



HAL
open science

Lois d'endommagement incrémentales isotrope/anisotropes pour applications thermomécaniques complexes

Stéphane Otin

► **To cite this version:**

Stéphane Otin. Lois d'endommagement incrémentales isotrope/anisotropes pour applications thermomécaniques complexes. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2007. Français. NNT: . tel-00341830

HAL Id: tel-00341830

<https://theses.hal.science/tel-00341830>

Submitted on 26 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2007 n°71



**THESE DE DOCTORAT
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Présentée par
Monsieur STEPHANE OTIN

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN

Domaine :
MECANIQUE – GENIE MECANIQUE – GENIE CIVIL

Sujet de la thèse :

**LOIS D'ENDOMMAGEMENT INCREMENTALES
ISOTROPE/ANISOTROPES POUR APPLICATIONS
THERMOMECHANQUES COMPLEXES**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 20 novembre 2007 devant le jury composé de :

VÉRONIQUE DOQUET	Directrice de recherche, Ecole Polytechnique	Rapporteuse
KHEMAIS SAANOUNI	Professeur, Université Technologique Troyes	Rapporteur
ODD STURE HOPPERSTAD	Professeur, NTNU Trondheim, Norvège	Examinateur
JACQUES BESSON	Directeur de recherche, Ecole des Mines Paris	Examinateur
BRUNO DAMBRINE	Ingénieur, Snecma	Examinateur
RODRIGUE DESMORAT	Professeur, ENS Cachan	Directeur de thèse

Laboratoire de Mécanique et Technologie LMT-Cachan
ENS Cachan / CNRS UMR8535 / UPMC / PRES UniverSud Paris
61, avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX

Cette thèse a été réalisée sous la direction de Rodrigue Desmorat, professeur au LMT-Cachan. Un grand merci à Rodrigue pour ces trois années riches en enseignement, en réflexion, en remises en cause, en tentatives, en échecs (parfois) et en succès (souvent !). Merci également à Jean Lemaitre pour m'avoir fait partager son expérience et sa philosophie de la recherche. Merci enfin à Ahmed Benallal de m'avoir accueilli au sein du secteur Matériaux du LMT-Cachan.

Cette thèse a également été réalisée à Snecma, site de Villaroche, au Laboratoire d'Ingénierie des Matériaux et Procédés. Merci à Bruno Dambrine d'avoir lancé et soutenu ce projet, toujours avec conviction, et surtout avec bonne humeur. Merci à Marjolaine Grange de m'avoir accueilli dans son équipe, et en particulier à Antoine, David, Bénédicte, Sylvain, pour leur soutien, leur aide, et leur sympathie. Merci particulièrement à Olivier, Jérôme, Dominique et Yves pour la réalisation des essais, qui leur ont demandé du temps et beaucoup de patience.

Merci également à Pr. Hopperstad, qui a bien voulu accepter de présider le jury de cette thèse, ainsi qu'à Pr. Saanouni et Pr. Doquet, pour avoir su éplucher et commenter ce rapport de manière instructive et constructive. Merci également à Pr. Besson d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Je voudrais aussi remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'avancement de ce projet, que ce soit grâce à leur éclairage scientifique, ou bien pour leur soutien moral. Ne pas les citer est le meilleur moyen de n'oublier personne, aussi, si elles se sentent concernées, merci à elles !

Merci également à tou(te)s mes ami(e)s qui m'ont permis de conserver une vie sociale pendant ces trois ans...

Un immense merci à toi, Karine, qui, outre le fait d'avoir relu entièrement le manuscrit, a partagé mes soirées de travail, en fin de thèse, avec beaucoup de compréhension...

Enfin, je tiens à remercier toute ma famille, mes frères, et mes parents, qui m'ont toujours soutenu dans tout ce que j'ai entrepris. Merci à vous.

Résumé :

Les lois d'endommagement incrémentales présentent de nombreux avantages en terme de modélisation thermomécanique. Elles permettent notamment de s'affranchir de la notion de cycle en fatigue et s'appliquent naturellement aux cas de chargements complexes, anisothermes, comme pour les composants de moteurs d'avions. Différentes extensions à l'anisotropie du modèle d'endommagement isotrope de Lemaitre sont proposées et identifiées sur le Haynes 188, superalliage à base cobalt utilisé pour la réalisation de chambres de combustion de turbomachines. La finalité est de rendre possible la détermination des conditions d'amorçage de fissure au niveau de la chambre de combustion du moteur, et donc son dimensionnement, par la méthode des éléments finis. Le modèle d'endommagement est adapté au cas des hautes températures via un couplage viscoplasticité/endommagement dans le cadre de la thermodynamique des matériaux solides. Le seuil d'endommagement en énergie stockée et l'extension du modèle aux conditions unilatérales de refermeture des micro-défauts sont présentés. Différents schémas numériques de résolution sont proposés, que ce soit dans le cas de calculs couplés (prise en compte de l'endommagement dans les lois d'état), ou dans le cas de post-traitements de calculs 3D visco-plastiques sans endommagement (calculs découplés, via un post-processeur d'endommagement). Des applications anisothermes sont simulées, dans le but de se rapprocher des sollicitations réelles : chargement aléatoire, fluage sous température variable, chargements biaxiaux, chargements non-proportionnels. Les apports de l'anisotropie de l'endommagement et des conditions unilatérales de refermeture des microdéfauts sont étudiés. Enfin, la robustesse du modèle est testée sur un essai original de fatigue thermique structural : une éprouvette multiperforée subit un chargement thermique complexe au bac à flamme, reproduisant alors les sollicitations subies par une chambre de combustion. Son comportement et sa durée de vie (en terme d'initiation de mésofissure) sont comparés aux résultats obtenus par simulation numérique de l'essai. La bonne corrélation des résultats numériques et expérimentaux permet la validation de la méthodologie d'identification et d'utilisation du modèle incrémental employé, en vue de son industrialisation.

Mots-clés : Lois d'endommagement incrémentales, chargement anisotherme complexe, anisotropie, seuil d'endommagement en énergie stockée

Abstract :

Incremental damage laws present many advantages in terms of thermomechanical modeling. They enable to be freed from the cycle concept in fatigue and are very convenient for complex, anisothermal loadings, as in the components of aircraft engines. Different extensions to anisotropy of Lemaitre's isotropic damage model are proposed and identified on the cobalt-based superalloy Haynes 188 used for the manufacturing of turbomachines combustion chambers. The aim is the determination of crack initiation conditions at the combustion chamber scale for its design, with the Finite Element method. The damage model is adapted to high temperatures, through a coupling between viscoplasticity and damage within the thermodynamic frameworks. The stored energy damage threshold and the extension to unilateral conditions of micro-defects closure effect are presented. Various numerical resolution schemes are proposed, in the case of coupled computations (damage is taken into account in the state laws), or in the case of post-processing, from 3D visco-plastic computations without damage (uncoupled computations, via a damage post-processor). Anisothermal applications are simulated, with an aim of approaching the real requests : random loading, creep under variable temperature, biaxial loadings, non-proportional loading. The contributions of damage anisotropy and unilateral conditions of micro-defects closure effect are pointed out. Last, the robustness of the model is tested on an original structural thermal fatigue test : a multiperforate structural specimen is submitted to a complex thermal loading with a flame, reproducing the work conditions of a combustion chamber. Its behavior and lifetime (in terms of mesocrack initiation) are compared with the results obtained from numerical simulations. The good correlation between numerical and experimental results allows for the validation of the lifetime prediction method, for its industrialization.

Keywords : Incremental damage laws, complex anisothermal loadings, anisotropy, stored energy damage threshold

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
1 Mécanique de l'endommagement	3
2 Lois d'endommagement de type fatigue-fluage	4
2.1 Description de l'endommagement de fluage	5
2.2 Description de l'endommagement par fatigue	6
3 Lois d'endommagement incrémentales	8
1 Modèles d'endommagement anisotropes pour le superalliage Haynes 188	13
1 Comportement et endommagement à haute température	14
1.1 Potentiel thermodynamique et lois d'état	14
1.2 Lois d'endommagement anisotropes incrémentales	15
1.3 Viscoplasticité couplée à l'endommagement	17
2 Seuil d'endommagement en énergie stockée	18
2.1 Energie stockée par les écrouissages	18
2.2 Le seuil d'endommagement : un paramètre « matériau » ?	19
2.3 Energie stockée – Formulation en contrainte équivalente	21
3 Conditions unilatérales de refermeture des micro-défauts	22
3.1 Potentiel thermodynamique avec refermeture des micro-défauts	22
3.2 Couplage avec l'endommagement	23
4 Synthèse des modèles d'endommagement étudiés	23
4.1 Modèle d'endommagement isotrope	24
4.2 Modèles d'endommagement anisotropes sans refermeture des micro-défauts	24
4.3 Modèles d'endommagement anisotropes avec refermeture des micro-défauts	26
5 Le modèle isotrope : une limite de l'anisotropie induite	30
5.1 Endommagement sous chargement uniaxial	30
5.2 Analogie entre modèle isotrope et anisotrope	33
5.3 Durée de vie en fluage	34
5.4 Durée de vie en fatigue	35
6 Conclusion	36
2 Schémas numériques pour l'endommagement anisotrope et la fatigue	37
1 Couplage plasticité/endommagement	38
1.1 Algorithme implicite sans refermeture des micro-défauts	38

1.2	Algorithme implicite avec refermeture des micro-défauts	44
2	Schéma d'intégration pour l'énergie stockée	47
2.1	Discrétisation de l'énergie stockée par les écrouissages	47
2.2	Discrétisation de l'expression en contrainte équivalente	48
3	Post-processeurs d'endommagement	49
3.1	Principe	49
3.2	Calcul du seuil d'endommagement en énergie stockée	50
3.3	Calcul de l'évolution de l'endommagement	51
4	Premières validations	52
5	Conclusion	54
3	Identification et validation isotherme des modèles	55
1	Le superalliage base cobalt Haynes 188	56
1.1	Présentation du matériau	56
1.2	Applications	57
1.3	Fabrication	57
2	Identification des paramètres de visco-plasticité	58
2.1	Base expérimentale	58
2.2	Viscosité	59
2.3	Écrouissages	61
2.4	Optimisation numérique	62
2.5	Paramètres et température	63
3	Identification des paramètres d'endommagement	64
3.1	Base expérimentale	66
3.2	Durée de vie en fluage	69
3.3	Durée de vie en fatigue	71
3.4	Paramètres et température	71
3.5	Identification des différentes lois d'endommagement	75
4	Validation sous condition isotherme	76
4.1	Fatigue à temps de maintien	76
4.2	Sensibilité du modèle	77
4	Lois incrémentales et chargements thermomécaniques complexes	81
1	Essais anisothermes	82
1.1	Fluage en température variable	82
1.2	Essai thermomécanique de type "mission"	83
2	Durée de vie et histoire du chargement	91
2.1	Rupture sous chargement monotone	92
2.2	Cumul non-linéaire du dommage	93
2.3	Interaction fatigue-fluage	93
3	Chargements biaxiaux	95
3.1	Chargements biaxiaux proportionnels et non-proportionnels	95
3.2	Chargements biaxiaux en fatigue alternée	98

4	Fréquences élevées - Fatigue à grand nombre de cycles	102
5	Conclusion	105
5	Fatigue thermique structurale	107
1	Définition et réalisation d'un essai sur structure représentative	108
1.1	La chambre de combustion : un composant fortement sollicité . . .	108
1.2	Définition et réalisation du montage d'essai	110
1.3	Mise en oeuvre de l'essai au banc à flamme	114
1.4	Acquisition des champs thermiques	115
2	Simulation numérique de l'essai	115
2.1	Principe	118
2.2	Calcul thermique transitoire	119
2.3	Calcul élasto-viscoplastique sous chargement thermique	121
2.4	Endommagement par post-traitements du calcul mécanique	124
3	Confrontation entre résultats numériques et expérimentaux	124
3.1	Comportement de la structure	124
3.2	Prévision de durée de vie	128
4	Conclusion	135
	Conclusion	137
	Bibliographie	139
	Annexe A	
	Plan de l'éprouvette axisymétrique d'essai uniaxial	145
	Annexe B	
	Plan du support d'éprouvette pour l'essai de fatigue thermique structural	147
	Annexe C	
	Algorithmes d'optimisation	149
	Annexe D	
	Modèle de comportement à double viscosité	151

Introduction

Les composants de moteurs d'avions sont constamment soumis à des sollicitations sévères faisant intervenir des températures élevées. Le couplage de ces deux phénomènes peut conduire à la ruine prématurée de la pièce si son dimensionnement n'est pas réalisé en connaissance de cause. Des outils ont été élaborés afin de prendre ces données en compte dans la phase de conception des pièces. Ils doivent permettre d'estimer la durée de vie du composant lorsque celui-ci est soumis à un chargement thermomécanique défini. L'estimation de durée de vie obtenue est alors ajustée en fonction des incertitudes de calculs et des hypothèses simplificatrices utilisées. Ces méthodes fondées sur les concepts de la mécanique de l'endommagement sont relativement aisées à mettre en oeuvre lorsque le chargement appliqué présente des cycles simples ou lorsque le matériau est considéré comme isotrope, mais deviennent vite complexes pour des chargement réels et lorsque l'on tient compte de l'anisotropie du matériau (anisotropie initiale, ou consécutive de la déformation et de la visco-plasticité). Afin de garantir la durée de vie des moteurs, Snecma (société du groupe Safran dont l'activité est la conception et la réalisation de moteurs d'avions civils et militaires) utilise de telles méthodes tout en s'assurant du conservatisme de ses modèles.

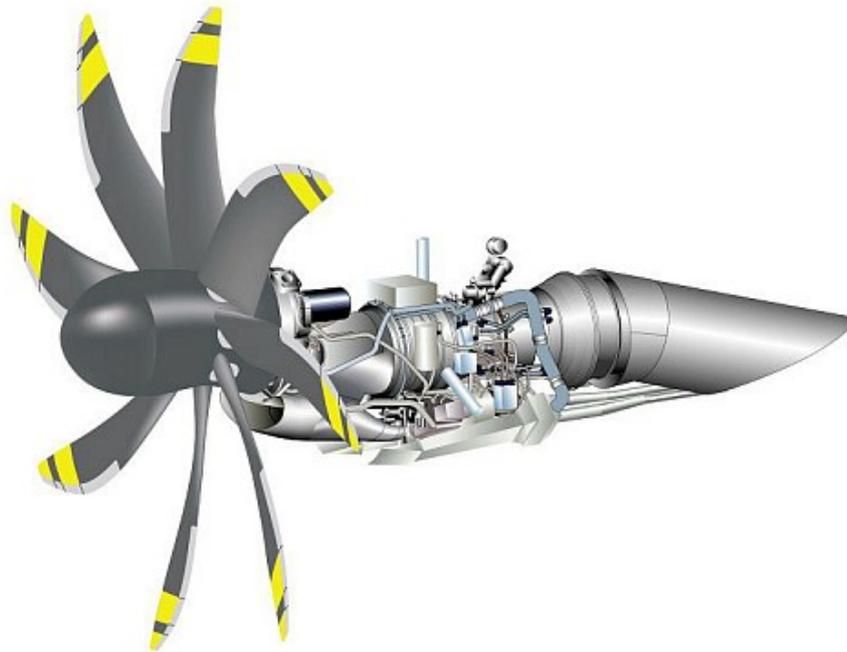


FIG. 1: Maquette numérique du TP400-D6

Le travail de cette thèse consiste à développer une méthodologie de dimensionnement des composants de moteurs d'avions, fondée sur un modèle d'endommagement incrémental développé au LMT-Cachan, dont les particularités et les avantages seront qualifiés. Cette étude sera réalisée sur un superalliage polycristallin, le Haynes 188, constituant des chambres de combustions de moteurs comme le TP400-D6 (figure 1) qui équipe l'avion de transport militaire Airbus A400M, le SaM146 (figure 2), destiné à l'avion de transport régional russe Soukhoï Superjet 100, ou encore le nouveau moteur en projet Snecma Silvercrest, destiné à l'aviation d'affaire. En guise d'introduction, un rapide tour d'horizon sera réalisé sur les différentes approches de la mécanique de l'endommagement depuis les années 1950 jusqu'à nos jours, après quoi la méthodologie utilisée actuellement par Snecma sera présentée. Enfin, on détaillera le modèle d'endommagement servant de base à cette étude.



FIG. 2: Moteur SaM146

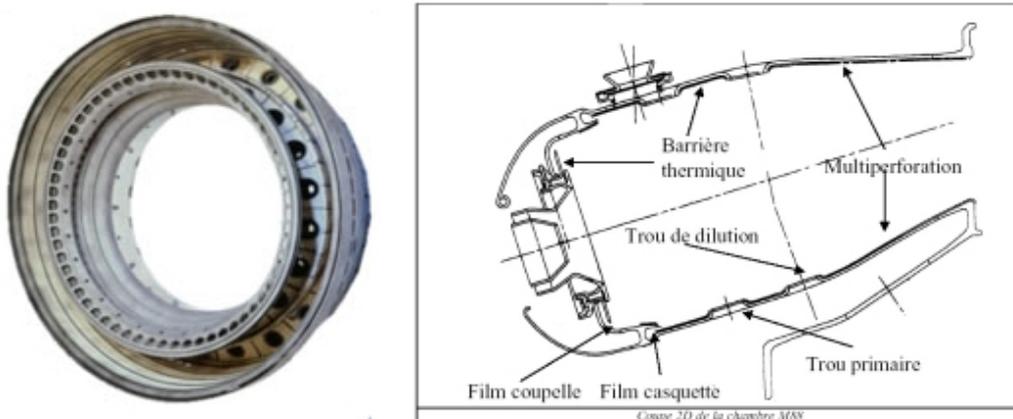


FIG. 3: Coupe d'une chambre de combustion

1 Mécanique de l'endommagement

Dès les années 1500, Léonard de Vinci s'intéresse à la rupture macroscopique des matériaux mais c'est en 1958 que naît la mécanique de l'endommagement moderne qui vise à décrire l'évolution de la détérioration d'un matériau qui précède sa rupture, date où Kachanov introduit une variable d'endommagement définie comme le rapport entre l'aire totale des micro-défauts dans une section d'un élément de volume et la surface totale de cette section (Kachanov, 1958). Ce cadre s'applique à l'époque uniquement aux chargements uniaxiaux et à la rupture en fluage des métaux. Ses travaux sont repris peu de temps après par Rabotnov (1969) et Lemaitre (1971), qui, introduisant la notion de contrainte effective, permettent la mesure macroscopique de l'endommagement (modification des caractéristiques d'élasticité en particulier). La notion de mécanique de l'endommagement des milieux continus apparaît en 1972 avec Hult, et on voit se développer alors un grand intérêt pour la modélisation de l'anisotropie de l'endommagement (Martin & Leckie 1972, Lemaitre & Chaboche 1974, Chaboche 1978, Murakami & Ohno 1978, Cordebois & Sidoroff 1982) et pour la prévision de durée de vie en fatigue (Chaboche 1974, Lemaitre 1978). L'approche de la rupture en fatigue par la mécanique de l'endommagement n'est concrète qu'à partir des années 1980 (Hua & Socie, 1984, Chaboche & Lesne, 1988, Lemaitre & Doghri, 1994). Ces mêmes années voient l'émergence de modèles d'endommagements anisotropes, où la variable d'endommagement scalaire D est remplacée par un tenseur d'endommagement \mathbf{D} d'ordre 4 (Chaboche 1979, Leckie & Onat 1981) ou d'ordre 2 (Murakami & Ohno 1978, Cordebois & Sidoroff 1982, Ladevèze 1983) plus simples à manipuler et dont les composantes sont plus aisées à déterminer.

L'amélioration des modèles de comportement et d'endommagement des matériaux ductiles, la facilité croissante de leur mise en oeuvre et l'émergence des moyens informatiques de calcul poussent les industriels à intégrer la prévision de durée de vie dans leur méthodologie de dimensionnement. La chambre de combustion est un composant vital du moteur, qui subit des chargements thermomécaniques tridimensionnels complexes au cours d'une mission (décollage, croisière, atterrissage), et dont il est essentiel de savoir garantir la durée de vie. Elle est située en arrière du compresseur haute pression et en avant de la turbine haute pression. De forme annulaire à paroi mince multiperforée, elle permet la combustion des gaz sous pression et délivre l'essentiel de la poussée du moteur. La température des gaz en sortie de chambre peut atteindre jusqu'à 1500°C . La multiperforation de la paroi permet la création d'un film protecteur d'air froid à l'intérieur de la chambre : la température vue réellement par le matériau n'atteint au maximum que 800 à 900°C , mais au prix du perçage de micro-trous inclinés et donc de l'introduction de concentration de contraintes. On comprend aisément la nécessité de disposer de modèles de comportement et d'endommagement tridimensionnels, permettant de réaliser des calculs anisothermes sur des cycles de fonctionnement relativement complexes, voire aléatoires (figure 4), et qui puissent être menés et validés sur des structures représentatives. Les observations réalisées sur les chambres de combustion montrent que l'endommagement est essentiellement de type endommagement de fatigue et de fluage. Le choix de Snecma en terme de modélisation s'est donc logiquement dirigé vers une loi de type interaction fatigue-fluage (Lemaitre & Chaboche 1974, Dambrine & Masca-

rell, 1987). Le modèle de fluage est de type Kachanov, étendu à l'anisotropie par Rabotnov. La fatigue est modélisée par une loi de type Chaboche (1978), et l'interaction non-linéaire fatigue-fluage est décrite par le modèle initial de Lemaitre & Chaboche. Le modèle complet est présentée dans la section suivante.

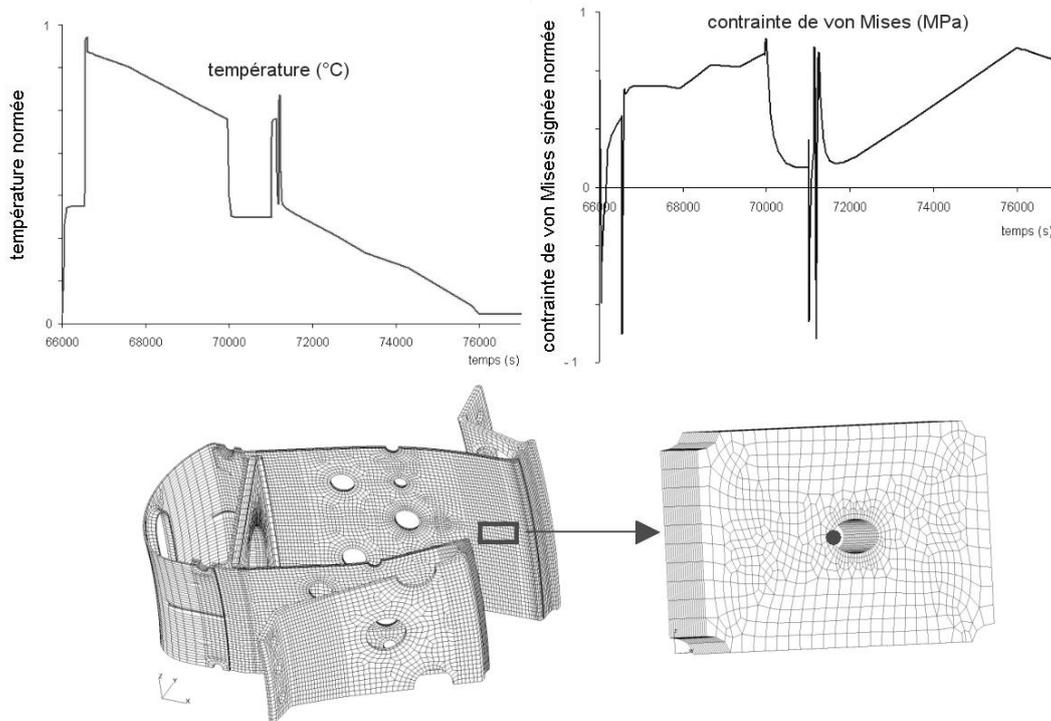


FIG. 4: Evolution de la contrainte de von Mises signée $\sigma_{VMs} = \text{sign}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D}$ et de la température au cours d'un cycle de fonctionnement sur la zone raccord paroi bride externe (où $\boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}$ est le déviateur des contraintes)

2 Lois d'endommagement de type fatigue-fluage

Il a été reconnu très tôt qu'à haute température, les temps de maintien sous contrainte ou les cycles de contraintes à basse fréquence sont très endommageants. Le modèle d'interaction fatigue-fluage, prenant en compte initialement une interaction non-linéaire des endommagements de fatigue et de fluage, a été synthétisé par Lemaitre et Chaboche (1985), en introduisant des modèles fondés sur la notion de contrainte effective et en faisant intervenir une accumulation non linéaire des dommages. Voici les principaux points de cette approche :

- Les équations d'évolution de l'endommagement sont écrites indépendamment en fluage pur et en fatigue pure. Le fluage pur est décrit selon la loi de Kachanov-Rabotnov (Kachanov 1958, Rabotnov 1969). La fatigue est décrite selon une loi différentielle avec cumul non-linéaire (Chaboche & Lesne 1988).

- Chaque phénomène, fatigue pure et fluage pur, s'accumule jusqu'à ce que la variable d'endommagement D atteigne la valeur 1. Lorsque les deux phénomènes agissent simultanément, les deux lois d'endommagement se combinent à chaque cycle, ce qui mène à une équation du type :

$$dD = f_C dt + f_F dN \quad (1)$$

où les fonctions f_C (C pour *creep*, traduction anglaise de fluage) et f_F (F pour *fatigue*) sont déterminées par les conditions de fluage pur et de fatigue pure. On admet qu'une fissure est initiée et peut se propager lorsque la variable d'endommagement D totale atteint la valeur critique $D_c = 1$.

Cette méthode de prédiction de durée de vie nécessite la mise en oeuvre de plusieurs étapes :

- la définition du chargement appliqué, des champs de température, et de leur évolution.
- l'analyse élastique/inélastique de la structure soumise à ces contraintes (l'analyse inélastique nécessite la connaissance du comportement cyclique et viscoplastique du matériau).
- l'application du modèle d'endommagement ou des lois d'initiation de fissure, qui déterminent les zones critiques de la structure, et le nombre de cycles en service effectués avant l'apparition d'une fissure macroscopique.
- éventuellement, pour certaines pièces, l'analyse des mécanismes de fissuration permettant d'allonger la durée de vie théorique du matériau en considérant que la fissure est acceptable si elle est suffisamment loin des zones critiques. Dans la plupart des problèmes d'ingénierie, on parle de fissure macroscopique lorsque celle-ci atteint une profondeur comprise entre $300\mu m$ et $1mm$.

2.1 Description de l'endommagement de fluage

La première loi d'endommagement a été développée par Kachanov en 1958, pour modéliser le fluage uniaxial. Rabotnov a repris ce modèle et l'a modifié en 1969 pour établir la loi d'endommagement en fluage pur suivante :

$$\dot{D} = \left(\frac{\sigma}{A}\right)^r (1 - D)^{-k} \quad (2)$$

A , k et r sont des paramètres qui dépendent du matériau et de la température. L'intégration à contrainte constante entre $D = 0$ et $D_c = 1$ fournit le temps à rupture en fluage pur :

$$t_{RC} = \frac{1}{k+1} \left(\frac{\sigma}{A}\right)^{-r} \quad (3)$$

Sous chargement multiaxial, la relation (2) se généralise en utilisant à la place de la contrainte une combinaison linéaire d'invariants élémentaires (Hayhurst & Leckie, 1973),

$$\chi(\sigma) = \alpha J_0(\sigma) + \beta J_1(\sigma) + (1 - \alpha - \beta) J_2(\sigma) \quad (4)$$

où $J_0(\boldsymbol{\sigma})$ désigne la contrainte principale maximale, $J_1(\boldsymbol{\sigma}) = 3\sigma_H = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$, et $J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D}$. La variable D est scalaire et l'écriture de la loi tridimensionnelle d'évolution de l'endommagement en fluage devient la suivante :

$$\dot{D} = \left\langle \frac{\chi(\boldsymbol{\sigma})}{A} \right\rangle^r (1-D)^{-k} \quad (5)$$

Pour le cas anisotrope, la contrainte effective est définie dans le repère principal. Au final, les paramètres A , r , k , α et β dépendant du matériau et de la température sont à identifier pour décrire l'endommagement de fluage en plus des paramètres usuels de viscoplasticité. On note que l'endommagement en compression uniaxiale peut soit être nul ($\alpha + \beta \geq 0.5$), soit égal à celui de la traction ($\alpha = \beta = 0$), soit prendre des valeurs intermédiaires.

2.2 Description de l'endommagement par fatigue

La loi modélisant l'endommagement en fatigue pure, appelée NLCD (Non-Linear Continuous fatigue Damage model, Chaboche & Lesne 1988) permet de déterminer l'endommagement accumulé durant chaque cycle selon l'expression :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = f_F(\sigma_M, \bar{\sigma}, D, T) \quad (6)$$

où σ_M est la contrainte maximale vue au cours du cycle, $\bar{\sigma}$ est la contrainte moyenne, T est la température et D est la variable d'endommagement, valant encore 1 lors de l'initiation de fissure. f_F est une fonction de la variable D , propriété qui permet conjointement à l'introduction d'un exposant α fonction du chargement d'obtenir une évolution non linéaire de l'endommagement sous un chargement cyclique. La forme spécifique choisie pour la loi (6) est la suivante :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = D^{\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})} \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})} \right]^\beta \quad (7)$$

L'intégration de cette équation pour une contrainte maximale σ_M et une contrainte moyenne $\bar{\sigma}$ constantes, entre $D = 0$ et $D_c = 1$ donne le nombre de cycles à rupture en fatigue pure N_{RF} :

$$D = \left(\frac{N}{N_{RF}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (8)$$

$$N_{RF} = \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})} \right]^\beta \quad (9)$$

La fonction M est choisie de manière à décrire la dépendance linéaire entre la contrainte moyenne et la limite de fatigue (Miller & Ibrahim, 1981). On peut donc écrire :

$$M(\bar{\sigma}) = M_0(1 - b\bar{\sigma}) \quad (10)$$

où b et M_0 , de la même manière que α et β , sont des paramètres dépendant du matériau. En ce qui concerne le choix de la fonction α , Chaboche (1978) montre qu'une fonction du type

$$\alpha = 1 - a \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_u} \right)^{\gamma - \beta} \quad (11)$$

rend bien compte des mesures d'endommagement expérimentales effectuées en utilisant le concept de la contrainte effective. Les paramètres a , β , γ et M_0 sont à identifier : a ne peut être identifié qu'à partir de mesures d'endommagement, mais il n'a d'importance que lorsque la fatigue est couplée à un autre phénomène (fluage par exemple). β et M_0 sont déterminés à partir des courbes de Wöhler expérimentales. Selon Lemaitre et Chaboche (1985), l'identification du modèle est plus aisée si la fonction α est écrite de la façon suivante :

$$\alpha = 1 - a \left\langle \frac{\sigma_M - \sigma_l(\bar{\sigma})}{\sigma_u - \sigma_M} \right\rangle \quad (12)$$

$$\sigma_l(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} + \sigma_{l_0}(1 - b\bar{\sigma}) \quad (13)$$

où σ_{l_0} est la limite de fatigue lorsque $\bar{\sigma} = 0$ (fatigue alternée). $\sigma_l(\bar{\sigma})$ est la limite de fatigue maximale à contrainte moyenne non nulle ($\bar{\sigma} \neq 0$). La partie positive dans l'expression de α lui fait prendre la valeur 1 lorsque la contrainte maximale est inférieure à la limite de fatigue $\sigma_l(\bar{\sigma})$. On peut alors calculer le nombre de cycles à rupture en fatigue pure N_{RF} :

$$N_{RF} = \frac{\sigma_u - \sigma_M}{a \langle \sigma_M - \sigma_l(\bar{\sigma}) \rangle} \left(\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})} \right)^{-\beta} \quad (14)$$

La contrainte ultime en traction σ_u ne joue aucun rôle en fatigue à grand nombre de cycles, mais est utilisée comme un paramètre de normalisation, capable de représenter la forme asymptotique des courbes de durée de vie en fatigue lors des régimes à très faible nombre de cycles. La relation (14) traduit également les cas limites, lorsque $N_{RF} \simeq 0$ pour $\sigma_M = \sigma_u$ et lorsque $N_{RF} = \infty$ pour $\sigma_M = \sigma_l(\bar{\sigma})$. Elle décrit correctement les courbes de durée de vie en fatigue pour des nombres de cycles allant de 10 à 10^7 . Les effets de cumul sont décrits uniquement par la spécification de la contrainte ultime en traction σ_u et par la limite de fatigue. Cette formulation permet de décrire quantitativement la plupart des résultats d'essais à plusieurs niveaux, sur de nombreux matériaux. Mais l'évaluation de D au travers de la durée de vie restante n'est cependant pas suffisante pour fixer totalement sa valeur à chaque instant. On utilise alors un second type d'évaluation, par le concept de la contrainte effective, dont l'évolution mesurée est extrêmement non-linéaire. Pour combiner cette évaluation avec celle correspondant à la durée de vie restante, on effectue un changement de variable en remplaçant D par $1 - (1 - D)^{\beta+1}$. La loi différentielle s'écrit alors (Chaboche & Lesne, 1988) :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \left[1 - (1 - D)^{\beta+1} \right]^{\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})} \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})(1 - D)} \right]^{\beta} \quad (15)$$

Le nombre de cycles à rupture devient :

$$N_{RF} = \frac{1}{(1 - \beta) [1 - \alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})]} \left(\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})} \right)^{-\beta} \quad (16)$$

Au final, ce modèle d'endommagement introduit 10 paramètres à identifier : A , r , k , α , β pour le fluage, a , b , σ_{l0} , σ_u et M_0 pour la fatigue. Le cas où la température est variable au cours de chaque cycle est résolu en introduisant une contrainte réduite $S = \sigma/\sigma_u(T)$ (figure 5) où $\sigma_u(T)$ est la contrainte de rupture en traction, dépendant de la température. Une grande partie de l'influence de la température est en effet prise en compte par ce paramètre. Ce modèle écrit en contraintes est relativement complet, puisqu'il permet de décrire

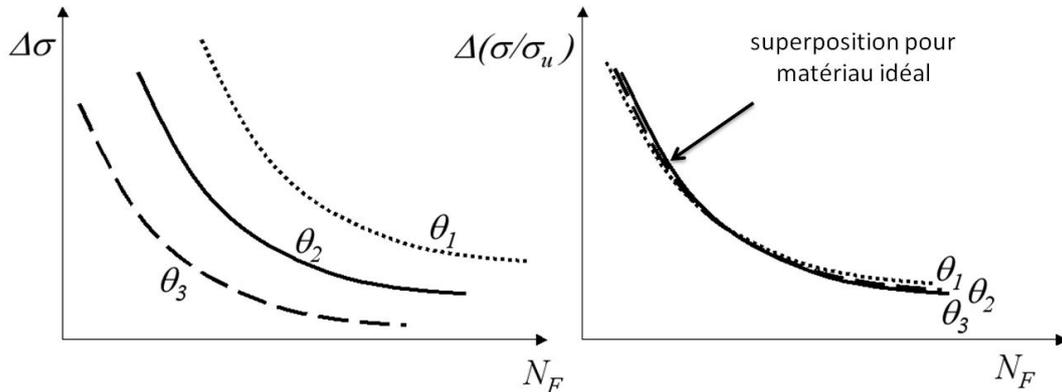


FIG. 5: Courbes de Wöhler en fonction de la température

la durée de vie en fluage et en fatigue, il modélise les effets de contrainte moyenne, et de cumul non-linéaire en fatigue-fluage. Cependant, il nécessite la décomposition des sollicitations en cycles simples, réalisée à Snecma par une méthode de type Rainflow. Une nouvelle incertitude est donc introduite par ce biais. Se pose également la question des chargements anisothermes : s'ils doivent être décomposés par la méthode de type Rainflow, quelle sera la température retenue pour la modélisation ?

Dans l'optique de pouvoir calculer des chargements thermomécaniques complexes, représentatifs des applications réelles, en s'affranchissant de la notion de cycle et de décomposition de type Rainflow, Snecma a donc opté pour une étude portant sur le modèle d'endommagement incrémental développé par Lemaître sous sa forme isotrope au cours des années 1980, et étendu à l'anisotropie induite par la plasticité.

3 Lois d'endommagement incrémentales

Le modèle d'endommagement présenté ici (Lemaître & al 2000, Lemaître & Desmorat 2005) est une forme généralisée à l'anisotropie induite par la plasticité du modèle d'endommagement isotrope de Lemaître et Chaboche (1985). L'idée principale est d'arriver à modéliser l'anisotropie induite par la plasticité (le matériau à l'état initial est supposé isotrope) sans introduire de paramètre d'endommagement supplémentaire : on utilise alors le fait que la plasticité fait déjà intervenir un tenseur du second ordre : le tenseur des

déformations plastiques $\boldsymbol{\epsilon}^p$. La loi d'évolution scalaire

$$\dot{D} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s \dot{p} \quad (17)$$

d'un endommagement scalaire gouverné par le taux de déformation plastique cumulée \dot{p} et fonction de la densité d'énergie élastique $\bar{Y} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^e : \underline{E} : \boldsymbol{\epsilon}^e$ ($\boldsymbol{\epsilon}^e$ est le tenseur des déformations élastiques) est remplacée par la loi d'évolution tensorielle

$$\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p| \quad (18)$$

où le taux d'endommagement - un tenseur d'ordre 2 - est proportionnel à la valeur absolue du tenseur des vitesses de déformations plastiques. Dans les deux cas, le paramètres S et l'exposant s sont des paramètres dépendant du matériau et de la température. La valeur absolue d'un tenseur est définie comme le tenseur des valeurs absolues des composantes principales du tenseur¹. Un seuil d'endommagement exprimé en terme de déformation plastique cumulée p_D ou d'énergie stockée w_D est introduit de manière à avoir

$$p < p_D \quad \text{ou} \quad w_s < w_D \longrightarrow D = 0 \quad (19)$$

Le terme de densité d'énergie élastique \bar{Y} peut être réécrit fonction de la contrainte et vaut alors $\bar{Y} = \tilde{\sigma}_{eq}^2 \tilde{R}_v / 2E$ où $\tilde{\sigma}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D}$ est une contrainte effective équivalente généralisant la contrainte effective scalaire de Kachanov $\tilde{\sigma} = \sigma / (1 - D)$:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left[(1 - \mathbf{D})^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}^D (1 - \mathbf{D})^{-\frac{1}{2}} \right]^D + \frac{\sigma_H}{1 - tr \mathbf{D}} \mathbf{1} \quad (20)$$

\tilde{R}_v est une fonction de triaxialité faisant intervenir la contrainte hydrostatique $\tilde{\sigma}_H = \frac{1}{3} tr(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ et la contrainte équivalente $\tilde{\sigma}_{eq}$:

$$\tilde{R}_v = \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\tilde{\sigma}_H}{\tilde{\sigma}_{eq}} \right)^2 \quad (21)$$

L'équation (18) peut alors se réécrire

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \left(\frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2 \tilde{R}_v}{2ES} \right)^s \left| \frac{d\boldsymbol{\epsilon}^p}{dt} \right| \quad (22)$$

L'intérêt d'une telle loi est de pouvoir décrire l'évolution de l'endommagement et la rupture sous différents types de chargements, que ce soit sous chargement monotone, de fatigue, de fluage, ou sous chargements combinés (fatigue avec temps de maintien, fatigue

¹on rend $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ diagonal via la matrice de passage \mathbf{P} , $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{diag}^p = \mathbf{P}^{-1} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \mathbf{P}$; on en prend la valeur absolue $|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{diag}^p|$ et au final $|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p| = \mathbf{P} |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{diag}^p| \mathbf{P}^{-1}$

à différents niveaux, chargements non-proportionnels par exemple) avec un seul jeu de paramètres : l'exposant s , le paramètre S de résistance à l'endommagement, l'endommagement critique D_c synonyme de présence d'une fissure mésoscopique, et le seuil d'endommagement w_D (ou de manière équivalente p_D en terme de déformation plastique cumulée²).

Par exemple, pour un chargement de type fluage à contrainte imposée σ , et si l'on se place dans la direction de chargement 1, avec une loi de viscosité du type $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}_{11}^p = g(\sigma)$, on obtient

$$\frac{dD_1}{dt} = \left(\frac{\sigma^2 \tilde{R}_v}{2ES(1-D_1)^2} \right)^s |g(\sigma)| \quad (23)$$

que l'on peut intégrer entre $t = t_D$, temps d'apparition de l'endommagement ($D = 0$) et $t = t_R$, temps à rupture ($D = D_c$), pour obtenir :

$$\int_0^{D_c} (1-D_1)^{2s} dD_1 = \left(\frac{\sigma^2 \tilde{R}_v}{2ES} \right)^s \int_{t_D}^{t_R} |g(\sigma)| dt \quad (24)$$

et ainsi le temps à rupture t_D :

$$t_R = t_D + \frac{1 - (1 - D_c)^{2s+1}}{(2s+1) |g(\sigma)|} \left(\frac{2ES}{\sigma^2 \tilde{R}_v} \right)^s \quad (25)$$

Il est donc aisé d'obtenir à partir de la formulation incrémentale du modèle d'endommagement une expression analytique du temps à rupture en fluage. On peut procéder de la même manière pour un chargement cyclique, où l'on impose les déformations, en se plaçant dans la direction de chargement 1 : à chaque cycle, l'incrément d'endommagement s'exprime comme (Lemaitre 1992) :

$$\frac{\delta D_1}{\delta N} \simeq \left(\frac{\sigma^2 \tilde{R}_v}{2ES} \right)^s \left| \frac{\delta \varepsilon^p}{\delta N} \right| \quad (26)$$

Lors d'un cycle, $\frac{\delta \varepsilon^p}{\delta N} = 2\Delta\varepsilon_p$ = deux fois l'amplitude de déformation plastique, et donc on obtient aisément le nombre de cycles à rupture en fatigue en intégrant la relation précédente entre $N = N_D$ (lorsque $D = 0$) et $N = N_R$ (lorsqu'on atteint $D = D_c$) :

$$N_R = N_D + \frac{D_c (2ES)^s}{2\sigma^{2s} \tilde{R}_v^s \Delta\varepsilon_p} \quad (27)$$

Des travaux portant sur l'identification et l'application du modèle d'endommagement incrémental ont déjà été réalisés, en particulier sur les métaux, dans le cadre isotrope (Sermage 1998 par exemple). Cependant, il n'existe pas de procédure industrielle d'identification des paramètres d'endommagement, que ce soit pour le cas isotrope comme pour le cas anisotrope. La validité du modèle est également à étudier dans le cas des hautes températures, où le matériau devient viscoplastique. L'apport de l'anisotropie par rapport

²La description fine de ce seuil, en fatigue notamment, peut faire apparaître 2 paramètres supplémentaires A et m (cf. partie 2 du chapitre 1)

au modèle isotrope doit être qualifié. La formulation et la validité d'un seuil d'endommagement en énergie stockée a été peu étudiée, la grande majorité des calculs se limitant au cas où le seuil en déformation plastique cumulée est indépendant du chargement, ce qui n'est pas le cas en fatigue. Enfin, ce genre de modèle n'a pas significativement été confronté à des cas de chargements complexes tridimensionnels à température variable.

Cette thèse a pour objectif d'appliquer et d'adapter le modèle d'endommagement incrémental au matériau Haynes 188, superalliage à base cobalt utilisé pour la réalisation de chambres de combustion Snecma, afin de rendre possible les calculs de cas complexes, d'inspiration réelle, par la méthode des éléments finis. Les missions réelles vécues par les composants de turbomachines sont en général loin d'être assimilables à de la traction-compression simple, les lois incrémentales sont *a priori* de bons outils pour décrire les chargements complexes, anisothermes, voire aléatoires (Desmorat & al, 2007).

Dans une première partie, le modèle d'endommagement est adapté au cas des hautes températures : on y décrit le couplage comportement/endommagement à haute température dans le cadre thermodynamique. La formulation du seuil d'endommagement en énergie stockée, le cas particulier de l'isotropie et l'extension du modèle aux conditions unilatérales de refermeture des microdéfauts sont présentés. Ensuite, différents schémas numériques sont proposés, que ce soit dans le cas de calculs couplés (prise en compte de l'endommagement dans les lois d'état), ou dans le cas de calculs en post-traitement de calculs sans endommagement (on parle alors de calculs découplés, via un post-processeur d'endommagement). Le chapitre 3 est consacré à la méthodologie d'identification des paramètres du matériau à partir d'une base expérimentale choisie, ainsi qu'à la validation de cette méthodologie par des essais thermomécaniques. Le chapitre 4 présente quelques applications intéressantes rendues possibles par la méthode employée. Des applications anisothermes sont simulées, dans le but de se rapprocher des sollicitations réelles : chargement aléatoire, fluage sous température variable, chargements biaxiaux, chargements non-proportionnels. L'apport de l'anisotropie et des conditions unilatérales de refermeture des microdéfauts est étudié. Dans une dernière partie, la robustesse du modèle est testée sur un essai original de fatigue thermique structurale, développé lors de cette thèse : une éprouvette structurale multiperforée subit un chargement thermique complexe au banc à flamme, reproduisant alors les sollicitations subies par une chambre de combustion. Son comportement et sa durée de vie sont comparés aux résultats obtenus par simulation numérique de l'essai. La bonne corrélation des résultats numériques et expérimentaux permet la validation de la méthodologie d'identification et d'utilisation du modèle incrémental employé, en vue de son industrialisation.

Modèles d'endommagement anisotropes pour le superalliage Haynes 188

Sommaire

1	Comportement et endommagement à haute température	14
1.1	Potentiel thermodynamique et lois d'état	14
1.2	Lois d'endommagement anisotropes incrémentales	15
1.3	Viscoplasticité couplée à l'endommagement	17
2	Seuil d'endommagement en énergie stockée	18
2.1	Energie stockée par les écrouissages	18
2.2	Le seuil d'endommagement : un paramètre « matériau » ?	19
2.3	Energie stockée – Formulation en contrainte équivalente	21
3	Conditions unilatérales de refermeture des micro-défauts	22
3.1	Potentiel thermodynamique avec refermeture des micro-défauts	22
3.2	Couplage avec l'endommagement	23
4	Synthèse des modèles d'endommagement étudiés	23
4.1	Modèle d'endommagement isotrope	24
4.2	Modèles d'endommagement anisotropes sans refermeture des micro-défauts	24
4.3	Modèles d'endommagement anisotropes avec refermeture des micro-défauts	26
5	Le modèle isotrope : une limite de l'anisotropie induite	30
5.1	Endommagement sous chargement uniaxial	30
5.2	Analogie entre modèle isotrope et anisotrope	33
5.3	Durée de vie en fluage	34
5.4	Durée de vie en fatigue	35
6	Conclusion	36

1 Comportement et endommagement à haute température

1.1 Potentiel thermodynamique et lois d'état

Il est admis que la représentation la plus générale pour une variable d'endommagement est un tenseur d'ordre 4 (Chaboche 1978, Krajcinovic 1981, Leckie & Onat 1981, Chow & Wang 1987), mais un tel tenseur est difficile à manipuler et n'est pas réellement nécessaire pour modéliser l'endommagement induit de la méso- ou micro-plasticité. Si l'on se ramène plus classiquement à un tenseur d'ordre 2 (Cordebois & Sidoroff 1982, Ladevèze 1983), prenons garde de choisir un tenseur garantissant la symétrie de la contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, l'indépendance de la contrainte effective au comportement en déformation (en particulier au coefficient de Poisson) et qui soit compatible avec les équations de la thermodynamique. Le choix se porte sur une contrainte effective définie par

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H})^D + \frac{\sigma_H}{1 - \text{tr} \mathbf{D}} \mathbf{1}, \quad \text{avec} \quad H_{ij} = (\delta_{ij} - D_{ij})^{-1/2} \quad (1.1)$$

où \mathbf{H} est le tenseur d'endommagement effectif. La puissance (ici -1/2) d'un tenseur est prise au sens des valeurs principales du tenseur¹. D'après les travaux de Lemaitre & al (2000) sur la description d'un état anisotrope de l'endommagement, le potentiel de Gibbs Ψ^{*e} se décompose en une partie déviatorique affectée par le tenseur d'endommagement \mathbf{D} et une partie hydrostatique affectée par la trace de \mathbf{D} ,

$$\rho \Psi^{*e} = \frac{1 + \nu}{2E} \text{tr}(\mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}^D) + \frac{3(1 - 2\nu)}{2E} \frac{\sigma_H^2}{1 - \text{tr} \mathbf{D}}, \quad (1.2)$$

où $\boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_H \mathbf{1}$ est la partie déviatorique de la contrainte et $\sigma_H = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}$ sa partie hydrostatique et ρ est la masse volumique.

La loi d'élasticité dérive du potentiel d'état, de sorte que

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \rho \frac{\partial \Psi^{*e}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1 + \nu}{E} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{1} \quad (1.3)$$

En plasticité, il suffit de remplacer la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ par la contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ dans le critère de plasticité pour obtenir le couplage avec l'endommagement. Le critère de von Mises en plasticité est défini par

$$f = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{eq} - R - \sigma_y \quad (1.4)$$

où σ_y est la limite d'élasticité, R est l'écrouissage isotrope, \mathbf{X} l'écrouissage cinématique ; r est la variable interne associée à R , $\boldsymbol{\alpha} = 3\mathbf{X}/(2C)$ la variable associée à \mathbf{X} (C est un paramètre d'écrouissage). La table 1.1 reprend les variables d'états et leurs variables associées dans le cas d'un endommagement anisotrope.

Les lois d'évolution dérivent d'un potentiel de dissipation F , préférablement une fonction convexe des variables associées afin de satisfaire au second principe de la thermodynamique. Si l'on note F_X le terme dû à l'écrouissage cinématique et F_D le potentiel dû

¹ $(\mathbf{1} - \mathbf{D})^\alpha = \mathbf{P} [(\mathbf{1} - \mathbf{D})_{diag}]^\alpha \mathbf{P}^{-1}$ où $(\mathbf{1} - \mathbf{D})_{diag} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{1} - \mathbf{D})\mathbf{P}$ est diagonal

Mécanismes	Type	Variables d'état observable	Variables d'état interne	Variables associées
Thermoélasticité	tenseur	ε_{ij}		σ_{ij}
Entropie	scalaire	T		s
Plasticité	tenseur		ε_{ij}^p	$-\sigma_{ij}$
Ecrouissage isotrope	scalaire		r	R
Ecrouissage cinématique	tenseur		α_{ij}	X_{ij}
Endommagement	tenseur		D_{ij}	$-Y_{ij}$

TAB. 1.1: Variables d'état et variables associées (Lemaitre 1978)

à l'endommagement, on a $F = f + F_X + F_D$. Les lois d'évolution s'écrivent alors sous la forme d'une loi de normalité :

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{ij}^p &= -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial(-\sigma_{ij})} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \\
\dot{r} &= -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R} \\
\dot{\alpha}_{ij} &= -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial X_{ij}} \\
\dot{D}_{ij} &= -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial(-Y_{ij})} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y_{ij}}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

1.2 Lois d'endommagement anisotropes incrémentales

Considérons un pseudo-potentiel de dissipation du à l'endommagement de la forme (Lemaitre & al. 2000)

$$F_D = \left(\frac{\bar{Y}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)}{S} \right)^s Y_{ij} \left| \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{dr} \right|_{ij} \tag{1.6}$$

où $|\cdot|$ appliqué à un tenseur signifie valeur absolue en terme de composantes principales. Le terme \bar{Y} représente la densité effective d'énergie élastique $\bar{Y} = \int \tilde{\sigma}_{ij} d\varepsilon_{ij}^e$, qui peut aussi être écrite en fonction de la contrainte effective,

$$\bar{Y} = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^e = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2 \tilde{R}_v}{2E} \tag{1.7}$$

où \tilde{R}_v est appelé fonction de triaxialité effective,

$$\tilde{R}_v = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\tilde{\sigma}_H}{\tilde{\sigma}_{eq}} \right)^2 \tag{1.8}$$

avec $\tilde{\sigma}_{eq} = (\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H})_{eq} = \left[\frac{3}{2} (\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H})_{ij}^D (\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H})_{ij}^D \right]^{1/2}$ et $\tilde{\sigma}_H = \sigma_H / (1 - tr\mathbf{D})$. On a alors

$$\dot{D}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y_{ij}} \quad \text{avec} \quad \dot{\lambda} = \dot{r} \quad (1.9)$$

$$\dot{D}_{ij} = \dot{r} \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s \left| \frac{d\boldsymbol{\epsilon}^p}{dr} \right|_{ij} \quad (1.10)$$

et finalement,

$$\dot{D}_{ij} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p|_{ij} \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p| \quad (1.11)$$

dès que $w_s > w_D$ ou $p > p_D$.

D'autres lois peuvent être utilisées à la place de cette dernière, en particulier si l'on désire prendre en compte la dissymétrie de l'endommagement en traction et en compression (Desmorat 2006). Une première proposition est d'introduire dans la loi d'endommagement la partie positive du tenseur taux de déformation plastique² $\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rangle$ au lieu de la valeur absolue $|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p|$. De ce fait, l'endommagement dans la direction considérée évolue uniquement si la vitesse de déformation plastique dans cette direction est positive. La loi d'endommagement anisotrope correspondante devient alors, lorsque le seuil est atteint :

$$\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rangle \quad \text{ou} \quad \dot{D}_{ij} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rangle_{ij} \quad (1.12)$$

Pour aller plus loin, on peut imaginer une loi encore différente, ne faisant cette fois-ci plus intervenir l'énergie élastique mais directement la partie positive de la contrainte effective, ainsi que le taux de déformation plastique cumulée :

$$\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle^2}{2ES} \right)^s \dot{p} \quad (1.13)$$

Ici, il est nécessaire d'utiliser le scalaire \dot{p} (déformation plastique cumulée) au lieu de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ afin de garder un tenseur d'endommagement \mathbf{D} symétrique. Ces différentes lois d'endommagement ont été programmées et étudiées au cours de cette thèse. Les schémas numériques pour les différents modèles sont présentés dans le chapitre 2. Une remarque importante est que pour le formalisme thermodynamique considéré ces lois garantissent la positivité de la dissipation intrinsèque due à l'endommagement ($Y_{ij}\dot{D}_{ij} = \mathbf{Y} : \dot{\mathbf{D}} \geq 0$) et vérifient le second principe (Desmorat 2006), même si le cadre utilisé est non-standard !

Dans tous ces cas, on considère qu'il y a initiation de fissure mésoscopique lorsque l'une des valeurs principales de \mathbf{D} atteint l'endommagement critique D_c . Dans le cas anisotrope, il est montré (Lemaitre & Desmorat 2005) par une étude de localisation que pour les métaux, $D_c \simeq 0.5$.

² $\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rangle = \mathbf{P} \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{diag}^p \rangle \mathbf{P}^{-1}$ où $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{diag}^p = \mathbf{P}^{-1} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \mathbf{P}$ et $\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{diag}^p \rangle = \langle \mathbf{P}^{-1} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \mathbf{P} \rangle$ sont diagonaux.

1.3 Viscoplasticité couplée à l'endommagement

Lorsque les applications industrielles nécessitent de s'intéresser à des cas où la température est élevée ($T > T_f/2$, où T_f est la température de fusion du matériau), il devient indispensable de prendre en compte les effets de viscosité du matériau. On introduit un critère f définissant le domaine élastique par $f < 0$, et le domaine de viscoplasticité par $f = \sigma_v > 0$, où σ_v est la contrainte visqueuse, définie par une loi de viscosité choisie.

Si l'on prend en compte un écrouissage isotrope R et un écrouissage cinématique \mathbf{X} , le critère se réécrit (pour le cas sans endommagement)

$$f = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})_{eq} - R - \sigma_v, \quad (1.14)$$

avec $(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_{ij}^D - X_{ij}^D)(\sigma_{ij}^D - X_{ij}^D)}$. L'écrouissage isotrope représente l'augmentation de la limite d'élasticité dans toutes les directions. Un écrouissage isotrope de type exponentiel est choisi, de la forme

$$R = R_\infty (1 - e^{-br}) \quad (1.15)$$

où R_∞ et b sont des paramètres dépendant du matériau et de la température. La variable interne r associée à R est par ailleurs égale à la déformation plastique cumulée p tant que l'endommagement est nul.

L'écrouissage cinématique, qui représente la translation du domaine élastique dans l'espace des contraintes, est modélisé par une loi non-linéaire d'Armstrong-Frederick généralisée pour le cas anisotherme :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma \boldsymbol{\alpha} \dot{p} \quad (1.16)$$

$\boldsymbol{\alpha} = 3\mathbf{X}/2C$ est la variable interne associée à \mathbf{X} , C et γ sont des paramètres dépendant du matériau et de la température. Dans le cas isotherme, on retrouve le cas classique d'Armstrong-Frederick où $\dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3}C\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma\mathbf{X}\dot{p}$. Le cas de la viscoplasticité se traite en introduisant la contrainte visqueuse σ_v fonction du taux de déformation plastique \dot{p} . Une loi de Norton,

$$f = \sigma_v = K_N \dot{p}^{1/N} \quad (1.17)$$

est efficace pour modéliser la viscosité de la majeure partie des matériaux métalliques, en particulier la vitesse de déformation plastique lors du fluage secondaire. K_N et N sont les paramètres de viscosité, dépendant du matériau et de la température.

