



**HAL**  
open science

# Couplage Fluide Structure pour la simulation numérique des écoulements fluides dans une conduite à parois rigides ou élastiques, en présence d'obstacles ou non.

Lahcen Ait Moudid

► **To cite this version:**

Lahcen Ait Moudid. Couplage Fluide Structure pour la simulation numérique des écoulements fluides dans une conduite à parois rigides ou élastiques, en présence d'obstacles ou non.. Sciences de la Terre. Université d'Artois, 2007. Français. NNT: . tel-00341094

**HAL Id: tel-00341094**

**<https://theses.hal.science/tel-00341094>**

Submitted on 24 Nov 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université d'Artois  
Faculté des Sciences Jean Perrin

**Sujet de thèse :**

**Couplage Fluide-Structure pour la simulation numérique des écoulements fluides dans une conduite à parois rigides ou élastiques, en présence d'obstacles ou non.**

Thèse présentée par :

Lahcen AIT MOUDID

Évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

M. Aziz Hamdouni	Professeur, Univ. La Rochelle	Rapporteur
Mme. Elisabeth Longatte	HDR, EDF Chatou	Rapporteur
M. Brahim Khelifa	Professeur, Univ. Artois	Président
M. Mhamed Souli	Professeur, USTL Lille1	Examineur
M. Christian Mathieu	Professeur, Univ. Artois	Examineur
M. Hakim Naceur	HDR, UTC Compiègne	Examineur
M. Andrew Parry	Dr. Ingénieur, Schlumberger Clamart	Examineur
M. Pasquale Mammone	Professeur, Univ. Artois	Codirecteur
M. Abdellatif Ouahsine	Professeur, UTC Compiègne	Directeur de thèse

**Thèse acceptée le : 24 octobre 2007**

## REMERCIEMENTS

Cette thèse a été effectuée à la fois au sein de l'Université d'Artois et aussi en collaboration avec l'Université de Technologie Compiègne. Je tiens tout d'abord à remercier Abdellatif Ouahsine, Professeur à l'université de Compiègne qui a accepté de diriger mes recherches. Ses grandes qualités humaines et scientifiques ainsi que sa disponibilité ont été essentielles à la réalisation de cette thèse.

Je remercie Madame Elisabeth Longatte, HDR à EDF Chatou, et Aziz Hamdouni, Professeur à l'université de La Rochelle, pour avoir accepté de rapporter sur ma thèse. Je remercie aussi Monsieur Christian Mathieu, Professeur à l'université d'Artois, pour sa rigueur et pour sa présence aux moments difficiles. Je suis très honoré que Monsieur Brahim Khelifa, Professeur à l'université d'Artois, ait accepté de présider ce jury.

Mes vives remerciements vont également à Messieurs les Professeurs Mhamed Souli, Andrew Parry et Pasquale Mammone pour leur aide, les multiples discussions très fructueuses et pour avoir acceptés de juger mon travail. Je remercie également Monsieur Hakim Naceur, Professeur à l'université de Compiègne, pour son aide et ses conseils. Je l'en remercie sincèrement pour l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail et pour avoir accepté de le juger.

Mes remerciements vont également à toute ma famille, et en particulier à mes parents, mes frères, mon épouse et ma fille Salma qui m'ont toujours soutenu dans les moments difficiles.

Je remercie également Monsieur Adlane Sayede, Maître de conférences à l'université d'Artois, pour son aide et ses conseils. Que mes amis, Sami Kaidi, Bouras Raneme... soient ici vivement remerciés pour leur fructueuse collaboration et leur aide matérielle pour la réalisation de ces travaux.

## RÉSUMÉ

La simulation numérique de l'interaction fluide-structure par la méthode des éléments finis a été étudiée dans le cadre des équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux newtonien incompressible en interaction avec un solide élastique.

La formulation Euler-Lagrange Arbitraire (ALE) a été utilisée, en considérant un maillage dynamique, où le solide est décrit par une formulation lagrangienne et le fluide par une formulation eulérienne. Le modèle fluide est validé en considérant des cas tests académiques et concernent les cas : de la marche, de la cavité, de l'écoulement autour d'un cylindre, etc... Le modèle solide est validé en considérant le cas d'une poutre encastrée-libre et encastrée-encastrée, le cas d'un cylindre soumis à son poids propre et le cas d'une arche elliptique.

Un algorithme de couplage est alors mis au point pour la mise en oeuvre de cette interaction fluide-structure. Cet algorithme, basé sur un schéma explicite, permet le transfert de champs de façon interactive. L'efficacité de la méthode ALE et du couplage fluide-structure a été évaluée en considérant plusieurs cas tests: solide immergé dans un canal, où s'écoule un fluide en écoulement transitoire ou stationnaire, écoulement d'un fluide dans une canalisation à parois élastiques, etc...

Les résultats montrent que ce couplage explicite-interactif permet d'utiliser un maillage et un schéma différent pour le fluide et la structure, et jouit de l'avantage de ne pas utiliser de grosses matrices de stockage des données.

### **Mots-clés :**

Fluide, Equation de Navier-Stokes, Structure, Eléments finis de coque, formulation ALE, interaction fluide-structure.

## ABSTRACT

The numerical simulation of fluid-structure interaction by the finite element method has been studied in the context of The Navier-Stokes equations for an incompressible Newtonian viscous fluid in interaction with an elastic solid.

The formulation Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) was used, by considering a dynamic grid, where the solid is described by a Lagrangian formulation and the fluid by a Eulerian formulation. The fluid model validation is carried out by considering academic tests and concerns: flow around a step, the Cavity, the flow around a cylinder... The solid model is validated by considering the case of a cantilever beam and fixed beam, the case of a cylinder subjected to its actual weight and the case of an elliptical arch.

An algorithm of coupling is then developed for the implementation of this interaction fluid-structure. This algorithm, based on an explicit schema, allows the transfer of fields in an interactive way. The effectiveness of the method ALE and the coupling fluid-structure was evaluated by considering several cases tests: solid immersed in a channel, where runs out a transitory or stationary fluid flow, flow of a fluid in a drain with elastic walls...

The results show that this coupling explicit-interactive makes it possible to use a different mesh and schemas for the fluid and the structure, and enjoys the advantage of not using large matrices of data storage.

### **Keywords :**

Fluid, Navier-Stokes equation, Structure, shell finite element model, ALE formulation, fluid-structure interaction.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>INTRODUCTION</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1: ETAT DE L'ART</b> . . . . .	<b>4</b>
1.1 Introduction . . . . .	4
1.2 Fluide-structure et problèmes associés . . . . .	6
1.3 Méthodes de couplage Fluide-structure . . . . .	7
1.3.1 Méthodes numériques . . . . .	7
1.3.2 Méthodes analytiques . . . . .	10
1.4 Formulation ALE des équations de Navier-Stokes . . . . .	11
<b>CHAPITRE 2: RÉOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉCOULEMENT</b>	
<b>DE FLUIDES PAR ÉLÉMENTS FINIS</b> . . . . .	<b>13</b>
2.1 Introduction : Méthode des éléments finis . . . . .	13
2.2 Éléments d'analyse fonctionnelle . . . . .	14
2.3 Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis . . . . .	16
2.3.1 Formulation variationnelle forte . . . . .	16
2.3.2 Formulation variationnelle faible . . . . .	16
2.3.3 Conditions aux limites . . . . .	17
2.4 Les équation du mouvement des fluides incompressible . . . . .	18
2.4.1 Équation de continuité . . . . .	18
2.4.2 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	18
2.5 Ecriture variationnelle faible dans le cas de fluides incompressibles . . . . .	19
2.5.1 Discrétisation par éléments finis . . . . .	20
2.6 Méthodes de stabilité numérique . . . . .	22

### CHAPITRE 3: MODÈLE FLUIDE : TRAITEMENT NUMÉRIQUE

	<b>ET VALIDATION . . . . .</b>	<b>24</b>
3.1	Résolution numérique . . . . .	24
3.1.1	Algorithmes de résolution : Discrétisation Temporelle . . . . .	24
3.1.2	Linéarisation : Méthode itérative de Newton-Raphson . . . . .	26
3.1.3	Stabilité de la solution : Condition de Ladysenskaya-Brezzi- Babuska (LBB) . . . . .	27
3.1.4	Méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) . . . . .	29
3.2	Validation du module fluide . . . . .	30
3.2.1	Cas test de Poiseuille . . . . .	31
3.2.2	Cas test d'écoulement autour d'un cylindre . . . . .	33
3.2.3	Cas test d'une Cavité carrée . . . . .	40
3.2.4	Cas test d'écoulement autour d'un obstacle . . . . .	43

### CHAPITRE 4: MODÈLE SOLIDE : TRAITEMENT NUMÉRIQUE

	<b>ET VALIDATION . . . . .</b>	<b>49</b>
4.1	Introduction . . . . .	49
4.2	Synthèse bibliographique . . . . .	50
4.3	Description des éléments finis utilisés dans le modèle structure . . . . .	51
4.3.1	Éléments de coques de type Kirchhoff discret . . . . .	51
4.3.2	Éléments de coques de type Reissner-Mindlin . . . . .	56
4.3.3	Élément à deux dimension en coordonnées cartésiennes, Élément triangulaire à trois noeuds (T3) . . . . .	58
4.4	Résultats numériques : tests de validation . . . . .	62
4.4.1	Modèles éléments finis . . . . .	62
4.4.2	Panneau cylindrique soumis à son poids propre. . . . .	63
4.4.3	Poutre 2D encastré-libre, soumise à un effort concentré : . . . . .	69

4.4.4	Poutre 2D en flexion encastré-encastré. . . . .	72
4.4.5	Déformation d'une arche elliptique . . . . .	75
<b>CHAPITRE 5: COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE . . . . .</b>		<b>78</b>
5.1	Formulations eulériennes, lagrangiennes et mixtes . . . . .	78
5.1.1	Formulation eulérienne . . . . .	78
5.1.2	Formulation lagrangienne . . . . .	79
5.1.3	Formulation ALE . . . . .	80
5.2	Procédure du couplage . . . . .	86
5.2.1	Conditions de couplage . . . . .	86
5.2.2	Algorithme de couplage . . . . .	87
5.3	Résultats de la procédure de couplage . . . . .	88
5.3.1	Cas test d'un canal plan en présence d'un obstacle vertical . . . . .	89
5.3.2	Écoulement dans un canal plan en présence de deux obstacles . . . . .	92
5.3.3	Conduite en forme de T, avec une paroi flexible . . . . .	96
<b>CONCLUSION . . . . .</b>		<b>102</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE . . . . .</b>		<b>104</b>



## LISTE DES FIGURES

3.1	Domaine de calcul pour le problème de Poiseuille et Maillage (2000 éléments). . . . .	31
3.2	Isovaleurs de vitesse $u$ dans le canal. . . . .	32
3.3	Isovaleurs de pression correspondantes. . . . .	32
3.4	Pression en fonction de $x$ au milieu du canal, comparer avec la pression analytique et stabiliser par SUPG. . . . .	33
3.5	Domaine de calcul et conditions aux limites. . . . .	34
3.6	Maillage du domaine, 11000 noeuds et 23000 éléments. . . . .	34
3.7	Lignes de courant pour $Re = 100$ . . . . .	35
3.8	Isovaleurs de la vitesse $u$ . . . . .	35
3.9	Isovaleurs de la vitesse $v$ . . . . .	36
3.10	Isovaleurs de la pression. . . . .	36
3.11	Lignes de courant pour $Re = 100$ . Résultats Filippone [48]. . . . .	36
3.12	Allure de vitesse et de la pression en amont de l'obstacle (couleur jaune et rouge) et en aval de l'obstacle (couleur verte). . . . .	37
3.13	Maillage homogène, 2689 noeuds. . . . .	37
3.14	Champ de vitesses, $Re = 100$ . . . . .	38
3.15	Champ de vitesses, $Re = 400$ . . . . .	38
3.16	Champ de vitesses, $Re = 1000$ . . . . .	38
3.17	Champ de vitesses, $Re = 2500$ . . . . .	39
3.18	Isovaleurs vitesses, $step = 60$ , $step = 65$ . . . . .	39
3.19	Isovaleurs vitesses, $step = 70$ , $step = 75$ . . . . .	39
3.20	Géométrie de la cavité et le maillage ( $30 \times 30$ ). . . . .	40
3.21	A gauche : vitesse $u$ . A droite : vitesse $v$ pour $Re = 1$ . . . . .	41
3.22	A gauche : vitesse $u$ . A droite : vitesse $v$ pour $Re = 100$ . . . . .	41

3.23	A gauche : vitesse $u(y)$ . A droite : vitesse $v(x)$ pour $Re = 100$ . . . . .	42
3.24	Vitesse en fonction de nombre de Reynolds. . . . .	42
3.25	Maillage de domaine (4000 noeuds et 8000 éléments) et conditions aux limites. . . . .	44
3.26	Pression obtenue par notre modèle, $Re = 1$ . . . . .	44
3.27	Pression obtenue par TDYN, $Re = 1$ . . . . .	44
3.28	Vitesse $u$ obtenue par notre modèle, $Re = 10$ . . . . .	45
3.29	Vitesse $u$ obtenue par TDYN, $Re = 10$ . . . . .	45
3.30	Les lignes de courant obtenues par notre modèle $Re = 10$ . . . . .	45
3.31	Les lignes de courant obtenues par TDYN $Re = 10$ . . . . .	45
3.32	Domaine et conditions aux limites. . . . .	46
3.33	Les lignes de courant, $Re = 100$ . . . . .	46
3.34	Les lignes de courant, $Re = 250$ . . . . .	47
3.35	Les lignes de courant, $Re = 500$ . . . . .	47
3.36	Coupe de la composante horizontale de la vitesse, nos résultats. . . . .	48
3.37	Coupe de la composante horizontale de la vitesse, résultats Kouakou [96]. . . . .	48
4.1	Géométrie et variables nodales de l'élément $DKQ2$ . . . . .	52
4.2	Géométrie et variables nodales de l'élément $DKT15$ . . . . .	53
4.3	Élément de coque courbe $Q4\gamma20$ . . . . .	57
4.4	Élément de référence à gauche et l'élément réel à droite . . . . .	58
4.5	Panneau cylindrique soumis à son poids propre. . . . .	64
4.6	Type de maillage utilisé. . . . .	65
4.7	Convergence du déplacement $W$ au bord libre $B$ . Éléments à 3 noeuds. 65	
4.8	Convergence du déplacement $W$ au centre $C$ . Éléments à 3 noeuds. 66	
4.9	Convergence du déplacement $W$ au bord libre $B$ . Éléments à 4 noeuds. 67	
4.10	Convergence du déplacement $W$ au centre $C$ . Éléments à 4 noeuds. 67	

4.11 Déplacement $V$ le long de $DA$ . . . . .	68
4.12 Déplacement $W$ le long de $CB$ . . . . .	68
4.13 Domaine et maillage (707 noeuds, 600 éléments). . . . .	69
4.14 Domaine déformé, $f$ est la flèche). . . . .	69
4.15 Vecteurs déplacements $v_y$ en $mm$ . . . . .	70
4.16 L'évolution de la solution $y = f(x)$ . . . . .	71
4.17 Domaine et maillage (707 noeuds et 600 éléments). . . . .	72
4.18 Vecteurs déplacements et domaine déformé ( $\times 200$ ). . . . .	74
4.19 L'évolution de la solution calculée par notre modèle et la solution analytique. . . . .	74
4.20 Géométrie et conditions aux limites d'après G. Dhatt [41]. . . . .	75
4.21 Maillage : 181 noeus et 150 éléments. . . . .	76
4.22 Vecteurs déplacements ( $mm$ ) suivant l'axe $y$ et maillage déformé (facteur= 200). . . . .	76
4.23 Les déplacements suivant l'axe $y$ pour $N_1$ , $N_2$ et $N_3$ . . . . .	77
5.1 Evolution du maillage suivant la formulation utilisée. . . . .	81
5.2 Transfert des données entre les deux codes. . . . .	87
5.3 Algorithme d'interaction fluide-structure. . . . .	88
5.4 Domaine et conditions aux limites. . . . .	89
5.5 Maillage : 793 noeuds et 1400 éléments. . . . .	89
5.6 Zoom sur l'interface fluide-structure. . . . .	89
5.7 Champ de pression le long de la conduite. . . . .	90
5.8 Déformation de la structure, $E = 2.10^4 MPa$ . . . . .	90
5.9 Les lignes de courant, $R_e = 1$ . . . . .	91
5.10 Module de Young= $10^4 MPa$ . . . . .	91
5.11 Domaine de calcul et conditions aux limites. . . . .	92

5.12	Pression le long du canal : rouge à travers le premier obstacle et jaune à travers le deuxième obstacle. . . . .	93
5.13	Champs des pressions, Modude de Young $E = 4.10^4 MPa$ . . . . .	94
5.14	Déformation des structures avec un modude de Young $E = 4.10^4 MPa$ . . . . .	94
5.15	Champs des pressions, Modude de Young $E = 10^4 MPa$ . . . . .	94
5.16	Déformation des structures avec un modude de Young $E = 10^4 MPa$ . . . . .	95
5.17	Lignes de courant, Modude de Young $E = 4.10^4 MPa$ et $R_e \gg 1$ . . . . .	95
5.18	Domaine et conditions aux limites. . . . .	96
5.19	Champ de pression (Pa), ( $E = 10^4 MPa$ ). . . . .	96
5.20	Vitesse $u(m/s)$ de l'écoulement ( $E = 10^4 MPa$ ). . . . .	97
5.21	Vitesse $v(m/s)$ de l'écoulement ( $E = 10^4 MPa$ ). . . . .	97
5.22	Lignes de courants ( $E = 10^4 MPa$ ). . . . .	97
5.23	Déformation de la paroi ( $E = 10^4 MPa$ ). . . . .	98
5.24	Déformation de la paroi ( $E = 75.10^3 MPa$ ). . . . .	98
5.25	Déformation du paroi ( $E = 50.10^3 MPa$ ). . . . .	98
5.26	Vecteurs déplacements ( $E = 10^4 MPa$ ). . . . .	99
5.27	Vecteurs déplacements ( $E = 75.10^3 MPa$ ). . . . .	99
5.28	Vecteurs déplacements ( $E = 50.10^3 MPa$ ). . . . .	99
5.29	Positions des coupes longitudinales. . . . .	100
5.30	Evolution de la vitesse $u(x)$ , en fonction de la position de la coupe. . . . .	100
5.31	Evolution de la vitesse $v(x)$ , en fonction de la position de la coupe. . . . .	101

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

$I$	tenseur identité
$J$	matrice de préconditionnement de Jacobi
$M$	matrise masse
$\eta$	viscosité cinématique pour un fluide newtonien
$\Omega$	domaine physique
$\Gamma$	frontière du domaine physique
$\rho$	densité
$(\xi, \eta, \zeta)$	coordonnées cartésiennes pour le passage à l'élément de référence
$\nabla$	opérateur gradient
$\  \cdot \ $	norme vectorielle
$t$	quantité dépendant du temps
$D$	condition de Dirichlet en vitesse
$N$	condition de Neumann en vitesse
$d$	dimension d'un espace
$e$	quantité évaluée sur un élément
$max$	quantité maximale
$t$	variable temps
$x, y$	coordonnées cartésiennes
$u, v$	vitesse du fluide
$p$	pression du fluide
$\mu$	viscosité dynamique du fluide
$ndle$	nombre de degrés de liberté par élément
$ndlt$	nombre de degrés de liberté total
$\nu$	coefficient de Poisson

## INTRODUCTION

Le couplage fluide-structure apparaît systématiquement dès qu'une structure vibrante est immergée dans un fluide au repos ou vice versa. Il est dû à l'accélération des particules du fluide, au voisinage de la structure. La variation de pression qui en résulte induit sur la structure, une force d'inertie qui agit comme une masse ajoutée fixée au système mécanique, et se déplaçant solidairement avec lui. En présence d'un fluide visqueux, un amortissement est induit par la viscosité et s'ajoute à l'amortissement propre de la structure.

Avec le développement des codes de calcul en mécanique des fluides et l'augmentation des ressources informatiques, la simulation numérique devient une alternative intéressante et complémentaire pour l'étude des couplages fluide-structure. En effet on peut envisager de reproduire numériquement les couplages fluide-structure étudiés expérimentalement et analytiquement. On est alors confronté aux problématiques suivantes : assurer la conservation de l'énergie lors de la transmission des données entre les codes et gérer l'interface mobile où s'échangent les données et où se crée le couplage. Les couplages fluide-structure s'opèrent au niveau de l'interface fluide-structure. En théorie on suppose que l'on a continuité des contraintes et des vitesses à l'interface entre le fluide et la structure. La difficulté est de trouver une formulation adaptée pour la résolution des équations fluide-structure qui tient compte des parois mobiles et permet de simuler des écoulements fortement convectifs. La formulation Lagrangian-Eulérien Arbitraire (ALE) est une solution qui permet de gérer des maillages mobiles avec des déplacements d'amplitude modérée. Le couplage entre codes fluide et structure se fait de la façon suivante : on calcule dans un premier temps, les chargements fluides exercés sur la structure. Ensuite ce chargement est utilisé pour le calcul mécanique et on en déduit le déplacement de la structure utilisée comme condition limite du calcul fluide à

l'itération suivante. Toutefois la gestion des conditions limites en particulier pour la prise en compte de parois mobiles avec des écoulements turbulents reste un problème complexe.

Dans le cadre de cette thèse, le fluide est considéré incompressible et le solide est un corps solide élastique. Pour le solide, la cinématique de son mouvement peut être décomposée en une translation (deux ou trois degrés de liberté suivant que le problème est plan ou tri-dimensionnel) et/ou une rotation (un ou trois degrés de liberté suivant la dimension du problème) [60, 84, 95].

Une multitude de méthodes et de modèles est utilisée pour résoudre l'interaction fluide-structure. Ceci révèle l'extrême complexité de ce type de problème, malgré l'ajout de certaines simplifications. L'interaction entre le fluide et le solide fait intervenir la continuité de la vitesse et la condition d'équilibre mécanique à l'interface. Ces conditions sont très largement utilisées dans les différents modèles d'interaction. On a fait le choix d'une formulation ALE pour le fluide et d'une formulation lagrangienne pour la structure, où la simulation numérique est basée sur la méthode des éléments finis.

Cette interaction est basée sur une procédure de couplage instantané, où à chaque itération la pression obtenue de modèle numérique fluide est utilisée comme sollicitation externe pour le modèle numérique solide. A cet effet, un modèle de couplage a été développé pour le pilotage instantané des deux modèles fluide-structure.

Un des avantages de cette procédure de couplage instantané est l'optimisation du temps de calcul et de mémoire, contrairement au couplage fort, qui nécessite une grande capacité de stockage pour les matrices masse et rigidité. L'algorithme proposé permet aussi facilement de modifier séparément les codes fluide ou structure afin d'envisager des lois de comportement différentes.

Enfin l'utilisation de la méthode ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian method) permet de résoudre les équations du problème fluide dans un domaine mobile

s'adaptant aux déformations de la structure.

La structure de cette de cette thèse est la suivante. Dans le premier chapitre, nous présentons l'état de l'art sur l'interaction fluide-structure ainsi qu'une revue bibliographique sur le sujet. Le deuxième chapitre est consacré à la formulation mathématique de la méthode des éléments finis, son principe et quelques méthodes de stabilité utilisés dans la programmation du modèle fluide-structure. Dans le troisième chapitre, des tests de validation numérique de modèle fluide proposé sont effectués et discutés. Ils concernent des "Benchmark" habituellement utilisés en CFD. Dans le chapitre 4 une description détaillée du modèle structure est présentée. Des tests de validation de ce modèle, qui concernent plus particulièrement des coques minces sont donnés. Au chapitre 5 la couplage fluide-structure est discuté. Il contient des discussions sur les formulations numériques des interactions fluide-structure. Après une introduction des différentes formulations eulérienne, lagrangienne et Lagrangian-Eulérien Arbitraire (ALE), nous avons détaillés les techniques de couplage utilisées dans les présentes investigations, l'algorithme de couplage et enfin des exemples tests. Ces exemples tests concernent les écoulements de fluide dans des conduite en présence ou pas d'obstacles. Les obstacles sont considérés comme solides déformables. Les canalisations sont également considérées aussi bien comme des structures rigides ou flexibles.

Une synthèse des différents résultats et discussions obtenus dans cette thèse sont données dans la conclusion.



## CHAPITRE 1

### ETAT DE L'ART

#### 1.1 Introduction

L'interaction fluide-structure s'intéresse au comportement d'un système constitué par deux entités mécaniques considérées comme distinctes : une structure mobile (rigide ou déformable) et un fluide (en écoulement ou au repos) autour ou à l'intérieur de la structure. L'évolution de chacune des deux entités dépendant de celle de l'autre, un phénomène de couplage apparaît. Plus précisément, le mouvement de la structure est influencé par l'écoulement du fluide à travers les efforts transmis à l'interface, et réciproquement, le mouvement de la structure influence l'écoulement du fluide par les déplacements de l'interface qui entraîne le fluide dans son mouvement.

Dans la nature, nombre de situations relèvent de ce type de problème, [36,99,110]. Nous nous intéressons au cas où la structure subit en présence de l'écoulement fluide des pressions qui modifie sa géométrie. Ce type de situation intervient par exemple dans les cas suivants :

hautes cheminées, gratte-ciels, ponts suspendus, câbles de téléphérique vibrant sous l'effet du vent, ailes d'avion, pâles d'hélice, aubages de turbine, tuyauteries de réfrigération, réservoirs subissant l'effet de ballottement de la surface libre du liquide, etc.

En pratique, on suppose que la force fluide exercée sur une structure peut se décomposer en trois contributions :

- une force, dite aléatoire ou force indépendante du mouvement : elle désigne la force exercée par le fluide sur la structure fixe. Elle est due à la perte de charge et aux frottements visqueux au niveau de la paroi fixe. Elle peut être stationnaire

ou présenter un caractère aléatoire lors de lâcher de tourbillons ou en présence d'écoulements turbulents ou diphasiques.

- une force fluide-structure : elle apparaît lorsqu'on a une structure vibrante dans un fluide au repos sans écoulement propre.

- une force fluide-élastique : cette force est due au mouvement de la structure dans un écoulement fluide.

Le couplage fluide-élastique est un couplage dynamique non-conservatif. Les flux d'énergie échangés entre le fluide et la structure dépendent de la vitesse de convection de l'écoulement moyen. Or, dans certaines configurations au delà d'une certaine vitesse caractéristique de l'écoulement moyen, le fluide transfère à la structure plus d'énergie qu'elle ne peut en dissiper. Le système devient alors "instable" : la structure se met à osciller fortement et peut éventuellement impacter les structures avoisinantes. Ce type de comportement, qualifié de départ en "instabilité fluide-élastique", est en général suivi d'un endommagement [16].

De telles vibrations peuvent endommager la structure concernée. En effet, il se peut, qu'à partir d'un seuil de vitesse du fluide, des mécanismes de couplage instables apparaissent, où une partie de l'énergie cinétique du fluide se transforme en énergie vibratoire de la structure. On observe alors une instabilité dite de flottement particulièrement dangereuse pour la structure, pouvant mener ainsi à la ruine de cette dernière.

Parmi les systèmes propices à de telles instabilités, les lignes de tuyauteries de réfrigération dans les réacteurs nucléaires ont été les premières étudiées, [36]. Païdoussis, [110,97,13] traite du problème du flottement d'un tube encastré en écoulement interne. Dans le domaine de l'aéronautique, on peut citer l'accident du chasseur F117 lors d'une rencontre aérienne en 1997 aux États Unis. L'origine de cet accident a été attribué au flottement d'un aileron, problème générique de cet avion qui semblait pourtant avoir été résolu par le renforcement des struc-

tures. La présence d'un écoulement peut aussi conduire à des instabilités dites de flambage, d'intérêt particulier en biomécanique pour les problèmes de contraction de vaisseaux sanguins ou d'asthme[80,130]. Dans ces phénomènes, l'instabilité est d'origine géométrique et est induite par la rotation de l'interface et de la charge appliquée.

## 1.2 Fluide-structure et problèmes associés

Il existe une grande variété de phénomènes d'interaction fluide-structure. On peut distinguer formellement les problèmes instationnaires et stationnaires. Ces derniers peuvent apparaître paradoxaux, comme la forme stationnaire d'une voile dans un vent permanent, ou celle d'un ballon de baudruche après gonflage. On peut surtout distinguer les problèmes par les équations régissant chacun des sous systèmes fluide ou structure. La distinction est moins naturelle quand on regarde les équations régissant la structure (modèles linéaires, en petits déplacements ou non, en petites déformations ou non, etc...) Par contre, une classification en fonction de modèle retenu pour le fluide prend plus de sens.

- Génie Civil : un des premiers grands secteurs où les simulations numériques et expérimentales d'interactions fluide-structure sont apparues est le Génie Civil, notamment pour les structures très élancées (ponts suspendus) et faisceaux de câbles.

- Génie Maritime: dans ce domaine, de nombreuses études numériques concernent différents aspects des interactions fluide-structure. La plupart des études font jouer un rôle particulier à la surface libre de la mer. Une des sollicitations les plus importantes pour des constructions portuaires ou des structures pour l'extraction off-shore du pétrole est simplement la houle (ondes sans déplacement de matière à la surface libre).

- Hydrodynamique navale : est un autre champ d'application essentiel. Il s'agit

de concevoir et d'optimiser des formes de coques et d'autres éléments sur différents véhicules.

- Génie Biomédical : concerne l'interaction entre des tissus biologiques. Dans de nombreux cas, les nombreux fluides du corps humains (sang, liquides oculaires, etc...) peuvent interagir avec les environnants. Ceux-ci étant déformables, de véritables interactions fluide-structure peuvent apparaître naturellement (veines collabables, rupture d'anévrisme, etc...). Pour une meilleure compréhension de l'apparition et de la rupture d'anévrisme, certaines équipes ont déjà proposé des chaînes plus ou moins automatiques allant de l'imagerie médicale sur le patient lui-même, à l'extraction des parois des vaisseaux [49].

- Génie Industriel : de nombreuses études sont menées dans ce domaine. Elles concernent : les structures très fines et très élancées comme les câbles ou les panneaux, ou les réservoirs. Des calculs ont par exemple été menés sur des lignes haute tension (interaction avec le vent, chargement de neige ou de glace, etc...) ou plus simplement sur des câbles.

### **1.3 Méthodes de couplage Fluide-structure**

#### **1.3.1 Méthodes numériques**

La structure est, en général, résolue par une formulation classique en éléments finis. Le problème du couplage fluide-structure réside dans la recherche d'une solution numérique pour le problème fluide. Une fois, cette solution trouvée, il faut la coupler à la formulation en éléments finis pour la structure afin de résoudre le problème d'interaction. Les méthodes numériques doivent être conçues pour suivre les déformations du fluide. Dans un premier temps, la formulation Lagrangienne ou ALE en éléments finis. L'interaction fluide-structure est alors gérée par des méthodes de contact. Dans ce cas, cette approche est limitée par la distor-

sion des mailles. Des méthodes de remaillage peuvent être envisagées mais leur coût CPU est très important. Ensuite, les solutions apportées par la méthode des éléments frontières (BEM) ou par la méthode SPH seront décrites: elles permettent de s'affranchir du maillage et donnent des résultats très proches des solutions physiques.

### 1.3.1.1 La méthode du 'Lagrangien augmenté' (pénalisation)

Le problème majeur des équations de Navier-Stokes est le traitement du couplage entre la pression et la vitesse. La difficulté réside dans le fait de calculer un champ de pression résultant d'un écoulement incompressible avec  $V$  qui vérifie l'équation de continuité, le tout sans disposer d'équation traduisant de manière explicite les évolutions de la pression. En incompressible, plusieurs méthodes de résolution existent, dont la relativement récente méthode dite du "Lagrangien augmenté". Cet algorithme a été élaboré dans un premier temps dans le but de résoudre le couplage vitesse-pression induit par les équations de Navier-Stokes écrites pour un écoulement incompressible. Il repose sur une méthode de minimisation sous la contrainte de l'équation de continuité, où la pression, découplée par rapport à la vitesse, apparaît comme un multiplicateur de Lagrange [51]. La contrainte est en fait directement introduite dans l'équation du mouvement sous la forme du terme de pénalisation qui couple les différentes composantes de la vitesse. Le calcul du couple vitesse-pression est effectué par l'algorithme itératif d'Uzawa [51, 58]. Les itérations de lagrangien augmenté (notées  $k$ ) sont répétées jusqu'à ce que la valeur moyenne de la divergence de la vitesse, dans l'ensemble du domaine, soit suffisamment petite. En notant  $K$  le nombre maximal d'itérations nécessaires pour satisfaire le précédent critère.

### 1.3.1.2 Méthode des éléments frontières (BEM method)

Longuet-Higgins et Cokelet [78] furent les premiers à introduire cette technique connue aussi sous le nom de méthode Euler-Lagrange mixte. Des variantes de cette méthode ont été appliquées à une large gamme de problèmes 2D et 3D par de nombreux auteurs tels que Faltinsen [47], Vinje et Brevig [127], Cointe [38],... La présentation de cette approche est détaillée dans les travaux de Zhao et Faltinsen. Ils présentèrent, dans [138], une méthode numérique permettant de calculer la répartition de pression sur le dièdre à partir d'une méthode non-linéaire d'éléments frontières. Cette méthode numérique s'applique à des problèmes linéaires elliptiques dont les équations partielles peuvent être reformulées sous formes intégrales.

### 1.3.1.3 Méthode SPH

En 1977, les travaux de Lucy et Monaghan [79] donnent lieu à une nouvelle méthode numérique: la méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics). Cette méthode particulière s'affranchit d'une connectivité géométrique, contrairement aux formulations classiques. Les domaines physiques sont discrétisés par des particules qui suivent le mouvement du matériau. Pour le tossage, la formation du jet ne pose ainsi plus de problèmes de modélisation. Cette méthode fut d'abord appliquée en astrophysique, [79] et [57], avant d'être utilisée par la suite en Mécanique, [85]. Les particules représentent les points d'interpolation où les inconnues mécaniques du problème sont déterminées. La méthode SPH se caractérise par la masse des particules et par deux grandeurs de discrétisation, la distance interparticulaire et la longueur de lissage. Le principe est d'approximer un champ  $\Phi$  sur un domaine  $\Omega$  par un ensemble de points de discrétisation appelés particules.

#### 1.3.1.4 Méthode VOF

Cette méthode a été introduite la première fois par Hirt et Nichols [89] dans un code appelé SOLA-VOF pour traquer les interfaces matérielles dans une grille Eulérienne. La méthode est liée à la résolution des équations d'Euler ou de Navier-Stokes par un schéma de différences finies ou de volumes finis. Le principe du suivi d'interface est de déterminer la quantité de fluide dans chaque volume de contrôle (cellule) en évaluant une quantité appelée fraction volumique. Si cette dernière vaut 1 alors la cellule est remplie de fluide ; si elle vaut 0, la cellule est soit vide, soit remplie d'un autre fluide. Les fractions volumiques comprises entre 0 et 1 déterminent la position de l'interface matérielle ou de la surface libre. En connaissant la distribution de la fraction volumique d'un fluide, il est possible de déterminer les limites physiques du domaine fluide dans un maillage. Pour cela, Young [136] propose une technique pour calculer précisément la position de l'interface dans une cellule en utilisant les fractions volumiques des cellules voisines. La méthode VOF a les trois caractéristiques nécessaires à une technique de suivi des interfaces matérielles : un schéma localisant l'interface, un algorithme déterminant précisément la position de l'interface dans le maillage et un algorithme appliquant les conditions aux limites sur cette frontière.

