



**HAL**  
open science

## Les files et les reseaux zero-automatiques

Thu Ha Dao Thi

► **To cite this version:**

Thu Ha Dao Thi. Les files et les reseaux zero-automatiques. Réseaux et télécommunications [cs.NI].  
Université Paris-Diderot - Paris VII, 2007. Français. NNT : . tel-00195119v2

**HAL Id: tel-00195119**

**<https://theses.hal.science/tel-00195119v2>**

Submitted on 6 Nov 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

Université Paris Diderot

# Les files et les réseaux zéro-automatiques

Zero-automatic queues and networks

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 3 décembre 2007

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Paris Diderot  
(spécialité: informatique et réseaux)

par

Dao Thi Thu Ha

### Composition du jury

*Rapporteurs :* FOURNEAU Jean-Michel  
KELLY Frank

*Examineurs :* BOUGEROL Phillipe  
FRAIGNIAUD Pierre  
JEAN-MARIE Alain

*Directeur de thèse :* MAIRESSE Jean



*À tous les gens que j'aime*  
*To everyone I love*



## Remerciements / Acknowledgments

Je tiens à remercier Jean Mairesse, mon directeur de thèse. Il m'a guidé tout au long de ces années et il est aussi mon grand ami. Je suis vraiment très contente d'avoir un directeur si gentil que lui.

J'aimerais remercier Jean-Michel Fourneau qui a accepté de rapporter sur cette thèse. Ses remarques ont permis l'amélioration du manuscrit.

I would like to thank Frank Kelly. It is my great honour that you accepted to review this PhD thesis.

Je souhaite remercier Phillipe Bougerol, Pierre Fraigniaud et Alain Jean-Marie qui ont accepté de participer à ce jury.

Un grand merci à tous les membres du LIAFA, l'équipe Automates et Applications et particulièrement, tous les thésards du LIAFA.

Je n'oublie pas l'encouragement de tous mes amis, de Xviet, de Xviet2k, de Chuoi, de Chuoifoot, de tous les membres de Choisy-open, des souriants petits Khoai et Nhat Phong, de ma grande famille et ma petite famille :x. Cam on cac ban cua to o rat xa nua, nhat la Ut ngo.



## Résumé

On introduit un nouveau modèle de file d'attente : les files Zéro-automatiques. Tout d'abord, on considère la discipline de service Premier Arrivé Premier Servi. Les files 0-automatiques sont caractérisées par une salle d'attente évoluant suivant un mécanisme de marche aléatoire sur un groupe ou un monoïde infini. En considérant les deux cas les plus simples et aussi extrêmes de files 0-automatiques, nous retrouvons la file simple  $M/M/1$  et la G-file de Gelenbe avec clients positifs et négatifs.

Le résultat saillant est que toutes les files 0-automatiques ont une distribution stationnaire à forme produit et un processus de départ de Poisson. C'est un point crucial pour construire les réseaux à forme produit.

On considère deux modèles correspondant aux différents routages classiques : réseaux à la Jackson et réseaux à la Kelly. Dans les deux cas, on a montré que la distribution stationnaire est à forme produit et peut être déterminée explicitement. De plus, le processus de départ est Poisson.

Enfin, considérons les files 0-automatiques avec discipline de service Dernier Arrivé Premier Servi. Dans ce cas, certaines propriétés restent vraies, mais pas toutes. On obtient des résultats intéressants en comparant les zones de stabilité d'une même file 0-automatique sous les disciplines Premier Arrivé Premier Servi et Dernier Arrivé Premier Servi.

**Mots-clés:** File d'attente, Réseau, Processus de Poisson, Forme produit, Zéro-automatique, Réversible, Quasi-réversible, Marche Aléatoire.

## Abstract

We introduce and study a new model : Zero-automatic queues. First, we consider the service discipline First In First Out. Roughly, 0-automatic queues are characterized by a special buffering mechanism evolving like a random walk on some infinite group or monoid. When considering the two simplest and extremal cases of 0-automatic queues, we recover the simple  $M/M/1$  queue, and Gelenbe's G-queue with positive and negative customers.

The salient result is that all stable 0-automatic queues have a product form stationary distribution and a Poisson departure process. This is a crucial point to build a network of 0-automatic queues with product form stationary distribution.

We consider two types of networks, with either a Jackson-like or a Kelly-like routing mechanism. In both cases, and under the stationary condition, we prove that the stationary distribution has a product form and can be explicitly determined. Furthermore, the departure process out of the network is Poisson.

At last, consider the 0-automatic queues with the service discipline Last In First Out. Some nice properties of the FIFO 0-automatic queues still hold for the LIFO queue, but not all of them. We obtain interesting results by comparing the stability region of the same 0-automatic queue under the two disciplines FIFO and LIFO.

**Keywords:** Queue, Network, Zero-automatic, Poisson process, Product form, Reversible, Quasi-reversible, Random walk.





# Table des matières

<b>Chapitre 1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 2 Les files d'attente et les réseaux</b>	<b>7</b>
2.1 Les files d'attente . . . . .	7
2.1.1 Réversibilité . . . . .	8
2.1.2 La file $M/M/1/\infty$ . . . . .	9
2.1.3 La G-file de Gelenbe . . . . .	11
2.1.4 La définition de la quasi-réversibilité . . . . .	12
2.1.5 Les files symétriques . . . . .	15
2.2 Les réseaux . . . . .	19
2.2.1 Le réseau de Jackson . . . . .	19
2.2.2 Le réseau de Gordon-Newell . . . . .	21
2.2.3 Le G-réseau de Gelenbe . . . . .	22
2.2.4 Les réseaux de Kelly . . . . .	23
2.2.5 Les réseaux de files quasi-réversibles de Chao, Miyazawa et Pinedo .	26
2.2.6 Le réseau BCMP . . . . .	32
<b>Chapitre 3 Marche aléatoire sur un groupe ou un monoïde</b>	<b>37</b>
3.1 Monoïde et groupe . . . . .	37
3.2 Paire zéro-automatique . . . . .	38
3.3 Marche aléatoire sur un monoïde ou un groupe . . . . .	39
3.4 Marche aléatoire sur une paire 0-automatique . . . . .	40
3.5 Monoïde et groupe libre fleuri . . . . .	43
3.6 Marche aléatoire sur un monoïde ou groupe libre fleuri . . . . .	44
<b>Chapitre 4 Zero-automatic queues</b>	<b>47</b>
4.1 The Zero-Automatic Queue . . . . .	47

4.1.1	Comparison with other models in the literature . . . . .	49
4.2	Stability Condition for a Zero-Automatic Queue . . . . .	51
4.3	Stationary Distribution of a Stable Queue . . . . .	53
4.3.1	The Twisted Traffic Equations . . . . .	53
4.3.2	The main results . . . . .	56
4.3.3	Quasi-Birth-and-Death processes . . . . .	63
4.4	The Zero-automatic Queue of a Plain Monoid . . . . .	65
4.5	Extension and Examples . . . . .	66
4.5.1	Extension . . . . .	66
4.5.2	Examples . . . . .	67
<b>Chapitre 5</b>	<b>Jackson-like network of 0-automatic queues</b>	<b>77</b>
5.1	Description of the model . . . . .	77
5.2	Traffic Equations . . . . .	78
5.3	Stationary distribution . . . . .	79
5.4	Examples . . . . .	84
5.4.1	The classical Jackson network . . . . .	85
5.4.2	Zero-automatic Jackson-like network of G-queues . . . . .	85
5.4.3	0-automatic Jackson-like network of a $(\mathbb{N}, \{1\})$ -queue and a $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \{a, a^2, b, b^2\})$ -queue . . . . .	86
<b>Chapitre 6</b>	<b>Kelly-like network of 0-automatic queues</b>	<b>89</b>
6.1	Zero-automatic queues with classes . . . . .	89
6.2	Description of the network model . . . . .	92
6.3	Traffic Equations . . . . .	93
6.4	Examples . . . . .	96
6.4.1	The FIFO Kelly network . . . . .	96
6.4.2	A random route model . . . . .	97
<b>Chapitre 7</b>	<b>The LIFO 0-automatic queues</b>	<b>99</b>
7.1	The LIFO Zero-Automatic Queue . . . . .	99
7.2	Stationary Distribution of a LIFO Queue . . . . .	100
7.2.1	The LIFO Twisted Traffic Equations . . . . .	101
7.2.2	The main results . . . . .	103
7.3	Comparison of FIFO and LIFO queues . . . . .	105

---

7.3.1	The free product $\mathbb{N} \star \mathbb{B}$ . . . . .	105
7.3.2	The free product $\mathbb{B} \star \mathbb{B}$ . . . . .	106
7.3.3	The free product $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{B}$ . . . . .	107
<b>Chapitre 8 Conclusion and future works</b>		<b>109</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>117</b>
<b>Index</b>		<b>121</b>



# Table des figures

1.1	Une file 0-automatique. . . . .	2
2.1	Une file d'attente. . . . .	7
2.2	Processus du nombre de clients d'une file $M/M/1$ avec les points des arrivées et des départs . . . . .	11
2.3	Réseau de Jackson de 3 files . . . . .	21
2.4	Les routes aléatoires . . . . .	23
2.5	La hiérarchie . . . . .	35
3.1	La marche aléatoire $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \nu)$ . . . . .	40
3.2	Les graphes de Cayley de $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N} \star \mathbb{B}$ . . . . .	44
3.3	La marche aléatoire $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \nu)$ . . . . .	45
4.1	Effect of an arrival and a departure on the content of the buffer in a 0-automatique queue built on the group $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . . . . .	50
4.2	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ : The stability region (left) and the load $\rho$ (right). . . . .	68
4.3	The queue $M/M/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \Sigma)$ $a$ in dark gray, $b$ in white, and $b^2$ in light gray. . . . .	69
4.4	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ : The stability region (left) and the load $\rho$ (right). . . . .	70
4.5	The queue $M/M/(X, \Sigma)$ with $a$ in dark gray, $b$ in white, and $b^2$ in light gray. . . . .	71
4.6	$\langle a, b \mid a^2 = a, b^3 = b^2 \rangle$ : The stability region (left) and the load $\rho$ (right). . . . .	71
4.7	The queue $M/M/(\mathbb{N} \star \mathbb{B}, \Sigma)$ with $a$ in white and $b$ in dark gray. . . . .	72
4.8	$\mathbb{N} \star \mathbb{B}$ : The stability region (left) and the load $\rho$ (right). . . . .	72
4.9	Stability region of the $M/M/1/(\mathbb{N} \star \mathbb{Z} \star \mathbb{B}, \Sigma)$ queue. The axis are $p, q$ , and $\lambda/\mu$ . . . . .	73
4.10	The $M/M/1/(\mathbb{F}(a), \Sigma)$ queue with $a$ in light gray and $a^{-1}$ in dark gray. . . . .	73
4.11	$\mathbb{F}(a)$ and $\mathbb{F}(a) \star \{c\}^*$ : the loads as a function of $\lambda/\mu$ . . . . .	74
4.12	$\mathbb{F}(a)$ : The solutions to the TTE. . . . .	75
4.13	$\langle a, b \mid ab = 1 \rangle$ and $\langle a, b \mid ab = 1 \rangle \star \{c\}^*$ : the loads in function of $\nu(a)$ and $t = \lambda/\mu$ . . . . .	76
5.1	Network of 2 queues . . . . .	86
5.2	Stability region, the sufficient condition (SC) and the necessary condition (NC) . . . . .	87
6.1	Random route . . . . .	97

7.1	The queue-content's evolution of the LIFO queue associated to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	100
7.2	Effect of an arrival and a departure on the content of the buffer in a LIFO 0-automatic queue on the free product $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	101
7.3	$B \star \mathbb{B}$ : The difference between two loads : $\rho_{LIFO} - \rho_{FIFO}$ .	106
7.4	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{B}$ , the stability region of the FIFO and LIFO queues	107
7.5	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{B}$ , the load $\rho_{LIFO}$ and $\rho_{FIFO}$ in the stability region : $p=1/4$ (left) and $p=1/2$ (right).	108
7.6	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{B}$ , the load $\rho_{LIFO}$ and $\rho_{FIFO}$ : $p=1/4$ (left) and $p=1/2$ (right).	108
8.1	Example of batch arrival and removal	116

# 1

## Introduction

Les phénomènes d'attente sont d'observation courante dans la vie quotidienne. Quand nous nous rendons à la poste, à la gare, à la banque, bien souvent nous devons "faire la queue" pour obtenir des timbres, un billet, de l'argent. Néanmoins, l'étude formelle de la théorie des files d'attente a seulement commencé au début du vingtième siècle avec le travail de A.K. Erlang. Il a réalisé la première analyse mathématique d'un modèle de file d'attente téléphonique. Depuis lors, la théorie des files d'attente s'est développée et a une large application.

Une file d'attente est la donnée d'une (ou plusieurs) unité de service où arrivent des clients demandant une certaine durée d'utilisation de cette unité. Un réseau de file d'attente est un système d'un nombre fini de files (stations) qui fournissent des services aux clients. Les exemples de réseaux de files d'attente incluent les systèmes informatiques, les systèmes de production, les ateliers, les terminaux d'aéroport, les systèmes de chemin de fer ou de route, et les systèmes de téléphone. Des modèles de réseaux de files d'attente ont été avec succès appliqués dans l'évaluation et l'optimisation des performances de tous ces systèmes.

La file d'attente la plus simple et la plus étudiée est la file  $M/M/1/\infty/FIFO$ . Dans la file, il y a juste un type de client. Un client arrive et augmente la taille du buffer (la longueur de la file) de 1, les clients sont servis dans l'ordre des arrivées. Gelenbe a introduit la G-file avec des clients positifs et négatifs dans [Gel91]. Un client négatif élimine un client positif (ordinaire). Les clients négatifs ne peuvent pas s'accumuler dans la file et sont simplement perdus si ils arrivent dans une file vide. Le réseau de G-files est appelé G-réseau.

Les réseaux avec les clients positifs et négatifs ont été inspirés la première fois par l'étude des réseaux neurologiques [Gel89]. Cependant, les G-réseaux peuvent avoir de nombreuses applications pour modéliser un grand nombre de systèmes. Par exemple, des clients positifs et négatifs peuvent être employés pour modéliser un réseau de sémaphores communicants. Un autre exemple est les systèmes basés sur des requêtes "optimistes" et des requêtes d'annulation qui détruisent les tâches inconsistantes. Les clients positifs sont les requêtes positives et les clients négatifs représentent les annulations.

Notre modèle est une généralisation de la G-file.

Plus précisément, nous présentons et étudions un nouveau modèle de file d'attente que l'on a choisi d'appeler : *les files zéro-automatiques*. Les files 0-automatiques peuvent



être vues comme une synthèse d'une file simple et une marche aléatoire sur une paire zéro-automatique.

Tout d'abord, on va donner une description informelle d'un type spécial de file 0-automatique (qui correspond à un produit libre de trois monoïdes finis). Considérons une file d'attente avec un seul serveur et un buffer de capacité infini. Les clients sont colorés en rouge (R), bleu (B) ou vert (V), avec un ensemble fini de nuances possibles disponibles dans chaque couleur :  $\Sigma_R, \Sigma_B, \Sigma_V$ . Dans le buffer, deux clients consécutifs de la même couleur peuvent s'éliminer ou fusionner pour créer un nouveau client de la même couleur. Les clients de couleurs différentes ne sont pas interactifs. Les règles de contenus du buffer sont illustrées dans le Figure 1.1. Les nuances de couleur sont modifiées lors du procédé de fusionnement, selon une loi interne :  $\Sigma_i \times \Sigma_i \rightarrow \Sigma_i \cup \{1\}$ ,  $i \in \{R, B, V\}$ , avec 1 codant pour l'annulation. La seule restriction, mais cruciale, est que chaque loi interne doit être associative.

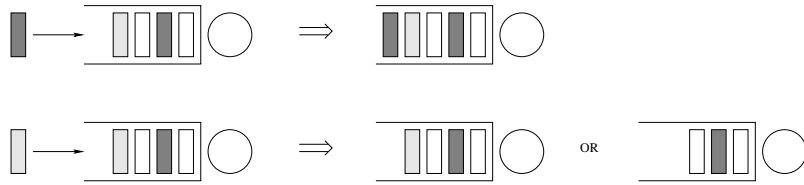


FIGURE 1.1 – Une file 0-automatique.

Un point intéressant et différent d'une file 0-automatique par rapport aux autres types de files connues est la possibilité de fusionner deux clients pour en créer un nouveau.

Présentons plus précisément le modèle. Considérons une file simple  $M/M/1/\infty$  avec la discipline de service premier arrivé, premier servi. Le taux d'arrivée et départ est  $\lambda$  et  $\mu$ . C'est sans doute le modèle le plus simple et également le modèle le plus étudié dans la théorie des files d'attente, avec au moins un livre qui lui est consacré en propre, voir [Coh69]. On va parler plus de détail de cette file dans la Section 2.1.2. Un résultat classique de cette file est que sous la condition de stabilité  $\lambda < \mu$ , le processus du contenu du buffer d'une file  $M/M/1$  est ergodique, et la distribution stationnaire est donnée par :

$$\pi(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n. \quad (1.1)$$

Présentons le modèle, complètement indépendant, de la marche aléatoire sur une paire 0-automatique étudié dans [Mai05, Mai04, MM07]. Soit  $X$  un groupe ou monoïde infini avec l'ensemble de générateurs fini  $\Sigma$ . Soit  $\nu$  une mesure de probabilité sur  $\Sigma$  et soit  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a  $\Sigma$ -valuées i.i.d. de loi  $\nu$ . Soit  $(X_n)_n$  la suite de v.a  $X$ -valuées définie par :

$$X_0 = 1_X, \quad X_{n+1} = X_n * x_n = x_0 * x_1 * \cdots * x_n,$$

où  $1_X$  est l'élément unité de  $X$  et  $*$  est la loi de groupe ou monoïde. Par définition,  $(X_n)_n$  est une réalisation de la marche aléatoire  $(X, \nu)$ .

Supposons maintenant que la paire  $(X, \Sigma)$  est 0-automatique. La définition va être donnée dans le chapitre 3. Pour l'instant, il suffit de dire que les éléments de  $X$  peuvent

être mis en bijection avec un langage rationnel  $L(X, \Sigma) \subset \Sigma^*$ . La marche aléatoire  $(X_n)_n$  est considérée comme évoluant sur  $L(X, \Sigma)$ . Si  $X_n = ua, a \in \Sigma$ , et  $x_n = b \in \Sigma$ , alors

$$X_{n+1} = u \text{ si } a * b = 1_X, \quad X_{n+1} = uc \text{ si } a * b = c \in \Sigma, \quad X_{n+1} = uab \text{ sinon.} \quad (1.2)$$

Supposons que la marche aléatoire est transiente. Soit  $\nu^\infty(u\Sigma^\mathbb{N})$  la probabilité que la marche aléatoire va à l'infini dans la "direction"  $u$  (c.à.d.  $\nu^\infty(u\Sigma^\mathbb{N}) = P\{\exists N, \forall n \geq N, X_n \in u\Sigma^*\}$ ). Ce qui suit est le résultat principal démontré dans [Mai05] :

$$\forall u = u_1 \cdots u_n \in L(X, \Sigma), \quad \nu^\infty(u\Sigma^\mathbb{N}) = \widehat{q}(u_1) \cdots \widehat{q}(u_{n-1})\widehat{r}(u_n), \quad (1.3)$$

où  $\forall a \in \Sigma, \widehat{q}(a) \in (0, 1), \widehat{r}(a) \in (0, 1)$ .

Les expressions dans (1.1) et (1.3) partagent une structure "multiplicative" commune. Guidé par cette analogie, on voudrait fusionner les deux modèles ensemble. Dans ce but, faisons l'observation élémentaire suivante : si on bloque le serveur d'une file  $M/M/1$ , le nombre de clients en attente après  $n$  arrivées est  $A_n = n$ . Et  $(A_n)_n$  peut être regardé comme une marche aléatoire (pas vraiment aléatoire) sur la paire  $((\mathbb{N}, +), \{1\})$  liée à la probabilité  $\nu : \nu(1) = 1$ .

Maintenant, remplaçons la marche aléatoire triviale  $(A_n)_n$  par une autre, plus complexe, la marche aléatoire  $(X_n)_n$  sur un triplet 0-automatique  $(X, \Sigma, \nu)$ . Alors, la marche aléatoire  $(X_n)_n$  constitue le contenu du buffer dans une file avec un serveur bloqué. Une *file 0-automatique* est le modèle obtenu en débloquent le serveur. L'ensemble  $\Sigma$  est l'ensemble des *classes* possibles pour les clients. Les clients arrivent au taux constant  $\lambda$ . En arrivant, le nouveau client (classe  $b$ ) et le client actuellement en arrière du buffer (classe  $a$ ) interagissent selon (1.2). En avant du buffer, les clients sont servis au taux constant  $\mu$ .

Soit  $\widehat{\gamma}$  la dérive ou la vitesse de fuite vers l'infini de la marche aléatoire  $(X_n)_n$ . On montre dans la Section 4.2 que la condition de stabilité pour une file 0-automatique associée à  $(X_n)_n$  est :  $\lambda\widehat{\gamma} < \mu$ . Sous cette condition, on montre dans la Section 4.3 que la distribution stationnaire  $p$  pour le processus du contenu du buffer a une structure "multiplicative" :

$$\forall u = u_1 \cdots u_n \in L(X, \Sigma), \quad p(u) = (1 - \rho)\rho^n q(u_1) \cdots q(u_{n-1})r(u_n), \quad (1.4)$$

pour certaines paramètres  $\rho \in (0, 1), \forall a \in \Sigma, q(a) \in (0, 1), r(a) \in (0, 1)$ . (Ces nombres sont en général différents de leurs contre-parties dans (1.1) et (1.3).) De plus, le processus de départ de la file est un processus de Poisson de taux  $\rho\mu$ . Ainsi nous avons un analogue du théorème de Burke pour toutes les files 0-automatiques. En utilisant la terminologie standard, les files 0-automatiques sont *quasi-reversibles*. Pour être plus précis, étant donné  $(X_n)_n$ , plusieurs variantes des files 0-automatiques peuvent être définies selon la manière dont des clients sont incorporés dans une file vide (condition au bord). Il y a précisément un choix de condition au bord pour lequel on obtient le résultat dans (1.4). Les valeurs  $\rho, q(\cdot), r(\cdot)$ , aussi bien que les conditions au bord, sont obtenues implicitement comme la solution unique d'un ensemble d'équations algébriques, voir les Théorèmes 4.13 et 4.14 pour un énoncé précis.

Supposons maintenant que  $(X, \Sigma)$  est formé par un monoïde libre fleuri avec l'ensemble de générateurs naturels, les définitions sont données dans la Section 3.5. Une telle paire

est 0-automatique, et la structure d'un monoïde ou un groupe libre fleuri est plus facile à étudier. À partir du chapitre 5, on étudie juste les files associées aux monoïdes libres fleuris.

Hormi le monoïde libre, l'exemple le plus simple d'une paire 0-automatique est le groupe libre généré par un seul générateur :  $((\mathbb{Z}, +), \{-1, 1\})$ . Les files 0-automatiques correspondantes sont des variations des G-files de Gelenbe, ou files d'attente avec clients positifs et négatifs, qui ont été intensivement étudiés dans les années 90, voir [Gel91, FGS96] et la bibliographie dans [GP98]. Les files 0-automatiques générales peuvent être regardées comme des généralisations des G-files. En effet, dans une file 0-automatique, différents types de tâches (de clients) peuvent être modélisés. Détaillons quatre d'entre eux :

- Le type classique. Les tâches sont traitées une par une sans simplification dans le buffer :  $aa \rightarrow aa$ .

- Le type positif/négatif. Les tâches sont soit positives ( $a$ ) soit négatives ( $a^{-1}$ ) et deux tâches consécutives de signes opposés s'éliminent :  $aa^{-1} \rightarrow \emptyset$ ,  $a^{-1}a \rightarrow \emptyset$ . La pertinence de ce type pour des applications est discutée par exemple dans [GP98].

- Le type "one equals many". Cela prend une même durée de traiter une ou plusieurs tâches consécutives :  $aa \rightarrow a$ . Pensons à une réservation de billets où le nombre de demandes est seulement reflété par un entier dans un menu déroulant).

- Le type "dating agency". Deux mêmes tâches s'éliminent :  $aa \rightarrow \emptyset$ . Pensons à une tâche comme à un joueur de tennis cherchant son partenaire (devant être fourni par le serveur) ; quand deux telles tâches sont à côté dans le buffer, ils partent pour jouer un jeu au lieu d'attendre dans le buffer. (Au lieu des joueurs de tennis, on pourrait considérer des trios de joueurs de musique, des joueurs de bridge, ..., les règles correspondantes de simplification sont  $aaa \rightarrow \emptyset$ ,  $aaaa \rightarrow \emptyset$ , ...)

Dans une file 0-automatique, plusieurs types peuvent coexister, tout comme plusieurs copies différentes du même type. L'ensemble de types est alors de la forme  $\Sigma = \cup_i \Sigma_i$  avec  $\Sigma_i = \{a_i\}$  (le type classique ou "one equals many") ou  $\Sigma_i = \{a_i, a_i^{-1}\}$  (le type positif/négatif) ou  $\Sigma_i = \{a_i, \dots, a_i^{k-1}\}$  (le type "dating agency" avec la règle de simplification  $a_i^k \rightarrow \emptyset$ ). Dans le buffer, deux clients consécutifs sont interactifs (fusion ou annulation) seulement s'ils appartiennent au même sous-ensemble  $\Sigma_i$ .

Au niveau algébrique, chaque type correspond à une paire groupe-générateurs ou monoïde-générateurs. Considérer plusieurs type dans la même file est comme considérer le produit libre des groupes ou des monoïdes des différents types, ainsi que l'union des générateurs. Les paires associées aux types ci-dessus sont :  $(\mathbb{N}, \{1\}) \sim (\{a\}^*, \{a\})$  pour le type classique ;  $(\mathbb{Z}, \{1, -1\}) \sim (\mathbb{F}(a), \{a, a^{-1}\})$  pour le type positif/négatif ;  $(\mathbb{B}, \{a\})$  où  $\mathbb{B}$  est le monoïde booléen  $\mathbb{B} = \langle a \mid a^2 = a \rangle$  pour le type "one equals many" ;  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle, \{a\})$  pour le type "dating agency".

Toutes les files 0-automatiques sont quasi-réversibles, c'est le point important pour construire les réseaux de files 0-automatiques. Les résultats sur les files 0-automatiques sont étudiés dans [DTM05, DTM07].

Décrivons informellement les réseaux 0-automatiques. Considérons un système de  $N$  files 0-automatiques, numérotées de 1 à  $N$ , et correspondant à des groupes ou monoïdes

---

possiblement différents, par conséquent avec différents ensembles de types. Pour un sous-ensemble non vide des files, il y a un processus d'arrivée externe. A la fin de son service, un client est conduit à une autre file ou quitte le réseau. Nous considérons deux modèles correspondant aux différents routages classiques : réseaux à la Jackson et réseaux à la Kelly.

Dans un réseau à la Jackson, il y a une matrice sous-stochastique  $P = (p_{ij})_{ij}$  de taille  $N \times N$ , appelée la *matrice de routage*. Un client terminant le service à la file  $i$  est routé à la file  $j$  avec la probabilité  $p_{ij}$ , ou quitte le réseau avec la probabilité  $1 - \sum_j p_{ij}$ . A chaque étape de son itinéraire, un client choisit son type selon la distribution aléatoire de la file actuellement visitée.

Dans un réseau à la Kelly, il y a un ensemble fini de routes possibles. Une route est simplement une liste ordonnée finie de files, devant être visitées dans cet ordre (n'importe quelle file donnée peut être visitée plusieurs fois le long de la route). Chaque client a deux informations : son type et sa route. A la fin du service, un client se déplace à la prochaine file le long de sa route, ou quitte le réseau si la file visitée était la dernière. Le type d'un client est réévalué à chaque file comme dans le cas du réseau à la Jackson. Par contre, la route est reportée sans changement. Quand deux clients  $a$  et  $b$  fusionnent dans un buffer pour créer un nouveau client  $c$ , alors la route de  $c$  est choisie égale à la route de  $a$  avec la probabilité  $1/2$ , ou à la route de  $b$  avec la probabilité  $1/2$ .

Dans les chapitres 5 et 6, nous étudions les réseaux 0-automatiques. Sous la condition de stabilité, la distribution stationnaire a une forme produit.

Les files et réseaux 0-automatiques avec discipline de service FIFO sont bien étudiées. Dans le chapitre 7, on va étudier les files avec discipline de service LIFO. La distribution stationnaire d'une telle file a encore une structure "multiplicative", par contre, le processus des départs n'est plus Poissonien. Quelques exemples nous montrent que les taux de charge d'une file LIFO et FIFO ne sont pas toujours égaux, des phénomènes étranges se produisant.



## 2

# Les files d'attente et les réseaux

## 2.1 Les files d'attente

Les files d'attente sont caractérisées par une salle d'attente et des serveurs. Lorsque plusieurs clients tentent simultanément d'obtenir un service, certains doivent patienter et attendre dans la salle. La Figure 2.1 illustre une file d'attente. La file peut n'accepter qu'un nombre fini de clients, et un client peut être servi pendant une certaine période puis abandonné par le serveur.

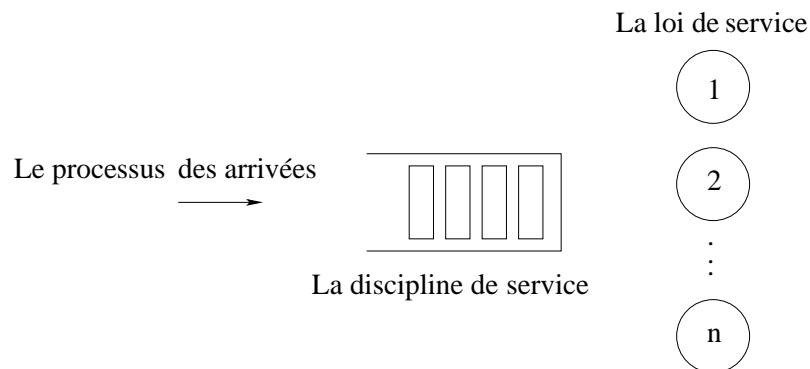


FIGURE 2.1 – Une file d'attente.

Le service résiduel d'un client est la durée du service qui reste à effectuer. La charge de la file est la somme de tous les services résiduels de tous les clients présents.

Pour décrire ce système de façon précise, il faut pouvoir spécifier :

- Le mécanisme d'arrivée des clients dans le buffer (c.à.d, en pratique, à quelle loi le processus d'arrivée va obéir).
- Le temps de service (c.à.d la distribution de probabilité de sa durée).
- La discipline de service (quand un serveur se libère, quel client choisit-il)

Pour identifier une file d'attente, on utilise la nomenclature de Kendall :

$$A/S/n/K/D$$

ou les lettres identifient

- $A$  : la loi du processus des arrivées (la distribution des inter-arrivées) ;
- $S$  : la loi du processus de service (la distribution du temps de service) ;
- $n$  : le nombre de serveurs ;
- $K$  : la taille (capacité) de la file (par défaut,  $K = \infty$ ) ;
- $D$  : la discipline de service.

Les valeurs de  $A$  et  $S$  sont données par :

- $M$  (pour Markovien) : loi “sans mémoire” (arrivées poissonniennes, service exponentiel) ;
- $D$  : loi déterministe ;
- $Ek$  : loi “Erlang- $k$ ” ;
- $Hk$  : loi “hyperexponentielle” d’ordre  $k$  ;
- $GI$  : loi générale, les variables successives étant indépendantes ;
- $G$  : loi générale, la suite des variables successives étant stationnaire.

$D$  peut prendre les valeurs suivantes :

- FIFO (First In First Out) : les clients sont servis dans l’ordre des arrivées (Premier Arrivé Premier Servi) ;
- LIFO (Last In First Out) : le serveur sert le client arrivé le plus récemment (Dernier Arrivé Premier Servi) ;
- PS (Processor Sharing) : si il y a  $n > 0$  clients dans la file, chacun est servi avec un taux  $1/n$  (processeur partagé) ;
- Priorités : il y a plusieurs classes de clients, chacune avec un niveau de priorité. Le client qui a la priorité la plus haute est servi en premier.

Avant d’introduire quelques types de files classiques, on va donner la définition de la réversibilité.

### 2.1.1 Réversibilité

Soit  $X(t)$  un processus stochastique sur l’espace d’état dénombrable  $\mathcal{S}$  pour  $t \in \mathcal{T}$  ( $\mathcal{T}$  est  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}$ ).

Certains processus ont la propriété que lorsque le temps est renversé, les comportements du processus restent le même.

**Définition 2.1.** *Un processus  $X(t)$  est réversible si  $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$  a la même distribution de  $(X(\tau - t_1), X(\tau - t_2), \dots, X(\tau - t_n))$  pour tout  $t_1, t_2, \dots, t_n, \tau \in \mathcal{T}$*

On va donner la propriété de base d’un processus réversible.

**Proposition 2.2.** *Un processus réversible est stationnaire.*

Supposons que  $X(t)$  est un processus de Markov de saut avec la matrice de saut  $Q = (q_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$ . Le théorème suivant caractérise la réversibilité du processus  $X(t)$ .

**Théorème 2.3.** *Un processus de Markov est réversible ssi il existe une suite positive  $\pi(i), i \in \mathcal{S}$  telle que*

$$\pi(i)q_{ij} = \pi(j)q_{ji}, \quad \forall i, j \in \mathcal{S} \tag{2.1}$$

*et  $\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi(i) = 1$ . Dans ce cas,  $\pi$  est la distribution stationnaire de ce processus.*

### 2.1.2 La file $M/M/1/\infty$

La file  $M/M/1/\infty/FIFO$  est la file d'attente la plus simple. Les instants des arrivées sont donnés par un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Les services ont une distribution exponentielle de paramètre  $\mu$ . La capacité du buffer est infinie et la discipline de service est premier arrivé, premier servi. Le processus du contenu du buffer est un processus de Markov de saut avec le générateur infinitésimal donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q(n, n+1) = \lambda, Q(n+1, n) = \mu. \quad (2.2)$$

Le résultat classique de la file simple est énoncé dans le Théorème suivant.

**Théorème 2.4.** *Sous la condition de stabilité  $\lambda < \mu$ , le processus du contenu du buffer d'une file  $M/M/1$  est ergodique, et la distribution stationnaire est donnée par :*

$$\pi(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n. \quad (2.3)$$

On va donner une idée du calcul de la mesure invariante  $\pi$ , voir [Kel79] ou [Rob03] pour plus de détail. La mesure  $\pi$  doit satisfaire l'équation de balance globale : pour tout  $n > 0$ ,

$$\begin{aligned} \pi(n)(Q(n, n+1) + Q(n, n-1)) &= \pi(n+1)Q(n+1, n) + \pi(n-1)Q(n-1, n) \\ \pi(0)Q(0, 1) &= \pi(1)Q(1, 0). \end{aligned}$$

Maintenant, substituons les valeurs de  $Q$  données par (2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \pi(n)(\lambda + \mu) &= \pi(n+1)\mu + \pi(n-1)\lambda, \quad n > 0 \\ \pi(0)\lambda &= \pi(1)\mu. \end{aligned} \quad (2.4)$$

On va proposer trois méthodes successives pour déterminer la distribution stationnaire.

#### 1. Première méthode.

En partant des équations (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} \pi(1) &= \pi(0) \frac{\lambda}{\mu} \\ \mu\pi(2) &= (\lambda + \mu) \frac{\lambda}{\mu} \pi(0) - \lambda\pi(0) \Rightarrow \pi(2) = \frac{\lambda^2}{\mu^2} \pi(0). \end{aligned}$$

Et on obtient de la même façon :  $\pi(n) = \pi(0) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ .

En utilisant  $\sum_n \pi(n) = 1$ , on trouve  $\pi(0) = 1 - \lambda/\mu$ , d'où la distribution stationnaire donnée par (2.3) :

$$\pi(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.$$



2. Seconde méthode.

Supposons que la chaîne de Markov est réversible.

D'après le Théorème 2.3, on doit alors avoir :

$$\pi(i)\lambda = \pi(i+1)\mu, \quad \forall i \geq 0.$$

On obtient alors directement (2.3). En utilisant que (2.1) est une CNS, on en déduit que la chaîne de Markov est effectivement réversible et que  $\pi$  donnée par (2.3) est effectivement la distribution stationnaire.

3. Troisième méthode.

Supposons que l'on devine que  $\pi$  est de la forme donnée par (2.3)

$$\pi(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n. \quad (2.5)$$

On remplace alors dans (2.4). Les termes se simplifient, on voit que (2.4) est effectivement vérifié. Donc l'hypothèse (2.5) est justifiée.

Dans la suite, on aura plusieurs situations où l'on devra déterminer la distribution stationnaire d'un processus de Markov dont le générateur infinitésimal sera trop complexe. Donc la méthode 1 est impossible à appliquer. Le processus considéré ne sera pas réversible (seulement quasi-réversible), donc la méthode 2 ne s'appliquera pas. Par contre, on utilisera des analogues de la méthode 3, en "devinant" à priori la forme de la distribution stationnaire.

Le célèbre Théorème de Burke est le point crucial pour le processus des départs d'une file  $M/M/1$ .

**Théorème 2.5.** *Sous la condition de stabilité  $\lambda < \mu$ , à l'équilibre, le processus des départs d'une file  $M/M/1$  a la même loi que le processus des arrivées. De plus, le nombre de clients dans la file à  $t = t_0$  est indépendant du processus des départs avant  $t = t_0$ .*

*Preuve.* La preuve la plus simple du Théorème de Burke est d'utiliser la réversibilité et est dû à Reich, voir par exemple [Kel79] ou [Rob03]. On va donner 2 méthodes permettant de montrer ce théorème.

1. Méthode 1. Cette méthode utilise simplement la réversibilité du processus du contenu du buffer.

Soit  $M(t)$  le processus stationnaire du contenu du buffer. Comme  $M(t)$  est réversible, alors pour tout  $t_0 \geq 0$ ,  $(M(t))_{0 \leq t \leq t_0}$  a même loi que  $(M(t_0 - t))_{0 \leq t \leq t_0}$ . Donc les instants de sauts positifs des  $(M(t))_{0 \leq t \leq t_0}$  et  $(M(t_0 - t))_{0 \leq t \leq t_0}$  ont la même loi.

Les instants de saut positifs de  $(M(t_0 - t))_{0 \leq t \leq t_0}$  sont précisément les instants de départs de la file. On en déduit que le processus des départs entre 0 et  $t_0$  a même loi que le processus des arrivées entre 0 et  $t_0$ , or le processus des départs est donc un processus de Poisson de taux  $\lambda$ .

La propriété de Poisson pour le processus des arrivées montre que le nombre de client à  $t = 0$  est indépendant des arrivées entre 0 et  $t_0$ . Donc pour le processus renversé, le nombre de client à  $t_0$  est indépendant du processus des départs avant  $t_0$ . Le théorème est démontré.

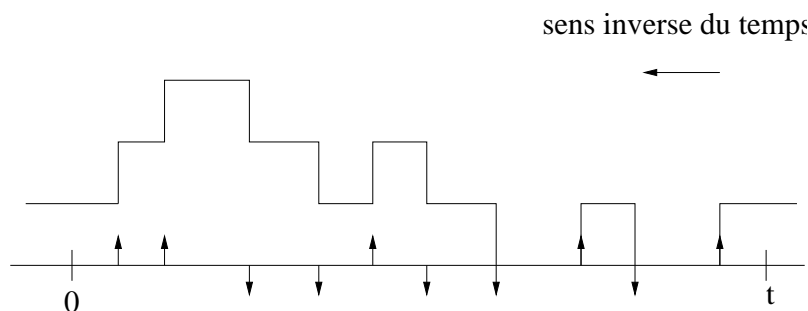


FIGURE 2.2 – Processus du nombre de clients d'une file  $M/M/1$  avec les points des arrivées et des départs

2. Méthode 2. On renverse le temps et on calcule le taux de saut du processus renversé.

Soit  $M(t)$  le processus stationnaire du contenu du buffer. Sa distribution est donnée par (2.3). Soit  $D$  le processus de départ correspondant. Par définition, le taux instantané de  $D$  est  $c(t) = \mu$  si  $M(t) \neq 0$  et  $c(t) = 0$  sinon.

On inverse le sens du temps. Considérons le processus renversé  $\tilde{D}$ . Le processus  $\tilde{D}$  correspond aux instants de saut positif du processus renversé  $\tilde{M}(t)$ .

Si  $\tilde{M}(t) = n$ , on a

$$\tilde{c}(t) = \frac{\pi(n+1)}{\pi(n)}\mu = \lambda.$$

Donc,  $\tilde{D}$  est un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . Les processus de Poisson sont préservés par renversement, donc  $D$  est aussi un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . En utilisant la propriété de Markov du processus de Poisson,  $\tilde{M}(t)$  est indépendant du processus  $\tilde{D}$  après le temps  $t$ . Cela se traduit pour le processus renversé par le fait que  $M(t)$  est indépendant du processus de départ  $D$  avant  $t$ . Le théorème est démontré. □

Pour les file 0-automatiques, on montrera l'existence de processus de départs poissoniens. Pour ce faire, on ne pourra pas utiliser la méthode 1, car on n'aura pas de réversibilité. Par contre, on pourra adapter la méthode 2.

### 2.1.3 La G-file de Gelenbe

La G-file avec des clients positifs et négatifs est introduite par Gelenbe dans [Gel91].

Les instants des arrivées des clients positifs et négatifs sont donnés par des processus de Poisson de paramètre  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$ . Un client positif augmente simplement la taille du buffer de 1. Par contre, un client négatif arrivant diminue la taille du buffer de 1 (élimine un client positif) si le nombre de clients est plus que 0, ou rien ne se passe si la file est vide.

Les clients négatifs ne demandent pas de service et le contenu du buffer n'est constitué que des clients positifs. Les services ont une distribution exponentielle de paramètre  $\mu$  et la discipline de service est premier arrivé, premier servi.

En effet, considérons une G-file non vide à l'équilibre. Soit  $X$  le temps à attendre avant la fin du premier service d'un client, et soit  $Y$  le temps à attendre avant la première arrivée d'un client négatif. Alors le premier instant de décroissance du contenu du buffer est  $\min(X, Y)$ . Comme  $X \sim \text{Exp}(\mu)$  et  $Y \sim \text{Exp}(\lambda^-)$ , on a  $\min(X, Y) \sim \text{Exp}(\lambda^- + \mu)$ . Tout se passe comme si on était dans une file classique avec le taux de service  $(\lambda^- + \mu)$ . Le Théorème suivant énonce ce résultat.

**Théorème 2.6.** *Le processus du contenu du buffer est ergodique si  $\lambda^+ < \mu + \lambda^-$ , et la distribution stationnaire est donnée par :*

$$\pi(n) = \left(1 - \frac{\lambda^+}{\mu + \lambda^-}\right) \left(\frac{\lambda^+}{\mu + \lambda^-}\right)^n. \quad (2.6)$$

### 2.1.4 La définition de la quasi-réversibilité

On va donner deux définitions de la quasi-réversibilité.

#### La définition de Kelly

Considérons une file simple multi-classe. Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble dénombrable des classes. Supposons qu'il est associé à la file un processus de Markov  $\mathbf{x}(t)$ , qui est appelé l'état de la file au temps  $t$ . Supposons que l'état de la file contient assez d'information pour déduire combien de clients de chaque classe  $c$  sont présents dans la file.

Dans [Kel79], Kelly a donné une définition de la quasi-réversibilité comme suivant

**Définition 2.7.** *Une file est quasi-réversible si son état  $\mathbf{x}(t)$  est un processus de Markov stationnaire avec la propriété que l'état au temps  $t_0$ ,  $\mathbf{x}(t_0)$ , est indépendant :*

- (i) *des instants d'arrivée des clients de la classe  $c$ ,  $c \in \mathcal{C}$ , après le temps  $t_0$  ;*
- (ii) *des instants de départ des clients de la classe  $c$ ,  $c \in \mathcal{C}$ , avant le temps  $t_0$ .*

Le théorème suivant donne une caractérisation de la quasi-réversibilité.

**Théorème 2.8.** *Si une file est quasi-réversible, alors :*

- (i) *les temps d'arrivée des clients de la classe  $c$ ,  $c \in \mathcal{C}$ , forment des processus de Poisson indépendants ;*
- (ii) *les temps de départ des clients de la classe  $c$ ,  $c \in \mathcal{C}$ , forment des processus de Poisson indépendants.*

#### La définition de la quasi-réversibilité pour les files avec les mouvements instantanés

Dans [CM00] et [CMP99], une autre définition et une définition similaire à la définition de Kelly de la quasi-réversibilité sont données. Considérons une file dont le contenu évolue comme une chaîne de Markov en temps continu sur l'espace d'état  $\mathcal{S}$  et possédant la fonction de transition  $q(x, x')$ ,  $x, x' \in \mathcal{S}$ . Un client arrivant possède une classe, un client quittant le système également. Soit  $T$  l'union des ensembles des classes d'arrivée et de départ. La fonction  $q(x, x')$  est décomposée en trois types de composants  $\{q_u^A(x, x'), u \in$

$T$ },  $\{q_u^D(x, x'), u \in T\}$  et  $q^I(x, x')$ , représentant, respectivement, le taux de transition pour la classe d'arrivée  $u$ , le taux de transition pour la classe de départs  $u$  et le taux de transition interne, c.à.d :

$$q(x, x') = \sum_{u \in T} q_u^A(x, x') + \sum_{u \in T} q_u^D(x, x') + q^I(x, x'), \quad x, x' \in \mathcal{S}. \quad (2.7)$$

Cela implique que pour un couple  $(x, x')$  donné, une arrivée de la classe  $u$ , un départ de la classe  $u$  ou une transition interne peuvent tous provoquer une transition de l'état  $x$  à l'état  $x'$ , avec les taux respectifs  $q_u^A(x, x')$ ,  $q_u^D(x, x')$  et  $q^I(x, x')$  (éventuellement nuls). Les fonctions de taux de transition  $q_u^A$ ,  $q_u^D$ ,  $q^I$  forment des processus ponctuels correspondant aux arrivées de la classe  $u$ , aux départs de la classe  $u$  et aux transitions internes. Les deux premiers processus ponctuels sont désignés souvent sous le nom du processus d'arrivée des entités de la classe  $u$  et du processus de départ des entités de la classe  $u$ . Les lettres "A", "D" et "I" sont pour "arrivée", "départ" et "interne".

Supposons que  $q$  admet une distribution stationnaire  $\pi$ . Si les transitions d'arrivées ne déclenchent pas simultanément les départs, Chao et Miyazawa définissent la quasi-réversibilité comme suit.

**Définition 2.9.** (la première définition de la quasi-réversibilité) *La chaîne de Markov en temps continu avec le taux de transition  $q$  est appelée quasi-réversible par rapport à  $\{q_u^A(x, x'), u \in T\}$ ,  $\{q_u^D(x, x'), u \in T\}$  et  $q^I(x, x')$  si il existe deux ensembles de nombres positifs ou nuls  $\{\alpha_u, u \in T\}$ ,  $\{\beta_u, u \in T\}$  t.q  $\forall x \in \mathcal{S}, u \in T$*

$$\sum_{x' \in \mathcal{S}} q_u^A(x, x') = \alpha_u, \quad (2.8)$$

$$\sum_{x' \in \mathcal{S}} \pi(x') q_u^D(x', x) = \beta_u \pi(x), \quad (2.9)$$

où  $\pi$  est la distribution stationnaire de la chaîne de Markov de noyau de transition  $q$ .

Une définition alternative pour la quasi-réversibilité est la suivante.

**Définition 2.10.** (la deuxième définition de la quasi-réversibilité) *Une chaîne de Markov en temps continu  $\{X(t), t \geq 0\}$  avec le taux de transition  $q$  se décomposant en  $q_u^A$ ,  $q_u^D$  et  $q^I$ , comme en (2.7) est quasi-réversible si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

(i) *La v.a  $X(t)$  est indépendante du processus d'arrivée des entités de la classe  $u$  après le temps  $t$  pour tout  $u \in T$  ;*

(ii) *La v.a  $X(t)$  est indépendante du processus de départ des entités de la classe  $u$  avant le temps  $t$  pour tout  $u \in T$ .*

Le Théorème suivant est démontré dans [CMP99].

**Théorème 2.11.** *Les définitions 2.9 et 2.10 sont équivalentes, et elles impliquent que*

(i) *le processus d'arrivée des entités de la classe  $u \in T$  est Poisson et les processus d'arrivée des entités des différentes classes sont indépendants, et*

(ii) *le processus de départ des entités de la classe  $u \in T$  est Poisson et les processus de départ des entités des différentes classes sont indépendants.*

*Remarque 2.12.* Chao, Miyazawa et Pinedo considèrent le modèle où  $q(x, x)$  se définit tout comme les autres termes  $q(x, x')$  ( $x$  et  $x'$  ne sont pas nécessairement différents). La raison est qu'ils acceptent aussi que  $q^A(x, x)$  puisse être différent de 0.

Pour que le modèle marche, ils modifient la définition d'une chaîne de Markov à temps continu.

