



HAL
open science

Simulation numérique de l'interaction arc électrique - écoulements gazeux dans les disjoncteurs moyenne et haute tension

Pierre Chévrier

► **To cite this version:**

Pierre Chévrier. Simulation numérique de l'interaction arc électrique - écoulements gazeux dans les disjoncteurs moyenne et haute tension. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1990. Français. NNT: . tel-00337263

HAL Id: tel-00337263

<https://theses.hal.science/tel-00337263>

Submitted on 6 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TU 8734

Thèse
présentée par
Pierre Chévrier
ingénieur ENSIMAG

pour obtenir le titre de Docteur
de l'Institut National Polytechnique de Grenoble
spécialité : Mathématiques Appliquées

**Simulation numérique de l'interaction
arc électrique - écoulements gazeux
dans les disjoncteurs moyenne et haute tension**

Date de soutenance : 22 Mai 1990

Composition du jury : MM. **Alain-Yves LeRoux** Président
Pierre Baras
Thierry Gallouët
Philippe Massé
Jean-Marc Talbot
Jean-Paul Vila

Thèse préparée au sein du Laboratoire LMC (IMAG) et du groupe IST (Merlin Gerin)

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

46 avenue Felix Viallet
38031 GRENOBLE cedex

Tél. : 76.57.45.00

Année universitaire 1989

Président de l'Institut :
Monsieur Georges LESPINARD

Professeurs des Universités

BARIBAUD Michel	ENSERG	JAUSSAUD Pierre	ENSIEG
BARRAUD Alain	ENSIEG	JOST Rémy	ENSPG
BAUDELET Bernard	ENSPG	JOUBERT Jean-Claude	ENSPG
BEAUFILS Jean-Pierre	INPG	JOURDAIN Geneviève	ENSIEG
BLIMAN Samuel	ENSERG	LACOUME Jean-Louis	ENSIEG
BOIS Philippe	ENSHMG	LADET Pierre	ENSIEG
BONNETAIN Lucien	ENSEEG	LESIEUR Marcel	ENSHMG
BONNET Guy	ENSPG	LESPINARD Georges	ENSHMG
BRISSONNEAU Pierre	ENSIEG	LONGEQUEUE Jean-Pierre	ENSPG
BRUNET Yves	IUFA	LORET Benjamin	ENSHMG
CAILLERIE Denis	ENSHMG	LOUCHET François	ENSEEG
CAVAIGNAC Jean-François	ENSPG	LUCAZEAU Guy	ENSEEG
CHARTIER Germain	ENSPG	MASSE Philippe	ENSIEG
CHENEVIER Pierre	ENSERG	MASSELOT Christian	ENSIEG
CHERADAME Hervé	UFR PGP	MAZARE Guy	ENSIMAG
CHERUY Arlette	ENSIEG	MOHR Roger	ENSIMAG
CHOVET Alain	ENSERG	MOREAU René	ENSHMG
COHEN Joseph	ENSERG	MORET Roger	ENSIEG
COLINET Catherine	ENSEEG	MOSSIERE Jacques	ENSIMAG
CORNUT Bruno	ENSIEG	OBLED Charles	ENSHMG
COULOMB Jean-Louis	ENSIEG	OZIL Patrick	ENSEEG
COUMES André	ENSERG	PA ULEAU Yves	ENSEEG
CROWLEY James	ENSIMAG	PERRET Robert	ENSIEG
DARVE Félix	ENSHMG	PIAU Jean-Michel	ENSHMG
DELLA-DORA Jean	ENSIMAG	PIC Etienne	ENSERG
DEPEY Maurice	ENSERG	PLATEAU Brigitte	ENSIMAG
DEPORTES Jacques	ENSPG	POUPOT Christian	ENSERG
DEROO Daniel	ENSEEG	RAMEAU Jean-Jacques	ENSEEG
DESRE Pierre	ENSEEG	REINISCH Raymond	ENSPG
DOLMAZON Jean-Marc	ENSERG	RENAUD Maurice	UFR PGP
DURAND Francis	ENSEEG	ROBERT André	UFR PGP
DURAND Jean-Louis	ENSPG	ROBERT François	ENSIMAG
FAUTRELLE Yves	ENSHMG	SABONNADIÈRE Jean-Claude	ENSIEG
FOGGIA Albert	ENSIEG	SAUCIER Gabrièle	ENSIMAG
FONLUPT Jean	ENSIMAG	SCHLENKER Claire	ENSPG
FOULARD Claude	ENSIEG	SCHLENKER Michel	ENSPG
GANDINI Alessandro	UFR PGP	SERMET Pierre	ENSERG
GAUBERT Claude	ENSPG	SILVY Jacques	UFR PGP
GENTIL Pierre	ENSERG	SIRIEYS Pierre	ENSHMG
GENTIL Sylviane	ENSIEG	SOHM Jean-Claude	ENSEEG
GREVEN Hélène	IUFA	SOLER Jean-Louis	ENSIMAG
GUEGUEN Claude	ENSIEG	SOUQUET Jean-Louis	ENSEEG
GUERIN Bernard	ENSERG	TROMPETTE Philippe	ENSHMG
GUYOT Pierre	ENSEEG	VINCENT Henri	ENSPG
IVANES Marcel	ENSIEG	ZADWORNÝ François	ENSERG

**Personnalités agréées à titre permanent à diriger
des travaux de recherche
(décision du conseil scientifique)**

E.N.S.E.E.G

HAMMOU Abdelkader
MARTIN-GARIN Régina
SARRAZIN Pierre
SIMON Jean-Paul

E.N.S.E.R.G

BOREL Joseph

E.N.S.I.E.G

DESCHIZEAUX Pierre
GLANGEAUD François
PERARD Jacques
REINISCH Raymond

E.N.S.H.M.G

ROWE Alain

E.N.S.I.M.A.G

COURTIN Jacques

C.E.N.G

CADET Jean
COEURE Philippe
DELHAYE Jean-Marc
DUPUY Michel
JOUVE Hubert
NICOLAU Yvan
NIFENECKER Hervé
PERROUD Paul
PEUZIN Jean-Claude
TAIEB Maurice
VINCENDON Marc

Laboratoires extérieurs :

C.N.E.T

DEVINE Rodericq
GERBER Roland
MERCCKEL Gérard
PAULEAU Yves

Situation particulière

PROFESSEURS D'UNIVERSITE

DETACHEMENT

ENSIMAG	LATOMBE	J..Claude	Détachement	21/10/1989
ENSHMG	PIERRARD	J.Marie	Détachement	30/04/1989
ENSIMAG	VEILLON	Gérard	Détachement	30/09/1990
ENSIMAG	VERJUS	J.Pierre	Détachement	30/09/1989
ENSPG	BLOCH	Daniel	Recteur à c/	21/12/1988

SURNOMBRE

INPG	CHIAVERINA	Jean	30/09/1989
ENSHMG	BOUVARD	Maurice	30/09/1991
ENSEEG	PARIAUD	J.Charles	30/09/1991

Personnes ayant obtenu le diplôme d'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

BECKER Monique
BINDER Zdenek
CHASSERY Jean-Marc
CHOLLET Jean-Pierre
COEY John
COLINET Catherine
COMMAULT Christian
CORNUJOLS Gérard
COULOMB Jean- Louis
COURNIL M.
DALARD Francis
DANES Florin
DEROO Daniel
DIARD Jean-Paul
DION Jean-Michel
DUGARD Luc
DURAND Madeleine
DURAND Robert
GALERIE Alain
GAUTHIER Jean-Paul
GENTIL Sylviane

GHIBAUDO Gérard
HAMAR Sylvaine
HAMAR Roger
LACHENAL D.
LADET Pierre
LATOMBE Claudine
LE HUY H.
LE GORREC Bernard
MADAR Roland
MEUNIER G.
MULLER Jean
NGUYEN TRONG Bernadette
NIEZ J.J.
PASTUREL Alain
PLA Fernand
ROGNON J.P.
ROUGER Jean
TCHUENTE Maurice
VINCENT Henri
YAVARI A.R.

Chercheurs du C.N.R.S

DIRECTEURS DE RECHERCHE CLASSE 0

LANDEAU	Ioan
NAYROLLES	Bernard

Directeurs de recherche 1ère Classe

ANSARA Ibrahim
CARRE René
FRUCHART Robert
HOPFINGER Emile

JORRAND Philippe
KRKOWIAK Sacha
LEPROVOST Christian
VACHAUD Georges
VERJUS Jean-Pierre

Directeurs de recherche 2ème Classe

ALEMANY Antoine
ALLIBERT Colette
ALLIBERT Michel
ARMAND Michel
AUDIER Marc
BERNARD Claude
BINDER Gilbert
BONNET Roland
BORNARD Guy
CAILLET Marcel
CALMET Jacques
CHATILLON Chritiant
CLERMONT Jean-Robert
COURTOIS Bernard
DAVID René
DION Jean-Michel
DRIOLE Jean
DURAND Robert
ESCUDIER Pierre
EUSTATHOPOULOS Nicolas
GARNIER Marcel
GUELIN Pierre

JOURD Jean-Charles
KAMARINOS Georges
KLEITZ Michel
KOFMAN Walter
LEJEUNE Gérard
MADAR Roland
MERMET Jean
MICHEL Jean-Marie
MEUNIER Jacques
PEUZIN Jean-Claude
PIAU Monique
RENOUARD Dominique
SENATEUR Jean-Pierre
SIFAKIS Joseph
SIMON Jean-Paul
SUERY Michel
TEODOSIU Christian
VAUCLIN Michel
VENNEREAU Pierre
WACK Bernard
YONNET Jean-Paul

Lorsque Bucéphale, cheval illustre, fut présenté au jeune Alexandre, aucun écuyer ne pouvait se maintenir sur cet animal redoutable. Sur quoi un homme vulgaire aurait dit : "Voilà un cheval méchant." Alexandre cependant cherchait l'épingle, et la trouva bientôt, remarquant que Bucéphale avait terriblement peur de sa propre ombre ; et comme la peur faisait sauter l'ombre aussi, cela n'avait point de fin. Mais il tourna le nez de Bucéphale vers le soleil, et, le maintenant dans cette direction, il put le rassurer et le fatiguer...

Ne dites jamais que les hommes sont méchants ; ne dites jamais qu'ils ont tel caractère. Cherchez l'épingle.

Alain, "*Propos sur le bonheur*"

L'évolution générale poursuit inexorablement sa route. L'épousant strictement pendant notre enfance et notre adolescence, notre évolution personnelle se ralentit par la suite, dévie, et bientôt s'immobilise à tel ou tel âge suivant les individus. Les plus favorisés s'adaptent encore quelques temps, puis insensiblement leurs opinions se cristallisent et dès lors la vérité se confond pour eux avec leurs conceptions sclérosées.

Mais l'évolution naturelle des choses se moque de tous les ukases, de toutes les routines. Elle poursuit sa marche et ceux-là sont dans l'erreur et seront balayés, qui veulent l'arrêter ou la dévier de son chemin.

Certes, il ne nous est pas donné de juger, mais il faut bien constater ce qui est. Au fond, ce qui importe, c'est de se réaliser pleinement, d'épuiser toutes ses possibilités, de se concrétiser en quelque chose, que ce soit en sport, en littérature, dans l'édification valeureuse d'une théorie scientifique ou philosophique, ou dans le simple jeu harmonieux de ses muscles, si cela représente le summum de ses possibilités créatrices.

Création, voilà le maître mot, l'activité première ; par elle nous participons à l'œuvre universelle, seule grandeur réelle.

Pierre Allain, "*Alpinisme et compétition*"

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Pierre Baras qui, durant ces trois années, a dirigé mon travail. Ses encouragements, arrivant toujours au bon moment, et ses conseils, fondés et constructifs, m'ont été précieux. Il a consacré beaucoup de temps à m'aider à parfaire la rédaction de ce travail. Qu'il sache que je garderai un excellent souvenir de notre collaboration.

Alain-Yves LeRoux me fait l'honneur de présider le jury après avoir accepté de rapporter sur mon travail. Je profite de cette occasion pour lui exprimer ma gratitude.

Thierry Gallouët a accepté de rapporter sur mon travail. Je le remercie vivement de l'intérêt qu'il a su montrer, des suggestions qu'il m'a faites et des conseils qu'il m'a donnés au cours de ces trois années.

Philippe Massé a accepté de participer au jury. Je le remercie de l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Je remercie Jean-Paul Vila d'avoir accepté de participer à ce jury. Tout au long de mon travail, ses conseils et critiques avisés ont été précieux.

Jean-Marc Talbot a suivi mon travail chez Merlin Gerin et encouragé certaines orientations judicieuses. Je le remercie d'avoir accepté de participer au jury.

Alain Girard a été un interlocuteur privilégié. Il est le physicien initiateur du modèle proposé. Je lui sais gré de l'intérêt qu'il a trouvé à ce travail.

Hervé Galley a été un collaborateur grâce à qui le logiciel issu de ce travail est, me semble-t-il, un bon logiciel. Sa rigueur et son approche systématique des problèmes nous ont permis d'effectuer un travail d'équipe efficace et humainement très enrichissant.

Je tiens à remercier Michel China, responsable du service "Informatique Scientifique et Technique" (IST) de Merlin Gerin, de m'avoir accueilli dans son service, ainsi que tous les membres de l'IST. L'ambiance et les bonnes conditions de travail régnant à l'IST ont offert un contexte de recherche très favorable.

Enfin, je remercie l'ensemble de l'équipe "Equations aux Dérivées Partielles" du laboratoire LMC. Le séminaire de travail du Jeudi est un moyen de communication essentiel. C'est justement dans la communication, formelle ou pas, que j'ai trouvé les côtés les plus enthousiasmants du travail du chercheur.

Sommaire :

<u>Introduction</u>	1
<u>Première partie</u> : Présentation du problème physique, des modèles mathématiques et de la thermodynamique des gaz réels	7
1- Introduction	9
1-1 . Arc électrique dans un disjoncteur	9
1-2 . Quelques ordres de grandeur	10
2- Modélisation mathématique des phénomènes physiques	11
2-1 . Equations de Navier-Stokes	11
2-2 . Terme de dissipation par effet Joule	13
2-3 . Hypothèses thermodynamiques	14
2-4 . Le rayonnement	16
2-4-1 Rayonnement optiquement mince	16
2-4-2 L'approximation de diffusion	17
3- Systèmes d'équations à résoudre	21
3-1. Problème unidimensionnel radial	21
3-2. Problème bidimensionnel axisymétrique	23
4- Rappels des principes de la thermodynamique	25
4-1 . Notations	25
4-2 . Les deux lois de la thermodynamique	25
4-3 . Loi d'état et variables d'état	26
4-4 . Entropie d'un système physique	27
4-5 . L'inégalité de Clausius Duhem	29
5- Dynamique d'un gaz réel et Système Hyperbolique Non Linéaire	31
5-1 . Quelques rappels sur les SHNL	31
5-2 . Systèmes de lois de conservation avec entropie	34
5-3 . Application à la dynamique des gaz	35
5-3-1 . Conditions pour que le système soit HNL	35

5-3-2 . Choix d'une fonction d'entropie	37
5-3-3 . Un cas d'école : le tube à choc	42
6- Hypothèses faites pour la modélisation du SF6 et conséquences	45
6-1 . Les deux hypothèses de base	45
6-2 . Conditions suffisantes devant être satisfaites par la loi d'état	46
6-2-1 . Pour que le système soit HNL	46
6-2-2 . Pour que la fonction d'entropie symétrise le système	49
6-2-3 . Récapitulatif	49
6-3 . Expressions de l'entropie et de l'énergie interne du SF6	50
<u>Deuxième partie</u> : Modélisation unidimensionnelle	53
1- Introduction	55
1-1 . Approche globale	55
1-2 . Approche "pas fractionnaires"	55
1-3 . Système à résoudre	56
2- Méthode d'éléments finis 1-D pour un gaz réel	57
2-1 . Symétrisation des équations de Navier Stokes	57
2-1-1 . Rappels et notations	57
2-1-2 . Symétrisation du système	59
2-1-3 . Inversibilité du changement de variables	61
2-2 . Solution faible et cadre fonctionnel	62
2-2-1 . Présentation du problème	62
2-2-2 . Solution faible	63
2-2-3 . Propriété caractéristique de la solution faible	65
2-3 . Discrétisation par une méthode d'éléments finis	69
2-3-1 . Terme d'upwind	69
2-3-2 . Terme de capture de choc	73
2-3-3 . Formulation mixte	76
2-3-4 . Conditions aux limites	77
2-3-5 . Formulation variationnelle	78
2-4 . Implémentation numérique	79
2-4-1 . Approximation des espaces de discrétisation	79
2-4-2 . Résolution du système non linéaire	81

2-4-3 . Méthode d'intégration utilisée -----	83
2-4-4 . Choix des pas d'espace et de temps -----	83
2-4-5 . Cas unidimensionnel radial -----	84
3- Méthode à pas fractionnaires en 1-D -----	86
3-1 . Introduction -----	86
3-1-1 . Système d'équations -----	86
3-1-2 . Découplage des phénomènes physiques -----	87
3-2 . Pas de convection : schéma de Van Leer -----	90
3-2-1 . Présentation du problème et notations -----	90
3-2-2 . Résolution des problèmes de Riemann -----	91
3-2-3 . Bilan de Godounov -----	92
3-2-4 . Calcul des pentes -----	93
3-2-5 . Cas unidimensionnel radial -----	95
3-3 . Pas de diffusion -----	95
3-3-1 . Equation à résoudre -----	95
3-3-2 . Schéma numérique -----	96
3-4 . Conditions de stabilité de la méthode -----	98
3-4-1 . Condition de CFL provenant du pas de convection -----	98
3-4-2 . Condition de stabilité issue du pas de dissipation -----	98
3-4-3 . Condition de stabilité issue de l'interaction des deux phénomènes -----	98
3-5 . Annexes -----	100
Annexe 1 : Schéma de Colella -----	100
Annexe 2 : Un schéma de Roe pour les gaz réels -----	107
Annexe 3 : Comparaison numérique des deux solveurs de Riemann -----	116
Annexe 4 : Détermination de la température T lorsqu'on connaît e -----	117
4- Calcul du terme source -----	118
4-1 . Terme de dissipation par effet Joule -----	118
4-2 . Terme de rayonnement -----	119
4-3 . Annexe 5 : Résolution numérique des équations du rayonnement -----	122
5- Résultats numériques -----	127
5-1 . Modélisation des phénomènes de convection 1D : le tube à choc -----	128
5-1-1 . Comparaison des deux méthodes -----	129
5-1-2 . Méthode d'éléments finis : capture de choc matricielle -----	131
5-2 . Modélisation des phénomènes de convection et diffusion 1D : onde radiale -----	132

5-2-1 . Gaz parfait et polytropique	132
5-2-2 . Gaz parfait et non polytropique	137
5-3 . Modélisation d'un arc électrique 1D (diffusion, convection, terme source)	141
5-3-1 Sans rayonnement	142
5-3-2 Avec rayonnement	145
<u>Troisième partie</u> : Modélisation bidimensionnelle	153
1- Introduction	155
1-1 . Contexte	155
1-2 . Méthode à pas fractionnaires	155
2- Résolution des équations d'Euler en gaz réels sur des maillages mobiles non structurés en 2D plan et axisymétrique	157
2-1 . Notations	157
2-2 . Schéma numérique	159
2-2-1 . Introduction	159
2-2-2 . Bilan de Godounov	159
2-2-3 . Reconstitution des pentes	163
2-2-4 . Condition de CFL et choix du pas de temps	166
2-3 . Schéma avec maillage mobile	168
3- Résolution de l'équation de la chaleur par une méthode de volumes finis sur des maillages non structurés	174
3-1 . Position du problème	174
3-2 . Schéma numérique	175
3-3 . Tests de convergence	180
4- Calcul du terme source	183
4-1 . Définition de la zone d'arc en 2D axi	183
4-2 . Terme de dissipation par effet Joule	185
4-3 . Terme de rayonnement	186
5- Résultats numériques	188
5-1 . Tube à choc 2-D plan	188
5-2 . Tube à choc 2-D plan : convergence	193

5-3 . Problème modèle "vraiment" bidimensionnel	196
5-4 . Détente par pistonnage	202
5-5 . Ecoulements froids dans un disjoncteur : comparaisons calcul / expérience	204
5-6 . Application industrielle	206
5-7 . Interaction arc / écoulements de gaz dans un disjoncteur	209
6- Implémentation numérique	212
6-1 . Architecture du logiciel	212
6-2 . Qualité du logiciel	214
<u>Conclusion</u>	217
<u>Bibliographie</u>	221

Introduction

Le propos de cette thèse est la simulation des écoulements gazeux dans les disjoncteurs à auto-expansion Haute et Moyenne Tension (> 1 kV) au moment d'une tentative d'interruption du courant électrique. Dans un disjoncteur, le processus d'interruption du courant s'accompagne toujours de l'apparition d'un arc électrique entre les contacts de l'appareil. Cet arc est un plasma baignant dans le gaz, et le comportement de l'écoulement de gaz favorise la dissipation de l'énergie de l'arc. Il joue un rôle primordial quant à la réussite ou l'échec d'une tentative de coupure. Simuler d'une façon correcte l'interaction entre l'arc électrique et les écoulements gazeux permet de mieux comprendre un certain nombre de phénomènes physiques qui entrent en jeu au moment de la coupure du courant, et de disposer d'un outil permettant de diminuer le nombre des expérimentations nécessaires lors de la mise au point d'un disjoncteur.

De nombreuses équipes dans le monde travaillent sur ces problèmes d'arc électrique et d'écoulements de gaz (Dauby [1], Gleizes [2, 3], Noël [1], Gilquin [1], Reggio [1], Lowke [1]). Les modélisations mathématiques du problème physique proposées par ces différentes équipes sont souvent proches de celle présentée dans la première partie de ce travail. Il s'agit la plupart du temps de résoudre les équations de Navier Stokes compressibles, l'équation d'état et les propriétés du gaz étant fournies par des tables (Gleizes [1]).

Dans notre étude, les hypothèses simplificatrices suivantes sont faites :

- géométrie et écoulement 2D plan ou axisymétrique.
- gaz non visqueux.
- arc électrique considéré comme du gaz chaud et conducteur.

Ainsi, l'arc électrique et le gaz environnant sont considérés comme un seul et même gaz. Le rayonnement a tout d'abord été pris en compte en supposant le milieu optiquement mince, ce qui revient à modifier le terme source de l'équation de bilan d'énergie. Mais les résultats ainsi obtenus ne sont pas satisfaisants, donc l'approximation de diffusion de Lowke (Lowke [1]) a été mise en œuvre. L'intensité totale du rayonnement est alors donnée par une équation de type Helmholtz par bandes de fréquences considérées. Les équations de Helmholtz sont prises en compte de façon explicite et se découplent des autres équations.

La première partie de cette thèse est une analyse du problème physique et des équations à résoudre. On décrit avec précision le modèle choisi (§ 2 et 3). Il est important de noter que ce modèle a beaucoup évolué au cours du temps. En particulier, la comparaison des résultats numériques obtenus sans rayonnement et des mesures expérimentales a mis en évidence l'importance de ce mode de transfert d'énergie dans le problème physique considéré.

Un modèle rigoureux de la thermodynamique du gaz réel est ensuite proposé. Le gaz doit vérifier les deux principes de la thermodynamique. Cela permet de définir l'énergie interne et l'entropie comme des variables d'état (§ 4). D'autre part, on veut que le système des équations de la dynamique des gaz compressibles (ou équations d'Euler, ce système étant obtenu lorsque le gaz est supposé non conducteur de la chaleur), soit strictement hyperbolique (§ 5). On s'assure que les lois d'état considérées permettent de rester à l'intérieur de ce cadre (§ 6).

La seconde partie de la thèse présente la modélisation numérique unidimensionnelle plane et radiale. Deux méthodes numériques, s'auto-validant mutuellement, sont développées afin de valider les hypothèses physiques faites précédemment. La méthode d'éléments finis proposée par Hughes [1, 6] et Johnson [1, 3] est adaptée au cas des gaz réels. Il s'agit d'une méthode d'éléments finis espace-temps sur les équations symétriques obtenues en utilisant les variables entropiques. La discrétisation testée utilise des éléments finis décentrés discontinus en temps et comporte un terme de capture de choc. Il est montré qu'une capture de choc sur les variables physiques donne de meilleurs résultats que le terme habituellement utilisé. Comme dans le cas de la discrétisation proposée par Hughes [1], la solution discrète obtenue avec des éléments finis espace-temps discontinus en temps vérifie le second principe de la thermodynamique en un sens faible (§ 2).

Les résultats obtenus par cette méthode d'éléments finis sont comparés avec ceux obtenus avec une méthode à pas fractionnaires séparant les phénomènes de convection et de conduction. Au cours d'un premier pas fractionnaire, les phénomènes de convection (équations d'Euler) sont discrétisés par un schéma de type Van Leer [1]. Ce schéma, qui utilise l'écriture classique des équations en variables conservatives, est explicite en temps et fournit pour chaque pas de temps une approximation linéaire par maille de la solution. La détermination des flux aux interfaces des mailles nécessite la résolution de problèmes de Riemann. Des solveurs de Colella (Colella [1]) et Roe (Vila [2]) adaptés aux gaz réels sont utilisés pour résoudre ces problèmes. Au cours d'un second pas fractionnaire, l'équation de diffusion de la chaleur instationnaire est discrétisée par une méthode standard (§ 3).

Deux exemples permettent de comparer les méthodes (§ 5) :

- on utilise le test du tube à choc pour un gaz supposé parfait et non conducteur, car on connaît une solution analytique de ce problème.
- dans le cas radial, un gaz initialement au repos soumis à un important apport de chaleur sur l'axe est simulé (l'arc électrique étant modélisé sous forme d'un effet Joule) ; ce second test permet, en ajoutant successivement de la physique (convection, conduction, rayonnement) de

juger de l'importance de chacun des modes de dissipation d'énergie.

La troisième et dernière partie de la thèse est relative au développement d'un code de calcul 2D industriel. Le modèle mathématique 1D est adapté à la dimension 2 et la prise en compte de l'ouverture des contacts du disjoncteur nécessite d'écrire un schéma avec maillage mobile. Seule la méthode à pas fractionnaires est implémentée. Les équations du mouvement sont résolues par une méthode volumes finis de Van Leer (§ 2), l'équation de la chaleur est discrétisée à l'aide d'un schéma volumes finis (§ 3). L'implémentation permet de résoudre ces équations sur des maillages non structurés (quadrangles et/ou triangles).

Les tests numériques bidimensionnels valident les schémas (§ 5). La première validation est d'ordre numérique. On s'assure que les résultats numériques obtenus sur des maillages non structurés sont bien les solutions des systèmes d'équations considérés. Le schéma de Van Leer avec maillage mobile est validé avec une solution analytique approchée d'une détente par pistonnage. La seconde validation est d'ordre physique. On cherche à vérifier que les résultats numériques sont en adéquation avec la physique du problème. Des comparaisons entre résultats expérimentaux et résultats numériques sur un disjoncteur à auto-expansion, dans différentes conditions expérimentales (gaz froids et gaz chauds) sont présentées.

Le code de calcul du problème bidimensionnel plan et axisymétrique est un logiciel destiné à une utilisation industrielle. Aussi des normes strictes relatives à l'architecture et à la qualité de ce logiciel ont été définies puis suivies. Le code obtenu s'avère à la fois évolutif, maintenable et d'un bon niveau de qualité (§ 6).

Cette thèse est le fruit d'une étroite collaboration entre un laboratoire universitaire (équipe Equations aux Dérivées Partielles du laboratoire de mathématiques appliquées LMC) et un centre de recherche industriel (département des Recherches de Merlin Gerin). Le problème industriel, problème physique complexe, doit être résolu le mieux possible, en dépit du manque de connaissance sur la physique du problème et de la limitation des possibilités offertes par la simulation numérique. La modélisation mathématique du problème physique et le choix des schémas numériques (les critères de choix étant la faisabilité des méthodes, la qualité des résultats et le coût des calculs) sont étroitement liés. D'une part, le choix du schéma dépend de la nature mathématique des équations issues de la modélisation. D'autre part, certains résultats numériques permettent d'affiner, parfois de remettre en cause cette modélisation. La qualité de la collaboration entre les deux partenaires (physiciens et numériciens) a assuré le succès du projet.

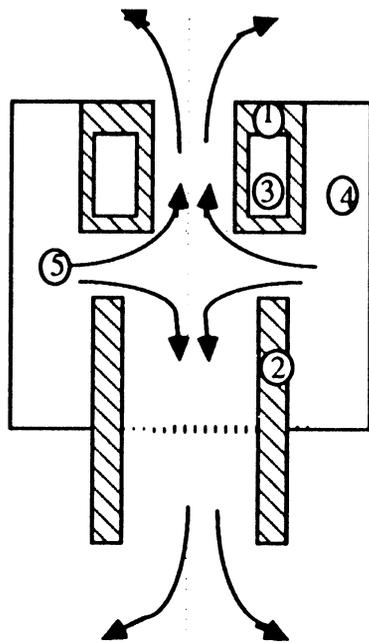
Première Partie

**Présentation du problème physique,
des modèles mathématiques et de la
thermodynamique des gaz réels**

1 - Introduction

1-1 Arc électrique dans un disjoncteur

Un disjoncteur est un appareil fonctionnant dans un réseau électrique complexe et destiné à interrompre le courant lorsque l'ordre lui en est donné. Dans la gamme de tension allant de la Moyenne Tension à la Très Haute Tension, Merlin Gerin utilise la technologie du SF6.



- ① Contact fixe . Le contact est creux et peut ainsi faire office de tuyère.
- ② Contact mobile. En position initiale (courant passant) le contact mobile est en contact avec le contact fixe. A l'instant t où l'on veut couper le courant, le contact s'ouvre mais le courant continue de passer du fait de la formation d'un arc électrique entre les deux contacts.
- ③ Bobine. Cette bobine crée un champ magnétique qui va faire tourner l'arc électrique.
- ④ Chambre de coupure : cavité de volume limité remplie de SF6 (appelée aussi volume d'expansion) à l'intérieur de laquelle sous l'effet de l'arc électrique la température puis la pression vont monter. L'arc est alors soufflé par le SF6 sous pression.
- ⑤ Flot de gaz s'échappant par les contacts creux (tuyères)

Caricature d'un disjoncteur à auto-expansion

Lorsque l'ordre d'interrompre le courant est donné, les contacts mobiles s'écartent, et un arc électrique apparaît, constitué d'un plasma de SF6 à haute température.

Lorsque le courant (qui est un courant alternatif) passe par la valeur 0, différentes techniques de coupure existent qui permettent de couper effectivement le courant, le gaz redevenant alors diélectrique.

Les équations régissant l'interaction arc-écoulement sont mal connues, et dans une première approche, on va chercher à résoudre les équations de Navier-Stokes avec un terme source approprié qui représente l'apport énergétique dû à l'arc électrique d'une part et l'énergie rayonnée d'autre part.

1-2 Quelques ordres de grandeur

Le phénomène physique de l'arc électrique est particulièrement compliqué. Nous allons ici donner quelques ordres de grandeur qui permettent de mieux cerner la complexité du phénomène.

Avant l'ouverture des contacts : **état initial de la modélisation**

Le gaz présent à l'intérieur du disjoncteur est le SF₆. Ce gaz est au repos (vitesse nulle) et à température ambiante (300 K). La pression du gaz est généralement égale à la pression atmosphérique.

Après l'ouverture des contacts : **création de l'arc électrique**

-très rapidement (après une centaine de micro-secondes), le gaz atteint sous l'effet de l'arc électrique une température supérieure à 15000 K. Cette température peut ensuite atteindre 25000 à 30000 K.

-plus rapidement encore (après à peine une dizaine de micro-secondes), des écoulements de gaz à vitesse transsonique peuvent être observés dans les tuyères du disjoncteur. Les phénomènes de transport sont prédominants dans les tuyères du disjoncteur.

-à partir d'une température de l'ordre de 1000 K, le SF₆ se dissocie en de multiples espèces moléculaires ou ionisées. Les espèces prépondérantes varient suivant la température (on différencie essentiellement deux phases de température : 1000 à 5000 K et 5000 à 30000 K).

Dans les zones les plus chaudes la dissipation de l'énergie se fait essentiellement de deux façons :

- par rayonnement : entre 40% et 60% du total de l'énergie dissipée.
- par conduction : à basse température le SF₆ n'est pratiquement pas conducteur de la chaleur, mais à haute température le phénomène de conduction de la chaleur ne peut plus être négligé.

2 - Modélisation mathématique des phénomènes physiques

L'ensemble des modèles physiques présentés ont été proposés par Alain Girard [1] et [2].

2-1 Equations de Navier-Stokes

On suppose vérifié en tout point un équilibre thermodynamique local (hypothèse de l'ETL). Cette hypothèse permet de ne faire aucune différence de nature entre l'arc électrique (plasma) et le gaz environnant.

Dans un premier temps on se propose de modéliser l'interaction arc-écoulement du gaz, à l'aide des équations modélisant la dynamique des gaz compressibles, non visqueux et conducteurs de la chaleur (équations de Navier-Stokes sans viscosité). On suppose que les deux coefficients de viscosité sont nuls, car la viscosité à haute température est considérée comme négligeable par rapport à d'autres phénomènes physiques. On présente ces équations dans un cadre monodimensionnel.

Notations:

- u = composante selon x de la vitesse du gaz .
- P = pression du gaz .
- e = énergie interne du gaz (énergie spécifique par unité de masse).
- T = température du gaz .
- E = énergie totale du gaz (énergie par unité de volume).
- ρ = densité ou masse volumique du gaz.
- k = conductivité thermique

Les équations de Navier-Stokes sont des équations de conservation, et s'écrivent :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad \text{conservation de la masse} \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} = 0 \quad \text{conservation de la quantité de mouvement (2-1)} \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (u(E+P))}{\partial x} - \frac{\partial (k(T) \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} = \text{source} \quad \text{conservation de l'énergie} \end{array} \right.$$

On peut écrire ce système sous une forme dite conservative. Il s'écrit alors :

$$\frac{\partial F_0(U)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} - \frac{\partial(k \frac{\partial G(U)}{\partial x})}{\partial x} = \text{source} \quad (2-2)$$

avec

$$U = {}^t(\rho, u, e)$$

$$F_0(U) = {}^t(\rho, \rho u, E) = {}^t(u_1, u_2, u_3)$$

$$F_1(U) = {}^t(\rho u, P + \rho u^2, (P + E)u)$$

$$G(U) = {}^t(0, 0, T)$$

Les variables $F_0(U)$ sont les variables dites conservatives du système. Moyennant la connaissance (cf. § 4 et 6) :

$$\begin{aligned} &\text{d'une loi d'état} && P = f(T, \rho) \\ &\text{de l'expression de l'énergie totale} && E = \rho(u^2/2 + e) \\ &\text{de la loi de comportement définissant l'énergie interne} && e = g(T, \rho), \end{aligned}$$

le système est un système de **3 équations à 3 inconnues**. De plus, on construit aisément une bijection entre ces variables et les variables dites physiques ou thermodynamiques (P, u, T) du système considéré.

Remarque sur les équations d'Euler :

Les équations d'Euler régissent la dynamique des gaz compressibles, non visqueux et non conducteurs de la chaleur. Ce sont des équations de transport qui génèrent des ondes de choc et des détente. Une attention toute particulière doit donc être apportée lors de leur modélisation numérique. Le système d'équations se déduit aisément du système (2-1) des équations de Navier-Stokes :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (u(E + P))}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{conservation de la masse} \\ \text{conservation de la quantité de mouvement} \\ \text{conservation de l'énergie} \end{array} \quad (2-3)$$

Système que l'on peut écrire sous la forme suivante dite forme conservative :

$$\frac{\partial F_0(U)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} = 0 \quad (2-4)$$

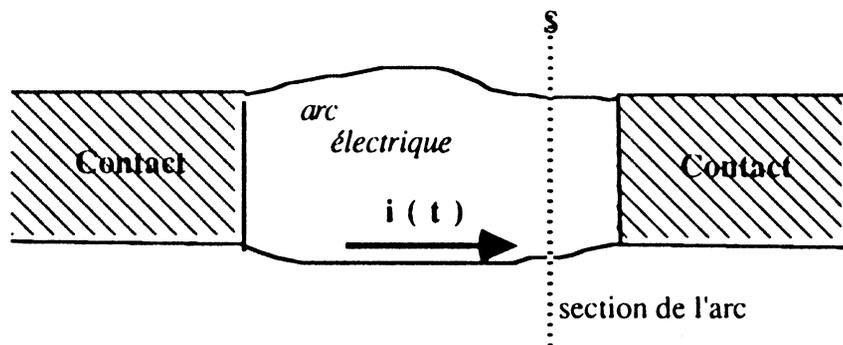
(même notations que pour le système (2-2) des équations de Navier-Stokes).

2-2 Terme de dissipation par effet Joule

Définition : l'arc électrique est défini comme la zone où la conductibilité électrique σ du gaz n'est pas nulle. La conductibilité électrique σ dépendant essentiellement de la température, la zone d'arc électrique peut être définie comme la zone où la température T du gaz (ou du plasma) est supérieure à une certaine valeur T_{\min} (T_{\min} est égale à 5000 K pour le SF6 et 7000 K pour l'air).

Hypothèse : on suppose que les lignes de courant sont toutes parallèles à l'axe de symétrie du disjoncteur. En conséquence, le **champ électrique**, gradient du potentiel, est **constant** sur les droites perpendiculaires à l'axe de symétrie.

Définition : une section S de l'arc est définie comme l'intersection d'un plan perpendiculaire à la direction du courant $i(t)$ et de l'arc électrique.



Sur une section S de l'arc, le champ électrique est donc constant.

Lors de la modélisation de l'arc électrique une des composantes du terme noté "source" dans les équations ci-dessus, est le terme de dissipation par effet Joule de l'énergie de l'arc électrique. Soit M un point intérieur à l'arc électrique, la dissipation par effet Joule en ce point s'écrit :

$$D_{\text{joule}}(t, M) = j \cdot E$$

où

E est le champ électrique dans l'arc au point M

j est la densité de courant au point M

Soit σ la conductibilité électrique au point M . La loi d'Ohm s'écrit :

$$j = \sigma E$$

σ est une fonction dépendant faiblement de la pression P et fortement de la température T . Sa détermination en un point M où l'ensemble des variables physiques sont connues se fait à l'aide des tables de Gleizes [1].

A l'instant t on connaît le courant électrique $i(t)$ parcourant le circuit électrique et donc l'arc. A travers une section S de l'arc, le courant $i(t)$ s'écrit :

$$i(t) = \int_S j \cdot ds$$

soit

$$i(t) = \int_S \sigma E \, ds$$

Or E est constant sur la section S , donc :

$$E(t, S) = \frac{i(t)}{\int_S \sigma \, ds}$$

Ainsi en un point M (point en lequel la température est T et la pression P) appartenant à la section S de l'arc, le terme de dissipation par effet Joule à l'instant t s'écrit :

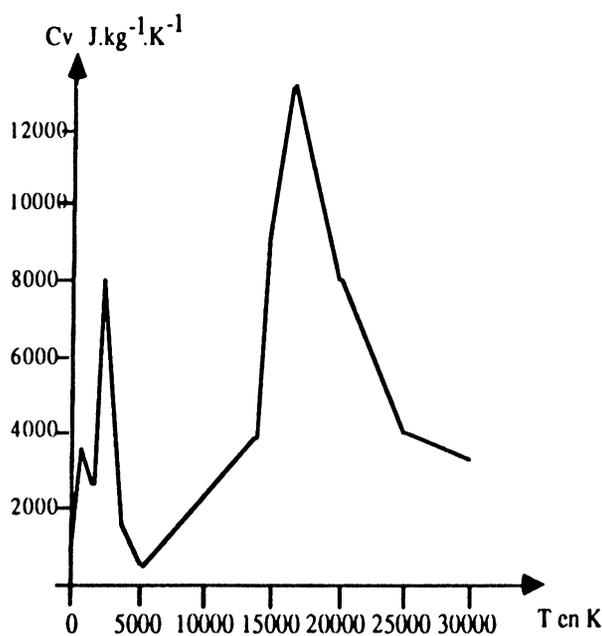
$$D_{\text{joule}}(M) = \sigma(P, T) \frac{i(t)^2}{\left[\int_S \sigma(P(M), T(M)) \, ds \right]^2} \quad (2-5)$$

2-3 Hypothèses thermodynamiques

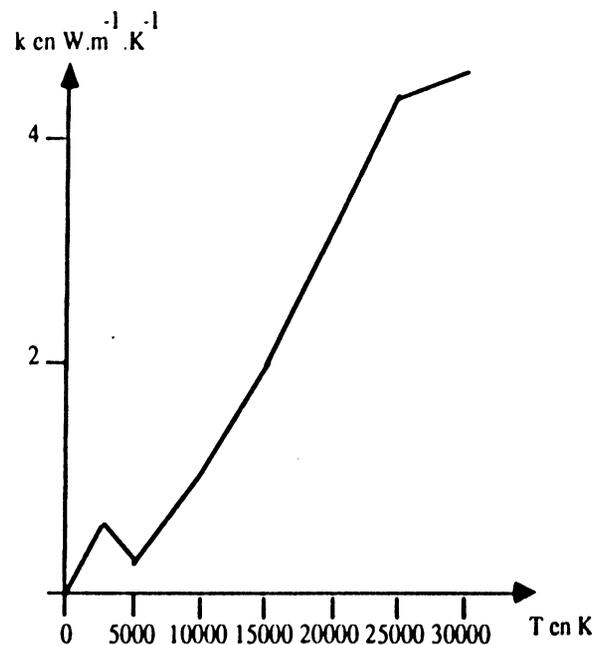
On cherche à traduire de façon macroscopique les phénomènes de dissociation et de ionisation du gaz. Le SF_6 à haute température se dissocie en molécules et ions multiples (entre 1000 K et 5000 K les espèces prépondérantes sont le SF_6 , le SF_5 , le SF_4 , le SF_3 , le SF_2 , le SF , le S , le S_2 , le F , le F_2 et le N_2F_4 et entre 5000 K et 30000 K les espèces prépondérantes sont les molécules N_2 et S_2 ainsi que les ions F^- , S^+ , S^{++} , F^+ , N^+ , N^{++} et N_2^+ (cf Gleizes [1]).

Aussi les caractéristiques du plasma considéré de notre point de vue comme un gaz, changent fortement en fonction des variables d'état.

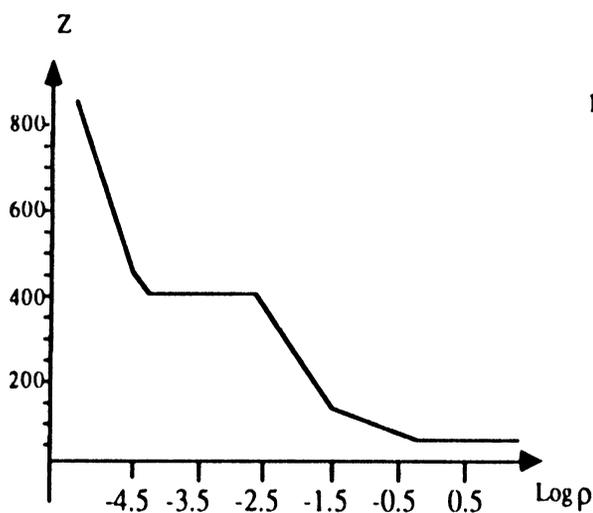
On dispose de courbes (Gleizes[1]) donnant les variations de la capacité calorifique C_v , de la conductivité thermique k , du coefficient de compressibilité Z (Z permet d'écrire une loi d'état du gaz de la forme $P = \rho.Z.T$) et de la conductibilité électrique σ en fonction de la température T à pression constante. On donne ci-dessous l'allure de ces courbes pour le SF_6 .



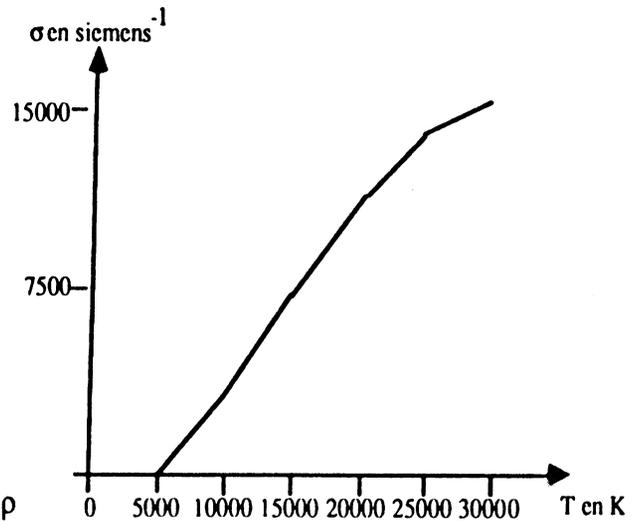
Capacité calorifique C_v en fonction de T à $P=1\text{atm}$



Conductivité thermique k en fonction de T à $P=1\text{atm}$



constante de compressibilité Z en fonction de T
P = 1 atm



Conductibilité électrique σ en fonction de T à
P = 1 atm

Dans la suite (cf. partie 1, § 6), l'hypothèse essentielle $C_v = C_v(T)$ est faite. C'est une hypothèse admissible car la dépendance de C_v suivant la pression P est peu importante. Une loi d'état prenant en compte l'ensemble des considérations énoncées ci-dessus, est ensuite proposée.

2-4 Le rayonnement

Deux modèles de rayonnement ont été implémentés :

- un modèle ne prenant en compte que le rayonnement optiquement mince, c'est à dire un rayonnement émis mais jamais réabsorbé par le fluide.
- un modèle plus complexe, proposé par Lowke [1] où l'on écrit l'équation générale de transport du rayonnement avant de faire l'approximation dite de diffusion.

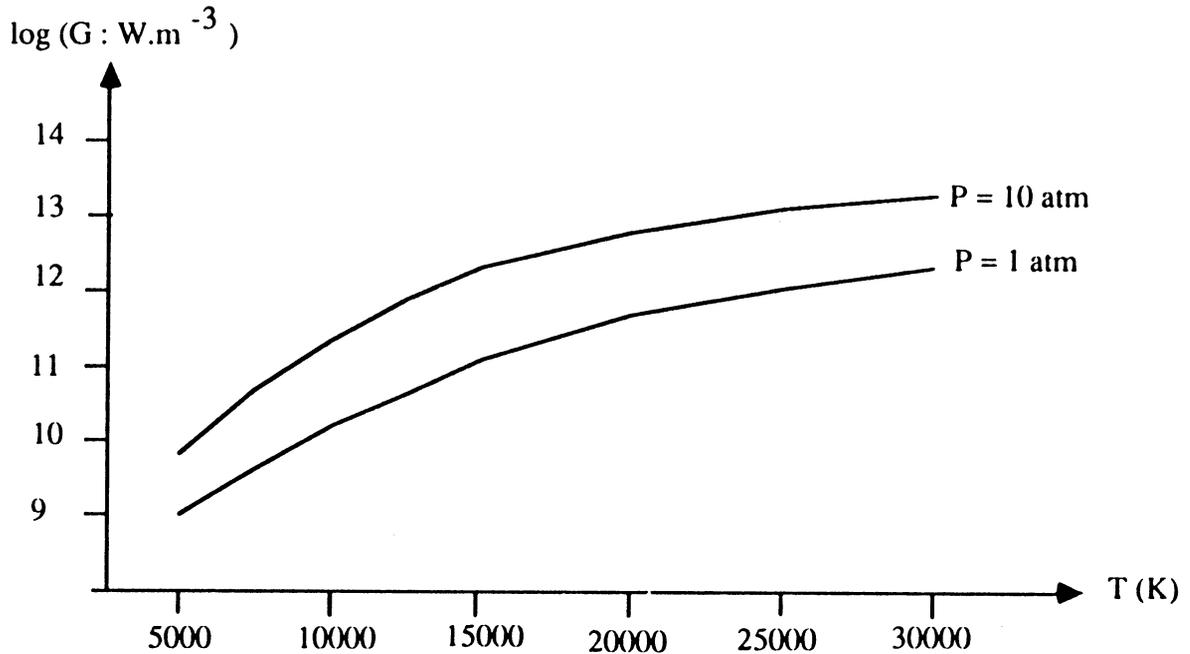
2-4-1 Rayonnement optiquement mince

Les phénomènes de radiation sont pris en compte sous la forme de pertes nettes (seule l'émission est prise en compte). Cela revient à supposer que le rayonnement émis se propage à l'infini s'il est à l'air libre, ou est absorbé par les parois s'il est en milieu confiné, sans interaction avec le milieu fluide. Cela se traduit par la présence d'un terme de perte G dans l'équation d'énergie (G est fonction de la température T et de la pression P).

L'équation de conservation de l'énergie du système d'équations de Navier-Stokes s'écrit alors :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(u(E+P))}{\partial x} - \text{div} [k(T) \text{grad}(T)] = D_{\text{joule}} - G(P, T) \quad (2-6)$$

On présente ci-dessous l'allure de la fonction G pour le SF6. On peut remarquer la faible dépendance du terme de perte par rapport à la pression.



2-4-2 Approximation de diffusion (Lowke [1])

2-4-2-1 Modèle général

L'équation de transport du rayonnement à une fréquence donnée ν s'écrit d'une façon générale (on néglige le "scattering" c'est à dire la diffusion éventuelle de la lumière par la matière) :

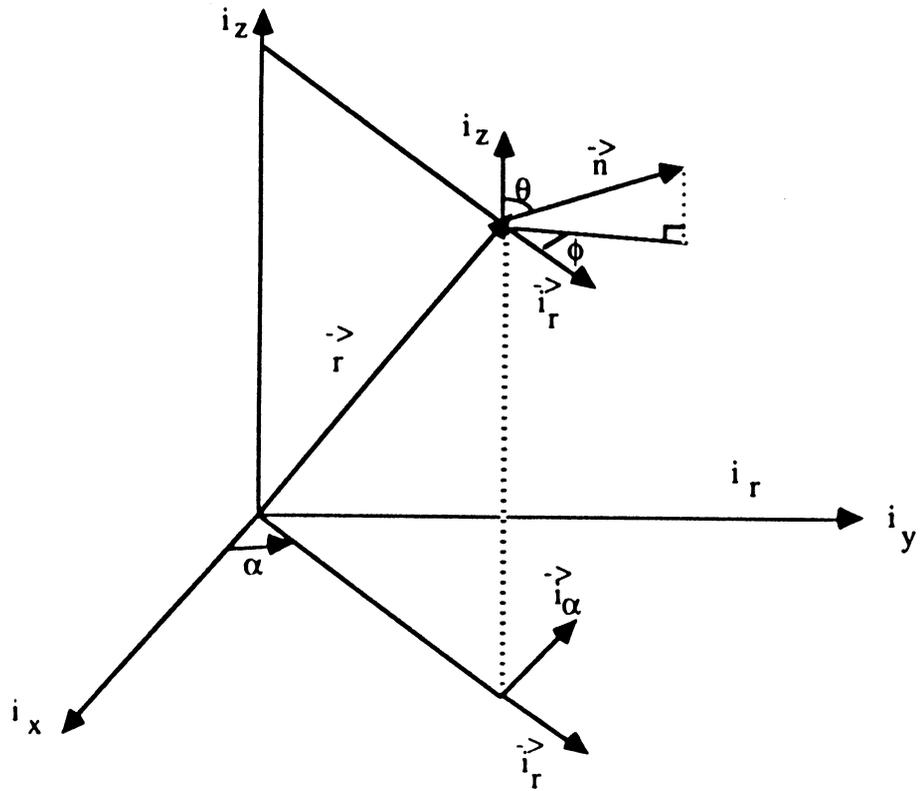
$$n \cdot \nabla [I_\nu(r, n)] = \epsilon_\nu - K_\nu \cdot I_\nu(r, n) \quad (2-7)$$

où

I_ν = intensité de rayonnement en un point défini par r dans une direction définie par le vecteur unité n (cf. figure qui suit). I_ν s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{ster}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$.

K_ν = coefficient d'absorption à la fréquence ν . K_ν s'exprime en m^{-1} .

ϵ_ν = coefficient d'émission à la fréquence ν . ϵ_ν s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Hz}^{-1} \cdot \text{ster}^{-1}$.



$$\mathbf{r} = (r, z, \alpha)^t$$

$$\mathbf{n} = (\phi, \theta)^t$$

Afin de rendre l'équation de transport du rayonnement plus agréable, on se propose de l'écrire sous une forme intégrale ; pour cela on multiplie chaque membre cette équation par un élément d'angle solide $d\Omega$ et on intègre sur tous les angles solides ; en posant alors :

$$F_{Rv} = \int_{4\pi} I_v \cdot \mathbf{n} \, d\Omega \quad (2-8)$$

et

$$J_v = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_v \, d\Omega \quad (2-9)$$

(F_{Rv} est appelé le flux de rayonnement et J_v l'intensité totale de rayonnement) en remarquant :

$$\begin{aligned}
 n \cdot \nabla (I_{\nu}(r, n)) &= \sum_i n_i \frac{\partial}{\partial x_i} (I_{\nu}(x, n)) \\
 &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (n_i I_{\nu}(x, n)) \\
 &= \operatorname{div}_r (n \cdot I(r, n))
 \end{aligned}$$

on obtient (cf Lowke [1]) les deux équations suivantes :

$$\operatorname{div} (\vec{F}_{R\nu}) = 4\pi (\epsilon_{\nu} - K_{\nu} J_{\nu}) \quad (2-10)$$

et

$$\operatorname{div} \left[\int_{4\pi} (n \cdot I_{\nu}) d\Omega(n) \right] = - \vec{F}_{R\nu} \cdot K_{\nu} \quad (2-11)$$

où $4\pi\epsilon_{\nu}$ est l'énergie émise à la fréquence ν et $4\pi K_{\nu} J_{\nu}$ l'énergie absorbée à la fréquence ν . Lowke propose de réaliser une approximation sur la direction du rayonnement, en posant :

$$I_{\nu}(r, n) = A(r) + B(r) \cos \phi \quad (2-12)$$

$$\phi \in [0, 2\pi]$$

Cette approximation est aussi appelée **approximation de diffusion** ; I est indépendant de l'angle θ et dépend alors de façon précise de ϕ .

L'équation (2-12) permet de réécrire l'équation (2-11) sous la forme (Lowke [1]) :

$$\vec{F}_{R\nu} = - \frac{4\pi}{3K_{\nu}} \operatorname{grad} (J_{\nu}) \quad (2-13)$$

De plus si on réécrit les équations (2-8) et (2-9), on peut déterminer $A(r)$ et $B(r)$; on obtient :

$$A(r) = J_{\nu} \quad (2-14)$$

$$B(r) = 2.F_{R\nu} / \pi^2 \quad (2-15)$$

Ce qui permet d'écrire l'intensité de rayonnement comme suit :

$$I_{\nu}(r, n) = J_{\nu} + (2.F_{R\nu} / \pi^2) \cdot \cos \phi$$

L'approximation de diffusion privilégie donc une direction de rayonnement. En effet, l'intensité de rayonnement est maximum dans la direction opposée à l'axe de symétrie ($\phi = 0$, $\cos \phi = 1$) et minimum vers cet axe ($\phi = \pi$, $\cos \phi = -1$). C'est une hypothèse admissible car le centre de l'arc électrique (à savoir le point le plus chaud) est supposé être situé sur l'axe de symétrie. Ainsi, le rayonnement est privilégié dans le sens "arc électrique vers milieu extérieur".

Si Ω est le domaine de calcul, on est donc amené à résoudre pour chaque fréquence ν , le système d'équations suivant :

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{F}_{R\nu}) = 4\pi(\epsilon_\nu - K_\nu J_\nu) \\ \operatorname{grad}(J_\nu) = -\frac{3}{4\pi} K_\nu \vec{F}_{R\nu} \end{array} \right. \quad \text{sur } \Omega \quad (2-16)$$

Les inconnues étant $F_{R\nu}$ et J_ν , les coefficients ϵ_ν et K_ν étant déterminés expérimentalement ou théoriquement pour un gaz donné comme des fonctions de la température T et de la pression P .

L'ensemble de ces problèmes est couplé avec l'équation de conservation de l'énergie du système d'équations de Navier-Stokes (2-1) de la façon suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(u(E+P))}{\partial x} - \operatorname{div}[k(T) \operatorname{grad}(T)] = D_{\text{joule}} - \operatorname{div}(\vec{F}_R) \quad (2-17)$$

où

$$\vec{F}_R = \int \vec{F}_{R\nu} d\nu \quad (2-18)$$

3 - Systèmes d'équations à résoudre

Sont présentés ci-dessous les systèmes d'équations à résoudre. On distingue le cas unidimensionnel (dont la modélisation fait l'objet de la seconde partie de la thèse) et le cas bidimensionnel (troisième partie). Volontairement, on présente d'abord ces systèmes d'équations en 1-D et 2-D plan, bien que les applications les plus intéressantes soient en 1-D radial et 2-D axisymétrique. En effet, les modifications dues au "radial" ne sont pas contraignantes (les méthodes numériques utilisées étant les mêmes).

3-1 Problème unidimensionnel

Dans un premier temps on réalise un modèle d'arc électrique unidimensionnel radial qui représente le cas théorique physique de l'arc électrique cylindrique confiné dans un cylindre de taille infinie.

Un tel modèle permet :

- de mettre au point les modèles physiques (ordre de grandeur permettant de négliger certains phénomènes par rapport à d'autres, choix des fréquences et détermination de certains coefficients du modèle de rayonnement).
- de tester différentes méthodes de résolution numérique en évaluant de façon comparative leur précision, leur coût en temps de calcul et leur difficulté d'implémentation.

Système à résoudre :

Soient $[0, R]$ un domaine d'application et $[0, T]$ une plage de temps durant laquelle on cherche à étudier le phénomène.

Soient ϵ_i et K_i , $i = 1, N_{\text{Fréq}}$ des coefficients de rayonnement donnés sur chaque plage de fréquence i .

On cherche à déterminer F_R , T , P , ρ et u sur $[0, T] \times [0, R]$ tels que :

$$\left[\begin{array}{l} \text{div} (F_{Ri}) = 4 \pi (\epsilon_i - K_i J_i) \\ \text{Grad} (J_i) = - \frac{3}{4 \pi} K_i F_{Ri} \end{array} \right. \quad \text{sur } \Omega$$

pour $i = 1, N_{\text{fréq.}}$

Conditions aux limites:

$F_{Ri} = 0$ au centre de l'arc (que l'on doit définir)

Intensité de rayonnement I_i nulle sur la paroi

(3-1)

$$\left[\begin{array}{l} F_R = \sum_{i=1}^{N_{\text{fréq.}}} F_{Ri} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (u(E+P))}{\partial x} - \frac{\partial (k(T) \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} = D_{\text{joule}} - \text{div} (F_R) \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ et } u = 0 \quad \text{sur } [0, T] \times \{0, R\} \\ P = f(T, \rho) \text{ loi d'état du gaz} \end{array} \right.$$

Soit alors "source" le terme ainsi défini :

$$\text{source} = D_{\text{joule}} - \text{div} (F_R)$$

Le problème général à résoudre consiste en la détermination des distributions de température, pression, vitesse et masse volumique à l'instant $t \in [0, T]$ en résolvant :

$$\boxed{\frac{\partial F_0(U)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} - \frac{\partial \left(k \frac{\partial G(U)}{\partial x} \right)}{\partial x} = \text{source} \quad (3-2)}$$

3-2 Problème bidimensionnel

Il s'agit ici de l'élaboration d'un prototype industriel. Le logiciel issu de la résolution du système d'équations doit permettre au concepteur de pré-dimensionner un disjoncteur et ainsi de réduire le nombre d'essais nécessaires à sa mise au point.

Notations:

T, P, ρ et u : même notations que précédemment

v = vitesse selon y

$U = {}^t(\rho, u, v, e)$

$F_0(U) = {}^t(\rho, \rho u, \rho v, E)$

$F_1(U) = {}^t(\rho u, P + \rho u^2, \rho uv, (P+E)u)$

$F_2(U) = {}^t(\rho v, \rho uv, P + \rho v^2, (P+E)v)$

$G(U) = {}^t(0, 0, 0, T)$

Système à résoudre:

Soient Ω un domaine d'application de \mathbb{R}^2 et $[0, T]$ une plage de temps durant laquelle on cherche à étudier le phénomène.

Soient ϵ_i et K_i , $i = 1, N_{\text{Fréq}}$ des coefficients de rayonnement donnés sur chaque plage de fréquence i .

On cherche à déterminer F_R, T, P, ρ, u et v sur $\Omega \times [0, T]$ tels que :

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \text{div}(F_{Ri}) = 4\pi(\epsilon_i - K_i J_i) \\ \text{Grad}(J_i) = -\frac{3}{4\pi} K_i F_{Ri} \end{array} \right. \quad \text{sur } [0; R] \\ \text{Conditions aux limites:} \\ \quad F_{Ri} = 0 \quad \text{au centre de l'arc} \\ \quad \text{Intensité de rayonnement } I_i \text{ nulle sur la paroi} \end{array} \right. \quad \text{pour } i = 1, N_{\text{fréq.}}$$

(3-3)

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^{N_{\text{freq.}}} \mathbf{F}_{Ri} \\
 \frac{\partial F_0(U)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(U)}{\partial y} - \text{div}[k(T).\text{Grad}(G(U))] = D_{\text{joule}} - \text{div}(\mathbf{F}_R) \\
 \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ et } \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ aux parois et sur l'axe de symétrie avec } \vec{v} = \vec{v}(u, v) \\
 P = f(T, \rho) \text{ loi d'état du gaz}
 \end{array}$$

Soit alors "source" le terme ainsi défini :

$$\text{source} = D_{\text{joule}} - \text{div}(\mathbf{F}_R)$$

Le problème général à résoudre consiste en la détermination des distributions de température, pression, vitesse (vecteur de dimension 2) et masse volumique à l'instant $t \in [0, T]$ en résolvant :

$$\frac{\partial F_0(U)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(U)}{\partial y} - \text{div}[k(T).\text{Grad}(G(U))] = \text{source} \quad (3-4)$$

Remarque : on peut noter que le terme source (effet Joule et rayonnement) est non linéaire par rapport à la variable U . D'une façon générale, les équations du rayonnement (premières parties des systèmes (3-1) et (3-3)) sont d'abord résolues, puis on résout Navier-Stokes ; cela revient à expliciter le terme source. Cependant, dans une des méthodes numériques proposées dans la partie 2, on effectue des itérations successives jusqu'à convergence : le terme source est donc dans ce cas implicite.

