



**HAL**  
open science

# Contributions à la modélisation numérique de la fissuration des structures en béton avec prise en compte du fluage et estimation de la perméabilité

Frédéric Dufour

► **To cite this version:**

Frédéric Dufour. Contributions à la modélisation numérique de la fissuration des structures en béton avec prise en compte du fluage et estimation de la perméabilité. Matériaux. Université de Nantes, 2007. tel-00334031

**HAL Id: tel-00334031**

**<https://theses.hal.science/tel-00334031>**

Submitted on 24 Oct 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE DOCTORALE**

**MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL**

*Année 2007*

N° B.U. :

**Mémoire d'habilitation à diriger des recherches**

**Document provisoire**

Spécialité : Génie Civil

Présentée et soutenue publiquement par :

FREDERIC - DUFOUR

le 19 décembre 2007  
à l'Ecole Centrale de Nantes

**TITRE**

**CONTRIBUTIONS A LA MODELISATION NUMERIQUE DE  
LA FISSURATION DES STRUCTURES EN BETON AVEC  
PRISE EN COMPTE DU FLUAGE ET ESTIMATION  
DE LA PERMEABILITE**

**JURY**

Président : MAZARS J., Professeur, INP Grenoble

Rapporteurs : KONDO D., Professeur, Université de Lille  
SLUYS L. J., Professeur, Delft University of Technology  
TORRENTI J.-M., Directeur de Recherche, LCPC

Examineurs : HUERTA A., Professeur, Universitat Politecnica de Catalunya  
PIJAUDIER-CAOBT G., Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour

# Remerciements

Avant de commencer ce manuscrit, je tiens à remercier Jacky MAZARS qui a accepté de présider le jury de soutenance. C'est avec un grand plaisir et un grand intérêt que nous avons échangé des points de vue scientifiques à l'occasion de cette soutenance, 13 ans après que Jacky m'ait accueilli à l'ENS de Cachan au département de génie civil, dont il était le Directeur.

Je souhaite aussi remercier les rapporteurs, Djimédo KONDO, Bert SLUYS et Jean-Michel TORRENTI dont les rapports et les questions ont confronté mon travail à une expertise très relevée. Ces discussions m'ont permis à la fois d'affiner mes projets de recherche et d'élargir ma connaissance du spectre des outils disponibles pour mener à bien mes futurs travaux de recherche.

Ensuite, comment ne pas remercier Gilles et Antonio qui m'ont suivi, ou plutôt entraîné, depuis mon entrée à l'ENS de Cachan pour le premier et depuis ma thèse de doctorat pour le second. C'est un réel bonheur de discuter de points scientifiques avec deux grands chercheurs qui ont su rester disponibles pour les "jeunes" avec une grande volonté de former les futurs chercheurs dans leur domaine. Ils sont et resteront pour moi des modèles à suivre aussi bien sur le plan humain que scientifique.

Une Habilitation à Diriger des Recherches, encore bien plus qu'une thèse de Doctorat, est délivrée à une seule personne alors que tout une équipe s'est mobilisée derrière les projets de recherche présentés. Je tiens donc tout particulièrement à remercier Marta, Marina, Rani, Abbas, Theocharis, Grégory, Pierre-François, Zhen et Liang.

Finalement, un travail scientifique est un travail de tous les instants qui emprunte forcément beaucoup de temps, sans jamais le rendre, sur les moments normalement consacrés à la famille. Je remercie donc ma femme, Olivia, pour son soutien quotidien et pour avoir accepté plusieurs déménagements et remises en cause professionnelles. Merci aussi à mes deux fils, Nicolas et Maxime, pour la joie quotidienne qu'ils apportent et qui permet parfois d'oublier le reste ...



# Avant-propos

Ce document est un résumé de mes activités de recherche sur l'étude de la fissuration des structures en béton, en prenant en compte les conséquences du fluage et en évaluant les conséquences sur la perméabilité.

Le contexte industriel de ce mémoire peut se résumer à la durabilité de la paroi interne d'une enceinte de confinement à double paroi de centrale nucléaire. Cette durabilité est, avant tout, relative aux propriétés de transferts, qui doivent être faibles, pour limiter les fuites vers l'environnement extérieur, suite à un accident du réseau primaire de refroidissement. La résistance aux chocs mécaniques extérieurs est apportée par l'enceinte externe. La paroi interne a une épaisseur d'environ 1 m, elle est fortement précontrainte dans deux directions. Le béton est donc soumis à un confinement permanent important qui engendre du fluage. La finalité industrielle de nos études est donc d'estimer les taux de fuite au cours du temps provoqués par l'évolution des matériaux (fluage du béton, relaxation des câbles de précontrainte, etc.). Ce mémoire se compose de trois principaux chapitres.

Dans le chapitre 1, après une analyse des résultats expérimentaux, nous présentons deux méthodes, en phase de post-traitement, pour estimer les fuites à partir d'un calcul mécanique basé sur les éléments finis. La première méthode permet de calculer la perméabilité à partir du champ d'endommagement et d'une relation entre la perméabilité et l'endommagement. La deuxième méthode s'appuie sur le champ des déformations, à partir duquel sont calculées la position et l'ouverture de la fissure. La relation de Poiseuille sera alors appliquée le long de la fissure.

Le chapitre 2 analyse la relation qui existe entre le fluage du béton et ses caractéristiques mécaniques. En effet, un béton est formulé pour répondre à un cahier des charges (durabilité), mais il est un matériau "vivant" dont les propriétés, notamment mécaniques, évoluent avec le temps et l'histoire du chargement qui lui est appliqué. Dans ce chapitre, nous nous intéressons donc particulièrement aux conséquences du fluage sur les propriétés mécaniques à long terme. Après une revue des résultats expérimentaux, nous proposons une analyse qualitative par l'étude des bifurcations, puis par une méthode numérique discrète, pour retrouver la même influence de la viscoélasticité sur la fragilité à rupture qu'observée expérimentalement. Finalement, les premiers résultats de l'analyse quantitative par une approche aux éléments finis utilisant un modèle couplé original sont présentés.

L'un des enjeux du chapitre 1, est de bien modéliser le comportement mécanique de l'ouvrage afin d'obtenir les champs d'endommagement et de déformations les plus proches de la réalité. Par conséquent, dans le cha-

pitre 3, un modèle couplé endommagement/plasticité est analysé dans le cadre d'une approche régularisée. L'objectif est d'étudier la capacité de ce modèle à prédire des modes de rupture mixte qui peuvent avoir lieu pour du béton sous chargements complexes (confinement). Par ailleurs, la prise en compte de la plasticité permet une meilleure estimation de l'endommagement qui pourra être intégré dans le calcul de la perméabilité.