Une chaîne de Markov à temps continu est définie par l'intermédiaire de taux de transition  $\{q(x, y); x, y \in \mathcal{S}\}$  avec

$$\begin{aligned} q(x, y) &\geq 0, & \forall x \neq y \\ q(x, x) &= -q(x) \\ &= - \sum_{x' \in \mathcal{S} \setminus \{x\}} q(x, x'). \end{aligned}$$

On peut aussi voir la chaîne comme un processus avec le noyau de saut  $p$  défini par

$$p(x, x') = \frac{q(x, x')}{q(x)}, \quad x \neq x', x, x' \in \mathcal{S}, \quad (2.10)$$

et avec le temps de séjour en l'état  $x$  exponentiellement distribué avec moyenne  $1/q(x)$  pour chaque  $x \in \mathcal{S}$ .

Cependant, Chao, Miyazawa et Pinedo utilisent le terme  $q(x, x)$  pour noter le taux des événements dans l'état  $x$  qui ne causent pas un changement d'état.

Ils considèrent donc des taux de transition  $\{q(x, y)\}$  avec  $q(x, y) \geq 0, \forall x, y$  et en particulier  $q(x, x) \geq 0$ . La chaîne de Markov à temps continu correspondante est redéfini par l'intermédiaire du noyau de saut comme en (2.10) avec un nouveau noyau de transition  $p^*$  et avec une moyenne de temps de séjour en l'état  $x$  égale à  $1/q^*(x)$ , avec

$$\begin{aligned} q^*(x) &= q(x) + q(x, x) = \sum_{x' \in \mathcal{S}} q(x, x'), \\ p^*(x, x') &= \frac{q(x, x')}{q^*(x)}, \quad \forall x, x'. \end{aligned}$$

Introduire cette modification (des  $q(x, x) \geq 0$ ) n'affecte pas la distribution stationnaire de la chaîne de Markov. Cela affecte la quasi-réversibilité de la chaîne modifiée parce que les instants d'arrivée et de départ incluent des transition de  $x$  à  $x$ .

Prenons un exemple pour être plus clair. Considérons une G-file. Cette G-file est vue comme une file de deux classes de clients. Posons  $T = \{c, c^-\}$  avec  $c$  et  $c^-$  représentant les clients positifs et les clients négatifs. Les composants du taux de transition sont donnés par

- $q_c^D(n, n-1) = \mu, \quad n = 1, 2, \dots$  : il n'y a que des clients positifs qui demandent un service exponentiel avec moyenne  $1/\mu$ .
- $q_c^A(n, n+1) = \lambda^+, \quad n = 0, 1, \dots$  : les clients positifs arrivent suivant un processus de Poisson de taux  $\lambda^+$ .
- $q_{c^-}^A(n, n-1) = \lambda^-, \quad n = 1, 2, \dots$  : les clients négatifs arrivent suivant un processus de Poisson de taux  $\lambda^-$  et diminuent la taille du buffer de 1.
- $q_{c^-}^A(0, 0) = \lambda^-$  : un client négatif arrivant dans une file vide disparaît.

Soit  $q(n, n')$  les taux de transition de la file. Alors, on a

$$\begin{aligned} q(n, n+1) &= q_c^A(n, n+1), & n \geq 0, \\ q(n, n-1) &= q_c^D(n, n-1) + q_c^A(n, n-1), & n \geq 1, \\ q(0, 0) &= q_c^A(0, 0). \end{aligned}$$

Maintenant, une telle  $G$ -file est quasi-réversible dans le sens de Chao, Miyazawa et Pinedo.

Pour nos modèles, on va utiliser cette modification pour introduire  $q(x, x) \geq 0$ .

*Remarque 2.13.* On voit bien que la définition 2.7 de Kelly et la définition 2.9 de Chao, Miyazawa et Pinedo sont équivalentes. De plus, les deux théorèmes caractérisant la quasi-réversibilité, les théorèmes 2.8 et 2.11, sont aussi équivalents.

### 2.1.5 Les files symétriques

Dans cette partie, considérons les files symétriques dont les demandes de services ne sont plus exponentiellement distribués. Ces files sont introduites dans [Kel79].

Considérons une file dont les clients sont ordonnés dans les positions  $1, 2, \dots, n$ , où  $n$  est le nombre total des clients. Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble dénombrable de classes. La classe d'un client n'influence que sa loi de service. Nous appellerons une telle file symétrique si elle fonctionne de la façon suivante :

1. La demande de service d'un client est une variable aléatoire dont la distribution pourra dépendre de la classe de ce client.
2. Un effort de service total est fourni avec le taux  $\phi(n)$ .
3. Une proportion  $\gamma(l, n)$  de cet effort est dirigée vers le client dans la position  $l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ), si ce client quitte la file, son service étant terminé, les clients des positions  $l+1, l+2, \dots, n$  se déplacent aux positions  $l, l+1, \dots, n-1$  respectivement.
4. Un client arrivant à la file se place à la position  $l$  ( $l = 1, 2, \dots, n+1$ ) avec probabilité  $\gamma(l, n+1)$ , les clients aux positions  $l, l+1, \dots, n$  précédemment se déplacent aux positions  $l+1, l+2, \dots, n+1$  respectivement.

Une file FIFO n'est pas symétrique, la raison est que si il y a  $n$  clients dans la file, la proportion de service est  $\gamma(1, n) = 1$ ,  $\gamma(i, n) = 0$  pour tout  $1 < i \leq n$ , et un client arrivé prend la position  $n+1$  avec probabilité  $\delta(n+1, n+1) = 1$ . Néanmoins, il existe quelques files symétriques utiles :

*Une file PS (processeur partagé).* Si

$$\gamma(l, n) = \frac{1}{n}, \quad l \leq n, \forall n$$

l'effort de service est partagé également pour tous les clients dans la file. Si  $\phi(n) = 1$  quand  $n > 0$  alors la file se comporte comme une file avec un seul serveur et la demande de service résiduelle d'un client diminue au taux  $1/n$ .

*Une pile : une file LIFO.* Si

$$\gamma(n, n) = 1, \forall n,$$

l'effort de service est dirigé vers le client qui arrive le dernier. Une telle file est comme une pile. Si  $\phi(n) = 1$  pour  $n > 0$  alors on a une file avec un seul serveur avec la discipline dernier arrivé premier servi avec préemption.

*Une file sans salle d'attente.* Considérons les fonctions

$$\begin{aligned}\phi(n) &= n & n = 1, 2, \dots, K \\ \phi(n) &= \xi & n = K + 1, K + 2, \dots \\ \gamma(l, n) &= \frac{1}{n} & l = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots, K \\ \gamma(n, n) &= 1 & n = K + 1, K + 2, \dots\end{aligned}$$

où  $\xi$  est très grand. Cette file est presque comme une file de  $K$  serveurs sans salle d'attente. Un client arrivant dans la file et trouvant  $K$  serveurs en service va partir presque immédiatement ( $\xi$  est très grand).

*Une file avec une infinité de serveurs.* Si

$$\begin{aligned}\phi(n) &= n & n = 1, 2, \dots \\ \gamma(l, n) &= \frac{1}{n} & l = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

alors la file se comporte comme une file avec un nombre de serveurs infini, chaque client ayant un serveur pour lui.

**Loi de service : distribution gamma.** Considérons une file symétrique à laquelle les clients de la classe  $c$  ( $c \in \mathcal{C}$ ) arrivent suivant un processus de Poisson de taux  $\nu(c)$ . Supposons qu'un client de la classe  $c$  demande  $w(c)$  étapes de service, chaque étape consistant en un temps de service exponentiellement distribué indépendant de moyenne  $d(c)$ . La classe  $c$  n'influe que sur la loi de la demande de service. La demande de service d'un client de la classe  $c$  aura une distribution gamma avec la moyenne  $w(c)d(c)$  et la variance  $w(c)d(c)^2$ .

Soit  $c(l)$  la classe du client à la position  $l$  et supposons que son service atteint l'étape  $u(l)$ , où  $1 \leq u(l) \leq w(c(l))$ . Posons  $\mathbf{c}(l) = (c(l), u(l))$ . Alors, si la file contient  $n$  clients,

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}(1), \mathbf{c}(2), \dots, \mathbf{c}(n))$$

est un processus de Markov représentant l'état de la file.

Les résultats suivants sont énoncés dans [Kel79].

**Théorème 2.14.** (i) *La distribution stationnaire d'une file symétrique décrite comme ci-dessus est*

$$\pi(\mathbf{c}) = b \prod_{l=1}^n \frac{\nu(c(l))d(c(l))}{\phi(l)} \quad (2.11)$$

avec la constante de normalisation donnée par

$$b^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\prod_{l=1}^n \phi(l)} \quad (2.12)$$

où

$$a = \sum_c \nu(c)d(c)w(c)$$

est strictement positif.

(ii) La probabilité qu'il y ait  $n$  clients dans la file est

$$\frac{ba^n}{\prod_{l=1}^n \phi(l)} .$$

(iii) Étant donné qu'il y a  $n$  clients dans la file, alors  $\mathbf{c}(1), \mathbf{c}(2), \dots, \mathbf{c}(n)$  sont indépendants. Le client à la position  $l$  est de la classe  $c$  avec probabilité

$$\frac{\nu(c)d(c)w(c)}{a} ,$$

et la distribution de  $u(l)$  est uniforme sur  $\{1, \dots, w(c(l))\}$ .

(iv) La file est quasi-réversible au sens de la définition 2.7.

**Loi de service : Mélange de distribution gamma.** Considérons maintenant que si un client de la classe  $c$  arrive à la file, il lui est assigné une classification plus fine,  $(c, z)$  avec probabilité  $p(c, z)$ , où  $z \in \mathcal{L}$ , où  $\mathcal{L}$  est un ensemble dénombrable, avec  $\sum_z p(c, z) = 1$ . Les arrivées à la file des clients de la classe  $(c, z)$  forment un processus de Poisson de paramètre  $\nu(c)p(c, z)$ . Si la demande de service d'un client de la classe  $(c, z)$  est une distribution gamma avec moyenne  $w(c, z)d(c, z)$  et variance  $w(c, z)d(c, z)^2$ , alors l'analyse précédente s'applique toujours pour la classification plus fine.

La demande de service d'un client de la classe  $c$  est maintenant une distribution gamma avec la moyenne  $w(c, z)d(c, z)$  et la variance  $w(c, z)d(c, z)^2$  avec probabilité  $p(c, z)$  pour  $z \in \mathcal{L}$ , c.à.d qu'il s'agit d'un mélange de distributions gamma. La demande de service moyenne d'un client de la classe  $c$  est

$$a(c) = \sum_z p(c, z)w(c, z)d(c, z)$$

et la quantité moyenne de demande de service arrivant à la file par unité de temps est

$$a = \sum_c \sum_z \nu(c)p(c, z)w(c, z)d(c, z) = \sum_c \nu(c)a(c).$$

Soit  $\mathbf{c}(l) = (c(l), z(l), u(l))$  où  $(c(l), z(l))$  est la classification raffinée du client à la position  $l$ , et prendre  $\mathbf{c} = (\mathbf{c}(1), \mathbf{c}(2), \dots, \mathbf{c}(n))$  pour l'état de la file. Alors la distribution stationnaire est

$$\pi(\mathbf{c}) = b \prod_{l=1}^n \frac{\nu(c(l))p(c(l), z(l))d(c(l), z(l))}{\phi(l)} \quad (2.13)$$

où  $b$  est défini comme dans (2.12). On a les résultats suivants qui sont introduits dans [Kel79].



**Théorème 2.15.** Une file symétrique stationnaire  $\mathbf{c}$  à laquelle la demande de service est un mélange de distributions gamma a les propriétés suivantes :

- (i) La distribution stationnaire est donnée par (2.13).
- (ii) La probabilité qu'il y ait  $n$  clients est

$$\frac{ba^n}{\prod_{l=1}^n \phi(l)}$$

(iii) Étant donné  $n$  clients dans la file, les classes des clients sont indépendantes et la probabilité que le client dans une position donnée soit de la classe  $c$  est

$$\frac{\nu(c)a(c)}{a}$$

(iv) La file est quasi-réversible au sens de la définition 2.7 par rapport à la classification  $c$  ou par rapport la classification raffinée  $(c, z)$ .

Dire que la file est quasi-réversible par rapport à la classification raffinée  $(c, z)$  s'obtient simplement par application du point (iv) du Théorème 2.14. Dire que c'est également quasi-réversible par rapport à la classification  $c$  est plus fort.

**Loi de service : générale.** Une distribution arbitraire peut être approximée par les mélanges de distributions gamma, c.à.d soit  $F(x)$  la fonction de distribution d'une v.a positive, alors il existe une suite de mélanges de distributions gamma  $F_m(x)$  t.q

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) = F(x)$$

pour tout  $x$  en lequel  $F$  est continue.

Grace à ce résultat, on a le résultat général du Théorème 2.15 sur les files symétriques.

Considérons une file symétrique à laquelle les clients de la classes  $c$  arrivent suivant un processus de Poisson de taux  $\nu(c)$ , et supposons que la distribution de la demande de service d'un client de la classe  $c$  a une fonction de distribution  $F_c(x)$  avec moyenne  $a(c)$ . Posons

$$a = \sum_c a(c).$$

Soit  $c(l) \in \mathcal{C}$  la classe du client à la position  $l$ ,  $z(l)$  ( $0 < z(l) < \infty$ ) sa demande de service,  $u(l)$  ( $0 < u(l) < z(l)$ ) la quantité d'effort de service qu'il a reçu. Posons  $\mathbf{c}(l) = (c(l), z(l), u(l))$  et prenons

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}(1), \mathbf{c}(2), \dots, \mathbf{c}(n))$$

l'état de la file. On a le théorème suivant qui est un des résultats importants dans [Kel79].

**Théorème 2.16.** Une file symétrique stationnaire avec des demandes de service abitraires a les propriétés (ii) à (iv) dans le Théorème 2.15. De plus,

(v) Étant donné le nombre de clients dans la file et la classe de chacun d'entre eux, les quantités d'effort de service que les clients ont reçus ont indépendantes, et la probabilité qu'un client de la classe  $c$  ait reçu une quantité d'effort de service inférieur ou égale à  $x$  est

$$F_c^*(x) = \frac{1}{a(c)} \int_0^x (1 - F_c(z)) dz$$

## 2.2 Les réseaux

Un réseau est la donnée de plusieurs files d'attente entre lesquelles circulent des flots de clients. Dans cette section, on introduit quelques types de réseaux à forme produit. Un réseau à forme produit est tel que la distribution stationnaire est le produit des distribution stationnaire des files considérant en isolation.

### 2.2.1 Le réseau de Jackson

Le réseau de Jackson est introduit par James R. Jackson dans [Jac57]. Il s'agit du premier développement significatif dans la théorie des réseaux de files d'attente à forme produit.

Un réseau de Jackson est un ensemble de  $N$  files simples. A la file  $i$ , les clients arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre  $\lambda_i$ , demandent un service de taux  $\mu_i$ . Après service à la file  $i$ , le client passe à la file  $j$  avec probabilité  $p_{ij}$  ( $p_{ii} = 0$ ) ou quitte définitivement le réseau avec probabilité  $d_i = 1 - \sum p_{ij}$ .

Supposons que le graphe de la matrice de routage  $P = (p_{ij})$  (de taille  $N \times N$ ) est connecté et que le rayon spectral de  $P$  est plus petit que 1. Alors, un client qui entre dans le réseau va forcément sortir (le réseau est sans "capture").

Le processus de Markov associé à ce réseau est à valeurs dans  $\mathbb{N}^N$ , il s'agit du nombre de clients dans le buffer de chaque file. Le générateur infinitésimal  $Q$  est donné par :

$$\begin{aligned} Q(n, n + e_i) &= \lambda_i, & i \leq N, \\ Q(n, n - e_i) &= \mu_i d_i, & n_i > 0, i \leq N, \\ Q(n, n - e_i + e_j) &= \mu_i p_{ij}, & n_i > 0, i, j \leq N, \end{aligned} \quad (2.14)$$

où  $e_i = (0, \dots, 0, 1_{k=i}, 0, \dots, 0)$  est le  $i$ -ième vecteur unité.

Les Equations de Trafic du réseau sont données par :

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^N \tilde{\lambda}_j p_{ji}. \quad (2.15)$$

Le terme  $\tilde{\lambda}_i$  peut être vu comme le taux d'arrivée total à la file  $i$ , qui est la somme du taux d'arrivée externe  $\lambda_i$  et des arrivées internes provenant de reroutage dans le réseau.

Sous l'hypothèse que le réseau est connecté et sans capture, les équations (2.15) ont une unique solution positive  $(\tilde{\lambda}_i)_i$ .

La distribution stationnaire du réseau est explicitée dans le Théorème suivant.

**Théorème 2.17.** *Si la solution des Equations de Trafic (2.15) vérifie  $\rho_i = \tilde{\lambda}_i / \mu_i < 1$  pour tout  $i$ , la distribution stationnaire du réseau a une forme produit donnée par :*

$$\pi(n) = \prod_{i=1}^N \pi_i(n_i) \quad (2.16)$$

$$= \prod_{i=1}^N (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i}. \quad (2.17)$$

A l'équilibre, l'état du réseau à l'instant  $t$  est indépendant du processus des départs avant  $t$ . Les processus des départs du réseau à chaque file sont des processus de Poisson indépendants, de paramètres respectifs  $(\tilde{\lambda}_i d_i)$ .

La distribution  $\pi$  est le produit des distributions stationnaires  $(\pi_i)$  des files considérées en isolation. A l'équilibre, le réseau se comporte comme  $N$  files indépendantes avec les taux d'arrivée  $(\tilde{\lambda}_i)_i$  et les taux de service  $(\mu_i)_i$ .

La mesure invariante du réseau doit vérifier :  $\pi Q = 0$ . Dans le cas de la file simple, on a vu que cette mesure peut être obtenue en résolvant directement cette équation. Par contre, ce n'est plus le cas pour le réseau de Jackson.

Voici l'idée pour calculer  $\pi$  (analogue de la méthode de preuve 3 pour le Théorème 2.4) :

- Supposons que  $\pi$  est de la forme (2.17).
- Substituons  $\pi$  dans  $\pi Q$  et simplifions en considérant que les équations de trafic sont vérifiées. On obtiendra que  $\pi Q = 0$ .

Ça montre que  $\pi$  est bien la mesure invariante du réseau. Détaillons les calculs.

On a  $\pi Q = 0$  ssi :

$$\pi(n) \sum_m Q(n, m) = \sum_m \pi(m) Q(m, n) . \quad (2.18)$$

Notons le côté à gauche et à droite de (2.18) par  $G$  et  $D$ , respectivement.

La gauche de (2.18) est :

$$G = \pi(n) \sum_i (\lambda_i + \mathbb{1}_{n_i > 0} \mu_i) . \quad (2.19)$$

La droite de (2.18) est donnée par :

$$\begin{aligned} D &= \sum_i \left\{ \mathbb{1}_{n_i > 0} \pi(n - e_i) \lambda_i + \pi(n + e_i) \mu_i d_i + \mathbb{1}_{n_i > 0} \sum_j \pi(n + e_j - e_i) \mu_j p_{ji} \right\} \\ &= \pi(n) \sum_i \left\{ \mathbb{1}_{n_i > 0} \left( \frac{\lambda_i}{\rho_i} + \sum_j \frac{\mu_j p_{ji} \rho_j}{\rho_i} \right) + \rho_i \mu_i d_i \right\} \\ &= \pi(n) \sum_i \left\{ \mathbb{1}_{n_i > 0} \frac{\tilde{\lambda}_i}{\rho_i} + (\tilde{\lambda}_i - \sum_j \rho_i \mu_i p_{ij}) \right\} \\ &= \pi(n) \sum_i (\lambda_i + \mathbb{1}_{n_i > 0} \mu_i) . \end{aligned}$$

On passe de la seconde à la troisième ligne en utilisant les Equations de Trafic. Donc l'équation (2.18) est vérifiée. Nous allons revoir cette methode plusieurs fois.

*Remarque 2.18.* On a considéré le cas où  $p_{ii} = 0$ . Néanmoins, pour le cas où  $p_{ii} \neq 0$ , les résultats marchent sous l'hypothèse sans capture de la matrice  $P$  (un client qui entre dans le réseau va forcément en sortir). Les preuves restent les mêmes en notant que la mesure invariante vérifie les équations de balance (2.18). On voit réapparaître la modification de Chao, Miyazawa et Pinedo dans la section 2.1.4.

Dans la Figure 2.3, un réseau de Jackson de 3 files est illustré.

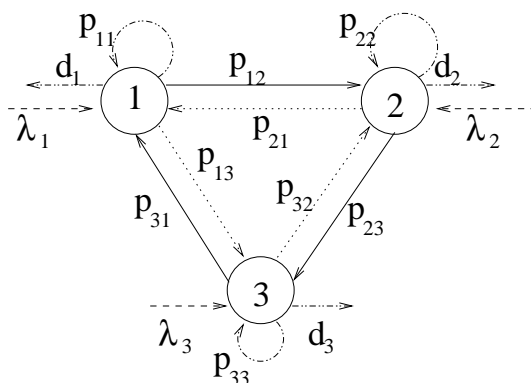


FIGURE 2.3 – Réseau de Jackson de 3 files

### 2.2.2 Le réseau de Gordon-Newell

Le réseau de Gordon-Newell est l'analogie fermé du réseau de Jackson. Ici, "fermé" signifie qu'il n'y a pas d'arrivées extérieures, et que d'autrepart les clients présents dans le réseau ne peuvent pas en sortir.

Considérons un réseau de  $N$  files dans lequel circulent  $M$  clients. A la file  $i$ , les clients demandent un service de taux  $\mu_i$ . Après la service à la file  $i$ , le client passe à la file  $j$  avec probabilité  $p_{ij}$  ( $\sum_j p_{ij} = 1$ ).

Le processus de Markov décrivant ce réseau est à valeur dans

$$\mathcal{S} = \left\{ n = (n_i)_{1 \leq i \leq N} \mid \sum_{i=1}^N n_i = M \right\} .$$

Le générateur infinitésimal du processus associé à ce réseau est donné par

$$Q(n, n - e_i + e_j) = \mu_i p_{ij} , \quad n_i > 0, \quad i, j \leq N .$$

On a le Théorème suivant.

**Théorème 2.19.** *Le réseau fermé décrit plus haut a la distribution stationnaire*

$$\pi(n) = \frac{1}{K} \prod_{i=1}^N \rho_i^{n_i} , \quad n = (n_i) \in \mathcal{S} ,$$

où  $\rho_i = \nu_i / \mu_i$  pour  $\nu_i$  vérifiant le système d'équations

$$\nu_i = \sum_{j=1}^N \nu_j p_{ji} ,$$

et  $K$  la constante de normalisation.

### 2.2.3 Le G-réseau de Gelenbe

Le G-réseau simple est introduit par Gelenbe dans [Gel91].

Considérons un réseau de  $N$  G-files. A la file  $i$ , les services sont i.i.d exponentiels de taux  $\mu_i$ , les instants des arrivées des clients positifs et négatifs sont donnés par les processus de Poisson de paramètres  $\lambda_i^+$  et  $\lambda_i^-$ , respectivement.

Après service à la file  $i$ , le client arrive à la file  $j$  comme un client positif avec probabilité  $p_{ij}^+$  ou comme un client négatif avec probabilité  $p_{ij}^-$ , ou quitte le réseau définitivement avec probabilité  $d_i = 1 - \sum p_{ij}^+ - \sum p_{ij}^-$ .

Considérons le processus des contenus de  $N$  G-files. L'espace d'état du système est  $\mathbb{N}^N$ . Le générateur infinitésimal  $Q$  du processus de Markov associé est donné par :

$$\begin{aligned} Q(n, n + e_i) &= \lambda_i^+ , & i \leq N , \\ Q(n, n - e_i) &= \mu_i d_i + \lambda_i^- + \sum_j \mathbb{1}_{n_j=0} \mu_i p_{ij}^- , & n_i > 0, i \leq N , \\ Q(n, n - e_i + e_j) &= \mu_i p_{ij}^+ , & n_i > 0, i, j \leq N , \\ Q(n, n - e_i - e_j) &= \mu_i p_{ij}^- , & n_i > 0, n_j > 0, i, j \leq N . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Les équations de trafic du réseau sont données par :

$$\tilde{\lambda}_i^+ = \lambda_i^+ + \sum_i p_{ji}^+ \mu_j \rho_j , \quad \tilde{\lambda}_i^- = \lambda_i^- + \sum_i p_{ji}^- \mu_j \rho_j , \tag{2.21}$$

où  $\rho_i = \tilde{\lambda}_i^+ / (\tilde{\lambda}_i^- + \mu_i)$ .

Il est intéressant de comparer (2.15) et (2.21). Dans (2.21), le terme  $\tilde{\lambda}_j^+$  est remplacé par  $\tilde{\lambda}_j^- \mu_j / (\tilde{\lambda}_j^- + \mu_j)$ . L'interprétation est la suivante : le taux total de "départs" de la file  $j$  est  $\tilde{\lambda}_j + \mu_j$ , mais ces départs sont constitués de "départ réels" (taux  $\mu_j$ ) et d'annulation (taux  $\tilde{\lambda}_j^-$ ). Seuls les départs réels sont reroutés, soit une proportion  $\mu_j / (\tilde{\lambda}_j + \mu_j)$  de l'ensemble des départs.

**Théorème 2.20.** *Si il existe une solution  $(\tilde{\lambda}_i^+, \tilde{\lambda}_i^-)$  positifs ou nuls du système (2.21) vérifiant  $\rho_i < 1$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ , le réseau est stable et sa distribution stationnaire est donnée par :*

$$\pi(n) = \prod_{i=1}^N \pi_i(n_i) \tag{2.22}$$

$$= \prod_{i=1}^N (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} . \tag{2.23}$$

*Remarque 2.21.* On peut déduire du Théorème 2.20, qu'il ne peut pas avoir plusieurs solutions de (2.21) vérifiant  $\rho_i < 1$  pour tout  $i$ . En effet, il n'y a qu'une distribution stationnaire  $\pi$  et chaque solution de (2.21) définit un  $\pi$ .

L'auteur a montré que sous certaines conditions, il existe une unique solution de (2.21).

**Extension.** Il existe plusieurs variantes de G-réseau, voir par exemple [GP98]. Les auteurs considèrent aussi les signaux (un signal arrivé va provoquer un déplacement d'un

client à une autre file ou encore détruire un “batch” de clients) et les réseaux avec des classes multiples de signaux et de clients positifs. Les équations de trafic du réseau sont plus compliquées. La distribution stationnaire a encore la forme produit. De plus, différentes disciplines de service sont considérées : PS, LIFO.

## 2.2.4 Les réseaux de Kelly

Les réseaux de Kelly sont introduits dans [Kel79]. Dans un réseau de Jackson, un client qui entre dans le réseau a plusieurs possibilités de routage (et le nombre de routes peut être infini, et les probabilités de chaque route sont liées par la matrice de routage sous-jacent). Dans un réseau de Kelly, chaque client a une route fixe (et le nombre de routes est fini).

**Les routes générales.** Dans le réseau il y a  $K$  types de clients. Chaque type a une route fixe qui est une liste ordonnée de files. Les clients de type  $k$  entrent dans le réseau suivant un processus de Poisson de paramètre  $\nu_k$ , et traversent les files dans l’ordre donné par la liste

$$r(k, 1), r(k, 2), \dots, r(k, S(k))$$

avant de quitter le système.

Un exemple est illustré dans la Figure 2.4. Il y a 3 types 1, 2 et 3 qui suivent les routes  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ ,  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  et  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ , respectivement.

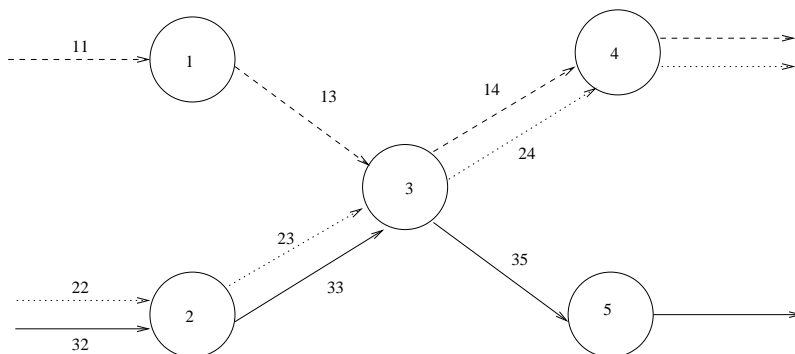


FIGURE 2.4 – Les routes aléatoires

Dans la file  $i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , il y a  $n_i$  clients ordonnés. Supposons que la file  $i$  fonctionne de la façon suivante :

1. Chaque client demande un service exponentiellement distribué de taux 1.
2. Un effort de service total est fourni avec le taux  $\phi_i(n_i)$ .
3. Une proportion  $\gamma_i(l, n_i)$  de cet effort est dirigée vers le client de la position  $l$  ( $l = 1, 2, \dots, n_i$ ). Si ce client quitte la file, son service étant terminé, les clients des positions  $l + 1, l + 2, \dots, n_i$  se déplacent aux positions  $l, l + 1, \dots, n_i - 1$  respectivement.

4. Un client arrivant à la file  $i$  se déplace à la position  $l$  ( $l = 1, 2, \dots, n_i + 1$ ) avec probabilité  $\delta_i(l, n_i + 1)$ , les clients aux positions  $l, l + 1, \dots, n_i$  précédemment se déplacent aux positions  $l + 1, l + 2, \dots, n_i + 1$  respectivement.

Posons  $t_i(l)$  le type du client à la position  $l$  dans la file  $i$  et  $s_i(l)$  son étape le long de sa route. On appelle  $c_i(l) = (t_i(l), s_i(l))$  la classe de ce client. Le vecteur

$$\mathbf{c}_i = (c_i(1), c_i(2), \dots, c_i(n_i))$$

décrit l'état de la file  $i$  et

$$\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_N)$$

est le processus de Markov représentant l'état du système.

Posons

$$\alpha_i(k, s) = \begin{cases} \nu_k & \text{si } r(k, s) = i; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$a_i = \sum_k \sum_{s=1}^{S(k)} \alpha_i(k, s) .$$

Si le réseau est stable, alors  $a_i$  sera le nombre moyen des clients arrivés à la file  $i$  par unité de temps.

Posons

$$b_i^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_i^n}{\prod_{l=1}^n \phi_i(l)} .$$

La condition de stabilité du réseau est que tous les  $b_i^{-1}$  soient finis. On a le Théorème suivant :

**Théorème 2.22.** *Sous la condition de stabilité, la distribution stationnaire du système décrit plus haut est*

$$\pi(\mathbf{C}) = \prod_i \pi_i(\mathbf{c}_i) , \tag{2.24}$$

où  $\pi_i(\mathbf{c}_i)$  est donné par :

$$\pi_i(\mathbf{c}_i) = b_i \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\alpha_i(t_i(l), s_i(l))}{\phi_i(l)} .$$

**Le réseau de Kelly avec discipline FIFO.** Considérons le réseau de Kelly de files simples avec discipline FIFO défini comme suit : Si  $\phi_i(n) = \mu_i$ ,  $\gamma_i(1, n_i) = 1$ ,  $\delta_i(n_i + 1, n_i + 1) = 1$ , à la file  $i$ , la discipline est FIFO, il y a un seul serveur et chaque client demande un service exponentiel avec moyenne  $\mu_i^{-1}$ .

La distribution stationnaire du réseau à l'équilibre est donné par (2.24) où  $\pi_i(\mathbf{c}_i)$  est donnée par :

$$\pi_i(\mathbf{c}_i) = \left(1 - \frac{a_i}{\mu_i}\right) \frac{\prod_{l=1}^{n_i} \alpha_i(t_i(l), s_i(l))}{\mu_i^{n_i}} .$$

**Les réseaux ouverts de files quasi-réversibles.** Dans la Section 2.1.4, on a donné la définition d'une file quasi-réversible. Considérons un réseau ouvert avec le routage comme en haut. On associe à un client arrivé à la file  $i$  sa classe  $(k, s)$ , c.à.d son type  $k$  et son étape  $s$ .

Soit  $\pi_i(\mathbf{x}_i)$  la distribution stationnaire d'une file quasi-réversible à laquelle les arrivées des clients de la classe  $(k, s)$  forment un processus de Poisson de taux  $\alpha_i(k, s)$ . Soit  $q_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i)$  les taux de transition de ce processus et soit  $\mathcal{S}_i(k, s, \mathbf{x}_i)$  l'ensemble des états dans lesquels la file contient un client de la classe  $(k, s)$  de plus que dans l'état  $\mathbf{x}_i$ , avec le même nombre de clients des autres classes.

Considérons maintenant un processus de Markov  $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_N(t))$  dont les taux de transitions sont définis comme suit. Le taux de transition avec lequel un client du type  $k$  entre dans le réseau et fait passer la file  $i = r(k, 1)$  de l'état  $\mathbf{x}_i$  à l'état  $\mathbf{x}'_i \in \mathcal{S}_i(k, 1, \mathbf{x}_i)$  est  $q_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i)$ . Le taux de transition avec lequel un client du type  $k$  quitte le réseau et fait passer la file  $i = r(k, S(k))$  de l'état  $\mathbf{x}'_i \in \mathcal{S}_i(k, S(k), \mathbf{x}_i)$  à l'état  $\mathbf{x}_i$  est  $q_i(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}_i)$ . Le taux de transition avec lequel un client de la classe  $(k, s)$ ,  $s < S(k)$ , part de la file  $i = r(k, s)$  et se rend à la file  $j = r(k, s + 1)$  comme un client de la classe  $(k, s + 1)$  et fait passer la file  $i$  de l'état  $\mathbf{x}'_i \in \mathcal{S}_i(k, s, \mathbf{x}_i)$  à l'état  $\mathbf{x}_i$  et la file  $j$  de l'état  $\mathbf{x}_j$  à l'état  $\mathbf{x}'_j \in \mathcal{S}_j(k, s + 1, \mathbf{x}_j)$  est

$$q_i(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}_i) \frac{q_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}'_j)}{\sum_{\mathbf{x}'_j \in \mathcal{S}_j(k, s+1, \mathbf{x}_j)} q_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}'_j)} = q_i(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}_i) \frac{q_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}'_j)}{\alpha_j(k, s + 1)} .$$

Et finalement, le taux de transition tel qu'il y ait un changement interne à la file  $i$  de l'état  $\mathbf{x}_i$  à l'état  $\mathbf{x}'_i$ , sans l'arrivée ou le départ de tout client, est  $q_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i)$  (un client qui reroute vers la même file). Les taux de transitions sont donc définis de la manière suivante : une file se comporte comme si elle est en isolation avec les arrivées des clients de la classe  $(k, s)$ , pour  $s > 1$ , qui sont déclenchées par des départs à une autre file plutôt que par un processus de Poisson indépendant. Si les files  $1, 2, \dots, N$  en isolation sont quasi-réversibles et le processus  $\mathbf{X}$  est en équilibre alors on appelle  $\mathbf{X}$  un réseau ouvert de files quasi-réversibles.

Utilisant le processus renversé, on en déduit que la distribution d'équilibre est

$$\pi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) = \pi_1(\mathbf{x}_1) \pi_2(\mathbf{x}_2) \dots \pi_N(\mathbf{x}_N) .$$

On peut montrer que le flux de probabilité qu'un client de la classe  $(k, s)$  sorte de la file  $i = r(k, s)$  et que cette file  $i$  quitte l'état  $\mathbf{x}_i$  est

$$\sum_{\mathbf{x}'_i \in \mathcal{S}_i(s, k, \mathbf{x}_i)} \pi_i(\mathbf{x}'_i) q_i(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}_i) = \pi_i(\mathbf{x}_i) \alpha_i(k, s) .$$

Ainsi, si un client de la classe  $(k, s)$  vient de quitter la file  $i$ , la probabilité que la file  $i$  soit dans l'état  $\mathbf{x}_i$  est  $\pi_i(\mathbf{x}_i)$ . Utilisant le processus renversé, on a un client de la classe  $(k, s)$  arrivant à la file  $i = r(k, s)$  trouve la file  $i$  en l'état  $\mathbf{x}_i$  avec probabilité  $\pi_i(\mathbf{x}_i)$  (cf(ii) ci-dessous).

Le théorème suivant est démontré dans [Kel79].



**Théorème 2.23.** *Un réseau ouvert de files quasi-réversibles a les propriétés suivantes :*

(i) *Les états des files individuelles sont indépendants.*

(ii) *Pour une file individuelle, la distribution à l'équilibre et la distribution sur les états obtenus par une arrivée d'un client d'une classe donnée sont identiques et sont toutes les deux comme elles seraient si la file était en isolation avec les arrivées des clients de chaque classe formant des processus de Poisson indépendants.*

(iii) *Après renversement du temps, le système devient un autre réseau ouvert de files quasi-réversibles.*

(iv) *Le système est quasi-réversible et les départs du système des clients de chaque type forment un processus de Poisson indépendant, et l'état du système au temps  $t_0$  est indépendant des départs du système avant le temps  $t_0$ .*

**Les réseaux fermés des files quasi-réversibles.** Kelly a étudié aussi le réseau fermé en considérant qu'un client du type  $k$  après avoir traversé la suite de files

$$r(k, 1), r(k, 2), \dots, r(k, S(k))$$

ne quitte pas le réseau. Il retourne à la file  $r(k, 1)$  et répète sa route. Alors, le réseau devient fermé. Le nombre de clients de chaque type  $k$  est fixé pour chaque  $k$ .

Les résultats du réseau fermé sont donnés dans [Kel79], mais on ne les détaille pas ici.

## 2.2.5 Les réseaux de files quasi-réversibles de Chao, Miyazawa et Pinedo

Ce modèle est introduit dans le livre [CMP99]. Considérons un réseau de  $N$  nœuds. On a un nœud supplémentaire 0 représentant le monde extérieur. L'espace d'état du nœud 0 est  $\mathcal{S}_0 = \{0\}$ . Le nœud 0 est une source de Poisson.

Soit  $T_i$  l'ensemble des classes d'arrivée et de départ au nœud  $i$ . Soit  $x_i$  l'état du nœud  $i$  avec l'espace d'état  $\mathcal{S}_i$ .

Pour chaque nœud, on a besoin d'informations sur :

- Les effets d'arrivée : la règle selon laquelle le nœud change d'état avec l'arrivée d'une entité.
- Les taux de transition de départ : le taux auquel l'état du nœud change sous l'effet d'un départ, probablement affectant les états des autres nœuds.
- Les taux de transition interne : le taux auquel l'état du nœud change sans affecter les états des autres nœuds, sans que ce soit l'effet d'une arrivée ou d'un départ.

Donc on va spécifier chaque nœud par une fonction de probabilité de transition qui décrit les changements d'états avec les arrivées, et les fonctions de taux de transition qui décrivent les changements d'états en raison de départs et les transitions internes. Pour un nœud  $i$  et une classe  $u$ , introduisons les fonctions  $p_{iu}^A$ ,  $q_{iu}^D$  et  $q_i^I$  sur l'espace d'état  $\mathcal{S}_i$  :

- $p_{iu}^A(x_i, x'_i)$  = la probabilité qu'une arrivée de la classe  $u$  au nœud  $i$  change l'état de  $x_i$  en  $x'_i$ , où on suppose que

$$\sum_{x'_i \in \mathcal{S}_i} p_{iu}^A(x_i, x'_i) = 1 \quad x_i \in \mathcal{S}_i ;$$

- $q_{iu}^D(x_i, x'_i)$  = le taux auquel les départs de la classe  $u$  changent l'état du nœud  $i$  de  $x_i$  à  $x'_i$ ;
- $q_i^I(x_i, x'_i)$  = le taux auquel les transitions internes changent l'état du nœud  $i$  de  $x_i$  à  $x'_i$ .

Pour le nœud 0, posons  $p_{0u}^A(0, 0) = 1$ ,  $q_{0u}^D(0, 0) = \beta_{0u}$  et  $q_i^I(0, 0) = 0$ . Cela implique que les départs de la classe  $u$  du nœud 0 arrivent au réseau de l'extérieur selon un processus de Poisson de paramètre  $\beta_{0u}$ . Le nœud 0 est une source de Poisson. Notons que  $p_{iu}^A(x_i, x_i)$  peut être strictement positif, c.à.d. qu'une arrivée peut, avec une probabilité strictement positive, ne pas changer l'état.

Dans la section 2.1.4, on a défini une file par les taux  $q_u^A$ ,  $q_u^D$ ,  $q^I$ . Si une file dans le réseau est initialement caractérisée par  $q_u^A$ ,  $q_u^D$ ,  $q^I$ , alors la fonction d'effet des arrivées peut être définie comme

$$p_u^A(x, x') = \frac{q_u^A(x, x')}{\sum_y q_u^A(x, y)},$$

et  $q_u^D$  et  $q^I$  sont la fonction de transition de départ et la fonction de transition interne. Néanmoins, sauf si un nœud est en isolation (comme dans la section 2.1.4), on suppose qu'il est caractérisé par  $p_u^A$ ,  $q_u^D$ ,  $q^I$ . La raison va apparaître ci-dessous.

On va étudier la distribution stationnaire du réseau.

Supposons la quasi-réversibilité pour chaque nœud en isolation, ce qui sera défini après, alors, la distribution stationnaire a une forme produit.

Considérons pour chaque nœud  $i$  le processus auxiliaire suivant :

$$q_i^{(\alpha_i)}(x_i, x'_i) = \sum_{u \in T_i} (\alpha_{iu} p_{iu}^A(x_i, x'_i) + q_{iu}^D(x_i, x'_i)) + q_i^I(x_i, x'_i), \quad (2.25)$$

pour  $x_i, x'_i \in \mathcal{S}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . On voit bien que  $q_i^{(\alpha_i)}$  peut être vu comme un nœud  $i$  en isolation, avec classe  $u \in T_i$  arrivant suivant un processus de Poisson de paramètre  $\alpha_{iu}$ . En général, les termes  $p_{iu}^A$ ,  $q_{iu}^D$  et  $q_i^I$  peuvent être des fonctions de  $\alpha_i = \{\alpha_{iu}; u \in T_i\}$ .

Supposons que  $q_i^{(\alpha_i)}$  a une distribution stationnaire  $\pi_i^{(\alpha_i)}$ , c.à.d :

$$\begin{aligned} \pi_i^{(\alpha_i)}(x_i) \left( \sum_{u \in T_i} \left( \alpha_{iu} + \sum_{x'_i \in \mathcal{S}_i} q_{iu}^D(x_i, x'_i) \right) + \sum_{x'_i \in \mathcal{S}_i} q_i^I(x_i, x'_i) \right) = \\ \sum_{u \in T_i} \sum_{x'_i \in \mathcal{S}_i} \pi_i^{(\alpha_i)}(x'_i) (\alpha_{iu} p_{iu}^A(x'_i, x_i) + q_{iu}^D(x'_i, x_i)) + \sum_{x'_i \in \mathcal{S}_i} \pi_i^{(\alpha_i)}(x'_i) q_i^I(x'_i, x_i). \end{aligned} \quad (2.26)$$

L'équation (2.26) est vérifiée pour  $i = 0$  puisque

$$\pi_0^{(\alpha_0)} = 1$$

est indépendant de  $\alpha_0$ . Pour  $i \neq 0$ ,  $\alpha_i$  va être déterminée par les équations de trafic.

On a toujours

$$\sum_{x'_i \in \mathcal{S}_i} \alpha_{iu} p_{iu}^A(x_i, x'_i) = \alpha_{iu} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad u \in T_i.$$

Il s'agit d'une des deux conditions pour de la quasi-réversibilité d'une file d'après Chao, Miyazawa et Pinedo, voir la Section 2.1.4. Donc, la quasi-réversibilité de  $q_i^{(\alpha_i)}$  est équivalente à l'existence d'un ensemble de nombres positifs ou nuls  $\{\beta_{iu}, u \in T_i\}$  tels que :

$$\sum_{x'_i \in \mathcal{S}_i} \pi_i^{(\alpha_i)}(x'_i) q_{iu}^D(x'_i, x_i) = \beta_{iu} \pi_i^{(\alpha_i)}(x_i), \quad x_i \in \mathcal{S}_i \quad (2.27)$$

Sommons (2.27) sur tous les  $x_i \in \mathcal{S}_i$ ,  $\beta_{iu}$  étant déterminé par

$$\beta_{iu} = \sum_{x_i, x'_i \in \mathcal{S}_i} \pi_i^{(\alpha_i)}(x_i) q_{iu}^D(x_i, x'_i) \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.28)$$

L'équation (2.28) s'interprète comme suit :  $\beta_{iu}$  est le taux de départ d'entités de la classe  $u$  du nœud  $i$ .

Le nœud  $i$  en isolation est dit être *quasi-réversible avec  $\alpha_i$*  si (2.27) est vérifié.

Considérons maintenant le réseau généré en connectant les nœuds  $1, 2, \dots, N$  par la matrice de routage  $R = (r_{iu, kv})$ , où le nœud  $i$  est défini par  $p_{iu}^A, q_{iu}^D$  et  $q_i^I$ . Supposons que la classe  $u \in T_0$  arrive au réseau de l'extérieur au taux  $\beta_{0u}$ , et que chaque entité joint le nœud  $k$  comme entité de la classe  $v$  avec probabilité  $r_{0u, kv}$ . Soit  $\beta_{kv}$  le taux moyen de départ d'entités de la classe  $v$  du nœud  $k$ . Le taux moyen d'arrivée d'entités de la classe  $u$  au nœud  $i$  vérifie les équations de trafic

$$\alpha_{iu} = \sum_{k=0}^N \sum_{v \in T_k} \beta_{kv} r_{kv, iu}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad u \in T_i. \quad (2.29)$$

Notons que  $\beta_{kv}$  est une fonction non-linéaire de  $\alpha_i$ , qui est déterminé par (2.28). Chercher des solutions de (2.29) peut être considéré comme un problème de point fixe par rapport au vecteur  $\alpha = \{\alpha_{iu}; i = 0, 1, \dots, N, u \in T_i\}$ .

**Théorème 2.24.** *Si chaque nœud  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$  du réseau avec le taux de transition  $q(x, x')$  est en isolation quasi-réversible avec  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$  qui vérifie (2.28) et (2.29), alors la distribution stationnaire du réseau est*

$$\pi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N \pi_i^{(\alpha_i)}(x_i), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathcal{S}, \quad (2.30)$$

où  $\pi_i^{(\alpha_i)}$  est la distribution stationnaire de  $q_i^{(\alpha_i)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Chao, Miyazawa et Pinedo considèrent encore un modèle plus compliqué, un réseau avec signaux et mouvements instantanés. Un signal arrivé peut immédiatement déclencher un départ. Ils modifient la définition de la quasi-réversibilité et du réseau modifié (avec des nœuds quasi-réversibles), ils obtiennent encore une distribution stationnaire à forme produit. On va donner deux exemples introduits dans [CM00] et [CMP99] : un du modèle plus compliqué, puis un du modèle convert par le Théorème 2.24.

Considérons un réseau de  $N$  nœuds et un seul serveur à chaque nœud. Il y a trois classes d'entités : clients, signaux positifs et signaux négatifs, notés par  $c$ ,  $s^+$  et  $s^-$ ,

respectivement. Supposons que l'état du réseau est  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ , où  $n_i$  est le nombre de clients au nœud  $i$ .

Les clients, les signaux positifs et les signaux négatifs arrivent de l'extérieur au nœud  $i$  suivant les processus de Poisson de taux  $\lambda_i$ ,  $\lambda_i^+$  et  $\lambda_i^-$ . Au nœud  $i$ , les services sont exponentiels de taux  $\mu_i$ . Après accomplissement de son service, un client part pour le nœud  $k$  comme un client régulier avec probabilité  $r_{ic,kc}$ , comme un signal positif avec probabilité  $r_{ic,ks^+}$ , comme un signal négatif avec probabilité  $r_{ic,ks^-}$ , et il quitte le réseau avec probabilité  $r_{ic,0}$ .

Un signal positif arrive au nœud  $i$ , il ajoute un client et part immédiatement pour le nœud  $k$  comme un client régulier avec probabilité  $r_{is^+,kc}$ , comme un signal positif avec probabilité  $r_{is^+,ks^+}$ , comme un signal négatif avec probabilité  $r_{is^+,ks^-}$ , et il quitte le réseau avec probabilité  $r_{is^+,0}$ .

Un signal négatif arrive au nœud  $i$ , il déclenche le départ d'un client, si il y en a. Le client sur le départ va au nœud  $k$  comme un client régulier avec probabilité  $r_{is^-,kc}$ , comme un signal positif avec probabilité  $r_{is^-,ks^+}$ , comme un signal négatif avec probabilité  $r_{is^-,ks^-}$ , et il quitte le réseau avec probabilité  $r_{is^-,0}$ .

Pour s'assurer que le réseau est stable, c.à.d., qu'il ne sera pas surchargé, on doit exclure le cas où un signal positif à un nœud produit un nombre infini de clients dans le réseau en un instant donné. On fait donc la supposition que la matrice carrée de dimension  $\{1, \dots, N\}$  définie par

$$p_{i,k} = r_{ik^+,ks^-}$$

a un rayon spectral strictement inférieur à 1.

