



HAL
open science

Sur la théorie et l'approximation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires

Abdallah Chalabi

► **To cite this version:**

Abdallah Chalabi. Sur la théorie et l'approximation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires. Modélisation et simulation. Université Mentouri Constantine, 1990. tel-00338805

HAL Id: tel-00338805

<https://theses.hal.science/tel-00338805>

Submitted on 14 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Tu 9797

THESE

présentée à

l'UNIVERSITE DE CONSTANTINE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Abdallah CHALABI

**SUR LA THEORIE ET L'APPROXIMATION NUMERIQUE
DE PROBLEMES HYPERBOLIQUES NON LINEAIRES**

Soutenue le 20 juin 1990 devant le jury:

Monsieur	M.A. MOUSSAOUI	Président
Messieurs	T. GALLOUET J.F. VILA	Rapporteurs
Messieurs	M. AMARA A. BENDALI	Examineurs

Thèse préparée au sein du laboratoire de modélisation et calcul (LMC)

Institut IMAG - Université Joseph Fourier - Grenoble

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'égard de M. T. Gallouët pour avoir dirigé cette thèse avec beaucoup de compétence et de gentillesse. Ses qualités scientifiques et humaines ont été décisives dans l'aboutissement de ce travail.

Je suis reconnaissant à M. M. A. Moussaoui pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Mes sincères remerciements vont à M. J. P. Vila pour m'avoir accordé avec une rare gentillesse de longs et fructueux entretiens. J'ai beaucoup appris auprès de lui, grâce à sa grande connaissance du sujet.

MM. M. Amara et A. Bendali ont bien voulu examiner cette thèse et faire partie de ce jury. Je tiens à les remercier très sincèrement.

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe EDP (IMAG - Grenoble) dont je remercie vivement tous les membres à travers son responsable M. P. Witomski, pour toute l'aide dont j'ai bénéficié le long de la préparation de cette thèse.

Je remercie M. J. Della Dora, directeur du laboratoire LMC pour m'avoir accueilli dans ce laboratoire.

C'est avec grand plaisir que j'associe à ces remerciements C. Bernier, à l'origine de l'agréable ambiance qui a toujours régné au bureau 66 et S. Champier, pour son soutien moral.

Je suis particulièrement sensible à la sympathie que m'ont témoignée mes amis de Grenoble dont A. Guerchaoui, A. Jamad et H. Tebbikh.

Merci enfin à tous ceux qui ont participé à la réalisation matérielle de cette thèse et plus particulièrement M. D. Iglesias.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 0. Introduction générale.

Première Partie: Lois de conservation scalaires.

Chapitre I. Quelques préliminaires sur les lois de conservation scalaires.

1. Solution faible.
2. Solution entropique.
3. Existence et unicité de la solution entropique.
4. Résolution du problème de Riemann.
5. Schémas numériques.

Références.

*Chapitre II. On a class of implicit and explicit schemes of Van–Leer type
for scalar conservation laws.*

1. Statement of the problem.
2. Preliminaries.
3. Approximation by second order explicit schemes.
4. Approximation by second order implicit schemes.
5. Numerical experiments.

Références.

*Chapitre III. Stable upwind schemes for hyperbolic conservation laws
with source terms.*

1. Preliminaries.
2. First order upwind schemes.
3. Second order upwind schemes.
4. Time continuous schemes.

References.

*Chapitre IV. Analyse de schémas décentrés pour des lois de conservation
bidimensionnelles non homogènes.*

1. Introduction.
2. Schémas d'ordre 1.
3. Schémas d'ordre 2.

Références.

Deuxième Partie: Systèmes hyperboliques non linéaires.

Chapitre V. Quelques généralités sur les systèmes hyperboliques non linéaires.

1. Quelques généralités.
2. Problème de Riemann.
3. Schémas aux différences pour les systèmes hyperboliques.

Références

*Chapitre VI. An analysis of some hyperbolic problems related
to the shallow water model.*

1. The Cauchy 2x2 problem.
2. The Riemann problem.
3. The Lagrangian representation.
4. A nonreflecting boundary condition.
5. The two dimensions case.

References.

*Chapitre VII. Eclatement d'opérateur, méthode à pas fractionnaires
et condition d'entropie pour les systèmes hyperboliques non linéaires.*

1. Position du problème.
2. Méthodes conservatives.
3. Méthodes non conservatives.

Références.

*Chapitre VIII. Analyse numérique du problème des ondes longues
en eau peu profonde.*

1. Existence de la solution.
2. Unicité de la solution.
3. Problème approché et schéma de résolution.

Références.

*Chapitre IX. Sur la résolution du problème des ondes longues
dans un fluide parfait.*

1. Formulation du problème.
2. Existence et unicité de la solution.
3. Exemple de conditions aux limites maximales positives.

Références.

Bibliographie générale.

CHAPITRE 0

Introduction générale

De nombreux problèmes d'origines diverses sont modélisés par des lois de conservation hyperboliques non linéaires, citons notamment le problème de la dynamique des gaz (Chorin et Marsden [15], Smoller [64] ...); le modèle de l'élasticité non linéaire (dynamique des câbles) (Keyfitz [35], Le Roux [42]); le système de Saint-Venant régissant l'écoulement de l'eau peu profonde (Le Roux [46], Vila [72]); la simulation des réservoirs de pétrole (Gallouët [25], Wagner [77]); les pipe-lines (Luskin [49]); certains problèmes issus de la biologie (Rascle [57]) ... etc.

L'étude mathématique des lois de conservation hyperboliques a connu ces dix dernières années un progrès considérable tant sur le plan théorique que numérique, en effet sur le plan théorique l'introduction de la compacité par compensation (Diperna [21], Rascle [57], Tartar [69]) a été d'un grand intérêt dans la démonstration de résultats d'existence de solutions entropiques pour les systèmes hyperboliques non linéaires, à partir des solutions visqueuses (Diperna [21]), sans passer par le schéma de Glimm [27].

Sur le plan de la résolution numérique des lois de conservation scalaires, de nouveaux types de schémas aux différences tels que les schémas TVD (à Variation Totale Décroissante) quasi d'ordre deux (Harten [30], Vila [72]) ont été développés. Ces schémas ont l'avantage de ne pas osciller aux voisinages des chocs contrairement au schéma d'ordre deux de Lax-Wendroff, mais ils sont précis seulement à l'ordre un aux voisinages des extremas de la solution. Pour tenter de remédier à cet inconvénient, on a développé récemment les schémas type ENO (Essentiellement Non Oscillants) (Chakravarthy et alii [8]). En raison de la non linéarité des équations, des discontinuités peuvent apparaître dans les solutions après un temps fini. A cause de la viscosité numérique qu'ils développent, les schémas du premier ordre simulent mal les chocs (discontinuités) en les étalant trop. D'où l'importance des schémas d'ordre deux pour le calcul des chocs.

Des schémas type Godunov basés sur l'utilisation d'un solveur approché du problème de Riemann ont été élaborés pour la résolution numérique des systèmes de lois de conservation hyperboliques (Harten et alii [34], Vila [73]).

D'autres travaux sur différents problèmes liés aux lois de conservation hyperboliques ont été réalisés récemment, on peut citer par exemple les travaux de Dubois et Le Floch [22], Le Roux [42], et Vila [72], sur le problème des conditions aux limites; les travaux de Le Floch et Raviart [40], sur le problème de Riemann généralisé. Le traitement numérique des problèmes ayant un terme source a fait l'objet des travaux de Le Roux [43], Roe [59] et Van-Leer [71]. Des problèmes hyperboliques sous forme non conservative ont été étudiés dans Le Floch [39].

Malgré les progrès enregistrés ces dernières années, la théorie des problèmes hyperboliques non linéaires est encore " pauvre " et beaucoup de questions restent ouvertes notamment en ce qui concerne:

- L'unicité de la solution entropique dans le cas des systèmes hyperboliques non linéaires.
- La convergence des schémas multidimensionnels du second ordre (même dans le cas scalaire).
- La convergence des schémas unidimensionnels d'ordre un pour les systèmes.
- La résolution du problème de Riemann multidimensionnel.

Le thème de cette thèse est l'analyse théorique et numérique de problèmes hyperboliques non linéaires. Le travail présenté se compose de deux parties: La première est composée des quatre premiers chapitres sur les lois de conservation scalaires, tandis que la deuxième partie est consacrée à l'étude de quelques problèmes liés au système de Saint-Venant et elle est composée des cinq derniers chapitres.

On donne dans le premier chapitre des préliminaires sur les lois de conservation scalaires en rappelant un résultat théorique d'existence et d'unicité de la solution entropique dû à Kruzkov [36] ainsi que quelques propriétés des schémas numériques notamment les schémas TVD (à Variation Totale Décroissante) (Harten [30]).

Au chapitre II, On propose une classe de schémas TVD quasi d'ordre deux de type Van-Leer, pour

d'ordre deux de type Van–Leer, pour des lois de conservation scalaires du type:

$$(1) \quad u_t + f(u)_x = 0$$

avec $f = f_1 + f_2$; $f_1' \geq 0$ et $f_2' \leq 0$.

Les schémas construits sont basés sur l'approximation affine par mailles du flux et ils sont de types explicites et implicites. On étudie la convergence de la solution approchée obtenue vers la solution entropique du problème continu. Un exemple numérique portant sur la résolution du problème de Cauchy associé à l'équation de Buckley–Leverett est donné à la fin de ce chapitre. Cette étude trouve sa motivation dans les problèmes de simulation des réservoirs de pétrole où des schémas de ce type sont utilisés.

L'étude de schémas numériques pour des lois de conservation monodimensionnelles ayant un terme source est faite dans le chapitre III. Les équations traitées sont de la forme:

$$(2) \quad u_t + f(u)_x = q(u, x)$$

Le terme source dans les lois de conservation non homogènes est dû à des effets géométriques (problèmes axisymétriques ou cylindriques, domaine à section variable...) ou à des effets physiques (forces extérieures, reste de la masse ou de l'énergie lors d'un bilan ...). Des schémas précis à l'ordre un, sont construits avec une donnée stationnaire par mailles. Sous la même condition CFL que dans le cas homogène, ces schémas sont précis à l'ordre deux pour les solutions stationnaires. Des schémas quasi d'ordre deux, sont construits à l'aide de la méthode de Van–Leer, en utilisant des approximations affines par mailles. Les schémas proposés sont explicites, implicites–explicites ou continus en temps (semi–discrets). Ces schémas ne sont pas TVD (à Variation Totale Décroissante) à cause de la présence du terme source, mais ils sont localement TVB (à Variation Totale Bornée). Des résultats de convergence de la solution approchée vers la

solution entropique sont établis. Nous terminons ce chapitre par des exemples numériques.

Au chapitre IV, nous abordons l'analyse de schémas numériques pour des lois de conservation bidimensionnelles non homogènes du type:

$$(3) \quad u_t + f(u)_x + g(u)_y = q(u, x, y)$$

$$\text{où} \quad f = f_1 + f_2; \quad f_1' \geq 0 \text{ et } f_2' \leq 0 \quad ; \quad g = g_1 + g_2; \quad g_1' \geq 0 \text{ et } g_2' \leq 0$$

On y présente des schémas explicites et implicites–explicites d'ordre un et quasi d'ordre deux en espace (c.a.d. un schéma obtenu par une discrétisation en temps par le schéma d'Euler implicite ou explicite d'un schéma "quasi" d'ordre deux continu en temps) pour lesquels on étudie la stabilité et la convergence de la solution approchée vers la solution entropique du problème continu. Pour étudier des schémas quasi d'ordre deux, les techniques utilisées dans le cas monodimensionnel ne sont plus applicables au cas bidimensionnel à cause de l'inexistence de schémas bidimensionnels TVD d'ordre deux comme le suggère un résultat de Goodman–Le Veque [29]. Des résultats numériques sont présentés à la fin de ce chapitre.

Dans le chapitre V, on donne des préliminaires sur les systèmes hyperboliques non linéaires. On y rappelle quelques notions relatives aux solutions faibles entropiques ainsi que la résolution du problème de Riemann dans le cas des systèmes. Nous terminons ce chapitre avec un bref rappel des schémas type Godunov pour la résolution numérique.

Une analyse "théorique" de quelques problèmes relatifs au modèle de l'eau peu profonde est faite au chapitre VI. Le système d'équations du modèle de l'eau peu profonde en dimension un d'espace s'écrit:

$$(4) \quad \begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ q_t + (q^2/h + g h^2/2)_x = 0 \end{cases}$$

où h représente la hauteur d'eau et q le débit.

On étudie en particulier le problème de Riemann associé à ce système ainsi que le problème des conditions aux limites dans le cas d'une résolution dans un demi intervalle. Nous abordons aussi la symétrisation du problème bidimensionnel associé.

Le chapitre VII est consacré à l'étude de la méthode à pas fractionnaires associée à l'éclatement d'un systèmes hyperbolique non linéaire. Grâce à la symétrisation du système en utilisant les variables entropiques, nous caractérisons les éclatements admissibles (consistants avec la condition d'entropie du système) dans les cas conservatifs et non conservatifs. Nous montrons dans le cas conservatif, la convergence de la solution approchée vers une solution entropique du système de départ.

Dans le chapitre VIII, on présente une étude du problème visqueux associé au système de Saint-Venant suivant:

$$(5) \quad \begin{cases} u_t - v \Delta u + g h_x + C/D \sqrt{u^2 + v^2} u - f v = f_1 \\ v_t - v \Delta v + g h_y + C/D \sqrt{u^2 + v^2} v + f u = f_2 \\ h_t - v' \Delta h + \operatorname{div} (h U) = f_3 \end{cases}$$

Où les inconnues sont la vitesse (u,v) et la profondeur h .

On a établi l'existence de la solution dans un espace fonctionnel approprié, en utilisant la méthode de Faedo-Galerkine et un résultat de compacité. L'unicité de la solution est démontrée grâce à l'inégalité de Gronwall.

La discrétisation du problème est faite à l'aide d'une méthode d'éléments finis. Un exemple numérique est donné à la fin de ce chapitre.

Le chapitre IX est consacré à la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution du problème des ondes longues dans un fluide parfait dans le cas d'un écoulement lent modélisé par:

$$(6) \quad \begin{cases} u_t + a u_x + b u_y + g h_x + C/D \sqrt{u^2 + v^2} u - f v = f_1 \\ v_t + a v_x + b v_y + g h_y + C/D \sqrt{u^2 + v^2} v + f u = f_2 \\ h_t + a h_x + b h_y + g (u_x + v_y) + \alpha h = \alpha g \end{cases}$$

On a procédé par linéarisation des termes convectifs, la force de frottement étant conservée non linéaire. L'existence et l'unicité de la solution du problème obtenu ont été prouvées à l'aide d'une méthode de monotonie.

REFERENCES DES TRAVAUX

- 1) A. CHALABI, *Analyse numérique du problème des ondes longues en eau peu profonde*, *Calcolo*, 19, (1982), pp. 269 - 288.
- 2) A. CHALABI, *Sur la résolution du problème des ondes longues dans un fluide parfait*, *Afrika Matematika*, 4, (1984), pp. 31- 48.
- 3) A. CHALABI, *A self-consistent finite difference treatment of the moving boundary for long waves in shallow water*, *Proceedings of the International Conference on Mathematical Analysis and its Applications*, (1985), 243–249.
- 4) A. CHALABI, *An Analysis of some hyperbolic problems related to the shallow water model*, *IMAG R.R. n° 579*, (1986) .
- 5) A. CHALABI, *Convergence de schémas décentrés pour des lois de conservation non-homogènes*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t . 307 , Série I , (1988), pp. 129–132 .
- 6) A. CHALABI and J.P. VILA, *On a class of implicit and explicit schemes of Van-Leer type for scalar conservation laws*, *Modél. Math. Anal. Numér.*, 2, (1989), pp. 261–282.
- 7) A. CHALABI, *Analyse de schémas décentrés pour des lois de conservation bidimensionnelles non homogènes*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t . 309 , Série I , (1989), pp.395–398 .
- 8) A. CHALABI, *Stable upwind schemes for hyperbolic conservation laws with source terms*, *Soumis pour publication à IMA. J. Numer. Anal.*
- 9) A. CHALABI and J.P. VILA, *Operator splitting, fractional steps method and entropy condition for nonlinear hyperbolic systems*, *International Conference on Nonlinear Hyperbolic Problems*, Uppsala (Sweden), (1990).

PREMIERE PARTIE

Lois de conservation scalaires

CHAPITRE I

Quelques préliminaires sur les lois de conservations scalaires

1- Solution faible

Soit $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$; $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On cherche $u : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$(1.1) \quad u_t + f(u)_x = q(u, x) \quad \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, T[$$

$$(1.2) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}, u_0 \text{ donnée}$$

Même si la donnée u_0 est très régulière, la solution de (1.1)–(1.2) ne l'est pas forcément. L'apparition de discontinuités de u après un temps fini est liée à la non linéarité de l'équation (1.1). D'où la nécessité d'introduire des solutions faibles au sens suivant :

Définition 1.1

Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[)$, u est solution faible de (1.1), (1.2) si

$$(1.3) \quad \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x, 0) dx = - \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} q(u, x)\phi dx dt$$

pour toute fonction-test $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T[)$, à support compact dans $\mathbb{R} \times [0, T[$.

Soit Γ une ligne "régulière" de discontinuité de u , donnée sous la forme: $x = \xi(t)$. Soit $\xi' = \sigma$ la vitesse du déplacement de la discontinuité. On a la relation de Rankine–Hugoniot suivante:

$$(1.4) \quad \sigma [u] = [f(u)]$$

où $[A]$ désigne le saut de A le long de cette discontinuité (pour un énoncé plus précis cf Smoller [8]).

2 – Solution entropique

Le problème (1.1)–(1.2) peut admettre plusieurs solutions faibles, pour sélectionner la "bonne" solution physique, on est amené à introduire une condition supplémentaire appelée condition d'entropie .

Définition 1.2

Soit $\eta, F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Le couple (η, F) est un couple entropie–flux d'entropie de (1.1) si

- 1) η est convexe
- 2) $\eta'(u)f'(u) = F'(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$

Définition 1.3

Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[)$, u est solution entropique de (1.1)–(1.2) si

- 1) u est solution faible
- 2) $\forall (\eta, F)$ couple entropie–flux d'entropie, on a :

$$(2.1) \quad \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} (\eta(u)\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt + \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} \eta'(u) q(u, x)\phi dx dt \geq 0$$

pour toute fonction-test $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times]0, T[)$ non négative et à support compact dans $\mathbb{R} \times]0, T[$.

3–Existence et unicité de la solution entropique

3.1–Existence de la solution entropique

Soit $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures bornées sur \mathbb{R} c. a. d. $\mathcal{M}(\mathbb{R}) = [\mathcal{C}_b(\mathbb{R})]'$

On définit sur $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ la norme suivante :

$$\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) ; \|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup \{ \langle \mu, \phi \rangle ; \phi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}), \|\phi\|_{\infty} = 1 \}$$

$\mathcal{M}(\mathbb{R})$ est un espace de Banach .

En utilisant l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, on va définir l'espace des fonctions à variation totale bornée et qu'on notera BV.

$$BV(\mathbb{R}) = \{ u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) ; u' \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \} ; \text{ la dérivation est prise au sens des distributions.}$$

$$\text{Soit } u \in BV \text{ alors } TV(u) = \|u'\|_{\mathcal{M}}$$

$$\text{A noter que si } u \in W^{1,1}(\mathbb{R}) = \{ u \in L^1(\mathbb{R}) ; u' \in L^1(\mathbb{R}) \} \text{ alors } u \in BV(\mathbb{R}) \text{ et } \|u'\|_{\mathcal{M}} = \|u'\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$W^{1,1} \subset L^1 \cap BV \text{ et } W^{1,1} \text{ est un fermé de } L^1 \cap BV \text{ muni de la norme } \|u\|_{L^1 \cap BV} = \|u\|_{L^1} + \|u'\|_{\mathcal{M}}$$

$$\text{Soit } \Delta \text{ une subdivision de } \mathbb{R} : \dots \leq x_{i-1} \leq x_i \leq x_{i+1} \leq \dots$$

On a si $u \in BV(\mathbb{R})$,

$$\|u'\|_{\mathcal{M}} = \sup_{\Delta} \left(\sum_i |u(x_i) - u(x_{i-1})| \right)$$

et

$$\langle u', \phi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} u \phi' dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(\mathbb{R})$$

$u' \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists C > 0$ vérifiant

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u \phi' dx \right| \leq C \|\phi\|_{\infty}$$

La plus petite constante C est $\|u\|_{\mathcal{M}}$

On peut montrer que $BV(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$.

Théorème 3.1 ([2])

Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $q \equiv 0$; alors il existe une solution entropique du problème

(1.1)–(1.2). De plus $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^1(\mathbb{R}))$, $(u(t))$ tend vers $u(0)$ dans L^1 quand t tend

vers 0) et $\forall t$ $u(\cdot, t) \in BV$. Avec les estimations :

$$i) \|u\|_{L(\mathbb{R} \times]0, T[)} \leq \|u_0\|_{L(\mathbb{R})}$$

$$ii) TV(u(\cdot, t)) \leq TV(u_0) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$iii) \exists C > 0, \text{ tel que } \int_{\mathbb{R}} |u(x, t_1) - u(x, t_2)| dx \leq C |t_1 - t_2| TV(u_0) \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T]$$

On note $u(x, t) = S(t)u_0(x)$

On peut montrer que $S(t)$ se prolonge par densité en une application :

$$S(t) : L^1 \mapsto L^1 \text{ contractante, i.e. } \|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{L(\mathbb{R})} \leq \|u_0 - v_0\|_{L(\mathbb{R})}$$

3.2-Unicité de la solution entropique

Théorème 3.2 (Kruzkov [4])

Soit $(u_0, v_0) \in (L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}))^2$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $q \equiv 0$; soit u une solution entropique de

(1.1)–(1.2) et v une solution entropique de (1.1) et de $u(x, 0) = v_0(x)$. On pose

$$M = \text{Max} \{ |f'(s)| ; s \in [-A, A] \} \text{ avec } A = \text{Max} \{ \|u_0\|_{L(\mathbb{R})}, \|v_0\|_{L(\mathbb{R})} \}$$

Alors, on a $\forall t \in]0, T[$ et $\forall a \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{-a}^a |u(x,t) - v(x,t)| dx \leq \int_{-a-Mt}^{a+Mt} |u_0(x) - v_0(x)| dx$$

Théorème 3.3 (Kruzkov [4])

Si dans les hypothèses du théorème 3.2, $q \neq 0$, avec

- i) $q \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- ii) q est une fonction Lipschitzienne en u (resp. en x) uniformément par rapport à x (resp. par rapport à u).
- iii) $q(0, \cdot)$ est bornée.

Alors on a le même résultat que dans le théorème 3.2 avec

$$\int_{-a}^a |u(x,t) - v(x,t)| dx \leq e^{\alpha} \int_{-a-Mt}^{a+Mt} |u_0(x) - v_0(x)| dx$$

Où α est la constante de Lipschitz de q par rapport à u .

4-Résolution du problème de Riemann

Soit le problème de Riemann :

$$(4.1) \quad u_t + f(u)_x = 0 \quad \text{pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, T[$$

$$(4.2) \quad u(x,0) = \begin{cases} u_g & \text{pour } x < 0 \\ u_d & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, si on suppose que f est strictement convexe i.e. $f'' > 0$, le problème de Riemann admet pour solution entropique :

i) Si $u_g = u_d$, on a la solution constante $u(x,t) = u_g = u_d$.

ii) Si $u_g > u_d$, on a la solution (onde de choc):

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{pour } x < \sigma t \\ u_d & \text{pour } x > \sigma t \end{cases}$$

avec

$$\sigma = \frac{f(u_g) - f(u_d)}{u_g - u_d}$$

iii) Si $u_g < u_d$, on a la solution (onde de détente):

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x \leq f'(u_g)t \\ v(\xi), \xi = x/t, v \text{ est tel que } f'(v(\xi)) = \xi & \text{si } f'(u_g)t \leq x \leq f'(u_d)t \\ u_d & \text{si } x \geq f'(u_d)t \end{cases}$$

Si f est linéaire on a une discontinuité de contact. Si f est ni convexe ni concave, la situation devient plus complexe (voir par exemple LeRoux [7]).

5- Schémas numériques pour les lois scalaires (cas $q \equiv 0$)

On s'intéresse à l'approximation numérique de la solution entropique du problème (1.1) – (1.2).

5.1- Schémas de type différences finies

Soit h le pas d'espace et k le pas de temps, relié à h par le nombre fixé $r = k/h$

On pose $\Delta = (h, k)$

$$(5.1) \quad u_{\Delta}(x,t) = u_j^n \quad \text{pour } (x,t) \in I_j \times J_n$$

avec $I_j \times J_n =](j-1/2)h, (j+1/2)h[\times](n-1/2)k, (n+1/2)k[\quad \forall j \in \mathbb{Z} \text{ et } n \leq N = E(T/k)+1$
où E désigne la fonction partie entière.

On pose :

$$(5.2) \quad u_j^0 = \frac{1}{h} \int_{I_j} u_0(x) dx \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

On posera $x_j = jh$, $x_{j+1/2} = (j+1/2)h$, $t_n = nk$, $t_{n+1/2} = (n+1/2)k$

5.2-Schémas explicites

Définition 5.1

Un schéma explicite associé à (1.1) est dit conservatif à $2p+1$ points ($p \in \mathbb{N}^*$ donné) s'il s'écrit sous la forme

$$(5.3) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \tau (g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n)$$

avec

$$g_{j+1/2}^n = g(u_{j-p+1}^n, \dots, u_{j+p}^n)$$

La fonction g s'appelle le flux numérique.

Définition 5.2

Le schéma (5.3) est dit consistant si

$$(5.4) \quad g(u, \dots, u) = f(u)$$

Soit $\Delta = (\Delta x, \Delta t)$; $u^n(x) = u_j^n$ pour $x_j \leq x \leq x_{j+1}$

On pose : $u_{\Delta}(x, t) = u_j^n$ pour $x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$ et $t_{n-1/2} < t < t_{n+1/2}$

Définition 5.3

Le schéma (5.3) est

1- L^∞ stable s'il existe une constante C_1 ne dépendant pas de h et k telle que

$$\|u_{\Delta}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_1 \quad \forall t \leq T.$$

2- BV stable s'il existe une constante C_2 ne dépendant pas de h et k telle que

$$\text{TV}(u_{\Delta}(\cdot, t)) \leq C_2 \quad \forall t \leq T.$$

3- L^∞ D si

$$\|u_{\Delta}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad \forall t \leq T.$$

4- TVD si

$$\text{TV}(u_{\Delta}(\cdot, t)) \leq \text{TV}(u_0) \quad \forall t \leq T.$$

Définition 5.4

On dira que le schéma (5.3) est consistant avec la condition d'entropie si $\forall (\eta, F)$ couple d'entropie-flux d'entropie il existe $G \in C^1(\mathbb{R}^{2k}, \mathbb{R})$ tel que

$$(5.5) \quad \eta(u_j^{n+1}) - \eta(u_j^n) + r(G_{j+1/2}^n - G_{j-1/2}^n) \leq 0$$

avec

$$G_{j+1/2}^n = G(u_{j-p+1}^n, \dots, u_{j+p}^n)$$

et

$$G(u, \dots, u) = F(u)$$

5.3-Théorèmes de convergence:

Théorème 5.1(Lax-Wendroff [6]):

Soit le schéma explicite:

$$(5.6) \quad u_j^{n+1} = H(u_{j-k}^n, \dots, u_{j+k}^n)$$

conservatif consistant et une suite $(\Delta_k = (\Delta_k^x, \Delta_k^t))$ avec $\Delta_k^x \rightarrow 0$ (donc $\Delta_k^t \rightarrow 0$ car r est fixé), telle que

$$(i) \quad \|u_{\Delta_k}\|_{L^\infty(]0,T[, \mathbb{R})} \leq C(T, u_0)$$

$$(ii) \quad u_{\Delta_k} \rightarrow u \text{ p.p.}$$

Alors u est solution faible de (1.1)-(1.2). Si de plus le schéma est entropique, alors u est la solution entropique de (1.1)-(1.2).

Théorème 5.2:

Si on suppose que le schéma (5.3) est tel que

1- Conservatif consistant .

2- Flux numérique localement Lipschitzien .

3- L^∞ stable et BV stable i.e.

$\exists C_1$ et C_2 deux constantes telles que

$$\|u_{\Delta}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_1 \quad \forall t \leq T; (\forall \Delta)$$

et

$$TV(u_{\Delta}(\cdot, t)) \leq C_2 \quad \forall t \leq T; (\forall \Delta)$$

Alors il existe une suite (Δ_k) telle que $(\Delta_k^x) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$ et

$$u_{\Delta_k} \rightarrow u \text{ quand } k \rightarrow \infty \text{ dans } L^\infty(]0, T[; L^1_{\text{loc}})$$

et u est solution faible de (1.1)–(1.2).

Si de plus le schéma est entropique, alors

$$u_\Delta \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(]0, T[; L^1_{\text{loc}}) \text{ quand } \Delta \rightarrow 0.$$

et u est la solution entropique de (1.1)–(1.2).

5.4– Schémas TVD:

Le schéma (5.3) est TVD (à Variation Totale Décroissante) si

$$\text{TV}(u^{n+1}) \leq \text{TV}(u^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si on écrit le schéma (5.3) sous forme incrémentale :

$$(5.7) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-1/2}^n \Delta_+ u_{j-1}^n + D_{j+1/2}^n \Delta_+ u_j^n$$

avec

$$C_{j+1/2}^n = r \frac{f(u_{j+1}^n) - g_{j+1/2}^n}{\Delta_+ u_j^n}$$

$$D_{j+1/2}^n = r \frac{f(u_j^n) - g_{j+1/2}^n}{\Delta_+ u_j^n}$$

La viscosité numérique du schéma est donnée par

$$Q_{j+1/2}^n = C_{j+1/2}^n + D_{j+1/2}^n$$

Théorème 5.3 (caractérisation des schémas TVD)

Le schéma (5.7) est TVD si (et seulement si dans le cas des schémas à trois points c.a.d. $p = 1$ dans la définition 5.1)

$$C_{j+1/2}^n \geq 0 \quad , \quad D_{j+1/2}^n \geq 0 \quad \text{et} \quad C_{j+1/2}^n + D_{j+1/2}^n \leq 1$$

Remarque 5.1

On peut construire des schémas TVD quasi d'ordre deux en utilisant soit la technique de l'antidiffusion corrigée [1], soit la méthode de Van-Leer [9].

REFERENCES

- [1] BOOK D.L., BORIS J.P. and HAIN K., *Flux-Corrected-Transport II: Generalisation of the method*, J. Comp. phys., 18, (1975), pp.248–283.
- [2] GALLOUET T., Cours de DEA Université de Grenoble (1986–1987).
- [3] HARTEN A., *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Phys., 49, (1983), pp. 357–393.
- [4] KRUSKOV N., *First order quasilinear equations in several independent variables*, Math. USSR Sb., 10, (1970), pp. 217–243.
- [5] LAX P.D. , *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, SIAM Regional Conference in Appl. Math. , 11, (1973) .
- [6] LAX P.D.and WENDROFF B., *Systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), pp.217–237 .
- [7] LEROUX A.Y., *Approximation de quelques problèmes hyperboliques non-linéaires* , Thèse d'Etat , Rennes (1979) .
- [8] SMOLLER J.A. , *Shocks waves and reaction diffusion equations* , Springer Verlag, (1983) .
- [9] VAN-LEER B., *Towards the ultimate conservative difference scheme. V* , J. Comp. Phys. 32, (1979) p.101–136 .
- [10] J.P. VILA , *Sur la théorie et l'approximation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires,application aux équations de Saint Venant et à la modélisation des avalanches de neige dense*, Thèse , Paris VI (1986) .

CHAPITRE II

**On a class of implicit and explicit schemes of Van-Leer type
for scalar conservation laws**

travail réalisé avec J.P. Vila

Publié dans M^2AN , 23, (1989), pp.261-282.

On a class of implicit and explicit schemes of Van-Leer type for scalar conservation laws

A. CHALABI (+) AND J. P. VILA (++)

Abstract: The convergence of second order accurate schemes towards the entropy solution of scalar conservation laws is studied . We make use of the Van-Leer method to get an affine approximation of the flux. The construction procedure leads to Total Variation Diminishing (TVD) schemes in the implicit and in the explicit cases.

The proposed schemes can be presented as corrected upwind schemes. The physical problems where the flux is the physical variable, motivated this study .

Introduction

Recently much effort has been made for obtaining second order accurate schemes for conservation laws, which do not exhibit spurious oscillations, near discontinuities of the solution, and lead to sharp discrete shock solutions. In general the first order accurate schemes, give poor resolution to discontinuities, because of their important numerical diffusion. First the construction procedure of nonoscillatory second order schemes was the Flux Corrected Transport (FCT) of Book-Boris-Hain [1]. This approach is based on the limitation of the numerical flux. Some years ago Van-Leer [9] derived a scheme using a flux limiter based on the affine approximation of the solution in each cell of the grid. More recently other authors have dealt with the high order schemes: HARTEN [3], LE ROUX [4], MAJDA and OSHER [5], MOCK [6], OSHER and CHAKRAVARTHY [7], VILA [10] .

For all the proposed schemes, we prove that these schemes are TVD together with the convergence of the approximate solution towards the entropy satisfying solution. This paper is built as follows: Section 1 is devoted to the statement of the problem, where we review the relevant theory of weak solution of scalar conservation laws. In § 2, we do the same for the theory of approximate solutions. Section 3 is concerned with the construction of second order accurate explicit schemes and the proof of convergence results related to the used limiters. In section 4 we construct a high order implicit scheme, for which we prove an entropy inequality. Finally § 5 gives results of numerical experiments

(+) Tour IRMA , Laboratoire TIM3 , BP 68 , 38402 Saint-Martin d'Hères , France

(++) CEMAGREF , Division Nivologie , BP 76 , 38402 Saint-Martin d'Hères , France

1-STATEMENT OF THE PROBLEM:

We consider the numerical solution of the following problem: Find a bounded u satisfying the quasi-linear equation:

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

for $(x,t) \in \mathbb{R} \times]0, T[$; $T > 0$ and

$$(1.2) \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

with $f \in C^1(\mathbb{R})$ and $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV_{loc}(\mathbb{R})$

where $BV_{loc}(\mathbb{R})$ denotes the space of the locally bounded variation functions.

We seek a weak solution to the problem (1.1)-(1.2), i.e. a bounded function $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[)$ satisfying :

$$(1.3) \quad \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0$$

for all test functions $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[)$ with compact support in $\mathbb{R} \times]0, T[$.

The solution to (1.1)-(1.2) is not necessarily unique and the physical one is characterized by the following entropy condition:

$$(1.4) \quad \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} \left(\eta(u) \frac{\partial \phi}{\partial t} + F(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt \geq 0$$

for all $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ with compact support in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, and $\phi \geq 0$, where η is the entropy function and F the entropy flux associated with the entropy function η .

Usually, when we deal with the numerical solution to the problem (1.1)-(1.2), we assume that the solution u is constant or affine in each cell of the grid. However some physical problems like reservoirs simulation use as data the flux $f(u)$ instead of the solution u . Because of this the proposed schemes are based on the affine approximation of the flux $f(u)$. The constructed explicit and implicit schemes are TVD second order accurate and the approximate solution given by these schemes converges towards the entropy solution of (1.1)-(1.2). The studied schemes can be presented as corrected upwind schemes.

2-PRELIMINARIES:

Let h be the spatial grid size and k be the time grid size related to h by the fixed positive number r through

$$r = \frac{k}{h}$$

A weak solution u to the problem (1.1)-(1.2) is approximated by a function u_h defined on $[\mathbb{R}_x] \times [0, T]$ by

$$(2.1) \quad u_h(x, t) = u_j^n \quad \text{for } (x, t) \in I_j \times J_n$$

with

$$I_j \times J_n = \left] \left(j - \frac{1}{2} \right) h, \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right[\times \left] \left(n - \frac{1}{2} \right) k, \left(n + \frac{1}{2} \right) k \right[\quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$$

such that $n \leq N = \lceil T/k \rceil + 1$; where $[\alpha]$ denotes the integer part of α .

The initial condition (1.2) is projected into the space of piecewise constant functions by :

$$(2.2) \quad u_j^0 = \frac{1}{h} \int_{I_j} u_0(x) dx \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

the studied schemes are written in conservation form

$$(2.3) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - r \left(G_{j+\frac{1}{2}} - G_{j-\frac{1}{2}} \right)$$

where $G \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ and is given by :

$$(2.4) \quad G_{j+\frac{1}{2}} = G(u_{j-p+1}^n, \dots, u_{j+p}^n; u_{j-q+1}^{n+1}, \dots, u_{j+q}^{n+1})$$

G is the numerical flux, with the consistency condition :

$$(2.5) \quad G(u, \dots, u; u, \dots, u) = f(u)$$

the scheme (2.4) contains the explicit and implicit cases.

It is well known that a crucial estimate required in convergence proofs of difference schemes is a bound on the total variation of the solution.

The total variation, $TV(u^{n+1})$ is defined by :

$$(2.6) \quad TV(u^{n+1}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}|$$

an important class of difference schemes is those which are Total Variation Diminishing (TVD), that

is :

$$(2.7) \quad \text{TV}(u^{n+1}) \leq \text{TV}(u^n)$$

we recall some useful properties of the TVD character. Let $\Delta_+ v_j = v_{j+1} - v_j$, in the explicit case the scheme (2.3) may be written in an incremental form:

$$(2.8) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta_+ u_{j-1}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta_+ u_j^n$$

sufficient conditions for the scheme (2.8) to be TVD are (see[3]):

$$(2.9) \quad 0 \leq C_{j+\frac{1}{2}}^n, \quad 0 \leq D_{j+\frac{1}{2}}^n, \quad C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1$$

the incremental form of the implicit scheme is :

$$(2.10) \quad u_j^n = u_j^{n+1} + C_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta_+ u_{j-1}^{n+1} - D_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta_+ u_j^{n+1}$$

it is shown in [3] that sufficient conditions for the scheme (2.10) to be TVD are :

$$(2.11) \quad -\infty < C \leq C_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \leq 0 \quad \text{and} \quad -\infty < C \leq D_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \leq 0$$

where C is a constant .

Let f be the flux of the scalar conservation law, we suppose that

$$f = f_1 + f_2 \quad \text{such that } f_1' \geq 0 \quad \text{and } f_2' \leq 0$$

this decomposition exists always for a general f.

The general form of the proposed schemes in explicit or implicit cases is :

$$(2.12) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \tau \Delta_+ G_{j-\frac{1}{2}}$$

To get second order accuracy in space and first order in time we take :

$$(2.13) \quad G_{j-\frac{1}{2}} = g_{j-\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \delta_{1,j-1} - \frac{h}{2} \delta_{2,j}$$

where

$$g_{j-\frac{1}{2}} = f_1(u_{j-1}) + f_2(u_j)$$

is an upwind numerical flux associated with the decomposition of f ,
and

$$(2.14) \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} \sigma \text{ Min} \left\{ |\hat{\delta}_{i,j}|, \frac{a}{h} |f_i(u_{j+1}) - f_i(u_j)|, \frac{a}{h} |f_i(u_j) - f_i(u_{j-1})| \right\} \\ \text{if } \sigma = \text{sgn}(\hat{\delta}_{i,j}) = \text{sgn}[f_i(u_{j+1}) - f_i(u_j)] = \text{sgn}[f_i(u_j) - f_i(u_{j-1})] \\ 0 \text{ elsewhere} \end{cases}$$

where

$$\hat{\delta}_{i,j} = \frac{f_i(u_{j+1}) - f_i(u_{j-1})}{2h}$$

$i = 1, 2$ and a is a positive constant depending on the type of limitations such that : $0 < a \leq 2$.

Remark 2.1:

If the flux f is convex, the upwind flux associated with the decomposition of f , coincides with the E.-O. numerical flux.

To obtain second order accuracy in space and in time, the numerical flux is taken to be :

$$(2.15) \quad G_{j-\frac{1}{2}} = g_{j-\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \delta_{1,j-1} - \frac{h}{2} \delta_{2,j} - \frac{\varepsilon k}{2} [f_1'(u_{j-1}) \delta_{1,j-1} + f_2'(u_j) \delta_{2,j}]$$

$\varepsilon = -1$ in the implicit scheme and $\varepsilon = +1$ in the explicit scheme.

From the formula (2.14), there exists $\alpha_{i,j+1/2}$ and $\beta_{i,j-1/2}$ such that

$$(2.16) \quad \begin{aligned} 0 \leq \alpha_{i,j+\frac{1}{2}} \leq a \quad \text{and} \quad 0 \leq \beta_{i,j-\frac{1}{2}} \leq a \\ \delta_{i,j} = \alpha_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{f_i(u_{j+1}) - f_i(u_j)}{h} = \beta_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{f_i(u_j) - f_i(u_{j-1})}{h} \end{aligned}$$

Remark 2.2:

The correction of the slope δ is given by (2.14) or by (2.16) once α and β are known.

The following proposition shows that there is a relation between the second order accuracy and the choice of α and β .

Proposition 2.1:

if $\alpha = 1 + O(h)$ and $\beta = 1 + O(h)$ in (2.16) ; then the scheme (2.12)-(2.13) is second order accurate in space; and the scheme (2.12)-(2.15) is second order accurate in space and in time.

Proof:

Since for $\alpha=\beta=1$, the scheme (2.12)-(2.13) is second order accurate in space (by a Taylor expansion). It suffices to check that :

$$O(h)[f(u_{j+1})-f(u_j)] = O(h^2)$$

we have :

$$\begin{aligned} O(h)[f(u_{j+1})-f(u_j)] &= O(h)f'(\xi_{j+1/2})(u_{j+1}-u_j) \\ &= O(h)hf'(\xi_{j+1/2})u_x(\xi_{j+1/2}) \\ &= O(h^2) \end{aligned}$$

hence the scheme (2.12)-(2.13) is second order accurate in space .With similar step we show that the scheme (2.12)-(2.15) is second order in space and in time .

3-APPROXIMATION OF (1.1)-(1.2) BY SECOND ORDER EXPLICIT SCHEMES:

In this section ,we consider explicit schemes of the form :

$$(3.1) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \tau \Delta_+ G_{j-\frac{1}{2}}^n$$

the numerical flux G is defined according to the order of accuracy .

3.1 - SECOND ORDER ACCURACY IN SPACE :

To get a second order accurate scheme in space and first order in time ; we take the numerical flux given by :

$$(3.2) \quad G_{j-\frac{1}{2}}^n = g_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{h}{2}\delta_{1,j-1}^n - \frac{h}{2}\delta_{2,j}^n$$

where g is an upwind flux associated with the decomposition of f . The correction is made separately through f_1 and f_2 ; i . e . :

$$\delta_{1,j}^n = \frac{a}{h} \alpha_{1,j+\frac{1}{2}}^n [f_1(u_{j+1}^n) - f_1(u_j^n)] = \frac{a}{h} \beta_{1,j-\frac{1}{2}}^n [f_1(u_j^n) - f_1(u_{j-1}^n)]$$

$$\delta_{2,j}^n = \frac{a}{h} \alpha_{2,j+\frac{1}{2}}^n [f_2(u_{j+1}^n) - f_2(u_j^n)] = \frac{a}{h} \beta_{2,j-\frac{1}{2}}^n [f_2(u_j^n) - f_2(u_{j-1}^n)]$$

with $0 \leq \alpha_{i,k}, \beta_{i,k} \leq 1$; $i=1,2$, and $k \in \mathbb{Q}$.

This scheme contains as a particular case the approximation of conservation laws with decreasing or increasing flux as in the case of the reservoir simulation problems .

The scheme (3.2) is written as :

$$(3.3) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta_+ u_{j-1}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta_+ u_j^n$$

with

$$(3.4) \quad \begin{cases} C_{j-\frac{1}{2}}^n = (1 + \frac{a}{2} \beta_{1,j-\frac{1}{2}}^n - \frac{a}{2} \alpha_{1,j-\frac{1}{2}}^n) r \frac{\Delta_+ f_1(u_{j-1}^n)}{\Delta_+ u_{j-1}^n} \\ D_{j+\frac{1}{2}}^n = (1 - \frac{a}{2} \beta_{2,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{a}{2} \alpha_{2,j+\frac{1}{2}}^n) r \frac{\Delta_+ f_2(u_j^n)}{\Delta_+ u_j^n} \end{cases}$$

and we choose

$$v_{1,j-\frac{1}{2}}^n = r \frac{\Delta_+ f_1(u_{j-1}^n)}{\Delta_+ u_{j-1}^n} \quad ; \quad v_{2,j+\frac{1}{2}}^n = r \frac{\Delta_+ f_2(u_j^n)}{\Delta_+ u_j^n}$$

since f_1 is an increasing function and f_2 is a decreasing function then $v_1 \geq 0$ and $v_2 \leq 0$.

