Les cahiers
du laboratoire
Leibniz

Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire – Perspectives théorique sur leurs interactions

J-L. Dorier

Laboratoire Leibniz-IMAG, 46 av. Félix Viallet, 38000 GRENOBLE, France -
ISSN : 1298-020X

n° 12
Oct. 2000

Document disponible en ligne : http:// www-leibniz.imag.fr/LesCahiers

RECHERCHES EN HISTOIRE ET EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES SUR L'ALGEBRE LINEAIRE

****

PERSPECTIVE THEORIQUE SUR LEURS INTERACTIONS

Jean-Luc DORIER

Equipe DDM – Laboratoire Leibniz

SOMMAIRE

AVERTISSEMENT

Le présent document est bâti à partir de la note de synthèse que j'ai écrite pour la soutenance de mon habilitation à diriger des recherches, le 20 mai 1997.

Ce n'est donc pas à proprement parler un texte conçu pour être lu de façon 'autonome', dans la mesure où il s'appuie sur un ensemble de travaux qui figuraient dans le dossier d'habilitation. Néanmoins, une part importante de ce qu'il présente peut-être, au moins en première lecture, compris sans nécessairement connaître les documents en question. C'est pourquoi j'ai choisi de le publier dans la série des Cahiers du laboratoire Leibniz, après quelques retouches. Le lecteur intéressé pourra s'il le désire compléter utilement son information en se référant à un ou plusieurs des documents de la liste qui suit et que je présente brièvement plus bas.

LISTE DES DOCUMENTS

Document n°1

Dorier J.-L. (1995a) : A general outline of the genesis of vector space theory, *Historia Mathematica* **22-3**, 227-261.

Document n°2

Dorier J.-L. (1993) : Emergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* 2ème série, vol.3, 159-190, Paris : Institut H. Poincaré.

Document n°3

Dorier J.-L. (1996) : Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions, *Revue d'Histoire des Mathématiques* **2(2),** 265-307.

Document n°4

Dorier J.-L. (1997) : Hermann Grassmann et la théorie de l'extension, *Repères* **26**, 89-108.

Document n°5

Dorier J.-L. (1996) : Basis and dimension, from Grassmann to van der Waerden, in G. Schubring (ed.), *Hermann Günther Grassmann (1809-1877): Visionnary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar -Papers from a Sesquicentinnial Conference,* Boston Studies in the Philosophy of Science 187, Dordrecht : Kluwer, 175-196.

Document n°6

Dorier J.-L. (1997) L'Ausdenhungslehre de Grassmann : Une étape clef dans la théorisation du linéaire, in Flament, D. (éd.) *Le nombre une hydre à n visages - entre nombres complexes et vecteurs,* Paris: Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, pp. 163-191.

Document n°7

Dorier J.-L. (1991) : Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algèbre linéaire à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques* **11-2/3**, 325-364.

Document n°8

Dorier J.-L. (1992) : *Illustrer l'aspect unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire,* Cahier DIDIREM n°14, IREM de Paris VII.

Document n°9

Dorier J.-L. (1995) Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics, *Educational Studies in Mathematics* **29(2)**, 175-197.

Document n°10

Dorier J.-L., Robert A, Robinet, J, Rogalski M. (1994) : The teaching of linear algebra in first year of French science university: epistemological difficulties, use of the 'meta-lever', long-term organization., in : Ponte J.P. da, Matos J.F. (eds) *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* , vol.4, pp.137-144, Lisbonne : Université de Lisbonne.

Document n°11

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J., Rogalski M. (1994) : L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions, in

Artigue M. et al. (eds) *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*, pp. 328-342, Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

Document n°12

Dorier, J.-L. (2000) Use of history in a research work on the teaching of linear algebra, in V. Katz (ed) *Using history to teach mathematic – An international perspective* MAA notes #51, Washington D.C. : The mathematical Association of America (Inc.).

Document n°13

Dorier J.-L. (ed.) (1997) : *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, collection Bibliothèque Recherches en Didactique des Mathématiques dirigée par N. Balacheff, Grenoble : La Pensée Sauvage éditions. (331 pages).

PRESENTATION SUCCINCTE DES DOCUMENTS

Les treize documents précédents se divisent en deux groupes :

Le premier est constitué de textes à caractère historique. Ce sont les documents n° 1 à 6 ainsi que la première partie du document n° 13[1].. Le document n° 1 me semble devoir être lu en premier ; il présente en effet un panorama assez détaillé et exhaustif de l'histoire de la genèse de la théorie des espaces vectoriels.

La première partie du document n° 13 correspond à une maturation du travail amorcé dans le précédent document. D'une part, j'ai, entre temps, approfondi mes recherches sur certaines parties de l'histoire de la genèse et sur les débuts de l'enseignement. Mais surtout, l'évolution porte sur l'effort de synthèse épistémologique visant à mieux dégager les étapes du développement historique, leur enchaînement et leur contexte, ainsi que le rôle et les interactions des différentes origines de la théorie des espaces vectoriels. On verra dans la suite que cet approfondissement du travail historique a été fondamental dans l'interaction avec les analyses didactiques.

Les documents 2 à 6 présentent chacun un travail historique plus détaillé sur une partie précise de la genèse des espaces vectoriels.

Le document n° 2[2] présente une étude de l'émergence du concept de rang dans le contexte des systèmes d'équations linéaires entre 1750 et 1900. L'exhaustivité de l'étude et le détail du contenu mathématique de certains textes assez techniques rendent le style de cet article un peu lourd et ont nui à une bonne explicitation de certains caractères épistémologiques. Dans ce sens, le premier paragraphe de la première partie du document n° 13 permet de mieux comprendre certaines idées qui n'étaient pas encore bien mises en évidence dans le document n° 2. Ces idées ont une influence essentielle sur notre analyse didactique à propos du concept de dépendance linéaire (cf. document n° 12, et ce qui suit).

Le document n° 3 présente notre travail historique le plus récent et développe de façon plus détaillée que dans le document n° 13, l'histoire de l'émergence du concept d'espace vectoriel de fonctions.

Les documents n° 4, 5 et 6 portent sur le travail de Grassmann.

---

[1] Le document n° 13 est un livre de synthèse dont j'ai assuré l'édition. J'en ai par ailleurs écrit la première partie (analyse épistémologique), et co-signé deux des quatre premiers chapitres de la deuxième partie, qui présentent les travaux du groupe, dans lequel je mène une part de mes recherches. J'en ai enfin écrit le dernier chapitre qui présente divers travaux sur l'enseignement de l'algèbre linéaire. Les autres chapitres ont été écrits par des équipes de recherche canadienne et américaines. Une version anglaise et actualisée vient de paraître :
Dorier J.-L (ed.) (2000) *On the teaching of linear algebra,* Dordrecht : Kluwer Academic Publisher (xxii + 288 pages).

[2] On pourra aussi consulter un travail plus récent (et peut-être plus accessible) sur le même sujet, élaboré à partir d'un atelier que j'ai animé lors d'une université d'été d'histoire des mathématiques : Dorier J.-L. (1999) Le concept de rang dans les systèmes d'équations linéaires, in IREM des Pays de Loire (ed.) *Contribution à une approche historique des mathématiques – IREM - Actes de la 7° université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques,* Université de Nantes, 12-17 Juillet 1997, pp. 237-252.

Le document n° 4 est un texte d'introduction destiné à un public ne connaissant pas l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann.

Les documents n° 5 et 6, plus particulièrement destinés à des spécialistes, analysent les conditions qui ont permis à Grassmann de dégager les concepts élémentaires d'algèbre linéaire, en particulier celui de dimension, de façon très précoce. Ils analysent aussi la place et l'influence de l'œuvre de Grassmann dans l'histoire des espaces vectoriels.

Le deuxième groupe de documents porte sur des travaux didactiques et comprend les documents n° 7 à 12 et certains chapitres de la deuxième partie du document n° 13.

Le document n° 7 est un article publié à la suite de ma thèse de doctorat, il en reprend de façon synthétique les principaux résultats et laisse déjà apparaître l'orientation épistémologique de mes travaux. En particulier, il soulève la difficulté didactique liée à la nature unificatrice et généralisatrice de l'algèbre linéaire et le choix d'utiliser le levier méta.

Le document n° 8 reprend l'analyse faite dans ma thèse de doctorat d'un problème portant sur la formule de Gregory, tel qu'il avait été posé dans une section ordinaire de DEUG et présente une reformulation de ce problème en y intégrant une dimension méta, conformément aux conclusions des précédents travaux. On y trouve les résultats d'une expérimentation de ce problème reformulé.

Le document n° 9 analyse sur la base de deux expérimentations, les caractéristiques épistémologiques des concepts unificateurs et généralisateurs et l'utilisation du levier méta dans leur enseignement.

Les documents n° 10 et 11 présentent de façon synthétique l'expérimentation menée à Lille, les résultats et les problèmes méthodologiques qui y sont attachés, en particulier en rapport avec l'intégration de la dimension méta dans un projet long.

Le document n° 12[3] montre sur l'exemple du concept de dépendance linéaire comment j'ai intégré dans une réflexion épistémologique conjointe les résultats de mess analyses historiques et didactiques.

Enfin les quatre premiers chapitres de la deuxième partie du document n° 13 présentent de façon synthétique une vue globale sur la recherche de notre groupe, à travers un bilan des

---

[3] Cette publication faisait suite à une conférence donnée en 1996 au congrès ICME de Séville. Pour des raisons matérielles, elle n'est parue sous sa forme définitive que très récemment. Au moment de soutenir mon habilitation, ces idées était très récente. La réflexion ainsi amorcée a été depuis prolongée dans quelques autres publications :

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J., Rogalski M. (2000) On a research program about the teaching and learning of linear algebra in first year of French science university, *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology* **31(1)**, 27-35.

Dorier J.-L. (1998a) État de l'art de la recherche en didactique des mathématiques à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire, *Recherches en didactique des mathématiques* **18(2)**, 191-230.

Dorier J.-L. (1998b) The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces, *Linear Algebra and its Applications* , **275-276**, 1998, 141-160.

Dorier J.-L. (1998c) On the teaching of the theory of vector spaces in first year of French science university, *EduMath* **6**, 38-48.

résultats acquis, des grandes lignes de questionnements, mais aussi des perspectives. Les quatre derniers chapitres donnent une vision de la place de ces travaux dans le contexte international de la recherche en didactique sur l'algèbre linéaire.

L'ensemble de ces travaux présente une unité évidente autour du thème de l'algèbre linéaire. Dans l'essai de synthèse qui va suivre je vais m'attacher à montrer un autre type d'unité portant non pas sur le contenu mathématique étudié mais sur la méthodologie de recherche employée, tout en en soulignant l'originalité. Mon but est ici de montrer le rôle central joué dans mes travaux didactiques par l'interaction avec mes recherches historiques. Ce point est déjà évoqué dans tous les documents du deuxième groupe précédent, à des degrés plus ou moins forts. Dans ce qui suit je vais aborder cette question sous un angle plus général, en dégageant, au—delà du seul exemple de l'algèbre linéaire, la nature des interactions possibles entre recherches historique et didactique et leur apport épistémologique, en dégageant également des questions de méthodologie. Je m'appuierai sur les documents précédents[4] pour construire ma réflexion.

[4] Les référence à ces documents sont données dans la suite avec le numéro entre crochets.

INTERACTIONS ENTRE RECHERCHES EN HISTOIRE ET EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES POUR L'ELABORATION D'UNE REFLEXION EPISTEMOLOGIQUE SUR LES QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT ET D'APPRENTISSAGE

L'EXEMPLE DE L'ALGEBRE LINEAIRE

Par l'objet même de son étude, la recherche en didactique des mathématiques présente un caractère expérimental, cependant le travail "de terrain" (observations, expérimentations, analyses de productions d'élèves, etc.) est sous-tendu par un travail préalable important ayant trait à "l'étude du savoir mathématique". Cette étude est une phase fondamentale pour que le chercheur puisse prendre ses distances par rapport aux enjeux didactiques. Le sens des concepts, les problèmes qui s'y rattachent, la position relative d'un élément de savoir dans un savoir plus large qui l'englobe, mais aussi la variabilité de ces données en fonction des périodes et des institutions, etc. sont autant de questions qui aident à mieux comprendre le fonctionnement d'un système didactique. De plus, le chercheur en didactique ne peut se contenter d'un point de vue interne au système d'enseignement, il analyse le processus complexe qui conduit de la production du savoir dans la communauté mathématique jusqu'à son enseignement, en replaçant l'enjeu de connaissance dans le contexte plus vaste de la constitution des savoirs. C'est en particulier ce qu'exprime Chevallard (1991, 15) quand il nous dit que "le concept de transposition didactique, par cela seulement qu'il renvoie au passage du savoir savant au savoir enseigné, donc à l'éventuelle, à l'obligatoire, distance qui les sépare, témoigne de ce questionnement nécessaire […] C'est l'un des instruments de la *rupture* que la didactique doit opérer pour se constituer en son domaine propre ; il est ce par quoi l'entrée du savoir dans la problématique de la didactique passe de la puissance à l'acte […]".

Ainsi une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du texte du savoir enseigné. En outre, le processus de transposition didactique est complexe, il ne commence pas au moment où l'enseignant prépare son cours, il est au contraire à ce moment là dans sa phase finale, l'enseignant n'ayant plus que le contrôle de variables locales dans la présentation du texte du savoir. Le chercheur en didactique est donc tenu de remonter aux sources de ce processus, jusqu'à la production du savoir savant, pour "se déprendre de la familiarité de son objet d'étude, et exercer sa vigilance épistémologique" (ibid., 15).

D'ailleurs, la pertinence de la référence à l'histoire du savoir depuis ses origines dans la sphère savante ne se limite pas au travail spécifique d'analyse de la transposition didactique et touche à la plupart des aspects de la recherche en didactique.

Dès le début de nos recherches sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, nous avons construit notre réflexion sur un plan épistémologique dans une dialectique entre nos investigations didactiques et historiques. Poursuivant nous-même une étude de la genèse historique de l'algèbre linéaire, nous avons toujours eu le souci d'intégrer les résultats de ce travail de recherche historique dans notre recherche didactique. Inversement notre analyse didactique, nous a permis d'aborder dans notre travail historique des questions épistémologiques nouvelles. Nos recherches ont ainsi pu progresser dans une dialectique dynamique entre leur pôle historique et leur pôle didactique.

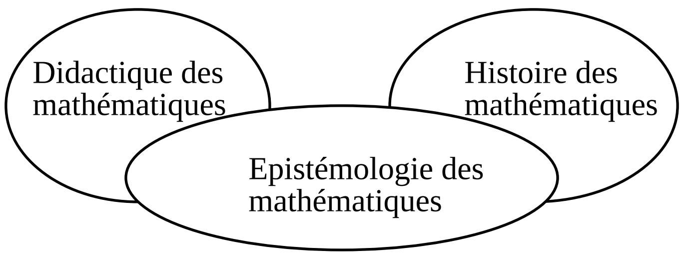
Le but de cette note de synthèse est de donner une perspective théorique et méthodologique de cette dialectique entre les recherches didactique et historique, dans la réflexion épistémologique sur des questions d'enseignement (chapitre I). Cette mise en perspective permettra une lecture renouvelée (chapitres II à IV) de notre travail sur l'algèbre linéaire (présenté à travers les différents articles du dossier, auxquels nous ferons référence).

Ce cadrage théorique est le fruit d'une réflexion sur notre propre pratique de recherche, c'est pourquoi les trois derniers chapitres de cette note permettront, outre d'exemplifier le cadre général proposé au premier chapitre, d'en valider en quelque sorte la pertinence. Par ailleurs, cette mise en perspective théorique s'appuie sur des travaux de divers auteurs, portant sur l'épistémologie, la didactique ou l'histoire des mathématiques, et sur les liens entre ces trois domaines de recherche, ce qui nous permettra de situer notre travail dans un ensemble de recherches épistémologiques et didactiques sur des questions d'enseignement des mathématiques.

Précisons dès maintenant ce projet pour en éclairer la présentation qui va suivre.

L'étude repose sur trois mots clefs : *épistémologie*, *didactique* et *histoire des mathématiques*.

L'épistémologie apparaît comme le terme médiateur qui fait le lien entre le travail historique et le travail didactique :



autrement dit, l'épistémologie joue un rôle transversal car elle interagit à la fois avec la didactique et l'histoire des mathématiques. Afin de mieux comprendre cet aspect médiateur de l'épistémologie, nous nous interrogerons, dans un premier temps, sur les diverses significations que recouvrent ce terme. Cela nous permettra de mettre en évidence une grande diversité d'approches se réclamant de l'épistémologie. Nous en conclurons qu'il serait donc vain pour notre propos, de vouloir définir l'épistémologie comme un domaine propre et bien délimité, aussi définirons-nous essentiellement l'adjectif "épistémologique", dans un sens volontairement "mou", pour rendre compte de la richesse et de la variété de points de vue qu'il recouvre.

A la lumière de l'analyse précédente, nous examinerons ensuite l'importance et la nature du caractère épistémologique de la recherche en didactique des mathématiques.

Puis nous nous interrogerons sur la nature de la recherche en histoire des mathématiques et ses diverses facettes épistémologiques.

Après ces clarifications sur la diversité de l'épistémologie et les liens qu'elle entretient avec la didactique des mathématiques d'une part et l'histoire des mathématiques de l'autre, nous aborderons la question centrale de cette note de synthèse : celle des liens entre recherches historique et didactique, et plus précisément nous nous attacherons à déterminer les types d'interaction, au niveau épistémologique, entre ces deux types de travaux.

Pour commencer, afin d'éviter toute ambiguïté, nous commencerons par montrer en quoi notre démarche se distingue des travaux expérimentaux portant sur l'utilisation de textes historiques dans l'enseignement.

Nous présenterons ensuite notre démarche, en commençant par la situer par rapport aux travaux visant à l'élaboration au niveau de l'enseignement d'une genèse expérimentale articulée sur la prise en compte de la genèse historique et des outils théoriques de la didactique. Nous dégagerons également les grands traits méthodologiques et l'originalité de notre travail.

Ce qui précède constitue le plan du chapitre I de cette note de synthèse. Nous ne donnerons le plan des trois chapitres suivants qu'après avoir présenté le cadre général, car c'est à la lumière de celui-ci que la division opérée et l'organisation retenue prennent tout leur sens.

I. CADRE GENERAL

1. Epistémologie, didactique et histoire des mathématiques.

a - Sur la diversité que recouvre l'épistémologie

L'épistémologie recouvre plusieurs types de travaux qui révèlent une grande richesse et une diversité d'approche. Nous allons montrer cette diversité tout en nous attachant à dégager certains points communs.

i - Origine et évolution du terme épistémologie

Le terme d'épistémologie est récent et n'apparaît qu'au 19e siècle, il est formé des deux racines grecques *épistèmè* (science) et *logos* (discours sur, étude de). Dans le *Vocabulaire technique et critique de la Philosophie* de Lalande (début 20e), on en trouve la définition suivante : "Ce mot désigne la philosophie des sciences mais avec un sens un peu plus précis. Ce n'est pas proprement l'étude des méthodes scientifiques, qui est l'objet de la Méthodologie, et fait partie de la Logique. Ce n'est pas non plus une synthèse ou une anticipation conjecturale des lois scientifiques […]. C'est essentiellement l'étude critique des principes, des hypothèses et des résultats des diverses sciences, destinée à déterminer leur origine logique (non psychologique), leur valeur et leur portée objective.". Dans un style plus succinct, le petit Larousse (édition de 1973) se restreint à : "étude des sciences, ayant pour objet d'apprécier leur valeur pour l'esprit humain". L'épistémologie apparaît donc classiquement comme une partie de la philosophie des sciences. Dans quelle mesure s'en distingue-t-elle ? La philosophie des sciences vise à mettre en évidence les moyens de la connaissance scientifique, à caractériser les objets auxquels elle s'applique, à déterminer sa validité, c'est-à-dire à la fonder en vérité. On peut distinguer deux objectifs qui sont toutefois assez indissociables :

- rechercher une "connaissance positive" (de quoi parle le savant ? comment en parle-t-il ?)
- faire de la pratique scientifique l'objet d'un jugement (qu'est-ce qu'une vérité scientifique ? à quelles conditions y a-t-il vérité ? dans quelles limites peut-on parler de vérité scientifique ?).

L'épistémologie au sens strict peut apparaître soit comme le nom savant de la philosophie des sciences soit comme limitée au premier objectif, c'est-à-dire à l'étude des conditions de production des connaissances scientifiques.

Il semble néanmoins que le sens du mot s'est largement étendu depuis plusieurs années. Cette évolution doit beaucoup au développement de domaines tels que l'histoire des sciences ou les sciences cognitives qui entretiennent avec l'épistémologie des rapports étroits. Ainsi le terme d'épistémologie s'est-il appliqué à de nouvelles problématiques, son sens s'est alors élargi. En particulier, il n'est pas rare aujourd'hui qu'épistémologie désigne la théorie des méthodes ou des fondements de la connaissance, ce qui est le sens du terme *epistemology* en anglais, le terme français de gnoséologie n'étant plus guère usité. L'usage introduit par Piaget dans l'expression *épistémologie génétique* témoigne de cet élargissement d'emploi : "la méthode génétique revient à étudier les connaissances en fonction de leur construction réelle ou psychologique, et à considérer toute connaissance comme relative à un certain niveau du mécanisme de cette construction." (Beth et al. 1957, 19).

ii - Rapports avec l'histoire des sciences

Nous venons de dire que l'histoire des sciences entretient des rapports étroits avec l'épistémologie, quelle est plus précisément la nature de ces rapports ? Dans une première approche, il semblerait que l'histoire des sciences est restreinte à une énumération contingente des événements scientifiques, tout au plus mis en perspective à travers l'idée générale de progrès. Une telle vision est cependant très limitative, comme le souligne G. Canguilhem : "L'histoire d'une science ne saurait être une simple collection de biographies, ni à plus forte raison un tableau chronologique agrémenté d'anecdotes. Elle doit être aussi une histoire de la formation, de la déformation et de la rectification de concepts scientifiques." Il ne s'agit donc plus seulement d'une description de faits, mais de la recherche d'une cohérence interne à travers les différents problèmes et concepts qui donnent leur sens à une science. Ainsi l'histoire d'une science est-elle inséparable d'un questionnement épistémologique qui peut être une part plus ou moins importante de l'analyse.

Bachelard cependant veut distinguer l'histoire et l'épistémologie d'une science :

"C'est (…) l'effort de rationalité et de construction qui doit retenir l'attention de l'épistémologue. On peut voir ici ce qui distingue le métier d'épistémologue de celui d'historien des sciences. L'historien des sciences doit prendre les idées comme des faits. L'épistémologue doit prendre les faits comme des idées, en les insérant dans un système de pensées. Un fait mal interprété par une époque reste un *fait* pour l'historien. C'est au gré de l'épistémologue, un *obstacle* ou une contre-pensée.

(…) Trop souvent le souci d'objectivité qui amène l'historien des sciences à répertorier tous les textes ne va pas jusqu'à mesurer les variations psychologiques dans l'interprétation d'un même texte. A une même époque, sous un même mot, il y a des concepts si différents! Ce qui nous trompe, c'est que le même mot à la fois désigne et explique. La désignation est la même ; l'explication est différente.

(…) L'épistémologue doit donc s'efforcer de saisir les concepts scientifiques dans des synthèses psychologiques effectives, c'est-à-dire dans des synthèses psychologiques progressives, en établissant, à propos de chaque notion, une échelle de concepts, en montrant comment un concept en a produit un autre, s'est lié avec un autre. Alors il aura quelque chance de mesurer une efficacité épistémologique. Aussitôt la pensée scientifique apparaîtra comme une difficulté vaincue, comme un obstacle surmonté." (Bachelard 1938, 17-18).

Du même coup, avec Bachelard, l'épistémologie devient plus historique et il lui revendique le statut de science. Il ne faudrait pas voir dans le travail de Bachelard une péjoration du travail historique. La distinction qu'il soulève montre au contraire la complémentarité des deux approches et revendique l'importance de la réflexion épistémologique dans le travail historique sans dénigrer l'importance de ce dernier. De plus, ce qui est très important pour l'usage que nous faisons de l'histoire et de l'épistémologie c'est que ces deux sciences ont chez Bachelard un caractère essentiellement local, régional. Autrement dit, Bachelard récuse l'idée d'une histoire ou d'une épistémologie générale des sciences, ce qui ne veut pas dire que l'épistémologie ou l'histoire régionales soient une histoire ou une épistémologie spécialisées. Les frontières entre les régions scientifiques sont mouvantes et l'épistémologie doit rendre compte de leurs mouvements en analysant les rapports de constitution qui lient les unes aux autres les différentes régions.

iii - Divers courants

Dans un article portant sur l'expression "enfant épistémologue", Drouin (1991, 28-29) distingue quatre courants distincts de l'épistémologie que nous résumons - en reprenant ses termes - ci-dessous :

1) *Epistémologie historique*

Cette "épistémologie s'appuie sur la science du passé pour découvrir derrière les tâtonnements, les erreurs, les fausses routes, les intuitions sans lendemain et les obstacles divers, des conditions de possibilité de l'émergence de concepts scientifiques nouveaux, qui sont autant d'éclairages sur ce qu'est une science et sur ses méthodes de validation." (Bachelard, Canguilhem)

2) *Epistémologie "a priori"*

Cette "épistémologie procède a priori, tentant de définir peut-être moins la science telle qu'elle est ou a été, que telle qu'elle devrait être dans sa pureté et sa rigueur. C'est une épistémologie plus proche de ce que les philosophes ont longtemps mis sous le terme de "logique", s'appuyant sur des formalisations a priori, définissant des critères idéaux de validation." (Popper, Lakatos)

3) *Epistémologie de la science telle qu'elle fonctionne*

Cette "épistémologie observe la science telle qu'elle fonctionne dans le monde des scientifiques, avec leurs rapports de force et leurs rivalités, s'intéresse à la difficulté, pour une théorie nouvelle, à s'installer à côté de la science reconnue par la communauté scientifique du moment, jusqu'à ce qu'une "révolution" scientifique parvienne à changer les normes." Elle revêt un caractère plus sociologique. (Kuhn)

4) *Epistémologie génétique*

Cette "épistémologie toujours à la recherche des caractéristiques du savoir scientifique, tente de les trouver dans la genèse du savoir, en s'appuyant sur une observation empirique des enfants." (Piaget)

Il n'est pas dans notre propos de discuter ni de la pertinence ni de l'exhaustivité d'un tel découpage. Ce qui nous importe de relever c'est la variété contenue derrière le mot d'épistémologie, tout en en dégageant une forme d'unité dans la démarche de questionnement.

iv - Sur l'épistémologie génétique

Mais arrêtons-nous un moment sur le cas de l'épistémologie génétique, car il constitue un prolongement de l'épistémologie particulièrement important pour le didacticien. En effet, l'épistémologie génétique s'intéresse au développement des connaissance chez l'individu, alors que l'épistémologie s'était juqu'alors intéressée au développment des savoirs dans les institutions productrices (les milieux scientifiques). Du coup, cette épistémologie quitte l'attachement à la philosophie pour se constituer en science humaine et expérimentale. D'avoir donné à l'épistémologie un aspect expérimental n'est pas le moindre mérite de Piaget, et certainement une condition nécessaire à l'existence de la didactique des mathématiques.

Piaget (1967, 6-7) donne deux approximations pour définir l'épistémologie :

i) *Etude de la constitution des connaissances valables.*

Le terme "constitution" montre l'idée d'un processus, alors que l'usage du pluriel insiste sur la différenciation disciplinaire et que le terme "valables" révèle une conception normative du savoir.

ii) *Etude du passage des états de moindre connaissance aux états de connaissance plus poussée*.

Cette position induit la dimension de genèse d'une connaissance, et en détermine la nature.

Ces deux points de vue coïncident si l'on considère que la constitution des connaissances n'est jamais achevée. Or c'est ce qu'expriment Beth et al. (1957, 18) : "Déterminer comment s'accroissent les connaissances implique que l'on considère, *par méthode*, toute connaissance sous l'angle de son développement dans le temps, c'est-à-dire comme un processus continu dont on ne saurait jamais atteindre ni le commencement premier ni la fin. Toute connaissance, autrement dit, est à envisager comme relative à un certain état antérieur de moindre connaissance, et comme susceptible de continuer elle-même un tel état antérieur par rapport à une connaissance plus poussée."

On retrouve là encore l'idée de genèse d'une connaissance qui est très importante dans l'œuvre de Piaget. Selon (Lercher, A (1985), *Les mots de la philosophie,* Paris : Belin, 80-81) "la genèse d'un être, d'une institution, d'un quelconque objet d'étude, c'est l'ensemble des étapes par lesquelles il est arrivé, depuis son origine, jusqu'à l'état dans lequel on le considère".

C'est aussi un point de convergence avec la perspective de Bachelard. Il ne faudrait cependant pas croire que ces deux auteurs ont une perception uniforme et linéaire de la genèse de la connaissance. Au contraire, dans des domaines assez différents, ces deux types de travaux ont permis de dégager des notions liées à l'idée de rupture et d'obstacle[5], qui mettent en évidence justement le caractère non uniforme et non linéaire de la progression de la connaissance.