4 - Rappels des lois de la thermodynamique

On se place ici dans le cadre général de la thermodynamique des fluides homogènes. On rappelle brièvement les deux premiers principes de la thermodynamique ; ces principes permettent au système thermodynamique de ne compter que deux variables internes indépendantes. Dans le cas de transformations réversibles, on peut définir l'entropie du système et donner en conséquence une équation différentielle devant être vérifiée par la loi d'état du gaz. Enfin, on donne une formulation locale du second principe (inégalité de Clausius Duhem) utile pour mettre en évidence une propriété essentielle de la méthode d'éléments finis développée au cours de la seconde partie.

4-1 Notations

Les notations définissant l'état physique du gaz sont celles du paragraphe précédent. On complète ces notations comme suit :

$$\begin{aligned} v &= \text{volume du gaz } (\rho = 1/v) = \text{volume spécifique} \\ S &= \text{entropie du gaz} \\ C_v &= \text{capacité calorifique} \end{aligned}$$

4-2 Les deux principes de la thermodynamique (Bamberger [1], Bruhat [1])

On considère un système Σ à température uniforme T et son évolution entre les instants t et $t+\Delta t$.

Soient :

∂Q , l'énergie thermique ou quantité de chaleur provenant de l'extérieur de Σ et reçue par Σ .

dW , l'énergie mécanique ou quantité de travail provenant de l'extérieur de Σ et reçue par Σ .

(remarque : la notion de différentielle "d" est relative au temps, c'est à dire à l'évolution réelle)

L'évolution de (Σ) satisfait aux deux principes de la thermodynamique qui peuvent s'exprimer ainsi :

" il existe deux fonctions de l'état intérieur du système (donc en particulier indépendantes du repère du mouvement, c'est à dire des variables de position), l'énergie interne e et l'entropie S telles que dans l'évolution réelle du système on ait " :

$$de = \partial Q + dW \quad (4-1)$$

$$\partial Q \leq TdS \quad (4-2)$$

Commentaires : la différence essentiellement positive

$$df = TdS - \partial Q \quad (4-3)$$

qui apparaît dans l'expression du second principe, est le travail des irréversibilités intérieures du système au cours de l'évolution. Dans une évolution réversible

$$df = 0 \quad (4-4)$$

L'élimination de la quantité de chaleur ∂Q entre les équations traduisant les deux principes

$$de = \partial Q + dW$$

$$\partial Q = TdS - df$$

conduit à l'équation dite de l'énergie :

$$dW = de - TdS + df \quad (4-5)$$

4-3 Loi d'état et variables d'état

On cherche à déterminer le nombre de variables internes indépendantes que comprend le système thermodynamique étudié.

Les différentes variables internes sont :

- le volume spécifique $v = 1 / \rho$
- la pression P
- la température T
- l'énergie interne e
- l'entropie S

et on dispose de plusieurs relations entre ces variables :

- la loi d'état du gaz

$$P = f(v, T) \quad (4-6)$$

permet de déterminer la pression P en fonction du volume v et de la température T .

- l'énergie interne e et l'entropie S étant des fonctions d'état, le système ne compte que deux variables indépendantes. On peut écrire les différentielles de ces deux fonctions d'état par rapport aux deux variables T et v par exemple (les dérivées partielles par rapport à v étant alors des dérivées à température constante et les dérivées partielles par rapport à T des dérivées à volume constant) :

$$de = e_{,T}.dT + e_{,v}.dv$$

et sachant que par définition

$$C_v = e_{,T}$$

l'énergie interne peut être déterminée en intégrant l'équation

$$de = C_v.dT + e_{,v}.dv \quad (4-7)$$

Enfin l'équation de l'énergie (4-5) permet de déterminer l'entropie S .

Remarque: dans la suite on choisit indifféremment comme variables d'état internes indépendantes les couples (v, T) , (v, S) ou bien (T, p) .

4-4 Entropie d'un système physique

On choisit dans ce paragraphe (v, T) comme couple de **variables indépendantes**.

Supposons que la transformation subie par le système soit réversible (cela exclut les effets dissipatifs en particulier).

Alors :

$$df = 0$$

et pour un gaz, la quantité de travail échangée avec l'extérieur est la quantité de travail des forces de pression. Ainsi :

$$dW = - P dv$$

et l'équation de l'énergie (4-5) s'écrit :

$$de = TdS - PdV \quad (4-8)$$

S est une fonction d'état et en conséquence dS est une différentielle totale exacte ; Ainsi l'accroissement d'entropie lorsqu'on passe d'un état (T1, v1) à un état (T2, v2) est le même quel que soit le chemin suivi.

Du point de vue mathématique cela s'écrit :

$$S_{,TV} = S_{,vT} \quad (4-9)$$

L'expression de l'énergie interne (4-7) et l'équation d'énergie (4-8) permettent d'écrire :

$$TdS = C_v.dT + (e_{,v} + P).dv$$

D'où

$$S_{,T} = C_v / T \quad (4-10a)$$

et

$$S_{,v} = (e_{,v} + P) / T \quad (4-10b)$$

De l'équation (4-10a) on déduit la première dérivée seconde de S :

$$S_{,TV} = (1 / T) . C_{v,v}$$

et de l'équation (4-10b) la seconde :

$$\begin{aligned} S_{,vT} &= (e_{,TV} + P_{,T}) / T + (e_{,v} + P) . (-1/T^2) \\ &= (e_{,vT} + P_{,T}) / T + (e_{,v} + P) . (-1/T^2) \\ &= (C_{v,v} + P_{,T}) / T + (e_{,v} + P) . (-1/T^2) \end{aligned}$$

Ainsi la condition traduisant que dS est une différentielle totale s'écrit :

$$e_{,v} = -P + T.P_{,T} \quad (4-11)$$

Dans la suite, même si les transformations subies par le système sont irréversibles, l'entropie dont on parle est la fonction définie par l'équation d'énergie sous sa forme (4-8). Le lecteur

saura de lui-même corriger l'abus de langage qui consiste à assimiler une fonction d'entropie à l'entropie du système physique lorsqu'il n'y a plus égalité.

4-5 L'inégalité de Clausius Duhem (Bamberger[1], Baras[1], Hughes[1])

On présente ici une formulation faible du second principe de la thermodynamique.

Soit O un ouvert, ∂O sa frontière, $f_t(O)$ la configuration courante de O et $g_t(\partial O)$ la configuration courante de ∂O , on peut écrire (on applique la classique formule de dérivation sous le signe somme) :

$$\frac{d}{dt} \int_{f_t(O)} \rho S \, d\omega = \int_{f_t(O)} \frac{\partial \rho S}{\partial t} \, d\omega + \int_{g_t(\partial O)} \rho S \, \vec{u}(x,t) \cdot \vec{n}(x,t) \, d\sigma$$

où \vec{u} est la vitesse du point (x,t) de $g_t(\partial O)$ et \vec{n} la normale extérieure

On se place dans le cadre d'un système du type de celui présenté au paragraphe 1, à savoir :

- il y a conservation de la masse ; On peut donc écrire :

$$\int_{f_t(O)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\omega + \int_{g_t(\partial O)} \rho \, \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

- on note "source" le terme de dissipation volumique de chaleur.

- on note $Q = -k(T) \cdot \text{grad}(T)$ le flux surfacique de chaleur.

Grâce à la conservation de la masse on obtient l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{f_t(O)} \rho S \, d\omega = \int_{f_t(O)} \rho \frac{dS}{dt} \, d\omega$$

Sur l'ouvert O la variation d'entropie s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{f_t(O)} \rho S \, d\omega$$

le rapport dQ/T est composé de deux termes, l'un surfacique

$$- \int_{\mathbf{g}_t(\partial\Omega)} \frac{(\vec{Q} \cdot \vec{n})}{T} d\sigma \quad \text{où} \quad \vec{Q} = -k(T) \vec{\text{grad}}(T)$$

et l'autre volumique

$$\int_{f_t(\Omega)} \frac{\text{source}}{T} d\omega$$

On peut donc écrire le second principe de la thermodynamique

$$\partial Q \leq T dS$$

sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{f_t(\Omega)} \rho S d\omega &\geq \int_{f_t(\Omega)} \frac{\text{source}}{T} d\omega - \int_{\mathbf{g}_t(\partial\Omega)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} d\sigma \\ \Leftrightarrow \int_{f_t(\Omega)} \rho \frac{dS}{dt} d\omega &\geq \int_{f_t(\Omega)} \frac{\text{source}}{T} d\omega - \int_{f_t(\Omega)} \text{div} \left(\frac{\vec{Q}}{T} \right) d\omega \end{aligned}$$

On déduit de cette inégalité une formulation locale du second principe de la thermodynamique généralement appelée inégalité de Clausius Duhem (Bamberger [1]) :

$$\rho \cdot \frac{dS}{dt} + \text{div} \left(\frac{\vec{Q}}{T} \right) - \frac{\text{source}}{T} \geq 0$$

5 - Dynamique d'un gaz réel et Système Hyperbolique Non Linéaire

Comme cela a été dit au cours du second paragraphe, un des objectifs de l'étude est de modéliser numériquement la dynamique d'un gaz réel (équations d'Euler pour un gaz réel).

Les méthodes utilisées pour cette modélisation sont basées sur le caractère **strictement hyperbolique** du système d'équation d'une part, et sur l'existence d'une fonction d'entropie permettant de symétriser ce système d'autre part.

Aussi présente t-on ici quelques rappels essentiels sur les SHNL (Systèmes Hyperboliques Non Linéaires) et sur les fonctions d'entropie d'un système hyperbolique. Une application à la dynamique des gaz est ensuite proposée.

5-1 Quelques rappels sur les S.H.N.L

Ce paragraphe essentiellement constitué de définitions fait un très bref rappel de certaines notions de la théorie des systèmes hyperboliques non linéaires. Pour plus de précision, se référer à Smoller[1] ou bien Lax[1].

On considère le système

$$\begin{aligned}
 U_{,t} + f(U)_{,x} &= 0 \\
 U(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\
 f &\text{ suffisamment régulière}
 \end{aligned}
 \tag{5-1}$$

Définition 1 : hyperbolicité

Le système (5-1) est dit hyperbolique si la matrice jacobienne $f'(U)$ a toutes ses valeurs propres toujours réelles.

Le système (5-1) est dit strictement hyperbolique si les valeurs propres de $f'(U)$ sont toujours réelles et distinctes. On a alors :

$$\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \dots < \lambda_m(U)$$

où λ_j est la $j^{\text{ième}}$ valeur propre. On note $r_j(U)$ le $j^{\text{ième}}$ vecteur propre à droite.

Définition 2 : courbes caractéristiques

Soit $U(x,t)$ une solution régulière de (5-1) ; la j -caractéristique x^j , issue de (x_0, t_0) est une courbe définie par :

$$\begin{aligned} (x^j(t; x_0, t_0))_{,t} &= \lambda_j(U(x^j(t; x_0, t_0), t)) \\ \text{et } x^j(t_0; x_0, t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Si U est régulière, x^j est régulière (Vila [1]).

Définition 3 : solution faible

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned} U_{,t} + f(U)_{,x} &= 0 \\ U(x,0) &= U_0(x) \end{aligned}$$

On appelle solution faible de ce problème, une solution au sens des distributions :

$$\begin{aligned} \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \\ \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (U\phi_{,t} + f(U)\phi_{,x}) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x,0) \cdot U_0(x) dx = 0 \end{aligned}$$

Définition 4 : champs linéairement dégénérés et champs vraiment non linéaires

On dit que le $k^{\text{ième}}$ champ est linéairement dégénéré si : $\text{grad}(\lambda_k) \cdot r_k(U) = 0$ pour tout U

On dit que le $k^{\text{ième}}$ champ est vraiment non linéaire si : $\text{grad}(\lambda_k) \cdot r_k(U) \neq 0$ pour tout U

Définition 5 : choc admissible

Afin de déterminer quelles sont les bonnes solutions physiques, Lax utilise la théorie des caractéristiques. Un choc est déclaré admissible s'il provient de la rencontre de deux k -caractéristiques. Lax propose la formulation suivante :

Soit U une solution faible (solution faible au sens des distributions d'un problème

(5-1)+donnée initiale), discontinue le long d'une courbe $(\Sigma) \ x = \Sigma(t)$, et de classe C^1 en dehors de (Σ) ; on dit que l'on a un choc admissible s'il existe k tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{k-1}(U(x-0, t)) < \sigma = \frac{d\Sigma}{dt} < \lambda_k(U(x-0, t)) \\ \lambda_k(U(x+0, t)) < \sigma = \frac{d\Sigma}{dt} < \lambda_{k+1}(U(x+0, t)) \end{array} \right. \quad (5-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{k-1}(U(x-0, t)) < \sigma = \frac{d\Sigma}{dt} < \lambda_k(U(x-0, t)) \\ \lambda_k(U(x+0, t)) < \sigma = \frac{d\Sigma}{dt} < \lambda_{k+1}(U(x+0, t)) \end{array} \right. \quad (5-3)$$

(5-2) et (5-3) sont les conditions de k -choc de Lax (ou encore inégalités relatives aux chocs).

Définition 6 : onde de détente associée à un champ V.N.L.

On appelle **j -détente** (associée au champ λ_j V.N.L.), dans un domaine $\sigma_0 < x/t < \sigma_1$, une fonction $U(x/t)$ telle que :

$$\begin{aligned} \sigma &= \lambda_j(U(\sigma)) & \sigma &= x/t \\ dU(\sigma) / d\sigma & \text{ parallèle à } r_j(U(\sigma)) \end{aligned}$$

Proposition 1 (Vila [1]) : $U(\sigma)$ définie ci-dessus est solution régulière du système (5-1).

Proposition 2 (Vila [1]) : onde de choc associée à un champ V.N.L.

$U_0 \in \mathbb{R}^m$ étant fixé, soit λ_j un champ V.N.L., alors il existe une courbe locale C de \mathbb{R}^m partant de U_0 dans la direction $r_j(U_0)$ telle que $\forall U \in C, \exists \sigma \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\sigma(U - U_0) = (f(U) - f(U_0))$$

Cette courbe est appelée **j -courbe de choc**.

Proposition 3 (Vila [1]) : discontinuité de contact associée à un champ L.D.

$U_0 \in \mathbb{R}^m$ étant fixé, soit λ_j un champ L.D., alors il existe localement une courbe C de \mathbb{R}^m partant de U_0 dans la direction $r_j(U_0)$ telle que $\forall U \in C, \exists \sigma \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\lambda_j(U_0) \cdot (U - U_0) = (f(U) - f(U_0))$$

Cette courbe est appelée **courbe de discontinuité de contact**.

5-2 Systèmes de lois de conservation avec entropie

Définition 7 : fonction d'entropie

Une fonction scalaire $H(U)$ est une fonction d'entropie de (5-1) si :

(i) la fonction H satisfait

$$H_{,U} \cdot f_{,U} = F_{,U} \quad (5-4)$$

où $F(U)$ est une fonction scalaire appelée flux d'entropie.

(ii) la fonction H est une fonction convexe de U

On peut déduire de (5-4), en multipliant cette équation par $H_{,U}$, que toute solution régulière de (5-1) vérifie :

$$H_{,t} + F(U)_{,x} = 0$$

Définition 8 : système hyperbolique symétrique

Un système d'équations

$$P \cdot v_{,t} + B \cdot v_{,x} = 0 \quad (5-5)$$

est appelé système hyperbolique symétrique si P est une matrice symétrique définie positive et si B est une matrice symétrique.

Remarque :

Soit un système de type (5-1). Si on effectue un changement de variables du type $v = v(U)$, ce système s'écrit :

$$U(v)_{,t} + f(U(v))_{,x} = U_{,v} \cdot v_{,t} + f(U)_{,v} \cdot v_{,x} = 0$$

Si $U_{,v}$ et $f(U)_{,v}$ sont deux matrices symétriques, en posant $P = U_{,v}$ et $B = f(U)_{,v}$ on obtient un système de type (5-5).

On peut de plus montrer qu'il existe deux fonctions scalaires $q(v)$ et $r(v)$ telles que :

$$q_{,v} = U^t \quad (5-6a)$$

$$r_{,v} = f^t \quad (\text{où } t \text{ dénote la transposée}) \quad (5-6b)$$

Le caractère défini positif de $U_{,v}$ est équivalent à la convexité de $q(v)$.

Théorème 1 (Godounov) : Supposons que (5-1) puisse être symétrisé par un changement de variables $v(U)$ (les relations (5-6) sont donc vérifiées avec q fonction convexe de v). Alors (5-1) admet une fonction d'entropie $H(U)$ donnée par :

$$H(U) = U^t v - q(v)$$

avec un flux d'entropie $F(U)$

$$F(U) = f^t v - r(v)$$

Théorème 2 (Mock): Supposons que $H(U)$ soit une fonction d'entropie de (5-1). Alors le changement de variables $v^t = H_{,U}$ symétrise le système (5-1)

démonstration des théorèmes 1 et 2: cf Harten[1]

Définition 9 : solution entropique

On dit que U solution faible de (5-1) est solution entropique de ce système si pour toute entropie convexe H de ce système on a

$$H(U)_{,t} + F(U)_{,x} \leq 0$$

au sens des distributions.

Conjecture (Lax): si le système est strictement hyperbolique, il existe au plus une solution entropique du problème de Cauchy qui suit :

$$U_{,t} + f(U)_{,x} = 0$$

$$U(x,0) = U_0(x)$$

Cette conjecture est vraie dans le cas scalaire ($m=1$) (théorème de Kruskov) et il y a aussi existence dans ce cas. Pour $m>1$ les résultats sont partiels (Vila [1]).

5-3 Application à la dynamique des gaz

5-3-1 Conditions pour que le système soit strictement HNL (Smoller [1])

Dans ce paragraphe, on choisit v et S comme variables internes indépendantes. Ce choix facilite en effet de façon significative les calculs d'ordre technique qui sont effectués. S est définie par l'équation d'énergie d'un système réversible :

$$TdS = de + Pdv$$

On peut alors écrire les équations de la dynamique des gaz (équations d'Euler : le gaz est alors supposé non visqueux et non conducteur de la chaleur) sous la forme (Smoller [1]) :

$$v_{,t} + uv_{,x} - vu_{,x} = 0$$

$$u_{,t} + uu_{,x} + vP_{,x} = 0$$

$$S_{,t} + uS_{,x} = 0$$

(Notons que ce système est équivalent au système (2-4) des équations d'Euler écrites sous forme conservatives).

La matrice jacobienne associée à ce système s'écrit alors (les variables du système étant v , u et S) :

$$\begin{bmatrix} u & -v & 0 \\ v.P_{,v} & u & v.P_{,S} \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}$$

Cette matrice a ses trois valeurs propres réelles et distinctes si et seulement si $P_{,v} < 0$ (c'est équivalent à dire que le système est strictement hyperbolique si et seulement si $P_{,v} < 0$).

Lorsque le système est strictement hyperbolique, on définit la vitesse du son du fluide c :

$$c^2 = P_{,\rho} = -v^2 P_{,v}$$

On a alors :

$$\lambda_1 = u - c$$

$$\lambda_2 = u$$

$$\lambda_3 = u + c$$

et les vecteurs propres, à droite correspondants sont :

$$r_1 = (v, c, 0)^t$$

$$r_2 = (P_{,S}, 0, P_{,v})^t$$

$$r_3 = (v, -c, 0)^t$$

on déduit alors la nature des trois champs associés à ces valeurs et vecteurs propres sachant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Grad}(\lambda_1) \cdot r_1 = -\frac{\partial c}{\partial v} v + c = -v^2 \frac{P_{,vv}}{2\sqrt{-P_{,v}}} \\ \text{Grad}(\lambda_2) \cdot r_2 = 0 \\ \text{Grad}(\lambda_3) \cdot r_3 = \frac{\partial c}{\partial v} v - c = v^2 \frac{P_{,vv}}{2\sqrt{-P_{,v}}} \end{array} \right.$$

Sous l'hypothèse $P_{,vv} \neq 0$, on a donc 2 champs (les champs 1 et 3) vraiment non linéaires et 1 champ (le champ 2) linéairement dégénéré.

Enfin, afin que les inégalités relatives aux chocs soient vérifiées, si $P_{,vv} \neq 0$, il faut de plus que (Smoller[1]) :

$$P_{,s} > 0, P > 0 \text{ et } P_{,vv} > 0$$

Ainsi, pour rentrer dans le cadre général d'un système hyperbolique non linéaire, l'équation d'état $P = P(v, S)$ doit vérifier les quatre conditions suivantes :

$$P > 0 \quad (C1)$$

$$P_{,s} > 0 \quad (C2)$$

$$P_{,v} < 0 \quad (C3)$$

$$P_{,vv} > 0 \quad (C4)$$

5-3-2 Choix d'une fonction d'entropie

Une fois déterminées les conditions (C1, C2, C3, C4), on réécrit les équations d'Euler sous leur forme conservative (2-4) :

$$F_0(U)_{,t} + F_1(U)_{,x} = 0$$

Par soucis de simplifier les calculs, les **deux variables indépendantes** du système thermodynamique sont **v** et **e** (volume et énergie interne).

5-3-2-1 Dérivées partielles des variables conservatives

Dans tout ce paragraphe on travaille avec les variables conservatives, à savoir $(\rho, \rho u, E)$ notée ici (u_1, u_2, u_3) . Les deux variables indépendantes du système physique étant v et e , on cherche à déterminer les dérivées partielles de v et e par rapport aux variables u_i .

Pour cela, on exprime l'énergie interne e en fonction des u_i . L'énergie totale du système est égale à la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique, soit :

$$E = \rho e + (1/2) \rho u^2$$

ce qui s'écrit avec les variables u_i :

$$u_3 = u_1 e + (1/2) (u_2^2 / u_1)$$

d'où l'expression de e :

$$e = (u_3 u_1 - (1/2) u_2^2) / u_1^2$$

En différentiant cette expression, on obtient :

$$de = (1/u_1^3) (-u_3 u_1 + u_2^2) du_1 + (-u_2/u_1^2) du_2 + (1/u_1) du_3$$

On dispose ainsi des dérivées partielles de v et e par rapport aux variables u_i :

$$\begin{array}{ll} v_{,u_1} = -1/u_1^2 & e_{,u_1} = (-u_3 u_1 + u_2^2) / u_1^3 \\ v_{,u_2} = 0 & e_{,u_2} = -u_2 / u_1^2 \\ v_{,u_3} = 0 & e_{,u_3} = 1 / u_1 \end{array}$$

5-3-2-2 Choix du changement de variables

On considère les équations de la dynamique des gaz écrites sous forme conservative :

$$F_0(U)_{,t} + F_1(U)_{,x} = 0 \quad (5-7)$$

avec

et $F_0(U) = {}^t(u_1, u_2, u_3)$

$$F_1(U) = {}^t(u_2, u_2^2/u_1 + P, (u_3 + P)u_2/u_1)$$

D'après le théorème de Mock, si on connaît une fonction d'entropie H du système (5-7) alors le changement de variables ${}^t v = H, U$ symétrise le système.

On cherche donc une **fonction d'entropie H** .

On a vu dans le paragraphe précédent que (il s'agit de la dérivée particulaire) :

$$dS/dt = 0$$

on peut donc écrire

$$u_1 dS/dt = u_1 S_{,t} + u_2 S_{,x} = 0$$

soit $h(S)$ une fonction différentiable. Alors

$$u_1 h(S)_{,t} + u_2 h(S)_{,x} = u_1 (\partial h / \partial S) (dS/dt) = 0$$

sachant que (conservation de la masse)

$$u_{1,t} + u_{2,x} = 0$$

on déduit en multipliant cette équation par $-h(S)$:

$$[-u_1 h(S)]_{,t} + [-u_2 h(S)]_{,x} = 0 \quad (5-8)$$

Ainsi, une bonne candidate à être fonction d'entropie est (la condition (i) de la définition d'une fonction d'entropie étant alors vérifiée, cf. définition (7), première partie) :

$$H(U) = -u_1 h(S)$$

avec comme flux d'entropie :

$$F(U) = -u_2 h(S)$$

Harten propose de prendre $h(S) = S$, la fonction d'entropie étant alors $H = -\rho S$.

On se propose, afin de déterminer explicitement le changement de variables, d'exprimer les dérivées partielles du premier et du second ordre de S (les dérivées partielles du second ordre sont utiles ultérieurement). Celles-ci sont obtenues à partir de la différentielle de l'énergie interne :

$$de = (1/u_1^3) (-u_3 u_1 + u_2^2) du_1 + (-u_2/u_1^2) du_2 + (1/u_1) du_3$$

et de l'équation dite de l'énergie

$$TdS = de + p \cdot dv$$

On obtient alors les dérivées premières

$$S_{,u_1} = (-P - u_3 + u_2^2/u_1)/(Tu_1^2)$$

$$S_{,u_2} = (-u_2)/(Tu_1^2)$$

$$S_{,u_3} = 1/(Tu_1)$$

et les dérivées secondes de S

$$S_{,u_1 u_1} = [-u_1 T_{,u_1} (-P - u_3 + u_2^2/u_1) - 2T (-P - u_3 + u_2^2/u_1) + T (-u_1 P_{,u_1} - u_2^2/u_1)] / (u_1^2 T^2)$$

$$S_{,u_1 u_2} = [2Tu_2 + u_1 u_2 T_{,u_1}] / (u_1^3 T^2)$$

$$S_{,u_1 u_3} = [-T - u_1 T_{,u_1}] / (u_1^2 T^2)$$

$$S_{,u_2 u_2} = [-T + u_2 T_{,u_2}] / (u_1^2 T^2)$$

$$S_{,u_2 u_3} = [u_2 T_{,u_3}] / (u_1^2 T^2)$$

$$S_{,u_3 u_3} = [-u_1 T_{,u_3}] / (u_1^2 T^2)$$

Avec la fonction d'entropie ($H = -\rho S$) choisie, le changement de variables s'écrit :

$$\begin{aligned} t_v &= H, U \\ &= t(v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

avec

$$v_1 = -S - (-P - u_3 + u_2^2/u_1)/(Tu_1)$$

$$v_2 = u_2/(Tu_1)$$

$$v_3 = -1/T$$

Les variables v_1, v_2 et v_3 sont appelées **variables entropiques** du système.

Cependant d'après la définition 7 (définition d'une fonction d'entropie) et le théorème de Mock, pour que ce changement de variables symétrise le système (5-7), il faut et il suffit que H soit une fonction d'entropie. Pour cela il suffit que H soit convexe, c'est à dire que v, U soit une matrice définie positive.

On se propose donc de calculer v, U :

$$v, U = \begin{bmatrix} 2S_{,u1} + u_1 S_{,u1u1} & S_{,u2} + u_1 S_{,u1u2} & S_{,u3} + u_1 S_{,u1u3} \\ S_{,u2} + u_1 S_{,u1u2} & u_1 S_{,u2u2} & u_1 S_{,u2u3} \\ S_{,u3} + u_1 S_{,u1u3} & u_1 S_{,u2u3} & u_1 S_{,u3u3} \end{bmatrix}$$

Connaissant les dérivées partielles des premier et second ordre de S , on peut exprimer v, U dans le cas général (sans hypothèses sur la loi d'état et sur les fonctions C_v et C_p) :

$$v, U = - D / (T^2 u_1^2)$$

où

$$D = \begin{bmatrix} T(u_1 P_{,u1} - u_2^2) - & u_2(T + u_1 T_{,u1}) & -u_1^2 T_{,u1} \\ u_1 T_{,u1}(-P - u_3 + u_2^2/u_1) & & \\ u_2(T + u_1 T_{,u1}) & -Tu_1 + u_1 u_2 T_{,u2} & u_1 u_2 T_{,u3} \\ -u_1^2 T_{,u1} & u_1 u_2 T_{,u3} & -u_1^2 T_{,u3} \end{bmatrix}$$

Sachant que l'on peut exprimer les dérivées partielles de T et P par rapport aux variables u_1, u_2 et u_3 :

$$T_{,ui} = T_{,v} \cdot v_{,ui} + T_{,e} \cdot e_{,ui}$$

$$P_{,ui} = P_{,v} \cdot v_{,ui} + P_{,e} \cdot e_{,ui}$$

on a de plus, d'une façon générale :

$$T_{,u1} = -u_1^2 T_{,v} + (-u_3/u_1^2 + u_2^2/u_1^3) T_{,e}$$

$$T_{,u2} = (-u_2/u_1^2) T_{,e}$$

$$T_{,u3} = (1/u_1) T_{,e}$$

et

$$P_{,u1} = -u_1^2 P_{,v} + (-u_3/u_1^2 + u_2^2/u_1^3) P_{,e}$$

$$P_{,u2} = (-u_2/u_1^2) P_{,e}$$

$$P_{,u3} = (1/u_1) P_{,e}$$

En calculant les déterminants successifs de v,U , on peut exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que v,U soit définie positive (c'est à dire pour que $H=-u_1S$ soit convexe).

On obtient :

v,U définie positive \Leftrightarrow

$$T_{,e} > 0 \quad \text{et} \quad T_{,e} (-TP_{,v} + PT_{,v}) - (T_{,v})^2 > 0 \quad (C5)$$

5-3-2 Un cas d'école : le tube à choc

Rappel : on appelle problème de Riemann associé au système des équations d'Euler le problème suivant :

soient U_{gauche} et U_{droite} , trouver $U_R(x, t)$ tel que :

$$F_0(U)_{,t} + (F_1(U))_{,x} = 0$$

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_{\text{gauche}} & \text{si } x < 0 \\ U_{\text{droite}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (Do)$$

On cherche donc à savoir comment se comporte la solution $U(x, t)$ du système d'équations lorsque sa donnée initiale (Do) est discontinue en un point (ici 0.) et constante à gauche et à droite de ce point.

Pour un gaz parfait on sait résoudre exactement le problème de Riemann associé aux équations d'Euler en dimension 1 (Gilquin [1]). En effet, dans le cas du gaz parfait, les conditions (C1) à (C4) sont vérifiées, et le système est strictement hyperbolique non linéaire (cf § 5-3-1). Les champs 1 et 3 sont Vraiment Non Linéaires, et le champ 2 est Linéairement

Dégénéré.

On présente en annexe de la seconde partie (annexes 3-5-1 et 3-5-2), deux méthodes permettant de calculer de façon approchée la solution de ce problème.

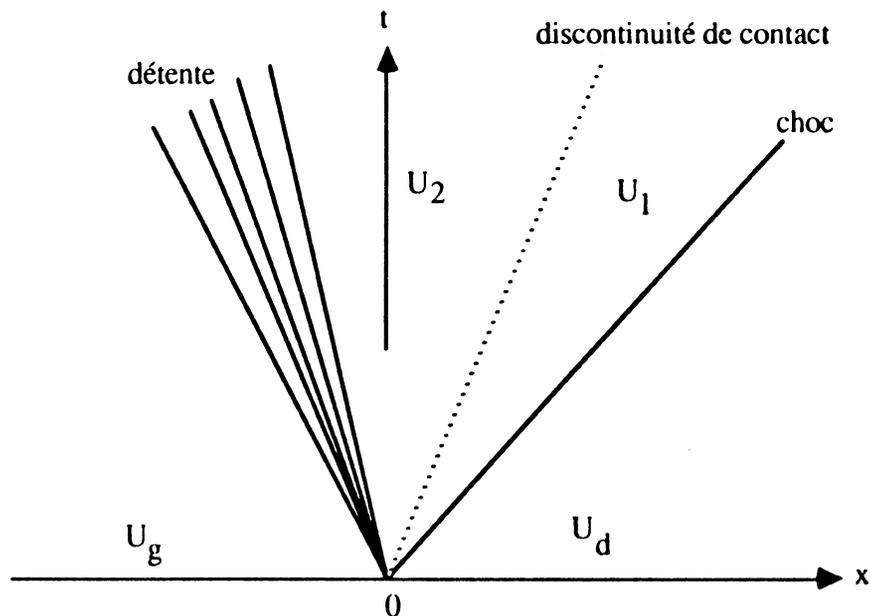
Un cas particulier de problème de Riemann est le problème du **tube à choc**. Les conditions sont alors :

$$u_{\text{gauche}} = u_{\text{droite}} = 0$$

$$P_{\text{gauche}} > P_{\text{droite}}$$

$$\rho_{\text{gauche}} > \rho_{\text{droite}}$$

On peut alors montrer qu'une 1-onde de détente (cf. § 5-2 définition 6 et proposition 1) est associée au premier champ (V.N.L, cf. § 5-3-1), qu'une discontinuité de contact (cf. § 5-2 proposition 3) est associée au second champ (L.D.), et qu'une 3-onde de choc (cf. §5-2 proposition 2) est associée au troisième champ (V.N.L). La solution est représentée par le diagramme qui suit :



De part et d'autre de la discontinuité de contact, la pression P^* et la vitesse u^* sont égales. Les états U_1 et U_2 sont définis comme suit :

$$U_1 = (\rho_1, P^*, u^*)$$

$$U_2 = (\rho_2, P^*, u^*)$$

On détermine P^* et u^* en déterminant dans le diagramme (P, u) l'intersection de la courbe de 3-choc et de la courbe de 1-détente (Gilquin[1]).

Dans la suite de nombreuses applications numériques du tube à choc sont présentées. Cela permet en effet de comparer les solutions obtenues à l'aide de différentes méthodes avec une solution analytique du problème.

6 - Hypothèses faites pour la modélisation du SF6 et conséquences

On présente ici les choix qui ont été faits pour modéliser le gaz réel (en particulier le SF6) ; on détermine ensuite les conditions suffisantes que doit vérifier la loi d'état de ce gaz pour que les équations de la dynamique des gaz soit un Système strictement Hyperbolique Non Linéaire d'une part et un Système Hyperbolique Symétrisable grâce à la fonction d'entropie $H = -\rho S$ d'autre part.

6-1 Les deux hypothèses de base

Dans ce paragraphe les variables indépendantes sont (v, T) .

Première hypothèse :

$$C_v = C_v(T) \quad (H1)$$

On suppose que C_v ne dépend que de la température. Grâce à l'équation (7) donnant l'expression de l'énergie interne, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial T} &= C_v(T) \\ \Leftrightarrow e(v, T) &= \int_T C_v(t).dt + g(v) \end{aligned}$$

Si on écrit la condition (4-11) traduisant que dS est une différentielle totale on a :

$$\begin{aligned} g(v)_{,v} &= g'(v) \\ &= -P + T.P_{,T} \end{aligned}$$

d'où

$$(P/T)_{,T} = g'(v)/T^2$$

et donc

$$P(v, T) = -g'(v) + f(v).T \quad (6-1)$$

On cherche à déterminer une loi d'état qui d'une part tient compte de la dissociation du SF6 et qui d'autre part assure que l'équation (6-1) est vérifiée.

Deuxième hypothèse :

Comme on le vérifie au cours des deux paragraphes suivants, la fonction g intervient dans les équations du mouvement (présence du terme $-g \cdot v \cdot v_x$ dans l'équation de conservation de quantité de mouvement (cf. 6-2-1)) mais n'intervient pas dans le calcul de l'entropie (cf. 6-3). La fonction g peut donc changer la nature du système d'équations et notamment son caractère "hyperbolique".

Aussi g apparaît comme un paramètre permettant de modifier la nature du système d'équations. Dans la suite on évite autant que possible d'émettre une hypothèse sur cette fonction g . Cependant chaque fois qu'il a été nécessaire de le faire (notamment lors des développements discutant de la nature du système d'équations (partie 1 paragraphe 6-2) et de l'ensemble des applications numériques), on fait l'hypothèse suivante :

$$g(v) = \text{constante} \quad (\text{H2})$$

et la loi d'état s'écrit alors

$$P = f(v) * T$$

6-2 Conditions suffisantes devant être satisfaites par la loi d'état

Les lois d'état des gaz considérés étant tabulées, si on veut que les équations d'Euler restent un système hyperbolique symétrisable, il est nécessaire de vérifier les conditions (C1) à (C5). Pour cela, des **conditions suffisantes** issues de (C1)-(C5) doivent être vérifiées.

Ces conditions suffisantes ont des expressions un peu compliquées bien qu'on ait cherché à les simplifier au maximum (en donnant des conditions simples sur C_v , f , f' et f''). En effet, en les simplifiant trop, elles ne sont jamais vérifiées pour un gaz réel.

6-2-1 Pour que le système soit strictement hyperbolique

On cherche à déterminer quelles conditions les fonctions f et C_v doivent vérifier afin que, sous les hypothèses H1 et H2 les conditions C1, C2, C3 et C4 soient satisfaites.

Remarque : les conditions C1 à C4 ont été exprimées à l'aide des variables indépendantes (v , S). Dans ce paragraphe on travaille donc avec les **variables indépendantes** (v , S).

Sous l'hypothèse (H1) : $C_v = C_v(T)$

A l'aide de l'équation d'énergie

$$TdS = de + PdV$$

et de l'expression de la différentielle de l'énergie interne

$$de = g'(v) dv + C_v dT$$

on écrit l'équation suivante

$$TdS = C_v dT + (g'(v) + P) dv$$

Cette équation permet d'écrire la dérivée partielle de T par rapport à v

$$\begin{aligned} T_{,v} &= - (g'(v) + P) / C_v \\ &= - f(v) \cdot T / C_v \end{aligned}$$

De plus la loi d'état du gaz s'écrit

$$P = - g'(v) + f(v).T$$

ainsi on obtient

$$TdS = C_v dT + (f(v).T) dv \quad (6-2)$$

si on différencie la loi d'état dans le système de variables (v, T)

$$dP = - f(v) dT + [- g''(v) + f'(v).T] dv$$

on peut alors substituer dT dans l'équation (6-1), qui s'écrit alors

$$C_v dP = f(v).T.dS + [- C_v g''(v) + C_v.f'(v).T - f^2(v).T] dv$$

Ainsi on peut exprimer $P_{,v}$ (qui est ici la dérivée partielle de P par rapport à v à entropie constante) et $P_{,S}$ (qui est la dérivée partielle de P par rapport à S à volume constant).

$$\begin{aligned} P_{,v} &= - g''(v) + f'(v).T - f^2(v).T / C_v \\ P_{,S} &= f(v).T / C_v \end{aligned}$$

Remarque : d'après le paragraphe (6-3-1), on sait que l'on peut écrire l'équation de conservation de mouvement sous la forme :

$$v_{,t} + v.P_{,v}.v_{,x} + u.u_{,x} + v.P_{,s} = 0$$

$$\Leftrightarrow v_{,t} + v.[-g''(v) + f'(v).T - f^2(v).T / C_v].v_{,x} + u.u_{,x} + v.f(v).T / C_v = 0$$

La fonction g apparaît donc dans l'équation de quantité de mouvement à travers le terme $-v.g''(v).v_{,x}$. On justifie donc ici l'affirmation (faite au cours du paragraphe précédent) relative à l'influence de la fonction g sur la nature du système d'équations (sauf bien entendu lorsque g est une fonction affine de v).

Sous les hypothèses (H1) et (H2) : $C_v = C_v(T)$ et $g = \text{constante}$

La condition C1 ($P > 0$) s'écrit :

$$f(v) > 0$$

La condition C2 ($P_{,s} > 0$) s'écrit :

$$f(v) / C_v > 0$$

Dans la pratique les fonctions f et C_v sont deux fonctions strictement positives et ceci pour tout volume spécifique v et toute température T . Les conditions C1 et C2 sont donc toujours vérifiées.

La condition C3 ($P_{,v} < 0$) est plus restrictive. Elle s'écrit

$$f'(v) / f^2(v) < 1 / C_v$$

et ainsi une condition suffisante pour que C3 soit vérifiée est :

$$f'(v) < 0$$

Pour exprimer la condition C4 ($P_{,vv} > 0$), on dérive par rapport à v l'expression de $P_{,v}$:

$$P_{,vv} = f''(v).T - 3f(v).f'(v).T / C_v + f^3(v).T / C_v^2 + f^2(v).T(C_v)_{,v} / C_v^2$$

or

$$(C_v)_{,v} = 0 \text{ puisque } C_v = C_v(T)$$

ainsi $P_{,vv} > 0$ s'écrit :

$$f''(v).T - 3 f(v).f'(v) T / C_v + f^3(v).T / C_v^2 > 0$$

Remarque : il est nécessaire de garder cette dernière condition sous cette forme ; en effet on a pu remarquer que les tables définissant la loi vérifiaient bien cette condition. Par contre la condition suffisante

$$f''(v) > 0$$

n'est pas toujours vérifiée par ces tables.

6-2-1 Pour que la fonction d'entropie symétrise le système

On choisit comme variables indépendantes e et v . On cherche une condition suffisante pour que la condition (C5) soit vérifiée.

Sous l'hypothèse : $C_v = C_v(T)$ (H1)

D'après ce que l'on vient de voir :

$$P_{,v} = -g''(v) + f'(v)T - f^2(v)T / C_v$$

$$T_{,v} = -f(v)T / C_v$$

et

$$T_{,e} = 1 / C_v$$

La condition (C5)

$$T_{,e} > 0 \text{ et } T_{,e} (-TP_{,v} - PT_{,v}) - (T_{,v})^2 > 0$$

est donc équivalente à :

$$C_v > 0 \text{ et } g''(v) - f'(v).T > 0$$

Sous l'hypothèse : $g(v) = \text{constante}$ (H2)

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que (C5) soit vérifiée est :

$$C_v > 0 \text{ et } f'(v) < 0$$

6-2-3 Récapitulatif

On peut exprimer ces différentes conditions sous une autre forme, et en particulier en

fonction de la variable de compressibilité Z qui est une fonction "tabulée" de la densité ρ , et en écrivant la loi d'état comme suit :

$$P = \rho \cdot Z(\rho) \cdot T$$

ce qui sous-entend qu'on a posé :

$$f(v) = Z(1/v) / v$$

Si on choisit comme variables indépendantes e et ρ on a :

$$P_{,\rho} = Z T + \rho T Z_{,\rho}$$

$$P_{,e} = \rho Z / C_v$$

$$T_{,\rho} = 0$$

$$T_{,e} = 1 / C_v$$

la condition (C1) s'écrit

$$Z > 0 \quad (6-3-a)$$

les conditions (C2)+(C3) ou (C5)

$$C_v > 0 \quad \text{et} \quad P_{,\rho} > 0 \quad (6-3-b)$$

et la condition (C4)

$$2 \rho Z' + \rho^2 Z'' + Z^3 / C_v^2 > 0 \quad (6-3-c)$$

Conclusion : dans la suite on s'assure que l'ensemble des conditions (6-3) sont vérifiées (ce qui n'est pas implicite sous les hypothèses (H1) et (H2)). Alors :

- le système d'équations de la dynamique du gaz (5-7) est un système strictement hyperbolique comprenant deux champs vraiment non linéaires et un champ linéairement dégénéré et les inégalités relatives aux chocs sont vérifiées.

- la fonction $H = - u_1 S$ est une fonction d'entropie et le changement de variables $v = H, U$ symétrise le système d'équations.

6-3 Expressions de l'entropie et de l'énergie interne du SF6

On se place sous les hypothèses H1 et H2 et on suppose les conditions C1 à C5 vérifiées. On se propose alors de calculer l'entropie et l'énergie interne du SF6. Dans ce paragraphe,

les variables indépendantes du système sont la température T et la densité ρ . Soit e_0 et S_0 l'énergie interne et l'entropie de l'état de référence (T_0, ρ_0).

Calcul de l'énergie interne :

D'après les hypothèses H1 et H2 :

$$de = C_v(T).dT$$

En intégrant cette équation entre les états (T_0, ρ_0) et (T, ρ) on obtient :

$$e(T) = e(T_0) + \int_{T_0}^T C_v(t) dt$$

Calcul de l'entropie :

Si on fait l'hypothèse H1, la loi d'état peut s'écrire :

$$P = \rho \cdot Z(\rho) \cdot T - g'(1/\rho)$$

Or l'équation d'énergie (4-8) s'écrit :

$$de = TdS - PdV$$

Sachant de plus que (4-7) :

$$de = C_v.dT + g'(v).dv$$

On obtient :

$$dS = C_v(T) \frac{dT}{T} - Z(\rho) \frac{d\rho}{\rho}$$

En intégrant cette équation entre les états (T_0, ρ_0) et (T, ρ) on obtient :

$$S(T, \rho) = S(T_0, \rho_0) + \int_{T_0}^T C_v(t) \frac{dt}{t} - \int_{\rho_0}^{\rho} Z(r) \frac{dr}{r}$$

Remarque: on vérifie ici (comme cela a été affirmé dans le paragraphe (6-1)) que la fonction g n'intervient pas dans le calcul de l'entropie. Aussi pour le calcul de l'entropie l'hypothèse (H2) n'est pas nécessaire.

Deuxième Partie

Modélisation monodimensionnelle



1 - Introduction

Tout ce chapitre traite la résolution numérique du **problème unidimensionnel**. La modélisation unidimensionnelle permet de mettre au point les modèles physiques et de tester différentes méthodes numériques.

Dans le problème physique que l'on cherche à modéliser interagissent plusieurs phénomènes physiques. On cherche à résoudre chacun d'eux **le mieux possible**. Les méthodes utilisées doivent être **adaptées aux gaz réels, adaptées aux systèmes hyperboliques non linéaires et adaptées aux problèmes transitoires**.

On propose (dans ce chapitre) **deux approches** très différentes mais qui répondent aux trois critères essentiels précisés ci-dessus. L'intérêt de développer en parallèle deux types de méthodes est que pour les problèmes considérés, on ne peut pas toujours valider les méthodes à l'aide de solutions analytiques (car on n'en connaît pas) et on ne peut pas, non plus, comparer les résultats de ces méthodes avec des expériences (car la modélisation n'est pas encore assez élaborée).

Aussi d'une certaine façon, ces deux méthodes se valident mutuellement.

1-1 Approche globale

On utilise pour modéliser les équations de Navier-Stokes, une méthode d'éléments finis avec :

- décentrage : permet de bien prendre en compte le transport
- éléments espace-temps : permet de bien traiter le phénomène transitoire
- capture de choc : le décentrage créant des oscillations aux discontinuités de la solution on ajoute de la viscosité dans ces zones afin d'éliminer ces oscillations.

Cette méthode, dite de **streamline diffusion**, a été développée par Hughes[1] et Johnson[1]. Johnson [2] et Szepessy [1, 2] proposent un début d'analyse théorique de cette méthode dans le cas de systèmes hyperboliques non linéaires.

1-2 Approche "pas fractionnaires"

On décompose le phénomène physique et on traite à chaque pas de temps séparément, la convection et la diffusion.

Lors du premier pas fractionnaire la convection est modélisée à l'aide de schémas volumes finis de type Van-Leer (méthode développée pour la résolution de systèmes hyperboliques non linéaires)(cf Vila [1]).

Lors du second pas fractionnaire la diffusion est traitée par une méthode standard (de type différences finies, éléments finis ou volumes finis).

Il faut noter que pour une telle méthode, on peut valider séparément les deux pas fractionnaires sur des solutions analytiques.

1-3 Système d'équations à résoudre

Le problème à résoudre a été défini précédemment (partie 1, § 3). Il s'agit de résoudre le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial F_0(U)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} - \text{div}[k(T).\text{Grad}(G(U))] = \text{source} \quad (1-1)$$

avec :

$$U = {}^t(\rho, u, e)$$

$$F_0(U) = {}^t(\rho, \rho u, E)$$

$$F_1(U) = {}^t(\rho u, P + \rho u^2, (P+E)u)$$

$$G(U) = {}^t(0, 0, T)$$

source = terme de rayonnement et de dissipation par effet Joule.

et

$$P = f_1(T, \rho), e = f_2(T) \text{ et } E = \rho(u^2/2 + e)$$

(f_1 et f_2 étant définies partie 1, § 4 et 6).

Les deux paragraphes suivants proposent la résolution de ce système à l'aide des deux méthodes numériques évoquées précédemment.

Lors de l'exposé de ces deux méthodes numériques on suppose que le calcul du terme source ne pose pas de problèmes. Ce terme non linéaire est explicité dans la méthode "pas fractionnaires" et implicite dans la méthode d'éléments finis (il est en fait explicité à chaque itération d'équilibre de la résolution du système non linéaire). Le calcul du terme source est présenté au cours du quatrième paragraphe de cette partie.

2 - Méthode d'éléments finis 1-D pour un gaz réel

2-1 Symétrisation du système d'équations

Les deux variables indépendantes du système thermodynamique sont ρ et e (densité et énergie interne).

Dans tout ce chapitre on travaille avec les variables conservatives définies au cours de la première partie :

$$F_0(U) = {}^t(\rho, \rho u, E)$$

notées ici (par soucis de simplifier les notations) :

$$U = {}^t(u_1, u_2, u_3)$$

2-1-1 Rappels et notations

On rappelle (partie 1, § 5) les dérivées partielles de ρ et e par rapport aux variables u_i :

$$\begin{aligned} \rho_{,u_1} &= 1 & e_{,u_1} &= (-u_3 u_1 + u_2^2) / u_1^3 \\ \rho_{,u_2} &= 0 & e_{,u_2} &= -u_2 / u_1^2 \\ \rho_{,u_3} &= 0 & e_{,u_3} &= 1 / u_1 \end{aligned}$$

On cherche à résoudre les équations de Navier-Stokes pour un gaz non visqueux. Le système d'équations (partie 1, § 3) s'écrit (pour simplifier $F_0(U)$ est noté ici U) :

$$U_{,t} + F_1(U)_{,x} - (k G(U)_{,x})_{,x} = \text{source} \quad (2-1)$$

où

$$\begin{aligned} U &= {}^t(\rho, \rho u, E) = {}^t(u_1, u_2, u_3) \\ F_1(U) &= {}^t(u_2, u_2^2/u_1 + P, u_2 u_1^{-1}(u_3 + P)) \\ G(U) &= {}^t(0, 0, T) \\ k &= \text{conductivité thermique (fonction de } T) \\ \text{source} &= \text{quantité d'énergie injectée dans le système} \\ &\quad - \text{énergie rayonnée} \end{aligned}$$

Le système (2-1) s'écrit aussi

$$U_{,t} + A U_{,x} - (K U_{,x})_{,x} = \text{source} \quad (2-2)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(u_2/u_1)^2 + P_{,u1} & 2u_2/u_1 + P_{,u2} & P_{,u3} \\ -(u_2/u_1^2)(u_3 + P) + (u_2/u_1)P_{,u1} & (u_3 + P)/u_1 + (u_2/u_1).P_{,u2} & (u_2/u_1)(1 + P_{,u3}) \end{bmatrix}$$

et

$$K = k(T) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ T_{,u1} & T_{,u2} & T_{,u3} \end{bmatrix}$$

et on peut exprimer les dérivées partielles de T et P par rapport aux variables u_1 , u_2 et u_3 :

$$T_{,ui} = T_{,\rho} \cdot \rho_{,ui} + T_{,e} \cdot e_{,ui}$$

$$P_{,ui} = P_{,\rho} \cdot \rho_{,ui} + P_{,e} \cdot e_{,ui}$$

donc

$$T_{,u1} = T_{,\rho} + (-u_3/u_1^2 + u_2^2/u_1^3) \cdot T_{,e}$$

$$T_{,u2} = (-u_2/u_1^2) \cdot T_{,e}$$

$$T_{,u3} = (1/u_1) \cdot T_{,e}$$

et

$$P_{,u1} = P_{,\rho} + (-u_3/u_1^2 + u_2^2/u_1^3) \cdot P_{,e}$$

$$P_{,u2} = (-u_2/u_1^2) \cdot P_{,e}$$

$$P_{,u3} = (1/u_1) \cdot P_{,e}$$

Ainsi on peut définir les matrices A et K de façon plus précise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ - (u_2/u_1)^2 + P_{,\rho} & (u_2/u_1)(2 - P_{,e}/u_1) & P_{,e}/u_1 \\ + (-u_3u_1 + u_2^2)(P_{,e}/u_1^3) & & \\ - (u_2/u_1^2)(u_3 + P) + & (u_3 + P)/u_1 - & (u_2/u_1)(1 + \\ (u_2/u_1)(P_{,\rho} + & (u_2^2/u_1^3) \cdot P_{,e} & P_{,e}/u_1 \\ (-u_3u_1 + u_2^2)(P_{,e}/u_1^3)) & & \end{bmatrix}$$

et

$$K = k(T) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (T_{,\rho} + & (u_2^2/u_1^3) T_{,e} & T_{,e}/u_1 \\ (-u_3u_1 + u_2^2)(T_{,e}/u_1^3)) & & \end{bmatrix}$$

2-1-2 Symétrisation du système

D'après le théorème de Mock (cf partie 1, § 5), la fonction d'entropie H (qui a été définie partie 1, § 5) est telle que le changement de variables $t_v = H, U$ symétrise la partie hyperbolique du système (2-1). On se propose de vérifier que ce changement de variables symétrise aussi le système général (2-1). Harten propose de prendre $H = -\rho \cdot S$. Le changement de variables est alors (cf partie 1, § 5) :

$$\begin{aligned} t_v &= H, U \\ &= (v_1, v_2, v_3) \\ &= (-S - (-P - u_3 + u_2^2/u_1)/(Tu_1), u_2/(Tu_1), -1/T) \quad (2-3) \end{aligned}$$

Les variables v_1, v_2 et v_3 sont appelées **variables entropiques** du système. Après

changement de variables, si on note comme suit la matrice v,U (calculée partie 1, § 5) :

$$v,U = A_0^{-1}$$

le système devient

$$A_0 v_{,t} + A^v v_{,x} - (K^v v_{,x})_{,x} = \text{source} \quad (2-4)$$

où

$$A^v = A A_0 \text{ et } K^v = K A_0$$

On détermine la matrice A_0 , puis on calcule A^v et K^v :

on pose

$$\begin{array}{lll} E1 = u_1 / H & E5 = E4^2 & E9 = u_3 / u_1 \\ E2 = u_2 / H & E6 = Tu_1 & E10 = Z T \\ E3 = u_3 / H & E7 = Tu_2 & E11 = C_v T \\ E4 = u_2 / u_1 & E8 = Tu_3 & \end{array}$$

avec

$$H = Z + \rho Z, \rho$$

on a alors :

$$A_0 = \begin{bmatrix} E1 & E2 & E3 \\ E2 & E6 + E2.E4 & E7 + E2.E9 \\ E3 & E7 + E2.E9 & E11.E6 + E3.E9 \\ & & + E4.E7 \end{bmatrix}$$

et

$$A^v = \begin{bmatrix} E2 & E6 + E2.E4 & E7 + E2.E9 \\ E6 + E2.E4 & 3E7 + E2.E5 & E6.E10 + E8 + 2E7.E4 + E3.E5 \\ E7 + E2.E9 & E6.E10 + E8 + 2E7.E4 + E3.E5 & E11.E7 + E2.E9^2 + 2E7.E9 + E7.E5 + 2E10.E7 \end{bmatrix}$$

On peut montrer que la seule façon de symétriser K^v est que T ne dépende que de la variable v_3 (Hughes[1]), la condition étant que h ($H = -u_1 \cdot h(S)$) soit une fonction affine de S . Avec le choix de la fonction d'entropie qui a été fait (partie 1, § 5) cela est bien le cas.

Donc :

$$K^v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k(T) \cdot T^2 \end{bmatrix}$$

Grâce à la fonction d'entropie $H = -u_1 S$, on a donc réussi à symétriser le système d'équations (2-1).

2-1-3 Inversibilité du changement de variables

On a vu que le changement de variables (2-3) choisi pour symétriser le système s'écrit :

$$v_1 = -S - (-P - u_3 + u_2^2 / u_1) / (Tu_1) \quad (2-5)$$

$$v_2 = u_2 / (Tu_1) \quad (2-6)$$

$$v_3 = -1 / T \quad (2-7)$$

Cependant il est important que ce changement de variables soit facilement inversible, c'est à dire que l'on puisse calculer sans difficulté les variables physiques (T , ρ , u) ou les variables conservatives (u_1 , u_2 , u_3) en fonction des variables entropiques (v_1 , v_2 , v_3).

L'équation (2-7) permet d'exprimer T :

$$T = -1/v_3$$

Puis, connaissant T , l'équation (2-6) permet de déterminer u :

$$u = u_2 / u_1 = v_2 / T$$

Sous les hypothèses H1 et H2 ($C_v = C_v(T)$ et $P = \rho \cdot Z \cdot T$), l'équation (2-5) permet d'écrire :

$$S = -v_1 + Z + (e - u^2/2) / T \quad (2-8)$$

Or on a vu (Partie 1, § 6), l'expression de S :

$$S(T, \rho) = S(T_0, \rho_0) + \int_{T_0}^T C_v(t) \frac{dt}{t} - \int_{\rho_0}^{\rho} Z(r) \frac{dr}{r}$$

Déterminer ρ revient donc à résoudre l'équation suivante :

$$-v_1 + Z(\rho) + \frac{1}{T} \left(e - \frac{1}{2} u^2 \right) = S(T_0, \rho_0) + \int_{T_0}^T C_v(t) \frac{dt}{t} - \int_{\rho_0}^{\rho} Z(r) \frac{dr}{r}$$

Equation que l'on peut résoudre par une méthode du type Newton dès que l'on sait intégrer Z / ρ , car e ne dépend que de T (et donc est parfaitement déterminée).

En effet cette équation est du type :

$$Z(\rho) + \int_{\rho_0}^{\rho} Z(r) \frac{dr}{r} + \text{constante}(T, e) = f(\rho) = 0$$

avec $f(\rho)$ fonction strictement croissante de ρ , $f(\rho_0) < 0$ et $f(+\infty) = +\infty$ (ce qui assure l'existence et l'unicité de ρ tel que $f(\rho) = 0$).

Sous les hypothèses H1 et H2, le changement de variables proposé est donc inversible.

2-2 Solution faible et cadre fonctionnel

2-2-1 Présentation du problème

Pour discrétiser le système d'équations (2-1), on utilise une méthode d'éléments finis proposée par Hughes [1] [6] et Johnson [1].

On cherche à résoudre le problème suivant :

Soit t_f un réel strictement positif et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{M-1} < t_M = t_f$ une discrétisation de

$[0, t_f]$; soit L un réel strictement positif et $[0 ; L]$ un intervalle de \mathbb{R} ; trouver V tel que :

$$A_0 V_{,t} + A^v V_{,x} - (K^v V_{,x})_{,x} = \text{source} \quad \text{sur } [0, L] \times [0, t_f] \quad (2-9)$$

Conditions initiales + Conditions aux limites

2-2-2 Solution faible

On note

$$\Omega = [0, t_f] \times [0, L]$$

On cherche à résoudre le problème (2-9). Sachant que

$$A_0 \cdot V_{,t} = U_{,t}$$

cette équation n'a pas de sens si U n'est pas régulière. On se propose donc de considérer certaines solutions faibles de ce problème, à savoir les fonctions $U = U(V) \in (L^2(\Omega))^3$ vérifiant (on a multiplié formellement par une fonction test " v " et intégré par parties en temps) :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} {}^t v_{,t} \cdot U \, dx dt + \int_0^L {}^t v(t=t_f) \cdot U(t=t_f) \cdot dx - \int_0^L {}^t v(t=0) \cdot U(t=0) \cdot dx + \\ & \iint_{\Omega} {}^t v \cdot A^v \cdot V_{,x} \cdot dx dt - \iint_{\Omega} {}^t v (K^v \cdot V_{,x})_{,x} dx dt = \iint_{\Omega} {}^t v \cdot \text{source} \cdot dx dt \end{aligned} \quad (2-10)$$

$$\forall v \in (H^1([0 ; L] \times [0 ; t_f]))^3$$

Le phénomène étudié étant instationnaire, on cherche un schéma en temps à la fois précis et acceptant des C.F.L élevées.

Johnson [1] propose d'utiliser des **éléments finis espace-temps**. La dimension "temps" est alors abordée de la même façon que la dimension "espace".

En utilisant des éléments finis **discontinus en t_n** , $n = 1, 2, \dots, M$, on peut découpler le problème à résoudre en M problèmes que l'on résout successivement, le $n^{\text{ième}}$ problème ne dépendant que du $n-1^{\text{ième}}$.

On note

$$U_n^+ = \lim_{s \rightarrow 0^+} U(t_n + s) \quad , \quad U_n^- = \lim_{s \rightarrow 0^-} U(t_n + s)$$

$$S_n = [t_n ; t_{n+1}] \times [0, L]$$

et X_h un sous espace de $\{U(V) \in (L^2(\Omega))^3, U|_{S_n} \in (H^1(S_n))^3, n = 1, \dots, M\}$, W_h un sous espace de $(H^1(\Omega))^3$. On s'intéresse essentiellement ici à la formulation en temps, et par conséquent, on suppose avoir toute la régularité nécessaire en espace.