#### 1.3.2 Méthodes analytiques

Pour présenter les deux approches analytiques dominantes permettant la résolution du problème d'impact, on peut effectuer un rapide parallèle entre elles en définissant leurs limites [137]. Chacune de ces méthodes a ses propres caractéristiques :

1) La méthode des similitudes respecte les conditions de surface libre et elle n'est applicable que pour des dièdres entrant à vitesse constante dans le fluide.

2) La méthode asymptotique est limitée à des angles d'incidence petits, inférieurs à  $30^\circ$  d'après [138]. Cette dernière méthode est le fruit d'une succession d'articles

dont le premier est [128]. Von Karman fut, en effet, le pionnier dans l'étude du tossage. Comme les hypothèses sur lesquelles elle repose s'avèrent restrictives, Wagner développa une théorie plus évoluée [129] mais l'expression de la pression est singulière sur le bord du dièdre. Watanabe améliora cette théorie pour contourner ce problème [131] et développa l'expression de la pression en prenant en compte le jet : il raccorda la solution de Wagner avec la solution du jet sur une plaque. Cointe [37] donna, indépendamment, une théorie similaire. Zhao et Falinsen, dans l'article [137], reprirent aussi l'expression de la pression de Wagner pour la raccorder asymptotiquement avec une solution externe pour le jet. La méthode des similitudes repose sur la théorie de Dobrovolskaya développée dans [42]. Cette théorie qui fut aussi l'objet des articles [100] et [54], considère que l'écoulement est autosimilaire réduisant ainsi l'étude à la résolution d'une équation intégrale non-linéaire unidimensionnelle.

#### 1.4 Formulation ALE des équations de Navier-Stokes

En interaction fluide-structure, les équations de Navier-Stokes sont résolues dans un domaine mobile ou déformable. Parmi les approches utilisées, la méthode Lagrangien-Eulérien Arbitraire (ALE) suscite beaucoup d'intérêt [117]. L'intérêt d'utiliser une formulation ALE [44] pour décrire les phénomènes est de combiner les avantages de la description Lagrangienne et ceux de la description Eulérienne.

Soit  $X$  les coordonnées Lagrangiennes d'un point dans le repère matériel,  $x$  ses coordonnées Eulériennes dans le repère spatial et  $\chi$  ses coordonnées dans un repère ALE. La relation de passage [19]. L'ALE traite le maillage comme un repère qui se déplace avec une vitesse arbitraire  $w$  :

$$f(\mathbf{x}, t) = \hat{f}(\chi, t) \quad (1.1)$$



La dérivée mixte  $\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}$  est donné par :  $\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}|_x = \frac{\partial f}{\partial t}|_x + w \cdot \nabla_x f$ , cela nous permet finalement d'écrire la relation de passage, pour la quantité  $f$  entre le repère matériel et le repère ALE, soit :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}|_x + \mathbf{u} \cdot \nabla_x f = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}|_x + (\mathbf{u} - w) \cdot \nabla_x f \quad (1.2)$$

où  $u(x, t) = \frac{\partial x}{\partial t}|_x$  est la vitesse matérielle et  $w = \frac{\partial x}{\partial t}|_x$  est la vitesse arbitraire.

Cette propriété est très utile dans le développement d'une description cinématique dans le repère ALE.

La loi de conservation de la quantité de mouvement exprimée en ALE :

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_\xi + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \eta \Delta u + f \quad (1.3)$$

La relation 1.2 appliquée à  $u$  donne :

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}|_x + (u \cdot \nabla)u = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t}|_\xi + ((u - w) \cdot \nabla)u \quad (1.4)$$

Enfin, la relation fondamentale qui permet de passer d'une loi exprimée en variable Eulérienne à une loi équivalente exprimée en variables mixtes (ALE) :

$$\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t}|_\xi + ((u - w) \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \eta \Delta u + f \quad (1.5)$$

On obtient donc l'écriture des équations de Navier-Stokes dans la description ALE en incompressible :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + ((u - w) \cdot \nabla)u \right) = -\nabla p + \mu \Delta u + f \quad (1.6)$$

Cette formulation assigne à chaque point de l'espace une vitesse de grille  $w$ , qui décrit un mouvement arbitraire du maillage et une vitesse matérielle  $u$ .

## CHAPITRE 2

### RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉCOULEMENT DE FLUIDES PAR ÉLÉMENTS FINIS

#### 2.1 Introduction : Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est fondée sur deux idées principales : une méthode d'interpolation et une méthode variationnelle.

Étant donné un domaine continu  $\Omega$  et une fonction  $\mathbf{u}$  solution de  $L(\mathbf{u}) = 0$ ,

- a) la méthode d'interpolation fournira une fonction proche de  $\mathbf{u}$  construite à partir d'un nombre fini de réels
- b) la méthode variationnelle remplacera  $L(\mathbf{u}) = 0$  par un nombre fini d'équations.

Si l'on suppose la fonction approchée connue en un certain nombre de points de l'élément, elle est évaluée en n'importe quel point de l'élément par interpolation.

La restriction de la fonction approchée à un élément  $K$  (triangle) du maillage, notée  $\phi_h^K$ , est de la forme :

$$\phi_h^K(x, y) = \sum_{i=1}^{N_k} \phi_i N_i(x, y) \quad (2.1)$$

où  $\phi_i$  désigne la valeur de la fonction approchée  $\phi_h$  au point  $\mathbf{x}_i$  de coordonnées  $(x_i, y_i)$ ,  $N_i$  la fonction d'interpolation associée à  $\mathbf{x}_i$ ,  $N_k$  le nombre de fonctions utilisées pour l'élément  $K$ .

Les coefficients  $\phi_i$  de cette combinaison linéaire sont les inconnues - ou degré de liberté - du problème discret. Les fonctions d'interpolation sont les fonctions de base d'un espace vectoriel de dimension finie  $N_h$  dans lequel on cherche à priori la solution discrète  $\phi_h$ .

Afin de déterminer les inconnus du problème discret, une méthode de résidus pondérés est utilisée : on minimise l'erreur commise est minimisée en remplaçant dans les équations aux dérivées partielles la fonction exacte par la fonction approchée. Pour cela, on projette l'erreur sur un espace de fonction  $\Phi_h$  à préciser.

La méthode de Galerkin est un cas particulier de la méthode des résidus pondérés, l'espace de projection est le même que l'espace d'approximation de la solution du problème, autrement dit  $\Phi_h = N_h$ .

## 2.2 Eléments d'analyse fonctionnelle

- **Espace  $L^1(\Omega)$**

On note  $L^1(\Omega)$  l'espace vectoriel des classes de fonctions (on identifie les fonctions qui sont égales presque partout) intégrables pour la mesure de Lebesgue  $dx$ .  $C'$  est un espace de Banach (normé complet) lorsque l'on prend pour norme de  $f \in L^1(\Omega)$  :

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx \quad (2.2)$$

- **Espaces  $L^p(\Omega)$**

Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . On définit

$$L^p(\Omega) = \{f \in F(\Omega; R) : f \text{ est mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\} \quad (2.3)$$

$c'$  est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (2.4)$$

$c'$  est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ C : |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \} \quad (2.5)$$

### • Espaces de Sobolev

On appelle espace de Sobolev sur  $\Omega$ , l'espace fonctionnel

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / \forall \alpha \in \mathbb{Z}, |\alpha| \leq k : D^\alpha u \in L^p(\Omega)\} \quad (2.6)$$

où  $D^\alpha u$  est la dérivée de  $u$  au sens des distributions.

On note  $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ , en particulier

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \forall i \in \{1, \dots, d\} : u_{x_i} \in L^2(\Omega)\}. \quad (2.7)$$

Soit l'application  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ , et soit

$$(u, v) \longrightarrow \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx \quad (2.8)$$

est un produit scalaire et munit  $H^1(\Omega)$  d'une structure d'espace de Hilbert. On note la norme associée par :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \quad (2.9)$$

### • Inégalité de Poincaré

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , alors il existe une constante  $C(\Omega)$  telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} u^2 dx \leq C(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad (2.10)$$

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , alors

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \quad (2.11)$$

sont des normes équivalentes sur  $H_0^1(\Omega)$ .

## 2.3 Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis

### 2.3.1 Formulation variationnelle forte

La formulation forte d'un problème aux conditions aux limites s'écrit alors comme suit :

Trouver  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in$  espace des solutions  $U_S$  tel que

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) - \mathcal{F} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad B(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathbf{u}_0} \quad (2.12)$$

On note que l'espace  $U_S$  dans lequel nous recherchons la fonction  $u$ , doit être défini judicieusement.

### 2.3.2 Formulation variationnelle faible

La formulation variationnelle faible peut être obtenue par les étapes suivantes :

1. approcher la solution  $\mathbf{u}$ , partout dans le domaine  $\Omega$ , par  $\tilde{\mathbf{u}}$  telque :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \tilde{\mathbf{u}}_i \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i(x, y)$  désignent les fonctions de forme et  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  des valeurs nodales indéterminées.

2. introduire (2.13) dans (2.12) il en résulte une erreur ou un résidu  $\epsilon$  tel que :

$$\epsilon = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}) - \mathcal{F} \neq 0 \quad (2.14)$$

où  $\epsilon = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$  c.à.d lorsqu'une solution exacte existe.

3. obtenir une valeur nulle de  $\epsilon$  en introduisant une fonction de point arbitraire

$W$  tel que :

$$\int_{\Omega} W_k (\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}) - \mathcal{F}) d\Omega = 0, k = 1, 2, \dots, N \quad (2.15)$$

où  $N$  Nombre d'inconnues indépendants du système (2.12).

En formulation de Galerkin les fonctions tests sont assimilées aux fonctions de forme. On pose

$$W_k = N_k \implies \int_{\Omega} N_k \cdot \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \tilde{\mathbf{u}}_i \right) d\Omega = 0 \quad (2.16)$$

On dit que  $u \in H_0^1(\Omega)$  est une solution faible de (2.18) si :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : a(\tilde{\mathbf{u}}, v) = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad (2.17)$$

$a(\cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire associée à  $\mathcal{L}$  Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  et  $\partial\Omega$  est régulier. On considère alors le problème :

$$Lu = f \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (2.18)$$

### 2.3.3 Conditions aux limites

Trouver la solution qui satisfait un système d'équations aux dérivées partielles et les conditions aux limites (conditions initiales et conditions frontières) forme un problème bien posé si les trois conditions suivantes sont satisfaites.

La définition correcte des conditions aux limites est un des éléments essentiels pour obtenir un problème bien posé, on rappelle les différents types des conditions aux limites communément rencontrées sont :

condition de Dirichlet :	$u = f$
condition de Neumann	$u_{,n} = f$
condition de Cauchy	$u_{,n} = f$ et $u = g$

## 2.4 Les équation du mouvement des fluides incompressible

### 2.4.1 Équation de continuité

Dans un milieu continu en mouvement l'équation de continuité doit être vérifiée pour tout volume  $\Omega$ , :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (2.19)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, le champs de vitesse vérifie nécessairement :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.20)$$

### 2.4.2 Conservation de la quantité de mouvement

On considère un écoulement d'un fluide visqueux incompressible, irrotationnel, soumis à des forces volumiques  $F$  et de surface  $\sigma$ . L'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + v \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{F_x}{\rho} = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{F_y}{\rho} = 0 \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

## 2.5 Ecriture variationnelle faible dans le cas de fluides incompressibles

En choisissant les fonctions test sous la forme :

$$\boldsymbol{\Psi} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{u}} \\ \Psi_p \end{array} \right\}, \quad \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{u}} = \left\{ \begin{array}{c} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

l'écriture faible s'écrit :

$$W = W_{N-S} + W_{Cont} \quad (2.24)$$

où l'indice  $N - S$  désigne les termes de conservation de la masse pour les équations de Navier-Stokes et l'indice  $Cont$  désigne termes de continuité.

De l'équation 2.21 on obtient :

$$\begin{aligned} W_{N-S} = & \int_{\Omega} \left[ \Psi_u \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + v \frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{F_x}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_u}{\partial x} p + \frac{\partial \Psi_u}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_u}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right] d\Omega + \\ & \int_{\Omega} \left[ \Psi_v \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + v \frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{F_y}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_v}{\partial y} p + \frac{\partial \Psi_v}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_v}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\Omega + \\ & \oint_{\partial\Omega} \Psi_v p n_y ds + \oint_{\partial\Omega} \Psi_u p n_x ds - \oint_{\partial\Omega} \Psi_u \left( \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) ds - \oint_{\partial\Omega} \Psi_v \left( \frac{\partial v}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) ds \\ W_{Cont} = & - \int_{\Omega} \Psi_p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega \quad \text{avec } \mathbf{u} = \mathbf{u}_s \text{ sur } S_u \end{aligned} \quad (2.25)$$

$\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  étant la normale à la frontière dirigée vers l'extérieur de la frontière  $S = \partial\Omega$ .

Conditions aux limites associées sont : à la paroi Paroi Condition d'adhérence  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , à l'Entrée  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  et à la Sortie  $p = \bar{p}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta}$ .



### 2.5.1 Discrétisation par éléments finis

1. Le domaine de calcul  $\Omega$  est représenté par un ensemble de sous domaines élémentaires  $\Omega_e$ , donc

$$\Omega = \sum_{i=1}^{Nelt} \Omega_e^i \implies W = \sum_{i=1e}^{Nelt} W_e^i \quad (2.26)$$

$Nelt$  = Nombre total d'éléments,  $W_e^i$  : formulation faible élémentaire

2. Approximation nodale des variables :

Pour chaque élément on a :

$$u = \langle N \rangle \{u_n\}, v = \langle N \rangle \{v_n\}, P = \langle \bar{N} \rangle \{P_n\} \quad (2.27)$$

La forme conservative des équations de Navier-Stokes est discrétisée en utilisant la même approximation pour  $u$ ,  $v$  et  $u^2$ ,  $uv$ ,  $v^2$ , c'est à dire:

$$\begin{aligned} u &= \langle N_i \rangle \{u_i\} & v^2 &= \langle N_i \rangle \{v_i^2\} & v\delta v &= \langle N_i v_i \rangle \{\delta v_i\} \\ v &= \langle N_i \rangle \{v_i\} & uv &= \langle N_i \rangle \{u_i v_i\} & u\delta v &= \langle N_i u_i \rangle \{\delta v_i\} \\ u^2 &= \langle N_i \rangle \{u_i^2\} & u\delta u &= \langle N_i u_i \rangle \{\delta u_i\} & v\delta u &= \langle N_i v_i \rangle \{\delta u_i\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

3. Approximation nodale des fonctions test (Formulation Galerkinge)

Dans la formulation Galerkinge, la fonction de forme est identique pour les fonctions test et les variables.

$$\Psi_u = \langle N \rangle \{\delta \Psi_{u_n}\}, \Psi_v = \langle N \rangle \{\delta \Psi_{v_n}\}, \Psi_p = \langle \bar{N} \rangle \{\delta \Psi_{P_n}\} \quad (2.29)$$

- $\langle N \rangle$  sont des fonctions d'interpolation pour les vitesses et  $\langle \bar{N} \rangle$  sont des fonctions d'interpolation pour la pression.

- $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  et  $\{P_n\}$  sont les variables nodales associées à chaque élément.

#### 4. Formulation matricielle élémentaire

L'introduction des fonctions solution  $(u, v, P)$  et des fonction tests  $(\Psi_u, \Psi_v, \Psi_p)$  dans la formulation faible élémentaire, on obtient :

$$W^e = \langle \delta \Psi \rangle \left( [\mathbf{M}]^e \{\dot{U}\} + [\mathbf{K}]^e \{U\} - \{F\}^e \right) = 0 \quad (2.30)$$

$$\implies [\mathbf{M}]^e \{\dot{U}\} + [\mathbf{K}]^e \{U\} - \{F\}^e = 0 \quad (2.31)$$

- $[\mathbf{M}]^e [ndle, ndle]$  : Matrice masse élémentaire
- $[\mathbf{K}]^e [ndle, ndle]$  : Matrice de rigidité élémentaire
- $\{F\}^e [ndle]$  : Vecteur force élémentaire

La forme matricielle générale du problème est donnée par :

$$W = \sum_{i=1e}^{Nelt} W_e^i \implies W = \langle \delta \Psi \rangle \left( [\mathbf{M}] \{\dot{U}\} + [\mathbf{K}] \{U\} - \{F\} \right) = 0 \quad (2.32)$$

Le système à résoudre est alors :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}] \{\dot{U}\} + [\mathbf{K}] \{U\} &= \{F\} \\ \{U(t_0)\} &= \{U_0\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

- $\{U\}$  : Vecteur des variables globales
- $[\mathbf{M}] [ndlt, ndlt]$  : Matrice masse globale
- $[\mathbf{K}] [ndlt, ndlt]$  : Matrice de rigidité globale
- $\{F\} [ndlt]$  : Vecteur global des sollicitations extérieures.

## 2.6 Méthodes de stabilité numérique

Pour mettre en évidence les différentes méthodes de stabilité on considère le cas simple d'un écoulement incompressible stationnaire de fluides newtoniens. Les composantes des contraintes normales et tangentielles s'expriment en fonction de pression et des taux de déformation :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = 0\end{aligned}\tag{2.34}$$

Les équations linéarisées de mouvement du fluide vérifient :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) + f = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}, \forall x \in \Omega\tag{2.35}$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\sigma(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n} = g, \forall x \in \Gamma_n ; \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \forall x \in \Gamma_D\tag{2.36}$$

### 2.6.0.1 Formulation faible mixte

$$\langle \hat{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) + f) \rangle = 0, \forall \hat{\mathbf{u}} \in \hat{U}\tag{2.37}$$

En effectuant une intégration par parties et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) - b(p, \hat{\mathbf{u}}, \cdot) \rangle = f(\hat{\mathbf{u}}) \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \hat{U} \\ p \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall \hat{\mathbf{p}} \in \hat{P} \end{array} \right. ,$$

$$a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \langle \epsilon(\hat{\mathbf{u}}), \mathbf{u} \rangle, \quad b(p, \hat{\mathbf{u}}, \cdot) = p \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}, \quad f(\hat{\mathbf{u}}) = \langle \hat{\mathbf{u}}, f \rangle + \langle \langle \hat{\mathbf{u}}, g \rangle \rangle_{\mathbf{n}} \quad (2.38)$$

### 2.6.0.2 Formulation discrète

La Formulation discrète consiste à écrire une approximation de  $u$  et  $p$  sous la forme suivante

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \phi_i^u(\mathbf{x}), \quad p^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p_i \phi_i^p(\mathbf{x}) \quad (2.39)$$

où  $\mathbf{u}_i$  et  $p_i$  sont des valeurs nodales inconnues, tandis que  $\phi_i^u(\mathbf{x})$  et  $\phi_i^p(\mathbf{x})$  sont des fonctions de forme spécifiées. On a volontairement utilisé des fonctions de forme de type différent pour la pression et les déplacements.

La formulation discrète s'écrit :

Trouver  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$  et  $p^h(\mathbf{x}) \in \hat{U}$  et  $\hat{P}$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle a(\hat{\mathbf{u}}^h, \mathbf{u}^h) - b(p^h, \hat{\mathbf{u}}^h, \cdot) \rangle = f(\hat{\mathbf{u}}^h) \quad \forall \hat{\mathbf{u}}^h \in \hat{U}^h \\ b(\hat{p}^h, \mathbf{u}^h) \quad \forall \hat{p}^h \in \hat{P}^h \end{array} \right. \quad (2.40)$$

## CHAPITRE 3

### MODÈLE FLUIDE : TRAITEMENT NUMÉRIQUE ET VALIDATION

#### 3.1 Résolution numérique

Le code que nous avons développé pour les écoulements de fluides incompressibles est conçu suivant l'architecture du code Reflex [10], développé à l'Université de Technologie de Compiègne. Le maillage, le post-traitement et les graphes ont été effectués et exécutés à l'aide du logiciel GID.

##### 3.1.1 Algorithmes de résolution : Discrétisation Temporelle

La Discrétisation Temporelle consiste en l'utilisation du schéma d'Euler (1er Ordre). Ce schéma consiste à discrétiser (2.33) par la méthode de différences finis décentrées en introduisant le paramètre d'implicitation  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \dot{\{U_{t+\alpha\Delta t}\}} &= \frac{1}{\Delta t} (\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\}) \\ U_{t+\alpha\Delta t} &= \alpha \{U_{t+\Delta t}\} + (1 - \alpha) \{U_t\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

- Lorsque  $\alpha = 0$ , ce schéma est explicite et son domaine de stabilité est restreint. Il est donc nécessaire de choisir un petit  $\Delta t$
- Lorsque  $\alpha = 0.5$ , ce schéma est appelé Crank-Nicholson. Ce schéma de 2ème ordre assure une meilleure stabilité et une excellente précision.
- **Schéma implicite**

soit  $s = \alpha \Delta t$ , on a :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{M}]\{\dot{U}\}_{s+1} + [\mathbf{K}]\{U\}_{s+1} &= \{F\}_{s+1} \\
\{\dot{U}\}_{s+1} &= \frac{\{U\}_{s+1} - \{U\}_s}{\Delta t_{s+1}} = (1 - \alpha)\{\dot{U}\}_s + \alpha\{\dot{U}\}_{s+1} \quad (3.2) \\
\Rightarrow \{\dot{U}\}_{s+1} &= \frac{\{U\}_{s+1} - \{U\}_s}{\alpha \Delta t_{s+1}} - \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \{\dot{U}\}_s
\end{aligned}$$

On introduisant l'expression de  $\{\dot{U}\}_{s+1}$  dans l'équation :

$$[\mathbf{M}]\{\dot{U}\}_{s+1} + [\mathbf{K}]\{U\}_{s+1} = \{F\}_{s+1} \quad (3.3)$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{M}]\{U\}_{s+1} - [\mathbf{M}]\{U\}_s + \alpha \Delta t_{s+1} [\mathbf{K}]\{U\}_{s+1} &= [\mathbf{M}]\Delta t_{s+1} (1 - \alpha) \{\dot{U}\}_s + \alpha \Delta t_{s+1} \{F\}_{s+1} \\
\underbrace{([\mathbf{M}]_{s+1} + \alpha \Delta t_{s+1} [\mathbf{K}]_{s+1})}_{[\tilde{\mathbf{K}}]_{s+1}} \{U\}_{s+1} &= \underbrace{([\mathbf{M}]_s - (1 - \alpha) [\mathbf{K}]_s \Delta t_{s+1})}_{[\tilde{\mathbf{K}}]_s} \{U\}_s \\
&\quad + \underbrace{((1 - \alpha) \{F\}_s + \alpha \{F\}_{s+1})}_{[\tilde{\mathbf{F}}]_{s+1}} \Delta t_{s+1} \\
[\tilde{\mathbf{K}}]_{s+1} \{U\}_{s+1} &= [\tilde{\mathbf{K}}]_s \{U\}_s + [\tilde{\mathbf{F}}]_{s+1} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Le schéma devient implicite car le calcul de la matrice  $\mathbf{K}$  nécessite le calcul préalable de la matrice Masse au pas de temps précédent. Ce qui a pour conséquence d'augmenter le temps de calcul.

La discrétisation du terme temporel, pour un pas de temps  $\Delta t$ , est faite par le biais du schéma d'Euler explicite telle que :

$$\left\{ \dot{U} \right\}_t = \frac{\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\}}{\Delta t} \quad (3.5)$$

Ce schéma est inconditionnellement stable et plus particulièrement autorise des pas de temps plus grands. Nous obtenons finalement :

$$([M] + \Delta t [K]) \{U_{t+\Delta t}\} = \Delta t \{F_{t+\Delta t}\} + [M] \{U_t\}$$

Pour la partie fluide, nous avons utilisé essentiellement des élément triangulaires. La discrétisation des formulations faibles issus des équation de Navient-Stokes conduit à un système global non linéaire, mixte en (u,p). Ce système est résolu à l'aide d'une méthode itérative de Newton Raphson basée sur une approche asymptotique [62].

### 3.1.2 Linéarisation : Méthode itérative de Newton-Raphson

Plusieurs méthodes peuvent être utilisés pour traiter les termes non-linéaires de l'équation (3.4). Dans les présentes applications nous avons utilisés la méthode itérative de Newton-Raphson [62]. Elle consiste à supposer dans un premier temps que le résiduel  $R$  est nul, soit :

$$R(U) = [K(\{U\})] \{U\} - \{F\} = \{0\} \quad (3.6)$$

Ensuite on développe cette dernière équation en série de Taylor en ne retenant que les termes d'ordre 1. Il vient :

$$\begin{aligned} R(U) &= \{R\}^r + \frac{\partial \{R\}^r}{\partial \{U\}} (\{U\}^{r+1} - \{U\}^r) + O(\{U\}^{r+1} - \{U\}^r)^2 \\ &= \{R\}^r + [K^T] \delta \{U\} + O(\delta \{U\})^2 = \{0\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$[K^T] = \frac{\partial \{R\}^r}{\partial \{U\}} \text{ à } \{U\} = \{U\}^r : \text{Matrice Tangente}$$

$$\delta \{U\} = \{U\}^{r+1} - \{U\}^r \quad : \text{Solution incrémentale}$$

Enfin, de l'équation (3.7) on déduit que :

$$\delta \{U\} = [K^T]^{-1} \{R\}^r = [K^T \{U\}^r]^{-1} (\{F\} - [K(\{U\}^r)] \{U\}^r) \quad (3.8)$$

La solution à l'itération (r+1)th est obtenue en utilisant :

$$\{U\}^{r+1} = \{U\}^r + \delta \{U\} \quad (3.9)$$

### 3.1.3 Stabilité de la solution : Condition de Ladysenskaya-Brezzi-Babuska (LBB)

Considérons la formulation discrète mixte (2.40) et analysons la stabilité de ce problème. Une condition naturelle de stabilité numérique devrait s'énoncer comme suit.

Il existe une constante  $C$  telle que si une solution  $(\mathbf{u}^h; p^h) \in U^h \times P^h$  satisfait (2.40), alors :

$$\|\mathbf{u}^h\|_1 + \|p^h\|_0 \leq \frac{1}{C} \|f\|_{-1} \quad (3.10)$$

où les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_0$  sont les normes des espace de Sobolev  $H^1$  et  $H^0 = L^2$ . La norme d'une forme  $b$  et la norme  $\|\cdot\|_1$  du vecteur  $\mathbf{u} = (u; v; w)$  sont respectivement définies par les expressions

$$\|f\|_{-1} = \sup_{\mathbf{u} \in U^h} \frac{|f(\mathbf{u})|}{\|\mathbf{u}^h\|_1}, \quad \|\mathbf{u}^h\|_1 = \sqrt{\|u\|_1^2 + \|v\|_1^2 + \|w\|_1^2} \quad (3.11)$$

Intuitivement, on souhaite qu'une petite erreur sur les données (ici,  $f$ ) n'ait qu'une conséquence finie sur la norme de la solution du problème mixte.

Il est possible d'obtenir une inégalité (3.10), si la condition suivante dite de Ladysenskaya-Brezzi-Babuska est satisfaite :

Il existe une constante  $CLBB > 0$  telle que :



(3.12)

$$\inf_{p^h \in P^h} \sup_{\mathbf{u}^h \in U^h} \frac{|b(p^h, \mathbf{u}^h)|}{\|\mathbf{u}^h\|_1 \|p^h\|_0} \geq C_{LBB}$$

Pour simplifier la démonstration mathématique, on supposera que :  $U^h = \hat{U}^h$  et  $P^h = \hat{P}^h$ . Cela conduit à prendre alors  $\hat{\mathbf{u}}^h = \mathbf{u}^h$  et  $\hat{p}^h = p^h$  dans la formulation discrète mixte (2.40), on peut écrire :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) + b(p^h, \mathbf{u}^h) = f(\mathbf{u}^h) & \forall \mathbf{u}^h \in U^h \\ b(p^h, \mathbf{u}^h) & \forall p^h \in P^h \end{cases} \quad (3.13)$$

L'obtention de l'inégalité de stabilité à partir de la condition LBB se réalise en deux parties.

- En soustrayant les deux lignes de (3.13), on obtient :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) &= f(\mathbf{u}^h) \\ a \|\mathbf{u}^h\|_1^2 &\leq a(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) = f(\mathbf{u}^h) \\ \leq \|f\|_{-1} \|\mathbf{u}^h\|_1 &\Rightarrow \|\mathbf{u}^h\|_1 \leq \frac{1}{a} \|f\|_{-1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

- En ne considérant que la première ligne de l'équation (3.13), on écrit :

$$-b(p^h, \mathbf{u}^h) = -a(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) + f(\mathbf{u}^h) \quad (3.15)$$

En vertu de la condition LBB (3.12), on obtient après un calcul intermédiaire :

$$C_{LBB} \leq \sup_{\mathbf{u}^h \in U^h} \frac{|b(p^h, \mathbf{u}^h)|}{\|\mathbf{u}^h\|_1} \leq \underbrace{\sup_{\mathbf{u}^h \in U^h} \frac{|a(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h)|}{\|\mathbf{u}^h\|_1}}_{\leq \frac{c}{a} \|f\|_{-1}} + \underbrace{\sup_{\mathbf{u}^h \in U^h} \frac{|f(\mathbf{u}^h)|}{\|\mathbf{u}^h\|_1}}_{=\|f\|_{-1}} \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow \|p^h\|_0 \leq \frac{1}{C_{LBB}} \left( \frac{c}{a} + 1 \right) \|f\|_{-1} \quad (3.17)$$

### 3.1.4 Méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin)

Cette méthode est utilisée dans les présentes applications. Elle consiste à décentrer les fonctions de poids suivant les lignes de courant de l'écoulement. Pour le noeud  $i$  d'un élément, la fonction de poids s'exprime :

$$\nu_i = N_i + \frac{\alpha L_e}{2|\mathbf{V}|} \left( V_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + V_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \quad (3.18)$$

où  $L_e$  est la longueur de l'élément suivant la direction de la vitesse et mesurée en passant par le point d'intégration de Gauss [74].

Contrairement à la méthode du produit, un seul facteur  $\alpha$  est calculé pour tout l'élément. Il fait intervenir  $L_e$  et la norme de la vitesse :

$$\alpha = \coth P_e - \frac{1}{P_e} \quad (3.19)$$

Cette méthode a d'abord été introduite par l'intermédiaire d'une diffusion artificielle anisotrope orientée dans le sens de l'écoulement [74]. Elle présente l'avantage de s'appliquer indifféremment à des éléments carrés et triangles. La méthode SUPG réduit l'influence des noeuds situés perpendiculairement à l'écoulement par rapport à la méthode produit. Hughes et Brooks [68] montrent que la méthode produit tend à lisser exagérément les résultats dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. Ils parlent de "crosswind diffusion".

Le décentrement des termes convectifs est obtenu en éléments finis par la méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin). Pour cela on considère:

$$\phi_i = N_i + \gamma \mathbf{u} \cdot \nabla N_i \quad (3.20)$$

où  $N_i$  est la fonction de base choisi,  $\gamma$  un paramètre de stabilisation et  $\mathbf{u}$  le champ de vitesse associé au terme convectif.

Pour un élément en amont du noeud  $i$ ,  $\mathbf{u} \cdot \nabla N_i$  est positif. La fonction de pondération associée sur cet élément au noeud  $i$  devient donc plus importante.

### 3.2 Validation du module fluide

La phase de validation du module fluide est effectuée suivant trois tests académiques, et concernent : Poiseuille, écoulement d'un fluide autour d'un cylindre fixe, écoulement dans une cavité carrée, écoulement dans une conduite à section variable (2 tubes de diamètres différents), écoulement à travers une marche bas, étranglement du canal et enfin l'écoulement d'un fluide dans une conduite où l'on a placé : un obstacle vertical ou une bosse circulaire. Le test de Poiseuille permet d'obtenir une solution stationnaire. Tandis que les autres tests sont effectués pour le cas transitoire.

Afin d'aider à identifier les caractéristiques physiques des écoulements les équations de Navier-Stokes sont adimensionalisées, en remplaçant la densité  $\rho$  (constante) par 1 et la viscosité dynamique  $\mu$  par  $1/Re$ . Le nombre de Reynolds  $Re$  représente le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité et est défini par :

$$Re = UL/\eta \quad (3.21)$$

où  $U$  est une vitesse caractéristique de l'écoulement étudié (par exemple la vitesse du mouvement d'un corps ou la vitesse moyenne dans une section déterminée du canal, etc.),  $\eta = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique du fluide et  $L$  est une longueur

caractéristique (par exemple le diamètre ou la longueur d'un corps, la largeur intérieure d'un canal, etc...).

### 3.2.1 Cas test de Poiseuille

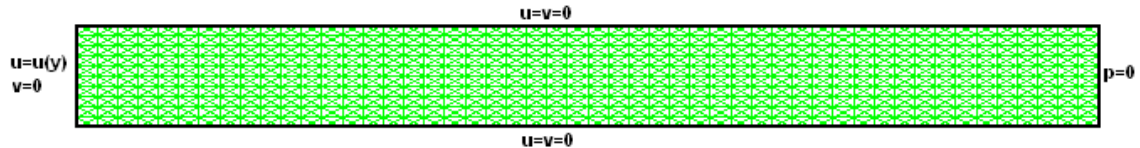


Figure 3.1: Domaine de calcul pour le problème de Poiseuille et Maillage (2000 éléments).

Il s'agit de l'écoulement d'un fluide dans un canal  $1m \times 10m$  avec un profil de vitesse parabolique imposée en entrée et d'une viscosité  $\eta = 0.002m^2/s$ . Ce problème possède une solution analytique suivante :

$$u = \left( \frac{4y}{H^2}(H - y), 0 \right), \text{ et } p = \frac{-4x}{H^2} + \text{constante}. \quad (3.22)$$

où  $H$  est la hauteur du canal.

Le maillage et les différentes conditions aux limites du domaine sont présentées sur la figure 3.1.

L'analyse des résultats des tests numériques montre que les champs de vitesses Figure 3.2 ont bien un aspect parabolique qui confirme l'allure de la solution analytique Figure 3.22, ces résultats sont obtenus au bout de  $5Pas$ . Quant à la pression Figure 3.3 on constate que son allure perturbée n'est pas linéaire contrairement à la solution analytique (Figure 3.4). Pour pallier à ce problème et améliorer la stabilité de la solution concernant la pression on a utilisé la méthode de stabilité SUPG (le principe de la méthode est donné dans la section Figure 3.1.4).



Figure 3.2: Isovaleurs de vitesse  $u$  dans le canal.

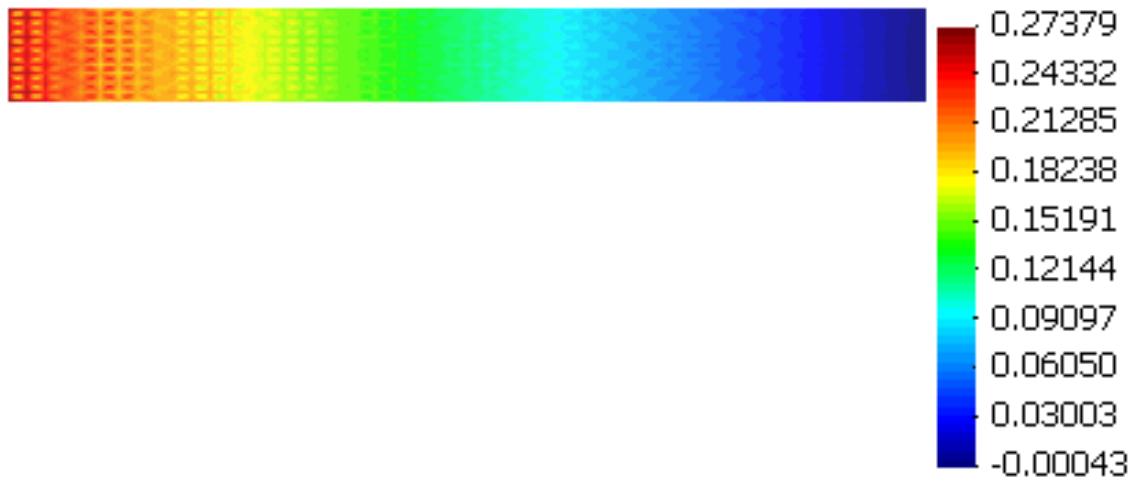


Figure 3.3: Isovaleurs de pression correspondantes.

