



HAL
open science

Étude exploratoire de la prédiction en temps réel des mouvements des navires sur la houle

Jean-Michel Forestier

► **To cite this version:**

Jean-Michel Forestier. Étude exploratoire de la prédiction en temps réel des mouvements des navires sur la houle. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2005. Français. NNT: . tel-00011323v2

HAL Id: tel-00011323

<https://theses.hal.science/tel-00011323v2>

Submitted on 12 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ENSC -2005 n° 37

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par
Monsieur Jean-Michel FORESTIER

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine :
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Sujet de la thèse :

**Étude exploratoire de la prédiction en temps réel
des mouvements des navires sur la houle**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 28 février 2005 devant le jury composé de

Laurent DESVILLETES	Professeur	Examineur
Isabelle GALLAGHER	Professeur	Rapporteur
Christophe HAZARD	Chargé de recherche	Rapporteur
Jean-Marc QUÉNEZ	Ingénieur en Chef de l'Armement	Examineur
Frédéric HÉLEIN	Professeur	Directeur de thèse

Centre de Mathématiques et Leurs Applications
ENS CACHAN/CNRS/UMR 8536
61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

À mon père qui par son âme de poète m'a appris à croire au rêve.

*Les vagues naissent de l'océan et s'y perdent, les flammes montent puis s'éteignent,
le soleil surgit puis disparaît. Ainsi tout trouve sa source dans la spatialité de la
conscience et y retourne.*

Vijñānabhairavatantra, stance 110, adapté de la traduction de Daniel Odier

Remerciements

Je voudrais avant tout remercier le professeur Frédéric Hélein, d'abord d'avoir accepté de diriger cette thèse alors que le sujet traité n'était en rien relié à ses activités, ensuite pour sa direction éclairée et bienveillante, ce qui n'excluait pas la fermeté. J'ai passé sous sa direction quatre ans de totale liberté tout en étant guidé quand cela était nécessaire. Sa rigueur, adaptée aux besoins d'un ingénieur, ainsi que sa profonde connaissance des liens entre les mathématiques et la physique ont fortement influencé le contenu de cette thèse.

Je voudrais aussi remercier le professeur Isabelle Gallagher ainsi que Christophe Hazard d'avoir accepté d'être rapporteurs et à ce titre d'avoir eu le courage de se plonger dans les innombrables équations que comporte ce mémoire. Je voudrais enfin remercier le professeur Laurent Desvillettes et l'ingénieur en chef de l'Armement Jean-Marc Quénez d'avoir accepté de distraire de leur temps pour être membres du jury.

Durant ces quatre années, l'environnement scientifique et humain du Centre de Mathématiques et Leurs Applications a constitué un cadre de travail idéal et je voudrais remercier Véronique Almodovar, Micheline Brunetti, Virginie Pouchont et Pascal Bringas pour leur amabilité et leur efficacité dans le traitement des questions administratives et informatiques.

Enfin, j'ai une pensée particulière pour Geneviève qui m'a constamment soutenu et qui dans les moments de doute a toujours donné une petite impulsion dans la bonne direction. J'ai ainsi pu aller jusqu'au bout de toutes les idées que je voulais explorer. Cette thèse ne serait pas ce qu'elle est sans elle.

Résumé

L'objectif de l'étude est d'établir un modèle de comportement de l'ensemble navire et eau l'entourant permettant de prédire à court terme (10-15s) et en temps réel les mouvements du navire sur la houle. L'approche proposée consiste 1) à établir une équation d'évolution autonome $de/dt = f(e)$ de l'ensemble navire et eau, 2) à observer à chaque instant les variables d'état e à partir de mesures physiques. Le modèle f est établi par une mise en équations en fluide parfait et incompressible. Le potentiel et sa dérivée temporelle sur la surface libre ou sur la carène sont des variables d'état possibles pour l'eau. Ces grandeurs sur la surface libre peuvent être observées à partir de la mesure de sa dénivellation. L'observabilité de ces grandeurs sur la carène à partir de la mesure de la pression est un problème ouvert. Pour obtenir un modèle indépendant du temps, la mise en équations est développée en perturbations à partir d'une solution d'ordre zéro elle-même indépendante du temps.

Mots-clés : mécanique des solides - écoulement potentiel avec surface libre - théorie des systèmes - observateur - méthode de perturbations

Abstract

The aim of this study is to establish a model of the joint behaviour of a ship and the surrounding water allowing for the short-term (10-15s) real-time prediction of the motion of the ship on a swell. The proposed approach consists of 1) establishing an autonomous evolution equation $de/dt = f(e)$ for the entire system of ship and water, and 2) observing the state variables e from physical measurements at each time. The model f is based on the hypothesis of a perfect and incompressible fluid. The potential and its time derivative on the free surface or on the hull can be used as state variables of the water. These variables on the free surface can be observed from measurement of its height. The observability of these variables on the hull from measurement of fluid pressure is an open question. To obtain a time-independent model, a perturbation method with an order zero solution not depending on time is applied.

Key words : solid mechanics - free surface potential flow - system theory - observer - perturbation method

Table des matières

Introduction	1
1 Expression du besoin	6
2 État de l'art	13
2.1 Prédiction des mouvements à court terme	13
2.1.1 Méthodes utilisant une représentation d'état	13
2.1.2 Méthodes utilisant une représentation des relations entrées/sorties	16
2.1.3 Études menées pour la frégate La Fayette et le porte-avions Charles de Gaulle	17
2.2 Prédiction des mouvements à moyen terme	18
2.3 Bassins à houle numériques	18
3 Approche envisagée pour satisfaire le besoin	19
3.1 Hypothèses adoptées pour la mise en équations	23
3.1.1 Pour le navire	23
3.1.1.1 Corps rigide	23
3.1.2 Pour le fluide	23
3.1.2.1 Écoulement irrotationnel	23
3.1.2.2 Fluide incompressible	24
3.1.2.3 Profondeur finie	24
3.1.2.4 Fluide au repos à l'infini horizontal	24

4	Mises en équations avec conditions aux limites exactes	26
4.1	Mise en équations du système navire	26
4.1.1	Équation d'évolution couplée	28
4.1.2	Équation d'évolution découplée	30
4.2	Mises en équations du système fluide	32
4.2.1	Conditions à satisfaire	33
4.2.1.1	Conditions de champ	33
4.2.1.2	Conditions aux limites	35
4.2.2	Mises en équations	43
4.2.2.1	Variables d'état φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$	45
4.2.2.2	Variables d'état φ_C et $\partial\varphi_C/\partial t$	51
4.2.2.3	Action du fluide sur le navire	55
4.3	Mises en équations du système navire + fluide	57
4.3.1	Variables d'état fluide φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$	60
4.3.1.1	Équation d'évolution navire	60
4.3.1.2	Équation d'évolution fluide	66
4.3.1.3	Mer numérique	67
4.3.2	Variables d'état fluide φ_C et $\partial\varphi_C/\partial t$	68
4.3.2.1	Équation d'évolution navire	68
4.3.2.2	Équation d'évolution fluide	71
5	Mises en équations avec conditions aux limites développées en perturbations	73
5.1	Mise en équations du système navire	74
5.1.1	Équation d'évolution couplée	74
5.1.2	Équation d'évolution découplée	76
5.2	Mises en équations du système fluide	77
5.2.1	Développement des conditions à satisfaire	77
5.2.1.1	Condition de champ	77
5.2.1.2	Conditions aux limites	77
5.2.1.3	Action du fluide sur le navire	79

5.2.2	Mises en équations	82
5.2.2.1	Variables d'état $\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}$ et $\partial\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}/\partial t$	82
5.2.2.2	Variables d'état $\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}$ et $\partial\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}/\partial t$	96
5.3	Mises en équations du système navire + fluide	106
6	Identification des modèles	107
6.1	Identification de l'équation d'évolution	108
6.2	Identification de l'effet des entrées	109
6.3	Conditions d'identification des modèles	109
7	Satisfaction du besoin	110
	Conclusion	112
	Bibliographie	114
ANNEXES		
A	Notations	117
B	Abrégé de théorie des systèmes physiques	140
C	Mécanique des corps rigides ou peu déformables	146
D	Représentations des potentiels	176
E	Application de la méthode des perturbations au mouvement d'un corps peu déformable	195
F	Application de la méthode des perturbations à la mécanique des fluides parfaits et incompressibles avec surface libre en présence d'un corps flottant	212
G	Paramétrage des rotations	277
H	Programmes MuPAD	281
I	Expression de la dérivée d'une distribution donc l'argument est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}	330

Table des figures

1.1	Altitude de la surface libre	7
1.2	Altitude de la surface libre (suite 1)	7
1.3	Altitude de la surface libre (suite 2)	8
1.4	Procédure d'appontage	8
1.5	Spectre de mer du vent	10
1.6	Spectre de houle monodirectionnelle	11
1.7	Spectre de mer confuse	11

Introduction

Depuis que les navires existent, leurs mouvements sur la houle ont toujours été une source de difficultés de mise en œuvre. Les progrès techniques aidant, les navires militaires comme civils sont depuis environ un demi-siècle stabilisés en roulis. Les moyens employés sont variés et dépendent du contexte. Des cuves passives ou actives sont utilisées si la stabilisation doit être efficace pour le navire à l'arrêt ou à faible vitesse d'avance, des ailerons de stabilisation si elle n'est nécessaire que pour une vitesse d'avance plus élevée.

Lors du lancement des études de la frégate La Fayette et du porte-avions Charles de Gaulle au milieu des années 80, les progrès de l'automatique ont permis d'envisager une stabilisation plus performante que ce qui existait alors et une prédiction des mouvements, les deux étant souhaitables pour améliorer les capacités opérationnelles de ces navires. Les objectifs initiaux dans ces domaines (et les modélisations hydrodynamiques utilisées) sont décrits dans [10]. Les études préliminaires ont rapidement conduit à restreindre ces objectifs.

La principale limitation est venue du fait qu'il n'existe actuellement pas de modèle de comportement de l'ensemble navire + houle autonome. L'hydrodynamique navale a jusqu'à présent orienté ses travaux en tenue à la mer, autre nom des mouvements sur la houle, avant tout vers le calcul des mouvements sur une houle donnée. La modélisation de la houle n'est pas incluse dans ces modèles; elle en est une entrée. La prédiction des mouvements est impossible avec de tels modèles puisque la houle n'étant pas modélisée, ne peut pas être prédite.

L'inadéquation des modèles hydrodynamiques est moins gênante pour la stabilisation : l'automatique pallie les insuffisances de la modélisation. La houle est considérée comme une perturbation (une entrée) non modélisée et les lois de commande doivent être suffisamment robustes pour stabiliser le navire dans

ces conditions. Ceci a quand même conduit à revenir à des lois de commande par retour de sorties (commandes PID avec en entrées les mouvements), alors que des lois par retour d'état, incluant l'état houle et donc sa modélisation, plus performantes étaient prévues au départ.

Une autre limitation est venue du fait que la modélisation de la tenue à la mer est complètement disjointe de la modélisation de la manœuvrabilité. Ces modélisations répondent en effet à des besoins différents : mouvements sur la houle pour la tenue à la mer, réponse aux braquages des safrans de gouvernail pour la manœuvrabilité. Elles concernent des domaines de fréquences de mouvements différents : fréquences moyennes (5 à 30 s) pour la tenue à la mer, basses fréquences (10 s à l'infini) pour la manœuvrabilité. Ceci a conduit à des lois de commande des ailerons de stabilisation, issues du modèle de tenue à la mer, indépendantes de celles de la compensation de gîte par masses mobiles, issues du modèle de manœuvrabilité. Pour les automaticiens, vu le recouvrement du domaine de fréquences de ces modèles, un couplage entre ces lois et donc un modèle unique aurait été souhaitable.

Toutes ces limitations proviennent uniquement de l'inadéquation des modèles hydrodynamiques utilisés : l'état de l'art de l'hydrodynamique navale ne permet pas de fournir aux automaticiens les modèles qu'ils souhaitent. L'objectif de la présente étude est de commencer à pallier cette situation.

Prédiction vs. stabilisation

Pour un navire, deux groupes de mouvements sur houle sont distingués :

- les mouvements dits «verticaux» : cavalement–pilonnement–tangage ;
- les mouvements dits «horizontaux» : embardée–roulis–lacet.

En théorie linéaire et si le navire a un plan vertical et longitudinal de symétrie, ce qui est généralement le cas, les mouvements de ces deux groupes sont découplés.

Fondamentalement, l'idéal serait de stabiliser tous les mouvements d'un navire, mais pour cela il faudrait disposer d'actionneurs suffisants. Pour les mouvements verticaux, les efforts mis en jeu sont trop importants pour que des actionneurs raisonnables (ailerons, masses mobiles) aient une action. À défaut de stabiliser ces mouvements, il faut au moins les prédire. Pour les mouvements horizontaux par contre, des actionneurs raisonnables peuvent agir. Ces mouvements sont donc stabilisables. La différence entre les deux groupes porte

uniquement sur la possibilité d'action, pas sur les modèles hydrodynamiques utilisés, qui sont les mêmes.

La présente étude ne traite que de la prédiction. Tout progrès dans ce domaine se retrouvera intégralement dans la stabilisation par la capacité d'anticipation donnée aux lois de commande ; c'est cette propriété qui était visée avec la commande par retour d'état prévue initialement.

Description de l'étude

Les options techniques possibles pour aller vers l'objectif fixé sont multiples. De façon à définir des critères de choix, nous examinons dans un premier temps le besoin relatif à la prédiction. Ensuite, un état de l'art est dressé. Le cœur de l'étude est ensuite abordé. La modélisation de la prédiction consiste à établir une équation d'évolution autonome, c.-à-d. sans entrées :

$$(1) \quad \frac{de}{dt} = f(e)$$

de l'ensemble navire + fluide, telle que le vecteur d'état e soit si possible mesurable ou sinon observable. Les variables d'état navire sont ses positions et vitesses et sont mesurées aujourd'hui avec précision. Le choix des variables d'état fluide est libre tant qu'elles représentent complètement l'évolution du fluide. Ce choix dépend des possibilités technologiques de mesure de l'état fluide.

L'approche choisie pour établir les modèles fluide possibles est de les déduire des équations de la mécanique des fluides, ou plus exactement de ce nous savons manipuler de ces équations. Dans un premier temps, les équations d'évolution du fluide satisfaisant exactement les conditions aux limites, mais sous l'hypothèse d'un écoulement à potentiel scalaire, sont établies pour deux vecteurs d'état fluide : φ et $\partial\varphi/\partial t$ sur la surface libre pour le premier modèle et les mêmes grandeurs sur la carène pour le second (φ est le potentiel). Les modèles obtenus seraient utilisables dans un logiciel de calcul mais pas en modélisation de représentation : tous les opérateurs (la fonction f de (1)) varient avec le temps, ce qui interdit toute identification.

Dans un deuxième temps, ces modèles sont développés en perturbations de façon à obtenir des opérateurs indépendants du temps (si le mouvement d'ordre 0 l'est). Ces développements sont effectués jusqu'à l'ordre 3. Le premier objectif de cette prise en compte des non-linéarités est que ces modèles, qui sont au départ des modèles de tenue à la mer, puissent aussi modéliser la manœu-

vrabilité, qui est très non linéaire. Un autre objectif, plus lointain, est qu'ils puissent aider à modéliser le phénomène de regroupement de houle. Cette modélisation est nécessaire pour la prédiction des périodes d'accalmie des mouvements.

Le fait d'utiliser comme variables d'état fluide φ et $\partial\varphi/\partial t$ au lieu de la dénivellation de surface libre et sa dérivée temporelle, comme c'est le cas habituellement, permet d'éliminer du problème la position de la surface libre. Ceci donne un développement en perturbations plus systématique.

La détermination à chaque instant des variables d'état fluide à partir de mesures est l'autre point nécessaire à la prédiction. La mesure de la dénivellation de la surface libre autour du navire définit φ et $\partial\varphi/\partial t$ sur cette surface. La détermination de ces grandeurs à partir de cette mesure nécessite un observateur. Si seules des mesures sur la carène sont disponibles, φ et de $\partial\varphi/\partial t$ sur la carène peuvent peut-être être observés à partir de la mesure de la pression. Ce problème est ouvert.

La construction de l'observateur est entièrement déterministe contrairement aux approches habituelles, qui sont issues des théories de traitement du signal et donc stochastiques. Dans celles-ci, les observateurs, qui deviennent des estimateurs, sont optimaux *statistiquement*, c.-à-d. pour un horizon de temps supposé infini (en pratique 15 à 20 mn). Le besoin étant la prédiction des mouvements à court terme (entre 0 et 80 s), l'approche déterministe est plus pertinente. Ceci dit, ces approches ne sont pas opposées ; il est possible de passer continûment de l'une à l'autre.

Organisation du mémoire

La lecture du texte principal est linéaire. Les développements particuliers sont systématiquement reportés en annexes. Chacune de ces annexes est le plus indépendante possible du texte principal et des autres annexes. Ceci entraîne quelquefois des répétitions. Quand une recopie d'équation à l'identique est inévitable, la référence de l'équation d'origine est indiquée dans le texte ou à droite de l'équation recopiée.

De même, la lecture de chaque annexe est linéaire. Elles ont leur propre table des matières et leur propre bibliographie. Les références dans une annexe se rapportent à sa bibliographie.

Les notations mathématiques utilisées dans cette étude suivent des conventions particulières. Celles-ci, ainsi que la signification des variables utilisées dans le texte principal, sont exposées en annexe A.

Pour une première lecture, les chapitres 4 et 5 ainsi que les annexes peuvent être ignorés. Dans un second temps, ces chapitres peuvent être survolés, sans trop entrer dans la compréhension des équations. L'annexe B, qui constitue la base théorique voire philosophique sur laquelle repose l'établissement des modèles peut aussi être lue avec profit. Ensuite, en fonction du courage du lecteur, les chapitres 4 et 5 et les autres annexes peuvent être approfondis. Toutes les parties du mémoire interagissant les unes avec les autres, sa compréhension ne peut être que progressive.

Chapitre 1

Expression du besoin

L'amélioration des capacités opérationnelles des porte-avions, pour l'appontage des avions et des hélicoptères, et des frégates, pour l'appontage des hélicoptères et des drones, nécessite une prédiction en temps réel des mouvements du navire : quelles seront les positions et vitesses du navire dans les x prochaines secondes ? Plus précisément, ce besoin se décompose en

- une prédiction à moyen terme (60-80 s pour les avions, le prochain extrema pour les hélicoptères) de l'enveloppe des mouvements ;
- une prédiction à court terme (10-15 s pour les avions¹, le prochain extrema pour les hélicoptères) des mouvements eux-mêmes.

Prédiction à moyen terme

Le besoin de prédiction à moyen terme vient du fait que la houle réelle est répartie en groupes : l'amplitude des crêtes et des creux est modulée plus ou moins régulièrement (cf. figure 1.1). Ce phénomène est bien connu des marins et des surfers : les uns redoutent, les autres attendent les (trois) grandes vagues successives qui arrivent plus ou moins périodiquement. Pour les marins, la prédiction des moments d'accalmie de la houle, et donc des mouvements, serait utile pour choisir une fenêtre temporelle d'opération.

Pour l'appontage des avions, cette fenêtre détermine l'instant de déclenchement du dernier virage (cf. figure 1.4). L'intervalle de temps entre ce déclenchement et l'appontage donne l'horizon de prédiction à moyen terme demandé.

¹Cette fourchette est issue d'une appréciation des officiers d'appontage. Elle n'est pas le résultat d'une étude des spécifications de l'appontage automatique.

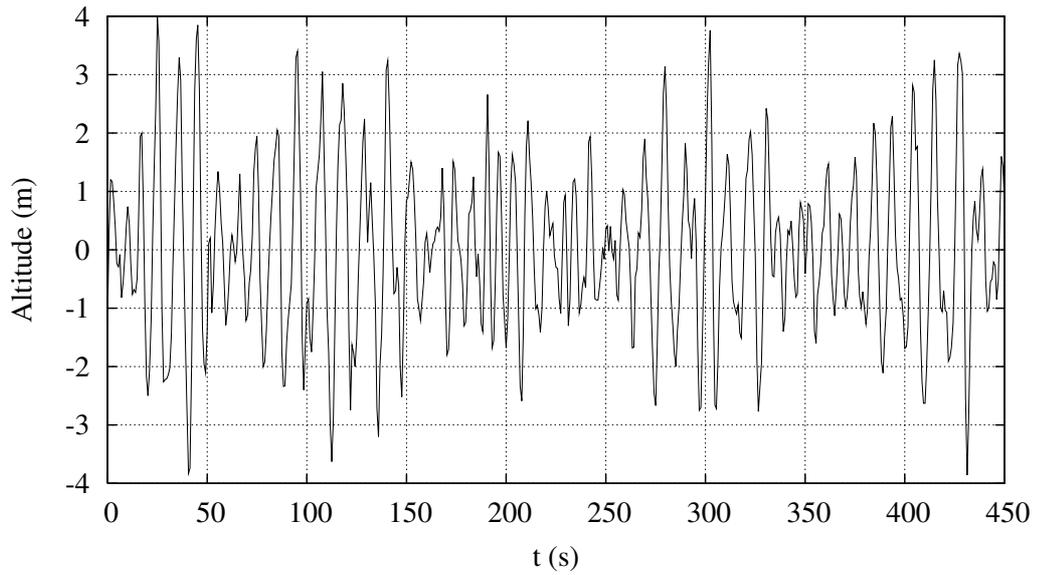


FIG. 1.1 – Altitude de la surface libre⁴ – [Bouée Datawell directionnelle 2004/02/01, 1 h GMT – Long. : -5.5° , Lat. : 48.3° – H_s^5 : 4.9 m]

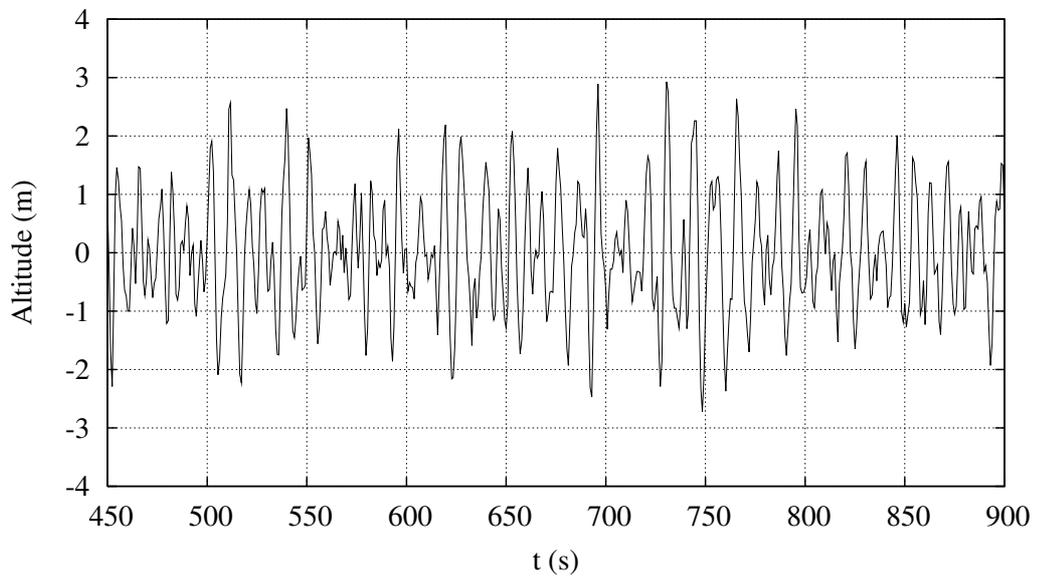


FIG. 1.2 – Altitude de la surface libre (suite 1)

⁴Ces mesures ont été aimablement fournies par le Bassin d'essais des carènes.

⁵ H_s : hauteur (= différence d'altitude entre les crêtes et les creux) significative de la houle, définie comme quatre fois la valeur quadratique moyenne de l'altitude de la surface libre.

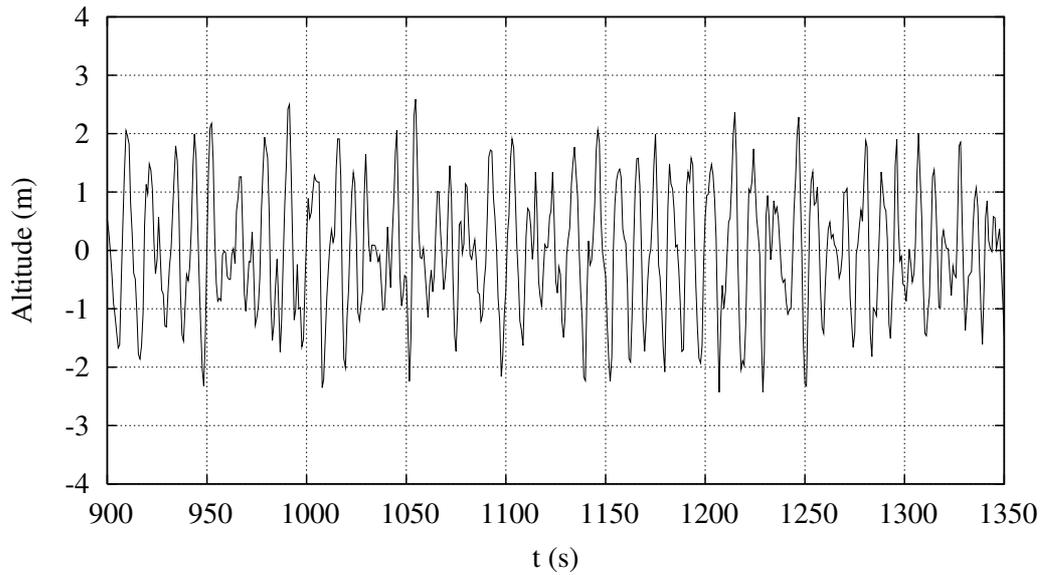


FIG. 1.3 – Altitude de la surface libre (suite 2)

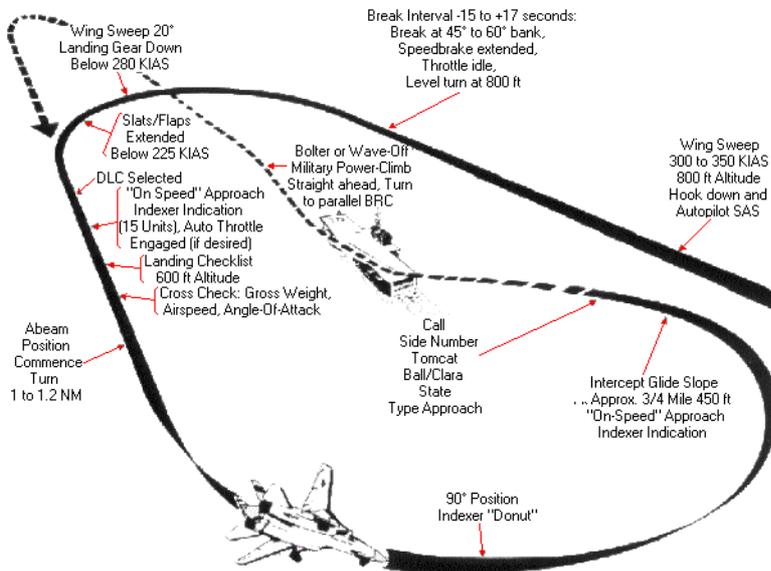


FIG. 1.4 – Procédure d'atterrissage⁶ © U.S. Navy

⁶Cette procédure est dans son principe identique pour tous les avions. Les détails de cette figure sont pour un avion F-14 Tomcat.

Cette prédiction est moins cruciale pour l'appontage des hélicoptères puisque le pilote maîtrise jusqu'au dernier moment l'instant d'appontage, mais elle leur serait quand même utile : diverses procédures sont utilisées, une est d'attendre un mouvement important du navire et de se poser juste après, une autre est d'attendre une accalmie des mouvements.

La modulation de l'amplitude des crêtes et des creux de la houle est un phénomène assez irrégulier. La suite de l'enregistrement de la figure 1.1 est montrée en figures 1.2 et 1.3. La houle est beaucoup moins modulée entre 450 et 900 s qu'entre 0 et 450 s ; et elle l'est encore moins entre 900 et 1350 s. Ensuite la modulation reprend.

Prédiction à court terme

Pour les avions, la prédiction à court terme concerne le guidage final (appontage sur but futur) et l'autorisation ultime d'appontage. Cette prédiction doit être valide pour le navire en accélération : à chaque appontage le navire est mis en accélération, ce qui a pour effet de «casser» temporairement le tangage (et il est ensuite freiné pour pouvoir réitérer cette opération). Ces accélérations et freinages sont évidemment très faibles en valeur absolue. Ce phénomène demande à être analysé plus précisément qu'il ne l'est aujourd'hui. La validité de la modélisation dans cette situation est impérative : le tangage est le mouvement le plus important à prédire et c'est lui qui est modifié par cette procédure. Par contre, la modélisation n'a à être valide qu'en route rectiligne : durant toutes les opérations aviations, le navire garde un cap constant au degré près.

La prédiction à court terme est moins importante pour les hélicoptères : le pilote voit constamment les mouvements du navire et peut donc les anticiper. Par contre elle est une nécessité pour l'appontage des drones hélicoptères : leur appontage doit être totalement automatique.

État de mer

Les prédictions tant à moyen terme qu'à court terme doivent être valides pour des houles multidirectionnelles : une mer réaliste est toujours constituée d'une superposition d'ondes de directions de propagation différentes. Ceci provient du processus même de formation de ces ondes. Un vent local, par exemple produit par une dépression, crée une mer locale, la mer du vent, caractérisée

par des périodes courtes et par un étalement angulaire important des directions de propagation. Un spectre typique d'une telle mer est donné en figure 1.5.

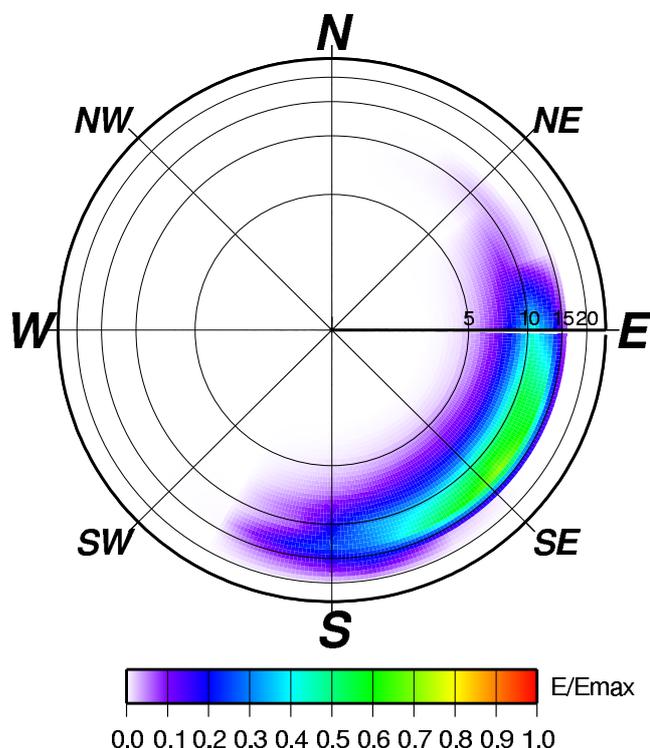


FIG. 1.5 – Spectre⁸ de mer du vent – [Modèle VAG : 2002/11/13, 12 h GMT
Long. : -20.0°, Lat. : 50.0° – Hs : 5.8 m – Emax : 31.6 m²·s]

Les ondes constituant cette mer sont appelées des vagues. Pour un vent donné, au cours du temps, des vagues de périodes de plus en plus longues sont créées. Les vagues de longues périodes s'amortissant moins vite celles de courtes périodes, sont les seules à se propager loin de la zone où elle ont été créées, d'autant que, plus la période est longue, plus la vitesse de propagation (vitesse de groupe) est grande. Ces ondes sont appelées des houles. Un spectre typique d'une houle créée par une dépression éloignée est donné en figure 1.6. Une telle houle est beaucoup moins étalée en fréquence et en direction de propagation qu'une mer du vent. Elle peut être considérée comme monodirectionnelle.

⁸Ces spectres ont été aimablement fournis par Météo-France, Direction de la Prévision, Division Marine et Océanographie. Dans ces représentations, les graduations 5, 10, 15, 20 sont les périodes de la houle (le rayon n'est pas proportionnel à la période). Les directions sont les directions de propagation de la houle. La valeur du spectre, représentée par la couleur, est l'énergie, c.-à-d. le carré de l'amplitude, de la composante de période et de direction donnée.

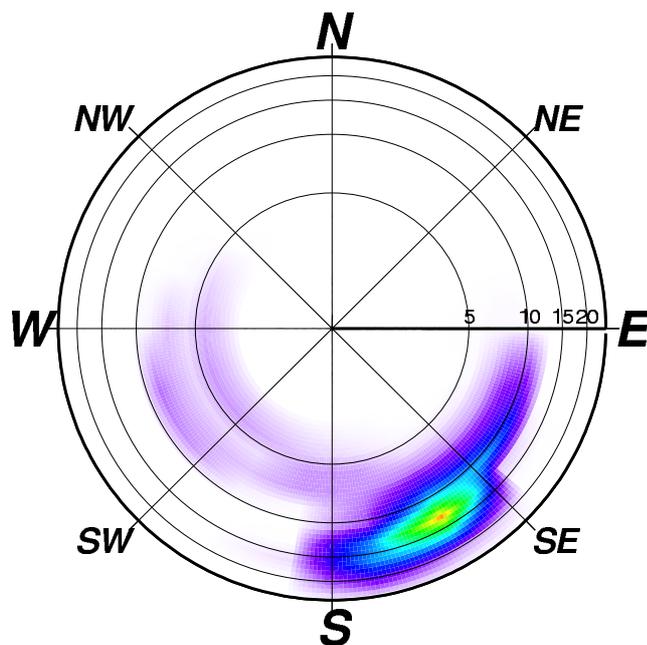


FIG. 1.6 – Spectre de houle monodirectionnelle – [Modèle VAG : 2002/11/13, 1h GMT – Long. : -30.0°, Lat. : 30.0° – Hs : 1.8 m, Emax : 5.6 m²·s]

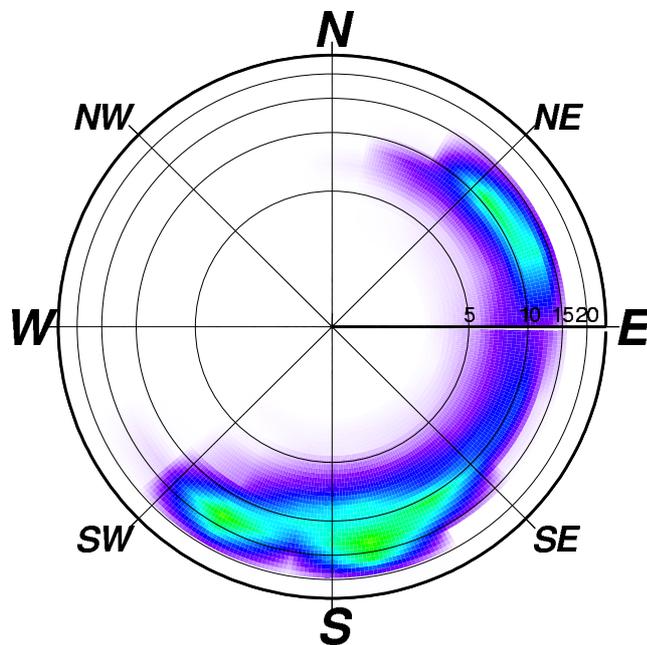


FIG. 1.7 – Spectre de mer confuse – [Modèle VAG : 2002/11/13, 12h GMT Long. : -30.0°, Lat. : 50.0° – Hs : 2.8 m – Emax : 5.6 m²·s]

Ces cas peuvent se combiner jusqu'à obtenir des houles se propageant dans des directions opposées comme dans le spectre présenté en figure 1.7. Les situations d'école correspondant aux figures 1.5, 1.6 et 1.7 existent mais sans être très fréquentes. Les mers rencontrées en pratique se situent quelque part entre ces trois cas.

Les dimensions des porte-avions sont telles que ce sont avant tout les houles qui les font bouger et ces houles n'ont donc aucun rapport avec le vent local. Le cap suivi en opérations aviation étant déterminé uniquement par la direction du vent, la modélisation doit pouvoir prendre en compte des houles de gisement⁹ quelconque. Pour les houles du secteur arrière, les fréquences de rencontre peuvent être dans le domaine de fréquences de la manœuvrabilité. Ceci implique une unification des modèles de tenue à la mer et de manœuvrabilité : la limite basses fréquences du modèle de tenue à la mer doit donner le modèle de manœuvrabilité.

Tout ceci reste globalement vrai pour les fréquences mais en étant moins marqué : le maintien d'un gisement de vent relatif donné est moins impératif pour l'appontage des hélicoptères que pour celui des avions.

La prédiction n'a à être valide que jusqu'aux états de mer correspondant aux limites opérationnelles des navires. Celles-ci sont déterminées aujourd'hui de façon satisfaisante en utilisant des codes de tenue à la mer basés sur des théories linéaires : pour ces états de mer, les hauteurs de houle et les mouvements sont suffisamment petits pour que l'hypothèse de linéarité soit satisfaite, au moins pour des résultats statistiques. Les non-linéarités de la modélisation des mouvements sur une houle donnée sont donc faibles. La première non-linéarité à prendre en compte en tenue à la mer est donc celle intervenant dans la propagation de la houle, qui est la cause de la formation des groupes de houle.

⁹ Angle entre une direction, ici la direction de propagation de la houle, et l'axe longitudinal du navire.

Chapitre 2

État de l'art

2.1 Prédiction des mouvements à court terme

Les méthodes utilisées jusqu'à présent pour prédire en temps réel les mouvements à court terme des navires sur la houle peuvent être classées en deux types : les méthodes utilisant

- une représentation d'état ;
- une représentation des relations entrées/sorties.

D'une façon générale, seules des modélisations linéaires ont été utilisées : avant d'envisager de prendre en compte les non-linéarités des phénomènes, les méthodes doivent déjà fonctionner en petites hauteurs de houle et petits mouvements.

2.1.1 Méthodes utilisant une représentation d'état

Ces méthodes consistent à établir une équation d'évolution (EE) et un estimateur des variables d'état (VE) de l'ensemble navire + fluide.

L'EE du navire sec est connue, ce sont les équations (linéarisées) du mouvement d'un solide. Les VE de ce système sont les positions et vitesses du navire. Ces grandeurs sont mesurées ; elles ne nécessitent donc pas d'estimateur.

Pour le fluide, la situation est moins claire. Dans la continuité des travaux

en tenue à la mer des années 50¹ s'appuyant eux-mêmes sur les théories de traitement du signal développées dans les années 40, la houle est considérée comme un phénomène aléatoire dont seules les caractéristiques statistiques, le spectre, sont connues. Pour les besoins de la représentation d'état, la houle est considérée comme étant la sortie d'un filtre² dit formeur ayant pour entrée un bruit blanc. Ce filtre est censé représenter le spectre de la houle. Cette représentation est dite modale : les modes (les pôles, les résonances)³ du filtre donnent les pics du spectre. L'EE du filtre formeur est considérée comme l'EE du fluide.

Les efforts appliqués par le fluide sur le navire sont donnés par la sortie d'un autre filtre ayant pour entrée la sortie du filtre formeur. Ce deuxième filtre est déterminé à partir des fonctions de transfert houle → efforts appliqués sur le navire. La détermination de ce filtre pose un problème fondamental : en considérant que son entrée est la dénivellation de la surface libre, il est non causal, quel que soit l'endroit où cette mesure est prise⁴. La dénivellation de la surface libre en un point donné ne peut donc pas être considérée comme une entrée pour la définition des efforts. La solution adoptée est de considérer que cette mesure est quand même l'entrée mais en prenant le filtre causal le plus proche du filtre réel. Plus le point de mesure considéré est loin dans la direction de provenance de la houle, plus le filtre réel est proche d'un filtre causal, avec en contrepartie une dégradation de sa représentativité.

Tous ces filtres sont agrégés pour former un filtre représentant l'ensemble na-

¹Les idées de cette époque ont été formalisées par St. Denis & Pierson [26]. Elles consistent à dire que 1) la houle est un processus aléatoire, 2) la réponse du navire à cette entrée est linéaire, ce qui permet des calculs spectraux simples. Cette approche est encore celle utilisée aujourd'hui si la situation vérifie ces deux hypothèses, c.-à-d. si les résultats demandés sont statistiques et si les hauteurs de houle et les mouvements sont suffisamment petits. Voir aussi Ogilvie [23] pour une revue de ces théories.

²«Filtre» et «système dynamique», c.-à-d. système représenté par une EE, sont presque synonymes : un filtre est un système dynamique ayant au moins une entrée et une sortie (un système dynamique peut ne pas en avoir).

³Le terme «spectre» pourrait être ajouté à cette liste mais ceci risquerait d'induire une confusion avec la signification attribuée à ce terme dans ce chapitre, spectre de houle, qui n'a aucun rapport avec spectre d'un opérateur.

⁴Cette question a donné lieu dans les années 60 à des discussions dans les congrès d'hydrodynamique navale. Elle remettait en cause la notion de filtre navire telle qu'elle était comprise à l'époque.

vire + fluide ayant pour entrée un bruit blanc et pour sorties les mouvements du navire. Pour la prédiction des mouvements, l'entrée est supprimée puisqu'un bruit blanc est par définition non prédictible. L'EE de l'ensemble navire + fluide devient donc autonome.

L'initialisation de cette équation demande la connaissance à chaque instant de la valeur des VE. Les VE inconnues, c.-à-d. celles du filtre formeur, sont déterminées par un estimateur de Kalman à partir de la mesure des mouvements. La détermination de cet estimateur demande la connaissance de l'EE de l'ensemble navire + fluide (et de la matrice de covariance des mesures).

Ces méthodes demandent donc, pour la détermination de l'EE et de l'estimateur, la connaissance du spectre de la houle. Celui-ci doit être déterminé par ailleurs.

Le caractère totalement fictif de la représentation de la houle utilisée a une autre grave conséquence : la notion de fréquence de rencontre produite par la vitesse d'avance du navire n'apparaît pas dans la modélisation. Cette notion doit être introduite de façon artificielle en utilisant le spectre de rencontre au lieu du spectre de houle. Cet artifice ne peut fonctionner que pour des houles monodirectionnelles et du secteur avant. Pour celles du secteur arrière, deux houles de même direction de propagation mais de fréquences différentes peuvent donner la même fréquence de rencontre : les mouvements du navire ne permettent pas de les distinguer. Pour les houles multidirectionnelles la situation est pire puisque qu'il existe un continuum de combinaisons direction de propagation - fréquence de houle donnant la même fréquence de rencontre, que les houles soient du secteur avant ou arrière. L'hypothèse opérationnelle faite pour que ces méthodes soient utilisables est que la mer est de face et monodirectionnelle. Ceci ne correspond pas aux conditions réelles.

Les principaux travaux utilisant cette approche sont ceux de Triantafyllou, Bodson & Athans [28, 29] et ceux de Sidar & Doolin [24]. Les résultats présentés dans ces articles sont issus uniquement de simulations numériques.

Les travaux de Bozzo [4], bien qu'utilisant une représentation d'état et une estimation des VE par un filtre de Kalman, sont en fait équivalents à une méthode AR (cf. section suivante) puisque l'EE de l'ensemble navire + fluide (sans entrée) est identifiée en permanence.

2.1.2 Méthodes utilisant une représentation des relations entrées/sorties

Les autres méthodes utilisées sont les méthodes AR, MA ou ARMA. Elles sont équivalentes aux méthodes par représentation d'état dans lesquelles seules les relations entrées/sorties, ou sorties/sorties dans le cas d'un système autonome (AR), seraient exprimées. Les VE ne sont plus explicites, mais la puissance de représentation reste la même. La différence porte sur la manière d'identifier les modèles.

Dans les méthodes par représentation d'état, les EE, sauf celle représentant la houle, sont identifiées une fois pour toutes alors que dans celles par représentation des relations entrées/sorties, les modèles sont réidentifiés à chaque pas de temps. L'objectif recherché dans cette auto-identification est de s'affranchir de la nécessité de connaître le spectre de houle : son identification est supposée être incluse dans l'identification du modèle (qui est celle de l'ensemble navire + fluide).

Une autre différence, mais qui n'en est pas vraiment une, est que ces méthodes, sauf AR, nécessitent une entrée. Ceci a poussé à utiliser pour cette entrée une mesure de la dénivellation de la surface libre à l'avant des navires, cette mesure étant supposée représenter l'«entrée» du filtre navire.

Le premier, et peut être le plus explicite, des travaux utilisant cette approche est celui de Yumori [34]. Les méthodes sont décrites et des résultats de prédiction des mouvements d'un navire réel, le SSP Kaïmalino, sont présentés. Les résultats, qui se retrouveront grossièrement dans toutes les études ultérieures, est que l'amplitude du pilonnement est bien prédite sur $1/2$ période et sa phase sur une période.

D'autres travaux ont suivi : Jefferys & Samra [18], Sifredi, Grandclément & Puy [25], Lin [20], Broome & al. [7, 6, 5]. Les différences entre ces travaux portent principalement sur les méthodes d'identifications utilisées.

2.1.3 Études menées pour la frégate La Fayette et le porte-avions Charles de Gaulle

À partir de 1984, l'ONERA/CERT a été chargé des études de prédiction et de stabilisation des mouvements de la frégate La Fayette et du porte-avions Charles de Gaulle. Les travaux menés par Jung, Hardier et Mouyon sont globalement équivalents aux études décrites ci-dessus, et les difficultés rencontrées semblables. Les deux types de méthodes ont été essayés. Les performances en prédiction obtenues sont similaires et correspondent aux résultats donnés dans [34].

Un apport des études ONERA/CERT est que la mesure de la dénivellation de la surface libre à l'avant du navire n'a pas de cohérence avec les mouvements du navire en basses fréquences, et ceci même houle de face sur des houles d'Atlantique pouvant être assez monodirectionnelles (les houles de Méditerranée sont plus multidirectionnelles). Ceci donne l'explication du résultat donné dans [34] qui est que l'utilisation de la mesure de la dénivellation de la surface libre n'apporte un gain en prédiction que pour les houles de courtes périodes (< 5 s).

La fonction de cohérence entre deux signaux représente l'existence d'un filtre linéaire entre eux. Le fait que cette fonction soit nulle veut dire que, soit la relation entre les signaux n'est pas linéaire, soit le signal qui est considéré comme une entrée n'en est pas une, soit la sortie est fonction d'autres entrées non prises en compte. Sur les houles considérées, la linéarité n'est pas mise en cause, le fait que la houle soit une entrée non plus. La seule possibilité est qu'une mesure de la dénivellation de la surface libre en un point ne représente pas une houle quelconque, ce qui est une évidence. Si des informations sont ajoutées disant que la houle est sinusoïdale et que la direction de propagation est donnée, alors une mesure ponctuelle définit la houle, mais seulement dans ce cas.

D'une façon plus générale, la propriété fondamentale à satisfaire pour que toutes ces méthodes soient valides : l'observabilité de l'état de l'ensemble navire + fluide à partir des mesures utilisées, n'a jamais été démontrée. Seul le fluide posant un problème, ce point relève de l'hydrodynamique (navale).

2.2 Prédiction des mouvements à moyen terme

Actuellement aucune étude n'a été publiée sur la prédiction des périodes d'accalmie de la houle. Le seul développement qui s'en rapproche est celui du DRDC Atlantic (cf. [9]) qui a mis au point un système, le Flight Deck Motion System (FDMS), d'aide à l'appontage des hélicoptères. Ce système a pour objectif de renseigner l'officier d'appontage sur le fait même d'être ou non dans une période d'accalmie des mouvements.

2.3 Bassins à houle numériques

Bien que ce ne soit pas l'objet principal de l'étude, nous sommes conduits pour obtenir une modélisation répondant au besoin, à (re)mettre en équations le comportement temporel de l'ensemble navire + fluide. Ceci correspond exactement à la mise en équations des bassins à houle numériques.

Ces mises en équations sont toutes basées sur la méthode *Mixed Eulerian-Lagrangian* (MEL) de Longuet-Higgins & Cokelet [21]. L'hypothèse de base de celle-ci est que l'écoulement est à potentiel scalaire. Les VE choisies pour le fluide sont la position de points de la surface libre et le potentiel en ces points. L'EE est donnée par la convection de ces grandeurs. Les conditions de surface libre sont satisfaites exactement. Cette mise en équations est sans navire ; elle était destinée à l'origine à modéliser l'évolution non linéaire de la houle. Une revue concernant ce problème est présentée par Tsai & Yue dans [30].

Quand un navire est ajouté à cette modélisation, avec les conditions de glissement sur la carène satisfaites exactement, nous obtenons un bassin à houle numérique. Les principales revues concernant ce problème sont celles de Yeung [33] et de Kim, Clément & Tanizawa [19].

Des bassins à houle numériques basés sur les équations de Navier-Stokes sont en cours de développement. Ils ne sont pas pleinement utilisables actuellement.

Chapitre 3

Approche envisagée pour satisfaire le besoin

Le besoin concerne avant tout les mouvements sur houle des navires. Nous avons vu au chapitre 2 que les difficultés rencontrées viennent de l'absence de modélisation physique de la houle : les modélisations de houle utilisées jusqu'à présent sont fictives. De plus, ces modélisations, étant issues des théories de traitement du signal, sont optimales statistiquement alors que le besoin concerne les mouvements à court terme. Sur les horizons de prédiction demandés, la houle est un phénomène déterministe.

L'approche choisie est de modéliser physiquement le comportement de l'ensemble navire + fluide qui l'entoure en partant des lois de la mécanique. Le guide constant dans cette mise en équations est la théorie des systèmes physiques. Cette théorie donne des règles simples et incontournables de construction des modèles. Un abrégé de cette théorie est donné en annexe B.

Le modèle recherché est donc un modèle déterministe et temporel puisque c'est le comportement dans le temps de l'ensemble navire + fluide qui doit être représenté. La théorie des systèmes¹ dit que le comportement temporel déterministe de tout système physique continu en temps peut toujours être représenté par un modèle de la forme

$$(3.1) \quad \frac{de}{dt} = f(t, e, u) \quad (\text{B.1})$$

¹Pour alléger la rédaction, la théorie des systèmes physiques est appelée maintenant simplement théorie des systèmes.

où

$e(t)$: vecteur d'état du système,

$u(t)$: vecteur d'entrées du système,

et où f est une fonction du temps au sens strict du terme : $f(t, e, u)$ ne dépend que des valeurs de e et de u à l'instant t ; aucune intégrale ou dérivée temporelles de ces grandeurs n'intervient. La fonction f peut être un opérateur pour les autres variables que t . L'équation (3.1) est l'équation d'évolution (EE) (des variables d'état (VE)) du système.

Les entrées d'un système sont les actions venant de l'extérieur modifiant son évolution temporelle. Pour le système navire + fluide, ces entrées sont l'action du vent sur le fluide, qui crée la houle, et l'action du vent sur le navire. Sur les horizons de prédiction demandés, le vent est considéré comme ne modifiant pas la houle, la constante de temps de cette action se mesurant en heures. Nous ne nous occuperons pas de l'action du vent sur le navire, qui peut être modélisée de façon satisfaisante pour le besoin. Le système à modéliser est donc considéré comme sans entrées ou encore autonome, c.-à-d. de la forme

$$\frac{de}{dt} = f(t, e).$$

REMARQUE

▼ C'est le fait même d'obtenir un système autonome qui permet sa prédiction. Si une entrée agissait sur l'horizon de prédiction demandé, elle devrait être connue pour pouvoir prédire l'évolution du système. Il faudrait donc elle-même la prédire, c.-à-d. la modéliser comme la sortie d'un système autonome. ▲

Le modèle est destiné à être *identifié* à partir de mesures physiques et non *calculé*. Comme nous ne savons identifier que des modèles invariants dans le temps, f ne doit pas en dépendre. Le modèle recherché est donc finalement de la forme

$$(3.2) \quad \frac{de}{dt} = f(e).$$

Les sorties d'un système sont ses actions sur l'extérieur. La théorie des systèmes dit que ces actions sont toujours de la forme

$$(3.3) \quad v = g(t, e, u) \tag{B.2}$$

où

$v(t)$: vecteur de sorties du système,

et où, de même que f , g est une fonction du temps au sens strict du terme. L'équation (3.3) est une équation de sortie (ES) ou d'observation du système.

Dans le problème traité, les sorties demandées sont les positions et vitesses du navire. Ces grandeurs étant les VE du navire, g est trivial. Nous n'en parlerons plus.

La prédiction à moyen terme concerne l'enveloppe des minimums et maximums des mouvements. Celle-ci peut être considérée en première approximation comme proportionnelle à l'enveloppe des crêtes et des creux de la houle. La forme de cette enveloppe, c.-à-d. la modulation de la houle, est due à la non-linéarité des conditions de surface libre. Il serait possible d'écrire une théorie ne traitant que de cette enveloppe et obtenir ainsi son EE. La prédiction serait obtenue à partir d'une mesure en temps réel de cette enveloppe, ce qui devrait être possible à partir de mesures radar. Cette approche est envisageable et sera même probablement nécessaire. Dans la présente étude, le besoin concerne avant tout la prédiction à court terme. Nous n'insisterons donc pas particulièrement sur la prédiction à moyen terme. Les non-linéarités seront prises en compte au mieux des possibilités, mais sans chercher à modéliser l'enveloppe de la houle.

Pour que le problème traité soit cohérent, toutes les non-linéarités du système, celles de la mécanique des solides et celles de la mécanique des fluides, doivent être prises en compte. La fonction f est donc a priori non linéaire par rapport à toutes les VE.

Un autre intérêt de considérer un f non linéaire concerne l'unification des modèles de tenue à la mer et de manœuvrabilité. La principale raison qui a interdit jusqu'à présent cette unification est que ces modèles sont de natures différentes : linéaires et à mémoire, c.-à-d. dépendants des entrées aux instants précédents l'instant actuel, pour la tenue à la mer, non linéaires et instantanés, c.-à-d. ne dépendants que des entrées à l'instant actuel, pour la manœuvrabilité.

L'équation (3.2) est fondamentalement un modèle à mémoire. Elle peut donc modéliser la tenue à la mer ; et si elle est non linéaire, elle peut modéliser la manœuvrabilité. Les entrées de ces modèles sont la houle pour la tenue à la mer et la propulsion et le braquage des safrans pour la manœuvrabilité. Dans

(3.2), la houle est représentée dans les VE du système. Pour modéliser la manoeuvrabilité, il «suffit» donc de rajouter à ce modèle les entrées propulsion et braquage des safrans. Envisager un f non linéaire par rapport à toutes les VE peut donc permettre d’unifier les modèles de tenue à la mer et de manoeuvrabilité. Dans la présente étude, nous en restons au modèle autonome (3.2), c.-à-d. sans les entrées propulsion et braquage des safrans.

La mécanique des solides nous dit que les VE navire sont la translation, la rotation et les vitesses de translation et de rotation du navire. La mécanique des fluides dit que pour des conditions de surface libre linéarisées et en fluide parfait et incompressible, les VE fluide peuvent être η et $d\eta/dt$ où η est la dénivellation de la surface libre (cf. Hadamard qui a introduit cette approche dans [14, 15]²). Pour les conditions de surface libre exactes, les VE utilisées dans la méthode MEL sont la position de la surface libre et le potentiel sur cette surface.

Pour déterminer quelles sont les VE fluide pertinentes dans le cas qui nous intéresse, nous allons mettre en équations tout le problème pour en déduire une EE navire + fluide. Cette démarche peut paraître irréaliste, mais les informations recherchées sont uniquement qualitatives : quelles peuvent être les VE du problème et quelle est la forme mathématique du f correspondant ? Nous ne chercherons pas à résoudre les équations obtenues.

Une fois un modèle (3.2) établi et identifié, l’initialisation de la prédiction nécessite de connaître à chaque instant la valeur réelle des VE. Il faut donc disposer d’une observation ou d’une estimation de celles-ci. L’observation concerne l’approche déterministe, l’estimation l’approche stochastique de la détermination des VE (cf. par exemple [1] chapitres 4 et 5 pour un exposé sur les observateurs et les estimateurs). L’approche suivie dans la présente étude étant entièrement déterministe, nous ne traitons que de l’observation des VE.

Les VE navire sont mesurées aujourd’hui avec une grande précision. La difficulté est dans l’observation des VE fluide. Cette observation demande un dialogue entre la théorie : quelles sont les VE fluide possibles ? et la technologie : quels sont les moyens de mesure actuels, ou raisonnablement envisageables dans le futur, du fluide entourant le navire ?

²Le génie d’Hadamard demandait à être rendu accessible au commun des mortels : Bouligand dans [3] a explicité et développé ces articles.

En résumé, la prédiction tant à court terme qu'à moyen terme demande de déterminer deux éléments :

- 1) des VE du système navire + fluide et le f correspondant,
- 2) un moyen d'observation de ces VE à chaque instant.

3.1 Hypothèses adoptées pour la mise en équations

Pour qu'une mise en équations soit possible, le champ des possibilités doit être restreint par des hypothèses qui doivent, si possible, correspondre au cas traité.

3.1.1 Pour le navire

3.1.1.1 Corps rigide

Le navire est a priori considéré comme un corps rigide. Ceci n'est évidemment qu'une approximation, mais dans le cas traité, cette approximation est suffisante : seuls les mouvements d'ensemble du navire nous intéressent. Ceci dit, dans la mise en équations de la mécanique des solides adoptée, cf. annexe C, le corps doit obligatoirement être déformable, mais avec une déformabilité qui peut être aussi petite que l'on veut. Un des intérêts de cette mise en équations est qu'elle se généralise naturellement à des solides de plus en plus déformables. Ceci peut être utile dans l'avenir.

3.1.2 Pour le fluide

L'idéal serait de considérer un fluide le plus proche possible du réel, c.-à-d. visqueux et compressible.

3.1.2.1 Écoulement irrotationnel

Un fluide visqueux donne obligatoirement un écoulement rotationnel. Nous ne savons pas représenter et manipuler simplement un tel écoulement. L'écoule-

ment considéré est donc irrotationnel et en conséquence le fluide est supposé non visqueux ou encore parfait. En considérant le fluide comme parfait, aucune couche limite et aucun décollement ne sont modélisés. Mais le fait de considérer que l'écoulement est irrotationnel restreint encore plus sa représentativité : des tourbillons peuvent quand même être présents dans un écoulement en fluide parfait. Ils peuvent être produits entre autres par des surfaces portantes. Les efforts produits par tous ces phénomènes, qui sont une partie de l'amortissement des mouvements en tenue à la mer et les efforts principaux en manœuvrabilité, ne peuvent donc pas être représentés dans le modèle résultant. L'objectif d'unifier les modèles de tenue à la mer et de manœuvrabilité ne pourra a priori pas être atteint ; mais l'identification du modèle à partir du réel pourra augmenter son domaine de validité.

3.1.2.2 Fluide incompressible

Dans le domaine de fréquences des mouvements en tenue à la mer et encore plus en manœuvrabilité, la compressibilité du fluide n'intervient pas. Il est donc considéré comme incompressible, mais cette hypothèse donne un fluide non physique (transmission instantanée des modifications de pression dans tout le fluide quelle que soit la distance). Ceci entraîne la nécessité de définir une condition à l'infini.

3.1.2.3 Profondeur finie

Le fond F est de forme quelconque, parfaitement étanche, immobile et à une profondeur finie. Cette dernière hypothèse entraîne que la condition à l'infini de la section précédente ne doit être définie que pour l'infini *horizontal*.

3.1.2.4 Fluide au repos à l'infini horizontal

En tenue à la mer, la houle considérée habituellement est une houle spectrale. Cette manière d'aborder la question n'est pas utilisable dans le cas présent parce qu'elle entraîne la perte de l'information sur les phases des composantes³ de la houle alors que cette information est fondamentale pour la prédiction.

³Chaque composante de houle est définie par un (petit) domaine de pulsation et un (petit) domaine de gisement par rapport au navire.

De façon à conserver cette information, le fluide est supposé au repos à l'infini horizontal. Ceci va assurer l'unicité de la solution des mises en équations (cette unicité implique que la forme de la surface libre est définie de façon unique et donc aussi les phases des composantes de la houle).

L'hypothèse de repos du fluide à l'infini horizontal est cohérente avec les horizons temporels de prédictions demandés, qui sont finis.

Chapitre 4

Mises en équations avec conditions aux limites exactes

La mise en équations du système navire + fluide consiste à écrire son EE. Celle-ci est construite à partir des EE des systèmes navire et fluide et des interactions entre ces systèmes. À un vecteur d'état donné correspond une EE. Pour le fluide, deux vecteurs d'état sont envisagés, ce qui donne autant de mises en équations.

Une procédure d'observation doit être définie pour chaque vecteur d'état et pour les mesures physiques possibles.

4.1 Mise en équations du système navire

En tenue à la mer et en manœuvrabilité, seuls les mouvements d'ensemble du navire nous intéressent; le navire est considéré comme un corps rigide. Les équations du mouvement d'un tel corps sont connues depuis Euler (qui les a établies pour le calcul des mouvements des navires!).

En anticipant sur la suite, la mise en équations du système fluide devant être développée en perturbations, celle du système navire doit aussi l'être. Pour que ce développement soit le plus simple possible, les équations exactes du mouvement d'un corps rigide doivent être le plus linéaires possible par rapport à leurs VE. Le choix de ces VE est libre tant que l'EE correspondante définit complètement l'évolution temporelle du système. En choisissant pour VE définissant

la rotation du corps la *matrice* de rotation et non les *paramètres* de la rotation (en hydrodynamique navale : les angles de Cardan¹), les équations du mouvement sont linéaires. De plus, avec ce choix, les efforts appliqués au corps sont exprimés dans le référentiel absolu, ce qui correspond à la mise en équations naturelle du système fluide, mais les données massiques restent exprimées dans le référentiel navire, où elles sont constantes pour une répartition donnée des masses du navire.

L'inconvénient apparent de ce choix est que l'EE de la matrice de rotation n'assure a priori pas le maintien de son orthonormalité. Cette condition traduit l'indéformabilité du corps, qui n'est donc plus assurée. Ceci ne fait que correspondre à la réalité physique : tout corps est déformable. La condition d'orthonormalité peut être imposée de façon artificielle, comme une contrainte à satisfaire, ou peut être approchée par une modélisation plus ou moins fine des relations contraintes \rightarrow déformations du corps. C'est cette deuxième possibilité qui est adoptée ici parce qu'elle permet de transformer ce qui paraît être un inconvénient en un avantage : cette mise en équations se généralise naturellement à des déplacements autres que parfaitement rigides. Ceci peut être utile dans l'avenir si la prise en compte des déformations du navire devient nécessaire. L'introduction des relations contraintes \rightarrow déformations réintroduit une non-linéarité. Tout ceci est détaillé en annexe C.

Convention

Dans toute la section 4.1, le terme «VE» sans autre précision désigne les VE du système navire sec.

Sauf spécification contraire, toutes les équations s'entendent $\forall t$.

Variables d'état

Les VE choisies pour représenter le mouvement d'un corps rigide sont $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}$, $dp_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}/dt$, $p_{[\frac{*}{A};\frac{*}{N}]}^{[1]}$ et $dp_{[\frac{*}{A};\frac{*}{N}]}^{[1]}/dt$, où

$p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}$: composantes du vecteur $O_A O_N$ dans une base absolue B_A , c.-à-d. position en translation du navire,

¹Il serait plus juste de dire : angles *à la* Cardan. Ces angles n'ont pas été définis à proprement parler par Cardan ; ils reproduisent la cinématique d'un joint de Cardan. Ces angles sont souvent appelés improprement angles d'Euler.

= constante ;

$$\begin{aligned}
m_{N[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} & : \text{moment de degré 2 dans } \mathcal{R}_N \text{ des masses,} \\
& \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} dm \cdot x_{\frac{i}{N}} \cdot x_{\frac{j}{N}}, \tag{C.20} \\
& = \text{constante ;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]}^{[1]} & \stackrel{\text{déf}}{=} (p_{[\frac{i}{N}, \frac{j}{A}]}^{[1]})_{[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]}^{-1} \Big|^2, \tag{C.50} \\
& = \text{fonction de } t ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
fi_{N0[\frac{i}{N}]}^{[0]} & : \text{moment de degré 0 des forces intérieures de rappel,} \\
(4.2) \quad & = ({}_{d_N} fi_{N0[\frac{i}{N}]}^{[0]} + {}_{d_N} fi_{N0[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot \mu_{N[\frac{j}{N}, \frac{k}{N}]}^{[2]} \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]}) \cdot \bar{\mathfrak{X}}_N, \tag{C.65} \\
& = \text{fonction de } t ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
fi_{N1[\frac{i}{N}]}^{[0]} & : \text{moment de degré 0 des forces intérieures d'amortissement,} \\
(4.3) \quad & = ({}_{d_N} fi_{N1[\frac{i}{N}]}^{[0]} + {}_{d_N} fi_{N1[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot \mu_{N[\frac{j}{N}, \frac{k}{N}]}^{[2]} \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]}) \cdot \bar{\mathfrak{X}}_N, \tag{C.65} \\
& = \text{fonction de } t ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
fi_{N0[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[1]} & : \text{moment de degré 1 des forces intérieures de rappel,} \\
(4.4) \quad & = ({}_{d_N} fi_{N0[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[1]} + {}_{d_N} fi_{N0[\frac{i}{N}]}^{[0]} \cdot \mu_N^{[0]} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]}) \cdot \bar{\mathfrak{X}}_N, \tag{C.66} \\
& = \text{fonction de } t ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
fi_{N1[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[1]} & : \text{moment de degré 1 des forces intérieures d'amortissement,} \\
(4.5) \quad & = ({}_{d_N} fi_{N1[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[1]} + {}_{d_N} fi_{N1[\frac{i}{N}]}^{[0]} \cdot \mu_N^{[0]} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]}) \cdot \bar{\mathfrak{X}}_N, \tag{C.66} \\
& = \text{fonction de } t ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]} & : \text{moment de degré 0 des forces extérieures appliquées au corps} \\
& \text{exprimées dans } B_A \text{ (= somme de ces forces),} \\
& \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} dfe_{N \frac{i}{A}}, \tag{C.16} \\
& = \text{fonction de } t ;
\end{aligned}$$

² $p_{[\frac{i}{N}, \frac{j}{A}]}^{[1]}$ est la transposée de $p_{[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]}^{[1]}$, cf. convention de notation (C.39).

$fe_N^{[1]}{}_{[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]}$: moment de degré 1 dans \mathcal{R}_N des forces extérieures appliquées au corps exprimées dans B_A ,

$$\stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x_{\frac{*}{N}} \in \mathbb{R}^3} df e_N \frac{i}{A} \cdot x_{\frac{j}{N}}, \quad (\text{C.28})$$

= fonction de t ;

où les ${}_d m_N fi_{N*}^{[0]}{}_{[\frac{*}{N}]}$ sont nuls, cf. (C.59) et (C.60), et où ${}_d m_N fi_{N0}^{[1]}{}_{[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}$ et ${}_d m_N fi_{N1}^{[1]}{}_{[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}$ sont donnés par (4.7) et (4.8) infra. Dans ces définitions,

$$\mu_N^{[0]} \stackrel{\text{déf}}{=} (m_N^{[0]})^{-1}, \quad \mu_N^{[2]}{}_{[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]} \stackrel{\text{déf}}{=} (m_N^{[2]}{}_{[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}{}_{[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]})^{-1} \quad (\text{C.33})$$

et

$$\mathfrak{K}_N^3 \stackrel{\text{déf}}{=} (1 - m_N^{[1]}{}_{[\frac{i}{N}]} \cdot \mu_N^{[2]}{}_{[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]} \cdot m_N^{[1]}{}_{[\frac{j}{N}]} \cdot \mu_N^{[0]})^{-1}. \quad (\text{C.64})$$

Les $m_N^{[*]}{}_{[\frac{*}{N}, \dots]}$ sont des constantes pour une répartition donnée des masses du navire.

4.1.2 Équation d'évolution découplée

L'EE (4.1) s'écrit aussi, cf. (C.68),

$$(4.6) \quad \begin{cases} (1) & \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} = {}_d m_N fe_N^{[0]}{}_{[\frac{i}{A}]} \cdot {}_d \mu_N^{[0]}, \\ (2) & \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^2} = (\pi_{[\frac{i}{A}, \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot ({}_d m_N fi_{N0}^{[1]}{}_{[\frac{k}{N}, \frac{l}{N}]} + {}_d m_N fi_{N1}^{[1]}{}_{[\frac{k}{N}, \frac{l}{N}]}) + {}_d m_N fe_N^{[1]}{}_{[\frac{i}{A}, \frac{l}{N}]} \cdot {}_d \mu_N^{[2]}{}_{[\frac{l}{N}, \frac{j}{N}]} \end{cases}$$

plus les relations triviales pour $dp_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}/dt$ et $dp_{[\frac{*}{A}, \frac{*}{N}]}^{[1]}/dt$, où

$${}_d \mu_N^{[0]} = ({}_d m_N^{[0]})^{-1} \quad \text{avec} \quad (\text{C.31})$$

$$\begin{aligned} {}_d m_N^{[0]} &: m_N^{[0]} \text{ découplé (avec les } m_N^{[*][*]}{}_{[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}), \\ &= m_N^{[0]} - m_N^{[1]}{}_{[\frac{i}{N}]} \cdot \mu_N^{[2]}{}_{[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]} \cdot m_N^{[1]}{}_{[\frac{j}{N}]}, \\ &= \text{constante}; \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

³ \mathfrak{K} : troisième lettre de l'alphabet sanskrit, se prononce i bref.

$$d_N \mu_{N[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} = (d m_{N[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}^{[2]})_{[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{-1} \text{ avec} \quad (\text{C.36})$$

$$\begin{aligned} d m_{N[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} &: m_{N[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} \text{ d'écouplé (avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}), \\ &= m_{N[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} - m_{N[\frac{i}{N}]}^{[1]} \cdot \mu_N^{[0]} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]}, \\ &= \text{constante}; \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

$$\begin{aligned} d_N f i_{N0[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[1]} &: f i_{N0[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[1]} \text{ d'écouplé avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}, \\ (4.7) \quad &= -\frac{k_0}{2} \cdot (p_{[\frac{i}{N}, \frac{k}{A}]}^{[1]} \cdot p_{[\frac{k}{A}, \frac{j}{N}]}^{[1]} - \delta_{i,j}), \\ &= \text{fonction de } t; \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

$$\begin{aligned} d_N f i_{N1[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[1]} &: f i_{N1[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[1]} \text{ d'écouplé avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}, \\ (4.8) \quad &= -k_1 \cdot (p_{[\frac{i}{N}, \frac{k}{A}]}^{[1]} \cdot \frac{d p_{[\frac{k}{A}, \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt})^S, \\ &= \text{fonction de } t; \end{aligned} \quad (\text{C.62})$$

$$\begin{aligned} d_N f e_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]} &: f e_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]} \text{ d'écouplé avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}, \\ (4.9) \quad &= f e_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]} - f e_{N[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot \mu_{N[\frac{j}{N}, \frac{k}{N}]}^{[2]} \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]}, \\ &= \text{fonction de } t; \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

$$\begin{aligned} d_N f e_{N[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]}^{[1]} &: f e_{N[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]}^{[1]} \text{ d'écouplé avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}, \\ (4.10) \quad &= f e_{N[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]}^{[1]} - f e_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]} \cdot \mu_N^{[0]} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]}, \\ &= \text{fonction de } t; \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

avec

k_0 : scalaire (constant) représentant une rigidité globale du corps ;

k_1 : scalaire (constant) représentant un amortissement global du corps.

La répartition de forces intérieures de rappel et d'amortissement de moments $d_N f i_{N*[\frac{*}{N}]}^{[0]}$ et $d_N f i_{N*[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}^{[1]}$ adoptée ici est juste un exemple de relations déformations \rightarrow contraintes possibles. L'étude détaillée de ces relations n'étant pas l'objet de cette mise en équations, ces relations ne sont pas plus approfondies.

Les EE (4.1) ou (4.6) sont initialisées avec $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}$, $p_{[\frac{*}{A}, \frac{*}{N}]}^{[1]}$ et leur dérivée temporelle connus à $t = 0$ et satisfaisant à cet instant

- 1) $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$: matrice orthonormale ;
- 2) $dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}/dt = p_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot \omega_{\frac{k}{N}, \frac{j}{N}}$ avec $\omega_{\frac{*}{N}, \frac{*}{N}}$: matrice antisymétrique.

4.2 Mises en équations du système fluide

L'objectif de ces mises en équations est avant tout de déterminer quelles sont les VE possibles pour le système fluide. Pour cela, le problème est mis en équations complètement dans le cadre des hypothèses adoptées. Ces mises en équations pourraient être utilisées pour du calcul. Dans le présente étude, nous ne les utilisons que pour de la représentation. La différence entre les deux utilisations est dans les grandeurs connues ou non dans chaque cas. Quand cette différence doit être soulignée, ces mises en équations sont appelées «modélisation de calcul» ou «modélisation de représentation».

Les hypothèses adoptées pour ces mises en équations sont que l'écoulement est irrotationnel et le fluide incompressible avec pour conditions aux limites, les conditions de surface libre, les conditions de glissement sur la carène, les conditions de glissement sur le fond et la condition de repos à l'infini horizontal. Ces mises en équations suivent exactement le canevas défini par Hadamard dans [14, 15], en l'étendant au cas d'un domaine fluide infini, avec des conditions de surface libre exactes et en présence d'un corps mobile.

Conventions

Les mises en équations sont en coordonnées eulériennes, dans un repère absolu. Les grandeurs $x_{\frac{1}{A}}$ et $x_{\frac{2}{A}}$ sont les coordonnées horizontales, $x_{\frac{3}{A}}$ est la coordonnée verticale, > 0 vers le haut. Les vitesses sont des vitesses absolues. Dans toute cette section, le terme «VE» sans spécification désigne les VE du système fluide.

4.2.1 Conditions à satisfaire

4.2.1.1 Conditions de champ

4.2.1.1.1 Irrotationnalité

L'irrotationnalité de l'écoulement du fluide fait que sa vitesse peut être représentée par le gradient d'une fonction scalaire :

$$(4.11) \quad v_{\frac{i}{A}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

où

$v_{\frac{i}{A}}$: vitesse absolue du fluide,
= fonction de t et de $x_{\frac{*}{A}}$;

φ : potentiel de $v_{\frac{i}{A}}$,
= fonction de t et de $x_{\frac{*}{A}}$.

Dans (4.11), pour alléger l'écriture, les $\partial/\partial x_*$ représentent les dérivées par rapport aux variables x_* en argument des fonctions, ici $x_{\frac{*}{A}}$. Cette convention est appliquée dans toute l'étude.

4.2.1.1.2 Incompressibilité

L'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v_{\frac{i}{A}}}{\partial x_i} = 0$$

où

ρ : masse volumique du fluide.

L'incompressibilité du fluide, qui peut s'exprimer par le fait que ρ est constant, reportée dans (↑) donne

$$\rho \cdot \frac{\partial v_{\frac{i}{A}}}{\partial x_i} = 0,$$

et comme ρ est toujours $\neq 0$, cette incompressibilité s'écrit finalement

$$\frac{\partial v_{\frac{i}{A}}}{\partial x_i} = 0.$$

Si l'écoulement est irrotationnel, (4.11) reportée dans (↑) donne

$$(4.12) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x_i)^2} = 0$$

qui est l'expression de l'incompressibilité pour un écoulement à potentiel scalaire.

4.2.1.1.3 Principe fondamental de la dynamique

Pour un fluide parfait dans un champ de pesanteur, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$(4.13) \quad \rho \cdot \mathbf{D}_t(v_{\frac{i}{A}}) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \cdot g_{\frac{i}{A}}$$

où \mathbf{D}_t représente la dérivée particulaire, définie par

$$(4.14) \quad \mathbf{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

et où

p : pression statique du fluide,
= fonction de t et de $x_{\frac{*}{A}}$;

$g_{\frac{i}{A}}$: vecteur accélération de la gravité,

$$(4.15) \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \quad g > 0 \text{ avec les conventions adoptées,}$$

= constante ;

L'équation (4.11) reportée dans (4.13) donne

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - g_{\frac{i}{A}} = 0,$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2 - g_{\frac{j}{A}} \cdot x_{\frac{j}{A}} \right) = 0,$$

ce qui donne l'équation de Bernoulli

$$(4.16) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 - g_{\frac{i}{A}} \cdot x_{\frac{i}{A}} = f(t).$$

En prenant comme convention que p est nul pour $x_{\frac{i}{A}} = 0_i$ quand le fluide est au repos, f est nul.

Pour simplifier les expressions à venir, nous posons que

$$(4.17) \quad p = - \rho \cdot \psi$$

avec

$$(4.18) \quad \psi \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 - g_{\frac{i}{A}} \cdot x_{\frac{i}{A}}.$$

La grandeur

$$(4.19) \quad \chi \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2$$

est le potentiel d'accélération du fluide, c.-à-d. que l'accélération d'une particule fluide (suivie dans son mouvement) est donnée par

$$(4.20) \quad \gamma_{\frac{i}{A}} = \frac{\partial \chi}{\partial x_i}.$$

4.2.1.2 Conditions aux limites

4.2.1.2.1 Conditions de surface libre

La surface libre L est définie implicitement, c.-à-d. qu'elle est constituée des points dont les coordonnées $x_{L\frac{*}{A}}$ satisfont

$$(4.21) \quad l = 0$$

où

l : une fonction définissant la surface libre,
 = fonction de t et de $x_{\frac{*}{A}}$.

En modélisation de calcul, l est inconnu. En modélisation de représentation, si la dénivellation de surface libre η est mesurée, l est connu, cf. par exemple (F.57).

Pour simplifier l'écriture des équations, la valeur des fonctions en $x_{L\frac{*}{A}}$, ce qui est quelquefois exprimé par les expressions «sur L » ou «pour $x_{\frac{*}{A}} \in L$ », est indiquée par un indice L ⁴.

La grandeur l_L doit satisfaire les conditions de surface libre (CSL), qui sont constituées

- 1) des conditions de glissement sur L (L est une surface étanche);
- 2) de la condition de pression nulle sur L .

⁴Un certain flou est laissé quand au fait que cet indice indique la valeur de la fonction *en* $x_{L\frac{*}{A}}$ ou *dans un voisinage de* $x_{L\frac{*}{A}}$.

Conditions de glissement sur L

Le glissement du fluide d'une surface peut s'exprimer de diverses manières. La plus habituelle, parce que la plus intuitive, est de dire que sur la surface, la vitesse normale du fluide doit être égale à la vitesse normale de la surface. Nous aurons besoin dans la suite d'exprimer cette condition pour les accélérations. Notre intuition n'étant plus opérante dans ce cas, nous allons l'exprimer d'une autre manière, plus généralisable. Cette autre expression est : *une particule sur la surface à un instant donné le reste dans un voisinage de temps (c.-à-d. dans un court laps de temps)*⁵. Elle s'écrit pour $L : x_{\frac{*}{A}}$, l et φ doivent satisfaire

$$(4.22) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (1) & l = 0, \\ (2) & \mathbf{D}_t(l) = 0, \\ \dots & \dots\dots\dots \\ (n+1) & \mathbf{D}_t^n(l) = 0. \end{array} \right.$$

Condition de pression nulle sur L

Cette condition s'écrit

$$p_L = 0.$$

La surface libre peut donc être définie par⁶

$$l = p$$

ou encore

$$l = \psi.$$

⁵L'idée première serait de dire qu'une particule sur la surface à un instant donné le reste ($\forall t$), ce qui s'exprimerait par : $x_{\frac{*}{A}}$, l et φ doivent satisfaire

$$\left\{ \begin{array}{lll} (1) & l = 0, & t = t_0, \\ (2) & \mathbf{D}_t(l) = 0, & t = t_0, \\ \dots & \dots\dots\dots & t = t_0, \\ (n+1) & \mathbf{D}_t^n(l) = 0, & \forall t, \end{array} \right.$$

mais cette condition imposerait qu'une particule sur la surface le reste indéfiniment, ce qui est une condition trop forte; les particules doivent avoir la possibilité d'arriver sur et partir de la surface.

⁶Ceci ne serait plus vrai en présence de variations de pression sur la surface libre ou si la tension superficielle était prise en compte.

Conditions de surface libre

La grandeur l peut être éliminés en reportant (↑) dans (4.22), ce qui donne

$$(4.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \psi = 0, \\ (2) \quad \mathbf{D}_t(\psi) = 0, \\ \dots \quad \dots\dots\dots \\ (n+1) \quad \mathbf{D}_t^n(\psi) = 0. \end{array} \right.$$

En anticipant sur la suite, seules les deux premières équations de (↑) sont nécessaires pour écrire l'EE du système fluide.

Pour alléger l'écriture, $\mathbf{D}_t(\psi)$ est noté $D_t\psi$.

La condition (4.23.2) correspond à la condition habituelle de glissement : les vitesses normales à L du fluide et de L doivent être égales.

VÉRIFICATION

▼ La grandeur $d\psi_L/dt$ (c.-à-d. la dérivée temporelle de ψ en suivant L dans son mouvement) s'écrit

$$\frac{d\psi_L}{dt} = \frac{\partial\psi_L}{\partial t} + \frac{\partial\psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_{L\frac{i}{A}}}{dt}.$$

Les coordonnées $x_{L\frac{i}{A}}^*$ satisfaisant (4.23.1) $\forall t$, la grandeur $dx_{L\frac{i}{A}}^*/dt$ doit donc satisfaire

$$\frac{\partial\psi_L}{\partial t} + \frac{\partial\psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_{L\frac{i}{A}}}{dt} = 0.$$

Le report de (4.23.2) dans (↑) donne

$$(4.24) \quad \frac{\partial\psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_{L\frac{i}{A}}}{dt} = \frac{\partial\psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi_L}{\partial x_i}.$$

La surface L étant définie par (4.23.1), sa normale (non unitaire) est

$$(4.25) \quad n_{L\frac{i}{A}} \stackrel{d\acute{e}f}{=} \frac{\partial\psi_L}{\partial x_i}.$$

L'équation (4.24) est l'expression du fait que la vitesse de L normale à L est égale à la vitesse du fluide normale à L , expression qui reste valide même si la normale n'est pas unitaire et quelle que soit son orientation (intérieure ou extérieure au fluide).

La condition (4.23.2) peut conserver l'appellation de condition cinématique, même si elle fait intervenir la pression : cette condition traduit une égalité de vitesses, qui est bien une condition cinématique. Si cette mise en équations est étendue aux ordres de dérivations supérieurs (les dans (4.23), (4.28) et (4.33) et suivantes infra), toutes les conditions supplémentaires introduites restent des conditions cinématiques puisqu'elles traduisent des égalités d'accélération, de dérivée temporelle d'accélération et ainsi de suite. ▲

En modélisation de calcul, pour obtenir des CSL ne faisant intervenir que des grandeurs inconnues harmoniques dans E , ψ est éliminé dans (4.23) en utilisant son expression en fonction de φ (4.18), ce qui donne : $x_{\bar{A}}^*$ et φ doivent satisfaire

$$(4.26) \quad \begin{cases} (1) & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 - g_{\bar{A}}^i \cdot x_{\bar{A}}^i = 0, \\ (2) & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \left(2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2 \right) - g_{\bar{A}}^i \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0. \end{cases}$$

La condition (↑.2) est la condition cinématique exprimée uniquement en fonction de φ habituelle. Le fait de l'exprimer avec la dérivation particulière de ψ permet d'obtenir immédiatement son expression. Dans l'approche habituelle, qui part de l'égalité des vitesses normales du fluide et de la surface libre, cette expression est obtenue moins immédiatement.

4.2.1.2.2 Conditions de glissement sur la carène

La carène C est de même définie implicitement⁷ : elle est constituée des points dont les coordonnées $x_{C\bar{A}}^*$ satisfont

$$(4.27) \quad c = 0$$

où

c : une fonction définissant la carène,
= fonction de t et de $x_{\bar{A}}^*$.

⁷Avec cette manière de définir une surface, seule celle-ci et ses dérivées temporelles *normales* (vitesse, accélération) sont définies. Cette définition ne serait pas utilisable pour un fluide visqueux.

EXEMPLE

▼ La fonction c définissant (avant déformation) un ellipsoïde de $1/2$ axes principaux $a_{\frac{*}{N}}$ (dans \mathcal{R}_N) est

$$c(p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}, p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}, x_{\frac{*}{A}}) = \sum_i (a_{\frac{i}{N}}^{-1} \cdot \sum_j (p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]})_{[\frac{i}{N}; \frac{j}{A}]}^{-1} \cdot (x_{\frac{j}{A}} - p_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}))^2 - 1$$

soit

$$c(t, x_{\frac{*}{A}}) = \sum_i (a_{\frac{i}{N}}^{-1} \cdot \sum_j (p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}(t))_{[\frac{i}{N}; \frac{j}{A}]}^{-1} \cdot (x_{\frac{j}{A}} - p_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}(t)))^2 - 1. \quad \blacktriangle$$

De même que pour la surface libre, les conditions de glissement sur la carène (CGC) sont : $x_{\frac{*}{A}}$, c et φ doivent satisfaire

$$(4.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad c = 0, \\ (2) \quad \mathbf{D}_t(c) = 0, \\ (3) \quad \mathbf{D}_t^2(c) = 0, \\ (4) \quad \mathbf{D}_t^3(c) = 0, \\ \dots \quad \dots\dots\dots \\ (n+1) \quad \mathbf{D}_t^n(c) = 0. \end{array} \right.$$

En anticipant sur la suite, les quatres premières équations de (4.28) peuvent être nécessaires pour écrire l'EE du système fluide! De même que pour la surface libre, (↑.2) correspond à la condition habituelle d'égalité des vitesses normales à C du fluide et de C .

Pour alléger l'écriture, les $\mathbf{D}_t^*(c)$ sont notés D_t^*c . Par définition des $\mathbf{D}_t^*(c)$, avec c défini comme une fonction de t et de $x_{\frac{*}{A}}$, ces grandeurs sont, pour $x_{\frac{*}{A}} \in C$,

$$(4.29) \quad D_t c_C = \frac{\partial c_C}{\partial t} + \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i},$$

$$(4.30) \quad D_t^2 c_C = \frac{\partial D_t c_C}{\partial t} + \frac{\partial D_t c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i}$$

et

$$(4.31) \quad D_t^3 c_C = \frac{\partial D_t^2 c_C}{\partial t} + \frac{\partial D_t^2 c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i}.$$

4.2.1.2.3 Conditions de glissement sur le fond

Les conditions de glissement sur le fond sont identiques aux CGC mais pour une surface connue et immobile. Le fond F est défini implicitement : il est constitué des points dont les coordonnées $x_{F/\bar{A}}^*$ satisfont

$$(4.32) \quad f = 0$$

où

f : une fonction définissant le fond,
 = fonction de $x_{\bar{A}}^*$ (F est indépendant de t . Pour le fluide, c'est la seule différence entre C et F).

Les conditions de glissement sur le fond sont : $x_{\bar{A}}^*$ et φ (f est supposé connu) doivent satisfaire

$$(4.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad f = 0, \\ (2) \quad \mathbf{D}_t(f) = 0, \\ (3) \quad \mathbf{D}_t^2(f) = 0, \\ \dots \quad \dots\dots\dots \\ (n+1) \quad \mathbf{D}_t^n(f) = 0. \end{array} \right.$$

Ces conditions s'écrivent

$$(4.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad f = 0, \\ (2) \quad D_t f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0, \\ (3) \quad D_t^2 f = \frac{\partial D_t f}{\partial t} + \frac{\partial D_t f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0, \\ \dots \quad \dots\dots\dots \\ (n+1) \quad D_t^n f = \frac{\partial D_t^{n-1} f}{\partial t} + \frac{\partial D_t^{n-1} f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0. \end{array} \right.$$

Les conditions (\uparrow .3) à (\uparrow . $n+1$) peuvent être simplifiées en utilisant le fait que toutes les conditions ((\uparrow .1) à (\uparrow . $n+1$)) de ce système sont des conditions homogènes qui doivent être satisfaites sur la même surface F . Leurs gradients en F sont donc colinéaires, ce qui peut être exprimé par

$$(4.35) \quad \frac{\partial D_t^m f_F}{\partial x_i} + \lambda_{\left(\frac{D_t^m f}{f}\right)_F} \cdot \frac{\partial f_F}{\partial x_i} = 0, \quad m = 1 \rightarrow n,$$

$$(4.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad f = 0, \\ (2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0, \\ (3) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_i} = 0, \\ \dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (n+1) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^n \varphi}{\partial t^{n-1} \partial x_i} = 0. \end{array} \right.$$

Les conditions (↑.3) à (↑.n + 1) peuvent être obtenues plus directement par le raisonnement suivant : puisque la frontière F est immobile, un point de la frontière peut avoir des coordonnées constantes. La condition (↑.2) devant être satisfaite $\forall t$, tous les $\partial/\partial t$ de cette condition doivent être nuls. La frontière étant immobile, tous les $\partial/\partial t$ de $\partial f/\partial x_*$ sont nuls, d'où ces conditions.

REMARQUE 1

▼ L'application de cette procédure aux CGC ne les simplifie pas. ▲

REMARQUES 2

▼ Les mises en équations actuelles qui résolvent un problème aux limites pour obtenir $\partial\varphi/\partial t$ (toutes ne suivent pas cette approche, cf. Commentaires 1, page 47) utilisent (4.36.2) comme condition de glissement sur une frontière immobile pour ce potentiel.

Si ces mises en équations incluent un corps mobile *libre*, elles utilisent comme condition de glissement sur la frontière avec ce corps, l'égalité des accélérations normales du fluide et de la frontière, sans autre justification que l'intuition (cf. [8] équation (18) ou [27] équation (9)). L'accélération du fluide étant donnée par (4.20), cette condition s'écrirait sur une frontière immobile

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_i} = 0$$

soit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0,$$

ce qui est incohérent avec (4.36.2).

Une autre incohérence de ces mises en équations est que sur une frontière mobile mais ayant un mouvement *imposé*, un batteur à houle par exemple, c'est la

condition (4.36.2) qui est appliquée et non l'égalité des accélérations normales : la condition de glissement appliquée dépend du comportement de la frontière !