Alors sachant que

$$\int_0^t \int_0^L - {}^t v_{h,t} \cdot U_h \, dx \, dt = \sum_{n=0}^{M-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L - {}^t v_{h,t} \cdot U_h \, dx \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L {}^t v_h \cdot U_{h,t} \, dx \, dt - \sum_{n=0}^{M-1} \int_0^L [{}^t v_{h,n+1} \cdot U_{h,n+1}^- - {}^t v_{h,n} \cdot U_{h,n}^+] \, dx$$

et que d'après le théorème de trace (v_h appartenant à $(H^1(\Omega))^3$) :

$$v_{h,n+1}^- = v_{h,n+1}^+$$

si on note

$$U_{h,0}^- = U(t=0)$$

alors les solutions faibles considérées vérifient :

$$\sum_{n=1}^M \left[\int_{S_n} {}^t v \cdot [A_o \cdot V_{h,t}^+ + A^v \cdot V_{h,x}^- - (K^v \cdot V_{h,x})_{,x}] \, dx \, dt + \int_0^L {}^t v \cdot (U_{h,n}^+ - U_{h,n}^-) \cdot dx \right] =$$

$$\iint_{\Omega} {}^t v \cdot \text{source} \cdot dx \, dt$$

On se propose donc de chercher une solution faible vérifiant sur chaque bande S_n :

$$\left[\begin{array}{l} U \in X_h \\ \int_{S_n} {}^t v \cdot [A_o \cdot V_{h,t} + A^v \cdot V_{h,x} - (K^v \cdot V_{h,x})_{,x}] dx \cdot dt + \int_0^L {}^t v \cdot (U_{h,n}^+ - U_{h,n}^-) \cdot dx = \int_{S_n} {}^t v \cdot \text{source} \cdot dx \cdot dt \end{array} \right. \quad \forall v \in W_h \quad (2-11)$$

2-2-3 Propriété caractéristique de la solution faible

Un des intérêts de la symétrisation du système est que sous cette forme, le second principe de la thermodynamique est vérifié dans un sens faible.

2-2-3-1 Forme faible de l'inégalité de Clausius Duhem

L'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit localement (cf. partie I, § 4-5) :

$$\begin{aligned} & \rho \frac{dS}{dt} + \text{div} \left(\frac{Q}{T} \right) - \frac{\text{source}}{T} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \rho \frac{\partial S}{\partial t} + \rho u \frac{\partial S}{\partial x} + \text{div} \left(\frac{Q}{T} \right) - \frac{\text{source}}{T} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} - S \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) + \text{div} \left(\frac{Q}{T} \right) - \frac{\text{source}}{T} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} + \text{div} \left(\frac{Q}{T} \right) - \frac{\text{source}}{T} \geq 0 \quad \text{car} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Cette inégalité n'a pas de sens si ρ et S sont discontinues en temps. Par contre, elle s'écrit sur $\Omega = [0, t_f] \times [0, L]$ en un sens faible (on a multiplié formellement par une fonction test positive ϕ et intégré par parties ; de plus par choix de la fonction d'entropie on a : $H = -\rho S$ et $Hu = -\rho u S$) :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \phi_t H \, dx dt - \int_0^L [\phi H](t = t_f) \, dx + \int_0^L [\phi H](t = 0) \, dx \\ & + \int_{\Omega} \phi \left[-(Hu)_{,x} + \text{div} \frac{Q}{T} - \frac{\text{source}}{T} \right] dx dt \geq 0 \quad \forall \phi \in H^1(\Omega), \quad \phi \geq 0 \end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L -\phi_{,t} H \, dx \, dt &= \sum_{n=0}^{M-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L -\phi_{,t} H \, dx \, dt \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \phi \cdot H_{,t} \, dx \cdot dt - \sum_{n=0}^{M-1} \int_0^L [\phi_{n+1} \cdot H_{n+1}^- - \phi_n \cdot H_n^+] \, dx \quad \forall \phi \geq 0 \end{aligned}$$

De plus, d'après le théorème de trace (ϕ appartenant à $H^1(\Omega)$) :

$$\phi_{n+1}^- = \phi_{n+1}^+$$

Une formulation faible de l'inégalité de Clausius Duhem sur chaque bande S_n s'écrit alors :

$$\int_{S_n} \left[-H_{,t} - (Hu)_{,x} + \operatorname{div} \left(\frac{Q}{T} \right) - \frac{\text{source}}{T} \right] \phi \cdot dx \, dt + \int_0^L [H^-(t=t_n) - H^+(t=t_n)] \phi \cdot dx \geq 0$$

$$\forall \phi \in H^1(S_n), \phi \geq 0 \quad (2-12)$$

2-2-3-2 Solution discrète et inégalité de Clausius Duhem

Soit V une solution de (2-11) ; alors V vérifie la formulation faible suivante :

$$\forall v \in W_h$$

$$\int_{S_n} {}^t v \cdot [A_o \cdot V_{h,t} + A^v \cdot V_{h,x} - (K^v \cdot V_{h,x})_{,x} - \text{source}] \, dx \cdot dt + \int_0^L {}^t v \cdot (U_{h,n}^+ - U_{h,n}^-) \cdot dx = 0$$

Or l'expression

$$A_o V_{,t} + A^v V_{,x} - (K^v V_{,x})_{,x} - \text{source}$$

multipliée à gauche par ${}^t V$, peut se réécrire (en prenant $U(V) \in X_h$) :

$$\begin{aligned} &{}^t V A_o V_{,t} + {}^t V A^v V_{,x} + {}^t V_{,x} K^v V_{,x} - ({}^t V K^v V_{,x})_{,x} - {}^t V \text{source} \\ &= H_{,t} + (Hu)_{,x} + {}^t V_{,x} K^v V_{,x} - ({}^t V K^v V_{,x})_{,x} - {}^t V \text{source} \end{aligned}$$

car

$$A_0 = U, v$$

$${}^tV = H, U$$

ce qui entraîne

$$H, t = H, U \cdot U, v \cdot v, t$$

De plus, H étant une fonction d'entropie du système d'équation, elle vérifie par définition (cf. partie 1, § 5-6, définition 7) :

$$H, U \cdot F_{1, U} = (Hu), U$$

car Hu est le flux d'entropie associé à la fonction d'entropie H . Donc :

$$(Hu), x = H, U \cdot F_{1, U} \cdot U, x = {}^tVA \cdot A_0 \cdot v, x$$

Ainsi, l'égalité suivante est vérifiée (pour $U(v) \in X_h$) :

$$\begin{aligned} & {}^tVA_0 v, t + {}^tVA^v v, x + {}^tV, x K^v v, x - ({}^tVK^v v, x), x - {}^tV_{source} \\ &= H, t + (Hu), x + {}^tV, x K^v v, x - (Q/T), x + source/T \end{aligned}$$

car

$${}^tV = {}^t(v_1, v_2, -1/T)$$

La solution discrétisée en temps du problème initial vérifie donc (il suffit de poser $v = \phi V$, ce qu'on peut faire sur S_n , car U appartient à X_h , ϕ étant une fonction positive quelconque de $H^1(S_n)$) :

$$\begin{aligned} & \int_{S_n} \left[H, t + (Hu), x + {}^tV, x K^v v, x - \operatorname{div} \left(\frac{Q}{T} \right) + \frac{source}{T} \right] \phi \cdot dx dt \\ & \quad + \int_0^L {}^tV [U^+(t = t_n) - U^-(t = t_n)] \phi \cdot dx = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{S_n} \left[-H, t - (Hu), x + \operatorname{div} \left(\frac{Q}{T} \right) - \frac{source}{T} \right] \phi \cdot dx dt + \int_0^L H, U \cdot [U^-(t = t_n) - U^+(t = t_n)] \phi \cdot dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{S_n} {}^tV_{,x} K^v V_{,x} \phi \cdot dx dt \\
\Leftrightarrow & \int_{S_n} \left[-H_{,t} - (Hu)_{,x} + \operatorname{div} \left(\frac{Q}{T} \right) - \frac{\text{source}}{T} \right] \phi \cdot dx dt + \int_0^L [H^-(t = t_n) - H^+(t = t_n)] \phi \cdot dx \\
&= \int_{S_n} {}^tV_{,x} K^v V_{,x} \phi \cdot dx \cdot dt + \int_0^L [H_{,U} (U^+ - U^-) - (H^+ - H^-)] \phi \cdot dx
\end{aligned}$$

avec

$$H_{,U} = H_{,U} (U^+)$$

Or

$$H_{,U} (U^+ - U^-) \geq H^+ - H^-$$

car H est par hypothèse une fonction convexe (cf partie 2, § 2-1-2). Ainsi, sachant que K^v est une matrice semi définie positive, la solution discrète satisfait toujours l'inégalité de Clausius-Duhem au sens faible défini précédemment (2-12) :

$$\forall \phi \in H^1(S_n), \phi \geq 0$$

$$\int_{S_n} \left[-H_{,t} - (Hu)_{,x} + \operatorname{div} \left(\frac{Q}{T} \right) - \frac{\text{source}}{T} \right] \phi \cdot dx dt + \int_0^L [H^-(t = t_n) - H^+(t = t_n)] \phi \cdot dx \geq 0$$

(il faut noter que toute solution des équations de Navier Stokes satisfait implicitement l'inégalité de Clausius Duhem; cette propriété fondamentale est donc conservée par la solution discrète en un sens faible).

Remarque : notons que la fonction ϕ varie de façon quelconque dans $H_1(S_n)$ tant que la discrétisation en espace n'est pas faite. Donc la discrétisation en temps (et spécialement le choix des éléments finis espace-temps) n'affaiblit pas la formulation de l'inégalité de Clausius Duhem obtenue. Par contre dès que l'on choisit des fonctions de base appartenant à Q_1 (ce qui est fait en pratique), alors la formulation de l'inégalité de Clausius Duhem est à considérer au sens très faible où $\phi = 1$.

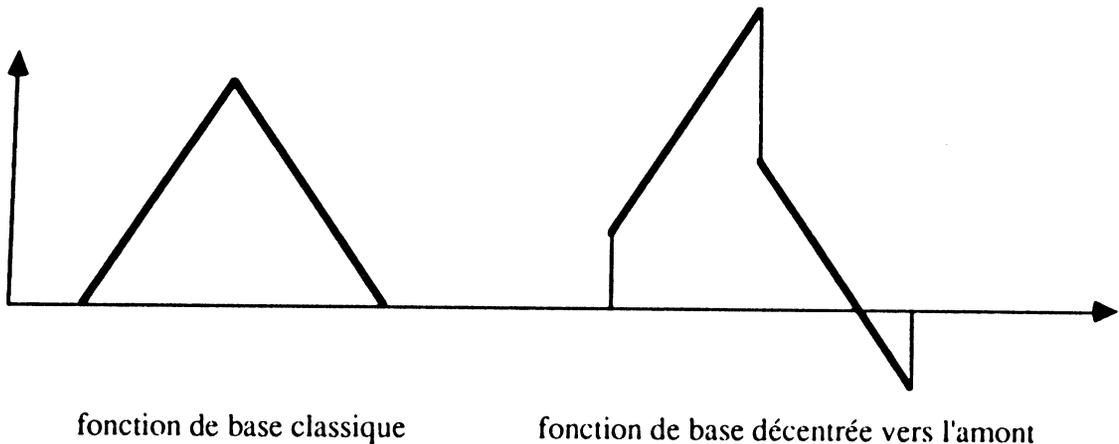
2-3 Discrétisation par une méthode d'éléments finis

2-3-1 Terme d'upwind

La méthode d'éléments finis de Galerkin a le défaut d'être instable lorsque les ondes solutions du système d'équations sont discontinues. Or les solutions des équations de la dynamique des gaz peuvent présenter des discontinuités. Afin d'y remédier, on met en œuvre une formulation de type Petrov-Galerkin utilisant une notion de décentrage ou upwind (Hughes [1] à [6]).

La notion de décentrage en éléments finis est un peu moins immédiate qu'en différences finies. En effet, le décentrage se fait **en modifiant** les fonctions tests ou fonctions de base v de la formulation variationnelle.

Exemple : décentrage en amont (on va chercher l'information "vers la gauche")



On cherche à résoudre le système (2-9) :

$$A_0 V_{,t} + A^V V_{,x} - (K^V V_{,x})_{,x} = \text{source}$$

sur chaque tranche $S_n = [t_n ; t_{n+1}] \times [0, L]$. Les termes de transport sont :

$$A_0 V_{,t} + A^V V_{,x}$$

Ce sont les matrices A_0 et A^V qui donnent les "directions" de décentrage. Johnson [1] propose de modifier les fonctions de base de la façon suivante :

$$v \quad \text{--->} \quad v + \tau (A_0 v_{,t} + A^V v_{,x})$$

où τ , matrice dite d'upwind, "module" le décentrage.

La formulation variationnelle du problème (2-9) s'écrit alors :

Trouver V appartenant à X_h tel que :

$$\left[\int_{S_n} (v + \tau.(A_o v_{,t} + A^v v_{,x})).(A_o V_{,t} + A^v V_{,x} - (K^v V_{,x})_{,x} - source).dx dt \right. \\ \left. + \int_0^L (v + \tau.(A_o v_{,t} + A^v v_{,x})).(U_{h,n}^+ - U_{h,n}^-).dx = 0 \quad \forall v \in W_h \right.$$

Toute la difficulté de ce décentrage réside en la détermination de la matrice d'upwind τ . Pour cela on utilise un critère d'optimalité du décentrage pour une équation de convection-diffusion scalaire. Encore faut-il se placer dans une situation analogue à celle d'une équation scalaire.

On procède en trois étapes :

- 1 - découplage du système d'équations
- 2 - décentrage optimal pour chaque équation
- 3 - conclusion : calcul de la matrice d'upwind

2-3-1-1 Découplage du système

Le but est de découpler le plus significativement possible les trois équations du système, afin de pouvoir les considérer comme trois équations scalaires indépendantes.

Soit P la matrice orthogonale constituée des vecteurs propres de

$$A'' = (A_o^{-1/2}) A^v (A_o^{-1/2}).$$

Définissons alors la matrice

$$E = (A_o^{-1/2})P$$

on a

$${}^t E A_o E = Id$$

et

$${}^t E A^v E = L \quad \text{avec } L \text{ matrice diagonale } (l_i)_{i=1,2,3}$$

Ainsi, si on pose

$$Ey = w \text{ et } Ez = v$$

alors, en considérant le système linéarisé (A_0 , A^v , K^v sont supposées constantes) :

$$\begin{aligned} & [A_0 w_{,t} + A^v w_{,x} - (K^v w_{,x})_{,x}] (v + \tau (A_0 v_{,t} + A^v v_{,x})) \\ &= {}^t E^{-1} [y_{,t} + L y_{,x} - ({}^t E K^v E y_{,x})_{,x}] E (z + E^{-1} \tau {}^t E^{-1} (A_0 z_{,t} + L z_{,x})) \\ &= [y_{,t} + L y_{,x} - (E {}^t K^v E y_{,x})_{,x}] (z + E^{-1} \tau {}^t E^{-1} (A_0 z_{,t} + L z_{,x})) \end{aligned}$$

Le système n'est alors découplé qu'en partie. En effet ${}^t E^{-1} K^v E$ n'est pas en général, une matrice diagonale. Mais on ne sait pas mieux faire. On découple donc artificiellement le système (afin de déterminer l'upwind optimal) en réduisant ${}^t E K^v E$ à sa diagonale.

Notons donc :

$$K_i = {}^t e_i K^v e_i$$

où $e_i = i^{\text{ième}}$ colonne de E , et

$$LK = (K_i) = \text{matrice diagonale des } K_i$$

2-3-1-2 Décentrage optimal de chacune des équations

On peut montrer (Hughes [3]) qu'une équation de convection diffusion scalaire

$$\lambda u_{,x} - k u_{,xx} = \text{source}$$

peut être résolue d'une façon optimale (la solution discrète aux nœuds étant alors la solution exacte) en utilisant un schéma éléments finis standard mais en modifiant les fonctions de base de la façon suivante :

$$v \text{ -----> } v + \tau \lambda v_{,x}$$

avec

$$\tau = (1/2) h f(\alpha) / |\lambda|$$

et

$$\alpha = (1/2) |\lambda| h / k$$

$$h = \text{pas d'espace}$$

$$f(x) = \coth(x) - 1/x$$

α est le nombre de Peclet associé à l'équation considérée.

Dans notre système d'équations découplées la $i^{\text{ème}}$ équation de convection diffusion est de la forme :

$$u_{,t} + l_i u_{,x} - k_i u_{,xx} = \text{source}$$

car le temps est considéré comme une dimension spatiale. On propose donc le décentrage suivant :

$$v \longrightarrow v + \tau_{\text{opt}} (v_{,t} + l_i v_{,x})$$

avec

$$\tau_{\text{opt}} = h f(\alpha_i) / (1 + l_i^2)^{1/2}$$

(on a pris $(1 + l_i^2)^{1/2}$ à la place de λ dans la formule standard car c'est la norme de la vitesse "espace-temps") et

$$\alpha_i = (1 + l_i^2)^{1/2} h / (2 k_i)$$

$$f(x) = \coth(x) - 1/x$$

Remarque : $f(x)$ tend vers $x/3$ quand x tend vers 0 et tend vers 1 lorsque x tend vers l'infini.

Notons

$$T = \text{diag}(\tau_{\text{opt}}) = h (\text{Id} + L^2)^{-1/2} \cdot X$$

où

$$L = \text{diag}(l_i) \text{ et } X = \text{diag}(f(\alpha_i))$$

T est la matrice diagonale des τ_{opt} , chacun des τ_{opt} étant associé à une des équations découplées.

2-3-1-3 Calcul de la matrice τ

On tient à définir la matrice τ de façon à ce que le décentrage "optimal" pour chacune des trois équations, soit :

$$E^{-1} \tau E^{-1} = T$$

c'est à dire

$$E^{-1} \tau E^{-1} = h (\text{Id} + L^2)^{-1/2} \cdot X$$

Donc on choisit :

$$\tau = h E (\text{Id} + L^2)^{-1/2} \cdot X \cdot E \quad (2-13)$$

Remarque : on est ramené à résoudre chaque fois que l'on cherche τ (c'est à dire en chaque point de Gauss si on veut être précis, sur chaque élément sinon) un problème de valeurs propres (de taille 3 en dimension 1 et de taille 4 en dimension 2). On ne peut l'éviter comme c'est le cas lorsqu'il n'y a pas de diffusion.

En effet :

sachant que

$$\begin{aligned} (\text{Id} + L^2)^{-1/2} &= [{}^t P (\text{Id} + A^2) P]^{-1/2} \\ &= {}^t P (\text{Id} + A^2)^{-1/2} P \end{aligned}$$

car

$$({}^t P (\text{Id} + A^2) P)^{1/2} = {}^t P (\text{Id} + A^2)^{1/2} P$$

on déduit que

$$\tau = h A_0^{-1/2} P X {}^t P (\text{Id} + A^2)^{-1/2} A_0^{-1/2}$$

Ainsi si P et X commutent alors on peut calculer τ sans résoudre de problème de valeurs propres. C'est le cas si $K^V = 0$ ($X = \text{Id}$) mais pas si $K^V \neq 0$.

2-3-2 Terme de capture de choc

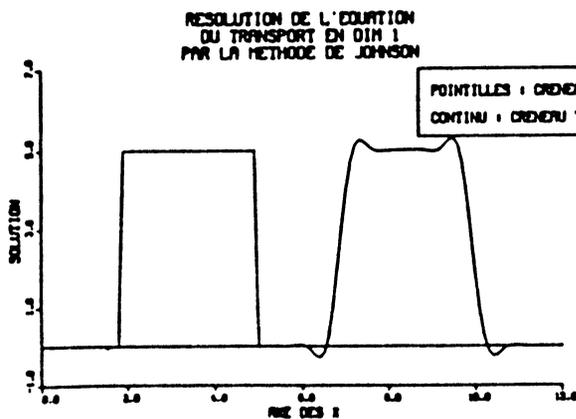
Lorsqu'on modélise par la méthode proposée par Johnson [1] (c'est à dire avec des éléments finis espace-temps et un terme d'upwind), l'équation scalaire du transport

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

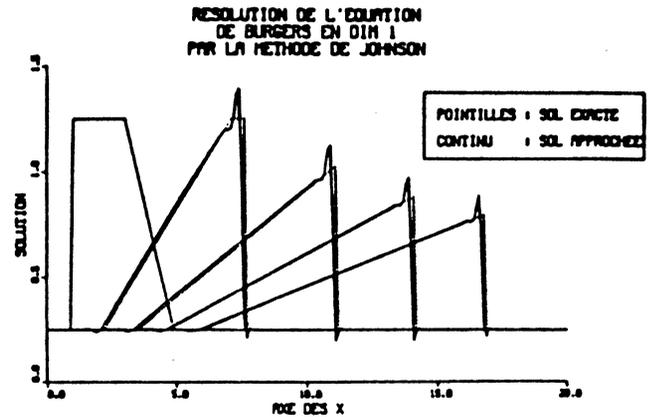
ou bien l'équation de Burgers

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

on note la présence d'oscillations si la solution présente des discontinuités ou ondes de choc.



transport d'un créneau
(méthode de Johnson)



solutions de l'équation de Burgers
(méthode de Johnson)

Afin d'éliminer ces oscillations, Johnson [1] propose d'ajouter un terme de capture de choc. Le but est d'ajouter de la diffusion lorsque le résiduel (c'est à dire $|u_{,t} + u_{,x}|$ pour l'équation scalaire du transport et $|A_0 V_{,t} + A^V V_{,x} - (K^V V_{,x})_{,x} - \text{source}|$ pour les équations de Navier-Stokes) de l'équation est important. Cela équivaut donc à ajouter de la viscosité artificielle dans les zones où l'équation est "mal résolue". Ce terme à l'intérêt d'être conséquent dans ces zones où le plus souvent la solution exacte est discontinue et où les gradients en conséquence sont importants et d'être nul ou négligeable dans les zones où la solution est régulière.

2-3-2-1 Capture de choc sur les variables entropiques

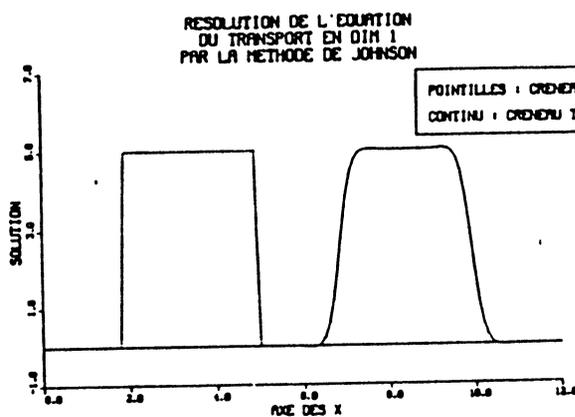
Le terme de capture de choc de Johnson [1] apparaît dans la formulation variationnelle espace-temps sous la forme

$$\delta \int_{S_n} \frac{|\text{résiduel}|}{\varepsilon + |\text{grad}(V)|} ({}^t v_{,t} \cdot V_{,t} + {}^t v_{,x} \cdot V_{,x}) dx dt$$

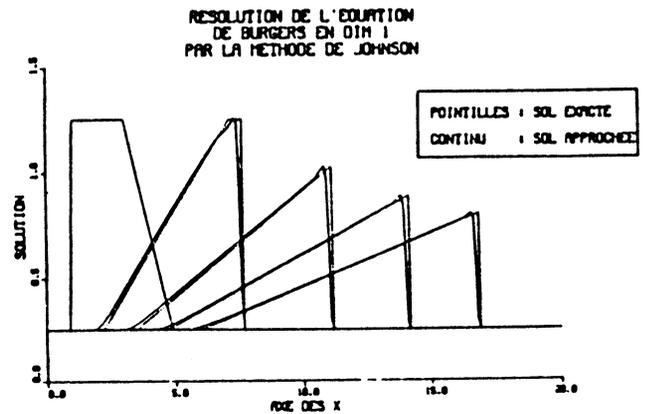
où δ est un terme à ajuster (de l'ordre de $h/10$, h étant le pas d'espace), ε est un réel strictement positif dont la présence assure une stabilité numérique et

$$\text{Grad}(V) = {}^t(V_{,t}, V_{,x})$$

Comme l'attestent les figures qui suivent, la présence de ce terme élimine de façon satisfaisante les oscillations mises en évidence précédemment sans dégrader la solution dans les zones où elle est régulière.



transport d'un créneau
(Johnson avec capture de choc)



solutions de l'équation de Burgers
(Johnson avec capture de choc)

Dans le cas de la résolution du système d'équations (11) le terme de capture de choc proposé par Johnson [1] est de la forme :

$$\delta \int_{S_n} \frac{|A_0 V_{,t} + A^V V_{,x} - Q_{,x} - \text{source}|}{\epsilon + |\text{grad}(V)|} ({}^t v_{,t} V_{,t} + {}^t v_{,x} V_{,x}) dx dt$$

où on a posé

$$Q = K^V \cdot V_{,x}$$

2-3-2-2 Capture de choc sur les variables physiques

On peut améliorer cette capture de choc, en s'appuyant sur l'idée que les chocs que l'on veut capturer sont les chocs des variables physiques ; ainsi, il est souhaitable que le terme de capture de choc soit important dans les régions où les gradients des variables physiques sont importants.

Afin de mieux prendre en compte les gradients des variables physiques, on propose le terme de capture de choc suivant :

$$\delta \int_{S_n} \frac{|A_0 V_{,t} + A^V V_{,x} - Q_{,x} - \text{source}|}{\varepsilon + |\text{grad}(V)|} [v_{,t} \cdot M \cdot V_{,t} + v_{,x} \cdot M \cdot V_{,x}] dx dt \quad (2-14)$$

où M est une matrice que l'on choisit généralement égale à A_0 . En effet si on note V les variables entropiques et U les variables conservatives alors :

$$M \cdot \text{grad}(V) = \text{grad}(U)$$

Ainsi le terme de capture de choc est proportionnel au gradient des variables conservatives (qui sont des variables proches des variables physiques). Cette modification améliore de façon substantielle la capture de choc (moins de diffusion dans les zones régulières et plus de capture dans les zones de discontinuités).

On présente au cours du paragraphe 5 de cette partie, l'exemple du tube à choc traité avec les deux termes de capture de choc. Cet exemple met clairement en évidence l'intérêt de la capture de choc sur les variables physiques.

2-3-3 Formulation mixte

Une fois l'upwind mis en œuvre, la formulation faible du problème est telle qu'apparaissent nécessairement des termes d'ordre 2 (qui sont soit $(K^V V_{,x})_{,x}$ si on n'effectue pas d'intégration par parties en espace, soit $(v + \tau \cdot (A_0 v_{,t} + A^V v_{,x}))_{,x}$). Si on désire approximer les espaces X_h et W_h par des fonctions polynômiales de degré 1, on ne peut avoir une formulation variationnelle standard dès que l'on a un terme d'ordre 2.

On réalise donc une formulation mixte classique. Hughes[5] a montré que pour une formulation du problème de Stokes avec upwind, la condition inf-sup était vérifiée (pour une formulation P1/P1 par exemple).

Dans la suite on pose donc

$$Q = K^V V_{,x}$$

où Q est le flux de chaleur.

On cherche alors à résoudre deux systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1 :

trouver (V, Q) tel que :

$$\begin{cases} A_0 V_{,1} + A^{\nu} V_{,x} - Q_{,x} = 0 \\ Q = K^{\nu} V_{,x} \end{cases} \quad (2-15)$$

On présente au paragraphe 2-3-5, la formulation variationnelle associée à ce problème.

Remarque : après symétrisation, l'égalité vectorielle $Q = K^{\nu} V_{,x}$ est en fait une équation aux dérivées partielles scalaire.

Le système (2-15) est donc un système de 4 équations à 4 inconnues v_1, v_2, v_3 et Q .

2-3-4 Conditions aux limites

On définit les différentes frontières de $S_n = [t_n ; t_{n+1}] \times [0 ; L]$ comme suit :

$$\Gamma_{0,n} = [t_n, t_{n+1}] \times \{0\} \cup [t_n, t_{n+1}] \times \{L\}$$

$$\Gamma_{1,n} = \{t_n\} \times]0 ; L[$$

$$\Gamma_{2,n} = \{t_{n+1}\} \times]0 ; L[$$

Les conditions aux limites ne sont à définir que sur $\Gamma_{0,n}$ puisque $\Gamma_{1,n}$ et $\Gamma_{2,n}$ sont des frontières entre des éléments finis espace-temps (exceptée $\Gamma_{1,0}$ où la condition initiale apparaît comme une condition de Dirichlet). Au vu des problèmes physiques traités, on envisage comme conditions aux limites sur $\Gamma_{0,n}$: imperméabilité + adiabaticité

On définit alors les espaces suivant :

Y_h sous espace de

$$\{U(V) \in (L^2(\Omega))^3, A^{\nu} V_{,x} \in (L^2(\Omega))^3, K^{\nu} V_{,x} \in (L^2(\Omega))^3, U|_{S_n} \in (H_1(S_n))^3\}$$

$$W_0^n = \{v \in (H_1(S_n))^3, U = U(v) \text{ et } U \in Y_h\}$$

$$W_1^n = \left\{ p \in (H^1(S_n))^3, \forall v \in W_0^n, \int_{\Gamma_{0,n}} {}^t p \cdot v \, dt = 0 \right\}$$

Remarque : W_1^n est sous-espace fermé de $(H_1(S_n))^3$.

2-3-5 Formulation variationnelle

En récapitulant ce qui a été énoncé au cours de ce paragraphe, le problème à résoudre est de trouver V tel que :

$$A_0 V_{,t} + A^v V_{,x} - (K^v V_{,x})_{,x} = \text{source} \quad \text{sur } [0, L] \times [0, t_f]$$

$$V(t=0) = V_0$$

$$K^v V_{,x} = 0 \quad \text{et } u = 0 \text{ (vitesse nulle) sur } \Gamma_{0,n} \quad n = 1, M-1$$

et la formulation variationnelle associée (2-16) s'écrit :

Trouver (V, Q) tel que :

$$V - V_0 \in W_0^n$$

$$Q \in W_1^n$$

$$\left[\begin{aligned} & \int_{S_n} {}^t (v + \tau (A_0 v_{,t} + A^v v_{,x})) (A_0 V_{,t} + A^v V_{,x} - Q_{,x}) \, dx dt \\ & + \delta \int_{S_n} \frac{|A_0 V_{,t} + A^v V_{,x} - Q_{,x} - \text{source}|}{\varepsilon + |\text{grad}(V)|} [{}^t v_{,t} \cdot M V_{,t} + {}^t v_{,x} \cdot M V_{,x}] \, dx dt + \\ & \int_0^L {}^t (v + \tau (A_0 v_{,t} + A^v v_{,x})) \cdot (U^+ - U^-)_{t=t_n} \, dx = \int_{S_n} {}^t (v + \tau (A_0 v_{,t} + A^v v_{,x})) \cdot \text{source} \, dx dt \quad \forall v \in W_0^n \\ & \int_{S_n} {}^t p \cdot (Q - K^v V_{,x}) \, dx dt = 0 \quad \forall p \in W_1^n \end{aligned} \right.$$

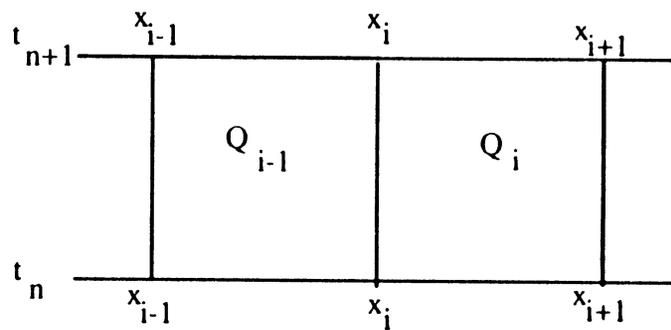
où $\text{grad}(V) = {}^t(V, t, V, x)$.

2-4 Implémentation numérique

2-4-1 Approximation des espaces de discrétisation

Considérons la discrétisation en espace suivante :

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{n\text{coor}} = L$$



On note N_{2i-1} le nœud (x_i, t_n) et N_{2i} le nœud (x_i, t_{n+1}) .

L'utilisation d'éléments finis espace-temps discontinus en temps, signifie que la solution discrète cherchée est de la forme :

$$V | [t_n; t_{n+1}] \times [x_i; x_{i+1}] \in Q_k$$

où Q_k est l'ensemble des polynômes de degré $\leq k$ en x et en t .

$$V \text{ continue en } x_i, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, N$$

Par contre aucune condition de continuité n'est imposée en $t = t_n$. La solution discrète est donc généralement discontinue en $t = t_n$.

On approxime les deux espaces W_0^n et W_1^n par des polynômes Q_1 , à savoir :

$$\phi_i, i = 1, 2, \dots, n\text{coor avec}$$

$$\phi_{2i-1}(x, t) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-1})(t - t_{n+1})}{(x_i - x_{i-1})(t_n - t_{n+1})} & \text{sur } Q_{i-1} \\ \frac{(x - x_{i+1})(t - t_{n+1})}{(x_i - x_{i+1})(t_n - t_{n+1})} & \text{sur } Q_i \end{cases}$$

$$\phi_{2i}(x, t) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-1})(t - t_n)}{(x_i - x_{i-1})(t_{n+1} - t_n)} & \text{sur } Q_{i-1} \\ \frac{(x - x_{i+1})(t - t_n)}{(x_i - x_{i+1})(t_{n+1} - t_n)} & \text{sur } Q_i \end{cases}$$

Remarque : ϕ_1 et ϕ_2 ne sont définies que sur Q_1 et $\phi_{2ncoor-1}$ et ϕ_{2ncoor} ne sont définies que sur $Q_{ncoor-1}$.

On définit alors les fonctions v_i et p_i comme suit :

$$v_{3i-2} = {}^t(\phi_i, 0, 0) \quad i = 1, 2, \dots, ncoor$$

$$v_{3i-1} = {}^t(0, \phi_i, 0) \quad i = 1, 2, \dots, ncoor$$

$$v_{3i} = {}^t(0, 0, \phi_i) \quad i = 1, 2, \dots, ncoor$$

$$p_i = {}^t(0, 0, \phi_i) \quad i = 1, 2, \dots, ncoor$$

on peut alors écrire

$$V = \sum_{i=1}^{6ncoor} V_i v_i; \quad V_{,x} = \sum_{i=1}^{6ncoor} V_i v_{i,x}; \quad V_{,t} = \sum_{i=1}^{6ncoor} V_i v_{i,t}$$

$$\text{et } Q = \sum_{i=1}^{2ncoor} Q_i p_i; \quad Q_{,x} = \sum_{i=1}^{2ncoor} Q_i p_{i,x}; \quad Q_{,t} = \sum_{i=1}^{2ncoor} Q_i p_{i,t}$$

Traduction des conditions aux limites :

-Imperméabilité : on impose la vitesse nulle sur $\Gamma_{0,n}$. Pour cela on supprime 4 degrés de liberté en vitesse en posant :

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_{2n\text{coor}-1} = 0 \text{ et } u_{2n\text{coor}} = 0$$

-Adiabaticité : on impose le flux de chaleur nul sur $\Gamma_{o,n}$. Pour cela, on impose un flux nul aux 4 nœuds $N_1, N_2, N_{2n\text{coor}-1}$ et $N_{2n\text{coor}}$, et on supprime donc 4 degrés de liberté en posant :

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, Q_{2n\text{coor}-1} = 0 \text{ et } Q_{2n\text{coor}} = 0$$

Ces deux conditions aux limites sont traduites à travers les espaces variationnels (bien que l'adiabaticité soit une condition de Neumann pour une formulation standard).

2-4-2 Résolution du système non linéaire

Rappel : les définitions des matrices A_o, A^v, K^v sont données paragraphe 2-1-2 (p.53), celle du vecteur Q paragraphe 2-3-3 (p.70).

On note :

$$K1_{i,j} = \int_{S_n} {}^t(v_j + \tau.(A_o v_{j,t} + A^v v_{j,x})).(A_o v_{i,t} + A^v v_{i,x}).dx dt$$

$$+ \delta \int_{S_n} \frac{|A_o v_{i,t} + A^v v_{i,x} - Q_{i,x} - \text{source}|}{\epsilon + |\text{grad}(V)|} |{}^t v_{j,t} \cdot M v_{i,t} + {}^t v_{j,x} \cdot M v_{i,x}| \quad i, j = 1, 6n\text{coor}$$

$$K2_{j,i} = \int_0^L {}^t(v_j + \tau.(A_o v_{j,t} + A^v v_{j,x})).(A_o v_i) dx \quad i, j = 1, 6n\text{coor}$$

$$K3_{j,i} = \int_{S_n} - {}^t p_j \cdot K^v v_{i,x} dx dt \quad j = 1, 2n\text{coor}, i = 1, 6n\text{coor}$$

$$P1_{i,i} = - \int_{S_n} {}^t(v_j + \tau.(A_o v_{j,t} + A^v v_{j,x})).p_{i,x} dx dt \quad j = 1, 6n\text{coor}, i = 1, 2n\text{coor}$$

$$P2_{j,i} = \int_{S_n} {}^t p_i p_j dx dt \quad i, j = 1, 6n\text{coor}$$

$$S1_j = \int_{S_n} (v_j + \tau (A_o v_{j,t} + A^v v_{j,x})) \cdot \text{source} \cdot dx \cdot dt + \int_0^L (v_j + \tau (A_o v_{j,t} + A^v v_{j,x})) \cdot U_n^- \cdot dx \quad j = 1, 6n\text{coor}$$

Si on note :

K1 la matrice (6ncoor, 6ncoor) des K1_{j,i}

K2 la matrice (6ncoor, 6ncoor) des K2_{j,i}

K3 la matrice (2ncoor, 6ncoor) des K3_{j,i}

P1 la matrice (6ncoor, 2ncoor) des P1_{j,i}

P2 la matrice (2ncoor, 2ncoor) des P2_{j,i}

S1 le vecteur (6ncoor) des S1_j

V le vecteur (6ncoor) des V_j

et

Q vecteur (2ncoor) des Q_j

le système issu de la formulation variationnelle (2-16) s'écrit :

Trouver V et Q tels que :

$$[K1 + K2] V + P1 \cdot Q = S1$$

$$[\quad K3 \quad] V + P2 \cdot Q = 0$$

Ce système est fortement **non linéaire** car les matrices K1, K2, K3 et P1 et le vecteur S1 dépendent des matrices A_o, A^v et K^v et donc de la variables V. La méthode choisie pour résoudre ce système non linéaire est basée sur la méthode de Newton (pour le terme K2.V la matrice dérivée de K2 étant aisée à déterminer) et la méthode des itérations successives (pour tous les autres termes).

On obtient un schéma itératif qui s'écrit à la k^{ème} itération :

$$[K1^k + K2^k] V^{k+1} + P1^k Q^{k+1} = S1^k - K2^k V^k + K2^k V^k \tag{2-18}$$

$$[\quad K3^k \quad] V^{k+1} + P2^k Q^{k+1} = 0$$

2-4-3 Méthode d'intégration utilisée

Sur chaque quadrangle Q_j , pour chaque terme de la discrétisation, on réalise une intégration numérique sur le quadrangle de référence. Pour cela on utilise une formule de quadrature à 4 points, les 4 points choisis étant les points de Gauss.

2-4-4 Choix des pas d'espace et de temps

Le pas d'espace est choisi en fonction du problème traité et de la précision demandée par l'utilisateur. Le pas de temps est lui fonction du pas d'espace et de la vitesse du fluide. En théorie la méthode est stable quelque soit la C.F.L choisie. Cependant si le pas de temps est trop important le système non linéaire à résoudre ne converge pas numériquement ou converge trop lentement. On est donc ramené à choisir le pas de temps en fonction du nombre d'itérations espéré lors de la résolution du système non linéaire.

Voici à titre d'exemple en fonction des CFL les résultats qui ont pu être obtenues lors de la résolution de différents problèmes :

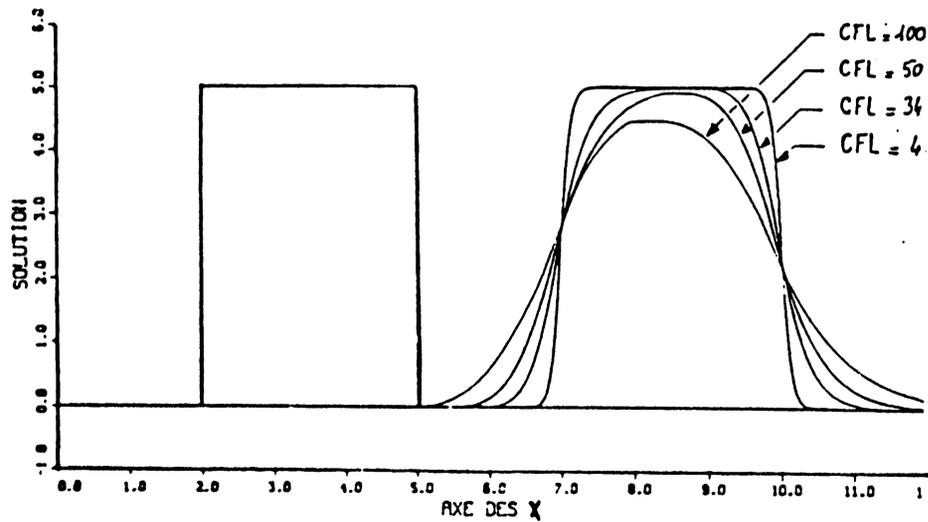
- Equation de transport scalaire

Il s'agit ici d'une équation linéaire; notons cependant que le système à résoudre à chaque pas de temps est non linéaire du fait de la présence des termes d'upwind et de capture de choc.

$$u_{,t} + u_{,x} = 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

On présente ci-après les résultats obtenus avec différentes CFL lors du transport d'une solution raide.



transport d'un créneau avec différentes C.F.L.

- Equations d'Euler

Dans le cas du système des équations d'Euler, les résultats présentés paragraphe 5 ont été obtenus avec une CFL égale à 1.

- Problème général (2-9)

Les calculs ont été réalisés (voir paragraphe 5) avec une CFL comprise entre 0.1 et 1. On ne peut dans ce cas augmenter la CFL, non pas à cause d'une dégradation de la qualité des résultats par diffusion numérique mais à cause de problèmes de convergence du système non linéaire à résoudre.

2-4-5 Cas unidimensionnel radial

Le traitement du cas radial, très utilisé pour les applications numériques (cas d'un arc électrique dans un cylindre infini), ne présente pas de difficultés particulières. Le système d'équations à résoudre s'écrit :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial r} = -\frac{1}{r} \rho u \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (P + \rho u^2)}{\partial r} = -\frac{1}{r} \rho u^2 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (E + P)u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k(T) \frac{\partial T}{\partial r}) - \frac{1}{r} (E + P)u + \text{source} \end{array} \right.$$

ou encore

$$\frac{\partial F_0(U)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r.Q) + F$$

si on garde les mêmes notations que précédemment pour F_0 , F_1 et Q et si on note :

$$F = \left(-\frac{1}{r} \rho u, -\frac{1}{r} \rho u^2, -\frac{1}{r} (E + P)u + \text{source} \right)$$

Ce système se symétrise comme le système 1-D axial, et on le résout exactement de la même façon en tenant compte du terme source F au cours des itérations.

Traitement de la condition à la limite sur l'axe : sur l'axe, on impose comme condition de symétrie :

$$u = 0 \quad \text{et} \quad Q = 0$$

L'expression du second membre F ne pose alors pas de problèmes particuliers. En effet, il n'est pas nécessaire de l'exprimer sur l'axe mais simplement aux points d'intégration de Gauss. Or, en ces points de Gauss, le second membre F est défini.

3 - Méthode à pas fractionnaires en 1-D

3-1 Introduction

3-1-1 Système d'équations

Comme au paragraphe précédent on se propose de résoudre les équations de la dynamique des gaz pour un gaz compressible, conducteur de la chaleur et non visqueux.

On doit donc résoudre le système d'équations (1-1) :

$$F_0(U)_{,t} + F_1(U)_{,x} - \text{div}(k(T) G(U)_{,x}) = \text{source} \quad (3-1)$$

avec

$$\begin{aligned} U &= {}^t(\rho, u, e) \\ F_0(U) &= {}^t(\rho, \rho u, E) \\ F_1(U) &= {}^t(\rho u, P + \rho u^2, (P + E)u) \\ G(U) &= {}^t(0, 0, T) \end{aligned}$$

Notations :

Soit t_f un réel strictement positif. On cherche à résoudre le système (3-1) durant l'intervalle de temps $[0, t_f]$.

Soit L un réel strictement positif et

$$0 = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{N-1/2} < x_{N+1/2} = L$$

une discrétisation de $[0, L]$ ainsi définie :

$$x_{i+1/2} = i h \quad \text{pour } i \text{ compris entre } 0 \text{ et } N$$

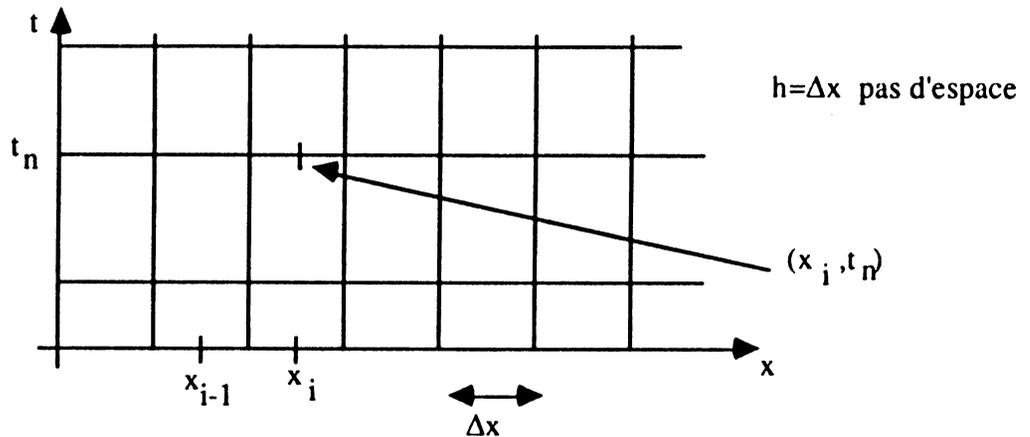
On note :

$$x_i = (i - 1/2) h \quad \text{pour } i \text{ compris entre } 1 \text{ et } N$$

$$I_i =]x_{i-1/2} ; x_{i+1/2}[\quad \text{pour } i \text{ compris entre } 1 \text{ et } N$$

et U_i^n est l'approximation recherchée de $U(x_i, t_n)$ au point x_i et à un temps t_n appartenant à

l'intervalle d'étude $[0, t_f]$.



Dans la suite de ce chapitre, on se propose de déterminer une approximation de la solution du système (3-1) en découplant les deux phénomènes physiques de la convection et de la diffusion.

3-1-2 Découplage des phénomènes physiques

La solution U_i^n étant supposée connue, on cherche à déterminer une approximation de la solution au temps $t_{n+1}=t_n+\Delta t$ (Δt étant à déterminer).

On décompose la résolution de ce problème en deux pas fractionnaires.

Dans un **premier pas fractionnaire** on cherche à résoudre les équations d'Euler qui modélisent la convection (c'est à dire les phénomènes de transport) du gaz. On nomme ce pas fractionnaire, **pas de convection**. On utilise pour cela une méthode de volumes finis espace-temps basée sur le schéma de Van Leer.

Dans le cas de maillages fixes, ce schéma est équivalent à un schéma d'Euler explicite en temps avec une formulation de type volumes finis en espace (schéma de Van Leer).

Le système d'équations s'écrit :

$$\frac{\partial F_0(U)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} = 0 \quad (3-2)$$

et le schéma en temps est donc de la forme :

$$\frac{F_0(U^*) - F_0(U^n)}{\Delta t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} = 0$$

soit encore en écrivant chacune des trois équations du système (3-2) :

$$\frac{\rho^* - \rho^n}{\Delta t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{(\rho u)^* - (\rho u)^n}{\Delta t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{E^* - E^n}{\Delta t} + \frac{\partial (u (E + P))}{\partial x} = 0 \quad (3-3)$$

La résolution du pas de convection permet de déterminer un état intermédiaire U^* . Grâce à la loi d'état on détermine une température T_j^* sur chaque maille I_j . On détermine alors les termes $C_v(T^*)$, $k(T^*)$ et $\text{source}(T^*, P^*)$ au centre de chaque maille de la discrétisation en espace.

Dans un **second pas fractionnaire** on cherche à résoudre l'équation de conservation de l'énergie lorsqu'on néglige les phénomènes de transport (car ceux-ci ont été traités lors de la résolution du premier pas fractionnaire). Ce pas fractionnaire est appelé **pas de diffusion**.

L'équation d'énergie prenant en compte la diffusion par dissipation de la chaleur et négligeant les termes de transport, s'écrit :

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \text{div}(k(T) \cdot \text{grad}(T)) = \text{source} \quad (3-4)$$

où l'énergie totale E est la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique :

$$E = \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right)$$

Par hypothèse, durant le pas fractionnaire de diffusion la masse volumique $\rho^* = \rho^{n+1}$ et la vitesse $u^* = u^{n+1}$ sont supposés constantes.

Ainsi, dans le contexte du pas fractionnaire de diffusion la dérivée de l'énergie totale E par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho \frac{\partial e}{\partial t}$$

L'équation devant être résolue pendant ce pas fractionnaire est donc la suivante :

$$\rho e_{,t} - \text{div}[k(T).\text{grad}(T)] = \text{source } (T, P) \quad (3-5)$$

En utilisant un schéma semi explicite en temps, en explicitant k , source et C_v (nécessaire pour le calcul de l'énergie interne e) cette équation devient (la discrétisation en espace n'étant pas encore effectuée) :

$$\rho^{n+1} \frac{e^{n+1} - e^*}{\Delta t} - \frac{\partial \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right]}{\partial x} = \text{source} \quad (3-6)$$

Avec une discrétisation en espace standard, on peut alors déterminer la température T^{n+1} au centre de chaque maille et, grâce à la loi d'état la pression P^{n+1} . Les variables U_i^{n+1} sont donc déterminées pour $i = 1$ à N . Dans les paragraphes qui suivent on propose une description plus approfondie de ces deux pas fractionnaires ainsi qu'un moyen de déterminer Δt à chaque temps t_n .

Remarque :

On peut donner l'ordre en temps du schéma proposé ci-dessus; en additionnant membre à membre les équations (3-3) et (3-6) on obtient :

$$\frac{\rho^{n+1} (e^{n+1} - e^* + e^*) - \rho^n e^n}{\Delta t} + \frac{\left[\rho \frac{u^2}{2} \right]^{n+1} - \left[\rho \frac{u^2}{2} \right]^n}{\Delta t} + \frac{\partial [u (E+P)]}{\partial x} - \frac{\partial \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right]}{\partial x} = \text{source}$$

c'est à dire

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} + \frac{\partial (u (E+P))}{\partial x} - \frac{\partial \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right]}{\partial x} = \text{source}$$

Le schéma en temps réalisé sur le système général (3-1) est donc de la forme :

$$\frac{F_0(U^{n+1}) - F_0(U^n)}{\Delta t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} - \frac{\partial \left(k \frac{\partial G(U)}{\partial x} \right)}{\partial x} = \text{source}$$

C'est un schéma d'ordre 1 en temps.

Remarque : comme on choisit d'explicitier les coefficients $k(T)$, $C_v(T)$ et $source(T, P)$, le schéma est au plus semi-implicite en espace. Certaines conditions de stabilité devront donc être vérifiées.

3-2 Pas convectif : schéma de Van Leer

3-2-1 Décomposition du problème et notations

Afin d'obtenir un schéma précis tout en ayant un pas d'espace h raisonnable, on propose ici un schéma de Godounov d'ordre 2, à savoir le schéma de Van Leer qui est un schéma explicite, quasi d'ordre 2 en espace (c'est à dire, lorsque la solution est régulière, un schéma dont la consistance est d'ordre 2 si le maillage est régulier et d'ordre 1 sinon) et d'ordre 1 en temps (il est également possible d'obtenir un schéma d'ordre 2 en temps). Le schéma de Van Leer utilisé est basé sur une approximation P_1 discontinue par maille (Vila [1]).

On cherche une solution approchée U_h au temps t_n dans l'espace de discrétisation V_h^1 ainsi défini :

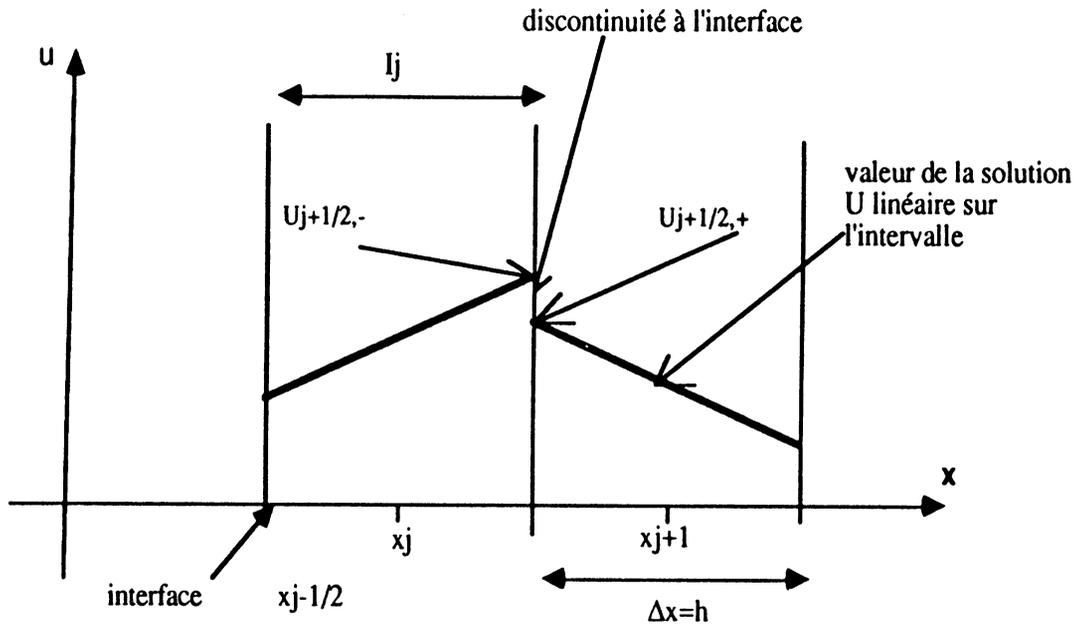
$$V_h^1 = \{ f, \forall j \in \{1, \dots, N\}, f|_{I_j} \in (P_1)^3 \} \text{ où } P_1 \text{ est l'ensemble des polynômes de degré 1.}$$

A chaque pas de temps (c'est à dire chaque fois que l'on connaît la solution au temps $t=t_n$ et qu'on la cherche à $t = t_n + \Delta t = t_{n+1}$) on cherche à déterminer six inconnues par maille (ou six degrés de liberté) :

1 à 3 : $F_0(U_j^{n+1})$ qui est la solution au centre de la maille j à $t=t_{n+1}$ (c'est aussi la valeur moyenne de la solution sur la maille I_j ; soit trois degrés de liberté : ρ , pu et E)

4 à 6 : δ_j^{n+1} qui est la valeur de la pente de $F_0(U)$ sur la maille I_j (c'est à dire la valeur du gradient de $F_0(U)$).

(Remarque : U et δ appartiennent à \mathbb{R}^3)



$F_0(U_j^{n+1})$ et δ_j^{n+1} étant connus le polynôme de degré 1 est défini sur l_j :

$$\forall x \in]x_{j-1/2}; x_{j+1/2}[, F_0(U_h^{n+1}(x)) = F_0(U_j^{n+1}) + \delta_j^{n+1} \cdot (x - x_j)$$

On peut décomposer le schéma de Van Leer en 3 étapes :

étape 1 : calcul des flux aux interfaces (résolution des problèmes de Riemann)

étape 2 : calcul des valeurs moyennes U_j^{n+1} sur chaque maille.

étape 3 : calcul des pentes.

3-2-2 Résolution des problèmes de Riemann (Schémas de Colella et de Roe)

On note $U_{i+1/2,+}$ la valeur "à droite" (limite quand x tend vers $x_{i+1/2}$ par valeurs supérieures) de la solution approchée et $U_{i+1/2,-}$ la valeur "à gauche" (limite quand x tend vers $x_{i+1/2}$ par valeurs inférieures) de la solution approchée.

En chaque point $x_{i+1/2}$, $i = 1, N-1$, la détermination des flux $F_1(U_R)$ de masse, quantité de mouvement et énergie, nécessite de trouver U_R tel que :

$$\frac{\partial F_0(U)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} = 0$$

$$U(x, t_n) = \begin{cases} U_{i+1/2,-}^n & \text{si } x < x_{i+1/2} \\ U_{i+1/2,+}^n & \text{si } x > x_{i+1/2} \end{cases}$$

Un tel problème est appelé **problème de Riemann** (cf. Partie 1 § 5-3-3). La résolution de ces problèmes est classique. On peut montrer dans le cas d'un gaz parfait, que la solution est constante sur toute droite $t = a.x + b$ issue de $x_{i+1/2}$ (en particulier sur la droite $x = x_{i+1/2}$). Colella[1] propose un solveur de Riemann adapté aux gaz réels. Ce solveur a été implémenté (cf. annexe 1, paragraphe 5). On a également implémenté un solveur approché de type solveur de Roe adapté aux gaz réels (cf. annexe 2, paragraphe 5). Une comparaison des performances numériques de ces deux solveurs est proposée (cf. annexe 3, paragraphe 5).

Remarques :

- 1- A chaque pas de temps on doit donc résoudre N-1 problèmes de Riemann.
- 2- De plus on doit résoudre deux "demi" problèmes de Riemann aux deux frontières. Ces deux problèmes permettent de déterminer $U_R(x_{1/2})$ et $U_R(x_{N+1/2})$ (cf. annexe 1).

3-2-3 Bilan de Godounov

On écrit alors que les équations d'Euler sont vérifiées globalement sur $Q_j^n = I_j \times [t_n, t_{n+1}]$:

$$\int_{Q_j^n} \left[\frac{\partial F_0(U)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} \right] dx dt = 0$$

Ce qui donne après application de la formule de Green (intégration par parties) :

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} [F_0(U_{\text{exact}}(x, t_{n+1})) - F_0(U_{\text{exact}}(x, t_n))] dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[F_1(U_{\text{exact}}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - F_1(U_{\text{exact}}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) \right] dt = 0$$

on approche alors

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} F_0(U_{\text{exact}}(x, t_{k+1})) dx \quad \text{par} \quad F_0(U_i^{k+1}) \cdot h \quad (k = n-1, n)$$

et

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} F_1(U_{\text{exact}}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt \quad \text{par} \quad F_1(U_R(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)) \cdot \Delta t$$

Ainsi, le schéma s'écrit :

$$F_0(U_j^{n+1}) = F_0(U_j^n) - \frac{\Delta t}{h} \left[F_1(U_R(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n)) - F_1(U_R(x_{j-\frac{1}{2}}, t^n)) \right] \quad (3-7)$$

On sait donc déterminer les valeurs moyennes U_j^{n+1} sur chaque maille .

3-2-4 Calcul des pentes

Il s'agit en fait de techniques d'interpolations algébriques auxquelles on ajoute des corrections afin d'assurer la stabilité du schéma (cf Vila [1]). On distingue deux temps : la prédiction et la correction .

- prédiction :

on définit ∂_j^{n+1} comme suit :

$$\partial_j^n = \frac{F_0(U)_{j+1}^{n+1} - F_0(U)_{j-1}^{n+1}}{2h}$$

C'est une approximation d'ordre 2 de la dérivée des variables conservatives par rapport à x .

- correction :

Dans le cas d'une équation scalaire, pour qu'un tel schéma soit stable au sens de la norme B.V. (norme qui traduit la somme des variations d'une fonction), il suffit qu'il soit T.V.D. (à variation totale décroissante). (cf. Vila [1]).

Dans le cas du système des équations d'Euler aucun résultat n'est encore connu. Cependant pour avoir un schéma stable, on limite (ou on corrige) les pentes précédemment prédites.

Notons alors $\sigma_j^{n+1} = \text{signe}(\partial_j^{n+1})$ (c'est donc en fait un vecteur "signe"). On choisit comme

correction (cf. Vila [1]) :

$$\delta_j^{n+1} = \sigma_j^{n+1} \max \left\{ 0, \min \left(\sigma_j^{n+1} \left[\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}}{h} \right], |\partial_j^{n+1}|, \sigma_j^{n+1} \left[\frac{U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{h} \right] \right) \right\}$$

Ci-dessous un petit schéma présente deux cas de figure de correction de pente.

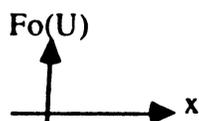


Schéma 1 :

Fo(U_j) est un extremum local, la pente est corrigée à 0.

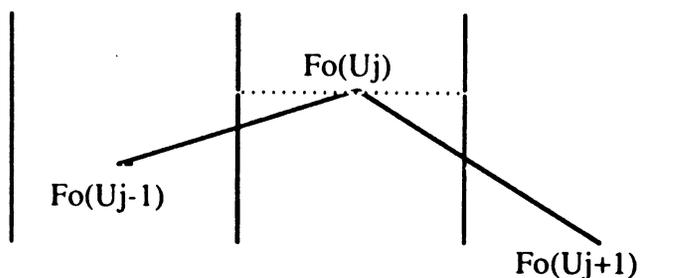
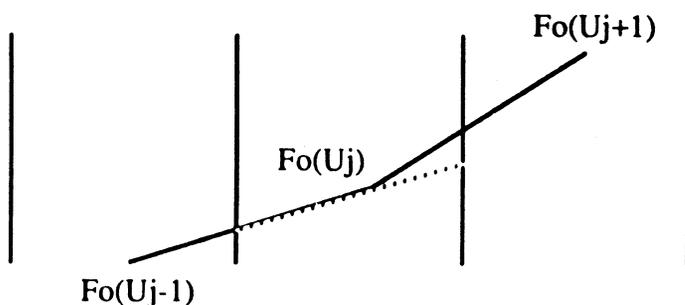


Schéma 2

La fonction Fo(U) croît selon j. La pente choisie après correction est la plus faible en valeur absolue soit

$$(Fo(U_j) - Fo(U_{j-1})) / h$$

(Ce serait la même chose si les pentes étaient négatives)



Remarques :

a - La correction proposée ci-dessus est telle qu'on a jamais $\delta_j^{n+1} = \partial_j^{n+1}$. Cela peut paraître nuisible à la précision du schéma car ∂_j^{n+1} est l'approximation (la seule) d'ordre 2 de la dérivée (cependant δ_j^{n+1} reste une approximation d'ordre 1 de la dérivée ce qui assure une précision du schéma du second ordre en espace).