Piaget relie par ailleurs son approche à ce qu'il appelle la *méthode historico-critique,* proche de l'épistémologie historique de Bachelard. Pour lui "la méthode complète de l'épistémologie

---

[5] Nous reviendrons en détail sur la notion d'obstacle.

génétique est constituée par une collaboration intime des méthodes historico-critique et psychogénétique, et cela en vertu du principe suivant […] : que la nature d'une réalité vivante n'est révélée ni par ses seuls stades initiaux, ni par ses stades terminaux, mais par le processus même de ses transformations. […] Or, de cette constitution progressive, la méthode psychogénétique fournit seule la connaissance des paliers élémentaires, même si elle n'atteint jamais le premier, tandis que la méthode historico-critique fournit seule la connaissance des paliers, parfois intermédiaires mais en tous cas supérieurs, même si elle n'est jamais en possession du dernier […]" (Beth et al. 1957, 23).

Ainsi Piaget établit-il un lien entre phylogenèse et ontogenèse. Il se garde toutefois de dire que la deuxième serait une réplique de la première à petite échelle, mais il établit plutôt un lien de filiation, comme si l'évolution d'une connaissance chez un individu était constitutive de la genèse globale de cette connaissance. On verra plus loin comment la didactique des mathématiques a repris et dépassé cette idée en combinaison avec d'autres, essentiellement issues de Bachelard.

v - Essai de définition

Ce tour d'horizon nécessairement non-exhaustif montre l'extrême diversité que recouvre l'usage du terme épistémologie. Il apparaît difficile de le dissocier de la philosophie des sciences, ou de la théorie de la connaissance (scientifique). Par ailleurs, ses liens avec l'histoire des sciences sont également très importants. Enfin depuis Piaget, l'épistémologie se trouve au coeur de nombreuses théories de l'apprentissage. Il en ressort que dans l'optique de notre travail, nous avons intérêt à conserver à ce terme l'usage le plus large possible. En effet, la didactique des mathématiques s'est construite en se nourrissant des approches se réclamant de l'épistémologie que nous venons d'évoquer. Nous n'avons pas à écrire une définition de dictionnaire, ni à déterminer une discipline scientifique que l'on nommerait épistémologie et qui, pour des raisons institutionnelles, devrait recevoir une définition afin de délimiter ses objectifs et ses moyens en rapport avec les autres sciences établies. Nous nous intéressons essentiellement à l'épistémologie en ce qu'elle nous permet de mieux comprendre les liens entre la constitution du savoir dans la sphère savante d'une part et l'enseignement et l'apprentissage de ce savoir d'autre part.

C'est dans le sens de cette ouverture qu'il nous semble préférable de donner une définition de l'adjectif "épistémologique", sans nous risquer à définir le substantif, qu'au demeurant nous emploierons peu. Ainsi proposons-nous comme définition du terme *épistémologique : qui est relatif à l'évolution des savoirs ou des connaissances* (pour nous ils seront toujours *mathématiques*). Le terme évolution est à prendre au sens le plus large : elle peut concerner aussi bien un système, qu'une institution ou un individu, etc., de plus, elle ne se réduit pas seulement à l'idée de progrès, mais peut aussi se révéler être une stagnation ou un recul. En outre, les termes savoirs et connaissances sont à prendre ici dans un sens générique ; une connaissance est liée à un individu dans un rapport de mise en fonctionnalité relatif à un ensemble de situations déterminées, elle n'est susceptible de devenir un savoir qu'après dépersonnalisation et décontextualisation[6]. Cette approche "minimaliste" a l'avantage de mettre l'accent sur l'aspect dynamique et pluraliste des savoirs et des connaissances, de plus la définition retenue s'applique partout où des savoirs et des connaissances mathématiques sont en cours de constitution, d'acquisition, d'évolution, d'application ou de transformation, on pourra donc appliquer l'adjectif dans un cadre très large, en particulier aussi bien pour la classe et l'élève que dans le contexte historique.

b - Aspect épistémologique de la didactique des mathématiques

Il s'agit maintenant de préciser où se situe l'objet de la didactique des mathématiques par rapport à la définition proposée.

i - L'épistémologie au cœur de la didactique

La didactique des mathématiques se distingue d'autres types de recherche sur l'éducation par le fait qu'elle ne s'intéresse à une relation de maître à élève(s) que dans la mesure où il y a une volonté pour l'un d'enseigner et pour l'autre d'apprendre un savoir mathématique précis, c'est-à-dire une intention didactique. Cette intention peut bien entendu être institutionnelle, comme c'est le cas dans le système scolaire habituel où elle peut même avoir à s'opposer à des résistances personnelles. Autrement dit, comme nous l'avons déjà souligné dans notre introduction, le parti pris fondamental de la didactique consiste à ne regarder la relation maître-élève(s) que dans ce qu'elle a de spécifique au savoir en jeu (et enjeu de connaissance) dans la situation, si bien que **toute analyse didactique doit englober un aspect de nature épistémologique**, au sens où nous avons défini ce terme ci-dessus.[7] Même si le poids épistémologique est plus ou moins fort selon le type d'analyses, il est primordial de ne pas négliger ce point. Cette position n'exclut pas les aspects psychologiques, sociaux ou culturels de la relation didactique, mais ceux-ci seront examinés dans leurs rapports à la nature épistémologique de la relation entre maître et élève(s).

Pour préciser la nature épistémologique de la didactique, regardons à présent comment Chevallard situe le problème. Dans la postface à la deuxième édition de la *Transposition*

[6] Pour une distinction plus fine de ces termes, on pourra consulter Rouchier, A. (1991) *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itéro-récursives, instituionnalisation*, thèse d'état, université d'Orléans, ou Connes, F (1992) : Savoirs et connaissances dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **12-2/3**, 221-270.

[7] Rappelons que la didactique a failli s'appeler "épistémologie expérimentale".

Didactique, il s'interroge sur la place de la didactique, et propose de la situer dans le champ de l'anthropologie ("l'étude de l'Homme"). Très schématiquement, son point de vue est le suivant. Il distingue savoir et connaissance : "Une certaine connaissance, c'est-à-dire une certaine qualité du rapport à un objet, se donne à voir. Au lieu qu'un savoir est toujours *supposé*. Il se présente à nous par ses emblèmes (sa dénomination, etc.), et nous le rencontrons comme présent *in absentia*, comme une *potentialité* - ou un *manque*, quand nous voulons "l'apprendre"." (Chevallard 1991, 209). Il parle alors de la *didactique de la connaissance*, ou didactique *cognitive*. Or celle-ci ne saurait être incluse dans la seule *anthropologie cognitive*, il y manque encore la composante relative à l'intention didactique, c'est pourquoi l'auteur introduit le terme d'*anthropologie didactique de la connaissance*. Par ailleurs, comme il a associé l'adjectif cognitif au terme de connaissance, il associe l'adjectif épistémologique au terme de savoir[8], il identifie ainsi l'anthropologie des savoirs à l'*anthropologie épistémologique* et finalement à l'*épistémologie*. Ce jeu sur les mots est pour lui le moyen de montrer non seulement les liens entre la didactique et l'épistémologie, mais aussi l'apport de l'approche de la didactique, dans sa dimension anthropologique, pour l'épistémologie : "Il est assez clair maintenant que l'épistémologie telle qu'elle existe s'est donnée jusqu'ici avec passion à l'étude quasi exclusive de la *production* des savoirs et à l'étude de leurs producteurs ; et qu'elle a négligé et leur *utilisation*, et leur *enseignement*. Or ceux-ci ne peuvent être écartés d'une étude anthropologique des savoirs." (ibid., 211).[9] Ce vocabulaire étant mis en place, l'auteur est prêt à nous fournir la clé de sa définition de la didactique, définition qui la situe dans le champ de l'anthropologie :

"Au croisement de l'anthropologie des savoirs et de l'anthropologie didactique de la connaissance, il y a l'anthropologie *didactique* des savoirs, dont l'objet est la manipulation des savoirs dans une intention *didactique*, et en particulier *l'enseignement* des savoirs. Là aussi, écourtons. De même qu'on a parlé de didactique de la connaissance (ou didactique cognitive), parlons, pour faire bref, de *didactique des savoirs*. Celle-ci est donc à la fois une division de l'anthropologie des savoirs ou épistémologie (en notre sens) et de la didactique cognitive. C'est exactement elle que je nommerais désormais -nouveau raccourci - *didactique*, sans plus." (ibid., 211).

Cette approche par les définitions et partant du principe que la didactique est une partie de l'anthropologie est complétée par Chevallard, qui précise, plus loin, le rôle primordial que joue

[8] On remarquera tout de suite une différence avec notre choix. Celle-ci résulte en partie d'une différence dans la séparation des termes connaissance et savoir. Je pense qu'elle résulte également de la volonté de Chevallard de garder un sens plus restreint au mot épistémologie (n'englobant pas, entre autres, le sens d'épistémologie génétique) pour mieux montrer l'apport de la dimension anthropologique (cf. la citation qui suit). On va voir que cette différence dans l'utilisation du terme épistémologique sera quasiment gommée dans la dernière étape de l'élaboration de définitions par Chevallard.

[9] Sans adhérer entièrement à cette critique à peine masquée de l'épistémologie "classique", nous retiendrons de cette citation que l'appel explicite au cadre anthropologique permet d'envisager les questions d'utilisation et d'enseignement au même niveau que celles de production. Ce qui n'était sûrement pas le cas jusqu'alors, même si certaines études épistémologiques avaient abordées les deux premiers types de problèmes. C'est donc plus un positionnement théorique qui est en jeu qu'un constat de faits.

la sphère de production dans la légitimité épistémologique des choix d'enseignement : "[…] Une des plus fortes leçons qu'ait procurée la didactique (…), c'est que l'enseignement d'un savoir, plus largement sa manipulation didactique en général, ne peuvent, en bien des aspects, se comprendre si l'on ignore et ses utilisations et sa production […]" (ibid., 211-212). "Dans le cas d'un savoir savant, en effet, la sphère de la production en vient à assumer, par le biais notamment de l'Ecole et de la transposition didactique, un rôle bien plus large que celui de production *stricto sensu*.[…] La sphère de la recherche en un savoir savant est un belvédère d'où peuvent s'observer, et où finissent toujours par trouver quelque écho, les mouvements affectant le monde complexe et naturellement opaque des pratiques de ce savoir. Tout tend à monter vers elle, parce que tout tend à rechercher l'investiture épistémologique et culturelle du savoir savant qui y est produit." (ibid., 233).

ii - Sur le rôle de l'histoire des mathématiques en didactique

Des travaux de Piaget et de Bachelard notamment, la didactique des mathématiques a retenu le concept de genèse. L'enseignement vise à recréer dans la classe une genèse des concepts mathématiques que l'élève doit s'approprier. Cette genèse sera qualifiée d'artificielle, dans la mesure où ce n'est pas la genèse historique ou d'expérimentale, parce qu'elle est liée à l'expérience de la classe et de chaque élève.

Cependant il est une illusion contre laquelle il faut lutter, qui consiste à croire pouvoir recréer dans l'enseignement les conditions de la genèse historique. Cette illusion se fonde sur une analogie biologique qui consiste à dire que l'ontogenèse ne serait qu'une courte récapitulation de la phylogenèse. Une lecture un peu rapide des travaux de Bachelard et de Piaget pourrait conduire à de tels présupposés. Les didacticiens des mathématiques ont une position unanime sur ce fait : "Certes les contraintes qui gouvernent ces genèses (artificielles) ne sont pas identiques à celles qui ont gouverné la genèse historique, mais cette dernière reste néanmoins, pour le didacticien, un point d'ancrage de l'analyse didactique, sorte de promontoire d'observation, quand il s'agit d'analyser un processus d'enseignement donné ou une base de travail, s'il s'agit d'élaborer une telle genèse." (Artigue 1991, 244).

En fait l'usage du mot genèse peut être trompeur en faisant croire à un développement linéaire et uniforme, ce qui n'est jamais le cas pour un savoir mathématique. La réalité est plus complexe, elle fait intervenir plusieurs origines, un réseau de problèmes qui ont joué des rôles divers. Ces rôles peuvent être non seulement plus ou moins importants, mais aussi redondants. Dans certains cas, l'évolution historique peut avoir suivi un parcours inutilement sinueux et des raccourcis possibles ont pu intervenir par la suite, ou bien il est facile de les imaginer. Ainsi la réalité historique n'est pas un modèle parfait sans scories. On peut dès lors bien sûr envisager de réorganiser les événements de façon à ne choisir que les étapes essentielles, en raccourcir certaines, en regrouper d'autres, etc. Mais un tel travail est difficile et n'est plus à proprement parler historique. Il comporte aussi le danger d'être exposé à l'arbitraire et au subjectif. Il doit s'intégrer dans une problématique bien définie et s'appuyer sur un cadre d'analyse théorique qui devra englober des outils didactiques. C'est déjà ce qu'exprimait Brousseau dans un article de 1981 sur l'enseignement des décimaux : "Pour organiser une genèse expérimentale qui donne un sens convenable à la notion de décimal, il faut faire une étude épistémologique afin de mettre en évidence les formes sous lesquelles le décimal s'est manifesté et leur statut cognitif. […] Il y a un équilibre à trouver entre un enseignement "historique" qui restaurerait une forêt de distinctions et de points de vue périmés dans laquelle se perdrait l'enfant, et un enseignement direct de ce que l'on sait aujourd'hui être une structure unique et générale, sans se soucier d'unifier les conceptions de l'enfant, nécessairement et naturellement différentes. La recherche des conditions d'un tel équilibre est un des grands problèmes qui se pose actuellement à la didactique." (Brousseau 1981, 48).

De plus, le contexte de l'enseignement reste une contrainte incontournable qui soulève beaucoup de problèmes d'adaptation. Le problème du temps tout d'abord : comment en effet recréer une genèse de plusieurs décennies (voire siècles) en quelques heures (même sur plusieurs années) ? Le problème des contraintes cognitives ensuite : l'organisation du savoir enseigné ne suit pas dans son ensemble la progression historique du savoir savant, comment alors intégrer le passé mathématique de l'élève au modèle du processus historique ? Plus généralement, les différences en termes sociaux, psychologiques ou institutionnels sont telles que la genèse artificielle à l'œuvre dans la classe ne peut suivre que de très loin la genèse historique. Dans l'analyse de la genèse historique, plus que l'énumération et la fonction de différentes étapes de l'évolution, il importe de pouvoir déterminer les conditions qui ont permis de passer d'une étape à une autre ou au contraire ce qui a pu faire obstacle. Nous reviendrons en détail sur ces points plus loin.

Les problèmes rapidement évoqués ici montrent la difficulté qu'il peut y avoir à exploiter directement les résultats d'une analyse historique à des fins d'enseignement. C'est à cette difficulté que notre travail s'est intéressé (en particulier à propos de l'algèbre linéaire). Sur la base de ce positionnement global de la recherche en didactique par rapport à l'analyse épistémologique et à l'utilisation des résultats de l'histoire des mathématiques, nous présenterons à la fin de ce chapitre le cadre général et la méthodologie qui sous-tendent notre travail de recherche sur l'enseignement de l'algèbre linéaire.

c - Sur la nature de la recherche historique

Depuis Bachelard, comme nous l'avons dit plus haut, l'histoire des mathématiques ne peut pas ne pas contenir une part épistémologique. Il n'a d'ailleurs sûrement jamais pu en être autrement ; en effet, la seule énumération de faits sans un point de vue critique, ou seulement une mise en perspective, est impossible. Or cette nécessaire prise de distance dans le récit des faits est de nature épistémologique. Cependant une caractéristique essentielle du travail historique est qu'il se donne l'exhaustivité pour but. Ce but est bien entendu impossible à atteindre, c'est un positionnement méthodologique qui est la seule garantie d'avoir la plus d'informations possible.

Par exemple, l'œuvre isolée d'un mathématicien qui n'aura pas pu faire connaître ses travaux est un fait historique même si son influence sur le développement ultérieur du contenu mathématique étudié est restée nulle ou négligeable, et même si ce qu'il a découvert a été redécouvert après lui, indépendamment de ses propres travaux[10]. En effet, les conditions d'une découverte sont tout aussi importantes du point de vue historique, que la découverte elle-même. Dans ce sens, il est important de bien replacer le travail du mathématicien dans le contexte de son époque ; dans le contexte scientifique bien entendu, mais aussi parfois dans le contexte, social, économique, politique ou culturel, mais aussi dans le contexte personnel de son auteur. Une analyse historique produit une base de données permettant de mieux comprendre l'évolution des concepts, les conditions dans lesquelles ceux-ci se sont développés, mais aussi les conditions qui ont rendu possibles les avancées ou a contrario ce qui a pu empêcher certains progrès. Cependant, l'historien n'a souvent accès qu'à des textes publiés donc achevés, ayant gommé une part substantielles des questionnements, des recherches n'ayant pas abouti et des tâtonnements antérieurs de leur auteur. Plus rarement, le chercheur en histoire des mathématiques a accès à des notes personnelles ou à la correspondance des mathématiciens, qui peuvent laisser apparaître des étapes moins abouties de la réflexion. Il doit donc faire tout un travail de reconstruction à partir des indices dont il dispose pour essayer d'établir les conditions qui ont permis telle avancée ou au contraire celles qui ont fait obstacle. C'est dans ce sens que l'historien des mathématiques retrace la genèse d'un concept ou d'une théorie.

Dans cette optique, certains outils d'analyse didactique peuvent servir à donner un éclairage complémentaire à l'analyse historique, dans la mesure où d'une façon partielle le chercheur en mathématiques peut être assimilé à un apprenant au sein d'une communauté ayant ses ouvrages et ses maîtres de référence.

Outre l'exigence de trouver les textes originaux, l'historien des mathématiques se confronte à la difficulté d'interprétation d'un texte ancien en se référant à l'état des connaissances mathématiques de l'époque. Le chercheur doit connaître l'environnement mathématique de la période à laquelle appartient le texte qu'il examine, mais aussi ses pratiques, ses exigences de rigueur et de démonstration, les grands problèmes qui l'occupent et la façon classique de les aborder, etc. La mise en perpective par rapport à l'état actuel des mathématiques est un point de vue réducteur qui ne saurait suffire à l'analyse de textes anciens. La traduction d'un texte en notations modernes est un exemple de ce genre de pratique, si elle permet en première approche

[10] Ceci est particulièrement vrai dans notre cas pour le travail de Grassmann ([4], [5] et [6]).

une meilleure lisibilité, elle n'est bien sûr pas fidèle à la pensée de l'auteur et ne rend donc pas compte de sa contribution dans le contexte de son époque.

Si l'on se situe à présent dans l'optique d'une utilisation de l'histoire pour la recherche en didactique, il apparaît que dans un premier temps au moins, le travail de recherche historique est conduit indépendamment du travail didactique. En effet, la reconstitution de la genèse historique ne dépend en rien de la connaissance de quelque problème d'enseignement. Cette affirmation peut paraître évidente. Cependant, dans l'optique d'un travail de didactique, la question de l'indépendance n'est pas si innocente. En effet, le travail historique qu'un didacticien utilise dans son travail didactique est pour tout, ou au moins en partie, la production d'un autre que lui-même. Ce fait nous semble incontournable et a priori ne pas devoir poser de difficulté. Néanmoins, dans l'utilisation du travail historique, il est nécessaire parfois de retourner aux sources citées ou de bien prendre en compte tous les aspects de la genèse. Ces précautions sont importantes, dans la mesure où le didacticien se pose avant tout des questions didactiques et que le danger est réel d'appréhender la réalité historique avec un biais lié au questionnement didactique. En d'autre termes, il faut se garder d'une analyse trop superficielle de l'histoire, qui tendrait à adapter la réalité historique pour mieux appuyer un présupposé d'origine didactique. Il nous semble en particulier que ce danger est très fort dans certains travaux qui font un usage un peu mou du concept d'obstacle épistémologique. Ces travaux gagneraient à être enrichis par une analyse historique plus fine. Nous reviendrons sur ce point plus loin.

d - Sur l'utilisation de textes historiques

Avant d'aborder le cœur de notre propos nous voudrions, afin d'éviter toute confusion, aborder brièvement la question de l'utilisation de textes historiques dans l'enseignement. Ce type de démarche pose des problèmes bien spécifiques que nous n'avons pas abordés dans nos recherches, mais comme les deux sujets sont voisins, il nous semble important de faire quelques remarques sur ce point.

Pour un néophyte en histoire des mathématiques (ce que nous étions au début de nos travaux), la découverte de textes anciens représente souvent une révélation enthousiasmante, dans la mesure où elle donne l'impression d'accéder au "vrai" sens d'une certaine connaissance. Or le mathématicien professionnel (qu'il soit enseignant ou chercheur) a intégré cette connaissance depuis de nombreuses années, celle-ci fait partie de son paysage quotidien, mais elle a été du même coup, par des transformations successives, réduite à une essence. Ainsi compactée, elle remplit parfaitement son rôle dans le réseau de connaissances de celui qui se l'est appropriée en fonction du contexte de son travail scientifique ou pédagogique. La découverte historique est alors un moyen de se ré-interroger sur le sens de cette connaissance et d'en (re)découvrir certains aspects. Néanmoins, elle intervient dans un contexte stable où il n'y a pas vraiment remise en cause mais enrichissement. L'effet de nouveauté peut alors être trompeur parce qu'il masque l'importance du parcours individuel antérieur. Ainsi un texte historique peut donner à un expert l'impression de fournir un accès au vrai sens d'une connaissance alors qu'il ne joue ce rôle que parce qu'il intervient à un moment précis de son histoire personnelle et vient en complément d'un accès antérieur par d'autres voies à cette connaissance.

L'utilisation d'un texte historique dans l'enseignement doit donc relever d'une analyse didactique complète qui prend en compte un contexte beaucoup plus large que le seul point de vue de l'expert. Nous ne voulons pas ici réfuter en bloc les bienfaits éventuels de l'utilisation de textes historiques en classe. Il est vrai qu'ils présentent un motif d'intérêt à la fois pour les élèves et les enseignants (ou au moins une part d'entre eux), qu'ils ouvrent des horizons nouveaux, montrent un fonctionnement moins figé des mathématiques, etc. En ce sens, ils sont une source de motivation réelle et efficace tant pour les élèves que pour leurs enseignants et participent à la lutte contre les phénomènes bien connus d'obsolescence. Néanmoins leur fonction spécifique dans l'acquisition d'une connaissance précise reste à déterminer, et nous doutons, faute d'une masse suffisamment critique d'études de cas, que l'on puisse tirer trop de généralités sur ce point. D'ailleurs, il est remarquable que beaucoup de textes historiques utilisés en classe touchent à des connaissances périphériques par rapport au contenu des programmes, cet aspect est renforcé par le côté récréatif que l'on veut leur faire jouer. Une utilisation réellement didactique de textes historiques reste beaucoup plus problématique.

2. Nouveau positionnement du problème

Voyons à présent comment nous avons abordé la question des rapports entre recherche historique et recherche didactique dans nos travaux.

L'analyse didactique peut commencer sans connaissances précises de l'histoire des concepts mathématiques en jeu, du moment qu'on en a une bonne connaissance mathématique. On peut ainsi par exemple faire une analyse des tâches et un premier diagnostic des erreurs récurrentes qui leur sont associées. Ce travail relève aussi d'une forme d'épistémologie puisqu'il s'appuie en partie sur le fonctionnement du savoir et des connaissances sans prendre en compte néanmoins la dimension historique.

a - Limites d'une analyse interne au système d'enseignement

Cette première phase reste enfermée dans un certain rapport au savoir qui, s'il permet de dépasser le savoir enseigné au niveau scolaire analysé, n'en est pas moins très marqué par l'institution scolaire. Par leur position, l'enseignant, et encore plus le chercheur en didactique, entretiennent des liens avec ce que Chevallard, en empruntant à Teilhard de Chardin, appelle la *noosphère* (littéralement l'endroit où l'on pense), c'est-à-dire les différents lieux où l'on apprête un savoir en vue de l'enseigner. La noosphère est l'interface entre le système d'enseignement et son environnement. Ainsi le chercheur ou l'enseignant peuvent être membres d'une commission ou militants syndicaux et donc être eux-mêmes acteurs de la noosphère. Quoi qu'il en soit, ils ont accès à une forme plus ou moins visible du savoir à enseigner et même à au moins une partie du savoir savant. Cependant où existe vraiment le savoir savant ? La quasi totalité de ce qui est enseigné (au moins jusqu'à la licence de mathématiques[11]) correspond à des mathématiques découvertes au plus tard au début du 20e siècle (et souvent même bien des siècles auparavant). Hors de l'enseignement, ces mathématiques existent comme outils de base des mathématiciens professionnels, ou comme outils ou savoir-faire dans des institutions utilisatrices de mathématiques. Or, dans ces contextes, elles ne sont plus questionnées en tant qu'objets, elles ont pris différentes formes naturalisées ; leur origine, les problèmes qu'elles ont soulevés, permis de résoudre, etc. sont oubliés. Elles remplissent une fonction bien déterminée et servent de fondements à des savoirs nouveaux et plus complexes qui émergent de ces diverses institutions.

De plus, le savoir enseigné subit régulièrement des modifications, mais celles-ci ne sont que très rarement motivées par des raisons de nature épistémologique qui remonteraient à la source de la production de ce savoir. Ces modifications, souvent conjoncturelles, obéissent essentiellement à des contraintes internes à l'institution d'enseignement.

Bien sûr, les productions de la noosphère, notamment certains traités, sont les garants de la référence originelle au savoir savant. Mais il reste une certaine opacité dans le lien entre savoir savant et savoir enseigné (même en prenant en compte le savoir à enseigner) que la distance qui nous sépare de l'époque où un savoir a été introduit dans l'enseignement pour la première fois ne fait qu'accentuer. Faute de connaître l'historicité du savoir savant, l'enseignant ou le chercheur n'ont pas accès aux origines de la transposition didactique dont ils ne perçoivent que les étapes les plus contemporaines. C'est pourquoi, comme l'exprime Chevallard dans la citation qui suit, la connaissance de la genèse historique du savoir savant est indispensable à la recherche en didactique : "Le passage d'un contenu de savoir précis à une version didactique de cet objet de savoir peut être appelé plus justement "transposition didactique *stricto sensu*". Mais l'*étude* scientifique du processus de transposition didactique (qui est une dimension fondamentale de la *didactique des mathématiques*) suppose la prise en compte de la transposition didactique *sensu lato*, représentée par le schéma : $\rightarrow$ objet de savoir $\rightarrow$ objet à enseigner $\rightarrow$ objet d'enseignement. Dans lequel le premier chaînon marque le passage de l'implicite à l'explicite, de la pratique à la théorie, du *préconstruit* au *construit*." (Chevallard 1991, 39-40).

[11] A ce niveau certaines notions très proches de recherches actuelles peuvent être enseignées, surtout dans le domaine des mathématiques appliquées d'ailleurs, mais la majorité des ensiegnements concerne des savoirs découverts il y a plusieurs décennies, voire siècles.

b - Une première ouverture apportée par l'histoire

C'est d'abord en ce sens que la connaissance de l'histoire des mathématiques est une donnée fondamentale de la recherche en didactique, elle est une des sources essentielles pour analyser la transposition didactique sensu lato. Elle permet de donner au savoir mathématique sa dimension dynamique, et contribue à dégager, à travers les étapes de sa constitution, ce qui en a fait un savoir de référence digne d'être enseigné ; elle en détermine le sens de façon beaucoup plus riche que la seule référence au contexte actuel ne le permettrait. Par ailleurs, l'étude historique, si elle se prolonge jusqu'au moment où le savoir a été enseigné et retrace également l'histoire de cet enseignement, est un outil fondamental pour l'étude de la transposition didactique stricto sensu.

Un point essentiel de la notion de transposition didactique est son ancrage anthropologique lié à une approche systémique. Aussi serait-il vain, comme aurait pu le laisser croire le paragraphe précédent, de chercher à délimiter savoir savant et savoir enseigné par une seule composante temporelle et d'une façon cloisonnée. Rappelons que, pour Chevallard, un "savoir est toujours supposé", ainsi le savoir savant ou le savoir enseigné n'existent et ne se distinguent qu'au travers des rapports qu'ils ont à différentes institutions, ces rapports sont relatifs et ils évoluent de façons parfois interactives, il faut donc se garder d'un découpage trop strict entre ces deux notions. Seule une approche socio-historique des différentes pratiques liées au savoir peut permettre d'aborder pleinement la question de la transposition didactique.

Par ailleurs, il ne faut pas oublier que le didacticien ne peut agir que très partiellement sur la transposition didactique, qui est un processus incontournable obéissant à des contraintes d'un système qui dépasse le seul système didactique et s'étend largement à la noosphère. Il ne s'agit donc pas de chercher la *bonne* transposition didactique, ni même de savoir si c'est une bonne ou une mauvaise chose. Une telle position nous ramènerait inévitablement à ce que nous avons rejeté plus haut. En effet, elle induit l'idée qu'"il serait possible de constituer une épistémologie artificielle comme *résumé amélioré* - c'est-à-dire laissant de côté les impasses, les échecs, mais redéployant toute la richesse de développements féconds et parfois oubliés - de la construction historique du savoir.

"Une autre direction de recherche consiste à prendre acte de la *spécificité* du projet de construction didactique des savoirs, de son hétérogénéité *a priori* avec les *pratiques savantes* des savoirs, de son irréductibilité immédiate aux genèses socio-historiques correspondantes." (ibid., 48).