Proposition 3.1:

Suppose that the CFL condition :

$$(3.5) \quad v = r (\sup_{|x| \leq \|u_0\|_{L^\infty}(\mathbb{R})} |f_1'(x)| + \sup_{|x| \leq \|u_0\|_{L^\infty}(\mathbb{R})} |f_2'(x)|) \leq 2 / (2+a)$$

is satisfied , then the scheme (3.3) is TVD and

Proof:

From (3.4) and using $0 < a \leq 2$ we deduce :

$$\begin{aligned} C_{j-\frac{1}{2}}^n &\geq \left(1 - \frac{a}{2} \alpha_{1,j-\frac{1}{2}}^n\right) v_{1,j-\frac{1}{2}}^n \\ &\geq \frac{2-a}{2} v_{1,j-\frac{1}{2}}^n \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} D_{j+\frac{1}{2}}^n &\geq -\left(1 - \frac{a}{2} \beta_{2,j+\frac{1}{2}}^n\right) v_{2,j+\frac{1}{2}}^n \\ &\geq -\left(\frac{2-a}{2}\right) v_{2,j+\frac{1}{2}}^n \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

we now show :

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1$$

Using C and D given in (3.4) we get :

$$\begin{aligned} C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n &= v_{1,j+\frac{1}{2}}^n - v_{2,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{a}{2} \left(\beta_{1,j+\frac{1}{2}}^n - \alpha_{1,j+\frac{1}{2}}^n\right) v_{1,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{a}{2} \left(\beta_{2,j+\frac{1}{2}}^n - \alpha_{2,j+\frac{1}{2}}^n\right) v_{2,j+\frac{1}{2}}^n \\ &\leq \left(\frac{2+a}{2}\right) v_{j+\frac{1}{2}}^n \end{aligned}$$

where

$$v_{j+\frac{1}{2}}^n = v_{1,j+\frac{1}{2}}^n - v_{2,j+\frac{1}{2}}^n$$

The CFL condition (3.5) yields

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1$$

to show (3.6), it suffices to prove that under (3.5) we get

$$C_{j-\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1$$

the use of expressions C and D gives

$$\begin{aligned} C_{j-\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n &= v_{1,j-\frac{1}{2}}^n - v_{2,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{a}{2} (\beta_{1,j-\frac{1}{2}}^n - \alpha_{1,j-\frac{1}{2}}^n) v_{1,j-\frac{1}{2}}^n + \frac{a}{2} (\beta_{2,j+\frac{1}{2}}^n - \alpha_{2,j+\frac{1}{2}}^n) v_{2,j+\frac{1}{2}}^n \\ &\leq \left(\frac{2+a}{2} \right) v \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

where condition (3.5) leads to

$$v \leq \frac{2}{2+a}$$

we thus obtain

$$\|u^{n+1}\|_{\infty} \leq \|u^n\|_{\infty} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

We note that for $a=1$; the CFL condition becomes :

$$v \leq \frac{2}{3}$$

and for $a=2$; we have

$$v \leq \frac{1}{2}$$

Using proposition 3.1 and applying Helly's theorem, we show that there exists a subsequence $\{u_m\}$ of (u_h) ; which converges towards a weak solution of (1.1)-(1.2).

To prove that the whole family (u_h) converges towards the entropy solution of (1.1)-(1.2), we slightly modify the definition of δ given in (2.14), as follows:

$$(3.7) \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} \sigma \text{Min} \left\{ |\hat{\delta}_{i,j}|, \frac{a}{h} |f_i(u_{j+1}) - f_i(u_j)|, \frac{a}{h} |f_i(u_j) - f_i(u_{j-1})|, ch^{\alpha-1} \right\} \\ \text{if } \sigma = \text{sgn}(\hat{\delta}_{i,j}) = \text{sgn}[f_i(u_{j+1}) - f_i(u_j)] = \text{sgn}[f_i(u_j) - f_i(u_{j-1})] \\ 0 \text{ elsewhere} \end{cases}$$

where $i = 1, 2$; $c > 0$ and $\alpha \in]0, 1[$.

Before stating the convergence of the whole family (u_h) towards the entropy solution of the problem (1.1)-(1.2), we recall a result of VILA [10].

Theorem 3.1 [10]:

Let us consider the following prediction-correction scheme:

$$(3.8) \quad \bar{U}_j^{n+1} = u_j^n - r \Delta_+ f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(3.9) \quad u_j^{n+1} = \bar{U}_j^{n+1} - \Delta_+ \bar{a}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}$$

If we suppose that :

(i) the scheme (3.8) is consistent with the conservation law (1.1) and its associated entropy condition [10].

(ii) $|\bar{a}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}| \leq e(h) \quad \forall j \in \mathbb{Z}; \lim e(h) = 0$ when h tends to 0.

Then if the approximate solution u_h constructed by (3.1) is bounded in $BV \cap L^\infty$; u_h converges towards u in L^1_{loc} and u is the entropy solution of (1.1)-(1.2).

Theorem 3.2:

Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV_{loc}(\mathbb{R})$; then under the CFL condition (3.5), the approximate solution u_h constructed by (2.1)-(3.1)-(3.2)-(3.7) converges towards the entropy solution of the problem (1.1)-(1.2).

Proof:

We write the scheme (3.1) in prediction-correction form as the following :

$$(3.10) \quad \bar{U}_j^{n+1} = u_j^n - r [(f_1(u_j^n) - f_1(u_{j-1}^n)) + (f_2(u_{j+1}^n) - f_2(u_j^n))]$$

$$(3.11) \quad u_j^{n+1} = \bar{U}_j^{n+1} - \Delta_+ \bar{a}_{j-\frac{1}{2}}^n$$

with

$$\bar{a}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{r h}{2} (\delta_{1,j-1}^n - \delta_{2,j}^n)$$

(3.10) is a monotone scheme, then it is consistent with the associated entropy condition for the problem (1.1)-(1.2). Using the bounded variation in space of the discrete solution since the scheme (3.3)-(3.4) is TVD and from formula (3.7) we have :

$$|\bar{a}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}| \leq r c h^\alpha \quad ; c > 0, \quad 1 \geq \alpha > 0.$$

Then by theorem 3.1, the approximate solution u_h converges towards the entropy solution of the problem (1.1)-(1.2) as h tends to zero

3.2-SECOND ORDER ACCURACY IN SPACE AND IN TIME :

By construction the scheme (3.1)-(3.2) is of quasi-order two in space and of first order in time. Now, we propose a scheme of quasi-order two in space and in time. For that we introduce the numerical flux G at the time step $(n+1/2)$, that is :

$$(3.12) \quad G_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = G_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{k}{2} [f_1'(u_{j-1}^n) \delta_{1,j-1}^n + f_2'(u_j^n) \delta_{2,j}^n]$$

in incremental form, the new scheme will be :

$$(3.13) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta_+ u_{j-1}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta_+ u_j^n$$

with :

$$(3.14) \quad \begin{cases} C_{j-\frac{1}{2}}^n = v_{1,j-\frac{1}{2}}^n [1 + \frac{1}{2} \beta_{1,j-\frac{1}{2}}^n (1 - v_{1,j}^n) - \frac{1}{2} \alpha_{1,j-\frac{1}{2}}^n (1 - v_{1,j-1}^n)] \\ D_{j+\frac{1}{2}}^n = -v_{2,j}^n [1 - \frac{1}{2} \beta_{2,j+\frac{1}{2}}^n (1 - v_{2,j+1}^n) + \frac{1}{2} \alpha_{2,j+\frac{1}{2}}^n (1 - v_{2,j}^n)] \end{cases}$$

α and β are given by (2.16)

Proposition 3.2

Under the CFL condition :

$$(3.15) \quad v = \tau [\sup|f_1'(x)| + \sup|f_2'(x)|] \leq \frac{1}{a} \left[-\left(1 + \frac{a}{2}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 + 2a} \right]$$

the sup is taken over the set $\{x ; |x| \leq \|u_0\|_\infty\}$

the scheme (3.13)-(3.14) is TVD and

$$(3.16) \quad \|u^{n+1}\|_{L^\infty} \leq \|u^n\|_{L^\infty} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proof:

From (3.14) we have

$$C_{j-\frac{1}{2}}^n \geq v_{1,j-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{a}{2} (1+v)\right)$$

$$C_{j-\frac{1}{2}}^n \geq 0 \quad \text{for } v \leq \frac{2}{a} - 1$$

therefore using (3.15) we get

$$C_{j-\frac{1}{2}}^n \geq 0$$

similarly we obtain

$$D_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0$$

to prove the TVD character, we have to show :

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1$$

using (3.14) we get

$$\begin{aligned} C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n &\leq v + \frac{a}{2}v + \frac{a}{2} \left(v_{1,j+\frac{1}{2}}^2 + v_{2,j+\frac{1}{2}}^2 \right) \\ &\leq \left(1 + \frac{a}{2}\right)v + \frac{a}{2}v^2 \end{aligned}$$

the condition (3.15) then gives :

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1$$

hence the scheme (3.13)-(3.14) is TVD .

Similarly we can prove that if (3.15) holds , then we have:

$$C_{j-\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1$$

hence

$$\|u^{n+1}\|_{\infty} \leq \|u^n\|_{\infty} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Remark 3.1:

In this case the constant a must satisfy $2 > a$ and for $a=1$ the CFL condition becomes:

$$v \leq \frac{\sqrt{17}-3}{2}$$

using proposition 3.2 and with the same step in the proof of theorem 3.2, we prove :

Theorem 3.3:

Let $u_0 \in L^{\infty}(\mathbb{R}) \cap BV_{loc}(\mathbb{R})$, if the CFL condition (3.15) holds, then the approximate family $\{u_h\}$ obtained by the scheme (2.1)-(3.7)-(3.13)-(3.14) converges towards the entropy solution of the problem (1.1)-(1.2) as h tends to zero .

4-APPROXIMATION OF (1.1)-(1.2) BY SECOND ORDER IMPLICIT SCHEMES:

Next we consider the approximation of the problem (1.1)-(1.2) by the following implicit scheme

$$(4.1) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \tau \Delta_+ G_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}$$

4.1-SECOND ORDER ACCURACY IN SPACE:

In the case of second order accuracy in space and first order in time the numerical flux is given by :

$$(4.2) \quad G_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = g_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{h}{2} \delta_{1,j-1}^{n+1} - \frac{h}{2} \delta_{2,j}^{n+1}$$

as in §3, g is the upwind flux and δ is given by (2.14) .

The scheme (4.2) can be written :

$$(4.3) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta_+ u_{j-1}^{n+1} + D_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta_+ u_j^{n+1}$$

with

$$(4.4) \quad \begin{cases} C_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2}\beta_{1,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_{1,j-\frac{1}{2}}^{n+1}\right) \frac{r \Delta_+ f_1(u_{j-1}^{n+1})}{\Delta_+ u_{j-1}^{n+1}} \\ D_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \left(-1 - \frac{1}{2}\beta_{2,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{1}{2}\alpha_{2,j+\frac{1}{2}}^{n+1}\right) \frac{r \Delta_+ f_2(u_j^{n+1})}{\Delta_+ u_j^{n+1}} \end{cases}$$

and (α, β) given (2.16) (at the time step $(n+1)$).

Let us set

$$\begin{cases} v_{1,j-\frac{1}{2}} = \frac{r \Delta_+ f_1(u_{j-1}^{n+1})}{\Delta_+ u_{j-1}^{n+1}} \\ v_{2,j+\frac{1}{2}} = \frac{r \Delta_+ f_2(u_j^{n+1})}{\Delta_+ u_j^{n+1}} \end{cases}$$

since f_1 is an increasing function and f_2 is a decreasing function then

$$v_{1,j-\frac{1}{2}} \geq 0 \quad \text{and} \quad v_{2,j+\frac{1}{2}} \leq 0$$

Proposition 4.1:

The implicit scheme (4.3)-(4.4) is unconditionally TVD and

$$\|u^{n+1}\|_{\infty} \leq \|u^n\|_{\infty} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proof:

According to lemma 3.2 [3], to prove the TVD character (4.3)-(4.4) it suffices to show that there exists $c > 0$ such that :

$$c \geq C_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \geq 0 \quad \text{and} \quad c \geq D_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \geq 0$$

from (4.4) we have :

$$\begin{aligned}
C_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{2} \beta_{1,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{1}{2} \alpha_{1,j-\frac{1}{2}}^{n+1}\right) v_{1,j-\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{2} \beta_{1,j-\frac{1}{2}}^{n+1}\right) v_{1,j-\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{3}{2} v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} &= - \left(1 - \frac{1}{2} \beta_{2,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{1}{2} \alpha_{2,j+\frac{1}{2}}^{n+1}\right) v_{2,j+\frac{1}{2}} \\
&\leq - \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_{2,j+\frac{1}{2}}^{n+1}\right) v_{2,j+\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{3}{2} v
\end{aligned}$$

hence there exists $c = 3/2 v$ which satisfies the required condition. From the third section we have

$$C_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \geq 0 \quad \text{and} \quad D_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \geq 0$$

then the scheme (4.3)-(4.4) is TVD.

(4.3) gives :

$$u_j^n = \left(1 + C_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + D_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}\right) u_j^{n+1} - C_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} u_{j-1}^{n+1} - D_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} u_{j+1}^{n+1}$$

thus

$$|u_j^n| \geq \left(1 + C_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + D_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}\right) |u_j^{n+1}| - C_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} |u_{j-1}^{n+1}| - D_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} |u_{j+1}^{n+1}|$$

hence

$$\|u^{n+1}\|_{\infty} \leq \|u^n\|_{\infty}$$

To prove the convergence towards the entropy solution we can use similar technics as in §2 (use of Ch^α), however when the flux f is convex we can make use of OSHER technics for the time continuous schemes, to get an entropy inequality, that is

$$\int_{u_j}^{u_{j+1}} \eta''(w) \left[G_{j+\frac{1}{2}} - f(w) \right] dw \leq 0$$

with η an entropy function and G the numerical flux given in (4.2). In the last inequality we dropped the superscript $n+1$ on u and G .

In practice it suffices to get this inequality for :

$$\eta(w) = \frac{w^2}{2}$$

then the entropy inequality becomes:

$$\int_{u_j}^{u_{j+1}} [G_{j+\frac{1}{2}} - f(w)] dw \leq 0$$

Lemma 4.1:

Let

$$(4.5) \quad I = \int_{u_j}^{u_{j+1}} [G_{j+\frac{1}{2}} - f(w)] dw$$

and

$$f'_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta_+ f_i(u_j)}{\Delta_+ u_j} \quad ; \quad i=1,2$$

then there exists $u_{j+1/2}$ between u_j and u_{j+1} such that :

$$(4.6) \quad I = \frac{1}{12} f''(u_{j+\frac{1}{2}}) (\Delta_+ u_j)^3 - \frac{1}{2} (\Delta_+ u_j)^2 \{ (1-\alpha) f'_{1,j+\frac{1}{2}} - (1-\beta) f'_{2,j+\frac{1}{2}} \}$$

proof:

by integration by parts of (4.5) we get

$$I = (\Delta_+ u_j) (G_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (f(u_j) + f(u_{j+1}))) + \frac{1}{2} \int_{u_j}^{u_{j+1}} f''(w) \{ (\frac{1}{2} \Delta_+ u_j)^2 - (w - \frac{1}{2} (u_j + u_{j+1}))^2 \} dw$$

since for all w between u_j and u_{j+1} we have

$$(\frac{1}{2} \Delta_+ u_j)^2 - (w - \frac{1}{2} (u_j + u_{j+1}))^2 \geq 0$$

then by the mean theorem there exists $u_{i+1/2}$ between u_j and u_{j+1} such that

$$\int_{u_j}^{u_{j+1}} f''(w) \{ (\frac{1}{2} \Delta_+ u_j)^2 - (w - \frac{1}{2} (u_j + u_{j+1}))^2 \} dw = f''(u_{j+\frac{1}{2}}) \int_{u_j}^{u_{j+1}} \{ (\frac{1}{2} \Delta_+ u_j)^2 - (w - \frac{1}{2} (u_j + u_{j+1}))^2 \} dw$$

$$= \frac{1}{6} f''(u_{j+\frac{1}{2}}) (\Delta_+ u_j)^3$$

and since

$$\begin{aligned} G_{j+\frac{1}{2}} &= f_1(u_j) + f_2(u_{j+1}) + \frac{h}{2} \delta_{1,j} - \frac{h}{2} \delta_{2,j+1} \\ &= f_1(u_j) + f_2(u_{j+1}) + \frac{1}{2} \alpha_{1,j+\frac{1}{2}} [f_1(u_{j+1}) - f_1(u_j)] - \frac{1}{2} \beta_{2,j+\frac{1}{2}} [f_2(u_{j+1}) - f_2(u_j)] \end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned} I &= (\Delta_+ u_j) \{ [f_1(u_j) - \frac{1}{2} (f_1(u_j) + f_1(u_{j+1}))] + [f_2(u_{j+1}) - \frac{1}{2} (f_2(u_j) + f_2(u_{j+1}))] \} \\ &\quad + (\Delta_+ u_j)^2 \left(\frac{1}{2} \alpha_{1,j+\frac{1}{2}} f'_{1,j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \beta_{2,j+\frac{1}{2}} f'_{2,j+\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{12} f''(u_{j+\frac{1}{2}}) (\Delta_+ u_j)^3 \end{aligned}$$

then

$$I = \frac{1}{12} f''(u_{j+\frac{1}{2}}) (\Delta_+ u_j)^3 - \frac{1}{2} (\Delta_+ u_j)^2 \left[(1 - \alpha_{1,j+\frac{1}{2}}) f'_{1,j+\frac{1}{2}} - (1 - \beta_{2,j+\frac{1}{2}}) f'_{2,j+\frac{1}{2}} \right]$$

Proposition 4.2:

Let $\gamma = \sup_{\|x\| \leq \|u_0\|_\infty} f''(x)$

then the scheme (4.3)-(4.4) defined by

$$(4.7) \quad \alpha_{1,j+\frac{1}{2}} = \text{Max} \left\{ 0, \text{Min} \left\{ 1, \frac{\Delta_+ f_1(u_{j-1})}{\Delta_+ f_1(u_j)}, 1 - \frac{\gamma}{f'_{1,j+\frac{1}{2}}} \Delta_+ u_j \right\} \right\}$$

$$(4.8) \quad \beta_{2,j+\frac{1}{2}} = \text{Max} \left\{ 0, \text{Min} \left\{ 1, \frac{\Delta_+ f_2(u_{j+1})}{\Delta_+ f_2(u_j)}, 1 + \frac{\gamma}{f'_{2,j+\frac{1}{2}}} \Delta_+ u_j \right\} \right\}$$

satisfies the inequality

$$(4.9) \quad \int_{u_j}^{u_{j+1}} [G_{j+\frac{1}{2}} - f(w)] dw \leq 0$$

Proof:

It is clear from (4.7) that if $\Delta_+ u_j \leq 0$ then $I \leq 0$. In the following let us consider the case where $\Delta_+ u_j > 0$. we will distinguish two cases :

a) if $\alpha_{1,j+1/2} = \beta_{2,j+1/2} = 0$, then we can check that

$$I = \int_{u_j}^{u_{j+1}} [f_1(u_j) + f_2(u_{j+1}) - f(w)] dw \leq 0$$

b) if $\alpha_{1,j+1/2} > 0$ or $\beta_{2,j+1/2} > 0$, we have

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{12} f'' \left(u_{j+\frac{1}{2}} \right) (\Delta_+ u_j)^3 - \frac{1}{2} \gamma (\Delta_+ u_j)^3 \\ &\leq \frac{1}{2} (\Delta_+ u_j)^3 \left[\frac{1}{6} f'' \left(u_{j+\frac{1}{2}} \right) - \gamma \right] \end{aligned}$$

from the definition of γ we get $I \leq 0$.

Such a scheme is TVD and satisfies the entropy condition. It is second order accurate in smooth regions outside of $f'_i = 0$, $i=1, 2$.

Remark 4.1:

The scheme may be defined by giving α_1 and α_2 , β_1 and β_2 , α_1 and β_2 or β_1 and α_2 .

From the second order accuracy preserving property stated in section 2, we observe that the choice of α in (4.7) and (4.8) preserves the second order accuracy of the used schemes.

We will make use of the following result due to VILA.

Theorem 4.1[10]:

If the numerical flux G is consistent with the conservative form of (1.1) and satisfies the condition

$$\int_{u_j}^{u_{j+1}} \eta''(w) \left[G_{j+\frac{1}{2}} - f(w) \right] dw \leq 0$$

where η is an entropy function.

Then the limit solution u of the implicit scheme:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \tau \Delta_+ G_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$$

is the entropy solution of (1.1)-(1.2).

Now we state a convergence result for our implicit scheme

Theorem 4.2:

Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV_{loc}(\mathbb{R})$; then under the hypothesis of proposition 4.2, the approximate family $\{u_h\}$ obtained by the scheme (4.3)-(4.4) converges towards the entropy solution of (1.1)-(1.2) as h tends to zero.

Proof:

The convergence of the family $\{u_h\}$ towards a weak solution of (1.1)-(1.2) is insured by proposition 4.1, and the convergence towards the entropy solution of (1.1)-(1.2) is a consequence of proposition 4.2 and theorem 4.1.

4.2-SECOND ORDER ACCURACY IN SPACE AND IN TIME:

The new scheme will take the form :

$$(4.10) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \tau \Delta_+ G_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$$

with

$$(4.11) \quad G_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = G_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{1}{2}k [f_1'(u_{j-1}^{n+1}) \delta_{1,j-1}^{n+1} + f_2'(u_j^{n+1}) \delta_{2,j}^{n+1}]$$

this scheme can be written as

$$(4.12) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta_+ u_{j-1}^{n+1} + D_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta_+ u_j^{n+1}$$

with

$$(4.13) \quad \begin{cases} C_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = v_{1,j-\frac{1}{2}} [1 + \frac{1}{2} \beta_{1,j-\frac{1}{2}} (1 - v_{1,j}) - \frac{1}{2} \alpha_{1,j-\frac{1}{2}} (1 - v_{1,j-1})] \\ D_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = -v_{2,j} [1 - \frac{1}{2} \beta_{2,j+\frac{1}{2}} (1 - v_{2,j+1}) + \frac{1}{2} \alpha_{2,j+\frac{1}{2}} (1 - v_{2,j})] \end{cases}$$

in (4.13) we omitted the subscript (n+1) for α, β and v .

$$v_{1,j} = f_1'(u_j^{n+1}) \quad , \quad v_{2,j} = f_2'(u_j^{n+1})$$

the scheme (4.12)-(4.13) is TVD if the coefficients C and D given in (4.13), are positive. To have

$$C_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \geq 0$$

it suffices that

$$1 \geq \frac{1}{2} \left(\alpha_{1,j-\frac{1}{2}} - \beta_{1,j-\frac{1}{2}} \right) (1 - v_{1,j-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} \beta_{1,j-\frac{1}{2}} (v_{1,j} - v_{j-1})$$

this condition holds, if we choose α and β so that

$$(4.14) \quad \begin{cases} |\beta_{1,j-\frac{1}{2}} (v_{1,j} - v_{1,j-1})| \leq 1 \\ |(\alpha_{1,j-\frac{1}{2}} - \beta_{1,j-\frac{1}{2}}) (1 - v_{1,j-1})| \leq 1 \end{cases}$$

similar conditions can be obtained to get :

$$D_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \geq 0$$

we can prove the following:

Proposition 4.3:

if $\alpha = 1 + O(h)$ and $\beta = 1 + O(h)$ the condition (4.14) holds in the smoothness regions and the second order is preserved too .

To prove the entropy character of the scheme (4.10)-(4.11) , we will write it in the following form:

$$(4.15) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \tau \Delta_+ g_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + \Delta_+ a_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}$$

with

$$g_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = f_1(u_{j-1}^{n+1}) + f_2(u_j^{n+1})$$

and

$$a_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = -\frac{1}{2} \tau k [f_1'(u_{j-1}^{n+1}) \delta_{1,j-1}^{n+1} + f_2'(u_j^{n+1}) \delta_{2,j}^{n+1}]$$

g is a numerical flux of an E-scheme ; it is then proved [7] that for all entropy flux F associated

with the entropy η , we have :

$$(4.16) \quad -\eta'(u_j) \Delta_+ g_{j-\frac{1}{2}} + \Delta_+ H(u_j) = \int_{u_j}^{u_{j+1}} \eta''(w) [g_{j+\frac{1}{2}} - f(w)] dw \leq 0$$

with

$$H(u_j) = F(u_j) + \eta'(u_j) [g_{j-\frac{1}{2}} - f(u_j)]$$

using (4.15) we write

$$\eta'(u_j^{n+1}) (u_j^{n+1} - u_j^n) = -r \eta'(u_j^{n+1}) \Delta_+ g_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + \Delta_+ a_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}$$

since η is convex we have

$$\eta(u_j^{n+1}) - \eta(u_j^n) \leq \eta'(u_j^{n+1}) (u_j^{n+1} - u_j^n)$$

then

$$\eta(u_j^{n+1}) - \eta(u_j^n) + r \Delta_+ H(u_j^{n+1}) = \int_{u_j}^{u_{j+1}} \eta''(w) [g_{j+\frac{1}{2}} - f(w)] dw + \eta'(u_j^{n+1}) \Delta_+ a_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}$$

thus

$$(4.17) \quad \eta(u_j^{n+1}) - \eta(u_j^n) + r \Delta_+ H(u_j^{n+1}) \leq \eta'(u_j^{n+1}) \Delta_+ a_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}$$

if we add in the definition of δ the argument ch^α , we prove that the right side of (4.17) converges towards zero as h tends to zero. Then the solution given by the scheme (4.12)-(4.13) satisfies the entropy condition at the limit.

We thus have the following :

Theorem 4.3:

Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV_{loc}(\mathbb{R})$, then under the hypothesis of proposition 4.2, the family $\{u_h\}$ given by the implicit scheme (4.12)-(4.13) converges towards the entropy solution of the problem (1.1)-(1.2) as h tends to zero.

Inversion property of the regular part of the nonlinear iteration :

If the flux f is an increasing function, then the implicit scheme (4.12)-(4.13) may be written :

$$\Psi(u)_j^{n+1} + \phi(u)_j^{n,n+1} = 0$$

where

$$\Psi(u)_j^{n+1} = u_j^{n+1} + r [f(u_j^{n+1}) - f(u_{j-1}^{n+1})]$$

$$\phi(u)_j^{n,n+1} = \frac{r h}{2} \Delta_+ \delta_{j-1}^{n+1} + u_j^n$$

Proposition 4.3:

ψ is invertible

Proof:

It suffices that there exists $C > 0$ such that :

$$\|\Psi'(u)w\|_{l^\infty} \geq C \|w\|_{l^\infty} \quad \forall w \in l^\infty$$

we have

$$\Psi'(u)w = w_j + r f'(u_j)w_j - r f'(u_{j-1})w_{j-1}$$

let

$$\Psi'(u)w = b$$

with

$$b_j = w_j (1 + a_j) - a_{j-1} w_{j-1}$$

and $a_j = r f'(u_j) > 0$; a_j is bounded since $\|u_j\|_\infty \leq \text{constant}$
thus

$$b_j + a_{j-1} w_{j-1} = w_j (1 + a_j)$$

hence

$$\sum_j b_j^2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) + \sum_j a_j^2 w_j^2 (1 + \varepsilon) \geq \sum_j (1 + a_j)^2 w_j^2 \quad ; \quad \forall \varepsilon > 0$$

If

$$(1 + \varepsilon) \sup \frac{a_j^2}{(1 + a_j^2)} < 1$$

we get

$$\sum_j b_j^2 \geq \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \right) \sum_j w_j^2 \quad \text{i.e.} \quad \|\psi'(u)w\|_{1^\infty} \geq \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \right) \|w\|_{1^\infty}$$

then, by the local inversion theorem we obtain that ψ is invertible and from this property we deduce the existence and the uniqueness of the solution of the nonlinear iteration :

$$\psi(u^{N+1}) + \phi(u^N) = 0 \quad N \in \mathbb{N}$$

5-NUMERICAL EXPERIMENTS:

We compute the solution to the cauchy problem, associated with the Buckley_Leverett equation with a Riemann data :

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{4u^2}{4u^2 + (1-u)^2} \right] = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{if } 3h \geq x \geq 0 \\ 0 & \text{if } 1 \geq x > 3h \end{cases} \end{cases}$$

where h is the spatial step. The exact solution contains a shock and a rarefaction part and it is given by

$$(5.2) \quad u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq 3h \\ v(\xi) & \text{if } 3h \leq x \leq f(u_*)t + 3h \\ 0 & \text{if } x > f(u_*)t + 3h \end{cases}$$

with

$$\xi = \frac{x - 3h}{t}, \text{ and } v \text{ satisfies: } f(v(\xi)) = \xi, \quad u_* = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

in this example $f' = f_1'$, since $f \geq 0$.

1) We compute the solution at the time $t = 0.24$, using the explicit schemes (3.1)-(3.2) and (3.1)-(3.12), we compare this computed solution with the one given by the first order scheme and the one given by the exact solution (FIG.5.1). We observe that in this explicit second order accuracy in space, the first order and the second order accuracy in time give the same solution.

2) The computed solution at the time $t = 0.24$, by the implicit schemes (4.1)-(4.2) and (4.1)-(4.11) is presented in FIG.5.2, the non linearity is treated using the following iterative technic: We apply Newton method to the operator ψ to get the iteration:

$$(5.3) \quad u^{N+1} = u^N + \psi^{-1}(u^N) \left[u^n + \frac{r h}{2} \delta_+^N - \psi(u^N) \right]$$

this iteration is made inside every step of time, u^n denotes the value of u at the time $n \Delta t$, u^N denotes the value of u at the N^{th} iteration; we recall that

$$\psi(u)_j^{n+1} = u_j^{n+1} + r [f(u_j^{n+1}) - f(u_{j-1}^{n+1})]$$

In this implicit scheme there is a difference between the first order and the second order accuracy in time.

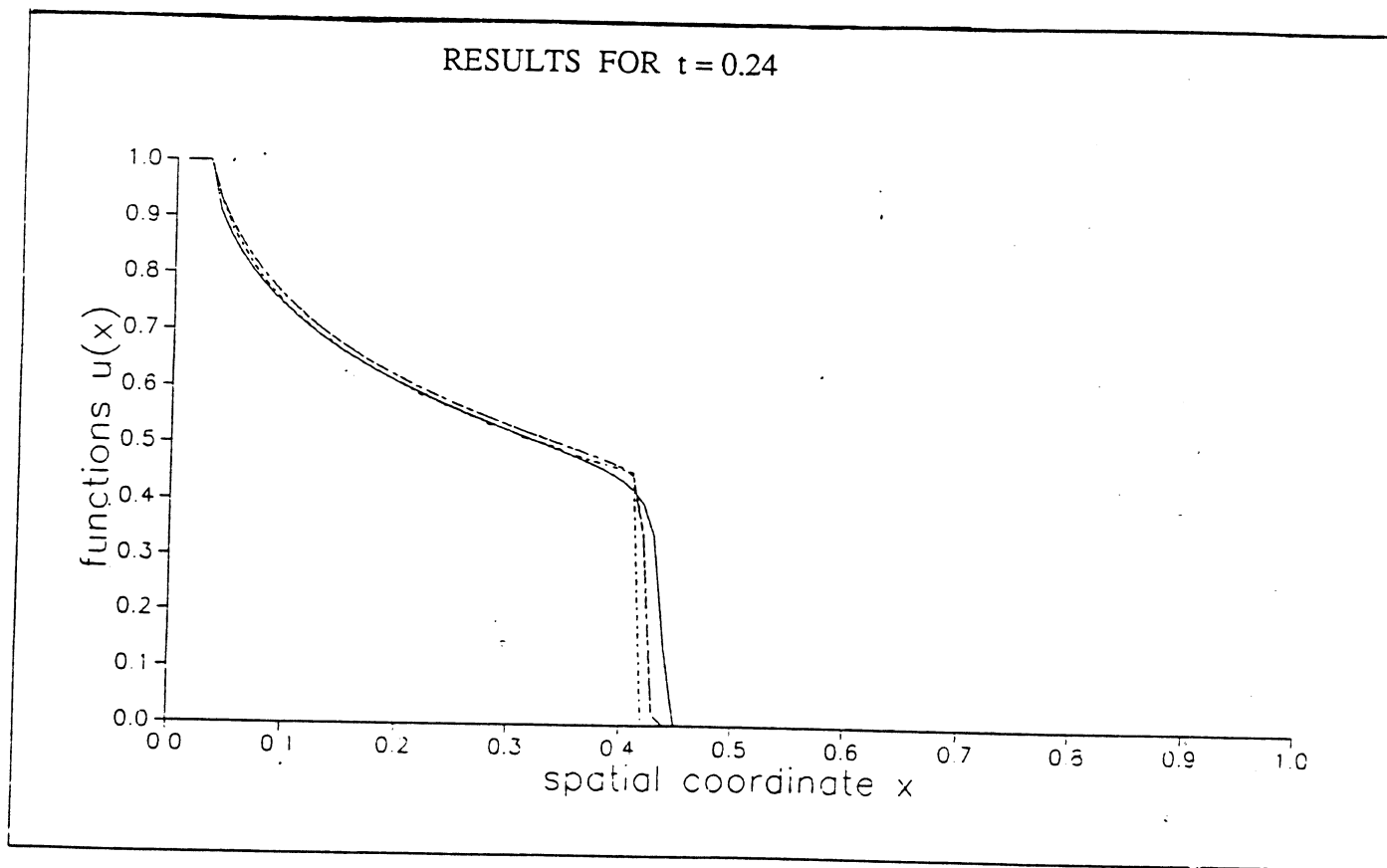


FIG 5.1. *Explicit schemes.* $DT = 0.003$, $C.F.L.number = 0.6$; --- exact solution, - - - computed solution by first order scheme, . . . second order in space first order in time, . . . second order in space and in time.

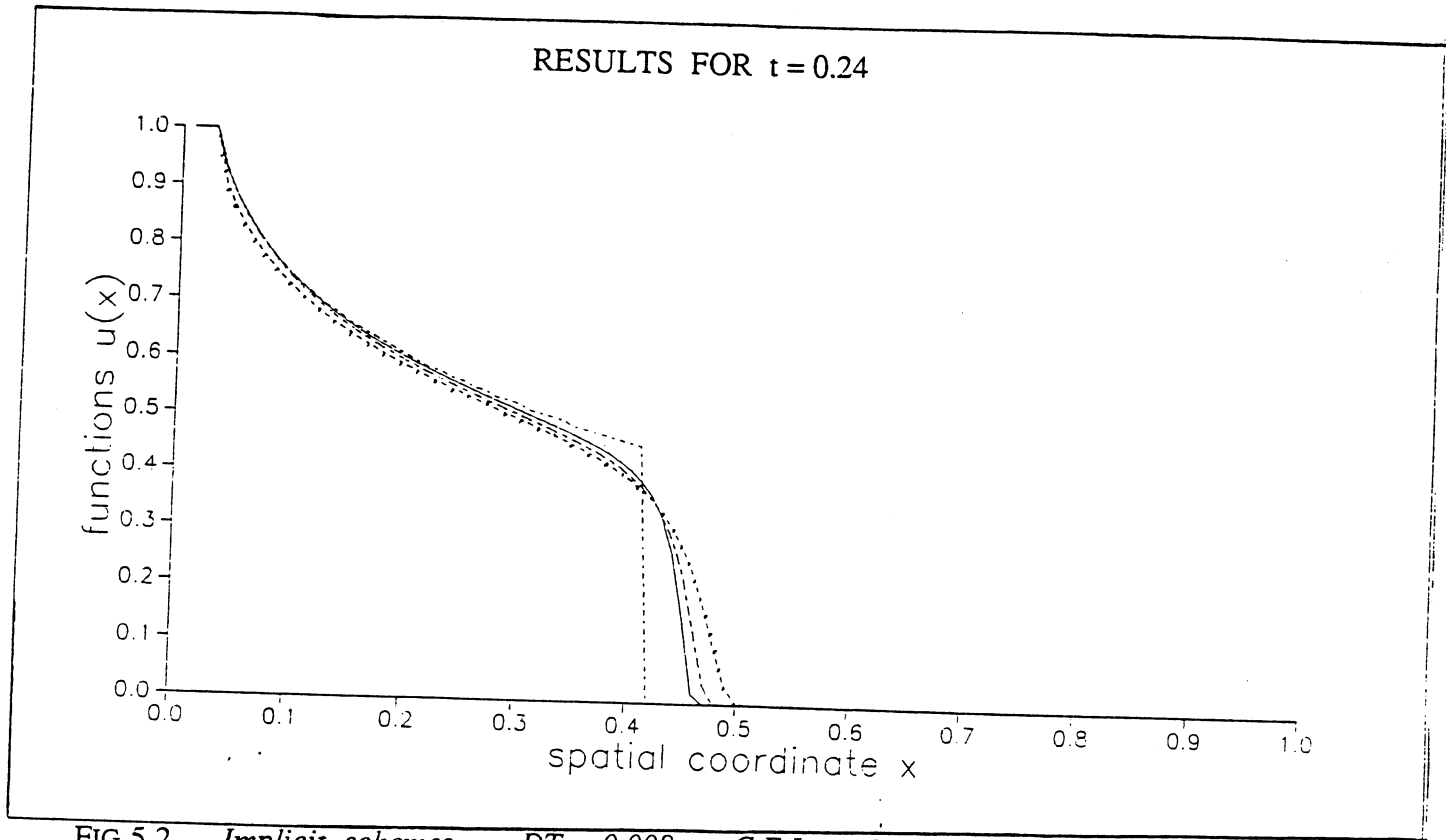


FIG 5.2. *Implicit schemes.* $DT = 0.008$, $C.F.L.number = 1.6$; --- exact solution , - - - computed solution by first order scheme , . . . second order in space first order in time , - . - second order in space and in time .

Acknowledgment . The authors are grateful to professor Thierry Gallouet for proposing the subject of this study and for a number of stimulating discussions .

REFERENCES

- [1] D.L. BOOK , J.P. BORIS and K. HAIN , *Flux-Corrected-Transport II :Generalisation of the method* , J. of Comp. Phys.,18 (1975) , pp. 248-283
- [2] B. ENGQUIST and S. OSHER , *Stable and entropy condition satisfying approximations for transonic flow calculations* , Math. Comp., 34 (1980), pp.45-75
- [3] A. HARTEN , *On a class of high resolution total-variation-stable finite difference schemes* , SIAM J. of Numer. Anal. 21, 1 (1984) , pp.1-23

- [4] A. Y. LE ROUX , *Convergence of an accurate scheme for first order quasi-linear equations* ,
R.A.I.R.O. Analyse Numérique 15 , 2 (1981) , pp. 151-170
- [5] A. MAJDA and S. OSHER , *Numerical viscosity and the entropy condition* ,
Comm. Pure Appl. Math . 32 (1979) , pp. 797-834
- [6] M.S.MOCK , *Some higher order difference schemes enforcing an entropy inequality* ,
Michigan Math. J. 25 (1978) , pp. 325-344
- [7] S. OSHER and S. CHAKRAVARTHY , *High resolution schemes and the entropy condition* ,
SIAM J. Numer. Anal. 21, 5 (1984) , pp. 955-984
- [8] S. OSHER , *Convergence of generalized MUSCL schemes* , SIAM J. Numer. Anal. 22 , 5
(1985) , pp. 947-961.
- [9] B. VAN-LEER , *Towards the ultimate conservative scheme -5* , J.of Comput. Phys. 32 , 1 ,
(1979),pp.101-136
- [10] J.P. VILA , *Sur la théorie et l'approximation numérique des problèmes hyperboliques non
linéaire - Applications aux équations de Saint-Venant et à la modélisation des avalanches
de neige dense* , Thesis - Paris 6 - (1986)
- [11] J.P. VILA , *high order schemes and entropy condition for nonlinear hyperbolic systems of
conservation laws* , To appear in Math. of Comp .
- [12] J.P. VILA , *P1-methods for the approximation of the conservation laws* , To appear in SIAM
J. Numer. Anal..

C H A P I T R E I I I

**Stable upwind schemes for hyperbolic conservation laws
with source terms**

Travail soumis pour publication

Annoncé dans la note CRAS , t. 307, Série I, (1988), pp. 129–132.

Stable upwind schemes for hyperbolic conservation laws with source terms

A. CHALABI

Tour IRMA , Laboratoire TIM3 , BP 53X, 38041 Grenoble, France.

Abstract. A class of stable upwind schemes for the numerical solution of nonhomogeneous hyperbolic conservation laws is given. Explicit and implicit–explicit schemes of first and second order accuracy are studied. Stationary solutions are used as data in the first order case . Because of the effect of the source term, the constructed schemes are not TVD (Total Variation Decreasing), but they are locally TVB (Total Variation Bounded). The convergence of the numerical solution towards the entropy solution is proved.

0-Introduction. Most problems of technological interest are nonhomogeneous, or multidimensional, or both. The source term in the nonhomogeneous problems is due to physical effects (exterior forces, release of mass or energy ...) or to geometrical effects (axisymmetric or cylindrical problems, area with variable section ...). The theoretical study of the scalar nonhomogeneous conservation law is made in Kruskov [6], where the existence and the uniqueness of the solution are proved. The case of nonhomogeneous hyperbolic systems is studied by Liu [8], who used the solution of a Riemann problem with stationary data to prove a global existence result together with the asymptotic behaviour of the solutions. Other theoretical results for particular nonhomogeneous hyperbolic systems based on estimations of the Riemann invariants can be found in Luskin–Temple [9], Nishida [11], and Vila [23]. A different approach can be found in the paper of Schonbek [15] which uses the theory of compensated compactness to obtain an existence result for some conservation laws with singular source terms.

Schemes of first order accuracy have been proposed for the numerical solution of conservation laws with source terms. These schemes are based on the splitting method as in Sod [16] and Toro [20] or on the solution of a generalized Riemann problem with stationary data Glimm–Marshall–Plohr [4], Roe [14], and Van–Leer [22]. A numerical integration along the characteristic curves is used by Marshall [10]. First and second order accurate schemes for numerical solution of inhomogeneous equations are proposed in Glaister [5] and Roe [14]. The solution of the inhomogeneous equations does not possess the TVD property because of the effect of the source term which increases the total variation. Recently Sweby [17] proposed a method based on the transformation of the dependent variable to reduce the nonhomogeneous scalar

conservation law to a homogeneous one which does possess the TVD property. The study of the convergence of the numerical solution is made by Le Roux [7] in the case of upwind schemes with constant piecewise data.

The purpose of this paper is the study of the convergence of the numerical solution given by explicit or implicit–explicit first order accurate schemes with stationary data. Explicit second order accurate schemes are also studied.

This paper is built as follows:

Section 1 is devoted to preliminaries related to the nonhomogeneous scalar conservation laws. In §2, we construct and study first order accurate explicit and implicit–explicit schemes with a stationary data. Section 3 concerns the second order accurate upwind schemes where the convergence of the numerical solution towards the entropy solution is proved. This section may be seen as extension of the study made in [2]. In section 4 we give a study of a time continuous scheme.

1–Preliminaries.

We consider the numerical solution of the following problem: Find a bounded u satisfying the nonhomogeneous scalar conservation law :

$$(1.1) \quad u_t + (f(u))_x = q(u, x)$$

for $(x,t) \in \mathbb{R} \times]0,T[$; $T > 0$ and

$$(1.2) \quad u(x,0) = u_0(x)$$

with $u_0 \in BV_{loc}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ and $f = f_1 + f_2$ such that $f_1' \geq 0$ and $f_2' \leq 0$;

$q \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, the functions q and q/f are assumed to satisfy the Lipschitz condition in u uniformly with respect to x , and in x uniformly with respect to u . d_1 and d_2 are the Lipschitz constants of q and q/f ; $q(0,.) = 0$.

We seek a weak solution to the cauchy problem (1.1)–(1.2), i.e. a function $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0,T[)$ satisfying:

$$(1.3) \quad \iint_{\mathbb{R} \times]0,T[} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x,0) dx = - \iint_{\mathbb{R} \times]0,T[} q(u,x)\phi(x,t) dx dt$$

for all test functions $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times [0,T])$, with compact support in $\mathbb{R} \times [0,T]$.

Let $\eta \in C^2(\mathbb{R})$, be a strictly convex function, whose entropy flux is F i.e.

$$(1.4) \quad \eta'(u)f'(u) = F'(u) \quad , \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

The solution of (1.1)–(1.2) is not necessarily unique and the physical one is characterized by the following entropy condition:

$$(1.5) \quad \iint_{\mathbb{R} \times]0,T[} (\eta(u)\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt \geq - \iint_{\mathbb{R} \times]0,T[} \eta'(u)q(u,x)\phi(x,t) dx dt$$

for all positive test functions $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times]0,T[)$, with compact support in $\mathbb{R} \times]0,T[$.

We observe that in the nonhomogeneous case, the characteristic curves are not straight lines along which the solution u is not necessarily constant .

Let h be the spatial size and k be the time grid size related to h by the fixed positive number r through :

$$r = k/h$$

A weak solution u of (1.1)–(1.2) is approximated by a function u_h defined on $\mathbb{R} \times]0,T[$ by :

$$(1.6) \quad u_h(x,t) = u_j^n \quad \text{for } (x,t) \in I_j \times J_n$$

with

$$I_j \times J_n =](j-1/2)h, (j+1/2)h[\times](n-1/2)k, (n+1/2)k[\quad \forall j \in \mathbb{Z} \text{ et } n \leq N = E(T/k)+1$$

where E denotes the integer part function .

The initial condition (1.2) is projected into the space of piecewise constant functions by :

$$(1.7) \quad u_j^0 = \frac{1}{h} \int_{I_j} u_0(x) dx \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

2-First order upwind schemes.

To take into account the nonhomogeneous character in the numerical solution of (1.1)–(1.2), we construct a first order upwind scheme, using a piecewise stationary data. The use of the idea of

stationary solutions as data in the nonhomogeneous problems, was first proposed by Liu [8] and then used by Van-Leer [22], Glimm–Marshall–Plohr [4] and Roe [14].

Outside the shock and sonic points, the stationary equation associated with (1.1) gives :

$$(2.1) \quad u_x = q(u,x)/f(u)$$

Let us assume that the initial values form a piecewise linear distribution :

$$(2.2) \quad u^n(x) = u_j^n + (x - x_j)q(u_j^n, x_j)/f'(u_j^n) \quad \text{for } x \in I_j$$

where $x_j = jh$.

Let

$$a(u,x) = 1/2q(u,x)/f'(u)$$

and

$$(2.3) \quad a_j^n = 1/2q(u_j^n, x_j)/f'(u_j^n)$$

we particularly need the initial boundary values inside cell j :

$$(2.4) \quad \begin{cases} u_{j+1/2, -}^n = u_j^n + h a_j^n \\ u_{j-1/2, +}^n = u_j^n - h a_j^n \end{cases}$$

We will consider the explicit upwind scheme :

$$(2.5) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \tau \Delta_+ [f_1(u_{j-1/2, -}^n) + f_2(u_{j-1/2, +}^n)] + k q(u_j^n, x_j)$$

where

$$\Delta_+ b_j = b_{j+1} - b_j.$$

We observe that if f is convex, the Engquist–Osher numerical flux is of the preceding form with some convenient f_1 and f_2 .