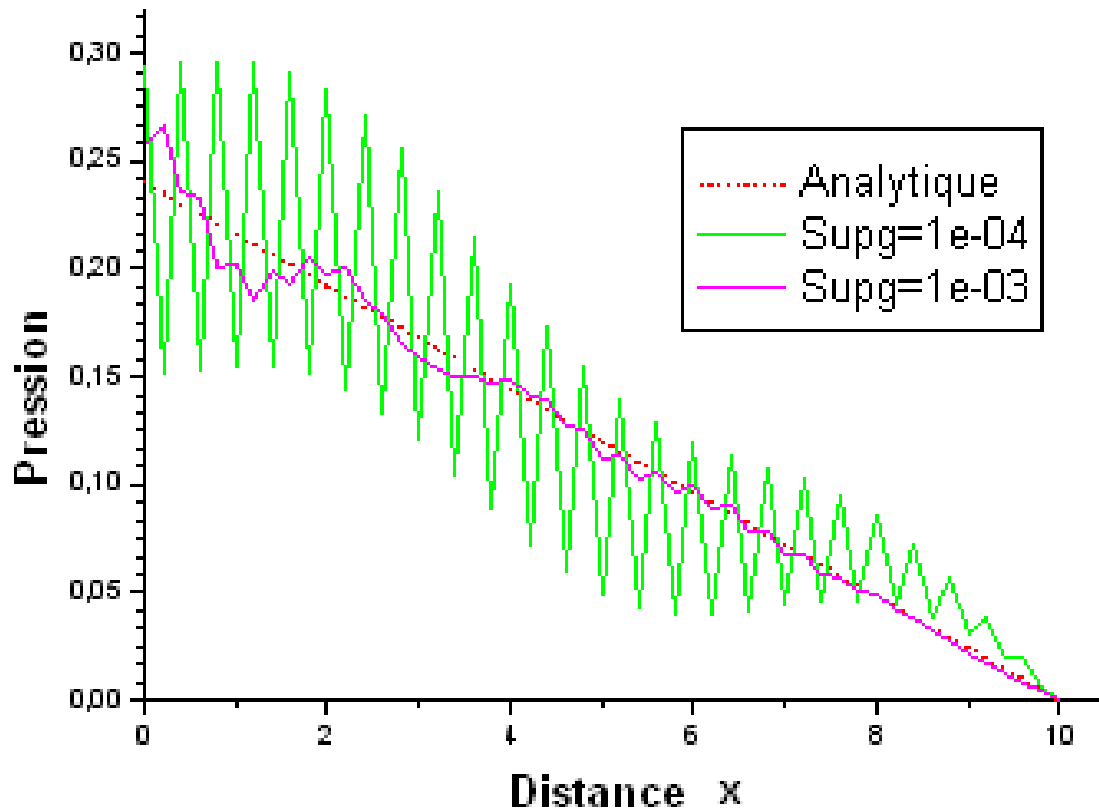


Figure 3.4: Pression en fonction de  $x$  au milieu du canal, comparer avec la pression analytique et stabiliser par SUPG.

### 3.2.2 Cas test d'écoulement autour d'un cylindre

Ce problème est caractérisé par un écoulement instationnaire et le développement d'un détachement tourbillonnaire à l'arrière du cylindre, connue sous le nom d'allées de Von Karman. Ce problème a été étudié numériquement et expérimentalement par divers auteurs [27; 15]. Il est aussi considéré comme un test de référence (benchmark) pour évaluer la performance des méthodes numériques pour la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaire. En effet, selon les expériences numériques réalisées par Buffat en 1991, il s'avère que les schémas de discrétisation en temps trop diffusifs (par exemple les schémas Upwind d'ordre 1) ne sont pas en mesure de prédire correctement l'évolution temporelle de la solution.

- Description du problème et procédures de calcul

La figure 3.5 présente le domaine de calcul et les conditions aux limites. Le domaine de calcul a pour dimensions  $13m \times 7m$  unités de longueur adimensionnelle Figure 3.6 avec un cylindre de diamètre égal à 1.

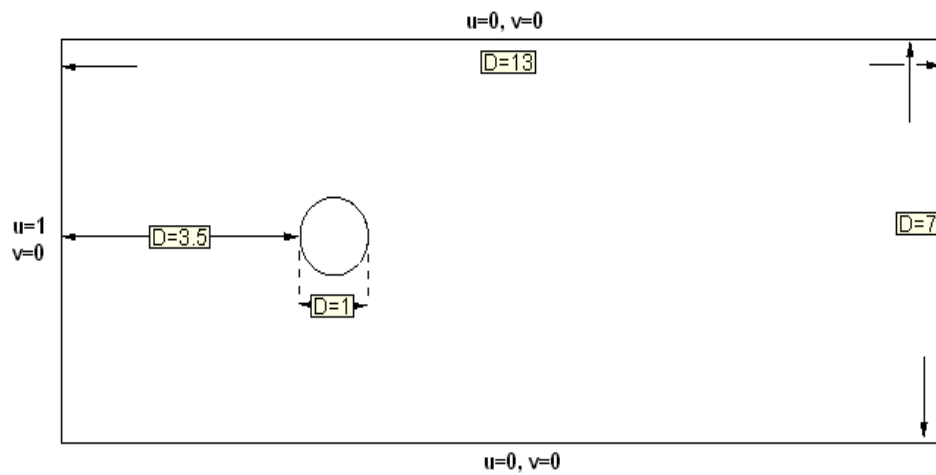


Figure 3.5: Domaine de calcul et conditions aux limites.

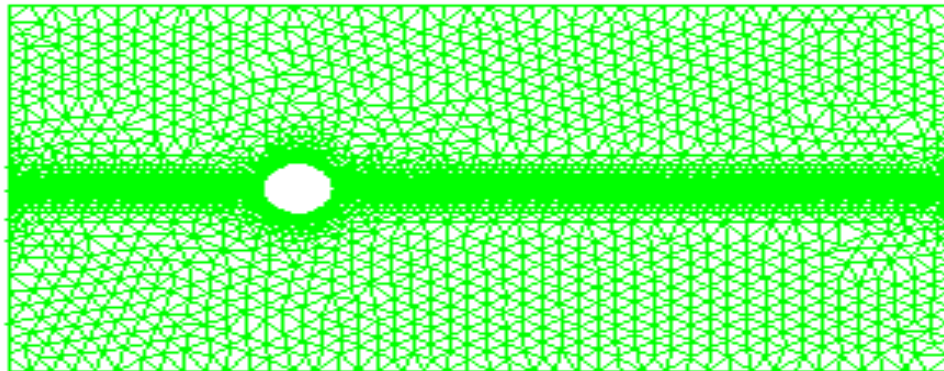


Figure 3.6: Maillage du domaine, 11000 noeuds et 23000 éléments.

Un écoulement uniforme ( $u = 1, v = 0$ ) est imposé à l'entrée et aux frontières supérieure et inférieure du domaine. Le fluide adhère à la paroi du cylindre. A la sortie pas de condition. Le maillage est construit en tenant compte de la solution

du problème. Il est suffisamment raffiné dans le sillage du cylindre, afin d'avoir un champ de vitesse et une pression correcte figures (3.8, 3.9 et 3.10) et de capturer la formation des tourbillons figure 3.7, comparés avec les résultats [48] figure 3.11. Le comportement de l'écoulement est étudié en fonction du nombre de Reynolds  $Re = DU/\eta$  où  $D$  est le diamètre du cylindre,  $U$  est la vitesse uniforme en entrée et  $\eta$  est la viscosité cinématique du fluide tel que :  $\eta = 0.01m^2/s$ .

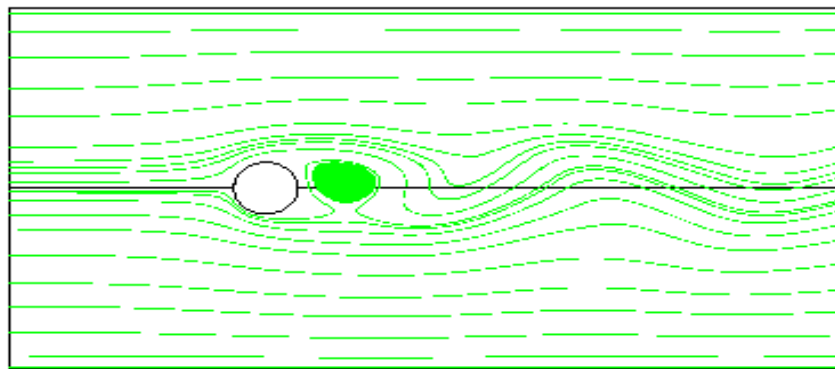


Figure 3.7: Lignes de courant pour  $Re = 100$ .

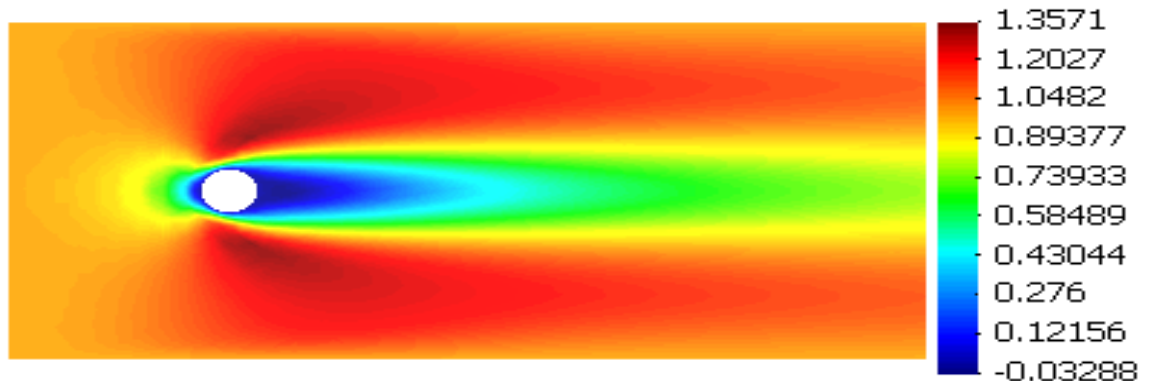


Figure 3.8: Isovaleurs de la vitesse  $u$ .



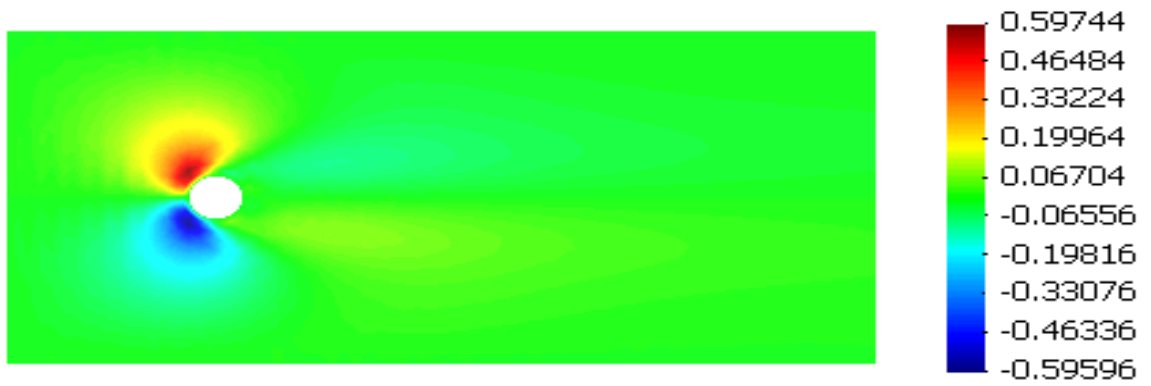
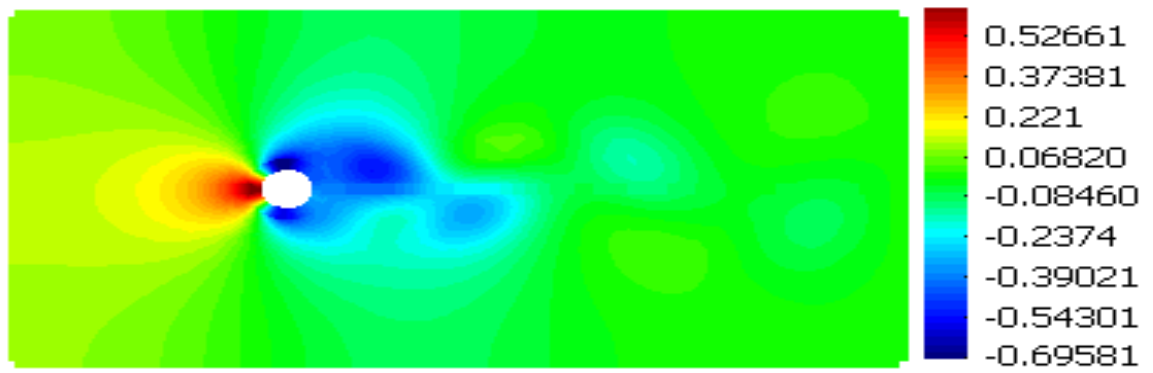
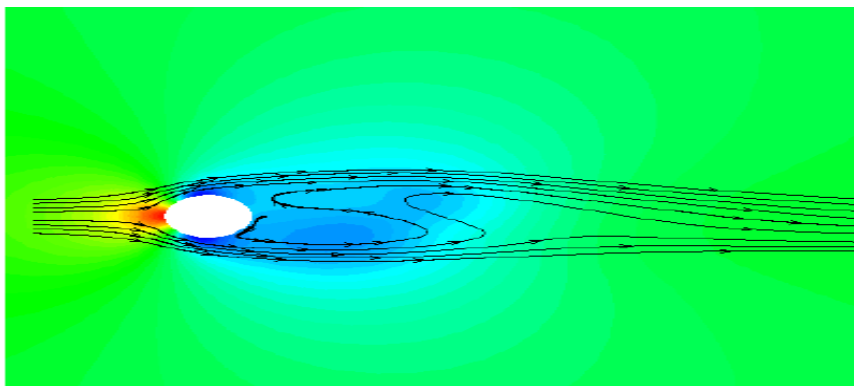
Figure 3.9: Isovaleurs de la vitesse  $v$ .

Figure 3.10: Isovaleurs de la pression.

Figure 3.11: Lignes de courant pour  $Re = 100$ . Résultats Filippone [48].

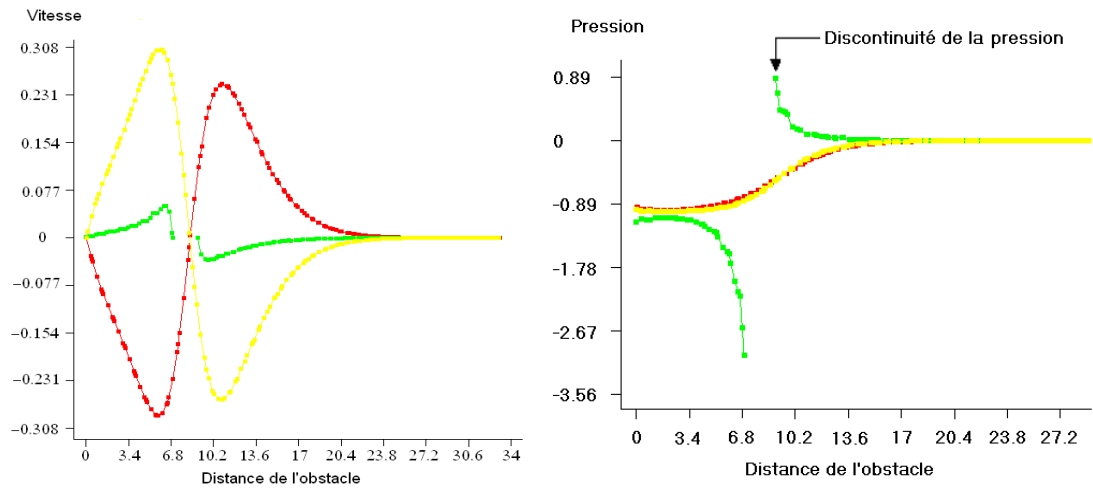


Figure 3.12: Allure de vitesse et de la pression en amont de l'obstacle (couleur jaune et rouge) et en aval de l'obstacle (couleur verte).

Pour étudier la sensibilité de notre modèle au nombre de Reynolds, nous avons choisis le même cas de cylindre avec un maillage homogène Figure 3.13, les champs de vitesses obtenus pour  $R_e = 100$ ,  $R_e = 400$ ,  $R_e = 1000$  et  $R_e = 3000$  sont donnés sur les figures 3.14, 3.15, 3.16 et 3.17. Ce cas test nous a permis d'évaluer la stabilité de notre élément.

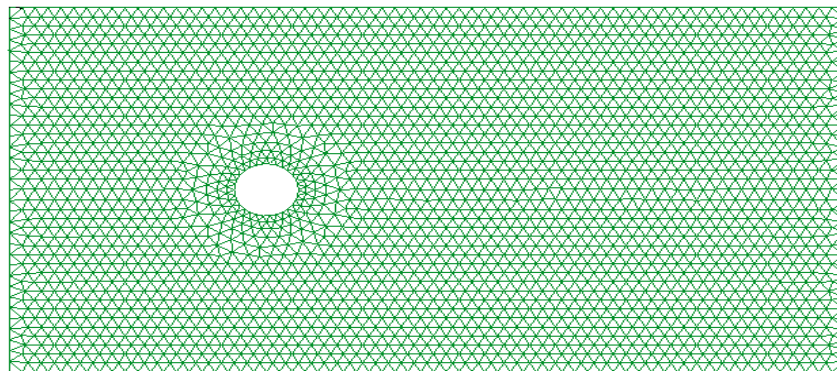


Figure 3.13: Maillage homogène, 2689 noeuds.

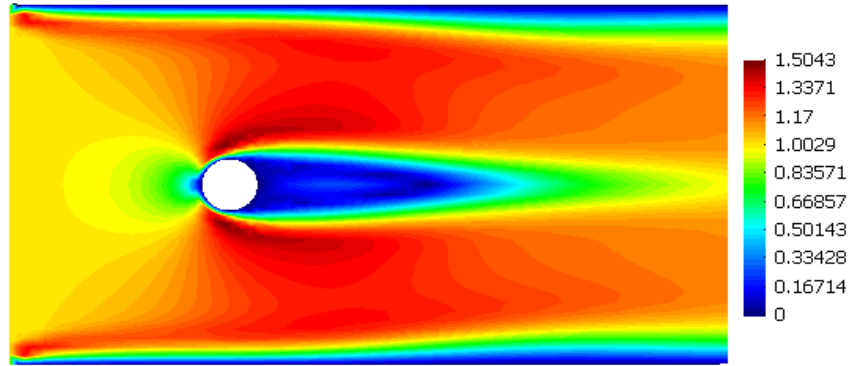


Figure 3.14: Champ de vitesses,  $Re = 100$ .

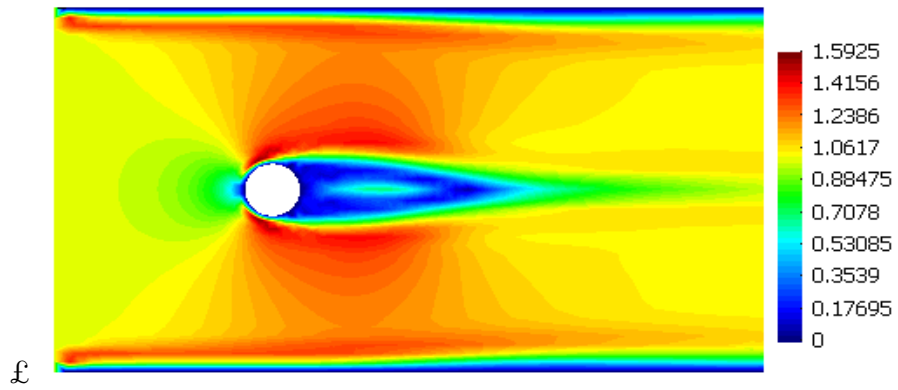


Figure 3.15: Champ de vitesses,  $Re = 400$ .

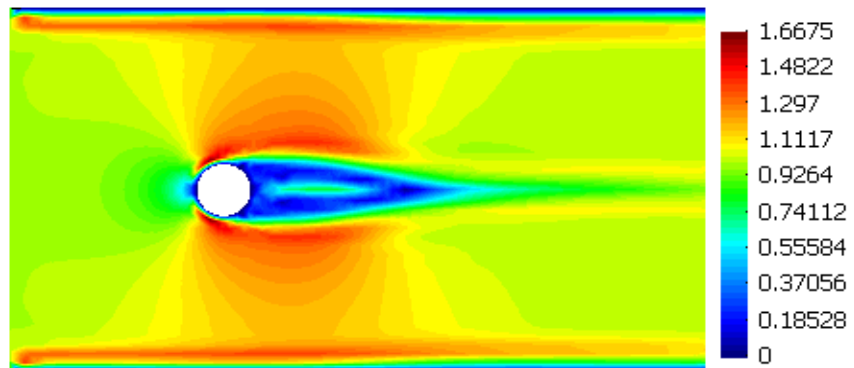


Figure 3.16: Champ de vitesses,  $Re = 1000$ .

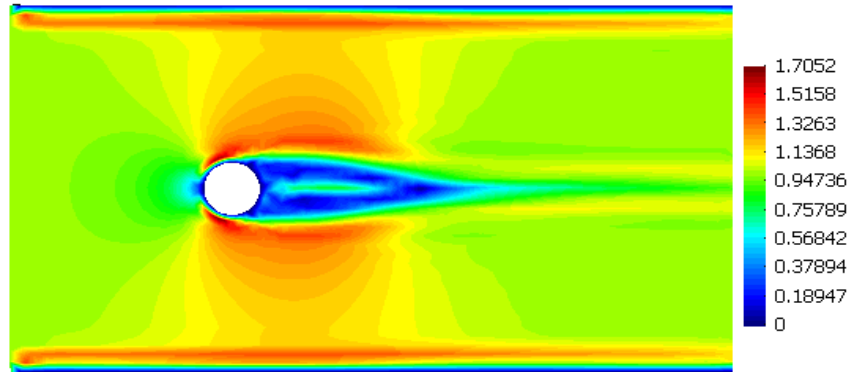


Figure 3.17: Champ de vitesses,  $R_e = 2500$ .

Les figures 3.18 et 3.19 présentent les isovalues vitesses en fonction de plusieurs steps (60, 65, 70 et 75).

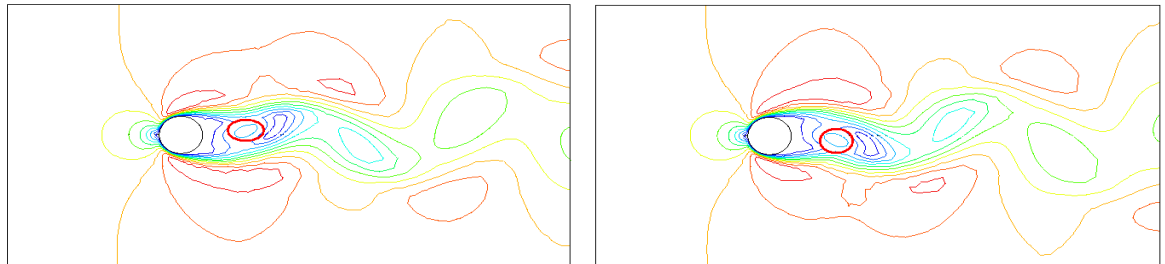


Figure 3.18: Isovaleurs vitesses,  $step = 60$ ,  $step = 65$ .

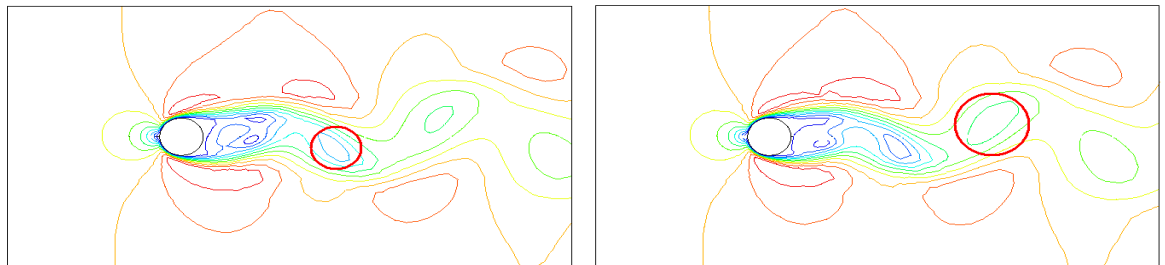


Figure 3.19: Isovaleurs vitesses,  $step = 70$ ,  $step = 75$ .

### 3.2.3 Cas test d'une Cavité carrée

Dans ce test, consiste en une cavité carrée de dimension  $1 \times 1$  et de longueur infinie (Figure 3.20 à gauche). La paroi supérieure se déplace à une vitesse uniforme entraînant ainsi le fluide. Celui-ci forme un large tourbillon dont le centre dépend du nombre de Reynolds. C'est un cas test classique utilisé en simulation numérique des écoulement laminaire de fluide incompressible. Les résultats seront confrontés aux résultats de [67] et [19].

Les conditions aux limites en vitesse-pression, sont les suivantes :

$$u(x, y) = (0, 0) \quad \text{si } (x, y) \in \Gamma_0 \quad (3.23)$$

$$u(x, y) = (1, 0) \quad \text{si } (x, y) \in \Gamma_1$$

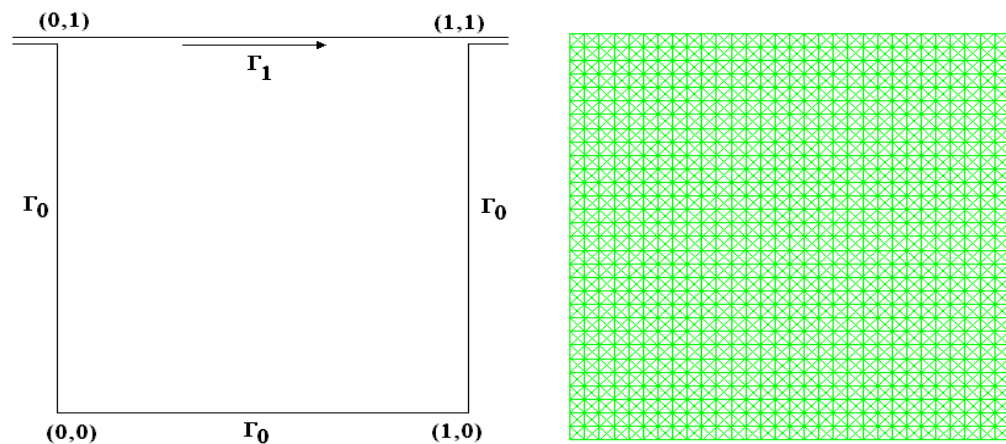


Figure 3.20: Géométrie de la cavité et le maillage ( $30 \times 30$ ).

Nous représentons sur les figures suivantes les champs des composantes de la vitesse suivant les axes  $x$  et  $y$  figure 3.21 pour  $R_e = 1$  et figure 3.22 pour  $R_e = 100$ .

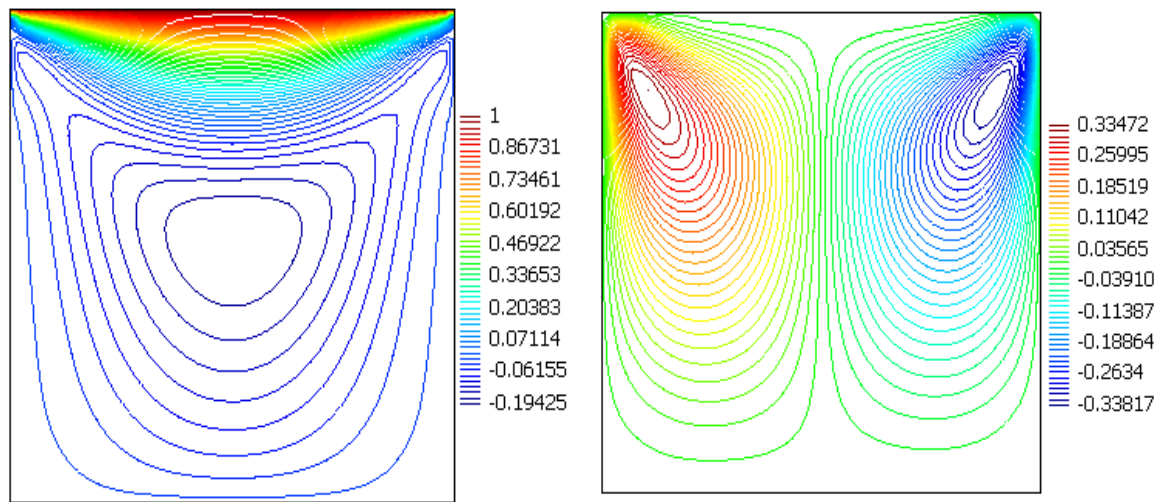


Figure 3.21: A gauche : vitesse  $u$ . A droite : vitesse  $v$  pour  $R_e = 1$ .

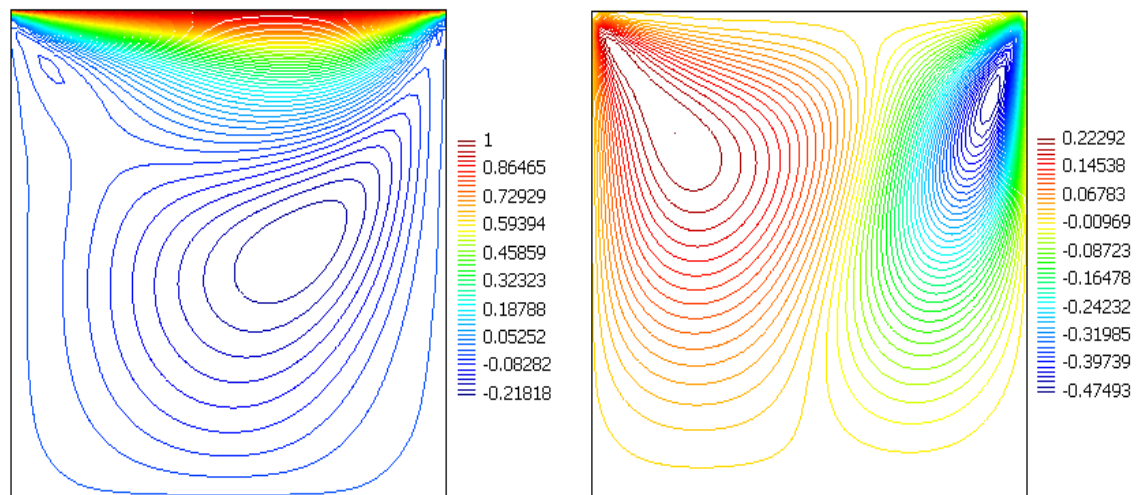


Figure 3.22: A gauche : vitesse  $u$ . A droite : vitesse  $v$  pour  $R_e = 100$ .

Les variations des vitesses  $u, v$  en fonction de  $y, x$  respectivement pour plusieurs coupes Figure 3.23.

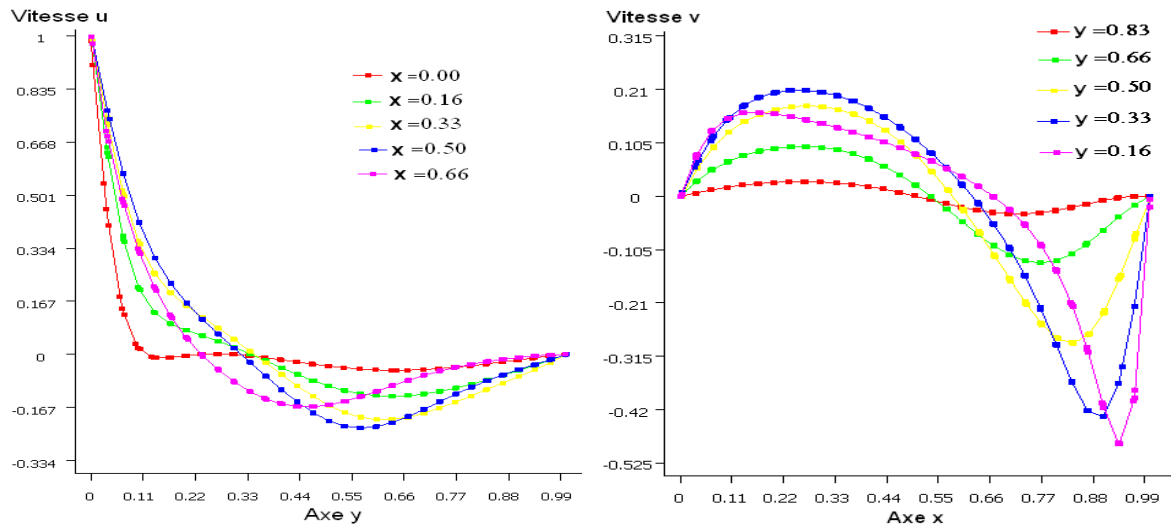


Figure 3.23: A gauche : vitesse  $u(y)$ . A droite : vitesse  $v(x)$  pour  $Re = 100$ .

Sur la figure 3.24 à droite, nous avons représentés les profils de la composante de la vitesse  $u$  en fonction de  $y$  pour  $x=0.5$  et ce pour les nombres de Reynolds de 100 et 400. Les résultats des simulations sont en bon accord avec les résultats de [67] et [19].

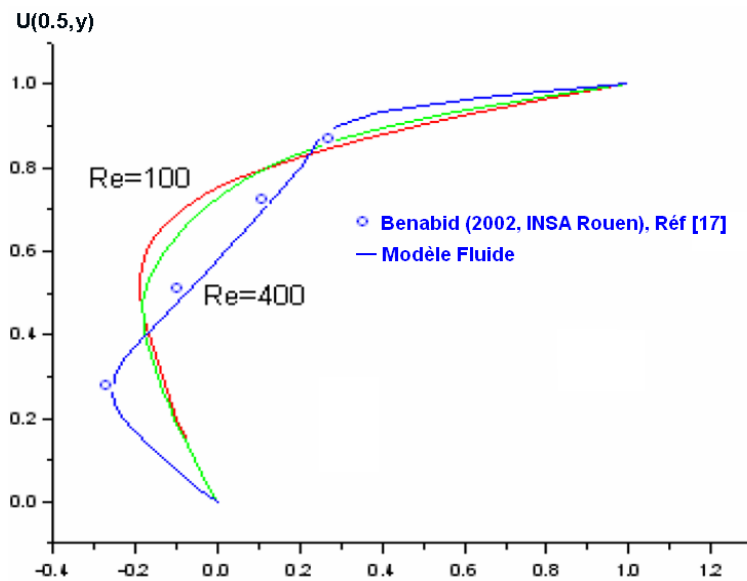


Figure 3.24: Vitesse en fonction de nombre de Reynolds.

### 3.2.4 Cas test d'écoulement autour d'un obstacle

Les problèmes d'écoulement autour d'un obstacle font l'objet de plusieurs applications. Des exemples de tels écoulements se retrouvent dans des problèmes d'échangeurs de chaleur, d'écoulement du vent autour de maison, écoulement dans les artères en présence de plaques, etc. Parmi cette classe d'écoulement, le problème de l'écoulement autour d'un obstacle rectangulaire entre deux plaques est considéré dans cette étude. Le domaine de calcul est composé d'un canal avec un rétrécissement (cas d'une marche) suivi d'un canal avec un élargissement (cas d'une marche inverse) figure 3.25.