Afin d'y remédier on corrige de la façon suivante :

$$\delta_j^{n+1} = \sigma_j^{n+1} \max \left\{ 0, \min \left(\alpha \cdot \sigma_j^{n+1} \left[\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}}{h} \right], |\partial_j^{n+1}|, \alpha \cdot \sigma_j^{n+1} \left[\frac{U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{h} \right] \right) \right\} \quad (3-8)$$

avec $\alpha \in [1; 2]$.

La précision est ainsi accrue. Par contre pour $\alpha = 2$, par exemple, le schéma n'est pas T.V.D. (dans le cas des équations d'Euler). Dans toutes les applications on cherche un α optimal .

b - On peut faire le calcul des pentes (prédiction et correction) sur les variables physiques (masse volumique, vitesse, pression) plutôt que sur les variables conservatives. Dans le cas des équations d'Euler les résultats sont alors meilleurs. Une explication plus complète relative à cette remarque est faite dans la partie 3, paragraphe 2.

3-2-4 Cas unidimensionnel radial

Dans le cas radial, on écrit les équations d'Euler comme suit :

$$\frac{\partial (r F_0(U))}{\partial t} + \frac{\partial (r F_1(U))}{\partial r} = H$$

où $H = t(0, P, 0)$.

Les variables conservatives naturelles sont donc $r.F_0(U)$ et $r.F_1(U)$ au terme source H près. Godounov [1] propose alors d'explicitier le terme H (qui n'intervient que dans l'équation de quantité de mouvement), et de réaliser un schéma identique au cas axial (modulo la petite différence signalée sur les variables conservatives).

Les flux sont obtenus en résolvant des problèmes de Riemann unidimensionnels axiaux.

3-3 Pas de diffusion

3-3-1 Equation à résoudre

On doit résoudre lors du pas fractionnaire de diffusion, l'équation de la chaleur instationnaire (3-4) à savoir :

$$\rho e_{,t} - (k(T) T_{,x})_{,x} = \text{source}(T, P) \quad (3-9)$$

La modélisation du gaz (cf. partie 1, § 6) repose essentiellement sur deux hypothèses :

$$C_v = C_v(T) \quad (H1)$$

et

$$P = f(v) T \quad (H2)$$

qui permettent d'écrire la différentielle de l'énergie interne comme suit :

$$de = C_v(T).dT$$

La dérivée temporelle de l'énergie interne peut donc s'écrire :

$$e_{,t} = C_v T_{,t} \quad (3-10)$$

Ainsi, l'équation à résoudre durant le pas de diffusion est :

$$\rho C_v T_{,t} - (k(T) T_{,x})_{,x} = \text{source}(T, P) \quad (3-11)$$

3-3-2 Schéma numérique

Pour la modéliser, on utilise une méthode **d'éléments finis mixtes**.

(Dans un premier temps, on souhaitait implémenter une méthode du même type en dimension 2. On a donc choisit cette méthode afin de tester certaines de ces caractéristiques ; il faut pourtant savoir qu'une méthode de différences finies aurait fait l'affaire. D'ailleurs, la restriction en dimension 1 de la méthode finalement utilisée en dimension 2, est une méthode de différences finies à 3 points).

On suppose la température T^n connue sur chaque maille I_j , et on cherche à déterminer T^{n+1} .

On sait qu'une étape intermédiaire a consisté en l'actualisation des coefficients C_v et K , du terme source et que ρ (noté ici ρ^n) est connu et supposé constant durant ce demi-pas de dissipation.

Notations :

$$a = \rho^n \cdot C_v(T^n)$$

$$b = \Delta t$$

$$k = k(T^n)$$

$$f = \rho^n C_v(T^n) \cdot T^n + \Delta t \cdot \text{source}(P^n, T^n)$$

(Remarque : a, b, k et f sont évalués au centre de chaque maille)

Schéma en temps : on réalise un schéma semi-implicite qui s'écrit avec les notations définies ci-dessus :

$$a T^{n+1} - b (k T^{n+1})_{,x} = f$$

Schéma en espace : on pose

$$P = -k T_{,x}$$

La **formulation variationnelle mixte** s'écrit alors (les deux frontières étant supposées adiabatiques) :

Trouver $T \in L^2(0, L)$ et $P \in H_1(0, L)$ tels que :

$$\int_0^L a T v \, dx + \int_0^L b \frac{\partial P}{\partial x} v \, dx = \int_0^L f v \, dx \quad \forall v \in L^2(0, L)$$

$$\int_0^L P \cdot Q \, dx - \int_0^L k T \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx = 0 \quad \forall Q \in H_1(0, L)$$

On choisit une approximation des espaces compatible avec celle du demi-pas convectif d'une part et vérifiant la condition inf-sup discrète (Thomas [1]) d'autre part. On est alors amené à une formulation d'ordre 1 en espace, soit :

L_h approximation de L^2 avec :

$$L_h = \{ T \in L^2(0, L), T|_{I_j} = \text{constante pour tout } j = 1, N \}$$

H_h approximation de H_1 (ou $H(\text{div})$, c'est le même espace en dimension 1) avec :

$H_h =$ espace engendré par les $N-1$ fonctions P_1 (fonctions "chapeaux") $Q_{j+1/2}$ ($j=1, N-1$) où :

$$Q_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (x - x_{j-1/2}) / h & \text{sur } [x_{j-1/2}; x_{j+1/2}] \\ (x_{j+3/2} - x) / h & \text{sur } [x_{j+1/2}; x_{j+3/2}] \end{cases}$$

A chaque pas de temps on est ramené à résoudre un système tridiagonal de taille $N-1$ afin de déterminer P ($N-1$ inconnues aux points $x_{j+1/2}$, $j = 1, N-1$). Connaissant P , on détermine explicitement les N inconnues du vecteur T .

3-4 Condition de stabilité de la méthode

3-4-1 Condition de CFL provenant du pas de convection

La méthode de volumes finis qui est mise en œuvre, est une méthode explicite. En particulier le solveur de Riemann utilisé est un solveur explicite. Aussi une condition dite de C.F.L (Courant Friedrichs Levy) doit être respectée. On peut trouver cette condition dans Gilquin [1] ou Godounov [1]. Elle exprime que les caractéristiques issues d'un problème de Riemann (qui sont des droites d'équation $x / t = \text{constante}$) ne doivent pas rencontrer les nœuds voisins. Elle peut s'écrire :

$$\Delta t \leq \Delta t_1 = \lambda \cdot \frac{h}{\max_{i=1,\dots,N} (|D_{i+1/2}^-|, |D_{i+1/2}^+|)} \quad (3-12)$$

(λ est un réel dont la présence assure la stabilité numérique compris entre 0 et 1. On prend généralement $\lambda = 0.9$).

$D_{i+1/2}^+$ et $D_{i+1/2}^-$ sont les pentes minimale et maximale des caractéristiques issues de $x_{i+1/2}$ (donc de la résolution d'un problème de Riemann en ce point).

3-4-2 Condition de stabilité issue du pas de diffusion

L'équation de la chaleur est résolue à l'aide d'un schéma semi-implicite en espace ; certains paramètres physiques dépendant de la température (comme la capacité calorifique C_v ou la conductivité thermique k) sont explicités. On impose donc une condition de stabilité du type de celle d'un schéma explicite en espace qui s'écrit (Euvrard [1]) :

$$\Delta t \leq \Delta t_2 = C \cdot \min_{i=1,\dots,N} \left[\frac{1}{2} \frac{h^2 \rho_i^n C_v(T_i^n)}{k(T_i^n)} \right] \quad (3-13)$$

(C est un réel généralement égal à 1).

3-4-3 Condition de stabilité issue de l'interaction des deux phénomènes

On introduit ici une notion plus intuitive liée à la physique du problème. Si le pas de temps est trop grand les deux phénomènes physiques de la convection et de la diffusion de la chaleur sont dissociés non seulement "numériquement" mais aussi "physiquement". Il n'y a plus

superposition mais **succession** des deux phénomènes. On observe alors que le **schéma diverge**. Afin d'éviter cet état de fait, on impose une "modification maximum de l'état physique" à chaque demi-pas de temps, à savoir :

$$\max_{i=1,\dots,N} |u_i^{n+1} - u_i^n| \leq \Delta u_0 \quad (3-14)$$

$$\max_{i=1,\dots,N} |T_i^{n+1} - T_i^n| \leq \Delta T_0 \quad (3-15)$$

ΔT_0 et Δu_0 étant des valeurs données. Dans la pratique sont choisies les valeurs suivantes :

$$\Delta T_0 \in [20 ; 75]$$

$$\Delta u_0 \in [10 ; 30]$$

Si une des deux conditions (3-14) ou (3-15) n'est pas vérifiée, alors on diminue le pas de temps. On note Δt_3 le pas de temps tel que ces deux conditions soient vérifiées.

Remarque : on observe que cette nouvelle condition est nécessaire lorsque le terme source est raide (ce qui est souvent le cas). Une façon équivalente d'écrire (3-15) est la suivante :

$$\Delta t \leq \Delta T_0 \cdot \max_{i=1,\dots,n} \left(\frac{\text{source}_i}{\rho_i^n \cdot C_v(T_i^n)} \right)$$

La condition de stabilité issue de (3-15) est donc proportionnelle au terme source.

La condition de stabilité générale s'écrit alors (les conditions (3-12), (3-13), (3-14) et (3-15) étant alors toutes vérifiées :

$$\Delta t = \min (\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3) \quad (3-16)$$

Une fois Δt_0 et Δu_0 ajustés (ils dépendent essentiellement du gaz choisi), on constate que cette condition sur le pas de temps est suffisante pour assurer la convergence du schéma. On a pu noter, dans les différentes applications numériques, que la **condition Δt_2 était moins restrictive** que les deux autres. Généralement, lorsque le terme source est raide, le pas de temps est déterminé par la condition de "**de cohérence**" (Δt_3) lors de l'initialisation du phénomène, puis par la CFL du pas de convection (Δt_1) ensuite.

3-5 Annexes

Annexe 1 : Schéma de Colella[1]

Le schéma présenté ici est exactement celui proposé par Colella [1] lorsqu'il s'agit de résoudre un problème de Riemann classique pour un gaz réel. Sont présentés ci-dessous les principes et principales hypothèses de ce schéma. Pour plus de détails, on renvoie à Colella [1]. Pour résoudre les problèmes de Riemann aux frontières du domaine (résolution de demi-problèmes de Riemann), on propose une solution inspirée des idées de Colella (paramétrisation des courbes de choc). La résolution de ces demi-problèmes est décrites en détail.

1- Le problème de Riemann classique

Problème à résoudre : on cherche à résoudre le problème suivant :

soient U_{gauche} et U_{droite} , trouver $U(x,t)$ tel que :

$$F_0(U)_{,t} + F_1(U)_{,x} = 0$$

$$U(x,0) = \begin{cases} U_{\text{droite}} & \text{si } x > 0 \\ U_{\text{gauche}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Dans la suite, on se propose de déterminer la solution de ce problème sur les droites d'équations $x/t = \sigma$, σ appartenant à l'intervalle $] -\infty ; +\infty [$.

Hypothèses et relations de base :

On a vu (partie 1, § 5-3), que les équations de la dynamique des gaz admettent trois champs associés aux trois valeurs propres de la matrice jacobienne $A = \partial F_0 / \partial F_1$. Les champs 1 et 3 sont V.N.L. (vraiment non linéaire) et le champ 2 est L.D. (linéairement dégénéré) :

- aux champs V.N.L., on peut associer (partie 1, § 5-3, définition 6 et propositions 1 et 2) une onde de détente ou bien une onde de choc.

- au champ L.D. est nécessairement associé (partie 1, § 5-3, proposition 3) une discontinuité de contact. La discontinuité de contact est une discontinuité de la densité (ou masse volumique), mais par contre la pression et la vitesse sont constantes au travers de cette discontinuité.

La première étape de la résolution d'un problème de Riemann est de **déterminer l'état constant** (c'est à dire la pression P^* et la vitesse u^*) entre la 1-onde et la 3-onde issues des champs 1 et 3. Cet état constant est l'état qui traverse la discontinuité de contact. Cet état est déterminé comme étant l'intersection de la courbe définissant la 1-onde (champ 1) et de la courbe définissant la 3-onde (champ 3). Colella propose de déterminer cette intersection de façon approchée **en supposant** que sont associées **deux ondes de choc** aux champs 1 et 3 (et ceci quelques soient les données initiales du problème de Riemann traité). L'état $*$ est donc déterminé comme l'intersection des deux courbes de choc associés aux champs 1 et 3.

La seconde étape de la résolution du problème de Riemann consiste à **déterminer la valeur de la densité** ρ de part et d'autre de la discontinuité de contact, c'est à dire la densité "à droite" de la 1-onde de choc, et la densité "à gauche" de la 3-onde de choc. Pour cela on utilise les relations de Rankine et Hugoniot qui relient les états situés à gauche et à droite d'une courbe de choc en fonction de la vitesse de ce choc.

La dernière étape de la résolution du problème de Riemann consiste à **déterminer la valeur de la solution** U du problème de Riemann sur une droite d'équation x / t .

Relations de Rankine et Hugoniot :

On écrit les relations de Rankine et Hugoniot reliant à travers une discontinuité l'état $*$ (situé à l'intersection des deux courbes de choc) et l'état s (qui est soit l'état "gauche" soit l'état "droite"). σ est la vitesse de la discontinuité :

$$\rho^* u^* - \rho_s u_s = \sigma (\rho^* - \rho_s) \quad (1)$$

$$\rho^* u^{*2} + P^* - \rho_s u_s^2 - P_s = \sigma (\rho^* u^* - \rho_s u_s) \quad (2)$$

$$(P^* + E^*) u^* - (P_s + E_s) u_s = \sigma (E^* - E_s) \quad (3)$$

en éliminant la vitesse du choc σ entre les équations (1) et (2) on obtient :

$$-(1/\rho^* - 1/\rho_s) = (u^* - u_s)^2 / (P^* - P_s) \quad (4)$$

Traitement des gaz réels : on cherche à définir une loi d'état locale ($P = f(\rho, e)$), afin de bien prendre en compte les phénomènes liés aux gaz réels tout en étant capable d'écrire les courbes de choc.

Colella introduit deux variables Γ et γ ainsi définies :

$$\Gamma = C^2 / (\rho \cdot P)$$

$$\gamma = P / (\rho \cdot e) + 1 \quad (\text{la loi d'état s'écrivant donc } P = (\gamma - 1)\rho e)$$

C est la vitesse lagrangienne du son à savoir :

$$C^2 = (P \cdot P_{,e} + \rho^2 P_{,\rho})$$

(Il faut noter que dans le cas des gaz parfaits, on a : $\gamma = \Gamma = \text{constante}$)

On cherche alors à paramétrer γ dans les zones régulières et à travers les discontinuités. Soit une courbe, paramétrisée par σ_0 , le long de laquelle γ est régulière. On peut considérer le comportement dynamique de γ le de cette courbe :

$$\frac{d\gamma}{d\sigma_0} = \frac{\partial\gamma}{\partial\tau} \frac{d\tau}{d\sigma_0} + \frac{\partial\gamma}{\partial e} \frac{de}{d\sigma_0}$$

qui peut aussi s'écrire en utilisant les expressions de γ et Γ , la loi d'état et le premier principe de la thermodynamique (Colella [1]) :

$$\frac{d\gamma}{d\sigma_0} = \left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma}\right) (\gamma - 1) \frac{1}{P} \frac{dP}{d\sigma_0}$$

En général (Colella [1]), il n'est pas possible de spécifier comment se comporte γ à travers une discontinuité sans résoudre les relations de Rankine et Hugoniot. Cependant, si le choc n'est pas trop fort, alors les conditions de saut de γ sont bien approximées en utilisant une forme intégrale de la relation précédente, à savoir :

$$\gamma_s^* = \gamma_s + (1 - \gamma_c / \Gamma_c) (\gamma_c - 1) (P^* - P_s) / ((1/2)(P^* + P_s)) \quad (5)$$

où s = gauche ou droite et :

$$\gamma_c = (\gamma_{\text{gauche}} + \gamma_{\text{droite}}) / 2 \quad \text{et} \quad \Gamma_c = (\Gamma_{\text{gauche}} + \Gamma_{\text{droite}}) / 2$$

Il reste alors à définir, de façon approchée, les vitesses du son des états situés à gauche et à droite de l'état (P^*, u^*) . Cette vitesse sonique est obtenue à partir des relations de Rankine et Hugoniot et de la loi d'état locale qui vient d'être définie. Si s = gauche ou droite, la vitesse du son à gauche ou à droite de l'état (P^*, u^*) s'écrit (Colella [1]) :

$$W_s^2 = \rho_s \cdot \frac{(P^* - P_s)(P^* + \frac{1}{2}(\gamma_s^* - 1)(P^* + P_s))}{P^* - \frac{\gamma_s^* - 1}{\gamma_s^*} P_s}$$

(Remarque : cette expression est exacte dans le cas d'un gaz parfait).

Première étape : détermination de P^* et u^*

Les deux courbes de choc associées au champ 1 et 3 sont obtenues grâce aux relations de Rankine et Hugoniot que l'on projette dans le plan (P, u) (cf. Gilquin [1]). Elles s'écrivent :

$$u(P) = u_{\text{gauche}} - (P - P_{\text{gauche}})/W_{\text{gauche}} \quad \text{champ 1}$$

$$u(P) = u_{\text{droite}} + (P - P_{\text{droite}})/W_{\text{droite}} \quad \text{champ 3}$$

P^* est la valeur de P à l'intersection des deux courbes de choc. On résout donc par une méthode d'itérations successives le problème suivant :

$$u_{\text{gauche}} - (P - P_{\text{gauche}})/W_{\text{gauche}} = u_{\text{droite}} + (P - P_{\text{droite}})/W_{\text{droite}}$$

Puis u^* est obtenu automatiquement :

$$u^* = u(P^*)$$

Seconde et troisième étapes : détermination de ρ^* puis de la solution sur la droite d'équation $x/t = \sigma$

La solution cherchée est la solution sur la droite d'équation $x/t = \sigma$. Dans un premier temps on cherche à déterminer si cette droite est située à gauche ou à droite de la discontinuité de contact :

- si $\sigma < u^*$, la droite est à gauche de la discontinuité de contact. On pose dans les équations (1)-(3) $s = \text{gauche}$ (on s'intéresse alors à la 1-onde du problème de Riemann, Gilquin[1]).

- si $\sigma > u^*$, la droite est à droite de la discontinuité de contact. On pose dans les équations (1)-(3) $s = \text{droite}$ (on s'intéresse alors à la 3-onde du problème de Riemann, Gilquin[1]).

Si $P^* > P_s$ (l'onde considérée est un choc):

- ρ^* est déterminé en éliminant la vitesse du choc entre les deux premières relations de Rankine-Hugoniot (équation (4)); Connaissant ρ^* on détermine la vitesse du choc σ à l'aide de l'une des deux premières relations de Rankine-Hugoniot.

- la solution cherchée est alors (cas où $s =$ droite, on raisonne par symétrie sinon) :

$$F_0(U_s) \text{ si } \sigma > \sigma$$

$$F_0(U^*) \text{ si } \sigma < \sigma$$

Si $P^* < P_s$ (l'onde considérée est une détente):

- ρ^* (densité "de l'autre côté de la détente") est déterminée par intégration de l'équation :

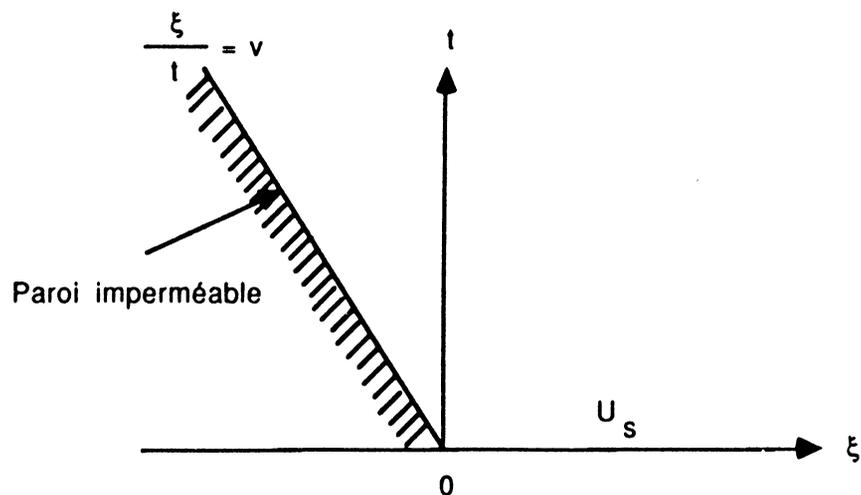
$$\partial P / \partial \rho = C^2 / \rho^2$$

(loi d'isentropie : en effet l'entropie S étant un invariant de Riemann (cf. Gilquin [1]), l'entropie est constante dans la détente) entre l'état s et l'état final P^*, u^* . Cette intégration n'est pas triviale en gaz réels.

- on regarde où se place σ par rapport à la détente : si on se situe dans la détente, la solution cherchée est obtenue par une interpolation linéaire entre les états $*$ et s . Sinon la solution est égale à l'état $*$ ou à l'état s selon la valeur de σ .

2- Cas d'un demi problème de Riemann

Problème à résoudre :



Soit une paroi imperméable mobile se déplaçant à la vitesse v . On note U_{paroi} l'état du gaz sur

la paroi. Cet état est défini par la vitesse v (issue de la condition à la limite d'imperméabilité), par une pression P^* et par une densité ρ^* , a priori inconnues.

On cherche à résoudre le problème suivant aussi appelé "demi problème de Riemann". Soient U_s ($s=$ droite ou gauche) et v la vitesse de la paroi donnée, trouver $U(\xi, t)$ tel que :

$$F_0(U)_{,t} + F_1(U)_{,\xi} = 0$$

$$U(\xi, 0) = \begin{cases} U_{\text{droite}} & \text{si } \xi > 0 \\ U_{\text{paroi}} & \text{si } \xi < 0 \end{cases} \quad \text{dans le cas d'une frontière gauche}$$

ou bien

$$U(\xi, 0) = \begin{cases} U_{\text{gauche}} & \text{si } \xi < 0 \\ U_{\text{paroi}} & \text{si } \xi > 0 \end{cases} \quad \text{dans le cas d'une frontière droite}$$

Hypothèses et relations de base :

Gilquin [1] montre que si v n'est pas supersonique (ce qui est une hypothèse ici admise), alors les états U_{paroi} et U_s ne sont séparés que par une onde. Afin de déterminer P_{paroi} , on suppose que l'onde séparant ces deux états est un choc.

La projection de cette courbe de choc dans le plan (u, P) permet d'écrire (Gilquin [1]):

$$u(P) = u_s + \varepsilon (P - P_s) / W_s$$

$$W_s^2 = \rho_s (P + (\gamma_s - 1) (P + P_s) / 2)$$

avec $\varepsilon = 1$ si $s =$ droite et $\varepsilon = -1$ si $s =$ gauche, γ_s et c_s étant paramétrés selon la méthode proposée par Colella.

Première étape : détermination de P^* (pression sur la paroi mobile)

Pour déterminer P^* sachant que $u^* = v$, on doit donc résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{v - u_s}{P - P_s} = \frac{\varepsilon}{W_s} \\ \frac{(P - P_s)^2}{(v - u_s)^2} = \rho_s \left(P + \frac{1}{2} (\gamma_s - 1)(P + P_s) \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{v - u_s}{P - P_s} = \frac{\varepsilon}{W_s} \\ P^2 - P \left(2P_s + \frac{\gamma_s + 1}{2} \rho_s (v - u_s)^2 \right) + P_s^2 - \rho_s \frac{\gamma_s - 1}{2} P_s (v - u_s)^2 = 0 \end{cases}$$

Soit Δ le discriminant de la seconde équation de ce système, on a :

$$\Delta^2 = (v - u_s)^2 \left[\left(\frac{\gamma_s + 1}{2} \right)^2 \rho_s^2 (v - u_s)^2 + 4P_s \rho_s \gamma_s \right]$$

les deux racines de cette équation étant alors :

$$P_1 = P_s + \frac{\gamma_s + 1}{4} \rho_s (v - u_s)^2 + \frac{\Delta}{2}$$

$$P_2 = P_s + \frac{\gamma_s + 1}{4} \rho_s (v - u_s)^2 - \frac{\Delta}{2}$$

La solution est obtenue grâce à la première équation du système à savoir :

$$P^* = \begin{cases} P_1 & \text{si } \varepsilon (v - u_s) > 0 \\ P_2 & \text{si } \varepsilon (v - u_s) < 0 \end{cases}$$

Seconde étape: détermination de la solution sur la droite d'équation $x/t =$ 'sigma'

Connaissant P^* et u^* ($u^* = v$), on procède comme dans le cas du problème de Riemann classique.

Annexe 2 : Un schéma de Roe pour les gaz réels

On cherche à résoudre le problème suivant :

soient U_{gauche} et U_{droite} , trouver $U(x, t)$ tel que :

$$F_0(U)_{,t} + F_1(U)_{,x} = 0$$

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_{\text{droite}} & \text{si } x > 0 \\ U_{\text{gauche}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Dans la suite on note :

$$\Delta a = a_{\text{droite}} - a_{\text{gauche}}$$

$$a^m = (a_{\text{droite}} + a_{\text{gauche}}) / 2$$

$$a_i = i^{\text{ème}} \text{ composante du vecteur } a$$

Définition : Une matrice $A_{\text{Roe}}(U_{\text{gauche}}, U_{\text{droite}})$ est appelée matrice de Roe si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

$$(i) \quad \Delta F_1(U) = A_{\text{Roe}}(U_{\text{gauche}}, U_{\text{droite}}) \cdot \Delta F_0(U)$$

$$(ii) \quad A_{\text{Roe}}(U, U) = \partial F_1(U) / \partial F_0(U)$$

(iii) $A_{\text{Roe}}(U_{\text{gauche}}, U_{\text{droite}})$ est diagonalisable et a toutes ses valeurs propres réelles.

$$(iv) \quad A_{\text{Roe}}(U, V) \text{ est continue par rapport à } U \text{ et } V.$$

Dans la suite on note par abus $A_{\text{Roe}} = A_{\text{Roe}}(U_{\text{gauche}}, U_{\text{droite}})$.

Matrice de Roe pour les gaz parfaits ($P = (\gamma - 1) \rho e$) :

Roe montre qu'on peut écrire $F_0(U)$ et $F_1(U)$ sous forme quadratique à savoir qu'il existe des coefficients b_{jl} et c_{jl} et un vecteur de variables w tels que :

$$F_0(U)_i = \sum_{j,l} b_{jl}^i w_j w_l$$

$$F_1(U)_i = \sum_{j,l} c_{jl}^i w_j w_l$$

(1)

En effet, on peut écrire $F_0(U)$ et $F_1(U)$ sous la forme quadratique qui suit :

$$F_0(U) = \begin{bmatrix} w_1^2 \\ w_1 w_2 \\ \frac{w_1 w_3}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} w_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F_1(U) = \begin{bmatrix} w_1 w_2 \\ \frac{\gamma - 1}{\gamma} w_1 w_3 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} w_2^2 \\ w_2 w_3 \end{bmatrix}$$

si on a défini le vecteur des variables w comme suit :

$$w_1 = \sqrt{\rho} \quad , \quad w_2 = \sqrt{\rho} \cdot u \quad \text{et} \quad w_3 = \frac{E + P}{\sqrt{\rho}}$$

On peut alors calculer de façon générale une matrice de Roe (cf Vila [2]). En effet $F_0(U)$ étant écrit sous la forme (1) on peut aisément calculer ses dérivées partielles par rapport à w :

$$\left[\left(\frac{\partial F_0(U)_i}{\partial w} \right) (w) \right]_k = 2 \sum_j b_{jk}^i w_j \quad (2)$$

De plus

$$\begin{aligned} \Delta F_0(U)_i &= F_0(U_d)_i - F_0(U_g)_i \\ &= \sum_{j,l} b_{jl}^i (w_d)_j (w_d)_l - \sum_{j,l} b_{jl}^i (w_g)_j (w_g)_l \\ &= \sum_{j,l} b_{jl}^i [(w_d)_j (w_d)_l - (w_g)_j (w_g)_l] \\ &= 2 \sum_{j,l} b_{jl}^i w_j^m \Delta w_l \end{aligned}$$

et ceci pour des raisons de symétrie lors de la sommation sur l'ensemble des indices j et l .

Ainsi, on peut écrire d'après (2) :

$$\Delta F_0(U)_i = \sum_l 2 \sum_j b_{jl}^i w_j^m \Delta w_l = \frac{\partial F_0(U)_i}{\partial w} (w^m) \cdot \Delta w$$

soit

$$\Delta F_0(U) = \frac{\partial F_0(U)}{\partial w} (w^m) \cdot \Delta w$$

De même on peut montrer que :

$$\Delta F_1(U) = \frac{\partial F_1(U)}{\partial w} (w^m) \cdot \Delta w$$

Ainsi, si le changement de variables est un "bon" changement de variables alors $\frac{\partial F_0}{\partial w}(w^m)$ est inversible et on a :

$$\Delta F_1(U) = \frac{\partial F_1(U)}{\partial w} (w^m) \left[\frac{\partial F_0}{\partial w} (w^m) \right]^{-1} \cdot \Delta F_0(U)$$

La matrice de Roe peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} A_{\text{Roe}} &= \frac{\partial F_1}{\partial w} (w^m) \left[\frac{\partial F_0}{\partial w} (w^m) \right]^{-1} \\ \Leftrightarrow A_{\text{Roe}} &= \frac{\partial F_1}{\partial F_0} (U(w^m)) \end{aligned} \quad (3)$$

On vient de vérifier que la propriété (i) (cf. définition d'une matrice de Roe) était vérifiée sous ces conditions. On vérifie aisément qu'il en est de même pour les conditions (ii), (iii) et (iv).

Matrice de Roe pour un gaz réel :

On cherche à définir une matrice de Roe en reprenant le raisonnement fait dans le cas des gaz parfaits. D'une façon générale, on peut écrire :

$$w = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} u \\ \frac{E+P}{\sqrt{\rho}} \end{pmatrix} \quad \text{il s'en suit} \quad \begin{pmatrix} F_0(U)_1 \\ F_0(U)_2 \\ F_0(U)_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^2 \\ w_1 w_2 \\ w_1 w_3 - P \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_1(U) = \begin{pmatrix} w_1 w_2 \\ w_2^2 + P \\ w_2 w_3 \end{pmatrix}$$

Considérons l'intervalle $[U_{\text{gauche}} ; U_{\text{droite}}] = [U_g ; U_d]$; la matrice de Roe recherchée est telle que :

$$F_1(U_g) - F_1(U_d) = A_{\text{Roe}} (F_0(U_g) - F_0(U_d))$$

Pour se ramener au cas où F_0 et F_1 sont quadratiques (tel que celui des gaz parfaits), on se

propose (Vila [2]) de remplacer sur l'intervalle $[U_g; U_d]$ la fonction F_0 par une fonction quadratique (de w) G_0 et la fonction F_1 par la fonction G_1 ; G_0 et G_1 doivent alors vérifier :

$$\begin{aligned} G_0(U_g) &= F_0(U_g) \text{ et } G_0(U_d) = F_0(U_d) \\ G_1(U_g) &= F_1(U_g) \text{ et } G_1(U_d) = F_1(U_d) \end{aligned}$$

Si G_1 et G_0 sont des **formes quadratiques** de w alors un raisonnement identique à celui qui a été tenu pour les gaz parfaits permet d'exhiber une matrice de Roe qui s'écrit :

$$A_{\text{Roe}} = \frac{\partial G_1}{\partial G_0}(U(w^m)) \quad (4)$$

Ainsi en choisissant $w^t = (w_1, w_2, w_3)$ avec :

$$w_1 = \sqrt{\rho} \quad , \quad w_2 = \sqrt{\rho} \cdot u \quad \text{et} \quad w_3 = \sqrt{\rho} \cdot H$$

et (P'' traduisant alors sur l'intervalle $[U_g; U_d]$, la loi d'état induite par G_0 et G_1) :

$$G_0(U) = \begin{pmatrix} w_1^2 \\ w_1 w_2 \\ w_1 w_3 - P'' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G_1(U) = \begin{pmatrix} w_1 w_2 \\ w_2^2 + P'' \\ w_2 w_3 \end{pmatrix}$$

on peut écrire (4) si P'' est une **forme quadratique de w sur $[U_g, U_d]$ telle que $P''(U_g) = P_g$ et $P''(U_d) = P_d$.**

La loi d'état locale, permettant de calculer la pression P'' , doit donc vérifier :

$$\begin{aligned} 1- P'' &= \sum_{j,1} d_{j1} w_j w_1 \text{ sur } [U_g; U_d] \\ 2- P''(U_g) &= P_g \text{ et } P''(U_d) = P_d. \end{aligned}$$

où d_{j1} sont les coefficients de la forme quadratique P'' .

Choix de la loi d'état sur $[U_g; U_d]$:

La pression P'' vérifiant les hypothèses correctes permettant de calculer la matrice de Roe selon

(4) s'écrit comme une fonction linéaire de p_e et ρ (cf Vila [2]) :

$$P'' = a p_e + b \rho + d$$

Alors sachant que :

$$H = (E + P'') / \rho$$

l'énergie interne e vérifie l'équation :

$$p_e = [w_1 w_3 - w_2^2 / 2 - b.w_1^2 - d] / (1 + a)$$

La pression P'' s'écrit donc :

$$P'' = \frac{a}{1+a} w_1 w_3 - \frac{a}{2(1+a)} w_2^2 + \frac{b}{1+a} w_1^2 + \frac{d}{1+a}$$

Les réels a , b et c étant déterminés de façon que :

$$P(U_g) = P_g \quad \text{et} \quad P(U_d) = P_d$$

et

$$P'' \cdot P''_{,e} / \rho^2 + P''_{,\rho} > 0$$

Cette dernière pouvant aussi s'écrire :

$$2 [a.e + b] + d.a / \rho > 0$$

On se propose donc de définir la loi d'état comme suit :

$$\text{si} \quad \frac{P_g}{\rho_g e_g} = \frac{P_d}{\rho_d e_d} \quad \text{alors} \quad P'' = \frac{P_g}{\rho_g e_g} p_e$$

sinon si $\Delta P \cdot \Delta e > 0$ alors

$$\text{si} \quad \Delta P > 0 \quad \text{alors} \quad P'' = \frac{\Delta P}{\rho_d \Delta e} [\rho (e - e_g)] + P_g$$

$$\text{sinon} \quad P'' = \frac{\Delta P}{\rho_g \Delta e} [\rho (e - e_d)] + P_d$$

sinon (ΔP et $\Delta \rho$ ont alors nécessairement le même signe)

$$P'' = \frac{\Delta P}{\Delta \rho} (\rho - \rho_g) + P_g$$

Cette loi d'état a été choisie car elle présente les avantages suivant :

- si le gaz est parfait alors la loi d'état définissant P'' est celle des gaz parfaits.
- dans les zones où la solution est constante, la loi d'état est celle d'un gaz parfait.
- P'' a toujours ses dérivées partielles par rapport à la densité et à l'énergie interne positives.

Schéma de Roe pour un gaz réel :

La matrice de Roe définie par (4) peut s'écrire (la matrice $\partial F_1 / \partial F_0$ qui s'écrit de la même façon que la matrice $\partial G_1 / \partial G_0$ a été calculée dans cette même partie 2 au chapitre 2-1) :

$$A_{\text{Roe}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 - \frac{P''_{,e}}{\rho} (H - u^2) & 2u - \frac{u P''_{,e}}{\rho} & \frac{P''_{,e}}{\rho} \\ u (c^2 - H) - \frac{u P''_{,e}}{\rho} (H - u^2) & H - \frac{u^2 P''_{,e}}{\rho} & u + \frac{u P''_{,e}}{\rho} \end{bmatrix}$$

$$\text{où } c^2 = \frac{P''_{,e} \cdot P''_{,e}}{\rho^2} + P''_{,\rho} \quad \text{et } H = \frac{E + P''}{\rho}$$

(c étant la vitesse du son du fluide), et :

$$\rho = \rho(w^m) = \left(\frac{\sqrt{\rho_d} + \sqrt{\rho_g}}{2} \right)^2$$

$$u = u(w^m) = \frac{\sqrt{\rho_d} u_d + \sqrt{\rho_g} u_g}{\sqrt{\rho_d} + \sqrt{\rho_g}}$$

$$H = H(w^m) = \frac{\sqrt{\rho_d} H_d + \sqrt{\rho_g} H_g}{\sqrt{\rho_d} + \sqrt{\rho_g}}$$

L'expression particulière de u et H au point w^m sont dues au fait que u, H et e s'expriment de façon similaire en fonction de w :

$$u = w_2 / w_1$$

$$H = w_3 / w_1$$

Enfin :

$$P'' = P''(w^m)$$

$$e = e(w^m)$$

et

$$c = c(w^m)$$

La matrice de Roe a ses trois valeurs propres réelles et distinctes :

$$\lambda = \begin{pmatrix} u - c \\ u \\ u + c \end{pmatrix} \quad \text{sont les valeurs propres de } A_{Roe}(w^m)$$

et les vecteurs propres (à droite) associés sont :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \end{pmatrix} \quad \text{est le vecteur propre associé à la première valeur propre de } A_{Roe}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ H - \frac{\rho c^2}{P''_{,e}} \end{pmatrix} \quad \text{est le vecteur propre associé à la seconde valeur propre de } A_{Roe}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \end{pmatrix} \quad \text{est le vecteur propre associé à la troisième valeur propre de } A_{Roe}$$

On se propose alors de résoudre le problème de **Riemann approché** suivant :

$$G_O(U)_{,t} + A_{Roe} \cdot G_O(U)_{,x} = 0$$

$$U(x,0) = \begin{cases} U_{\text{droite}} & \text{si } x > 0 \\ U_{\text{gauche}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ce problème est simple à résoudre. En effet il suffit de diagonaliser le système d'équations, et ensuite de résoudre les trois problèmes de Riemann associés aux équations de transport scalaires des équations découplées. Cependant, le schéma de Godunov requiert la connaissance des flux $G_1(U_{\text{solution}})$ et il est possible de les calculer directement sur les droites d'équations $\sigma = x/t$ en déterminant les coefficients α_j tels que :

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i = \Delta G_0 \quad (5)$$

Sachant que :

$$\Delta G_1 = A_{Roe} \Delta G_0$$

L'égalité suivante est également vérifiée :

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i \alpha_i e_i = \Delta G_1 \quad (6)$$

La première équation du système (5) et la première équation du système (6) permettent d'écrire :

$$\alpha_1 = \frac{1}{c} [\alpha_3 c + (\Delta \rho) u - (\Delta \rho u)]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{c} [-2\alpha_3 c - (\Delta \rho) \cdot (u - c) + (\Delta \rho u)]$$

Puis, la seconde équation du système (6) permet de déterminer les trois coefficients α_i :

$$\left[\begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1}{2c^2} [\Delta P + uc\Delta\rho - c(\Delta\rho u)] \\ \alpha_2 = \Delta\rho - \frac{\Delta P}{c^2} \\ \alpha_3 = \frac{1}{2c^2} [\Delta P - uc\Delta\rho + c(\Delta\rho u)] \end{array} \right.$$

Remarques :

1- Une propriété utile pour obtenir l'expression des α_i est la suivante :

$$\Delta(\rho u^2) + u^2 \Delta\rho - 2u \Delta(\rho u) = 0$$

2- Glaister [1] propose un schéma un peu différent (il n'est en particulier pas basé sur une forme quadratique de la loi d'état). Les deux schémas ont été testés et donnent des résultats équivalents.

Algorithme de résolution du problème de Riemann approché : le flux G_1 de la solution U_{solution} du problème de Riemann approché sur la droite d'équation ' $\sigma = x/t$ ' s'écrit comme suit :

- si $\lambda_1 > \sigma$ alors $G_1(U_{\text{solution}}) = G_1(U_g)$
- si $\lambda_2 > \sigma > \lambda_1$ alors $G_1(U_{\text{solution}}) = G_1(U_g) + \lambda_1 \cdot \alpha_1 \cdot e_1$
- si $\lambda_3 > \sigma > \lambda_2$ alors $G_1(U_{\text{solution}}) = G_1(U_d) - \lambda_3 \cdot \alpha_3 \cdot e_3$
- si $\sigma > \lambda_3$ alors $G_1(U_{\text{solution}}) = G_1(U_d)$

Annexe 3 : Comparaison numérique des deux solveurs de Riemann

On présente deux cas tests :

Test 1 : cas du tube à choc 1-D.

On considère un tube rempli de gaz parfait, d'une longueur de 100 m.

Dans la partie "gauche" du tube (région 1) les conditions initiales sont les suivantes :

vitesse du gaz : 0. m/s
 densité : 12 kg/m³
 pression : 10⁶ Pa

Dans la partie "droite" du tube (région 2) les conditions initiales sont les suivantes :

vitesse du gaz : 0. m/s
 densité : 1.2 kg/m³
 pression : 10⁵ Pa

A l'instant $t = 0$ s, on retire la cloison centrale. Les résultats fournis sont à $t = 0.06$ s. Les résultats obtenus avec chacun des solveurs sont rigoureusement identiques. Par contre le solveur approché de Roe permet d'obtenir un gain sensible en temps de calcul.

On note : temps normalisé = temps CPU méthode / temps CPU meilleure méthode.

Temps de calcul

	Temps réel (s)	Temps normalisé
Pas fraction (Roe)	26.01	1.
Pas fraction (Colella)	34.51	1.32

Test 2 : onde de choc de gaz réel (1-D radial).

Un terme source simulant l'énergie dissipée par un arc électrique placé sur l'axe provoque

l'expansion d'une onde de choc. Le gaz modélisé est le SF6 dont la modélisation est présentée dans le chapitre 1 (C_v varie fortement en fonction de T et Z varie fortement en fonction de ρ).

Les résultats obtenus avec chacun des solveurs sont identiques. On note comme précédemment un gain de temps de calcul lorsqu'on utilise le solveur de Roe. Ce gain est cependant moins important que dans le cas du tube à choc car on résout ici l'ensemble du système d'équations (Euler + Diffusion de la chaleur + Terme source) alors qu'on ne résout que les équations d'Euler pour le problème du tube à choc.

Temps de calcul

/ / / / / / / /	Temps réel (s)	Temps normalisé
Pas fraction (Roe)	40.95	1.
Pas fraction (Colella)	50.44	1.23

Annexe 4 : Détermination de la température T lorsqu'on connaît l'énergie interne e

Le bilan de Godounov permet de déterminer explicitement ρ et u grâce aux équations de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement. L'équation de conservation de l'énergie permet de déterminer l'énergie interne e . La question que l'on pose ici est de savoir comment on peut calculer la température T et la pression P lorsqu'on connaît la vitesse, la densité et l'énergie interne.

On a vu au paragraphe 2 que l'énergie interne se calcule comme suit :

$$e(T) = e(T_0) + \int_{T_0}^T C_v(t) dt$$

C_v étant toujours strictement positif l'énergie interne est une fonction strictement croissante et ainsi pour toute énergie interne e supérieure à e_0 , il existe une et une seule température T correspondant à e .

Connaissant T et ρ on détermine alors P grâce à la loi d'état.

4 - Terme source

Le terme source n'intervient que dans l'équation d'énergie. Aussi, même s'il a été présenté jusqu'ici comme un vecteur, dans ce chapitre c'est un scalaire (à savoir la composante du vecteur "source" intervenant dans l'équation d'énergie).

Comme cela est précisé dans la partie 1, on distingue deux termes :

- le terme de dissipation par effet Joule ; c'est en fait l'énergie fournie au gaz par le courant traversant l'arc électrique. Ce terme est noté D_{Joule} .

- le terme de dissipation par rayonnement ; un modèle monodimensionnel à plusieurs bandes de fréquences, basé sur l'approximation de diffusion de Lowke est proposé. Le système des équations du rayonnement permet de calculer le flux de rayonnement F_R pour l'ensemble des bandes de fréquence.

Le terme source s'écrit alors :

$$\text{source} = D_{\text{Joule}} - \text{div } F_R \quad (4-1)$$

Nous allons préciser ces notions dans les pages qui viennent.

Notons que ce terme source est présenté ici dans un cas **monodimensionnel radial**. Il s'agit en effet de simuler la présence théorique d'un arc électrique dans un cylindre infini. On définit donc un espace monodimensionnel radial $\Omega = [0; R]$ (définir ce terme en 1-D plan, ne présente pas d'intérêt du point de vue pratique).

4-1 Terme de dissipation par effet Joule

Comme cela a été vu partie 1 § 2-2, si S_0 est une section de l'arc (cette section est perpendiculaire au sens du courant $i(t)$), le terme de dissipation par effet Joule s'écrit en un point M_0 de cette section :

$$D_{\text{joule}} (M_0) = \sigma (P_0, T_0) \frac{i(t)^2}{\left[\int_{S_0} \sigma (P(M), T(M)) ds \right]^2}$$

Dans le cas monodimensionnel radial, la section S_0 de l'arc est définie comme étant la zone conductrice du maillage 1-D (zone où la conductibilité électrique σ est non nulle).

Connaissant les distributions de température et de pression à un instant t , on sait évaluer la conductibilité σ en tout point du maillage.

Soit C_0 , la conductance de la section discrète S_0 :

$$C_0 = \int_{S_0} \sigma(P(M), T(M)) ds$$

Le calcul de la conductance C_0 de l'arc électrique sur la section S_0 consiste en l'intégration suivante (on effectue cette intégration en supposant que la conductibilité électrique σ est constante sur chaque maille de la section discrète) :

$$C_0 = 2\pi \int_0^R \sigma(r).r.dr$$

(le coefficient 2π qui apparaît est dû à l'axisymétrie)

Remarque : si la conductance C_0 est nulle ($\sigma = 0$ partout, c'est à dire que la température T est inférieure à la température minimale de conductivité), l'arc électrique est inexistant et le terme de dissipation par effet Joule est nul en tout point de la section considérée.

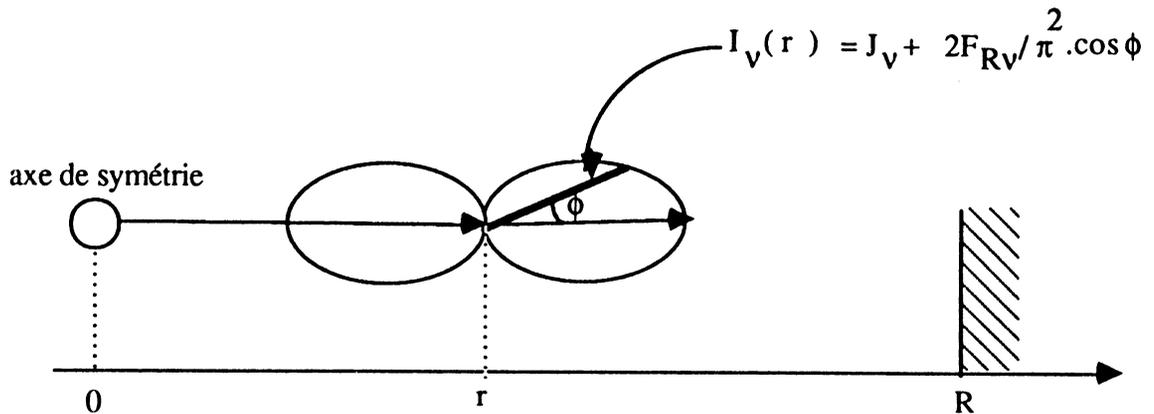
Dans le cas contraire ce terme s'écrit en chaque point M_0 (de température T_0 et de pression P_0) de la section S_0 :

$$D_{\text{Joule}}(M_0) = \sigma(P_0, T_0) \cdot \left[\frac{i(t)}{C_0} \right]^2 \quad (4-2)$$

4-2 Terme de rayonnement

On se place à une altitude z (on pose $\theta = \pi / 2$) ; on cherche dans un premier temps à résoudre le système (partie 1, formule (3-4)) sur un espace Ω monodimensionnel, $\Omega = [0; R]$; on ne

conserve alors que la composante radiale r du système d'équation.



Les équations de conservation du rayonnement s'écrivent alors (système monodimensionnel radial) :

Trouver F_{Rv} et J_v tels que :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial (r.F_{Rv})}{\partial r} = 4 \pi r (\epsilon_v - K_v J_v) \\ \frac{\partial J_v}{\partial r} = -\frac{3}{4 \pi} K_v F_{Rv} \end{array} \right. \quad \text{sur } [0; R] \quad (4-3)$$

Conditions aux limites:

$$F_{Rv} = 0 \quad \text{en } r = 0$$

$$F_{Rv} = \frac{\pi}{2} J_v^2 \quad \text{en } r = R \quad (\text{à la paroi})$$

Les conditions aux limites signifient que :

1- le flux de rayonnement est nul sur l'axe de symétrie (on suppose que le centre de l'arc est situé sur l'axe de symétrie).

2- l'intensité de rayonnement est nulle à la paroi, toute l'énergie étant réfléchi :

$$I_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad J_v + (2 / \pi^2) F_{Rv} \cdot \cos(\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad J_v = (2 / \pi^2) F_{Rv}$$

La détermination des fonctions ϵ_v et K_v n'étant pas triviale, on se propose alors de limiter l'étude à un nombre de plages de fréquence $N_{\text{fréq}}$ (dans la pratique $N_{\text{fréq}} = 2$ à 4). En effet, on ne tient compte que des bandes de fréquence pour lesquelles le gaz a des propriétés très caractéristiques d'émission ou d'absorption.

Le système global à résoudre s'écrit alors (cf. partie 1, § 3-1) :

on cherche F_{Ri} et J_i ($i = 1, N_{\text{fréq}}$) sur $[0, R]$ tels que :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial (r.F_{Ri})}{\partial r} = 4 \pi r (\epsilon_i - K_i J_i) \\ \frac{\partial J_i}{\partial r} = - \frac{3}{4 \pi} K_i F_{Ri} \end{array} \right. \quad \text{sur } [0; R] \quad \text{pour } i = 1, N_{\text{fréq.}} \quad (4-4)$$

Conditions aux limites:

$$F_{Ri} = 0 \quad \text{en } r = 0$$

$$F_{Ri} = \frac{\pi}{2} J_i^2 \quad \text{en } r = R \quad (\text{à la paroi})$$

le terme de flux de rayonnement global s'écrivant alors :

$$F_R = \sum_{i=1}^{N_{\text{fréq}}} F_{Ri}$$

NB : l'annexe 1 de ce chapitre présente la méthode de résolution numérique qui a été implémentée pour ce système d'équations.

4-5 - Annexe 5 : Module de résolution des équations du rayonnement monodimensionnel

On suppose connus les champs de température et de pression sur $[0, R]$. On est alors capable de déterminer les valeurs de ϵ et K sur $[0, R]$.

Soient ϵ et K des fonctions données, on cherche à résoudre le problème (4-4) à savoir :

trouver F et J sur $[0, R]$ tels que :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial (r.F)}{\partial r} = 4 \pi r (\epsilon - KJ) \\ \frac{\partial J}{\partial r} = -\frac{3}{4 \pi} K F \end{array} \right. \quad \text{sur } [0; R] \quad (A-1)$$

Conditions aux limites:

$$F = 0 \quad \text{en } r = 0$$

$$F = \frac{\pi}{2} J \quad \text{en } r = R \quad (\text{à la paroi})$$

Méthode de résolution :

On se propose de résoudre le système (A-1) par une méthode d'éléments finis mixtes (Thomas[1]), méthode particulièrement bien adaptée à ce système d'équations.

On cherche donc à déterminer J appartenant à un espace L_h approximation de $L^2([0, R])$ et F appartenant à un espace H_h approximation de $\{p \in H^1([0, R]), p(0) = 0\}$. On sait (Thomas [1]) que la condition de Dirichlet $F(L) = (\pi^2 / 2).J(L)$ est intrinsèquement prise en compte dans la formulation variationnelle.

Approximation des espaces :

On se donne la discrétisation de $[0, R]$ qui suit :

$$0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{M-1} < r_M = R$$

On choisit une approximation des espaces vérifiant la **condition inf-sup** discrète (Thomas[1]).

Soit L_h une approximation de $L^2([0, R])$ ainsi définie :

$$L_h = \{ v_{i-1/2}, i = 1, M \} \text{ où } v_{i-1/2}(r) = 1 \text{ si } r \in [r_{i-1}; r_i] \text{ et } v_{i-1/2}(r) = 0 \text{ sinon}$$

Soit H_h une approximation de $\{ p \in H^1([0, R]), p(0) = 0 \}$ ainsi définie :

$$H_h = \{ p_i, i = 1, M \} \text{ où } p_i(r) = (r - r_{i-1}) / (r_i - r_{i-1}) \text{ si } r \in [r_{i-1}; r_i]$$

$$p_i(r) = (r - r_{i+1}) / (r_i - r_{i+1}) \text{ si } r \in [r_i; r_{i+1}]$$

$$\text{et } p_i(r) = 0 \text{ si } r \notin [r_{i-1}; r_{i+1}]$$

et on pose

$$F = \sum_{i=1}^M F_i p_i$$

$$J = \sum_{i=1}^M J_{i-1/2} v_{i-1/2}$$

Formulation variationnelle :

Une formulation faible du système d'équations (A-1) s'écrit :

Trouver $J \in L^2([0, R])$ et $F \in H^1([0, R])$ tels que :

$$\left[\begin{array}{l} \int_0^R \frac{\partial (r.F)}{\partial r} v \, dr + \int_0^R 4.\pi..r.K.J.v \, dr = \int_0^R 4.\pi.\varepsilon.r.v \, dr \quad \forall v \in L^2([0, R]) \\ \int_0^R \frac{\partial J}{\partial r} .P \, dr + \int_0^R \frac{3}{4\pi} .K.F.P \, dr = 0 \quad \forall P \in H^1([0, R]) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \int_0^R \frac{\partial (r.F)}{\partial r} v \, dr + \int_0^R 4.\pi..r.K.J.v \, dr = \int_0^R 4.\pi.\varepsilon.r.v \, dr \quad \forall v \in L^2([0, R]) \\ - \int_0^R J . \frac{\partial P}{\partial r} \, dr + \int_0^R \frac{3}{4\pi} .K.F.P \, dr = - [J . P]_0^R \quad \forall P \in H^1([0, R]) \end{array} \right. \quad (A-2)$$

Projection dans les espaces :

Après discrétisation du problème, on cherche à déterminer les vecteurs F (vecteur dont les M composantes sont les F_i) et J (vecteur dont les M composantes sont les J_j) vérifiant les équations suivantes :

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^M F_i \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{\partial (r.P_i)}{\partial r} \cdot v_{j-\frac{1}{2}} dr + \sum_{i=1}^M J_{i-\frac{1}{2}} \cdot 4\pi \int_{r_{i-1}}^{r_i} r.K.v_{i-\frac{1}{2}} \cdot v_{j-\frac{1}{2}} dr \\ \\ = 4.\pi. \int_0^R r.E.v_{j-\frac{1}{2}} dr \quad j = 1, M \quad (A-3) \\ \\ - \sum_{i=1}^M J_{i-\frac{1}{2}} \int_{r_{i-1}}^{r_i} v_{i-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial r} dr + \sum_{i=1}^M F_i \cdot \frac{3}{4\pi} \int_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} K.P_i.P_j dr = -\frac{2}{\pi} F_M \cdot P_j(R) \quad j = 1, M \end{array} \right.$$

On pose alors :

$$a_{i,i} = \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} 4\pi r K dr \right)_{i=1, M} \quad \text{matrice diagonale } M \times M$$

$$b_{i,i} = \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{\partial (r.P_i)}{\partial r} dr \right)_{i=1, M} ; b_{i+1,i} = \left(\int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{\partial (r.P_i)}{\partial r} dr \right)_{i=1, M-1} \quad \text{matrice tridiagonale } M \times M$$

$$c_{i,i} = \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{\partial P_i}{\partial r} dr \right)_{i=1, M} ; c_{i+1,i} = \left(\int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{\partial P_i}{\partial r} dr \right)_{i=1, M-1} \quad \text{matrice tridiagonale } M \times M$$

$$d_{i,i} = \left(\int_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \frac{3}{4\pi} K.P_i.P_i.dr \right)_{i=1,M} \quad d_{i+1,i} = d_{i,i+1} = \left(\int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{3}{4\pi} K.P_i.P_i.dr \right)_{i=1,M-1} \quad \text{matrice } M \times M$$

$$S_i = \int_{r_{i-1}}^{r_i} 4\pi \epsilon r dr \quad i = 1, M \quad \text{vecteur de taille } M$$

$$x_{M,M} = \frac{2}{\pi} \quad \text{et } x_{i,j} = 0 \text{ sinon} \quad (\text{matrice } M \times M)$$

Le système (A-3) est alors équivalent au système matriciel suivant :

déterminer les vecteurs F et J tels que :

$$\begin{cases} BF + AJ = S & M \text{ équations} \\ - {}^tCJ + DF - XF = 0 & M \text{ équations} \end{cases} \quad (A-4)$$

En substituant AJ dans la seconde équation du système, on obtient le système tridiagonal qui suit:

$$[{}^tCB - AX + AD] . F = {}^tCS$$

F étant déterminé on obtient J explicitement (A étant une matrice diagonale) :

$$J = A^{-1} . [S - BF]$$

Tests numériques :

On se propose de tester numériquement le module de résolution des équations du rayonnement en comparant la solution obtenue à une solution analytique.

Considérons les fonctions suivantes sur $[0 ; L]$:

$$\epsilon = (-3/8\pi)(r^2 - L^2) + 1/\pi \quad r \in [0 ; L]$$

$$K = 1$$

alors les fonctions

$$F = r \quad r \in [0; L]$$

$$\text{et } J = (-3/8\pi)(r^2 - L^2) + 1/2\pi \quad r \in [0; L]$$

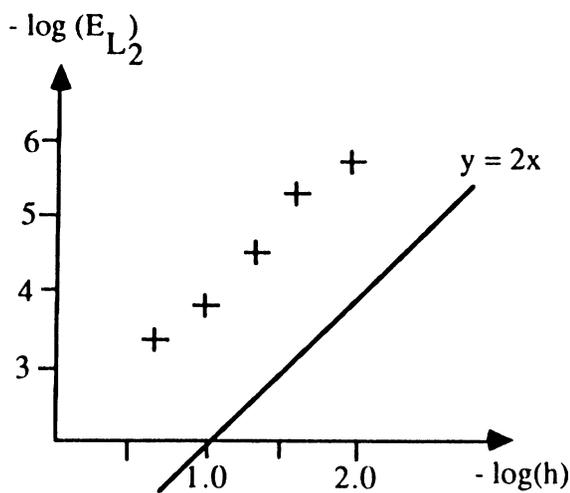
sont les solutions analytiques du problème (1) dès que $L = \pi/4$ (en effet $F(L) = (\pi^2/2).J(L)$ si et seulement si $L = \pi/4$).

On teste le module de résolution sur différents maillages de pas d'espace constant h , et on calcule l'erreur en norme L^2 de la solution obtenue.

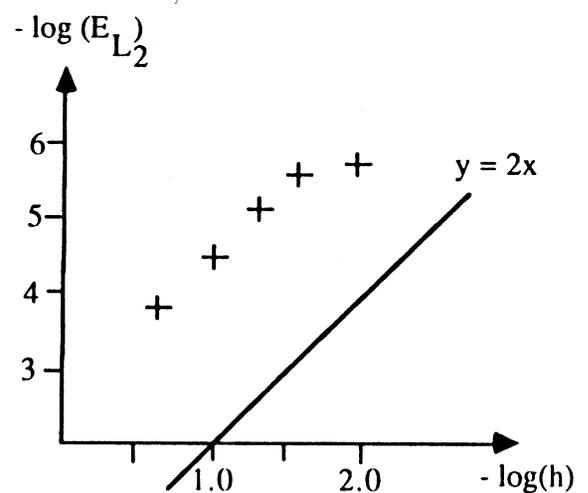
On définit ainsi cette erreur :

$$E_{L^2}(F) = \|F_h - F_{\text{exacte}}\|_{L^2} / \|F_{\text{exacte}}\|_{L^2}$$

$$E_{L^2}(J) = \|J_h - J_{\text{exacte}}\|_{L^2} / \|J_{\text{exacte}}\|_{L^2}$$



Erreur L^2 sur le flux de rayonnement F



Erreur L^2 sur l'intensité de rayonnement J

La méthode proposée converge donc en norme L^2 . Sa précision sur chacune des deux inconnues F et J est proche de l'ordre 2 en espace.

5 - Résultats numériques

Ce paragraphe présente différents calculs **en dimension 1** obtenus avec chacune des deux méthodes numériques présentées dans ce chapitre (la méthode d'éléments finis et la méthode à pas fractionnaires).

5-1 . Modélisation des phénomènes de convection 1D : le tube à choc

5-1-1 . Comparaison des deux méthodes

5-1-2 . Méthode d'éléments finis : capture de choc matricielle

5-2 . Modélisation des phénomènes de convection et diffusion 1D : onde radiale

5-2-1 . Gaz parfait et polytropique

5-2-1-1 . Diffusion numérique du schéma de Godounov

5-2-1-2 . Comparaison des deux méthodes

5-2-2 . Gaz parfait et non polytropique

5-2-2-1 . Comparaison des deux méthodes

5-2-2-2 . Influence des variations de la capacité calorifique

5-3 . Modélisation d'un arc électrique 1D (diffusion, convection, terme source)

5-3-1 Sans rayonnement

5-3-1-1 Comparaison des deux méthodes

5-3-1-2 Profils d'arc (avec différents gaz)

5-3-2 Avec rayonnement

5-3-2-1 Influence des bandes de fréquence

5-3-2-2 Comparaison des deux méthodes

NB : dans tout ce paragraphe on appelle :

- **Godounov + EFM** : la méthode à pas fractionnaires lorsque le pas de convection est résolu à l'aide du schéma de Godounov d'ordre 1 (les pentes sont alors toutes nulles) et le pas de diffusion est résolu à l'aide de la méthode d'éléments finis mixtes.