Using (2.4) we get the explicit scheme :

$$(2.6) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \tau \Delta_+ [f_1(u_{j-1}^n + h a_{j-1}^n) + f_2(u_j^n - h a_j^n)] + k q(u_j^n, x_j)$$

We can also consider the following implicit–explicit scheme :

$$(2.7) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - r \Delta_+ [f_1(u_{j-1}^{n+1} + h a_{j-1}^n) + f_2(u_j^{n+1} - h a_j^n)] + k q(u_j^n, x_j)$$

We first study the convergence of the explicit scheme (2.6).

Proposition 2.1

There exist positive constants C_0, C_1, C_2 such that under the CFL condition :

$$(2.8) \quad r [\sup_{x \in A} |f_1'(x)| + \sup_{x \in A} |f_2'(x)|] \leq 1, \quad A = \{x \in \mathbb{R}, |x| \leq e^{2Tr(C_0 + d_2/2)} \|u^0\|_\infty\}$$

the family given by the explicit scheme (2.6) satisfies

$$(2.9) \quad \begin{cases} \|u^{n+1}\|_\infty \leq (1+C_0 h) \|u^n\|_\infty \\ \sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq (1+C_1 h) \sum_{|j| \leq J+1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + C_1 J h^2 \\ \sum_{|j| \leq J} |u_j^{n+1} - u_j^n| \leq \sum_{|j| \leq J+1} |u_j^n - u_{j-1}^n| + C_2 J h \|u^n\|_\infty \end{cases}$$

Proof

Let us denote:

$$v_{1,j-1/2}^n = r [\Delta_+ f_1(u_{j-1}^n + h a_{j-1}^n)] / [\Delta_+(u_{j-1}^n + h a_{j-1}^n)]$$

and

$$v_{2,j+1/2}^n = r [\Delta_+ f_2(u_j^n - h a_j^n)] / [\Delta_+(u_j^n - h a_j^n)]$$

we have $v_1 \geq 0$ and $v_2 \leq 0$ since $f_1' \geq 0$ and $f_2' \leq 0$.

The explicit scheme (2.6) may be written:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= (1 - v_{1,j-1/2}^n + v_{2,j+1/2}^n) u_j^n + v_{1,j-1/2}^n u_{j-1}^n - v_{2,j+1/2}^n u_{j+1}^n + k q(u_j^n, x_j) \\ &\quad + (-v_{1,j-1/2}^n - v_{2,j+1/2}^n) h a_j^n + v_{1,j-1/2}^n h a_{j-1}^n + v_{2,j+1/2}^n h a_{j+1}^n \end{aligned}$$

Let

$$C_0 = r d_1 + 3/2 d_2$$

The first inequality of (2.9) may be proved by induction, since if we assume that

$$\|u^n\|_\infty \leq (1 + C_0 h)^n \|u^0\|_\infty$$

Then by the CFL condition (2.8) we have

$$1 - v_{1,j-1/2}^n + v_{2,j+1/2}^n \geq 0$$

Using (2.8) and the hypothesis on the functions q and q/f we obtain

$$|u_j^{n+1}| \leq (1 - v_{1,j-1/2}^n + v_{2,j+1/2}^n) |u_j^n| + v_{1,j-1/2}^n |u_{j-1}^n| - v_{2,j+1/2}^n |u_{j+1}^n| + k d_1 |u_j^n| + 3/2 h d_2 \|u^n\|_\infty$$

d_1 and d_2 are constants of the functions q and q/f .

Thus

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq (1 + C_0 h) \|u^n\|_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

To prove the second inequality of (2.9) we have

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} &= (1 - v_{1,j+1/2}^n + v_{2,j+1/2}^n) (u_{j+1}^n - u_j^n) + v_{1,j-1/2}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) - v_{2,j+3/2}^n (u_{j+2}^n - u_{j+1}^n) \\ &\quad + (-v_{1,j+1/2}^n - v_{2,j+1/2}^n) h (a_{j+1}^n - a_j^n) + v_{1,j-1/2}^n h (a_j^n - a_{j-1}^n) + v_{2,j+3/2}^n h (a_{j+2}^n - a_{j+1}^n) \\ &\quad + k [q(u_{j+1}^n, x_{j+1}) - q(u_j^n, x_{j+1}) + q(u_j^n, x_{j+1}) - q(u_j^n, x_j)] \end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned} \sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| &\leq \sum_{|j| \leq J+1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + 3/2 h d_2 \sum_{|j| \leq J+1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + 3/2 d_2 (2J+3) h^2 \\ &\quad + k d_1 \sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^n - u_j^n| + d_1 (2J+1) h k \end{aligned}$$

Then

$$\sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq (1 + C_1 h) \sum_{|j| \leq J+1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + C_1 J h^2$$

with

$$C_1 = \text{Max} (3/2 d_2 + r d_1, 15/2 d_2 + 3 r d_1)$$

with the same step we have :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_j^n &= -v_{1,j-1/2}^n \Delta_+ u_{j-1}^n - v_{2,j+1/2}^n \Delta_+ u_j^n + r h (q(u_j^n, x_j) - q(0, x_j)) \\ &\quad - v_{1,j-1/2}^n h \Delta_+ a_{j-1}^n + v_{2,j+1/2}^n h \Delta_+ a_j^n \end{aligned}$$

hence

$$\sum_{|j| \leq J} |u_j^{n+1} - u_j^n| \leq \sum_{|j| \leq J+1} |u_j^n - u_{j-1}^n| + C_2 J h \|u^n\|_\infty$$

where

$$C_2 = 3 r d_1 + 6 d_2$$

Theorem 2.1

Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV_{loc}(\mathbb{R})$, then under the CFL condition (2.8) ; the family (u_h) constructed from the explicit scheme (2.6), contains a subsequence (u_h) which converges in $L_{loc}^1(\mathbb{R} \times]0, T[)$ towards a weak solution u of the problem (1.1)–(1.2), as h tends to zero .

Proof

We will use proposition 2.1 to show that (u_h) is bounded in $L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[) \cap BV_{loc}(\mathbb{R} \times]0, T[)$.

From the first inequality of (2.9) we get

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq (1 + C_0 h)^n \|u^0\|_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

we have $n \leq N$, then

$$(1 + C_0 h)^n \leq (1 + C_0 h)^N, \quad N = E(T/k) + 1$$

$$\leq e^{2C_0 T/r}, \quad r = k/h$$

Since $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, then (u_h) is bounded in $L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[)$.

We choose $R > 0$ and set $\Omega_R =]-R, R[\times]0, T[$, $J = E(R/h)$, where E denotes the integer part function.

From the second inequality of (2.9) we have :

$$\sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq M_0 \sum_{|j| \leq J+n+1} |u_{j+1}^0 - u_j^0| + M_1(R, T/r)$$

with

$$M_0 = e^{2C_4 T/h (R + T/h + 1)} \quad \text{and} \quad M_1 = M_0 - 1$$

using (1.7) we obtain

$$\sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq M_0 \frac{1}{h} \int_{|x| \leq 2R + T/h} |u_0(x+h) - u_0(x)| dx + M_1(R, T/h)$$

since $u_0 \in BV_{loc}(\mathbb{R})$ then there exists a constant $M(R, T/h)$ depending only on Ω_R such that

$$\sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^n - u_j^n| \leq M(R, T/h)$$

Hence

$$\sum_{n \leq N} \sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^n - u_j^n| k \leq 2 M(R, T/h) T$$

Then u_h is of locally bounded variation in the x coordinate .

Making use of the third inequality of (2.9) we obtain

$$\sum_{|j| \leq J} \sum_{n \leq N} |u_j^{n+1} - u_j^n| h \leq 2 M(R, T/h) T/h + 2 C_2/h T R \|u_h\|_\infty$$

Then u_h is of locally bounded variation in the time coordinate.

This completes the proof that (u_h) is bounded in $L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[) \cap BV_{loc}(\mathbb{R} \times]0, T[)$.

Following Le Roux [7] and Sweby [18], by making use of the Helly's theorem we can extract from u_h a subsequence u_{h_m} , which is Cauchy in $L^1(\Omega_R)$. By a diagonal process we can show that there exists a subsequence of u_h which converges in $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times]0, T[)$ towards a weak solution u of (1.1)–(1.2).

The result of theorem 2.1 can be made more precise by using a result of Tadmor [19], if we suppose that

$$(2.10) \quad r [\sup_{x \in A} |f_1'(x)| + \sup_{x \in A} |f_2'(x)|] \leq 1/2, \quad A = \{x \in \mathbb{R}, |x| \leq e^{2T/h(C_0 + d_2/2)} \|u^0\|_\infty\}$$

Theorem 2.2

Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV_{loc}(\mathbb{R})$, then under the CFL condition (2.10), the family (u_h) constructed from the explicit scheme (2.6) converges in $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times]0, T[)$ towards the entropy solution u of the problem (1.1)–(1.2), as h tends to zero.

Proof

It was proved in theorem 2.1 that there exists a subsequence (u_{h_m}) which converges towards a weak solution u of (1.1)–(1.2). Let us now prove that u satisfies the entropy condition (1.5). To do this we write the explicit scheme (2.6) in the form:

$$(2.11.a) \quad \hat{u}_j^{n+1} = u_j^n - r \Delta_+ g_{j-1/2}^n$$

$$(2.11.b) \quad u_j^{n+1} = \hat{u}_j^{n+1} - k \Delta_+ [f_{1,j-1/2}^n a_{j-1}^n - f_{2,j-1/2}^n a_j^n] + k q(u_j^n, x_j)$$

with

$$g_{j-1/2}^n = f_1(u_{j-1}^n) + f_2(u_j^n)$$

$$f_{1,j-1/2}^n = [f_1(u_{j-1}^n + h a_{j-1}^n) - f_1(u_{j-1}^n)] / (h a_{j-1}^n)$$

$$f_{2,j-1/2}^n = [f_2(u_j^n - h a_j^n) - f_2(u_j^n)] / (-h a_j^n)$$

The scheme (2.11.a) is monotone (under the CFL condition (2.8)), then using a result of Tadmor [19], under the more restrictive CFL condition (2.10) there exists a numerical entropy flux $F_{j-1/2}^n$ associated with η such that

$$(2.12) \quad \eta(\hat{u}_j^{n+1}) - \eta(u_j^n) + r \Delta_+ F_{j-1/2}^n \leq 0$$

From (2.12) and the convexity of η we obtain

$$(2.13) \quad \eta(u_j^{n+1}) - \eta(u_j^n) + r \Delta_+ F_{j-1/2}^n \leq \eta'(u_j^{n+1}) (u_j^{n+1} - \hat{u}_j^{n+1})$$

Multiplying (2.13) by $\phi_j h$ ($\phi_j = \phi(x_j, nk)$) and taking the sum over j and n , we get

$$(2.14) \quad \sum_{n,j} h (\eta(u_j^{n+1}) - \eta(u_j^n)) \phi_j^n + \sum_{n,j} k \Delta_+ (F_{j-1/2}^n) \phi_j^n \leq \sum_{n,j} h \eta'(u_j^{n+1}) (u_j^{n+1} - \hat{u}_j^{n+1}) \phi_j^n$$

We denote by A (resp. B) the left hand side (resp. the right hand side) of the inequality (2.14). By discrete integration by parts we obtain

$$A = - \sum_{n,j} k h (\eta(u_j^{n+1})) (\phi_j^{n+1} - \phi_j^n) / k - \sum_{n,j} h k F_{j+1/2}^n (\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) / h$$

Hence

$$A = - \iint_{\mathbb{R}]0, T[} [\eta(u_h(x, t)) (\phi_h(x, t))_t + F_A(u_h(x, t)) (\phi_h(x, t))_x] dx dt$$

Making use of Lebesgue's theorem we prove that

$$\iint_{\mathbb{R}]0, T[} [\eta(u_h(x, t)) (\phi_h(x, t))_t + F_A(u_h(x, t)) (\phi_h(x, t))_x] dx dt \rightarrow \iint_{\mathbb{R}]0, T[} [\eta(u) \phi_t + F(u) \phi_x] dx dt$$

Let

$$b_{j-1/2}^n = k [f_{1,j-1/2}^n a_{j-1}^n - f_{2,j-1/2}^n a_j^n]$$

We have

$$B = B_1 + B_2$$

with

$$B_1 = \sum_{n,j} -h \phi_j^n \eta'(u_j^{n+1}) \Delta_+ b_{j-1/2}^n$$

and

$$B_2 = \sum_{n,j} k h \phi_j^n \eta'(u_j^{n+1}) q(u_j^n, x_j)$$

Using discrete integration by parts we obtain

$$B_1 = \sum_{n,j} h \phi_j^n b_{j-1/2}^n \Delta_+ (\eta'(u_{j-1}^n)) + \sum_{n,j} h (\Delta_+ \phi_{j-1}^n) b_{j-1/2}^n \eta'(u_{j-1}^n)$$

Let

$$K = 1/2 (\|f_1'\|_{\infty, A} + \|f_2'\|_{\infty, A}) \|u_h\|_{\infty} \text{ avec } \|v\|_{\infty, A} = \sup_{x \in A} |v(x)|$$

The function ϕ has a compact support, then

$$|B_1| \leq r h K \|\phi\|_{\infty} \|\eta''(u_h)\|_{\infty} \sum_{n \leq N} k \sum_{|j| \leq J} |\Delta_+ u_j^n| + r h K \|\eta'(u_h)\|_{\infty} \sum_n k \sum_j |\Delta_+ \phi_j^n|$$

Since (u_h) is bounded in $L^\infty \cap BV_{loc}$ and $\eta \in C^2(\mathbb{R})$, we get

$$\overline{\lim} B_1 \leq 0$$

Again, with Lebesgue's theorem, we have

$$\lim B_2 = \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} \eta'(u) q(u, x) \phi(x, t) \, dx \, dt$$

Then, at the limit we get

$$\iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} [\eta(u) \phi_t + F(u) \phi_x] \, dx \, dt \geq - \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} \eta'(u) q \phi \, dx \, dt$$

Then u satisfies the entropy condition.

The uniqueness of the entropy solution of (1.1)–(1.2) ensures that the whole family u_h converges towards the entropy solution u .

Remark 2.1:

We observe that the explicit scheme (2.6) is a second order accurate scheme for the stationary solutions, that is the approximation of the stationary solutions by the scheme :

$$(2.15) \quad 1/h \Delta_+ [f_1(u_{j-1}^n + h a_{j-1}^n) + f_2(u_j^n - h a_j^n)] = q(u_j^n, x_j)$$

is second order accurate .

Remark 2.2:

The CFL condition (2.8) is the same as in the case of the upwind scheme for the homogeneous equation with piecewise constant data .

Remark 2.3:

If we consider the entropy function of Kruskov $\eta(u) = |u - k|$ ($k \in \mathbb{R}$), using a result of Crandall–Majda [3], then under the CFL condition (2.8) there exists a numerical entropy flux $F_{j-1/2}$ associated with η such that

$$\eta(\hat{u}_j^{n+1}) - \eta(u_j^n) + \tau \Delta_+ F_{j-1/2}^n \leq 0$$

this numerical entropy flux is

$$F_{j-1/2} = f_1(u_{j-1} \vee k) + f_2(u_j \vee k) - f_1(u_{j-1} \wedge k) - f_2(u_j \wedge k)$$

where: $a \vee b = \max(a, b)$ and $a \wedge b = \min(a, b)$.

Let us now return to the study of the implicit–explicit scheme (2.7) in the case where $q = q(u)$.

Lemma 2.1

Let C, M, K be three positive constants and let the family $(\alpha_j^n) \subset \mathbb{R}$, such that

$$\text{i) } \sum_j \alpha_j^0 < +\infty$$

$$\text{ii) } 0 < \alpha_j^n < M, \forall n \in \mathbb{N}; \forall j \in \mathbb{Z}$$

$$\text{iii) } \sum_{|j| \leq J} \alpha_j^{n+1} \leq C \sum_{|j| \leq J+1} \alpha_j^n + (\alpha_{-J-1}^{n+1} + \alpha_{J+1}^{n+1}) K$$

Then the serie $\sum_j \alpha_j^n$ converges and we have

$$\sum_j \alpha_j^{n+1} \leq C \sum_j \alpha_j^n$$

Proof

By induction, if we assume that the serie $\sum_j \alpha_j^n$ converges, then using ii) and iii) we get

$$\sum_{|j| \leq J} \alpha_j^{n+1} \leq C \sum_j \alpha_j^n + 2MK$$

Then the serie $\sum_j \alpha_j^{n+1}$ converges, hence α_{-J-1}^{n+1} and α_{J+1}^{n+1} tend to zero, when J tends to ∞ .

From iii), we obtain

$$\sum_j \alpha_j^{n+1} \leq C \sum_j \alpha_j^n$$

Proposition 2.2

There exist positive constants C_0, C_1, C_2 such that the family given by the implicit-explicit scheme (2.7) satisfies :

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|u^{n+1}\|_{\infty} \leq (1 + C_0 h) \|u^n\|_{\infty} \\ \sum_j |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq (1 + C_1 h) \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n| \\ \sum_{|j| \leq J} |u_j^{n+1} - u_j^n| \leq C_2 (1 + C_2 h) \sum_j |u_j^n - u_{j-1}^n| + C_2 J h \|u^n\|_{\infty} \end{array} \right.$$

Proof

Now we denote

$$v_{1,j-1/2}^n = r [\Delta_+ f_1(u_{j-1}^{n+1} + h a_{j-1}^n)] / [\Delta_+(u_{j-1}^{n+1} + h a_{j-1}^n)]$$

and

$$v_{2,j+1/2}^n = r [\Delta_+ f_2(u_j^{n+1} - h a_j^n)] / [\Delta_+(u_j^{n+1} - h a_j^n)]$$

We write the implicit-explicit scheme (2.7) in the form:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & u_j^n + (-v_{1,j-1/2}^n + v_{2,j+1/2}^n) u_j^{n+1} + v_{1,j-1/2}^n u_{j-1}^{n+1} - v_{2,j+1/2}^n u_{j+1}^{n+1} + k q(u_j^n, x_j) \\ & + (-v_{1,j-1/2}^n - v_{2,j+1/2}^n) h a_j^n + v_{1,j-1/2}^n h a_{j-1}^n + v_{2,j+1/2}^n h a_{j+1}^n \end{aligned}$$

Using the hypothesis on the functions q and q/f we obtain

$$(1 + v_{1,j-1/2}^n - v_{2,j+1/2}^n) |u_j^{n+1}| \leq |u_j^n| + v_{1,j-1/2}^n |u_{j-1}^{n+1}| - v_{2,j+1/2}^n |u_{j+1}^{n+1}| + k d_1 |u_j^n| + 3/2 d d_2 h \|u^n\|_{\infty}$$

where

$$d = r \max (\|f_1\|_\infty , \|f_2\|_\infty)$$

d_1 and d_2 are the Lipschitz constants of the functions q and q/f .

Thus

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq (1 + C_0 h) \|u^n\|_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

where

$$C_0 = r d_1 + 3/2 d d_2$$

To prove the second inequality of (2.16) we have

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} &= \Delta_+ u_j^n + (-v_{1,j+1/2}^n + v_{2,j+1/2}^n) (\Delta_+ u_j^{n+1}) + v_{1,j-1/2}^n (\Delta_+ u_{j-1}^{n+1}) - v_{2,j+3/2}^n (\Delta_+ u_{j+1}^{n+1}) \\ &\quad + (-v_{1,j+1/2}^n - v_{2,j+1/2}^n) h (\Delta_+ a_j^n) + v_{1,j-1/2}^n h (\Delta_+ a_{j-1}^n) + v_{2,j+3/2}^n h (\Delta_+ a_{j+1}^n) \\ &\quad + k [q(u_{j+1}^n) - q(u_j^n)] \end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned} (1 + v_{1,j+1/2}^n - v_{2,j+1/2}^n) |\Delta_+ u_j^{n+1}| &\leq |\Delta_+ u_j^n| + v_{1,j-1/2}^n |\Delta_+ u_{j-1}^{n+1}| - v_{2,j+3/2}^n |\Delta_+ u_{j+1}^{n+1}| \\ &\quad + 1/2 h d d_2 (|\Delta_+ u_j^n| + |\Delta_+ u_{j-1}^n| + |\Delta_+ u_{j+1}^n|) + r h d_1 |\Delta_+ u_j^n| \end{aligned}$$

Thus

$$\sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq (1 + C_1 h) \sum_{|j| \leq J+1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + d |\Delta_+ u_{-J-1}^{n+1}| + d |\Delta_+ u_{J+1}^{n+1}|$$

Then by Lemma 2.1 we have

$$\sum_j |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq (1 + C_1 h) \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n|$$

Where

$$C_1 = 3/2 d d_2 + r d_1$$

To prove the third inequality of (2.16) we write the scheme (2.7) on the form

$$u_j^{n+1} - u_j^n = -v_{1,j-1/2}^n \Delta_+ u_{j-1}^{n+1} - v_{2,j+1/2}^n \Delta_+ u_j^{n+1} + r h (q(u_j^n) - q(0)) \\ - v_{1,j-1/2}^n h \Delta_+ a_{j-1}^n + v_{2,j+1/2}^n h \Delta_+ a_j^n$$

With the same step in the proof of the third inequality of (2.16) we obtain

$$\sum_{|j| \leq J} |u_j^{n+1} - u_j^n| = 2 d \sum_{|j| \leq J+1} |u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}| + h d d_2 \sum_{|j| \leq J+1} |u_j^n - u_{j-1}^n| + 3 r J h d_1 \|u^n\|_\infty$$

Then using the first and the second inequalities of (2.16) we get

$$\sum_{|j| \leq J} |u_j^{n+1} - u_j^n| \leq C_2 (1 + C_2 h) \sum_{|j| \leq J+1} |u_j^n - u_{j-1}^n| + C_2 J h \|u^n\|_\infty$$

With

$$C_2 = \text{Max} (2 d, 2 d C_1 + d d_2, 3 r d_1)$$

In this implicit–explicit case the hypothesis $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV_{loc}(\mathbb{R})$ is not sufficient to prove the convergence, we need $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$.

Theorem 2.3

Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$, then the approximate solution u_h constructed from the implicit–explicit scheme (2.7), contains a subsequence (u_h) which converges inconditionnaly in $L_{loc}^4(\mathbb{R} \times]0, T[)$ towards a weak solution u of the problem (1.1)–(1.2), as h tends to zero .

Proof

Making use of proposition 2.2. we prove that (u_h) is bounded in $L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[) \cap BV(\mathbb{R} \times]0, T[)$ and by the Helly 's theorem, like in the explicit case, we show the existence of a subsequence of (u_h) , which converges in $L_{loc}^4(\mathbb{R} \times]0, T[)$ towards a weak solution u of (1.1)–(1.2).

Without any supplementary condition, the result of theorem 2.3 can be made more precise :

Theorem 2.4

Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$, then the approximate solution u_h constructed from the implicit–explicit scheme (2.7), converges inconditionnaly in $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times]0, T[)$ towards the entropy solution u of the problem (1.1)–(1.2), as h tends to zero .

Proof

It was proved in theorem (2.3) the existence of a subsequence of u_h which converges towards a weak solution u of (1.1)–(1.2). To prove that u is the entropy solution, we rewrite the scheme (2.7) in the form :

$$(2.17) \quad \hat{u}_j^{n+1} = u_j^n - \tau \Delta_+ g_{j-1/2}^{n+1}$$

$$(2.18) \quad u_j^{n+1} = \hat{u}_j^{n+1} - k \Delta_+ [f_{1,j-1/2}^{n+1} a_{j-1}^n - f_{2,j+1/2}^{n+1} a_{j+1}^n] + k/2 q(u_j^n, x_j)$$

where

$$g_{j-1/2}^{n+1} = f_1(u_{j-1}^{n+1}) + f_2(u_j^{n+1})$$

$$f_{1,j-1/2}^{n+1} = [f_1(u_{j-1}^{n+1} + h a_{j-1}^n) - f_1(u_{j-1}^{n+1})] / (h a_{j-1}^n)$$

$$f_{2,j+1/2}^{n+1} = [f_2(u_j^{n+1} - h a_j^n) - f_2(u_j^{n+1})] / (-h a_j^n)$$

Let η be a convex entropy for (1.1) and F the associated entropy to η . The scheme (2.17) is a monotone, then it is an E–scheme i.e.

$$(2.19) \quad \text{sgn}(u_{j+1} - u_j) [g_{j+1/2} - f(u)] \leq 0$$

Thus

$$(2.20) \quad \int_{u_j}^{u_{j+1}} \eta''(w) [g_{j+1/2} - f(w)] dw \leq 0$$

Using a result of Vila [24], there exists an entropy numerical flux $F_{j-1/2}$ defined by :

$$(2.21) \quad F_{j-1/2} = F(u_j) + \eta'(u_j) [g_{j-1/2} - f(u_j)]$$

and we have:

$$(2.22) \quad \eta(\hat{u}_j^{n+1}) - \eta(u_j^n) + r \Delta_+ F_{j-1/2}^{n+1} \leq 0$$

The end of the proof is exactly the same as the proof of theorem 2.1.

Remark 2.4:

We did not take the source term in implicit form for two reasons. The first one is that the explicit form is enough to get an inconditionnally stable scheme; the second one is, the existence of u^{n+1} requires in that case more hypothesis on q .

3-Second order upwind schemes.

3.1-Second order accuracy in space.

To construct quasi second order accurate scheme, as in [21] we assume that the initial values form a piecewise linear distribution

$$(3.1) \quad u^n(x) = u_j^n + (x - x_j) \delta_j^n, \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$$

where

$$(3.2) \quad \delta_j^n = \begin{cases} \sigma \text{ Min } \{ |\hat{\delta}_j^n|, |u_{j+1}^n - u_j^n|/h, |u_j^n - u_{j-1}^n|/h, Ch^{\alpha-1} \} \\ \quad \text{if } \sigma = \text{sgn}(\delta_j^n) = \text{sgn}(u_{j+1}^n - u_j^n) = \text{sgn}(u_j^n - u_{j-1}^n) \\ 0 \quad \text{elsewhere} \end{cases}$$

with $C > 0$; $0 < \alpha < 1$ and

$$(3.3) \quad \hat{\delta}_j^n = (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)/(2h)$$

From (3.2) there exist $\alpha_{j+1/2}^n$ and $\beta_{j-1/2}^n$ such that

$$0 \leq \alpha_{j+1/2}^n \leq 1 \text{ and } 0 \leq \beta_{j-1/2}^n \leq 1$$

and

$$(3.4) \quad \delta_j^n = \alpha_{j+1/2}^n (u_{j+1}^n - u_j^n)/h = \beta_{j-1/2}^n (u_j^n - u_{j-1}^n)/h$$

We will need the initial boundary values inside cell j :

$$(3.5) \quad \begin{cases} u_{j+1/2,-}^n = u_j^n + h/2 \delta_j^n \\ u_{j-1/2,+}^n = u_j^n - h/2 \delta_j^n \end{cases}$$

The quasi second order accurate (in space) scheme may be written

$$(3.6) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \tau \Delta_+ [f_1(u_{j-1/2,-}^n) + f_2(u_{j-1/2,+}^n)] + k q(u_j^n, x_j)$$

Proposition 3.1

Under the CFL condition :

$$(3.7) \quad v = r \left[\sup_{x \in A} |f_1'(x)| + \sup_{x \in A} |f_2'(x)| \right] \leq 1/2, \quad A = \{x \in \mathbb{R}, |x| \leq e^{2\tau r(C_0+2)} \|u^0\|_\infty\}$$

The family (u^n) given by the explicit scheme (3.6) satisfies

$$(3.8) \quad \begin{cases} \|u^{n+1}\|_\infty \leq (1+C_0h) \|u^n\|_\infty \\ \sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq (1+C_1h) \sum_{|j| \leq J+1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + C_1 J h^2 \\ \sum_{|j| \leq J} |u_j^{n+1} - u_j^n| \leq \sum_{|j| \leq J+1} |u_j^n - u_{j-1}^n| + C_2 J h \|u^n\|_\infty \end{cases}$$

Proof

We write the scheme (3.6) in the form

$$(3.9) \quad u_j^{n+1} = (1 - v_{1,j-1/2}^n + v_{2,j+1/2}^n) u_j^n + v_{1,j-1/2}^n u_{j-1}^n - v_{2,j+1/2}^n u_{j+1}^n + k q(u_j^n, x_j) \\ + (-v_{1,j-1/2}^n - v_{2,j+1/2}^n) h/2 \delta_j^n + v_{1,j-1/2}^n h/2 \delta_{j-1}^n + v_{2,j+1/2}^n h/2 \delta_{j+1}^n$$

where

$$v_{1,j-1/2}^n = \tau [\Delta_+ f_1(u_{j-1}^n + h/2 \delta_{j-1}^n)] / [\Delta_+ (u_{j-1}^n + h/2 \delta_{j-1}^n)]$$

$$v_{2,j+1/2}^n = \tau [\Delta_+ f_2(u_j^n - h/2 \delta_j^n)] / [\Delta_+ (u_j^n - h/2 \delta_j^n)]$$

Using (3.4) and the CFL condition (3.7), the scheme (3.9) gives

$$\|u^{n+1}\|_{\infty} \leq (1 - 3/2 v) \|u^n\|_{\infty} + 3/2 v \|u^n\|_{\infty} + r h d_1 \|u^n\|_{\infty}$$

Then

$$\|u^{n+1}\|_{\infty} \leq (1 + C_0 h) \|u^n\|_{\infty}$$

With

$$C_0 = r d_1$$

To prove the second inequality of (3.8) we write

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} &= (1 - v_{1,j+1/2}^n + v_{2,j+1/2}^n) (u_{j+1}^n - u_j^n) + v_{1,j-1/2}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) - v_{2,j+3/2}^n (u_{j+2}^n - u_{j+1}^n) \\ &+ (-v_{1,j+1/2}^n - v_{2,j+1/2}^n) h/2 (\delta_{j+1}^n - \delta_j^n) + v_{1,j-1/2}^n h/2 (\delta_j^n - \delta_{j-1}^n) + v_{2,j+3/2}^n h/2 (\delta_{j+2}^n - \delta_{j+1}^n) \\ &+ k [q(u_{j+1}^n, x_{j+1}) - q(u_j^n, x_{j+1}) + q(u_j^n, x_{j+1}) - q(u_j^n, x_j)] \end{aligned}$$

By addition over $|j| \leq J$, we get

$$\begin{aligned} \sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| &\leq \sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^n - u_j^n| + v_{1,-J-1/2}^n |u_{-J}^n - u_{-J-1}^n| - v_{2,J+3/2}^n |u_{J+2}^n - u_{J+1}^n| \\ &+ v_{1,-J-1/2}^n h/2 (\delta_{-J}^n - \delta_{-J-1}^n) + v_{2,J+3/2}^n h/2 (\delta_{J+2}^n - \delta_{J+1}^n) + k d_1 \sum_{|j| \leq J+1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + d_1 (2J+1) h k \end{aligned}$$

By (3.4), we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| &\leq \sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^n - u_j^n| + 2 v_{1,-J-1/2}^n |u_{-J}^n - u_{-J-1}^n| - 2 v_{2,J+3/2}^n |u_{J+2}^n - u_{J+1}^n| \\ &+ k d_1 \sum_{|j| \leq J+1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + d_1 (2J+1) h k \end{aligned}$$

Using the CFL condition (3.7) we get

$$\sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq \sum_{|j| \leq J+1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + k d_1 \sum_{|j| \leq J+1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + d_1 (2J+1) h k$$

Then

$$\sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq (1+C_1 h) \sum_{|j| \leq J+1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + C_1 J h^2$$

with

$$C_1 = 3 r d_1$$

The second inequality of (3.8) can be proved by writing

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_j^n &= -v_{1,j-1/2}^n \Delta_+ u_{j-1}^n - v_{2,j+1/2}^n \Delta_+ u_j^n + r h (q(u_j^n, x_j) - q(0, x_j)) \\ &\quad - v_{1,j-1/2}^n h/2 \Delta_+ \delta_{j-1}^n + v_{2,j+1/2}^n h/2 \Delta_+ \delta_j^n \end{aligned}$$

From (3.4) and the CFL (3.7) we obtain

$$\sum_{|j| \leq J} |u_j^{n+1} - u_j^n| \leq \sum_{|j| \leq J+1} |u_j^n - u_{j-1}^n| + r d_1 (2J+1) h \|u^n\|_\infty$$

Hence

$$\sum_{|j| \leq J} |u_j^{n+1} - u_j^n| \leq \sum_{|j| \leq J+1} |u_j^n - u_{j-1}^n| + C_2 J h \|u^n\|_\infty$$

where

$$C_2 = 3 r d_1$$

Theorem 3.1

Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV_{loc}(\mathbb{R})$, then under the CFL condition (3.7), the approximate solution (u_h) constructed from the explicit scheme (3.6), converges in $L_{loc}^1(\mathbb{R} \times]0, T[)$ towards the entropy solution u of the problem (1.1)–(1.2), as h tends to zero .

Proof

Exactly the same as the proof of theorem 2.1 , by making use of Proposition 3.1, we prove that (u_h) is bounded in $L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[) \cap BV_{loc}(\mathbb{R} \times]0, T[)$, using the compact injection of $L^\infty \cap BV_{loc}$ in

L^4_{loc} , we can show that there exists a subsequence of (u_n) which converges in $L^4_{loc}(\mathbb{R} \times]0, T[)$ towards a weak solution u of (1.1)–(1.2).

To prove that u is the entropy solution, let

$$g_{j-1/2}^n = f_1(u_{j-1}^n) + f_2(u_j^n)$$

$$b_{j-1/2}^{n+1} = k/2 [f_{1,j-1/2}^n \delta_{j-1}^n - f_{2,j+1/2}^n \delta_{j+1}^n]$$

with

$$f_{1,j-1/2}^n = [f_1(u_{j-1}^n + h/2 \delta_{j-1}^n) - f_1(u_{j-1}^n)] / (h/2 \delta_{j-1}^n)$$

$$f_{2,j+1/2}^n = [f_2(u_j^n - h/2 \delta_j^n) - f_2(u_j^n)] / (-h/2 \delta_j^n)$$

we write the scheme (3.6) in the form:

$$(3.10) \quad \hat{u}_j^{n+1} = u_j^n - r \Delta_+ g_{j-1/2}^n$$

$$(3.11) \quad u_j^{n+1} = \hat{u}_j^{n+1} - \Delta_+ b_{j-1/2}^{n+1} + k q(u_j^n, x_j)$$

As in the proof of theorem 2.2, there exists a numerical entropy flux $F_{j-1/2}^n$ associated with the entropy function η such that

$$(3.12) \quad \eta(\hat{u}_j^{n+1}) - \eta(u_j^n) + r \Delta_+ F_{j-1/2}^n \leq 0$$

From (3.12) and the convexity of η we obtain

$$(3.13) \quad \eta(u_j^{n+1}) - \eta(u_j^n) + r \Delta_+ F_{j-1/2}^n \leq \eta'(u_j^{n+1}) (u_j^{n+1} - \hat{u}_j^{n+1})$$

Using (3.2) we have

$$|b_{j-1/2}^{n+1}| \leq C h^\alpha$$

Multiplying (3.13) by $\phi_j h$ and taking the sum over j and n , exactly like in the proof of theorem 2.2

we get at the limit

$$(3.14) \quad \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} [\eta(u)\phi_t + F(u)\phi_x] dx dt \geq - \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} \eta'(u)q\phi dx dt$$

Then u satisfies the entropy condition.

The uniqueness of the entropy solution of (1.1)–(1.2) ensures that the whole family u_h converges towards the entropy solution u .

3.2–Second order accuracy in space and in time.

The second order in time may be achieved by advancing the cell boundary values, to be used in the flux function, to the intermediate time level $t^{n+1/2} = t^n + 1/2 k$. Using (3.5) we get the advanced boundary values:

$$(3.15) \quad \begin{cases} u_{j+1/2,-}^{n+1/2} = u_{j+1/2,-}^n - \tau/2 [f(u_{j+1/2,-}^n) - f(u_{j-1/2,+}^n)] + k/2 q(u_j^n, x_j) \\ u_{j-1/2,+}^{n+1/2} = u_{j-1/2,+}^n - \tau/2 [f(u_{j+1/2,-}^n) - f(u_{j-1/2,+}^n)] + k/2 q(u_j^n, x_j) \end{cases}$$

The full scheme is :

$$(3.16) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \tau \Delta_+ [f_1(u_{j-1/2,-}^{n+1/2}) + f_2(u_{j-1/2,+}^{n+1/2})] + k q(u_j^{n+1/2}, x_j)$$

with

$$(3.17) \quad u_j^{n+1/2} = (u_{j+1/2,-}^{n+1/2} + u_{j-1/2,+}^{n+1/2})/2$$

Proposition 3.2

The scheme (3.16) is second order accurate (in space and in time).

Proof

We compute the truncation error of the scheme (3.16) in the regions where $(u_x)^n \neq 0$, using (3.2),

we have

$$\delta_j^n = (u_x)_j^n + O(h^2)$$

Substituting in (3.5), we get

$$\begin{aligned} u_{j+1/2,-}^n &= u_j^n + h/2 (u_x)_j^n + O(h^3) \\ u_{j-1/2,+}^n &= u_j^n - h/2 (u_x)_j^n + O(h^3) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} u_{j-1/2,-}^n &= u_{j-1}^n + h/2 (u_x)_{j-1}^n + O(h^3) \\ &= u_j^n - h/2 (u_x)_j^n + k/2 (u_t)_j^n - h k/2 (u_{xt})_j^n + O(h^3) \end{aligned}$$

(3.15) gives

$$\begin{aligned} u_{j+1/2,-}^{n+1/2} &= u_j^n + h/2 (u_x)_j^n - \tau/2 [f(u_j^n) + h/2 f'(u_j^n)(u_x)_j^n + h^2/8 f''(u_j^n)((u_x)_j^n)^2 \\ &\quad - f(u_j^n) + h/2 f'(u_j^n)(u_x)_j^n - h^2/8 f''(u_j^n)((u_x)_j^n)^2] + k/2 q(u_j^n, x_j) + O(h^3) \end{aligned}$$

Making use of (1.1), we obtain

$$u_{j+1/2,-}^{n+1/2} = u_j^n + h/2 (u_x)_j^n + k/2 (u_t)_j^n + O(h^3)$$

and

$$u_{j-1/2,+}^{n+1/2} = u_j^n - h/2 (u_x)_j^n + k/2 (u_t)_j^n + O(h^3)$$

By (3.17), we have

$$u_j^{n+1/2} = u_j^n + k/2 (u_t)_j^n + O(h^3)$$

By substituting in the scheme (3.16), we obtain the truncation error

$$\begin{aligned} R_j^n &= (u_t)_j^n + k/2 (u_{tt})_j^n + 1/h [h f'(u_j^n)(u_x)_j^n + h k/2 f'(u_j^n)(u_{xt})_j^n + 1/2 f'(u_j^n) h (u_x)_j^n k (u_t)_j^n] \\ &\quad - q(u_j^n, x_j) + k/2 (q_u)_j^n (u_t)_j^n + O(h^2) \end{aligned}$$

Using (1.1) and its differential with respect to t , we get

$$R_j^n = (u_t)_j^n + f'(u_j^n)(u_x)_j^n - q(u_j^n, x_j) + O(h^2) = O(h^2)$$

Then the scheme (3.16) is second order accurate.

Proposition 3.3

Under the CFL condition :

$$(3.18) \quad v = r [\sup_{x \in A} |f_1'(x)| + \sup_{x \in A} |f_2'(x)|] \leq (\sqrt{13} - 3)/2, \quad A = \{x \in \mathbb{R}, |x| \leq 2 e^{4CT/r} (2 + 1/8 d_2) \|u^0\|\}$$

The family (u^n) given by the explicit scheme (3.16) satisfies

$$(3.19) \quad \begin{cases} \|u^{n+1}\|_{\infty} \leq (1 + C_0 h) \|u^n\|_{\infty} \\ \sum_{|j| \leq J} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq (1 + C_1 h) \sum_{|j| \leq J+1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + C_1 J h^2 \\ \sum_{|j| \leq J} |u_j^{n+1} - u_j^n| \leq (1 + C_2 h) \sum_{|j| \leq J+1} |u_j^n - u_{j-1}^n| + C_2 h N \end{cases}$$

Proof

Let

$$v_j^n = r [f(u_{j+1/2,-}^n) - f(u_{j-1/2,+}^n)] / (u_{j+1/2,-}^n - u_{j-1/2,+}^n)$$

(3.15) gives us

$$u_{j+1/2,-}^{n+1/2} = u_{j+1/2,-}^n - v_j^n / 2 (u_{j+1/2,-}^n - u_{j-1/2,+}^n) + k/2 q(u_j^n, x_j)$$

Using (3.5) we obtain

$$\begin{aligned} u_{j+1/2,-}^{n+1/2} &= u_j^n + h/2 \delta_j^n - v_j^n h/2 \delta_j^n + k/2 q(u_j^n, x_j) \\ u_{j-1/2,+}^{n+1/2} &= u_j^n - h/2 \delta_j^n - v_j^n h/2 \delta_j^n + k/2 q(u_j^n, x_j) \end{aligned}$$

We let

$$v_{1,j}^{n+1/2} = r [f_1(u_{j+1/2,-}^{n+1/2}) - f_1(u_{j-1/2,-}^{n+1/2})] / (u_{j+1/2,-}^{n+1/2} - u_{j-1/2,-}^{n+1/2})$$

and

$$v_{2,j}^{n+1/2} = r [f_2(u_{j+1/2,+}^{n+1/2}) - f_2(u_{j-1/2,+}^{n+1/2})] / (u_{j+1/2,+}^{n+1/2} - u_{j-1/2,+}^{n+1/2})$$

From (3.16) we get

$$u_j^{n+1} = u_j^n - v_{1,j}^{n+1/2} (u_{j+1/2,-}^{n+1/2} - u_{j-1/2,-}^{n+1/2}) - v_{2,j}^{n+1/2} (u_{j+1/2,+}^{n+1/2} - u_{j-1/2,+}^{n+1/2}) + k q(u_j^{n+1/2}, x_j)$$

The scheme (3.16) takes the form

$$(3.20) \quad \begin{aligned} u_j^{n+1} = & u_j^n - v_{1,j}^{n+1/2} (u_j^n + h/2 \delta_j^n - v_j^n h/2 \delta_j^n - u_{j-1}^n - h/2 \delta_{j-1}^n + v_{j-1}^n h/2 \delta_{j-1}^n) \\ & - v_{2,j}^{n+1/2} (u_{j+1}^n - h/2 \delta_{j+1}^n - v_{j+1}^n h/2 \delta_{j+1}^n - u_j^n + h/2 \delta_j^n + v_j^n h/2 \delta_j^n) + kq(u_j^{n+1/2}, x_j) \\ & - v_{1,j}^{n+1/2} k/2 [q(u_j^n, x_j) - q(u_{j-1}^n, x_{j-1})] - v_{2,j}^{n+1/2} k/2 [q(u_{j+1}^n, x_{j+1}) - q(u_j^n, x_j)] \end{aligned}$$

Using (3.4) we write

$$(3.21) \quad \begin{aligned} u_j^{n+1} = & u_j^n - C_{j-1/2}^n \Delta_+ u_{j-1}^n + D_{j+1/2}^n \Delta_+ u_j^n + k q(u_j^{n+1/2}, x_j) \\ & - v_{1,j}^{n+1/2} k/2 [q(u_j^n, x_j) - q(u_{j-1}^n, x_{j-1})] - v_{2,j}^{n+1/2} k/2 [q(u_{j+1}^n, x_{j+1}) - q(u_j^n, x_j)] \end{aligned}$$

with

$$(3.22) \quad \begin{cases} C_{j-1/2}^n = v_{1,j}^{n+1/2} [1 + 1/2 \beta_{j-1/2}^n (1 - v_j^n) - 1/2 \alpha_{j-1/2}^n (1 - v_{j-1}^n)] \\ D_{j+1/2}^n = -v_{2,j}^{n+1/2} [1 - 1/2 \beta_{j+1/2}^n (1 + v_{j+1}^n) + 1/2 \alpha_{j+1/2}^n (1 + v_j^n)] \end{cases}$$

From (3.22) we have

$$C_{j-1/2}^n \geq v_{1,j}^{n+1/2} (1 - v_j^n)/2 \beta_{j-1/2}^n$$

Using (3.18) we get

$$C_{j-1/2}^n \geq 0$$

Similarly we obtain

$$D_{j+1/2}^n \geq 0$$

To prove the second inequality of (3.19), let us first show that

$$C_{j+1/2}^n + D_{j+1/2}^n \leq 1/2$$

Using (3.22) we get

$$C_{j+1/2}^n + D_{j+1/2}^n \leq 1/2 v^2 + 3/2 v$$

where v is given in (3.18). The CFL condition (3.18) then gives

$$C_{j+1/2}^n + D_{j+1/2}^n \leq 1/2$$

Similarly we can prove the first inequality of (3.19) by showing that

$$C_{j-1/2}^n + D_{j+1/2}^n \leq 1/2$$

To achieve the proof of the second inequality of (3.19), it suffices to show that

$$\sum_{|j| \leq J} k |q(u_{j+1}^{n+1/2}, x_{j+1}) - q(u_j^{n+1/2}, x_j)| \leq C h \sum_{|j| \leq J+1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + C k h J$$

To do this, using (3.5) and (3.15), we have

$$u_{j+1/2,-}^{n+1/2} = u_j^n + h/2 \delta_j^n - \tau/2 f(\xi_{j-1/2}^n) h \delta_j^n + k/2 q(u_j^n, x_j)$$

Hence

$$1/2 |u_{j+3/2,-}^{n+1/2} - u_{j+1/2,-}^{n+1/2}| \leq (1 + \tau/2 v + k/4 d_1) |u_{j+1}^n - u_j^n| + k/4 d_1 h J$$

Similar inequality may be found for : $1/2 |u_{j+1/2,+}^{n+1/2} - u_{j-1/2,+}^{n+1/2}|$

The result is obtained by making use of (3.17).

The third inequality can be proved directly from (3.20) as in the proof of theorem 3.1 .

Using proposition 3.3 as in theorem 3.1, we prove:

Theorem 3.2

Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV_{loc}(\mathbb{R})$, then under the CFL condition (2.10), the approximate solution (u_h) constructed from the explicit scheme (3.16) converges in $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times]0, T[)$ towards the entropy solution u of the problem (1.1)–(1.2), as h tends to zero .