Le couplage avec l'endommagement se fait au travers de la contrainte effective,

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H})^D + \frac{\sigma_H}{1 - tr\mathbf{D}}\mathbf{1}, \quad (1.18)$$

que l'on introduit dans la loi d'élasticité ainsi que dans le critère de von Mises à la place de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$:

$$f = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{eq} - R - \sigma_v \quad (1.19)$$

Un tableau récapitulatif de toutes les équations constitutives du modèle complet couplé à l'endommagement est donné dans la partie 4 de ce chapitre.

2 Seuil d'endommagement en énergie stockée

Lors d'essais de fatigue sur matériaux métalliques, une grande partie de la durée de vie se déroule sans endommagement. Celui-ci n'apparaît qu'après un certain seuil, qui peut représenter jusqu'à 90% de la durée de vie totale du matériau. Il est donc nécessaire d'avoir un modèle qui permette d'estimer assez précisément la valeur du seuil d'endommagement afin de garantir une bonne prévision de la durée de vie, sans complexifier pour autant le modèle.

La piste proposée ici est d'utiliser l'énergie stockée dans le matériau par les écrouissements comme indicateur de l'« incubation » de l'endommagement, au détriment de la déformation plastique cumulée. En effet, les valeurs de déformation plastique cumulée atteintes en fatigue sont nettement supérieures aux valeurs atteintes lors de chargements monotones. De ce fait, un seuil d'endommagement exprimé en terme de déformation plastique cumulée est nécessairement dépendant du chargement. Il ne peut donc pas être introduit comme paramètre matériau.

2.1 Énergie stockée par les écrouissements

En accord avec le formalisme développé dans la section précédente (élasto-viscoplasticité avec un écrouissage isotrope et un écrouissage cinématique non-linéaires), l'énergie stockée dans le matériau par les écrouissements se définit comme l'intégrale

$$w_s = \int_0^t (R\dot{r} + X_{ij}\dot{\alpha}_{ij}) dt \quad (1.20)$$

Si l'on se place à de grandes valeurs de p , alors $R \simeq R_\infty$, et si l'on considère la loi d'état $\mathbf{X} = \frac{2}{3}C\boldsymbol{\alpha}$, on obtient

$$w_s \simeq R_\infty p + \frac{3}{4C} X_{ij} X_{ij}, \quad \text{tant que } D = 0. \quad (1.21)$$

Lors d'un chargement monotone, la contribution de l'écrouissage cinématique non-linéaire atteint une valeur à saturation, et lors de chargements cycliques, c'est une fonction périodique du temps. On a donc une expression de l'énergie stockée qui exhibe une dépendance linéaire en p . Or, expérimentalement l'énergie stockée exhibe une tendance à saturation et tend vers une valeur asymptotique. L'expression 1.20 de l'énergie stockée est donc incorrecte, elle nécessite une correction (Chrysochoos, 1987, Sermage & al 1999, Lemaitre & al 2000).

On introduit alors un nouveau jeu de variables thermodynamiques associées (Q, q) qui représentent l'écrouissage isotrope corrigé par une fonction de correction $z(r)$ ($z(r) = \frac{A}{m} r^{(1-m)/m}$ par exemple, où A et m sont des paramètres dépendant du matériau et de la température, Lemaitre & Desmorat 2005). On obtient la nouvelle expression de l'énergie stockée, écrite dans le cadre thermodynamique si le jeu de variables (Q, q) est utilisé au lieu

de (R, r) :

$$w_s = \int_0^t (Q\dot{q} + X_{ij}\dot{\alpha}_{ij})dt = \int_0^t (R(r)z(r)\dot{r} + X_{ij}\dot{\alpha}_{ij})dt \quad (1.22)$$

Avec le changement de variable $Q(q) = R(r)$ et $dq = z(r)dr$ on obtient l'approximation suivante représentant la tendance à saturation

$$w_s \simeq AR_\infty p^{1/m} + \frac{3}{4C} X_{ij} X_{ij}, \quad \text{tant que } D = 0, \quad (1.23)$$

rendant invariante les lois mécaniques, notamment la fonction critère

$$f = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})_{eq} - Q(q) - \sigma_y = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})_{eq} - R(r) - \sigma_y \quad (1.24)$$

Notons qu'une écriture non associée de la plasticité et de l'écroutissage isotrope (Besson & al, 2001) conduit à la saturation de l'énergie stockée. Mais la saturation est trop rapide en regard des phénomènes de fatigue et de la modélisation du seuil d'endommagement.

2.2 Le seuil d'endommagement : un paramètre « matériau » ?

Lorsque $m > 1$, l'énergie stockée exhibe une tendance à la saturation pour de grandes valeurs de p . Des simulations réalisées grâce au logiciel Zebulon le montrent sur la figure 1.1, lors d'essais monotones ou cycliques. En fatigue oligocyclique, le seuil d'endommagement apparait généralement au delà de la mi-durée de vie : la déformation plastique cumulée peut alors atteindre de très grandes valeurs (1000 % !) par rapport au seuil d'endommagement en déformation plastique cumulée d'un chargement monotone (de l'ordre de quelques dizaines de pourcents). La figure 1.1 fait apparaître une valeur de l'énergie stockée w_D correspondant au seuil d'endommagement en déformation plastique cumulée pour différents chargements et nous nous proposons ici d'établir une formule originale (équation 1.29) en permettant le calcul rapide.

Lors d'un chargement monotone, l'énergie stockée est donnée approximativement par

$$w_s \simeq AR_\infty p^{1/m} + \frac{1}{2C} X_\infty^2 \quad (1.25)$$

donc au seuil d'endommagement noté ε_{pD} en monotone,

$$w_D^{monotone} = w_s(p = \varepsilon_{pD}) \simeq AR_\infty \varepsilon_{pD}^{1/m} + \frac{1}{2C} X_\infty^2 \quad (1.26)$$

Pour un chargement cyclique, si l'on considère que $X_{max} = X_\infty \tanh\left(\frac{\gamma \Delta \varepsilon_p}{2}\right)$ de par la loi d'Armstrong-Frederick, l'énergie stockée s'écrit

$$w_s \simeq AR_\infty p^{1/m} + \frac{1}{2C} X_\infty^2 \tanh^2\left(\frac{\gamma \Delta \varepsilon_p}{2}\right) \quad (1.27)$$

où $\Delta\varepsilon_p$ est l'amplitude de déformation plastique par cycle. Au seuil d'endommagement en déformation plastique cumulée p_D , on a :

$$w_D^{fatigue} = w_s(p = p_D) \simeq AR_\infty p_D^{1/m} + \frac{1}{2C} X_\infty^2 \tanh^2 \left(\frac{\gamma \Delta \varepsilon_p}{2} \right) \quad (1.28)$$

Pour que w_D soit un paramètre matériau, il faut que sa valeur à une température donnée soit indépendante du chargement. L'égalité $w_D^{monotone} = w_D^{fatigue} = w_D$, vraie quelque soit le chargement, nous amène à la relation importante suivante :

$$p_D = \left[\varepsilon_{pD}^{1/m} + \frac{X_\infty^2}{2AR_\infty C} \cosh^{-2} \left(\frac{\gamma \Delta \varepsilon_p}{2} \right) \right]^m \quad (1.29)$$

Le seuil d'endommagement en énergie stockée w_D , indépendant du chargement, définit donc de manière naturelle un seuil d'endommagement en déformation plastique cumulée qui, lui, dépend du chargement : w_D dépend uniquement du matériau et de la température. Sur la figure 1.1, l'identification du seuil en monotone ε_{pD} (sur des courbes de fluage ou de traction) détermine la valeur de w_D selon les valeurs choisies pour A et m . Le seuil d'endommagement en déformation plastique cumulée identifié en fatigue permettra de déterminer définitivement A et m , à condition de disposer de deux essais de fatigue au moins, ou mieux, d'une courbe de Wöhler (voir chapitre 3).

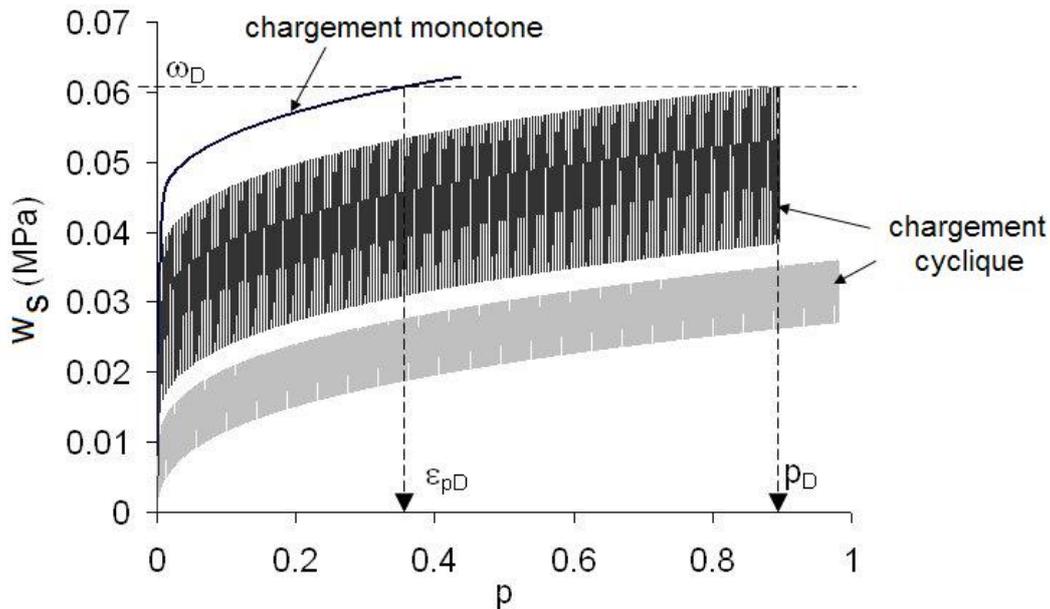


FIG. 1.1: Seuil en énergie stockée et en déformations plastique cumulée pour différents chargements

2.3 Énergie stockée – Formulation en contrainte équivalente

L'énergie stockée dans le matériau par les écrouissages est un bon indicateur de l'incubation de l'endommagement et comme nous venons de le voir, un seuil d'endommagement exprimé en énergie stockée permet d'introduire naturellement la dépendance au chargement du seuil d'endommagement en déformation plastique cumulée. Cependant, il nécessite la connaissance précise des paramètres d'écrouissage du matériau et donc du modèle élasto-viscoplastique choisi. Si l'on désire effectuer des calculs d'endommagement en post-traitement d'un calcul de comportement (nous anticipons pour cela les résultats du chapitre 4), il vaut mieux s'affranchir au maximum du modèle de comportement afin de permettre un maximum de liberté à l'utilisateur quant à son choix.

Schématiquement, l'énergie stockée correspond à l'aire hachurée sur la figure 1.2, avec et sans fonction de correction (voir section précédente). Nous proposons donc d'exprimer la valeur maximum de l'énergie stockée en termes de contrainte³ :

$$w_s = \int_0^p \frac{A}{m} \langle \sigma_{eq} - \sigma_v - \sigma_y \rangle p^{\frac{1}{m}-1} dp \quad (1.30)$$

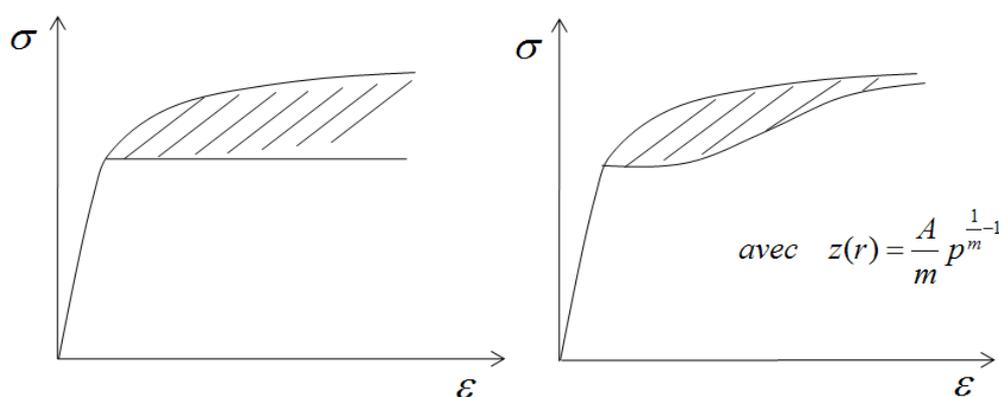


FIG. 1.2: Énergie stockée sur des courbes contrainte-déformation

Cette relation fait intervenir la contrainte équivalente au sens de von Mises, mais aussi la limite d'élasticité σ_y et la contrainte visqueuse σ_v . Il est plus aisé d'utiliser cette formulation car il est moins fréquent d'utiliser des modèles complexes de viscosité pour les matériaux métalliques (lois en sinus hyperbolique, doubles viscosités) que de simples lois puissances (Loi de Norton). A contrario, les modèles avec plusieurs écrouissages isotropes et cinématiques sont fréquents pour les matériaux métalliques (Chaboche 1997, Marquis 2001 par exemple). Le nombre de paramètres à identifier se multipliant, mieux vaut en dépendre le moins possible.

Lorsque l'on intègre cette forme entre $p = 0$ et une valeur quelconque de p , on obtient en supposant les déformations plastiques suffisamment grandes (écrouissages saturés,

³rappelons que $\langle x \rangle = \max(0, x)$

contrainte visqueuse constante),

$$w_s = A \langle \sigma_{eq} - \sigma_v - \sigma_y \rangle p^{1/m} \quad (1.31)$$

On en déduit que $w_D = A \langle \sigma_{eq} - \sigma_v - \sigma_y \rangle \varepsilon_{pD}^{1/m}$ en monotone, et $w_D = A \langle \sigma_{eq} - \sigma_v - \sigma_y \rangle p_D^{1/m}$ en fatigue, relation qui servira à l'identification de w_D en fonction des valeurs observées expérimentales de p_D en fatigue.

3 Conditions unilatérales de refermeture des micro-défauts

Le modèle d'endommagement décrit dans la partie précédente prend en compte l'anisotropie de l'endommagement induite par la plasticité. On sait également qu'un matériau endommagé n'a pas le même comportement en traction et en compression (Chaboche 1992). Or écrit tel quel, le modèle ne prend pas en compte cette dissymétrie. La modélisation de cette dissymétrie peut se faire via l'introduction (ou non) d'un scalaire h jouant sur l'endommagement en compression : le paramètre de refermeture des micro-défauts, défauts pouvant être des micro-fissures ou des micro-cavités.

3.1 Potentiel thermodynamique avec refermeture des micro-défauts

On définit (de manière indicelle dans cette partie) :

$$H_{ij}^p = (\mathbf{1} - \mathbf{D})_{ij}^{-1/2}, \quad H_{ij}^n = (\mathbf{1} - h\mathbf{D})_{ij}^{-1/2} \quad (1.32)$$

(p pour *positif*, n pour *négatif*). Le potentiel d'état utilisé pour modéliser l'endommagement avec conditions quasi-unilatérales est

$$\begin{aligned} \rho\psi_e^* &= \frac{1+\nu}{2E} \left(H_{ij}^p \sigma_{+jk}^D H_{kl}^p \sigma_{+li}^D + H_{ij}^n \sigma_{+jk}^D H_{kl}^n \sigma_{+li}^D \right) \\ &+ \frac{3(1-2\nu)}{2E} \left(\frac{\langle \sigma_H \rangle^2}{1 - \text{tr}\mathbf{D}} + \frac{\langle -\sigma_H \rangle^2}{1 - h\text{tr}\mathbf{D}} \right) \end{aligned} \quad (1.33)$$

où σ_+^D est construit à partir des valeurs propres et des vecteurs propres correspondants de la matrice non-symétrique $(\mathbf{H}^p \sigma^D)$, de telle manière que $(\mathbf{H}^p \sigma_+^D \mathbf{H}^p \sigma_+^D)$ soit continuellement différentiable (Ladevèze 1983, Desmorat & Otin 2007).

La loi d'élasticité dérive du potentiel d'état,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^e &= \rho \frac{\partial \psi_e^*}{\partial \sigma_{ij}} \\ &= \frac{1+\nu}{E} \left[\left(H_{ik}^p \sigma_{+kl}^D H_{lj}^p \right)^D + \left(H_{ik}^n \sigma_{-kl}^D H_{lj}^n \right)^D \right] + \frac{1-2\nu}{E} \left(\frac{\langle \sigma_H \rangle}{1 - \text{tr}\mathbf{D}} + \frac{\langle -\sigma_H \rangle}{1 - h\text{tr}\mathbf{D}} \right) \delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij}^e &= \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma_{ij}) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (1.34)$$

et définit la contrainte effective

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \left(H_{ik}^p \sigma_{+kl}^D H_{lj}^p \right)^D + \left(H_{ik}^n \sigma_{-kl}^D H_{lj}^n \right)^D + \left(\frac{\langle \sigma_H \rangle}{1 - tr \mathbf{D}} + \frac{\langle -\sigma_H \rangle}{1 - h tr \mathbf{D}} \right) \delta_{ij} \quad (1.35)$$

qui prend en compte l'effet quasi-unilatéral de refermeture des micro-défauts.

3.2 Couplage avec l'endommagement

Afin de modéliser une évolution de l'endommagement plus faible en compression qu'en traction avec les lois $\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p|$ et $\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle$, on exprime la densité d'énergie effective en fonction des paramètres de refermeture des micro-défauts :

$$\begin{aligned} \bar{Y} = & \frac{1+\nu}{2E} tr \left[\left(\mathbf{H}^p \boldsymbol{\sigma}_+^D \mathbf{H}^p \right)^2 + h \left(\mathbf{H}^n \boldsymbol{\sigma}_-^D \mathbf{H}^n \right)^2 \right] \\ & + \frac{3(1-2\nu)}{2E} \left(\frac{\langle \sigma_H \rangle^2}{(1 - tr \mathbf{D})^2} + h \frac{\langle -\sigma_H \rangle^2}{(1 - h tr \mathbf{D})^2} \right) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Lorsque $h = 1$, on retrouve le modèle d'endommagement anisotrope sans refermeture des micro-défauts, et lorsque $0 < h < 1$, on obtient l'effet de dissymétrie traction/compression également sur l'évolution de l'endommagement. L'ensemble des équations des modèles correspondants est repris dans la partie suivante.

4 Synthèse des modèles d'endommagement étudiés

Cette partie vise à rappeler les lois d'endommagement étudiées dans cette thèse. Pour chaque loi d'évolution, on se propose de donner l'allure du tenseur d'endommagement obtenu dans le cas d'une traction simple, d'une compression, et d'une bitraction. La forme du tenseur des contraintes est imposée. Les tenseurs des contraintes et des déformations plastiques correspondants sont donnés pour chaque cas (avec $\sigma > 0$ et $\varepsilon^p > 0$) :

traction	compression	bitraction
$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \begin{pmatrix} \varepsilon^p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon^p}{2} \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \begin{pmatrix} -\varepsilon^p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon^p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon^p}{2} \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \begin{pmatrix} \varepsilon^p & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^p & 0 \\ 0 & 0 & -2\varepsilon^p \end{pmatrix}$

4.1 Modèle d'endommagement isotrope

Ce modèle est le modèle d'endommagement initial développé par Lemaitre et Chaboche, couplé à la viscoplasticité, via la contrainte effective $\tilde{\sigma}$ au lieu de σ dans la fonction critère. Les équations constitutives de ce modèle sont rappelées dans le tableau 1.2.

La loi d'endommagement, qui s'écrit initialement sous forme scalaire, peut s'écrire sous forme tensorielle :

$$\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{Y}{S} \right)^s \dot{p} \mathbf{1} \quad (1.37)$$

et induit dans le cas d'une traction simple un tenseur d'endommagement dont les composantes sur la diagonale (dans le repère principal) sont égales : l'endommagement est le même dans toutes les directions, quelque soit le mode de sollicitation.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

4.2 Modèles d'endommagement anisotropes sans refermeture des micro-défauts

Les modèles présentés dans cette partie sont des modèles d'endommagement tenant compte de l'anisotropie induite par la plasticité dans le matériau. L'endommagement n'est *a priori* plus le même dans toutes les directions. On sait par exemple que l'endommagement d'un matériau en traction est plus important que l'endommagement en compression, et certaines lois peuvent en tenir compte. Le couplage des lois d'endommagement avec la viscoplasticité se fait toujours via la contrainte effective, et l'ensemble des équations constitutives du modèle sont rappelées dans le tableau 1.3.

4.2.1 Endommagement anisotrope gouverné par la valeur absolue des vitesses de déformation plastique

Cette loi est l'extension naturelle du modèle d'endommagement isotrope (voir section 5). La loi d'endommagement,

$$\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P|, \quad (1.39)$$

introduit un taux d'endommagement directement proportionnel au tenseur des valeurs absolues des vitesses de déformations plastiques, dont la forme est donnée dans le tableau suivant en fonction du type de chargement :

traction	compression	bitraction
$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D}{2} \end{pmatrix}$	$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D}{2} \end{pmatrix}$	$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 2D \end{pmatrix}$

Les cas de la traction et de la compression donnent le même tenseur d'endommagement : il n'y a pas de dissymétrie de l'évolution de l'endommagement en traction et compression, cette loi généralisant ainsi complètement le formalisme $(1 - D)$ isotrope identique en traction/compression à l'anisotropie. Le cas de la bitraction est à souligner car il induit un endommagement plus grand dans la direction 3, tandis que l'on tire dans les directions 1 et 2 propriété en général non physique mais atténuée lors des calculs de structure par le phénomène de localisation.

4.2.2 Endommagement anisotrope gouverné par la partie positive des vitesses de déformation plastique

Le modèle précédent, en valeur absolue des vitesses de déformation plastique, traite de façon identique les cas de traction et de compression. Si l'on remplace la valeur absolue de la loi précédente par la partie positive des vitesses de déformation plastique, l'endommagement ne pourra évoluer principalement qu'en traction. La loi proposée,

$$\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \rangle, \quad (1.40)$$

induit les tenseurs d'endommagement suivants en traction, compression et bitraction :

traction	compression	bitraction
$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$	$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Les cas monotones du type traction simple, fluage, sont inchangés par rapport au modèle précédent, mais en fatigue oligocyclique en traction et compression, l'effet est différent : à mêmes conditions de chargement, l'endommagement augmentera plus lentement (cf. chapitre 4). Les deux modèles $\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P|$ et $\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \rangle$ prouvent un endommagement (et son anisotropie) gouverné par le tenseur des vitesses de déformation plastique, mais on peut aussi imaginer une anisotropie gouvernée par le tenseur des contraintes.

4.2.3 Endommagement anisotrope gouverné par la partie positive du tenseur des contraintes

De même que le modèle précédent, ce modèle d'endommagement incrémental privilégie l'endommagement en traction par rapport à l'endommagement en compression. Le tenseur des vitesses d'endommagement est proportionnel à un tenseur du second ordre symétrique et positif $\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle^2$ et l'endommagement demeure gouverné par la déformation plastique cumulée⁴.

$$\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle^2}{2ES} \right)^s \dot{p} \quad (1.41)$$

En traction, bitraction et compression, les tenseurs d'endommagement prennent les formes suivantes, où d est un scalaire tel que $d \ll D$.

traction	compression	bitraction
$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$	$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

Le fait que d ne soit pas exactement nul est dû à la définition même de la contrainte effective et au fait qu'elle est issue d'une décomposition en une partie déviatorique et une partie hydrostatique.

4.3 Modèles d'endommagement anisotropes avec refermeture des micro-défauts

Une manière de modéliser la dissymétrie de l'évolution de l'endommagement entre traction et compression a été présentée dans la partie 3 de ce chapitre, en introduisant un paramètre h , compris entre 0 et 1, jouant sur l'endommagement en compression. Les équations constitutives de ce modèle sont rappelées dans le tableau 1.4. Les deux lois $\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P|$ et $\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \rangle$ peuvent être utilisées, mais où le paramètre de refermeture des micro-défauts affecte \bar{Y} (via l'équation 1.36) et donc l'évolution de l'endommagement.

4.3.1 Loi $\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P|$ et refermeture des micro-défauts

Le modèle avec prise en compte de l'effet unilatéral de refermeture des micro-défauts a été initialement proposé avec la loi d'endommagement $\dot{\mathbf{D}} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P|$. Ce modèle a été

⁴ $\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = \mathbf{P} \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{diag} \rangle \mathbf{P}^{-1}$ où $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{diag} = \mathbf{P}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{P}$ diagonal

présenté dans la partie 3 de ce chapitre, et donne, pour des chargements de traction, bitraction et compression, les tenseurs d'endommagement suivants :

traction	compression	bitraction
$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D}{2} \end{pmatrix}$	$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D}{2} \end{pmatrix}$	$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 2D \end{pmatrix}$

L'allure des tenseurs d'endommagement est exactement la même que pour la loi en $|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p|$ sans refermeture des micro-défauts ($h = 1$, partie 4.2.1), mais à paramètres d'endommagement identiques, l'endommagement évolue dans le cas présent plus lentement que sans effet de refermeture des micro-défauts.

4.3.2 Loi $\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{\gamma}}{S}\right)^s \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rangle$ et refermeture des micro-défauts

Ce dernier modèle est une association du modèle précédent avec refermeture des micro-défauts et de la loi en partie positive des vitesses de déformations plastiques. Les deux effets s'ajoutent, pour accentuer davantage la dissymétrie traction-compression.

traction	compression	bitraction
$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$	$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Les tenseurs d'endommagement ont la même forme qu'en utilisant le modèle en $|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p|$ sans refermeture des micro-défauts ($h = 1$) (partie 4.2.2), mais en prenant $h = 0$ l'endommagement évolue plus lentement en compression.

4.3.3 Loi $\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^2}{2ES}\right)^s \dot{p}$ et refermeture des micro-défauts

Cette dernière association entre anisotropie induite par la forme du tenseur des contraintes et effet de refermeture des micro-défauts (via le paramètre h dans la loi d'élasticité) donne la même forme du tenseur d'endommagement que sans h :

traction	compression	bitraction
$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$	$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

Mais vu que le paramètre h n'affecte pas la loi d'évolution, il n'est pas judicieux de l'introduire uniquement pour le couplage avec l'élasticité. Ce modèle ne sera pas utilisé par la suite.

Partition des déformations	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
Thermoélasticité	$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{1} + \alpha(T - T_{ref}) \mathbf{1}$
Contrainte effective	$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-D}$
Fonction critère	$f = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{eq} - R - \sigma_y$
(Visco-)plasticité	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D - \mathbf{X}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{eq}} \dot{r}$ $\dot{p} = \frac{\dot{r}}{1-D}$ $R = R_\infty (1 - e^{-br})$ $\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{X}}{\gamma X_\infty} \right) = \frac{2}{3} (1-D) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\mathbf{X}}{X_\infty} \frac{\dot{r}}{1-D}$
Endommagement	$\dot{D} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s \dot{p} \text{ dès que } r > p_D \text{ ou } w_s > w_D$ $Y = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e = \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{eq}^2 R_v}{2E}$ $\tilde{R}_v = \frac{2}{3} (1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_H}{\boldsymbol{\sigma}_{eq}} \right)^2$
Multiplicateur plastique	$\dot{r} = \dot{\lambda}$ donné par $f = 0$ et $\dot{f} = 0$
Multiplicateur visco-plastique par la loi de Norton	$\dot{p} = \left\langle \frac{f}{K_N} \right\rangle^N$

TAB. 1.2: Elasto-(visco-)plasticité couplée à l'endommagement isotrope ($X_\infty = \frac{C}{\gamma}$)

5 Le modèle isotrope : une limite de l'anisotropie induite

Le modèle initial, isotrope, a été étendu à l'anisotropie induite par la plasticité. Aucun paramètre supplémentaire n'a été introduit lors de cette opération. A ce titre, comment passe-t-on du modèle anisotrope au modèle isotrope ? Les paramètres "matériau" restent-ils inchangés ? Dans cette section, on tente de donner un éclaircissement sur ce point à partir de cas de chargement simples, menés analytiquement avec la loi d'évolution $\dot{D} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\epsilon}^p|$ et sans refermeture de micro-défauts.

5.1 Endommagement sous chargement uniaxial

Le chargement uniaxial est choisi ici comme cas d'étude puisqu'il permet une analyse quasi-analytique du problème considéré et qu'il est la base de toute procédure d'identification. On choisit donc d'étudier le cas d'un chargement monotone uniaxial sous contrainte σ d'une éprouvette axisymétrique. La direction 1 est la direction de chargement. Dans ce cas, on a :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}^D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_H = \frac{1}{3}\sigma \quad (1.42)$$

Le tenseur des déformations plastiques correspondant vaut (avec $\dot{p} = |\dot{\epsilon}^p| = \dot{\epsilon}^p$) :

$$\boldsymbol{\epsilon}^p = \begin{pmatrix} \epsilon_p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon_p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\epsilon_p}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p| = \begin{pmatrix} \dot{p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{p}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{p}}{2} \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

La loi d'évolution de l'endommagement implique $D_1 = 2D_2 = 2D_3$ (comme souligné en partie 4.2.1) et :

$$\dot{D}_1 = \left(\frac{\tilde{\sigma}_{eq} \tilde{R}_v}{2ES} \right)^s |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p|_{11} = \left(\frac{\tilde{\sigma}_{eq} \tilde{R}_v}{2ES} \right)^s \dot{p} \quad (1.44)$$

La relation $D_1 = 2D_2 = 2D_3$ a été observée expérimentalement (Lemaitre & al, 2000). Le tenseur \mathbf{H} est donc diagonal et s'écrit

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-D_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{D_1}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{D_1}{2}}} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

Partition des déformations	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
Thermoélasticité	$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{1} + \alpha(T - T_{ref}) \mathbf{1}$
Contrainte effective	$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{H} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D \mathbf{H})^D + \frac{\sigma_H}{1 - \text{tr} \mathbf{D}} \mathbf{1}$
Fonction critère	$f = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{eq} - R - \sigma_y$
(Visco-)plasticité	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = [\mathbf{H} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \mathbf{H}]^D \quad \text{avec} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D - \mathbf{X}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{eq}} \dot{r}$ $\dot{p} = \frac{[\mathbf{H}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D - \mathbf{X})\mathbf{H}]_{eq} \dot{r}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{eq}}$ $R = R_\infty (1 - e^{-br})$ $\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{X}}{\gamma X_\infty} \right) = \frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\mathbf{X}}{X_\infty} \dot{r}$
Endommagement	$\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p , \quad \dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle^2}{2ES} \right)^s \dot{p}$ <p>dès que $r > p_D$ ou $w_s > w_D$</p> $\bar{Y} = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2 \tilde{R}_v}{2E}$ $\tilde{R}_v = \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\tilde{\sigma}_H}{\tilde{\sigma}_{eq}} \right)^2$ $\tilde{\sigma}_{eq} = (\mathbf{H} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D \mathbf{H})_{eq}, \quad \tilde{\sigma}_H = \frac{\sigma_H}{1 - \text{tr} \mathbf{D}}$
Multiplicateur plastique	$\dot{r} = \dot{\lambda}$ donné par $f = 0$ et $\dot{f} = 0$
Multiplicateur visco-plastique par la loi de Norton	$\dot{p} = \left\langle \frac{f}{K_N} \right\rangle^N$

TAB. 1.3: Elasto-(visco-)plasticité couplée à l'endommagement anisotrope sans refermeture des micro-défauts

Partition des déformations	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
Thermoélasticité	$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1+\nu}{E} \left[(\mathbf{H}^p \boldsymbol{\sigma}_+^D \mathbf{H}^p)^D + (\mathbf{H}^n \boldsymbol{\sigma}_-^D \mathbf{H}^n)^D \right]$ $+ \frac{3(1-2\nu)}{E} \left[\frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_H \rangle}{1 - \text{tr} \mathbf{D}} - \frac{\langle -\boldsymbol{\sigma}_H \rangle}{1 - h \text{tr} \mathbf{D}} \right]$
Fonction critère	$f = (\mathbf{H}^p \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}^p - \mathbf{X})_{eq} - R - \sigma_y$
(Visco-)plasticité	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = [\mathbf{H}^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \mathbf{H}^p]^D$ <p>avec $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{H}^p \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}^p)^D - \mathbf{X}}{(\mathbf{H}^p \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}^p - \mathbf{X})_{eq}} \dot{r}$</p> $\dot{p} = \frac{[\mathbf{H}^p ((\mathbf{H}^p \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}^p) - \mathbf{X}) \mathbf{H}^p]_{eq} \dot{r}}{(\mathbf{H}^p \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}^p - \mathbf{X})_{eq}}$ $R = R_\infty (1 - e^{-br})$ $\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{X}}{\gamma X_\infty} \right) = \frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\mathbf{X}}{X_\infty} \dot{r}$
Endommagement	$\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p , \quad \dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S} \right)^s \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle \text{ ou } \dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle^2}{2ES} \right)^s \dot{p}$ <p>dès que $r > p_D$ ou $w_s > w_D$</p> $\bar{Y} = \frac{1+\nu}{2E} \text{tr} \left[(\mathbf{H}^p \boldsymbol{\sigma}_+^D \mathbf{H}^p)^2 + h (\mathbf{H}^n \boldsymbol{\sigma}_-^D \mathbf{H}^n)^2 \right]$ $+ \frac{3(1-2\nu)}{2E} \left[\frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_H \rangle^2}{(1 - \text{tr} \mathbf{D})^2} + h \frac{\langle -\boldsymbol{\sigma}_H \rangle^2}{(1 - h \text{tr} \mathbf{D})^2} \right]$
Multiplicateur plastique	$\dot{r} = \dot{\lambda}$ donné par $f = 0$ et $\dot{f} = 0$
Multiplicateur visco-plastique par la loi de Norton	$\dot{p} = \left\langle \frac{f}{K_N} \right\rangle^N$

TAB. 1.4: Elasto-(visco-)plasticité couplée à l'endommagement anisotrope avec refermeture des micro-défauts

Ainsi, la contrainte effective s'écrit :

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{ij} &= (H_{ik}\sigma_{kl}^D H_{lj})^D + \frac{\sigma_H}{1 - tr\mathbf{D}} \delta_{ij} \\ \tilde{\sigma}_1 &= \frac{4}{9} \frac{\sigma}{1 - D_1} + \frac{2}{9} \frac{\sigma}{1 - D_2} + \frac{1}{3} \frac{\sigma}{1 - tr\mathbf{D}}\end{aligned}\quad (1.46)$$

La contrainte équivalente et la fonction de triaxialité s'écrivent respectivement (avec $D_3 = D_2 = \frac{D_1}{2}$, $tr\mathbf{D} = 2D_1$) :

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{eq} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma}{1 - D_1} + \frac{1}{3} \frac{\sigma}{1 - D_2} \\ \tilde{R}_v &= \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left[(1 - tr\mathbf{D}) \left(\frac{2}{1 - D_1} + \frac{1}{1 - D_2} \right) \right]^{-2}\end{aligned}\quad (1.47)$$

On retrouve le modèle d'endommagement isotrope lorsque le terme $tr\mathbf{D}$ est remplacé par D et lorsque $D_2 = D_1$: à ce titre, on a alors $\tilde{\sigma}_{eq} = \sigma/(1 - D)$ et $\tilde{R}_v = 1$.

5.2 Analogie entre modèle isotrope et anisotrope

Restons dans le cas d'un chargement uniaxial de contrainte σ , dont la direction de chargement est notée 1. Le modèle d'endommagement anisotrope s'écrit dans la direction 1 :

$$\dot{D}_1 = \left(\frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2 \tilde{R}_v}{2ES} \right)^s |\dot{\epsilon}_{11}^p| \quad (1.48)$$

En utilisant les expressions de $\tilde{\sigma}_{eq}$ fonction de σ et de \tilde{R}_v (équation 1.47), on peut écrire que $\tilde{\sigma}_{eq}^2 \tilde{R}_v = \sigma^2 \mathcal{G}(D_1)$ avec

$$\mathcal{G}(D_1) = \frac{2}{27}(1 + \nu) \left(\frac{2}{1 - D_1} + \frac{1}{1 - \frac{D_1}{2}} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{1 - 2\nu}{(1 - 2D_1)^2} \quad (1.49)$$

et donc,

$$\dot{D}_1 = \left(\frac{\sigma^2 \mathcal{G}(D_1)}{2ES} \right)^s |\dot{\epsilon}_{11}^p| \quad (1.50)$$

L'expression de la loi d'évolution de l'endommagement dans le cas anisotrope est exactement la même que dans le cas isotrope, à la fonction \mathcal{G} près : dans le cas isotrope, on a bien

$$\dot{D} = \left(\frac{\sigma^2 \mathcal{G}_{iso}(D)}{2ES} \right)^s \dot{p} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_{iso}(D) = \frac{1}{(1 - D)^2} \quad (1.51)$$

Cette conclusion est également valable pour les modèles en $(\bar{Y}/S)^s \langle \dot{\epsilon}^p \rangle$ ou en $(\langle \tilde{\sigma} \rangle^2 / 2ES)^s \dot{p}$. Dans le cas uniaxial, la différence entre modèle isotrope et modèle anisotrope réside uniquement dans la fonction \mathcal{G} . La conséquence de cette différence est une

évolution de l'endommagement davantage non-linéaire dans le cas anisotrope (figure 1.3). Le modèle sera identifié pour que la durée de vie soit quasiment la même en uniaxial que l'on soit en isotrope ou en anisotrope : seul le paramètre d'endommagement S sera alors à réidentifier dans le cas anisotrope, s'il est connu dans le cas isotrope, le paramètre s restant inchangé (Desmorat & Otin, 2007). Les différences vont essentiellement apparaître en multiaxial. L'apport de l'anisotropie sera alors à quantifier, ce que nous ferons numériquement au chapitre 4.

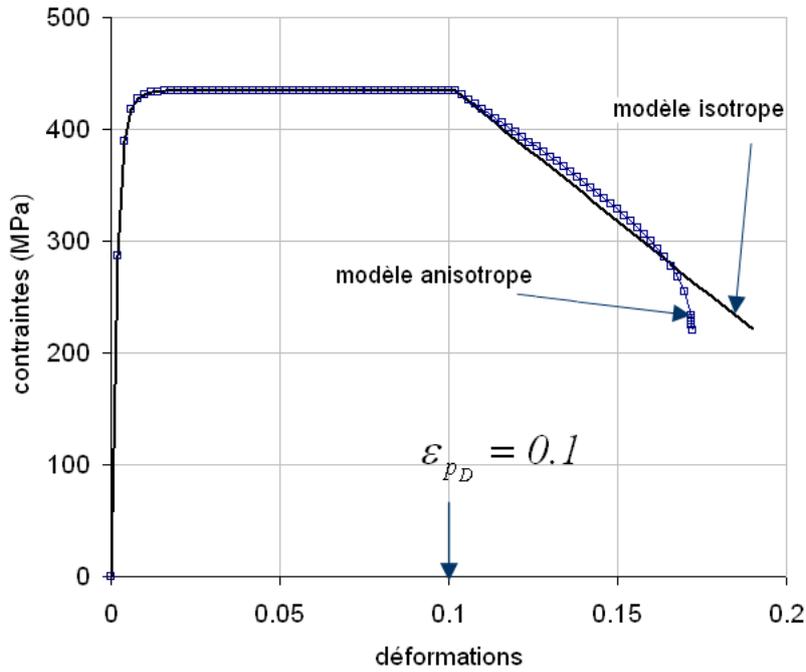


FIG. 1.3: Courbes de traction simulées avec les modèles isotrope et anisotrope d'endommagement (Haynes 188, 800°C, $10^{-4} s^{-1}$)

5.3 Durée de vie en fluage

Dans l'optique de pouvoir identifier aisément le modèle d'endommagement sur le matériau des chambres de combustion, on se propose d'établir dans le cas uniaxial les expressions des durées de vie en fluage et en fatigue similaires à celles du modèle d'endommagement isotrope. Dans le cas du fluage, soit une contrainte σ appliquée dans la direction 1 (axiale) d'une éprouvette 1D. On retrouve alors pour le modèle d'endommagement isotrope,

$$\dot{D} = \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{2ES} \right)^s \dot{p} = \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{2ES} \right)^s \left(\frac{\tilde{\sigma} - X - R - \sigma_y}{K_N} \right)^N \quad (1.52)$$

si l'on suppose qu'au seuil d'endommagement, les écrouissements sont saturés, la relation précédente se réécrit :

$$\frac{dD}{dt} = \left(\frac{\sigma^2}{2ES(1-D)^2} \right)^s \left(\frac{\frac{\sigma}{1-D} - X_\infty - R_\infty - \sigma_y}{K_N} \right)^N \quad (1.53)$$

Si l'on intègre cette relation entre $t = t_D$ où $D = 0$ et $t = t_R$ où $D = D_c$, on obtient le temps à rupture t_R suivant :

$$t_R = t_D + \left(\frac{2ES}{\sigma^2} \right)^s \int_0^{D_c} (1-D)^{2s} \left(\frac{\frac{\sigma}{1-D} - X_\infty - R_\infty - \sigma_y}{K_N} \right)^{-N} dD \quad (1.54)$$

où t_D est le seuil d'endommagement (durée avant laquelle l'endommagement est nul), $\varepsilon_p(t_D) = \varepsilon_{pD}$ et $t_D = \varepsilon_{pD} \left(\frac{\sigma - X_\infty - R_\infty - \sigma_y}{K_N} \right)^{-N}$. Pour le modèle anisotrope, t_D est inchangé mais

$$t_R = t_D + \left(\frac{2ES}{\tilde{R}_v} \right)^s \int_0^{D_c} (\tilde{\sigma}_{eq})^{-2s} \left(\frac{\tilde{\sigma} - X_\infty - R_\infty - \sigma_y}{K_N} \right)^{-N} dD \quad (1.55)$$

Seul le paramètre S est à réidentifier afin de retrouver la durée de vie prévue dans le cas isotrope en uniaxial.

5.4 Durée de vie en fatigue

Dans le même contexte, si une éprouvette axisymétrique est soumise à un chargement uniaxial de fatigue, piloté par exemple en déformation (on suppose ici que $\varepsilon_{min} = -\varepsilon_{max}$), l'incrément d'endommagement par cycle vaut :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{2ES} \right)^s \frac{\delta p}{\delta N} \quad (1.56)$$

où $\tilde{\sigma}$ est pris égale la contrainte maximale mesurée σ_M , et où $\frac{\delta p}{\delta N} = 2\Delta\varepsilon_p$. Ainsi le nombre de cycles à rupture de l'éprouvette est donné par l'intégration de la relation suivante entre $N = N_D$ ($D = 0$) et $N = N_R$ ($D = D_c$). On obtient

$$N_R = N_D + \frac{D_c}{2\Delta\varepsilon_p} \left(\frac{2ES}{\sigma_M^2} \right)^s \quad (1.57)$$

où N_D est le seuil d'endommagement en fatigue (identifié graphiquement comme le nombre de cycles à partir duquel la contrainte maximale atteinte par cycle diminue),

$$N_R = N_D + \frac{D_c}{2\Delta\varepsilon_p} \left(\frac{2ES}{\tilde{\sigma}_M^2 \tilde{R}_v} \right)^s \quad (1.58)$$

pour le cas anisotrope.

6 Conclusion

Différentes lois d'endommagement incrémentales ont été décrites, qui, couplées à la viscoplasticité, permettent de décrire le comportement du matériau endommagé jusqu'à rupture, via un tenseur d'endommagement du second ordre \mathbf{D} (permettant quant à lui la définition d'une contrainte effective symétrique et indépendante des caractéristiques élastiques). Certains des modèles proposés reproduisent les effets de dissymétrie de l'évolution de l'endommagement en traction et en compression. Le modèle isotrope de Lemaitre et Chaboche est un cas particulier du modèle plus général étendu à l'anisotropie. Les différentes généralisations proposées à l'anisotropie induite conduisent à des états d'endommagement parfois fort différents, notamment en compression. Ce point sera illustré lors du chapitre d'applications sur structures (chapitre 4).

Capables grâce à leur caractère incrémental de modéliser la rupture sous chargements complexes divers (indépendant notamment de la notion de cycle), ces modèles ont été implémentés dans le code éléments finis Zebulon, identifiés sur le matériau des chambres de combustion, le superalliage à base cobalt Haynes 188, et appliqués à des cas de chargement complexes, anisothermes et/ou structuraux. Ces travaux font l'objet des chapitres suivants.

Schémas numériques pour l'endommagement anisotrope et la fatigue

Sommaire

1	Couplage plasticité/endommagement	38
1.1	Algorithme implicite sans refermeture des micro-défauts	38
1.2	Algorithme implicite avec refermeture des micro-défauts	44
2	Schéma d'intégration pour l'énergie stockée	47
2.1	Discrétisation de l'énergie stockée par les écrouissages	47
2.2	Discrétisation de l'expression en contrainte équivalente	48
3	Post-processeurs d'endommagement	49
3.1	Principe	49
3.2	Calcul du seuil d'endommagement en énergie stockée	50
3.3	Calcul de l'évolution de l'endommagement	51
4	Premières validations	52
5	Conclusion	54

1 Couplage plasticité/endommagement

Les différents modèles d'endommagement couplés à la viscoplasticité présentés dans le premier chapitre ont été implantés dans le code éléments finis Zebulon, sur la base des parties 1.1 et 1.2 pour les calculs couplés (Benallal & al 1991, Saanouni & al 1996, Simo & Hugues 1998, Besson & Desmorat 2004) et de la partie 2 pour les calculs découplés. On dispose ainsi d'une routine (*plastdamage06*), permettant d'utiliser le modèle isotrope ou le modèle prenant en compte l'anisotropie induite par la plasticité, sans refermeture des micro-défauts. Cette routine permet également d'utiliser au choix l'une des lois $\dot{\mathbf{D}} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P|$ ou $\dot{\mathbf{D}} = (\bar{Y}/S)^s \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \rangle$. Une variante de cette routine (*plastdamagebeta*) a été programmée, qui intègre l'énergie stockée en fonction de la contrainte équivalente, et non plus des écrouissages (cf. partie 2.2). La troisième routine (*plast_damage_closure*), traitant uniquement de l'endommagement anisotrope, permet de prendre en compte ou non la refermeture des micro-défauts, via le paramètre h et l'une des lois en $|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P|$ ou en $\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \rangle$. Une quatrième routine (*plastdamagesigma*) permet enfin d'utiliser la loi d'endommagement $\dot{\mathbf{D}} = (\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle^2 / 2ES)^s \dot{p}$. La présente partie décrit les algorithmes implicites utilisés dans ces différentes versions de l'implantation des modèles. Les algorithmes présentés sont valables pour des calculs anisothermes où les cartes des températures sont connues (déterminées par exemple par un calcul thermique préalable...).

1.1 Algorithme implicite sans refermeture des micro-défauts

Dans le cas sans refermeture des micro-défauts, la programmation des cas isotrope et anisotrope a été unifiée en utilisant les seules variables tensorielles \mathbf{D} et $\mathbf{H} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}$ pour les deux cas. Dans le cas isotrope, $\mathbf{D} = D\mathbf{1}$, et $\mathbf{H} = \mathbf{1}/\sqrt{1-D}$. L'utilisation de la contrainte effective pour le couplage de l'endommagement avec la plasticité permet l'utilisation de schémas numériques existants, développés pour l'élasto-viscoplasticité (Benallal & al, 1988). Les lois d'évolution des variables internes dérivent de la règle de normalité appliquée au potentiel $F = f + F_X + F_D$ où f est le critère de plasticité, F_X représente la nonlinéarité de l'écrouissage cinématique et F_D l'évolution de l'endommagement. On rappelle que

$$f = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{eq} - R - \sigma_y, \quad \text{et} \quad F_X = \frac{3\gamma}{4C} \mathbf{X} : \mathbf{X} \quad (2.1)$$

On définit les normales

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^X &= \frac{\partial F}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D - \mathbf{X}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D - \mathbf{X})_{eq}}, \\ \mathbf{n} &= \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{H} \mathbf{n}^X \mathbf{H})^D, \\ \mathbf{m} &= -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{n}^X - \gamma \boldsymbol{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Les lois d'évolution 1.5 de la déformation plastique et de l'écroutissage cinématique deviennent

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{r} \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\lambda} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} = \dot{r} \mathbf{m} \quad (2.3)$$

et la déformation plastique cumulée s'écrit

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n} : \mathbf{n} \dot{r}}, \quad (2.4)$$

ce qui implique $\dot{p} = \dot{r}/(1 - D)$ en endommagement isotrope. Avec les lois d'état

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\mathbf{E}} : [\boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\alpha}(T - T_{ref})\mathbf{1}] \quad \text{et} \quad \mathbf{X} = \frac{2}{3} C \boldsymbol{\alpha} \quad (2.5)$$

et du fait de la définition de \mathbf{H} , les normales \mathbf{n}^X , \mathbf{n} et \mathbf{m} peuvent être exprimées à une température donnée T en fonction uniquement de $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, $\boldsymbol{\alpha}$ et D :

$$\mathbf{n}^X = \mathbf{n}^X(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}, D), \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}). \quad (2.6)$$

Un système de 4 équations non-linéaires des 4 variables indépendantes $\{\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}, r, D\}$ doit alors être résolu :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \dot{r} \mathbf{n} &= 0, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{r} \mathbf{m} &= 0, \\ f - \sigma_v &= (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{eq} - R - \sigma_y - \sigma_v = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{D} - \left(\frac{\bar{Y}}{S}\right)^s |\mathbf{n}| \dot{r} = 0 \quad \text{loi 1 en } |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p| \\ \dot{D} - \left(\frac{\bar{Y}}{S}\right)^s \langle \mathbf{n} \rangle \dot{r} = 0 \quad \text{loi 2 en } \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle \\ \dot{D} - \left(\frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle^2}{2ES}\right)^s \dot{p} = 0 \quad \text{loi 3 en } \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \end{array} \right. \quad (2.7) \end{aligned}$$

où $|\mathbf{n}|$ signifie valeur absolue de \mathbf{n} en termes de valeurs principales, $\langle \mathbf{n} \rangle$ sa partie positive, $\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle$ la partie positive du tenseur contrainte effective, $R = R(r)$, $\sigma_v = K_N \dot{p}^{1/N} = K_N \left(\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n} : \mathbf{n} \dot{r}} \right)^{1/N}$ (loi de Norton), et $Y(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \bar{Y}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$.

1.1.1 Discrétisation par la θ -méthode

Le système d'équations non-linéaires précédent est discrétisé en temps en considérant les inconnues au temps intermédiaire $t_{n+\theta} = t_n + \theta \Delta t$, où θ est le paramètre numérique de la θ -méthode. Une valeur $0 \leq \theta \leq 1$ est utilisée pour les 3 équations différentielles. En plasticité, il est indispensable de s'assurer de la validité du critère de von Mises à chaque pas de temps t_k . La valeur $\theta = 1$ (schéma implicite d'Euler) est prise pour l'équation non-linéaire $f_{n+1} = 0$, forme numérique de la condition de consistance en plasticité. Toute valeur

$0 < \theta \leq 1$ peut être utilisée en viscoplasticité en étant toutefois attentif à la convergence de la méthode, en raffinant le pas de temps si nécessaire.

Lorsque la plasticité est couplée à l'endommagement, le résidu local est défini comme $\{R_{loc}\} = \{R_{\epsilon^e}, R_{\alpha}, R_r, R_D\}^T$, $R_D = R_{D_1}$ ou R_{D_2} ou R_{D_3} ,

$$\{R_{loc}\} = \begin{cases} R_{\epsilon^e} = \Delta \epsilon^e - \Delta \epsilon + \Delta r \mathbf{n}_{n+\theta} \\ R_{\alpha} = \Delta \alpha - \Delta r \mathbf{m}_{n+\theta} \\ R_r = f_{n+1} = (\tilde{\sigma}_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1})_{eq} - R(r_{n+1}) - \sigma_y \\ R_{D_1} = \Delta \mathbf{D} - \left(\frac{\bar{Y}(\epsilon_{n+\theta}^e)}{S} \right)^s |\mathbf{n}_{n+\theta}| \Delta r \\ R_{D_2} = \Delta \mathbf{D} - \left(\frac{\bar{Y}(\epsilon_{n+\theta}^e)}{S} \right)^s \langle \mathbf{n}_{n+\theta} \rangle \Delta r \\ R_{D_3} = \Delta \mathbf{D} - \left(\frac{\langle \tilde{\sigma}_{n+\theta} \rangle^2}{2ES} \right)^s \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta} \Delta r \end{cases} \quad (2.8)$$

où $\tilde{\sigma}_{n+\theta} = \underline{\mathbf{E}} : [\epsilon_{n+\theta}^e - \alpha_{n+\theta}(T_{n+\theta} - T_{ref})\mathbf{1}]$.

Lorsque l'on est en viscoplasticité couplée à l'endommagement, le résidu R_r est modifié en R_r^v ,

$$R_r^v = \Delta r - \frac{\Delta t}{\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}} \left\langle \frac{f_{n+\theta}}{K_N} \right\rangle^N \quad (2.9)$$

L'intégration des lois constitutives du modèle consiste à atteindre la convergence locale $\|\{R_{loc}\}\| < \text{erreur admise}$, pour une déformation donnée $\epsilon = \epsilon_{n+1}$ en corrigeant les variables ϵ^e , α , r et \mathbf{D} . Si l'on utilise un schéma itératif de Newton, on doit alors résoudre

$$\{R_{loc\ n+1}^{q'}\} + \left[\frac{\partial \{R_{loc}\}}{\partial \Delta \mathcal{W}} \right]_{n+1}^{q'} \cdot (\mathcal{W}_{n+1}^{q'+1} - \mathcal{W}_{n+1}^{q'}) = 0 \quad (2.10)$$

où l'expression de la matrice Jacobienne $[\partial \{R_{loc}\} / \partial \Delta \mathcal{W}]_{n+1}^{q'}$ (ou toute bonne approximation) des dérivées partielles de chaque équation discrétisée par rapport à l'incrément de chaque variable $\Delta \mathcal{W} = \{\Delta \epsilon^e, \Delta \alpha, \Delta r, \Delta \mathbf{D}\}$ est nécessaire pour des raisons de convergence.

A convergence, l'on pose $\Delta \epsilon^e = \Delta \epsilon^{e\ q'+1}$, $\Delta \alpha = \Delta \alpha^{q'+1}$, $\Delta r = \Delta r^{q'+1}$, $\Delta \mathbf{D} = \Delta \mathbf{D}^{q'+1}$ et

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1}^e &= \epsilon_n^e + \Delta \epsilon^e \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta \alpha \\ r_{n+1} &= r_n + \Delta r \\ \mathbf{D}_{n+1} &= \mathbf{D}_n + \Delta \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.11)$$

1.1.2 Réactualisation des variables thermodynamiques

Une fois que ϵ_{n+1}^e , α_{n+1} , r_{n+1} et \mathbf{D}_{n+1} sont connues, les variables thermodynamiques restantes sont actualisées de façon explicite (mais le schéma reste bel et bien implicite) :

- le tenseur des contraintes effectives : $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \underline{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$
- le tenseur des déformations plastiques : $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$
- les variables d'écrouissages : $R_{n+1} = R(r_{n+1}), \mathbf{X}_{n+1} = \frac{2}{3} \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$
- la déformation plastique cumulée : $p_{n+1} = p_n + \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}} \Delta r$ équivalent à $p_{n+1} = p_n + \Delta r / (1 - D_{n+\theta})$ pour le cas isotrope
- l'énergie stockée : $w_{s n+1} = w_{s n} + \mathbf{X}_{n+\frac{1}{2}} : \Delta \boldsymbol{\alpha} + AR(r_{n+\frac{1}{2}})(r_{n+1}^{1/m} - r_n^{1/m})$
- l'endommagement : $\mathbf{H}_{n+1} = (\mathbf{1} - \mathbf{D}_{n+1})^{-\frac{1}{2}}, Y_{n+1} = \bar{Y}_{n+1} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$
- le tenseur des contraintes : $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \underline{\mathbf{M}}_{n+1}^{-1} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{H n+1} \mathbf{1}$ avec

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^D = \mathbf{H}_{n+1}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \mathbf{H}_{n+1}^{-1} - \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}_{n+1}) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{3(1 - D_{H n+1})} (\mathbf{1} - \mathbf{D}_{n+1}) \\ \boldsymbol{\sigma}_{H n+1} = (1 - \text{tr} \mathbf{D}_{n+1}) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{H n+1} \end{cases} \quad (2.12)$$

pour les parties hydrostatiques et déviatoriques.

Le tenseur $\underline{\mathbf{M}}$ permet une écriture tensorielle $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\mathbf{M}} : \boldsymbol{\sigma}$ de la contrainte effective (1.1),

$$\underline{\mathbf{M}} = \mathbf{H} \underline{\otimes} \mathbf{H} - \frac{1}{3} [\mathbf{H}^2 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{H}^2] + \frac{1}{9} (\text{tr} \mathbf{H}^2) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{1}{3(1 - \text{tr} \mathbf{D})} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (2.13)$$

où $(\mathbf{H} \underline{\otimes} \mathbf{H})_{ijkl} = \frac{1}{2} (H_{ik} H_{jl} + H_{il} H_{jk})$ Cette relation peut être inversée analytiquement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \underline{\mathbf{M}}^{-1} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{H}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{H}^{-1})^{sym} - \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{3(1 - D_H)} (\mathbf{1} - \mathbf{D}) + (1 - \text{tr} \mathbf{D}) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_H \mathbf{1} \quad (2.14)$$

avec $\mathbf{H}^{-1} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{1/2}$ et

$$\underline{\mathbf{M}}^{-1} = \mathbf{H}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{H}^{-1} - \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{D}) \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{D})}{3(1 - D_H)} + \frac{1}{3} (1 - \text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (2.15)$$

1.1.3 Opérateur tangent consistant

L'un des avantages de l'intégration implicite est de pouvoir calculer directement l'opérateur tangent consistant $\underline{\mathbf{L}}^c$ ou sa représentation matricielle $[L^c]$ (Simo & Taylor 1985, Besson 1999, Lemaitre & Desmorat 2005)

On décompose le résidu $\{R_{loc}\}$ en deux parties,

$$\{R_{loc}\} = \{R_i\} - \{R_e\} \quad \{R_e\} = \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

où $\{R_i\}$ correspond à la contribution des variables internes et $\{R_e\}$ à la contribution du chargement appliqué. Lorsque la convergence est atteinte, on introduit une petite perturbation dans l'Eq. (2.16), $\delta\{R_{loc}\} = \delta\{R_i\} - \delta\{R_e\} = \{0\}$.