Ce cas test a été choisi pour les raisons suivantes : d'abord, la géométrie est simple et l'écoulement est caractérisé par la présence de plusieurs zones de recirculation tel que les zones fermées et des allées [2]; et finalement, à travers les expériences numériques réalisées par [86], il s'avère que ce problème est un test plus contraignant que les problème standard de la marche inversée. En effet, contrairement au problème de la marche inversée, les erreurs numériques provenant de l'avant de l'obstacle peuvent influencer de façon très significative la prédiction de l'écoulement dans tout le domaine.

- **Description du problème et procédures de calcul**

Le domaine de calcul est constitué d'un canal à l'intérieur du quel se trouve un obstacle de hauteur  $H$  et de largeur  $h$ , les conditions aux limites sont illustrées sur la figure 3.25. Le fluide rentre dans le canal avec un profil de vitesse parabolique

$$u(y) = \left(\frac{3}{2}y(2-y), 0\right) \text{ pour } 0 \leq y \leq 2, \quad (3.24)$$

adhéré aux parois solides (condition de non-glissement). Le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse moyenne à l'entrée ( $\hat{U} = \frac{2}{3}u_{max}=0.1$  m/s) et la hauteur  $H$  de l'obstacle. Le maillage utilisé (4000 noeuds et 8000 éléments) est bien raffiné



autour de l'obstacle afin de capturer les caractéristiques de base de l'écoulement (vitesses, pression et lignes de courant). Les figures 3.26, 3.27, 3.28, 3.29, 3.30 et 3.31 représentent respectivement la pression, la vitesse  $u$  et les lignes de courant obtenues par notre modèle et comparé aux résultats obtenues par TDYN.

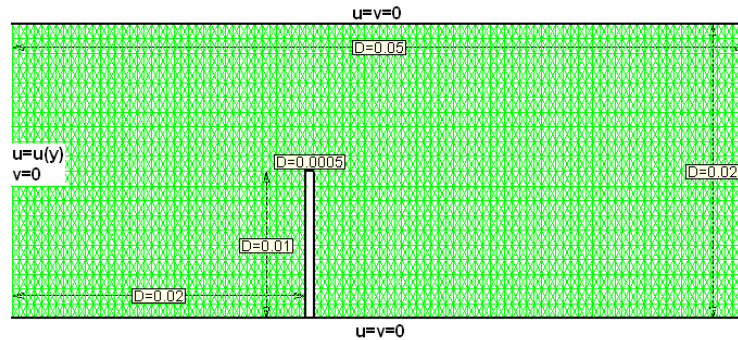


Figure 3.25: Maillage de domaine (4000 noeuds et 8000 éléments) et conditions aux limites.

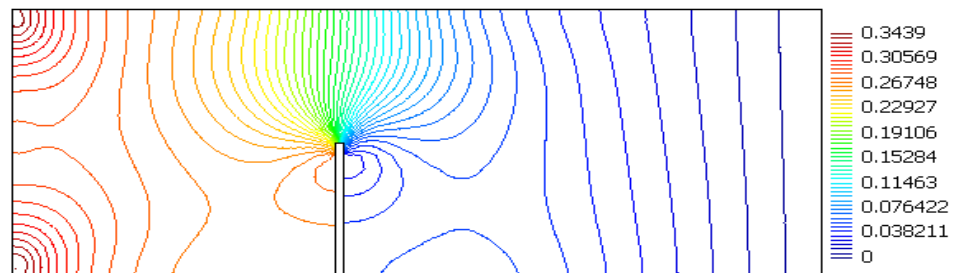


Figure 3.26: Pression obtenue par notre modèle,  $R_e = 1$ .

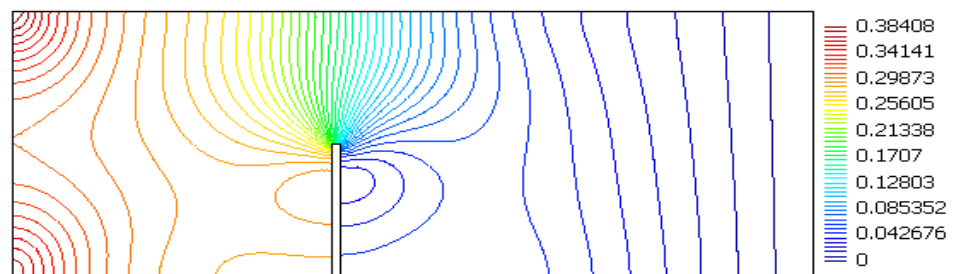


Figure 3.27: Pression obtenue par TDYN,  $R_e = 1$ .

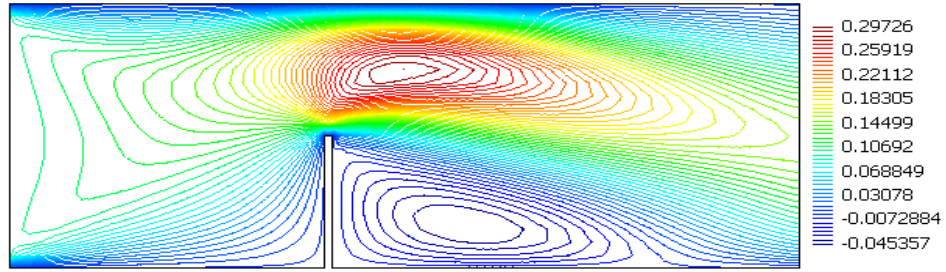


Figure 3.28: Vitesse  $u$  obtenue par notre modèle,  $R_e = 10$ .

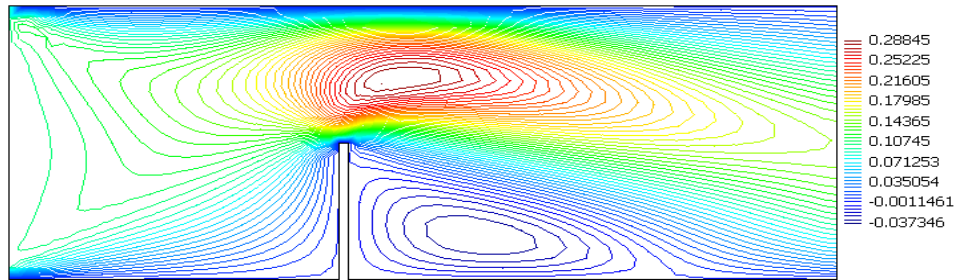


Figure 3.29: Vitesse  $u$  obtenue par TDYN,  $R_e = 10$ .

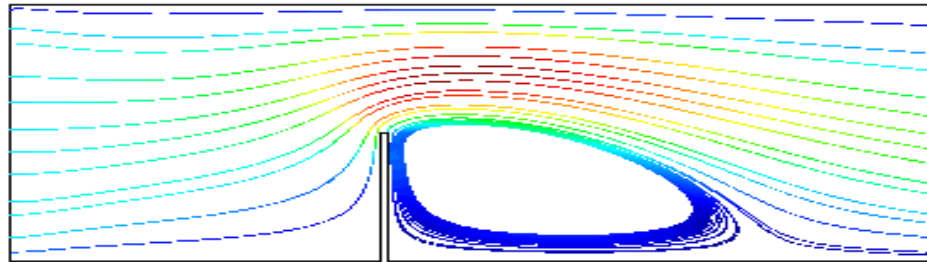


Figure 3.30: Les lignes de courant obtenues par notre modèle  $R_e = 10$ .

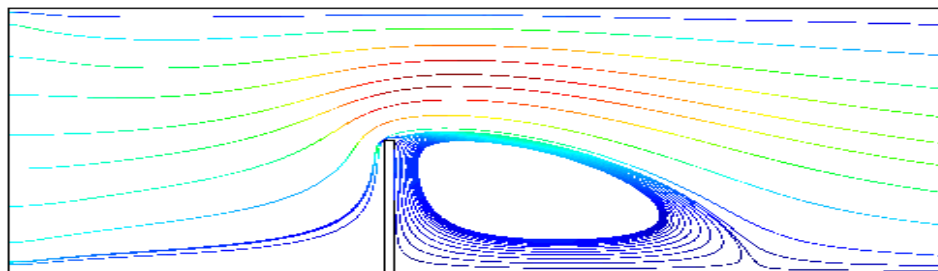


Figure 3.31: Les lignes de courant obtenues par TDYN  $R_e = 10$ .

Dans ce test, on cherche à prédire les caractéristiques de l'écoulement (zone de recirculation et la composante horizontale de la vitesse à différentes stations en aval de l'obstacle. Notre solution est comparée aux résultats numériques fournies par N'Dri [96], Armaly [3] et Cruchaga [35].

Notre cas tests est composé de deux marche, nous avons choisis après la marche pour évaluer la longueur de la zone de recirculation. Pour cela nous considérons le domaine et les conditions aux limites donnés sur la figure 3.32

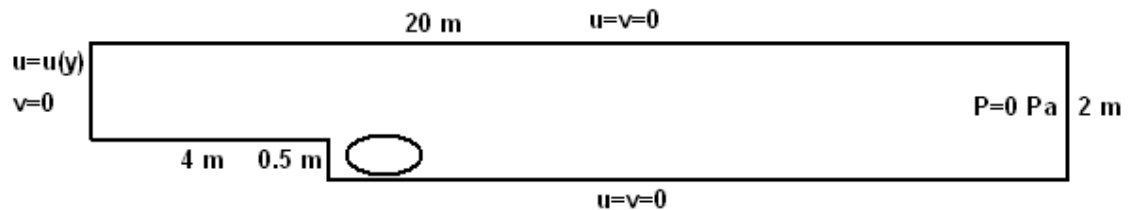


Figure 3.32: Domaine et conditions aux limites.

La longueur de la zone de recirculation est estimé selon les auteurs entre cinq et six fois la hauteur  $h$  de la marche. Les résultats obtenus pour  $Re = 100, 250, 500$  sont représentés sur les figures 3.33, 3.34 et 3.35. Pour  $Re = 250$  la longueur obtenue ( $5.66 \times h$ ) par notre modèle est raisonnable par rapport aux résultats de Armaly [3] et Cruchaga [35].

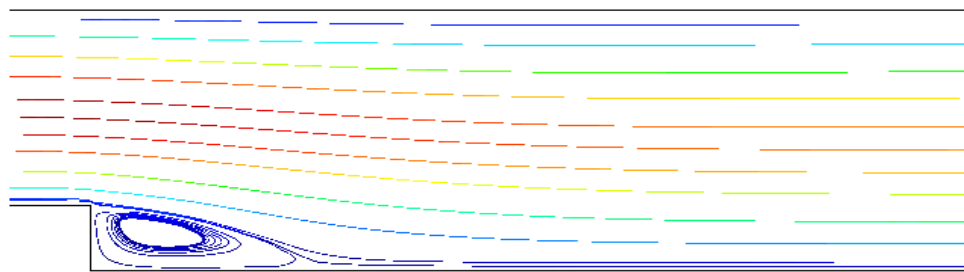


Figure 3.33: Les lignes de courant,  $Re = 100$ .

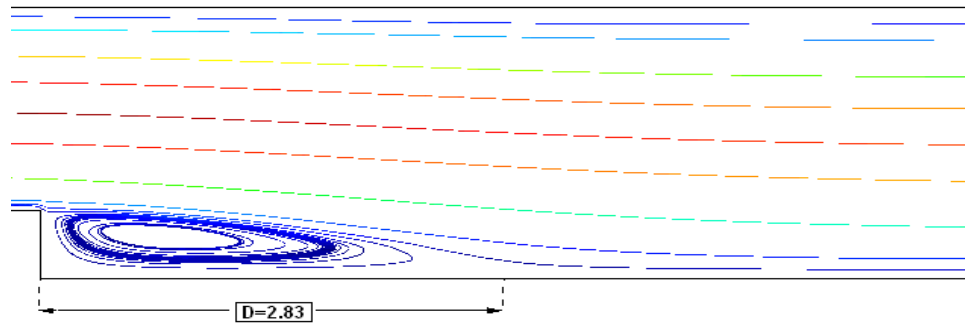


Figure 3.34: Les lignes de courant,  $Re = 250$ .

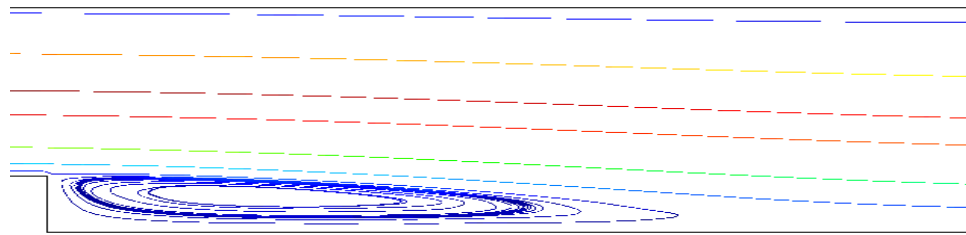


Figure 3.35: Les lignes de courant,  $Re = 500$ .

Dans le canal avec l'obstacle vertical on observe la présence de zone de recirculation le long de paroi solide. Sur la figure 3.37 la distribution de vitesse est comparée aux résultats numériques et expérimentaux [96].

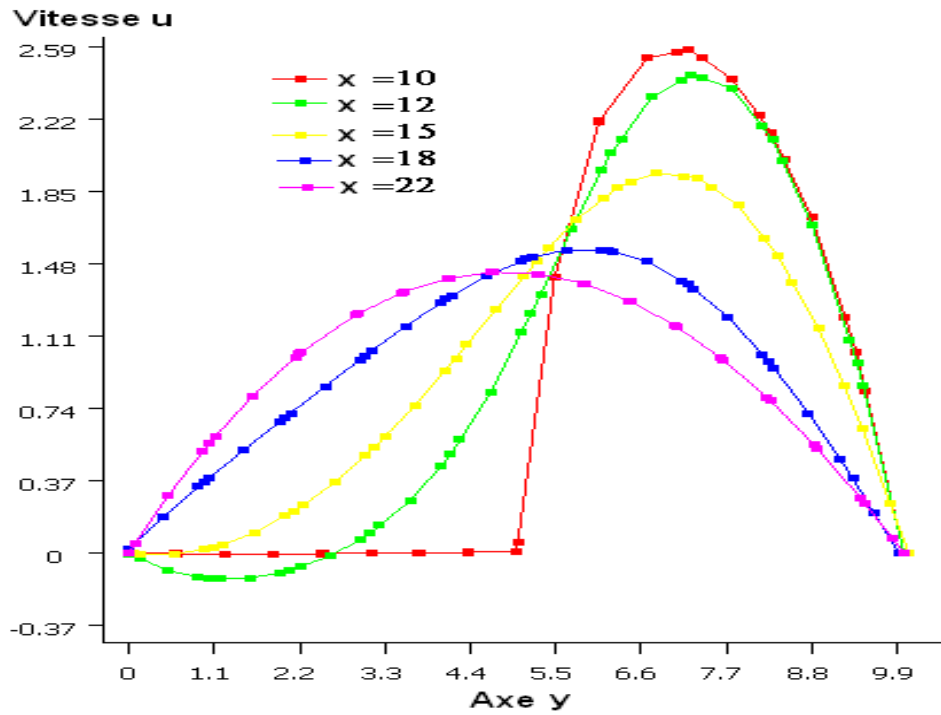


Figure 3.36: Coupe de la composante horizontale de la vitesse, nos résultats.

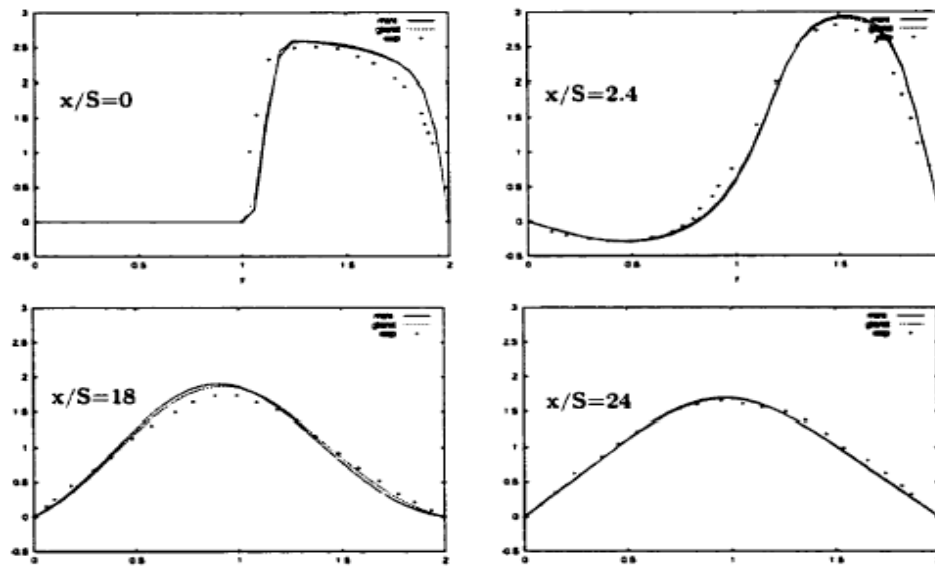


Figure 3.37: Coupe de la composante horizontale de la vitesse, résultats Kouakou [96].

## CHAPITRE 4

### MODÈLE SOLIDE : TRAITEMENT NUMÉRIQUE ET VALIDATION

#### 4.1 Introduction

Dans ce module, il a été considéré le cas de structures minces (coque). Toute fois, une coque est une structure tridimensionnelle caractérisée par une épaisseur très petite par rapport aux autres dimensions. Ce type de structures apparaît fréquemment dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...), dans la conception industrielle (turbines, pièces de mécanique, carrosserie de voiture), et même en biomécanique (artères, bronches,...).

Afin de simuler numériquement le comportement des structures minces, il est important de formuler des méthodes d'éléments finis de coques qui soient robustes vis-à-vis du verrouillage numérique, mais aussi consistantes. On trouve fréquemment des structures minces de géométrie complexe qui nécessitent l'utilisation de maillages surfaciques non-structurés qui incluent forcément des éléments finis triangulaires [88].

Il est bien connu que les techniques d'éléments finis standards marchent bien dans des situations à membrane dominante, mais en général celles-ci donnent des solutions approchées trop rigides pour les problèmes à flexion dominante, principalement lorsque l'épaisseur est très petite, phénomène connu sous le nom de verrouillage numérique [32]. Le verrouillage numérique est l'une des difficultés majeures dans la formulation d'éléments finis robustes pour l'analyse numérique des structures minces, mais ce phénomène concerne aussi les formulations incompressibles de la mécanique des milieux continus en particulier [9], [25], [10] et [69]. Des nombreux travaux ont été réalisés dans la recherche de remèdes contre cette

pathologie. Les méthodes mixtes dont les fondements théoriques ont été établis par [6] et [25] constituent un outil efficace pour la conception et l'analyse rigoureuse des méthodes numériques qui échappent au verrouillage, en particulier dans la mécanique des fluides incompressibles et les modèles de plaques [25], [33] et [112].

## 4.2 Synthèse bibliographique

L'obtention des modèles de plaques et coques a été un sujet de recherche primordial en mécanique [28], [53], [91], [108], [124], [126] et [134]. L'idée de base dans la théorie de ces modèles est d'utiliser des hypothèses et simplifications physiquement justifiables à travers l'épaisseur. Le but visé est d'obtenir la déformation d'une structure mince tridimensionnelle à partir d'un problème formulé sur sa surface moyenne. Par exemple, on néglige l'influence de la composante normale des contraintes, les effets des déformations à travers l'épaisseur, ou on utilise souvent des hypothèses cinématiques du type Reissner-Mindlin qui supposent que les composantes tangentielles  $u, v$  du déplacement sont linéaires en  $z$ , tandis que la composante transversale est constante [77], [87], [92] et [109]. Mais on peut aussi penser à des hypothèses cinématiques d'ordre plus élevé, en particulier [31].

Les problèmes de robustesse des méthodes d'éléments finis pour les coques, et notamment le phénomène de verrouillage numérique de cisaillement et de membrane qui intervient lorsque la structure considérée est mince, sont désormais bien compris, en particulier [32] et ses références. Même si l'on ne connaît pas, pour l'instant, d'élément dont on ait pu démontrer qu'il serait parfaitement robuste, on dispose de méthodologies détaillées et rigoureuses pour évaluer la robustesse des éléments de coques au moyen de cas-tests [14], [32]. De fait, certains éléments existants comme l'élément quadrangulaire  $Q4\gamma24$  "Élément de Coque" [90] montrent un très bon comportement à travers ces tests. Cet élément est développé dans la présente version de REFLEX, utilisée dans le cadre des présents travaux.

### 4.3 Description des éléments finis utilisés dans le modèle structure

#### 4.3.1 Éléments de coques de type Kirchhoff discret

Les premiers éléments de plaques et de coques développés étaient basés en grandes parties sur l'hypothèse de Kirchhoff-Love. Cette hypothèse, qui consiste à annuler l'énergie due aux déformations de cisaillement transverse, exige une continuité  $C^1$  (pour un modèle déplacement compatible). Ce modèle, qui ne s'applique que pour des structures minces, a été utilisé par [135]. La continuité  $C^1$ , qui exige la continuité de  $w$  et des dérivées premières, est très difficile à assurer [140]. Pour éviter ces difficultés, plusieurs approches ont été proposées. Parmi ces approches, on trouve la classe des éléments de type Kirchhoff discret. Cette approche permet de satisfaire la continuité inter-éléments des variables essentielles  $(u, v, w, \beta_x, \beta_y)$  et permet encore d'obtenir des résultats numériques très satisfaisants. Les hypothèses de Kirchhoff sous forme discrète furent introduites par Wempner et al. [133] et Dhatt [39]. En 1978 de nombreux chercheurs, développeurs de codes et d'industriels ont porté un intérêt marqué pour les éléments triangulaires DKT et quadrilatéraux DKQ. Ces éléments ont été utilisés pour l'analyse des plaques et des coques minces dans les domaines linéaires et non linéaires, constituées de matériaux isotropes ou composites et soumises à des sollicitations statiques et dynamiques Fafard et al. [46]. Les éléments de type Kirchhoff discret ont été proposés comme une alternative pour définir des éléments à faible nombre de noeuds et de ddl sans utiliser la théorie continue de Kirchhoff. Dans ce cadre, nous présentons deux éléments finis de coques minces, l'un de type quadrilatéral nommé  $DKQ20$  et l'autre triangulaire noté  $DKT15$ . Ces derniers sont basés sur une approche tridimensionnelle dégénérée qui tient compte de l'hypothèse de Kirchhoff sous forme discrète, et permettent de simuler le comportement des coques minces élastiques de formes quelconques.



### 4.3.1.1 Description géométrique de $DKQ20$ et $DKT15$

L'interpolation géométrique d'un vecteur position d'un point  $q$  s'exprime en fonction des coordonnées  $\zeta$  et  $\eta$  de l'élément de référence sous la forme suivante :

$$X_q = X_p + \frac{1}{2}\zeta hn \quad (4.1)$$

$$X_q(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1,nd} N_i(\xi, \eta) X_i + \zeta \sum_{i=1,nd} N_i(\xi, \eta) \frac{h_i}{2} n_i \quad (4.2)$$

$nd$  : nombre de noeud (3 pour  $DKT15$  et 4 pour  $DKQ20$ )

$N_i$  : fonctions de formes linéaire en  $\zeta$  et  $\eta$  :

$\langle N_1 \ N_2 \ N_3 \rangle = \langle 1 - \zeta - \eta \ \zeta \ \eta \rangle$  pour  $DKT15$

$\langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle = \frac{1}{4} \langle (1 - \pm\zeta) (1 - \pm\eta) \rangle$  pour  $DKQ20$

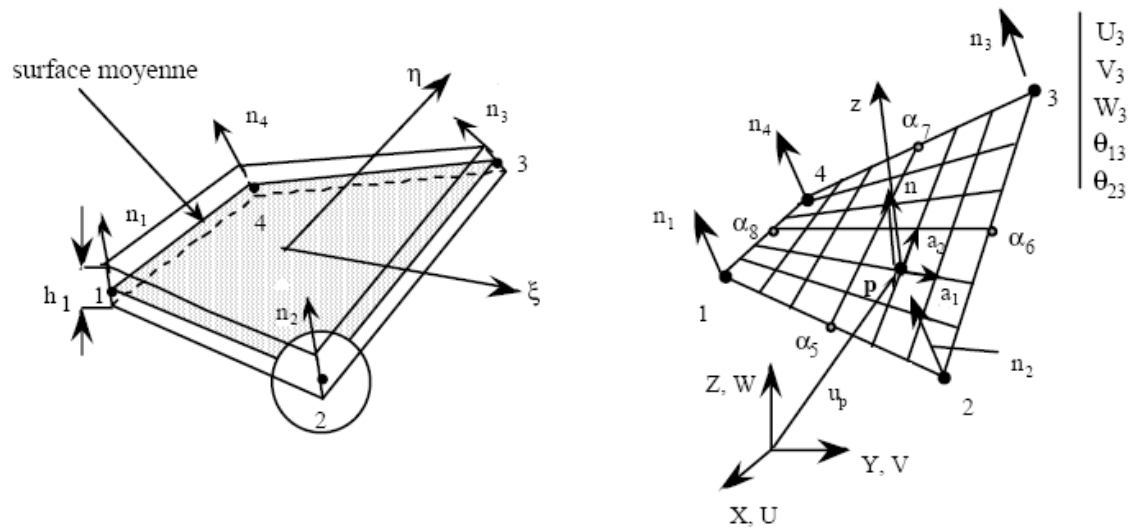


Figure 4.1: Géométrie et variables nodales de l'élément  $DKQ2$ .

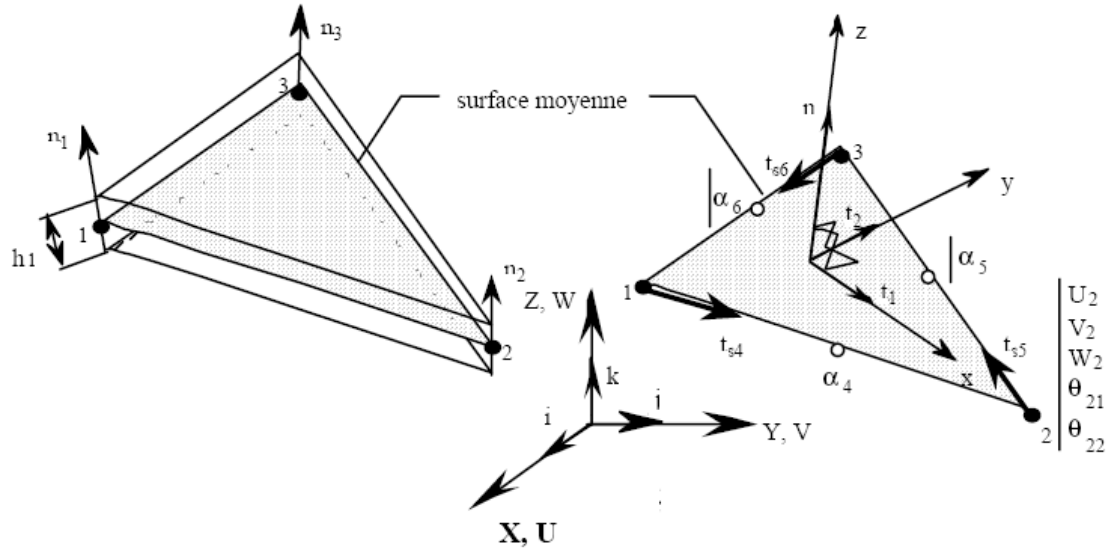


Figure 4.2: Géométrie et variables nodales de l'élément *DKT15*.

#### 4.3.1.2 Champs de déplacements

Le champ de déplacements d'un point quelconque de la coque s'écrit avec l'hypothèse de sections droites de Hencky/Mindlin/Reissner :

$$U_q(\xi, \eta, \zeta) = U_p(\xi, \eta) + \zeta \frac{h}{2} \beta(\xi, \eta) \quad (4.3)$$

$U_p$  : vecteur déplacement du point  $p$  ( $\zeta = 0$ )

$\beta(\xi, \eta)$  : vecteur rotation orthogonal à la normale, s'écrit également :

$$\beta = \theta \wedge n = (\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2) \wedge n = \theta_2 t_1 - \theta_1 t_2 \quad (4.4)$$

L'interpolation des déplacements est faite à partir des vecteurs déplacements aux noeuds et des rotations autour des vecteurs tangents  $t_{1i}$  et  $t_{2i}$  :

$$U_q = \sum_{i=1,nd} N_i U_{pi} + \frac{\zeta}{2} \left( \sum_{i=1,nd} N_i h_i (\theta_{2i} t_{1i} - \theta_{1i} t_{2i}) + \sum_{k=nd+1}^{2nd} P_k t_{sk} h_k \alpha_k \right) \quad (4.5)$$

$P_k$  sont des fonctions linéaires et quadratiques compatibles associées respective-

ment aux éléments *DKT15* et *DKQ20*, représentées sur le tableau ci-dessous.

Eléments	$P_k (k = nd, 2nd)$
<i>DKT15</i> ( $k = 4$ à $6$ )	$P_4 = 4\xi (1 - \xi - \eta)$ $P_5 = 4\xi\eta$ $P_6 = 4\eta (1 - \xi - \eta)$
<i>DKG20</i> ( $k = 5$ à $8$ )	$P_5 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta)$ $P_6 = \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 + \xi)$ $P_7 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta)$ $P_8 = \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 - \xi)$

#### 4.3.1.3 Champs de déformations

Les déformations en un point de coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  s'écrivent :

$$\{\epsilon_s\} = \{e\} + \zeta \{\chi\} \quad (4.6)$$

Pour *DKQ20* et *DKT15* les expressions des composantes curvilignes de déformations dans la base  $[Q]$  sont :

- déformations de membrane :

$$\langle e \rangle = \langle e_x \ e_y \ e_{xy} \rangle \quad (4.7)$$

$$e_x = t_1 u_{p,x} ; e_y = t_2 u_{p,y} ; e_{xy} = t_2 u_{p,x} + t_1 u_{p,y}$$

- déformations de flexion (courbures) :

$$\langle \chi \rangle = \langle \chi_x \ \chi_y \ \chi_{xy} \rangle \quad (4.8)$$

$$\chi_x = t_1 (u_{p,\xi} b c_{11} + u_{p,\eta} b c_{21}) + t_1 \left( \frac{h}{2} \beta \right)_{,x}$$

$$\chi_y = t_2 (u_{p,\xi} b c_{12} + u_{p,\eta} b c_{22}) + t_2 \left( \frac{h}{2} \beta \right)_{,y}$$

$$\chi_{xy} = t_2 (u_{p,\xi} b c_{11} + u_{p,\eta} b c_{21}) + t_1 (u_{p,\xi} b c_{12} + u_{p,\eta} b c_{22}) + t_2 \left( \frac{h}{2} \beta \right)_{,x} + t_1 \left( \frac{h}{2} \beta \right)_{,y}$$

En tenant compte des hypothèses de Kirchhoff, les déformations de cisaillement transversal constantes en  $\zeta$  sont négligeables. Les expressions  $\gamma_{xz} = 0$  et  $\gamma_{yz} = 0$  peuvent être utilisées pour relier  $\beta$  aux gradients de  $u_p$ .

#### 4.3.1.4 Matrices de rigidité

En introduisant les expressions des déformations en fonction des variables nodales, on peut obtenir les matrices de rigidité en intégrant explicitement suivant  $\zeta$  tel que  $(-1 \preceq \zeta \preceq 1)$  :

$$W(u_p, \beta) = W_{int} - W_{ext} \quad \text{avec :} \quad W_{int} = W_{int}^m + W_{int}^f \quad (4.9)$$

Sachant que :

$$\begin{cases} W_{int}^m = \int_{A^e} \langle e^* \rangle [H_m] \{e\} dA = \langle u_n^* \rangle [k_m] \{u_n\} \\ W_{int}^f = \int_{A^e} \frac{4}{h^2} \langle \chi^* \rangle [H_f] \{\chi\} dA = \langle u_n^* \rangle [k_f] \{u_n\} \end{cases} \quad (4.10)$$

avec :

$$\begin{cases} [k_m] = \int_{A^e} [B_m]^T [H_m] [B_m] dA \\ [k_f] = \int_{A^e} \frac{4}{h^2} [B_f]^T [H_f] [B_f] dA \end{cases} \quad (4.11)$$

où  $dA = \sqrt{ad} \xi d\eta$

La matrice de rigidité élémentaire ( $DKT15$  ou  $DKQ20$ ) s'exprime par :

$$[k^e] = [k_m] + [k_f] \Rightarrow \begin{cases} [k^e]_{(15 \times 15)} & \text{pour } DKT15 \\ [k^e]_{(20 \times 20)} & \text{pour } DKQ20 \end{cases} \quad (4.12)$$

Pour *DKT15* :

\*  $[k_m]$  représente la rigidité de membrane.

\*  $[k_f]$  représente la rigidité de flexion qui est obtenue en considérant un schéma d'intégration numérique de Hammer à trois points suivant  $\xi, \eta$ .

\*  $h$  représente l'épaisseur de la coque.

Pour *DKQ20* :

\*  $[k_m]$  représente la rigidité de membrane. Cette matrice est relative à  $Q4$ .

\*  $[k_f]$  représente la rigidité de flexion qui est obtenue en considérant un schéma d'intégration numérique de Gauss à deux points suivant  $\xi, \eta$ .

Nous remarquons que les termes  $bc_{ij}$  dans l'expression des courbures de flexion ( $\chi_x, \chi_y$  et  $\chi_{xy}$ ) interviennent que les éléments soient coplanaires ou non.

### 4.3.2 Éléments de coques de type Reissner-Mindlin

La théorie de Reissner-Mindlin consiste à tenir compte du cisaillement transversal. Cette théorie permet de considérer une continuité  $C^0$  des déplacements (et rotations) alors qu'une continuité  $C^1$  est nécessaire pour un élément conforme basé sur la théorie de Kirchhoff. Elle offre aussi un domaine d'application plus large (coques minces et épaisses). Plusieurs éléments finis de coque de continuité  $C^0$  ont été construits selon cette théorie, et sont actuellement les plus utilisés même dans le cas où la structure modélisée vérifie bien l'hypothèse de Kirchhoff. Parmi les éléments à continuité  $C^0$ , la formulation introduite par Ahmad [1], [122] permet de formuler une famille d'éléments de coque isoparamétrique de façon commode et efficace qui assure la continuité géométrique. En se basant sur cette cinématique, nous avons développé deux éléments finis de coque avec cisaillement transverse, l'un de type quadrilatéral nommé  $Q4\gamma20$  et l'autre triangulaire noté  $T3\gamma15$ . Ces derniers restent dans le cadre d'une formulation en déplacement et s'appuient sur des techniques dites "d'interpolation des distorsions transverses".