**Remarque** Depuis ma soutenance de thèse de Doctorat, sur les simulations en grandes transformations, des publications ont été réalisées (Dufour et Pijaudier-Cabot (2005), O'Neill *et al.* (2006) et Roussel *et al.* (2007)). Cependant, ce thème n'a pas été développé dans ce document, car mes activités dans ce domaine relèvent plus de "l'expertise-conseil" que d'un réel développement. Ce thème ne fait pas partie des priorités de l'Institut de Recherche GeM et a donc été mis en veille. Toutefois, l'intégration de Level Sets dans la Méthode aux Eléments Finis avec des Points d'Intégration Lagrangiens, permettrait de réduire le domaine d'intégration aux points d'intérêt et d'introduire des discontinuités cinématiques aux interfaces. Une nouvelle application de cette méthode se trouve d'ailleurs, dans la simulation numérique de l'usinage dans le voisinage de l'outil, pour laquelle les grandes transformations et le glissement du copeau sur l'outil sont des points cruciaux.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>3</b>
<b>1 Interaction perméabilité-endommagement</b>	<b>8</b>
1.1 Introduction . . . . .	10
1.1.1 Cadre de travail . . . . .	10
1.1.2 Problématique industrielle . . . . .	10
1.1.3 Verrous scientifiques . . . . .	11
1.2 Mise en évidence expérimentale . . . . .	12
1.2.1 Description de l'essai . . . . .	12
1.2.2 Effet de l'état de contrainte . . . . .	12
1.2.3 Effet du chargement . . . . .	14
1.2.4 Bilan de l'étude expérimentale . . . . .	15
1.3 Modélisation du couplage perméabilité - endommagement . . . . .	16
1.3.1 Proposition d'une nouvelle relation . . . . .	16
1.3.2 Validation structurelle de la relation proposée . . . . .	18
1.4 Calcul de l'ouverture de fissure . . . . .	20
1.4.1 Approche unidimensionnelle . . . . .	20
1.4.2 Approche 3D . . . . .	30
<b>2 Couplage fluage-endommagement</b>	<b>34</b>
2.1 Introduction . . . . .	35
2.1.1 Cadre de travail . . . . .	35
2.1.2 Problématique industrielle . . . . .	35
2.1.3 Verrous scientifiques . . . . .	36
2.2 Mise en évidence expérimentale . . . . .	37
2.2.1 Caractérisation du matériau . . . . .	37

2.2.2	Caractérisation des propriétés à rupture . . . . .	37
2.2.3	Caractérisation à long terme : Essai de fluage propre . . . . .	38
2.2.4	Caractérisation résiduelle : effet d'échelle . . . . .	40
2.3	Analyses qualitatives . . . . .	42
2.3.1	Analyse des bifurcations . . . . .	42
2.3.2	Analyse discrète . . . . .	43
2.4	Analyse quantitative . . . . .	45
2.4.1	Modèle de fluage . . . . .	45
2.4.2	Modèle d'endommagement . . . . .	46
2.4.3	Couplage endommagement-fluage . . . . .	46
2.4.4	Premiers résultats numériques . . . . .	47
2.5	Conclusions et perspectives . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Fissuration des structures en béton précontraint</b>	<b>52</b>
3.1	Introduction . . . . .	53
3.1.1	Cadre de travail . . . . .	53
3.1.2	Contexte industriel . . . . .	53
3.1.3	Verrous scientifiques . . . . .	53
3.2	Modèle élasto-endo-plastique . . . . .	54
3.2.1	Modèle plastique . . . . .	54
3.2.2	Couplage plasticité-endommagement . . . . .	56
3.2.3	Estimation de l'opérateur tangent . . . . .	57
3.3	Validation du modèle . . . . .	58
3.3.1	Tests élémentaires . . . . .	58
3.3.2	Poutre de grande hauteur . . . . .	59
3.3.3	Simulation d'un Volume Structurel Représentatif . . . . .	62
3.4	Perspectives . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>68</b>
4.1	Modélisation des taux de fuite d'une structure . . . . .	69
4.1.1	Méthodes proposées . . . . .	69
4.1.2	Validations expérimentales . . . . .	69
4.2	Amélioration du modèle non local . . . . .	72
4.2.1	Méthodes existantes . . . . .	72
4.2.2	Méthodes proposées . . . . .	73
4.2.3	Validation . . . . .	75

4.2.4 D'un bord libre vers une fissure . . . . . 78



# Chapitre 1

## Interaction perméabilité-endommagement

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>10</b>
1.1.1	Cadre de travail	10
1.1.2	Problématique industrielle	10
1.1.3	Verrous scientifiques	11
<b>1.2</b>	<b>Mise en évidence expérimentale</b>	<b>12</b>
1.2.1	Description de l'essai	12
1.2.2	Effet de l'état de contrainte	12
1.2.3	Effet du chargement	14
1.2.3.1	Phase pré-pic	14
1.2.3.2	Phase post-pic	14
1.2.4	Bilan de l'étude expérimentale	15
<b>1.3</b>	<b>Modélisation du couplage perméabilité - endommagement</b>	<b>16</b>
1.3.1	Proposition d'une nouvelle relation	16
1.3.2	Validation structurelle de la relation proposée	18
<b>1.4</b>	<b>Calcul de l'ouverture de fissure</b>	<b>20</b>
1.4.1	Approche unidimensionnelle	20
1.4.1.1	Approches non locales de l'endommagement	20
1.4.1.2	Discontinuité forte régularisée	22
1.4.1.3	Calcul du saut de déplacement et de l'erreur	22
1.4.1.4	Simulations numériques	24
1.4.2	Approche 3D	30
1.4.2.1	Position de la fissure	30

1.4.2.2 Calcul du saut le long de la fissure . . . . . 32

---

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 Cadre de travail

Les travaux sur ce thème et relatifs à la partie expérimentale (1.2) ont été réalisés, en collaboration avec Marta Choinska lors de sa thèse de doctorat (Choinska, 2006). La partie expérimentale de son travail est la continuation des travaux réalisés par Vincent Picandet (Picandet, 2001) et Georges Chatzigeorgiou au cours de leur thèse de doctorat qui, pour ce dernier, s'est déroulée dans le cadre du projet européen RTN-DIGA (*Degradation and Instabilities in Geomaterials with Application to Hazard Mitigation*). En ce qui concerne la partie modélisation, elle a été réalisée en collaboration avec Marta Choinska pour le raccordement des lois de perméabilité (paragraphe 1.3) et le calcul de l'ouverture de fissure en 1D (paragraphe 1.4.1), et avec Grégory Legrain, lors de son post-doctorat dans le cadre du projet ANR CONTIFISS (FISSuration CONTInue) piloté par Gilles Pijaudier-Cabot, pour le calcul de la position de la fissure et de son ouverture en 2D et 3D (paragraphe 1.4.2).

**Production scientifique associée** Dufour *et al.* (2008), Dufour *et al.* (2007), Choinska et Pijaudier-Cabot (2007), Choinska *et al.* (2007), Legrain *et al.* (2007)

### 1.1.2 Problématique industrielle

Un des paramètres importants de la durabilité des structures en béton repose sur son aptitude à s'opposer au transport d'agents agressifs au travers du matériau. La durabilité induite par les propriétés de transfert revêt un caractère évident pour toutes les structures soumises à des environnements agressifs, tels que les milieux salins ou sulfatiques qui peuvent entraîner une dégradation prématurée du matériau (corrosion des armatures, lixiviation du béton, etc). Mais, cette durabilité devient encore primordiale, quand le rôle principal de la structure est de limiter les échanges entre un milieu confiné et l'environnement. Les enceintes de confinement des centrales nucléaires, des réservoirs de stockage de gaz liquide, de château d'eau, en sont des exemples.

Ainsi, nous avons effectué ces travaux dans le cadre de notre collaboration avec EDF R&D, avec une application directe des résultats sur l'étude des enceintes de confinement.