Dans dans cette "autre direction de recherche" que s'inscrivent nos travaux sur l'enseignement de l'algèbre linéaire. Ainsi il ne s'agira pas pour nous d'essayer à tout prix de réduire l'écart entre la genèse historique et les genèses artificielles compatibles avec les choix de programmes, mais plutôt à partir d'une difficulté d'enseignement ou d'apprentissage repérée, d'essayer de comprendre, à la lumière de la genèse historique, l'origine et les moyens de dépasser cette difficulté.

La genèse historique joue le rôle d'exemple de processus privilégié. Il s'agit d'en dégager une logique globale, les grandes étapes, leurs rôles et leur interactions mutuelles. De plus, il faut déterminer les conditions internes de développement, de stabilité ou de blocage d'une étape historique, comprendre les problèmes qui motivaient les acteurs de la vie scientifique de l'époque, leurs contraintes de tous ordres. Tout stade du développement historique doit donc être évalué dans ses rapports à son époque, qu'ils soient scientifiques, sociaux ou culturels. Il ne s'agit pas de se placer seulement dans l'optique d'une progression hiérarchisée en fonction du savoir final, mais de comprendre la fonctionnalité et les raisons d'être de chaque étape. Nous retrouvons ici les exigences que nous assignions plus haut à la recherche historique.

Encore une fois, la question n'est pas ensuite de regarder a priori si l'enseignement suit ou ne suit pas cette progression historique. Il s'agit plutôt quand une difficulté d'apprentissage ou un dysfonctionnement de l'enseignement sont repérés de les analyser à la lumière de la genèse historique dans une réflexion épistémologique. Cette méthodologie permet d'exercer la vigilance épistémologique sans forcer la suprématie de la genèse historique. Par ailleurs, soulignons que le point de départ comme le point d'arrivée de l'analyse proposée sont didactiques alors que la connaissance historique s'intègre comme un maillon intermédiaire dans l'analyse épistémologique.

Ainsi la détection des difficultés didactiques est la question première. Cette question se pose d'abord en termes d'apprentissage, il s'agit d'évaluer les effets de l'enseignement en fonction de ses attendus. Mais il faut aussi s'interroger sur les attendus de l'enseignement en rapport avec le fonctionnement du savoir savant qui en constitue certains des sens possibles. Sur ces deux points, l'interaction avec l'analyse historique est fondamentale.

Du point de vue méthodologique, la réflexion épistémologique s'organise dans un rapport dialectique entre l'analyse didactique et l'analyse historique en procédant par touches successives visant des questions de plus en plus fines. L'analyse historique peut susciter la détection d'un problème didactique, mais elle ne saurait le supposer exister a priori, ni en déterminer à elle seule les conditions de dépassement. En multipliant les angles d'attaque et en poursuivant le processus dialectique de la réflexion épistémologique, on construit ainsi peu à peu les éléments qui détermineront éventuellement une ingénierie globale permettant la réalisation d'une genèse expérimentale. Néanmoins cette construction n'est jamais ni univoque, ni achevée, elle montre des choix possibles toujours susceptibles d'amélioration.

<u>c - Diagnostic d'erreurs - obstacles épistémologiques</u>

Le type de démarche évoqué ci-dessus montre un rôle que peut jouer l'analyse historique dans la construction d'ingénieries didactiques et dans les choix globaux déterminant les grandes lignes de la genèse expérimentale que l'enseignement vise à produire. A un niveau plus local, l'analyse historique joue également un rôle pertinent dans les diagnostics d'erreurs. En effet, l'histoire fournit des exemples de processus d'évolution des connaissances, dont une analyse épistémologique permet de mettre en évidence, les ressorts, les sauts conceptuels, la fonctionnalité, etc. Une confrontation des erreurs des élèves à ces exemples peut permettre d'interpréter ces erreurs de façon plus satisfaisante. En particulier, l'analyse historique peut permettre de distinguer les erreurs de nature épistémologique, des erreurs plus contingentes qui peuvent être de nature cognitive ou didactique.

Dans un texte de 1976, Brousseau analyse ainsi le rôle des erreurs : "L'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié que l'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiriques et behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise." (Brousseau 1983[12], 171).

En s'inspirant de Bachelard, les chercheurs en didactique des mathématiques vont importer dans leur domaine la notion d'obstacle épistémologique. Bachelard introduit ainsi cette notion : "Quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens de l'esprit humain : c'est dans l'acte de connaître, intimement, qu'apparaissent par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques. (…) En revenant sur un passé d'erreurs, on trouve la vérité en un véritable repentir intellectuel. En fait, on connaît contre une connaissance antérieure en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation." (Bachelard 1938, 13).

Brousseau distingue trois types d'origine des obstacles :

- *ontogénétique*, liée aux limitations cognitives des élèves.
- *didactique*, liée aux choix du système d'enseignement
- *épistémologique*, au sens de Bachelard.

[12] Ce texte est une réédition de : Brousseau, G. (1976) : La problématique de l'enseignement des mathématiques, XXVIIIème Rencontre de la CIEAEM, Louvain la Neuve.

Dans la perspective d'un apprentissage par adaptation à un milieu problématique, qui est un point de vue prépondérant dans toutes les approches didactiques, l'obstacle épistémologique ne doit - et ne peut d'ailleurs - être évité, son apparition et son dépassement sont des conditions incontournables de l'apprentissage. Ces obstacles sont constitutifs de la connaissance. Il s'agit alors de mettre en place des situations propres à faire apparaître l'obstacle, à le faire fonctionner, et à permettre de le dépasser. Dans cette optique, l'analyse historique est un outil fondamental pour identifier la nature épistémologique d'un obstacle et pour fournir les moyens de la mise en œuvre d'un dispositif didactique adapté.

Bachelard avait a priori écarté les mathématiques de son propos, pour lui "en fait , l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connaît des périodes d'arrêt. Elle ne connaît pas des périodes d'erreurs. " (Bachelard 1938, 22). Néanmoins la notion d'obstacle a été beaucoup étudiée en didactique des mathématiques (voir entre autres, (CIRADE 1989) et (Perrin-Glorian 1993). Il nous semble cependant qu'il y a un danger à la trop banaliser. En effet, dans une polémique qui l'a opposé à Glaeser à propos de l'enseignement des décimaux, Brousseau avait exprimé des exigences très fortes quant à la consistance de l'analyse historique pour qu'elle puisse aider de façon pertinente à la mise en place d'un dispositif didactique en termes d'obstacles épistémologique : " Se posait-on ces problèmes ? Comment les résolvait-on ? Ou croyait-on pouvoir les résoudre ? Est-ce que ce qui nous apparaît aujourd'hui comme une difficulté était perçu de la même façon à l'époque ? Pourquoi cet "état de connaissances" paraissait-il suffisant, sur quel ensemble de questions était-il stable ? Pourquoi les tentatives de le modifier ou plutôt de le renouveler étaient-elles vouées à l'échec à ce moment-là ? Peut-être jusqu'à ce que de nouvelles conditions apparaissent et qu'un travail "latéral" soit accompli, mais lequel ?

Ces questions sont nécessaires pour entrer dans l'intimité de la construction des connaissances […]" (Brousseau 1983, 190-191)

Ces exigences montrent la difficulté d'analyse liée à la détermination d'un obstacle épistémologique. Du point de vue de l'histoire, la notion d'erreur ou seulement de difficulté est très problématique, les questions précédentes nous y renvoient. Dans ce contexte, le parallèle avec la situation d'enseignement doit être suffisamment contrôlé. De plus, il nous semble difficile (voire dangereux) de faire jouer à l'exemple de la genèse historique un caractère trop prédictif. Cela suppose au moins une analyse comparée très minutieuse des conditions et des contraintes du contexte historique et du contexte didactique visé. Une analyse didactique qui se donnerait la recherche d'obstacles épistémologiques comme but essentiel doit prendre en compte au moins l'ensemble des questions énoncées par Brousseau, pour ne pas risquer d'introduire un biais dans l'analyse historique. Autrement dit, la notion d'obstacle épistémologique présuppose une réflexion épistémologique fine qui repose sur une analyse historique particulièrement dense. En un sens, l'obstacle épistémologique correspond à un stade final de la dualité de la réflexion épistémologique. Faute d'avoir une perception aussi riche de la notion d'obstacle au début de nos recherches, nous avons gardé personnellement une certaine réticence face à ce concept. Néanmoins, dans nos travaux, certaines analyses s'en rapprochent. L'accent mis sur la dialectique entre recherches historique et didactique permet de bien mettre en évidence, dans ces cas, la complexité de la réflexion épistémologique. Nous en montrerons deux exemples au dernier paragraphe de ce texte.

3. Conclusion

Notre position méthodologique est finalement assez simple à résumer. Il s'agit de disposer, dans un premier temps, d'une analyse historique de la genèse du savoir visé, établie de façon indépendante de l'analyse didactique, qui est cependant l'origine et le but de la recherche. Avec les critères que nous avons rappelés plus haut, l'analyse historique constitue une banque de données que sous-tend déjà une réflexion épistémologique. Ce travail historique est en général conduit de façon parallèle avec les premières analyses didactiques et peut s'appuyer pour une part plus ou moins grande, sur des recherches déjà existantes. De cette confrontation initiale ressortent les premières hypothèses didactiques, qui vont permettre d'éclaircir certaines difficultés d'enseignement et d'apprentissage à un niveau global. Il s'ensuit une deuxième analyse didactique de ces difficultés visant à préciser et valider (ou invalider) les hypothèses. Ces analyses sont alors confrontées à l'analyse historique dans une dialectique de nature épistémologique. Ce processus se poursuit ainsi, permettant de mettre en place les éléments du dispositif expérimental, visant à l'élaboration d'une genèse artificielle contrôlée par l'explicitation et la détermination de contraintes et de variables didactiques.

Nous avons indiqué plus haut les différents cadres théoriques dans lesquels cette réflexion dialectique pouvait s'inscrire. La démarche que nous proposons ne détermine pas en effet un cadre théorique spécifique, mais elle implique un positionnement méthodologique qui est compatible avec la plupart des cadres théoriques de la didactique des mathématiques (nous en avons évoqués plusieurs plus haut). Il s'agit pour nous de réaffirmer l'importance de l'analyse historique dans la recherche en didactique des mathématiques et de montrer que son rôle est non seulement pertinent mais aussi opérationnel. Dans ce sens, deux principes complémentaires nous semblent fondamentaux :

- tout d'abord, l'analyse historique doit être indépendante, doit satisfaire des exigences d'exhaustivité, et doit répondre aux différents types de questionnement évoqués plus haut
- d'autre part, le questionnement épistémologique doit avoir une origine et une finalité didactiques

Ces deux principes ont comme corollaire qu'un travail didactique n'a pas à "raconter" l'histoire d'un concept ou d'une théorie (sauf si le travail est original, auquel cas c'est un travail réellement d'historien), il doit s'assurer que ce travail existe et en disposer pour ensuite intégrer de ce travail historique ce qui est pertinent pour son analyse didactique, dans une réflexion épistémologique dialectique. La nécessité de vigilance épistémologique n'est pas satisfaite de la simple superposition d'une analyse historique et d'une analyse didactique, elle réclame une réelle dialectique dans une réflexion de nature épistémologique.

Pour rendre ces propos plus opérationnels, nous allons maintenant les exemplifier et les étoffer à partir de notre travail sur l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année d'université. En revenant ainsi à la source de la réflexion qui précède, le lecteur pourra mieux en cerner les enjeux. De plus, les chapitres qui suivent ont pour but de proposer une lecture renouvelée de nos travaux sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, dans une mise en perspective théorique et méthodologique selon le cadre général que nous venons de présenter.

L'enseignement de l'algèbre linéaire représente une part importante de l'enseignement des mathématiques en première année de DEUG de sciences en France (entre un quart et un tiers du programme environ). C'est un domaine très important des mathématiques, dont les difficultés d'enseignement sont reconnues de tous les enseignants. Par ailleurs, la théorie des espaces vectoriels est très "récente" et de ce fait cache un passé complexe, c'est donc un exemple extrême de la perte d'historicité d'un savoir. L'entrée historique s'est donc rapidement imposée dans nos travaux, d'autant qu'aucun travail n'avait présenté la genèse historique de cette théorie. Nous allons maintenant expliciter, en nous appuyant sur les documents joints à ce dossier[13], comment le processus dialectique entre recherches historique et didactique s'est élaboré dans notre travail, illustrant ainsi la présentation générale qui précède.

Nous n'avons pas choisi une présentation basée sur une catégorisation des différents types d'interactions. En effet, nous avons bien dit plus haut que notre travail s'est organisé par touches successives. Nous allons donc plutôt distinguer différents angles d'attaque, montrant pour chacun d'eux l'élaboration du processus dialectique dans la réflexion épistémologique. Chacun des trois chapitres qui suivent illustrera donc différents types d'interactions à des niveaux plus ou moins globaux ou locaux de l'analyse.

Plus précisément, notre présentation s'organisera selon les trois axes suivants :

- Nos premières analyses du fonctionnement d'un enseignement classique d'algèbre linéaire nous ont permis de mettre à jour un dysfonctionnement entre le parti pris affiché par l'enseignement d'aborder une théorie formelle et abstraite, première structure algébrique axiomatisée que les étudiants rencontrent, et la réduction rapide du niveau des exigences à propos de la résolution d'exercices à des tâches purement algorithmique, sans rapport avec le niveau conceptuel visé par le début des enseignements. Par ailleurs, nos premières recherches

[13] Souvent, nous renvoyons à la lecture de certains passages de ces documents pour alléger la rédaction de cette note de synthèse. Pour les références, les documents du dossier seront repérés par un numéro correspondant à celui donné au début de ce texte. Ainsi [1, 12-15] signifie les pages 12 à 15 du document n°1. Pour le document n°13, nous reprenons la division du livre en parties, chapitres et paragraphes, ainsi [13, II-3-§2] signifie deuxième partie, troisième chapitre, deuxième paragraphe du document n°13, ou [13, I-2] signifie tout le deuxième chapitre de la première partie.

historiques sur le rôle et la place de la théorie axiomatique des espaces vectoriels dans la genèse de l'algèbre linéaire, montrent les aspects unificateur et formalisateur de cette théorie. La confrontation de ces deux analyses nous a amené à nous interroger sur le sens global que cette théorie peut prendre dans l'enseignement universitaire, pour un étudiant par rapport à ses connaissances et ses pratiques mathématiques. Ces réflexions rejoignent celles de travaux antérieurs : globalement sur l'enseignement "post-obligatoire" (Robinet 1984), (Robert 1986 a et b, 1897 et 1988), sur l'algèbre linéaire (Robinet 1986), (Robert et Robinet 1989) et (Rogalski 1990) mais aussi sur les suites (Robert 1988) et sur la géométrie en Terminale (Robert et Tenaud 1988) ou en licence en formation continuée (Robert 1990 et 1992). Dans la lignée de ces différents travaux, et sur la base de notre réflexion épistémologique, nous avons induit des choix didactiques très globaux sur la nature de l'ingénierie à mettre en place, en particulier, autour de la notion de *levier méta* introduite par A. Robert et J. Robinet (1993 et 1996)[14].

- Par ailleurs, tant sur le plan historique que sur le plan de l'enseignement, la géométrie nous est apparue jouer un rôle prépondérant au sein de l'algèbre linéaire. Or si l'enseignement des espaces vectoriels donne au cadre géométrique un rôle essentiel, nos analyses didactiques nous ont montré que l'utilisation de ce cadre de référence ne va pas sans difficulté dans la compréhension des concepts d'algèbre linéaire. Par ailleurs, l'analyse historique montre le rôle spécifique joué par le cadre géométrique dans la genèse de la théorie des espaces vectoriels. Une analyse du point de vue de la transposition didactique nous a permis de mieux comprendre la nature et les raisons de la distance qui sépare le fonctionnement des interactions entre le cadre géométrique et les concepts d'algèbre linéaire, dans l'enseignement et dans le contexte historique. Cette approche nous a permis une analyse plus riche de certaines des difficultés des étudiants dans l'apprentissage de l'algèbre linéaire. En annexe, nous aborderons également quelques questions portant sur l'enseignement des vecteurs dans le secondaire, car c'est un maillon des interactions entre le géométrique et l'algèbre linéaire dans le système d'enseignement.

- Enfin l'analyse historique montre l'importance majeure du concept de rang dans la genèse de l'algèbre linéaire. Or la constitution de ce concept s'est faite essentiellement dans le cadre des systèmes d'équations linéaires et est restée très liée à la notion de dépendance linéaire. Nous avons donc mené une étude épistémologique et didactique spécifique autour de ces deux concepts. Cette étude nous a également amené à nous interroger sur la place de l'étude des systèmes d'équations linéaires dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.

[14] Si certaines dates sont postérieures au début de mes travaux, ce n'est que pour des raisons de délai de publication. Par ailleurs le méta a d'abord été intégré dans des recherches de terrain menées par les auteurs, qui ne l'ont qu'ensuite introduit comme objet théorique.

Le choix de ces trois angles d'attaque peut, a priori, paraître relativement arbitraire. Nous avons tenté, dans la présentation succincte qui précède, de montrer en quoi ils correspondent à des questionnements surgis d'une interaction première entre nos travaux historique et didactique (c'est un point de méthodologie auquel nous tenons comme nous l'avons signalé plus haut). Le fait que ces questionnements aient pu devenir de véritables questions de recherche montre a posteriori leur bien fondé. Par ailleurs, on voit également qu'ils recouvrent trois aspects essentiels du fonctionnement d'un élément de savoir dans un tout plus vaste au sein d'une institution didactique :

- pourquoi enseigner tel nouvel élément de savoir ? (angle d'attaque n°1)
- comment s'insère-t-il dans l'ensemble des savoirs enseignés (angle d'attaque n°2 mais aussi n°3 pour les systèmes d'équations linéaires)
- quel en est le fonctionnement didactique interne ? (angle d'attaque n°3).

Nous ne prétendons pas avoir fait ainsi le tour de la question de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre linéaire (cela est-il possible ?) mais nous voulons montrer que l'entrée historique et la méthodologie proposée sont propres à apporter des informations substantielles relevant des principaux aspects sur un thème aussi vaste que celui de l'algèbre linéaire.

II. SUR LA NATURE EPISTEMOLOGIQUE DE LA THEORIE DES ESPACES VECTORIELS - CHOIX DIDACTIQUES GLOBAUX.

1. Une difficulté d'ordre didactique

De nos premières analyses des tâches proposées aux étudiants tout au long de l'enseignement d'algèbre linéaire en première année de DEUG scientifique [7, 336-342], il ressort une dichotomie très nette entre le début et la fin de l'enseignement. En particulier, les tâches proposées aux étudiants en début d'enseignement nécessitent la manipulation de concepts formels dans un cadre souvent abstrait. Or, nous avons relevé de nombreuses difficultés des étudiants débouchant sur des pertes de sens et des incompréhensions très fortes. Ces constats ont permis de préciser ceux de Robert et Robinet (1989) et de Rogalski (1990).

Par ailleurs, nos analyses montrent qu'au contraire, la fin de l'enseignement, en particulier au niveau des exercices et des problèmes proposés, y compris lors de l'évaluation, se limitent assez rapidement à des tâches de type algorithmique essentiellement menées dans le cadre matriciel et centrées sur la notion de valeur propre et la réduction des endomorphismes. Dans cette deuxième phase, les étudiants réussissent mieux et ont moins la sensation d'être submergés.

Il en ressort une contradiction forte puisque de nombreux étudiants s'avèrent pouvoir trouver la forme réduite d'un opérateur linéaire, mais gardent des incompréhensions profondes sur des notions telles que la somme (directe) de sous-espaces, voire la notion de générateurs ou même d'indépendance linéaire, qui sont pourtant des concepts clés dans les fondements théoriques des techniques de réduction des endomorphismes.

Si l'on se réfère au travail de Chevallard (1991, 67-68) cette algorithmisation est une réponse classique quand l'objet d'enseignement apparaît comme trop nouveau. En effet, la transposition didactique doit obéir à certaines règles d'organisation spatio-temporelle des savoirs dans les différents cycles d'enseignement (contraintes de topogenèse). Ainsi un nouveau savoir à enseigner doit pouvoir s'articuler avec d'anciens objets de savoir enseignés qu'il doit lui-même dépasser, "l'objet d'enseignement réalise un "équilibre" contradictoire *entre passé et avenir* : il est un objet transactionnel entre passé et avenir." (ibid., 67). Ainsi, selon Chevallard, si l'échec de l'enseignement est attribué à une trop grande nouveauté de l'objet d'enseignement celui-ci est dénaturé avant que le taux d'échecs ne passe un seuil critique non acceptable. Or dans leurs premières analyses, Robert et Robinet (op. cité) ont montré que les étudiants reprochent à l'enseignement d'algèbre linéaire d'être trop formel et abstrait, de les submerger de nouvelles définitions et d'être déconnecté de leurs connaissances antérieures. L'algorithmisation est alors un moyen de négocier à la baisse le conflit en permettant de diminuer l'aspect de nouveauté (et d'éviter du même coup la difficulté conceptuelle). Les enseignants se rattachent, via l'algorithme, à un cadre connu : la résolution de systèmes d'équations linéaires dans le cas des espaces vectoriels.

Par ailleurs, les tâches où l'algèbre linéaire peut être utilisée pour modéliser une situation mathématique dans un cadre externe (géométrie, polynômes, fonctions, etc.) sont globalement peu nombreuses dans l'enseignement. De plus, dans les quelques cas observés, les analyses montrent que les étudiants n'appliquent les outils de la théorie des espaces vectoriels que par effet de contrat (on applique ce qu'on est en train d'apprendre) sans comprendre vraiment l'intérêt que cela représente. On trouvera dans [8, 1-3], l'analyse d'un cas flagrant de ce type de comportement, qui met en évidence l'utilisation de l'algorithme de résolution des systèmes d'équations linéaires comme attachement nécessaire à un savoir passé pour contourner la difficulté liée à la nouveauté.

Ces différents constats ont en commun de montrer que l'enseignement de la théorie des espaces vectoriels ne se détermine pas assez aux yeux des étudiants en termes de fonctionnalité dans l'édifice de leurs connaissances mathématiques. A quoi ça sert ? Pourquoi tant de mots et de notions nouveaux ? Par exemple, se poser la question de savoir si toutes les bases d'un sous-espace ont même cardinal apparaît en général incongrue à un étudiant de DEUG. D'ailleurs, la réponse affirmative ne pourra que renforcer cette impression de complications inutiles. En outre, quasiment tous les problèmes linéaires - qui ne sont pas des applications directes du cours - et que l'on peut aborder avec les étudiants à ce niveau d'enseignement peuvent être résolus en termes d'équations linéaires sans toute la "batterie" des espaces vectoriels qui paraît bien lourde pour l'usage qu'on en fait. Ainsi une question essentielle s'impose : devrait-on repousser l'enseignement de la théorie des espaces vectoriels et attendre qu'on en ait vraiment besoin ? Ou bien doit-on la conserver au programme de DEUG, ne serait-ce que pour ses vertus esthétiques et parce qu'elle permet de court-circuiter d'horribles calculs de résolution de systèmes d'équations ? N'y a-t-il pas enfin de moyen terme qui permette de satisfaire l'intérêt que les mathématiciens portent à cette théorie sans rebuter les néophytes ? Peut-on alors mieux rendre compte de la nature épistémologique de la théorie des espaces vectoriels ?

C'est cette réflexion qui a guidé, de façon récurrente, notre recherche depuis le début. Pour tenter d'y répondre, il fallait se plonger dans le passé de cette théorie, avant qu'elle ne devienne cet édifice exemplaire de la sobriété bourbakiste.

2. Synthèse de l'historique récente des espaces vectoriels[15]

C'est d'abord dans ce but que nous avons entrepris nos premières analyses historiques. La première surprise fut de découvrir que la théorie des espaces vectoriels était très récente. Même si les premières tentatives d'axiomatisation datent de la fin du 19e siècle, la suprématie de la théorie des espaces vectoriels ne s'amorce qu'à partir de 1930 [13, I-2]. Pendant plus de 40 ans, les démarches analytiques (essentiellement basées sur la théorie des déterminants) ont prévalu, y compris pour des dimensions infinies non dénombrables. Par conséquent, l'histoire atteste que tous les problèmes linéaires abordables au niveau DEUG (et même au-delà) peuvent être (et ont été pendant longtemps) résolus avec des techniques que les étudiants possèdent déjà - au moins en partie. Ainsi aucun de ces problèmes ne peut réellement motiver - justifier - l'introduction d'une théorie axiomatique, aussi coûteuse en termes cognitifs. L'analyse historique montre bien d'ailleurs les résistances que les mathématiciens ont eu à utiliser l'approche axiomatique dans l'étude des équations fonctionnelles. Ils ont préféré en grande majorité, au moins jusqu'au travail de Banach en 1932, résoudre des systèmes infinis d'équations linéaires, parce que les outils à l'œuvre étaient connus et bien rodés. L'analyse des raisons qui ont conduit à l'adoption tardive du point de vue axiomatique met en évidence plusieurs facteurs concomitants, que nous présentons ci-dessous de façon succincte (pour plus de détails voir [3]).

- Dans la fin du 19e siècle, les notations vectorielles s'imposent en physique. Après une période de conflit entre les défenseurs des quaternions d'Hamilton et les partisans des concepts de la théorie de Grassmann (en particulier autour des formules de Maxwell pour lesquels une

[15] Nous ne donnons pas en général les références bibliographiques des textes historiques que nous évoquons, pour ne pas alourdir notre présentation. Le lecteur les trouvera dans nos différents articles à caractère historique (documents 1 à 6 et 13).

notation synthétique s'imposait), un consensus s'établit autour de notations vectorielles stables que physiciens et mathématiciens s'attachent à dégager (Reich, 1996). Le travail de Burali-Forti et Marcolongo pour unifier les notations vectorielles et diffuser leur usage est caractéristique de cette tendance. De plus, les travaux ces deux italiens (l'un étant mathématicien l'autre physicien), mais aussi celui de Weyl par exemple, ont permis de diffuser les premières approches de la géométrie basée sur une axiomatisation en termes d'espace affine euclidien.

- Au début du 20e siècle, les travaux d'algèbre - essentiellement en Allemagne - conduisent à dégager l'importance des structures algébriques définies axiomatiquement. La structure d'espace vectoriel n'apparaît d'abord pas en tant que telle, alors que les concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire sont étudiés à propos des extensions de corps. La première publication en 1930-31 de la *Moderne Algebra* de van der Waerden marque le tournant décisif dans l'organisation de la nouvelle algèbre. Dès la deuxième édition, la théorie des espaces vectoriels s'intègre dans un chapitre traitant des modules sur un anneau.

- En analyse fonctionnelle (dénomination récente), les mathématiciens de la fin du 19e siècle ont d'abord généralisé la théorie des déterminants à la dimension infinie. Puis, les tentatives de généralisation de la résolution de l'équation de Fredholm ont conduit à introduire de nouveaux ensembles de fonctions et ainsi à dégager peu à peu le concept d'espace fonctionnel. Cette abstraction a d'abord porté essentiellement sur les propriétés topologiques, puis l'introduction du langage géométrique, liée à l'importance des notions topologiques (distance, norme, orthogonalité), a mis en avant l'intérêt d'une approche synthétique des espaces fonctionnels. C'est une des raisons essentielles qui a conduit à l'explicitation de la structure algébrique de ces espaces. Banach avec son traité de 1932 a finalement imposé l'approche axiomatique. Dans l'introduction de ce livre, l'auteur justifie l'intérêt de l'approche adoptée par le gain que son aspect unificateur apporte : établir des théorèmes dans un cadre général, puis les spécifier pour chaque ensemble de fonctions vérifiant les quelques axiomes posés au départ. Par ailleurs, Banach résout des problèmes nouveaux qui n'auraient pu être abordés dans le cadre analytique.

- L'importance des espaces de Hilbert, en analyse fonctionnelle, mais aussi en physique quantique, a conduit à l'élaboration de la théorie axiomatique des espaces vectoriels euclidiens et hermitiens. Ce sont avant tout les espaces de dimension infinie qui sont visés, mais du même coup, les mathématiciens prennent l'habitude d'aborder la dimension finie avec le point de vue axiomatique.[16]

3. Notre lecture épistémologique : le caractère unificateur et généralisateur de la théorie des espaces vectoriels

[16] Il est intéressant de noter au passage que les présentations axiomatiques des espaces vectoriels euclidiens (ou hermitiens) de dimension finie de cette période ressemblent beaucoup à l'enseignement de la théorie des espaces vectoriels de première année de DEUG en France.