Soit  $\{\alpha_i, i = 1, \dots, N\}$ ,  $\{\alpha_i^+, i = 1, \dots, N\}$ ,  $\{\alpha_i^-, i = 1, \dots, N\}$  la solution des équations de trafic

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \lambda_i + \sum_{k=1}^N \rho_k \mu_k r_{kc,ic} + \sum_{k=1}^N \rho_k \alpha_k^- r_{ks^-,ic} + \sum_{k=1}^N \rho_k^{-1} \alpha_k^+ r_{ks^+,ic} , \\ \alpha_i^+ &= \lambda_i^+ + \sum_{k=1}^N \rho_k \mu_k r_{kc,is^+} + \sum_{k=1}^N \rho_k \alpha_k^- r_{ks^-,is^+} + \sum_{k=1}^N \rho_k^{-1} \alpha_k^+ r_{ks^+,is^+} , \\ \alpha_i^- &= \lambda_i^- + \sum_{k=1}^N \rho_k \mu_k r_{kc,is^-} + \sum_{k=1}^N \rho_k \alpha_k^- r_{ks^-,is^-} + \sum_{k=1}^N \rho_k^{-1} \alpha_k^+ r_{ks^+,is^-} , \end{aligned} \quad (2.31)$$

pour  $i = 1, \dots, N$ , où

$$\rho_i = \frac{\alpha_i + \alpha_i^+}{\mu_i + \alpha_i^-} .$$

Commentons les ET (2.31). Dans les membres de droite, les deux premières sommes s'interprètent de façon similaire au G-réseau, voir section 2.2.3. La dernière somme est plus complexe à interpréter.

D'autre part, on définit les conditions au bord de la façon suivante : si le nœud  $i$  est vide, un processus de Poisson de départ des signaux positifs est activé au taux  $\rho_i^{-1} \alpha_i^+$ .

**Théorème 2.25.** *Si les Equations de Trafic (2.31) ont une solution et que cette solution vérifie  $\rho_i < 1$ , pour tout  $i = 1, \dots, N$ , alors le réseau modifié décrit ci-dessus a une*

distribution stationnaire à forme produit

$$\pi(n_1, \dots, n_N) = \prod_{i=1}^N (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} . \quad (2.32)$$

*Remarque 2.26.* On note deux particularités : des équations de trafic de forme raffinée, et des conditions aux bords spécifiques. Ces deux ingrédients se retrouvent sous une forme plus complexe pour les files et les réseaux 0-automatiques.

Les auteurs ne discutent pas l'unicité de la solution de (2.29). Pour les files et réseaux 0-automatiques, on manipule des équations de trafic plus compliquées que (2.29), et malgré cela, on arrivera à démontrer existence et unicité d'une solution aux équations de trafic (sous certaines hypothèses).

*Remarque 2.27.* Notons que le G-réseau est modélisable dans ce cadre. Il n'y a pas de signaux positifs, les signaux négatifs sont des clients négatifs (on parle de G-réseau simple dans la section 2.2.3).

**Les réseaux de Jackson multi-classes et les réseaux de Kelly.** Considérons un réseau de  $N$  nœuds et  $I$  classes de clients. Les clients de la classe  $u$  arrivent au nœud suivant un processus de Poisson de taux  $\lambda_{iu}$ .

Dans le nœud  $i$ , il y a  $n_i$  clients ordonnés. Supposons que

1. Un client de la classe  $u$  a une demande de service exponentielle de taux  $\mu_{iu}$ .
2. Le serveur fournit un service au taux  $\phi_i(n_i)$ .
3. Une proportion  $\rho_i^D(l, n_i)$  de ce taux est dirigée vers le client de la position  $l$  ( $l = 1, 2, \dots, n_i$ ). Si ce client quitte le nœud, son service étant terminé, les clients des positions  $l+1, l+2, \dots, n_i$  se déplacent aux positions  $l, l+1, \dots, n_i-1$  respectivement.
4. Un client arrivant à la file  $i$  se place à la position  $l$  ( $l = 1, 2, \dots, n_i + 1$ ) avec probabilité  $\rho_i^A(l, n_i + 1)$ , les clients aux positions  $l, l+1, \dots, n_i$  précédemment se déplacent aux positions  $l+1, l+2, \dots, n_i+1$  respectivement.

Le routage est décrit comme suit : un client de la classe  $u$ , après accomplissement de son service au nœud  $i$ , se rend au nœud  $k$  comme un client de la classe  $v$  avec probabilité  $r_{iu,kv}$  et quitte le réseau avec probabilité  $r_{iu,0}$ , où

$$\sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^I r_{iu,kv} + r_{iu,0} = 1 , \quad j = 1, \dots, N, \quad u = 1, \dots, I .$$

Ce réseau est un *réseau de Jackson multi-classes avec service positions* avec le temps de service exponentiel.

*Remarque 2.28.* Au lieu d'un routage probabiliste, pour chaque classe de clients, on peut définir une route fixe. Alors, un réseau de Kelly peut se modéliser comme un réseau de Jackson multi-classes. En effet, soit  $r(k, 1), \dots, r(k, S(k))$  une route dans un réseau de Kelly. Soit  $u = (k, s)$ ,  $v = (k, s+1)$ ,  $i = r(k, s)$  et  $j = r(k, s+1)$ , on pose  $r_{iu,jv} = 1$ .

Soit  $c_i(l)$  la classe du client à la position  $l$  au nœud  $i$ . Posons

$$\mathbf{c}_i = (c_i(1), c_i(2), \dots, c_i(n_i)) ,$$

où  $n_i$  est le nombre de clients au nœud  $i$ . L'état du réseau est représenté par

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_N) .$$

Posons  $n_{iu}$  le nombre de clients de la classe  $u$  au nœud  $i$ , et posons

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i &= (n_{i1}, \dots, n_{iI}) , \\ \mathbf{n} &= (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_N) . \end{aligned}$$

Soit  $\alpha_{iu}$  le taux d'arrivées globales de la classe  $u$  au nœud  $i$ . Un client qui entre dans un nœud va finir par le quitter, donc le taux de départs globaux d'un nœud devraient rester le même, et en conséquence, les équations de trafic

$$\alpha_{iu} = \lambda_{iu} + \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^I \alpha_{kv} r_{kv,iu} , \quad i = 1, \dots, N, \quad u = 1, \dots, I, \quad (2.33)$$

doivent être vérifiées.

Définissons l'intensité de trafic au nœud  $i$  par

$$\rho_i = \sum_{u=1}^I \frac{\alpha_{iu}}{\mu_{iu}} , \quad i = 1, \dots, N .$$

Le théorème suivant est démontré dans [CMP99]. Notons que le résultat de la forme produit sur le réseau de Jackson et le réseau de Kelly (les routes générales) dans la section 2.2.1 et 2.2.4 constituent des cas particuliers de ce théorème.

**Théorème 2.29.** *Considérons un réseau de Jackson multi-classes avec service dépendant de la position et les demandes de services exponentielles. Supposons que pour chaque file  $i$ , l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- (a)  $\mu_{iu}$  est indépendante de la classe  $u$ .
- (b)  $\rho_i^A(l, n_i) = \rho_i^D(l, n_i)$  pour tout  $l = 1, \dots, n_i$  (file symétrique).

*En supposant la condition de stabilité : la constante de normalisation  $b_i$*

$$b_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_i^n}{\prod_{l=1}^n \phi_i(l)} < \infty$$

*est finie, la distribution stationnaire du réseau est*

$$\pi(\mathbf{c}) = \prod_{i=1}^N \pi_i(\mathbf{c}_i) , \quad (2.34)$$

où  $\pi_i(\mathbf{c}_i)$  est la distribution stationnaire du nœud  $i$  en supposant qu'il est en isolation avec des processus des arrivées Poisson de taux  $\alpha_{iu}$ , c.à.d.

$$\pi(\mathbf{c}_i) = b_i^{-1} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ic_i(l)}}{\phi_i(l) \mu_{ic_i(l)}} . \quad (2.35)$$

### 2.2.6 Le réseau BCMP

Les réseaux à forme produit avec des services non-exponentiels et les disciplines de service LIFO avec préemption et PS ont été introduits pour la première fois par Baskett, Chandy, Muntz et Palacios [BCMP75].

Dans cette section, on va introduire les réseaux BCMP dont la distribution stationnaire a encore une forme produit en présentant différentes classes de client et de nouvelles disciplines de service. Les réseaux BCMP sont modélisables dans le cadre du réseau de Chao, Miyazawa et Pinedo.

Considérons un réseau de  $N$  nœuds et  $I$  classes de clients. Les clients de la classe  $u$  arrivent au nœud  $i$  de l'extérieur suivant un processus de Poisson de taux  $\lambda_{iu}$ . Un client peut changer sa classe si il se déplace d'un nœud à un autre. Plus précisément, un client de la classe  $u$ , après accomplissement de son service au nœud  $i$ , se rend au nœud  $k$  comme un client de la classe  $v$  avec probabilité  $r_{iu,kv}$  et quitte le réseau avec probabilité  $r_{iu,0}$ . Ces probabilités vérifient

$$\sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^I r_{iu,kv} + r_{iu,0} = 1, \quad j = 1, \dots, N, \quad u = 1, \dots, I.$$

Soit  $n_{iu}$  le nombre des clients de la classe  $u$  au nœud  $i$ , et

$$\mathbf{n}_i = (n_{i1}, \dots, n_{iI}).$$

On utilise  $n_i$  pour noter le nombre total des clients au nœud  $i$ , c.à.d

$$n_i = \sum_{u=1}^I n_{iu}.$$

Un réseau BCMP peut contenir plusieurs types de nœuds.

*Nœud du type 0.* Les nœuds où la demande de service est exponentielle avec un taux indépendant de la classe du client, et où la discipline de service est FIFO sont appelés *nœuds de type 0*.

*Nœud du type 1.* Ce type de nœud contient un serveur de type Processeur Partagé. Les demandes de service des clients de chaque classe sont arbitrairement distribuées, et peuvent dépendre de la classe du client. On dit alors que l'on a un nœud de type 1. La distribution des demandes de service des clients de la classe  $u$  au nœud  $i$  de type 1 est  $F_{iu}$ . Quand il y a  $n_i$  clients présents au nœud  $i$ , l'effort de service est divisé également parmi tous les clients. Quand il y a  $n_{iu}$  clients de la classe  $u$  au nœud  $i$  et que la demande de service d'un client de la classe  $u$  est exponentielle de taux  $\mu_{iu}$ , alors le taux d'accomplissement de service de clients de la classe  $u$  est

$$\frac{n_{iu}}{n_i} \mu_{iu}, \quad u = 1, \dots, I.$$

*Nœud du type 2.* Un seul serveur sert les clients selon la discipline de service LIFO avec préemption. Les demandes de service de chaque classe de clients sont arbitrairement

distribuées et peuvent dépendre de la classe du client. La distribution des demandes de service des clients de la classe  $u$  au nœud  $i$  de type 2 est  $F_{iu}$ ,  $u = 1, \dots, I$ .

*Nœud du type 3.* Ce type de nœud a un nombre infini de serveurs. Chaque client arrivant commence son service immédiatement. Les demandes de service des clients sont arbitrairement distribuées et peuvent dépendre de la classe du client. La distribution des demandes de service des clients de la classe  $u$  au nœud  $i$  de type 3 est  $F_{iu}$ ,  $u = 1, \dots, I$ .

*Nœud du type 4.* Ce type de nœud a un nombre fini de serveurs,  $K_i$ , mais pas de salle d'attente pour les clients additionnels. Si un client arrive et trouve qu'il n'y a plus de serveurs disponibles, il part tout de suite. Les demandes de service des clients sont arbitrairement distribuées et peuvent dépendre de la classe du client. La distribution des demandes de service des clients de la classe  $u$  au nœud  $i$  de type 4 est  $F_{iu}$ ,  $u = 1, \dots, I$ .

Soit  $\alpha_{iu}$  le taux moyen d'arrivée des clients de la classe  $u$  au nœud  $i$ . Puisque un client qui entre au nœud  $i$  va quitter ce nœud,  $\alpha_{iu}$  devrait également être le taux moyen de départ des clients de la classe  $u$  du nœud  $i$ . Alors les équations de trafic

$$\alpha_{iu} = \lambda_{iu} + \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^I \alpha_{kv} r_{kv,iu} \quad (2.36)$$

doivent être vérifiées.

Soit  $S_{iu}$  un temps de service générique d'un client de la classe  $u$  au nœud  $i$ . Si le nœud  $i$  est de type 0, c.à.d le type des nœuds avec les temps de service exponentiels, alors  $S_{iu}$  a une distribution de service exponentielle avec moyenne  $E(S_{iu}) = 1/\mu_i$  qui est indépendante de la classe  $u$ . Si le nœud est de type de 1 à 4, alors  $S_{iu}$  est une distribution arbitraire avec moyenne  $E(S_{iu})$  (finie).

Pour  $i = 1, 2, \dots, N$ , notons les intensités du trafic au nœud  $i$  par

$$\begin{aligned} \rho_{iu} &= \alpha_{iu} E(S_{iu}), \quad u = 1, 2, \dots, I, \\ \rho_i &= \sum_{u=1}^I \rho_{iu}. \end{aligned}$$

On va énoncer le théorème BCMP en suivant la présentation donnée dans [CMP99].

**Théorème 2.30.** *Supposons que le réseau contient les nœuds de type 0,1,2,3, et 4. Supposons qu'il existe une solution des équations de trafic (2.36)  $\alpha_{iu}$ ,  $u = 1, \dots, I$  et  $i = 1, \dots, N$ , avec  $\rho_i < 1$  lorsque le nœud  $i$  est de type 0,1 ou 2. Alors la distribution stationnaire du réseau est*

$$\pi(\mathbf{n}) = \prod_{i=1}^N \pi_i(\mathbf{n}_i),$$

où  $\pi_i(\mathbf{n}_i)$  dépend du type du nœud  $i$ . Si le nœud est de type 0, alors  $\pi_i$  est donnée par

$$\pi_i(\mathbf{n}_i) = (1 - \rho_i) \frac{n_i!}{n_{i1}! n_{i2}! \dots n_{iI}!} \prod_{u=1}^I (\alpha_{iu} / \mu_i)^{n_{iu}}.$$



Si le nœud  $i$  est de type 1 ou 2, alors  $\pi_i$  est donnée par

$$\pi_i(\mathbf{n}_i) = (1 - \rho_i) \frac{n_i!}{n_{i1}! n_{i2}! \dots n_{iI}!} \prod_{u=1}^I (\rho_{iu})^{n_{iu}} .$$

Si le nœud  $i$  est de type 3, alors

$$\pi_i(\mathbf{n}_i) = e^{-\rho_i} \prod_{u=1}^I \frac{(\rho_{iu})^{n_{iu}}}{n_{iu}!} .$$

Si le nœud  $i$  est de type 4, alors

$$\pi_i(\mathbf{n}_i) = \frac{\prod_{u=1}^I \rho_{iu}^{n_{iu}} / n_{iu}!}{\sum_{k=0}^{K_i} \rho_i^k / k!} , \quad \sum_{u=1}^I n_{iu} \leq K_i .$$

Un résultat sur le réseau BCMP avec service dépendant de la position est aussi donné dans [CMP99].

Dans [GP98], un théorème plus fort est énoncé pour le cas où les taux de service dépendent du nombre de clients dans le nœud. De plus, les deux cas de réseau ouvert et fermé sont considérés.

En comparant avec la section 2.1.5, les nœuds du type 1, 2, 3 ou 4 sont des nœuds symétriques au sens de Kelly (un nœud du type 1 est une file PS, un nœud du type 2 est une file LIFO avec préemption, un nœud du type 3 est une file avec infinité de serveurs et un nœud du type 4 est une file sans salle d'attente).

**Récapitulatif.** Dans ce chapitre, on a présenté quelques types classiques de files et de réseaux à forme produit.

Le réseau de Jackson est un réseau de files simples avec un routage probabiliste. Dans un G-réseau, il y a deux types de clients : clients positifs et clients négatifs, et le routage est toujours probabiliste. La discipline de service pour ces réseaux est FIFO et les services sont exponentiels.

Dans un réseau de Kelly, les routes sont fixés. Par contre, en considérant le service dépendant de la position, de nouvelles disciplines de service sont considérées (LIFO, PS, ...).

Les réseaux introduits par Chao, Miyazawa et Pinedo sont les réseaux les plus généraux. Les réseaux de Kelly et de Jackson et les G-réseaux sont tous modélisables dans ce cadre.

Le réseau BCMP est un réseau constitué de file simple et des files symétriques. Les demandes de services pour les files symétriques peuvent être arbitrairement distribuées. Le réseau BCMP est aussi modélisable dans le cadre de Chao, Miyazawa et Pinedo.

En comparant avec notre modèle, la file simple et la G-file sont des cas spéciaux de files 0-automatiques. Notre file est quasi-réversible au sens de la définition de Chao, Miyazawa et Pinedo dans la section 2.1.4. Dans une file 0-automatique, outre les clients positifs et les clients négatifs, d'autres types de clients peuvent être modélisés. Le réseau à la Jackson de files 0-automatiques est une généralisation du réseau de Jackson. En comparant avec le G-réseau, la mécanisme de routage d'un réseau à la Jackson de G-files est moins flexible.

Néanmoins, il est possible de définir plusieurs variantes de réseaux à la Jackson de G-files. Le réseau à la Kelly avec discipline FIFO est un cas spécial du réseau à la Kelly de files 0-automatique. Notons que dans un réseau à la Kelly, l'effet produit quand deux clients fusionnent pour créer un nouveau client est spécial. La classe de ce nouveau client peut changer.

Les réseaux de files 0-automatiques sont modélisables dans le cadre de Chao, Miyazawa et Pinedo, mais le point nouveau et crucial est que la distribution stationnaire est non seulement à forme produit mais aussi explicitement calculable.

Les demandes de services arbitrairement distribuées sont étudiées dans le cas des files symétriques. Par contre, il est difficile de considérer d'autres disciplines de service pour la file 0-automatique que la discipline FIFO. Donc, pour le moment, on considère juste les services exponentiels. On n'étudie pas les réseaux fermés, car lorsqu'il y a des annulations, le nombre de clients diminue (c'était déjà le cas pour les G-réseaux).

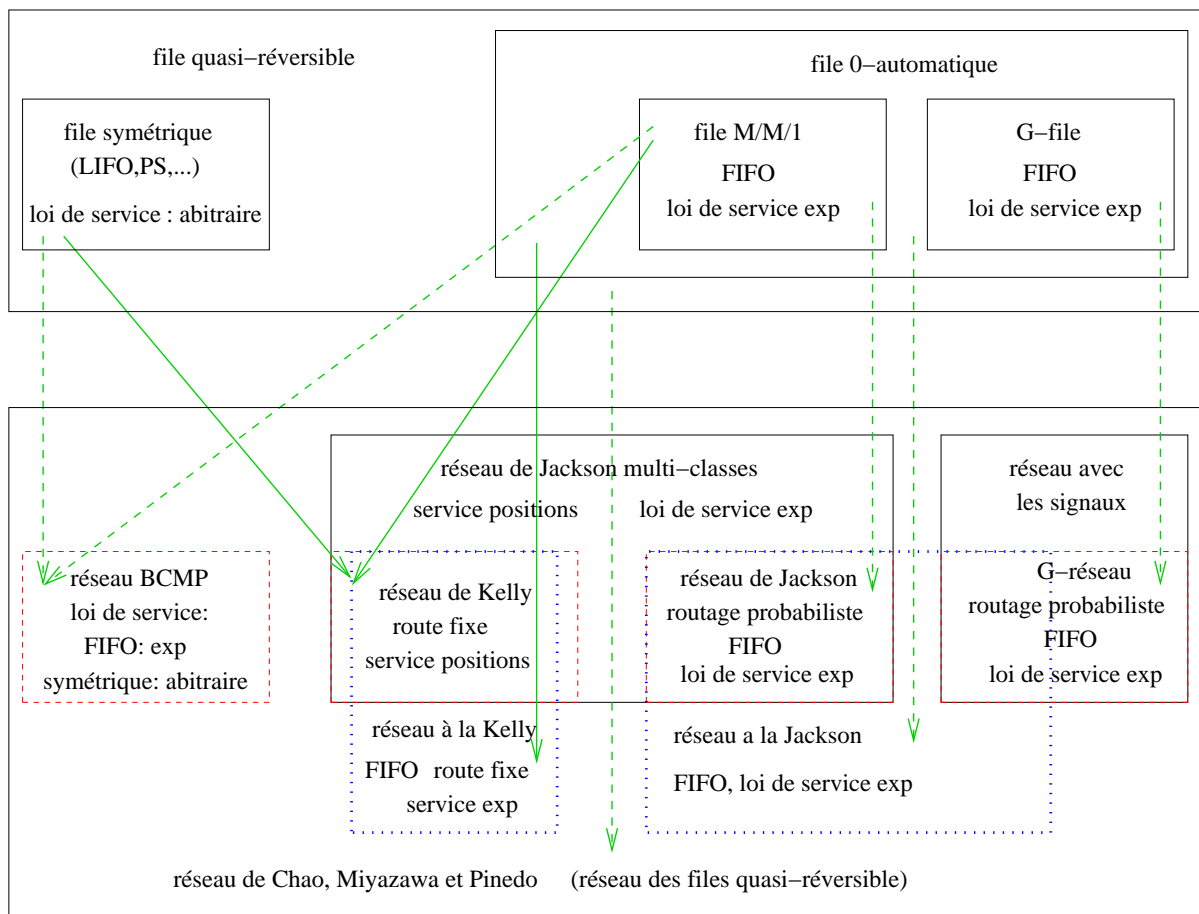


FIGURE 2.5 – La hiérarchie

Le tableau 2.5 donne la hiérarchie des files et réseaux qu'on a introduit (notons que le G-réseau mentionné est le G-réseau simple de la section 2.2.3, on ne discute pas les G-réseaux plus complexes avec d'autres disciplines de service ou avec des signaux).



# 3

## Marche aléatoire sur un groupe ou un monoïde

*Notations.* Notons respectivement par  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{R}_+$  les entiers relatifs, les entiers naturels et les réels positifs. Notons par  $\mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{R}_+^*$  les nombres entiers strictement positifs et les nombres réels strictement positifs. Le symbole  $\sqcup$  est utilisé pour l'union disjointe d'ensembles. Soit  $T$  un ensemble et  $S \subset T$ , définissons  $\mathbb{1}_S : T \rightarrow \{0, 1\}$  par  $\mathbb{1}_S(u) = 1$  si  $u \in S$  et  $\mathbb{1}_S(u) = 0$  sinon. Étant donné un ensemble  $T$ , un vecteur  $x \in \mathbb{R}^T$ , et  $S \subset T$ , posons  $x(S) = \sum_{u \in S} x(u)$ .

Rappelons le matériel nécessaire sur les marches aléatoires sur les monoïdes. La présentation suit [Mai05, MM07, Mai04].

### 3.1 Monoïde et groupe

Soit un ensemble  $\Sigma$ , le monoïde libre engendré par  $\Sigma$  est noté  $\Sigma^*$ . L'élément unité est noté  $1$  ou  $1_{\Sigma^*}$ . Comme d'habitude, les éléments de  $\Sigma$  et  $\Sigma^*$  sont appelés *lettres* et *mots*, respectivement. Un sous-ensemble de  $\Sigma^*$  est appelé *langage*. La *longueur* (nombre des lettres) d'un mot  $u$  est notée  $|u|_{\Sigma}$ .

Soit  $(X, *)$  un groupe ou un monoïde avec l'ensemble de generateurs  $\Sigma$ . L'élément unité de  $X$  est noté  $1_X$ . Si  $X$  est un groupe, l'inverse de  $x \in X$  est noté  $x^{-1}$ . Supposons toujours que  $1_X \notin \Sigma$  et dans le cas de groupe que  $x \in \Sigma \implies x^{-1} \in \Sigma$ .

Notons par  $\pi : \Sigma^* \rightarrow X$  l'homomorphisme de monoïde qui s'associe à un mot  $a_1 \cdots a_k$  de  $\Sigma^*$  l'élément  $a_1 * \cdots * a_k$  de  $X$ . Un langage  $L$  de  $\Sigma^*$  est une *section* de  $X$  si la restriction de  $\pi$  à  $L$  est une bijection. La fonction inverse  $\Phi : X \rightarrow L$  est alors appelée la fonction *forme normale*.

La *longueur* par rapport à  $\Sigma$  d'un élément  $x$  de  $X$  est :

$$|x|_{\Sigma} = \min\{k \mid x = a_1 * \cdots * a_k, a_i \in \Sigma\} \quad (3.1)$$

Le *graphe de Cayley*  $\mathcal{X}(X, \Sigma)$  de  $X$  par rapport à  $\Sigma$  est le graphe orienté avec les noeuds  $X$  et les arcs  $u \rightarrow v$  si  $\exists a \in \Sigma, u * a = v$ .

Considérons une relation  $R \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$ , et notons  $\sim_R$  la plus petite congruence de  $\Sigma^*$  telle que  $u \sim_R v$  si  $(u, v) \in R$ . Soit  $X$  le monoïde quotient  $(\Sigma^* / \sim_R)$ . On va dire que

$\langle \Sigma \mid u = v, (u, v) \in R \rangle$  est une *présentation de monoïde* de  $X$  et on écrit  $X = \langle \Sigma \mid u = v, (u, v) \in R \rangle$ .

Étant donné un ensemble  $S$ , notons  $\mathbb{F}(S)$  le groupe libre engendré (en tant que groupe) par  $S$ . Posons  $S^{-1}$  l'ensemble des inverses des générateurs. Une présentation de monoïde de  $\mathbb{F}(S)$  est

$$\mathbb{F}(S) = \langle S \sqcup S^{-1} \mid aa^{-1} = 1, a^{-1}a = 1, \forall a \in S \rangle. \quad (3.2)$$

Étant donné deux groupes ou monoïdes  $X_1$  et  $X_2$ , notons  $X_1 \star X_2$  le *produit libre* de  $X_1$  et  $X_2$ . Les éléments de  $X_1 \star X_2$  sont des suites alternées finies d'éléments de  $X_1 \setminus \{1_{X_1}\}$  et  $X_2 \setminus \{1_{X_2}\}$ , et la loi est la concaténation avec simplification. Plus rigoureusement, la définition est la suivante. Posons  $S = X_1 \sqcup X_2$ . Le *produit libre*  $X_1 \star X_2$  est défini par la présentation de monoïde :

$$\langle S \mid (\forall u, v \in S^*, \forall i \in \{1, 2\}), u1_{X_i}v = uv, (\forall a, b, c \in X_i, \text{ t.q. } c = a * b), uabv = ucv \rangle.$$

Si  $X_1$  et  $X_2$  sont des groupes, alors  $X_1 \star X_2$  est aussi un groupe. Le produit libre de plus de deux groupes ou monoïdes est défini pareillement.

Le graphe de Cayley du groupe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  est représenté sur la figure 3.1 (gauche).

## 3.2 Paire zéro-automatique

Définissons le langage  $L(X, \Sigma) \subset \Sigma^*$  des *mots localement réduits* par :

$$L(X, \Sigma) = \{u_1 \cdots u_k \mid \forall i \in \{1, \dots, k-1\}, u_i * u_{i+1} \notin \Sigma \cup \{1_X\}\}. \quad (3.3)$$

Définissons les ensembles :  $\forall a \in \Sigma$ ,

$$\text{Left}(a) = \{b \in \Sigma \mid b * a \notin \Sigma \cup \{1_X\}\}, \quad \text{Right}(a) = \{b \in \Sigma \mid a * b \notin \Sigma \cup \{1_X\}\}. \quad (3.4)$$

Observons que  $L(X, \Sigma) = \{u_1 \cdots u_k \mid \forall i, u_{i-1} \in \text{Left}(u_i)\} = \{u_1 \cdots u_k \mid \forall i, u_{i+1} \in \text{Right}(u_i)\}$ .

**Définition 3.1.** Soit  $(G, *)$  un groupe avec l'ensemble fini de générateurs finis  $\Sigma$ . La paire  $(G, \Sigma)$  est 0-automatique si  $L(G, \Sigma)$  est une section de  $G$ .

Le nom *0-automatique* vient de [Mai04]. Sous d'autres noms, cette notion avait été étudiée par exemple dans [Sta66, HS83]. Dans ces deux dernières références, on montre que si  $(G, \Sigma)$  est une paire 0-automatique, alors  $G$  est isomorphe à un *groupe libre fleuri*, c.à.d. un produit libre d'un nombre fini de groupes finis et d'un groupe libre finiment engendré. Cependant l'ensemble  $\Sigma$  peut être plus grand que l'ensemble des générateurs "naturels" d'un groupe libre fleuri. Dans [Mai04], est proposé un procédé qui calcule tout les  $\Sigma$  tels que  $(G, \Sigma)$  soit 0-automatique, pour un groupe libre fleuri donné  $G$ .

Quatre caractérisations différentes des paires 0-automatiques, complétant celle de la définition 3.1, sont rassemblées dans [Mai04, Theorem 3.6].

**Définition 3.2.** Soit  $(M, *)$  un monoïde avec l'ensemble fini de générateurs  $\Sigma$ . Supposons que  $L(M, \Sigma)$  est une section. Soit  $\Phi : M \rightarrow L(M, \Sigma)$  la fonction forme normale correspondante. Supposons que :  $\forall u \in M$  t.q  $\Phi(u) = u_1 \cdots u_k, \forall a \in \Sigma$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(u * a) &= \begin{cases} u_1 \cdots u_{k-1} & \text{si } u_k * a = 1_M \\ u_1 \cdots u_{k-1}v & \text{si } u_k * a = v \in \Sigma \\ u_1 \cdots u_k a & \text{sinon} \end{cases} , \\ \Phi(a * u) &= \begin{cases} u_2 \cdots u_k & \text{si } a * u_1 = 1_M \\ vu_2 \cdots u_k & \text{si } a * u_1 = v \in \Sigma \\ au_1 \cdots u_k & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Supposons de plus que :  $\forall a, b \in \Sigma$  t.q  $a * b \in \Sigma$ ,

$$\text{Right}(a * b) = \text{Right}(b), \quad \text{Left}(a * b) = \text{Left}(a) . \quad (3.6)$$

Alors on dit que la paire  $(M, \Sigma)$  est 0-automatique.

Dans le cas d'un groupe, les conditions (3.5) et (3.6) sont impliquées par le fait que le langage des mots localement réduits est une section.

Si  $(X, \Sigma)$  est 0-automatique avec  $X$  infini, le graphe de Cayley  $\mathcal{X}(X, \Sigma)$  a une structure d'arbre. L'élimination d'un noeud quelconque déconnecte le graphe. De plus, le nombre des circuits élémentaires passant par un noeud donné est fini.

Voici quelques exemples de paires 0-automatiques

- Soit  $X$  un groupe ou un monoïde fini. Alors  $(X, X \setminus \{1_X\})$  est 0-automatique.
- Soit  $\Sigma$  un ensemble fini. Les paires  $(\Sigma^*, \Sigma)$  et  $(\mathbb{F}(\Sigma), \Sigma \sqcup \Sigma^{-1})$  sont 0-automatiques.
- Soit  $(X_1, \Sigma_1)$  et  $(X_2, \Sigma_2)$  deux paires 0-automatiques. Alors  $(X_1 * X_2, \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2)$  est 0-automatique.

Le *graphe des successeurs*  $(\Sigma, \rightarrow)$  d'une paire 0-automatique  $(X, \Sigma)$  est le graphe orienté avec :

$$\text{noeuds} : \Sigma, \quad \text{arcs} : u \rightarrow v \text{ si } v \in \text{Right}(u) . \quad (3.7)$$

Si  $X = G$  est un groupe infini non isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , alors le graphe  $(\Sigma, \rightarrow)$  est fortement connexe [Mai05, Lemma 3.6]. De plus, si  $X$  est le produit libre de deux monoïdes ou plus, alors le graphe  $(\Sigma, \rightarrow)$  est clairement fortement connexe.

### 3.3 Marche aléatoire sur un monoïde ou un groupe

Soit  $(X, *)$  un groupe ou un monoïde avec l'ensemble de générateurs  $\Sigma$  fini. Soit  $\nu$  une mesure de probabilité sur  $\Sigma$ . Considérons la chaîne de Markov sur l'espace d'état  $X$  avec les probabilités de transition données par :

$$\forall x \in X, \forall a \in \Sigma, P_{x, x*a} = \nu(a) .$$

Cette chaîne de Markov est appelée *marche aléatoire* (à droite) (lié à)  $(X, \nu)$ .

Soit  $(x_n)_n$  une suite de v.a  $\Sigma$ -valuées i.i.d de loi  $\nu$ . Posons

$$X_0 = 1_X, \quad X_{n+1} = X_n * x_n = x_0 * \cdots * x_n . \quad (3.8)$$

Alors  $(X_n)_n$  est une réalisation de la marche aléatoire  $(X, \nu)$ . Pour tout  $x, y \in X$ , on a  $|x * y|_\Sigma \leq |x|_\Sigma + |y|_\Sigma$ . Appliquons le Théorème Ergodique Sous-additif de Kingman, on obtient le résultat suivant (remarqué pour la première fois dans ce contexte par Guivarc'h [Gui80]) : il existe  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  t.q

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|_\Sigma}{n} = \gamma \quad \text{p.s et dans } L^p, \quad (3.9)$$

pour tout  $1 \leq p < \infty$ . On appelle  $\gamma$  la *dérivée* ou la vitesse de fuite de la marche aléatoire.

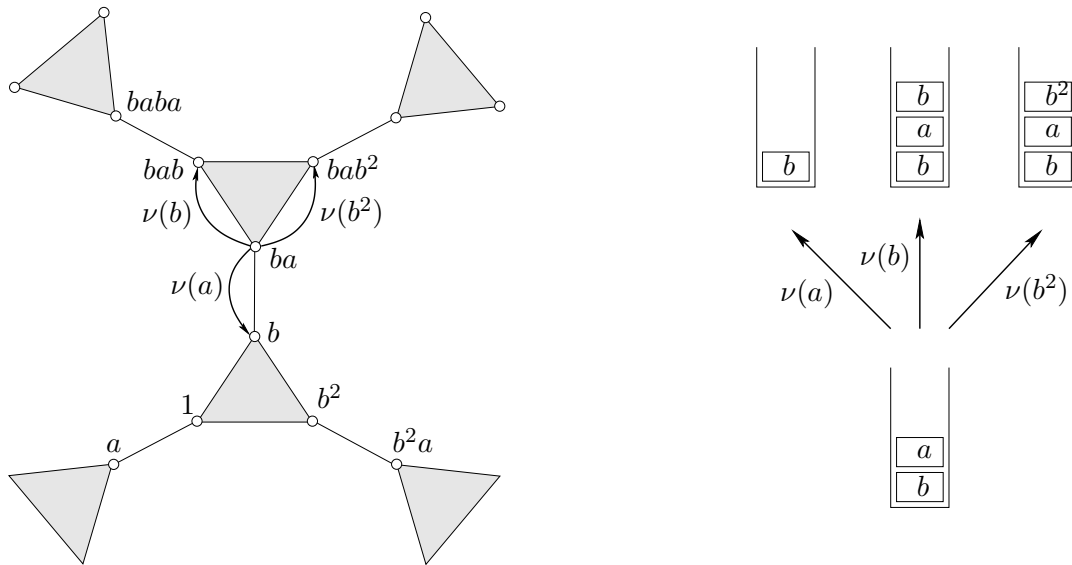


FIGURE 3.1 – La marche aléatoire  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \nu)$ .

Pour l'illustrer, considérons le groupe  $X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle \star \langle b \mid b^3 = 1 \rangle$  et l'ensemble de générateurs  $\Sigma = \{a, b, b^2 = b^{-1}\}$ . Soit  $\nu$  une mesure de probabilité sur  $\Sigma$ . Du côté gauche de la Figure 3.1, on a représenté une partie finie du graphe infini de Cayley  $\mathcal{X}(X, \Sigma)$ , et les transitions en une étape de la marche aléatoire  $(X, \nu)$  à partir de l'état  $ba$ . Du côté droit de la figure, on donne les mêmes transitions en une étape sur les éléments de groupe vus comme des mots de  $L(X, \Sigma)$  (écrits de bas en haut).

### 3.4 Marche aléatoire sur une paire 0-automatique

Il est pratique d'introduire la notion de triplet 0-automatiques.

**Définition 3.3.** *Un triplet  $(X, \Sigma, \nu)$  est dit 0-automatique si : (i)  $(X, \Sigma)$  est une paire 0-automatique avec  $X$  infini ; (ii)  $\nu$  est une mesure de probabilité dont le support est inclus dans  $\Sigma$  et engendre  $X$ .*

Les Equations de Trafic jouent un rôle essentiel dans l'étude de la marche aléatoire  $(X, \nu)$ .

**Définition 3.4** (Equations de Trafic). *Les Equations de Trafic (TE) associées à un triplet 0-automatique  $(X, \Sigma, \nu)$  sont les équations en les variables  $(x(a))_{a \in \Sigma} \in \mathbb{R}^\Sigma$  définies par :  $\forall a \in \Sigma$ ,*

$$x(a) = \nu(a)x(\text{Right}(a)) + \sum_{b \star d = a} \nu(b)x(d) + \sum_{\substack{d \in \text{Left}(a) \\ b \star d = 1_X}} \nu(b) \frac{x(d)}{x(\text{Right}(b))} x(a). \quad (3.10)$$

Une solution admissible est une solution appartenant à  $\{x \in \mathbb{R}^\Sigma \mid \forall i, x(i) > 0, \sum_i x(i) = 1\}$ .

Supposons les conditions additionnelles suivantes sur les triplets 0-automatiques  $(X, \Sigma, \nu)$  :

- C1.** le graphe  $(\Sigma, \rightarrow)$  est fortement connexe ;
- C2.** la marche aléatoire  $(X, \nu)$  est transiente.

Comme mentionné ci-dessus , la Condition **C1** est toujours satisfaite quand  $X$  est un groupe autre que  $\mathbb{Z}$ , ou lorsque  $X$  est un produit libre. La Condition **C2** n'est pas très restrictive non plus. Il y a juste deux cas où  $(X, \nu)$  n'est pas transiente : (i) le triplet  $(\mathbb{Z}, \{-1, 1\}, \{1/2, 1/2\})$  ; (ii) les triplets  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{a, b\}, \nu)$ , pour tout  $\nu$ , où  $a$  et  $b$  sont les générateurs respectifs des deux groupes cycliques. Voir [Mai05] pour le détail. Voir [Woe00, Chapter 1.B] pour les conditions générales permettant de s'assurer qu'une marche aléatoire sur un graphe infini est transiente.

Définissons :

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^\Sigma \mid \forall i, x(i) > 0, \sum_i x(i) = 1\}, \quad \bar{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{R}^\Sigma \mid \forall i, x(i) \geq 0, \sum_i x(i) = 1\}. \quad (3.11)$$

En multipliant les deux côtés de (3.10) par  $\prod_b x(\text{Right}(b))$ , on obtient un nouvel ensemble d'équations sans dénominateur. Avec un certain abus, une solution  $r$  dans  $\bar{\mathcal{B}}$  de cet dernier ensemble d'équations sera toujours appelé une solution des TE.

Le résultat suivant peut être facilement déduit de la preuve de [Mai05, Théorème 4.5].

**Proposition 3.5.** *Soit  $(X, \Sigma, \nu)$  un triplet 0-automatique. Les Equations de Trafic ont au moins une solution dans  $\bar{\mathcal{B}}$ . Supposons maintenant que les Conditions **C1-C2** sont aussi vraies. Les Equations de Trafic ont une unique solution dans  $\bar{\mathcal{B}}$ , et cette solution appartient à  $\mathcal{B}$ .*

L'intérêt de la Proposition 3.5 est que la mesure harmonique et la dérive peuvent être exprimées en fonction de la solution des TE.

Définissons l'ensemble  $L^\infty \subset \Sigma^\mathbb{N}$  par

$$L^\infty = \{u_0 u_1 \cdots u_k \cdots \in \Sigma^\mathbb{N} \mid \forall i \in \mathbb{N}, u_{i+1} \in \text{Right}(u_i)\}. \quad (3.12)$$

Un mot appartient à  $L^\infty$  ssi tous ses préfixes finis appartiennent à  $L(X, \Sigma)$ . L'ensemble  $L^\infty$  peut être vu comme la "frontière" de  $X$ .



Soit  $(X_n)_n$  une réalisation de la marche aléatoire qui est supposée être transiente. La mesure harmonique de la marche aléatoire est la mesure de probabilité  $\nu^\infty$  sur  $L^\infty$  dont les marginales fini-dimensionnelles sont définies par :

$$\forall u_1 \cdots u_k \in L(X, \Sigma), \nu^\infty(u_1 \cdots u_k \Sigma^{\mathbb{N}}) = P\{\exists N, \forall n \geq N, \Phi(X_n) \in u_1 \cdots u_k \Sigma^*\}.$$

Ceci définit bien une mesure sur  $L^\infty$  parce que la marche aléatoire est transiente, et parce que  $\Phi(X_n)$  et  $\Phi(X_{n+1})$  diffèrent par au plus un symbole par 0-automaticité. Intuitivement, la mesure harmonique  $\nu^\infty$  donne la direction dans laquelle  $(X_n)_n$  part à l'infini.

Pour une preuve du résultat suivant, voir [Mai05, Théorème 4.5] et aussi [MM07, Théorème 3.3]. Dans le cas spécifique du groupe libre, le résultat apparaît dans [DM61, SS87], voir aussi le survol [Led01].

**Théorème 3.6.** *Soit  $(X, \Sigma, \nu)$  un triplet 0-automatique satisfaisant les conditions **C1-C2**. Soit  $\hat{r} = (\hat{r}(a))_{a \in \Sigma}$  l'unique solution admissible des Equations de Trafic. Posons  $\hat{q}(a) = \hat{r}(a)/\hat{r}(\text{Right}(a))$ , pour tout  $a \in \Sigma$ . La mesure harmonique  $\nu^\infty$  de la marche aléatoire  $(X, \nu)$  est donnée par :*

$$\forall u_1 \cdots u_k, \nu^\infty(u_1 \cdots u_k \Sigma^{\mathbb{N}}) = \hat{q}(u_1) \cdots \hat{q}(u_{k-1}) \hat{r}(u_k). \quad (3.13)$$

La dérive de la marche est donnée par :

$$\hat{\gamma} = \sum_{a \in \Sigma} \nu(a) [\hat{r}(\text{Right}(a)) - \sum_{b|a*b=1_X} \hat{r}(b)]. \quad (3.14)$$

La mesure  $\nu^\infty$  est la mesure harmonique de la marche aléatoire  $(X, \nu)$  ssi pour tout  $u = u_1 \cdots u_n \in L(X, \Sigma), n \geq 2$ , on a

$$\begin{aligned} \nu^\infty(u \Sigma^{\mathbb{N}}) &= \nu(u_1) \nu^\infty(u_2 \cdots u_n \Sigma^{\mathbb{N}}) + \sum_{x*y=u_1} \nu(x) \nu^\infty(y u_2 \cdots u_n \Sigma^{\mathbb{N}}) \\ &+ \sum_{\substack{x \in \text{Left}(u_1) \\ y*x=1_X}} \nu(y) \nu^\infty(x u \Sigma^{\mathbb{N}}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pour montrer que la mesure harmonique est de la forme (3.13), on va employer la méthode utilisée pour calculer la distribution stationnaire d'un réseau de Jackson :

- Supposons que  $\nu^\infty$  est de la forme (3.13).
- Substituons  $\nu^\infty$  dans (3.15) et simplifions, on retrouve les équations de trafic (3.10). Substituons  $\nu^\infty$  sous la forme (3.13) dans (3.15), cette équation est équivalente à

$$\hat{r}(u_1) = \nu(u_1) \hat{r}(\text{Right}(u_1)) + \sum_{x*y=u_1} \nu(x) \hat{r}(y) \frac{\hat{r}(\text{Right}(u_1))}{\hat{r}(\text{Right}(y))} + \sum_{\substack{x \in \text{Left}(u_1) \\ y*x=1_X}} \nu(y) \frac{\hat{r}(x) \hat{r}(u_1)}{\hat{r}(\text{Right}(x))} \quad (3.16)$$

On a  $\text{Left}(y) = \text{Left}(u_1)$  quand  $x * y = u_1$ , on en déduit que (3.16) sont les équations de trafic (3.10).

**La dérive de la marche aléatoire sur le produit libre  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .** Considérons le triplet 0-automatique  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \Sigma = \{a, a^2, b, b^2\}, \nu)$ , où  $\nu(a) = \nu(b) = p$ ,  $\nu(a^2) = \nu(b^2) = q = 1/2 - p$ . D'après Théorème 3.6, il existe une unique solution des Equations de Traffic correspondantes. Utilisant la symétrie, on a  $\hat{r}(a) = \hat{r}(b)$  et  $\hat{r}(a^2) = \hat{r}(b^2)$ .

L'unique solution admissible des TE est calculée explicitement et donnée par

$$\hat{r}(a) = \hat{r}(b) = \frac{4p - 3 + \sqrt{16p^2 - 8p + 5}}{4(4p - 1)}, \quad \hat{r}(a^2) = \hat{r}(b^2) = \frac{4p + 1 - \sqrt{16p^2 - 8p + 5}}{4(4p - 1)}.$$

Donc, la dérive de la marche aléatoire est

$$\hat{\gamma} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{16p^2 - 8p + 5}. \quad (3.17)$$

On va donner la définition des monoïde ou groupes libres fleuris. Un monoïde libre fleuri avec l'ensemble de générateurs convenables est 0-automatique, mais le contraire n'est pas vrai. Par contre, on a dit que si  $(G, \Sigma)$  est 0-automatique avec  $G$  un groupe, alors  $G$  est isomorphe à un groupe libre fleuri. L'ensemble des monoïde ou groupes libres fleuris est plus petit que l'ensemble des groupes ou monoïdes associés à une paire 0-automatique, mais leur structure est plus facile à étudier.

## 3.5 Monoïde et groupe libre fleuri

Un *monoïde libre fleuri* est un monoïde  $X$  de la forme

$$X = S^* \star \mathbb{F}(T) \star X_1 \star \cdots \star X_k, \quad (3.18)$$

où  $S$  et  $T$  sont des ensembles finis et  $X_1, \dots, X_k$  sont des monoïde finis. Un *groupe libre fleuri* est une monoïde libre fleuri qui est aussi un groupe. Un monoïde libre fleuri  $X$  défini comme dans (3.18) est un groupe libre fleuri ssi  $S = \emptyset$  et  $X_1, \dots, X_k$  sont des groupes.

Définissons

$$\Sigma = S \sqcup T \sqcup T^{-1} \sqcup X_1 \setminus \{1_{X_1}\} \sqcup \cdots \sqcup X_k \setminus \{1_{X_k}\}. \quad (3.19)$$

L'ensemble  $\Sigma$  est un ensemble fini de générateurs de  $X$ , qu'on appelle générateurs *naturels*.

On voit facilement que l'ensemble  $L(X, \Sigma)$  défini en (3.3) est en bijection avec les éléments du groupe. Dans la suite, on identifie souvent  $X$  et  $L(X, \Sigma)$ . Ce qui suit est une conséquence de la définition d'un monoïde libre fleuri :

$$a, b \in \Sigma, \quad a * b \in \Sigma \cup \{1_X\} \iff b * a \in \Sigma \cup \{1_X\}. \quad (3.20)$$

Pour démontrer (3.20), il suffit de le vérifier cas par cas. Il est pratique d'introduire les ensembles :  $\forall a \in \Sigma$ ,

$$\text{Next}(a) = \{b \in \Sigma \mid b * a \notin \Sigma \cup \{1_X\}\} = \{b \in \Sigma \mid a * b \notin \Sigma \cup \{1_X\}\}.$$

Observons que  $\text{Next}(a) = \text{Right}(a) = \text{Left}(a)$  et que  $L(X, \Sigma) = \{u_1 \cdots u_k \mid \forall i, u_{i-1} \in \text{Next}(u_i)\} = \{u_1 \cdots u_k \mid \forall i, u_{i+1} \in \text{Next}(u_i)\}$ .

La prochaine propriété, utilisée ultérieurement, est une autre conséquence directe de la définition d'un monoïde libre fleuri :

$$a * b \in \Sigma \implies \text{Next}(a) = \text{Next}(b) = \text{Next}(a * b). \quad (3.21)$$

A l'exception du cas  $X = \mathbb{F}(T), |T| = 1$ , observons que le graphe des successeurs  $(\Sigma, \rightarrow)$  est fortement connexe.