Ces enceintes sont des structures très complexes de par une précontrainte bi-axiale (verticale et ortho-radiale), qui contiennent des points singuliers tels que les sas d'entrée, les goussets, etc. Les mesures des taux de fuite, lors des essais décennaux de mise en pression de l'enceinte, permettent de distinguer deux types de fuites. D'une part, qu'en quelques points de la structure, les fuites sont relativement importantes et dues à des fissures ouvertes, mais qui peuvent être colmatées facilement car identifiables et qui, au final, ne représentent pas un fort débit ramené à la taille de la structure. D'autre part, un taux de fuite au travers des

parties courantes de l'ouvrage où aucune fissure n'est détectable en surface avec un taux de fuite faible par mètre carré mais sur des surfaces très importantes.

Il est donc essentiel d'estimer ces taux de fuite à la fois au travers de fissure d'ouverture variable et au travers d'un milieu poreux continu susceptible d'être endommagé de manière diffuse par relaxation des aciers de précontraintes ou par fluage, par exemple.

### 1.1.3 Verrous scientifiques

La physique des mécanismes de percolation d'un fluide dans un milieu poreux, n'est connue qu'à l'échelle du pore, pour des géométries très simples. Or, la porosité d'un béton est extrêmement complexe à décrire par l'intermédiaire de pores dont la distribution des tailles présente deux pics, un à 1 nm pour les pores d'hydrates et un à 0,1  $\mu\text{m}$  pour les pores capillaires. Tous ces pores peuvent être plus ou moins connectés, ouverts, tortueux, rugueux. Ces caractéristiques sont autant de paramètres (non connus) qui modifient les lois d'écoulement approchées par des méthodes discrètes.

Par conséquent, les relations, obtenue dans le cadre d'une approche continue, entre la porosité initiale, ou induite par un chargement (endommagement) et les propriétés de transferts (perméabilité) sont phénoménologiques et calées sur des essais expérimentaux (Bary (1996), Dal Pont *et al.* (2005), Gawin *et al.* (2005), Gérard *et al.* (1996) et Picandet *et al.* (2001)). Pour élaborer des lois d'évolution du matériau, il est nécessaire que les mesures de perméabilité se fassent sur des éprouvettes homogènes, et donc, en phase pré-pic. Par conséquent, il n'est pas rare de lire dans la littérature, des relations liant la perméabilité à l'endommagement, qui ne sont valables que pour de faibles endommagements (jusqu'à 0,15~0,3) demeurant diffus.

Certains auteurs proposent des lois calées sur des essais avec de forts endommagements en mesurant l'endommagement moyen de l'éprouvette (perte de raideur) ou en reliant la perméabilité à des grandeurs macroscopiques. En effet, les mesures de perméabilité après fissuration par fendage sont reportées en fonction, soit de l'ouverture de fissure (Gérard *et al.*, 1996), soit de la déformation moyenne (Wang *et al.*, 1997). En terme de modélisation, d'une part, l'ouverture de fissure est une grandeur difficile à calculer, qui n'a pas de sens pour les petits chargements, et d'autre part, la déformation est une quantité peu objective en post-pic à cause du phénomène de localisation.

Finalement, pour toutes les raisons évoquées ci-dessus, une relation unique permettant de calculer la perméabilité du début de la microfissuration jusqu'à l'ouverture d'une macrofissure, sur un même matériau n'est pas proposée dans la littérature.

Par ailleurs, la plupart des essais de mesures de perméabilité se font sur des éprouvettes endommagées dont une partie est extraite par carottage ou sciage pour mesurer la perméabilité. Ce processus expérimental ne permet pas de mesurer la perméabilité sous charge, qui est pourtant essentielle pour les structures ayant subi un endommagement de service.

Les mesures de perméabilité au gaz ou à l'eau dépendent fortement de la taille de l'éprouvette et de l'orientation du gradient de pression par rapport à l'axe de chargement. En effet, même dans la phase pré-pic, les microfissures ont une longueur caractéristique (liée à la taille des granulats), la porosité est donc d'autant plus "traversante" que l'éprouvette est fine et que les microfissures, parallèles au chargement en compression et perpendiculaires en traction, sont dans la direction du gradient de pression. Ce dernier, surtout pour la mesure de la perméabilité à l'eau, peut avoir une influence non négligeable (création de nouvelles fissures, accroissement des fissures existantes ou effet de nettoyage/colmatage par des particules fines).

L'originalité des travaux expérimentaux réalisés dans l'ERT R&DO réside dans la mesure de la perméabilité sous charge, à différents niveaux de chargement sur la même éprouvette et pour différentes températures. Ce dernier aspect ne sera pas traité dans ce document.

## **1.2 Mise en évidence expérimentale**

### **1.2.1 Description de l'essai**

Il s'agit d'un essai en compression simple (mis au point par Chatzigeorgiou (2004) qui a effectué un séjour d'un an pendant sa thèse de doctorat dans le cadre du projet européen RTN-DIGA) sur une éprouvette cylindrique creuse en son centre. Une pression de gaz est imposée dans l'espace vide et le flux radial est mesuré. Les mesures de perméabilité peuvent se faire sous chargement et l'ensemble est placé dans une enceinte climatique à température et humidité contrôlées. Le matériau est un béton ordinaire de résistance caractéristique à la compression de 26 MPa, séché dans une étuve jusqu'à stabilité de la masse.

A chaque point de chargement mécanique, en charge ou après décharge partielle, la mesure de la perméabilité se fait par le processus de Klinkenberg qui permet de déterminer la perméabilité intrinsèque de la structure à partir de la mesure du débit massique sous, au moins, trois gradients de pression différents.

### **1.2.2 Effet de l'état de contrainte**

Pour la mesure des déformations lors des essais, des jauges de déformation ont été collées à la surface du matériau. Les courbes de la Figure 1.1 montrent l'évolution du comportement volumique de contractant à dilatant au voisinage du pic et le caractère adoucissant avec une perte de raideur de l'éprouvette et une augmentation des déformations permanentes au cours du chargement. Ces caractéristiques essentielles du comportement du béton seront retrouvées dans la partie 3.2 dans le cadre d'un couplage d'un modèle d'endommagement et d'un modèle de plasticité.