D'après la définition de la matrice Jacobienne,

$$\delta\{R_i\} = [Jac] \delta\Delta\mathcal{W} \quad (2.17)$$

on a ainsi :

$$\begin{bmatrix} \delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e \\ \delta\Delta\boldsymbol{\alpha} \\ \delta\Delta r \\ \delta\Delta\mathbf{D} \end{bmatrix} = [Jac]^{-1} \begin{bmatrix} \delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

ce qui montre que la première colonne de l'inverse de la Jacobienne est le vecteur

$$\begin{bmatrix} [Jac]_{\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^e}^{-1} \\ [Jac]_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}^e}^{-1} \\ [Jac]_{r, \boldsymbol{\varepsilon}^e}^{-1} \\ [Jac]_{\mathbf{D}, \boldsymbol{\varepsilon}^e}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \frac{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\Delta\boldsymbol{\alpha}} \\ \frac{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\Delta r} \\ \frac{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\Delta\mathbf{D}} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

dont la valeur au temps $t_{n+\theta}$ est calculée à partir du schéma itératif de Newton.

Ainsi,

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \underline{M}^{-1} : \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial\underline{M}^{-1}}{\partial\mathbf{D}} : \Delta\mathbf{D} \quad (2.20)$$

et finalement, avec $\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{E} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e = \underline{E} : [Jac]_{\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^e}^{-1} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\Delta\mathbf{D} = [Jac]_{\mathbf{D}, \boldsymbol{\varepsilon}^e}^{-1} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ l'expression de l'opérateur tangent consistant est :

$$\underline{L}^c = \underline{M}^{-1} : \underline{E} : [Jac]_{\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^e}^{-1} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial\underline{M}^{-1}}{\partial\mathbf{D}} : [Jac]_{\mathbf{D}, \boldsymbol{\varepsilon}^e}^{-1} \quad (2.21)$$

Pour le calcul des termes de la matrice Jacobienne, le lecteur pourra se référer au livre de Lemaitre & Desmorat (2005). Pour les modèles développés au cours de cette thèse, les termes de la Jacobienne qui diffèrent du modèle anisotrope initial (en $|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p|$) sont explicités dans la section suivante.

1.1.4 Calcul des termes de la Jacobienne

Comme dit précédemment, seuls les termes de la Jacobienne modifiés par l'utilisation de nouvelles lois d'endommagement seront explicités dans cette partie. L'utilisation de la loi d'endommagement anisotrope $\dot{\mathbf{D}} = (\bar{Y}/S)^s \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle$ ne modifie quasiment pas l'implantation numérique car seul $\mathbf{n}_{n+\theta}$ est changé dans le résidu \mathbf{R}_{D_2} ($\langle \mathbf{n}_{n+\theta} \rangle$) au lieu de $|\mathbf{n}_{n+\theta}|$, terme qui n'était pas dérivé dans le schéma initial). L'utilisation de la loi d'endommagement anisotrope $\dot{\mathbf{D}} = \left(\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle^2 / 2ES \right)^s \dot{p}$ modifie un peu plus le système d'équations non-linéaires à résoudre. A présent, il faut résoudre en quatrième équation tensorielle

$$\mathbf{R}_D = \mathbf{R}_{D_3} = \Delta\mathbf{D} - \left(\frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\theta} \rangle^2}{2ES} \right)^s \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}} \Delta r \quad (2.22)$$

où $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\theta}$ est en fait fonction de $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+\theta}^p$ et donc de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e$ via la loi d'élasticité. On rappelle que lorsque l'on dérive une fonction g par rapport à $\Delta\mathcal{W}$ on a :

$$\frac{\partial g}{\partial \Delta\mathcal{W}} = \frac{\partial g}{\partial \mathcal{W}} : \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \Delta\mathcal{W}} = \theta \frac{\partial g}{\partial \mathcal{W}} \quad (2.23)$$

où \mathcal{W} peut ici être $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, $\boldsymbol{\alpha}$, r ou \mathbf{D} . A nouveau, les expressions analytiques de $\partial \mathbf{n} / \partial \mathcal{W}$ sont calculées de façon détaillées dans Lemaitre & Desmorat 2005. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} &= -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{X}} = \underline{\underline{\mathbf{Q}}} : \frac{\partial \mathbf{n}^X}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{D}} &= \frac{\partial (\mathbf{H} \mathbf{n}^X \mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} : \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{D}} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{n}^X : (\mathbf{H}^2 \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{H}^2) \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} &= \underline{\underline{\mathbf{Q}}} : \frac{\partial \mathbf{n}^X}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{2}{3} \mathbf{C} \underline{\underline{\mathbf{Q}}} : \frac{\partial \mathbf{n}^X}{\partial \mathbf{X}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

où le tenseur du quatrième ordre $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ est défini de telle manière que $\mathbf{n} = (\mathbf{H} \mathbf{n}^X \mathbf{H})^D = \underline{\underline{\mathbf{Q}}} : \mathbf{n}^X$ et

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \mathbf{H} \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{H} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{H}^2 \quad (2.25)$$

Les dérivées $\partial \mathbf{n}^X / \partial \mathcal{W}$ sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}^X}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} &= -\frac{\partial \mathbf{n}^X}{\partial \mathbf{X}} = \frac{1}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{eq}} \left[\frac{3}{2} \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{n}^X \otimes \mathbf{n}^X \right] \\ \frac{\partial \mathbf{n}^X}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{n}^X}{\partial \mathbf{D}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Les termes de la matrice Jacobienne relatifs à \mathbf{R}_D dérivé par rapport à $\Delta\mathcal{W}$ peuvent alors être calculés :

$$\frac{\partial \mathbf{R}_D}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e} = -\frac{\theta \Delta r}{(2ES)^s} \left[\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\theta} \rangle^{2s} \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}} + \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\theta} \rangle^{2s} \right] \quad (2.27)$$

où la dérivée $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle$ n'existe pas dans le cas général. L'hypothèse

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle^{2s} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \left[\left(\frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle}{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} \rangle} \right)^{2s} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{eq}^{2s} \right] \simeq \left(\frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle}{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} \rangle} \right)^{2s} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{eq}^{2s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (2.28)$$

permet de proposer une expression approchée, numériquement efficace, de la Jacobienne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}_D}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e} &\simeq -\frac{\theta \Delta r}{(2ES)^s} \left[\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\theta} \rangle^{2s} \otimes \frac{3}{2} \frac{\mathbf{n}_{n+\theta}}{\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}}} : \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \Big|_{n+\theta} : \underline{\mathbf{E}} \right. \\
&\quad \left. + 2s \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}} \left(\frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\theta} \rangle}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{eq_{n+\theta}}} \right)^{2s} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{eq_{n+\theta}}^{2s-1} \otimes (\mathbf{n}^X : \underline{\mathbf{E}}) \right] \\
\frac{\partial \mathbf{R}_D}{\partial \Delta \boldsymbol{\alpha}} &= -\Delta r \left(\frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\theta} \rangle^2}{2ES} \right)^s \otimes \frac{\partial}{\partial \Delta \boldsymbol{\alpha}} \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}} \\
&= -\frac{3}{2} \theta \Delta r \left(\frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\theta} \rangle^2}{2ES} \right)^s \otimes \frac{\mathbf{n}_{n+\theta}}{\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}}} : \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \Big|_{n+\theta} \\
\frac{\partial \mathbf{R}_D}{\partial \Delta r} &= -\left(\frac{\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\theta} \rangle^2}{2ES} \right)^s \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}} \\
\frac{\partial \mathbf{R}_D}{\partial \Delta \mathbf{D}} &\simeq \underline{\mathbf{I}}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Afin de qualifier la convergence de cette programmation, une simulation de fluage à 120 MPa et 800°C a été réalisée, d'abord en utilisant le modèle anisotrope déjà implanté (en $|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p|$), puis en utilisant le modèle en $\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle$ et enfin le modèle en $\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle$. Un pas de temps a été imposé, mais l'on permet au code de le raffiner lorsque le nombre d'itérations nécessaires à la convergence est trop élevé. En termes de résultats, on compare le nombre total d'incréments nécessaire pour simuler l'essai complet jusqu'à rupture, pour les trois modèles. La figure 2.1 représente la courbe temps/déformations de l'essai de fluage simulé.

Pour un même pas de temps initial, les modèles anisotropes en valeur absolue et en partie positive du taux de déformation plastique convergent de manière identique. Ils nécessitent de raffiner davantage le pas de temps lorsque l'endommagement devient fortement non-linéaire, contrairement au modèle en partie positive de la contrainte effective, dont les raffinements sont moins nombreux (de 10% environ). La convergence du second modèle est donc atteinte plus rapidement. La même tendance est par ailleurs observée sur une seconde simulation menée de la même manière, cette fois-ci à 130MPa à la même température. L'implantation avec les termes de la Jacobienne (2.29) permet d'aboutir au terme du calcul en un nombre plus faible d'incréments. Remarquons au passage qu'en monotone uniaxial, via une identification adéquate, les réponses des modèles d'endommagement anisotrope se superposent.

1.2 Algorithme implicite avec refermeture des micro-défauts

Le modèle avec refermeture des micro-défauts ne permet plus, dans le cas anisotrope, d'utiliser la contrainte effective définie en élasticité par $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\mathbf{E}} : [\boldsymbol{\varepsilon}^e - \alpha(T - T_{ref})\mathbf{1}]$ pour le couplage avec la plasticité. En effet, on a dans le cas anisotrope

$$f = (\mathbf{s} - \mathbf{X})_{eq} - R - \sigma_y \quad \text{avec} \quad \mathbf{s} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \neq \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^D \tag{2.30}$$

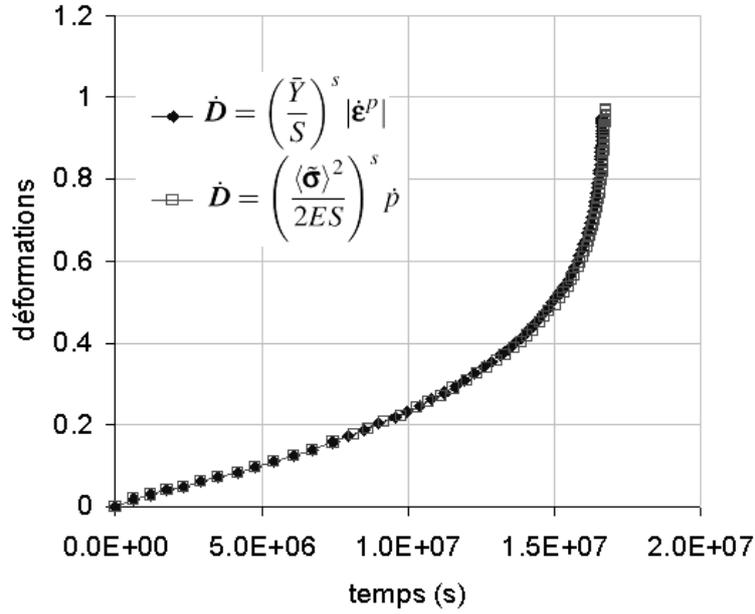


FIG. 2.1: Simulations d'essai de fluage à 120MPa à 800°C

afin de garantir notamment la convexité de la surface seuil. Les normales \mathbf{n}^X , \mathbf{n} et \mathbf{m} sont exprimées de la même manière que dans le cas sans refermeture de micro-défauts, car le critère d'élasticité reste inchangé. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^X &= \frac{3}{2} \frac{s^D - \mathbf{X}}{(s - \mathbf{X})_{eq}}, \\ \mathbf{n} &= \left[(1 - \mathbf{D})^{-1/2} \mathbf{n}^X (1 - \mathbf{D})^{-1/2} \right]^D, \\ \mathbf{m} &= \mathbf{n}^X - \gamma \boldsymbol{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

sont des fonctions de $\boldsymbol{\alpha}$, \mathbf{D} et $\boldsymbol{\sigma}$ seulement. Un système différentiel de 5 équations des 5 variables indépendantes $\{\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}, r, \mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}\}$ doit alors être résolu (comme précisé lors de la description des modèles, l'implantation numérique de la loi d'évolution de l'endommagement en $\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle^{2s}$, jugée peu utile, n'a pas été effectuée).

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \dot{\mathbf{m}} &= 0, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\mathbf{m}} &= 0, \\ f - \sigma_v = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})_{eq} - R - \sigma_y - \sigma_v &= 0, \\ \dot{\mathbf{D}} - \left(\frac{Y}{S} \right)^s |\mathbf{n}| \dot{r} = 0 \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{D}} - \left(\frac{Y}{S} \right)^s \langle \mathbf{n} \rangle \dot{r} &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}^e - \underline{\mathbf{E}}^{-1} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\alpha}(T - T_{ref}) \mathbf{1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

où l'on a pour la loi d'élasticité avec effet quasi-unilatéral de refermeture des micro-défauts :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^e - \frac{1+\nu}{E} [(\mathbf{H}^p \boldsymbol{\sigma}_+^D \mathbf{H}^p)^D + (\mathbf{H}^n \boldsymbol{\sigma}_-^D \mathbf{H}^n)^D] \\ - \frac{1-2\nu}{E} \left[\frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_H \rangle}{1 - \text{tr} \mathbf{D}} - \frac{\langle -\boldsymbol{\sigma}_H \rangle}{1 - h \text{tr} \mathbf{D}} \right] \mathbf{1} - \alpha(T - T_{ref}) \mathbf{1} = 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

avec $\mathbf{H}^p = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}$ et $\mathbf{H}^n = (\mathbf{1} - h\mathbf{D})^{-1/2}$, et où l'on a :

$$\begin{aligned} Y &= Y(\mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{Y} = \bar{Y}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}) \\ \bar{Y} &= \frac{1+\nu}{2E} \text{tr} [(\mathbf{H}^p \boldsymbol{\sigma}_+^D \mathbf{H}^p)^2 + h(\mathbf{H}^n \boldsymbol{\sigma}_-^D \mathbf{H}^n)^2] \\ &+ \frac{3(1-2\nu)}{2E} \left[\frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_H^2 \rangle}{(1 - \text{tr} \mathbf{D})^2} + h \frac{\langle -\boldsymbol{\sigma}_H^2 \rangle}{(1 - h \text{tr} \mathbf{D})^2} \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

1.2.1 Discrétisation par la θ -méthode

Le système d'équations non-linéaires précédentes est discrétisé en utilisant une θ -méthode (avec $\theta = 1$ dans le critère de plasticité). On en déduit le résidu local pour la plasticité couplée à l'endommagement

$$\{R_{loc}\} = \begin{cases} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\varepsilon}^e} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e - \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta r \mathbf{n}_{n+\theta} \\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}} = \Delta \boldsymbol{\alpha} - \Delta r \mathbf{m}_{n+\theta} \\ R_r = f_{n+1} = (\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1})_{eq} - R(r_{n+1}) - \sigma_y \\ \mathbf{R}_D = \Delta \mathbf{D} - \left(\frac{\bar{Y}_{n+\theta}}{S} \right)^s |\mathbf{n}_{n+\theta}| \Delta r \quad \text{ou} \quad \mathbf{R}_D = \Delta \mathbf{D} - \left(\frac{\bar{Y}_{n+\theta}}{S} \right)^s \langle \mathbf{n}_{n+\theta} \rangle \Delta r \\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+\theta}^e - \left(\frac{1+\nu}{E} [(\mathbf{H}_{n+\theta}^p \boldsymbol{\sigma}_{+n+\theta}^D \mathbf{H}_{n+\theta}^p)^D + (\mathbf{H}_{n+\theta}^n \boldsymbol{\sigma}_{-n+\theta}^D \mathbf{H}_{n+\theta}^n)^D] \right. \\ \left. - \frac{1-2\nu}{E} \left[\frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_{H_{n+\theta}} \rangle}{1 - \text{tr} \mathbf{D}_{n+\theta}} - \frac{\langle -\boldsymbol{\sigma}_{H_{n+\theta}} \rangle}{1 - h \text{tr} \mathbf{D}_{n+\theta}} \right] \mathbf{1} \right) - \alpha_{n+\theta}(T - T_{ref}) \mathbf{1} \end{cases} \quad (2.35)$$

La principale différence avec le cas sans refermeture des micro-défauts réside dans le fait que la relation $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{D})$ est à présent donnée implicitement et nécessite une inversion numérique de la loi d'élasticité. En viscoplasticité couplée à l'endommagement, on utilise le résidu dû à la loi de Norton R_r^v défini par l'équation (2.9) au lieu de R_r . Les termes de la Jacobienne $\Delta \mathcal{W} = \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e, \Delta \boldsymbol{\alpha}, \Delta r, \Delta \mathbf{D}, \Delta \boldsymbol{\sigma}\}$ sont nécessaires pour s'assurer de la convergence du schéma numérique. Ils sont donnés dans Lemaitre & Desmorat (2005). Pour la loi d'endommagement en partie positive de $\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle$, il suffit de remplacer $|\mathbf{n}_{n+\theta}|$ par $\langle \mathbf{n}_{n+\theta} \rangle$ dans toutes les expressions.

1.2.2 Actualisation des variables thermodynamiques

Une fois que $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$, $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, r_{n+1} et \mathbf{D}_{n+1} , $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ sont connus, il reste à actualiser explicitement :

- le tenseur des déformations plastiques : $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e$
- les variables d'écrouissage : $R_{n+1} = R(r_{n+1})$, $\mathbf{X}_{n+1} = \frac{2}{3}C_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$
- la déformation plastique cumulée : $p_{n+1} = p_n + \sqrt{\frac{2}{3}\mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}} \Delta r$
- l'énergie stockée : $w_{s\,n+1} = w_{s\,n} + \mathbf{X}_{n+\frac{1}{2}} : \Delta\boldsymbol{\alpha} + A_{n+\frac{1}{2}}R(r_{n+\frac{1}{2}})(r_{n+1}^{1/m} - r_n^{1/m})$ avec fonction de correction,
- l'endommagement : $\mathbf{H}_{n+1}^p = (\mathbf{1} - \mathbf{D}_{n+1})^{-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{H}_{n+1}^n = (\mathbf{1} - h\mathbf{D}_{n+1})^{-\frac{1}{2}}$,
and $Y_{n+1} = Y(\mathbf{D}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1})$ or $\bar{Y}_{n+1} = \bar{Y}(\mathbf{D}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1})$.

1.2.3 Opérateur tangent consistant

Les variables $\{\boldsymbol{\epsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}, r, \mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}\}$ sont utilisées pour intégrer localement les équations constitutives. L'opérateur tangent consistant est ainsi un bloc de la matrice Jacobienne à convergence du schéma de Newton local :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = [\text{Jac}]_{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}^e}^{-1} \Delta\boldsymbol{\epsilon} \implies \underline{\mathbf{L}}^c = [\text{Jac}]_{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}^e}^{-1} \quad (2.36)$$

2 Schéma d'intégration pour l'énergie stockée

Le seuil d'endommagement peut être gouverné par la déformation plastique cumulée du matériau ; il est alors dépendant du chargement imposé. Si l'on exprime le seuil d'endommagement en terme d'énergie stockée dans le matériau par les écrouissages, on retrouve d'abord naturellement le seuil d'endommagement en déformation plastique cumulée, mais on introduit également un paramètre dépendant uniquement du matériau et de la température : le seuil $w_D(T)$.

L'endommagement ne peut croître au sein d'un matériau que si le seuil en énergie stockée a été atteint. Une fois ce seuil atteint, l'endommagement augmente à chaque fois qu'il y a déformation plastique. Un test doit donc être mené dans l'algorithme de calcul afin de savoir si le seuil d'endommagement a été atteint, avant de procéder au calcul de l'évolution de l'endommagement. Notons que le calcul de l'énergie stockée (pour les écrouissages) est inclu dans le schéma numérique précédent. Nous détaillons ce point en partie 2.1. Le schéma numérique pour la formulation alternative à partir de la contrainte de von Mises et de la contrainte visqueuse est donné en partie 2.2.

2.1 Discrétisation de l'énergie stockée par les écrouissages

On rappelle l'expression de l'énergie stockée par les écrouissages au sein du matériau, avec fonction de correction, comme vu dans le chapitre 1 ($r = p$ tant que $D = 0$) :

$$w_s = \int_0^t R_z(p) \dot{p} dt + \frac{1}{3} C \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} \quad (2.37)$$

Le second terme de l'expression peut être calculé directement, à chaque pas de temps, connaissant C et α . Si l'on intègre le premier membre de l'expression de l'énergie stockée par parties, on obtient, comme proposé par Lemaitre & Desmorat :

$$\int_0^t Rz(p)\dot{p}dt = \int_0^p \frac{A}{m} R p^{\frac{1-m}{m}} dp = \left[AR p^{\frac{1}{m}} \right]_0^p - \int_0^p A \frac{dR}{dp} p^{\frac{1}{m}} dp \quad (2.38)$$

Le premier terme de cette expression est lui aussi connu à chaque pas de temps. L'intégrale du second membre

$$w_s^{partie} = \int_0^p A \frac{dR}{dp} p^{\frac{1}{m}} dp \quad (2.39)$$

n'est plus singulière en 0 et se calcule par une discrétisation classique de type méthode des trapèzes. La valeur de l'énergie stockée à chaque pas de temps vaut alors

$$w_s = \frac{1}{3} C \alpha : \alpha + AR p^{\frac{1}{m}} - w_s^{partie} \quad (2.40)$$

Cette méthode a été programmée initialement pour le calcul de l'énergie stockée. Elle s'est avérée très sensible au pas de temps.

Il est possible de proposer une intégration plus efficace, en remarquant que

$$\int_0^p \frac{A}{m} R p^{\frac{1-m}{m}} dp = \int_0^p AR d\left(p^{\frac{1}{m}}\right) \quad (2.41)$$

Autrement dit, en explicitant la discrétisation,

$$w_s^p = w_s^p|_n + AR \left(p_{n+1}^{1/m_{n+1}} - p_n^{1/m_n} \right) \quad (2.42)$$

$$w_s|_{n+1} = w_s^p|_{n+1} + \frac{1}{3} C \alpha_{n+1} : \alpha_{n+1} \quad (2.43)$$

Afin de comparer ces deux méthodes d'intégration, un calcul de fluage a été simulé sur un élément de volume, à 800°C et 110 MPa, avec chacune des deux méthodes. Le pas de temps a été imposé à 10^5 secondes (sur une durée d'essai de fluage simulé de plusieurs milliers d'heures), mais en cas de non-convergence, celui-ci est automatiquement divisé par 4. Ainsi, le meilleur schéma est celui qui nécessite le moins de divisions du pas de temps. Après calcul, il s'avère que la méthode avec intégration par partie nécessite 693 pas de temps, contre 688 pour la méthode sans intégration par partie, gain finalement assez faible. C'est néanmoins cette dernière méthode d'intégration qui a été retenue dans les schémas numériques précédents. Le gain est faible en temps de calcul sur cet exemple élémentaire, mais sur structure complexe, il devient très significatif.

2.2 Discrétisation de l'expression en contrainte équivalente

Si l'on envisage de programmer ce modèle en tant que post-processeur, il est nécessaire de s'affranchir au maximum des paramètres de comportement du matériau, et de ne

conserver en données d'entrée que le strict minimum, à savoir tenseur des contraintes et des déformations plastiques résultant d'un calcul élasto-viscoplastique préalable, sans endommagement. L'inconvénient de la formulation de l'énergie stockée précédente est sa dépendance aux paramètres d'érouissages du matériau. En effet, la formulation se complique dès lors que l'on désire introduire des érouissages supplémentaires. Une solution alternative est, comme décrit dans la section 2, d'utiliser une formulation de l'énergie stockée faisant intervenir contrainte équivalente et contrainte visqueuse. La formulation proposée dans la partie 2 du chapitre 1 (équation 1.30) est réécrite de la manière suivante :

$$w_s = \int_0^p \frac{A}{m} \langle \sigma_{eq} - \sigma_v - \sigma_y \rangle d \left(p^{\frac{1}{m}-1} \right) \quad (2.44)$$

Si l'on discrétise l'énergie stockée comme précédemment par une θ -méthode, l'énergie à l'instant $t_{n+\theta}$ s'écrit

$$w_s|_{n+1} = w_s|_n + \frac{A_{n+1} \langle \sigma_{eq} - f - \sigma_y \rangle_{n+1} + A_n \langle \sigma_{eq} - f - \sigma_y \rangle_n}{2} \left(p_{n+1}^{\frac{1}{m_{n+1}}} - p_n^{\frac{1}{m_n}} \right) \quad (2.45)$$

où $f = \sigma_v = K_N \dot{p}^{1/N}$ en viscoplasticité.

3 Post-processeurs d'endommagement

Afin d'effectuer des calculs à coûts modérés, un post-processeur d'endommagement a été programmé, sous deux versions (une version pour chaque forme de l'énergie stockée). Dans chaque version, la loi d'évolution de l'endommagement anisotrope est l'une des trois lois précédentes (en $|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p|$, en $\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle^{2s}$ ou en $\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rangle$). Cette partie présente le principe et l'algorithme de discrétisation du calcul de l'énergie stockée et de l'endommagement des deux versions de ce post-processeur.

3.1 Principe

Le couplage fort comportement élasto-viscoplastique / endommagement a été programmé dans Zebulon. L'appel de la loi matériau correspondante (plastdamage, plastdamagebeta, plastdamagesigma, ou plast_damage_closure) permet le calcul de structures soumises à des chargements complexes (fatigue, fluage, interaction fatigue-fluage, température variable, cycles de missions prédéfinies...), et ce jusqu'à amorçage de fissure. Cependant, la simulation de milliers de cycles devient très vite lourde en temps de calcul pour des structures. Le calcul de l'endommagement incrémental par post-traitement, méthode développée au LMT-Cachan dès les années 1980, permet alors :

- de ne calculer l'endommagement qu'en un nombre de points prédéfinis,
- de ne considérer que quelques cycles élasto-viscoplastiques et de calculer la durée de vie à partir de cette simulation plus économique.

A l'issu d'un calcul élastoviscoplastique quelconque (sans endommagement), le post-traitement utilise l'histoire des tenseurs des contraintes et des tenseurs des déformations plastiques ainsi que de la température, pour calculer la durée de vie correspondante à chaque point de Gauss. Dans un premier temps, il calcul le seuil d'endommagement en énergie stockée, à partir de la discrétisation présentée dans la section précédente. Ensuite, connaissant le temps seuil (noté t_D), il calcul la durée d'évolution de l'endommagement t_E nécessaire pour atteindre l'endommagement critique D_c . Cette durée, ajoutée au seuil d'endommagement, donne la durée de vie totale t_R à chaque point de Gauss, au sens de l'amorçage d'une fissure. La durée de vie d'une structure est alors le minimum des durées de vie aux points de Gauss de la structure (durée de vie au sens de l'amorçage d'une fissure macroscopique, sans phase de propagation).

3.2 Calcul du seuil d'endommagement en énergie stockée

Dans le cas d'un post-traitement de calculs élasto-viscoplastiques, seules les histoires des tenseurs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, des déformations plastiques $\boldsymbol{\epsilon}^p$ et de la température sont généralement stockées en mémoire. Lors d'un post-traitement, on doit donc recalculer la variable d'écrouissage cinématique $\boldsymbol{\alpha}$ à chaque pas de temps afin de déterminer l'énergie stockée selon la méthode décrite dans la section 2 (à partir des écrouissages) ou utiliser la formulation en contrainte équivalente précédente.

L'écrouissage cinématique est décrit par la loi d'Armstrong-Frederick réécrite pour le cas anisotherme en $\boldsymbol{\alpha}$ plutôt qu'en \mathbf{X} , $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \gamma \boldsymbol{\alpha} \dot{p}$ avec $\mathbf{X} = \frac{2}{3} C \boldsymbol{\alpha}$. La résolution numérique de ces équations nécessite leur discrétisation temporelle. Ainsi pour la loi d'écrouissage cinématique, on obtient avec un schéma d'Euler moyen (θ -méthode avec $\theta = 1/2$) correspondant à la méthode des trapèzes pour le calcul d'intégrales :

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\epsilon}_n^p - \boldsymbol{\alpha}_{n+\frac{1}{2}} \gamma_{n+\frac{1}{2}} (p_{n+1} - p_n) \quad (2.46)$$

ce qui revient à écrire

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\epsilon}_n^p - \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \boldsymbol{\alpha}_n}{2} \right) \left(\frac{\gamma_{n+1} + \gamma_n}{2} \right) (p_{n+1} - p_n) \quad (2.47)$$

et donc,

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\epsilon}_n^p + \boldsymbol{\alpha}_n \left[1 - \left(\frac{\gamma_{n+1} + \gamma_n}{4} \right) (p_{n+1} - p_n) \right]}{1 + \left(\frac{\gamma_{n+1} + \gamma_n}{4} \right) (p_{n+1} - p_n)} \quad (2.48)$$

où les indices n et $n+1$ permettent de prendre en compte la dépendance des paramètres à la température. Soit $J = \frac{1}{3} C \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha}$. On obtient donc à chaque itération $J_{n+1} = \frac{1}{3} C_{n+1} \boldsymbol{\alpha}_{n+1} : \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$. Il reste à évaluer la valeur de l'intégrale $I = \int_0^t R z(p) \dot{p} dt = \int_0^p A R d(p^{1/m})$ pour le calcul de w_S . En discrétisant, on obtient

$$I_{n+1} = I_n + \left(\frac{A_{n+1} R_{n+1} + A_n R_n}{2} \right) \left(p_{n+1}^{\frac{1}{m}} - p_n^{\frac{1}{m}} \right) \quad (2.49)$$

en ayant préalablement initialisé α_0 et I_0 à 0.

La valeur de w_S à l'instant $n+1$ est donc égale à $w_S|_{n+1} = I_{n+1} + J_{n+1}$. Le temps t_D correspond à l'apparition de l'endommagement, $w_S(t_D) = w_D$.

3.3 Calcul de l'évolution de l'endommagement

La deuxième étape du post-processeur consiste à évaluer la durée t_E correspondant à la durée d'évolution de l'endommagement de 0 à la valeur critique D_c . Que l'on soit dans le cas isotrope ou anisotrope, la méthode de résolution est la même. Nous nous contenterons donc ici de ne présenter que le cas de l'endommagement anisotrope gouverné par $|\dot{\epsilon}^p|$. Rappelons la loi d'évolution de l'endommagement dans ce cas :

$$\dot{\mathbf{D}} = \left(\frac{\bar{Y}}{S}\right)^s |\dot{\epsilon}^p| \tag{2.50}$$

Ainsi la valeur de \mathbf{D} à chaque instant t est égale à :

$$\mathbf{D} = \int_0^t \left(\frac{\bar{Y}}{S}\right)^s |\dot{\epsilon}^p| dt \tag{2.51}$$

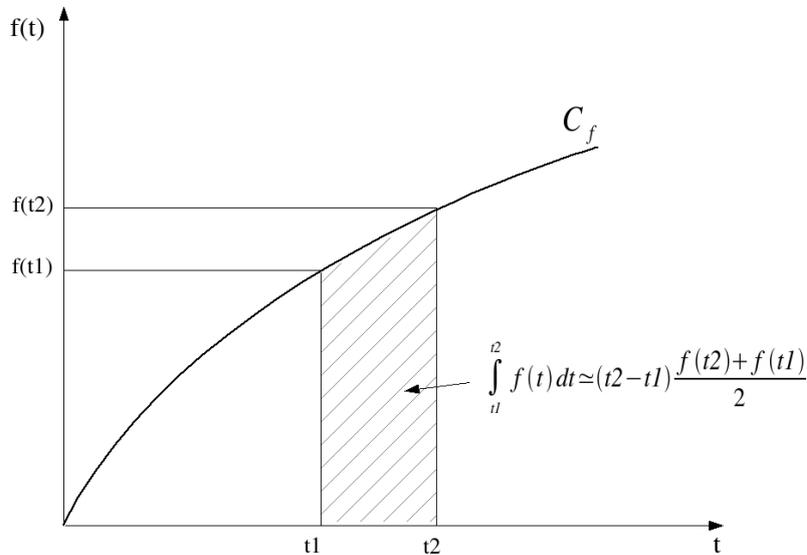


FIG. 2.2: Intégration par la méthode des trapèzes

Pour le calcul de cette intégrale, nous utilisons la méthode des trapèzes ($\theta = \frac{1}{2}$, figure 2.2). Cette méthode est la plus efficace compte tenu de la précision et du temps de calcul. L'emploi de la méthode de Simpson par exemple aurait conduit à l'évaluation de la contrainte entre chaque pas de temps, ce qui nécessite un temps de calcul plus important pour un gain de précision minime.

La discrétisation de l'intégrale est donc la suivante :

$$\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\bar{Y}_{n+1}}{S_{n+1}} \right)^{s_{n+1}} + \left(\frac{\bar{Y}_n}{S_n} \right)^{s_n} \right] |\epsilon_{n+1}^p - \epsilon_n^p| \quad (2.52)$$

en ayant préalablement initialisé \mathbf{D}_0 à $\mathbf{0}$. La discrétisation de \bar{Y}_n est :

$$\bar{Y}_n = \frac{\tilde{\sigma}_{eq_n}^2 \tilde{R}_{v_n}}{2E_n} \quad (2.53)$$

Cette résolution est effectuée tant que la plus grande valeur principale $\max D_{n+1}^I < D_c$. Lorsque ce n'est plus le cas, le calcul s'arrête et la valeur de t correspondante est assignée à t_E .

4 Premières validations

Il est connu que la qualité du résultat d'un calcul numérique dépend de la finesse du pas de temps choisi pour la discrétisation temporelle du problème. Dans cette partie, on tente de qualifier la convergence des deux versions du post-processeur d'endommagement, en étudiant l'influence du pas de temps sur la qualité du résultat obtenu, ainsi que le gain en temps de calcul permis par la méthode découplée de calcul de durée de vie par rapport à la méthode couplée visco-plasticité/endommagement. On choisit dans un premier temps de calculer la durée de vie obtenue par les deux versions du post-processeur après simulation de 10 cycles d'un essai de fatigue-relaxation (10 secondes de montée de $\epsilon = 0$ à ϵ_{max} , 300 secondes de relaxation à $\epsilon = \epsilon_{max}$, et 10 secondes de descente à $\epsilon = 0$). Les post-processeurs sont appliqués sur le dernier cycle, supposé stabilisé.

Le paramètre que l'on fait varier d'un calcul à l'autre est le pas de temps choisi, ou bien de façon équivalente le nombre de pas de temps par segment de cycle (ici un segment correspond soit à la montée en déformation, soit au temps de maintien ou bien à la descente). Pour une valeur de déformation maximale $\epsilon_{max} = 0.004$ ($\dot{\epsilon}_{max} = 4 \times 10^{-4} s^{-1}$), un nombre de pas de temps de 20 par segment correspond à un pas de temps minimal de $10/20 = 0.5$ s.

La durée de vie obtenue en nombre de cycles à rupture est normalisée par la durée de vie obtenue à 400 pas de temps par segment, afin de pouvoir comparer les deux post-processeurs, ceux-ci ne donnant pas exactement le même résultat. Les courbes de convergence sont données sur la figure 2.3. On observe que pour le post-processeur où l'énergie stockée est calculée à partir des paramètres d'écrouissage (*POST_ANISODAMAGE_SEH*), la convergence est atteinte rapidement : à partir de 100 pas de temps par segment ($\delta t_{min} = 10/100 = 0.1$ s) l'augmentation du nombre de pas de temps n'a plus que très peu d'effet sur la durée de vie obtenue. Par contre, pour le post-processeur où l'énergie stockée est calculée en fonction de la contrainte visqueuse et de la contrainte équivalent (*POST_ANISODAMAGE_SEE*), la convergence est plus difficile à atteindre. On privilégiera par la suite l'utilisation de la version du post-processeur (*POST_ANISODAMAGE_SEH*)

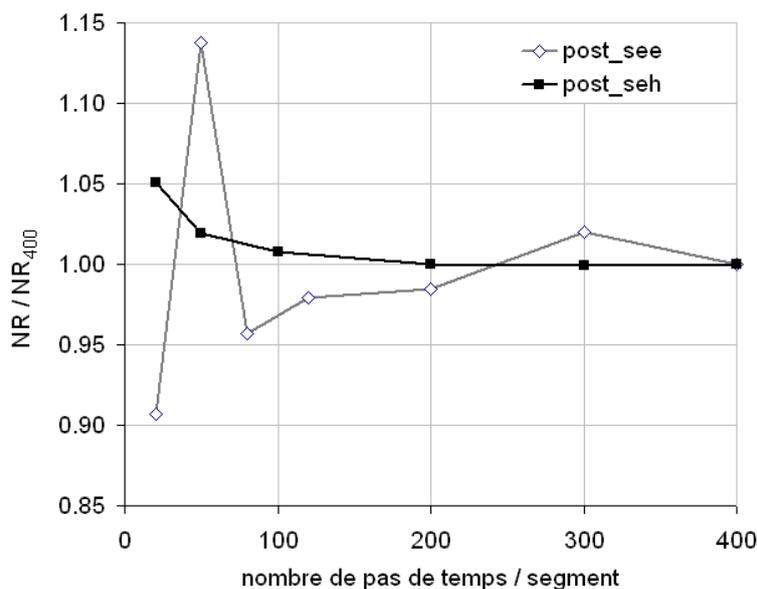


FIG. 2.3: Convergence des deux versions de post-processeurs, essai de fatigue à temps de maintien (10-300-10)

(SEH pour *stored energy by hardenings*), car nous resterons dans le cadre d'une description simple des écrouissages.

A présent, si l'on compare le temps de calcul des deux versions de post-processeurs aux versions correspondantes couplées élasto-visco-plasticité/endommagement, le gain est (comme attendu) très significatif. La simulation décrite ci-dessus a été réitérée dans le cas couplé, lorsque l'énergie stockée est exprimée en fonction des écrouissages (*SEH*), et en fonction de la contrainte équivalente (*SEE*). Le cycle est discrétisé en 20 pas de temps par segment ($\delta t_{min} = 0.5$ s). En terme de temps de calcul, les résultats sont résumés dans le tableau 2.1.

	couplé		découplé	
	$N_R/N_{Rcouple}$	temps CPU	$N_R/N_{Rcouple}$	temps CPU
méthode SEH	1	1640	0.97	8.35
méthode SEE	1	1095	0.90	10.35

TAB. 2.1: Temps de calcul (en unités CPU) pour les différentes méthodes de calcul de durée de vie (essai 10_300_10).

La méthode *SEH* illustre clairement le gain en temps de calcul entre la méthode couplée et la méthode découplée pour une qualité de résultat quasiment identique (indispensable pour la validation de la méthodologie, voir partie 4.1 du chapitre suivant), puisque ce gain atteint un rapport 200 en faveur du calcul par post-traitement. La méthode *SEE* est aussi avantageuse en terme de temps de calcul, mais la qualité du résultat n'est pas aussi bien reproduite pour ce pas de temps δt choisi.

5 Conclusion

La programmation des lois d'endommagement couplées à la visco-plasticité via un schéma implicite par θ -méthode donne d'excellents résultats dans le cas de modélisations de chargements monotones, de type fluage, traction, sur structure, afin de modéliser l'endommagement jusqu'à rupture des structures sollicitées.

Lorsque le temps de calcul devient trop long, en fatigue notamment, il convient d'utiliser un post-processeur d'endommagement. Les deux versions implantées dans Zébulon utilisent une formulation différente de l'énergie stockée, et donnent des résultats très fidèles aux calculs couplés sur un point de Gauss. Ce résultat, classique pour la fatigue des métaux, est dû notamment à la relativement faible valeur de l'endommagement critique ($D_c \leq 0.5$). Le gain en temps de calcul est alors considérable pour de tels types de chargements.

Une fois ces schémas implantés, il est nécessaire à présent de déterminer les paramètres de comportement et d'endommagement du matériau (ici le Haynes 188) afin de pouvoir comparer résultats numériques et résultats réels, obtenus lors de campagnes d'essais de validation.

La méthodologie utilisée se veut prédictive en terme de durée de vie, il faudra donc valider l'identification sur des cas de chargement à rupture réels simulés numériquement.

Identification et validation isotherme des modèles

Sommaire

1	Le superalliage base cobalt Haynes 188	56
1.1	Présentation du matériau	56
1.2	Applications	57
1.3	Fabrication	57
2	Identification des paramètres de visco-plasticité	58
2.1	Base expérimentale	58
2.2	Viscosité	59
2.3	Ecrouissages	61
2.4	Optimisation numérique	62
2.5	Paramètres et température	63
3	Identification des paramètres d'endommagement	64
3.1	Base expérimentale	66
3.2	Durée de vie en fluage	69
3.3	Durée de vie en fatigue	71
3.4	Paramètres et température	71
3.5	Identification des différentes lois d'endommagement	75
4	Validation sous condition isotherme	76
4.1	Fatigue à temps de maintien	76
4.2	Sensibilité du modèle	77

1 Le superalliage base cobalt Haynes 188

1.1 Présentation du matériau

Le Haynes 188 est un superalliage à base cobalt, qui possède une combinaison unique de propriétés. A température ambiante, sa structure est hexagonale compacte, et devient cubique à face centrée à partir de 420°C. Le Haynes 188 combine excellente résistance mécanique à très haute température, stabilité thermique et bonne résistance à l'oxydation, jusqu'à plus de 1150°C en exposition prolongée. Sa température de fusion se situe autour de 1495°C. Il possède également une excellente ductilité. Il est particulièrement employé lors d'applications de longue durée, à hautes températures (>650°C). Sa composition est donnée dans le tableau 3.1.

Eléments	min	max
Carbone C	0.05	0.15
Manganèse Mn	–	1.25
Silicium Si	0.20	0.50
Phosphore P	–	0.02
Soufre S	–	0.015
Chrome Cr	21.0	23.0
Nickel Ni	20.0	24.0
Tungstène W	13.0	15.0
Lanthane La	0.03	0.12
Bore B	–	0.015
Fer Fe	–	3.0
Cobalt Co	balance	

TAB. 3.1: Composition du Haynes 188 en % massique

Le lot de matière dont dispose Snecma, dans lequel ont été usinées les éprouvettes servant à l'identification du modèle, suit précisément la composition décrite dans le tableau 3.2.

B	C	Co	Cr	Fe	Mn	Ni	P	S	Si	W	La
0.003	0.1	Bal	22.04	1.89	0.79	22.68	< 0.005	< 0.002	0.33	14.16	0.088

TAB. 3.2: Composition de la coulée Haynes 188 Snecma en % massique

Les éléments d'addition ont pour objet d'améliorer la tenue à la corrosion (Cr), d'étendre la structure CFC (Ni, Fe, Mn), de former des carbures (métaux réfractaires dont le tungstène W). La résistance mécanique de l'alliage résulte principalement d'un durcissement de solution solide dû à la présence de 14% massiques de tungstène, et de la présence de carbure de manganèse bien réparti dont la stabilité empêche un grossissement excessif des grains au cours du traitement thermique ou d'un service prolongé à haute température. Le maintien

dans ces conditions d'une bonne ductilité et d'une résilience élevée est obtenu en retardant la précipitation d'une phase de laves fragilisantes composée principalement de carbure de tungstène. Le Haynes 188 est obtenu par refusion sous vide ou sous laitier, au four à électrode consommable. Ce matériau polycristallin possède des grains de 30 à 70 μm (figure 3.1).



FIG. 3.1: Microstructure du Haynes 188 à l'état laminé

1.2 Applications

Grâce à ses excellentes propriétés à haute température, le Haynes 188 est employé lorsque les conditions de contraintes et de températures sont sévères. Ces conditions sont rencontrées fréquemment dans les milieux aéronautique, spatial, chimique et nucléaire. Présent notamment dans les composants de turbines et de propulseurs, le Haynes 188 est par exemple employé dans les chambres de combustions, les stabilisateurs de flamme, ou les éléments de post-combustion.

1.3 Fabrication

Le Haynes 188 a de bonnes propriétés de fabrication et de soudage. Il peut être forgé, ou travaillé de toute autre manière à chaud, à condition que la pièce puisse être maintenue à 1100 °C uniformément assez longtemps. Grâce à sa bonne ductilité, il peut également être travaillé à froid. Le Haynes 188 s'écrouit rapidement, c'est pourquoi des recuits intermédiaires peuvent être nécessaires pour la réalisation de pièces complexes. Dans tous

les cas, les pièces réalisées doivent être recuites et refroidies rapidement pour rétablir la meilleure balance des propriétés mécaniques. Il peut être soudé par méthodes automatiques ou manuelles, par exemple par la méthode TIG (arc de tungstène), à l'arc (MIG), par faisceau d'électrons ou par résistance. Les barres de 14mm d'épaisseur dans lesquelles les éprouvettes d'identification ont été usinées ont subi un recuit de 30 minutes à 1205°C, suivi d'une trempe. Les éprouvettes ont été réalisées selon le plan technique fourni en annexe B.

2 Identification des paramètres de visco-plasticité

2.1 Base expérimentale

Les sollicitations subies par la chambre de combustion sont essentiellement de type fatigue oligocyclique, et fluage. L'identification du modèle élasto-visco-plastique (ou élasto-visco-plastique) est réalisée essentiellement à partir d'essais de ce type : essais de traction cyclique à vitesse et amplitude de déformations variées, relaxations, essais de fluage. On pourrait en plus utiliser des essais de traction monotone, mais le modèle n'étant pas destiné à reproduire les phénomènes à déformations élevées (supérieure à 20%), cela n'a pas été fait et aurait vraisemblablement nécessité une modélisation plus complexe des écrouissages que celle retenue ci-après.

Des essais réalisés à Snecma ont servi à l'identification du modèle de comportement élasto-visco-plastique à double viscosité. Ils sont présentés dans le tableau 3.3. Les essais de fatigue incrémentale comprennent 64 cycles à vitesse de déformation de $10^{-3}s^{-1}$, 32 cycles à $10^{-4}s^{-1}$ et 8 cycles à $10^{-5}s^{-1}$, puis une relaxation est réalisée. Le rapport de chargement R_ϵ est défini comme le rapport $\epsilon_{min}/\epsilon_{max}$. Ces essais sont également utilisés afin d'identifier le modèle élasto-visco-plastique simple, à une seule viscosité, dont on rappelle ici les paramètres "matériau" :

- E , ν sont les paramètres d'élasticité, et sont considérés comme connus,
- σ_y est la limite d'élasticité,
- R_∞ est la valeur de l'écrouissage isotrope supposé saturé,
- C et γ sont les paramètres de la loi d'écrouissage cinématique non-linéaire (et $X_\infty = C/\gamma$),
- K_N et N sont les paramètres de la loi de viscosité (loi de Norton).

L'écrouissage isotrope étant considéré comme saturé, on identifiera directement la somme $R_\infty + \sigma_y$, notée R_0 .

La procédure décrite dans cette section suppose que les écrouissages soient rapidement saturés (pour l'écrouissage isotrope, c'est le cas puisque $R = R_\infty$, et pour l'écrouissage cinématique, on a $\gamma > 100$). A haute température, les paramètres de viscosité sont identifiés en premier lieu, puis les paramètres d'écrouissages. Les valeurs initiales de ces paramètres sont alors optimisées numériquement. A température ambiante, l'identification se fait sur les courbes cycliques uniquement. Des valeurs initiales des paramètres de viscosité notamment sont alors obtenues par extrapolation des paramètres obtenus aux températures supérieures. La totalité des paramètres est optimisée sur les essais cycliques dont on dispose.

Température	Référence	fatigue incrémentale $R_e = -1$	Relaxation	Fluage	Remarques
20°C	HA107 HA112	10^{-3} , 10^{-4} et $10^{-5} s^{-1}$, de 0.2% à 0.9%	0.9% 0.8%		<i>inexploitable</i>
600°C	HA108 HA113 HA94	10^{-3} , 10^{-4} et $10^{-5} s^{-1}$, de 0.2% à 0.7%	0.6%	400 MPa	<i>rupture avant relaxation</i>
700°C	HA109 HA114 HA95 HA95	10^{-3} , 10^{-4} et $10^{-5} s^{-1}$, de 0.2% à 0.6%	0.6% 0.6%	250 MPa 270 MPa 300 MPa	<i>essai partiel</i>
800°C	HA110 HA115 HA99 HA100 HA98	10^{-3} , 10^{-4} et $10^{-5} s^{-1}$, de 0.1% à 0.5%	0.5% 0.5%	120 MPa 130 MPa 140 MPa	
900°C	HA111 HA116 HA102 HA103 HA101	10^{-3} , 10^{-4} et $10^{-5} s^{-1}$, de 0.1% à 0.4%	0.4% 0.4%	60 MPa 65 MPa 70 MPa	

TAB. 3.3: Essais disponibles pour l'identification du modèle élasto-visco-plastique

2.2 Viscosité

La première étape consiste à déduire des courbes de relaxation des contraintes, réalisées lorsque les écrouissages sont saturés (après une centaine de cycles lors des essais de fatigue incrémentale), la valeur de $X_\infty + R_\infty + \sigma_y$. Celle-ci correspond à l'asymptote des courbes de relaxation. La figure 3.2 reprend les différents essais de relaxation dont on dispose à chaque température, et on en déduit une estimation pour chaque température de la valeur de $X_\infty + R_\infty + \sigma_y$.

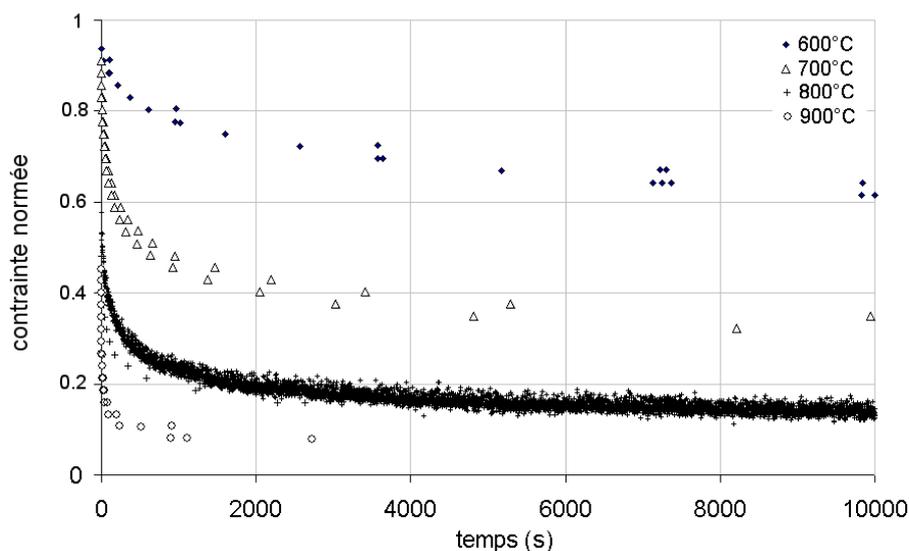


FIG. 3.2: Courbes de relaxation du Haynes 188

Ensuite, on trace à chaque température la courbe de viscosité (contrainte visqueuse σ_v fonction de la vitesse de déformation plastique \dot{p}) pour l'ensemble des essais dont on dispose (fluage, relaxation, mais aussi traction si on en dispose), dans un repère logarithmique. La courbe correspondant au Haynes 188 à la température de 800°C est donnée figure 3.3. La loi de viscosité,

$$\dot{p} = \left(\frac{\sigma_v}{K_N} \right)^N \iff \sigma_v = K_N \dot{p}^{1/N} \quad (3.1)$$

équivalent à

$$\log(\sigma_v) = \frac{1}{N} \log(\dot{p}) + \log(K_N) \quad (3.2)$$

Dans un repère logarithmique, les différents couples (\dot{p}, σ_v) pour les différents essais

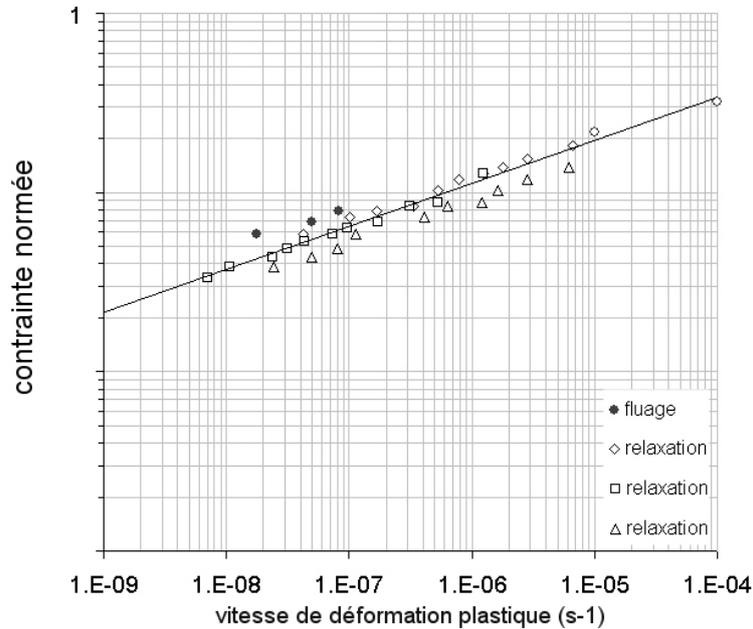


FIG. 3.3: Courbe de viscosité du Haynes 188 à 800°C

doivent s'aligner sur une droite dont la pente est $\frac{1}{N}$. L'ordonnée à l'origine est quant à elle donnée par $\log(K_N)$.

A chaque essai de fluage correspond un couple (\dot{p}, σ_v) , donné par le fluage secondaire : la vitesse de déformation plastique \dot{p} est donnée par la pente du fluage secondaire, et $\sigma_v = \sigma - (X_\infty + R_\infty + \sigma_y)$. A chaque essai de relaxation correspond une infinité de couples (\dot{p}, σ_v) . En effet, la pente des tangentes en chaque point de la courbe de relaxation nous donne $\dot{\sigma}$ (< 0) pour une contrainte σ donnée, et la relation $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p = 0$ (condition de déformation constante imposée) permet d'en déduire $\dot{p} = -\frac{\dot{\sigma}}{E}$.

Le tracé des courbes de viscosité à chaque température permet ainsi d'obtenir un jeu initial de paramètres de viscosité K_N et N .

2.3 Ecrouissages

2.3.1 Ecrouissage isotrope

L'écrouissage isotrope $R = R_\infty(1 - e^{-bp})$ ou ici plus simplement $R = R_\infty$ représente l'augmentation de la limite d'élasticité dans toutes les directions. Un écrouissage isotrope positif se traduit, lors d'un chargement cyclique piloté en déformation, par une augmentation de la contrainte maximale atteinte. Ainsi, la valeur à saturation de l'écrouissage isotrope R_∞ peut être estimée à partir d'un essai cyclique piloté en déformations, à rapport de charge $R_\varepsilon = -1$, comme la différence entre la contrainte maximale atteinte au cycle stabilisé et la contrainte maximale atteinte au premier cycle. Sur la figure 3.4, le premier cycle, le cycle 100 et le cycle 500 d'un essai de fatigue piloté en déformation ($T = 800^\circ\text{C}$, $\varepsilon_{\max} = 0.4\%$ et $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}$) sont représentés. Les cycles 100 et 500 sont confondus, ce qui permet de considérer le cycle 100 comme cycle stabilisé. La différence entre la contrainte maximale atteinte au cycle 100 et celle atteinte au premier cycle donne une estimation de la valeur à saturation de l'écrouissage isotrope R_∞ .