On va donner quelques l'exemple de monoïdes libres fleuris. Le produit libre d'un nombre fini de monoïdes de la forme suivant : le monoïde libre généré par un seul générateur  $\mathbb{N} \sim \{a\}^*$  ; le groupe libre généré par un générateur  $\mathbb{Z} \sim \mathbb{F}(a)$  ; le monoïde booléan  $\mathbb{B} = \langle a \mid a^2 = a \rangle$  ; le groupe cyclique  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$ . Par exemple :  $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \star \mathbb{Z}, \mathbb{N} \star \mathbb{B}, \mathbb{N} \star \mathbb{B} \star \mathbb{Z}, \mathbb{N} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \dots$

La Figure 3.2 donne les graphes de Cayley  $\mathcal{X}(\mathbb{N} \star \mathbb{B} = \{a\}^* \star \langle b \mid b^2 = b \rangle, \{a, b\})$  et  $\mathcal{X}(\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{a^k\}_{k \in \mathbb{Z}} \star \langle b \mid b^3 = 1 \rangle, \{a, b, b^2\})$

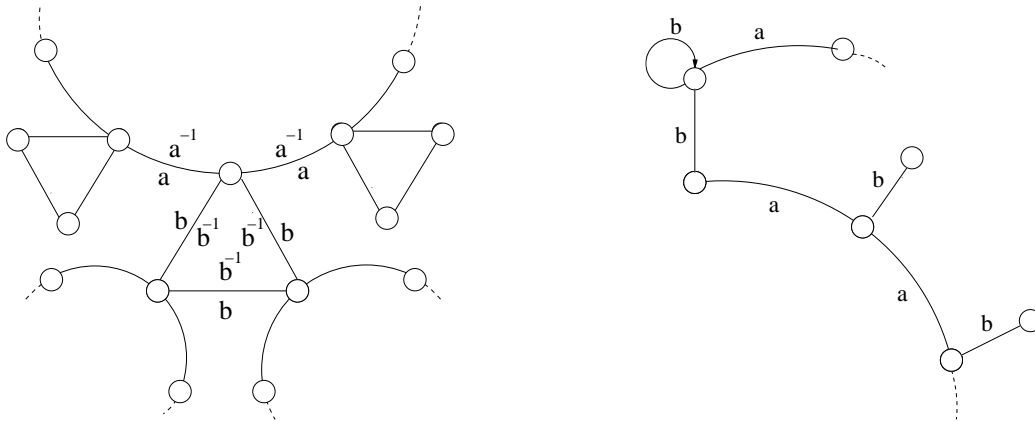


FIGURE 3.2 – Les graphes de Cayley de  $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{N} \star \mathbb{B}$

### 3.6 Marche aléatoire sur un monoïde ou groupe libre fleuri

Il est pratique d'introduire la notion d'un triplet libre fleuri.

**Définition 3.7.** Un triplet  $(X, \Sigma, \nu)$  est libre fleuri si : (i)  $X$  est un monoïde libre fleuri infini qui n'est pas isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ; (ii)  $\Sigma$  est un ensemble de générateurs naturels ; (iii)  $\nu$  est une mesure de probabilité dont le support est inclu dans  $\Sigma$  et engendre  $X$ .

On voit bien que tous les triplets libres fleuris sont 0-automatiques.

**Proposition 3.8.** Si  $(X, \Sigma, \nu)$  est un triplet libre fleuri, alors la marche aléatoire  $(X, \nu)$  est transiente.

Comme mentionné dans la section 3.4, il y seulement deux cas où  $(X, \nu)$  n'est pas transiente. Comme  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sont exclus dans la définition 3.7, alors la marche aléatoire  $(X, \nu)$  est transiente. De plus, le graphe des successeurs  $(\Sigma, \rightarrow)$  est fortement connexe. Donc un triplet libre fleuri vérifie les Conditions **C1-C2**.

Le cas  $X = \mathbb{Z}$  est spécifique. Certains des résultats ci-dessous restent vrais mais pas tous. Par soucis de simplicité, nous traitons ce cas séparément dans Section 4.5.2.

Le produit libre  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  est libre fleuri. Le Figure 3.1 est aussi un exemple de marche aléatoire sur un groupe libre fleuri. Un autre exemple de la marche aléatoire sur le groupe libre fleuri  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  est illustré dans la Figure 3.3

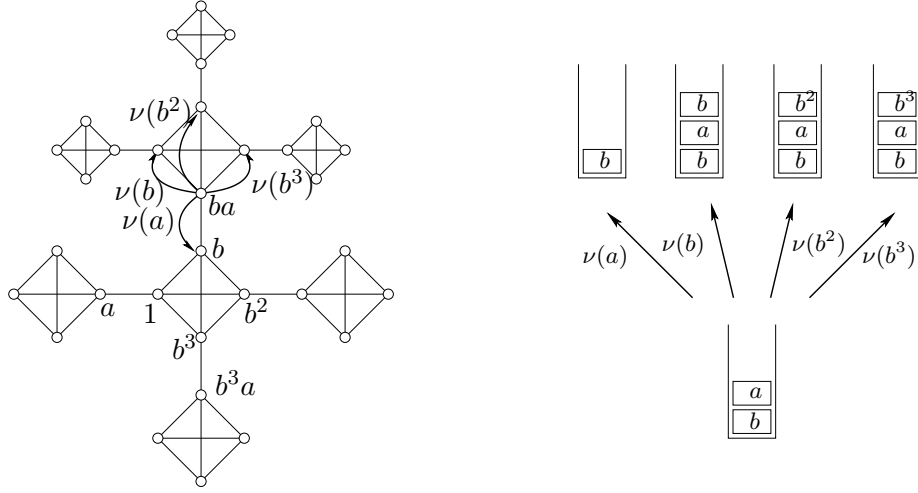


FIGURE 3.3 – La marche aléatoire  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \nu)$ .

Un triplet libre fleuri est 0-automatique satisfaisant **C1-C2**, donc tous les résultats dans la Section 3.4 sont encore valables, et se réécrire comme suit :

**Définition 3.9.** Les Equations de Trafic (TE) associées à un triplet libre fleuri  $(X, \Sigma, \nu)$  sont les équations des variables  $(x(a))_{a \in \Sigma} \in \mathbb{R}_+^\Sigma$  définies par :  $\forall a \in \Sigma$ ,

$$x(a) = \nu(a)x(\text{Next}(a)) + \sum_{b*d=a} \nu(b)x(d) + \sum_{\substack{d \in \text{Next}(a) \\ b*d=1_X}} \nu(b) \frac{x(d)}{x(\text{Next}(d))} x(a). \quad (3.22)$$

Une solution admissible est une solution appartenant à  $\mathcal{B}$ .

**Proposition 3.10.** Soit  $(X, \Sigma, \nu)$  un triplet libre fleuri. Les Equations de Trafic ont une unique solution admissible.

**Théorème 3.11.** Soit  $(X, \Sigma, \nu)$  un triplet libre fleuri. Soit  $\hat{r} = (\hat{r}(a))_{a \in \Sigma}$  l'unique solution admissible des Equations de Trafic. Posons  $\hat{q}(a) = \hat{r}(a)/\hat{r}(\text{Next}(a))$ , pour tout  $a \in \Sigma$ . La mesure harmonique  $\nu^\infty$  de la marche aléatoire  $(X, \nu)$  est donnée par :

$$\forall u_1 \cdots u_k, \quad \nu^\infty(u_1 \cdots u_k \Sigma^{\mathbb{N}}) = \hat{q}(u_1) \cdots \hat{q}(u_{k-1}) \hat{r}(u_k). \quad (3.23)$$

La dérive de la marche aléatoire est donnée par :

$$\hat{\gamma} = \sum_{a \in \Sigma} \nu(a) [\hat{r}(\text{Next}(a)) - \sum_{b|a*b=1_X} \hat{r}(b)] . \quad (3.24)$$

# 4

## Zero-automatic queues

### Résumé

Les files 0-automatiques sont caractérisées par une salle d'attente évoluant suivant un mécanisme de marche aléatoire sur un groupe ou un monoïde infini. Le résultat saillant est que toutes les files 0-automatiques ont une distribution stationnaire à forme produit et un processus de départ Poisson. En considérant les deux cas les plus simples et aussi extrêmes des files 0-automatiques, nous récupérons la file d'attente simple  $M/M/1$ , et la  $G$ -file de Gelenbe avec les clients positifs et négatifs

Firstly, we introduce the 0-automatic queues associated with the 0-automatic triples. Then, we present the simpler model of queues associated with the plain triples. The presentation closely follows [DTM05, DTM07].

Note that in this thesis, we use the modification of Chao, Miyazawa and Pinedo as in section 2.1.4 : the transition rate  $Q(x, x)$  is defined as the transition rate from state  $x$  back to itself for each  $x$ .

### 4.1 The Zero-Automatic Queue

We first define the 0-automatic queue informally, before doing it formally in Definition 4.1.

Consider a 0-automatic triple  $(X, \Sigma, \nu)$ . The associated 0-automatic queue is formed by a simple single server queue with FIFO discipline and an infinite capacity buffer in which the buffering occurs according to the random walk  $(X, \nu)$ . It is a multi-class queue (classes  $\Sigma$ ) but the class does not influence the way customers get served, only the way they get buffered.

More precisely, the instants of customer arrivals are given by a Poisson process of rate  $\lambda$ , and each customer carries a mark, or *class*, which is an element of  $\Sigma$ . The sequence of marks is i.i.d. of law  $\nu$ . Upon arrival, a new customer interacts with the customer presently at the back-end of the buffer, and depending on their respective classes, say  $b$  and  $a$ , one of three possible events occurs : (i) if  $b * a = 1_X$ , then the two customers leave the queue ; (ii) if  $b * a = c \in \Sigma$ , then the two customers merge to create a customer of type

$c$ ; (iii) otherwise, customer  $b$  takes place at the back-end of the buffer, behind customer  $a$ . In the mean time, at the front-end of the buffer, the customers are served one by one and at constant rate  $\mu$  by the server. To be complete, one needs to specify how customers are incorporated when the buffer is empty. Several variants may be considered, and we view this “boundary condition” as an additional parameter of the model. The resulting flexibility in the definition of a 0-automatic queue will turn out to be a crucial point.

According to the above description, the queue-content (the sequence of classes of customers in the buffer) is a continuous time jump Markov process. The more formal definition of the queue is given via the infinitesimal generator of this process.

**Definition 4.1** (Zero-automatic queue). *Consider a 0-automatic triple  $(X, \Sigma, \nu)$ . Let  $L(X, \Sigma)$  be the set of words defined in (3.3). Consider  $r \in \bar{\mathbb{B}}$ , see (3.11), and  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ . The 0-automatic queue of type  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$  is defined as follows. The queue-content  $(M(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  is a continuous time jump Markov process on the state space  $L(X, \Sigma)$  with infinitesimal generator  $Q$  defined by :  $\forall u = u_n \cdots u_1 \in L(X, \Sigma) \setminus \cup_{a \in \Sigma} \{a\}^*$ ,*

$$\begin{cases} Q(u, bu) & = \lambda \nu(b) , & \forall b \in \text{Left}(u_n) \\ Q(u, cu_{n-1} \cdots u_1) & = \lambda \sum_{b|b*u_n=c} \nu(b) , & \forall c \in \Sigma, \exists b \in \Sigma, b * u_n = c \\ Q(u, u_{n-1} \cdots u_1) & = \lambda \sum_{b|b*u_n=1_X} \nu(b) \\ Q(u, u_n \cdots u_2) & = \mu \end{cases} \quad (4.1)$$

and, for all  $a \in \Sigma$  such that  $a \in \text{Right}(a)$ , and for all  $n \geq 1$ ,

$$\begin{cases} Q(a^n, ba^n) & = \lambda \nu(b) , & \forall b \in \text{Left}(a) \\ Q(a^n, ca^{n-1}) & = \lambda \sum_{b|b*a=c} \nu(b) , & \forall c \in \Sigma, \exists b \in \Sigma, b * a = c \\ Q(a^n, a^{n-1}) & = \mu + \lambda \sum_{b|b*a=1_X} \nu(b) \end{cases} \quad (4.2)$$

and, finally, the boundary condition is,

$$Q(1_{\Sigma^*}, a) = \lambda \nu(a) r(\text{Right}(a)), \forall a \in \Sigma ; Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*}) = \lambda \left( 1 - \sum_a \nu(a) r(\text{Right}(a)) \right). \quad (4.3)$$

We denote by  $M/M/(X, \Sigma)$  any 0-automatic queue of type  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$ .

*Remark 4.2.* The intuition behind the form of the boundary condition is as follows : the buffer-content is viewed as the visible part of an iceberg consisting of an infinite word of  $L^\infty$ , see (3.12). When the buffer is empty, new customers are incorporated depending on the invisible part of the iceberg, whose first marginal is assumed to be  $r$ . This last point will find an a-posteriori justification in Theorem 4.13. Another kind of this “boundary condition” was seen in 2.2.5, when Chao, Miyazawa and Pinedo modify the network with positive and negative signals.

The two simplest examples of 0-automatic queues are those, which associated with (i) the free monoid  $(\mathbb{N}, +)$  and (ii) the free group  $(\mathbb{Z}, +)$ . They correspond to well-known objects. : (i) the simple  $M/M/1$  queue, and (ii) a variation of the  $G$ -queue or queue with positive and negative customers. Let us detail this.

**The simple queue.** Consider the free monoid  $X = \{a\}^* = \{a^k, k \in \mathbb{N}\}$  over the single generator set  $\Sigma = \{a\}$ . Hence, for any  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ , there is only one possible associated queue :  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$ , where  $\nu(a) = r(a) = 1$ . By specializing the infinitesimal generator  $Q$  given in Definition 4.1, we get :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$Q(a^n, a^{n+1}) = \lambda, \quad Q(a^{n+1}, a^n) = \mu.$$

This is the simple  $M/M/1/\infty$  FIFO queue with arrival rate  $\lambda$  and service rate  $\mu$ .

**The G-queue.** Consider the free group  $X = \mathbb{F}(a) = \{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$  and the set of generators  $\Sigma = \{a, a^{-1}\}$ . Let  $\nu$  be a probability measure on  $\Sigma$  such that  $\nu(a) > 0, \nu(a^{-1}) > 0$ . Consider  $r \in \mathcal{B}$  and  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ .

The 0-automatic queue  $(\mathbb{F}(a), \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$  has an infinitesimal generator  $Q$  given by :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} Q(a^n, a^{n+1}) &= \lambda\nu(a), & Q(a^{n+1}, a^n) &= \mu + \lambda\nu(a^{-1}) \\ Q(a^{-n}, a^{-(n+1)}) &= \lambda\nu(a^{-1}), & Q(a^{-(n+1)}, a^{-n}) &= \mu + \lambda\nu(a) \\ Q(1_{\Sigma^*}, a) &= \lambda\nu(a)r(a), & Q(1_{\Sigma^*}, a^{-1}) &= \lambda\nu(a^{-1})r(a^{-1}), \end{cases}$$

and the term  $Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*}) = \lambda - Q(1_{\Sigma^*}, a^{-1}) - Q(1_{\Sigma^*}, a)$ .

This is close to the mechanism of the G-queue, a queue with positive and negative customers introduced by Gelenbe [Gel91, GP98]. With respect to the G-queue, one originality of the  $M/M/(\mathbb{F}(a), \Sigma)$  queue is that negative and positive customers play symmetrical roles. Another one is the treatment of the boundary condition.

The definition of 0-automatic queues has the flexibility to allow many variations and extensions, see Section 4.5.2 for a couple of examples.

**Extension.** It is possible to generalize Definition 4.1 in order to define a 0-automatic queue of type  $GI/GI/(X, \Sigma)$ , resp.  $G/G/(X, \Sigma)$ . Roughly, the description would go as follows. The buffering mechanism is kept unchanged ; the sequence of inter-arrival times and classes of customers is i.i.d. (resp. stationary and ergodic) ; the sequence of service times at the server is i.i.d. (resp. stationary and ergodic) and independent of the arrivals.

### 4.1.1 Comparison with other models in the literature

Under stability condition, we will see that a 0-automatic queue has the ‘‘Poisson output’’ property. Also, a 0-automatic queue is ‘‘quasi-reversible’’, at least in the sense of Chao, Miyazawa, and Pinedo, see Section 2.1.4. There exist many examples of queues with such properties, see for instance Kelly [Kel79] or [CMP99]. However, 0-automatic queues are quite different from the existing models.

Let us detail the comparison with the models in [CMP99], see also [CM00], which were introduced in Section 2.2.5. Their model is a wide generalization of Gelenbe’s G-queue with signals, batch arrivals, and batch departures. In a sense, 0-automatic queues can also be viewed as a wide generalization of G-queues. Other common features between the models include : non-linear traffic equations, an output rate different from the input



rate, and subtle boundary conditions to get a product form. Despite these similarities, the models are quite orthogonal. One big novelty of 0-automatic queues is the possibility for two customers to merge and create a customer with a new type. The algebraic foundation of 0-automatic queues is another originality.

It is also worth comparing the 0-automatic queue with another model for queues introduced by Yeung and Sengupta [YS94], see also He [He.03] (the *YS model* in the following).

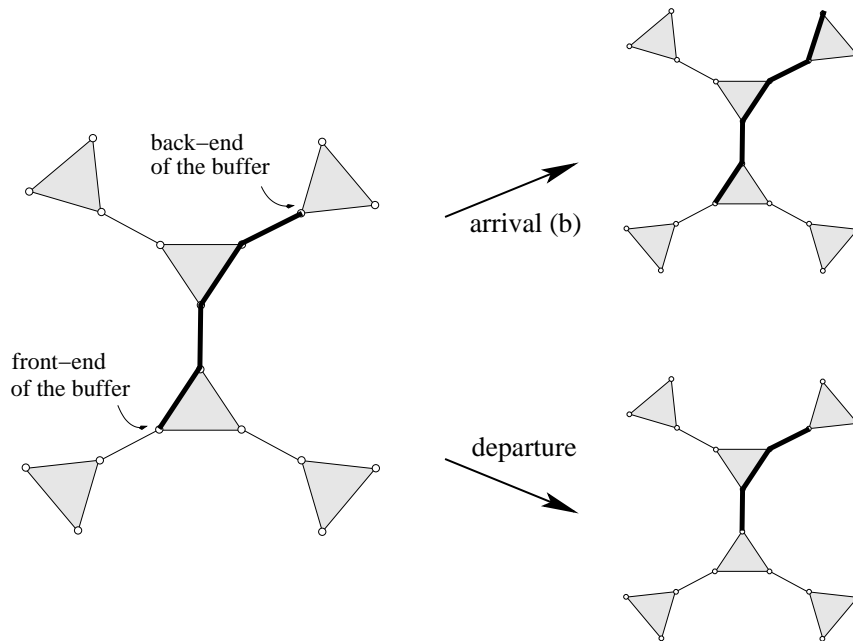


FIGURE 4.1 – Effect of an arrival and a departure on the content of the buffer in a 0-automatic queue built on the group  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

A common feature is the structure of the state space : a tree for the YS model (or the cartesian product of a tree and a finite set), and a more general tree-like graph for the 0-automatic queue. In particular, both models correspond to multi-class queues, and the buffer content is coded by a word over the alphabet of classes. Second common feature, the effect of a new arrival is either to add, to modify the class of, or to remove, a customer at the back-end of the buffer (in the YS model, the removal/modification may affect several customers at the back-end of the buffer). Now, this is the first main difference, departures occur at the front-end of the buffer in the 0-automatic queue, and at the back-end in the YS model. Therefore, the former is a FIFO queue while the latter is a LIFO queue. We have illustrated the FIFO mechanism of the 0-automatic queue in Figure 4.1. The second important difference concerns the type of results which are proved. In a stable 0-automatic queue, the buffer content has a “product form” stationary distribution, see Theorem 4.13. In the YS model, it has only a “matrix product form”, see [YS94, Section 2] and getting the stronger “product form” requires severe additional assumptions, see [YS94, Section 6]. To conclude the comparison, here again, the original flavor of the 0-automatic queue comes

from the underlying group or monoid structure. It is this algebraic foundation which can be accounted for the ability to get the strong product form results.

## 4.2 Stability Condition for a Zero-Automatic Queue

Throughout Sections 4.2 and 4.3, the model is as follows. Let  $(X, \Sigma, \nu)$  be a 0-automatic triple satisfying the Conditions **C1-C2**. Fix  $\lambda$  and  $\mu$  in  $\mathbb{R}_+^*$  and  $r$  in  $\mathcal{B}$ . Consider the 0-automatic queue  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$ .

Let  $M = (M_t)_t$  be the queue-content process, and  $Q$  the infinitesimal generator. Next Lemma is a direct consequence of Condition **C1**.

**Lemma 4.3.** *The process  $M$  is irreducible.*

The aim of this Section is to prove Proposition 4.4 which characterizes the stability region of the 0-automatic queue.

**Proposition 4.4.** *Let  $\hat{\gamma}$  be the drift of the random walk  $(X, \nu)$ . We have :*

$$\begin{aligned} [\lambda \hat{\gamma} < \mu] &\iff M \text{ ergodic} \\ [\lambda \hat{\gamma} = \mu] &\iff M \text{ null recurrent} \\ [\lambda \hat{\gamma} > \mu] &\iff M \text{ transient.} \end{aligned}$$

Consider an excursion of  $M$  from the instant  $t = 0$  at which it is assumed to leave state  $1_{\Sigma^*}$ , to the instant  $R_M$  which corresponds to the first return to state  $1_{\Sigma^*}$ . Recall that  $M$  is transient iff  $P\{R_M = \infty\} > 0$ , and ergodic iff  $E[R_M] < \infty$ .

It is convenient to use the following representation for  $M$ . Let  $A = (A_0 = 0, A_1, A_2, \dots)$  where  $(A_1, A_2, \dots)$  are the time points of a time-stationary Poisson process of rate  $\lambda$  on  $\mathbb{R}_+$ . Let  $N_A = (N_A(t))_t$  be the corresponding counting process. Let  $N_D = (N_D(t))_t$  be the counting process of a time-stationary Poisson process of rate  $\mu$  on  $\mathbb{R}_+$ . Let  $\tilde{X} = (\tilde{X}_n)_n$  be a realization of the random walk  $(X, \nu)$  viewed as evolving on  $L(X, \Sigma)$ , see (3.8). Assume that  $A, \tilde{X}$ , and  $N_D$  are mutually independent. Let  $(X_t)_t$  be the continuous-time jump Markov process on the state space  $L(X, \Sigma)$  defined by :

$$X_t = \tilde{X}_{n+1} \text{ on } [A_n, A_{n+1}).$$

For all  $t$  in the interval  $[0, R_M)$ , we have :

$$|M_t|_{\Sigma} = |X_t|_{\Sigma} - N_D(t). \tag{4.4}$$

Here  $X_t$  is the queue-content at time  $t$  if no service has been completed. Observe that the first letter of  $X_t$  corresponds to the front-end of the buffer (the right-end in Figure 1.1), and the last letter to the back-end (the left-end in Figure 1.1).

The counting process of a Poisson process satisfies a Strong Law of Large Numbers. We get, a.s.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_A(t)}{t} = \lambda, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_D(t)}{t} = \mu. \tag{4.5}$$

We also have, a.s.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{X}_n|_\Sigma}{n} = \hat{\gamma},$$

where  $\hat{\gamma}$  is the drift of the random walk  $(X, \nu)$ . So we have, a.s.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_t|_\Sigma}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|X_t|_\Sigma}{N_A(t)} \times \frac{N_A(t)}{t} = \lambda \hat{\gamma}. \quad (4.6)$$

We can now prove the following.

**Lemma 4.5.** *If  $\lambda \hat{\gamma} < \mu$  then  $M$  is recurrent. If  $\lambda \hat{\gamma} > \mu$  then  $M$  is transient.*

*Proof.* We show the first statement by contraposition. If  $M$  is transient then  $P\{R_M = \infty\} > 0$ . Using (4.4) and (4.5), we obtain that a.s. on the event  $\{R_M = \infty\}$ , we have :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|M_t|_\Sigma}{t} = \lambda \hat{\gamma} - \mu.$$

To avoid a contradiction, we must have  $\lambda \hat{\gamma} - \mu \geq 0$ .

Now assume that  $\lambda \hat{\gamma} > \mu$ . Using the independence of  $(X_t)_t$ , and  $N_D$ , and the regenerative properties of  $R_M$ , it is easily shown that  $P\{\forall t, |M_t|_\Sigma > 0\} > 0$ . In particular  $P\{R_M = \infty\} > 0$  and  $M$  is transient.  $\square$

To get the stronger results in Proposition 4.4, the idea is to approximate the 0-automatic queue by a simple queue with a Markov additive arrival process, and then to use standard results from queueing theory.

Since  $(X_t)_t$  is transient (condition **C2**), there exists an a.s. finite  $T_0$  such that  $\forall t \geq T_0, |X_t|_\Sigma \geq 1$ . For notational simplicity, assume that  $T_0 = 0$ . Define the random variables :  $\forall k \geq 1$ ,

$$T_k = \inf\{t \mid \forall s \geq t, |X_s|_\Sigma \geq k + 1\}, \quad \tau_k = T_{k+1} - T_k. \quad (4.7)$$

The r.v.'s  $T_k$  are a.s. finite because  $(X_t)_t$  is transient, and we have :  $(T_0 = 0) < T_1 < T_2 < \dots$  a.s.

By transience,  $\lim_t X_t$  is a (random) infinite word on the alphabet  $\Sigma$ , let us write it as  $\lim_t X_t = U_0 U_1 U_2 \dots$ . By definition, see Chapter 3, the law of  $U_1 U_2 \dots$  is the harmonic measure  $\nu^\infty$  of the random walk  $(X, \nu)$ . Observe that :

$$X_{T_k}^- = U_0 \dots U_{k-1}, \quad \forall t \geq T_k, X_t = U_0 \dots U_{k-1} Y_t, \quad Y_t \in L(X, \Sigma) \setminus \{1_{\Sigma^*}\}.$$

According to Theorem 3.6, we have :  $\forall u_0 \dots u_{k-1} \in L(X, \Sigma)$ ,

$$\begin{aligned} P\{U_0 \dots U_{k-1} = u_0 \dots u_{k-1}\} &= \frac{\hat{r}(u_0)}{\hat{r}(\text{Right}(u_0))} \dots \frac{\hat{r}(u_{k-2})}{\hat{r}(\text{Right}(u_{k-2}))} \hat{r}(u_{k-1}) \\ &= \hat{r}(u_0) \frac{\hat{r}(u_1)}{\hat{r}(\text{Right}(u_0))} \dots \frac{\hat{r}(u_{k-1})}{\hat{r}(\text{Right}(u_{k-2}))}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

It follows that  $(U_k)_k$  is a Markov chain with initial distribution  $\hat{r}$  and transition matrix  $P$  given by :

$$\forall a, b \in \Sigma, \quad P_{a,b} = \begin{cases} \hat{r}(b)/\hat{r}(\text{Right}(a)) & \text{if } b \in \text{Right}(a) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

The matrix  $P$  is irreducible as a direct consequence of Condition **C1**. Let  $\pi$  be the stationary distribution of  $P$  characterized by  $\pi P = \pi$ . In general, the Markov chain  $(U_k)_k$  is not stationary, i.e.  $\hat{r}$  is different from  $\pi$ . (See [MM07, Proposition 3.6] for a sufficient condition on  $(X, \nu)$  ensuring that  $\hat{r} = \pi$ .)

Consider now the sequence  $(U, \tau) = ((U_k, \tau_k))_k$ . A consequence of the above is that  $(U, \tau)$  is a Markov chain with transition function depending only on the first coordinate. According to the classical terminology, the sequence  $(T_k)_k$  is a *Markov additive process (MAP)*.

Consider the simple queue of type MAP/M/1 with arrival process  $(T_k)_k$ , and a service process driven by  $N$ . Let  $(\sigma_k)_k$  be the corresponding sequence of service times. We deduce from (4.5), that a.s. and in  $L^1$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \tau_i) = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda \hat{\gamma}}.$$

Let  $Z = (Z_t)_t$  be the queue-length process of this queue. Let  $R_Z$  be the first instant of return to 0 for the process  $Z$ . Applying standard results for MAP/GI/1 queues, see for instance [Asm87, Prop. 4.2, Chapter X], we get :

$$[\lambda \hat{\gamma} < \mu] \implies [E[R_Z] < \infty] \tag{4.9}$$

$$[\lambda \hat{\gamma} = \mu] \implies [R_Z \text{ a.s. finite, } E[R_Z] = \infty]. \tag{4.10}$$

Concentrating on the mechanism of the 0-automatic queue, it is not difficult to see that :

$$[T_k \leq R_Z < T_{k+1}] \implies [T_k \leq R_Z \leq R_M < T_{k+1}]. \tag{4.11}$$

Hence, the queue MAP/M/1 is a good approximation of the 0-automatic queue. In particular, the two implications in (4.9)-(4.10) also hold for  $R_M$ . In view of Lemma 4.5, this completes the proof of Proposition 4.4.

**Remark.** The above proof does not rely on an essential way on the Markovian assumption. For instance, modulo some care, an analog of Proposition 4.4 can clearly be written for a 0-automatic queue of type GI/GI/(X,  $\Sigma$ ).

## 4.3 Stationary Distribution of a Stable Queue

### 4.3.1 The Twisted Traffic Equations

The Traffic Equations, see Definition 3.4, play a central role in studying the random walk. We now introduce equations which play a similar role for the queue.

**Definition 4.6** (Twisted Traffic Equations). *The Twisted Traffic Equations TTE associated with  $(X, \Sigma, \nu, \lambda, \mu)$  are the equations of the variables  $(\eta, x)$ ,  $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $x = (x(a))_{a \in \Sigma} \in$*

$\mathbb{R}_+^\Sigma$ , defined by :

$$\begin{aligned} \eta(\lambda + \mu)x(a) &= \eta^2\mu x(a) + \lambda\nu(a)x(\text{Right}(a)) + \eta\lambda \sum_{b*d=a} \nu(b)x(d) \\ &\quad + \eta^2\lambda \sum_{\substack{d \in \text{Left}(a) \\ b*d=1_X}} \nu(b) \frac{x(d)}{x(\text{Right}(d))} x(a). \end{aligned} \quad (4.12)$$

To get a hint of the future role of the TTE, let us examine the case  $(X, \Sigma) = (\{a\}^*, \{a\})$  considered at the end of Section 4.1. Recall that there is only one possible variant for the queue  $M/M/(\{a\}^*, \{a\})$  which is equivalent to the simple  $M/M/1$  queue. By simplifying (4.12), we get :

$$\rho(\lambda + \mu) = \rho^2\mu + \lambda. \quad (4.13)$$

Compare this with the global balance equations of the  $M/M/1$  queue :

$$\pi(n)(\lambda + \mu) = \pi(n-1)\lambda + \pi(n+1)\mu. \quad (4.14)$$

By substituting  $\pi(n) = \pi(0)\rho^n$  in (4.14), we recognize (4.13).

According to Proposition 3.5, there is a unique admissible solution to the Traffic Equations, that we denote by  $\hat{r} = (\hat{r}(a))_{a \in \Sigma}$ . We denote by  $\hat{\gamma}$  the drift of the random walk  $(X, \nu)$ .

Consider  $x \in \bar{\mathcal{B}}$ . Define

$$A(x) = \sum_{a \in \Sigma} \nu(a) \sum_{b \in \text{Right}(a)} x(b), \quad B(x) = \sum_{a*b \in \Sigma} \nu(a)x(b), \quad C(x) = \sum_{a*b=1_X} \nu(a)x(b). \quad (4.15)$$

One easily checks that :

$$A(x) + B(x) + C(x) = 1. \quad (4.16)$$

This point was the crux of the argument in proving Proposition 3.5 in [Mai05]. Observe that a simple rewriting of (3.14) gives :

$$\hat{\gamma} = A(\hat{r}) - C(\hat{r}). \quad (4.17)$$

Let us investigate some properties of the solutions to the Twisted Traffic Equations.

First, if  $(\rho, r)$  is a solution to the TTE with  $r \in \bar{\mathcal{B}}$ , then  $r$  belongs to  $\mathcal{B}$ . This follows directly from the shape of the TTE and from Condition **C1**.

Second, if we set  $\eta = 1$  in the Twisted Traffic Equations (4.12), and perform the obvious simplifications, we obtain the Traffic Equations (3.10). It implies that  $(1, \hat{r})$  is a solution to the TTE for all  $\lambda$  and  $\mu$ .

**Lemma 4.7.** *Let  $(\rho, r)$ ,  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $r \in \mathcal{B}$ , be a solution to the TTE. We have either  $(\rho, r) = (1, \hat{r})$ , or*

$$\rho = \frac{\lambda \sum_{a \in \Sigma} \nu(a)r(\text{Right}(a))}{\mu + \lambda \sum_{a*b=1_X} \nu(a)r(b)} = \frac{\lambda A(r)}{\mu + \lambda C(r)}. \quad (4.18)$$

*Proof.* By summing all the Equations of (4.12), we get :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda + \mu) &= \rho^2\mu + \lambda \sum_{a \in \Sigma} \nu(a)r(\text{Right}(a)) + \rho\lambda \sum_{a*b \in \Sigma} \nu(a)r(b) \\ &\quad + \rho^2\lambda \sum_{\substack{d \in \text{Left}(a) \\ b*d=1_X}} \nu(b) \frac{r(d)}{r(\text{Right}(d))} r(a) \\ &= \rho^2\mu + \lambda A(r) + \rho\lambda B(r) + \rho^2\lambda C(r). \end{aligned}$$

Replacing  $B(r)$  by  $1 - A(r) - C(r)$  in the above, we get :

$$(\rho - 1)[(\mu + \lambda C(r))\rho - \lambda A(r)] = 0. \quad (4.19)$$

If  $\rho = 1$ , we have seen that the TTE reduces to the TE, which implies by Proposition 3.5 that  $(\rho, r) = (1, \hat{r})$ . Otherwise, we must have  $(\mu + \lambda C(r))\rho - \lambda A(r) = 0$ . This completes the proof.  $\square$

The relevant solutions to the TTE will turn out to be the ones satisfying (4.18). It leads us to the next Definition.

**Definition 4.8.** A solution  $(\rho, r)$  to the TTE is called an admissible solution if  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $r \in \mathcal{B}$ , and if (4.18) is satisfied.

**Lemma 4.9.** If  $\lambda\hat{\gamma} = \mu$ , then  $(1, \hat{r})$  is an admissible solution to the TTE. If  $(1, r)$  is an admissible solution to the TTE, then  $r = \hat{r}$  and  $\lambda\hat{\gamma} = \mu$ .

*Proof.* Assume that  $\lambda\hat{\gamma} = \mu$ . We know that  $(1, \hat{r})$  is a solution to the TTE. We need to check that it is admissible. By definition, it is admissible if :

$$1 = \frac{\lambda A(\hat{r})}{\mu + \lambda C(\hat{r})} \iff \lambda(A(\hat{r}) - C(\hat{r})) = \mu.$$

We conclude by recalling that  $\hat{\gamma} = A(\hat{r}) - C(\hat{r})$ , see (4.17).

Assume that  $(1, r)$  is an admissible solution to the TTE. Since  $\rho = 1$ , the TTE reduce to the TE implying that  $r = \hat{r}$ . Replacing  $(\rho, r)$  by  $(1, \hat{r})$  in (4.18), we get :  $\lambda\hat{\gamma} = \mu$ .  $\square$

More generally, admissible solutions always exist :

**Lemma 4.10.** There exists an admissible solution to the TTE.

*Proof.* Consider the Equations (4.12) and replace  $\eta$  by  $\lambda A(x)/(\mu + \lambda C(x))$ . The resulting equations in  $x$  can be viewed as a fixed point equation of the type  $\Psi(x) = x$ . The corresponding application  $\Psi : (\mathbb{R}_+^*)^\Sigma \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^\Sigma$  has the following form. For  $a \in \Sigma$  and for  $x \in (\mathbb{R}_+^*)^\Sigma$ ,

$$\begin{aligned} \Psi(x)(a) &= \frac{1}{\lambda + \mu} \left[ \frac{\lambda A(x)}{\mu + \lambda C(x)} \left[ \mu x(a) + \lambda \sum_{\substack{d \in \text{Left}(a) \\ b*d=1_X}} \nu(b) \frac{x(d)}{x(\text{Right}(d))} x(a) \right] \right. \\ &\quad \left. + \lambda \sum_{b*d=a} \nu(b)x(d) + \frac{\mu + \lambda C(x)}{A(x)} \nu(a)x(\text{Right}(a)) \right]. \quad (4.20) \end{aligned}$$

Consider  $x \in \mathcal{B}$ . By summing the Equations in (4.20) and using (4.16), we get :

$$\sum_{a \in \Sigma} \Psi(x)(a) = \frac{1}{\lambda + \mu} [\lambda A(x) + \lambda B(x) + \mu + \lambda C(x)] = 1 .$$

We have proved that  $\Psi(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ . The end of the proof follows very closely the proof of Theorem 4.5 in [Mai05]. For the sake of completeness, we recall the argument.

To use a Fixed Point Theorem, we need to define  $\Psi$  on a compact and convex set. The set  $\bar{\mathcal{B}}$ , which is the closure of  $\mathcal{B}$ , is a compact and convex subset of  $\mathbb{R}^\Sigma$ . However, in general, the map  $\Psi$  can not be extended continuously on  $\bar{\mathcal{B}}$ . More precisely,  $\Psi(x), x \in \bar{\mathcal{B}} \setminus \mathcal{B}$ , can be defined unambiguously iff  $x(\text{Right}(u)) \neq 0$  for all  $u$ .

For  $x \in \bar{\mathcal{B}} \setminus \mathcal{B}$ , let  $\Psi(x) \subset \bar{\mathcal{B}}$  be the set of possible limits of  $\Psi(x_n), x_n \in \mathcal{B}, x_n \rightarrow x$ . We have extended  $\Psi$  to a correspondence  $\Psi : \bar{\mathcal{B}} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}$ . Clearly this correspondence has a closed graph and nonempty convex values. Therefore, we are in the domain of application of the Kakutani-Fan-Glicksberg Theorem, see [AB99, Chapter 16]. The correspondence has at least one fixed point :  $\exists r \in \bar{\mathcal{B}}$  such that  $r \in \Psi(r)$ . Now using the shape of the Equations in (4.20) and the strong connectivity of the graph of successors  $(\Sigma, \rightarrow)$ , we obtain that  $r \in \mathcal{B}$  (see [Mai05, Theorem 4.5] for details).

Set  $\rho = \lambda A(r) / (\mu + \lambda C(r))$ . The pair  $(\rho, r)$  is an admissible solution to the TTE.  $\square$

### 4.3.2 The main results

Next Lemma begins to establish the link between the Twisted Traffic Equations and the queue  $M/M/(X, \Sigma)$ .

**Lemma 4.11.** *Let  $(\rho, r)$  be an admissible solution to the TTE. Consider the 0-automatic queue of type  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$ . Let  $Q_r$  be the infinitesimal generator of the queue-content process. Consider the measure  $p_{\rho, r}$  on  $L(X, \Sigma)$  defined by :*

$$\forall a_n \cdots a_1 \in L(X, \Sigma), \quad p_{\rho, r}(a_n \cdots a_1) = \rho^n \frac{r(a_n)}{r(\text{Right}(a_n))} \cdots \frac{r(a_2)}{r(\text{Right}(a_2))} r(a_1) . \quad (4.21)$$

We have  $p_{\rho, r}$  is a stationary measure of the queue-content process. Conversely, assume there exist  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$  and  $r \in \mathcal{B}$  such that the measure  $p_{\rho, r}$  defined by (4.21) is a stationary measure. Then  $(\rho, r)$  is an admissible solution to the TTE.

*Proof.* We have  $p_{\rho, r}$  is a stationary measure of the queue-content process with the infinitesimal  $Q_r$  if and only if :  $\forall u \in L(X, \Sigma)$ ,

$$\sum_{v \in L(X, \Sigma)} p_{\rho, r}(u) Q_r(u, v) = \sum_{v \in L(X, \Sigma)} p_{\rho, r}(v) Q_r(v, u) . \quad (4.22)$$

Denote the left and right-hand side of the above equality by  $L$  and  $R$ , respectively.

The left of (4.22) is :

$$L = \begin{cases} \sum_{a \in \Sigma} \lambda \nu(a) r(\text{Right}(a)) + Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*}) = \lambda A(r) + Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*}) & \text{if } u = 1_{\Sigma^*} \\ p_{\rho, r}(u)(\lambda + \mu) & \text{otherwise} \end{cases} . \quad (4.23)$$

The right of (4.22) is given by, for  $u = 1_{\Sigma^*}$ ,

$$R = \sum_{a \in \Sigma} \rho r(a) \left[ \mu + \lambda \sum_{b * a = 1_X} \nu(b) \right] + Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*}) = \rho(\mu + \lambda C(r)) + Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*}), \quad (4.24)$$

and for  $u = a_n \cdots a_1$ ,  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} R &= \lambda \nu(a_n) p_{\rho, r}(a_{n-1} \cdots a_1) + \sum_{b * d = a_n} \lambda \nu(b) p_{\rho, r}(da_{n-1} \cdots a_1) \\ &\quad + \sum_{\substack{b \in \text{Left}(a_n) \\ a * b = 1_X}} \lambda \nu(a) p_{\rho, r}(ba_n \cdots a_1) + \sum_{b \in \text{Right}(a_1)} p_{\rho, r}(a_n \cdots a_1 b) \mu \\ &= p_{\rho, r}(a_n \cdots a_1) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{r(\text{Right}(a_n))}{r(a_n)} \lambda \nu(a_n) + \sum_{b * d = a_n} \frac{r(d)}{r(\text{Right}(d))} \frac{r(\text{Right}(a_n))}{r(a_n)} \lambda \nu(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{b \in \text{Left}(a_n) \\ a * b = 1_X}} \rho \lambda \nu(a) \frac{r(b)}{r(\text{Right}(b))} + \sum_{b \in \text{Right}(a_1)} \rho \frac{r(b)}{r(\text{Right}(a_1))} \mu \right]. \end{aligned}$$

Now recall that  $b * d \in \Sigma \implies \text{Right}(b * d) = \text{Right}(d)$ . We obtain :

$$\begin{aligned} R &= p_{\rho, r}(a_n \cdots a_1) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{r(\text{Right}(a_n))}{r(a_n)} \lambda \nu(a_n) + \sum_{b * d = a_n} \frac{r(d)}{r(a_n)} \lambda \nu(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{b \in \text{Left}(a_n) \\ a * b = 1_X}} \rho \lambda \nu(a) \frac{r(b)}{r(\text{Right}(b))} + \rho \mu \right]. \end{aligned}$$

We see that for  $u \neq 1_{\Sigma^*}$ , the equality  $L = R$  is precisely equivalent to the fact that  $(\rho, r)$  is a solution to the TTE. For  $u = 1_{\Sigma^*}$ , the equality  $L = R$  is precisely equivalent to the fact that  $\rho$  and  $r$  satisfy (4.18).

Therefore, the equality  $L = R$  is precisely equivalent to the fact that  $(\rho, r)$  is an admissible solution to the TTE. This completes the proof.  $\square$

*Remark 4.12.* The proof of Lemma 4.11 uses the same idea with the idea of calculating the invariant measure of a Jackson network in section 2.2.1 and calculating of the harmonic measure of a random walk in section 3.4.

Now we have all the ingredients to prove the main results of this chapter.

**Theorem 4.13.** *Let  $(X, \Sigma, \nu)$  be a  $\theta$ -automatic triple. The Conditions C1-C2 of page 41 are assumed to hold. Fix  $\lambda$  and  $\mu$  in  $\mathbb{R}_+^*$ . Let  $(\rho, r)$  be an admissible solution to the TTE. Consider the  $\theta$ -automatic queue  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$ . Denote by  $M_r = (M_r(t))_t$  the queue-content process and by  $Q_r$  its infinitesimal generator. We have :*

$$\begin{aligned} [\rho < 1] &\iff [\lambda \widehat{\gamma} < \mu] \iff M_r \text{ ergodic} \\ [\rho = 1] &\iff [\lambda \widehat{\gamma} = \mu] \iff M_r \text{ null recurrent} \\ [\rho > 1] &\iff [\lambda \widehat{\gamma} > \mu] \iff M_r \text{ transient.} \end{aligned}$$



Assume that  $\lambda\hat{\gamma} < \mu$ . The stationary distribution  $\pi_{\rho,r}$  of the process  $M_r$  is given by :  $\forall a_n \cdots a_1 \in L(X, \Sigma)$ ,

$$\pi_{\rho,r}(a_n \cdots a_1) = (1 - \rho)p_{\rho,r}(a_n \cdots a_1) = (1 - \rho)\rho^n q(a_n) \cdots q(a_2)r(a_1), \quad (4.25)$$

where  $q(a) = r(a)/r(\text{Right}(a))$  for all  $a \in \Sigma$ .

*Proof.* Let  $(\rho, r)$  be an admissible solution to the Twisted Traffic Equations. Let  $p_{\rho,r}$  be the measure defined in (4.21). We have (using that  $\sum_{a \in \Sigma} r(a) = 1$ ) :

$$\sum_{u \in L(X, \Sigma)} p_{\rho,r}(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{u \in L(X, \Sigma) \\ |u|_{\Sigma} = n}} p_{\rho,r}(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho^n.$$

Hence,  $\sum_u p_{\rho,r}(u) < \infty$  iff  $\rho < 1$ . Now recall that  $p_{\rho,r}$  is a stationary measure of  $M_r$ , Lemma 4.11. It is standard (see for instance [Bré99, Chapter 8]) that the process  $M_r$  is ergodic iff  $\sum_u p_{\rho,r}(u) < \infty$ . Now, according to Proposition 4.4,  $M_r$  is ergodic iff  $\lambda\hat{\gamma} < \mu$ . By combining the three equivalences, we get :

$$[\rho < 1] \iff [M_r \text{ ergodic}] \iff [\lambda\hat{\gamma} < \mu].$$

The result in (4.25) holds as a direct consequence of Lemma 4.11.

Now let us turn our attention to the null recurrent case. Assume that  $\rho = 1$ . Using Lemma 4.9 and Proposition 4.4, we have :

$$[\rho = 1] \implies [\lambda\hat{\gamma} = \mu] \iff [M_r \text{ null recurrent}]. \quad (4.26)$$

Let  $(\tilde{\rho}, \tilde{r})$  be an admissible solution to the TTE. Using the argumentation in the forthcoming proof of Theorem 4.14, we deduce that we must have  $\tilde{\rho} = \rho = 1$ . Hence we have an equivalence on the left of (4.26). This completes the proof.  $\square$

Assume that  $\lambda\hat{\gamma} = \mu$ . It follows immediately from Lemma 4.9 and Theorem 4.13 that  $(1, \hat{r})$  is the unique admissible solution to the TTE. We now prove a more interesting result in the same vein.

**Theorem 4.14.** *Consider the same model as in Theorem 4.13, for  $(X, \Sigma, \nu)$  is a plain triple. Assume that  $\lambda\hat{\gamma} < \mu$ . Then the TTE have a unique admissible solution. In particular, there is only one variant of the 0-automatic queue  $M/M/(X, \Sigma)$  with a product form distribution.*

*Proof.* Let  $(\rho, r)$  and  $(\tilde{\rho}, \tilde{r})$  be two admissible solutions to the TTE. According to Theorem 4.13, we have  $\rho < 1$  and  $\tilde{\rho} < 1$ . Let  $\pi$  and  $\tilde{\pi}$  be the respective stationary distributions of  $M_r$  and  $M_{\tilde{r}}$ .

We now use a classical result on ergodic Markov processes, cf for instance [Bré99, Chapter 8, Theorem 5.1] : the stationary distribution is proportional to the time spent in each state in an excursion of the process from  $s$  to  $s$ , for some arbitrary state  $s$ .

Assume that the queue-content is  $1_{\Sigma^*}$  at instant 0. Let  $T$ , resp.  $\tilde{T}$ , be the first instant of jump of  $M_r$ , resp.  $M_{\tilde{r}}$ . Let  $R$ , resp.  $\tilde{R}$ , be the first return instant to  $1_{\Sigma^*}$ . We have, for all  $u \in L(X, \Sigma)$  ( $\sim$  stands for ‘proportional to’),

$$\pi(u) \sim E\left[\int_0^R \mathbb{1}_{\{M_r(t)=u\}} dt\right], \quad \tilde{\pi}(u) \sim E\left[\int_0^{\tilde{R}} \mathbb{1}_{\{M_{\tilde{r}}(t)=u\}} dt\right].$$

It follows that, for all  $u \in L(X, \Sigma)$ ,  $u \neq 1_{\Sigma^*}$ ,

$$\pi(u) \sim E\left[\int_T^R \mathbb{1}_{\{M_r(t)=u\}} dt\right], \quad \tilde{\pi}(u) \sim E\left[\int_{\tilde{T}}^{\tilde{R}} \mathbb{1}_{\{M_{\tilde{r}}(t)=u\}} dt\right].$$

And, conditioning by the value of  $M_r(T)$ , resp.  $M_{\tilde{r}}(\tilde{T})$ , we have, for all  $u \in L(X, \Sigma)$ ,  $u \neq 1_{\Sigma^*}$ ,

$$\begin{aligned} \pi(u) &\sim \sum_{a \in \Sigma} \nu(a) r(\text{Next}(a)) E\left[\mathbb{1}_{\{M_r(T)=a\}} \int_T^R \mathbb{1}_{\{M_r(t)=u\}} dt\right] \\ \tilde{\pi}(u) &\sim \sum_{a \in \Sigma} \nu(a) \tilde{r}(\text{Next}(a)) E\left[\mathbb{1}_{\{M_{\tilde{r}}(\tilde{T})=a\}} \int_{\tilde{T}}^{\tilde{R}} \mathbb{1}_{\{M_{\tilde{r}}(t)=u\}} dt\right]. \end{aligned}$$

Observe that the generators  $Q_r$  and  $Q_{\tilde{r}}$  differ only in the line indexed by  $1_{\Sigma^*}$ . In other terms, the conditional law of  $(M_r(t))_{t \in [T, R]}$  on the event  $\{M_r(T) = a\}$ , is equal to the conditional law of  $(M_{\tilde{r}}(t))_{t \in [\tilde{T}, \tilde{R}]}$  on the event  $\{M_{\tilde{r}}(\tilde{T}) = a\}$ . Therefore  $\pi$  and  $\tilde{\pi}$  are obtained as linear combinations of the same measures  $p_a$  defined by :

$$p_a(u) = E\left[\mathbb{1}_{\{M_r(T)=a\}} \int_T^R \mathbb{1}_{\{M_r(t)=u\}} dt\right] = E\left[\mathbb{1}_{\{M_{\tilde{r}}(\tilde{T})=a\}} \int_{\tilde{T}}^{\tilde{R}} \mathbb{1}_{\{M_{\tilde{r}}(t)=u\}} dt\right].$$

For  $n \in \mathbb{N}^*$ , set  $\pi(n) = \pi\{u \in L(X, \Sigma) \mid |u|_{\Sigma} = n\}$ . Define  $\tilde{\pi}(n)$  and  $p_a(n)$  accordingly. Using the above, we have, for all  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\pi(n) \sim \sum_{a \in \Sigma} \nu(a) r(\text{Next}(a)) p_a(n), \quad \tilde{\pi}(n) \sim \sum_{a \in \Sigma} \nu(a) \tilde{r}(\text{Next}(a)) p_a(n). \quad (4.27)$$

Besides, according to (4.25), we have  $\pi(n) \sim \rho^n$  and  $\tilde{\pi}(n) \sim \tilde{\rho}^n$ . In view of (4.27), we conclude easily that we must have  $\rho = \tilde{\rho}$ .