On voit donc que l'approche axiomatique ne s'est pas imposée essentiellement parce qu'elle a permis d'aborder et de résoudre de nouveaux problèmes ; même si c'était déjà le cas pour Banach, ce fait a plutôt été un effet du développement de l'approche axiomatique qu'une des causes de celui-ci. L'approche axiomatique, qui existait potentiellement depuis 1888, est restée pendant quarante ans à l'état de tentatives individuelles de "modernisation" avortée. Elle impliquait une refonte profonde des pratiques de recherche, remettant en cause la façon d'aborder les problèmes qu'elle se proposait de résoudre. De plus, son adoption nécessitait un investissement "gratuit" dans un système de pensée, dont on ne pouvait recueillir les fruits que de façon différée. De fait, beaucoup ont préféré continuer à généraliser les outils à l'œuvre depuis des décennies. En effet, même si certaines généralisations devenaient très techniques, l'usage d'outils bien connus permettait une prise directe sur la réalité du problème à résoudre qu'une théorie axiomatique nouvelle interdisait. Dans le début des années trente, la situation a évolué plus favorablement. L'approche synthétique par le calcul vectoriel du monde géométrique a montré ses avantages par rapport à la méthode analytique héritée de Descartes. L'introduction du langage géométrique en analyse fonctionnelle déplace ce débat en dimension infinie favorisant ainsi l'abandon de la représentation analytique pour une approche traitant la fonction comme un objet indépendant de ses représentations. Ce moment de l'évolution des problèmes linéaires est essentiel pour la question qui nous occupe. En effet, autour de l'équation de Fredholm convergent au début du 20^{e} siècle les approches issues de trois des origines essentielles de l'algèbre linéaire : géométrique, analytique (résolution des équations), et fonctionnelle. De plus, la théorie des déterminants généralisée, enrichie d'outils topologiques de plus en plus sophistiqués, a permis de résoudre l'équation de Fredholm dans des cas de plus en plus complexes, mais les limites se font sentir. Par exemple des liens apparaissent entre les opérateurs fonctionnels et les formes quadratiques sans qu'on puisse vraiment faire ressortir de traits communs. Dans ce contexte, l'approche axiomatique va pouvoir enfin s'imposer parce qu'elle permet d'unifier divers problèmes aux origines variées dont les ressemblances commencent à apparaître et parce qu'elle permet aussi de combler les manques dans le processus de généralisation. De plus, l'analogie géométrique, à présent possible au delà de la dimension trois jusqu'à des dimensions infinies, donne à cette théorie abstraite le support intuitif qui lui manquait jusqu'alors. L'algèbre moderne va alors fournir le cadre nécessaire pour que l'axiomatisation accède du rang d'outil à celui d'objet (Douady 1986) et se fonde en une véritable théorie dont le pouvoir unificateur ne cessera de s'étendre, alors que les nouvelles applications permettront de continuer le développement de l'outil.

Ainsi l'analyse historique montre la complexité épistémologique liée à l'adoption de la théorie axiomatique des espaces vectoriels comme cadre de référence pour le traitement des problèmes linéaire. Le résumé que nous en avons fait ci-dessus permet de se faire une idée de ce que nous appellerons, en reprenant une dénomination de Robert (1986), déjà en germe dans le travail de Robinet (1984), les caractères unificateur, généralisateur, simplificateur et formalisateur de cette théorie. La simplification est un effet différé qui suppose une bonne connaissance de la théorie. Le formalisme est, quant à lui, intrinsèque à la théorie même et apparaît comme une condition nécessaire des aspects unificateur et généralisateur. Pour englober des situations aussi variées sous une même théorie, il est nécessaire d'atteindre un degré d'abstraction qui ne peut s'exprimer qu'en des termes formels où les objets ne sont définis qu'en fonction d'un petit nombre de propriétés communes, les dépouillant de leurs caractères spécifiques pour ne garder que ce qui les réunit, leurs propriétés linéaires précisément.

Les conditions décrites ci-dessus laissent entrevoir la difficulté didactique. Comment rendre compte de cette dimension épistémologique de l'algèbre linéaire dans son enseignement ?

4. Conséquences didactiques

Deux des principaux outils théoriques dont dispose le didacticien pour fonder l'élaboration d'une ingénierie sont : "la théorie des situations" de Brousseau (1986) et la "dialectique outil / objet" de Douady (1986). Or ces deux approches ont en commun de déboucher sur une situation didactique faisant apparaître l'objet d'enseignement comme un outil efficace pour résoudre un problème accessible aux étudiants.

Au premier abord, les caractères unificateur et généralisateur de la théorie des espaces vectoriels ne s'adaptent pas facilement à ce type d'approche. Comment en effet montrer sur un seul problème, voire même plusieurs, l'intérêt d'une telle théorie qui est justement de permettre d'en unifier plusieurs en favorisant des généralisations ? Cette difficulté a été examinée dès le début de nos recherches, dans la lignée des travaux de Robert et Robinet et en rapport avec les difficultés didactiques que nous évoquions au §1 de ce chapitre. Nous avons d'abord expérimenté différentes ingénieries (basées sur les carrés magiques, ou les suites de Fibonacci [9, 178-179]). L'analyse a posteriori de nos expérimentations a montré que ces ingénieries ne répondaient pas à nos attentes. Nous avons donc cherché de nouvelles possibilités en nous basant sur l'analyse épistémologique, que nous avons été amené à affiner.

C'est dans ce processus dialectique de la réflexion épistémologique entre analyse historique et analyse didactique, que s'est constituée notre approche basée sur la notion de *levier méta.* Cette notion avait été introduite par Robert et Robinet (1993 et 1996), nous l'avons précisé dans le cadre spécifique de notre approche. Le mot *levier* se rapporte à l'idée d'introduire à un moment bien choisi de l'apprentissage un élément permettant aux étudiants de mieux comprendre la nature épistémologique de l'algèbre linéaire. Le préfixe substantivé *méta* signifie que ce levier favorise une réflexion *sur* l'activité mathématique propre.

La seule résolution d'un ou même de plusieurs problèmes mathématiques ne permettant de faire comprendre à elle seule les caractères unificateur et généralisateur de la théorie des espaces vectoriels, nous avons construit des situations faisant intervenir, en liaison avec un problème mathématique, un élément provoquant chez les étudiants une réflexion sur un aspect du problème ou de sa résolution (c'est cet élément qui constitue le levier méta). L'interaction du problème mathématique et du levier méta vise à déclencher, dans un contexte que l'élève s'est approprié, une réflexion sur l'apport de la théorie des espaces vectoriels en termes d'unification, de généralisation et de simplification. Autrement dit, ce type d'activité de niveau *méta* vise à faire faire un pas de côté pour que les étudiants s'interrogent sur la fonctionnalité d'une théorie qui a des caractéristiques épistémologiques nouvelles par rapport à ce qu'ils connaissent déjà en mathématiques.[17]

Nous avons déjà expliqué comment ce type d'activité s'est imposée à nous en interaction avec nos recherches historiques. Cette interaction est d'autant plus utile pour la construction de ces activités. Il ne s'agit pourtant pas ici seulement d'introduire un discours de l'enseignant présentant les grandes lignes du développement historique aux étudiants. Croire que ce seul fait aurait pour effet de faire comprendre aux étudiants la nature de l'algèbre linéaire relève de la même illusion que celle qui consiste à croire qu'il suffit de faire de belles mathématiques devant un public assidu pour que celui-ci atteigne le même niveau de compétence par simple osmose. Il est essentiel au contraire que la réflexion méta s'articule sur un contexte mathématique précis, que l'étudiant a pu s'approprier dans un premier temps de l'activité et qu'il pourra réutiliser. Une réflexion trop générale guidée par un discours de l'enseignant ne pourrait avoir un effet aussi durable et un impact aussi fort, l'étudiant doit pouvoir mener sa propre réflexion à un niveau qui lui est accessible. Il s'agit bien de créer, en interaction avec un problème mathématique, les conditions favorables à la dévolution aux étudiants d'une réflexion *méta* sur la nature épistémologique de l'algèbre linéaire, qui s'appliquera à la résolution de ce problème. Un discours de l'enseignant peut venir en support à une telle activité, mais celle-ci doit avant tout engager les étudiants dans un chemin personnel s'appuyant sur des pratiques précises de mathématiques.

Nos recherches ont permis de mettre au point un certain nombre de séquences ([8], [9] et [13, II-4]) qui s'insèrent dans le projet long expérimenté à Lille ((Rogalski 1991, 1994 et 1995) et [13, II:3]).

Du point de vue de la méthodologie didactique, une difficulté essentielle consiste à évaluer les effets de telles séquences. En effet, ceux-ci ne peuvent être que différés ; de plus, il est très difficile de recueillir des indices de la réflexion méta des étudiants. Quant aux effets que ce type de réflexion peut avoir sur l'apprentissage du contenu mathématique, il est difficile (voire impossible) d'en discerner la source tant l'utilisation du levier méta s'insère dans un processus plus complexe où d'autres causes pourraient tout aussi bien produire les mêmes effets. Par sa

[17] Cette approche ne s'oppose pas a priori à la théorie des situations, dont nous avons d'ailleurs utilisé quelques éléments dans nos analyses. Cependant les éléments qui ont conduit à l'élaboration de telles activités sont en partie extérieurs à cette théorie. Le travail d'analyse des activités méta dans le paradigme de la théorie des situations reste à en grande partie à faire.

nature même le levier méta n'a d'ailleurs jamais vocation d'être le seul élément visant à produire un certain apprentissage. De plus, l'utilisation du levier méta ne relève pas d'une micro ingénierie, c'est une composante récurrente d'un dispositif complexe qui porte sur un enseignement à long terme englobant d'autres éléments avec lesquels elle rentre en interaction. Les difficultés méthodologiques spécifiques aux projets longs ont été étudiées dans (Robert 1990 et 1992), [10] et [11].

Nous ne développerons pas plus ce point dans cette note de synthèse et renvoyons le lecteur aux documents du dossier pour une étude plus fine et des exemples de telles activités.

III. SUR LES LIENS ENTRE LA GEOMETRIE ET L'ALGEBRE LINEAIRE

Que ce soit dans l'enseignement ou dans l'histoire, l'algèbre linéaire a toujours entretenu des liens privilégiés avec la géométrie. Il est donc tout à fait nécessaire d'examiner les deux aspects de ces liens dans l'histoire et dans l'enseignement. Nous ne reprendrons pas ici en détail l'analyse historique de la genèse du savoir savant (voir essentiellement [13, I-1-§2 et 3]). Nous allons nous attacher dans un premier temps à faire une analyse de la transposition didactique, afin de mieux comprendre la nature du lien entre l'algèbre linéaire et la géométrie dans le fonctionnement du savoir enseigné et ses rapports avec le fonctionnement du savoir savant. Cette première étape nous permettra d'avoir une analyse plus documentée des difficultés que les étudiants rencontrent dans l'utilisation du cadre géométrique en algèbre linéaire et que notre travail nous a permis de mettre à jour. Puis nous ferons quelques hypothèses sur la fonctionnalité du cadre géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire en nous appuyant sur les résultats des deux paragraphes qui auront précédé, mais aussi sur l'ensemble de nos travaux et en particulier en liaison avec l'expérimentation de Lille. Enfin, nous proposerons, en annexe[18], quelques réflexions sur l'enseignement du vecteur dans l'enseignement secondaire, qui s'appuient sur notre analyse historique, sur l'analyse de la transposition didactique présentée ici et sur les résultats de quelques travaux, dont une thèse en cours que nous co-dirigeons.

1. Analyse de la transposition didactique

a - Première phase 1939-1954

Dans notre analyse des débuts de l'enseignement de la théorie des espaces vectoriels en France [13, I-2-§3], nous avons montré que ceux-ci sont intervenus entre 1939 et 1954 dans le

[18] Nous plaçons ces réflexions en annexe, d'une part parce qu'elles sortent du cadre de notre travail sur l'algèbre linéaire, même si elles ont des liens avec celui-ci et, d'autre part, parce que ce ne sont, pour l'instant, que des pistes de recherche, qui demandent à être exploitées plus en détail (nous venons d'engager un étudiant en thèse dans cette voie).

cours de Calcul Différentiel et Intégral (cours principal de mathématiques de la licence de science) et dans des cours de mathématiques pour la physique (tout particulièrement les bases mathématiques pour la mécanique quantique). A notre connaissance, Henri Cartan est le premier à avoir introduit une présentation axiomatique des structures algébriques (donc des espaces vectoriels) dans son cours de CDI en 1939-40 à l'université de Strasbourg repliée à Clermont-Ferrand.[19] D'autres jeunes mathématiciens (dont la plupart seront à l'origine de Bourbaki) prendront comme Cartan l'initiative d'introduire les structures algébriques dans le cours de CDI dans quelques universités de province.[20] Finalement, en 1954, Georges Valiron étant tombé malade, Gustave Choquet est désigné pour reprendre le cours de CDI à Paris, il introduit l'enseignement des structures algébriques sous l'angle axiomatique et rapidement l'exemple est suivi dans celles des universités de province qui n'avaient pas encore pris les devants. Par ailleurs, André Lichnérovicz publie en 1947 *Algèbre et Analyse Linéaires.* Ce livre présente les bases mathématiques pour la physique et servira de modèle pour les cours du certificat de mathématiques pour la physique, dont la création est due à Lichnérovicz lui-même. Le livre s'ouvre sur une présentation axiomatique de la structure d'espace vectoriel. Que ce soit dans le cours de CDI ou dans le certificat de mathématiques pour la physique, la référence au savoir savant concerne les derniers développements de l'analyse fonctionnelle et plus particulièrement l'espace de Hilbert. Dans ce contexte, le rapport de la théorie des espaces vectoriels à la géométrie est bien spécifique : l'espace de Hilbert se présente dans une étape finale comme une généralisation à la dimension infinie de l'espace euclidien défini de façon axiomatique. De plus, l'importance du problème des valeurs propres pour la résolution des équations fonctionnelles fait de la question de la réduction des opérateurs et des formes bilinéaires - en particulier symétriques - le but essentiel de ce type de présentation. Par ailleurs, la plupart des auteurs de ces cours, souvent liés à Bourbaki, avaient été très marqués par les livres de Banach et de van der Waerden.[21] Or ces deux livres ont en commun de déclarer a priori les vertus d'une approche axiomatique. De plus, ce sont des livres de synthèse qui ont pour but de présenter un ensemble de résultats, jusqu'alors épars, d'un point de vue unifié et formel. Enfin aucun de ces deux livres ne rend compte des origines analytiques de la théorie. On retrouve ainsi trois caractéristiques essentielles de l'approche bourbakiste de l'algèbre linéaire : approche axiomatique, importance des structures mères, effacement de l'origine analytique.

---

[19] Nous disposons d'une copie des notes manuscrites datées du cours de Cartan (aimablement fournies par Liliane Beaulieu qui les tient de Cartan lui-même). De plus, dans un entretien que nous avons eu avec lui, il nous a confirmé qu'il pense être le premier en France à avoir fait ce type d'enseignement. Nous n'avons par ailleurs, malgré des recherches diverses, jamais trouvé de traces d'un enseignement plus ancien.

[20] On pourra consulter à ce sujet l'article de Revuz (La prise de conscience bourbakiste, 1930-1960, in Belhoste et al. (eds) (1996), pp. 69-76) qui montre l'origine du projet de Bourbaki dans la volonté de réforme du cours de CDI.

[21] Henri Cartan nous a confirmé que les Bourbaki avaient découvert les espaces vectoriels dans ces deux livres *Moderne Algebra* de van der Waerden, dont la première édition paraît en 1930/31 et *Théorie des opérateurs linéaires* de Banach, paru en 1932.

De fait, dès les débuts de l'enseignement de la théorie des espaces vectoriels, le long passé analytique lié à la théorie des déterminants, dont on a vu l'importance dans la genèse historique [13, I-1] est largement minoré. La résolution des systèmes est repoussée en fin de parcours comme une application de la théorie des déterminants, qui reçoit elle une légitimité théorique à travers l'étude des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n. Par contre, le rapport à la géométrie se retrouve sur le devant de la scène, via le récent développement de l'analyse fonctionnelle. Cependant, ce lien dépasse largement la seule application du calcul vectoriel à la géométrie en dimension deux ou trois. Or l'analyse historique montre bien que le cadre des équations linéaires a joué historiquement un rôle très important dans le développement des concepts linéaires, en particulier pour des concepts fondamentaux comme la dépendance linéaire ou le rang [13, I-1-§1]. A contrario, le cadre géométrique, s'il a été fondamental pour le développement du calcul vectoriel, n'a que peu joué dans le développement des concepts de la théorie des espaces vectoriels. Nous avons d'ailleurs montré qu'à l'exception notable de Grassmann, les généralisations directement issues de la géométrie n'ont pas permis de dégager le concept de dimension de façon satisfaisante parce qu'elles ne prenaient pas suffisamment en compte la notion de générateur ([5, 183-186], [6, 20-24] et [13, I-2-§1]). Donc, si le cadre géométrique a joué un rôle essentiel dans la genèse de l'algèbre linéaire, il ne peut se substituer au cadre des équations linéaires pour une part essentielle du développement des concepts élémentaires de la théorie. Ainsi le processus de transposition didactique à l'œuvre entre 1940 et 1960 a pour conséquence un décalage assez net entre savoir savant et savoir enseigné. Néanmoins dans le contexte du cours de CDI ou du certificat de mathématiques pour la physique, où l'algèbre linéaire prend sens essentiellement à travers l'analyse fonctionnelle, et dans l'étude des espaces de Hilbert, ce décalage reste encore assez limité même s'il ne prend en compte explicitement qu'une partie assez restreinte du développement historique.

La nature du décalage va être toute autre dans la deuxième phase de la transposition didactique, qui va aboutir, dans le cadre de la réforme des mathématiques modernes à l'introduction de la théorie des espaces vectoriels dans l'enseignement secondaire.

b - Deuxième phase 1954 - 1981

i - Premiers cycles universitaires

Assez rapidement, l'enseignement de la théorie des espaces vectoriels s'est retrouvé avancé en première année d'université (dans les classes préparatoires, ce changement est officiel à partir de 1956, même s'il faut encore quelques années pour que le changement soit effectif dans les mentalités). Il s'est donc écoulé très peu de temps, si l'on pense que la généralisation de l'enseignement de la théorie des espaces vectoriels dans le cours de CDI ne date que de 1954. Ce fait peut s'expliquer par la raison suivante. La diffusion de la théorie des espaces vectoriels au niveau licence s'accompagnait de la conviction que l'entrée par les structures était le bon point de vue pour aborder la résolution des problèmes mathématiques (ou modélisables par les mathématiques). De nombreux mathématiciens de l'époque se sont exprimés sur ce point, par exemple Lichnérovicz : "En traitant des problèmes concrets, apparemment fort éloignés les uns des autres, les mathématiciens et les physiciens constatent souvent qu'ils sont ramenés à des calculs linéaires formellement identiques. Une notion importante va nous aider à comprendre les raisons de ce phénomène : la notion d'espace vectoriel" (op. cité, 7), ou encore Bourbaki : " Les "structures" sont des *outils* pour le mathématicien : une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure d'un type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attaque dont la puissance dépendait de son talent personnel […]." (Bourbaki 1948, 40). Ainsi dans la sphère des enseignants d'université, la structure algébrique gagne ses lettres de noblesse.

Or, dans l'enseignement de première année d'université et des classes préparatoires, on enseignait en 1954, pour les besoins essentiellement de la mécanique, le vecteur de l'espace géométrique. Celui-ci était essentiellement introduit de façon descriptive par ses propriétés géométriques comme segment orienté. D'ailleurs, dans ce type de présentation, il n'y avait pas qu'une sorte de vecteurs, on distinguait en accord avec les concepts de physique : le vecteur lié (origine fixe, point d'appui d'une force), libre (celui des mathématiques défini par la relation d'équipollence entre vecteurs liés), glissant (support fixe), axial (produit vectoriel, donc dont le signe dépend de l'orientation de l'espace), sans parler des champs de vecteurs. Par ailleurs, on enseignait aussi les fonctions de plusieurs variables et donc la géométrie de l'espace $\mathbb{R}^n$.

L'adhésion au bien fondé du point de vue des structures algébriques exigeait donc une réorganisation des savoirs mathématiques enseignés à l'université. L'enseignement de la théorie des espaces vectoriels devait apparaître en début de cycle. Cette transformation dans l'organisation des savoirs modifia d'autant la nature de l'algèbre linéaire en tant que savoir enseigné, l'éloignant encore plus de son origine savante. Dans cette étape du processus de transposition didactique, l'aspect structurel se trouvait valorisé et l'aspect analytique apparaissait comme une application, alors que le modèle du calcul vectoriel dans l'espace géométrique s'imposait comme entrée naturelle dans la théorie.

ii - La géométrie du lycée[22]

A partir des années 60, les acteurs de la noosphère vont s'interroger sur la cohésion entre les enseignements de mathématiques à l'université et dans le secondaire. Cette phase va donner lieu

[22] En complément de notre présentation, on pourra consulter l'article de Bkouche (La place de la géométrie dans l'enseignement mathématique en France : de la réforme de 1902 à la réforme des mathématiques modernes, in Belhoste et al. (eds) (1996), pp. 121-138).

à de vifs débats, où tous pourtant s'accordent sur la nécessité et l'urgence de rénover l'enseignement des mathématiques du lycée et tout particulièrement celui de la géométrie. Dans ce contexte, l'introduction de l'enseignement de l'algèbre linéaire va se trouver au centre des discussions. On peut résumer schématiquement les diverses tendances à travers l'analyse de trois livres parus dans l'intervalle de deux ans : le deuxième volume des *cours de l'APMEP sur l'algèbre linéaire* par André et Germaine Revuz paru en 1963, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* de Jean Dieudonné et *L'enseignement de la géométrie* de Gustave Choquet, tous deux parus en 1964, dans la collection *enseignement des sciences* (Hermann). Ces trois livres sont typiquement des produits issus de la noosphère. En effet, ce ne sont ni des traités destinés à la sphère savante ni des livres d'enseignement (les auteurs l'annoncent clairement en introduction). Dans les cas de A et G. Revuz et de Choquet, ces livres sont l'aboutissement de conférences de vulgarisation, pour le premier à destination des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire de la région parisienne, pour le second au séminaire de pédagogie mathématique de l'E.N.S. de Saint-Cloud (reproduites dans le bulletin de l'APMEP de décembre 1960).

Quand à Dieudonné, il annonce en introduction :

"Le fait qu'à l'heure présente il n'y a sans doute pas un bachelier sur mille qui serait en état de lire ce livre sans aide et sans fournir un travail personnel considérable en dit long sur l'incohérence de nos programmes d'enseignement. Il y a déjà plusieurs années que l'on s'est inquiété un peu partout du divorce grandissant entre les méthodes et l'esprit de l'enseignement des mathématiques, dans les lycées d'une part, dans les universités de l'autre. Ayant participé à plusieurs discussions sur ce problème, j'ai pu me convaincre que, même parmi les professeurs de l'Enseignement secondaire les plus conscients de la nécessité d'une réforme, il subsiste une grande incertitude sur la teneur de ce que devraient être les programmes nouveaux et sur leur articulation, tant interne qu'en relation avec l'Enseignement supérieur. C'est donc en fait à eux que ce livre est avant tout destiné ; je l'ai conçu comme un "*livre du maître*", en d'autres termes une ossature solide sur laquelle bâtir un enseignement oral, vivant, et adapté aux élèves qui doivent le recevoir." (op. cité, 7).

Ainsi dans une introduction de plus de dix pages, il se lance dans un plaidoyer pour la rénovation de l'enseignement secondaire des mathématiques, qui se doit d'intégrer des progrès datant de parfois plus d'un siècle qui permettent de mieux penser et plus vite. Et pour montrer le fondement épistémologique de son point de vue, il termine en se défendant d'avoir quelque intérêt personnel dans la question.

A priori, les Revuz ne prennent pas position pour l'introduction de la théorie des espaces vectoriels dans l'enseignement secondaire, leur but est seulement de former les enseignants du secondaire, dont ils estiment qu'il serait bon qu'ils connaissent ce que leurs élèves apprendront plus tard à l'université. Mais a posteriori ce cours, tout en permettant la formation des enseignants du secondaire, servira de base pour le schéma des programmes de la réforme des mathématiques modernes.

Choquet s'intéresse lui spécifiquement à l'enseignement de la géométrie. S'il se réfère à la "voie royale"[23] du mathématicien qui définit l'espace géométrique comme un espace affine euclidien de dimension trois, il pense que l'on ne peut pas "parachuter" sans précautions ces notions trop abstraites à un enfant de moins de 17 ans. Il propose alors une axiomatique de la géométrie qui repose sur les notions plus intuitives de structure additive, de parallélisme et de symétrie, tout en permettant d'accéder plus rapidement, dans une seconde étape, à la structure d'espace affine euclidien.

Dieudonné dit d'emblée qu'il faut aborder la géométrie par la structure affine euclidienne. Ce qu'il justifie par le raisonnement suivant - que nous résumons - : il ne faut enseigner dans le secondaire que ce qui prépare à l'enseignement supérieur (tout en se gardant de faire un enseignement élitiste réservé aux futurs mathématiciens). Ainsi il faut préparer les élèves à l'algèbre linéaire qui est à la base de la plupart des notions enseignées en propédeutique. "D'autre part, j'ai cherché à résister à la tentation d'introduire *prématurément* les théories qui seront enseignées à l'Université. Il me semble que la nature nous a heureusement fourni "une ligne de démarcation" toute tracée, en nous douant de l'intuition géométrique pour les espaces à 2 et 3 dimensions ; il est donc possible de représenter graphiquement *tous* les phénomènes de l'Algèbre linéaire limités à ces deux dimensions (et bien entendu aux scalaires *réels*)." (Dieudonné 1964, 14). Donc l'intérêt de la géométrie dans l'enseignement secondaire tient en ce qu'elle représente un "merveilleux laboratoire où se familiariser avec des cas particuliers d'aspect fort simple et susceptibles d'images concrètes, de notions dont l'essence est beaucoup plus générale mais aussi beaucoup plus abstraite, et qu'il faudra assimiler sous cette forme générale plus tard." (ibid., 14).

Au passage, Dieudonné épingle Choquet en affirmant qu'il est "tout à fait opposé [au fait que], sous prétexte que le système d'axiomes de l'Algèbre linéaire est "trop abstrait", on [veuille], avant de l'introduire, partir d'un autre système d'axiomes, réputé plus accessible, et en *déduire* ensuite les axiomes de l'Algèbre linéaire." (ibid., 17).

Choquet et Dieudonné s'affrontent par livres interposés sur la question, centrale dans la réforme des mathématiques modernes, du renouvellement de l'enseignement de la géométrie. Néanmoins, malgré leurs divergences, tous deux reconnaissent la suprématie de la structure affine euclidienne de l'espace géométrique. On sait que finalement c'est le point de vue de Dieudonné qui l'a emporté, sans doute par continuité avec ce qui s'était fait dans le supérieur.

Les résultats élémentaires de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie furent introduits dans les programmes du lycée dès la classe de seconde en 1969. Implicitement ou

[23] Le mot est de Choquet, comme "parachuter" qui suit.

explicitement, et même en partie contre son gré pour Choquet, les trois auteurs précédents[24] avaient déjà fixé le cadre de cette nouvelle transposition de l'algèbre linéaire, sans que ce soit forcément eux qui aient pris la décision politique. La structure d'espace vectoriel devenait un objet d'étude à part entière et les livres de Revuz et de Dieudonné, eux-mêmes inspirés de l'approche bourbakiste mais apprêtés pour être accessibles au public des enseignants du secondaire donnaient la trame du texte du savoir à enseigner. Mais ce nouvel élément de savoir devait trouver sa place dans l'organisation et le fonctionnement du savoir enseigné, en particulier dans ses relations aux savoirs enseignés dans les classes antérieures. C'est tout naturellement par rapport à la géométrie qu'il va pouvoir se situer, réalisant du même coup la rénovation tant désirée de l'enseignement de cette discipline à la faveur du point de vue de Dieudonné. L'attachement des premiers enseignements aux espaces de Hilbert avaient disparu. Néanmoins dans l'organisation globale des programmes, l'enseignement des espaces de Hilbert en Licence offrait une continuité parfaite permettant l'élargissement à la dimension infinie, ce qui permettait (d'autant mieux) d'illustrer leur interprétation géométrique (Dieudonné n'ignorait bien sûr pas ce fait).

iii - Qu'advient-il des systèmes d'équations linéaires ?

L'origine historique des concepts d'algèbre linéaire dans l'étude des systèmes d'équations linéaires se trouvait entièrement gommée du savoir enseigné.[25] Celle-ci n'apparaissait plus que comme une application de la nouvelle théorie rejetée en fin de programme. L'étude était quasiment réduite au cas des systèmes dit de Cramer et apparaissait essentiellement comme une application des déterminants, eux-mêmes appendice de l'étude des applications multilinéaires.

Ce qui précède nous a permis de suivre, depuis les premiers enseignements d'algèbre linéaire, la chronique de cette disparition annoncée des systèmes linéaires comme cadre d'introduction de l'algèbre linéaire. Une raison encore plus profonde peut toutefois être invoquée pour montrer qu'une transposition didactique de l'algèbre linéaire favorisant l'entrée par les systèmes d'équations linéaires était très improbable. En effet, l'étude des systèmes d'équations linéaires ne pouvait constituer l'entrée dans l'algèbre linéaire qu'à la condition qu'un savoir plus ancien sur ces systèmes eut existé auparavant. Or s'il était de longue date de coutume d'enseigner assez tôt la résolution des systèmes d'équations linéaires (au moins en deux ou trois équations et inconnues), ni la notion d'équation, ni celle de n-uplet (sa solution), n'ont jamais eu dans l'enseignement (au moins avant l'université) le statut d'objet

[24] Nous ne prétendons pas ici avoir fait le tour de toutes les productions de la noosphère sur la question, mais ces trois ouvrages nous semblent assez représentatifs de l'ensemble pour notre propos. Une étude exhaustive de la transposition reste à faire.