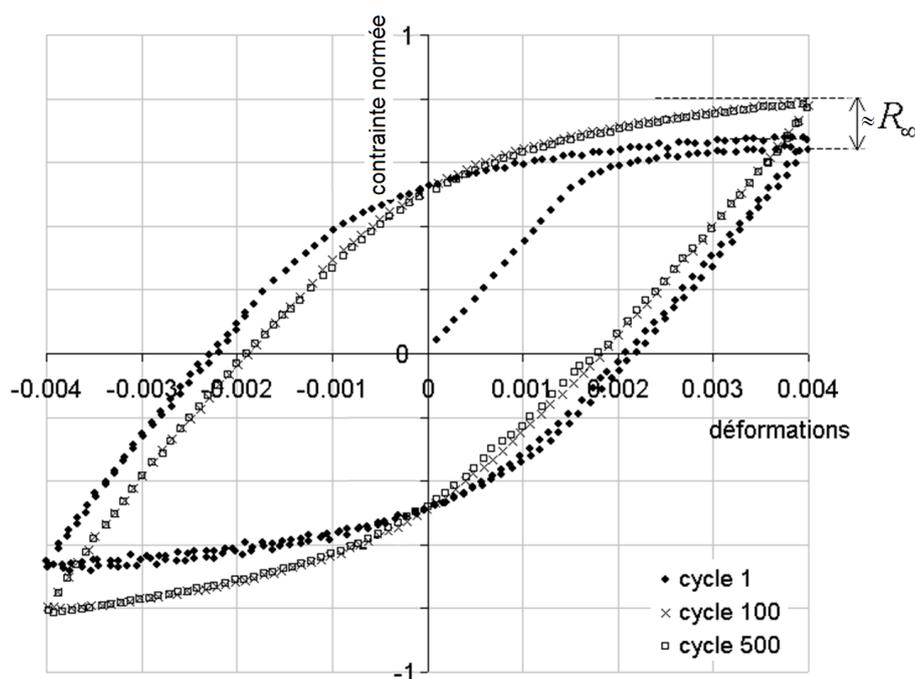


FIG. 3.4: Identification du paramètre R_∞ sur un essai de traction cyclique

2.3.2 Ecrouissage cinématique

L'écrouissage cinématique représente la translation du domaine linéaire élastique dans l'espace des contraintes. Concrètement, il correspond en uniaxial au décalage par rapport à la contrainte zéro du centre du domaine élastique lors d'un essai de traction cyclique

par exemple. Sur la figure 3.5, le cycle stabilisé de l'essai de traction cyclique précédent est représenté. La soustraction de la contrainte visqueuse à la contrainte maximale permet d'obtenir la zone élastique, dont la distance entre le centre et l'axe des abscisses correspond à la valeur X_∞ . Par exemple, ici, la contrainte visqueuse est estimée à partir des paramètres initiaux de viscosité : $\sigma_v \simeq K_N \dot{\epsilon}^{1/N}$. Toujours à partir du jeu initial estimé de paramètres, on déduit la valeur de X_∞ . On vérifie par ailleurs que $k \simeq R_0 + X_\infty$.

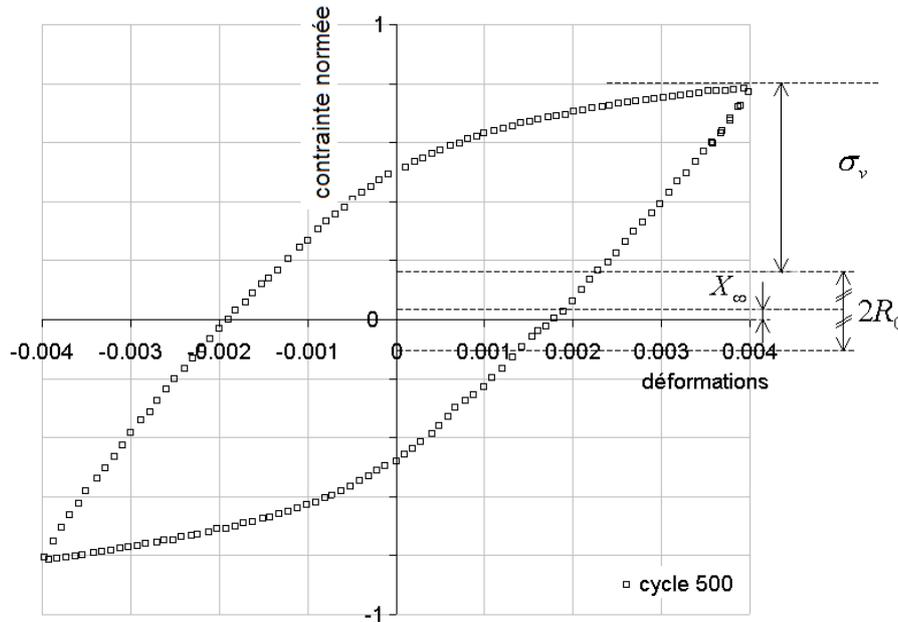


FIG. 3.5: Identification du paramètre X_∞ sur un essai de traction cyclique ($T = 800^\circ\text{C}$)

L'hypothèse utilisée pour identifier la viscosité est la saturation rapide des écrouissages. Une valeur initiale élevée est choisie pour γ ($\gamma \simeq 1000$). Le jeu de paramètres initial obtenu est alors optimisé numériquement.

2.4 Optimisation numérique

L'optimisation numérique permet, à partir d'un jeu initial de paramètres d'un modèle, de déterminer le jeu optimal permettant de modéliser un nombre d'essais choisis par l'utilisateur. Le code de calcul par éléments finis Zébulon, développé conjointement par le Centre des Matériaux de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris et l'Office National d'Etudes et de Recherche Aéronautique (ONERA), présente un optimiseur automatique basé sur différents algorithmes d'optimisation. Les algorithmes SQP et Levenberg-Marquardt ont été utilisés. Les contraintes (inégalités qui délimitent l'espace des solutions) sont exprimées explicitement. Le principe des deux algorithmes d'optimisation cités ci-dessus sont présentés en annexe C.

2.4.1 Essais choisis et mise en oeuvre de l'optimisation

A chaque température, l'on dispose d'essais de traction cyclique à différentes vitesses et amplitudes de déformations, de relaxations et de fluage sur le Haynes 188. Comme les paramètres de Norton ont été identifiés sur les courbes de viscosité qui prennent en compte à la fois les essais de fluage et les essais de relaxation, et que les conditions de ruine des pièces en service sont plus proches du fluage, nous n'avons pas optimisé ces paramètres sur les essais de relaxation. Nous avons privilégié donc les essais de fluage (plus particulièrement le fluage secondaire), beaucoup plus sensibles aux variations des paramètres K_N et N , et les boucles d'hystérésis des essais de traction cyclique à amplitudes et vitesses de déformation variables. A chaque température, l'optimisation sera réalisée sur quelques boucles à $10^{-5}s^{-1}$, $10^{-4}s^{-1}$ et $10^{-3}s^{-1}$, à plusieurs niveaux de déformation en traction cyclique, et sur les courbes de fluage jusqu'à 0.1% (seuil d'endommagement observé expérimentalement).

Plutôt que de comparer les résultats numériques lors de l'optimisation aux résultats expérimentaux point par point, on choisit de comparer les intégrales de la contrainte σ par rapport au temps pour les essais de fatigue, et du rapport $E\varepsilon$ par rapport au temps pour les essais de fluage (E étant le module d'Young) afin de rester cohérent en terme de poids relatif des essais ($E\varepsilon$ a le même poids qu'une contrainte). La minimisation numérique est donc faite sur la différence entre les intégrales expérimentales et numériques. Cela permet également de s'affranchir du nombre de points disponibles dans les fichiers de résultats expérimentaux.

A chaque itération, le code par éléments finis Zébulon simule sur un point de Gauss tous les essais choisis, calcule l'intégrale de la contrainte par rapport au temps pour les essais cycliques et de $E\varepsilon$ par rapport au temps pour les essais de fluage, calcule la fonction objectif correspondant à l'algorithme d'optimisation utilisé et réactualise les paramètres d'optimisation. L'opération est réitérée jusqu'à avoir convergence, ou jusqu'à ce que le nombre maximal d'itérations fixé par l'utilisateur est atteint. Les paramètres optimum sont alors disponibles dans un fichier.

Les résultats de l'optimisation sont présentés pour chaque température d'identification. La figure 3.6 présente le fluage secondaire modélisé par le modèle, en comparaison avec les courbes de fluages expérimentales correspondantes, pour $\varepsilon < 0,15$. La figure 3.7 présente la comparaison entre le modèle identifié et quelques essais cycliques disponibles, sur lesquels le modèle a été identifié. L'accord avec l'expérience est plutôt bon malgré le faible nombre de paramètres du modèle (3 paramètres d'écrouissage et 2 paramètres de viscosité). Les courbes de viscosité présentées figure 3.8 montrent que le fluage a été privilégié par rapport aux courbes de relaxation, lorsque peu d'essais sont disponibles (c'est le cas à 600 et 700°C). Notons aussi que malgré un niveau de contrainte élevé, le fluage à 600°C est faible comparativement aux températures supérieures, comme attendu car le rapport température absolue sur température de fusion du matériau est alors $T/T_f = 873/1770 = 0.49 < 0.5$.

2.5 Paramètres et température

Aux températures de 20°C, 600°C, 700°C, 800°C et 900°C, les paramètres de viscoplasticité ont été optimisés numériquement, à partir d'un jeu initial obtenu graphiquement sur

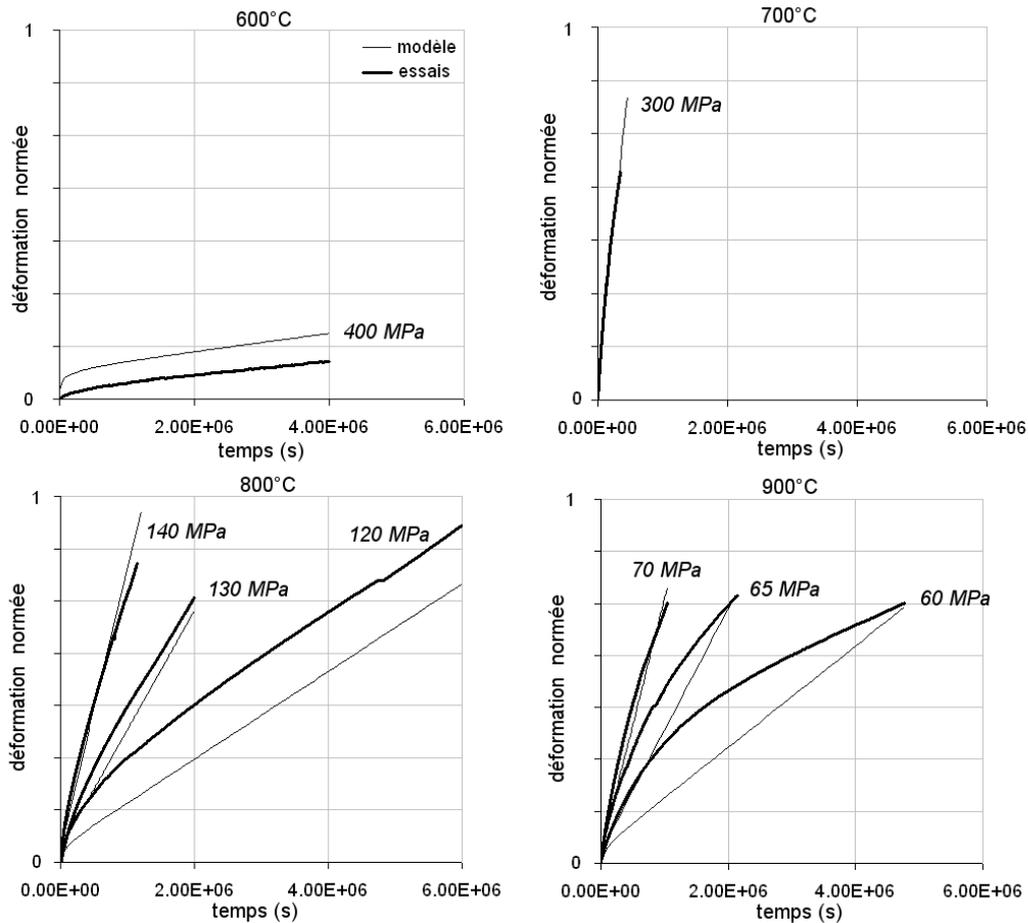


FIG. 3.6: Courbes de fluage primaire et secondaire : confrontation entre modèle et expérience

les courbes de viscosité et de traction cyclique.

Si à présent l'on trace chaque paramètre en fonction de la température, ou plutôt de la température normée par la température de fusion du matériau (températures données en Kelvin), on peut en déduire des expressions des paramètres fonction de T/T_f de forme exponentielle. Les fonctions correspondantes sont tracées sur la figure 3.9 et elles sont explicitées dans le tableau 3.4. Elles peuvent s'avérer utiles si l'on désire extrapoler la valeur des paramètres à des températures au-delà du domaine d'identification, si aucun changement microstructural ne s'opère dans le matériau à ces températures.

3 Identification des paramètres d'endommagement

Le modèle d'endommagement incrémental permet d'exprimer analytiquement le temps à rupture d'un matériau sous chargement cyclique, ou de fluage, en fonction de la contrainte appliquée et de l'amplitude de déformation plastique par cycle. L'identification des pa-

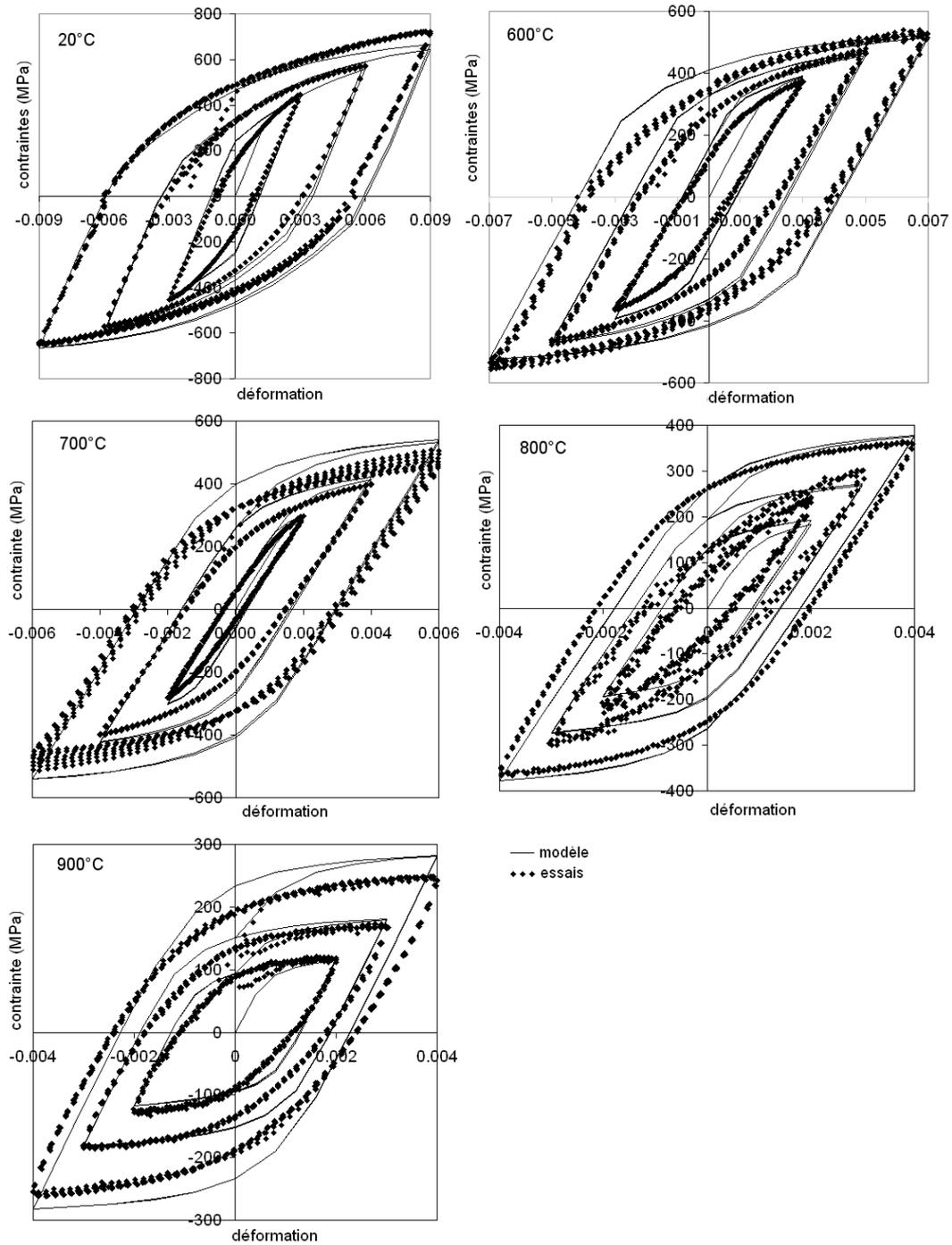


FIG. 3.7: Courbes de traction cyclique : confrontation entre modèle et expérience

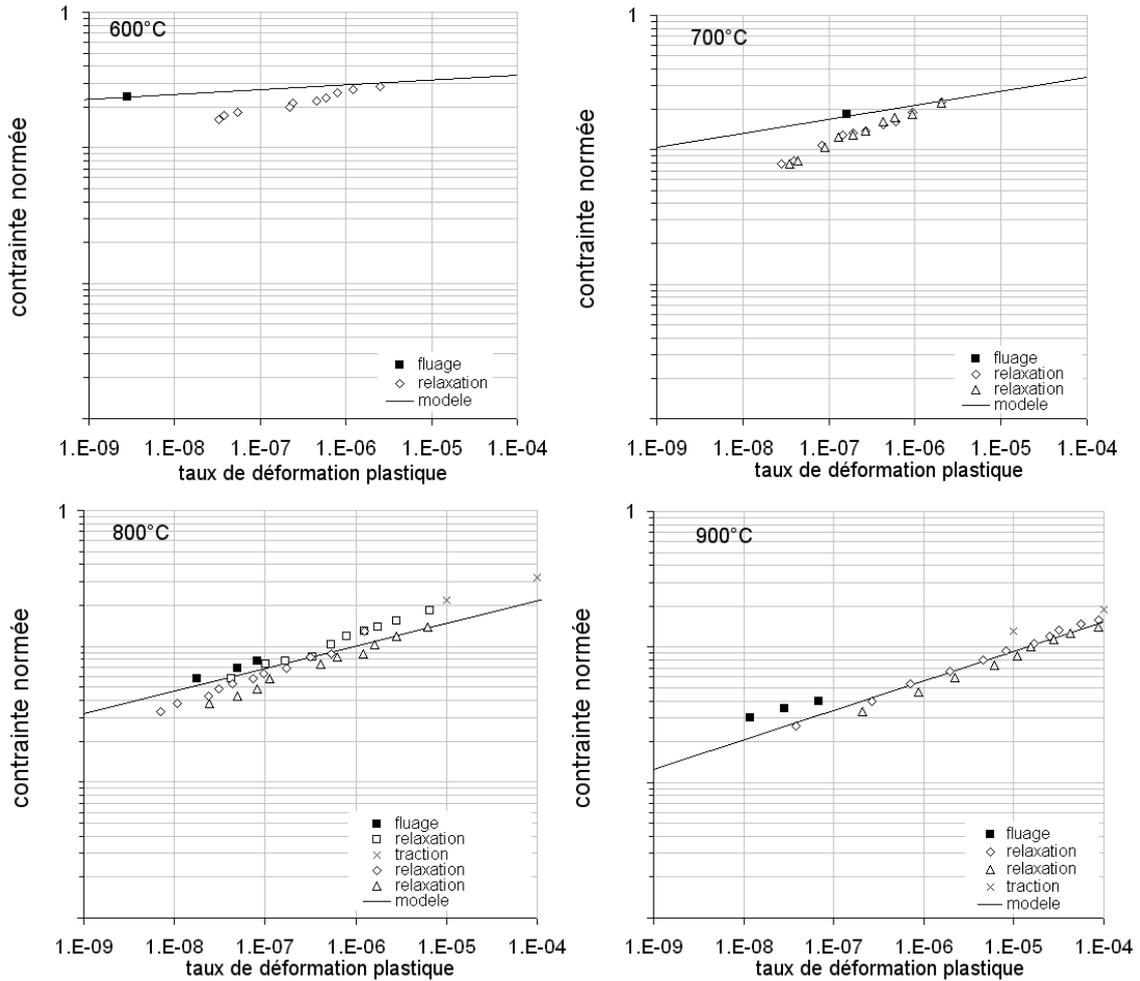


FIG. 3.8: Courbes de viscosité : confrontation entre modèle et expérience après optimisation

ramètres d'endommagement va donc s'appuyer sur ces deux types d'essais, menés à rupture.

3.1 Base expérimentale

A chaque température, deux essais de fluage à rupture et deux essais de fatigue oligocyclique sont réalisés, dont les caractéristiques sont présentées dans les tableaux 3.5 et 3.6. Ces essais uniaxiaux sont menés, de la même manière que pour l'identification des paramètres viscoplastiques, sur des éprouvettes axisymétriques dont le plan est donné en annexe A.

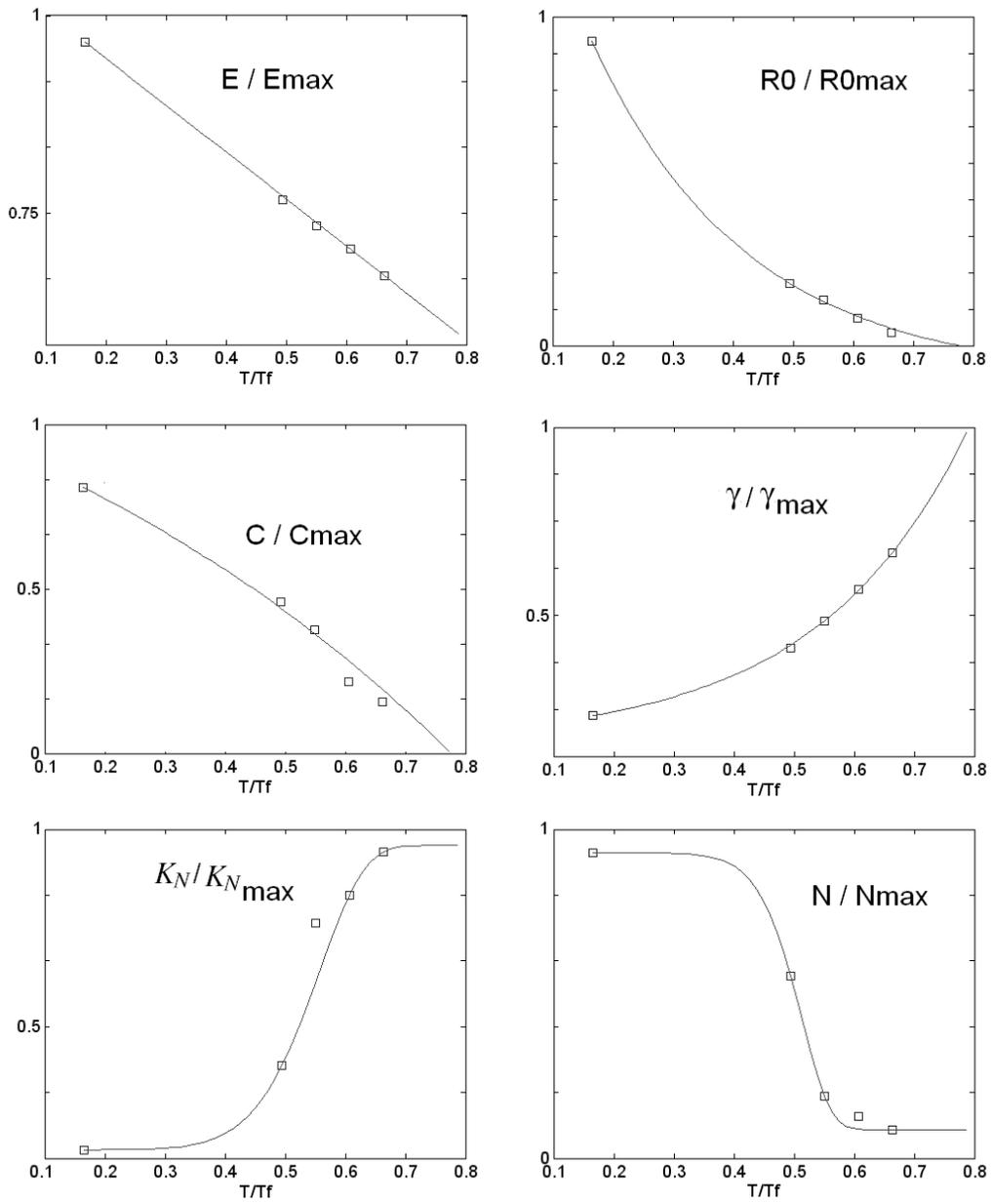


FIG. 3.9: Evolution des paramètres élasto-viscoplastiques en fonction de T/T_f (températures en Kelvin)

Paramètre	Expression
Module d'Young	$E(T) = e_1 \frac{T}{T_f} + e_2$
Ecrouissage isotrope (+ limite d'élasticité)	$R_\infty(T) + \sigma_y(T) = r_1 \exp\left(r_2 \frac{T}{T_f}\right) + r_3$
Ecrouissage cinématique	$C(T) = c_1 \exp\left(c_2 \frac{T}{T_f}\right) + c_3$ $\gamma(T) = g_1 \exp\left(g_2 \frac{T}{T_f}\right) + g_3$
Viscosité	$K_N(T) = k_1 \exp\left[k_2 \left(\frac{T}{T_f}\right)^{k_3}\right] + k_4$ $N(T) = n_1 \exp\left[n_2 \left(\frac{T}{T_f}\right)^{n_3}\right] + n_4$

TAB. 3.4: Expression des paramètres de visco-plasticité du Haynes 188 en fonction de T/T_f (températures en Kelvin)

Température	Référence	déformation max $R_e = -1$	rupture	Remarques
20°C	HA4	0.4% à $10^{-3} s^{-1}$	16229 cycles	pas de rupture
	HA10	0.3% à $10^{-3} s^{-1}$	48800 cycles	
	HA11	0.2% à $10^{-3} s^{-1}$	126600 cycles	
600°C	HA12	0.3% à $10^{-3} s^{-1}$ pendant 37140 cycles puis 0.3% pendant 9800 cycles	46940 cycles	
	HA13	0.4% à $10^{-3} s^{-1}$	5600 cycles	
700°C	HA11	0.35% à $10^{-3} s^{-1}$	3932 cycles	éprouvette de l'essai à 20°C !
	HA3	0.2% à $10^{-3} s^{-1}$ pendant 21000 cycles puis 0.25% à $10^{-3} s^{-1}$ pendant 102000 cycles puis 0.35% à $10^{-3} s^{-1}$ pendant 5800 cycles	128800 cycles	
	HA13	0.3% à $10^{-3} s^{-1}$	10941 cycles	
800°C	HA6	1.00% à $5.10^{-4} s^{-1}$	27 cycles	
	HA7	0.4% à $5.10^{-4} s^{-1}$	910 cycles	
	HA8	0.17% à $10^{-3} s^{-1}$ pendant 48000 cycles puis 0.3% à $10^{-3} s^{-1}$ pendant 1573 cycles	49573 cycles	
900°C	HA1	0.2% à $10^{-3} s^{-1}$	8445 cycles	
	HA2	0.3% à $10^{-3} s^{-1}$	1453 cycles	

TAB. 3.5: Essais de fatigue pour l'identification des paramètres d'endommagement

Température	Référence	contrainte	rupture
600°C	HA94	400 MPa	7278 heures
700°C	HA96	300 MPa	444 heures
800°C	HA99	120 MPa	2920 heures
	HA100	130 MPa	1477 heures
	HA98	140 MPa	845.5 heures
900°C	HA102	60 MPa	2920 heures
	HA103	65 MPa	1477 heures
	HA101	70 MPa	845.5 heures

TAB. 3.6: Essais de fluage à rupture pour l'identification des paramètres d'endommagement

3.2 Durée de vie en fluage

On rappelle ici l'expression analytique de la durée de vie en fluage uniaxial, donnée dans le chapitre 1, dans le cas d'un endommagement isotrope :

$$t_R = t_D + \left(\frac{2ES}{\sigma^2} \right)^s \int_0^{D_c} (1-D)^{2s} \left(\frac{\frac{\sigma}{1-D} - X_\infty - R_\infty - \sigma_y}{K_N} \right)^{-N} dD \quad (3.3)$$

Pour chaque essai, on peut identifier t_D directement sur les courbes de fluage, approximativement comme le temps correspondant au point d'inflexion du fluage secondaire. On a alors $\varepsilon = \varepsilon_{pD} \iff t = t_D$. Le dernier terme de la relation est déterminé expérimentalement comme étant la différence $t_E = t_R - t_D$. Si l'on dispose de deux essais de fluage sous contraintes différentes, on obtient donc deux relations pour déterminer les deux paramètres, s et S . Graphiquement, on trace la courbe expérimentale σ fonction t_R , et l'on fait varier les paramètres s et S pour que la courbe théorique t_R s'en rapproche le plus possible. L'exposant s détermine la pente de la courbe, et S son ordonnée à l'origine (donc sa position en abscisse). Sur la figure 3.11, $s = 1$: plusieurs valeurs entières ont été testées, la valeur 1 correspond à l'inclinaison de la courbe modèle la plus proche des points expérimentaux (une valeur négative n'aurait physiquement pas grand sens). La valeur de S est alors déterminée comme donnant l'écart minimal entre durées de vie théoriques et expérimentales. Cependant, on constate que le modèle ne suit pas parfaitement les points expérimentaux, en particulier à la température de 700°C. Entre 450°C et 750°C, ce matériau présente du vieillissement dynamique (*Dynamic Strain Ageing*, ou *DSA*) responsable d'un durcissement cyclique en fatigue pilotée en déformation, comme le montre la figure 3.10 (Rao & al 1995, Castelli 1996, Hasselqvist 2004). Ce durcissement peut être important (jusqu'à 250 MPa à 650°C) et peut ne pas saturer, persistant jusqu'à rupture dans certains cas. Ce phénomène, qui n'est pas modélisé par la loi de comportement que l'on utilise ici, peut être à l'origine d'erreurs introduites sur le niveau des contraintes simulées et donc de la dispersion observée à 700°C en terme de durée de vie.

Cet écart peut aussi être imputé au paramètre de viscosité N (l'inclinaison de la courbe est en fait régie par la somme $2s + N$). Une réidentification des paramètres de viscosité (et donc de tous les paramètres de viscoplasticité !) pourrait éventuellement corriger ce

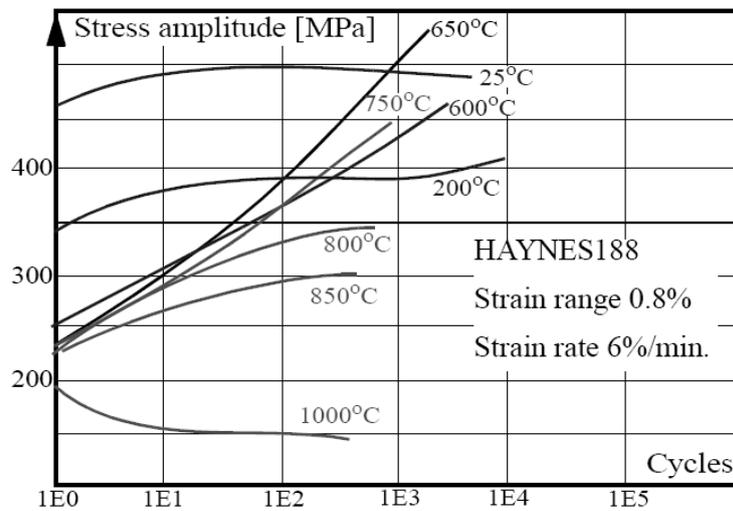


FIG. 3.10: Evolution de la contrainte maximale au cours d'essais de fatigue oligocyclique sur Haynes 188 entre 20°C et 1000°C (d'après Castelli, 1996)

problème, l'introduction de paramètres "matériau" supplémentaires également (Chaboche 1989, Tanaka 1994, Yaguchi & Takahashi 2000, Ho & Krempi 2001).

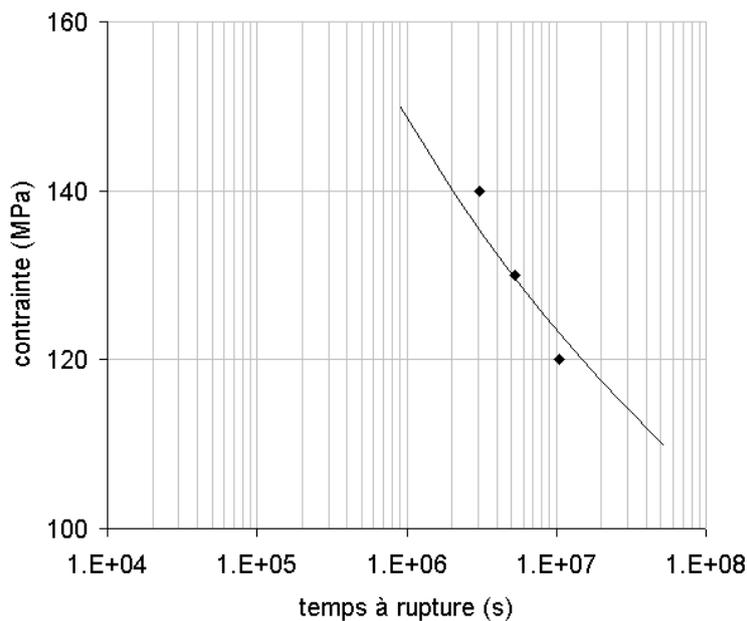


FIG. 3.11: Identification de s et S sur la courbe de durée de vie en fluage, 800°C, Haynes 188

3.3 Durée de vie en fatigue

De la même façon, si l'on rappelle l'expression analytique de la durée de vie en fatigue uniaxiale sous déformation cyclique imposée, le nombre de cycles à rupture est donné par :

$$N_R = N_D + \frac{D_c}{2\Delta\varepsilon_p} \left(\frac{2ES}{\sigma^2} \right)^s \quad (3.4)$$

où $\sigma = \sigma_{max}$ imposée au cours de l'essai, et $2\Delta\varepsilon_p$ est l'incrément de déformation plastique cumulée par cycle. Les paramètres S et s sont déjà connus, car ils ont été identifiés sur les courbes de durée de vie en fluage. Le seuil en monotone ε_{pD} est également connu, identifié comme la déformation atteinte au point d'inflexion du fluage secondaire. On a d'ailleurs constamment $\varepsilon_{pD} \approx 0.1$ pour ce matériau. Il reste à identifier les paramètres du seuil d'endommagement en énergie stockée, w_D , A et m . On peut connaître pour chaque essai la valeur du nombre de cycles à apparition de l'endommagement N_D , puisque $N_D = N_{R_{exp}} - \frac{D_c}{2\Delta\varepsilon_p} \left(\frac{2ES}{\sigma^2} \right)^s$. Comme la déformation plastique cumulée s'exprime en fonction du nombre de cycles $p = 2N\Delta\varepsilon_p$, on peut en déduire la déformation plastique cumulée à apparition de l'endommagement p_D (lorsque $N = N_D$) : $p_D = 2N_D\Delta\varepsilon_p$.

D'autre part, le seuil d'endommagement en déformation plastique cumulée p_D en fatigue s'exprime en fonction de ε_{pD} de sorte que le seuil d'endommagement en énergie stockée soit un paramètre matériau (voir chap. 1) :

$$p_D = \left[\varepsilon_{pD}^{1/m} + \frac{X_\infty^2}{2AR_\infty C} \cosh^{-2} \left(\frac{\gamma\Delta\varepsilon_p}{2} \right) \right]^m \quad (3.5)$$

On est donc capable de tracer sur un même graphique p_D en fonction de $\Delta\varepsilon_p$ les points correspondant à chaque essai, ainsi que la courbe théorique 3.12 paramétrée par A et m (figure 3.12). Les paramètres A et m sont choisis de telle sorte que la courbe théorique "colle" au mieux aux données expérimentales, avec au final $w_D = AR_\infty \varepsilon_{pD}^{1/m} + \frac{X_\infty^2}{2C}$.

Ces opérations sont réalisées aux températures de 20°C, 600°C, 700°C, 800°C et 900°C. En terme de résultats d'identification des paramètres d'endommagement, les courbes de durée de vie calculée fonction de la durée de vie expérimentale sont tracées, en fluage et en fatigue oligocyclique pour chaque essai (figures 3.13 et 3.14).

3.4 Paramètres et température

Aux températures de 20°C, 600°C, 700°C, 800°C et 900°C, on a identifié analytiquement les paramètres d'endommagement du modèle, sur le Haynes 188 à partir d'essais de durée de vie en fluage et en fatigue oligocyclique, selon la procédure décrite précédemment.

De la même façon que lors de l'identification des paramètres de visco-plasticité du Haynes 188, il est possible d'exprimer la dépendance à la température (en Kelvin) normée par la température du fusion de chaque paramètre d'endommagement via des fonctions de type exponentiel. Ces extrapolations sont à considérer avec précaution, particulièrement dans la zone comprise entre les températures 20°C et 600°C, où aucune identification n'a

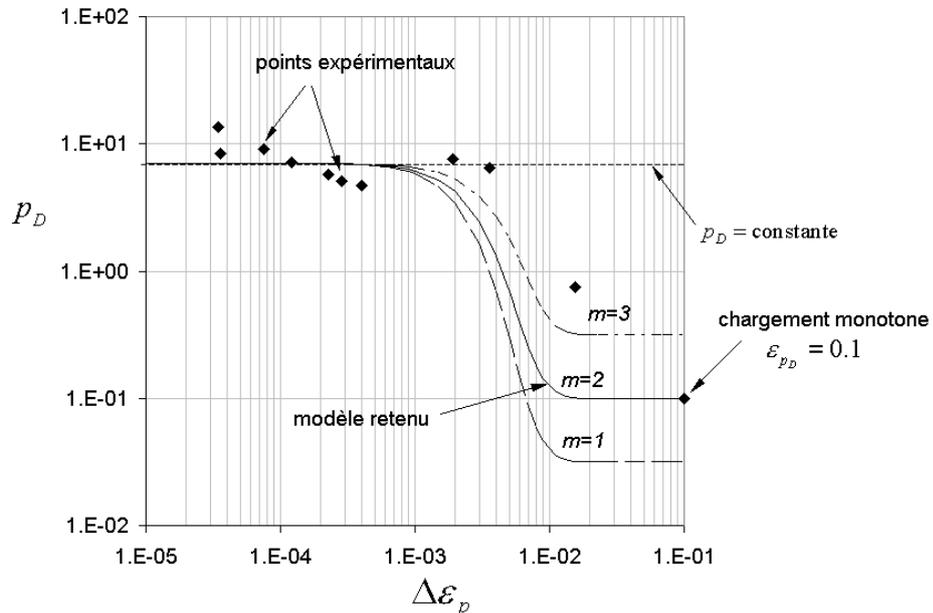


FIG. 3.12: Identification de A et m en fatigue oligocyclique à 800°C , Haynes 188

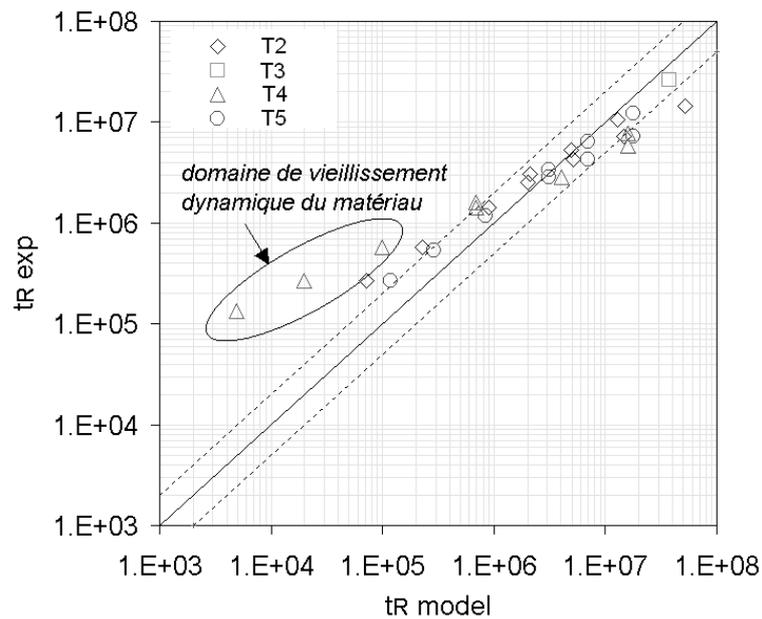


FIG. 3.13: Durée de vie théorique et durée de vie expérimentale en fluage du Haynes 188

été menée. Chaque paramètre est ainsi exprimé en fonction de T/T_f . Les courbes d'interpolation sont présentées sur la figure 3.15. Les expressions correspondantes sont explicitées dans le tableau 3.7.

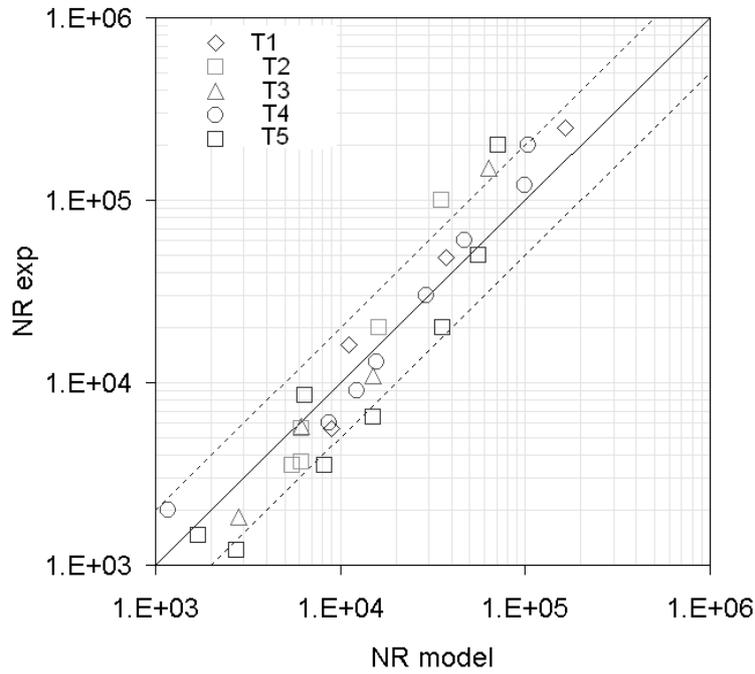


FIG. 3.14: Durée de vie théorique et durée de vie expérimentale en fatigue oligocyclique du Haynes 188

Paramètre	Expression
Intensité d'endommagement	$S(T) = S_1 \cdot \exp \left[-S_2 \left(\frac{T}{T_f} - S_3 \right) \right] + S_4$
Exposant d'endommagement	$s=1.0$
Seuil d'endommagement	$w_D(T) = w_1 \cdot \exp \left[-w_2 \left(\frac{T}{T_f} - w_3 \right) \right] + w_4$
Paramètres de correction	$A(T) = A_1 \frac{T}{T_f} \exp \left[-A_2 \left(\frac{T}{T_f} - A_3 \right) \right] + A_4$ $m(T) = m_1 \cdot \exp \left(m_2 \frac{T}{T_f} \right) + m_3$

TAB. 3.7: Expression des paramètres d'endommagement anisotropes du Haynes 188 en fonction de T/T_f

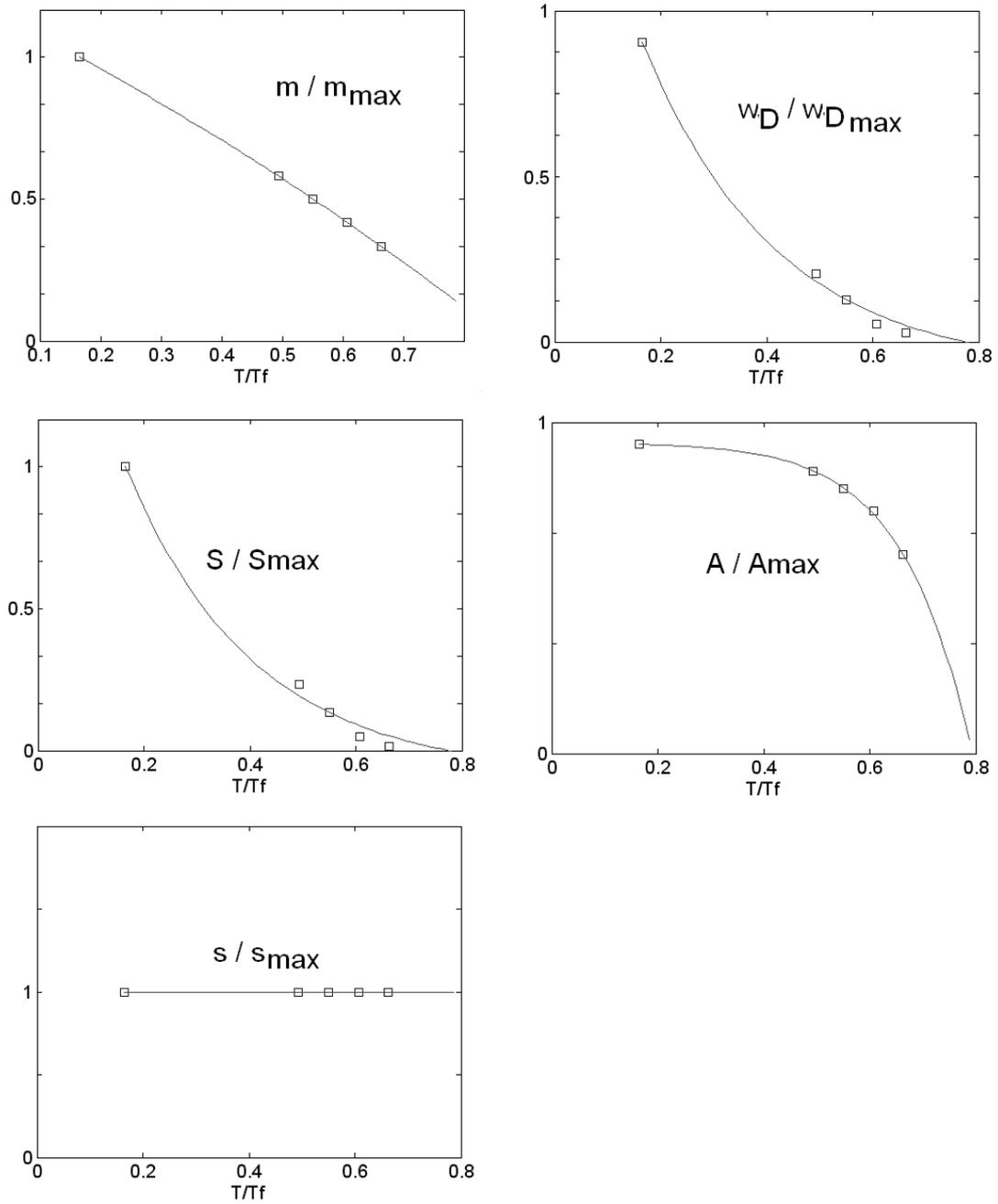


FIG. 3.15: Evolution des paramètres d'endommagement anisotropes en fonction de T/T_f

3.5 Identification des différentes lois d'endommagement

Le modèle d'endommagement prenant en compte la refermeture des micro-défauts a été implanté dans le code Zébulon. Il a été développé de telle manière que l'effet de l'endommagement en compression soit plus faible qu'en traction, via un paramètre h affectant les contraintes négatives. Le seuil d'endommagement en énergie stockée reste quant à lui inchangé. La dépendance de la loi d'endommagement à la contrainte n'étant fonction que de l'exposant s (\dot{D} proportionnel à σ^{2s}), la dépendance à la déformation plastique étant linéaire (\dot{D} proportionnel à \dot{p}), on choisit, afin d'identifier le modèle à refermeture de micro-défauts, de conserver les paramètres du seuil d'endommagement tels quels. Plus précisément, seul le paramètre S est amené à être modifié. Dans ce contexte, il suffit alors simplement d'effectuer une identification croisée (Desmorat & Otin 2007), c'est-à-dire de recalculer les courbes de fluages simulées avec le modèle avec refermeture de micro-défauts ($h = 0$) et le modèle sans refermeture de micro-défauts ($h = 1$). L'effet de refermeture des micro-défauts n'a pas d'effet sur l'évolution de l'endommagement dans la direction de fluage.

Cette opération a été réalisée à chaque température sur des courbes de fluage, pour chaque loi incrémentale d'endommagement (on a toujours pour chacune des lois \dot{D} proportionnel à σ^{2s} et \dot{D} proportionnel à \dot{p}). Le résultat de l'identification croisée de S à 800°C est présenté figure 3.16, pour la loi avec refermeture des micro-défauts (loi en valeur absolue des vitesses de déformations plastiques et h). L'opération est reconduite pour chaque loi d'endommagement. Les évolutions des paramètres S en fonction de la température sont présentées pour chaque loi sur la figure 3.17.

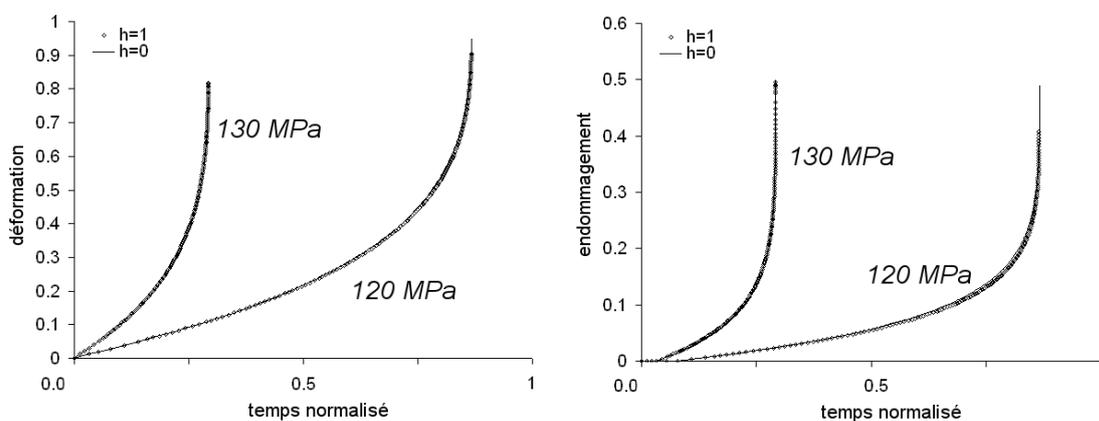


FIG. 3.16: Illustration de l'identification croisée du paramètre S des modèles sans ($h = 1$) et avec ($h = 0$) refermeture des micro-défauts à 800°C

L'expression de S est de la forme :

$$S(T) = S_1 \cdot \exp \left[-S_2 \left(\frac{T}{T_f} - S_3 \right) \right] + S_4 \quad (3.6)$$

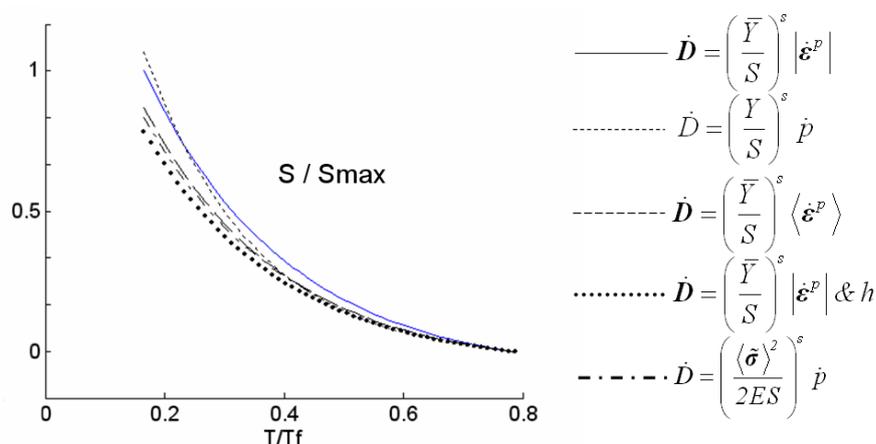


FIG. 3.17: S fonction de T/T_f pour les différentes lois d'endommagement

4 Validation sous condition isotherme

La présente section s'attache à traiter de la validation de l'identification des paramètres de comportement et d'endommagement du Haynes 188, et de l'implantation du modèle d'endommagement, en mode couplé à la viscoplasticité ou sous forme de post-processeur, lors d'un cas isotherme en premier lieu. La robustesse des différentes méthodes de calcul de durée de vie est également quantifiée, par des analyses de sensibilité.

4.1 Fatigue à temps de maintien

L'essai retenu pour validation dans le cas isotherme est un essai uniaxial mené sur éprouvette massive axisymétrique, dit essai de fatigue à temps de maintien. Classiquement, les temps de montée et de descente en déformation sont de 10 secondes, et la durée du maintien (relaxation) à déformation maximale est de 300 secondes. La température de l'essai est 800°C . La déformation maximale imposée est de 0.4%. La première éprouvette a cependant subi au préalable 510 cycles à déformation maximale de 0.2%. En terme de comportement, seuls les cycles à déformation maximale de 0.4% ont été comparés avec le modèle. Les cycles à 0.2% de déformation maximale présentent en effet très peu de plasticité.

La figure 3.18 présente les boucles d'hystérésis expérimentales dans le diagramme contrainte-déformation des deux essais à temps de maintien réalisés à déformation maximale de 0.4%, ainsi que la courbe calculée numériquement en utilisant le code éléments finis Zébulon et les paramètres de comportement du Haynes 188 identifiés précédemment (modèle à simple viscosité). La corrélation entre simulation et expérience valide dans le cas présent l'identification des paramètres de visco-plasticité du Haynes 188 à la température de 800°C , le modèle (ici à simple viscosité, à droite) étant même meilleur que le modèle à double viscosité (à gauche, voir Annexe D) !

En terme de durée de vie, plusieurs types de calculs ont été menés : en premier lieu, les deux essais ont été complètement simulés, grâce au modèle de comportement visco-

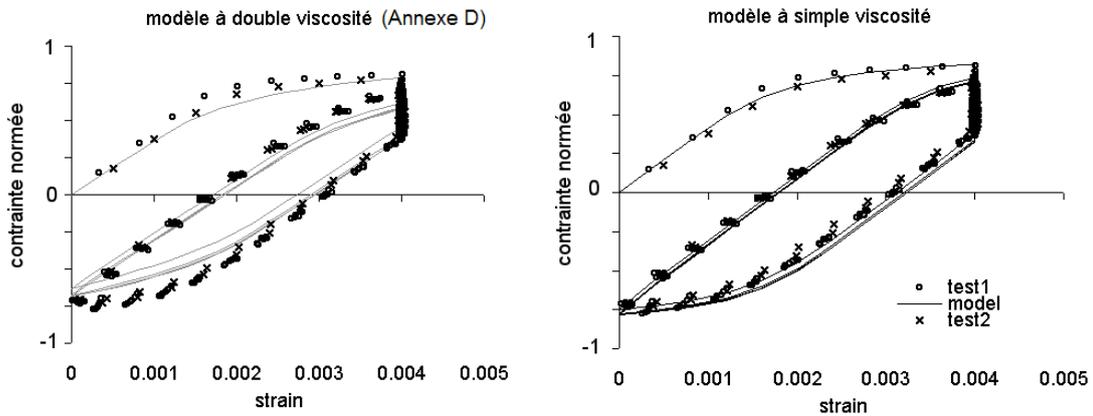


FIG. 3.18: Simulation et résultats expérimentaux du comportement du Haynes 188 à 800°C sous chargement de fatigue à temps de maintien.

plastique couplé à l'endommagement implanté dans Zébulon. Ensuite, l'essai complet a été simulé *sans endommagement*, et l'essai complet a alors été post-traité pour obtenir la durée de vie théorique. Enfin, seuls 10 cycles de l'essai ont été simulés, et le post-traitement a été réalisé sur ces 10 cycles. Les 3 résultats sont représentés dans le graphique de la figure 3.19 pour chaque essai. Les deux premières méthodes de calcul donnent des résultats très proches, ce qui valide l'implantation du post-processeur. L'évolution de l'énergie stockée et de l'endommagement au cours de l'essai sont en effet reproduits de la même façon que lors d'un calcul couplé. La troisième méthode donne des résultats moins élevés en terme de durée de vie, mais plus proches de la réalité. Post-traiter les 10 premiers cycles seulement est en effet plus contraignant (la plasticité évolue davantage au cours du premier cycle qu'aux cycles stabilisés). La qualité du résultat est toutefois dans tous les cas supérieure à la limite désirée : ne pas excéder un facteur 2 (ou 1/2) entre modèle et expérience. En terme d'utilisation, il est bien entendu conseillé de lancer le post-processeur sur les 10 premiers cycles (non répétés) puis sur le 10e cycle répété jusqu'à rupture.

Ces deux essais et les simulations numériques menées montrent d'une part, qu'à 800°C, le comportement du Haynes 188 est très bien reproduit dans le cas d'un pilotage en déformation, à déformation moyenne non nulle, d'autre part, que l'identification des paramètres d'endommagement du Haynes 188 est satisfaisante, ainsi que l'implantation du post-processeur, au regard des résultats donnés par le calcul couplé et par l'expérience. L'étape ultime reste la validation sur des cas anisothermes et structuraux.

4.2 Sensibilité du modèle

Afin de garantir la robustesse de la méthodologie employée, il est important de quantifier à quel point un calcul numérique mené avec l'aide des modèles élasto-visco-plastique et endommagement anisotrope, en particulier par post-traitement, est sensible aux paramètres de comportement et d'endommagement utilisés. L'étude présentée ici permet de quantifier l'écart entre la durée de vie calculée lors d'une chaîne classique en bureau d'études

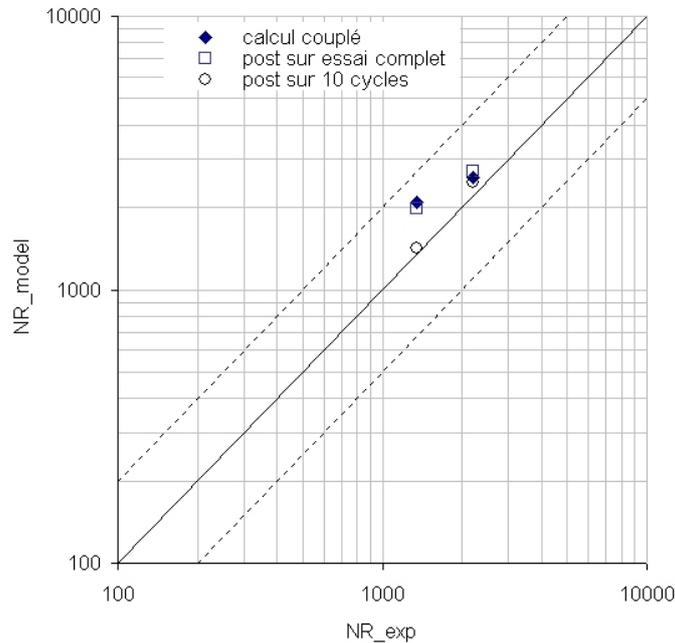


FIG. 3.19: Simulation et résultats expérimentaux de la durée de vie du Haynes 188 à 800°C sous chargement de fatigue à temps de maintien.