- **Van Leer + EFM** : la méthode à pas fractionnaires lorsque le pas de convection est résolu à l'aide du schéma de Van Leer (avec calcul des pentes cf § 3-2) et le pas de diffusion est résolu à l'aide de la méthode d'éléments finis mixtes.

De même, lorsqu'on parle de schéma de **Godounov**, il s'agit de la résolution du pas de convection lorsque les pentes sont mises à 0.

5-1 Modélisation des phénomènes de convection (équations d'Euler) :
le tube à choc 1-D

Introduction : on considère un tube (monodimensionnel, ce qui correspond au cas théorique physique d'un tube d'une largeur et d'une hauteur infinies) rempli de gaz parfait, d'une longueur de 100 m cloisonné en son centre (en $x = 50$ m).

Maillage : 100 mailles égales (chacune de largeur 1m)

Caractéristiques du gaz : (notations habituelles)

Dénomination du gaz : **Air froid** considéré comme un gaz parfait

Capacité calorifique : $C_v = 716.375 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Coefficient de compressibilité : $Z = 287.09$

Conductivité thermique : $k = 0.0 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$

Conductibilité électrique : $\sigma = 0.0 \text{ siemens}^{-1}$

Conditions initiales :

Dans la partie "gauche" du tube (région 1) les conditions initiales sont les suivantes :

vitesse du gaz : 0. m/s

densité : 12 kg/m^3

pression : 10^6 Pa

Dans la partie "droite" du tube (région 2) les conditions initiales sont les suivantes :

vitesse du gaz : 0. m/s

densité : 1.2 kg/m^3

pression : 10^5 Pa

Conditions aux limites : imperméabilité aux deux extrémités du maillage (c'est à dire $u = 0$ aux deux extrémités du maillage).

Conditions d'étude : à l'instant $t = 0$ s, on retire la cloison centrale. On observe alors l'expansion de trois ondes, une onde de détente, une discontinuité de contact et une onde de choc dont on sait calculer les expressions analytiques (cf. Gilquin [1]).

Résultats : les résultats fournis sont à $t = 0.06$ s.

5-1-1 Comparaison des deux méthodes

Les résultats obtenus avec la méthode de Van Leer (schéma de Godounov d'ordre 2 en espace sur des maillages réguliers) sont sensiblement meilleurs que ceux obtenus avec la méthode d'éléments finis espace-temps ; on constate en effet (cf. page suivante):

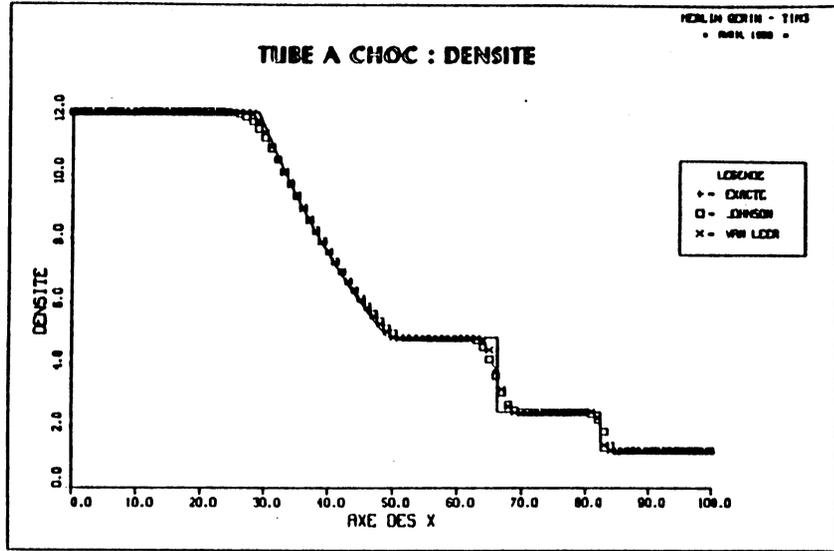
- une meilleure approximation du choc (moins de points dans le choc)
- une meilleure approximation de la discontinuité de contact
- une meilleure approximation de la détente (la détente est très bien approchée par la méthode de Van Leer)
- un temps de calcul bien inférieur.

Temps de calcul

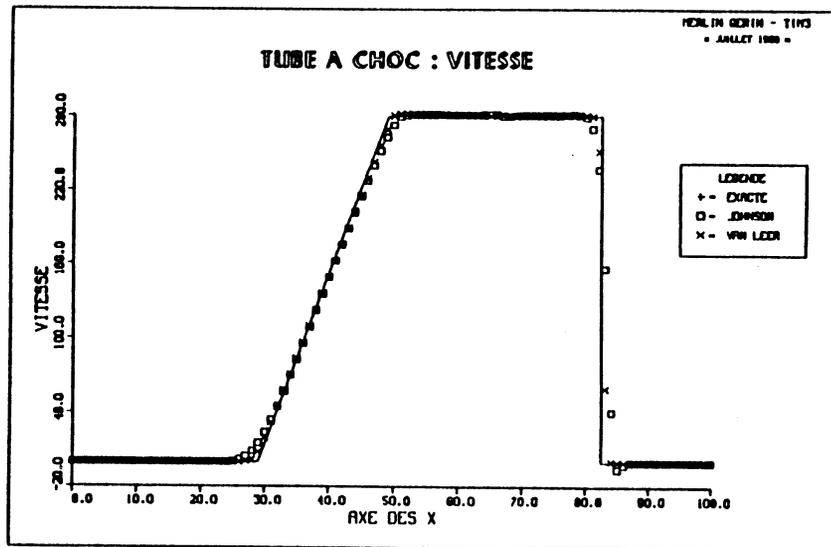
/ / / / / / / / / /	Temps réel (s)	Temps normalisé
Johnson	1190.38	45.77
Pas fraction (Roc)	26.01	1.

Remarque : c'est bien entendu (on ne modélise en effet que la convection) la condition de CFL imposée par la méthode de Van Leer qui gère le pas de temps de la méthode à pas fractionnaires pour ce problème du tube à choc.

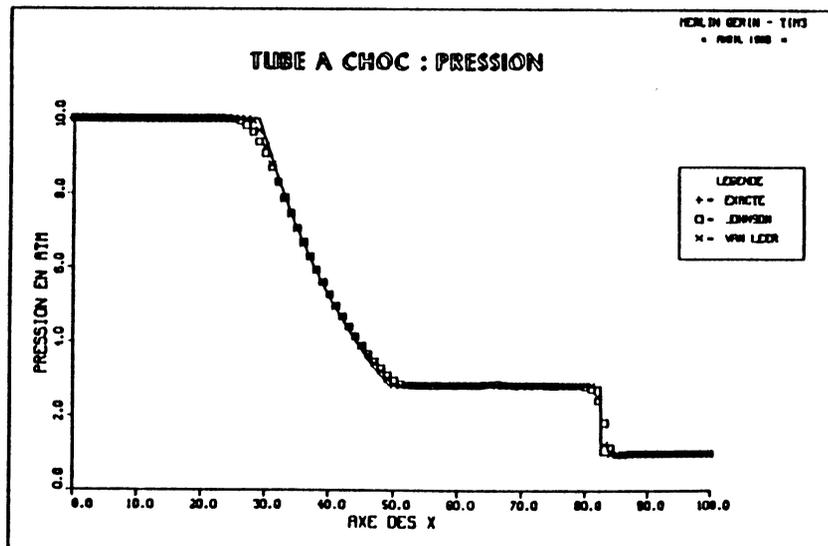
Densité :



Vitesse :



Pression :



5-1-2 Méthode d'éléments finis : la capture de choc matricielle

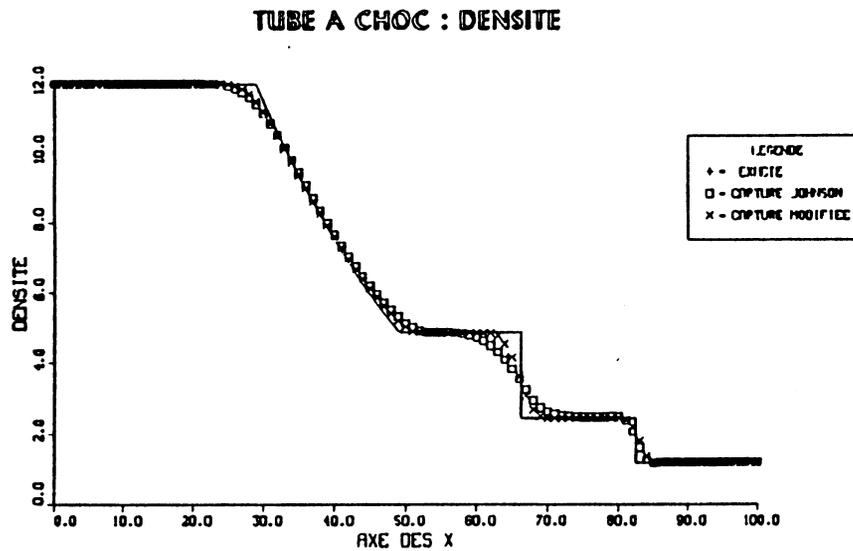
Pour ce qui concerne la méthode d'éléments finis, la capture de choc matricielle (qui effectue une capture de choc sur les variables conservatives) donne des résultats meilleurs que la capture de choc scalaire (capture de choc sur les variables entropiques).

Les résultats présentés ci-dessous mettent en effet en évidence :

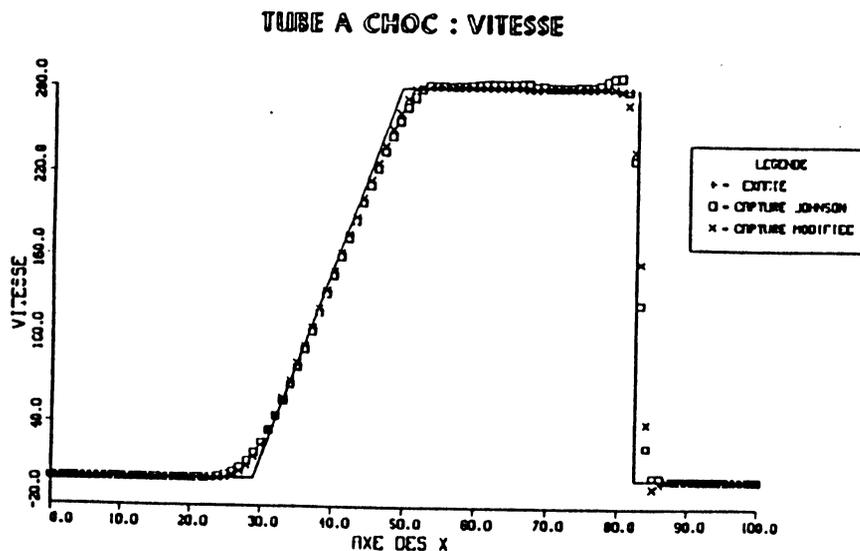
- une meilleure approximation du choc et surtout de la discontinuité de contact
- une meilleure capture du choc (cela est notamment très net sur les courbes de vitesse)

pour la capture de choc matricielle (nommée "capture modifiée" sur les courbes).

Densité :



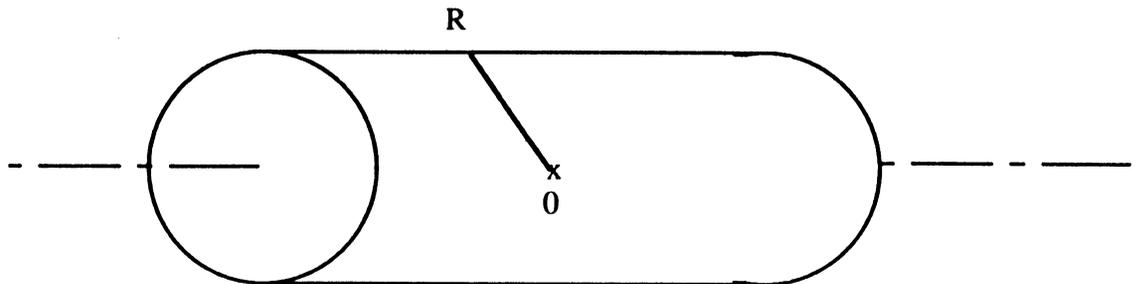
Vitesse :



5-2 Modélisation des phénomènes 1D de convection et de diffusion : onde radiale

5-2-1 Gaz parfait et polytropique

Introduction : on considère un tube cylindrique rempli de gaz parfait, d'une longueur infinie et de diamètre 10 cm.



On étudie les écoulements de gaz sur un rayon de ce cylindre (problème 1D radial), à savoir pour $x \in [0, R]$ (0 est par hypothèse situé sur l'axe et $R = 5$ cm est le rayon du cylindre).

Maillage : 50 mailles de tailles égales (chacune de largeur 1mm)

Caractéristiques du gaz : (notations habituelles)

Dénomination du gaz : Air considéré comme un gaz parfait

Capacité calorifique : $C_v = 716.375 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Coefficient de compressibilité : $Z = 287.09$

Conductivité thermique : $k = 1000.0 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$

Conductibilité électrique : $\sigma = 0.0 \text{ siemens}^{-1}$

Conditions initiales : partout dans le tube

vitesse du gaz : 0. m/s

densité : 1.18377 kg/m^3

pression : $1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

température : 300 K

Conditions aux limites : imperméabilité et adiabaticité aux deux extrémités du maillage.

Terme source : durant l'ensemble du temps d'étude, on injecte de l'énergie (affectée intégralement au terme source) sous la forme suivante :

$$\text{source}(x) = 10^{12} \cdot \exp(-x^2/s^2) \quad \text{avec } s = 10^{-3}$$

On étudie l'expansion de l'onde de gaz sur l'intervalle de temps $[0, 10^{-4}]$

Résultats : les résultats sont fournis aux instants suivants : $2 \cdot 10^{-5}$, $4 \cdot 10^{-5}$, $6 \cdot 10^{-5}$, $8 \cdot 10^{-5}$ et $1 \cdot 10^{-4}$

Remarques :

a - Le paragraphe 5-2-1-1 présente les résultats obtenus avec les deux méthodes mises en œuvre :

- la méthode d'éléments finis de Johnson
- la méthode à pas fractionnaire : le pas de convection est résolu à l'aide de la méthode de volumes finis de Godounov (le schéma étant alors exactement équivalent à un schéma de Van Leer où on aurait mis toutes les pentes à 0).

On constate une nette différence entre les deux méthodes ; cependant, en raffinant (2 fois, 3 fois puis 5 fois) le maillage sur lequel le schéma de Godounov est appliqué, la différence entre les solutions obtenues par les méthodes de Godounov et de Johnson diminue.

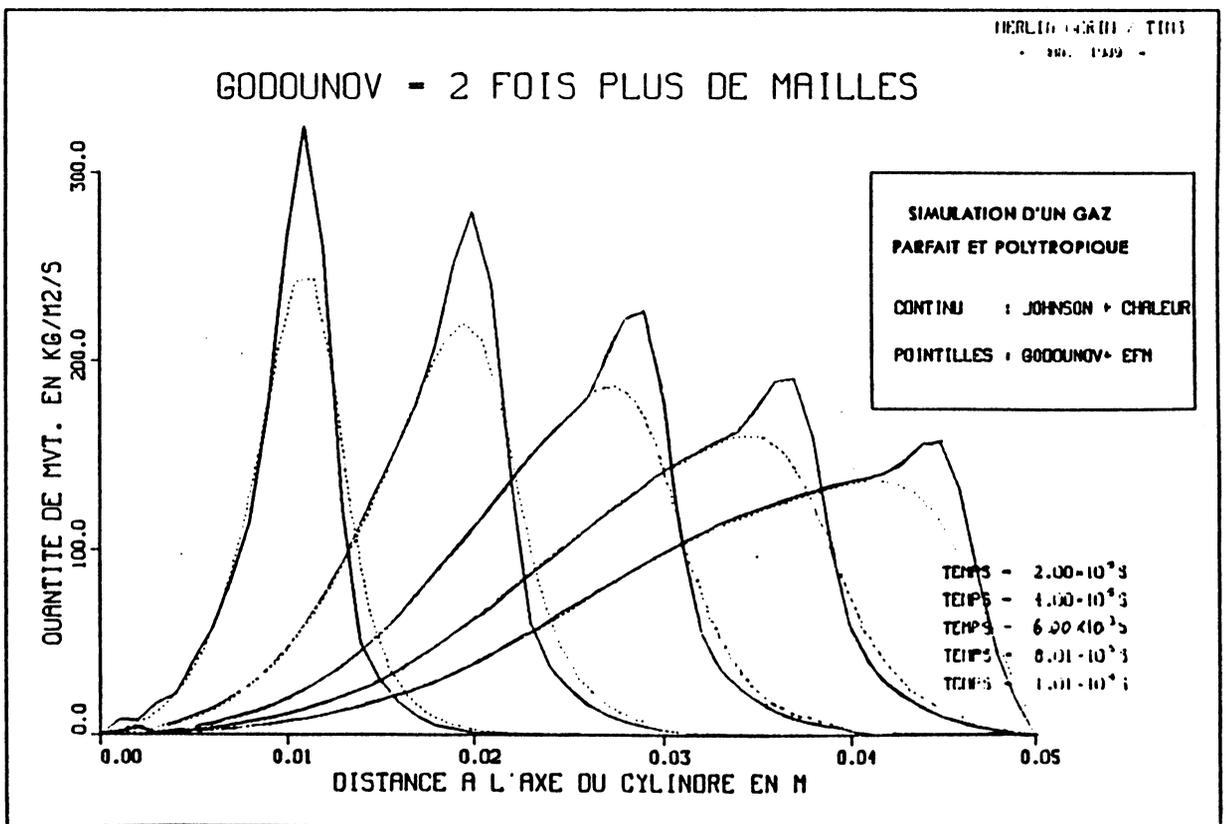
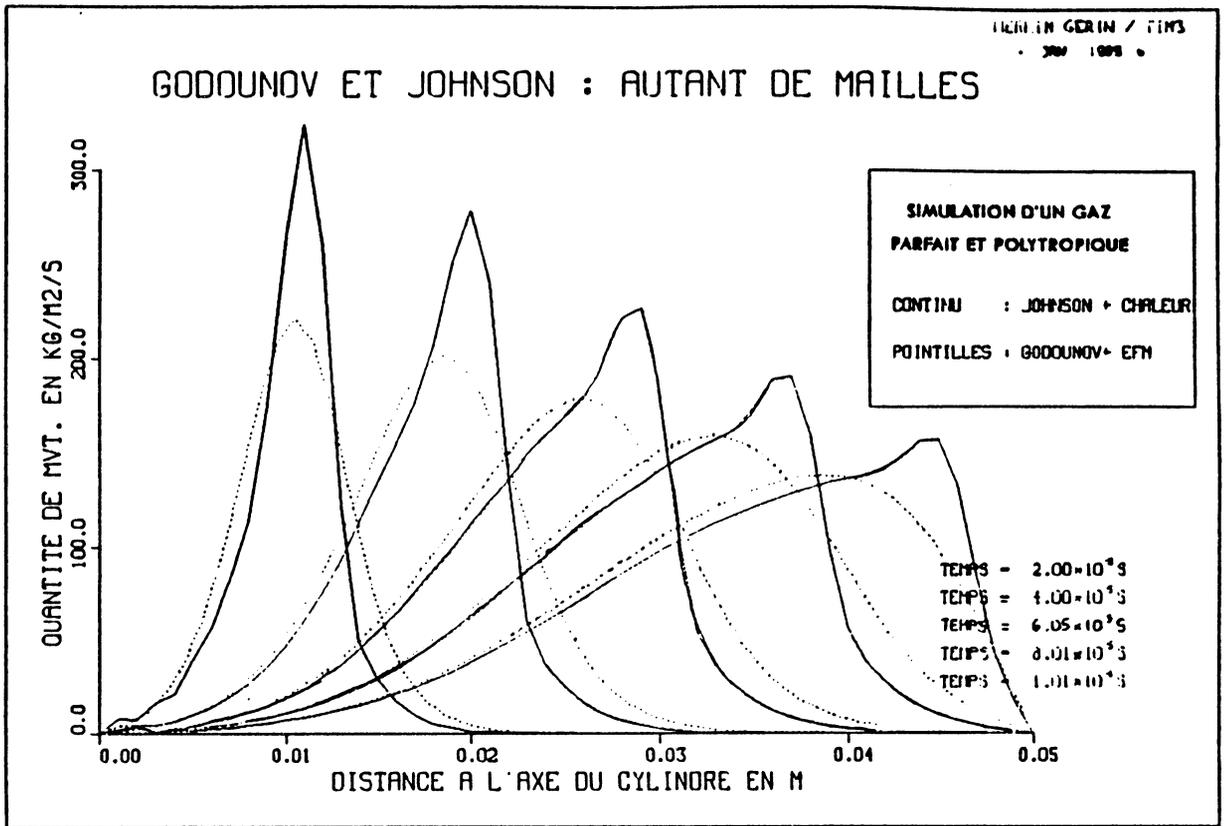
On met ainsi en évidence l'importante diffusion numérique du schéma de Godounov pour ce problème.

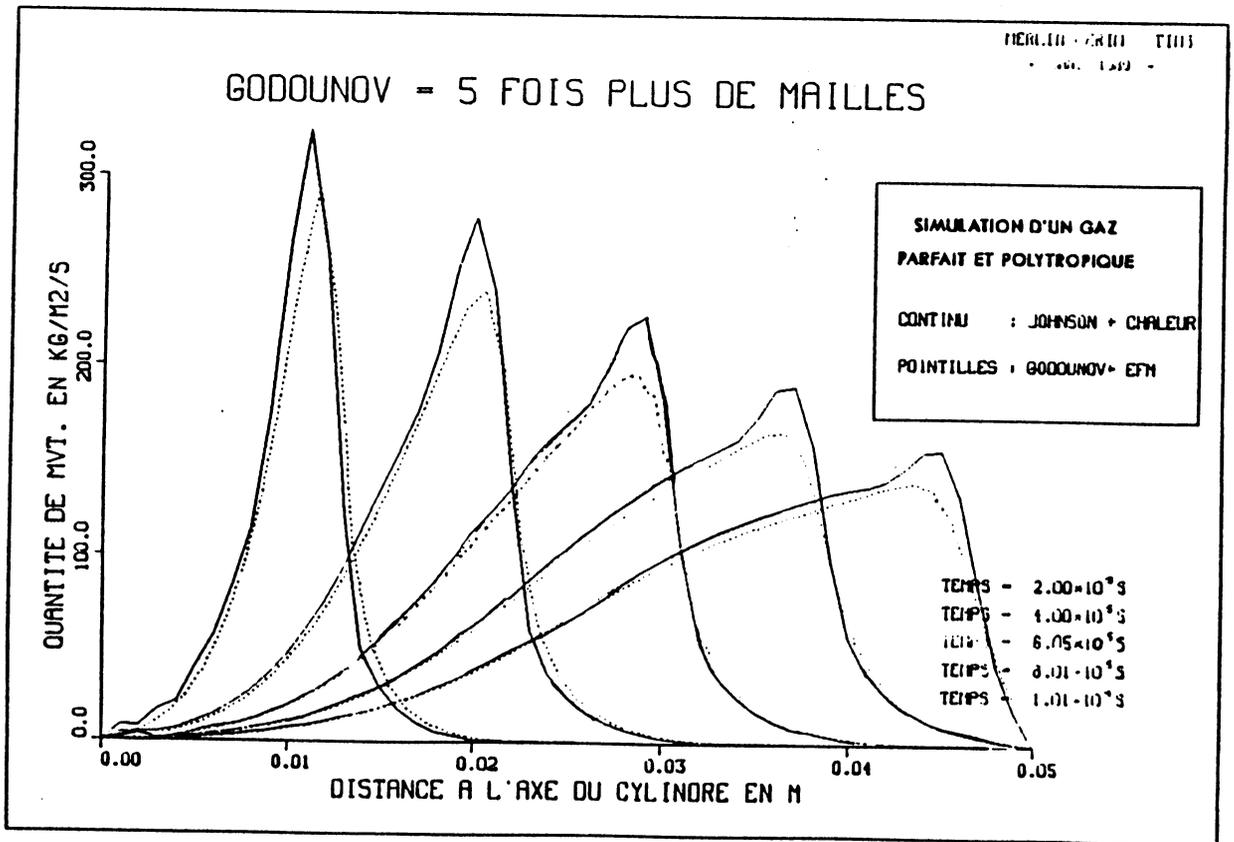
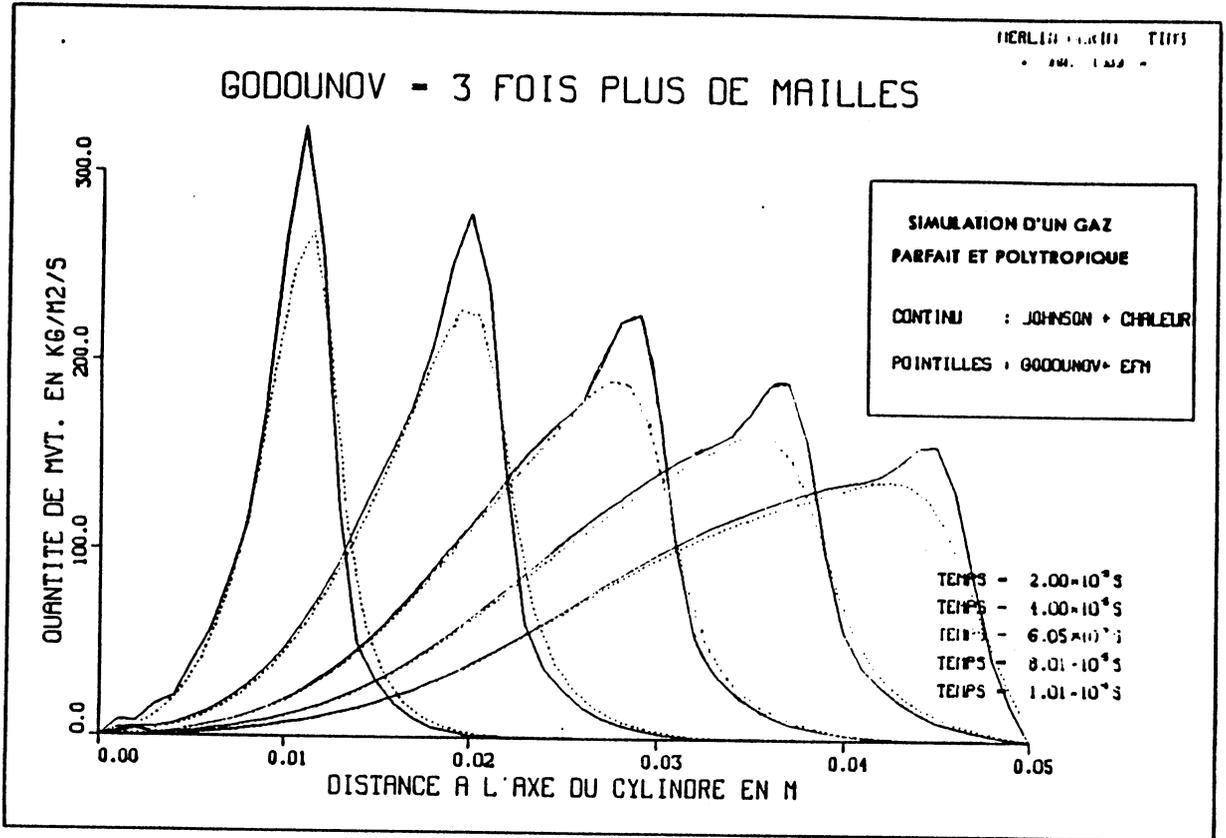
b - Le paragraphe 5-2-1-2 compare les méthodes d'éléments finis (espace-temps) et de pas fractionnaires (Van Leer et éléments finis mixtes). Les résultats obtenus sur ce problème raide sont très proches. Les temps de calcul sont par contre très différents.

Conclusion : ces résultats mettent en évidence trois résultats importants :

- 1- Les résultats très proches entre les deux méthodes.
- 2- L'importance des phénomènes de transport (et des ondes de choc). Il semble nécessaire pour bien traiter ces chocs avec une méthode à pas fractionnaires, d'avoir un schéma d'ordre 2 en espace (sur des maillages réguliers, d'ordre 1 sinon) lors du pas de convection.
- 3- Le coût (temps de calcul) nettement plus élevé de la méthode d'éléments finis.

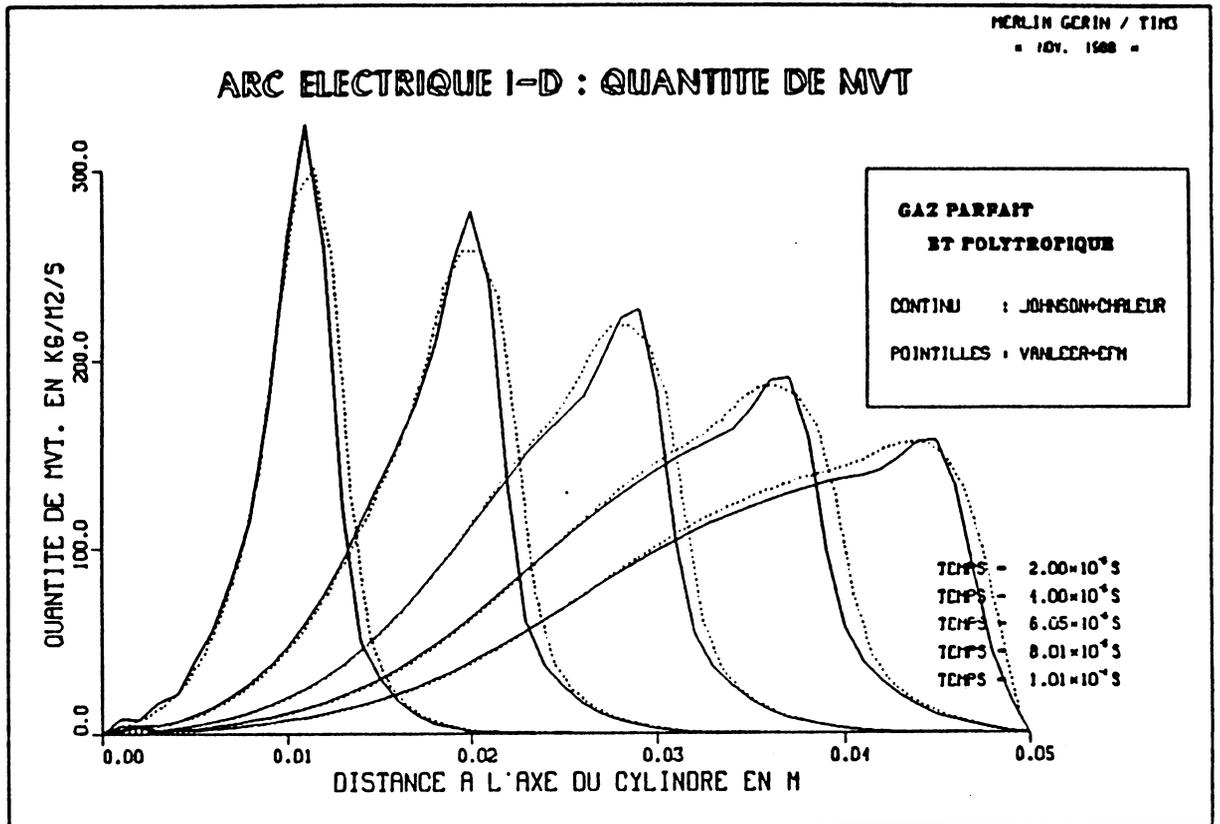
5-2-1-1 Diffusion numérique du schéma de Godounov





5-2-1-2 Comparaison des deux méthodes (Eléments finis Johnson et pas fractionnaires)

Comme précédemment on présente les ondes de quantité de mouvement obtenues.



Temps de calcul

	Temps réel (s)	Temps normalisé
Johnson	1919.18	56.10
Pas fraction (Roe)	34.21	1.

Les résultats ont été obtenus sur des **maillages identiques**. Le nombre de pas de temps nécessaire pour obtenir la solution avec chacune des deux méthodes est sensiblement équivalent (en fait on note que la méthode de Johnson demande de l'ordre de 30 % de pas de temps en moins). Le pas de temps de la méthode à pas fractionnaires est déterminé par la condition de "cohérence" (cf. § 3-4) durant l'initialisation du phénomène ($t < 2.10^{-5}$ s), puis par la condition de CFL du pas de convection ensuite ; on observe le même processus pour les exemples qui suivent.

5-2-2 Gaz parfait et non polytropique

Introduction : on considère un tube cylindrique rempli de gaz parfait et non polytropique (la capacité calorifique varie en fonction de la température), d'une longueur infinie et de diamètre 10 cm (idem 5-2-1).

On étudie les écoulements de gaz sur un rayon de ce cylindre (problème 1D radial), à savoir pour $x \in [0, R]$ (0 est par hypothèse situé sur l'axe et $R = 5$ cm est le rayon du cylindre).

Maillage : 50 mailles de tailles égales (chacune de largeur 1mm)

Caractéristiques du gaz : (notations habituelles)

Dénomination du gaz : **SF6** considéré comme un gaz parfait mais non polytropique (C_v varie fortement en fonction de la température).

Capacité calorifique : $C_v = C_v(T)$ cf Vacquié [1] pour une pression de 1atm (10^5 Pa)

Coefficient de compressibilité : $Z = 56.95$

Conductivité thermique : $k = k(T)$ cf Vacquié [1]

Conductibilité électrique : $\sigma = 0.0 \text{ s}^{-1}$

Conditions initiales : partout dans le tube

vitesse du gaz : 0. m/s

densité : 5.89 kg/m³

pression : 1.01 10⁵ Pa

température : 300 K

Conditions aux limites : imperméabilité et adiabaticité aux deux extrémités du maillage .

Terme source : idem gaz parfait et polytropique.

Durant l'ensemble du temps d'étude, on injecte de l'énergie (affectée intégralement au terme source) sous la forme suivante :

$$\text{source}(x) = 10^{12} \cdot \exp(-x^2/s^2) \quad \text{avec } s = 10^{-3}$$

On étudie l'expansion de l'onde de gaz sur l'intervalle de temps $[0, 10^{-4}]$

Résultats : les résultats sont fournis aux instants suivants : 2.10^{-5} , 4.10^{-5} , 6.10^{-5} , 8.10^{-5} et 1.10^{-4} .

Remarques :

a - Le paragraphe 5-2-2-1 compare les méthodes d'éléments finis (espace-temps) et de pas fractionnaires (Van Leer et éléments finis mixtes)). Les résultats obtenus sur ce problème sont très proches (les courbes se confondent la plupart du temps). Les temps de calcul sont par contre très différents.

b - Le paragraphe 5-2-2-2 compare, pour une même méthode (Van Leer et éléments finis mixtes) l'influence des variations de la capacité calorifique C_v en fonction de la température. On compare en effet les résultats obtenus avec le gaz décrit ci-dessus et le gaz parfait polytropique suivant :

Capacité calorifique : $C_v = C_v(300) = 1044 \text{ J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ (cf. Vacquié [1])

Coefficient de compressibilité : $Z = 56.95$

Conductivité thermique : $k = k(300) = 0.0541 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ (cf. Vacquié [1])

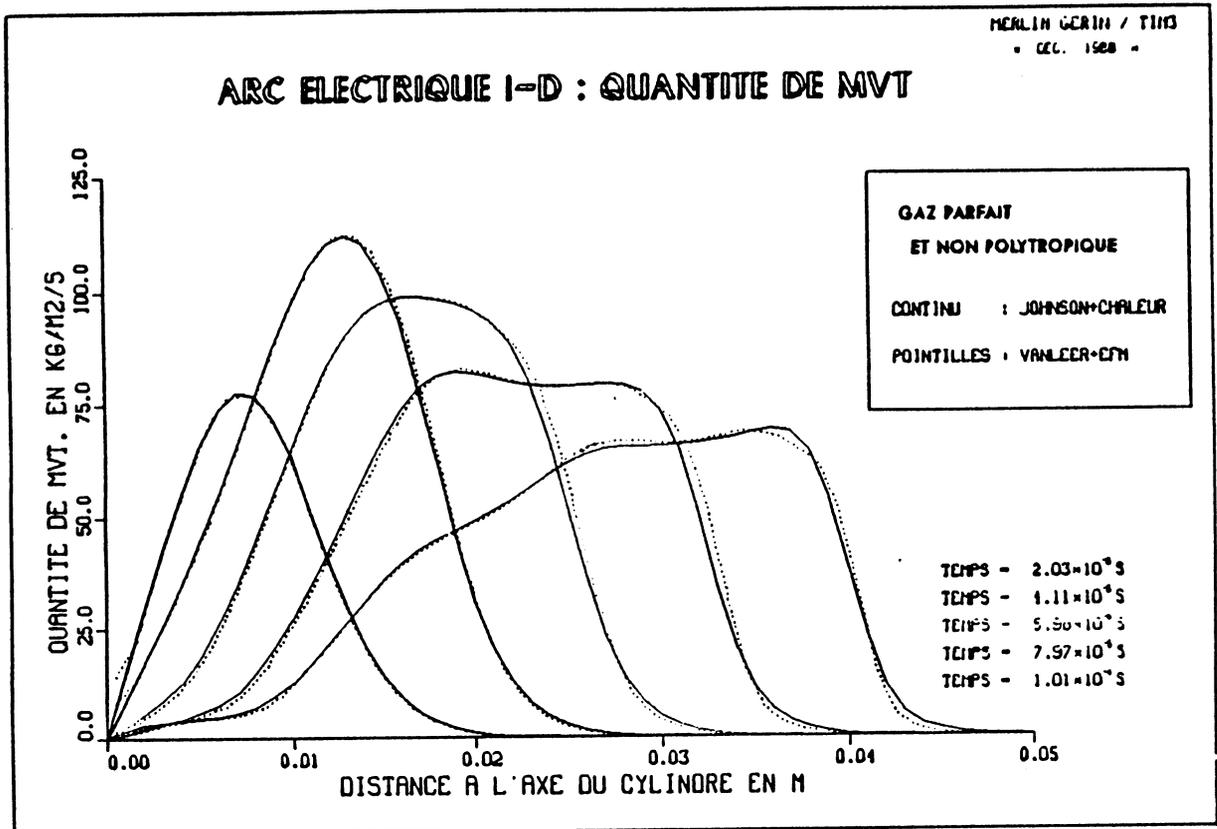
Conductibilité électrique : $\sigma = 0.0 \text{ siemens}^{-1}$

Conclusion : l'étude de ce cas permet de confirmer deux résultats importants :

1- Les résultats très proches entre les deux méthodes.

2- Le coût (temps de calcul) nettement plus élevé de la méthode d'éléments finis.

De plus, on met en évidence l'importance de bien traiter les non linéarités dues à la thermodynamique des gaz réels.

5-2-2-1 Comparaison des deux méthodes (Eléments finis et pas fractionnaires)

Temps de calcul

	Temps réel (s)	Temps normalisé
Johnson	1997.14	55.2
Pas fraction (Roe)	36.18	1.

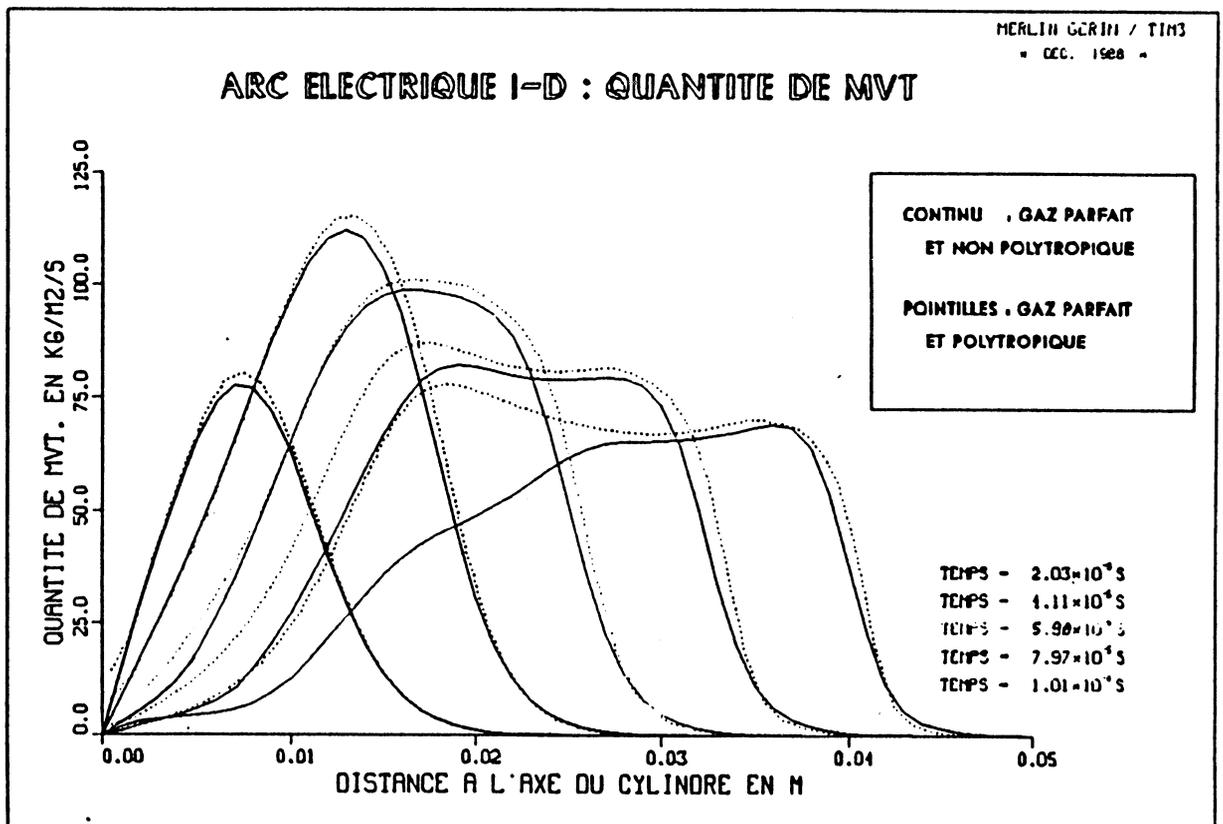
Les résultats ont été obtenus sur des **maillages identiques**. Le nombre de pas de temps nécessaire pour obtenir la solution avec chacune des deux méthodes est sensiblement équivalent (en fait on note que la méthode de Johnson demande de l'ordre de 10 % de pas de temps en moins).

5-2-2-2 Influence des variations de la capacité calorifique

Les courbes présentées ci-dessous (les courbes en trait plein étant les résultats obtenus pour un gaz parfait dont la capacité calorifique C_v varie avec la température alors que les courbes en pointillé sont les résultats obtenus pour un gaz parfait dont la capacité calorifique ne varie pas) mettent en évidence les résultats suivants :

- tant que la température est basse (premières ondes de quantité de mouvement), les résultats sont logiquement peu différents.

- lorsque la température est plus élevée, on note un très net décalage entre les résultats.



Ainsi, il est absolument nécessaire de bien prendre en compte les variations de la capacité calorifique en fonction de la température ; celle-ci a, en effet, une grande incidence sur la nature des résultats.

5-3 Modélisation d'un arc électrique 1D

Dans ce paragraphe les phénomènes de diffusion, convection, effet Joule et rayonnement sont simulés.

Introduction : on considère un tube cylindrique rempli de gaz réel, d'une longueur infinie et de diamètre 10 cm (idem § 5-2-1).

On étudie les écoulements de gaz sur un rayon de ce cylindre (problème 1D radial), à savoir pour $x \in [0, R]$ (0 est par hypothèse situé sur l'axe et $R = 5$ cm est le rayon du cylindre).

Maillage : 50 mailles de tailles égales (chacune de largeur 1mm)

Caractéristiques du gaz : (notations habituelles)

Dénomination des gaz: SF6 ou N2 (Azote, très proche de l'air)

Capacité calorifique : $C_v = C_v(T)$ cf Vacquié [1] pour une pression de 1atm (10^5 Pa)

Coefficient de compressibilité : $Z = Z(T)$ cf Vacquié [1] pour une pression de 1atm (10^5 Pa)

Conductivité thermique : $k = k(T)$ cf Vacquié [1]

Conductibilité électrique : $\sigma = \sigma(T)$ cf Vacquié [1] pour une pression de 1atm (10^5 Pa)

Conditions initiales :

Pour le SF6 :

température : 300 K

vitesse du gaz : 0. m/s

pression : $1.01 \cdot 10^5$ Pa

densité : 5.89 kg/m^3

Pour l'azote (N2) :

température : 300 K

vitesse du gaz : 0. m/s

pression : $1.01 \cdot 10^5$ Pa

densité : 1.18377 kg/m^3

Conditions aux limites : imperméabilité et adiabaticité aux deux extrémités du maillage (une des deux extrémités est l'axe de symétrie, les conditions de symétrie sont l'imperméabilité et l'adiabaticité).

Terme source : durant 10^{-4} s, on injecte de l'énergie (affectée intégralement au terme source) sous la forme suivante :

$$\text{source}(x) = 10^{12} \cdot \exp(x^2/s^2) \quad \text{avec } s = 10^{-3}$$

Ensuite ($t > 10^{-4}$ s.), le terme source prend en compte les phénomènes de dissipation par effet Joule et de rayonnement (cf partie 2, chapitre 4).

5-3-1 Sans rayonnement

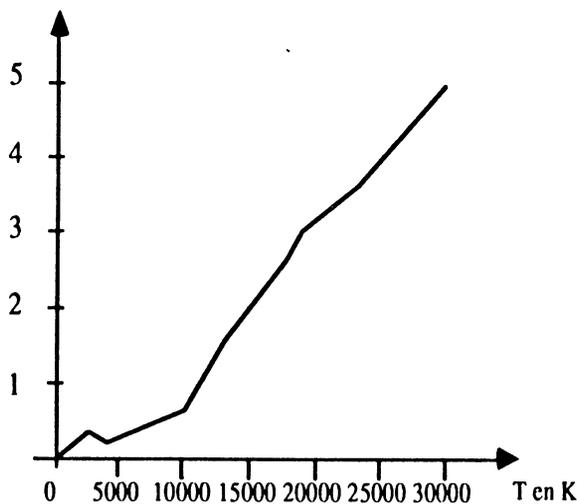
Conditions d'étude : le courant électrique parcourant le réseau électrique (retrouvé dans l'expression du terme de dissipation d'énergie par effet Joule) est un courant alternatif :

$$i(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi) \quad \text{avec } I_0 = 1000 \text{ A, } \omega = 2 \pi f, f = 50 \text{ Hz et } \phi = 0$$

Résultats : le paragraphe 5-3-1-1 compare les méthodes d'éléments finis (Johnson avec formulation mixte) et de pas fractionnaires (Van Leer et éléments finis mixtes). Les résultats sont donnés aux instants suivants : $2 \cdot 10^{-5}$, $4 \cdot 10^{-5}$, $6 \cdot 10^{-5}$, $8 \cdot 10^{-5}$ et $1 \cdot 10^{-4}$. Les résultats obtenus sur ce problème sont **très proches**. Les temps de calcul sont par contre très différents (comme précédemment).

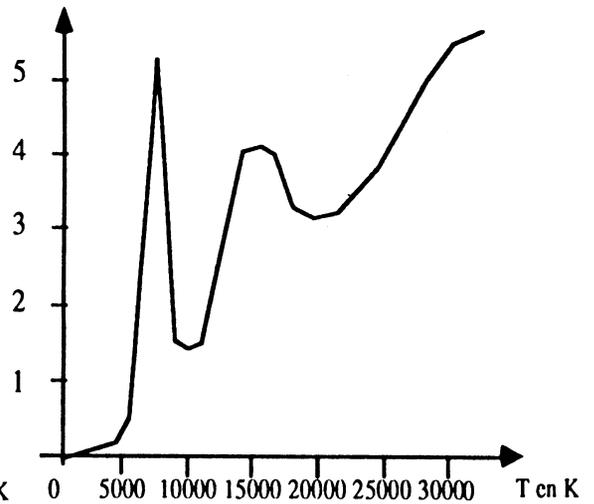
Le paragraphe 5-3-1-2 compare, pour une même méthode (méthode à pas fractionnaires) l'influence sur les profils d'arc, du gaz considéré. Les résultats sont donnés toutes les 2 millisecondes. La **conductivité électrique** est très différente pour chacun des deux gaz. Cela explique les différences majeures entre les profils obtenus.

$k(T)$ en W/m/K



Conductivité thermique du SF6 en fonction de T

$k(T)$ en W/m/K

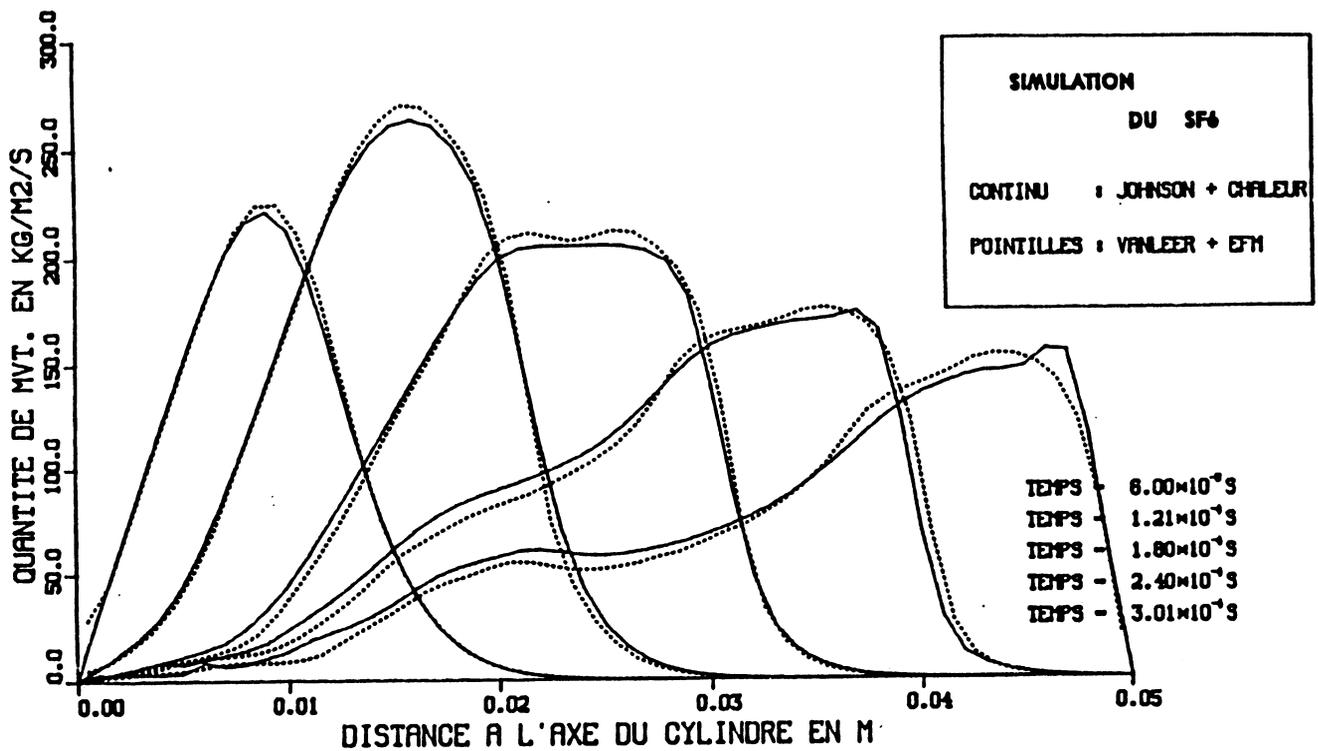


Conductivité thermique du N2 en fonction de T

5-3-1-1 Comparaison des deux méthodes (éléments finis et pas fractionnaires)

MERLIN GERIN / TIMS
" JUV. 1988 "

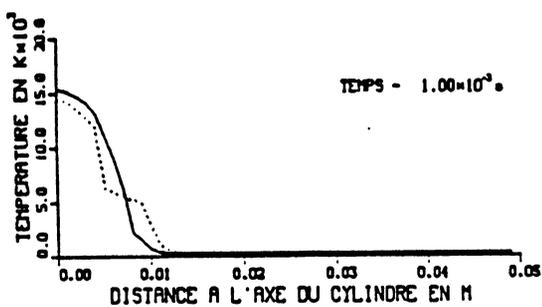
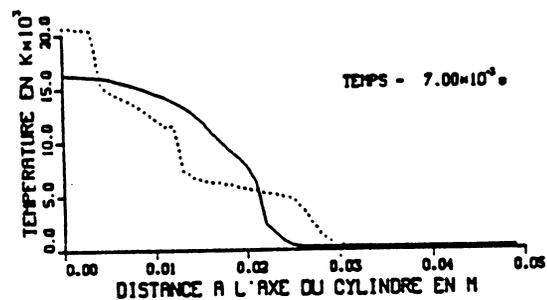
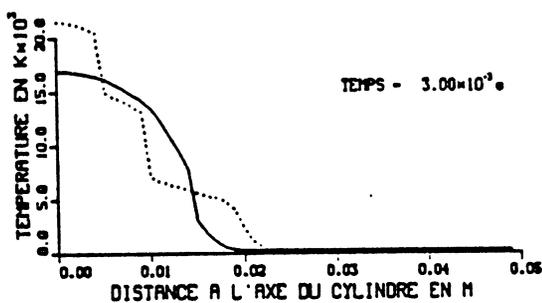
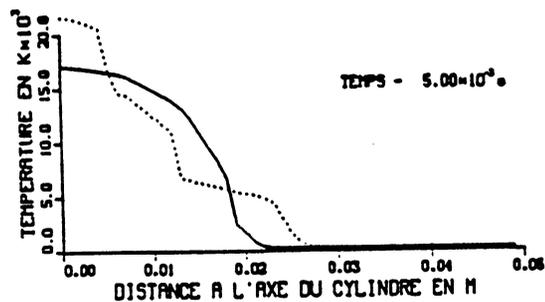
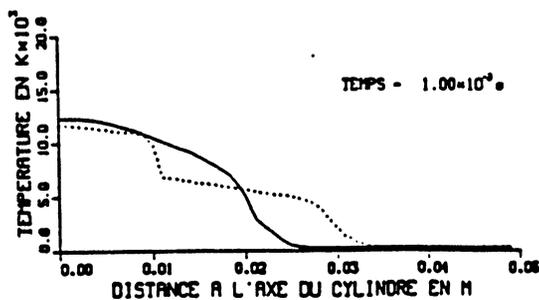
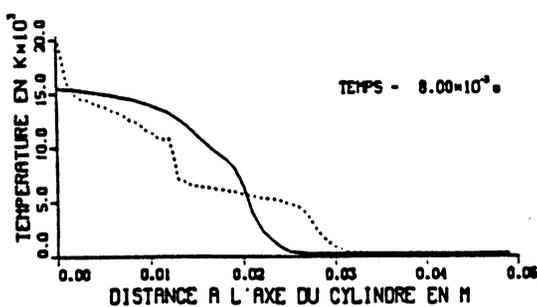
ARC ELECTRIQUE I-D : QUANTITE DE MVT



Temps de calcul

	Temps réel (s)	Temps normalisé
Johnson	2050.84	50.08
Pas fraction (Roe)	40.95	1.

Les résultats ont été obtenus sur des **maillages identiques**. Le nombre de pas de temps nécessaire pour obtenir la solution avec chacune des deux méthodes est sensiblement équivalent (en fait on note que la méthode de Johnson demande de l'ordre de 10 % de pas de temps en moins).

5-3-1-2 Profils d'arc (Méthode à pas fractionnaires modélisant différents gaz)ARC ELECTRIQUE 1-D , TEMPERATURE
SIMULATION DE GAZ REELSCONTINU : SF6
POINTILLES : AIRARC ELECTRIQUE 1-D , TEMPERATURE
SIMULATION DE GAZ REELSCONTINU : SF6
POINTILLES : AIRARC ELECTRIQUE 1-D , TEMPERATURE
SIMULATION DE GAZ REELSCONTINU : SF6
POINTILLES : AIR

5-3-2 Avec rayonnement

Conditions d'étude : le gaz considéré est le SF6. Le courant électrique parcourant le réseau électrique (retrouvé dans l'expression du terme de dissipation d'énergie par effet Joule) est un

courant alternatif : $i(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$

avec $I_0 = 10000$ A, $\omega = 2 \pi f$, $f = 50$ Hz et $\phi = 0$

5-3-2-1 Influence des bandes de fréquence sur les profils et la montée en pression

Etude avec une bande de fréquence :

On suppose que le gaz émet et absorbe de l'énergie suivant une bande de fréquence unique.

On présente ci-dessous les coefficients d'émission et d'absorption de la bande de fréquence ; les coefficients d'absorption sont inspirés des coefficients obtenus par Lowke [1] pour le SF6. Il s'agit essentiellement d'absorption dans les U.V.; les coefficients d'émission représentent l'émission totale du SF6 (cf Girard [1]).

température T	100	2000	2100	5000	10000	12500	15000	20000	25000	30000
émission $\log(\epsilon)$	0.0	0.0	0.0	7.9	9.0	9.6	10.0	10.6	10.9	11.3
absorption $\log(K)$	5.0	4.8	4.8	4.6	4.0	3.7	3.3	2.7	1.8	1.0

Dans la suite, cette bande de fréquence est appelée "bande U.V.".

Etude avec deux bandes de fréquence :

On suppose que le gaz émet et absorbe de l'énergie suivant deux bandes de fréquence. Les coefficients d'émission et d'absorption de chaque bande de fréquence sont présentés ci-dessous.

Il s'agit en fait de :

50 % de rayonnement mince :

température T	100	2000	2100	5000	10000	12500	15000	20000	25000	30000
émission log(ϵ)	0.0	0.0	0.0	7.6	8.7	9.3	9.7	10.3	10.6	11.0
absorption log(K)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

50 % de "bande U.V." (rayonnement présenté précédemment) :

température T	100	2000	2100	5000	10000	12500	15000	20000	25000	30000
émission log(ϵ)	0.0	0.0	0.0	7.6	8.7	9.3	9.7	10.3	10.6	11.0
absorption log(K)	5.0	4.8	4.8	4.6	4.0	3.7	3.3	2.7	1.8	1.0

L'émission totale (somme sur les deux bandes de fréquence) représente l'émission totale du SF6 (cf Girard [1]).

Etude avec trois bandes de fréquence :

On suppose que le gaz émet et absorbe de l'énergie suivant trois bandes de fréquence. Les coefficients d'émission et d'absorption de chaque bande de fréquence sont présentés ci-dessous.

Il s'agit en fait de :

50 % de rayonnement mince :

température T	100	2000	2100	5000	10000	12500	15000	20000	25000	30000
émission log(ϵ)	0.0	0.0	0.0	7.6	8.7	9.3	9.7	10.3	10.6	11.0
absorption log(K)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

30 % de "bande U.V." :

température T	100	2000	2100	5000	10000	12500	15000	20000	25000	30000
émission log(ϵ)	0.0	0.0	0.0	7.4	8.5	9.1	9.5	10.1	10.4	10.8
absorption log(K)	5.0	4.8	4.8	4.6	4.0	3.7	3.3	2.7	1.8	1.0

20 % d'une nouvelle bande de fréquence (du domaine Visible et I.R.) :

température T	100	2000	2100	5000	10000	12500	15000	20000	25000	30000
émission log(ϵ)	0.0	0.0	0.0	7.16	8.26	8.86	9.26	9.86	10.16	10.56
absorption log(K)	2.0	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Cette nouvelle bande de fréquence, dont l'émission correspond à 20 % de l'émission totale du SF₆, prend en compte la réabsorption d'énergie à basse température ($T < 2000$ K) et à courte distance (la distance moyenne entre l'endroit où l'énergie est émise et l'endroit où l'énergie est réabsorbée est de $1 \text{ cm} = 1 / K$ si K est le coefficient d'absorption).

Remarques :

- L'émission totale (somme sur les trois bandes de fréquence) représente l'émission totale du SF₆ (cf Girard [1]).
- Chaque profil est comparé avec le profil obtenu lorsqu'il y a 100 % de rayonnement mince (le gaz émettant alors de l'énergie mais ne réabsorbant rien).

Conclusion : les résultats obtenus mettent en évidence **l'importance des phénomènes de rayonnement** dans le problème physique considéré.

Le "calage" du modèle se fait, par exemple, à l'aide des considérations suivantes (et après comparaison avec des résultats expérimentaux) :

- le pourcentage de rayonnement mince fixe la température maximale de l'arc électrique
- la montée en pression est très influencée par les bandes de fréquence choisies.