La perméabilité est mesurée soit sous charge, ce qui entraîne une relaxation visible sur la Figure 1.1 des contraintes dans la phase post-pic par déplacement imposé, soit après décharge quasi complète. Le rapport des deux perméabilités est présenté Figure 1.2 en fonction du rapport de la déformation appliquée sur la

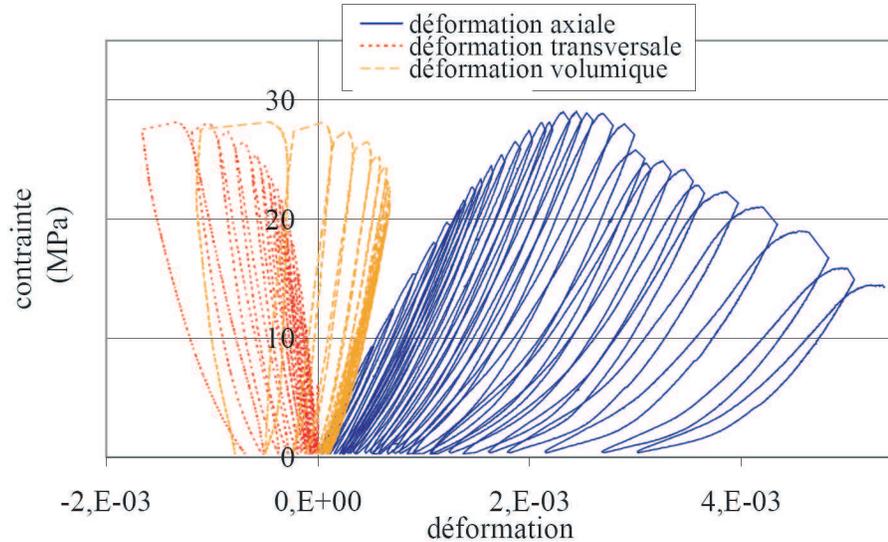


FIG. 1.1 – Réponse type en contrainte déformation d’une éprouvette de béton soumise à de la compression.

déformation au pic. On peut distinguer trois étapes :

- Jusqu’à une déformation relative de l’ordre de 0,7, la perméabilité est plus forte sous charge par refermeture des microfissures présentes initialement ( fissures de retrait et proches des auréoles de transition). Dans ce domaine, le matériau possède globalement une contractance croissante, qui induit une diminution de la porosité initiale sous charge. Toutefois, cette diminution n’a lieu que, parce que l’écoulement se produit dans les microfissures perpendiculaires à la charge qui se referment. Si on mesurait la perméabilité dans le sens de la charge de compression, elle diminuerait.
- Jusqu’au-delà du pic (déformation relative  $\approx 1,2$ ) le rapport augmente fortement pour atteindre un maximum proche de 2,2 entre la perméabilité sous charge et déchargée. Ceci s’explique par la création, sous charge, de nouvelles fissures peu ouvertes, qui se referment donc aisément lorsque la charge est supprimée.
- Au-delà, ce rapport diminue pour tendre vers 1. A ces niveaux de déformations, les fissures sous charge s’ouvrent tellement, qu’elles ne peuvent plus se refermer, et la perméabilité est donc identique sous charge ou déchargée. Ce phénomène est à relier directement aux déformations permanentes importantes mesurées à la fin de l’essai.

Cette évolution des propriétés de transferts en fonction du niveau de contrainte ne peut pas être représentée par une relation, entre la perméabilité et l’endommagement ou la déformation permanente, qui restent constants lors du déchargement. Toutefois, le facteur 2 reste faible, voire négligeable, par rapport à l’augmentation de 2 à 3 ordres de grandeurs de la perméabilité en fonction du chargement.

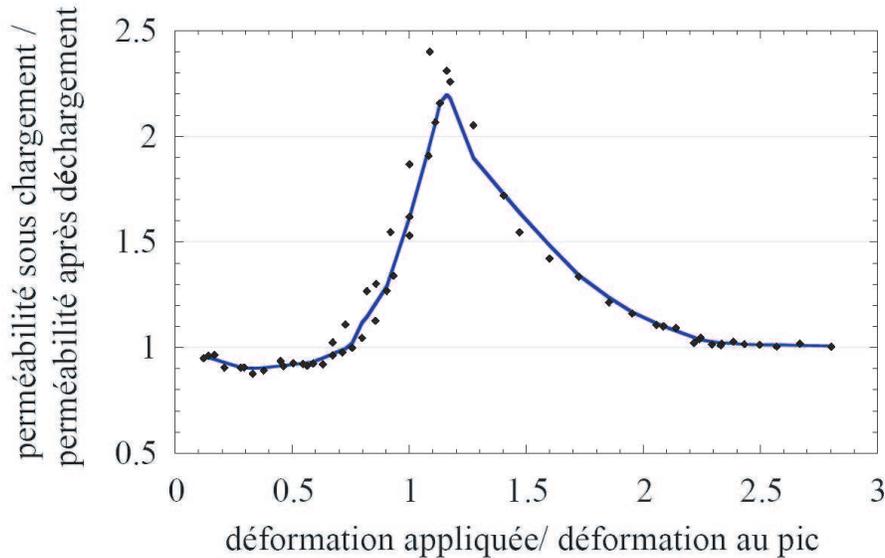


FIG. 1.2 – Evolution du rapport entre la perméabilité sous chargement et après déchargement en fonction de la déformation axiale relative.

### 1.2.3 Effet du chargement

#### 1.2.3.1 Phase pré-pic

L'évolution de la perméabilité en fonction du chargement en phase pré-pic présente trois phases distinctes visibles sur la Figure 1.3 :

- Jusqu'à 50% de la contrainte au pic, la perméabilité décroît par refermeture des microfissures initiales et sans augmentation de l'endommagement par le chargement.
- De 50% à 85%, la perméabilité croît à nouveau mais faiblement. L'endommagement commence à augmenter (comportement non linéaire visible sur la Figure 1.1), mais en créant des microfissures non connectées entre elles, qui ont donc peu d'effet sur la perméabilité.
- Jusqu'au pic, commence une phase de croissance importante, car à la fois la quantité et la connectivité des microfissures augmentent avec le chargement.

#### 1.2.3.2 Phase post-pic

En phase post-pic, à cause des effets différés, il n'est pas possible de maintenir le niveau de charge pendant la mesure de la perméabilité. Le pilotage de l'essai se fait donc en déformation. A l'échelle de l'évolution de la perméabilité de l'état initial jusqu'à la rupture, on peut distinguer trois phases visibles sur la Figure 1.4 :

- La première phase jusqu'à 85% de la déformation au pic correspond aux trois phases du chargement en pré-pic décrites précédemment. A cette échelle de grandeur, on n'observe pas d'évolution, c'est-à-dire

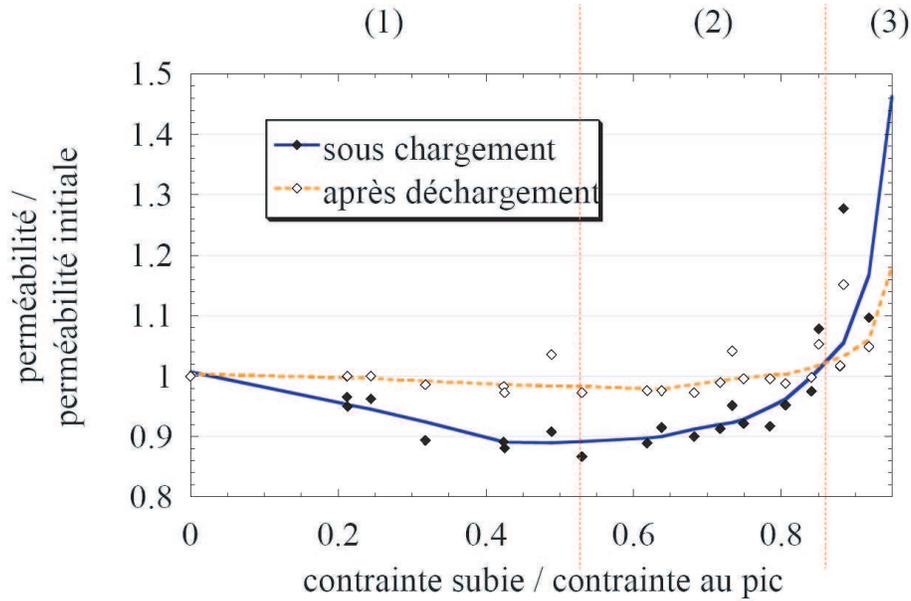


FIG. 1.3 – Evolution en phase pré-pic de la perméabilité relative sous chargement et après déchargement en fonction du niveau maximal de contrainte subit au cours du chargement.

que par rapport à un comportement à rupture, l’augmentation de la perméabilité en pré-pic peut être négligée.