Proof

By making use of proposition 3.3, we get (u_h) bounded in $L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[) \cap BV_{loc}(\mathbb{R} \times]0, T[)$, using the compact injection of $L^\infty \cap BV_{loc}$ in L^1_{loc} , we can show that there exists a subsequence of (u_h) which converges in $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times]0, T[)$ towards a weak solution u of (1.1)–(1.2).

Following the same step as in the proof of theorem 3.1, we get that u is the entropy solution of the problem (1.1)–(1.2).

4 -Time continuous schemes.

We consider a semi-discrete, method of lines approximation to the problem (1.1)–(1.2) in the case $q = q(u)$.

Let : $I_j = [(j - 1/2)h, (j + 1/2)h [$

We define the step function u_h for each $t > 0$, as :

$$(4.1) \quad u_h(x, t) = u_j(t) \quad \text{for } x \in I_j$$

The initial data is discretized via the L^2 - projection :

$$(4.2) \quad u_j(0) = \frac{1}{h} \int_{I_j} u_0(x) dx \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Using the notations of the section 3.1, we define, for t fixed :

$$(4.3) \quad u(x) = u_j + (x - x_j) \delta_j \quad , \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$$

where

$$(4.4) \quad \delta_j = \begin{cases} \sigma \text{ Min } \{ \hat{|\delta_j|}, |u_{j+1} - u_j|/h, |u_j - u_{j-1}|/h, Ch^{\alpha-1} \} \\ \text{if } \sigma = \text{sgn}(\delta_j) = \text{sgn}(u_{j+1} - u_j) = \text{sgn}(u_j - u_{j-1}) \\ 0 \quad \text{elsewhere} \end{cases}$$

with $C > 0$; $0 < \alpha < 1$ and

$$(4.5) \quad \hat{\delta}_j = (u_{j+1} - u_{j-1})/(2h)$$

From (4.4) there exists $\alpha_{j+1/2}$ and $\beta_{j-1/2}$ such that

$$0 \leq \alpha_{j+1/2} \leq 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq \beta_{j-1/2} \leq 1$$

and

$$(4.6) \quad \delta_j = \alpha_{j+1/2} (u_{j+1} - u_j)/h = \beta_{j-1/2} (u_j - u_{j-1})/h$$

We will need the boundary values inside cell j .

$$(4.7) \quad \begin{cases} u_{j+1/2,-} = u_j + h/2 \delta_j \\ u_{j-1/2,+} = u_j - h/2 \delta_j \end{cases}$$

The second order accurate semi-discrete scheme may be written

$$(4.8) \quad \frac{du_j}{dt} + \frac{1}{h} \Delta_+ [f_1(u_{j-1/2,-}) + f_2(u_{j-1/2,+})] = q(u_j)$$

By writing the scheme (4.8) in the incremental form, we get :

$$(4.9) \quad \frac{du_j}{dt} + C_{j-1/2} \Delta_+ u_{j-1} - D_{j+1/2} \Delta_+ u_j = q(u_j)$$

with

$$(4.10) \quad \begin{cases} C_{j-1/2} = v_{1,j-1/2} (1 + 1/2 \beta_{j-1/2} - 1/2 \alpha_{j-1/2}) \\ D_{j+1/2} = -v_{2,j+1/2} (1 - 1/2 \beta_{j+1/2} + 1/2 \alpha_{j+1/2}) \end{cases}$$

where

$$v_{1,j-1/2}^n = 1/h [\Delta_+ f_1(u_{j-1}^n + h/2 \delta_{j-1}^n)] / [\Delta_+ (u_{j-1}^n + h/2 \delta_{j-1}^n)]$$

$$v_{2,j+1/2}^n = 1/h [\Delta_+ f_2(u_j^n - h/2 \delta_j^n)] / [\Delta_+ (u_j^n - h/2 \delta_j^n)]$$

Lemma 4.1

The coefficients $C_{j-1/2}$ and $D_{j+1/2}$ given in (4.10) satisfy

$$(4.11) \quad C_{j-1/2} \geq 0, \quad D_{j+1/2} \geq 0$$

Proof

$$\begin{aligned} C_{j-1/2} &\geq v_{1,j-1/2} (1 - 1/2 \alpha_{j-1/2}) \\ &\geq 1/2 v_{1,j-1/2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Similarly we show that $D_{j+1/2} \geq 0$.

Proposition 4.1

If $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ and $\|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty \leq d$ (d : positive constant), then the initial value problem associated with (4.8) admits a unique solution $U \in \mathcal{C}^1([0, T[, l^1(\mathbb{Z}))$.

Proof

Let us write (4.8) in the form:

$$\frac{dU}{dt} = G(U)$$

where $U = (u_j)$ and $G(U)_j = -\frac{1}{h} \Delta_+ [f_1(u_{j-1/2,-}) - f_2(u_{j-1/2,+})] + q(u_j)$

Using (4.7) and the boundness of the derivatives f_1' and f_2' , we show that the function G is globally Lipschitz in l^1 , then the initial problem associated with (4.8) admits a global solution $U \in \mathcal{C}^1([0, T[, l^1(\mathbb{Z}))$.

Remark 4.2:

The scheme (4.8) is second order accurate.

Proposition 4.2

There exist two constants m and M such that the solution of (4.8) satisfies:

$$m \leq u_j(t) \leq M \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall t \leq T$$

Proof

Let us consider the following problem

$$(4.12) \quad \begin{cases} \frac{dv_j}{dt} + \frac{1}{h} \Delta_+ [f_1(v_{j-1/2,-}) + f_2(v_{j-1/2,+})] = q(v_j) \\ v_j(0) = \sup_p u_p(0) \end{cases}$$

The solution of (4.9) is constant in space, then the problem (4.9) may be written

$$(4.13) \quad \begin{cases} \frac{dv_j}{dt} = q(v_j) \\ v_j(0) = \sup_p u_p(0) \end{cases}$$

(4.10) admits a unique solution $v_j \in \mathcal{C}^1([0, T])$. The uniqueness of the solution ensures that

$$v_j(t) = v(t) \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

If

$$u_j(t) \neq v_j(t) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall t \in [0, T[$$

Then

$$u_j(t) \leq v_j(t) = v(t) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall t \in [0, T[$$

Hence the result, else

Let $t_0 = \inf A$; $A = \{ t; \exists j_0 \in \mathbb{Z}, \text{ such that } u_{j_0}(t) = v_{j_0}(t) \}$

By proposition 4.1, $(u_j) \in l^1$, then u_j tends to 0 as j tends to ∞ .

Then $\exists j_0 \in \mathbb{Z}$, such that $u_{j_0}(t_0) = \max_j u_j(t_0) = v_{j_0}(t_0)$

and

$$\forall j \neq j_0 \quad u_j(t_0) \leq v_j(t_0) = v(t_0)$$

Writing (4.8) and (4.10) at the point j_0 and $t = t_0$, we get

$$\frac{du_{j_0}}{dt}(t_0) - \frac{dv_{j_0}}{dt}(t_0) = -1/h [\Delta_+ f_1(u_{j_0-1}(t_0)) + \Delta_+ f_2(u_{j_0}(t_0))]$$

By construction we have

$$\forall j \in \mathbb{Z} \quad u_j(t_0) \leq u_j(t_0)$$

Then, using the monotony of f_1 and f_2 , we obtain

$$\frac{du_{j_0}}{dt}(t_0) < \frac{dv_{j_0}}{dt}(t_0)$$

Hence

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \forall t \in [0, T[, u_j(t) \leq v_j(t) = v(t)$$

Then

$$\sup_j u_j(t) \leq \sup_{t \in [0, T[} v(t) = M$$

By similar proof, we get

$$\inf_j u_j(t) \geq \inf_{t \in [0, T[} v(t) = m$$

Let

$$s_{j+1/2}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Delta_+ u_j(t) \geq 0 \\ -1 & \text{if } \Delta_+ u_j(t) < 0 \end{cases}$$

We define:

$$V(u_h)(t) = \sum_j |u_{j+1}(t) - u_j(t)| = \sum_j (u_{j+1}(t) - u_j(t)) s_{j+1/2}(t)$$

Proposition 4.3

The scheme (4.8) is TVB i.e. there exists a positive constant K (independent of h) such that for each $0 < t < T'$ ($0 < T' < T$) we have :

$$V(u_h)(t) \leq K(T')$$

Proof

The scheme (4.8) admits a regular solution $U = (u_j)$ such that $u_j \in \mathcal{C}^1([0, T[), \forall j$.

Let

$$V_J(t) = \sum_{|j| \leq J} (u_{j+1}(t) - u_j(t)) s_{j+1/2}(t)$$

$V_J(t)$ is a Lipschitzian function, then it is derivable a.e. and integrable of its derivative. We have

$$V_J'(t) = \sum_{|j| \leq J} (u_{j+1}'(t) - u_j'(t)) s_{j+1/2}(t) \quad \text{a.e.}$$

Using (4.11) we obtain

$$V_J'(t) = - \sum_{|j| \leq J} \Delta_+ [C_{j-1/2} \Delta_+ u_{j-1} - D_{j+1/2} \Delta_+ u_j - q(u_j)] s_{j+1/2}(t) \quad \text{a.e.}$$

By discrete integration by parts, we have

$$\begin{aligned} V_J'(t) = & \sum_{-J \leq j \leq J-1} [C_{j+1/2} \Delta_+ u_j - D_{j+3/2} \Delta_+ u_{j+1}] \Delta_+ s_{j+1/2}(t) + \sum_{|j| \leq J} \Delta_+ q(u_j) s_{j+1/2}(t) \\ & - [C_{J+1/2} \Delta_+ u_J - D_{J+3/2} \Delta_+ u_{J+1}] s_{J+1/2}(t) + [C_{-J-1/2} \Delta_+ u_{-J-1} - D_{-J+1/2} \Delta_+ u_{-J}] s_{-J+1/2}(t) \end{aligned}$$

Again, (4.11) gives

$$\begin{aligned} V_J'(t) = & \sum_{-J \leq j \leq J-1} [C_{j+1/2} \Delta_+ u_j - D_{j+3/2} \Delta_+ u_{j+1}] \Delta_+ s_{j+1/2}(t) + \sum_{|j| \leq J} \Delta_+ q(u_j) s_{j+1/2}(t) \\ & + \frac{du_{J+1}}{dt} s_{J+1/2}(t) - q(u_{J+1}) s_{J+1/2}(t) - \frac{du_{-J}}{dt} s_{-J+1/2}(t) - q(u_{-J}) s_{-J+1/2}(t) \end{aligned}$$

Using (4.13) and the result of proposition 4.1, we get

$$V_J'(t) \leq d_1 V_J(t) + d$$

where

$$d = 2 \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{\infty} + 2 d_1 \|u\|_{\infty}$$

By integration, we get

$$V_J(t) \leq V_J(0) + d_1 \int_0^t V_J(y) dy + d T$$

Gronwall inequality gives

$$V_J(t) \leq (V_J(0) + d T) \exp(d_1 T) \quad \forall t \leq T.$$

Then we get

$$V_J(u_h(\cdot, t)) \leq K \quad \forall t \leq T.$$

Taking the limit as J tends to ∞ , we obtain

$$V(u_h(\cdot, t)) \leq K \quad \forall t \leq T.$$

Theorem 4.1

If $u_0 \in L^1 \cap L^\infty \cap BV$, then the approximate solution u_h constructed from the scheme (4.9) converges in L^1_{loc} towards the entropy solution u of the problem (1.1)–(1.2) as h tends to zero.

Proof

By use of proposition 4.2, the family (u_h) is bounded in $L^\infty \cap BV$, then there exists a subsequence (which we denote by (u_h)) which converges towards a weak solution u of the problem (1.1)–(1.2) as h tends to zero.

To show that u is the entropy solution, we write the scheme (4.8) in the form

$$(4.14) \quad \frac{du_j}{dt} + 1/h \Delta_+ g_{j-1/2} + \Delta_+ b_{j-1/2} = q(u_j)$$

where

$$g_{j-1/2} = f_1(u_{j-1}) + f_2(u_j)$$

and

$$b_{j-1/2} = 1/2 (f_1'_{j-1/2} \delta_{j-1} - f_2'_{j-1/2} \delta_j)$$

with

$$f_1'_{j-1/2} = [f_1(u_{j-1} + h/2 \delta_{j-1}) - f_1(u_{j-1})]/(h/2 \delta_{j-1})$$

$$f_2'_{j-1/2} = [f_2(u_j - h/2 \delta_j) - f_2(u_j)]/(-h/2 \delta_j)$$

By extension of the method used in [12], to the non homogeneous case, we get

Let $\eta(w)$ be a convex entropy, with entropy flux $F(w)$. We multiply (4.14) by $h \eta'(u_j)$. This gives us

$$(4.15) \quad h \frac{d}{dt} \eta(u_j) = -\eta'(u_j) \Delta_+ g_{j-1/2} - h \eta'(u_j) \Delta_+ b_{j-1/2} + h \eta'(u_j) q(u_j)$$

We add to both sides of (4.15) the quantity

$$(4.16) \quad \Delta_+ (\eta'(u_j) [g_{j-1/2} - f(u_j)]) + \Delta_+ F(u_j) = \Delta_+ F_A(u_j)$$

We obtain

$$(4.17) \quad \left\{ \begin{aligned} h \left[\frac{d}{dt} \eta(u_j) + 1/h \Delta_+ F_A(u_j) \right] &= (\Delta_+ \eta'(u_j)) g_{j+1/2} - \Delta_+ [\eta'(u_j) f(u_j) - F(u_j)] \\ &\quad - h \eta'(u_j) \Delta_+ b_{j-1/2} + h \eta'(u_j) q(u_j) \end{aligned} \right.$$

We have

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \Delta_+ F(u_j) &= \int_{u_j}^{u_{j+1}} F'(w) dw = \int_{u_j}^{u_{j+1}} \eta'(w) f'(w) dw \\ &= \Delta_+ [\eta'(u_j) f(u_j)] - \int_{u_j}^{u_{j+1}} \eta''(w) f(w) dw \end{aligned}$$

and also

$$(4.19) \quad (\Delta_+ \eta'(u_j)) g_{j+1/2} = \int_{u_j}^{u_{j+1}} g_{j+1/2} \eta''(w) dw$$

Substituting (4.18) and (4.19) into (4.17), we get

$$(4.20) \quad h \left[\frac{d}{dt} \eta(u_j) + 1/h \Delta_+ F_A(u_j) \right] = \int_{u_j}^{u_{j+1}} \eta''(w) [g_{j+1/2} - f(w)] dw - h \eta'(u_j) \Delta_+ b_{j-1/2} + h \eta'(u_j) q(u_j)$$

Since the numerical flux $g_{j-1/2}$ satisfies

$$\int_{u_j}^{u_{j+1}} \eta''(w) [g_{j+1/2} - f(w)] dw \leq 0$$

Then

$$(4.21) \quad h \left[\frac{d}{dt} \eta(u_j) + 1/h \Delta_+ F_A(u_j) \right] \leq -h \eta'(u_j) \Delta_+ b_{j-1/2} + h \eta'(u_j) q(u_j)$$

Let ϕ be a test function such that $\phi \geq 0$, $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times]0, T[)$ with compact support in $\mathbb{R} \times]0, T[$, and let

$$\phi_h(x, t) = \phi(jh, t) = \phi_j(t), \text{ for } (x, t) \in](j-1)h, jh[\times]0, T[$$

$$(\phi_h(x, t))_x = (\phi_j(t) - \phi_{j-1}(t))/h, \text{ for } (x, t) \in](j-1)h, jh[\times]0, T[$$

By multiplication of (4.21) by $\phi_j(t)$, then summing and integrating by parts, we get

$$(4.22) \quad \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} [\eta(u_h(x, t)) (\phi_h(x, t))_t + F_A(u_h(x, t)) (\phi_h(x, t))_x] dx dt \geq - \int_0^T B(t) dt$$

where

$$B(t) = B_1(t) + B_2(t)$$

with

$$B_1(t) = \sum_j -h \phi_j \eta'(u_j) \Delta_+ b_{j-1/2}$$

$$B_2(t) = \sum_j h \phi_j \eta'(u_j) q(u_j)$$

Using discrete integration by parts we obtain

$$B_1(t) = \sum_j h \phi_{j+1} b_{j+1/2} \Delta_+ (\eta'(u_j)) + \sum_j h (\Delta_+ \phi_j) b_{j+1/2} \eta'(u_j)$$

Let

$$K = 1/2 (\|f_1'\|_{\infty} + \|f_2'\|_{\infty})$$

The function ϕ has a compact support, then

$$|B_1(t)| \leq C h^\alpha K \|\phi\|_\infty \|\eta''(u)\|_\infty \sum_j |\Delta_+ u_j| + C h^\alpha K \|\eta'(u)\|_\infty \sum_j |\Delta_+ \phi_j|$$

Since (u_h) is bounded in $L^\infty \cap BV$ and $\eta \in C^2(\mathbb{R})$, we get

$$\overline{\lim} |B_1(t)| \leq 0$$

Let

$$g_h(x, t) = g_{j-1/2}(t), \text{ for } (x, t) \in](j-1)h, jh[\times]0, T[$$

Making use of Lebesgue's theorem we prove that

$$\iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} [\eta(u_h(x, t)) (\phi_h(x, t))_t + F_A(u_h(x, t)) (\phi_h(x, t))_x] dx dt \rightarrow \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} [\eta(u)\phi_t + F(u)\phi_x] dx dt$$

To do this, from (4.16) we have:

$\eta'(u_h)[g_h - f(u_h)]\phi_h$ tends to 0, as h tends to 0, since $\eta'(u_h)\phi_h$ is bounded and both g_h and $f(u_h)$ converge to $f(u)$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times]0, T[)$ as h tends to zero.

and

$$\lim B_2(t) = \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} \eta'(u)q(u)\phi(x, t) dx dt$$

Then, at the limit we get

$$(4.23) \quad \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} (\eta(u)\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt \geq - \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} \eta'(u)q(u)\phi(x, t) dx dt.$$

The uniqueness of the entropy solution ensures that the whole family (u_h) converges towards the entropy solution u of the problem (1.1)–(1.2).

5- Numerical experiments

We compute the solution of the Cauchy problem associated with the inhomogeneous Burgers equation :

$$(5.1) \quad u_t + (u^2/2)_x + a u = 0 \quad , \quad a > 0$$

$$(5.2) \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{for } x < x_m \\ u_r & \text{for } x > x_m \end{cases}$$

The characteristic form of (5.1) is

$$(5.3) \quad \frac{du}{dt} = -a \quad \text{if} \quad \frac{dx}{dt} = u$$

Along the characteristic lines, we have

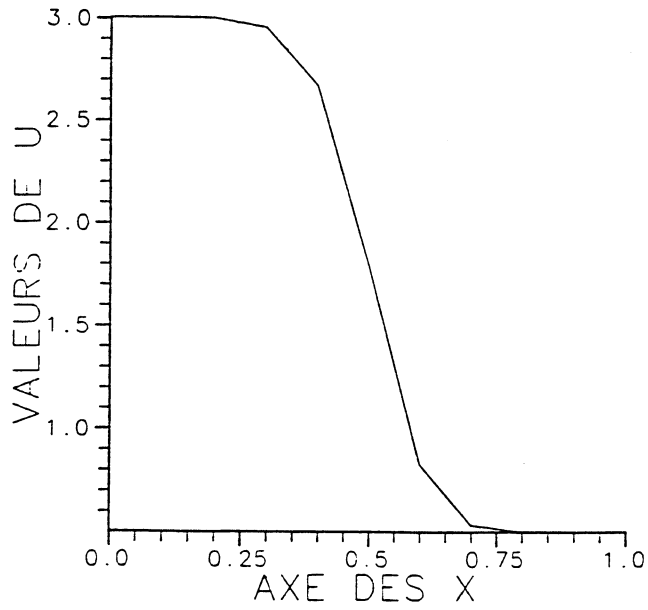
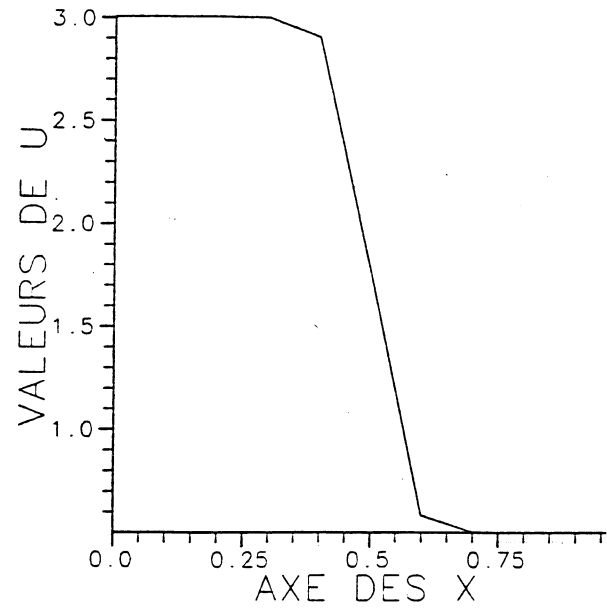
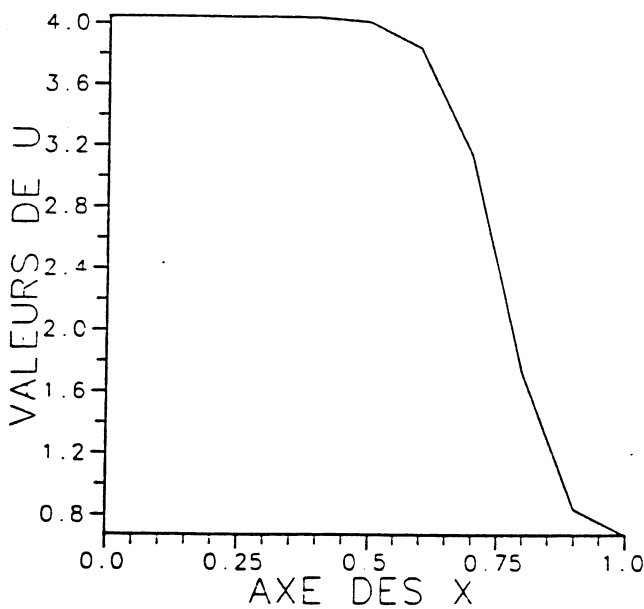
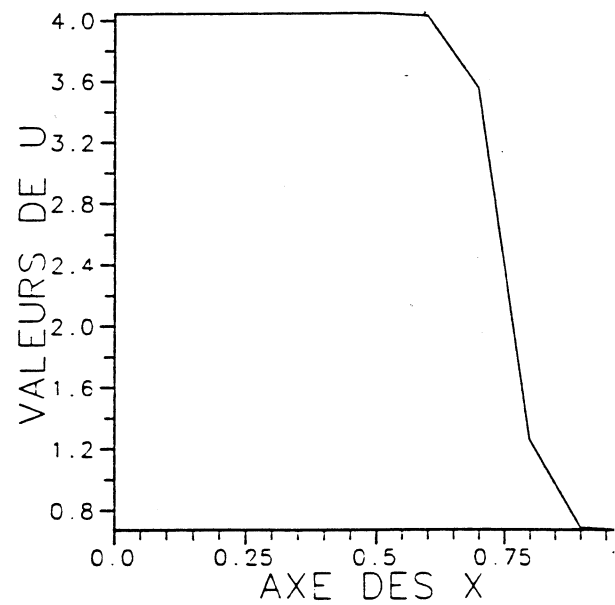
$$(5.4) \quad u(x, t) = f(x - \int u dt) e^{-at} \quad \text{along} \quad x - \int u dt = \text{const.}$$

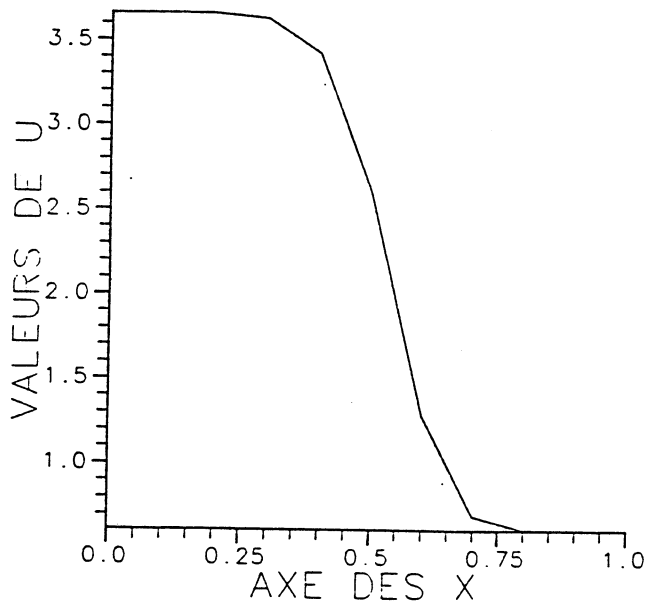
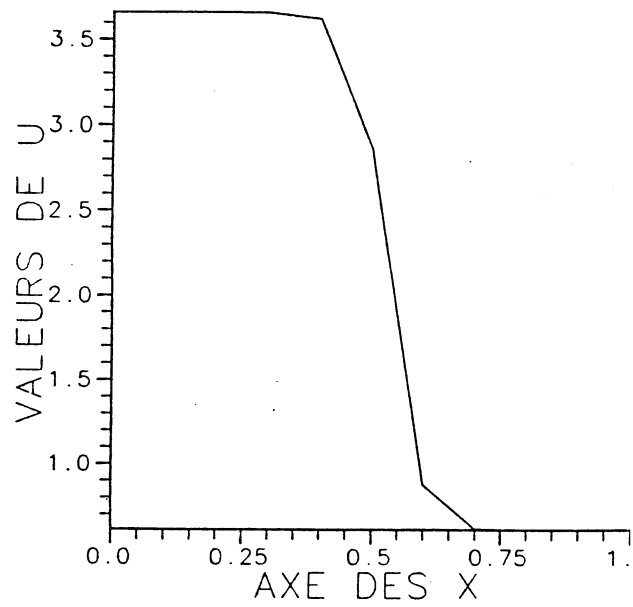
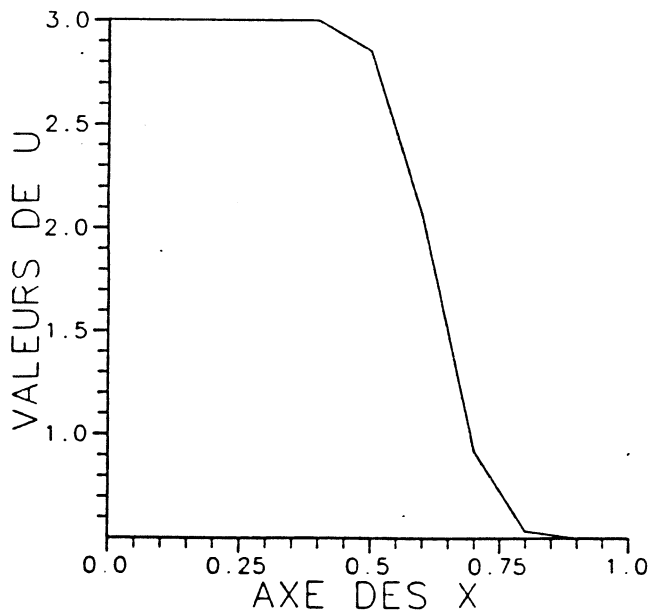
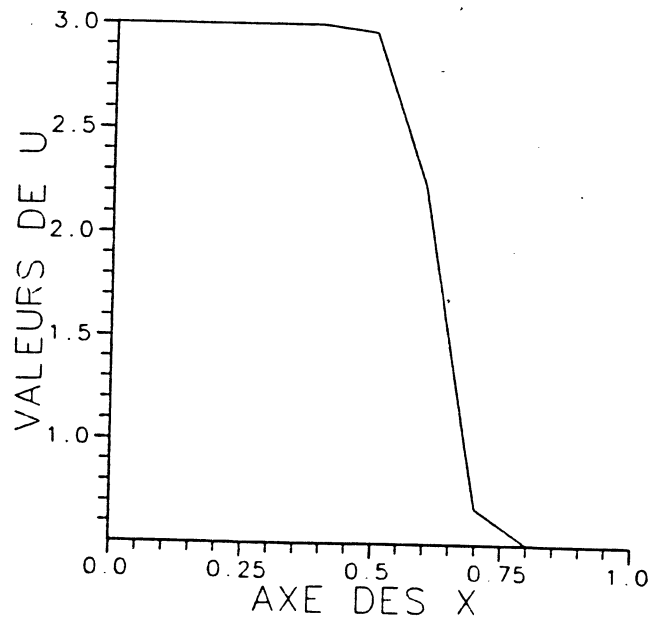
Equations (5.3) and (5.4) indicate that in the smooth region of the flow, an initial condition will propagate along characteristic curves with slope $1/u$, its value decreasing exponentially due to the source term.

The solution of (5.1)–(5.2) is a rarefaction wave if $u_l < u_r$. If $u_r < u_l$, the solution is a shock wave with velocity

$$(5.4) \quad \sigma = 1/2 (u_l + u_r) e^{-at}$$

We compute the solution of (5.1)–(5.2), at the times $t = 10 \Delta t$, $t = 20 \Delta t$, $t = 30 \Delta t$ for : $u_l = 3$, $u_r = 0$, using the quasi-second order accurate explicit scheme (3.16) and its associated first order scheme, with $\Delta x = \Delta y = 0.1$ and $\Delta t = 0.01$.

Results at $t = 20 \Delta t$ Figure 5.1: First order scheme, $a = 0.01$ Figure 5.2: Quasi-second order scheme, $a = 0.01$ Results at $t = 30 \Delta t$ Figure 5.3: First order scheme, $a = 1$.Figure 5.4: Quasi-second order scheme, $a = 1$.

Results at $t = 20 \Delta t$ Figure 5.5: First order scheme, $a = 1$.Figure 5.6: Quasi-second order scheme, $a = 1$.Results at $t = 10 \Delta t$ Figure 5.7: First order scheme, $a = 0.01$ Figure 5.8: Quasi-second order scheme, $a = 0.01$

Références

- [1] CHALABI A., *Convergence de schémas décentrés pour des lois de conservation non-homogènes* , C. R. Acad. Sci. Paris, t. 307 , Série I , (1988) , pp. 129–132 .
- [2] CHALABI A. and VILA J.P., *On a class of implicit and explicit schemes of Van–Leer type for scalar conservation laws* , Math. Model. Numer. Anal. , vol. 23 , (1989) , pp. 261–282 .
- [3] CRANDALL M.G. and MAJDA A., *Monotone difference approximations for scalar conservation laws*, Math. Comp. , 34, 149, (1980), pp. 1–21 .
- [4] GLIMM J., MARSHALL G. and PLOHR B., *A generalized Riemann problem for quasi–one–dimensional gas flows*, Adv. Appl. Math. , 5 , (1984) , pp. 1–30 .
- [5] GLAISTER P., *Second order difference schemes for hyperbolic conservation laws with source terms*, University of Reading, Department of Mathematics, Numerical Analysis Report 6/87.
- [6] KRUKOV S.N., *First order quasi-linear equations in several independant variables*, Math. U.S.S.R. Sb. , 10 , (1970) , pp. 217–243.
- [7] LE ROUX A.Y., *Approximation de quelques problèmes hyperboliques non linéaires*, Thèse d'état , Rennes (1979).
- [8] LIU T.P., *Quasilinear hyperbolic systems*, Comm. Math. Phys., 68 , (1979) , pp. 141–172.
- [9] LUSKIN M. and TEMPLE J.B., *The existence of a global weak solution to nonlinear waterhammer problem*, Comm. Pure Appl. Math. , 35, (1982), pp. 697–735.
- [10] MARSHALL G. and MENENDEZ A.N., *Numerical treatment of non conservative forms of the equations of shallow water theory*, J. Comp. Phys., 44 , (1981), pp. 167–188.
- [11] NISHIDA T., *Non linear hyperbolic equations and related topics in fluid dynamics*, Publications Mathématiques d'Orsay, 78. 02 .
- [12] OSHER S., *Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations*, SIAM J. Numer. Anal., 21, (1984), pp. 217–235 .

- [13] OSHER S. and CHAKRAVARTHY S., *High resolution schemes and the entropy condition*, SIAM J. Numer. Anal., 21, (1984), pp. 955–984.
- [14] ROE P.L., *Upwind differencing schemes for hyperbolic conservation laws with source terms*, Proc. Nonlinear Hyperbolic Problems, Eds. C. Carasso, P.A. Raviart, D. Serre, Springer Lecture Notes in Mathematics 1270, (1986).
- [15] SCHONBEK M.E., *Existence of solutions to singular conservation laws*, SIAM J. Math. Anal., 15, 6, (1984), pp. 1125–1139.
- [16] SOD G.A., *A numerical study of a converging shock*, J. Fluid Mech., 83, (1977), pp. 785–794.
- [17] SWEBY P.K., *"TVD" Schemes for inhomogeneous conservation laws*, Second International Conference on Hyperbolic Problems, RWTH Aachen (1988).
- [18] SWEBY P.K. and M.J. BAINES, *On convergence of Roe scheme for the general non-linear scalar wave equation*, J. of Comp. Phys., 56, 1, (1984), pp. 135–148.
- [19] TADMOR E., *Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes*, Math. Comp., 43, (1984), pp. 369–382.
- [20] TORO E.F., *Roe's method in gas dynamical problems associated with the combustion of high energy solids in a closed tube*. Cranfield Inst. of Tech. Rept, COA NFP86/18 (1986).
- [21] VAN-LEER B., *Towards the ultimate conservative difference scheme. V A second order sequel to godunov's method*, J. Comp. Phys., 32, (1979), pp. 101–136.
- [22] VAN-LEER B., *On the relationship between the upwind differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher, and Roe*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 5, (1984), pp. 1–20.
- [23] VILA J.P., *On the existence and the smoothness of solutions for fluid flow equations with friction and slope source term*, Internal Report of Ecole Polytechnique, n^o 133, (1985).
- [24] VILA J.P., *High-order schemes and entropy condition for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, Math. of Comp., 50, 181, (1988), pp. 53–73.

CHAPITRE IV

Analyse de schémas décentrés pour des lois de conservation bidimensionnelle non homogènes

Travail soumis pour publication

Annoncé dans la note CRAS , t. 309, Série I, (1989), pp. 395–398.

Analyse de schémas décentrés pour des lois de conservation bidimensionnelles non homogènes

A. CHALABI

Tour IRMA, Laboratoire TIM3 – Institut IMAG, BP 53X, 38041 Grenoble Cedex, France

Résumé. On présente dans cette étude, une analyse de la stabilité et de la convergence de schémas décentrés pour des lois de conservation bidimensionnelles ayant un terme source. Les schémas proposés sont précis à l'ordre un et deux.

An analysis of upwind schemes for inhomogeneous two dimensional conservation laws

Abstract. This paper deals with the study of the stability and the convergence of upwind schemes, for two dimensional conservation laws with source terms. The proposed schemes are first and second order accurate.

0- INTRODUCTION:

Beaucoup de problèmes d'intérêt technologique sont modélisés par des lois de conservation non homogènes et multidimensionnelles. Le terme source est dû à des effets physiques ou géométriques. Le caractère multidimensionnel est très courant dans les problèmes pratiques (dynamique des gaz, simulation des réservoirs de pétrole...etc). D'où l'intérêt de la résolution numérique des équations quasi-linéaires de la forme:

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = q(u, x, y)$$

L'étude théorique de ce type d'équations est faite dans [10] ; où des résultats d'existence et d'unicité de la solution entropique (physique) sont établis .

L'étude de la convergence de schémas monotones (d'ordre un) pour des lois de conservation bidimensionnelles est faite dans ([5], [11], [14]). Des schémas quasi d'ordre deux ont été proposés dans [10].

Le plan du papier se présente comme suit: On rappelle dans §1 quelques préliminaires relatifs à la solution entropique. Le paragraphe 2 porte sur l'étude de la convergence des schémas implicite et explicite du premier ordre. L'étude de la stabilité du schéma quasi d'ordre deux en espace est faite au paragraphe 3. Au §4 on présente des résultats numériques.

1-QUELQUES PRELIMINAIRES:

Soit $T > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$, $q \in C^1(\mathbb{R}^3)$, la fonction q est supposée Lipschitzienne par rapport aux trois variables u , x et y ; d_1 étant la constante de Lipschitz; $q(0, \cdot, \cdot) = 0$.

On s'intéresse à l'approximation par des schémas aux différences finies du problème de Cauchy:

$$(1.1) \quad u_t + f(u)_x + g(u)_y = q(u, x, y) \quad \text{pour } (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times]0, T[$$

$$(1.2) \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

On se propose d'approcher une solution faible de (1.1), (1.2) i.e. $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$ satisfaisant à

$$(1.3) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \int_{]0, T[} (u \phi_t + f(u) \phi_x + g(u) \phi_y) dx dy dt + \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x, y) \phi(x, y, 0) dx dy \\ = - \int_{\mathbb{R}^2} \int_{]0, T[} q(u, x, y) \phi(x, y, t) dx dy dt$$

pour toute fonction-test $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$, à support compact dans $\mathbb{R}^2 \times]0, T[$.

Soit $\eta(u) = |u - c|$; $c \in \mathbb{R}$, on pose

$$(1.4) \quad F(u) = \text{sgn}(u - c)(f(u) - f(c))$$

$$(1.5) \quad G(u) = \text{sgn}(u - c)(g(u) - g(c))$$

avec

$$\text{sgn}(r) = \begin{cases} +1 & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r = 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

L'unique solution physique (entropique) de (1.1)–(1.2) est la solution faible caractérisée par

$$(1.6) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \int_{]0, T[} (\eta(u) \phi_t + F(u) \phi_x + G(u) \phi_y) dx dy dt \geq - \int_{\mathbb{R}^2} \int_{]0, T[} \text{sgn}(u - c) q(u, x, y) \phi(x, y, t) dx dy dt$$

pour toute fonction-test $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$ positive et à support compact dans $\mathbb{R}^2 \times]0, T[$ et $\forall c \in \mathbb{R}$.

On utilise la décomposition suivante du flux f :

$$f = f_1 + f_2 \quad \text{avec } f_1' \geq 0 \quad \text{et } f_2' \leq 0$$

$$g = g_1 + g_2 \quad \text{avec } g_1' \geq 0 \quad \text{et } g_2' \leq 0$$

2-SCHEMAS D'ORDRE UN.

Soient h et l les pas d'espace suivant les directions x et y et soit k le pas de temps relié à h et l par les nombres fixés $r = k/h$ et $s = k/l$. On pose

$$(2.1) \quad u_{\delta}(x,t) = u_{i,j}^n \quad \text{pour } (x,y,t) \in \Omega_{i,j} \times J_n$$

avec $\Omega_{i,j} =](i-1/2)h, (i+1/2)h[\times](j-1/2)l, (j+1/2)l[$ et $J_n =](n-1/2)k, (n+1/2)k[$

$\forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2$ et $n \leq N = E(T/k) + 1$, où E désigne la fonction partie entière. $\delta = (h^2 + l^2)^{1/2}$.

On pose:

$$(2.2) \quad u_{i,j}^0 = \frac{1}{hl} \int_{\Omega_{i,j}} u_0(x,y) dx dy \quad \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2$$

Soit $x_i = ih$, $y_j = jl$; $\Delta_{+,i} a_{i,j} = a_{i+1,j} - a_{i,j}$, $\Delta_{+,j} a_{i,j} = a_{i,j+1} - a_{i,j}$

On considère le schéma décentré explicite :

$$(2.3) \quad \hat{u}_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - r \Delta_{+,i} [f_1(u_{i-1,j}^n) + f_2(u_{i,j}^n)] - s \Delta_{+,j} [g_1(u_{i,j-1}^n) + g_2(u_{i,j}^n)]$$

$$(2.4) \quad u_{i,j}^{n+1} = \hat{u}_{i,j}^{n+1} + k q(u_{i,j}^n, x_i, y_j)$$

PROPOSITION 2.1. *Sous la condition CFL:*

$$(2.5) \quad r [\sup_{x \in A} |f_1'(x)| + \sup_{x \in A} |f_2'(x)|] + s [\sup_{x \in A} |g_1'(x)| + \sup_{x \in A} |g_2'(x)|] \leq 1, \quad A = \{x, |x| \leq \|u^0\|_{\infty}\}$$

Le schéma (2.3) est TVD au sens suivant:

$$(2.6) \quad \sum_{i,j} |\hat{u}_{i+1,j}^{n+1} - \hat{u}_{i,j}^{n+1}| + \sum_{i,j} |\hat{u}_{i,j+1}^{n+1} - \hat{u}_{i,j}^{n+1}| h \leq \sum_{i,j} |u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n| + \sum_{i,j} |u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n| h \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et L^{∞} au sens suivant:

$$(2.7) \quad \|\hat{u}^{n+1}\|_{\infty} \leq \|u^n\|_{\infty} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Démonstration

(cf. [5] par exemple).

THEOREME 2.1:

Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2) \cap BV_{loc}(\mathbb{R}^2)$, alors sous la condition CFL (2.5), la solution approchée u_δ construite à partir du schéma explicite (2.3)–(2.4), converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$ vers la solution entropique du problème (1.1)–(1.2), lorsque δ tend vers zéro.

Démonstration

Comme dans le chapitre III, on commence par montrer que la suite (u_δ) est bornée dans

$L^\infty(\mathbb{R}^2 \times]0, T[) \cap BV_{loc}(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$. Pour cela on écrit le schéma (2.3)–(2.4) sous la forme:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - v_{1,i-1/2,j}^n (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) - v_{2,i+1/2,j}^n (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) - \mu_{1,i,j-1/2}^n (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n) \\ - \mu_{2,i,j+1/2}^n (u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n) + k q(u_{i,j}^n, x_i, y_j)$$

où

$$v_{1,i-1/2,j}^n = \tau [\Delta_{+,i} f_1(u_{i-1,j}^n)] / [\Delta_{+,i} (u_{i-1,j}^n)] \quad , \quad v_{2,i+1/2,j}^n = \tau [\Delta_{+,i} f_2(u_{i,j}^n)] / [\Delta_{+,i} (u_{i,j}^n)] \\ \mu_{1,i,j-1/2}^n = \tau [\Delta_{+,j} g_1(u_{i,j-1}^n)] / [\Delta_{+,j} (u_{i,j-1}^n)] \quad , \quad \mu_{2,i,j+1/2}^n = \tau [\Delta_{+,j} g_2(u_{i,j}^n)] / [\Delta_{+,j} (u_{i,j}^n)]$$

Utilisant les mêmes techniques que dans le cas d'une seule variable d'espace, on obtient sous la condition CFL (2.5), l'inegalité:

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq (1 + k d_1) \|u^n\|_\infty$$

On en déduit que la suite (u_δ) est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$.

D'autre part, en utilisant les mêmes techniques que dans le cas unidimensionnel ([2]), on a

$$\sum_{|i| \leq I, |j| \leq J} |u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}| \leq \sum_{|i| \leq I+1, |j| \leq J+1} |u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n| + k d_1 \sum_{|i| \leq I, |j| \leq J} |u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n| + 9 I J k d_1 h$$

et

$$\sum_{|i| \leq I, |j| \leq J} |u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}| h \leq \sum_{|i| \leq I+1, |j| \leq J+1} |u_{i,j}^n - u_{i,j}^n| h + k d_1 \sum_{|i| \leq I, |j| \leq J} |u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n| h + 9 I J k d_1 h$$

d'où la suite (u_δ) est bornée dans $BV_{loc}(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$.

On peut donc extraire de (u_δ) , une sous suite qui converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$, vers u solution faible de (1.1)–(1.2). Il reste à montrer que u vérifie la condition d'entropie (1.6). Le schéma (2.3) est monotone, donc d'après un résultat de Crandall–Majda [5], il existe un vecteur flux numérique d'entropie $(F_{i-1/2, j}, G_{i, j-1/2})$ défini par :

$$F_{i-1/2, j}^n = f_1(u_{i-1, j}^n \vee c) + f_2(u_{i, j}^n \vee c) - f_1(u_{i-1, j}^n \wedge c) - f_2(u_{i, j}^n \wedge c)$$

et

$$G_{i, j-1/2}^n = g_1(u_{i, j-1}^n \vee c) + g_2(u_{i, j}^n \vee c) - g_1(u_{i, j-1}^n \wedge c) - g_2(u_{i, j}^n \wedge c)$$

tels que

$$\eta(\hat{u}_{i, j}^{n+1}) - \eta(u_{i, j}^n) + r \Delta_+ F_{i-1/2, j}^n + s \Delta_+ G_{i, j-1/2}^n \leq 0$$

d'où

$$\eta(u_{i, j}^{n+1}) - \eta(u_{i, j}^n) + r \Delta_+ F_{i-1/2, j}^n + s \Delta_+ G_{i, j-1/2}^n \leq \eta(u_{i, j}^{n+1}) - \eta(\hat{u}_{i, j}^{n+1})$$

Le second membre de cette inégalité s'écrit

$$\eta(u_{i, j}^{n+1}) - \eta(\hat{u}_{i, j}^{n+1}) = [(|u_{i, j}^{n+1} - c| - |\hat{u}_{i, j}^{n+1} - c|) / (u_{i, j}^{n+1} - \hat{u}_{i, j}^{n+1})] (u_{i, j}^{n+1} - \hat{u}_{i, j}^{n+1})$$

Après multiplication par $(h \phi(ih, jl, nk))$ et intégration par parties discrète, on obtient à la limite, l'inégalité d'entropie (1.6). Donc u est la solution entropique de (1.1)–(1.2) et toute la suite (u_δ) converge vers u, en vertu de l'unicité de la solution entropique de (1.1)–(1.2).

On considère maintenant le schéma implicite–explicite dans le cas où $q = q(u)$:

$$(2.8) \quad u_{i, j}^{n+1} = u_{i, j}^n - r \Delta_{+, i} [f_1(u_{i-1, j}^{n+1}) + f_2(u_{i, j}^{n+1})] - s \Delta_{+, j} [g_1(u_{i, j-1}^{n+1}) + g_2(u_{i, j}^{n+1})] + k q(u_{i, j}^n)$$

Sans aucune condition du type CFL on peut montrer le résultat suivant:

THEOREME 2.2

Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2) \cap BV_{loc}(\mathbb{R}^2)$, alors la solution approchée u_δ construite à partir du schéma implicite-explicite (2.8), converge inconditionnellement dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$ vers la solution entropique du problème (1.1)–(1.2), lorsque δ tend vers zéro.