Ces incohérences montrent les limites de notre intuition physique. ▲

4.2.1.2.4 Condition de repos à l'infini horizontal

Le repos du fluide à l'infini horizontal est traduit par le fait que dans la représentation de φ et de $\partial\varphi/\partial t$ par leur valeur aux frontières, la frontière F_∞ (à l'infini horizontal) n'apporte pas de contribution, cf. section D.1.1.2.

4.2.2 Mises en équations

Les conditions (4.12), (4.26), (4.28), (4.36) et la condition de repos à l'infini horizontal définissent le comportement du système fluide. Pour être utilisable, cet ensemble d'équation doit être transformé en une EE. Celle-ci est entièrement déterminée par les VE choisies. La théorie des systèmes, cf. annexe B, ne propose pas de méthode systématique pour ce choix. La description de cette théorie étant auto-référente, le processus de choix des VE est itératif. Nous ne présentons qu'un résumé de ces itérations. Celles-ci se terminent quand le modèle obtenu avec les VE choisies satisfait les critères exposés en annexe B.

Le point d'entrée dans ces itérations peut être quelconque. Nous choisissons de partir de l'hypothèse que c est une entrée du système fluide. Cette hypothèse est fortement suggérée par le fait que la position du navire, et donc de C , est une sortie du système navire et par la dualité des grandeurs d'entrée et de sortie dans une liaison, cf. annexe B, une entrée du système fluide. Pour que cette hypothèse soit confirmée, la pression sur C , qui est la variable duale de la position de C dans la transmission d'énergie du fluide vers le navire, ne doit dépendre que des VE⁹. La pression dépend de $\partial\varphi/\partial t$ et de $\partial\varphi/\partial x_*$ (cf. (4.16)). Les VE doivent donc définir φ dans un voisinage de C et $\partial\varphi/\partial t$ sur C . Nous supposons que les VE doivent définir ces potentiels dans tout E et pas seulement sur C .

L'harmonicité de φ et de $\partial\varphi/\partial t$ dans E fait que ces potentiels ne dépendent que de leur valeur ou de la valeur de leur dérivée normale sur ∂E . Les gran-

⁹Cf. note 4 page 144.

deurs $\partial\varphi_c/\partial n$ ¹⁰ et $\partial^2\varphi_c/\partial t \partial n$ ¹⁰ dépendant de c , nous pouvons supposer qu'elles sont connues si c l'est (nous verrons plus loin que ceci n'est pas aussi immédiat qu'il le paraît). Les seules variables libres définissant φ et $\partial\varphi/\partial t$ dans E sont donc une définition de L , $\{\varphi_L$ ou $\partial\varphi_L/\partial n\}$ et $\{\partial\varphi_L/\partial t$ ou $\partial^2\varphi_L/\partial t \partial n\}$. Les VE doivent donc définir ces grandeurs. Le plus simple est de considérer que ces grandeurs *sont* les VE.

Les grandeurs $x_{L\bar{A}}^*$, φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$ sont liées par (4.26.1). Les VE devant être des variables indépendantes, seules deux de ces trois grandeurs peuvent être les VE. Les deux grandeurs choisies comme VE doivent entièrement déterminer la troisième, sinon φ ou $\partial\varphi/\partial t$ dans E ne sont pas définis. Ceci implique que φ_L est obligatoirement une VE : (4.26.1) ne définit que $(\partial\varphi_L/\partial x_i)^2$, ce qui ne définit pas φ_L . Le choix restant pour la deuxième VE est entre $x_{L\bar{A}}^*$ et $\partial\varphi_L/\partial t$.

Le choix de $x_{L\bar{A}}^*$ est le point de départ de la méthode MEL (cf. [21]). La règle de la théorie des systèmes disant que les sorties d'un système ne doivent dépendre que des VE rend très difficile l'adoption de cette grandeur comme VE : dans la liaison fluide \leftrightarrow air, $x_{L\bar{A}}^*$ est bien une sortie du système fluide, mais dans la liaison fluide \leftrightarrow navire, la sortie est supposée être la pression (sur C) et l'expression de cette grandeur en fonction de $x_{L\bar{A}}^*$ n'est pas immédiate. Il est donc plus simple de prendre $\partial\varphi_L/\partial t$ comme deuxième VE.

Une autre indication de la non pertinence de prendre $x_{L\bar{A}}^*$ comme VE est que φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$ définissent $x_{L\bar{A}}^*$, $dx_{L\bar{A}}^*/dt$ et $d^2x_{L\bar{A}}^*/dt^2$, cf. (4.113) et (4.114) infra, alors que $x_{L\bar{A}}^*$ et φ_L ne définissent que $\partial\varphi_L/\partial t$ et $dx_{L\bar{A}}^*/dt$.

De plus, en anticipant sur la suite, nous sommes conduits à développer le pro-

¹⁰Dans le texte, la convention de notation concernant la dérivée normale à C est que

$$(4.37) \quad \frac{\partial \bullet_c}{\partial n} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial c_c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bullet_c}{\partial x_i}.$$

La normale

$$(4.38) \quad n_{C\bar{A}} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial c_c}{\partial x_i}$$

peut ne pas être unitaire.

La notation $\partial \bullet_c / \partial n$ n'est pas utilisée dans les équations parce que trop dangereuse :

$$\begin{aligned} \text{l'opération } \frac{\partial}{\partial \circ} \left(\frac{\partial \bullet_c}{\partial n} \right) \text{ devait signifier } & \frac{\partial^2 c_c}{\partial \circ \partial x_i} \cdot \frac{\partial \bullet_c}{\partial x_i} + \frac{\partial c_c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \bullet_c}{\partial \circ \partial x_i} \\ & = \frac{\partial^2 c_c}{\partial \circ \partial x_i} \cdot \frac{\partial \bullet_c}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \bullet_c}{\partial \circ \partial n} \text{ avec cette notation !} \end{aligned}$$

Le lecteur peut préférer raisonner en normale unitaire. Dans ce cas c est la distance signée à la surface ; mais la notation $\partial \bullet_c / \partial n$ garde la même dangerosité.

blème en perturbations. Cette opération n'a pas de sens avec $x_{L\bar{A}}^*$ comme VE : l'objectif du développement en perturbations avec conditions en une surface inconnue est justement d'éliminer du problème l'inconnue qu'est la position de la surface, cf. section F.2.2.2.2, alors que cette inconnue doit obligatoirement être conservée si elle est une VE. L'utilisation de $x_{L\bar{A}}^*$ comme VE n'est donc d'une façon générale pas pertinente et n'est pas possible dans le problème traité. Les VE choisies sont donc, au départ, φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$.

4.2.2.1 Variables d'état φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$

4.2.2.1.1 Équation d'évolution

Il faut vérifier que φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$ constituent bien un vecteur d'état complet du système fluide. Pour cela, le système d'équations (4.26), (4.28) doit pouvoir être mis avec ces VE sous la forme d'une EE canonique, cf. annexe B pour la définition de ce terme. Considérée comme une EE de ces VE, (4.26) s'écrit

$$(4.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial\varphi_L}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial\varphi_L}{\partial x_i} \right)^2 - g_{\bar{A}}^i \cdot x_{L\bar{A}}^i = 0, \\ (2) \quad \frac{\partial^2\varphi_L}{\partial t^2} = - \left(2 \cdot \frac{\partial^2\varphi_L}{\partial t \partial x_i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\partial\varphi_L}{\partial x_j} \right)^2 \right) - g_{\bar{A}}^i \right) \cdot \frac{\partial\varphi_L}{\partial x_i} \end{array} \right\}^{11}$$

plus la relation triviale pour $\partial\varphi_L/\partial t$: $\partial\varphi_L/\partial t = \partial\varphi_L/\partial t$.

Bien que (↑.1) ne fasse intervenir que des VE¹², elle fait partie de l'EE en ce qu'elle permet d'éliminer du second membre la grandeur inconnue $x_{L\bar{A}}^*$. Celui-ci n'est donc implicitement fonction que des VE. Ceci sera manifeste lors de l'élimination de $x_{L\bar{A}}^*$ dans le développement en perturbation.

L'EE (4.39) n'est pas encore sous forme canonique : toutes les VE et seulement elles apparaissent bien dans son second membre mais sous la forme de dérivées spatiales et les entrées du système (les mouvements de la carène) n'y apparaissent pas. Ces points sont résolus par le fait que φ étant harmonique dans E , peut être représenté, cf. annexe D, par

$$(4.40) \quad \varphi(x_{\bar{A}}^*) = (- {}^1\mathbf{G}_L(\varphi_L) + {}^1\mathbf{G}_{c_n} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi_c}{\partial x_i} \right))(x_{\bar{A}}^*)$$

¹¹Dans ces équations, l'indice L est redondant avec l'équation (1). Il est introduit pour faciliter la lecture des équations à venir.

¹²Cf. note 4 page 144.

où ${}^1\mathbf{G}_L$ et ${}^1\mathbf{G}_{c_n}$ sont des opérateurs linéaires. La grandeur φ_L est une VE et $\partial\varphi_C/\partial n$ est déterminé par les CGC, cf. (4.46) infra : les VE et les entrées du système définissent φ dans tout E et donc ses dérivées spatiales.

En modélisation de représentation, seuls nous intéressent les faits que les opérateurs ${}^1\mathbf{G}_*$ existent, soient uniques, soient linéaires et soient différentiables par rapport à $x_{\bar{A}}^*$, y compris quand $x_{\bar{A}}^* \rightarrow \partial E$. Le calcul effectif de ces opérateurs représente la plus grande part de la modélisation de calcul.

La grandeur $\partial\varphi/\partial t$ étant harmonique dans E , peut de même être représentée, cf. annexe D, par

$$(4.41) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x_{\bar{A}}^*) = (-{}^1\mathbf{G}_L(\frac{\partial\varphi_L}{\partial t}) + {}^1\mathbf{G}_{c_n}(\frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2\varphi_C}{\partial t \partial x_i}))(x_{\bar{A}}^*).$$

La différentiabilité des opérateurs fait que les dérivées spatiales de (4.40) et de (4.41) donnent la représentation des dérivées spatiales de φ et de $\partial\varphi/\partial t$. Celles qui seront utilisées dans la suite sont

$$(4.42) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_{\bar{A}}^*) = (-\frac{\partial {}^1\mathbf{G}_L}{\partial x_i}(\varphi_L) + \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{c_n}}{\partial x_i}(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial\varphi_C}{\partial x_j}))(x_{\bar{A}}^*),$$

$$(4.43) \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t \partial x_i}(x_{\bar{A}}^*) = (-\frac{\partial {}^1\mathbf{G}_L}{\partial x_i}(\frac{\partial\varphi_L}{\partial t}) + \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{c_n}}{\partial x_i}(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2\varphi_C}{\partial t \partial x_j}))(x_{\bar{A}}^*)$$

et

$$(4.44) \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x_{\bar{A}}^*) = (-\frac{\partial^2 {}^1\mathbf{G}_L}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi_L) + \frac{\partial^2 {}^1\mathbf{G}_{c_n}}{\partial x_i \partial x_j}(\frac{\partial c_C}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial\varphi_C}{\partial x_k}))(x_{\bar{A}}^*).$$

Le report de ces représentations (pour $x_{\bar{A}}^* \in L$) dans (4.39) donne l'EE fluide :

$$(4.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial\varphi_L}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,L}}{\partial x_i}(\varphi_L) + \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,c_n}}{\partial x_i}(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial\varphi_C}{\partial x_j}))^2 - g_{\bar{A}}^i \cdot x_{L\bar{A}}^i = 0, \\ (2) \quad \frac{\partial^2\varphi_L}{\partial t^2} \\ = - (2 \cdot (-\frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,L}}{\partial x_i}(\frac{\partial\varphi_L}{\partial t}) + \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,c_n}}{\partial x_i}(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2\varphi_C}{\partial t \partial x_j})) \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} ((-\frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,L}}{\partial x_j}(\varphi_L) + \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,c_n}}{\partial x_j}(\frac{\partial c_C}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial\varphi_C}{\partial x_k}))^2) \\ - g_{\bar{A}}^i \cdot (-\frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,L}}{\partial x_i}(\varphi_L) + \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,c_n}}{\partial x_i}(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial\varphi_C}{\partial x_j})) \end{array} \right.$$

(plus la relation triviale pour $\partial\varphi_L/\partial t$). Le second membre de cette EE ne dépend que des VE et des entrées $\partial\varphi_C/\partial n$ et $\partial^2\varphi_C/\partial t \partial n$. Pour qu'elle soit canonique, les entrées doivent être exprimées en fonction uniquement des mouvements de la carène, c.-à-d. de c , et si besoin des VE.

La condition (4.28.2) donne

$$(4.46) \quad \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} = - \frac{\partial c_C}{\partial t}.$$

La grandeur $\partial\varphi_C/\partial n$ ne dépend donc que de c .

La grandeur $\partial^2\varphi_C/\partial t \partial n$ a la dimension d'une accélération¹³. Cette entrée devant provenir de la CGC, son expression est donnée par l'application de cette condition (une particule sur C à un instant donné le reste dans un voisinage de temps) aux accélérations, c.-à-d. que c_C et φ_C doivent satisfaire (4.28.3), ce qui donne

$$(4.47) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_i} \\ &= - \frac{\partial^2 c_C}{\partial t^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 c_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} - \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Pour que l'EE soit canonique, les dérivées spatiales de φ_C au second membre de (↑) doivent être exprimées en fonction uniquement des VE et de c . Le report dans (↑) de (4.42) et de (4.44) (pour $x_A^* \in C$) et ensuite de (4.46), ce que nous ne ferons qu'en section 4.3.1, montre que $\partial^2\varphi_C/\partial t \partial n$ peut être exprimé en fonction uniquement des VE et de c .

Toutes les entrées de l'EE (4.45) peuvent être exprimées en fonction uniquement des VE et de c . Elle est donc canonique : φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$ constituent bien un vecteur d'état complet du système fluide.

COMMENTAIRES 1 : *Comparaison avec les mises en équations des bassins à houle numériques*

▼ Les premières mises en équations des bassins à houle numériques ne modélisaient que φ , pas $\partial\varphi/\partial t$: en l'absence de corps mobile, $\partial\varphi/\partial t$ n'est requis

¹³Le fait que cette grandeur soit une entrée peut paraître curieux. Ceci vient de (4.41), qui est une conséquence de l'incompressibilité du fluide : l'accélération se transmet instantanément dans tout le fluide. Cette caractéristique non physique du fluide met en défaut notre intuition.

que sur L ; cette grandeur était calculée par dérivation numérique retardée de φ_L (cf. par exemple [21]). Des instabilités apparaissaient. La modélisation de $\partial\varphi/\partial t$ a été introduite pour deux raisons : soit pour pouvoir prendre en compte un corps mobile (cf. [31, 8, 27, 12]), soit pour utiliser une intégration temporelle d'ordre supérieur (cf. [11, 13]). Dans les deux cas, les instabilités disparaissent.

Une EE canonique est obtenue en prenant pour VE φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$ et avec une représentation de φ et de $\partial\varphi/\partial t$ dans E à partir de ces VE. Celles-ci étant indépendantes, la représentation de $\partial\varphi/\partial t$ (ou son calcul dans les modélisations de calcul) est donc une *nécessité*, même sans corps mobile et en en restant à l'ordre minimal de dérivation temporel permettant l'écriture du modèle.

Dans les mises en équations des bassins à houle numériques, les conditions de glissement utilisées habituellement pour $\partial\varphi/\partial t$ sont $\partial^2\varphi/\partial t \partial n = 0$ sur une frontière immobile et l'égalité des accélérations normales sur une frontière mobile. Ces conditions sont incohérentes entre elles et ne correspondent pas à la CGC (4.28.3), cf. Remarques 2 page 42. ▲

COMMENTAIRE 2 : *Correspondances avec les conditions d'unicité des fonctions de Green de l'hydrodynamique navale*

▼ La procédure suivie pour obtenir l'EE (4.45) fait intervenir *deux*¹⁴ conditions d'unicité :

- 1) les conditions à l'infini horizontal (D.1) et (D.2.5) qui donnent l'unicité du problème harmonique ;
- 2) l'utilisation d'un modèle de la forme (3.1), et donc causal, qui donne l'unicité du problème ondulatoire.

Des correspondances peuvent être établies avec les fonctions de Green de l'hydrodynamique navale, même si ces fonctions ne concernent que le problème linéarisé. La démarche suivie pour les établir est la suivante (cf. [32]) :

- 1) écriture du problème à résoudre en temps et dans l'espace physique $x_{\frac{3}{A}}^*$;
- 2) transformation de Fourier horizontale (la direction $x_{\frac{3}{A}}$ reste dans l'espace physique) ;

¹⁴Le fait que deux conditions d'unicité interviennent provient du caractère non physique d'un fluide incompressible.

- 3) transformation de Laplace ou de Fourier en temps suivant que la fonction de Green demandée est temporelle ou fréquentielle ;
- 4) résolution du problème ;
- 5) retour dans l'espace physique horizontal par transformation de Fourier inverse ;
- 6) pour la fonction de Green temporelle, transformation de Laplace inverse, en en prenant la détermination causale (ce qui est souvent oublié tellement ce choix est automatique) ; pour la fonction de Green fréquentielle, élimination des ondes entrantes (condition de Sommerfeld).

Les correspondances entre les conditions d'unicité utilisées pour obtenir le modèle (4.45) et la démarche ci-dessus sont les suivantes :

- 1) la condition d'unicité du problème harmonique est dans le fait d'utiliser une transformée de Fourier horizontale et donc d'imposer implicitement que cette transformée existe ;
- 2) la condition d'unicité du problème ondulatoire est, pour les fonctions de Green temporelles, dans le choix de la détermination causale de la transformée de Laplace inverse et, pour les fonctions de Green fréquentielles, dans la condition de Sommerfeld.

Ces correspondances apportent un autre éclairage aux conditions d'unicité des fonctions de Green de l'hydrodynamique navale. ▲

4.2.2.1.2 Expression de ψ

L'expression de ψ en fonction uniquement des VE et de c doit être connue pour déterminer l'expression de l'action fluide \rightarrow navire (c.-à-d. des efforts exercés par le fluide sur la carène).

Le report de (4.41) et de (4.42) dans (4.18) donne

$$(4.48) \quad \psi(x_A^*) = \left(- {}^1\mathbf{G}_L \left(\frac{\partial \varphi_L}{\partial t} \right) + {}^1\mathbf{G}_{c_n} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial t \partial x_i} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot \left(- \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_L}{\partial x_i} (\varphi_L) + \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{c_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_j} \right) \right)^2 - g_{\frac{i}{A}} \cdot x_{\frac{i}{A}} \right) (x_A^*).$$

L'expression de ψ en fonction uniquement des VE et de c est obtenue en reportant jusqu'à épuisement, ce que nous ne ferons pas, (4.46) et (4.47) dans (\uparrow). Ceci confirme l'hypothèse que la pression est une sortie du système fluide.

4.2.2.1.3 Observation des VE

La houle apparaît avant tout comme la dénivellation η ¹⁵ de L . La première idée est d'envisager une mesure de cette grandeur sur toute l'étendue nécessaire autour du navire. Cette mesure permet-elle de déterminer les VE?

Théorème 1 : φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$ sont observables à partir des valeurs de η et de $\partial\eta/\partial t$ sur tout L .

DÉMONSTRATION

▼ Les grandeurs η et $\partial\eta/\partial t$ définissent complètement la vitesse normale de L . Cette grandeur est $\partial\varphi_L/\partial\nu$ (ν : normale unitaire). La représentation de φ dans E à partir de φ_L et de $\partial\varphi_C/\partial\nu$ définie en section D.1.1 pourrait être réétablie avec $\partial\varphi_L/\partial\nu$ à la place de φ_L . La grandeur φ dans E est donc entièrement définie par $\partial\varphi_L/\partial\nu$ et $\partial\varphi_C/\partial\nu$, qui est supposé connu. Les grandeurs η et $\partial\eta/\partial t$ définissent donc complètement φ dans E et donc φ_L . Le report de la définition φ dans E et de η dans (4.26.1) donne $\partial\varphi_L/\partial t$ ▲

Cette démonstration permettrait de définir un observateur. Comme nous n'utiliserons pas la mise en équations avec conditions exactes pour la modélisation, celui-ci n'est pas explicité.

Cette démonstration pourrait conduire à penser que $\partial\varphi_L/\partial\nu$ devrait être utilisé à la place de φ_L comme VE, mais il n'en est rien : l'utilisation de cette VE ne modifierait pas le fait que l'expression de $\partial\varphi/\partial x_*$ dans (4.26.1) nécessite de connaître une représentation de φ dans E .

4.2.2.1.4 Non observabilité des VE à partir des seuls mouvements

La mesure de η , ou de toute autre grandeur qui lui est liée, en temps réel et sur une étendue suffisante autour du navire étant difficile avec les technologies actuelles, la question immédiatement posée par les utilisateurs de la prédictions est : la prédiction des mouvements est-elle possible en connaissant seulement les mouvements du navire? Ceci se traduit techniquement par : les VE fluide sont-elles observables à partir des seuls mouvements du navire? Ces mouvements sont mesurés aujourd'hui avec précision et de façon courante sur les navires.

La réponse est malheureusement négative. Dans la liaison fluide \leftrightarrow navire, la sortie du système fluide, c.-à-d. la grandeur qui dépend des VE fluide, est la

¹⁵ Avec les notations adoptées dans cette étude, $\eta = x_{L\frac{3}{A}}(t, x_{\frac{1}{A}}, x_{\frac{2}{A}})$.

pression sur C . Cette pression se traduit dans les mouvements du navire par les 6 accélérations. Ces informations ne peuvent pas être équivalentes aux grandeurs φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$ qui ont chacune pour dimension \mathbb{R}^2 . Pour que les VE fluide soient observables, des mesures doivent donc être ajoutées aux mesures des mouvements.

Cette difficulté de mesure de grandeurs physiques représentant les VE fluide nous amène à aborder cette question dans l'autre sens : les mesures possibles actuellement à bord d'un navire permettent-elles d'observer ces VE ?

4.2.2.2 Variables d'état φ_C et $\partial\varphi_C/\partial t$

La grandeur la plus facilement mesurable actuellement est p_C , la pression du fluide sur la carène. Elle peut être remplacée, ou complétée, par la mesure des contraintes dans la structure : en petites déformations, ce qui est le cas en fonctionnement normal d'un navire, ces contraintes (hors contraintes statiques) dépendent linéairement de la pression sur la carène et des efforts d'inertie.

4.2.2.2.1 Équation d'évolution

Les grandeurs φ , $\partial\varphi/\partial t$ et $\partial^2\varphi/\partial t^2$ peuvent être représentées, cf. annexe D, par

$$(4.49) \quad \varphi(x_A^*) = (- {}^2\mathbf{G}_C(\varphi_C) + {}^2\mathbf{G}_{C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i}))(x_A^*),$$

$$(4.50) \quad \frac{\partial \varphi(x_A^*)}{\partial t} = (- {}^2\mathbf{G}_C(\frac{\partial \varphi_C}{\partial t}) + {}^2\mathbf{G}_{C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_i}))(x_A^*)$$

et

$$(4.51) \quad \frac{\partial^2 \varphi(x_A^*)}{\partial t^2} = (- {}^2\mathbf{G}_C(\frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t^2}) + {}^2\mathbf{G}_{C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_C}{\partial t^2 \partial x_i}))(x_A^*).$$

Avec ces représentations, les dérivées spatiales de ces grandeurs sont

$$(4.52) \quad \frac{\partial \varphi(x_A^*)}{\partial x_i} = (- \frac{\partial {}^2\mathbf{G}_C(\varphi_C)}{\partial x_i} + \frac{\partial {}^2\mathbf{G}_{C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j})}{\partial x_i})(x_A^*),$$

$$(4.53) \quad \frac{\partial^2 \varphi(x_A^*)}{\partial t \partial x_i} = (- \frac{\partial {}^2\mathbf{G}_C(\frac{\partial \varphi_C}{\partial t})}{\partial x_i} + \frac{\partial {}^2\mathbf{G}_{C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_j})}{\partial x_i})(x_A^*),$$

$$(4.54) \quad \frac{\partial^2 \varphi(x_A^*)}{\partial x_i \partial x_j} = (- \frac{\partial^2 {}^2\mathbf{G}_C(\varphi_C)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 {}^2\mathbf{G}_{C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k})}{\partial x_i \partial x_j})(x_A^*),$$

$$(4.55) \quad \frac{\partial^3 \varphi(x_A^*)}{\partial t \partial x_i \partial x_j} = (- \frac{\partial^2 {}^2\mathbf{G}_C(\frac{\partial \varphi_C}{\partial t})}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 {}^2\mathbf{G}_{C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_k})}{\partial x_i \partial x_j})(x_A^*)$$

et

$$(4.56) \quad \frac{\partial^3 \varphi(x_{\bar{A}}^*)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \left(- \frac{\partial^2 {}^2\mathbf{G}_c}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\varphi_c) + \frac{\partial^2 {}^2\mathbf{G}_{c_n}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_l} \right) \right) (x_{\bar{A}}^*).$$

Le report de (4.50) à (4.54) (pour $x_{\bar{A}}^* \in L$) dans (4.39) donne l'EE fluide :

$$(4.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad - {}^2\mathbf{G}_{L,C} \left(\frac{\partial \varphi_c}{\partial t} \right) + {}^2\mathbf{G}_{L,C_n} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial t \partial x_i} \right) \\ \quad + \frac{1}{2} \cdot \left(- \frac{\partial^2 {}^2\mathbf{G}_{L,C}}{\partial x_i}(\varphi_c) + \frac{\partial^2 {}^2\mathbf{G}_{L,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_j} \right) \right)^2 - g_{\bar{A}}^i \cdot x_{L_{\bar{A}}}^i = 0, \\ (2) \quad - {}^2\mathbf{G}_{L,C} \left(\frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial t^2} \right) \\ = - {}^2\mathbf{G}_{L,C_n} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_c}{\partial t^2 \partial x_i} \right) \\ \quad - \left(2 \cdot \left(- \frac{\partial^2 {}^2\mathbf{G}_{L,C}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi_c}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 {}^2\mathbf{G}_{L,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial t \partial x_k} \right) \right) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(- \frac{\partial^2 {}^2\mathbf{G}_{L,C}}{\partial x_j}(\varphi_c) + \frac{\partial^2 {}^2\mathbf{G}_{L,C_n}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_k} \right) \right)^2 \right) \right. \\ \quad \left. - g_{\bar{A}}^i \cdot \left(- \frac{\partial^2 {}^2\mathbf{G}_{L,C}}{\partial x_i}(\varphi_c) + \frac{\partial^2 {}^2\mathbf{G}_{L,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_k} \right) \right) \right\} \end{array} \right.$$

(plus la relation triviale pour $\partial \varphi_c / \partial t$).

L'opérateur ${}^2\mathbf{G}_{L,C}$ étant inversible, cf. D.1.4, les VE de cette EE peuvent être φ_c et $\partial \varphi_c / \partial t$. Elle doit donc être complétée par la relation triviale pour $\partial \varphi_c / \partial t$. Ses entrées sont $\partial \varphi_c / \partial n$, $\partial^2 \varphi_c / \partial t \partial n$ et $\partial^3 \varphi_c / \partial t^2 \partial n$.

De même que pour (4.39), (†.1), qui ne dépend que des VE et maintenant des entrées, fait partie de l'EE en ce qu'elle permet d'éliminer la grandeur inconnue $x_{L_{\bar{A}}}^*$ du second membre. Celui-ci n'est donc implicitement fonction que des VE et des entrées.

Pour que cette EE soit canonique, ses entrées doivent être exprimées en fonction des mouvements de la carène, c.-à-d. de c , et si besoin des VE.

L'expression de $\partial \varphi_c / \partial n$ est toujours (4.46).

L'expression de $\partial^2 \varphi_c / \partial t \partial n$ en fonction uniquement des VE et de c s'obtient de la même manière qu'en section 4.2.2.1.1 mais en utilisant (4.52) et (4.54)

(pour $x_{\bar{A}}^* \in C$).

Pour la même raison et avec les mêmes commentaires que pour $\partial^2\varphi_C/\partial t \partial n$ (cf. note 13 page 47), $\partial^3\varphi_C/\partial t^2 \partial n$ est déterminé par (4.28.4), ce qui donne

$$\begin{aligned}
(4.58) \quad & \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_C}{\partial t^2 \partial x_i} \\
&= -\frac{\partial^3 c_C}{\partial t^3} - 3 \cdot \frac{\partial^3 c_C}{\partial t^2 \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_i} \\
&\quad - 3 \cdot \frac{\partial^3 c_C}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \\
&\quad - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} - 2 \cdot \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_C}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \\
&\quad - \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_j} \\
&\quad - \frac{\partial^3 c_C}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} \\
&\quad - \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} - \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Le report de (4.52) à (4.56) (pour $x_{\bar{A}}^* \in C$), de (4.46) et de l'expression de $\partial^2\varphi_C/\partial t \partial n$ en fonction des VE et de c dans (†), ce que nous ne ferons qu'en section 4.3.2, montre que $\partial^3\varphi_C/\partial t^2 \partial n$ ne dépend que des VE et de c .

Toutes les entrées de l'EE (4.57) peuvent être exprimées en fonction uniquement des VE et de c . Elle est donc canonique : φ_C et $\partial\varphi_C/\partial t$ constituent bien un vecteur d'état complet du système fluide.

4.2.2.2.2 Expression de ψ

Le report de (4.50) et de (4.52) dans (4.18) donne

$$\begin{aligned}
(4.59) \quad \psi(x_{\bar{A}}^*) &= (-{}^2\mathbf{G}_c \left(\frac{\partial \varphi_C}{\partial t} \right) + {}^2\mathbf{G}_{c_n} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_i} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\partial {}^2\mathbf{G}_c}{\partial x_i}(\varphi_C) + \frac{\partial {}^2\mathbf{G}_{c_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \right) \right)^2 - g_{\bar{A}}^i \cdot x_{\bar{A}}^i)(x_{\bar{A}}^*).
\end{aligned}$$

L'expression de ψ en fonction uniquement des VE et de c est obtenue en reportant (4.46) et (4.47) dans (†) :

$$\begin{aligned} \psi(x_{\bar{A}}^*) &= (-{}^2\mathbf{G}_c \left(\frac{\partial\varphi_c}{\partial t}\right) - {}^2\mathbf{G}_{c_n} \left(\frac{\partial^2 c_c}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 c_c}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi_c}{\partial x_i}\right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 c_c}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial\varphi_c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi_c}{\partial x_j} + \frac{\partial c_c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial\varphi_c}{\partial x_j}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{G}_c}{\partial x_i}(\varphi_c) + \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{c_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial t}\right)\right)^2 - g_{\bar{A}}^i \cdot x_{\bar{A}}^i(x_{\bar{A}}^*). \end{aligned}$$

Avec les VE φ_c et $\partial\varphi_c/\partial t$, l'expression de ψ_c est simplifiée : en utilisant (D.43) et (D.44), ou en ne reportant pas (4.50) dans les équations précédentes, ψ_c est donné par

$$(4.60) \quad \psi_c = \frac{\partial\varphi_c}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{G}_{c,c}}{\partial x_i}(\varphi_c) + \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{c,c_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial t}\right)\right)^2 - g_{\bar{A}}^i \cdot x_{c_{\bar{A}}}^i.$$

Mais attention, cette expression n'est valide que *sur* C . Elle n'est pas dérivable spatialement (sauf tangentiellement à C).

4.2.2.2.3 Observation des VE

Par analogie avec les VE φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$ et les mesures de η et de $\partial\eta/\partial t$, nous pouvons supposer que φ_c et $\partial\varphi_c/\partial t$ peuvent être déterminés à partir de ψ_c et de $\partial\psi_c/\partial t$. Cette supposition demande à être démontrée.

En utilisant (4.52) et (4.53) (pour $x_{\bar{A}}^* \in C$), $\partial\psi_c/\partial t$ s'écrit

$$(4.61) \quad \begin{aligned} \frac{\partial\psi_c}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial t^2} + \left(-\frac{\partial^2 \mathbf{G}_{c,c}}{\partial x_i}(\varphi_c) + \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{c,c_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial\varphi_c}{\partial x_j}\right)\right) \\ &\quad \cdot \left(-\frac{\partial^2 \mathbf{G}_{c,c}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\varphi_c}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{c,c_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial t \partial x_j}\right)\right). \end{aligned}$$

Le report de (4.57.1) et des expressions de $\partial\varphi_c/\partial n$, de $\partial^2 \varphi_c/\partial t \partial n$ et de $\partial^3 \varphi_c/\partial t^2 \partial n$ en fonction uniquement des VE et de c dans (†), ce que nous ne ferons pas, donne l'expression de $\partial\psi_c/\partial t$ en fonction uniquement des VE et de c . L'équation (4.60) et cette expression constituent l'équation d'observation de φ_c et de $\partial\varphi_c/\partial t$ à partir de ψ_c et de $\partial\psi_c/\partial t$. Nous ne sommes pas en mesure de démontrer l'unicité de la solution de cette équation, c.-à-d. l'observabilité de φ_c et de $\partial\varphi_c/\partial t$ à partir de ψ_c et de $\partial\psi_c/\partial t$. Cette question est ouverte.

4.2.2.3 Action du fluide sur le navire

4.2.2.3.1 Moment de degré 0 des forces de pression sur la carène

En fluide parfait, les forces exercées sur la carène proviennent uniquement de la pression. Leur moment de degré 0, c.-à-d. la somme de ces forces, est donné par

$$(4.62) \quad f_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]} \stackrel{\text{déf}}{=} -\rho \cdot \int_{x_{\frac{*}{A}} \in C} ds \cdot \nu_{\frac{i}{A}} \cdot \psi.$$

Avec la carène définie par une équation implicite, (†) s'écrit

$$(4.63) \quad f_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]} = -\rho \cdot \int_{x_{\frac{*}{A}} \in C} ds \cdot \left\| \frac{\partial c}{\partial x_{*}} \right\|^{-1} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \psi.$$

L'intégration des forces de pression est simplifiée quand la variable d'intégration est $x_{\frac{*}{N}}$ au lieu de $x_{\frac{*}{A}}$, cf. section suivante. Une autre expression du moment de degré 0 des forces de pression est donc

$$(4.64) \quad f_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]} = -\rho \cdot \int_{x_{\frac{*}{N}} \in C} ds \cdot \left\| \frac{\partial c}{\partial x_{*}} \right\|^{-1} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \psi$$

(c et ψ restent les mêmes fonctions de $x_{\frac{*}{A}}$ mais cette grandeur est maintenant une fonction de $x_{\frac{*}{N}}$, cf. (C.40)).

Le développement en perturbations de ces expressions est difficile. Une expression équivalente à (4.63) est

$$(4.65) \quad f_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]} = -\rho \cdot \int_{x_{\frac{*}{A}} \in \mathbb{R}^3} |dx_{\frac{*}{A}}| \cdot \delta(c) \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \psi \cdot \Upsilon(-\psi)$$

où

δ : fonction de Dirac ;

Υ : fonction de Heaviside.

La partie $\delta(c)$ veut dire «sur la carène» et la partie $\Upsilon(-\psi)$, «limitée au domaine où la pression est positive»¹⁶, c.-à-d. sous la surface libre. La manipulation analytique de cette intégrale est simple. Cette expression nécessite une

¹⁶Pour être rigoureux, il faudrait ajouter «au voisinage de la ligne de flottaison d'ordre 0 et \forall la pression sous la ligne de flottaison» : le $\Upsilon(-\psi)$ ne doit plus intervenir sous la ligne de flottaison, des pressions négatives peuvent y exister. Ceci est pris en compte dans le développement en perturbations par le fait que les grandeurs sont sommées sur tout $C^{(0)}$, c.-à-d. quel que soit le signe de la pression.

définition implicite de la carène, d'où l'adoption de ce mode de définition dans l'étude.

Dans (↑), seule la valeur des fonctions pour $x_{\bar{A}}^* \in C$ intervient. Cette équation peut donc s'écrire

$$(4.66) \quad f_{C[\bar{A}]}^{[0]} = -\rho \cdot \int_{x_{\bar{A}}^* \in \mathbb{R}^3} |dx_{\bar{A}}^*| \cdot \delta(c_C) \cdot \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \psi_C \cdot \Upsilon(-\psi_C).$$

Dans la suite, (↑) sera notée

$$(4.67) \quad f_{C[\bar{A}]}^{[0]} = \mathbf{f}_{C[\bar{A}]}^{[0]}(c_C, \psi_C)$$

où l'opérateur $\mathbf{f}_{C[\bar{A}]}^{[0]}$ est

$$(4.68) \quad \mathbf{f}_{C[\bar{A}]}^{[0]}(c_C, \psi_C) \stackrel{\text{déf}}{=} -\rho \cdot \int_{x_{\bar{A}}^* \in \mathbb{R}^3} |dx_{\bar{A}}^*| \cdot \delta(c_C) \cdot \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \psi_C \cdot \Upsilon(-\psi_C).$$

Les intégrales résultant du développement en perturbations sont de la forme (4.65). Pour être utilisables numériquement, elles doivent être retransformées en intégrales de la forme (4.62) ou ses équivalentes calculables.

4.2.2.3.2 Moment de degré 1 des forces de pression sur la carène

Le moment de degré 1 s'obtient en multipliant l'intégrand dans (4.62) et ses équivalentes par $x_{\bar{N}}^j$. Pour (4.64), ceci n'ajoute pas de difficulté puisque la variable d'intégration est déjà $x_{\bar{N}}^*$. Une expression de ce moment est donc

$$(4.69) \quad f_{C[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]} \stackrel{\text{déf}}{=} -\rho \cdot \int_{x_{\bar{N}}^* \in C} ds \cdot \left\| \frac{\partial c}{\partial x_*} \right\|^{-1} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \psi \cdot x_{\bar{N}}^j$$

que l'on notera dans la suite

$$(4.70) \quad f_{C[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]} = \mathbf{f}_{C[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}(c_C, \psi_C)$$

où l'opérateur $\mathbf{f}_{C[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}$ est

$$(4.71) \quad \mathbf{f}_{C[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}(c_C, \psi_C) \stackrel{\text{déf}}{=} -\rho \cdot \int_{x_{\bar{N}}^* \in C} ds \cdot \left\| \frac{\partial c}{\partial x_*} \right\|^{-1} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \psi \cdot x_{\bar{N}}^j.$$

L'expression du moment de degré 1 utilisant les distributions est

$$(4.72) \quad f_{c[\frac{i}{A};\frac{j}{N}]}^{[1]} = -\rho \cdot \int_{x_{\frac{A}}^* \in \mathbb{R}^3} |dx_{\frac{A}}^*| \cdot \delta(c_c) \cdot \frac{\partial c_c}{\partial x_i} \cdot \psi_c \cdot \Upsilon(-\psi_c) \cdot x_{\frac{j}{N}}.$$

L'opérateur $f_{c[\frac{i}{A};\frac{j}{N}]}^{[1]}$ s'écrit donc aussi

$$(4.73) \quad f_{c[\frac{i}{A};\frac{j}{N}]}^{[1]}(c_c, \psi_c) \stackrel{def}{=} -\rho \cdot \int_{x_{\frac{A}}^* \in \mathbb{R}^3} |dx_{\frac{A}}^*| \cdot \delta(c_c) \cdot \frac{\partial c_c}{\partial x_i} \cdot \psi_c \cdot \Upsilon(-\psi_c) \cdot x_{\frac{j}{N}}.$$

4.3 Mises en équations du système navire + fluide

Cette mise en équations consiste à écrire l'EE du système navire + fluide. Cette EE est la réunion de

- l'EE navire (4.1) ou (4.6) ;
- l'action navire \rightarrow fluide (les entrées du système fluide) : les CGC (4.28.1) à (4.28.3) ou (4.28.4) suivant les VE fluide utilisées ;
- l'EE fluide (4.45) ou (4.57) suivant les VE fluide utilisées ;
- l'action fluide \rightarrow navire (les entrées du système navire) : les efforts exercés par le fluide sur la carène (4.67) et (4.70).

Dans le problème considéré, les forces extérieures sont uniquement les forces de pression sur la carène :

$$(4.74) \quad fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]} = f_{c[\frac{i}{A}]}^{[0]}$$

et

$$(4.75) \quad fe_{N[\frac{i}{A};\frac{j}{N}]}^{[1]} = f_{c[\frac{i}{A};\frac{j}{N}]}^{[1]}.$$

Action du navire sur le fluide

L'assemblage des systèmes navire et fluide fait que, vue du fluide, la dépendance en temps de la fonction c provient maintenant des déplacements-déformations du navire, qui sont définis par les grandeurs $p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}$ et $p_{[\frac{i}{A};\frac{j}{N}]}^{[1]}$. La fonction c devient une fonction de ces variables et des coordonnées mais plus du temps. Dans les CGC (4.28), il faut donc considérer que pour c ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{ est complété par } \frac{\partial}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} + \frac{\partial}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A};\frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt}.$$

Les ordres de dérivations temporelles supérieurs s'obtiennent par applications successives de cet opérateur. Les $D_t^* c_C$ sont donc maintenant

$$(4.76) \quad D_t c_C = \frac{\partial c_C}{\partial t} \Big|^{17} + \frac{\partial c_C}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} + \frac{\partial c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} + \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i},$$

$$(4.77) \quad D_t^2 c_C = \frac{\partial D_t c_C}{\partial t} \Big|^{18} + \frac{\partial D_t c_C}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} + \frac{\partial D_t c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} + \frac{\partial D_t c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i}$$

et

$$(4.78) \quad D_t^3 c_C = \frac{\partial D_t^2 c_C}{\partial t} \Big|^{18} + \frac{\partial D_t^2 c_C}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} + \frac{\partial D_t^2 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} + \frac{\partial D_t^2 c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i}.$$

Les CGC (4.28.2-4) s'écrivent (cf. (4.76), (F.154) et (F.165))

$$(4.79) \quad \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} = - \frac{\partial c_C}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} - \frac{\partial c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt},$$

$$(4.80) \quad \begin{aligned} \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_i} = & - \frac{\partial c_C}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} - \frac{\partial c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^2} \\ & - \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}}{dt} - 2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt} \\ & - 2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}}{dt} \\ & - 2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} \\ & - \frac{\partial^2 c_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} - \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \end{aligned}$$

et

¹⁷Ce terme est nul mais est conservé pour que l'expression de l'opérateur D_t reste identique pour tous les ordres de dérivation.

¹⁸Ces termes ne sont pas nuls.

(4.81)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial c_c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_c}{\partial t^2 \partial x_i} \\
&= - \frac{\partial c_c}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{d^3 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^3} - \frac{\partial c_c}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{d^3 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^3} \\
&\quad - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_c}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}}{dt} - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_c}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt} \\
&\quad - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_c}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt^2} - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_c}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} \cdot \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_j} \\
&\quad - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_c}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial t \partial x_j} - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_c}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^2} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}}{dt} \\
&\quad - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_c}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^2} \cdot \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_k} - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_c}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial t \partial x_k} \\
&\quad - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_c}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_j} - 2 \cdot \frac{\partial c_c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_c}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_j} \\
&\quad - \frac{\partial c_c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial t \partial x_j} - \frac{\partial^3 c_c}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]} \partial p_k^{[0]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}]}^{[0]}}{dt} \\
&\quad - 3 \cdot \frac{\partial^3 c_c}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}}{dt} \\
&\quad - 3 \cdot \frac{\partial^3 c_c}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]} \partial x_k} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_k} \\
&\quad - 3 \cdot \frac{\partial^3 c_c}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]} \partial p_{l;m}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1]}}{dt} \\
&\quad - 6 \cdot \frac{\partial^3 c_c}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]} \partial x_l} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_l} \\
&\quad - 3 \cdot \frac{\partial^3 c_c}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_k} - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_c}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial^3 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]} \partial p_{m;n}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}] }^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}] }^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{m}{A}; \frac{n}{N}] }^{[1]}}{dt} \\
& - 3 \cdot \frac{\partial^3 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]} \partial x_m} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}] }^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}] }^{[1]}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_m} \\
& - 3 \cdot \frac{\partial^3 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k \partial x_l} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}] }^{[1]}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_l} \\
& - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}] }^{[1]}}{dt} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_k \partial x_l} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_l} \\
& - \frac{\partial^3 c_C}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} - 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} \\
& - \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} - \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Action du fluide sur le navire

Dans (4.67) et (4.70), c devient de même une fonction de $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}$, de $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ et des coordonnées. Dans ces équations, ψ , dépendant des VE fluide, des coordonnées et de c (cf. (4.18) et {(4.41) et (4.42)} ou {(4.50) et (4.52)}), dépend maintenant des VE fluide, des coordonnées, de $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}$ et de $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$. Les efforts $f_{c[\frac{*}{A}]}^{[0]}$ et $f_{c[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ dépendent donc uniquement de ces grandeurs. Leur expression sera explicitée pour chaque vecteur d'état du fluide.

4.3.1 Variables d'état fluide φ_L et $\partial \varphi_L / \partial t$

4.3.1.1 Équation d'évolution navire

Le report de (4.74), de (4.75), de (4.67), de (4.70), de (4.2) à (4.5), de (4.7) et de (4.8) dans (4.1) donne

$$(4.82) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} \cdot m_N^{[0]} + \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} = f_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]} + \mathbf{f}_{c[\frac{i}{A}]}^{[0]}(c_C, \psi_C), \\ (2) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} + \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{k}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} = f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} + \mathbf{f}_{c[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(c_C, \psi_C), \end{array} \right.$$

où

$$f_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]} = d_N f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot \mu_{N[\frac{j}{N}; \frac{k}{N}]}^{[2]} \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot \bar{\xi}_N \quad \text{et} \quad f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} = d_N f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot \bar{\xi}_N$$

avec

(4.83)

$$d_N f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} = -\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot \left(\frac{k_0}{2} \cdot (p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1]} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} - \delta_{k,j}) + k_1 \cdot (p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1]} \cdot \frac{dp_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt}) S \right).$$

L'expression de ψ devant intervenir dans (4.82), c.-à-d. l'expression fonction uniquement des VE navire et fluide, est obtenue en utilisant (4.48). La procédure commence par le report de {(4.42) et de (4.44)} (pour $x_{\frac{*}{A}} \in C$) et de (4.79) dans (4.80), ce qui donne

$$(4.84) \quad \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_i} = -\frac{\partial c_C}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} - \frac{\partial c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^2} - {}^1Q_{\varphi_{t,n}C}$$

où ${}^1Q_{\varphi_{t,n}C}$ est une expression quadratique de φ_L , de $dp_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}/dt$ et de $dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}/dt$ définie par

(4.85)

$$\begin{aligned} & {}^1Q_{\varphi_{t,n}C} \\ & \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,L}}{\partial x_j} \right) \right) \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,L}}{\partial x_i} (\varphi_L) (\varphi_L) \\ & - \left(2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_k^{[0]} \partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,L}}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,L}}{\partial x_j} \right) \right) \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_k^{[0]}} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_k^{[0]}} \right) \right) \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,L}}{\partial x_i} (\varphi_L) \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}]}^{[0]}}{dt} \\ & - \left(2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_{k;l}^{[1]} \partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,L}}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,L}}{\partial x_j} \right) \right) \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_{k;l}^{[1]}} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_{k;l}^{[1]}} \right) \right) \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,L}}{\partial x_i} (\varphi_L) \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}}{dt} \\ & + \left(\frac{\partial^2 c_C}{\partial p_k^{[0]} \partial p_l^{[0]}} - 2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_k^{[0]} \partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_l^{[0]}} \right) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_k^{[0]}} \right) \right) \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_l^{[0]}} \right) \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{l}{A}]}^{[0]}}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial^2 c_c}{\partial p_k^{[0]} \partial p_{l;m}^{[1]}} - 2 \cdot \frac{\partial^2 c_c}{\partial p_k^{[0]} \partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1 \mathbf{G}_{c,c_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial p_{l;m}^{[1]}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial {}^1 \mathbf{G}_{c,c_n}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_c}{\partial p_k^{[0]}} \right) \right) \cdot \frac{\partial {}^1 \mathbf{G}_{c,c_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial p_{l;m}^{[1]}} \right) \right) \cdot \frac{dp_{\left[\frac{k}{A}\right]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{\left[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}\right]}^{[1]}}{dt} \\
& + \left(\frac{\partial^2 c_c}{\partial p_m^{[0]} \partial p_{k;l}^{[1]}} - 2 \cdot \frac{\partial^2 c_c}{\partial p_{k;l}^{[1]} \partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1 \mathbf{G}_{c,c_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial p_m^{[0]}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial {}^1 \mathbf{G}_{c,c_n}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_c}{\partial p_{k;l}^{[1]}} \right) \right) \cdot \frac{\partial {}^1 \mathbf{G}_{c,c_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial p_m^{[0]}} \right) \right) \cdot \frac{dp_{\left[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}\right]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{\left[\frac{m}{A}\right]}^{[0]}}{dt} \\
& + \left(\frac{\partial^2 c_c}{\partial p_{k;l}^{[1]} \partial p_{m;n}^{[1]}} - 2 \cdot \frac{\partial^2 c_c}{\partial p_{k;l}^{[1]} \partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1 \mathbf{G}_{c,c_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial p_{m;n}^{[1]}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial {}^1 \mathbf{G}_{c,c_n}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_c}{\partial p_{k;l}^{[1]}} \right) \right) \cdot \frac{\partial {}^1 \mathbf{G}_{c,c_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_c}{\partial p_{m;n}^{[1]}} \right) \right) \cdot \frac{dp_{\left[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}\right]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{\left[\frac{m}{A}; \frac{n}{N}\right]}^{[1]}}{dt}.
\end{aligned}$$

Le report de (4.79) et de (4.84) dans (4.48) donne l'expression de ψ demandée :

$$\begin{aligned}
(4.86) \quad \psi(x_{\frac{*}{A}}) &= \left(- {}^1 \mathbf{G}_L \left(\frac{\partial \varphi_L}{\partial t} \right) - {}^1 \mathbf{G}_{c_n} \left(\frac{\partial c_c}{\partial p_i^{[0]}} \right) \cdot \frac{d^2 p_{\left[\frac{i}{A}\right]}^{[0]}}{dt^2} - {}^1 \mathbf{G}_{c_n} \left(\frac{\partial c_c}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \right) \cdot \frac{d^2 p_{\left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}\right]}^{[1]}}{dt^2} \right. \\
& \quad \left. - {}^1 \mathbf{G}_{c_n} ({}^1 Q_{\varphi_{t,nC}}) + {}^1 Q_{\psi} - g_{\frac{i}{A}} \cdot x_{\frac{i}{A}} \right) (x_{\frac{*}{A}})
\end{aligned}$$

où ${}^1 Q_{\psi}$ est une expression quadratique des mêmes variables que ${}^1 Q_{\varphi_{t,nC}}$ définie par

$$(4.87) \quad {}^1 Q_{\psi}(x_{\frac{*}{A}}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial {}^1 L}{\partial x_i} \right)^2 (x_{\frac{*}{A}})$$

avec

$$(4.88) \quad {}^1 L(x_{\frac{*}{A}}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left({}^1 \mathbf{G}_L(\varphi_L) + {}^1 \mathbf{G}_{c_n} \left(\frac{\partial c_c}{\partial p_i^{[0]}} \right) \cdot \frac{dp_{\left[\frac{i}{A}\right]}^{[0]}}{dt} + {}^1 \mathbf{G}_{c_n} \left(\frac{\partial c_c}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \right) \cdot \frac{dp_{\left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}\right]}^{[1]}}{dt} \right) (x_{\frac{*}{A}}).$$

L'apparition de termes en $d^2 p_{\left[\frac{*}{A}, \dots\right]}^{[*]}/dt^2$ dans (4.86) entraîne une difficulté : dans (4.68) et (4.73), ψ intervient lin\u00e9airement dans l'int\u00e9grand et non lin\u00e9airement dans la d\u00e9finition du domaine d'int\u00e9gration. Cette non-lin\u00e9arit\u00e9 des efforts exerc\u00e9s sur la car\u00e8ne par rapport \u00e0 ψ rend impossible en pratique la r\u00e9solution de (4.82) par rapport aux $d^2 p_{\left[\frac{*}{A}, \dots\right]}^{[*]}/dt^2$. Le probl\u00e8me vient de la variation du domaine d'int\u00e9gration avec ces grandeurs. Ceci nous conduit \u00e0 examiner cette variation d'un peu plus pr\u00e8s.

L'équation (4.86) fait apparaître une incohérence : d'un côté la forme de L , donnée par (4.23.1), dépend des $d^2 p_{[\frac{*}{A}, \dots]}^*/dt^2$, c.-à-d. de l'accélération de C , de l'autre cette accélération produit une accélération du fluide qui ne peut cinématiquement pas influencer sur la forme de L . Cette incohérence provient très probablement de la non prise en compte de la singularité de ligne de flottaison¹⁹. Ceci nous conduit à formuler l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 : *La singularité de ligne de flottaison doit être telle que le domaine d'intégration dans les opérateurs $\mathbf{f}_{C[\frac{*}{A}]}^{[0]}$ et $\mathbf{f}_{C[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$, c.-à-d. la partie mouillée de C , ne doit pas être modifié par l'accélération de C .*

En supposant cette hypothèse vérifiée, les efforts exercés sur la carène dépendent linéairement de ψ . Ceci permet d'isoler les termes en $d^2 p_{[\frac{*}{A}, \dots]}^*/dt^2$ dans ces efforts et donc de les passer au premier membre de (4.82).

Une manière plus ou moins arbitraire d'appliquer cette hypothèse est de considérer que dans (4.68) et (4.73), le domaine d'intégration est défini par $\Upsilon(-\dot{\psi}_C)$ où $\dot{\psi}$ est ψ avec l'accélération de C nulle :

$$(4.89) \quad \dot{\psi}(x_{\frac{*}{A}}) \stackrel{\text{déf}}{=} (-{}^1\mathbf{G}_L(\frac{\partial \varphi_L}{\partial t}) - {}^1\mathbf{G}_{C_n}({}^1Q_{\varphi_{t,nC}}) + {}^1Q_{\psi} - g_{\frac{i}{A}} \cdot x_{\frac{i}{A}})(x_{\frac{*}{A}}).$$

Les opérateurs $\mathbf{f}_{C[\frac{*}{A}]}^{[0]}$ et $\mathbf{f}_{C[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ deviennent

$$(4.90) \quad \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]}(c_C, \psi_C) = \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{\circ[0]}(c_C, \dot{\psi}_C) - m_{E[\frac{i}{A}][\frac{j}{A}]}^{[0][0]} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}}{dt^2} - m_{E[\frac{i}{A}][\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[0][1]} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt^2}$$

et

$$(4.91) \quad \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(c_C, \psi_C) = \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{\circ[1]}(c_C, \dot{\psi}_C) - m_{E[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}][\frac{k}{A}]}^{[1][0]} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{k}{A}]}^{[0]}}{dt^2} - m_{E[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}][\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1][1]} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}}{dt^2},$$

où

$$(4.92) \quad \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{\circ[0]}(c_C, \bullet) \stackrel{\text{déf}}{=} -\rho \cdot \int_{x_{\frac{*}{A}} \in \mathbb{R}^3} |dx_{\frac{*}{A}}| \cdot \delta(c_C) \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \bullet \cdot \Upsilon(-\dot{\psi}_C),$$

$$(4.93) \quad \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{\circ[1]}(c_C, \bullet) \stackrel{\text{déf}}{=} -\rho \cdot \int_{x_{\frac{*}{A}} \in \mathbb{R}^3} |dx_{\frac{*}{A}}| \cdot \delta(c_C) \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \bullet \cdot \Upsilon(-\dot{\psi}_C) \cdot x_{\frac{j}{N}},$$

¹⁹La ligne de flottaison est la ligne $C \cap L$.

$$(4.94) \quad m_{E[\frac{i}{A}][\frac{j}{A}]}^{[0][0]} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{\circ[0]}(c_C, {}^1\mathbf{G}_{C,C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial p_j^{[0]}})),$$

$$(4.95) \quad m_{E[\frac{i}{A}][\frac{j}{A};\frac{k}{N}]}^{[0][1]} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{\circ[0]}(c_C, {}^1\mathbf{G}_{C,C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial p_{j;k}^{[1]}})),$$

$$(4.96) \quad m_{E[\frac{i}{A};\frac{j}{N}][\frac{k}{A}]}^{[1][0]} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A};\frac{j}{N}]}^{\circ[1]}(c_C, {}^1\mathbf{G}_{C,C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial p_k^{[0]}}))$$

et

$$(4.97) \quad m_{E[\frac{i}{A};\frac{j}{N}][\frac{k}{A};\frac{l}{N}]}^{[1][1]} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A};\frac{j}{N}]}^{\circ[1]}(c_C, {}^1\mathbf{G}_{C,C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial p_{k;l}^{[1]}})).$$

Les $m_{E[\frac{i}{A}^*][\frac{j}{A}^*][\frac{k}{A}^*][\frac{l}{A}^*]}^{[*][*]}$ sont les «masses d'eau ajoutées» associées à chaque mouvement.

Le report de (4.90) et de (4.91) dans (4.82) donne

$$(4.98) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad m_{NE[\frac{i}{A}][\frac{j}{A}]}^{[0][0]} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}}{dt^2} + m_{NE[\frac{i}{A}][\frac{j}{A};\frac{k}{N}]}^{[0][1]} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{j}{A};\frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt^2} \\ \quad = f_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]} + \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{\circ[0]}(c_C, \dot{\psi}_C), \\ (2) \quad m_{NE[\frac{i}{A};\frac{j}{N}][\frac{k}{A}]}^{[1][0]} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{k}{A}]}^{[0]}}{dt^2} + m_{NE[\frac{i}{A};\frac{j}{N}][\frac{k}{A};\frac{l}{N}]}^{[1][1]} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{k}{A};\frac{l}{N}]}^{[1]}}{dt^2} \\ \quad = f_{N[\frac{i}{A};\frac{j}{N}]}^{[1]} + \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A};\frac{j}{N}]}^{\circ[1]}(c_C, \dot{\psi}_C), \end{array} \right.$$

où

$$(4.99) \quad m_{NE[\frac{i}{A}][\frac{j}{A}]}^{[0][0]} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \delta_{i,j} \cdot m_N^{[0]} + m_{E[\frac{i}{A}][\frac{j}{A}]}^{[0][0]},$$

$$(4.100) \quad m_{NE[\frac{i}{A}][\frac{j}{A};\frac{k}{N}]}^{[0][1]} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \delta_{i,j} \cdot m_N^{[1]} + m_{E[\frac{i}{A}][\frac{j}{A};\frac{k}{N}]}^{[0][1]},$$

$$(4.101) \quad m_{NE[\frac{i}{A};\frac{j}{N}][\frac{k}{A}]}^{[1][0]} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \delta_{i,k} \cdot m_N^{[1]} + m_{E[\frac{i}{A};\frac{j}{N}][\frac{k}{A}]}^{[1][0]}$$

et

$$(4.102) \quad m_{NE[\frac{i}{A};\frac{j}{N}][\frac{k}{A};\frac{l}{N}]}^{[1][1]} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \delta_{i,k} \cdot m_N^{[2]} + m_{E[\frac{i}{A};\frac{j}{N}][\frac{k}{A};\frac{l}{N}]}^{[1][1]}.$$

Le système d'équations (4.98) peut être découplé en suivant la même procédure que pour les équations sans masses d'eau ajoutées, ce qui donne

$$(4.103) \quad \begin{cases} (1) & \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} = d\mu_{NE[\frac{i}{A}][\frac{j}{A}]}^{[0][0]} \cdot (d_{NE} f_{N[\frac{j}{A}]}^{[0]} + d_{NE} \mathbf{f}_{C[\frac{j}{A}]}^{[0]}(c_C, \dot{\psi}_C)), \\ (2) & \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^2} = d\mu_{NE[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}][\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1][1]} \cdot (d_{NE} f_{N[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]} + d_{NE} \mathbf{f}_{C[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}(c_C, \dot{\psi}_C)), \end{cases}$$

où

$$(4.104)$$

$$d\mu_{NE[\frac{i}{A}][\frac{j}{A}]}^{[0][0]} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (d m_{NE[\frac{i}{A}][\frac{j}{A}]}^{[0][0]})^{-1} \quad \text{avec}$$

$$(4.105) \quad \begin{aligned} d m_{NE[\frac{i}{A}][\frac{j}{A}]}^{[0][0]} & : m_{NE[\frac{i}{A}][\frac{j}{A}]}^{[0][0]} \text{ d\u00e9coupl\u00e9 (avec les } m_{NE[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]} \text{)}, \\ & = m_{NE[\frac{i}{A}][\frac{j}{A}]}^{[0][0]} - m_{NE[\frac{i}{A}][\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[0][1]} \cdot \mu_{NE[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}][\frac{m}{A}; \frac{n}{N}]}^{[1][1]} \cdot m_{NE[\frac{m}{A}; \frac{n}{N}][\frac{j}{A}]}^{[1][0]}; \end{aligned}$$

$$(4.106)$$

$$d\mu_{NE[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}][\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1][1]} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (d m_{NE[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}][\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1][1]})^{-1} \quad \text{avec}$$

$$(4.107) \quad \begin{aligned} d m_{NE[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}][\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1][1]} & : m_{NE[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}][\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1][1]} \text{ d\u00e9coupl\u00e9 (avec les } m_{NE[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]} \text{)}, \\ & = m_{NE[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}][\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1][1]} - m_{NE[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}][\frac{m}{A}]}^{[1][0]} \cdot \mu_{NE[\frac{m}{A}][\frac{n}{A}]}^{[0][0]} \cdot m_{NE[\frac{n}{A}][\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[0][1]}; \end{aligned}$$

$$(4.108) \quad \begin{aligned} d_{NE} f_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]} & : f_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]} \text{ d\u00e9coupl\u00e9 avec les } m_{NE[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}, \\ & = f_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]} - m_{NE[\frac{i}{A}][\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[0][1]} \cdot \mu_{NE[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}][\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1][1]} \cdot f_{N[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1]}; \end{aligned}$$

$$(4.109) \quad \begin{aligned} d_{NE} f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} & : f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \text{ d\u00e9coupl\u00e9 avec les } m_{NE[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}, \\ & = f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} - m_{NE[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}][\frac{k}{A}]}^{[1][0]} \cdot \mu_{NE[\frac{k}{A}][\frac{l}{A}]}^{[0][0]} \cdot f_{N[\frac{l}{A}]}^{[0]}; \end{aligned}$$

$$(4.110) \quad \begin{aligned} d_{NE} \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]} & : \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]} \text{ d\u00e9coupl\u00e9 avec les } m_{NE[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}, \\ & = \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]} - m_{NE[\frac{i}{A}][\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[0][1]} \cdot \mu_{NE[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}][\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1][1]} \cdot \mathbf{f}_{C[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1]}; \end{aligned}$$

$$(4.111) \quad \begin{aligned} d_{NE} \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} & : \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \text{ d\u00e9coupl\u00e9 avec les } m_{NE[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}, \\ & = \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} - m_{NE[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}][\frac{k}{A}]}^{[1][0]} \cdot \mu_{NE[\frac{k}{A}][\frac{l}{A}]}^{[0][0]} \cdot \mathbf{f}_{C[\frac{l}{A}]}^{[0]}. \end{aligned}$$

L'inverse des ${}^* m_{*[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}][\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1][1]}$ est d\u00e9fini par

$$({}^* m_{*[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}][\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1][1]})^{-1} \cdot m_{*[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}][\frac{m}{A}; \frac{n}{N}]}^{[1][1]} = \delta_{i,m} \cdot \delta_{j,n}.$$

Le système d'équations (4.103) et les relations triviales pour $dp_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}/dt$ et $dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}/dt$ constituent l'EE navire exprimée en fonction uniquement des VE navire et fluide.

4.3.1.2 Équation d'évolution fluide

Le report de (4.79) et de (4.84) dans (4.45) donne l'EE fluide :

$$(4.112) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial \varphi_L}{\partial t} + {}^1Q_{\psi_L} - g_{\frac{i}{A}} \cdot x_{L\frac{i}{A}} = 0, \\ (2) \quad \frac{\partial^2 \varphi_L}{\partial t^2} \\ \\ = (- 2 \cdot \left(\frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,L}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi_L}{\partial t} \right) + \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,Cn}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_j^{[0]}} \right) \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}}{dt^2} \right. \\ \\ \quad \left. + \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,Cn}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_{j;k}^{[1]}} \right) \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt^2} + \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,Cn}}{\partial x_i} ({}^1Q_{\varphi_{t,nC}}) \right) \\ \\ \quad + \frac{\partial {}^1Q_{\psi_L}}{\partial x_i} - g_{\frac{i}{A}} \cdot \left(\frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,L}}{\partial x_i} (\varphi_L) + \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,Cn}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_j^{[0]}} \right) \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}}{dt} \right. \\ \\ \quad \left. \left. + \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,Cn}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_{j;k}^{[1]}} \right) \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt} \right) \right) \end{array} \right.$$

La théorie des systèmes dit que les VE de l'EE navire + fluide sont les VE navire et les VE fluide, cf. annexe B. Pour que cette EE soit canonique, son second membre ne doit être fonction que des VE et des entrées. Cette condition n'est pas satisfaite par (4.112.2) : $d^2 p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}/dt^2$ et $d^2 p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}/dt^2$ y apparaissent au second membre. Ce point peut être résolu en remplaçant ces grandeurs par leurs expressions (4.103.1-2), qui ne dépendent que des VE navire et fluide.

L'EE du système navire + fluide, constituée de (4.103) et de (4.112), n'a pas d'entrées ; elle est autonome, ce qui est l'objectif recherché.

4.3.1.3 Mer numérique

Bien que ce ne soit pas l'objet de cette étude, cette mise en équations peut être utilisée pour modéliser une mer numérique²⁰. Pour cela cette mise en équations doit être complétée par l'EE de $x_{L\bar{A}}^*$.

La grandeur $dx_{L\bar{A}}^*/dt$ doit tout d'abord satisfaire (4.24) : seule la vitesse normale de L est définie. Tous les $dx_{L\bar{A}}^*/dt$ satisfaisant cette condition sont possibles, mais le plus simple est de choisir

$$(4.113) \quad \frac{dx_{L\bar{A}}^i}{dt} = \frac{\partial\varphi_L}{\partial x_i},$$

c.-à-d., comme dans la méthode MEL, de convecter L ²¹.

L'accélération des particules fluide est aussi définie par les VE navire et fluide. Cette accélération est donnée par (4.20), soit pour les particules de L :

$$(4.114) \quad \frac{d^2x_{L\bar{A}}^i}{dt^2} = \frac{\partial\chi_L}{\partial x_i}.$$

Les équations (4.113) et (†) constituent l'EE de $x_{L\bar{A}}^*$. Cette EE s'exprime uniquement en fonction des VE navire et fluide en suivant la procédure de remplacement de φ et de $\partial\varphi/\partial t$ par leur représentation utilisée pour obtenir (4.103) et (4.112), mais elle ne fait pas partie de l'EE du problème puisque $x_{L\bar{A}}^*$ est éliminé de (4.112) : $x_{L\bar{A}}^*$ est une sortie du système navire + fluide.

Les équations (4.103), (4.112), (4.113) et (4.114) constituent une mise en équations complète d'une mer numérique. Sa caractéristique principale étant que ce sont les grandeurs φ et $\partial\varphi/\partial t$ (sur L) qui sont choisies comme VE fluide, cette mise en équations peut être appelée méthode $\varphi\varphi_t$. Elle est une alternative à la méthode MEL.

Le fait d'imposer la condition (D.1) à φ , et donc à φ_L , et la condition (D.51) à $\partial\varphi/\partial t$, et donc à $\partial\varphi_L/\partial t$, a pour conséquence d'éliminer les ondes parasites issues de la méthode, de la discrétisation ou des erreurs numériques. Dans les bassins à houle numériques, cette fonction est assurée par les procédures d'amortissement des ondes réfléchies par les bords.

²⁰L'étendue du domaine fluide pouvant être infinie, ce terme est plus approprié que celui de bassin à houle numérique.

²¹ Les méthodes où $dx_{L\bar{A}}^*/dt$ a une direction imposée, en général verticale, sont appelées méthodes semi-lagrangiennes. La prise en compte de (4.114) dans ces méthodes semble difficile.

4.3.2 Variables d'état fluide φ_C et $\partial\varphi_C/\partial t$

4.3.2.1 Équation d'évolution navire

L'EE navire est toujours (4.82) ou son équivalente découplée :

$$(4.115) \quad \begin{cases} (1) & \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} = {}_{d_N} \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]}(c_C, \psi_C) \cdot {}_d \mu_N^{[0]}, \\ (2) & \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^2} = ({}_{d_N} f_{N[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} + {}_{d_N} \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}(c_C, \psi_C)) \cdot {}_d \mu_{N[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[2]}, \end{cases}$$

où ${}_{d_N} f_{N[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}$ est donné par (4.83) et où

$$(4.116) \quad \begin{aligned} {}_{d_N} \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]} & : \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]} \text{ découplé avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}, \\ & = \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]} - \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot \mu_{N[\frac{j}{N}; \frac{k}{N}]}^{[2]} \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]}, \end{aligned} \quad \text{idem (4.9)}$$

$$(4.117) \quad \begin{aligned} {}_{d_N} \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} & : \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \text{ découplé avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}, \\ & = \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} - \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]} \cdot \mu_N^{[0]} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]}, \end{aligned} \quad \text{idem (4.10)}$$

avec les opérateurs $\mathbf{f}_{C[\frac{*}{A}]}^{[0]}$ et $\mathbf{f}_{C[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ définis par (4.68) et (4.73).

L'expression de ψ devant intervenir dans ces EE doit être fonction uniquement des VE navire et fluide. Pour préparer la suite, nous commençons par établir cette expression pour un point quelconque dans le fluide (l'expression de ψ_C peut être obtenue plus directement, cf. (4.60)).

La procédure suivie est identique à celle de la section 4.3.1.1 : elle commence par le report de {(4.52) et de (4.54)} (pour $x_{\frac{*}{A}} \in C$) et de (4.79) dans (4.80), ce qui donne

$$(4.118) \quad \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_i} = - \frac{\partial c_C}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} - \frac{\partial c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^2} - {}^2 Q_{\varphi_{t,n} C}$$

où ${}^2 Q_{\varphi_{t,n} C}$ est une expression quadratique de φ_C , de $dp_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}/dt$ et de $dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}/dt$ définie par

$$(4.119) \quad \begin{aligned} & {}^2 Q_{\varphi_{t,n} C} \\ & \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{c,c}}{\partial x_j} \right) \right) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{c,c}}{\partial x_i} (\varphi_C) (\varphi_C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_k^{[0]} \partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C}}{\partial x_i} () - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C}}{\partial x_j} () \right) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_k^{[0]}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_k^{[0]}} \right) \right) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C}}{\partial x_i} () \right) (\varphi_C) \cdot \frac{dp_{[A]}^{[0]}}{dt} \\
& - \left(2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_{k;l}^{[1]} \partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C}}{\partial x_i} () - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C}}{\partial x_j} () \right) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_{k;l}^{[1]}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_{k;l}^{[1]}} \right) \right) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C}}{\partial x_i} () \right) (\varphi_C) \cdot \frac{dp_{[A;L]}^{[1]}}{dt} \\
& + \left(\frac{\partial^2 c_C}{\partial p_k^{[0]} \partial p_l^{[0]}} - 2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_k^{[0]} \partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_l^{[0]}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_k^{[0]}} \right) \right) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_l^{[0]}} \right) \right) \cdot \frac{dp_{[A]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[L]}^{[0]}}{dt} \\
& + \left(\frac{\partial^2 c_C}{\partial p_k^{[0]} \partial p_{l;m}^{[1]}} - 2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_k^{[0]} \partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_{l;m}^{[1]}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_k^{[0]}} \right) \right) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_{l;m}^{[1]}} \right) \right) \cdot \frac{dp_{[A]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[L;M]}^{[1]}}{dt} \\
& + \left(\frac{\partial^2 c_C}{\partial p_m^{[0]} \partial p_{k;l}^{[1]}} - 2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_{k;l}^{[1]} \partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_m^{[0]}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_{k;l}^{[1]}} \right) \right) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_m^{[0]}} \right) \right) \cdot \frac{dp_{[A;N]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[M]}^{[0]}}{dt} \\
& + \left(\frac{\partial^2 c_C}{\partial p_{k;l}^{[1]} \partial p_{m;n}^{[1]}} - 2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_{k;l}^{[1]} \partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_{m;n}^{[1]}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_{k;l}^{[1]}} \right) \right) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_{m;n}^{[1]}} \right) \right) \cdot \frac{dp_{[A;N]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[M;N]}^{[1]}}{dt}
\end{aligned}$$

${}^2Q_{\varphi_{t,n}C}$ est formellement identique à ${}^1Q_{\varphi_{t,n}C}$, cf. (4.85), en remplaçant les ${}^1\mathbf{G}_{C,*}$ par les ${}^2\mathbf{G}_{C,*}$, l'indice L étant remplacé par l'indice C .

Le report de (4.79) et de (4.118) dans (4.59) donne l'expression de ψ en fonction des VE navire et fluide :

$$\begin{aligned}
\psi(x_{\bar{A}}^*) &= (-{}^2\mathbf{G}_C \left(\frac{\partial \varphi_C}{\partial t} \right) \\
&\quad - {}^2\mathbf{G}_{C_n} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_i^{[0]}} \right) \cdot \frac{d^2 p_{[\bar{A}]^{[0]}}^{[0]}}{dt^2} - {}^2\mathbf{G}_{C_n} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \right) \cdot \frac{d^2 p_{[\bar{A};\bar{N}]^{[1]}}^{[1]}}{dt^2} \\
&\quad - {}^2\mathbf{G}_{C_n} ({}^2Q_{\varphi_{t,n}C}) + {}^2Q_{\psi} - g_{\bar{A}}^i \cdot x_{\bar{A}}^i)(x_{\bar{A}}^*)
\end{aligned}$$

où ${}^2Q_{\psi}$ est une expression quadratique des mêmes variables que ${}^2Q_{\varphi_{t,n}C}$ définie par

$$(4.120) \quad {}^2Q_{\psi}(x_{\bar{A}}^*) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial {}^2L}{\partial x_i} \right)^2(x_{\bar{A}}^*)$$

avec

$$(4.121) \quad {}^2L(x_{\bar{A}}^*) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} ({}^2\mathbf{G}_C(\varphi_C) + {}^2\mathbf{G}_{C_n} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_i^{[0]}} \right) \cdot \frac{dp_{[\bar{A}]^{[0]}}^{[0]}}{dt} + {}^2\mathbf{G}_{C_n} \left(\frac{\partial c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \right) \cdot \frac{dp_{[\bar{A};\bar{N}]^{[1]}}^{[1]}}{dt})(x_{\bar{A}}^*).$$

(2L est formellement identique à 1L , cf. (4.88), en remplaçant les ${}^1\mathbf{G}_*$ par les ${}^2\mathbf{G}_*$, l'indice L étant remplacé par l'indice C).

De même qu'en section 4.2.2.2.2, avec les VE fluide φ_C et $\partial\varphi_C/\partial t$, l'expression de ψ_C est simplifiée (cf. (4.60)). Cette expression est

$$(4.122) \quad \psi_C = \frac{\partial \varphi_C}{\partial t} + {}^2Q_{\psi_C} - g_{\bar{A}}^i \cdot x_{C\bar{A}}^i :$$

La grandeur ψ_C n'est fonction que des VE navire et fluide mais pas de leur dérivée temporelle; la notion de masses d'eau ajoutées n'apparaît donc plus explicitement dans l'EE navire. En fait cette notion réapparaît implicitement dans l'EE fluide qui dépend maintenant des dérivées temporelles des VE navire, cf. section suivante.

Les expressions des efforts exercés sur la carène ne comportant plus de termes en dérivées temporelles des VE navire, la procédure de transfert de ces termes au premier membre de l'EE navire (l'addition des masses d'eau ajoutées aux masses du navire) est sans objet. L'EE découplée (4.115) peut donc être utilisée. Ceci est même une nécessité pour exprimer les termes de ce type, qui apparaissent maintenant dans l'EE fluide, en fonction des VE navire et fluide.

4.3.2.2 Équation d'évolution fluide

Les expressions des entrées $\partial\varphi_C/\partial n$ et $\partial^2\varphi_C/\partial t \partial n$ de l'EE (4.57) en fonction uniquement des VE navire et fluide ont déjà été établies. Il reste à établir celle de $\partial^3\varphi_C/\partial t^2 \partial n$.

Le report de (4.52) à (4.56) (pour $x_{\bar{A}}^* \in C$), de (4.79) et de (4.118) dans (4.81) donne

$$(4.123) \quad \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_C}{\partial t^2 \partial x_i} = - \frac{\partial c_C}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{d^3 p_{[\bar{A}]}^{[0]}}{dt^3} - \frac{\partial c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{d^3 p_{[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}}{dt^3} \\ - {}^2L_{C[\bar{A}]}^{[0]} \cdot \frac{d^2 p_{[\bar{A}]}^{[0]}}{dt^2} - {}^2L_{C[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]} \cdot \frac{d^2 p_{[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}}{dt^2} \\ - {}^2Q_{\varphi_{i^2, n C}} - {}^2C_{\varphi_{i^2, n C}}$$

où

- ${}^2L_{C[\bar{A}]}^{[0]}$: expression linéaire de φ_C , de $dp_{[\bar{A}]}^{[0]}/dt$ et de $dp_{[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}/dt$,
- ${}^2L_{C[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}$: idem,
- ${}^2Q_{\varphi_{i^2, n C}}$: expression quadratique de $\partial\varphi_C/\partial t$ et de $\{\varphi_C, dp_{[\bar{A}]}^{[0]}/dt$ ou $dp_{[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}/dt\}$,
- ${}^2C_{\varphi_{i^2, n C}}$: expression cubique de φ_C , $dp_{[\bar{A}]}^{[0]}/dt$ et de $dp_{[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}/dt$.

Pour garder une taille raisonnable à cette étude, ces expressions ne sont pas explicitées.

Pour obtenir le résultat demandé, les $d^2 p_{[\bar{A}, \dots]}^{[*]}/dt^2$ et $d^3 p_{[\bar{A}, \dots]}^{[*]}/dt^3$ dans (†) doivent être exprimés en fonction uniquement des VE navire et fluide. Les expressions des $d^2 p_{[\bar{A}, \dots]}^{[*]}/dt^2$ sont données par (4.115.1-2). Les expressions des $d^3 p_{[\bar{A}, \dots]}^{[*]}/dt^3$ sont obtenues par d/dt de ces équations :

$$(4.124) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{d^3 p_{[\bar{A}]}^{[0]}}{dt^3} = \frac{d}{dt} ({}_{dN} \mathbf{f}_{C[\bar{A}]}^{[0]}(c_C, \psi_C)) \cdot {}_d \mu_N^{[0]}, \\ (2) \quad \frac{d^3 p_{[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}}{dt^3} = \left(\frac{d}{dt} ({}_{dN} f_{i_N[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}) + \frac{d}{dt} ({}_{dN} \mathbf{f}_{C[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}(c_C, \psi_C)) \right) \cdot {}_d \mu_N^{[2] \left[\begin{smallmatrix} \bar{k} \\ \bar{N} \end{smallmatrix} \right]; \bar{j}}, \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} ({}_{d_N} f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}) \\
&= -\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot (k_0 \cdot (p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1]} \cdot \frac{dp_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt})^S \\
&\quad + k_1 \cdot (\frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} + (p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1]} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^2})^S))
\end{aligned}$$

et où

$$\begin{aligned}
(4.125) \quad \frac{d}{dt} ({}_{d_N} \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]}) & : \frac{d}{dt} (\mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]}) \text{ découplé avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}, \\
&= \frac{d}{dt} (\mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]}) - \frac{d}{dt} (\mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}) \cdot \mu_{N[\frac{j}{N}, \frac{k}{N}]}^{[2]} \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.126) \quad \frac{d}{dt} ({}_{d_N} \mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}) & : \frac{d}{dt} (\mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}) \text{ découplé avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}, \\
&= \frac{d}{dt} (\mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}) - \frac{d}{dt} (\mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]}) \cdot \mu_N^{[0]} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]}.
\end{aligned}$$

La détermination des expressions de $\frac{d}{dt} (\mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]})$ et de $\frac{d}{dt} (\mathbf{f}_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]})$ en fonction uniquement des VE navire et fluide à partir de (4.68) et de (4.73) est d'une complexité inextricable. Le fait que les difficultés apparaissent dans le calcul des efforts exercés sur la carène n'est pas un hasard : avec les VE fluide φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$, nous avons dû formuler l'hypothèse 1 pour obtenir l'EE de l'ensemble navire + fluide. Par cohérence, cette hypothèse devrait aussi intervenir ici.

Ces difficultés ne remettent pas en cause le fait que φ_c et $\partial\varphi_c/\partial t$ constituent un vecteur d'état complet du fluide. Ces VE ne sont simplement pas pertinentes pour la mise en équations exactes de l'ensemble navire + fluide. Nous ne poursuivons pas dans cette voie.

Chapitre 5

Mises en équations avec conditions aux limites développées en perturbations

Les modélisations établies au chapitre 4 s'appliquent aussi bien au calcul qu'à la représentation. Leur inconvénient est qu'elles utilisent des opérateurs *G_* variables dans le temps puisque ∂E l'est. Dans une modélisation de calcul, ces opérateurs peuvent être recalculés à chaque instant. Dans une modélisation de représentation utilisée en prédiction, ces opérateurs devraient eux-mêmes être prédits, c.-à-d. d'abord être modélisés en tant que VE d'une EE et ensuite être observés à chaque instant. Dans l'état actuel de nos connaissances, d'une part nous ne savons pas écrire une telle EE et d'autre part son observation, c.-à-d. son auto-identification, n'est pas envisageable en pratique vu le peu de résultats utilisables obtenus dans ce domaine. En représentation nous devons donc obligatoirement nous ramener à des modèles dont les opérateurs sont indépendants du temps.

Une façon d'obtenir ce résultat est d'appliquer la méthode des perturbations à partir d'une solution d'ordre 0 indépendante du temps. La méthode des perturbations est une approximation pour les conditions non linéaires (les conditions linéaires restent satisfaites exactement). Le domaine de validité des modèles résultants est donc moindre que celui des modèles exacts, mais devrait être suffisant pour le problème traité (cf. chapitre 1).

Une première manière d'appliquer cette méthode serait de développer en per-

turbations les modèles exacts obtenus. Ceci demanderait entre autres de développer les opérateurs par rapport aux variations de position de L et de C , ce qui n'est pas immédiat. Une deuxième manière, celle adoptée ici, est de développer en perturbations les conditions à satisfaire et d'appliquer la procédure utilisée pour obtenir les modèles exacts aux problèmes de chaque ordre. Ce développement en perturbations ne concerne que les conditions aux limites puisque ce sont les seules conditions non linéaires du problème.

Ce développement est à l'ordre 3 pour pouvoir espérer représenter les efforts de manœuvrabilité : les modèles de manœuvrabilité sont des modèles polynômiaux au minimum de degré 3. Au plan théorique, c'est aussi à cet ordre qu'apparaît la structure générale des développements avec des conditions à satisfaire en des coordonnées inconnues, cf. section F.1.2.

Conventions

Les conventions adoptées dans les mises en équations avec conditions aux limites exactes sont toujours valides. Les conventions propres au présent chapitre sont que l'ordre p est l'ordre en cours de traitement et que l'ordre q représente tous les ordres de 1 à p . Les grandeurs inconnues d'ordre p sont mises en évidence par un encadrement.

5.1 Mise en équations du système navire

Le développement en perturbations de la mise en équations de ce système est exposé en annexe E.

Variables d'état

Les VE utilisées, $p_{[\bar{A}]}^{[0](*)}$ et $p_{[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1](*)}$, sont issues des décompositions (E.8) et (E.10) des VE utilisées dans la mise en équations exacte.

5.1.1 Équation d'évolution couplée

Le développement de (4.1) est donné par (E.35) :

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \boxed{\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}}{dt^2}} \cdot m_N^{[0]} + \boxed{\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}}{dt^2}} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} \\ \\ = \mathbf{f}i_{N \triangleleft 0[\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}} \right) + \mathbf{f}i_{N \triangleleft 1[\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(\boxed{\frac{dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}{dt}} \right) + fi_{N \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0](p)} + fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}, \\ \\ (2) \quad \boxed{\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}}{dt^2}} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} + \boxed{\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](p)}}{dt^2}} \cdot m_{N[\frac{k}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} \\ \\ = \mathbf{f}i_{N \triangleleft 0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}} \right) + \mathbf{f}i_{N \triangleleft 1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\boxed{\frac{dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}{dt}} \right) + fi_{N \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} + fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}, \end{array} \right.$$

plus les relations triviales pour $dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}/dt$ et $dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}/dt$. Dans (\uparrow),

$\mathbf{f}i_{N \triangleleft 0[\frac{i}{A}]}^{[0]}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot (fi_{N 0[\frac{j}{N}]}^{[0]} + fi_{N 1[\frac{j}{N}]}^{[0]})$ fonction de $p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}$, défini par (E.36),
= fonction de t ;

$\mathbf{f}i_{N \triangleleft 1[\frac{i}{A}]}^{[0]}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot (fi_{N 0[\frac{j}{N}]}^{[0]} + fi_{N 1[\frac{j}{N}]}^{[0]})$ fonction de $dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}/dt$, défini par (E.37),
= fonction de t ;

$fi_{N \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0](p)}$: second membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot (fi_{N 0[\frac{j}{N}]}^{[0]} + fi_{N 1[\frac{j}{N}]}^{[0]})$, donné par (E.40),
= fonction de t ;

$fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}$: terme d'ordre p du développement de $fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}$, c.-à-d. de $f_C^{[0]}[\frac{i}{A}]$ (cf. (4.74)), donné par (5.11) ou (5.20) infra,
= fonction de t ;

$\mathbf{f}i_{N \triangleleft 0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot (fi_{N 0[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} + fi_{N 1[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]})$ fonction de $p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}$, défini par (E.38),
= fonction de t ;

- $\mathbf{f}i_{N \triangleleft 1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot (fi_{N 0[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} + fi_{N 1[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]})$ fonction de $dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1(p)]}/dt$, défini par (E.39),
= fonction de t ;
- $fi_{N \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]}$: second membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot (fi_{N 0[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} + fi_{N 1[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]})$, donné par (E.41),
= fonction de t ;
- $fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]}$: terme d'ordre p du développement de $fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$, c.-à-d. de $f_C^{[1]}[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]$ (cf. (4.75)), donné par (5.12) ou (5.21) infra,
= fonction de t .

5.1.2 Équation d'évolution découplée

Le développement de (4.6) est donné par (E.22) :

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \boxed{\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0(p)]}}{dt^2}} = {}_{d_N} fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0(p)]} \cdot d\mu_N^{[0]}, \\ (2) \quad \boxed{\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]}}{dt^2}} = ({}_{d_N} \mathbf{f}i_{N \triangleleft 0[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1(p)]}} \right) + {}_{d_N} \mathbf{f}i_{N \triangleleft 1[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \left(\boxed{\frac{dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1(p)]}}{dt}} \right) \\ \quad \quad \quad + {}_{d_N} fi_{N \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1(p)]} + {}_{d_N} fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]}) \cdot d\mu_{N[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[2]}, \end{array} \right.$$

plus les relations triviales pour $dp_{[\frac{*}{A}]}^{[0(p)]}/dt$ et $dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1(p)]}/dt$. Dans (\uparrow),

- ${}_{d_N} fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0(p)]}$: terme d'ordre p du développement de ${}_{d_N} fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}$, c.-à-d. de ${}_{d_N} f_C^{[0]}[\frac{i}{A}]$ donné par (5.13) ou (5.22) infra,
= fonction de t ;
- ${}_{d_N} \mathbf{f}i_{N \triangleleft 0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot ({}_{d_N} fi_{N 0[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} + {}_{d_N} fi_{N 1[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]})$ fonction de $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1(p)]}$, défini par (E.23),
= fonction de t ;

- $d_N \mathbf{f}i_{N < 1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot (d_N fi_{N 0[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} + d_N fi_{N 1[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]})$ fonction de $dp_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1(p)]}/dt$, défini par (E.24),
 = fonction de t ;
- $d_N fi_{N > [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]}$: second membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot (d_N fi_{N 0[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} + d_N fi_{N 1[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]})$, donné par (E.25),
 = fonction de t ;
- $d_N fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]}$: terme d'ordre p du développement de $d_N fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$, c.-à-d. de $d_N f_{C[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$ donné par (5.14) ou (5.23) infra,
 = fonction de t ;

5.2 Mises en équations du système fluide

Le développement en perturbations de ces mises en équations est exposé en annexe F. La principale difficulté est de transformer les conditions à satisfaire en des limites inconnues en conditions à satisfaire en des limites connues. Ceci est fait en éliminant des conditions la variation de position des limites.

5.2.1 Développement des conditions à satisfaire

5.2.1.1 Condition de champ

5.2.1.1.1 Harmonicité

Le développement de (4.12) est donné par (F.176) :

$$(5.3) \quad \boxed{\frac{\partial^2 \varphi^{(p)}}{(\partial x_i)^2}} = 0.$$

5.2.1.2 Conditions aux limites

5.2.1.2.1 Conditions de surface libre

Le développement de (4.23.1-2) est donné par (F.182), soit

$$(5.4) \quad \mathbf{D}_t \boldsymbol{\psi}_{L^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}} \right) + \lambda_{\left(\frac{D_t \boldsymbol{\psi}}{\boldsymbol{\psi}} \right)_{L^{(0)}}^{(0)}} \cdot \boldsymbol{\psi}_{L^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}} \right) + D_t \bar{\boldsymbol{\psi}}_{L \triangleright \lambda}^{(p)} = 0$$

(dans (↑), $x_{L^* \bar{A}}^{(p)}$ a été éliminé; cette équation est le développement de tout le système (4.23) pour $n = 1$ à 2).