- La deuxième phase correspond à la poursuite de la troisième phase en pré-pic. L’endommagement continue à augmenter de manière diffuse en créant de nouveaux vides et en augmentant leur connectivité. On suppose que les déformations ne se sont toujours pas localisées.
- Depuis 1,5 fois la déformation au pic et jusqu’à la rupture, la perméabilité continue d’augmenter mais à un rythme plus faible. La fissuration s’est localisée en quelques macrofissures et seule l’ouverture de ces fissures augmentent avec le chargement sans modification de la connectivité.

### 1.2.4 Bilan de l’étude expérimentale

Etant donné les différences de mesures entre les états chargé et déchargé, et une perméabilité à l’eau ou au gaz, ainsi que les différences dues au choix du mode de chargement (compression, fendage, traction) et de la direction du flux mesuré relativement à la direction privilégiée de fissuration, les évolutions qualitatives des résultats de Picandet *et al.* (2001), Gérard *et al.* (1996), Sugiyama *et al.* (1996), Meziani et Skoczylas (1999) sont retrouvées ponctuellement. Mais ces essais ont surtout permis d’obtenir une base de données expérimentale pour la relation perméabilité-fissuration de la phase élastique à la rupture.

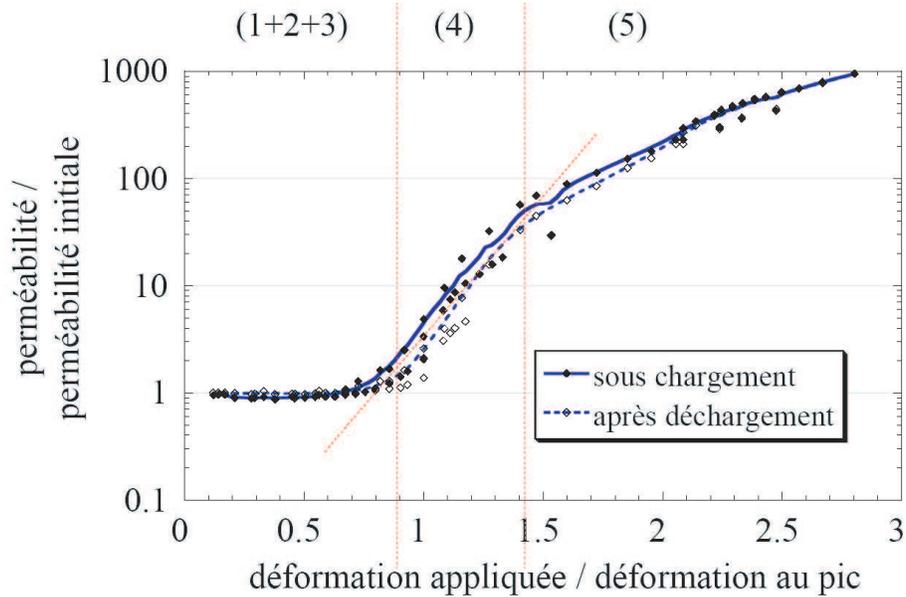


FIG. 1.4 – Evolution jusqu’à la rupture de la perméabilité relative sous chargement et après déchargement en fonction du niveau de déformation.

## 1.3 Modélisation du couplage perméabilité - endommagement

### 1.3.1 Proposition d’une nouvelle relation

L’idée est de proposer une relation unique, qui soit capable d’estimer la perméabilité du matériau en fonction de l’état d’endommagement, même si cette classe de modèle reste discutable pour des endommagements de l’ordre de 1. D’une part, nous disposons de lois empiriques pour les faibles endommagements (microfissuration), i.e., lorsque le matériau est toujours homogène. D’autre part, des lois physiques existent (relation de Poiseuille) pour une macrofissure, qui peuvent être adaptées à des résultats expérimentaux (Wang *et al.*, 1997), afin de prendre en compte la spécificité du béton, en ce qui concerne la rugosité et la tortuosité des fissures en fonction du type de chargement. Il n’existe donc pas, à notre connaissance, de loi capable de décrire l’évolution de la perméabilité depuis l’amorçage de la microfissuration jusqu’à l’ouverture de la macrofissure. La difficulté résidant, sans doute, dans l’absence d’un paramètre unique capable de décrire le comportement mécanique du début de l’endommagement à la rupture. Nous proposons donc, une loi mathématique unique, basée sur la loi des mélanges, qui permet de retrouver aux limites, respectivement les très petits endommagements et une macrofissure ouverte, les lois existantes.

**Relation pour faibles endommagements** Pour les faibles endommagements, nous utilisons la loi de Picandet, à savoir :

$$k_D = k_0 \exp[(\alpha D)^\beta] \quad (1.1)$$

dont les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  ont été calés, à des valeurs de 11,3 et 1,64 respectivement, jusqu'à des endommagements de l'ordre de 0,15.  $k_0$  est la perméabilité initiale et  $D$  la variable d'endommagement. Afin d'introduire cette relation (1.1) dans une loi des mélanges, il est nécessaire d'écrire un développement limité pour  $D = 0$ . En effet, la forme exponentielle de la relation (1.1) la rend prépondérante par rapport à la seconde loi à mélanger, quelle que soit son expression mathématique, surtout pour de forts endommagements. Or, l'impact de la relation (1.1) se doit de diminuer au sein de la loi des mélanges en même temps que  $D$  augmente. Le développement limité de la relation de Picandet s'écrit pour  $D = 0$  :

$$k_D^F = k_0 \left[ 1 + (\alpha D)^\beta + \frac{(\alpha D)^{2\beta}}{2} + \frac{(\alpha D)^{3\beta}}{6} \right] \quad (1.2)$$

Les deux relations sont tracées sur la Figure 1.5 afin de montrer qu'elles sont bien équivalentes pour les faibles endommagements.

**Relation pour forts endommagements** Pour les forts endommagements, la "perméabilité" d'une fissure est donnée par la loi de Poiseuille, qui s'écrit :

$$k_f = \zeta \frac{[U]^2}{12} \quad (1.3)$$

où  $[U]$  est l'ouverture moyenne de la fissure et  $\zeta$  est un coefficient tenant compte de la rugosité et de la tortuosité de la fissure qui peut être calé expérimentalement. Pour pouvoir mélanger les relations (1.2) et (1.3), il faut les exprimer en fonction d'une variable unique. Nous avons choisi  $D$  plutôt que  $[U]$  car cette variable est facilement disponible dans un calcul aux éléments finis.