It remains to prove that  $r = \tilde{r}$ . Let us first show that :

$$[\forall a \in \Sigma, q(a) = \tilde{q}(a)] \implies [\forall a \in \Sigma, r(a) = \tilde{r}(a)]. \quad (4.28)$$

We have :  $\forall a, q(a) = r(a)/r(\text{Next}(a))$ . We can reinterpret this as :  $Mr = r$ , with  $r$  being viewed as a column vector and with  $M$  being the matrix of dimension  $\Sigma \times \Sigma$  defined by :

$$\forall a, b \in \Sigma, \quad M_{a,b} = \begin{cases} q(a) & \text{if } b \in \text{Next}(a) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Consequently, the matrix  $M$  is irreducible. Now invoking the Perron-Frobenius Theorem, since  $r$  has all its coordinates positive, it implies that  $r$  is necessarily the Perron eigenvector of the matrix, i.e. the unique (up to a multiplicative constant) eigenvector associated with the spectral radius. But we also have :  $M\tilde{r} = \tilde{r}$ , and  $\sum_a r(a) = \sum_a \tilde{r}(a) = 1$ . By uniqueness of the Perron eigenvector, we conclude that  $r = \tilde{r}$ .

Therefore, it remains to prove that :  $\forall a \in \Sigma, q(a) = \tilde{q}(a)$ . Define  $C(X, \Sigma) \subset L(X, \Sigma)$  by :

$$C(X, \Sigma) = \{u_1 \cdots u_k \in L(X, \Sigma) \mid u_1 \in \text{Next}(u_k)\}.$$

Observe that :  $[u \in C(X, \Sigma)] \implies [\forall n, u^n \in C(X, \Sigma)]$ .

For  $u = u_1 \cdots u_k \in C(X, \Sigma)$ , set  $q(u) = q(u_1) \cdots q(u_k)$ . Define  $\tilde{q}(u)$  analogously. Using (4.25), we have, for all  $n \in \mathbb{N}^*$ , for some constants  $C_1, C_2$ ,

$$\pi(u^n) = C_1 \rho^{n|u|_\Sigma} q(u)^n r(\text{Next}(u_k)), \quad \tilde{\pi}(u^n) = C_2 \rho^{n|u|_\Sigma} \tilde{q}(u)^n \tilde{r}(\text{Next}(u_k)). \quad (4.29)$$

Besides,

$$\pi(u^n) = C_3 \sum_{a \in \Sigma} \nu(a) r(\text{Next}(a)) p_a(u^n), \quad \tilde{\pi}(u^n) = C_4 \sum_{a \in \Sigma} \nu(a) \tilde{r}(\text{Next}(a)) p_a(u^n),$$

for some constants  $C_3, C_4$ . Therefore,  $\pi(u^n)$  and  $\tilde{\pi}(u^n)$  must grow at the same exponential speed as a function of  $n$ . In view of (4.29), we must have :

$$q(u_1) \cdots q(u_k) = \tilde{q}(u_1) \cdots \tilde{q}(u_k). \quad (4.30)$$

For the remaining step, the argument depends on the form of  $X$ . Set  $X = X_1 \star \cdots \star X_K \star X_{K+1} \star F$ , with  $X_{K+1} = \Sigma_{K+1}^* (|\Sigma_{K+1}| \geq 0)$ , with  $F = \mathbb{F}(\Sigma_{K+2}) (|\Sigma_{K+2}| \geq 0)$ , with  $X_i$  being finite monoids for  $1 \leq i \leq K$ , and with  $\Sigma = \Sigma_{K+2}^{-1} \sqcup_{1 \leq i \leq K+2} \Sigma_i$ ,  $\Sigma_i = (X_i \setminus \{1_{X_i}\})$  for  $1 \leq i \leq K$ .

For  $a \in \Sigma_i, 1 \leq i \leq K$ ,  $\text{Next}(a) = \Sigma \setminus \Sigma_i$ . For  $b \in \Sigma_{K+1}$ ,  $\text{Next}(b) = \Sigma$ . For  $c \in \Sigma_{K+2}$ ,  $\text{Next}(c) = \Sigma \setminus \{c^{-1}\}$ .

We first treat the case  $|\Sigma_{K+1}| + |\Sigma_{K+2}| \geq 1$ . Then there exists  $i \in \{K+1, K+2\}$  such that  $|\Sigma_i| \geq 1$ . Set  $\text{Gen} = \Sigma_{K+1} \sqcup \Sigma_{K+2} \sqcup \Sigma_{K+2}^{-1}$ . For all  $a \in \text{Gen}$ ,  $a \in \text{Next}(a)$ , so we have  $q(a)^2 = \tilde{q}(a)^2$ . It implies that  $q(a) = \tilde{q}(a)$ . Consider  $b \in \Sigma \setminus \text{Gen}$  and  $a \in \text{Gen}$ , one has  $b \in \text{Next}(a)$ , so, according to (4.30),  $q(b)q(a) = \tilde{q}(b)\tilde{q}(a)$ . Hence,  $q(b) = \tilde{q}(b)$ . So  $q(c) = \tilde{q}(c)$  for all  $c \in \Sigma$ .

We now consider the case  $|\Sigma_{K+1}| + |\Sigma_{K+2}| = 0$ . Assume that  $K \geq 3$ . Consider  $a \in \Sigma_1, b \in \Sigma_2, c \in \Sigma_3$ . We have :  $\text{Next}(a) = \Sigma \setminus \Sigma_1$ ,  $\text{Next}(b) = \Sigma \setminus \Sigma_2$ , and  $\text{Next}(c) = \Sigma \setminus \Sigma_3$ . Therefore,  $abc \in C(X, \Sigma)$  and  $bc \in C(X, \Sigma)$ . Using (4.30), we deduce that :  $q(a)q(b)q(c) = \tilde{q}(a)\tilde{q}(b)\tilde{q}(c)$  and  $q(b)q(c) = \tilde{q}(b)\tilde{q}(c)$ . We conclude that  $q(a) = \tilde{q}(a)$  for all  $a \in \Sigma$ .

Assume now that  $K = 2$ . The above argument does not work anymore. First of all, we want to prove that :

$$\forall a \in \Sigma_i, \quad \frac{r(a)}{r(\Sigma_i)} = \frac{\tilde{r}(a)}{\tilde{r}(\Sigma_i)}. \quad (4.31)$$

Consider  $a, b \in \Sigma_1$  and  $c \in \Sigma_2$ . We have :  $\text{Next}(a) = \text{Next}(b) = \Sigma_2$  and  $\text{Next}(c) = \Sigma_1$ . Hence,  $ac \in C(X, \Sigma)$  and  $bc \in C(X, \Sigma)$ . Using (4.30), we have :  $q(a)q(c) = \tilde{q}(a)\tilde{q}(c)$  and  $q(b)q(c) = \tilde{q}(b)\tilde{q}(c)$ . It implies that :  $q(a)/q(b) = \tilde{q}(a)/\tilde{q}(b)$ , which is equivalent to (4.31). Set  $R(a) = r(a)/r(\Sigma_i) = \tilde{r}(a)/\tilde{r}(\Sigma_i)$  if  $a \in \Sigma_i$ .

Now let us sum the TTE corresponding to all the elements of  $\Sigma_1$ , and let us perform

the simplifications implied by (4.31). For instance for  $(\rho, r)$ , we get :

$$\begin{aligned}
 \rho(\lambda + \mu)r(\Sigma_1) &= \rho^2\mu r(\Sigma_1) + \lambda\nu(\Sigma_1)r(\Sigma_2) + \rho\lambda \sum_{a*b \in \Sigma_1} \nu(a)r(b) \\
 &\quad + \rho^2\lambda \sum_{a \in \Sigma_1} \sum_{\substack{b,d \in \Sigma_2 \\ b*d = 1_{X_2}}} \nu(b) \frac{r(d)}{r(\Sigma_1)} r(a) \\
 &= \rho^2\mu r(\Sigma_1) + \lambda\nu(\Sigma_1)r(\Sigma_2) + \rho\lambda r(\Sigma_1) \sum_{a*b \in \Sigma_1} \nu(a)R(b) \\
 &\quad + \rho^2\lambda r(\Sigma_2) \sum_{\substack{b,d \in \Sigma_2 \\ b*d = 1_{X_2}}} \nu(b)R(d)
 \end{aligned}$$

Set  $B_1 = \sum_{a*b \in \Sigma_1} \nu(a)R(b)$  and  $C_2 = \sum_{a,b \in \Sigma_2, a*b = 1_{X_2}} \nu(a)R(b)$ . Using that  $r(\Sigma_2) = 1 - r(\Sigma_1)$ , we get :

$$r(\Sigma_1) = \frac{\lambda\nu(\Sigma_1) + \rho^2\lambda C_2}{\rho(\lambda + \mu) - \rho^2\mu + \lambda\nu(\Sigma_1) - \rho\lambda B_1 + \rho^2\lambda C_2}. \quad (4.32)$$

But all the terms in the right-hand side of (4.32) are unchanged when we write the corresponding equation for  $\tilde{r}$ . So,  $r(\Sigma_1) = \tilde{r}(\Sigma_1)$ . In view of (4.31), we deduce that  $r(a) = \tilde{r}(a)$  for all  $a \in \Sigma$ . This completes the proof.  $\square$

We conjecture that Theorem 4.14 is suboptimal and that the TTE have a unique admissible solution under the conditions of Theorem 4.13. The difficulty is that our understanding of the structure of 0-automatic pairs for monoids is not as good as for groups.

When the the Conditions **C1-C2** are dropped for a 0-automatic triple, or the triple is not plain for the triple associate to a plain monoid, the TTE may have several admissible solutions. This is for instance the case for the triple  $(\mathbb{F}(a), \Sigma = \{a, a^{-1}\}, \{1/2, 1/2\})$  as discussed in Section 4.5.2.

*Remark 4.15.* In the case  $\rho < 1$ , if the boundary condition is chosen according to  $r'$ , where  $(\rho, r')$  is not a solution to the TTE, then the stationary distribution of  $M_{r'}$  exists (Prop. 4.4). But we do not know how to compute it exactly. See Remark 4.2 for a justification of the form of the boundary condition.

### Poisson departure processes.

The celebrated Burke Theorem states that the departure process from a stable  $M/M/1$  queue is a Poisson process of the same rate as the arrival process. A nice consequence of Theorem 4.13 is that an analog of Burke Theorem holds for 0-automatic queues.

In a 0-automatic queue, ‘departures’ occur both at the front-end and at the back-end of the buffer. Here we consider only the front-end departures, i.e. the ones corresponding to service completions and not to buffer cancellations.

Let  $M = (M(t))_t$  be the queue-content process of some 0-automatic queue  $M/M/(X, \Sigma)$ . A *departure* is an instant of jump of  $M$  corresponding to a jump of the type :  $u_n \cdots u_1 \rightarrow$

$u_n \cdots u_2$  for  $u = u_n \cdots u_1 \in L(X, \Sigma) \setminus \{1_{\Sigma^*}\}$ . When  $u = a^n, a \in \Sigma, n \geq 1$  (the case (4.2) in Definition 4.1), some special care must be taken. The jumps of type  $a^n \rightarrow a^{n-1}$  which are *departures* occur at rate  $\mu$ . The *departure process* is the point process of departures.

**Theorem 4.16.** *The model is the same as in Theorem 4.13. Assume that  $\lambda\hat{\gamma} < \mu$ . Let  $(\rho, r)$  be an admissible solution of the corresponding TTE. Consider the 0-automatic queue  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$ . The stationary departure process is a Poisson process of rate  $\rho\mu$ . Furthermore, for all  $t$ , the queue-content at time  $t$  is independent of the departure process up to time  $t$ .*

*Proof.* The simplest proof of Burke Theorem uses reversibility and is due to Reich, see for instance [Kel79] for details. Here, the argument is similar.

Let  $M_r$  be the stationary queue-content process. Its marginal distribution at a given instant is  $\pi_{\rho, r}$  given in (4.25). Let  $D$  be the corresponding departure process. By definition, the instantaneous rate of  $D$  is  $c(t) = \mu$  if  $M_r(t) \neq 1_{\Sigma^*}$  and  $c(t) = 0$  otherwise.

Now let us consider the time-reversed point process  $\tilde{D}$ . The process  $\tilde{D}$  corresponds to the instants of “right-increase” of the time-reversed process  $(\tilde{M}_r(t))_t$ . Therefore, the instantaneous rate  $\tilde{c}(t)$  of  $\tilde{D}$  is as follows. If  $\tilde{M}_r(t) = a_n \cdots a_1 \in L(X, \Sigma) \setminus \{1_{\Sigma^*}\}$ ,

$$\tilde{c}(t) = \sum_{a \in \text{Right}(a_1)} \frac{\pi_{\rho, r}(a_n \cdots a_1 a)}{\pi_{\rho, r}(a_n \cdots a_1)} \mu = \sum_{a \in \text{Next}(a_1)} \frac{\rho r(a)}{r(\text{Right}(a_1))} \mu = \rho\mu, \quad (4.33)$$

and if  $\tilde{M}_r(t) = 1_{\Sigma^*}$ ,

$$\tilde{c}(t) = \sum_{a \in \Sigma} \frac{\pi_{\rho, r}(a)}{\pi_{\rho, r}(1_{\Sigma^*})} \mu = \sum_{a \in \Sigma} \rho r(a) \mu = \rho\mu.$$

We conclude that  $\tilde{D}$  is a Poisson process of rate  $\rho\mu$ . Since Poisson processes are preserved by time-reversal,  $D$  is also a Poisson process of rate  $\rho\mu$ .

Also, using the Markov property of Poisson processes,  $\tilde{M}_r(t)$  is independent of the process  $\tilde{D}$  after time  $t$ . Under time-reversal, this translates as :  $M_r(t)$  is independent of the departure process  $D$  up to time  $t$ .  $\square$

Here are some additional comments on Theorem 4.16.

1- The infinitesimal generator of the time-reversed process  $\tilde{M}_r$  is certainly not the infinitesimal generator of a 0-automatic queue. This was already the case for the G-queue. But this is in contrast with the situation for the M/M/1 queue.

2- For  $a \in \Sigma$ , the departure process  $D_a$  of customers of class  $a$  is not a Poisson process.

3- Equation (4.33) corresponds to the condition (2.9) defining “quasi-reversibility” in section 2.1.4 (the definition of Chao, Miyazawa and Pinedo).

4- The saturation principle of Baccelli and Foss [BF95] holds for many classical queueing systems. Here is a rough description of it.

Consider a queueing system with an infinite capacity buffer. Let  $\mu_0$  be the departure rate in the *saturated system* in which an infinite number of customers are stacked in the

buffer. Now, if the actual arrival rate in the system is  $\lambda < \mu_0$ , then the system is stable, and the departure rate is  $\lambda$ . A dual presentation of the same principle is as follows. Let  $\lambda_0$  be the growth rate of the buffer in the *blocked system* where the server has been shut down. If the actual service rate in the system is  $\mu > \lambda_0$ , then the system is stable, and the departure rate is  $\lambda_0$ .

Zero-automatic queues do *not* satisfy the saturation principle. This can be viewed on the following inequalities (to be deduced from Theorem 4.16) :

$$\lambda\hat{\gamma} \leq \rho\mu < \mu ,$$

where :  $\rho\mu$  is the actual departure rate in equilibrium,  $\mu$  is the departure rate from the saturated system, and  $\lambda\hat{\gamma}$  is the growth rate of the buffer in the blocked system.

### 4.3.3 Quasi-Birth-and-Death processes

Quasi-Birth-and-Death (QBD) processes appear naturally in the modelling of several queueing and communication systems. As such, they have been extensively studied, see for instance the monographs [LR99, Neu81]. The results in Section 4.3.2 can be put in perspective by considering the relation between 0-automatic queues and QBD processes.

To that purpose, we define an “approximated” and quite simplified version of the 0-automatic queue. The idea is to keep track of the queue-content only through the number of customers and the class of the back-end customer. Clearly a difficulty arises : if a cancellation occurs at the back-end of the buffer, there is no way to retrieve the class of the new back-end customer. This missing information is compensated as follows : the class is chosen at random according to the relevant conditional law.

Consider a 0-automatic queue. The notations and assumptions are the ones of Theorem 4.13. In particular  $(\rho, r)$  is an admissible solution to the TTE. We assume that  $\lambda\hat{\gamma} < \mu$ . Recall that  $Q_r$  is the infinitesimal generator of the queue-content on the state space  $L(X, \Sigma)$ , and that  $\pi_{\rho, r}$  given by (4.25) is its stationary distribution.

Consider the application :

$$\begin{aligned} f : L(X, \Sigma) &\longrightarrow \{0\} \cup (\mathbb{N}^* \times \Sigma) \\ u_n \cdots u_1 &\longmapsto (n, u_n) \\ 1_{\Sigma^*} &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Define the infinitesimal generator  $\tilde{Q}_r$  on the state space  $\{0\} \cup (\mathbb{N}^* \times \Sigma)$  by :

$$\tilde{Q}_r(x, y) = \sum_{u \in f^{-1}(x)} \frac{\pi_{\rho, r}(u)}{\pi_{\rho, r}(f^{-1}(x))} \sum_{v \in f^{-1}(y)} Q_r(u, v) . \quad (4.34)$$

For instance, we obtain by using (4.25) and simplifying :

$$\tilde{Q}_r((n, a); (n-1, b)) = \lambda \sum_{c * a = 1_X} \nu(c) \frac{r(b)}{r(\text{Right}(a))} \mathbb{1}_{\{b \in \text{Right}(a)\}} .$$

Define a total order on  $\{0\} \cup (\mathbb{N}^* \times \Sigma)$  as follows : 0 is the smallest element and  $(n, a) \leq (m, b)$  if  $n < m$  or  $(n = m, a \preceq b)$ , where  $\preceq$  is some total order on  $\Sigma$ . A couple of lines of computation enable to check the following. If lines and columns are ranked according to the above order, the infinitesimal generator  $\tilde{Q}_r$  is block tridiagonal of the form :

$$\tilde{Q}_r = \begin{pmatrix} a & A(r) & 0 & 0 & & \\ B & A_1 & A_0 & 0 & \ddots & \\ 0 & A_2(r) & A_1 & A_0 & \ddots & \\ 0 & 0 & A_2(r) & A_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

where  $a$  is of dimension  $1 \times 1$ ,  $A(r)$  is of dimension  $1 \times \Sigma$ ,  $B$  is of dimension  $\Sigma \times 1$ , and  $A_0, A_1, A_2(r)$  are of dimension  $\Sigma \times \Sigma$ . Furthermore the entries of  $B, A_0, A_1$  can be expressed in function of  $\lambda, \mu$ , and  $\nu$ ; and the entries of  $A(r), A_2(r)$  can be expressed in function of  $\lambda, \mu, \nu$ , and  $r$ .

According to the terminology in Neuts [Neu81],  $\tilde{Q}_r$  is the infinitesimal generator of a QBD process with a complex boundary behavior. For any such ergodic process, the shape of the stationary distribution is known, see for instance [Neu81, Chapter 1.5]. So we assume that  $\tilde{Q}_r$  is ergodic and we apply the general results to get the stationary distribution  $\tilde{\pi}$  :

$$\tilde{\pi}(0) = y, \quad \forall n \geq 1, \forall a \in \Sigma, \tilde{\pi}(n, a) = (xR^{n-1})(a), \quad (4.36)$$

where

$$\begin{cases} A_0 + RA_1 + R^2A_2(r) = 0 \\ ay + xB = 0, \quad yA(r) + x(A_1 + RA_2(r)) = 0 \\ y + x(I - R)^{-1}(1, \dots, 1)^T = 1 \end{cases} \quad (4.37)$$

In (4.37),  $R$  is a matrix of dimension  $\Sigma \times \Sigma$  and is the minimal nonnegative solution to the first Equation. The pair  $(y, x)$ , where  $y$  is a scalar and  $x$  is a line vector of dimension  $\Sigma$ , is the unique positive solution to the second and third Equations.

The stationary distribution  $\tilde{\pi}$  in (4.36) has a *matrix product form*. This matrix product form is said to be a *product form* (this is called *Level-Geometric with parameter  $\theta$*  in [DQ02]) if :  $\tilde{\pi}(n, a) = \eta^{n-1}\tilde{\pi}(1, a) = \eta^{n-1}x(a)$ , for some  $\eta \in (0, 1)$ . Clearly, a necessary and sufficient condition for this to hold is :  $xR = \eta x$ . Assume that this last equality holds. By multiplying the first Equation in (4.37) by  $x$ , and by simplifying the Equations, we get :

$$\begin{cases} x(A_0 + \eta A_1 + \eta^2 A_2(r)) = 0 \\ ay + xB = 0, \quad yA(r) + x(A_1 + \eta A_2(r)) = 0 \\ y + (1 - \eta)^{-1}x(1, \dots, 1)^T = 1 \end{cases} \quad (4.38)$$

Now let us replace  $x$  by  $cr, c \in \mathbb{R}$ , and  $\eta$  by  $\rho$  in (4.38). The first Equation yields precisely the Twisted Traffic Equations (4.12) for the pair  $(\rho, r)$ . The other two Equations yield exactly :  $y = 1 - \rho, c = \rho(1 - \rho)$ .

We conclude that the stationary distribution of  $\tilde{Q}_r$  is given by :

$$\tilde{\pi}(0) = 1 - \rho, \quad \forall n \geq 1, \forall a \in \Sigma, \tilde{\pi}(n, a) = (1 - \rho)\rho^n r(a). \quad (4.39)$$

This is coherent with the form of  $\pi_{\rho,r}$  as given in (4.25). So the above provides an a-posteriori and partial justification for the shape of  $\pi_{\rho,r}$ . It also provides another light on the central role of the TTE.

It is classical in QBD theory [LR99, DQ02] to modify the boundary condition to get a stationary distribution of product form. Here the situation is more complex since not only the boundary condition, but also the  $A_2$  matrix, are modified in the quest for the product form.

Observe also that the result in Theorem 4.13 is much deeper than the one in (4.39). In particular, there is a-priori no way to retrieve the result on  $Q_r$  from the one on the simplified generator  $\tilde{Q}_r$ .

## 4.4 The Zero-automatic Queue of a Plain Monoid

As we mentioned in Section 3.6, all plain triples are 0-automatic and satisfy the Condition **C1-C2** of page 41.

The structure of 0-automatic triple is more complicated than one of plain triple. So, from now on, we study the 0-automatic queue associated with a plain triple. The presentation follows [DTM07].

The model is as follows. Let  $(X, \Sigma, \nu)$  be a plain triple. Fix  $\lambda$  and  $\mu$  in  $\mathbb{R}_+^*$  and  $r$  in  $\mathcal{B}$ . Consider the 0-automatic queue  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$ .

All the results in Section 4.2 and 4.3 hold and rewrite the TTE and the main result as follow.

**Definition 4.17** (Twisted Traffic Equations). *The Twisted Traffic Equations TTE associated with  $(X, \Sigma, \nu, \lambda, \mu)$  are the equations of the variables  $(\eta, x)$ ,  $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $x = (x(a))_{a \in \Sigma} \in \mathbb{R}_+^\Sigma$ , defined by :*

$$\begin{aligned} \eta(\lambda + \mu)x(a) &= \eta^2 \mu x(a) + \lambda \nu(a)x(\text{Next}(a)) + \eta \lambda \sum_{b*d=a} \nu(b)x(d) \\ &\quad + \eta^2 \lambda \sum_{\substack{d \in \text{Next}(a) \\ b*d=1_X}} \nu(b) \frac{x(d)}{x(\text{Next}(d))} x(a). \end{aligned} \quad (4.40)$$

**Theorem 4.18.** *Let  $(X, \Sigma, \nu)$  be a plain triple. Fix  $\lambda$  and  $\mu$  in  $\mathbb{R}_+^*$ . Let  $(\rho, r)$  be an admissible solution to the TTE. Consider the 0-automatic queue  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$ . Denote by  $M_r = (M_r(t))_t$  the queue-content process and by  $Q_r$  its infinitesimal generator. We have :*

$$\begin{aligned} [\rho < 1] &\iff [\lambda \hat{\gamma} < \mu] \iff [M_r \text{ ergodic}] \\ [\rho = 1] &\iff [\lambda \hat{\gamma} = \mu] \iff [M_r \text{ null recurrent}] \\ [\rho > 1] &\iff [\lambda \hat{\gamma} > \mu] \iff [M_r \text{ transient}]. \end{aligned}$$



Assume that  $\lambda\widehat{\gamma} < \mu$ . The stationary distribution  $\pi_{\rho,r}$  of the process  $M_r$  is given by :  $\forall a_n \cdots a_1 \in L(X, \Sigma)$ ,

$$\pi_{\rho,r}(a_n \cdots a_1) = (1 - \rho)p_{\rho,r}(a_n \cdots a_1) = (1 - \rho)\rho^n q(a_n) \cdots q(a_2)r(a_1), \quad (4.41)$$

where  $q(a) = r(a)/r(\text{Next}(a))$  for all  $a \in \Sigma$ .

The unicity of the solution to the TTE and the Poisson departure process still hold.

## 4.5 Extension and Examples

### 4.5.1 Extension

All the results in Sections 4.2 and 4.3 are derived under the Conditions **C1-C2**. The two conditions are not very restrictive, see the discussion in page 41. However, the models which are not covered are interesting themselves (e.g.  $\mathbb{Z}$ ) and also exhibit new phenomena. It is therefore worthwhile to determine the subset of the above results which remain true for 0-automatic triples not satisfying **C1-C2**.

Consider a 0-automatic triple  $(X, \Sigma, \nu)$  and  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ . The corresponding TTE are still defined as in (4.12). We use the convention described after (3.11) to define a solution to the TTE belonging to  $\bar{\mathcal{B}}$ .

A solution  $r \in \bar{\mathcal{B}}$  to the TTE does not necessarily belong to  $\mathcal{B}$ . Also the TE do not necessarily have a unique solution, see Proposition 3.5.

An analog of Lemma 4.7 holds : if  $(\rho, r), r \in \bar{\mathcal{B}}$ , is a solution to the TTE then either  $(\rho, r) = (1, r)$  and  $r$  is a solution to the TE, or

$$\rho = \frac{\lambda A(r)}{\mu + \lambda C(r)}. \quad (4.42)$$

We can now state the following result. Observe in particular that there may be several variants (corresponding to different  $r$ 's) of the 0-automatic queue with a product form.

**Proposition 4.19.** *Let  $(X, \Sigma, \nu)$  be a 0-automatic triple. Let  $(\rho, r), r \in \bar{\mathcal{B}}$ , be a solution to the TTE satisfying (4.42). Assume that :  $\forall a \in \Sigma, [r(a) > 0] \implies [r(\text{Right}(a)) > 0]$ . Define  $\tilde{\Sigma} = \{a \in \Sigma \mid r(a) > 0\}$  and  $\tilde{L} = L(X, \Sigma) \cap \tilde{\Sigma}^*$ .*

*Consider the 0-automatic queue of type  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$ . Let  $Q_r$  be the infinitesimal generator of the queue-content process  $M_r$ . Consider the measure  $p_{\rho,r}$  on  $\tilde{L}$  defined by :*

$$\forall a_n \cdots a_1 \in \tilde{L}, \quad p_{\rho,r}(a_n \cdots a_1) = \rho^n \frac{r(a_n)}{r(\text{Right}(a_n))} \cdots \frac{r(a_2)}{r(\text{Right}(a_2))} r(a_1). \quad (4.43)$$

*We have  $p_{\rho,r}Q_r = 0$ . Besides, we have :*

$$\begin{aligned} [\lambda\widehat{\gamma} < \mu] &\implies [\rho < 1] \implies M_r \text{ ergodic on } \tilde{L} \\ [\lambda\widehat{\gamma} > \mu] &\implies [\rho > 1] \implies M_r \text{ transient on } \tilde{L} \end{aligned} .$$

*When  $\lambda\widehat{\gamma} < \mu$ , the stationary distribution of  $M_r$  is  $\pi_{\rho,r} = (1 - \rho)p_{\rho,r}$ . The corresponding stationary departure process is a Poisson process of rate  $\rho\mu$ .*

The proofs of Lemma 4.11, Theorem 4.13, and Theorem 4.16 are easily adapted to get Prop. 4.19.

## 4.5.2 Examples

We study some particular 0-automatic queues to illustrate the above results. We focus on three aspects : (a) the stability region ; (b) the value of the *load*  $\rho$  ; (c) the existence of several stationary regimes (for the queues built on 0-automatic triples).

When the model is simple enough, the TTE can be solved explicitly to get closed form formulas as for  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  below. In all cases and like any set of algebraic equations, the TTE can be solved with any prescribed precision.

Another goal is to convey the idea that 0-automatic queues ought to be pertinent in several modelling contexts, due to the flexibility in their definition. The five examples below should be interpreted having in mind the different “types” of tasks detailed in the Introduction (classical, positive/negative, “one equals many”, and “dating agency”).

### The free product $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Consider the plain triple  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \Sigma = \{a, a^2, b, b^2\}, \nu)$ , where  $\nu(a) = \nu(b) = p$ ,  $\nu(a^2) = \nu(b^2) = q = 1/2 - p$ ,  $p \in (0, 1/2)$ .

In [MM07, Section 4.2], the drift is computed, it is given by :

$$\hat{\gamma} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{16p^2 - 8p + 5}.$$

According to Theorem 4.14, in the stable case, the associated TTE have a unique admissible solution that we denote by  $(\rho, r)$ . Solving the TTE, we get that :

$$\begin{aligned} \hat{r}(a) = \hat{r}(b) &= \frac{4\lambda p^2 - 2\lambda p + 4p\mu + \lambda}{4(4\lambda p^2 - 2\lambda p + \mu + \lambda)} = \frac{-4pq\lambda + \lambda + 4p\mu}{4(-4pq\lambda + \lambda + \mu)}, \\ \hat{r}(a^2) = \hat{r}(b^2) &= \frac{1}{2} - \hat{r}(a), \rho = 2\frac{4\lambda^2 p^2 - 2\lambda^2 p + \lambda\mu + \lambda^2}{4\lambda^2 p^2 - 2\lambda^2 p + 4\lambda\mu + \lambda^2 + 4\mu^2}. \end{aligned}$$

Figure 4.2 (left) shows the stability region of the queue. The abscissa is  $p$  and the ordinate is  $\lambda/\mu$ . In Figure 4.2 (right), we plot the load  $\rho$  as a function of  $p$  and  $t = \lambda/\mu$ , for  $p \in (0, 1/2)$  and  $\lambda/\mu \in (0, \min(1/\hat{\gamma}, 6))$ . Hence,  $\rho$  is always smaller or equal to 1, see Theorem 4.13.

### The modular group $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

The modular group is the group  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , i.e the group of  $2 \times 2$  matrices with integer entries and determinant 1, quotiented by  $\pm \text{Id}$ . It is isomorphic to the free product  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Let  $a$  and  $b$  be the respective generators of  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  and  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

Consider the 0-automatic triple  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \Sigma = \{a, b, b^2\}, \nu)$ , where  $\nu(b) = \nu(b^2) = p$ ,  $\nu(a) = 1 - 2p$ ,  $p \in (0, 1/2)$ . In Figure 4.3, we illustrate the corresponding buffering mechanism.

In [MM07, Section 4.2], the drift is computed, it is given by :

$$\hat{\gamma} = 2p(1 - 2p)/(2 - p).$$

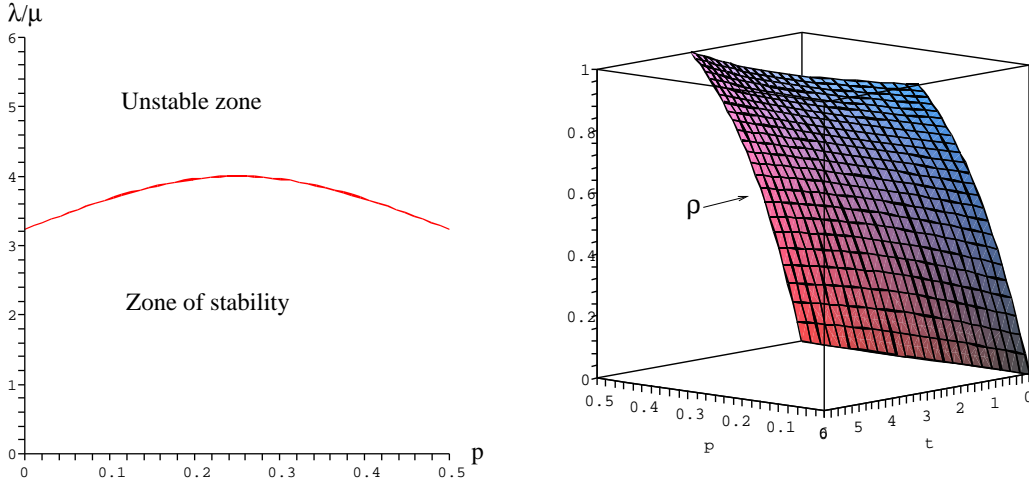


FIGURE 4.2 –  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  : The stability region (left) and the load  $\rho$  (right).

According to Theorem 4.14, the TTE have a unique admissible solution that we denote by  $(\rho, r)$ . By symmetry, we must have  $r(b) = r(b^2) = (1 - r(a))/2$ . By simplifying the TTE and using the symmetry, we obtain that  $\rho$  is a root of  $f(Y) = 0$ , where :

$$f(Y) = (\mu^2 + 2\lambda^2 p^2 - \lambda^2 p)Y^3 + (2\lambda^2 p^2 + \lambda\mu p - 2\lambda\mu - \mu^2 - \lambda^2 p)Y^2 + (2\lambda^2 p - 4\lambda^2 p^2)Y + 2\lambda^2 p - 4\lambda^2 p^2.$$

The relation between  $r(a)$  and  $\rho$  is given by :

$$r(a) = \frac{\rho(\mu + \lambda p) - (\lambda - 2\lambda p)}{\lambda(\rho(3p - 1) + 4p - 1)}. \quad (4.44)$$

In Figure 4.4 (left), we show the stability region of the queue. The abscissa is  $p$  and the ordinate is  $\lambda/\mu$ . In Figure 4.4 (right), we plot the load  $\rho$  as a function of  $p$  and  $t = \lambda/\mu$ , for  $p \in (0, 1/2)$  and  $\lambda/\mu \in (0, \min(1/\hat{\gamma}, 10))$ . Hence,  $\rho$  is always smaller or equal to 1, see Theorem 4.13.

**The monoid**  $X = \langle a, b \mid a^2 = a, b^3 = b^2 \rangle$

Consider the 0-automatic triple  $(X, \Sigma = \{a, b, b^2\}, \nu)$  with  $\nu(b) = p$ ,  $\nu(b^2) = q$ , and  $\nu(a) = 1 - p - q$ , where  $p, q \in (0, 1)$  and  $p + q < 1$ . In Figure 4.5, the buffering mechanism is illustrated.

The unique solution  $\hat{r}$  of the TE is easily computed :

$$\hat{r}(a) = 1 - p - q, \quad \hat{r}(b) = (1 - p - q)p, \quad \hat{r}(c) = q + p^2 + pq.$$

Applying Theorem 3.6, the drift of the random walk is given by :

$$\hat{\gamma} = 2(p + q)(1 - p - q).$$

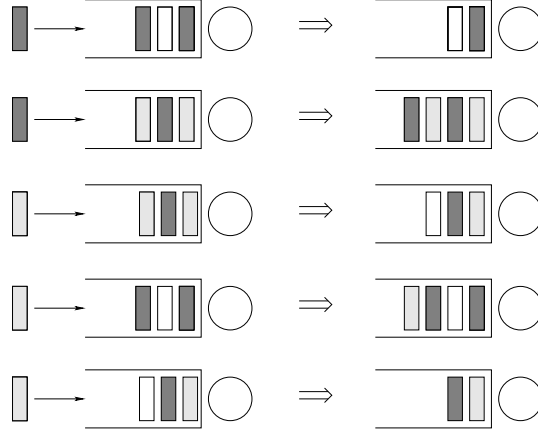


FIGURE 4.3 – The queue  $M/M/(Z/2Z \star Z/3Z, \Sigma)$   $a$  in dark gray,  $b$  in white, and  $b^2$  in light gray.

According to Theorem 4.14, the TTE have a unique admissible solution  $(\rho, r)$ . Solving the TTE, one gets that  $\rho$  is a root of  $f(Y) = 0$ , where :

$$f(Y) = \mu^2 Y^3 + (-\mu^2 - \mu\lambda)Y^2 + (-2\lambda^2 pq + \lambda^2 p + \lambda^2 q - \lambda^2 p^2 - \lambda^2 q^2)Y + (-2\lambda^2 pq + \lambda^2 p + \lambda^2 q - \lambda^2 p^2 - \lambda^2 q^2).$$

Both  $r(a)$  and  $r(b)$  are determined via  $\rho$  (and  $r(a)$ ) by :

$$r(a) = \frac{(1 - p - q)\lambda}{2\lambda + \mu - \rho^2 \mu - \lambda(p + q) - \lambda\rho + \lambda\rho(p + q)}$$

$$r(b) = \frac{p\mu r(a)}{(1 - p - q - r(a) + 2r(a)(p + q))(\mu + \lambda p + \lambda q + \lambda r(a) - 2\lambda r(a)(p + q))}.$$

In Figure 4.6 (left), we show the stability region of the queue. The abscissa is  $p$  and the ordinate is  $\lambda/\mu$ . In Figure 4.6 (right), we plot the load  $\rho$  as a function of  $p$  and  $t = \lambda/\mu$ , for  $q = 1/3$ ,  $p \in (0, 2/3)$ ,  $\lambda/\mu \in (0, \min(10, 1/\hat{\gamma}))$ . Hence,  $\rho$  is smaller or equal to 1.

### The free product $\mathbb{N} \star \mathbb{B}$

Consider the plain triple  $(\{a\} \star \langle b \mid b^2 = b \rangle, \Sigma = \{a, b\}, \nu)$ , where  $\nu(a) = p$ ,  $\nu(b) = 1 - p$ ,  $p \in (0, 1)$ . In Figure 4.7, we illustrate the corresponding buffering mechanism.

The unique solution  $\hat{r}$  of the TE is :

$$\hat{r}(c) = p, \quad \hat{r}(b) = 1 - p.$$

Hence, the drift of the random walk is

$$\hat{\gamma} = (2 - p)p.$$

According to Theorem 4.14, the associated TTE have a unique admissible solution that we denote by  $(\rho, r)$ . Solving the TTE, we obtain that  $\rho$  is a solution of  $f(Y) = 0$ , where :

$$f(Y) = \mu^2 Y^3 + (\mu^2 + \mu\lambda + \lambda\mu p)Y^2 + (\lambda^2 p + \lambda\mu p)Y - \lambda^2 p^2 + \lambda^2 p.$$

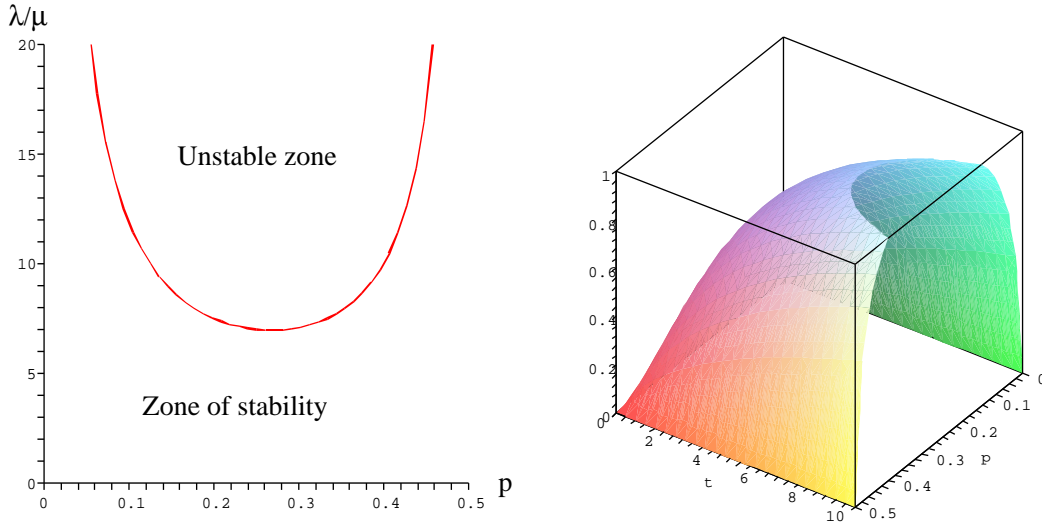


FIGURE 4.4 –  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  : The stability region (left) and the load  $\rho$  (right).

The relation between  $r(b)$  and  $\rho$  is given by :

$$\rho = [r(b)(1 - p) + p]\lambda/\mu .$$

In Figure 4.8 (left), we show the stability region of the queue. The abscissa is  $p$  and the ordinate is  $\lambda/\mu$ . In Figure 4.8 (right), we plot the load  $\rho$  as a function of  $p$  and  $t = \lambda/\mu$ , for  $p \in (0, 1)$  and  $\lambda/\mu \in (0, \min(1/\hat{\gamma}, 3))$ . Hence,  $\rho$  is always smaller or equal to 1, see Theorem 4.13.

### The free product $\mathbb{N} \star \mathbb{Z} \star \mathbb{B}$

Consider the queue associated with the plain triple  $(\{a\}^* \star \mathbb{F}(b) \star \langle c \mid c^2 = c \rangle, \Sigma = \{a, b, b^{-1}, c\}, \nu)$  where  $\nu(a) = p, \nu(b) = \nu(b^{-1}) = q/2$ , and  $\nu(c) = 1 - p - q$  with  $p, q, p + q \in (0, 1)$ .

The unique solution  $\hat{r}$  of the associated TE is

$$\hat{r}(b) = \hat{r}(b^{-1}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 - q^2}}{2(1 + q)}, \quad \hat{r}(a) = \frac{p(1 - \hat{r}(b))}{1 - \hat{r}(b) - q\hat{r}(b)}, \quad \hat{r}(c) = 1 - \hat{r}(a) - 2\hat{r}(b).$$

Applying Theorem 3.6, the drift of the random walk is given by :

$$\hat{\gamma} = p + (1 - p - q)(1 - \hat{r}(c)) + q(1 - 2\hat{r}(b)) .$$

From there, we obtain Figure 4.9 : the stability region is the region below the surface.

### The free group $\mathbb{Z}$ and the free product $\mathbb{N} \star \mathbb{Z}$

Consider the 0-automatic queue  $(\mathbb{F}(a), \{a, a^{-1}\}, \nu, r, \lambda, \mu)$ , where  $\nu$  is a non-degenerate probability measure on  $\Sigma = \{a, a^{-1}\}$ . In Figure 4.10, we illustrate the corresponding buffering mechanism. Such a mechanism is similar to the one of Gelenbe's G-queue.

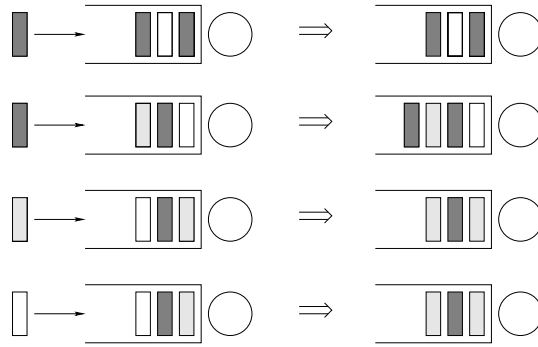


FIGURE 4.5 – The queue  $M/M/(X, \Sigma)$  with  $a$  in dark gray,  $b$  in white, and  $b^2$  in light gray.

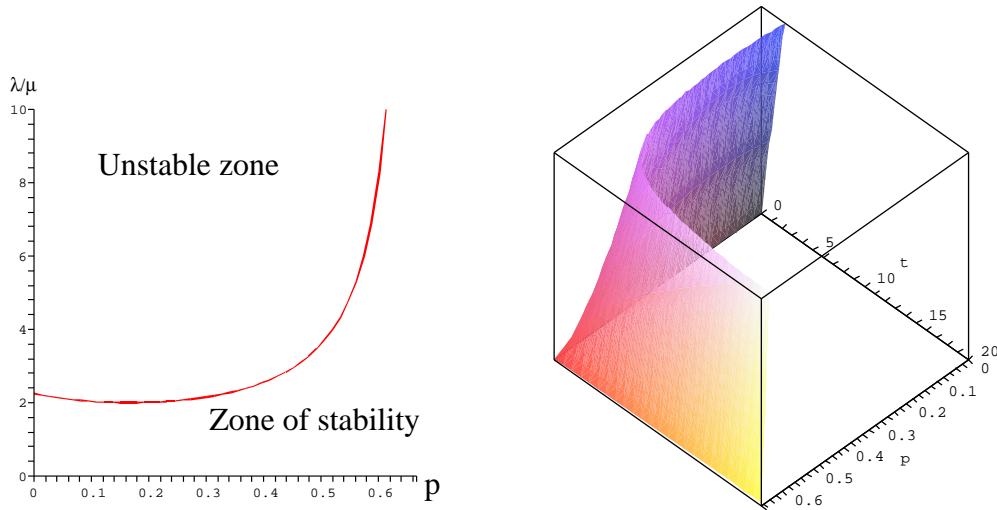


FIGURE 4.6 –  $\langle a, b \mid a^2 = a, b^3 = b^2 \rangle$  : The stability region (left) and the load  $\rho$  (right).

The underlying triple  $(\mathbb{F}(a), \{a, a^{-1}\}, \nu)$  is 0-automatic (Def. 3.1). Here the graph of successors  $(\Sigma, \rightarrow)$ , see (3.7), is not connected. Also the random walk  $(X, \nu)$  is not transient but null-recurrent when  $\nu(a) = \nu(a^{-1}) = 1/2$ . Hence, the Condition **C1-C2** are not satisfying.

The drift of the random walk is easily computed :

$$\hat{\gamma} = |\nu(a) - \nu(a^{-1})|.$$

Assume first that  $\nu(a) = \nu(a^{-1})$ . Solving the TTE, we get that  $(\lambda/(2\mu + \lambda), r)$  is a solution for all  $r \in \bar{\mathcal{B}}$ . It means that the queue is stable and has a product form distribution under any boundary condition. This interesting behavior can be traced back to the fact that the random walk  $(X, \nu)$  is not transient.

Assume now that  $\nu(a) \neq \nu(a^{-1})$ . There are 2 possible solutions for the TTE :

$$(\rho_1, r_1) = \left( \frac{\lambda\nu(a)}{\mu + \lambda\nu(a^{-1})}; (1, 0) \right), \quad (\rho_2, r_2) = \left( \frac{\lambda\nu(a^{-1})}{\mu + \lambda\nu(a)}; (0, 1) \right). \quad (4.45)$$

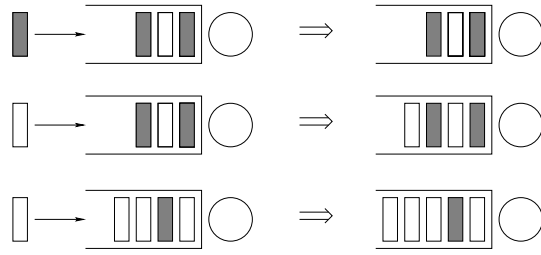


FIGURE 4.7 – The queue  $M/M/(N \star \mathbb{B}, \Sigma)$  with  $a$  in white and  $b$  in dark gray.