[25] Il est d'ailleurs intéressant de noter que l'importance de l'étude des systèmes d'équations linéaires dans la constitution de l'algèbre linéaire (telle que nous avons pu la dégager) est très largement minorée dans *l'abrégé d'histoire des mathématiques*, ainsi que dans les *notes historiques* de Bourbaki, deux travaux dont la rédaction a été supervisée par Dieudonné.

mathématique. L'enseignant, les manuels et les élèves les utilisent, mais jamais ils ne sont définis, ce sont donc des objets *paramathématiques* (Chevallard, 49-56). Ainsi une entrée dans l'algèbre par les systèmes d'équations linéaires aurait-elle nécessité la mise en place d'une phase de transformation des systèmes d'équations linéaires d'outils de résolution en objet d'étude, ce qui était improbable (voire impossible) dans l'esprit des programmes des années soixante, qui favorisaient une approche descendante, où les systèmes d'équations linéaires se trouvaient au bas de la pyramide.[26]

iv - Le vecteur au collège et en physique

Dans cette organisation du haut vers le bas, il restait à harmoniser l'introduction du vecteur au collège avec la suite de l'enseignement de l'algèbre linéaire. Dans l'esprit unificateur et simplificateur qui avait régi les phases précédentes, le bestiaire des différents types de vecteurs physiques que nous avons évoqués plus haut faisait mauvais genre ; une opération de ménage s'imposait. Or tous ces types de vecteurs (lié, libre[27], glissant, polaire, axial, etc.) peuvent recevoir une définition "rigoureuse" en termes d'algèbre linéaire comme sous catégorie du vecteur géométrique des mathématiques (l'ancien vecteur libre). Dans le respect des mathématiques modernes, le vecteur géométrique fut donc introduit dès la classe de quatrième comme classe d'équivalence de bipoints pour la relation d'équipollence. L'étude des propriétés algébriques était dirigée pour faire apparaître, sans le dire, la structure d'espace vectoriel sous-jacente à l'espace géométrique (en commençant par la droite, puis le plan). Du même coup ce nouveau formalisme permettait de renouveler la formulation des théorèmes classiques de géométrie du collège (tel le théorème de Thalès[28]) ainsi que l'étude des transformations, en particulier la translation (groupe isomorphe à l'espace vectoriel) et l'homothétie. A charge ensuite aux physiciens, de s'adapter ou non à ce modèle mathématique, dans l'enseignement des grandeurs physiques vectorielles.

v - Essai de synthèse

Dans son ensemble, le processus de transposition didactique de l'algèbre linéaire à l'œuvre jusqu'à la réforme des mathématiques modernes répond à une organisation descendante, qui

[26] Nous verrons que depuis, avec l'enseignement de la méthode du pivot de Gauss, cette solution est envisageable. Nous montrerons d'ailleurs comment on a pu la réaliser dans les expérimentations de notre équipe.

[27] Ces deux mots étaient à bannir pour risque de confusion avec les notions de familles libre et liée.

[28] Dans la configuration habituelle du thèorème de Thalès l'égalité du rapport des longueurs peut-être remplacée par la formulation vectorielle : si $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{A'C'} = k\,\overrightarrow{A'B'}$. Mais surtout la réciproque du théorème, dans le cas où A = A', devient immédiate. En effet, si la proposition précédente est vraie, alors $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = k\,\overrightarrow{BA} + k\,\overrightarrow{AB'} = k\,\overrightarrow{BB'}$, donc (CC') est parallèle à (AA'). Dans le cas où A et A' sont distincts, il faut rajouter dans l'hypothèse de la "réciproque" du théorème de Thalès, que (AA') est parallèle à (BB'), on obtient alors que $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} + k\,\overrightarrow{BB'}$, d'où on déduit que (CC') est également parallèle à (AA') et (BB').

vise à préparer les bases de l'enseignement universitaire. Le vecteur se retrouve ainsi dans trois lieux différents de l'enseignement[29] : la géométrie du collège, l'algèbre linéaire et la physique. Pour distinguer les trois types de vecteurs ainsi délimités (celui de la physique étant lui-même multiple), nous emploierons les termes de vecteur géométrique[30], vecteur algébrique et vecteurs physiques. Le vecteur algébrique est également multiple, mais les différentes types de vecteurs algébriques (fonctions, polynômes, suites, etc.) ne sont qu'un même objet dans la théorie formelle de l'algèbre linéaire, alors que les différents vecteurs physiques correspondent à des définitions mathématiques distinctes dans cette même théorie : un vecteur lié (ou segment orienté) est un couple formé d'un point (l'origine) et d'un vecteur géométrique, un vecteur glissant est un couple formé d'une droite affine (le support) et d'un vecteur géométrique, un vecteur axial est le produit vectoriel de deux vecteurs géométriques, un champ de vecteurs est une application du plan ou de l'espace affine dans l'espace vectoriel associé.

L'analyse de la transposition qui précède permet également de comprendre les règles d'interaction entre les trois types de vecteur. Cette organisation donne une idée de la distance qui sépare le savoir enseigné du savoir savant. Dans la constitution du savoir savant, le vecteur géométrique n'apparaît pas vraiment en tant que tel, tant sa genèse se confond avec celle des vecteurs physiques, il ne joue en tout cas que très faiblement le rôle de pont avec le vecteur algébrique pour lequel d'autres domaines (les systèmes d'équations linéaires et l'analyse fonctionnelle essentiellement) ont eu des rôles plus importants [13, I]. Ainsi le vecteur géométrique est en grande partie une création didactique qui obéit à des contraintes d'organisation interne au système d'enseignement. Il permet de faire le lien entre les vecteurs physiques et le vecteur algébrique. Précisons toutefois immédiatement que cet état de fait n'a pas a priori de connotation négative, la distance entre le savoir enseigné et le savoir savant est une conséquence inévitable du processus de transposition didactique, nous nous sommes expliqués sur ce point dans le premier chapitre de ce texte.

Par ailleurs, on observe, pour la notion d'espace vectoriel, un phénomène assez proche de ce que Chevallard et Johsua ont pu décrire à propos de la notion de distance (1991, 125-198). En effet le concept d'espace vectoriel n'a vraiment émergé dans le savoir savant qu'en rapport à des questions de dimension infinie en analyse fonctionnelle (et encore au delà des espaces de type Hilbert c'est-à-dire à base dénombrable dense) ; or au niveau du savoir enseigné, ce concept se trouve importé, par le processus de transposition didactique, dans le domaine de la géométrie, donc limité à la dimension trois. Comme dans le cas de la distance, cette importation est une

[29] En reprenant les termes de l'approche écologique des savoirs introduite par Chevallard (cf. l'introduction de (Rajoson 1988)), on pourrait dire qu'il se trouve dans trois habitats écologiques, ce qui rend compte non seulement de la différence de lieu, mais aussi des différences strucurelles de ces lieux, qui font intervenir des rapports distincts avec des savoirs distincts ou identiques.

[30] Nous désignerons par ce terme le vecteur du plan ou de l'espace géométrique défini de façon géométrique (soit par ses caractéristiques de longueur, direction et sens, soit par l'étude des translations), par opposition au vecteur, élément d'un espace vectoriel de dimension deux ou trois, défini axiomatiquement par des propriétés algébriques, qui est lui un exemple du vecteur algébrique.

solution technique au problème idéologique de l'apprentissage de l'abstrait à partir du concret, qui impose une certaine stratégie d'exposition (la citation de Dieudonné donnée en III-1-a-ii est très explicite sur ce point). Ainsi le concept d'espace vectoriel va trouver, dans cette transposition, un mode de fonctionnement très différent de celui qu'il avait pu avoir dans le savoir savant. En reprenant les termes exacts de Chevallard à propos de la notion de distance on peut dire que "l'introduction (de la notion d'espace vectoriel) produit une modification (locale) de la *structure* du système didactique, par le biais d'un changement apporté à la *structure du savoir enseigné* ; ce changement consiste en l'intégration d'un élément structurel emprunté au "savoir savant" (celui des mathématiciens) ; mais l'"isomorphisme" structurel (local) entre savoir savant et savoir enseigné *ne se double pas d'un isomorphisme fonctionnel* : deux éléments structurels isomorphes *assument des fonctions bien différentes*. Cette observation, simple mais fondamentale, ouvre un champ de problèmes nouveaux, celui des caractéristiques de situation de l'élément introduit au sein de l'économie du savoir enseigné." (op. cité, 166).

La remise en cause de la réforme des mathématiques modernes (effective dans les changements de programmes depuis le début des années quatre-vingts) a très largement modifié l'organisation des savoirs enseignés ayant trait aux différents vecteurs, modifiant ainsi la fonction de ce concept dans le savoir enseigné. C'est ce que nous allons examiner à présent.

c - Les années quatre-vingts

A partir du début des années quatre-vingts, on sait que les critiques de la réforme des mathématiques modernes ont conduit à un rejet de cette organisation par le haut.[31] Ce rejet a abouti peu à peu à une disparition totale de la théorie des espaces vectoriels de l'enseignement secondaire, considérée comme une théorie trop formelle et trop abstraite pour des élèves de lycée.[32] De plus, il a été explicitement demandé dans les programmes de ne plus faire allusion à la théorie des espaces vectoriels en géométrie et de ne plus insister sur les aspects algébriques du vecteur géométrique.

L'enseignement actuel de la géométrie (programmes mis en place à partir de 1990) est centré sur l'étude des figures et de l'action des transformations sur ces figures. Les programmes recommandent de n'aborder les transformations sous leur aspect "applications de l'ensemble des points du plan ou de l'espace" qu'à partir de la classe de seconde de façon progressive. L'introduction du vecteur géométrique se fait au niveau de la classe de quatrième, dans le plan seulement, sans que les vecteurs physiques ne soient évoqués en mathématiques. Il est introduit

[31] Cette remise en cause n'est pas nécessairement la preuve que la réforme proposée n'était pas "bonne". Il y a certainement beaucoup de raisons externes à la valeur intrinsèque de cette réforme pour son rejet : les enseignants y étaient certainement insuffisament préparés, de plus certains excès avaient caricaturé les idées de départ, etc. De toutes façons, notre but n'est pas de juger ici telle ou telle réforme.

[32] Commencée avec les programme de la seconde indifférenciée de 1981, cette disparition atteint toutes les classes des lycées avec les programmes de 1985.

"naïvement" (c'est le terme employé dans le programme officiel) par ses caractéristiques de longueur, de direction et de sens, et en relation avec l'étude des actions d'une translation sur les points d'une figure, dans un ordre qui varie selon les auteurs de manuels (voir à ce sujet (Chauvat 1988) et (Bouscasse et al. 1992)). L'addition des vecteurs n'est abordée qu'en troisième, en relation avec la composition des translations. C'est aussi en troisième, que les coordonnées des vecteurs sont introduites, alors que la multiplication par un scalaire est explicitement hors programme. En seconde, les programmes préconisent le passage de la notation $\overrightarrow{AB}$ à la notation **Erreur!**

Ainsi l'enseignement du vecteur géométrique s'étale sur cinq ans et l'enseignement du vecteur algébrique même limité à l'exemple géométrique disparaît de l'enseignement secondaire.

En conséquence, l'enseignement du vecteur algébrique doit être assumé entièrement par l'enseignement supérieur. Traditionnellement, les enseignements universitaires d'algèbre linéaire ont toujours repris la théorie des espaces vectoriels depuis la base, si bien que, du temps des mathématiques modernes, une partie de cet enseignement représentait des révisions et une extension à des exemples pris hors du domaine de la géométrie. Ainsi, dans les années quatre-vingts, la seule modification au niveau supérieur portait-elle (en apparence) sur le statut des deux ou trois premières séances d'algèbre linéaire qui, de révisions légèrement étendues, devenaient les premiers cours d'une théorie nouvelle. Techniquement, le problème paraissait donc pouvoir se régler à moindre frais, sans changer les programmes, tout au plus en prenant un peu plus de temps pour les premières séances. Cependant, il a vite fallu déchanter devant l'ampleur des difficultés rencontrées par les nouveaux bacheliers (non pas qu'avant tout se passât fort bien, mais après un seuil critique d'échecs avait été atteint). Les enseignants se sont alors plaints du manque de pratique de la logique et du langage ensembliste élémentaires (nous en avons parlé plus haut) mais aussi de l'incapacité des étudiants à se représenter géométriquement les nouveaux concepts de l'algèbre linéaire. En fait, notre hypothèse est que, moins que des connaissances sur le vecteur géométrique, ce qui était en cause ici était une absence de pratique de la géométrie analytique, en particulier concernant l'étude des questions d'incidence et de parallélisme de droites et de plans dans l'espace, ainsi que l'étude des transformations affines par la représentation analytique ou matricielle de l'application linéaire associée. Ainsi dans de nombreuses universités, la décision fut prise de rajouter en première année un cours de géométrie analytique comme propédeutique à l'enseignement de la théorie des espaces vectoriels, reproduisant ainsi de façon décalée le schéma des trois niveaux, régissant les interrelations entre vecteur géométrique et vecteur algébrique, tel qu'il s'était imposé avec la réforme des mathématiques modernes.

d - Conclusion

Cette étude de la transposition didactique de la notion de vecteur dans l'enseignement de la géométrie nous conduit à l'hypothèse que l'enseignement de la théorie des espaces vectoriels est resté prisonnier d'un certain rapport à l'enseignement de la géométrie qui ne peut plus obéir qu'à des contraintes internes au système d'enseignement. Dans l'enseignement, le vecteur géométrique est devenu le prototype du vecteur algébrique. D'une part, l'algèbre linéaire est introduite de façon privilégiée par la géométrie, dans une approche visant à généraliser les connaissances sur le vecteur géométrique dans le nouveau cadre formel du vecteur algébrique. D'autre part, la nature algébrique du vecteur géométrique reste entièrement dépendante de la modélisation par les espaces vectoriels. Pendant la réforme des mathématiques modernes, les aspects algébriques du vecteur géométrique se trouvaient valorisés par une introduction précoce du vecteur algébrique; depuis les années quatre-vingts, ces aspects ont été évacués sans être remplacés par une autre approche algébrique. Si bien que, si le rapport entre vecteur géométrique et vecteur algébrique a évolué, il n'a jamais été fondamentalement remis en question. Tout au plus, a-t-on modifié l'ordre de priorité.

Nous analyserons en annexe 1, certains aspects de l'enseignement du vecteur géométrique dans l'enseignement secondaire actuel.

Nous allons maintenant nous intéresser aux difficultés liées à l'usage du cadre géométrique en algèbre linéaire.

2. Analyses de quelques difficultés didactiques

Dès nos premiers travaux, nous avions été amené à nous interroger sur la relation particulière qui lie dans l'enseignement l'algèbre linéaire au cadre géométrique. Nous venons de voir l'origine de ce lien à travers l'étude de la transposition didactique, nous avons pu ainsi mettre en évidence l'écart avec le fonctionnement du savoir savant. Or nos premiers travaux ont montré des difficultés liées à l'approche de l'algèbre linéaire par la géométrie.

En effet, nous avions observé que les étudiants faisaient des erreurs récurrentes liées à la confusion linéaire / affine. Le point est l'objet premier dans l'univers géométrique, ainsi si le concept de segment orienté (autrement dit de vecteur lié à une origine fixe) prend une certaine réalité pour les étudiants, le concept de vecteur géométrique (c'est-à-dire de classe d'équipollence) nécessite une mise à distance de la perception intuitive[33] de l'espace et la reconnaissance d'un autre niveau de conceptualisation de nature plus algébrique (cf. l'article de Robert dans [13,II-2]). Or beaucoup d'étudiants n'ont pas encore réalisé ce saut conceptuel quand ils entrent à l'université. Par exemple, le concept de droite vectorielle n'est pas toujours

[33] Intuitif signifie pour nous "en rapport direct avec les sens". Cela ne veut bien sûr pas dire qu'il n'y a pas de "raisonnement", mais celui-ci reste en prise directe avec ce que les sens donnent à voir, il est une rationalisation immédiate, première. Ainsi, bon nombre de résultats de géométrie élémentaire peuvent être compris sans avoir d'autre conceptualisation du point que la trace de la pointe du crayon sur la feuille, ou le tracé sur le bord d'une règle pour la droite (affine) (c'est ce que nous appellerons des perceptions intuitives).

entièrement acquis. Ainsi il est fréquent que des étudiants, travaillant dans un contexte vectoriel, introduisent des droites parallèles, alors que le parallélisme n'a pas de sens pour des droites vectorielles, ou se résume à l'égalité.

Ainsi, par exemple, dans un test de type vrai/faux (avec demande de justification) que nous avons fait passer en début d'enseignement d'algèbre linéaire à l'université, dans notre thèse (Dorier 1990)[34], il était précisé en en-tête que "droite" signifiait sous-espace vectoriel de dimension 1, et la question suivante était posée :

Soient D_1, D_2 *et* D_3 *trois droites de* $\mathbb{R}^3$ *distinctes deux à deux,* D_1 7 D_2 7 $D_3 = \mathbb{R}^3$.

Or, de nombreux étudiants ont répondu: "Faux, parce que les droites peuvent être parallèles", ou encore "parce que les droites peuvent avoir une intersection vide". Au total 36% des 65 copies analysées révélaient une confusion entre affine et vectoriel (op. cité, 232-333).

On pourrait espérer éviter les confusions affine / vectoriel, en explicitant dès le début de l'enseignement ce que représente une structure affine et ses liens avec la théorie vectorielle. Des expérimentations que nous avons menées aux débuts de nos travaux ont montré que ce point est très délicat et qu'il paraît peu réaliste de faire comprendre ce qu'est *formellement* une structure affine avant que les étudiants aient bien intégré les résultats élémentaires de la théorie des espaces vectoriels (op. cité, 461-464). De fait, la nature essentiellement affine de la géométrie reste une difficulté importante à une bonne compréhension des concepts linéaires dans ce cadre, au moins au début de l'enseignement universitaire.

En outre, bien qu'à un niveau moins formel, le problème existe déjà dans l'enseignement du vecteur géométrique au collège et au lycée, où la représentation du vecteur par un tracé est souvent confondue par les élèves avec le vecteur lui-même, ce qui représente un obstacle à la compréhension du vecteur comme classe d'équipollence de segments orientés. La caractérisation du vecteur géométrique par la translation est un moyen de lutter contre cette difficulté, mais ne permet apparemment pas d'y remédier entièrement (Chauvat 1988). Ainsi la difficulté que les étudiants ont à assimiler les rapports entre les structures affine et vectorielle trouve une part de ses origines dans l'enseignement du vecteur géométrique au niveau de l'enseignement secondaire.

Par ailleurs, certaines spécificités du contexte géométrique interfèrent parfois dans la représentativité d'un concept d'algèbre linéaire dans ce cadre. Nous allons expliciter cette hypothèse à l'aide d'un exemple significatif.

Si on demande à des étudiants débutants en algèbre linéaire de donner l'équation d'un plan dont on connaît trois points A, B et C par leurs coordonnées, la réponse majoritaire (qui correspond à une technique enseignée en Terminale) consiste à commencer par former le

[34] Nous avons repris ce test de travaux préalables de Robert et Robinet.

produit vectoriel : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, et traduire ensuite l'appartenance du point M au plan par la relation :

$$\overrightarrow{AM} \ . \ [\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}] = 0$$

Cette technique traduit une conception duale du plan, comme orthogonal d'une droite. Les étudiants l'appliquent en en ayant une représentation intuitive (on peut donner à voir l'orthogonalité et son caractère involutif), mais sans connaître bien sûr les fondements théoriques en termes d'espace dual et d'orthogonal. En tant que technique calculatoire, ce procédé est efficace, et ne nécessite pas la maîtrise de la théorie qui le sous-tend. Cependant cette technique n'est pas favorable à la perception du plan comme espace affine de dimension deux (c'est-à-dire généré par un point et deux vecteurs), on pourrait même dire qu'elle court-circuite le concept de sous-espace engendré au profit de concepts plus élaborés. Or le sous-espace engendré est un concept plus élémentaire que la dualité dans l'organisation de l'algèbre linéaire.

La conception affine du plan relève d'une autre technique calculatoire qui consiste à exprimer que les vecteurs : $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont dépendants, soit par un calcul de déterminant soit en résolvant un système. L'avantage de poser un système est qu'on obtient directement une représentation paramétrique du plan, qui traduit de façon sémantiquement congruente (Duval 1993 et 1995) la représentation vectorielle, dans le registre sémiotique des équations. Si l'on veut une équation cartésienne (on sait que les étudiants croient souvent que c'est la seule représentation acceptable), il faut éliminer les deux paramètres, ce qui est techniquement un peu long et complexe. Par contre, le calcul du déterminant donne directement une équation cartésienne mais c'est aussi un outil qui ne rend pas compte d'une compréhension intuitive de la dépendance.

On peut alors comprendre le choix fait dans l'enseignement secondaire de passer par un produit vectoriel puis par un produit scalaire. Du point de vue technique, c'est aussi efficace que le déterminant, mais la décomposition en un produit mixte sauve le caractère intuitif, au prix néanmoins d'un fondement théorique bien plus complexe, que l'étudiant ne peut maîtriser dès le début de l'enseignement d'algèbre linéaire.

Cet exemple montre que certaines connaissances techniques des étudiants en géométrie peuvent faire écran à des idées élémentaires à l'œuvre en algèbre linéaire, en les plaçant d'emblée dans un champ de référence conceptuellement plus élevé. Cette difficulté peut être corrigée localement, mais elle montre toutefois que le cadre géométrique peut créer des interférences propres à gêner la représentation de certains concepts élémentaires de la théorie vectorielle.

Enfin, l'intérêt en termes d'intuition et de représentations visuelles du cadre géométrique reste limité à la dimension trois. Au delà, les généralisations deviennent beaucoup plus abstraites. Si la dimension trois est souvent suffisante pour avoir une idée déjà claire d'un concepts, cette limitation rend la représentation d'autres concepts peu pertinente ; c'est en particulier vrai pour les concepts de dépendance linéaire et surtout de rang, dont le chapitre qui suit s'attachera à montrer l'importance pour l'algèbre linéaire.

Pour clore ce chapitre, il nous reste à tenter de mieux expliciter, dans la limite des contraintes liées à la transposition didactique et à la lumière des difficultés repérées, la fonctionnalité du cadre géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. Nous nous appuierons également sur le reste de nos travaux.

3 - Fonctionnalité du cadre géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire

Le contenu de ce paragraphe est constitué d'hypothèses que nous avons faites à l'appui des analyses qui précèdent. Ces hypothèses sous-tendent l'expérimentation réalisée à Lille (Rogalski 1991, 1994 et 1995, [13, II-3]), et ont donc été testées et évaluées dans ce cadre. Elles ne montrent cependant qu'un point de vue possible sans préjuger d'autres interprétations qui pourraient découler de nos analyses présentées dans les deux paragraphes précédents.

Nos analyses nous conduisent à rejeter le choix de mise en texte du savoir adopté dans plusieurs manuels, qui consiste à introduire (voir déduire) les axiomes d'espace vectoriel par leur vérification sur les vecteurs géométriques.

Notre hypothèse est que, comme pour des ensembles de fonctions, de polynômes ou de suites, la modélisation en termes d'espace vectoriels des vecteurs géométriques relève d'un point de vue volontairement réducteur qui permet l'unification. En effet, la nature du vecteur géométrique ne se résume pas à ses seules propriétés linéaires (parce qu'elles ne rendent compte ni de sa nature géométrique ni de l'aspect constitutif de la dialectique entre algébrique et géométrique, ni de l'importance de la multiplication vectorielle dans la genèse du vecteur).

C'est pourquoi l'introduction des axiomes d'espace vectoriel par leur vérification sur les vecteurs géométriques a pour intérêt essentiel de montrer que de tels ensembles abstraits existent à un niveau plus "familier". Le choix du vecteur géométrique se justifie alors comme illustration, à condition d'être très explicite sur la fonction de cette illustration : ce peut être, par exemple, l'occasion de la première intervention de niveau méta à propos des caractères unificateur et généralisateur de la théorie vectorielle (voir à ce sujet le dispositif expérimental sur l'introduction des axiomes évoqué au chapitre II et développé dans (Dorier 1990), [9, 184-195] et [13, II-2]).

Néanmoins, la possibilité d'utiliser le cadre géométrique comme source de représentations visuelles et d'intuitions pour les concepts linéaires est essentielle, on en a vu l'intérêt en plusieurs points du développement historique. Dans ce contexte, ce n'est pas seulement la géométrie vectorielle qui est en jeu mais aussi la géométrie analytique. En particulier, la question de la représentation des droites ou des plans affines et vectoriels par des équations cartésiennes et paramétriques peut être un point d'appui pour illustrer des concepts tels que les générateurs, la dualité, et aborder les questions d'intersection de sous espaces. Cependant, dans le cadre de l'algèbre linéaire, il est nécessaire de pouvoir dépasser la dimension trois. Ainsi le cadre des équations linéaires vient ici s'insérer dans un cadre géométrique élargi, ce qui constitue un contexte riche pour élaborer les concepts d'algèbre linéaire. Par ailleurs, les concepts d'algèbre linéaire deviennent des outils efficaces en géométrie quand on aborde l'étude des transformations. C'est d'ailleurs sur ce point qu'historiquement les liens ont été les plus forts. La composition et la classification des transformations affines est particulièrement facilitée quand on passe par l'étude des transformations linéaires associées. Il s'agit alors de déterminer les espaces propres et les invariants qui en résultent en termes de représentation matricielle (recherche de formes réduites).

Ainsi, il apparaît possible de montrer l'intérêt de la théorie des espaces vectoriels dans l'étude des transformations géométriques et, par là même, de donner à certains concepts et certaines méthodes d'algèbre linéaire un substrat plus intuitif à travers le cadre géométrique. Mais cela concerne un niveau relativement élevé de la théorie. Par contre, l'interaction entre les concepts élémentaires de la théorie des espaces vectoriels et le cadre géométrique reste plus problématique. Le vecteur géométrique et les bases de géométrie analytique sont des prérequis pour pouvoir aborder l'étude des transformations affines par la théorie des espaces vectoriels, mais les concepts élémentaires de la théorie des espaces vectoriels ne peuvent, pour des raisons épistémologiques que nous avons exposées plus haut, prendre sens s'ils restent limités au seul cadre géométrique. Ainsi, le cours d'algèbre linéaire peut être l'occasion d'enseigner de la géométrie à l'université, dans un rapport dialectique qui ne prend tout son sens qu'après un enseignement assez substantiel d'algèbre linéaire, qui pourra s'appuyer aussi sur d'autres cadres.

En particulier le cadre des équations linéaires, dont notre analyse historique a montré qu'il a joué un rôle très important pour la constitution des concepts d'algèbre linéaire, est particulièrement à même de jouer un rôle fondamental dans l'enseignement de l'algèbre linéaire et d'interagir également avec le cadre géométrique. C'est un des points essentiels que nous allons à présent aborder à travers une étude centrée sur le concept de rang.

IV. LE ROLE CENTRAL DU CONCEPT DE RANG

L'analyse historique que nous avons faite montre le rôle central joué par le concept de rang ([2] et [13, I-1-§1]). Elle atteste aussi que ce concept s'est constitué essentiellement dans le contexte de l'étude des systèmes d'équations linéaires par la théorie des déterminants. Enfin comme nous l'avons rappelé, elle montre que la technicité des déterminants a été un facteur de ralentissement de certaines idées intuitives, déjà à l'œuvre dans le travail d'Euler (qui n'utilisait pas des déterminants).

Le rang permet de faire le lien entre les concepts de dépendance linéaire et de générateur : c'est le nombre maximal d'éléments indépendants dans un sous-espace aussi bien que le nombre minimal de générateurs. Cet invariant se retrouve aussi dans une perspective duale, puisque la dimension de l'espace total diminuée du rang caractérise le nombre minimal d'équations nécessaires pour représenter un sous-espace, ainsi que le nombre maximal d'équations indépendantes dans tout système de représentation. Nous avons montré que cet aspect dual a joué un rôle essentiel dans la genèse du concept de rang.

Le concept de dimension est très lié à celui de rang. Or, nous avons montré que certains des premiers auteurs à avoir introduit ce concept, à partir d'une généralisation du cadre géométrique, ont négligé l'aspect générateur de ce concept. Ils définissent la dimension comme le nombre maximal de vecteurs indépendandants dans un sous-espace, sans jamais montrer qu'une famille génératrice ne peut avoir un cardinal inférieur à la dimension ([5, 183-186], [6, 20-24] et [13, I-2-§1]).

La notion de rang correspond à un raffinement de la notion de dépendance, il permet dans un ensemble de générateurs, dans un sous-espace ou dans un système d'équations représentatives, de déterminer le "degré de dépendance". Sa détermination relève également d'un procédé de tri permettant de dégager un système générateur minimal, ou libre maximal, c'est-à-dire une base. La compréhension de la notion de rang dépend donc avant tout de la compréhension des notions d'indépendance et de dépendance linéaires, c'est ce point que nous commencerons par aborder.[35]

1. Sur l'indépendance et la dépendance linéaire

a - Difficultés didactiques

Comme nous l'avons déjà souligné plus haut, l'enseignement de l'algèbre linéaire apparaît comme excessivement formel aux étudiants. Or, ceci est sensible dès les débuts de la théorie.