Snecma, pré-traitement élasto-visco-plastique / post-traitement d'endommagement et cette même durée de vie calculée lorsqu'un paramètre est sous-estimé de 10%.

Les calculs ont été menés pour le module d'Young E , les paramètres d'érouissage R_∞ , γ , C , les paramètres de viscosité K_N , N , d'endommagement S , s , et de seuil w_D , A et m . Un abattement a été appliqué sur chaque paramètre tour à tour, d'abord lors du post-traitement uniquement, puis sur la chaîne de calcul complète, c'est-à-dire sur les paramètres de visco-plasticité (sans endommagement) mais également sur les paramètres d'endommagement lors du post-traitement. Le choix du chargement imposé s'est porté vers un chargement de type fatigue-fluage, à contrainte moyenne non-nulle et un rapport de charge $R_\sigma = \sigma_{min}/\sigma_{max} = 0$, à 600°C et 800°C : 100 secondes de montée à 220MPa, 100 secondes de maintien à cette contrainte puis 100 secondes de descente à un niveau de contrainte nul. Le calcul est réalisé sur un seul point d'intégration. Les résultats en terme de sensibilité sont présentés figures 3.20 et 3.21.

Une sous-estimation de 10% d'un des paramètres dans le post-processeur seulement n'affecte que de 20% environ le résultat en terme de durée de vie, tandis que la même erreur présente dans le calcul élasto-visco-plastique suivi du post-traitement peut modifier la durée de vie d'un facteur 2 que ce soit à haute température ou à température plus faible. La viscosité en particulier doit être identifiée avec le plus grand soin à haute température puisque ses paramètres ont la plus grande influence sur la durée de vie au final. A 600°C, c'est le paramètre d'érouissage γ qui s'avère le plus influent sur la durée de vie, puisque un abattement de sa valeur de 10% entraine une surestimation de 100% de la durée de vie ! Le post-processeur a quant à lui l'avantage de ne pas dépendre de la viscosité pour

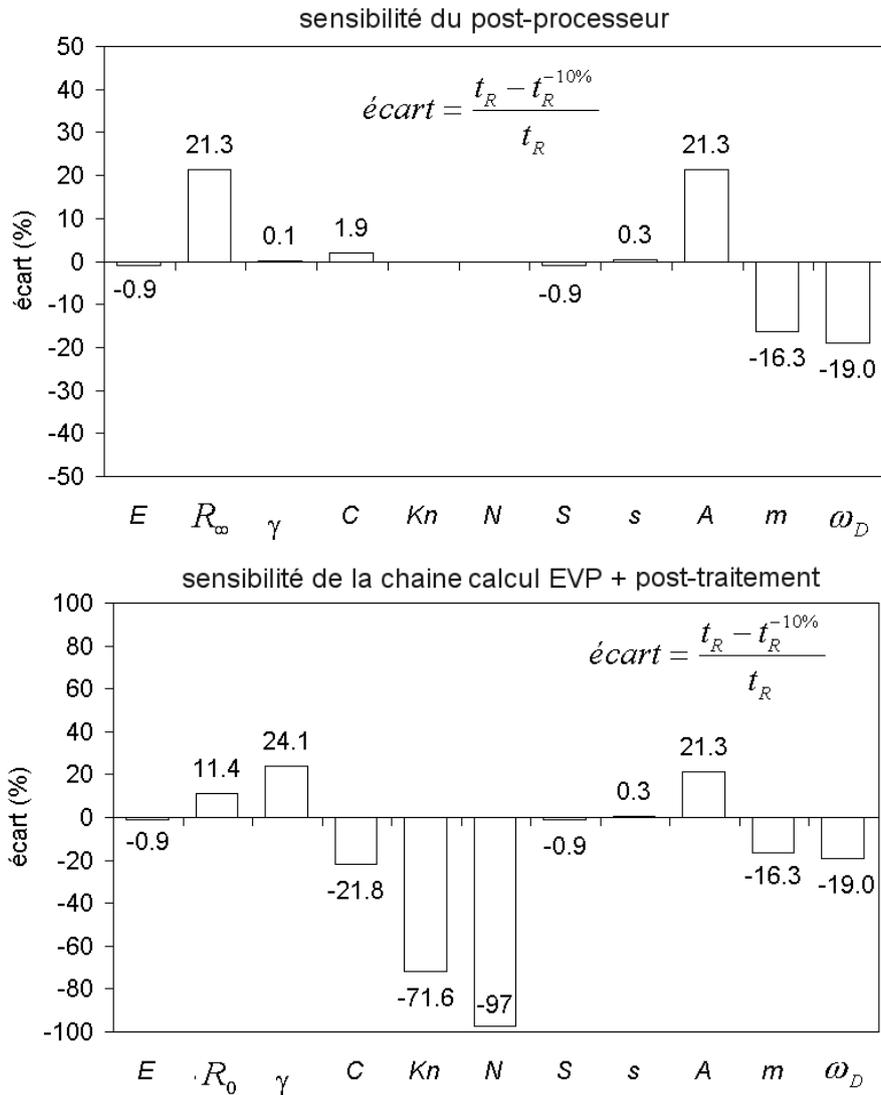


FIG. 3.20: Sensibilité aux paramètres de la chaîne de calcul de durée de vie en fatigue-fluage à 800°C.

la formulation de l'énergie stockée à partir des écrouissements. On vérifie également qu'une variation des paramètres de seuil n'a d'influence que lors du post-traitement, lorsque le pré-traitement est uniquement visco-plastique (sans endommagement).

Il est important d'être conscient des conséquences que peut avoir la mauvaise estimation d'un paramètre "matériau" sur la durée de vie calculée, en fonction de la température à laquelle la simulation est menée.

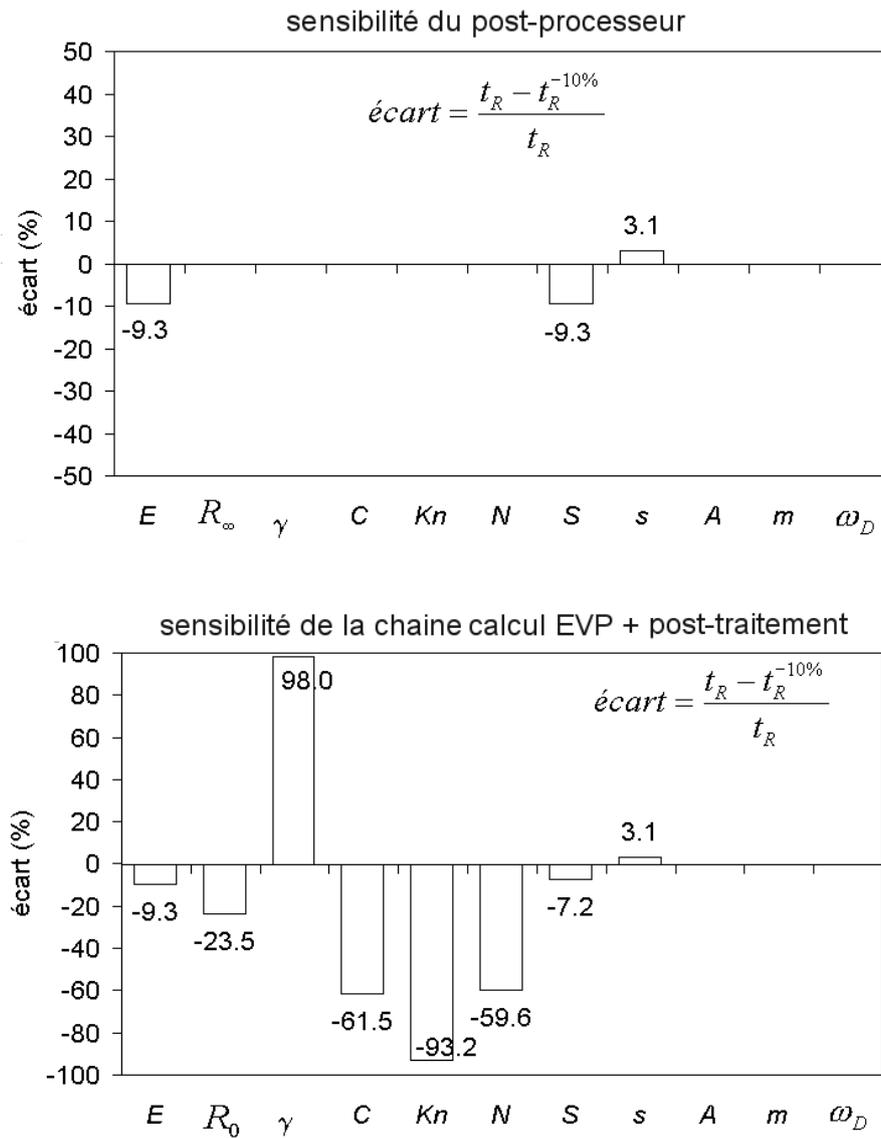


FIG. 3.21: Sensibilité aux paramètres de la chaîne de calcul de durée de vie en fatigue-fluage à 600°C.

Lois incrémentales et chargements thermomécaniques complexes

Sommaire

1	Essais anisothermes	82
1.1	Fluage en température variable	82
1.2	Essai thermomécanique de type "mission"	83
2	Durée de vie et histoire du chargement	91
2.1	Rupture sous chargement monotone	92
2.2	Cumul non-linéaire du dommage	93
2.3	Interaction fatigue-fluage	93
3	Chargements biaxiaux	95
3.1	Chargements biaxiaux proportionnels et non-proportionnels	95
3.2	Chargements biaxiaux en fatigue alternée	98
4	Fréquences élevées - Fatigue à grand nombre de cycles	102
5	Conclusion	105

1 Essais anisothermes

L'une des problématiques essentielles dans la chaîne de dimensionnement des composants de turbomachines est de pouvoir prévoir leur comportement et leur durée de vie sous chargements à température variable, ce qui est généralement le cas lors d'un cycle de fonctionnement du moteur. Les lois incrémentales permettent naturellement de prendre en compte les chargements anisothermes, lorsque l'on dispose de la dépendance à la température des paramètres "matériau". L'identification des paramètres de comportement et d'endommagement du Haynes 188 menée dans le chapitre 3, et leur interpolation en fonction de la température via des fonctions exponentielles, permettent de mener des calculs anisothermes. L'intégration de la loi d'endommagement sur un pas de temps à température variable est effectuée simplement du fait des schémas d'intégration utilisés, que ce soit en calcul couplé ou en post-traitement. Un exemple de fluage à température variable, inspiré par une étude menée chez Turboméca (Raffaitin & al 2007), est traité dans ce chapitre, ainsi que le cas d'un essai anisotherme de type "mission", confronté aux résultats numériques obtenus par le modèle.

1.1 Fluage en température variable

Le fluage à température variable est l'essai typique qui ne peut pas être simulé avec des lois d'endommagement écrites en nombre de cycles à rupture. Comme les lois incrémentales s'affranchissent de la notion de cycle, et puisque l'évolution de l'endommagement est calculée selon une simple décomposition du chargement en pas de temps, on s'est proposé de simuler quelques essais de fluage à température cyclique, du type de ceux menés par Raffaitin & al (2007). On s'est en effet aperçu que le dépouillement de tels essais et leur comparaison par rapport à des courbes maîtresses nécessitent habituellement de tronquer les courbes expérimentales en supprimant toute la partie de la courbe où la température est différente (inférieure) de celle de la courbe maîtresse. On en déduit alors l'effet de la variation de la température sur la durée de vie en fluage.

A l'aide des modèles d'endommagement incrémentaux, il suffit de simuler intégralement le chargement de fluage à température variable. Le modèle visco-plastique couplé à l'endommagement permet de simuler fluage primaire, secondaire mais aussi tertiaire, et ce dans des cas anisothermes. Il n'est donc plus nécessaire de tronquer les courbes expérimentales pour comparer modèle et essais. Des simulations de fluage anisotherme ont été réalisées avec la loi incrémentale anisotrope $\dot{D} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\epsilon}^p|$, et les paramètres matériau du Haynes 188 entre 20°C et 800°C suivant différentes vitesses de montée et de descente en température, comme montré sur la figure 4.1. On a ensuite tronqué chaque courbe numérique anisotherme en enlevant les parties où la température varie, pour ne garder qu'une courbe de fluage pseudo-isotherme. Celle-ci est alors comparée à la courbe isotherme simulée.

On remarque que les courbes pseudo-isothermes et isothermes ne se superposent pas : on néglige en effet le fluage lors de la variation de température, en tronquant cette partie de la courbe anisotherme. Cette approximation n'a plus lieu d'être en simulant intégralement, grâce aux modèles incrémentaux, la courbe complète de fluage à température variable.

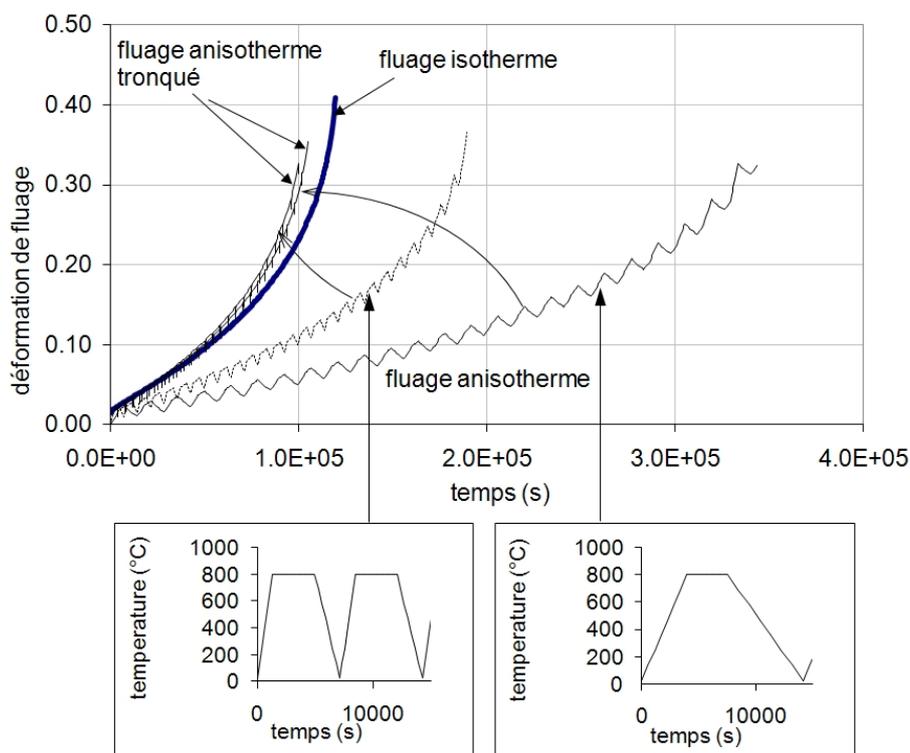


FIG. 4.1: Simulations de courbes de fluage isotherme et à température variable, entre 20°C et 800°C.

Modèle et expérience peuvent donc être comparés à présent directement sans artefact dû au dépouillement.

Si les conditions de températures étaient inversées, comme montré sur la figure 4.2, la température étant maintenue à 800°C durant 8000 secondes et subissant des montées et descentes à 900°C en 2000 secondes, il deviendrait aberrant de traiter les résultats d'essai en tronquant la courbe de fluage obtenue et en ne gardant que le fluage à 800°C. La différence entre fluage isotherme à 800°C, fluage anisotherme et courbe tronquée est nette (figure 4.2), et peut mener à des erreurs d'interprétation : ici, la courbe tronquée donne une durée de vie plus courte que le fluage anisotherme, en ne gardant que le fluage à 800°C, tandis que la durée de vie en fluage isotherme à 800°C est beaucoup plus grande (plus d'un facteur 100 !). En simulant les variations de température au cours de l'essai, chose permise par les lois incrémentales, on évite encore toute approximation au dépouillement et à l'interprétation des essais.

1.2 Essai thermomécanique de type "mission"

Dans le but de valider le modèle d'endommagement et la méthodologie de calcul employée, un essai anisotherme à rupture a été mené. L'idée est de se rapprocher du type de chargement que peut subir localement une chambre de combustion, d'imposer ce charge-

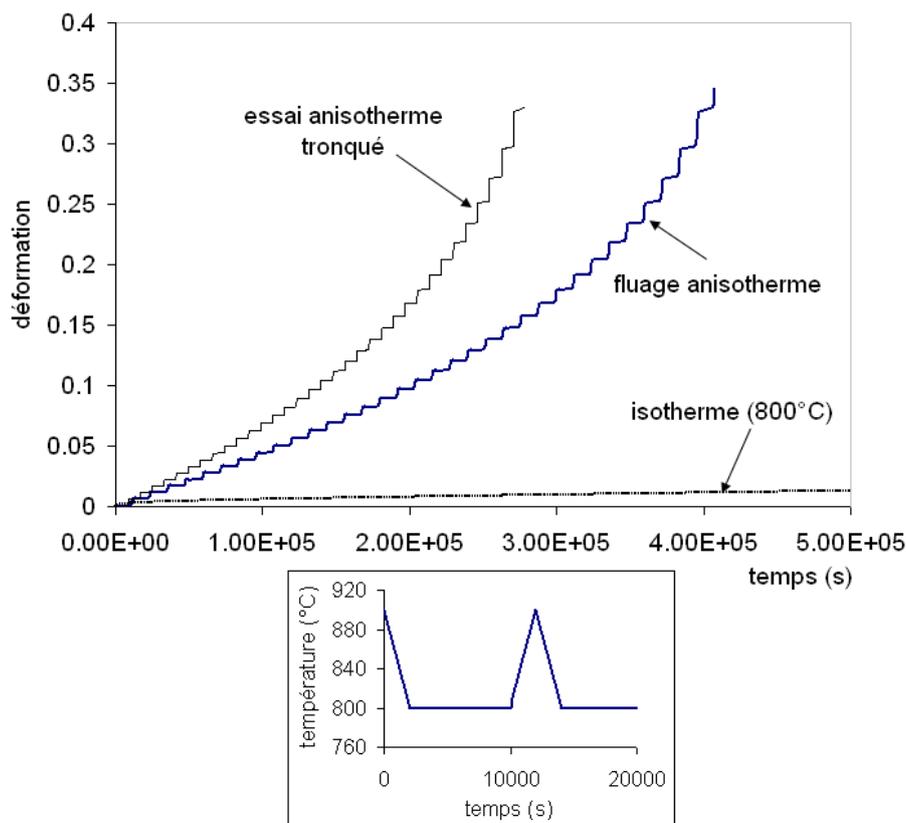


FIG. 4.2: Simulations de courbes de fluage isotherme et à température variable, entre 800°C et 900°C

ment anisotherme sur une éprouvette uniaxiale, jusqu'à sa rupture, et parallèlement, de simuler cet essai pour prévoir la durée de vie obtenue. Par l'intermédiaire du bureau d'études de Snecma, un chargement type "mission" a été défini. Celui-ci correspond aux sollicitations calculées par Eléments Finis dans la zone "paroi bride externe" de la chambre. On n'a conservé que la partie supposée la plus endommageante du cycle, afin que ce dernier ne soit pas trop long en terme de durée d'essai. La contrainte appliquée et la température imposée sont présentées figure 4.3 et une éprouvette cylindrique (sans multiperforation) a été testée. Compte tenu des possibilités limitées des machines d'essai en terme de vitesse de montée en température, le chargement imposé a été légèrement modifié. La vitesse maximale de montée en température permise par le matériel est de 5°C/s. Les valeurs des contraintes et températures correspondantes sont reportées dans le tableau 1.2.

1.2.1 Comportement

Partant de la température ambiante, un premier cycle en température est appliqué, à contrainte nulle. Cela permet de vérifier que les paramètres de dilatation thermique du modèle sont cohérents par rapport aux valeurs expérimentales. A partir du deuxième cycle, contraintes et températures imposées sont appliquées. Les boucles d'hystérésis contrainte-

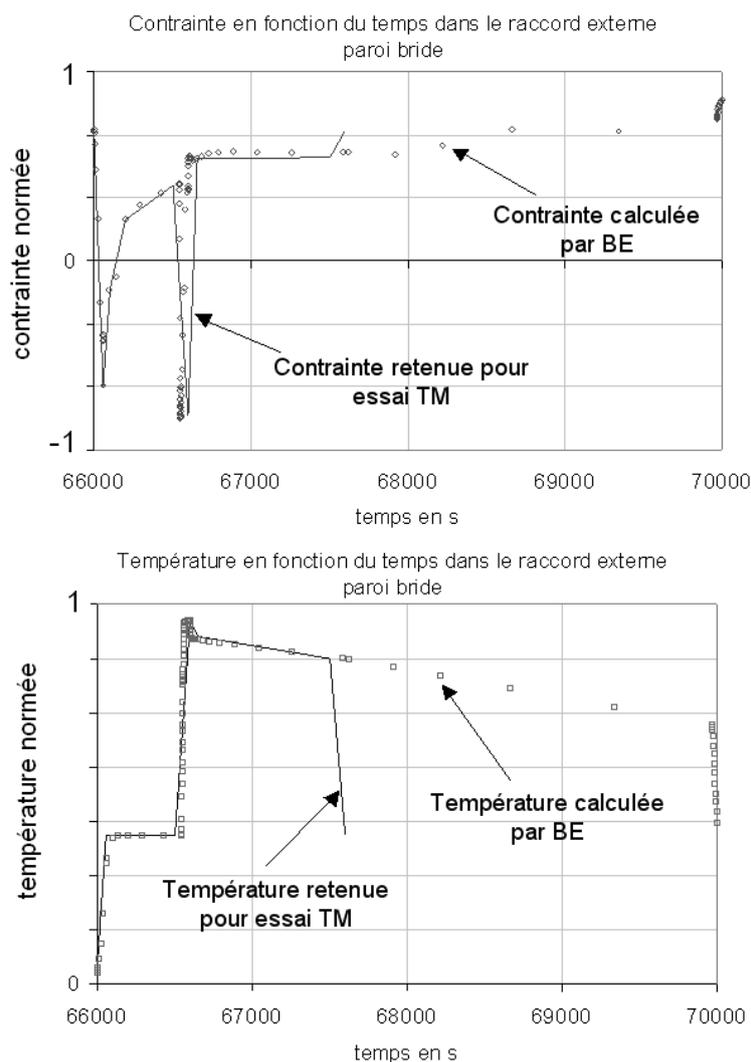


FIG. 4.3: Températures et contraintes imposées lors de l'essai thermomécanique (ou essai TM) de type "mission"

temps (s)	0	60	100	200	500	600	655	1500	1600
contrainte (MPa)	415	-400	-90	130	240	-490	325	330	415
température (°C)	275	225	275	275	275	670	640	600	275

TAB. 4.1: Evolution de la contrainte et de la température au cours d'un cycle de l'essai de type "mission"

déformation expérimentales sont présentées sur la figure 4.4. La réponse en terme de déformation totale en fonction du temps est présentée sur le graphique de la figure 4.5. Ce graphique permet de visualiser la déformation en fonction de la température et de la contrainte imposées.

L'essai a été simulé de deux manières : une première fois en utilisant la loi à double

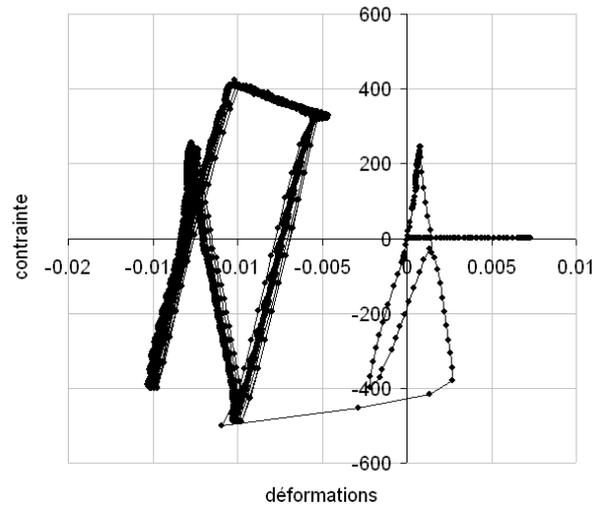


FIG. 4.4: Boucles contrainte-déformation expérimentales de l'essai thermomécanique de type "mission", 100 cycles tracés

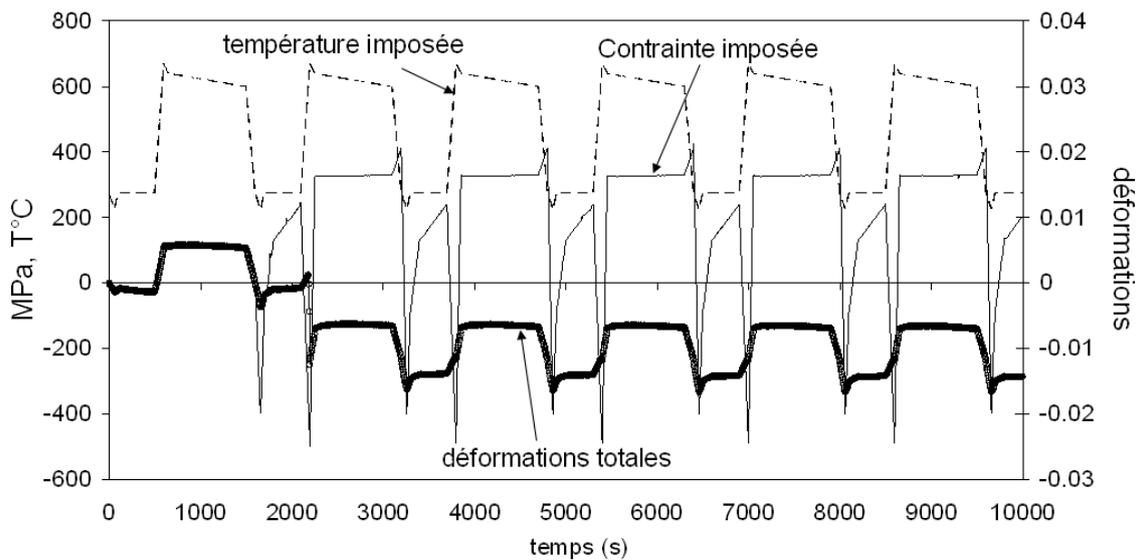


FIG. 4.5: Evolution de la déformation, de la contrainte et de la température au début de l'essai thermomécanique

viscosité utilisée à Snecma, la deuxième fois en utilisant la loi à simple viscosité identifiée lors de cette thèse. Les résultats de simulation par rapport à l'expérience sont présentés sur le graphique de la figure 4.6.

La courbe expérimentale des déformations en fonction du temps (figure 4.5) montre après le premier cycle une forte augmentation des déformations en compression au temps $t = 2195s$ et d'une durée de 15 secondes, correspondant au passage à une température supérieure à $600^{\circ}C$ et à un niveau de contrainte inférieur à -400 MPa. Ce phénomène, comme

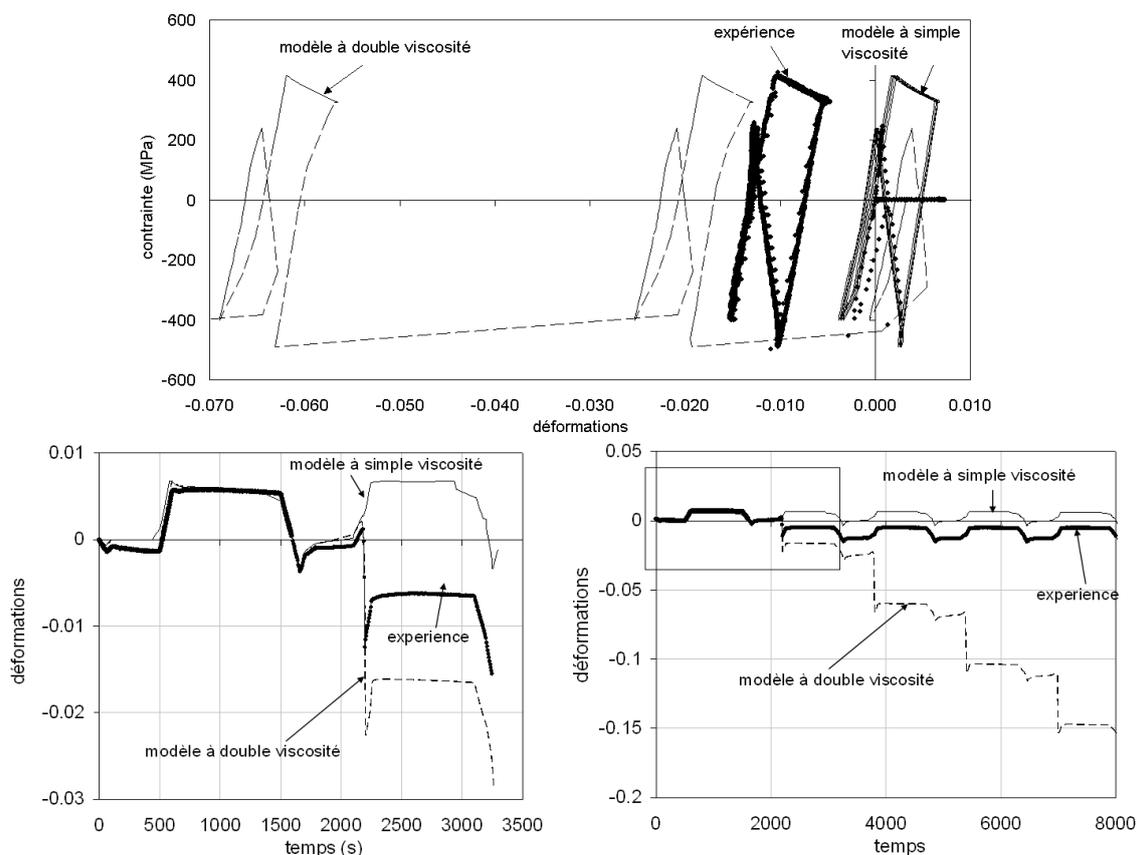


FIG. 4.6: Simulation de l'essai : modèle à simple viscosité et modèle à double viscosité

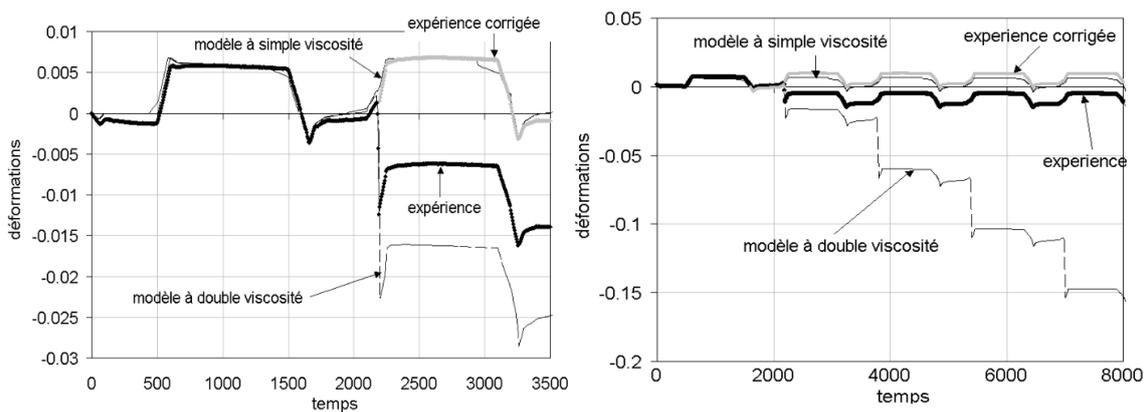


FIG. 4.7: Simulation de l'essai, avec expérience corrigée : modèle à simple viscosité et modèle à double viscosité

nous le verrons avec le modèle à double viscosité, peut être expliqué physiquement. Mais après enquête, l'hypothèse d'un flambage de l'éprouvette et du glissement de l'extensomètre n'est pas à exclure. C'est pourquoi nous avons également considéré la courbe translaturée

(expérience corrigée) grise sur la figure 4.7. Les cycles suivants sont stabilisés. L'amplitude de déformation plastique mesurée au cycle stabilisé est $\Delta\varepsilon^p \simeq 0.006$.

En terme de simulation, le modèle à double viscosité modélise la baisse des déformations à $t = 2195s$, mais de façon beaucoup trop accentuée. Il ne présente pas de cycle stabilisé, puisqu'il reproduit ce phénomène à chaque cycle, selon la même amplitude. Il modélise cependant convenablement l'allure des boucles contrainte-déformation.

Le modèle à simple viscosité modélise relativement mieux les boucles contrainte-déformation, mais ne présente pas du tout l'effet d'augmentation des déformations en compression à $t = 2195s$, ni aux cycles suivants. La simulation exhibe également un effet de rochet des boucles contrainte-déformation, vers les déformations négatives.

En enlevant à la déformation totale mesurée, d'abord la déformation thermique mesurée au premier cycle, puis la déformation élastique $\sigma/E(T)$ à chaque instant, on peut tracer l'évolution de la déformation plastique expérimentale en fonction du temps 4.8

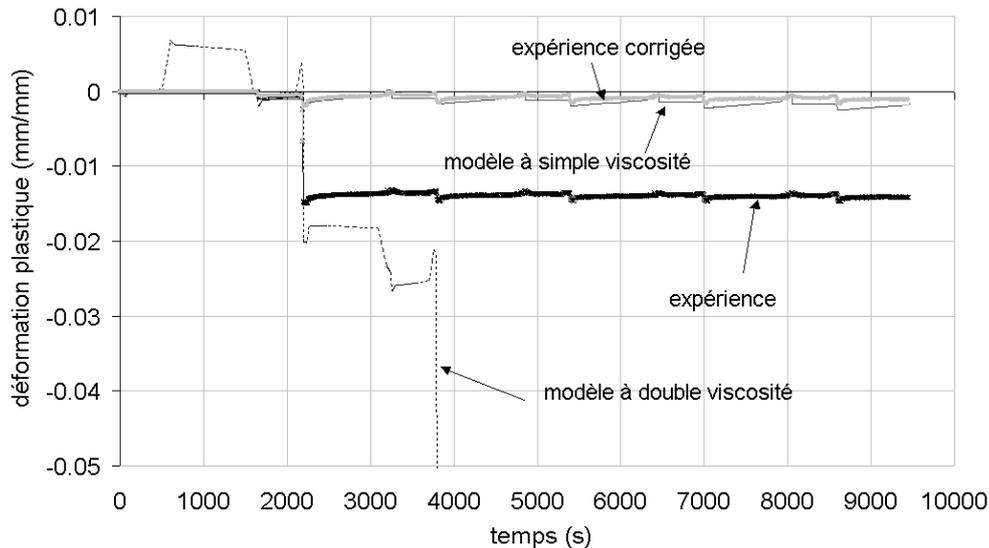


FIG. 4.8: Evolution de la déformation plastique expérimentale et théorique au début de l'essai

Afin d'expliquer l'augmentation brutale de la déformation plastique en compression après le premier cycle, l'essai a été répété sur deux nouvelles éprouvettes. Le phénomène s'est alors reproduit, mais l'amplitude de la différence de déformation plastique était à chaque fois différente (voir figure 4.9). On a bien observé une déformation de flambage sur l'éprouvette. L'augmentation de déformation plastique en compression se déroule à contrainte négative élevée (environ -400 MPa) et à température supérieure à 600°C, l'éprouvette subit à ce moment du flambage viscoplastique. L'extensomètre mesure alors une déformation non interprétable. Lors du premier essai, le matériau durci n'a plus flambé aux cycles suivants, ce qui explique la stabilisation des boucles hystérétiques. Lors des essais 2 et 3, on observe également, une stabilisation des cycles suivants.

Une remarque importante concerne la robustesse de la modélisation. Le modèle de comportement retenu est simple : un seul écrouissage cinématique, une seule loi de viscosité (de

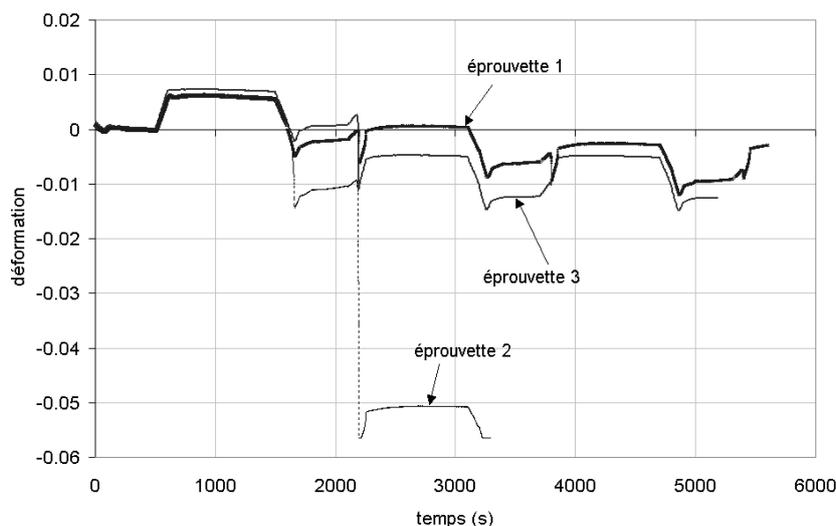


FIG. 4.9: Evolution de la déformation totale expérimentale lors de l'essai de fatigue thermomécanique sur les différentes éprouvettes

Norton). Même si des paramètres de viscosité supplémentaires peuvent améliorer la réponse isotherme de la modélisation (à double viscosité dans le cas présent), les conséquences dans le cas anisotherme sont importantes : la non-obtention du cycle stabilisé. Cet exemple illustre

- le fait que toute extrapolation sera a priori plus robuste avec un nombre restreint de paramètres matériaux,
- que des essais anisothermes de validation doivent être considérés systématiquement.

1.2.2 Endommagement

Pour des raisons de disponibilité du parc machines à Snecma, l'essai a été interrompu après 3300 cycles. Il a alors été simulé numériquement grâce au modèle viscoplastique couplé aux différentes lois d'endommagement, implanté dans Zebulon. Le premier modèle testé est le modèle en $\dot{D} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\epsilon}^p|$ et sans refermeture de fissures. Après calcul numérique, la durée de vie résultante est de 384 cycles. La différence avec les informations expérimentales (non-rupture après 3300 cycles), s'explique par le fait que numériquement, l'endommagement n'apparaît qu'en compression¹, comme montré sur les figures 4.10 et 4.11 (D est l'endommagement maximal, *i.e.* dans la direction de sollicitation).

Or ce modèle traite de la même manière endommagement en traction et en compression, tandis qu'en réalité l'endommagement en compression est beaucoup plus faible que l'endommagement en traction. Les modèles prenant en compte la refermeture des micro-défauts et la dissymétrie de l'évolution de l'endommagement en traction et en compression, devraient être plus à même de prévoir la bonne durée de vie correspondant à cet essai.

Le modèle en $\dot{D} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\epsilon}^p|$ avec refermeture des micro-défauts (et $h = 0$) a donc été utilisé pour une deuxième simulation couplée de l'essai. La durée de vie calculée est

¹sur une éprouvette multiperforée, des zones de traction seraient apparues

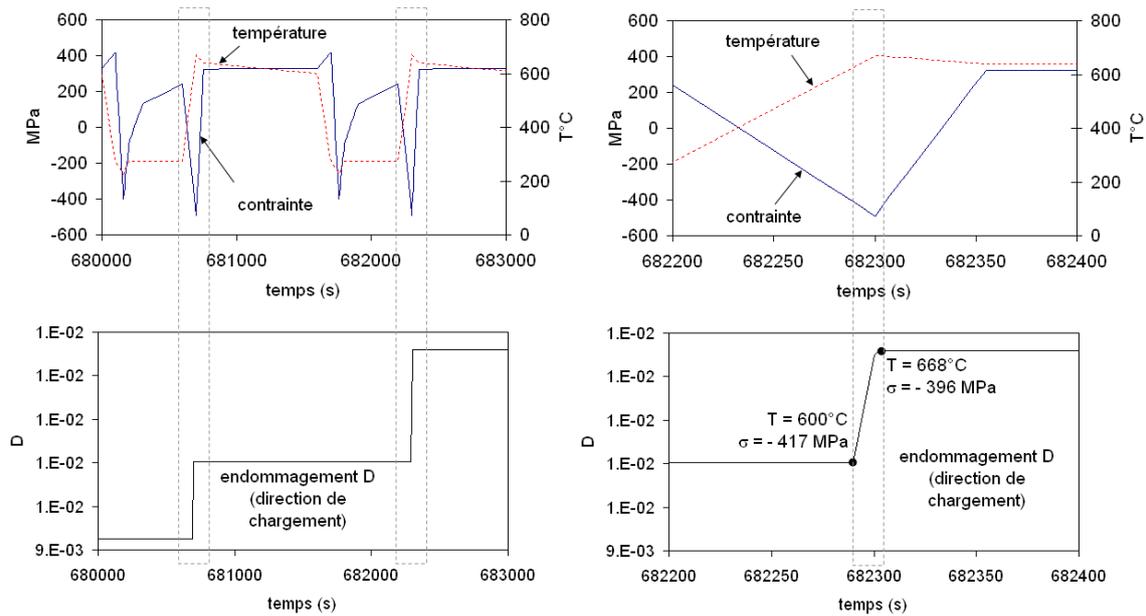


FIG. 4.10: Evolution de l'endommagement, de la contrainte et de la température selon le modèle incrémental $\dot{D} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\epsilon}^P|$

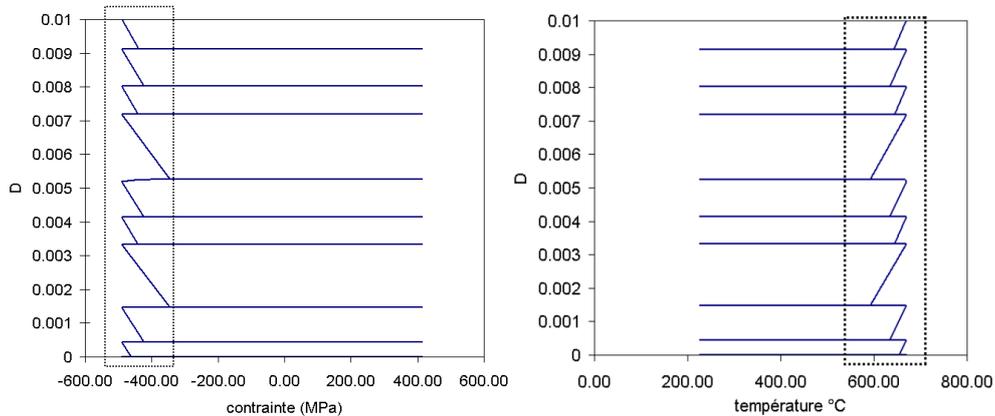


FIG. 4.11: Evolution de l'endommagement en fonction de la contrainte et de la température appliquées selon le modèle incrémental $\dot{D} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\epsilon}^P|$

cette fois-ci de 580 cycles. L'amélioration est nette mais pas suffisante : en effet, l'endommagement n'est que 2 à 3 fois inférieur à l'endommagement constaté avec le modèle $\dot{D} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\epsilon}^P|$ sans h (ou $h = 1$), comme on peut le voir sur la figure 4.12. Sur cette figure, le nombre de cycles est mis à zéro au seuil d'endommagement. On ne prend ainsi en compte que les derniers cycles de l'essai, où l'endommagement évolue jusqu'à sa valeur critique D_c .

Comme vu dans le chapitre 1, les modèles en $\dot{D} = (\bar{Y}/S)^s \langle \dot{\epsilon}^P \rangle$ et $\dot{D} = (\langle \tilde{\sigma} \rangle^2 / 2ES)^s \dot{p}$ ont l'avantage de modéliser un endommagement beaucoup plus faible en compression que les

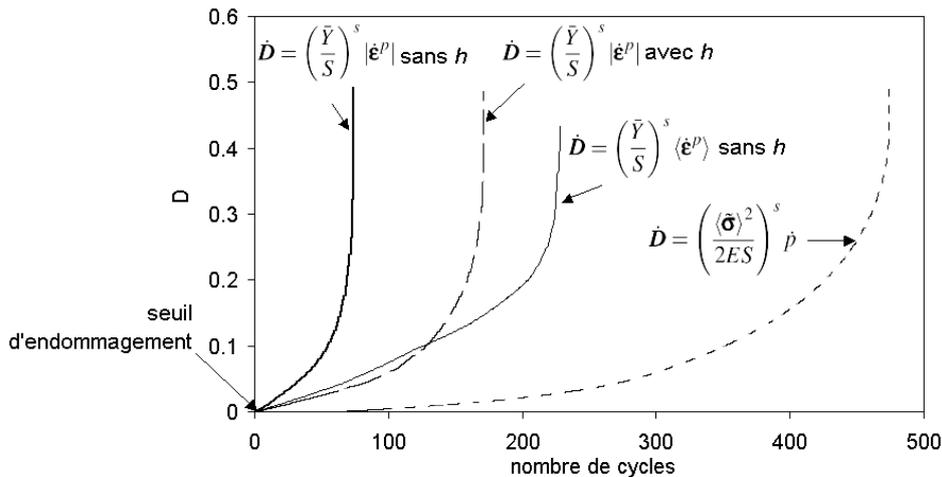


FIG. 4.12: Evolution de l'endommagement selon le modèle incrémental $\dot{D} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\epsilon}^p|$ avec et sans h , lors de la simulation de l'essai thermomécanique.

deux modèles précédents. On a donc simulé l'essai avec ces deux modèles également. On trouve alors respectivement une durée de vie de 900 et de 1730 cycles.

Il est clair que la tendance à modéliser un endommagement très faible en compression améliore les résultats en terme de durée de vie, en comparaison avec l'essai thermomécanique. De plus, les modèles incrémentaux de type Lemaitre n'ont pas été écrits pour la compression, et ont été identifiés dans des conditions qui sont loin des rapports de charge très négatifs. Il n'est donc pas étonnant que l'on soit éloigné de plus d'un facteur 2 de l'information expérimentale, lorsque l'on ne tient pas compte de la dissymétrie traction/compression. Rappelons également que même si l'amplitude de contrainte et de déformation plastique du cycle stabilisé est reproduite par le modèle à simple viscosité, l'erreur à chaque cycle du comportement se répercute sur le nombre de cycles à rupture calculé par le modèle d'endommagement.

Toutefois, ces résultats sont à considérer avec précaution puisque l'essai introduit du flambage viscoplastique au premier cycle. D'autres essais thermomécaniques plus appropriés, en cours (plus chauds, avec moins de compression), doivent permettre de tirer davantage de conclusions quant à la robustesse des modèles sous chargement anisotherme complexe. Des zones de traction apparaissent en fatigue thermique aux abords de la multiperforation, ce sera donc sur ce type d'essai que l'on validera au final la modélisation (chapitre 5).

2 Durée de vie et histoire du chargement

Les lois incrémentales ont l'avantage de prendre en compte naturellement certains phénomènes observés expérimentalement. Les lois écrites en nombre de cycles à rupture ne permettent pas de décrire la rupture sous chargement monotone, nous montrerons

dans ce chapitre que les lois incrémentales le permettent, sans introduction de paramètre supplémentaire. Elles sont également capables de rendre compte du cumul non-linéaire de l'endommagement lorsque des petits cycles puis des grands cycles de chargement sont appliqués simultanément.

2.1 Rupture sous chargement monotone

Les modèles de comportement couplés à l'endommagement permettent aisément de modéliser la rupture sous chargement monotone, puisque la variable d'endommagement devient une variable à part entière, au même titre que la déformation ou la contrainte, mais non-observable. L'identification d'un modèle viscoplastique relativement simple réalisée dans cette thèse privilégie les chargements de fatigue et de fluage, mais il est également important de pouvoir prévoir l'ordre de grandeur de la déformation à rupture dans le cas d'un chargement de traction. On se propose ici de simuler des essais de traction menés à

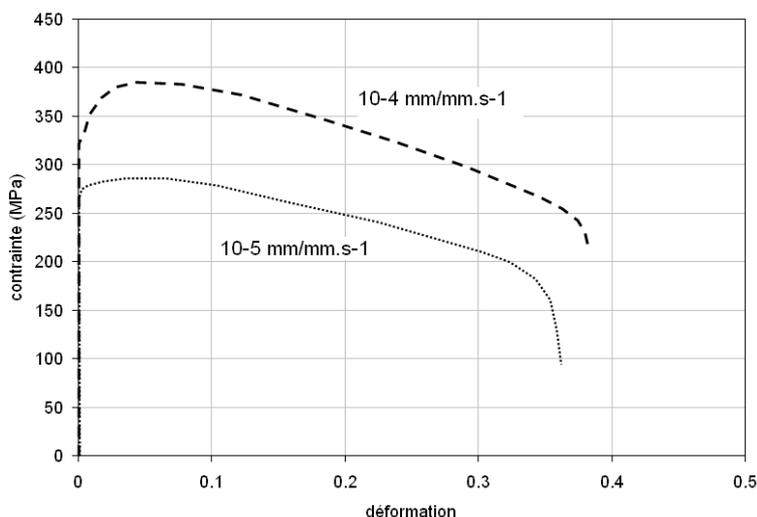


FIG. 4.13: Courbes de traction à rupture, 800°

800°C et à 900°C, à 10^{-4} et $10^{-5} s^{-1}$ (voir figure 4.13). Le modèle viscoplastique est couplé à la loi d'endommagement incrémentale $\dot{D} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\epsilon}^p|$, couplage réalisé via la contrainte effective comme vu précédemment. Les paramètres de comportement et d'endommagement ont été identifiés dans le chapitre 3. Les caractéristiques de chaque essai sont reportés dans le tableau 2.1

température	vitesse de déformation	ϵ_R expérimental	ϵ_R simulé
800°C	$10^{-4} s^{-1}$	0.47	0.32
800°C	$10^{-5} s^{-1}$	0.42	0.49

Identifié en fluage et en fatigue, le modèle de comportement ne reproduit pas parfaitement les courbes de traction puisque les écrouissements sont modélisés comme très vite saturés. La

contrainte maximale simulée correspond à environ 80% de la contrainte maximale réelle, mais rappelons que le modèle n'introduit pas d'érouissage isotrope (ce dernier est pris constant à la valeur R_∞). On observe néanmoins que la déformation à rupture est respectée par rapport aux essais.

Bien qu'identifié préférentiellement en fatigue et en fluage, le modèle d'endommagement incrémental couplé à la viscoplasticité rend donc compte de la rupture en traction monotone, sans avoir introduit de paramètre supplémentaire.

2.2 Cumul non-linéaire du dommage

Lorsque l'on simule un chargement cyclique, piloté en déformation, de rapport de charge $R_\epsilon = \epsilon_{min}/\epsilon_{max} = -1$ sur un volume élémentaire représentatif, successivement selon des cycles de faible amplitude puis de plus forte amplitude ($\Delta\epsilon_1 = 0.007$ et $\Delta\epsilon_2 = 0.006$), et si l'on rapporte dans un graphique le nombre de cycles effectués N_1 sous chargement 1, NR_1 sur le nombre de cycles à rupture NR par rapport au nombre de cycles N_2 sous chargement 2, NR_2 sur le nombre de cycles à rupture, on obtient la règle de cumul de dommage du modèle (avec $N_1 + N_2 = NR$). Les courbes de cumul du dommage ont ainsi été calculées pour différents modèles, et sont tracées sur la figure 4.14. Les lois anisotropes incrémentales permettent naturellement de rendre compte de cette non-linéarité du cumul de dommage. La règle de cumul linéaire de Miner (fausse en général) $N_1/NR + N_2/NR_2 = 1$ est la droite pointillée.

2.3 Interaction fatigue-fluage

Une pièce soumise à de la fatigue oligocyclique verra sa durée de vie diminuer nettement si l'on introduit un temps de maintien même court à contrainte maximale durant le cycle. Ce phénomène, appelé effet *Dwell* ou encore interaction non-linéaire fatigue-fluage, peut s'avérer critique pour les composants aéronautiques soumis à des températures élevées. Il est d'autant plus sévère que l'interaction fatigue-fluage est importante. C'est cette interaction que l'on désire qualifier ici, en simulant numériquement des courbes d'interaction fatigue-fluage par le modèle d'endommagement anisotrope $\dot{D} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\epsilon}^p|$ couplé à la viscoplasticité.

Sur la figure 4.15, les courbes d'interaction fatigue-fluage du Haynes 188 à 800°C ont été simulées. N_{RF} est la durée de vie en fatigue pure (en nombre de cycles), i.e. lorsque $\Delta t = 0$. Le temps t_{RC} est la durée de vie en fluage pur. N_R est la durée de vie lorsqu'un temps de maintien Δt est introduit, et $t_R = N_R \Delta t$. L'interaction fatigue-fluage est linéaire (hypothèse fautive en général) lorsque la loi linéaire de Taira (1973) est obtenue : $t_R/t_{RC} + N_R/N_{RF} = 1$.

Les simulations ont été réalisées à une contrainte de 200 MPa. Le temps de montée et de descente en contrainte δt est de 100 secondes, pour un temps de maintien Δt que l'on fait varier à chaque simulation ($T = \Delta T + 2\delta t$ ne désigne pas ici la température). Les courbes ont été tracées pour différentes valeurs de X_∞ , valeur à saturation de l'érouissage cinématique ($X_\infty = C/\gamma$), afin d'observer la dépendance de la non-linéarité fonction de X_∞ .

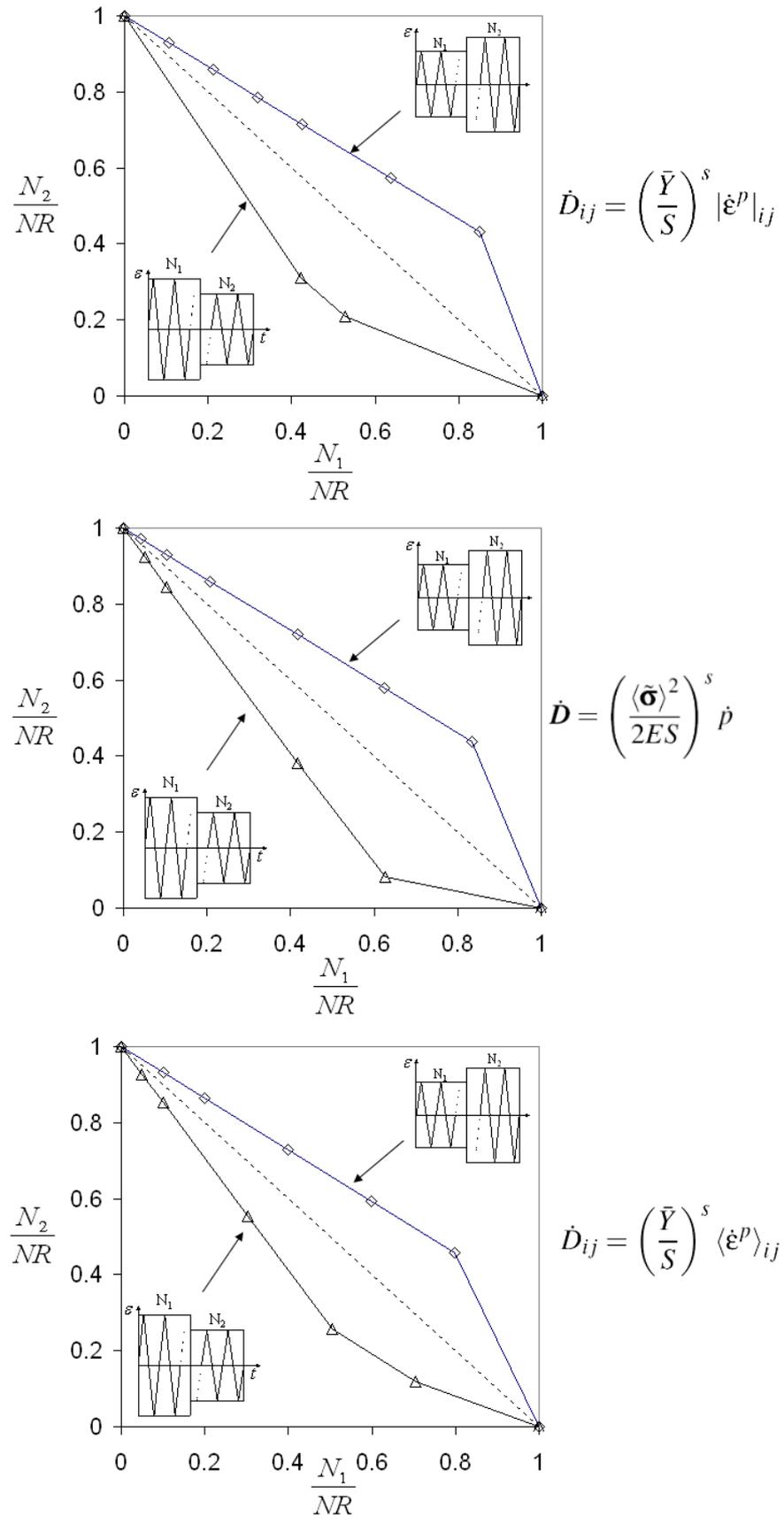


FIG. 4.14: Cumul non-linéaire des dommages, en fonction de l'histoire du chargement (Haynes 188, déformations imposées, à 800°C).