Démonstration

En écrivant le schéma (3.8) sous forme incrémentale, on obtient

$$(2.9) \quad \begin{cases} u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - C_{1,i-1/2,j}^{n+1} \Delta_{+,i} u_{i-1,j}^{n+1} + D_{1,i+1/2,j}^{n+1} \Delta_{+,i} u_{i,j}^{n+1} \\ \quad - C_{2,i,j-1/2}^{n+1} \Delta_{+,j} u_{i,j-1}^{n+1} + D_{2,i,j+1/2}^{n+1} \Delta_{+,j} u_{i,j}^{n+1} + k q(u_{i,j}^n) \end{cases}$$

avec

$$C_{1,i-1/2,j}^{n+1} = v_{1,i-1/2,j}^{n+1}, \quad D_{1,i+1/2,j}^{n+1} = -v_{2,i+1/2,j}^{n+1}$$

$$C_{2,i,j-1/2}^{n+1} = \mu_{1,i,j-1/2}^{n+1}, \quad D_{2,i,j+1/2}^{n+1} = -\mu_{2,i,j+1/2}^{n+1}$$

Où

$$v_{1,i-1/2,j}^{n+1} = r [\Delta_{+,i} f_1(u_{i-1,j}^{n+1})] / [\Delta_{+,i} (u_{i-1,j}^{n+1})], \quad v_{2,i+1/2,j}^{n+1} = r [\Delta_{+,i} f_2(u_{i,j}^{n+1})] / [\Delta_{+,i} (u_{i,j}^{n+1})]$$

$$\mu_{1,i,j-1/2}^{n+1} = r [\Delta_{+,j} g_1(u_{i,j-1}^{n+1})] / [\Delta_{+,j} (u_{i,j-1}^{n+1})], \quad \mu_{2,i,j+1/2}^{n+1} = r [\Delta_{+,j} g_2(u_{i,j}^{n+1})] / [\Delta_{+,j} (u_{i,j}^{n+1})]$$

De (2.9), on obtient

$$(2.10) \quad \|u^{n+1}\|_\infty \leq (1 + c k) \|u^n\|_\infty, \quad c = d_1 : \text{La constante de Lipschitz de } q.$$

d'où

$$(2.11) \quad \|u^n\|_\infty \leq C \|u^0\|_\infty, \quad \text{avec } C = e^{2T d_1}$$

La suite (u_δ) est donc bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$.

D'autre part, on a

$$\sum_{i,j} |u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}| \leq (1 + d_1 k) \sum_{i,j} |u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n|$$

d'où

$$\sum_{i,j} |u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n| \leq e^{2T d_1} \sum_{i,j} |u_{i+1,j}^0 - u_{i,j}^0|$$

De même on obtient

$$\sum_{i,j} |u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}| h \leq (1 + d_1 k) \sum_{i,j} |u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n| h$$

d'où

$$\sum_{i,j} |u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n| h \leq e^{2T d_1} \sum_{i,j} |u_{i,j+1}^0 - u_{i,j}^0| h$$

On déduit de ce qui précède que la suite (u_δ) est bornée dans $BV_{loc}(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$. Donc, on peut extraire de (u_δ) , une sous suite qui converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$ vers u solution faible de (1.1)–(1.2). Pour montrer que u est la solution entropique, on pose

$$\begin{aligned} f_{i-1/2,j}^{n+1} &= f_1(u_{i-1,j}^{n+1}) + f_2(u_{i,j}^{n+1}) \\ g_{i,j-1/2}^{n+1} &= g_1(u_{i,j-1}^{n+1}) + g_2(u_{i,j}^{n+1}) \end{aligned}$$

et

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \text{sgn}(u_{i,j}^{n+1} - c)$$

(2.8) et les inégalités suivantes

$$\Delta_{+,i} [(f_{i-1/2,j}^{n+1} - f_1(c) - f_2(c)) \psi_{i,j}^{n+1}] \leq [\Delta_{+,i} (f_{i-1/2,j}^{n+1} - f_1(c) - f_2(c))] \psi_{i,j}^{n+1}$$

$$\Delta_{+,j} [(g_{i,j-1/2}^{n+1} - g_1(c) - g_2(c)) \psi_{i,j}^{n+1}] \leq [\Delta_{+,j} (g_{i,j-1/2}^{n+1} - g_1(c) - g_2(c))] \psi_{i,j}^{n+1}$$

donnent

$$\begin{aligned} |u_{i,j}^{n+1} - c| - |u_{i,j}^n - c| + r \Delta_{+,i} [(f_1(u_{i-1,j}^{n+1}) + f_2(u_{i,j}^{n+1}) - f_1(c) - f_2(c)) \psi_{i,j}^{n+1}] \\ + s \Delta_{+,j} [(g_1(u_{i,j-1}^{n+1}) + g_2(u_{i,j}^{n+1}) - g_1(c) - g_2(c)) \psi_{i,j}^{n+1}] \leq k q(u_{i,j}^{n+1}) \psi_{i,j}^{n+1} \end{aligned}$$

$$(3.5) \quad \hat{b}_{i,j}^n = (u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n)/(2l)$$

On utilisera les valeurs aux interfaces:

$$(3.6) \quad \begin{cases} u_{i-1/2,+}^n = u_{i,j}^n - h/2 a_{i,j}^n \\ u_{i+1/2,-}^n = u_{i,j}^n + h/2 a_{i,j}^n \end{cases}$$

et

$$(3.7) \quad \begin{cases} u_{i,j-1/2,+}^n = u_{i,j}^n - l/2 b_{i,j}^n \\ u_{i,j+1/2,-}^n = u_{i,j}^n + l/2 b_{i,j}^n \end{cases}$$

Le schéma d'ordre deux en espace s'écrit

$$(3.8) \quad \begin{cases} u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - r \Delta_{+,i} [f_1(u_{i-1/2,-}^n) + f_2(u_{i-1/2,+}^n)] \\ + s \Delta_{+,j} [g_1(u_{i,j-1/2,-}^n) + g_2(u_{i,j-1/2,+}^n)] + k q(u_{i,j}^n, x_i, y_j) \end{cases}$$

En utilisant les techniques utilisées dans le cas d'une seule variable d'espace (Chalabi [2]), on a le résultat de stabilité suivant:

THEOREME 3.1

Si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, alors sous la condition CFL

$$(3.9) \quad r [\sup_{x \in A} |f_1'(x)| + \sup_{x \in A} |f_2'(x)|] + s [\sup_{x \in A} |g_1'(x)| + \sup_{x \in A} |g_2'(x)|] \leq 2/3 ; A = \{x, |x| \leq 2 e^{2Td} \|u^0\|_\infty\}$$

il existe une constante $C > 0$, telle que la famille (u^n) construite à partir du schéma explicite (3.8) vérifie:

$$(3.10) \quad \|u^n\|_\infty \leq C \|u^0\|_\infty$$

Démonstration

Par construction on a :

$$\begin{aligned} a_{i,j}^n &= \alpha_{i+1/2,j}^n (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n)/h = \beta_{i-1/2,j}^n (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n)/h \\ b_{i,j}^n &= \lambda_{i,j+1/2}^n (u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n)/l = \delta_{i,j-1/2}^n (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n)/l \end{aligned}$$

où chacun des nombres α , β , λ et δ est un réel positif inférieur ou égal à 1.

Par application, dans (3.8), du théorème des accroissements finis, aux fonctions f_1, f_2, g_1 et g_2 , le schéma (3.8) s'écrit sous la forme incrémentale suivante :

$$(3.11) \quad \begin{cases} u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - C_{1,i-1/2,j}^n \Delta_{+,i} u_{i-1,j}^n + D_{1,i+1/2,j}^n \Delta_{+,i} u_{i,j}^n \\ \quad - C_{2,i,j-1/2}^n \Delta_{+,j} u_{i,j-1}^n + D_{2,i,j+1/2}^n \Delta_{+,j} u_{i,j}^n + k q(u_{i,j}^n, x_i, y_j) \end{cases}$$

Avec

$$\begin{aligned} C_{1,i-1/2,j}^n &= v_{1,i-1/2,j}^n (1 + 1/2 \beta_{i-1/2,j}^n - 1/2 \alpha_{i-1/2,j}^n) \\ D_{1,i+1/2,j}^n &= -v_{2,i+1/2,j}^n (1 - 1/2 \beta_{i+1/2,j}^n + 1/2 \alpha_{i+1/2,j}^n) \\ C_{2,i,j-1/2}^n &= \mu_{1,i,j-1/2}^n (1 + 1/2 \delta_{i,j-1/2}^n - 1/2 \lambda_{i,j-1/2}^n) \\ D_{2,i,j+1/2}^n &= -\mu_{2,i,j+1/2}^n (1 - 1/2 \delta_{i,j+1/2}^n + 1/2 \lambda_{i,j+1/2}^n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_{1,i-1/2,j}^n &= r [\Delta_{+,i} f_1(u_{i-1,j}^n + h/2 a_{i-1,j}^n)] / [\Delta_{+,i} (u_{i-1,j}^n + h/2 a_{i-1,j}^n)] \\ v_{2,i+1/2,j}^n &= r [\Delta_{+,i} f_2(u_{i,j}^n - h/2 a_{i,j}^n)] / [\Delta_{+,i} (u_{i,j}^n - h/2 a_{i,j}^n)] \\ \mu_{1,i,j-1/2}^n &= r [\Delta_{+,j} g_1(u_{i,j-1}^n + h/2 b_{i,j-1}^n)] / [\Delta_{+,j} (u_{i,j-1}^n + h/2 b_{i,j-1}^n)] \\ \mu_{2,i,j+1/2}^n &= r [\Delta_{+,j} g_2(u_{i,j}^n - h/2 b_{i,j}^n)] / [\Delta_{+,j} (u_{i,j}^n - h/2 b_{i,j}^n)] \end{aligned}$$

Utilisant (3.11), le schéma (3.8) s'écrit

$$(3.12) \quad \begin{cases} u_{i,j}^{n+1} = (1 - C_{1,i-1/2,j}^n - D_{1,i+1/2,j}^n - C_{2,i,j-1/2}^n - D_{2,i,j+1/2}^n) u_{i,j}^n + C_{1,i-1/2,j}^n u_{i-1,j}^n \\ \quad + D_{1,i+1/2,j}^n u_{i+1,j}^n + C_{2,i,j-1/2}^n u_{i,j-1}^n + D_{2,i,j+1/2}^n u_{i,j+1}^n + k q(u_{i,j}^n, x_i, y_j) \end{cases}$$

Sous la condition CFL (3.9) on obtient donc

$$(3.13) \quad \|u^{n+1}\|_{\infty} \leq (1 + c k) \|u^n\|_{\infty}, \quad c = d_1 : \text{La constante de Lipschitz de } q.$$

d'où

$$(3.14) \quad \|u^n\|_{\infty} \leq (1 + c k)^n \|u^0\|_{\infty}$$

or

$$n \leq [T/k] + 1 \leq 2 T k$$

donc

$$(3.15) \quad \|u^n\|_\infty \leq C \|u^0\|_\infty, \text{ avec } C = e^{2T d_1}$$

Remarque 3.1:

Du théorème 3.1 on a la L^∞ -stabilité, mais ce résultat reste insuffisant pour prouver la convergence à cause des non linéarités.

Remarque 3.2:

Certains problèmes pratiques, comme celui de la simulation des réservoirs de pétrole, sont modélisés par des lois bidimensionnelles de la forme :

$$(3.11) \quad u_t + (f(u, x, y))_x + (g(u, x, y))_y = q(u, x, y)$$

où le flux est fonction de la solution u et des variables x et y . Ce type d'équations est très peu étudié numériquement.

4-RESULTATS NUMERIQUES:

On résout numériquement le problème de Cauchy avec une donnée de Riemann:

$$(4.1) \quad \begin{cases} u_t + (a u^2/2)_x + (u^2/2)_y = b u, & 1 \leq a \leq 2 \\ u(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > x \\ -1 & \text{si } y < x \end{cases} \end{cases}$$

dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

Pour $b = 0$, la solution exacte de (4.1) est (cf [6]) constituée d'une discontinuité de contact stationnaire si $a = 1$ et d'une onde de choc stationnaire si $a > 1$. Les fonctions $f(u) = a u^2/2$ et $g(u) = u^2/2$ sont décomposées selon le procédé d'Engquist-Osher [7].

On présente dans les différentes figures les courbes des isovaleurs de la solution. On constate sur les différentes figures la meilleure précision du schéma de Van-Leer (quasi d'ordre 2) par rapport au schéma du premier ordre. On présente quelques tests pour différentes valeurs des paramètres a et b . Comme conditions aux limites, On a pris des flux nuls aux bords.

Exemple 4.1:

On résout le problème (4.1) à $t = 20\Delta t$, avec $\Delta t = 0.01$, $\Delta x = \Delta y = 0.1$, $a = 1.25$, $b = 0.01$.

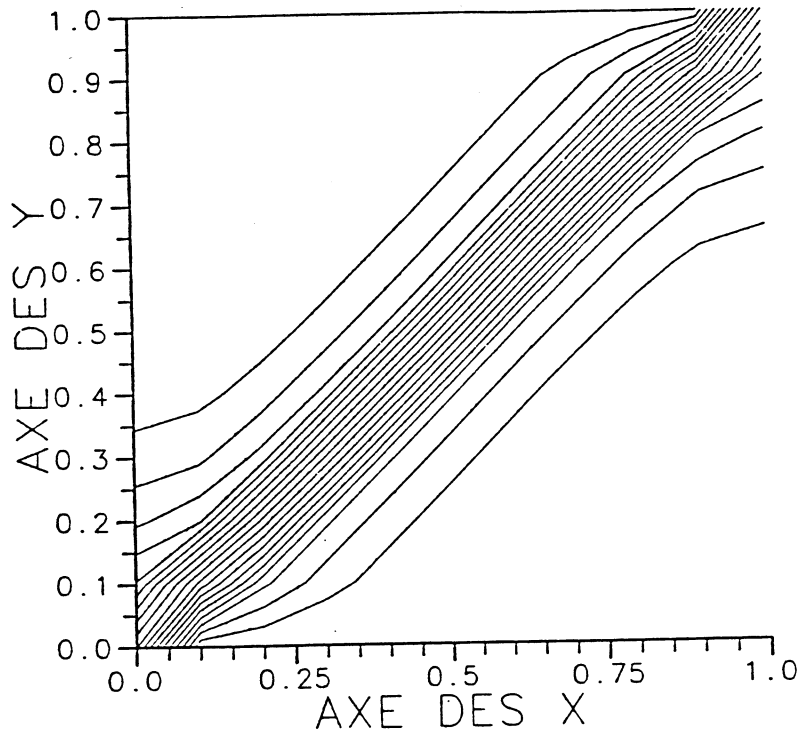


Figure 4.1: Courbes des isovaleurs obtenues par le schéma d'ordre un.

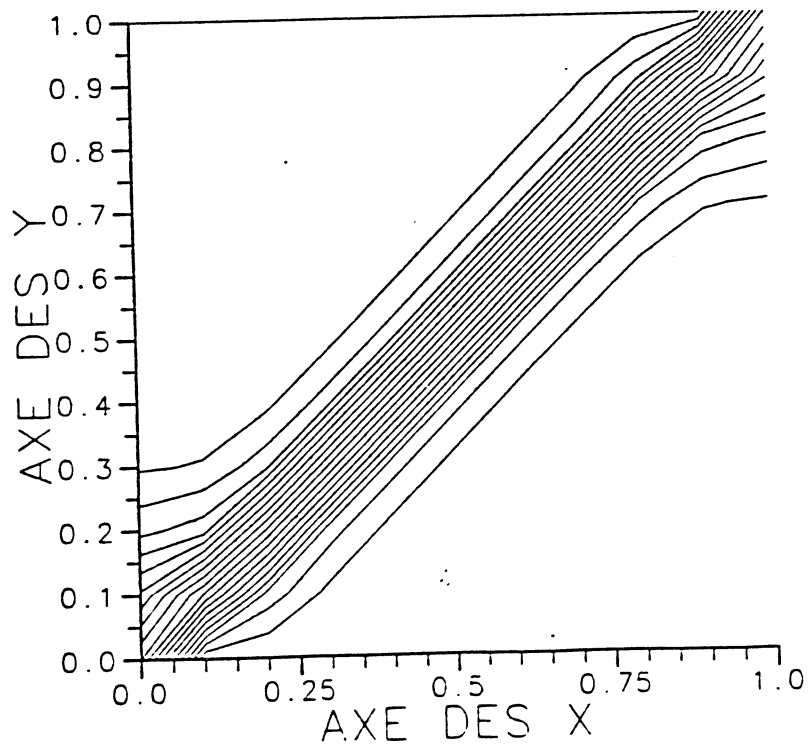


Figure 4.2: Courbes des isovaleurs obtenues par le schéma quasi d'ordre deux.

Exemple 4.2:

On résout le problème (4.1) à $t = 10\Delta t$, avec $\Delta t = 0.01$, $\Delta x = \Delta y = 0.1$, $a = 1.75$, $b = 0.01$.

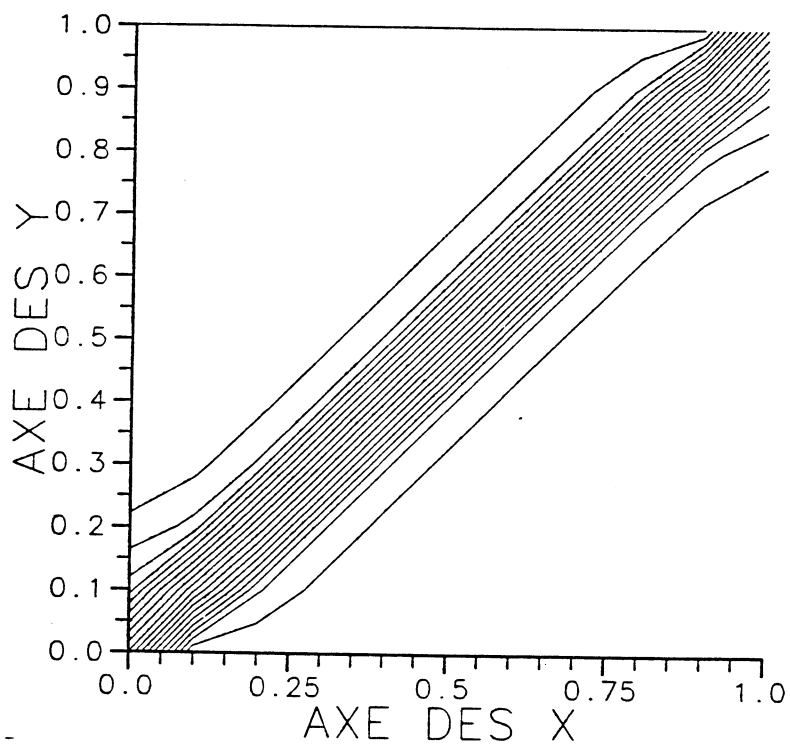


Figure 4.3: Courbes des isovaleurs obtenues par le schéma d'ordre un.

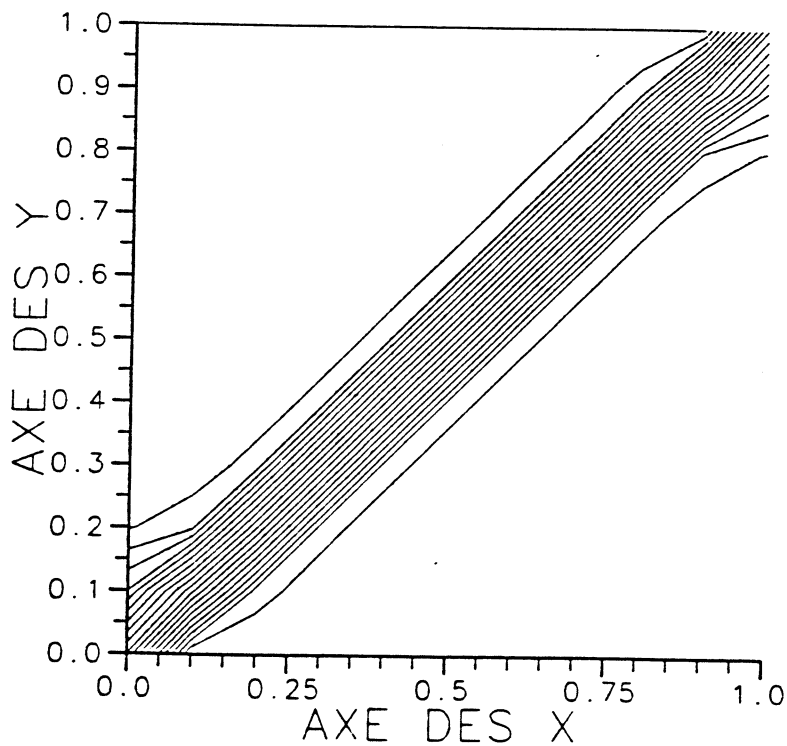


Figure 4.4: Courbes des isovaleurs obtenues par le schéma quasi d'ordre deux.

Exemple 4.3:

On résout le problème (4.1) à $t = 10\Delta t$, avec $\Delta t = 0.02$, $\Delta x = \Delta y = 0.1$, $a = 1.75$, $b = 0.1$.

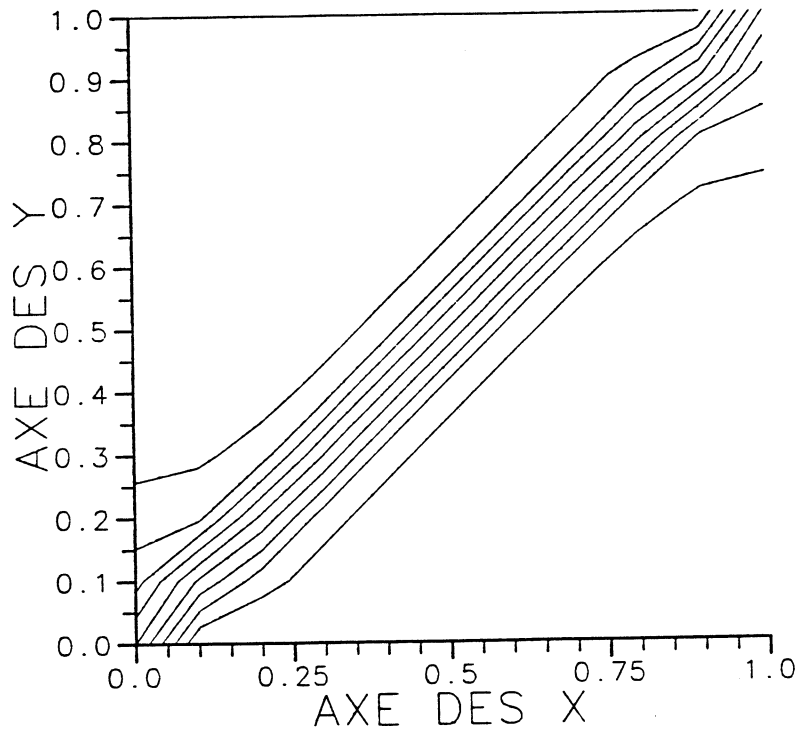


Figure 4.5: Courbes des isovaleurs obtenues par le schéma d'ordre un.

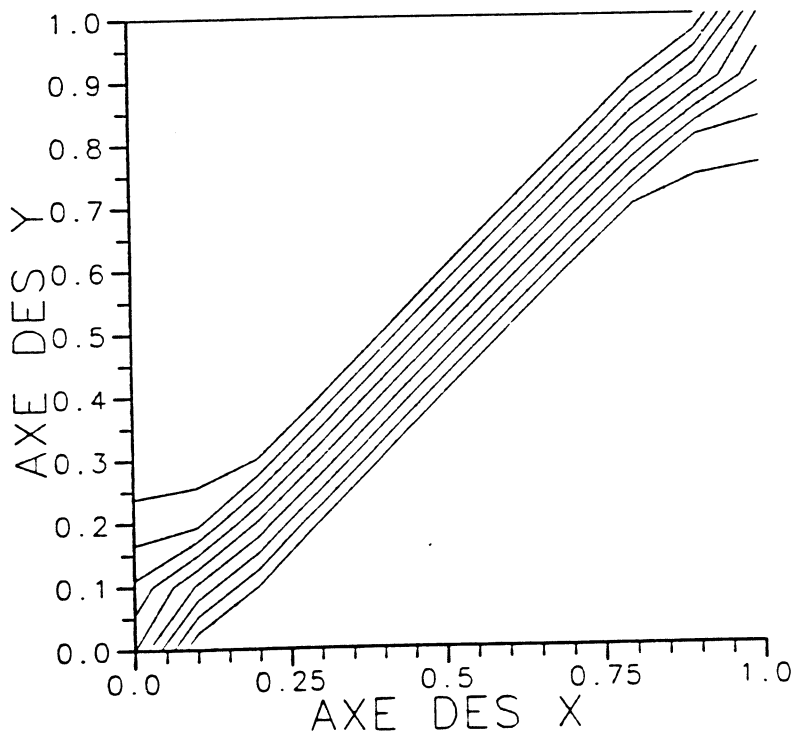


Figure 4.6: Courbes des isovaleurs obtenues par le schéma quasi d'ordre deux.

Exemple 4.4:

On résout le problème (4.1) à $t = 10\Delta t$, avec $\Delta t = 0.02$, $\Delta x = \Delta y = 0.1$, $a = 1.$, $b = 0.01$.

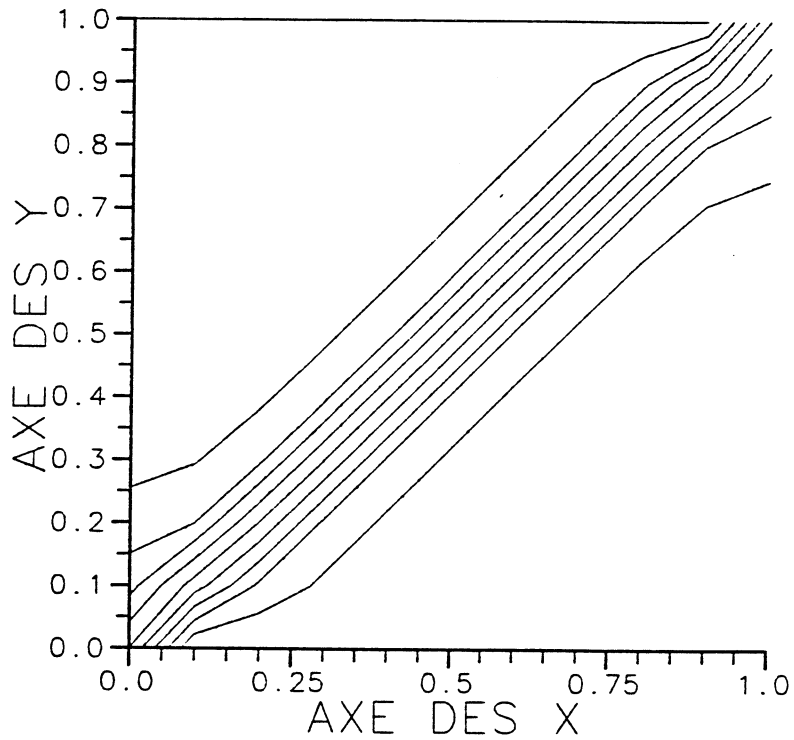


Figure 4.7: Courbes des isovaleurs obtenues par le schéma d'ordre un.

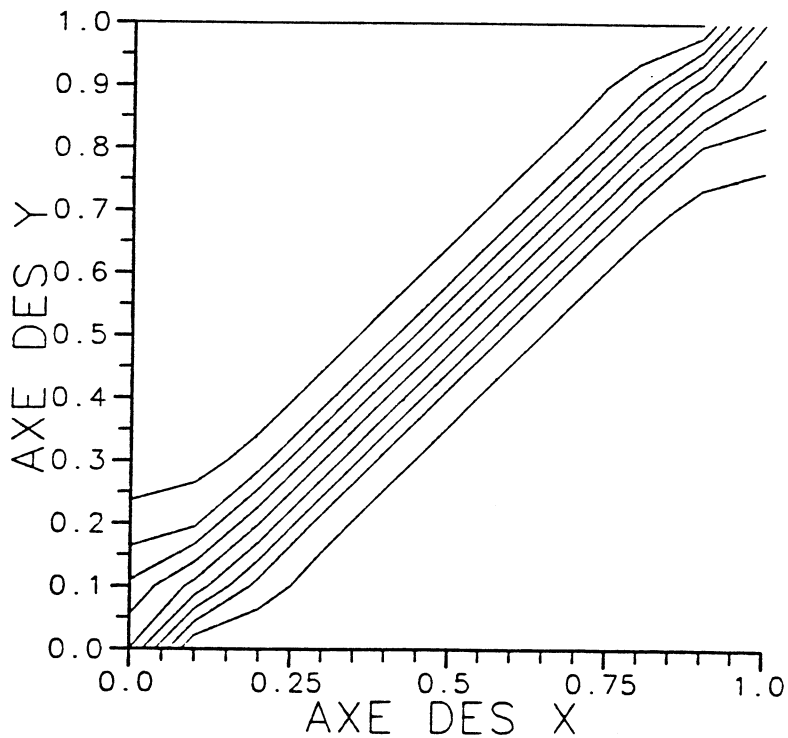


Figure 4.8: Courbes des isovaleurs obtenues par le schéma quasi d'ordre deux.

Remerciements. L'auteur remercie vivement C. Bernier pour sa contribution à la programmation des tests numériques.

REFERENCES

- [1] BELL J.B., DAWSON C.N. and SHUBIN G.R., *An upsplitted, higher Godunov method for scalar conservation laws in multiple dimensions*, J. Comp. Phys., 74, 51988), pp. 1–24.
- [2] CHALABI A., *Convergence de schémas décentrés pour des lois de conservation non-homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série I, (1988), pp. 129–132 .
- [3] CHALABI A., *Analyse de schémas décentrés pour des lois de conservation bidimensionnelles non homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 309, Série I, (1989), pp. 395–398 .
- [4] CONWAY E. and SMOLLER J.A., *Global solutions of the Cauchy problem for quasilinear first order equations in several space variables*, Comm. Pure Appl. Math., 19 , (1966), pp. 95–105.
- [5] CRANDALL M.G. and MAJDA A., *Monotone difference approximations for scalar conservation laws*, Math. of Comp., 34, (1980), pp. 1–21.
- [6] CRANDALL M.G. and MAJDA A., *The method of fractional steps for conservation laws*, Num. Math., 34, (1980), pp. 285–314.
- [7] ENGQUIST B. and OSHER S., *Stable and entropy condition satisfying approximations for transonic flow calculations*, Math. Comp., 34, (1980), pp. 45–75 .
- [8] GALLOUET T. and PFERZEL A., *On some upstream weighting schemes for oil recovery simulation* , (à paraître dans les annales de l'ENIT).
- [9] GOODMAN J.B. and LE VEQUE R., *On the accuracy of stable schemes for 2D scalar conservation laws*, Math. Comp., 45, (1985), pp. 15–21.
- [10] KRUSKOV N., *First order quasilinear equations in several independent variables*, Math. USSR Sb. ,10, (1970), pp.217–243.
- [11] LEROUX A.Y., *Approximation de quelques problèmes hyperboliques non-linéaires* , Thèse d'Etat , Rennes (1979) .

- [12] LINDQUIST W.B., *The scalar Riemann problem in two spacial dimensions piecewise smoothness of solutions and breakdown*, SIAM J. Math. Anal., 17, (1986), pp. 1178–1197.
- [13] MONTAGNE J.L., *Etude de schémas numériques décentrés en dynamique des gaz bidimensionnelle*, La Recherche Aéropaciale, 5 , (1984) , pp. 323–338.
- [14] SANDERS R., *On convergence of monotone finite difference schemes with variable spacial differencing*, Math. Comp. , 40, (1983), pp. 91–106.
- [15] VAN-LEER B., *On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe* , SIAM J. Sci. Stat. Comput. , 5, 1, (1984), pp. 1–20.
- [16] WAGNER D., *The Riemann problem in two space dimensions for a single conservation law*, SIAM J. Math. Anal., 14, (1983), pp. 534–559.

DEUXIEME PARTIE

Systemes hyperboliques non linéaires

CHAPITRE V

Quelques généralités sur les systèmes hyperboliques non linéaires

1-Quelques généralités

On considère le système des lois de conservation

$$(1.1) \quad u_t + f(u)_x = 0$$

$$u : \mathbb{Q} = \mathbb{R}_x \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, \text{ régulière}$$

1.1-Hyperbolicité

Le système (1.1) est dit hyperbolique si la matrice Jacobienne $A(u) = f'(u)$ a pour tout u toutes ses valeurs propres réelles, Strictement hyperbolique si de plus ses valeurs propres sont distinctes pour tout u . On a alors :

$$\forall u \quad \lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \dots < \lambda_N(u)$$

On notera respectivement $l_i(u)$ et $r_i(u)$ ($i = 1, \dots, N$) les vecteurs propres à gauche et à droite de $A(u)$.

1.2-Invariants de Riemann

Une fonction $w(u)$ est appelée k-invariant de Riemann au sens de Lax si

$$(1.2) \quad \text{grad} w(u) \cdot r_k(u) = 0 \quad \forall u$$

1.3-Champs linéairement dégénérés et champs vraiment non linéaires

La valeur propre λ_k est dite linéairement dégénérée si

$$(1.3) \quad \text{grad} \lambda_k(u) \cdot r_k(u) = 0 \quad \forall u$$

i.e. λ_k est un k -invariant de Riemann; c'est en particulier le cas si A est une matrice constante (i.e. le système est linéaire).

Elle est vraiment non linéaire si

$$(1.4) \quad \text{grad } \lambda_k(u) \cdot r_k(u) \neq 0 \quad \forall u$$

1.4-Courbes caractéristiques

Soit $u(x, t)$ une solution régulière de (1.1); on définit la k-courbe caractéristique, x^k issue de (x_0, t_0) par :

$$(1.5) \quad (x^k(t; x_0, t_0))_t = \lambda_k(u(x^k(t; x_0, t_0), t))$$

Proposition 1.1

Si w est un j -invariant de Riemann pour chaque $j \neq k$, alors w est constant le long d'une k -courbe caractéristique.

Pour la démonstration cf Smoller [6].

Le système (1.1) étant non linéaire, des k -courbes caractéristiques issues des points différents à $t = t_0$, peuvent se rencontrer rendant ainsi impossible l'existence de solutions régulières. D'où la nécessité d'introduire des solutions faibles.

1.5-Solution faible

u est solution faible si et seulement si

$$(1.6) \quad \iint_{\mathbb{R} \times]0, T[} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0$$

pour toute fonction-test $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T[)$, à support compact dans $\mathbb{R} \times [0, T[$.

Soit Γ une ligne de discontinuité régulière de u , donnée sous la forme: $x = x(t)$. Soit $x'(t) = \sigma$ la vitesse du déplacement de la discontinuité. Par une intégration par parties de (1.6) on obtient la relation de Rankine-Hugoniot suivante:

$$(1.7) \quad \sigma [u] = [f(u)]$$

avec

$$[v] = v(x(t) + 0, t) - v(x(t) - 0, t)$$

2-Solution entropique

Il n'y a généralement pas unicité des solutions faibles du problème de Cauchy associé à (1.1). Pour déterminer la "bonne" solution faible (au sens physique) on dispose de deux critères:

2.1-Critère 1: Conditions de choc de Lax

Ce critère est basé sur la théorie des caractéristiques. Si u est une solution faible, discontinue le long d'une courbe $x = x(t)$, et de classe C^1 en dehors de cette courbe. On dira que l'on a une discontinuité admissible s'il existe k , tel que

$$(2.1) \quad \lambda_k(u(x+0, t)) \leq \sigma = x'(t) \leq \lambda_k(u(x-0, t))$$

et

$$(2.2) \quad \lambda_{k-1}(u(x-0, t)) < \sigma < \lambda_{k+1}(u(x+0, t))$$

s'il y a une double égalité en (2.1), alors on a une k -discontinuité de contact. Si (2.1) est une double inégalité stricte, alors on a un k -choc. Nous définirons au paragraphe suivant ce qu'on appelle une k -détente.

2.2-Critère 2: Condition d'entropie de Lax

Définition 2.1

Soit $(\eta, F) \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$. Le couple (η, F) est un couple entropie-flux d'entropie pour le système (1.1) si

1) η est convexe

2) $\text{grad } \eta(u) \cdot f'(u) = \text{grad } F(u)$

La condition d'entropie de Lax est la suivante: si (η, F) est un couple d'entropie-flux d'entropie pour le système (1.1), alors les solutions faibles admissibles de (1.1) sont celles qui vérifient :

$$(2.3) \quad (\eta(u))_t + (F(u))_x \leq 0 \quad \text{au sens des distributions}$$

Définition 2.2

Une solution u de (1.1) est dite solution entropique, si l'inégalité (2.3) est vérifiée pour tout couple d'entropie-flux d'entropie (η, F) associé au système (1.1).

Remarque 2.1

Les solutions régulières vérifient l'égalité : $(\eta(u))_t + (F(u))_x = 0$.

Remarque 2.2

Soit u une solution de (1.1) régulière hors d'une courbe de discontinuité $x = x(t)$, si $\|u(x+0,t) - u(x-0,t)\|$ est petit, alors u vérifie les conditions de choc de Lax (2.1) et (2.2) si et seulement si u vérifie la condition d'entropie de Lax (2.3).

3- Problème de Riemann

La résolution du problème de Riemann est d'un grand intérêt car il est à la base de la plupart des schémas numériques.

On considère le problème de Cauchy :

$$(3.1) \quad \begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

où u_g et u_d sont deux vecteurs quelconques de \mathbb{R}^N . Les valeurs propres sont supposées réelles distinctes, chacune d'elles étant soit vraiment non linéaire, soit linéairement dégénérée.

D'après Lax[3], la solution faible vérifiant les conditions de choc et d'entropie est du type :

$$(3.2) \quad u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = x/t.$$

Elle est formée d'une succession d'états constants reliant u_g à u_d :

$$u_g = u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1} = u_d$$

Chaque état u_{k+1} étant relié à u_k par une k -détente ou un k -choc si λ_k est vraiment non linéaire et par une k -discontinuité de contact si λ_k est linéairement dégénérée.

Soit a un vecteur de \mathbb{R}^N , étudions l'ensemble des états (vecteurs) b de \mathbb{R}^N que l'on peut relier à a par une onde de l'un des trois types suivants

i) k -détente:

C'est une solution u de (3.1), de la forme (3.2), C^1 par morceaux, continue et passant par le point a pour $\xi = \xi_0$.

Reportons (3.2) dans (3.1), on obtient

$$\frac{1}{t}(-\xi I + f'(u(\xi))) u'(\xi) = 0$$

D'où deux cas

– ou $u'(\xi) = 0$: u est (localement) constant

– ou il existe k tel que $\xi = \lambda_k(u(\xi))$ et $u'(\xi) \parallel r_k(u(\xi))$

De ce dernier cas, on déduit que si w est un invariant de Riemann, on a

$$\text{grad } w(u(\xi)) \cdot u'(\xi) = 0$$

D'où

$$(3.3) \quad w(u(\xi)) = \text{constante}, \text{ pour tout } k\text{-invariant de Riemann } w.$$

Par ailleurs (voir Lax [3]) on peut normaliser r_k par

$$\text{grad } \lambda_k(u(\xi)) \cdot r_k(u(\xi)) = 1$$

(si λ_k est vraiment non linéaire ce qu' on suppose ici)

On a alors

$$(3.4) \quad \begin{cases} u'(\xi) // r_k(u(\xi)) \\ u(\xi_0) = a \end{cases}$$

On définit alors:

$$O_g^k(a) = \{ b = u(\xi), \xi \geq \xi_0, u \text{ vérifiant (3.3) - (3.4) sur } [\xi_0, \xi] \}$$

C'est l'ensemble des états b pouvant être reliés à a par une k-détente (a étant à gauche de b dans le plan (x,t) car $\xi > \xi_0$).

Remarque 3.1

$\forall b \in O_g^k(a)$, on a $\lambda_k(b) \geq \lambda_k(a)$.

On définit de manière analogue

$$O_d^k(a) = \{ b = u(\xi), \xi \leq \xi_0, u \text{ vérifiant (3.3)-(3.4) sur } [\xi, \xi_0] \}$$

(a est à droite de b dans le plan (x,t)).

$\forall b \in O_d^k(a)$, on a $\lambda_k(b) \leq \lambda_k(a)$

$$\text{On a : } O^k(a) = O_g^k(a) \cup O_d^k(a)$$

Dans \mathbb{R}^N , $O^k(a)$ est une courbe, appelée courbe de k-détente.

ii) k-choc:

C'est une droite d'équation : $x/t = \sigma$.

Si on considère l'ensemble de Rankine-Hugoniot défini par :

$$(3.5) \quad \text{R.H.}(a) = \{ b \in \mathbb{R}^N / \exists \sigma \in \mathbb{R} \text{ vérifiant : } f(a) - f(b) = \sigma (b-a) \}$$

On définit :

$$C_g^k(a) = \{ b \in \mathbb{R}^N / \exists \sigma \in \mathbb{R}, \text{ vérifiant: } \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } f(a) - f(b) = \sigma (b-a) \\ \text{(ii) } \lambda_k(b) < \sigma < \lambda_k(a) \text{ et } \lambda_{k-1}(a) < \sigma < \lambda_{k+1}(b) \end{array} \right\} \}$$

C'est l'ensemble des états b pouvant être reliés à a (a étant à gauche de b dans le plan (x,t)) par un k -choc .

De même on a :

$$C_d^k(a) = \{ b \in \mathbb{R}^N / \exists \sigma \in \mathbb{R}, \text{ vérifiant: } \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } f(a) - f(b) = \sigma (b-a) \\ \text{(ii) } \lambda_k(a) < \sigma < \lambda_k(b) \text{ et } \lambda_{k-1}(b) < \sigma < \lambda_{k+1}(a) \end{array} \right\} \}$$

C'est l'ensemble des états b pouvant être reliés à a par un k -choc (a étant à droite de b dans le plan (x,t)) .

Dans \mathbb{R}^N , $C_g^k(a)$ est une courbe appelée courbe de k -choc à gauche et $C_d^k(a)$ courbe de k -choc à droite .

Remarque 3.2:

Les k -courbes caractéristiques issues des états situés à gauche et à droite du k -choc le rencontrent .

iii) k -discontinuité de contact :

C'est le cas où λ_k est linéairement dégénéré. Dans ce cas il ne peut y avoir ni k -détente, ni k -choc. La courbe solution est donnée par

$$(3.6) \quad \begin{cases} u'(\xi) = h(\xi) r_k(u(\xi)) , & h : \text{fonction scalaire arbitraire} \\ u(\xi_0) = a \end{cases}$$

La courbe de discontinuité est une droite d'équation : $x/t = \sigma$

La relation de Rankine-Hugoniot est vérifiée au passage de cette droite et pour tout k -invariant de Riemann w on a

$$(3.7) \quad w(u(\xi)) = \text{constante} .$$

En particulier

$$(3.8) \quad \lambda_k(u(\xi)) = \text{constante} = \lambda_k(a) = \sigma = \lambda_k(b)$$

On définit

$$D.C.^k(a) = \{ b = u(\xi), u \text{ vérifiant (3.6), (3.7) et (3.8)} \}$$

C'est l'ensemble des états b pouvant être reliés à a par une discontinuité de contact ; a se trouvant à droite ou à gauche de b , dans le plan (x,t) .

Dans \mathbb{R}^N , c'est une courbe appelée courbe de k -discontinuité de contact.

4 - Schémas aux différences pour les systèmes hyperboliques

Nous nous limitons dans ce paragraphe aux schémas type Godunov. S'inspirant des techniques développées par Godunov [1], Harten–Lax–Van-Leer [2] ont introduit une classe plus générale de schémas type Godunov. Ces schémas utilisent un solveur approché du problème de Riemann (et non la solution exacte de ce problème comme dans le schéma de Godunov).

4.1- Schémas type Godunov

Définition 4.1

On appelle solveur approché du problème de Riemann, une approximation notée u_a , de la solution de ce problème qui vérifie :

i) La consistance du solveur approché avec la forme intégrale du système i.e.

$$(4.1) \quad \int_{-h/2}^{h/2} u_a(x/k; u_g, u_d) dx = h/2 (u_g + u_d) - k f(u_d) + k f(u_g)$$

pour $k \leq \max_{i,u} |\lambda_i| \leq h/2$

ii) On dira que le solveur approché est consistant avec la forme intégrale de la condition d'entropie

$\eta_t + F_x \leq 0$ associée à (1.1) si

$$(4.2) \quad \int_{-h/2}^{h/2} \eta(u_a(x/k; u_g, u_d)) dx = k/2 (\eta(u_g) + \eta(u_d)) - k (F(u_d) - F(u_g))$$

où h = pas d'espace et k = pas de temps .