En effet, l'usage de la définition formelle de l'indépendance ou de la dépendance linéaires pose souvent des problèmes de formulation aux débutants, liés à la syntaxe du langage formel. L'indépendance linéaire est à ce titre beaucoup plus difficile du fait que sa définition formelle est quasiment impossible à traduire en langue naturelle d'une façon qui conserve la syntaxe : elle s'exprime à l'aide d'une quantification universelle et d'une implication alors que la définition en langue naturelle (il n'existe pas d'autre combinaison linéaire que celle à

[35] Ce paragraphe s'appuie sur les résultats présentés dans [12]. Ce texte est le plus récent de nos travaux, et il est écrit en anglais. Par ailleurs, comme son objet est au cœur de ce que nous voulons montrer dans ce texte, nous avons choisi d'en reprendre ici les éléments principaux, tout en approfondissant notre analyse à la lumière du cadre général présenté au chapitre I.

coefficients tous nuls qui donne le vecteur nul) utilise la négation d'une quantification existentielle et pas d'implication. Au sens de Duval (1993 et 1995), il n'y a donc pas congruence sémantique entre les deux formulations. Dans les deux cas, il s'agit bien de la négation des définitions en langue formelle et en langue naturelle de la dépendance (qui elles sont sémantiquement congruentes), mais cette négation revêt un caractère très technique en langue formelle (il faut non seulement utiliser les règles de négation formelle mais aussi expliciter des choses non dites, en particulier qu'une combinaison linéaire à coefficients tous nuls est toujours nulle, et des quantificateurs cachés), alors qu'en langue naturelle, elle se marque seulement par une négation (ne…pas). Dans des tâches relativement élémentaires, il est courant de lire de la part des débutants des formulations incorrectes de cette définition (absence de quantificateur, voire même d'implication), néanmoins cette maladresse, qui peut n'être que passagère, n'empêche pas que la majorité des étudiants finissent par réussir les tâches classiques : essentiellement montrer qu'une famille de vecteurs (dans des cadres divers) est libre ou liée. Par contre, des difficultés plus tenaces sont visibles dans des tâches moins usuelles. Examinons par exemple les deux exercices suivants[36] :

1. *Soient* u, v *et* w *trois vecteurs de l'espace et* f *un endomorphisme. Si* u, v *et* w *sont indépendants, est-ce que* f(u), f(v) *et* f(w) *le sont ?*

2. *Soient* u, v *et* w *trois vecteurs de l'espace et* f *un endomorphisme. Si* f(u), f(v) *et* f(w) *sont indépendants, est-ce que* u, v *et* w *le sont ?*

Une proportion écrasante d'étudiants se trompent et affirment que la proposition 1 est vraie. Le raisonnent le plus fréquent revient, à quelques variantes près, à ceci :

Si $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, *alors comme f est une application linéaire :* $\alpha f(u) + \beta f(v) + \gamma f(w) = f(0) = 0$. *Or, comme* u, v et w *sont indépendants, alors* $\alpha = \beta = \gamma = 0$ *; donc* f(u), f(v) *et* f(w) *sont indépendants, donc la proposition 1 est vraie.*

Une première analyse de ce type de réponses semble révéler une difficulté dans l'utilisation de l'implication mathématique. Dans cet exemple, en effet l'implication apparaît à deux niveaux, dans l'énoncé de la proposition à démontrer mais aussi dans la définition de l'indépendance linéaire qui est au cœur de l'hypothèse et de la conclusion de la proposition. Plus précisément, la proposition à démontrer suit un schéma du type suivant :

si (P implique Q) est vraie alors (P' implique Q') est vraie

De fait la proposition est une implication dont l'antécédent et la conclusion sont des implications. Pour démontrer ce type de proposition, il faut partir de P' et en déduire Q', en utilisant que (P implique Q) est vraie. Or ici Q = Q' et les étudiants partent de P dont ils déduisent P', puis comme (P implique Q) est vraie en déduisent Q qui est aussi Q'. Ils croient

[36] Les exercices présentés dans ce paragraphe proviennent de sources diverses. Ils avaient, entre autres, été testés par A. Robert et J. Robinet (1989), nous les avons également repris dans notre travail de doctorat (Dorier 1990).

ainsi avoir démontré la proposition. Il semblerait donc que leur difficulté soit essentiellement de nature logique.

Nous avons testé cette hypothèse lors de notre travail de doctorat. Nous avons d'abord fait passer et analysé un prétest de logique élémentaire (en début d'année), puis nous avons proposé les deux exercices précédents après le début de l'enseignement d'algèbre linéaire. L'étude des corrélations montre que celles-ci sont quasiment inexistantes entre les compétences des étudiants dans l'utilisation de l'implication mathématique et les réponses aux deux exercices précédents. Par contre, il existe une bonne corrélation globale entre le prétest de logique et le post-test en algèbre linéaire, ce qui vient conforter l'hypothèse des blocs et du seuil quantitatif nécessaire pour un saut qualitatif [7, 40-41][37]. Il apparaît donc que les dysfonctionnements repérés dans l'utilisation de la définition formelle de l'indépendance linéaire ne peuvent être dus aux seules difficultés de type logique.[38] Il serait vain également d'invoquer une difficulté générale des étudiants à pouvoir mener correctement une démonstration formelle. Nos analyses nous poussent à chercher des raisons plus intrinsèquement liées au contexte de l'algèbre linéaire.

Ainsi sur l'exemple précédent, si on demande aux étudiants ayant donné une réponse fausse d'illustrer la proposition en géométrie par exemple, la plupart réalisent immédiatement qu'il y a une erreur, sans être cependant capables de la détecter. En conséquence, il existe un hiatus entre l'utilisation que les étudiants font de la définition formelle de l'indépendance, et ce qu'ils perçoivent intuitivement de cette notion. D'où l'hypothèse qu'une telle définition ne peut être opérationnelle, faute d'être raccrochée à un contexte intuitif qui lui donne du sens.

Une autre erreur classique liée au caractère formel de la définition de l'indépendance linéaire concerne le cadre des fonctions. En effet, une technique classique pour examiner l'indépendance d'un ensemble de fonctions consiste à poser une combinaison linéaire nulle, puis, à prendre autant de valeurs de x qu'il y a de fonctions, et enfin, à résoudre le système numérique carré ainsi obtenu. Si on trouve la seule solution nulle, on peut alors affirmer que la famille est libre. Pour comprendre et accepter ce raisonnement, il faut avoir bien assimilé le fonctionnement de l'implication, qui autorise la perte d'une partie de l'information. Or cette caractéristique de l'implication va à l'encontre du principe du maximum d'information, dont on sait qu'il conditionne fortement le comportement des étudiants. De plus, dans le cas où l'on trouve d'autres solutions que la solution nulle, on ne peut rien conclure sur la nature de la

[37] Plus que des connaissances préalables pointues dans un domaine de prérequis, c'est un bon niveau général d'acquisition de ces prérequis (aucun bloc vide) qui discrimine la compréhension d'une connaissance nouvelle. Ainsi tout se passe comme si un seuil quantitatif était nécessaire pour pouvoir franchir certains sauts conceptuels. Cette hypothèse avait été énoncée par Robert et Boschet (1985) à propos de l'enseignement du début de l'analyse réelle à l'université. Nous avons repris la méthodologie proposée par Robert dans notre thèse pour valider cette hypothèse dans le cas de l'enseignement de l'algèbre linéaire.

[38] Ces résultats ont depuis été confirmés par des travaux sur l'apprentissage de la logique, qui ont mis en évidence, l'importance du contexte dans lequel les exercice de logique sont proposés dans les compétences des étudiants (Durand-Guerrier 1991 et 1996).

famille. Il y a donc une dissymétrie troublante dans les raisonnements, suivant que la famille est libre ou non.

Voici enfin un exercice qui révèle un autre type de difficulté :

Soient u, v *et* w *trois vecteurs de l'espace non deux à deux colinéaires, sont-ils indépendants dans leur ensemble ?*

Il est courant que les étudiants soient persuadés que la réponse est oui. Ils essaient alors d'échafauder une justification à l'aide de la définition formelle. Cette tentative peut vite s'enfermer dans une impasse, ou bien, sous la pression du contrat didactique qui veut que l'étudiant donne une réponse, les démonstrations les plus édifiantes peuvent être produites. Là encore une illustration sur un exemple familier convainc facilement les étudiants du bon résultat, mais la difficulté à utiliser la définition formelle subsiste.

Cet exercice révèle que beaucoup d'étudiants ont du mal à traiter les questions de dépendance linéaire de façon globale. Très souvent, tout se passe comme si ils scindaient le problème en sous-problèmes et recollaient les morceaux à la fin. Il est vrai que cette technique donne des résultats corrects dans de nombreux cas, et peut même s'avérer économique, si elle est bien contrôlée, mais elle donne aussi lieu à des erreurs (comme dans le cas de l'exercice présent). Dans un travail de doctorat récent, Ousman (1996) a mis en évidence plusieurs types de difficultés que l'on peut rattacher à ce comportement de réduction en sous-problèmes. En reprenant l'idée d'Ousman, on peut rattacher ces erreurs à des théorèmes en acte, au sens de Vergnaud (1990), par exemple :

- Si u et v sont indépendants chacun de w, alors u, v et w sont indépendants.
- Si un vecteur n'est pas combinaison linéaire d'autres vecteurs, alors tous les vecteurs sont indépendants dans leur ensemble.
- Si u, v et w sont indépendants et si u', v et w le sont aussi, alors u, u', v et w le sont aussi.

Comment peut-on expliquer cet ensemble de difficultés ?

La dépendance linéaire est une notion qui généralise la notion de proportionnalité de deux séquences ordonnées de nombres (deux vecteurs en analytique). Nous faisons l'hypothèse que c'est dans les termes de cette généralisation que réside une part du problème. Pourtant, celui-ci est plus complexe, comme cela apparaît dans le dernier théorème en acte cité ci-dessus. Dans ce cas, la difficulté pour trois vecteurs peut avoir été dépassée, mais il y a un problème dans le traitement de quatre vecteurs. Plus précisément, si la question porte directement sur quatre vecteurs, ce théorème en acte a peu de chance d'apparaître ; il est, par contre, beaucoup plus probable de le déceler, si, comme le suggère la notation utilisée ici, les quatre vecteurs sont scindés en deux groupes de deux. En particulier, Ousman a pu parvenir à une analyse pertinente en modélisant le comportement d'étudiants par ce théorème en acte dans un exercice où il était demandé de chercher l'intersection des deux sous-espaces engendrés respectivement par {u, u'} et {v, w}. En effet, beaucoup d'étudiants ont montré que u d'une part et u' d'autre part ne dépendaient pas de v et w et en ont conclu que l'intersection était réduite à {0}. En réalité, il existait effectivement des combinaisons linéaires de u et u' égales à des combinaisons linéaires de v et w et l'intersection était une droite.

Ces dysfonctionnements ont en commun de réduire une propriété globale sur un ensemble à la même propriété sur plusieurs sous-ensembles. C'est donc une forme de réduction d'un problème global en sous-problèmes locaux.

Les trois difficultés que nous venons d'analyser montrent que la compréhension des définitions formelles de la dépendance et de l'indépendance linéaires ne sont pas toujours opérationnelles et que, par conséquent, leur utilisation par les étudiants ne s'accompagne pas d'un contrôle faisant appel à des conceptions antérieures de ces concepts, plus locales en référence à un contexte plus familier, (sur la proportionnalité, sur la dépendance des équations, des vecteurs géométriques, etc.). Comment alors enseigner ces notions formelles dans un meilleur rapport aux connaissances antérieures des étudiants ?

b - Confrontation avec l'analyse historique

i - Sur la difficulté à appréhender l'aspect global du concept de dépendance linéaire

Dans notre analyse historique, nous avons repéré que la difficulté du passage de deux à plus de deux objets est sensible chez certains auteurs. Par exemple, dans son texte sur la dépendance dans les systèmes d'équations, Euler distingue, dans le cas de trois équations, le cas où deux équations sont identiques de celui où l'une d'entre elles est *comprise* dans les deux autres ([13, 4] et [12, 7-8]). A la suite d'Euler, l'usage des déterminants ne laisse plus apparaître cette difficulté. Les déterminants relèvent, par essence, d'une approche globale de la notion de dépendance. Ainsi, s'il y a bien eu, au début de la genèse du concept de dépendance, une attention particulière portée sur le passage de deux à plus de deux objets, nous n'avons pas repéré dans la genèse historique des concepts de dépendance et d'indépendance linéaires de réel blocage sur le problème de la réduction d'un problème global en sous-problèmes locaux. Est-ce à dire qu'il n'y a pas ici d'obstacle épistémologique ?

Dans les deux comportements analysés dans le paragraphe précédent (pour trois puis pour quatre vecteurs), les erreurs ont des origines semblables, dans la mesure où, comme nous l'avons dit plus haut, elles relèvent de la réduction d'une propriété globale sur un ensemble à la même propriété sur deux sous-ensembles. On détecte donc ici un type d'erreur récurrent et résistant, puisque même vaincu à un certain niveau, il peut réapparaître, chez un même individu, à un niveau de complexité plus grand. De plus, ces erreurs correspondent à la généralisation d'un procédé efficace dans un certain domaine à un domaine où il n'est plus entièrement valide. En effet, la réduction d'une propriété d'un ensemble à des sous-ensembles est un processus de simplification efficace dans un grand nombre de situations mathématiques ; par exemple, la continuité ou la dérivabilité d'une fonction se déduit de celle de ces composantes élémentaires, via les théorèmes classiques d'opérations sur les fonctions. Ainsi la difficulté repérée ici semble bien posséder certaines des caractéristiques essentielles d'un obstacle au sens où on utilise ce terme en didactique des mathématiques.

La question de la nature de cet obstacle est plus délicate. Avant d'examiner la possibilité d'une origine d'ordre épistémologique, regardons les deux autres possibilités (ontogénétique ou didactique, en reprenant la classification de Brousseau rappelée au I de ce texte). L'âge des étudiants de DEUG (18-20 ans), nous pousse à écarter l'origine ontogénétique. Cet obstacle peut-il être d'origine didactique, c'est-à-dire résulter de choix curriculaires ? La réduction en sous-problèmes est une méthode mathématique propre à simplifier la résolution de certains problèmes. L'expert connaît les domaines de validité de cette réduction et discrimine spontanément, ou en tous cas dans un réflexe bien conditionné - donc plus ou moins conscient et explicitable -, les cas où elle s'applique, de ceux où elle n'est plus applicable. Cependant cette compétence ne fait jamais l'objet d'un enseignement explicite, tout au plus apparaît-elle dans quelques allusions marginales de la part du professeur. L'élève développe donc un rapport à cette méthode de réduction en sous-problèmes, sans contrôle explicite de l'institution didactique. Cette méthode n'est en particulier jamais institutionnalisée comme élément de connaissance ni même seulement comme technique et a fortiori ses domaines de validité ne sont jamais explicités. Nous ne pouvons donc rejeter l'hypothèse d'une origine didactique à l'obstacle relevé plus haut dans la mesure où le système ne prend pas en charge l'enseignement des méthodes de ce type.

De plus, l'étude qui précède fournit quelques éléments pour l'élaboration d'un dispositif didactique permettant la gestion de cet obstacle. En effet, sur la base des deux exemples que nous avons abordés, il est possible de mettre en place des situations didactiques, dont on sait qu'elles vont favoriser l'apparition du théorème en acte chez de nombreux étudiants. Dans le premier cas, on a vu qu'une confrontation avec un exemple familier crée une déstabilisation, propre à réaliser le franchissement de l'obstacle pour trois vecteurs. Dans le cas de quatre vecteurs, la déstabilisation peut venir de la donnée d'un vecteur de l'intersection ou du fait de poser la question de l'indépendance des quatre vecteurs. En incluant à ces situations une réflexion de niveau méta sur la méthode générale de réduction en sous-problèmes, on peut alors envisager un dispositif didactique de dépassement de cet obstacle.

Nous passons maintenant à la question de l'articulation de la défintion formelle de l'indépendance linéaire avec les connaissances antérieures.

ii - Conceptions de dépendance sur les équations

Dans notre analyse de la genèse du concept de rang, nous avons identifié, à propos du travail d'Euler sur le paradoxe de Cramer (1750), une conception, que nous avons nommée *dépendance inclusive*, qui a dominé l'approche des systèmes d'équations linéaires pendant plus d'un siècle [13, I-1-§1]. Cette conception est mathématiquement équivalente à la dépendance linéaire, elle reste néanmoins attachée au cadre strict des équations. Nous avons souligné que cette conception était tout à fait efficace, et en quelque sorte naturelle, dans le contexte de l'époque, où la préoccupation majeure face aux systèmes d'équations linéaires était leur résolution. Cependant nous avons montré que cette conception empêchait de voir les équations et les n-uplets de solutions de la même façon au regard de leur linéarité. Cette limitation n'a pas permis de dégager entièrement le concept de rang. En effet, nous avons démontré que pour ce faire, il fallait pouvoir utiliser un raisonnement dual permettant de relier entre eux tous les systèmes ayant le même ensemble de solutions. Or un raisonnement dual nécessite de pouvoir transformer une équation en n-uplet et vice versa, c'est-à-dire d'unifier ces deux objets sous un même concept linéaire : le vecteur au sens de l'élément d'un espace vectoriel. Ce pas a été franchi en 1875 par Frobenius ([2, 178-186], [13, I-1§1] et [12, 8-9]).

Celui-ci commence par donner la définition suivante :

Plusieurs solutions particulières

$$A_1^{(\chi)}, A_2^{(\chi)}, \ldots, A_n^{(\chi)} \ (\chi = 1, 2, \ldots, k)$$

seront dites indépendantes *ou* différentes, *si* $c_1A_\alpha^{(1)} + c_2A_\alpha^{(2)} + \ldots + c_kA_\alpha^{(k)}$ *ne peuvent s'annuler pour tous les* $\alpha = 1, 2, \ldots n$*, sans que* $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *soient tous nuls, en d'autres termes, si les* k *formes linéaires* $A_1^{(\chi)}u_1 + A_2^{(\chi)}u_2 + \ldots + A_n^{(\chi)}u_n$ $(\chi = 1, \ldots, k)$ *sont indépendantes*[39].

Non seulement cette définition est tout à fait semblable à la définition moderne de l'indépendance linéaire (c'est la première fois qu'une telle définition est donnée), mais elle montre explicitement la similarité entre les n-uplets de solutions et les équations dans leur caractère linéaire. Cette idée, a priori si simple, va être essentielle dans le travail de Frobenius ; il va ainsi mettre en évidence, en quelques pages, pour la première fois, toutes les caractéristiques essentielles du rang d'un système (quoique ce concept soit encore implicitement défini comme l'ordre du plus grand mineur non nul)[40].

L'idée essentielle de Frobenius consiste à introduire le concept de système associé (*zugeordnet* oder *adjungirt)* à un ensemble de n-uplets, ce qui en terme moderne correspond à

[39] *Mehrere particuläre Lösungen*

$$A_1^{(\chi)}, A_2^{(\chi)}, \ldots, A_n^{(\chi)} \ (\chi = 1, 2, \ldots, k)$$

sollen daher unhabhängig *oder* verschieden *heissen, wenn* $c_1A_\alpha^{(1)} + c_2A_\alpha^{(2)} + \ldots + c_kA_\alpha^{(k)}$ *nicht für* $\alpha = 1, 2, \ldots n$*,verschwinden kann, ohne dass* $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *sämmtlich gleich Null sind, mit andern Worten wenn die k linearen Formen* $A_1^{(\chi)}u_1 + A_2^{(\chi)}u_2 + \ldots + A_n^{(\chi)}u_n$ $(\chi = 1, \ldots, k)$ *unhanbhängig sind* [Frobenius 1875, 255].

[40] Le terme de rang (*Rang)* sera introduit pour la première fois, par Frobenius en 1879.

la représentation cartésienne de l'orthogonal du sous espace engendré par les n-uplets. Voici en résumé son raisonnement.

Considérons le système suivant : $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad\cdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$ (I)

Si $(A_1^{(\chi)}, A_2^{(\chi)}, \dots, A_n^{(\chi)})$ ($\chi = 1, 2, \dots, n-r$), r étant l'ordre maximal des mineurs non nuls, est une base de solutions de (I), le système associé est :

$$\begin{cases} A_1^{(1)}x_1 + \dots + A_n^{(1)}x_n = 0 \\ \quad\cdots \\ A_1^{(n-r)}x_1 + \dots + A_n^{(n-r)}x_n = 0 \end{cases} \quad (I^*)$$

Maintenant si $(B_1^{(\upsilon)}, B_2^{(\upsilon)}, \dots, B_n^{(\upsilon)})$ ($\upsilon = 1, 2, \dots, q$) est une base de solutions of (I*), le système associé est :

$$\begin{cases} B_1^{(1)}x_1 + \dots + B_n^{(1)}x_n = 0 \\ \quad\cdots \\ B_1^{(q)}x_1 + \dots + B_n^{(q)}x_n = 0 \end{cases} \quad (I^{**})$$

Frobenius démontre que, quel que soit le choix des bases à chaque étape, le système (I**) est équivalent au système (I) et que q = r.

Ce premier résultat de dualité en dimension finie lui permet de montrer le double niveau d'invariance associé au rang (nombre maximal de vecteurs indépendants et nombre minimal de générateurs), à la fois pour le système d'équations et pour l'ensemble de solutions. De plus, l'approche de Frobenius a permis de considérer un système comme l'élément d'une classe de systèmes tous équivalents (c'est-à-dire ayant le même ensemble de solutions), ce qui constitue une étape fondamentale pour la représentation cartésienne des sous-espaces.

Ainsi, on repère dans l'histoire que la conception de dépendance inclusive semble jouer un rôle d'obstacle à l'émergence du concept de rang. Plus précisément, l'obstacle réside dans l'adoption d'une définition formelle de l'indépendance linéaire unifiant la dépendance des n-uplets et des équations. En effet, il est clair dans le travail de Frobenius que la formulation d'une telle définition permet en quelques pages d'expliciter toutes les caractéristiques du rang.

Or les difficultés des étudiants que nous évoquions plus haut peuvent être interprétées à la lumière de ce que nous avons repéré dans l'analyse historique. En effet, les étudiants ont du mal à faire fonctionner la définition formelle de l'indépendance linéaire, alors qu'ils savent faire fonctionner des connaissances antérieures qui lui sont attachées dans des contextes plus familiers. Dans son travail, Ousman (op. cité.) a fait passer un test à des étudiants entrant à l'université avant tout enseignement d'algèbre linéaire. Les étudiants doivent dire, sur des exemples, si les équations de certains systèmes sont ou non dépendantes. Aucune définition du terme "dépendant" n'a été donnée auparavant et les étudiants se réfèrent simplement à une compréhension primitive du terme dans le langage courant ou en rapport avec d'autres cas d'utilisation en mathématiques. Les réponses laissent paraître que très souvent la conception de la dépendance des étudiants est très proche de ce que nous avons appelé la dépendance inclusive, à la suite de nos analyses historiques. Ce constat est concordant avec l'analyse du contexte historique dans la mesure où dans l'enseignement secondaire l'étude des systèmes d'équations est axée sur leur résolution, comme dans le contexte des mathématiques de la fin du 18e siècle et de la première moitié du 19e siècle. Ainsi dans des contextes et des problématiques semblables, on repère ici des conceptions semblables au niveau de l'histoire et de l'enseignement.

Du point de vue du développement historique, la difficulté que nous soulevons dans nos analyses n'était pas perçue par les mathématiciens de l'époque. Même Frobenius n'y fait aucune allusion. Il met en place une définition efficace de l'indépendance, en utilisant les mêmes mots de la langue naturelle que ceux qu'on utilisait pour la dépendance inclusive, mais il ne s'exprime pas sur la métamorphose du concept, bien qu'il souligne explicitement le parallèle entre équation et n-uplet. De plus, la dépendance inclusive étant mathématiquement équivalente à la dépendance linéaire, elle n'a jamais donné lieu à des raisonnements incorrects que la dépendance linéaire aurait pu corriger. Elle a, par contre, limité certaines approches, sans que les mathématiciens impliqués en aient eu nécessairement conscience.

D'un autre côté, les difficultés des étudiants ne montrent pas qu'une résistance de leur conception de dépendance inclusive empêche une bonne utilisation de la définition formelle. En revanche, nous avons mis en évidence que les raisonnements utilisant des conceptions primitives sur la dépendance (dont la dépendance inclusive) ne suffisent pas pour bien utiliser la définition formelle.

Ce constat nous conduit à l'hypothèse que la difficulté didactique est en fait ici plus globale, elle vient du processus de généralisation à l'œuvre dans le passage à la théorie des espaces vectoriels. En effet, le concept formel d'indépendance linéaire est une généralisation (de la dépendance inclusive, de la proportionnalité, etc.) dans le sens où il unifie diverses conceptions dont les domaines de validité sont limités, chacun, à un contexte particulier. Dans ce processus il n'y a pas de possibilité de généralisation abusive : la généralisation n'est tout simplement pas possible sauf à créer justement le concept formel qui va se substituer globalement à toutes les conceptions primitives. Du point de vue logique, il y a équivalence des conceptions primitives au concept formel dans chacun de leurs champs d'application. L'obstacle est donc dans la nature de la généralisation. C'est ce que nous avons appelé "l'obstacle du formalisme"[41] [13, II-1]. Notre double analyse historique et didactique montre alors que la difficulté consiste à accéder au concept formel à travers un processus prenant en compte les conceptions primitives et les caractéristiques épistémologiques de ce type de généralisation unifiante. Pour le cas des équations, il s'agit donc de passer de la conception de dépendance inclusive au concept de dépendance linéaire dans une problématique qui montre d'une part le lien entre les deux

[41] Le mot obstacle est à prendre ici dans son sens mou.

conceptions et d'autre part la supériorité du concept de dépendance linéaire. Or ce passage ne peut être conçu que comme réponse au besoin d'unification relativement à d'autres contextes.

On peut alors, par exemple, s'appuyer sur l'analyse historique, pour mieux déterminer les conditions d'un tel processus. La question qui se pose est celles des conditions qui ont amené Frobenius à définir la dépendance linéaire et à dépasser (implicitement) la conception inclusive. C'est avant tout un changement de perspective dans l'approche des systèmes d'équations linéaires. Dans la deuxième moitié du 19^{e} siècle, divers problèmes (arithmétiques, géométriques ou physiques) ont conduit les mathématiciens à s'intéresser à la classification des formes bilinéaires (en particulier symétriques). Ce problème débouche sur la recherche d'invariants par substitutions linéaires dans de telles formes. Par ailleurs, la possibilité de représenter une forme bilinéaire, une forme quadratique, ou une substitution linéaire par des matrices conduit à la recherche d'invariants dans les tableaux de nombres (même si Frobenius, au contraire de Cayley par exemple, préféra toujours la notation des formes bilinéaires). Une telle problématique nécessitait de ne plus seulement envisager les systèmes linéaires dans une perspective de résolution mais d'en dégager des caractères invariants, dont le rang, qui apparaîtra comme essentiel. De fait, la problématique de résolution effective s'est estompée pour laisser place à une étude plus qualitative des systèmes. Or, le processus de résolution d'un système consistait, à l'époque, à déterminer un mineur non nul d'ordre maximal. A partir de ce mineur (dont la question du choix n'était pas soulevée), on distinguait inconnues et équations principales et secondaires et on appliquait ensuite les méthodes de Cramer. Sur la base de ce choix particulier, le lien entre le nombre d'équations indépendantes et la "taille" de l'ensemble de solutions apparaissait implicitement. En prenant le point de vue qualitatif de la recherche d'invariants, l'étape suivante "naturelle" consistait à montrer le rôle d'invariant joué par la taille du plus grand mineur non nul, et ce, autant du point de vue du nombre d'équations indépendantes que de celui de la taille de l'ensemble de solutions. C'est dans cette optique que se place Frobenius dans son texte de 1875, où il détermine la nature du rang, qui restera pour lui la taille du plus grand mineur non nul.

Une telle problématique peut-elle inspirer l'élaboration d'un dispositif didactique destiné aux étudiants actuels ? Le problème de la classification des formes bilinéaires ne nous semble pas envisageable dans la structure actuelle des programmes. On peut par contre penser à un autre dispositif permettant de transposer les idées essentielles à l'œuvre dans le travail de Frobenius.