**Changement de variable** Imaginons une barre en traction, avec une représentation discrète de la rupture on aurait une ouverture de fissure  $[U]$ , tandis qu'avec une représentation continue de la mécanique de l'endommagement, nous avons une bande endommagée avec  $D = 1$  de largeur  $\alpha l_c$  où  $\alpha$  est une constante et  $l_c$  est la longueur caractéristique du modèle non local (voir paragraphe 1.4 pour plus de détails). En écrivant l'équivalence cinématique entre les deux approches, et en utilisant le fait que la variable  $\bar{Y}$  pilotant l'endommagement est, suivant le modèle de Mazars, la déformation équivalente qui en 1D est aussi la déformation axiale, on peut donc écrire :

$$[U] = \int_0^{\alpha l_c} (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) dx = \int_0^{\alpha l_c} (\bar{Y} - Y_{D0}) dx = \alpha l_c (\bar{Y} - Y_{D0}) \quad (1.4)$$

où  $Y_{D0}$  est le seuil d'endommagement.

**Loi des mélanges** Finalement, comme les ordres de grandeurs de la perméabilité entre les faibles et les forts endommagements sont très différents, nous proposons de mélanger non pas les perméabilités, mais les ordres de grandeur. Ce qui revient à écrire une loi des mélanges basée sur les logarithmes des perméabilités :

$$\log(k) = (1 - D) \log(k_D^F) + D \log(k_f) \quad (1.5)$$

La loi proposée est illustrée à la Figure 1.5 en rapport avec les lois aux limites.

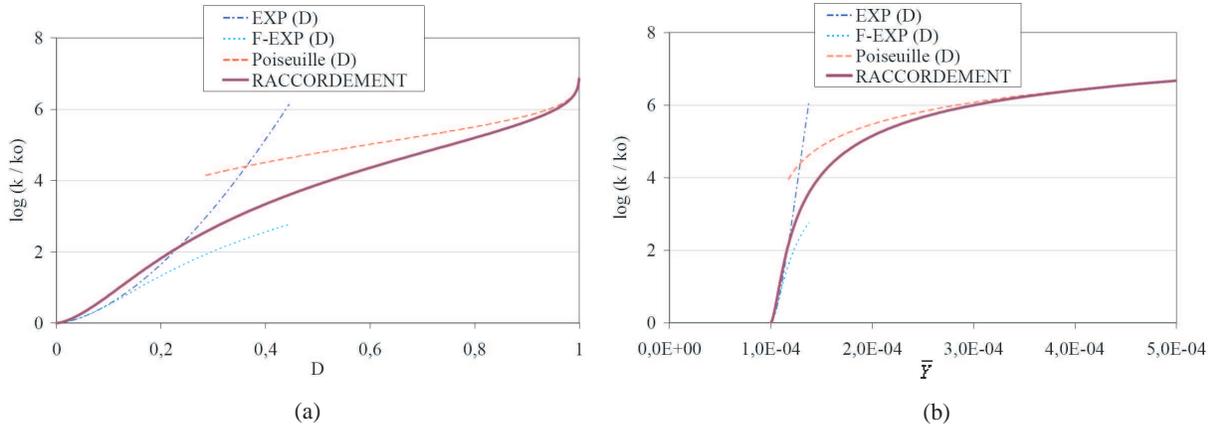


FIG. 1.5 – Loi de raccordement proposée dans le repère de l’endommagement (a) et de déformation (b). “EXP” est la relation de Picandet, “F-EXP” est son développement limité, “Poiseuille” est la relation de Poiseuille après le changement de variable et “RACCORDEMENT” la loi des mélanges que nous proposons.

### 1.3.2 Validation structurelle de la relation proposée

Des simulations numériques sur des éprouvettes de type disque en fendage ont été réalisées (voir Figure 1.6) afin d’estimer la perméabilité au cours du chargement, et surtout, pour vérifier que notre loi des mélanges respecte bien, au niveau structurel, les conditions que nous lui avons imposées au niveau local. Les résultats sont qualitativement corrects et reproduisent bien les trois phases du comportement telles que décrites sur la Figure 1.4. Cependant, une campagne d’essais est en cours afin de valider notre approche d’un point de vue quantitatif (voir paragraphe 4.1).

**Effet d’échelle** Ces simulations se feront sur plusieurs tailles d’éprouvette car, tout comme sur la réponse mécanique, nous imaginons qu’un effet d’échelle se produira sur la réponse hydraulique. En effet, le flux se concentrera dans la zone de fissuration, dont la largeur est une constante matériau alors que la longueur dépend de la taille de la structure. La perméabilité moyenne étant calculée comme le rapport entre le flux et la surface (en 2D) de l’éprouvette, elle devrait diminuer avec la taille de la structure qui intervient au carré

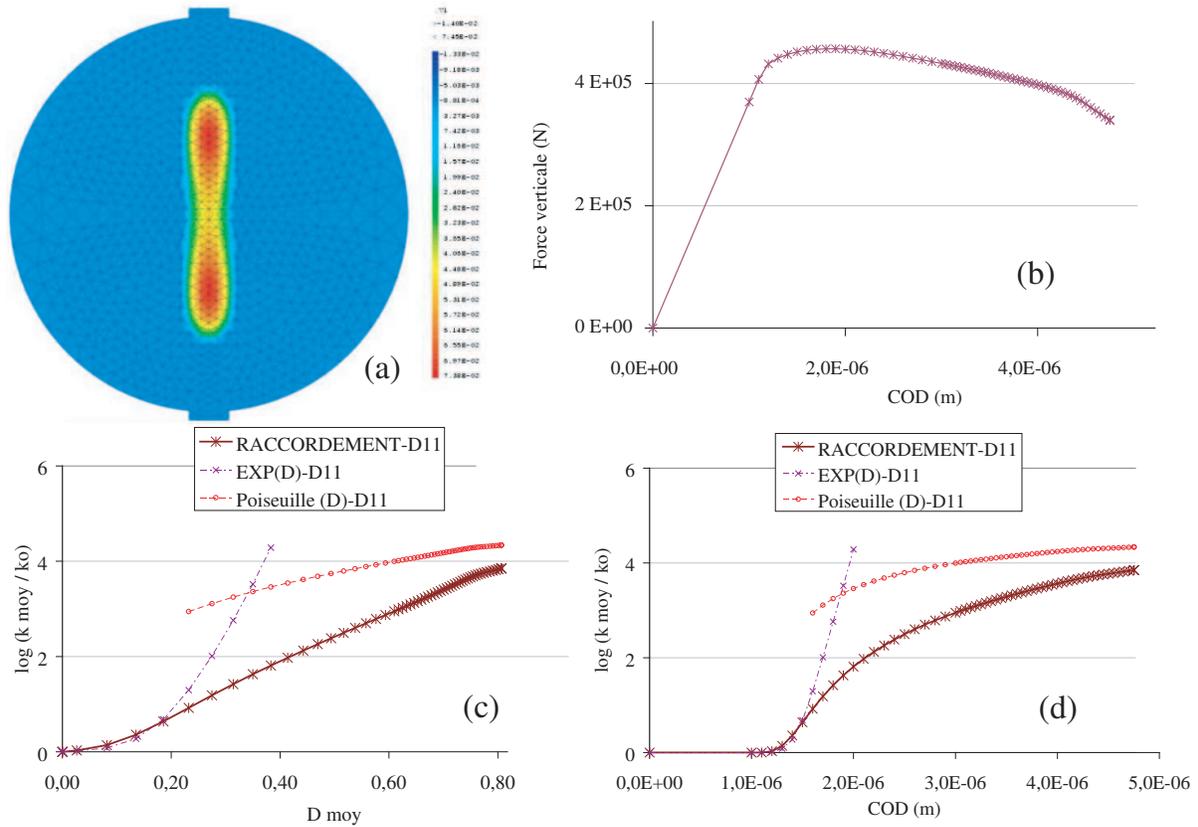


FIG. 1.6 – (a) Champ d’endommagement d’un essai de fendage. (b) Réponse mécanique Force-COD. (c) Evolution de la perméabilité moyenne en fonction de l’endommagement moyen (mesuré à partir de la perte de raideur) pour les différentes relations étudiées. (d) Evolution de la perméabilité moyenne en fonction de l’ouverture de fissure pour les différentes relations étudiées.