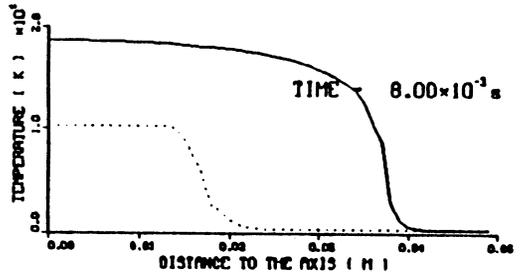
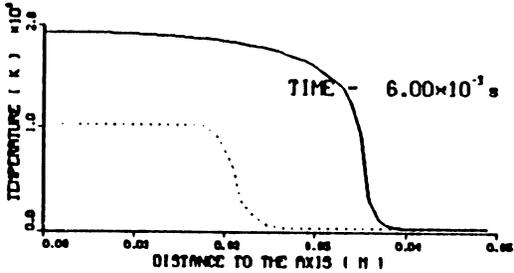
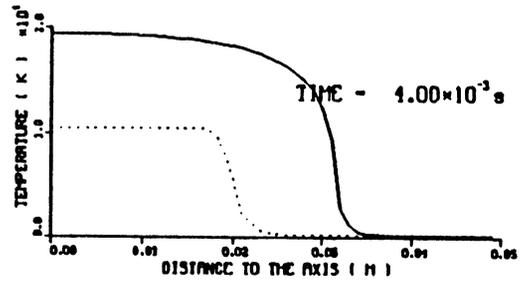
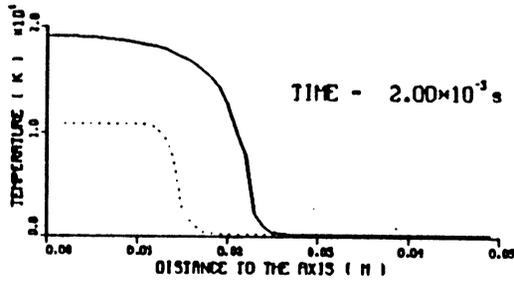
Résultats avec une bande de fréquence :

Profil d'arc (comparaison avec le profil d'arc obtenu avec le rayonnement mince)

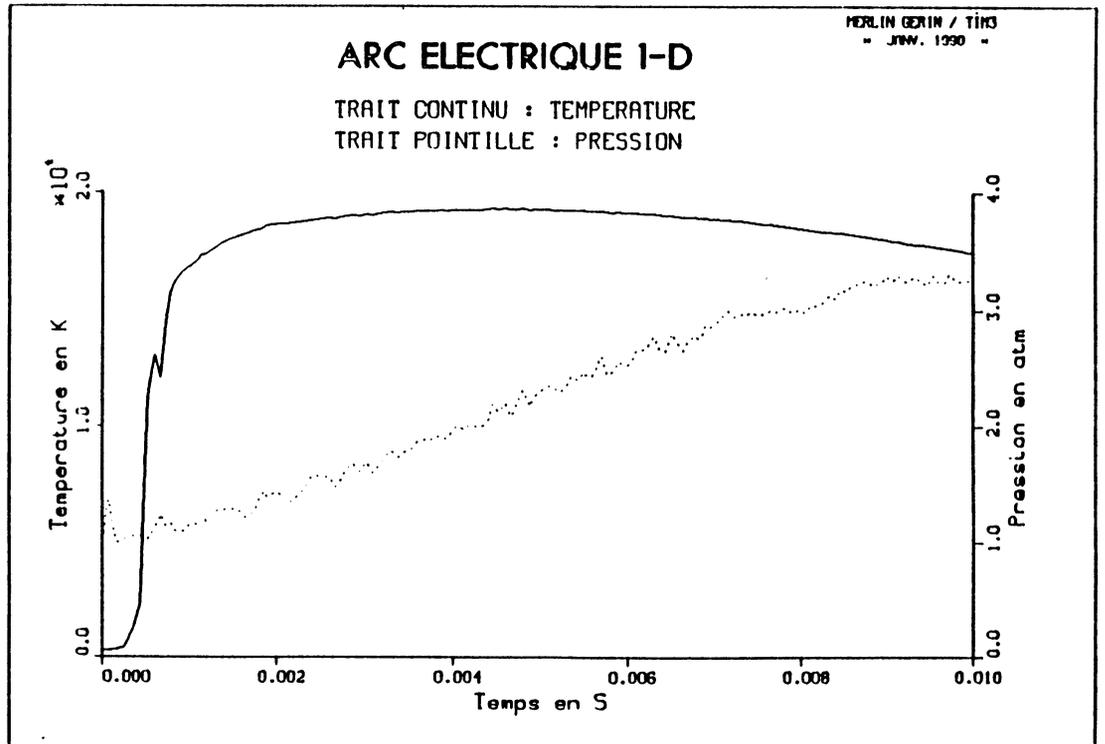
ELECTRIC ARC 10000 A , TEMPERATURE

FULL LINE : 1 BANDE DE FREQUENCE

DOTED LINE : RAYT OPTIOT MINCE



Montée en pression et évolution de la température, au point d'abscisse 0.01 m, au cours d'une demi-période (10 millisecondes) de courant :

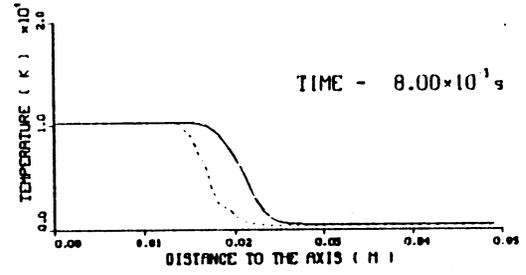
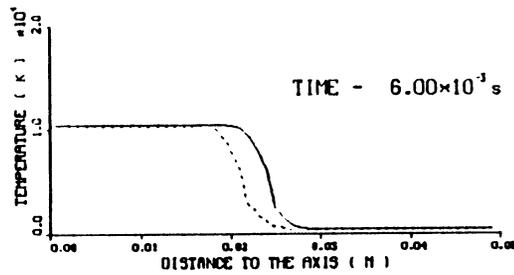
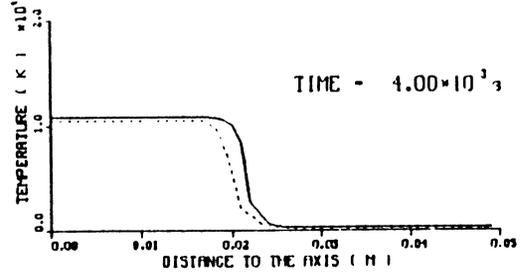
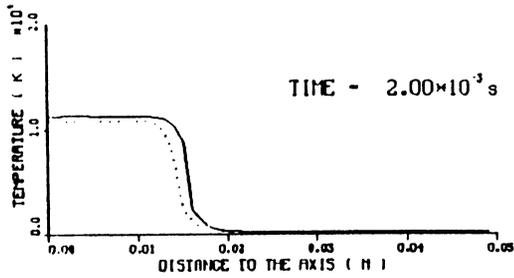


Résultats avec deux bandes de fréquence :

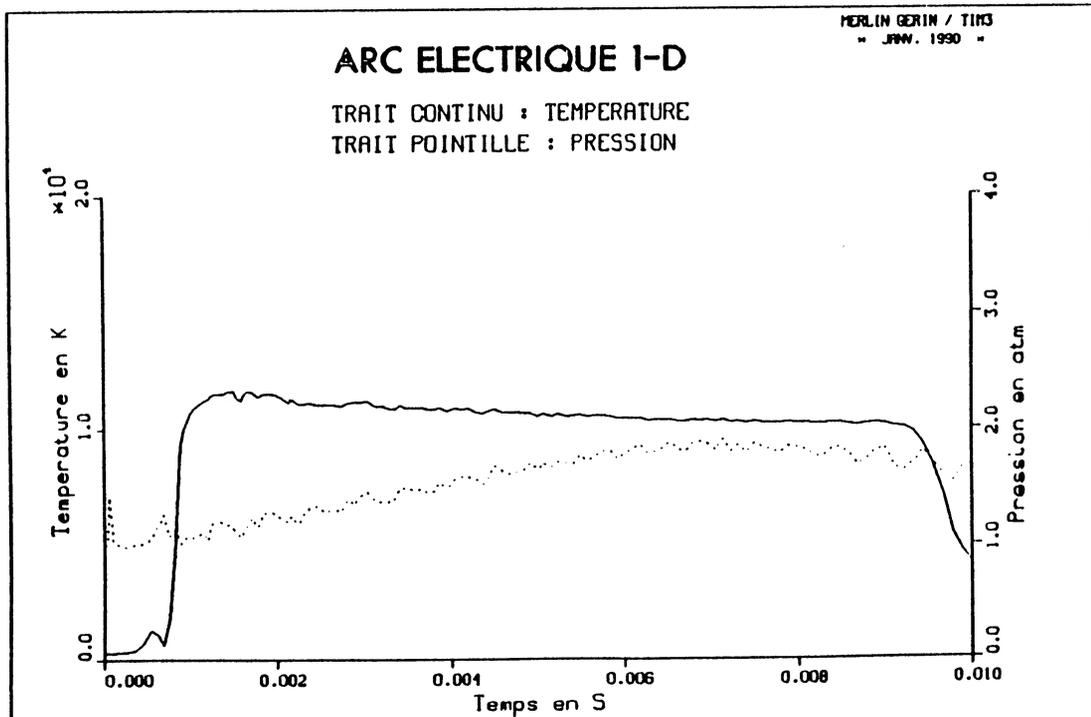
Profil d'arc (comparaison avec le profil d'arc obtenu avec le rayonnement mince)

ELECTRIC ARC 10000 A , TEMPERATURE

FULL LINE : 2 BANDES DE FREQUENCE
 DOTTED LINE : RAYT OPTIOT MINCE



Montée en pression et évolution de la température, au point d'abscisse 0.01 m, au cours d'une demi-période (10 millisecondes) de courant :

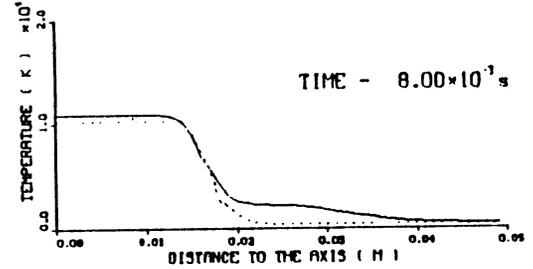
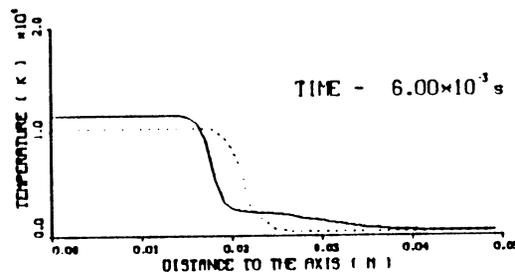
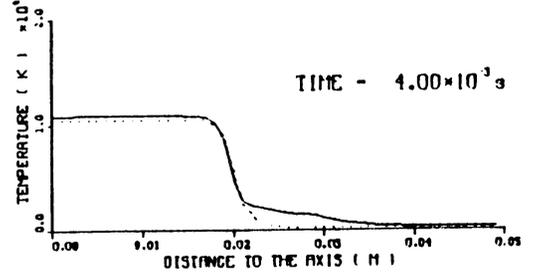
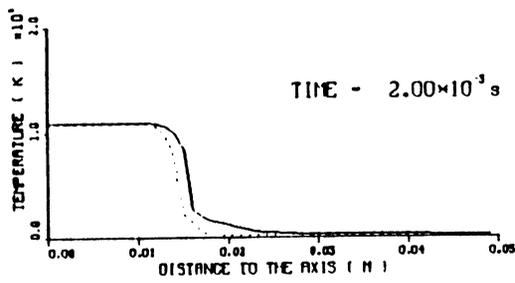


1D résultats numériques

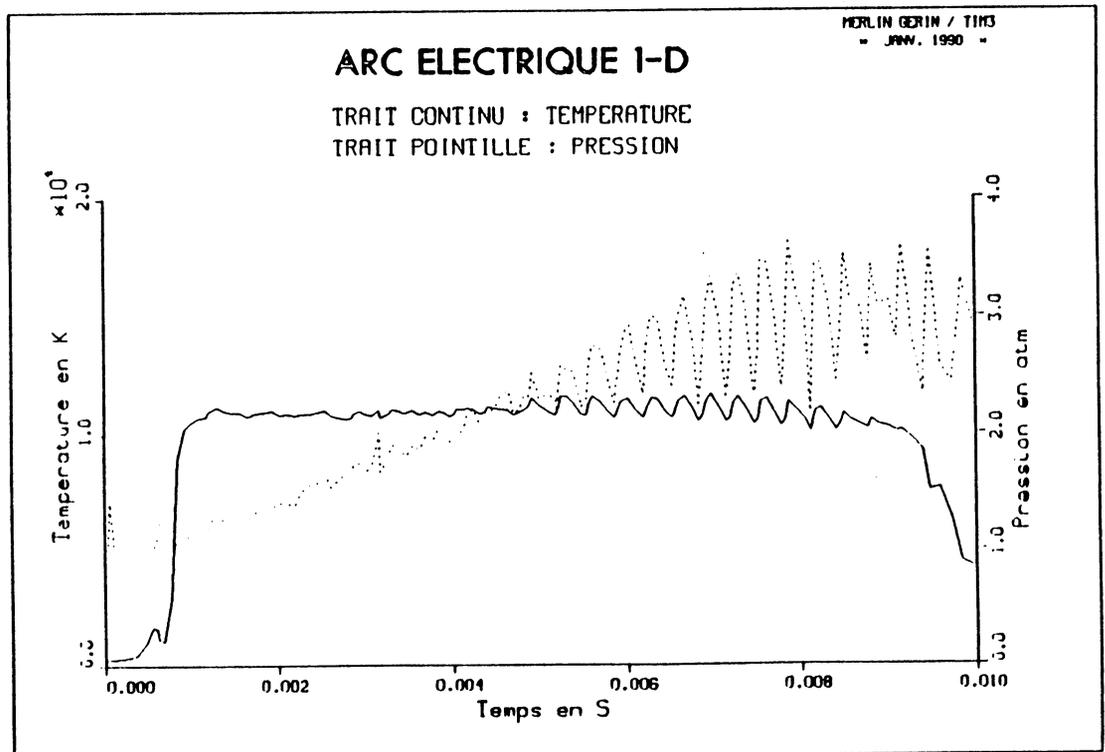
Résultats avec trois bandes de fréquence :

Profil d'arc (comparaison avec le profil d'arc obtenu avec le rayonnement mince)

FULL LINE : 3 BANDES DE FREQUENCE
 DOTTED LINE : RAYT OPTIOT MINCE



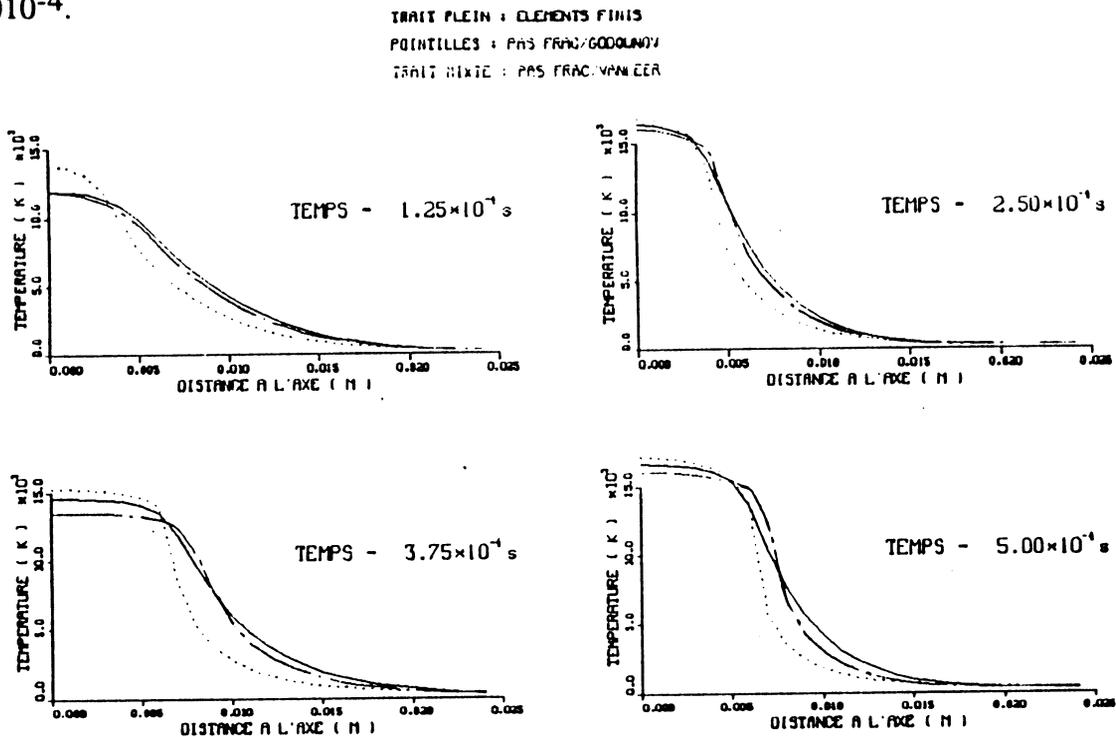
Montée en pression et évolution de la température, au point d'abscisse 0.01 m, au cours d'une demi-période (10 millisecondes) de courant :



5-3-2-2 Comparaison de trois méthodes : éléments finis, pas fractionnaires (Van Leer) et pas fractionnaires (Godounov)

Conditions d'étude : les calculs sont faits avec 2 bandes de fréquence. On étudie l'expansion de l'onde de gaz sur l'intervalle de temps $[0, 10^{-4}]$.

Résultats : les résultats sont fournis aux instants suivants : $1.25 \cdot 10^{-4}$, $2.50 \cdot 10^{-4}$, $3.75 \cdot 10^{-4}$ et $5.00 \cdot 10^{-4}$.



Temps de calcul

	Temps réel (s)	Temps normalisé
Johnson	11050	48.10
Pas fraction Godounov	230	1.
Pas fraction Van Leer	248	1.08

Conclusion : de notables différences (dues aux méthodes utilisées) apparaissent dans les profils d'arc ; ces résultats confirment (cf. problème du tube à choc) que la méthode générant le plus de diffusion numérique est la méthode à pas fractionnaires lorsque le pas de convection est traité à l'aide du schéma de Godounov, et que la méthode la plus précise est la méthode à pas fractionnaires lorsque le pas de convection est traité à l'aide du schéma de Van Leer.

Troisième Partie

Modélisation bidimensionnelle

1 - Introduction

1-1 Contexte

Le modèle a été défini et mis au point à l'aide de la simulation unidimensionnelle. La simulation bidimensionnelle qui va être décrite dans ce chapitre est destinée à devenir un **outil** d'aide à la conception et à la mise au point des disjoncteurs. Aussi le logiciel développé doit être un **logiciel industriel**. Il doit donc respecter un cahier des charges dont les caractéristiques majeures sont les suivantes :

- Les problèmes **bidimensionnels plans et bidimensionnels axisymétriques** doivent pouvoir être traités.

- Le maillage peut **bouger** au cours du temps. En effet les mouvements d'ouverture et de fermeture des contacts mobiles doivent être pris en compte. Pour cela une classe des "mouvements possibles" (translation selon l'axe des x, rebonds, vitesse variable ...) et des "géométries des parois mobiles" a été définie. La méthode proposée répond strictement aux spécifications de cette classe.

- L'utilisation d'un mailleur automatique si la géométrie est **complexe** (cf. annexe 5), et de **maillages non structurés** doit être possible.

1-2 Méthode à pas fractionnaires

Le problème à résoudre a été défini dans la première partie. Il s'agit de résoudre le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial F_0(U)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(U)}{\partial y} - \text{div}[k(T) \cdot \text{Grad}(G(U))] = \text{source} \quad (1-1)$$

avec les notations :

T, P, ρ , u et e : même notations que précédemment

v = vitesse selon y

$U = {}^t(\rho, u, v, e)$

$F_0(U) = {}^t(\rho, \rho u, \rho v, E)$

$F_1(U) = {}^t(\rho u, P + \rho u^2, \rho uv, (P + E)u)$

$$F_2(U) = t(\rho v, \rho u v, P + \rho v^2, (P+E)v)$$

$$G(U) = t(0, 0, 0, T)$$

source = terme de rayonnement et de dissipation par effet Joule.

et $P = f_1(T, \rho)$, $e = f_2(T)$, $E = \rho((u^2 + v^2)/2 + e)$ (f_1 et f_2 étant définies partie 1, § 4 et 6).

Comme cela a été fait en dimension 1 (méthode à pas fractionnaires) le problème est décomposé en deux pas fractionnaires. Dans un **premier pas fractionnaire**, on s'attache à résoudre les équations d'Euler avec une méthode de volumes finis espace-temps basée sur le schéma de Van Leer. Le maillage peut évoluer au cours du temps (schéma avec maillage mobile). La résolution du premier pas fractionnaire, appelé pas de convection, permet de déterminer un état intermédiaire U^* . Grâce à la loi d'état on détermine une température T_j^* sur chaque maille I_j . On détermine alors les termes $C_v(T^*)$, $k(T^*)$ et $source(T^*, P^*)$ sur chaque maille de la discrétisation en espace. Dans un **second pas fractionnaire**, on s'attache à résoudre l'équation de diffusion de la chaleur en régime transitoire par une méthode de volumes finis. Le **maillage** est supposé être **fixe** (l'ensemble du mouvement étant pris en compte lors du premier demi-pas de temps). Durant ce pas fractionnaire, appelé pas de diffusion, la densité $\rho^{n+1} = \rho^*$ et la vitesse $(u^{n+1}, v^{n+1}) = (u^*, v^*)$ du gaz sont supposées constantes. On peut alors déterminer la température T^{n+1} au centre de chaque maille et grâce à la loi d'état la pression P^{n+1} . **Les variables conservatives U^{n+1} sont donc déterminées sur chaque élément du maillage.**

Dans les paragraphes qui suivent on propose une description plus approfondie de ces deux pas fractionnaires et du calcul du terme source.

Le **pas de temps Δt** à chaque instant t_n est déterminé de la même façon qu'en 1-D (cf partie 2, § 3-4) :

$$\Delta t = \min(\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3)$$

où Δt_1 est le pas de temps assurant la stabilité du schéma de Van Leer (cf. § 2-2-4 de cette partie), Δt_2 le pas de temps assurant la stabilité du schéma volumes finis explicite du pas de dissipation et Δt_3 la cohérence de la méthode à pas fractionnaires. Comme dans le cas 1-D, la condition Δt_2 n'est **jamais la plus restrictive**. Pendant l'initialisation des phénomènes (jusqu'à ce que l'arc électrique atteigne une température suffisante), c'est la condition de "cohérence" (Δt_3) des deux pas fractionnaires qui impose le pas de temps. Ensuite, le pas de temps est le plus souvent imposé par la condition de CFL du pas de convection (Δt_1).

2 - Résolution des équations d'Euler en gaz réels sur des maillages mobiles non structurés en 2D plan et axisymétrique

2-1 Notations

On cherche à modéliser numériquement les équations de la dynamique des gaz (équations d'Euler). On propose une méthode dite de Volumes Finis en utilisant un schéma de type Van Leer (cf Van Leer [1], Vila[1]).

En dimension 2, afin de limiter la diffusion numérique, on désire avoir un schéma d'ordre 2 en espace lorsque le maillage est régulier et d'ordre 1 lorsque le maillage est irrégulier. Par contre, on se limite à un schéma d'ordre 1 en temps puisque de toutes façons la méthode à pas fractionnaires utilisée (pour la résolution du problème global 'Euler + Chaleur') limite l'ordre en temps à 1 (cf partie 2, paragraphe 3).

Les équations d'Euler régissent la dynamique des gaz non visqueux et non conducteurs de la chaleur. Le système traduisant les différentes lois physiques de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie) s'écrit sous forme conservative (notations partie 1) :

$$\frac{\partial(F_0(U))}{\partial t} + \frac{\partial(F_1(U))}{\partial x} + \frac{\partial(F_2(U))}{\partial y} = 0 \quad (2-1)$$

avec

$$U = {}^t(\rho, u, v, e)$$

$$F_0(U) = {}^t(\rho, \rho u, \rho v, E)$$

$$F_1(U) = {}^t(\rho u, P + \rho u^2, \rho uv, (P+E)u)$$

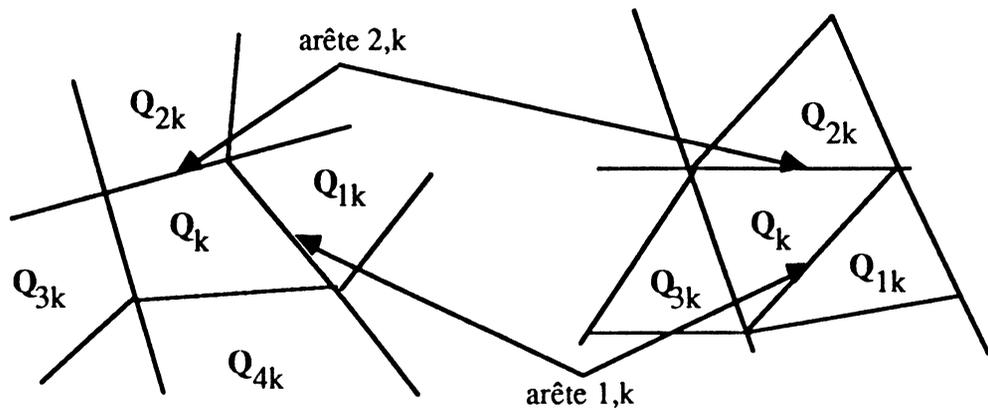
$$F_2(U) = {}^t(\rho v, \rho uv, P + \rho v^2, (P+E)v)$$

Etant donné un maillage en espace constitué de quadrangles ou de triangles, on cherche une solution approchée :

- linéaire par maille à t fixé (c'est à dire linéaire sur chaque quadrangle ou triangle)
- discontinue entre chaque maille.

Pour cela on définit la valeur moyenne (ou encore valeur au barycentre de la maille) et 2 pentes

P_x et P_y (constantes par maille). Rappelons que pour le schéma d'ordre 1 de Godounov on cherche une solution sous forme d'une fonction constante par maille (cf [Godounov]).



Sur une maille Q_k la solution approchée U_h a l'expression suivante :

Soit $(x,y) \in Q_k$, alors

$$U_h(x,y) = U_h(x_k,y_k) + (x-x_k)P_x + (y-y_k)P_y$$

où (x_k,y_k) est le barycentre du quadrangle ou du triangle Q_k .

Les degrés de liberté sont au nombre de 12 par maille :

$U_h(x_k,y_k, t=t_n)$ que l'on note aussi U_k^n (soit 4 degrés de liberté)

P_x^n (soit 4 degrés de liberté, il y a en effet une pente définie pour chaque inconnue)

P_y^n (idem).

Notations :

$V_k^{n,n+1}$: volume espace-temps engendré par la maille Q_k entre les temps t_n et t_{n+1}

S_k^n : surface de la maille Q_k au temps $t = t_n$

$U_{i,k,-}$: valeur "à gauche" de la solution au centre de l'arête i,k au temps $t = t_n$

$U_{i,k,+}$: valeur "à droite" de la solution au centre de l'arête i,k au temps $t = t_n$

Les notions de "droite" et "gauche" sont définies en donnant arbitrairement une orientation à l'arête.

Remarque : dans la suite de ce paragraphe on notera U^{n+1} (au lieu de U^*) la solution après ce premier pas fractionnaire.

2-2 Schéma numérique

2-2-1 Introduction

On suppose la solution connue linéaire par maille à l'instant $t = t_n$ et on cherche à la déterminer à l'instant $t = t_{n+1}$. On procède en deux étapes :

- étape 1 : calcul des valeurs moyennes U_k^{n+1} sur chaque maille
- étape 2 : reconstitution des pentes P_x et P_y sur chaque maille

Le schéma de Godounov (Godounov [1]), consiste à intégrer le système d'équations à résoudre sur des volumes finis espace-temps.

Une intégration par parties (formule de Green) et une approximation sur chaque facette du volume (formule de la moyenne) permettent de déterminer les valeurs moyennes de la solution au temps t^{n+1} sur chaque maille dès que sont connus les flux entrant et sortant du volume fini (on appelle "flux" les grandeurs $F_0(U)$, $F_1(U)$ et $F_2(U)$ calculées sur une des faces du volume). C'est la première étape du schéma.

Dans le schéma de Van Leer (schéma de Godounov d'ordre 2 en espace), l'étape de reconstitution des pentes est très importante. Un tel schéma a en effet tendance à créer des oscillations là où la solution du problème présente des discontinuités (ondes de choc par exemple). On s'efforce donc d'assurer la stabilité du schéma tout en ne pénalisant pas trop la précision de celui-ci.

2-2-1 Bilan de Godounov

2-2-1-1 Intégration sur les volumes finis

On intègre l'équation sur chaque volume fini $V_k^{n,n+1}$ (ce volume a $m+2$ faces, m étant le nombre de côtés de la maille); pour chacune de ces faces F on définit une normale extérieure n :

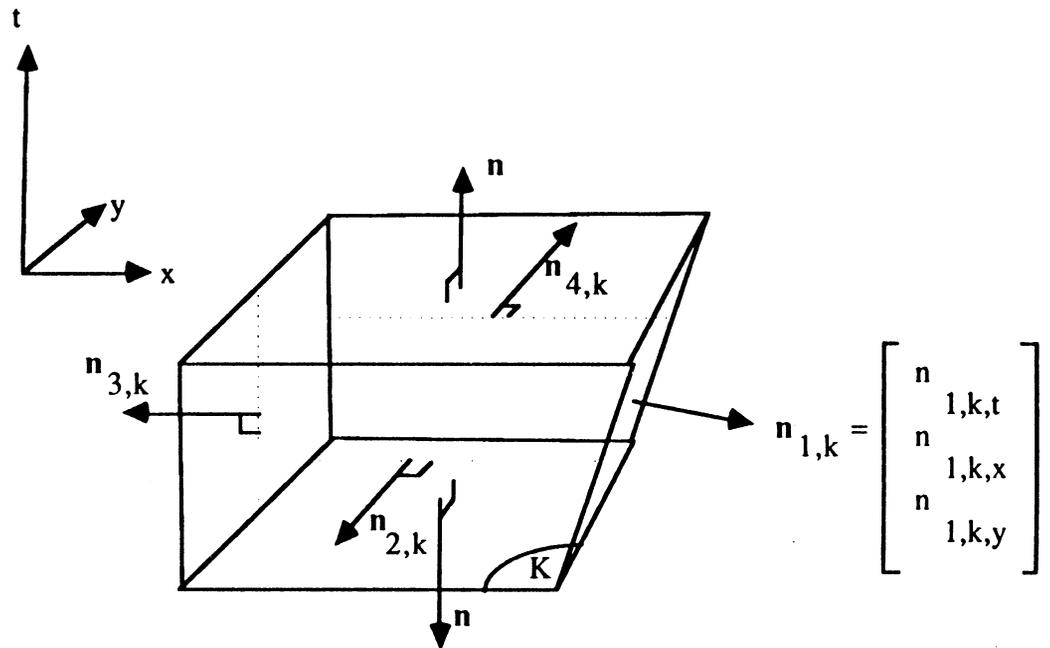
$$n = (n_t, n_x, n_y)$$

En intégrant par parties on obtient :

$$\int_{V_K^{n,n+1}} \left[\frac{\partial F_0(U)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(U)}{\partial y} \right] dv = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{m+2 \text{ faces } F \text{ de } V_K^{n,n+1}} \int_F [F_0(U).n_t + F_1(U).n_x + F_2(U).n_y] dS = 0$$

Les normales aux faces S_k^n et S_k^{n+1} étant parallèles à l'axe des temps, on obtient avec les notations de la figure suivante



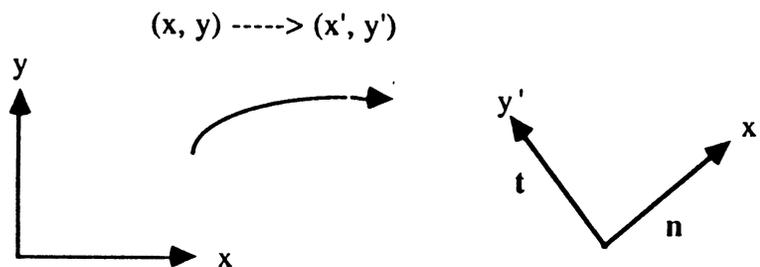
$$\int_{S_k^{n+1}} F_0(U) ds = \int_{S_k^n} F_0(U) ds - \sum_{i=1}^m \left[\int_{\Gamma_i} \{ n_{i,k,t} F_0(U_R) + n_{i,k,x} F_1(U_R) + n_{i,k,y} F_2(U_R) \} d\gamma \right] \quad (2-2)$$

Pour réaliser un tel bilan il faut calculer les flux sur les faces Γ_i ; m problèmes de Riemann sont à résoudre sur les m arêtes de chaque maille ($m = 3$ ou 4) afin de déterminer $U_R(x_{i,k}, y_{i,k}, t)$ pour $i = 1, 2, \dots, m$.

2-2-1-2 Calcul des flux : résolution des problèmes de Riemann

Les problèmes de Riemann sont des problèmes bidimensionnels. Cependant la propriété d'**invariance par rotation** des équations d'Euler permet de se ramener à des problèmes unidimensionnels.

Soit \mathbf{n} un vecteur unitaire quelconque de \mathbb{R}^2 ; on peut alors définir la transformation affine associée à la rotation suivante :



et U' la variable définie comme suit :

$$U' = R(\mathbf{n}) \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y & 0 \\ 0 & -n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot U$$

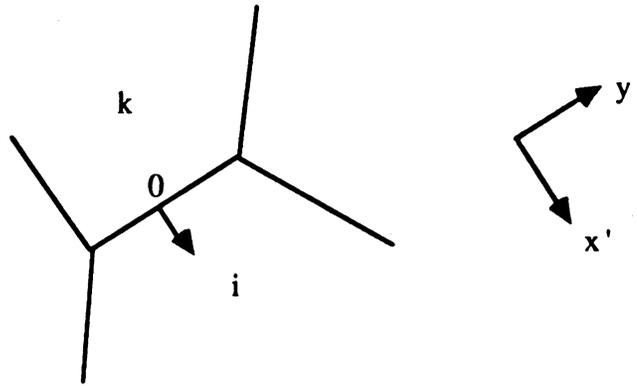
on a alors

$$\begin{cases} u' = n_x \cdot u + n_y \cdot v \\ v' = -n_y \cdot u + n_x \cdot v \end{cases}$$

La propriété d'invariance par rotation des équations d'Euler s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(U)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(U)}{\partial y} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial F_0(U')}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U')}{\partial x'} + \frac{\partial F_2(U')}{\partial y'} &= 0 \end{aligned}$$

Soit alors à résoudre un problème de Riemann sur une arête quelconque (ici une arête notée i,k) :



On suppose la solution constante le long de l'arête (et donc indépendante de y'). C'est une approximation dès que le schéma est d'ordre supérieur à 1 en espace. En effet, si la solution n'est pas constante sur une maille, elle n'est pas non plus constante le long des arêtes de cette maille.

Les dérivées partielles selon y' peuvent donc être mises à 0, le problème à résoudre étant alors le suivant :

trouver U'_R tel que :

$$\frac{\partial(F_0(U'))}{\partial t} + \frac{\partial(F_1(U'))}{\partial x'} = 0$$

$$U'(x, y, t_n) = \begin{cases} U'_{i,k,-}{}^n & \text{si } x' < 0 \\ U'_{i,k,+}{}^n & \text{si } x' > 0 \end{cases}$$

C'est un problème quasi-unidimensionnel. On le résout grâce aux solveurs présentés en annexes (partie 2, paragraphe 3, annexes 1 et 2). Il est appelé quasi-unidimensionnel car il faut déterminer la vitesse tangentielle v'_R de la solution sur la droite d'équation $\sigma = x'/t$. A travers un choc, la conservation de la quantité de mouvement implique la continuité de la composante tangentielle au passage de la discontinuité. Par contre, dans le cas d'une discontinuité de contact, le flux est tangent à la surface de la discontinuité. Il peut y avoir glissement et la composante tangentielle de la vitesse peut présenter une discontinuité (Gilquin [1]). Ainsi, soit v_{dc} la vitesse de la discontinuité de contact du problème de Riemann unidimensionnel,

$$\text{si } v_{dc} > \sigma \quad \text{alors } v'_R = v'^n_{i,k,+}$$

$$\text{si } v_{dc} < \sigma \quad \text{alors } v'_R = v'^n_{i,k,-}$$

Remarque : les valeurs de la solution à gauche et à droite d'une arête i,k sont déterminées à l'aide des valeurs au centre et des pentes au temps t_n sur chacune des mailles k et i .

2-2-1-3 Détermination des valeurs moyennes

Pour chacune des $m+2$ (m étant le nombre de côtés de la maille) facettes du volume $V_k^{n,n+1}$, on effectue l'approximation suivante (c'est la formule de la moyenne) :

$$\int_{\Gamma_i} F_j(U).n_j.d\gamma = S_{\Gamma_i} \cdot [\overline{F_j(U).n_j}]$$

où $\overline{F_j(U).n_j}$ est la valeur de $F_j(U).n_j$ au centre de la facette.

Le schéma issu de (2-2) permettant de déterminer les valeurs moyennes U_i^{n+1} s'écrit :

$$S_k^{n+1} \cdot F_0(U_k^{n+1}) = S_k^n \cdot F_0(U_k^n) - \sum_{i=1}^m S_{\Gamma_i} [n_{i,k,t} F_0(U_R) + n_{i,k,x} F_1(U_R) + n_{i,k,y} F_2(U_R)] \quad (2-3)$$

On peut ainsi déterminer les valeurs au centre U_k^{n+1} à partir des valeurs au centre U_k^n et des solutions des problèmes de Riemann.

Mais il reste à déterminer les pentes sur chacune des mailles du maillage. C'est ce que l'on se propose de faire maintenant.

2-2-3 Reconstitution des pentes P_x^{n+1} et P_y^{n+1} (Gallouët [1])

Pour calculer les pentes, on distingue deux étapes :

- l'étape de **prédiction** : on cherche une approximation de la pente du meilleur ordre possible.

- l'étape de **correction** : le schéma étant instable sans cela, on limite les pentes précédemment prédites.

Etape de prédiction :

Considérons une maille k . La maille k a m mailles voisines numérotées de 1 à m . Supposons connues les $m+1$ valeurs moyennes $U^{n+1}_k, U^{n+1}_{1k}, U^{n+1}_{2k}, \dots, U^{n+1}_{mk}$. On cherche à prédire les pentes de façon cohérente avec ces $m+1$ valeurs. Avec une maille voisine donnée i_k on aimerait que $P_x^{n+1}_k$ et $P_y^{n+1}_k$ vérifient le mieux possible :

$$\Delta(U,k,i,n+1) = U^{n+1}_{ik} - U^{n+1}_k + P_x^{n+1}_k (x-x_k) + P_y^{n+1}_k (y-y_k) \neq 0$$

en notant (x,y) le barycentre de la maille i_k et (x_k,y_k) le barycentre de la maille k .

$\Delta(U,k,i,n+1)$ est l'écart entre la valeur effective de U^{n+1} au centre de l'élément voisin i_k , et la valeur obtenue au centre de cet élément en prolongeant linéairement la fonction U^{n+1} définie sur l'élément k .

Ainsi on choisit de déterminer $P_x^{n+1}_k$ et $P_y^{n+1}_k$, supposées constantes par maille, en minimisant la somme des carrés des écarts de U^{n+1} entre l'élément k et ses voisins, ie :

$$\sum_{i=1,m} |\Delta(U,k,i,n+1)|^2$$

Les pentes $P_x^{n+1}_k$ et $P_y^{n+1}_k$ réalisant le minimum sont solutions du système linéaire 2×2 :

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^m [\Delta(U,k,i,n+1)]^2 \right)}{\partial P_x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^m [\Delta(U,k,i,n+1)]^2 \right)}{\partial P_y} = 0 \quad (2-4)$$

Etape de correction :

L'étape de correction est le point sensible de l'implémentation du schéma de Van Leer en dimension 2. Les pentes sont corrigées sur chaque élément Q_k afin de s'assurer que chaque valeur "intérieure" (ie, calculée avec la valeur au centre et les pentes de la maille Q_k) de U^{n+1} sur l'arête (i,k) , qu'on note $U^{n+1}_{i,k}$, par exemple, soit comprise entre la valeur de U^{n+1} au centre de l'élément k et la valeur de U^{n+1} au centre de l'élément i_k (ie, appartient à l'intervalle $[U^{n+1}_k, U^{n+1}_{i_k}]$).

Pour cela on utilise l'algorithme suivant : $((x_{ik}, y_{ik}))$ est le centre de la maille ik)

Pour $i = 1$ à m faire

si U_k^{n+1} n'appartient pas à l'intervalle $[U_k^{n+1}, U_{ik}^{n+1}]$ alors

- déterminer α réel appartenant à $[0 ; 1]$ tel que:

$$U_k + \alpha[(x_{ik}-x_k)P_x^{n+1}_k + (y_{ik}-y_k)P_y^{n+1}_k] = U_{ik}^{n+1} \text{ ou } U_k^{n+1}$$

- phase "correction" :

$$P_x^{n+1}_k := \alpha . P_x^{n+1}_k$$

$$P_y^{n+1}_k := \alpha . P_y^{n+1}_k$$

fin si

fin pour

(en fait on détermine une valeur de α pour chaque composante de U).

Remarques :

1-Un cas pathologique apparaît dans le cas d'un écoulement unidimensionnel. En effet de petites oscillations dans une direction perpendiculaire au sens de l'écoulement peuvent obliger à limiter totalement les pentes ($P_x = P_y = 0$) et le schéma n'est plus d'ordre 2 mais d'ordre 1.

Par exemple, si on considère un écoulement suivant (Ox) , de très petites oscillations suivant (Oy) peuvent créer un extremum local suivant la direction (Oy) . Dans le cas d'un maillage cartésien la limitation présentée ci-dessus entraîne $\alpha = 0$ et donc $P_x = P_y = 0$.

Afin de remédier à ce problème on découple localement la limitation des pentes dans le cas de maillage localement parallèle aux axes (ainsi dans le cas d'un extremum local dans la direction (Oy) on impose $P_y = 0$ mais rien sur P_x).

Ainsi, lorsque localement le maillage est cartésien, le calcul des pentes est découplé (implicitement pour la prédiction et "manuellement" pour la correction) et correspond en fait pour chaque direction au calcul présenté pour le cas unidimensionnel.

2-Afin d'assurer une meilleure stabilité numérique, chaque fois qu'on limite les pentes, on pondère cette limitation par un coefficient β appartenant à l'intervalle $[1/2, 1]$.

Lorsqu'on résout les équations d'Euler, dans le cas de pentes découplées si $\beta = 1$, avec la prédiction choisie, le schéma crée des oscillations. La restriction unidimensionnelle du schéma est d'ailleurs équivalente au schéma 1-D (partie 2, § 3-2-4) avec $\alpha = 2$ (schéma créant également des oscillations). La phase "correction" s'écrit alors :

-phase "correction" :

$$P_{xk} := \alpha . \beta . P_{xk}$$

$$Py_k := \alpha \cdot \beta \cdot Py_k$$

Dans les exemples présentés dans les annexes le coefficient β a toujours été choisi dans l'intervalle [0.5 ; 0.7].

3- Comme dans le cas unidimensionnel le calcul des pentes (prédiction et correction) est fait sur les variables physiques (masse volumique, vitesse, pression) plutôt que sur les variables conservatives parce qu'alors les résultats sont meilleurs (on observe en effet des oscillations sur les variables physiques u , v et P dans les zones où une discontinuité de contact existe, lorsqu'on choisit de calculer les pentes sur les variables conservatives).

On peut essayer de donner une explication de ce phénomène : lors de la résolution d'un problème de Riemann il y a une discontinuité de contact sur la variable ρ , et donc sur chacune des variables conservatives (ρ , ρu , ρv , p). Si on fait le calcul des pentes sur ces variables, ces pentes tiennent toutes compte de cette discontinuité. Par contre si le calcul des pentes est fait sur les variables physiques (ρ , u , v , P) la discontinuité de contact n'est visible que sur ρ ; aussi les pentes calculées sur u , v et P approximent mieux l'état constant sur ces variables.

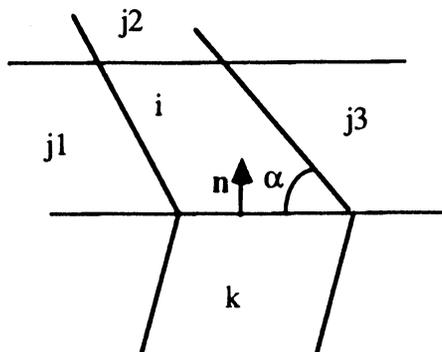
2-2-4 Condition de CFL et choix du pas de temps

Comme on a pu le constater dans le cas unidimensionnel, la condition de C.F.L. impose que les ondes issues de la résolution d'un problème de Riemann entre deux mailles i et k ne perturbent pas la solution sur les mailles voisines de i et k . La condition sur le pas de temps imposée par la résolution du problème de Riemann sur l'arête (i,k) s'écrit (cf. partie 2, paragraphe 3 et Gilquin [1], Δy est la largeur des mailles i et k) :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta y}{\max(|D_{i,k}^-|, |D_{i,k}^+|)}$$

$D_{i,k}^+$ et $D_{i,k}^-$ sont les pentes minimale et maximale des caractéristiques issues de l'interface i,k .

En dimension 2, on doit vérifier le même type de conditions, sur chaque arête i,k du maillage. En effet le flux issu du problème de Riemann résolu au centre de l'arête (i,k) , ne doit pas perturber la solution sur les mailles voisines de i et k .



Rigoureusement aussi petit que soit le pas de temps, dès que le vecteur flux $F_{i,k}$ n'est plus parallèle aux arêtes $(i,j1)$ ou $(i,j3)$, il perturbe la solution sur ces mailles si $F_{i,k} \cdot n > 0$. Ainsi, on ne peut donc pas, comme en 1D, définir facilement de C.F.L. théorique. Cependant, la pratique montre qu'en définissant une longueur d'élément égale à la plus courte des médianes et en choisissant :

$$\Delta t \leq \lambda \cdot \min_{\text{éléments}} \left[\frac{\text{longueur élément}}{\max_{\text{arêtes } i,k} (|D_{i,k}^-|, |D_{i,k}^+|)} \right]$$

(λ étant un réel dont la présence assure la stabilité numérique compris entre 0 et 1) le schéma est stable (pour l'ensemble des applications présentées en annexe) dès que $\lambda < 0.7$ si le maillage est formé de triangles et dès que $\lambda < 0.9$ si le maillage est formé de quadrangles.

Remarque : on a toujours :

$$|D_{i,k}^+| < |V_{i,k}| + c$$

$$|D_{i,k}^-| < |V_{i,k}| + c$$

si c est la vitesse sonique sur l'arête et $V_{i,k}$ la vitesse du gaz sur cette arête (car on majore ainsi la vitesse des ondes de choc et des ondes de détente obtenues lors de la résolution des problèmes de Riemann, cf. Gilquin [1]).

Dans la pratique, pour des raisons de commodité d'implémentation, on remplace :

$$\max (|D_{i,k}^+|, |D_{i,k}^-|)$$

par

$$|V_{\text{élément}}| + c$$

où $V_{\text{élément}}$ est la vitesse au centre de l'élément au temps t^n . La condition que doit vérifier Δt s'écrit donc :

$$\Delta t \leq \lambda. \min_{\text{éléments}} \left[\frac{\text{longueur élément}}{|v_{\text{élément}}| + c} \right] \quad (2-5)$$

Cette simplification discutable près des discontinuités initiales de la solution (la vitesse du gaz étant nulle des deux côtés de la discontinuité) ne pose en pratique aucun problème de stabilité numérique.

Applications numériques :

Les paragraphes 5-1, 5-2, 5-3 et 5-5 (troisième partie, paragraphe 5), présentent plusieurs applications numériques destinées à valider le schéma et à comparer ses performances par rapport à un schéma d'ordre 1.

Lors de plusieurs tests sur des maillages non structurés, les solutions obtenues pour un même problème ont été comparées sur différents maillages. **On a mis ainsi en évidence les performances de ce schéma sur des maillages formés de triangles.** Ce résultat, de toute première importance, permet de mailler des géométries compliquées avec des mailleurs automatiques (qui le plus souvent n'arrivent pas à mailler uniquement avec des quadrangles).

Sont présentées les applications numériques suivantes :

§ 5-1 et § 5-2 : test sur le tube à choc 2D.

§ 5-3 : exemple "vraiment" bidimensionnel.

§ 5-6 : application industrielle mettant en évidence l'intérêt de maillages réalisés avec des triangles.

2-3 Schéma avec maillage mobile

Le schéma de volumes finis présenté ci-dessus tolère que la géométrie des mailles change au cours du temps ; il faut néanmoins souligner que de la forme des mailles (et notamment de la forme des quadrangles irréguliers) et de leur régularité, dépend la consistance du schéma (cela est particulièrement bien mis en évidence dans partie 3, § 5-3).

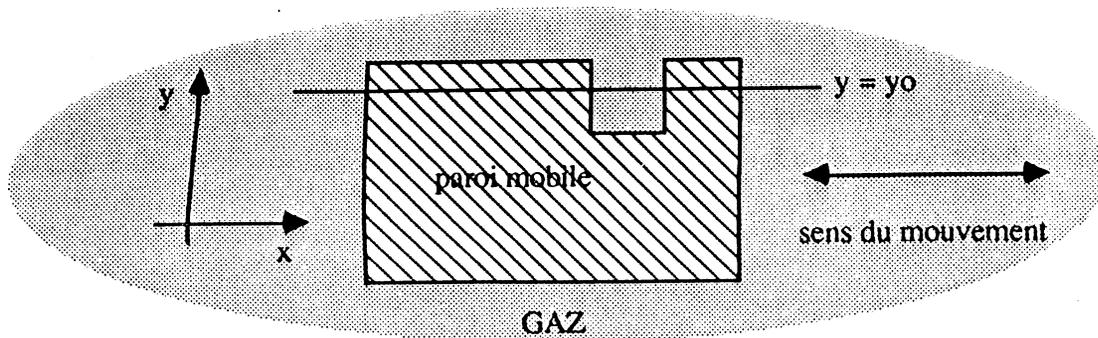
La géométrie du maillage changeant au cours du temps (afin de prendre en compte le mouvement du contact mobile du disjoncteur), on cherche une méthode dite de "maillage mobile" qui ne

distorde pas exagérément les éléments du maillage. Ainsi contrairement à la méthode proposée par Gilquin [1] pour laquelle l'ensemble du maillage subit une déformation à chaque pas de temps (toutes les mailles étant alors déformées même si le mouvement ne concerne qu'une petite partie de la géométrie, certaines mailles pouvant subir des distorsions excessives), on propose ici une méthode ne déformant le maillage que très localement.

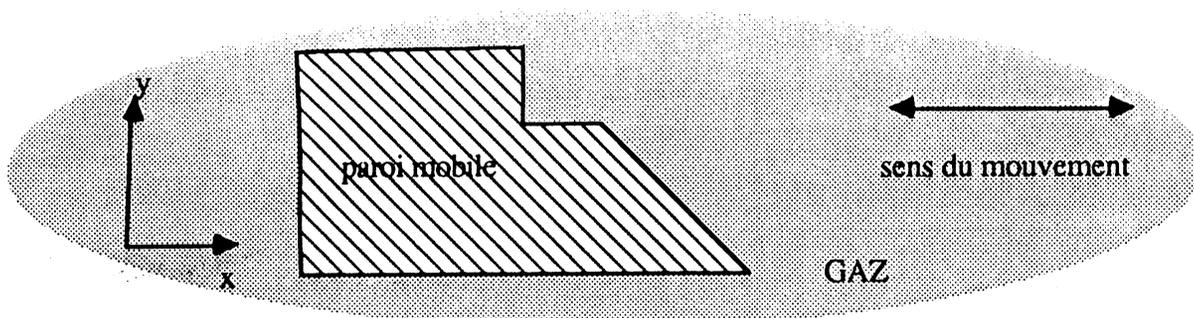
Il est également important de noter que les mouvements du maillage sont restreints à des translations suivant l'axe des x (par souci de simplification, l'ensemble des mouvements des contacts dans le cas du disjoncteur répondant à ces spécifications).

Définition d'une frontière mobile : c'est une paroi imperméable dont le mouvement est une translation selon l'axe des x dans le cas 2D plan et selon l'axe de symétrie x dans le cas bidimensionnel axisymétrique. La géométrie de cette paroi ou frontière mobile doit être "convexe selon x "; autrement dit l'intersection de toute droite $y = y_0$ avec la paroi mobile est connexe.

Exemples :



Manifestement, la paroi mobile présentée ci-dessus n'est pas convexe selon x . Par contre la paroi qui suit l'est.



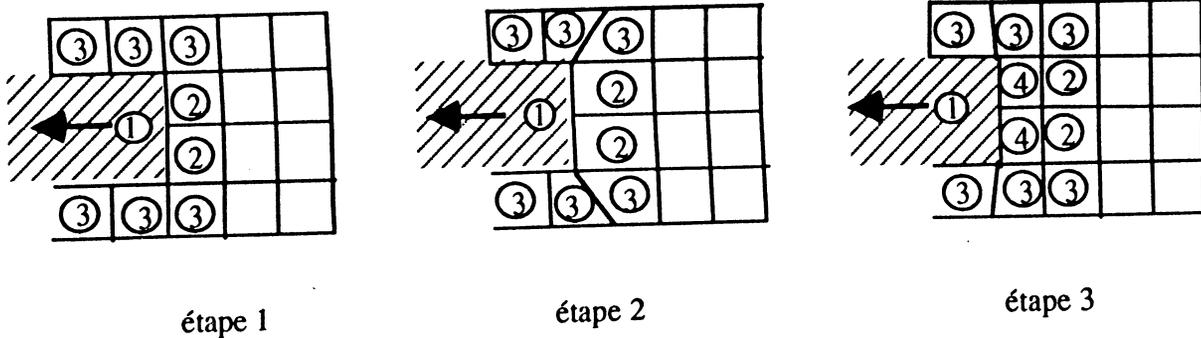
Dans la suite on suppose que les parois traitées sont toutes "convexes selon x".

Exemples de mouvements : on peut distinguer essentiellement 2 grands types de mouvements.

Légende:

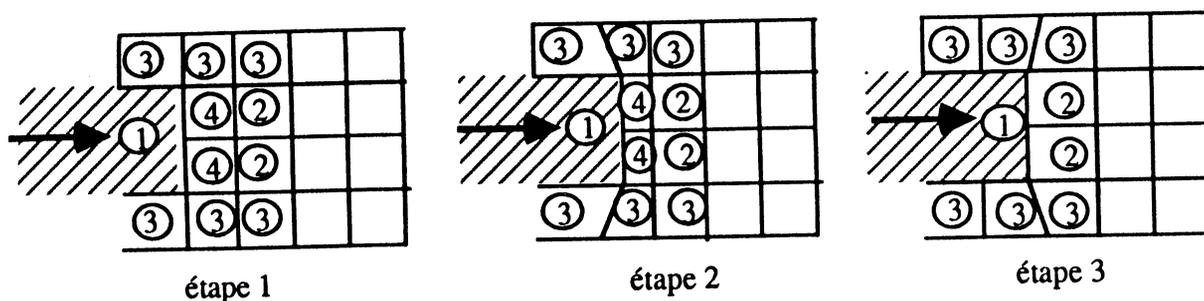
- ① Paroi mobile
- ② Maille possédant une arête à deux nœuds mobiles
- ③ Maille dite "frontière" possédant un seul nœud mobile
- ④ Maille nouvellement créée ou amenée à disparaître (selon le mouvement)

1 - Les mouvements où il y a création de mailles, c'est à dire les mouvements où le volume contenant le gaz augmente.



- étape 1 : maillage initial avant mouvement de la paroi.
- étape 2 : la paroi mobile bouge; la géométrie des mailles de type "2" ou "3" est modifiée en changeant les coordonnées des nœuds appartenant à la paroi mobile.
- étape 3 : création de nouveaux éléments de type "4"; les éléments de type "2" sont divisés en deux éléments.

2 - Les mouvements où il y a suppression de mailles, c'est à dire où le volume contenant le gaz diminue.

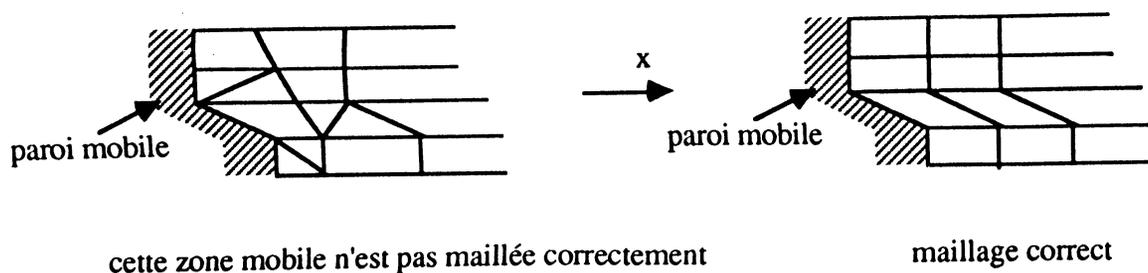


- étape 1 : maillage initial avant mouvement de la paroi.
- étape 2 : la paroi mobile bouge; la géométrie des mailles de type "3" ou "4" est modifiée en changeant les coordonnées des nœuds appartenant à la paroi mobile.
- étape 3 : suppression des éléments de type "4".

Remarques pratiques :

-1- Du fait de la lenteur relative du mouvement des contacts par rapport aux phénomènes physiques (vitesse du gaz par exemple), il y a un grand nombre d'étapes "2" entre une étape "1" et une étape "3".

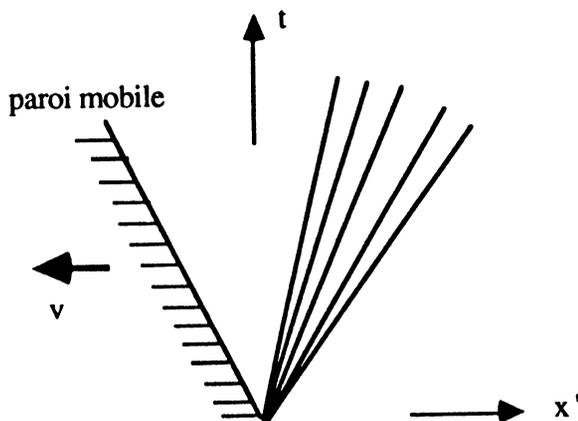
-2- Restriction sur le maillage : les mailles concernées par le mouvement de la paroi (mailles de type "2", "3" ou "4") sont nécessairement des parallélogrammes (les zones mobiles doivent être maillées à l'aide de parallélogrammes mais rien n'empêche de mailler d'autres zones à géométrie complexe à l'aide de triangles).



-3- Des mouvements de va et vient (en translation) des contacts peuvent être pris en compte par la méthode proposée.

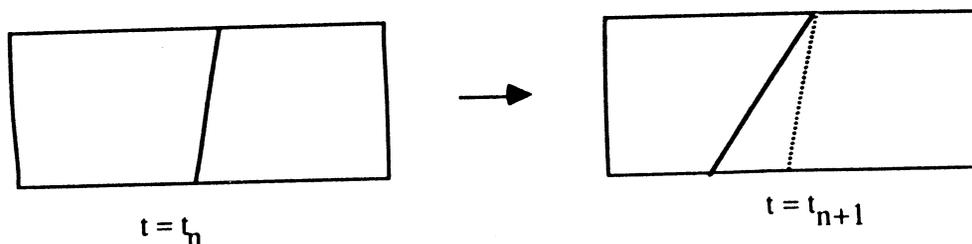
Remarques théoriques :

-1- Résolution des problèmes de Riemann sur les frontières mobiles :



On a montré (partie 2, paragraphe 3, annexe 1) que l'on sait résoudre, de façon approchée, de tels problèmes de Riemann, aussi appelés "demi-problèmes" de Riemann. Lorsqu'on résout un problème de ce type, il suffit de connaître la valeur de la solution (densité, vitesse et pression du gaz) à droite et la vitesse de la paroi v pour déterminer la valeur de la solution sur la paroi.

-2- Résolution des problèmes de Riemann sur une arête "pivotante" (arête séparant deux mailles de type "3") :

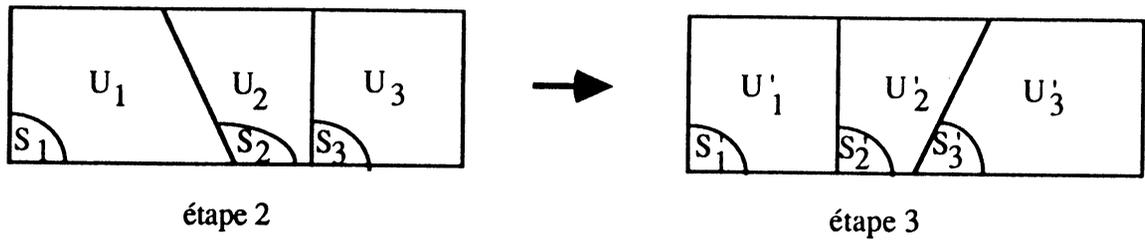


Aucun élément théorique présenté auparavant ne peut donner une résolution d'un problème de Riemann sur une arête dont un seul nœud bouge ; dans ce cas on ne peut théoriquement pas se ramener à un problème de Riemann monodimensionnel.

Cependant compte tenu de la lenteur relative du mouvement de la paroi mobile (cf. remarque ci-dessus) et du très petit nombre de mailles de ce type, on se ramène pour ces arêtes à une résolution monodimensionnelle et on suppose que la vitesse de la paroi est non nulle et égale à $v/2$ si v est la vitesse de la paroi mobile ($v/2$ est en effet la vitesse moyenne des points de l'arête).

Notons que cette simplification n'enlève rien au caractère **conservatif** du schéma. Par contre on introduit un peu de **diffusion numérique**.

-3- Redistribution des valeurs de la solution lors du passage d'une "étape 2" à une "étape 3":



On veut que le schéma soit **conservatif**. On choisit donc de déterminer U'_1 , U'_2 et U'_3 comme suit:

$$\begin{aligned} 1 - S'_1 \cdot F_0(U'_1) &= S'_1 \cdot F_0(U_1) \\ 2 - S'_2 \cdot F_0(U'_2) &= (S_1 - S'_1) \cdot F_0(U_1) + (S'_2 + S'_1 - S_1) \cdot F_0(U_2) \\ 3 - S'_3 \cdot F_0(U'_3) &= (S_3 - S'_3) \cdot F_0(U_2) + S_3 \cdot F_0(U_3) \end{aligned}$$

Ces trois égalités traduisent la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sur les surfaces S'_1 , S'_2 et S'_3 .