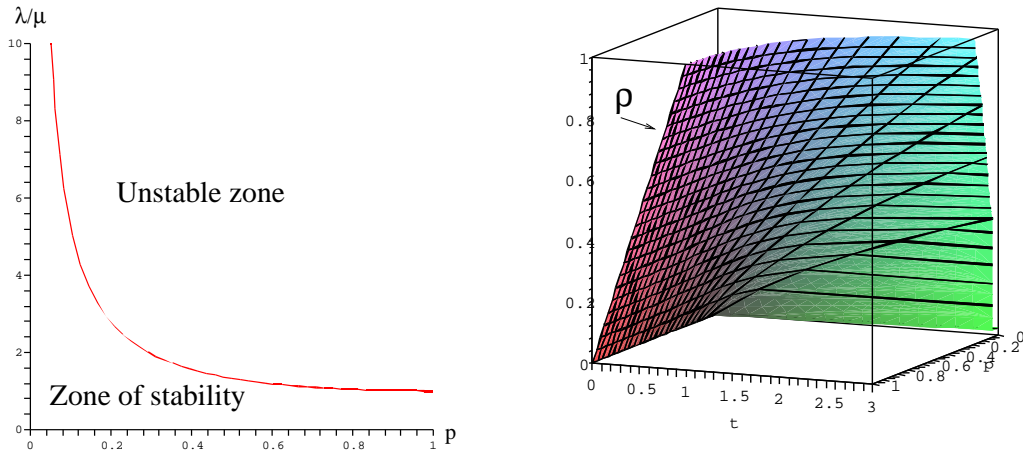


FIGURE 4.8 –  $\mathbb{N} \star \mathbb{B}$  : The stability region (left) and the load  $\rho$  (right).

The two solutions correspond to extremal values for  $r$ , it means that in the buffer, there is only one type of customer with probability 1 : if  $r_1 = (1, 0)$ , there is only  $a$  in the buffer ; if  $r_2 = (0, 1)$ , there is only  $a^{-1}$  in the buffer. Here we recover a model very close to the classical G-queue.

Set  $\underline{\rho} = \min\{\rho_1, \rho_2\}$  and  $\bar{\rho} = \max\{\rho_1, \rho_2\}$  and define  $\underline{r}$  and  $\bar{r}$  accordingly. We have :

$$\underline{\rho} < 1, \quad [\bar{\rho} < 1] \iff [\lambda \hat{\gamma} < \mu] .$$

The stationary distribution of the 0-automatic queue  $(\mathbb{F}(a), \Sigma, \nu, \underline{r}, \lambda, \mu)$  is :

$$\pi_{\underline{r}}(1_{\Sigma^*}) = 1 - \underline{\rho}, \quad \pi_{\underline{r}}(x^n) = (1 - \underline{\rho}) \underline{\rho}^n, \quad \forall n \geq 1, \quad (4.46)$$

where  $x = a$  if  $\nu(a) < \nu(a^{-1})$ , and  $x = a^{-1}$  if  $\nu(a) > \nu(a^{-1})$ . When  $\lambda \hat{\gamma} < \mu$ , the 0-automatic queue  $(\mathbb{F}(a), \Sigma, \nu, \bar{r}, \lambda, \mu)$  also has a product form stationary distribution of the form (4.46) with  $\bar{\rho}$  instead of  $\underline{\rho}$ .

Consider now a boundary condition  $r \in \mathbb{B}$ . In particular,  $r \neq r_1$ ,  $r \neq r_2$ , so the stationary distribution is not of product form. However, if  $\lambda \hat{\gamma} < \mu$ , the stationary distribution

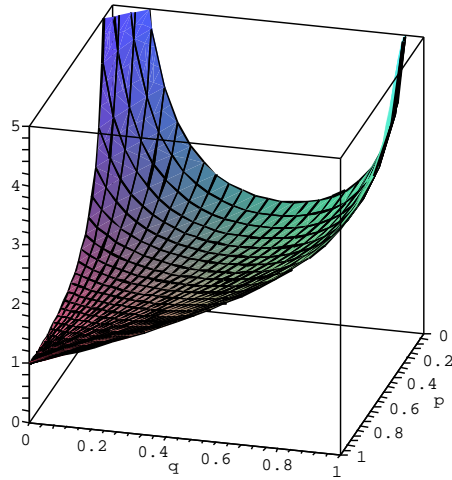


FIGURE 4.9 – Stability region of the  $M/M/1/(N \star Z \star B, \Sigma)$  queue. The axis are  $p, q$ , and  $\lambda/\mu$ .

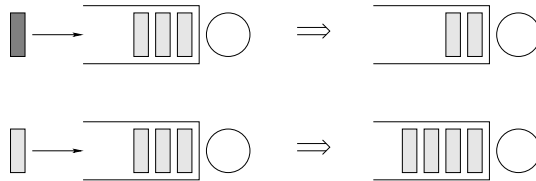


FIGURE 4.10 – The  $M/M/1/(F(a), \Sigma)$  queue with  $a$  in light gray and  $a^{-1}$  in dark gray.

$\pi_r$  can still be determined explicitly by solving the global balance equations. It is given by :

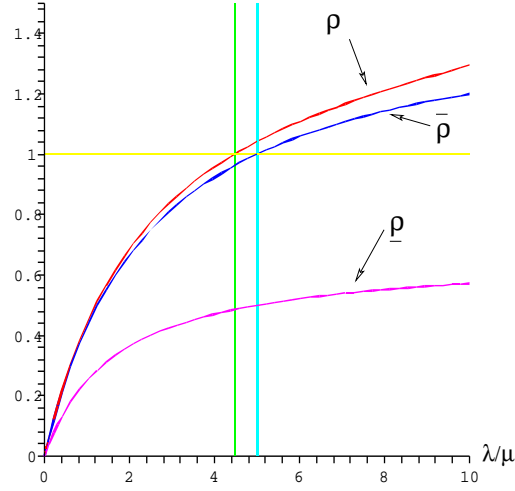
$$\begin{aligned} \pi_r(1_{\Sigma^*}) &= \left( 1 + r(a) \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} + r(a^{-1}) \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} \right)^{-1} \\ \pi_r(a^n) &= \pi_r(1_{\Sigma^*}) r(a) \rho_1^n, \quad \pi_r(a^{-n}) = \pi_r(1_{\Sigma^*}) r(a^{-1}) \rho_2^n, \end{aligned} \quad (4.47)$$

where  $\rho_1$  and  $\rho_2$  are defined in (4.45). The expression in (4.47) is “almost” of product form. So, why do we prefer an expression like the one in (4.46)? The point is that the departure process associated with a stationary distribution of type (4.47) is not Poisson, as opposed to the one associated with (4.46). And having a Poisson departure process is crucial to build product form networks, see [DTM].

To summarize, when  $\lambda\hat{\gamma} < \mu$ , there are two variants of the 0-automatic queue with a product form. We would like to argue that one of the two makes more “physical” sense.

To that purpose, consider the plain triple  $(F(a) \star \{c\}^*, \{a, a^{-1}, c\}, \nu)$  with  $0 < \nu(c) \ll 1$ . According to Theorem 4.14, there exists a single variant of the queue with a product form. Let  $\rho$  be the corresponding load. The question is to determine which one of the two solutions in (4.45) is recovered when letting  $\nu(c)$  go to 0.




 FIGURE 4.11 –  $\mathbb{F}(a)$  and  $\mathbb{F}(a) \star \{c\}^*$  : the loads as a function of  $\lambda/\mu$ .

Since the TTE are difficult to solve explicitly, we content ourselves with numerical evidence. In Figure 4.11, we plot  $\rho$ ,  $\bar{\rho}$ , and  $\underline{\rho}$  as functions of  $\lambda/\mu$ , for  $\nu(c) = 0.01$  and  $\nu(a) = p = 3/5$ . We see that  $\rho$  tends to the larger solution  $\bar{\rho}$ . The two vertical lines correspond to the stability regions. They have an abscissa equal to the inverse of the drift  $\hat{\gamma}^{-1}$  for the random walk on  $\mathbb{F}(a) \star \{c\}^*$  and  $\mathbb{F}(a)$  respectively.

**The monoid**  $M = \langle a, b \mid ab = 1 \rangle$

Consider the *bicyclic monoid*  $M = \langle a, b \mid ab = 1 \rangle$ . Here we have a new “type” of tasks. It is close to the positive/negative type but with no symmetry between the positive and negative customers.

Consider the triple  $(M, \Sigma = \{a, b\}, \nu)$ , with  $\nu(a) = p \in (0, 1)$ ,  $\nu(b) = 1 - p$ . This 0-automatic triple do not satisfy the Condition **C1**.

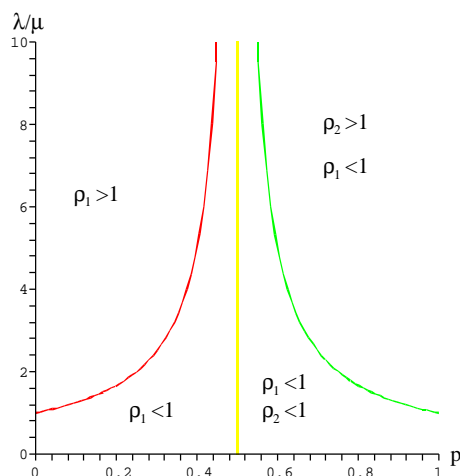
The drift of the random walk is easily computed and given by  $\hat{\gamma} = |1 - 2p|$ . Solving the associated TTE, we obtain that there is one solution if  $p \leq 1/2$  and two solutions if  $p > 1/2$ . More precisely, these two solutions are :

$$(\rho_1, r_1) = \left( \frac{\lambda(1-p)}{\mu + \lambda p}; (0, 1) \right), \forall p$$

$$(\rho_2, r_2) = \left( \frac{\lambda p}{\mu + \lambda(1-p)}; \left( \frac{2p-1}{p}, \frac{1-p}{p} \right) \right), \text{ if } p > 1/2.$$

We have :

$$\begin{aligned} \text{if } p \leq 1/2, & \quad [\rho_1 < 1] \iff [\lambda \hat{\gamma} < \mu] \\ \text{if } p > 1/2, & \quad \rho_1 < 1, \quad [\rho_2 < 1] \iff [\lambda \hat{\gamma} < \mu]. \end{aligned}$$


 FIGURE 4.12 –  $\mathbb{F}(a)$  : The solutions to the TTE.

In Figure 4.12, we show the solutions to the TTE as a function of  $p$  and  $\lambda/\mu$ .

To discriminate between  $(\rho_1, r_1)$  and  $(\rho_2, r_2)$ , we proceed as for  $\mathbb{F}(a)$ . Consider  $X = \langle a, b \mid ab = 1 \rangle \star \{c\}^*$ . Set  $\nu(a) = p$ ,  $\nu(b) = q$ ,  $\nu(c) = 1 - p - q$  with  $p, q > 0$ ,  $p + q < 1$ . The triple  $(X, \{a, b, c\}, \nu)$  is 0-automatic.

The TE can be solved explicitly. It turns out that there is a unique solution  $\hat{r}$  which is determined by :

$$\hat{r}(a) = \frac{p(1 - \hat{r}(b))}{1 - p\hat{r}(b)}, \quad \hat{r}(b) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq}}{2p}, \quad \hat{r}(c) = \frac{1 - p - q}{1 - p\hat{r}(b)}.$$

According to Theorem 3.6, the corresponding drift is  $\hat{\gamma} = \sqrt{1 - 4pq}$ . Now, solving the TTE, we find a unique admissible solution  $(\rho, r)$ , given by :

$$\rho = \frac{\lambda(1 - pr(b))}{\mu + \lambda pr(b)}, \quad r = \hat{r}.$$

We have  $\rho < 1$  iff  $\mu > \lambda\hat{\gamma} = \lambda\sqrt{1 - 4pq}$ .

Let us observe what happens when  $\nu(c)$  tends to 0. When  $p < 1/2$ , there is only one solution  $(\rho_1, r_1)$  for the TTE of the first case. And, as expected,  $(\rho, r)$  tends to  $(\rho_1, r_1)$  when  $\nu(c) \rightarrow 0$ . When  $p > 1/2$ , there are two possible solutions  $(\rho_1, r_1)$  and  $(\rho_2, r_2)$  for the TTE of the first case. In this case,  $(\rho, r)$  tends to  $(\rho_2, r_2)$  when  $\nu(c) \rightarrow 0$ .

In Figure 4.13 (left), we plot  $\rho$  and  $\rho_1$  as functions of  $p$  and  $\lambda/\mu$ , for  $\nu(c) = 0.01$ . In Figure 4.13 (right), we plot  $\rho$  and  $\rho_2$ .

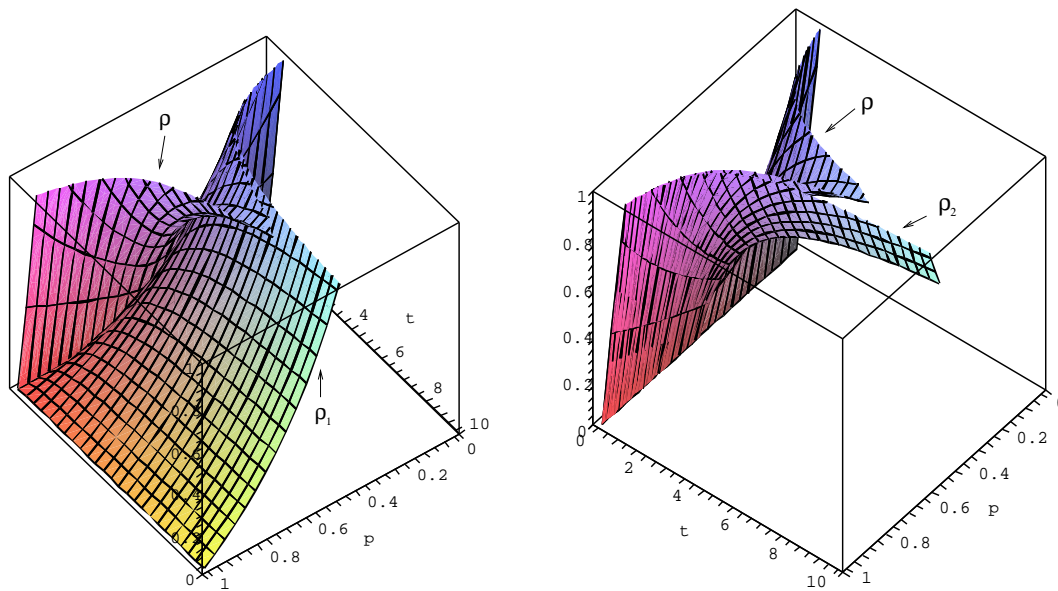


FIGURE 4.13 –  $\langle a, b \mid ab = 1 \rangle$  and  $\langle a, b \mid ab = 1 \rangle \star \{c\}^*$  : the loads in function of  $\nu(a)$  and  $t = \lambda/\mu$ .

# 5

## Jackson-like network of 0-automatic queues

### Résumé

Dans le Chapitre 4, le résultat remarquable est que toutes les files 0-automatiques ont un processus de départ Poisson. C'est le point important pour construire les réseaux de files 0-automatiques dont les distributions stationnaires sont à forme produit. Dans ce chapitre, considérons le réseau à la Jackson dont le routage est suivant le réseau de Jackson classique. La forme produit d'un réseau stable peut être déterminée explicitement et de plus, le processus de départ hors du réseau est Poisson.

### 5.1 Description of the model

Consider a network consisting of  $N$  0-automatic queues  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, r_i, \lambda_i, \mu_i)_{1 \leq i \leq N}$ . We recall the meaning of the queue  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, r_i, \lambda_i, \mu_i)$ . Customers arrive at rate  $\lambda_i$ , choose their type in  $\Sigma_i$  according to  $\nu_i$ , line up according to the random walk  $(X_i, \nu_i)$ , and are served in a FIFO way at rate  $\mu_i$ . The vector  $r_i$  determines the way customers are incorporated in an empty queue. After completing its service at queue  $i$ , a customer goes to queue  $j$  with probability  $p_{ij}$  or leaves definitely the network with probability  $d_i = 1 - \sum_j p_{ij}$ . The matrix  $P = (p_{ij})_{ij}$  of dimension  $N \times N$  is called the *routing matrix*. The graph of  $P$  is assumed to be connected. We also assume that the spectral radius of  $P$  is strictly less than 1, which is equivalent to the assumption that the network is without capture : a customer entering the network will eventually leave it.

The types of customers are not preserved from queue to queue (in fact, different queues need not have the same sets of types). More precisely, when a customer arrives at queue  $i$  coming from another queue, then it chooses its type according to  $\nu_i$ , as if it was arriving from the outside.

We call this model a *Jackson-like network of 0-automatic queues*.

Once again the boundary conditions  $r_i$  will play a central role, with one specific choice leading to good properties for the network.

The more formal definition of the network is done via the infinitesimal generator of the queue-content process.

**Definition 5.1.** Let  $\mathcal{X}_i = (X_i, \Sigma_i, \nu_i, r_i, \lambda_i, \mu_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , be  $N$  zero-automatic queues. Let  $P = (p_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}_+^{N \times N}$  be a sub-stochastic matrix, whose graph is assumed to be connected, and whose spectral radius is strictly less than 1. The Jackson-like network associated with  $((\mathcal{X}_i)_i, P)$  is defined as follows. The queue-content process  $(M(t))_t$  of the network is a continuous time jump Markov process on the state space  $\prod_i L(X_i, \Sigma_i)$ , see (3.3). Denote by  $Q$  its infinitesimal generator. Denote by  $Q_{\lambda, \mu}^i$  the infinitesimal generator of the 0-automatic queue  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, r_i, \lambda, \mu)$ . For all  $u^i = a_{n_i}^i \cdots a_1^i$ ,  $n_i \geq 1$ , in  $L(X_i, \Sigma_i)$ , set  $\text{Dep}(u^i) = a_{n_i}^i \cdots a_2^i$  (Dep for “departure”).

The infinitesimal generator  $Q$  is then defined by :  $\forall u = (u^i)_i$ ,  $u^i \in L(X_i, \Sigma_i)$ ,

$$Q(u, v) = Q^A(u, v) + Q^D(u, v) + Q^I(u, v) + Q^{In}(u, v) ,$$

where :

$$\begin{cases} Q^A(u, u^1 \cdots u^{i-1} v^i u^{i+1} \cdots u^N) &= Q_{\lambda_i, 0}^i(u^i, v^i), & \forall v^i, \\ Q^I(u, u^1 \cdots u^{i-1} v^i u^{i+1} \cdots u^N) &= Q_{\mu_i p_{ii}, 0}^i(\text{Dep}(u^i), v^i), & \forall v^i, \\ Q^{In}(u, \cdots \text{Dep}(u^i) \cdots v^j \cdots) &= Q_{\mu_i p_{ij}, 0}^j(u^j, v^j), & \forall v^j, j \neq i \\ Q^D(u, \cdots \text{Dep}(u^i) \cdots) &= \mu_i d_i, & \forall u^i \end{cases} \quad (5.1)$$

All the other non-diagonal elements are equal to 0.

Let us comment on the various cases in (5.1). The first line corresponds to an arrival at queue  $i$ , which comes from the outside. The second line corresponds to an arrival to queue  $i$  either from queue  $j$  or from queue  $i$  itself (feedback). The third line corresponds to a departure from queue  $i$  to queue  $j$ . The fourth line corresponds to a departure from queue  $i$  to the outside.

## 5.2 Traffic Equations

The Network Traffic Equations (2.15) play a central role in the study of the classical Jackson networks. We now introduce their counterpart : the Jackson-like Network Traffic Equations.

**Definition 5.2 (J-NTE).** The Jackson-like Network Traffic Equations (*J-NTE*) associated with a Jackson-like network of  $N$  queues  $((X_i, \Sigma_i, \nu_i, \lambda_i, \mu_i)_i, P)$  are the equations in the variables  $(\tilde{\lambda}_i)_i$  defined by :

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \sum_j p_{ji} \mu_j \tilde{\rho}_j , \quad (5.2)$$

where  $(\tilde{\rho}_i, \tilde{r}_i)$  is a solution of the TTE associated with  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, \tilde{\lambda}_i, \mu_i)$ .

The interpretation of the J-NTE (5.2) is that  $\tilde{\lambda}_i$  can be viewed as the “total” arrival rate in queue  $i$ , which is the sum of the external arrival rate  $\lambda_i$  and all the rates coming to queue  $i$  from other queues.

The subtlety in (5.2) lies in the fact that the equations are defined in a completely implicit way :  $(\tilde{\lambda}_i)_i$  is a function of  $(\tilde{\rho}_i)_i$  (via the J-NTE) and  $\tilde{\rho}_i$  is itself a function of  $\tilde{\lambda}_i$  (via the TTE). On the other hand, the J-NTE do not depend on the boundary conditions  $(r_i)_i$  defining the 0-automatic queues.

To carry on with the analysis, we need to state a conjecture which has stood up to our efforts.

**Conjecture 5.3.** *Consider the same model as in Theorem 4.13, except that  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  is no longer fixed. For all  $\lambda$ , there is a unique solution  $(\rho, r)$  in  $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{B}$  of the TTE corresponding to  $\lambda$ . Let us set  $\rho(\lambda) = \rho$ . Then  $\rho(\lambda)$  is a continuous and increasing function of  $\lambda$ .*

This conjecture is reasonable. In particular, it holds in all the specific examples that we have been able to treat completely.

For a line vector  $\Lambda = (\Lambda_i)_i$  in  $\mathbb{R}_+^N$ , denote by  $Diag(\Lambda)$  the diagonal matrix of size  $N \times N$  defined by  $Diag(\Lambda)_{ii} = \Lambda_i$ . Assume that Conjecture 5.3 holds. Denote by  $\rho(\Lambda)$  the line vector in  $\mathbb{R}_+^N$  whose  $i$ -th coordinate is  $\rho_{i(\Lambda_i)}$  where  $(\rho_{i(\Lambda_i)}, R_{i(\Lambda_i)})$  is the unique solution of the TTE of  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, \Lambda_i, \mu_i)$ . By convention,  $\rho_{i(0)} = 0$ .

Fix the line vectors  $\lambda = (\lambda_i)_i$  in  $\mathbb{R}_+^N$  and  $\mu = (\mu_i)_i$  in  $(\mathbb{R}_+^*)^N$ . Define the function :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_+^N &\rightarrow \mathbb{R}_+^N \\ \Lambda &\mapsto \Phi(\Lambda) = \lambda + \mu Diag(\rho(\Lambda))P, \end{aligned} \quad (5.3)$$

where  $P = (p_{ij})_{ij}$  is the routing matrix. Conjecture 5.3 implies that  $\Phi$  is an increasing function.

We can rewrite the J-NTE (5.2) as follows :

$$\tilde{\lambda} = \lambda + \mu Diag(\rho(\tilde{\lambda}))P = \Phi(\tilde{\lambda}), \quad (5.4)$$

where  $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_i)_i$ ,  $\lambda = (\lambda_i)_i$ ,  $\mu = (\mu_i)_i$  are line vectors of dimension  $N$ .

## 5.3 Stationary distribution

**Lemma 5.4.** *Assume that Conjecture 5.3 holds. Then there exists a solution for the J-NTE (5.2).*

*Proof.* Let  $(\rho_{i(\Lambda_i)}, R_{i(\Lambda_i)})$  be the unique solution to the TTE for the queue  $i$  with an arrival rate  $\Lambda_i > 0$ . Using the TTE, we get,  $\forall a \in \Sigma_i$ ,

$$\rho_{i(\Lambda_i)}(\Lambda_i + \mu_i)R_{i(\Lambda_i)}(a) > \rho_{i(\Lambda_i)}^2 \mu_i R_{i(\Lambda_i)}(a). \quad (5.5)$$

Simplifying (5.5), we have :

$$\rho_{i(\Lambda_i)} \mu_i < (\Lambda_i + \mu_i). \quad (5.6)$$

Consider the function :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^N &\rightarrow \mathbb{R}_+^N \\ \Lambda &\mapsto \lambda + (\mu + \Lambda)P. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Using (5.6), we get :

$$\varphi(\Lambda) = \lambda + (\mu + \Lambda)P > \lambda + \mu \text{Diag}(\rho(\Lambda))P = \Phi(\Lambda) . \quad (5.8)$$

Consider the sequence  $(\Lambda^n)_n$  in  $\mathbb{R}_+^N$  defined by :

$$\begin{aligned} \Lambda^0 &= 0 , \\ \Lambda^1 &= \varphi(\Lambda^0) = \lambda + \mu P , \\ \Lambda^2 &= \varphi(\Lambda^1) = \lambda + \lambda P + \mu P + \mu P^2 , \\ &\dots \\ \Lambda^n &= \varphi(\Lambda^{n-1}) = \lambda + \lambda P + \dots + \lambda P^{n-1} \\ &\quad + \mu P + \dots + \mu P^n , \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

The matrix  $P$  has a spectral radius strictly less than 1, so the sequence  $(\Lambda^n)_n$  converges. Now, consider another sequence  $(\tilde{\lambda}^n)_n$  in  $\mathbb{R}_+^N$  defined by :

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^0 &= 0 , \\ \tilde{\lambda}^1 &= \Phi(\tilde{\lambda}^0) , \\ &\dots \\ \tilde{\lambda}^n &= \Phi(\tilde{\lambda}^{n-1}) , \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

Since  $\Phi$  is increasing, the sequence  $\tilde{\lambda}^n$  is also increasing. The inequality (5.8) implies that  $\tilde{\lambda}^n < \Lambda^n$  for all  $n$ . So there exists a limit  $\tilde{\lambda}$  of  $\tilde{\lambda}^n$  when  $n$  tends to infinity. Since  $\rho$  is a continuous function of  $\lambda$  (Conjecture 5.3), this is equivalent to the existence of a fixed point for the function  $\Phi$ , or to the existence of a solution for the J-NTE (5.2). This completes the proof.  $\square$

**Lemma 5.5.** *Let  $(\tilde{\lambda}_i)_i$  be a solution to the J-NTE (5.2). Consider the Jackson-type network of  $N$  queues  $[(X_i, \Sigma_i, \nu_i, \tilde{r}_i, \lambda_i, \mu_i)]$ . Let  $Q$  be the infinitesimal generator of the network-content process. Consider the measure  $p$  on  $L(X_1, \Sigma_1) \times \dots \times L(X_i, \Sigma_i) \times \dots \times L(X_N, \Sigma_N)$  defined by :*

$$\forall u = (u^i)_i , u^i \in L(X_i, \Sigma_i), \quad p(u) = \prod_i p^i(u^i) ,$$

where  $p^i(u^i)$  has the form given by : for  $u^i = a_{n_i}^i \dots a_1^i \in L(X_i, \Sigma_i)$ ,

$$\forall u^i = a_{n_i}^i \dots a_1^i \in L(X_i, \Sigma_i), \quad p^i(u^i) = (\tilde{\rho}_i)^{n_i} \tilde{q}_i(a_{n_i}^i) \dots \tilde{q}_i(a_2^i) \tilde{r}_i(a_1^i) , \quad (5.11)$$

where  $\tilde{q}_i(a) = \tilde{r}_i(a) / \tilde{r}_i(\text{Next}(a))$  for all  $a \in \Sigma_i$ . The measure  $p$  is the stationary measure of the network-content process.

*Proof.* The measure  $p$  is stationary iff the balance equation is satisfied :

$$\sum_v p(u)Q(u, v) = \sum_v p(v)Q(v, u). \quad (5.12)$$

Denote the left and right-hand side of the above equality by  $L$  and  $R$ , respectively. Using the shape of  $Q$ , see Def. 5.1, the left of (5.12) can be written as :

$$L = p(u) \sum_i \mathbb{1}_{\{n_i=0\}} \lambda_i + p(u) \sum_i \mathbb{1}_{\{n_i>0\}} (\lambda_i + \mu_i). \quad (5.13)$$

Using Theorem 4.13, for all  $1 \leq i \leq N$ , one obtains  $N$  balance equations associated with the queues  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, \tilde{r}_i, \tilde{\lambda}_i, \mu_i)$  :

$$\begin{aligned} \sum_{v^i} p^i(v^i) Q_{\tilde{\lambda}_i, \mu_i}^i(v^i, u^i) &= \sum_{v^i} p^i(u^i) Q_{\tilde{\lambda}_i, \mu_i}^i(u^i, v^i) \\ &= \mathbb{1}_{\{n_i>0\}} p^i(u^i) (\tilde{\lambda}_i + \mu_i) + \mathbb{1}_{\{n_i=0\}} p^i(u^i) \tilde{\lambda}_i. \end{aligned} \quad (5.14)$$

The right of (5.12) can be written as :

$$\begin{aligned} R &= \sum_i \frac{p(u)}{p^i(u^i)} \sum_v p^i(v^i) (Q^A(v, u) + Q^D(v, u) + Q^I(v, u)) \\ &\quad + \sum_{i,j|i \neq j} \frac{p(u)}{p^i(u^i) p^j(u^j)} \sum_v p^i(v^i) p^j(v^j) Q^{In}(v, u) \\ &= \sum_i \frac{p(u)}{p^i(u^i)} B_1 + \sum_{i,j|i \neq j} \frac{p(u)}{p^i(u^i) p^j(u^j)} B_2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Let us consider the term  $B_1$ . Using the equation (5.14) and the form of the infinitesimal generator  $Q$  given in (5.1), it implies :

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{v^i} p^i(v^i) Q_{\tilde{\lambda}_i, 0}^i(v^i, u^i) + \sum_{v^i a} p^i(v^i a) Q_{p_{ii} \mu_i, 0}^i(v^i, u^i) + \sum_{v^i | \text{Dep}(v^i)=u^i} p^i(v^i) \mu_i d_i \\ &= \frac{\lambda_i}{\tilde{\lambda}_i} p^i(u^i) \left\{ \mathbb{1}_{n_i>0} (\tilde{\lambda}_i + \mu_i) + \mathbb{1}_{n_i=0} \tilde{\lambda}_i - \mu_i \tilde{\rho}_i \right\} \\ &\quad + \tilde{\rho}_i \sum_{v^i} p^i(v^i) Q_{p_{ii} \mu_i, 0}^i(v^i, u^i) + p^i(u^i) \tilde{\rho}_i \mu_i (1 - \sum_j p_{ij}) \\ &= \frac{\lambda_i}{\tilde{\lambda}_i} p^i(u^i) \left\{ \mathbb{1}_{n_i>0} \mu_i + \tilde{\lambda}_i - \mu_i \tilde{\rho}_i \right\} \\ &\quad + \tilde{\rho}_i \frac{p_{ii} \mu_i}{\tilde{\lambda}_i} p^i(u^i) \left\{ \mathbb{1}_{n_i>0} \mu_i + \tilde{\lambda}_i - \mu_i \tilde{\rho}_i \right\} + p^i(u^i) \tilde{\rho}_i \mu_i (1 - \sum_j p_{ij}). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Similarly, the term  $B_2$  is :

$$\begin{aligned} B_2 &= \sum_{v^i | \text{Dep}(v^i)=u^i} p^i(v^i) \sum_{j \neq i, v^j} p^j(v^j) Q_{p_{ij} \mu_i, 0}^j(v^j, u^j) \\ &= p^i(u^i) \tilde{\rho}_i \frac{\mu_i p_{ij}}{\tilde{\lambda}_j} p^j(u^j) \left\{ \mathbb{1}_{n_j>0} \mu_j + \tilde{\lambda}_j - \tilde{\rho}_j \mu_j \right\}. \end{aligned} \quad (5.17)$$



Substitute  $B_1$  and  $B_2$  in (5.15) and simplify by using the TE (5.2), one gets :

$$\begin{aligned}
 \frac{R}{p(u)} &= \sum_i \frac{\lambda_i + \sum_j \mu_j p_{ji} \tilde{\rho}_j}{\tilde{\lambda}_i} \left\{ \mathbb{1}_{n_i > 0} \mu_i + \tilde{\lambda}_i - \mu_i \tilde{\rho}_i \right\} + \sum_i \tilde{\rho}_i \mu_i - \sum_i \tilde{\rho}_i \mu_i \sum_j p_{ij} \\
 &= \sum_i \left\{ \mathbb{1}_{n_i > 0} \mu_i + \tilde{\lambda}_i \right\} - \sum_i (\tilde{\lambda}_i - \lambda_i) \\
 &= \sum_i \mathbb{1}_{\{n_i=0\}} \lambda_i + \sum_i \mathbb{1}_{\{n_i>0\}} (\lambda_i + \mu_i) .
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Therefore, the balance equation  $L = R$  is proved. It completes the proof.  $\square$

Next theorem establishes the first main result of the paper : the stationary distribution of a Jackson-like network of 0-automatic queues has a product form, which means that it is obtained as the product of the stationary distributions of the individual queues in isolation.

**Theorem 5.6.** *Consider a Jackson-like network of  $N$  queues  $((X_i, \Sigma_i, \nu_i, \lambda_i, \mu_i)_i, P)$ . Let  $\hat{\gamma}_i$  be the drift of the random walk  $(X_i, \nu_i)$ . Set  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_i)_{1 \leq i \leq N}$ .*

*Consider the J-NTE (5.2) associated with the network. Let  $(\tilde{\lambda}_i)_i$  be a solution to the J-NTE. Let  $(\tilde{\rho}_i, \tilde{r}_i)$  be a solution of the TTE associated with  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, \tilde{\lambda}_i, \mu_i)$ .*

*Consider now the Jackson-like network of  $N$  queues  $((X_i, \Sigma_i, \nu_i, \tilde{r}_i, \lambda_i, \mu_i)_i, P)$  where we have specified the boundary conditions  $(\tilde{r}_i)_i$ .*

*Denote by  $M = (M^1(t), \dots, M^N(t))_t$  the Markov jump process associated with this network (where  $(M^i(t))_t$  is the queue-content process in queue  $i$ ). Then we have the following equivalences :*

$$[ M \text{ is ergodic } ] \iff [ \forall i, \tilde{\rho}_i < 1 ] \iff [ \forall i, \tilde{\lambda}_i \hat{\gamma}_i < \mu_i ] .$$

*Assume that  $\tilde{\lambda}_i \hat{\gamma}_i < \mu_i$ , for all  $i$ . The stationary distribution of the process  $M$  exists and has a product form :*

$$\forall u = (u^i)_i, u^i \in L(X_i, \Sigma_i), \quad \pi(u) = \prod_i \pi_{\tilde{\rho}_i, \tilde{r}_i}^i(u^i) , \tag{5.19}$$

where  $\pi_{\tilde{\rho}_i, \tilde{r}_i}^i(u^i)$  has the form given in (4.25) :

$$\forall u^i = a_{n_i}^i \cdots a_1^i \in L(X_i, \Sigma_i), \quad \pi_{\tilde{\rho}_i, \tilde{r}_i}^i(u^i) = (1 - \tilde{\rho}_i) (\tilde{\rho}_i)^{n_i} \tilde{q}_i(a_{n_i}^i) \cdots \tilde{q}_i(a_2^i) \tilde{r}_i(a_1^i) ,$$

where  $\tilde{q}_i(a) = \tilde{r}_i(a) / \tilde{r}_i(\text{Next}(a))$  for all  $a \in \Sigma_i$ .

*Proof.* Let  $p$  be the measure defined in (5.11). We have :

$$\sum_u p(u) = \prod_{i=1}^N \sum_{u^i \in L(X_i, \Sigma_i)} p^i(u^i) = \prod_{i=1}^N \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\rho}_i^n .$$

Therefore,  $\sum_u p(u) < \infty$  iff  $\rho_i < 1$  for all  $i$ . Lemma 5.5 states that  $p$  is the stationary measure of the process  $M$ . The process  $M$  is ergodic iff  $\sum_u p(u) < \infty$ , see for instance [Bré99, Chapter 8]. So we have established that  $M$  is ergodic iff  $\rho_i < 1$  for all  $i$ .

Next we need to argue that  $M$  is ergodic iff  $\tilde{\lambda}_i \hat{\gamma}_i < \mu_i$  for all  $i$ .

If  $\tilde{\rho}_i < 1$ , then  $\sum_{u^i \in L(X_i, \Sigma_i)} p^i(u^i) = 1/(1 - \tilde{\rho}_i)$ . It yields that under the stability condition, the stationary distribution is given by (5.19). Hence, this completes the proof.  $\square$

**Corollary 5.7.** *The model is the same as in Theorem 5.6. Consider the Jackson-like network of  $N$  queues  $((X_i, \Sigma_i, \nu_i, \tilde{r}_i, \lambda_i, \mu_i)_i, P)$ . Assume that  $\tilde{\lambda}_i \hat{\gamma}_i < \mu_i$ , then the departure process out of the network is a Poisson process of rate  $\sum_i \mu_i \tilde{\rho}_i d_i$ , where  $d_i = 1 - \sum_j p_{ij}$ .*

*Proof.* Let  $Q_D$  be the subset of the set of state transition rates  $Q = \{q(u, u') \mid u, u'$  state vectors of the network  $\} : q(u, u') \in Q_D$  if the transition from  $u$  to  $u'$  occurs with a customer's real departure (or  $Q^D(u, u')$  is positive).

Let  $M = (M^i)$  be the Markov jump process associated to the network. Let  $D = (D^i)$  be the real departure process of the network, i.e a customer leaving the network from one of server towards the outside.

Consider the time-reversed process  $\tilde{D}$  of  $D$ . The process  $\tilde{D}$  corresponds to the instants of "right-increase" in one of  $N$  time-reversed process  $(\tilde{M}^i(t))_t$ . Therefore, the instantaneous rate  $\tilde{c}(t)$  of  $\tilde{D}$  is as follows. If  $\tilde{M}(t) = u = u_1 \cdots u_N$ ,  $u_i \in L(X_i, \Sigma_i)$ ,

$$\tilde{c}(t) = \sum_{u'} \pi(u') q(u', u) \mathbb{1}_{q(u', u) \in Q_D} / \pi(u) = \sum_i \tilde{\rho}_i \mu_i d_i .$$

Therefore,  $\sum_i \tilde{D}^i$  is a Poisson process of rate  $\sum_i \tilde{\rho}_i \mu_i d_i$ . Since Poisson processes are preserved by time-reversal,  $\sum_i D^i$  is also a Poisson process of rate  $\sum_i \tilde{\rho}_i \mu_i d_i$ . This completes the proof.  $\square$

*Remark 5.8.* These above results may obtain by using the stronger version of Theorem 2.24 states by Chao, Miyazawa et Pinedo in [CMP99].

In the case of one 0-automatic queue, the stability condition depends only on the input variables which define the model. The same holds for a classical Jackson network where the stability condition can be rewritten as :  $\lambda(I - P)^{-1} < \mu$  (see (2.15)). Here, on the other hand, the stability condition of the Jackson-like network depends on  $\tilde{\lambda}$ , which is an implicit solution of the J-NTE. It is hard to give an explicit stability condition for the network. Nevertheless, we found the following explicit necessary and sufficient conditions.

Let  $\hat{\Lambda}$  be the line vector satisfying :

$$\hat{\Lambda} \text{Diag}(\hat{\gamma}) = \mu . \quad (5.20)$$

Theorem 4.13 implies that  $\text{Diag}(\rho(\hat{\Lambda})) = I$ , where  $I$  is the identity matrix of dimension  $N \times N$ . Hence,  $\Phi(\hat{\Lambda}) = \lambda + \mu P$ .

The next lemma gives a sufficient condition of stability for a Jackson-like network of 0-automatic queues under the Conjecture 5.3.

The condition  $(\lambda + \mu P) \text{Diag}(\hat{\gamma}) < \mu$  is equivalent to

$$\lambda + \mu P < \hat{\Lambda} . \quad (5.21)$$

**Lemma 5.9.** *Assume that Conjecture 5.3 is true. If we have  $(\lambda + \mu P) \text{Diag}(\hat{\gamma}) < \mu$ , or  $\lambda + \mu P < \hat{\Lambda}$ , then the J-NTE (5.2) have a solution  $\tilde{\lambda}$  such that  $\rho_{i(\tilde{\lambda})} < 1$  for all  $1 \leq i \leq N$ .*

*Proof.* Consider the sequence  $\tilde{\lambda}^i$  defined by (5.10). The following inequation will be proved by induction :

$$\tilde{\lambda}^i < \lambda + \mu P, \forall i . \quad (5.22)$$

For  $i = 1$  :  $\tilde{\lambda}^1 = \lambda < \lambda + \mu P$ .

Suppose that  $\tilde{\lambda}^i < \lambda + \mu P$ . Then, the increasing of  $\Phi$  yields :

$$\tilde{\lambda}^{i+1} = \Phi(\tilde{\lambda}^i) < \Phi(\hat{\Lambda}) = \lambda + \mu P. \quad (5.23)$$

Hence, the equation (5.22) is proved. Therefore, the sequence  $\tilde{\lambda}^i$  is increasing and bounded by  $\lambda + \mu P$ . It implies that the limit  $\tilde{\lambda}$  of the sequence  $\tilde{\lambda}^i$  is less than  $\hat{\Lambda}$ . Under Conjecture 5.3, the increasing of function  $\rho$  yields that  $\rho_i(\tilde{\lambda}) < \rho_i(\hat{\Lambda}) = 1$ . This completes the proof.  $\square$

The next lemma gives a necessary condition under the Conjecture 5.3.

**Lemma 5.10.** *Assume that Conjecture 5.3 is valid. If the solution  $\tilde{\lambda}$  of the J-NTE (5.2) is such that  $\rho_{i(\tilde{\lambda})} < 1$  for all  $1 \leq i \leq N$ , then  $\lambda(I - \text{Diag}(\hat{\gamma})P)^{-1} < \hat{\Lambda}$ .*

*Proof.* Suppose that the network is stable, or the solution  $\tilde{\lambda}$  of the J-NTE (5.2) satisfied  $\rho_{i(\tilde{\lambda})} < 1$ .

In a stable 0-automatic queue  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$ , where  $(\rho, r)$  is an admissible solution to the associated TTE, one has  $\lambda\hat{\gamma} < \rho\mu$ , where  $\hat{\gamma}$  is the drift of the random walk  $(X, \nu)$ . It implies that :

$$\tilde{\lambda} = \lambda + \mu \text{Diag}(\rho(\tilde{\lambda}))P \geq \lambda + \tilde{\lambda} \text{Diag}(\hat{\gamma})P . \quad (5.24)$$

This is equivalent to :

$$\tilde{\lambda}(I - \text{Diag}(\hat{\gamma})P) \geq \lambda . \quad (5.25)$$

Matrix  $\text{Diag}(\hat{\gamma})P$  is sub-stochastic, so  $(I - \text{Diag}(\hat{\gamma})P)^{-1}$  is a positive matrix. It yields :

$$\tilde{\lambda} \geq \lambda(I - \text{Diag}(\hat{\gamma})P)^{-1} . \quad (5.26)$$

The stability of the network is equivalent to the solution of the TE (5.2) satisfied  $\tilde{\lambda} < \hat{\Lambda}$ . This completes the proof.  $\square$

## 5.4 Examples

The simple  $M/M/1$  queue and the  $G$ -queue are the two simplest examples of 0-automatic queues. A classical Jackson network is a 0-automatic Jackson-like network of simple queues. A  $G$ -network, as studied for instance in [Gel91, FGS96, GP98], is close to a 0-automatic Jackson-like network of  $G$ -queues. In a classical  $G$ -network, the routing is slightly more complex, and the customer types are slightly less complex.

### 5.4.1 The classical Jackson network

Consider a network of  $N$  0-automatic queues  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, r_i, \lambda_i, \mu_i)_{1 \leq i \leq N}$ , where  $X_i = \{a_i^k, k \in \mathbb{N}\}$ ,  $\Sigma_i = \{a_i\}$ , and a routing matrix  $P = (p_{ij})_{ij}$ . Here, one has  $\nu_i(a_i) = r_i(a_i) = 1$ , so there is a single possible variant for the 0-automatic network. This variant is a classical Jackson network.

In queue  $i$ , the solution to the TTE is  $\rho_{i(\Lambda_i)} = \Lambda_i / \mu_i$ . If we simplify the J-NTE (5.2) accordingly, we obtain precisely the NTE (2.15).

The necessary condition in Lemma 5.10 is also the sufficient condition of stability for the network.

### 5.4.2 Zero-automatic Jackson-like network of G-queues

Consider  $N$  zero-automatic queues  $(\mathbb{F}(a_i), \{a_i, a_i^{-1}\}, \nu_i, r_i, \lambda_i, \mu_i)_i$  where  $\nu_i(a_i) \neq \nu_i(a_i^{-1})$ , for all  $i$ . Let  $P = (p_{ij})_{ij}$  be the routing matrix (connected, with a spectral radius strictly less than 1).

We recall that each TTE has 2 possible solutions, see Section 4.5.2. If the arrival rate to queue  $i$  is  $\Lambda_i$ , we denote these two solutions by  $(\rho_{i(\Lambda_i)}^1, R^1)$  and  $(\rho_{i(\Lambda_i)}^2, R^2)$ .

Corresponding to these solutions, we may define  $2^N$  different variants of the Jackson-like network of G-queues. In particular, there are  $2^N$  possible J-NTE :

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \sum_j p_{ji} \mu_j \tilde{\rho}_j, \quad (5.27)$$

where  $\tilde{\rho}_i = \rho_{i(\tilde{\lambda}_i)}^1$  or  $\tilde{\rho}_i = \rho_{i(\tilde{\lambda}_i)}^2$ . If  $\tilde{\rho}_i = \rho_{i(\tilde{\lambda}_i)}^1$ , then there are only customers of type  $a_i$  in queue  $i$ ; and if  $\tilde{\rho}_i = \rho_{i(\tilde{\lambda}_i)}^2$ , then there are only customers of type  $a_i^{-1}$  in queue  $i$ .

For each  $i$ , the equation (4.45) implies immediately that either  $\rho_{i(\tilde{\lambda}_i)}^1$  or  $\rho_{i(\tilde{\lambda}_i)}^2$  is less than 1. Hence, among the  $2^N$  variants of the networks, there is at least one variant in which the network is stable.

Consider the case  $N = 2$  where  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 2$ ,  $\nu_1(a_1) = \nu_2(a_2) = 4/9$ ,  $\nu_1(a_1^{-1}) = \nu_2(a_2^{-1}) = 5/9$ . Let us consider the 4 variants.

1.  $\tilde{\rho}_1 = \rho_{1(\tilde{\lambda}_1)}^1$  and  $\tilde{\rho}_2 = \rho_{2(\tilde{\lambda}_2)}^1$ . The J-NTE have a solution such that  $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}_2 = 1/5 < 1$ .
2.  $\tilde{\rho}_1 = \rho_{1(\tilde{\lambda}_1)}^1$  and  $\tilde{\rho}_2 = \rho_{2(\tilde{\lambda}_2)}^2$ . The J-NTE have a solution such that  $\tilde{\rho}_1 = 0.208 < 1$ ,  $\tilde{\rho}_2 = 0.265 < 1$ .
3.  $\tilde{\rho}_1 = \rho_{1(\tilde{\lambda}_1)}^2$  and  $\tilde{\rho}_2 = \rho_{2(\tilde{\lambda}_2)}^1$ . The J-NTE have a solution such that  $\tilde{\rho}_1 = 0.265 < 1$ ,  $\tilde{\rho}_2 = 0.208 < 1$ .
4.  $\tilde{\rho}_1 = \rho_{1(\tilde{\lambda}_1)}^2$  and  $\tilde{\rho}_2 = \rho_{2(\tilde{\lambda}_2)}^2$ . The J-NTE have a solution such that  $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}_2 = 0.276 < 1$ .

Hence, in the numerical example above, each possible J-NTE have a unique solution such that the corresponding network is stable and has a product form.

In comparison with the above model, the G-networks defined in [Gel91] are slightly more flexible in the way the routing mechanism is defined. On the other hand, and because of this flexibility, it is not possible to define several variants of the network as above.

### 5.4.3 0-automatic Jackson-like network of a $(\mathbb{N}, \{1\})$ -queue and a $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \{a, a^2, b, b^2\})$ -queue

Consider a network of 2 queues : the simple queue  $(\{c\}^*, \{c\}, \nu_1(c) = 1, r_1(c) = 1, \lambda_1, \mu_1)$  and a  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \{a, a^2, b, b^2\}, \nu_2, r_2, \lambda_2, \mu_2)$  - queue, where  $\nu_2(a) = \nu_2(b) = p$  and  $\nu_2(a^2) = \nu_2(b^2) = q = 1/2 - p$ . The buffering mechanism is illustrated in Figure 5.1. For simplicity, we take  $p_{11} = p_{22} = 0$ .

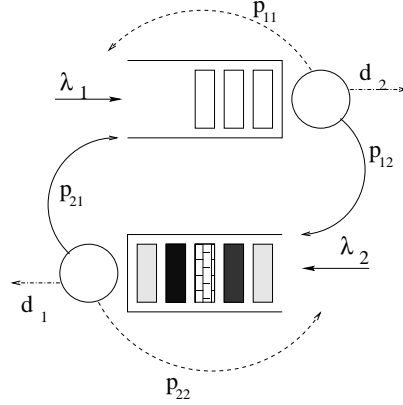


FIGURE 5.1 – Network of 2 queues

In Section 4.5.2, the solution  $\rho_2(\lambda, \mu)$  to the TTE of the 0-automatic queue  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \{a, b, a^2, b^2\}, \nu_2, \lambda, \mu)$  is given :

$$\rho_2(\lambda, \mu) = 2 \frac{4\lambda^2 p^2 - 2\lambda^2 p + \lambda\mu + \lambda^2}{4\lambda^2 p^2 - 2\lambda^2 p + 4\lambda\mu + \lambda^2 + 4\mu^2} . \quad (5.28)$$

Therefore, the J-NTE (5.2) of the network are :

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 + \mu_2 p_{21} \rho_2(\tilde{\lambda}_2, \mu_2) \\ \tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 + \tilde{\lambda}_1 p_{12} \end{cases} . \quad (5.29)$$

The J-NTE (5.29) have a unique positive solution which can be expressed as a root of a polynomial of degree 3.

For simplicity, let us carry out the computations for the model obtained by setting  $p = 1/3, p_{12} = 1/4, p_{21} = 1/2, \mu_1 = 2, \mu_2 = 3$ . The arrival rates  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  may vary.