pour la surface et au premier ordre pour le flux. Par contre, comme la perméabilité n’est pas une grandeur intrinsèque, nous ne pouvons pas définir de perméabilité nominale et donc de loi d’effet d’échelle comme celle de Bazant pour la résistance. Nous prévoyons donc que la perméabilité aura le même effet d’échelle que la résistance.

Toutefois, des simulations sont en cours de réalisation sur le *wedge test* où la perméabilité sera comparée pour différentes tailles d’éprouvette avec un même rapport entre la longueur de la fissure et celle du ligament.

## 1.4 Calcul de l'ouverture de fissure

L'objectif de ce travail est non pas de proposer une transition entre une description continue de la rupture et une approche discrète comme cela a pu être esquissé par Planas *et al.* (1993), Mazars et Pijaudier-Cabot (1996) et plus récemment en utilisant X-FEM (Moes *et al.*, 1999) par Simone *et al.* (2003), Comi *et al.* (2007) et Benvenuti *et al.* (2007). Mais il s'agit de proposer une méthode d'analyse des résultats permettant d'extraire d'un calcul aux éléments finis avec un modèle d'endommagement non local, une ouverture de fissure équivalente au champ d'endommagement. Nous proposons donc une méthode qui peut être implantée dans tout code aux éléments finis comme un module de post-traitement.

### 1.4.1 Approche unidimensionnelle

#### 1.4.1.1 Approches non locales de l'endommagement

**Modèle d'endommagement** Le modèle d'endommagement de Mazars (1984) est utilisé pour la simulation numérique de la rupture de la barre. Pour ce modèle, le tenseur des contraintes est exprimé en fonction du tenseur des déformations

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.6)$$

où  $D$  est la variable d'endommagement qui s'écrit :

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c \quad (1.7)$$

avec  $\alpha_t$  et  $\alpha_c$  qui dépendent du tenseur de déformation selon les relations :

$$\alpha_{t,c} = \left( \frac{\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^{t,c} \langle \varepsilon_i \rangle_+}{\varepsilon_{eq}} \right) \quad (1.8)$$

Ils valent respectivement 1 et 0 dans le cas de la barre en traction.  $D$  s'écrit alors :

$$D = 1 - \frac{Y_{D0}(1 - A_t)}{Y} - \frac{A_t}{\exp(B_t(Y - Y_{D0}))} \quad (1.9)$$

où  $A_t$ ,  $B_t$  et  $Y_{D0}$  sont les paramètres matériau du modèle et  $Y$  est définie par :

$$Y = \max(Y, \varepsilon_{eq}) \quad \text{avec initialement } Y = Y_{D0} \quad (1.10)$$

où la déformation équivalente est définie par :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad (1.11)$$

où  $\langle \varepsilon_i \rangle_+$  définit la partie positive des déformations principales. Il est à noter qu'avec cette forme de la loi d'évolution de l'endommagement, la valeur de 1 n'est atteinte qu'asymptotiquement. Par ailleurs, il est bien connu que ce modèle présente une perte d'ellipticité et doit être régularisé afin d'éviter une localisation de l'endommagement dans un seul élément, ce qui rend la réponse mécanique dépendante du maillage.

**Approche intégrale** Dans cette approche la variable qui pilote l'endommagement (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987) doit être moyennée dans le voisinage du point considéré. Cela donne :

$$\bar{\varepsilon}_{eq}(x) = \frac{\int_{\Omega} \Psi(x-s) \varepsilon_{eq}(s) ds}{\int_{\Omega} \Psi(x-s) ds} \quad (1.12)$$

où  $\bar{\varepsilon}_{eq}(x)$  est la déformation équivalente régularisée qui remplace  $\varepsilon_{eq}(x)$  dans l'Equation (1.10).

L'approche intégrale est justifiée d'un point de vue micromécanique par les interactions (redistribution des contraintes lors de la fissuration) dues aux hétérogénéités du matériau (voir paragraphe 4.2).

**Approche en gradient** Afin de calculer une variable régularisée qui pilote l'endommagement, on peut aussi utiliser une approche en gradient implicite. Nous ne présentons dans ce document qu'une seule des versions implicites, qui est celle utilisée pour tous les calculs en gradient de nos études. Dans cette approche, une équation sur le domaine  $\Omega$  en gradient est à résoudre :

$$\bar{\varepsilon} - c \nabla^2 \bar{\varepsilon} = \varepsilon \quad (1.13)$$

dont les conditions aux limites sont  $\nabla \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ .  $c$  est exprimé en  $m^2$  et est relatif à la longueur caractéristique du matériau et  $\bar{\varepsilon}$  est le tenseur des déformations régularisées qui permet de calculer la variable  $\bar{\varepsilon}_{eq}$  qui pilote l'endommagement par la relation :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \bar{\varepsilon}_i \rangle_+^2} \quad (1.14)$$

Dans les applications suivantes, même lorsque l'approche en gradient est utilisée pour le calcul aux éléments finis, la phase de post-traitement se fera avec l'approche intégrale et une longueur interne équivalente au  $c$  du calcul en gradient.

**Remarque** Il est important de noter que notre méthode compare (voir Equation (1.20)) des profils de déformations régularisées  $\bar{\varepsilon}_{eq}$  et  $\bar{\varepsilon}_{sd}$  calculés à partir de profils de déformations : la déformation  $\varepsilon(x)$  dans le premier cas et le Dirac  $\delta(x)$  dans le second. Pour des raisons de simplicité, la régularisation que nous opérons dans la phase post-traitement est basée sur l'approche intégrale. Toutefois, dans cette phase la

fonction poids peut être différente de celle utilisée dans le calcul aux éléments finis, ce qui nous oblige à repartir des déformations locales  $\varepsilon(x)$  au lieu des déformations déjà régularisées  $\bar{\varepsilon}_{eq}(x)$  dans le calcul. Par contre, l'avantage est de pouvoir utiliser notre approche pour toute méthode de régularisation, y compris l'approche en gradient.

### 1.4.1.2 Discontinuité forte régularisée

Lorsqu'une barre de longueur  $L$  se rompt sous un chargement uniaxial de direction  $\vec{x}$ , elle est divisée en deux parties par une fissure dont la position dépend de la position ( $x_0$ ) du point faible du matériau. Si on fait l'hypothèse que le matériau suit une loi d'endommagement, les contraintes, et donc les déformations (Equation (1.6)) sont nulles, à la rupture, sauf au droit de la fissure (Figure 1.7.(c)).