5.2.1.2.2 Conditions de glissement sur la carène

Pour la carène définie par $\mathbf{c}(t, \mathbf{x}_A^*)$

Le développement de (4.28.1-4) est donné par (F.197), soit

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \mathbf{D}_t \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + \lambda_{\left(\frac{D_t \mathbf{c}}{c} \right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + D_t \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} = 0, \\ (2) \quad \mathbf{D}_t^2 \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + \lambda_{\left(\frac{D_t^2 \mathbf{c}}{c} \right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + D_t^2 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} = 0, \\ (3) \quad \mathbf{D}_t^3 \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + \lambda_{\left(\frac{D_t^3 \mathbf{c}}{c} \right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + D_t^3 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} = 0, \end{array} \right.$$

(de même qu'en section précédente, dans (↑) $x_{C^* \bar{A}}^{(p)}$ a été éliminé; ce système est le développement de tout le système (4.28) pour $n = 1$ à 4).

Pour la carène définie par $\mathbf{c}(p_{\bar{A}}^{[0]}, p_{\bar{A}; \bar{N}}^{[1]}, \mathbf{x}_A^*)$

Le développement de (4.28.1-4) est donné par (F.205), soit

$$(5.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \mathbf{D}_t \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{\bar{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\bar{A}; \bar{N}}^{[1](p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + \lambda_{\left(\frac{D_t \mathbf{c}}{c} \right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{\bar{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\bar{A}; \bar{N}}^{[1](p)}} \right) \\ \quad + D_t \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} = 0, \\ (2) \quad \mathbf{D}_t^2 \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{\bar{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\bar{A}; \bar{N}}^{[1](p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + \lambda_{\left(\frac{D_t^2 \mathbf{c}}{c} \right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{\bar{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\bar{A}; \bar{N}}^{[1](p)}} \right) \\ \quad + D_t^2 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} = 0, \\ (3) \quad \mathbf{D}_t^3 \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{\bar{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\bar{A}; \bar{N}}^{[1](p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + \lambda_{\left(\frac{D_t^3 \mathbf{c}}{c} \right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{\bar{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\bar{A}; \bar{N}}^{[1](p)}} \right) \\ \quad + D_t^3 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} = 0. \end{array} \right.$$

5.2.1.2.3 Conditions de glissement sur le fond

Le développement de (4.36) est donné par (F.207) :

$$(5.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial f_F}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_F^{(p)}}{\partial x_i}} = 0, \\ (2) \quad \frac{\partial f_F}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_F^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} = 0, \\ (3) \quad \frac{\partial f_F}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 \varphi_F^{(p)}}{\partial t^2 \partial x_i}} = 0. \end{array} \right.$$

5.2.1.2.4 Condition de repos à l'infini horizontal

De même que pour la mise en équations exactes, le repos du fluide à l'infini horizontal est traduit par le fait que dans la représentation de $\varphi^{(p)}$ et de $\partial \varphi^{(p)} / \partial t$ par leur valeur aux frontières, la frontière F_∞ n'apporte pas de contribution (cf. section D.1.1.2).

5.2.1.3 Action du fluide sur le navire

Dans la mise en équations développée, les efforts sur la carène sont développés séparément de la pression sur la carène.

5.2.1.3.1 Pour la carène définie par $c(t, x_A^*)$

Pression sur la carène

Le développement de (4.17) est

$$p^{(p)} = -\rho \cdot \psi^{(p)},$$

soit pour $x_A^* \in C$

$$(5.8) \quad \bar{p}_C^{(p)} = -\rho \cdot \bar{\psi}_C^{(p)}.$$

L'expression de $\bar{\psi}_C^{(p)}$ est (F.35) (pour $S = C$), soit

$$(5.9) \quad \bar{\psi}_C^{(p)} = \psi_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + \frac{\partial \psi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{C^i}^{(p)}}}{1!} + \bar{\psi}_{C \triangleright}^{(p)}.$$

La grandeur $x_{C^*}^{(p)}$ est éliminée dans (↑) en utilisant (F.204), ce qui donne

$$(5.10) \quad \bar{\psi}_C^{(p)} = \boldsymbol{\psi}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + \lambda_{\left(\frac{\psi}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + \bar{\psi}_{C \triangleright} + \lambda_{\left(\frac{\psi}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \bar{c}_{C \triangleright}^{(p)}.$$

Moments de degré 0 et 1 des forces de pression sur la carène

Le développement de (4.66) est donné par (F.217) :

$$(5.11) \quad f_{C \left[\frac{i}{A} \right]}^{[0](p)} = \mathbf{f}_{C \triangleleft \left[\frac{i}{A} \right]}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + f_{C \triangleright \left[\frac{i}{A} \right]}^{[0](p)}.$$

Le développement de (4.72) est donné par (F.221) :

$$(5.12) \quad f_{C \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1](p)} = \mathbf{f}_{C \triangleleft \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + f_{C \triangleright \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1](p)}.$$

Pour les équations découplées, ces moments s'écrivent

$$(5.13) \quad {}_{d_N} f_{C \left[\frac{i}{A} \right]}^{[0](p)} = {}_{d_N} \mathbf{f}_{C \triangleleft \left[\frac{i}{A} \right]}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + {}_{d_N} f_{C \triangleright \left[\frac{i}{A} \right]}^{[0](p)}$$

et

$$(5.14) \quad {}_{d_N} f_{C \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1](p)} = {}_{d_N} \mathbf{f}_{C \triangleleft \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + {}_{d_N} f_{C \triangleright \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1](p)}$$

où

$$(5.15) \quad \begin{aligned} & {}_{d_N} \mathbf{f}_{C \triangleleft \left[\frac{i}{A} \right]}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \\ &= \mathbf{f}_{C \triangleleft \left[\frac{i}{A} \right]}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) - \mathbf{f}_{C \triangleleft \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \cdot \mu_{N \left[\frac{j}{N}; \frac{k}{N} \right]}^{[2]} \cdot m_{N \left[\frac{k}{N} \right]}^{[1]}, \end{aligned}$$

$$(5.16) \quad \begin{aligned} & {}_{d_N} \mathbf{f}_{C \triangleleft \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \\ &= \mathbf{f}_{C \triangleleft \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) - \mathbf{f}_{C \triangleleft \left[\frac{i}{A} \right]}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \cdot m_{N \left[\frac{j}{N} \right]}^{[1]} \cdot \mu_N^{[0]}, \end{aligned}$$

$$(5.17) \quad {}_{d_N} f_{C \triangleright \left[\frac{i}{A} \right]}^{[0](p)} = f_{C \triangleright \left[\frac{i}{A} \right]}^{[0](p)} - f_{C \triangleright \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1](p)} \cdot \mu_{N \left[\frac{j}{N}; \frac{k}{N} \right]}^{[2]} \cdot m_{N \left[\frac{k}{N} \right]}^{[1]}$$

et

$$(5.18) \quad {}_{d_N} f_{C \triangleright \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1](p)} = f_{C \triangleright \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1](p)} - f_{C \triangleright \left[\frac{i}{A} \right]}^{[0](p)} \cdot m_{N \left[\frac{j}{N} \right]}^{[1]} \cdot \mu_N^{[0]}.$$

5.2.1.3.2 Pour la carène définie par $c(p_{\frac{[i]}{A}}^{[0]}, p_{\frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1]}, x_A^*)$

Pression sur la carène

L'élimination de $x_{C^*}^{(p)}$ dans (5.9) en utilisant (F.206) donne

$$(5.19) \quad \bar{\psi}_C^{(p)} = \psi_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + \lambda_{\left(\frac{\psi}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{\frac{[i]}{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)}} \right) + \bar{\psi}_{C \triangleright}^{(p)} + \lambda_{\left(\frac{\psi}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \bar{c}_{C \triangleright}^{(p)}.$$

Moments de degré 0 et 1 des forces de pression sur la carène

Le développement de (4.66) est donné par (F.224) :

$$(5.20) \quad f_{C \frac{[i]}{A}}^{[0](p)} = \mathbf{f}_{C \triangleleft \frac{[i]}{A}}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)}} \right) + f_{C \triangleright \frac{[i]}{A}}^{[0](p)}.$$

Le développement de (4.72) est donné par (F.226) :

$$(5.21) \quad f_{C \frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)} = \mathbf{f}_{C \triangleleft \frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)}} \right) + f_{C \triangleright \frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)}.$$

Pour les équations découplées, ces moments s'écrivent

$$(5.22) \quad d_N f_{C \frac{[i]}{A}}^{[0](p)} = d_N \mathbf{f}_{C \triangleleft \frac{[i]}{A}}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)}} \right) + d_N f_{C \triangleright \frac{[i]}{A}}^{[0](p)}$$

et

$$(5.23) \quad d_N f_{C \frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)} = d_N \mathbf{f}_{C \triangleleft \frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)}} \right) + d_N f_{C \triangleright \frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)}$$

où

$$(5.24) \quad \begin{aligned} d_N \mathbf{f}_{C \triangleleft \frac{[i]}{A}}^{[0]} & \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)}} \right) \\ &= \mathbf{f}_{C \triangleleft \frac{[i]}{A}}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)}} \right) \\ & \quad - \mathbf{f}_{C \triangleleft \frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)}} \right) \cdot \mu_N^{[2]} \left[\frac{j}{N}, \frac{k}{N} \right] \cdot m_N^{[1]} \left[\frac{k}{N} \right], \end{aligned}$$

$$(5.25) \quad \begin{aligned} d_N \mathbf{f}_{C \triangleleft \frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1]} & \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)}} \right) \\ &= \mathbf{f}_{C \triangleleft \frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)}} \right) \\ & \quad - \mathbf{f}_{C \triangleleft \frac{[i]}{A}}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{\frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)}} \right) \cdot m_N^{[1]} \left[\frac{j}{N} \right] \cdot \mu_N^{[0]}, \end{aligned}$$

$$(5.26) \quad d_N f_{C \triangleright \frac{[i]}{A}}^{[0](p)} = f_{C \triangleright \frac{[i]}{A}}^{[0](p)} - f_{C \triangleright \frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)} \cdot \mu_N^{[2]} \left[\frac{j}{N}, \frac{k}{N} \right] \cdot m_N^{[1]} \left[\frac{k}{N} \right]$$

et

$$(5.27) \quad d_N f_{C \triangleright \frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)} = f_{C \triangleright \frac{[i]}{A}; \frac{[j]}{N}}^{[1](p)} - f_{C \triangleright \frac{[i]}{A}}^{[0](p)} \cdot m_N^{[1]} \left[\frac{j}{N} \right] \cdot \mu_N^{[0]}.$$

5.2.2 Mises en équations

Les conditions (5.3), (5.4), (5.5), (5.7) et la condition de repos à l'infini horizontal sont transformées en une EE de la même manière que pour les mises en équations avec conditions exactes. Les VE utilisées, $\varphi_{L^{(0)}}^{(*)}$ et $\partial\varphi_{L^{(0)}}^{(*)}/\partial t$ ou $\varphi_{C^{(0)}}^{(*)}$ et $\partial\varphi_{C^{(0)}}^{(*)}/\partial t$, sont issues de la décomposition (F.25) des VE utilisées dans ces mises en équations.

5.2.2.1 Variables d'état $\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}$ et $\partial\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}/\partial t$

5.2.2.1.1 Équation d'évolution

L'EE est donnée par (5.4), qui s'écrit

$$(5.28) \quad \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2}} = -2 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} + \frac{\partial^2 \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}} + \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_j}} \right) \\ - \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j}} + g_{\bar{A}}^i \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}} \\ - \lambda_{\left(\frac{D_t \psi}{\psi}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}} \cdot \left(\boxed{\frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial t}} + \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}} \right) - D_t \bar{\psi}_{L \triangleright \lambda}^{(p)} \Big|,$$

plus la relation triviale pour $\partial\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}/\partial t$.

L'harmonicité des $\varphi^{(p)}$ et des $\partial\varphi^{(p)}/\partial t$ (cf. (5.3)) fait que les représentations (4.40) et (4.41) restent valides pour ces grandeurs, avec des frontières à choisir. Nous choisissons évidemment les frontières d'ordre 0, ce qui donne

$$(5.29) \quad \boxed{\varphi^{(p)}}(x_{\bar{A}}^*) = (-{}^1\mathbf{G}_{L^{(0)}}(\boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}) + {}^1\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}(\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}}))(x_{\bar{A}}^*)$$

et

$$(5.30) \quad \boxed{\frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial t}}(x_{\bar{A}}^*) = (-{}^1\mathbf{G}_{L^{(0)}}(\boxed{\frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial t}}) + {}^1\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}(\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}}))(x_{\bar{A}}^*).$$

Les expressions des entrées $\partial\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}/\partial n$ et $\partial^2\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}/\partial t \partial n$ en fonction de c et si besoin des VE sont incorporées dès maintenant dans ces représentations. Ces entrées sont déterminées par les CGC (5.5).

L'expression de $\partial\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}/\partial n$ est (5.5.1), qui s'écrit

$$(5.31) \quad \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}} = - \boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t}} - \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}} - \lambda_{\left(\frac{D_t c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} - D_t \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} \quad |^1.$$

Le report de (↑) dans (5.29) donne la représentation de $\varphi^{(p)}$ en fonction uniquement des VE et des $c_{C^{(0)}}^{(*)}$:

$$(5.32) \quad \boxed{\varphi^{(p)}}(x_A^*) \\ = (- {}^1\mathbf{G}_{L^{(0)}}(\boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}) \\ - {}^1\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}\left(\boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t}}\right) - {}^1\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}\left(\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}}\right) - \lambda_{\left(\frac{D_t c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot {}^1\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}) \\ - {}^1\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}(D_t \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}))(x_A^*).$$

L'expression de $\partial^2\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}/\partial t \partial n$ est obtenue à partir de (5.5.2) : le report de la représentation (↑) (pour $x_A^* \in C^{(0)}$) dans cette équation donne

$$(5.33) \quad \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} \\ = - \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2}} - 2 \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} - \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j}} \\ + \psi_{tn}({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)}, C_n^{(0)}}(\boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t}})) \\ + (\psi_{tn}({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)}, C_n^{(0)}}(\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot ())) - (\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j}) \cdot ())(\boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}}) \\ - (\lambda_{\left(\frac{D_t^2 c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot (.) - \lambda_{\left(\frac{D_t c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \psi_{tn}({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)}, C_n^{(0)}}())) (\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}) \\ + \psi_{tn}({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)}, L^{(0)}}(\boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}})) \\ - D_t^2 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} + \psi_{tn}({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)}, C_n^{(0)}}(D_t \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}))$$

¹Pour conserver une taille raisonnable aux équations, les développements des seconds membres ne sont pas explicités.

où l'opérateur ψ_{tn} est défini par

$$(5.34) \quad \psi_{tn} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \left(2 \cdot \frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Le report de (5.33) dans (5.30) donne la représentation de $\partial \varphi^{(p)}/\partial t$ en fonction uniquement des VE et des $c_{C^{(0)}}^{(*)}$:

$$(5.35) \quad \begin{aligned} & \boxed{\frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial t}}(x_A^*) \\ &= \left(- {}^1\mathbf{G}_{L^{(0)}} \left(\boxed{\frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial t}} \right) + {}^1\mathbf{G}_{c_n^{(0)}}(\psi_{tn}({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},L^{(0)}}(\boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}))) \right. \\ & \quad - {}^1\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} \left(\boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2}} \right) - 2 \cdot {}^1\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} \left(\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} \right) \\ & \quad - {}^1\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} \left(\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j}} \right) \\ & \quad + {}^1\mathbf{G}_{c_n^{(0)}}(\psi_{tn}({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},c_n^{(0)}}(\boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t}}))) \\ & \quad + ({}^1\mathbf{G}_{c_n^{(0)}}(\psi_{tn}({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},c_n^{(0)}}(\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot ()))) \\ & \quad - {}^1\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} \left(\left(\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \right) \cdot (\right) \left(\boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}} \right) \\ & \quad - \left(\lambda_{\left(\frac{D_t^2 c}{c}\right)_{C^{(0)}}} \cdot {}^1\mathbf{G}_{c_n^{(0)}}(\cdot) - \lambda_{\left(\frac{D_t c}{c}\right)_{C^{(0)}}} \cdot {}^1\mathbf{G}_{c_n^{(0)}}(\psi_{tn}({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},c_n^{(0)}}(\cdot))) \right) \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \\ & \quad - {}^1\mathbf{G}_{c_n^{(0)}}(D_t^2 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}) + {}^1\mathbf{G}_{c_n^{(0)}}(\psi_{tn}({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},c_n^{(0)}}(D_t \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}))) \left(x_A^* \right). \end{aligned}$$

La relation triviale pour $\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}/\partial t$ et le report des représentations (5.32) et (↑) (pour $x_A^* \in L^{(0)}$) dans (5.28) donnent l'EE fluide :

$$(5.36) \quad \frac{\partial {}^1e_E^{(p)}}{\partial t} = {}^1\mathbf{A}_E({}^1e_E^{(p)}) + {}^{1,1}\mathbf{B}_E({}^1u_E^{(p)}) + {}^{1,1}ab_{E \triangleright}^{(p)}$$

où

$$(5.37)$$

${}^1e_E^{(p)}$: vecteur d'état n° 1 d'ordre p ,

$$\stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} \varphi_{L^{(0)}}^{(p)} \\ \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial t} \end{bmatrix},$$

(5.38)

${}^1u_E^{(p)}$: vecteur d'entrées n° 1 d'ordre p ,

$$\stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} c_{C^{(0)}}^{(p)} \\ \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2} \end{bmatrix},$$

(5.39)

1A_E : opérateur linéaire donnant la contribution des VE d'ordre p à $\partial {}^1e_E^{(p)}/\partial t$ (l'exposant gauche est le n° du vecteur d'état),

$$\stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \delta \\ {}^1A_{E1} & {}^1A_{E2} \end{bmatrix},$$

(5.40)

${}^{1,1}B_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des entrées d'ordre p à $\partial {}^1e_E^{(p)}/\partial t$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur d'état, le second le n° du vecteur d'entrées),

$$\stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}^{1,1}B_{E1} & {}^{1,1}B_{E2} & {}^{1,1}B_{E3} \end{bmatrix}$$

et

(5.41)

${}^{1,1}ab_{E \triangleright}^{(p)}$: contribution des VE et des entrées d'ordre $< p$ à $\partial {}^1e_E^{(p)}/\partial t$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur d'état, le second le n° du vecteur d'entrées),

$$\stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{1,1}ab_{E \triangleright 2}^{(p)} \end{bmatrix},$$

avec les opérateurs ${}^1A_{E*}$ et ${}^{1,1}B_{E*}$ et l'expression ${}^{1,1}ab_{E \triangleright 2}^{(p)}$ définis par

$${}^1\mathbf{A}_{E1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^1\mathbf{K}_1({}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},L^{(0)}}) - {}^1\mathbf{K}_2({}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},C_n^{(0)}}(\psi_{tn}({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},L^{(0)}}))),$$

$${}^1\mathbf{A}_{E2} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^1\mathbf{K}_2({}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},L^{(0)}}),$$

$$\begin{aligned} {}^1,1\mathbf{B}_{E1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} & {}^1\mathbf{K}_2({}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},C_n^{(0)}} \left(\left(\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \lambda_{\left(\frac{D_t^2 c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \boldsymbol{\delta} \right) \\ & + {}^1\mathbf{K}_3 \left(\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda_{\left(\frac{D_t c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \boldsymbol{\delta} \right), \end{aligned}$$

$${}^1,1\mathbf{B}_{E2} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} 2 \cdot {}^1\mathbf{K}_2({}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},C_n^{(0)}} \left(\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right)) + {}^1\mathbf{K}_3,$$

$${}^1,1\mathbf{B}_{E3} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^1\mathbf{K}_2({}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},C_n^{(0)}})$$

et

$${}^1,1ab_{E \triangleright 2}^{(p)} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^1\mathbf{K}_2({}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},C_n^{(0)}}(D_t^2 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)})) + {}^1\mathbf{K}_3(D_t \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}) + D_t \bar{\psi}_{L \triangleright \lambda}^{(p)},$$

o\u00f9 les op\u00e9rateurs ${}^1\mathbf{K}_*$ sont d\u00e9finis par

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{K}_1 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} & \left(2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \right) - g_A^i + \lambda_{\left(\frac{D_t \psi}{\psi}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}} \cdot \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \\ & + \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \end{aligned}$$

$${}^1\mathbf{K}_2 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} 2 \cdot \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda_{\left(\frac{D_t \psi}{\psi}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

et

$${}^1\mathbf{K}_3 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^1\mathbf{K}_1({}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},C_n^{(0)}}) - {}^1\mathbf{K}_2({}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},C_n^{(0)}}(\psi_{tn}({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},C_n^{(0)}}))).$$

Le report de (D.17) et de (D.18) dans ces d\u00e9finitions n'apporte de simplifications que dans les termes en $\boldsymbol{\delta}$ dans ${}^1\mathbf{K}_2({}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},L^{(0)}})$ (dans ${}^1\mathbf{A}_{E2}$) et dans les ${}^1\mathbf{K}_2({}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},C_n^{(0)}}(*))$ (dans les autres d\u00e9finitions). Ces simplifications sont minimes.

Tous les op\u00e9rateurs intervenant dans l'EE fluide ne d\u00e9pendent que des grandeurs d'ordre 0, ce qui est l'objectif recherch\u00e9. Si $\varphi^{(0)}$ est ind\u00e9pendant du

temps et si le fond F est horizontal, ces opérateurs sont indépendants du temps et peuvent donc être identifiés une fois pour toutes.

REMARQUE

▼ Cette mise en équations est d'une complexité beaucoup plus grande que celle avec les conditions aux limites exactes. Ceci vient avant tout du développement de ces conditions et dans une moindre mesure du fait d'avoir éliminé du problème la variation de position des limites. En modélisation de calcul, le seul intérêt de cette mise en équations serait d'éviter de recalculer à chaque pas de temps les opérateurs ${}^1\mathbf{G}_*$ dans le cas où $\varphi^{(0)}$ est indépendant du temps. Dans le cas où $\varphi^{(0)}$ varie dans le temps, cette mise en équations n'a, sauf problème spécifique, pas d'intérêt. ▲

5.2.2.1.2 Expression de $\bar{\psi}_C^{(p)}$

Le report dans (5.10) de (F.37) (pour $S^{(0)} = C^{(0)}$) et de (F.85) et ensuite de (5.32) et de (5.35) (pour $x_A^* \in C^{(0)}$) donne

$$(5.42) \quad \bar{\psi}_C^{(p)} = \tilde{\tilde{\psi}}_{C,1} \mathbf{C}_E ({}^1e_E^{(p)}) + \tilde{\tilde{\psi}}_{C,1} \mathbf{D}_E ({}^1u_E^{(p)}) + \bar{\psi}_{C,1,1} cd_{E\triangleright}^{(p)},$$

où

$$(5.43)$$

$\tilde{\tilde{\psi}}_{C,1} \mathbf{C}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des VE d'ordre p à $\bar{\psi}_C^{(p)}$ (le deuxième exposant gauche est le n° du vecteur d'état),

$$\stackrel{\text{déf}}{=} \left[\tilde{\tilde{\psi}}_{C,1} \mathbf{C}_{E1} \quad \tilde{\tilde{\psi}}_{C,1} \mathbf{C}_{E2} \right],$$

$$(5.44)$$

$\tilde{\tilde{\psi}}_{C,1} \mathbf{D}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des entrées d'ordre p à $\bar{\psi}_C^{(p)}$ (le deuxième exposant gauche est le n° du vecteur d'entrées),

$$\stackrel{\text{déf}}{=} \left[\tilde{\tilde{\psi}}_{C,1} \mathbf{D}_{E1} \quad \tilde{\tilde{\psi}}_{C,1} \mathbf{D}_{E2} \quad \tilde{\tilde{\psi}}_{C,1} \mathbf{D}_{E3} \right]$$

et

$$(5.45)$$

$\bar{\psi}_{C,1,1} cd_{E\triangleright}^{(p)}$: contribution des VE et des entrées d'ordre $< p$ à $\bar{\psi}_C^{(p)}$ (le deuxième exposant gauche est le n° du vecteur d'état, le troisième le n° du vecteur d'entrées),

$$\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^1\mathbf{M}_2({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},C_n^{(0)}}(D_t^2\bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)})) + {}^1\mathbf{M}_3(D_t\bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}) + \bar{\psi}_{C \triangleright}^{(p)} + \lambda_{(\frac{\psi}{c})_{C^{(0)}}} \cdot \bar{c}_{C \triangleright}^{(p)},$$

avec les op\u00e9rateurs $\tilde{\psi}_{C,1}\mathbf{C}_{E^*}$ et $\tilde{\psi}_{C,1}\mathbf{D}_{E^*}$ d\u00e9finis par

$$\tilde{\psi}_{C,1}\mathbf{C}_{E1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^1\mathbf{M}_1({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},L^{(0)}}) - {}^1\mathbf{M}_2({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},C_n^{(0)}}(\psi_{t\mathbf{n}}({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},L^{(0)}}))),$$

$$\tilde{\psi}_{C,1}\mathbf{C}_{E2} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^1\mathbf{M}_2({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},L^{(0)}}),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{C,1}\mathbf{D}_{E1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} & {}^1\mathbf{M}_2({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},C_n^{(0)}}((\frac{\partial^2\varphi_{C^{(0)}}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2\varphi_{C^{(0)}}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial\varphi_{C^{(0)}}}{\partial x_j}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \\ & + \frac{\partial\varphi_{C^{(0)}}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi_{C^{(0)}}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \lambda_{(\frac{D_t^2c}{c})_{C^{(0)}}} \cdot \delta)) \\ & + {}^1\mathbf{M}_3(\frac{\partial\varphi_{C^{(0)}}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda_{(\frac{D_t c}{c})_{C^{(0)}}} \cdot \delta) + \lambda_{(\frac{\psi}{c})_{C^{(0)}}} \cdot \delta, \end{aligned}$$

$$\tilde{\psi}_{C,1}\mathbf{D}_{E2} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} 2 \cdot {}^1\mathbf{M}_2({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},C_n^{(0)}}(\frac{\partial\varphi_{C^{(0)}}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i})) + {}^1\mathbf{M}_3$$

et

$$\tilde{\psi}_{C,1}\mathbf{D}_{E3} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^1\mathbf{M}_2({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},C_n^{(0)}}),$$

o\u00f9 les op\u00e9rateurs ${}^1\mathbf{M}_*$ sont d\u00e9finis par

$${}^1\mathbf{M}_1 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} - \frac{\partial\varphi_{C^{(0)}}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$${}^1\mathbf{M}_2 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} - \delta$$

et

$${}^1\mathbf{M}_3 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^1\mathbf{M}_1({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},C_n^{(0)}}) - {}^1\mathbf{M}_2({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},C_n^{(0)}}(\psi_{t\mathbf{n}}({}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},C_n^{(0)}}))).$$

Le report de (D.17) et de (D.18) dans ces expressions ne les simplifie pas.

5.2.2.1.3 Observation des VE

De m\u00eame que pour la mise en \u00e9quations exacte, la question est de savoir si la mesure de la d\u00e9nivellation de la surface libre permet de d\u00e9terminer les VE. L'application de la m\u00e9thode des perturbations introduit une difficult\u00e9 suppl\u00e9-

mentaire : les mesures de grandeurs physiques donnent la somme pour tous les ordres des grandeurs en question et non la répartition ordre par ordre de ces grandeurs, qui est fictive. Il faut donc définir une procédure de répartition des grandeurs mesurées entre tous les ordres. Pour résoudre ce problème, nous allons d'abord traiter l'observation des VE pour chaque ordre en supposant que les mesures pour cet ordre (et pour les ordres inférieurs) sont connues et ensuite nous définirons une procédure de répartition.

Observation des VE pour chaque ordre

La première «mesure» considérée est la dénivellation de L d'ordre p . Dans le développement en perturbation, seule la composante suivant $\partial l_{L^{(0)}}^{(0)}/\partial x_i$ de cette dénivellation est définie. Le report de (5.32) (pour $x_A^* \in L^{(0)}$) dans (F.178.1) donne l'expression de $\partial \psi_{L^{(0)}}^{(0)}/\partial x_i \cdot x_{L_A^i}^{(p)}$ en fonction uniquement des VE et des $c_{C^{(0)}}^{(*)}$, qui peut s'écrire

$$(5.46) \quad {}^1v_{E1}^{(p)} = {}^{1,1}C_{E1}({}^1e_E^{(p)}) + {}^{1,1}D_{E1}({}^1u_E^{(p)}) + {}^{1,1,1}cd_{E \triangleright 1}^{(p)}$$

où

$${}^1v_{E1}^{(p)} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{x_{L_A^i}^{(p)}},$$

$${}^{1,1}C_{E1} \stackrel{\text{déf}}{=} \left[{}^{1,1}C_{E1,1} \quad {}^{1,1}C_{E1,2} \right],$$

$${}^{1,1}D_{E1} \stackrel{\text{déf}}{=} \left[{}^{1,1}D_{E1,1} \quad {}^{1,1}D_{E1,2} \quad 0 \right]$$

et

$${}^{1,1,1}cd_{E \triangleright 1}^{(p)} \stackrel{\text{déf}}{=} {}^1N_3(D_t \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}) - \bar{\psi}_{L \triangleright}^{(p)},$$

avec les opérateurs ${}^{1,1}C_{E1,*}$ et ${}^{1,1}D_{E1,*}$ définis par

$${}^{1,1}C_{E1,1} \stackrel{\text{déf}}{=} {}^1N_1({}^1G_{L^{(0)},L^{(0)}}),$$

$${}^{1,1}C_{E1,2} \stackrel{\text{déf}}{=} {}^1N_2({}^1G_{L^{(0)},L^{(0)}}),$$

$${}^{1,1}D_{E1,1} \stackrel{\text{déf}}{=} {}^1N_3\left(\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda_{\left(\frac{D_t c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \delta\right)$$

et

$${}^{1,1}D_{E1,2} \stackrel{\text{déf}}{=} {}^1N_3,$$

où les opérateurs ${}^1\mathbf{N}_*$ sont définis par

$${}^1\mathbf{N}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$${}^1\mathbf{N}_2 \stackrel{\text{déf}}{=} -\boldsymbol{\delta}$$

et

$${}^1\mathbf{N}_3 \stackrel{\text{déf}}{=} {}^1\mathbf{N}_1({}^1\mathbf{G}_{L^{(0)}, C_n^{(0)}}).$$

Le report de (D.17) dans ces expressions n'apporte de simplification que pour ${}^{1,1}\mathbf{C}_{E1,2}$:

$$(5.47) \quad {}^{1,1}\mathbf{C}_{E1,2} = \boldsymbol{\delta}.$$

Les VE sont deux grandeurs indépendantes ; il faut donc deux mesures pour les déterminer. Une deuxième « mesure » pourrait être la vitesse normale de L d'ordre p ; mais pour rester cohérent avec la méthode des perturbations (qui ne produit que des relations linéaires entre les variables d'ordre p), cette deuxième mesure est en fait la vitesse normale à $L^{(0)}$ et sur $L^{(0)}$ d'ordre p :

$$(5.48) \quad \frac{\partial \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}}.$$

Le report de (5.32) (pour $x_A^* \in L^{(0)}$) dans cette définition donne l'expression de cette grandeur en fonction uniquement des VE et des $c_{C^{(0)}}^{(*)}$, qui peut s'écrire

$$(5.49) \quad {}^1v_{E2}^{(p)} = {}^{1,1}\mathbf{C}_{E2}({}^1e_E^{(p)}) + {}^{1,1}\mathbf{D}_{E2}({}^1u_E^{(p)}) + {}^{1,1,1}cd_{E \triangleright 2}^{(p)}$$

où

$${}^1v_{E2}^{(p)} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}},$$

$${}^{1,1}\mathbf{C}_{E2} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} {}^{1,1}\mathbf{C}_{E2,1} & 0 \end{bmatrix},$$

$${}^{1,1}\mathbf{D}_{E2} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} {}^{1,1}\mathbf{D}_{E2,1} & {}^{1,1}\mathbf{D}_{E2,2} & 0 \end{bmatrix}$$

et

$${}^{1,1,1}cd_{E \triangleright 2}^{(p)} \stackrel{\text{déf}}{=} {}^1\mathbf{N}_{t3}({}^1D_t \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}),$$

avec les opérateurs ${}^{1,1}\mathbf{C}_{E2,*}$ et ${}^{1,1}\mathbf{D}_{E2,*}$ définis par

$${}^{1,1}\mathbf{C}_{E2,1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^1\mathbf{N}_{t1} ({}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},L^{(0)}}),$$

$${}^{1,1}\mathbf{D}_{E2,1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^1\mathbf{N}_{t3} \left(\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda_{\left(\frac{D_{tc}}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \boldsymbol{\delta} \right)$$

et

$${}^{1,1}\mathbf{D}_{E2,2} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^1\mathbf{N}_{t3},$$

o\u00f9 les op\u00e9rateurs ${}^1\mathbf{N}_{t*}$ sont d\u00e9finis par

$${}^1\mathbf{N}_{t1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} - \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et

$${}^1\mathbf{N}_{t3} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^1\mathbf{N}_{t1} ({}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},C_n^{(0)}}).$$

Les \u00e9quations (5.46) et (5.49) constituent l'\u00e9quation d'observation pour chaque ordre, qui peut \u00eatre synth\u00e9tis\u00e9e en

$$(5.50) \quad {}^1\mathbf{v}_E^{(p)} = {}^{1,1}\mathbf{C}_E ({}^1\mathbf{e}_E^{(p)}) + {}^{1,1}\mathbf{D}_E ({}^1\mathbf{u}_E^{(p)}) + {}^{1,1,1}cd_{E>}^{(p)}$$

o\u00f9

$$(5.51)$$

${}^1\mathbf{v}_E^{(p)}$: vecteur de mesures (fictives) n\u00b0 1 d'ordre p ,

$$\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{v}_{E1}^{(p)} \\ {}^1\mathbf{v}_{E2}^{(p)} \end{bmatrix},$$

$$(5.52)$$

${}^{1,1}\mathbf{C}_E$: op\u00e9rateur lin\u00e9aire donnant la contribution des VE d'ordre p aux mesures ${}^1\mathbf{v}_E^{(p)}$ (le premier exposant gauche est le n\u00b0 du vecteur de mesures, le second le n\u00b0 du vecteur d'\u00e9tat),

$$\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \begin{bmatrix} {}^{1,1}\mathbf{C}_{E1} \\ {}^{1,1}\mathbf{C}_{E2} \end{bmatrix},$$

$$(5.53)$$

${}^{1,1}\mathbf{D}_E$: op\u00e9rateur lin\u00e9aire donnant la contribution des entr\u00e9es d'ordre p aux mesures ${}^1\mathbf{v}_E^{(p)}$ (le premier exposant gauche est le n\u00b0 du vecteur de mesures, le second le n\u00b0 du vecteur d'entr\u00e9es),

$$\underline{\underline{d\acute{e}f}} \quad \begin{bmatrix} {}^{1,1}D_{E1} \\ {}^{1,1}D_{E2} \end{bmatrix}$$

et

(5.54)

${}^{1,1,1}cd_{E \triangleright}^{(p)}$: contribution des VE et des entrées d'ordre $< p$ aux mesures ${}^1v_E^{(p)}$ (le premier (le premier exposant gauche est le n^o du vecteur de mesures, le deuxième le n^o du vecteur d'état, le troisième le n^o du vecteur d'entrées),

$$\underline{\underline{d\acute{e}f}} \quad \begin{bmatrix} {}^{1,1,1}cd_{E \triangleright 1}^{(p)} \\ {}^{1,1,1}cd_{E \triangleright 2}^{(p)} \end{bmatrix}.$$

La transmission directe des entrées vers les mesures, représentée par l'opérateur ${}^{1,1}D_E$, n'existe normalement pas dans les systèmes physiques. Elle n'apparaît ici que parce que le fluide est considéré comme incompressible.

Observabilité

L'observabilité de φ_L et de $\partial\varphi_L/\partial t$ à partir de η et de $\partial\eta/\partial t$ dans le problème exact (théorème 1 page 50) assure l'observabilité des grandeurs correspondantes dans le problème développé en perturbations. L'équation d'observation (5.50) a donc une solution. L'opérateur ${}^{1,1}C_E$ est donc inversible, toujours à une valeur propre nulle près correspondant au fait que $\varphi_L^{(p)}$ est défini à une constante près. L'opérateur ${}^{1,1}C_E$ étant

$${}^{1,1}C_E = \begin{bmatrix} {}^{1,1}C_{E1,1} & {}^{1,1}C_{E1,2} \\ {}^{1,1}C_{E2,1} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

son inverse est

$${}^{1,1}C_E^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & {}^{1,1}C_{E2,1}^{-1} \\ {}^{1,1}C_{E1,2}^{-1} & -{}^{1,1}C_{E1,2}^{-1} ({}^{1,1}C_{E1,1} ({}^{1,1}C_{E2,1}^{-1})) \end{bmatrix}.$$

L'opérateur ${}^{1,1}C_{E2,1}$ est donc inversible (l'inversibilité de ${}^{1,1}C_{E1,2}$ est déjà acquise avec (5.47)).

Répartions des mesures entre tous les ordres

Nous pouvons maintenant aborder la question de la répartition des mesures entre tous les ordres. La linéarité des opérateurs dans (5.50) fait que

$$(5.55) \quad {}^1v_E = {}^{1,1}C_E(\sum {}^1e_E^{(q)}) + {}^{1,1}D_E(\sum {}^1u_E^{(q)}) + \sum {}^{1,1,1}cd_{E\triangleright}^{(q)}$$

où

$$(5.56)$$

1v_E : vecteur de mesures intermédiaires n° 1,

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_{L(0)}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \sum x_{L\bar{A}}^{(q)} \\ \frac{\partial\psi_{L(0)}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \sum \frac{\partial\varphi_{L(0)}^{(q)}}{\partial x_i} \end{bmatrix}$$

et

$$\sum \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{q=1}^p.$$

Les «mesures» $\partial\psi_{L(0)}^{(0)}/\partial x_i \cdot \sum x_{L\bar{A}}^{(q)}$ et $\partial\psi_{L(0)}^{(0)}/\partial x_i \cdot \sum \partial\varphi_{L(0)}^{(q)}/\partial x_i$ sont qualifiées d'intermédiaires parce qu'elles ne sont plus totalement fictives comme $\partial\psi_{L(0)}^{(0)}/\partial x_i \cdot x_{L\bar{A}}^{(p)}$ et $\partial\psi_{L(0)}^{(0)}/\partial x_i \cdot \partial\varphi_{L(0)}^{(p)}/\partial x_i$ ni encore vraiment réelles, cf. section suivante (Obtention des mesures à partir de η).

L'opérateur ${}^{1,1}C_E$ étant inversible,

$$(5.57) \quad \sum {}^1e_E^{(q)} = {}^{1,1}C_E^{-1}({}^1v_E - {}^{1,1}D_E(\sum {}^1u_E^{(q)}) - \sum {}^{1,1,1}cd_{E\triangleright}^{(q)}),$$

donc seule la grandeur $\sum {}^1e_E^{(q)}$ est déterminée par 1v_E et les ${}^1u_E^{(q)}$. La question est de savoir comment la répartir entre les ${}^1e_E^{(q)}$ (pour $q = 1$ à p). Cette répartition n'influe que sur les seconds membres ${}^{1,1,1}cd_{E\triangleright}^{(q)}$. Ce problème est donc entièrement non linéaire.

Le système (5.55) est sous déterminé : le nombre d'équations est $2 \cdot \mathbb{R}^2$ et le nombre de variables $2 \cdot p \cdot \mathbb{R}^2$. Ceci vient du fait que la méthode des perturbations remplace chaque VE du problème exact par p VE fictives. En nous inspirant de la construction de la matrice d'observabilité de Kalman (cf. [2] section 4.3.6), une manière d'ajouter des informations est de dériver temporellement (5.55) autant de fois que nécessaire. Le report de (5.36) dans ces dérivées donne des expressions dans lesquelles les dérivées temporelles de $\sum {}^1e_E^{(q)}$ sont éliminées.

Application : le report de (5.36) dans $\partial/\partial t(5.55)$ donne

$$(5.58) \quad \begin{aligned} \frac{\partial {}^1v_E}{\partial t} = & \left(\frac{\partial {}^{1,1}\mathbf{C}_E}{\partial t} + {}^{1,1}\mathbf{C}_E({}^1\mathbf{A}_E) \right) (\sum {}^1e_E^{(q)}) \\ & + \left(\frac{\partial {}^{1,1}\mathbf{D}_E}{\partial t} + {}^{1,1}\mathbf{C}_E({}^{1,1}\mathbf{B}_E) \right) (\sum {}^1u_E^{(q)}) + {}^{1,1}\mathbf{D}_E \left(\sum \frac{\partial {}^1u_E^{(q)}}{\partial t} \right) \\ & + {}^{1,1}\mathbf{C}_E \left(\sum {}^{1,1}ab_{E\triangleright}^{(q)} \right) + \sum \frac{\partial {}^{1,1,1}cd_{E\triangleright}^{(q)}}{\partial t}. \end{aligned}$$

La même opération effectuée sur (↑) donne

$$(5.59) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 {}^1v_E}{\partial t^2} = & \left(\frac{\partial^2 {}^{1,1}\mathbf{C}_E}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial {}^{1,1}\mathbf{C}_E}{\partial t}({}^1\mathbf{A}_E) + {}^{1,1}\mathbf{C}_E \left(\frac{\partial {}^1\mathbf{A}_E}{\partial t} + {}^{1,1}\mathbf{C}_E({}^1\mathbf{A}_E^2 |^2) \right) \right) (\sum {}^1e_E^{(q)}) \\ & + \left(\frac{\partial^2 {}^{1,1}\mathbf{D}_E}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial {}^{1,1}\mathbf{C}_E}{\partial t}({}^{1,1}\mathbf{B}_E) + {}^{1,1}\mathbf{C}_E \left(\frac{\partial {}^{1,1}\mathbf{B}_E}{\partial t} \right) \right. \\ & \quad \left. + {}^{1,1}\mathbf{C}_E({}^1\mathbf{A}_E({}^{1,1}\mathbf{B}_E)) \right) (\sum {}^1u_E^{(q)}) \\ & + \left(2 \cdot \frac{\partial {}^{1,1}\mathbf{D}_E}{\partial t} + {}^{1,1}\mathbf{C}_E({}^{1,1}\mathbf{B}_E) \right) \left(\sum \frac{\partial {}^1u_E^{(q)}}{\partial t} \right) + {}^{1,1}\mathbf{D}_E \left(\sum \frac{\partial^2 {}^1u_E^{(q)}}{\partial t^2} \right) \\ & + \left(2 \cdot \frac{\partial {}^{1,1}\mathbf{C}_E}{\partial t} + {}^{1,1}\mathbf{C}_E({}^1\mathbf{A}_E) \right) \left(\sum {}^{1,1}ab_{E\triangleright}^{(q)} \right) + {}^{1,1}\mathbf{C}_E \left(\sum \frac{\partial {}^{1,1}ab_{E\triangleright}^{(q)}}{\partial t} \right) \\ & + \sum \frac{\partial^2 {}^{1,1,1}cd_{E\triangleright}^{(q)}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Dans ces équations, $\sum {}^1e_E^{(q)}$ est donné par (5.57). Les dérivées temporelles des ${}^{1,1}ab_{E\triangleright}^{(q)}$ et des ${}^{1,1,1}cd_{E\triangleright}^{(q)}$ font apparaître des dérivées temporelles des VE, qui sont de même exprimées en fonction des VE en utilisant (5.36).

Nous verrons en section suivante que les mesures $\partial l_{L^{(0)}}^{(0)}/\partial x_i \cdot \sum \partial \varphi_{L^{(0)}}^{(q)}/\partial x_i$ dépendent de la répartition de mesures obtenue, cf. (5.61) infra. La répartition est donc obtenue par la résolution pour les ${}^1e_E^{(q)}$ **et** les ${}^1v_E^{(q)}$ du système (5.55), (5.58), (5.59), etc. **et** (5.61). La méthode de résolution de ce système d'équations reste à définir.

La dérivation temporelle de mesures est une opération délicate. En pratique, l'ordre de dérivation maximum possible est de 2, et ceci avec des signaux

² : ${}^1\mathbf{A}_E$ à la puissance 2.

de bonne qualité. Le nombre de dérivations nécessaires pour obtenir autant d'équations que d'inconnues étant de $p - 1$, l'ordre p maximum avec la procédure de répartition décrite est de 3. Les équations à résoudre étant non linéaires, d'autres procédures sont peut-être possibles. Ce problème est ouvert.

Obtention des mesures à partir de η

La dénivellation η est supposée être mesurée. La question est : cette mesure permet-elle de déterminer les mesures intermédiaires $\partial\psi_{L^{(0)}}^{(0)}/\partial x_i \cdot \sum x_{L^{\frac{i}{A}}}^{(q)}$ et $\partial\psi_{L^{(0)}}^{(0)}/\partial x_i \cdot \sum \partial\varphi_{L^{(0)}}^{(q)}/\partial x_i$?

La surface L est connue explicitement par η , ou implicitement par une fonction l (cf. par exemple (F.57)). La surface $L^{(0)}$ est de même connue explicitement par $\eta^{(0)}$, ou implicitement par $l^{(0)}$, cf. (F.58). La mesure $\partial l_{L^{(0)}}^{(0)}/\partial x_i \cdot \sum x_{L^{\frac{i}{A}}}^{(q)}$ est la distance entre $L^{(0)}$ et L suivant $\partial l_{L^{(0)}}^{(0)}/\partial x_*$ multipliée par la norme de ce vecteur. Si $L^{(0)}$ et L sont connus, cette grandeur est connue.

La grandeur $\partial l_{L^{(0)}}^{(0)}/\partial x_i \cdot \sum \partial\varphi_{L^{(0)}}^{(q)}/\partial x_i$ n'a pas d'existence physique. Elle est un produit de la méthode des perturbations. Son expression est obtenue à partir du développement (F.191) des CSL (4.22.1-2) :

$$(5.60) \quad \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i} = - \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial t} - \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} - \lambda_{\left(\frac{D_t l}{l}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}} \cdot l_{L^{(0)}}^{(p)} - D_t \bar{\psi}_{L \triangleright \lambda}^{(p)}.$$

La linéarité de cette équation par rapport aux termes d'ordre p fait que

$$(5.61) \quad \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \sum \frac{\partial\varphi_{L^{(0)}}^{(q)}}{\partial x_i} = - \sum \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(q)}}{\partial t} - \sum \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(q)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} - \lambda_{\left(\frac{D_t l}{l}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}} \cdot \sum l_{L^{(0)}}^{(q)} - \sum D_t \bar{\psi}_{L \triangleright \lambda}^{(q)}.$$

La grandeur $\sum l_{L^{(0)}}^{(q)}$ est la perturbation de l sur $L^{(0)}$, c.-à-d. par définition

$$\sum l_{L^{(0)}}^{(q)} = l_{L^{(0)}} - l_{L^{(0)}}^{(0)} \Big|^3.$$

La grandeur η définissant l et donc $l_{L^{(0)}}$, sa connaissance est donc suffisante pour déterminer la mesure $\partial l_{L^{(0)}}^{(0)}/\partial x_i \cdot \sum \partial\varphi_{L^{(0)}}^{(q)}/\partial x_i$.

Dans (5.60), les mesures d'ordre inférieur à p interviennent dans $D_t \bar{\psi}_{L \triangleright \lambda}^{(p)}$. La mesure $\partial l_{L^{(0)}}^{(0)}/\partial x_i \cdot \sum \partial\varphi_{L^{(0)}}^{(q)}/\partial x_i$ va donc dépendre de la répartition de mesure obtenue.

³Bien que ce terme soit nul par définition, il est conservé pour que cette expression soit dérivable.

5.2.2.2 Variables d'état $\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}$ et $\partial\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}/\partial t$

5.2.2.2.1 Équation d'évolution

Les représentations (4.49), (4.50) et (4.51) de $\varphi^{(p)}$, $\partial\varphi^{(p)}/\partial t$ et $\partial^2\varphi^{(p)}/\partial t^2$ pour les frontières d'ordre 0 sont

$$(5.62) \quad \boxed{\varphi^{(p)}}(x_A^*) = (-{}^2\mathbf{G}_{C^{(0)}}(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}) + {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}}(\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}}))(x_A^*),$$

$$(5.63) \quad \boxed{\frac{\partial\varphi^{(p)}}{\partial t}}(x_A^*) = (-{}^2\mathbf{G}_{C^{(0)}}(\boxed{\frac{\partial\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t}}) + {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}}(\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}}))(x_A^*)$$

et

$$(5.64) \quad \boxed{\frac{\partial^2\varphi^{(p)}}{\partial t^2}}(x_A^*) = (-{}^2\mathbf{G}_{C^{(0)}}(\boxed{\frac{\partial^2\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2}}) + {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}}(\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^3\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2 \partial x_i}}))(x_A^*).$$

Les CGC (5.5) sont de même incorporées dès maintenant dans ces représentations. L'expression de $\partial\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}/\partial n$ est toujours (5.31). Le report de cette équation dans (5.62) donne la représentation de $\varphi^{(p)}$ en fonction uniquement des VE et des $c_{C^{(0)}}^{(*)}$:

$$(5.65) \quad \boxed{\varphi^{(p)}}(x_A^*) \\ = (-{}^2\mathbf{G}_{C^{(0)}}(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}) \\ - {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}}(\boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t}}) - {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}}(\frac{\partial\varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}}) - \lambda_{(\frac{D_t c}{c})_{C^{(0)}}} \cdot {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}}(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}) \\ - {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}}(D_t \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}))(x_A^*),$$

(cette représentation est formellement identique à la représentation (5.32) en remplaçant les ${}^1\mathbf{G}_*$ par les ${}^2\mathbf{G}_*$, l'indice L étant remplacé par l'indice C).

Le report de cette représentation (pour $x_A^* \in C^{(0)}$) dans (5.5.2) donne

$$\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} \\ = - \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2}} - 2 \cdot \frac{\partial\varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} - \frac{\partial\varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j}} \\ + \psi_{tn}({}^2\mathbf{G}_{C^{(0)},c_n^{(0)}}(\boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t}}))$$

$$\begin{aligned}
& + (\psi_{\mathbf{tn}}({}^2\mathbf{G}_{C^{(0)},C_n^{(0)}}(\frac{\partial\varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot ())) - (\frac{\partial^2\varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2\varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial\varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j}) \cdot ()) (\boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}}}) \\
& - (\lambda_{(\frac{D_t^2 c}{c})_{C^{(0)}}} \cdot (.) - \lambda_{(\frac{D_t c}{c})_{C^{(0)}}} \cdot \psi_{\mathbf{tn}}({}^2\mathbf{G}_{C^{(0)},C_n^{(0)}}())) (\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}) \\
& + \psi_{\mathbf{tn}}({}^2\mathbf{G}_{C^{(0)},C^{(0)}}(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}})) \\
& - D_t^2 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} + \psi_{\mathbf{tn}}({}^2\mathbf{G}_{C^{(0)},C_n^{(0)}}(D_t \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)})).
\end{aligned}$$

Cette expression se simplifie en utilisant (D.43) et (D.44) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} &= - \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2}} - 2 \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} - \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j}} \\
& - (\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j}) \cdot (\boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}}) - \lambda_{(\frac{D_t^2 c}{c})_{C^{(0)}}} \cdot (\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}) \\
& - \psi_{\mathbf{tn}}(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}) - D_t^2 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}
\end{aligned}$$

(où l'opérateur $\psi_{\mathbf{tn}}$ est toujours défini par (5.34)).

Le report de (↑) dans (5.63) donne la représentation de $\partial\varphi^{(p)}/\partial t$ en fonction uniquement des VE et des $c_{C^{(0)}}^{(*)}$:

$$\begin{aligned}
(5.66) \quad \boxed{\frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial t}}(x_A^*) &= (- {}^2\mathbf{G}_{C^{(0)}}(\boxed{\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t}}) - {}^2\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}(\psi_{\mathbf{tn}}(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}))) \\
& - {}^2\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}(\boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2}}) - 2 \cdot {}^2\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}(\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}}) \\
& - {}^2\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}(\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j}}) \\
& - {}^2\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}((\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j}) \cdot (\boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}})) \\
& - \lambda_{(\frac{D_t^2 c}{c})_{C^{(0)}}} \cdot {}^2\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}) - {}^2\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}(D_t^2 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}))(x_A^*).
\end{aligned}$$

Le report des représentations (5.65) et (↑) (pour $x_A^* \in C^{(0)}$) dans (5.5.3) donne

(5.67)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 \varphi_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2 \partial x_i}} \\
&= - \boxed{\frac{\partial^3 c_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^3}} - 3 \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 c_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2 \partial x_i}} - 3 \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 c_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j}} \\
&\quad - \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 c_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}} \\
&\quad - 3 \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} \\
&\quad - 3 \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j}} \\
&\quad - \left(\frac{\partial^3 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial t^2 \partial x_i} + 2 \cdot \frac{\partial^3 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_j} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^3 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}} \\
&\quad - \lambda \frac{D_t^3 \varepsilon}{c} \cdot \boxed{c_{c^{(0)}}^{(p)}} \\
&\quad - {}^2\mathbf{J}_2 \left(\frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial t} \right) - {}^2\mathbf{J}_1 \left(\varphi_{c^{(0)}}^{(p)} \right) - D_t^3 c_{c \triangleright \lambda}^{(p)},
\end{aligned}$$

où les opérateurs ${}^2\mathbf{J}_*$ sont définis par

$$\begin{aligned}
{}^2\mathbf{J}_1 &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \\
&\quad + \left(3 \cdot \frac{\partial D_t c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} - 2 \cdot \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \\
&\quad + \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \\
&\quad + \left(3 \cdot \frac{\partial D_t^2 c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} - 3 \cdot \frac{\partial D_t c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial^3 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \right) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

et

$${}^2\mathbf{J}_2 \stackrel{\text{d\'ef}}{=} 2 \cdot \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + (3 \cdot \frac{\partial D_t c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} - 2 \cdot \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Le report de (5.67) et ensuite de (5.66) dans (5.64) donne la représentation de $\partial^2 \varphi^{(p)} / \partial t^2$ en fonction uniquement des VE et des $c_{c^{(0)}}^{(*)}$.

$$\begin{aligned} & \boxed{\frac{\partial^2 \varphi^{(p)}}{\partial t^2}}(x_{\bar{A}}^*) \\ &= (- {}^2\mathbf{G}_{c^{(0)}} \left(\boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2}} \right) - {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} ({}^2\mathbf{J}_2 \left(\boxed{\frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial t}} \right)) - {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} ({}^2\mathbf{J}_1 \left(\boxed{\varphi_{c^{(0)}}^{(p)}} \right))) \\ & \quad - {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} \left(\boxed{\frac{\partial^3 c_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^3}} \right) - 3 \cdot {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} \left(\frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 c_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2 \partial x_i}} \right) \\ & \quad - 3 \cdot {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} \left(\frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 c_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j}} \right) \\ & \quad - {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} \left(\frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 c_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}} \right) \\ & \quad - 3 \cdot {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} \left(\left(\frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} \right) \\ & \quad - 3 \cdot {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} \left(\left(\frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j}} \right) \\ & \quad - {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} \left(\left(\frac{\partial^3 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial t^2 \partial x_i} + 2 \cdot \frac{\partial^3 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_j} \right. \right. \\ & \quad \quad \left. \left. + \frac{\partial^3 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \right. \right. \\ & \quad \quad \left. \left. + \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}} \right) \\ & \quad - {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} \left(\lambda_{\left(\frac{D_t^3 c}{c} \right)_{c^{(0)}}} \cdot \boxed{c_{c^{(0)}}^{(p)}} \right) - {}^2\mathbf{G}_{c_n^{(0)}} (D_t^3 \bar{c}_{c \triangleright \lambda}^{(p)}) (x_{\bar{A}}^*). \end{aligned}$$

La relation triviale pour $\partial \varphi_{c^{(0)}}^{(p)} / \partial t$ et le report des représentations (5.65), (5.66) et (↑) (pour $x_{\bar{A}}^* \in L^{(0)}$) dans (5.28) donnent une EE formellement identique à (5.36) :

$$(5.68) \quad \frac{\partial {}^2e_E^{(p)}}{\partial t} = {}^2\mathbf{A}_E({}^2e_E^{(p)}) + {}^{2,2}\mathbf{B}_E({}^2u_E^{(p)}) + {}^{2,2}ab_{E \triangleright}^{(p)}$$

mais où

(5.69)

${}^2e_E^{(p)}$: vecteur d'état n° 2 d'ordre p ,

$$\stackrel{d\acute{e}f}{=} \begin{bmatrix} \varphi_{C(0)}^{(p)} \\ \frac{\partial \varphi_{C(0)}^{(p)}}{\partial t} \end{bmatrix},$$

(5.70)

${}^2u_E^{(p)}$: vecteur d'entrées n° 2 d'ordre p ,

$$\stackrel{d\acute{e}f}{=} \begin{bmatrix} c_{C(0)}^{(p)} \\ \frac{\partial c_{C(0)}^{(p)}}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 c_{C(0)}^{(p)}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^3 c_{C(0)}^{(p)}}{\partial t^3} \end{bmatrix}, \text{ c.-à-d. vecteur d'état n° 1 + } |\partial^3 c_{C(0)}^{(p)} / \partial t^3|^4,$$

(5.71)

${}^2\mathbf{A}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des VE d'ordre p à $\partial {}^2e_E^{(p)} / \partial t$ (l'exposant gauche est le n° du vecteur d'état),

$$\stackrel{d\acute{e}f}{=} \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\delta} \\ {}^2\mathbf{A}_{E1} & {}^2\mathbf{A}_{E2} \end{bmatrix},$$

(5.72)

${}^{2,2}\mathbf{B}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des entrées d'ordre p à $\partial {}^2e_E^{(p)} / \partial t$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur d'état, le second le n° du vecteur d'entrées),

⁴Le fait que les entrées d'un système dépendent des VE utilisées peut paraître curieux voire inacceptable. Ceci vient toujours du caractère non physique de l'écoulement incompressible (la présence de $\partial^2 c_{C(0)}^{(p)} / \partial t^2$ dans les entrées, qui fait apparaître la notion de masses d'eau ajoutées, est tout aussi non physique que celle de $\partial^3 c_{C(0)}^{(p)} / \partial t^3$. Nous y sommes simplement plus habitué(e)s).

$$\stackrel{\text{d\'ef}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{2,2}\mathbf{B}_{E1} & {}^{2,2}\mathbf{B}_{E2} & {}^{2,2}\mathbf{B}_{E3} & {}^{2,2}\mathbf{B}_{E4} \end{bmatrix}$$

et

(5.73)

${}^{2,2}ab_{E \triangleright}^{(p)}$: contribution des VE et des entrées d'ordre $< p$ à $\partial^2 e_E^{(p)}/\partial t$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur d'état, le second le n° du vecteur d'entrées),

$$\stackrel{\text{d\'ef}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{2,2}ab_{E \triangleright 2}^{(p)} \end{bmatrix},$$

avec les opérateurs ${}^2\mathbf{A}_{E*}$ et ${}^{2,2}\mathbf{B}_{E*}$ et l'expression ${}^{2,2}ab_{E \triangleright 2}^{(p)}$ définis par

$${}^2\mathbf{A}_{E1} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} {}^2\mathbf{K}_0({}^2\mathbf{J}_1) + {}^2\mathbf{K}_1({}^2\mathbf{G}_{L^{(0)},C^{(0)}}) + {}^2\mathbf{K}_2({}^2\mathbf{G}_{L^{(0)},C_n^{(0)}}(\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{t}\mathbf{n}})),$$

$${}^2\mathbf{A}_{E2} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} {}^2\mathbf{K}_0({}^2\mathbf{J}_2) + {}^2\mathbf{K}_2({}^2\mathbf{G}_{L^{(0)},C^{(0)}}),$$

$$\begin{aligned} {}^{2,2}\mathbf{B}_{E1} &\stackrel{\text{d\'ef}}{=} {}^2\mathbf{K}_0 \left(\left(\frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t^2 \partial x_i} + 2 \cdot \frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_j} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right. \\ &\quad \left. + 3 \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \lambda_{\left(\frac{D_{\mathbf{t}c}^3}{c}\right)_{C^{(0)}}} \cdot \boldsymbol{\delta} \right) \\ &\quad + {}^2\mathbf{K}_2({}^2\mathbf{G}_{L^{(0)},C_n^{(0)}}) \left(\left(\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \lambda_{\left(\frac{D_{\mathbf{t}c}^2}{c}\right)_{C^{(0)}}} \cdot \boldsymbol{\delta} \right) \\ &\quad \left. + {}^2\mathbf{K}_3 \left(\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda_{\left(\frac{D_{\mathbf{t}c}}{c}\right)_{C^{(0)}}} \cdot \boldsymbol{\delta} \right), \right. \end{aligned}$$

$${}^{2,2}\mathbf{B}_{E_2} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} 3 \cdot {}^2\mathbf{K}_0 \left(\left(\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ + 2 \cdot {}^2\mathbf{K}_2 \left({}^2\mathbf{G}_{L^{(0)}, C_n^{(0)}} \left(\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) + {}^2\mathbf{K}_3,$$

$${}^{2,2}\mathbf{B}_{E_3} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} 3 \cdot {}^2\mathbf{K}_0 \left(\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + {}^2\mathbf{K}_2 \left({}^2\mathbf{G}_{L^{(0)}, C_n^{(0)}} \right),$$

$${}^{2,2}\mathbf{B}_{E_4} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^2\mathbf{K}_0$$

et

$${}^{2,2}ab_{E \triangleright 2}^{(p)} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^2\mathbf{K}_0 (D_t^3 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}) + {}^2\mathbf{K}_2 \left({}^2\mathbf{G}_{L^{(0)}, C_n^{(0)}} (D_t^2 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}) \right) + {}^2\mathbf{K}_3 (D_t \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}) + D_t \bar{\psi}_{L \triangleright \lambda}^{(p)},$$

o\u00f9 les op\u00e9rateurs ${}^2\mathbf{K}_*$ sont d\u00e9finis par

$${}^2\mathbf{K}_0 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} - {}^2\mathbf{G}_{L^{(0)}, C^{(0)}}^{-1} \left({}^2\mathbf{G}_{L^{(0)}, C_n^{(0)}} \right),$$

$${}^2\mathbf{K}_1 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} - {}^2\mathbf{G}_{L^{(0)}, C^{(0)}}^{-1} ({}^1\mathbf{K}_1),$$

$${}^2\mathbf{K}_2 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} - {}^2\mathbf{G}_{L^{(0)}, C^{(0)}}^{-1} ({}^1\mathbf{K}_2)$$

et

$${}^2\mathbf{K}_3 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^2\mathbf{K}_1 \left({}^2\mathbf{G}_{L^{(0)}, C_n^{(0)}} \right).$$

Le report de (D.43) et de (D.44) dans ces expressions ne les simplifie pas. La simplification (minime) correspondant \u00e0 celle obtenue par le report de (D.17) dans la d\u00e9finition de ${}^1\mathbf{A}_{E_2}$ (cf. section 5.2.2.1.1) est la simplification naturelle du terme en δ dans ${}^2\mathbf{K}_2 \left({}^2\mathbf{G}_{L^{(0)}, C^{(0)}} \right)$ (dans ${}^2\mathbf{A}_{E_2}$) : ${}^2\mathbf{G}_{L^{(0)}, C^{(0)}}^{-1} (\delta ({}^2\mathbf{G}_{L^{(0)}, C^{(0)}})) = \delta$. Les simplifications obtenues par le report de (D.18) dans les autres d\u00e9finitions de la section 5.2.2.1.1 n'ont pas de correspondance dans les d\u00e9finitions ci-dessus.

5.2.2.2 Observation des VE

Observation des VE pour chaque ordre

La premi\u00e8re «mesure» consid\u00e9r\u00e9e est $\bar{\psi}_C^{(p)}$. Le report dans (5.10) de (F.37) (pour $S^{(0)} = C^{(0)}$) et de (F.85) et ensuite de (5.65) et de (5.66) (pour $x_A^* \in$

$C^{(0)}$ donne

$$(5.74) \quad {}^2v_{E1}^{(p)} = {}^{2,2}C_{E1}({}^2e_E^{(p)}) + {}^{2,2}D_{E1}({}^2u_E^{(p)}) + {}^{2,2,2}cd_{E>1}^{(p)},$$

où

$${}^2v_{E1}^{(p)} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \bar{\psi}_C^{(p)},$$

$${}^{2,2}C_{E1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \begin{bmatrix} {}^{2,2}C_{E1,1} & {}^{2,2}C_{E1,2} \end{bmatrix},$$

$${}^{2,2}D_{E1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \begin{bmatrix} {}^{2,2}D_{E1,1} & {}^{2,2}D_{E1,2} & {}^{2,2}D_{E1,3} & 0 \end{bmatrix}$$

et

$${}^{2,2,2}cd_{E>1}^{(p)} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \bar{\psi}_{C>}^{(p)} + \lambda_{(\frac{\psi}{c})_{C^{(0)}}} \cdot \bar{c}_{C>}^{(p)},$$

avec les op\u00e9rateurs ${}^{2,2}C_{E1,*}$ et ${}^{2,2}D_{E1,*}$ d\u00e9finis par

$${}^{2,2}C_{E1,1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} -{}^2M_1,$$

$${}^{2,2}C_{E1,2} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} -{}^2M_2,$$

$${}^{2,2}D_{E1,1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \lambda_{(\frac{\psi}{c})_{C^{(0)}}} \cdot \delta,$$

$${}^{2,2}D_{E1,2} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \mathbf{0}$$

et

$${}^{2,2}D_{E1,3} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \mathbf{0},$$

où les op\u00e9rateurs 2M_* sont d\u00e9finis par

$${}^2M_1 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} -\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et

$${}^2M_2 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} -\delta.$$

L'\u00e9quation (5.74) constitue une partie de l'\u00e9quation d'observation pour chaque ordre. Pour obtenir autant d'\u00e9quations que d'inconnues, cette \u00e9quation est compl\u00e9t\u00e9e par sa d\u00e9riv\u00e9e temporelle, qui peut s'\u00e9crire

$$(5.75) \quad {}^2v_{E2}^{(p)} = {}^{2,2}C_{E2}({}^2e_E^{(p)}) + {}^{2,2}D_{E2}({}^2u_E^{(p)}) + {}^{2,2}D_{E1}\left(\frac{\partial {}^2u_E^{(p)}}{\partial t}\right) + {}^{2,2,2}cd_{E>2}^{(p)},$$

où

$${}^2v_E^{(p)} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial \bar{\psi}_C^{(p)}}{\partial t},$$

$${}^{2,2}\mathbf{C}_{E2} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial {}^{2,2}\mathbf{C}_{E1}}{\partial t} + {}^{2,2}\mathbf{C}_{E1}({}^2\mathbf{A}_E),$$

$${}^{2,2}\mathbf{D}_{E2} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial {}^{2,2}\mathbf{D}_{E1}}{\partial t} + {}^{2,2}\mathbf{C}_{E1}({}^{2,2}\mathbf{B}_E)$$

et

$${}^{2,2,2}cd_{E \triangleright 2}^{(p)} \stackrel{\text{déf}}{=} {}^{2,2}\mathbf{C}_{E1}({}^{2,2}ab_{E \triangleright}^{(p)}) + \frac{\partial {}^{2,2,2}cd_{E \triangleright 1}^{(p)}}{\partial t}.$$

Attention, les dérivation temporelles doivent être appliquées aux expressions de ${}^{2,2}\mathbf{C}_{E1}$, de ${}^{2,2}\mathbf{D}_{E1}$ et de ${}^{2,2,2}cd_{E \triangleright 1}^{(p)}$ établies *avant* les simplifications résultant de l'utilisation de (D.43) et de (D.44).

Les équations (5.74) et (5.75) constituent l'équation d'observation pour chaque ordre, qui peut être synthétisée en

$$(5.76) \quad {}^2v_E^{(p)} = {}^{2,2}\mathbf{C}_E({}^2e_E^{(p)}) + {}^{2,2}\mathbf{D}_E({}^2u_E^{(p)}) + {}^{2,2}\mathbf{D}_{Et}\left(\frac{\partial {}^2u_E^{(p)}}{\partial t}\right) + {}^{2,2,2}cd_{E \triangleright}^{(p)},$$

où

(5.77)

${}^2v_E^{(p)}$: vecteur de mesures (fictives) n° 2 d'ordre p ,

$$\stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} {}^2v_{E1}^{(p)} \\ {}^2v_{E2}^{(p)} \end{bmatrix},$$

(5.78)

${}^{2,2}\mathbf{C}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des VE d'ordre p aux mesures ${}^2v_E^{(p)}$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur de mesures, le second le n° du vecteur d'état),

$$\stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} {}^{2,2}\mathbf{C}_{E1} \\ {}^{2,2}\mathbf{C}_{E2} \end{bmatrix},$$

(5.79)

${}^{2,2}\mathbf{D}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des entrées d'ordre p aux mesures ${}^2v_E^{(p)}$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur de mesures, le second le n° du vecteur d'entrées),

$$\underline{\underline{\text{d\'ef}}}\left[\begin{array}{c} {}^{2,2}\mathbf{D}_{E1} \\ {}^{2,2}\mathbf{D}_{E2} \end{array} \right],$$

(5.80)

${}^{2,2}\mathbf{D}_{Et}$: opérateur linéaire donnant la contribution des dérivées temporelles des entrées d'ordre p aux mesures ${}^2v_E^{(p)}$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur de mesures, le second le n° du vecteur d'entrées),

$$\underline{\underline{\text{d\'ef}}}\left[\begin{array}{c} 0 \\ {}^{2,2}\mathbf{D}_{E1} \end{array} \right]$$

et

(5.81)

${}^{2,2,2}cd_{E\triangleright}^{(p)}$: contribution des VE et des entrées d'ordre $< p$ aux mesures ${}^2v_E^{(p)}$ (le premier (le premier exposant gauche est le n° du vecteur de mesures, le deuxième le n° du vecteur d'état, le troisième le n° du vecteur d'entrées),

$$\underline{\underline{\text{d\'ef}}}\left[\begin{array}{c} {}^{2,2,2}cd_{E\triangleright 1}^{(p)} \\ {}^{2,2,2}cd_{E\triangleright 2}^{(p)} \end{array} \right].$$

Observabilité

De même qu'en section 5.2.2.1.3, l'observabilité de $\varphi_{C(0)}^{(p)}$ et de $\partial\varphi_{C(0)}^{(p)}/\partial t$ à partir de $\bar{\psi}_C^{(p)}$ et de $\partial\bar{\psi}_C^{(p)}/\partial t$ demande que (5.76) ait une seule solution, toujours à une valeur propre nulle près correspondant au fait que $\varphi_{C(0)}^{(p)}$ est défini à une constante près. Ceci demande que ${}^{2,2}\mathbf{C}_E$ soit inversible. Ce problème est ouvert.

Répartitions des mesures entre tous les ordres

La procédure de répartition des mesures entre tous les ordres peut être celle exposée en section 5.2.2.1.3.

Obtention de la mesure

Les grandeurs $\sum \bar{\psi}_c^{(a)}$ et $\sum \partial \bar{\psi}_c^{(a)} / \partial t$ sont donnés directement par la mesure de la pression sur la carène.

5.3 Mises en équations du système navire + fluide

Les EE du système navire + fluide sont obtenue en suivant la même procédure que dans la mise en équations exacte. L'écriture de ces EE est réservée pour un développement ultérieur.

Chapitre 6

Identification des modèles

Un principe de l'automatique est d'identifier le modèle¹ d'un système à partir du système réel, l'objectif étant que ce modèle représente tous les phénomènes significatifs intervenants dans son comportement. Une représentation grossière mais prenant en compte tous les phénomènes est préférable à une représentation précise mais partielle. Le modèle final dépend aussi de l'utilisation envisagée. Un modèle utilisé pour établir des lois de commande peut être très rudimentaire. Il peut ne représenter que les tendances générales du comportement d'un système. Un modèle de simulation doit représenter le système plus finement.

L'étude théorique effectuée dans le chapitre 4 apporte comme informations que pour la modélisation de la tenue à la mer, φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$ ou φ_C et $\partial\varphi_C/\partial t$ peuvent être des VE du système navire + fluide. De plus, φ_L et $\partial\varphi_L/\partial t$ sont observables de façon certaine à partir de η et de $\partial\eta/\partial t$; φ_C et $\partial\varphi_C/\partial t$ sont peut-être à partir de ψ_C et de $\partial\psi_C/\partial t$.

Les développements en perturbations effectués dans le chapitre 5 donnent des structures de modèles dont les opérateurs peuvent être indépendants du temps, mais ces modèles sont d'une grande complexité. L'utilisation de leur forme exacte pour un modèle de représentation n'est pas envisageable et de toute façon pas souhaitable : leur représentativité est limitée par l'hypothèse de l'écoulement irrotationnel du fluide.

¹Le terme «modèle» indique l'ensemble «EE + ES», cette dernière étant triviale dans le cas traité.

La structure générale d'un modèle produit par la méthode des perturbations est une cascade de modèles, linéaires pour l'EE et non linéaires pour les entrées. Les EE de tous les modèles constitutants sont identiques. Par contre, les entrées d'un modèle étant les VE de tous les modèles d'ordre inférieur, la façon dont ces entrées interviennent varie suivant l'ordre du modèle. La physique du système est donc présente en deux endroits :

- dans l'EE commune ;
- dans l'effet des entrées pour chaque ordre.

Cette standardisation de la structure du modèle a l'avantage de permettre à d'autres phénomènes que ceux pris en compte dans l'étude théorique d'être représentés.

6.1 Identification de l'équation d'évolution

La propriété fondamentale de cette EE est sa linéarité. Les VE de cette EE étant arbitraires, son identification consiste avant tout à identifier son spectre. Les techniques d'identification des systèmes linéaires sont bien maîtrisées. Elles supposent généralement que le spectre est discret, les systèmes à identifier étant généralement de dimension finie. Dans le cas d'un système navire + fluide, Hazard montre dans [16, 17] que le spectre de ce système est constitué d'une partie discrète (les pôles, les modes, les résonances du système), d'une partie continue située dans \mathbb{R}^- et éventuellement d'un point à l'infini. Ce spectre est établi avec une hypothèse d'écoulement irrotationnel (et de navire souple, mais ceci n'intervient que dans la partie discrète du spectre). L'identification d'un modèle représentant l'ensemble navire + fluide demande donc une adaptation des techniques classiques à ce type de spectre.

Le point à l'infini ne fait probablement pas partie du spectre : ce point peut être atteint par $\pm i\infty$ et tout système mécanique est bloquant quand la fréquence d'excitation tend vers l'infini.

Dans toute l'étude théorique, la non prise en compte de la singularité de ligne de flottaison conduit à des incohérences. Ceci apparaît ici dans le fait que cette singularité modifie le spectre du problème. Cette singularité est faible. Il est possible qu'elle soit topologiquement équivalente à la surface de flottaison du navire. Dans ce cas, l'analyse fonctionnelle d'un fluide avec un corps perçant

la surface libre serait identique à celle d'un fluide avec un corps entièrement immergé. Cette question est à approfondir.

6.2 Identification de l'effet des entrées

Les entrées du système d'un ordre donné sont les VE des modèles d'ordre inférieur. L'identification de cette partie consiste à identifier des opérateurs polynômiaux ayant pour arguments les VE des modèles d'ordre inférieur. Ce problème est ouvert.

6.3 Conditions d'identification des modèles

Pour que les modèles produits par la méthode des perturbations soient indépendants du temps, ce qui dans l'état actuel de nos connaissances est une nécessité pour qu'ils soient identifiables, le problème d'ordre 0 doit l'être. Ceci est obtenu en prenant pour conditions d'essais d'ordre 0 la translation uniforme. Pour que les frontières du problème ne soient pas modifiées (dans \mathcal{R}_N), cette translation doit être horizontale, l'attitude du navire fixe et le fond horizontal.

La dépendance en $\varphi^{(0)}$ des opérateurs obtenus dans la partie théorique se traduit dans l'identification par le fait que les modèles dépendent de la définition de cette translation, c.-à-d. par exemple de la vitesse translation suivant chacun des axes $x_{\frac{1}{N}}$ et $x_{\frac{2}{N}}$, et par la définition de la géométrie de la carène, donnée par l'enfoncement et l'attitude du navire.

Chapitre 7

Satisfaction du besoin

La satisfaction du besoin ne pourra être évaluée de façon certaine que quand un prédicteur réel aura été installé à bord d'un navire. Les considérations de ce chapitre ne peuvent donc être que générales.

Les performances en prédiction dépendent entièrement des mesures disponibles. La modélisation a été établie pour une mesure de la dénivellation de la surface libre et éventuellement pour une mesure de la pression sur la carène. Dans le premier cas, nous ne parlons dans ce chapitre que de mesure de la surface libre, sans préciser de quelle mesure il s'agit ; la modélisation pourrait être établie avec d'autres grandeurs mesurées sur la surface libre. Dans le deuxième cas, nous ne parlons que de mesure des contraintes (dans la structure) : sauf progrès technologique permettant de mesurer une pression extérieure sans percer une coque, le nombre de capteur à installer rend cette mesure peu réaliste.

Prédiction à court terme

Les performances en prédiction obtenues avec les approches classiques sont d'environ 4-5s. Avec une modélisation physique de la houle et beaucoup plus d'informations en entrée que dans ces approches, ce que demandent les modélisations développées dans cette étude, l'objectif des 10-15s paraît tout à fait atteignable, et ceci dans les conditions opérationnelles correspondant à la réalité : houles multidirectionnelles, navire en accélération. Une mesure de la surface libre est évidemment préférable mais la mesure des contraintes devrait convenir (à condition que l'observabilité des VE fluide à partir de cette mesure ait été démontrée). Une théorie linéaire semble suffisante, par contre la pré-

sence du navire doit être prise en compte : ses mouvements modifient la houle dans la zone impliquée dans cette prédiction. En considérant une houle de période 9 s et donc de célérité (ou vitesse de phase) 14 m/s en profondeur infinie, les 10-15 s correspondent à une distance parcourue d'environ 180 m. Pour 12 s de période, ce qui commence à correspondre à des états de mer au-delà des limites opérationnelles, cette distance serait d'environ 240 m. La longueur d'un porte-avions (français) est de 250 m.

Prédiction à moyen terme

Il semble peu réaliste d'espérer que la mesure des contraintes puisse déterminer la houle à une distance du navire suffisante pour cette prédiction. Les groupes de houle se propagent à la vitesse de groupe. En profondeur infinie celle-ci est la moitié de la célérité. Les 80-100 s demandés pour la prédiction à moyen terme correspondent à une distance parcourue d'environ 630 m. Pour 12 s de période, cette distance serait de 840 m. Il est probable que seules des mesures de la surface libre peuvent donner les informations nécessaires.

Cette prédiction demande une modélisation non linéaire, mais par contre la présence du navire n'est pas nécessaire. Les modélisations développées dans l'étude, prenant en compte cette présence, sont trop sophistiquées. Une approche probablement plus simple et donc plus fiable serait de ne modéliser que l'enveloppe de la houle. Ceci est une voie à explorer. En attendant qu'une telle théorie soit établie d'une façon permettant la prédiction, la modélisation non linéaire développée dans l'étude peut être essayée.

Unification des modèles de tenue à la mer et de manœuvrabilité

La représentativité des modèles issus de l'approche théorique est limitée par l'hypothèse de l'écoulement irrotationnel du fluide. L'intérêt de l'identification à partir du navire réel d'un modèle produit par la méthode des perturbations, qui est donc général, est que les efforts de manœuvrabilité peuvent être représentés : ces efforts sont représentés dans les modèles classiques de manœuvrabilité par des polynômes ayant pour entrées les mouvements. Cette unification est donc possible. Elle repose entièrement sur l'identification. Le modèle utilisé doit évidemment être non linéaire.

Conclusion

L'objectif de cette étude est d'obtenir une modélisation des mouvements des navires sur la houle rendant possible leur prédiction. Cette prédiction nécessite la détermination à chaque instant de l'état mécanique de l'ensemble navire + fluide qui l'entoure. Cette détermination est entièrement dépendante des mesures physiques disponibles. La mesure de l'état mécanique du navire est aujourd'hui courante. La difficulté est dans la mesure de l'état mécanique du fluide. Dans l'étude, nous avons supposé disponible, soit une mesure de la dénivellation de la surface libre, soit une mesure de la pression sur la carène. La première mesure donne l'état fluide de façon certaine. Nous n'avons pas pu le démontrer pour la seconde. Ce point serait à éclaircir, éventuellement par des test numériques. À chaque cas de mesure correspond un modèle différent.

Le modèle final est obtenu par le développement en perturbations du modèle exact, ce qui est suffisant pour les conditions de mer pour lesquelles la prédiction est demandée. Cette procédure donne la liberté de choisir le degré de non-linéarité du modèle. Ceci peut permettre d'unifier les modèles de tenue à la mer et de manœuvrabilité.

Cette étude fournit donc un éventail de modélisations possibles. Le choix parmi les diverses possibilités dépendra des objectifs recherchés et des moyens, en commençant par les moyens de mesure, mis en œuvre pour les atteindre.

Pour les porte-avions, l'objectif principal étant la prédiction à court terme, une modélisation linéaire avec mesure des contraintes dans la structure, si cette mesure donne l'état fluide, est un point de départ réaliste.

La prédiction à moyen terme demande obligatoirement une mesure de la surface libre. Une mesure de l'enveloppe des crêtes et des creux de la houle est suffisante. Dans l'état actuel de la technologie, la seule mesure ayant une relation avec la surface libre et disponible en temps réel à bord d'un navire est

le «retour de mer» (sea clutter) des radars de navigation. Cette mesure est actuellement exploitée pour déterminer le spectre directionnel de la houle, le courant et la topographie du fond en petite profondeur. Elle pourrait être envisagée pour une mesure de cette enveloppe, en connexion avec l'équation d'évolution de celle-ci, qui reste à établir.

Au delà de l'étude de la prédiction des mouvements, la (re)mise en équations à laquelle nous avons été conduit pour établir ces modèles permettra de progresser dans la quête d'une théorie du comportement des navire sur la houle, cf. [22].

Bibliographie

- [1] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.-P. Richard, F. Rotella, and I. Zambetakis, *Commande et optimisation des processus*, première ed., Méthodes et pratiques de l'ingénieur, vol. 1, Technip, 1990.
- [2] ———, *Modélisation et identification des processus*, Tome 1, première ed., Méthodes et pratiques de l'ingénieur, vol. 2, Technip, 1992.
- [3] G. Bouligand, *Sur les équations des petits mouvements de surface des fluides parfaits*, Bull. Soc. Math. Fr. **40** (1912), 149–180.
- [4] C. Bozzo, *Filtrage adaptatif des mouvements de plateforme d'un navire sur la houle*, Ass. Tech. Mar. et Aéro. (1977), 231–255.
- [5] D. R. Broome, *Application of ship motion prediction II*, Trans. Inst. Mar. Eng. **110** (1998), no. 2, 135–153.
- [6] D. R. Broome and M. S. Hall, *Application of ship motion prediction I*, Trans. Inst. Mar. Eng. **110** (1998), no. 1, 77–93.
- [7] D. R. Broome and A. Pittaras, *Ship motion prediction*, Proc. 9th Int. Conf. Offshore Mech. and Artic Eng. **1** (1990), no. A, 303–311.
- [8] R. Cointe, P. Geyer, B. King, B. Molin, and M. Tramoni, *Nonlinear and linear motions of a rectangular barge in a perfect fluid*, Proc. 18th ONR Symposium on Naval Hydrodynamics, Ann Arbor, Michigan (1990), 85–99.
- [9] J. L. Colwell, *Flight deck motion system (FDMS) : Operating concepts and system description*, Technical Memorandum, TM 2004-003, DRDC Atlantic, January 2004.
- [10] J.-C. Dern, G. Hardier, and J.-P. Jung, *Modélisation hydrodynamique et lois de commande du système de stabilisation du porte-avions à propulsion nucléaire*, Ass. Tech. Mar. et Aéro. (1987), 565–611.
- [11] J. W. Dold, *An efficient surface-integral algorithm applied to unsteady gravity waves*, J. Comp. Physics **103** (1992), 90–115.

- [12] P. Ferrant, *Simulation of strongly nonlinear wave generation and wave-body interactions using a 3-D MEL model*, Proc. 21th ONR Symposium on Naval Hydrodynamics, Trondheim, Norway (1996), 93–108.
- [13] S. T. Grilli, P. Guyenne, and F. Dias, *A fully non-linear model for three-dimensional overturning waves over an arbitrary bottom*, Int. J. Numer. Meth. Fluids **35** (2001), 829–867.
- [14] J. Hadamard, *Sur les ondes liquides*, C. R. Acad. Sci., Paris, **150** (1910), 609–611.
- [15] ———, *Sur les ondes liquides*, C. R. Acad. Sci., Paris, **150** (1910), 772–774.
- [16] C. Hazard, *The singularity expansion method : an application in hydrodynamics*, Proc. 5th Int. Conf. Math. and Num. Aspects of Wave Propagation, SIAM (2000), 494–498.
- [17] C. Hazard and F. Loret, *Décomposition en modes résonnants pour le problème transitoire de tenue à la mer*, 9èmes Journées de l’Hydrodynamique (2003), 137–150.
- [18] E. R. Jefferys and B. S. Samra, *Adaptative prediction of the motion of marine vehicle*, ASME J. Energy Resources Technology **107** (1985), 450–454.
- [19] C. H. Kim, A. H. Clément, and K. Tanizawa, *Recent research and development of numerical wave tanks - A review*, Int. J. Offshore and Polar Eng. **9** (1999), 241–256.
- [20] N. K. Lin, *Real time estimation of ship motion using ARMA filtering techniques*, Proc. 6th Int. Conf. Offshore Mech. and Artic Eng. **2** (1987), 325–329.
- [21] M. S. Longuet-Higgins and E. D. Cokelet, *The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computation*, Proc. R. Soc. Lond. A **350** (1976), 1–26.
- [22] J. N. Newman, *The quest for a three-dimensional theory of ship wave interaction*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **334** (1991), 213–227.
- [23] T. F. Ogilvie, *Recent progress toward the understanding and prediction of ship motions*, Proc. 5th ONR Symposium on Naval Hydrodynamics, Bergen, Norvège (1964), 3–128.
- [24] M. M. Sidar and B. F. Doolin, *On the feasibility of real-time prediction of aircraft carrier motion at sea*, IEEE Trans. Auto. Contr. **AC-28** (1983), no. 3, 350–356.

- [25] B. Sifredi, M. A. Grandclément, and J. P. Puy, *Prédiction des mouvements de plateforme à l'aide d'algorithmes ayant une structure de treillis*, Ass. Tech. Mar. et Aéro. (1987), 539–563.
- [26] M. St. Denis and W. J. Pierson, *On the motions of ships in confused seas*, Trans. Soc. Naval Arch. and Marine Eng. **61** (1953), 280–357.
- [27] K. Tanizawa, *A nonlinear simulation method of 3-D body motions in waves*, J. Soc. Nav. Arch. Japan **178** (1995), 179–191.
- [28] M. S. Triantafyllou, M. Bodson, and M. Athans, *Real time estimation and prediction of ship motions using Kalman filtering techniques*, Tech. Report MIT LIDS-R-1220, MIT, July 1982.
- [29] ———, *Real time estimation of ship motions using Kalman filtering techniques*, IEEE J. Oceanic Eng. **OE-8** (1983), no. 1, 9–20.
- [30] W. Tsai and D. K. P. Yue, *Computation of non linear free surface flows*, Ann. Rev. Fluid Mech. **28** (1996), 249–278.
- [31] T. Vinge and P. Brevig, *Nonlinear ship motions*, Proc. 3rd Int. Conf. on Num. Ship Hydro. **2** (1981), VI.3.1–VI.3.10.
- [32] J. V. Wehausen and E. V. Laitone, *Surface waves*, Encyclopedia of physics (Handbuch der physik) (Flugge :S-Truesdell :C, ed.), Springer-Verlag, 1960, pp. 446–778.
- [33] R. W. Yeung, *Numerical methods in free-surface flows*, Ann. Rev. Fluid Mech. **14** (1982), 395–442.
- [34] I. R. Yumori, *Real time prediction of ship response to ocean waves using time series analysis*, Oceans'81 **2** (1981), 1082–1089.

Annexe A

Notations

A.1	Abréviations	118
A.2	Signes dans le texte	118
A.3	Désignation des éléments géométriques	118
A.4	Désignation des grandeurs physiques et des opérateurs	119
A.4.1	Lettres seules	119
A.4.2	Symboles complexes	120
A.4.2.1	Lettres centrales	120
A.4.2.2	Jokers	122
A.4.2.3	Indices droits	123
A.4.2.4	Exposants droits	124
A.4.2.5	Exposants gauches	124
A.4.2.6	Indices gauches	124
A.4.2.7	Liste des symboles	125
A.4.2.7.1	Symboles apparaissant dans les mises en équations avec conditions exactes	125
A.4.2.7.2	Symboles apparaissant dans les mises en équations avec conditions développées en perturbations	131
A.4.3	Fonctions vs opérateurs	139

Cette annexe décrit les abréviations et signes particuliers utilisés dans le texte principal de cette étude.

A.1 Abréviations

CGC : conditions de glissement sur la carène.

CSL : condition(s)¹ de surface libre.

EE : équation d'évolution (des VE) d'un système.

ES : équation de sortie d'un système.

VE : variables d'état d'un système. L'ensemble des variables d'état d'un système constitue son vecteur d'état.

A.2 Signes dans le texte

▼ : début d'une démonstration, d'une vérification, d'une remarque, d'un commentaire, d'un exemple.

▲ : fin d'une démonstration, d'une vérification, d'une remarque, d'un commentaire, d'un exemple.

(↑) : équation ou système d'équations précédent.

A.3 Désignation des éléments géométriques

∂E : la frontière du fluide, constituée de C , L , F_∞ et F .

C : la carène (= la partie de la coque du navire en contact avec le fluide).

E : le fluide (l'eau).

F : le fond.

F_∞ : une frontière du fluide à l'infini.

L : la surface libre.

¹Deux conditions pour les conditions exactes ou une condition (pour chaque ordre) pour les conditions développées en perturbations.

S : une surface quelconque. Sert de fait à désigner de façon indifférenciée C , F ou L .

A.4 Désignation des grandeurs physiques et des opérateurs

Une grandeur physique ou un opérateur sont désignés par le même symbole dans toute l'étude. Les seules exceptions sont dans l'annexe D où le référentiel dans lequel sont exprimées les coordonnées x_* ou y_* n'est pas indiqué, celui-ci n'intervenant pas dans cette annexe.