The vector  $\hat{\Lambda}$  defined in (5.20) is given by  $\hat{\Lambda} = (2, (\sqrt{37} - 3)/4)$ . We obtain that  $\tilde{\lambda}_2$  is the positive root of the polynomial

$$f(x) = 28x^3 + (411 - 28\lambda_2 - 7\lambda_1)x^2 - (432\lambda_2 - 1215 + 108\lambda_1)x - 324\lambda_1 - 1296\lambda_2 .$$

Then  $\tilde{\lambda}_1$  can be determined via  $\tilde{\lambda}_2$  :

$$\tilde{\lambda}_1 = 4(\tilde{\lambda}_2 + \lambda_2) .$$

In particular, we can explicitly determine the stability region which, we recall, is characterized by  $\tilde{\lambda}_1 \hat{\gamma}_1 < \mu_1, \tilde{\lambda}_2 \hat{\gamma}_2 < \mu_2$  (Theorem 5.6). It is instructive to compare this

stability region with the regions provided by the sufficient condition of Lemma 5.9 and the necessary condition of Lemma 5.10.

The necessary condition in Lemma 5.10 is equivalent to :

$$0 < \lambda_1 < 2, \quad 0 < \lambda_2 < \hat{\Lambda}_2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 \hat{\Lambda}_2 / 6 < 2, \quad \lambda_2 + 1/4 \lambda_1 < \hat{\Lambda}_2. \quad (5.30)$$

Consider now the sufficient condition in Lemma 5.9. In the present situation, we obtain :

$$0 < \lambda_2 < \frac{\sqrt{37} - 5}{4}, \quad 0 < \lambda_1 < 1/2. \quad (5.31)$$

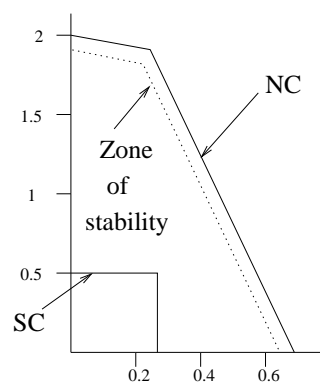


FIGURE 5.2 – Stability region, the sufficient condition (SC) and the necessary condition (NC)

Figure 5.2 shows the stability region, together with the regions associated with the sufficient condition (5.31) and the necessary condition (5.30). The stability region is very close to the necessary condition, but very far from the sufficient condition.



## 6

# Kelly-like network of 0-automatic queues

## Résumé

Le réseau à la Jackson des files 0-automatiques est introduit dans le chapitre 5. On va continuer à étudier un autre type de réseau des files 0-automatiques. Dans ce chapitre, on introduit le réseau à la Kelly dont le routage est suivant le réseau de Kelly introduit dans la Section 2.2.4. La forme produit d'un réseau stable à la Kelly peut être déterminé explicitement.

## 6.1 Zero-automatic queues with classes

Consider a 0-automatic queue  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$  and denote by  $Q_{\lambda, \mu}$  the infinitesimal generator of the queue-content. Let  $\mathcal{C}$  be the finite set of *classes*. We refine the model by assuming that each customer carries a *class* (in  $\mathcal{C}$ ) on top of its type (in  $\Sigma$ ). The customers of class  $c$  enter the network according to a Poisson process of rate  $\lambda_c$ , so that  $\lambda = \sum_{c \in \mathcal{C}} \lambda_c$ .

The classes of the customers do not influence the buffering mechanism. When two customers of *types*  $a$  and  $b$  merge in the buffer to create a new customer of *type*  $c = a * b$ , then the *class* of the customer  $c$  is chosen to be equal to the class of the customer  $a$  with probability  $1/2$ , and to the class of the customer  $b$  with probability  $1/2$ . Hence, a class of customer may “change” in a zero-automatic queues with classes. We will see that the 0-automatic queue with classes is still quasi-reversible in sense of Chao, Miyazawa and Pinedo, however, the phenomenon of changing class of one customer is strange to compare to the queues of Chao, Miyazawa and Pinedo.

The *0-automatic queue with classes*  $(X, \Sigma, \nu, r, \mathcal{C}, (\lambda_c), \mu)$  is defined formally as follows. The *queue-content*  $(M(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  is a continuous time jump Markov process on the state space

$$\mathcal{S} = \{(u, \alpha) \in L(X, \Sigma) \times \mathcal{C}^* \mid |u|_{\Sigma} = |\alpha|_{\mathcal{C}}\} \quad (6.1)$$

with infinitesimal generator  $Q$  defined by :



$$\forall (u, \alpha), u = u_n \cdots u_1 \in L(X, \Sigma), \alpha = \alpha_n \cdots \alpha_1 \in \mathcal{C}^*,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q((u, \alpha), (bu, c\alpha)) = Q_{\lambda_c, 0}(u, bu), \quad \forall b \in \text{Next}(u_n) \\ Q((u, \alpha), (bu_{n-1} \cdots u_1, c\alpha_{n-1} \cdots \alpha_1)) = \mathbb{1}_{c=\alpha_n} 1/2 Q_{\lambda+\lambda_c, 0}(u, bu_{n-1} \cdots u_1) \\ \quad + \mathbb{1}_{c \neq \alpha_n} 1/2 Q_{\lambda_c, 0}(u, bu_{n-1} \cdots u_1), \\ \quad \text{for } b \in \Sigma, \end{array} \right. \quad (6.2)$$

The others values of  $Q$  given by : if  $(u_n \cdots u_2, \alpha_n \cdots \alpha_2) \neq (u_{n-1} \cdots u_1, \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} Q((u, \alpha), (u_{n-1} \cdots u_1, \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1)) = Q_{\lambda, 0}(u, u_{n-1} \cdots u_1) \\ Q((u, \alpha), (u_n \cdots u_2, \alpha_n \cdots \alpha_2)) = Q_{0, \mu}(u, u_n \cdots u_2), \end{array} \right. \quad (6.3)$$

and, if  $(u_n \cdots u_2, \alpha_n \cdots \alpha_2) = (u_{n-1} \cdots u_1, \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1)$ ,

$$Q((u, \alpha), (u_1^{n-1}, \alpha_1^{n-1})) = Q_{\lambda, \mu}(u, u_{n-1} \cdots u_1). \quad (6.4)$$

**Theorem 6.1.** Consider a  $\theta$ -automatic queue with classes  $(X, \Sigma, \nu, r, \mathcal{C}, (\lambda_c), \mu)$ , where  $(\rho, r)$  is an admissible solution to the TTE associated with  $(X, \Sigma, \nu, \lambda, \mu)$ . Denote by  $M_r = (M_r(t))$  the queue-content process and by  $Q_r$  its infinitesimal generator. Assume that  $\lambda \hat{\gamma} < \mu$ , where  $\hat{\gamma}$  is the drift of the random walk  $(X, \Sigma, \nu)$ . The stationary distribution  $\pi_{\rho, r}$  of the process  $M_r$  is given by :  $\forall (u, \alpha) = (u_n \cdots u_1, \alpha_n \cdots \alpha_1) \in L(X, \Sigma) \times \mathcal{C}^*$ ,

$$\pi_{\rho, r}(u, \alpha) = (1 - \rho) \rho^n q(u_n) \cdots q(u_2) r(a_1) p_{\alpha_n} \cdots p_{\alpha_1}, \quad (6.5)$$

where  $q(a) = r(a)/r(\text{Next}(a))$  for all  $a \in \Sigma$ ,  $p_c = \lambda_c/\lambda$ , for all  $c \in \mathcal{C}$ .

There are two parts in (6.5) : the same term as in (4.25)  $(1 - \rho) \rho^n q(u_n) \cdots q(u_2) r(a_1)$  which accounts for the ‘‘type’’ of customers, and the term  $p_{\alpha_n} \cdots p_{\alpha_1}$  which accounts for the ‘‘classes’’ of customers.

*Proof.* Under the stability condition  $\lambda \hat{\gamma} < \mu$ , the admissible solution  $(\rho, r)$  satisfied  $\rho < 1$ , see Theorem 4.13. Hence, to prove Theorem 6.1 is equivalent to prove the balance equation :

$$\sum_{(v, \beta)} \pi_{\rho, r}(u, \alpha) Q((u, \alpha), (v, \beta)) = \sum_{(v, \beta)} \pi_{\rho, r}(v, \beta) Q((v, \beta), (u, \alpha)). \quad (6.6)$$

Denote the left and the right-hand side of the above equality by  $L$  and  $R$ , respectively. The left of (6.6) is :

$$L = \left\{ \begin{array}{l} (1 - \rho) \left( \sum_{a \in \Sigma, c \in \mathcal{C}} \lambda_c \nu(a) r(\text{Next}(a)) + Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*}) \right) \\ \quad = (1 - \rho) (\lambda A(r) + Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*})) \\ \pi_{\rho, r}(u, \alpha) (\lambda + \mu) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{if } u = 1_{\Sigma^*} \\ \text{otherwise} \end{array} \quad (6.7)$$

The right of (6.6) is given by, for  $u = 1_{\Sigma^*}$ ,

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\substack{a \in \Sigma \\ c \in \mathcal{C}}} \rho r(a) [\mu + \lambda_c \sum_{b^* a = 1_X} \nu(b)] + (1 - \rho) Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*}) \\ &= \rho (\mu + \lambda C(r)) + (1 - \rho) Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*}), \end{aligned} \quad (6.8)$$

where  $A(r)$ ,  $B(r)$  and  $C(r)$  are defined as in (4.15). Hence  $\lambda A(r) = \rho(\mu + \lambda C(r))$ , or  $L = R$  for  $u = 1_{\Sigma^*}$ .

For  $(u, \alpha) = (u_n \cdots u_1, \alpha_n \cdots \alpha_1)$ ,  $n \geq 1$ , using the fact that if  $a * b \in \Sigma$ , then  $\text{Next}(a * b) = \text{Next}(b)$ , one has :

$$\begin{aligned}
 R &= \lambda_{\alpha_n} \nu(u_n) \pi_{\rho, r}(u_{n-1} \cdots u_1, \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1) + \sum_{\substack{b \in \text{Next}(u_n) \\ a * b = 1_X \\ c_1, c_2 \in \mathcal{C}}} \lambda_{c_2} \nu(a) \pi_{\rho, r}(bu, c_1 \alpha) \\
 &+ \sum_{\substack{b \in \text{Next}(u_1) \\ c \in \mathcal{C}}} \pi_{\rho, r}(ub, \alpha c) \mu + \pi_{\rho, r}(bu_{n-1} \cdots u_1, c \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1) \\
 &\times \sum_{\substack{a * b = u_n \\ c, c_1 \in \mathcal{C}}} (\mathbb{1}_{c_1 = c = \alpha_n} + \frac{1}{2} (\mathbb{1}_{c \neq \alpha_n, c_1 = \alpha_n} + \mathbb{1}_{c = \alpha_n, c_1 \neq \alpha_n})) \lambda_{c_1} \nu(a) \\
 &= \pi_{\rho, r}(u, \alpha) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{r(\text{Next}(u_n))}{r(u_n)} \lambda \nu(u_n) + \sum_{\substack{b \in \text{Next}(u_n) \\ a * b = 1_X}} \rho \lambda \nu(a) \frac{r(b)}{r(\text{Next}(b))} \right. \\
 &\quad \left. + \rho \mu + \sum_{a * b = u_n} \lambda \nu(a) \frac{r(b)}{r(u_n)} \left( \frac{1}{2} (1 + p_{\alpha_n}) + \frac{1}{2} (1 - p_{\alpha_n}) \right) \right] \\
 &= \pi_{\rho, r}(u, \alpha) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{r(\text{Next}(u_n))}{r(u_n)} \lambda \nu(u_n) + \sum_{\substack{b \in \text{Next}(u_n) \\ a * b = 1_X}} \rho \lambda \nu(a) \frac{r(b)}{r(\text{Next}(b))} \right. \\
 &\quad \left. + \rho \mu + \sum_{a * b = u_n} \lambda \nu(a) \frac{r(b)}{r(u_n)} \right].
 \end{aligned}$$

For  $u \neq 1_{\Sigma^*}$ , the equality  $L = R$  is precisely equivalent to the fact that  $(\rho, r)$  is a solution to the TTE associated with  $(X, \Sigma, \nu, \lambda, \mu)$ . This completes the proof.  $\square$

**Theorem 6.2.** *The model is the same as in Theorem 6.1. Assume that  $\lambda \hat{\gamma} < \mu$ . The stationary departure process of class  $c$ ,  $c \in \mathcal{C}$ , is a Poisson process of rate  $p_c \rho \mu$ .*

*Proof.* The process  $M_r$  is the stationary queue-content process that its marginal distribution at a given instant is  $\pi_{\rho, r}$  given in (6.5). Let  $D_c$  be the real departure process of class  $c$  (departure at the front-end of the buffer).

Consider the time-reversed process  $\widetilde{D}_c$  of  $D_c$ . The process  $\widetilde{D}_c$  corresponds to the instants of “right-increase” of the time-reversed process  $(\widetilde{M}_r(t))_t$ , where the new “right-increase” class is  $c$ . Therefore, the instantaneous rate  $\tilde{d}_c(t)$  of  $\widetilde{D}_c$  is as follows. If  $\widetilde{M}_r(t) = (u, \alpha) = (u_n \cdots u_1, \alpha_n \cdots \alpha_1)$ ,  $u \in L(X, \Sigma)$ ,  $\alpha_i \in \mathcal{C}$ ,

$$\tilde{d}_c(t) = \sum_{a \in \text{Next}(u_1)} \frac{\pi_{\rho, r}(ua, \alpha c)}{\pi_{\rho, r}(u, \alpha)} \mu = \sum_{a \in \text{Next}(u_1)} \frac{\rho r(a) p_c}{r(\text{Next}(u_1))} \mu = p_c \rho \mu,$$

and if  $\widetilde{M}_r(t) = (1_{\Sigma^*}, 1_{\mathcal{C}^*})$ ,

$$\tilde{d}_c(t) = \sum_{a \in \Sigma} \frac{\pi_{\rho, r}(a, c)}{\pi_{\rho, r}(1_{\Sigma^*}, 1_{\mathcal{C}^*})} \mu = \sum_{a \in \Sigma} p_c \rho r(a) \mu = p_c \rho \mu.$$

We conclude that  $\widetilde{D}_c$  is a Poisson process of rate  $p_c \rho \mu$ . Since Poisson processes are preserved by time-reversal,  $D_c$  is also a Poisson process of rate  $p_c \rho \mu$ . □

## 6.2 Description of the network model

Consider a network consisting of  $N$  0-automatic queues with classes  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, r_i, \mathcal{C}, (\lambda_c^i, \mu_i))$ . Observe that the set of classes  $\mathcal{C}$  is the same for all the queues. Let  $\mathcal{C}_I$ , the set of *initial* classes, be a non-empty subset of  $\mathcal{C}$ . Let :

$$\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \{0\}, \quad \xi : \mathcal{C} \rightarrow \{1, \dots, N\}$$

be two maps, with the following interpretation : a customer of class  $c$  queues up at queue  $\xi(c)$  and, after completing its service there, he transmutes into a customer of class  $\Phi(c)$  or leaves the network if  $\Phi(c) = 0$ . The function  $\Phi$  satisfies the following two conditions :

$$\forall c \in \mathcal{C}_I, \quad \Phi^{-1}(c) = \emptyset \tag{6.9}$$

$$\forall c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_I, \exists! c' \in \mathcal{C}, \quad \Phi(c') = c. \tag{6.10}$$

Here is an interpretation of the above two conditions : there is a finite number of possible customer routes and a customer's class determines both its global route and its current position within the route. A class in  $\mathcal{C}_I$  corresponds to a route with the current position being the first queue along the route. The equality  $\Phi(c') = c$  in (6.10) means that  $c'$  and  $c$  are two classes corresponding to the same global route with the current position being one step ahead in  $c$  with respect to  $c'$ . More precisely, assume that  $c_1 \in \mathcal{C}_I$  and that  $c_2, \dots, c_k$  are defined by  $c_{i+1} = \Phi(c_i)$  and  $\Phi(c_k) = 0$ . Then the classes  $c_1 \dots c_k$  correspond to the same route, and this route is of the same length  $k$  and formed by the sequence  $\xi(c_1), \dots, \xi(c_k)$ . Observe that nothing prevents the same queue to appear several times along a given route. This is the mechanism of the Kelly network, see Section 2.2.4.

Customers enter the network from outside according to independent Poisson streams. Let  $\lambda_c^i$  be the rate of arrivals of customers of class  $c$  in queue  $i$ . In accordance with the above interpretation, we have :

$$\forall c \in \mathcal{C}_I, \quad \lambda_c^{\xi(c)} > 0, \quad \forall i \neq \xi(c), \lambda_c^i = 0 \tag{6.11}$$

$$\forall c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_I, \forall i, \quad \lambda_c^i = 0. \tag{6.12}$$

The resulting network is a *Kelly-like network of zero-automatic queues*. We now propose a more formal definition,

**Definition 6.3.** Let  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \{0\}$  and  $\xi : \mathcal{C} \rightarrow \{1, \dots, N\}$  be two maps with  $\Phi$  satisfying (6.9)-(6.10). Let  $\mathcal{X}_i = (X_i, \Sigma_i, \nu_i, r_i, \mathcal{C}, (\lambda_c^i, \mu_i))$ ,  $1 \leq i \leq N$ , be  $N$  zero-automatic queues with classes, where  $(\lambda_c^i)$  satisfy the condition mentioned above. The Kelly-like network associated with  $((\mathcal{X}_i)_i, \Phi, \xi)$  is defined as follows. The queue-content process  $(M(t))_t$  of the network is a continuous time jump Markov process on the state space  $\prod_i \mathcal{S}_i$  (cf. (6.1)). Denote by  $Q$  its infinitesimal generator. Denote by  $Q_{(\lambda_c, \mu)}^i$  the

infinitesimal generator of the 0-automatic queue with classes  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, r_i, \mathcal{C}, (\lambda_c), \mu)$ . For  $u = u_n \cdots u_1$  in  $L(X_i, \Sigma_i)$  or in  $\mathcal{C}^*$ , set  $\text{Dep}(u) = u_n \cdots u_2$ .

The generator  $Q$  is given by :

$$\forall (u, \alpha) = (u^i, \alpha^i)_i, u^i = a_{n_i}^i \cdots a_1^i \in L(X_i, \Sigma_i), \alpha^i = \alpha_{n_i}^i \cdots \alpha_1^i \in \mathcal{C}^{n_i},$$

$$\begin{aligned} Q((u, \alpha), (v, \beta)) &= Q^A((u, \alpha), (v, \beta)) + Q^D((u, \alpha), (v, \beta)) \\ &\quad + Q^I((u, \alpha), (v, \beta)) + Q^{In}((u, \alpha), (v, \beta)), \end{aligned}$$

where

$$\left\{ \begin{array}{l} Q^A((u, \alpha), (u^1 \cdots v^i \cdots u^N, \alpha^1 \cdots \beta^i \cdots \alpha^N)) \\ \quad = Q_{(\lambda_c), 0}^i((u^i, \alpha^i), (v^i, \beta^i)), \quad \text{for } c \text{ such that } \lambda_c^i \neq 0, \text{ where } \lambda_c = \lambda_c^i \mathbb{1}_{c=c}, \\ Q^D((u, \alpha), (u^1 \cdots \text{Dep}(u^i) \cdots u^N, \alpha^1 \cdots \text{Dep}(\alpha^i) \cdots \alpha^N)) \\ \quad = \mu_i, \quad \text{if } \Phi(\alpha_1^i) = 0, \\ Q^{In}((u, \alpha), (u^1 \cdots \text{Dep}(u^i) \cdots v^{\xi(\Phi(\alpha_1^i))} \cdots u^N, \alpha^1 \cdots \text{Dep}(\alpha^i) \cdots \beta^{\xi(\Phi(\alpha_1^i))} \cdots \alpha^N)) \\ \quad = Q_{(\lambda_c), 0}^{\xi(\Phi(\alpha_1^i))}((u^{\xi(\Phi(\alpha_1^i))}, \alpha^{\xi(\Phi(\alpha_1^i))}), (v^{\xi(\Phi(\alpha_1^i))}, \beta^{\xi(\Phi(\alpha_1^i))})), \\ \quad \quad \text{if } \xi(\alpha_1^i) = i \neq \xi(\Phi(\alpha_1^i)), \text{ where } \lambda_c = \mu_i \mathbb{1}_{c=\Phi(\alpha_1^i)}, \\ Q^I((u, \alpha), (u^1 \cdots v^i \cdots u^N, \alpha^1 \cdots \beta^i \cdots \alpha^N)) \\ \quad = Q_{(\lambda_c), 0}^i((\text{Dep}(u^i), \text{Dep}(\alpha^i)), (v^i, \beta^i)), \\ \quad \quad \text{if } \xi(\alpha_1^i) = i = \xi(\Phi(\alpha_1^i)), \text{ where } \lambda_c = \mu_i \mathbb{1}_{c=\Phi(\alpha_1^i)}. \end{array} \right. \quad (6.13)$$

Let us comment on the different subcases in (6.13).

- First case : an external arrival to queue  $i$  of a customer of class  $c$ .
- Second case : a customer of class  $c$  leaves the network.
- Third case : a customer of class  $c$  leaves queue  $\xi(c)$  and transmutes into a customer of class  $\Phi(c)$ , where  $\xi(\Phi(c)) \neq \xi(c)$ .
- Fourth case : a customer of class  $c$  leaves queue  $\xi(c)$  and transmutes into a customer of class  $\Phi(c)$ , where  $\xi(\Phi(c)) = \xi(c)$ .

## 6.3 Traffic Equations

**Definition 6.4** (K-NTE). *The Kelly-like Network Traffic Equations (K-NTE) associated with a Kelly-like network  $((X_i, \Sigma_i, \nu_i, \mathcal{C}, (\lambda_c^i), \mu_i)_i, \Phi, \xi)$  are defined by :*

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_c^{\xi(c)} &= \begin{cases} \lambda_c^{\xi(c)}, & \text{if } \lambda_c^{\xi(c)} \neq 0 \\ \mu_{\xi(\Phi^{-1}(c))} \tilde{\rho}_{\xi(\Phi^{-1}(c))} \tilde{p}_{\Phi^{-1}(c)}^{\xi(\Phi^{-1}(c))}, & \text{otherwise} \end{cases} \\ \tilde{\lambda}_c^i &= 0, \quad \text{if } i \neq \xi(c), \end{aligned} \quad (6.14)$$

where  $\tilde{\lambda}_i = \sum_c \tilde{\lambda}_c^i$ , where  $p_c^i = \tilde{\lambda}_c^i / \tilde{\lambda}_i$ , where  $\tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}_{i(\tilde{\lambda}_i)}$ , where  $(\tilde{\rho}_{i(\tilde{\lambda}_i)}, \tilde{r}_i)$  is a solution of the TTE associated with  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, \tilde{\lambda}_i, \mu_i)$ .

As for the J-NTE, the K-NTE are defined in an intricate and implicit way. Observe also that the K-NTE do not depend on the boundary conditions  $(r_i)_i$ .

We do not know if the K-NTE always have a solution. In particular, we do not have a counterpart to Lemma 5.4.

The next result establishes the second main result of this paper for the Kelly-like network of 0-automatic queues.

**Theorem 6.5.** *Assume there exists a solution  $(\tilde{\lambda}_i)_i$  to the K-NTE (6.14). Let  $(\tilde{\rho}_i, \tilde{r}_i)$  be a solution to the TTE associated with  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, \tilde{\lambda}_i, \mu_i)$ .*

*Consider the Kelly-like network of  $N$  queues  $((X_i, \Sigma_i, \nu_i, \tilde{r}_i, \mathcal{C}, (\lambda_c^i), \mu_i)_i, \Phi, \xi)$ . Denote by  $M = (M^i(t))_t$  the Markov jump process associated to this network. We have the equivalences :*

$$[M \text{ is ergodic}] \iff [\forall i, \tilde{\rho}_i < 1] \iff [\forall i, \tilde{\lambda}_i \hat{\gamma}_i < \mu_i],$$

where  $\hat{\gamma}_i$  is the drift of the random walk associated with  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i)$ .

Assume that  $\tilde{\lambda}_i \hat{\gamma}_i < \mu_i$ , for all  $i$ . The stationary distribution of the process  $M$  has the product form given by :

$$\forall u = (u^i)_i, u^i \in L(X_i, \Sigma_i), \alpha^i \in \mathcal{C}^*,$$

$$\pi(u, \alpha) = \prod_i \pi^i(u^i, \alpha^i), \quad (6.15)$$

where  $\pi^i(u^i, \alpha^i)$  has the form given by : for  $u^i = a_{n_i}^i \cdots a_1^i \in L(X_i, \Sigma_i)$ ,  $\alpha^i = \alpha_{n_i}^i \cdots \alpha_1^i \in \mathcal{C}^{n_i}$ ,

$$\pi^i(u^i, \alpha^i) = (\tilde{\rho}_i)^{n_i} \tilde{q}_i(a_{n_i}^i) \cdots \tilde{q}_i(a_2^i) \tilde{r}_i(a_1^i) p_{\alpha_{n_i}^i}^i \cdots p_{\alpha_1^i}^i, \quad (6.16)$$

where  $p_c^i = \tilde{\lambda}_c^i / \tilde{\lambda}_i$ ,  $\tilde{q}_i(a) = \tilde{r}_i(a) / \tilde{r}_i(\text{Next}(a))$  for  $a \in \Sigma_i$ .

*Proof.* We have to prove the the balance equation :

$$\sum_{v, \beta} \pi(u, \alpha) Q((u, \alpha), (v, \beta)) = \sum_{v, \beta} \pi(v, \beta) Q((v, \beta), (u, \alpha)) \quad (6.17)$$

Define

$$\lambda_i = \sum_c \lambda_c^i = \sum_{c | \lambda_c^i \neq 0} \lambda_c^i. \quad (6.18)$$

The left of (6.17) is :

$$L = \pi(u, \alpha) \sum_i \mathbb{1}_{n_i > 0} (\lambda_i + \mu_i) + \pi(u, \alpha) \sum_i \mathbb{1}_{n_i = 0} \lambda_i. \quad (6.19)$$

For all  $1 \leq i \leq N$ , Theorem 6.1 yields the following equations :

$$\begin{aligned} \sum_{(v^i, \beta^i)} \pi^i(v^i, \beta^i) Q_{(\tilde{\lambda}_i^i, \mu_i^i)}^i((v^i, \beta^i), (u^i, \alpha^i)) &= \sum_{(v^i, \beta^i)} \pi^i(u^i, \alpha^i) Q_{(\tilde{\lambda}_i^i, \mu_i^i)}^i((u^i, \alpha^i), (v^i, \beta^i)) \\ &= \pi^i(u^i, \alpha^i) \left[ \mathbb{1}_{n_i = 0} \tilde{\lambda}_i + \mathbb{1}_{n_i > 0} (\mu_i + \tilde{\lambda}_i) \right]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

The right of (6.17) is :

$$\begin{aligned}
 R &= \sum_i \frac{\pi(u, \alpha)}{\pi^i(u^i, \alpha^i)} \sum_{(v, \beta)} \pi^i(v^i, \beta^i) Q^A((u, \alpha), (v, \beta)) \\
 &+ \sum_i \frac{\pi(u, \alpha)}{\pi^i(u^i, \alpha^i)} \sum_{(v, \beta)} \pi^i(v^i, \beta^i) Q^D((u, \alpha), (v, \beta)) \\
 &+ \sum_{j \neq i} \frac{\pi(u, \alpha)}{\pi^j(u^j, \alpha^j)} \sum_{v, \beta} \pi^j(v^j, \beta^j) \frac{\pi^i(v^i, \beta^i)}{\pi^i(u^i, \alpha^i)} Q^{In}((v, \beta), (u, \alpha)) \\
 &+ \sum_i \sum_{v, \beta} \pi^j(v^j, \beta^j) \frac{\pi^i(v^i, \beta^i)}{\pi^i(u^i, \alpha^i)} Q^I((v, \beta), (u, \alpha)) \\
 &= \sum_i \frac{\pi(u, \alpha)}{\pi^i(u^i, \alpha^i)} \sum_{(v^i, \beta^i)} \pi^i(v^i, \beta^i) Q_{(\lambda_c^i, 0)}^i((v^i, \beta^i), (u^i, \alpha^i)) \\
 &+ \sum_i \frac{\pi(u, \alpha)}{\pi^i(u^i, \alpha^i)} \sum_{\substack{v^i | \text{Dep}(v^i) = u^i \\ \beta^i | \text{Dep}(\beta^i) = \alpha^i}} \pi^i(v^i, \beta^i) \mathbb{1}_{\xi(\beta_1^i) = i} \mathbb{1}_{\Phi(\beta_1^i) = 0} \mu_i \\
 &+ \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\pi(u, \alpha)}{\pi^j(u^j, \alpha^j)} \sum_{\substack{v^j | \text{Dep}(v^j) = u^j \\ \beta^j | \text{Dep}(\beta^j) = \alpha^j}} \pi^j(v^j, \beta^j) \mathbb{1}_{\xi(\beta_1^j) = j} \mathbb{1}_{\Phi(\beta_1^j) = c} \mathbb{1}_{\xi(c) = i} \\
 &\times \sum_{v^i, \beta^i} \frac{\pi^i(v^i, \beta^i)}{\pi^i(u^i, \alpha^i)} Q_{(\lambda_{c'} = \mu_j \mathbb{1}_{c' = c}, 0)}^i((v^i, \beta^i), (u^i, \alpha^i)) + \sum_i \sum_{v^i, \beta^i} \mathbb{1}_{\xi(\beta_1^i) = i} \mathbb{1}_{\Phi(\beta_1^i) = c} \mathbb{1}_{\xi(c) = i} \\
 &\times \pi(u, \alpha) \frac{\pi^i(v^i, \beta^i)}{\pi^i(u^i, \alpha^i)} Q_{(\lambda_{c'} = \mu_i \mathbb{1}_{c' = c}, 0)}^i((\text{Dep}(v^i), \text{Dep}(\beta^i)), (u^i, \alpha^i)) \\
 &= B_1 + B_2 + B_3 + B_4 . \tag{6.21}
 \end{aligned}$$

Let us consider the term  $B_3 + B_4$ . Using the K-NTE (6.14) and the form of the infinitesimal generator  $Q$  given in (6.13), it implies :

$$\begin{aligned}
 \frac{B_3 + B_4}{\pi(u, \alpha)} &= \sum_i \sum_{j \neq i} \tilde{\rho}_j \sum_{\xi(\beta_1^j) = j} \mathbb{1}_{\Phi(\beta_1^j) = c} \mathbb{1}_{\xi(c) = i} \\
 &\times \sum_{v^i, \beta^i} \frac{\pi^i(v^i, \beta^i)}{\pi^i(u^i, \alpha^i)} Q_{(\lambda_{c'} = \mu_j \mathbb{1}_{c' = c}, 0)}^i((v^i, \beta^i), (u^i, \alpha^i)) \\
 &+ \sum_i \tilde{\rho}_i \sum_{\substack{\xi(\beta_0^i) = i \\ v^i, \beta^i}} \mathbb{1}_{\Phi(\beta_0^i) = c} \mathbb{1}_{\xi(c) = i} \\
 &\times p_{\beta_0^i}^i \frac{\pi^i(v^i, \beta^i)}{\pi^i(u^i, \alpha^i)} Q_{(\lambda_{c'} = \mu_i \mathbb{1}_{c' = c}, 0)}^i((v^i, \beta^i), (u^i, \alpha^i)) \\
 &= \sum_i \sum_{c | \exists \Phi^{-1}(c)} \frac{1}{\pi^i(u^i, \alpha^i)} \sum_{v^i, \beta^i} \pi^i(v^i, \beta^i) Q_{(\lambda_{c'} = \tilde{\lambda}_c^i \mathbb{1}_{c' = c}, 0)}^i((v^i, \beta^i), (u^i, \alpha^i))
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Now, consider the term  $B_2$ , one has :

$$\begin{aligned}
 \frac{B_2}{\pi(u, \alpha)} &= \sum_i \tilde{\rho}_i \sum_{\beta_1^i | (\Phi, \xi)(\beta_1^i) = (0, i)} \mu_i p_{\beta_1^i}^i \\
 &= \sum_i \tilde{\rho}_i \mu_i - \sum_i \mu_i \tilde{\rho}_i \sum_{c | \Phi(c) \neq 0, \xi(c) = i} p_c^i \\
 &= \sum_i \tilde{\rho}_i \mu_i - \sum_i (\tilde{\lambda}_i - \lambda_i) \tag{6.23}
 \end{aligned}$$

Substitute  $B_3 + B_4$  in (6.22) and  $B_2$  in (6.23) and using (6.20), one gets :

$$\begin{aligned}
 \frac{R}{\pi(u, \alpha)} &= \sum_i \left\{ \mathbb{1}_{n_i=0} \tilde{\lambda}_i + \mathbb{1}_{n_i>0} (\mu_i + \tilde{\lambda}_i) - \mu_i \tilde{\rho}_i \right\} + \sum_i \tilde{\rho}_i \mu_i - \sum_i (\tilde{\lambda}_i - \lambda_i) \\
 &= \sum_i \mathbb{1}_{n_i=0} \lambda_i + \sum_i \mathbb{1}_{n_i>0} (\lambda_i + \mu_i)
 \end{aligned}$$

Therefore, the balance equation  $L = R$  is proved. This completes the proof.  $\square$

## 6.4 Examples

### 6.4.1 The FIFO Kelly network

Consider a Kelly-like network of  $N$  queues built on the pairs  $(X_i = \{a_i^k, k \in \mathbb{N}\}, \Sigma_i = \{a_i\})$ . Obviously,  $\nu_i(a_i) = r_i(a_i) = 1$ . There is no simplification in the buffers, and the service discipline is FIFO.

Consider the set of possible classes  $\mathcal{C}$ . Let  $\Phi$  and  $\xi$  be two maps as defined in Section 6.2. Let :

$$\Phi^- : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

be the map defined by : if  $\Phi^{-n}(c) = \emptyset$  and  $\Phi^{-(n-1)}(c) \neq \emptyset$  then  $\Phi^-(c) = \Phi^{-(n-1)}(c)$ . The interpretation is that  $\Phi^-(c)$  is the class in  $\mathcal{C}_I$  in which a customer of class  $c$  "enters" the network.

The K-NTE associated with the Kelly-like network  $((X_i, \Sigma_i, \nu_i, \mathcal{C}, (\lambda_c^i, \mu_i)_i, \Phi, \xi)$  are given by :

$$\tilde{\lambda}_c^{\xi(c)} = \lambda_{\Phi^-(c)}^{\xi(\Phi^-(c))}, \quad \tilde{\lambda}_c^i = 0, \quad \text{if } i \neq \xi(c). \tag{6.24}$$

Then  $\tilde{\rho}_i$  and  $\tilde{\lambda}_i$  are given by :

$$\tilde{\lambda}_i = \sum_{c | \xi(c) = i} \lambda_{\Phi^-(c)}^{\xi(\Phi^-(c))}, \quad \tilde{\rho}_i = \frac{\tilde{\lambda}_i}{\mu_i}.$$

Set  $\tilde{\rho}_c^i = p_c^i \tilde{\rho}_i = \tilde{\lambda}_i / \mu_i$ . Under the stability condition, the stationary distribution of the network is given by :

$$\pi(u, \alpha) = \prod_i \pi^i(n_i, \alpha_i), \quad \forall u = (n_i) \in \mathbb{N}^N, \alpha^i \in \mathcal{C}^{n_i},$$

where  $\pi^i(n_i, \alpha^i)$  has the form given by : for  $\alpha^i = \alpha_{n_i}^i \cdots \alpha_1^i$ ,

$$\pi^i(n_i, \alpha^i) = \tilde{\rho}_{\alpha_{n_i}^i}^i \cdots \tilde{\rho}_{\alpha_1^i}^i .$$

Here, we recover exactly the Kelly network with FIFO discipline, see Section 2.2.4.

### 6.4.2 A random route model

Consider the network illustrated in Figure 6.1, which was mentioned in Section 2.2.4. There are three possible routes : (1) =  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ , (2) =  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ , (3) =  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ . This model is picked from [Kel79]. The set of classes is  $\mathcal{C} = \{11, 13, 14, 22, 23, 24, 32, 33, 35\}$ . The class  $ki \in \mathcal{C}$  corresponds to the route  $(k)$  and to the current queue  $i$ .

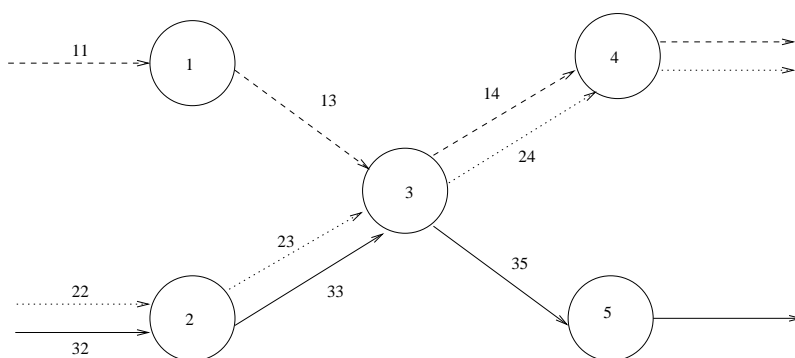


FIGURE 6.1 – Random route

Consider 5 plain triples  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i)$ . The external arrival rates are  $\lambda_{11}^1, \lambda_{22}^2, \lambda_{32}^2$ . The service rate in queue  $i$  is  $\mu_i$ . Denote by  $(\rho_{i(\Lambda_i)}, r_{i(\Lambda_i)})$  an admissible solution to the TTE associated with  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, \Lambda_i, \mu_i)$ . Hence, the K-NTE associated with the network are given by :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\lambda}_{11}^1 = \lambda_{11}^1, \quad \tilde{\lambda}_{22}^2 = \lambda_{22}^2, \quad \tilde{\lambda}_{32}^3 = \lambda_{32}^3, \\ \tilde{\lambda}_{13}^1 = \rho_1(\lambda_{11}^1) \mu_1, \\ \tilde{\lambda}_{23}^2 = \rho_2(\lambda_{22}^2 + \lambda_{32}^3) \mu_2 \frac{\lambda_{22}^2}{\lambda_{22}^2 + \lambda_{32}^3}, \\ \tilde{\lambda}_{33}^3 = \rho_2(\lambda_{22}^2 + \lambda_{32}^3) \mu_2 \frac{\lambda_{32}^3}{\lambda_{22}^2 + \lambda_{32}^3}, \\ \tilde{\lambda}_{14}^1 = \rho_2(\tilde{\lambda}_{13}^1 + \tilde{\lambda}_{23}^2 + \tilde{\lambda}_{33}^3) \mu_3 \frac{\tilde{\lambda}_{13}^1}{\tilde{\lambda}_{13}^1 + \tilde{\lambda}_{23}^2 + \tilde{\lambda}_{33}^3}, \\ \tilde{\lambda}_{24}^2 = \rho_2(\tilde{\lambda}_{13}^1 + \tilde{\lambda}_{23}^2 + \tilde{\lambda}_{33}^3) \mu_3 \frac{\tilde{\lambda}_{23}^2}{\tilde{\lambda}_{13}^1 + \tilde{\lambda}_{23}^2 + \tilde{\lambda}_{33}^3}, \\ \tilde{\lambda}_{35}^3 = \rho_2(\tilde{\lambda}_{13}^1 + \tilde{\lambda}_{23}^2 + \tilde{\lambda}_{33}^3) \mu_3 \frac{\tilde{\lambda}_{33}^3}{\tilde{\lambda}_{13}^1 + \tilde{\lambda}_{23}^2 + \tilde{\lambda}_{33}^3}. \end{array} \right. \quad (6.25)$$

Since the routing is simple enough, the K-NTE (6.25) can be solved explicitly as soon as the TTE associated with  $(X_i, \Sigma_i, \nu_i, \Lambda_i, \mu_i)$  are solvable.





# 7

## The LIFO 0-automatic queues

### Résumé

On a étudié les files 0-automatiques avec discipline de service FIFO. Dans ce chapitre, on va introduire les files 0-automatiques avec discipline de service LIFO. La distribution stationnaire d'une tel file est encore calculable et a une structure "multiplicative", par contre, le processus des départs ne sont plus Poissonien. Il n'est pas facile d'étudier les réseaux des files 0-automatiques LIFO. Cependant, il est intéressant de comparer les files 0-automatiques LIFO et FIFO.

### 7.1 The LIFO Zero-Automatic Queue

**Definition 7.1** (LIFO Zero-automatic queue). *Let  $(X, \Sigma, \nu)$  be a plain triple. Let  $L(X, \Sigma)$  be the set of locally reduced words, defined in (3.3). Consider  $r \in \bar{\mathbb{B}}$ , see (3.11), and  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ . The LIFO 0-automatic queue of type  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$  is defined as follows. The queue-content  $(M(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  is a continuous time jump Markov process on the state space  $L(X, \Sigma)$  with infinitesimal generator  $Q$  defined by :  $\forall u = u_n \cdots u_1 \in L(X, \Sigma)$ ,*

$$\begin{cases} Q(u, bu) &= \lambda \nu(b) , & \forall b \in \text{Next}(u_n) \\ Q(u, cu_{n-1} \cdots u_1) &= \lambda \sum_{b|b*u_n=c} \nu(b) , & \forall c \in \Sigma, \exists b \in \Sigma, b * u_n = c \\ Q(u, u_{n-1} \cdots u_1) &= \lambda \sum_{b|b*u_n=1_X} \nu(b) + \mu \end{cases} \quad (7.1)$$

and, finally, the boundary condition is,

$$Q(1_{\Sigma^*}, a) = \lambda \nu(a) r(\text{Next}(a)) , \quad \forall a \in \Sigma , \quad Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*}) = \lambda \left( 1 - \sum_{a \in \Sigma} \nu(a) r(\text{Next}(a)) \right) . \quad (7.2)$$

To illustrate, consider the LIFO queue associated with the plain group  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle \star \langle b \mid b^3 = 1 \rangle$  with the set of generators  $\{a, b, b^2\}$ . When the buffer-content is  $ab$ , the evolution of the buffer-content is shown in Figure 7.1.

The two simplest examples of 0-automatic queues are the ones associated with (i) the free monoid  $(\mathbb{N}, +)$  and (ii) the free group  $(\mathbb{Z}, +)$ . They correspond to well-known objects :

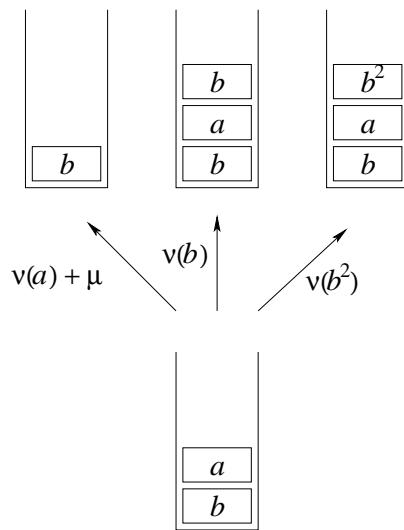


FIGURE 7.1 – The queue-content’s evolution of the LIFO queue associated to  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

(i) the simple  $M/M/1$  queue, and (ii) a variation of the  $G$ -queue or queue with positive and negative customers. If we consider the LIFO 0-automatic queues associated with (i) the free monoid  $(\mathbb{N}, +)$  and (ii) the free group  $(\mathbb{Z}, +)$ , they behave in exactly the same way as the corresponding FIFO 0-automatic queues. The reason is that there is always one type of customers in the queue, so, letting the departures occur at the back-end or at the front-end of the buffer do not make any difference.

**Extension.** It is possible to generalize Definition 7.1 in order to define a LIFO 0-automatic queue of type  $GI/GI/(X, \Sigma)$ , resp.  $G/G/(X, \Sigma)$ . Roughly, the description would go as follows. The buffering mechanism is kept unchanged; the sequence of inter-arrival times and classes of customers is i.i.d. (resp. stationary and ergodic); the sequence of service times at the server is i.i.d. (resp. stationary and ergodic) and independent of the arrivals.

## 7.2 Stationary Distribution of a LIFO Queue

For a FIFO 0-automatic queue, the stability region is  $\lambda/\mu < 1/\hat{\gamma}$ . This region depends only on the input variables of the model, and is directly linked to the random walk mechanism (as term  $1/\hat{\gamma}$ ). Also, for the unstable FIFO queue, it is intuitively clear that the speed at which the buffer grows to infinity is  $\lambda\hat{\gamma} - \mu$ , which provides a way to recover the stability region. Indeed, the random walk mechanism (at the back-end of the buffer) and the service mechanism (at the front-end of the buffer) are completely separated.

All of this collapses for the LIFO queue. Consider for instance an unstable LIFO queue with a buffer growing to infinity. The random walk and service mechanisms are not separated anymore. There is no simple formula for the drift, hence no simple formula for the stability region in terms of the input variables. See the Figure 7.2 for the effect of an arrival and a departure of a LIFO queue, both occur at the back-end of the buffer.

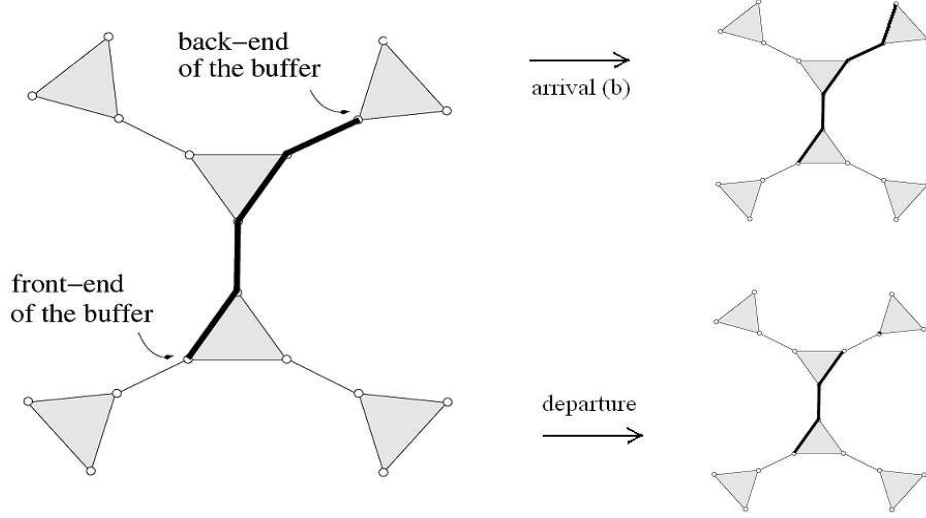


FIGURE 7.2 – Effect of an arrival and a departure on the content of the buffer in a LIFO 0-automatic queue on the free product  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Besides, a FIFO 0-automatic queue associated with a 0-automatic triple was studied completely. However, it is not the case for a LIFO 0-automatic queue. The model is treated only for a queue associated with a plain triple, when we have the nice property :  $\text{Left}(a) = \text{Right}(a) = \text{Next}(a), \forall a \in \Sigma$ .

### 7.2.1 The LIFO Twisted Traffic Equations

The results and proofs of the results are very similar to the ones for FIFO queues. There are however, important differences. In particular, the departure process is no longer Poisson for a LIFO queue. We detail the results below.

The Twisted Traffic Equations of a 0-automatic queue play a central role in studying the queue. We now introduce equations which play a similar role for the LIFO queue.

**Definition 7.2** (LIFO Twisted Traffic Equations). *Let  $(X, \Sigma, \nu)$  be a plain triple. The LIFO Twisted Traffic Equations LIFO-TTE associated with  $(X, \Sigma, \nu, \lambda, \mu)$  are the equations of the variables  $(\eta, x)$ ,  $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $x = (x(a))_{a \in \Sigma} \in \mathbb{R}_+^\Sigma$ , defined by :*

$$\begin{aligned} \eta(\lambda + \mu)x(a) = & \eta^2 \mu \sum_{b \in \text{Next}(a)} \frac{x(b)}{x(\text{Next}(b))} x(a) + \lambda \nu(a) x(\text{Next}(a)) + \eta \lambda \sum_{b*d=a} \nu(b) x(d) \\ & + \eta^2 \lambda \sum_{\substack{d \in \text{Next}(a) \\ b*d=1_X}} \nu(b) \frac{x(d)}{x(\text{Next}(d))} x(a). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Observe that the only difference between the LIFO-TTE and the FIFO-TTE are the terms  $\eta^2 \mu \sum_{b \in \text{Next}(a)} x(b)/x(\text{Next}(b))x(a)$  and  $\eta^2 \mu x(a)$ . It is because of the discipline of

service. Hence, the proofs for LIFO 0-automatic queue and FIFO 0-automatic queue are similar. The crucial point is that for a plain monoid,  $b \in \text{Next}(a)$  is equivalent to  $a \in \text{Next}(b)$ .