Il nous faut ici faire une parenthèse importante sur l'utilisation des déterminants, dont on a vu qu'elle a dominé l'histoire de l'algèbre linéaire de 1750 à l'aube du 20° siècle. Or notre analyse historique a également mis en évidence que l'extrême technicité attachée à l'usage des déterminants a, à certaines étapes de l'évolution de l'algèbre linéaire, masqué des idées intuitives et a ainsi pu en freiner le développement. C'est en particulier vrai pour le concept de rang, si on examine les 125 ans qui séparent le travail d'Euler de celui de Frobenius ([2] et [13, I-1-§1]). Dans ce sens, la méthode du pivot de Gauss offre l'avantage d'une plus grande transparence des résultats obtenus au regard des calculs effectués. D'autre part, du point de vue mathématique, elle permet d'obtenir les même résultats que la théorie des déterminants.[42]

Historiquement cette méthode algorithmique déjà en germe dans les travaux de Gauss a été occultée pendant près de deux siècles par la théorie des déterminants. C'est avec le développement de domaines tels que la programmation linéaire (ayant à traiter des systèmes d'équations linéaires souvent volumineux), que les méthodes algorithmiques de résolution effective des systèmes linéaires ont repris de l'importance. L'intérêt pour l'étude qualitative des algorithmes s'est développé avec l'évolution de l'informatique. Aujourd'hui, les déterminants n'offrent plus guère d'intérêt pratique. Leur calcul effectif, s'il est nécessaire, passe par des méthodes algorithmiques du type pivot de Gauss. L'étude approfondie des algorithmes a même montré que les éléments des matrices obtenus à chaque étape d'une résolution pouvaient être interprétés en termes de mineurs et de co-facteurs du système initial. Nénamoins, les déterminants conservent un intérêt théorique indéniable dans plusieurs branches des mathématiques.[43]

Donc, à l'encontre du développement historique et en accord avec les programmes actuels, notre analyse épistémologique nous conduit à faire l'hypothèse que la méthode du pivot de Gauss est un meilleur point d'entrée sur le plan didactique que les déterminants pour aborder l'étude des systèmes d'équations linéaires.[44] Cela ne veut pas dire que nous ne nous intéressons pas au développement historique en liaison avec la théorie des déterminants. Au contraire, il nous importe de l'analyser au plus près pour en dégager ce qui est indépendant du contexte des déterminants et comment le transposer dans le contexte de la méthode de Gauss.

Or, dans cette optique, l'enseignement secondaire porte essentiellement sur la technique de résolution des systèmes d'équations linéaires. Il s'agit donc dès le début de l'enseignement universitaire d'algèbre linéaire d'introduire un "saut qualitatif" en remplaçant la problématique de résolution par celle de l'étude plus théorique des systèmes (nous avons déjà évoqué ce point

[42] D'un point de vue pratique, la résolution d'un système dépendant de paramètres peut être plus facile à mener en utilisant les déterminants, si le paramètre apparaît dans de nombreux termes. C'est en particulier le cas dans la recherche des valeurs propres. Néanmoins, même dans ce cas, l'usage du pivot de Gauss permet une recherche conjointe des valeurs propres et de leurs sous-espaces propres. De plus, l'accessibilité à des outils informatiques de calculs de plus en plus puissants conduit à relativiser l'importance de l'efficacité de nos étudiants pour résoudre des systèmes, même dépendants de paramètres. En outre, le fonctionnement de ces outils repose toujours sur des méthodes issues du pivot de Gauss.

[43] Je remercie ici Daniel Perrin de m'avoir informer sur ce point. Il cite deux intérêts essentiels, à ses yeux, en rapport avec les deux domaines qu'il connaît le mieux (l'algèbre commutative et la géoémtrie algébrique). Pour lui, les déterminants sont essentiels parce qu'ils fournissent des équations explicites de l'ensemble des matrices de randg r et aussi parce qu'ils sont une construction "naturelle" i.e. fonctorielle, ce qui se traduit dans le cas le plus simple par la formule det(AB)=det(A)det(B).

[44] Il n'en reste pas moins que le déterminant est une notion essentielle de la théorie des espaces vectoriels. Cependant son intérêt étant plus théorique que calculatoire, elle intervient de façon pertinente dans des questions d'un niveau non-élémentaire et nous semble pouvoir être réservée à un stade plus avancé de l'enseignement de l'algèbre linaire (polynôme caractéristique, structure du groupe linéaire, etc.), que celui auquel nous nous sommes intéressé. Il nous semble en particulier stérile, de multiplier des exercices calculatoires sur toutes sortes de déterminants, comme cela a pu être le cas dans certains types d'enseignement.

plus haut dans l'analyse de la transposition didactique). Nous allons présenter le dispositif expérimenté à Lille dans le paragraphe qui suit.

Pour conclure sur les concepts de dépendance et d'indépendance linéaires, nous noterons que la méthode du pivot de Gauss est particulièrement adaptée pour faire permettre le passage de la conception de la dépendance inclusive à la définition formelle du concept de dépendance linéaire. En effet, la "disparition" éventuelle d'une équation en fin de résolution (une ligne de zéros en bas de la diagonale du tableau triangulaire) est l'"accident" qui montre la dépendance au sens d'Euler (la dépendance inclusive). Or, l'algorithme fonctionnant par combinaisons linéaires successives des lignes, la ligne nulle à la fin est aussi le révélateur de l'existence d'une relation linéaire entre les équations. Ainsi une analyse réflexive sur l'algorithme offre une possibilité d'interpréter la dépendance inclusive en termes de dépendance linéaire. C'est aussi un argument supplémentaire pour la validité du pivot de Gauss.

2. Dispositif expérimental autour du concept de rang

Dans ce paragraphe nous allons présenter les grandes lignes du dispositif expérimental (pour plus de détails cf. (Rogalski 1991, 1994 et 1995), [13, II-3], [10] et [11]). Nous divisons cette présentation en deux parties : tout d'abord dans le cadre des systèmes d'équations linéaires, puis dans le cadre formel.

a - Approfondissement théorique de la méthode du pivot de Gauss.

Dans un premier temps, on généralise la méthode du pivot de Gauss à des systèmes d'équations linéaires non nécessairement carrés, on aborde également des problèmes de modélisation intra-mathématiques de géométrie ou liés aux carrés magiques, etc. Dans le cadre géométrique, par exemple, on aborde la question de la double représentation cartésienne et paramétrique. Cette première phase permet d'aborder empiriquement des questions comme :

- ai-je trop d'équations, pas assez, juste ce qu'il faut ?
- combien de paramètres me faut-il pour décrire l'ensemble des solutions d'un système d'équations ? quels sont les seconds membres permettant des solutions ?

A travers une application des systèmes et de leur résolution par la méthode du pivot de Gauss, on aborde avec les étudiants des questions d'un ordre plus qualitatif, qui ont trait au rang, y compris dans sa dimension duale. On réalise ainsi un premier pas vers une approche plus théorique, qui se fonde sur l'analyse de problèmes. Le type de questions est en partie inspiré de ce que l'on a dégagé de l'analyse historique à propos essentiellement des travaux d'Euler et de Frobenius.

Le deuxième temps commence par une explicitation des questions soulevées dans la première phase. L'organisation de ces questions s'accompagne du changement de point de vue consistant à identifier une équation homogène au n-uplet de ses coefficients. Les définitions formelles de l'indépendance et de la dépendance linéaires et du rang sont alors données, et l'invariance du rang est démontrée, en interaction avec la résolution des questions ainsi dégagées de la phase 1. Jusque là, seul le cadre de $\mathbb{R}^n$ a été abordé, cependant les n-uplets sont systématiquement notés par une seule lettre.

La troisième phase reprend les mêmes concepts que la phase 2, en les abordant dans le cadre le plus formel, par l'approche axiomatique (nous y reviendrons en détail dans le paragraphe suivant).

A ce dispositif très schématiquement résumé ici se superposent les choix plus globaux explicités dans les deux chapitres précédents, en particulier l'utilisation du levier méta. De plus, dans l'organisation que nous venons de présenter, on retrouve les grands traits de l'évolution historique :

- Emergence des premiers concepts, dont le rang, à travers l'étude des systèmes d'équations linéaires.
- Passage de la problématique de résolution vers une étude plus théorique, lien avec la dépendance inclusive.
- Importance de l'aspect dual du rang (à l'œuvre dans la problématique de double représentation cartésienne et paramétrique).
- Identification d'une équation à un n-uplet (premier pas vers le formalisme du concept unificateur de vecteur algébrique).

b - Organisation des concepts dans le cadre formel

Dans le cadre formel, le concept de dimension prend plus d'importance que celui de rang, particulièrement adapté au cadre des équations. Nous avons vu que pour ce concept, l'aspect générateur n'a pas toujours été très bien pris en compte dans l'évolution historique.

Voici dans les grandes lignes, une organisation possible des concepts, qui nous a été inspirée de nos recherches historiques et de notre pratique d'enseignement. Cette approche essaie de problématiser l'introduction et les liens entre les nouveaux concepts élémentaires d'algèbre linéaire ; c'est une tentative de réponse à la critique des étudiants qui se sentent submergés par l'abondance de nouveaux concepts dans la théorie des espaces vectoriels. Cette organisation avait déjà été expérimentée lors de notre travail de doctorat (Dorier 1990). Plus récemment un travail en cours de Behaj[45] nous a permis de tester la pertinence de cette approche. En effet, Behaj a interviewé des binômes d'enseignants et d'étudiants entre la deuxième année de DEUG et la maîtrise. Il leur demande de présenter un squelette de cours

[45] H. Behaj est enseignant-chercheur à la faculté des sciences de Fès, il prépare un doctorat sous la direction conjointe de G. Arsac et de moi-même portant sur le concept de structuration du savoir.

portant sur les notions de familles libre, liée, génératrice, base, rang et dimension. Spontanément, étudiants et enseignants présentent très majoritairement une organisation logique (de type bourbakiste) qu'ils justifient par des arguments de rigueur. Béhaj leur demande ensuite où ils donneraient des exemples et des exercices, et lesquels. Or dans ce rapport à la pratique de résolution d'exercices et de problèmes où interviennent aussi les enseignements qui ont suivi celui d'algèbre linéaire, il est clair que se dessine une autre organisation (structuration) de ces concepts, plus "pragmatique", mais aussi plus proche de celle que nous proposons directement à nos étudiants.

Cette organisation est la suivante. Une fois les définitions d'espace et de sous-espace vectoriel posées, on peut introduire les familles génératrices. Celles-ci sont présentées comme un concentré de l'information dont on dispose sur le sous-espace, cette information se "propage" ensuite par combinaison linéaire. Ainsi il apparaît important de réduire au maximum la taille d'une famille génératrice. Si on pose aux étudiants la question : "quel critère doit satisfaire un vecteur d'une famille génératrice pour qu'on puisse le retirer sans que la famille perde son caractère générateur ?", ils donnent majoritairement une réponse rapide et correcte : "il faut et il suffit qu'il soit combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille". Cela fournit la définition d'une famille liée et le critère de dépendance. L'indépendance définie comme négation de la dépendance devient : "aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres". Du même coup il est évident qu'une famille génératrice minimale (dont on ne peut plus retirer de vecteur) est libre et vice versa (si une famille est libre, on ne peut plus lui retirer de vecteur). Par ailleurs, il est facile de voir qu'une famille libre maximale est génératrice. On obtient ainsi les trois caractérisations d'une base : famille libre maximale = famille génératrice minimale = famille libre génératrice. Il reste encore à relier ces trois caractéristiques à l'idée de base = système de représentation univoque de chaque vecteur. Ce résultat repose sur l'équivalence entre univocité de la représentation et indépendance.

Par ailleurs, en faisant des exercices, les étudiants comprennent vite que la définition précédente d'une famille liée n'est pas pratique car elle oblige à regarder pour chaque vecteur de la famille s'il est combinaison linéaire des autres. Un travail avec les étudiants pour "départiculariser" la définition débouche sur la caractérisation en "il existe une combinaison à coefficients non tous nuls qui vaut zéro". Cette définition et sa traduction (sémantiquement congruente) en langage formel correspondent à la définition habituelle.[46] Etablir la définition formelle de la dépendance linaire est alors une activité purement logique, elle peut toutefois être menée par les étudiants dans un contexte qui a du sens. Cette approche est un moyen de rendre les définitions formelles plus abordables.

[46] Il est frappant de constater dans le travail de Behaj que nombre d'étudiants, mais aussi d'enseignants, croient que la première définition est plus pratique que la définition formelle de la dépendance linéaire. C'est un signe de la confusion courante entre intuitif et pratique. Ce qui est déroutant en algèbre linéaire c'est justement que les définitions formelles les moins intuitives peuvent être les plus pratiques !

Reste ensuite à établir l'invariance du cardinal des bases d'un même sous-espace vectoriel. Cette question peut être abordée d'au moins trois façons structurellement différentes, illustrées dans l'histoire par les travaux de Grassmann (lemme de l'échange), Steinitz (recours aux équations) et Dedekind (récurrence). Chacune a à nos yeux ses vertus et ses difficultés. Toutefois, le recours aux systèmes d'équations linéaires est le plus facile à articuler avec la phase précédente. Cette démonstration reste néanmoins toujours difficile pour les étudiants, c'est pourquoi la compréhension de l'invariance du rang à travers la résolution des systèmes est pour nous un but plus important.

V. CONCLUSIONS

Conclure sur ce que nous venons de présenter n'est pas une tâche aisée, dans la mesure où cette présentation constitue déjà une synthèse de notre travail (et d'une partie de quelques autres). Aussi, plutôt que de risquer de nous paraphraser, nous allons nous permettre une petite digression sur notre histoire personnelle, pour permettre de jeter un regard différent sur la présentation qui précède, une sorte de perspective personnelle après la mise en perspective théorique.

Ayant commencé ma scolarité au plus fort de la réforme des mathématiques modernes, j'ai été habitué très jeune à la théorie des espaces vectoriels. En particulier, ma pratique de la géométrie s'est faite essentiellement dans ce cadre, l'espace étant pour moi avant tout $\mathbb{R}^3$, muni d'une structure affine euclidienne. Dans cette optique, un élargissement au delà de la dimension trois m'a toujours semblé assez naturel, et, dans mes études supérieures, j'ai pu faire le lien avec les espaces de Hilbert, sur lesquels l'usage du langage géométrique s'imposait de lui-même. Ma perception de la géométrie a vraiment évolué lorsque j'ai préparé le concours de l'agrégation. Un monde nouveau s'ouvrait alors à moi, où il m'a fallu apprendre jusqu'aux cas d'égalité des triangles. A bien des égards, le concours de l'agrégation offrait à un étudiant de mathématiques de ma génération l'occasion d'un "choc culturel" sur le terrain de la géométrie et à vrai dire, le normalien que j'étais regardait cette façon de faire de la géométrie avec scepticisme. Il me semblait (comme à beaucoup de mes camarades) qu'il fallait connaître tellement de résultats, alors que l'algèbre linéaire reposait sur si peu de connaissances!!! En outre, tracer de belles figures et raisonner sans l'appui de l'analytique n'était pas dans nos habitudes.

Si je fais part ici, brièvement, de ces quelques réflexions, ce n'est pas pour commencer mon autobiographie, mais parce que ces réflexions me semblent typiques d'une génération de mathématiciens.

Deux ans après que l'agrégation m'eut ouvert à de nouveaux horizons dans le domaine de la géométrie, avec en prime une meilleure vue d'ensemble de ce que j'avais appris jusque là en mathématiques, j'ai commencé mes recherches sur l'enseignement de l'algèbre linéaire. Les difficultés des étudiants me sont vite apparues, elles tranchaient avec mes souvenirs (assez frais) de mes propres études, moi qui avais particulièrement apprécié cette théorie, sur laquelle une part importante de mes connaissances mathématiques s'étaient construites.

Après le choc de l'agrégation, c'est le début de mes recherches historiques qui m'a vraiment ouvert des horizons insoupçonnés. Jusque là, j'aurais pu me définir comme un amateur d'algèbre formelle et structurelle, comme ma génération en compte beaucoup, de ceux que la géométrie des figures aussi bien que les rapports de l'analyse avec les sciences physiques rebutent. L'analyse du contexte historique m'a montré que cette vision structurelle des problèmes mathématiques n'était que la partie émergée de l'iceberg et que, en profondeur, le monde des objets mathématiques révélait une réalité plus complexe mais aussi peut-être plus significative.[47] Nous n'allons pas nous lancer ici dans ce qui pourrait s'apparenter à la psychanalyse d'une génération de mathématiciens. Ce qu'il nous importe de dire, c'est que, face à ce hiatus entre les difficultés des étudiants et notre position d'enseignant qui ne voyait que simplicité dans la théorie des espaces vectoriels, notre travail en histoire des mathématiques nous a permis de trouver un fil directeur, sans lequel notre travail didactique n'aurait pu exister tel que nous le présentons aujourd'hui.

La connaissance de l'histoire de l'algèbre linéaire aurait pu nous amener à un revirement total, faisant de nous un détracteur passionné du formalisme de l'algèbre moderne. Mais ma position n'est pas idéologique, dans le sens où ce n'est pas la question de savoir si des étudiants de première année d'université doivent ou non connaître la théorie axiomatique des espaces vectoriels qui m'interpelle d'abord en tant que chercheur en didactique des mathématiques. Aussi, mon travail est-il parti du présupposé que cette théorie est au programme des DEUG scientifiques français. Dans ce contexte, il m'importait d'étudier les difficultés liées à l'enseignement et à l'apprentissage de ce formalisme, en le liant à une pratique des mathématiques que l'étude de l'histoire m'avait révélée. De façon schématique, les trois angles d'attaque que j'ai développés plus haut se rattachent aux trois groupes de questions suivantes :

- Qu'est-ce que la théorie axiomatique des espaces vectoriels peut signifier pour un étudiant ? Quelle est sa fonction par rapport à ce que les étudiants connaissent déjà en mathématiques ? Cette question débouche inévitablement sur celle de la signification et de la fonction de l'approche structurelle de l'algèbre moderne dans l'enseignement universitaire.

- Comment le cadre géométrique permet-il de donner à la théorie des espaces vectoriels un substrat plus intuitif ? Quelles sont les limites de ce lien privilégié autant pour l'enseignement de la théorie des espaces vectoriels que pour celui de la géométrie ?

[47] L'histoire des mathématiques n'est sûrement pas le seul chemin pour arriver à une telle prise de consciente, ou en tous cas, à quelque chose de voisin. Beaucoup de mes camarades, à présent chercheurs en mathématiques, en sont la preuve.

- Comment l'organisation des concepts formels à l'intérieur de la théorie des espaces vectoriels peut-elle se construire selon une logique interne et dans une articulation avec des notions primitives issues de divers cadres et qui sont ainsi généralisées, unifiées et restructurées ? Ce point a été abordé au chapitre IV à travers le concept de rang.

D'une façon générale, l'enseignement de l'algèbre linéaire me semble être un terrain où de nombreuses interactions cognitives peuvent être développées. J'ai abordé cette question de façon périphérique dans la présentation que je viens de faire. Elle est aussi très présente dans le projet d'enseignement expérimenté à Lille. Plusieurs changements de cadres (Douady 1986), des interactions entre différents registres de représentation sémiotique (Duval 1993 et 1995)[48] et plus généralement des changements plus locaux de points de vue peuvent être activés dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire ; les aspects unificateur et généralisateur de la théorie des espaces vectoriels, la fonction que le formalisme y joue, leur donnent une importance particulière. Dans un travail de thèse en cours, Dias (1993, 1995) (cf. [13, II-8-§2]) utilise le terme de *flexibilité cognitive* pour désigner la mobilité entre les différents cadres, registres ou points de vue. Son travail tend à montrer que cette flexibilité cognitive est en général peu sollicitée par l'enseignement. Elle en étudie la fonction dans des tâches où l'on demande aux étudiants de donner divers types de représentations (cartésiennes et paramétriques) de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Cette analyse, qui prend un point d'entrée essentiellement cognitif, s'appuie également fortement sur une analyse historique. Dias examine en particulier la fonction des différents changements de cadres, registres ou points de vue dans la genèse du concept de rang (à partir de notre analyse dans [2]).

La recherche en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire a certainement encore beaucoup de questions à soulever et à examiner. Nous espérons que notre travail de recherche historique et l'utilisation que nous en avons faite dans nos recherches didactiques, selon le cadre théorique que nous avons explicité et exemplifié dans cette note, serviront aux recherches en cours ou à venir. Nos collaborations tant en France qu'à l'étranger [13, II-5 à 8] nous ont déjà permis des interactions fructueuses dans ce sens. De plus, le prolongement de notre réflexion épistémologique sur ce que nous avons désigné plus haut comme le vecteur géométrique nous a conduit à collaborer à des recherches en cours sur l'enseignement du vecteur dans le secondaire et a ainsi mettre à l'épreuve, dans un contexte différent de celui de l'algèbre linéaire, le cadre général et la méthodologie que nous avons présentés dans le chapitre I. Dans une perspective encore plus large, nous espérons que notre mise en perspective théorique et méthodologique des interactions entre recherches didactique et historique pourra aider à mieux problématiser cette dimension dans de futures recherches sur des questions d'enseignement portant sur des domaines mathématiques autres que l'algèbre linéaire.

[48] Voir aussi à ce sujet la travail de Pavlopoulou (1993 et 1994) et [13, II-8-§1].

BIBLIOGRAPHIE[49]

Artigue, M. (1991) : Epistémologie et Didactique, *Recherche en Didactique des Mathématiques* **10-2/3**, 241-286.

Bachelard, G. (1938) : *La formation de l'esprit scientifique,* 13° éd., Paris : Vrin, 1986.

Belhoste, B., Gispert, H. et Hulin, N. (eds) (1996) : *Les sciences au Lycée*, Paris : Vuibert.

Beth, W.E., Mays, W. et Piaget, J. (1957) : *Epistémologie génétique et recherche psychologique,* Etude d'épistémologie génétique I, Paris : P.U. F.

Bourbaki, N. (1948) : L'architecture des mathématiques, in *Les grands courants de la pensée mathématique,* présenté par F. Le Lionnais, nouvelle édition augmentée, Paris : Blanchard, 1962.

Bouscasse, J.-M et al. (1992) : *L'enseignement des vecteurs (quatrième, toisième seconde),* collection "contribution à l'enseignement de la géométrie", IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (1981) : Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **1-1**, 37-127.

Brousseau, G. (1983) : Les obsatcles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **4-2**, 165-198.

Brousseau, G. (1986) : *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques,* Thèse d'état, Université de Bordeaux 1.

Chevallard, Y. (1991) : *La transposition didactique*, 2ème éd., Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chauvat, G. (1988) : *A propos de l'enseignement de la translation au collège,* DEA de didactique des mathématiques, Université de Bordeaux 1.

Choquet, G. (1964) : *L'enseignement de la géométrie,* Paris : Hermann.

CIRADE (1989) : *Construction des savoirs - Obstacles et conflits,* Actes du colloque du CIRADE à Montréal, Ottawa : Arc éd.

Dias, M. (1993): Contribution à l'analyse d'un enseignement expérimental d'algèbre linéaire en DEUG A première année, Mémoire de DEA, Université de Paris 7.

Dias, M. et Artigue, M. (1995): Articulation problems between different systems of symbolic representations in linear algebra, in The proceedings of the 19th annual meeting of the international group for the Psychology of Mathematics Education, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brésil, 3 vols, 2:34-41.Dieudonné, J. (1964) : Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Paris : Hermann.

Dorier, J.-L. (1990) : *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire - Approches historique et didactique,* Thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier - Grenoble 1.

[49] Nous ne rappelons pas dans la bibliographie nos travaux qui figurent dans le dossier d'habilitation et dont la liste figure en tête de la note de synthèse.

Douady, R. (1986) : Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7-2**, 5-31.

Drouin, A.-M. (1991) : A propos de l'expression : l'enfant épistémologue, *ASTER* **12**, 27-37.

Durand-Guerrier, V. (1991) : *Les difficultés en logique des étudiants de premier cycle universitaire - Première approche*, Mémoire de DEA de Didactique des Disciplines Scientifiques, Université de Lyon 1.

Durand-Guerrier, V. (1996) : *Logique et raisonnement mathématique - Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*, Thèse de Doctorat de l'université de Lyon 1.

Duval, R. (1993) : Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **5**, Strasbourg : IREM, 37-65.

Duval, R. (1995) : *Sémiosis et pensée humaine - Registres sémiotiques et apprentissage intellectuel*, Bern : Peter Lang.

Granger, G. (1968) : *Essai d'une philosophie du style*, Paris : Armand Colin ; rééd., Paris : Odile Jacob, 1988.

Legrand, M. (1993) : Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères* **10**, 123-159.

Lê Thi Hoai, C (1995) : *Une étude des problèmes d'enseignement / apprentissage de la notion de vecteur au Viêt-nam*, Mémoire de DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

Lê Thi Hoai, C. et Comiti, C. (1995) Problèmes d'enseignement et d'apprentissage des vecteurs : une comparaison de résulatts d'élèves vietnamiens et français, in Comiti et al. (eds), *Didactique des disciplines scientifiques et formation des enseignants,* premier colloque régional des pays francophones du sud-est asiatique, Hanoï : Maison d'Edition de l'Education, pp. 318-325.

Lê Thi Hoai, C (1997) : *Etude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Vietnam et la classe de seconde en France*, Thèse de doctorat de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier - Grenoble 1 et Ecole Normale Supérieure de Vinh.

Lounis, A. (1989) : *L'introduction aux modèles vectoriels en physique et en mathématiques : conceptions et difficultés des élèves, essai de remédiation*, thèse de doctorat de didactique des sciences physqiues, Université de Provence, Aix-Marseille 1.

Malgrange, J.-L., Saltiel, E. et Viennot, L. (1973) : *Vecteurs, scalaires et grandeurs physiques*, encart pédagogique du Bulletin de la Société Française de Physique.

Ousman, R. (1996) : *Contribution à l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année d'université,* Thèse de doctorat de l'université de Rennes I.

Pavlopoulou, K. (1993): Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algébre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* **5**, Strasbourg: IREM, 67-93.

Pavlopoulou, K. (1994): *Propédeutique de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation sémiotique,* Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg 1), prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée.

Perrin-Glorian, M.-J. (1993) : Utilisation de la notion d'obstacle en didactique des mathématiques, *Cahier du Séminaire de Recherche / réflexion / Interaction*, année 1992-93, Grenoble : IUFM, 1-21.

Piaget, J. (dir.) (1967) : *Logique et connaissance scientifique*, Encyclopédie de la Pléiade, Paris : Gallimard.

Rajoson, L. (1988) : *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études des cas,* Thèse de doctorat de troisième cycle, Université d'Aix-marseille II.

Reich, K (1996) : Emergence of vector calculus in physics: the early decades, in G. Schubring (ed.), *Hermann Günther Grassmann (1809-1877) : Visionnary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar -Papers from a Sesquicentinnial Conference*, Boston Studies in the Philosophy of Science 187, Dordrecht : Kluwer, pp. 197-210.

Revuz, A. et G. (1963) : *Le cours de l'APMEP II- Espaces vectoriels*, Paris : APMEP.

Robert, A. et Boschet (1985) : *Acquisition des premiers concepts d'analyse sur R dans une section ordinaire de DEUG première année,* Cahier de didactique des mathématiques 7, IREM de Paris VII.

Robert, A. (1986a) : Didactique de l'enseignement supérieur : une démarche en première année de DEUG, *Actes de la IVème école d'été de didactique des mathématiques.*

Robert, A. (1986b) : *Une démarche dans l'enseignement supérieur*, Cahier de didactique des mathématiques 28, IREM de Paris VII.

Robert, A. (1987) : *De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire*, Cahier de didactique des mathématiques 47, IREM de Paris VII.

Robert, A. (1988) : Première année d'enseignement en DEUG scientifique : une démarche, *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique,* Grenoble : La pensée sauvage.

Robert, A. et Robinet, J. (1989) : *Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG,* Cahier de Didactique des Mathématiques 53, IREM de Paris VII.

Robert, A. et Tenaud, I. (1989) : Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **9-1**, 31-70.

Robert, A. (1990) : *Un projet long d'enseignement (algèbre et géométrie - licence en formation continuée)*, Cahier DIDIREM 9, IREM de Paris VII.

Robert, A. (1992) : Projets longs et ingénierie pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **12-2/3**, 181-220.

Robert, A. (1993) : Analyse du discours non strictement mathématiques accompagnant les cours de mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire, *Educational Studies in Mathematics* **28(1)**, 73-86.

Robert, A. et Robinet, J. (1993) : *Prise en compte du "méta" en didactique des mathématiques,* Cahier de DIDIREM 21, IREM de Paris VII.

Robert, A. et Robinet, J. (1996) : Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **16-2**, 145,176.

Robinet (1984) : *Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur*, Thèse de l'université de Paris VII.

Robinet, J. (1986) : *Esquisse d'une genèse des concepts d'algèbre linéaire,* Cahier de Didactique des Mathématiques 29, IREM de Paris VII.

Rogalski, M. (1990) : Pourquoi un tel échec de l'enseignement de l'algèbre linéaire?, in *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG Première Année*, Commission inter-IREM université, pp. 279-291.

Rogalski, M. (1991) : *Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année,* Cahier de Didactique des Mathématiques 53, IREM de Paris VII.

Rogalski, M. (1994) : L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année de DEUG A, *La Gazette des Mathématiciens* **60**, 39-62.

Rogalski, M. (1995) : Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel, que la dialectique outil/objet ne semble pas marcher, et qu'il n'ait pas apparemment de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire, *Séminaires DidaTech 1994-1995 - n°169,* 127-162.

Vergnaud, G. (1990) : La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10-2/3**, 133-170.

ANNEXE

QUELQUES REFLEXIONS SUR L'ENSEIGNEMENT DU VECTEUR GEOMETRIQUE DANS LE SECONDAIRE

Nous n'avons pas vraiment abordé cette question dans nos travaux, mais nous avons collaboré à la direction d’une thèse sur ce thème (Le Thi Hoai 1997), qui par ailleurs semble attirer l'attention de plusieurs chercheurs depuis quelques années (voir entre autres Chauvat 1988 et Bouscasse et al. 1992).