Le n° de la ou des formules donnant la définition des grandeurs physiques ou des opérateurs est donné à la fin de leur description, si ces formules existent.

A.4.1 Lettes seules

Certaines grandeurs physiques et fonctions mathématiques sont désignées par une seule lettre :

δ : fonction de Dirac.

η : dénivellation (ou altitude) de la surface libre. (note 15 page 50)

ρ : masse volumique du fluide.

Υ : fonction de Heaviside.

φ : potentiel de la vitesse du fluide exprimée dans \mathcal{R}_A (c.-à-d. potentiel de la vitesse absolue).

χ : potentiel de l'accélération du fluide exprimée dans \mathcal{R}_A (c.-à-d. potentiel de l'accélération absolue). (4.19)

$\psi \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{p}{\rho}$. (4.18)

c : fonction définissant C . (4.27)

e : vecteur d'état d'un système.

f : fonction quelconque ;

: fonction définissant F . (4.32)

- g : fonction quelconque ;
: accélération de la gravité.
- l : fonction définissant L . (4.21) et (F.57)
- p : pression statique du fluide.
- u : vecteur d'entrées d'un système.
- v : vitesse ;
: vecteur de sorties d'un système.

A.4.2 Symboles complexes

Les autres grandeurs physiques sont désignés par des symboles plus complexes. De façon à faciliter leur compréhension, leur règle de construction est explicitée : ces symboles sont constitués d'une ou de deux lettres centrales et de suites de signes en indices et exposants droits et gauches. La ou les lettres centrales désignent le type de la grandeur (par exemple m pour une masse, f pour une force). Les indices et exposants précisent de quelle grandeur il s'agit. La désignation des opérateurs suit la même règle. Ils sont distingués des grandeurs physiques par le fait d'être écrits en caractères gras. Les opérateurs différentiels usuels d/d et ∂/∂ restent écrits en caractères normaux.

Afin de faciliter la compréhension des symboles complexes, la signification des lettres centrales et des signes en indices et exposants droits et gauches est d'abord donnée séparément.

A.4.2.1 Lettes centrales

Les lettres seules de la section A.4.1 peuvent aussi être des lettres centrales de symboles complexes. Les autres significations de ces lettres et les significations des autres lettres utilisées sont données ci-dessous.

Grandeurs physiques

- \mathfrak{I}^2 : grandeur sans dimension intervenant dans le passage des équations découplées du mouvement d'un corps peu déformable aux équations couplées.
- γ : accélération.
- λ : facteur permettant d'éliminer la variation de position de la surface dans les conditions à satisfaire en une surface inconnue.
- μ : inverse de m .
- ν : normale unitaire à une surface.
- π : inverse de la position p (ne s'applique que pour $p_{[\frac{*}{N}; \frac{*}{A}]}^{[1]}$).
- $\overset{\circ}{\psi}$: ψ avec l'accélération de C nulle. (4.89)
- ab : contribution, a priori non linéaire, des VE et des entrées d'ordre $< p$ aux EE d'ordre p .
- B : base de représentation.
- cd : contribution, a priori non linéaire, des VE et des entrées d'ordre $< p$ aux ES d'ordre p .
- f : fonction quelconque ;
: force.
- $\overset{\circ}{f}$: force f avec l'accélération de C nulle.
- fe : force extérieure (à un système).
- fi : force intérieure (à un système).
- k : scalaire représentant le comportement global d'un corps peu déformable.
- L : expression linéaire des VE.
- m : masse.
- n : normale (non obligatoirement unitaire) à une surface.
- O : point de référence.

²Troisième lettre de l'alphabet sanskrit, se prononce i bref.

- p : position (ne s'applique qu'au navire);
: pression statique du fluide.
- Q : expression quadratique des VE.
- \mathcal{R} : référentiel, constitué d'un point de référence O et d'une base de représentation B .
- x : coordonnées dans un référentiel.

Opérateurs

- ψ : opérateur donnant ψ .
- A : opérateur linéaire d'évolution (dans les EE).
- B : opérateur linéaire d'entrée ou de commande (dans les EE).
- C : opérateur linéaire de sortie ou d'observation (dans les ES).
- c : opérateur donnant c .
- D : opérateur linéaire de transmission directe des entrées vers les sorties (dans les ES).
- D_t : dérivation particulaire. (4.14)
- f : opérateur donnant f (une force).
- \mathring{f} : opérateur donnant \mathring{f} .
- fi : opérateur donnant fi .
- G : opérateur donnant φ dans E connaissant φ ou $\partial\varphi/\partial n$ sur L et sur C .

A.4.2.2 Jokers

Dans la suite nous allons utiliser des jokers :

- * : un joker de valeur : représente toutes les valeurs possibles de la variable à cet endroit.
- ★ : un autre joker de valeur.

- : un joker de grandeur : représente toutes les grandeurs physiques possibles à cet endroit.
- : un autre joker de grandeur.

A.4.2.3 Indices droits

- ◁ : indique que la grandeur est la partie du développement d'ordre p d'une condition constituée uniquement des grandeurs d'ordre p . Cette partie est appelée le «premier membre» des conditions, même si ensuite dans les manipulations, cette partie est au premier ou au second membre des équations. (E.5)
- ▷ : indique que la grandeur est la partie du développement d'ordre p d'une condition constituée uniquement des grandeurs d'ordre $< p$. Cette partie est appelée le «second membre» des conditions, même si ensuite dans les manipulations, cette partie est au premier ou au second membre des équations. (E.5)
- [] : indique que la grandeur est un moment, cf. par exemple la section C.4.4 pour la définition cette notion. Les indices relatifs aux x_{**}^* sont à droite du «;» dans la liste d'indices à l'intérieur des []. S'il n'y a pas de «;», le moment est de degré 0.
- λ : indique l'expression d'une grandeur dans laquelle un λ intervient, c.-à-d. dans laquelle $x_{**A}^{(p)}$ a été éliminé.
- A : relatif au référentiel absolu.
- $\frac{*}{A}$: indique que l'indice $*$ se rapporte à une grandeur exprimée dans \mathcal{R}_A pour cet indice.
- C : pour $x_{**A}^* \in C$.
- $C^{(0)}$: pour $x_{**A}^* \in C^{(0)}$.
- C_n : n'est utilisé que pour les opérateurs *G : indique la partie de ces opérateurs dépendant de $\partial\varphi_C/\partial n$.
- $C_n^{(0)}$: n'est utilisé que pour les opérateurs *G : indique la partie de ces opérateurs dépendant de $\partial\varphi_{C^{(0)}}/\partial n$.
- E : relatif au fluide (à l'eau);
- : pour $x_{**A}^* \in E$.

L : pour $x_{\bar{A}}^* \in L$.

$L^{(0)}$: pour $x_{\bar{A}}^* \in L^{(0)}$.

N : relatif au référentiel navire ;
: relatif au navire.

\overline{N}^* : indique que l'indice $*$ se rapporte à une grandeur exprimée dans \mathcal{R}_N
pour cet indice.

S : pour $x_{\bar{A}}^* \in S$.

A.4.2.4 Exposants droits

Dans les descriptions ci-dessous, n est un nombre, entier ou non suivant les cas.

n : puissance au sens habituel du terme.

(n) : n est l'ordre dans le développement en perturbations de la grandeur.

$[n]$: n est le degré du moment (redondant avec les $[]$ en indices droits mais facilite la lecture en évitant de compter le nombre d'indices à droite du « ; » dans la liste d'indices à l'intérieur de ces $[]$).

$\{n\}$: n est l'ordre de dérivation de la fonction (n'est en fait utilisé que pour les fonctions δ et Υ).

A.4.2.5 Exposants gauches

Ces exposants définissent des variantes des noms de grandeurs définis par les lettres centrales : grandeur $x_{n^0 1}$, $n^0 2$ etc.

A.4.2.6 Indices gauches

Pour éviter un trop grand nombre de signes en indices droits, certains sont mis en indices gauches.

ε : $\varepsilon_{\bullet}^{(p)} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\bullet^{(p)}}{\varepsilon^p}$.

d, d_N, d_{NE} : indiquent que la grandeur est une grandeur découplée (ou diagonalisée par blocs) avec les masses du navire pour d_N ou avec les masses du navire + les masses d'eau ajoutées pour d_{NE} . L'indice d (sans indices N ou NE) ne s'applique qu'aux découplages des masses, les masses servant au découplage étant les masses elles-mêmes (la notion de découplage des équations du mouvement du navire est décrite à partir de (C.29)).

N : avec pour origine O_N .

A.4.2.7 Liste des symboles

La signification de chaque symbole est donnée dans le cours du texte lors de sa première apparition. La liste ci-dessous est une récapitulations de ces descriptions. Seuls les symboles ayant une signification (qui sont donc désignés de la même façon dans toute l'étude) et apparaissant dans le texte principal sont repris ici. Ceux sans signification particulières ont en général une portée locale, par exemple les opérateurs \mathbf{J} , \mathbf{K} , \mathbf{M} et \mathbf{N} du chapitre 5 qui ne servent qu'à regrouper des termes ou les opérateurs \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} de l'annexe D qui n'ont pas une signification constante. Les symboles utilisés dans les annexes suivent les mêmes principes de construction que ceux du texte principal.

A.4.2.7.1 Symboles apparaissant dans les mises en équations avec conditions exactes

Grandeurs physiques

$\bar{\mathfrak{z}}_N$: grandeur sans dimension intervenant dans le passage des équations découplées du mouvement du navire aux équations couplées. (C.64)

$\mu_N^{[0]}$: inverse de $m_N^{[0]}$. (C.33)

${}_d\mu_N^{[0]}$: inverse de ${}_d m_N^{[0]}$. (C.31)

$\mu_N^{[2]}_{[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}$: inverse de $m_N^{[2]}_{[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}$. (C.33)

${}_d\mu_N^{[2]}_{[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}$: inverse de ${}_d m_N^{[2]}_{[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}$. (C.36)

$$d\mu_{NE}^{[0][0]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] : \text{inverse de } dm_{NE}^{[0][0]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right]. \quad (4.104)$$

$$d\mu_{NE}^{[1][1]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \\ * \\ N \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \\ * \\ N \end{smallmatrix} \right] : \text{inverse de } dm_{NE}^{[1][1]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \\ * \\ N \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \\ * \\ N \end{smallmatrix} \right]. \quad (4.106)$$

$\nu_{\bar{A}}$: normale unitaire à une surface exprimée dans \mathcal{R}_A .

$$\pi_{\left[\begin{smallmatrix} * \\ A \\ * \\ N \end{smallmatrix} \right]}^{[1]} : \text{inverse de } p_{\left[\begin{smallmatrix} * \\ N \\ * \\ A \end{smallmatrix} \right]}^{[1]}. \quad (C.50)$$

φ_C : valeur de φ en C .

φ_L : valeur de φ en L .

ψ_C : valeur de ψ en C .

ψ_L : valeur de ψ en L .

B_A : une base de représentation absolue.

B_N : une base de représentation navire.

c_C : valeur de c en C (est en fait utilisé dans la désignation de la valeur des *dérivées* de c en C).

$$f_C^{[0]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] : \text{moment de degré 0 des forces exercées par le fluide sur la carène.} \quad (4.62)$$

$$f_C^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \\ * \\ N \end{smallmatrix} \right] : \text{moment de degré 1 des forces exercées par le fluide sur la carène.} \quad (4.69)$$

$$fe_N^{[0]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] : \text{moment de degré 0 des forces extérieures appliquées au corps exprimées dans } B_A. \quad (C.16)$$

$$d_N fe_N^{[0]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] : fe_N^{[0]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] \text{ découpé avec les } m_{N \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] \dots \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] \dots}^{[*][*]}. \quad (C.30)$$

$$fe_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \\ * \\ N \end{smallmatrix} \right] : \text{moment de degré 1 dans } \mathcal{R}_N \text{ des forces extérieures appliquées au corps exprimées dans } B_A. \quad (C.28)$$

$$d_N fe_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \\ * \\ N \end{smallmatrix} \right] : fe_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \\ * \\ N \end{smallmatrix} \right] \text{ découpé avec les } m_{N \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] \dots \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] \dots}^{[*][*]}. \quad (C.35)$$

$$d_{NE} fi_N^{[0]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] : fi_N^{[0]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] \text{ découpé avec les } m_{NE \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] \dots \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] \dots}^{[*][*]}. \quad (4.108)$$

$$d_{NE} fi_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \\ * \\ N \end{smallmatrix} \right] : fi_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \\ * \\ N \end{smallmatrix} \right] \text{ découpé avec les } m_{NE \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] \dots \left[\begin{smallmatrix} * \\ A \end{smallmatrix} \right] \dots}^{[*][*]}. \quad (4.109)$$

$$fi_N^{[0]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ N \end{smallmatrix} \right] : \text{moment de degré 0 des forces intérieures.} \quad (C.55)$$

$$d_N f_{N[\frac{*}{N}]}^{[0]} : f_{N[\frac{*}{N}]}^{[0]} \text{ découplé avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}. \quad (\text{C.53})$$

$$f_{N0[\frac{*}{N}]}^{[0]} : \text{moment de degré 0 des forces intérieures de rappel.} \quad (\text{C.65})$$

$$f_{N1[\frac{*}{N}]}^{[0]} : \text{moment de degré 0 des forces intérieures d'amortissement.} \quad (\text{C.65})$$

$$f_{N[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]} : \text{moment de degré 1 des forces intérieures.} \quad (\text{C.56})$$

$$d_N f_{N[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]} : f_{N[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]} \text{ découplé avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}. \quad (\text{C.54})$$

$$f_{N0[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]} : \text{moment de degré 1 des forces intérieures de rappel.} \quad (\text{C.66})$$

$$d_N f_{N0[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]} : f_{N0[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]} \text{ découplé avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}. \quad (\text{C.61})$$

$$f_{N1[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]} : \text{moment de degré 1 des forces intérieures d'amortissement.} \quad (\text{C.66})$$

$$d_N f_{N1[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]} : f_{N1[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]} \text{ découplé avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}. \quad (\text{C.62})$$

$$g_{\bar{A}}^* : \text{vecteur accélération de la gravité.} \quad (\text{4.15})$$

$$k_0 : \text{scalaire représentant une rigidité globale du corps.}$$

$$k_1 : \text{scalaire représentant un amortissement global du corps.}$$

$${}^1L : \text{expression linéaire de } \varphi_L, \text{ de } dp_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}/dt \text{ et de } dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}/dt \text{ intervenant dans l'expression de } {}^1Q_\psi. \quad (\text{4.88})$$

$${}^2L : \text{expression linéaire de } \varphi_C, \text{ de } dp_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}/dt \text{ et de } dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}/dt \text{ intervenant dans l'expression de } {}^2Q_\psi. \quad (\text{4.121})$$

$$l_L : \text{valeur de } l \text{ en } L \text{ (est en fait utilisé dans la désignation de la valeur des dérivées de } l \text{ en } L).$$

$$m_{E[\frac{*}{A}][\frac{*}{A}]}^{[0][0]} : \text{«masse d'eau ajoutée» représentant le moment de degré 0 des forces exercées par le fluide sur la carène dues à l'accélération } d^2p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}/dt^2 \text{ de celle-ci.} \quad (\text{4.94})$$

$$m_{E[\frac{*}{A}][\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[0][1]} : \text{«masse d'eau ajoutée» représentant le moment de degré 0 des forces exercées par le fluide sur la carène dues à l'accélération } d^2p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}/dt^2 \text{ de celle-ci.} \quad (\text{4.95})$$

$m_{E[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}][\frac{*}{A}]}$ ^{[1][0]} : «masse d'eau ajoutée» représentant le moment de degré 1 des forces exercées par le fluide sur la carène dues à l'accélération $d^2p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}/dt^2$ de celle-ci. (4.96)

$m_{E[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}][\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}$ ^{[1][1]} : «masse d'eau ajoutée» représentant le moment de degré 1 des forces exercées par le fluide sur la carène dues à l'accélération $d^2p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}/dt^2$ de celle-ci. (4.97)

m_N ^[0] : moment de degré 0 des masses, c.-à-d. masse du corps. (C.14)

$d m_N$ ^[0] : m_N ^[0] découplé (avec les $m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}$ ^{[*][*]}). (C.32)

m_N ^[1]_[\frac{*}{N}] : moment de degré 1 dans \mathcal{R}_N des masses. (C.15)

m_N ^[2]_[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}] : moment de degré 2 dans \mathcal{R}_N des masses. (C.20)

$d m_N$ ^[2]_[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}] : m_N ^[2]_[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}] découplé (avec les $m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}$ ^{[*][*]}). (C.37)

m_{NE} ^{[0][0]}_{[\frac{*}{A}][\frac{*}{A}]} : m_N ^[0] + $m_{E[\frac{*}{A}][\frac{*}{A}]}$ ^{[0][0]}. (4.99)

$d m_{NE}$ ^{[0][0]}_{[\frac{*}{A}][\frac{*}{A}]} : m_{NE} ^{[0][0]}_{[\frac{*}{A}][\frac{*}{A}]} découplé (avec les $m_{NE[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}$ ^{[*][*]}). (4.105)

m_{NE} ^{[0][1]}_{[\frac{*}{A}][\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]} : m_N ^[1]_[\frac{*}{N}] + $m_{E[\frac{*}{A}][\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}$ ^{[0][1]}. (4.100)

m_{NE} ^{[1][0]}_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}][\frac{*}{A}]} : m_N ^[1]_[\frac{*}{N}] + $m_{E[\frac{*}{A}, \frac{*}{N}][\frac{*}{A}]}$ ^{[1][0]}. (4.101)

m_{NE} ^{[1][1]}_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}][\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]} : m_N ^[2]_[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}] + $m_{E[\frac{*}{A}, \frac{*}{N}][\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}$ ^{[1][1]}. (4.102)

$d m_{NE}$ ^{[1][1]}_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}][\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]} : m_{NE} ^{[1][1]}_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}][\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]} découplé (avec les $m_{NE[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}$ ^{[*][*]}). (4.107)

$n_{\frac{*}{A}}$: normale (non obligatoirement unitaire) à une surface exprimée dans \mathcal{R}_A .

n_C _{\frac{*}{A}}} : normale (non obligatoirement unitaire) à C . (4.38)

n_L _{\frac{*}{A}}} : normale (non obligatoirement unitaire) à L . (4.25)

O_A : un point de référence absolu.

O_N : un point de référence navire.

p_L : valeur de p en L .

- $p_{[\bar{A}]}^{[0]}$: composantes du vecteur $O_A O_N$ dans une base absolue B_A , c.-à-d. position en translation du navire.
- $p_{[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}$: matrice de rotation-déformation du corps.
- ${}^1Q_{\varphi_{t,n} C}$: expression quadratique de φ_L , de $dp_{[\bar{A}]}^{[0]}/dt$ et de $dp_{[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}/dt$ intervenant dans l'expression de $\partial^2 \varphi_C / \partial t \partial n$. (4.85)
- ${}^2Q_{\varphi_{t,n} C}$: expression quadratique de φ_C , $dp_{[\bar{A}]}^{[0]}/dt$ et de $dp_{[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}/dt$ intervenant dans l'expression de $\partial^2 \varphi_C / \partial t \partial n$. (4.119)
- ${}^1Q_{\psi}$: expression quadratique de φ_L , $dp_{[\bar{A}]}^{[0]}/dt$ et de $dp_{[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}/dt$ intervenant dans l'expression de ψ . (4.87)
- ${}^2Q_{\psi}$: expression quadratique de φ_C , $dp_{[\bar{A}]}^{[0]}/dt$ et de $dp_{[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}/dt$ intervenant dans l'expression de ψ . (4.120)
- \mathcal{R}_A : référentiel absolu, constitué d'un point de référence absolu O_A et d'une base de représentation absolue B_A (par définition, le principe fondamental de dynamique est valide dans ce référentiel).
- \mathcal{R}_N : référentiel navire, constitué d'un point de référence navire O_N et d'une base de représentation navire B_N .
- $x_{\bar{A}}^*$: coordonnées dans \mathcal{R}_A d'un point.
- $x_{\bar{N}}^*$: coordonnées dans \mathcal{R}_N d'un point.
- $x_{C\bar{A}}^*$: coordonnées dans \mathcal{R}_A des points constituant C .
- $x_{F\bar{A}}^*$: coordonnées dans \mathcal{R}_A des points constituant F .
- $x_{L\bar{A}}^*$: coordonnées dans \mathcal{R}_A des points constituant L .

Opérateurs

- $\mathbf{f}_{C[\bar{A}]}^{[0]}$: opérateur donnant $f_{C[\bar{A}]}^{[0]}$ à partir de c et de ψ . (4.68)
- ${}_N \mathbf{f}_{C[\bar{A}]}^{[0]}$: $\mathbf{f}_{C[\bar{A}]}^{[0]}$ découplé avec les $m_{N[\bar{A} \dots][\bar{A} \dots]}^{[*][*]}$. (4.116) et (4.125)
- $\hat{\mathbf{f}}_{C[\bar{A}]}^{[0]}$: $\mathbf{f}_{C[\bar{A}]}^{[0]}$ avec l'accélération de C nulle (c.-à-d. $\mathbf{f}_{C[\bar{A}]}^{[0]}$ avec ψ remplacé par $\dot{\psi}$). (4.92)

$$d_{NE} \mathring{f}_{C[\frac{*}{A}]}^{[0]} : \mathring{f}_{C[\frac{*}{A}]}^{[0]} \text{ découplé avec les } m_{NE[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}. \quad (4.110)$$

$$\mathbf{f}_{C[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]} : \text{ opérateur donnant } f_{C[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]} \text{ à partir de } c \text{ et de } \psi. \quad (4.71)$$

$$d_N \mathbf{f}_{C[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]} : \mathbf{f}_{C[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]} \text{ découplé avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}. \quad (4.117) \text{ et } (4.126)$$

$$\mathring{f}_{C[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]} : \mathbf{f}_{C[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]} \text{ avec l'accélération de } C \text{ nulle (c.- -d. } \mathbf{f}_{C[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]} \text{ avec } \psi \text{ remplacé par } \mathring{\psi}). \quad (4.93)$$

$$d_{NE} \mathring{f}_{C[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]} : \mathring{f}_{C[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]} \text{ découplé avec les } m_{NE[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}. \quad (4.111)$$

$${}^1\mathbf{G} : \text{ opérateur donnant } \varphi \text{ dans } E \text{ à partir de } \varphi_L \text{ et de } \partial\varphi_C/\partial n. \quad (D.9)$$

$${}^1\mathbf{G}_{C_n} : \text{ partie de } {}^1\mathbf{G} \text{ dépendant de } \partial\varphi_C/\partial n. \quad (D.12)$$

$${}^1\mathbf{G}_{C, C_n} : {}^1\mathbf{G}_{C_n} \text{ pour } x_{\frac{*}{A}} \in C. \quad (D.20)$$

$${}^1\mathbf{G}_{L, C_n} : {}^1\mathbf{G}_{C_n} \text{ pour } x_{\frac{*}{A}} \in L. \quad (D.18)$$

$${}^1\mathbf{G}_L : \text{ partie de } {}^1\mathbf{G} \text{ dépendant de } \varphi_L. \quad (D.11)$$

$${}^1\mathbf{G}_{C, L} : {}^1\mathbf{G}_L \text{ pour } x_{\frac{*}{A}} \in C. \quad (D.19)$$

$${}^1\mathbf{G}_{L, L} : {}^1\mathbf{G}_L \text{ pour } x_{\frac{*}{A}} \in L. \quad (D.17)$$

$${}^2\mathbf{G} : \text{ opérateur donnant } \varphi \text{ dans } E \text{ à partir de } \varphi_C \text{ et de } \partial\varphi_C/\partial n. \quad (D.36)$$

$${}^2\mathbf{G}_C : \text{ partie de } {}^2\mathbf{G} \text{ dépendant de } \varphi_C. \quad (D.37)$$

$${}^2\mathbf{G}_{C, C} : {}^2\mathbf{G}_C \text{ pour } x_{\frac{*}{A}} \in C. \quad (D.43) \text{ et } (D.45)$$

$${}^2\mathbf{G}_{L, C} : {}^2\mathbf{G}_C \text{ pour } x_{\frac{*}{A}} \in L.$$

$${}^2\mathbf{G}_{C_n} : \text{ partie de } {}^2\mathbf{G} \text{ dépendant de } \partial\varphi_C/\partial n. \quad (D.38)$$

$${}^2\mathbf{G}_{C, C_n} : {}^2\mathbf{G}_{C_n} \text{ pour } x_{\frac{*}{A}} \in C. \quad (D.44) \text{ et } (D.46)$$

$${}^2\mathbf{G}_{L, C_n} : {}^2\mathbf{G}_{C_n} \text{ pour } x_{\frac{*}{A}} \in L.$$

A.4.2.7.2 Symboles apparaissant dans les mises en équations avec conditions développées en perturbations

Grandeurs physiques

$\tilde{\bullet}$: Indique que la grandeur est le développement en perturbation (c.-à-d. l'approximation) de la grandeur \bullet . Bien que le signe $\tilde{}$ soit sur une seule lettre du symbole, il concerne l'ensemble du symbole. (E.1)

$\bar{\bullet}_S^{(p)}$: Une grande partie de la difficulté de compréhension du développement en perturbation avec conditions en une surface inconnue est contenue dans cette notation : ce symbole représente le terme d'ordre p du développement en perturbations à partir de $S^{(0)}$ de la valeur en S de la grandeur \bullet . Il est par définition le coefficient de ε^p du développement de cette grandeur. Ce développement provient du fait que d'une part la grandeur \bullet est développée en $\bullet^{(0)} + \bullet^{(1)} + \bullet^{(2)} + \dots$ à partir de $S^{(0)}$ et que d'autre part la variation de position entre $S^{(0)}$ et S est donnée par un développement $x_{S^*}^{(1)} + x_{S^*}^{(2)} + \dots$. La combinaison de ces deux développements donne le développement de \bullet en S . Le terme d'ordre p dépend des $\bullet^{(q)}$ et des $x_{S^*}^{(q)}$ pour $q = 1$ à p . La présence du signe $\bar{}$ indique que la manière de lire ce symbole est l'inverse de la manière habituelle : avec les conventions de notation de cette étude, le symbole $\bullet_S^{(p)}$ (sans le signe $\bar{}$) représente la valeur en S du terme d'ordre p du développement en perturbations à partir de $S^{(0)}$ de la grandeur \bullet . Dans ces définitions, l'ordre des mots est important : $\bar{\bullet}_S^{(p)}$ est différent de $\bullet_S^{(p)}$. Par contre $\bar{\bullet}_{S^{(0)}}^{(p)}$ est égal à $\bullet_{S^{(0)}}^{(p)}$ puisque en $S^{(0)}$ le développement de x_{S^*} n'intervient pas. Ces notions sont détaillées en section F.1.1. Bien que le signe $\bar{}$ soit sur une seule lettre du symbole, il concerne l'ensemble du symbole (sauf, pour être rigoureux, les \triangleleft et \triangleleft qui n'ont de sens qu'une fois le développement en perturbations effectué).

$\lambda_{\left(\frac{\psi}{c}\right)_{C^{(0)}}}^{(0)}$: facteur permettant d'éliminer les $x_{C^*}^{(p)}$ des efforts sur la carène. (F.213)

$\lambda_{\left(\frac{D_t \psi}{\psi}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}}$: facteur permettant d'éliminer les $x_{L^*}^{(p)}$ des CSL. (F.180)

$\lambda_{\left(\frac{D_t^* c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}}$: facteur permettant d'éliminer les $x_{C^*}^{(p)}$ des CGC. (F.203)

$\lambda_{\left(\frac{D_t l}{l}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}}$: même définition que celle de $\lambda_{\left(\frac{D_t \psi}{\psi}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}}$ mais pour L défini par une fonction l connue.

$\varphi^{(p)}$: terme d'ordre p du développement de φ . (F.25)

$\varepsilon \varphi^{(p)} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\varphi^{(p)}}{\varepsilon^p}$. (F.26)

$\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}$: valeur de $\varphi^{(p)}$ en $C^{(0)}$.

$\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}$: valeur de $\varphi^{(p)}$ en $L^{(0)}$.

$\psi^{(p)}$: terme d'ordre p du développement de ψ .

$\bar{\psi}_C^{(p)}$: terme d'ordre p du développement de ψ sur C .
(5.10) ou (5.19)

$\bar{\psi}_{C \triangleright}^{(p)}$: second membre de $\bar{\psi}_C^{(p)}$.
Suivant l'ordre p : (F.39) + (F.40) ou (F.41) + (F.42) ou (F.43) + (F.44) (pour $S = C$)

${}^{1,1}ab_{E \triangleright}^{(p)}$: contribution des VE ${}^1e_E^{(*)}$ et des entrées ${}^1u_E^{(*)}$ d'ordre $< p$ à $\partial {}^1e_E^{(p)}/\partial t$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur d'état, le second le n° du vecteur d'entrées). (5.41)

${}^{2,2}ab_{E \triangleright}^{(p)}$: contribution des VE ${}^2e_E^{(*)}$ et des entrées ${}^2u_E^{(*)}$ d'ordre $< p$ à $\partial {}^2e_E^{(p)}/\partial t$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur d'état, le second le n° du vecteur d'entrées). (5.73)

$c_{C^{(0)}}^{(p)}$: valeur de $c^{(p)}$ en $C^{(0)}$.

$\bar{c}_{C \triangleright}^{(p)}$: second membre de $\bar{c}_C^{(p)}$.
Suivant l'ordre p et le mode de définition de c : (F.88) + (F.89) ou (F.90) + (F.91) ou (F.92) + (F.93) ou (F.138) + (F.139) ou (F.140) + (F.141) ou (F.142) + (F.143)

${}^{1,1,1}cd_{E \triangleright}^{(p)}$: contribution des VE ${}^1e_E^{(*)}$ et des entrées ${}^1u_E^{(*)}$ d'ordre $< p$ aux mesures ${}^1v_E^{(p)}$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur de mesures, le deuxième le n° du vecteur d'état, le troisième le n° du vecteur d'entrées). (5.54)

- ${}^{1,1,1}cd_{E \triangleright *}^{(p)}$: composantes de ${}^{1,1,1}cd_{E \triangleright *}^{(p)}$.
- ${}^{2,2,2}cd_{E \triangleright}^{(p)}$: contribution des VE ${}^2e_E^{(*)}$ et des entrées ${}^2u_E^{(*)}$ d'ordre $< p$ aux mesures ${}^2v_E^{(p)}$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur de mesures, le deuxième le n° du vecteur d'état, le troisième le n° du vecteur d'entrées). (5.81)
- ${}^{2,2,2}cd_{E \triangleright *}^{(p)}$: composantes de ${}^{2,2,2}cd_{E \triangleright *}^{(p)}$.
- $\bar{\psi}_{C,1,1}cd_{E \triangleright}^{(p)}$: contribution des VE ${}^1e_E^{(*)}$ et des entrées ${}^1u_E^{(*)}$ d'ordre $< p$ à $\bar{\psi}_C^{(p)}$ (le deuxième exposant gauche est le n° du vecteur d'état, le troisième le n° du vecteur d'entrées). (5.45)
- $D_t \bar{\psi}_{L \triangleright \lambda}^{(p)}$: second membre du terme d'ordre p du développement de la³ CSL dans lesquelles $x_{L \frac{*}{\bar{A}}}^{(p)}$ a été éliminé. (F.183)
- $D_t^* \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)}$: seconds membres des termes d'ordre p du développement des CGC dans lesquelles $x_{C \frac{*}{\bar{A}}}^{(p)}$ a été éliminé. (F.198)
- ${}^1e_E^{(p)}$: vecteur d'état n° 1 d'ordre p . (5.37)
- ${}^2e_E^{(p)}$: vecteur d'état n° 2 d'ordre p . (5.69)
- $f_{C \frac{*}{\bar{A}}}^{[0](p)}$: terme d'ordre p du développement de $f_{C \frac{*}{\bar{A}}}^{[0]}$. (5.11) ou (5.20)
- $d_N f_{C \frac{*}{\bar{A}}}^{[0](p)}$: terme d'ordre p du développement de $d_N f_{C \frac{*}{\bar{A}}}^{[0]}$. (5.13) ou (5.22)
- $f_{C \triangleright \frac{*}{\bar{A}}}^{[0](p)}$: second membre de $f_{C \frac{*}{\bar{A}}}^{[0](p)}$. (F.220)
- $d_N f_{C \triangleright \frac{*}{\bar{A}}}^{[0](p)}$: second membre de $d_N f_{C \frac{*}{\bar{A}}}^{[0](p)}$. (5.17) ou (5.26)
- $f_{C \frac{*}{\bar{A}}; \frac{*}{\bar{N}}}^{[1](p)}$: terme d'ordre p du développement de $f_{C \frac{*}{\bar{A}}; \frac{*}{\bar{N}}}^{[1]}$. (5.12) ou (5.21)
- $d_N f_{C \frac{*}{\bar{A}}; \frac{*}{\bar{N}}}^{[1](p)}$: terme d'ordre p du développement de $d_N f_{C \frac{*}{\bar{A}}; \frac{*}{\bar{N}}}^{[1]}$. (5.14) ou (5.23)
- $f_{C \triangleright \frac{*}{\bar{A}}; \frac{*}{\bar{N}}}^{[1](p)}$: second membre de $f_{C \frac{*}{\bar{A}}; \frac{*}{\bar{N}}}^{[1](p)}$. (F.223)
- $d_N f_{C \triangleright \frac{*}{\bar{A}}; \frac{*}{\bar{N}}}^{[1](p)}$: second membre de $d_N f_{C \frac{*}{\bar{A}}; \frac{*}{\bar{N}}}^{[1](p)}$. (5.18) ou (5.27)

³Lorsque $x_{L \frac{*}{\bar{A}}}^{(p)}$ est éliminé des CSL, il ne reste qu'une.

$fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}$: terme d'ordre p du développement de $fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}$, c.-à-d. de $f_C^{[0]\frac{i}{A}}$, cf. (4.74). (5.11) ou (5.20)

$d_N fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}$: terme d'ordre p du développement de $d_N fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}$, c.-à-d. de $d_N f_C^{[0]\frac{i}{A}}$. (5.13) ou (5.22)

$fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}$: terme d'ordre p du développement de $fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$, c.-à-d. de $f_C^{[1]\frac{i}{A}; \frac{j}{N}}$, cf. (4.75). (5.12) ou (5.21)

$d_N fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}$: terme d'ordre p du développement de $d_N fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$, c.-à-d. de $d_N f_C^{[1]\frac{i}{A}; \frac{j}{N}}$. (5.14) ou (5.23)

$fi_{N \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0](p)}$: second membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot (fi_{N0[\frac{j}{N}]}^{[0]} + fi_{N1[\frac{j}{N}]}^{[0]})$. (E.40)

$fi_{N \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}$: second membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot (fi_{N0[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} + fi_{N1[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]})$. (E.41)

$d_N fi_{N \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}$: second membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot (d_N fi_{N0[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} + d_N fi_{N1[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]})$. (E.25)

$l^{(0)}$: fonction définissant $L^{(0)}$. (F.58)

$l_{L^{(0)}}$: valeur de l en $L^{(0)}$.

$l_{L^{(0)}}^{(0)}$: valeur de $l^{(0)}$ en $L^{(0)}$ (est en fait utilisé dans la désignation de la valeur des *dérivées* de $l^{(0)}$ en $L^{(0)}$).

$p^{(p)}$: terme d'ordre p du développement de p (la pression).

$\bar{p}_C^{(p)}$: terme d'ordre p du développement de p (la pression) sur C . (5.8)

$p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}$: terme d'ordre p du développement de $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}$. (E.8)

$\varepsilon p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}{\varepsilon^p}$. (E.9)

$p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}$: terme d'ordre p du développement de $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$. (E.10)

$\varepsilon p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}{\varepsilon^p}$. (E.11)

$${}^1u_E^{(p)} \quad : \quad \text{vecteur d'entrées n}^\circ 1 \text{ d'ordre } p. \quad (5.38)$$

$${}^2u_E^{(p)} \quad : \quad \text{vecteur d'entrées n}^\circ 2 \text{ d'ordre } p. \quad (5.70)$$

$${}^1v_E \quad : \quad \text{vecteur de mesures intermédiaires n}^\circ 1. \quad (5.56)$$

$${}^1v_E^{(p)} \quad : \quad \text{vecteur de mesures (fictives) n}^\circ 1 \text{ d'ordre } p. \quad (5.51)$$

$${}^1v_{E*}^{(p)} \quad : \quad \text{composantes de } {}^1v_E^{(p)}.$$

$${}^2v_E^{(p)} \quad : \quad \text{vecteur de mesures (fictives) n}^\circ 2 \text{ d'ordre } p. \quad (5.77)$$

$${}^2v_{E*}^{(p)} \quad : \quad \text{composantes de } {}^2v_E^{(p)}.$$

$$x_{C^*A}^{(p)} \quad : \quad \text{terme d'ordre } p \text{ du développement de } x_{C^*A}. \quad (F.27)$$

$$\varepsilon x_{C^*A}^{(p)} \quad \stackrel{\text{déf}}{=} \quad \frac{x_{C^*A}^{(p)}}{\varepsilon^p}. \quad (F.28)$$

$$x_{L^*A}^{(p)} \quad : \quad \text{terme d'ordre } p \text{ du développement de } x_{L^*A}. \quad (F.29)$$

$$\varepsilon x_{L^*A}^{(p)} \quad \stackrel{\text{déf}}{=} \quad \frac{x_{L^*A}^{(p)}}{\varepsilon^p}. \quad (F.30)$$

Opérateurs

$$\psi_{C^{(0)}\triangleleft} \quad : \quad \text{opérateur donnant le premier membre de } \bar{\psi}_C^{(p)}. \quad (F.37) \text{ (pour } S^{(0)} = C^{(0)})$$

$$\psi_{L^{(0)}\triangleleft} \quad : \quad \text{opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre } p \text{ du développement de } \psi_{L^{(0)}} \text{ fonction de } \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}. \quad (F.37) \text{ (pour } S^{(0)} = L^{(0)})$$

$$\psi_{tn} \quad : \quad \text{opérateur intervenant dans la CGC que doit satisfaire } \partial\varphi^{(p)}/\partial t, \text{ cf. (5.33)}. \quad (5.34)$$

$${}^1A_E \quad : \quad \text{opérateur linéaire donnant la contribution des VE } {}^1e_E^{(p)} \text{ à } \partial {}^1e_E^{(p)}/\partial t \text{ (l'exposant gauche est le n}^\circ \text{ du vecteur d'état)}. \quad (5.39)$$

$${}^1A_{E*} \quad : \quad \text{composantes de } {}^1A_E.$$

${}^2\mathbf{A}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des VE ${}^2e_E^{(p)}$ à $\partial {}^2e_E^{(p)}/\partial t$ (l'exposant gauche est le n° du vecteur d'état). (5.71)

${}^2\mathbf{A}_{E*}$: composantes de ${}^2\mathbf{A}_E$.

${}^{1,1}\mathbf{B}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des entrées ${}^1u_E^{(p)}$ à $\partial {}^1e_E^{(p)}/\partial t$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur d'état, le second le n° du vecteur d'entrées). (5.40)

${}^{1,1}\mathbf{B}_{E*}$: composantes de ${}^{1,1}\mathbf{B}_E$.

${}^{2,2}\mathbf{B}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des entrées ${}^2u_E^{(p)}$ à $\partial {}^2e_E^{(p)}/\partial t$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur d'état, le second le n° du vecteur d'entrées). (5.72)

${}^{2,2}\mathbf{B}_{E*}$: composantes de ${}^{2,2}\mathbf{B}_E$.

${}^{1,1}\mathbf{C}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des VE ${}^1e_E^{(p)}$ aux mesures ${}^1v_E^{(p)}$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur de mesures, le second le n° du vecteur d'état). (5.52)

${}^{1,1}\mathbf{C}_{E*}$: composantes de ${}^{1,1}\mathbf{C}_E$.

${}^{1,1}\mathbf{C}_{E*,\star}$: composantes des ${}^{1,1}\mathbf{C}_{E*}$.

${}^{2,2}\mathbf{C}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des VE ${}^2e_E^{(p)}$ aux mesures ${}^2v_E^{(p)}$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur de mesures, le second le n° du vecteur d'état). (5.78)

${}^{2,2}\mathbf{C}_{E*}$: composantes de ${}^{2,2}\mathbf{C}_E$.

${}^{2,2}\mathbf{C}_{E*,\star}$: composantes des ${}^{2,2}\mathbf{C}_{E*}$.

$\tilde{\psi}_C, {}^1\mathbf{C}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des VE ${}^1e_E^{(p)}$ à $\tilde{\psi}_C^{(p)}$ (le deuxième exposant gauche est le n° du vecteur d'état). (5.43)

$\tilde{\psi}_C, {}^1\mathbf{C}_{E*}$: composantes de $\tilde{\psi}_C, {}^1\mathbf{C}_E$.

$\mathbf{c}_{C(0) \triangleleft}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $c_{C(0)}$ fonction, suivant le mode de définition de c , de $c_{C(0)}^{(p)}$ ou de $p_{[\tilde{A}]^{(p)}}$ et de $p_{[\tilde{A}; \tilde{N}]^{(p)}}$. (F.85) ou (F.136)

${}^{1,1}\mathbf{D}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des entrées ${}^1u_E^{(p)}$ aux mesures ${}^1v_E^{(p)}$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur de mesures, le second le n° du vecteur d'entrées). (5.53)

${}^{1,1}\mathbf{D}_{E*}$: composantes de ${}^{1,1}\mathbf{D}_E$.

${}^{1,1}\mathbf{D}_{E*,*}$: composantes des ${}^{1,1}\mathbf{D}_{E*}$.

${}^{2,2}\mathbf{D}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des entrées ${}^2u_E^{(p)}$ aux mesures ${}^2v_E^{(p)}$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur de mesures, le second le n° du vecteur d'entrées). (5.79)

${}^{2,2}\mathbf{D}_{E*}$: composantes de ${}^{2,2}\mathbf{D}_E$.

${}^{2,2}\mathbf{D}_{E*,*}$: composantes des ${}^{2,2}\mathbf{D}_{E*}$.

${}^{2,2}\mathbf{D}_{Et}$: opérateur linéaire donnant la contribution des entrées $\partial^2 u_E^{(p)}/\partial t$ aux mesures ${}^2v_E^{(p)}$ (le premier exposant gauche est le n° du vecteur de mesures, le second le n° du vecteur d'entrées). (5.80)

$\tilde{\psi}_{C,1}\mathbf{D}_E$: opérateur linéaire donnant la contribution des entrées ${}^1u_E^{(p)}$ à $\bar{\psi}_C^{(p)}$ (le deuxième exposant gauche est le n° du vecteur d'entrées). (5.44)

$\tilde{\psi}_{C,1}\mathbf{D}_{E*}$: composantes de $\tilde{\psi}_{C,1}\mathbf{D}_E$.

$\mathbf{D}_t\psi_{L^{(0)}\triangleleft}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $D_t\psi_{L^{(0)}}$ fonction de $\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}$. (F.49) (pour $S^{(0)} = L^{(0)}$)

$\mathbf{D}_t^*c_{C^{(0)}\triangleleft}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $D_t^*c_{C^{(0)}}$ fonction de $\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}$ et, suivant le mode de définition de c , de $c_{C^{(0)}}^{(p)}$ ou de $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}$ et de $p_{[\frac{*}{A};\frac{*}{N}]}^{[1](p)}$. (F.99) ou (F.146), (F.113) ou (F.157) et (F.126) ou (F.168)

$\mathbf{f}_{C\triangleleft[\frac{*}{A}]}^{[0]}$: opérateur donnant le premier membre de $f_{C[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}$ (qui est fonction de $\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}$ et, suivant le mode de définition de c , de $c_{C^{(0)}}^{(p)}$ ou de $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}$ et de $p_{[\frac{*}{A};\frac{*}{N}]}^{[1](p)}$). (F.219) ou (F.225)

- $d_N \mathbf{f}_{c \triangleleft [\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[0]}$: opérateur donnant le premier membre de $d_N f_{c [\frac{*}{A}]}^{[0](p)}$ (qui est fonction de $\varphi_{c^{(0)}}^{(p)}$ et, suivant le mode de définition de c , de $c_{c^{(0)}}^{(p)}$ ou de $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}$ et de $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}$). (5.15) ou (5.22)
- $\mathbf{f}_{c \triangleleft [\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$: opérateur donnant le premier membre de $f_{c [\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}$ (qui est fonction de $\varphi_{c^{(0)}}^{(p)}$ et, suivant le mode de définition de c , de $c_{c^{(0)}}^{(p)}$ ou de $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}$ et de $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}$). (F.222) ou (F.226)
- $d_N \mathbf{f}_{c \triangleleft [\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$: opérateur donnant le premier membre de $d_N f_{c [\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}$ (qui est fonction de $\varphi_{c^{(0)}}^{(p)}$ et, suivant le mode de définition de c , de $c_{c^{(0)}}^{(p)}$ ou de $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}$ et de $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}$). (5.16) ou (5.25)
- $\mathbf{f}i_{N \triangleleft 0 [\frac{i}{A}]}^{[0]}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot (fi_{N0 [\frac{j}{N}]}^{[0]} + fi_{N1 [\frac{j}{N}]}^{[0]})$ fonction de $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}$. (E.36)
- $\mathbf{f}i_{N \triangleleft 1 [\frac{i}{A}]}^{[0]}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot (fi_{N0 [\frac{j}{N}]}^{[0]} + fi_{N1 [\frac{j}{N}]}^{[0]})$ fonction de $dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}/dt$. (E.37)
- $\mathbf{f}i_{N \triangleleft 0 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot (fi_{N0 [\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} + fi_{N1 [\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]})$ fonction de $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}$. (E.38)
- $d_N \mathbf{f}i_{N \triangleleft 0 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot (d_N fi_{N0 [\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} + d_N fi_{N1 [\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]})$ fonction de $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}$. (E.23)
- $\mathbf{f}i_{N \triangleleft 1 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot (fi_{N0 [\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} + fi_{N1 [\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]})$ fonction de $dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}/dt$. (E.39)
- $d_N \mathbf{f}i_{N \triangleleft 1 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$: opérateur donnant la partie du premier membre du terme d'ordre p du développement de $\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot (d_N fi_{N0 [\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} + d_N fi_{N1 [\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]})$ fonction de $dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}/dt$. (E.24)
- ${}^1\mathbf{G}_{(0)}$: opérateur donnant φ dans E à partir de $\varphi_{L^{(0)}}$ et de $\partial\varphi_{C^{(0)}}/\partial n$.

${}^1\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}$: partie de ${}^1\mathbf{G}_{(0)}$ dépendant de $\partial\varphi_{C^{(0)}}/\partial n$.
${}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},C_n^{(0)}}$: ${}^1\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}$ pour $x_{\bar{A}}^* \in C^{(0)}$.
${}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},C_n^{(0)}}$: ${}^1\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}$ pour $x_{\bar{A}}^* \in L^{(0)}$.
${}^1\mathbf{G}_{L^{(0)}}$: partie de ${}^1\mathbf{G}_{(0)}$ dépendant de $\varphi_{L^{(0)}}$.
${}^1\mathbf{G}_{C^{(0)},L^{(0)}}$: ${}^1\mathbf{G}_{L^{(0)}}$ pour $x_{\bar{A}}^* \in C^{(0)}$.
${}^1\mathbf{G}_{L^{(0)},L^{(0)}}$: ${}^1\mathbf{G}_{L^{(0)}}$ pour $x_{\bar{A}}^* \in L^{(0)}$.
${}^2\mathbf{G}_{(0)}$: opérateur donnant φ dans E à partir de $\varphi_{C^{(0)}}$ et de $\partial\varphi_{C^{(0)}}/\partial n$.
${}^2\mathbf{G}_{C^{(0)}}$: partie de ${}^2\mathbf{G}_{(0)}$ dépendant de $\varphi_{C^{(0)}}$.
${}^2\mathbf{G}_{C^{(0)},C^{(0)}}$: ${}^2\mathbf{G}_{C^{(0)}}$ pour $x_{\bar{A}}^* \in C^{(0)}$.
${}^2\mathbf{G}_{L^{(0)},C^{(0)}}$: ${}^2\mathbf{G}_{C^{(0)}}$ pour $x_{\bar{A}}^* \in L^{(0)}$.
${}^2\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}$: partie de ${}^2\mathbf{G}_{(0)}$ dépendant de $\partial\varphi_{C^{(0)}}/\partial n$.
${}^2\mathbf{G}_{C^{(0)},C_n^{(0)}}$: ${}^2\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}$ pour $x_{\bar{A}}^* \in C^{(0)}$.
${}^2\mathbf{G}_{L^{(0)},C_n^{(0)}}$: ${}^2\mathbf{G}_{C_n^{(0)}}$ pour $x_{\bar{A}}^* \in L^{(0)}$.

A.4.3 Fonctions vs opérateurs

Dans cette étude, fonctions et opérateurs sont distingués. Les sens attribués à ces termes sont les suivants. Les fonctions sont des opérations mathématiques transformant un nombre en un autre nombre (ayant pour argument un nombre et produisant un nombre). Les opérateurs sont des opérations mathématiques transformant une fonction en une autre fonction (ayant pour argument une fonction et produisant une fonction). Avec ces définitions, une fonction pouvant toujours être considérée comme un opérateur, la distinction entre les deux notions est parfois assez arbitraire.

Annexe B

Abrégé de théorie des systèmes physiques

Le terme «système» a beaucoup de significations. La théorie exposée dans cette annexe concerne la modélisation du comportement des assemblages de matière (inerte), d'où le nom de systèmes physiques. D'autres théories de systèmes existent : théories des systèmes sociaux, économiques, biologiques, théorie des automates. Il n'en est évidemment pas question ici. Pour alléger la rédaction, la théorie des systèmes physiques est appelée maintenant simplement théorie des systèmes.

Le principal moteur du développement de la théorie des systèmes a été l'automatique. Cette discipline devant s'appliquer à tous les domaines techniques a eu besoin d'une représentation la plus uniforme possible des phénomènes à commander, au point qu'automatique et théorie des systèmes sont pratiquement confondues. Mais en fait la théorie des systèmes dépasse la seule automatique ; elle concerne toute la physique macroscopique et peut-être microscopique.

Une théorie des systèmes pourrait être construite logiquement en partant de principes de base, les postulats de la théorie, et en en déduisant par la logique les autres faits. Nous ne suivons pas cette voie qui peut être intéressante mais qui est assez illusoire, cette théorie étant en réalité assez heuristique : les faits la constituant sont avant tout le résultat de *constatations* faites lors de la modélisation de systèmes à partir des lois de la physique. Les faits considérés comme des résultats pourraient être pris pour postulats et vice versa. Nous

exposons juste les faits de la théorie, sans rechercher les liens logiques.

Un système physique est défini arbitrairement en lui donnant des frontières physiques. Par exemple dans l'étude nous considérons trois systèmes mécaniques ; le navire, le fluide¹ (l'eau) et l'air. La frontière entre le navire et le fluide est la carène du navire : C . Celle entre le fluide et l'air est la surface libre : L . Les interactions navire \leftrightarrow air ne sont pas prises en compte. Il n'y a donc pas de frontière de définie ente le navire et l'air.

Une manière «extérieure» ou «boîte noire» d'envisager la notion de système est de dire que nous ne connaissons d'un système que ses entrées et ses sorties. Ces grandeurs représentent ses interactions avec les autres systèmes. Par définition, les grandeurs intérieures au système et qui n'apparaissent pas dans les sorties (elles ne peuvent pas apparaître dans les entrées, cf. la définition des notions d'entrée et de sortie d'un système infra) sont inconnues.

Le postulat fondamental de la théorie des systèmes est que tout système physique possède un ensemble de grandeurs : son vecteur d'état², définissant totalement l'état du système à chaque instant. Pour être utilisable, cette notion d'état doit être définie concrètement. Si le système a des entrées et des sorties, une manière de le faire est de dire que la valeur du vecteur d'état à un instant t_0 et des entrées entre les instants t_0 et $t_1 > t_0$ définissent entièrement les sorties à l'instant t_1 . Les constituants du vecteur d'état sont les variables d'état (VE) du système. «Valeurs des VE» et «état du système» sont des expressions synonymes.

Si le système n'a pas d'entrées, c.-à-d. est autonome, et qu'il a des sorties, la définition ci-dessus s'applique toujours : la valeur des VE à un instant t_0 définit entièrement les sorties à l'instant $t_1 > t_0$. Si le système n'a ni entrées ni sorties, c.-à-d. est fermé ou isolé, nous ne pouvons rien en dire, ce qui ne change rien au fait que son comportement reste celui d'un système autonome.

Nous ne traitons dans cette annexe que des systèmes physiques continus en temps et déterministes. Leur comportement, s'il est suffisamment régulier, peut être représenté par une équation de la forme

¹Dans toute l'étude, le terme «fluide» désigne l'eau, bien que l'air soit aussi un fluide.

²Terminologie de la théorie des systèmes. Les physiciens utilisent plutôt le terme de «variables de phase». En théorie des système, ce terme semble être aujourd'hui réservé au cas où un vecteur d'état est constitué d'une variable et de ses dérivées temporelles.

$$(B.1) \quad \frac{de}{dt} = f(t, e, u)$$

où

$e(t)$: vecteur d'état du système,

$u(t)$: vecteur d'entrées du système,

et où f est une fonction du temps au sens strict du terme : $f(t, e, u)$ ne dépend que des valeurs de e et de u à l'instant t ; aucune intégrale ou dérivée temporelles de ces grandeurs n'intervient. L'équation (B.1) est l'équation d'évolution³ (EE) (des VE) du système.

Le choix des VE est libre, sous la condition que (B.1) représente l'évolution temporelle du système. Une notion importante est qu'un choix de VE et donc de modèle (B.1) privilégie toujours une échelle de temps. Dans le cas du navire sur la houle, les fréquences des mouvements dus à la houle sont plus basses que les fréquences des modes propres du navire ou que les fréquences acoustiques du fluide. Comme nous ne sommes intéressés que par la représentation des mouvements sur la houle, les déformations du navire et la compressibilité du fluide n'ont pas à être prises en compte par le modèle. Cette notion d'échelle de temps peut être encore plus manifeste : à l'échelle de son temps de commutation, un circuit électronique digital est considéré comme continu en temps. À une échelle plus grande, il est considéré comme discret. À l'échelle de temps quantique, il serait aussi considéré comme discret. Le type même de modèle change en fonction de l'échelle de temps choisie.

Le choix des VE doit de préférence donner un f le plus simple possible. Les VE sont des grandeurs indépendantes. L'ordre du système est le nombre de VE intervenant dans l'EE. Il ne dépend pas du choix des VE.

Curieusement, il n'existe pas actuellement, sauf pour les circuits électriques, de méthode systématique pour déterminer a priori quelles sont les VE d'un système. Elles ne sont connues de façon certaine que quand une équation de la forme (B.1) est obtenue. Cette forme est appelée canonique pour indiquer le fait que pour représenter complètement l'évolution temporelle du système, toutes les variables intervenant dans f , soit doivent apparaître dans le premier membre de (B.1), soit sont connues de ce système par principe (ce qui vaut pour le temps), et inversement que toutes les variables du premier membre

³Terminologie de physicien. Les automaticiens utilisent le terme «équation d'état», qui peut être vu comme l'abréviation d'«équation d'évolution des variables (ou du vecteur) d'état». En physique, le terme «équation d'état» a un tout autre sens, d'où la terminologie employée.

doivent intervenir dans f .

Les VE représentent la «mémoire» du système. Une constatation de la théorie des systèmes est que les variables représentant un stockage d'énergie sont des VE, mais cette considération n'est parfois pas suffisante pour déterminer toutes les VE d'un système.

La définition de l'état d'un système utilise les notions d'entrées et de sorties, qui doivent donc à leur tour être définies. Pour les systèmes physiques simples, ses grandeurs d'entrée et de sortie sont des évidences, au point que la question n'est généralement même pas formulée. Pour les systèmes moins simples, ces évidences demandent à être définies rationnellement. Ceci peut être fait en faisant appel à la théorie des graphes de liaison (bound-graphs), qui comme son nom l'indique s'intéresse avant tout aux interactions entre systèmes (cf. par exemple [1] chapitre 5). Cette théorie constate que l'interaction entre deux systèmes consiste toujours en un échange d'énergie, qui s'exprime par le produit d'une grandeur d'effort et d'une grandeur de position.

Les entrées d'un système sont les grandeurs connues de lui lors de son évolution. Une manière d'exprimer ceci est de dire que ce sont les grandeurs qui ne dépendent pas des VE du système dans les transmissions d'énergie dans les liaisons. Les sorties sont les grandeurs duales des entrées dans ces transmissions d'énergies. Par exemple, dans la liaison fluide \leftrightarrow air, la pression de l'air sur L , étant par hypothèse constante, ne dépend pas des VE fluide. C'est donc une entrée du système fluide. La variable duale de la pression, qui est la position de L , est la grandeur de sortie du fluide pour cette liaison.

La dualité entre grandeurs d'entrée et de sortie fait que dans une liaison, la grandeur qui est une entrée pour un système est une sortie pour l'autre. Par exemple, dans la liaison navire \leftrightarrow fluide, les mises en équations du fluide et du navire montrent que la pression du fluide sur C ne dépend que des VE fluide et que la position de C ne dépend que des VE navire. Cette pression est donc une entrée pour le navire et une sortie pour le fluide et inversement pour la position de C .

Par définition, les sorties d'un système dépendent de ses VE, sinon les transmissions d'énergie entre ce système et les autres ne dépendraient pas de son état et il n'aurait donc pas d'effet sur eux. Une constatation de la théorie des

systèmes est que les sorties d'un système ne dépendent *que* de ses VE⁴ et *éventuellement* de ses entrées, et que cette dépendance est de la forme

$$(B.2) \quad v = g(t, e, u)$$

où

$v(t)$: vecteur de sorties du système,

et où, de même que f , g est une fonction du temps au sens strict du terme. L'équation (B.2) est une équation de sortie (ES) ou d'observation du système. Une ES différente est associée à chaque liaison du système en question avec les autres systèmes.

Les termes «sortie» (d'un système vers un autre système) et «action» (d'un système sur un autre système) sont synonymes. Le terme «interaction» (entre deux systèmes) représente les entrées et sorties de chaque système vers l'autre.

La forme des équations (B.1) et (B.2) fait que lorsque plusieurs systèmes sont assemblés pour en former un seul, les VE de ce système sont les VE de tous les systèmes constituants et seulement elles.

Nous voyons que l'approche adoptée pour représenter un système conduit à des définitions auto-référentes : la notion d'état est définie en utilisant les notions d'entrée et de sortie et vice versa. Ceci ne serait pas acceptable pour une théorie mathématique. Une définition axiomatique de la théorie des systèmes semble donc difficile. Cette théorie peut juste être décrite. L'auto-référence de sa description n'implique pas que cette théorie soit vide de sens. Elle n'obéit simplement plus à une logique linéaire.

Les notions présentées dans cette annexe, bien que générales et pouvant être considérées comme des nécessités logiques où même comme des évidences, sont néanmoins utiles pour guider les mises en équations et elles sont suffisantes pour les besoins de cette étude.

Le lecteur intéressé par la théorie des systèmes pourra consulter le petit ouvrage [2], qui, comme son titre ne l'indique pas, traite aussi de systèmes non linéaires, ou [3]. Ces deux ouvrages restent malgré tout orientés vers les circuits électriques comme exemples de systèmes physiques et vers l'automatique comme application de la théorie des systèmes.

⁴Dans toute l'étude, l'expression «que des VE» veut dire «que des VE mais pas de leurs dérivées temporelles, sauf si ces dérivées sont elles-mêmes des VE».

Bibliographie

- [1] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.-P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis, *Modélisation et identification des processus*, Tome 2, première ed., Méthodes et pratiques de l'ingénieur, vol. 3, Technip, 1992.
 - [2] J. Lifermann, *Systèmes linéaires - Variables d'état*, Masson, 1972.
 - [3] L. Padulo and M. A. Arbib, *System theory - A unified state-space approach to continuous and discrete systems*, first ed., W. B. Saunders Compagny, 1974.
-

Annexe C

Mécanique des corps rigides ou peu déformables

C.1	Hypothèse de base	147
C.2	Représentation des rotations	149
C.2.1	Représentation de la rotation	149
C.2.2	Représentation de la vitesse et de l'accélération de rotation . . .	149
C.3	Représentation du moment des forces	153
C.4	Principe fondamental de la dynamique	155
C.4.1	Application du principe fondamental de la dynamique en translation à l'ensemble du corps	155
C.4.1.1	Dans la base absolue	155
C.4.1.2	Dans la base liée	157
C.4.2	Application du principe fondamental de la dynamique en rotation à l'ensemble du corps	158
C.4.2.1	Dans la base absolue	158
C.4.2.2	Dans la base liée	160
C.4.3	Équations du mouvement	160
C.4.3.1	Conditions d'orthonormalité de $r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}$	164
C.4.3.1.1	Première méthode	167
C.4.3.1.2	Deuxième méthode	169
C.4.4	Généralisation	173

L'assemblage des systèmes navire et fluide (incompressible) fait apparaître la notion de masses d'eau ajoutées, cf. section 4.3.1.1. Pour que ces masses s'additionnent le plus simplement possible aux masses du navire, les équations du mouvement des corps¹ rigides sont réécrites sous une forme adaptée. Un autre intérêt de cette réécriture est qu'elle se généralise naturellement aux corps déformables, ce qui peut être utile dans l'avenir.

C.1 Hypothèse de base

L'hypothèse de base de la mécanique des corps rigides, l'indéformabilité des corps, se traduit mathématiquement par l'invariance de la distance entre deux points du corps lors des mouvements. Les seuls mouvements possibles d'un corps rigide sont une translation et une rotation². La translation peut être définie par la position d'un point de référence O_N du corps par rapport à un point de référence absolu O_A . Cette position est représentée par la valeur $p_{[\frac{z}{A}]}^{[0]}$ des composantes du vecteur $O_A O_N$ dans une base absolue B_A .

La rotation est définie par la donnée d'une matrice $r_{*,*}$ orthonormale³ propre (c.-à-d. de déterminant +1). Le vecteur $r_{i,j} \cdot \Delta x_j$ représente la transformation des composantes dans une base donnée d'un vecteur Δx_* lié au corps. Deux points de vue sont possibles suivant que la base est considérée comme fixe et le corps comme mobile ou l'inverse :

- 1) *Base fixe, corps mobile* : $r_{i,j} \cdot \Delta x_j$ donne les composantes *dans la même base* de vecteurs *différents* (le vecteur de départ et le vecteur transformé). Dans ce cas $r_{*,*}$ est une matrice de rotation ;
- 2) *Base mobile, corps fixe* : $r_{i,j} \cdot \Delta x_j$ donne les composantes *dans deux bases différentes* du *même* vecteur. Dans ce cas $r_{*,*}$ est une matrice de changement de base.

Pour définir de façon explicite à quelle base se rapporte un indice dans $r_{*,*}$, celle-ci est indiquée en dénominateur de l'indice : le scalaire $r_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}$ ⁴ désigne le

¹Dans cette annexe, à partir de maintenant nous ne parlerons plus que de corps au lieu de navire, les grandeurs relatives à l'ensemble du corps restant indicées par N .

²Suivant différents auteurs, ce théorème est attribué à Euler, Chasles ou même Rodrigues !

³Le terme utilisé habituellement est «orthogonale». Orthonormale est plus précis.

⁴Les noms des bases en dénominateur des indices font partie du nom de la matrice. En fait

produit scalaire du vecteur i de B_A avec le vecteur j de B_N . Bien que les $r_{*,*}^{*,*}$ soient appelés des matrices de rotation, cette notation privilégiée en fait l'aspect changement de base : un changement de base s'écrit (les bases sont orthonormales)

$$x_{\overline{A}}^i = r_{\overline{A}, \overline{N}}^{i, j} \cdot x_{\overline{N}}^j,$$

où $x_{\overline{A}}^*$ est l'expression d'un vecteur dans B_A et $x_{\overline{N}}^*$ l'expression de ce même vecteur dans B_N , alors qu'une rotation s'écrit

$$(C.1) \quad x'_{\overline{A}}^i = r_{\overline{A}, \overline{N}}^{i, j} \cdot x_{\overline{A}}^j,$$

où $x'_{\overline{A}}^*$ est le vecteur obtenu par la rotation $B_A \rightarrow B_N$ du vecteur $x_{\overline{A}}^*$, ce qui est moins immédiat.

Le produit scalaire étant commutatif,

$$(C.2) \quad r_{\overline{N}, \overline{A}}^{i, j} = r_{\overline{A}, \overline{N}}^{j, i}.$$

Avec la notation adoptée pour $r_{*,*}^{*,*}$, la transposition s'écrit

$$(r_{\overline{A}, \overline{N}}^{*,*})_{i,j}^T \stackrel{\text{déf}}{=} r_{\overline{A}, \overline{N}}^{j, i} = r_{\overline{N}, \overline{A}}^{i, j}$$

en utilisant (C.2). L'orthonormalité de $r_{\overline{A}, \overline{N}}^{*,*}$ s'écrit

$$(C.3) \quad r_{\overline{A}, \overline{N}}^{i, k} \cdot r_{\overline{N}, \overline{A}}^{k, j} = r_{\overline{N}, \overline{A}}^{i, k} \cdot r_{\overline{A}, \overline{N}}^{k, j} = \delta_{i,j}.$$

Un ensemble $\{\textit{Point de référence}, \textit{Base}\}$ constitue un référentiel⁵ : $\{O_A, B_A\} = \mathcal{R}_A$, référentiel absolu, $\{O_N, B_N\} = \mathcal{R}_N$, référentiel lié (au corps).

Les équations du mouvement font intervenir les positions, vitesses et accélérations des particules matérielles, qui pour un corps rigide sont entièrement définies par la translation⁶, la rotation^{6,7} et les vitesse et accélération de ces mouvements. En translation, ces vitesse et accélération sont définies par $dp_{[\overline{A}]}^{[0]}/dt$ et $d^2p_{[\overline{A}]}^{[0]}/dt^2$ et en rotation par $dr_{\overline{A}, \overline{N}}^{*,*}/dt$ et $d^2r_{\overline{A}, \overline{N}}^{*,*}/dt^2$.

le r pourrait être supprimé dans ce nom.

⁵La mise en équations de l'hydrodynamique navale demande de séparer les notions de point de référence et de base (une base n'est pas «attachée» à un point). Cette séparation est conservée dans la partie mécanique des corps rigides. Cette mécanique utilise généralement la notion de repère qui est *défini* comme une base attachée à un point, c.-à-d. comme un référentiel, et qui est *utilisé* uniquement comme une base (changement de repère = changement de base sans changement du point de référence). Cette notion apportant de la confusion, elle n'est pas utilisée ici. En pratique le lecteur peut considérer que base et repère sont synonymes.

⁶Les termes «translation» ou «rotation» seuls désignent explicitement la *position* en translation ou en rotation, pas les vitesse ou accélération de ces mouvements.

⁷En mécanique du vol, la rotation est aussi appelée attitude.

C.2 Représentation des rotations

C.2.1 Représentation de la rotation

Une rotation est définie par une matrice orthonormale propre. Une telle matrice a $n \cdot (n - 1) / 2$ degrés de liberté. Habituellement, de façon à ne manipuler que des grandeurs libres, la rotation est représentée par ces degrés de liberté, appelés paramètres ou coordonnées généralisées de la rotation.

Plusieurs modes de paramétrage d'une rotation existent. Les plus courants sont les paramétrages par les angles de Cardan⁸ ou d'Euler qui sont des angles de rotation suivant différents axes, la manière de choisir ces axes et l'ordre dans lequel les rotations sont appliquées définissant le paramétrage utilisé (cf. par exemple [5]). Ces paramétrages donnent des matrices qui ne s'expriment pas simplement en fonction des angles, ce qui ne facilite pas leur manipulation analytique. De plus ils présentent des dégénérescences : certaines rotations ne sont pas définies par un jeu de valeurs unique des angles. Ceci peut rendre problématique la détermination des angles correspondant à une matrice donnée. La rotation peut aussi être paramétrée avec les quaternions d'Hamilton, mais cette représentation n'est pas entièrement libre : la norme euclidienne de trois des quatre paramètres doit être égale à 1.

De façon à éviter ces inconvénients, la rotation est représentée par sa matrice ; les équations du mouvement peuvent être écrites uniquement avec elle, c.-à-d. sans que le paramétrage de la rotation intervienne. La contre-partie est que cette matrice doit satisfaire la condition d'orthonormalité.

La représentation d'une rotation par sa matrice est peu explicite. Lors de l'édition des résultats, la rotation doit de préférence être exprimée par ses paramètres. Cette question est traitée en annexe G.

C.2.2 Représentation de la vitesse et de l'accélération de rotation

La dérivation temporelle de (C.1) montre que la vitesse de rotation $dr_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}^* / dt$ représente la vitesse de translation par rapport à O_A d'un point fixe en fonc-

⁸Cf. note 1 page 27.

tion de ses coordonnées *avant* la rotation :

$$(C.4) \quad \frac{dx'_{\frac{i}{A}}(t)}{dt} = \frac{dr_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}(t)}{dt} \cdot x_{\frac{j}{A}}.$$

L'expression de cette vitesse en fonction des coordonnées actuelles du point est obtenue en reportant (C.1) et (C.3) dans (↑) :

$$(C.5) \quad \frac{dx'_{\frac{i}{A}}(t)}{dt} = \frac{dr_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}(t)}{dt} \cdot r_{\frac{j}{N}, \frac{k}{A}}(t) \cdot x'_{\frac{k}{A}}(t).$$

La matrice $dr_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}^*/dt \cdot r_{\frac{j}{N}, \frac{k}{A}}^*$ est une matrice antisymétrique.

DÉMONSTRATION

▼ La dérivation temporelle de (C.3) donne

$$\frac{dr_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}}}{dt} \cdot r_{\frac{k}{N}, \frac{j}{A}} + r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}} \cdot \frac{dr_{\frac{k}{N}, \frac{j}{A}}}{dt} = \frac{dr_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}}}{dt} \cdot r_{\frac{k}{N}, \frac{j}{A}} + \frac{dr_{\frac{j}{A}, \frac{k}{N}}}{dt} \cdot r_{\frac{k}{N}, \frac{i}{A}} = 0.$$

La matrice $r_{\frac{i}{N}, \frac{j}{A}}^* \cdot dr_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}^*/dt$ est donc antisymétrique. Elle est appelée $\omega_{\frac{i}{A}, \frac{j}{A}}^*$:

$$(C.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \omega_{\frac{i}{A}, \frac{j}{A}} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{dr_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}}}{dt} \cdot r_{\frac{k}{N}, \frac{j}{A}}, \\ \text{ou} \\ (2) \quad = -r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}} \cdot \frac{dr_{\frac{k}{N}, \frac{j}{A}}}{dt}. \end{array} \right.$$

Par changement de base, (↑) devient

$$(C.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \omega_{\frac{i}{N}, \frac{j}{N}} = r_{\frac{i}{N}, \frac{k}{A}} \cdot \frac{dr_{\frac{k}{A}, \frac{j}{N}}}{dt}, \\ \text{ou} \\ (2) \quad = -\frac{dr_{\frac{i}{N}, \frac{k}{A}}}{dt} \cdot r_{\frac{k}{A}, \frac{j}{N}}. \quad \blacktriangle \end{array} \right.$$

L'équation (C.5) peut s'écrire

$$\frac{dx'_{\frac{i}{A}}(t)}{dt} = \omega_{\frac{i}{A}, \frac{j}{A}}(t) \cdot x'_{\frac{k}{A}}(t).$$

Les matrices antisymétriques ont, comme les matrices de rotation, $n \cdot (n - 1) / 2$ degrés de liberté. Le paramétrage d'une matrice antisymétrique est immédiat : ce sont les $n \cdot (n - 1) / 2$ valeurs de la matrice inférieure ou supérieure.

Il se trouve que l'espace physique dans lequel nous vivons a 3 dimensions matérielles. Pour $n = 3$, le nombre de degrés de liberté de $\omega_{*,*}$ est aussi égal à 3, ce qui donne une grandeur qui peut être assimilée à un vecteur : le pseudo-vecteur

vitesse de rotation. «Pseudo» parce que ce vecteur ne suit pas exactement la procédure de changement de base d'un vecteur normal : en cas de changement de base entre deux bases l'une directe et l'autre non, il faut rajouter un changement de signe au changement de base. Pour n différent de 3, le nombre de degrés de liberté n'est plus égal à n ; la notion de pseudo-vecteur ne peut plus être définie.

Pour représenter l'opérateur $\omega_{*,*}$ en ne faisant intervenir que ce pseudo-vecteur, une opération a été créée : le produit vectoriel⁹. Il est défini par

$$a_* \times b_* \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{bmatrix}.$$

Si a_* est le pseudo-vecteur, l'opération correspondante avec une matrice est

$$a_{i,j} \cdot b_j$$

où¹⁰

$$a_{i,j} \stackrel{\text{déf}}{=} i \begin{matrix} & & j \\ \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Si b_* est le pseudo-vecteur, l'opération correspondante est

$$a_i \cdot b_{i,j},$$

où la transformation de b_* en $b_{*,*}$ est la même que pour a_* :

$$b_{i,j} \stackrel{\text{déf}}{=} i \begin{matrix} & & j \\ \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

L'opérateur $a_* \times$ ou $\times a_*$ où a_* est le pseudo-vecteur correspondant à la matrice antisymétrique $a_{*,*}$ est bien le même opérateur que la matrice $a_{*,*}$.

L'intérêt du produit vectoriel est que seuls les paramètres de la vitesse de rotation interviennent. Ses inconvénients sont

⁹Cette notion a été formalisée par Gibbs à la suite des travaux de Grassmann.

¹⁰La transformation pseudo-vecteur $a_* \longleftrightarrow$ matrice (antisymétrique) $a_{*,*}$ est indiquée uniquement par le nombre d'indices.

- 1) il n'existe que pour $n = 3$, ce qui n'est a priori pas gênant en mécanique des corps rigides pour ingénieur ;
- 2) il n'est pas associatif, ce qui est beaucoup plus gênant.

De façon à éviter ces inconvénients et pour rester cohérent avec la représentation de la rotation, la vitesse de rotation est aussi représentée par une matrice, avec de même la contre-partie d'avoir à satisfaire la condition d'antisymétrie, mais cette condition étant issue de la condition d'orthonormalité de $r_{*,*}$, la satisfaction de l'une entraînera la satisfaction de l'autre, aux conditions initiales près.

Pour conserver les conventions de signe habituelles pour $n = 3$ (une rotation positive fait aller le vecteur 1 de la base vers le vecteur 2, de même du vecteur 2 vers le vecteur 3 et du vecteur 3 vers le vecteur 1), la vitesse de rotation est définie matriciellement par

$$\omega_{i,j} \stackrel{\text{d'éf}}{=} i \begin{matrix} & & j \\ \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

où l'argument de l'opérateur correspond au deuxième indice.

Toutes ces considérations peuvent être reprises pour l'accélération de rotation : $d/dt(C.4)$ montre que l'accélération de rotation $d^2 r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}^* / dt^2$ représente l'accélération par rapport à O_A d'un point fixe en fonction de ses coordonnées *avant* la rotation :

$$\frac{d^2 x'_{\frac{i}{A}}(t)}{dt^2} = \frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}(t)}{dt^2} \cdot x_{\frac{j}{A}}$$

et l'expression de cette accélération en fonction des coordonnées actuelles du point est

$$\frac{d^2 x'_{\frac{i}{A}}(t)}{dt^2} = \frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}(t)}{dt^2} \cdot r_{\frac{j}{N}, \frac{k}{A}}(t) \cdot x'_{\frac{k}{A}}(t);$$

mais c'est maintenant la matrice $d^2 r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}^* / dt^2 \cdot r_{\frac{*}{N}, \frac{*}{A}}^* + dr_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}^* / dt \cdot dr_{\frac{*}{N}, \frac{*}{A}}^* / dt$ où une des matrices équivalentes qui est antisymétrique, pas la matrice $d^2 r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}^* / dt^2 \cdot r_{\frac{*}{N}, \frac{*}{A}}^*$.

DÉMONSTRATION

▼ La dérivation temporelle de (C.6) donne

$$(C.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{d\omega_{\bar{A},\bar{A}}^{i,j}}{dt} = \frac{d^2 r_{\bar{A},\bar{N}}^{i,k}}{dt^2} \cdot r_{\bar{N},\bar{A}}^{k,j} + \frac{dr_{\bar{A},\bar{N}}^{i,k}}{dt} \cdot \frac{dr_{\bar{N},\bar{A}}^{k,j}}{dt}, \\ \text{ou} \\ (2) \quad = - \frac{dr_{\bar{A},\bar{N}}^{i,k}}{dt} \cdot \frac{dr_{\bar{N},\bar{A}}^{k,j}}{dt} - r_{\bar{A},\bar{N}}^{i,k} \cdot \frac{d^2 r_{\bar{N},\bar{A}}^{k,j}}{dt^2}. \end{array} \right.$$

La dérivation temporelle de (C.7) donne

$$(C.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{d\omega_{\bar{N},\bar{N}}^{i,j}}{dt} = \frac{dr_{\bar{N},\bar{A}}^{i,k}}{dt} \cdot \frac{dr_{\bar{A},\bar{N}}^{k,j}}{dt} + r_{\bar{N},\bar{A}}^{i,k} \cdot \frac{d^2 r_{\bar{A},\bar{N}}^{k,j}}{dt^2}, \\ \text{ou} \\ (2) \quad = - \frac{d^2 r_{\bar{N},\bar{A}}^{i,k}}{dt^2} \cdot r_{\bar{A},\bar{N}}^{k,j} - \frac{dr_{\bar{N},\bar{A}}^{i,k}}{dt} \cdot \frac{dr_{\bar{A},\bar{N}}^{k,j}}{dt}. \end{array} \right.$$

Les matrices $d\omega_{*,*}/dt$ étant des dérivées de matrices antisymétriques, sont antisymétriques. ▲

Tout ceci est connu et a été exposé de diverses manières (cf. par exemple [3] ou [1]).

C.3 Représentation du moment des forces

Si la rotation, la vitesse de rotation et l'accélération de rotation sont définies par des matrices, le moment des forces par rapport à un point doit aussi l'être. Ce moment est représenté habituellement par le produit vectoriel d'un vecteur par un autre vecteur, mais ici ce sont deux «vrais» vecteurs; il n'y a aucune raison de considérer l'un ou l'autre comme un pseudo-vecteur. Pour résoudre cette question, une opération produisant une matrice antisymétrique à partir de deux vecteurs est définie. Cette opération consiste d'abord à créer une matrice à partir de ces deux vecteurs et ensuite à l'antisymétriser :

$$(a_i \cdot b_j)^{AS} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \cdot (a_i \cdot b_j - b_i \cdot a_j) \quad |^{11}$$

(les deux vecteurs doivent être exprimés dans la même base).

¹¹Le facteur 1/2 fait que le moment défini de cette façon ne correspond pas à la définition habituelle des moments, mais ce facteur apparaîtra partout. Il est introduit pour que cette opération soit cohérente avec l'opération de symétrisation dont nous aurons besoin dans la suite.

En notation vectorielle, cette opération sera désignée par $(a_* \otimes b_*)^{AS}$.

Propriétés

(a) Bilinéarité :

$$c \cdot (a_i \cdot b_j)^{AS} = (c \cdot a_i \overset{(\otimes)}{\cdot} b_j)^{AS} = (a_i \overset{(\otimes)}{\cdot} c \cdot b_j)^{AS} \quad (c \text{ ne doit pas dépendre de } i \text{ ou de } j).$$

(b) Permutation des vecteurs sans permutation des indices :

$$(a_i \cdot b_j)^{AS} = - (b_i \cdot a_j)^{AS}.$$

(c) Permutation des indices sans permutation des vecteurs (antisymétrie) :

$$(a_i \cdot b_j)^{AS} = - (a_j \cdot b_i)^{AS}.$$

(d) Changement de base :

$$(a_{\frac{i}{A}} \cdot b_{\frac{j}{A}})^{AS} = (r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}} \cdot a_{\frac{k}{N}} \cdot b_{\frac{l}{N}} \cdot r_{\frac{l}{N}, \frac{j}{A}})^{AS} = r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}} \cdot (a_{\frac{k}{N}} \cdot b_{\frac{l}{N}})^{AS} \cdot r_{\frac{l}{N}, \frac{j}{A}}$$

(le changement de base doit être effectué sur les deux vecteurs en même temps).

En notation indicielle, les propriétés (a), (b) et (c) font que dans l'expression à l'intérieur d'un $()^{AS}$, le « \cdot » représentant la multiplication et le « \cdot » séparant les deux arguments n'ont pas à être différenciés : l'expression à l'intérieur d'un $()^{AS}$ peut être vue comme une expression où tous les « \cdot » représentent une multiplication.

L'opération $(a_* \otimes b_*)^{AS}$ représente bien un produit vectoriel, au signe et au facteur 1/2 près :

$$(C.10) \quad (a_* \otimes b_*)^{AS} \cdot c_* = -\frac{1}{2} \cdot (a_* \times b_*) \times c_*.$$

Nous aurons besoin dans la suite de l'opération de symétrisation d'une matrice, qui est définie par

$$(a_i \cdot b_j)^S \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \cdot (a_i \cdot b_j + b_i \cdot a_j).$$

Le remplacement des produits vectoriels par des matrices antisymétriques permet d'obtenir beaucoup plus facilement les formules classiques concernant ces produits. Par exemple, (C.10) est l'expression du double produit vectoriel, qui en matriciel donne immédiatement

$$(a_* \otimes b_*)^{AS} \cdot c_* = \frac{1}{2} \cdot (a_* \cdot (b_* \cdot c_*) - b_* \cdot (a_* \cdot c_*)).$$

Une discussion de l'intérêt d'abandonner le produit vectoriel, y compris au plan numérique, est présentée dans [4].

C.4 Principe fondamental de la dynamique

Pour chaque élément de masse du corps, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$(C.11) \quad dm \cdot \frac{d^2 x_{\frac{i}{A}}(t)}{dt^2} = df_{\frac{i}{A}}(t)$$

où

$x_{\frac{i}{A}}(t)$: coordonnées dans \mathcal{R}_A de l'élément de masse dm ;

$df_{\frac{i}{A}}(t)$: somme des forces extérieures appliquées à l'élément de masse dm et exprimées dans B_A .

Les éléments de masse dm sont fixes dans \mathcal{R}_N . Ils peuvent donc être repérés par leurs coordonnées dans \mathcal{R}_N . Toutes les grandeurs dans (C.11) dépendent de ces coordonnées.

C.4.1 Application du principe fondamental de la dynamique en translation à l'ensemble du corps

C.4.1.1 Dans la base absolue

Les coordonnées dans \mathcal{R}_A d'un élément de masse de coordonnées $x_{\frac{i}{N}}$ dans \mathcal{R}_N sont

$$x_{\frac{i}{A}}(t, x_{\frac{i}{N}}^*) = p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) + {}_N x_{\frac{i}{A}}(t, x_{\frac{i}{N}}^*)$$

soit

$$(C.12) \quad x_{\frac{i}{A}}(t, x_{\frac{i}{N}}^*) = p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) + r_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}(t) \cdot x_{\frac{j}{N}}$$

où ${}_N x_{\frac{i}{A}}^*$ sont les composantes dans B_A du vecteur $O_N X$. L'élément de masse étant fixe dans \mathcal{R}_N , $x_{\frac{i}{N}}^*$ ne dépend pas du temps.

L'opération $d^2/dt^2(\uparrow)$ donne

$$\frac{d^2 x_{\frac{i}{A}}(t, x_{\frac{i}{N}}^*)}{dt^2} = \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} + \frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}(t)}{dt^2} \cdot x_{\frac{j}{N}}$$

Le principe fondamental de la dynamique en translation pour l'ensemble du corps s'écrit

$$\int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} dm(x_N^*) \cdot \frac{d^2 x_{\frac{i}{A}}(t, x_N^*)}{dt^2} = \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} df_{\frac{i}{A}}(t, x_N^*)$$

soit

$$\int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} dm(x_N^*) \cdot \left(\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} + \frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}(t)}{dt^2} \cdot x_{\frac{j}{N}} \right) = \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} df_{\frac{i}{A}}(t, x_N^*).$$

Dans le premier membre de (↑), $p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}$ et $r_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}^*$ ne dépendent pas de x_N^* . Dans le second, les efforts entre éléments de masse s'annulent, ce qui donne

$$\int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} dm(x_N^*) \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} + \frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}(t)}{dt^2} \cdot \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} dm(x_N^*) \cdot x_{\frac{j}{N}} = \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} df_{e_N \frac{i}{A}}(t, x_N^*),$$

ce qui peut s'écrire

$$(C.13) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} \cdot m_N^{[0]} + \frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} = fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)$$

où

$$(C.14)$$

$$m_N^{[0]} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} dm(x_N^*),$$

: moment¹² de degré 0 des masses, c.-à-d. masse du corps ;

$$(C.15)$$

$$m_{N[\frac{i}{N}]}^{[1]} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} dm(x_N^*) \cdot x_{\frac{i}{N}},$$

: moment de degré 1 dans \mathcal{R}_N des masses. La grandeur $m_{N[\frac{i}{N}]}^{[1]} \cdot (m_N^{[0]})^{-1}$ est la définition des coordonnées dans \mathcal{R}_N du centre de gravité G_N ;

$$(C.16)$$

$$fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} df_{e_N \frac{i}{A}}(t, x_N^*),$$

: moment de degré 0 des forces extérieures appliquées au corps exprimées dans B_A , c.-à-d. somme de ces forces, exprimée dans B_A .

L'équation (C.13) peut aussi s'écrire (théorème de la quantité de mouvement dans \mathcal{R}_A),

$$(C.17) \quad \frac{dq_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}(t)}{dt} = fe_{N[\frac{j}{A}]}^{[0]}(t)$$

où

$$\begin{aligned} q_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}(t) &\stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x_{\frac{N}{N}}^* \in \mathbb{R}^3} dm(x_{\frac{N}{N}}^*) \cdot dx_{\frac{i}{A}}(t, x_{\frac{N}{N}}^*)/dt, \\ &= dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}(t)/dt \cdot m_N^{[0]} + dr_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}(t)/dt \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]}, \\ &= dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}(t)/dt \cdot m_N^{[0]} + \omega_{\frac{i}{A}, \frac{j}{A}}(t) \cdot m_{N[\frac{j}{A}]}^{[1]}(t), \end{aligned}$$

: moment de degré 0 des quantités de mouvement exprimées dans B_A , c.-à-d. quantité de mouvement du corps exprimée dans B_A .

C.4.1.2 Dans la base liée

Dans B_N , (C.13) s'écrit

$$(C.18) \quad r_{\frac{i}{N}, \frac{j}{A}}(t) \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} \cdot m_N^{[0]} + r_{\frac{i}{N}, \frac{j}{A}}(t) \cdot \frac{d^2 r_{\frac{j}{A}, \frac{k}{N}}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]} = fe_{N[\frac{j}{N}]}^{[0]}(t),$$

ce qui peut aussi s'écrire (théorème de la quantité de mouvement dans \mathcal{R}_N),

$$\begin{aligned} \frac{dq_{[\frac{j}{N}]}^{[0]}(t)}{dt} &= \frac{dr_{\frac{i}{N}, \frac{j}{A}}(t)}{dt} \cdot r_{\frac{j}{A}, \frac{k}{N}}(t) \cdot q_{[\frac{k}{N}]}^{[0]}(t) + fe_{N[\frac{j}{N}]}^{[0]}(t), \\ &= -\omega_{\frac{i}{N}, \frac{j}{N}}(t) \cdot q_{[\frac{j}{N}]}^{[0]}(t) + fe_{N[\frac{j}{N}]}^{[0]}(t), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} q_{[\frac{j}{N}]}^{[0]}(t) &= r_{\frac{i}{N}, \frac{j}{A}}(t) \cdot q_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}(t), \\ &= r_{\frac{i}{N}, \frac{j}{A}}(t) \cdot dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}(t)/dt \cdot m_N^{[0]} + r_{\frac{i}{N}, \frac{j}{A}}(t) \cdot dr_{\frac{j}{A}, \frac{k}{N}}(t)/dt \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]}, \\ &= r_{\frac{i}{N}, \frac{j}{A}}(t) \cdot dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}(t)/dt \cdot m_N^{[0]} + \omega_{\frac{i}{N}, \frac{j}{N}}(t) \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]}, \end{aligned}$$

¹²Il s'agit ici du moment au sens de moment d'une variable aléatoire, le rôle de la variable aléatoire étant joué par x_* et le rôle de la fonction de répartition de probabilité par la grandeur physique extensive. Une ambiguïté est volontairement entretenue entre ce sens et celui de moment d'une force par rapport à un point. La différence entre les deux sens disparaît en section C.4.3, cf. note 15 page 162.

: moment de degré 0 des quantités de mouvement exprimées dans B_N , c.-à-d. quantité de mouvement du corps exprimée dans B_N .