#### 4.3.2.1 Élément $Q4\gamma20$

Concerne la formulation de l'élément quadrilatéral à quatre noeuds non coplanaires ayant comme degrés de liberté (ddl) : trois composantes de déplacement et deux rotations. La formulation est inspirée de l'élément  $Q4\gamma24$  développé par Batoz et Dhatt [11]. Cet élément est représentée par la surface moyenne  $A$  et la fibre épaisseur  $hn$ . Le vecteur position d'un point quelconque s'écrit en fonction des coordonnées isoparamétriques [12] :

$$x_q(\xi, \eta, \zeta) = x_p(\xi, \eta) + \frac{1}{2}\zeta hn \quad (4.13)$$

$x_p$  est le vecteur position du point  $p$  de la surface moyenne, défini par :

$$x_p(\xi, \eta) = \sum_{i=1,4} N_i(\xi, \eta) x_i$$

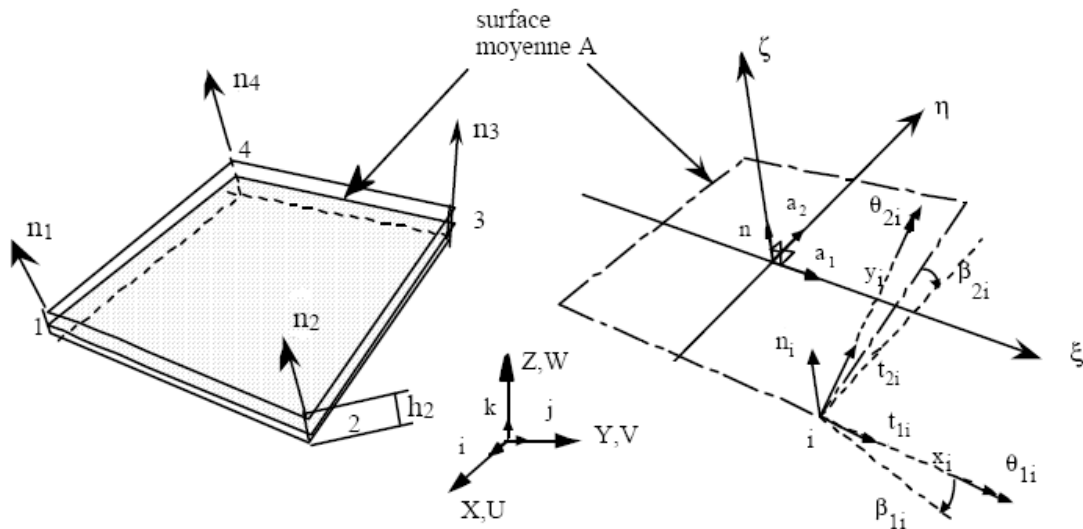


Figure 4.3: Élément de coque courbe  $Q4\gamma20$ .

#### 4.3.2.2 Élément $T3\gamma15$

Nous présentons brièvement la définition de l'élément triangulaire à trois noeuds, simple et efficace mais qui n'est pas parfait. L'élément  $T3\gamma15$  présente une pseudo-normale continue et donc une pseudo-courbure. Il est ainsi bien adapté aux géométries courbes, et il a comme ddl : trois composantes de déplacements et deux composantes de rotations. L'élément  $T3\gamma15$  est inspiré de l'élément développé par Boisse et al. [20], lui même inspiré de l'élément de Hughes et al. [71].  $T3\gamma15$  est complètement définie par sa surface moyenne, sa fibre épaisseur  $hn$ . Le vecteur position d'un point quelconque s'écrit :

$$x_q(\xi, \eta, \zeta) = x_p(\xi, \eta) + \frac{1}{2}\zeta hn \quad (4.14)$$

#### 4.3.3 Élément à deux dimension en coordonnées cartésiennes, Élément triangulaire à trois noeuds (T3)

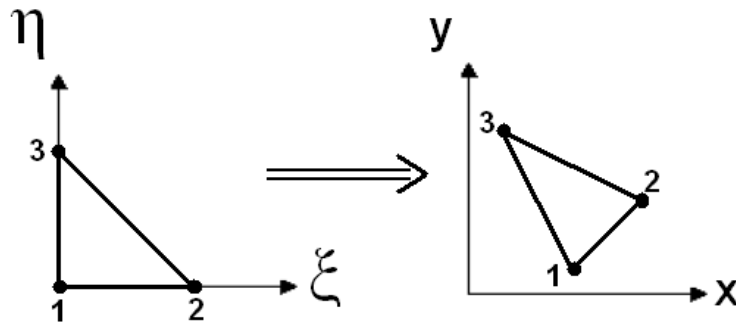


Figure 4.4: Élément de référence à gauche et l'élément réel à droite

Les fonctions d'interpolation sont :

$$\langle N \rangle = \langle 1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta \rangle$$

La matrice jacobienne inverse  $[j]$  étant :

$$[j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$J = \det[J] = 2A = y_{31}x_{21} - x_{31}y_{21}$$

Les déformations dans le plan  $x, y$  sont :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} = [B] \{u_n\} \quad (4.16)$$

avec :

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 \ v_1 : u_2 \ v_2 : u_3 \ v_3 \rangle$$

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Le domaine d'intégration est :

$$\int_{v^e} (\dots) dv = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\dots) dz \right) 2A d\eta d\xi \quad (4.18)$$

La matrice de rigidité est :

$$[k] = [B]^T \left( \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [H_m] d\eta d\xi \right) [B] 2A \quad (4.19)$$

avec :



$$[H_m] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} ([H]) dz \quad (4.20)$$

où  $h$  est l'épaisseur dans la direction  $z$  et  $[H]$  dépend des hypothèses (contraintes ou déformations planes) et du matériau . Pour un matériau isotrope :

$$[H] = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & 0 \\ H_2 & H_1 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$H_1 = \frac{E(1 - av)}{(1 + v)(1 - v - av)} \quad (4.22)$$

$$H_2 = \frac{vH_1}{1 - av} \quad (4.23)$$

Avec :  $E$  module d'élasticité ;  $v$  coefficient de Poisson.

$$G = \frac{E}{2(1 + v)} \quad (4.24)$$

$a = 0$  en contraintes planes (CP) ;  $a = 1$  en déformation planes (DP).

La matrice  $[k]$  est donnée explicitement dans le tableau 2.6.4 (pour  $[H]$  définie par 2.6.35 et  $h$  constant).

La matrice  $[m]$  associée aux variables nodales  $u_1, u_2, u_3$  (idem pour  $v_1, v_2, v_3$ ) est :

$$[m] = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \rho_m \{N\} \langle N \rangle 2Ad\eta d\xi$$

avec :

$$\rho_m = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} ([H]) dz \quad (4.25)$$

où  $\rho$  est la masse volumique en un point  $x, y, z$ .

Pour  $\rho_m$  constant :

$$[m] = \rho_m A \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

La matrice masse diagonale est simplement :

$$[m] = \rho_m \frac{A}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Le vecteur sollicitation dû à des forces de volume  $f_x(x, y)$  (suivant  $x$ ) et  $f_y(x, y)$  (suivant  $y$ ) est :

$$\langle f_{nv} \rangle = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \langle N_1 f_x \quad N_1 f_y \quad N_2 f_x \quad N_2 f_y \quad N_3 f_x \quad N_3 f_y \rangle h \cdot 2A \cdot d\eta \cdot d\xi \quad (4.28)$$

Pour  $f_x$  et  $f_y$  constants :

$$\langle f_{nv} \rangle = \frac{Ah}{3} \langle f_x \quad f_y \quad f_x \quad f_y \quad f_x \quad f_y \rangle \quad (4.29)$$

Le vecteur dû aux contraintes initiales  $[\sigma_0]$  et thermiques  $[\sigma_{th}]$  est :

$$\{f_\sigma\} = - \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [B]^T \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\{\sigma_0\} + \{\sigma_{th}\}) dz \right) 2A \cdot d\eta \cdot d\xi \quad (4.30)$$

$$\langle \sigma_0 \rangle = \langle \sigma_{0x} \quad \sigma_{0y} \quad \sigma_{0xy} \rangle \quad (4.31)$$

$$\langle \sigma_{th} \rangle = \langle \sigma_{thx} \quad \sigma_{thy} \quad \sigma_{thxy} \rangle \quad (4.32)$$

Les contraintes thermiques dépendent du matériau et des hypothèses de con-

traintes ou déformations planes. Pour un matériau homogène isotrope :

$$\langle \sigma_{th} \rangle = -\frac{E\alpha T}{1-\nu} \langle 1 \ 1 \ 0 \rangle \quad (4.33)$$

avec :  $a = 1$  en (CP) et  $a = 2$  en (DP).

Les contraintes  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  en un point  $x, y, z$  de l'élément sont :

$$\{\sigma\} = [H] [B] \{u_n\} + \{\sigma_0\} \quad (4.34)$$

En général, les contraintes ainsi calculées sont discontinues d'un élément à l'autre. On affecte les contraintes au centre de gravité ( $\{\sigma\}$  étant constant si  $\{\sigma_0\}$  est constant). Un champ de contraintes continues est obtenu par une technique de lissage (moyennes avec ou sans pondération, moindres carrés, ...).

## 4.4 Résultats numériques : tests de validation

### 4.4.1 Modèles éléments finis

Parmi les objectifs visés dans les présents travaux de thèse concerne la formulation d'éléments finis de coque avec continuité complète de la géométrie avec une intégration explicite dans l'épaisseur. En s'inspirant de la formulation d'éléments dits isoparamétriques dégénérés décrite en [12], nous avons développé des éléments de type triangulaires et quadrilatéraux à cinq degrés de liberté par noeud. Certains éléments prennent en compte les effets de cisaillement transversal (T3 $\gamma$  15, Q4 $\gamma$  20) ; d'autres sont obtenus en considérant les hypothèses de Kirchhoff sous forme discrète (DKT15, DKQ20).

Les principales caractéristiques des éléments utilisés sont :

- la variation linéaire des composantes de déformations en  $\zeta$ , permettant une intégration explicite dans l'épaisseur,

- la prise en compte du gauchissement de la surface moyenne dans le cas des éléments quadrilatéraux DKQ20 et Q4g 20,
- la définition de cinq degrés de liberté par noeud qui sont les trois composantes de translation  $U, V, W$  et deux composantes de rotations  $\theta_1, \theta_2$ .

#### 4.4.2 Panneau cylindrique soumis à son poids propre.

Le problème représenté à la figure 4.5 est un problème qui a été le plus étudié pour vérifier les formulations et comparer les performances d'éléments plats ou courbés, triangulaires, cylindriques ou isoparamétriques. Il s'agit d'un panneau cylindrique, modélisé par Naceur. H. Professeur à l'UTC, dont les bords rectilignes sont libres et dont les côtés courbés reposent sur des diaphragmes rigides dans leur plan. La coque est soumise à une charge verticale de gravité (poids propre) de  $f_z = -0.625 \times 10^4 Pa$ . Ce problème décrit dans plusieurs références [1, 12, 45, ...], sert à tester l'aptitude d'un élément à simuler des états de déformations et de contraintes complexes avec une certaine domination de la partie membrane. Les rapports  $L/h = 200$  et  $R/h = 100$  sont importants et les déformations de cisaillement transverse sont négligeables. Les déformations de membrane sont importantes par rapport à celles de flexion, d'où un grand risque de blocage en membrane et en cisaillement.

Dans la littérature, deux solutions sont proposées. L'une est basée sur la théorie des coques surbaissées [118] ; l'autre est obtenue en considérant une théorie des coques profondes. La différence entre les deux théories étant de l'ordre de 3%:

Valeurs de référence (théorie des coques "profondes") :

$$W_B = -3.61cm ; W_C = 0.541cm$$

Solution analytique (théorie des coques surbaissées) :

$$W_B = -3.703cm ; W_C = 0.525cm$$

Les données et les conditions aux limites dans ce cas sont :

$$L = 6m ; R = 3m ; h = 0.03m ; E = 3 \times 10^{10} Pa ; \phi = 40^\circ$$

$$U = W = \phi_2 \text{ sur } AD ; U = \phi_2 = 0 \text{ sur } CD ; V = \phi_1 = 0 \text{ sur } CB$$

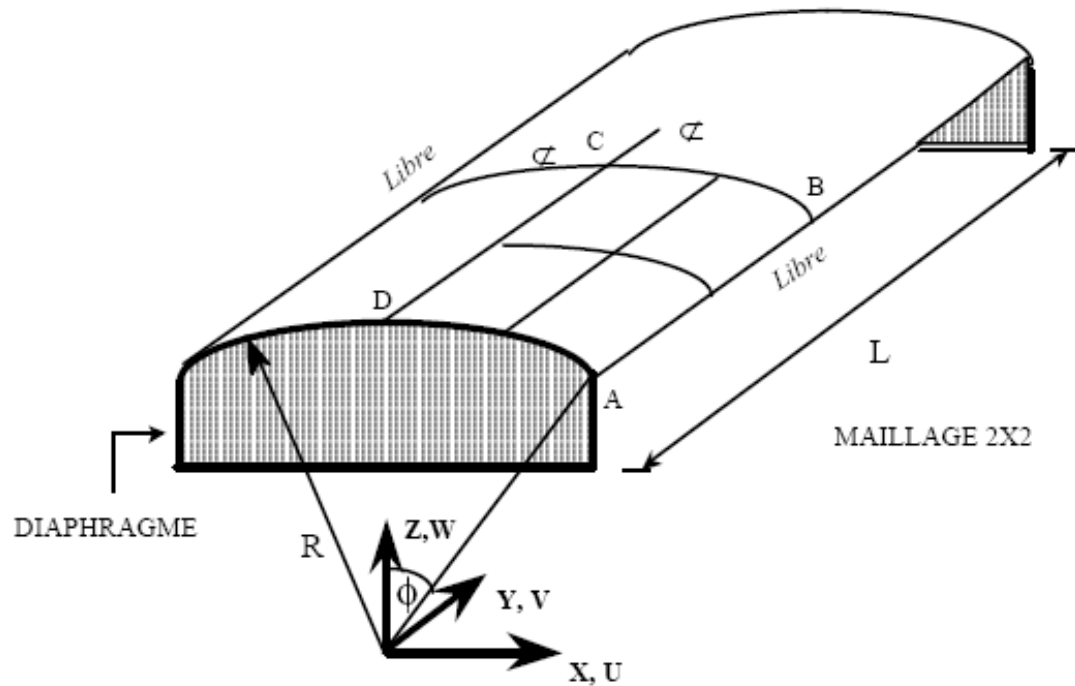


Figure 4.5: Panneau cylindrique soumis à son poids propre.

Nous avons considéré le quart de la structure à cause de la double symétrie en considérant des maillages réguliers avec  $N = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 16$  et  $20$  éléments suivant  $AB$  et  $BC$ . L'orientation des éléments triangulaires est indiquée sur la figure 4.5. Le maillage de type  $A$  (Figure 4.6) est utilisé pour évaluer les performances des éléments triangulaires.

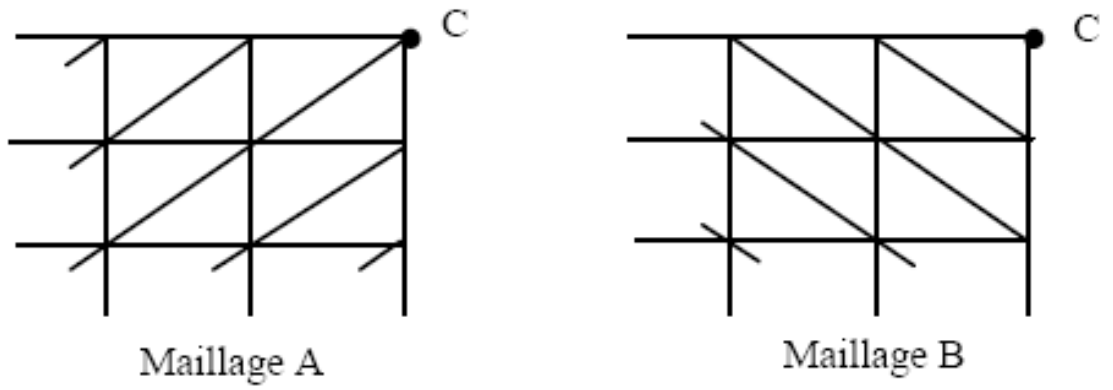
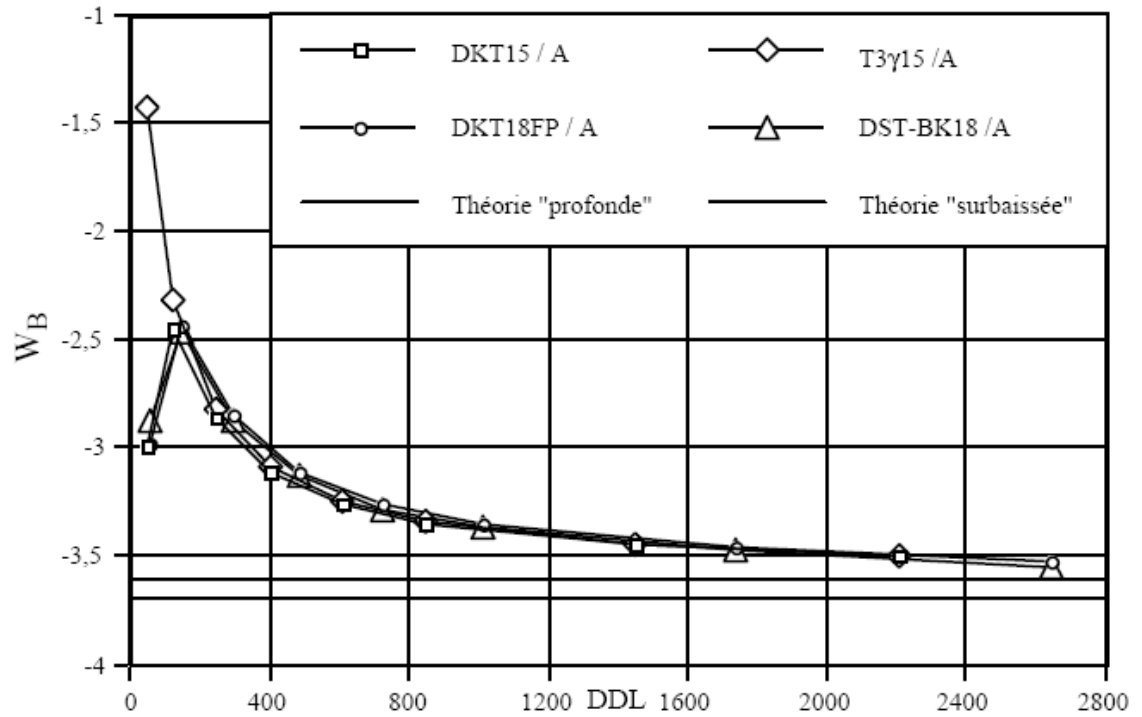


Figure 4.6: Type de maillage utilisé.

Figure 4.7: Convergence du déplacement  $W$  au bord libre  $B$ . Eléments à 3 noeuds.

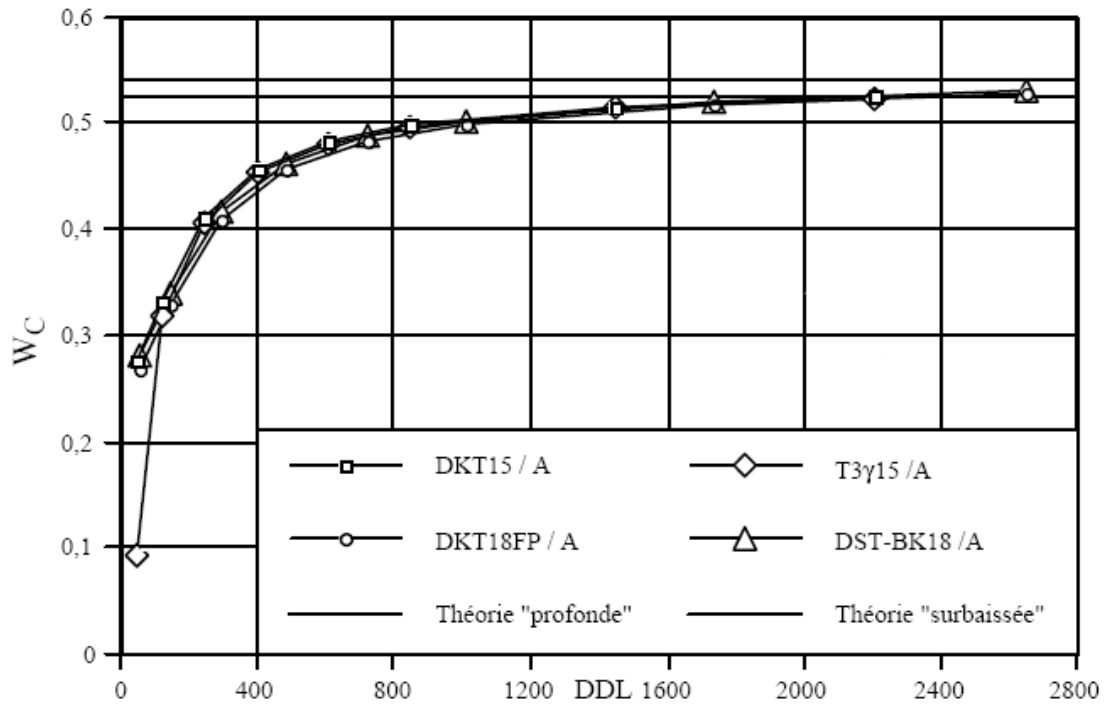


Figure 4.8: Convergence du déplacement  $W$  au centre  $C$ . Éléments à 3 noeuds.

Les courbes de convergence en terme de  $DDL$  total des déplacements verticaux au point  $B$  (milieu du bord libre), et au point  $C$  (centre de la structure) sont présentées sur les figures 4.7, 4.8 pour les éléments à trois noeuds et sur les figures 4.9, 4.10 pour les éléments à quatre noeuds.

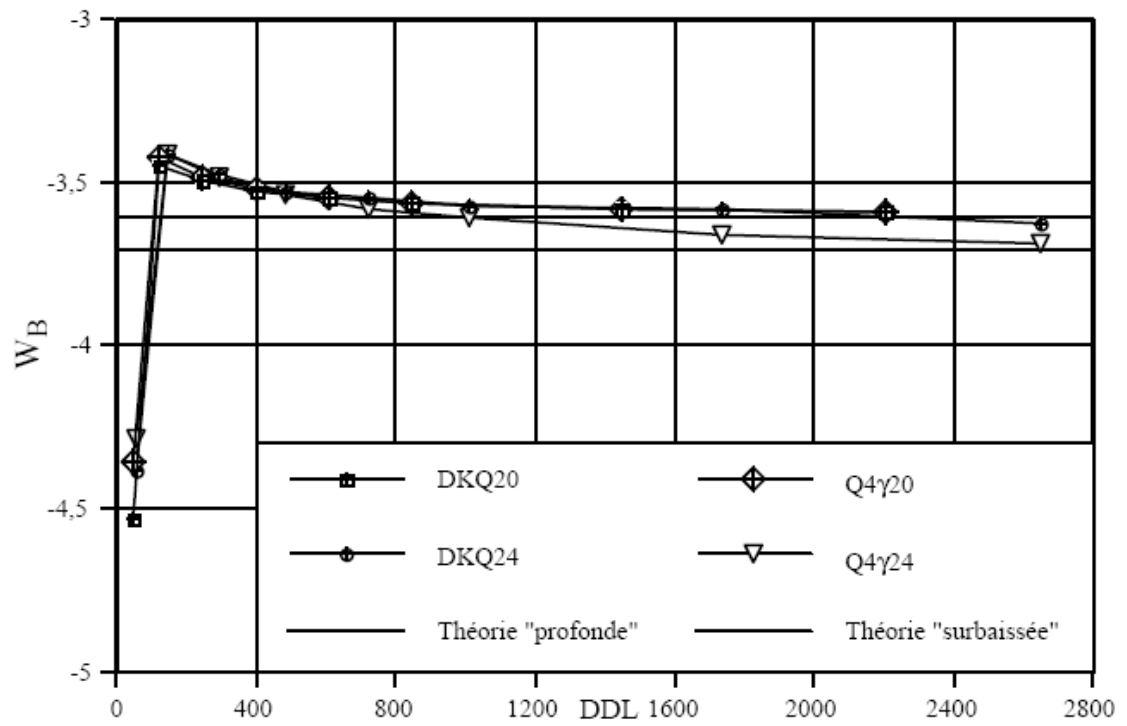


Figure 4.9: Convergence du déplacement  $W$  au bord libre  $B$ . Eléments à 4 noeuds.

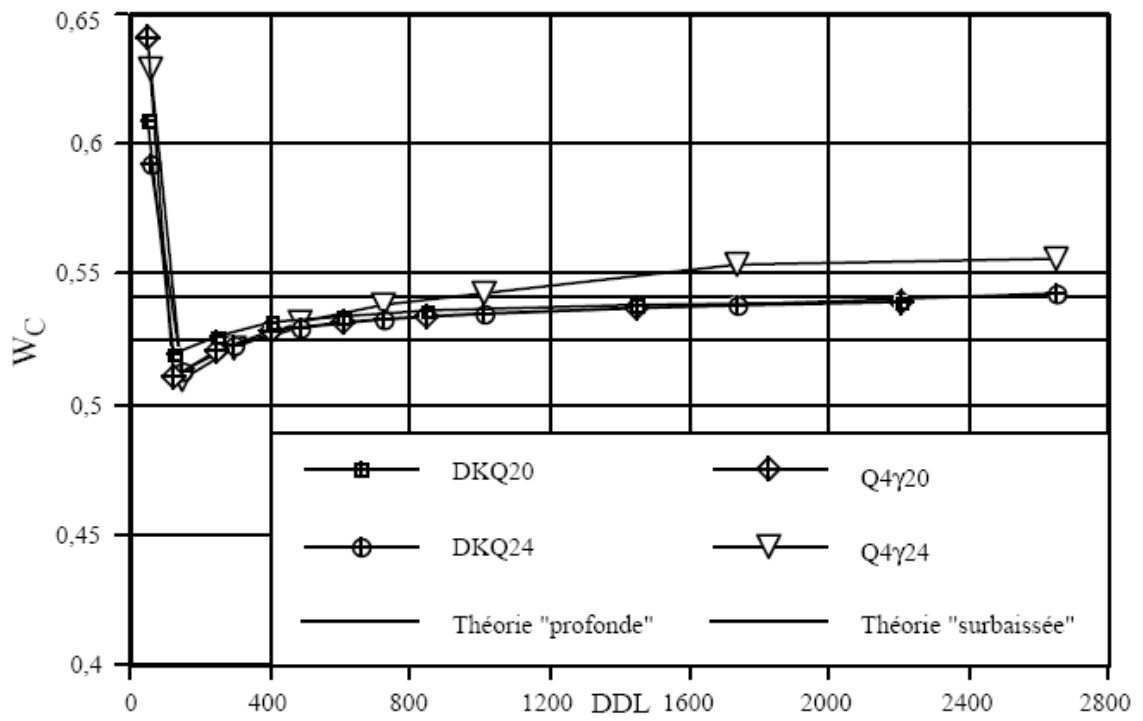


Figure 4.10: Convergence du déplacement  $W$  au centre  $C$ . Eléments à 4 noeuds.



Le déplacement vertical  $W$  suivant  $C-B$  et le déplacement tangentiel  $V$  suivant  $D-A$  sont présentés sur les figures 4.11 et 4.12 en considérant un maillage de  $20 \times 20$  avec les éléments  $DKT15$ ,  $T3\gamma15$ ,  $Q4\gamma20$  et  $DKQ20$ .

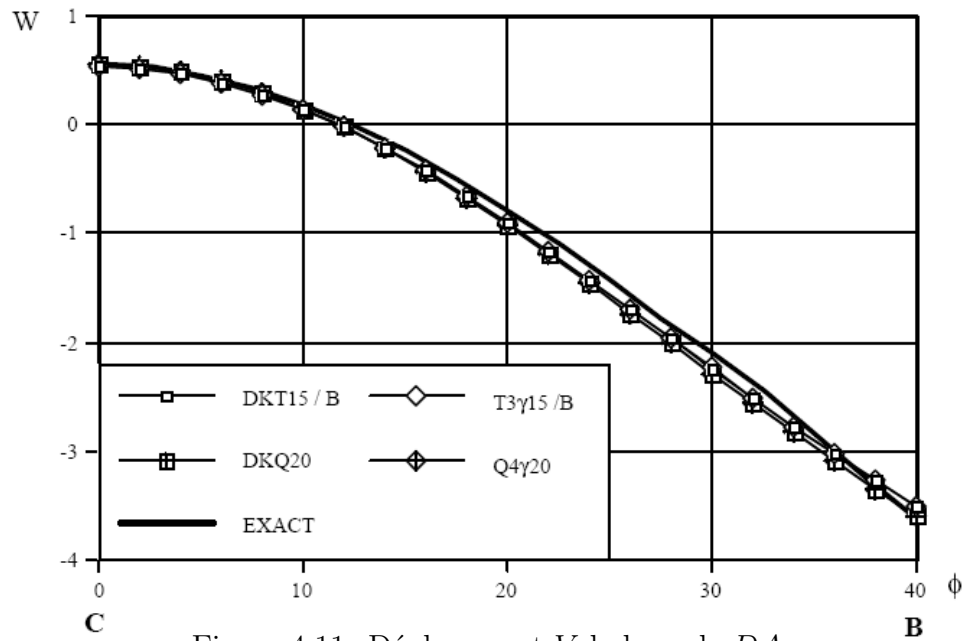


Figure 4.11: Déplacement  $V$  le long de  $DA$ .

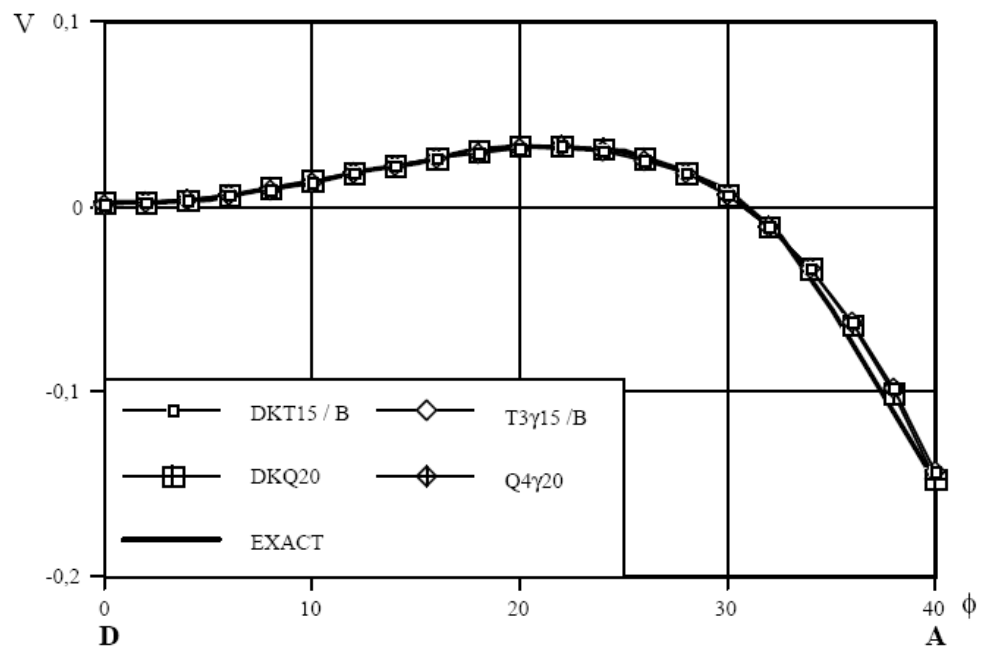


Figure 4.12: Déplacement  $W$  le long de  $CB$ .

#### 4.4.3 Poutre 2D encastré-libre, soumise à un effort concentré :

Le but de ce test est de valider le modèle E.F utilisé (Q4 mixte-hybride). Pour cela, on considère une poutre 2D tels que les déplacements suivant pour  $x = 0$  sont nuls (Figure 4.13).

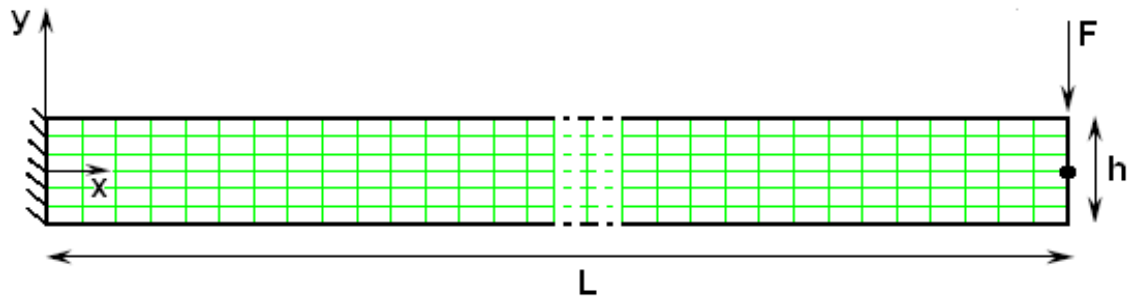


Figure 4.13: Domaine et maillage (707 noeuds, 600 éléments).

Les données dans ce cas sont les suivantes :

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} Pa \quad \nu = 0.3 \quad L = 1m \quad h = 0.03m$$

Les conditions aux limites sont :

$$\text{En } x = 0, u = v = 0 ; \text{ En } x = L, F = -1000N$$

L'épaisseur de la poutre est égale à  $0.03m$  et le moment est  $6.75 \cdot 10^{-8}m^4$ .

Le domaine déformé ( $\times 0.005$ ) et les déplacements suivant l'axe  $y$  sont données sur les figures 4.14 et 4.15.

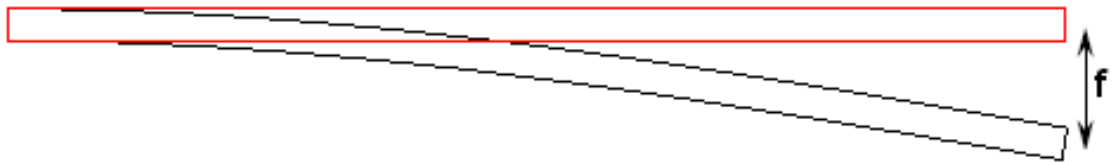


Figure 4.14: Domaine déformé, f est la flèche).

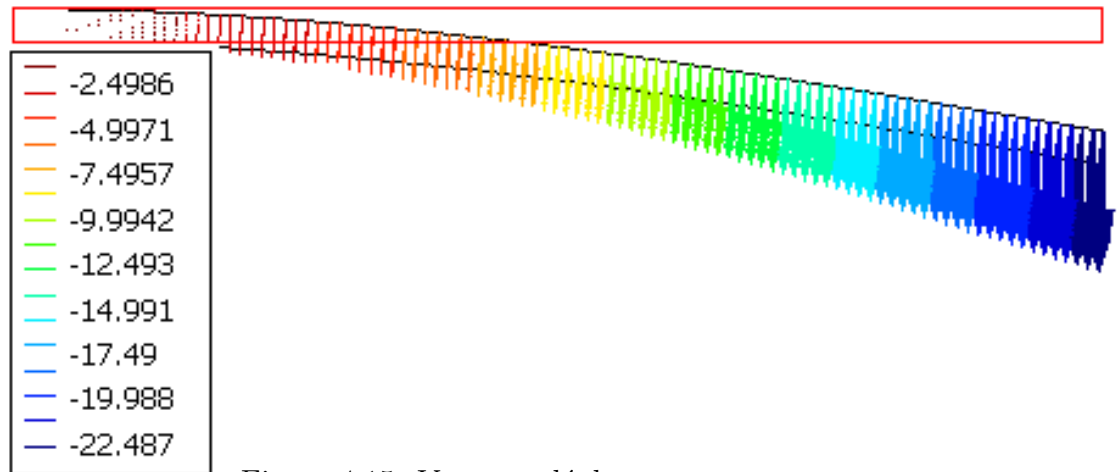


Figure 4.15: Vecteurs déplacements  $v_y$  en  $mm$ .

La flèche obtenue par notre modèle est égale à  $f = -22.487mm$ , cette valeur est comparée à la solution calculé, ci-dessous, par la résistance des matériaux.