Définition 4.2

Soit $u_a(x/t, u_g, u_d)$ un solveur approché de Riemann. Le schéma type Godunov associé est défini par :

$$(4.3) \quad u_j^{n+1} = 1/h \int_0^{h/2} u_a(x/k; u_{j-1}^n, u_j^n) dx + 1/h \int_{-h/2}^0 u_a(x/k; u_j^n, u_{j+1}^n) dx$$

4.2- Solveur de Roe

On sait que le problème de Riemann pour un problème hyperbolique linéaire se résout de manière particulièrement simple. Pour avoir un schéma de type Godunov, Roe[5] définit une classe de solveurs "linéaires" caractérisés par le résultat suivant:

Théorème 4.1

On définit un solveur approché du problème de Riemann comme étant la solution exacte du problème de Riemann linéaire:

$$(4.4) \quad \begin{cases} u_t + A(u_g, u_d) u_x = 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Alors si A vérifie

$$(4.5) \quad \begin{cases} \text{(i)} & A(u, v) (u - v) = f(u) - f(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n \\ \text{(ii)} & A \text{ est strictement hyperbolique} \\ \text{(iii)} & A \text{ continu par rapport à } u \text{ et } v \end{cases}$$

Le solveur ainsi défini est un solveur approché au sens de la définition 4.1 et le flux numérique associé s'écrit

$$(4.6) \quad g(u, v) = 1/2 (f(u) + f(v)) - 1/2 |A(u, v)| (u - v)$$

où

$|A|$ est la matrice de valeurs propres $|\lambda_i|$ associées aux vecteurs propres r_i

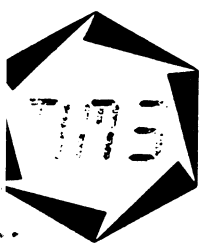
REFERENCES

- [1] GODUNOV S.K., *A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics*, Mat. Sb. , 47, 89, (1959) p. 271–300 .
- [2] HARTEN A., LAX P.D., VAN-LEER B., *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Review, 25, (1983), pp. 35–61.
- [3] LAX P.D., *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, SIAM Regional Conference in Appl. Math. , 11, (1973) .
- [4] RASCLE M., *Perturbations par viscosité de certains systèmes hyperboliques non linéaires*, Thèse d'Etat Lyon I, (1983).
- [5] ROE P.L., *Approximate Riemann solvers, parameter vector, and difference schemes* , J. Comp. Phys. , 43 , (1981) p.357–372 .
- [6] SMOLLER J.A., *Shocks waves and reaction diffusion equations* , Springer Verlag, (1983) .
- [7] VAN-LEER B., *Towards the ultimate conservative difference scheme. V* , J. Comp. Phys. 32, (1979) p.101–136 .
- [8] VILA J.P., *Sur la théorie et l'approximation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires, application aux équations de Saint Venant et à la modélisation des avalanches de neige dense*, Thèse , Paris VI (1986) .
- [9] VILA J.P., *Simplified Godunov schemes for 2 x 2 systems of conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal., 23 , 6, (1986), PP. 1173–1192 .

CHAPITRE VI

**An analysis of some hyperbolic problems related
to the shallow water model**

IMAG R.R. n^o 579, (1986)



P 68
8402 Saint Martin d'Hères cedex
France
Tél. (76) 51.46.00
Secrétariat : poste 5257

RESUME

On s'intéresse dans ce rapport à l'étude de quelques problèmes des ondes longues en eau peu profonde. Divers cas en coordonnées Euleriennes et Lagrangiennes sont étudiés. Le problème de Riemann a été analysé. A la fin de ce rapport on donne une condition aux limites non réflexive pour le problème unidimensionnel.

ABSTRACT

This paper deals with the study of some problems of long waves in shallow water. Various cases are studied in Eulerian and Lagrangian coordinates. The Riemann problem is analysed. At the end of this paper we give a nonreflecting boundary condition for the one dimensional problem.

AN ANALYSIS OF SOME HYPERBOLIC PROBLEMS RELATED TO THE SHALLOW WATER MODEL

A. CHALABI

R. R. N° 579 , JANVIER 1986

0- Introduction.

We consider in this study the shallow water model, that is the hyperbolic quasilinear system of equations governing the flow of an ideal incompressible fluid, in a gravitational field, with free surface and when the depth of the fluid is small. The equations discontinuities arise when bore or hydraulic jumps are present.

Different studies of this problem were given in ([2], [3], [4], [5], [11], [16]). The hyperbolic character of the model was used in [11] and [16].

The aim of this paper is to apply some general results to the model of shallow water for which the hyperbolic nature is assumed.

Since the problem is a nonlinear hyperbolic system, solutions with shocks may occur after a finite time, these solutions are meaningful in physics.

In the first three sections we give an analysis of the three possible formulation of the model together with the study of the associated Riemann problem.

In the fourth section, we deal with the problem of the nonreflecting boundary condition for the shallow water problem, for which we have made use of a result of Hedström [9]

The fifth section is concerned with the uniqueness of the regular solution for the two dimensional case.

The system of the shallow water model has several "good" properties, since it is strictly hyperbolic, every characteristic field is genuinely nonlinear, the Riemann invariants are convex, the invariant regions are bounded, the system admits a strict convex entropy function.

1- Formulation in (u, h)

1.1- The Cauchy Problem.

In the case of one space variable, the system of equations of the shallow water is

$$(1.1) \quad \begin{cases} u_t + (u^2/2 + g h)_x = 0 \\ h_t + (h u)_x = 0 \end{cases}$$

where u is the velocity, h is the depth of the water, g is the acceleration of the gravity. h may be assumed positive for all the time.

The quasilinear form of (1.1) is

$$(1.2) \quad U_t + A(U) U_x = 0$$

with

$$U = (u, h)^t, \quad A(U) = \begin{bmatrix} u & g \\ h & u \end{bmatrix}$$

Lemma 1.1

The system (1.1) admits as an entropy the function

$$(1.3) \quad \eta(u, h) = 1/2 (h u^2 + g h^2)$$

which is strictly convex for $g h > u^2$; $h, g > 0$.

Proof

Multiplying the first equation of (1.1) by $(h u)$ and the second equation of (1.1) by $(u^2/2)$, we get

$$(1.4) \quad \begin{cases} h (u^2/2)_t + h u (u^2/2)_x + h u g h_x = 0 \\ u^2/2 h_t + u^2/2 (h u)_x = 0 \end{cases}$$

Hence

$$(h u^2/2)_t + (u^2/2 h u)_x + h u g h_x = 0$$

Multiplying the second equation of (1.1) by $(g h)$ and adding it to the last one, we obtain

$$(h u^2/2 + g h^2/2)_t + (u^3 h/2 + g u h^2)_x = 0$$

It is easy to check that the matrix $\eta'' \cdot A$ is symmetric (A is the matrix of (1.2)).

We have

$$\eta''(u, h) = \begin{bmatrix} h & u \\ u & g \end{bmatrix}$$

and

$$\eta'' \cdot A = \begin{bmatrix} 2 u h & u^2 + g h \\ u^2 + g h & 2 g h \end{bmatrix}$$

Then $\eta'' \cdot A$ is symmetric .

To prove the strict convexity, we have

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \langle \eta'' \cdot (a, b)^t, (a, b)^t \rangle &= h a^2 + g b^2 + 2 a b u, \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \\ &\geq 2 |a| |b| \sqrt{gh} - 2 |a| |b| |u| \\ &\geq 2 |a| |b| (\sqrt{gh} - |u|) \\ &\geq 0 \text{ if } \sqrt{gh} - |u| > 0. \end{aligned}$$

and from (1.5), we get

$$\langle \eta'' \cdot (a, b)^t, (a, b)^t \rangle > 0 \text{ if } a \neq 0 \text{ or } b \neq 0 \text{ and } \sqrt{gh} > |u|$$

Then η is strictly convex .

The entropy flux F is given by

$$(1.6) \quad F(u, h) = u^3/2 h + g h^2 u$$

Theorem 1.1

Let $(u_\varepsilon, h_\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) be a solution of the parabolic system :

$$(1.7) \quad \begin{cases} (u_\varepsilon)_t + (u_\varepsilon^2/2 + g h_\varepsilon)_x = \varepsilon \Delta u_\varepsilon \\ (h_\varepsilon)_t + (u_\varepsilon h_\varepsilon)_x = \varepsilon \Delta h_\varepsilon \end{cases}$$

with

$$(1.8) \quad \begin{cases} u_\varepsilon(x, 0) = \phi(x) \\ h_\varepsilon(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

If we assume that $(u_\varepsilon, h_\varepsilon)$ remains bounded in $(L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+))^2$ (when $\varepsilon \rightarrow 0$) and converges a.e. to (u, h) , then (u, h) is a solution of (1.1) with the initial conditions

$$(1.9) \quad \begin{cases} u(x, 0) = \phi(x) \\ h(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

and

$$(1.10) \quad (\eta(u, h))_t + (F(u, h))_x \leq 0 \quad \text{if} \quad u_\varepsilon^2 \leq g h_\varepsilon \quad \text{a.e.} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

η and F are the entropy function and the entropy flux defined in Lemma 1.1.

Proof [10]

By taking the limit in the sense of distributions of (1.7) as $\varepsilon \rightarrow 0$, we deduce (1.1). Multiplying (1.7) by $\eta'(u_\varepsilon, h_\varepsilon)$ and using the strict convexity of η , we obtain the inequality (1.10) by taking the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$.

The system (1.1) is a particular case of the isentropic gas dynamics for a polytropic gas:

$$(1.11) \quad \begin{cases} u_t + (u^2/2 + k^2/(\gamma - 1) \rho^{\gamma-1})_x = 0, \quad k > 0, \quad 1 < \gamma < 3 \\ (\rho)_t + (u \rho)_x = \end{cases}$$

The system (1.1) corresponds to $\rho = h$, $k = \sqrt{g}$ and $\gamma = 2$

The eigenvalues of (1.1) are:

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh}, \quad , \quad \lambda_2 = u + \sqrt{gh}$$

The corresponding right vectors are:

$$r_1 = (-g, \sqrt{gh})^t, \quad , \quad r_2 = (g, \sqrt{gh})^t$$

It is easy to check that:

$$r_i \cdot \nabla \lambda_i \neq 0 \quad ; \quad i = 1, 2.$$

Therefore the system (1.1) is genuinely nonlinear [10]. The Riemann invariants are given by

$$z = u - 2\sqrt{gh} \quad , \quad w = u + 2\sqrt{gh}$$

The Rankine–Hugoniot relations are

$$(1.12) \quad \sigma [U] = [f(U)]$$

If (U_-, U_+) is a shock, then using (1.12) we obtain

$$(1.13) \quad (u_+ - u_-)^2 = 2g(h_+ - h_-)^2(h_+ + h_-)^{-1}$$

– The rarefaction curves

They are defined by

$$(1.14) \quad \Gamma_1(U_0) = \{ (u, h) ; h \geq 0, u - 2\sqrt{gh} = u_0 - 2\sqrt{gh_0} \}$$

$$(1.15) \quad \Gamma_2(U_0) = \{ (u, h) ; h \geq 0, u + 2\sqrt{gh} = u_0 + 2\sqrt{gh_0} \}$$

$\Gamma_1(U_0)$ (resp. $\Gamma_2(U_0)$) represents the states $U = (u, h)$ which can be linked to $U_0 = (u_0, h_0)$ by an 1–rarefaction (resp. 2–rarefaction).

– The shock curves

They are solutions of the Rankine–Hugoniot equations (1.13), then we define

$$(1.16) \quad S_1(U_0) = \{ (u, h) ; h > 0, h = h_g + 1/(4g)[(u - u_g)^2 - (u - u_g)\sqrt{(u - u_g)^2 + 8gh_g}] \}$$

$$(1.17) \quad S_2(U_0) = \{ (u, h) , h > 0, h = h_d + 1/(4g)[(u - u_d)^2 + (u - u_d)\sqrt{(u - u_d)^2 + 8gh_d}] \}$$

$S_1(U_0)$ (resp. $S_2(U_0)$) represents the states $U = (u, h)$ which can be linked to $U_0 = (u_0, h_0)$ by an 1–shock (resp. 2–shock) .

Theorem 1.2

If $TV(\phi, \psi) < \infty$ and $z_0 = \sup z(\phi(x), \psi(x)) < w_0 = \inf w(\phi(x), \psi(x))$, then there exists a weak solution $(u(x, t), h(x, t))$ of the Cauchy problem (1.1)–(1.8). (TV = Total variation).

Proof

This result is a consequence of a general result of Diperna [6].

Remark 1.1

If we assume that $\phi \equiv 0$ and $\psi \geq \alpha > 0$, then the conditions of the theorem 1.2 are satisfied and hence the existence of the solution for the Cauchy problem follows .

1.2- The Riemann Problem.

We consider the Cauchy problem :

$$(1.18) \quad \begin{cases} u_t + (u^2/2 + gh)_x = 0 \\ h_t + (hu)_x = 0 \end{cases}$$

with

$$(1.19) \quad \begin{cases} u(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{for } x < 0 \\ u_r & \text{for } x > 0 \end{cases} \\ h(x, 0) = \begin{cases} h_l & \text{for } x < 0 \\ h_r & \text{for } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

A solution of this problem was given in Leroux [11]. In that paper u is expressed in fonction of h . In our study we follow the same step, but we consider h as a function of u .

This problem has a weak solution composed of two waves for which the speeds are :

$$\sigma_1 = u - \sqrt{gh} \quad , \quad \sigma_2 = u + \sqrt{gh}$$

in between them there is a constant state $U_c = (u_c, h_c)$.

In the area where the solution is regular, we suppose that :

$$h = H(u)$$

Substituting in (1.18), we obtain:

$$(1.18)' \quad \begin{cases} u_t + u u_x + g H'(u) u_x = 0 \\ u_t + u u_x + (H(u)/(H'(u))) u_x = 0 \end{cases}$$

For consistency we require :

$$g H'(u) = H(u)/(H'(u))$$

which implies:

$$(1.20) \quad \sqrt{g} H'(u) = \pm \sqrt{H}$$

If we take the positive sign in (1.20) and integrate the obtained equation we get

$$(1.21) \quad 2 \sqrt{g H} - 2 \sqrt{g H_0} = u$$

where $H_0 = H(0)$.

Using (1.20) the first equation of (1.18)' becomes :

$$(1.22) \quad u_t + (u + \sqrt{g H}) u_x = 0$$

if we use (1.21) and set $C = \sqrt{g H_0}$, equation (1.22) may be written as

$$(1.23) \quad u_t + (C + 3/2 u) u_x = 0$$

if we take the negative sign in (1.20) we obtain the equation

$$(1.24) \quad u_t + (-C + 3/2 u) u_x = 0$$

Let us now consider the equation (1.23) of the faster wave; (1.23) is of the form

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

where f is a strict convex function; therefore a continuous solution of (1.23) exists if

$$u \leq u_r$$

For the second equation we have the condition

$$u \leq u_1$$

We define the two family of curves: $\Sigma_1(U_0)$ and $\Sigma_2(U_0)$

$\Sigma_1(U_0)$ (resp. $\Sigma_2(U_0)$) represents the states which can be linked to U_0 by an 1-wave (shock or rarefaction) (resp. 2-wave (shock or rarefaction)) issuing from U_0

$$\Sigma_1(U_0) = \{U ; h > 0, U \in \Gamma_1(U_0) \text{ if } u \leq u_0, U \in S_1(U_0) \text{ si } u > u_0 \}$$

$$\Sigma_2(U_0) = \{U ; h > 0, U \in \Gamma_2(U_0) \text{ if } u \leq u_0, U \in S_2(U_0) \text{ si } u > u_0 \}$$

The solution of the Riemann problem (1.18)–(1.19) is composed of 1-wave and 2-wave separated by a constant state $U_C = (u_c, h_c)$, determined by

$$U_C = \Sigma_1(U_L) \cap \Sigma_2(U_R)$$

The nature of the waves linking U_L to U_C , and U_C to U_R is given by the nature of the curve linking U_L to U_C in $\Sigma_1(U_L)$, and U_C to U_R in $\Sigma_2(U_R)$

2- Formulation in (h, q)

2.1- Some properties.

The system (1.1) may be written

$$(2.1) \quad \begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ q_t + (q^2/h + g h^2/2)_x = 0 \end{cases}$$

where $h (\geq 0)$ is the depth of the water and $q (= u h)$ is the flux. We can check easily that the system (2.1) is strictly hyperbolic if $h > 0$.

The eigenvalues of the system (2.1) are:

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh} \quad , \quad \lambda_2 = u + \sqrt{gh}$$

The corresponding right vectors are:

$$r_1 = (1, u - \sqrt{gh})^t \quad , \quad r_2 = (1, u + \sqrt{gh})^t$$

The two fields defined by the two eigenvalues are genuinely nonlinear.

The Riemann invariants of (2.1) are

$$z = u - 2\sqrt{gh} \quad , \quad w = u + 2\sqrt{gh}$$

The function

$$(2.2) \quad \eta(h, q) = g h^2/2 + q^2/(2 h)$$

is an entropy function for the system (2.1). η is strictly convex for $h > 0$. The associated entropy flux is defined by

$$(2.3) \quad F(h, q) = g h q + q^3/(2 h^2)$$

As in §1.1, the rarefaction curves are given by (1.14), (1.15) and the shock curves by (1.16), (1.17).

2.1.1–Lax's shock Conditions.

Let $U_L = (h_L, q_L)$ (resp. $U_R = (h_R, q_R)$) be the value of U on the left (resp. on the right) of a shock whose speed is σ . The Lax's shock conditions are

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{for an 1-shock} \\ \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(U_L) > \sigma > \lambda_1(U_R) \\ \sigma < \lambda_2(U_R) \end{array} \right. \\ \text{for a 2-shock} \\ \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2(U_L) > \sigma > \lambda_2(U_R) \\ \lambda_1(U_L) < \sigma \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Proposition 2.1[16]

If (U_L, U_R) is a shock satisfying the Rankine–Hugoniot relations, then we have

- (i) $\{(U_L, U_R) \text{ is an 1-shock satisfying the Lax's shock conditions}\} \Leftrightarrow \{U_R \in S_1(U_L) \text{ and } h_L < h_R\}$
(ii) $\{(U_L, U_R) \text{ is a 2-shock satisfying the Lax's shock conditions}\} \Leftrightarrow \{U_R \in S_2(U_L) \text{ and } h_L > h_R\}$

2.1.2–Lax'entropy condition.

The Lax's entropy condition for a shock gives

$$(2.5) \quad \sigma[\eta(U)] \geq [F(U)] \quad , \text{ for all convex entropy } \eta \text{ for the system}$$

Proposition 2.2[16]

Let (U_L, U_R) be a shock whose speed is σ . Then

$$\sigma[\eta(U)] \geq [F(U)] \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1(U_L) > \sigma > \lambda_1(U_R) \\ \sigma < \lambda_2(U_R) \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \lambda_2(U_L) > \sigma > \lambda_2(U_R) \\ \lambda_1(U_L) < \sigma \end{cases}$$

for the entropy η given by (2.2) .

2.2– The Riemann Problem.

We consider the Cauchy problem :

$$(2.6) \quad \begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ q_t + (q^2/h + g h^2/2)_x = 0 \end{cases}$$

with

$$(2.7) \quad \begin{cases} h(x, 0) = \begin{cases} h_l & \text{for } x < 0 \\ h_r & \text{for } x > 0 \end{cases} \\ q(x, 0) = \begin{cases} q_l & \text{for } x < 0 \\ q_r & \text{for } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

The solution of the Riemann problem (2.6)–(2.7) is composed of an 1–wave and a 2–wave separated by a constant state $U_C = (u_c, h_c)$, determined by

$$U_C = \Sigma_1(U_L) \cap \Sigma_2(U_R)$$

$\Sigma_1(U_L)$ and $\Sigma_2(U_R)$ were defined in §1.2 .

The nature of the waves linking U_L to U_C , and U_C to U_R is given by the nature of the curve

linking U_L to U_C in $\Sigma_1(U_L)$, and U_C to U_R in $\Sigma_2(U_R)$

2.3- Invariant regions for the solution of the Riemann problem.

In the plane (h, q) , the regions defined by

$$\Omega_{\alpha, \beta} = \{U = (h, q) ; u + 2\sqrt{gh} < \alpha , u - 2\sqrt{gh} > \beta \}$$

are invariant for the solution of the Riemann problem: that is if $(U_L, U_R) \in \Omega_{\alpha, \beta}$ then the solution

$$U(x/t, U_L, U_R) \in \Omega_{\alpha, \beta} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

$\Omega_{\alpha, \beta}$ is bounded in the plane (h, q) , this leads to get stability results in L^∞ , for the Godunov type schemes (Leroux [11]).

The advantages of the formulation in (q, h) are:

- i) The equations of (2.1) have a physical sense.
- ii) The entropy given in (2.2) is strictly convex without any supplementary condition.
- iii) The invariants regions defined in §2.3 are bounded.
- iv) The system of conservation laws (2.1) may be extended to the tow dimensionnal case.

3- The Lagrangian formulation.

3.1- The P-system.

The system (1.1) may be written as a P-system, if we introduce the Lagrangian coordinates defined by

$$X = X(x, t)$$

where X is the solution of the differential equation:

$$X_t = u(X(x, t), t)$$

with

$$X(x, 0) = 2/g \int_{x_0}^x \frac{ds}{h(s)}$$

Then from (1.1) we obtain

$$v = 2/(g h)$$

and

$$(3.1) \quad \begin{cases} v_t - u_x = 0 \\ u_t + (v^{-2})_x = 0 \end{cases}$$

for $h > 0$, $p(v) = v^{-2}$ satisfies:

$$p'(v) < 0, p''(v) > 0$$

The system (3.1) is genuinely nonlinear in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

The eigenvalues of the system (3.1) are:

$$\lambda_1 = -\sqrt{-p'(v)}, \quad \lambda_2 = +\sqrt{-p'(v)} \quad \text{with } p'(v) = -2v^{-3}$$

The corresponding right vectors are:

$$r_1 = (1, -p'(v))^t, \quad r_2 = (-1, +p'(v))^t$$

The two fields defined by the two eigenvalues are genuinely nonlinear.

The Riemann invariants of (3.1) are

$$z = u - \int^v \sqrt{-p'(y)} dy, \quad w = u + \int^v \sqrt{-p'(y)} dy$$

– The rarefaction curves

They are defined by

$$(3.4) \quad \Gamma_1(U_0) = \{ (v, u) ; v > 0, u = u_0 - 2\sqrt{2/v} + 2\sqrt{2/v_0} \}$$

$$(3.5) \quad \Gamma_2(U_0) = \{ (v, u) ; v > 0, u = u_0 + 2\sqrt{2/v} - 2\sqrt{2/v_0} \}$$

$\Gamma_1(U_0)$ (resp. $\Gamma_2(U_0)$) represents the states $U = (v, u)$ which can be linked to $U_0 = (v_0, u_0)$ by an 1-rarefaction (resp. 2-rarefaction).

– The shock curves

They are solutions of the Rankine–Hugoniot equations for (3.1), then we define

$$(3.6) \quad S_1(U_0) = \{(v, u) ; v > 0, u = u_g - (v - v_g) \sqrt{(v + v_g)/(v v_g)}\}$$

$$(3.7) \quad S_2(U_0) = \{(v, u) ; v > 0, u = u_g + (v - v_g) \sqrt{(v + v_g)/(v v_g)}\}$$

$S_1(U_0)$ (resp. $S_2(U_0)$) represents the states $U = (v, u)$ which can be linked to $U_0 = (v_0, u_0)$ by an 1–shock (resp. 2–shock).

(3.1) admits as an entropy the function

$$(3.8) \quad \eta(v, u) = u^2/2 + 1/v$$

In our problem, it is assumed that $v > 0$, hence η is strictly convex. The entropy flux is given by

$$F(v, u) = u/(v^2)$$

3.2– The Riemann problem.

We consider the following Cauchy problem

$$(3.9) \quad \begin{cases} v_t - u_x = 0 \\ u_t + (v^{-2})_x = 0 \end{cases}$$

with

$$(3.10) \quad \begin{cases} v(X, 0) = \begin{cases} v_l & \text{for } X < 0 \\ v_r & \text{for } X > 0 \end{cases} \\ u(X, 0) = \begin{cases} u_l & \text{for } X < 0 \\ u_r & \text{for } X > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Using the shock conditions of Lax, we define the two family of curves: $\Sigma_1(U_0)$ and $\Sigma_2(U_0)$

$\Sigma_1(U_0)$ (resp. $\Sigma_2(U_0)$) represents the states which can be linked to U_0 by an 1–wave (shock or rarefaction) (resp. 2–wave (shock or rarefaction)) issuing from U_0

$$\Sigma_1(U_0) = \{U ; v > 0, U \in \Gamma_1(U_0) \text{ if } v < v_0, U \in S_1(U_0) \text{ si } v > v_0\}$$

$$\Sigma_2(U_0) = \{U ; v > 0, U \in \Gamma_2(U_0) \text{ if } v < v_0, U \in S_2(U_0) \text{ si } v > v_0\}$$

The solution of the Riemann problem (3.9)–(3.10) is composed of 1–wave and 2–wave separated by a constant state $U_C = (v_c, u_c)$, determined by

$$U_C = \Sigma_1(U_L) \cap \Sigma_2(U_R)$$

The nature of the waves linking U_L to U_C , and U_C to U_R is given by the nature of the curve linking U_L to U_C in $\Sigma_1(U_L)$, and U_C to U_R in $\Sigma_2(U_R)$

4– A nonreflecting boundary condition.

The choice of the boundary condition at the open boundary (liquid boundary) is a hard problem, especially in the nonlinear hyperbolic case.

In the paper [7], Engquist and Majda give nonreflecting boundary conditions for linear hyperbolic systems. In this section we use a result of Hedström [9] (which holds in the nonlinear case) to get a nonreflecting boundary condition for the shallow water problem in the one dimensional case.

Let us consider systems in the form

$$(4.1) \quad \begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 & \text{for } (x, t) \in \Omega \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

with $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; x > 0, t > 0\}$

Let l_1, \dots, l_m be the left eigenvectors corresponding to the positive eigenvalues of $A(u)$, we have the following result of Hedström [9].

Theorem 4.1

The condition at $x = 0$

$$(4.2) \quad l_i u_t = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

gives no waves coming into Ω from the boundary $x = 0$ if there are only simple waves going out. If a shock of strength ε leaves Ω , this condition produces an incoming wave of strength $O(\varepsilon^3)$.

Let us consider again the system (1.1), the matrix A of the system has only one negative eigenvalue $\lambda_1 = u - (gh)^{1/2}$ if we suppose that $|u| < (gh)^{1/2}$, then we need only one boundary condition at $x = 0$, to get a well posed problem .

Theorem 4.2

The boundary condition at $x = 0$

$$(4.3) \quad u + 2\sqrt{gh} = u_0 + 2\sqrt{gh_0}$$

gives no waves coming into the domain $x > 0$ from the boundary $x = 0$, if there are only simple waves going out. If a shock of strength ε leaves the domain $x > 0$, condition (4.3) produces an incoming wave of strength $O(\varepsilon^3)$.

Proof

Using the result of Hedström [9], it suffices to check that

$$(4.3) \Leftrightarrow l_2 \cdot (u_t, h_t)^t = 0$$

where l_2 is the left eigenvector of A related to the positive eigenvalue $\lambda_2 = u + (gh)^{1/2}$. Indeed

$$l_2 = (1, \sqrt{g/h})^t = \text{grad}_{(u,h)}(u + 2\sqrt{gh})$$

hence

$$(4.3) \Leftrightarrow (u + 2\sqrt{gh})_t = 0$$

$$\Leftrightarrow (u + 2\sqrt{gh}) = (u_0 + 2\sqrt{gh_0})$$

where u_0 and h_0 are the initial conditions

Remark 4.1

$w(u,h) = u + 2(gh)^{1/2}$ is the 2-Riemann invariant for the system (1.1).

5- The two dimensionnal problem.

The "complete" system of the shallow water flow in conservative form is

$$(5.1) \quad \begin{cases} p_t + ((p/h)^2 + gh^2/2)_x + (pq/h)_y = 0 \\ q_t + (pq/h)_x + ((q/h)^2 + gh^2/2)_y = 0 \\ h_t + p_x + q_x = 0 \end{cases}$$

where (p, q) is the flow vector given by

$p = u h$, $q = v h$ h : the depth of the fluid , (u, v) : the velocity vector

It is easy to check that the system (5.1) is strictly hyperbolic for $h \neq 0$, and it admits as a convex entropy the function:

$$(5.2) \quad \eta(p, q, h) = g h^2/2 + p^2/(2 h) + q^2/(2 h)$$

In the area where the solution is regular, the system (5.1) may be written in the quasilinear form:

$$(5.3) \quad U_t + A_1(U)U_x + A_2(U)U_y = 0$$

with

$$U = (u, v, h) \quad , \quad A_1 = \begin{bmatrix} u & 0 & g \\ 0 & u & 0 \\ h & 0 & u \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & g \\ 0 & h & v \end{bmatrix}$$

Lemma 5.1

The system (5.1) is symmetrizable

Proof

The matrix

$$A_0(u, v, h) = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix}$$

is symmetric, positive definite for $h > 0$.

The matrices $A_0 A_1$, $A_0 A_2$ are symmetric since

$$A_0 A_1 = \begin{bmatrix} uh & 0 & gh \\ 0 & uh & 0 \\ gh & 0 & ug \end{bmatrix} \quad , \quad A_0 A_2 = \begin{bmatrix} vh & 0 & 0 \\ 0 & vh & gh \\ 0 & gh & vg \end{bmatrix}$$

Therefore the system (5.2) is symmetrizable, hence using a result of Bardos [1], we prove:

Theorem 5.1

There exists at most one uniformly Lipschitz solution of the Cauchy problem related to (5.3) .

REFERENCES

- [1] BARDOS C., *Introduction aux problèmes hyperboliques non linéaires*, Rapport interne n° 40, Université de Paris Nord (1983).
- [2] BEN-AHMED M., *Identifiqation de non linéarités ou de paramètres répartis dans deux équations aux dérivées partielles évolutives non linéaires modélisant un gisement d'hydrocarbures et un écoulement dans un canal ouvert*, Thèse, Paris (1978).
- [3] BULGARELLI U. and ROSATI M., *Analisi numerica di modelli di simulazione per le acque basse*, *Calcolo*, 16, (1979), pp. 203–237.
- [4] CHALABI A., *Analyse numérique du problème des ondes longues en eau peu profonde*, *Calcolo*, 19, (1982), pp.269–288.
- [5] CHALABI A., *Sur la résolution du problème des ondes longues dans un fluide parfait*, *Afrika Matematica*, 6, (1984), pp. 31–48.
- [6] DIPERNA R.J., *Global solutions to a class of non linear hyperbolic systems of equations*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 26, (1973), pp.1–28.
- [7] ENGQUIST B. and MAJDA A., *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, *Math. of Comp.*, 31, (1977), pp.629–651.
- [8] GLIMM J., *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18, (1965), pp.697–715.
- [9] HEDSTROM G.W., *Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems*, *J. of Comp. Phys.*, 30, (1979), pp.222–237.
- [10] LAX P.D., *Hyperbolic systems of conservation laws*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 10, (1957), pp.537–566.
- [11] LEROUX A.Y., *Stabilité de schémas numériques adaptés à certains modèles océaniques non linéaires*, Rapport CNEXO, 78–1963, (1980).
- [12] LEROUX A.Y., *Numerical stability for some equations of gas dynamics*, *Math. of Comp.*, 37, (1981), pp.307–320.
- [13] LIU T.P., *Uniqueness of weak solutions of Cauchy problem for general 2x2 conservation laws*, *J. of Diff. Eq.*, 23, (1976), pp.369–388.

- [14] NISHIDA T. and SMOLLER J., *Mixed problems for nonlinear conservation laws*, J. of Diff. Eq. , 23 , (1977), pp.244–269.
- [15] SMOLLER J., *Shock waves and reaction diffusion equations*, Springer Verlag, (1983).
- [16] VILA J.P., *Sur la théorie et l'approximation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires, application aux équations de Saint Venant et à la modélisation des avalanches de neige dense*, Thèse, Paris VI (1986).

C H A P I T R E V I I

**Eclatement d'opérateur, méthode à pas fractionnaires
et condition d'entropie pour les systèmes hyperboliques non linéaires**

travail réalisé avec J.P. Vila

Accepté au colloque international sur les problèmes hyperboliques

Uppsala (Suède), juin (1990)

Eclatement d'opérateur, méthode à pas fractionnaires et condition d'entropie pour les systèmes hyperboliques non linéaires

0 – Introduction

Les méthodes à pas fractionnaires sont des méthodes efficaces pour la résolution de problèmes industriels complexes, car elles permettent de traiter séparément des phénomènes physiques différents comme la convection et la propagation dans le cas des problèmes modélisés par les équations de Navier–Stokes[1] ou de Saint–Venant [2].

L'avantage de cette décomposition est la résolution numérique de sous problèmes simples permettant un pas de temps plus grand lors de l'approximation (une condition CFL moins restrictive) ([2]). Pour les problèmes linéaires et les problèmes "réguliers", il est bien connu que ces méthodes sont convergentes dès que chaque problème éclaté conduit à un problème bien posé et que l'on utilise une méthode stable et consistante pour résoudre ce sous problème (cf. [12]). Dans le cas des problèmes hyperboliques non linéaires (avec chocs), il est naturel que de ne considérer que les éclatements conduisant à des sous problèmes hyperboliques, bien posés. Le caractère entropique des solutions obtenues par une méthode à pas fractionnaires n'a été abordée que dans le cas scalaire et pour les directions alternées ([3]).

Dans cette étude on se propose de donner une caractérisation du "bon" éclatement afin que les sous systèmes hyperboliques obtenus possèdent la même entropie que le système de départ. Cela peut paraître très contraignant, ce qui peut être le cas pour un éclatement conservatif (on donne cependant un procédé général de construction). Tandis que pour le cas non conservatif la restriction est beaucoup moins importante, il s'agit en effet seulement d'éclater un opérateur symétrique en opérateurs symétriques. Dans le cas conservatif, on démontre que si la solution approchée construite par la méthode à pas fractionnaires converge, elle converge vers une solution entropique du problème initial. La convergence dans le cas non conservatif est étudiée dans un autre article.

Le plan de ce papier se présente ainsi: le premier paragraphe est consacré à la position du problème de l'éclatement d'un problème hyperbolique non linéaire. Dans §2, on étudie dans un premier lieu les éclatements conservatifs. On propose deux types de schémas pour lesquels on étudie la convergence vers une solution entropique. On y donne aussi la caractérisation ainsi qu'un procédé de construction des éclatements " admissibles " conduisant à des sous systèmes conservatifs.

L'étude des éclatements conduisant à des sous systèmes non conservatifs est entamée au §3.

1 – Position du problème

On considère le problème de Cauchy:

$$(1.1) \quad \begin{cases} U_t + (F(U))_x = 0 \\ U(x, 0) = U_0(x) \end{cases}$$

$U : Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, F est une fonction vectorielle régulière.

On suppose que la matrice Jacobienne $A(u) = F'(U)$ est diagonalisable à valeurs propres réelles.

Une fonction régulière strictement convexe $\eta = \eta(u)$ est une fonction d'entropie de (1.1) si elle vérifie:

$$(1.2) \quad \eta' F' = G'$$

la fonction G étant le flux d'entropie associé à η .

Les solutions physiques de (1.1) sont celles vérifiant l'inégalité (d'entropie):

$$(1.3) \quad \eta(U)_t + G(U)_x \leq 0$$

La condition (1.2) est équivalente à:

$$(1.4) \quad \eta'' F' = {}^t F' \eta''$$

Pour une raison de simplification, on se limite à l'étude des méthodes à deux pas. Nous éclatons la matrice A en deux parties:

$$(1.5) \quad A(U) = A_1(U) + A_2(U)$$

telles que A_1 et A_2 soient des matrices hyperboliques (i.e. diagonalisables à valeurs propres réelles).

La résolution de (1.1) passera donc par la résolution du problème de Cauchy:

$$(1.6) \quad \begin{cases} U_t + A_i(U)U_x = 0 \\ U(x, 0) = U_0(x) \end{cases}$$

($i = 1, 2$)

Nous dirons que la méthode est sous forme conservative s'il existe une fonction vectorielle $F_1(U)$ telle que

$$(1.7) \quad F_1'(U) = A_1(U)$$

on dira sinon que la méthode est non conservative.

Les deux problèmes auxquels nous avons tenté d'apporter une réponse sont

- i) Le "bon" choix de l'éclatement de la matrice A.
- ii) Le caractère entropique de la solution approchée construite à partir d'un schéma associé à (1.6).

2 – Méthodes conservatives

Supposons que

$$(2.1) \quad F(U) = F_1(U) + F_2(U)$$

et que les deux systèmes hyperboliques associés respectivement à F_1 et F_2 possèdent la même entropie η .

Pour l'approximation numérique (1.1), on propose deux types de schémas aux différences finies:

2.1 – Schémas de résolution

Soit h le pas d'espace et k le pas de temps, on pose: $\lambda = k/h$; $\Delta_+ a_j = a_{j+1} - a_j$

2.1.1 – Schéma I

On utilise pour approcher L_i ($i = 1, 2$) solution de (1.6), un schéma aux différences finies sous forme conservative, consistant avec L_i et sa condition d'entropie ([5]), d'où le schéma à deux pas:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \bar{U}_j^{n+1} = U_j^n - \lambda \Delta_+ F_{1,j-1/2}^n \\ \eta(\bar{U}_j^{n+1}) - \eta(U_j^n) + \lambda \Delta_+ G_{1,j-1/2}^n \leq 0 \end{cases}$$

et

$$(2.3) \quad \begin{cases} U_j^{n+1} = \bar{U}_j^{n+1} - \lambda \Delta_+ \bar{F}_{2,j-1/2}^{n+1} \\ \eta(U_j^{n+1}) - \eta(\bar{U}_j^{n+1}) + \lambda \Delta_+ \bar{G}_{2,j-1/2}^{n+1} \leq 0 \end{cases}$$

où les flux numériques $F_{1,j-1/2}^n = g_1(U_{j-1}^n, U_j^n)$ et $F_{2,j-1/2}^n = g_2(U_{j-1}^n, U_j^n)$ sont Lipschitziens par rapport à U^n et tels que $g_1(U, U) = F_1(U)$, $g_2(U, U) = F_2(U)$ (idem. pour les flux numériques d'entropie G_1 et G_2).

Si on pose:

$$(2.4) \quad U_h(x, t) = U_j^n \quad \text{pour } (x, t) \in I_j \times J_n$$

avec

$$I_j \times J_n =](j - 1/2)h, (j + 1/2)h[\times](n - 1/2)k, (n + 1/2)k[\quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$$

On démontre alors le résultat suivant:

Théorème 2.1

Si la solution approchée U_h construite à l'aide des schémas (2.2)–(2.3), converge vers U p.p. en restant bornée dans L^∞ , alors U vérifie (1.1) et (1.3).

Démonstration

Utilisant (2.2) et (2.3) on obtient le schéma sous forme conservative:

$$(2.5) \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda \Delta_+ F_{j-1/2}^n$$

avec

$$\begin{aligned} F_{j-1/2}^n &= g_1(U_{j-1}^n, U_j^n) + g_2(U_{j-1}^n - \lambda \Delta_+ g_1(U_{j-2}^n, U_{j-1}^n), U_j^n - \lambda \Delta_+ g_1(U_{j-1}^n, U_j^n)) \\ &= g(U_{j-2}^n, U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n) \end{aligned}$$

Les flux numériques $F_{1,j-1/2}$ et $F_{2,j-1/2}$ étant consistants avec F_1 et F_2 , d'où le flux numérique

$F_{j-1/2}$ est lui aussi consistant avec F , car

$$\begin{aligned} g(U, U, U, U) &= g_1(U, U) + g_2(U, U) \\ &= F_1(U) + F_2(U) \\ &= F(U) \end{aligned}$$

Le flux g est Lipschitzien par rapport à U^n car g_1 et g_2 le sont. Donc U est solution faible de (1.1)

d'après le théorème de Lax–Wendroff. D'autre part de (2.2) et (2.3) on a:

$$(2.6) \quad \eta(U_j^{n+1}) - \eta(U_j^n) + \lambda \Delta_+ (G_{1,j-1/2}^n + \overline{G}_{2,j-1/2}^{n+1}) \leq 0$$

Utilisant la consistance des flux numériques d'entropie $G_{1,j-1/2}$ et $G_{2,j-1/2}$ on en déduit que U vérifie la condition d'entropie (1.3).

Remarque 2.1

Dans le cas scalaire, on a convergence de la solution approchée construite à l'aide du schéma (2.5) vers la solution entropique dès que (2.5) est L^∞ et BV stable.

2.1.2 – Schéma II

On utilise un solveur de Riemann approché pour construire des schémas type Godunov ([10]).

Soient $U_{1,h}$ et $U_{2,h}$ Les solutions des problèmes de Riemann associés à (1.6), obtenues à l'aide d'un solveur de Riemann approché, On pose

$$(2.7) \quad U(x, t) = U(x, t^n) + (U_{1,h}(x, t) - U(x, t^n)) + (U_{2,h}(x, t) - U(x, t^n))$$

en considérant la projection L^2 de $U(x, t^{n+1})$, on obtient:

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= 1/h \int_{I_j} U(x, t^{n+1}) dx \\ &= 1/h \int_{I_j} U_1(x, t^{n+1}) dx + 1/h \int_{I_j} U_2(x, t^{n+1}) dx - 1/h \int_{I_j} U(x, t^n) dx \end{aligned}$$

En utilisant des schémas type Godunov, on retrouve donc (cf [10]) le schéma sous forme conservative:

$$(2.8) \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda \Delta_+ (F_{1,j-1/2}^n + F_{2,j-1/2}^n)$$

où $F_{1,j-1/2}$ et $F_{2,j-1/2}$ sont les flux numériques des schémas type Godunov associés aux solveurs de

Riemann approchés utilisés. Si $(\lambda_{i,l})$ ($l = 1, \dots, m$; $i = 1, 2$) sont les valeurs propres des matrices

A_1, A_2 , on montre:

Théorème 2.2

Sous la condition CFL:

$$(2.9) \quad r \max (\max |\lambda_{1,l}(U_1(x, t^{n+2}; U_n))| ; \max |\lambda_{2,l}(U_2(x, t^{n+2}; U_n))|) \leq 1/4, \quad l = 1, \dots, m$$

Si la solution approchée U_h construite à l'aide des schémas (2.8), converge vers U p.p. en restant bornée dans L^∞ , et si les solveurs de Riemann approchés sont consistants avec la condition d'entropie, alors U vérifie (1.1) et (1.3).

Démonstration

Pour montrer que la limite U est solution faible de (1.1), on procède exactement comme dans la

démonstration du théorème 2.1. Il reste à montrer que U vérifie l'inégalité d'entropie (1.3). On pose:

$$\bar{U}_{1,j}^{n+2} = 1/h \int_{I_j} U_1(x, t^{n+2}, U^n) dx$$

et

$$\bar{U}_{2,j}^{n+2} = 1/h \int_{I_j} U_2(x, t^{n+2}, U^n) dx$$

grâce au caractère entropique des schémas type Godunov et à la condition CFL (2.9), il existe des flux numériques d'entropie $G_{1,j-1/2}$ et $G_{2,j-1/2}$ tels que:

$$\eta(\bar{U}_{1,j}^{n+2}) - \eta(U_j^n) + 2 \lambda \Delta_+ G_{1,j-1/2}^n \leq 0$$

et

$$\eta(\bar{U}_{2,j}^{n+2}) - \eta(U_j^n) + 2 \lambda \Delta_+ G_{2,j-1/2}^n \leq 0$$

Utilisant la convexité η on obtient

$$\eta(1/2 (\bar{U}_{1,j}^{n+2} + \bar{U}_{2,j}^{n+2})) - \eta(U_j^n) + \lambda \Delta_+ (G_{1,j-1/2}^n + G_{2,j-1/2}^n) \leq 0$$

Or

$$U_j^{n+1} = 1/2 (\bar{U}_{1,j}^{n+2} + \bar{U}_{2,j}^{n+2})$$

Donc

$$\eta(U_j^{n+1}) - \eta(U_j^n) + \lambda \Delta_+ (G_{1,j-1/2}^n + G_{2,j-1/2}^n) \leq 0$$

En utilisant la consistance des flux numériques d'entropie $G_{1,j-1/2}$ et $G_{2,j-1/2}$, on montre alors sous la condition CFL (2.9) que U vérifie la condition d'entropie (1.3).

2.2 – Eclatement admissible

2.2.1 – Caractérisation

Nous allons caractériser les éclatements de F du type (2.1), tels que F_1 et F_2 possèdent une même entropie.

Définition 2.1

Un éclatement $F(U) = F_1(U) + F_2(U)$ est dit admissible ou consistant avec la condition d'entropie

du système (1.1), pour une entropie η si F_1' et F_2' sont diagonalisables, à valeurs propres réelles

et si η est une entropie pour F , F_1 et F_2 ou de manière équivalente:

$$(2.10) \quad \eta'' F_1' = F_1' \eta''$$

Nous sommes alors capables, à l'aide des variables entropiques $V = \eta'(U)$ (cf. [6]) qui symétrisent (1.1), de caractériser les éclatements admissibles:

Théorème 2.3

Les éclatements admissibles sont ceux qui vérifient:

$$F(U(V)) = H_1(V) + H_2(V); \text{ avec } V = \eta'(U) \text{ et } H_1' \text{ symétrique}$$

Démonstration

On pose $H(V) = H_1(V) + H_2(V)$

Montrons d'abord que le système écrit en variables entropiques est bien hyperbolique. En utilisant le changement de variable $V = \eta'(U)$, le système (1.1) devient:

$$(1.1)' \quad B_0(V)V_t + B(V)V_x = 0$$

où $B_0 = U_V$ est symétrique et est définie positive grâce à la stricte convexité de la fonction d'entropie η ; $B = H_V$ est symétrique.

Les matrices $(B_0)^{-1}B$ et $(B_0)^{-1/2}B(B_0)^{1/2}$ sont semblables, d'où $(B_0)^{-1}B$ et B sont semblables, or la matrice B est symétrique, donc $(B_0)^{-1}B$ est diagonalisable à valeurs propres réelles, d'où le système (1.1)' est hyperbolique. De même, on vérifie que le système (1.6) est hyperbolique.

Il reste à montrer que la condition (2.10) est satisfaite. On a $F_1(U(V)) = H_1(V)$, d'où

$$F_1' = H_1' V'$$

$$= H_1' \eta''$$

donc $\eta'' F_1' = \eta'' H_1' V'$

$$= {}^t(H_1' \eta'') \eta''$$

car H_1' est symétrique par hypothèse et η'' est symétrique puisque la fonction η est régulière.

On obtient donc

$$\eta'' F_1' = {}^t F_1' \eta''$$

2.2.2 – Procédé de construction

En pratique, on prend $H_1(V)$ quelconque tel que H_1' soit symétrique, et $H_2 = F - H_1$, on a alors un éclatement admissible. Il y a donc une infinité d'éclatements conservatifs admissibles.