C.4.2 Application du principe fondamental de la dynamique en rotation à l'ensemble du corps

C.4.2.1 Dans la base absolue

Le principe fondamental de la dynamique en rotation pour l'ensemble du corps peut s'écrire (par rapport à O_N)

$$\int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} (dm(x_N^*) \cdot \frac{d^2 x_{\frac{i}{A}}(t, x_N^*)}{dt^2} \cdot {}_N x_{\frac{j}{A}}(t, x_N^*))^{AS} = \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} (df_{\frac{i}{A}}(t, x_N^*) \cdot {}_N x_{\frac{j}{A}}(t, x_N^*))^{AS}$$

soit

$$\int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} (dm(x_N^*) \cdot (\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} + \frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}}(t)}{dt^2} \cdot x_{\frac{k}{N}}) \cdot r_{\frac{j}{A}, \frac{l}{N}}(t) \cdot x_{\frac{l}{N}})^{AS} = \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} (df_{\frac{i}{A}}(t, x_N^*) \cdot {}_N x_{\frac{j}{A}}(t, x_N^*))^{AS}.$$

Dans le premier membre de (\uparrow), $p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}$ et $r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}}$ ne dépendent pas de x_* . Dans le second, les efforts entre éléments de masse s'annulent, ce qui donne

$$\begin{aligned} & (\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} \cdot r_{\frac{j}{A}, \frac{k}{N}}(t) \cdot \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} dm(x_N^*) \cdot x_{\frac{k}{N}})^{AS} + (\frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}}(t)}{dt^2} \cdot r_{\frac{j}{A}, \frac{l}{N}}(t) \cdot \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} dm(x_N^*) \cdot x_{\frac{k}{N}} \cdot x_{\frac{l}{N}})^{AS} \\ &= \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} (dfe_{N \frac{i}{A}}(t, x_N^*) \cdot {}_N x_{\frac{j}{A}}(t, x_N^*))^{AS}, \end{aligned}$$

soit

$$(C.19) \quad \begin{aligned} & (\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} \cdot r_{\frac{j}{A}, \frac{k}{N}}(t) \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]})^{AS} + (\frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}}(t)}{dt^2} \cdot r_{\frac{j}{A}, \frac{l}{N}}(t) \cdot m_{N[\frac{k}{N}, \frac{l}{N}]}^{[2]})^{AS} \\ &= (fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{A}]}^{[1]}(t))^{AS} \end{aligned}$$

où

$$(C.20) \quad m_{N[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[2]} \stackrel{d\acute{e}f}{=} \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} dm(x_N^*) \cdot x_{\frac{i}{N}} \cdot x_{\frac{j}{N}},$$

: moment de degré 2 dans \mathcal{R}_N des masses¹³. Cette matrice est symétrique positive (pour les corps non dégénérés);

$$fe_{N[\frac{i}{A};\frac{j}{A}]}^{[1]}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x_{\frac{*}{N}} \in \mathbb{R}^3} df e_{N[\frac{i}{A};\frac{j}{A}]}(t, x_{\frac{*}{N}}) \cdot {}_N x_{\frac{j}{A}}(t, x_{\frac{*}{N}}),$$

: moment de degré 1 dans B_A et par rapport au point O_N des forces extérieures appliquées au corps exprimées dans B_A .

Le deuxième terme du premier membre de (C.19) est arrangé en utilisant (C.2) pour faire apparaître un produit de matrice habituel :

$$(C.21) \quad \left(\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} \cdot r_{\frac{j}{A}, \frac{k}{N}}(t) \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]} \right)^{AS} + \left(\frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{k}{N}, \frac{l}{N}]}^{[2]} \cdot r_{\frac{l}{N}, \frac{j}{A}}(t) \right)^{AS} \\ = (fe_{N[\frac{i}{A};\frac{j}{A}]}^{[1]}(t))^{AS}.$$

Cette équation peut aussi s'écrire,

$$\left(\frac{dq_{[\frac{i}{A};\frac{j}{A}]}^{[1]}(t)}{dt} \right)^{AS} = - (q_{[\frac{i}{A};\frac{k}{A}]}^{[1]}(t) \cdot \omega_{\frac{k}{A}, \frac{j}{A}}(t))^{AS} + (fe_{N[\frac{i}{A};\frac{j}{A}]}^{[1]}(t))^{AS}$$

où

$$q_{[\frac{i}{A};\frac{j}{A}]}^{[1]}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x_{\frac{*}{N}} \in \mathbb{R}^3} dm(x_{\frac{*}{N}}) \cdot dx_{\frac{i}{A}}(t, x_{\frac{*}{N}})/dt \cdot {}_N x_{\frac{j}{A}}(t, x_{\frac{*}{N}}), \\ = dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)/dt \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot r_{\frac{k}{N}, \frac{j}{A}}(t) + dr_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}}(t)/dt \cdot m_{N[\frac{k}{N}, \frac{l}{N}]}^{[2]} \cdot r_{\frac{l}{N}, \frac{j}{A}}(t), \\ = dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)/dt \cdot m_{N[\frac{j}{A}]}^{[1]}(t) + \omega_{\frac{i}{A}, \frac{k}{A}}(t) \cdot m_{N[\frac{k}{A}, \frac{j}{A}]}^{[2]}(t),$$

: moment de degré 1 dans B_A et par rapport au point O_N des quantités de mouvement exprimées dans B_A . Cette matrice n'est pas antisymétrique¹⁴.

¹³La correspondance avec la matrice d'inertie habituelle est

$$I_{\frac{i}{N}, \frac{j}{N}} = tr(m_{N[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}^{[2]}) \cdot \delta_{i,j} - m_{N[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]}.$$

Ces deux matrices ont les mêmes vecteurs propres. Leurs valeurs propres sont reliées par

$$I_{\frac{i}{N_P}} = tr(m_{N[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}^{[2]}) - m_{N[\frac{i}{N_P}]}^{[2]}$$

où $I_{\frac{i}{N_P}}$ et $m_{N[\frac{i}{N_P}]}^{[2]}$ sont les valeurs propres correspondant au vecteur i de B_{N_P} , la base formée par les vecteurs propres.

¹⁴La correspondance avec le moment cinétique habituel est

C.4.2.2 Dans la base liée

Dans B_N , (C.21) s'écrit

$$(C.22) \quad \begin{aligned} & \left(r_{\frac{i}{N}, \frac{k}{A}}(t) \cdot \frac{d^2 p_{\frac{k}{A}}^{[0]}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} \right)^{AS} + \left(r_{\frac{i}{N}, \frac{k}{A}}(t) \cdot \frac{d^2 r_{\frac{k}{A}, \frac{l}{N}}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{l}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} \right)^{AS} \\ & = (fe_{N[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[1]}(t))^{AS}. \end{aligned}$$

Cette équation peut aussi s'écrire,

$$(C.23) \quad \left(\frac{dq_{\frac{i}{N}, \frac{j}{N}}^{[1]}(t)}{dt} \right)^{AS} = - \left(\omega_{\frac{i}{N}, \frac{k}{N}}(t) \cdot q_{\frac{k}{N}, \frac{j}{N}}^{[1]}(t) \right)^{AS} + (fe_{N[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[1]}(t))^{AS}$$

où

$$\begin{aligned} q_{\frac{i}{N}, \frac{j}{N}}^{[1]}(t) &= r_{\frac{i}{N}, \frac{k}{A}}(t) \cdot q_{\frac{k}{A}, \frac{l}{A}}^{[1]}(t) \cdot r_{\frac{l}{A}, \frac{j}{N}}(t), \\ &= r_{\frac{i}{N}, \frac{k}{A}}(t) \cdot dp_{\frac{k}{A}}^{[0]}(t)/dt \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} + r_{\frac{i}{N}, \frac{k}{A}}(t) \cdot dr_{\frac{k}{A}, \frac{l}{N}}(t)/dt \cdot m_{N[\frac{l}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]}, \\ &= r_{\frac{i}{N}, \frac{k}{A}}(t) \cdot dp_{\frac{k}{A}}^{[0]}(t)/dt \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} + \omega_{\frac{i}{N}, \frac{k}{N}}(t) \cdot m_{N[\frac{k}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]}, \end{aligned}$$

: moment de degré 1 dans \mathcal{R}_N des quantités de mouvement. Même remarque que pour $q_{\frac{i}{A}, \frac{j}{A}}^{[1]}$.

C.4.3 Équations du mouvement

L'objectif de la mise en équations est d'obtenir une équation de la forme

$$(C.24) \quad \frac{de}{dt} = f(t, e, u) \quad (B.1)$$

où

$e(t)$: variables d'état (VE) du système, à choisir,

f : fonction du temps au sens strict du terme, cf. annexe B,

$u(t)$: entrées du système, c.-à-d. ici efforts extérieurs appliqués au corps.

L'équation (C.24) est l'équation d'évolution (EE) (des VE) du système appelée aussi en mécanique, équations du mouvement.

$$H_{\frac{i}{A}, \frac{j}{A}}(t) = q_{\frac{i}{A}, \frac{j}{A}}^{[1]}(t) - q_{\frac{j}{A}, \frac{i}{A}}^{[1]}(t).$$

Les sorties d'un système sont les entrées des autres systèmes auquel il est lié, cf. annexe B. La théorie des systèmes dit que ces sorties sont de la forme

$$(C.25) \quad v = g(t, e, u) \quad (B.2)$$

où

$v(t)$: sorties du système.

g : fonction du temps au sens strict du terme, cf. annexe B,

Cette équation est une équation de sortie (ES) ou d'observation du système.

Ces autres systèmes peuvent interagir ou non avec le système en question. Dans le premier cas, les sorties de ces systèmes font partie des entrées u du système en question, dans le second non. Dans le cas traité ici, deux systèmes sont liés au système navire : le système fluide et le système de mesure des mouvements. Le premier interagit avec le système navire, pas le second. Les entrées du système navire sont les efforts exercés par le fluide sur la carène. Ses sorties vers le système fluide sont la position de la carène, c.-à-d. la position du navire.

L'EE d'un système est déterminée par le choix des VE. Celui-ci est libre, sous la condition que cette EE représente complètement l'évolution temporelle du système. Dans le cas d'un corps rigide, les deux premières VE qui s'imposent sont celles définissant la translation et la rotation du corps dans \mathcal{R}_N , grandeurs dont peuvent dépendre les efforts extérieurs. La translation est définie par $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}$. Il semble difficile de trouver une autre grandeur contenant la même information. La rotation a été jusqu'à présent définie par $r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}$, grandeur qui intervient explicitement dans toutes les équations traduisant le principe fondamental de la dynamique, sauf (C.17). Autant la prendre directement comme VE. La contre-partie est qu'il faudra veiller à ce qu'elle satisfasse continûment la contrainte d'orthonormalité.

Les deux autres VE doivent définir les vitesses de translation et rotation du corps. La vitesse de translation est $dp_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}/dt$. Nous choisissons cette grandeur comme VE. Pour la vitesse de rotation, l'approche classique est de choisir pour VE $\omega_{\frac{*}{N}, \frac{*}{N}}$; mais avec la représentation matricielle de la rotation et de la vitesse de rotation, ce choix n'apporte pas de gain conceptuel particulier. Le choix le plus cohérent avec cette représentation est que la VE définissant la vitesse de rotation soit $dr_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}/dt$.

Une autre possibilité serait de choisir pour ces VE $q_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}$ et $q_{[\frac{*}{A}, \frac{*}{N}]}^{[1]}$. Les VE d'un

système intervenant dans l'expression des interactions avec les autres systèmes et ces expressions comportant toujours des relations entre des grandeurs cinématiques, il est préférable de n'utiliser que ces grandeurs comme VE. Nous en restons donc à $dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}/dt$ et $dr_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}/dt$.

Les équations (C.18) et (C.22) doivent être mises sous forme canonique, cf. annexe B pour la définition de ce terme. Pour (C.18), ceci se fait en la multipliant à gauche par $r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}$. Pour (C.22), l'antisymétrisation rend difficile cette procédure : un $r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}$ est toujours associé aux d/dt des VE. Cette difficulté est plus apparente avec (C.23) : le premier membre de cette équation détermine des termes de la forme $q_{[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} - q_{[\frac{j}{N}; \frac{i}{N}]}^{[1]}$ alors que dans le second, les $q_{[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$ interviennent séparément. La matrice $q_{[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ n'étant pas antisymétrique, la résolution de cette équation serait problématique.

L'inspection de la section C.4.2 montre qu'à aucun moment l'antisymétrisation n'intervient dans la validité des développements concernant l'application du principe fondamental de la dynamique en rotation. Elle n'apparaît que parce que le moment d'une force par rapport à un point a été défini de cette façon ; toutes les équations de cette section sont valides sans elle.

La suppression de l'antisymétrisation entraîne l'apparition de $n \cdot (n+1)/2$ équations supplémentaires dans les équations en rotation, ce qui en apparence est une contradiction, il n'y a pas $n \cdot (n+1)/2$ degrés de liberté supplémentaires dans les équations du mouvement. En fait ces degrés de liberté supplémentaires sont la différence entre les n^2 degrés de liberté de $r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}$ et les $n \cdot (n-1)/2$ degrés de liberté de son paramétrage. Les équations supplémentaires correspondantes sont les conditions d'orthonormalité de $r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}$. La suppression de l'antisymétrisation est donc possible à condition de satisfaire la condition d'orthonormalité.

À partir de maintenant, sauf explicitement spécifié, l'antisymétrisation est supprimée de toutes les définitions et équations¹⁵.

La mise sous la forme canonique de (C.22) peut maintenant se faire en multipliant aussi à gauche cette équation par $r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}$, ce qui donne

$$(C.26) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} \cdot m_N^{[0]} + \frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} = f e_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)$$

et

¹⁵C'est ici que les deux sens du terme «moment» se rejoignent (cf. note 12 page 157).

$$(C.27) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} + \frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{k}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} = fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t).$$

où

$$(C.28)$$

$$fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_{x_{\frac{*}{N}} \in \mathbb{R}^3} df e_{N[\frac{i}{A}]}(t, x_{\frac{*}{N}}) \cdot x_{\frac{j}{N}},$$

: moment de degr\u00e9 1 dans \mathcal{R}_N des forces ext\u00e9rieures appliqu\u00e9es au corps exprim\u00e9es dans B_A .

$d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}}^*(t)/dt^2$ est \u00e9limin\u00e9 par l'op\u00e9ration (C.26)–(C.27) $\cdot (m_{N[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}^{[2]})_{[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}^{-1} \cdot m_{N[\frac{*}{N}]}^{[1]}$, ce qui donne

$$(C.29) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} = {}_d m_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) \cdot {}_d \mu_N^{[0]}$$

où

$${}_d m_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) : fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) \text{ d\u00e9coupl\u00e9 avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]},$$

$$(C.30) \quad \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) - fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) \cdot \mu_{N[\frac{j}{N}, \frac{k}{N}]}^{[2]} \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]},$$

$$(C.31)$$

$${}_d \mu_N^{[0]} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} ({}_d m_N^{[0]})^{-1} \text{ avec}$$

$${}_d m_N^{[0]} : m_N^{[0]} \text{ d\u00e9coupl\u00e9 (avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]}),$$

$$(C.32) \quad \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} m_N^{[0]} - m_{N[\frac{i}{N}]}^{[1]} \cdot \mu_{N[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]},$$

avec dans ces d\u00e9finitions

$$(C.33) \quad \mu_N^{[0]} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (m_N^{[0]})^{-1} \quad \text{et} \quad \mu_{N[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (m_{N[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}^{[2]})_{[\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{-1}.$$

De m\u00eame, de fa\u00e7on \u00e0 garder un traitement sym\u00e9trique, $d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)/dt^2$ est \u00e9limin\u00e9 par l'op\u00e9ration (C.27) – (C.26) $\otimes m_{N[\frac{*}{N}]}^{[1]} \cdot (m_N^{[0]})^{-1}$, ce qui donne

$$(C.34) \quad \frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}(t)}{dt^2} = {}_d fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}(t) \cdot {}_d \mu_{N[\frac{k}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]}$$

où

$${}_d fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) : fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) \text{ d\u00e9coupl\u00e9 avec les } m_{N[\frac{*}{A} \dots][\frac{*}{A} \dots]}^{[*][*]},$$

$$(C.35) \quad \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) - fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot \mu_N^{[0]},$$

(C.36)

$${}_d\mu_N^{[2]} \left[\frac{i}{N}, \frac{j}{N} \right] \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \left({}_d m_N^{[2]} \left[\frac{*}{N}, \frac{*}{N} \right] \right)_{\left[\frac{i}{N}, \frac{j}{N} \right]}^{-1} \quad \text{avec}$$

$${}_d m_N^{[2]} \left[\frac{i}{N}, \frac{j}{N} \right] : m_N^{[2]} \left[\frac{i}{N}, \frac{j}{N} \right] \text{ d\'ecoupl\'e (avec les } m_N^{[*][*]} \left[\frac{*}{A} \dots \right] \left[\frac{*}{A} \dots \right] \text{)},$$

$$(C.37) \quad \stackrel{\text{d\'ef}}{=} m_N^{[2]} \left[\frac{i}{N}, \frac{j}{N} \right] - m_N^{[1]} \left[\frac{i}{N} \right] \cdot m_N^{[1]} \left[\frac{j}{N} \right] \cdot \mu_N^{[0]}.$$

Les expressions (C.35) et (C.37) sont des moments par rapport à G_N . L'équation (C.34) correspond donc à l'équation habituelle donnant l'accélération en rotation en fonction du moment des forces par rapport au centre de gravité. Nous allons vérifier que (C.29), (C.34) et les définitions des moments d'écouplé redonnent bien l'équation habituelle pour l'accélération en translation du centre de gravité.

La position de G_N dans \mathcal{R}_A est

$$g_N \frac{i}{A}(t) = p_{\left[\frac{i}{A} \right]}^{[0]}(t) + r_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}(t) \cdot m_N^{[1]} \left[\frac{j}{N} \right] \cdot \mu_N^{[0]}.$$

La dérivée temporelle seconde de cette équation donne

$$\frac{d^2 g_N \frac{i}{A}(t)}{dt^2} = \frac{d^2 p_{\left[\frac{i}{A} \right]}^{[0]}(t)}{dt^2} + \frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}}(t)}{dt^2} \cdot m_N^{[1]} \left[\frac{j}{N} \right] \cdot \mu_N^{[0]}.$$

Le report de (↑) dans (C.26), qui est équivalente à (C.29) et (C.34) compte tenu de (C.30), (C.32), (C.35) et (C.37) donne

$$\frac{d^2 g_N \frac{i}{A}(t)}{dt^2} \cdot m_N^{[0]} = f_{N \left[\frac{i}{A} \right]}^{[0]}(t)$$

qui est l'équation habituelle.

Dans l'équation (C.34), les forces et les vitesses sont exprimées dans B_A et les distances dans B_N . Cette équation ne peut donc pas être considérée comme «dans la base absolue» ou «dans la base liée» puisqu'elle fait intervenir des grandeurs exprimées dans les deux bases. Cette équation montre aussi que si les équations sont d'écouplées, la mise en équations est de fait toujours en G_N .

C.4.3.1 Conditions d'orthonormalité de $r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}$

La condition d'orthonormalité de $r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}} \forall t$ est décomposée en, $\exists t$ tq

$$1) \quad r_{\frac{i}{N}, \frac{k}{A}} \cdot r_{\frac{k}{A}, \frac{j}{N}} = \delta_{i,j},$$

- 2) $d(r_{\frac{i}{N}, \frac{k}{A}} \cdot r_{\frac{k}{A}, \frac{j}{N}})/dt = 0_{i,j}$,
3) $d^2(r_{\frac{i}{N}, \frac{k}{A}} \cdot r_{\frac{k}{A}, \frac{j}{N}})/dt^2 = 0_{i,j} \forall t$.

Quand l'antisymétrisation est supprimée, ces conditions n'ont aucune raison d'être satisfaites. Nous allons montrer que leur premier membre représente la déformation du corps, ce qui remet en cause l'hypothèse de base de la mécanique des corps rigides.

Pour distinguer dans ce qui a été écrit, ce qui reste valide de ce qui ne l'est plus, $r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}}^*$ est remplacé par $p_{[\frac{i}{A}, \frac{k}{N}]^{[1]}}$ qui définit la transformation au cours du temps d'un vecteur dont chaque extrémité est liée au corps :

$$\Delta x_{\frac{i}{A}}(t) = p_{[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]^{[1]}}(t) \cdot \Delta x_{\frac{j}{A}}(0).$$

Le carré de la distance entre les deux extrémités du vecteur est

$$(C.38) \quad \|\Delta x_{\frac{i}{A}}^*(t)\|_E^2 = \Delta x_{\frac{i}{A}}(0) \cdot p_{[\frac{i}{N}, \frac{j}{A}]^{[1]}}(t) \cdot p_{[\frac{j}{A}, \frac{k}{N}]^{[1]}}(t) \cdot \Delta x_{\frac{k}{A}}(0),$$

en prenant pour convention de notation que

$$(C.39) \quad (p_{[\frac{i}{A}, \frac{k}{N}]^{[1]}})^T \stackrel{\text{déf}}{=} p_{[\frac{k}{N}, \frac{i}{A}]^{[1]}}.$$

La dérivation temporelle de (C.38) donne

$$\begin{aligned} \frac{d\|\Delta x_{\frac{i}{A}}^*(t)\|_E^2}{dt} &= \Delta x_{\frac{i}{A}}(0) \cdot \left(\frac{dp_{[\frac{i}{N}, \frac{j}{A}]^{[1]}}(t)}{dt} \cdot p_{[\frac{j}{A}, \frac{k}{N}]^{[1]}}(t) + p_{[\frac{i}{N}, \frac{j}{A}]^{[1]}}(t) \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}, \frac{k}{N}]^{[1]}}(t)}{dt} \right) \cdot \Delta x_{\frac{k}{A}}(0), \\ &= 2 \cdot \Delta x_{\frac{i}{A}}(0) \cdot (p_{[\frac{i}{N}, \frac{j}{A}]^{[1]}}(t) \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}, \frac{k}{N}]^{[1]}}(t)}{dt})^S \cdot \Delta x_{\frac{k}{A}}(0). \end{aligned}$$

La forme quadratique $(p_{[\frac{i}{N}, \frac{k}{A}]^{[1]}} \cdot dp_{[\frac{k}{A}, \frac{i}{N}]^{[1]}}/dt)^S$ représente donc le taux de variation par unité de temps de la distance entre deux points liés au corps.

Les développements des sections C.4.1 et C.4.2 sont repris en considérant que $p_{[\frac{i}{A}, \frac{k}{N}]^{[1]}}$ est quelconque, c.-à-d. que le corps est déformable. Pour retrouver les mêmes éléments que dans ces sections, B_A et B_N sont définis de façon à être identiques à $t = 0$, ce qui donne

$${}_N x_{\frac{i}{A}}(0, x_{\frac{i}{N}}^*) = x_{\frac{i}{N}}.$$

À $t = 0$, B_N est donc une base orthonormale. Elle peut ne plus l'être aux autres instants.

Les coordonnées dans \mathcal{R}_A d'un élément de masse de coordonnées $x_{\frac{i}{N}}$ dans \mathcal{R}_N sont

$$x_{\frac{i}{A}}(t, x_{\frac{*}{N}}) = p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) + p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) \cdot x_{\frac{j}{A}}(0, x_{\frac{*}{N}})$$

soit

$$(C.40) \quad x_{\frac{i}{A}}(t, x_{\frac{*}{N}}) = p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) + p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) \cdot x_{\frac{j}{N}}.$$

La dérivée temporelle seconde de cette équation donne

$$\frac{d^2 x_{\frac{i}{A}}(t, x_{\frac{*}{N}})}{dt^2} = \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} + \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t)}{dt^2} \cdot x_{\frac{j}{N}}.$$

Pour unifier les appellations, l'«application du principe fondamental de la dynamique en translation à l'ensemble du corps» devient le «moment de degré 0 du principe fondamental de la dynamique». Il s'écrit

$$(C.41) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} \cdot m_N^{[0]} + \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} = fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t).$$

Maintenant que l'antisymétrisation n'oblige plus à exprimer toutes les grandeurs intervenant dans un moment dans la même base, le moment de degré 1 du principe fondamental de la dynamique peut s'écrire directement

$$(C.42) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} + \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{k}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} = fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t).$$

Les mêmes éliminations que pour (C.29) et (C.34) redonnent (C.29) et

$$(C.43) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t)}{dt^2} = {}_d m_{N[\frac{i}{A}, \frac{k}{N}]}^{[1]} fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}(t) \cdot {}_d \mu_{N[\frac{k}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]}.$$

Nous pouvons maintenant revenir aux conditions d'orthonormalité de $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$.

La condition 1) est vérifiée par définition de $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ en $t = 0$. La condition 2) s'écrit, $\exists t$ tq

$$p_{[\frac{i}{N}; \frac{k}{A}]}^{[1]} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt}$$

est une matrice antisymétrique. La condition 3) s'écrit

$$(C.44) \quad \frac{d}{dt} (p_{[\frac{i}{N}; \frac{k}{A}]}^{[1]} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt}) \quad \text{est une matrice antisymétrique, } \forall t.$$

L'équation (C.43) multipliée à gauche par $p_{[\frac{*}{N}; \frac{*}{A}]}^{[1]}(t)$ donne

$$p_{[\frac{i}{N}; \frac{k}{A}]}^{[1]}(t) \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{k}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t)}{dt^2} = p_{[\frac{i}{N}; \frac{k}{A}]}^{[1]}(t) \cdot {}_d m_{N[\frac{k}{A}, \frac{l}{N}]}^{[1]} fe_{N[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}(t) \cdot {}_d \mu_{N[\frac{l}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]},$$

soit

$$\begin{aligned}
(C.45) \quad & \frac{d}{dt} (p_{[\frac{i}{N}; \frac{k}{A}]}^{[1]}(t) \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t)}{dt}) \\
&= \frac{dp_{[\frac{i}{N}; \frac{k}{A}]}^{[1]}(t)}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t)}{dt} + p_{[\frac{i}{N}; \frac{k}{A}]}^{[1]}(t) \cdot {}_{d_N} f e_{N[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}(t) \cdot {}_d \mu_{N[\frac{l}{N}; \frac{j}{N}]}^{[2]}.
\end{aligned}$$

Une répartition quelconque de forces extérieures n'a aucune raison de satisfaire (C.44).

C.4.3.1.1 Première méthode

Une manière de satisfaire cette contrainte est de rajouter une répartition de forces intérieures de moment ${}_{d_N} f i_{N[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ qui s'oppose au moment des accélérations de déformation. Pour ne pas modifier le mouvement d'ensemble du corps, ${}_{d_N} f i_{N[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ doit être symétrique : si le point d'application d'une force extérieure $d f e_{N \frac{*}{N}}$ est déplacé dans une direction colinéaire à $d f e_{N \frac{*}{N}} |^{16}$, c.-à-d. du point $x_{\frac{*}{N}}$ au point $x_{\frac{*}{N}} + \Delta \cdot d f e_{N \frac{*}{N}} / |d x_{\frac{*}{N}}|$, le moment $f e_{N[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$ est modifié d'une grandeur

$$(C.46) \quad \Delta f e_{N[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} = \int_{x_{\frac{*}{N}} \in \mathbb{R}^3} |d x_{\frac{*}{N}}| \cdot \Delta(x_{\frac{*}{N}}) \cdot \frac{d f e_{N \frac{i}{N}}(x_{\frac{*}{N}})}{|d x_{\frac{*}{N}}|} \cdot \frac{d f e_{N \frac{j}{N}}(x_{\frac{*}{N}})}{|d x_{\frac{*}{N}}|}.$$

Cette matrice est symétrique. Ces déplacements des points d'application des forces ne devant pas avoir de conséquence sur le mouvement d'ensemble d'un corps rigide, $f e_{N[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$ n'est défini qu'à une matrice symétrique près. Cette indétermination peut être vue comme le moment ${}_{d_N} f i_{N[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ d'une répartition de forces intérieures qui doit être telle que (C.45) satisfait la condition (C.44). Un moment ${}_{d_N} f i_{N[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ symétrique est donc ajouté à la répartition de forces extérieures de façon que

$$\begin{aligned}
& \frac{dp_{[\frac{i}{N}; \frac{k}{A}]}^{[1]}(t)}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t)}{dt} + p_{[\frac{i}{N}; \frac{k}{A}]}^{[1]}(t) \cdot {}_{d_N} f e_{N[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}(t) \cdot {}_d \mu_{N[\frac{l}{N}; \frac{j}{N}]}^{[2]} \\
& + {}_{d_N} f i_{N[\frac{i}{N}; \frac{k}{N}]}^{[1]}(t) \cdot {}_d \mu_{N[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[2]}
\end{aligned}$$

soit une matrice antisymétrique. En utilisant la symétrie de ${}_{d_N} f i_{N[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ et de ${}_d \mu_{N[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[2]}$, cette condition s'écrit

¹⁶Notion de vecteur glissant.

$$\begin{aligned}
& d_N f i_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{N} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} k \\ \bar{N} \end{smallmatrix} \right] (t) \cdot d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} k \\ \bar{N} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{N} \end{smallmatrix} \right] + d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{N} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} k \\ \bar{N} \end{smallmatrix} \right] \cdot d_N f i_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} k \\ \bar{N} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{N} \end{smallmatrix} \right] (t) \\
&= -2 \cdot \left(\frac{d p_{\left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{N} \end{smallmatrix}; \bar{A} \right]}^{[1]}(t)}{d t} \cdot \frac{d p_{\left[\begin{smallmatrix} k \\ \bar{A} \end{smallmatrix}; \bar{N} \right]}^{[1]}(t)}{d t} + \left(p_{\left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{N} \end{smallmatrix}; \bar{A} \right]}^{[1]}(t) \cdot d_N f e_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} k \\ \bar{A} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{N} \end{smallmatrix} \right] (t) \cdot d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{N} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{N} \end{smallmatrix} \right] \right)^S.
\end{aligned}$$

Cette équation est une équation de Sylvester. Sa solution existe et est unique si les valeurs propres de $d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ \bar{N} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} * \\ \bar{N} \end{smallmatrix} \right]$ sont différentes de celles de $-d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ \bar{N} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} * \\ \bar{N} \end{smallmatrix} \right]$, (cf. [2] section 8.3), ce qui est le cas puisque $d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ \bar{N} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} * \\ \bar{N} \end{smallmatrix} \right]$ est une matrice positive. Cette solution ne s'exprime simplement que dans la base propre B_{DP}^{17} de $d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ \bar{N} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} * \\ \bar{N} \end{smallmatrix} \right]$:

$$\begin{aligned}
\text{(C.47)} \quad & d_N f i_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] (t) \\
&= -2 \cdot \frac{\frac{d p_{\left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \bar{A} \right]}^{[1]}(t)}{d t} \cdot \frac{d p_{\left[\begin{smallmatrix} k \\ \bar{A} \end{smallmatrix}; \bar{D}_P \right]}^{[1]}(t)}{d t} + \left(p_{\left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \bar{A} \right]}^{[1]}(t) \cdot d_N f e_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} k \\ \bar{A} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] (t) \cdot d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] \right)^S}{d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] + d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right]}
\end{aligned}$$

où

$d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right]$: valeur propre de $d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ \bar{N} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} * \\ \bar{N} \end{smallmatrix} \right]$ correspondant au vecteur i de B_{DP} .

L'équation (C.43) devient

$$\frac{d^2 p_{\left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{A} \end{smallmatrix}; \bar{D}_P \right]}^{[1]}(t)}{d t^2} = \left(d_N f e_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{A} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] (t) + \left(p_{\left[\begin{smallmatrix} * \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \bar{A} \right]}^{[1]}(t) \right)_{\left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{A} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} k \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right]}^{-1} \cdot d_N f i_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} k \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] (t) \right) \cdot d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right].$$

La matrice $p_{\left[\begin{smallmatrix} * \\ \bar{A} \end{smallmatrix}; \bar{D}_P \right]}^{[1]}$ satisfaisant maintenant exactement les conditions d'orthonormalité est remplacée par $r_{\bar{A}, \bar{D}_P}^*$:

$$\text{(C.48)} \quad \frac{d^2 r_{\bar{A}, \bar{D}_P}^* \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{A} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] (t)}{d t^2} = \left(d_N f e_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{A} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] (t) + r_{\bar{A}, \bar{D}_P}^* \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{A} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} k \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] (t) \cdot d_N f i_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} k \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] (t) \right) \cdot d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right]$$

avec $d_N f i_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} * \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right]$ donné par (C.47) où $p_{\left[\begin{smallmatrix} * \\ \bar{A} \end{smallmatrix}; \bar{D}_P \right]}^{[1]}$ est aussi remplacé par $r_{\bar{A}, \bar{D}_P}^*$:

$$\begin{aligned}
\text{(C.49)} \quad & d_N f i_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] (t) \\
&= -2 \cdot \frac{\frac{d r_{\bar{D}_P, \bar{A}}^* \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} k \\ \bar{A} \end{smallmatrix} \right] (t)}{d t} \cdot \frac{d r_{\bar{A}, \bar{D}_P}^* \left[\begin{smallmatrix} k \\ \bar{A} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] (t)}{d t} + \left(r_{\bar{D}_P, \bar{A}}^* \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} k \\ \bar{A} \end{smallmatrix} \right] (t) \cdot d_N f e_N^{[1]} \left[\begin{smallmatrix} k \\ \bar{A} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] (t) \cdot d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] \right)^S}{d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right] + d \mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} j \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} i \\ \bar{D}_P \end{smallmatrix} \right]}
\end{aligned}$$

¹⁷Si $O_N \neq G_N$, cette base et les valeurs propres correspondantes sont différentes de la base propre et des valeurs propres de $\mu_N^{[2]} \left[\begin{smallmatrix} * \\ \bar{N} \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} * \\ \bar{N} \end{smallmatrix} \right]$.

L'équation (C.48) est l'équation d'Euler pour la représentation matricielle des moments des forces et des rotations.

Récapitulation

L'EE est

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} = {}_{d_N} f e_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) \cdot {}_d \mu_N^{[0]}, \\ (2) \quad \frac{d^2 r_{\frac{i}{A}, \frac{j}{B_P}}(t)}{dt^2} = (r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{B_P}}(t) \cdot {}_{d_N} f i_{N[\frac{k}{B_P}, \frac{j}{B_P}]}^{[1]}(t) + {}_{d_N} f e_{N[\frac{i}{A}, \frac{j}{B_P}]}^{[1]}(t)) \cdot {}_d \mu_N^{[2]} \end{array} \right. \quad (C.29)$$

$$\quad (C.48)$$

où ${}_{d_N} f i_{N[\frac{*}{B_P}, \frac{*}{B_P}]}^{[1]}$ est donné par (C.49), plus les relations triviales pour $dp_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}/dt$ et $dr_{\frac{*}{A}, \frac{*}{B_P}}/dt$. Les grandeurs $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}$, $r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{B_P}}$, $dp_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}/dt$ et $dr_{\frac{*}{A}, \frac{*}{B_P}}/dt$ sont connues à $t = 0$ et satisfont

- 1) $r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{B_P}}(0)$: matrice orthonormale,
- 2) $dr_{\frac{i}{A}, \frac{j}{B_P}}(0)/dt = r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{B_P}}(0) \cdot \omega_{\frac{k}{B_P}, \frac{j}{B_P}}(0)$ avec $\omega_{\frac{*}{B_P}, \frac{*}{B_P}}(0)$: matrice antisymétrique.

C.4.3.1.2 Deuxième méthode

Une autre manière de satisfaire la condition d'orthonormalité, plus proche de la réalité physique, est de considérer le corps comme déformable. Ces déformations produisent des forces intérieures dont les moments de degré 0 et 1 sont notés $f i_{N[\frac{*}{N}]}^{[0]}$ ¹⁸ et $f i_{N[\frac{*}{N}, \frac{*}{N}]}^{[1]}$ ¹⁸. Les équations (C.41) et (C.42) deviennent

$$\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} \cdot m_N^{[0]} + \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]}^{[1]}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} = \pi_{[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) \cdot f i_{N[\frac{j}{N}]}^{[0]}(t) + f e_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)$$

et

$$\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} + \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}, \frac{k}{N}]}^{[1]}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{k}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} = \pi_{[\frac{i}{A}, \frac{k}{N}]}^{[1]}(t) \cdot f i_{N[\frac{k}{N}, \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) + f e_{N[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]}^{[1]}(t)$$

avec

$$(C.50) \quad \pi_{[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]}^{[1]} \stackrel{\text{déf}}{=} (p_{[\frac{*}{N}, \frac{*}{A}]}^{[1]})_{[\frac{i}{A}, \frac{j}{N}]}^{-1} \quad |^{19}.$$

¹⁸Les forces intérieures sont a priori plus facilement exprimées dans B_N que dans B_A .

La linéarité de ces équations par rapport aux $fi_{N[\frac{i}{N}; \dots]}^{[*]}$ fait que (C.29) et (C.43) s'écrivent

$$(C.51) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[0]}(t)}{dt^2} = (\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) \cdot {}_{d_N} fi_{N[\frac{j}{N}]}^{[0]}(t) + {}_{d_N} fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)) \cdot {}_d \mu_N^{[0]}$$

et

$$(C.52) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t)}{dt^2} = (\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}(t) \cdot {}_{d_N} fi_{N[\frac{k}{N}; \frac{l}{N}]}^{[1]}(t) + {}_{d_N} fe_{N[\frac{i}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}(t)) \cdot {}_d \mu_N^{[2]}[\frac{l}{N}, \frac{j}{N}]$$

où les ${}_{d_N} fi_{N[\frac{i}{N}; \dots]}^{[*]}$ sont les $fi_{N[\frac{i}{N}; \dots]}^{[*]}$ découplés par les transformations (C.30) et (C.35) :

$$(C.53) \quad {}_{d_N} fi_{N[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) = fi_{N[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) - fi_{N[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) \cdot \mu_{N[\frac{j}{N}, \frac{k}{N}]}^{[2]} \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]}$$

et

$$(C.54) \quad {}_{d_N} fi_{N[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) = fi_{N[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) - fi_{N[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot \mu_N^{[0]}.$$

Pour prendre un exemple, les forces intérieures sont supposées être constituées de forces intérieures de rappel (élasticité) et d'amortissement (viscosité). Les moments de ces forces sont notées respectivement $fi_{N0[\frac{i}{N}; \dots]}^{[*]}$ et $fi_{N1[\frac{i}{N}; \dots]}^{[*]}$:

$$(C.55) \quad fi_{N[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) = fi_{N0[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) + fi_{N1[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t)$$

et

$$(C.56) \quad fi_{N[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) = fi_{N0[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) + fi_{N1[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t).$$

Les transformations (C.53) et (C.54) étant linéaires par rapport aux $fi_{N[\frac{i}{N}; \dots]}^{[*]}$, ces moments découplés s'écrivent

$${}_{d_N} fi_{N[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) = {}_{d_N} fi_{N0[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) + {}_{d_N} fi_{N1[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t)$$

et

$${}_{d_N} fi_{N[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) = {}_{d_N} fi_{N0[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) + {}_{d_N} fi_{N1[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t).$$

Les équations (C.51) et (C.52) deviennent

$$(C.57) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[0]}(t)}{dt^2} = (\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) \cdot ({}_{d_N} fi_{N0[\frac{j}{N}]}^{[0]}(t) + {}_{d_N} fi_{N1[\frac{j}{N}]}^{[0]}(t)) + {}_{d_N} fe_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)) \cdot {}_d \mu_N^{[0]}$$

¹⁹ $p_{[\frac{i}{N}; \frac{j}{A}]}^{[1]}$ est la transposée de $p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$, cf. convention de notation (C.39).

et

$$(C.58) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t)}{dt^2} = (\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}(t) \cdot ({}_{d_N} f i_{N0[\frac{k}{N}; \frac{l}{N}]}^{[1]}(t) + {}_{d_N} f i_{N1[\frac{k}{N}; \frac{l}{N}]}^{[1]}(t)) \\ + {}_{d_N} f e_{N[\frac{i}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}(t)) \cdot {}_d \mu_{N[\frac{l}{N}; \frac{j}{N}]}^{[2]}.$$

Nous posons *arbitrairement* comme condition que les forces intérieures ne doivent pas modifier l'équation de translation (C.57). Leur moment de degré 0 en G_N doit donc être nul :

$$(C.59) \quad {}_{d_N} f i_{N0[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) = 0_i$$

et

$$(C.60) \quad {}_{d_N} f i_{N1[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) = 0_i.$$

Nous posons tout aussi arbitrairement que leur moment de degré 1 est de la forme

$$(C.61) \quad {}_{d_N} f i_{N0[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) = -\frac{k_0}{2} \cdot (p_{[\frac{i}{N}; \frac{k}{A}]}^{[1]}(t) \cdot p_{[\frac{k}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) - \delta_{i,j}),$$

et

$$(C.62) \quad {}_{d_N} f i_{N1[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) = -k_1 \cdot (p_{[\frac{i}{N}; \frac{k}{A}]}^{[1]}(t) \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t)}{dt})^S$$

où k_0 et k_1 sont des scalaires représentant une rigidité et un amortissement globaux du corps.

L'inversion du système (C.30) et (C.35) s'écrit

$$(C.63) \quad \begin{cases} f e_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) = ({}_{d_N} f e_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) + {}_{d_N} f e_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) \cdot \mu_{N[\frac{j}{N}; \frac{k}{N}]}^{[2]} \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]}) \cdot \mathfrak{K}_N, \\ f e_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) = ({}_{d_N} f e_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) + {}_{d_N} f e_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot \mu_N^{[0]}) \cdot \mathfrak{K}_N, \end{cases}$$

où

$$(C.64) \quad \mathfrak{K}_N \stackrel{20}{=} \stackrel{d\acute{e}f}{=} (1 - m_{N[\frac{i}{N}]}^{[1]} \cdot \mu_{N[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[2]} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot \mu_N^{[0]})^{-1}.$$

Les moments des forces intérieures non découplés s'écrivent donc

$$f i_{N[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) = ({}_{d_N} f i_{N[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) + {}_{d_N} f i_{N[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) \cdot \mu_{N[\frac{j}{N}; \frac{k}{N}]}^{[2]} \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]}) \cdot \mathfrak{K}_N$$

et

$$f i_{N[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) = ({}_{d_N} f i_{N[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) + {}_{d_N} f i_{N[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot \mu_N^{[0]}) \cdot \mathfrak{K}_N,$$

ce qui donne pour les moments des forces intérieures de rappel et d'amortissement non découplés

²⁰ \mathfrak{K} : troisième lettre de l'alphabet sanskrit, se prononce i bref.

$$(C.65) \quad f_{N^*[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) = ({}_{d_N}f_{N^*[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) + {}_{d_N}f_{N^*[\frac{i}{N};\frac{j}{N}]}^{[1]}(t) \cdot \mu_{N[\frac{j}{N},\frac{k}{N}]}^{[2]} \cdot m_{N[\frac{k}{N}]}^{[1]}) \cdot \bar{\mathfrak{E}}_N$$

et

$$(C.66) \quad f_{N^*[\frac{i}{N};\frac{j}{N}]}^{[1]}(t) = ({}_{d_N}f_{N^*[\frac{i}{N};\frac{j}{N}]}^{[1]}(t) + {}_{d_N}f_{N^*[\frac{i}{N}]}^{[0]}(t) \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot \mu_N^{[0]}) \cdot \bar{\mathfrak{E}}_N.$$

La nullité des ${}_{d_N}f_{N^*[\frac{i}{N}]}^{[0]}$ n'entraîne pas celle des $f_{N^*[\frac{i}{N}]}^{[0]}$.

COMMENTAIRES

▼ La grandeur $p_{[\frac{*}{A};\frac{*}{N}]}^{[1]}$ ne satisfaisant pas exactement les conditions d'orthonormalité, ne peut pas être remplacée par $r_{\frac{*}{A},\frac{*}{N}}$. Ceci entraîne que dans cette approche, les notions de base liée B_N et donc de référentiel lié \mathcal{R}_N disparaissent. La notion de changement de référentiel pour les coordonnées d'un point, donnée par (C.12), est remplacée par (C.40) qui est un changement de variables. Le fait que $p_{[\frac{*}{A};\frac{*}{N}]}^{[1]}$ ne satisfasse pas exactement les conditions d'orthonormalité ne fait que correspondre à la réalité : la notion de corps rigide est une idéalisation.

Une conséquence de la prise en compte explicite des forces intérieures est que la notion de vecteur glissant disparaît : le moment de degré 1 des forces extérieures est modifié par un déplacement de leur point d'application dans une direction qui leur est colinéaire (cf. (C.46)). Une autre conséquence, proche de celle-ci, est que si le principe d'opposition des forces d'action et de réaction dans une liaison (ici intérieure) est vérifié, ces forces ont obligatoirement un point d'application différent : toutes les forces sont obligatoirement des forces à distance. ▲

Récapitulation

L'EE couplée est

$$(C.67) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} \cdot m_N^{[0]} + \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A};\frac{j}{N}]}^{[1]}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} \\ \quad = \pi_{[\frac{i}{A};\frac{j}{N}]}^{[1]}(t) \cdot (f_{N0[\frac{j}{N}]}^{[0]}(t) + f_{N1[\frac{j}{N}]}^{[0]}(t)) + f_{N[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t), \\ (2) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} + \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A};\frac{k}{N}]}^{[1]}(t)}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{k}{N},\frac{j}{N}]}^{[2]} \\ \quad = \pi_{[\frac{i}{A};\frac{k}{N}]}^{[1]}(t) \cdot (f_{N0[\frac{k}{N};\frac{j}{N}]}^{[1]}(t) + f_{N1[\frac{k}{N};\frac{j}{N}]}^{[1]}(t)) + f_{N[\frac{i}{A};\frac{j}{N}]}^{[1]}(t), \end{array} \right.$$

plus les relations triviales pour $dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}/dt$ et $dp_{[\frac{*}{A};\frac{*}{N}]}^{[1]}/dt$. L'EE découplée correspondante est

(seuls des tenseurs d'ordre 0 ou 1 sont utilisés ici).

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$(C.70) \quad \frac{dq_{[\frac{i}{A}; \frac{j_1}{N}, \dots, \frac{j_p}{N}]}^{[p]}(t)}{dt} \Big|^{21} = f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j_1}{N}, \dots, \frac{j_p}{N}]}^{[p]}(t)$$

où

$$(C.71) \quad q_{[\frac{i}{A}; \frac{j_1}{N}, \dots, \frac{j_p}{N}]}^{[p]}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} dm(x_N^*) \cdot \frac{dx_{\frac{i}{A}}(t, x_N^*)}{dt} \cdot x_{\frac{j_1}{N}} \cdots x_{\frac{j_p}{N}},$$

$$= \sum_{q=0, n} \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{k_1}{N}, \dots, \frac{k_q}{N}]}^{[q]}(t)}{dt} \cdot m_{N[\frac{j_1}{N}, \dots, \frac{j_p}{N}, \frac{k_1}{N}, \dots, \frac{k_q}{N}]}^{[p+q]},$$

: moment de degré p par rapport au point O_N des quantités de mouvement.

$$f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j_1}{N}, \dots, \frac{j_p}{N}]}^{[p]}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x_N^* \in \mathbb{R}^3} df_{N \frac{i}{A}}(t, x_N^*) \cdot x_{\frac{j_1}{N}} \cdots x_{\frac{j_p}{N}},$$

: moment de degré p par rapport au point O_N des forces intérieures, qui doivent donc être modélisées, et des forces extérieures.

Dans (C.71), $m_{N[\frac{i_1}{N}, \dots, \frac{i_{p+q}}{N}]}^{[p+q]}$ est le moment de degré $p+q$ des masses.

L'EE explicite des VE $p_{[\frac{i}{A}; \frac{*}{N}, \dots, \frac{*}{N}]}^{[q]}$ pour $q = 0$ à n , est donnée par l'inversion du système d'équations (C.70) pour $p = 0$ à n . L'EE découplée de ces VE est donnée par l'inversion par bloc de ce système. Le passage par ce découplage n'est pas une nécessité. Il permet juste une analyse plus aisée des phénomènes.

D'autres champs de déplacement que celui défini en (C.69), par exemple des polynômes orthogonaux, peuvent être utilisés.

²¹Les notations p et q utilisées dans cette étude sont l'inverse des notations habituelles de la mécanique analytique.

Bibliographie

- [1] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, second ed., GTM, no. 60, Springer-Verlag, 1989.
 - [2] F. R. Gantmacher, *Théorie des matrices*, Tome 1, Dunod, 1966.
 - [3] H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison-Wesley, 1956.
 - [4] W. Kahan, *Cross-products and rotations in 2- and 3- dimensional euclidian spaces*, Notes de cours, H110, UC Berkeley, November 2003.
 - [5] L. Maisonoble, *MARMOTTES*, Documentation mathématique, éd. 4, rév. 0, CNES, fév. 2002.
-

Annexe D

Représentations des potentiels

D.1 Représentations de φ	177
D.1.1 Représentation de φ connaissant φ_L et $\partial\varphi_C/\partial n$	177
D.1.1.1 Unicité de 1g	178
D.1.1.2 Représentation de φ	179
D.1.2 Représentation de φ dans un domaine connaissant φ et $\partial\varphi/\partial\nu$ sur une partie de la frontière	183
D.1.2.1 Unicité de φ	183
D.1.2.2 Représentation de φ	185
D.1.3 Représentation de φ connaissant φ_C et $\partial\varphi_C/\partial n$	188
D.1.3.1 Unicité de φ	188
D.1.3.2 Représentation de φ	188
D.1.4 Relations entre les 1G_* et les 2G_*	191
D.1.4.1 Relations générales	191
D.1.4.2 Relations en C et en L	192
D.2 Représentations de $\partial\varphi/\partial t$	192
D.2.1 Représentation de $\partial\varphi/\partial t$ connaissant $\partial\varphi_L/\partial t$ et $\partial^2\varphi_C/\partial t \partial n$	193
D.2.2 Représentation de $\partial\varphi/\partial t$ connaissant $\partial\varphi_C/\partial t$ et $\partial^2\varphi_C/\partial t \partial n$	194

L'objectif de cette annexe est de déterminer les représentations des potentiels φ et $\partial\varphi/\partial t$ dans E en fonction de leur valeur et de la valeur de leur dérivée normale sur ∂E ou sur une partie de ∂E . Plus précisément, pour φ , ces représentations sont demandées en fonction des valeurs de φ sur L ou sur C et des valeurs de $\partial\varphi/\partial n$ sur C , et pour $\partial\varphi/\partial t$, en fonction des valeurs de $\partial\varphi/\partial t$ sur L ou sur C et des valeurs de $\partial^2\varphi/\partial t \partial n$ sur C . Ces représentations doivent rester valides au voisinage de ces surfaces pour pouvoir en déduire l'expression des dérivées spatiales de φ et de $\partial\varphi/\partial t$ dans ces voisinages.

Pour simplifier les démonstrations, dans cette annexe le fond F est supposé horizontal à une profondeur h .

D.1 Représentations de φ

Les deux hypothèses fondamentales faite sur φ donnant les représentations recherchées sont

- 1) l'harmonicité (cf. (4.12));
- 2) le repos du fluide à l'infini horizontal.

Cette deuxième condition est exprimée arbitrairement par l'existence d'une représentation asymptotique de φ :

$$(D.1) \quad \varphi(x_r, x_\theta, x_3) \approx \int_0^\infty d\alpha \cdot f_\varphi(\alpha, x_\theta, x_3) \cdot x_r^{-\alpha}, \quad \text{quand } x_r \rightarrow \infty$$

où x_r , x_θ et x_3 sont les coordonnées cylindriques du point de coordonnées (cartésiennes) x_* et où f_φ est une fonction ou une distribution arbitraire.

D.1.1 Représentation de φ connaissant φ_L et $\partial\varphi_C/\partial n$

Considérons la fonction de Green 1g satisfaisant

$$(D.2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (1) & \frac{\partial^2 {}^1g(x_*; y_*)}{(\partial y_i)^2} = -\delta(x_* - y_*), \quad \forall x_* \in E, \quad \forall y_* \in E, \\ (2) & \nu_i(y_*) \cdot \frac{\partial {}^1g(x_*; y_*)}{\partial y_i} = 0, \quad \forall x_* \in E, \quad \forall y_* \in C, \\ (3) & {}^1g(x_*; y_*) = 0, \quad \forall x_* \in E, \quad \forall y_* \in L, \\ (4) & \nu_i(y_*) \cdot \frac{\partial {}^1g(x_*; y_*)}{\partial y_i} = 0, \quad \forall x_* \in E, \quad \forall y_* \in F, \\ (5) & {}^1g(x_*; y_r, y_\theta, y_3) \approx \int_0^\infty d\alpha \cdot f_{1g}(\alpha, y_\theta, y_3) \cdot y_r^{-\alpha}, \quad \forall x_* \in E, \quad y_r \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

où y_r , y_θ et y_3 sont les coordonnées cylindriques du point de coordonnées y_* et où f_{1g} est une fonction ou une distribution arbitraire.

D.1.1.1 Unicité de 1g

L'unicité de la solution de ce problème se démontre de façon classique : la première formule de Green¹ est appliquée à une fonction $({}^1g - {}^1h)(x_*; y_*)$ de la façon suivante

$$(D.3) \quad \begin{aligned} & \int_{y_* \in E} |dy_*| \cdot \left(\frac{\partial^2 ({}^1g - {}^1h)}{(\partial y_i)^2} \cdot ({}^1g - {}^1h) + \left(\frac{\partial ({}^1g - {}^1h)}{\partial y_i} \right)^2 \right) \\ &= \int_{y_* \in \partial E} d\nu_i(y_*) \cdot \frac{\partial ({}^1g - {}^1h)}{\partial y_i} \cdot ({}^1g - {}^1h), \quad \forall x_* \in E, \end{aligned}$$

où $\partial E \stackrel{\text{déf}}{=} C \cup L \cup F \cup F_\infty$ et où $d\nu_*$ est une abréviation de $ds \cdot \nu_*$ ². Dans (\uparrow), comme dans toutes les formules de Green utilisées dans cette étude, ν_* est la normale extérieure. Tous les termes de la $\int_{\partial E}$ sont de la forme

$$\int_{y_* \in \partial E} d\nu_i(y_*) \cdot \frac{\partial \bullet(x_*; y_*)}{\partial y_i} \cdot \circ(x_*; y_*)$$

¹Une grande fantaisie existe quand à la numérotation des formules de Green. La numérotation adoptée dans toute l'étude est celle de [1].

²Dans cette annexe certaines normales sont unitaires. Elles sont notées ν . Les normales n gardent leur définition ((4.38) pour $n_{C \frac{*}{\bar{A}}}$ et (4.25) pour $n_{L \frac{*}{\bar{A}}}$).

où \bullet et \circ représentent 1g ou 1h . Si ces fonctions satisfont (D.2),

- (D.2.1) (pour 1g et 1h) fait que le premier terme de l'intégrand de la \int_E est nul ;
- (D.2.2-4) (pour 1g et 1h) fait que les intégrands des \int_C , \int_L et \int_F sont nuls ;
- (D.2.5) (pour 1g et 1h) fait que l'intégrand de \int_{F_∞} est nul. Ce point demande à être démontré.

DÉMONSTRATION

▼ Si F_∞ est un cylindre circulaire vertical dont l'axe passe par l'origine des coordonnées, de rayon y_r et avec l'origine des coordonnées à la même altitude que la surface libre à l'infini, les termes de la \int_{F_∞} s'écrivent

$$\int_0^{2\pi} dy_\theta \int_{-h}^0 dy_3 \cdot y_r \cdot \frac{\partial \bullet(x_*; y_r, y_\theta, y_3)}{\partial y_r} \cdot \circ(x_*; y_r, y_\theta, y_3).$$

Lorsque y_r tend vers l'infini, (D.2.5) pour 1g et/ou 1h fait que cette \int est de la forme

$$\int_0^{2\pi} dy_\theta \int_{-h}^0 dy_3 \cdot y_r \cdot \int_0^\infty d\alpha \cdot f_\bullet(\alpha, y_\theta, y_3) \cdot y_r^{-\alpha-1} \cdot \int_0^\infty d\beta \cdot f_\circ(\beta, y_\theta, y_3) \cdot y_r^{-\beta}$$

soit

$$\int_0^{2\pi} dy_\theta \int_{-h}^0 dy_3 \cdot \int_0^\infty d\alpha \cdot f_\bullet(\alpha, y_\theta, y_3) \cdot y_r^{-\alpha} \cdot \int_0^\infty d\beta \cdot f_\circ(\beta, y_\theta, y_3) \cdot y_r^{-\beta}.$$

Lorsque y_r tend vers l'infini, les $\int d\alpha$ et $\int d\beta$ tendent vers 0. L'intégrale tend donc aussi vers 0 : tous les termes de la \int_{F_∞} tendent vers 0 quand y_r tend vers l'infini. ▲

L'équation (D.3) est donc finalement

$$\int_{y_* \in E} |dy_*| \cdot \left(\left(\frac{\partial({}^1g - {}^1h)}{\partial y_i} \right)^2 \right) = 0, \quad \forall x_* \in E,$$

ce qui montre que ${}^1g \equiv {}^1h$ à une constante près.

D.1.1.2 Représentation de φ

La représentation de φ est obtenue en appliquant la deuxième formule de Green à φ et à 1g de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\text{(D.4)} \quad & \int_{y_* \in E} |dy_*| \cdot \left(\frac{\partial^2 {}^1g(x_*; y_*)}{(\partial y_i)^2} \cdot \varphi(y_*) - {}^1g(x_*; y_*) \cdot \frac{\partial^2 \varphi(y_*)}{(\partial y_i)^2} \right) \\
& = \int_{y_* \in \partial E} d\nu_i(y_*) \cdot \left(\frac{\partial {}^1g(x_*; y_*)}{\partial y_i} \cdot \varphi(y_*) - {}^1g(x_*; y_*) \cdot \frac{\partial \varphi(y_*)}{\partial y_i} \right).
\end{aligned}$$

- (D.2.1) fait que le premier terme de la \int_E est $-\varphi(x_*)$;
- (4.12) fait que le deuxième terme de l'intégrand de la \int_E s'annule;
- (D.2.2) fait que le premier terme de l'intégrand de la \int_C s'annule;
- (D.2.3) fait que le deuxième terme de l'intégrand de la \int_L s'annule;
- (D.2.4) et (4.36.2) font que les deux termes de l'intégrand de la \int_F s'annulent;
- (D.1) et (D.2.5) font que les deux termes de la \int_{F_∞} s'annulent. La démonstration de ce point est identique à celle effectuée pour l'unicité de 1g avec \bullet et \circ représentant maintenant 1g ou φ .

REMARQUES

▼ La forme donnée aux conditions à l'infini horizontal (D.1) et (D.2.5) a uniquement pour objectif d'obtenir que F_∞ n'intervienne pas dans la représentation de φ . Toute autre condition suffisamment générale et donnant le même résultat pourrait convenir. Des conditions comme *La transformée de Fourier horizontale de φ existe* ou *L'énergie cinétique de φ est finie* pourraient être envisagées. Elles sont suffisantes pour le problème traité, mais nous n'avons pas réussi à en déduire ce résultat.

Dans cette approche, le comportement à l'infini horizontal de φ et de 1g est imposé. Cette question pourrait être abordée dans un autre sens : quel serait le comportement de φ à l'infini horizontal avec 1g satisfaisant (D.2.5) et F_∞ n'intervenant pas dans la représentation de φ . Cette approche est mathématiquement beaucoup plus difficile. ▲

L'équation (D.4) est donc finalement

$$(D.5) \quad \begin{aligned} \varphi(x_*) &= - \int_{y_* \in L} d\nu_i(y_*) \cdot \frac{\partial {}^1g(x_*; y_*)}{\partial y_i} \cdot \varphi(y_*) \\ &\quad + \int_{y_* \in C} d\nu_i(y_*) \cdot {}^1g(x_*; y_*) \cdot \frac{\partial \varphi(y_*)}{\partial y_i}, \quad \forall x_* \in E. \end{aligned}$$

Si ∂E satisfait une condition de Hölder, ce que nous supposons, la convergence des intégrales dans (D.5) est uniforme quand $x_* \in E$ tend vers ∂E (cf. [1] section VI.4 ou [2] section II.2.2-7). Cette équation peut donc être dérivée par rapport à x_* , y compris près de ∂E , ce qui donne

$$(D.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x_*)}{\partial x_i} &= - \int_{y_* \in L} d\nu_j(y_*) \cdot \frac{\partial^2 {}^1g(x_*; y_*)}{\partial x_i \partial y_j} \cdot \varphi(y_*) \\ &\quad + \int_{y_* \in C} d\nu_j(y_*) \cdot \frac{\partial {}^1g(x_*; y_*)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi(y_*)}{\partial y_j}, \quad \forall x_* \in E, \end{aligned}$$

et ainsi de suite pour les autres dérivées spatiales.

Dans toute l'étude nous utilisons $\partial c_c / \partial y_*$ pour définir la normale à C , sans supposer que cette normale soit unitaire. Dans (\uparrow), la \int_C doit être légèrement modifiée pour tenir compte de ce fait. Les équations (D.5) et (D.6) deviennent

$$(D.7) \quad \begin{aligned} \varphi(x_*) &= - \int_{y_* \in L} d\nu_i(y_*) \cdot \frac{\partial {}^1g(x_*; y_*)}{\partial y_i} \cdot \varphi(y_*) \\ &\quad + \int_{y_* \in C} ds(y_*) \cdot \left\| \frac{\partial c(y_*)}{\partial y_*} \right\|^{-1} \cdot {}^1g(x_*; y_*) \cdot \frac{\partial c(y_*)}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi(y_*)}{\partial y_j}, \quad \forall x_* \in E, \end{aligned}$$

$$(D.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x_*)}{\partial x_i} &= - \int_{y_* \in L} d\nu_j(y_*) \cdot \frac{\partial^2 {}^1g(x_*; y_*)}{\partial x_i \partial y_j} \cdot \varphi(y_*) \\ &\quad + \int_{y_* \in C} ds(y_*) \cdot \left\| \frac{\partial c(y_*)}{\partial y_*} \right\|^{-1} \cdot \frac{\partial {}^1g(x_*; y_*)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial c(y_*)}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi(y_*)}{\partial y_j}, \quad \forall x_* \in E, \end{aligned}$$

et ainsi de suite pour les autres dérivées spatiales. La convention sur les normales fait que $\partial c_c / \partial y_*$ doit être une normale extérieure à E .

Pour alléger l'écriture, (D.7) et (D.8) sont notées

$$(D.9) \quad \varphi(x_*) = (-{}^1\mathbf{G}_L(\varphi_L) + {}^1\mathbf{G}_{C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial y_i}))(x_*) \quad (x_* \text{ sous entendu } \in E)$$

et

$$(D.10) \quad \frac{\partial \varphi(x_*)}{\partial x_i} = (-\frac{\partial {}^1\mathbf{G}_L(\varphi_L)}{\partial x_i} + \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial y_j})}{\partial x_i})(x_*) \quad \text{idem},$$

où φ_L et φ_C représentent les valeurs de φ sur L et sur C et où

$$(D.11) \quad {}^1\mathbf{G}_L(\bullet_L)|^3(x_*)|^4 \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{y_* \in L} d\nu_i(y_*) \cdot \frac{\partial {}^1g(x_*; y_*)}{\partial y_i} \cdot \bullet(y_*),$$

$$(D.12) \quad {}^1\mathbf{G}_{C_n}(\bullet_C)(x_*) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{y_* \in C} ds(y_*) \cdot \|\frac{\partial c(y_*)}{\partial y_*}\|^{-1} \cdot {}^1g(x_*; y_*) \cdot \bullet(y_*),$$

$$\frac{\partial {}^1\mathbf{G}_L(\bullet_L)(x_*)}{\partial x_i} = \int_{y_* \in L} d\nu_j(y_*) \cdot \frac{\partial^2 {}^1g(x_*; y_*)}{\partial x_i \partial y_j} \cdot \bullet(y_*)$$

et

$$\frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C_n}(\bullet_C)(x_*)}{\partial x_i} = \int_{y_* \in C} ds(y_*) \cdot \|\frac{\partial c(y_*)}{\partial y_*}\|^{-1} \cdot \frac{\partial {}^1g(x_*; y_*)}{\partial x_i} \cdot \bullet(y_*).$$

Les valeurs de φ et de $\partial\varphi/\partial n$ ⁵ sur L et sur C s'écrivent

$$(D.13) \quad \varphi_L = -{}^1\mathbf{G}_{L,L}(\varphi_L) + {}^1\mathbf{G}_{L,C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial y_i}),$$

$$(D.14) \quad \varphi_C = -{}^1\mathbf{G}_{C,L}(\varphi_L) + {}^1\mathbf{G}_{C,C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial y_i}),$$

³Habituellement en mathématiques, la composition d'un opérateur linéaire avec son argument est représentée par un produit (une multiplication). Nous conservons la notation par composition pour conserver l'information sur la portée des opérateurs, qui n'est pas toujours immédiate dans l'étude.

⁴Cet argument représente la valeur de la variable où est demandé le résultat. Si cet argument correspond à L ou à C , il est supprimé et le nom de cette surface est mis en premier indice droit. Par exemple pour $x_* \in C$, cet opérateur est noté ${}^1\mathbf{G}_{C,L}(\bullet_L)$.

⁵Les $\partial_{\bullet_S}/\partial n$ (qui n'apparaissent que dans le texte, pas dans les équations) gardent leur signification, définie par (4.37) pour $S = C$ et par

$$\frac{\partial \bullet_L}{\partial n} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial \psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bullet_L}{\partial x_i}$$

pour $S = L$.

$$(D.15) \quad \frac{\partial \psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_L}{\partial x_i} = - \frac{\partial \psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,L}}{\partial x_i}(\varphi_L) + \frac{\partial \psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial y_j} \right)$$

et

$$(D.16) \quad \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} = - \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,L}}{\partial x_i}(\varphi_L) + \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_C}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial y_j} \right)$$

(pour les ${}^1\mathbf{G}_{*,*}$, le $\partial/\partial x_i$ correspond au premier indice).

Les grandeurs φ_L et $\partial\varphi_C/\partial n$ étant indépendantes, (D.13) et (D.16) ne peuvent être vérifiées que si

$$(D.17) \quad {}^1\mathbf{G}_{L,L} = -\boldsymbol{\delta},$$

$$(D.18) \quad {}^1\mathbf{G}_{L,C_n} = \mathbf{0},$$

$$(D.19) \quad \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,L}}{\partial x_i} = \mathbf{0}$$

et

$$(D.20) \quad \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} = \boldsymbol{\delta}.$$

Les seules équations apportant une information sont donc (D.14) et (D.15).

D.1.2 Représentation de φ dans un domaine connaissant φ et $\partial\varphi/\partial\nu$ sur une partie de la frontière

D.1.2.1 Unicité de φ

Nous allons d'abord démontrer un théorème d'unicité de la valeur de φ dans un domaine D connaissant la valeur de φ et de $\partial\varphi/\partial\nu$ ⁶ sur une partie non vide de la frontière de D .

⁶Cette notation correspond à la dérivée normale habituelle (unitaire) :

$$\frac{\partial \bullet_s}{\partial \nu} \stackrel{\text{déf}}{=} \nu_i \cdot \frac{\partial \bullet_s}{\partial x_i}.$$

Comme pour les $\partial \bullet_s / \partial n$, cette notation n'apparaît que dans le texte, pas dans les équations (cf. note 10 page 44).

Théorème 2 : *Une fonction harmonique est définie de façon unique par sa valeur et la valeur de sa dérivée normale sur une surface non vide dans tout le domaine où elle peut être prolongée analytiquement à partir de cette surface.*⁷

DÉMONSTRATION

▼ Considérons un domaine fini simplement connexe D de frontière ∂D suffisamment régulière et le domaine complémentaire D' . La frontière ∂D ne fait partie ni de D ni de D' . Le potentiel φ est par hypothèse harmonique dans D . La troisième formule de Green peut donc s'appliquer :

(D.21)

$$-\int_{y_* \in \partial D} d\nu_i(y_*) \cdot \left(\frac{\partial g(x_*; y_*)}{\partial y_i} \cdot \varphi(y_*) - g(x_*; y_*) \cdot \frac{\partial \varphi(y_*)}{\partial y_i} \right) = \begin{cases} (1) \varphi(x_*) & \forall x_* \in D, \\ (2) 0 & \forall x_* \in D', \end{cases}$$

où

$$g(x_*; y_*) = \frac{1}{4\pi \cdot r(x_*; y_*)}$$

(ν_* est la normale extérieure à D).

La frontière ∂D est partagée deux parties : ∂D_1 et ∂D_2 , non vides. Si φ et $\partial\varphi/\partial\nu$ sont nuls disons sur ∂D_2 , ceci revient dans (↑) à n'intégrer que sur ∂D_1 . Cette \int définit toujours une fonction analytique dans D (et dans D'). Étant nulle dans D' ((↑.2) est toujours valide), par prolongement analytique elle est nulle dans D : une fonction harmonique dont la valeur et la valeur de la dérivée normale sur une surface non vide sont nulles, est nulle partout où elle peut être prolongée analytiquement à partir de cette surface.

L'unicité s'obtient de façon classique par la différence entre deux fonctions harmoniques dont les valeurs et les valeurs de la dérivée normale sur une surface non vide sont respectivement identiques.

Le domaine de validité de ce théorème est celui de la troisième formule de Green. ▲

Ce théorème peut être considéré comme une variante globale du théorème de Cauchy-Kovalevski.

⁷Ce théorème est dû à Marc Lenoir, ENSTA/SMP, Paris, communication orale, 26 juillet 1994.

D.1.2.2 Représentation de φ

L'équation (D.21.1) est une représentation de φ dans D à partir des valeurs de φ et de $\partial\varphi/\partial\nu$ sur ∂D , mais ce n'est pas une représentation libre en ce qu'une seule des deux conditions sur ∂D définit de façon unique φ dans D . Les grandeurs φ et $\partial\varphi/\partial\nu$ doivent donc satisfaire une condition de compatibilité. Cette condition est donnée par le fait que la partie régulière de (D.21) sur ∂D doit être telle que (D.21.1) et (D.21.2) sont vérifiées. La partie singulière de (D.21), c.-à-d. celle donnant le saut de potentiel à la traversée de ∂D , se répartit en $\varphi/2$ dans D et $-\varphi/2$ dans D' . Les conditions (D.21.1) et (D.21.2) sont donc vérifiées si la partie régulière de (D.21) (sur ∂D) est égale à $\varphi/2$, ce qui s'exprime par

$$(D.22) \quad -\text{vp} \int_{y_* \in \partial D} d\nu_i(y_*) \cdot \left(\frac{\partial g(x_*; y_*)}{\partial y_i} \cdot \varphi(y_*) - g(x_*; y_*) \cdot \frac{\partial \varphi(y_*)}{\partial y_i} \right) = \frac{\varphi(x_*)}{2} \quad \forall x_* \in \partial D.$$

Cette condition est bien adaptée au cas où l'inconnue est φ , c.-à-d. si $\partial\varphi/\partial\nu$ est donné. Le problème à résoudre est une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce, qui est ici bien conditionnée.

Dans le cas où c'est φ qui est donné, une équation du même type par rapport à l'inconnue $\partial\varphi/\partial\nu$ peut être obtenue par $\nu_i \cdot \partial/\partial x_i(\uparrow)$:

$$(D.23) \quad -\nu_i(x_*) \cdot \text{vp} \int_{y_* \in \partial D} d\nu_j(y_*) \cdot \left(\frac{\partial^2 g(x_*; y_*)}{\partial x_i \partial y_j} \cdot \varphi(y_*) - \frac{\partial g(x_*; y_*)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi(y_*)}{\partial y_j} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)(x_*),$$

$$\forall x_* \in \partial D.$$

Pour obtenir la représentation demandée, les $\int_{\partial D}$ dans (D.22) et dans (\uparrow) sont décomposées en $\int_{\partial D_1}$ et $\int_{\partial D_2}$. Pour alléger l'écriture, ceci est noté

$$(D.24) \quad -\mathbf{G}_{1,1}(\varphi_1) + \mathbf{G}_{1,1\nu}(\nu_i \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i}) - \mathbf{G}_{1,2}(\varphi_2) + \mathbf{G}_{1,2\nu}(\nu_i \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i}) = \frac{\varphi_1}{2},$$

$$(D.25) \quad -\mathbf{G}_{2,1}(\varphi_1) + \mathbf{G}_{2,1\nu}(\nu_i \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i}) - \mathbf{G}_{2,2}(\varphi_2) + \mathbf{G}_{2,2\nu}(\nu_i \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i}) = \frac{\varphi_2}{2},$$

$$(D.26) \quad -\mathbf{G}_{1\nu,1}(\varphi_1) + \mathbf{G}_{1\nu,1\nu}(\nu_i \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i}) - \mathbf{G}_{1\nu,2}(\varphi_2) + \mathbf{G}_{1\nu,2\nu}(\nu_i \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i}) = \frac{1}{2} \cdot \nu_i \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}$$

et

(D.27)

$$- \mathbf{G}_{2\nu,1}(\varphi_1) + \mathbf{G}_{2\nu,1\nu}(\nu_i \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i}) - \mathbf{G}_{2\nu,2}(\varphi_2) + \mathbf{G}_{2\nu,2\nu}(\nu_i \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i}) = \frac{1}{2} \cdot \nu_i \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i},$$

où φ_i et $\partial\varphi_i/\partial\nu$ représentent les valeurs de φ et de $\partial\varphi/\partial\nu$ en ∂D_i (pour $i = 1, 2$) et où

$$\mathbf{G}_{i,j}(\bullet_j)(x_*) = [\text{vp}] \int_{y_* \in \partial D_j} d\nu_k(y_*) \cdot \frac{\partial g(x_*; y_*)}{\partial y_k} \cdot \bullet(y_*) \quad x_* \in \partial D_i,$$

$$\mathbf{G}_{i,j\nu}(\bullet_j)(x_*) = [\text{vp}] \int_{y_* \in \partial D_j} ds(y_*) \cdot g(x_*; y_*) \cdot \bullet(y_*) \quad x_* \in \partial D_i,$$

$$\mathbf{G}_{i\nu,j}(\bullet_j)(x_*) = \nu_k(x_*) \cdot [\text{vp}] \int_{y_* \in \partial D_j} d\nu_l(y_*) \cdot \frac{\partial^2 g(x_*; y_*)}{\partial x_k \partial y_l} \cdot \bullet(y_*) \quad x_* \in \partial D_i$$

et

$$\mathbf{G}_{i\nu,j\nu}(\bullet_j)(x_*) = \nu_k(x_*) \cdot [\text{vp}] \int_{y_* \in \partial D_j} ds(y_*) \cdot \frac{\partial g(x_*; y_*)}{\partial x_k} \cdot \bullet(y_*) \quad x_* \in \partial D_i$$

(pour $i = 1, 2$ et $j = 1, 2$), l'intégration en valeur principale n'intervenant évidemment que si $i = j$.

Une représentation de φ en fonction uniquement de disons φ_1 et $\partial\varphi_1/\partial\nu$ s'obtient en éliminant φ_2 et $\partial\varphi_2/\partial\nu$ de la représentation (D.21). Pour cela φ_2 et $\partial\varphi_2/\partial\nu$ doivent être exprimés en fonction de φ_1 et de $\partial\varphi_1/\partial\nu$. Parmi les combinaisons possibles des équations (D.24) à (D.27) donnant ces expressions, la mieux conditionnée pour cette élimination est (D.25) - (D.27), qui s'écrit

$$\mathbf{A} \left(\begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \nu_i \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{B} \left(\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \nu_j \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_j} \end{bmatrix} \right)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \mathbf{G}_{2,2} & -\mathbf{G}_{2,2\nu} \\ \mathbf{G}_{2\nu,2} & \frac{1}{2} - \mathbf{G}_{2\nu,2\nu} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{G}_{2,1} & \mathbf{G}_{2,1\nu} \\ -\mathbf{G}_{2\nu,1} & \mathbf{G}_{2\nu,1\nu} \end{bmatrix}$$

(les coordonnées courant sur ∂D_1 sont maintenant les z_* , celles courant sur ∂D_2 restant les y_*).

Le théorème d'unicité fait qu'à φ_1 et $\partial\varphi_1/\partial\nu$ donnés correspond une seule valeur de φ_2 et de $\partial\varphi_2/\partial\nu$ et vice versa. Les opérateurs \mathbf{A} et \mathbf{B} sont donc inversibles, ce qui permet d'écrire

$$(D.28) \quad \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \nu_i \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \left(\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \nu_j \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_j} \end{bmatrix} \right)$$

où

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{2,1} & \mathbf{C}_{2,1\nu} \\ \mathbf{C}_{2\nu,1} & \mathbf{C}_{2\nu,1\nu} \end{bmatrix}.$$

Le report de cette expression dans (D.21) donne la représentation de φ dans D en fonction uniquement de φ_1 et de $\partial\varphi_1/\partial\nu$:

$$-\mathbf{G}_1(\varphi_1)(x_*) + \mathbf{G}_{1\nu}(\nu_i \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i})(x_*) = \begin{cases} (1) \varphi(x_*) & \forall x_* \in D, \\ (2) 0 & \forall x_* \in D', \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}_1(\bullet_1)(x_*) \\ &= \int_{z_* \in \partial D_1} ds(z_*) \cdot \nu_i(z_*) \cdot \frac{\partial g(x_*; z_*)}{\partial z_i} \cdot \bullet(z_*) \\ & \quad + \int_{y_* \in \partial D_2} ds(y_*) \cdot (\nu_i(y_*) \cdot \frac{\partial g(x_*; y_*)}{\partial y_i} \cdot \mathbf{C}_{2,1}(y_*, z_*) - g(x_*; y_*) \cdot \mathbf{C}_{2\nu,1}(y_*, z_*))(\bullet_1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}_{1\nu}(\bullet_1)(x_*) \\ &= \int_{z_* \in \partial D_1} ds(z_*) \cdot g(x_*; z_*) \cdot \bullet(z_*) \\ & \quad - \int_{y_* \in \partial D_2} ds(y_*) \cdot (\nu_i(y_*) \cdot \frac{\partial g(x_*; y_*)}{\partial y_i} \cdot \mathbf{C}_{2,1\nu}(y_*, z_*) - g(x_*; y_*) \cdot \mathbf{C}_{2\nu,1\nu}(y_*, z_*))(\bullet_1). \end{aligned}$$

Cette représentation tient compte des relations de compatibilité (D.22) et/ou (D.23) ((D.28) les représente). Les grandeurs φ_1 et $\partial\varphi_1/\partial\nu$ sont donc indépendantes, mais pas complètement : elles doivent quand même correspondre à un φ harmonique dans D .

Même si cette représentation ne dépend que de φ_1 et de $\partial\varphi_1/\partial\nu$, elle s'«appuie» sur ∂D_2 . La discontinuité de φ à la traversée de ∂D_2 est toujours présente : cette représentation ne donne pas le prolongement analytique de φ dans D' .

D.1.3 Représentation de φ connaissant φ_C et $\partial\varphi_C/\partial n$

L'objectif de cette section est d'obtenir une représentation de φ dans E en fonction uniquement des valeurs de φ et de $\partial\varphi/\partial n$ sur C . Les conditions (4.36.2) et (D.1) font que la représentation établie en section D.1.2 n'est pas directement utilisable. Une représentation adaptée au problème doit être établie.

D.1.3.1 Unicité de φ

L'ajout des conditions (4.36.2) et (D.1) à celles que φ doit satisfaire dans le théorème 2 page 184 ne peut que renforcer l'unicité. Ces conditions supplémentaires poseraient plutôt la question de l'existence de φ .

D.1.3.2 Représentation de φ

La représentation demandée est obtenue en appliquant la procédure utilisée en section D.1.2.2 à (D.5) et à (D.6), ∂D_1 et ∂D_2 devenant C et L . Du fait de l'utilisation de la solution 1g du problème (D.2), les conditions de compatibilités (D.22) et/ou (D.23) sont déjà prises en compte dans (D.5) et (D.6). La question n'est donc plus d'éliminer des données redondantes mais de remplacer une donnée par une autre : φ_L par φ_C .

Nous devons établir une relation entre φ_L , $\partial\varphi_L/\partial n$, φ_C et $\partial\varphi_C/\partial n$. Les seules équations apportant une information étant (D.14) et (D.15), cette relation s'écrit

$$(D.29) \quad {}^1\mathbf{A} \left(\begin{bmatrix} \varphi_L \\ \frac{\partial\psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi_L}{\partial x_i} \end{bmatrix} \right) = {}^1\mathbf{B} \left(\begin{bmatrix} \varphi_C \\ \frac{\partial c_C}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial\varphi_C}{\partial y_j} \end{bmatrix} \right)$$

où

$$(D.30) \quad {}^1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -{}^1\mathbf{G}_{C,L} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial\psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,L}}{\partial x_i} & \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix}$$

et

$$(D.31) \quad {}^1\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta & -{}^1\mathbf{G}_{C,C_n} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial\psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,C_n}}{\partial x_i} \end{bmatrix}$$

(les coordonnées courant sur L sont les x_* , celles courant sur C sont les y_*).

Le théorème d'unicité fait qu'à φ_L et $\partial\varphi_L/\partial n$ donnés correspond une seule valeur de φ_C et de $\partial\varphi_C/\partial n$ et vice versa. Les opérateurs ${}^1\mathbf{A}$ et ${}^1\mathbf{B}$ sont donc inversibles. L'équation (D.29) peut donc s'écrire

$$(D.32) \quad \begin{bmatrix} \varphi_L \\ \frac{\partial\psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi_L}{\partial x_i} \end{bmatrix} = {}^1\mathbf{C} \left(\begin{bmatrix} \varphi_C \\ \frac{\partial\varphi_C}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial\varphi_C}{\partial y_j} \end{bmatrix} \right)$$

où

$$(D.33) \quad {}^1\mathbf{C} = {}^1\mathbf{A}^{-1}({}^1\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{C}_{L,C} & {}^1\mathbf{C}_{L,C_n} \\ {}^1\mathbf{C}_{L_n,C} & {}^1\mathbf{C}_{L_n,C_n} \end{bmatrix}.$$

L'expression de ${}^1\mathbf{A}^{-1}$ est

$${}^1\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -{}^1\mathbf{G}_{C,L}^{-1} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial\psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,L}}{\partial x_i} ({}^1\mathbf{G}_{C,L}^{-1}) & \delta \end{bmatrix},$$

ce qui montre que ${}^1\mathbf{G}_{C,L}$ est inversible. Le report de (†) et de (D.31) dans (D.33) donne

$$(D.34) \quad {}^1\mathbf{C}_{L,C} = -{}^1\mathbf{G}_{C,L}^{-1},$$

$$(D.35) \quad {}^1\mathbf{C}_{L,C_n} = {}^1\mathbf{G}_{C,L}^{-1}({}^1\mathbf{G}_{C,C_n}),$$

$${}^1\mathbf{C}_{L_n,C} = \frac{\partial\psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,L}}{\partial x_i} ({}^1\mathbf{G}_{C,L}^{-1})$$

et

$${}^1\mathbf{C}_{L_n,C_n} = \frac{\partial\psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,C_n}}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi_L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{L,L}}{\partial x_i} ({}^1\mathbf{G}_{C,L}^{-1}({}^1\mathbf{G}_{C,C_n})).$$

Le report de la première ligne de (D.32) compte tenu de (D.34) et de (D.35) dans (D.9) donne la représentation de φ dans E en fonction uniquement de φ_C et de $\partial\varphi_C/\partial n$:

$$(D.36) \quad \varphi(x_*) = (-{}^2\mathbf{G}_C(\varphi_C) + {}^2\mathbf{G}_{C_n}(\frac{\partial c_C}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial y_i}))(x_*)$$

où

$$(D.37) \quad {}^2\mathbf{G}_C \stackrel{\text{d\'ef}}{=} -{}^1\mathbf{G}_L({}^1\mathbf{G}_{C,L}^{-1})$$

et

$$(D.38) \quad {}^2\mathbf{G}_{C_n} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} {}^1\mathbf{G}_{C_n} - {}^1\mathbf{G}_L({}^1\mathbf{G}_{C,L}^{-1}({}^1\mathbf{G}_{C,C_n})).$$

La représentation de la dérivée spatiale de φ est donnée par le report de (D.32) dans (D.10) ou, ce qui est équivalent, par $\partial/\partial x_*$ de (D.36) :

$$(D.39) \quad \frac{\partial \varphi(x_*)}{\partial x_i} = (-\frac{\partial {}^2\mathbf{G}_C}{\partial x_i}(\varphi_C) + \frac{\partial {}^2\mathbf{G}_{C_n}}{\partial x_i}(\frac{\partial c_C}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial y_j}))(x_*)$$

où

$$(D.40) \quad \frac{\partial {}^2\mathbf{G}_C}{\partial x_i} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_L}{\partial x_i}({}^1\mathbf{C}_{L,C})$$

et

$$\frac{\partial {}^2\mathbf{G}_{C_n}}{\partial x_i} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C_n}}{\partial x_i} - \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_L}{\partial x_i}({}^1\mathbf{C}_{L,C_n}).$$

De même, le report de (D.34) dans (D.40) et de (D.35) dans (↑) donne

$$(D.41) \quad \frac{\partial {}^2\mathbf{G}_C}{\partial x_i} = -\frac{\partial {}^1\mathbf{G}_L}{\partial x_i}({}^1\mathbf{G}_{C,L}^{-1})$$

et

$$(D.42) \quad \frac{\partial {}^2\mathbf{G}_{C_n}}{\partial x_i} = \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_{C_n}}{\partial x_i} - \frac{\partial {}^1\mathbf{G}_L}{\partial x_i}({}^1\mathbf{G}_{C,L}^{-1}({}^1\mathbf{G}_{C,C_n})).$$

Les autres dérivées spatiales s'écrivent de la même manière.

Les grandeurs φ_C et $\partial\varphi_C/\partial n$ étant indépendantes, les expressions donnant ces grandeurs avec les représentations (D.36) et (D.39) ne peuvent être vérifiées que si

$$(D.43) \quad {}^2\mathbf{G}_{C,C} = -\boldsymbol{\delta},$$

$$(D.44) \quad {}^2\mathbf{G}_{C,C_n} = \mathbf{0},$$

$$(D.45) \quad \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^2\mathbf{G}_{C,C}}{\partial x_i} = \mathbf{0}$$

et

$$(D.46) \quad \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial {}^2\mathbf{G}_{C,C_n}}{\partial x_i} = \boldsymbol{\delta},$$

ce qui traduit le fait que ces représentations n'apportent pas d'information pour $x_* \in C$.

D.1.4 Relations entre les ${}^1\mathbf{G}_*$ et les ${}^2\mathbf{G}_*$

D.1.4.1 Relations générales

Les expressions des ${}^2\mathbf{G}_*$ en fonction des ${}^1\mathbf{G}_*$ sont données par (D.37) et (D.38) et par (D.41) et (D.42) pour leur dérivée spatiale. Les inverses de ces expressions peuvent être utiles. La comparaison des représentations (D.14) et (D.36) montre que pour les obtenir nous devons établir une relation entre φ_L , φ_C et $\partial\varphi_C/\partial n$. Cette relation peut être donnée par (D.36) pour $x_* \in L$ et par la relation triviale pour $\partial\varphi_C/\partial n$, ce qui s'écrit

$$\begin{bmatrix} \varphi_L \\ \frac{\partial c_C}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial y_i} \end{bmatrix} = {}^2\mathbf{A} \begin{bmatrix} \varphi_C \\ \frac{\partial c_C}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial y_j} \end{bmatrix}$$

où

$${}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -{}^2\mathbf{G}_{L,C} & {}^2\mathbf{G}_{L,C_n} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix}.$$

Le théorème d'unicité fait qu'à φ_C et $\partial\varphi_C/\partial n$ donnés correspond une seule valeur de φ_L . L'opérateur ${}^2\mathbf{A}$ est donc inversible, ce qui permet d'écrire

$$(D.47) \quad \begin{bmatrix} \varphi_C \\ \frac{\partial c_C}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial y_i} \end{bmatrix} = {}^2\mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_L \\ \frac{\partial c_C}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial y_j} \end{bmatrix}.$$

L'expression de ${}^2\mathbf{A}^{-1}$ est

$${}^2\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -{}^2\mathbf{G}_{L,C}^{-1} & {}^2\mathbf{G}_{L,C}^{-1}({}^2\mathbf{G}_{L,C_n}) \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix},$$

ce qui montre que ${}^2\mathbf{G}_{L,C}$ est inversible. Ceci est nécessaire pour que l'EE (4.57) puisse être mise sous forme canonique.

Le report de (D.47) dans (D.36) donne

$$\varphi(x_*) = ({}^2\mathbf{G}_C ({}^2\mathbf{G}_{L,C}^{-1}(\varphi_L)) + ({}^2\mathbf{G}_{C_n} - {}^2\mathbf{G}_C ({}^2\mathbf{G}_{L,C}^{-1}({}^2\mathbf{G}_{L,C_n})))) \left(\frac{\partial c_C}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial y_i} \right) (x_*).$$

L'identification des termes de (\uparrow) et de (D.9) donne

$$(D.48) \quad {}^1\mathbf{G}_L = -{}^2\mathbf{G}_C ({}^2\mathbf{G}_{L,C}^{-1})$$

et

$$(D.49) \quad {}^1\mathbf{G}_{C_n} = {}^2\mathbf{G}_{C_n} - {}^2\mathbf{G}_C ({}^2\mathbf{G}_{L,C}^{-1} ({}^2\mathbf{G}_{L,C_n})).$$

Les inverses des relations (D.41) et (D.42) s'obtiennent par dérivation des opérateurs les plus extérieurs dans les deux relations ci-dessus.

D.1.4.2 Relations en C et en L

Des relations particulières sont obtenues avec les expressions en C et en L de (D.37), de (D.38), de (D.48) et de (D.49). Seules celles apportant des informations supplémentaire aux relations déjà établies sont conservées.

L'équation (D.37) en L s'écrit

$${}^2\mathbf{G}_{L,C} = -{}^1\mathbf{G}_{L,L} ({}^1\mathbf{G}_{C,L}^{-1}).$$

Le report de (D.17) dans (↑) donne

$${}^2\mathbf{G}_{L,C} = {}^1\mathbf{G}_{C,L}^{-1}.$$

Cette relation est la seule entre les ${}^1\mathbf{G}_{*,*}$ et les ${}^2\mathbf{G}_{*,*}$ utilisée dans l'étude. La relation inverse est obtenue par le report de (D.43) dans (D.48) en C .

Le report de (D.17) et de (D.18) dans (D.38) en L donne

$${}^2\mathbf{G}_{L,C_n} = {}^1\mathbf{G}_{C,L}^{-1} ({}^1\mathbf{G}_{C,C_n}).$$

Inversement, le report de (D.43) et de (D.44) dans (D.49) en C donne

$${}^1\mathbf{G}_{C,C_n} = {}^2\mathbf{G}_{L,C}^{-1} ({}^2\mathbf{G}_{L,C_n}).$$

D.2 Représentations de $\partial\varphi/\partial t$

De même que pour φ , les deux conditions que doit satisfaire $\partial\varphi/\partial t$ donnant les représentations recherchées sont

- 1) l'harmonicité;
- 2) le repos du fluide à l'infini horizontal.

La première condition est une conséquence de l'harmonicité de $\varphi : \partial/\partial\bullet$ de (4.12) donne

$$(D.50) \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \bullet (\partial x_i)^2} = 0 :$$

toutes les dérivées de φ sont harmoniques, ce qui vaut pour $\partial\varphi/\partial t$.