Dans le paragraphe 1 du chapitre III de ce texte nous avons analysé brièvement le processus de transposition didactique du vecteur géométrique jusqu'aux programmes actuels des classes de quatrième des collèges à la terminale scientifique des lycées. Notre hypothèse essentielle est que le vecteur géométrique tel qu'il est actuellement enseigné est en grande partie une création didactique qui vise à combler le manque qu'il y a entre les vecteurs de la physique et le vecteur algébrique tel qu'il apparaît dans l'enseignement universitaire d'algèbre linéaire. Rappelons que vecteur géométrique désigne pour nous le vecteur du plan ou de l'espace géométrique (vecteur libre et non segment orienté), défini par des propriétés géométriques et non comme élément d'une structure linéaire de dimension 2 ou 3. Ceci dit le vecteur géométrique est un outil efficace pour (mieux) faire de la géométrie et c'est le rôle officiel que lui assigne l'institution scolaire.

1. Analyse historique

L'analyse historique de la genèse du calcul vectoriel [13, I-1-§2 et 3] montre la difficulté qu'il y a eu à dégager un objet géométrique susceptible d'un calcul de nature algébrique rendant compte des propriétés géométriques. En effet, l'origine du calcul vectoriel vient de la critique, essentiellement exprimée par Leibniz, de la méthode analytique de Descartes. Leibniz récusait l'usage en géométrie d'un intermédiaire algébrique étranger au monde géométrique. Il reprochait à la méthode analytique à la fois de produire des calculs aveugles sans rapport avec l'intuition géométrique et d'user d'un repérage arbitraire. Il voulait créer un calcul géométrique intrinsèque qui aurait porté sur des quantités directement géométriques, rendant compte de la position comme le nombre rend compte des grandeurs.

La géométrie cartésienne se fonde essentiellement sur l'idée de mesure. Pour Descartes, les êtres géométriques peuvent être réduits à des données purement métriques. Dès lors, l'intuition sensible des figures, peu fiable aux yeux de Descartes, va pouvoir s'effacer pour laisser place au calcul algébrique relevant du seul entendement, donc beaucoup plus rigoureux. Ainsi l'algèbre à l'œuvre dans la méthode analytique est celle des nombres (qui pour Descartes comme pour ses contemporains sont essentiellement positifs). Au contraire, le rêve leibnizien consiste à construire une analyse[50] portant directement sur des grandeurs géométriques. Or, de l'idée de longueur d'un segment à celle de vecteur, qui réalisera le programme de Leibniz, il faudra près de deux siècles. Par exemple, l'introduction du négatif permettant de généraliser l'égalité AB + BC = AC à trois points alignés tels que B ne soit pas nécessairement entre A et C est encore assez problématique au milieu du 19° siècle pour que Grassmann la développe dans le détail dans l'introduction de son *Ausdehnungslehre.*

En fait l'analyse épistémologique du développement historique montre que la constitution du calcul vectoriel a nécessité une profonde réflexion dialectique entre intuition géométrique et calcul algébrique. C'est une constante que l'on a pu observer dans tous les travaux des mathématiciens ayant joué un rôle fondamental dans l'émergence du calcul vectoriel, Grassmann et Hamilton en sont les deux figures les plus représentatives. Dans tous les travaux fondamentaux sur le sujet, cette dialectique a eu pour effet d'introduire une notion de génération des objets géométriques par combinaisons d'autres objets. En ce sens le rôle important joué par la multiplication, que ce soit chez Grassmann ou chez Hamilton est significatif. De plus, la nature algébrique du calcul géométrique s'exprime, à l'opposé de l'approche cartésienne, comme un facteur interne visant à la caractérisation d'une certaine structure. Chez Grassmann, cela apparaît dans le rôle d'"architectonique" joué par la théorie générale des formes ([4], [5], [6] et [13, I-1-§3]), chez Hamilton, par l'explicitation des premières propriétés des structures algébriques.[51]

Ainsi la nature du vecteur géométrique ne réside ni dans un processus lié à une forme d'intuition géométrique, ni même dans une nécessité purement géométrique, elle est l'aboutissement nécessaire d'une mise en rapport dialectique de la structuration algébrique et de l'intuition géométrique.[52] Nous devons souligner ici que l'usage du terme "structuration algébrique" ne doit pas faire croire que le calcul vectoriel est par essence l'émergence de la théorie des espaces vectoriels en géométrie. En effet, il ne faut pas ici se laisser abuser par la similitude du vocabulaire. La théorie des espaces vectoriels est de nature axiomatique, les vecteurs algébriques ne sont pas construits, ils existent a priori et ne sont définis que par leurs propriétés structurelles. Le calcul vectoriel relève quant à lui d'une modélisation dynamique, l'objet se crée dans la combinaison algébrique en interaction avec l'intuition géométrique. De

[50] Il faut ici prendre ce terme au sens qu'il avait encore au 17° siècle, qui est proche du terme moderne de calcul. Le sens restreint moderne du terme analyse n'est apparu qu'après qu'une nouvelle branche des mathématiques se fût constituée autour de la notion de calcul infinitésimal.

[51] Il est intéressant de consulter sur ce point, la façon dont Granger (1968, 71-76) caractérise ce qu'il appelle le "style vectoriel". Malgré un point de vue théorique initial très différent, son analyse rejoint celle que nous présentons ici tout en lui donnant une dimension plus large.

[52] Le caractère nécessaire du vecteur est discutable, dans la mesure où il existe d'autres calculs géométriques comme le calcul barycentrique ou le calcul d'extension de Grassmann qui n'est pas entièrement réductible au calcul vectoriel. Cependant, le calcul vectoriel entretient avec ces autres calculs géométriques des rapports étroits qui laissent apparaître de fortes similitudes, nous autorisant à tout regrouper sous le même vocable.

plus, le rôle de la multiplication a été fondamental dans la genèse du vecteur géométrique, alors que la structure linéaire ne comporte pas de produit.[53]

En outre, l'histoire du calcul vectoriel est très liée à l'histoire de la physique. Dans son article, Reich (1996) montre bien l'importance des formules de Maxwell pour le développement du calcul vectoriel. Par ailleurs, elle montre que l'unification des notations vectorielles et les différents débats autour de cette phase de constitution (dans la deuxième moitié du 19° siècle) ont engagé essentiellement des physiciens et des mathématiciens intéressés par des questions de physique mathématique. Dans le même ordre d'idée, on notera que les premiers enseignements de calcul vectoriel se réalisent dans des institutions proches de la sphère savante des physiciens, principalement à propos de mécanique, de cinématique ou d'électromagnétisme. Dans ce contexte, ce sont les vecteurs physiques sous les différents aspects évoqués plus haut qui sont en jeu. L'origine dans la géométrie du calcul vectoriel, si elle a joué un rôle fondamental, n'a pas donné lieu à une production importante de traités visant à montrer la pertinence du calcul vectoriel dans ce domaine, c'est plus dans certaines branches de la physique que le calcul vectoriel s'est développé à partir du milieu du 19° siècle. De plus, en géométrie, le vecteur s'insère le plus souvent dans une approche analytique par les coordonnées. On peut ainsi dire qu'il y a eu une vectorialisation de la géométrie analytique mais pas réellement de géométrie vectorielle (synthétique). Il reste que cette géométrie des coordonnées intégrant l'outil vectoriel a permis de reformuler toute la géométrie élémentaire plane et spatiale et peu à peu, à partir des années cinquante, de prendre une place dominante dans les enseignements à des niveaux de plus en plus élémentaires de l'institution scolaire.

La réforme des mathématiques modernes radicalise cette approche en faisant du vecteur géométrique le prototype du vecteur algébrique et de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, le plan et l'espace affines géométriques. En réaction à ce radicalisme, les programmes actuels ont évacué ce que le vecteur géométrique avait d'algébrique. C'était oublier que le vecteur géométrique est algébrique par essence et que cette nature algébrique n'a nullement besoin de s'afficher par l'intermédiaire de l'espace vectoriel. Les opérations sur les vecteurs géométriques sont constitutives du concept même de vecteur géométrique :

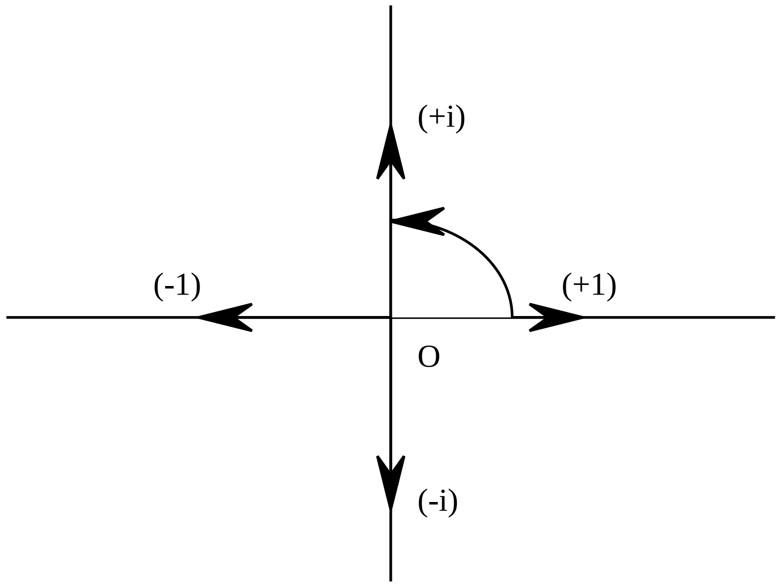
- La longueur est la base de l'algébrique depuis les Grecs.
- Le sens (sur une même direction) est ce qui permet de considérer des grandeurs négatives incontournables dans la constitution de l'addition.
- La direction enfin est ce qui vient de l'idée de multiplication.

Cette dernière hypothèse est plus difficile à comprendre. Mais regardons ce qu'est la multiplication de deux vecteurs. Dans l'algèbre géométrique des Grecs anciens, la multiplication

[53] Le produit dont il s'agit ici n'est pas le produit scalaire, il s'agit du produit vectoriel et de produits encore plus complexes. Grassmann définit trois sortes de produits qui jouent chacun un rôle fondamental dans sa théorie. Le produit extérieur a été repris par Elie Cartan dans sa théorie des algèbres extérieures, alors que le concept de produit régressif, d'abord ramené par dualité à un produit extérieur, a été récemment repris par Rota, qui en a donné une définition moderne sans dualité, en montrant l'intérêt d'une telle approche.

de deux nombres (c'est-à-dire de deux segments) est l'aire d'un rectangle. Si l'on passe du rectangle au parallélogramme apparaît dans la formule de l'aire le sinus de l'angle formé par les deux côtés, c'est-à-dire la position relative de leurs directions (l'idée de négatif implique ici la prise en compte de l'orientation). Ainsi comme le souligne Grassmann dans l'introduction de l'*Ausdehnungslehre*, c'est le parallélogramme et non le rectangle qui symbolise le vrai concept de multiplication si l'on considère les grandeurs géométriques orientées (en direction et sens). Ce point de vue souligne l'importance de la direction des grandeurs géométriques dans l'idée de produit.

Or une idée du même ordre est à l'œuvre dans le travail d'Argand (1806) sur la représentation géométrique des nombres complexes (ancêtre du calcul vectoriel). Partant de la représentation de (+1) et de (-1) comme deux grandeurs géométriques unitaires portées par une même droite issues du même point O mais de direction opposée, il s'agit de représenter la moyenne géométrique entre ces deux grandeurs : $\sqrt{(+1)\,(-1)}$, c'est ainsi qu'Argand arrive à la conclusion que les racines de (-1) ont nécessairement une direction médiane entre (+1) et (-1) (donc orthogonale a l'axe réel) :



Le point O apparaît ainsi comme le point d'articulation autour duquel se dessinent toutes les directions (orientées) du plan. Cette conception du plan complexe (il faudrait dire selon le vocabulaire de l'époque : le plan des quantités imaginaires) montre comment la recherche d'une racine pour (-1) (donc un problème lié à la multiplication) ouvre la représentation rectiligne des "nombres réels" sur le plan par la reconnaissance du point O comme centre d'articulation entre les deux grandeurs (-1) et (+1).

Cette approche dynamique de l'algèbre du vecteur géométrique qui trouve ses racines dans la mécanique (que Grassmann, Hamilton et tous les créateurs du calcul vectoriel avaient présente à l'esprit) ne peut se retrouver dans l'approche par l'algèbre linéaire où le concept de produit est resté essentiellement attaché à l'idée de produit scalaire. Il a fallu attendre l'algèbre multilinéaire et le produit tensoriel dans les algèbres extérieures d'Elie Cartan pour que les théories mathématiques reprennent en compte ce type de représentation.

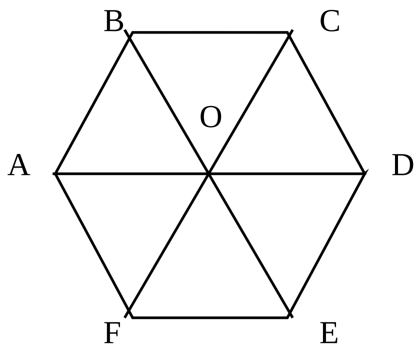
Ainsi la modélisation du vecteur géométrique comme prototype du vecteur algébrique ne peut à un niveau élémentaire rendre compte d'un aspect historique essentiel dans la constitution de ce concept. Nous allons voir que cet "écrasement" de l'algèbre du vecteur géométrique à l'algèbre linéaire (résultat de la vision descendante des mathématiques modernes) peut être interprété comme une des sources de difficultés dans l'enseignement du vecteur géométrique dans le secondaire.

Nous ne disons pas ici que l'absence dans l'enseignement du vecteur géométrique d'une problématique sur le produit est une "mauvaise chose". Nous relevons seulement son importance historique et nous donnons une interprétation possible de la non prise en compte dans l'enseignement actuel. Une approche du vecteur intégrant un ou plusieurs aspects du produit vectoriel assez tôt dans l'enseignement secondaire peut ne pas être une "bonne" option didactique, ou peut tout simplement ne pas s'avérer didactiquement viable. Nous ne trancherons pas sur cette question dans ce texte. Il nous importe pour l'instant d'élargir le champ des investigations en menant une analyse épistémologique la plus large possible.

2. Analyses de quelques difficultés

Dans son travail, Lê Thi Hoai a analysé un test comportant l'exercice suivant (cf. (Lê Thi Hoai 1995 et 1997) et (Lê Thi Hoai et Comiti 1995)) :

Soit un hexagone régulier ABCDEF dont le centre est O.



Parmi tous les vecteurs dont l'origine et l'extrémité sont prises dans l'ensemble des points {A,B,C,D,E,F,O}, indiquez tous ceux qui sont égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Or, ses analyses laissent paraître que seul un tiers des élèves français en début de seconde répondent correctement, alors qu'un quart ne prennent en compte que la longueur du vecteur pour répondre, ce qui les conduit à identifier jusqu'à 24 vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$. Certains donnent des réponses qui montrent une difficulté avec l'utilisation du mot sens, bien que ce problème soit plus aigu avec les élèves vietnamiens qu'avec les élèves français (en raison d'une ambiguïté dans le manuel utilisé). Ainsi certains élèves considèrent que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ car ils ont même longueur et même sens, mais que $\overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{AB}$ car ils ont même longueur mais des sens différents.

Lê Thi Hoai a distingué différents profils correspondant à des conceptions différentes de la notion de vecteur suivant que certaines caractéristiques sont ou non prises en compte.

Deux difficultés apparaissent donc ici.

La première est liée à la particularité du concept de sens. En effet le sens d'un vecteur n'est pas une notion absolue, elle ne se définit que relativement à des vecteurs ayant déjà même direction, de tels vecteurs ne pouvant alors avoir que même sens ou sens opposé. Dans l'enseignement du vecteur, le mot direction a eu à certaines périodes la double signification de direction et sens, on a parlé également de l'orientation du vecteur pour regrouper ces deux termes, on a aussi utilisé la notion de support, pour rendre compte de la direction (non orientée). Au delà de la difficulté purement lexicale, on voit l'intérêt qu'il peut y avoir à distinguer direction (non orientée) et sens, sachant que cette dernière notion ne se comprend que dans un rapport d'opposition pour des vecteurs de même direction.

La deuxième difficulté qui apparaît dans les résultats précédents concerne la réduction du vecteur à sa seule caractéristique de longueur. Elle montre donc une prégnance de l'approche métrique de la géométrie. On a vu plus haut que c'est une des caractéristiques essentielles de la géométrie de Descartes (qui en cela ne diffère pas de celle des Grecs anciens). Il y a donc dans la difficulté repérée ici une prégnance d'un modèle métrique qui a marqué l'histoire de la géométrie jusqu'au 19° siècle (même Leibniz dans sa critique de Descartes ne peut concevoir l'idée de grandeur géométrique négative). Comme nous l'avons souligné plus haut le dépassement de ce modèle s'est fait historiquement à travers l'élaboration de l'addition des grandeurs géométriques (qui produit les grandeurs négatives liées à la notion de sens) et de leur multiplication (qui produit les différentes directions). Ce rapprochement entre la genèse historique et les difficultés des élèves suggère que le modèle métrique agit comme un obstacle épistémologique pour la notion de grandeur orientée en géométrie. Néanmoins, dans le sens de ce que nous avons exprimé au chapitre I sur la notion d'obstacle, il nous semble qu'il faut être prudent dans ce type d'approche. A la suite de Leibniz, les mathématiciens ont cherché à établir un calcul géométrique intrinsèque, ils n'en n'ont jamais produit (à notre connaissance du moins) de faux qui auraient conduit à des erreurs d'interprétation de problèmes géométriques, ils ont par contre eu des difficultés à dépasser le modèle numérique classique. Les élèves eux se trouvent face à un nouveau concept qui est une grandeur orientée (que l'on ne leur a pas introduit comme solution à la recherche d'un calcul géométrique intrinsèque!), et dans son traitement, ils appliquent abusivement les schèmes opératoires du modèle numérique. Cette différence essentielle de position entre le mathématicien créateur et l'élève apprenant rend l'interprétation en terme d'obstacle délicate. En fait la première hypothèse que l'analyse historique suggère d'examiner et de mettre à l'épreuve est que le vecteur géométrique doit être introduit comme la solution à la recherche d'un calcul géométrique. Ce n'est que dans le cadre de cette hypothèse que la question de l'obstacle et donc de son franchissement peut prendre tout son sens. En accord avec cette hypothèse, il apparaît que l'addition et la multiplication des vecteurs (produit vectoriel) devraient être introduites très tôt et ne pas se réduire au calcul analytique sur les coordonnées. Il s'agirait en fait de montrer dans le contexte de la géométrie "pure" (sans coordonnées) comment peuvent s'établir des relations algébriques entre des grandeurs géométriques qui déboucheraient sur la caractérisation du vecteur géométrique. En d'autres termes les opérations algébriques de somme et de produit vectoriel deviendraient constitutives du concept même de vecteur, en accord avec le processus historique. Dans cette optique, la structure linéaire de l'ensemble des vecteurs géométriques (du plan et de l'espace) ne focalise plus tout l'aspect algébrique des vecteurs. Il ne s'agirait pas une fois les opérations de somme et de produit par un scalaire introduites de vérifier (sans le dire) la validité des axiomes de la structure d'espace vectoriel sur l'ensemble des vecteurs géométriques du plan. La problématique algébrique autour du vecteur ne serait plus celle d'une structure algébrique mais celle de la nature des opérations et de leur signification en terme géométrique, la question des propriétés de ces opérations serait seconde.

Dans le premier chapitre de ce texte (paragraphe 3-b), nous avons exprimé nos réticences, partagées largement par l'ensemble des didacticiens des mathématiques, sur les applications trop immédiates d'une analyse de la genèse historique dans l'enseignement. L'hypothèse que nous venons de formuler pourrait paraître contradictoire à cette position théorique, s'il n'était pas clair que c'est pour nous une hypothèse globale qui devrait guider une analyse didactique visant à élaborer une ingénierie, qui dépasse le cadre de ce travail. L'élaboration de cette ingénierie devrait prendre en compte non seulement l'aspect historique et épistémologique, mais aussi d'autres contraintes liées entre autres au contexte de l'enseignement de la géométrie et de l'algèbre au niveau des classes concernées. En particulier, le type d'approche que nous proposons semble a priori très ambitieux et risque de se heurter à des difficultés d'ordre cognitif, la recherche d'un calcul géométrique est-elle une problématique "viable" pour des élèves de quatrième ou même de seconde ? Répondre à ces questions, monter les expérimentations nécessaires, est un travail de longue haleine, sur lequel nous ne pouvons à l'heure actuelle que donner quelques pistes. Cependant, l'ampleur des difficultés liées à l'apprentissage du vecteur géométrique, qui ont résisté à plusieurs changements de programmes nous semble nécessiter un travail de fond, qu'un retour aux sources de l'histoire du concept de vecteur peut permettre d'entamer. Il nous semble aussi qu'un tel travail devrait se pencher sur la question du rôle des vecteurs dans l'enseignement de la physique. C'est une autre voie qui apparaît comme complémentaire et peut s'avérer plus riche sur le plan didactique.

En effet, plusieurs travaux de didactique de la physique ont souligné la difficulté des élèves à concevoir les grandeurs physiques de type vectoriel autrement que comme des mesures. Dans son doctorat, Lounis (1989) a montré à l'appui de plusieurs tests (en classe de seconde), que cette difficulté est très résistante. Il montre également, avec des outils statistiques, qu'elle est encore plus forte en physique qu'en mathématiques. Selon Lounis, une raison serait qu'en physique la longueur du vecteur désigne l'intensité de la grandeur représentée, ce qui est la donnée essentielle aux yeux des élèves. De plus, dans ses analyses, il montre que dans les manuels de Physique de seconde (et il fait l'hypothèse que cela ne diffère guère aux niveaux supérieurs) la plupart des exercices (environ 80%) où interviennent des vecteurs utilisent essentiellement des cas de vecteurs colinéaires, où les données sur la direction n'interviennent pas. De plus, il cite des extraits d'un Bulletin de l'Union des Physiciens datant de 1910, où cette difficulté est déjà soulevée, il poursuit en remarquant : "les difficultés des élèves liées aux aspects scalaires des grandeurs physiques vectorielles sont donc repérées depuis fort longtemps ; si une solution miracle était possible, elle aurait sans doute été trouvée depuis. D'où le problème posé aux didacticiens encore aujourd'hui." (op. cité, 147). Par ailleurs, dans l'analyse d'une enquête menée entre 1970 et 1972, sur vecteurs, scalaires et grandeurs physiques auprès d'étudiants de premier cycle universitaire, Malgrange et al. (1973) relèvent que : "si on donne deux vecteurs par leurs composantes, 80% des étudiants les additionnent correctement. Mais la proportion de réussite devient faible si on donne les vecteurs par leur direction et leur module, surtout s'il s'agit de vecteurs physiques : on ajoute les modules (des nombres) sans se poser le problème "d'ajouter" des directions" (op. cité, 12). En conclusion de cette enquête, les auteurs disent : " […] nous pensons avoir mis en évidence l'origine de certaines difficultés des étudiants, en particulier l'influence trop grande d'une "géométrie naturelle" mal articulée sur l'algèbre, et qui laisse dans l'ombre bien des aspects des relations entre forces, mouvement et géométrie des déplacements." (ibid., 13). Cette remarque nous semble à certains égards rejoindre l'analyse que nous faisions plus haut et qui nous a conduit à reposer la question des liens entre algébrique et géométrique dans l'approche du vecteur. Les auteurs semblent suggérer ici que l'articulation actuellement à l'œuvre dans l'enseignement entre ces deux caractères du vecteur laisse dans l'ombre plusieurs aspects physiques des grandeurs vectorielles. Il y aurait sûrement beaucoup de renseignements à tirer d'une étude plus fine des liens entre physique et mathématique dans la genèse historique du calcul vectoriel, en vue d'une meilleure coordination dans l'enseignement du vecteur en mathématiques et en physique. Lounis lui dit directement : "La question se pose par ailleurs de savoir si le calcul vectoriel ne prend pas plus de sens d'abord dans le cadre de l'enseignement de la physique élémentaire, avec tous les bouleversements et implications que cela pourrait entraîner au niveau de la chronologie habituelle des programmes". (op. cité, 153).

Nous nous garderons de prendre position par rapport à cette dernière affirmation. Néanmoins, les similitudes observées dans l'analyse de certaines difficultés dans l'apprentissage du vecteur à la fois en physique et en mathématiques nous poussent à penser qu'il serait bon de s'interroger sur les liens que ces deux enseignements peuvent entretenir, en remontant ici encore aux sources historiques.

Dans ce sens, Legrand (1993, 136-139) a expérimenté une situation d'introduction du vecteur en cours de mathématiques, à partir d'un problème "réel" qui s'apparente à une question de physique. Il s'agit de choisir un ordre de grandeur du poids à accrocher à une corde à linge pour la tendre de façon à ce qu'un blue-jeans accroché à cette corde (en deux points) ne touche pas le sol. Les analyses montre que le modèle métrique est dominant dans les réponses et Legrand propose une gestion de la situation, sous la forme d'un débat, permettant d'invalider les réponses majoritaires et de mettre en place une connaissance adaptée à la situation et conforme à celle de vecteur.

Ces quelques réflexions sur l'enseignement du vecteur géométrique dans le secondaire n'ont pas la prétention d'être exhaustives. En particulier, nous n'avons pas évoqué deux problèmes qui nous semblent néanmoins essentiels, à savoir :

- la difficulté à passer de la notion de segment orienté (ou vecteur lié à son origine) à celle de vecteur (libre) comme classe d'équivalence. On sait que les élèves ont du mal à se dégager de la représentation graphique, qui reste ambigüe sur la distinction entre la représentation d'une classe d'équipollence et celle d'un représentant de cette classe. Nous avons souligné plus haut que cette difficulté est une source de confusions, jusqu'à l'université, entre les cadres affine et vectoriel. Or le concept de classe d'équipollence est essentiel dans la définition des opérations sur les vecteurs. En effet, on ne peut additionner en général deux segments orientés, il faut choisir des représentants tels que l'extrémité du premier soit l'origine du second (reste à vérifier ensuite que cette opération est compatible avec l'équipollence, c'est-à-dire que quel que soit le couple de représentants, la somme obtenue est bien le représentant d'une seule et même classe)[54]. Ainsi la notion de classe d'équipollence est liée à la possibilité de définir une addition qui soit une "vraie" opération. En accord avec l'hypothèse émise plus haut, on trouve donc ici un point d'entrée qui peut peut-être permettre de mieux faire saisir la notion d'équipollence dans la dialectique entre algèbre et géométrie à travers laquelle le vecteur géométrique se constitue en tant qu'objet.
- l'insertion de l'outil vectoriel dans le cadre de la géométrie des coordonnées. S'il nous paraît évident que l'outil vectoriel enrichit de façon substantielle la méthode analytique, la question se pose cependant de savoir à quel niveau de l'enseignement du vecteur il est le plus approprié d'introduire la représentation analytique. Il nous semble qu'il peut y avoir un danger à introduire trop tôt ce type de représentation, si l'on veut que l'aspect algébrique des opérations vectorielles (addition et multiplication vectorielle) prenne un sens suffisamment stable dans le contexte d'une géométrie sans coordonnées. Pour bien faire saisir l'intrication très spécifique du géométrique et de l'algébrique dans la constitution du vecteur et des opérations qui lui sont

[54] Néanmoins, dans une approche par la notion de force, les vecteurs sont en général tous liés à la même origine et l'addition se fait par la règle du parallélogramme, ce qui est conforme au sens physique de la résultante de deux forces.

attachées, il semble préférable de ne pas introduire les coordonnées trop tôt, celles-ci risquant de cantonner l'aspect algébrique dans le seul cadre numérique. Par ailleurs, la représentation par les coordonnées est source de nouvelles difficultés dans la confusion entre segment orienté et vecteur : par exemple, certains élèves confondent les coordonnées du vecteur avec celles de l'extrémité d'un représentant.

Ces questionnements restent pour nous encore largement ouverts. Cependant, il nous semble qu'une référence plus forte aux origines du calcul vectoriel, principalement quant à la dialectique entre algèbre et géométrie dans l'élaboration de l'addition et de la multiplication vectorielles et quant aux liens entre mathématiques et physique, peut permettre une réflexion selon les directions esquissées plus haut, qu'il nous semble important d'exploiter. Le travail de Lê Thi Hoai est un premier pas dans ce sens.

Le laboratoire Leibniz est fortement pluridisciplinaire. Son activité scientifique couvre un large domaine qui comprend aussi bien des thèmes fondamentaux que des thèmes très liés aux applications, aussi bien en mathématiques qu'en informatique.

Les recherches sur les Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain et la didactique des mathématiques ouvrent cette pluridisciplinarité sur les sciences humaines, elles jouent un rôle particulier en favorisant les coopérations entre différentes composantes du laboratoire.

* mathématiques discrètes et recherche opérationnelle
* logique et mathématique pour l'informatique
* informatique de la connaissance
* EIAH et didactique des mathématiques

Les cahiers du laboratoire Leibniz ont pour vocation la diffusion des rapports de recherche, des séminaires ou des projets de publication réalisés par des membres du laboratoire. Au-delà, Les cahiers peuvent accueillir des textes de chercheurs qui ne sont pas membres du laboratoire Leibniz mais qui travaillent sur des thèmes proches et ne disposent pas de tels supports de publication. Dans ce dernier cas, les textes proposés sont l'objet d'une évaluation par deux membres du Comité de Rédaction.

Contact Gestion & Réalisation : Jacky Coutin
Directeur de la publication : Nicolas Balacheff
ISSN : 1298-020X