Si on suppose que

$$H_1 = (g_1(v_1, \dots, v_m), \dots, g_m(v_1, \dots, v_m))$$

on doit avoir

$$\partial g_i / \partial v_j = \partial g_j / \partial v_i \text{ pour } i, j = 1, \dots, m.$$

Si on fixe $g_1(v_1, \dots, v_m)$, on obtient alors les autres g_i ($i = 2, \dots, m$), à l'aide de la formule:

$$g_i(v_1, \dots, v_m) = \int_0^{v_1} (\partial g_1 / \partial v_i)(w, v_2, \dots, v_m) dw + \phi_i(v_2, \dots, v_m) \quad , \quad i = 2, \dots, m$$

Les fonctions ϕ_i doivent vérifier:

$$\partial \phi_i / \partial v_j = \partial \phi_j / \partial v_i \text{ pour } i, j = 2, \dots, m.$$

On peut donc se fixer $\phi_2(v_2, \dots, v_m)$ puis $\phi_3(v_3, \dots, v_m)$ ainsi de suite jusqu'à $\phi_m(v_m)$.

2.2.3 – Exemples

Exemple I

Nous considérons le système de Saint Venant:

$$(2.11) \quad U_t + F(U)_x = 0$$

$$\text{avec } U = (h, hu)^T \text{ et } F(U) = (hu, hu^2 + 1/2 gh^2)^T$$

$\eta(U) = 1/2 h (u^2 + gh)$ est une entropie pour le système (2.11). Les variables entropiques sont données par:

$$V = (w, u)^T \text{ où } w = 1/2 u^2 + gh$$

On peut alors donner comme exemple d'éclatement admissible de F:

$$F_1(U) = (u^3/(3g), hu^2)^T \text{ et } F_2(U) = (hu - u^3/(3g), 1/2 gh^2)^T$$

en effet $H_1(V) = (u^3/(3g), 1/g (w - u^2/2) u^2)^T$ et H_1' est symétrique.

Exemple II

On peut aussi considérer pour le système (2.11) l'éclatement:

$$F_1(U) = (u^3/(2g), 3/4 u^4/g + 3/2 hu^2)^T \text{ et } F_2(U) = (hu - u^3/(2g), 1/2 gh^2 - hu^2 - 3/4 u^4/g)^T$$

Exemple III

Un autre éclatement admissible pour (2.11):

$$F_1(U) = (0, \phi(u))^T \text{ et } F_2(U) = (hu, 1/2 gh^2 + hu^2 - \phi(u))^T$$

où ϕ est une fonction régulière telle que $\phi' \neq 0$.

3 – Méthodes non conservatives

Supposons maintenant que dans (1.5), $A_1(U)$ et $A_2(U)$ ne sont pas des gradients. Afin d'obtenir des résultats similaires au cas conservatif, nous devons relier A_1 et A_2 à l'aide d'une notion d'entropie. Généralisons la définition 2.1 aux éclatements non conservatifs:

Définition 3.1

Un éclatement $A(U) = A_1(U) + A_2(U)$ est dit admissible ou consistant avec la condition d'entropie du système (1.1), pour une entropie η si A_1 et A_2 sont diagonalisables à valeurs propres réelles et si

$$(3.1) \quad \eta'' A_1 = 'A_1 \eta''$$

Nous donnons un résultat analogue au théorème 2.3, pour caractériser les éclatements admissibles dans le cas non conservatif

Grâce aux résultats de LeFloch [8], nous sommes capables de définir des solutions " entropiques " pour le système écrit sous forme non conservative (1.6), à l'aide de la condition d'entropie:

$$(3.2) \quad \eta(U)_t + \widehat{(\eta' \cdot A_1)}(U) U_x \leq 0$$

cette inégalité a un sens dans les espaces des mesures de Borel dès que $U \in BV(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

$\widehat{(\eta' \cdot A_1)}(U)$ étant la " superposition fonctionnelle " de U par $(\eta' \cdot A_1)$, selon Volpert [11]. En écrivant (1.1) en variables entropiques, on obtient:

$$(3.3) \quad B_0(V) V_t + B(V) V_x = 0$$

Où $B(V) = A(U(V)) (\eta'')^{-1}(U(V))$ est symétrique. A l'éclatement $A(U) = A_1(U) + A_2(U)$ en variables conservatives correspond l'éclatement $B(V) = B_1(V) + B_2(V)$ en variables entropiques.

Théorème 3.1

Les éclatements admissibles sont ceux qui vérifient:

$$B(V) = B_1(V) + B_2(V) ; \text{ avec } B_1(V) \text{ symétrique}$$

Démonstration

On démontre exactement de la même manière que dans le cas conservatif, que le système (1.6) est hyperbolique.

D'autre part de l'hypothèse B_1 symétrique, on déduit:

$$\eta'' A_1 = {}^t A_1 \eta''$$

puisque η est supposée régulière.

Donc la condition d'admissibilité (3.1) est satisfaite.

Exemple 3.1

On donne un exemple qui sera valable pour les équations de Saint Venant ($U = (h, hu)^T$) et celles d'Euler ($U = (\rho, \rho u, E)^T$) et qui sera très proche de l'éclatement classique "convection-propagation":

$$A_1(U) = u I \quad \text{et} \quad A_2(U) = A(U) - u I$$

REFERENCES

- [1] ABARBANEL S., DUTH P., and GOTTLIEB D., *Splitting methods for low Mach number Euler and Navier–Stokes equations*, Computers & Fluids, 17, (1989), pp. 1–12.
- [2] BENQUE J.P., DAUBERT O., GOUSSEBAILE J., HAUGEL H., *Splitting up technics for computations of industrial flows*, In Vistas in applied mathematics, Springer (1986).
- [3] CRANDALL M. and MAJDA A., *The method of fractional steps for conservation laws*, Num. Math., 34, (1980), pp. 285–314.
- [4] FRIEDRICHS K. and LAX P. D., *Systems of conservation laws with a convex extension*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 68, (1971), pp. 1686–1688.
- [5] HARTEN A., Lax P. D. and VAN-LEER B., *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Review, 25, (1983), pp. 35–61.
- [6] HARTEN A., *On the symmetric form of systems of conservation laws with entropies*, J. Comput. Phys., 49, (1983), pp. 151–164.
- [7] LAX P. and WEDROFF B., *Systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., 13, (1960), pp. 217–237.
- [8] LEFLOCH P., *Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems in non conservation form*, Comm. Part. Diff. Equa., 13, (1988), pp. 669–727.
- [9] LEVEQUE R.J., J., *High resolution finite volume methods on arbitrary grids via wave Propagation*, J. Comput. Phys., 78, (1988), pp.36–63.
- [10] VILA J.P., *Simplified Godunov schemes for 2x2 systems of conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal., 23, (1986), pp.1173–1192.
- [11] VOLPERT A.I., *The spaces BV and quasilinear equations*, Math. Sbornik, 73, (1967), pp. 225–267.
- [12] YANENKO, " *Fractional steps methods* ", Springer Verlag, (1971).

C H A P I T R E V I I I

**Analyse numérique du problème des ondes longues
en eau peu profonde**

Travail publié dans *Calcolo* , 19 , 3 , (1982), pp. 269–288.

ANALYSE NUMERIQUE DU PROBLEME
DES ONDES LONGUES EN EAU PEU PROFONDE (1)

A. CHALABI (2)

ABSTRACT - This paper deals with the study of the problem of long waves in shallow water, when viscosity is taken into account. Existence and uniqueness of the solution are established. For the numerical treatment, an implicit scheme is proposed together with results of stability and convergence.

Introduction.

On s'intéresse dans ce papier à l'étude du problème des ondes longues dans un liquide visqueux peu profond. Le cas d'un liquide parfait a été étudié par BULGARELLI et ROSATI [2], où les auteurs ont utilisé une méthode de monotonie. On donne pour ce problème un résultat d'existence et d'unicité; étendant ainsi au cas bidimensionnel un résultat établi par BENAHMED [1] en dimension un. Le cadre fonctionnel que l'on s'est donné nous a permis d'utiliser une méthode de compacité grâce à l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

La dernière partie est consacrée à l'étude du problème approché où on montre la stabilité (dans un sens précis) du schéma implicite proposé et la convergence de la solution approchée vers la solution du problème continu.

Les conditions aux limites étant homogènes pour les deux composantes de la vitesse en raison de la couche limite avoisinant la frontière. La condition aux limites sur la profondeur totale du liquide peut être non homogène.

— Reçu 3 Mai, 1981.

(1) Le présent travail a été réalisé au Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble (France).

(2) Département de Mathématiques. Université de Constantine. Constantine. Algérie.

1. Existence de la solution.

Notations et définitions: Ω : un ouvert borné de \mathbb{R}^2 Γ : frontière de Ω

$$Q = \Omega \times]0, T[\quad T > 0$$

$$\Sigma = \Gamma \times]0, T[$$

 (u, v) : vecteur-vitesse h : la profondeur totale du liquide C : la constante de frottement D : une profondeur moyenne constante g : l'accélération de la pesanteur f : coefficient de Coriolis ν : coefficient de viscosité cinématique ν' : coefficient de viscosité « artificielle » $(f_i)_{i=1,2}$: composantes de la force extérieure f_3 : une fonction liée aux conditions initiales.

On considère le problème (régularisé) suivant:
trouver u, v et h vérifiant:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \frac{C}{D} \sqrt{u^2 + v^2} u - f v + g \frac{\partial h}{\partial x} = f_1 \text{ dans } Q \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \frac{C}{D} \sqrt{u^2 + v^2} v + f u + g \frac{\partial h}{\partial y} = f_2 \text{ dans } Q \\ \frac{\partial h}{\partial t} - \nu' \Delta h + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = f_3 \text{ dans } Q \end{cases}$$

avec

$$(1.2) \quad \begin{cases} u = v = h = 0 \text{ sur } \Sigma \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \text{ dans } \Omega \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y) \text{ dans } \Omega \\ h(x, y, 0) = h_0(x, y) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Cadre fonctionnel et formulation variationnelle.

On pose:

$$V = H_0^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega) \text{ et } V' = H^{-1}(\Omega) \text{ (dual de } V)$$

H sera identifié à son dual.

On note par:

$\| \cdot \|$ et (\cdot, \cdot) la norme et le produit scalaire dans V

$| \cdot |$ et (\cdot, \cdot) la norme et le produit scalaire dans H

$\| \cdot \|_*$ et $((\cdot, \cdot))_*$ » » » V' .

On pose:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega \quad \forall u, v \in V$$

où ∇ désigne le gradient, et

$$b_1(u, v, w) = \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} w \, d\Omega \quad \forall u, v, w \in V$$

$$b_2(u, v, w) = \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial y} w \, d\Omega \quad \forall u, v, w \in V.$$

On a le problème suivant:

En supposant que:

$$f_i \in L^2(0, T; H) \quad i=1, 2, 3$$

$$u_0, v_0 \text{ et } h_0 \in V.$$

Trouver $(u, v, h) \in (L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H))^3$ vérifiant le système:

$$(1.3) \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \phi \right) + \nu a(u, \phi) + \left(\frac{C}{D} \sqrt{u^2 + v^2} u, \phi \right) + (-fv, \phi) + g \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \phi \right) = (f_1, \phi) \quad \forall \phi \in V \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \psi \right) + \nu a(v, \psi) + \left(\frac{C}{D} \sqrt{u^2 + v^2} v, \psi \right) + f(u, \psi) + g \left(\frac{\partial h}{\partial y}, \psi \right) = (f_2, \psi) \quad \forall \psi \in V \\ \left(\frac{\partial h}{\partial t}, \delta \right) + \nu' a(h, \delta) + \left(\frac{\partial(uh)}{\partial x}, \delta \right) + \left(\frac{\partial(vh)}{\partial y}, \delta \right) = (f_3, \delta) \quad \forall \delta \in V \end{cases}$$

$$(1.4) \quad \begin{cases} u(x, y, 0) = u_0(x, y) \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y) \\ h(x, y, 0) = h_0(x, y). \end{cases}$$

Pour donner un sens aux conditions (1.4) nous allons nous servir des lemmes suivants:

LEMME 1.1. Si

$$(u, v, h) \in (L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H))^3$$

alors:

$$(u, v, h) \in (L^4(Q))^3.$$

DÉMONSTRATION: Il suffit de démontrer le lemme pour la fonction u .

$$u(t) \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \bar{u}(t) \in H^1(\mathbf{R}^2) \text{ (prolongement de } u \text{ par } 0).$$

Or on sait que ([8], [10]):

$$\|\phi\|_{L^4(\mathbf{R}^2)} \leq C \|\phi\|_{H^1(\mathbf{R}^2)}^{1/2} \|\phi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}^{1/2} \quad \forall \phi \in H^1(\mathbf{R}^2)$$

d'où

$$\|u(t)\|_{L^4(\Omega)} \leq C(\Omega) \|u(t)\|^{1/2} \|u(t)\|^{1/2}.$$

On a donc le résultat.

LEMME 1.2. Sous les hypothèses du Lemme 1.1 on a:

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x}, \frac{\partial(vh)}{\partial y} \in L^2(0, T; V')$$

DÉMONSTRATION: Soit $\phi \in V$:

$$\left| \left(\frac{\partial(uh)}{\partial x}, \phi \right) \right| = \left| \left(uh, \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \right| \leq C \|u\|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|h\|^{1/2} \|h\|^{1/2} \|\phi\|.$$

D'où:

$$\left\| \frac{\partial(uh)}{\partial x} \right\|_{V'} \leq C \|u\|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|h\|^{1/2} \|h\|^{1/2}$$

et

$$\left\| \frac{\partial (uh)}{\partial x} \right\|_{V'}^2 \leq C (\|u\| |u| + \|h\| |h|).$$

en tenant compte des hypothèses on obtient:

$$\frac{\partial (uh)}{\partial x} \in L^2(0, T; V')$$

de même on démontre que:

$$\frac{\partial (vh)}{\partial x} \in L^2(0, T; V').$$

LEMME 1.3. Si $u, v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ alors

$$\sqrt{u^2 + v^2} u \in L^2(0, T; V') \text{ et } \sqrt{u^2 + v^2} v \in L^2(0, T; V').$$

DÉMONSTRATION: On a pour tout $\phi \in V$,

$$\begin{aligned} |(\sqrt{u^2 + v^2} u, \phi)| &\leq C_1 \|\sqrt{u^2(t) + v^2(t)} u(t)\|_{L^{3/2}(\Omega)} \cdot \|\phi\|_{L^3(\Omega)} \leq \\ &\leq C_2 (\|u\|_{L^3(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^3(\Omega)}) \|\phi\|_{L^3(\Omega)} \leq \\ &\leq C_3 (\|u\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^4(\Omega)}) \|\phi\|_{L^3(\Omega)} \end{aligned}$$

et d'après le lemme 1.1 et le théorème d'injection de Sobolev, on a:

$$|(\sqrt{u^2 + v^2} u, \phi)| \leq C_4 (\|u\| \cdot |u| + \|v\| \cdot |v|) \|\phi\|$$

d'où

$$\|\sqrt{u^2 + v^2} u\|_{V'} \leq C_4 (\|u\| \cdot |u| + \|v\| \cdot |v|)$$

en tenant compte de l'hypothèse on a bien le résultat.

Utilisant les résultats des lemmes 1.2 et 1.3 on peut conclure que si $(u, v, h) \in (L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H))^3$, alors $\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}\right) \in (L^2(0, T; V'))^3$ et que la solution (u, v, h) du problème (1.3)-(1.4) est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0, T]^3 \rightarrow (H)^3$ d'où l'écriture (1.4) a un sens.

Faute de connaissance des hypothèses de régularité qui nous permet de démontrer que h est borné dans $L^{\infty}(0, T; L^{\infty}(\Omega))$, on introduit comme dans [1] une troncature de h au niveau des termes non linéaires dans l'équation de continuité, et le problème qu'on résout sera:

Si on suppose vérifiées les hypothèses; trouver

$$(u(t), v(t), h(t)) \in (L^2(0, T; V) \cap L^{\infty}(0, T; H))^3$$

vérifiant le système:

$$(1.5) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \phi \right) + \nu a(u, \phi) + \left(\frac{C}{D} \sqrt{u^2 + v^2} u, \phi - f(v, \phi) + g\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \phi\right) \right) = (f_1, \phi) \quad \forall \phi \in V \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \psi \right) + \nu a(v, \psi) + \left(\frac{C}{D} \sqrt{u^2 + v^2} v, \psi \right) + f(u, \psi) + g\left(\frac{\partial h}{\partial y}, \psi\right) = (f_2, \psi) \quad \forall \psi \in V \\ \left(\frac{\partial h}{\partial t}, \delta \right) + \nu' a(h, \delta) + b_1(\alpha_K(h), u, \delta) + b_1(u, \alpha_K(h), \delta) + b_2(\alpha_K(h), v, \delta) + \\ + b_2(v, \alpha_K(h), \delta) = (f_3, \delta) \quad \forall \delta \in V, \end{cases}$$

$$(1.6) \quad \begin{cases} u(x, y, 0) = u_0(x, y) \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y) \\ h(x, y, 0) = h_0(x, y) \end{cases}$$

avec:

$$\alpha_K(h) = \begin{cases} h & \text{si } |h| \leq K \\ K & \text{si } h > K \\ -K & \text{si } h < -K \end{cases}$$

on vérifie facilement que:

$$\begin{aligned} \alpha_K(h) &\xrightarrow{K \rightarrow \infty} h \text{ dans } L^2(0, T; V) \\ b_1(\alpha_K(h), u, h) &\xrightarrow{K \rightarrow +\infty} b_1(h, u, h) \text{ dans } \mathbf{R} \\ b_1(u, \alpha_K(h), v) &\xrightarrow{K \rightarrow +\infty} b_1(u, h, v) \text{ dans } \mathbf{R} \end{aligned}$$

on a des propriétés analogues pour le forme b_2 .

THÉORÈME 1.1. Si on suppose que $f_i \in L^2(0, T; H)$, $i=1, 2, 3$ et $u_0, v_0, h_0 \in V$, alors le problème (1.5) - (1.6) admet au moins une solution.

DÉMONSTRATION.

Solution approchée:

$V = H_0^1(\Omega)$ étant séparable, il existe une suite w_1, \dots, w_n, \dots libre et totale dans V . Soit V_m le sous-espace de V engendré par w_1, \dots, w_m . On définit une solution approchée (u_m, v_m, h_m) du problème (1.5) - (1.6) comme suit:

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) w_i$$

$$v_m(t) = \sum_{i=1}^m \beta_{im}(t) w_i$$

$$h_m(t) = \sum_{i=1}^m \gamma_{im}(t) w_i$$

et

$$(1.7) \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}, w_j \right) + \nu a(u_m, w_j) + \left(\frac{C}{D} \sqrt{u_m^2 + v_m^2} u_m, w_j \right) - f(v_m, w_j) + g \left(\frac{\partial h_m}{\partial x}, w_j \right) = (f_1, w_j) \\ & \hspace{15em} j=1, m \\ & \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, w_j \right) + \nu a(v_m, w_j) + \left(\frac{C}{D} \sqrt{u_m^2 + v_m^2} v_m, w_j \right) + \\ & \hspace{10em} + f(u_m, w_j) + g \left(\frac{\partial h_m}{\partial y}, w_j \right) = (f_2, w_j) \quad j=1, m \\ & \left(\frac{\partial h_m}{\partial t}, w_j \right) + \nu' a(h_m, w_j) + b_1(\alpha_K(h_m), u_m, w_j) + b_1(u_m, \alpha_K(h), w_j) + \\ & \hspace{10em} + b_2(\alpha_K(h_m), v_m, w_j) + b_2(v_m, \alpha_K(h_m), w_j) = (f_3, w_j) \quad j=1, \dots, m \end{aligned} \right.$$

$$(1.8) \left\{ \begin{aligned} & u_m(0) = u_{0m} \\ & v_m(0) = v_{0m} \\ & h_m(0) = h_{0m} \end{aligned} \right.$$

où u_{0m}, v_{0m} et h_{0m} sont respectivement les projections orthogonales dans H de u_0, v_0 et h_0 sur le sous-espace V_m . On a donc: $(u_{0m}, v_{0m}, h_{0m}) \rightarrow (u_0, v_0, h_0)$ dans H lorsque $m \rightarrow +\infty$.

Le déterminant de la matrice (w_i, w_j) est non nul grâce à la linéaire indépendance de w_1, \dots, w_m , d'où on peut écrire le système d'équations différentielles ordinaires (1.7) sous la forme résolue. Par utilisation du théorème d'existence de Caracetheodory [4], on obtient une solution $u_m(t)$ dans un intervalle $[0, t_m] \subset [0, T]$. Les estimations à priori qui suivent montreront que $t_m = T$.

Estimations à priori (I):

En multipliant les équations de (1.7) respectivement par $\alpha_{im}(t), \beta_{im}(t)$ et $\gamma_{im}(t)$ et en prenant la somme sur i on aura:

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_m|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |h_m|^2 + \nu \|u_m\|^2 + \nu \|v_m\|^2 + \nu' \|h_m\|^2 + \\ & + \left(\frac{C}{H} \overline{u_m^2 + v_m^2} u_m, u_m \right) + \left(\frac{C}{D} \overline{u_m^2 + v_m^2} v_m, v_m \right) = (f_1, u_m) + (f_2, v_m) + \\ & + (f_3, h_m) - g \left(\frac{\partial h_m}{\partial x}, u_m \right) - g \left(\frac{\partial h_m}{\partial x}, v_m \right) - b_1(\alpha_K(h_m), \\ & u_m, h_m) - b_1(u_m, \alpha_K(h_m), h_m) - b_2(v_m, \alpha_K(h_m), h_m) - b_2(\alpha_K(h_m), v_m, h_m) \end{aligned} \right.$$

par application de l'inégalité de YOUNG on aura:

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_m|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |h_m|^2 + \frac{\nu}{2} \|u_m\|^2 + \frac{\nu}{2} \|v_m\|^2 + \frac{\nu'}{2} \|h_m\|^2 \leq \\ & \leq |f_1|^2 + |f_2|^2 + |f_3|^2 + c_1 |u_m|^2 + c_2 |v_m|^2 + c_3 |h_m|^2, \end{aligned} \right.$$

en intégrant de 0 à t l'inégalité (1.10) on obtient moyennant le Lemme de GRONWALL:

$$(1.11) \quad |u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + |h_m(t)|^2 \leq \text{constante indépendante de } m \text{ et } t$$

car

$$\int_0^t (|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + |h_m(t)|^2) dt \leq \int_0^T (|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + |h_m(t)|^2) dt$$

reprenant (1.11) on en déduit que

$$(1.12) \quad \int_0^t \|u_m(t)\|^2 dt + \int_0^t \|v_m(t)\|^2 dt + \int_0^t \|h_m(t)\|^2 dt \leq \text{constante}$$

(indépendante de m et t). Pour la même raison que dans (1.11).

De (1.11) et (1.12) on déduit que $t_m = T$ et que u_m, v_m et h_m sont bornés dans $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$.

Estimations à priori (II):

Soit P_m l'opérateur de projection de H sur $\{w_1, \dots, w_n\}$ dans H (i. e. $\forall u \in H, P_m u = \sum_{i=1}^n (u, w_i) w_i$).

On remarque d'abord que

$$\|P_m u\| \leq \|u\| \quad \forall u \in V.$$

on a donc:

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V, V)} \leq 1$$

et donc par transposition comme $P_m^* = P_m$

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V', V')} \leq 1.$$

Si on pose

$$a(u, v) = \langle A(u), v \rangle \quad \forall u, v \in V; \text{ avec } A \in \mathcal{L}(V, V')$$

$$b_i(u, v, w) = \langle B_i(u, v), w \rangle \quad \forall u, v, w \in V; \text{ avec } B(u, v) \in V' \quad i=1, 2$$

$$\begin{aligned} \|P_m A(u_m)\|_{V'} &\leq \|A(u_m)\|_{V'} \leq \\ &\leq C \|u_m\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|P_m \left(\frac{C}{D} \sqrt{u_m^2 + v_m^2} u_m \right)\|_{V'} &\leq C_1 \|\sqrt{u_m^2 + v_m^2} u_m\|_{L^{3/2}(\Omega)} \leq \\ &\leq C_2 (\|u_m\|_{L^3(\Omega)}^2 + \|v_m\|_{L^3(\Omega)}^2) \end{aligned}$$

d'où

$$\left\| P_m \left(\frac{C}{D} \sqrt{u_m^2 + v_m^2} u_m \right) \right\|_{V'} \leq C_3 (\|u_m\| \cdot \|u_m\| + \|v_m\| \|v_m\|)$$

en vertu de l'inégalité: $\|\phi\|_{L^3(\Omega)}^2 \leq C \|\phi\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C' \|\phi\| \|\phi\|$

$$\forall \phi \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$$

$$\left\| P_m \frac{\partial h_m}{\partial x} \right\|_{V'} \leq \left\| \frac{\partial h_m}{\partial x} \right\|_{V'} \leq C \|h_m\|$$

$$\left\| P_m B_1 \left(u_m, \frac{\partial \alpha_K(h_m)}{\partial x} \right) \right\|_{V'} \leq C \|u_m\| \|h_m\|.$$

On aura donc grâce aux estimations à priori (I):

$$\left\| \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; V')} \leq \text{constante}$$

$$\left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; V')} \leq \text{constante}$$

$$\left\| \frac{\partial h_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; V')} \leq \text{constante.}$$

Passage à la limite:

Des estimations à priori (I) et (II) on déduit qu'on peut extraire trois sous-suites u_μ, v_μ et h_μ des suites u_m, v_m et h_m telles que:

$$(1.13) \quad u_\mu \rightarrow u \quad \text{dans } L^2(0, T; V) \text{ faible}$$

$$(1.14) \quad v_\mu \rightarrow v \quad \text{dans } L^2(0, T; V) \text{ faible}$$

$$(1.15) \quad h_\mu \rightarrow h \quad \text{dans } L^2(0, T; V) \text{ faible}$$

$$(1.16) \quad \frac{du_\mu}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt} \quad \text{dans } L^2(0, T; V') \text{ faible}$$

$$(1.17) \quad \frac{dv_\mu}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} \quad \text{dans } L^2(0, T; V') \text{ faible}$$

$$(1.18) \quad \frac{dh_\mu}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} \quad \text{dans } L^2(0, T; V') \text{ faible}$$

Grâce à l'injection compacte de $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ et au lemme de Compacité de [8] on a:

$$(1.19) \quad u_\mu \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) (=L^2(Q)), \text{ fort et p. p.}$$

$$(1.20) \quad v_\mu \rightarrow v \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) (=L^2(Q)), \text{ fort et p. p.}$$

$$(1.21) \quad h_\mu \rightarrow h \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) (=L^2(Q)), \text{ forte et p. p.}$$

$\sqrt{u_\mu^2 + v_\mu^2} u_\mu$ est borné dans $L^\infty(0, T; L^{3/2}(\Omega))$ on peut donc supposer que

$$(1.22) \quad \sqrt{u_\mu^2 + v_\mu^2} u_\mu \rightarrow w \text{ dans } L^\infty(0, T; L^{3/2}(\Omega)) \text{ faible}$$

d'après (1.19) et (1.20) $\sqrt{u_\mu^2 + v_\mu^2} u_\mu \rightarrow \sqrt{u^2 + v^2} u$ p. p.

et $\sqrt{u_\mu^2 + v_\mu^2} u_\mu \rightarrow w$ dans $L^{3/2}(\Omega)$ d'après (1.22); d'où:

$$(1.23) \quad W = \sqrt{u^2 + v^2} u$$

de même pour $\sqrt{u_\mu^2 + v_\mu^2} v_\mu$.

D'autre part on déduit de (1.19), (1.21) que

$$b_1(u_\mu, \alpha_K(h_\mu), w_j) \rightarrow b_1(u, \alpha_K(h), w_j) \text{ dans } L^2(0, T) \text{ faible}$$

$$b_1(\alpha_K(h_\mu), u_\mu, w_j) \rightarrow b_1(\alpha_K(h), u, w_j) \text{ dans } L^2(0, T) \text{ faible}$$

de même pour b_2 .

Mais d'après (1.19)

$$a(u_\mu, w_j) \rightarrow a(u, w_j) \text{ dans } L^2(0, T) \text{ faible}$$

$$\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial t}, w_j \right) \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial t}, w_j \right) \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T).$$

De même pour les termes de v_μ et h_μ et de (1.22) et (1.23):

$$\left(\frac{C}{D} \sqrt{u_\mu^2 + v_\mu^2} u_\mu, w_j \right) \rightarrow \left(\frac{C}{D} \sqrt{u^2 + v^2} u, w_j \right) \text{ dans } L^2(0, T) \text{ faible}$$

$$\text{de même pour } \frac{C}{D} \sqrt{u_\mu^2 + v_\mu^2} v_\mu.$$

On déduit donc de (1.7) que (u, v, h) est une solution du problème (1.5)-(1.6).

D'où le problème (1.5)-(1.6) admet au moins une solution dans les espaces envisagés.

2. Unicité de la solution.

THÉORÈME 2.1. Sous les hypothèses du théorème 1.1., le problème (1.1) - (1.2) admet au plus une solution.

DÉMONSTRATION. Soient (u_1, v_1, h_1) et (u_2, v_2, h_2) deux solutions du problème. On pose:

$$w_1 = u_1 - u_2$$

$$w_2 = v_1 - v_2$$

$$w_3 = h_1 - h_2$$

utilisant le système (1.1)-(1.2) on obtient:

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \nu \Delta w_1 + \frac{C}{D} (\sqrt{u_1^2 + v_1^2} u_1 - \sqrt{u_2^2 + v_2^2} u_2) - f w_2 + g \frac{\partial w_3}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - \nu \Delta w_2 + \frac{C}{D} (\sqrt{u_1^2 + v_1^2} v_1 - \sqrt{u_2^2 + v_2^2} v_2) + f w_2 + g \frac{\partial w_3}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial w_3}{\partial t} - \nu' \Delta w_3 + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial h_1}{\partial y} - v_2 \frac{\partial h_2}{\partial y} + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \\ \quad + h_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + h_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0. \end{array} \right.$$

Par multiplication de (2.1), respectivement par w_1, w_2 et w_3 il vient:

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_1|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_2|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_3|^2 + \nu \|w_1\|^2 + \nu \|w_2\|^2 + \nu' \|w_3\|^2 \leq \\ \left| \frac{C}{D} \left[(\sqrt{u_1^2 + v_1^2} u_1 - \sqrt{u_2^2 + v_2^2} u_2, w_1) + (\sqrt{u_1^2 + v_1^2} v_1 - \sqrt{u_2^2 + v_2^2} v_2, w_2) \right] + \right. \\ \left. + g \left(\frac{\partial w_3}{\partial y}, w_2 \right) + \left(u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial h_1}{\partial y} - v_2 \frac{\partial h_2}{\partial y} + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \right. \right. \\ \left. \left. - h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + h_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - h_2 \frac{\partial v_2}{\partial y}, w_3 \right) \right| \end{array} \right.$$

par utilisation de l'inégalité de YOUNG, on trouve après intégration de 0 à t :

$$\begin{aligned}
 |w_1(t)|^2 + |w_2(t)|^2 + |w_3(t)|^2 \leq & 2 \int_0^t [\alpha_1 |h_2|^2 \|h_2\|^2 + \\
 & + K_1 (|u_1|^2 + |v_1|^2 + |u_2|^2 + |v_2|^2) + C_1] |w_1(t)|^2 dt + \\
 & + 2 \int_0^t [\beta_1 |h_2|^2 \|h_2\|^2 + K_2 (|u_1|^2 + |v_1|^2 + |u_2|^2 + |v_2|^2) + C_3] |w_2(t)|^2 dt \\
 & + 2 \int_0^t [\alpha_2 |u_1|^2 \|u_1\|^2 + \beta_2 |v_1|^2 \|v_1\|^2 + \\
 & + \delta_1 |v_2|^2 \|v_2\|^2 + \delta_2 |h_1|^2 \|h_1\|^2 + C' |h_2|^2 \|h_2\|^2] |w_3(t)|^2 dt
 \end{aligned}$$

$\alpha_i, \beta_i, \delta_i$ $i=1, 2$ et C' sont des constantes positives.

Grâce au lemme de Gronwall on a:

$$w_1 = w_2 = w_3 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2, v_1 = v_2 \text{ et } h_1 = h_2$$

d'où l'unicité de la solution du problème.

3. Problème approché et schéma de résolution.

Soit V_h l'espace des fonctions continues s'annulant à l'extérieur de $\Omega(h)$;

$$\Omega(h) = \bigcup_{s \in \mathcal{T}_h} s \quad (\mathcal{T}_h \text{ la triangulation de } \Omega)$$

et dont la restriction à chaque $s \in \mathcal{T}_h$ est un polynôme.

On divise l'intervalle $[0, T]$ en N intervalles de longueur identique k :

$$k = \frac{T}{N}$$

à chaque f_i , $i=1, 2, 3$; on associe les éléments f_i^1, \dots, f_i^N avec:

$$f_i^m = \frac{1}{k} \int_{(m-1)k}^{mk} f_i(t) dt; \quad m=1, \dots, N; \quad f_i^m \in L^2(\Omega)$$

u_h^0, v_h^0, z_h^0 sont respectivement les projections orthogonales de u_0, v_0 et $z_0 (=h_0)$ sur V_h dans $L^2(\Omega)$. L'espace V_h peut être muni de deux normes:

$$\|u_h\|_h = \|u_h\| \quad \forall u_h \in V_h \text{ norme induite par celle de } H_0^1(\Omega)$$

$$|u_h|_h = |u_h| \quad \forall u_h \in V_h \text{ norme induite par celle de } L_2(\Omega).$$

Schéma de résolution.

On suppose que $u_h^0, v_h^0, z_h^0, \dots, u_h^{m-1}, v_h^{m-1}, z_h^{m-1}$ sont connus et on cherche (u_h^m, v_h^m, z_h^m) solution dans $V_h \times V_h \times V_h$ de:

$$(3.1) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{k} (u_h^m - u_h^{m-1}, \phi_h) + \nu ((u_h^m, \phi_h))_h + \frac{C}{D} (\sqrt{(u_h^{m-1})^2 + (v_h^{m-1})^2} u_h^m, \phi_h) - f(v_h^m, \phi_h) + \\ & \quad + g\left(\frac{\partial z_h^m}{\partial x}, \phi_h\right) = (f_1^m, \phi_h) \quad \forall \phi_h \in V_h \\ & \frac{1}{k} (v_h^m - v_h^{m-1}, \psi_h) + \nu ((v_h^m, \psi_h))_h + \frac{C}{D} (\sqrt{(u_h^{m-1})^2 + (v_h^{m-1})^2} v_h^m, \psi_h) + f(u_h^m, \psi_h) + \\ & \quad + g\left(\frac{\partial z_h^m}{\partial y}, \psi_h\right) = (f_2^m, \psi_h) \quad \forall \psi_h \in V_h \\ & \frac{1}{k} (z_h^m - z_h^{m-1}, \delta_h) + \nu' ((z_h^m, \delta_h))_h + b_{1h} (u_h^{m-1}, z_h^m, \delta_h) + b_{1h} (z_h^{m-1}, u_h^m, \delta_h) + \\ & \quad + b_{2h} (v_h^{m-1}, z_h^m, \delta_h) + b_{2h} (z_h^{m-1}, v_h^m, \delta_h) = (f_3^m, \delta_h) \quad \forall \delta_h \in V_h. \end{aligned} \right.$$

DÉFINITION. Un ensemble infini de fonction ξ est dit $L^p(0, T; X)$ -stable si et seulement si ξ est un sous-ensemble borné de $L^p(0, T; X)$.

On introduit la fonction approchée u_h telle que,

$$u_h: [0, T] \rightarrow V_h$$

$$u_h(t) = u_h^m \quad (m-1)k \leq t < mk \quad m=1, \dots, N.$$

On définit de manière analogue v_h et z_h .

Si \mathcal{H} désigne l'ensemble des triangulations on montre:

THÉORÈME 3.1: Les fonctions u_h, v_h, z_h , ($h \in \mathcal{H}$) correspondant au schéma (3.1) sont $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ -stables et convergent respectivement vers u, v, z solution de (1.5) - (1.6) dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

DÉMONSTRATION:

Stabilité du schéma.

Soit:

$$\begin{aligned} \mu_r &= |u_h^{0r}|^2 + |v_h^{0r}|^2 + |z_h^{0r}|^2 + \frac{2kd_0^2}{\nu} \sum_{m=1}^r (|f_1^m|^2 + |f_2^m|^2) + \frac{5kd_0^2}{\nu'} \sum_{m=1}^r |f_3^m|^2 \leq \\ &\leq |u_h^{0r}|^2 + |v_h^{0r}|^2 + |z_h^{0r}|^2 + \frac{d_0^2}{\nu} \int_0^T (|f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2) dt + \frac{5d_0^2}{\nu'} \int_0^T |f_3(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

On montre par récurrence via le Lemme de GRONWALL discret que:

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{aligned} &|u_h^{r}|^2 + \sum_{m=1}^r |u_h^m - u_h^{m-1}|^2 + \frac{k\nu}{2} \sum_{m=1}^r \|u_h^m\|_h^2 + |v_h^{r}|^2 + \sum_{m=1}^r |v_h^m - v_h^{m-1}|^2 + \\ &+ \frac{k\nu}{2} \sum_{m=1}^r \|v_h^m\|_h^2 + |z_h^{r}|^2 + \sum_{m=1}^r |z_h^m - z_h^{m-1}|^2 + \frac{k}{2} \sum_{m=1}^r \|z_h^m\|_h^2 \leq \\ &\leq \mu_r + k \left(\frac{\sqrt{2c}}{\varepsilon D} + \frac{5g^2}{\nu'} \right) \sum_{m=1}^r (|u_h^m|^2 + |v_h^m|^2). \end{aligned} \right.$$

ε constante positive aussi petite que l'on veut on sait [11] qu'il existe d_0 , $S(h)$ et d_1 tel que:

$$|u_h|_h \leq d_0 \|u_h\|_h \quad \forall u_h \in V_h (\subset H_0^1(\Omega))$$

$$\|u_h\|_h \leq S(h) |u_h|_h \quad \forall u_h \in V_h$$

$$|b_i(u_h, v_h, w_h)| \leq d_1 \|u_h\|_h \|v_h\|_h \|w_h\|_h \quad \forall u_h, v_h, w_h \in V_h; i=1, 2.$$

On pose:

$$d = 2\mu_N \exp \left[2T \left(\frac{\sqrt{2c}}{\varepsilon D} + \frac{5g}{\nu'} \right) \right].$$

Utilisant le fait que:

$$\|u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq d_3 \|u_h\|_h \quad \forall u_h \in V_h;$$

on aura:

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \|u_h(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq \frac{2d_2 d_3}{\nu} \quad \sup_{t \in [0, T]} |u_h(t)| \leq \sqrt{d_2} \\ \int_0^T \|v_h(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq \frac{2d_2 d_3}{\nu} \quad \sup_{t \in [0, T]} |v_h(t)| \leq \sqrt{d_2} \\ \int_0^T \|z_h(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq \frac{2d_2 d_3}{\nu'} \quad \sup_{t \in [0, T]} |z_h(t)| \leq \sqrt{d_2} \end{array} \right.$$

d'où la stabilité du schéma au sens défini ci-haut.

Convergence de la solution approchée.

Pour chaque k (ou N) on considère les fonctions $(w_{ih})_{i=1,2,3}$ continues, affines par morceaux de $[0, T]$ dans V_h et définies par:

$$w_{1h}(t) = u_h^m + \frac{t - mk}{k} (u_h^{m+1} - u_h^m)$$

$$w_{2h}(t) = v_h^m + \frac{t - mk}{k} (v_h^{m+1} - v_h^m)$$

$$w_{3h}(t) = z_h^m + \frac{t - mk}{k} (z_h^{m+1} - z_h^m)$$

pour

$$t \in [(mk, (m+1)k]; \quad m=0, \dots, N-1.$$

On définit:

$$f_{ik}: [0, T] \rightarrow V'$$

$$t \rightarrow f_{ik}(t) = f_i^m \text{ pour } t \in [(m-1)k, mk] \quad m=1, \dots, N \quad i=1, 2, 3.$$

Utilisant (3.1) et la définition des $(w_{ih})_{i=1,2,3}$ on montre que:

Les fonctions $(w_{ih})_{i=1,2,3}$ vérifient les estimations a priori, suivantes:

$$(i) \quad \|w_{ih}\|_{L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C_i \quad i=1, 2, 3$$

$$(ii) \quad \left\| \frac{\partial w_{ih}}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; V')} \leq C'_i \quad i=1, 2, 3$$

où $(C_i)_{i=1,2,3}$ et $(C'_i)_{i=1,2,3}$ sont des constantes indépendantes de h et de k , grâce aux estimations à priori (i) et (ii) et au lemme de Compacité de [8];

Il existe des sous-suites $u_{h'}$ et $(w_{ih'})_{i=1,2,3}$ telles que:

$$u_{h'} \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ faible}$$

$$w_{ih'} \rightarrow w_i \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ fort } \quad i=1, 2, 3$$

($u_{h'}$ est une sous-suite de la suite u_h définie en début de ce paragraphe) d'autre part:

$$u_h - w_{1h} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ fort quand } h \text{ et } k \rightarrow 0, \text{ d'où}$$

$$w_1 = \lim w_{1h'} = \lim u_{h'} = u$$

et il existe une sous-suite $u_{h'}$ telle que:

$$u_{h'} \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ fort quand } h' \text{ et } k' \rightarrow 0$$

(de même pour $(w_{ih})_{i=2,3}$, on pose $v = \lim w_{2h}$ et $z = \lim w_{3h}$), utilisant le fait que:

$$f_{ik} \rightarrow f_i \text{ dans } L^2(0, T; V') \text{ quand } k \rightarrow 0; \quad i=1, 2, 3$$

on vérifie que:

Les fonctions u , v et z définies ci-dessus sont solution du problème (1.5)-(1.6).
En effet:

Le schéma (3.1) peut être interprété de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad & \left. \begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} (w_{1h}(t), \phi_h) + \nu ((u_h(t), \phi_h))_h + \frac{C}{D} (\sqrt{(u_h(t-k))^2 + (v_h(t-k))^2} u_h(t), \phi_h) - \\
 & - f(v_h(t), \phi_h) + g\left(\frac{\partial z_h(t)}{\partial x}, \phi_h\right) = (f_{1k}(t), \phi_h), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \phi_h \in V_h \\
 & \frac{d}{dt} (w_{2h}(t), \Psi_h) + \nu ((v_h(t), \Psi_h))_h + \frac{C}{D} (\sqrt{(u_h(t-k))^2 + (v_h(t-k))^2} v_h(t), \Psi_h) + \\
 & + f(u_h(t), \Psi_h) + g\left(\frac{\partial z_h(t)}{\partial y}, \Psi_h\right) = (f_{2k}(t), \Psi_h), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \Psi_h \in V_h \\
 & \frac{d}{dt} (w_{3h}(t), \delta_h) + \nu' ((z_h(t), \delta_h))_h + b_1(u_h(t-k), \alpha_K(z_h(t)), \delta_h) + \\
 & + b_1(\alpha_K(z_h(t-k), u_h(t), \delta_h) + b_2(v_h(t-k), \alpha_K(z_h(t), \delta_h) + \\
 & + b_2(\alpha_K(z_h(t-k), v_h(t), \delta_h) = (f_{3k}(t), \delta_h) \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \delta_h \in V_h.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

On suppose que ϕ_h, Ψ_h et δ_h représentent respectivement les projections de ϕ, Ψ et δ qui sont des éléments de V .

Soit $\gamma \in C^1([0, T])$ avec $\gamma(T) = 0$. En multipliant (3.4) par $\gamma(t)$ et en intégrant par rapport à t on obtient:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T (u(t), \gamma'(t) \phi) dt + \nu \int_0^T ((u(t), \gamma(t) \phi)) dt + \frac{C}{D} \int_0^T (\sqrt{u^2(t) + v^2(t)} u(t), \gamma(t) \phi) dt - \\
 & - f \int_0^T (v(t), \gamma(t) \phi) dt + g \int_0^T \left(\frac{\partial z(t)}{\partial x}, \gamma(t) \phi \right) dt = \int_0^T (f_{1k}(t), \gamma(t) \phi) dt + (u_0, \phi) \gamma(0) - \\
 & - \int_0^T (v(t), \gamma'(t) \Psi) dt + \int_0^T ((v(t), \gamma(t) \Psi)) dt + \frac{C}{D} \int_0^T (\sqrt{u^2(t) + v^2(t)} v(t), \gamma(t) \Psi) dt + \\
 & + f \int_0^T (u(t), \gamma(t) \Psi) dt + g \int_0^T \left(\frac{\partial z(t)}{\partial y}, \gamma(t) \Psi \right) dt = \int_0^T (f_{2k}(t), \gamma(t) \Psi) dt + (v_0, \Psi) \gamma(0) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T (z(t), v'(t) \delta) dt + v' \int_0^T ((z(t), \gamma(t) v)) dt + \int_0^T b_1(u(t), \alpha_K(z(t), \gamma(t) \delta) dt + \\
 & + \int_0^T b_1 \alpha_K(z(t), u(t), \gamma(t) \delta) dt + \int_0^T b_2(v(t), \alpha_K(z(t), \gamma(t) \delta) dt + \\
 & + \int_0^T b_2(\alpha_K(z(t), v(t), \gamma(t) \delta) dt = \int_0^T (f_3(t), \gamma(t) \delta) dt + (z_0, \delta) \gamma(0).
 \end{aligned}$$

Si on prend γ dans $\mathcal{D}(0, T)$ on retrouve (1.5) au sens des distributions; en multipliant (1.5) par $\gamma(t)$ et en intégrant.

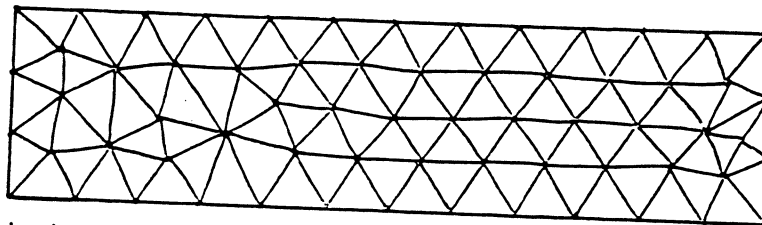
Par comparaison, avec (3.5) on obtient:

$$(3.6) \quad \begin{cases} (u_0 - u(0), \phi) \gamma(0) = 0 & \forall \phi \in V \\ (v_0 - v(0), \Psi) \gamma(0) = 0 & \forall \Psi \in V \end{cases}$$

si on choisit γ telle que $\gamma(0) \neq 0$ on obtient (1.6) d'où (u, v, z) est solution de (1.5)-(1.6).