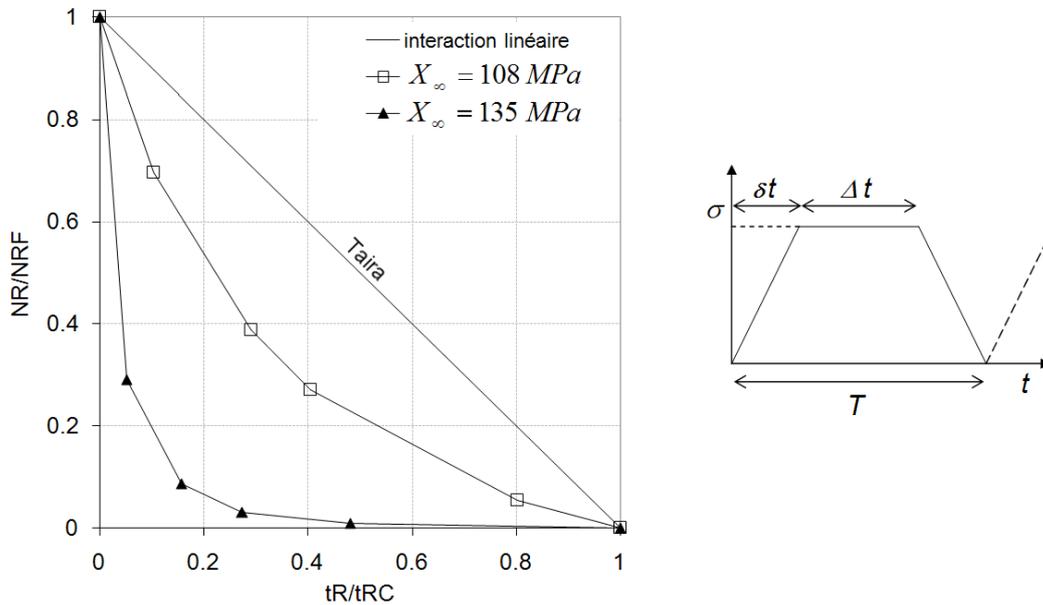


FIG. 4.15: Courbes d'interaction fatigue-fluage simulées, modèle anisotrope à 800°C

Cette dépendance avait déjà été observée dans la thèse de Sermage (1998), mais dans le cas isotrope à l'époque.

On observe dans le cas anisotrope que l'on retrouve cette dépendance de la non-linéarité de l'interaction fatigue-fluage fonction de X_∞ . Cette donnée peut servir au recalage des paramètres de visco-plasticité, si l'on dispose d'un essai de fatigue-fluage à rupture, et ainsi à identifier la valeur optimale de X_∞ du matériau. Par ailleurs, plus la valeur de X_∞ est élevée, et plus la non-linéarité est accentuée : l'introduction d'un temps de maintien en fatigue réduit alors considérablement la durée de vie du matériau. C'est pourquoi il est indispensable de rendre compte correctement de ce phénomène pour le dimensionnement des composants sous températures élevées.

3 Chargements biaxiaux

3.1 Chargements biaxiaux proportionnels et non-proportionnels

3.1.1 Triaxialité des contraintes – traction équilibaxiale

La fonction de triaxialité (\tilde{R}_v qui fait intervenir le taux de triaxialité $T_X = \tilde{\sigma}_H / \tilde{\sigma}_{eq}$, équation (1.8)) joue un rôle important dans le cas de chargements tridimensionnels (Mirza & al 1996, Borvik & al 2003, Hopperstad & al 2003). Il est connu (Rice & Tracey, 1969) que lors de chargements tridimensionnels, la triaxialité rend le matériau plus fragile. Un exemple est proposé ici : on simule la réponse du Haynes 188 à 800°C soumis à un chargement de traction simple, uniaxiale en déformation dans la direction 1, puis équilibaxiale dans les directions 1 et 2 avec les mêmes niveaux de déformation, et on observe la déformation à

rupture. Les résultats sont présentés figure 4.16

La déformation à rupture est nettement moindre en traction équibiaxiale, qu'une traction uniaxiale. On note également qu'en traction biaxiale, c'est dans la direction libre (direction 3) que l'endommagement est maximal, du fait de la forme anisotrope du tenseur d'endommagement par la loi $\dot{D} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\epsilon}^p|$ considérée ici. L'effet de l'anisotropie est également mis en évidence lors de chargements non-proportionnels.

3.1.2 Influence du trajet de chargement

En guise d'illustration de la robustesse des modèles et de leur implémentation, on se propose d'étudier les courbes ϵ_2^R vs ϵ_1^R à rupture en contrainte plane, et leur dépendance au trajet de chargement.

Le modèle utilisé lors des calculs est celui en $|\dot{\epsilon}^p|$, avec et sans refermeture des micro-défauts. On considère un écrouissage isotrope seul. Le seuil d'endommagement est pris constant ($p_D = \epsilon_{pD}$). Les paramètres matériaux utilisés pour cette étude correspondent à l'acier SOLDUR 355 : $E = 230000$ MPa, $\nu = 0.3$ pour l'élasticité, $\sigma_y = 375$ MPa comme limite d'élasticité, $R_\infty^y = 120$ MPa, $b = 25$ pour l'écrouissage isotrope exponentiel, $\epsilon_{pD} = 2.5 \times 10^{-2}$ comme seuil d'endommagement et pour l'endommagement :

- $S = 0.57$ MPa $s = 4$, $D_c = 0.5$ sans refermeture des micro-défauts ($h = 1$).
- $h = 0$, $S = 0.43$ MPa $s = 4$, $D_c = 0.5$ avec refermeture des micro-défauts.

Ils correspondent à une contrainte ultime de $\sigma_u = 474$ MPa en traction uniaxiale et à une déformation à rupture (après adoucissement) $\epsilon_{pR} \approx 0.3$.

Les courbes ainsi obtenues sont présentées figure 4.18 et 4.17 en chargement proportionnel (trait fin) et dans le cas de trajets de chargement non-proportionnels. La plupart des trajets de chargement non-proportionnels présentent un amorçage de fissure en deçà de la courbe limite en chargement proportionnel. Des trajets de chargement favorables sont obtenus pour les deux modèles, après une précharge biaxiale. Seul le modèle avec refermeture de micro-défauts exhibe des trajets de chargement très favorables, comme observé expérimentalement (Moussy & Cordebois, 1990).

Ce genre de simulations numériques offre la possibilité d'optimiser les trajets de chargement en minimisant la valeur de l'endommagement atteint, et ainsi de pouvoir calculer numériquement des courbes limites de formage (CLF) à rupture par la mécanique de l'endommagement (Doghri & Billardon 1995, Grange & al 2000). En effet, lors de la réalisation d'une pièce, par formage ou par emboutissage, le matériau est sujet à de grandes déformations plastiques, limitées par les instabilités à l'échelle microscopique, par les phénomènes de localisation des déformations et par l'amorçage de fissure. Ici, on est capable de quantifier les limitations du procédé de formage dues à l'amorçage de méso-fissures, c'est-à-dire lorsque l'endommagement maximal dans le repère principal D_I atteint la valeur critique D_c , en négligeant les aspects d'instabilités. Expérimentalement, différentes courbes limites de formage peuvent être tracées du fait des différents trajets de chargement possibles (proportionnels ou non-proportionnels). La modélisation de la refermeture des micro-défauts joue ici un rôle très important dans la modélisation de la dépendance des conditions de rupture au trajet de chargement.

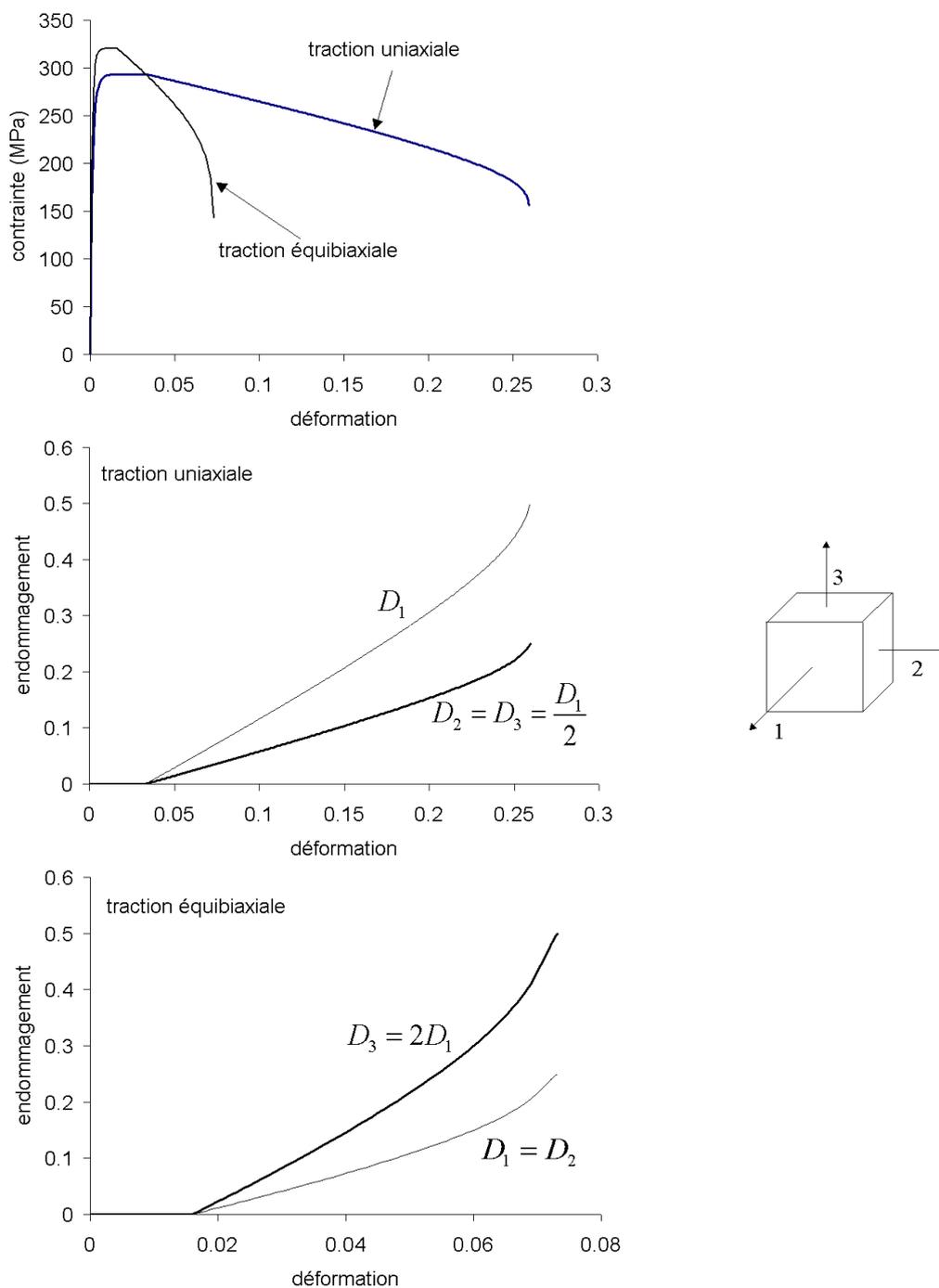


FIG. 4.16: Traction uniaxiale et traction équi-biaxiale, modèle anisotrope du Haynes 188 à 800°C

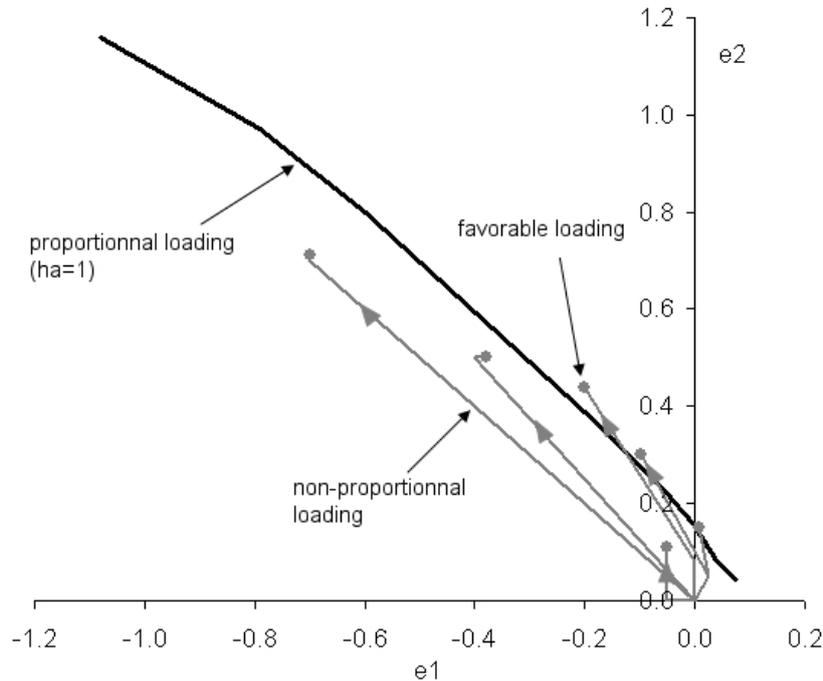


FIG. 4.17: Influence du trajet de chargement : cas sans refermeture des micro-défauts

3.2 Chargements biaxiaux en fatigue alternée

Contrairement aux chargements proportionnels, dans cette partie on se propose de solliciter le matériau N_2 cycles dans la direction 2 jusqu'à rupture après l'avoir sollicité N_1 cycles dans la direction 1, en fatigue, à même amplitude, que ce soit en contrainte ou en déformation (voir figure 4.19) et de mettre en évidence l'effet de l'anisotropie induite de l'endommagement. On note alors $N_1 + N_2$ la durée de vie obtenue comparée à la durée de vie $N_R = NR_1 = NR_2$ obtenue lors d'un chargement dans une seule et même direction. Le rapport du nombre de cycles passé dans une direction sur la durée de vie N_R est tracé en fonction du nombre de cycles passé dans la deuxième direction sur la durée de vie N_R . Dans un diagramme de cumul anisotrope des dommages, on trace donc N_1/N_R fonction de N_2/N_R . Cette courbe est calculée pour un chargement piloté en déformations, puis pour un chargement piloté en contraintes. Les rapports de charge appliqués sont $R_\varepsilon = R_\sigma = -1$, l'amplitude en déformation est de $\Delta\varepsilon = 0.004$, et en contrainte l'amplitude choisie est de $\Delta\sigma = 500$ MPa. Les courbes sont simulées à l'aide des modèles incrémentaux anisotropes sans refermeture des micro-défauts $\dot{\mathbf{D}} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p|$, $\dot{\mathbf{D}} = (\bar{Y}/S)^s \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle$ et $\dot{\mathbf{D}} = ((\bar{\sigma})^2 / 2ES)^s \dot{p}$ couplés à la viscoplasticité, pour le Haynes 188 à 800°C. Les résultats sont présentés sur la figure 4.20.

La non-linéarité du cumul des dommages est beaucoup plus prononcée lorsque le pilotage se fait en déformations. Lorsque l'on trace par exemple pour la loi $\dot{\mathbf{D}} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p|$ l'évolution des composantes du tenseur d'endommagement \mathbf{D} pour différents points choisis sur les courbes (figure 4.21), le pilotage en contrainte induit des évolutions des différentes

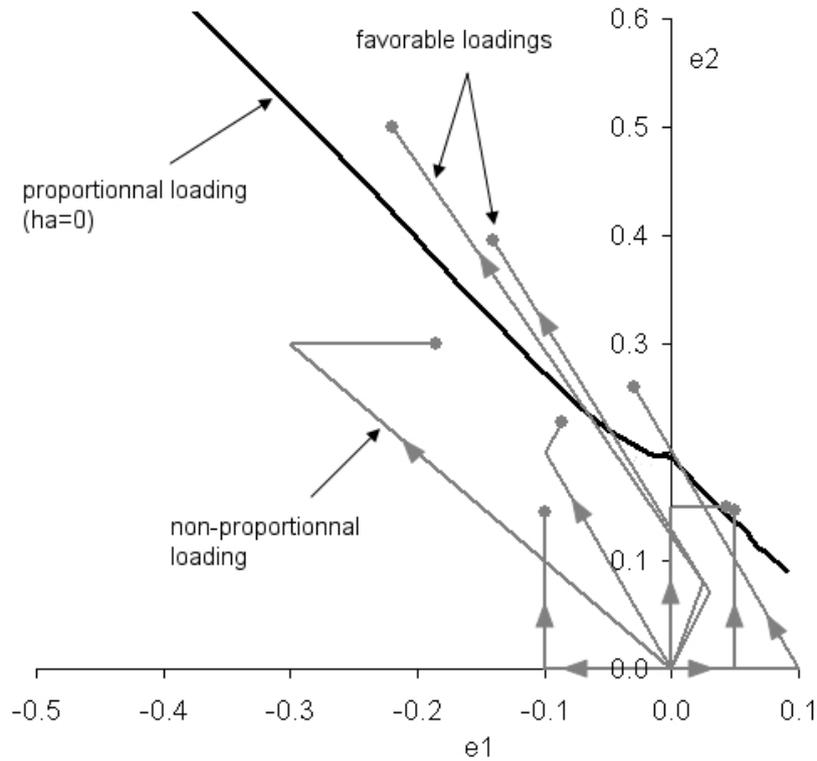


FIG. 4.18: Influence du trajet de chargement : cas avec refermeture des micro-défauts ($h = 0$)

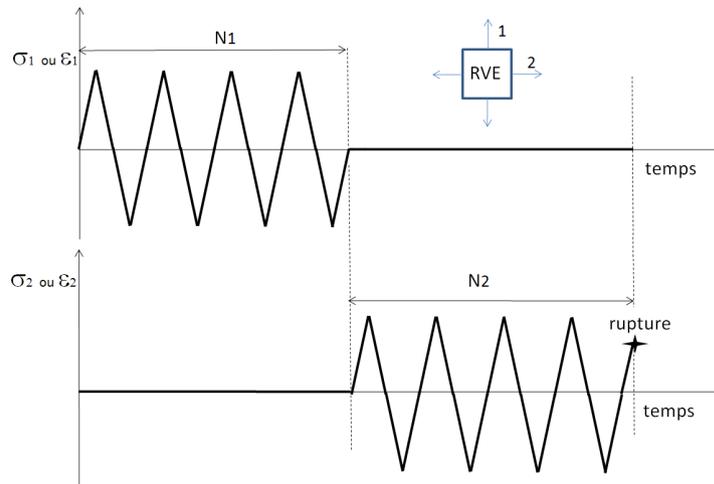


FIG. 4.19: Profil de chargement pour fatigue biaxiale alternée

composantes de \mathbf{D} plus non-linéaires que lors du pilotage en déformation, ce qui explique un cumul moins non-linéaire de l'endommagement lorsque l'on change de direction.

Le modèle $\dot{\mathbf{D}} = (\bar{Y}/S)^s \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rangle$ donne un cumul des dommages dont l'allure est la même que

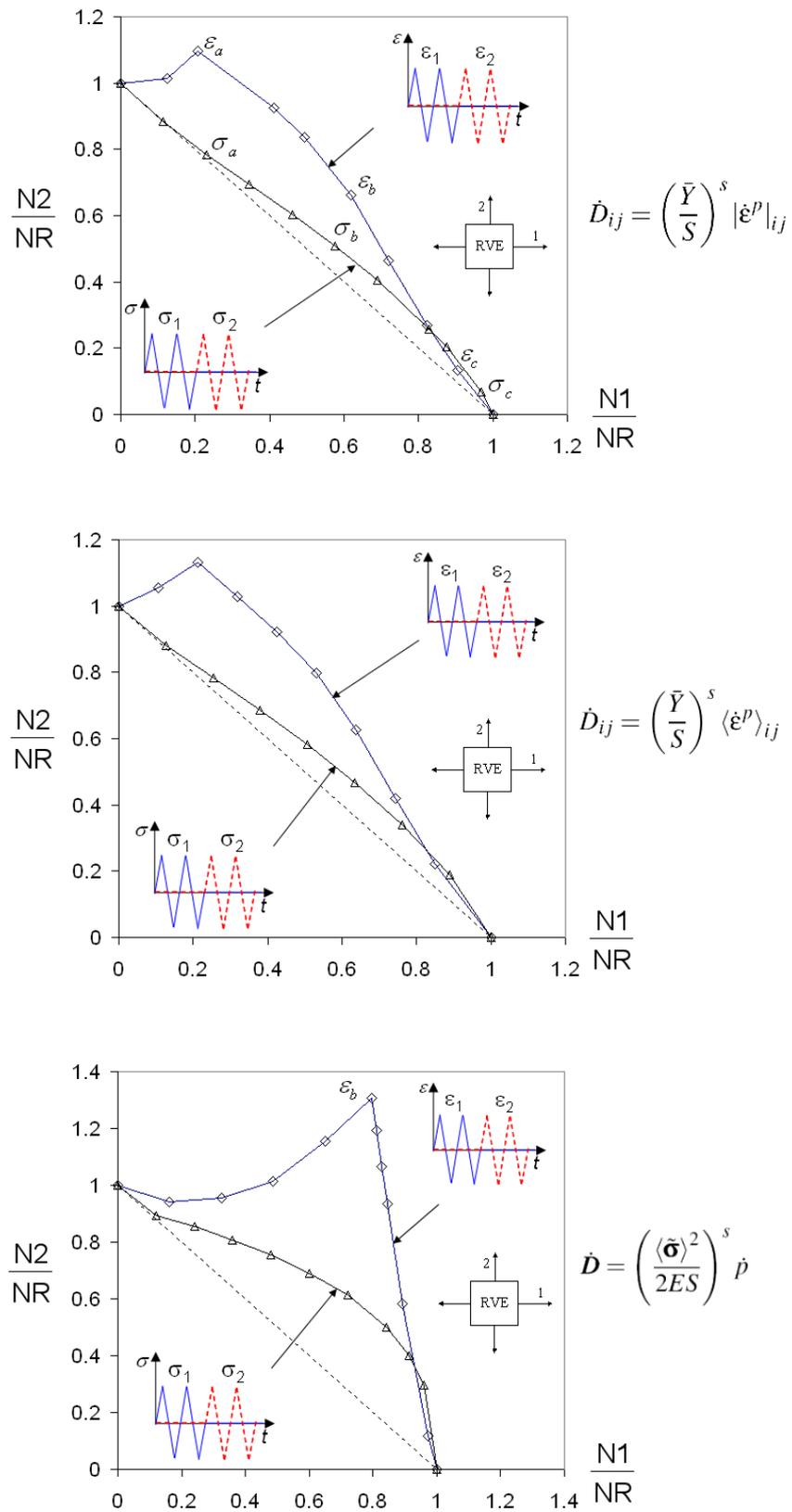


FIG. 4.20: Cumul non-linéaire du dommage en bitraction alternée, pour différents modèles d'endommagement incrémentaux (déformations imposées et contraintes imposées)

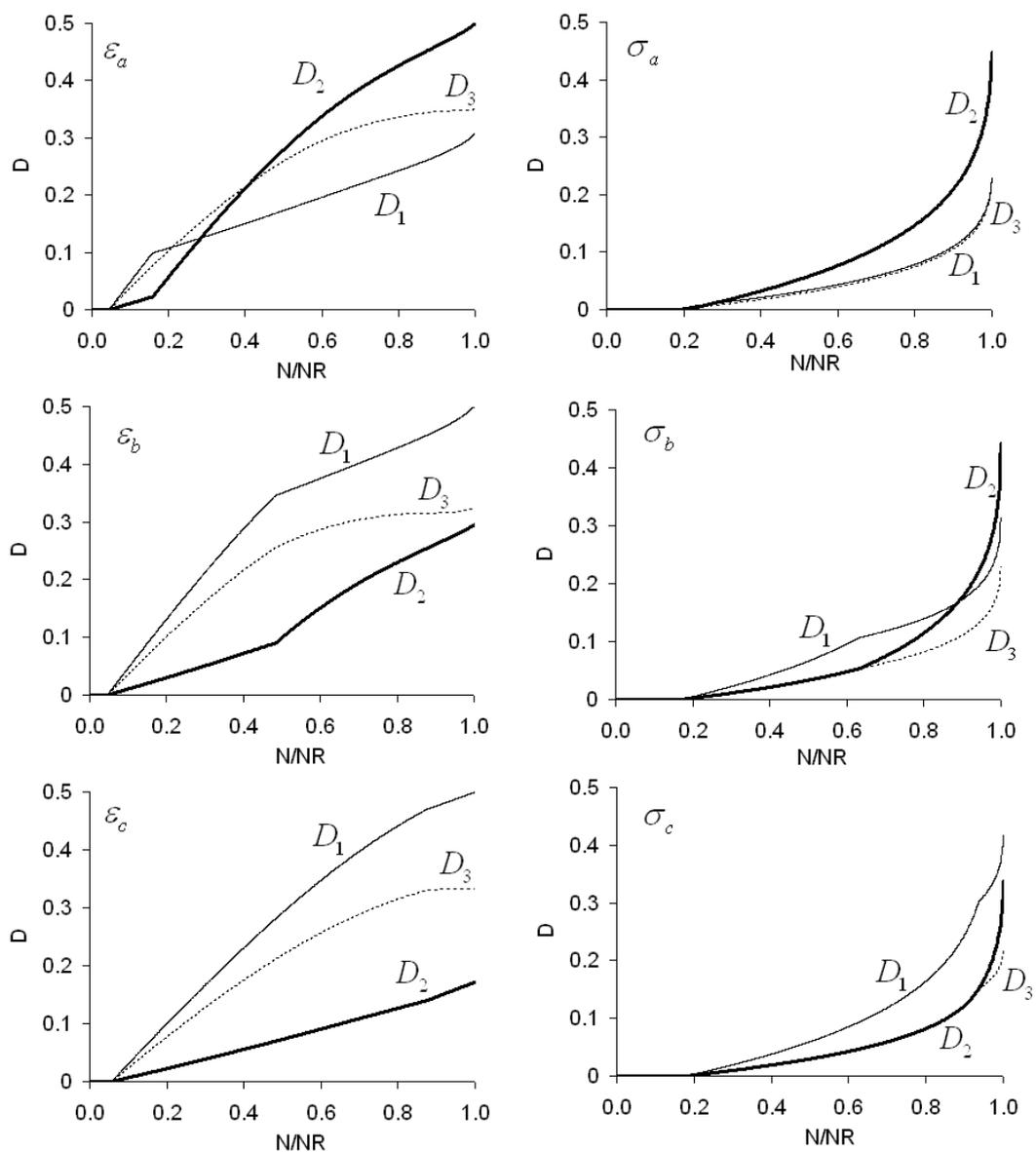


FIG. 4.21: Evolution de l'endommagement en bitraction alternée pour différents N_1 et N_2 , pour la loi $\dot{D} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\epsilon}^p|$

pour la loi en valeur absolue. La loi en $\dot{D} = (\langle \tilde{\sigma} \rangle^2 / 2ES)^s \dot{p}$ donne quant à elle un profil de cumul non linéaire beaucoup plus accentué, lorsque le chargement est piloté en déformations. Un pic est atteint, correspondant au cas où les endommagements D_1 et D_2 atteignent l'endommagement critique D_c au même instant (figure 4.22).

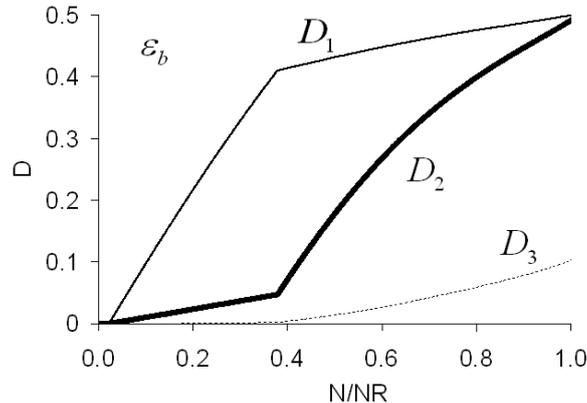


FIG. 4.22: Evolution de l'endommagement en bitraction alternée au point ε_a de la figure 4.20 pour la loi $\dot{D} = (\langle \tilde{\sigma} \rangle^2 / 2ES)^s \dot{p}$

Dans tous les cas, l'introduction d'un pré-cyclage dans une première direction permet de réaliser plus de cycles dans la deuxième direction que si l'on cycle simplement dès le départ dans cette deuxième direction. L'effet de l'endommagement dans la première direction est évidemment moins néfaste que s'il avait été obtenu dans la direction 2 et traduit l'effet de l'anisotropie de l'endommagement. Cette information peut s'avérer particulièrement utile pour la comparaison avec des données expérimentales bi-axiales à venir et la discrimination des modèles. Elle justifie la recherche de chargements non-proportionnels pour le tracé de courbes limites de formage des matériaux utilisés lors de la mise en forme de pièces métalliques.

4 Fréquences élevées - Fatigue à grand nombre de cycles

Les lois incrémentales d'endommagement permettent de prévoir le temps à rupture sous chargements complexes, aussi bien en fluage qu'en fatigue, isotherme ou anisotherme, uni-axiaux ou multiaxiaux. Les hautes températures nécessitent de modéliser les effets visqueux du matériau. Mais lorsque les vitesses de sollicitation sont trop élevées, lorsque l'on sort du domaine de validité des lois de viscosité classiques, en fatigue polycyclique par exemple, où les vitesses de cyclage peuvent atteindre 100 Hz, il faut trouver un moyen de limiter la viscosité, qui, modélisée classiquement par une loi de Norton, ne donne plus du tout de bons résultats (contraintes obtenues trop élevées). Dans cette partie, on propose d'utiliser une loi de viscosité qui sature aux grandes vitesses de déformation, afin d'être capable de prédire la durée de vie du matériau également sous sollicitations rapides, type HCF (High Cycle Fatigue, pour fatigue à grand nombre de cycles).

La loi de viscosité de type Norton permet de définir la contrainte visqueuse en fonction de la vitesse de déformation plastique :

$$\sigma_v = K_N \dot{p}^{1/N} \quad (4.1)$$

Afin de modéliser la saturation de la contrainte visqueuse pour de grandes valeurs de vitesse de déformation plastique, on se propose d'utiliser une loi en exponentielle, du type :

$$\sigma_v = \sigma_v^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{K_N}{\sigma_v^\infty} \dot{p}^{1/N}\right) \right] \quad (4.2)$$

Lorsque $\dot{p} \ll 1$ on retrouve $\sigma_v \simeq K_N \dot{p}^{1/N}$ et lorsque $\dot{p} \gg 1$, on approche de la saturation de la contrainte visqueuse, à savoir $\sigma_v \simeq \sigma_v^\infty$. Cette loi nécessite l'identification d'un nouveau paramètre matériau, σ_v^∞ , que l'on peut par exemple identifier sur des courbes de durée de vie en HCF, puisque c'est ce paramètre qui va jouer sur la quantité de plasticité par cycle lors de vitesses de sollicitation rapides, donc sur la durée de vie.

Une version de ce modèle a été programmée dans Zébulon (routine *plastdamageHCF*), et pour cela il a fallu redéfinir le résidu "visqueux" (en lieu et place de l'expression 2.9)

$$R_r^v = \Delta r - \frac{\Delta t}{\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}}} \left(\frac{\sigma_v^\infty}{K_N} \right)^N \left[\ln \left(1 - \frac{f}{\sigma_v^\infty} \right) \right]^N \quad (4.3)$$

et recalculer les termes de la matrice Jacobienne dépendant du modèle de viscosité choisi.

Lorsque l'on prend en compte la viscosité du matériau, on a besoin de calculer les termes $\frac{\partial R_r^v}{\partial \Delta \mathcal{W}}$ au temps $t_{n+\theta}$. Pour l'incrément de variable Δr (cf. chapitre 2), on utilise à présent la loi de viscosité exponentielle (eq. 4.2), et on a ainsi

$$\frac{\partial R_r^v}{\partial \Delta r} = 1 - \frac{N \Delta t}{\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}}} \left(\frac{\sigma_v^\infty}{K_N} \right)^N \left[-\ln \left(1 - \frac{f_{n+\theta}}{\sigma_v^\infty} \right) \right]^{N-1} \frac{1}{\sigma_v^\infty - f_{n+\theta}} \frac{\partial R_r}{\partial \Delta r} \quad (4.4)$$

Pour les autres variables $\Delta \mathcal{W}_i = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e, \Delta \boldsymbol{\alpha}, \Delta \mathbf{D}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_r^v}{\partial \Delta \mathcal{W}_i} = & - \frac{N \Delta t}{\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}}} \left(\frac{\sigma_v^\infty}{K_N} \right)^N \left[-\ln \left(1 - \frac{f_{n+\theta}}{\sigma_v^\infty} \right) \right]^{N-1} \frac{1}{\sigma_v^\infty - f_{n+\theta}} \frac{\partial \Delta R_r}{\partial \Delta \mathcal{W}_i} \\ & - \frac{2}{3} \theta \Delta t \left(\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{n+\theta} : \mathbf{n}_{n+\theta}} \right)^{-\frac{3}{2}} \left[-\frac{\sigma_v^\infty}{K_N} \ln \left(1 - \frac{f_{n+\theta}}{\sigma_v^\infty} \right) \right]^N \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathcal{W}_i} \Big|_{n+\theta} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Des simulations ont été menées sans endommagement afin de comparer les modèles faisant intervenir les deux lois de viscosité : la loi de Norton et la loi en exponentielle. Des cycles pilotés en déformation, à un rapport de charge $R_e = -1$, avec $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = 0.007$ ont été simulés à 800°C en augmentant la vitesse de déformation imposée. La comparaison des deux modèles est présentée sur la figure 4.23 A vitesse lente, les deux lois se superposent. A vitesse élevée, les boucles obtenues avec la loi de Norton ne présentent plus de plasticité. A contrario, la loi en exponentielle permet d'avoir encore de l'hystérésis (comme observé) et de pouvoir calculer une durée de vie via le post-processeur d'endommagement.

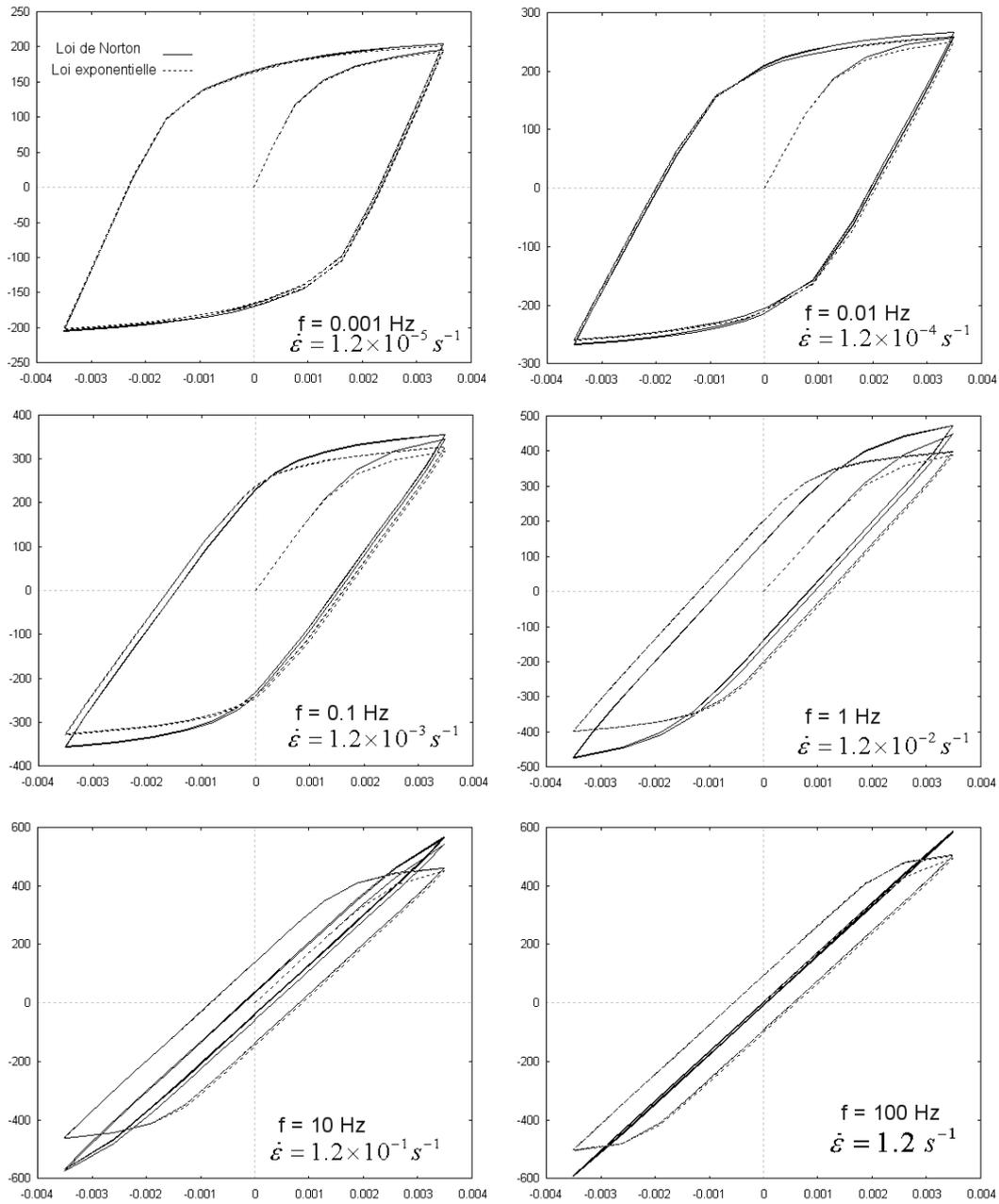


FIG. 4.23: Boucles d'hystérésis en fatigue obtenues pour la loi de Norton et la loi exponentielle de viscosité, à différentes vitesses de sollicitation.

5 Conclusion

Les lois d'endommagement incrémentales permettent, avec un seul jeu de paramètres, de rendre compte d'une multitude de phénomènes non-linéaires observés expérimentalement : interaction fatigue-fluage, chargements non-proportionnels bénéfiques, rupture en monotone (et donc influence de surcharges), etc.

L'importance de l'identification des paramètres de viscoplasticité dans le cas anisotherme a été soulevée dans ce chapitre, au travers d'un essai thermomécanique complexe mettant à rude épreuve les modèles utilisés. En terme de validation, les lois incrémentales semblent robustes, hormis lorsque l'endommagement est principalement atténué par la compression car les rapports de charge négatifs ne font pas partie de la base expérimentale d'identification. Lorsque des phases de compression existent, notamment aux hautes températures lors de chargements anisothermes, les lois tenant compte de la dissymétrie traction/compression prennent le dessus, et prévoient une durée de vie plus proche des expériences que les lois symétriques.

La méthodologie de calcul de durée de vie a été validée sur un cas isotherme de fatigue à temps de maintien, en calcul couplé ainsi qu'en post-traitement d'un calcul élasto-viscoplastique sans endommagement. Il reste à corrélérer simulation numérique et expérience sur un cas tridimensionnel, représentatif de l'application chambre de combustion.

Sommaire

1	Définition et réalisation d'un essai sur structure représentative	108
1.1	La chambre de combustion : un composant fortement sollicité	108
1.2	Définition et réalisation du montage d'essai	110
1.3	Mise en oeuvre de l'essai au banc à flamme	114
1.4	Acquisition des champs thermiques	115
2	Simulation numérique de l'essai	115
2.1	Principe	118
2.2	Calcul thermique transitoire	119
2.3	Calcul élasto-viscoplastique sous chargement thermique	121
2.4	Endommagement par post-traitements du calcul mécanique	124
3	Confrontation entre résultats numériques et expérimentaux	124
3.1	Comportement de la structure	124
3.2	Prévision de durée de vie	128
4	Conclusion	135

La modélisation du type endommagement incrémental a été validée par des essais thermomécaniques uniaxiaux, mais la prise en compte de chargements multiaxiaux sous chargement anisotherme n'a pas encore été qualifiée. De plus, la modélisation doit être validée pour des applications à l'échelle d'une structure. Un essai de fatigue thermique structural a donc été dimensionné et réalisé sur une structure représentative de l'application « chambre de combustion ». Afin de confronter les résultats du modèle aux données expérimentales de durée de vie, une simulation numérique de l'essai a par ailleurs été réalisée. Ce dernier chapitre présente la mise en oeuvre de l'essai, les observations et résultats expérimentaux ainsi que leur corrélation avec les résultats numériques.

1 Définition et réalisation d'un essai sur structure représentative

La validation d'une méthodologie de prévision de durée de vie passe nécessairement par l'étude d'un cas complexe, proche de l'application réelle. D'une part, l'éprouvette doit permettre de représenter fidèlement les caractéristiques géométriques du composant étudié, d'autre part, les conditions d'essai doivent être fidèles au chargement habituellement rencontré par le composant lors de son fonctionnement normal. La durée de vie de l'éprouvette sera alors comparée à la durée de vie numérique correspondant à des conditions d'essai identiques. Dans cette section, les choix technologiques de réalisation, d'instrumentation et de dépouillement de l'essai seront présentés, avant de commenter les résultats obtenus.

1.1 La chambre de combustion : un composant fortement sollicité

De par son rôle, on comprend aisément que la chambre de combustion est un composant du moteur qui subit des sollicitations thermomécaniques complexes. La figure 5.1 schématise le fonctionnement d'une chambre : la principale source de contraintes est d'origine thermique, puisque qu'en face externe, l'arrivée d'air froid va permettre à la multiperforation de jouer son rôle de protection thermique en créant un film d'air en face interne, elle-même soumise à des températures très élevées. La température de flamme peut atteindre 1400°C, la température de la face interne voit quant à elle une température maximale de 900°C, grâce essentiellement au film d'air froid créé par les multiperforations. Ces gradients thermiques vont déformer la pièce dans toutes les directions, et donc la contraindre. La complexité de la géométrie du perçage de multiperforation rajoute des difficultés supplémentaires, puisque peu de symétries sont exploitables. En effet, les perçages sont réalisés selon des motifs hexagonaux (figure 5.2) dont les caractéristiques (angle de perçage, pas transversal, pas radial, diamètre de perçage) sont amenés à varier selon le choix de conception.

L'essai de fatigue thermique structural doit pouvoir tenir compte des principales propriétés de la chambre de combustion, à savoir ses propriétés géométriques et de fonctionnement. On choisit donc de réaliser un essai de fatigue au banc à flamme, sur une éprouvette

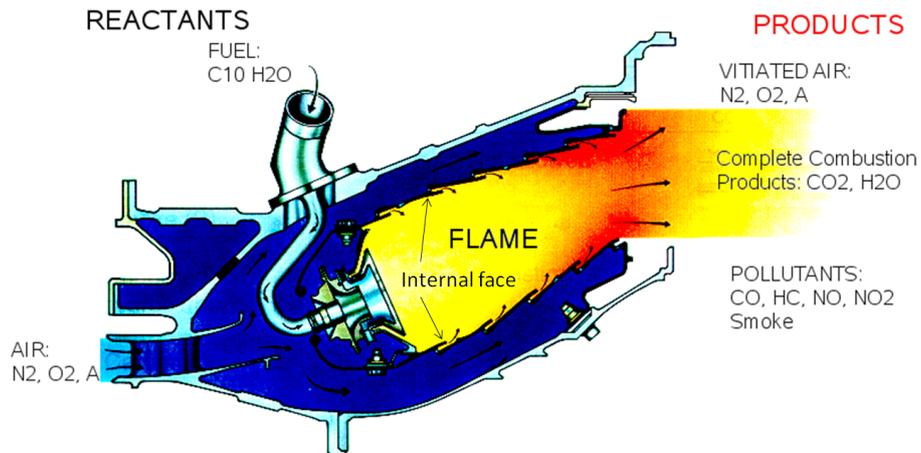


FIG. 5.1: Schéma de fonctionnement d'une chambre de combustion

multi-perforée, où l'on reproduira le refroidissement par film d'air froid à l'aide d'une arrivée d'air comprimé dans un compartiment en face arrière de l'éprouvette. La géométrie des éprouvettes s'inspire de la structure de la chambre de combustion, puisque l'on choisit d'utiliser des plaquettes de 50mm de côté et de 2mm d'épaisseur, percées de 115 trous de multi-perforation selon les deux géométries montrées figure 5.2. La figure 5.3 présente la géométrie complète d'une éprouvette dont la multi-perforation correspond au motif 1. La structure d'étude à présent déterminée, il est nécessaire de définir les données d'entrées, les données mesurées et les moyens de mesures utilisés, avant de réaliser le montage.

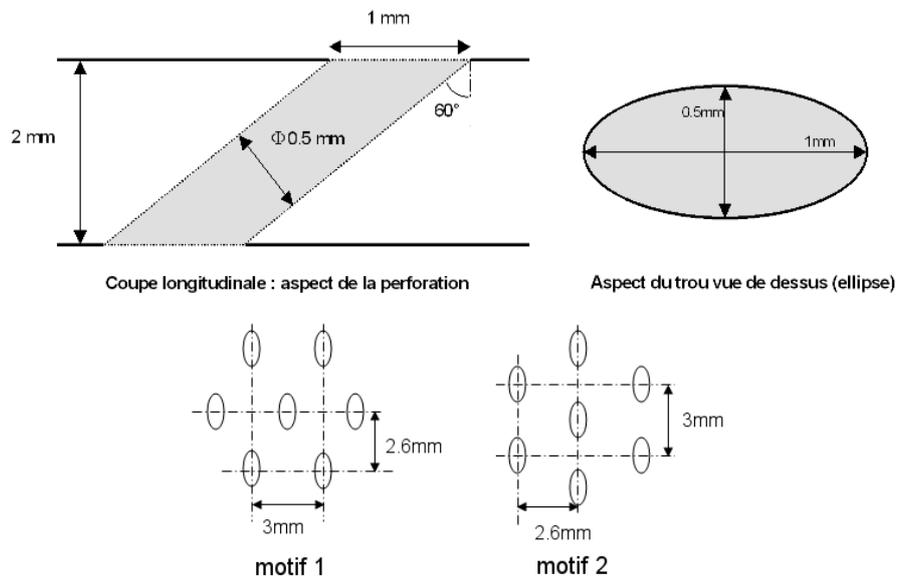


FIG. 5.2: Motifs de perçage pour multi-perforation sur chambre de combustion

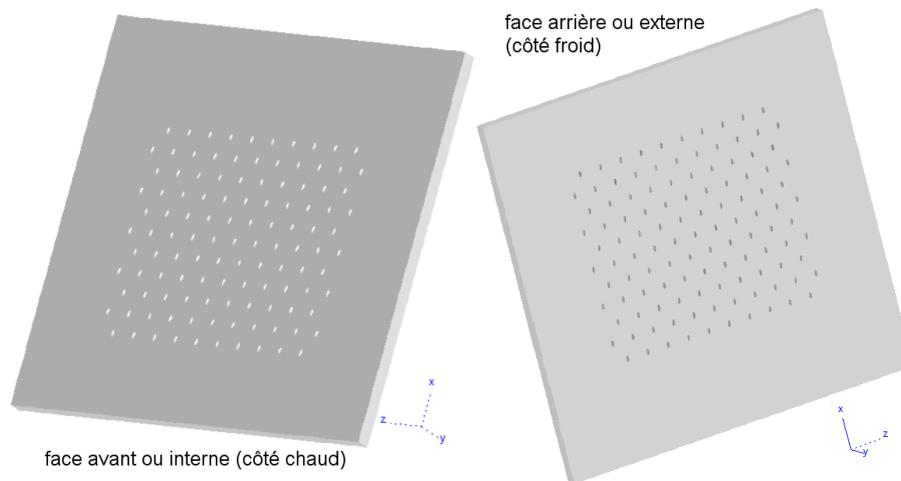


FIG. 5.3: Géométrie d'une éprouvette pour l'essai de fatigue thermique structural

1.2 Définition et réalisation du montage d'essai

1.2.1 Données d'entrées

Pour réaliser l'essai de fatigue thermique, Snecma dispose d'un banc à flamme fonctionnant avec un mélange d'oxygène et de tétrène, et de plusieurs géométries de chalumeau. On est capable de contrôler la puissance calorifique de la flamme (en jouant sur la stoechiométrie du mélange oxygène-tétrène), donc la température en face avant de l'éprouvette, mais également de réguler le débit d'air froid en face externe de l'éprouvette. Les quantités que l'on choisit d'imposer sont donc la température de flamme et le débit d'air froid en face arrière, qui auront une incidence sur les températures en face arrière et en face avant de l'éprouvette.

Les deux zones les plus critiques de la chambre de combustion sont la zone du premier trou de multiperforation en aval des trous de dilution, et la zone de raccord entre la paroi de la chambre et la bride externe (voir figure 5.4). Cette dernière a servi à définir l'essai de validation thermomécanique uniaxial, car elle subit de grands niveaux de contraintes axiales et tangentielles. La zone en aval des trous de dilution est quant à elle peu chargée en contraintes axiales et tangentielles. On se propose donc d'utiliser les données en termes de températures disponibles dans cette zone pour définir les conditions d'essai de fatigue thermique.

Selon des résultats de calculs thermiques menés sur la chambre par le bureau d'études, le cycle « type » pourrait être défini comme suit :

- temps de montée du ralenti aux pleins gaz : 12s
- palier plein gaz d'une durée de 46.5 s
- température de l'air injecté au palier pleins gaz : environ 520°C
- température de l'air injecté au ralenti : environ 210°C
- temps de descente du plein gaz au ralenti : 12 s
- pression au plein gaz : 24.72 bar en face externe, 24.2 bar en face interne, soit $\Delta P = 0.5$

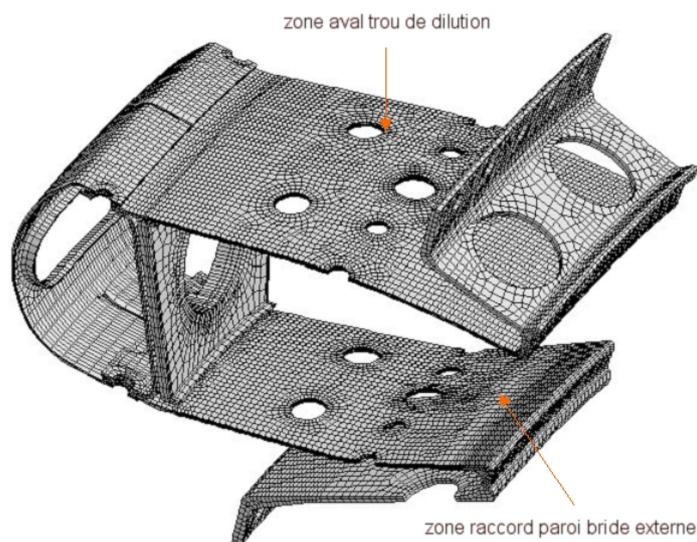


FIG. 5.4: Zones fortement sollicitées sur une chambre de combustion M88

- bar - débit par trou de multiperforation : 0.24g/s
- pression au ralenti : 3.69 bar en face externe, 3.60 bar en face interne, soit $\Delta P = 0.09$ bar
- bar - débit par trou de multiperforation : 0.045g/s

Aux pleins gaz, la température vue par le matériau en face interne est d'environ 900°C. Au ralenti, on considèrera en première approximation qu'il n'y a plus de combustion, donc plus de flamme. A ce moment le chalumeau sera déplacé sur le côté à l'aide d'un vérin et guidé sur un rail. Les valeurs ci-dessus ne pourront cependant pas être rigoureusement respectées, en raison de la difficulté de mise en oeuvre d'un tel essai : par exemple, il est très difficile de contrôler la température de l'air sous pression injecté. Un essai similaire au banc à flamme a permis de constater que la température de l'air froid a même tendance à augmenter tout comme la température du montage au cours de l'essai. Cependant, on ne pourra certainement pas atteindre la valeur de la température au plein gaz pour l'air froid. L'essentiel est en tout cas de connaître le champ de température sur la face arrière. Pour ce qui est du débit de l'air froid, nous sommes également limités par le matériel : un débit maximal de 130 L/min est envisageable, ce qui représente 0.012g/s pour chaque trou de multiperforation. Quant aux pressions atteintes en utilisation réelle, elles ne pourront pas être reproduites ici.

S'inspirant de ces réflexions, le cycle appliqué est le suivant :

- durée pleins gaz (température en face avant : 900°C, débit d'air 130 L/min) : 48 secondes
- durée de ralenti (le chalumeau est écarté, le débit d'air reste à 130 L/min) : 12 secondes.

Des mesures réalisées lors de l'essai d'étalonnage montrent que les températures relevées par des thermocouples au point central des deux faces de l'éprouvette évoluent en cycles

trapèzes conformément au cycle « type » prévu par le bureau d'études. Seuls les niveaux de température sont légèrement différents (figure 5.5).

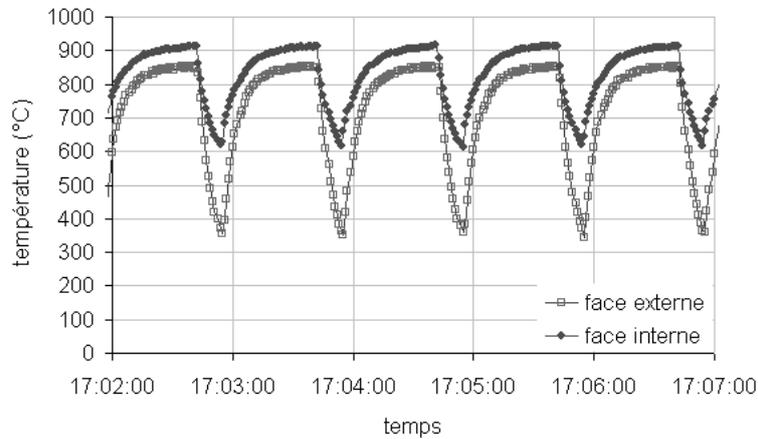


FIG. 5.5: Evolution de la température au point central des deux faces de l'éprouvette étalon

1.2.2 Données mesurées et moyens de mesure

L'objectif de l'essai est de valider le modèle d'endommagement incrémental étudié, il est donc indispensable d'avoir accès au temps à rupture de l'éprouvette. Ici, le temps à rupture est défini comme la durée au terme de laquelle une mésofissure d'une longueur d'environ $300\mu\text{m}$ est détectée. Deux solutions sont possibles pour cela. La première consiste à réaliser des observations *in situ* de l'éprouvette à l'aide d'un appareil optique grossissant. L'encombrement dû au montage, l'accessibilité restreinte à la face arrière de l'éprouvette et la distance à maintenir entre l'éprouvette et l'appareil optique à cause de la chaleur générée par l'essai nous forcent à envisager les choses d'une façon plus pragmatique. Il a donc été décidé de réaliser un support amovible de l'éprouvette, afin de pouvoir la déplacer sans modifier ses conditions de maintien. Il devient alors possible d'observer l'éprouvette à la lunette binoculaire à intervalles de cycles réguliers, jusqu'à obtenir un grossissement d'un facteur 40, suffisant pour visualiser une fissure de 0.3mm .

Il est également indispensable de pouvoir mesurer les températures en face avant et arrière de l'éprouvette, afin d'asservir en conséquence le mélange oxygène-tétrène de la flamme et le débit d'air froid. En face avant, une caméra infra-rouge Flir ThermoVision de gamme spectrale $7.5\text{-}13\mu\text{m}$ munie d'une optique Flir ThermaCAM 12° (grossissement $\times 2$) est utilisée afin d'acquérir les champs de température lorsque le chalumeau n'est pas devant l'éprouvette (lors du refroidissement par exemple). La caméra est associée au logiciel ThermaCAM Researcher Pro 2.7 qui permet de visualiser et de traiter les images sur ordinateur. Sur les deux faces de l'éprouvette, des pyromètres mesurent l'évolution de la température en un point au cours des cycles thermiques. Une éprouvette d'étalonnage est utilisée, sur laquelle sont soudés des thermocouples, afin de réaliser un recalage avec les valeurs de

températures acquises par la caméra infra-rouge et par les différents pyromètres, au cours d'un essai d'étalonnage dédié.

Enfin, on se propose de mesurer les déplacements en surface de la face arrière de l'éprouvette par corrélation d'image. Cela permettra d'en déduire le champ des déformations en face arrière, et de pouvoir comparer les résultats expérimentaux aux simulations numériques. Un moucheti de peinture doit être réalisé sur la face concernée de l'éprouvette, qui puisse résister aux températures élevées vues par la pièce. Une caméra d'acquisition CCD est également nécessaire afin de prendre des images en niveau de gris pendant l'essai. La taille de l'éprouvette et sa distance à l'emplacement de la caméra nécessitent l'emploi d'un objectif. La caméra utilisée est une Panasonic WV-BP100 à monture C que l'on a associée à un objectif Schneider Variogon 1.8/12.5 - 75mm ainsi qu'à un doubleur de focale Pentax. Le logiciel Correli développé au LMT-Cachan (Hild 2002) sera utilisé pour les calculs de corrélation d'images.