On sait que :  $EIy'' = -M$  tel que :  $M(x) = -F(L - x)$ , on obtient :

$$EIy'' = -F(L - x) \quad (4.35)$$

Une première intégration donne :  $EIy' = FLx - F\frac{x^2}{2} + c_1$ , suivie d'une deuxième intégration qui donne l'évolution de la flèche en fonction de  $x$  et des constantes  $c_1$  et  $c_2$ . soit :

$$EIy = FL\frac{x^2}{2} - F\frac{x^3}{6} + c_1x + c_2 \quad (4.36)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

On obtient :  $c_1 = c_2 = 0$  et donc :

$$y = \frac{F}{6EI}x^2(3L - x) \quad (4.38)$$

Pour  $y_{\max}$ , la flèche maximale est :

$$f = \frac{FL^3}{3EI} \quad (4.39)$$

Dans notre cas test, le flèche au point  $x = L$  est :  $f = \frac{FL^3}{3EI} = -23.516mm$ .

Nous avons comparés l'évolution de cette flèche avec la solution analytique  $y = \frac{F \cdot x^2}{6EI}(3L - x)$ , la figure 4.16 représente la solution calculé par notre modèle en noir et la solution analytique en rouge. Une concordance parfaite entre les deux résultats.

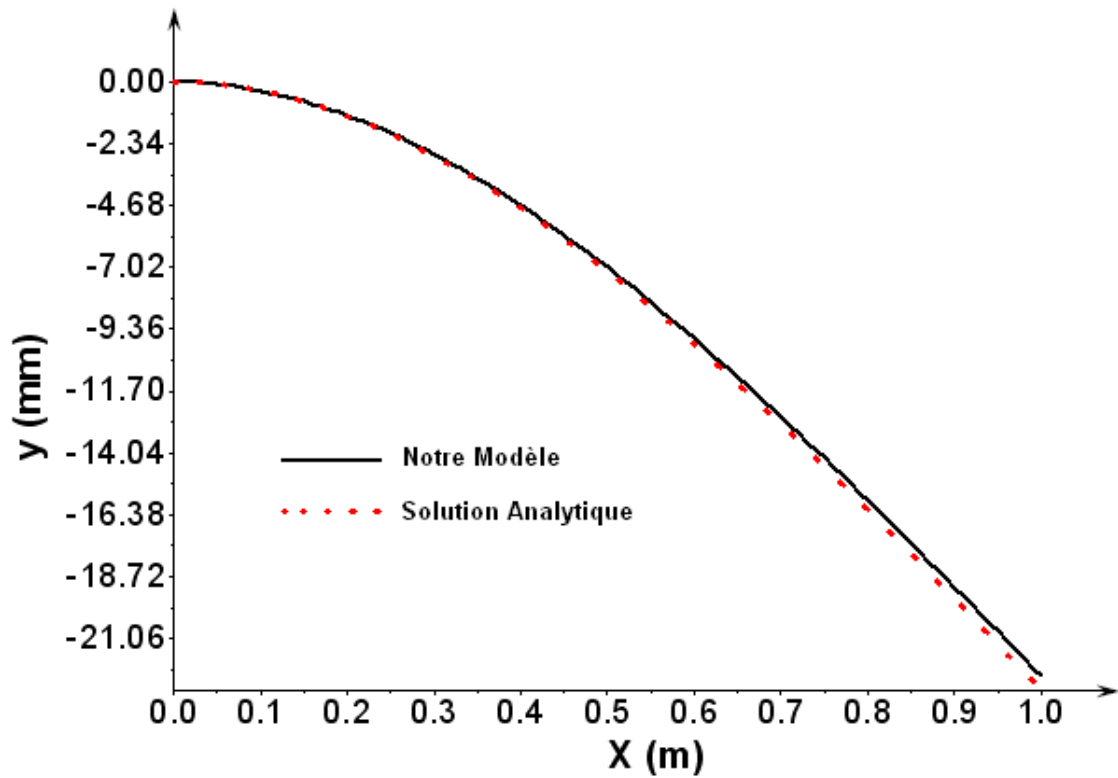


Figure 4.16: L'évolution de la solution  $y = f(x)$ .

#### 4.4.4 Poutre 2D en flexion encastré-encastré.

Soit une poutre droite de longueur  $L = 5m$ , de section constante  $0.3m \times 0.005m$  et de moment d'inertie  $I$ , qui supporte en son milieu une charge  $F = 10000N$  (Figure 4.17).

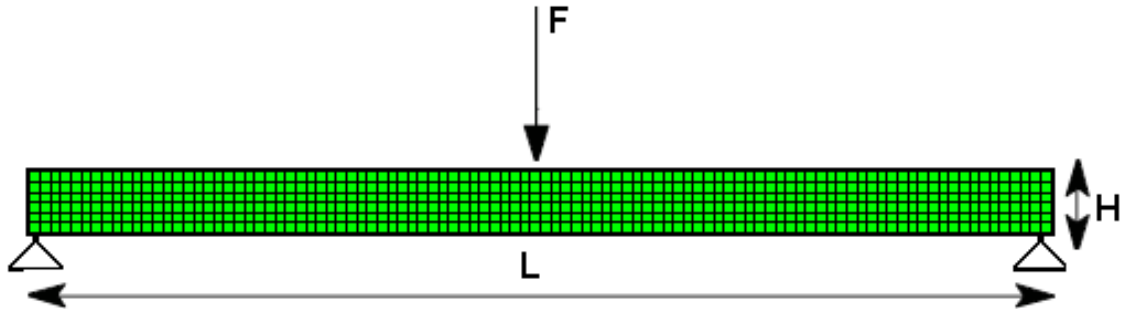


Figure 4.17: Domaine et maillage (707 noeuds et 600 éléments).

- Effort tranchant (T) :

$$\text{si } 0 < x < \frac{L}{2} \Rightarrow T = -\frac{F}{2}$$

$$\text{si } \frac{L}{2} < x < L \Rightarrow T = -\frac{F}{2} + F = \frac{F}{2}$$

- Moment fléchissant (M) :

$$\text{si } 0 < x < \frac{L}{2} \Rightarrow M = -\frac{Fx}{2}$$

$$\text{si } \frac{L}{2} < x < L \Rightarrow M = \frac{Fx}{2} - F(x - \frac{L}{2}) = \frac{F}{2}(L - x)$$

Le moment fléchissant est au maximum au milieu de la poutre ( $x = L/2$ ) est :

$$M_{\max} = \frac{FL}{4}$$

- Calcul des flèches :

On sait que  $EIY'' = -M_f$

$$\text{Si } 0 < x < \frac{L}{2}, M = -\frac{Fx}{2}, \text{ donc } EIY'' = -\frac{Fx}{2}$$

$$\text{Une première intégration donne : } EIY' = -\frac{F}{4}x^2 + c_1$$

Quand la flèche est à son maximum,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $Y' = 0$ , alors :

$$EIY' = -\frac{F}{4}x^2 + \frac{FL^2}{16}$$

Une deuxième intégration donne :  $EIY = -\frac{F}{12}x^3 + \frac{FL^2}{16}x + c_2$

La poutre est toujours en appui, pour  $x = 0$ ,  $Y = 0$  donc  $c_2 = 0$ .

L'équation de la déformée est :

$$Y = \frac{1}{EI} \left( \frac{F}{12}x^3 + \frac{FL^2}{16}x \right) \quad (4.40)$$

Pour  $Y_{\max}$  :

$$Y = f = \frac{1}{EI} \left( -\frac{F}{12} \frac{L^3}{8} + \frac{FL^2}{16} \frac{L}{2} \right) = \frac{FL^3}{48EI} \quad (4.41)$$

Avec :  $E = 2.10^{10} Pa$  le module de Young et  $I = 4.457.10^{-10} m^4$  le moment quadratique.

On obtient :

$$f = \frac{10000 \times 5^3}{48 \times 2.10^{10} \times 4.457.10^{-10} m^4} = 2.2735.10^{-3} m \quad (4.42)$$

La figure 4.18 présente les vecteurs déplacements. La valeur maximale de la flèche obtenue par notre modèle est :

$$f = 2.3585.10^{-3} m \quad (4.43)$$

Sur la figure 4.19, l'évolution de la solution obtenue (en noir) et la solution analytique de l'équation 4.40 (en rouge).

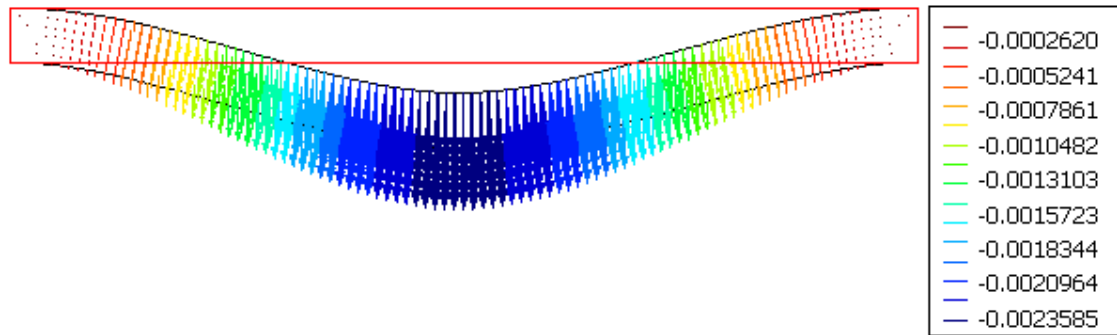


Figure 4.18: Vecteurs déplacements et domaine déformé ( $\times 200$ ).

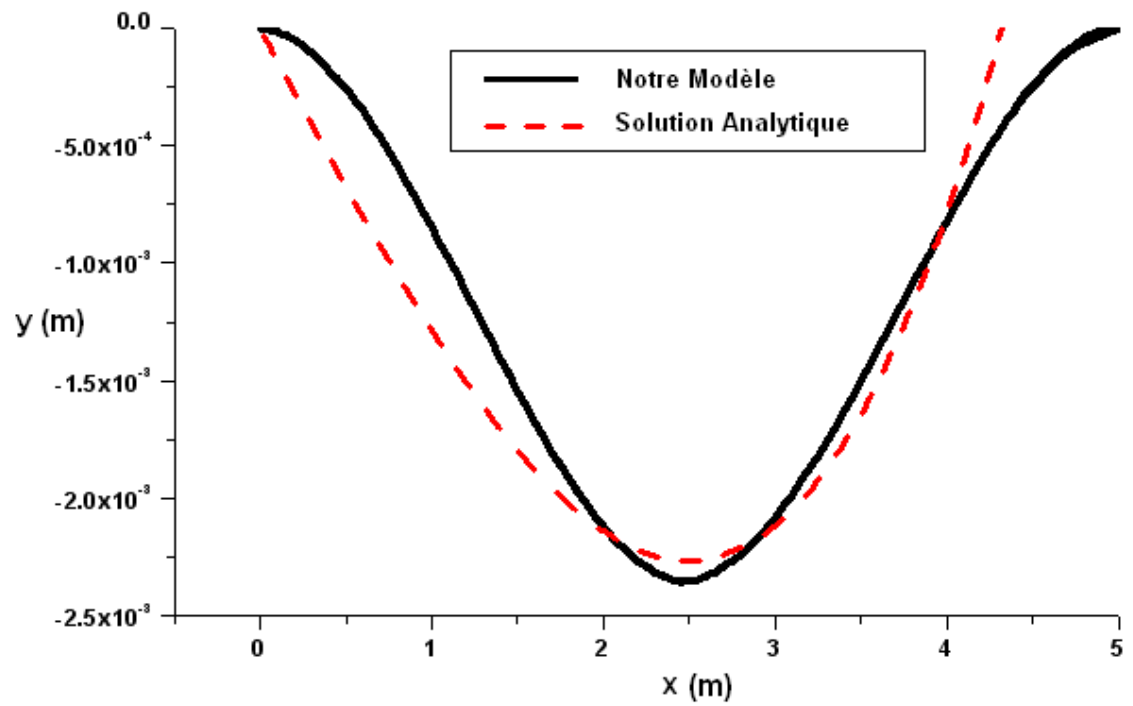


Figure 4.19: L'évolution de la solution calculée par notre modèle et la solution analytique.

#### 4.4.5 Déformation d'une arche elliptique

Ce cas test [41] concerne l'étude de la répartition des déplacements dans une arche elliptique de pont ( $R_1 \times R_2 = 6m \times 3m$ ). Les seuls déplacements possibles sont suivant l'axe  $y$ . Les paramètres choisis dans cet exemple sont :  $E = 2.10^{10}Pa$  et  $\nu = 0.3$ . L'arche a pour hauteur  $H = 3.5m$  et pour longueur  $L = 6.5m$ . Le domaine, les conditions aux limites et le maillage choisi pour ce cas sont présentés sur les figures 4.20 et 4.21.

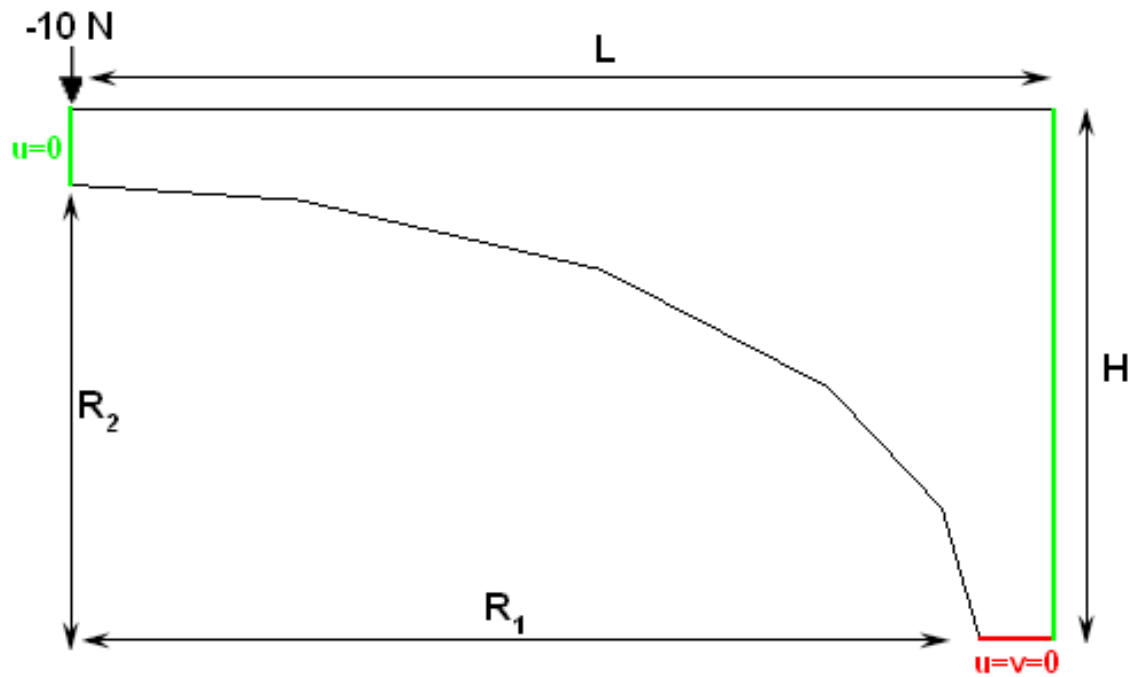


Figure 4.20: Géométrie et conditions aux limites d'après G. Dhatt [41].



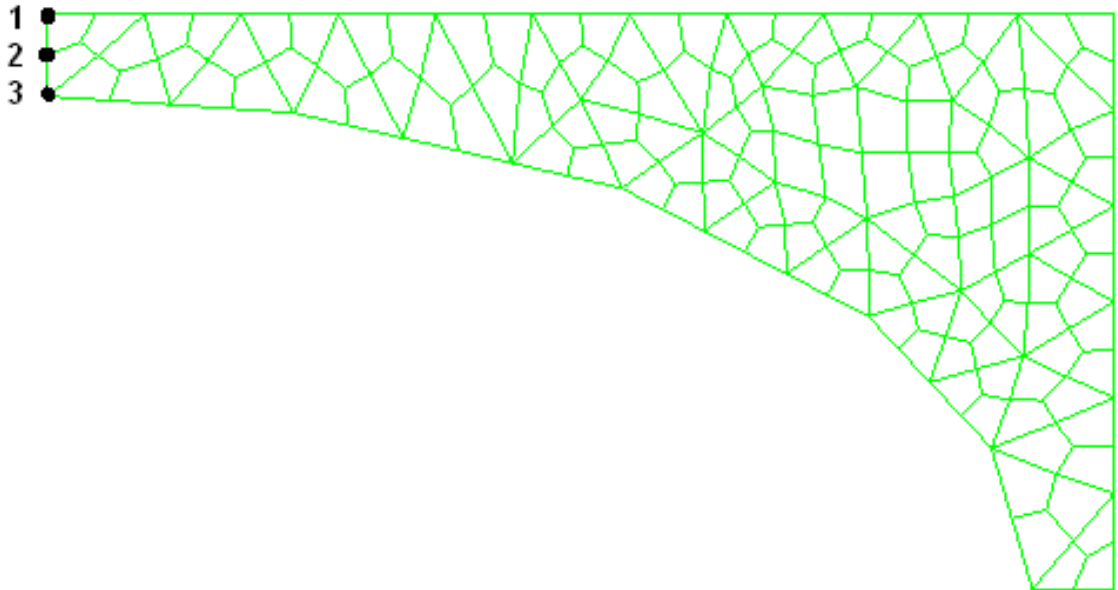


Figure 4.21: Maillage : 181 noeus et 150 éléments.

Les vecteurs déplacements, suivant l'axe  $y$ , obtenus par notre modèle sont présentés sur le figure 4.22.

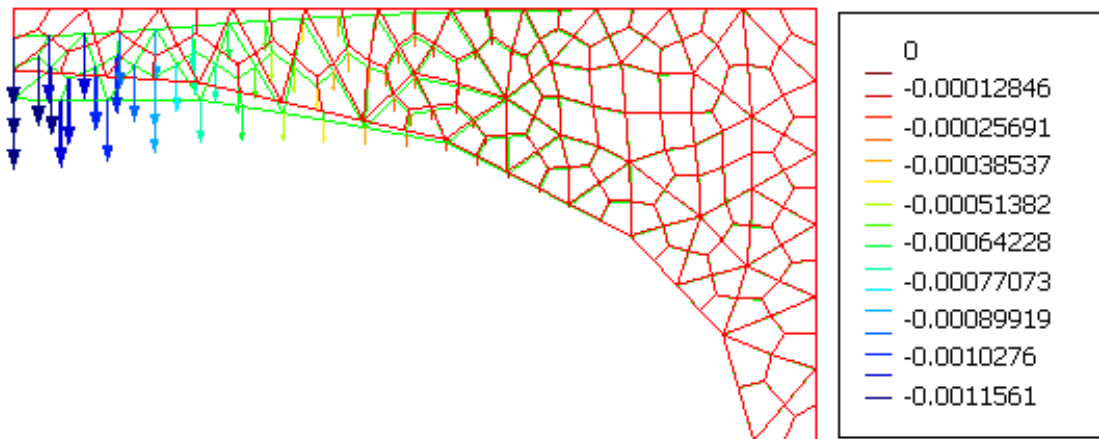


Figure 4.22: Vecteurs déplacements ( $mm$ ) suivant l'axe  $y$  et maillage déformé (facteur= 200).

Nous avons comparés les résultats obtenus pour les trois noeuds de l'extrémité gauche de l'arche avec cels obtenus par G. Dhatt [41], le tableau ci-dessous montre un accord raisonable entre les deux résultats.

Noeuds	Déplacement-Reflex	Déplacements-G.Dhatt[41]
1	-0.0011542	-0.0011428
2	-0.0011503	-0.0011456
3	-0.0011561	-0.0011440

Figure 4.23: Les déplacements suivant l'axe  $y$  pour  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$ .

De ces résultats on constate que la déformation maximale est située à l'extrémité opposée du point d'encastrement de la structure. Nous avons donc comparé la déformation simulée avec les résultats donnés dans [41], au niveau où la déformation est maximale. L'erreur entre les deux résultats est de l'ordre de  $(1 - 0.99) = 1\%$  soit :

$$\begin{aligned}
 |\Delta X|_1 &= |X_f - X_i| = 0.11542.E^{-2} \quad ; \quad \text{nos simulations} \\
 |\Delta X|_2 &= |X_f - X_i| = 0.11428.E^{-2} \quad ; \quad \text{d'après [41]} \\
 \text{rapport} &= \frac{|\Delta X|_1}{|\Delta X|_2} = 0.9901
 \end{aligned}
 \tag{4.44}$$

## CHAPITRE 5

### COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE

#### 5.1 Formulations eulériennes, lagrangiennes et mixtes

##### 5.1.1 Formulation eulérienne

La description eulérienne étudie le passage d'une certaine quantité de matière à travers une région donnée de l'espace. Le système de référence associé est fixe et est appelé Système de Référence Spatial (SRS). Dans cette description, l'observateur se place en un point fixe et étudie comment varient les caractéristiques de la particule passant par ce point à l'instant considéré. Cette formulation est généralement celle qui est adoptée en mécanique des fluides.

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, la formulation eulérienne impose un maillage fixe dans l'espace. Ce maillage définit un volume de contrôle invariable au cours du temps et une particule matérielle donnée peut migrer d'un élément fini vers un autre. Certaines particules matérielles peuvent même quitter le domaine défini initialement et, dans ce cas, toute information ultérieure relative à ces particules est perdue.

L'utilisation de formulations eulériennes fait apparaître des difficultés lors de l'étude de problèmes à frontières variables. Les frontières du corps étudié ne coïncident généralement ni partout ni à chaque instant avec le bord d'un élément. Il en résulte de grandes difficultés pour prendre en compte les conditions aux limites matérielles ainsi qu'une définition peu précise des frontières matérielles lorsque celles-ci évoluent au cours du temps.

En revanche, les formulations eulériennes autorisent d'importantes distorsions de la matière. Ceci explique pourquoi elles sont largement utilisées en mécanique

des fluides ou dans le cas de la mise en forme des matériaux pour l'étude des processus stationnaires.

### 5.1.2 Formulation lagrangienne

La description lagrangienne étudie le mouvement du corps considéré comme une certaine quantité de matière se déplaçant dans l'espace à partir d'une référence connue. Le système de référence, appelé Système de Référence Matériel (SRM), est donc attaché à la matière. Dans ce cas, l'observateur peut être considéré comme attaché à une particule matérielle donnée et il étudie l'évolution temporelle des propriétés de cette particule au cours de son mouvement. Cette formulation est classiquement adoptée en mécanique des solides.

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, la formulation lagrangienne impose à chaque nœud de rester en coïncidence avec la même particule matérielle tout au long du processus de déformation. Cette propriété est intéressante d'un point de vue numérique puisque, lors de l'intégration des lois de comportement, les termes convectifs n'apparaissent pas dans les équations. D'autre part, un élément donné contient toujours le même ensemble de particules matérielles et est donc entraîné (convecté) par la déformation. En particulier, un nœud situé à la frontière du corps reste sur cette frontière au cours de la simulation et, dans ce cas, le suivi d'une frontière mobile ne présente pas de difficultés.

En revanche, en présence de grandes déformations, le maillage peut être fortement distordu et entraîner une imprécision des résultats voire l'impossibilité de conduire la simulation à terme. Des opérations de réactualisation de maillage (remaillage) sont alors indispensables, opérations coûteuses en temps homme et machine.

### 5.1.3 Formulation ALE

#### 5.1.3.1 introduction et revue bibliographique

La formulation ALE est particulièrement bien adaptée à l'étude des problèmes présentant de grandes déformations et plus généralement à l'étude des problèmes couplés.

Elle permet de combiner les avantages de la représentation lagrangienne (bonne définition des frontières variables, facilité d'imposer des conditions aux limites matérielles) et ceux de la formulation eulérienne (possibilité de prise en compte de grandes distorsions). Le principe de cette formulation mixte est le développement de maillages se déplaçant à taux indépendant (bien que non nul) de celui de la matière. En conséquence, la matière se déplace par rapport au maillage, comme dans une formulation eulérienne pure, mais la forme extérieure des éléments est contrôlée par les conditions aux limites du problème, comme dans une formulation lagrangienne.

Hirt et al. [64] utilisent une technique ALE associée à des discrétisations par différences finies pour l'étude de l'effet de chocs dans des tuyaux, d'écoulements autour d'obstacles, d'écoulements instables ou d'écoulements dans l'atmosphère soumise à une explosion. Hughes et al. [70] utilisent une discrétisation éléments finis pour le calcul d'écoulements à surface libre. Les degrés de liberté normaux à la surface libre sont lagrangiens et ceux tangents sont eulériens. Ailleurs, ils sont purement eulériens. Ce choix permet de gérer le problème de frontières mobiles. Brooks et Hughes [27] développent une formulation éléments finis qui permet le calcul d'écoulements multidimensionnels autour d'un cylindre en résolvant les équations de Navier Stokes dans la cas incompressible.

Dans le domaine nucléaire, Donea et al. [43] et Kennedy et Belytschko [75] adaptent la formulation ALE aux problèmes couplés. La structure est traitée

de manière lagrangienne tandis que le fluide est traité de façon eulérienne dans l'écoulement et de façon lagrangienne à l'interface avec la structure.

Nomura [94] et Nomura et Hughes [95] simulent des écoulements dans lesquels un solide, considéré comme indéformable, est en mouvement. D'autres, dans le même esprit, considèrent des structures mobiles avec des modèles fluides plus ou moins complexes (modèle turbulent par exemple). Boschitsch et Quackenbush [23] utilisent la méthode des volumes finis pour le fluide alors que Blom et Leyland [21] utilisent des maillages éléments finis. Undreiner et Frei [125] présentent les résultats d'une étude couplée fluide-structure portant sur la simulation du comportement dynamique de la zone fluide entre un flasque de roue et un corps de pompe.



Figure 5.1: Evolution du maillage suivant la formulation utilisée.

La figure 5.1 illustre les difficultés associées aux formulations eulérienne et lagrangienne ainsi que l'intérêt des formulations de type ALE.

### 5.1.3.2 Mise en œuvre des formulations ALE

Ce paragraphe présente les étapes principales de la mise en œuvre des formulations ALE. Pour plus de détails, il convient de se reporter, par exemple, aux travaux de Ponthot [104] et de Souli [121] et [120].

a) Relation fondamentale

Pour la formulation ALE, trois configurations sont distinguées :

- La configuration initiale  $C_0$  où chaque particule est associée à un nœud.
- La configuration  $C_t$ . C'est la configuration après évolution du domaine (déformations, mouvement) pour laquelle l'équilibre est recherché.
- La configuration de référence  $C_{ref}$ . C'est dans cette configuration que les nœuds sont positionnés et associés à des particules.

Pour la formulation lagrangienne,  $C_{ref}$  et  $C_0$  sont identiques alors que pour la formulation eulérienne, ce sont  $C_{ref}$  et  $C_t$  qui sont identiques. En ce qui concerne la formulation ALE,  $C_{ref}$  est choisie de la façon la plus judicieuse possible. Dans ce cas, lors du processus d'évolution, la particule est transportée par une application alors que le nœud est transporté par une application  $\varphi$ . Dans la configuration  $C_t$ , le nœud n'est alors plus associé à la même particule que dans  $C_0$ .

Configurations	Coordonnées
$C_0$	$\mathbf{X} = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle^t$
$C_t$	$\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle^t$
$C_{ref}$	$\chi = \langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle^t$

Lors de la mise en équation, on est amené à calculer la dérivée par rapport au temps de champs tels que ceux relatifs à la vitesse, à la masse volumique. Le choix du référentiel conditionne alors la forme des expressions des dérivées.

Soit  $f$  une fonction représentant un champ. Lorsque le système de référence est le système de référence spatial (formulation eulérienne), la fonction est notée  $f(\mathbf{x}, t)$ . Si le système de référence est matériel (formulation lagrangienne), la fonction est notée  $\tilde{f}(\mathbf{X}, t)$ . Enfin, pour un système de grille (formulation ALE), la fonction est notée  $\hat{f}(\chi, t)$ . Il vient donc :

$$f(\mathbf{x}, t) = \tilde{f}(\mathbf{X}, t) = \hat{f}(\chi, t) \quad (5.1)$$

En calculant les dérivées de chaque fonction par rapport au temps, on obtient :

- Dans le cas d'une formulation eulérienne :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \mathbf{u} \quad (5.2)$$

- Dans le cas d'une formulation lagrangienne :

$$\frac{d\tilde{f}}{dt} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \quad (5.3)$$

- Dans le cas d'une formulation ALE :

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \chi_i} \frac{\partial \chi_i}{\partial t} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \nabla \hat{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \nabla \hat{f} \cdot \mathbf{c} \quad (5.4)$$

où :

$\nabla f$  : Gradient de la fonction  $f$

$\nabla \hat{f}$  : Gradient de la fonction  $\hat{f}$

$\mathbf{u}$  : Vitesse de la particule par rapport au système de référence spatial

$\mathbf{w}$  : Vitesse du maillage par rapport au système de référence spatial

$\mathbf{c}$  : Vitesse de la particule par rapport au système de référence de grille (vitesse convective)

L'expression (ALE) permet de retrouver le cas eulérien ( $\hat{\mathbf{u}}$ ) et le cas lagrangien ( $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ ).

En combinant les équations Lag, Eul et ALE, on obtient la relation suivante, entre les expressions des dérivées dans les différents systèmes de référence :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \nabla \hat{f} \cdot \mathbf{c} \quad (5.5)$$

b) Principales étapes de la mise en œuvre de la formulation ALE



La mise en équations de type ALE conduit à un système non carré. En effet, les déplacements de la matière ( $n$  inconnues) et les déplacements du maillage ( $n$  inconnues) sont à déterminer avec seulement  $n$  équations. Pour résoudre le système, il est donc nécessaire de réduire le nombre d'inconnues ou d'augmenter le nombre d'équations.

L'augmentation du nombre d'équations conduit à établir  $n$  équations supplémentaires pour déterminer le déplacement des nœuds du maillage. Ces équations supplémentaires peuvent être obtenues en connaissant à priori la vitesse des nœuds du maillage. Par exemple, cette technique est quelquefois employée en mécanique des fluides, dans le cas où la vitesse du maillage est donnée par des équations de type lignes de courant sous forme discrétisées ([70] par exemple). Hu et Liu [65] étendent cette technique à la mécanique des solides.

La réduction du nombre d'inconnues est retenue par de nombreux auteurs. Cette réduction est réalisée en partitionnant l'opérateur eulérien-lagrangien en :

- Une phase lagrangienne,
- Une phase eulérienne.

La phase lagrangienne met en jeu un calcul classique où le système d'équations ne comporte pas de termes convectifs (système carré  $n \times n$ ). Cette phase permet de résoudre les équations régissant le comportement du domaine étudié tout en respectant les conditions aux limites. Le maillage utilisé est matériel. La phase eulérienne est ensuite basée sur une opération de remaillage, le maillage est alors arbitraire, puis de transfert des données du maillage matériel au maillage arbitraire.

Les techniques classiques de remaillage, appliquées régulièrement au cours d'une simulation, sont basées sur des critères géométriques, éviter les distorsions par exemple, ou sur des critères de qualité de la solution.

L'étape de transfert des données est nécessaire après une phase de remaillage. Les données utiles sont transférées du maillage matériel au maillage arbitraire. Pour cela, plusieurs méthodes sont également disponibles dans la littérature. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, la valeur des champs connus aux nœuds du maillage (déplacements, vitesses, forces externes) est aisément calculable en tout point de l'espace en utilisant les fonctions de forme des éléments. Pour les champs connus uniquement aux points de Gauss, le lissage de ces champs est une étape préliminaire au transfert de données. Martinet [83] propose des méthodes globale et locale des moindres carrés. En fonction des valeurs du champ connu aux points de Gauss et des fonctions de forme, il est possible d'obtenir les valeurs aux nœuds du maillage. Une fois les champs à transférer continus, le transfert effectif est réalisé. La méthode globale des moindres carrés est ici aussi souvent utilisée. L'idée est de minimiser l'écart entre les deux champs (celui du maillage matériel  $f^M$  et celui du maillage arbitraire  $f^A$ ) :

$$err = \int_{\Delta_A} (f^M - f^A)^2 d\Delta \quad (5.6)$$

où  $\Delta_A$  représente le nouveau maillage couvrant le domaine  $\Delta$ .

Le fait que la fréquence de remaillage soit élevée et que le remaillage soit à topologie constante permet de minimiser l'étape de transfert. En effet, il est possible de considérer qu'à un point du maillage matériel (nœud ou point de Gauss) ne correspond qu'un seul point du maillage arbitraire. De plus, ces deux points restent à des distances assez faibles et ceci permet d'utiliser un développement au premier ordre. Pour un champ  $f$  donné, on a alors :

$$f^A = f^M + d_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \quad (5.7)$$

où  $d_\alpha$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$  sont respectivement les composantes du vecteur joignant les points des deux maillages et les composantes du gradient du champ  $f$  ;  $f^A$  et  $f^B$  sont les valeurs du champ  $f$  sur le maillage arbitraire et sur le maillage matériel.

## 5.2 Procédure du couplage

L'action de couplage fluide/structure doit nécessairement commencer par une phase de mise en place d'algorithme de couplage entre trois opérateurs principaux : un solveur de l'écoulement du fluide, un solveur pour la structure et une procédure de mise à jour du maillage fluide.

### 5.2.1 Conditions de couplage

Le couplage entre le fluide et la structure intervient au niveau de l'interface entre les deux domaines. Les conditions du couplage sont donc imposées sur la frontière  $\Gamma_c$ . Soit  $\Gamma_c$  la frontière d'interface entre le fluide et la structure tel que  $\Gamma_c = \partial\Omega_f \cap \partial\Omega_s$ . Les conditions de couplage consistent en une opération de transfert de champs entre le fluide et la structure, et concerne le transfert des contraintes de pression au solide, qui en se déformant transfère les champs de déplacements au fluide.

Ces conditions doivent vérifier :

- la continuité des vitesses (condition cinématique) :  $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s$
- la continuité des efforts  $\sigma_f \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_c} = \sigma_s \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_c}$

Les étapes de transfert des données se déroulent de la manière suivante (Figure 5.2) :

1. le code fluide transmet les pressions, nodales de l'interface, au code structure.
2. le code structure calcule la solution et remet à jour les coordonnées des noeuds

3. la structure transmet les nouvelles positions des noeuds de l'interface
4. le code fluide mis à jour le maillage, en tenant compte des nouvelles positions des noeuds, et calcule la solution (pressions), telle que :

$$X = X_0 + \Delta X, \quad Y = Y_0 + \Delta Y \quad (5.8)$$

$X_0$  et  $Y_0$  désignent respectivement les positions initiales suivant x et y ;  $\Delta X$  et  $\Delta Y$  désignent l'incrément des déplacement suivant x et y.

5. retour à l'étape 1.

### 5.2.2 Algorithme de couplage

La procédure de couplage consiste en la mise à jour régulière de transfert de champs entre le code fluide et le code structure. Cette remise à jour des variables entre codes est faite par l'intermédiaire d'un coupleur en fortran mise en place dans le cadre de cette thèse. L'algorithme de ce coupleur est présenté sur les figures (5.2 et 5.3).