Après avoir redistribué les valeurs de la solution par projection L^2 sur les nouvelles mailles, on détermine de façon standard les pentes sur ces mailles.

Applications numériques :

Une première application (§ 5-4) valide numériquement l'implémentation du schéma avec maillage mobile. On présente un test de détente par pistonnage pour lequel on peut calculer une solution analytique du problème approché grâce à l'hypothèse proposée par Colella (partie 2, paragraphe 3, annexe 1).

Une seconde application (§ 5-5) valide en partie la modélisation physique qui a été faite pour les gaz froids et non visqueux (équations d'Euler). On compare en effet sur un prototype de disjoncteur des résultats expérimentaux avec les résultats du calcul.

3 - Résolution de l'équation de la chaleur en gaz réels par une méthode de volumes finis sur des maillages non structurés

3-1 Position du problème

Le second pas fractionnaire, aussi appelé pas fractionnaire de diffusion, consiste en la résolution de l'équation d'énergie lorsqu'on néglige les phénomènes de convection. Ces phénomènes de convection ont en effet été traités lors de la résolution du premier pas fractionnaire appelé pas fractionnaire de convection.

L'équation d'énergie prenant en compte la diffusion par dissipation de la chaleur et négligeant les termes de transport, s'écrit :

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \text{div}(k(T) \cdot \text{grad}(T)) = \text{source} \quad (3-1)$$

où l'énergie totale E est la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique :

$$E = \rho \left(e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right)$$

Par hypothèse, durant le pas fractionnaire de diffusion la masse volumique ρ^{n+1} et les deux composantes de la vitesse (u^{n+1} , v^{n+1}) sont supposés constantes.

La modélisation du gaz (du SF6 par exemple, cf. § 1-6) repose essentiellement sur deux hypothèses :

$$C_v = C_v(T) \quad (H1)$$

et

$$P = f(v) T \quad (H2)$$

qui permettent d'écrire la différentielle de l'énergie interne comme suit :

$$de = C_v(T) \cdot dT$$

Ainsi, dans le contexte du pas fractionnaire de diffusion la dérivée de l'énergie totale E par rapport au temps s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} &= \rho \frac{\partial e}{\partial t} && \text{(car } \rho, u, v \text{ sont supposés constants)} \\ &= \rho \cdot C_v(T) \frac{\partial T}{\partial t} && \text{(d'après la forme de la différentielle de } e\text{)}\end{aligned}$$

L'équation devant être résolue pendant ce pas fractionnaire est donc la suivante :

$$\rho C_v T_{,t} - \text{div}[k(T) \cdot \text{grad}(T)] = \text{source}(T, P) \quad (3-2)$$

3-2 Schéma numérique (Gallouët [1])

Le schéma numérique utilisé, est un schéma volumes finis adapté aux maillages non structurés. Dans un premier temps, nous avons choisi de discrétiser ce problème grâce à une méthode d'éléments finis mixtes hybrides duaux (Talbot [1]), mais la rapidité en temps de calcul, la simplicité de l'implémentation et la qualité des résultats nous ont poussés à choisir la méthode de volumes finis (cf. tests comparatifs en fin de paragraphe).

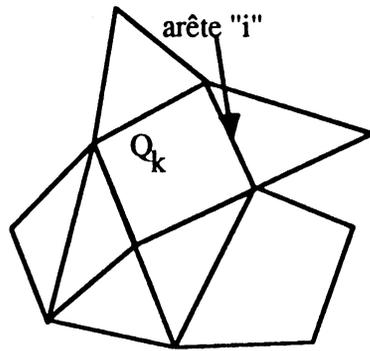
Remarque : dans la suite de ce paragraphe on note U^n (au lieu de U^*) l'état intermédiaire obtenu après le pas fractionnaire de convection.

Connaissant l'état intermédiaire U^n (et par conséquent grâce à la loi d'état la température T^n) au temps t^n , et en supposant que densité et vitesse sont constantes durant le pas fractionnaire de diffusion, on cherche à déterminer la température T^{n+1} à l'instant t^{n+1} satisfaisant l'équation de la chaleur :

$$\left[\begin{array}{l} \rho \cdot C_v \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div} [k(T) \cdot \text{grad}(T)] = \text{source} \text{ sur } \Omega \\ \text{grad}(T) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (3-3)$$

(la condition de Neumann traduit l'adiabaticité aux bords du domaine).

Le maillage non structuré est constitué de triangles et de quadrangles.



m = nombre de voisins de Q_k
 l_i = longueur de l'arête "i"
 S_k = surface de l'élément Q_k

Soit Q_k une maille quelconque de ce maillage, on intègre l'équation de la chaleur (3-2) sur Q_k :

$$\int_{Q_k} \left(\rho \cdot C_v \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div} (k(T) \cdot \text{grad}(T)) \right) ds = \int_{Q_k} \text{source} \cdot ds$$

On discrétise le terme en temps grâce à une formulation Euler explicite (d'ordre 1 en temps) et on intègre par parties le terme d'espace :

$$S_k \cdot \rho \cdot C_v \frac{T^{n+1} - T^n}{t^{n+1} - t^n} + \int_{\partial Q_k} \vec{k} \cdot \text{grad} T \cdot \vec{n} \cdot d\gamma = S_k \cdot \text{source}$$

en approximant le terme intégral d'espace

$$\int_{\partial Q_k} \vec{k} \cdot \text{grad} T \cdot \vec{n} \cdot d\gamma$$

sur chaque arête par

$$l_i \cdot [\vec{k} \cdot \text{grad} T \cdot \vec{n}]_i$$

il vient le schéma volumes finis :

$$\rho \cdot C_v \cdot \frac{T^{n+1} - T^n}{t^{n+1} - t^n} + \frac{1}{S_k} \sum_{i=1}^m l_i \cdot [\vec{k} \cdot \text{grad} T \cdot \vec{n}]_i = \text{source} \quad (3-4)$$

On choisit alors d'expliciter (comme cela a été fait en 1-D) les coefficients de l'équation (C_v , ρ et source) en prenant leurs valeurs au temps t^n (la température étant égale à T^n).

La détermination de la température T^{n+1} sur chaque maille Q_k est possible dès que sont connus les valeurs des flux :

$$[k_i \cdot \overset{\rightarrow}{\text{grad}T} \cdot \vec{n}]_i$$

au centre de chaque arête "i" de la maille Q_k .

Détermination des flux :

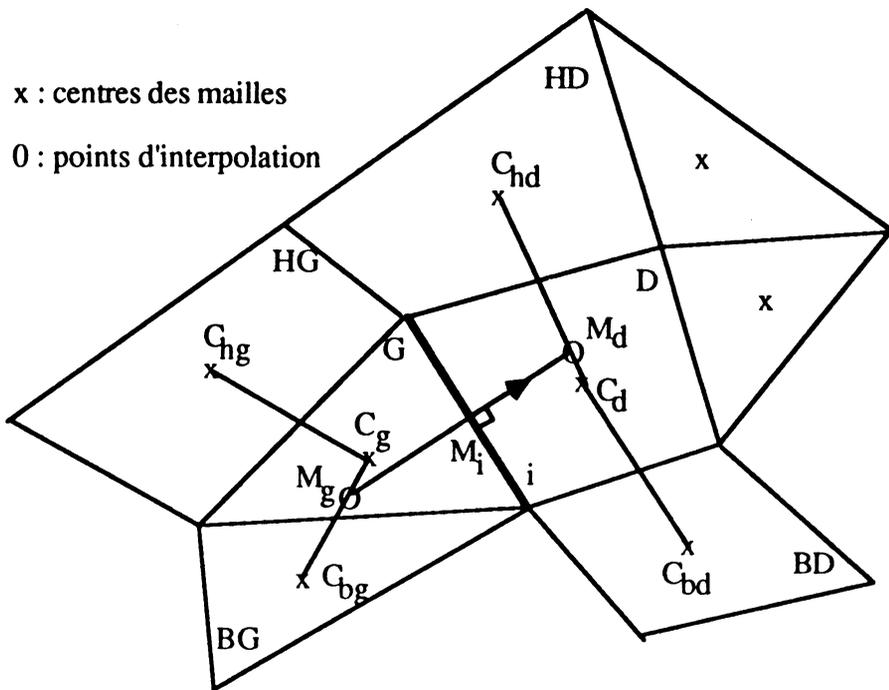
Soit une arête "i" on cherche à définir le flux sur cette arête. On procède pour cela en trois étapes :

- définition géométrique de deux points M_d et M_g situés à droite et à gauche de l'arête
- calcul des températures T_{M_d} et T_{M_g} en chacun des points M_d et M_g
- évaluation du flux sur l'arête, à partir des valeurs de T_{M_d} et T_{M_g}

a - Définition géométrique des points M_d et M_g :

Soient :

- M_i le milieu de l'arête "i"
- D (respectivement G) l'élément situé par convention à droite (resp^t à gauche) de cette arête
- HD et BD (resp^t HG et BG) les éléments situés en haut et en bas de l'élément D (resp^t G)
- N la normale à l'arête "i" passant par M_i
- C_d , C_g , C_{hd} , C_{hg} , C_{bd} et C_{bg} les barycentres respectifs des éléments D, G, HD, HG, BD et BG



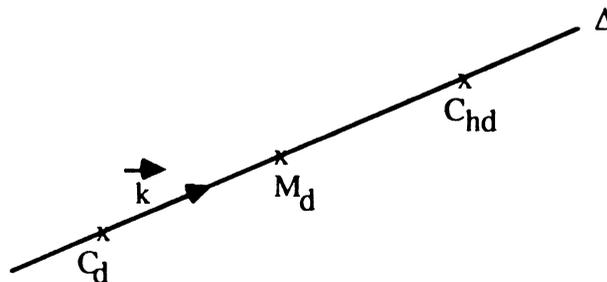
Les points M_d et M_g sont définis comme suit :

- si $N \cap [C_{hd}, C_d] \neq \emptyset$ alors $M_d = N \cap [C_{hd}, C_d]$
 sinon $M_d = N \cap [C_{bd}, C_d]$
- si $N \cap [C_{hg}, C_g] \neq \emptyset$ alors $M_g = N \cap [C_{hg}, C_g]$
 sinon $M_g = N \cap [C_{bg}, C_g]$

b - Calcul des températures T_{M_d} et T_{M_g} aux points M_d et M_g :

On suppose que par exemple $M_d = N \cap [C_{hd}, C_d]$. Les températures T_d et T_{hd} sont connues (ce sont les valeurs au temps $t = t_n$).

Alors on définit T_{M_d} comme étant la température au point M_d , issue de l'interpolation linéaire entre la température au point C_d (soit T_d) et la température au point C_{hd} (soit T_{hd}).



Soit \mathbf{k} le vecteur directeur de la droite supportant les points C_d et C_{hd} . La température T_{Md} est vaut donc :

$$T_{Md} = T_d + \frac{T_{hd} - T_d}{(C_{hd}C_d \cdot \mathbf{k})} (\overrightarrow{M_d C_d} \cdot \mathbf{k}) \quad (3-5)$$

T_{Mg} est définie de façon similaire.

c - Evaluation du flux sur l'arête :

Il reste à évaluer la conductivité thermique k_i sur l'arête; c'est un paramètre sensible (car k dépend fortement de la température).

On tient à respecter deux règles de base :

- si $T_{Md} = T_{Mg} = T_0$ alors $k_i = k(T_0)$
- si T_{Md} ou T_{Mg} sont tels que $k(T_{Md}) = 0$ ou $k(T_{Mg}) = 0$ (ce qui signifie que le milieu à droite ou le milieu à gauche n'est pas du tout conducteur) alors $k_i = 0$ (ce qui impose un flux nul sur l'arête)

Une approximation de la conductivité thermique sur la paroi prenant en compte ces deux règles est :

$$k_i = \frac{2}{\frac{1}{k(T_{Mg})} + \frac{1}{k(T_{Md})}}$$

d - Expression du flux sur l'arête i :

Le flux sur l'arête "i" s'écrit alors comme suit :

$$(\mathbf{k} \cdot \text{grad} T \cdot \mathbf{n})_i = k_i \cdot \frac{T_{Md} - T_{Mg}}{\|\overrightarrow{M_d M_g}\|} \quad (3-6)$$

Schéma numérique :

La température T^{n+1} est déterminée explicitement au centre de chaque maille grâce au schéma volumes finis précédemment présenté :

$$T^{n+1} = T^n - \frac{t^{n+1} - t^n}{\rho^n \cdot C_v} \left[\frac{1}{S_k} \sum_{i=1}^m l_i \cdot [k \cdot \text{grad} T \cdot \vec{n}]_i \right] + \frac{t^{n+1} - t^n}{\rho^n \cdot C_v} [\text{source} (T^n, P^n)] \quad (3-7)$$

Ainsi :

- le pas fractionnaire de convection fournit les valeurs de ρ^{n+1} , u^{n+1} et v^{n+1} .
- le pas fractionnaire de diffusion fournit la valeur de T^{n+1} .
- on en déduit grâce à la loi d'état la valeur de la pression P^{n+1} .

Le paragraphe suivant présente des courbes de convergence obtenues avec ce schéma sur différents maillages formés de quadrangles ou de triangles. Il est important de noter que ces résultats sont relatifs à l'équation de la chaleur linéaire.

Remarque : les critères de convergence des schémas Volumes Finis n'ont encore pas été démontrés d'une façon générale. Dans le cas linéaire elliptique, **des résultats théoriques de convergence** sur certains maillages irréguliers (avec pendage régulier) ont été mis en évidence par Faille [1]. Ces résultats sont sans doute généralisables au cas linéaire et parabolique.

3-3 Tests de convergence

On présente des résultats numériques de convergence de la méthode de volumes finis décrites précédemment.

On cherche à trouver T solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = g & \text{sur } \Omega = [0; 1]^2 \\ \text{Grad } T \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ g(x,y,t) = -e^{-t} \cdot e^{-2\cos\pi x} \cdot e^{-2\cos\pi y} \cdot [1 + 4\pi^2 \sin^2 \pi x + 4\pi^2 \sin^2 \pi y + 2\pi^2 \cos^2 \pi x + 2\pi^2 \cos^2 \pi y] \end{cases}$$

Ce problème admet la solution analytique suivante :

$$T(x,y,t) = e^{-t} \cdot e^{-2\cos\pi x} \cdot e^{-2\cos\pi y}$$

Le schéma est testé sur huit maillages différents :

- 4 maillages formés de quadrangles irréguliers (sur lesquels on compare la méthode avec une méthode d'éléments finis mixtes hybrides duaux) (Talbot [1]).

- 4 maillages formés de triangles quelconques (obtenus à l'aide d'un mailleur automatique).

Ces maillages sont de plus en plus fins (on divise le pas d'espace par 2 à chaque fois, le nombre d'éléments étant alors multiplié exactement par 4 pour le maillage de quadrangles et approximativement par trois pour le maillage de triangles).

Résultats obtenus sur les quadrangles (méthode de Volumes Finis) :

Cas	CPU	Δt	nombre d'éléments	erreur L2 absolue	erreur L2 relative	erreur L_∞ absolue	erreur L_∞ relative
Quad 1	15"	0.001	16	0.620	0.150	1.26	42.8
Quad 2	1' 01"	0.001	64	0.316	0.076	1.17	30.1
Quad 3	12' 04"	0.0005	256	0.075	0.018	0.364	6.92
Quad 4	60' 00"	0.0001	1024	0.021	0.005	0.104	1.94

Résultats obtenus sur les quadrangles (méthode d'éléments finis mixtes hybrides duaux) :

Cas	nombre d'éléments	erreur L2 absolue	erreur L_∞ absolue
Quad 1	16	0.800	2.53
Quad 2	64	0.300	0.45
Quad 3	256	0.070	0.12
Quad 4	1024	0.027	0.038

Résultats obtenus sur les triangles (méthode de Volumes Finis) :

Cas	CPU	Δt	nombre d'éléments	erreur L2 absolue	erreur L2 relative	erreur L_{∞} absolue	erreur L_{∞} relative
Tri 1	26"	0.002	58	1.46	0.350	1.84	162
Tri 2	1' 40"	0.001	116	0.44	0.106	0.67	50
Tri 3	6' 00"	0.0005	244	0.13	0.032	0.21	15.4
Tri 4	35' 00"	0.0002	504	0.036	0.009	0.33	2.99

Remarques :

- le schéma de volumes finis présenté devient un schéma différences finies à cinq points si le maillage est régulier.
- ce schéma volumes finis a été baptisé VF9 par T. Gallouët (car 9 mailles sont susceptibles d'intervenir dans le bilan effectué sur une maille). C'est un schéma conservatif dont l'approximation des flux est consistante (cf. Faille [1]).
- les résultats numériques montrent que VF9 est proche d'un schéma d'ordre 2 en espace aussi bien sur les maillages considérés formés de quadrangles que sur les maillages considérés formés de triangles.
- ce schéma peut s'implémenter en espace, mais la nature du problème que l'on résout ici impose un pas de temps assez petit pour que le schéma explicite soit stable.
- l'erreur absolue L_{∞} obtenue avec le maillage de triangles le plus fin (Tri4) est anormalement importante. Elle provient sans doute d'un "facteur de forme du maillage" (c'est à dire d'un triangle particulièrement déformé).

4 - Terme source

Comme dans le cas monodimensionnel, le terme source n'intervient que dans l'équation d'énergie. Aussi, même s'il a été présenté jusqu'ici comme un vecteur, dans ce chapitre c'est un scalaire (à savoir la composante du vecteur "source" intervenant dans l'équation d'énergie).

Le terme source est composé de deux termes : le terme de dissipation par effet Joule et le terme de dissipation par rayonnement. Il s'écrit :

$$\text{source} = D_{\text{Joule}} - \text{div } F_R \quad (4-1)$$

Notons que ce terme source est présenté ici dans un cas **bidimensionnel axisymétrique** (le cas 2-D plan n'a pas été envisagé mais il ne présente a priori pas de difficulté théorique supplémentaire). Il s'agit en effet de simuler la présence d'un arc électrique dans un disjoncteur dont la géométrie est proche d'une géométrie axisymétrique.

4-1 Définition de la zone d'arc

Remarques :

- La zone inter-contacts définie dans ce paragraphe (cf. le schéma qui suit) est une zone inter-contacts "étendue" (si on se réfère à la zone inter-contacts définie pour le maillage mobile).
- En toute rigueur, l'arc électrique n'est pas axisymétrique. En effet, le gaz est plongé dans un champ magnétique qui a pour effet de faire tourner l'arc électrique. Pourtant dans notre modélisation il l'est nécessairement. On suppose alors qu'il est cylindrique plein, et par conséquent le centre (c'est à dire la zone la plus chaude) de cet arc est situé sur l'axe de symétrie
- Dans la pratique il est possible que la zone de gaz située dans les tuyères soit assez chaude pour être conductrice. Pourtant, on suppose que le courant électrique ne traverse que la zone inter-contacts (car c'est là que la résistance électrique est la plus faible). Le terme de dissipation par effet Joule n'existe donc que dans cette zone inter-contacts.

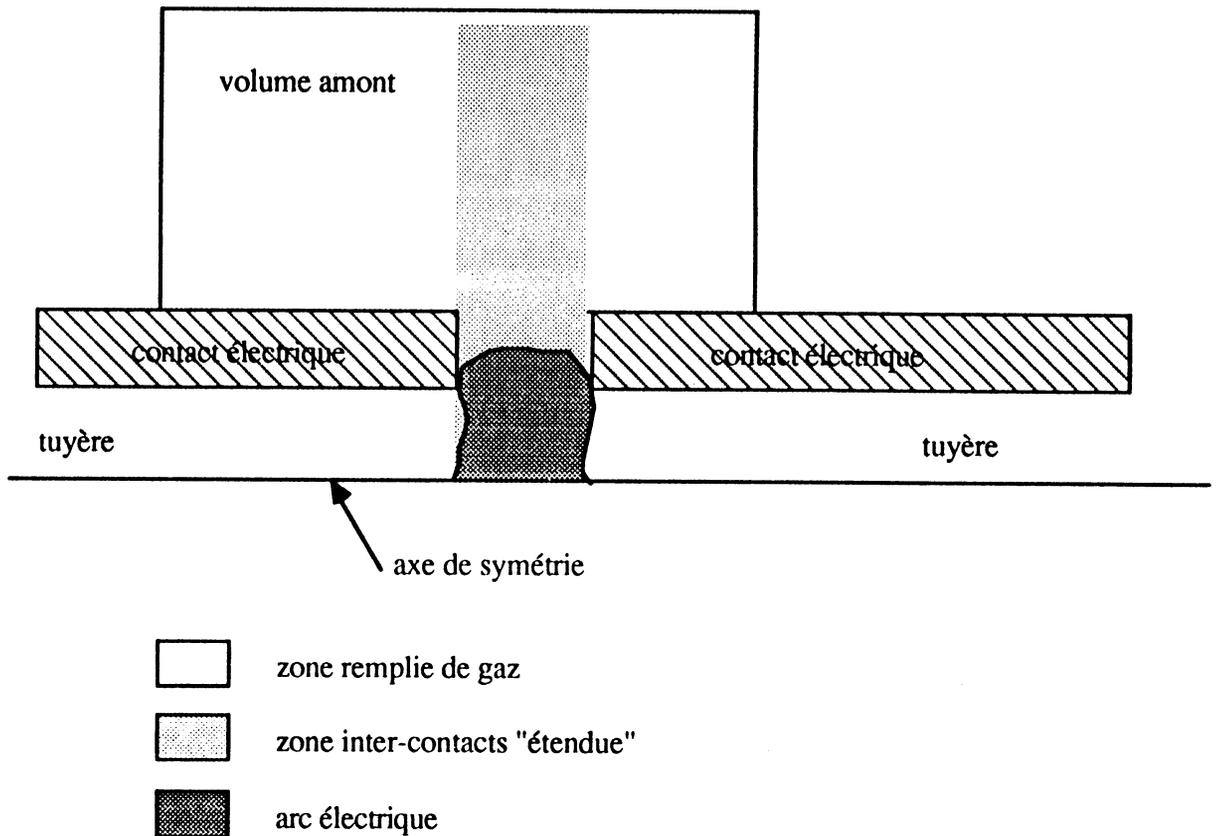
Il faut donc noter qu'implicitement on a distingué deux zones dans l'arc électrique (arc électrique: zone où le gaz est conducteur) :

- une zone traversée par le courant (qu'on suppose être dans la zone inter-contacts)
- une zone conductrice, mais ne conduisant plus le courant (zone très chaude, mais située hors de la zone inter-contacts).

On est obligé de distinguer ces deux zones (ce qui consiste en fait à maintenir l'arc électrique dans la zone inter-contacts), car les équations traduisant les phénomènes "d'accrochage" de l'arc

électrique aux contacts n'ont pas été prises en compte.

Le sens passant du courant est donc toujours parallèle à l'axe de symétrie de la géométrie. Aussi, sur toute droite appartenant à la zone inter-contacts et perpendiculaire à l'axe de symétrie, le champ électrique est constant.



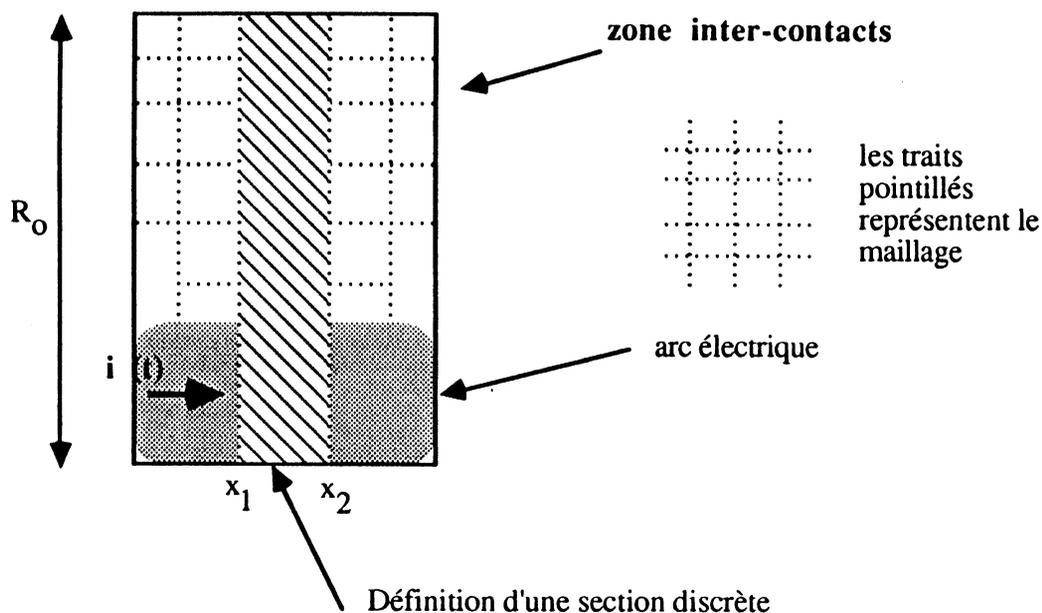
Dans la suite, on appelle **section** de la zone inter-contacts, un domaine où le champ électrique est constant.

Remarque : toute droite appartenant à la zone inter-contacts et perpendiculaire à l'axe de symétrie est donc une section.

De même, on appelle **section discrète** de la zone inter-contacts, un domaine du maillage ainsi défini :

- la largeur (la largeur étant définie selon l'axe de symétrie) de ce domaine est composé d'une seule maille
- la hauteur (perpendiculaire à l'axe de symétrie) de ce domaine est égale à la hauteur de la zone inter-contacts.

Afin de pouvoir définir ces sections discrètes sans problèmes, on suppose dans la suite que le maillage de la zone inter-contacts est cartésien.



Remarques :

- le champ électrique est constant au centre des maille d'une même section discrète
- une section discrète S_0 peut alors être définie (comme un pavé de \mathbb{R}^2) à l'aide de 3 réels x_1 , x_2 et R_0 tels que :

$$S_0 = [x_1 ; x_2] \times [0 ; R_0]$$

Le terme source, dont le calcul est développé dans les deux paragraphes suivants, n'est défini que pour les mailles appartenant à une des sections de la zone inter-contacts (sur le schéma ci-dessus 5 sections sont définies dans la zone inter-contacts).

4-2 Terme de dissipation par effet Joule

Soit S_0 est une section discrète de l'arc définie par x_1 , x_2 et R_0 :

$$S_0 = [x_1 ; x_2] \times [0 ; R_0]$$

On cherche à calculer le terme de dissipation par effet Joule en chaque point de cette section. Ce terme s'écrit (cf. partie 1, § 2-2) :

$$D_{\text{joule}}(M_o) = \sigma(P_o, T_o) \frac{i(t)^2}{\left[\int_{S_o} \sigma(P(M), T(M)) ds \right]^2}$$

Connaissant les distributions de température et de pression à un instant t , on sait évaluer la conductibilité σ en tout point du maillage.

Soit C_o , la conductance de la section discrète S_o :

$$C_o = \int_{S_o} \sigma(P(M), T(M)) ds$$

L'intégrale définissant cette conductance ne doit pas être considérée comme une intégrale surfacique, mais comme une intégrale curviligne le long de la section (qui est ne l'oublions pas une section axisymétrique). Sur chaque section, les calculs sont identiques à ceux effectués en 1-D. En un point M_o (de température T_o et de pression P_o) de la section S_o , le terme de dissipation par effet Joule s'écrit donc :

$$D_{\text{Joule}}(M_o) = \sigma(P_o, T_o) \left[\frac{i(t)}{C_o} \right]^2 \quad (4-2)$$

4-3 Terme de rayonnement

On cherche à résoudre les équations du rayonnement sur chaque section discrète S_o . Soit N le nombre de sections de la zones inter-contacts : **on se ramène à N résolutions distinctes du problème monodimensionnel radial**.

Considérons donc une section S_o ($S_o = [x_1 ; x_2] \times [0 ; R_o]$). D'après ce qu'on a vu pour le 1-D, les équations de conservation du rayonnement s'écrivent alors (système monodimensionnel radial dont les coefficients d'émission ϵ_v et d'absorption K_v sont déterminés par les conditions de température sur la section S_o) :

Trouver le flux de rayonnement F_{R_v} (vecteur de \mathbb{R} donc scalaire, puisqu'on se ramène à une étude monodimensionnelle) et l'intensité de rayonnement J_v (scalaire) tels que :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial (r.F_{Rv})}{\partial r} = 4 \pi r (\epsilon_v - K_v J_v) \\ \frac{\partial J_v}{\partial r} = -\frac{3}{4 \pi} K_v F_{Rv} \end{array} \right. \quad \text{sur } [0; R_0]$$

avec les conditions aux limites:

$$F_{Rv} = 0 \quad \text{en } r = 0 \quad (\text{sur l'axe de symétrie})$$

$$F_{Rv} = \frac{\pi}{2} J_v^2 \quad \text{en } r = R \quad (\text{à la paroi})$$

Les conditions aux limites signifient que :

- 1- le flux de rayonnement est nul sur l'axe de symétrie (on suppose en effet que le centre de l'arc est situé sur l'axe de symétrie; c'est la meilleure hypothèse en 2-D).
- 2- l'intensité de rayonnement est nulle à la paroi, toute l'énergie étant réfléchie (cf 1-D).

Comme en 1-D, on limite l'étude à un nombre de plages de fréquence $N_{\text{fréq}}$ (dans la pratique $N_{\text{fréq}} = 2$ à 4). En effet, on ne tient compte que des bandes de fréquence pour lesquelles le gaz a des propriétés d'émission ou d'absorption très caractéristiques. Sur chaque section discrète S_0 , le système global à résoudre s'écrit alors :

trouver F_{Ri} et J_i ($i = 1, N_{\text{fréq}}$) sur $[0, R_0]$ tels que :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial (r.F_{Ri})}{\partial r} = 4 \pi r (\epsilon_i - K_i J_i) \\ \frac{\partial J_i}{\partial r} = -\frac{3}{4 \pi} K_i F_{Ri} \end{array} \right. \quad \text{sur } [0; R_0] \quad \text{pour } i = 1, N_{\text{fréq.}} \quad (4-3)$$

Conditions aux limites:

$$F_{Ri} = 0 \quad \text{en } r = 0$$

$$F_{Ri} = \frac{\pi}{2} J_i^2 \quad \text{en } r = R_0 \quad (\text{à la paroi})$$

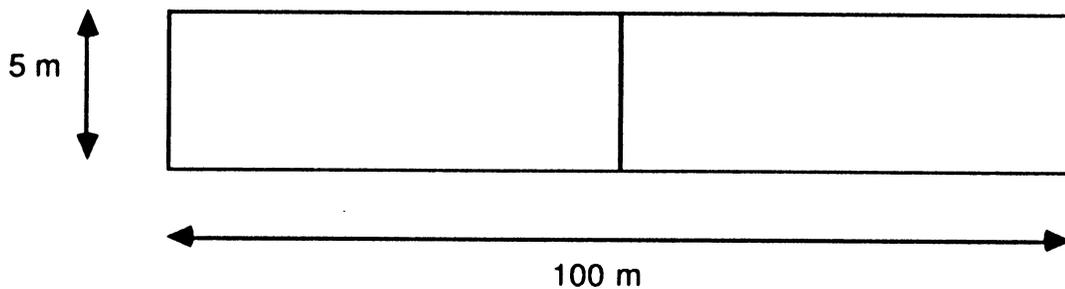
le terme de flux de rayonnement global s'écrivant alors :

$$F_R = \sum_{i=1}^{N_{\text{freq}}} F_{Ri}$$

5 - Résultats numériques

5-1 Tube à choc 2D plan (Chévrier-Galley [2])

On considère un tube rempli de gaz parfait, d'une longueur de 100 m et d'une hauteur de 5 m cloisonné en son centre (en $x = 50$ m).



Dans la partie "gauche" du tube (région 1) les conditions initiales sont les suivantes :

vitesse du gaz : 0. m/s
 densité : 12 kg/m³
 pression : 10⁶ Pa

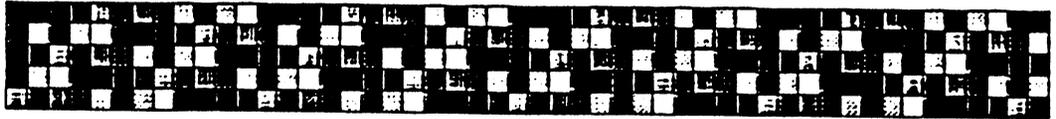
Dans la partie "droite" du tube (région 2) les conditions initiales sont les suivantes :

vitesse du gaz : 0. m/s
 densité : 1.2 kg/m³
 pression : 10⁵ Pa

A l'instant $t = 0$ s, on retire la cloison centrale. On observe alors l'expansion de trois ondes, une onde de détente, une discontinuité de contact et une onde de choc dont on sait calculer les expressions analytiques (grâce aux relations de Rankine et Hugoniot, cf [Gilquin]).

Les résultats fournis sont à $t = 0.06$ s. On compare les résultats obtenus sur différents maillages avec le schéma de Van Leer présenté ci-dessus et le schéma de Godounov d'ordre 1 en espace (pour lequel aucun calcul de pentes n'est fait).

Maillages : (seule la moitié du maillage est représentée)



Mesh with 500 squares



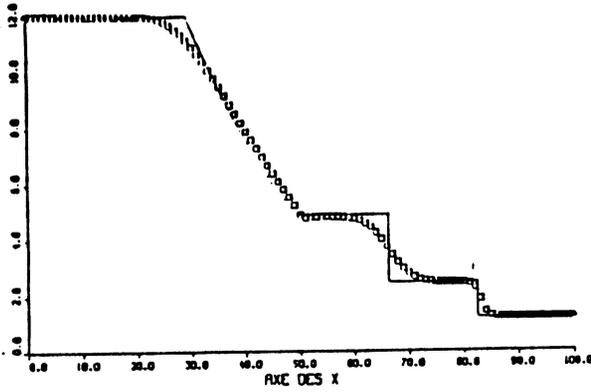
Mesh with 592 quadrilaterals



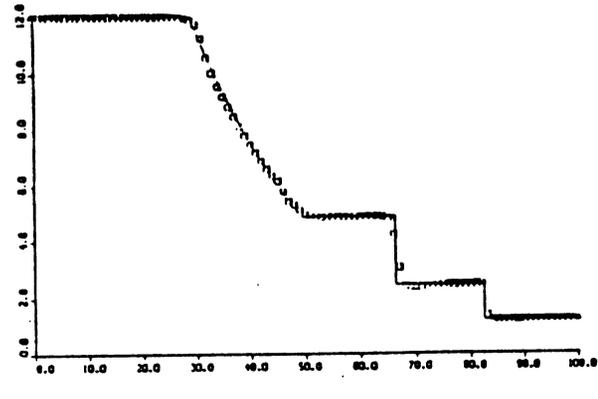
Mesh with 520 triangles

Densités :

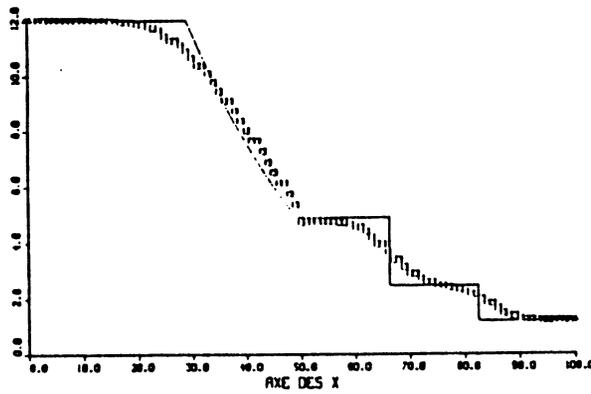
Godunov on Squares



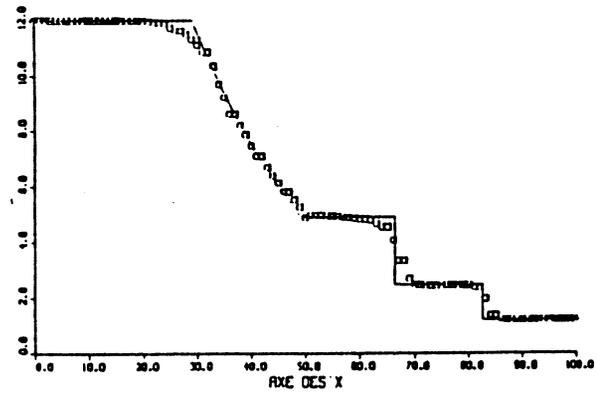
Van Leer on Squares



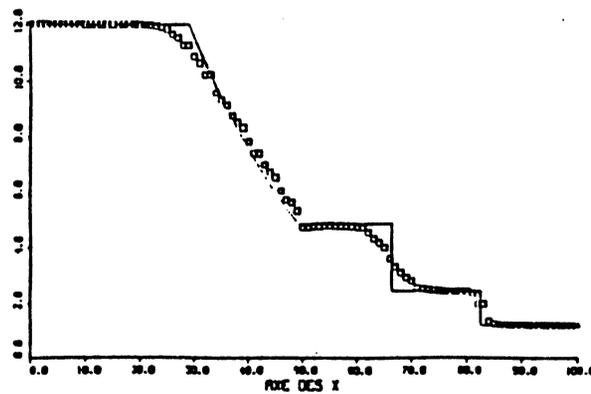
Godunov on Quadrilaterals



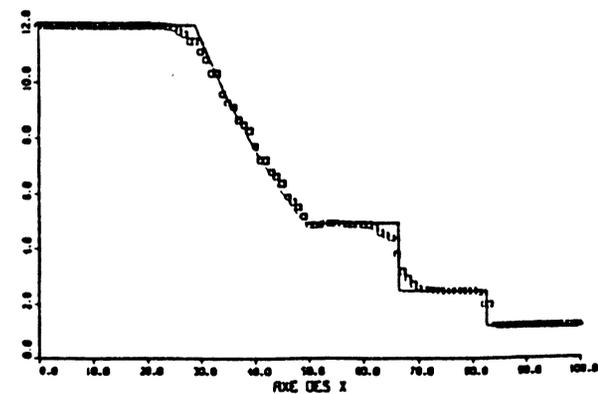
Van Leer on Quadrilaterals



Godunov on Triangles

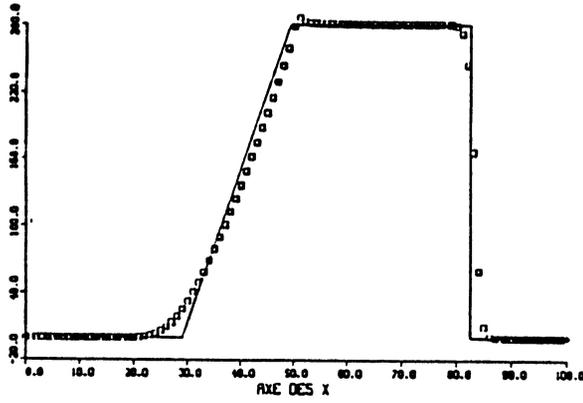


Van Leer on Triangles

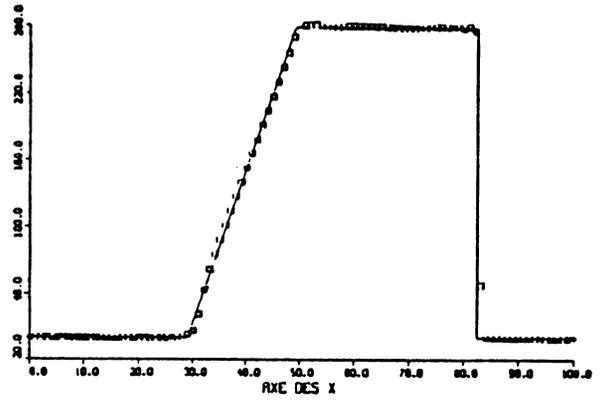


Vitesse :

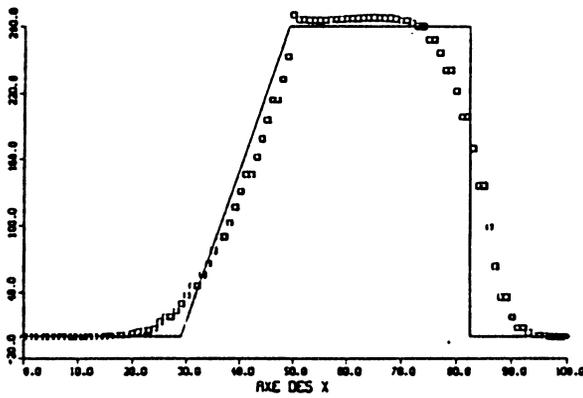
Godunov on Squares



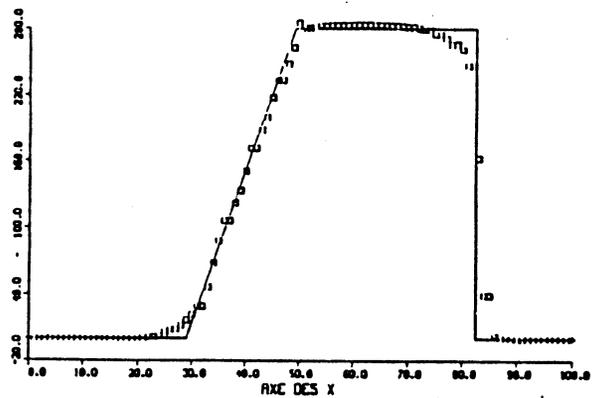
Van Leer on Squares



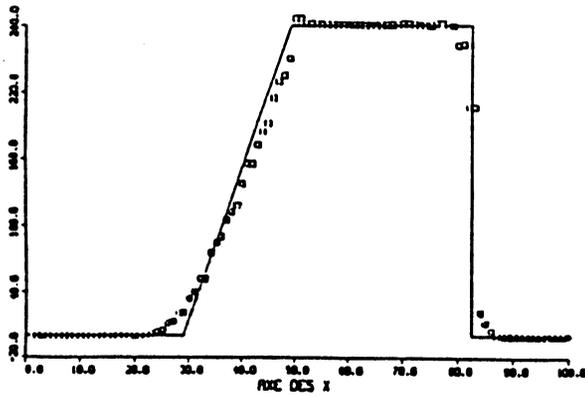
Godunov on Quadrilaterals



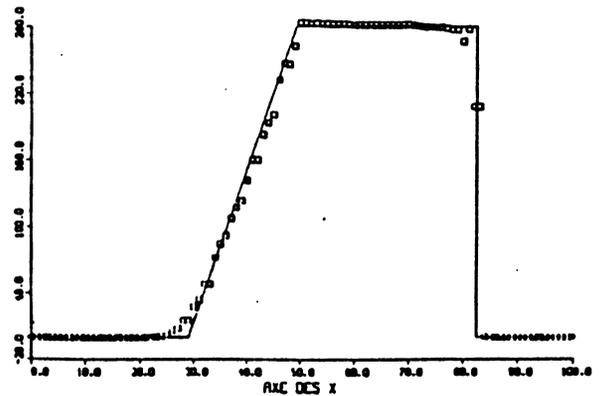
Van Leer on Quadrilaterals



Godunov on Triangles

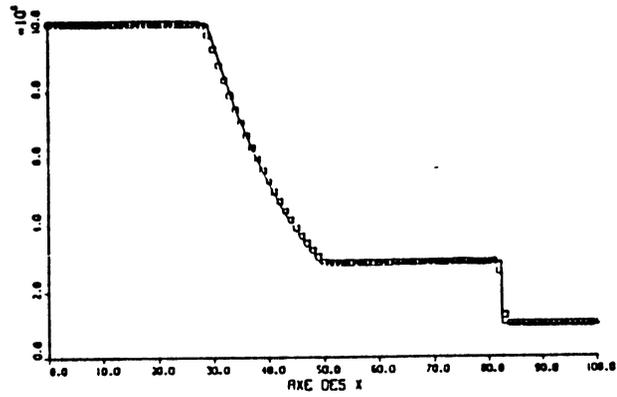


Van Leer on Triangles

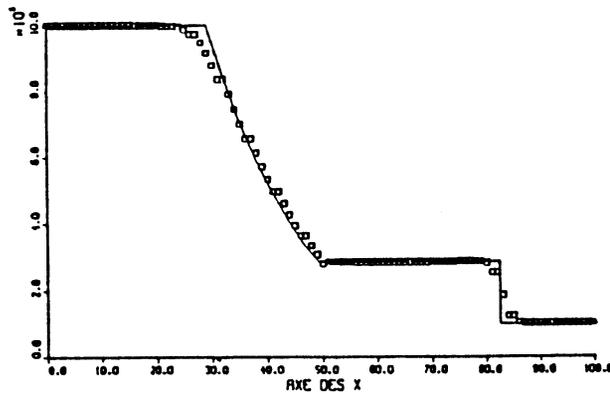


Pressions (schéma de Van Leer seul) :

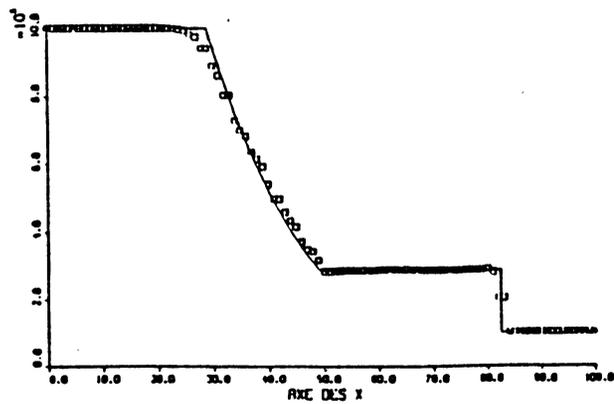
Van Leer on Squares



Van Leer on Quadrilaterals



Van Leer on Triangles



5-2 Tube à choc 2D plan : convergence

On considère un tube rempli de gaz parfait, d'une longueur L de 30 m (selon l'axe des x) et d'une hauteur de 1.5 m cloisonné en son centre (en $x = 15$ m).

Dans la partie "gauche" du tube (région 1) les conditions initiales sont les suivantes :

vitesse du gaz : 0. m/s
 densité : 1 kg/m³
 pression : 10⁵ Pa

Dans la partie "droite" du tube (région 2) les conditions initiales sont les suivantes :

vitesse du gaz : 0. m/s
 densité : 0.125 kg/m³
 pression : 10⁴ Pa

A l'instant $t = 0$ s, on retire la cloison centrale. Les résultats fournis sont à $t = 0.0221$ s.

On compare les résultats obtenus sur différents maillages :

- maillage 10 x 5 (M1)
- maillage 30 x 5 (M2)
- maillage 100 x 5 (M3)
- maillage 300 x 5 (M4).

et avec différentes méthodes :

- Godounov d'ordre 1 avec solveur de Roe (GR)
- Godounov d'ordre 1 avec solveur de Colella (GC)
- Godounov d'ordre 2 (Van Leer) avec solveur de Roe (VLR)
- Godounov d'ordre 2 (Van Leer) avec solveur de Colella (VLC).

Les résultats obtenus sont comparés avec la solution exacte. La norme L_1 de l'erreur est calculée dans chaque cas (sur une coupe selon l'axe des x du maillage) :

$$E = \int_0^L |\rho - \rho_{\text{exact}}| dx = \sum_{i=1}^N |\rho_i - \rho_{\text{exact}}(x_i)| \cdot h$$

si N est le nombre de mailles dans la longueur, $h = 1 / N$, $x_i = ih$ et ρ_i la solution obtenue par le

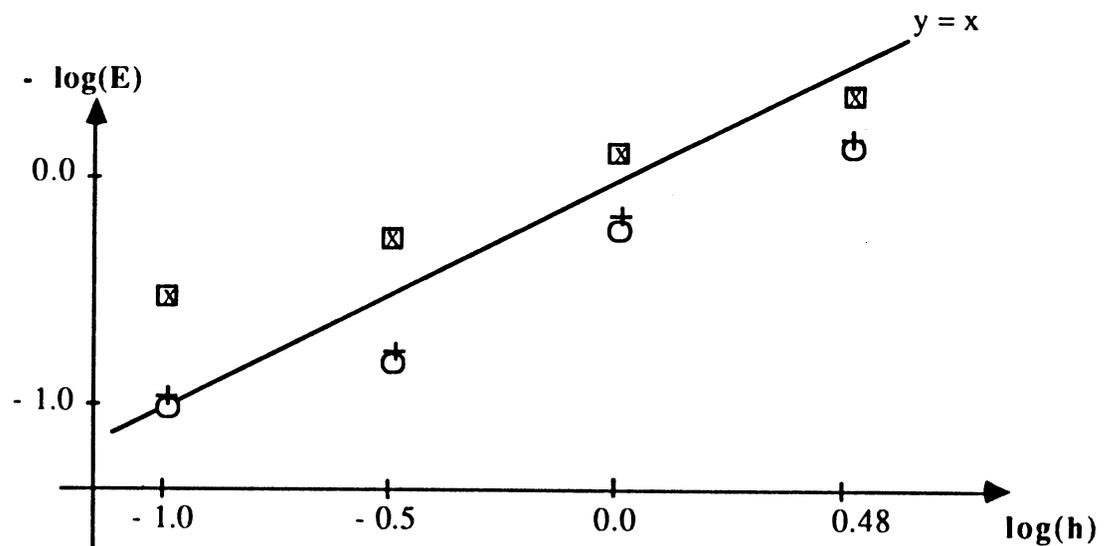
calcul en x_j .

Tableau de convergence :

	GR	GC	VLR	VLC
M1	0.29	0.30	0.12	0.090
M2	0.08	0.08	- 0.23	- 0.24
M3	- 0.30	- 0.30	- 0.79	- 0.83
M4	- 0.55	- 0.55	- 0.96	- 0.98

Calcul sur différents maillages avec différentes méthodes de $\log(E)$

Courbes de convergence :



- + Van Leer Roe
- O Van Leer Colella
- x Godounov Roe
- Godounov Colella

Conclusion :

On voit, d'après les courbes de convergence ci-dessus, que les méthodes de "Godounov du premier ordre en espace" et de "Godounov du second ordre en espace" (Van Leer) sont deux méthodes d'ordre 1 en espace dès que la solution présente des discontinuités.

Cependant, il reste intéressant d'utiliser le schéma de Van Leer. En effet, les temps de calcul obtenus avec les maillages M2 et M3 sont les suivants :

	GR	GC	VLR	VLC
M2	28 "	51 "	33 "	58 "
M3	78 "	171 "	99 "	194 "

Si on note "rapport" le quotient ainsi défini :

$$\text{rapport} = \frac{\text{CPU}}{\text{précision}}$$

et qu'on le compare avec les différentes méthodes on obtient (on choisit les rapports obtenus pour une précision donnée similaire, à savoir celle obtenue avec M3 pour Godounov et celle obtenue avec M2 pour Van Leer) :

$$\text{rapport (GR)} = 260$$

$$\text{rapport (VLR)} = 143$$

et

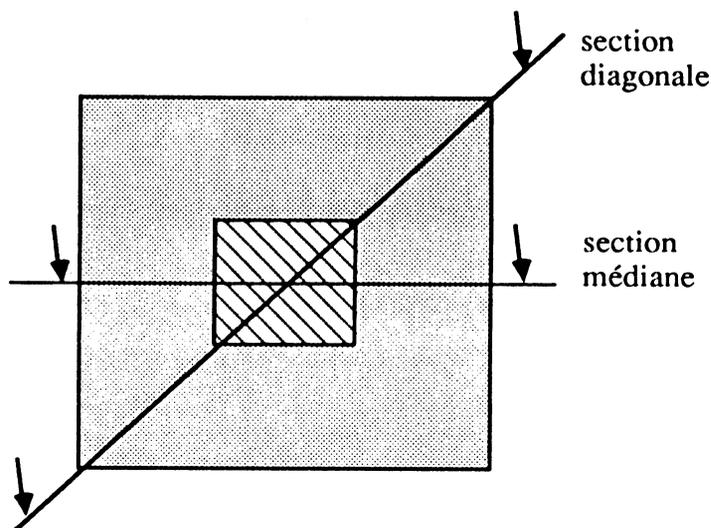
$$\text{rapport (GC)} = 570$$

$$\text{rapport (VLC)} = 241$$

Il apparaît donc qu'avec le schéma de Roe, la méthode de Godounov est **1.82** fois plus chère que celle de Van Leer, et qu'avec le schéma de Colella, la méthode de Godounov est **2.36** fois plus chère que celle de Van Leer. Il faut noter de plus que ces évaluations sont **monodimensionnelles** (l'écoulement est monodimensionnel et on ne raffine le maillage que dans le sens de l'écoulement). Pour un problème vraiment bidimensionnel, on peut s'attendre à des rapports plus importants (de l'ordre du carré de ceux obtenus ici).

5-3 Problème modèle "vraiment" bidimensionnel (Chévrier-Galley [2])

On considère un plan carré (de dimension 140 x 140 m, cf. figure ci-dessous) avec deux sous-domaines : une aire carrée centrale (hachurée de dimensions 40 x 40 m), et son aire complémentaire (ombrée), toutes deux remplies de gaz parfait (air).



Sur l'aire hachurée (carré intérieur) les conditions initiales sont les suivantes :

vitesse : 0 m/s densité : 12 kg/m^3 pression : 10^6 Pa .

Sur l'aire ombrée les conditions initiales sont les suivantes :

vitesse : 0 m/s densité : 1.2 kg/m^3 pression : 10^5 Pa .

On compare les solutions obtenues à $t = 0.05 \text{ s}$. Les calculs ont été effectués à l'aide du schéma de Van Leer décrit ci-dessus, avec trois maillages différents :

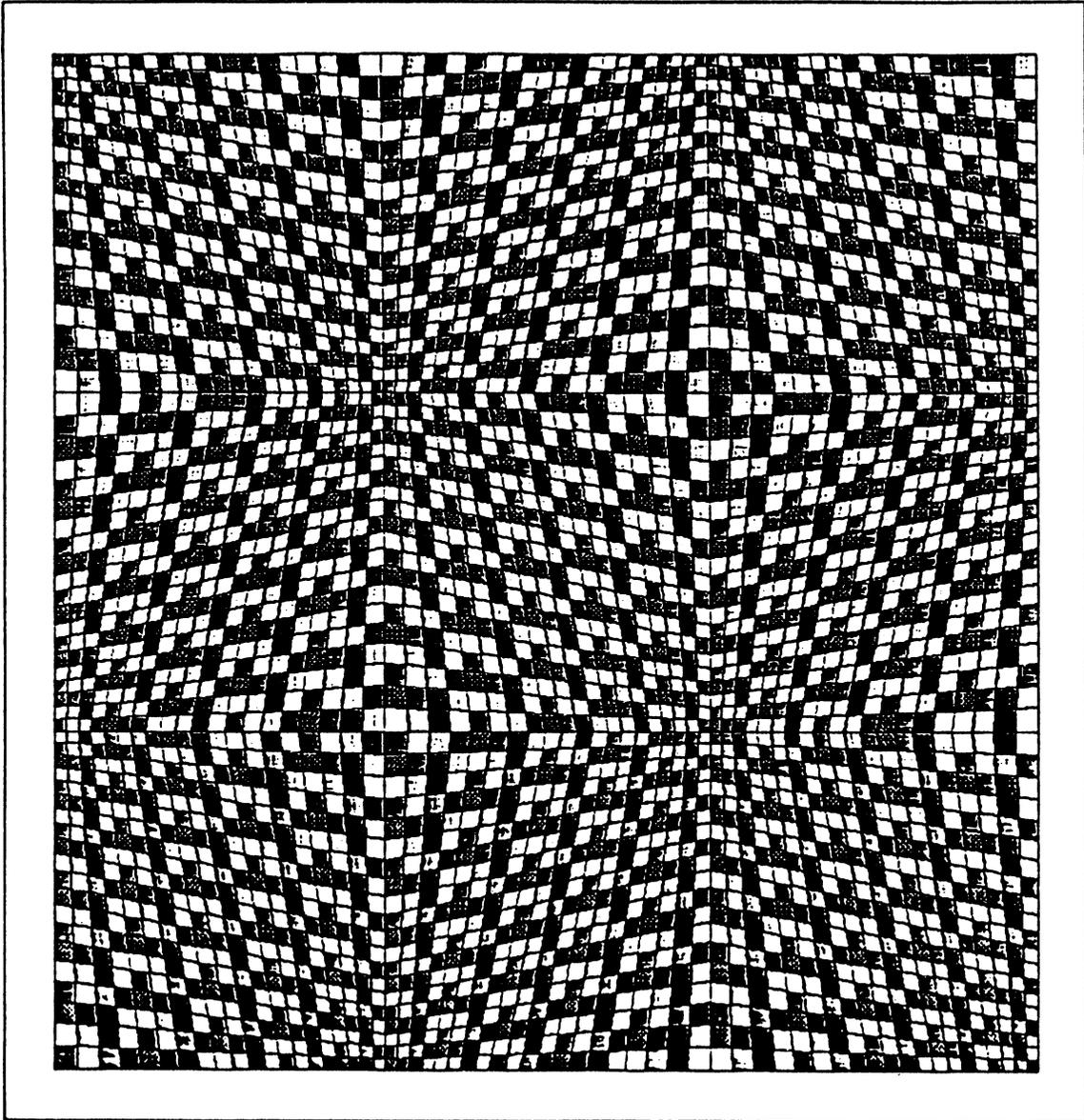
- | | |
|---|---------------------------|
| 1. maillage composé de 3600 carrés identiques | (temps CPU : 10 mn 09 s) |
| 2. maillage composé de 3600 quadrangles quelconques | (temps CPU : 11 mn 34 s) |
| 3. maillage composé de 3834 triangles quelconques | (temps CPU : 13 mn 37 s). |

Chacune des solutions est présentée le long de deux sections :

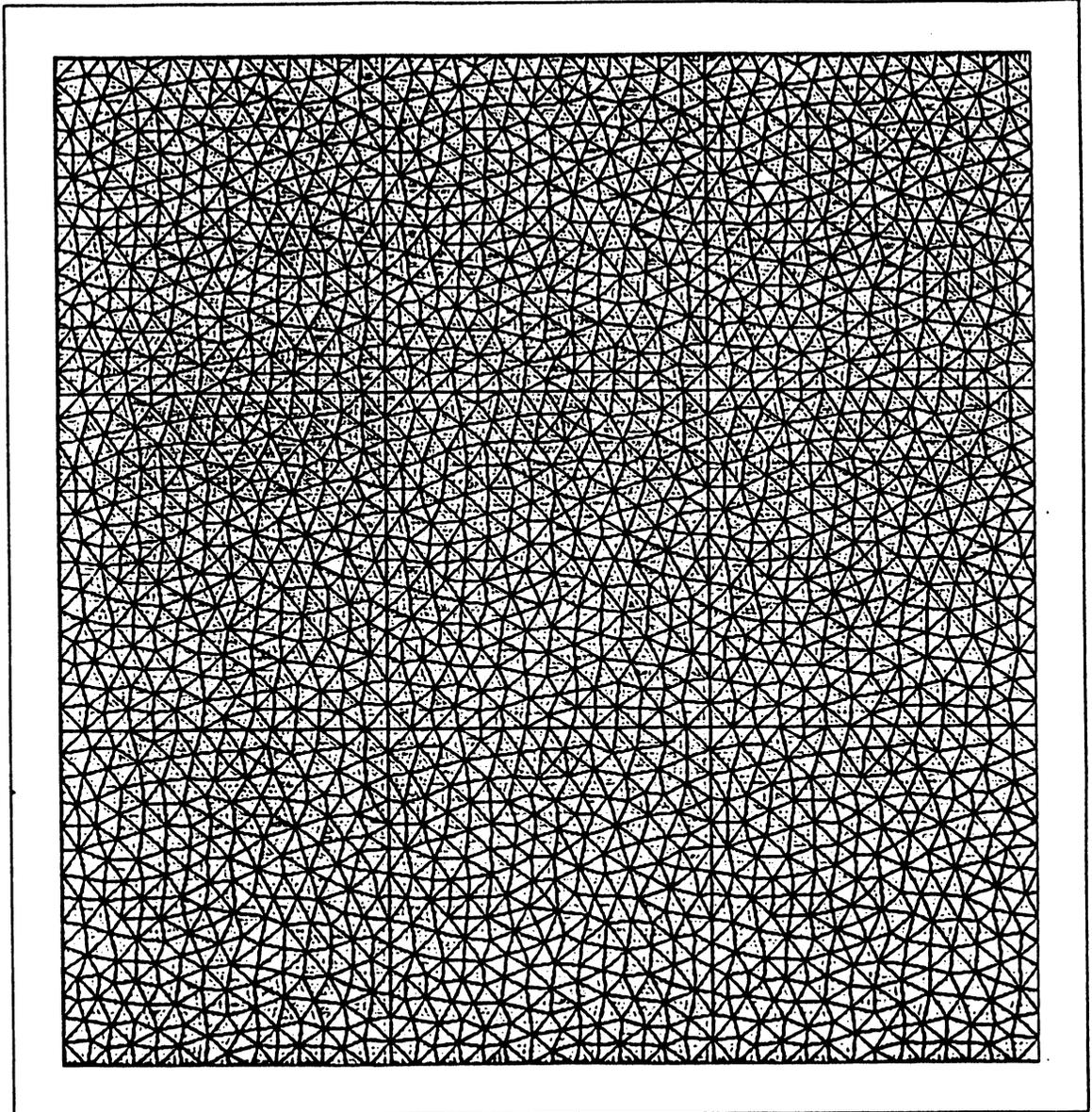
- a. une section médiane.
- b. une section diagonale

Un calcul effectué sur un maillage très fin comportant 9216 carrés permet d'obtenir une meilleure approximation de la solution exacte, et est utilisé comme "solution de référence".