1.2.3 Réalisation du montage

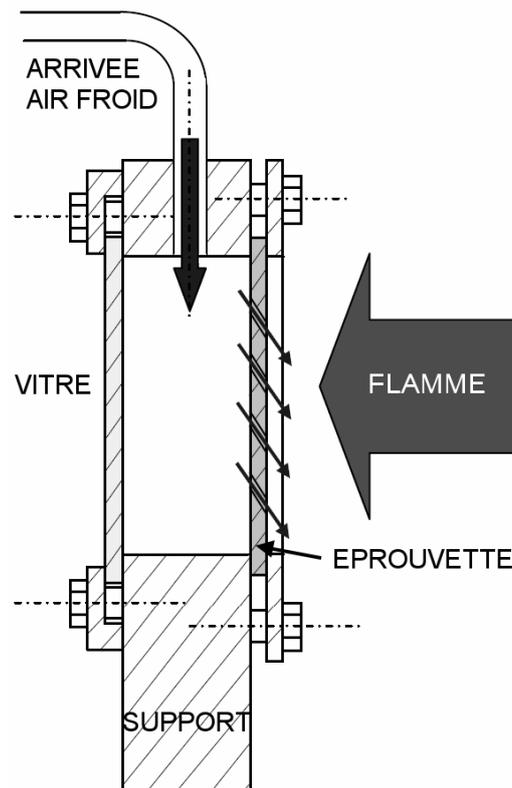


FIG. 5.6: Schéma synthétique d'une coupe du support de l'éprouvette d'essai

Une fois les moyens de mesure clairement déterminés, le montage a pu être réalisé. Le support a été usiné dans un acier inoxydable de type Z10CNT18 selon le plan donné en an-

nexe B. Les éprouvettes ont été usinées dans des plaques de Haynes188 de 2mm d'épaisseur, et les multiperforations ont été réalisées par perçage au laser. Par analogie aux chambres de combustion, le côté débouchant du perçage est placé du côté chaud. L'éprouvette est maintenue légèrement serrée sur le support par une plaque vissée, les tranches de l'éprouvette restent libres. L'air de refroidissement débouche dans la cavité située à l'arrière de l'éprouvette par un conduit, de haut en bas. Il est important de disposer l'éprouvette de manière à ce que la multiperforation soit également orientée de haut en bas en allant de la face externe à la face interne, ceci pour représenter fidèlement la création du film d'air en face interne de la chambre. A l'arrière de la cavité, une vitre totalement transparente est maintenue serrée contre le support : elle doit permettre d'avoir un accès visuel à la face arrière de l'éprouvette, tout en s'assurant de l'étanchéité de la cavité d'air froid. Le schéma de la figure 5.6 résume ce montage.

1.3 Mise en oeuvre de l'essai au banc à flamme

Une première éprouvette « étalon » a été utilisée, sur laquelle des thermocouples ont été soudés au centre de chaque face afin de recalibrer les valeurs des températures mesurées par pyromètre et par imagerie infrarouge. Cette éprouvette a également permis de tester la procédure de réalisation de l'essai, la pertinence des moyens de mesure, et les réglages de température de flamme. C'est la valeur du pyromètre en face avant qui servira de consigne pour le réglage du cycle thermique. En conclusion, la procédure définitive de réalisation de l'essai de fatigue thermique sur structure multiperforée est présentée dans cette section.

En premier lieu, un moucheti est réalisé sur l'éprouvette afin que les images puissent être exploitées par corrélation (figure 5.7). Deux peintures sont utilisées : une blanche comme couleur de fond, une noire pour les motifs aléatoires du moucheti. Toutes deux sont choisies pour leur tenue à très haute température.

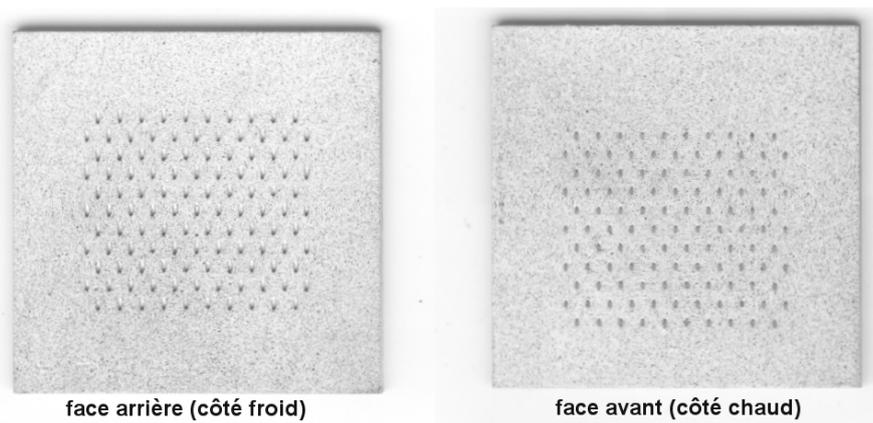


FIG. 5.7: Photographie des deux faces mouchetées de l'éprouvette HAFT1 avant essai

Une fois l'éprouvette sur son support et l'essai prêt à être lancé, la flamme doit être stabilisée. Une vingtaine de minutes sont nécessaires pour atteindre une température de

flamme constante. L'arrivée d'air est ouverte, dans notre cas le débit est de 130 l/min. Le cyclage thermique peut alors commencer.

L'éprouvette est filmée par caméra infrarouge à 5 images par seconde, durant le dixième cycle. Lors des 12 secondes de refroidissement à la fin du cycle, des images de la face arrière de l'éprouvette sont prises toutes les 2 secondes. On dispose alors de 6 images entre l'instant le plus chaud ($t = 48s$) et l'instant le plus froid ($t = 60s$). Ces images sont traitées *a posteriori* par le logiciel Correli, et l'on peut visualiser le champ des déplacements lors de la descente en température. Le rayonnement dû à la source de chaleur pendant la phase de chauffe a tendance à « déformer » les images, il n'est donc pas possible de prendre des images durant le cycle complet.

L'opération est réitérée au cinquantième cycle, ainsi qu'au centième. A la fin du centième cycle, l'essai est interrompu. Une fois refroidi, le support est démonté et l'éprouvette est observée à la lunette binoculaire. Si aucune fissure de plus de $300\mu m$ n'est visible, le support est remonté et l'on reprend l'essai pour une centaine de cycles supplémentaires. L'essai s'arrête lorsqu'une fissure est observée.

1.4 Acquisition des champs thermiques

Avant toute chose, il a fallu s'assurer de la cohérence des données entre les différents moyens de mesure de température. Les pyromètres ont été recalés sur les thermocouples de l'éprouvette étalon. La caméra infrarouge est quant à elle recalée sur le pyromètre en face avant. C'est à ce moment qu'est pleinement illustré le fait que l'émissivité du matériau, qui permet les mesures par rayons infra-rouges, dépend de la température. L'émissivité de l'éprouvette est recalée ainsi sur plusieurs points du cycle, et on en déduit sa valeur en fonction de la température. Du fait de l'application d'une couche de peinture thermo-sensible pour réaliser un moucheti, nécessaire à la corrélation d'images (seule la face arrière est utilisée pour la corrélation d'image, mais les deux faces ont été peintes), l'émissivité n'est pas celle du matériau brut, le Haynes 188. En effet, pour les métaux, l'émissivité augmente généralement avec la température (Bates 1999, Pajani 2001), comme illustré sur la figure 5.9. Ici, c'est le cas contraire : l'émissivité a tendance à augmenter lorsque la température diminue (figure 5.10). La bonne connaissance de l'émissivité est donc essentielle, et elle permet par après d'afficher les cartes des températures corrigées (figure 5.11), prenant en compte la variation d'émissivité avec la température.

2 Simulation numérique de l'essai

L'essai de fatigue thermique sur structure multiperforée est un essai complexe. La confrontation des résultats expérimentaux aux données obtenues par simulation doit permettre de valider la méthodologie de calcul de durée de vie employée : identification, implantation numérique, méthode de calcul, etc. Cette section présente la démarche employée pour réaliser la simulation de l'essai, de la mise en données jusqu'à l'obtention de la durée de vie de la pièce et de la localisation des fissures.

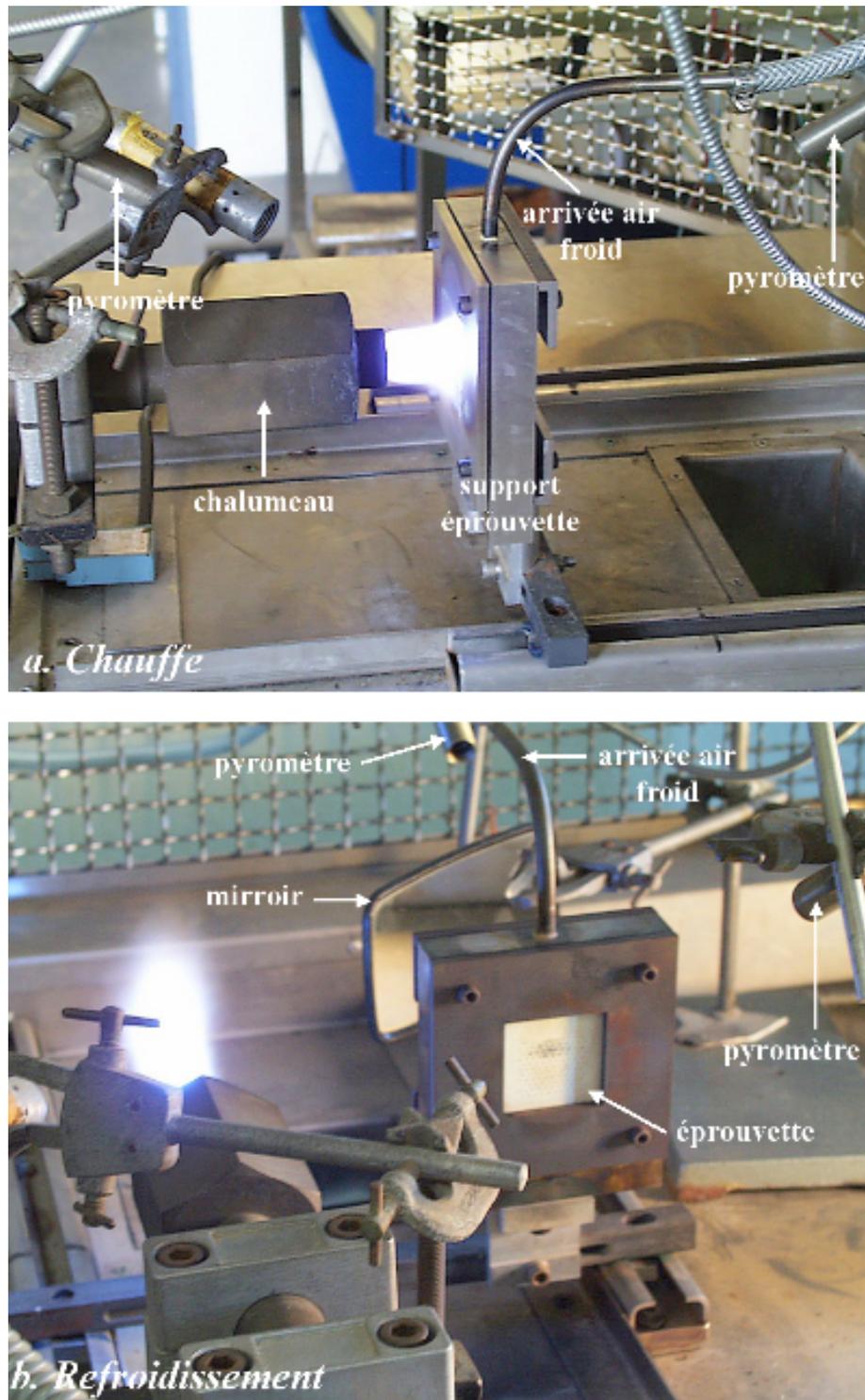


FIG. 5.8: Mise en oeuvre de l'essai de fatigue thermique au banc à flamme

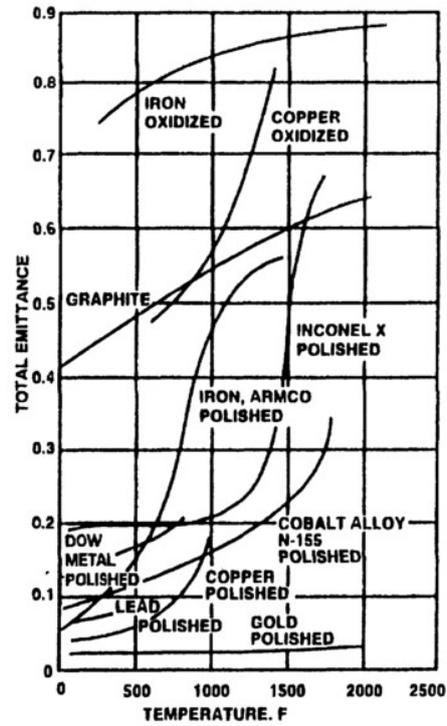


FIG. 5.9: Evolution de l'émissivité de quelques métaux en fonction de la température (Bates, 1999)

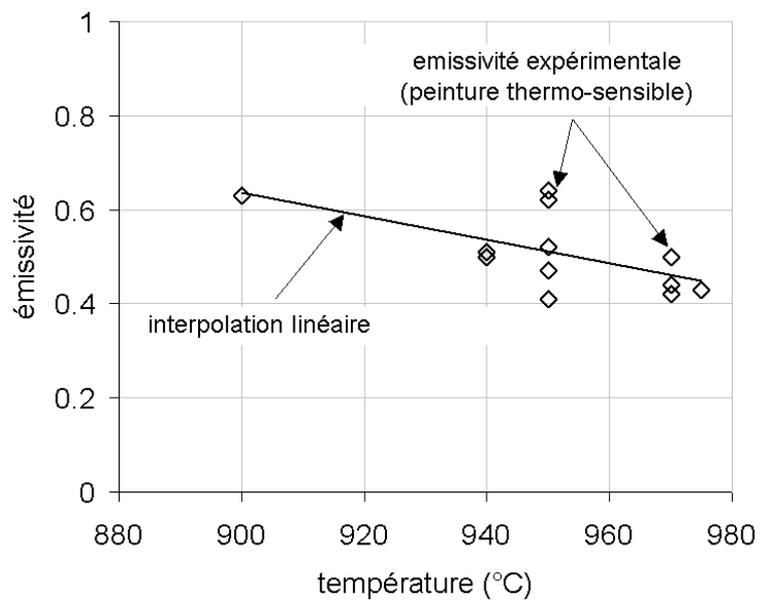


FIG. 5.10: Evolution de l'émissivité de la surface de l'éprouvette en fonction de la température

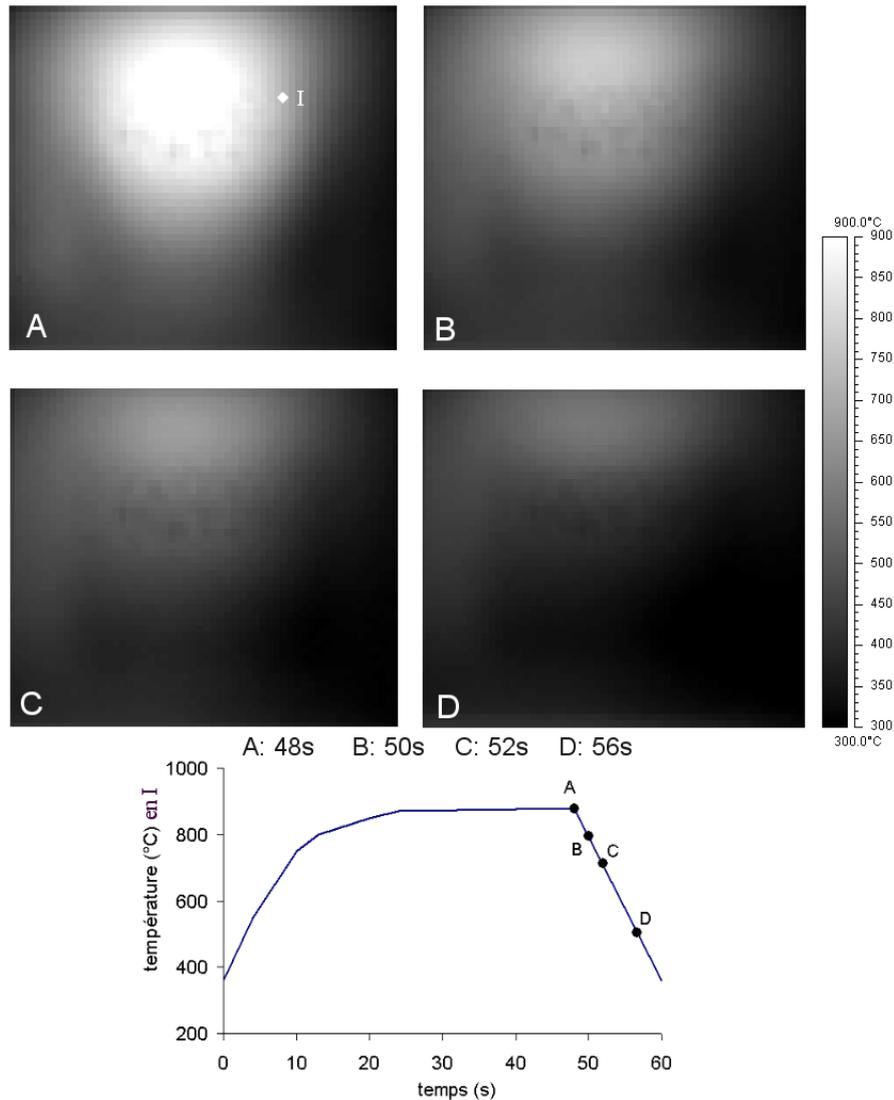


FIG. 5.11: Cartes de températures obtenues lors du refroidissement (chalumeau retiré) en face avant de l'éprouvette

2.1 Principe

La simulation a pour objet de reproduire le plus fidèlement possible les conditions d'essai, afin de pouvoir prédire au mieux les conditions de rupture de la mini-structure. Cela implique une bonne connaissance des conditions aux limites et du chargement imposé. Le support a été conçu de telle sorte que l'éprouvette soit sous conditions de bords libres en première approximation. On impose les conditions de chargement thermique, plus précisément la puissance de flamme et le débit d'air de refroidissement. Les acquisitions par caméra thermique infra-rouge permettent de recaler un premier calcul thermique transitoire réalisé à Snecma (E. Mercier) dans le but d'obtenir l'évolution de la température en chaque point de Gauss du maillage de la structure. Par un transfert de champs, on ap-

plique alors l'évolution de la température de la pièce obtenue à un maillage mécanique de la plaque multiperforée, dans le but de calculer au cours du cycle le tenseur des contraintes et des déformations plastiques. Ces dernières données serviront d'entrée au post-processeur d'endommagement, déterminant la durée de vie et la localisation de la rupture de la pièce.

2.2 Calcul thermique transitoire

Le calcul thermique transitoire est réalisé selon la procédure Snecma de modélisation des essais thermiques et aérodynamiques des "liners" expérimentaux (*liner* désignant pour les motoristes aéronautiques la paroi des chambres de combustion). La paroi d'une chambre est protégée des hautes températures par le film d'air froid, généré par la multiperforation. Elle est l'objet de transferts thermiques avec les fluides qui l'entourent, par convection et rayonnement, et de conduction en son sein. Les transferts convectifs et radiatifs à l'intérieur des trous de multiperforation sont négligés. Le schéma de la figure 5.12 résume les différents échanges thermiques qui ont lieu entre la plaque multiperforée et son environnement.

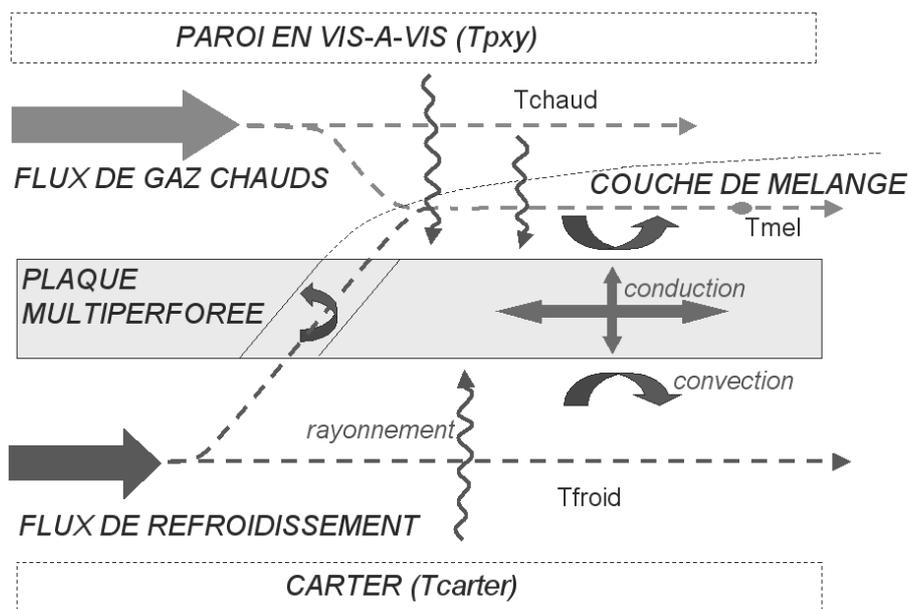


FIG. 5.12: Echanges thermiques dans les chambres de combustion

La différence principale avec l'essai mené à Snecma est l'orientation de la flamme qui est orthogonale à l'éprouvette et non pas tangente à la plaque comme lors d'un essai classique. Cette approximation sera prise en compte et un recalage sera réalisé grâce aux données obtenues par mesure thermique infrarouge lors de l'essai. De plus, dans notre cas la paroi en vis-à-vis de l'éprouvette est absente. On ne prend donc pas en compte les flux d'échanges radiatifs entre la plaque et cette paroi.

Le flux d'échange radiatif entre la plaque et les gaz chauds est donné par une corrélation de type Reeves,

$$\phi_1 = \sigma C_1 (\epsilon_{chaud} T_{chaud}^4 - \alpha_{chaud} T_{ps}^4) \quad (5.1)$$

où σ est la constante de Stefan-Boltzmann, T_{chaud} est la température du gaz chaud, T_{ps} est la température de la paroi chaude (températures données en Kelvin), ϵ_{chaud} est l'émissivité de la surface de la paroi chaude, α_{chaud} est un coefficient correctif prenant en compte les pertes par transmission dans le gaz chaud et C_1 est le coefficient d'échange relationnel entre la paroi et le gaz.

Le flux d'échange radiatif avec le carter vers la face inférieure (froide) de la plaque est aussi modélisé par une corrélation de Reeves entre deux plaques parallèles séparées par un gaz transparent :

$$\phi_2 = \sigma C_2 (T_{carter}^4 - T_{pi}^4) \quad (5.2)$$

où $T_{pi} = T_{paroi_froide}$, et C_3 est le coefficient d'échange relationnel entre deux parois à travers un gaz transparent.

Le flux convectif du côté chaud au niveau de la plaque s'écrit

$$\phi_3 = h_{mel} (T_{mel} - T_{ps}) \quad (5.3)$$

où h_{mel} est le coefficient d'échange convectif à la paroi chaude de la plaque pris à la température $T = (T_{mel} + T_{ps})/2$ et où T_{mel} est la température de mélange en dehors de la couche limite.

Le flux convectif du côté froid de la plaque est donné par

$$\phi_4 = h_{froid} (T_{froid} - T_{pi}) \quad (5.4)$$

où h_{froid} est le coefficient d'échange convectif à la paroi froide de la plaque.

Le flux conductif dans la plaque est donné par

$$\phi_5 = -\lambda_{plaque} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (5.5)$$

où λ_{plaque} est la conductivité thermique de la plaque et z la direction suivant l'épaisseur.

Le bilan thermique s'obtient en sommant les différents flux décrits plus haut sur un élément de paroi. En régime transitoire, la chaleur accumulée par l'élément de paroi élève sa température selon l'équation

$$\rho \cdot c_{plaque} \cdot e \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \phi_i \quad (5.6)$$

où e est l'épaisseur de la plaque. Seuls le paramètre de conductivité du matériau λ_{plaque} et sa chaleur spécifique c_{plaque} sont connus *a priori*. La difficulté de l'étude réside essentiellement dans la présence du film de refroidissement issu des multiperforations. Pour bien comprendre et prendre en compte les phénomènes physiques présents, la chaîne de calcul suivante est utilisée : le code de calcul GECOPE détermine la répartition des débits dans le dispositif, dont les résultats servent de base pour le reste de l'étude. Le logiciel TEMVIR est utilisé pour le calcul 1.5D des flux radiatifs, convectifs et conductifs. Il utilise les principes fondamentaux de la physique, des corrélations empiriques et un couplage avec le pré-calcul aérodynamique GECOPE. L'intérêt de ce code est qu'il couple en permanence les calculs

aérodynamiques dans le flux chaud avec les calculs conductifs dans le matériau. Enfin, le code NS3-NATUR, un code Navier-Stokes non structuré compressible, simule à partir des flux d'air d'entrée donnés par GECOPE le comportement aérothermique du flux chaud en 2D ou 3D. On obtient alors la répartition pariétale de la température en 2D ou 3D. NS3-NATUR ne simule en effet que le flux convectif à la paroi et le calcul conductif est effectué par un code distinct, ici ABAQUS. Les deux codes sont couplés au regard de la description du flux convectif $\phi_{conv} = h_{conv} \cdot (T_p - T_{conv})$ où h_{conv} et T_{conv} proviennent de N3S et T_p (p pour paroi) de ABAQUS.

En pratique, on exploite d'abord les données du pyromètre du côté chaud : le cycle de température mesuré dans la zone correspondante est discrétisé au cours du temps, et imposé lors du calcul thermique. Cependant, les cartes complètes de températures obtenues par infrarouge ne sont disponibles que pendant les 12 dernières secondes du cycle. A ce moment, le recalage des paramètres d'échanges est possible.

Pour obtenir un transitoire thermique sur toute la plaque et pendant un cycle complet, seuls certains points sont calculés au cours du cycle, puis une interpolation spatiale est réalisée à chaque incrément de temps, en accord avec les données expérimentales. Le résultat de la simulation confronté aux données expérimentales est représenté sur la figure 5.13. Les cartes de températures correspondent au point le plus chaud du cycle ($t = 48s$). Les températures sont calculées le long de deux axes, l'un au bord de l'éprouvette, l'autre au milieu. L'évolution de la température le long de l'axe central est donnée figure 5.13 pour le cas expérimental et simulé. L'évolution de la température au cours du temps est extrapolée ensuite à chaque point de Gauss.

2.3 Calcul élasto-viscoplastique sous chargement thermique

La précédente section décrit la manière dont on obtient l'évolution de la température à chaque point de Gauss au cours du cycle thermique. L'évolution de la température est alors utilisée en tant que chargement imposé du calcul mécanique. Pour cela, on réalise un transfert du champ de température au cours du temps du maillage thermique vers un maillage mécanique, prenant en compte (ou non) la multiperforation. L'opération est réalisée automatiquement par le logiciel Zebulon. Une illustration de l'opération est présentée figure 5.14, lors du transfert du champ de température sur un demi-maillage de la plaque multiperforée.

Les conditions de température ainsi appliquées en chaque point de Gauss et à chaque pas de temps servent de conditions de chargement pour le calcul mécanique. Les gradients de température génèrent des déformations au sein de la structure, qui engendrent des contraintes menant à l'endommagement du matériau. Le support a été conçu de telle sorte que l'éprouvette puisse se déformer en particulier aux bords : elle est uniquement maintenue légèrement serrée contre le support (figure 5.6). Ainsi on peut considérer que la structure est soumise à des conditions de bords libres, en première approximation. On applique donc les champs de température à chaque pas de temps obtenus par calcul thermique transitoire, pour obtenir le tenseur des contraintes et des déformations plastiques de la structure aux points d'intégration. Les résultats peuvent être comparés aux données obtenues par corrélation d'images pendant la descente en température (12 dernières secondes du cycle).

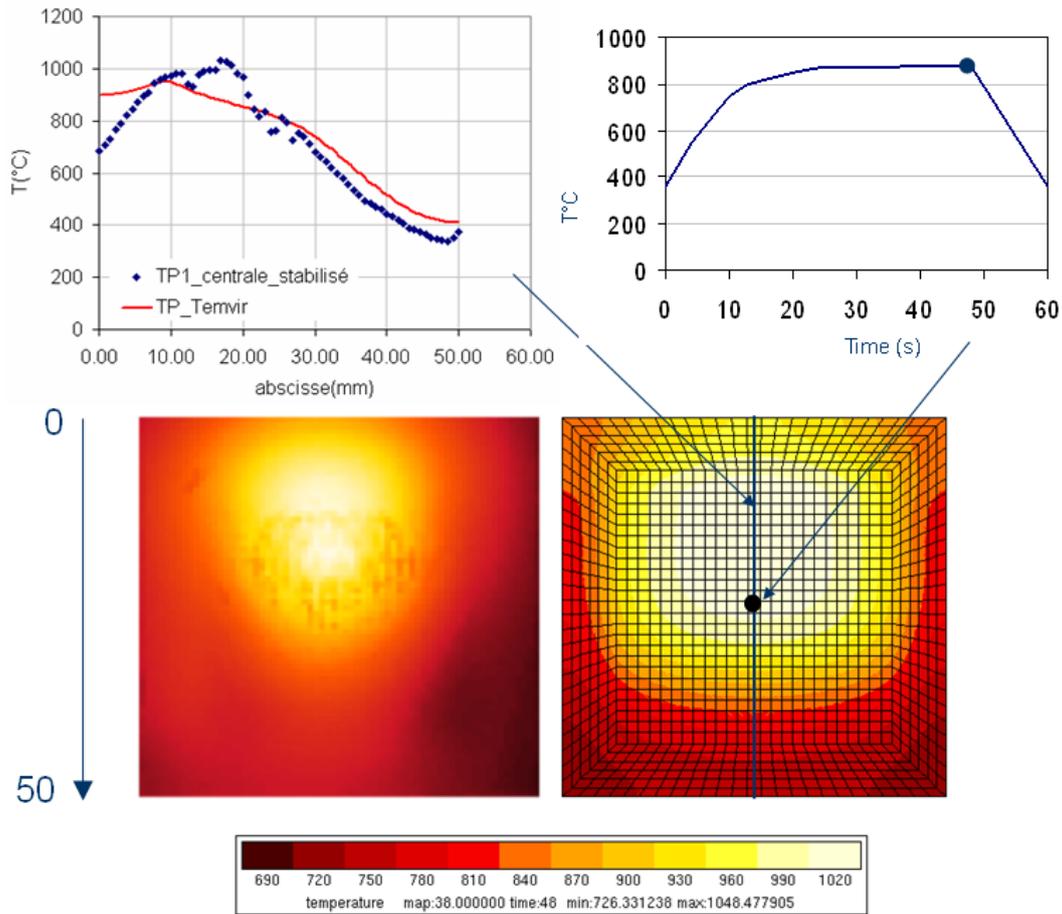


FIG. 5.13: Expérience et simulation du thermique transitoire de l'essai au banc à flamme

En terme de maillage, l'approche adoptée dépend du type de calcul mené : le calcul thermique transitoire ne nécessite pas le maillage de la multiperforation puisque celle-ci est prise en compte dans les coefficients d'échange du calcul. La plaque est donc maillée sans trou, avec quatre éléments dans l'épaisseur et des éléments cubiques linéaires à huit points d'intégration de type c3d8. La zone multiperforée est cependant distinguée de la zone pleine. Ce maillage a été réalisé grâce au code PATRAN. Le calcul mécanique peut quant à lui être mené de différentes façons : la zone multiperforée peut être représentée par un maillage plein, assigné d'un matériau homogénéisé, ou par un maillage représentant les multiperforations. La géométrie de la multiperforation rend l'opération de maillage très délicate. Pour obtenir les meilleurs résultats, le mailleur volumique GHS3D développé par l'INRIA a été utilisé. Un exemple de maillage obtenu autour d'un trou de multiperforation est présenté à la figure 5.15. Les éléments utilisés sont des éléments tétraédriques quadratiques à 10 points d'intégration de type c3d10.

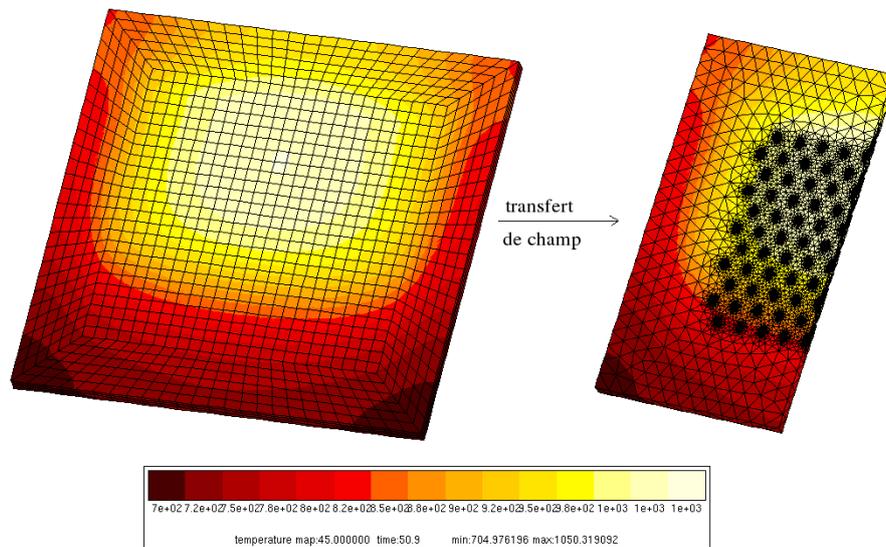


FIG. 5.14: Transfert des champs de température du maillage thermique au maillage mécanique multiperforé.

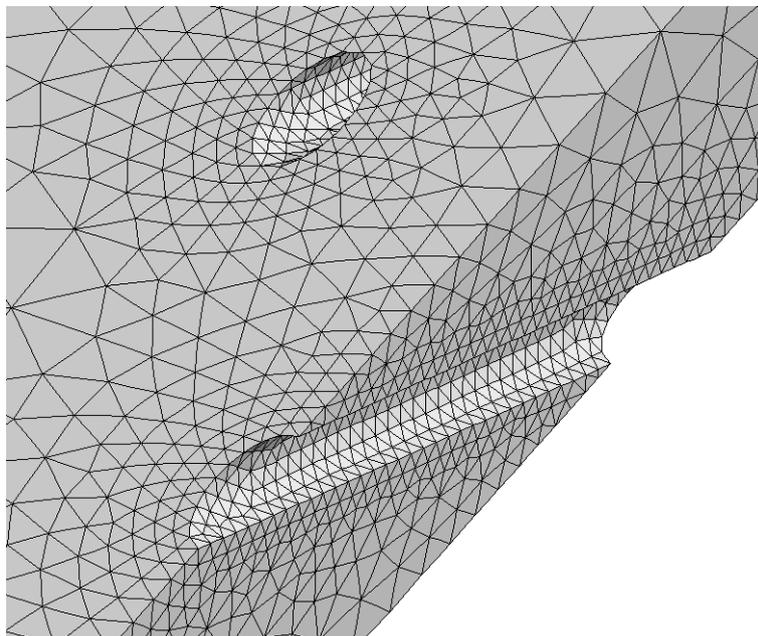


FIG. 5.15: Maillage d'un trou de multiperforation par le mailleur volumique GHS3D de l'INRIA (la distance entre 2 trous est de l'ordre de 3mm, à comparer aux 30 par 30 mm de la zone utile multiperforée)

2.4 Endommagement par post-traitements du calcul mécanique

Le calcul mécanique décrit dans la section précédente permet d'obtenir à chaque incrément de temps et en chaque point de Gauss le tenseur des déformations plastiques et des contraintes. Ces données sont alors post-traitées par le post-processeur d'endommagement implémenté dans Zebulon (chapitre 2) afin d'obtenir la carte de durée de vie de la structure. En d'autres termes, le post-processeur d'endommagement permet d'obtenir à chaque point de Gauss la durée de vie à amorçage de fissure. On a accès en résumé au lieu d'amorçage de fissure, à la durée de vie de la structure (minimum des durées de vie de tous les points de Gauss au sens de l'amorçage d'une fissure), au seuil d'endommagement en énergie stockée, ainsi qu'à l'accroissement de l'endommagement obtenu par d'un cycle de chargement. Afin de conserver des temps de calcul raisonnables, on sélectionne sur la géométrie les zones critiques que l'on choisit de post-traiter, afin d'éviter des calculs de post-traitement très longs dans les zones les moins contraintes. Pour sélectionner la ou les zones critiques, on tient compte principalement des niveaux de contrainte et de déformation plastique atteints. Les zones les plus sollicitées sont celles où ces valeurs sont grandes comparativement à la moyenne sur la structure.

3 Confrontation entre résultats numériques et expérimentaux

La présente section rapporte les résultats obtenus par simulation pour divers types de maillage et de conditions aux limites, et comparés aux résultats expérimentaux. L'essai de fatigue thermique a été mené en premier lieu sur une éprouvette étalon. Celle-ci a présenté une fissure au bout de 700 cycles environs. Un deuxième essai a ensuite été réalisé, en conservant les réglages obtenus lors de l'essai étalon. Une fissure a été détectée après 500 cycles environs. La figure 5.16 montre l'évolution de la fissure apparaissant au 500e cycle, ainsi que l'apparition et la propagation d'autres fissures aux bords des trous voisins. L'essai a été stoppé au cycle 1165, la vitesse de propagation des fissures devenant plus lente qu'aux cycles précédents.

3.1 Comportement de la structure

L'essai de fatigue thermique n'est piloté qu'en température. Ce sont les gradients de température qui génèrent des contraintes au sein du matériau. Le montage a été réalisé de sorte que la pièce puisse se dilater librement, en particulier en ses bords. Techniquement, l'éprouvette est maintenue légèrement serrée sur le support, par une plaque vissée. En premier lieu il est important de vérifier les conditions aux limites appliquées lors du calcul numérique par rapport à l'expérience.

On a exploité les images prises par caméra CCD afin de déterminer les champs de déplacement en face arrière de l'éprouvette par corrélation d'images, grâce au logiciel CORRELI. Les images acquises par caméra CCD sont en niveaux de gris, de taille 704 x 576

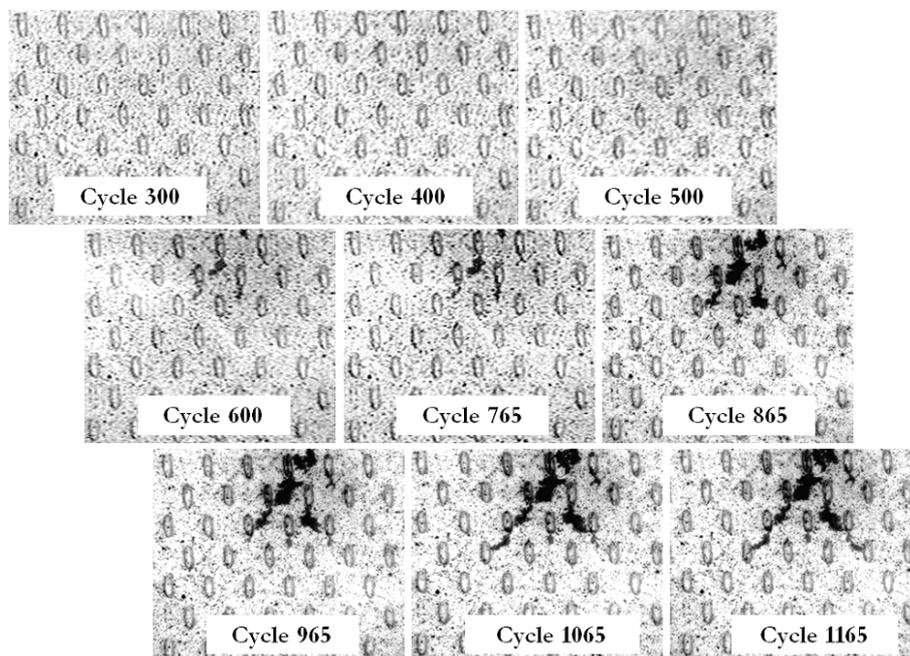


FIG. 5.16: Apparition et propagation de fissures en face avant de l'échantillon multiperforé au cours de l'essai de fatigue thermique.

pixels, pour une zone d'étude de 50mm x 42mm sans doubleur de focale, soit 14 pixels par mm, et de 21mm x 17mm avec doubleur de focale, soit 34 pixels par mm environ. Les images sont prises toutes les 2 secondes pendant la descente en température, lorsque la flamme s'écarte. La figure 5.17 présente le résultat de corrélation d'images entre une image prise à $t = 0s$ et une image prise à $t = 48s$, soit au point le plus chaud. Les champs globaux de déplacement U_1 et U_2 sont donnés, et comparés avec les résultats du calcul numérique élasto-visco-plastique.

En terme de géométrie des champs de déplacement, les résultats numériques sont en très bonne corrélation avec l'expérience. En terme d'ordre de grandeur, la corrélation d'images nous donne comme valeurs maximale et minimale respectivement 1.5 et -1.5 pixels de déplacement. Les images correspondantes ont une résolution de 14 px/mm, les déplacements minimum et maximum sont donc de -0.11 et 0.11mm. En revanche, pour le calcul numérique, au point le plus chaud les déplacements minimum et maximum constatés sont respectivement de -0.4mm et +0.4mm. Cela dit, les déplacements calculés lors de la simulation numérique sont donnés par rapport à l'instant $t = 0$ où la température vaut $T = 20^\circ C$, avant la simulation de la mise en température et avant le début du cyclage, tandis qu'en corrélation d'images, l'image initiale est prise au début du cycle, où la température est déjà en moyenne supérieure à $400^\circ C$, et au point le plus chaud, à $t = 48s$, après avoir déjà réalisé quelques cycles.

Pour des raisons de temps de calcul, le comportement élastoviscoplastique de la structure n'a été simulé que sur un cycle à l'heure actuelle. Le calcul a été mené sur deux types de

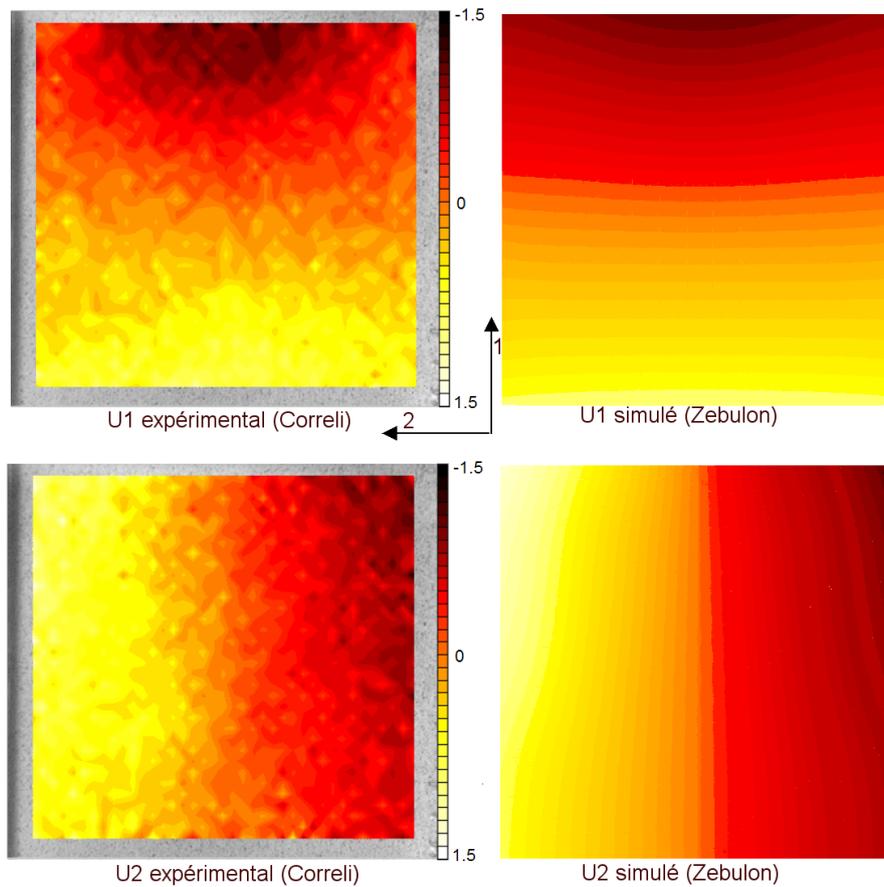


FIG. 5.17: Champs de déplacement expérimentaux et simulés, au point le plus chaud du cycle thermique.

maillages. D'abord, sur une structure pleine, sans trous (environ 3 heures de calcul sur bi-processeur AMD 64 bits Opteron à 8 Gigabits de mémoire vive). On a affecté à la zone correspondant à la multiperforation un matériau avec comportement homogène équivalent (Declercq, 2001). On a cependant négligé les effets d'anisotropie dus à la géométrie de la multiperforation : on a simplement appliqué un abattement 20% sur le module de Young du matériau plein. Le deuxième calcul a été mené sur une structure prenant en compte cette fois-ci la multiperforation dans son intégralité (environ 450 heures de calcul sur le même bi-processeur). Le maillage a été réalisé grâce au mailleur GHS3D.

Les premières observations ont montré que sur structure homogène équivalente (sans le maillage de la multiperforation), les zones les plus critiques en terme de déformation plastique cumulée et de niveau de contrainte ne sont pas dans la zone de multiperforation (figure 5.18, 5.19, 5.20). Les zones les plus critiques se situent en fait au bord de l'éprouvette, particulièrement dans les zones 1 et 2 (figure 5.18). Sur la figure 5.18 on constate qu'au point le plus chaud, (B), la zone de multiperforation est surtout sollicitée en compression. Au point A, les contraintes vues par cette zone sont positives, mais restent relativement faibles pour la température atteinte à cet instant (environ 700°C), puisque la contrainte à 0.2% de

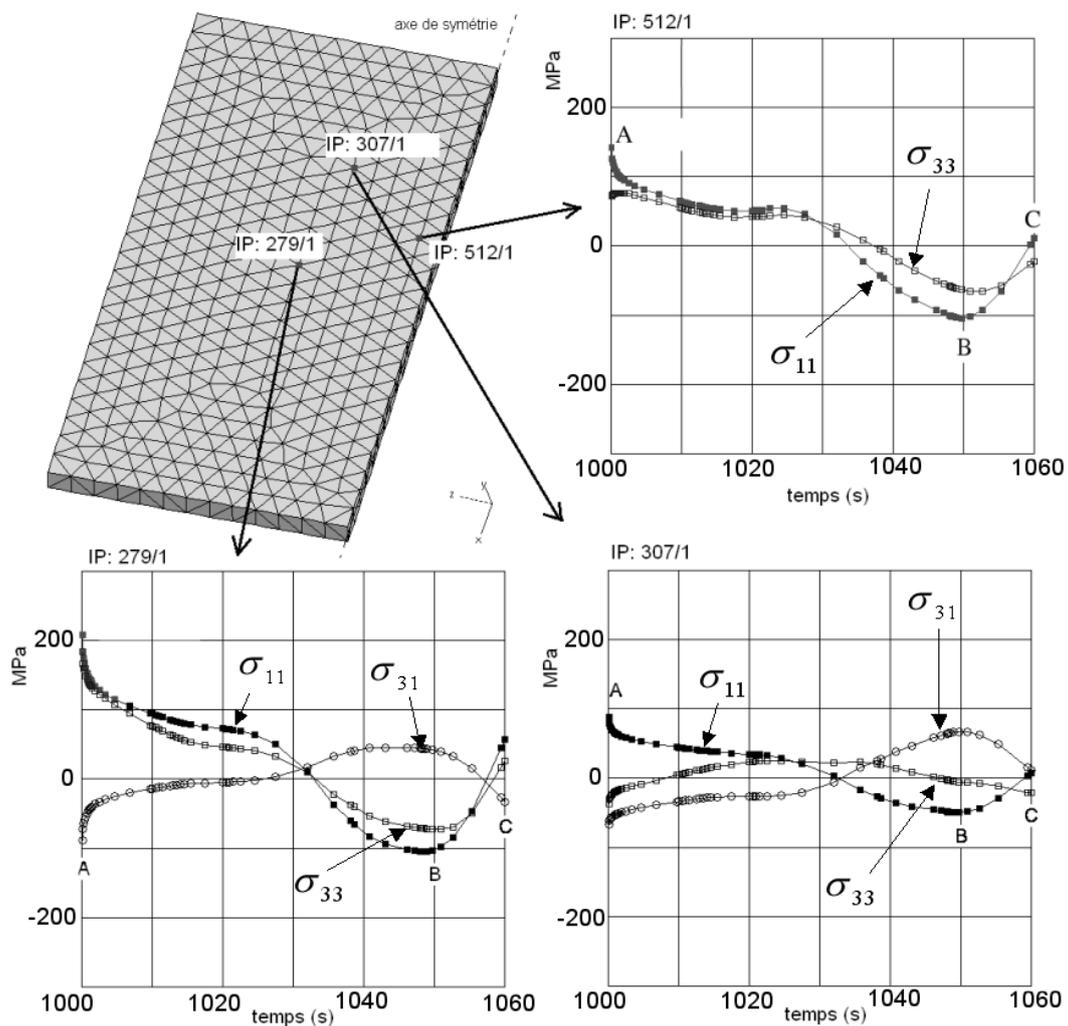


FIG. 5.18: Evolution des contraintes locales en 3 points de la structures, lors d'un cycle thermique

déformation plastique à cette température se situe au delà de 220 MPa.

Sur le maillage multiperforé, les conclusions sont différentes et bien plus réalistes : en effet, si l'on agrandit la zone 3 de la figure 5.21 sur laquelle on voit apparaître l'évolution des contraintes en 3 points de la zone multiperforée, on peut constater l'apparition au cours du cycle de forts gradient de contraintes locaux (figure 5.22). La déformation plastique s'accumule d'ailleurs au bord des trous, comme le montre la partie droite de cette figure. Les zones critiques où les fissures risquent d'apparaître d'après le calcul numérique semblent donc bien être les zones où les fissures apparaissent réellement, comme le montrent les photos de la figure 5.23.

Les calculs numériques ont permis de valider les conditions limites supposées en première hypothèse, et reproduisent relativement correctement les phénomènes laissant sup-

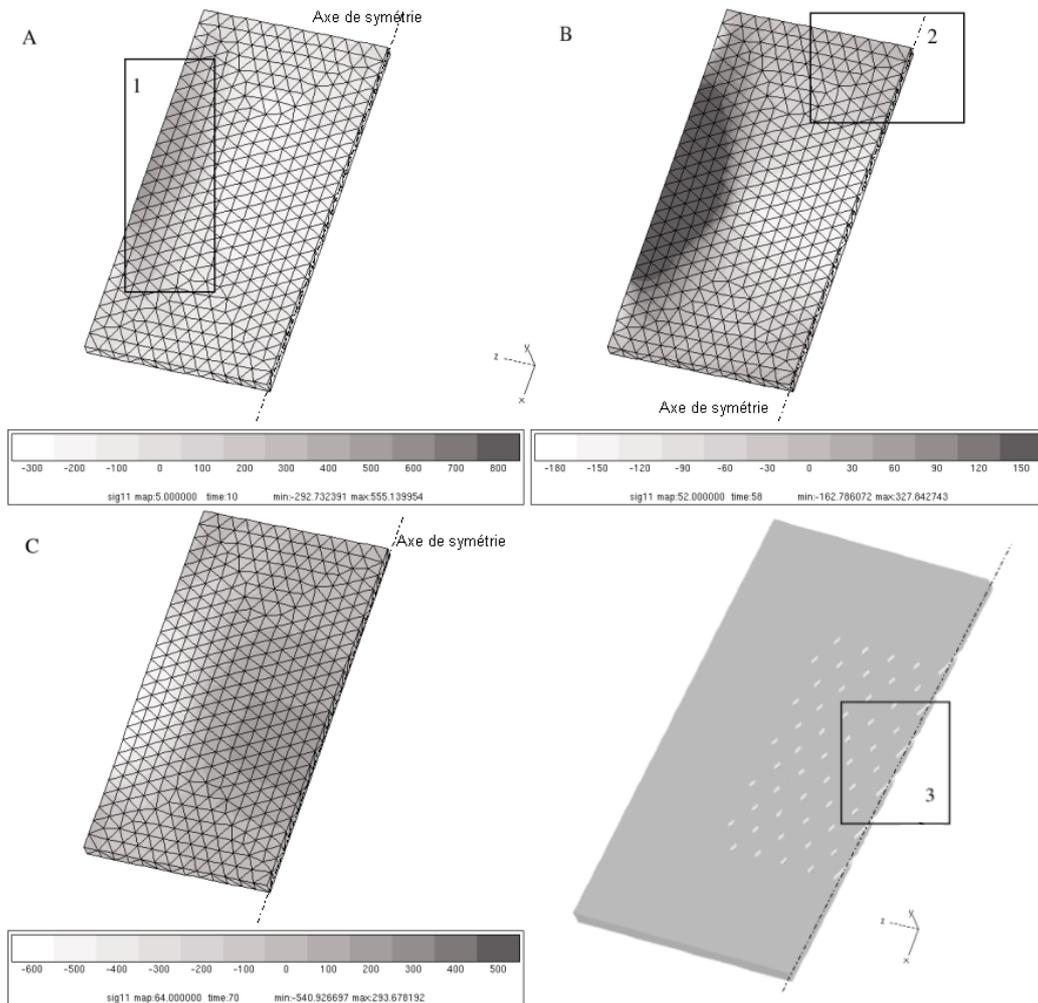


FIG. 5.19: Champs de contraintes σ_{11} aux instants A, B et C du cycle thermique pour le cas d'un matériau homogène équivalent.

poser l'amorçage de fissures aux bords des trous comme observé expérimentalement, à condition cependant d'utiliser une géométrie prenant en compte la multiperforation au niveau du maillage. On verra par la suite que cela a également une importance en terme de durée de vie.

3.2 Prévision de durée de vie

Le post-processeur d'endommagement incrémental a été utilisé pour déterminer le temps à amorçage de fissure de l'éprouvette multiperforée, après la simulation élasto-viscoplastique d'un cycle de l'essai. Les calculs élasto-viscoplastiques ont été menés dans un premier temps sur un maillage homogène équivalent puis sur le maillage complet de la demi-structure, tenant compte des trous de multiperforation.

Lorsque le post-processeur est appliqué sur la structure homogène équivalente, la

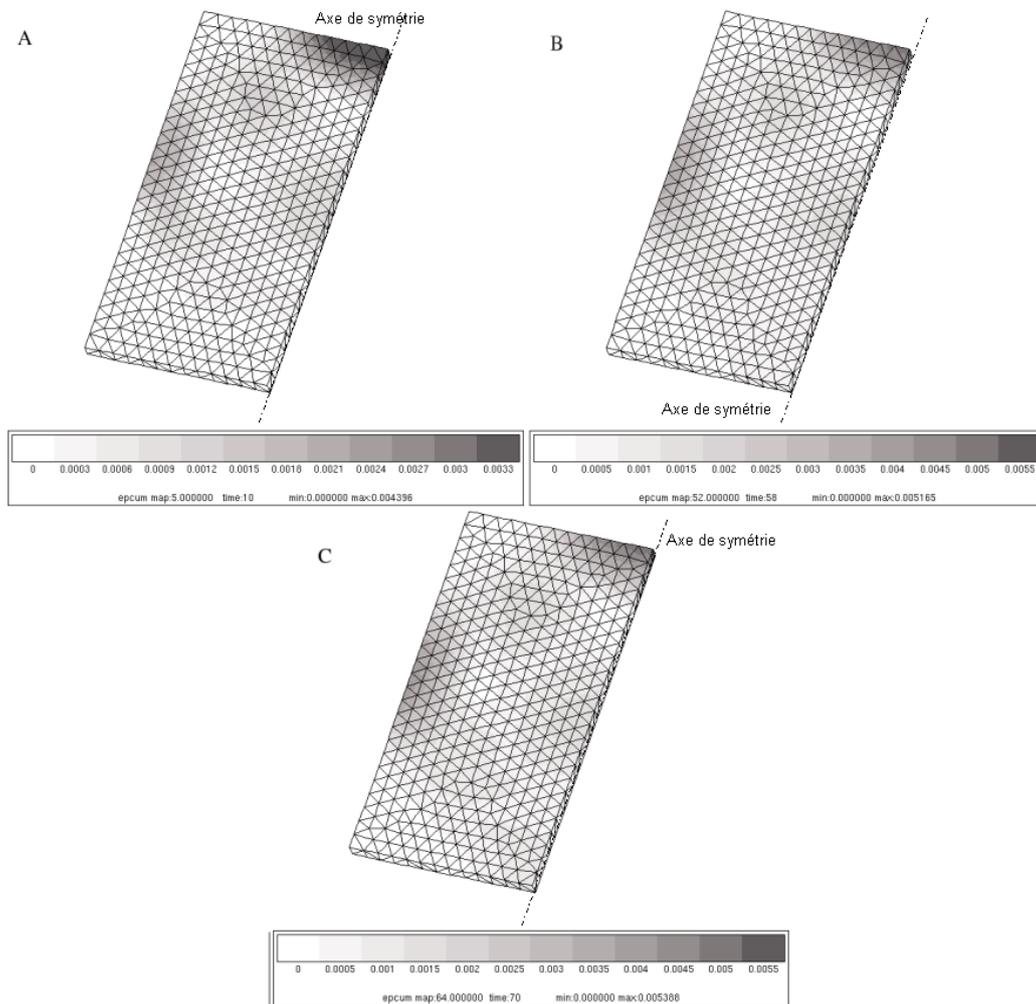


FIG. 5.20: Champs des déformations plastiques cumulées aux points A, B et C du cycle thermique.

durée de vie calculée est de 5507 cycles avec la loi sans refermeture des micro-défauts $\dot{D} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\epsilon}^P|$, et le lieu d'amorçage supposé de la fissuration n'est pas le bon. On rappelle que la durée de vie expérimentale se situe entre 400 et 500 cycles à amorçage d'une fissure. Le facteur 10 entre durée de vie calculée et durée de vie expérimentale provient du fait que la multiperforation n'est pas modélisée, hormis le fait qu'on prenne en compte un abattement des propriétés mécaniques du matériau homogène équivalent. On ne rend donc pas compte des zones de traction et des gradients de contrainte au bord des trous. Ainsi, la durée de vie est une durée de vie globale de la pièce, et l'initiation de fissure se fait dans la zone calculée comme la plus contrainte (zone 1 sur la figure 5.18), zone qui ne correspond pas à la zone réelle de fissuration de l'éprouvette (zone 3 de la figure 5.21).