Consider  $x \in \bar{\mathcal{B}}$ . The term  $A(x)$ ,  $B(x)$  and  $C(x)$  defined in (4.15) are given by :

$$A(x) = \sum_{a \in \Sigma} \nu(a) \sum_{b \in \text{Next}(a)} x(b), \quad B(x) = \sum_{a*b \in \Sigma} \nu(a)x(b), \quad C(x) = \sum_{a*b=1_X} \nu(a)x(b). \quad (7.4)$$

One always has the equality

$$A(x) + B(x) + C(x) = 1 .$$

**Lemma 7.3.** *Let  $(\rho, r)$ ,  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $r \in \mathcal{B}$ , be a solution to the LIFO-TTE. We have either  $\rho = 1$ , or*

$$\rho = \frac{\lambda \sum_{a \in \Sigma} \nu(a)r(\text{Next}(a))}{\mu + \lambda \sum_{a*b=1_X} \nu(a)r(b)} = \frac{\lambda A(r)}{\mu + \lambda C(r)}. \quad (7.5)$$

*Proof.* By summing all the Equations of (7.3) and using the fact that if  $b \in \text{Next}(a)$  then  $a \in \text{Next}(b)$ , one gets :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda + \mu) &= \rho^2 \mu + \lambda \sum_{a \in \Sigma} \nu(a)r(\text{Next}(a)) + \rho \lambda \sum_{a*b \in \Sigma} \nu(a)r(b) \\ &\quad + \rho^2 \lambda \sum_{\substack{d \in \text{Next}(a) \\ b*d=1_X}} \nu(b) \frac{r(d)}{r(\text{Next}(d))} r(a) \\ &= \rho^2 \mu + \lambda A(r) + \rho \lambda B(r) + \rho^2 \lambda C(r) . \end{aligned}$$

Replacing  $B(r)$  by  $1 - A(r) - C(r)$  in the above, we get :

$$(\rho - 1)[(\mu + \lambda C(r))\rho - \lambda A(r)] = 0 . \quad (7.6)$$

This completes the proof. □

The relevant solutions to the TTE will turn out to be the ones satisfying (7.5). This leads us to the next Definition.

**Definition 7.4.** *A solution  $(\rho, r)$  to the LIFO-TTE is called an admissible solution if  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $r \in \mathcal{B}$ , and if (7.5) is satisfied.*

An admissible solution always exists.

**Lemma 7.5.** *There exists an admissible solution to the LIFO-TTE.*

*Proof.* Consider the Equations (7.3) and replace  $\eta$  by  $\lambda A(x)/(\mu + \lambda C(x))$ . The resulting equations in  $x$  can be viewed as a fixed point equation of the type  $\Psi(x) = x$ . The

corresponding application  $\Psi : (\mathbb{R}_+^*)^\Sigma \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^\Sigma$  has the following form. For  $a \in \Sigma$  and for  $x \in (\mathbb{R}_+^*)^\Sigma$ ,

$$\begin{aligned} \Psi(x)(a) &= \frac{1}{\lambda + \mu} \left[ \lambda \sum_{b*d=a} \nu(b)x(d) + \frac{\mu + \lambda C(x)}{A(x)} \nu(a)x(\text{Next}(a)) + \frac{\lambda A(x)}{\mu + \lambda C(x)} \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \mu x(a) \sum_{b \in \text{Next}(a)} \frac{x(b)}{x(\text{Next}(b))} + \lambda \sum_{\substack{d \in \text{Next}(a) \\ b*d=1_X}} \nu(b) \frac{x(d)}{x(\text{Next}(d))} x(a) \right] \right]. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Consider  $x \in \mathcal{B}$ . By summing the Equations in (7.7), using  $[b \in \text{Next}(a) \Leftrightarrow a \in \text{Next}(b)]$  and the equation (4.16), we get :

$$\sum_{a \in \Sigma} \Psi(x)(a) = \frac{1}{\lambda + \mu} [\lambda A(x) + \lambda B(x) + \mu + \lambda C(x)] = 1.$$

The end of the proof is exactly the same as in Lemma 4.10.

Set  $\rho = \lambda A(r)/(\mu + \lambda C(r))$ . The pair  $(\rho, r)$  is an admissible solution to the LIFO-TTE.  $\square$

## 7.2.2 The main results

Next Lemma begins to establish the link between the LIFO Twisted Traffic Equations and the LIFO 0-automatic queue.

**Lemma 7.6.** *Let  $(\rho, r)$  be an admissible solution to the LIFO-TTE. Consider the LIFO 0-automatic queue of type  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$ . Let  $Q_r$  be the infinitesimal generator of the queue-content process. Consider the measure  $p_{\rho, r}$  on  $L(X, \Sigma)$  defined by :*

$$\forall a_n \cdots a_1 \in L(X, \Sigma), \quad p_{\rho, r}(a_n \cdots a_1) = \rho^n \frac{r(a_n)}{r(\text{Next}(a_n))} \cdots \frac{r(a_2)}{r(\text{Next}(a_2))} r(a_1). \quad (7.8)$$

*We have  $p_{\rho, r}$  is a stationary measure of the queue-content process. Conversely, assume there exist  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$  and  $r \in \mathcal{B}$  such that the measure  $p_{\rho, r}$  defined by (7.8) is a stationary measure. Then  $(\rho, r)$  is an admissible solution to the LIFO-TTE.*

*Proof.* We have  $p_{\rho, r}$  is a stationary measure if and only if :  $\forall u \in L(X, \Sigma)$ ,

$$\sum_{v \in L(X, \Sigma)} p_{\rho, r}(u) Q_r(u, v) = \sum_{v \in L(X, \Sigma)} p_{\rho, r}(v) Q_r(v, u). \quad (7.9)$$

Denote the left and right-hand side of the above equality by  $L$  and  $R$ , respectively. The left of (7.9) is :

$$L = \begin{cases} \sum_{a \in \Sigma} \lambda \nu(a) r(\text{Next}(a)) + Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*}) = \lambda A(r) + Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*}) & \text{if } u = 1_{\Sigma^*} \\ p_{\rho, r}(u)(\lambda + \mu) & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (7.10)$$

The right of (7.9) is given by, for  $u = 1_{\Sigma^*}$ ,

$$R = \sum_{a \in \Sigma} \rho r(a) [\mu + \lambda \sum_{b * a = 1_X} \nu(b)] + Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*}) = \rho(\mu + \lambda C(r)) + Q(1_{\Sigma^*}, 1_{\Sigma^*}), \quad (7.11)$$

and for  $u = a_n \cdots a_1$ ,  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} R &= \lambda \nu(a_n) p_{\rho, r}(a_{n-1} \cdots a_1) + \sum_{b * d = a_n} \lambda \nu(b) p_{\rho, r}(da_{n-1} \cdots a_1) \\ &\quad + \sum_{\substack{b \in \text{Next}(a_n) \\ a * b = 1_X}} \lambda \nu(a) p_{\rho, r}(ba_n \cdots a_1) + \sum_{b \in \text{Next}(a_n)} p_{\rho, r}(ba_n \cdots a_1) \mu \\ &= p_{\rho, r}(a_n \cdots a_1) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{r(\text{Next}(a_n))}{r(a_n)} \lambda \nu(a_n) + \sum_{b * d = a_n} \frac{r(d)}{r(\text{Next}(d))} \frac{r(\text{Next}(a_n))}{r(a_n)} \lambda \nu(u) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{b \in \text{Next}(a_n) \\ a * b = 1_X}} \rho \lambda \nu(a) \frac{r(b)}{r(\text{Next}(b))} + \sum_{b \in \text{Next}(a_n)} \rho \mu \frac{r(b)}{r(\text{Next}(b))} \right]. \end{aligned}$$

Now recall that  $b * d \in \Sigma \implies \text{Next}(b * d) = \text{Next}(d)$ . We obtain :

$$\begin{aligned} R &= p_{\rho, r}(a_n \cdots a_1) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{r(\text{Next}(a_n))}{r(a_n)} \lambda \nu(a_n) + \sum_{b * d = a_n} \frac{r(d)}{r(a_n)} \lambda \nu(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{b \in \text{Next}(a_n) \\ a * b = 1_X}} \rho \lambda \nu(a) \frac{r(b)}{r(\text{Next}(b))} + \sum_{b \in \text{Next}(a_n)} \rho \mu \frac{r(b)}{r(\text{Next}(b))} \right]. \end{aligned}$$

We see that for  $u \neq 1_{\Sigma^*}$ , the equality  $L = R$  is precisely equivalent to the fact that  $(\rho, r)$  is a solution to the TTE. For  $u = 1_{\Sigma^*}$ , the equality  $L = R$  is precisely equivalent to the fact that  $\rho$  and  $r$  satisfy (7.5).

Therefore, the equality  $L = R$  is precisely equivalent to the fact that  $(\rho, r)$  is an admissible solution to the TTE. This completes the proof.  $\square$

We now have all the ingredients to prove the main results of this chapter.

**Theorem 7.7.** *Let  $(X, \Sigma, \nu)$  be a  $\theta$ -automatic triple. Fix  $\lambda$  and  $\mu$  in  $\mathbb{R}_+^*$ .*

*Let  $(\rho, r)$  be an admissible solution to the TTE. Consider the  $\theta$ -automatic queue  $(X, \Sigma, \nu, r, \lambda, \mu)$ . Denote by  $M_r = (M_r(t))_t$  the queue-content process and by  $Q_r$  its infinitesimal generator. We have :*

$$[\rho < 1] \iff [M_r \text{ ergodic}]$$

*Assume that  $\rho < 1$ . The stationary distribution  $\pi_{\rho, r}$  of the process  $M_r$  is given by :*

$$\pi_{\rho, r}(a_n \cdots a_1) = (1 - \rho) p_{\rho, r}(a_n \cdots a_1) = (1 - \rho) \rho^n q(a_n) \cdots q(a_2) r(a_1), \quad (7.12)$$

*where  $q(a) = r(a)/r(\text{Next}(a))$  for all  $a \in \Sigma$ .*

The proof is exactly the same as the one of Theorem 4.13.

We do not know if the solution of the LIFO-TTE is unique. Nevertheless, in all the examples we have been able to treat, the solution is unique.

### Departure processes.

For a LIFO queue, the departure process is no longer a Poisson process. So, we could not build networks of LIFO 0-automatic queues, as opposed to what we did for FIFO 0-automatic queues. However, the study of LIFO queues is interesting, and unexpected behaviors appear, see the section 7.3 for details.

## 7.3 Comparison of FIFO and LIFO queues

For a queue associated with a free monoid or a free group, it is obvious that the stability region for a LIFO queue and a FIFO queue are the same. Nevertheless, an originality of 0-automatic queues is that in some cases, the stability condition for a FIFO queue and a LIFO queue are different. In a FIFO queue, the stability region is defined by :

$$\frac{\lambda}{\mu} < \frac{1}{\widehat{\gamma}} \iff \rho_{FIFO} < 1 .$$

In general, there is no simple expression for  $\rho_{FIFO}$ , so we use the left characteristic. On the other hand, for the LIFO queue, we have no equivalent of  $\lambda/\mu < 1/\widehat{\gamma}$ , so we need to characterize the stability region by  $\rho_{LIFO} < 1$ . We give several examples of this.

### 7.3.1 The free product $\mathbb{N} \star \mathbb{B}$

Consider the plain triple  $(\{a\}^* \star \langle b \mid b^2 = b \rangle, \Sigma = \{a, b\}, \nu)$ , where  $\nu(a) = p, \nu(b) = 1-p, p \in (0, 1)$ .

The drift of the random walk is  $\widehat{\gamma} = (2-p)p$ . Hence, the stability condition for a FIFO queue is

$$t < \frac{1}{\widehat{\gamma}} = \frac{1}{(2-p)p} ,$$

where  $t = \lambda/\mu$ .

Solving the corresponding LIFO-TTE, we find a unique solution :

$$\rho_{LIFO} = \frac{t(p + \sqrt{4p - 3p^2})}{2} , \quad x(a) = \frac{\rho_{LIFO}/t - p}{1 - p} .$$

It yields that the LIFO queue is stable iff :

$$t < \frac{2}{p + \sqrt{(4p - 3p^2)}} .$$

The following inequality holds :

$$\frac{1}{\widehat{\gamma}} = \frac{1}{(2-p)p} > \frac{2}{p + \sqrt{(4p - 3p^2)}} .$$

Hence, in this case, the stability region of the FIFO queue is larger than the stability region of the LIFO queue.



### 7.3.2 The free product $\mathbb{B} \star \mathbb{B}$

Consider the plain triple  $\langle a \mid a^2 = a \rangle \star \langle b \mid b^2 = b \rangle, \Sigma = \{a, b\}, \nu$ , where  $\nu(a) = p, \nu(b) = 1 - p, p \in (0, 1)$ .

The drift of the random walk is  $\hat{\gamma} = 2p(1 - p)$ . The stability condition for a FIFO queue is

$$t < 1/\hat{\gamma} = 1/(2(1 - p)p),$$

where  $t = \lambda/\mu$ .

First, consider the case  $p = 1/2$ . The solution of the LIFO-TTE and FIFO-TTE both satisfy  $x(a) = x(b)$ , and the LIFO-TTE and the FIFO-TTE are the same. In this case,  $\rho_{LIFO} = \rho_{FIFO}$ .

Next, consider the case  $p \neq 1/2$ . Solving the corresponding LIFO-TTE, we find a unique solution :

$$\rho_{LIFO} = t\sqrt{p - p^2}, \quad x(a) = \frac{\rho_{LIFO}/t - p}{1 - 2p}.$$

One has the inequality :

$$\frac{1}{\hat{\gamma}} = \frac{1}{2p(1 - p)} > \frac{1}{\sqrt{p - p^2}}.$$

Like in the first example, the stability region of the FIFO queue is larger than the stability region of the LIFO queue.

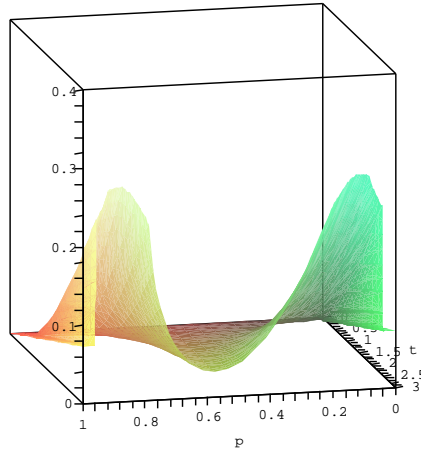


FIGURE 7.3 –  $B \star \mathbb{B}$  : The difference between two loads :  $\rho_{LIFO} - \rho_{FIFO}$ .

In Figure 7.3, we plot the difference between the two loads of the FIFO and the LIFO queue in the stability region of the FIFO queue. When  $p = 1/2$ , the two  $\rho$  are equal. For the other case, one has  $\rho_{FIFO} < \rho_{LIFO}$  in this region, or the difference  $\rho_{LIFO} - \rho_{FIFO}$  is greater than 0.

### 7.3.3 The free product $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{B}$

In the third example, more subtle phenomena occur.

Consider the plain triple  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \langle b \mid b^2 = b \rangle$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\nu$ , where  $\nu(a) = p$ ,  $\nu(b) = 1-p$ ,  $p \in (0, 1)$ .

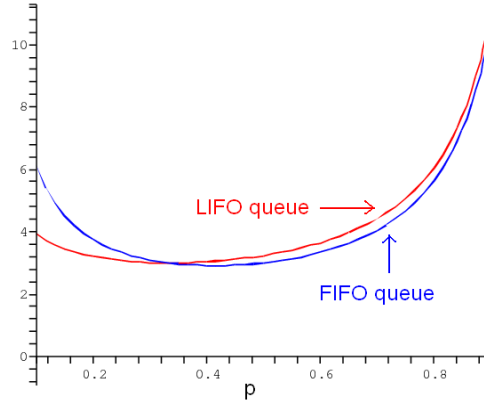


FIGURE 7.4 –  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{B}$ , the stability region of the FIFO and LIFO queues

The drift of the random walk is :

$$\hat{\gamma} = \frac{2p(1-p)}{1+p}.$$

We find a unique solution of the corresponding TTE-LIFO :

$$\rho_{LIFO} = t \sqrt{\frac{p(1-p)}{tp+1}}.$$

In Figure 7.4, the stability regions of the FIFO and LIFO queues are shown.

For simplicity, let us take two numerical examples : the case  $p_1 = 1/4$  and  $p_2 = 1/2$ , the corresponding drifts are  $\hat{\gamma}_1 = 3/10$  and  $\hat{\gamma}_2 = 1/3$ .

Figure 7.5 shows an interesting phenomenon : in the case  $p = 1/4$ , the stability region of the FIFO queue is larger than the one of the LIFO queue ( $\rho_{LIFO} > \rho_{FIFO}$  in the stability region). In the case  $p = 1/2$ , we have the opposite : the one of the FIFO queue is smaller than the one of the LIFO queue ( $\rho_{LIFO} < \rho_{FIFO}$  in the stability region).

In Figure 7.6, we have plotted the two loads in a larger region, for  $t = \lambda/\mu$ . Another interesting phenomenon appear : in the case  $p = 1/4$ , one sees that depending on  $t$ , either one or the other of the loads is larger.

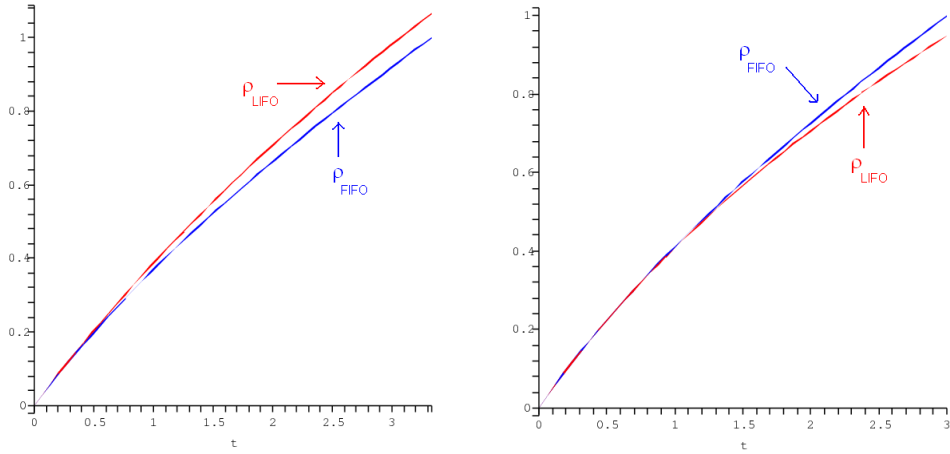


FIGURE 7.5 –  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{B}$ , the load  $\rho_{LIFO}$  and  $\rho_{FIFO}$  in the stability region :  $p=1/4$ (left) and  $p=1/2$  (right).

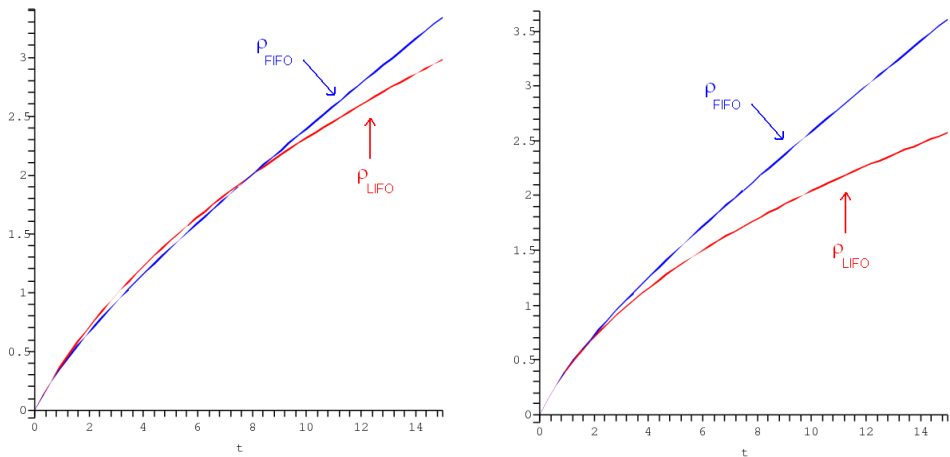


FIGURE 7.6 –  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{B}$ , the load  $\rho_{LIFO}$  and  $\rho_{FIFO}$  :  $p=1/4$ (left) and  $p=1/2$  (right).

# 8

## Conclusion and future works

### Discussion

We now discuss some possible extension of the models considered in the previous chapters.

**Discipline LIFO and Poisson departure process.** As mentioned above, the departure process of a LIFO 0-automatic queue is not a Poisson process in general. The reason is that the stationary distribution has the form given in (7.8). If we insist on a Poisson departure process, one must have the form of the stationary distribution given by

$$\pi_{\rho,r}(a_n \cdots a_1) = (1 - \rho)\rho^n r(a_n)q(a_{n-1}) \cdots q(a_1). \quad (8.1)$$

In this case, the problem of departure at the back-end of the buffer is solved, however, it creates a problem with arrivals at the back-end of the buffer. If we plug (8.1) in the global balance equations, they are satisfied in only two cases :  $(X, \Sigma) = (S^*, S)$  or  $(X, \Sigma) = (X_1 \star X_2, X_1 \setminus \{1_{X_1}\} \sqcup X_2 \setminus \{1_{X_2}\})$ , where  $X_1$  and  $X_2$  are finite monoids.

In the first case, the customers do not interact, so the queue is a normal LIFO queue (with types of customers, but there is no difference between the different types).

In the second case, the balance equations simplify to give a new system of associated TTE : for  $a \in \Sigma_i$

$$\eta(\lambda + \mu)x(a) = \eta^2 \mu x(a) + \lambda \nu(a)x(\Sigma_i) + \eta \lambda \sum_{b*d=a} \nu(b)x(d) + \frac{x(a)}{x(\Sigma_{3-i})} \eta^2 \sum_{\substack{d \in \Sigma_{3-i} \\ b*d=1_X}} x(d) \lambda \nu(b). \quad (8.2)$$

We do not know if the equations (8.2) have a solution. Nevertheless, if they have a solution, then we can construct a network of LIFO-queues which has a product form solution. Observe that in this case , we may also consider networks where some queues are FIFO and others are LIFO.

Another idea is to consider a LIFO queue with a different boundary behavior : when the queue is empty, any arriving customer is accepted. We have not been able to solve this model in general, but for the free group  $\mathbb{F}(T)$ , it gives interesting results, see below.

**Discipline PS.** The Processors Sharing (PS) discipline was introduced in Section 2.1.5. When considering a 0-automatic queue (associated with a plain triple) with PS discipline, difficulties occur : indeed a departure does not necessary have a local effect. Consider for instance that the queue content is  $a^k b a^{-k}$ , a departure of client  $b$  will empty the queue. A way to get rid of the difficulty may be to forget about the order between customers.

Let us start with a plain monoid  $X = S^* \star \prod_{i=1..|T|} \mathbb{F}(a_i) \star X_1 \star \dots \star X_k$ , where  $S$  and  $T$  are finite and  $X_1, \dots, X_k$  are finite monoids. Forgetting the order amounts to switch to the commutative product  $Y = S^* \times \mathbb{F}(T) \times X_1 \times \dots \times X_k$ . The queue associated with  $Y$  can be considered as  $k + 1 + |T|$  queues, and the customers in different queues do no interact, but the customers in the same queue may interact. The “queue” associated with  $S$  is a normal queue, each client adds one to the queue-length. The “queue” associated with  $X_i$  has at most one customer. However, it is not clear for the moment if it is possible to build version of this model which have good properties, and are quasi-reversible.

**G-queues with both positive and negative customers in the buffer.** In section 4.5.2, the G-queue with the boundary condition  $r$ , where  $r \notin \{(1, 0), (0, 1)\}$ , was mentioned. However, in that case, the departure process is not Poisson.

We now consider a different model. Consider a G-queue  $(\mathbb{F}(a), \{a, a^{-1}\}, \nu, \lambda, \mu)$  with both types of customers in the buffer, but without the boundary condition. It means that when a customer arrives in an empty queue, it will take place with probability 1. Here, all the disciplines (FIFO, LIFO, PS) are equivalent, they give the same infinitesimal generator. If  $\lambda \hat{\gamma} < \mu$ , the stationary distribution  $\pi$  can be computed and is given by :

$$\begin{aligned} \pi_r(1_{\Sigma^*}) &= \left(1 + \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} + \frac{\rho_2}{1 - \rho_2}\right)^{-1} \\ \pi_r(a^n) &= \pi_r(1_{\Sigma^*}) \rho_1^n, \quad \pi_r(a^{-n}) = \pi_r(1_{\Sigma^*}) \rho_2^n, \end{aligned} \quad (8.3)$$

where  $\rho_1$  and  $\rho_2$  are given by :

$$\rho_1 = \frac{\lambda \nu(a)}{\mu + \lambda \nu(a^{-1})}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda \nu(a^{-1})}{\mu + \lambda \nu(a)}.$$

This G-queue is quasi-reversible in the sense of Chao, Miyazawa and Pinedo in section 2.1.4.

Hence, we may consider the network of G-queues with two types of customers. Consider a network of  $N$  queues. In queue  $i$ , customers of type  $a$  and  $a^{-1}$  arrive from the outside according to a Poisson process of rate  $\lambda \nu_i(a)$ ,  $\lambda \nu_i(a^{-1})$ , respectively. The service rate is  $\mu_i$ . An  $a$ -customer and an  $a^{-1}$ -customer cancel each other. Upon a service completion at queue  $i$ , an  $a$ -customer leaves for queue  $j$  as an  $a$ -customer with probability  $p_{ij}^{++}$ , as an  $a^{-1}$ -customer with probability  $p_{ij}^{+-}$ , and it leaves the network with probability  $d_i^+$ ; an  $a^{-1}$ -customer leaves for queue  $j$  as an  $a$ -customer with probability  $p_{ij}^{-+}$ , as an  $a^{-1}$ -customer with probability  $p_{ij}^{--}$ , and it leaves the network with probability  $d_i^-$ .

The network traffic equations are given by :

$$\begin{aligned} \lambda_i^+ &= \lambda \nu_i(a) + \sum \rho_j^+ \mu_j p_{ji}^{++} + \sum \rho_j^- \mu_j p_{ji}^{-+}, \\ \lambda_i^- &= \lambda \nu_i(a^{-1}) + \sum \rho_j^+ \mu_j p_{ji}^{+-} + \sum \rho_j^- \mu_j p_{ji}^{--}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

---

where

$$\rho_i^+ = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \lambda_i^-}, \quad \rho_i^- = \frac{\lambda_i^-}{\mu_i + \lambda_i^+}.$$

We have the following theorem.

**Theorem 8.1.** *If there exists a solution to the traffic equation (8.4) and it satisfies  $\rho_i^+ < 1$  and  $\rho_i^- < 1$  for all  $i = 1, \dots, N$ , then the network has the product form stationary distribution given by*

$$\begin{aligned} \pi(n_1, n_2, \dots, n_N) &= \prod \pi_i(a^{n_i}) \\ &= \prod \left(1 + \frac{\rho_i^+}{1 - \rho_i^+} + \frac{\rho_i^-}{1 - \rho_i^-}\right) (\mathbb{1}_{n_i \geq 0} (\rho_i^+)^{n_i} + \mathbb{1}_{n_i < 0} (\rho_i^-)^{-n_i}). \end{aligned} \quad (8.5)$$

**LIFO discipline. “G-queue” with multi-class of customers.** We consider the same model as above, with no boundary condition, but with several types of positive/negative customers. Consider a queue associated with  $(\mathbb{F}(T), \Sigma = T \sqcup T^{-1}, \nu, \lambda, \mu)$  with LIFO discipline.

Consider the probability measure  $\pi$  on  $L(\mathbb{F}(T), \Sigma)$  defined by

$$\pi(a_n \cdots a_1) = C \rho_{a_n} \cdots \rho_{a_1}, \quad (8.6)$$

where  $C$  is a constant normalization and where

$$\rho_a = \frac{\lambda \nu(a)}{\mu + \lambda \nu(a^{-1})}. \quad (8.7)$$

Substitute this probability measure in the balance equations

$$\sum_v \pi(u) Q(u, v) = \sum_v \pi(v) Q(v, u),$$

after simplification, one obtains

$$\rho_a(\mu + \lambda) = \lambda \nu(a) + \sum_{b \in \text{Next}(a)} \rho_b(\mu + \lambda \nu(b^{-1})) \rho_a \quad (8.8)$$

and

$$\lambda = \sum_{a \in \Sigma} \rho_a(\mu + \lambda \nu(a^{-1})). \quad (8.9)$$

The equations (8.8) and (8.9) follow from (8.7). It implies that the measure defined in (8.6) is the stationary measure of the considering queue.

If  $\sum \rho_a < 1$ , then the queue is stable. The queue is quasi-reversible in the sense of Chao, Miyazawa and Pinedo given in section 2.1.4.

*Remark 8.2.* We may consider a more general model, where the service rate depends on the class of customers, say  $\mu_a$  for class  $a$ . We obtain the same type of solution, with  $\mu_a$  instead of  $\mu$  in (8.7).

Similar to the previous paragraph, one may consider the network of these  $N$  LIFO queues  $(\mathbb{F}(T_i), \Sigma_i = T_i \sqcup T_i^{-1}, \nu_i, \lambda_i, \mu_i)$ , with the routing matrix is described as follow : upon a service completion at queue  $i$ , an  $a$ -customer leaves to queue  $j$  as a  $b$ -customer with probability  $p_{(ij),(ab)}$ , and it leaves the network with probability  $d_{i,a}$ .

The network traffic equations are given by : for all  $i$  and  $a \in \Sigma_i$ ,

$$\tilde{\lambda}_{i,a} = \lambda_i \nu_i(a) + \sum_{j,b} \mu_j \rho_{j,b} p_{(ji),(ba)} , \quad (8.10)$$

where

$$\rho_{i,a} = \frac{\tilde{\lambda}_{i,a}}{\mu_i + \tilde{\lambda}_{i,a^{-1}}} .$$

If there exists a solution of the traffic equation (8.10) and if it satisfies  $\sum_{a \in \Sigma_i} \rho_{i,a} < 1$  for all  $i$ , then the network has the product form stationary distribution given by, for  $u_i = (a_{i,n_i}, \dots, a_{i,1}) \in L(\mathbb{F}(T_i), \Sigma_i)$ ,

$$\pi(u_1, \dots, u_N) = \prod \pi_i(u_i) \quad (8.11)$$

$$= C \prod \rho_{i,a_n} \cdots \rho_{i,a_1} , \quad (8.12)$$

where  $C$  is the normalization constant and

$$\rho_{i,a} = \frac{\tilde{\lambda}_{i,a}}{\mu_i + \tilde{\lambda}_{i,a^{-1}}} .$$

Note that the normalization constant  $C$  are not easy to calculate.

We do not know if the TE have a solution. However, if they have one which satisfies  $\sum_{a \in \Sigma_i} \rho_{i,a} < 1$  for all  $i$ , it must be unique. Indeed, the stationary distribution is unique, and each solution to the TE defines a possible candidate. The situation different from the one in the previous chapters, where the solution to the TE was modifying the infinitesimal generator via the boundary condition.

For FIFO queue and network, we do not have analog results.

### **G-network with multiple classes of customers of Fourneau, Gelenbe and Suros.**

In [GP98] and [FGS96], Fourneau, Gelenbe and Suros consider the G-network with multiple classes of customers. In the network, only the positives customers take place and are served. They consider three types of service disciplines : FIFO, LIFO and PS.

In their model, they consider a network of  $N$  queues. There are  $R$  classes of positive customers and  $S$  classes of negative customers. Positive customers arrive to queue  $i$  as a customer of class  $k$  according to a Poisson process of rate  $\Lambda_{i,k}$ . Negative customers arrive to queue  $i$  as a customer of class  $m$  according to a Poisson process of rate  $\lambda_{i,m}$ .

Only positive customers are served. Upon a service completion, a positive customer of class  $k$  leaves queue  $i$  to queue  $j$  as a positive customer of class  $l$  with probability  $p_{(ij),(kl)}^+$ , as a negative customer of class  $m$  with probability  $p_{(ij),(km)}^-$ , or it leaves the network with probability  $d_{i,k}$ .

On its arrival at a non-empty queue, a negative customer selects a positive customer as its “target” in the queue in accordance with the service discipline at this station. In a FIFO or LIFO queues, the “target” is the customer being served. In a PS queue, it is one of the customer being served chosen uniformly. If the queue is empty, then the negative customer simply disappears. A negative customer of a class  $m$  arriving at the service center  $i$  succeeds in destroying a selected positive customer, of some class  $k$ , with probability  $K_{i,m,k}$ . With probability  $1 - K_{i,m,k}$  it does not succeed. A negative customer will disappear after trying to destroy a customer.

All service centers have exponential service time distribution. At queue  $i$ , a positive customer of class  $k$  has the service rate  $\mu_{i,k}$ .

There are no constraints for LIFO queues, but there are some constrains for the other two service disciplines.

**FIFO :** In the service center of type FIFO, one has the following condition :

$$\mu_{i,k} + \sum_{m=1}^S K_{i,m,k} \lambda_{i,m} = c_i . \quad (8.13)$$

For all classes of negative customer  $m$  such that  $\sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^R p_{(j,i)(l,m)}^- > 0$  :

$$\text{for all classes of positive customers } a \text{ and } b, K_{i,m,a} = K_{i,m,b} . \quad (8.14)$$

This condition implies that a negative customer of some class  $m$  arriving from the network does not “distinguish” between the positive customer classes it will try to delete, and that it will treat them all in the same manner. Condition (8.13) and (8.14) have the effect of producing a single positive customer equivalent. Because services are exponential, positive customers of a given class are indistinguishable for destroying.

**PS :** In the center of type PS, the probability that any one positive customer of the queue is selected by the arriving negative customer is  $1/n$  if  $n$  is the total number of customers in the queue.

The state at time  $t$  of the network is denoted by  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ .

For type LIFO and FIFO server,  $x_i = (x_{i,n_i}, \dots, x_{i,1})$ , where  $n_i$  is the number of customers in queue  $i$ ,  $x_{i,j}$  is the class index of the corresponding customer.

For type PS server,  $x_i = (x_{i,k})_{k=1, \dots, R}$ , where  $x_{i,k}$  is the number of customers of class  $k$  in queue  $i$ .

The network traffic equations are given by :

$$\rho_{i,k} = \frac{\Lambda_{i,k} + \Lambda_{i,k}^+}{r_{i,k} + \sum_{m=1}^S K_{i,m,k} (\lambda_{i,m} + \lambda_{i,m}^-)} , \quad (8.15)$$

$$\Lambda_{i,k}^+ = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^R p_{(j,i),(lk)}^+ \mu_{j,l} \rho_{j,l} , \quad (8.16)$$

$$\lambda_{i,m}^- = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^R p_{(j,i),(lm)}^- \mu_{j,l} \rho_{j,l} . \quad (8.17)$$



If the traffic equations have a solution such that for all  $i, k$   $\rho_{i,k} > 0$ , and for all  $i$   $\sum_{k=1}^R \rho_{i,k} < 1$ , then the stationary distribution of the network is given by

$$\pi(x) = G \prod_{i=1}^N g_i(x_i) , \quad (8.18)$$

where each  $g_i(x_i)$  depends on the type of service center  $i$ . The  $g_i(x_i)$  have the following form :

**FIFO** and **LIFO**. If the service center is FIFO or LIFO, then

$$g_i(x_i) = \prod_{h=1}^{n_i} \rho_{i,x_i,h} . \quad (8.19)$$

**PS**. If the service center is PS, then

$$g_i(x_i) = n_i! \prod_{k=1}^R \frac{(\rho_{i,k})^{x_{i,k}}}{x_{i,k}!} . \quad (8.20)$$

*Remark 8.3.* One has a similar result for a more general model : with signals which trigger the positive customers between stations.

Let us compare their model with our work.

**FIFO**. In their model, the arriving customers take place at the back-end of the buffer, but negative customer will select a customer at the front-end of the buffer as its “target”. One needs the constraint (8.13) to have the product form solution.

Consider a network of 0-automatic queues associated to  $(\mathbb{F}(T), T \sqcup T^{-1}, \nu_i, \lambda_i, \mu_i)$  with FIFO discipline. In our case, both negative and positive customers are served. Arriving customers take place at the back-end of the buffer, so the cancellation occurs at the back-end of the buffer. We do not need any constraint as (8.13) but our routing matrix is less flexible, because we have only one load  $\rho_i$  for queue  $i$ , as opposed to the model of Fourneau, Gelenbe and Suros, where each class  $a$  in  $T$  has its own load  $\rho_{i,k}$  at queue  $i$ .

**LIFO**. In their model, the arriving customers take place at the back-end of the buffer and the arriving negative customer will select a customer also at the back-end of the buffer as its “target” to cancel, and the services take place at the back-end.

Consider a network of 0-automatic queues associated to  $(\mathbb{F}(T), T \sqcup T^{-1}, \nu_i, \lambda_i, \mu_i)$  with LIFO discipline as in the previous paragraph. In our case, both negative and positive customers are served. Arriving customers take place at the back-end of the buffer. The cancellation occurs at the back-end of the buffer and the service is also at the back-end of the buffer. Each class of customer has its own load, the only difference is that the negative customers exist in the buffer.

**PS**. In their model, the probability of a negative customer to arrive and select a positive customer to cancel is  $1/n$  if  $n$  is the total number of customers in the queue.

Let us take a simple case, when there are two classes  $a$  and  $b$ . If there is  $n_a$  customer of class  $a$  and  $n_b$  customers of class  $b$ , then with probability  $n_a/(n_a + n_b)$  a customer of type  $a$  is selected.

---

This is quite different from the mechanism involved in our models. The closest version we have is the one discussed above in the paragraph Discipline PS, for which we do not have any results.

If we insist on both negative and positive customers being served, it is not easy to find a reasonable mechanism for which the stationary distribution would be computable.

## Conclusion

Zero-automatic queues form a new class of quasi-reversible queues. It is a unifying framework for several known quasi-reversible queues such as simple queues and G-queues. The additional basic primitives for tasks such as “one equals many” and “dating agency” create an interesting phenomenon : the possibility of merging two customers to create a new customer.

The queue-content of a 0-automatic queue is not an integer but a sequence of symbols, so even in a queue, the stationary distribution has “product form” (a multiplicative structure).

The 0-automatic queue with classes was introduced in Section 6.1. The 0-automatic queue with classes is also quasi-reversible. Hence, we may define the Jackson network multi-classes of 0-automatic queues as in Section 2.2.5. However, as we said, the way a customer changes its class after merging with another one is very special.

The complicated Twisted Traffic Equations is a magic system of equations which help us to determine the form of the stationary distribution of a 0-automatic queue and a 0-automatic network. In short, the studying of FIFO 0-automatic queue and network with exponential service is quite complete.

## Future work

We may consider the LIFO 0-automatic queue having Poisson departure process, that is the one associated with  $X_1 \star X_2$ . In this case, one might expect to get an insensitivity result, that is to have the same stationary distribution when the service not exponential but still having the same mean.

A closed network is interesting to consider, if we can treat the problem of the vanishing of customers.

With the discipline PS, it seems that only the study of queues associated with free product of several G-queues is valuable. In comparison, in the network introduced by Gelenbe and Pujolle in [GP98], “positive” customers and “negative” customers are asymmetric. Hence, our problem is to find a better version of PS discipline for general 0-automatic queues.

**Batch removal.** A G-network with batch removal is introduced in [GP98]. In this network, when a negative customer arrives at queue  $i$ , the length is reduced by some integer random variable  $B_i$  if  $B_i \leq n_i$ , or the queue length becomes zero if  $n_i < B_i$ , where

$n_i$  is the total number of customers in queue  $i$ . The batch removal size distribution at queue  $i$  is arbitrary :  $P[B_i = m] = \pi_{im}, m \geq 1$ .

In the case of 0-automatic queues, the phenomenon of batch removal can be introduced as follows.

Consider the 0-automatic pair  $(X, \Sigma)$ . Let  $\nu$  be a probability distribution on  $X$  with finite support, it means that  $\nu$  may put some mass on words of length greater than 1. The queue associated to  $(X, \Sigma, \nu)$  incorporates a mechanism of batch arrival and batch removal. Let us give an example.

Consider the free group  $\mathbb{F}(a, b)$ . The support of  $\nu$  is the set of  $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}, ab, b^{-1}b^{-1}\}$ . If the queue content is  $bbab^{-1}$ , then the effect of an arrival of the queue content is illustrated in Figure 8.1.

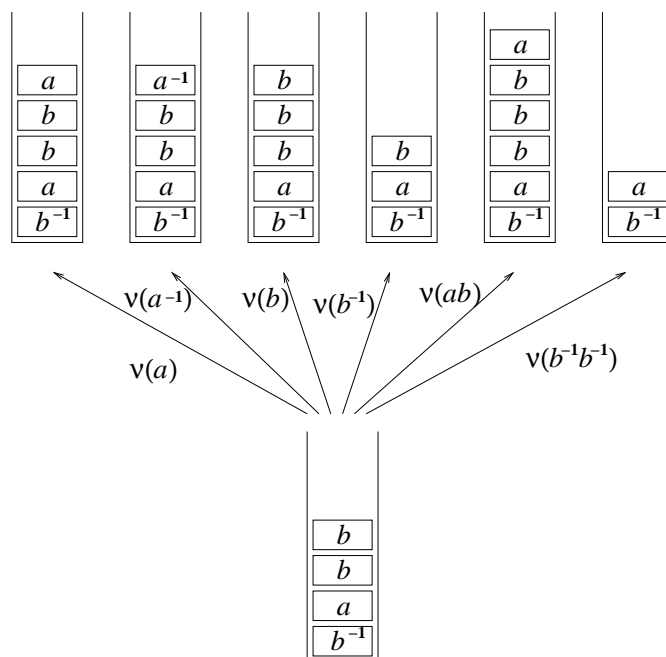


FIGURE 8.1 – Example of batch arrival and removal

Nevertheless, the problem is that the random walk associated with the queue has a complicated behavior. In the paper in preparation of Mairesse [Mai], the harmonic measure is explicitly given, but its structure is more complicated. Indeed, it is Markovian multiplicative but after some additional hidden parameters are added. Hence, it is possible to consider version of 0-automatic queue with batch arrival and removal. And we may expect it to be quasi-reversible. However, it will be intricate to analyze.

# Bibliographie

- [AB99] C. Aliprantis and K. Border. *Infinite-dimensional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1999. A hitchhiker’s guide.
- [Asm87] S. Asmussen. *Applied probability and queues*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1987.
- [BCMP75] F. Baskett, K.M. Chandy, R.R. Muntz, and F.G. Palacios. Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 22 :248–260, 1975.
- [BF95] F. Baccelli and S. Foss. On the saturation rule for the stability of queues. *J. Appl. Probab.*, 32(2) :494–507, 1995.
- [Bré99] P. Brémaud. *Markov chains*, volume 31 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999. Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues.
- [CM00] X. Chao and M. Miyazawa. Queueing networks with instantaneous movements : a unified approach by quasi-reversibility. *Adv. in Appl. Probab.*, 32(1) :284–313, 2000.
- [CMP99] X. Chao, M. Miyazawa, and M. Pinedo. *Queueing networks. Customers, signals, and product form solutions*. Wiley, 1999.
- [Coh69] J. W. Cohen. *The single server queue*. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 8. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1969.
- [DM61] E. B. Dynkin and M. B. Maljutov. Random walk on groups with a finite number of generators. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 137 :1042–1045, 1961.
- [DQ02] T. Dayar and F. Quessette. Quasi-birth-and-death processes with level-geometric distribution. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 24(1) :281–291 (electronic), 2002.
- [DTM] T.-H. Dao-Thi and J. Mairesse. Zero-automatic networks. *To appear in JDEDS*.

- [DTM05] T.-H. Dao-Thi and J. Mairesse. Zero-automatic queues. *In Formal Techniques for Computer Systems and Business Processes*, 3670 of *LNCS* :64–78, Springer-Verlag, 2005.
- [DTM07] T.-H. Dao-Thi and J. Mairesse. Zero-automatic queues and product form. *Adv. in Appl. Probab.*, 39(2) :429–461, 2007.
- [FGS96] J.-M. Fourneau, E. Gelenbe, and R. Suros.  $G$ -networks with multiple classes of negative and positive customers. *Theoret. Comput. Sci.*, 155(1) :141–156, 1996.
- [Gel89] E. Gelenbe. Random neutral networks with negative and positive signals and product form solution. *Neural Computation*, 1(4) :502–510, 1989.
- [Gel91] E. Gelenbe. Product-form queueing networks with negative and positive customers. *J. Appl. Probab.*, 28(3) :656–663, 1991.
- [GP98] E. Gelenbe and G. Pujolle. *Introduction to queueing networks*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1998. Second Edition.
- [Gui80] Y. Guivarc’h. Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d’une marche aléatoire. *In Conference on Random Walks (Kleebach, 1979) (French)*, volume 74 of *Astérisque*, pages 47–98, 3. Soc. Math. France, Paris, 1980.
- [He.03] Q.-M. He. The classification of matrix  $GI/M/1$ -type Markov chains with a tree structure and its applications to queueing. *J. Appl. Probab.*, 40(4) :1087–1102, 2003.
- [HS83] R. Haring-Smith. *Groups and simple languages*. 1983.
- [Jac57] J.R. Jackson. Networks of waiting lines. *Operations Res.*, 5 :518–521, 1957.
- [Kel79] F. Kelly. *Reversibility and stochastic networks*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1979. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- [Led01] F. Ledrappier. Some asymptotic properties of random walks on free groups. *In Topics in probability and Lie groups : boundary theory*, volume 28 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 117–152. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [LR99] G. Latouche and V. Ramaswami. *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling*. ASA-SIAM Series on Statistics and Applied Probability. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.
- [Mai] J. Mairesse. Hidden markov sources and random walks on virtually free groups, in preparation. *In preparation*.
- [Mai04] J. Mairesse. Random walks on groups and monoids with a Markovian harmonic measure. *Research Report LIAFA 2004-005, Univ. Paris 7*, 2004.

- 
- [Mai05] J. Mairesse. Random walks on groups and monoids with a Markovian harmonic measure. *Electron. J. Probab.*, 10 :1417–1441 (electronic), 2005.
- [MM07] J. Mairesse and F. Mathéus. Random walks on free products of cyclic groups. *J.London Math.Soc.*, 75(1) :44–66, 2007.
- [Neu81] M. Neuts. *Matrix-geometric solutions in stochastic models*, volume 2 of *Johns Hopkins Series in the Mathematical Sciences*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Md., 1981. An algorithmic approach.
- [Rob03] P. Robert. *Stochastic networks and queues*, volume 52 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [SS87] S. Sawyer and T. Steger. The rate of escape for anisotropic random walks in a tree. *Probab. Theory Related Fields*, 76(2) :207–230, 1987.
- [Sta66] J. Stallings. A remark about the description of free products of groups. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 62 :129–134, 1966.
- [Woe00] W. Woess. *Random walks on infinite graphs and groups*, volume 138 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [YS94] R. Yeung and B. Sengupta. Matrix product-form solutions for Markov chains with a tree structure. *Adv. in Appl. Probab.*, 26(4) :965–987, 1994.



# Index

- 0-automatic, 38, 39
  - 0-automatic triple, 40
- 0-automatic network
  - Jackson-like network, 78
  - Jackson-like Network Traffic Equations
    - J-NTE, 78
  - Kelly-like network, 92
  - Kelly-like Network Traffic Equations
    - K-NTE, 93
- 0-automatic queue, 48
  - boundry condition, 48
  - G-queue, 49
  - LIFO 0-automatic queue, 99
    - LIFO-TTE, 101
  - simple queue, 49
  - Twisted Traffic Equations TTE, 53, 65
- 0-automatique, 38, 39
  - triplet 0-automatique, 40
- Burke theorem, 10
- dérive, 40
- discipline
  - FIFO, 8
  - LIFO, 8
  - PS, 8
- drift, 40
- file 0-automatique, 1
- file d'attente, 1, 7
  - file symétrique, 15
  - G-file, 1, 11
  - M/M/1, 1, 9
- forme produit, 19
- graph of successors, 39
- graphe des successeurs, 39
- harmonic measure, 42
- libre fleuri
  - groupe libre fleuri, 43
  - monoïde libre fleuri, 43
  - triplet libre fleuri, 44
- locally reduced words, 38
- marche aléatoire, 39
- mesure harmonique, 42
- monoïde, groupe
  - élément unit, 37
  - graphe de Cayley, 37
  - langage, 37
  - lettre, 37
  - mot, 37
  - produit libre, 38
  - section, 37
- monoid, group
  - cross section, 37
  - Cayley graph, 37
  - free product, 38
  - language, 37
  - letter, 37
  - unit element, 37
  - word, 37
- mots localement réduit, 38
- network
  - BCMP network, 32
  - G-network, 22
  - Gordon-Newell network, 21
  - Jackson network, 19
  - Kelly network, 23
- nomenclature de Kendall, 7
- plain
  - plain group, 43
  - plain monoid, 43
  - plain triple, 44



- product form, 19
- quasi-réversible, 12
- quasi-reversible, 12
- réseau, 1, 19
  - G-réseau, 22
  - réseau BCMP, 32
  - réseau de Gordon-Newell, 21
  - réseau de Jackson, 19
  - réseau de Jackson multi-classes, 30
  - réseau de Kelly, 23
- réseau 0-automatique, 4
  - à la Jackson, 5
  - à la Kelly, 5
- réversible, 8
- random walk, 39
- reversible, 8
- routing matrix, 77
- théorème de Burke, 10
- type de clients dans une file 0-automatique,
  - 4
  - “one equals many”, 4
  - “dating agency”, 4
  - classique, 4
  - positif/négatif, 4
- type of tasks in a 0-automatique queue, 4
  - positive/negative, 4
  - classic, 4
  - dating agency, 4
  - one equals many, 4