La deuxième condition est exprimée tout aussi arbitrairement que pour φ par l'existence d'une représentation asymptotique de $\partial\varphi/\partial t$:

$$(D.51) \quad \frac{\partial\varphi(x_r, x_\theta, x_3)}{\partial t} \approx \int_0^\infty d\alpha \cdot f_{\varphi_t}(\alpha, x_\theta, x_3) \cdot x_r^{-\alpha}, \quad \text{quand } x_r \rightarrow \infty.$$

D.2.1 Représentation de $\partial\varphi/\partial t$ connaissant $\partial\varphi_L/\partial t$ et $\partial^2\varphi_C/\partial t \partial n$

Cette représentation est obtenue en appliquant la deuxième formule de Green à $\partial\varphi/\partial t$ et à 1g de la même manière que pour φ :

$$(D.52) \quad \begin{aligned} & \int_{y_* \in E} |dy_*| \cdot \left(\frac{\partial^2 {}^1g(x_*; y_*)}{(\partial y_i)^2} \cdot \frac{\partial\varphi(y_*)}{\partial t} - {}^1g(x_*; y_*) \cdot \frac{\partial^3 \varphi(y_*)}{\partial t (\partial y_i)^2} \right) \\ &= \int_{y_* \in \partial E} d\nu_i(y_*) \cdot \left(\frac{\partial {}^1g(x_*; y_*)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial\varphi(y_*)}{\partial t} - {}^1g(x_*; y_*) \cdot \frac{\partial^2 \varphi(y_*)}{\partial t \partial y_i} \right). \end{aligned}$$

- (D.2.1) fait que le premier terme de la \int_E est $-\partial\varphi(x_*)/\partial t$;
- (D.50) fait que le deuxième terme de l'intégrand de la \int_E s'annule ;
- (D.2.2) fait que le premier terme de l'intégrand de la \int_C s'annule ;
- (D.2.3) fait que le deuxième terme de l'intégrand de la \int_L s'annule ;
- (D.2.4) et (4.36.3) font que les deux termes de l'intégrand de la \int_F s'annulent. ;
- (D.2.5) et (D.51) font que les deux termes de la \int_{F_∞} s'annulent.

La représentation (D.52) est donc

$$(D.53) \quad \frac{\partial\varphi(x_*)}{\partial t} = (- {}^1\mathbf{G}_L \left(\frac{\partial\varphi_L}{\partial t} \right) + {}^1\mathbf{G}_{c_n} \left(\frac{\partial c_C}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial y_i} \right))(x_*),$$

où ${}^1\mathbf{G}_L$ et ${}^1\mathbf{G}_{c_n}$ gardent leur définition (D.11) et (D.12).

D.2.2 Représentation de $\partial\varphi/\partial t$ connaissant $\partial\varphi_C/\partial t$ et $\partial^2\varphi_C/\partial t \partial n$

La procédure suivie en section D.1.3.2 pour établir la représentation de φ en fonction de φ_C et de $\partial\varphi_C/\partial n$ est applicable à $\partial\varphi/\partial t$ en remplaçant la représentation (D.9) par la représentation (D.53). Ceci donne

$$\frac{\partial\varphi(x_*)}{\partial t} = \left(-{}^2\mathbf{G}_C \left(\frac{\partial\varphi_C}{\partial t} \right) + {}^2\mathbf{G}_{C_n} \left(\frac{\partial c_C}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial^2\varphi_C}{\partial t \partial y_i} \right) \right) (x_*)$$

où ${}^2\mathbf{G}_C$ et ${}^2\mathbf{G}_{C_n}$ gardent leur définition (D.37) et (D.38).

De même que pour les représentations de φ , les dérivées spatiales de $\partial\varphi/\partial t$ sont obtenues par dérivations de (D.53) et de (↑).

Bibliographie

- [1] O. D. Kellogg, *Foundations of potential theory*, Dover, 1954.
- [2] V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, Tome 4, Deuxième partie, Mir, 1984.

Annexe E

Application de la méthode des perturbations au mouvement d'un corps peu déformable

E.1	Présentation de la méthode des perturbations	196
E.1.1	Principe	196
E.1.2	Développement d'une condition	198
E.1.2.1	Étape 1	198
E.1.2.2	Étape 2	199
E.1.3	En pratique	199
E.1.4	Estimation d' ε	200
E.2	Application au mouvement d'un corps peu déformable	201
E.2.1	Équation d'évolution découplée	201
E.2.1.1	Développement du terme en $f^i_{N0[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$	201
E.2.1.2	Développement du terme en $f^i_{N1[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$	203
E.2.1.3	Développement de l'équation d'évolution	205
E.2.2	Équation d'évolution couplée	206
E.2.2.1	Développement du terme en $f^i_{N0[\frac{*}{N}]}^{[0]}$	206
E.2.2.2	Développement du terme en $f^i_{N1[\frac{*}{N}]}^{[0]}$	207
E.2.2.3	Développement du terme en $f^i_{N0[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$	208
E.2.2.4	Développement du terme en $f^i_{N1[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$	209
E.2.2.5	Développement de l'équation d'évolution	210

E.1 Présentation de la méthode des perturbations

E.1.1 Principe

La méthode des perturbations est destinée à traiter les problèmes de (petites) variations d'un phénomène à partir d'un état donné connu. Elle consiste à décomposer toutes les grandeurs inconnues f intervenant dans le problème en composantes d'ordres de grandeur décroissants :

$$(E.1) \quad f(t, x_*) \approx \tilde{f}(t, x_*) = (f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \dots)(t, x_*) \quad |^1$$

où $f^{(p)} \gg f^{(p+1)}$. De façon à manipuler les ordres de grandeur, (†) est réécrite en

$$(E.2) \quad \tilde{f}(t, x_*) = (f^{(0)} + \varepsilon \cdot {}_\varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 \cdot {}_\varepsilon f^{(2)} + \dots)(t, x_*)$$

où ${}_\varepsilon f^{(p)} \sim {}_\varepsilon f^{(p+1)}$ et ε est un paramètre fictif considéré comme $\ll 1$. Ce paramètre est une constante et est commun à toutes les grandeurs inconnues du problème².

Dans les conditions à satisfaire, des dérivées de f par rapport aux coordonnées \circ (t ou x_i) peuvent intervenir. Le fait qu' ε soit supposé constant fait que $\partial/\partial\circ(E.2)$ donne

$$(E.3) \quad \frac{\partial f}{\partial\circ}(t, x_*) \approx \frac{\partial \tilde{f}}{\partial\circ}(t, x_*) = \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\circ} + \varepsilon \cdot \frac{\partial {}_\varepsilon f^{(1)}}{\partial\circ} + \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial {}_\varepsilon f^{(2)}}{\partial\circ} + \dots \right)(t, x_*)$$

$$(E.4) \quad = \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\circ} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial\circ} + \frac{\partial f^{(2)}}{\partial\circ} + \dots \right)(t, x_*) \quad ,$$

et ainsi de suite pour les dérivées d'ordre supérieur.

Les décompositions (E.2), (E.3), etc. de chaque grandeur sont reportées dans les conditions à satisfaire. Pour chaque condition, les termes de même degré en

¹La variable t représente toute coordonnée connue dans tout le problème et x_* toute coordonnée éventuellement inconnue, c.-à-d. définie par des conditions à satisfaire, cf. annexe F, mais dans la présente annexe toutes ces coordonnées sont connues.

²Cette approche de la méthode des perturbations est légèrement différente de l'approche habituelle où ε représente la petitesse d'une grandeur physique particulière. Ici les grandeurs physiques correspondant à ε sont déterminées a posteriori, cf. section E.1.4, mais la mise en équations résultante est identique.

ε , c.-à-d. de même ordre de grandeur, sont regroupés. L'ensemble des conditions à un ordre donné forment le problème à résoudre pour cet ordre.

Cette procédure a pour résultat que

- (a) $\forall p$, toutes les équations multipliées par ε^p redonnent les mêmes équations où les ${}_{\varepsilon}f$ sont remplacés par des f ;
- (b) $\forall p$, le problème ne dépend que des ${}_{\varepsilon}f$ d'ordre p et inférieurs ;
- (c) Pour $p \geq 1$, le problème est linéaire par rapport aux ${}_{\varepsilon}f$ d'ordre p ;
- (d) Pour $p \geq 1$, les coefficients des ${}_{\varepsilon}f$ d'ordre p sont toujours les mêmes et ne dépendent donc que des ${}_{\varepsilon}f$ d'ordre 0 ;
- (e) pour $p = 1$, le problème est homogène c.-à-d. que tous les termes contiennent une grandeur d'ordre 1.

Le point (a) fait que cette méthode peut être présentée de la façon suivante

- (1) toutes les grandeurs inconnues sont décomposées en

$$\tilde{f}(t, x_*) = (f^{(0)} + \varepsilon \cdot f^{(1)} + \varepsilon^2 \cdot f^{(2)} + \dots)(t, x_*),$$

- (2) les conditions à satisfaire sont développées pour chaque ordre ;
- (3) les problèmes de chaque ordre sont résolus ;
- (4) la solution finale est obtenue sous la forme

$$\tilde{f}(t, x_*) = (f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \dots)(t, x_*)$$

en oubliant le ε !

Le point (b) fait que les problèmes peuvent être résolus par ordre croissant.

Le point (c) fait que la résolution des problèmes d'ordre 1 et supérieurs est envisageable. Par contre, les développements d'ordre 0 des conditions ayant les mêmes expressions que les conditions de départ, la solution du problème d'ordre 0 doit être connue par une autre méthode. Dans la méthode des perturbations, toutes les grandeurs d'ordre 0 sont donc supposées connues.

Le point (d) fait que seuls les seconds membres des équations changent en

fonction de l'ordre.

Pour les problèmes à résoudre, c.-à-d. pour les ordres 1 et supérieurs, les développements de toutes les conditions à satisfaire à un ordre p sont décomposés en termes contenant les grandeurs d'ordre p , qui sont appelés le premier membre (\triangleleft) des conditions et les autres, qui sont appelés le second membre (\triangleright) :

$$(E.5) \quad c^{(p)}(t, x_*) = (c_{\triangleleft}^{(p)} + c_{\triangleright}^{(p)})(t, x_*),$$

même s'ils ne sont pas au premier ou au second membre des équations manipulées.

E.1.2 Développement d'une condition

Le développement d'une condition à un ordre donné peut être obtenu par la procédure suivante :

E.1.2.1 Étape 1

Expression de $c^{(0)}$

Le développement d'ordre 0, $c^{(0)}$, est la condition exacte où toutes les grandeurs inconnues sont remplacées par les mêmes grandeurs d'ordre 0 : si la condition est

$$(E.6) \quad c(t, x_*) = 0,$$

où c est par exemple

$$(E.7) \quad c(t, x_*) = (f \cdot g)(t, x_*),$$

le développement d'ordre 0 de cette condition est

$$c^{(0)}(t, x_*) = 0,$$

où $c^{(0)}$ est

$$c^{(0)}(t, x_*) = (f^{(0)} \cdot g^{(0)})(t, x_*).$$

E.1.2.2 Étape 2

Expression de $c^{(p)}$

Le terme d'ordre p du développement, $c^{(p)}$, peut être obtenu à partir de $c^{(0)}$ de la façon suivante : chaque terme de $c^{(0)}$ est reproduit en autant de termes tels que la somme des ordres vaut p et les nombres constitués par les ordres de chaque terme sont tous différents. Le coefficient de chaque terme est 1. Par exemple avec le c donné par (E.7), les premiers $c^{(p)}$ sont

$$c^{(1)}(t, x_*) = (f^{(1)} \cdot g^{(0)} + f^{(0)} \cdot g^{(1)})(t, x_*),$$

$$c^{(2)}(t, x_*) = (f^{(2)} \cdot g^{(0)} + f^{(1)} \cdot g^{(1)} + f^{(0)} \cdot g^{(2)})(t, x_*),$$

$$c^{(3)}(t, x_*) = (f^{(3)} \cdot g^{(0)} + f^{(2)} \cdot g^{(1)} + f^{(1)} \cdot g^{(2)} + f^{(0)} \cdot g^{(3)})(t, x_*)$$

(un terme en f^n doit être «étalé» en $f \cdot f \cdots$, où tous les f sont considérés comme des grandeurs différentes).

Si un terme de la condition est une fonction d'une grandeur f , autre qu'un simple monôme, cette fonction est remplacée par son développement limité à partir de $f^{(0)}$ en utilisant la décomposition (E.1).

Expression de la condition d'ordre p

Pour chaque ordre, la condition (E.6) s'écrit

$$c^{(p)}(t, x_*) = 0.$$

Dans l'expression finale du développement d'une condition, la séparation en premier et second membres fait disparaître le caractère systématique de ces expressions.

E.1.3 En pratique

La méthode des perturbations n'est en toute rigueur valide que si les suites (E.1), (E.4), etc. convergent. La perte du caractère systématique des expressions des seconds membres évoquée ci-dessus fait que ces expressions peuvent rarement être établies à tous les ordres, ce qui interdit toute démonstration de convergence. La méthode des perturbations n'est donc en pratique utilisée que

comme une méthode d'approximation, c.-à-d. en s'imposant un ordre maximal donné. Le domaine de validité de la solution obtenue doit ensuite être déterminé en utilisant soit des calculs plus exacts soit des expériences réelles. Aujourd'hui en calculs de tenue à la mer, l'ordre maximal utilisé est au maximum de 2.

En définitive, la méthode des perturbations peut être vue simplement comme une méthode de décompositions du problème à résoudre en une suite de problèmes linéaires, sauf le premier, le domaine de validité de la solution obtenue étant déterminé a posteriori en fonction de l'ordre maximal utilisé. Ce domaine est évidemment moindre que celui des équations exactes.

E.1.4 Estimation d' ε

Une manière de définir le domaine de validité est de lui faire correspondre un domaine d' ε . Cette grandeur doit donc être estimée. D'après (E.1) et (E.2), l'ordre de grandeur d' ε est donné par

$$\tilde{\varepsilon}(t, x_*) = O\left(\frac{f^{(1)}}{f^{(0)}}\right)(t, x_*) = O\left(\frac{f^{(2)}}{f^{(1)}}\right)(t, x_*) = \text{etc.}$$

Si des dérivées interviennent dans le problème, d'après (E.3) et (E.4) cet ordre de grandeur est aussi donné par

$$\tilde{\varepsilon}(t, x_*) = O\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial_*} / \frac{\partial f^{(0)}}{\partial_*}\right)(t, x_*) = O\left(\frac{\partial f^{(2)}}{\partial_*} / \frac{\partial f^{(1)}}{\partial_*}\right)(t, x_*) = \text{etc.},$$

et ainsi de suite pour les dérivées d'ordres supérieurs.

Une autre manière, plus synthétique, d'estimer ε est de ne considérer que la décomposition des conditions non linéaires (les conditions linéaires sont satisfaites exactement), ce qui donne

$$\tilde{\varepsilon}(t, x_*) = O\left(\frac{c^{(1)}}{c^{(0)}}\right)(t, x_*) = O\left(\frac{c^{(2)}}{c^{(1)}}\right)(t, x_*) = \text{etc..}$$

En définissant à partir de ces $\tilde{\varepsilon}$ une norme d' ε ayant un sens par rapport au problème traité, le domaine de validité de la décomposition à l'ordre choisi pourrait correspondre à un domaine de cette norme. Tout reste à faire pour mettre en œuvre ces propositions.

E.2 Application au mouvement d'un corps peu déformable

Les grandeurs inconnues du problème exact sont $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}$, $dp_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}/dt$, $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ et $dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}/dt$, cf. annexe C. Le problème est développé à l'ordre 3. Ces inconnues sont donc décomposées en

$$(E.8) \quad \tilde{p}_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}(t) = (p_{[\frac{i}{A}]}^{0} + p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](1)} + p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](2)} + p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](3)})(t)$$

$$(E.9) \quad = (p_{[\frac{i}{A}]}^{0} + \varepsilon \cdot {}_{\varepsilon}p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](1)} + \varepsilon^2 \cdot {}_{\varepsilon}p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](2)} + \varepsilon^3 \cdot {}_{\varepsilon}p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](3)})(t)$$

et

$$(E.10) \quad \tilde{p}_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) = (p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} + p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{1} + p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](2)} + p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](3)})(t)$$

$$(E.11) \quad = (p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} + \varepsilon \cdot {}_{\varepsilon}p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{1} + \varepsilon^2 \cdot {}_{\varepsilon}p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](2)} + \varepsilon^3 \cdot {}_{\varepsilon}p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](3)})(t).$$

De même pour leurs dérivées temporelles. Les équations à satisfaire sont développées à partir de ces décompositions. Les équations obtenues pour chaque ordre p sont multipliées par ε^p pour obtenir des équations en $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}$, $dp_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}/dt$, $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}$ et $dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}/dt$ au lieu de ${}_{\varepsilon}p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}$, $d_{\varepsilon}p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}/dt$, ${}_{\varepsilon}p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}$ et $d_{\varepsilon}p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}/dt$. Ceci est implicite dans toute la suite.

E.2.1 Équation d'évolution découplée

L'EE découplée du problème est (C.68) avec les ${}_{d_N}f_{N^*[\frac{*}{N}]}^{[0]}$ nuls et les ${}_{d_N}f_{N^*[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ donnés par (C.61) et (C.62). Les seules non-linéarités sont dans les termes en ${}_{d_N}f_{N^*[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ dans (C.68.2).

E.2.1.1 Développement du terme en ${}_{d_N}f_{N^0[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$

Le terme en ${}_{d_N}f_{N^0[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$ (au second membre de (C.68.2)) est ${}_{d_N}f_{N^0[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot {}_{d_N}\mu_{N^0[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[2]}$ où

$$\begin{aligned} {}_{d_N}f_{N^0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} &= \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot {}_{d_N}f_{N^0[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}, \\ &= -\frac{k_0}{2} \cdot \Delta^0 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \end{aligned}$$

avec $\pi_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ donné par (C.50) et

$$\Delta^0 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} = p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} - \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}.$$

La matrice $\pi_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ est aussi décomposé en

$$(E.12) \quad \tilde{\pi}_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}(t) = (\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(1)} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(2)} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(3)})(t).$$

La relation (C.50), c.-à-d. $p_{[\frac{i}{N}; \frac{k}{A}]}^{[1]} \cdot \pi_{[\frac{k}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} = \delta_{i,j}$, donne

$$\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)} = (p_{[\frac{*}{N}; \frac{*}{A}]}^{[1(0)})^{-1}_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]},$$

$$\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(1)} = -\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)},$$

$$\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(2)} = -\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1(2)} \cdot \pi_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{m}{N}; \frac{n}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{n}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)},$$

$$\begin{aligned} \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(3)} &= -\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1(3)} \cdot \pi_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)} \\ &+ \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1(2)} \cdot \pi_{[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{m}{N}; \frac{n}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{n}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{m}{N}; \frac{n}{A}]}^{[1(2)} \cdot \pi_{[\frac{n}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)} \\ &- \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{m}{N}; \frac{n}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{n}{A}; \frac{q}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{q}{N}; \frac{r}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{r}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)}. \end{aligned}$$

Pour préparer la suite, les $\pi_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1(p)}$, $p = 1$ à 3 , sont décomposés en

$$\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)} = \pi_{\triangleleft[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)} + \pi_{\triangleright[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)}$$

où

$$\pi_{\triangleleft[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)} = \boldsymbol{\pi}_{\triangleleft[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1(p)} \right)$$

avec l'opérateur $\boldsymbol{\pi}_{\triangleleft[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ défini par

$$\boldsymbol{\pi}_{\triangleleft[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1(p)} \right) = -\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1(p)} \cdot \pi_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)}$$

et où

$$\pi_{\triangleright[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(1)} = 0,$$

$$\pi_{\triangleright[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(2)} = \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{m}{N}; \frac{n}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{n}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)},$$

$$\begin{aligned} \pi_{\triangleright[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(3)} &= \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1(2)} \cdot \pi_{[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{m}{N}; \frac{n}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{n}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{m}{N}; \frac{n}{A}]}^{[1(2)} \cdot \pi_{[\frac{n}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)} \\ &- \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{m}{N}; \frac{n}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{n}{A}; \frac{q}{N}]}^{[1(0)} \cdot p_{[\frac{q}{N}; \frac{r}{A}]}^{[1(1)} \cdot \pi_{[\frac{r}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)}. \end{aligned}$$

Tout ceci donne la décomposition de ${}_{d_N}f_{N0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$:

E.2.1.1.1 Ordre 0

$$(E.13) \quad {}_{d_N}f_{N0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} = -\frac{k_0}{2} \cdot (p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} - \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}).$$

E.2.1.1.2 Ordres 1 à 3

$${}_{d_N}f_{N0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} = {}_{d_N}f_{N0<[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} + {}_{d_N}f_{N0>[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}$$

où

$$(E.14) \quad {}_{d_N}f_{N0<[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} = {}_{d_N}\mathbf{f}i_{N0<[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \right)$$

et

$$(E.15) \quad {}_{d_N}f_{N0>[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} = -\frac{k_0}{2} \cdot \Delta^0 p_{>[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}.$$

Dans (E.14), l'opérateur ${}_{d_N}\mathbf{f}i_{N0<[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$ est

$$(E.16) \quad {}_{d_N}\mathbf{f}i_{N0<[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \right) = -\frac{k_0}{2} \cdot \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} - \boldsymbol{\pi}_{<[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \right) \right).$$

Dans (E.15),

$$\Delta^0 p_{>[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} = -\pi_{>[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}.$$

E.2.1.2 Développement du terme en ${}_{d_N}f_{N1[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$

De même, le terme en ${}_{d_N}f_{N1[\frac{i}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$ (au second membre de (C.68.2)) est

${}_{d_N}f_{N1[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot {}_d\mu_{N[\frac{k}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]}$ où

$$\begin{aligned} {}_{d_N}f_{N1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} &= \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot {}_{d_N}f_{N1[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]}, \\ &= -\frac{k_1}{2} \cdot \Delta^1 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta^1 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} &= 2 \cdot \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot \left(p_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1]} \cdot \frac{dp_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} \right)^S, \\ &= \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1]}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}. \end{aligned}$$

Ceci donne la décomposition de ${}_{d_N}f_{N1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$:

E.2.1.2.1 Ordre 0

$$(E.17) \quad d_N f_{N1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} = -\frac{k_1}{2} \cdot \left(\frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}}{dt} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](0)} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} \right).$$

E.2.1.2.2 Ordres 1 à 3

$$d_N f_{N1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} = d_N f_{N1<[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} + d_N f_{N1>[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}$$

où

$$(E.18) \quad d_N f_{N1<[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} = d_N \mathbf{f}_{N1<[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)} \right)$$

et

$$(E.19) \quad d_N f_{N1>[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} = -\frac{k_1}{2} \cdot \Delta^1 p_{>[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}.$$

Dans (E.18), l'opérateur $d_N \mathbf{f}_{N1<[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ est

(E.20)

$$d_N \mathbf{f}_{N1<[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)} \right) = -\frac{k_1}{2} \cdot \left(\frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}}{dt} + \pi_{<[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)} \right) \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} \right. \\ \left. + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](0)} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1](p)}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](0)} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \right).$$

Dans (E.19),

$$\Delta^1 p_{>[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{1} = 0,$$

$$\Delta^1 p_{>[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](2)} = \pi_{>[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](2)} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{1} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{1}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} \\ + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{1} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{1} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](0)} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{1}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{1}$$

et

$$\Delta^1 p_{>[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](3)} \\ = \pi_{>[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](3)} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](2)} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{1}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](2)} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{1} \\ + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{1} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1](2)}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{1} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{1}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{1} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{1} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](2)} \\ + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](0)} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1](2)}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{1} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](0)} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{1}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](2)}.$$

E.2.1.3 Développement de l'équation d'évolution

E.2.1.3.1 Ordre 0

L'EE d'ordre 0 est rappelée juste pour mémoire :

$$(E.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{0}(t)}{dt^2} = {}_{d_N} f e_{N[\frac{i}{A}]}^{0}(t) \cdot {}_d \mu_N^{[0]}, \\ (2) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}(t)}{dt^2} = ({}_{d_N} f i_{N[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](0)}(t) + {}_{d_N} f e_{N[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](0)}(t)) \cdot {}_d \mu_{N[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[2]} \end{array} \right.$$

plus les relations triviales pour $dp_{[\frac{i}{A}]}^{0}/dt$ et $dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}/dt$. Dans (\uparrow),

$${}_{d_N} f i_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}(t) = {}_{d_N} f i_{N0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}(t) + {}_{d_N} f i_{N1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}(t).$$

E.2.1.3.2 Ordres 1 à 3

L'EE d'ordre p s'écrit

$$(E.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}}{dt^2} = {}_{d_N} f e_{N[\frac{i}{A}]}^{[0](p)} \cdot {}_d \mu_N^{[0]}, \\ (2) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}}{dt^2} = ({}_{d_N} \mathbf{f} i_{N \triangleleft 0[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \right) + {}_{d_N} \mathbf{f} i_{N \triangleleft 1[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \left(\frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}}{dt} \right) \\ \quad \quad \quad + {}_{d_N} f i_{N \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](p)} + {}_{d_N} f e_{N[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](p)}) \cdot {}_d \mu_{N[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[2]}, \end{array} \right.$$

plus les relations triviales pour $dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}/dt$ et $dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}/dt$. Dans (\uparrow),

$$(E.23) \quad {}_{d_N} \mathbf{f} i_{N \triangleleft 0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \right) \\ = -\frac{k_0}{2} \cdot \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} - \pi_{\triangleleft[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \right) \right) \\ - \frac{k_1}{2} \cdot \left(\pi_{\triangleleft[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \right) \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](0)} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \right),$$

$$(E.24) \quad {}_{d_N} \mathbf{f} i_{N \triangleleft 1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}}{dt} \right) = -\frac{k_1}{2} \cdot \left(\frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}}{dt} + \pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](0)} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{N}; \frac{l}{A}]}^{[1](p)}}{dt} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} \right)$$

et

$$(E.25) \quad {}_{d_N} f_i^{[1](p)}{}_{N \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]} = {}_{d_N} f_i^{[1](p)}{}_{N 0 \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]} + {}_{d_N} f_i^{[1](p)}{}_{N 1 \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}$$

où les ${}_{d_N} f_i^{[1](p)}{}_{N * \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}$ sont donnés par (E.15) et (E.19).

E.2.2 Équation d'évolution couplée

L'EE couplée du problème est (C.67) avec les $f_i^{[0]}{}_{N * [\frac{*}{N}]}$ et $f_i^{[1]}{}_{N * [\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}$ en fonction des ${}_{d_N} f_i^{[0]}{}_{N * [\frac{*}{N}]}$ et des ${}_{d_N} f_i^{[1]}{}_{N * [\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}$ donnés par (C.65) et (C.66). Les grandeurs inconnues du problème sont toujours $p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}$, $p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$ et leur dérivée temporelle. Les seules non-linéarités sont dans les termes en $f_i^{[0]}{}_{N * [\frac{*}{N}]}$ et $f_i^{[1]}{}_{N * [\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}$.

E.2.2.1 Développement du terme en $f_i^{[0]}{}_{N 0 [\frac{i}{A}]}$

Le terme en $f_i^{[0]}{}_{N 0 [\frac{i}{A}]}$ (au second membre de (C.67.1)) est

$$\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot f_i^{[0]}{}_{N 0 [\frac{j}{N}]} = f_i^{[0]}{}_{N 0 [\frac{i}{A}]}.$$

Le report de (C.59) dans (C.65) pour les forces intérieures de rappel donne

$$f_i^{[0]}{}_{N 0 [\frac{i}{A}]} = {}_{d_N} f_i^{[1]}{}_{N 0 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]} \cdot \lambda_{\frac{j}{N}}$$

où

$$\lambda_{\frac{j}{N}} = \mu_{N [\frac{i}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} \cdot m_{N [\frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot \bar{\xi}_N.$$

Le développement de $f_i^{[0]}{}_{N 0 [\frac{i}{A}]}$ est donc celui de ${}_{d_N} f_i^{[1]}{}_{N 0 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}$ multiplié par $\lambda_{\frac{j}{N}}$. Ceci donne

E.2.2.1.1 Ordre 0

$$f_i^{0}{}_{N 0 [\frac{i}{A}]} = {}_{d_N} f_i^{[1](0)}{}_{N 0 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]} \cdot \lambda_{\frac{j}{N}}$$

où ${}_{d_N} f_i^{[1](0)}{}_{N 0 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}$ est donné par (E.13).

E.2.2.1.2 Ordres 1 à 3

$$f_{N0\langle[\frac{i}{A}]}^{[0](p)} = f_{N0\langle[\frac{i}{A}]}^{[0](p)} + f_{N0\triangleright[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}$$

où

$$(E.26) \quad f_{N0\langle[\frac{i}{A}]}^{[0](p)} = \mathbf{f}_{N0\langle[\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{i}{N}]}^{[1](p)} \right)$$

et

$$(E.27) \quad f_{N0\triangleright[\frac{i}{A}]}^{[0](p)} = {}_{d_N} f_{N0\triangleright[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \cdot \lambda_{\frac{j}{N}}.$$

Dans (E.26), l'opérateur $\mathbf{f}_{N0\langle[\frac{i}{A}]}^{[0]}$ est

$$\mathbf{f}_{N0\langle[\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{i}{N}]}^{[1](p)} \right) = {}_{d_N} \mathbf{f}_{N0\langle[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{i}{N}]}^{[1](p)} \right) \cdot \lambda_{\frac{j}{N}}$$

où l'opérateur ${}_{d_N} \mathbf{f}_{N0\langle[\frac{i}{A}; \frac{i}{N}]}^{[1]}$ est défini par (E.16). Dans (E.27), ${}_{d_N} f_{N0\triangleright[\frac{i}{A}; \frac{i}{N}]}^{[1](p)}$ est défini par (E.15).

E.2.2.2 Développement du terme en $\mathbf{f}_{N1[\frac{i}{N}]}^{[0]}$

La démarche est identique à celle de la section précédente en remplaçant les indices $N 0$ par $N 1$, (C.59) par (C.60) et «forces intérieures de rappel» par «forces intérieures d'amortissement». Ceci donne

E.2.2.2.1 Ordre 0

$$f_{N1[\frac{i}{A}]}^{0} = {}_{d_N} f_{N1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} \cdot \lambda_{\frac{j}{N}}$$

où ${}_{d_N} f_{N1[\frac{i}{A}; \frac{i}{N}]}^{[1](0)}$ est donné par (E.17).

E.2.2.2.2 Ordres 1 à 3

$$f_{N1[\frac{i}{A}]}^{[0](p)} = f_{N1\langle[\frac{i}{A}]}^{[0](p)} + f_{N1\triangleright[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}$$

où

$$(E.28) \quad f_{N1\langle[\frac{i}{A}]}^{[0](p)} = \mathbf{f}_{N1\langle[\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{i}{N}]}^{[1](p)} \right)$$

et

$$(E.29) \quad f_{N1 \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0](p)} = {}_{d_N} f_{N1 \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \cdot \lambda_{\frac{j}{N}}.$$

Dans (E.28), l'opérateur $\mathbf{f}i_{N1 \triangleleft [\frac{*}{A}]}^{[0]}$ est

$$\mathbf{f}i_{N1 \triangleleft [\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}} \right) = {}_{d_N} \mathbf{f}i_{N1 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}} \right) \cdot \lambda_{\frac{j}{N}}$$

où l'opérateur ${}_{d_N} \mathbf{f}i_{N1 \triangleleft [\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ est défini par (E.20). Dans (E.29), ${}_{d_N} f_{N1 \triangleright [\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}$ est défini par (E.19).

E.2.2.3 Développement du terme en $\mathbf{f}i_{N0[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$

Le terme en $f_{N0[\frac{*}{N}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ (au second membre de (C.67.2)) est

$$\pi_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]} \cdot f_{N0[\frac{k}{N}; \frac{j}{N}]}^{[1]} = f_{N0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}.$$

Le report de (C.59) dans (C.66) pour les forces intérieures de rappel donne

$$f_{N0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} = {}_{d_N} f_{N0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \cdot \bar{\xi}_N.$$

Le développement de $f_{N0[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ est donc celui de ${}_{d_N} f_{N0[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ multiplié par $\bar{\xi}_N$. Ceci donne

E.2.2.3.1 Ordre 0

$$f_{N0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} = {}_{d_N} f_{N0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} \cdot \bar{\xi}_N$$

où ${}_{d_N} f_{N0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}$ est donné par (E.13).

E.2.2.3.2 Ordres 1 à 3

$$f_{N0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} = f_{N0 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} + f_{N0 \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}$$

où

$$(E.30) \quad f_{N0 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} = \mathbf{f}i_{N0 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}} \right)$$

et

$$(E.31) \quad f_{N0 \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]} = {}_{d_N} f_{N0 \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]} \cdot \bar{\mathfrak{F}}_N.$$

Dans (E.30), l'opérateur $\mathbf{f}_{N0 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$ est

$$\mathbf{f}_{N0 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\boxed{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]}} \right) = {}_{d_N} \mathbf{f}_{N0 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\boxed{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]}} \right) \cdot \bar{\mathfrak{F}}_N$$

où l'opérateur ${}_{d_N} \mathbf{f}_{N0 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$ est défini par (E.16). Dans (E.31), ${}_{d_N} f_{N0 \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]}$ est défini par (E.15).

E.2.2.4 Développement du terme en $\mathbf{f}_{N1 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$

La démarche est identique à celle de la section précédente en remplaçant les indices $N0$ par $N1$, (C.59) par (C.60) et «forces intérieures de rappel» par «forces intérieures d'amortissement». Ceci donne

E.2.2.4.1 Ordre 0

$$f_{N1 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)]} = {}_{d_N} f_{N1 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)]} \cdot \bar{\mathfrak{F}}_N$$

où ${}_{d_N} f_{N1 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(0)]}$ est donné par (E.17).

E.2.2.4.2 Ordres 1 à 3

$$f_{N1 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]} = f_{N1 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]} + f_{N1 \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]}$$

où

$$(E.32) \quad f_{N1 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]} = \mathbf{f}_{N1 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\boxed{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]}} \right)$$

et

$$(E.33) \quad f_{N1 \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]} = {}_{d_N} f_{N1 \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]} \cdot \bar{\mathfrak{F}}_N.$$

Dans (E.32), l'opérateur $\mathbf{f}_{N1 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$ est

$$\mathbf{f}_{N1 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\boxed{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]}} \right) = {}_{d_N} \mathbf{f}_{N1 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\boxed{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]}} \right) \cdot \bar{\mathfrak{F}}_N$$

où l'opérateur ${}_{d_N} \mathbf{f}_{N1 \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}$ est défini par (E.20). Dans (E.33), ${}_{d_N} f_{N1 \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1(p)]}$ est défini par (E.19).

E.2.2.5 Développement de l'équation d'évolution

E.2.2.5.1 Ordre 0

L'EE d'ordre 0 est rappelée juste pour mémoire :

$$(E.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{0}}{dt^2} \cdot m_N^{[0]} + \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} = f_{N[\frac{i}{A}]}^{0} + f_{N[\frac{i}{A}]}^{0}, \\ (2) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{0}}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} + \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](0)}}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{k}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} = f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} + f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} \end{array} \right.$$

plus les relations triviales pour $dp_{[\frac{i}{A}]}^{0}/dt$ et $dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}/dt$. Dans (\uparrow),

$$f_{N[\frac{i}{A}]}^{0} = f_{N0[\frac{i}{A}]}^{0} + f_{N1[\frac{i}{A}]}^{0}$$

et

$$f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} = f_{N0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)} + f_{N1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}.$$

E.2.2.5.2 Ordres 1 à 3

L'EE d'ordre p s'écrit

$$(E.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}}{dt^2} \cdot m_N^{[0]} + \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} \\ = \mathbf{f}_{N < 0[\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \right) + \mathbf{f}_{N < 1[\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(\frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}}{dt} \right) + f_{N > [\frac{i}{A}]}^{[0](p)} + f_{N[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}, \\ (2) \quad \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{j}{N}]}^{[1]} + \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](p)}}{dt^2} \cdot m_{N[\frac{k}{N}, \frac{j}{N}]}^{[2]} \\ = \mathbf{f}_{N < 0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \right) + \mathbf{f}_{N < 1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}}{dt} \right) + f_{N > [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} + f_{N[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}, \end{array} \right.$$

plus les relations triviales pour $dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}/dt$ et $dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}/dt$. Dans (\uparrow),

$$(E.36) \quad \mathbf{f}_{N < 0[\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \right) = {}_d \mathbf{f}_{N < 0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} \right) \cdot \lambda_{\frac{j}{N}},$$

$$(E.37) \quad \mathbf{fi}_{N \triangleleft 1[\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(\frac{dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}{dt} \right) = {}_{d_N} \mathbf{fi}_{N \triangleleft 1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\frac{dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}{dt} \right) \cdot \lambda_{\frac{j}{N}},$$

$$(E.38) \quad \mathbf{fi}_{N \triangleleft 0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)} \right) = {}_{d_N} \mathbf{fi}_{N \triangleleft 0[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)} \right) \cdot \bar{\mathfrak{A}}_N,$$

$$(E.39) \quad \mathbf{fi}_{N \triangleleft 1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\frac{dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}{dt} \right) = {}_{d_N} \mathbf{fi}_{N \triangleleft 1[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\frac{dp_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}{dt} \right) \cdot \bar{\mathfrak{A}}_N,$$

$$(E.40) \quad \mathbf{fi}_{N \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0](p)} = \mathbf{fi}_{N 0 \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0](p)} + \mathbf{fi}_{N 1 \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0](p)}$$

et

$$(E.41) \quad \mathbf{fi}_{N \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} = \mathbf{fi}_{N 0 \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} + \mathbf{fi}_{N 1 \triangleright [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}.$$

Dans ces définitions, les opérateurs ${}_{d_N} \mathbf{fi}_{N \triangleleft *[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ sont donnés par (E.23) et (E.24), et les $\mathbf{fi}_{N * \triangleright [\frac{*}{A}]}^{[0](p)}$ et $\mathbf{fi}_{N * \triangleright [\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}$ par (E.27), (E.29), (E.31) et (E.33).

Annexe F

Application de la méthode des perturbations à la mécanique des fluides parfaits et incompressibles avec surface libre en présence d'un corps flottant

F.1	Présentation de la méthode des perturbations	214
F.1.1	Principe	214
F.1.2	Décompositions et regroupements utilisés	218
F.1.3	Développement d'une condition devant être satisfaite en des coordonnées inconnues	219
F.1.3.1	Étape 1	219
F.1.3.2	Étape 2	219
F.1.4	En pratique	221
F.1.5	Estimation d' ε	221
F.2	Application à la mécanique des fluides parfaits et incompressibles avec surface libre en présence d'un corps flottant . . .	222
F.2.1	Développement des grandeurs intervenant dans les conditions . . .	223
F.2.1.1	Développements pour ψ_S	223
F.2.1.2	Développements pour l_L	227
F.2.1.3	Développements pour la carène définie par $c(t, x_{\frac{*}{A}})$. . .	231

F.2.1.4	Développements pour la carène définie par	
	$c(p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}, p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}, x_{\frac{*}{A}}^*)$	242
F.2.2	Développement des conditions	253
F.2.2.1	Développement de la condition d'harmonicité	253
F.2.2.2	Développement des conditions de surface libre pour	
	$l = \psi$	254
F.2.2.3	Développement des conditions de surface libre pour l	
	donné	258
F.2.2.4	Développement des conditions de glissement sur la ca-	
	rène définie par $c(t, x_{\frac{*}{A}}^*)$	260
F.2.2.5	Développement des conditions de glissement sur la ca-	
	rène définie par $c(p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}, p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}, x_{\frac{*}{A}}^*)$	263
F.2.2.6	Développement des conditions de glissement sur le fond	265
F.2.3	Développement des efforts exercés sur la carène définie par	
	$c(t, x_{\frac{*}{A}}^*)$	265
F.2.3.1	Moment de degré 0 des forces de pression sur la carène	265
F.2.3.2	Moment de degré 1 des forces de pression sur la carène	274
F.2.4	Développement des efforts exercés sur la carène définie par	
	$c(p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}, p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}, x_{\frac{*}{A}}^*)$	275
F.2.4.1	Moment de degré 0 des forces de pression sur la carène	275
F.2.4.2	Moment de degré 1 des forces de pression sur la carène	276

F.1 Présentation de la méthode des perturbations

F.1.1 Principe

Le principe de la méthode et le développement des conditions à satisfaire en des coordonnées connues sont exposés en annexe E. Dans le problème que nous traitons, des conditions doivent aussi être satisfaites en des coordonnées inconnues, ici des surfaces inconnues¹ S . Chacune de ces surfaces est déterminée par une condition à satisfaire de la forme $s = 0$. Ces fonctions s sont aussi des inconnues du problème, au même titre que les autres grandeurs inconnues. Elles sont donc décomposées suivant (E.1) ou (E.2). Pour la suite, ces surfaces doivent aussi être définies explicitement, c.-à-d. par leurs coordonnées x_{S^*} qui par définition satisfont

$$(F.1) \quad s(t, x_{S^*}(t)) = 0.$$

Les x_{S^*} étant des inconnues au même titre que les s , sont aussi décomposés suivant (E.1) ou (E.2) :

$$(F.2) \quad x_{Si}(t) \approx \tilde{x}_{Si}(t) = (x_{Si}^{(0)} + x_{Si}^{(1)} + x_{Si}^{(2)} + \dots)(t, x_{S^*}^{(0)})$$

$$(F.3) \quad = (x_{Si}^{(0)} + \varepsilon \cdot x_{Si}^{(1)} + \varepsilon^2 \cdot x_{Si}^{(2)} + \dots)(t, x_{S^*}^{(0)}).$$

Les x_{S^*} pouvant varier, toutes les grandeurs inconnues intervenant dans les conditions à satisfaire sur la surface sont approximées par leur développement limité en x_* . Pour que les conditions soient exprimées en une valeur connue des x_* , ces développements ont pour points de départ $x_{S^*}^{(0)}$, cf. commentaires sur le point (c) infra :

$$(F.4) \quad \tilde{f}(t, x_{S^*}) \approx (\tilde{f} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \cdot \frac{\Delta x_{Si}}{1!} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\Delta x_{Si} \cdot \Delta x_{Sj}}{2!} + \dots)(t, x_{S^*}^{(0)})$$

où

$$(F.5) \quad \Delta x_{Si}(t, x_{S^*}^{(0)}) = (x_{Si}^{(1)} + x_{Si}^{(2)} + \dots)(t, x_{S^*}^{(0)})$$

$$(F.6) \quad = (\varepsilon \cdot x_{Si}^{(1)} + \varepsilon^2 \cdot x_{Si}^{(2)} + \dots)(t, x_{S^*}^{(0)}).$$

¹Le fait que ces surfaces soient des frontières du domaine concerné par la mise en équations n'intervient pas dans le développement en perturbation. Ces surfaces pourraient être à l'intérieur du domaine.

Dans (F.4), la convention de notation établie en section 4.2.1.1.1 page 33 est appliquée.

Des dérivées de f par rapport aux x_* en x_{s^*} peuvent intervenir dans les conditions à satisfaire. Ces dérivées peuvent être obtenue en faisant varier dans (F.4) soit les $x_{s^*}^{(0)}$ soit les Δx_{s^*} . Les résultats sont (heureusement) identiques :

$$(F.7) \quad \frac{\partial \tilde{f}(t, x_{s^*})}{\partial x_i} \approx \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\Delta x_{sj}}{1!} + \frac{\partial^3 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\Delta x_{sj} \cdot \Delta x_{sk}}{2!} + \dots \right) (t, x_{s^*}^{(0)}),$$

$$(F.8) \quad \frac{\partial^2 \tilde{f}(t, x_{s^*})}{\partial x_i \partial x_j} \approx \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\Delta x_{sk}}{1!} + \frac{\partial^4 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} \cdot \frac{\Delta x_{sk} \cdot \Delta x_{sl}}{2!} + \dots \right) (t, x_{s^*}^{(0)}),$$

etc.

Les décompositions (E.2) et (F.6) sont reportées dans les développements (F.4), (F.7), (F.8), etc. Dans les expressions obtenues, les termes de même degré en ε sont regroupés, ce qui peut être synthétisé en

$$(F.9) \quad \tilde{f}(t, x_{s^*}) = (\bar{f}_s^{(0)} + \varepsilon \cdot \bar{f}_s^{(1)} + \varepsilon^2 \cdot \bar{f}_s^{(2)} + \dots)(t, x_{s^*}^{(0)}),$$

$$(F.10) \quad = (\bar{f}_s^{(0)} + \bar{f}_s^{(1)} + \bar{f}_s^{(2)} + \dots)(t, x_{s^*}^{(0)}),$$

où

$$(F.11) \quad \bar{f}_s^{(0)}(t, x_{s^*}^{(0)}) = f_{s^{(0)}}^{(0)}(t, x_{s^*}^{(0)})$$

et

$$(F.12) \quad \bar{f}_s^{(p)}(t, x_{s^*}^{(0)}) = (f_{s^{(0)}}^{(p)} + \bar{f}_{s^{(0)}s}^{(p)})(t, x_{s^*}^{(0)})$$

Cette dernière équation correspond à la décomposition (F.17) infra.

La convention de notation concernant des grandeurs développées, c.-à-d. avec un ordre de développement en exposant, ayant une surface en indice et sans le signe $\bar{}$, par exemple $f_s^{(p)}$, est que la grandeur indiquée représente la valeur de la grandeur *sur la surface en indice*, qui peut être autre que $S^{(0)}$, bien que l'argument de la fonction soit toujours $x_{s^*}^{(0)}$.

La convention de notation concernant ces mêmes grandeurs mais avec le signe $\bar{}$ est plus délicate à comprendre. D'après sa définition (F.9) ou (F.10), la grandeur $\bar{f}_s^{(p)}$ représente le terme d'ordre p du développement en perturbations de

la valeur en S de f . La combinaison des développements de f et de x_{S^*} fait que ce terme dépend des $f^{(q)}$ et des $x_{S^*}^{(q)}$ pour $q = 1$ à p , et donc que

$$\bar{f}_S^{(p)} \neq f_S^{(p)}.$$

Par contre

$$\bar{f}_{S^{(0)}}^{(p)} = f_{S^{(0)}}^{(p)}$$

puisque en $S^{(0)}$ le développement de x_{S^*} n'intervient pas. Si deux surfaces sont en indice, la grandeur représente la variation de la grandeur entre les deux surfaces.

Ces conventions ne s'appliquent pas aux $x_{S^*}^{(*)}$.

Les programmes **MuPAD** présentés en annexe H sont une traduction concrète de toutes ces notions.

Dans (F.12), les $f_{S^{(0)}}^{(p)}$ (et donc les $f^{(p)}$) sont des inconnues du problème et les $\bar{f}_{S^{(0)}S}^{(p)}$ sont définis en section F.1.3 en considérant que la condition c dans cette section est constituée uniquement de f .

De même, les dérivées spatiales de f sont synthétisées en

$$(F.13) \quad \frac{\partial \tilde{f}(t, x_{S^*})}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \bar{f}_S^{(0)}}{\partial x_i} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \bar{f}_S^{(1)}}{\partial x_i} + \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial \bar{f}_S^{(2)}}{\partial x_i} + \dots \right)(t, x_{S^*}^{(0)})$$

$$(F.14) \quad = \left(\frac{\partial \bar{f}_S^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{f}_S^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{f}_S^{(2)}}{\partial x_i} + \dots \right)(t, x_{S^*}^{(0)}),$$

$$(F.15) \quad \frac{\partial^2 \tilde{f}(t, x_{S^*})}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\frac{\partial^2 \bar{f}_S^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \bar{f}_S^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{f}_S^{(2)}}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \right)(t, x_{S^*}^{(0)})$$

$$(F.16) \quad = \left(\frac{\partial^2 \bar{f}_S^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \bar{f}_S^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \bar{f}_S^{(2)}}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \right)(t, x_{S^*}^{(0)}),$$

etc.

Les dérivées temporelles de f se développent de la même manière.

Les développements (F.9), (F.13), (F.15), etc. de chaque grandeur sont reportées dans les conditions à satisfaire en les surfaces inconnues. Pour chaque condition, les termes de même degré en ε , c.-à-d. de même ordre de grandeur, sont regroupés. L'ensemble des conditions à un ordre donné forme le problème à résoudre pour cet ordre. Les $x_{S^*}^{(*)}$ peuvent être éliminés des conditions à satisfaire, diminuant ainsi le nombre d'inconnues. La manière de le faire est exposée en section F.2.2.2.2.

Cette procédure a pour résultat que

- (a) \forall l'ordre p , toutes les équations multipliées par ε^p redonnent les mêmes équations où les ${}_{\varepsilon}f$ sont remplacés par des f et les ${}_{\varepsilon}x_{Si}$ par des x_{Si} ;
- (b) $\forall p$, le problème ne dépend que des ${}_{\varepsilon}f$ et ${}_{\varepsilon}x_{Si}$ d'ordre p et inférieurs ;
- (c) pour $p \geq 1$, le problème est linéaire par rapport aux ${}_{\varepsilon}f$ et ${}_{\varepsilon}x_{Si}$ d'ordre p ;
- (d) pour $p \geq 1$, les coefficients des ${}_{\varepsilon}f$ et des ${}_{\varepsilon}x_{Si}$ d'ordre p sont toujours les mêmes et ne dépendent donc que des ${}_{\varepsilon}f$ et des ${}_{\varepsilon}x_{Si}$ d'ordre 0 ;
- (e) pour $p = 1$, le problème est homogène c.-à-d. que tous les termes contiennent une grandeur d'ordre 1.

Le point (a) fait que cette méthode peut être présentée de la façon suivante

- (1) toutes les grandeurs inconnues sont décomposées en

$$\tilde{f}(t, x_*) = (f^{(0)} + \varepsilon \cdot f^{(1)} + \varepsilon^2 \cdot f^{(2)} + \dots)(t, x_*)$$

et les coordonnées des surfaces inconnues en

$$\tilde{x}_{Si}(t, x_*) = (x_{Si}^{(0)} + \varepsilon \cdot x_{Si}^{(1)} + \varepsilon^2 \cdot x_{Si}^{(2)} + \dots)(t, x_{S*}^{(0)}) ;$$

- (2) les conditions à satisfaire sont développées pour chaque ordre ;
- (3) les problèmes de chaque ordre sont résolus ;
- (4) la solution finale est obtenue sous la forme

$$\tilde{f}(t, x_*) = (f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \dots)(t, x_*)$$

et

$$\tilde{x}_{Si}(t, x_{S*}^{(0)}) = (x_{Si}^{(0)} + x_{Si}^{(1)} + x_{Si}^{(2)} + \dots)(t, x_{S*}^{(0)}),$$

en oubliant le ε !

Les autres commentaires sont identiques à ceux de l'annexe E.

F.1.2 Décompositions et regroupements utilisés

La décomposition des développements en premier et second membre (E.5) est aussi utilisée pour les conditions en des surfaces inconnues. L'expression de ces conditions est simplifiée si leur développement est aussi décomposé en une partie représentant la valeur de la condition sur la surface d'ordre 0 et une partie représentant la variation² de la valeur de la condition due à la variation de position de la surface :

$$(F.17) \quad \bar{c}_s^{(p)}(t, x_{s^*}^{(0)}) = (c_{s^{(0)}}^{(p)} + \bar{c}_{s^{(0)}s}^{(p)})(t, x_{s^*}^{(0)}).$$

Le développement de ces conditions devant aussi être décomposé suivant (E.5), est finalement décomposé en

$$(F.18) \quad \bar{c}_s^{(p)}(t, x_{s^*}^{(0)}) = (c_{s^{(0)}\triangleleft}^{(p)} + c_{s^{(0)}\triangleright}^{(p)} + \bar{c}_{s^{(0)}s\triangleleft}^{(p)} + \bar{c}_{s^{(0)}s\triangleright}^{(p)})(t, x_{s^*}^{(0)}).$$

Toujours pour simplifier l'expression des conditions, divers regroupements de cette décomposition sont utilisés dans la suite :

$$(F.19) \quad \bar{c}_s^{(p)}(t, x_{s^*}^{(0)}) = (\bar{c}_{s\triangleleft}^{(p)} + \bar{c}_{s\triangleright}^{(p)})(t, x_{s^*}^{(0)}),$$

$$(F.20) \quad \bar{c}_{s\triangleleft}^{(p)}(t, x_{s^*}^{(0)}) = (c_{s^{(0)}\triangleleft}^{(p)} + \bar{c}_{s^{(0)}s\triangleleft}^{(p)})(t, x_{s^*}^{(0)}),$$

$$(F.21) \quad \bar{c}_{s\triangleright}^{(p)}(t, x_{s^*}^{(0)}) = (c_{s^{(0)}\triangleright}^{(p)} + \bar{c}_{s^{(0)}s\triangleright}^{(p)})(t, x_{s^*}^{(0)}),$$

$$(F.22) \quad \bar{c}_{s^{(0)}s}^{(p)}(t, x_{s^*}^{(0)}) = (\bar{c}_{s^{(0)}s\triangleleft}^{(p)} + \bar{c}_{s^{(0)}s\triangleright}^{(p)})(t, x_{s^*}^{(0)}).$$

Toutes ces décompositions et regroupements sont résumés dans le tableau ci-dessous

$\bar{c}_s^{(p)}$	$\bar{c}_{s\triangleleft}^{(p)}$	$\bar{c}_{s\triangleright}^{(p)}$
$c_{s^{(0)}}^{(p)}$	$c_{s^{(0)}\triangleleft}^{(p)}$	$c_{s^{(0)}\triangleright}^{(p)}$
$\bar{c}_{s^{(0)}s}^{(p)}$	$\bar{c}_{s^{(0)}s\triangleleft}^{(p)}$	$\bar{c}_{s^{(0)}s\triangleright}^{(p)}$

Dans ce tableau, les grandeurs dans la ligne du haut ou dans la colonne de gauche sont la somme des autres termes de la colonne ou de la ligne correspondante.

²Le terme «variation» désigne toujours les grandeurs d'ordre 1 et supérieurs, c.-à-d. la variation des grandeurs par rapport aux grandeurs d'ordre 0.

F.1.3 Développement d'une condition devant être satisfaite en des coordonnées inconnues

Le développement à un ordre donné d'une condition devant être satisfaite en des coordonnées inconnues peut être obtenu par la procédure suivante :

F.1.3.1 Étape 1

Cette étape est identique à celle de l'annexe E en considérant les $x_{S^*}^{(0)}$ comme des grandeurs inconnues.

Expression de $c_{S^{(0)}}^{(0)}$

Le développement d'ordre 0, $c_{S^{(0)}}^{(0)}$, est la condition exacte où toutes les grandeurs inconnues sont remplacées par les mêmes grandeurs d'ordre 0 : si la condition est

$$(F.23) \quad c(t, x_{S^*}) = 0,$$

où c est par exemple

$$(F.24) \quad c(t, x_*) = (f \cdot g + x_i \cdot x_i)(t, x_*),$$

le développement d'ordre 0 de cette condition est

$$c_{S^{(0)}}^{(0)}(t, x_{S^*}^{(0)}) = 0,$$

où $c_{S^{(0)}}^{(0)}$ est

$$c_{S^{(0)}}^{(0)}(t, x_*) = (f_{S^{(0)}}^{(0)} \cdot g_{S^{(0)}}^{(0)} + x_i \cdot x_i)(t, x_*).$$

F.1.3.2 Étape 2

À partir de l'ordre 1, le développement de la condition est décomposé suivant (F.17).

Expression de $c_{S^{(0)}}^{(p)}$

La grandeur $c_{S^{(0)}}^{(p)}$ peut être obtenue à partir de $c_{S^{(0)}}^{(0)}$ de la façon suivante. Les x_* de cette expression sont d'abord remplacés par les $x_{S^*}^{(0)}$. Ensuite chaque terme du $c_{S^{(0)}}^{(0)}$ obtenu est reproduit en autant de termes tels que la somme des ordres vaut p et les nombres constitués par les ordres de chaque terme sont

tous différents. Le coefficient de chaque terme est 1. Par exemple avec le c donné par (F.24), les premiers $c_{s^{(0)}}^{(p)}$ sont

$$c_{s^{(0)}}^{(1)}(t, x_{s^*}^{(0)}) = (f_{s^{(0)}}^{(1)} \cdot g_{s^{(0)}}^{(0)} + f_{s^{(0)}}^{(0)} \cdot g_{s^{(0)}}^{(1)} + x_{s_i}^{(1)} \cdot x_{s_i}^{(0)} + x_{s_i}^{(0)} \cdot x_{s_i}^{(1)})(t, x_{s^*}^{(0)}),$$

$$c_{s^{(0)}}^{(2)}(t, x_{s^*}^{(0)}) = (f_{s^{(0)}}^{(2)} \cdot g_{s^{(0)}}^{(0)} + f_{s^{(0)}}^{(1)} \cdot g_{s^{(0)}}^{(1)} + f_{s^{(0)}}^{(0)} \cdot g_{s^{(0)}}^{(2)} + x_{s_i}^{(2)} \cdot x_{s_i}^{(0)} + x_{s_i}^{(1)} \cdot x_{s_i}^{(1)} + x_{s_i}^{(0)} \cdot x_{s_i}^{(2)})(t, x_{s^*}^{(0)}),$$

$$c_{s^{(0)}}^{(3)}(t, x_{s^*}^{(0)}) = (f_{s^{(0)}}^{(3)} \cdot g_{s^{(0)}}^{(0)} + f_{s^{(0)}}^{(2)} \cdot g_{s^{(0)}}^{(1)} + f_{s^{(0)}}^{(1)} \cdot g_{s^{(0)}}^{(2)} + f_{s^{(0)}}^{(0)} \cdot g_{s^{(0)}}^{(3)} + x_{s_i}^{(3)} \cdot x_{s_i}^{(0)} + x_{s_i}^{(2)} \cdot x_{s_i}^{(1)} + x_{s_i}^{(1)} \cdot x_{s_i}^{(2)} + x_{s_i}^{(0)} \cdot x_{s_i}^{(3)})(t, x_{s^*}^{(0)})$$

(un terme en f^n ou en $x_{s_i}^n$ doit être «étalé» en $f \cdot f \cdots$ ou en $x_{s_i} \cdot x_{s_i} \cdots$, où tous les f ou x_{s_i} sont considérés comme des grandeurs différentes).

Si un terme de la condition est une fonction d'une grandeur f , autre qu'un simple monôme, cette fonction est remplacée par son développement limité à partir de $f^{(0)}$ en utilisant la décomposition (E.1).

Expression de $\bar{c}_{s^{(0)}s}^{(p)}$

La grandeur $\bar{c}_{s^{(0)}s}^{(p)}$ est obtenue en développant de la même façon que $c_{s^{(0)}}^{(0)}$ l'expression

$$\left(\sum_{q=1}^p \frac{\partial^q c_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \cdots} \cdot \frac{x_{s_i}^{(1)} \cdot x_{s_j}^{(1)} \cdots}{q!} \right)(t, x_{s^*}^{(0)}),$$

mais en ne conservant que les termes où les x_{s^*} sont d'ordre ≥ 1 (le terme en $\partial^p / \partial x_i \partial x_j \cdots$ n'est pas développé puisque la somme de ses ordres est déjà égale à p).

Quelle que soit la condition (F.23), les premiers $\bar{c}_{s^{(0)}s}^{(p)}$ sont donc

$$\bar{c}_{s^{(0)}s}^{(1)}(t, x_{s^*}^{(0)}) = \left(\frac{\partial c_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{s_i}^{(1)}}{1!} \right)(t, x_{s^*}^{(0)}),$$

$$\bar{c}_{s^{(0)}s}^{(2)}(t, x_{s^*}^{(0)}) = \left(\frac{\partial c_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{s_i}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial c_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{s_i}^{(2)}}{1!} + \frac{\partial^2 c_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{s_i}^{(1)} \cdot x_{s_j}^{(1)}}{2!} \right)(t, x_{s^*}^{(0)}),$$

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{s^{(0)}s}^{(3)}(t, x_{s^*}^{(0)}) &= \left(\frac{\partial c_{s^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{si}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial c_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{si}^{(2)}}{1!} + \frac{\partial c_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{si}^{(3)}}{1!} \right. \\
&+ \frac{\partial^2 c_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{si}^{(1)} \cdot x_{sj}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2 c_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{si}^{(2)} \cdot x_{sj}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2 c_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{si}^{(1)} \cdot x_{sj}^{(2)}}{2!} \\
&\left. + \frac{\partial^3 c_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{x_{si}^{(1)} \cdot x_{sj}^{(1)} \cdot x_{sk}^{(1)}}{3!} \right)(t, x_{s^*}^{(0)}).
\end{aligned}$$

Expression de la condition d'ordre p

Pour chaque ordre, la condition (F.23) s'écrit

$$\bar{c}_s^{(p)}(t, x_{s^*}^{(0)}) = (c_{s^{(0)}}^{(p)} + \bar{c}_{s^{(0)}s}^{(p)})(t, x_{s^*}^{(0)}) = 0.$$

Dans l'expression finale du développement d'une condition, la séparation en premier et second membres fait disparaître le caractère systématique de ces expressions.

F.1.4 En pratique

La méthode des perturbations n'est en toute rigueur valide que si les suites (F.2), (F.10), (F.14), (F.16), etc. convergent, avec les mêmes commentaires qu'en annexe E.

F.1.5 Estimation d' ε

En plus des estimations données en annexe E, ε doit aussi être estimé à partir des x_{s^*} . Plutôt que d'utiliser (F.2) et (F.3) (les termes de la forme $x_{si}^{(1)}/x_{si}^{(0)}$ n'ont pas de sens), il est préférable d'utiliser l'effet des x_{s^*} sur les conditions à satisfaire en des coordonnées inconnues (qui sont obligatoirement non linéaires), c.-à-d. les $\bar{c}_s^{(*)}$:

$$\tilde{\varepsilon}(t, x_{s^*}^{(0)}) = O\left(\frac{\bar{c}_s^{(1)}}{\bar{c}_s^{(0)}}\right)(t, x_{s^*}^{(0)}) = O\left(\frac{\bar{c}_s^{(2)}}{\bar{c}_s^{(1)}}\right)(t, x_{s^*}^{(0)}) = \text{etc.},$$

avec les mêmes commentaires qu'en annexe E.

F.2 Application à la mécanique des fluides parfaits et incompressibles avec surface libre en présence d'un corps flottant

|³

Les grandeurs inconnues du problème exact sont $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}$, $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$, φ , $x_{C\frac{*}{A}}$, $x_{L\frac{*}{A}}$ et leurs dérivées temporelles et/ou spatiales. Les grandeurs $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}$ et $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ sont définies en sections C.1 et C.4.3.1. Les grandeurs φ , $x_{C\frac{*}{A}}$ et $x_{L\frac{*}{A}}$ sont définies en section C.2. Rappel :

$$p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]} = \text{fonction de } t,$$

$$p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]} = \text{fonction de } t,$$

$$\varphi = \text{fonction de } t \text{ et de } x_{\frac{*}{A}},$$

$$x_{C\frac{i}{A}} = \text{fonction de } t,$$

$$x_{L\frac{i}{A}} = \text{fonction de } t.$$

Le problème est développé à l'ordre 3. Ces inconnues sont donc décomposées en (E.8), (E.10) et

$$(F.25) \quad \tilde{\varphi}(t, x_{\frac{*}{A}}) = (\varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(3)})(t, x_{\frac{*}{A}})$$

$$(F.26) \quad = (\varphi^{(0)} + \varepsilon \cdot_{\varepsilon} \varphi^{(1)} + \varepsilon^2 \cdot_{\varepsilon} \varphi^{(2)} + \varepsilon^3 \cdot_{\varepsilon} \varphi^{(3)})(t, x_{\frac{*}{A}}),$$

$$(F.27) \quad \tilde{x}_{C\frac{i}{A}}(t) = (x_{C\frac{i}{A}}^{(0)} + x_{C\frac{i}{A}}^{(1)} + x_{C\frac{i}{A}}^{(2)} + x_{C\frac{i}{A}}^{(3)})(t, x_{C\frac{*}{A}}^{(0)})$$

$$(F.28) \quad = (x_{C\frac{i}{A}}^{(0)} + \varepsilon \cdot_{\varepsilon} x_{C\frac{i}{A}}^{(1)} + \varepsilon^2 \cdot_{\varepsilon} x_{C\frac{i}{A}}^{(2)} + \varepsilon^3 \cdot_{\varepsilon} x_{C\frac{i}{A}}^{(3)})(t, x_{C\frac{*}{A}}^{(0)})$$

$$(F.29) \quad \tilde{x}_{L\frac{i}{A}}(t) = (x_{L\frac{i}{A}}^{(0)} + x_{L\frac{i}{A}}^{(1)} + x_{L\frac{i}{A}}^{(2)} + x_{L\frac{i}{A}}^{(3)})(t, x_{L\frac{*}{A}}^{(0)})$$

$$(F.30) \quad = (x_{L\frac{i}{A}}^{(0)} + \varepsilon \cdot_{\varepsilon} x_{L\frac{i}{A}}^{(1)} + \varepsilon^2 \cdot_{\varepsilon} x_{L\frac{i}{A}}^{(2)} + \varepsilon^3 \cdot_{\varepsilon} x_{L\frac{i}{A}}^{(3)})(t, x_{L\frac{*}{A}}^{(0)}).$$

Les conditions à satisfaire sont développées à partir de ces décompositions.

³Dans cette section, les c et C veulent dire «carène», et les l et L , «(surface) libre».

Les conditions obtenues pour chaque ordre p sont multipliées par ε^p pour obtenir des équations en $p_{[\frac{*}{A}]^{[0](p)}}$, $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1](p)}}$, $\varphi_{vphp}^{(p)}$, $x_{C\frac{*}{A}}^{(p)}$ et $x_{L\frac{*}{A}}^{(p)}$ au lieu de $\varepsilon p_{[\frac{*}{A}]^{[0](p)}}$, $\varepsilon p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1](p)}}$, $\varepsilon \varphi^{(p)}$, $\varepsilon x_{C\frac{*}{A}}^{(p)}$ et $\varepsilon x_{L\frac{*}{A}}^{(p)}$. Ceci est implicite dans toute la suite.

Pour préparer ces développements, les grandeurs intervenant dans les conditions sont d'abord développées seules.

F.2.1 Développement des grandeurs intervenant dans les conditions

Dans les développements qui suivent, la convention de notation établie en section 4.2.1.1.1 page 33 est systématiquement appliquée. De même, pour alléger l'écriture, les opérateurs $\partial/\partial p_{[\frac{i}{A}]^{0}}$ et $\partial/\partial p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{[1](0)}}$ sont notés $\partial/\partial p_i^{[0]}$ et $\partial/\partial p_{i,j}^{[1]}$.

Tous les développements de la présente section et des sections F.2.3 et F.2.4 sont obtenus en utilisant le logiciel de calculs formels **MuPAD**. Les programmes correspondants sont présentés en annexe H.

F.2.1.1 Développements pour ψ_S

F.2.1.1.1 Développement de ψ_S

Sur une surface S (L ou C), ψ est donné par

$$(F.31) \quad \psi_S = \frac{\partial \varphi_S}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_S}{\partial x_i} \right)^2 - g_{\frac{i}{A}} \cdot x_{S\frac{i}{A}}. \quad (4.18)$$

Cette grandeur est développée suivant (F.10) (en tenant compte de (F.11)), c.-à-d. en

$$(F.32) \quad \tilde{\psi}_S = \psi_{S(0)}^{(0)} + \bar{\psi}_S^{(1)} + \bar{\psi}_S^{(2)} + \bar{\psi}_S^{(3)}$$

où les $\bar{\psi}_S^{(p)}$ sont des fonctions définies à partir de (F.31), donc connues, mais dépendant des grandeurs inconnues $\varphi_{S(0)}^{(*)}$ et $x_{S\frac{*}{A}}^{(*)}$ ⁴.

La grandeur $\partial \varphi_S / \partial x_*$ est développée en utilisant (F.14) (en tenant compte de (F.11)) :

$$(F.33) \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_S}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_{S(0)}^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\varphi}_S^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\varphi}_S^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\varphi}_S^{(3)}}{\partial x_i}.$$

⁴Le «*» pour ordre des arguments de fonctions veut dire «tous les ordres de 0 à p ».

Ordre 0

La grandeur $\psi_{s^{(0)}}^{(0)}$ est

$$(F.34) \quad \psi_{s^{(0)}}^{(0)} = \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \right)^2 - g_{\frac{i}{A}} \cdot x_{s \frac{i}{A}}^{(0)}.$$

Ordres 1 à 3

Les $\bar{\psi}_s^{(p)}$ sont décomposés suivant (F.18), c.-à-d. en

$$(F.35) \quad \bar{\psi}_s^{(p)} = \psi_{s^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + \bar{\psi}_{s^{(0)} s \triangleleft}^{(p)} + \psi_{s^{(0)} \triangleright}^{(p)} + \bar{\psi}_{s^{(0)} s \triangleright}^{(p)}$$

où

$$(F.36) \quad \psi_{s^{(0)} \triangleleft}^{(p)} = \boldsymbol{\psi}_{s^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{s^{(0)}}^{(p)}} \right)$$

avec l'opérateur $\boldsymbol{\psi}_{s^{(0)} \triangleleft}$ défini par

$$(F.37) \quad \boldsymbol{\psi}_{s^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{s^{(0)}}^{(p)}} \right) = \boxed{\frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(p)}}{\partial t}} + \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}}$$

et

$$(F.38) \quad \bar{\psi}_{s^{(0)} s \triangleleft}^{(p)} = \frac{\partial \psi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{s \frac{i}{A}}^{(p)}}}{1!}.$$

Les seconds membres sont

Ordre 1

$$(F.39) \quad \psi_{s^{(0)} \triangleright}^{(1)} = 0,$$

$$(F.40) \quad \bar{\psi}_{s^{(0)} s \triangleright}^{(1)} = 0,$$

Ordre 2

$$(F.41) \quad \psi_{s^{(0)} \triangleright}^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \right)^2,$$

$$(F.42) \quad \bar{\psi}_{s^{(0)} s \triangleright}^{(2)} = \frac{\partial \psi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{s \frac{i}{A}}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial^2 \psi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{s \frac{i}{A}}^{(1)} \cdot x_{s \frac{j}{A}}^{(1)}}{2!},$$

Ordre 3

$$(F.43) \quad \psi_{s^{(0)} \triangleright}^{(3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \Big|_5,$$

(F.44)

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_{S^{(0)}S\triangleright}^{(3)} = & \frac{\partial\psi_{S^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{S^i}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial\psi_{S^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{S^i}^{(2)}}{1!} \\
& + \frac{\partial^2\psi_{S^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{S^i}^{(1)} \cdot x_{S^j}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2\psi_{S^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{S^i}^{(2)} \cdot x_{S^j}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2\psi_{S^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{S^i}^{(1)} \cdot x_{S^j}^{(2)}}{2!} \\
& + \frac{\partial^3\psi_{S^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{x_{S^i}^{(1)} \cdot x_{S^j}^{(1)} \cdot x_{S^k}^{(1)}}{3!}.
\end{aligned}$$

F.2.1.1.2 Développement de $D_t\psi_S$

Sur une surface S (L ou C), $D_t\psi$ est donné par

$$(F.45) \quad D_t\psi_S = \frac{\partial^2\varphi_S}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2\varphi_S}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi_S}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi_S}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2\varphi_S}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial\varphi_S}{\partial x_j} - g_{\frac{i}{A}} \cdot \frac{\partial\varphi_S}{\partial x_i}.$$

Cette grandeur est développée suivant (F.10), c.-à-d. en

$$D_t\tilde{\psi}_S = D_t\psi_{S^{(0)}}^{(0)} + D_t\bar{\psi}_S^{(1)} + D_t\bar{\psi}_S^{(2)} + D_t\bar{\psi}_S^{(3)}$$

où les $D_t\bar{\psi}_S^{(p)}$ sont des fonctions définies à partir de (F.45), donc connues, mais dépendant des grandeurs inconnues $\varphi_{S^{(0)}}^{(*)}$ et $x_{S^*}^{(*)}$ ⁶.

Le développement de $\partial\varphi_S/\partial x_*$ est donné par (F.33). La grandeur $\partial^2\varphi_S/\partial x_*^2$ est développée en utilisant (F.16) :

$$(F.46) \quad \frac{\partial^2\tilde{\varphi}_S}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\varphi_{S^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2\bar{\varphi}_S^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2\bar{\varphi}_S^{(2)}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2\bar{\varphi}_S^{(3)}}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ordre 0

La grandeur $D_t\psi_{S^{(0)}}^{(0)}$ est

(F.47)

$$D_t\psi_{S^{(0)}}^{(0)} = \frac{\partial^2\varphi_{S^{(0)}}^{(0)}}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2\varphi_{S^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi_{S^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi_{S^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2\varphi_{S^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial\varphi_{S^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} - g_{\frac{i}{A}} \cdot \frac{\partial\varphi_{S^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i}.$$

⁵Dans cette expression et dans beaucoup de suivantes des termes sont identiques, mais ils ne sont pas regroupés pour laisser apparente la structure des développements.

⁶Idem note 4 page 223.

Ordres 1 à 3

Les $D_t \bar{\psi}_s^{(p)}$ sont décomposés suivant (F.18), c.-à-d. en

$$D_t \bar{\psi}_s^{(p)} = D_t \psi_{s^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + D_t \bar{\psi}_{s^{(0)} s \triangleleft}^{(p)} + D_t \psi_{s^{(0)} \triangleright}^{(p)} + D_t \bar{\psi}_{s^{(0)} s \triangleright}^{(p)}$$

où

$$(F.48) \quad D_t \psi_{s^{(0)} \triangleleft}^{(p)} = \mathbf{D}_t \psi_{s^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{s^{(0)}}^{(p)}} \right)$$

avec l'opérateur $\mathbf{D}_t \psi_{s^{(0)} \triangleleft}$ défini par

(F.49)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_t \psi_{s^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{s^{(0)}}^{(p)}} \right) &= \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2}} + 2 \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} + \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j}} \\ &+ \left(2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_j} + 2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} - g_{\frac{j}{A}} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_j}} \end{aligned}$$

et

$$(F.50) \quad D_t \bar{\psi}_{s^{(0)} s \triangleleft}^{(p)} = \frac{\partial D_t \psi_{s^{(0)} \triangleleft}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{s \frac{i}{A}}^{(p)}}}{1!}.$$

Les seconds membres sont

Ordre 1

$$(F.51) \quad D_t \psi_{s^{(0)} \triangleright}^{(1)} = 0,$$

$$(F.52) \quad D_t \bar{\psi}_{s^{(0)} s \triangleright}^{(1)} = 0,$$

Ordre 2

(F.53)

$$\begin{aligned} D_t \psi_{s^{(0)} \triangleright}^{(2)} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \\ &+ \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

$$(F.54) \quad D_t \bar{\psi}_{s^{(0)} s \triangleright}^{(2)} = \frac{\partial D_t \psi_{s^{(0)} \triangleright}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{s \frac{i}{A}}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial^2 D_t \psi_{s^{(0)} \triangleright}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{s \frac{i}{A}}^{(1)} \cdot x_{s \frac{j}{A}}^{(1)}}{2!},$$

Ordre 3

(F.55)

$$\begin{aligned}
& D_t \psi_{s^{(0)}}^{(3)} \triangleright \\
&= 2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(2)}}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \right) \\
&+ \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \\
&+ \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_j} \\
&+ \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{s^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_j},
\end{aligned}$$

(F.56) $D_t \bar{\psi}_{s^{(0)}s \triangleright}^{(3)}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial D_t \psi_{s^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{s \frac{i}{A}}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial D_t \psi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{s \frac{i}{A}}^{(2)}}{1!} \\
&+ \frac{\partial^2 D_t \psi_{s^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{s \frac{i}{A}}^{(1)} \cdot x_{s \frac{j}{A}}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2 D_t \psi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{s \frac{i}{A}}^{(2)} \cdot x_{s \frac{j}{A}}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2 D_t \psi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{s \frac{i}{A}}^{(1)} \cdot x_{s \frac{j}{A}}^{(2)}}{2!} \\
&+ \frac{\partial^3 D_t \psi_{s^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{x_{s \frac{i}{A}}^{(1)} \cdot x_{s \frac{j}{A}}^{(1)} \cdot x_{s \frac{k}{A}}^{(1)}}{3!}.
\end{aligned}$$

F.2.1.2 Développements pour l_L

F.2.1.2.1 Développement de l_L

La surface libre est constituée des points dont les coordonnées $x_{L \frac{*}{A}}$ satisfont la condition (cf. (4.21))

$$l(t, x_{L \frac{*}{A}}^{(*)}) = 0.$$

Cette grandeur est supposée connue (elle n'est utilisée que dans les observateurs). Par exemple, si la dénivellation η de la surface libre est mesurée, l peut être défini par

$$(F.57) \quad l = x_{\frac{3}{A}} - \eta.$$

La valeur de la fonction l en L est développée suivant (F.10), c.-à-d. en

$$\tilde{l}_L = l_{L^{(0)}}^{(0)} + \bar{l}_L^{(1)} + \bar{l}_L^{(2)} + \bar{l}_L^{(3)}.$$

Dans cette équation, les $\bar{l}_L^{(p)}$ sont des inconnues, mais en fait les inconnues réellement manipulées vont être les $l_{L^{(0)}}^{(p)}$ et $x_{L^*A}^{(p)}$, constituants des $\bar{l}_{L\triangleleft}^{(p)}$, cf. la section suivante.

Si la définition de l est (F.57), la définition de $l^{(0)}$ est

$$(F.58) \quad l^{(0)} = x_{\frac{3}{A}} - \eta^{(0)}$$

où $\eta^{(0)}$ est la dénivellation mesurée dans l'état non perturbé.

Ordres 1 à 3

Les $\bar{l}_L^{(p)}$ sont décomposés suivant (F.18), c.-à-d. en

$$(F.59) \quad \bar{l}_L^{(p)} = l_{L^{(0)}\triangleleft}^{(p)} + \bar{l}_{L^{(0)}L\triangleleft}^{(p)} + l_{L^{(0)}\triangleright}^{(p)} + \bar{l}_{L^{(0)}L\triangleright}^{(p)}$$

où

$$(F.60) \quad l_{L^{(0)}\triangleleft}^{(p)} = \mathbf{l}_{L^{(0)}\triangleleft} \left(\boxed{l_{L^{(0)}}^{(p)}} \right)$$

avec l'opérateur $\mathbf{l}_{L^{(0)}\triangleleft}$ défini par

$$(F.61) \quad \mathbf{l}_{L^{(0)}\triangleleft} \left(\boxed{l_{L^{(0)}}^{(p)}} \right) = \boxed{l_{L^{(0)}}^{(p)}} \mid^7$$

c.-à-d.

$$(F.62) \quad \mathbf{l}_{L^{(0)}\triangleleft} = \boldsymbol{\delta}$$

et

$$(F.63) \quad \bar{l}_{L^{(0)}L\triangleleft}^{(p)} = \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{L^*A}^{(p)}}{1!}.$$

Les seconds membres sont

Ordre 1

$$(F.64) \quad l_{L^{(0)}\triangleright}^{(1)} = 0 \mid^8,$$

$$(F.65) \quad \bar{l}_{L^{(0)}L\triangleright}^{(1)} = 0,$$

Ordre 2

$$(F.66) \quad l_{L^{(0)}\triangleright}^{(2)} = 0 \mid^9,$$

⁷La raison de cette formulation, apparemment inutilement compliquée, est d'être formellement identique quelle que soit l'expression à développer, même si cette expression est constituée uniquement de la grandeur à développer (ici l).

⁸Mêmes commentaires que dans la note 7 ci-dessus : les $\bullet_{\triangleright}^{(p)}$ sont nuls quand l'expression à développer est constituée uniquement de la grandeur à développer \bullet .

$$(F.67) \quad \bar{l}_{L^{(0)}L}^{(2)} = \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial^2 l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)} \cdot x_{L^j}^{(1)}}{2!},$$

Ordre 3

$$(F.68) \quad l_{L^{(0)}L}^{(3)} = 0 \text{ } |^{10},$$

$$(F.69) \quad \bar{l}_{L^{(0)}L}^{(3)} = \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{L^i}^{(2)}}{1!} \\ + \frac{\partial^2 l_{L^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)} \cdot x_{L^j}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2 l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{L^i}^{(2)} \cdot x_{L^j}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2 l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)} \cdot x_{L^j}^{(2)}}{2!} \\ + \frac{\partial^3 l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)} \cdot x_{L^j}^{(1)} \cdot x_{L^k}^{(1)}}{3!}.$$

F.2.1.2.2 Développement de $D_t l_L$

La grandeur $D_t l$ sur L est définie par

$$(F.70) \quad D_t l_L = \frac{\partial l_L}{\partial t} + \frac{\partial l_L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_L}{\partial x_i}.$$

Cette grandeur est développée suivant (F.10), c.-à-d. en

$$D_t \tilde{l}_L = D_t l_{L^{(0)}}^{(0)} + D_t \bar{l}_L^{(1)} + D_t \bar{l}_L^{(2)} + D_t \bar{l}_L^{(3)}$$

où les $D_t \bar{l}_L^{(p)}$ sont des fonctions définies à partir de (F.70), donc connues, mais dépendant des grandeurs inconnues $l_{L^{(0)}}^{(*)}$, $\varphi_{L^{(0)}}^{(*)}$ et $x_{L^i}^{(*)}$ |¹¹.

La grandeur $\partial l_L / \partial x_*$ est développée en utilisant (F.14) :

$$(F.71) \quad \frac{\partial \tilde{l}_L}{\partial x_i} = \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{l}_L^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{l}_L^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{l}_L^{(3)}}{\partial x_i}.$$

Le développement de $\partial \varphi_L / \partial x_*$ est donné par (F.33) (pour $S = L$).

Ordre 0

La grandeur $D_t l_{L^{(0)}}^{(0)}$ est

$$(F.72) \quad D_t l_{L^{(0)}}^{(0)} = \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i}.$$

⁹Cf. note 8 page ci-contre.

¹⁰Cf. note 8 page précédente.

¹¹Idem note 4 page 223.

Ordres 1 à 3

Les $D_t \bar{l}_L^{(p)}$ sont décomposés suivant (F.18), c.-à-d. en

$$D_t \bar{l}_L^{(p)} = D_t l_{L^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + D_t \bar{l}_{L^{(0)} L \triangleleft}^{(p)} + D_t l_{L^{(0)} \triangleright}^{(p)} + D_t \bar{l}_{L^{(0)} L \triangleright}^{(p)}$$

où

$$(F.73) \quad D_t l_{L^{(0)} \triangleleft}^{(p)} = \mathbf{D}_t \mathbf{l}_{L^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{l_{L^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}} \right)$$

avec l'opérateur $\mathbf{D}_t \mathbf{l}_{L^{(0)} \triangleleft}$ défini par

$$(F.74) \quad \mathbf{D}_t \mathbf{l}_{L^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{l_{L^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}} \right) = \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i} + \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}$$

et

$$(F.75) \quad D_t \bar{l}_{L^{(0)} L \triangleleft}^{(p)} = \frac{\partial D_t l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{L^i}^{(p)}}}{1!}.$$

Les seconds membres sont

Ordre 1

$$(F.76) \quad D_t l_{L^{(0)} \triangleright}^{(1)} = 0,$$

$$(F.77) \quad D_t \bar{l}_{L^{(0)} L \triangleright}^{(1)} = 0,$$

Ordre 2

$$(F.78) \quad D_t l_{L^{(0)} \triangleright}^{(2)} = \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i},$$

$$(F.79) \quad D_t \bar{l}_{L^{(0)} L \triangleright}^{(2)} = \frac{\partial D_t l_{L^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial^2 D_t l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)} \cdot x_{L^j}^{(1)}}{2!},$$

Ordre 3

$$(F.80) \quad D_t l_{L^{(0)} \triangleright}^{(3)} = \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial l_{L^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i},$$

(F.81)

$$\begin{aligned} D_t \bar{l}_{L^{(0)} L \triangleright}^{(3)} &= \frac{\partial D_t l_{L^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial D_t l_{L^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{L^i}^{(2)}}{1!} \\ &+ \frac{\partial^2 D_t l_{L^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)} \cdot x_{L^j}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2 D_t l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{L^i}^{(2)} \cdot x_{L^j}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2 D_t l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)} \cdot x_{L^j}^{(2)}}{2!} \\ &+ \frac{\partial^3 D_t l_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)} \cdot x_{L^j}^{(1)} \cdot x_{L^k}^{(1)}}{3!}. \end{aligned}$$

F.2.1.3 Développements pour la carène définie par $c(t, x_{\frac{*}{A}})$

Cette section est formellement identique à la section F.2.1.2, en remplaçant l et L par c et C , mais avec une nuance, qui n'intervient pas dans les développements, qui est que dans la présente section, c est une inconnue du problème alors que dans la section F.2.1.2, l est connu mais c'est son développement qui est inconnu. L'autre différence avec cette section est qu'ici les développements sont effectués jusqu'à $D_t^3 c_C$.

Par rapport à la section F.2.1.4, dans la présente section, la fonction c elle-même est une inconnue alors que dans la section F.2.1.4, c est connue mais ce sont ses arguments qui sont les inconnues.

F.2.1.3.1 Développement de c_C

La carène est définie par

$$c(t, x_{\frac{*}{A}}^{(*)}) = 0.$$

La grandeur c sur C est développée suivant (F.10), c.-à-d. en

$$(F.82) \quad \tilde{c}_C = c_{C^{(0)}}^{(0)} + \bar{c}_C^{(1)} + \bar{c}_C^{(2)} + \bar{c}_C^{(3)}.$$

Dans (↑), les $\bar{c}_C^{(p)}$ sont des inconnues, mais en fait les inconnues réellement manipulées vont être les $c_{C^{(0)}}^{(p)}$ et $x_{\frac{*}{A}}^{(p)}$, constituants des $\bar{c}_{C^{\triangleleft}}^{(p)}$, cf. la section suivante.

Ordres 1 à 3

Les $\bar{c}_C^{(p)}$ sont décomposés suivant (F.18), c.-à-d. en

$$(F.83) \quad \bar{c}_C^{(p)} = c_{C^{(0)}^{\triangleleft}}^{(p)} + \bar{c}_{C^{(0)}^{\triangleleft}}^{(p)} + c_{C^{(0)}^{\triangleright}}^{(p)} + \bar{c}_{C^{(0)}^{\triangleright}}^{(p)}$$

où

$$(F.84) \quad c_{C^{(0)}^{\triangleleft}}^{(p)} = \mathbf{c}_{C^{(0)}^{\triangleleft}} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right)$$

avec l'opérateur $\mathbf{c}_{C^{(0)}^{\triangleleft}}$ défini par

$$(F.85) \quad \mathbf{c}_{C^{(0)}^{\triangleleft}} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) = \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}$$

c.-à-d.

$$(F.86) \quad \mathbf{c}_{C^{(0)}^{\triangleleft}} = \boldsymbol{\delta}$$

et

$$(F.87) \quad \bar{c}_{C^{(0)}C\triangleleft}^{(p)} = \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{C^{\frac{i}{A}}^{(p)}}}}{1!}.$$

Les seconds membres sont

Ordre 1

$$(F.88) \quad c_{C^{(0)}\triangleright}^{(1)} = 0,$$

$$(F.89) \quad \bar{c}_{C^{(0)}C\triangleright}^{(1)} = 0,$$

Ordre 2

$$(F.90) \quad c_{C^{(0)}\triangleright}^{(2)} = 0,$$

$$(F.91) \quad \bar{c}_{C^{(0)}C\triangleright}^{(2)} = \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{C^{\frac{i}{A}}}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{C^{\frac{i}{A}}}^{(1)} \cdot x_{C^{\frac{j}{A}}}^{(1)}}{2!},$$

Ordre 3

$$(F.92) \quad c_{C^{(0)}\triangleright}^{(3)} = 0,$$

$$(F.93) \quad \begin{aligned} \bar{c}_{C^{(0)}C\triangleright}^{(3)} = & \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{C^{\frac{i}{A}}}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{C^{\frac{i}{A}}}^{(2)}}{1!} \\ & + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{C^{\frac{i}{A}}}^{(1)} \cdot x_{C^{\frac{j}{A}}}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{C^{\frac{i}{A}}}^{(2)} \cdot x_{C^{\frac{j}{A}}}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{C^{\frac{i}{A}}}^{(1)} \cdot x_{C^{\frac{j}{A}}}^{(2)}}{2!} \\ & + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{x_{C^{\frac{i}{A}}}^{(1)} \cdot x_{C^{\frac{j}{A}}}^{(1)} \cdot x_{C^{\frac{k}{A}}}^{(1)}}{3!}. \end{aligned}$$

F.2.1.3.2 Développement de $D_t c_C$

La grandeur $D_t c_C$ est définie par (4.29). Elle est développée suivant (F.10), c.-à-d. en

$$(F.94) \quad D_t \tilde{c}_C = D_t c_{C^{(0)}}^{(0)} + D_t \bar{c}_C^{(1)} + D_t \bar{c}_C^{(2)} + D_t \bar{c}_C^{(3)}$$

où les $D_t \bar{c}_C^{(p)}$ sont des fonctions définies à partir de (4.29), donc connues, mais dépendant des grandeurs inconnues $c_{C^{(0)}}^{(*)}$, $\varphi_{C^{(0)}}^{(*)}$ et $x_{C^{\frac{*}{A}}}^{(*)}$ ¹².

¹²Idem note 4 page 223.

La grandeur $\partial c_C / \partial x_*$ est développée en utilisant (F.14) :

$$(F.95) \quad \frac{\partial \tilde{c}_C}{\partial x_i} = \frac{\partial c_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{c}_C^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{c}_C^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{c}_C^{(3)}}{\partial x_i}.$$

Le développement de $\partial \varphi_C / \partial x_*$ est donné par (F.33) (pour $S = C$).