Lorsque le post-processeur est appliqué sur la structure multiperforée, la zone d'étude critique est choisie. Ici, la zone 3 de la figure 5.21 est choisie puisque c'est dans cette zone que la déformation plastique cumulée est localement la plus grande à la fin du cycle ther-

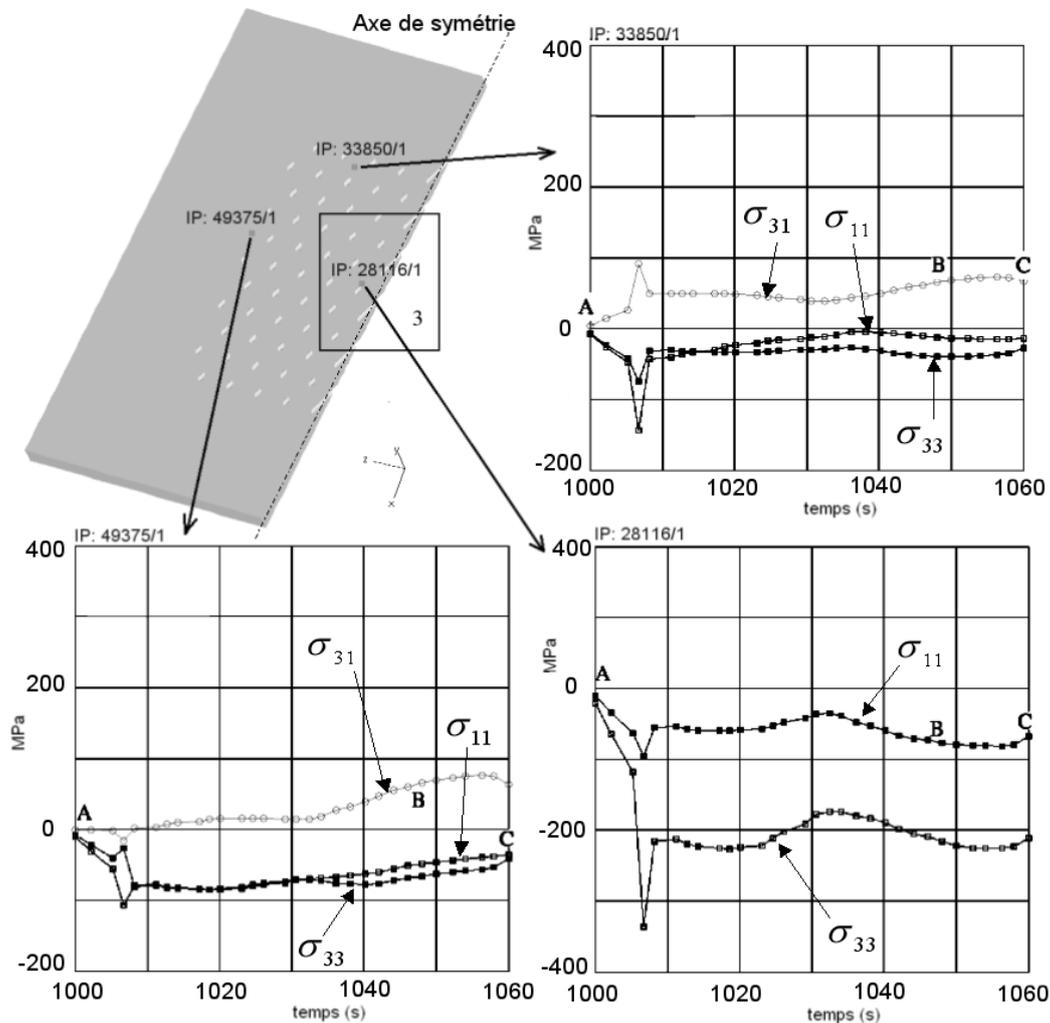
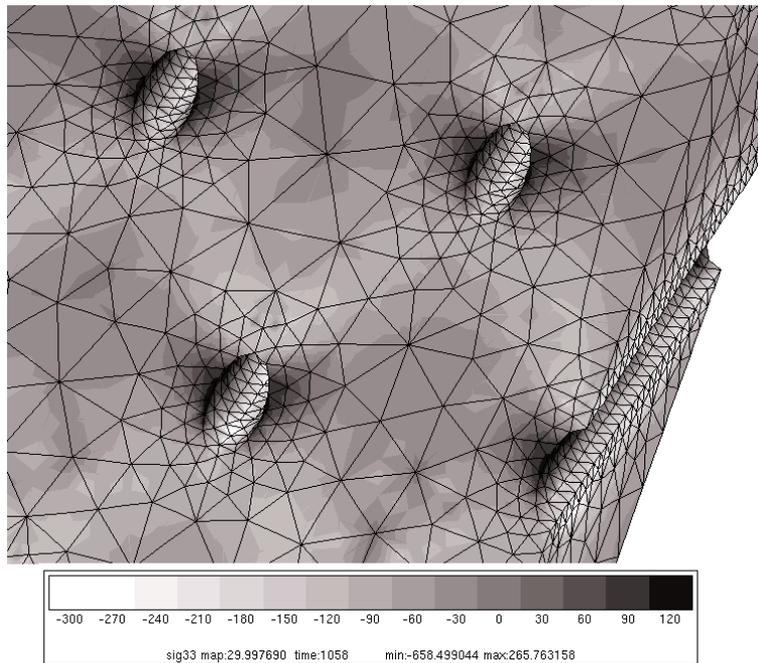
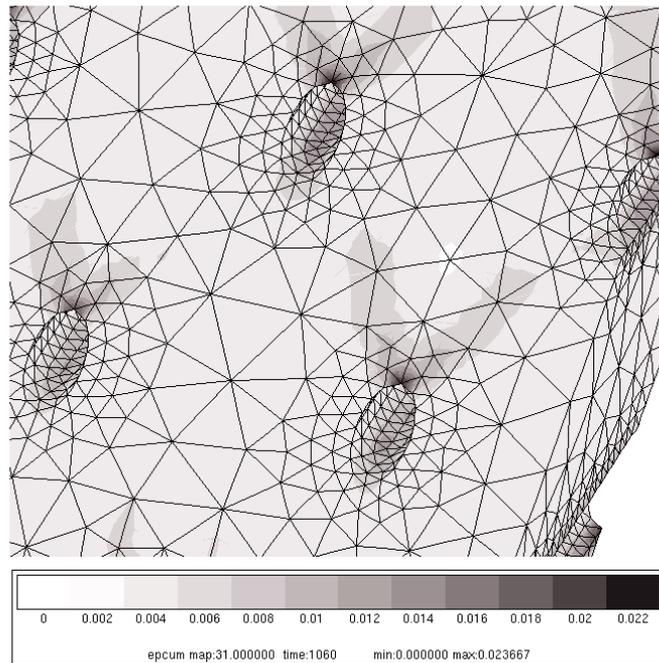


FIG. 5.21: Evolution des contraintes locales en 3 points de la structure multiperforée, lors d'un cycle thermique

mique. La durée de vie minimale constatée est alors de 264 cycles pour la loi en $|\dot{\epsilon}^P|$. La loi en $\langle \dot{\epsilon}^P \rangle$ donne une durée de vie au même point de Gauss de 290 cycles. Les autres lois n'ont pas pu être testées, car elles n'ont été programmées qu'en couplé. Ce dont on s'aperçoit ici est que la loi en $|\dot{\epsilon}^P|$ et la loi en $\langle \dot{\epsilon}^P \rangle$ donnent des résultats proches en terme de durée de vie. On s'attend localement à une anisotropie de l'endommagement différente, donc, point que nous détaillerons ci-après, à des différences quant aux directions de fissures initiées. De par la considération du seuil d'endommagement en énergie stockée, seuls les derniers cycles voient l'endommagement croître relativement rapidement (sur une durée de l'ordre de 20 à 50 cycles, comme illustré sur la figure 5.25). On peut également visualiser la localisation de la durée de vie la plus faible, sur la figure 5.24 après post-traitement. La zone où la durée de vie est la plus faible correspond bien à la zone réelle d'amorçage de fissure (figure 5.23) et à la zone d'endommagement maximum. Si l'on trace pour le point de Gauss le plus sollicité



sig_{zz} à l'instant C



déformation plastique cumulée à l'instant C

FIG. 5.22: Champs de contraintes σ_{zz} et de déformation plastique cumulée au point C du cycle thermique, dans la zone multiperforée 3 (face avant)

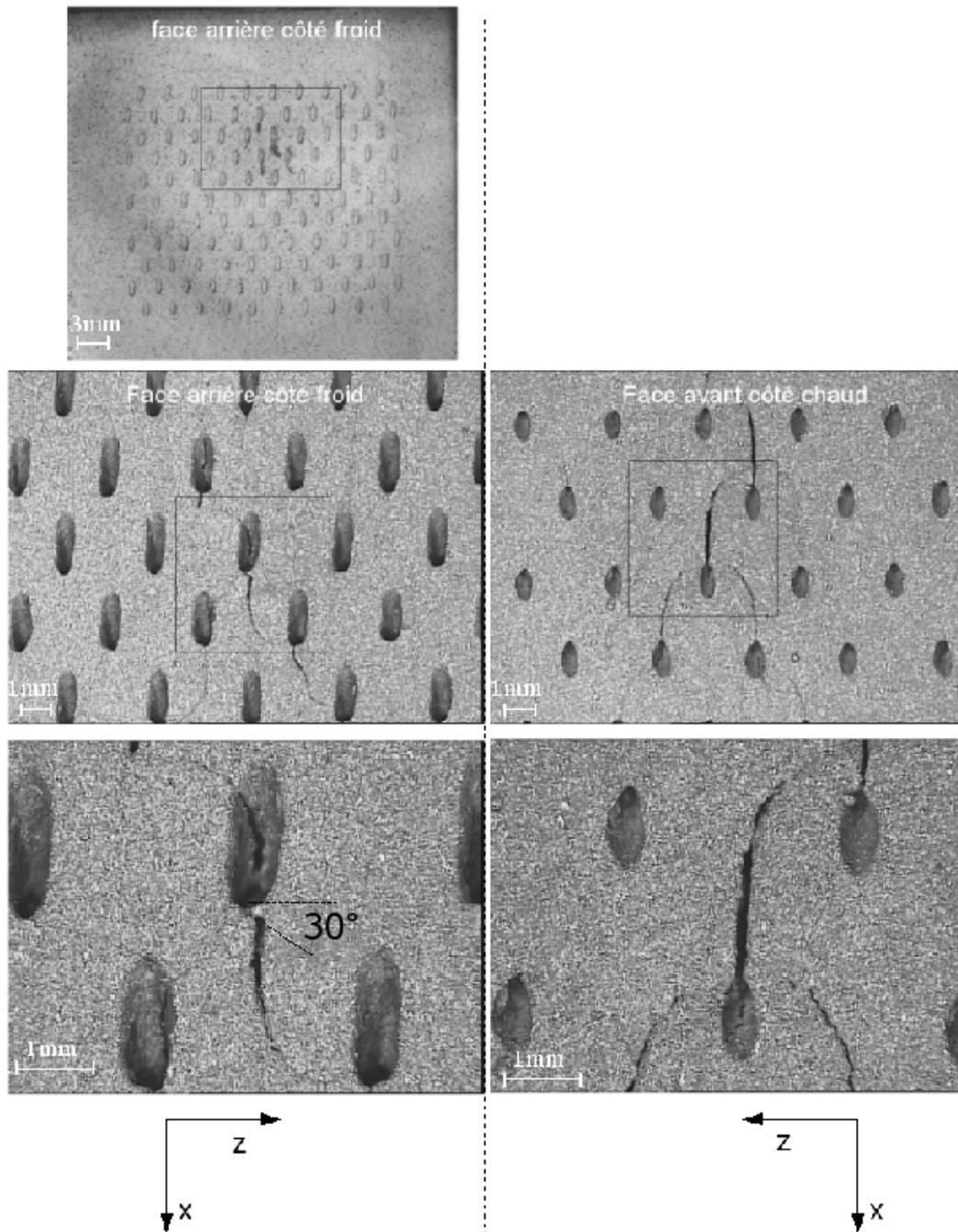


FIG. 5.23: Visualisation à la lunette binoculaire de l'apparition de fissures sur éprouvette expérimentale

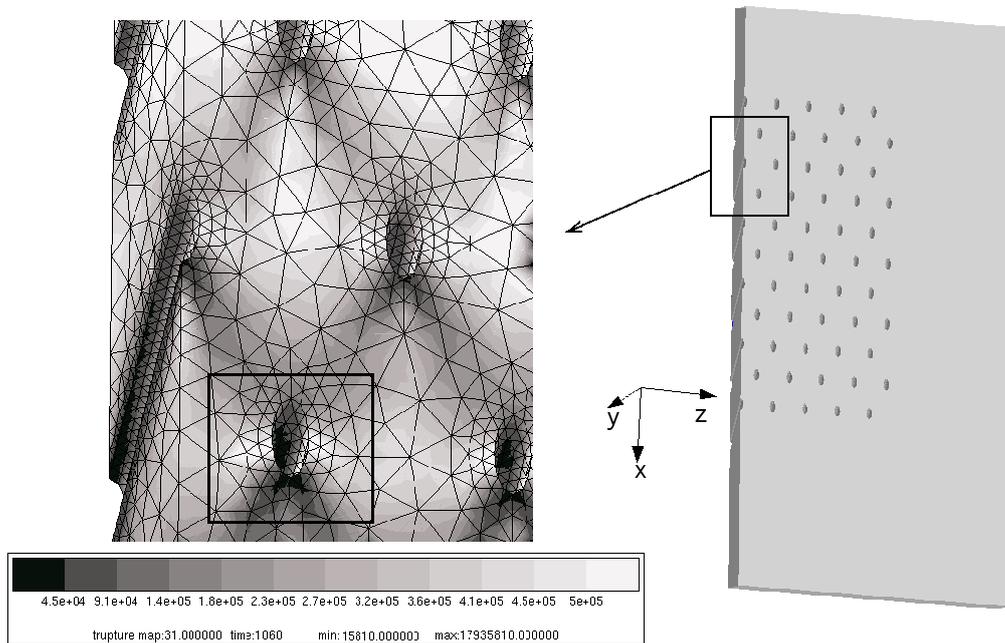


FIG. 5.24: Carte de durée de vie après post-traitement sur zoom structural (face arrière)

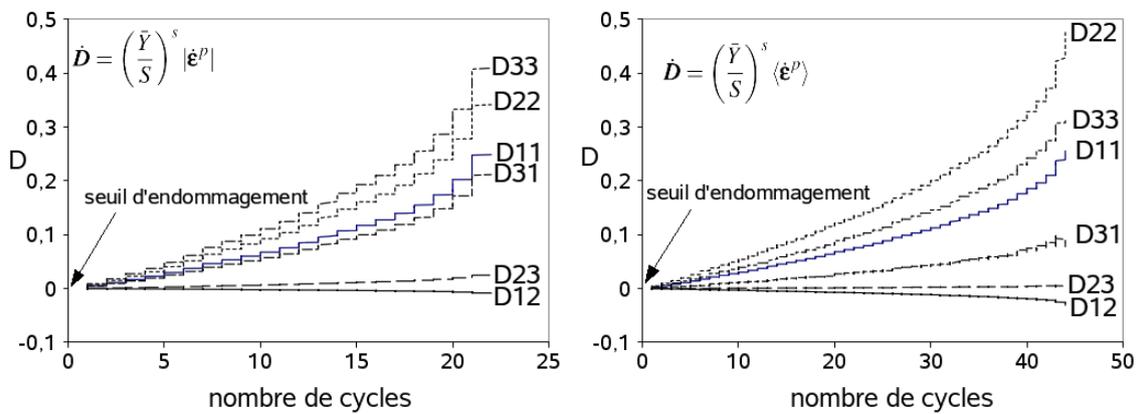


FIG. 5.25: Evolution des composantes du tenseur d'endommagement en bord de trou

l'évolution des composantes du tenseur d'endommagement, calculé par post-traitement, on peut théoriquement en déduire des informations sur l'orientation de la fissure à amorçage.

Pour la loi en $|\dot{\epsilon}^P|$, la figure 5.25 représente graphiquement les composantes du tenseur d'endommagement \mathbf{D} dans le repère de la géométrie, dont l'expression à l'amorçage de fissure est :

$$\mathbf{D}_{|\dot{\epsilon}^P|} = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.01 & 0.21 \\ -0.01 & 0.34 & 0.02 \\ 0.21 & 0.02 & 0.41 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Les composantes de \mathbf{D} peuvent tout-à-fait prendre des valeurs négatives, tant que les valeurs propres restent strictement positives. Les valeurs propres de $\mathbf{D}_{|\dot{\epsilon}^p|}$ valent ici 0.31, 0.09, et 0.50. La valeur maximale des valeurs propres correspond bien à l'endommagement critique $D_c = 0.5$, et c'est le vecteur propre associé à cette valeur propre qui détermine la direction préférentielle d'amorçage de fissure. Ici, le vecteur propre associé à la valeur propre 0.5 est

$$\vec{n}_{0.5} = \begin{pmatrix} 0.56 \\ 0.07 \\ 0.82 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

dans le repère $Oxyz$ de la géométrie. La direction privilégiée d'amorçage de fissure donnée par ce vecteur fait un angle d'environ 30° par rapport à la direction \vec{x} , proche de ce qui est observé sur la figure 5.23 gauche. La deuxième valeur propre, 0.31, correspond au vecteur propre

$$\vec{n}_{0.31} = \begin{pmatrix} -0.11 \\ 0.99 \\ -0.01 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Ces deux valeurs propres étant proches, on peut estimer qu'il y a compétition entre les deux directions \vec{z} et \vec{y} pour l'amorçage de fissure. Expérimentalement, on observe des fissures se propageant ensuite principalement dans la direction 3 (axe \vec{z}), avant de bifurquer, mais également une fissuration semblant partir du centre du trou.

Le même travail peut être mené pour la loi en $\langle \dot{\epsilon}^p \rangle$: le tenseur d'endommagement avant amorçage de fissure s'écrit :

$$\mathbf{D}_{\langle \dot{\epsilon}^p \rangle} = \begin{pmatrix} 0.26 & -0.03 & 0.08 \\ -0.03 & 0.48 & 0.00 \\ 0.08 & 0.00 & 0.32 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

dont les valeurs propres valent 0.5, 0.38 et 0.21. Le vecteur propre associé à la valeur 0.5,

$$\vec{n}_{0.5} = \begin{pmatrix} -0.12 \\ 0.72 \\ -0.44 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

et le vecteur propre associé à la valeur 0.38,

$$\vec{n}_{0.38} = \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.14 \\ 0.826 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

traduisent des directions préférentielles d'amorçage de fissure suivant principalement les axes \vec{z} et \vec{y} , de la même manière que pour la loi en $|\dot{\epsilon}^p|$. L'anisotropie de l'endommagement tendrait à montrer ici que l'amorçage de fissure se fait en compétition à nouveau entre les directions \vec{z} et \vec{y} . L'anisotropie de l'endommagement semble permettre d'estimer la direction d'amorçage de fissure, mais en terme de propagation, seule la mécanique de la

rupture pourrait apporter davantage d'informations. La comparaison avec les profils de fissure expérimentaux (figure 5.23) doit néanmoins se faire avec précaution, puisque aucune information sur la direction de propagation n'est donnée par ces calculs d'endommagement en post-traitement. Le lien entre mécanique de l'endommagement et mécanique de la rupture prend alors toute son importance, en trois phases : la phase de localisation des déformations (nécessité de calculs couplés au lieu de post-traitements), la phase d'amorçage proprement dite (de création de surfaces libres) et la phase de propagation.

4 Conclusion

L'essai de fatigue thermique développé lors de cette thèse a permis de faire apparaître des fissures sur une structure multiperforée, représentative de l'application chambre de combustion. Les gradients de contraintes d'origine thermique ont conduit à l'amorçage d'une fissure au bout de 500 cycles thermomécaniques complexes environ.

L'essai a été intégralement simulé, du thermique transitoire jusqu'au post-traitement de durée de vie. Un calcul sur plaque au comportement homogène équivalent a d'abord été mené, montrant les limitations d'une telle modélisation de structure multiperforée en terme de comportement mais également de durée de vie. Le calcul complet mené sur un maillage modélisant la multiperforation a donné de bien meilleurs résultats, permettant de retrouver la durée de vie expérimentale à un facteur 2 près. Les cartes de durée de vie calculées par post-traitement ont permis de localiser la fissure à initiation et ainsi confronter de manière satisfaisante ces résultats aux observations expérimentales.

Pour que l'exercice soit complet, il faudrait en outre s'intéresser à la dépendance des résultats de calcul et à la finesse du maillage. Rappelons seulement que le calcul sur structure multiperforée mené ici comprend environ 600 000 degrés de liberté et a duré 450 heures pour le calcul d'un cycle. Il peut être intéressant d'utiliser une méthode de parallélisation du calcul pour raffiner le maillage, ou si l'on veut simuler plus de cycles élasto-visco-plastiques, d'utiliser une méthode de calcul direct plus rapide, bien adaptée aux problèmes transitoires (Comte & al, 2006).

L'essai de fatigue thermique sur structure permet ainsi la validation des modèles et de leur identification ainsi que de leur implantation numérique et *in fine* la validation de la chaîne complète de dimensionnement sur un cas complexe tridimensionnel.

Conclusion

Les lois d'endommagement incrémentales permettent de modéliser la rupture d'un matériau sous divers types de sollicitations, que ce soit en chargement uniaxial (fluage, fatigue, traction monotone, interaction fatigue-fluage, fatigue à différents niveaux de chargements, chargements plus complexes voire aléatoires, chargements anisothermes), ou multiaxial (bitraction proportionnelle, non-proportionnelle, alternée, chargements d'origine thermique sur structure), sur points de Gauss ou sur structures complètes, le tout en utilisant un seul jeu de paramètre.

Différentes lois incrémentales tensorielles, traduisant un endommagement gouverné par la plasticité ou la viscoplasticité, ont été testées dans cette thèse :

- une loi traduisant une anisotropie induite par la valeur absolue du tenseur des vitesses de déformation plastique, $\dot{\mathbf{D}} = (\bar{Y}/S)^s |\dot{\mathbf{e}}^P|$, avec ($h = 1$) ou sans ($h = 0$) effet de refermeture des micro-défauts,
- une loi traduisant une anisotropie induite par la partie positive du tenseur des vitesses de déformation plastique, $\dot{\mathbf{D}} = (\bar{Y}/S)^s \langle \dot{\mathbf{e}}^P \rangle$, avec ($h = 1$) ou sans ($h = 0$) refermeture des micro-défauts,
- une loi traduisant une anisotropie induite par le tenseur contrainte effective $\dot{\mathbf{D}} = (\langle \tilde{\sigma} \rangle^2 / 2ES)^s \dot{p}$.

Ces lois généralisent toutes la loi isotrope $\dot{D} = (Y/S)^s \dot{p}$ de Lemaitre. Pour chaque loi, un jeu de paramètres "matériau" est disponible entre 20°C et 900°C, identifié sur des courbes de durée de vie en fluage et en fatigue oligocyclique, selon une procédure originale bien définie.

L'écriture d'un seuil d'endommagement en énergie stockée permet d'introduire le seuil d'endommagement w_D comme paramètre dépendant uniquement du matériau et de la température, et l'on retrouve par cette formulation la dépendance naturelle au chargement du seuil d'endommagement en déformation plastique cumulée p_D , dépendance observée particulièrement en fatigue.

Les paramètres de visco-plasticité ont quant à eux été identifiés sur des courbes de traction cyclique, et de fluage secondaire.

Les modèles d'endommagement couplés à la visco-plasticité ont été implantés dans le code éléments finis Zebulon de manière totalement couplée, et sous forme de post-processeur pour certains d'entre eux.

Des essais uniaxiaux, de fatigue à temps de maintien, ou de type "mission réelle" ont permis de valider l'identification du modèle de viscoplasticité à une seule viscosité, même si les limitations d'une identification isotherme des paramètres matériau ont pu être mises en évidence lors de la mise en oeuvre d'un essai de fatigue thermomécanique du type "mission réelle". Cet essai a également été l'occasion de mettre en lumière les difficultés de la modélisation de l'endommagement dans le cas particulier de la compression et de

l'apport de la modélisation de la refermeture des micro-défauts et de la dissymétrie traction/compression de l'endommagement.

Un essai de fatigue thermique a enfin été conçu et réalisé, permettant la validation de la méthodologie de calcul de durée de vie via les lois incrémentales d'endommagement, du calcul thermique transitoire initial jusqu'à la détermination du temps à initiation de fissure de la pièce par post-traitement de calcul viscoplastique.

Les résultats obtenus permettent de conclure à la robustesse de tels modèles, dans des conditions de chargement simples comme complexes, et particulièrement lors de chargements anisothermes.

Bibliographie

- [Bates, 1999] SC Bates. Low mass, low power, low cost space furnace. *SBIR Phase I Final Report - NASA Marshall Space Flight Center - Contract NAS8-99040*, 1999.
- [Benallal *et al.*, 1988] A Benallal, R Billardon, & I Doghri. An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations. *Applied Numerical Methods*, 4 :731–740, 1988.
- [Benallal *et al.*, 1991] A Benallal, R Billardon, & J Lemaitre. Continuum damage mechanics and local approach to fracture : Numerical procedures. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 92(2) :141–155, 1991.
- [Berthod *et al.*, 2003] P Berthod, S Michon, L Aranda, S Mathieu, & JC Gachon. Experimental and thermodynamic study of the microstructure evolution in cobalt-base superalloys at high temperature. *Computer Coupling of Phase Diagrams and Thermochemistry*, 27 :353–359, 2003.
- [Besson *et al.*, 2001] J Besson, G Cailletaud, JL Chaboche, & S Forest. *Mécanique non linéaire des matériaux*. Hermès – Lavoisier, 2001.
- [Besson & Desmorat, 2004] J Besson & R Desmorat. Numerical implementation of constitutive models. *Local Approach to Fracture, Chapter X, Ed. J. Besson, Presse de l'Ecole des Mines de Paris*, 2004.
- [Bhanu Sankara Rao *et al.*, 1995] K Bhanu Sankara Rao, MG Castelli, & JR Ellis. On the low cycle fatigue deformation of haynes 188 superalloy in the dynamic strain aging regime. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 33(6) :1005–1012, 1995.
- [Borvik *et al.*, 2003] T Borvik, OS Hopperstad, & T Berstad. On the influence of stress triaxiality and strain rate on the behaviour of a structural steel. part ii. numerical study. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 22(1) :15–32, 2003.
- [Bychkov *et al.*, 2007] NG Bychkov, VP Lukash, YA Nozhnitsky, AV Perchin, & AD Rekin. Investigations of thermomechanical fatigue for optimization of design and production process solutions for gas-turbine engine parts. *International Journal of Fatigue*, In press, 2007.
- [Castelli, 1996] MG Castelli. Cyclic deformation of haynes 188 superalloy under isothermal and thermomechanical loadings. In *Superalloys 1996, TMS 1996*, 1996.
- [Chaboche, 1978] JL Chaboche. *Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement*. Office national d'études et de recherches aérospatiales, 1978.
- [Chaboche, 1989] JL Chaboche. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 5(3) :247–302, 1989.

- [Chaboche, 1992] JL Chaboche. Damage induced anisotropy : On the difficulties associated with the active/passive unilateral condition. *International Journal of Damage Mechanics*, 1(2) :148–171, 1992.
- [Chaboche, 1997] JL Chaboche. Thermodynamic formulation of constitutive equations and application to the viscoplasticity and viscoelasticity of metals and polymers. *International Journal of Solids and Structures*, 18(34) :2239–2254, 1997.
- [Chaboche & Gallerneau, 2001] JL Chaboche & F Gallerneau. An overview of the damage approach of durability modelling at elevated temperature. *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, 24 :405–418, 2001.
- [Chaboche & Lesne, 1988] JL Chaboche & PM Lesne. A non-linear continuous fatigue damage model. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct*, 11 :1–17, 1988.
- [Chen *et al.*, 2001] LJ Chen, PK Liaw, YH He, ML Benson, JW Blust, PF Browning, RR Seeley, & DL Klarstrom. Tensile hold low-cycle fatigue behavior of cobalt-based haynes 188 superalloy. *Scripta Mater.*, 44 :859–865, 2001.
- [Chow & Wang, 1987] CL Chow & J Wang. An anisotropic theory for continuum damage mechanics. *Int. J. of Fract*, 33 :3–16, 1987.
- [Chrysochoos, 1987] A Chrysochoos. *Dissipation et Blocage d’Energie lors d’un Ecrouissage en Traction Simple*. PhD thesis, Université Paris 6, 1987.
- [Comte *et al.*, 2006] F Comte, H Maitournam, P Burry, & T Mac Lan Nguuyen. A direct method for the solution of evolution problems. *C.R. Mécanique*, pages 317–322, 2006.
- [Cordebois & Sidoroff, 1982] JP Cordebois & F Sidoroff. Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité. *J.M.T.A., numéro spécial*, pages 45–60, 1982.
- [Dambrine & Mascarell, 1987] B Dambrine & JP Mascarell. About the interest of using unified viscoplastic models in engine hot components life prediction. In *Proceedings of the MECAMAT International Seminar on High Temperature Fracture Mechanisms and Mechanics*, 1987.
- [Declercq, 1999] J Declercq. Identification d’une loi de comportement à 7 paramètres avec double viscosité sur le superalliage à base cobalt haynes 188. *Note technique Snecma Moteurs*, 1999.
- [Declercq, 2001] J Declercq. Identification d’une loi de comportement élasto-viscoplastique homogène équivalent d’un matériau multiperforé. *Rapport de stage de maîtrise spécialisé*, 2001.
- [Desmorat, 2006] R Desmorat. Positivité de la dissipation intrinsèque d’une classe de modèles d’endommagement anisotropes non standards. *C. R. Mécanique*, 334(10) :587–592, 2006.
- [Desmorat *et al.*, 2007] R Desmorat, A Kane, M Seyedi, & JP Sermage. Two scale damage model and related numerical issues for thermomechanical high cycle fatigue. *European J. Mechanics A/Solids, Vol à paraître*, 2007.
- [Desmorat & Otin, 2007] R Desmorat & S Otin. Cross-identification isotropic/anisotropic damage for (visco-)plasticity based models. *Engng. Fract. Mech.*, page In Press, 2007.

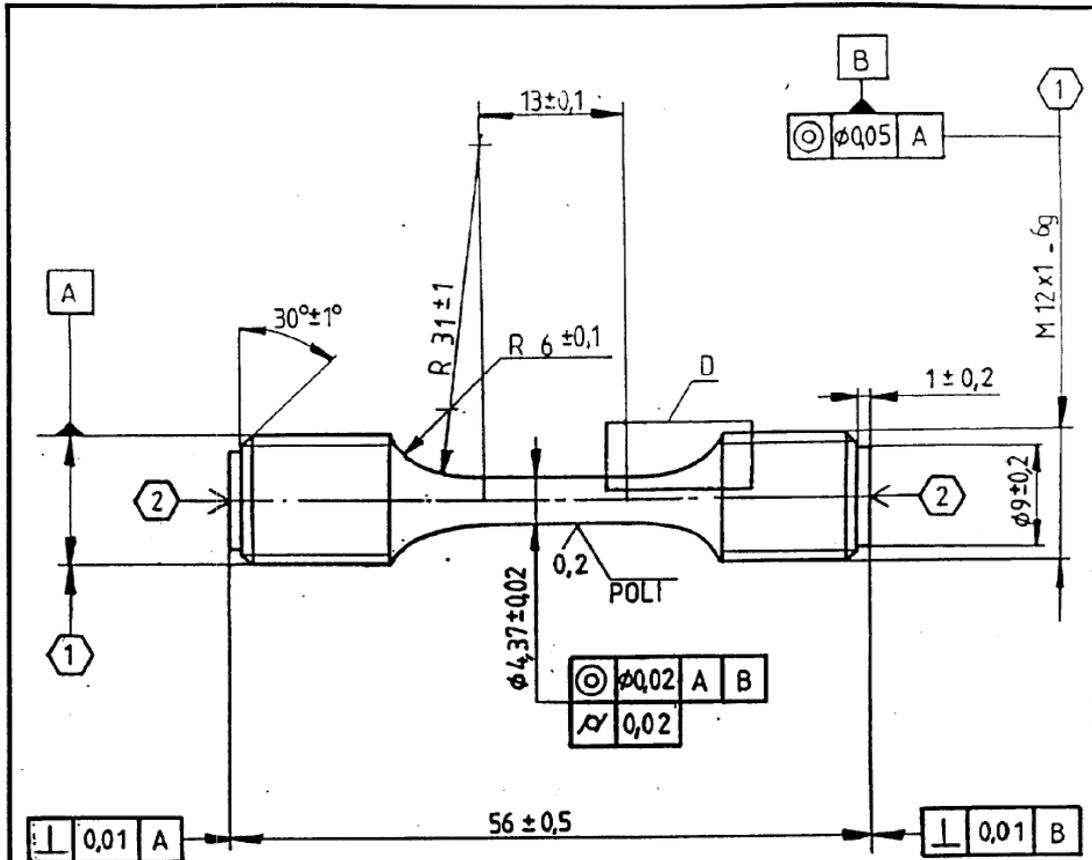
- [Desmorat *et al.*, 1999] R Desmorat, JP Sermage, & J Lemaitre. Loi d'endommagement anisotrope. *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. IIb*, pages 1231–1236, 1999.
- [Doghri & Billardon, 1995] I Doghri & R Billardon. Investigation of localization due to damage in elasto-plastic materials. *Mechanics of Materials*, 19(2-3) :129–149, 1995.
- [Doquet & Pineau, 1990] V Doquet & A Pineau. Extra hardening due to cyclic non-proportional loading of an austenitic stainless steel. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 24(3) :433–438, 1990.
- [Dreshfield, 1996] RL Dreshfield. Long time creep rupture of haynes alloy 188. In *Eighth International Symposium on Superalloys, Champion, Pennsylvania, September 2226, 1996*.
- [Grange *et al.*, 2000] M Grange, J Besson, & E Andrieu. An anisotropic gurson type model to represent the ductile rupture of hydrided zircaloy-4 sheets. *International Journal of Fracture*, 105(3) :273–293, 2000.
- [Hasselqvist, 2004] M Hasselqvist. Tmf crack initiation lifing of austenitic carbide precipitating alloys. In *ASME Turbo Expo 2004, Vienna, 2004*.
- [Hayhurst & Leckie, 1973] DR Hayhurst & FA Leckie. Creep rupture under multi-axial state of stress. *J. Mech. Phys. Solids*, 21(6) :431–446, 1973.
- [Hild, 2002] F Hild. *A software for displacement field measurements by digital image correlation*. Internal Report n°254, LMT-Cachan, 2002.
- [Ho & Krempi, 2001] K Ho & E Krempi. Modeling of unusual rate sensitivities inside and outside the dynamic strain aging regime. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 123(11) :28–35, 2001.
- [Hopperstad *et al.*, 2003] OS Hopperstad, T Borvik, M Langseth, K Labibes, & C Albertini. On the influence of stress triaxiality and strain rate on the behaviour of a structural steel. part i. experiments. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 22(1) :1–13, 2003.
- [Kachanov, 1958] LM Kachanov. Time of the rupture process under creep conditions. In *Izv. Akad. Nauk. SSR. Otd. Tekh. Nauk*, 1958.
- [Krajcinovic & Fonseka, 1973] D Krajcinovic & GU Fonseka. The continuous damage theory of brittle materials, parts i and ii., *J. Appl. Mech.*, 48 :809–824, 1973.
- [Ladevèze, 1983] P Ladevèze. Sur une théorie de l'endommagement anisotrope. Rapport interne 34, LMT-Cachan, 1983.
- [Leckie & Onat, 1981] FA Leckie & ET Onat. Tensorial nature of damage measuring internal variables. In *Hult, J. Lemaitre, J. L. (eds.). Proceedings of IUTAM Symposium on Physical Nonlinearities in Structural Analysis, Springer, Senlis, France, 1981*.
- [Lemaitre, 1981] J Lemaitre. Tensorial nature of damage measuring internal variables. In *Hult, J. Lemaitre, J. L. (eds.). Proceedings of IUTAM Symposium on Physical Nonlinearities in Structural Analysis, Springer, Senlis, France, 1981*.
- [Lemaitre, 1992] J Lemaitre. *A course on Damage Mechanics*. Springer Verlag, 1992.

- [Lemaitre & Chaboche, 1974] J Lemaitre & JL Chaboche. A non-linear model of creep-fatigue damage cumulation and interaction. *ONERA, TP no. 1394*, 1974.
- [Lemaitre & Chaboche, 1978] J Lemaitre & JL Chaboche. Phenomenological approach of damage rupture. *Journal de Mécanique Appliquée*, 2(3) :317–365, 1978.
- [Lemaitre & Chaboche, 1985] J Lemaitre & JL Chaboche. *Mécanique des Matériaux Solides*. Dunod, 1985.
- [Lemaitre & Desmorat, 2005] J Lemaitre & R Desmorat. *Engineering Damage Mechanics : Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Springer, 2005.
- [Lemaitre *et al.*, 2000] J Lemaitre, R Desmorat, & M Sauzay. Anisotropic damage law of evolution. *European Journal of Mechanics and Solids*, 19 :197–208, 2000.
- [Lissenden *et al.*, 2004] CJ Lissenden, Colaiuta JF, & BA Lerch. Hardening behavior of three metallic alloys under combined stresses at elevated temperature. *Acta Mechanica*, 169 :53–77, 2004.
- [Marquis, 2001] D Marquis. Cyclic plasticity model with nonlinear isotropic and kinematic hardenings : Nolikh model. *andbook of Materials Behavior Models*, pages 213–222, 2001.
- [Martin & Leckie, 1972] JB Martin & F Leckie. Creep rupture of structures. *J. Mechanics Physics Solids*, 20(44) :223–238, 1972.
- [Miller & Ibrahim, 1981] KJ Miller & MFE Ibrahim. Damage accumulation during initiation and short crack growth regimes. *Fatigue Eng. Mater. Struct.*, 4(3) :263–277, 1981.
- [Mirza *et al.*, 1996] MS Mirza, DC Barton, & P Church. The effect of stress triaxiality and strain-rate on the fracture characteristics of ductile metals. *Journal of Materials Science*, 31(2) :453–461, 1996.
- [Murakami, 1988] S Murakami. Mechanical modeling of material damage. *J. App. Mech*, 55 :280–286, 1988.
- [Murakami & Ohno, 1978] S Murakami & N Ohno. A constitutive equation of creep damage in polycrystalline metals. *IUTAM Colloquium Euromech 111, Marienbad*, 1978.
- [Otin *et al.*, 2007] S Otin, R Desmorat, & B Dambrine. Incremental damage laws applied to the design of combustion chambers. In *Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Mechanics, Shanghai*, 2007.
- [Pajani, 2001] D Pajani. Thermographie : Principes et mesure. *Tech. ing., Mes. contrôle*, RC3(R2740) :R2740.1–R2740.16, 2001.
- [Petry, 2006] C Petry. *Caractérisation et modélisation du comportement et de l'endommagement d'alliages métalliques sur une grande plage de température*. PhD thesis, ENS Cachan, 2006.
- [Rabotnov, 1969] YN Rabotnov. Creep problem in structural members. North Holland, Amsterdam, 1969.
- [Raffaitin *et al.*, 2007] A Raffaitin, D Monceau, F Crabos, & E Andrieu. The effect of thermal cycling on the high-temperature creep behaviour of a single crystal nickel-based superalloy. *Scripta Materialia*, 56(4) :277–280, 2007.

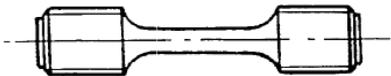
- [Rice & Tracey, 1969] JR Rice & DM Tracey. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids*, 17 :201–217, 1969.
- [Saanouni & Abdul-Latif, 1996] K Saanouni & A Abdul-Latif. Micromechanical modeling of low cycle fatigue under complex loadings - part 1 theoretical formulation - part 2 applications. *Int. Jal. of Plasticity*, 12(9) :1111–1149, 1996.
- [Saanouni *et al.*, 2000] K Saanouni, K Nasnas, & Y Hammi. Damage modeling in metal forming processes. *International Journal of Damage Mechanics*, 9(3) :196–240, 2000.
- [Savalle, 1981] S Savalle. Sur les problèmes d'identification des lois de comportement. application à la viscoplasticité cyclique. *Rapport Technique de synthèse n° 34/1765 RY 073 R, ONERA*, 1981.
- [Sermage, 1998] JP Sermage. *Fatigue thermique multiaxiale à température variable*. PhD thesis, Université Paris 6, 1998.
- [Sermage *et al.*, 1999] JP Sermage, J Lemaitre, & R Desmorat. Multiaxial creep-fatigue under anisothermal conditions. *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, 23 :241–252, 1999.
- [Simo & Hugues, 1998] JC Simo & TJR Hugues. *Computational Inelasticity*. Springer, 1998.
- [Simo & Taylor, 1985] JC Simo & RL Taylor. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comput. methods appl. mech. eng*, 48(1) :101–118, 1985.
- [Taira, 1973] S Taira. Relationship between thermal fatigue and low cycle fatigue at elevated temperature. *ASTM STP 520*, pages 20–101, 1973.
- [Tanaka, 1994] E Tanaka. A nonproportionality parameter and a cyclic viscoplastic constitutive model taking into account amplitude dependences and memory effects of isotropic hardening. *European journal of mechanics. A. Solids*, 13(2) :155–173, 1994.
- [Voyiadjis & Abu Al-Rub, 2003] GZ Voyiadjis & K Abu Al-Rub. On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :2611–2643, 2003.
- [Yaguchi & Takahashi, 2000] M Yaguchi & Y Takahashi. A viscoplastic constitutive model incorporating dynamic strain aging effect during cyclic deformation conditions. *International Journal of Plasticity*, 16(3-4) :241–262, 2000.
- [Yeom *et al.*, 2003] YT Yeom, SJ Williams, & NK Park. Low-cycle fatigue life prediction for waspaly. *Materials at high temperatures*, 19(3) :153–161, 2003.

Annexe A
Plan de l'éprouvette
axisymétrique d'essai
uniaxial

CE DESSIN EST LA PROPRIETE DE LA SNECMA ET NE PEUT ETRE REPRODUIT OU COMMUNIQUE SANS SON AUTORISATION



Echelle : 1



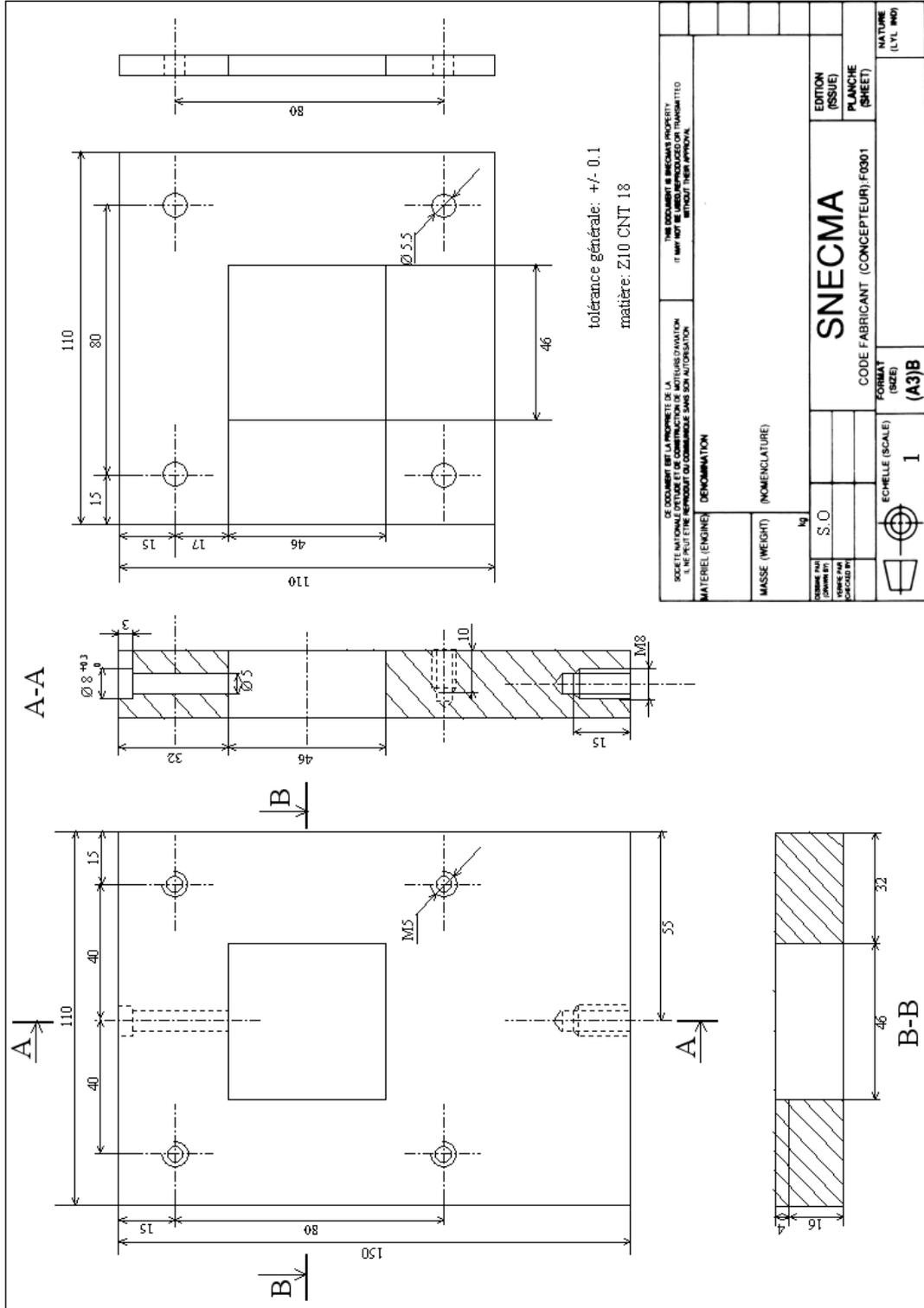
- ① Filetage métrique profil DT 10-18
Dimensions : Ø Ext. 11,974 / 11,794
Ø Sur flancs : 11,324 / 11,209
Ø Int. 10,891 Maxi.

- ② Trous de centre : NFE 60.051-A1,6/3,35

CONDITIONS D'USINAGE : DMC 0105

TOLERANCE GEOMETRIQUE : DT05-57		ETAT DE SURFACE GEOMETRIQUE DT05-75 $\sqrt{0.2}$ / ($\sqrt{0.2}$ / $\sqrt{0.2}$)			
SNECMA SOCIETE NATIONALE D'ETUDE ET DE CONSTRUCTION DE MOTEURS D'AVIATION (F0301)		DENOMINATION : EPROUVETTE DE FATIGUE OLIGOCYCLIQUE (Lt = 56mm)		207/96	C
				596/87	B
DESSIN	L. MARIE	96/05	NUMERO DU DESSIN 485-920-525-0	086/87	A
VERIF.					A.M.N.
				Page 1 / 2	

Annexe B
Plan du support
d'éprouvette pour l'essai
de fatigue thermique
structural



Annexe C

Algorithmes d'optimisation

Méthode de programmation quadratique séquentielle (SQP)

La méthode de programmation quadratique séquentielle (SQP) ou méthode du Lagrangien projeté est un optimiseur local du second ordre. Il se base sur le théorème suivant : l'optimum x^* est un minimum de la fonction Lagrangienne $L = f(x) + \lambda^T g(x)$ dans le sous-espace vectoriel orthogonal au gradient des contraintes actives (si g_i est active, $g_i(x) = 0$). La méthode SQP minimise à chaque itération une approximation quadratique du Lagrangien, où le terme $s^T \nabla g_i$ est négligeable tant que l'optimum se trouve dans le sous-espace tangent aux contraintes actives. En résumé, l'on minimise

$$f(x_i) + s^T \nabla f(x_i) + \frac{1}{2} s^T \nabla H(x_i, \lambda_i) s \quad (5.13)$$

en prenant $s = x_{i+1} - x_i$ de telle sorte que

$$g_j(x_i) + s^T \nabla g_j(x_i) \leq 0, \quad j = 1, n_g \quad (5.14)$$

où x_i est la solution à l'itération i , et $H(x_i, \lambda_i)$ est une approximation du Hessian de la fonction Lagrangienne, i.e. $H(x_i, \lambda_i) \rightarrow \nabla^2 f(x_i) + \lambda_i^T \nabla^2 g(x_i)$. La solution du sous-problème quadratique génère une direction de recherche s et des multiplicateurs de Lagrange λ_i . L'itération suivante x_{i+1} est obtenue en minimisant le Lagrangien dans la direction s : $x_{i+1} = x_i + \alpha s$, où α minimise $f(x_{i+1}) + \lambda_i^T g(x_{i+1})$.

Méthode de levenberg-Marquardt

La méthode de Levenberg-Marquardt est beaucoup utilisée pour l'identification de paramètres de modèles de comportement, lorsque le jeu de paramètres initial est proche du jeu optimal. Cependant, contrairement à la méthode précédente, elle ne permet pas de limiter explicitement le domaine de recherche. On écrit d'abord la norme en terme de moindres carrés de la distance entre simulation et expérience :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} (f(x) - y)^T W (f(x) - y) \quad (5.15)$$

où $f(x)$ est le vecteur de taille N des simulations, y est le vecteur de taille N de l'expérience, et W est la matrice poids, positive diagonale, de taille $(N \times N)$. Les dérivées première et seconde de $\mathcal{F}(x)$ sont :

$$\text{grad } \mathcal{F}(x) = J^T W (f(x) - y) \quad (5.16)$$

$$\text{hessien } \mathcal{F}(x) = J^T W J + \sum_{i=1}^N W_{ii} (f_i(x) - y_i) \text{hessien } f_i \quad (5.17)$$

où J est la matrice $n \times N$ contenant $[\text{grad } f_1 \dots \text{grad } f_N]$ (n est le nombre de variables à optimiser). Si la simulation est relativement proche de l'expérience, et lorsque les plus grandes valeurs propres de $\text{hessien } f_i$ sont relativement petites (si ce n'est pas le cas, il est adapté d'utiliser la méthode SQP plutôt que Levenberg-Marquardt), alors le terme $(f_i(x) - y_i)$ est petit devant le Hessien de f_i , et donc les derniers termes du hessien de $\mathcal{F}(x)$ peuvent être négligés, $\text{hessien } \mathcal{F}(x) \simeq J^T W J$. C'est là la première idée fondamentale de cette méthode, et c'est pourquoi le jeu initial de paramètres doit être proche du jeu optimal. Des conditions nécessaires doivent être remplies par le gradient de la fonction objectif pour que x^* soit optimum :

$$\text{grad } \mathcal{F}(x^*) = 0 \quad (5.18)$$

Linéarisée en x_k , cette équation s'écrit

$$\text{grad } \mathcal{F}(x_k) + \text{hessien } \mathcal{F}(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \quad (5.19)$$

La deuxième idée est de régulariser l'approximation du Hessien de la fonction objectif en ajoutant des termes positifs sur la diagonale et en l'utilisant dans l'équation précédente : l'approximation régularisée du Hessien de \mathcal{F} est alors strictement définie positive et l'équation précédente peut toujours être résolue. L'équation fondamentale pour mettre à jour les variables d'optimisation est

$$(J_k^T W J_k + \lambda_k I)(x_{k+1} - x_k) = -J_k^T W (f(x_k) - y) \quad (5.20)$$

où λ_k est un paramètre positif. Il peut être interprété comme un multiplicateur de Lagrange associé à la limite des variables à optimiser. Ainsi, sa valeur peut être réactualisée à chaque itération, afin de garantir que la linéarisation est toujours valide et que l'on minimise bien la fonction objectif. Les étapes de l'algorithme sont finalement les suivantes :

- $k = 0, \lambda = \lambda_0, x_k = x_0$
- résoudre l'équation 5.20
- si $\|\text{grad } \mathcal{F}(x_{k+1})\| < gmin$ ou $\mathcal{F}(x_{k+1}) < fmin$, ou si le nombre d'évaluations de $\mathcal{F} > iter$, ou si $\|x_{k+1} - x_k\| > stepmini$, stop
- si $\mathcal{F}(x_{k+1}) < \mathcal{F}(x_k)$, $\lambda_{k+1} = \lambda_k / nu$, $k = k + 1$, retour au point 2.
- si $\mathcal{F}(x_{k+1}) \geq \mathcal{F}(x_k)$, $\lambda_{k+1} = \lambda_k \cdot nu$, retour au point 2.

$iter, nu, stepmini, fmin$ et $gmin$ sont des paramètres de convergence choisis par l'utilisateur.

Annexe D

Modèle de comportement à double viscosité

Afin de modéliser le comportement sans endommagement du Haynes 188, Snecma utilise, implantée dans le code éléments finis ZeBuLon, une loi de comportement élasto-viscoplastique à 7 paramètres et double viscosité (Savalle 1981, Declercq, 1999). Cette loi a pour objectif de modéliser le comportement du matériau à la fois en fatigue au cycle stabilisé et en fluage. Elle tient compte du phénomène de viscosité lente qui améliore la modélisation du fluage, et utilise une viscosité rapide pour la description des déformations inélastiques sur les boucles de fatigue.

Partition des déformations

On fait l'hypothèse que la déformation mécanique totale est la somme des déformations inélastique (plasticité et viscoplasticité) et élastique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (5.21)$$

Elasticité et critère de Von Mises

L'élasticité est exprimée simplement de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \underline{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (5.22)$$

où $\underline{\mathbf{E}}$ est le tenseur de Hooke du matériau.

En supposant la présence d'écrouissages cinématique et isotrope, la fonction critère définissant le domaine élastique par $f < 0$ est donnée par :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R) = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X}) : (\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X})} - \sigma_y - R \quad (5.23)$$

où $\boldsymbol{\sigma}^D$ est la partie déviatorique de $\boldsymbol{\sigma}$.

Ecrouissage cinématique

L'écrouissage cinématique s'exprime par la variable d'écrouissage tensorielle $\mathbf{X} = \frac{2}{3}C\boldsymbol{\alpha}$, où $\boldsymbol{\alpha}$ est la variable tensorielle d'écrouissage associée à \mathbf{X} dont la loi d'évolution est du type

Armstrong-Frederick :

$$\dot{\alpha} = \dot{\epsilon}^p - \gamma \alpha \dot{p} \quad \mathbf{X} = \frac{2}{3} C \alpha \quad (5.24)$$

Les paramètres C et γ sont les deux paramètres "matériau" décrivant l'évolution de l'écrouissage cinématique non linéaire. Le coefficient γ va en particulier jouer sur la vitesse de saturation de l'écrouissage.

Ecrouissage isotrope

L'écrouissage isotrope non-linéaire est décrit par l'expression suivante :

$$R = R_{\infty} \left(1 - e^{-bp} \right) \quad (5.25)$$

où p est la déformation plastique cumulée, R_{∞} et b sont les paramètres d'écrouissage isotrope. On suppose ici que l'écrouissage isotrope est saturé, et on note $R_0 = R_{\infty} + \sigma_y$.

Écoulement viscoplastique

Pour décrire le comportement visqueux du matériau en fatigue et en fluage, on introduit deux lois d'écoulement distinctes :

- une loi dite « rapide », pour la description de l'effet de la vitesse de déformation inélastique sur les boucles de fatigue, dans laquelle est introduite la fonction de charge f ci-dessus :

$$\dot{p}_r = \left\langle \frac{f}{K_N^r} \right\rangle^{N^r} \quad (5.26)$$

- une loi dite « lente », pour la description du fluage, de type Norton :

$$\dot{p}_l = \left(\frac{|\sigma_{eq}|}{K_N^l} \right)^{N^l} \quad (5.27)$$

La déformation plastique cumulée totale est la somme des écoulements lent et rapide, mais on préfère exprimer cette somme sur les dérivées temporelles :

$$\dot{p} = \dot{p}_l + \dot{p}_r \quad (5.28)$$

L'introduction de cette «double viscosité » permet de rendre compte au mieux des phénomènes dits à « sollicitations rapides » (fatigue) et à « sollicitations lentes » (fluage de longue durée) en utilisant une modélisation qui rend compatibles les deux modèles.

Les 7 paramètres à identifier sont C , γ , R_0 , K_n^l , K_N^r , N^l et N^r . Cette loi à double viscosité est implantée dans le code de calcul ZeBuLon sous la forme de deux potentiels d'élasto-viscoplasticité généralisée (gen_evp) appelés *evr* pour le potentiel englobant les paramètres de comportement rapide et *evl* pour le potentiel englobant les paramètres de viscosité lente.