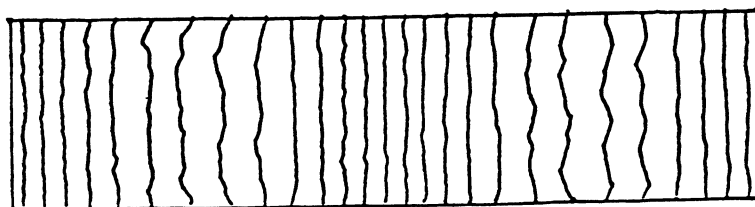
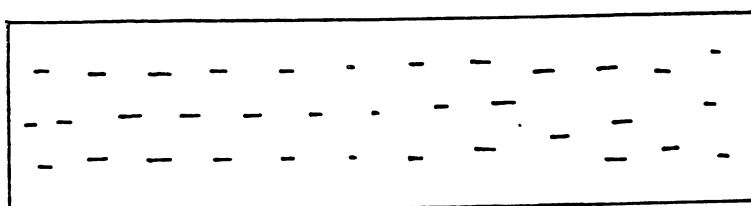
Et comme le problème (1.5) - (1.6) admet une solution unique, toute la famille (u_h, v_h, z_h) converge vers la solution, lorsque $h, k \rightarrow 0$.

Exemple numérique



Domaine à 98 triangles où on résout le système (5.1) avec:

$$\begin{aligned}
 \nu &= 0.012 & g &= 9.81 \\
 \nu' &= 0.010 & t &= 10 \Delta t \\
 f &= 0.0001 & U|_r &= v|_r = 0
 \end{aligned}$$

27 courbes de niveau de la profondeur h 

Représentation des vitesses aux sommets des triangles.

Remarque. L'exemple ci-dessus représente la propagation d'une onde progressive due au vent dans un canal fermé.

BIBLIOGRAPHY

- [1] M. BENAHMED, *Identification de non linéarités ou de paramètres répartis dans deux équations aux dérivées partielles évolutives non linéaires modélisant un gisement d'hydrocarbures et un écoulement dans un canal ouvert*. Thèse, (1978), Paris IX.
- [2] U. BULGARELLI - M. ROSATI, *Analisi numerica di modelli di simulazione per le acque basse*, *Calcolo*, (2) 16 (1979), 203-237.
- [3] A. CHALABI, *Analyse numérique de quelques problèmes relatifs aux ondes longues en eau peu profonde*. Thèse (1980), U.S.M.G. Grenoble.
- [4] E. A. CODDINGTON - N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, (1955), Mc. Graw Hill.
- [5] V. GIRAULT - P. A. RAVIART, *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations* (1979), Springer-Verlag.
- [6] P. HARTMAN, *Ordinary differential equations* (1964), John Wiley & Sons, Inc.
- [7] M. LEES, *A priori estimates for the solution of difference approximations to parabolic partial differential equations*, *Duke Math. J.* 27 (1960), 297-311. (1969), Dunod, Paris.
- [8] J. L. LIONS, *Queques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* (1969), Dunod, Paris.
- [9] J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogène et applications* (1968), 1, Dunod, Paris.
- [10] L. TARTAR, *Topics on non linear analysis* (1978), Publications de l'Université d'Orsay.
- [11] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations* (1979), North-Holland, Amsterdam.

CHAPITRE IX

**Sur la résolution du problème des ondes longues
dans un fluide parfait**

Travail publié dans Afrika Matematika , 6 , (1984) , pp. 31–48 .

SUR LA RESOLUTION DU PROBLEME DES ONDES LONGUES DANS UN FLUIDE PARFAIT

A. CHALABI

Institut de Mathématiques, Université de Constantine, Constantine, Algérie.

ABSTRACT: –The existence and the uniqueness of the solution for the problem of long waves in perfect fluid are established. Monotony method is used for the treatment of the nonlinear part of the equations. Friction force is taken into account.

RESUME: –L'existence et l'unicité de la solution du problème des ondes longues dans un fluide parfait sont établies. Une méthode de monotonie a été utilisée pour le traitement de la partie non linéaire. La force de frottement a été prise en compte.

0-INTRODUCTION:

On donne dans ce papier une étude théorique des équations des ondes longues amorties (par l'effet du frottement de fond) dans un fluide parfait. On a procédé par linéarisation au niveau des termes advectifs, ce qui n'altère pas de manière notable le système à résoudre en raison de la petitesse de ces termes devant les dérivées par rapport au temps (cas des écoulements lents).

Après le choix du cadre fonctionnel approprié pour une formulation du problème; on a montré que pour une condition aux limites vérifiant certaines hypothèses, le problème admet une solution unique. Pour cette fin on a utilisé une méthode de monotonie pour traiter la partie non linéaire et quelques résultats de la théorie des opérateurs dissipatifs pour traiter la partie linéaire. L'introduction de ce dernier outil nous semble naturelle en raison du lien existant entre la notion d'opérateur dissipatif et la mesure de la dissipation de l'énergie de l'onde. On s'est servi principalement des résultats de Bardos–Brezis[2] et de Lax–Phillips[11].

Ce papier contient quatre parties, la première concerne la formulation du problème. La deuxième est consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution. On donne dans la troisième partie un exemple de conditions aux limites positives maximales. La dernière partie concerne la régularité de la solution du problème .

1-FORMULATION DU PROBLEME:

On considère le problème des ondes longues sous sa forme " semi-linéarisée". Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière Γ , assez régulière . On pose:

$$Q = \Omega \times] 0, T[; T > 0 \text{ et } \Sigma = \Gamma \times] 0, T[$$

On utilisera les notations suivantes:

(u, v) : le vecteur vitesse de la particule

h : la profondeur totale

(a, b) : une vitesse moyenne

s : paramètre de coriolis ($=10^{-4}$)

g : l'accélération de la pesanteur

C : une constante

D : profondeur à l'état d'équilibre

α : une divergence moyenne de la vitesse

Le problème est de trouver (u, v, h) tels que dans Q :

$$(1.1) \quad \begin{cases} u_t + au_x + bu_y + gh_x - sv + C/D \sqrt{u^2 + v^2} u = f_1 \\ v_t + av_x + bv_y + gh_x + su + C/D \sqrt{u^2 + v^2} v = f_2 \\ h_t + ah_x + bh_y + g(u_x + u_y) + \alpha h = \alpha g \end{cases}$$

avec les conditions aux limites:

$$(1.2) \quad \beta(u, v, h) = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

β étant une matrice $(3 \times q)$, ($q \leq 3$) dépendant de x, y et t . Les conditions initiales dans Ω sont :

$$(1.3) \quad \begin{cases} u(x, y, 0) = u_0(x, y) \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y) \\ h(x, y, 0) = h_0(x, y) \end{cases}$$

On se place dans l'espace:

$$V = L^3(Q) \times L^3(Q) \times L^2(Q)$$

Le problème précédent s'écrit :

Trouver $w \in V$ tel que :

$$(1.1)' \quad w_t + Lw + Aw = f \quad \text{dans } Q$$

$$(1.2)' \quad \beta w = 0$$

$$(1.3)' \quad w(x,y,0) = w_0$$

avec

$$L = A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + A_3$$

et

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & g \\ 0 & a & 0 \\ g & 0 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & g \\ 0 & g & b \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \\ h \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad w_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ h_0 \end{bmatrix}$$

où $f_3 = \alpha g$.

A étant un opérateur défini par :

$$A : L^3(Q) \times L^3(Q) \times L^2(Q) \longrightarrow L^{3/2}(Q) \times L^{3/2}(Q) \times L^2(Q)$$

$$(u, v, h) \longmapsto (C/D \sqrt{u^2 + v^2} u, C/D \sqrt{u^2 + v^2} v, \alpha h)$$

où $D \in L^\infty(Q)$ et $D \geq d > 0$, d étant une constante

Pour donner un sens à la définition de l'opérateur A, il suffit de montrer que

$$\forall u, v \in L^3(Q) \text{ alors } C/D \sqrt{u^2 + v^2} u, C/D \sqrt{u^2 + v^2} v \in L^{3/2}(Q)$$

en effet

$$\begin{aligned} \int_Q (C/D \sqrt{u^2 + v^2} |u|)^{3/2} dQ &\leq \int_Q C/D (|u| + |v|)^{3/2} |u|^{3/2} dQ \\ &\leq C/d \left\{ \int_Q (|u| + |v|)^3 dQ \right\}^{1/2} \left\{ \int_Q |u|^3 dQ \right\}^{1/2} \\ &\leq +\infty \quad \text{car } u, v \in L^3(Q). \end{aligned}$$

β est définie sur Σ telle que

$$\beta = \beta(x, y, t) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^q), \quad q \leq 3.$$

et rang $\beta = q$; les coefficients de β étant dans $C^1(\Sigma)$.

On désigne par $B(x, y, t)$ le sous espace de \mathbb{R}^3 défini par :

$$B(x, y, t) = \{ v, v \in \mathbb{R}^3; \text{ tel que } \beta(x, y, t) v = 0 \}$$

et on définit le sous espace $B^*(x, y, t)$ de \mathbb{R}^3 par

$$B^*(x, y, t) = \{ w, w \in \mathbb{R}^3; \text{ tel que } v \cdot Aw = 0 \quad \forall v \in B(x, y, t) \}$$

avec

$$A_n = v_1 A_1 + v_2 A_2$$

où $v = (v_1, v_2)$ est le vecteur unitaire normal à la frontière Γ de Ω au point (x, y) .

On suppose que la divergence du vecteur (a, b) est nulle i.e. $a_x + b_y = 0$

et on pose

$$\gamma = v_1 a + v_2 b.$$

Lemme 1.1 :

Si on suppose que $\alpha > 0$; alors l'opérateur L est formellement dissipatif i.e.

$$((B + B^* - (A_1)_x - (A_2)_y) u, u) \geq 0 \quad \forall u \in (L^2(Q))^3$$

Démonstration:

$$((-(A_1)_x - (A_2)_y) u, u) = - \int_Q \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dQ = 0 \quad \forall u = (u_1, u_2, u_3) \in (L^2(Q))^3$$

$$((B + B^*) u, u) = \int_Q 2 \alpha u_3^2 dQ \geq 0$$

d'où :

$$((B + B^* - (A_1)_x - (A_2)_y) u, u) = \int_Q 2 \alpha u_3^2 dQ \geq 0 \quad \text{car } \alpha > 0.$$

Lemme 2.1:

Si on suppose que $0 < \gamma < g$; alors la matrice A_n est non singulière i. e. la frontière Γ de Ω n'est pas caractéristique .

Démonstration:

$$\det A_n = \det \begin{bmatrix} \gamma & 0 & v_1 g \\ 0 & \gamma & v_2 g \\ v_1 g & v_2 g & \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \gamma(\gamma^2 - g^2) = 0$$

On admet dans ce qui va suivre que la condition aux limites (1.2) est positive maximale i. e. vérifie les deux propriétés suivantes :

$$(1) \quad (A_n v, v) \geq 0 \quad \forall v \in B(x, y, t)$$

- (2) Dans tout sous espace de \mathbb{R}^3 contenant strictement $B(x, y, t)$ il existe un vecteur w tel que:

$$(A_n w, w) < 0.$$

2 - EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION:

Considérons les espaces fonctionnels suivants :

$$\mathcal{H} = (L^2(\Omega))^3 \text{ muni de la norme } \|u\| = \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{L(\Omega)}, \text{ pour } u = (u_1, u_2, u_3) \in (L^2(\Omega))^3$$

$$H = (L^2(Q))^3 \text{ muni de la norme } \|u\| = \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{L(Q)}, \text{ pour } u = (u_1, u_2, u_3) \in (L^2(Q))^3$$

$$V = (L^3(Q))^2 \times L^2(Q) \text{ muni de la norme } \|u\| = \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_{L(\Omega)} + \|u_3\|_{L(Q)} \text{ pour } u \in V$$

$$H^1(\Omega) = \{ u, u \in L^2(\Omega); u_x, u_y \in L^2(\Omega) \}$$

Nous rappelons la proposition suivante:

Proposition 2.1 [12]:

Soit X un espace de Banach ; si $f \in L^p(0, T; X)$ et $f_t \in L^p(0, T; X)$, ($1 \leq p \leq \infty$); alors f est après une modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $[0, T]$, continue de $[0, T]$ dans X .

$D(L(t))$ désigne le domaine de l'opérateur $L(t)$. On pose

$$D(L(t)) = \{ u(t) \in (H^1(\Omega))^3; u(x, y, t) \in B(x, y, t) \text{ p. p. sur } \Gamma \}$$

On note par $D(L^*(t))$ le domaine de l'opérateur $L^*(t)$ adjoint de $L(t)$.

$$D(L^*(t)) = \{ u(t) \in (H^1(\Omega))^3; u(x, y, t) \in B^*(x, y, t) \text{ p. p. sur } \Gamma \}$$

On désigne par $W(\Lambda)$ (resp. $W(\Lambda^*)$) l'espace des $u \in H$ tel que pour presque tout t , $u(t) \in D(L(t))$

(resp. $u(t) \in D(L^*(t))$) et tel que les fonctions : $t \longmapsto L(t) u(t)$ (resp. $t \longmapsto L^*(t) u(t)$) et

$t \longmapsto u_t$ appartiennent à H . Donc les éléments de $W(\Lambda)$ et $W(\Lambda^*)$ appartiennent à $\mathcal{C}(0, T; \mathcal{H})$.
 $D(\Lambda)$ (resp. $D(\Lambda^*)$) désigne l'espace des $u \in W(\Lambda)$ (resp. $u \in W(\Lambda^*)$) tel que $u(0) = 0$ (resp. $u(T) = 0$)

L'opérateur de domaine $D(\Lambda)$ défini par :

$$u \longmapsto u_t + L(t) u$$

est positif de domaine dense dans H , il est donc fermable [10]. On note par Λ sa fermeture et par Λ^* l'adjoint de Λ . Λ^* est égal à la fermeture de l'opérateur :

$$u \longmapsto -u_t + L^*(t) u$$

défini sur $D(\Lambda^*)$.

Définition 2.1:

On dit que Λ est V -régulier si :

- (i) $D(\Lambda^*) \cap V$ est dense dans V
- (ii) pour tout couple $(u, f) \in V \times V'$ vérifiant :

$$(u, \Lambda^* v) = (f, v) \quad \forall v \in D(\Lambda^*) \cap V$$

il existe une suite $(u_n) \subset D(\Lambda) \cap V$ telle que $\lim u_n = u$ dans V et $\lim \Lambda u_n = f$ dans V' .

On démontre dans [2] que l'opérateur Λ défini ci-dessus est $L^3(Q) \times L^2(Q) \times L^2(Q)$ -régulier.

Nous rappelons dans ce qui suit un résultat de Bardos-Brezis.

On note par $G(H)$ l'ensemble des générateurs infinitésimaux de semi-groupes de contractions fortement continus sur H .

Théoreme 2.1 [2]:

Soit $\Lambda \in G(H)$ un opérateur V -régulier et A un opérateur pseudo-monotone et coercif de V dans V'

alors pour tout couple $(u_0, f) \in \mathcal{H} \times V'$, il existe un unique $u \in V$ tel que

$$(u, \Lambda^* v) + (Au, v) = (f, v) + (u_0, v(0)) \quad \forall v \in D(\Lambda^*) \cap V$$

de plus $u \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H})$ et $u(0) = u_0$.

Remarque 2.1:

L'unicité de la solution est démontrée dans le cas de la stricte monotonie de A .

Remarque 2.2 :

Au sens de distributions u est solution de l'équation :

$$u_t + Lu + Au = f$$

Lemme 2.1 :

Si $\alpha, D \in L^\infty(Q)$ et $\alpha, D > 0$; alors

l'opérateur $A : L^3(Q) \times L^3(Q) \times L^2(Q) \longrightarrow L^{3/2}(Q) \times L^{3/2}(Q) \times L^2(Q)$

$$(u, v, h) \longmapsto (C/D \sqrt{u^2 + v^2} u, C/D \sqrt{u^2 + v^2} v, \alpha h)$$

est strictement monotone, borné, hémicontinu et coercif .

Démonstration:

– A strictement monotone:

Soient $X = (u_1, v_1, h_1)$, $Y = (u_2, v_2, h_2) \in L^3(Q) \times L^3(Q) \times L^2(Q)$; on pose :

$$a = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}, \quad b = \sqrt{u_2^2 + v_2^2}$$

$$(AX - AY, X - Y)_{V \times V} = \int_Q C/D [(au_1 - bu_2)(u_1 - u_2) + (av_1 - bv_2)(v_1 - v_2)] dQ + \int_Q \alpha (h_1 - h_2)^2 dQ$$

En utilisant les inégalités

$$-u_1 u_2 \geq -1/2 (u_1^2 + u_2^2)$$

$$-v_1 v_2 \geq -1/2 (v_1^2 + v_2^2)$$

On obtient

$$(AX - AY, X - Y)_{V \times V} \geq 1/2 \int_Q C/D [(a - b)(a^2 - b^2) + \alpha (h_1 - h_2)^2] dQ$$

Or

$$(a - b)(a^2 - b^2) + \alpha (h_1 - h_2)^2 = (a - b)^2 (a + b) + \alpha (h_1 - h_2)^2 \geq 0$$

On donc

$$(AX - AY, X - Y) \geq 0$$

d'où la monotonie de A .

Si on pose

$$(AX - AY, X - Y) = 0$$

d'après (2.2) on aura

$$a = b \quad \text{et} \quad h_1 = h_2$$

Si on remplace a par b dans (2.1) on obtient

$$u_1 = u_2 \quad \text{et} \quad v_1 = v_2$$

d'où

$$(u_1, v_1, h_1) = (u_2, v_2, h_2) \quad \text{i. e.} \quad X = Y$$

donc l'opérateur A est strictement monotone .

- A borné :

Soit $W = (u, v, h) \in V = (L^3(Q))^2 \times L^2(Q)$ avec

$$\|W\| = \|W\|_{(L(Q)) \times L(Q)} = \|u\|_{L(Q)} + \|v\|_{L(Q)} + \|h\|_{L(Q)}$$

$$\begin{aligned} \|AW\|_{(L(Q)) \times L(Q)} &= \|C/D (u^2 + v^2)^{1/2} u\|_{L(Q)} + \|C/D (u^2 + v^2)^{1/2} v\|_{L(Q)} + \|\alpha h\|_{L(Q)} \\ &= \left[\int_Q (C/D \sqrt{u^2 + v^2} |u|)^{3/2} dQ \right]^{2/3} + \left[\int_Q (C/D \sqrt{u^2 + v^2} |v|)^{3/2} dQ \right]^{2/3} + \left[\int_Q |\alpha h|^2 dQ \right]^{1/2} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_Q (C/D \sqrt{u^2 + v^2} |u|)^{3/2} dQ &\leq K^{3/2} \int_Q (|u|^{1/2} + |v|^{1/2})^3 |u|^{3/2} dQ \\ &\leq K^{3/2} \int_Q (|u|^3 + |u|^{3/2} |v|^{3/2} + 3 |u|^{5/2} |v|^{1/2} + 3 |u|^2 |v|) dQ \\ &\leq K^{3/2} (\|W\|^3 + \|W\|^{3/2} \|W\|^{3/2} + 3 \|W\|^{5/2} \|W\|^{1/2} + 3 \|W\|^2 \|W\|) \end{aligned}$$

$$\leq 8 K^{3/2} \|W\|^3$$

On montre de même que

$$\int_Q (C/D \sqrt{u^2 + v^2} |v|)^{3/2} dQ \leq 8 K^{3/2} \|W\|^3$$

et

$$\int_Q |a h|^2 dQ \leq M^2 \int_Q |h|^2 dQ \leq M^2 \|W\|^2$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|AW\|_V &\leq (8K^{3/2} \|W\|^3)^{2/3} + (8K^{3/2} \|W\|^3)^{2/3} + (M^2 \|W\|^2)^{1/2} \\ &\leq 8K \|W\|^2 + M \|W\| \end{aligned}$$

Si $\|W\| \leq C_1$, alors

$$\|AW\|_V \leq C$$

avec $C = 8KC_1^2 + MC_1$

d'où l'opérateur A est borné sur les parties bornées.

- A hémicontinu:

On montre facilement que $\forall x, y, z \in V = (L^3(Q))^2 \times L^2(Q)$; l'application :

$$\lambda \longmapsto (A(x+\lambda y), z)_{V \times V'} \quad (V' \text{ étant le dual de } V)$$

est continue

- A coercif:

Soit $W = (u, v, h) \in V$

$$(AW, W)_{V \times V'} = \int_Q C/D \sqrt{u^2 + v^2} u^2 dQ + \int_Q C/D \sqrt{u^2 + v^2} v^2 dQ + \int_Q \alpha h^2 dQ$$

$$\geq k \int_Q |u|^3 dQ + k \int_Q |v|^3 dQ + m \int_Q |h|^2 dQ$$

d'où

$$(AW, W)_{V \times V'} \geq \inf(k, m) \left[\int_Q |u|^3 dQ + \int_Q |v|^3 dQ + \int_Q |h|^2 dQ \right]$$

Si on prend

$$\|W\|_V = \sup(\|u\|_{L(Q)}, \|v\|_{L(Q)}, \|h\|_{L(Q)})$$

Comme $\|W\|_V$ est destiné à tendre vers $+\infty$, on peut supposer que $\|W\|_V \geq 1$

d'où

$$\int_Q |u|^3 dQ + \int_Q |v|^3 dQ + \int_Q |h|^2 dQ \geq [\sup(\|u\|_{L(Q)}, \|v\|_{L(Q)}, \|h\|_{L(Q)})]^2$$

On a donc

$$(AW, W)_{V \times V'} \geq C \|W\|_V^2$$

et

$$\frac{(AW, W)_{V \times V'}}{\|W\|} \longrightarrow +\infty \text{ quand } \|W\| \longrightarrow +\infty$$

Ce qui montre la coercivité de l'opérateur A.

Avant d'énoncer le résultat principal, nous allons rappeler quelques propriétés des opérateurs pseudo-monotones.

Définition 2.2:

Un opérateur A de $V \longrightarrow V'$ est dit pseudo-monotone si

- (i) A est borné
- (ii) lorsque $u_n \longrightarrow u$ dans V faible et $\limsup (A(u_n), u_n - u) \leq 0$

$$\text{alors } \liminf (A(u_n), u_n - v) \geq (A(u), u - v) \quad \forall v \in V.$$

Proposition 2.2[12]:

On a l'implication :

Si A est borné, hémicontinu et monotone alors A est pseudo-monotone.

Théoreme 2.2 :

Si les hypothèses des lemmes (1.1) et (1.2) sont vérifiées et si $(w_0, f) \in \mathcal{H} \times V'$ alors il existe un unique $w \in V$ tel que

$$(w, \Lambda^* v) + (Aw, v) = (f, v) + (w_0, v_0) \quad \forall v \in D(\Lambda^*) \cap V$$

d'autre part $w \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H})$ et vérifie $w(0) = w_0$. On a au sens des distributions:

$$w_t + Lw + Aw = f$$

et formellement

$$\beta w = 0 \text{ sur } \Sigma$$

Démonstration:

Sous les hypothèses des lemmes (1.1) et (1.2) l'opérateur Λ est V -régulier ($V = (L^3(Q))^2 \times L^2(Q)$) d'après le lemme 2.1, A est borné, monotone et hémicontinu de V dans V' ; il est donc pseudo-monotone (proposition 2.2).

D'autre part A est strictement monotone et coercif, d'où le résultat énoncé grace au théorème 2.1.

3 – EXEMPLE DE CONDITIONS AUX LIMITES MAXIMALES POSITIVES:

La maximalité peut être vérifiée à l'aide du nombre de conditions aux limites; car ce nombre est égal à la codimension du sous espace $B(x, y, t)$ [6]. Il est aussi égal au nombre de valeurs propres négatives de la matrice A_n ([7], [8], [13]):

$$A_n = \sum_{j=1}^2 v_j A_j, \text{ avec } (v_1, v_2) \text{ la normale unitaire extérieure à la frontière } \Gamma.$$

On a dans notre cas

$$A_n = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & v_1 g \\ 0 & \gamma & v_2 g \\ v_1 g & v_2 g & \gamma \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de A_n sont

$$\lambda_1 = \gamma, \lambda_2 = \gamma - g, \lambda_3 = \gamma + g$$

Sous l'hypothèse du Lemme 1.2, i.e. $0 < \gamma < g$; on aura une seule valeur propre négative λ_2 , d'où une seule condition aux limites suffit pour avoir un problème bien posé. On peut prendre comme condition aux limites, la condition naturelle

$$(3.1) \quad V_n = 0$$

avec $V_n = v_1 u + v_2 v$, est la composante normale de la vitesse.

La condition (3.1) s'écrit :

$$(3.2) \quad \beta w = 0$$

avec

$$\beta = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{bmatrix} u \\ v \\ h \end{bmatrix}$$

La condition (3.1) est positive, en effet :

$$\forall z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \beta z = 0 \text{ i.e. } v_1 z_1 + v_2 z_2 = 0$$

on a

$$(A z, z) = \gamma (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) + 2 g z_3 (v_1 z_1 + v_2 z_2)$$

$$= \gamma (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$$

$$\geq 0 \quad \text{car } \gamma > 0$$

4-REGULARITE DE LA SOLUTION:

Nous allons étudier dans ce paragraphe le problème de la régularité de la solution vitesse (u, v) . On découple le système en supposant que h est une fonction connue.

On montre l'existence et l'unicité d'une solution "faible" pour le cas non périodique. L'existence d'une solution forte est montrée uniquement dans le cas unidimensionnel.

Définition 4.1:

Un opérateur A d'un Hilbert H , est dit maximal monotone s'il est monotone et si $\forall x, y \in H$ tels que :

$$(y - Az, x - z) \geq 0 \quad \forall z \in D(A)$$

Alors $x \in D(A)$ et $y = Ax$

On rappelle la proposition suivante :

Proposition 4.1[4]:

Soit V un espace de Banach réflexif de dual V' tel que $V \subset H \subset V'$ avec injections continues et denses . Si $A : V \longrightarrow V'$ est un opérateur univoque partout défini sur V , hémicontinu et coercif, alors l'opérateur A_H , restriction de A à H défini par $D(A_H) = \{x \in V, Ax \in H\}$ et $A_H = A$, est maximal monotone dans H .

Définition 4.2:

Si A un opérateur d' un Hilbert H et $f \in L^1(0, T ; H)$; on appelle solution forte de :

$$\frac{du}{dt} + Au = f$$

toute fonction $u \in \mathcal{C}([0, T] ; H)$ absolument continue sur tout compact de $]0, T[$ vérifiant :

- (i) $u(t) \in D(A)$
- (ii) $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t)$ p.p. sur $[0, T]$

On dit que $u \in \mathcal{C}([0, T] ; H)$ est solution faible de :

$$\frac{du}{dt} + Au = f$$

s'il existe une suite $f_n \in L^1(0, T ; H)$ et $u_n \in \mathcal{C}([0, T] ; H)$ telles que u_n soit une solution forte de :

$$\frac{du_n}{dt} + Au_n = f_n$$

avec $f_n \longrightarrow f$ dans $L^1(0, T ; H)$ et $u_n \longrightarrow u$ uniformément sur $[0, T]$.

Théorème 4.1[4]:

Si A est un opérateur maximal monotone d'un Hilbert H ; pour tout $f \in L^1(0, T ; H)$ et tout $u_0 \in D(A)$, il existe une solution faible unique u de

$$\frac{du}{dt} + Au = f$$

telle $u(0) = u_0$

Si de plus A est coercif et si on remplace u_0 par $u(T)$ alors le problème périodique obtenu admet une solution faible .

On suppose que h est connu dans $L^3(Q)$ et $\nabla h \in L^{3/2}(Q)$. Considérons le problème :

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} \frac{du}{dt} + C/D \sqrt{u^2 + v^2} u - s v = -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} + C/D \sqrt{u^2 + v^2} v + s u = -g \frac{\partial h}{\partial y} \\ u(0) = v(0) = 0 \end{cases}$$

qu'on écrit sous la forme :

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

avec

$$U = (u, v) ; F = \left(-g \frac{\partial h}{\partial x}, -g \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

et

$$AU = C/D|U|U + MU ; M = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{bmatrix}$$

Proposition 4.2 :

l'opérateur $A : (L^3(Q))^2 \longrightarrow (L^{3/2}(Q))^2$

$$U \longmapsto C/D|U|U + MU$$

est monotone, coercif et hémicontinu .

Démonstration:

On décompose l'opérateur A sous la forme: $A = T_1 + T_2$; avec $T_1 U = C/D |U|U$ et $T_2 U = MU$.

Exactement comme dans la démonstration de la proposition 2.1, on montre que T_1 est monotone, coercif et hémicontinu de $(L^3(Q))^2$ dans $(L^{3/2}(Q))^2$.

D'autre part T_2 est un opérateur linéaire vérifiant :

$$(T_2 U, U) = 0$$

il est donc monotone, hémicontinu et coercif ; d'où A est monotone, hémicontinu et coercif.

Théorème 4.2 :

Si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et si U_0 vérifie $AU_0 \in (L^2(\Omega))^2$ alors le problème (\mathcal{P}_1) admet une solution faible unique.

Si on remplace U_0 par $U(T)$ dans (\mathcal{P}_1) , le problème périodique obtenu admet une solution faible.

Démonstration:

D'après la proposition 4.2, l'opérateur A est monotone, hémicontinu et coercif de $(L^3(Q))^2$ dans $(L^{3/2}(Q))^2$; de plus on a les injections continues et denses

$$(L^3(Q))^2 \subset (L^2(Q))^2 \subset (L^{3/2}(Q))^2$$

d'où d'après la proposition 4.2, l'opérateur A_H restriction de A à $(L^2(Q))^2$ défini par :

$$D(A_H) = \{ u \in (L^3(Q))^2, Ax \in (L^2(Q))^2 \} \text{ et } A_H = A$$

est maximal monotone dans $(L^2(Q))^2$.

Par application du théorème 4.1, on obtient le résultat.

Pour montrer l'existence de solution forte nous utilisons le résultat suivant :

Théorème 4.3 [4]:

Soit $f \in L^2(0, T; H)$, si A est le sous-différentiel d'une fonction convexe s.c.i. propre ϕ telle que

$\text{Min } \phi = 0$, alors toute solution faible de

$$\frac{du}{dt} + Au = f$$

est une solution forte .

Si de plus A est coercif , alors il existe une solution forte du problème périodique :

$$\frac{du}{dt} + Au = f \ ; \ u(0) = u(T)$$

et

$$\frac{du}{dt} \in L^2(0,T ; L^2(Q))$$

Soit le problème monodimensionnel suivant :

$$(\mathcal{P}_2) \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

avec

$$A : L^3(Q) \longrightarrow L^{3/2}(Q)$$

$$u \longmapsto C/D|u| \ u$$

Théorème 4.4 :

Si $f \in L^2(0,T ; L^2(Q))$ et $Au_0 \in L^2(Q)$, alors toute solution faible de (\mathcal{P}_2) est une solution forte .

Si on remplace par u_0 par $u(T)$ le problème périodique obtenu admet une solution forte et

et

$$\frac{du}{dt} \in L^2(0,T ; L^2(Q))$$

Démonstration:

$$\text{L'opérateur } A : L^3(Q) \longrightarrow L^{3/2}(Q)$$

$$u \longmapsto C/D|u| \ u$$

vérifie $A = \partial\phi$ (sous différentiel)

$$\text{avec } \phi : u \longmapsto \frac{|u|^3}{3}$$

convexe , s.c.i. propre sur $L^3(Q)$ et $\text{Min } \phi = 0$.

d'autre part, A est coercif , en effet

$$\frac{(Au, u)}{\|u\|_{L^3(Q)}^3} = \|u\|_{L^3(Q)}^2 \longrightarrow +\infty, \text{ quand } \|u\|_{L^3(Q)} \longrightarrow +\infty$$

d'où le résultat énoncé .

REFERENCES

- [1] BARDOS C., Thèse , Paris (1969) .
- [2] BARDOS C. et BREZIS H., *Sur une classe de problèmes d'évolution non linéaires* ,
J. of Differential Equations , 6 , (1969) pp. 345–395 .
- [3] BREZIS H., *On some degenerate nonlinear parabolic equations*, Proceedings in pure
Mathematics , vol .18 , AMS (1970) pp. 28–38 .
- [4] BREZIS H., *Opérateurs maximaux monotones* , North–Holland , (1973) .
- [5] CHALABI A., *Analyse numérique de quelques problèmes relatifs aux ondes longues en eau
peu profonde*, Thèse 3^{ème} cycle , Grenoble (1980) .
- [6] COURANT R. and HILBERT D., *Methods of mathematical physics* , vol . II ,
Interscience publishers , (1962) .
- [7] DAUBERT A. et GRAFFE O., *Quelques aspects des écoulements presque horizontaux à deux
dimensions en plan et non permanents Application aux estuaires* .La Houille Blanche , 8 ,
(1967) PP. 847–859 .
- [8] ENGQUIST B. and MAJDA A., *Absorbing boundary conditions for numerical simulation of
waves* , Math. of Comp. , 31, 139 , (1977) pp. 629–651 .

- [9] FRIEDRICHS K. and LAX P., *Boundary value problems for first order operations* , Comm. pure Appl. Math., 18 , (1965) pp. 355–388 .
- [10] KATO T., *Perturbation theory for linear operators* , tome 132 , Springer Verlag (1966) .
- [11] LAX P. and PHILLIPS R.S., *Local boundary conditions for dissipative symmetric operators*, Comm. pure Appl. Math. , 13 , (1960) pp. 427–455 .
- [12] LIONS J.L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* , Dunod Paris (1969) .
- [13] OLIGER J. and SUNDSTROM A., *Theoretical and practical aspects of some initial value problems in fluid dynamics* , SIAM J. Appl. Math., 35 , 3 , (1978) pp. 419–446 .

Bibliographie générale

- [1] ABARBANEL S., DUTH P. and GOTTLIEB D., *Splitting methods for low Mach number Euler and Navier–Stokes equations*, Computers & Fluids, 17, (1989), pp. 1–12.
- [2] BARDOS C., *Introduction aux problèmes hyperboliques non–linéaires*, Rapport interne n° 40, Université de Paris Nord (1983).
- [3] BARDOS C., LEROUX A.Y., NEDELEC J.C., *First order quasilinear equations with boundary conditions*, Comm. in Partial Differential Equations, 4 , 9 , (1982), pp. 1017–1034.
- [4] BEAM R. and WARMING R.F., *An implicit finite difference algorithm for hyperbolic systems in conservation law form*, J. Comp. Phys., 22, (1986), pp. 87–110.
- [5] BENABDALLAH A., *The "P–system" on an interval* , CRAS de Paris , t. 303 , série 1, n° 4, (1986), pp. 123–126.
- [6] BOOK D.L., BORIS J.P. and HAIN K., *Flux–Corrected–Transport II : Generalisation of the method*, J. of Comp. Phys., 18, (1975), pp. 248–283.
- [7] BRENIER Y., *Quelques schémas numériques pour l'approximation des lois de conservation* , Thèse d'Etat , Paris–Dauphine, (1986).
- [8] CHAKRAVARTHY R., ENGQUIST B., HARTEN A. and OSHER S., *Uniformly high accurate essentially non–oscillatory schemes III*, Ecoles CEA–EDF–INRIA , (1988).
- [9] CHALABI A., *Analyse numérique du problème des ondes longues en eau peu profonde*, Calcolo , (19) , 3 , (1982), pp. 269–288.
- [10] CHALABI A., *Sur la résolution du problème des ondes longues dans un fluide parfait* , Afrika Matematika , 6 , (1984) , pp. 31–48 .
- [11] CHALABI A., *Convergence de schémas décentrés pour des lois de conservation non–homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série I, (1988), pp. 129–132 .
- [12] CHALABI A., *Analyse de schémas décentrés pour des lois de conservation bidimensionnelles non homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 309, Série I, (1989), pp. 395–398 .
- [13] CHALABI A., *Stable upwind schemes for hyperbolic conservation laws with source terms*, Soumis à IMA J. Numer. Anal.

- [14] CHALABI A. et VILA J.P., *On a class of implicit and explicit schemes of Van-Leer type for scalar conservation laws*, Modélisation Math. et Analyse Numérique, 23, 2, (1989), pp. 261–282.
- [15] CHORIN A.J. and MARSDEN J.E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag (1979).
- [16] COLELLA P. and WOODWARD P.R., *The piecewise-parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations*, J. Comp. Phys., 54, (1984), pp. 174–201.
- [17] COLELLA P. and WOODWARD P.R., *The numerical simulation of two-dimensional fluid with strong shock*, J. Comp. Phys., 54, (1984), pp. 115–173.
- [18] CONWAY E. and SMOLLER J.A., *Global solutions of the Cauchy problem for quasilinear first order equations in several space variables*, Comm. Pure Appl. Math., 19, (1966), pp. 95–105.
- [19] CRANDALL M.G. and MAJDA A., *Monotone difference approximations for scalar conservation laws*, Math. Comp., 34, (1980), pp. 1–21.
- [20] CRANDALL M.G. and MAJDA A., *The method of fractional steps for conservation laws*, Num. Math., 34, (1980), pp. 285–314.
- [21] DIPERNA R.J., *Convergence of approximate solutions to conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal., 82, (1983), pp. 27–70.
- [22] DUBOIS F. and LE FLOCH P., *Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, J. Diff. Eq., 71, 1, (1988), pp. 93–122.
- [23] ENGQUIST B. and OSHER S., *Stable and entropy condition satisfying approximations for transonic flow calculations*, Math. Comp., 34, (1980), pp. 45–75.
- [24] FRIEDRICHS K. and LAX P., *Systems of conservation laws with convex extension*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 68, (1971), pp. 1686–1688.
- [25] GALLOUET T. and PFERZEL A., *On some new upstream weighting schemes for oil recovery simulation*, (à paraître).
- [26] GLAISTER P., *Second order quasi-linear equations in several independent variables*, University of Reading, Department of Mathematics, Numerical Analysis Report 6/87.

- [27] GLIMM J., *Solutions in large for non linear hyperbolic systems of equations*, Comm. pure Appl. Math., 15, (1965), pp. 697–715.
- [28] GODUNOV S.K., *A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics*, Mat. Sb. , 47, 89, (1959), pp. 271–300.
- [29] GOODMAN J.B. and LE VEQUE R., *On the accuracy of stable schemes for 2D scalar conservation laws*, Math. Comp., 45, (1985), pp. 15–21.
- [30] HARTEN A., *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws* , J. Comp. Phys., 49, (1983), pp. 357–393.
- [31] HARTEN A., *On the symmetric form of systems of conservation laws with entropy*, J. Comput. Phys., 49, (1983), pp. 151–164.
- [32] HARTEN A., *On a class of high resolution total–variation–stable finite difference schemes*, SIAM J. Numer . Anal., 21, (1984), pp. 1–23.
- [33] HARTEN A., HYMAN J.M. and LAX P.D., *On finite difference approximations and entropy conditions for shocks*, Comm. Pure Appl. Math., 29, (1976), pp. 297–322 .
- [34] HARTEN A., LAX P. and VAN–LEER B., *On upstream differencing and Godunov–type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Review, 25, (1983), pp. 35–61.
- [35] KEYFITZ B.L. and KRANZER H.C., *A system of non strictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity theory*, Arch. Rat. Mech. Anal., 72, (1980), pp. 219–241.
- [36] KRUSKOV N., *First order quasilinear equations in several independent variables*, Math. USSR Sb. ,10, (1970), pp.217–243.
- [37] LAX P.D., *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, SIAM Regional Conference in Appl. Math. , 11, (1973).
- [38] LAX P.D. and WENDROFF B., *Systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., 13, (1960), pp. 217–237.
- [39] LE FLOCH P., *Contributions à l'étude théorique et à l'approximation numérique des systèmes hyperboliques non linéaires. Application aux équations de la dynamique des gaz*, Thèse , Ecole Polytechnique Paris (1988) .

- [40] LE FLOCH P. and RAVIART P.A., *An asymptotic expansion for the solution of the generalized Riemann problem I*, Annales de L' I. H. P., 5, 2, (1988), pp. 179–207.
- [41] LERAT A., *Sur le calcul des solutions faibles des systèmes hyperboliques des lois de conservation à l'aide des schémas aux différences*, Thèse d'Etat, Université de Paris VI, (1981).
- [42] LEROUX A.Y., *Approximation de quelques problèmes hyperboliques non-linéaires*, Thèse d'Etat, Rennes (1979).
- [43] LEROUX A.Y., *Numerical stability of some equations of gas dynamics*, Math. Comp., 37, (1980), pp. 307–320.
- [44] LEROUX A.Y., *Convergence of an accurate scheme for first order quasi-linear equations*, R.A.I.R.O. Analyse Numérique, 15, 2, (1981), pp. 151–170.
- [45] LEROUX A.Y. and QUESSEVEUR P., *Convergence of an antidiffusion Lagrange–Euler scheme for quasi-linear equations*, SIAM J. Numer. Anal., 21, 5, (1984), pp. 985–994.
- [46] LEROUX A.Y. et al., *Modélisation océanique avec topographie*, Rapport CNEXO, Université de Rennes (1982).
- [47] LINDQUIST W.B., *The scalar Riemann problem in two spacial dimensions piecewise smoothness of solutions and breakdown*, SIAM J. Math. Anal., 17, (1986), pp. 1178–1197.
- [48] LIU T.P., *Quasilinear hyperbolic systems*, Comm. Math. Phys., 68, (1979), pp. 141–172.
- [49] LUSKIN M., *On the existence of global smooth solutions for a model equation for a fluid flow in a pipe*, J. Math. Anal. Appl., 84, (1981), pp. 614–630.
- [50] LUSKIN M. and TEMPLE J.B., *The existence of a global weak solution to the nonlinear waterhammer problem*, Comm. Pure Appl. Math., 35, (1982), pp. 697–735.
- [51] MAJDA A. and OSHER S., *Numerical viscosity and the entropy condition*, Comm. Pure Appl. Math., 32, (1979), pp. 797–838.
- [52] MOCK M.S., *Some higher order difference schemes enforcing an entropy inequality*, Michigan Math. J., 25, (1978), pp. 325–344.

- [53] MONTAGNE J.L., *Etude de schémas numériques décentrés en dynamique des gaz bidimensionnelle*, La Recherche Aéronautique, 5, (1984), pp. 323–338.
- [54] OLEINIK O.A., *Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation*, Amer. Math. Soc. Trans., ser. 2, 33, (1963), pp. 285–290.
- [55] OSHER S., *Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations*, SIAM J. Numer. Anal., 21, (1984), pp. 217–235.
- [56] OSHER S. and CHAKRAVARTHY S.R., *High resolution schemes and the entropy condition*, SIAM J. Numer. Anal., 21, 5, (1984), pp. 955–984.
- [57] RASCLE M., *Perturbations par viscosité de certains systèmes hyperboliques non linéaires*, Thèse d'Etat Lyon I, (1983).
- [58] ROE P.L., *Approximate Riemann solvers, parameter vector, and difference schemes*, J. Comp. Phys., 43, (1981), pp.357–372.
- [59] ROE P.L., *Upwind differencing schemes for hyperbolic laws with source terms*, Proc. Nonlinear Hyperbolic Problems, Eds. C. Carasso, P.A. Raviart, et D. Serre, Springer, Lectures Notes in Mathematics 1270, (1986).
- [60] SANDERS R., *On convergence of monotone finite difference schemes with variable spatial differencing*, Math. Comp., 40, (1983), pp. 91–106.
- [61] SERRE D., *Un système hyperbolique non linéaire avec des données oscillantes*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 302, Série I, (1986), pp. 115–118.
- [62] SHU C.W., *TVB Uniformly high-order schemes for conservation laws*, Math. Comp., 49, (1987), pp. 105–121.
- [63] SHU C.W., *TVD Time discretizations*, Preprint.
- [64] SMOLLER J.A., *Shocks waves and reaction diffusion equations*, Springer Verlag, (1983).
- [65] SOD G.M., *A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Phys., 27, (1978), pp. 1–31.
- [66] SWEBY P.K., *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal., 21, (1984), pp. 995–1011.

- [67] SWEBY P.K. and BAINES M.J., *On convergence of Roe's scheme for the general non-linear scalar wave equation*, J. Comp. Phys., 56, (1984), pp. 135–148.
- [68] TADMOR E., *Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes*, Math. Comp., 43, (1984), pp. 369–382.
- [69] TARTAR L., *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, in : Nonlinear Analysis and Mechanics, Herriot–Watt Symposium , vol. IV, R.J. Knops editor Pitman (1979), pp. 136–212.
- [70] VAN–LEER B., *Towards the ultimate conservative difference scheme. V*, J. Comp. Phys., 32, (1979), pp. 101–136.
- [71] VAN–LEER B., *On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist–Osher and Roe*, SIAM J. SCI. Stat. Comput. , 5, 1, (1984), pp. 1–20.
- [72] VILA J.P., *Sur la théorie et l'approximation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires, application aux équations de Saint Venant et à la modélisation des avalanches de neige dense*, Thèse , Paris VI (1986) .
- [73] VILA J.P., *Simplified Godunov schemes for 2 x 2 systems of conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal., 23 , 6, (1986), pp. 1173–1192.
- [74] VILA J.P., *High order schemes and entropy condition for non-linear hyperbolic systems of conservation laws*, Math. Comp., 50, (1988), pp. 53–73.
- [75] VILA J.P., *P1-methods for the approximation of the conservation laws*, To appear in SIAM J. Numer. Anal.
- [76] VOLPERT A.I., *The espace BV and quasi linear equations*, Math. SB. 73, 115, (1967), pp. 255–302.
- [77] WAGNER D., *The Riemann problem in two space dimensions for a single conservation law*, SIAM J. Math. Anal., 14, (1983), pp. 534–559.
- [78] YANENKO, *Fractional steps methods*, Springer Verlag, (1971).
- [79] YEE H.C., *Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications*, J. Comp. Phys., 68 , (1987), pp. 51–179.