Ordre 0

La grandeur $D_t c_{C(0)}^{(0)}$ est

$$(F.96) \quad D_t c_{C(0)}^{(0)} = \frac{\partial c_{C(0)}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial c_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_i}.$$

Ordres 1 à 3

Les $D_t \bar{c}_C^{(p)}$ sont décomposés suivant (F.18), c.-à-d. en

$$(F.97) \quad D_t \bar{c}_C^{(p)} = D_t c_{C(0)\triangleleft}^{(p)} + D_t \bar{c}_{C(0)C\triangleleft}^{(p)} + D_t c_{C(0)\triangleright}^{(p)} + D_t \bar{c}_{C(0)C\triangleright}^{(p)}$$

où

$$(F.98) \quad D_t c_{C(0)\triangleleft}^{(p)} = \mathbf{D}_t \mathbf{c}_{C(0)\triangleleft} \left(\boxed{c_{C(0)}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C(0)}^{(p)}} \right)$$

avec l'opérateur $\mathbf{D}_t \mathbf{c}_{C(0)\triangleleft}$ défini par

$$(F.99) \quad \mathbf{D}_t \mathbf{c}_{C(0)\triangleleft} \left(\boxed{c_{C(0)}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C(0)}^{(p)}} \right) = \frac{\partial c_{C(0)}^{(p)}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial c_{C(0)}^{(p)}}{\partial x_i} + \frac{\partial c_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C(0)}^{(p)}}{\partial x_i}$$

et

$$(F.100) \quad D_t \bar{c}_{C(0)C\triangleleft}^{(p)} = \frac{\partial D_t c_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{C\frac{i}{A}}^{(p)}}}{1!}.$$

Les seconds membres sont

Ordre 1

$$(F.101) \quad D_t c_{C(0)\triangleright}^{(1)} = 0,$$

$$(F.102) \quad D_t \bar{c}_{C(0)C\triangleright}^{(1)} = 0,$$

Ordre 2

$$(F.103) \quad D_t c_{C(0)\triangleright}^{(2)} = \frac{\partial c_{C(0)}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C(0)}^{(1)}}{\partial x_i},$$

$$(F.104) \quad D_t \bar{c}_{C^{(0)}C \triangleright}^{(2)} = \frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial^2 D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)} \cdot x_{C^j}^{(1)}}{2!},$$

Ordre 3

$$(F.105) \quad D_t c_{C^{(0)} \triangleright}^{(3)} = \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i},$$

(F.106)

$$\begin{aligned} D_t \bar{c}_{C^{(0)}C \triangleright}^{(3)} &= \frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{C^i}^{(2)}}{1!} \\ &+ \frac{\partial^2 D_t c_{C^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)} \cdot x_{C^j}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2 D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{C^i}^{(2)} \cdot x_{C^j}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2 D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)} \cdot x_{C^j}^{(2)}}{2!} \\ &+ \frac{\partial^3 D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)} \cdot x_{C^j}^{(1)} \cdot x_{C^k}^{(1)}}{3!}. \end{aligned}$$

F.2.1.3.3 Développement de $D_t^2 c_C$

La grandeur $D_t^2 c_C$ est définie par (4.30), soit

$$(F.107) \quad \begin{aligned} D_t^2 c_C &= \frac{\partial^2 c_C}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} + \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_i} \\ &+ \frac{\partial^2 c_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} + \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Cette grandeur est développée suivant (F.10), c.-à-d. en

$$(F.108) \quad D_t^2 \tilde{c}_C = D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(0)} + D_t^2 \bar{c}_C^{(1)} + D_t^2 \bar{c}_C^{(2)} + D_t^2 \bar{c}_C^{(3)}.$$

Les développements de $\partial c_C / \partial x_*$, de $\partial \varphi_C / \partial x_*$ et de $\partial^2 \varphi_C / \partial x_*^2$ sont donnés par (F.95), (F.33) et (F.46) (pour $S = C$). La grandeur $\partial^2 c_C / \partial x_*^2$ est développée en utilisant (F.16) :

$$(F.109) \quad \frac{\partial^2 \tilde{c}_C}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \bar{c}_C^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \bar{c}_C^{(2)}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \bar{c}_C^{(3)}}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ordre 0

La grandeur $D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}$ est

$$(F.110) \quad D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(0)} = \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} \\ + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j}.$$

Ordres 1 à 3

Les $D_t^2 \bar{c}_C^{(p)}$ sont décomposés suivant (F.18), c.-à-d. en

$$(F.111) \quad D_t^2 \bar{c}_C^{(p)} = D_t^2 c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + D_t^2 \bar{c}_{C^{(0)} C \triangleleft}^{(p)} + D_t^2 c_{C^{(0)} \triangleright}^{(p)} + D_t^2 \bar{c}_{C^{(0)} C \triangleright}^{(p)}$$

où

$$(F.112) \quad D_t^2 c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} = \mathbf{D}_t^2 \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right)$$

avec l'opérateur $\mathbf{D}_t^2 \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft}$ défini par

$$(F.113) \quad \mathbf{D}_t^2 \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) = \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2} \\ + 2 \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} + \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j}} \\ + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j}} \\ + \left(\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}} \\ + \left(2 \cdot \frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}}$$

et

$$(F.114) \quad D_t^2 \bar{c}_{C^{(0)} C \triangleleft}^{(p)} = \frac{\partial D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{C^i}^{(p)}}}{1!}.$$

Les seconds membres sont

Ordre 1

$$(F.115) \quad D_t^2 c_{C^{(0)} \triangleright}^{(1)} = 0,$$

$$(F.116) \quad D_t^2 \bar{c}_{C^{(0)} C \triangleright}^{(1)} = 0,$$

(F.120)

$$\begin{aligned}
& D_t^2 \tilde{c}_{C^{(0)}C}^{(3)} \\
&= \frac{\partial D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(2)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)}}{1!} + \frac{\partial D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{C^i}^{(2)}}{1!} \\
&+ \frac{\partial^2 D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)} \cdot x_{C^j}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2 D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{C^i}^{(2)} \cdot x_{C^j}^{(1)}}{2!} + \frac{\partial^2 D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)} \cdot x_{C^j}^{(2)}}{2!} \\
&+ \frac{\partial^3 D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)} \cdot x_{C^j}^{(1)} \cdot x_{C^k}^{(1)}}{3!}.
\end{aligned}$$

F.2.1.3.4 Développement de $D_t^3 c_C$

La grandeur $D_t^3 c_C$ est définie par (4.31), soit

(F.121) $D_t^3 c_C$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^3 c_C}{\partial t^3} + 3 \cdot \frac{\partial^3 c_C}{\partial t^2 \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_C}{\partial t^2 \partial x_i} \\
&+ 3 \cdot \frac{\partial^3 c_C}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \\
&+ 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} + 2 \cdot \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_C}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \\
&+ \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_j} \\
&+ \frac{\partial^3 c_C}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} \\
&+ \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} + \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Cette grandeur est développée suivant (F.10), c.-à-d. en

$$(F.122) \quad D_t^3 \tilde{c}_C = D_t^3 c_{C^{(0)}}^{(0)} + D_t^3 \tilde{c}_C^{(1)} + D_t^3 \tilde{c}_C^{(2)} + D_t^3 \tilde{c}_C^{(3)}.$$

Les développements de $\partial c_C / \partial x_*$, de $\partial^2 c_C / \partial x_*^2$, de $\partial \varphi_C / \partial x_*$ et de $\partial^2 \varphi_C / \partial x_*^2$ sont donnés par (F.95), (F.109), (F.33) et (F.46) (pour $S = C$). Les $\partial^3 / \partial x_*^3$ sont développés de la même manière.

Ordre 0

La grandeur $D_t^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}$ est

(F.123)

$$\begin{aligned}
& D_t^3 c_{C^{(0)}}^{(0)} \\
&= \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t^3} + 3 \cdot \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t^2 \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t^2 \partial x_i} \\
&+ 3 \cdot \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \\
&+ 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + 2 \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \\
&+ \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_j} \\
&+ \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \\
&+ \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Ordres 1 à 3

Les $D_t^3 \bar{c}_{C^{(p)}}^{(p)}$ sont décomposés suivant (F.18), c.-à-d. en

$$(F.124) \quad D_t^3 \bar{c}_{C^{(p)}}^{(p)} = D_t^3 c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + D_t^3 \bar{c}_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + D_t^3 c_{C^{(0)} \triangleright}^{(p)} + D_t^3 \bar{c}_{C^{(0)} \triangleright}^{(p)}$$

où

$$(F.125) \quad D_t^3 c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} = \mathbf{D}_t^3 \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right)$$

avec l'opérateur $\mathbf{D}_t^3 \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft}$ défini par

$$\begin{aligned}
(F.126) \quad & \mathbf{D}_t^3 \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \\
&= \boxed{\frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^3}} + 3 \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2 \partial x_i}} + 3 \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j}} \\
&+ \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2 \partial x_i}} + 2 \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j}} \\
& + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}} \\
& + 3 \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} \\
& + 3 \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j}} \\
& + \left(3 \cdot \frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} - 2 \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} \\
& + \left(\left(3 \cdot \frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} - 2 \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \right) \right) \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_k}} \\
& + \left(\frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t^2 \partial x_i} + 2 \cdot \frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_j} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}} \\
& + \left(3 \cdot \frac{\partial D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} - 3 \cdot \frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \right) \right) \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}}
\end{aligned}$$

et

$$(F.127) \quad D_t^3 \bar{c}_{C^{(0)} C \triangleleft}^{(p)} = \frac{\partial D_t^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{x_{C \frac{i}{A}}^{(p)}}{1!}.$$

Les seconds membres sont

Ordre 1

$$(F.128) \quad D_t^3 c_{C^{(0)} \triangleright}^{(1)} = 0,$$

$$(F.129) \quad D_t^3 \bar{c}_{C^{(0)} C \triangleright}^{(1)} = 0,$$

F.2.1.4 Développements pour la carène définie par $c(p_{[\frac{*}{A}]^{[0]}}, p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1]}}, x_{\frac{*}{A}}^{(*)})$

F.2.1.4.1 Développement de c_C

La carène est maintenant définie par

$$c(p_{[\frac{*}{A}]^{[0]}}, p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1]}}, x_{\frac{*}{A}}^{(*)}) = 0.$$

La grandeur c sur C est développée suivant (F.10), c.-à-d. formellement en (F.82) :

$$(F.134) \quad \tilde{c}_C = c_{C^{(0)}}^{(0)} + \bar{c}_C^{(1)} + \bar{c}_C^{(2)} + \bar{c}_C^{(3)}.$$

mais où les $\bar{c}_C^{(p)}$ sont des fonctions définies à partir de c , donc connues, mais dépendant des grandeurs inconnues $p_{[\frac{*}{A}]^{[0]}}, p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1]}}$ et $x_{\frac{*}{A}}^{(*)}$ ¹³.

Ordre 0

La grandeur $c_{C^{(0)}}^{(0)}$ est

$$c_{C^{(0)}}^{(0)} = c(p_{[\frac{*}{A}]^{[0]}}, p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1]}}, x_{\frac{*}{A}}^{(0)}).$$

Ordres 1 à 3

Les $\bar{c}_C^{(p)}$ sont décomposés suivant (F.18), c.-à-d. formellement en (F.83) mais où

$$(F.135) \quad c_{C^{(0)}\triangleleft}^{(p)} = \mathbf{c}_{C^{(0)}\triangleleft} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}]^{[0]}(p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1]}(p)}} \right)$$

avec l'opérateur $\mathbf{c}_{C^{(0)}\triangleleft}$ défini par

$$(F.136) \quad \mathbf{c}_{C^{(0)}\triangleleft} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}]^{[0]}(p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1]}(p)}} \right) = \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \boxed{p_{[\frac{*}{A}]^{[0]}(p)}} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1]}(p)}} \right)$$

et

$$(F.137) \quad \bar{c}_{C^{(0)}\triangleleft}^{(p)} : \text{formellement identique à (F.87).}$$

Les seconds membres sont

Ordre 1

$$(F.138) \quad c_{C^{(0)}\triangleright}^{(1)} = 0,$$

¹³Idem note 4 page 223.

$$(F.139) \quad \bar{c}_{C^{(0)}C \triangleright}^{(1)} = 0,$$

Ordre 2

$$(F.140) \quad c_{C^{(0)} \triangleright}^{(2)} = \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]^{(0)(1)}} \cdot p_{[\frac{j}{A}]^{(0)(1)}}}{2!} + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]^{(0)(1)}}}{1!} \cdot \frac{p_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]^{(1)(1)}}}{1!} \\ + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{(1)(1)}} \cdot p_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]^{(1)(1)}}}{2!},$$

$$(F.141) \quad \bar{c}_{C^{(0)}C \triangleright}^{(2)} : \text{formellement identique à (F.91),}$$

Ordre 3

$$(F.142) \quad c_{C^{(0)} \triangleright}^{(3)} = \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]^{(0)(2)}} \cdot p_{[\frac{j}{A}]^{(0)(1)}}}{2!} + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]^{(0)(1)}} \cdot p_{[\frac{j}{A}]^{(0)(2)}}}{2!} \\ + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]^{(0)(2)}}}{1!} \cdot \frac{p_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]^{(1)(1)}}}{1!} + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]^{(0)(1)}}}{1!} \cdot \frac{p_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]^{(1)(2)}}}{1!} \\ + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{(1)(2)}} \cdot p_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]^{(1)(1)}}}{2!} + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{(1)(1)}} \cdot p_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]^{(1)(2)}}}{2!} \\ + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]} \partial p_k^{[0]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]^{(0)(1)}} \cdot p_{[\frac{j}{A}]^{(0)(1)}} \cdot p_{[\frac{k}{A}]^{(0)(1)}}}{3!} \\ + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]^{(0)(1)}} \cdot p_{[\frac{j}{A}]^{(0)(1)}}}{2!} \cdot \frac{p_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]^{(1)(1)}}}{1!} \\ + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]} \partial p_{l;m}^{[1]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]^{(0)(1)}}}{1!} \cdot \frac{p_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]^{(1)(1)}} \cdot p_{[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]^{(1)(1)}}}{2!} \\ + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]} \partial p_{m;n}^{[1]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{(1)(1)}} \cdot p_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]^{(1)(1)}} \cdot p_{[\frac{m}{A}; \frac{n}{N}]^{(1)(1)}}}{3!},$$

$$(F.143) \quad \bar{c}_{C^{(0)}C \triangleright}^{(3)} : \text{formellement identique à (F.93).}$$

F.2.1.4.2 Développement de $D_t c_C$

La grandeur $D_t c_C$ est définie par (4.76). Elle est développée suivant (F.10), c.-à-d. formellement en (F.94) mais où les $D_t \bar{c}_C^{(p)}$ sont des fonctions définies à

partir de (4.76), donc connues, mais dépendant des grandeurs inconnues $p_{[\frac{i}{A}]^{(*)}}^{[0](*)}$, $p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{(*)}}^{[1](*)}$ et $x_{C^*}^{(*)}$ |¹⁴. Les développements de $\partial c_C / \partial x_*$ et de $\partial \varphi_C / \partial x_*$ sont donnés par (F.95) et (F.33) (pour $S = C$).

Ordre 0

La grandeur $D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}$ est

$$(F.144) \quad D_t c_{C^{(0)}}^{(0)} = \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]^{(0)}}^{0}}{dt} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{(0)}}^{[1](0)}}{dt} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i}.$$

Ordres 1 à 3

Les $D_t \bar{c}_C^{(p)}$ sont décomposés suivant (F.18), c.-à-d. formellement en (F.97) mais où

$$(F.145) \quad D_t c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} = \mathbf{D}_t \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{[\frac{i}{A}]^{(p)}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{(p)}}^{[1](p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right)$$

avec l'opérateur $\mathbf{D}_t \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft}$ défini par

$$(F.146) \quad \begin{aligned} \mathbf{D}_t \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} & \left(\boxed{p_{[\frac{i}{A}]^{(p)}}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{(p)}}^{[1](p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \\ &= \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \boxed{\frac{dp_{[\frac{i}{A}]^{(p)}}^{[0](p)}}{dt}} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \boxed{\frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{(p)}}^{[1](p)}}{dt}} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}} \\ &+ \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \boxed{p_{[\frac{i}{A}]^{(p)}}^{[0](p)}} + \frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \boxed{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{(p)}}^{[1](p)}} \right) \end{aligned}$$

et

$$(F.147) \quad D_t \bar{c}_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} : \text{formellement identique à (F.100).}$$

Les seconds membres sont

Ordre 1

$$(F.148) \quad D_t c_{C^{(0)} \triangleright}^{(1)} = 0,$$

$$(F.149) \quad D_t \bar{c}_{C^{(0)} \triangleright}^{(1)} = 0,$$

¹⁴Idem note 4 page 223.

Ordre 2

$$\begin{aligned}
(F.150) \quad D_t \bar{c}_{C^{(0)} \triangleright}^{(2)} = & \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](1)}}{1!} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0](1)}}{dt} + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_k^{[0]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{1}}{1!} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}]}^{[0](1)}}{dt} \\
& + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](1)}}{1!} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{1}}{dt} + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{1}}{1!} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{1}}{dt} \\
& + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](1)}}{1!} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{1}}{1!} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_k} \\
& + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]} \partial p_k^{[0]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](1)} \cdot p_{[\frac{j}{A}]}^{[0](1)}}{2!} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}]}^{0}}{dt} \\
& + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]} \partial p_l^{[0]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](1)}}{1!} \cdot \frac{p_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{1}}{1!} \cdot \frac{dp_{[\frac{l}{A}]}^{0}}{dt} \\
& + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]} \partial p_m^{[0]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{1} \cdot p_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{1}}{2!} \cdot \frac{dp_{[\frac{m}{A}]}^{0}}{dt} \\
& + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](1)} \cdot p_{[\frac{j}{A}]}^{[0](1)}}{2!} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \\
& + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]} \partial p_{l;m}^{[1]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](1)}}{1!} \cdot \frac{p_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{1}}{1!} \cdot \frac{dp_{[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \\
& + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]} \partial p_{m;n}^{[1]}} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{1} \cdot p_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{1}}{2!} \cdot \frac{dp_{[\frac{m}{A}; \frac{n}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \\
& + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]} \partial x_k} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](1)} \cdot p_{[\frac{j}{A}]}^{[0](1)}}{2!} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \\
& + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]} \partial x_l} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](1)}}{1!} \cdot \frac{p_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{1}}{1!} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_l} \\
& + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]} \partial x_m} \cdot \frac{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{1} \cdot p_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{1}}{2!} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_m},
\end{aligned}$$

(F.151) $D_t \bar{c}_{C^{(0)} \triangleright}^{(2)}$: formellement identique à (F.104),

Ordre 3

$$(F.152) \quad D_t c_{C(0)\triangleright}^{(3)} = \text{beaucoup de termes !}$$

$$(F.153) \quad D_t \bar{c}_{C(0)C\triangleright}^{(3)} : \text{formellement identique à (F.106).}$$

F.2.1.4.3 Développement de $D_t^2 c_C$

La grandeur $D_t^2 c_C$ est définie par (4.77), soit

$$(F.154) \quad D_t^2 c_C = \frac{\partial c_C}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} + \frac{\partial c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^2} + \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_i} \\ + \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}}{dt} + 2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt} \\ + 2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}}{dt} \\ + 2 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} \\ + \frac{\partial^2 c_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} + \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j}.$$

Cette grandeur est développée suivant (F.10), c.-à-d. formellement en (F.108) mais où les $D_t^2 \bar{c}_C^{(p)}$ sont des fonctions définies à partir de (F.154), donc connues, mais dépendant des grandeurs inconnues $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](*)}$, $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](*)}$ et $x_{C \frac{*}{A}}^{(*)}$ ¹⁵.

Les développements de $\partial c_C / \partial x_*$, de $\partial^2 c_C / \partial x_*^2$, de $\partial \varphi_C / \partial x_*$ et de $\partial^2 \varphi_C / \partial x_*^2$ sont donnés par (F.95), (F.109), (F.33) et (F.46) (pour $S = C$).

Ordre 0

La grandeur $D_t^2 c_{C(0)}^{(0)}$ est

¹⁵Idem note 4 page 223.

$$\begin{aligned}
(F.155) \quad D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(0)} &= \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{0}}{dt^2} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}}{dt^2} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} \\
&+ \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{0}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}]}^{0}}{dt} + 2 \cdot \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{0}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \\
&+ 2 \cdot \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{0}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \\
&+ 2 \cdot \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \\
&+ \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

Ordres 1 à 3

Les $D_t^2 \bar{c}_C^{(p)}$ sont décomposés suivant (F.18), c.-à-d. formellement en (F.111) mais où

$$(F.156) \quad D_t^2 c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} = \mathbf{D}_t^2 c_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right)$$

avec l'opérateur $\mathbf{D}_t^2 c_{C^{(0)} \triangleleft}$ défini par

$$\begin{aligned}
(F.157) \quad \mathbf{D}_t^2 c_{C^{(0)} \triangleleft} &\left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \\
&= \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \boxed{\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}}{dt^2}} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \boxed{\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}}{dt^2}} \\
&+ \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j}} \\
&+ \left(2 + \frac{1}{1!} \right) \cdot \left(\frac{\partial D_t c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \boxed{\frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}}{dt}} + \frac{\partial D_t c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \boxed{\frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}}{dt}} \right) \\
&+ \left(2 \cdot \frac{\partial D_t c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}} \\
&+ \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\partial D_t^2 c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \boxed{p_{[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}} + \frac{\partial D_t^2 c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \boxed{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)}} \right)
\end{aligned}$$

et

$$(F.158) \quad D_t^2 \bar{c}_{C^{(0)}C \triangleleft}^{(p)} : \text{formellement identique à (F.114).}$$

Les seconds membres sont

Ordre 1

$$(F.159) \quad D_t^2 c_{C^{(0)}C \triangleright}^{(1)} = 0,$$

$$(F.160) \quad D_t^2 \bar{c}_{C^{(0)}C \triangleright}^{(1)} = 0,$$

Ordre 2

$$(F.161) \quad D_t^2 c_{C^{(0)}C \triangleright}^{(2)} = \text{beaucoup de termes !}$$

$$(F.162) \quad D_t^2 \bar{c}_{C^{(0)}C \triangleright}^{(2)} : \text{formellement identique à (F.118),}$$

Ordre 3

$$(F.163) \quad D_t^2 c_{C^{(0)}C \triangleright}^{(3)} = \text{beaucoup de termes !}$$

$$(F.164) \quad D_t^2 \bar{c}_{C^{(0)}C \triangleright}^{(3)} : \text{formellement identique à (F.120).}$$

F.2.1.4.4 Développement de $D_t^3 c_C$

La grandeur $D_t^3 c_C$ est définie par (4.78), soit

$$(F.165) \quad D_t^3 c_C = \frac{\partial c_C}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{d^3 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^3} + \frac{\partial c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{d^3 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^3} + \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_C}{\partial t^2 \partial x_i} \\ + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} \cdot \frac{d p_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}}{dt} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} \cdot \frac{d p_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt} \\ + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]}} \cdot \frac{d p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt^2} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt^2} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \\ + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j} \cdot \frac{d p_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_j} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^2} \cdot \frac{d p_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}}{dt}$$

$$\begin{aligned}
& + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k} \cdot \frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt^2} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_k} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} + 2 \cdot \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_C}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \\
& + \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t \partial x_j} + \frac{\partial^3 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]} \partial p_k^{[0]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}]}^{[0]}}{dt} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^3 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}}{dt} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^3 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]} \partial x_k} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^3 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]} \partial p_{l;m}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1]}}{dt} \\
& + 6 \cdot \frac{\partial^3 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]} \partial x_l} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_l} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^3 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{[0]}}{dt} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} \\
& + \frac{\partial^3 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]} \partial p_{m;n}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{m}{A}; \frac{n}{N}]}^{[1]}}{dt} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^3 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]} \partial x_m} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_m} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^3 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k \partial x_l} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_l} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]}}{dt} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_k \partial x_l} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_l} \\
& + \frac{\partial^3 c_C}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} \\
& + \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k} + \frac{\partial c_C}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Cette grandeur est développée suivant (F.10), c.-à-d. formellement en (F.122) mais où les $D_t^3 \bar{c}_C^{(p)}$ sont des fonctions définies à partir de (F.165), donc connues, mais dépendant des grandeurs inconnues $p_{[\bar{A}]^{(*)}}^{[0]^{(*)}}$, $p_{[\bar{A}; \bar{N}]^{(*)}}^{[1]^{(*)}}$ et $x_{C \bar{A}}^{(*)}$ ¹⁶.

Les développements de $\partial c_C / \partial x_*$, de $\partial^2 c_C / \partial x_*^2$, de $\partial \varphi_C / \partial x_*$ et de $\partial^2 \varphi_C / \partial x_*^2$ sont donnés par (F.95), (F.109), (F.33) et (F.46) (pour $S = C$). Les $\partial^3 / \partial x_*^3$ sont développés de la même manière.

Ordre 0

La grandeur $D_t^3 c_{C(0)}^{(0)}$ est

(F.166)

$$\begin{aligned}
D_t^3 c_{C(0)}^{(0)} = & \frac{\partial c_{C(0)}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \frac{d^3 p_{[\bar{A}]^{(0)}}^{[0]^{(0)}}}{dt^3} + \frac{\partial c_{C(0)}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \frac{d^3 p_{[\bar{A}; \bar{N}]^{(0)}}^{[1]^{(0)}}}{dt^3} + \frac{\partial c_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_{C(0)}^{(0)}}{\partial t^2 \partial x_i} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C(0)}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\bar{A}]^{(0)}}^{[0]^{(0)}}}{dt^2} \cdot \frac{d p_{[\bar{A}]^{(0)}}^{[0]^{(0)}}}{dt} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C(0)}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\bar{A}]^{(0)}}^{[0]^{(0)}}}{dt^2} \cdot \frac{d p_{[\bar{A}; \bar{N}]^{(0)}}^{[1]^{(0)}}}{dt} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C(0)}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]}} \cdot \frac{d p_{[\bar{A}]^{(0)}}^{[0]^{(0)}}}{dt} \cdot \frac{d^2 p_{[\bar{A}; \bar{N}]^{(0)}}^{[1]^{(0)}}}{dt^2} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C(0)}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j} \cdot \frac{d^2 p_{[\bar{A}]^{(0)}}^{[0]^{(0)}}}{dt^2} \cdot \frac{\partial \varphi_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_j} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C(0)}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j} \cdot \frac{d p_{[\bar{A}]^{(0)}}^{[0]^{(0)}}}{dt} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C(0)}^{(0)}}{\partial t \partial x_j} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C(0)}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{d^2 p_{[\bar{A}; \bar{N}]^{(0)}}^{[1]^{(0)}}}{dt^2} \cdot \frac{d p_{[\bar{A}; \bar{N}]^{(0)}}^{[1]^{(0)}}}{dt} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C(0)}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k} \cdot \frac{d^2 p_{[\bar{A}; \bar{N}]^{(0)}}^{[1]^{(0)}}}{dt^2} \cdot \frac{\partial \varphi_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_k} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C(0)}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k} \cdot \frac{d p_{[\bar{A}; \bar{N}]^{(0)}}^{[1]^{(0)}}}{dt} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C(0)}^{(0)}}{\partial t \partial x_k} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C(0)}^{(0)}}{\partial t \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_j} + 2 \cdot \frac{\partial c_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_{C(0)}^{(0)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_j} \\
& + \frac{\partial c_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C(0)}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C(0)}^{(0)}}{\partial t \partial x_j} + \frac{\partial^3 c_{C(0)}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]} \partial p_k^{[0]}} \cdot \frac{d p_{[\bar{A}]^{(0)}}^{[0]^{(0)}}}{dt} \cdot \frac{d p_{[\bar{A}]^{(0)}}^{[0]^{(0)}}}{dt} \cdot \frac{d p_{[\bar{A}; \bar{N}]^{(0)}}^{[1]^{(0)}}}{dt} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^3 c_{C(0)}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]} \partial p_{k;l}^{[1]}} \cdot \frac{d p_{[\bar{A}]^{(0)}}^{[0]^{(0)}}}{dt} \cdot \frac{d p_{[\bar{A}]^{(0)}}^{[0]^{(0)}}}{dt} \cdot \frac{d p_{[\bar{A}; \bar{N}]^{(0)}}^{[1]^{(0)}}}{dt}
\end{aligned}$$

¹⁶Idem note 4 page 223.

$$\begin{aligned}
& + 3 \cdot \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_j^{[0]} \partial x_k} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{0}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}]}^{0}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]} \partial p_{l;m}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{0}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{l}{A}; \frac{m}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \\
& + 6 \cdot \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial p_{j;k}^{[1]} \partial x_l} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{0}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{j}{A}; \frac{k}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_l} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{0}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]} \partial x_j} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}]}^{0}}{dt} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \\
& + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]} \partial p_{m;n}^{[1]}} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{m}{A}; \frac{n}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial p_{k;l}^{[1]} \partial x_m} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot \frac{dp_{[\frac{k}{A}; \frac{l}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_m} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k \partial x_l} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_l} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]} \partial x_k} \cdot \frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](0)}}{dt} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k \partial x_l} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_l} \\
& + \frac{\partial^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \\
& + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \\
& + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \\
& + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

Ordres 1 à 3

Les $D_t^3 c_C^{(p)}$ sont décomposés suivant (F.18), c.-à-d. formellement en (F.124) mais où

$$(F.167) \quad D_t^3 c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} = \mathbf{D}_t^3 c_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{[\frac{i}{A}]^{[0](p)}}}, \boxed{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{[1](p)}}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right)$$

avec l'opérateur $\mathbf{D}_t^3 c_{C^{(0)} \triangleleft}$ défini par

$$(F.168) \quad \begin{aligned} & \mathbf{D}_t^3 c_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{[\frac{i}{A}]^{[0](p)}}}, \boxed{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{[1](p)}}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \\ &= \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \boxed{\frac{d^3 p_{[\frac{i}{A}]^{[0](p)}}}{dt^3}} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \boxed{\frac{d^3 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{[1](p)}}}{dt^3}} \\ &+ \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t^2 \partial x_i}} + 2 \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j}} \\ &+ \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}} \\ &+ (3 + \frac{1}{1!}) \cdot \left(\frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \boxed{\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}]^{[0](p)}}}{dt^2}} + \frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \boxed{\frac{d^2 p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{[1](p)}}}{dt^2}} \right) \\ &+ (3 \cdot \frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} - 2 \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j}) \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} \\ &+ ((3 \cdot \frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} - 2 \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j}) \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \\ &+ \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot (\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j}) \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \partial x_k}} \\ &+ (3 + \frac{2}{1!}) \cdot \left(\frac{\partial D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \boxed{\frac{dp_{[\frac{i}{A}]^{[0](p)}}}{dt}} + \frac{\partial D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \boxed{\frac{dp_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{[1](p)}}}{dt}} \right) \\ &+ (3 \cdot \frac{\partial D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} - 3 \cdot \frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} + 3 \cdot \frac{\partial^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial t \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} \right) \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i}} \\
& + \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\partial D_t^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_i^{[0]}} \cdot \boxed{p_{[\frac{i}{A}]^{[0](p)}}} + \frac{\partial D_t^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial p_{i;j}^{[1]}} \cdot \boxed{p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]^{[1](p)}}} \right)
\end{aligned}$$

et

$$(F.169) \quad D_t^3 \bar{c}_{C^{(0)} C^{\triangleleft}}^{(p)} : \text{formellement identique à (F.127).}$$

Les seconds membres sont

Ordre 1

$$(F.170) \quad D_t^3 c_{C^{(0)} \triangleright}^{(1)} = 0,$$

$$(F.171) \quad D_t^3 \bar{c}_{C^{(0)} C^{\triangleright}}^{(1)} = 0,$$

Ordre 2

$$(F.172) \quad D_t^3 c_{C^{(0)} \triangleright}^{(2)} = \text{beaucoup de termes !}$$

$$(F.173) \quad D_t^3 \bar{c}_{C^{(0)} C^{\triangleright}}^{(2)} : \text{formellement identique à (F.131),}$$

Ordre 3

$$(F.174) \quad D_t^3 c_{C^{(0)} \triangleright}^{(3)} = \text{beaucoup de termes !}$$

$$(F.175) \quad D_t^3 \bar{c}_{C^{(0)} C^{\triangleright}}^{(3)} : \text{formellement identique à (F.133).}$$

Nous disposons maintenant de tous les éléments pour développer les conditions que doivent vérifier les grandeurs inconnues.

F.2.2 Développement des conditions

F.2.2.1 Développement de la condition d'harmonicité

La condition d'harmonicité (4.12) étant linéaire, son développement est immédiat :

$$(F.176) \quad \boxed{\frac{\partial^2 \varphi^{(p)}}{(\partial x_i)^2}} = 0.$$

F.2.2.2 Développement des conditions de surface libre pour $l = \psi$

Pour $l = \psi$, les CSL sont (4.23) où ψ_L et $D_t\psi_L$ sont donnés par (F.31) et (F.45) (pour $S = L$).

F.2.2.2.1 Ordre 0

Les grandeurs $\varphi_{L^{(0)}}^{(0)}$ et $x_{L^* \bar{A}}^{(0)}$ doivent satisfaire le système d'équations

$$(F.177) \quad \begin{cases} (1) & \psi_{L^{(0)}}^{(0)} = 0, \\ (2) & D_t\psi_{L^{(0)}}^{(0)} = 0, \end{cases}$$

où $\psi_{L^{(0)}}^{(0)}$ et $D_t\psi_{L^{(0)}}^{(0)}$ sont donnés par (F.34) et (F.47) (pour $S^{(0)} = L^{(0)}$). La surface définie par les $x_{L^* \bar{A}}^{(0)}$ satisfaisant ces conditions est désignée par $L^{(0)}$.

F.2.2.2.2 Ordres 1 à 3

Les grandeurs $\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}$ et $x_{L^* \bar{A}}^{(p)}$ doivent satisfaire le système d'équations

$$\begin{cases} (1) & \bar{\psi}_L^{(p)} = 0, \\ (2) & D_t\bar{\psi}_L^{(p)} = 0, \end{cases}$$

soit, en décomposant,

$$(F.178) \quad \begin{cases} (1) & \psi_{L^{(0)\triangleleft} }^{(p)} + \frac{\partial\psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{L^* \bar{A}}^{(p)}}}{1!} + \bar{\psi}_{L^{\triangleright}}^{(p)} = 0, \\ (2) & D_t\psi_{L^{(0)\triangleleft} }^{(p)} + \frac{\partial D_t\psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{L^* \bar{A}}^{(p)}}}{1!} + D_t\bar{\psi}_{L^{\triangleright}}^{(p)} = 0, \end{cases}$$

où $\psi_{**}^{(p)}$ et $D_t\psi_{**}^{(p)}$ sont donnés par (F.36) à (F.44) et (F.48) à (F.56) (pour $S^{(0)} = L^{(0)}$).

Le point clé du traitement des surfaces inconnues est le fait que $x_{L^* \bar{A}}^{(p)}$ peut être éliminé entre (↑.1) et (↑.2) en remarquant que dans ces équations, les termes en facteur de ce vecteur sont les gradients des conditions homogènes (F.177.1) et (F.177.2) qui doivent être satisfaites sur la même surface $L^{(0)}$. Ces gradients *en* $L^{(0)}$ sont donc colinéaires, ce qui peut être exprimé par

$$(F.179) \quad \frac{\partial D_t \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} + \lambda_{\left(\frac{D_t \psi}{\psi}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}} \cdot \frac{\partial \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} = 0$$

où $\lambda_{\left(\frac{D_t \psi}{\psi}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}}$ est un scalaire. Une expression de $\lambda_{\left(\frac{D_t \psi}{\psi}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}}$ peut être obtenue en multipliant (↑) par $\partial \psi_{L^{(0)}}^{(0)} / \partial x_i$ ¹⁷, ce qui donne

$$(F.180) \quad \begin{aligned} \lambda_{\left(\frac{D_t \psi}{\psi}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}} &= - \frac{\frac{\partial D_t \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i}}{\left(\frac{\partial \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j}\right)^2}, \\ &= \mathbf{L}_{\frac{-\nabla \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\|\nabla \psi_{L^{(0)}}^{(0)}\|^2}} (D_t \psi_{L^{(0)}}^{(0)}), \end{aligned}$$

où \mathbf{L} est la dérivée de Lie.

L'équation (F.179) permet d'éliminer $x_{L^*}^{(p)}$ dans le système (F.178), qui devient

$$(F.181) \quad D_t \psi_{L^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + \lambda_{\left(\frac{D_t \psi}{\psi}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}} \cdot \psi_{L^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + D_t \bar{\psi}_{L \triangleright}^{(p)} + \lambda_{\left(\frac{D_t \psi}{\psi}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}} \cdot \bar{\psi}_{L \triangleright}^{(p)} = 0.$$

Cette condition s'écrit

$$(F.182) \quad \mathbf{D}_t \bar{\psi}_{L \triangleleft \lambda} \left(\boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}} \right) + D_t \bar{\psi}_{L \triangleright \lambda}^{(p)} = 0$$

où l'opérateur $\mathbf{D}_t \bar{\psi}_{L \triangleleft \lambda}$ doit être tel que

$$\mathbf{D}_t \bar{\psi}_{L \triangleleft \lambda} \left(\boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}} \right) = D_t \psi_{L^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + \lambda_{\left(\frac{D_t \psi}{\psi}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}} \cdot \psi_{L^{(0)} \triangleleft}^{(p)},$$

ce qui donne

$$\mathbf{D}_t \bar{\psi}_{L \triangleleft \lambda} \left(\boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}} \right) = \mathbf{D}_t \psi_{L^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}} \right) + \lambda_{\left(\frac{D_t \psi}{\psi}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}} \cdot \psi_{L^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}} \right)$$

où les opérateurs $\psi_{L^{(0)} \triangleleft}$ et $\mathbf{D}_t \psi_{L^{(0)} \triangleleft}$ sont définis par (F.37) et (F.49) (pour $S^{(0)} = L^{(0)}$).

Les seconds membres sont donnés par

$$(F.183) \quad D_t \bar{\psi}_{L \triangleright \lambda}^{(p)} = D_t \bar{\psi}_{L \triangleright}^{(p)} + \lambda_{\left(\frac{D_t \psi}{\psi}\right)_{L^{(0)}}^{(0)}} \cdot \bar{\psi}_{L \triangleright}^{(p)}$$

soit

$$D_t \bar{\psi}_{L \triangleright \lambda}^{(1)} = 0,$$

¹⁷Tout vecteur non orthogonal à ce vecteur pourrait être utilisé.

$$D_t \bar{\psi}_{L \triangleright \lambda}^{(2)} = D_t \psi_{L^{(0)} \triangleright}^{(2)} + \lambda \left(\frac{D_t \psi}{\psi} \right)_{L^{(0)}}^{(0)} \cdot \psi_{L^{(0)} \triangleright}^{(2)} + D_t \psi_{L^{(0)} i \lambda}^{(1)} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)}}{1!} + D_t \psi_{L^{(0)} i, j \lambda}^{(0)} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)} \cdot x_{L^j}^{(1)}}{2!}$$

et

$$\begin{aligned} D_t \bar{\psi}_{L \triangleright \lambda}^{(3)} &= D_t \psi_{L^{(0)} \triangleright}^{(3)} + \lambda \left(\frac{D_t \psi}{\psi} \right)_{L^{(0)}}^{(0)} \cdot \psi_{L^{(0)} \triangleright}^{(3)} \\ &+ D_t \psi_{L^{(0)} i \lambda}^{(2)} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)}}{1!} + D_t \psi_{L^{(0)} i \lambda}^{(1)} \cdot \frac{x_{L^i}^{(2)}}{1!} \\ &+ D_t \psi_{L^{(0)} i, j \lambda}^{(1)} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)} \cdot x_{L^j}^{(1)}}{2!} + D_t \psi_{L^{(0)} i, j \lambda}^{(0)} \cdot \frac{x_{L^i}^{(2)} \cdot x_{L^j}^{(1)}}{2!} + D_t \psi_{L^{(0)} i, j \lambda}^{(0)} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)} \cdot x_{L^j}^{(2)}}{2!} \\ &+ D_t \psi_{L^{(0)} i, j, k \lambda}^{(0)} \cdot \frac{x_{L^i}^{(1)} \cdot x_{L^j}^{(1)} \cdot x_{L^k}^{(1)}}{3!} \end{aligned}$$

avec

$$D_t \psi_{L^{(0)} i, \dots \lambda}^{(p)} = \frac{\partial \dots D_t \psi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \dots} + \lambda \left(\frac{D_t \psi}{\psi} \right)_{L^{(0)}}^{(0)} \cdot \frac{\partial \dots \psi_{L^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \dots}.$$

Cette procédure permet d'éliminer $x_{L^i}^{(p)}$ mais pas les $x_{L^i}^{(*)}$ d'ordre inférieur : les seconds membres restent fonction de ces grandeurs.

Il reste à obtenir une expression de $x_{L^i}^{(p)}$. Cette grandeur est déterminée par (F.178.1) ou (F.178.2) où elle n'intervient que par ses produits scalaires avec $\partial \psi_{L^{(0)}}^{(0)} / \partial x_*$ et $\partial D_t \psi_{L^{(0)}}^{(0)} / \partial x_*$. Ces deux vecteurs étant colinéaires, seule sa composante suivant cette direction est définie. Ces équations donnent

$$(F.184) \quad \boxed{x_{L^i}^{(p)}} = - \frac{\psi_{L^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}} \right) + \bar{\psi}_{L \triangleright}^{(p)} \cdot \partial \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\left(\frac{\partial \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \right)^2} \cdot \frac{\partial \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i}$$

et

$$(F.185) \quad \boxed{x_{L^i}^{(p)}} = - \frac{\mathbf{D}_t \psi_{L^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{L^{(0)}}^{(p)}} \right) + D_t \bar{\psi}_{L \triangleright}^{(p)} \cdot \partial D_t \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\left(\frac{\partial D_t \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \right)^2} \cdot \frac{\partial D_t \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i}.$$

Ces expressions donnent la même valeur de $x_{L^i}^{(p)}$, ce qui peut être vérifié en utilisant (F.179) et (F.181).

L'expression (F.185) est donnée juste pour mémoire. Cette équation ne sera pas utilisée dans la suite ; les $x_{L^i}^{(p)}$ seront éliminés en n'utilisant que (F.184).

La surface définie par $x_{L^i}^{(0)} + x_{L^i}^{(1)} + \dots + \boxed{x_{L^i}^{(p)}}$ est la surface libre d'ordre p . Elle est désignée par $L^{(p)}$.

Rappel : la procédure d'élimination des $x_{L^* \bar{A}}^{(p)}$ définie ci-dessus n'est valide que si $\varphi_{L^{(0)}}^{(0)}$ et $x_{L^* \bar{A}}^{(0)}$ satisfont *exactement* le système d'équations (F.177).

Pour $\varphi^{(0)} \equiv 0$, cette procédure redonne bien la condition de surface libre de Poisson (cf. [4] équation (4)).

VÉRIFICATION

▼ L'opération $\partial/\partial x_*$ de (F.34) et de (F.47) donne

$$(F.186) \quad \frac{\partial \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} = -g_{\bar{A}}^i$$

et

$$(F.187) \quad \frac{\partial D_t \psi_{L^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} = 0.$$

Le report de ces résultats dans (F.178) montre que les $x_{L^* \bar{A}}^{(p)}$ n'ont plus à être éliminés entre les équations de ce système. Dans ce cas, la procédure d'élimination des $x_{L^* \bar{A}}^{(p)}$ définie jusqu'ici, qui reste formellement valide, est inutilement lourde. Une méthode plus directe est de partir de (F.178) : le report de (F.36), de (F.39), de (F.40), de (F.48), de (F.51) et de (F.52) (pour $S^{(0)} = L^{(0)}$) dans ce système donne

$$(F.188) \quad \begin{cases} (1) & \boxed{\frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(1)}}{\partial t}} - g_{\bar{A}}^i \cdot \boxed{x_{L^* \bar{A}}^{(1)}} = 0, \\ (2) & \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_{L^{(0)}}^{(1)}}{\partial t^2}} - g_{\bar{A}}^i \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(1)}}{\partial x_i}} = 0. \end{cases}$$

L'équation (↑.1) est la relation entre $\partial \varphi_{L^{(0)}}^{(1)}/\partial t$ et la dénivellation de la surface libre d'ordre 1. L'équation (↑.2) est la condition de surface libre de Poisson. ▲

Limitation de la méthode des perturbations

Les coefficients des premiers membres des équations étant les mêmes pour tous les ordres, seules les composantes suivant $\partial \psi_{L^{(0)}}^{(0)}/\partial x_*$ ou $\partial D_t \psi_{L^{(0)}}^{(0)}/\partial x_*$ des $x_{L^* \bar{A}}^{(p)}$ sont définies. Le $x_{L^* \bar{A}}^{(p)}$ final est donc colinéaire à cette direction. Comme, d'autre part, si la suite des $x_{L^* \bar{A}}^{(p)}$ converge, elle le fait vers un seul vecteur, la méthode des perturbations ne peut traiter rigoureusement les problèmes avec conditions en une surface inconnue que si cette surface (exacte) est coupée en un seul point par la normale à la surface d'ordre 0. Elle ne permet donc pas de traiter par exemple le déferlement en partant d'un $\varphi^{(0)}$ nul.

F.2.2.3 Développement des conditions de surface libre pour l donné

Pour l donné, les CSL sont directement (4.22) où $D_t l_L$ est donné par (F.70).

F.2.2.3.1 Ordre 0

Les grandeurs $l_{L(0)}^{(0)}$ et $x_{L\bar{A}}^{(0)}$ doivent satisfaire le système d'équations

$$(F.189) \quad \begin{cases} (1) & l_{L(0)}^{(0)} = 0, \\ (2) & D_t l_{L(0)}^{(0)} = 0. \end{cases}$$

La grandeur $l_{L(0)}^{(0)}$ est supposé connue, par les mêmes mesures que celles déterminant l mais pour les conditions correspondant à l'ordre 0. L'expression de $D_t l_{L(0)}^{(0)}$ est (F.72).

F.2.2.3.2 Ordres 1 à 3

Les grandeurs $l_{L(0)}^{(p)}$ ¹⁸ et $x_{L\bar{A}}^{(p)}$ doivent satisfaire le système d'équations

$$\begin{cases} (1) & \bar{l}_L^{(p)} = 0, \\ (2) & D_t \bar{l}_L^{(p)} = 0, \end{cases}$$

soit, en décomposant,

$$(F.190) \quad \begin{cases} (1) & l_{L(0)\triangleleft}^{(p)} + \frac{\partial l_{L(0)}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{L\bar{A}}^{(p)}}}{1!} + \bar{l}_{L\triangleright}^{(p)} = 0, \\ (2) & D_t l_{L(0)\triangleleft}^{(p)} + \frac{\partial D_t l_{L(0)}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{L\bar{A}}^{(p)}}}{1!} + D_t \bar{l}_{L\triangleright}^{(p)} = 0, \end{cases}$$

où $l_{**}^{(p)}$ et $D_t l_{**}^{(p)}$ sont donnés par (F.60) à (F.69) et (F.73) à (F.81).

Après élimination de $x_{L\bar{A}}^{(p)}$ entre (↑.1) et (↑.2), ce système devient

$$(F.191) \quad \mathbf{D}_t \bar{l}_{L\triangleleft\lambda} \left(\boxed{l_{L(0)}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{L(0)}^{(p)}} \right) + D_t \bar{l}_{L\triangleright\lambda}^{(p)} = 0$$

où l'opérateur $\mathbf{D}_t \bar{l}_{L\triangleleft\lambda}$ doit être tel que

¹⁸Les $l_{L(0)}^{(p)}$ sont des inconnues : l est connu mais sa décomposition suivant les différents ordres, les $l_{L(0)}^{(p)}$, est inconnue.

$$D_t \bar{l}_{L \triangleleft \lambda} \left(\boxed{l_{L(0)}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{L(0)}^{(p)}} \right) = D_t l_{L(0) \triangleleft}^{(p)} + \lambda \frac{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}^{(0)}}{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}} \cdot l_{L(0) \triangleleft}^{(p)},$$

ce qui donne

$$D_t \bar{l}_{L \triangleleft \lambda} \left(\boxed{l_{L(0)}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{L(0)}^{(p)}} \right) = D_t l_{L(0) \triangleleft} \left(\boxed{l_{L(0)}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{L(0)}^{(p)}} \right) + \lambda \frac{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}^{(0)}}{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}} \cdot l_{L(0) \triangleleft} \left(\boxed{l_{L(0)}^{(p)}} \right).$$

Les seconds membres sont donnés par

$$D_t \bar{l}_{L \triangleright \lambda}^{(p)} = D_t \bar{l}_{L \triangleright}^{(p)} + \lambda \frac{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}^{(0)}}{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}} \cdot \bar{l}_{L \triangleright}^{(p)}$$

soit

$$D_t \bar{l}_{L \triangleright \lambda}^{(1)} = 0,$$

$$D_t \bar{l}_{L \triangleright \lambda}^{(2)} = D_t l_{L(0) \triangleright}^{(2)} + \lambda \frac{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}^{(0)}}{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}} \cdot l_{L(0) \triangleright}^{(2)} + D_t l_{L(0) i \lambda}^{(1)} \cdot \frac{x_{L \bar{A}}^{(1)}}{1!} + D_t l_{L(0) i, j \lambda}^{(0)} \cdot \frac{x_{L \bar{A}}^{(1)} \cdot x_{L \bar{A}}^{(1)}}{2!}$$

et

$$\begin{aligned} D_t \bar{l}_{L \triangleright \lambda}^{(3)} &= D_t l_{L(0) \triangleright}^{(3)} + \lambda \frac{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}^{(0)}}{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}} \cdot l_{L(0) \triangleright}^{(3)} \\ &+ D_t l_{L(0) i \lambda}^{(2)} \cdot \frac{x_{L \bar{A}}^{(1)}}{1!} + D_t l_{L(0) i \lambda}^{(1)} \cdot \frac{x_{L \bar{A}}^{(2)}}{1!} \\ &+ D_t l_{L(0) i, j \lambda}^{(1)} \cdot \frac{x_{L \bar{A}}^{(1)} \cdot x_{L \bar{A}}^{(1)}}{2!} + D_t l_{L(0) i, j \lambda}^{(0)} \cdot \frac{x_{L \bar{A}}^{(2)} \cdot x_{L \bar{A}}^{(1)}}{2!} + D_t l_{L(0) i, j \lambda}^{(0)} \cdot \frac{x_{L \bar{A}}^{(1)} \cdot x_{L \bar{A}}^{(2)}}{2!} \\ &+ D_t l_{L(0) i, j, k \lambda}^{(0)} \cdot \frac{x_{L \bar{A}}^{(1)} \cdot x_{L \bar{A}}^{(1)} \cdot x_{L \bar{A}}^{(1)}}{3!} \end{aligned}$$

avec

$$D_t l_{L(0) i, \dots \lambda}^{(p)} = \frac{\partial \dots D_t l_{L(0)}^{(p)}}{\partial x_i \dots} + \lambda \frac{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}^{(0)}}{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}} \cdot \frac{\partial \dots l_{L(0)}^{(p)}}{\partial x_i \dots}.$$

La grandeur $\lambda \frac{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}^{(0)}}{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}}$ est définie par

$$\lambda \frac{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}^{(0)}}{(\frac{D_t l}{l})_{L(0)}} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \mathbf{L} \frac{-\nabla l_{L(0)}^{(0)}}{\|\nabla l_{L(0)}^{(0)}\|^2} (D_t l_{L(0)}^{(0)}).$$

Cette procédure permet d'éliminer $x_{L \bar{A}}^{(p)}$ mais pas les $x_{L \bar{A}}^{(*)}$ d'ordre inférieur : les seconds membres restent fonction de ces grandeurs. La grandeur $x_{L \bar{A}}^{(p)}$ est donnée par

$$(F.192) \quad \boxed{x_{L \bar{A}}^{(p)}} = - \frac{l_{L(0) \triangleleft} \left(\boxed{l_{L(0)}^{(p)}} \right) + \bar{l}_{L \triangleright}^{(p)} \cdot \frac{\partial l_{L(0)}^{(0)}}{\partial x_i}}{\left(\frac{\partial l_{L(0)}^{(0)}}{\partial x_j} \right)^2}$$

et

$$(F.193) \quad \boxed{x_{L\bar{A}}^{(p)}} = - \frac{D_t l_{L(0)\triangleleft} \left(\boxed{l_{L(0)}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{L(0)}^{(p)}} \right) + D_t \bar{l}_{L\triangleright}^{(p)} \cdot \partial D_t l_{L(0)}^{(0)}}{\left(\frac{\partial D_t l_{L(0)}^{(0)}}{\partial x_j} \right)^2} \cdot \frac{\partial D_t l_{L(0)}^{(0)}}{\partial x_i}.$$

Ces expressions donnent la même valeur de $x_{L\bar{A}}^{(p)}$, ce qui peut être vérifié de la même manière qu'en section F.2.2.2.2. Mais contrairement à celle-ci, ici c'est (F.193) qui est utilisée pour éliminer les $x_{L\bar{A}}^{(p)}$ (cf. section 5.2.2.1.3). L'équation (F.192) (ou (F.190.1)) représente une définition de $l_{L(0)}^{(p)}$ connaissant $\partial l_{L(0)}^{(0)}/\partial x_i \cdot x_{L\bar{A}}^{(p)}$.

F.2.2.4 Développement des conditions de glissement sur la carène définie par $c(t, x_{\bar{A}}^*)$

Les CGC sont (4.28) où $D_t c_C$, $D_t^2 c_C$ et $D_t^3 c_C$ sont donnés par (4.29), (4.30) ou son développement (F.107) et (4.31) ou son développement (F.121).

F.2.2.4.1 Ordre 0

Les grandeurs $c_{C(0)}^{(0)}$, $\varphi_{C(0)}^{(0)}$ et $x_{C\bar{A}}^{(0)}$ doivent satisfaire le système d'équations

$$(F.194) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad c_{C(0)}^{(0)} = 0, \\ (2) \quad D_t c_{C(0)}^{(0)} = 0, \\ (3) \quad D_t^2 c_{C(0)}^{(0)} = 0, \\ (4) \quad D_t^3 c_{C(0)}^{(0)} = 0, \end{array} \right.$$

où $D_t c_{C(0)}^{(0)}$, $D_t^2 c_{C(0)}^{(0)}$ et $D_t^3 c_{C(0)}^{(0)}$ sont donnés par (F.96), (F.110) et (F.123). La surface définie par les $x_{C\bar{A}}^{(0)}$ satisfaisant ces conditions est désignée par $C^{(0)}$.

F.2.2.4.2 Ordres 1 à 3

Les grandeurs $c_{C(0)}^{(p)}$, $\varphi_{C(0)}^{(p)}$ et $x_{C\bar{A}}^{(p)}$ doivent satisfaire le système d'équations

$$(F.195) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \bar{c}_C^{(p)} = 0, \\ (2) \quad D_t \bar{c}_C^{(p)} = 0, \\ (3) \quad D_t^2 \bar{c}_C^{(p)} = 0, \\ (4) \quad D_t^3 \bar{c}_C^{(p)} = 0, \end{array} \right.$$

soit, en décomposant,

$$(F.196) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{C^i A}^{(p)}}}{1!} + \bar{c}_{C \triangleright}^{(p)} = 0, \\ (2) \quad D_t c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + \frac{\partial D_t c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{C^i A}^{(p)}}}{1!} + D_t \bar{c}_{C \triangleright}^{(p)} = 0, \\ (3) \quad D_t^2 c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + \frac{\partial D_t^2 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{C^i A}^{(p)}}}{1!} + D_t^2 \bar{c}_{C \triangleright}^{(p)} = 0, \\ (4) \quad D_t^3 c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + \frac{\partial D_t^3 c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\boxed{x_{C^i A}^{(p)}}}{1!} + D_t^3 \bar{c}_{C \triangleright}^{(p)} = 0, \end{array} \right.$$

où $c_{**}^{(p)}$, $D_t c_{**}^{(p)}$, $D_t^2 c_{**}^{(p)}$ et $D_t^3 c_{**}^{(p)}$ sont donnés par (F.84) à (F.93), (F.98) à (F.106), (F.112) à (F.120) et (F.125) à (F.133).

Après élimination de $x_{C^i A}^{(p)}$ entre (↑.1) d'une part et (↑.2), (↑.3) et (↑.4) d'autre part, ce système devient

$$(F.197) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \mathbf{D}_t \bar{c}_{C \triangleleft \lambda} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + D_t \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} = 0, \\ (2) \quad \mathbf{D}_t^2 \bar{c}_{C \triangleleft \lambda} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + D_t^2 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} = 0, \\ (3) \quad \mathbf{D}_t^3 \bar{c}_{C \triangleleft \lambda} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + D_t^3 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} = 0, \end{array} \right.$$

où les opérateurs $\mathbf{D}_t^s \bar{c}_{C \triangleleft \lambda}$ (pour $s = 1 \rightarrow 3$) doivent être tels que

$$\mathbf{D}_t^s \bar{c}_{C \triangleleft \lambda} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) = D_t^s c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + \lambda \left(\frac{D_t^s c}{c} \right)_{C^{(0)}}^{(0)} \cdot c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)},$$

ce qui donne

$$D_t^s \bar{c}_{C \triangleleft \lambda} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) = D_t^s c_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + \lambda_{\left(\frac{D_t^s c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot c_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right).$$

Les seconds membres sont donnés par

$$(F.198) \quad D_t^s \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} = D_t^s \bar{c}_{C \triangleright}^{(p)} + \lambda_{\left(\frac{D_t^s c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \bar{c}_{C \triangleright}^{(p)},$$

soit

$$(F.199) \quad D_t^s \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(1)} = 0,$$

$$(F.200)$$

$$D_t^s \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(2)} = D_t^s c_{C^{(0)} \triangleright}^{(2)} + \lambda_{\left(\frac{D_t^s c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot c_{C^{(0)} \triangleright}^{(2)} + D_t^s c_{C^{(0)} i \lambda}^{(1)} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)}}{1!} + D_t^s c_{C^{(0)} i, j \lambda}^{(0)} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)} \cdot x_{C^j}^{(1)}}{2!}$$

et

$$(F.201)$$

$$\begin{aligned} D_t^s \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(3)} &= D_t^s c_{C^{(0)} \triangleright}^{(3)} + \lambda_{\left(\frac{D_t^s c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot c_{C^{(0)} \triangleright}^{(3)} \\ &+ D_t^s c_{C^{(0)} i \lambda}^{(2)} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)}}{1!} + D_t^s c_{C^{(0)} i \lambda}^{(1)} \cdot \frac{x_{C^i}^{(2)}}{1!} \\ &+ D_t^s c_{C^{(0)} i, j \lambda}^{(1)} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)} \cdot x_{C^j}^{(1)}}{2!} + D_t^s c_{C^{(0)} i, j \lambda}^{(0)} \cdot \frac{x_{C^i}^{(2)} \cdot x_{C^j}^{(1)}}{2!} + D_t^s c_{C^{(0)} i, j \lambda}^{(0)} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)} \cdot x_{C^j}^{(2)}}{2!} \\ &+ D_t^s c_{C^{(0)} i, j, k \lambda}^{(0)} \cdot \frac{x_{C^i}^{(1)} \cdot x_{C^j}^{(1)} \cdot x_{C^k}^{(1)}}{3!}, \end{aligned}$$

avec

$$(F.202) \quad D_t^s c_{C^{(0)} i, \dots \lambda}^{(p)} = \frac{\partial \dots D_t^s c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \dots} + \lambda_{\left(\frac{D_t^s c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \frac{\partial \dots c_{C^{(0)}}^{(p)}}{\partial x_i \dots}.$$

Les $\lambda_{\left(\frac{D_t^s c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}}$ sont définis par

$$(F.203) \quad \lambda_{\left(\frac{D_t^s c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{L}_{\frac{-\nabla c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\|\nabla c_{C^{(0)}}^{(0)}\|^2}} (D_t^s c_{C^{(0)}}^{(0)}).$$

Comme pour les CSL, cette procédure permet d'éliminer $x_{C^i}^{(p)}$ mais pas les $x_{C^i}^{(*)}$ d'ordre inférieur : les seconds membres restent fonction de ces grandeurs.

Les termes correctifs mis en évidence dans [5], appelés plus tard les «*m*-terms» (cf. [3] section 2.a), sont inclus dans la condition (F.197.1).

La grandeur $x_{C^i}^{(p)}$ est donnée par

$$\boxed{x_{C\frac{i}{A}}^{(p)}} = - \frac{\mathbf{D}_t^s \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} (\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}) + D_t^s \bar{c}_{C \triangleright}^{(p)} \cdot \partial D_t^s c_{C^{(0)}}^{(0)}}{(\frac{\partial D_t^s c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j})^2} \cdot \frac{\partial D_t^s c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i}, \text{ pour } s = 0 \rightarrow 3.$$

Ces expressions donnent la même valeur de $x_{C\frac{i}{A}}^{(p)} \forall s$, ce qui peut être vérifié de la même manière que pour les CSL.

L'équation ci-dessus ne sera utilisée dans la suite que pour $s = 0$: les $x_{C\frac{i}{A}}^{(p)}$ seront éliminés en n'utilisant que

$$(F.204) \quad \boxed{x_{C\frac{i}{A}}^{(p)}} = - \frac{\mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} (\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}}) + \bar{c}_{C \triangleright}^{(p)} \cdot \partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{(\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j})^2} \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i}.$$

La surface définie par $x_{C\frac{i}{A}}^{(0)} + x_{C\frac{i}{A}}^{(1)} + \dots + \boxed{x_{C\frac{i}{A}}^{(p)}}$ est la carène d'ordre p . Elle est désignée par $C^{(p)}$.

Limitation de la méthode des perturbations

Les CGC sont sujettes à la même limitation que les CSL : la méthode des perturbations ne peut traiter rigoureusement les problèmes avec conditions en une surface inconnue que si cette surface (exacte) est coupée en un seul point par la normale à la surface d'ordre 0. La carène ne respecte pas toujours cette condition, par exemple à l'étrave dans les mouvements transversaux.

F.2.2.5 Développement des conditions de glissement sur la carène définie par $\mathbf{c}(p_{[\frac{*}{A}]^{[0]}}, p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1]}}, \mathbf{x}_A^*)$

Ce développement est formellement identique à celui pour la carène définie par $c(t, x_A^*)$ en remplaçant les grandeurs $c_{C^{(0)}}^{(*)}$ par les grandeurs $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](*)}$, $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](*)}$.

Les CGC sont toujours (4.28) mais où $D_t c_C$, $D_t^2 c_C$ et $D_t^3 c_C$ sont maintenant donnés par (4.76), (4.77) ou son développement (F.154) et (4.78) ou son développement (F.165).

F.2.2.5.1 Ordre 0

Les grandeurs $p_{[\frac{*}{A}]}^{0}$, $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](0)}$, $\varphi_{C^{(0)}}^{(0)}$ et $x_{C\frac{i}{A}}^{(0)}$ doivent satisfaire formellement (F.194) mais où $D_t c_{C^{(0)}}$, $D_t^2 c_{C^{(0)}}$ et $D_t^3 c_{C^{(0)}}$ sont maintenant donnés par (F.144), (F.155) et (F.166).

F.2.2.5.2 Ordres 1 à 3

Les grandeurs $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}$, $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}$, $\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}$ et $x_{C \frac{*}{A}}^{(p)}$ doivent satisfaire formellement (F.195), qui se décompose formellement en (F.196) mais où les $c_{**}^{(p)}$, $D_t c_{**}^{(p)}$, $D_t^2 c_{**}^{(p)}$ et $D_t^3 c_{**}^{(p)}$ sont maintenant donnés par (F.135) à (F.139), (F.145) à (F.149), (F.156) à (F.160) et (F.167) à (F.171).

Après élimination de $x_{C \frac{*}{A}}^{(p)}$ entre (F.196.1) d'une part et (F.196.2), (F.196.3) et (F.196.4) d'autre part, ce système devient

$$(F.205) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \mathbf{D}_t \bar{\mathbf{c}}_{C \triangleleft \lambda} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + D_t \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} = 0, \\ (2) \quad \mathbf{D}_t^2 \bar{\mathbf{c}}_{C \triangleleft \lambda} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + D_t^2 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} = 0, \\ (3) \quad \mathbf{D}_t^3 \bar{\mathbf{c}}_{C \triangleleft \lambda} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + D_t^3 \bar{c}_{C \triangleright \lambda}^{(p)} = 0, \end{array} \right.$$

où les opérateurs $\mathbf{D}_t^s \bar{\mathbf{c}}_{C \triangleleft \lambda}$ doivent être tels que

$$\mathbf{D}_t^s \bar{\mathbf{c}}_{C \triangleleft \lambda} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) = D_t^s c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)} + \lambda_{\left(\frac{D_t^s c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot c_{C^{(0)} \triangleleft}^{(p)},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} & \mathbf{D}_t^s \bar{\mathbf{c}}_{C \triangleleft \lambda} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \\ &= \mathbf{D}_t^s \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + \lambda_{\left(\frac{D_t^s c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}} \right). \end{aligned}$$

Les seconds membres sont de mêmes donnés formellement par (F.198), c.-à-d. (F.199), (F.200) et (F.201) pour les ordres 1 à 3, avec les mêmes définitions (F.202) et (F.203) de $D_t^s c_{C^{(0)} i, \dots \lambda}^{(p)}$ et de $\lambda_{\left(\frac{D_t^s c}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}}$.

La grandeur $x_{C \frac{*}{A}}^{(p)}$ est donnée par

$$\boxed{x_{C \frac{*}{A}}^{(p)}} = - \frac{\mathbf{D}_t^s \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}}, \boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + D_t^s \bar{c}_{C \triangleright}^{(p)} \cdot \frac{\partial D_t^s c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i}}{\left(\frac{\partial D_t^s c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j}\right)^2}$$

Les $x_{C \frac{*}{A}}^{(p)}$ seront éliminés en n'utilisant (\uparrow) que pour $s = 0$, c.-à-d.

$$(F.206) \quad \boxed{x_{C \frac{*}{A}}^{(p)}} = - \frac{\mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}} \right) + \bar{c}_{C \triangleright}^{(p)} \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i}}{\left(\frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j}\right)^2}$$

F.2.2.6 Développement des conditions de glissement sur le fond

Les conditions de glissement sur le fond (4.36) étant linéaires, leur développement est immédiat

$$(F.207) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial f_F}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi_F^{(p)}}{\partial x_i}} = 0, \\ (2) \quad \frac{\partial f_F}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \varphi_F^{(p)}}{\partial t \partial x_i}} = 0, \\ (3) \quad \frac{\partial f_F}{\partial x_i} \cdot \boxed{\frac{\partial^3 \varphi_F^{(p)}}{\partial t^2 \partial x_i}} = 0. \end{array} \right.$$

F.2.3 Développement des efforts exercés sur la carène définie par $c(t, \mathbf{x}_A^*)$

F.2.3.1 Moment de degré 0 des forces de pression sur la carène

Le moment de degré 0 des forces de pression sur la carène est donné par (4.66). L'intégrand dans cette expression est noté $\varpi_{c[\frac{i}{A}]}^{[0]}$:

$$(F.208) \quad \varpi_{c[\frac{i}{A}]}^{[0]} \stackrel{def}{=} \delta(c_c) \cdot \frac{\partial c_c}{\partial x_i} \cdot \psi_c \cdot \Upsilon(-\psi_c).$$

F.2.3.1.1 Développement de $\varpi_{c[\frac{i}{A}]}^{[0]}$

Cette grandeur est développée suivant (F.10) (en tenant compte de (F.11)), c.-à-d. en

$$\tilde{\varpi}_{c[\frac{i}{A}]}^{[0]} = \varpi_{c^{(0)}[\frac{i}{A}]}^{0} + \bar{\varpi}_{c[\frac{i}{A}]}^{[0](1)} + \bar{\varpi}_{c[\frac{i}{A}]}^{[0](2)} + \bar{\varpi}_{c[\frac{i}{A}]}^{[0](3)}$$

où les $\bar{\varpi}_{c[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}$ sont des fonctions définies à partir de (F.208), donc connues, mais dépendant des grandeurs inconnues du problème. Les expressions de ces fonctions sont obtenues à partir des développements de chacune des composantes de $\varpi_{c[\frac{i}{A}]}^{[0]}$.

La fonction $\delta(c_c)$ est développée¹⁹ à partir de $c_{c^{(0)}}$ en utilisant le développement (F.134) de c_c :

¹⁹Ce développement n'a évidemment de sens que dans les distributions.

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}(c_C) &= \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \\
&+ \delta^{\{1\}}(c_{C^{(0)}}^{(0)})|^{20} \cdot \frac{(\bar{c}_C^{(1)} + \bar{c}_C^{(2)} + \bar{c}_C^{(3)})}{1!} \\
&+ \delta^{\{2\}}(c_{C^{(0)}}^{(0)})|^{20} \cdot \frac{(\bar{c}_C^{(1)} + \bar{c}_C^{(2)} + \bar{c}_C^{(3)})^2}{2!} \\
&+ \delta^{\{3\}}(c_{C^{(0)}}^{(0)})|^{20} \cdot \frac{(\bar{c}_C^{(1)} + \bar{c}_C^{(2)} + \bar{c}_C^{(3)})^3}{3!}.
\end{aligned}$$

Si les inconnues du problème satisfont (F.195.1), les $\bar{c}_C^{(p)}$ sont nuls. Le développement de $\delta(c_C)$ se réduit donc à

$$\tilde{\delta}(c_C) = \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}),$$

c.-à-d. que l'intégration se fait sur $C^{(0)}$.

Les développements de $\partial c_C / \partial x_*$ et de ψ_C sont donnés par (F.95) et (F.32) (pour $S = C$).

La fonction $\Upsilon(-\psi_C)$ est développée de la même façon que $\delta(c_C)$, c.-à-d. en utilisant le développement (F.32) de ψ_C , mais ici les $\bar{\psi}_C^{(p)}$ n'étant pas nuls, le résultat est

$$\begin{aligned}
\tilde{\Upsilon}(-\psi_C) &= \Upsilon(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)}) \\
&- \delta(\psi_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{(\bar{\psi}_C^{(1)} + \bar{\psi}_C^{(2)} + \bar{\psi}_C^{(3)})}{1!} \\
&- \delta^{\{1\}}(\psi_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{(\bar{\psi}_C^{(1)} + \bar{\psi}_C^{(2)} + \bar{\psi}_C^{(3)})^2}{2!} \\
&- \delta^{\{2\}}(\psi_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{(\bar{\psi}_C^{(1)} + \bar{\psi}_C^{(2)} + \bar{\psi}_C^{(3)})^3}{3!}.
\end{aligned}$$

Dans le développement de (4.66), des intégrales de la forme

$$(F.209) \quad \int_{x_{\bar{A}}^* \in \mathbb{R}^3} |dx_{\bar{A}}^*| \cdot \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial \bar{c}_C^{(p)}}{\partial x_i} \cdot f \cdot \Upsilon^{\{q\}}(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)})$$

apparaissent. Nous allons montrer que toute intégrale de cette forme est nulle pour $p \geq 1$, $\forall q$.

DÉMONSTRATION

▼ Par définition des distributions, la formule du gradient s'applique. Elle est appliquée à la distribution $\delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \bar{c}_C^{(p)} \cdot f \cdot \Upsilon^{\{q\}}(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)})$ dans un domaine fini

²⁰L'exposant entre accolades : $\{q\}$, représente la dérivée d'ordre q de la fonction.

Ω :

$$\int_{x_{\bar{A}}^* \in \Omega} |dx_{\bar{A}}^*| \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \bar{c}_C^{(p)} \cdot f \cdot \Upsilon^{\{q\}}(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)})) = \int_{x_{\bar{A}}^* \in \partial\Omega} ds \cdot \nu_i \cdot \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \bar{c}_C^{(p)} \cdot f \cdot \Upsilon^{\{q\}}(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)}).$$

$C^{(0)}$ est à support compact (le navire est de taille finie). Quand le domaine $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, il englobe tout $C^{(0)}$ et dans ce cas, le terme $\delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \Upsilon^{\{q\}}(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)})$ étant nul sur $\partial\Omega$, la $\int ds$ est nulle ce qui entraîne que

$$\int_{x_{\bar{A}}^* \in \mathbb{R}^3} |dx_{\bar{A}}^*| \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \bar{c}_C^{(p)} \cdot f \cdot \Upsilon^{\{q\}}(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)})) = 0_i,$$

c.-à-d.

$$(F.210) \quad \int_{x_{\bar{A}}^* \in \mathbb{R}^3} |dx_{\bar{A}}^*| \cdot (\delta^{\{1\}}(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \bar{c}_C^{(p)} \cdot f \cdot \Upsilon^{\{q\}}(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)}) \\ + \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial \bar{c}_C^{(p)}}{\partial x_i} \cdot f \cdot \Upsilon^{\{q\}}(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)}) \\ + \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \bar{c}_C^{(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (f \cdot \Upsilon^{\{q\}}(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)}))) = 0_i.$$

Si les inconnues du problème satisfont (F.195.1), les $\bar{c}_C^{(p)}$ sont nuls. L'intégrale restante, qui est de la forme (F.209), est donc nulle.

Il reste à vérifier qu'une intégrale de cette forme n'est pas obligatoirement nulle pour $p = 0$. Dans ce cas, (F.210) s'écrit

$$(F.211) \quad \int_{x_{\bar{A}}^* \in \mathbb{R}^3} |dx_{\bar{A}}^*| \cdot (c_{C^{(0)}}^{(0)} \cdot \delta^{\{1\}}(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot f \cdot \Upsilon^{\{q\}}(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)}) \\ + \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot f \cdot \Upsilon^{\{q\}}(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)}) \\ + c_{C^{(0)}}^{(0)} \cdot \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (f \cdot \Upsilon^{\{q\}}(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)}))) = 0_i.$$

La théorie des distributions (cf. par exemple [1]) donne

$$c_{C^{(0)}}^{(0)} \cdot \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) = 0, \\ c_{C^{(0)}}^{(0)} \cdot \delta^{\{1\}}(c_{C^{(0)}}^{(0)}) = -\frac{1!}{0!} \cdot \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}).$$

L'équation (F.211) devient donc

$$\int_{x_{\bar{A}}^* \in \mathbb{R}^3} |dx_{\bar{A}}^*| \cdot (\delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot f \cdot \Upsilon^{\{q\}}(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)}) - \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot f \cdot \Upsilon^{\{q\}}(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)})) = 0_i,$$

équation toujours vérifiée. Une intégrale de la forme (F.209) peut donc ne pas être nulle pour $p = 0$. ▲

Nous disposons maintenant de tous les éléments pour développer (F.208). Dans les développements qui suivent, seuls les termes non nuls sont écrits (les termes nuls sont ceux contenant $\bar{c}_C^{(p)}$ pour $p \geq 1$, $\psi_{C^{(0)}}^{(0)} \cdot \delta(\psi_{C^{(0)}}^{(0)})$ et ceux de la forme (F.209)).

F.2.3.1.2 Ordre 0

La grandeur $\varpi_{C^{(0)}[\frac{i}{A}]}^{0}$ est

$$\varpi_{C^{(0)}[\frac{i}{A}]}^{0} = \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \psi_{C^{(0)}}^{(0)} \cdot \Upsilon(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)}).$$

Ce résultat est rappelé pour mémoire ; il n'intervient pas dans le problème.

F.2.3.1.3 Ordre 1

La partie non nulle de $\bar{\omega}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0](1)}$ est

$$(F.212) \quad \bar{\omega}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0](1)} = \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \bar{\psi}_C^{(1)} \cdot \Upsilon(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)}).$$

Pour la suite, les premier et second membres de $\bar{\omega}_{C[\frac{i}{A}]}^{[0](1)}$ doivent être séparés. Pour cela, $\bar{\psi}_C^{(1)}$ est décomposé suivant (F.19) et (F.20) :

$$\bar{\psi}_C^{(1)} = \psi_{C^{(0)}\triangleleft}^{(1)} + \bar{\psi}_{C^{(0)}\triangleleft}^{(1)} + \bar{\psi}_{C\triangleright}^{(1)},$$

où $\psi_{C^{(0)}\triangleleft}^{(1)}$, $\bar{\psi}_{C^{(0)}\triangleleft}^{(1)}$ et $\bar{\psi}_{C\triangleright}^{(1)}$ sont donnés par (F.36), (F.38) et (F.39)+(F.40) (pour $S = C$). En éliminant $x_{C\frac{i}{A}}^{(1)}$ avec (F.204), (†) s'écrit

$$\bar{\psi}_C^{(1)} = \bar{\psi}_{C\triangleleft}^{(1)} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(1)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(1)}} \right) + \bar{\psi}_{C\triangleright}^{(1)} + \lambda_{(\frac{\psi}{c})_{C^{(0)}}}^{(0)} \cdot \bar{c}_{C\triangleright}^{(1)}$$

où l'opérateur $\bar{\psi}_{C\triangleleft}^{(1)}$ est défini par

$$\bar{\psi}_{C\triangleleft}^{(1)} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \stackrel{\text{déf}}{=} \psi_{C^{(0)}\triangleleft}^{(p)} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + \lambda_{(\frac{\psi}{c})_{C^{(0)}}}^{(0)} \cdot \mathbf{c}_{C^{(0)}\triangleleft} \left(\boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right)$$

avec les opérateurs $\psi_{C^{(0)}\triangleleft}$ et $\mathbf{c}_{C^{(0)}\triangleleft}$ donnés par (F.37) (pour $S^{(0)} = C^{(0)}$) et (F.85) et où

$$(F.213) \quad \lambda_{\left(\frac{\psi}{c}\right)_{C^{(0)}}}^{(0)} = \mathbf{L} \frac{-\nabla c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\|\nabla c_{C^{(0)}}^{(0)}\|^2} (\psi_{C^{(0)}}^{(0)}).$$

Ceci donne

$$\bar{\omega}_{C \ll [\frac{i}{A}]}^{[0](1)} = \bar{\omega}_{C \ll [\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(1)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(1)}} \right) + \bar{\omega}_{C \gg [\frac{i}{A}]}^{[0](1)}$$

où l'opérateur $\bar{\omega}_{C \ll [\frac{i}{A}]}^{[0]}$ est donné par

$$\bar{\omega}_{C \ll [\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \stackrel{\text{déf}}{=} \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \bar{\psi}_{C \ll [\frac{i}{A}]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \cdot \Upsilon(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)})$$

et le second membre par

$$\bar{\omega}_{C \gg [\frac{i}{A}]}^{[0](1)} = \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \bar{\psi}_{C \gg 0}^{(1)} \cdot \Upsilon(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)})$$

où

$$(F.214) \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_{C \gg 0}^{(p)} &\stackrel{\text{déf}}{=} \bar{\psi}_{C \gg}^{(p)} + \lambda_{\left(\frac{\psi}{c}\right)_{C^{(0)}}}^{(0)} \cdot \bar{c}_{C \gg}^{(p)}, \\ &= 0 \text{ à l'ordre 1.} \end{aligned}$$

REMARQUE

▼ En n'utilisant que (F.38), (F.39) et (F.40), (F.212) s'écrit

$$\bar{\omega}_{C \ll [\frac{i}{A}]}^{[0](1)} = \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot (\psi_{C^{(0)}}^{(1)} + \frac{\partial \psi_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\boxed{x_{C \frac{j}{A}}^{(1)}}}{1!}) \cdot \Upsilon(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)}).$$

Le terme en $\psi_{C^{(0)}}^{(1)}$ est le terme de pression d'ordre 1 habituel. Le terme en $x_{C \frac{j}{A}}^{(1)}$ est une correction due à la variation de position de la carène. Ce terme est le pendant pour les efforts des «*m*-terms» de la section F.2.2.4.2 pour les CGC. L'existence de ce terme est évoquée dans [2] chapitre VIII, mais il ne semble pas être pris en compte dans les mises en équations habituelles. ▲

F.2.3.1.4 Ordre 2

La partie non nulle de $\bar{\omega}_{C \ll [\frac{i}{A}]}^{[0](2)}$ est

$$(F.215) \quad \begin{aligned} \bar{\omega}_{c[\frac{i}{A}]}^{[0](2)} &= \delta(c_{c^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot (\bar{\psi}_c^{(2)} \cdot \Upsilon(-\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) \\ &\quad - \bar{\psi}_c^{(1)} \cdot \frac{\bar{\psi}_c^{(1)}}{1!} \cdot \delta(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) \\ &\quad - \psi_{c^{(0)}}^{(0)} \cdot \frac{(\bar{\psi}_c^{(1)})^2}{2!} \cdot \delta^{\{1\}}(\psi_{c^{(0)}}^{(0)})). \end{aligned}$$

La théorie des distributions donne

$$\psi_{c^{(0)}}^{(0)} \cdot \delta^{\{1\}}(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) = -\frac{1!}{0!} \cdot \delta(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}).$$

(F.215) devient donc

$$\bar{\omega}_{c[\frac{i}{A}]}^{[0](2)} = \delta(c_{c^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot (\bar{\psi}_c^{(2)} \cdot \Upsilon(-\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) - \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot (\bar{\psi}_c^{(1)})^2 \cdot \delta(\psi_{c^{(0)}}^{(0)})).$$

Après élimination de $x_{c^*A}^{(2)}$, les premier et second membres de $\bar{\omega}_{c[\frac{i}{A}]}^{[0](2)}$ s'écrivent

$$\bar{\omega}_{c \triangleleft [\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{c^{(0)}}^{(2)}}, \boxed{c_{c^{(0)}}^{(2)}} \right)$$

et

$$\bar{\omega}_{c \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0](2)} = \delta(c_{c^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot (\bar{\psi}_{c \triangleright 0}^{(2)} \cdot \Upsilon(-\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) + \bar{\psi}_{c \triangleright 1}^{(2)} \cdot \delta(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}))$$

où $\bar{\psi}_{c \triangleright 0}^{(2)}$ est donné par (F.214) et où

$$\bar{\psi}_{c \triangleright 1}^{(2)} \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{1 \cdot 2} \cdot (\bar{\psi}_c^{(1)})^2.$$

F.2.3.1.5 Ordre 3

La partie non nulle de $\bar{\omega}_{c[\frac{i}{A}]}^{[0](3)}$ est

(F.216)

$$\bar{\omega}_{c[\frac{i}{A}]}^{[0](3)}$$

$$\begin{aligned} &= \delta(c_{c^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot (\bar{\psi}_c^{(3)} \cdot \Upsilon(-\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) \\ &\quad - \frac{\bar{\psi}_c^{(2)} \cdot \bar{\psi}_c^{(1)} + \bar{\psi}_c^{(1)} \cdot \bar{\psi}_c^{(2)}}{1!} \cdot \delta(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) \\ &\quad - \frac{(\bar{\psi}_c^{(1)})^3}{2!} \cdot \delta^{\{1\}}(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) - \frac{\bar{\psi}_c^{(2)} \cdot \bar{\psi}_c^{(1)} + \bar{\psi}_c^{(1)} \cdot \bar{\psi}_c^{(2)}}{2!} \cdot \psi_{c^{(0)}}^{(0)} \cdot \delta^{\{1\}}(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) \\ &\quad - \frac{(\bar{\psi}_c^{(1)})^3}{3!} \cdot \psi_{c^{(0)}}^{(0)} \cdot \delta^{\{2\}}(\psi_{c^{(0)}}^{(0)})). \end{aligned}$$

La théorie des distributions donne

$$\psi_{c^{(0)}}^{(0)} \cdot \delta^{\{2\}}(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) = -\frac{2!}{1!} \cdot \delta^{\{1\}}(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}).$$

(F.216) devient donc

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{c \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0]\{3\}} &= \delta(c_{c^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot (\bar{\psi}_c^{(3)}) \cdot \Upsilon(-\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) \\ &\quad - \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot (\bar{\psi}_c^{(2)} \cdot \bar{\psi}_c^{(1)} + \bar{\psi}_c^{(1)} \cdot \bar{\psi}_c^{(2)}) \cdot \delta(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) \\ &\quad - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot (\bar{\psi}_c^{(1)})^3 \cdot \delta^{\{1\}}(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}). \end{aligned}$$

Après élimination de $x_{c^*A}^{(3)}$, les premier et second membres de $\bar{\omega}_{c \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0]\{3\}}$ s'écrivent

$$\bar{\omega}_{c \triangleleft [\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{c^{(0)}}^{(3)}}, \boxed{c_{c^{(0)}}^{(3)}} \right)$$

et

$$\bar{\omega}_{c \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0]\{3\}} = \delta(c_{c^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot (\bar{\psi}_{c \triangleright 0}^{(3)}) \cdot \Upsilon(-\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) + \bar{\psi}_{c \triangleright 1}^{(3)} \cdot \delta(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) + \bar{\psi}_{c \triangleright 2}^{(3)} \cdot \delta^{\{1\}}(\psi_{c^{(0)}}^{(0)})$$

où $\bar{\psi}_{c \triangleright 0}^{(3)}$ est donné par (F.214),

$$\bar{\psi}_{c \triangleright 1}^{(3)} \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{1 \cdot 2} \cdot (\bar{\psi}_c^{(2)} \cdot \bar{\psi}_c^{(1)} + \bar{\psi}_c^{(1)} \cdot \bar{\psi}_c^{(2)})$$

et

$$\bar{\psi}_{c \triangleright 2}^{(3)} \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{2 \cdot 3} \cdot (\bar{\psi}_c^{(1)})^3.$$

Pour être utilisable, le terme en $\delta^{\{1\}}(\psi_{c^{(0)}}^{(0)})$ de $\bar{\omega}_{c \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0]\{3\}}$ doit être transformé en un terme en au plus $\delta(\psi_{c^{(0)}}^{(0)})$. La théorie des distributions dit qu'une expression possible de la dérivée d'une distribution χ donc l'argument est une application f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} est, cf. annexe I,

$$\int_{x_* \in \mathbb{R}^n} |dx_*| \cdot \varphi(x_*) \cdot \chi^{\{q\}}(f(x_*)) = (-1)^q \cdot \int_{x_* \in \mathbb{R}^n} |dx_*| \cdot \mathbf{D}_f^q(\varphi(x_*)) \cdot \chi(f(x_*)) \quad (\text{I.3})$$

où φ est une fonction test de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et où l'opérateur \mathbf{D}_f est défini par

$$\mathbf{D}_f(\varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi \cdot \Delta_i(f)) \quad (\text{I.4})$$

avec l'opérateur Δ_* défini par

$$\Delta_i(f) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2}. \quad (\text{I.2})$$

Le terme en $\delta^{\{1\}}(\psi_{c^{(0)}}^{(0)})$ peut donc \u00eatre transform\u00e9 en un terme en $\delta(\psi_{c^{(0)}}^{(0)})$:

$$\begin{aligned} & \delta(c_{c^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \bar{\psi}_{c \triangleright 2}^{(3)} \cdot \delta^{\{1\}}(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta(c_{c^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \bar{\psi}_{c \triangleright 2}^{(3)} \cdot \Delta_j(\psi_{c^{(0)}}^{(0)})) \cdot \delta(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) \\ &= - (\delta(c_{c^{(0)}}^{(0)}) \cdot \left(\frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\psi}_{c \triangleright 2}^{(3)} \cdot \Delta_j(\psi_{c^{(0)}}^{(0)})) + \frac{\partial^2 c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \bar{\psi}_{c \triangleright 2}^{(3)} \cdot \Delta_j(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) \right) \\ & \quad + \delta^{\{1\}}(c_{c^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_j} \cdot \bar{\psi}_{c \triangleright 2}^{(3)} \cdot \Delta_j(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) \cdot \delta(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}). \end{aligned}$$

Cette transformation fait appara\u00eetre un terme en $\delta^{\{1\}}(c_{c^{(0)}}^{(0)})$. Ce terme dispara\u00eet si l'hypoth\u00e8se suivante est v\u00e9rifi\u00e9e :

Hypoth\u00e8se 2 : $\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}/\partial x_*$ est orthogonal \u00e0 $\partial \psi_{c^{(0)}}^{(0)}/\partial x_*$.

Dans ce cas, $\bar{\omega}_{c \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0](3)}$ devient

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{c \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0](3)} &= \delta(c_{c^{(0)}}^{(0)}) \cdot \left(\frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \bar{\psi}_{c \triangleright 0}^{(3)} \cdot \Upsilon(-\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot (\bar{\psi}_{c \triangleright 1}^{(3)} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\psi}_{c \triangleright 2}^{(3)} \cdot \Delta_j(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}))) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial^2 c_{c^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \bar{\psi}_{c \triangleright 2}^{(3)} \cdot \Delta_j(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) \cdot \delta(\psi_{c^{(0)}}^{(0)}) \right) \right). \end{aligned}$$

REMARQUE G\u00c9NANTE

▼ Les termes en $\delta(c_{c^{(0)}}^{(0)}) \cdot \delta(\psi_{c^{(0)}}^{(0)})$ proviennent du d\u00e9veloppement de ψ et donc de φ \u00e0 partir de la ligne de flottaison. Ces termes n'existent que si φ est r\u00e9gulier en cet endroit, ce qui n'est pas le cas puisqu'une singularit\u00e9 y est pr\u00e9sente, y compris pour $\varphi^{(0)}$. Ce d\u00e9veloppement et l'hypoth\u00e8se ci-dessus n'auront en fait de sens que quand cette singularit\u00e9 aura \u00e9t\u00e9 soustraite de φ . Pour cela il faudrait la conna\u00eetre ! ▲

F.2.3.1.6 Intégration

Le moment de degré 0 et d'ordre p des forces de pression sur la carène s'écrit

$$(F.217) \quad f_{C \llbracket \frac{i}{A} \rrbracket}^{[0](p)} = \mathbf{f}_{C \llbracket \frac{i}{A} \rrbracket}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + f_{C \triangleright \llbracket \frac{i}{A} \rrbracket}^{[0](p)},$$

où l'opérateur $\mathbf{f}_{C \llbracket \frac{i}{A} \rrbracket}^{[0]}$ est donné par

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}_{C \llbracket \frac{i}{A} \rrbracket}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \\ & \stackrel{d\acute{e}f}{=} -\rho \cdot \int_{x_A^* \in \mathbb{R}^3} |dx_A^*| \cdot \bar{\omega}_{C \llbracket \frac{i}{A} \rrbracket}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \\ & = -\rho \cdot \int_{x_A^* \in \mathbb{R}^3} |dx_A^*| \cdot \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \bar{\psi}_{C \llbracket \frac{i}{A} \rrbracket} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \cdot \Upsilon(-\psi_{C^{(0)}}^{(p)}) \end{aligned}$$

et les seconds membres par

$$f_{C \triangleright \llbracket \frac{i}{A} \rrbracket}^{[0](p)} = -\rho \cdot \int_{x_A^* \in \mathbb{R}^3} |dx_A^*| \cdot \bar{\omega}_{C \triangleright \llbracket \frac{i}{A} \rrbracket}^{[0](p)}.$$

Pour que ces expressions soient utilisables numériquement et pour préparer l'expression des moments de degré > 0 , la variable d'intégration doit de préférence être $x_{\frac{N}{N}}^*$. Le changement de variable $x_A^*(x_{\frac{N}{N}}^*)$ est défini par (C.40). L'intégration de faisant sur $C^{(0)}$, ce changement de variable peut n'être considéré que pour les $p_{\llbracket \frac{i}{A} \rrbracket}^{[0]}$ et $p_{\llbracket \frac{i}{A}; \frac{j}{N} \rrbracket}^{[1]}$ d'ordre 0 :

$$(F.218) \quad x_{\frac{i}{A}}^{(0)} = p_{\llbracket \frac{i}{A} \rrbracket}^{0} + p_{\llbracket \frac{i}{A}; \frac{j}{N} \rrbracket}^{[1](0)} \cdot x_{\frac{j}{N}},$$

l'objectif de ceci étant d'éviter le développement des composantes des intégrands, en particulier du jacobien, par rapport aux $p_{\llbracket \frac{i}{A} \rrbracket}^{[0]}$ et $p_{\llbracket \frac{i}{A}; \frac{j}{N} \rrbracket}^{[1]}$ d'ordre > 0 .