Maillages :



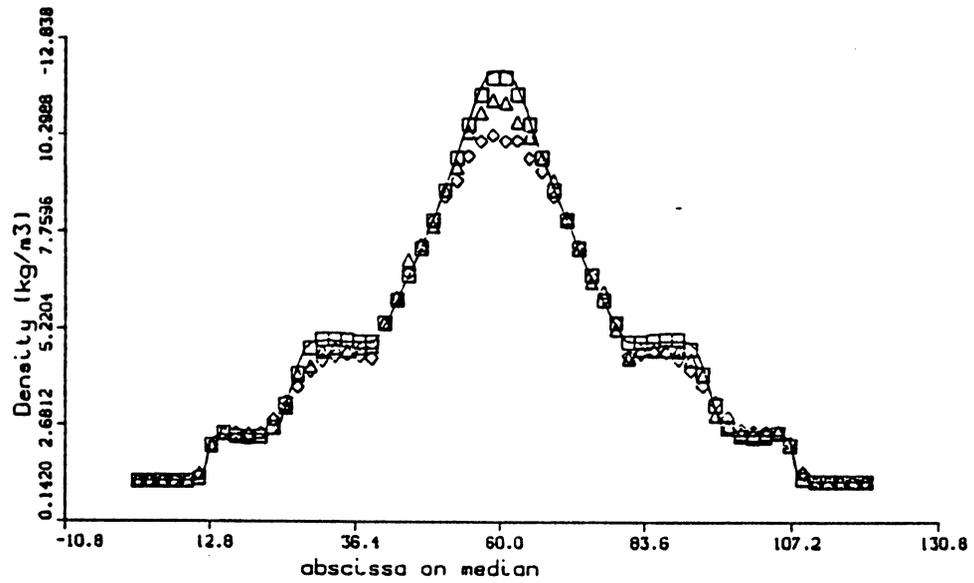
Maillage composé de 3600 quadrangles



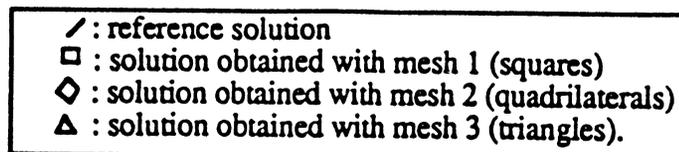
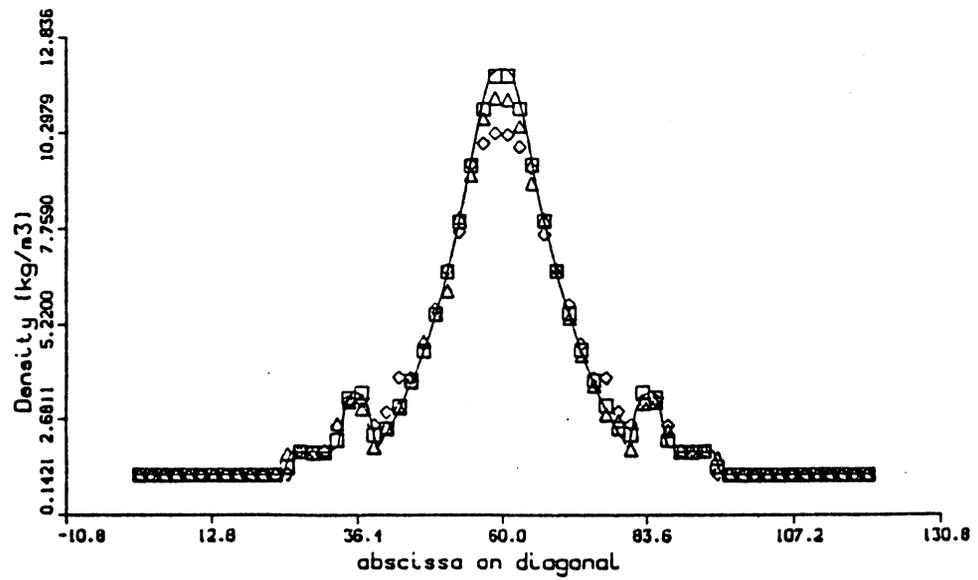
Maillage composé de 3834 triangles

Densités (schéma de Van Leer) :

Median section :

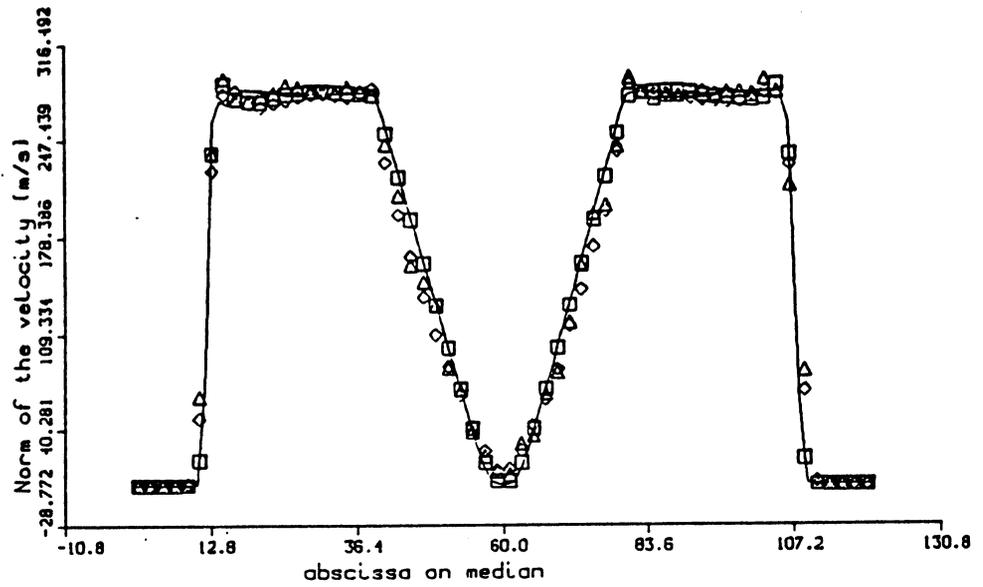


Diagonal section :

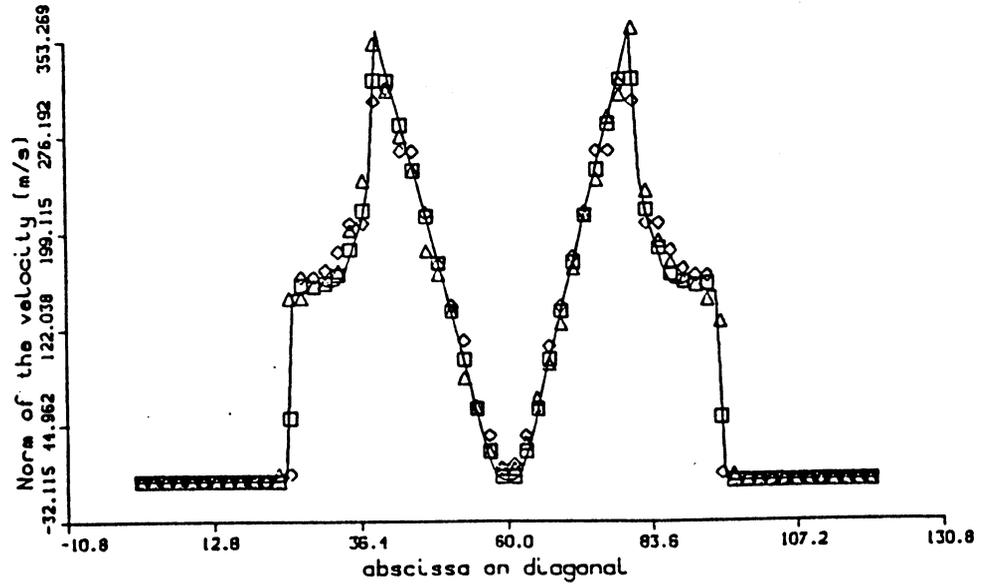


Vitesses (schéma de Van Leer) :

Median section :



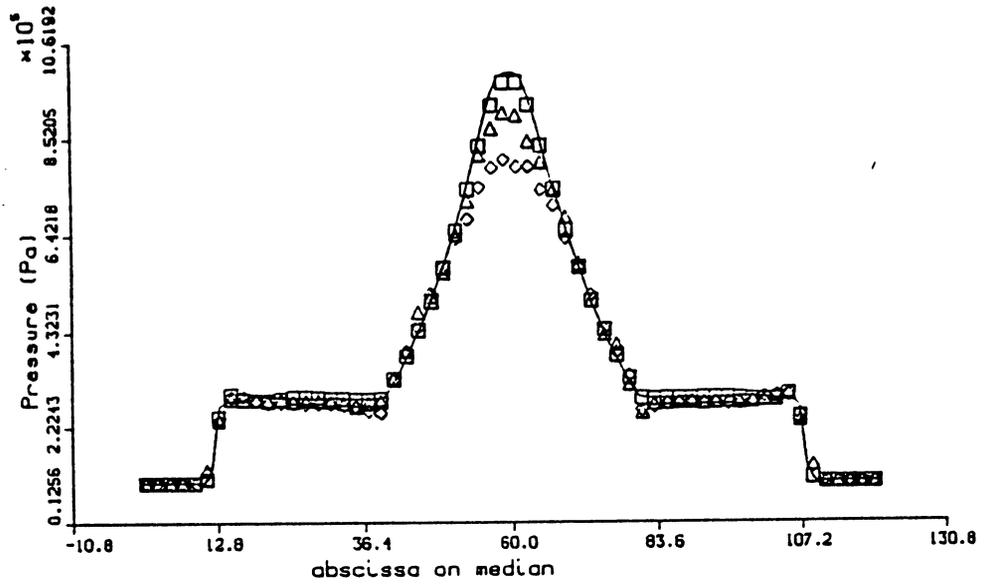
Diagonal section :



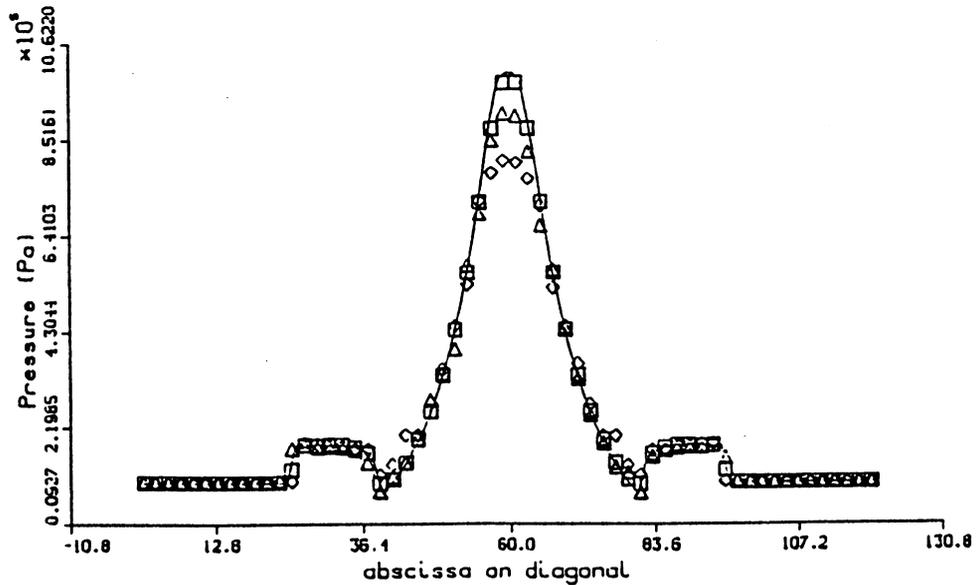
- | | |
|---|--|
| / | : reference solution |
| □ | : solution obtained with mesh 1 (squares) |
| ◇ | : solution obtained with mesh 2 (quadrilaterals) |
| △ | : solution obtained with mesh 3 (triangles). |

Pressions (schéma de Van Leer) :

Median section :



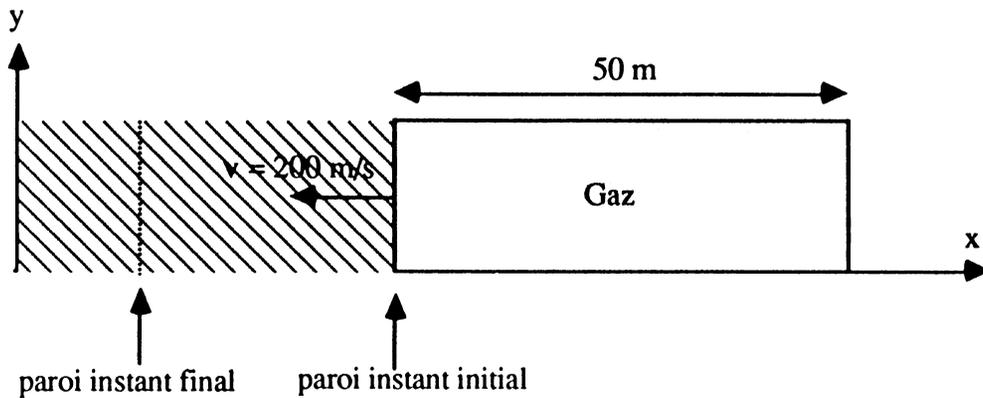
Diagonal section :



- / : reference solution
- : solution obtained with mesh 1 (squares)
- ◇ : solution obtained with mesh 2 (quadrilaterals)
- △ : solution obtained with mesh 3 (triangles).

5-4 Détente par pistonnage

On considère un piston d'une longueur de 50 m et rempli de gaz parfait. Il s'ouvre à une vitesse de 200 m/s.



Les conditions initiales du gaz sont:

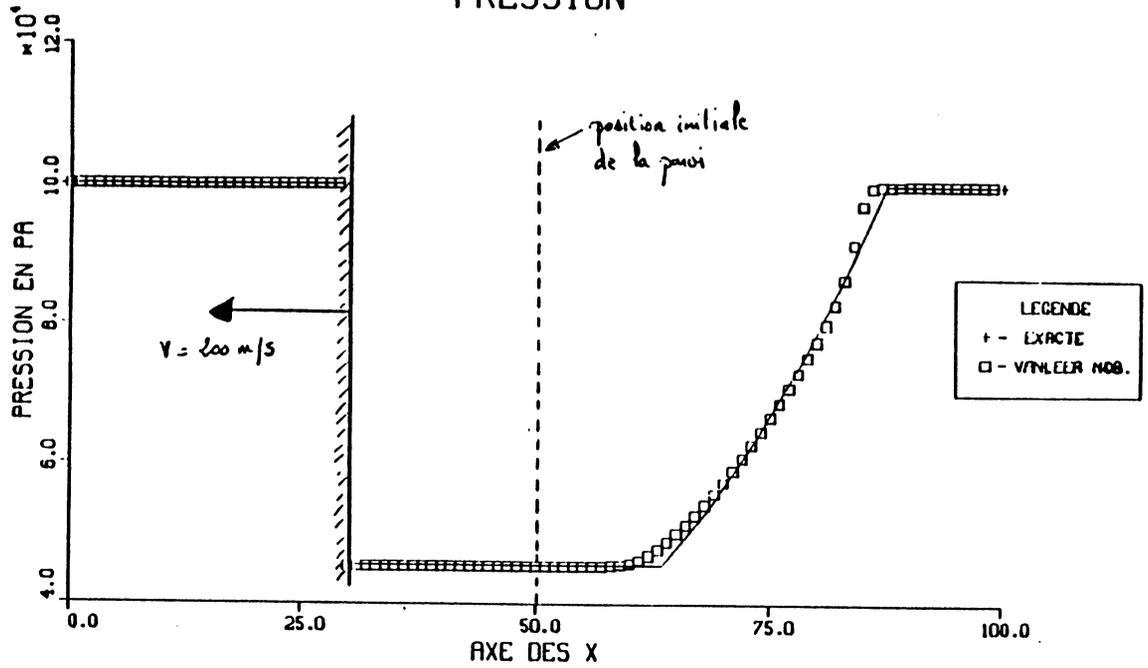
- densité : 1 kg/m^3
- vitesse : 0 m/s
- pression : 10^5 Pa

A $t = 0$ la frontière imperméable mobile commence son mouvement, et on compare les résultats obtenus à $t = 0.1 \text{ s}$ avec une solution analytique d'un **problème approché** (on résout pour cela analytiquement un demi problème de Riemann en **supposant** que l'état de la solution sur la frontière et l'état de la solution à droite de la frontière sont **séparés par un choc**, cf. partie 2, paragraphe 3, annexe 2).

Cet exemple numérique met en évidence la validité de la formulation espace-temps (c'est à dire du schéma avec maillage mobile).

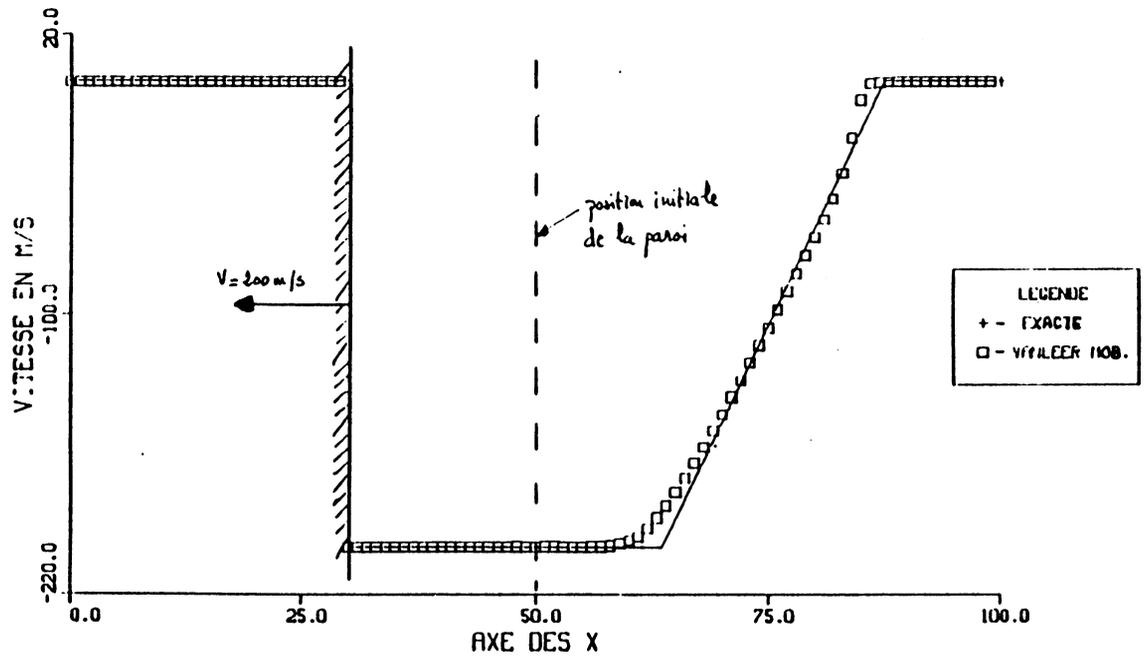
Pressions :

DETENTE PAR PISTONNAGE
PRESSION



Vitesses :

DETENTE PAR PISTONNAGE
VITESSE



5-4 Écoulements froids dans un disjoncteur : comparaison calcul / expérience

Les calculs ont été effectués sur un prototype de disjoncteur à auto-expansion (cf. introduction de la Partie 1).

Les écoulements simulés sont supposés froids et non visqueux (équations d'Euler, loi des gaz parfaits). L'intérêt de cette simulation (qui, ne tenant pas compte de l'arc électrique, est éloignée du problème initial) réside en la **comparaison** de calculs avec des expériences. En effet, des expériences ont été faites sur des écoulements de gaz froids (SF6 ou air) (Favre-Marinet [1]).

Les conditions expérimentales sont les suivantes :

- on distingue deux zones : le volume amont (ou volume d'expansion) et le volume aval (tuyères et échappements). Ces deux volumes sont initialement séparés par les contacts électriques qui sont alors fermés.

- les conditions initiales sont les suivantes :

volume amont : $P = 3.10^5$ Pa, $T = 300$ K, vitesse nulle

volume aval : $P = 1.10^5$ Pa, $T = 300$ K, vitesse nulle

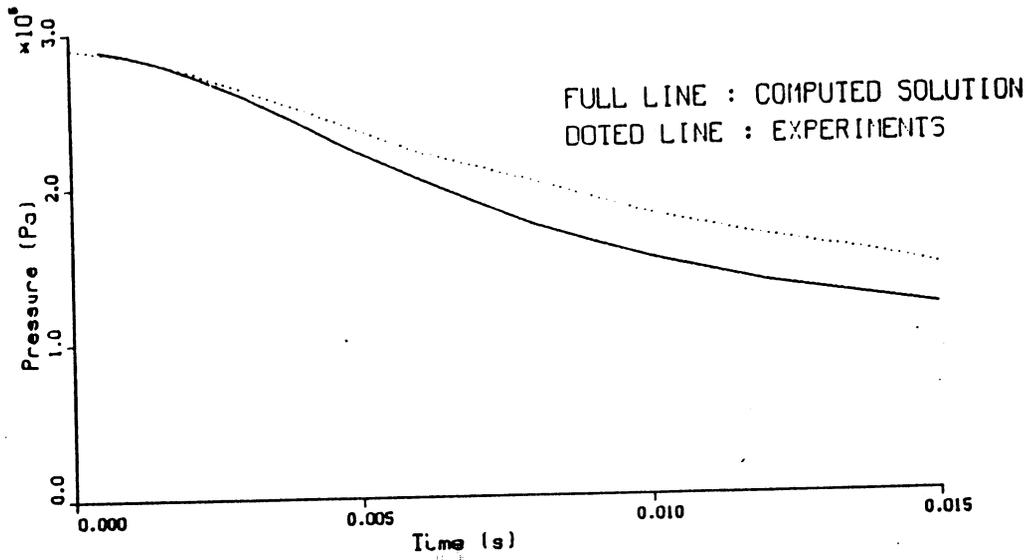
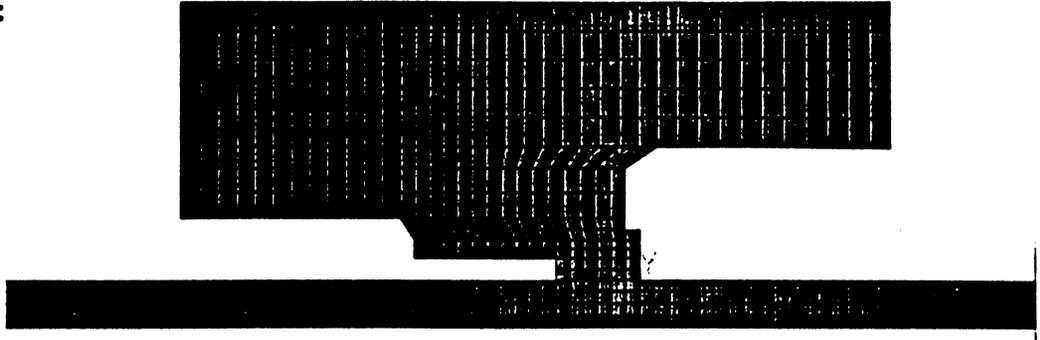
- à l'instant $t = 0$ s, on ouvre les contacts à une vitesse donnée. On observe alors l'expansion d'ondes de choc (le problème décrit ci-dessus est celui du tube à choc dans une géométrie de disjoncteur) dans le volume aval.

La comparaison calcul / expérience se fait de la façon suivante :

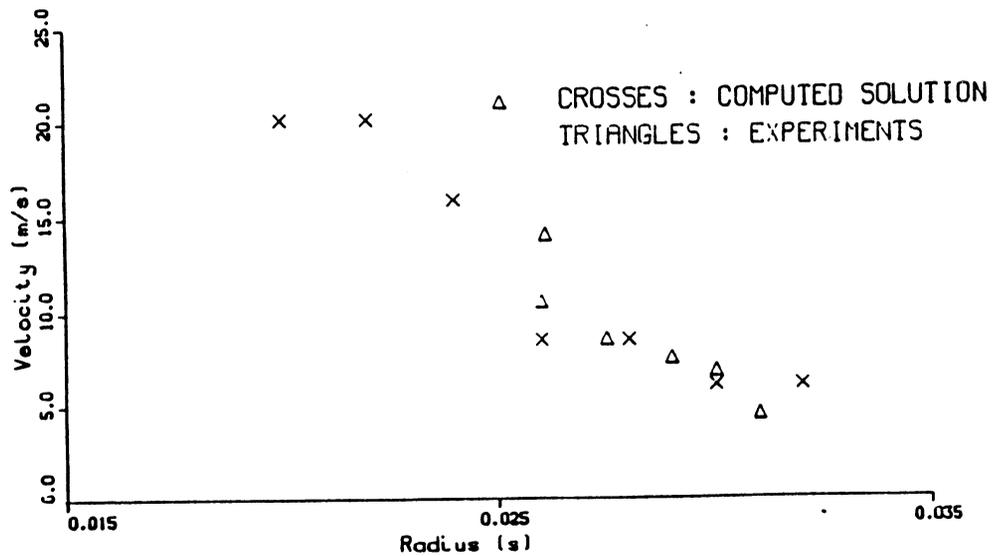
- comparaison de l'évolution de la pression au cours du temps (durant les 20 premières ms) en un point du volume amont.

- comparaison du profil des vitesses à un instant donné (5 ms) dans la zone inter-contacts.

Maillage :



Comparaison de la pression dans le volume amont ($x = -0.002, y = 0.032$)



Comparaison des vitesses dans la zone inter-contacts (coupe à $t = 4.5$ ms)

5-6 Application industrielle

Il s'agit d'une étude menée chez Merlin Gerin au cours du développement d'un produit.

Cette étude met en évidence l'intérêt des maillages constitués de triangles lorsque la géométrie de la pièce est compliquée. L'utilisation de mailleurs automatiques (aujourd'hui très performants lorsqu'il faut mailler avec des triangles) permet en effet de **réduire considérablement** le temps nécessaire pour faire le maillage.

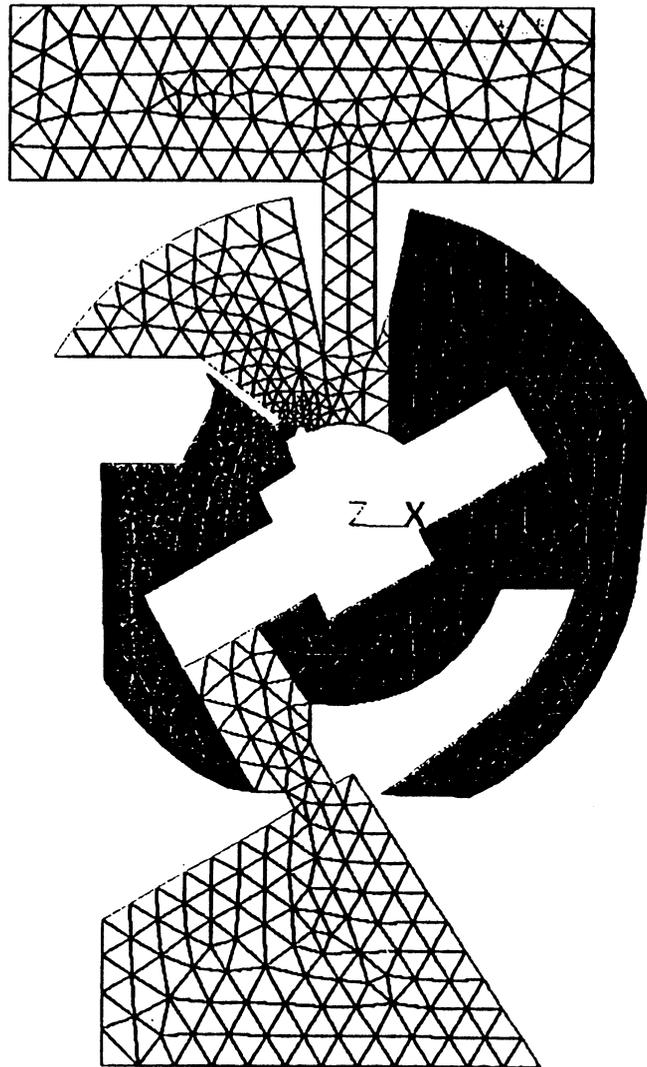
Contexte industriel : il s'agit d'étudier l'évolution des grandeurs physiques (pression, vitesse, densité, température) à l'intérieur d'un interrupteur. La présence d'arc électrique (non simulé) induit une température importante. L'étude a donc été menée avec un gaz réel.

Conditions initiales :

<u>zone 1</u>	<u>zone 2</u>	<u>zone 3</u>
pression : 1 atm	pression : 2 atm	pression : 2 atm
température : 300 K	température : 600K	température : 3500 K

On présente ci-dessous le maillage d'une des configuration étudiée et des résultats des champ de vitesse après 5 ms.

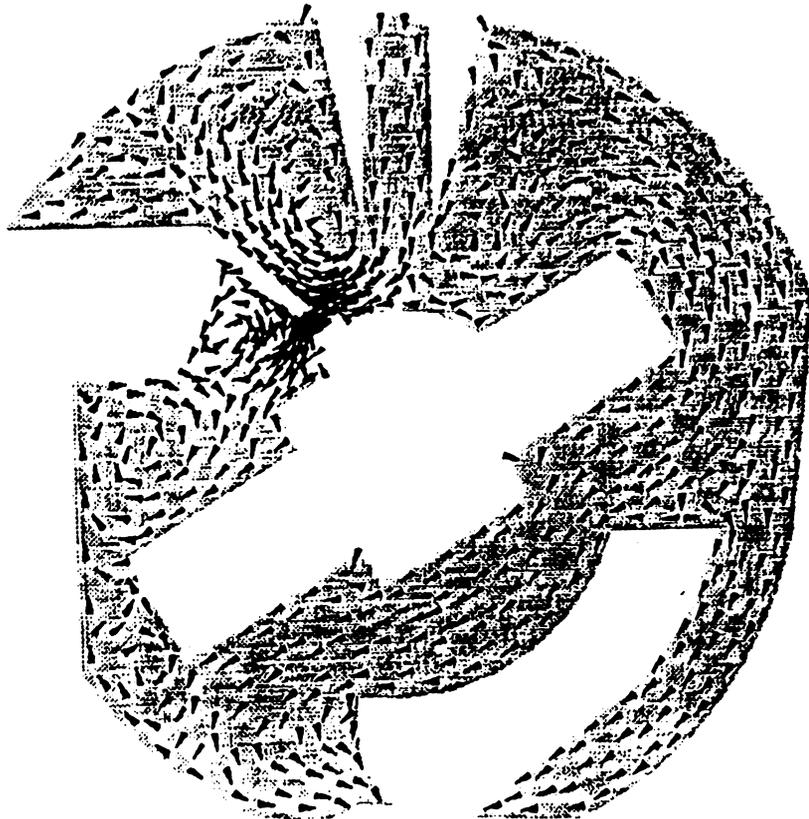
Maillage :



zone 1 : zone centrale de gauche

zone 2 : zone centrale de droite

zone 3 : zones supérieure et inférieure



Champ des vitesses à $t = 5$ ms

5-7 Interaction arc / écoulements de gaz dans un disjoncteur

Les calculs ont été effectués sur un prototype de disjoncteur à auto-expansion (cf. introduction de la Partie 1).

Les conditions expérimentales sont les suivantes :

- on distingue deux zones : le volume amont (ou volume d'expansion) et le volume aval (tuyères et échappements). Ces deux volumes sont initialement séparés par les contacts électriques qui sont alors fermés.

- les conditions initiales sont les suivantes : identiques dans chaque zone

volume amont : $P = 1.10^5$ Pa, $T = 300$ K, vitesse nulle

volume aval : $P = 1.10^5$ Pa, $T = 300$ K, vitesse nulle

- à l'instant $t = 0$ s, on ouvre les contacts à une vitesse donnée. Apparaît alors un arc électrique entre les contacts du disjoncteur (cet arc est amorcé par une Gaussienne de puissance centrée sur l'axe de symétrie, comme cela a aussi été fait en dimension 1, cf partie 2, paragraphe 5).

- le courant électrique est le suivant :

$$I = I_0 \sin(\omega t + \phi) \quad \text{avec } I_0 = 6.7 \text{ kA, } \omega = 61 \text{ Hz et } \phi = 0.5 \text{ rad.}$$

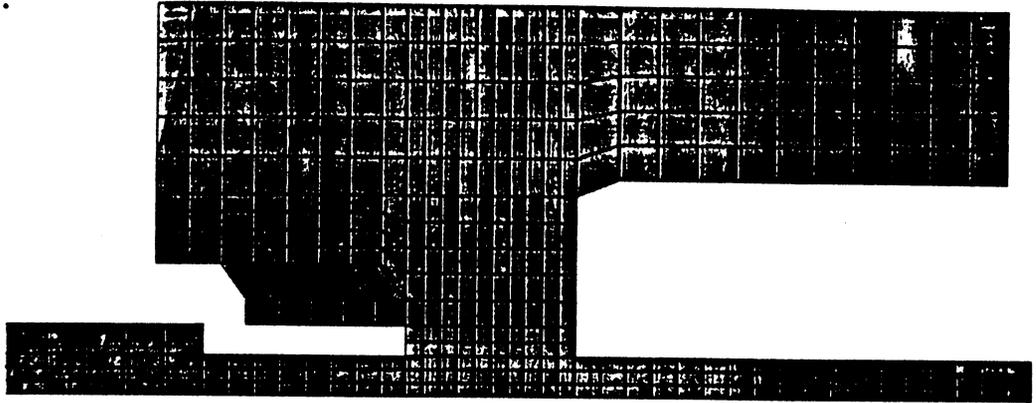
- rayonnement (cf. Partie 2, § 5) : 20 % de mince, 60 % de bande 1, 20 % de bande 2

Résultats numériques présentés :

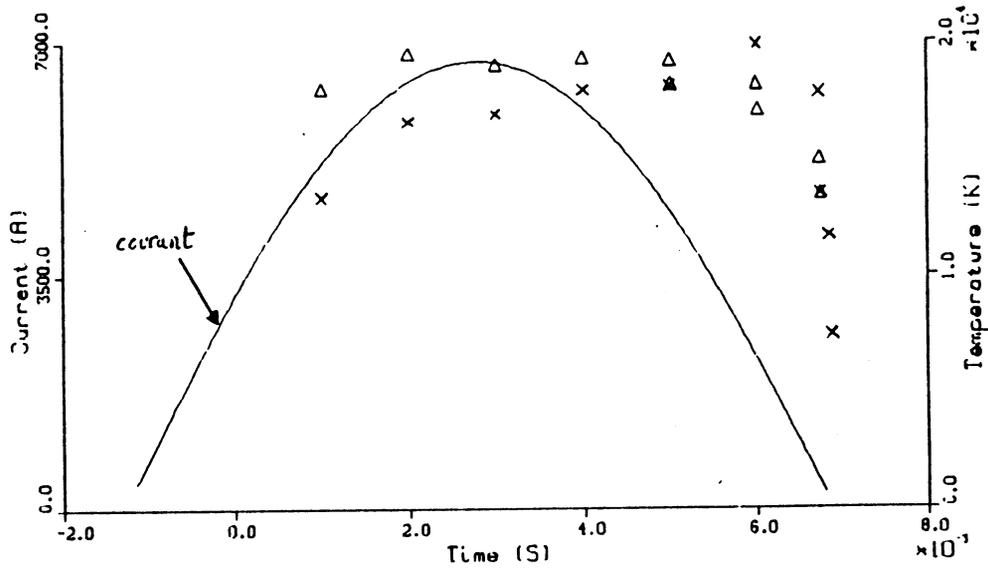
- Grâce à des mesures expérimentales (Girard [3]), une comparaison de l'évolution de la température au cours du temps (durant la demi période de courant) au centre de l'arc électrique et une comparaison de la montée en pression dans le volume amont ont pu être faites.

- Sont également présentés, l'évolution de la pression dans le volume amont et l'évolution de la vitesse dans les tuyères (qui sont les contacts creux du disjoncteur).

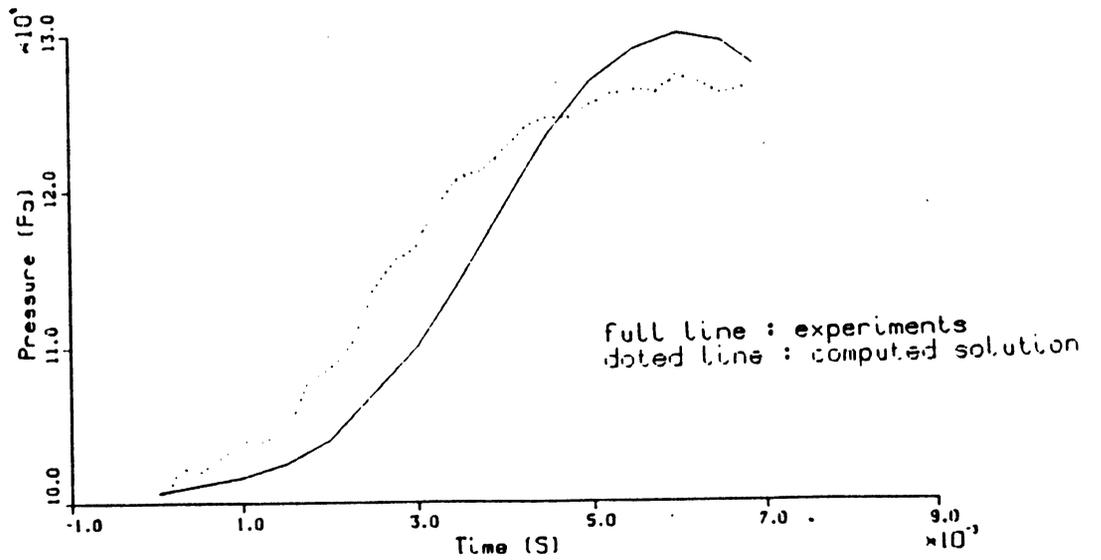
Maillage :



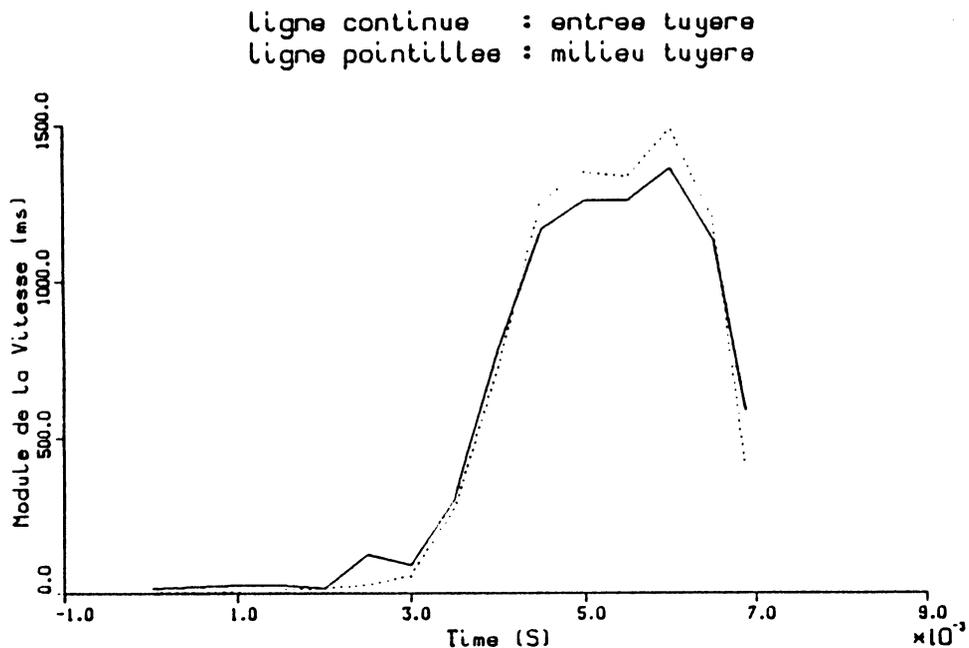
triangles : experiments
crosses : computed solution



Comparaison des températures au cours du temps



Comparaison de la montée en pression dans le volume amont



Vitesse dans les tuyères

Conclusion : les résultats obtenus sont extrêmement encourageants. On retrouve en effet les bons ordres de grandeurs (vitesse du gaz dans les tuyères) et lorsqu'est donnée la possibilité d'effectuer des comparaisons entre mesures et calculs, il y a une très bonne adéquation (température de l'arc et montée en pression du volume amont).

6 - Implémentation

Le développement de l'ensemble du logiciel a été réalisé avec Hervé Galley (ingénieur chez Merlin Gerin) .

Deux stagiaires nous ont aidés à montrer la faisabilité de points particuliers (maillage mobile et mise au point de Van Leer).

Deux points particulièrement importants (architecture et qualité du logiciel) sont exposés ci-dessous :

6-1 Architecture du logiciel

L'architecture du logiciel a été définie avec une méthode de conception **orientée par les données** (Galley [2]) et l'utilisation de la notion de "package".

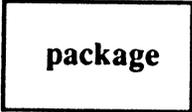
Pourquoi avoir choisi une orientation par les données ? Parce qu'elles sont stables dans le temps. En effet les données, c'est à dire par exemple les nœuds, arêtes et éléments d'un maillage, les variables physiques en mécanique des fluides (densité, vitesse, énergie, température, pression...) n'évoluent guère au cours de la vie du logiciel. Par contre, les traitements appliqués à ces données peuvent totalement varier (changement de méthode numérique, rajout de nouvelles fonctionnalités...). Un maillage sera toujours un maillage, décrit en termes de nœuds, d'arêtes, d'éléments; par contre il y a de nombreuses façons de l'exploiter : méthodes de Volumes Finis, d'Eléments Finis, de Différences Finies...

La première étape de la méthode de conception définie pour ce projet a consisté à identifier les données et à les regrouper en **unités de données** en utilisant des critères de cohésion (regrouper les données traitant du même sujet) et de masquage d'information (ne pas mettre trop de données dans chaque unité de données).



Chaque unité de données est un fichier source (COMMON Fortran) inclus (par la directive fortran INCLUDE) dans les sous programmes qui ont besoin d'accéder à ces données.

La seconde étape a consisté à identifier les traitements et à les regrouper en **packages** en utilisant des critères de cohésion.



package

Un package est un module auto-suffisant car il contient ses tests unitaires, ce qui permet de tester le package de façon autonome. Chaque package est un fichier source contenant une collection de sous-programmes traitant du même sujet, et un sous-programme servant à tester le package.

La troisième étape a consisté à déterminer quels packages voient quelles unités de données (par exemple l'unité de programme traitant les équations du rayonnement voit les unités de données telles que les variables physiques, le maillage). Les unités de données utiles à un seul package deviennent privées (les autres packages ne peuvent pas y accéder).

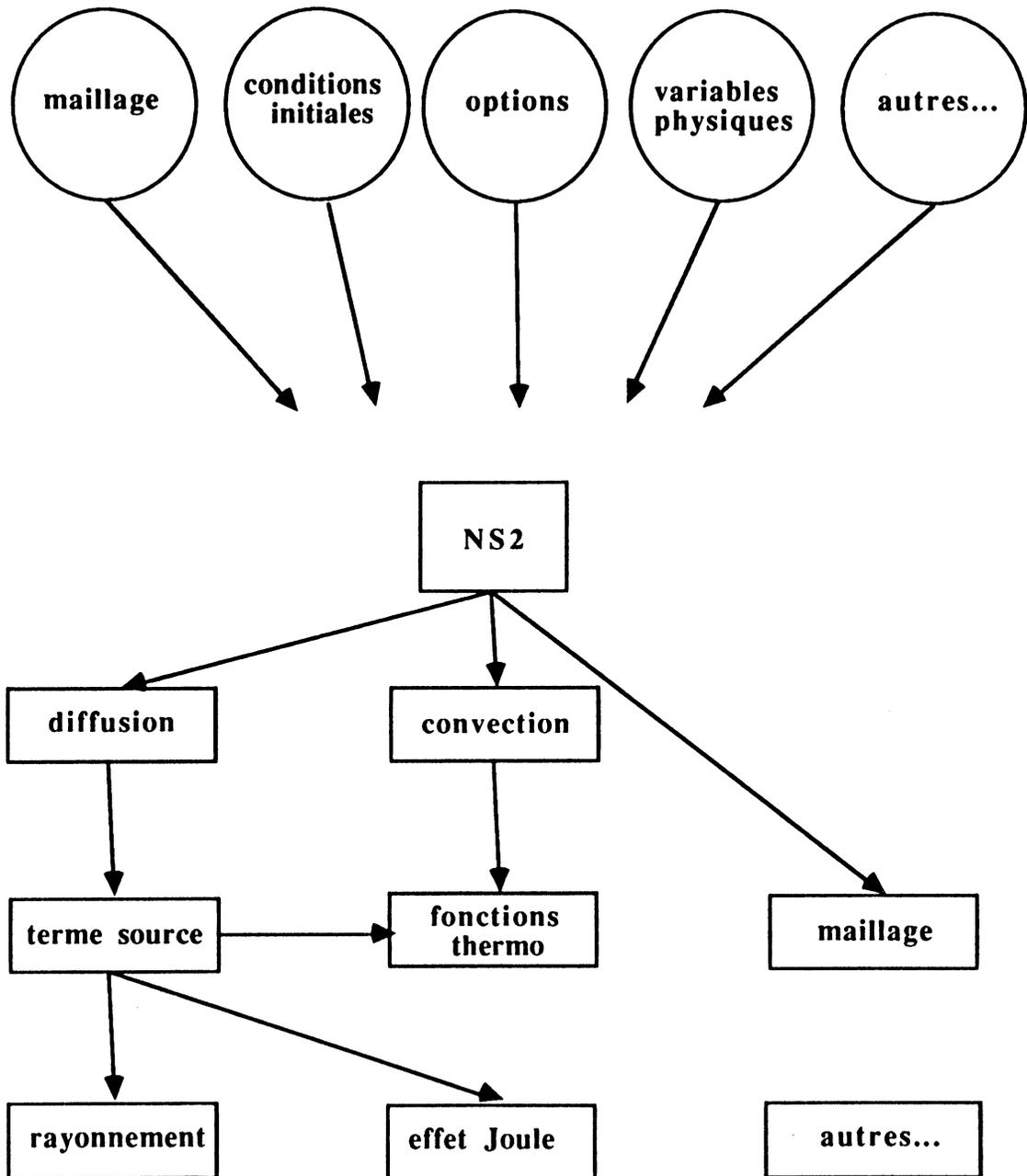
La **méthode à pas fractionnaires** utilisée est particulièrement bien adaptée à cette architecture. En effet, on a pu, séparer en différents packages la résolution des différents problèmes physiques (convection, diffusion, rayonnement...).

Si le **développement incrémental** du programme (autorisé par la méthode numérique utilisée) s'est bien déroulé, c'est que l'**architecture** ainsi conçue était vraiment **évolutive**.

La figure ci-dessous met en évidence des exemples d'évolution faciles à envisager :

- utiliser une autre méthode numérique pour un **package**
- rajouter une donnée dans une **unité de données**
- **rajouter** de la physique, donc une unité de programme
- **réutiliser** certaines unités de programme pour un autre projet.

Le logiciel NS2 est construit comme suit :



6-2 Qualité du logiciel

Comme cela a déjà été mentionné, le but était d'obtenir un logiciel apte à l'utilisation industrielle.

Plusieurs critères de qualité ont donc été utilisés :

Qualité "externe" :

- satisfaction des besoins des utilisateurs potentiels (nous avons été fréquemment en contact avec les physiciens)
- facilité d'utilisation (interfaçage avec un pré-processeur du commerce)
- réduction du nombre d'erreurs de programmation grâce à la définition d'une norme Fortran (Galley [1]), et grâce à des revues systématiques de code.

Qualité "interne" :

- maintenabilité, obtenue grâce à une architecture évolutive, un code lisible et autodocumenté et des tests unitaires intégrés à chaque package
- ouverture sur l'extérieur (interfaçage aisé avec d'autres pré- ou post-processeurs).

Nous avons choisi, pour chaque package, d'obtenir un niveau de qualité très élevé avant de passer à la réalisation du prochain package. En d'autres termes, nous nous sommes fixés d'atteindre le niveau de qualité requis du premier coup (en fait, sitôt que la faisabilité numérique avait été établie). Cette stratégie qui peut paraître pénalisante (en temps de développement) à court terme, s'est avérée extrêmement efficace. Par exemple, le package "rayonnement" n'a été écrit qu'une fois, mais est utilisé dans trois programmes différents (méthode d'éléments finis de Johnson 1-D, méthode à pas fractionnaires 1-D et méthode à pas fractionnaires 2-D).

Conclusion

La faisabilité de la méthode d'éléments finis proposée par Hughes et Johnson avec des gaz réels a été mise en évidence. Les résultats sont d'une façon générale meilleurs que ceux obtenus par la méthode à pas fractionnaires lorsque le demi-pas de convection est discrétisé à l'aide d'un schéma de Godounov d'ordre 1 en espace, mais moins bons lorsque le demi-pas de convection est discrétisé à l'aide d'un schéma de Godounov d'ordre 2. Ceci traduit l'importance de bien résoudre les équations de la dynamique des gaz compressibles (qui ne représentent pourtant qu'une partie du problème général) et de modéliser au mieux les ondes de choc et les discontinuités dans ce genre de problèmes. En particulier, le front de l'arc électrique ressemble beaucoup à une discontinuité de contact. Une bonne qualité de la modélisation de ces discontinuités de contacts assure donc une bonne modélisation de ce front. La méthode d'éléments finis est par contre beaucoup plus onéreuse en temps de calcul. En fait, c'est une méthode implicite précise, mais les fortes variations des coefficients thermodynamiques en fonction de la température ne peuvent être prises en compte qu'avec de très petits pas de temps. Les performances de la méthode sont donc ici affaiblies par la trop grande non-linéarité des équations.

En dimension 2, la méthode à pas fractionnaires est particulièrement agréable car elle permet de séparer les traitements du système hyperbolique non linéaire des équations d'Euler, et de l'équation de la chaleur instationnaire. Les schémas volumes finis traduisent les lois fondamentales de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. De plus ils sont simples à implémenter (la mise au point étant cependant souvent délicate), très précis (c'est également vrai sur des maillages non structurés) et économes en temps de calcul (les schémas proposés étant explicites).

Les résultats obtenus sont très encourageants lorsqu'on les compare aux mesures expérimentales. Les approximations effectuées lors de la modélisation du problème physique (problème bidimensionnel axisymétrique, gaz non visqueux et modélisation simplifiée de l'arc électrique) semblent donc opportunes. Le rôle très important joué par le rayonnement a été mis en évidence.

Le code a été testé et validé sur des disjoncteurs à auto-expansion. Il semble cependant nécessaire de continuer à le valider sur d'autres types d'appareils. En effet, plus de pratique permettra de savoir comment l'utiliser au mieux lors de la conception de vrais disjoncteurs.

Certains phénomènes physiques intervenant lors de la coupure ne sont actuellement pas pris en compte. Par exemple il n'est pas question de l'accrochage de l'arc électrique aux électrodes, qui semble pourtant un des problèmes clé. Tenir compte de ce phénomène demande un nouvel effort de modélisation (mathématique et numérique) et le passage au tridimensionnel.

Le code actuel est utilisable industriellement dès aujourd'hui. Il représente une base saine pour les développements futurs qui inclueront plus de physique et est en grande partie réutilisable pour modéliser un problème physique proche tel que celui de l'arc électrique dans les disjoncteurs basse-tension.

Bibliographie

- Bamberger [1] Y. Bamberger, Milieux déformables, Mécanique de l'ingénieur II, Hermann 1981.
- Baras [1] P. Baras, Introduction aux méthodes numériques en mécanique des fluides, cours de DEA USTM Grenoble 1986.
- Bruhat [1] G. Bruhat, Cours de Physique Générale, Thermodynamique, Masson 1962.
- Chévrier [1] P. Chévrier, Modélisation 1-D d'un arc électrique par une méthode d'éléments finis, 21^{ème} congrès d'analyse numérique, Autrans Mai 1989.
- Chévrier [2] P. Chévrier, H. Galley, A Van Leer Finite Volume Scheme for the Euler Equations on Unstructured Meshes, soumis à Journal of Computational Physics.
- Colella [1] P. Colella, H.M. Glaz, Efficient solutions algorithms for the Riemann problem for the real gases, Journal of Computational Physics 1984.
- Dauby [1] B. Dauby, W. Legros, P. Scarpa, A. Girard, J.M. Talbot, Modélisation d'un arc électrique dans un disjoncteur à auto-expansion, Journée d'étude sur la modélisation de l'écoulement des plasmas thermiques, Mai 1989, Centre de Physique Atomique de Toulouse.
- Euvrard[1] D. Euvrard, Résolution numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, 1988.
- Faille [1] I. Faille, Modélisation bidimensionnelle de la genèse et la migration des hydrocarbures dans un bassin sédimentaire, rapport de thèse IFP, 1990.
- Favre-Marinet [1] M. Favre-Marinet, Ecoulement dans la chambre de coupure d'un disjoncteur moyenne tension mise sous pression sans arc, Visualisation strioscopique, Rapport interne Merlin Gerin, Février 1989.
- Galley [1] H. Galley, Norme Fortran 77, publication interne Merlin Gerin, 1989.

- Galley [2] H. Galley, J.C. Ianeselli, *Eléments de génie logiciel, Etude Technique 293*, Merlin Gerin 1989.
- Gallouët [1] T. Gallouët, *Communication personnelle*.
- Gallouët [2] T. Gallouët and P. Joly, *Rapport final du contrat Elf - Paris VI, Laboratoire d'Analyse Numérique Paris VI 1985*.
- Gilquin [1] H. Gilquin, *Analyse numérique d'un problème hyperbolique multidimensionnel en dynamique des gaz avec frontière mobile. Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Université de St Etienne (France), 1984*.
- Girard [1] A. Girard and P. Malkin, *Arc radiation measurement in SF₆ autoexpansion circuit-breaker, IXth international conference on gas discharges and their applications, Venezia 1988*.
- Girard [2] A. Girard, *Etude de l'arc électrique, modélisation, Etude Technique Merlin Gerin 89-40*.
- Girard [3] A. Girard, P. Chévrier, C. Fievet, C. Fleurier, *Experimental and theoretical study of the discharge of a SF₆ autoexpansion interrupter and of its extinction, soumis à Journal of Applied Physics*.
- Glaister [1] Glaister, *An approximate linearised Riemann solver for the Euler Equations for real Gases, Journal of Computational Physics, 74, 382-408 (1988)*.
- Gleizes [1] A. Gleizes, M. Razafinimanana, S. Vacquié, *Equilibrium Composition, Thermodynamic Properties and Transport Coefficients of SF₆-N₂ Mixtures, Rapport CNRS n° 40277, February 85*.
- Gleizes [2] A. Gleizes, M. Mahieddin Rahal, H. Delacroix, Pham Van Doan, *Study of a Circuit-Breaker Arc with Self-Generated Flow : Part I : Energie Transfer in the High-Current Phase, IEEE Transactions on Plasma Science, Vol.16 n°6, december 88*.
- Gleizes [3] A. Gleizes, M. Mahieddin Rahal, S. Papadopoulos, S. Vacquié, *Study of a*

Circuit-Breaker Arc with Self-Generated Flow : Part II : The Flow Phase, IEEE Transactions on Plasma Science, Vol.16 n°6, december 88.

- Godunov[1] S. Godunov, Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz, Editions of Moscow, 1976.
- Johnson[1] C. Johnson, U. Nävert, J. Pitkäranta, Finite Element Methods for linear hyperbolic problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 45(1984) 285-312.
- Johnson [2] C. Johnson, A. Szepessy, P. Hansbo, On the convergence of shock capturing streamline diffusion finite element methods for hyperbolic conservation laws. To appear.
- Johnson [3] C. Johnson, A. Szepesy, Convergence of a finite element method for a nonlinear hyperbolic conservation law, University of Göteborg, preprint 1985.
- Hansbo [1] P. Hansbo, Finite Element procedures for conduction and convection problems, Thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1986.
- Harten [1] A. Harten, On the symmetric form of systems of conservation laws with entropy, Journal of Computational Physics 49, 151-164 (83).
- Hughes [1] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, M. Mallet, A new finite element formulation for computational fluid dynamics : I, Symmetric forms of the compressible Euler and Navier Stokes Equations and the Second Law of Thermodynamics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 54 (1986) 223-234.
- Hughes [2] T.J.R. Hughes, M. Mallet, A. Mizukami, A new finite element formulation for computational fluid dynamics : II, Beyond SUPG, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 54 (1986) 341-355.
- Hughes [3] T.J.R. Hughes, M. Mallet, A new finite element formulation for computational fluid dynamics : III, The Generalized Streamline Operator for

- Multidimensional Advection-Diffusive Systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 58 (1986) 305-328.
- Hughes [4] T.J.R. Hughes, M. Mallet, A new finite element formulation for computational fluid dynamics : IV, A Discontinuity Capturing Operator for Multidimensional Advective-Diffusive Systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 58 (1986) 329-336.
- Hughes [5] T.J.R. Hughes, M. Mallet, M. Balestra, A new finite element formulation for computational fluid dynamics : V, Circumventing the BB condition : a stable Petrov Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal order interpolations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 59 (1986) 85-99.
- Hughes [6] T.J.R. Hughes, M. Mallet, L.P. Franca, New Finite Element Methods for the compressible Euler and Navier Stokes Equations, to appear in *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- Hughes [7] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, M. Mallet, Convergence Analysis of the Generalized SUPG Formulation for Linear Time-dependant Multidimensional Advective-Diffusive Systems, preprint 1986.
- Lesaint [1] Lesaint, Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis, Thèse université Paris VI 1975.
- Lowke [1] J.J. Lowke, Radiative Energy Transfer in Circuit Breaker Arcs, in *current Interruption in High-Voltage Networks*, 299-327, Plenum Press 1978.
- Noël [1] J. Noël, Développement et application d'une méthode d'éléments finis auto-adaptatifs multimaillages pour le calcul d'un plasma thermique, Thèse de Doctorat en Mécanique, Ecole Centrale de Lyon (1989).
- Pironneau [1] O. Pironneau, *Méthodes d'éléments finis pour les fluides*, Masson, 1988.
- Pironneau [2] O. Pironneau, Quelques méthodes d'éléments finis pour les fluides, cours de DEA Paris VI 86-87.

- Raviart [1] P.A. Raviart, Les méthodes d'éléments finis en mécanique des fluides, collection de la direction des Etudes et Recherches EDF, Eyrolles, 1981.
- Raviart [2] P.A. Raviart, J.M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, 1983.
- Reggio [1] M. Reggio, J.Y. Trepanier, R. Camarero, R. Jeanjean, Computer Aided Tools in Gas Circuit Breaker Design, IEEE Vol 5 n° 1, January 1990.
- Roe [1] P.L. Roe, Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. Journal of Computational Physics, 43 (1981) 357-372.
- Smoller [1] J. Smoller : Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer-Verlag, 1983.
- Szepessy [1] A. Szepessy, Convergence of a shock-capturing streamline diffusion finite element method for a scalar conservation law in two space dimensions, to appear in Math. of Comp. (1989).
- Szepessy [2] A. Szepessy, Convergence of the streamline diffusion finite element method for conservation laws, Thesis University of Göteborg, Sweden, 1989.
- Talbot [1] J.M. Talbot, P. Chévrier, Numerical simulation of thermoconvective phenomena in a circuit breaker, fifth International Symposium on Numerical Methods in Engineering, Vol 2, Springer Verlag 1989.
- Thomas [1] J.M. Thomas, Elements finis mixtes. Cours de DEA Paris 6.
- Van Leer [1] B. Van Leer, Towards the ultimate conservative difference scheme II-IV-V. Journal of Computational Physics, 14, 23, 32 (1978).
- Vila [1] J.P. Vila, Sur la théorie et l'approximation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires. Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Université de Paris VI, 1986.
- Vila [2] J.P. Vila, Construction of Roe type matrices, a new approach, application to real gas dynamic, proposition de Note au CRAS Analyse Numérique 1990.

A U T O R I S A T I O N de S O U T E N A N C E

VU les dispositions de l'Arrêté du 23 novembre 1988 relatif aux Etudes doctorales

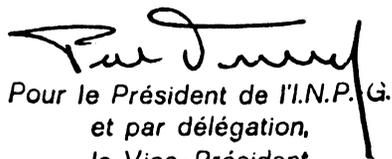
VU les rapports de présentation de

- Monsieur LEROUX
- Monsieur GALLOUET

Monsieur CHEVRIER Pierre

est autorisé(e) à présenter une thèse en soutenance en vue de l'obtention du diplôme de DOCTEUR de L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, spécialité "Mathématiques Appliquées"

Fait à Grenoble, le 07 Mai 1990


Pour le Président de l'I.N.P.G.
et par délégation,
le Vice-Président
P. VENNEREAU

Résumé

On simule l'écoulement de gaz avec arc électrique au moment d'une interruption du courant dans un disjoncteur haute ou moyenne tension. Les équations de Navier Stokes compressible sont résolues pour un gaz réel non visqueux. L'arc électrique est du gaz chaud et conducteur. Le rayonnement est pris en compte. L'équation d'état et les propriétés du gaz sont tabulées. On présente une analyse du problème physique et des équations à résoudre. Deux modélisations numériques unidimensionnelles, par une méthode d'éléments finis (avec upwind et capture de choc) et par une méthode à pas fractionnaires séparant le traitement des phénomènes de diffusion et de convection, ont été implémentées. Elles ont permis d'affiner le modèle et de mettre en évidence l'importance du rayonnement. La dernière partie est relative au développement d'un code de calcul industriel 2D plan ou axisymétrique. Seule la méthode à pas fractionnaires a été implémentée. Le code permet de résoudre le problème sur des maillages non structurés et mobiles. Des tests numériques valident les schémas mis en œuvre.

Mots clés

- disjoncteur - arc électrique - Navier Stokes compressible -
- gaz réels - éléments finis - volumes finis -
- rayonnement - maillages non structurés -