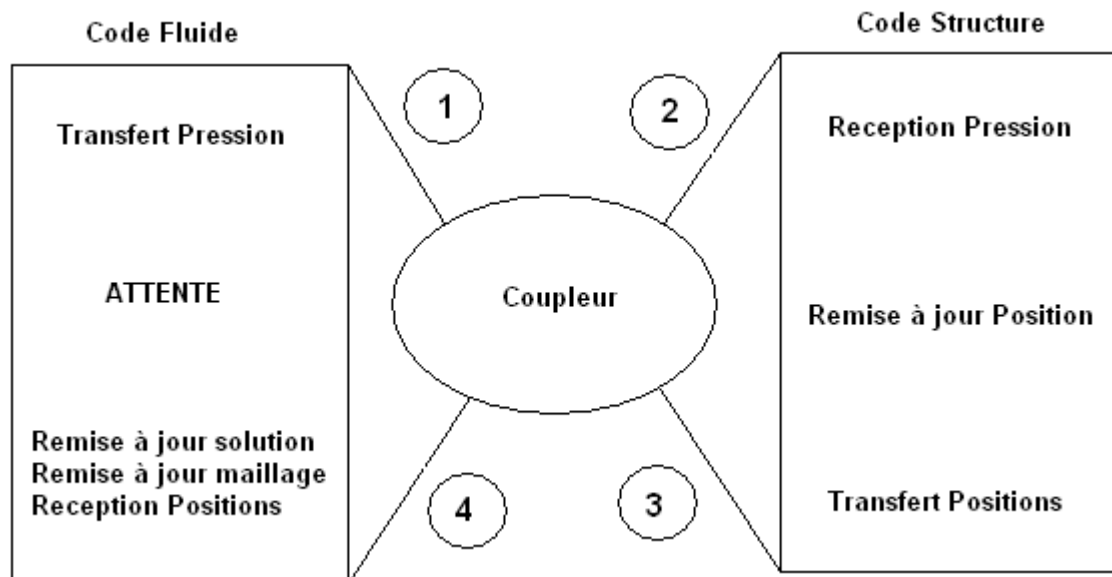


Figure 5.2: Transfert des données entre les deux codes.

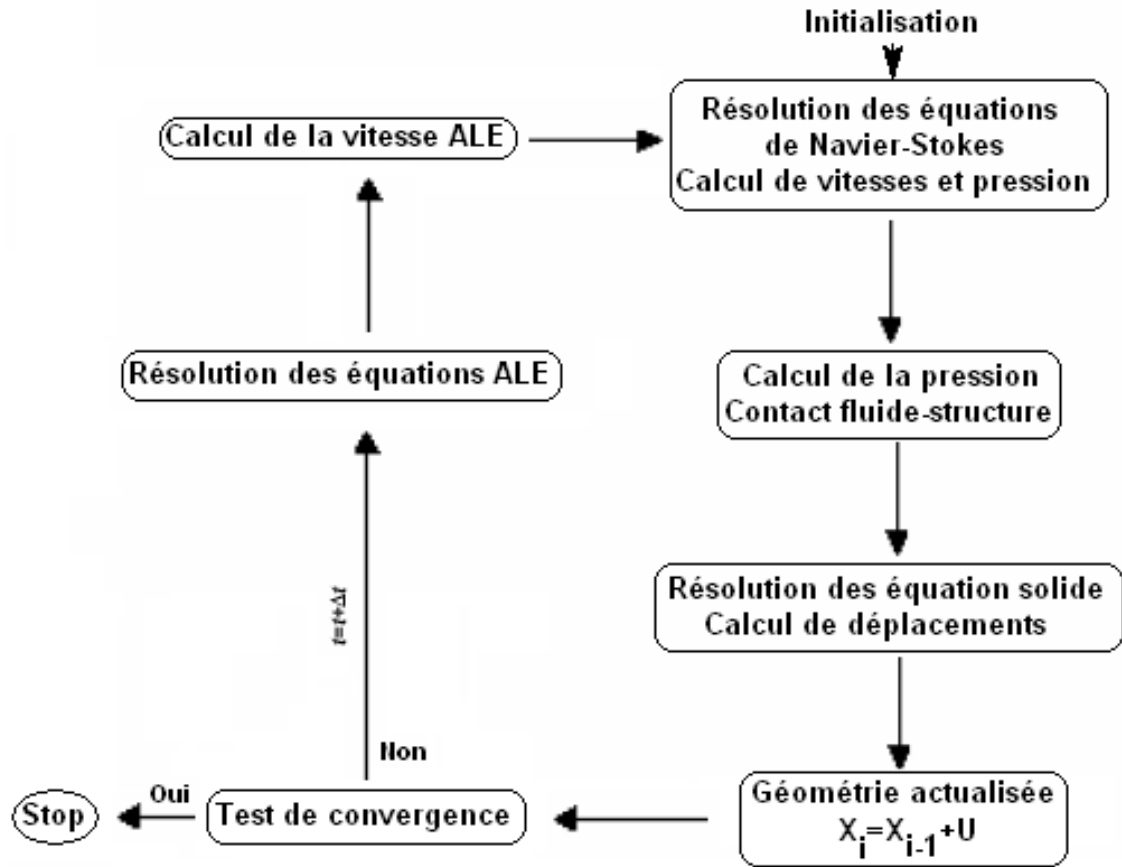


Figure 5.3: Algorithme d'interaction fluide-structure.

### 5.3 Résultats de la procédure de couplage

La procédure de couplage utilisée est basée sur un algorithme explicite. A chaque itération  $t_n$ , après convergence du code fluide, on obtient la pression correspondante  $P_n$ , qui sera transmise au code structure.  $P_n$  sera considérée comme une sollicitation extérieure aux frontières de la structure.

Le code de calcul des structures, développé à l'UTC de Compiègne, est stationnaire et non-linéaire. De ce fait, la convergence ne concerne que la matrice de rigidité  $\mathbf{K}_T$ , en utilisant la méthode de Newton-Raphson, et non la matrice masse. Après convergence du code structure, on extrait les nouvelles positions  $x_n$  et  $y_n$ , puis on actualise la géométrie pour un calcul du code fluide.

### 5.3.1 Cas test d'un canal plan en présence d'un obstacle vertical

Ce cas test concerne l'écoulement d'un fluide stationnaire ( $\eta = 1$ ), visqueux et incompressible dans un canal de dimensions ( $L \times H = 30m \times 3m$ ), à l'intérieur duquel est placée verticalement une plaque flexible de dimension ( $l \times h = 1m \times 0.1m$ ), (Figure 5.4). La plaque, considérée, comme obstacle déformable, est située à  $13m$  de l'entrée du canal. Les conditions aux limites sont : ( $u = 10m/s, v = 0$ ) à l'entrée; ( $p = 1bar$ ) à la sortie et ( $u = 0, v = 0$ ) sur les autres parois.

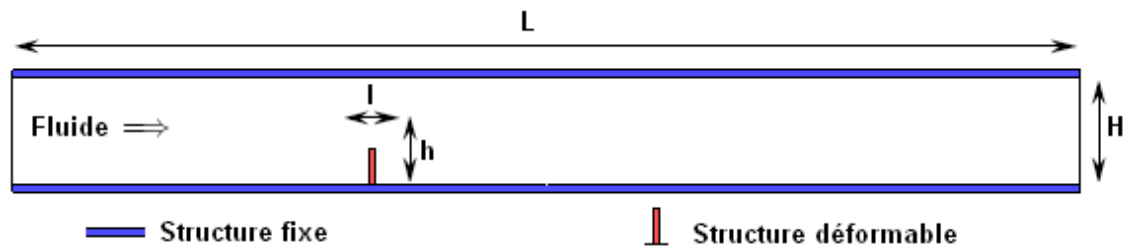


Figure 5.4: Domaine et conditions aux limites.

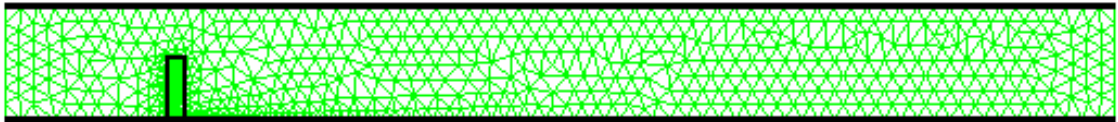


Figure 5.5: Maillage : 793 noeuds et 1400 éléments.

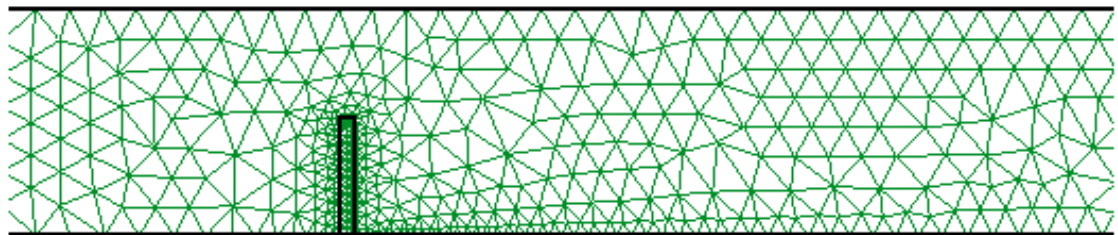


Figure 5.6: Zoom sur l'interface fluide-structure.

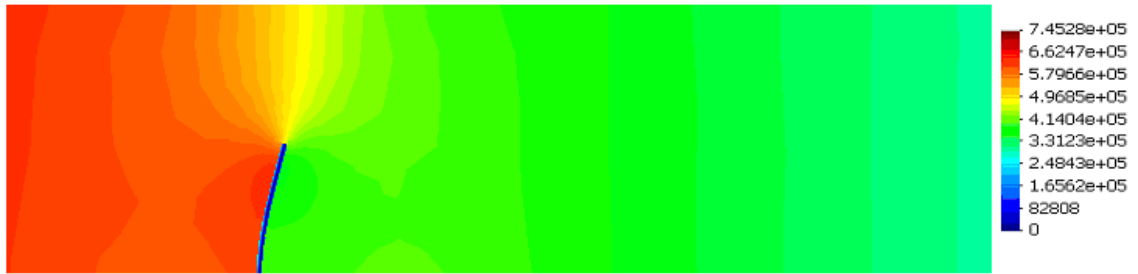


Figure 5.7: Champ de pression le long de la conduite.

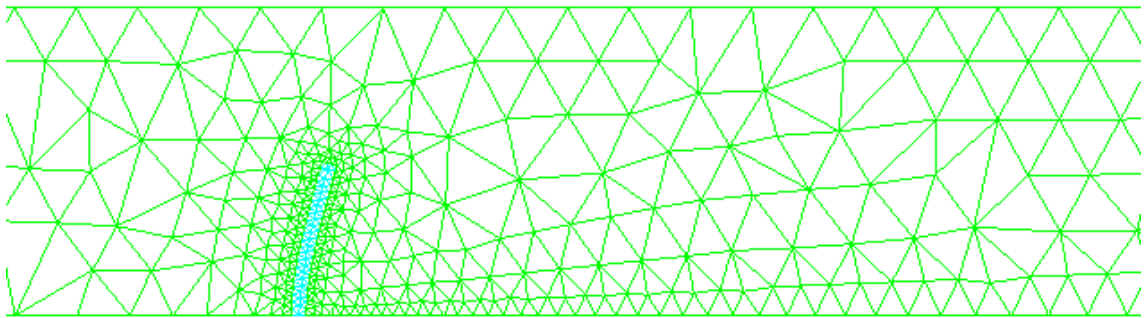


Figure 5.8: Déformation de la structure,  $E = 2.10^4 MPa$ .

Le champ de pression est représentée dans (Figure 5.7), la déformation de la structure dans (Figure 5.8), les lignes de courant avec déformation de la structure dans (Figure 5.9) et la déformation de la structure pour un module de young  $E = 10^4 MPa$ .

Les simulations présentées ici illustrent la validité du couplage entre les différents opérateurs mis en jeu dans cette interaction fluide-structure.

C'est un couplage dit faible avec des effets rétroactifs du fluide sur la structure, qui, en se déformant agit sur la nature de l'écoulement du fluide. Les figure (5.10) montrent que la déformation de la structure dépend de sa rigidité (Module de Young  $E$ ) et de la nature de l'écoulement qui exerce sur elle des forces de pression.

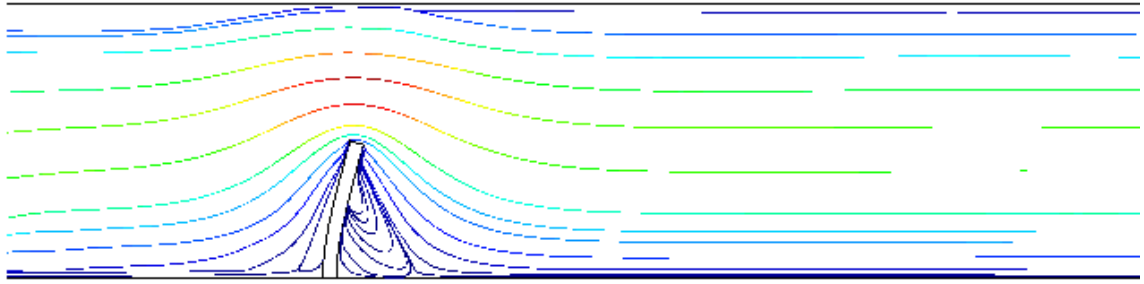


Figure 5.9: Les lignes de courant,  $R_e = 1$ .

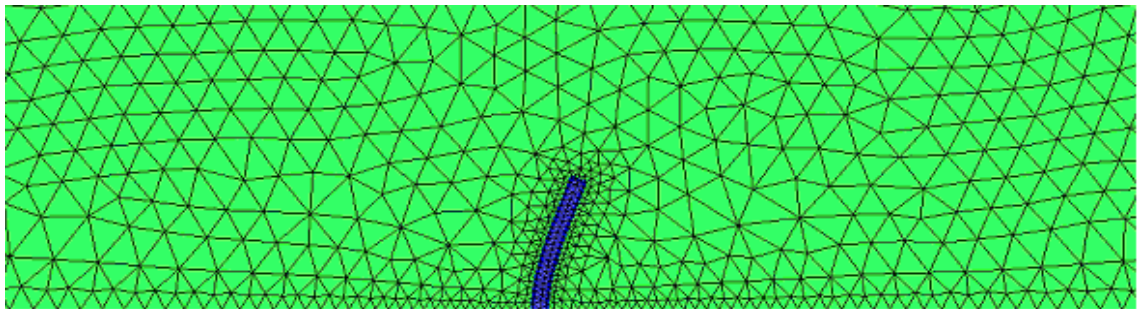


Figure 5.10: Module de Young =  $10^4 MPa$ .

Toutefois, ces forces de pression doivent être calculées judicieusement à partir du modèle fluide. Ainsi, le profil de l'écoulement a été vérifié en plusieurs points du canal. On constate qu'à la sortie du canal, ce profil est parfaitement parabolique, tandis qu'au niveau de l'obstacle une dissymétrie du profil est constatée.



### 5.3.2 Écoulement dans un canal plan en présence de deux obstacles

Dans ce cas test, on considère l'écoulement fluide (l'eau de mer,  $\eta = 1,9.10^{-3}$ ) dans un canal où est immergée deux structures rigides, considérées comme des obstacles à l'écoulement Figure 5.11. Ces deux obstacles sont fixés sur les parois intérieures de ce canal .

Le canal est de longueur  $L = 30m$  et de largeur  $H = 3m$ , et les deux obstacles sont identiques, avec une hauteur  $l = 1m$  et une épaisseur  $h = 0.1m$  .

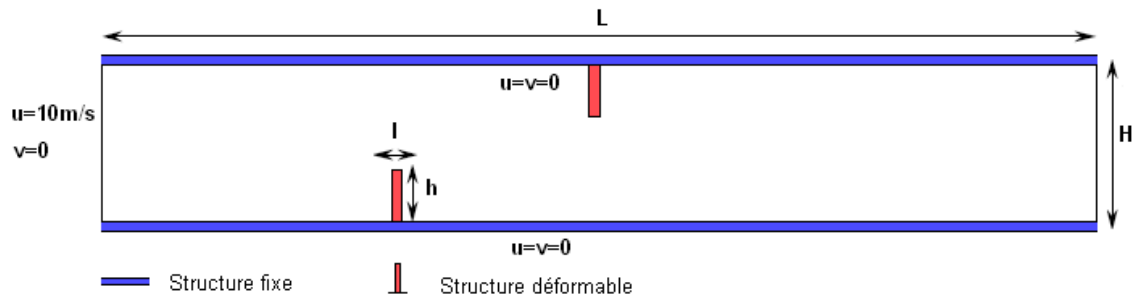


Figure 5.11: Domaine de calcul et conditions aux limites.

La figure 5.12 représente l'évolution de la pression le long du canal. Nous avons constatés une depression importante au niveau du deuxième obstacle, ce qui explique la différence de déplacements des deux obstacle.

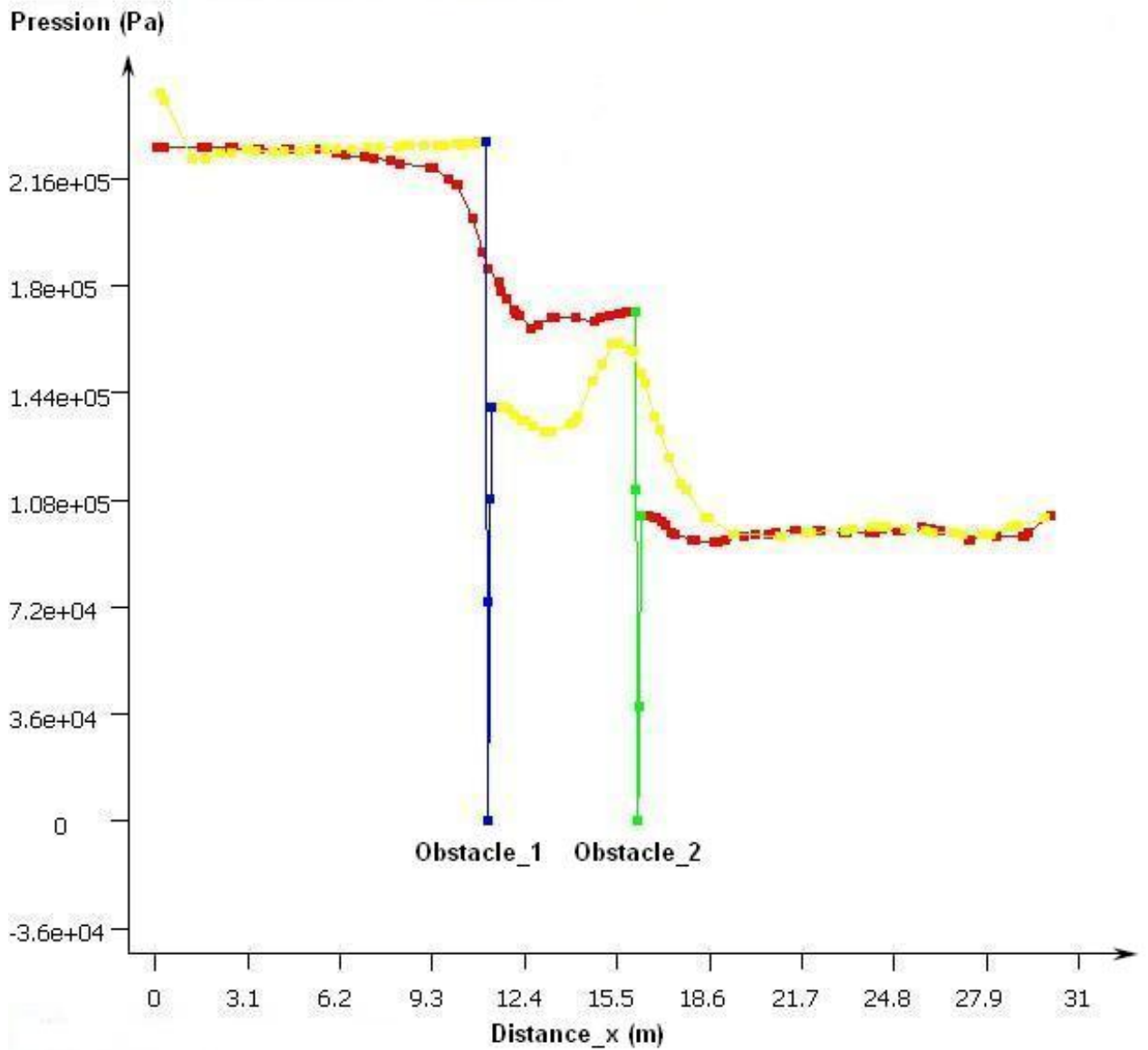


Figure 5.12: Pression le long du canal : rouge à travers le premier obstacle et jaune à travers le deuxième obstacle.

Les figures (5.13, 5.14, 5.15 et 5.16) montrent les déformations des obstacles et la pression dans le canal en fonctions du module de Young.

En effet des figures (5.13 et 5.15) on constate deux régimes de baisse de pression dans le canal. Une première depression après le premier obstacle et une deuxième

depression plus importante après le second obstacle. Ceci quelque soit la rigidité de la structure (quelques soit la valeur du module de Young).

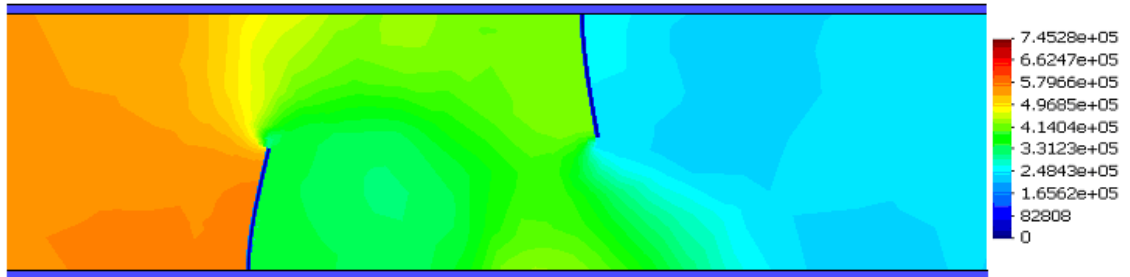


Figure 5.13: Champs des pressions, Modude de Young  $E = 4.10^4 MPa$ .

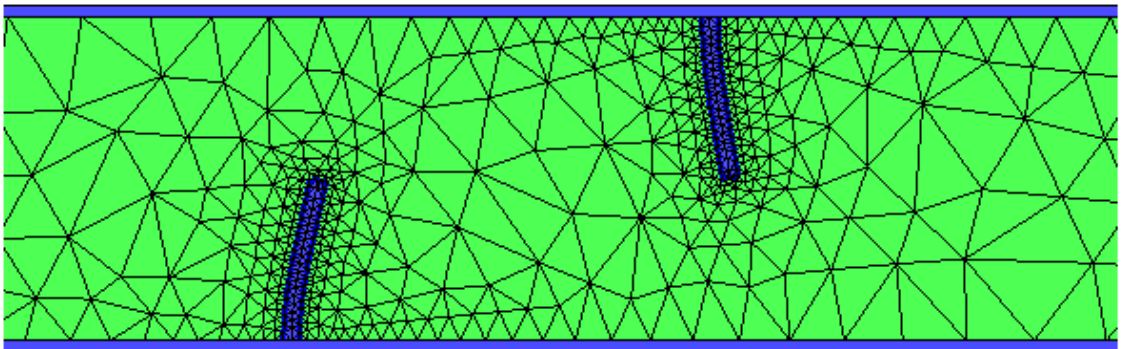


Figure 5.14: Déformation des structures avec un module de Young  $E = 4.10^4 MPa$ .

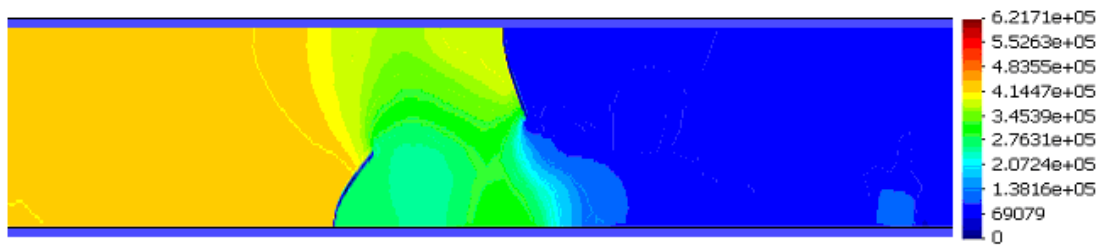


Figure 5.15: Champs des pressions, Modude de Young  $E = 10^4 MPa$ .

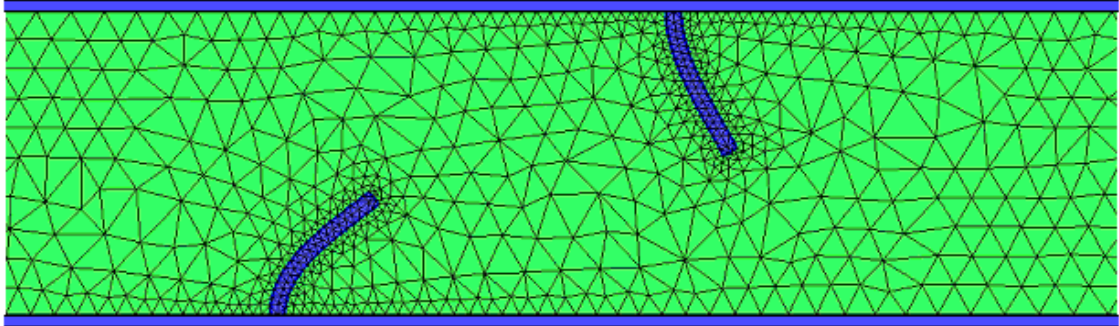


Figure 5.16: Déformation des structures avec un module de Young  $E = 10^4 MPa$ .

Sur la figure (5.17) sont représentées les lignes de courant de l'écoulement, en fonction de la déformation des deux structures, qui correspond au module de Young  $E = 4.10^4 MPa$ . De cette figure on constate la présence de structures tourbillonnaires en aval de chaque structure (Figure 5.17).

La taille de ces tourbillons est proportionnelle à la valeur de la viscosité du fluide et de la longueur de l'obstacle ainsi que de sa déformation.

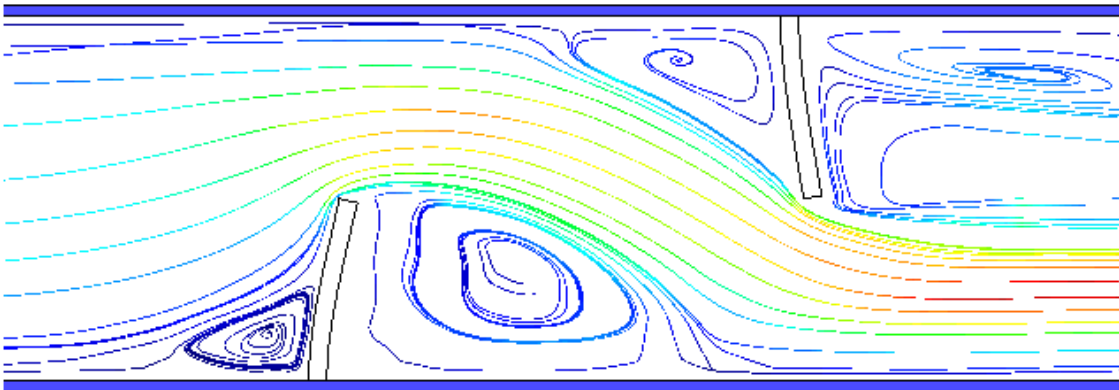


Figure 5.17: Lignes de courant, Module de Young  $E = 4.10^4 MPa$  et  $Re \gg 1$ .

### 5.3.3 Conduite en forme de T, avec une paroi flexible

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible dans une conduite en forme de T, composée d'une part d'un tronçon de canal vertical à parois rigides et d'autre part d'un canal horizontal dont une partie de la paroi supérieure est flexible. La géométrie et les conditions aux limites sont données dans la figure 5.18. La partie flexible est fixée à ces extrémités à la paroi rigide. Les déformations de la partie flexible en fonction du module de Young sont données sur les figures (5.23, 5.24 et 5.25).

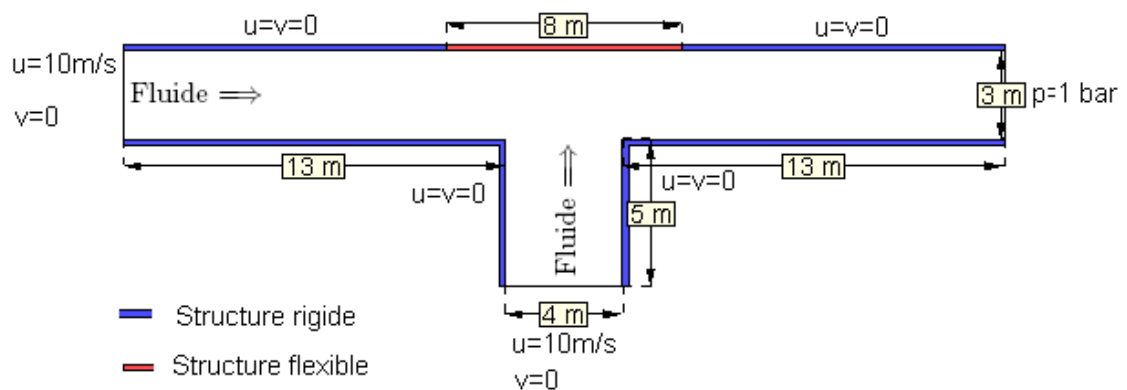


Figure 5.18: Domaine et conditions aux limites.

Les champs de pression et des vitesses dans la conduite, sont présentés sur les figures (5.19, 5.20 et 5.21), pour la valeur du module de Young  $E = 10^4\text{ MPa}$ .

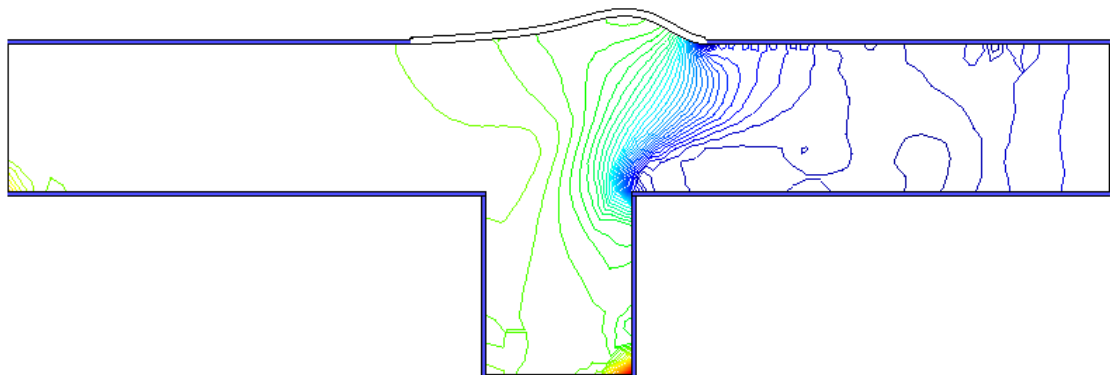


Figure 5.19: Champ de pression (Pa), ( $E = 10^4\text{ MPa}$ ).

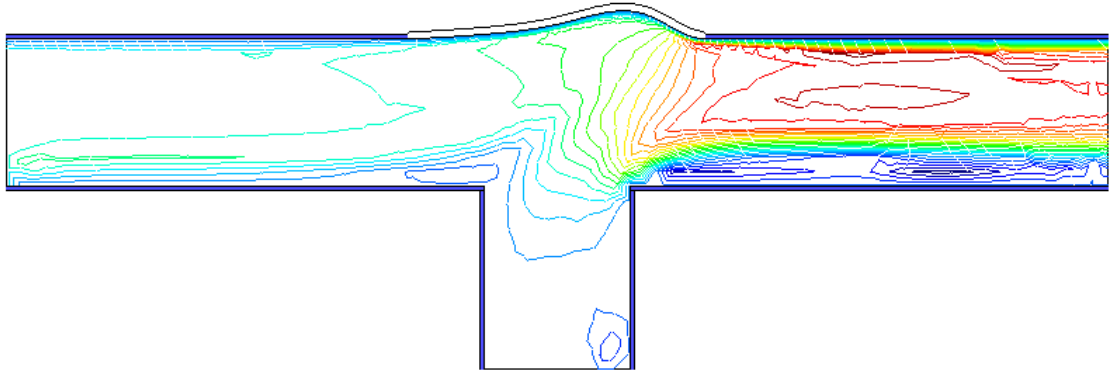


Figure 5.20: Vitesse  $u(m/s)$  de l'écoulement ( $E = 10^4 MPa$ ).

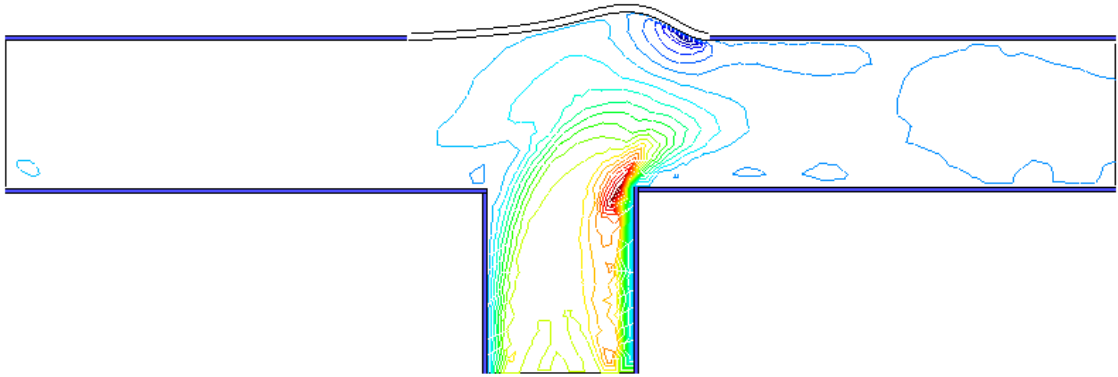


Figure 5.21: Vitesse  $v(m/s)$  de l'écoulement ( $E = 10^4 MPa$ ).

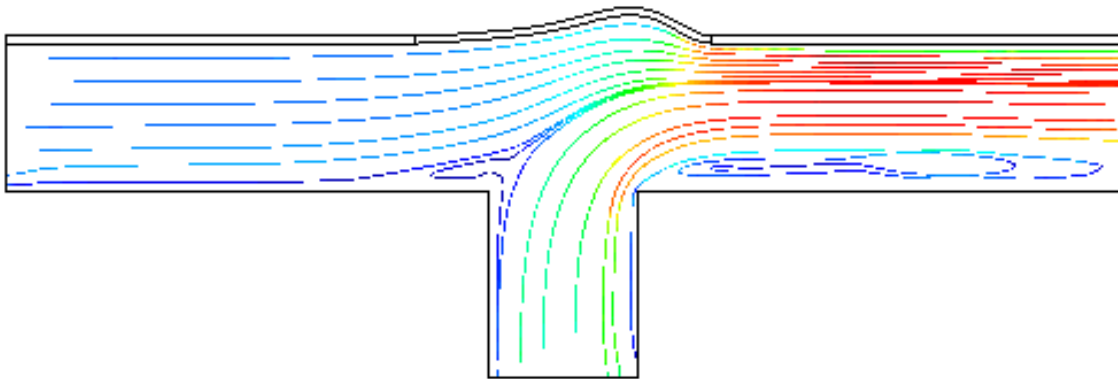


Figure 5.22: Lignes de courants ( $E = 10^4 MPa$ ).

De ces dernières figures on constate que l'écoulement vertical, issu de la branche verticale, perturbe l'écoulement (vitesse  $u$ ) dans la branche horizontale. Cet écoulement

vertical a pour effet d'amplifier la vitesse  $v$  au niveau de l'intersection des deux canaux, ce qui a pour conséquences de provoquer la déformation de la paroi supérieure, notamment au niveau de la partie flexible (5.23, 5.24 et 5.25).

En aval de l'intersection entre les deux branches, l'écoulement devient uniforme (Figure 5.22).

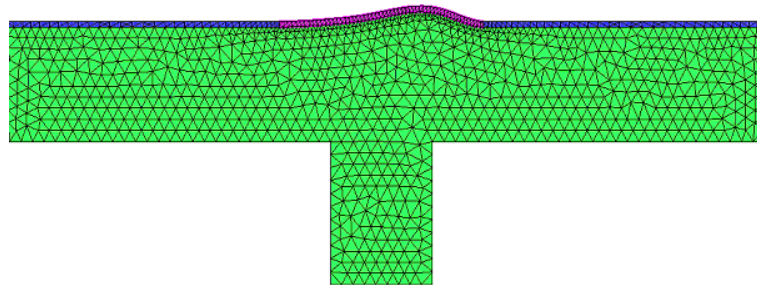


Figure 5.23: Déformation de la paroi ( $E = 10^4 MPa$ ).