Dans l'expression des grandeurs à intégrer, des $\partial/\partial t$ peuvent intervenir. Ces dérivations correspondent à un point immobile dans \mathcal{R}_A . Dans le changement de variables (C.40), la seule précaution éventuelle à prendre est de considérer les $p_{\llbracket \frac{i}{A} \rrbracket}^{[0]}$ et $p_{\llbracket \frac{i}{A}; \frac{j}{N} \rrbracket}^{[1]}$ comme indépendants du temps. Ce changement de variables intervenant ici dans les expressions finales des grandeurs, cette précaution est sans objet.

L'opérateur $\mathbf{f}_{C \llbracket \frac{i}{A} \rrbracket}^{[0]}$ peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}
(F.219) \quad & \mathbf{f}_{C \triangleleft [\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \\
&= -\rho \cdot \int_{x_{\bar{N}}^* \in \mathbb{R}^3} |dx_{\bar{N}}^*| \cdot J^{(0)} \cdot \delta(c_{C^{(0)}}^{(0)}) \cdot \frac{\partial c_{C^{(0)}}^{(0)}}{\partial x_i} \cdot \bar{\psi}_{C \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \cdot \Upsilon(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)}), \\
&= -\rho \cdot \int_{x_{\bar{N}}^* \in C^{(0)}} ds \cdot \nu_{\frac{i}{A}}^{(0)} \cdot \bar{\psi}_{C \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right),
\end{aligned}$$

où $J^{(0)}$ est le jacobien du changement de variable (F.218), c.-à-d. $|p_{[\frac{i}{A}; \bar{N}]}^{[1](0)}|$.

Les termes en $\Upsilon(-\psi_{C^{(0)}}^{(0)})$ des seconds membres sont de la même forme :

$$f_{C \triangleright 0[\frac{i}{A}]}^{[0](p)} = -\rho \cdot \int_{x_{\bar{N}}^* \in C^{(0)}} ds \cdot \nu_{\frac{i}{A}}^{(0)} \cdot \bar{\psi}_{C \triangleright 0}^{(p)}.$$

Les termes en $\delta(\psi_{C^{(0)}}^{(0)})$ sont des intégrales linéiques sur $C^{(0)} \cap L^{(0)}$, c.-à-d. sur la ligne de flottaison d'ordre 0. Cette ligne est appelée $CL^{(0)}$. Ces termes sont

$$f_{C \triangleright 1[\frac{i}{A}]}^{[0](p)} = -\rho \cdot \int_{x_{\bar{N}}^* \in CL^{(0)}} dl \cdot \nu_{\frac{i}{A}}^{(0)} \cdot \bar{\psi}_{C \triangleright 1}^{(p)}.$$

Le terme en $\delta^{\{1\}}(\psi_{C^{(0)}}^{(0)})$ (dans le second membre d'ordre 3) n'est pas pris en compte (cf. la fin de la section F.2.3.1.5). Les seconds membres s'écrivent

$$(F.220) \quad f_{C \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0](p)} = f_{C \triangleright 0[\frac{i}{A}]}^{[0](p)} + f_{C \triangleright 1[\frac{i}{A}]}^{[0](p)}.$$

F.2.3.2 Moment de degré 1 des forces de pression sur la carène

Le moment de degré 1 des forces de pression sur la carène s'obtient en multipliant l'intégrand de l'intégrale (4.66) par $x_{\bar{N}}^*$ (cf. (4.72)), ce qui peut s'écrire :

$$f_{C[\frac{i}{A}; \bar{N}]}^{[1]} = -\rho \cdot \int_{x_{\bar{A}}^* \in \mathbb{R}^3} |dx_{\bar{A}}^*| \cdot \varpi_{C[\frac{i}{A}]}^{[0]} \cdot x_{\bar{N}}^j.$$

Le terme d'ordre p du développement de ce moment s'écrit

$$(F.221) \quad f_{C[\frac{i}{A}; \bar{N}]}^{[1](p)} = \mathbf{f}_{C \triangleleft [\frac{i}{A}; \bar{N}]}^{[1]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + f_{C \triangleright [\frac{i}{A}; \bar{N}]}^{[1](p)},$$

où l'opérateur $\mathbf{f}_{C \triangleleft [\frac{i}{A}; \bar{N}]}^{[1]}$ est donné par

$$(F.222) \quad \mathbf{f}_{C \triangleleft [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \stackrel{d\acute{e}f}{=} - \rho \cdot \int_{x_{\frac{N}{*}} \in C^{(0)}} ds \cdot \nu_{\frac{i}{A}}^{(0)} \cdot \bar{\psi}_{C \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{c_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) \cdot x_{\frac{j}{N}}$$

et les seconds membres par

$$(F.223) \quad f_{C \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0](p)} = f_{C \triangleright 0 [\frac{i}{A}]}^{[0](p)} + f_{C \triangleright 1 [\frac{i}{A}]}^{[0](p)}$$

où

$$f_{C \triangleright 0 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} = - \rho \cdot \int_{x_{\frac{N}{*}} \in C^{(0)}} ds \cdot \nu_{\frac{i}{A}}^{(0)} \cdot \bar{\psi}_{C \triangleright 0}^{(p)} \cdot x_{\frac{j}{N}}$$

et

$$f_{C \triangleright 1 [\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1](p)} = - \rho \cdot \int_{x_{\frac{N}{*}} \in CL^{(0)}} dl \cdot \nu_{\frac{i}{A}}^{(0)} \cdot \bar{\psi}_{C \triangleright 1}^{(p)} \cdot x_{\frac{j}{N}}.$$

De même que pour le moment de degré 0, le terme en $\delta^{\{1\}}(\psi_{C^{(0)}}^{(0)})$ n'est pas pris en compte.

F.2.4 Développement des efforts exercés sur la carène définie par $c(p_{[\frac{*}{A}]}^{[0]}, p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}, x_{\frac{*}{A}}^*)$

Ces développements sont formellement identiques à ceux pour la carène définie par $c(t, x_{\frac{*}{A}}^*)$ en remplaçant les grandeurs $c_{C^{(0)}}^{(*)}$ par les grandeurs $p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](*)}$ et $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](*)}$.

F.2.4.1 Moment de degré 0 des forces de pression sur la carène

Le moment de degré 0 et d'ordre p des forces de pression sur la carène s'écrit

$$(F.224) \quad f_{C \triangleleft [\frac{i}{A}]}^{[0](p)} = \mathbf{f}_{C \triangleleft [\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}} \right) + f_{C \triangleright [\frac{i}{A}]}^{[0](p)}$$

où l'opérateur $\mathbf{f}_{C \triangleleft [\frac{i}{A}]}^{[0]}$ est donné par

$$(F.225) \quad \mathbf{f}_{C \triangleleft [\frac{i}{A}]}^{[0]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}} \right) \stackrel{d\acute{e}f}{=} - \rho \cdot \int_{x_{\frac{N}{*}} \in C^{(0)}} ds \cdot \nu_{\frac{i}{A}}^{(0)} \cdot \bar{\psi}_{C \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}]}^{[0](p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1](p)}} \right)$$

et où les seconds membres sont formellement identiques à ceux pour la carène définie par $c(t, x_{\frac{*}{A}}^*)$. Dans (†), l'opérateur $\bar{\psi}_{C \triangleleft}$ est défini par

$$\bar{\psi}_{C \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}]^{[0](p)}}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1](p)}}} \right) \\ \stackrel{\text{déf}}{=} \psi_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}} \right) + \lambda_{\left(\frac{\psi}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}} \cdot \mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft} \left(\boxed{p_{[\frac{*}{A}]^{[0](p)}}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1](p)}}} \right)$$

avec les opérateurs $\psi_{C^{(0)} \triangleleft}$ et $\mathbf{c}_{C^{(0)} \triangleleft}$ donnés par (F.37) (pour $S^{(0)} = C^{(0)}$) et (F.136). La grandeur $\lambda_{\left(\frac{\psi}{c}\right)_{C^{(0)}}^{(0)}}$ est le résultat de l'élimination de $x_{C \frac{*}{A}}^{(1)}$ avec (F.204) et est toujours définie formellement par (F.213).

F.2.4.2 Moment de degré 1 des forces de pression sur la carène

Le moment de degré 1 et d'ordre p des forces de pression sur la carène s'écrit

$$(F.226) \quad f_{C \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1](p)} = \mathbf{f}_{C \triangleleft \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}]^{[0](p)}}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1](p)}}} \right) + f_{C \triangleright \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1](p)}$$

où l'opérateur $\mathbf{f}_{C \triangleleft \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1]}$ est donné par

$$\mathbf{f}_{C \triangleleft \left[\frac{i}{A}; \frac{j}{N} \right]}^{[1]} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}]^{[0](p)}}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1](p)}}} \right) \\ \stackrel{\text{déf}}{=} - \rho \int ds \cdot \nu_{\frac{i}{A}}^{(0)} \cdot \bar{\psi}_{C \triangleleft} \left(\boxed{\varphi_{C^{(0)}}^{(p)}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}]^{[0](p)}}}, \boxed{p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]^{[1](p)}}} \right) \cdot x_{\frac{j}{N}} \\ x_{\frac{*}{N}} \in C^{(0)}$$

et où les seconds membres sont formellement identiques à ceux pour la carène définie par $c(t, x_{\frac{*}{A}})$.

Bibliographie

- [1] N. Boccara, *Distributions*, première ed., Ellipses, 1997.
- [2] J. N. Newman, *The theory of ship motions*, Adv. Appl. Mech. **18** (1978), 221–283.
- [3] ———, *The quest for a three-dimensional theory of ship wave interaction*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **334** (1991), 213–227.
- [4] S. D. Poisson, *Mémoire sur la théorie des ondes*, Mém. Acad. Sci., Paris, 1816, Tome 1, 71–186.
- [5] R. Timman and J. N. Newman, *The coupled damping coefficients of a symmetric ship*, J. Ship Res. **5** (1962), no. 4, 1–7.

Annexe G

Paramétrage des rotations

G.1 Principe	277
G.2 Décomposition de $p_{\left[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}\right]}^{[1]}$ en une déformation et une rotation	278
G.3 Proposition	279

G.1 Principe

Les rotations doivent pouvoir être exprimées d'une façon plus explicite que par leur matrice. Tous les paramétrages habituels sont possibles : angles de Cardan¹ ou d'Euler ou quaternions d'Hamilton. Pour rester en continuité avec la représentation de la rotation par une matrice, nous en emploierons un autre, proche en fait des quaternions. Ce paramétrage est basé sur le théorème suivant : *l'exponentielle d'une matrice antisymétrique est une matrice orthonormale propre* (le déterminant est égal à +1 par l'application du théorème du matriciant : $\det(\exp(x_{*,*})) = \exp(\text{trace}(x_{*,*})) \forall$ la matrice (carrée) $x_{*,*}$). Une rotation peut donc être définie par une matrice antisymétrique $a_{*,*}$, la relation avec la définition par matrice de rotation étant

$$(G.1) \quad r_{i,j} = \exp(a_{*,*})_{i,j}.$$

Inversement, à toute matrice orthonormale propre $r_{*,*}$ correspond une matrice $a_{*,*}$ antisymétrique (cf. [2] section 9.14.2) :

$$a_{i,j} = \log(r_{*,*})_{i,j}.$$

¹Cf. note 1 page 27.

Le log d'une matrice de déterminant +1 existe toujours et le résultat est unique à condition que $0 \leq |a_{*,*}| < \pi$.

Le théorème $\exp(-x_{*,*})_{*,*} = (\exp(x_{*,*})_{*,*})^{-1} \forall x_{*,*}$ implique que $(r_{*,*})^{-1} = \exp(-a_{*,*})_{*,*}$: la rotation inverse est obtenue en changeant de signe $a_{*,*}$ ($a_{*,*}$ étant antisymétrique, une autre manière d'obtenir le même résultat est d'utiliser le fait que $(\exp(x_{*,*})^T)_{*,*} = (\exp(x_{*,*})_{*,*})^T \forall x_{*,*}$ et que $\exp(a_{*,*})_{*,*}$ est orthonormale).

Les fonctions $\exp(a_{*,*})_{*,*}$ et $\log(r_{*,*})_{*,*}$ peuvent être calculées avec les séries classiques ou par beaucoup d'autres méthodes, cf. l'article récurrent [8], [3] section 11.3 ou [4] pour le calcul de $\exp(a_{*,*})_{*,*}$ et [3] section 11.2.3 et les références du chapitre 11 de cet ouvrage pour le calcul de $\log(r_{*,*})_{*,*}$. Dans le cas spécifique de la rotation et pour $n = 3$, les formules de Rodrigues, cf. par exemple [6] chapitre 2, permettent de passer de $a_{*,*}$ à $r_{*,*}$ et inversement de façon plus concise. Dans [1], les formules de Rodrigues sont étendues à $n \geq 4$.

G.2 Décomposition de $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ en une déformation et une rotation

Dans le cas où la VE utilisée pour définir la rotation est la matrice $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$, cf. section C.4.3.1.2, cette transformation, pour être explicite, doit de préférence être décomposée en une rotation et une déformation. Comme cette transformation peut ne pas être infinitésimale, la décomposition doit être sous la forme d'une composition de transformations et non d'une somme de transformations. Cette décomposition est obtenue en utilisant le théorème de décomposition polaire (cf. par exemple [5] section 7.3.3) :

$$\begin{aligned} p_{[\frac{i}{A}; \frac{j}{N}]}^{[1]} &= r_{\frac{i}{A}, \frac{k}{N}} \cdot s_{\frac{k}{N}, \frac{j}{N}} \\ &= s_{\frac{i}{A}, \frac{k}{A}} \cdot r_{\frac{k}{A}, \frac{j}{N}} \end{aligned}$$

où

- $r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}$: matrice orthonormale, c.-à-d. matrice de rotation ;
- $s_{\frac{*}{N}, \frac{*}{N}}$: matrice symétrique, c.-à-d. matrice de déformation ;
- $s_{\frac{*}{A}, \frac{*}{A}}$: matrice symétrique, c.-à-d. matrice de déformation.

La première décomposition est dite «à droite», la seconde «à gauche». Si la matrice $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$ n'est pas singulière, les matrices $r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}$ sont identiques dans les deux décompositions. Dans ce cas, les matrices $s_{\frac{*}{*}, \frac{*}{*}}$ sont liées par

$$s_{\frac{i}{N}, \frac{j}{N}} = r_{\frac{i}{N}, \frac{k}{A}} \cdot s_{\frac{k}{A}, \frac{l}{A}} \cdot r_{\frac{l}{A}, \frac{j}{N}} :$$

Les matrices $s_{\frac{*}{A}, \frac{*}{A}}$ et $s_{\frac{*}{N}, \frac{*}{N}}$ représentent la même déformation exprimée dans les bases B_A et B_N . La déformation dans B_N est plus explicite. Ces décompositions peuvent être calculées à partir d'une SVD de la matrice $p_{[\frac{*}{A}; \frac{*}{N}]}^{[1]}$.

G.3 Proposition

L'attitude des véhicules évoluant dans l'environnement terrestre est habituellement définie par les angles de Cardan, avec les multiples variantes données par les choix divers d'axes de rotations et d'ordre dans lequel les rotations sont appliquées. Toutes ces définitions sont dégénérées pour certaines attitudes. De plus la multiplicité des variantes entraîne des complications lors de l'interfaçage de systèmes (cf. [7]). La proposition est d'utiliser les angles a_1 , a_2 et a_3 de la matrice $a_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}}$:

$$(G.2) \quad a_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}} \stackrel{\text{déf}}{=} \log(r_{\frac{*}{A}, \frac{*}{N}})_{\frac{i}{A}, \frac{j}{N}} = i \begin{matrix} & & j \\ \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

pour définir cette attitude. Ces coordonnées sont appelées *Coordonnées de Lie-Cartan de première espèce* (cf. [6] section 2A).

Avec, dans l'attitude normale du véhicule, le vecteur 1 de la base B_N orienté suivant sa direction de déplacement privilégiée, le vecteur 2 horizontal et le vecteur 3 soit vers le bas soit vers le haut suivant la convention adoptée, a_1 , a_2 et a_3 seraient par définition le roulis, le tangage et le lacet. Cette définition éviterait les multiples variantes et les dégénérescences des angles de Cardan. En marine, ces angles seraient décomposés en gîte, assiette et cap pour la partie très basses fréquences et roulis, tangage et lacet pour les mouvements restants.

Bibliographie

- [1] J. Gallier and D. Xu, *Computing exponentials of skew symmetric matrices and logarithms of orthogonal matrices*, Int. J. Robotics and Automation **18** (2003), no. 1, 10–20.
 - [2] F. R. Gantmacher, *Théorie des matrices*, Tome 1, Dunod, 1966.
 - [3] G. H. Golub and C. Van Loan, *Matrix computations*, second ed., Johns Hopkins University Press, 1989.
 - [4] W. A. Harris, Jr, J. P. Fillmore, and D. R. Smith, *Matrix exponentials - Another approach*, SIAM Review **43** (2001), no. 4, 694–706.
 - [5] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*, second ed., Cambridge University Press, 1987.
 - [6] Y. Ma, S. Soatto, J. Kosecka, and S. S. Sastry, *An invitation to 3-D vision*, first ed., Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 26, Springer-Verlag, 2005.
 - [7] L. Maisonoble, *MARMOTTES*, Documentation mathématique, éd. 4, rév. 0, CNES, fév. 2002.
 - [8] C. Moler and C. Van Loan, *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later*, SIAM Review **45** (2003), no. 1, 3–49.
-

Annexe H

Programmes MuPAD

H.1 Développement de ψ_S et de $D_t\psi_S$	282
H.1.1 Correspondance des variables	282
H.1.2 Programme	283
H.2 Développement de $\varpi_{C[\bar{A}]}^{[0]}$	290
H.2.1 Correspondance des variables	290
H.2.2 Programme	291
H.3 Développement de c_C et des $D_t^*c_C$ pour la carène définie par $c(t, x_{\bar{A}}^*)$	299
H.3.1 Correspondance des variables	299
H.3.2 Programme	300
H.4 Développement de c_C et des $D_t^*c_C$ pour la carène définie par $c(p_{[\bar{A}]}^{[0]}, p_{[\bar{A}; \bar{N}]}^{[1]}, x_{\bar{A}}^*)$	312
H.4.1 Correspondance des variables	312
H.4.2 Programme	312
H.5 Procédures communes	328

Cette annexe présente les programmes **MuPAD** donnant les développements en perturbations des grandeurs intervenant dans les conditions de surface libre, le moment de degré 0 des forces de pression sur la carène et les conditions de glissement sur la carène. Les résultats sont trop volumineux (≈ 500 pages) pour y être inclus.

Dans tous ces programmes, la combinaison des développements en perturbations de la grandeur et des coordonnées de la surface inconnue décrite en sec-

tion F.1.1 est effectuée par le sous-programme `Dlt_dev`.

Les variables dont les noms ont pour préfixe `Dlt` (Δ) représentent les termes du développement dépendant de la variation de position de la surface, à l'instar de Δx_{S^*} , cf. (F.5). Celles dont les noms ont pour préfixe `Prt` (perturbation) représentent les termes du développement dépendant de ε , c.-à-d. tous les termes sauf le terme d'ordre 0. Les premiers font partie des seconds.

Dans les noms de variables, le chiffre après le signe `_` est l'ordre du développement. Cette convention n'est pas appliquée aux `x*`.

H.1 Développement de ψ_S et de $D_t\psi_S$

La grandeur ψ_S est définie par (4.18) (pour $x_* \in S$).

H.1.1 Correspondance des variables

<code>Dltx</code>	:	$\Delta x_{S^*_A}$
<code>DtpsiS</code>	:	$D_t \tilde{\psi}_S$
<code>DtpsiS0</code>	:	$D_t \tilde{\psi}_{S^{(0)}}$
<code>DtpsiS0_0</code> , ... , <code>DtpsiS0_3</code>	:	$D_t \psi_{S^{(0)}}^{(0)}$, ... , $D_t \psi_{S^{(0)}}^{(3)}$
<code>DtpsiS0S</code>	:	$D_t \tilde{\psi}_{S^{(0)S}}$
<code>DtpsiS0S_1</code> , ... , <code>DtpsiS0S_3</code>	:	$D_t \bar{\psi}_{S^{(0)S}}^{(1)}$, ... , $D_t \bar{\psi}_{S^{(0)S}}^{(3)}$
<code>DtpsiS0S1_1</code> , ... , <code>DtpsiS0S1_3</code>	:	$D_t \bar{\psi}_{S^{(0)S\triangleleft}}^{(1)}$, ... , $D_t \bar{\psi}_{S^{(0)S\triangleleft}}^{(3)}$
<code>DtpsiS0Sr_1</code> , ... , <code>DtpsiS0Sr_3</code>	:	$D_t \bar{\psi}_{S^{(0)S\triangleright}}^{(1)}$, ... , $D_t \bar{\psi}_{S^{(0)S\triangleright}}^{(3)}$
<code>eps</code>	:	ε
<code>phiS</code>	:	$\tilde{\varphi}_S$
<code>phiS0</code>	:	$\tilde{\varphi}_{S^{(0)}}$
<code>phiS0_0</code> , ... , <code>phiS0_3</code>	:	$\varphi_{S^{(0)}}^{(0)}$, ... , $\varphi_{S^{(0)}}^{(3)}$
<code>psiS</code>	:	$\tilde{\psi}_S$

psiS0	:	$\tilde{\psi}_{S(0)}$
psiS0_0 ,..., psiS0_3	:	$\psi_{S(0)}^{(0)} , \dots , \psi_{S(0)}^{(3)}$
psiS0S	:	$\tilde{\psi}_{S(0)S}$
psiS0S_1 ,..., psiS0S_3	:	$\bar{\psi}_{S(0)S}^{(1)} , \dots , \bar{\psi}_{S(0)S}^{(3)}$
psiS0Sl_1 ,..., psiS0Sl_3	:	$\bar{\psi}_{S(0)S\triangleleft}^{(1)} , \dots , \bar{\psi}_{S(0)S\triangleleft}^{(3)}$
psiS0Sr_1 ,..., psiS0Sr_3	:	$\bar{\psi}_{S(0)S\triangleright}^{(1)} , \dots , \bar{\psi}_{S(0)S\triangleright}^{(3)}$
x	:	\tilde{x}_{S^*A}
x0 ,..., x3	:	$x_{S^*A}^{(0)} , \dots , x_{S^*A}^{(3)}$

H.1.2 Programme

```

/***** DEVELOPPEMENT DE psi ET DE Dtpsi *****/

/* Définitions des alias */

/* Pour des calculs plus numériques, et obligatoirement pour les
vérifications, supprimer les mises en commentaire ci-dessous */
// f1 := fact(1) :
// f2 := fact(2) :
// f3 := fact(3) :

/*****/

/* Chargement des procédures communes */
read("...") :

/*****/

/* Définitions des procédures locales */

/* Remplacement d'expressions par un identificateur (pour
alléger l'édition des résultats) */
subsp := proc(expr_a)

```

```

begin
subs(expr_a
    ,phiS0_0(t, x0) = level(phi0, 0)    // phiS0_0() -> phi0
    ,phiS0_1(t, x0) = level(phi1, 0)    // phiS0_1() -> phi1
    ,phiS0_2(t, x0) = level(phi2, 0)    // phiS0_2() -> phi2
    ,phiS0_3(t, x0) = level(phi3, 0)) : // phiS0_3() -> phi3
end_proc :

/*****/

/* Paramètre d'édition des résultats */
TEXTWIDTH := 65 :

/*****/

print
(Unquoted
,"***** Début des résultats *****");

/* 1- Développement de psiS */

/* 1.1- Développement de psiS0 */

/* 1.1.1- Développement de phiS0 */
phiS0
:= phiS0_0(t, x0)
+
eps * phiS0_1(t, x0)
+
eps^2 * phiS0_2(t, x0)
+
eps^3 * phiS0_3(t, x0) :

/* 1.1.2- Calcul de psiS0 */
psiS0 := psi_f(phiS0, x0) :

/* 1.1.3- Extraction des expressions de psiS0 pour chaque ordre */

```

```

psiS0_p := poly(psiS0, [eps]) :
psiS0_0 := coeff(psiS0_p, 0) :
psiS0_1 := coeff(psiS0_p, 1) :
psiS0_2 := coeff(psiS0_p, 2) :
psiS0_3 := coeff(psiS0_p, 3) :

/* 1.1.4- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
, "***** psiS0_0 *****"
, expand(subsp(psiS0_0))) ;
print
(Unquoted
, "***** psiS0_1 *****"
, expand(subsp(psiS0_1))) ;
print
(Unquoted
, "***** psiS0_2 *****"
, expand(subsp(psiS0_2))) ;
print
(Unquoted
, "***** psiS0_3 *****"
, expand(subsp(psiS0_3))) ;

/* 1.2- Développement de psiS */

/* 1.2.1- Développement de x */

/* 1.2.1.1- Développement de Dltx */
/* Toutes les dérivées (en t et en x0) étant des dérivées
partielles, les x* peuvent être considérés comme des variables
indépendantes (de t et de x0) */
Dltx := eps * x1 + eps^2 * x2 + eps^3 * x3 :

/* 1.2.1.2- Calcul de x */
x := x0 + Dltx :

```

```

/* 1.2.2- Développement de phiS */
phiS := phiS0 + Dlt_dev(phiS0, x0, Dltx) :

/* 1.2.3- Calcul de psiS */
psiS := psi_f(phiS, x) :

/* 1.2.4- Calcul de psiS0S */
psiS0S := psiS - psiS0 :

/* 1.2.5- Extraction des expressions de psiS0S pour chaque ordre
*/
psiS0S_p := poly(psiS0S, [eps]) :
psiS0S_1 := coeff(psiS0S_p, 1) :
psiS0S_2 := coeff(psiS0S_p, 2) :
psiS0S_3 := coeff(psiS0S_p, 3) :

/* 1.2.6- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
,"***** psiS0S_1 *****"
,expand(subsp(psiS0S_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** psiS0S_2 *****"
,expand(subsp(psiS0S_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** psiS0S_3 *****"
,expand(subsp(psiS0S_3))) ;

/*
/* 1.2.7- Vérification des formules concernant psiS0S */

/* 1.2.7.1- Calcul des expressions de psiS0S au premier membre
pour chaque ordre */
psiS0S1_1 := diff(psiS0_0, x0 $ 1) * (x1 / f1) :
psiS0S1_2 := diff(psiS0_0, x0 $ 1) * (x2 / f1) :

```

```

psiS0Sl_3 := diff(psiS0_0, x0 $ 1) * (x3 / f1) :

/* 1.2.7.2- Calcul des expressions de psiS0S au second membre pour
chaque ordre */
psiS0Sr_1 := 0 :
psiS0Sr_2 := Dltexpr2r(psiS0_0, psiS0_1) :
psiS0Sr_3 := Dltexpr3r(psiS0_0, psiS0_1, psiS0_2) :

/* 1.2.7.3- Vérifications */
/* Les expressions ci-dessous doivent être nulles */
print
(Unquoted
, "***** psiS0S_1 - psiS0Sl_1 - psiS0Sr_1 *****"
, expand(subsp(psiS0S_1 - psiS0Sl_1 - psiS0Sr_1))) ;

print
(Unquoted
, "***** psiS0S_2 - psiS0Sl_2 - psiS0Sr_2 *****"
, expand(subsp(psiS0S_2 - psiS0Sl_2 - psiS0Sr_2))) ;
print
(Unquoted
, "***** psiS0S_3 - psiS0Sl_3 - psiS0Sr_3 *****"
, expand(subsp(psiS0S_3 - psiS0Sl_3 - psiS0Sr_3))) ;
*/

/* 2- Développement de DtpsiS */

/* 2.1- Développement de DtpsiS0 */

/* 2.1.1- Calcul de DtpsiS0 */
DtpsiS0 := Dtpsi_f(phiS0) :

/* 2.1.2- Extraction des expressions de DtpsiS0 pour chaque ordre
*/
DtpsiS0_p := poly(DtpsiS0, [eps]) :
DtpsiS0_0 := coeff(DtpsiS0_p, 0) :
DtpsiS0_1 := coeff(DtpsiS0_p, 1) :

```

```

DtpsiS0_2 := coeff(DtpsiS0_p, 2) :
DtpsiS0_3 := coeff(DtpsiS0_p, 3) :

/* 2.1.3- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
,"***** DtpsiS0_0 *****"
,expand(subsp(DtpsiS0_0))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtpsiS0_1 *****"
,expand(subsp(DtpsiS0_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtpsiS0_2 *****"
,expand(subsp(DtpsiS0_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtpsiS0_3 *****"
,expand(subsp(DtpsiS0_3))) ;

/* 2.2- Développement de DtpsiS */

/* 2.2.1- Calcul de DtpsiS */
DtpsiS := Dtpsi_f(phiS) :

/* 2.2.2- Calcul de DtpsiS0S */
DtpsiS0S := DtpsiS - DtpsiS0 :

/* 2.2.3- Extraction des expressions de DtpsiS0S pour chaque ordre
*/
DtpsiS0S_p := poly(DtpsiS0S, [eps]) :
DtpsiS0S_1 := coeff(DtpsiS0S_p, 1) :
DtpsiS0S_2 := coeff(DtpsiS0S_p, 2) :
DtpsiS0S_3 := coeff(DtpsiS0S_p, 3) :

/* 2.2.4- Edition de ces expressions */

```

```

print
(Unquoted
,"***** DtpsiS0S_1 *****"
,expand(subsp(DtpsiS0S_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtpsiS0S_2 *****"
,expand(subsp(DtpsiS0S_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtpsiS0S_3 *****"
,expand(subsp(DtpsiS0S_3))) ;

/*
/* 2.2.5- Vérification des formules concernant DtpsiS0S */

/* 2.2.5.1- Calcul des expressions de DtpsiS0S au premier membre
pour chaque ordre */
DtpsiS0S1_1 := diff(DtpsiS0_0, x0 $ 1) * (x1 / f1) :
DtpsiS0S1_2 := diff(DtpsiS0_0, x0 $ 1) * (x2 / f1) :
DtpsiS0S1_3 := diff(DtpsiS0_0, x0 $ 1) * (x3 / f1) :

/* 2.2.5.2- Calcul des expressions de DtpsiS0S au second membre
pour chaque ordre */
DtpsiS0Sr_1 := 0 :
DtpsiS0Sr_2 := Dltexpr2r(DtpsiS0_0, DtpsiS0_1) :
DtpsiS0Sr_3 := Dltexpr3r(DtpsiS0_0, DtpsiS0_1, DtpsiS0_2) :

/* 2.2.5.3- Vérifications */
/* Les expressions ci-dessous doivent être nulles */
print
(Unquoted
,"***** DtpsiS0S_1 - DtpsiS0S1_1 - DtpsiS0Sr_1 *****"
,expand(subsp(DtpsiS0S_1 - DtpsiS0S1_1 - DtpsiS0Sr_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtpsiS0S_2 - DtpsiS0S1_2 - DtpsiS0Sr_2 *****"

```

```

,expand(subsp(DtpsiS0S_2 - DtpsiS0Sl_2 - DtpsiS0Sr_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtpsiS0S_3 - DtpsiS0Sl_3 - DtpsiS0Sr_3 *****"
,expand(subsp(DtpsiS0S_3 - DtpsiS0Sl_3 - DtpsiS0Sr_3))) ;
*/

print
(Unquoted
,"***** Fin des résultats *****");

/***** FIN DU PROGRAMME *****/

```

H.2 Développement de $\varpi_{C[\bar{A}]}^{[0]}$

La grandeur $\varpi_{C[\bar{A}]}^{[0]}$ est définie par (F.208).

H.2.1 Correspondance des variables

cC	: \tilde{c}_C
cC_1 ,... , cC_3	: $\bar{c}_C^{(1)} , \dots , \bar{c}_C^{(3)}$
cC0	: $\tilde{c}_{C(0)}$
cC0_0 ,... , cC0_3	: $c_{C(0)}^{(0)} , \dots , c_{C(0)}^{(3)}$
dcCsdx0	: $\partial \tilde{c}_C / \partial x_i$
dcC_1sdx0 ,... , dcC_3sdx0	: $\partial \bar{c}_C^{(1)} / \partial x_i , \dots , \partial \bar{c}_C^{(3)} / \partial x_i$
Dirac	: δ
Dltx	: $\Delta x_{C\bar{A}}$
eps	: ε
Heavi	: Υ
phiC	: $\tilde{\varphi}_C$

phiC0	:	$\tilde{\varphi}_{C(0)}$
phiC0_0 ,..., phiC0_3	:	$\varphi_{C(0)}^{(0)} , \dots , \varphi_{C(0)}^{(3)}$
piC	:	$\tilde{\omega}_{C[\frac{*}{A}]}^{[0]}$
piC_0 ,..., piC_3	:	$\bar{\omega}_{C[\frac{*}{A}]}^{0} (= \omega_{C(0)[\frac{*}{A}]}^{0}), \bar{\omega}_{C[\frac{*}{A}]}^{[0](1)} , \dots , \bar{\omega}_{C[\frac{*}{A}]}^{[0](3)}$
PrtcC	:	$\bar{c}_C^{(1)} + \bar{c}_C^{(2)} + \bar{c}_C^{(3)}$
Prtpsic	:	$\bar{\psi}_C^{(1)} + \bar{\psi}_C^{(2)} + \bar{\psi}_C^{(3)}$
psiC	:	$\tilde{\psi}_C$
psiC_0 ,..., psiC_3	:	$\bar{\psi}_C^{(0)} (= \psi_{C(0)}^{(0)}), \bar{\psi}_C^{(1)} , \dots , \bar{\psi}_C^{(3)}$
psiC0_0	:	$\psi_{C(0)}^{(0)}$
x	:	$\tilde{x}_{C\frac{i}{A}}$
x0 ,..., x3	:	$x_{C\frac{i}{A}}^{(0)} , \dots , x_{C\frac{i}{A}}^{(3)}$

H.2.2 Programme

```

/***** DEVELOPPEMENT DE piC *****/

/* Définitions des alias */

/* Pour des calculs plus numériques, supprimer les mises en
commentaire ci-dessous */
// f1 := fact(1) :
// f2 := fact(2) :
// f3 := fact(3) :

/*****

/* Chargement des procédures communes */
read("...") :

/*****

```

```

/* Définitions des procédures locales */

/* Creation des fonctions "Développement en serie de la
fonction de Dirac" et "Développement en serie de la
fonction de Heaviside" */
Dirac_dev
:= Dirac(f_a)
+
diff(Dirac(f_a), f_a $ 1) * (df_a^1 / f1)
+
diff(Dirac(f_a), f_a $ 2) * (df_a^2 / f2)
+
diff(Dirac(f_a), f_a $ 3) * (df_a^3 / f3) :
Dirac_dev_f := fp::unapply(Dirac_dev, f_a, df_a) :
Heavi_dev
:= Heavi(f_a)
+
diff(Dirac(f_a), f_a $ 0) * (df_a^1 / f1)
+
diff(Dirac(f_a), f_a $ 1) * (df_a^2 / f2)
+
diff(Dirac(f_a), f_a $ 2) * (df_a^3 / f3) :
Heavi_dev_f := fp::unapply(Heavi_dev, f_a, df_a) :

/* - Expression de l'expression passée en argument en fonction des
cC_*, des psiC_* et des dcC_*sdx0;
- annulation des cC_*;
- remplacement de ces expressions par des identificateurs (pour
alléger l'édition des résultats).
Il faudrait aussi éliminer avec des substitutions les termes en
psiC0_0.Dirac(psiC0_0) et en Dirac(cC0_0).dcC_*sdx0. Je n'ai
pas réussi; il faut le faire à la main. */
subspiC := proc(expr_a)
begin
expr1 := expr_a :
expr1 := subs(expr1
,cC_1 = 0

```

```

,cC_2 = 0
,cC_3 = 0) :
expr1
:= subs(expr1
,dcC_1sdx0 = level(dcC1sdx0, 0) // dcC_1sdx0() -> dcC1sdx0
,dcC_2sdx0 = level(dcC2sdx0, 0) // dcC_2sdx0() -> dcC2sdx0
,dcC_3sdx0 = level(dcC3sdx0, 0) // dcC_3sdx0() -> dcC3sdx0
,psiC_1 = level(psiC1, 0) // psiC_1() -> psiC1
,- psiC_1 = - level(psiC1, 0) // - psiC_1() -> - psiC1
,psiC_2 = level(psiC2, 0) // psiC_2() -> psiC2
,- psiC_2 = - level(psiC2, 0) // - psiC_2() -> - psiC2
,psiC_3 = level(psiC3, 0) // psiC_3() -> psiC3
,- psiC_3 = - level(psiC3, 0)) : // - psiC_3() -> - psiC3
cC0_0_ := level(c0, 0) : // cC0_0_ -> c0
psiC0_0_ := level(psi0, 0) : // psiC0_0_ -> psi0
expr1
:= subs(expr1
,cC0_0(t, x0) = cC0_0_ // cC0_0() -> cC0_0_
,psiC0_0 = psiC0_0_ // psiC0_0() -> psiC0_0_
,- psiC0_0 = - psiC0_0_) : // - psiC0_0() -> - psiC0_0_
expr1_p := poly(expr1
,[Dirac(cC0_0_)
,psiC0_0_
,Heavi(psiC0_0_)
,Dirac(psiC0_0_)
,diff(Dirac(psiC0_0_), psiC0_0_ $ 1)
,diff(Dirac(psiC0_0_), psiC0_0_ $ 2)]) :
end_proc :

/* Remplacement d'expressions par des identificateurs (pour
alléger l'édition des résultats) */
subsc := proc(expr_a)
begin
subs(expr_a
,cC0_0(t, x0) = level(c0, 0) // cC0_0() -> c0
,cC0_1(t, x0) = level(c1, 0) // cC0_1() -> c1
,cC0_2(t, x0) = level(c2, 0) // cC0_2() -> c2

```

```

,cC0_3(t, x0) = level(c3, 0) // cC0_3() -> c3
,phiC0_0(t, x0) = level(phi0, 0) // phiC0_0() -> phi0
,phiC0_1(t, x0) = level(phi1, 0) // phiC0_1() -> phi1
,phiC0_2(t, x0) = level(phi2, 0) // phiC0_2() -> phi2
,phiC0_3(t, x0) = level(phi3, 0)) : // phiC0_3() -> phi3
end_proc :

/*****/

/* Paramètre d'édition des résultats */
TEXTWIDTH := 65 :

/*****/

print
(Unquoted
,"***** Début des résultats *****");

/* 1- Développement de x */

/* 1.1- Développement de Dltx */
/* Toutes les dérivées (en t et en x0) étant des dérivées
partielles, les x* peuvent être considérés comme des variables
indépendantes (de t et de x0) */
Dltx := eps * x1 + eps^2 * x2 + eps^3 * x3 :

/* 1.2- Calcul de x */
x := x0 + Dltx :

/* 2- Développement de cC */

/* 2.1- Développement de cC0 */
cC0
:= cC0_0(t, x0)
+
eps * cC0_1(t, x0)
+

```

```

    eps^2 * cC0_2(t, x0)
    +
    eps^3 * cC0_3(t, x0) :

/* 2.2- Développement de cC */
cC := cC0 + Dlt_dev(cC0, x0, Dltx) :

/* 3- Calcul de Prtc */
Prtc := cC - cC0_0(t, x0) :

/* 4- Extraction d'expressions utilisées dans la suite */
cC_p := poly(cC, [eps]) :
cC_1 := coeff(cC_p, 1) :
cC_2 := coeff(cC_p, 2) :
cC_3 := coeff(cC_p, 3) :

/* 5- Calcul d'expressions utilisées dans la suite */
dcCsdx0 := diff(cC, x0 $ 1) :
dcC_1sdx0 := diff(cC_1, x0 $ 1) :
dcC_2sdx0 := diff(cC_2, x0 $ 1) :
dcC_3sdx0 := diff(cC_3, x0 $ 1) :

/*
/* 6- Edition de ces expressions pour vérification */
print
(Unquoted
, "***** cC_1 *****"
, expand(subsc(cC_1))) ;
print
(Unquoted
, "***** dcC_1sdx0 *****"
, expand(subsc(dcC_1sdx0))) ;
print
(Unquoted
, "***** cC_2 *****"
, expand(subsc(cC_2))) ;
print

```

```

(Unquoted
,"***** dcC_2sdx0 *****"
,expand(subsc(dcC_2sdx0))) ;
print
(Unquoted
,"***** cC_3 *****"
,expand(subsc(cC_3))) ;
print
(Unquoted
,"***** dcC_3sdx0 *****"
,expand(subsc(dcC_3sdx0))) ;
*/

/* 7- Développement de phiC */

/* 7.1- Développement de phiC0 */
phiC0
:= phiC0_0(t, x0)
+
eps * phiC0_1(t, x0)
+
eps^2 * phiC0_2(t, x0)
+
eps^3 * phiC0_3(t, x0) :

/* 7.2- Calcul de phiC */
phiC := phiC0 + Dlt_dev(phiC0, x0, Dltx) :

/* 8- Calcul de psiC */
psiC := psi_f(phiC, x) :

/* 9- Calcul de Prtpsi */

/* 9.1- Calcul de psiC0_0 */
psiC0_0 := psi_f(phiC0_0(t, x0), x0) :

/* 9.2- Calcul de Prtpsi */

```

```

Prtpsi := psiC - psiC0_0 :

/* 10- Extraction d'expressions utilisées dans la suite */
psiC_p := poly(psiC, [eps]) :
psiC_0 := coeff(psiC_p, 0) : // psiC_0 = psiC0_0
psiC_1 := coeff(psiC_p, 1) :
psiC_2 := coeff(psiC_p, 2) :
psiC_3 := coeff(psiC_p, 3) :

/*
/* 11- Edition de ces expressions pour vérification */
print
(Unquoted
, "***** psiC_0 - psiC0_0 *****"
, expand(subsc(psiC_0 - psiC0_0))) ;
print
(Unquoted
, "***** psiC_0 *****"
, expand(subsc(psiC_0))) ;
print
(Unquoted
, "***** psiC_1 *****"
, expand(subsc(psiC_1))) ;
print
(Unquoted
, "***** psiC_2 *****"
, expand(subsc(psiC_2))) ;
print
(Unquoted
, "***** psiC_3 *****"
, expand(subsc(psiC_3))) ;
*/

/* 12- Développement de piC */
piC
:= Dirac_dev_f(cc0_0(t, x0), Prtc)
*
```

```

dcCsdX0
*
psiC
*
Heavi_dev_f(- psiC0_0, - Prtpsi) :

/* 13- Extraction des expressions de piC pour chaque ordre */
piC_p := poly(piC, [eps]) :
piC_0 := coeff(piC_p, 0) :
piC_1 := coeff(piC_p, 1) :
piC_2 := coeff(piC_p, 2) :
piC_3 := coeff(piC_p, 3) :

/* 14- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
,"***** piC_0 *****"
,expand(subspiC(piC_0))) ;
print
(Unquoted
,"***** piC_1 *****"
,expand(subspiC(piC_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** piC_2 *****"
,expand(subspiC(piC_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** piC_3 *****"
,expand(subspiC(piC_3))) ;

print
(Unquoted
,"***** Fin des résultats *****");

/***** FIN DU PROGRAMME *****/

```

H.3 Développement de c_C et des $D_t^*c_C$ pour la carène définie par $c(t, x_{\frac{*}{A}})$

H.3.1 Correspondance des variables

c_C	:	\tilde{c}_C
c_{C0}	:	$\tilde{c}_{C(0)}$
$c_{C0_0}, \dots, c_{C0_3}$:	$c_{C(0)}^{(0)}, \dots, c_{C(0)}^{(3)}$
c_{C0C}	:	$\tilde{c}_{C(0)C}$
$c_{C0C_1}, \dots, c_{C0C_3}$:	$\bar{c}_{C(0)C}^{(1)}, \dots, \bar{c}_{C(0)C}^{(3)}$
$c_{C0C1_1}, \dots, c_{C0C1_3}$:	$\bar{c}_{C(0)C\triangleleft}^{(1)}, \dots, \bar{c}_{C(0)C\triangleleft}^{(3)}$
$c_{C0Cr_1}, \dots, c_{C0Cr_3}$:	$\bar{c}_{C(0)C\triangleright}^{(1)}, \dots, \bar{c}_{C(0)C\triangleright}^{(3)}$
$Dltx$:	$\Delta x_{C\frac{*}{A}}$
Dtc_C	:	$D_t \tilde{c}_C$
Dtc_{C0}	:	$D_t \tilde{c}_{C(0)}$
$Dtc_{C0_0}, \dots, Dtc_{C0_3}$:	$D_t c_{C(0)}^{(0)}, \dots, D_t c_{C(0)}^{(3)}$
Dtc_{C0C}	:	$D_t \tilde{c}_{C(0)C}$
$Dtc_{C0C_1}, \dots, Dtc_{C0C_3}$:	$D_t \bar{c}_{C(0)C}^{(1)}, \dots, D_t \bar{c}_{C(0)C}^{(3)}$
$Dtc_{C0C1_1}, \dots, Dtc_{C0C1_3}$:	$D_t \bar{c}_{C(0)C\triangleleft}^{(1)}, \dots, D_t \bar{c}_{C(0)C\triangleleft}^{(3)}$
$Dtc_{C0Cr_1}, \dots, Dtc_{C0Cr_3}$:	$D_t \bar{c}_{C(0)C\triangleright}^{(1)}, \dots, D_t \bar{c}_{C(0)C\triangleright}^{(3)}$
Dt^*c_C	:	$D_t^* \tilde{c}_C$
Dt^*c_{C0}	:	$D_t^* \tilde{c}_{C(0)}$
$Dt^*c_{C0_0}, \dots, Dt^*c_{C0_3}$:	$D_t^* c_{C(0)}^{(0)}, \dots, D_t^* c_{C(0)}^{(3)}$
Dt^*c_{C0C}	:	$D_t^* \tilde{c}_{C(0)C}$
$Dt^*c_{C0C_1}, \dots, Dt^*c_{C0C_3}$:	$D_t^* \bar{c}_{C(0)C}^{(1)}, \dots, D_t^* \bar{c}_{C(0)C}^{(3)}$
$Dt^*c_{C0C1_1}, \dots, Dt^*c_{C0C1_3}$:	$D_t^* \bar{c}_{C(0)C\triangleleft}^{(1)}, \dots, D_t^* \bar{c}_{C(0)C\triangleleft}^{(3)}$

$Dt^*cC0Cr_1, \dots, Dt^*cC0Cr_3$: $D_t^* \bar{c}_{C(0)C\triangleright}^{(1)}, \dots, D_t^* \bar{c}_{C(0)C\triangleright}^{(3)}$
 eps : ε
 $phiC$: $\tilde{\varphi}_C$
 $phiC0$: $\tilde{\varphi}_{C(0)}$
 $phiC0_0, \dots, phiC0_3$: $\varphi_{C(0)}^{(0)}, \dots, \varphi_{C(0)}^{(3)}$
 x : $\tilde{x}_{C \frac{i}{A}}$
 $x0, \dots, x3$: $x_{C \frac{i}{A}}^{(0)}, \dots, x_{C \frac{i}{A}}^{(3)}$

H.3.2 Programme

```

/***** DEVELOPPEMENT DE cC et des Dt*cC *****/

/* Définitions des alias */

/* Pour des calculs plus numériques, et obligatoirement pour les
vérifications, supprimer les mises en commentaire ci-dessous */
// f1 := fact(1) :
// f2 := fact(2) :
// f3 := fact(3) :

/*****/

/* Chargement des procédures communes */
read("...") :

/*****/

/* Définitions des procédures locales */

/* Expression de la dérivée particulière Dtf d'une fonction f */
Dtf_f := proc(f_a, phi_a)
begin
diff(f_a, t $ 1)
+

```

```

diff(f_a, x0 $ 1) * diff(phi_a, x0 $ 1)
end_proc :

/* Expression de la dérivée particulière deuxième Dt2f d'une
fonction f */
Dt2f_f := proc(f_a, phi_a)
begin
Dtf_f(Dtf_f(f_a, phi_a), phi_a)
end_proc :

/* Expression de la dérivée particulière troisième Dt3f d'une
fonction f */
Dt3f_f := proc(f_a, phi_a)
begin
Dtf_f(Dt2f_f(f_a, phi_a), phi_a)
end_proc :

/* Remplacement d'expressions par des identificateurs (pour
alléger l'édition des résultats) */
subsc := proc(expr_a)
begin
subs(expr_a
, cC0_0(t, x0) = level(c0, 0) // cC0_0() -> c0
, cC0_1(t, x0) = level(c1, 0) // cC0_1() -> c1
, cC0_2(t, x0) = level(c2, 0) // cC0_2() -> c2
, cC0_3(t, x0) = level(c3, 0) // cC0_3() -> c3
, phiC0_0(t, x0) = level(phi0, 0) // phiC0_0() -> phi0
, phiC0_1(t, x0) = level(phi1, 0) // phiC0_1() -> phi1
, phiC0_2(t, x0) = level(phi2, 0) // phiC0_2() -> phi2
, phiC0_3(t, x0) = level(phi3, 0)) : // phiC0_3() -> phi3
end_proc :

/*****/

/* Paramètre d'édition des résultats */
TEXTWIDTH := 65 :

```

```

/*****/

print
(Unquoted
,"***** Début des résultats *****");

/* 1- Développement de cC */

/* 1.1- Développement de cC0 */
cC0 := cC0_0(t, x0)
      +
      eps * cC0_1(t, x0)
      +
      eps^2 * cC0_2(t, x0)
      +
      eps^3 * cC0_3(t, x0) :

/* 1.2- Développement de cC0C */

/* 1.2.1- Développement de Dltx */
/* Toutes les dérivées (en t et en x0) étant des dérivées
partielles, les x* peuvent être considérés comme des variables
indépendantes (de t et de x0) */
Dltx := eps * x1 + eps^2 * x2 + eps^3 * x3 :
/* Pour memoire, x = x0 + Dltx */

/* 1.2.2- Développement de cC0C */
cC0C := Dlt_dev(cC0, x0, Dltx) :

/* 1.2.3- Calcul de cC (utilisé dans le développement de DtcC) */
cC := cC0 + cC0C :

/* 1.2.4- Extraction des expressions de cC0C pour chaque ordre */
cC0C_p := poly(cC0C, [eps]) :
cC0C_1 := coeff(cC0C_p, 1) :
cC0C_2 := coeff(cC0C_p, 2) :
cC0C_3 := coeff(cC0C_p, 3) :

```

```

/* 1.2.5- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
,"***** cC0C_1 *****"
,expand(subsc(cC0C_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** cC0C_2 *****"
,expand(subsc(cC0C_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** cC0C_3 *****"
,expand(subsc(cC0C_3))) ;

/*
/* 1.2.6- Vérification des formules concernant cC0C */

/* 1.2.6.1- Calcul des expressions de cC0C au premier membre pour
chaque ordre */
cC0Cl_1 := diff(cC0_0(t, x0), x0 $ 1) * (x1 / f1) :
cC0Cl_2 := diff(cC0_0(t, x0), x0 $ 1) * (x2 / f1) :
cC0Cl_3 := diff(cC0_0(t, x0), x0 $ 1) * (x3 / f1) :

/* 1.2.6.2- Calcul des expressions de cC0C au second membre pour
chaque ordre */
cC0Cr_1 := 0 :
cC0Cr_2 := Dltexpr2r(cC0_0(t, x0), cC0_1(t, x0)) :
cC0Cr_3 := Dltexpr3r(cC0_0(t, x0), cC0_1(t, x0), cC0_2(t, x0)) :

/* 1.2.6.3- Vérifications */
/* Les expressions ci-dessous doivent être nulles */
print
(Unquoted
,"***** cC0C_1 - cC0Cl_1 - cC0Cr_1 *****"
,expand(subsc(cC0C_1 - cC0Cl_1 - cC0Cr_1))) ;
print

```

```

(Unquoted
,"***** cC0C_2 - cC0C1_2 - cC0Cr_2 *****"
,expand(subsc(cC0C_2 - cC0C1_2 - cC0Cr_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** cC0C_3 - cC0C1_3 - cC0Cr_3 *****"
,expand(subsc(cC0C_3 - cC0C1_3 - cC0Cr_3))) ;
*/

/* 2- Développement de DtcC */

/* 2.1- Développement de DtcC0 */

/* 2.1.1- Développement de phiC0 */
/* La dépendance en t des phiC0*, et donc de phiC0, ci-dessous
est sans utilité dans le développement de DtcC0 et de DtcC : seuls
les d*phiC0/dx0^* interviennent dans ces grandeurs, mais cette
dépendance intervient dans le développement de Dt2cC0, de Dt2cC
et suivants */
phiC0
:= phiC0_0(t, x0)
+
eps * phiC0_1(t, x0)
+
eps^2 * phiC0_2(t, x0)
+
eps^3 * phiC0_3(t, x0) :

/* 2.1.2- Calcul de DtcC0 */
DtcC0 := Dtf_f(cC0, phiC0) :

/* 2.1.3- Extraction des expressions de DtcC0 pour chaque ordre */
DtcC0_p := poly(DtcC0, [eps]) :
DtcC0_0 := coeff(DtcC0_p, 0) :
DtcC0_1 := coeff(DtcC0_p, 1) :
DtcC0_2 := coeff(DtcC0_p, 2) :
DtcC0_3 := coeff(DtcC0_p, 3) :

```

```

/* 2.1.4- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
,"***** DtcC0_0 *****"
,expand(subsc(DtcC0_0))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtcC0_1 *****"
,expand(subsc(DtcC0_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtcC0_2 *****"
,expand(subsc(DtcC0_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtcC0_3 *****"
,expand(subsc(DtcC0_3))) ;

/* 2.2- Développement de DtcC */

/* 2.2.1- Développement de phiC */
phiC := phiC0 + Dlt_dev(phiC0, x0, Dltx) :

/* 2.2.2- Calcul de DtcC */
DtcC := Dtf_f(cC, phiC) :

/* 2.2.3- Calcul de DtcC0C */
DtcC0C := DtcC - DtcC0 :

/* 2.2.4- Extraction des expressions de DtcC0C pour chaque ordre
*/
DtcC0C_p := poly(DtcC0C, [eps]) :
DtcC0C_1 := coeff(DtcC0C_p, 1) :
DtcC0C_2 := coeff(DtcC0C_p, 2) :
DtcC0C_3 := coeff(DtcC0C_p, 3) :

```

```

/* 2.2.5- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
,"***** DtcC0C_1 *****"
,expand(subsc(DtcC0C_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtcC0C_2 *****"
,expand(subsc(DtcC0C_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtcC0C_3 *****"
,expand(subsc(DtcC0C_3))) ;

/*
/* 2.2.6- Vérification des formules concernant DtcC0C */

/* 2.2.6.1- Calcul des expressions de DtcC0C au premier membre
pour chaque ordre */
DtcC0C1_1 := diff(DtcC0_0, x0 $ 1) * (x1 / f1) :
DtcC0C1_2 := diff(DtcC0_0, x0 $ 1) * (x2 / f1) :
DtcC0C1_3 := diff(DtcC0_0, x0 $ 1) * (x3 / f1) :

/* 2.2.6.2- Calcul des expressions de DtcC0C au second membre pour
chaque ordre */
DtcC0Cr_1 := 0 :
DtcC0Cr_2 := Dltexpr2r(DtcC0_0, DtcC0_1) :
DtcC0Cr_3 := Dltexpr3r(DtcC0_0, DtcC0_1, DtcC0_2) :

/* 2.2.6.3- Vérifications */
/* Les expressions ci-dessous doivent être nulles */
print
(Unquoted
,"***** DtcC0C_1 - DtcC0C1_1 - DtcC0Cr_1 *****"
,expand(subsc(DtcC0C_1 - DtcC0C1_1 - DtcC0Cr_1))) ;
print
(Unquoted

```

```

, "***** DtcC0C_2 - DtcC0C1_2 - DtcC0Cr_2 *****"
, expand(subsc(DtcC0C_2 - DtcC0C1_2 - DtcC0Cr_2)) ;
print
(Unquoted
, "***** DtcC0C_3 - DtcC0C1_3 - DtcC0Cr_3 *****"
, expand(subsc(DtcC0C_3 - DtcC0C1_3 - DtcC0Cr_3)) ;
*/

/* 3- Développement de Dt2cC */

/* 3.1- Développement de Dt2cC0 */

/* 3.1.1- Calcul de Dt2cC0 */
Dt2cC0 := Dt2f_f(cC0, phiC0) :

/* 3.1.2- Extraction des expressions de Dt2cC0 pour chaque ordre
*/
Dt2cC0_p := poly(Dt2cC0, [eps]) :
Dt2cC0_0 := coeff(Dt2cC0_p, 0) :
Dt2cC0_1 := coeff(Dt2cC0_p, 1) :
Dt2cC0_2 := coeff(Dt2cC0_p, 2) :
Dt2cC0_3 := coeff(Dt2cC0_p, 3) :

/* 3.1.3- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
, "***** Dt2cC0_0 *****"
, expand(subsc(Dt2cC0_0)) ;
print
(Unquoted
, "***** Dt2cC0_1 *****"
, expand(subsc(Dt2cC0_1)) ;
print
(Unquoted
, "***** Dt2cC0_2 *****"
, expand(subsc(Dt2cC0_2)) ;
print

```

```

(Unquoted
,"***** Dt2cC0_3 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0_3))) ;

/* 3.2- Développement de Dt2cC */

/* 3.2.1- Calcul de Dt2cC */
Dt2cC := Dt2f_f(cC, phiC) ;

/* 3.2.2- Calcul de Dt2cC0C */
Dt2cC0C := Dt2cC - Dt2cC0 ;

/* 3.2.3- Extraction des expressions de Dt2cC0C pour chaque ordre
*/
Dt2cC0C_p := poly(Dt2cC0C, [eps]) :
Dt2cC0C_1 := coeff(Dt2cC0C_p, 1) :
Dt2cC0C_2 := coeff(Dt2cC0C_p, 2) :
Dt2cC0C_3 := coeff(Dt2cC0C_p, 3) :

/* 3.2.4- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0C_1 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0C_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0C_2 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0C_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0C_3 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0C_3))) ;

/*
/* 3.2.5- Vérification des formules concernant Dt2cC0C */

/* 3.2.5.1- Calcul des expressions de Dt2cC0C au premier membre

```

```

pour chaque ordre */
Dt2cC0Cl_1 := diff(Dt2cC0_0, x0 $ 1) * (x1 / f1) :
Dt2cC0Cl_2 := diff(Dt2cC0_0, x0 $ 1) * (x2 / f1) :
Dt2cC0Cl_3 := diff(Dt2cC0_0, x0 $ 1) * (x3 / f1) :

/* 3.2.5.2- Calcul des expressions de Dt2cC0C au second membre
pour chaque ordre */
Dt2cC0Cr_1 := 0 :
Dt2cC0Cr_2 := Dltexpr2r(Dt2cC0_0, Dt2cC0_1) :
Dt2cC0Cr_3 := Dltexpr3r(Dt2cC0_0, Dt2cC0_1, Dt2cC0_2) :

/* 3.2.5.3- Vérifications */
/* Les expressions ci-dessous doivent être nulles */
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0C_1 - Dt2cC0Cl_1 - Dt2cC0Cr_1 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0C_1 - Dt2cC0Cl_1 - Dt2cC0Cr_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0C_2 - Dt2cC0Cl_2 - Dt2cC0Cr_2 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0C_2 - Dt2cC0Cl_2 - Dt2cC0Cr_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0C_3 - Dt2cC0Cl_3 - Dt2cC0Cr_3 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0C_3 - Dt2cC0Cl_3 - Dt2cC0Cr_3))) ;
*/

/* 4- Développement de Dt3cC */

/* 4.1- Développement de Dt3cC0 */

/* 4.1.1- Calcul de Dt3cC0 */
Dt3cC0 := Dt3f_f(cC0, phiC0) :

/* 4.1.2- Extraction des expressions de D3c pour chaque ordre */
Dt3cC0_p := poly(Dt3cC0, [eps]) :
Dt3cC0_0 := coeff(Dt3cC0_p, 0) :

```

```

Dt3cC0_1 := coeff(Dt3cC0_p, 1) :
Dt3cC0_2 := coeff(Dt3cC0_p, 2) :
Dt3cC0_3 := coeff(Dt3cC0_p, 3) :

/* 4.1.3- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0_0 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0_0))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0_1 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0_2 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0_3 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0_3))) ;

/* 4.2- Développement de Dt3cC */

/* 4.2.1- Calcul de Dt3cC */
Dt3cC := Dt3f_f(cC, phiC) :

/* 4.2.2- Calcul de Dt3cC0C */
Dt3cC0C := Dt3cC - Dt3cC0 :

/* 4.2.3- Extraction des expressions de Dt3cC0C pour chaque ordre
*/
Dt3cC0C_p := poly(Dt3cC0C, [eps]) :
Dt3cC0C_1 := coeff(Dt3cC0C_p, 1) :
Dt3cC0C_2 := coeff(Dt3cC0C_p, 2) :
Dt3cC0C_3 := coeff(Dt3cC0C_p, 3) :

```

```

/* 4.2.4- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0C_1 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0C_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0C_2 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0C_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0C_3 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0C_3))) ;

/*
/* 4.2.5- Vérification des formules concernant Dt3cC0C */

/* 4.2.5.1- Calcul des expressions de Dt3cC0C au premier membre
pour chaque ordre */
Dt3cC0C1_1 := diff(Dt3cC0_0, x0 $ 1) * (x1 / f1) :
Dt3cC0C1_2 := diff(Dt3cC0_0, x0 $ 1) * (x2 / f1) :
Dt3cC0C1_3 := diff(Dt3cC0_0, x0 $ 1) * (x3 / f1) :

/* 4.2.5.2- Calcul des expressions de Dt3cC0C au second membre
pour chaque ordre */
Dt3cC0Cr_1 := 0 :
Dt3cC0Cr_2 := Dltexpr2r(Dt3cC0_0, Dt3cC0_1) :
Dt3cC0Cr_3 := Dltexpr3r(Dt3cC0_0, Dt3cC0_1, Dt3cC0_2) :

/* 4.2.5.3- Vérifications */
/* Les expressions ci-dessous doivent être nulles */
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0C_1 - Dt3cC0C1_1 - Dt3cC0Cr_1 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0C_1 - Dt3cC0C1_1 - Dt3cC0Cr_1))) ;
print
(Unquoted

```

```

,"***** Dt3cC0C_2 - Dt3cC0C1_2 - Dt3cC0Cr_2 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0C_2 - Dt3cC0C1_2 - Dt3cC0Cr_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0C_3 - Dt3cC0C1_3 - Dt3cC0Cr_3 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0C_3 - Dt3cC0C1_3 - Dt3cC0Cr_3))) ;
*/

print
(Unquoted
,"***** Fin des résultats *****");

/***** FIN DU PROGRAMME *****/

```

H.4 Développement de c_C et des $D_t^* c_C$ pour la carène définie par $c(p_{[\underline{A}]^*}^{[0]}, p_{[\underline{A}; \underline{N}]^*}^{[1]}, x_{\underline{A}}^*)$

H.4.1 Correspondance des variables

Les variables de ce programme sont les mêmes que celles du programme de la section H.3, plus :

```

p0           :  $\tilde{p}_{[\underline{A}]^*}^{[0]}$ 
p0_0 , ..., p0_3 :  $p_{[\underline{A}]^*}^{[0](0)}, \dots, p_{[\underline{A}]^*}^{[0](3)}$ 
p1           :  $\tilde{p}_{[\underline{A}; \underline{N}]^*}^{[1]}$ 
p1_0 , ..., p1_3 :  $p_{[\underline{A}; \underline{N}]^*}^{[1](0)}, \dots, p_{[\underline{A}; \underline{N}]^*}^{[1](3)}$ 

```

H.4.2 Programme

```

/***** DEVELOPPEMENT DE cC et des Dt*cC *****/

/* Définitions des alias */

```

```

/* Pour des calculs plus numériques, et obligatoirement pour les
vérifications, supprimer les mises en commentaire ci-dessous */
// f1 := fact(1) :
// f2 := fact(2) :
// f3 := fact(3) :

/*****/

/* Chargement des procédures communes */
read("...") :

/*****/

/* Définitions des procédures locales */

/* Expression de la dérivée particulière Dtf d'une fonction f de
p0, p1 et x mais pas de t directement. Ce sont p0 et p1 qui
dépendent de t. La fonction "diff" de MuPAD n'applique pas la
règle de dérivation des fonctions composées, d'où l'obligation de
de l'appliquer explicitement pour obtenir la dérivée de f par
rapport à t */
Dtf_f := proc(f_a, phi_a)
begin
diff(f_a, p0_0 $ 1) * diff(p0, t $ 1)
+
diff(f_a, p1_0 $ 1) * diff(p1, t $ 1)
+
diff(f_a, x0 $ 1) * diff(phi_a, x0 $ 1)
end_proc :

/* Expression de la dérivée particulière deuxième Dt2f d'une
fonction f dans les mêmes conditions */
Dt2f_f := proc(f_a, phi_a)
begin
Dtf_f(Dtf_f(f_a, phi_a), phi_a)
+
diff(Dtf_f(f_a, phi_a), t $ 1)

```

```

end_proc :

/* Expression de la dérivée particulière troisième Dt3f d'une
fonction f dans les mêmes conditions */
Dt3f_f := proc(f_a, phi_a)
begin
Dt2f_f(Dt2f_f(f_a, phi_a), phi_a)
+
diff(Dt2f_f(f_a, phi_a), t $ 1)
end_proc :

/* Remplacement d'expressions par des identificateurs (pour
alléger l'édition des résultats) */
subsc := proc(expr_a)
begin
expr1 := expr_a :
expr1
:= subs(expr1
,cC0_0(p0_0, p1_0, x0) = level(c0, 0) // cC0_0() -> c0
,p0_0(t) = level(p00, 0) // p0_0() -> p00
,p0_1(t) = level(p01, 0) // p0_1() -> p01
,p0_2(t) = level(p02, 0) // p0_2() -> p02
,p0_3(t) = level(p03, 0) // p0_3() -> p03
,p1_0(t) = level(p10, 0) // p1_0() -> p10
,p1_1(t) = level(p11, 0) // p1_1() -> p11
,p1_2(t) = level(p12, 0) // p1_2() -> p12
,p1_3(t) = level(p13, 0) // p1_3() -> p13
,phiC0_0(t, x0) = level(phi0, 0) // phiC0_0() -> phi0
,phiC0_1(t, x0) = level(phi1, 0) // phiC0_1() -> phi1
,phiC0_2(t, x0) = level(phi2, 0) // phiC0_2() -> phi2
,phiC0_3(t, x0) = level(phi3, 0)) : // phiC0_3() -> phi3
expr1
:= subs(expr1
,p0_0 = level(p00, 0) // p0_0 -> p00
,p1_0 = level(p10, 0)) : // p1_0 -> p10
end_proc :

```

```

/*****/

/* Paramètre d'édition des résultats */
TEXTWIDTH := 65 :

/*****/

print
(Unquoted
,"***** Début des résultats *****");

/* 1- Développement de cC */

/* 1.1- Développement de cC0 */

/* 1.1.1- Développement de p0 */
Dltp0 := eps * p0_1(t) + eps^2 * p0_2(t) + eps^3 * p0_3(t) :
p0 := p0_0(t) + Dltp0 :

/* 1.1.2- Développement de p1 */
Dltp1 := eps * p1_1(t) + eps^2 * p1_2(t) + eps^3 * p1_3(t) :
p1 := p1_0(t) + Dltp1 :

/* 1.1.3- Développement de cC0 */
cC0 := cC0_0(p0_0, p1_0, x0) :
cC0 := cC0 + Dlt_dev(cC0, p0_0, Dltp0) :
cC0 := cC0 + Dlt_dev(cC0, p1_0, Dltp1) :

/* 1.1.4- Extraction des expressions de cC0 pour chaque ordre */
cC0_p := poly(cC0, [eps]) :
cC0_1 := coeff(cC0_p, 1) :
cC0_2 := coeff(cC0_p, 2) :
cC0_3 := coeff(cC0_p, 3) :

/* 1.1.5- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted

```

```

,"***** cC0_1 *****"
,expand(subsc(cC0_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** cC0_2 *****"
,expand(subsc(cC0_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** cC0_3 *****"
,expand(subsc(cC0_3))) ;

/* 1.2- Développement de cC0C */

/* 1.2.1- Développement de Dltx */
/* Toutes les dérivées (en t et en x0) étant des dérivées
partielles, les x* peuvent être considérés comme des variables
indépendantes (de t et de x0) */
Dltx := eps * x1 + eps^2 * x2 + eps^3 * x3 :
/* Pour memoire, x = x0 + Dltx */

/* 1.2.2- Développement de cC0C */
cC0C := Dlt_dev(cC0, x0, Dltx) :

/* 1.2.3- Calcul de cC (utilisé dans le développement de DtcC) */
cC := cC0 + cC0C :

/* 1.2.4- Extraction des expressions de cC0C pour chaque ordre */
cC0C_p := poly(cC0C, [eps]) :
cC0C_1 := coeff(cC0C_p, 1) :
cC0C_2 := coeff(cC0C_p, 2) :

cC0C_3 := coeff(cC0C_p, 3) :

/* 1.2.5- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
,"***** cC0C_1 *****"

```

```

,expand(subsc(cC0C_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** cC0C_2 *****"
,expand(subsc(cC0C_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** cC0C_3 *****"
,expand(subsc(cC0C_3))) ;

/*
/* 1.2.6- Vérifications */

/* 1.2.6.2- Vérification des formules concernant cC0C */

/* 1.2.6.2.1- Calcul des expressions de cC0C au premier membre
pour chaque ordre */
cC0Cl_1 := diff(cC0_0(p0_0, p1_0, x0), x0 $ 1) * (x1 / f1) :
cC0Cl_2 := diff(cC0_0(p0_0, p1_0, x0), x0 $ 1) * (x2 / f1) :
cC0Cl_3 := diff(cC0_0(p0_0, p1_0, x0), x0 $ 1) * (x3 / f1) :

/* 1.2.6.2.2- Calcul des expressions de cC0C au second membre pour
chaque ordre */
cC0Cr_1 := 0 :
cC0Cr_2 := Dltexpr2r(cC0_0(p0_0, p1_0, x0), cC0_1) :
cC0Cr_3 := Dltexpr3r(cC0_0(p0_0, p1_0, x0), cC0_1, cC0_2) :

/* 1.2.6.2.3- Vérifications */
/* Les expressions ci-dessous doivent être nulles */
print
(Unquoted
,"***** cC0C_1 - cC0Cl_1 - cC0Cr_1 *****"
,expand(subsc(cC0C_1 - cC0Cl_1 - cC0Cr_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** cC0C_2 - cC0Cl_2 - cC0Cr_2 *****"
,expand(subsc(cC0C_2 - cC0Cl_2 - cC0Cr_2))) ;

```

```

print
(Unquoted
,"***** cC0C_3 - cC0C1_3 - cC0Cr_3 *****"
,expand(subsc(cC0C_3 - cC0C1_3 - cC0Cr_3))) ;
*/

/* 2- Développement de DtcC */

/* 2.1- Développement de DtcC0 */

/* 2.1.1- Développement de phiC0 */
/* La dépendance en t des phiC0*, et donc de phiC0, ci-dessous est
sans utilité dans le développement de DtcC0 et de DtcC : seuls les
d*phiC0/dx0* interviennent dans ces grandeurs, mais cette
dépendance intervient dans le développement de Dt2cC0, de Dt2cC et
suivants */

phiC0
:= phiC0_0(t, x0)
+
eps * phiC0_1(t, x0)
+
eps^2 * phiC0_2(t, x0)
+
eps^3 * phiC0_3(t, x0) :

/* 2.1.2- Calcul de DtcC0 */
DtcC0 := Dtf_f(cC0, phiC0) :

/* 2.1.3- Extraction des expressions de DtcC0 pour chaque ordre */
DtcC0_p := poly(DtcC0, [eps]) :
DtcC0_0 := coeff(DtcC0_p, 0) :
DtcC0_1 := coeff(DtcC0_p, 1) :
DtcC0_2 := coeff(DtcC0_p, 2) :
DtcC0_3 := coeff(DtcC0_p, 3) :

/* 2.1.4- Edition de ces expressions */

```

```

print
(Unquoted
,"***** DtcC0_0 *****"
,expand(subsc(DtcC0_0))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtcC0_1 *****"
,expand(subsc(DtcC0_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtcC0_2 *****"
,expand(subsc(DtcC0_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtcC0_3 *****"
,expand(subsc(DtcC0_3))) ;

/* 2.2- Développement de DtcC */

/* 2.2.1- Développement de phiC */
phiC := phiC0 + Dlt_dev(phiC0, x0, Dltx) :

/* 2.2.2- Calcul de DtcC */
DtcC := Dtf_f(cC, phiC) :

/* 2.2.3- Calcul de DtcC0C */
DtcC0C := DtcC - DtcC0 :

/* 2.2.4- Extraction des expressions de DtcC0C pour chaque ordre
*/
DtcC0C_p := poly(DtcC0C, [eps]) :
DtcC0C_1 := coeff(DtcC0C_p, 1) :
DtcC0C_2 := coeff(DtcC0C_p, 2) :
DtcC0C_3 := coeff(DtcC0C_p, 3) :

/* 2.2.5- Edition de ces expressions */
print

```

```

(Unquoted
,"***** DtcC0C_1 *****"
,expand(subsc(DtcC0C_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtcC0C_2 *****"
,expand(subsc(DtcC0C_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtcC0C_3 *****"
,expand(subsc(DtcC0C_3))) ;

/*
/* 2.2.6- Vérifications */

/* 2.2.6.1- Vérification du développement de DtcC0_0 */
Verif_DtcC0_0
:=
DtcC0_0
-
(diff(cC0_0, t) // ce terme est nul
+
diff(cC0_0(p0_0, p1_0, x0), p0_0) * diff(p0_0(t), t)
+
diff(cC0_0(p0_0, p1_0, x0), p1_0) * diff(p1_0(t), t)
+
diff(cC0_0(p0_0, p1_0, x0), x0) * diff(phiC0_0(t, x0), x0)) :
/* L'expression ci-dessous doit être nulle */
print
(Unquoted
,"***** Verif_DtcC0_0 *****"
,subsc(simplify(Verif_DtcC0_0))) ;

/* 2.2.6.2- Vérification des formules concernant DtcC0C */

/* 2.2.6.2.1- Calcul des expressions de DtcC0C au premier membre
pour chaque ordre */

```

```

DtcC0Cl_1 := diff(DtcC0_0, x0 $ 1) * (x1 / f1) :
DtcC0Cl_2 := diff(DtcC0_0, x0 $ 1) * (x2 / f1) :
DtcC0Cl_3 := diff(DtcC0_0, x0 $ 1) * (x3 / f1) :

/* 2.2.6.2.2- Calcul des expressions de DtcC0C au second membre
pour chaque ordre */
DtcC0Cr_1 := 0 :
DtcC0Cr_2 := Dltexpr2r(DtcC0_0, DtcC0_1) :
DtcC0Cr_3 := Dltexpr3r(DtcC0_0, DtcC0_1, DtcC0_2) :

/* 2.2.6.2.3- Vérifications */
/* Les expressions ci-dessous doivent être nulles */
print
(Unquoted
,"***** DtcC0C_1 - DtcC0Cl_1 - DtcC0Cr_1 *****"
,expand(subsc(DtcC0C_1 - DtcC0Cl_1 - DtcC0Cr_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtcC0C_2 - DtcC0Cl_2 - DtcC0Cr_2 *****"
,expand(subsc(DtcC0C_2 - DtcC0Cl_2 - DtcC0Cr_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** DtcC0C_3 - DtcC0Cl_3 - DtcC0Cr_3 *****"
,expand(subsc(DtcC0C_3 - DtcC0Cl_3 - DtcC0Cr_3))) ;
*/

/* 3- Développement de Dt2cC */

/* 3.1- Développement de Dt2cC0 */

/* 3.1.1- Calcul de Dt2cC0 */
Dt2cC0 := Dt2f_f(cC0, phiC0) :

/* 3.1.2- Extraction des expressions de Dt2cC0 pour chaque ordre
*/
Dt2cC0_p := poly(Dt2cC0, [eps]) :
Dt2cC0_0 := coeff(Dt2cC0_p, 0) :

```

```

Dt2cC0_1 := coeff(Dt2cC0_p, 1) :
Dt2cC0_2 := coeff(Dt2cC0_p, 2) :
Dt2cC0_3 := coeff(Dt2cC0_p, 3) :

/* 3.1.3- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0_0 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0_0))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0_1 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0_2 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0_3 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0_3))) ;

/* 3.2- Développement de Dt2cC */

/* 3.2.1- Calcul de Dt2cC */
Dt2cC := Dt2f_f(cC, phiC) :

/* 3.2.2- Calcul de Dt2cC0C */
Dt2cC0C := Dt2cC - Dt2cC0 :

/* 3.2.3- Extraction des expressions de Dt2cC0C pour chaque ordre
*/
Dt2cC0C_p := poly(Dt2cC0C, [eps]) :
Dt2cC0C_1 := coeff(Dt2cC0C_p, 1) :
Dt2cC0C_2 := coeff(Dt2cC0C_p, 2) :
Dt2cC0C_3 := coeff(Dt2cC0C_p, 3) :

```

```

/* 3.2.4- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0C_1 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0C_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0C_2 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0C_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0C_3 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0C_3))) ;

/*
/* 3.2.5- Vérifications */

/* 3.2.5.1- Vérification du développement de Dt2cC0_0 */
Verif_Dt2cC0_0
:=
Dt2cC0_0
-
(diff(DtcC0_0, t)
+
diff(DtcC0_0, p0_0) * diff(p0_0(t), t)
+
diff(DtcC0_0, p1_0) * diff(p1_0(t), t)
+
diff(DtcC0_0, x0) * diff(phiC0_0(t, x0), x0)) :
/* L'expression ci-dessous doit être nulle */
print
(Unquoted
,"***** Verif_Dt2cC0_0 *****"
,subsc(simplify(Verif_Dt2cC0_0))) ;

/* 3.2.5.2- Vérification des formules concernant Dt2cC0C */

```

```

/* 3.2.5.2.1- Calcul des expressions de Dt2cC0C au premier membre
pour chaque ordre */
Dt2cC0C1_1 := diff(Dt2cC0_0, x0 $ 1) * (x1 / f1) :
Dt2cC0C1_2 := diff(Dt2cC0_0, x0 $ 1) * (x2 / f1) :
Dt2cC0C1_3 := diff(Dt2cC0_0, x0 $ 1) * (x3 / f1) :

/* 3.2.5.2.2- Calcul des expressions de Dt2cC0C au second membre
pour chaque ordre */
Dt2cC0Cr_1 := 0 :
Dt2cC0Cr_2 := Dltexpr2r(Dt2cC0_0, Dt2cC0_1) :
Dt2cC0Cr_3 := Dltexpr3r(Dt2cC0_0, Dt2cC0_1, Dt2cC0_2) :

/* 3.2.5.2.3- Vérifications */
/* Les expressions ci-dessous doivent être nulles */
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0C_1 - Dt2cC0C1_1 - Dt2cC0Cr_1 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0C_1 - Dt2cC0C1_1 - Dt2cC0Cr_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0C_2 - Dt2cC0C1_2 - Dt2cC0Cr_2 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0C_2 - Dt2cC0C1_2 - Dt2cC0Cr_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt2cC0C_3 - Dt2cC0C1_3 - Dt2cC0Cr_3 *****"
,expand(subsc(Dt2cC0C_3 - Dt2cC0C1_3 - Dt2cC0Cr_3))) ;
*/

/* 4- Développement de Dt3cC */

/* 4.1- Développement de Dt3cC0 */

/* 4.1.1- Calcul de Dt3cC0 */
Dt3cC0 := Dt3f_f(cC0, phiC0) :

/* 4.1.2- Extraction des expressions de Dt3cC0 pour chaque ordre
*/

```

```

Dt3cC0_p := poly(Dt3cC0, [eps]) :
Dt3cC0_0 := coeff(Dt3cC0_p, 0) :
Dt3cC0_1 := coeff(Dt3cC0_p, 1) :
Dt3cC0_2 := coeff(Dt3cC0_p, 2) :
Dt3cC0_3 := coeff(Dt3cC0_p, 3) :

/* 4.1.3- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0_0 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0_0))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0_1 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0_2 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0_3 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0_3))) ;

/* 4.2- Développement de Dt3cC */

/* 4.2.1- Calcul de Dt3cC */
Dt3cC := Dt3f_f(cC, phiC) :

/* 4.2.2- Calcul de Dt3cC0C */
Dt3cC0C := Dt3cC - Dt3cC0 :

/* 4.2.3- Extraction des expressions de Dt3cC0C pour chaque ordre
*/
Dt3cC0C_p := poly(Dt3cC0C, [eps]) :
Dt3cC0C_1 := coeff(Dt3cC0C_p, 1) :
Dt3cC0C_2 := coeff(Dt3cC0C_p, 2) :

```

```

Dt3cC0C_3 := coeff(Dt3cC0C_p, 3) :

/* 4.2.4- Edition de ces expressions */
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0C_1 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0C_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0C_2 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0C_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0C_3 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0C_3))) ;

/*
/* 4.2.5- Vérifications */

/* 4.2.5.1- Vérification du développement de Dt3cC0_0 */
Verif_Dt3cC0_0
:=
Dt3cC0_0
-
(diff(Dt2cC0_0, t)
+
diff(Dt2cC0_0, p0_0) * diff(p0_0(t), t)
+
diff(Dt2cC0_0, p1_0) * diff(p1_0(t), t)
+
diff(Dt2cC0_0, x0) * diff(phiC0_0(t, x0), x0)) :
/* L'expression ci-dessous doit être nulle */
print
(Unquoted
,"***** Verif_Dt3cC0_0 *****"
,subsc(simplify(Verif_Dt3cC0_0))) ;

```

```

/* 4.2.5.2- Vérification des formules concernant Dt3cC0C */

/* 4.2.5.2.1- Calcul des expressions de Dt3cC0C au premier membre
pour chaque ordre */
Dt3cC0C1_1 := diff(Dt3cC0_0, x0 $ 1) * (x1 / f1) :
Dt3cC0C1_2 := diff(Dt3cC0_0, x0 $ 1) * (x2 / f1) :
Dt3cC0C1_3 := diff(Dt3cC0_0, x0 $ 1) * (x3 / f1) :

/* 4.2.5.2.2- Calcul des expressions de Dt3cC0C au second membre
pour chaque ordre */
Dt3cC0Cr_1 := 0 :
Dt3cC0Cr_2 := Dltexpr2r(Dt3cC0_0, Dt3cC0_1) :
Dt3cC0Cr_3 := Dltexpr3r(Dt3cC0_0, Dt3cC0_1, Dt3cC0_2) :

/* 4.2.5.2.3- Vérifications */
/* Les expressions ci-dessous doivent être nulles */
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0C_1 - Dt3cC0C1_1 - Dt3cC0Cr_1 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0C_1 - Dt3cC0C1_1 - Dt3cC0Cr_1))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0C_2 - Dt3cC0C1_2 - Dt3cC0Cr_2 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0C_2 - Dt3cC0C1_2 - Dt3cC0Cr_2))) ;
print
(Unquoted
,"***** Dt3cC0C_3 - Dt3cC0C1_3 - Dt3cC0Cr_3 *****"
,expand(subsc(Dt3cC0C_3 - Dt3cC0C1_3 - Dt3cC0Cr_3))) ;
*/

print
(Unquoted
,"***** Fin des résultats *****");

/***** FIN DU PROGRAMME *****/

```

H.5 Procédures communes

```
/****** PROCEDURES COMMUNES *****/
```

```
/* Développement d'une expression par rapport à une variable */
```

```
Dlt_dev := proc(expr_a, x_a, Dltx_a)
begin
diff(expr_a, x_a $ 1) * (Dltx_a^1 / f1)
+
diff(expr_a, x_a $ 2) * (Dltx_a^2 / f2)
+
diff(expr_a, x_a $ 3) * (Dltx_a^3 / f3)
end_proc :
```

```
/* Expression des seconds membres en Dltx d'ordre 2 */
```

```
Dltexpr2r := proc(expr0_a, expr1_a)
begin
diff(expr1_a, x0 $ 1) * (x1 / f1)
+
diff(expr0_a, x0 $ 2) * (x1^2 / f2)
end_proc :
```

```
/* Expression des seconds membres en Dltx d'ordre 3 */
```

```
Dltexpr3r := proc(expr0_a, expr1_a, expr2_a)
begin
diff(expr2_a, x0 $ 1) * (x1 / f1)
+
diff(expr1_a, x0 $ 1) * (x2 / f1)
+
diff(expr1_a, x0 $ 2) * (x1^2 / f2)
+
diff(expr0_a, x0 $ 2) * (x2*x1 / f2)
+
diff(expr0_a, x0 $ 2) * (x1*x2 / f2)
+
diff(expr0_a, x0 $ 3) * (x1^3 / f3)
end_proc :
```

```

/* Expression de Dtpsi en fonction de phi */
Dtpsi_f := proc(phi_a)
begin
diff(phi_a, t $ 2)
+
2 * diff(phi_a, t $ 1, x0 $ 1) * diff(phi_a, x0 $ 1)
+
diff(phi_a, x0 $ 1) * diff(phi_a, x0 $ 2) * diff(phi_a, x0 $ 1)
+
g * diff(phi_a, x0 $ 1)
end_proc :

/* Expression de psi en fonction de phi et de x */
psi_f := proc(phi_a, x_a)
begin
diff(phi_a, t $ 1) + (1 / 2) * diff(phi_a, x0 $ 1)^2 + g * x_a
end_proc :

/***** FIN DES PROCEDURES COMMUNES *****/

```

Annexe I

Expression de la dérivée d'une distribution donc l'argument est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}

La définition de la dérivée d'une distribution dans \mathbb{R} est

$$\langle \varphi, \chi^{\{q\}} \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} (-1)^q \cdot \langle \varphi^{\{q\}}, \chi \rangle^1$$

où φ est une application $\in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et χ une distribution $\in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et où l'opération \langle, \rangle est définie pour une distribution régulière par

$$\langle \varphi, \chi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}} dx \cdot \varphi(x) \cdot \chi(x).$$

Cette définition peut être étendue au cas où φ est une application $\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et où l'argument de χ est une application f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^{q+1} , l'opération \langle, \rangle étant définie pour une distribution régulière par

$$\langle \varphi, \chi(f) \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x_* \in \mathbb{R}^n} |dx_*| \cdot \varphi(x_*) \cdot \chi(f(x_*)).$$

La question est : quelle est l'expression de la distribution $\chi^{\{q\}}(f(x_*))$?

Le résultat devant évidemment être vrai dans le cas d'une distribution régulière, nous nous plaçons dans ce cas. L'application de la formule de la divergence dans un domaine Ω à la grandeur

¹L'exposant entre accolades : $\{q\}$, représente la dérivée d'ordre q de la fonction (idem note 20 page 266).

$$\varphi \cdot \chi(f) \cdot \frac{g_i}{\frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot g_j}$$

où g_* est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n de classe C^q telle que

$$(I.1) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g_i \neq 0$$

s'écrit

$$\int_{x_* \in \Omega} |dx_*| \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi \cdot \chi(f) \cdot \frac{g_i}{\frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot g_j} \right) = \int_{x_* \in \partial\Omega} ds \cdot \nu_i \cdot \varphi \cdot \chi(f) \cdot \frac{g_i}{\frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot g_j}.$$

La fonction φ étant à support compact, quand Ω tend vers \mathbb{R}^n , le second membre de (↑) est nul, ce qui donne

$$\int_{x_* \in \mathbb{R}^n} |dx_*| \cdot \varphi \cdot \chi^{\{1\}}(f) = - \int_{x_* \in \mathbb{R}^n} |dx_*| \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi \cdot \frac{g_i}{\frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot g_j} \right) \cdot \chi(f).$$

Sauf cas de dégénérescence de f , la condition (I.1) est toujours satisfaite en prenant $g_i = \partial f / \partial x_i$. Une forme de (↑) est donc

$$\int_{x_* \in \mathbb{R}^n} |dx_*| \cdot \varphi \cdot \chi^{\{1\}}(f) = - \int_{x_* \in \mathbb{R}^n} |dx_*| \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi \cdot \Delta_i(f)) \cdot \chi(f)$$

où l'opérateur Δ_* est défini par

$$(I.2) \quad \Delta_i(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2}.$$

Une expression de la distribution régulière $\chi^{\{q\}}(f)$ est donc

$$(I.3) \quad \int_{x_* \in \mathbb{R}^n} |dx_*| \cdot \varphi \cdot \chi^{\{q\}}(f) = (-1)^q \cdot \int_{x_* \in \mathbb{R}^n} |dx_*| \cdot \mathbf{D}_f^q(\varphi) \cdot \chi(f)$$

où l'opérateur \mathbf{D}_f est défini par

$$(I.4) \quad \mathbf{D}_f(\varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi \cdot \Delta_i(f)),$$

et par extension

$$\langle \varphi, \chi^{\{q\}}(f) \rangle = (-1)^q \cdot \langle \mathbf{D}_f^q(\varphi), \chi(f) \rangle.$$