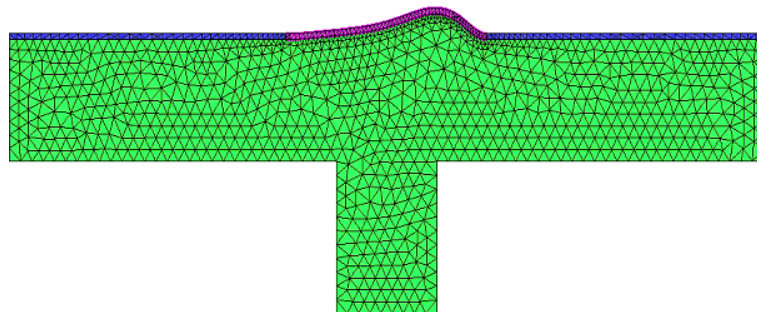


Figure 5.24: Déformation de la paroi ( $E = 75.10^3 MPa$ ).

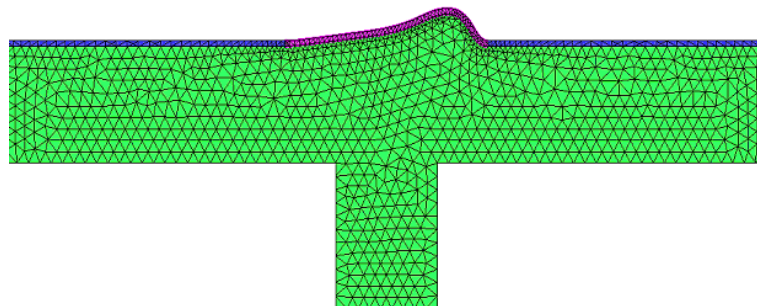


Figure 5.25: Déformation du paroi ( $E = 50.10^3 MPa$ ).

Les vecteurs déplacements correspondants à ces trois cas de figures sont représentés sur les figures 5.26, 5.26 et 5.26.

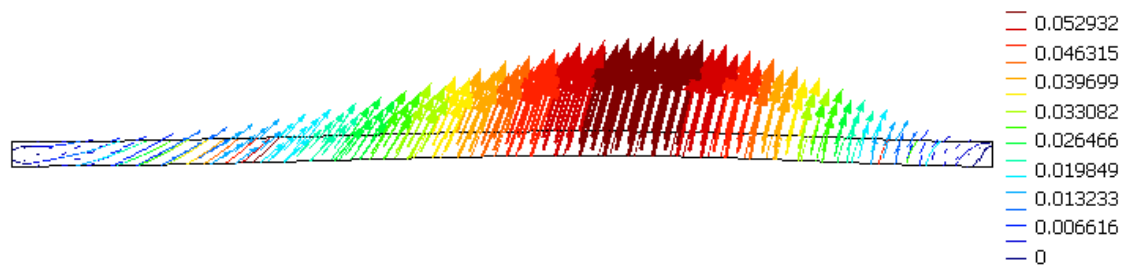


Figure 5.26: Vecteurs déplacements ( $E = 10^4 \text{ MPa}$ ).

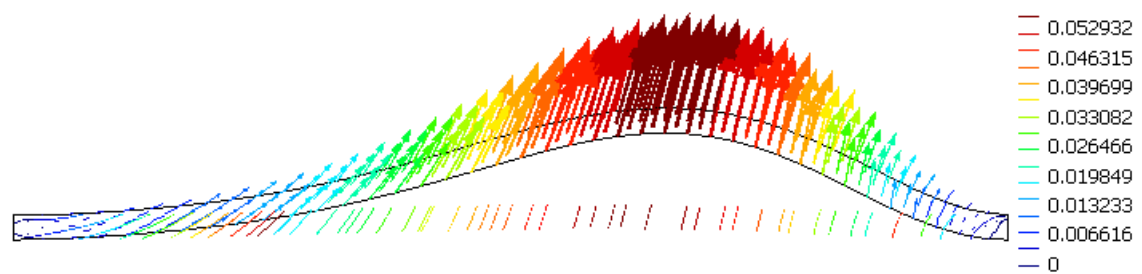


Figure 5.27: Vecteurs déplacements ( $E = 75.10^3 \text{ MPa}$ ).

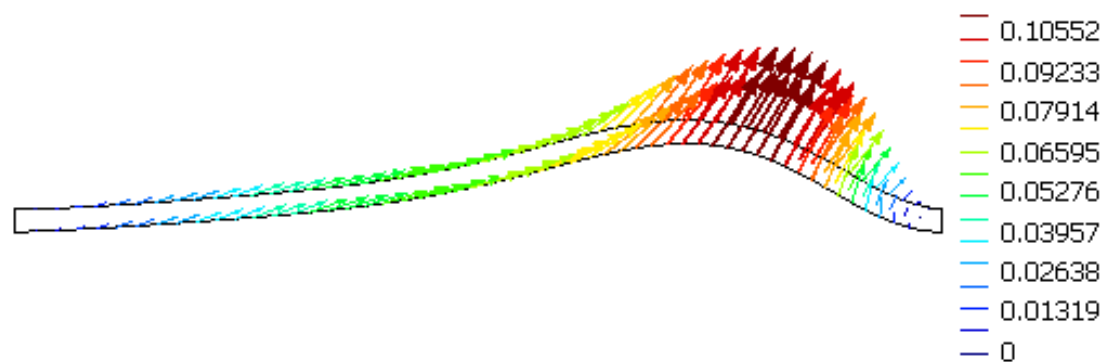


Figure 5.28: Vecteurs déplacements ( $E = 50.10^3 \text{ MPa}$ ).

Pour se rendre compte de l'influence de ce courant vertical dans cette conduite, on a effectué des coupes longitudinale suivant le canal horizontal (Figure 5.29), afin de mettre en évidence l'ordre de grandeur des vitesses au niveau de chaque coupe.



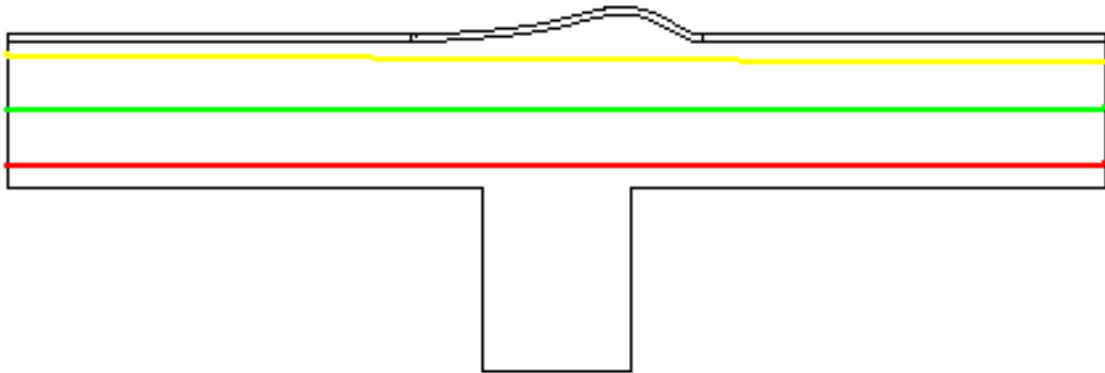


Figure 5.29: Positions des coupes longitudinales.

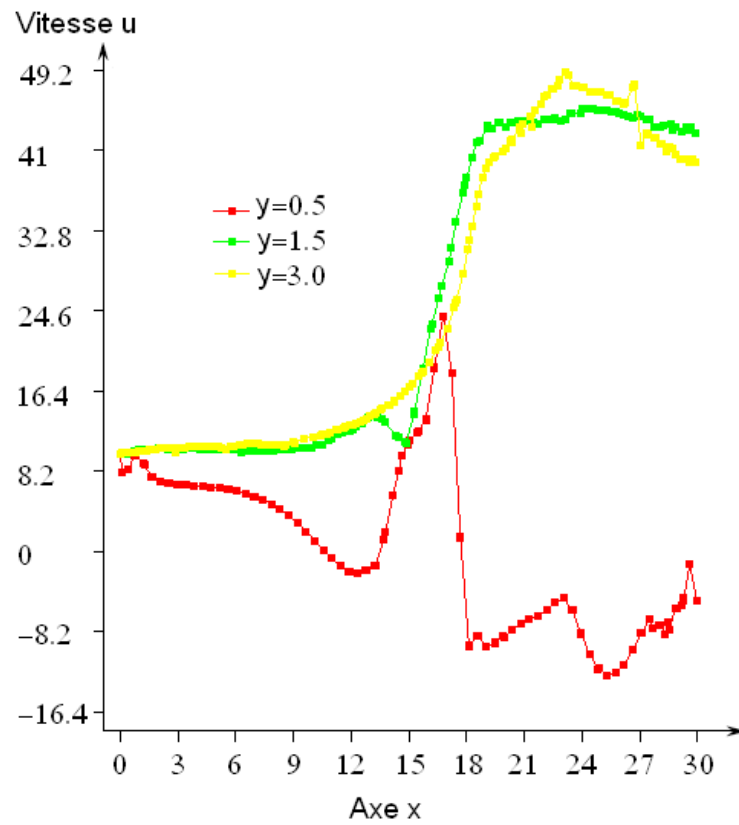


Figure 5.30: Evolution de la vitesse  $u(x)$ , en fonction de la position de la coupe.

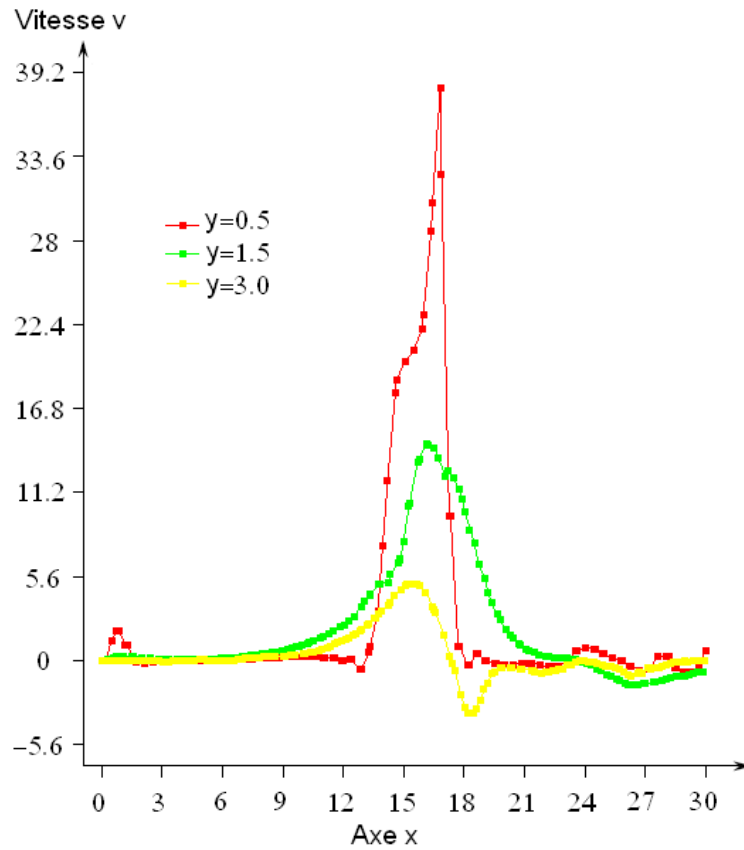


Figure 5.31: Evolution de la vitesse  $v(x)$ , en fonction de la position de la coupe.

Des figures (5.30 et 5.31), on constate que le maximum des vitesses se trouve au niveau de l'intersection entre les deux canaux, avec une perturbation notable de la vitesse  $v$  au niveau immédiat de la jonction. Cette perturbation, amplifie cette vitesse vertical  $v$  de l'écoulement, ce qui provoque la déformation de la paroi flexible (Figure 5.23 et Figure 5.25).

## CONCLUSION

Le modèle d'interaction fluide-structure développé dans cette thèse fait appel à des méthodes développées à partir des éléments finis. La méthode arbitraire lagrangienne-eulérienne, les équations de Navier-Stokes et de la dynamique d'un solide élastique nous ont aidé à établir ce modèle avec les dernières approches issues des méthodes des éléments finis.

Les géométries du fluide et du solide sont envisagées comme deux domaines complémentaires qui se déforment au fur et à mesure que le fluide et le solide agissent l'un sur l'autre. Sans modifier la topologie intrinsèque du maillage de chacun de ces deux domaines, les noeuds peuvent subir un mouvement propre sans passer par un remaillage systématique.

Le solide est considéré suivant une formulation lagrangienne où l'on donne au maillage qui lui est associé la possibilité de se déplacer en fonction de sa position actuelle. Cette approche nous a donc permis de tester de manière satisfaisante le couplage en étudiant des mouvements de structures immergées dans un canal dans laquelle s'écoule un fluide.

Nous avons résolu les équations de solide élastique avec succès et nous avons approfondi cette résolution pour de grands déplacements dans le cadre de l'interaction fluide-structure. Nous avons ainsi pu modéliser les déplacements d'un obstacle à l'intérieur d'un canal plan et obtenir plusieurs résultats intéressants suivant un écoulement de Poiseuille constant imposé à l'entrée du canal.

Plusieurs perspectives de développement restent encore envisageables :

- L'automatisation du maillage et du remaillage doivent être développés afin de pouvoir plus facilement aborder des géométries plus complexes par des maillages structurés ou non structurés.
- C'est à partir de cette amélioration que pourront être développées les tech-

niques utilisant par exemple la non conformité géométrique ou d'autres types d'éléments, les tétraèdres afin de rendre plus souple encore la génération de maillages et d'aborder plus facilement des géométries plus complexes en 2D et en 3D.

- Le problème lié aux grands déplacements est que nous pouvons être confrontés à des mouvements non linéaires. Ceci peut fortement diminuer l'éventail de simulations réalisables car les théories numériques sont construites sur la résolution de problèmes linéaires ou linéarisés.

Un travail sur la génération de maillage est un point clé de la résolution de ce type de problème. La déformation de maillage au niveau de la structure ne permet que de partiellement aborder les grands déplacements. Une manière plus générale pour décrire le cas de grands déplacements même avec une technique de remaillage reste manquante et les efforts mathématiques et numériques allant dans ce sens n'ont souvent été abordés que pour de petits déplacements ou en considérant un mouvement de corps rigide connu a priori.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] Ahmad S., Irons B.M. and Zienkiewicz O.C., Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements, I.J.N.M.E. , Vol. 2, p 419-451, 1970.
- [2] Ait Moudid L., Ouahsine A., Taki et M., Korotenko K., Estimation de la diffusion effective dans un écoulement instationnaire , Revue européenne de génie civil, Vol. 9 N° 7-8/2005, p 993-1009.
- [3] Armaly B. F. , Durst F. , Pereira J. C. F., Schönung B., Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. J. Fluid Mech. 127, 473-496, 1983.
- [4] Asuaje M., Méthodologie et optimisation dans la conception et l'analyse des performances des turbomachines à fluide incompressible, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers Centre de Paris, 2003.
- [5] Auricchio F. and Lovadina C., On the enhanced strain technique for elasticity problems. Computers and Structures, 81, 777-787, 2003.
- [6] Babuska I., The finite element method with Lagrangian multipliers. Numer. Math., 20, 179-192, 1973.
- [7] Baiocchi C. and Lovadina C., A shell classification by interpolation. Math. Models Methods Appl. Sci., 12(10), 1359-1380, 2002.
- [8] Bathe K.J., Chapelle D. , and Lee P.S., A shell problem 'highly sensitive' to thickness changes. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 57, 1039-1052, 2003.
- [9] Bathe K.J., Finite Element Procedures. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996.
- [10] Batoz J.L. and Dhett G., Modélisation des Structures par Eléments Finis. Hermes, 1990.

- [11] Batoz J.L. and Dhatt G., Modélisation des structures par éléments finis, vol. 1, éditions Hermès, Paris, 1992.
- [12] Batoz J.L. and Dhatt G., Modélisation des structures par éléments finis, Vol. 3 : Coques. Hermès Editeur, Paris 1992.
- [13] Barrenechea G. and Valentin F.. An unusual stabilized finite element method for a generalized Stokes problem. Numer. Math., (92), 653-677, 2002
- [14] Bathe K.J., Finite Element Procedures, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1995
- [15] Behr M., Liou J., Shih R., et Tezdwar T., Vorticitystreamfunction formulation of the unsteady incompressible flow past a cylinder : sensibility of the computed flow field to the location of the outflow boundary, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 12, 323-342, 1991.
- [16] Bendjeddou Z., Méthodologie pour la simulation numérique des vibrations induites par écoulements dans les faisceaux de tubes, Thèse de doctorat, Université des sciences et technologies de Lille, 2005.
- [17] Benjamin AS. , Denny E ., On the convergence of numerical solutions for 2-D flows in a cavity at large Re, J. Comput. Phys. 33, 340-358, 1979.
- [18] Benabid F., Modélisation des écoulements turbulents à faibles Reynolds par la méthode des éléments finis. Thèse de doctorat, Institut national des sciences appliquées de rouen 2002.
- [19] Benaouicha M., Contribution au Développement d'Algorithmes de Couplage en Interaction Fluide-Structure, Thèse de doctorat, Université de La Rochelle, 2007.
- [20] Boisse P., Daniel J.L. and Gelin J.C., A  $C^0$  three-node shell for non-linear structural analysis. Computers and Structures, Vol. 58, N°2, p. 249-261, 1996.

- [21] Blom F. and Leyland P., Analysis of fluid-structure interaction on moving airfoils by means of an improved ALE method. AIAA paper, V. 1770, 11p, 1997.
- [22] Bodard N., Minteraction fluide-structure par la méthode des éléments spectraux, Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2006.
- [23] Boschitsch A. H. and Quackenbush T. R., High accuracy computation of fluid-structure interaction in transonic cascades. 31st Aerospace Sciences Meeting and exhibit, AIAA 93-0485. 14p, 1993.
- [24] Brezzi F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. R.A.I.R.O., Anal. Numér., 8, 129-151, 1974.
- [25] Brezzi F. and Fortin M., Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [26] Brezis H., Analyse fonctionnelle, Masson
- [27] Brooks A. N. and Hughes J. R., Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. Computer methods in applied mechanics and engineering, vol 32, p 199-259, 1982.
- [28] Calladine C.R., Theory of Shell Structures, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [29] Cescutti J. P., Wey E. and Chenot J. L., Finite element calculation for hot forging with continuous remeshing. in J.L. Chenot, E. Onate, Modelling of metal forming processes : Proc. of the Euromech 233 Colloquium, Sophia Antipolis, France, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, p 207-216, 1988.

- [30] Chapelle D., Ferent A., and Bathe K.J., 3d-shell finite elements and their underlying model. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14(1), 105-142, 2004.
- [31] Chapelle D., Ferent A., and Bathe K.J., 3d-shell finite elements and their underlying model. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14(1), 105-142, 2004.
- [32] Chapelle D. and Bathe K.J., *The Finite Element Analysis of Shells - Fundamentals*. Springer-Verlag, 2003.
- [33] Chinosi C. and Lovadina C., Numerical analysis of some mixed finite element methods for Reissner-Mindlin plates. *Comput. Mech.*, 16, 36-44, 1995.
- [34] Ciarlet P. *The Finite Element method for elliptic problems*, North Holland 1978
- [35] Cruchaga M. A., A study of the backwards-facing step problem using a generalised streamline formulation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 14, 697-708, 1998.
- [36] Conca C., Duran M., J. Planchard, A quadratic eigenvalue problem involving Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 100 (3) 295-313, 1992.
- [37] Cointe, R. Two-dimensional water-solid impact. *ASME J.Offshore Mech. Arc. Eng.*, 111, 1989.
- [38] Cointe, R., Geyer, P., King, B., Motin, B. and Tramonì, M. Nonlinear and linear motions of a rectangular barge in a perfect fluid. In *Proceedings 18th Symposium on Naval Hydrodynamics* (pp. 85-99). Ann Arbor, MI, 1990.
- [39] Dhatt G., An efficient triangular shell element, *A.I.A.A. Journal*, Vol. 8, N°11, p. 2100-2102, 1970.



- [40] Dhatt G. , finite element modelling of fluids, Lecture, von Karman Institut, Mars 1992.
- [41] Dhatt G. et Touzot G., Une présentation de la méthode des éléments finis, Maloine S.A, Editeur, Paris France, 1984.
- [42] Dobrovolskaya, Z. On some problems of similarity flow of fluid with a free surface. JFM, 36, 1969.
- [43] Donea J., Giuliani S. and Halleux J. P., An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. Computer method in applied mechanics and engineering, vol 33, p 689-723, 1982.
- [44] Donea J., Huerta A., Ponthot J.-Ph., and Rodriguez-Ferran A. Arbitrary lagrangian-eulerian methods. Encyclopedia of Computational Mechanics, 1 : Fundamentals, 2004.
- [45] Domissy E., Formulation et évaluation d'éléments finis volumiques modifiés pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1997.
- [46] Fafard M., Dhatt G. et Batoz J.L., A new discrete Kirchhoff plate/shell element with updated procedures, Computers and Structures, Vol. 31, p 591-606, 1989.
- [47] Faltinsen, O. Numerical solution of transient nonlinear free-surface motion outside or inside moving bodies. In Wehausen, J. and N.Salvesen (Eds.), Proceedings 2nd Conf. on Num. Ship. Hydro (pp. 347-357). U.C.Berkeley: University Extension Publications, 1977.
- [48] Filippone A., site web : <http://aerodyn.org/Frames/1unsteady.html>

- [49] Formaggia L., Gerbeau J.F., Nobile F., and Quarteroni A., On the coupling of 3D and 1D Navier-Stokes equations for flow problems in compliant vessels. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 191(6-7), 561-582, 2001.
- [50] Fortin A., Jardak M., Gervais J.J., and Pierre R. . Localization of Hopf bifurcations in fluid flow problems. *Int.J.Numer.Methods Fluids*, 24(11), 1185-1210, 1997.
- [51] Fortin M., Glowinski R. Méthode de lagrangien augmenté. Application à la résolution numérique des problèmes aux limites. Collection méthodes mathématiques de l'informatique, Dunod, Paris, 1982.
- [52] Fourestey G., Simulation numérique et contrôle optimal d'interaction fluideincompressible/structure par une méthode de Lagrange-Galerkin d'ordre 2. Application aux ouvrages d'art., Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2005.
- [53] Flügge W. , Stresses in Shells, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 2nd edition, 1973.
- [54] Garabedian, P. Oblique water entry of wedge. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 6, 1984.
- [55] Gervais J.J., Lemelin D. , Pierre R., Some experiments with stability analysis of discrete incompressible flows in the lid-driven cavity, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 24, 477-492, 1997.
- [56] Ghia U., Ghia K., Shin C.T., Higher-Re solutions for incompressible pou using the Nauier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.* 48, 387-41 1, 1982.

- [57] Gingold, R. and Monaghan, J. Smoothed particle hydrodynamics - theory and application to non-spherical stars. Royal Astronomical Society, Monthly Notices, 181, 375-389, 1977.
- [58] Glockner S. Aquilon, Notice théorique et numérique. Technical report, 2001.
- [59] Godlewski E. and Raviart P.A., Hyperbolic systems of conservation laws, SMAI, Mathématiques Applications 3/4, Ellipses-Edition Marketing, Paris, 1991..
- [60] Grandmont C., Guimet V. et Maday Y.. Existence de solutions d'un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel instationnaire. Math. Prob. in Mech., 326(1), 525-530, 1998.
- [61] Gustafson K. and Halasi K., Cavity flow dynamics at higher reynolds number and higher aspect ratio, J. Comput. Phys. 70, 271-283. 1987.
- [62] Hadji S. et Dhatt G. , Asymptotic-Newton method for solving incompressible flows, Int. J.Numer. Methods fluids, 44, 861-878, 1997.
- [63] Havu V. and Pitkäranta J., Analysis of a bilinear finite element for shallow shells. Approximation of inextensional deformations. Math. Comp., 71, 923-943, 2002.
- [64] Hirt C. W., Amsden A. and Cook J. L., An arbitrary lagrangian eulerian computing method for all flow speeds. Journal of Computational Physics, vol 14, p 227-253, 1972.
- [65] Hu Y. K. and Liu W. K., ALE finite element formulation for ring rolling analysis. Int. journal for numerical methods in engineering, vol 33, p 1217-1236, 1992.

- [66] Hu Y. K. and Liu W. K., ALE hydrodynamic lubrication finite element method with application to strip rolling. *International journal for numerical methods in engineering*, vol 36, p 855-880, 1993.
- [67] Hubert G., Modélisation d'écoulement de fluides incompressible par la méthode des éléments finis. Thèse de doctorat, Université de Compiègne 1984.
- [68] Hughes T.J.R. and Brooks A.N.. A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, ed. T.J.R. HUGHES, AMD, 34, 19-35 ASME, New York, 1979.
- [69] Hughes T.J.R., *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1987.
- [70] Hughes J. R., Liu W. K. and Zimmerman T. K., Lagrangian Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol 29, p 329-349, 1981.
- [71] Hughes T.J.R. and Taylor R.L., The linear triangle bending elements, In *The Mathematics of Finite Element and Application IV*, MAFELAP 1981, London, Academic Press, p. 127-142, 1982.
- [72] Hunter S. C., *Mechanics of continuous* Halsted Press, Sheffield, 1976.
- [73] Jeng Y. H. and Payne U. J., An Adaptive tvd Limiter, *J. Comput. Phys.* 118, 229-241, 1995.
- [74] Kelly D.W., Nakasawa S., Zienkiewicz O.C., and Heinrich J.C., A note on upwinding and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 15, 1705-1711, 1980.

- [75] Kennedy J. M. and Belytschko T., Theory and application of a finite element method for arbitrary lagrangian eulerian fluids and structures. Nuclear engineering and design, vol 68, p 129-146, 1981.
- [76] Kreiss H.O., Numerical methods for solving time independent problems for partial differential équations, Sémin. de Math. Sup. Univ. Montreal 1978.
- [77] Koiter W. T., On the nonlinear theory of thin elastic shells. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., B69, 1-54, 1965.
- [78] Longuet-Higgins, M. and Cokelet, E. The deformation of steep surface waves on water: I. a numerical method of computation. Proc. R. Soc. Lond, 350, 1-26, 1976.
- [79] Lucy, L. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. Astronomical Journal, 82, 1013-1024, 1977.
- [80] Luo X.Y., Pedley T.J., Numerical simulation of steady flow in a 2-D Collapsible channel, J. Fluids Struct. 9, 149-197, 1995.
- [81] Majda A., Osher S., A systematic approach for correcting nonlinear instabilities, Num. Math., 30, pp.429-452, 1978.
- [82] Marcotte J. , Méthodes itératives pour la résolution, par éléments finis, du problème de Stokes non linéaire, Thèse de doctorat, Université de Montréal, 2000.
- [83] Martinet F., Etude et mise en oeuvre d'une formulation ALE Application au contact lubrifié en mise en forme. Thèse de doctorat : Université Aix-Marseille II 204 p, 1998.

- [84] Mendes P.A. et Branco F.A.. Analysis of fluid-structure interaction by an Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element formulation. *Int. J. Numer. Meth.*, 30, 897-919, 1999.
- [85] Monaghan, J. and Gingold, R. Shock simulation with the particle method sph. *J. Comp. Phys.*, 52, 374-389, 1983.
- [86] Moondra S. and Upadhyay A. and Sushanta K. Mitra, Investigation of Fluid Structure Interaction of an Elastic Membrane in a Microchannel. Excerpt from the Proceedings of the COMSOL Users Conference. Bangalore, 2006.
- [87] Mindlin R.D., Influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 18, 31-38, 1951.
- [88] Naceur H., Contribution à l'optimisation de forme de structures minces en présence de non linéarités géométriques et matérielles. , Thèse de doctorat, Université de Compiègne, Compiègne, 1998.
- [89] Nichols, B. and Hirt, C. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(201), 1981.
- [90] Hammadi F., Formulation et evaluation d'éléments finis à continuité CR de la géométrie pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques = formulation and evaluation of finite element models with CR continuity of the geometry for linear and non linear analysis of shells . , Thèse de doctorat, Université de Compiègne, Compiègne, 1998.
- [91] Naghdi P.M., Foundations of elastic shell theory, In *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 4, 1-90. North-Holland, Amsterdam, 1963.
- [92] Novozhilov V.V., *Thin Shell Theory*. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 2nd edition, 1970.

- [93] Nomura T. et Hughes T.J.R., An Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 95, 115-138, 1992.
- [94] Nomura T., ALE finite element computations of fluid-structures interaction problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol 112, p 291-308, 1994.
- [95] Nomura T. and Hughes T. J. R., An arbitrary lagrangian eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol 95, p 115-138, 1992.
- [96] N'dri K. D., Formulation éléments finis espace-temps pour les équations de Navier-Stokes, Thèse de doctorat, Université de Montréal, 2001.
- [97] Paidoussis M.P., Dynamics of flexible slender cylinder in axial flow, Part I., Theory,. *J. of Fluid Mechanics*,. 26, p. 717-736, 1966.
- [98] Pian T.H.H. and Sumihara K., Rational approach for assumed stress finite elements, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, pp. 1685-1695, 1984.
- [99] Piperno S., Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure, Thèse, ENPC, jun 1995
- [100] Pierson, J. The penetration of fluid surface by a wedge. *Stevens Inst. Tech., Expt. Towing Tank Report*, 387, 1950.
- [101] Piperno S., Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995.
- [102] Piperno S. , Numerical simulation of aeroelastic instabilities of elementary bridgedecks, technical report, INRIA, RR-3549, 1998.

- [103] Pironneau O., On the transport diffusion algorithm and its applications to the Navier- Stokes equations, *Numer. Math.* Vol. 38, pp. 309-332, 1982.
- [104] Ponthot J. P. and Belytschko T., Arbitrary lagrangian eulerian formulation for element free Galerkin method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol 152, p 19-46, 1997.
- [105] Pitkäranta J., Leino Y., Ovaskainen O., and Piila J., Shell deformation states and the finite element method : a benchmark study of cylindrical shells. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 128, 81-121, 1995.
- [106] Raviart P.A., *Les méthodes d'éléments finis en mécanique des Coll. DER-EDF Eyrolles* 1981.
- [107] Raviart P.A., Thomas J.M., *Introduction a l'analyse des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1983.
- [108] Reissner E., Stress strain relations in the theory of thin elastic shells. *J. Math. Phys.*, 31, 109-119, 1952.
- [109] Reissner E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 67, A69-A77, 1945.
- [110] Renou J.Y., *Une méthode eulérienne de calcul numérique de forces fluide-élastiques . Thèse de. doctorat : Université Paris VI*, 1998.
- [111] Rifai M.S. and Simo J.C., A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 29, 1595-1638, 1990.
- [112] Roberts J. E. and Thomas J.M., Mixed and hybrid methods. In *Handbook of numerical analysis*, Vol. II, *Handb. Numer. Anal.*, II, pages 523-639. North-Holland, 1991.



- [113] Rosenfeld M. , Kwak D. and Vinokur M.. A Solution Method for The Unsteady And Incompressible Navier-Stokes Equations In Generalized Coordinate Systems, ALAA Paper, 88-718, 1988.
- [114] Rusanov V., On difference schemes of Third order of accuracy for non linear Hyperbolic Systems J. Comp. Phys., 5, 507-516, 1970.
- [115] Rubin K. and Hosla, Navier-Stokes calculations with a coupled strongly implicit method : finite difference solutions, Computers and Fluids 4, 163-180, 1981.
- [116] Sanchez-Hubert J. and Sanchez-Palencia E., Coques Elastiques Minces - Propriétés Asymptotiques. Masson, Paris, 1997.
- [117] Sarrate J., Huerta A., and Donea. J. Arbitrary lagrangian-eulerian formulation for fluid-rigid body interaction. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190 :3171-3188, 2001.
- [118] Scordelis A.C. and Lo K.S., Computer analysis of cylindrical shells, J. Amer. Concrete Institute, Vol. 61, p. 539-561, 1969.
- [119] Simo J.C. and Reddy B.D., Stability and convergence of a class of enhanced strain methods. Siam. J. Numer. Anal., 6, 1705-1728, 1995.
- [120] Souli,M., Ouahsine, A., Lewin,L., ALE formulation for fluid-structure interaction problems. Comput. Methods Appl. Mech Engrg,190,659-675, 2000.
- [121] Souli, M. and Zolesio, J.P., Arbitrary Lagrangian-Eulerian and free surface methods in fluid mechanics, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 191, 2001.
- [122] Stanley G., Park K.C. and Hughes T.R.J., Continuum-based resultant shell elements, In Hughes T.J.R and Hinton E. (Eds), Finite Element Methods for

- Plates and Shell Structures, Vol 1, Pineridge Press, Swansea, UK., p. 1-45, 1986.
- [123] Thomée V. , Stability of difference schemes in the maximum norm. *J.Differential équations*,1,273-292, 1965.
- [124] Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- [125] Undreiner S. and Frei A., Simulation du comportement dynamique de la zone lame fluide entre le flasque de la roue et le corps de pompe. Colloque de la société hydrotechnique de France, Chatou, 19-20 Novembre, p 185-191, 1997.
- [126] Valid R., *The Nonlinear Theory of Shells through Variational Principles*. John Wiley and Sons, Chichester, 1995.
- [127] Vinje, T. and Brevig, P. Nonlinear ship motions. In *Proceedings 3rd International Symp. Num. Ship Hydro*. Paris, FRANCE, 1981.
- [128] Von Karman, T. The impact on seaplane floats during landing. *NACA TN*, 321, 1929.
- [129] Wagner, H. über stoss-und gleitvorgänge an der oberfläche von flüssigkeiten. *ZAMM*, 12, 1932.
- [130] Walsh C., Flutter in One-Dimensional Collapsible Tubes, *J. Fluids Struct.*, 9, pp. 393-408, 1995.
- [131] Watanabe, Y. On the properties of hydrodynamic impact pressure by matched asymptotic expansion technique. *T. West-Japan Soc. Nav. Arch.*, 32, 1966.

- [132] Wei G. and Kirby J.T., Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering* 121, 251-261, 1995.
- [133] Wempner G.A., Oden J.T. et Kross D.A., Finite element analysis of thin shells, *Engng. Mech. Div., Proc. ASCE*, Vol. 94, EM6, p. 1273-1294, 1968.
- [134] Wunderlich W., On a consistent shell theory in mixed tensor formulation. In *Proc. 3rd IUTAM Symposium on Shell Theory : Theory of Shells*, Amsterdam. North Holland, 1980.
- [135] Yang H.T.Y, Saigal et Liaw., Advances of thin shell finite elements and some applications - version 1, *Computers and Structures*, Vol. 35, p. 481-504, 1990.
- [136] Youngs, D. Time dependent multi-material flow with large fluid distortion. *Numerical Methods for Fluid Dynamics* (pp. 273-285), 1982.
- [137] Zhao, R. and Faltinsen, O. Slamming loads on high-speed vessels. In *19th ONR Conference*. Korea, 1992.
- [138] Zhao, R. and Faltinsen, O. Water entry of two-dimensional bodies. *JFM*, 246, 1993.
- [139] Zhong, Z. H. *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*. Oxford: Oxford Science Publications, 1993.
- [140] Zienkiewicz O.C et Taylor R.L., *La méthode des éléments finis. Formulation de base et problèmes linéaires*, Edition française AFNOR, Paris 1991.