Le champ de déplacement (Figure 1.7.(b)) sera donc constant par morceau avec un saut au droit de la fissure.

$$u_{sd}(x, x_0) = [U]H_{\Gamma}(x - x_0) \quad (1.15)$$

où l'indice  $sd$  fait référence au modèle en discontinuité forte (*strong discontinuity*) introduit par Simo *et al.* (1993) et repris récemment par Oliver *et al.* (2002).  $H_{\Gamma}$  est la fonction heaviside et  $[U]$  est le saut de déplacement au droit de la fissure. Par dérivation, on obtient la déformation :

$$\varepsilon_{sd}(x, x_0) = \nabla^s u_{sd} = [U] \delta(x - x_0) \quad (1.16)$$

où  $\delta(x)$  est la fonction Dirac et  $\nabla^s$  l'opérateur gradient symétrique. Ce modèle est en fait le comportement asymptotique à la rupture des modèles en discontinuité forte (Oliver *et al.*, 2002), pour lequel la partie continue est négligée.

Quand  $x_0$  est donné, la seule inconnue du problème demeure  $[U]$ . Au profil de déformation est associé un profil de déformation régularisée (Figure 1.7.(d)) au sens du modèle d'endommagement non local, à savoir :

$$\bar{\varepsilon}_{sd}([U], x, x_0) = \frac{\int_{\Omega} \Psi(x - s) \varepsilon_{sd}(s, x_0) ds}{\int_{\Omega} \Psi(x - s) ds} \quad (1.17)$$

où  $\Psi(x)$  est la fonction poids du modèle non local (Equation (1.12)). En insérant l'équation (1.16) dans (1.17), et en utilisant les propriétés d'un Dirac, on obtient finalement :

$$\bar{\varepsilon}_{sd}([U], x, x_0) = \frac{[U] \Psi(x - x_0)}{\int_{\Omega} \Psi(x - s) ds} \quad (1.18)$$

qui représente une mesure régularisée du saut de déplacement.

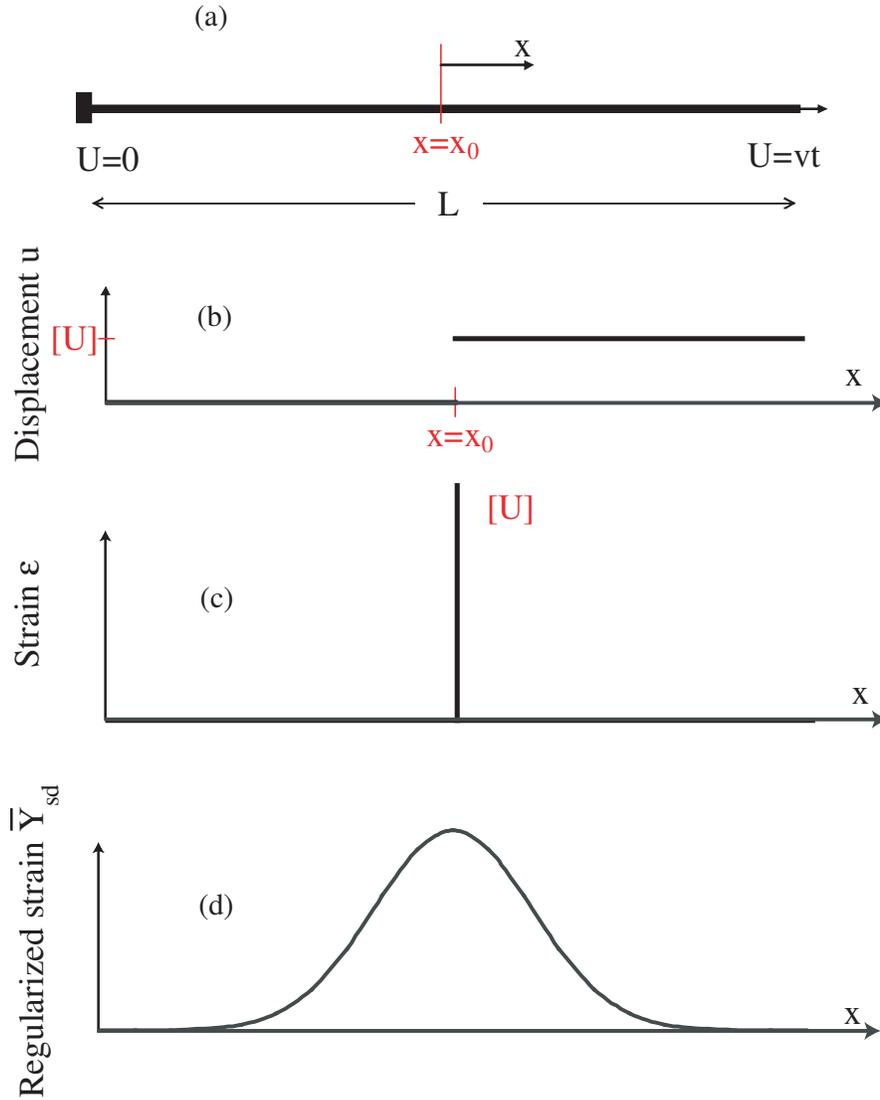


FIG. 1.7 – Modèle unidimensionnel de barre en élongation. (a) Géométrie de la barre avec ses conditions limites, (b) profil de déplacement, (c) profil de déformation et (d) profil de déformation régularisée.

### 1.4.1.3 Calcul du saut de déplacement et de l'erreur

L'idée clé de cette approche est de comparer les champs  $\bar{\epsilon}_{eq}(x)$  et  $\bar{\epsilon}_{sd}(x)$  en prenant comme hypothèse qu'ils sont égaux au droit de la fissure, on peut ainsi calculer le saut de déplacement par :

$$[U] = \frac{\bar{\epsilon}_{eq}(x_0) \int_{\Omega} \Psi(x_0 - s) ds}{\Psi(0)} \quad (1.19)$$

Sur ces deux champs, on peut calculer une erreur relative :

$$\Delta^r(x_0, [U]) = \frac{\int_{\Omega} \|\bar{\varepsilon}_{sd}(x, x_0, [U]) - \bar{\varepsilon}_{eq}(x)\| ds}{\int_{\Omega} \bar{\varepsilon}_{eq}(s) ds} \quad (1.20)$$

#### 1.4.1.4 Simulations numériques

**Réponse globale** On résout le problème défini à la Figure 1.7.(a) pour une barre unitaire dont la position de la fissure est imposée par un élément faible au centre de la barre. Pour des raisons pratiques de code numérique, les simulations ont été effectuées en 2D avec des éléments quadratiques en déformation plane et un coefficient de poisson nul afin d'avoir un champ de déformation uniaxial comme dans le cas d'une barre. Les paramètres du modèle matériau sont présentés à la table 1.1.

$E$	$=$	$37,7 \text{ GPa}$	$Y_{D0}$	$=$	$10^{-4}$
$E_{we}$	$=$	$31 \text{ GPa}$	$A_t$	$=$	$1$
$\nu$	$=$	$0,0$	$B_t$	$=$	$20000$

TAB. 1.1 – Paramètres du modèle matériau d'endommagement.

Nous avons réalisé des simulations avec les deux techniques de régularisation, avec deux maillages (31 et 61 éléments) et avec deux longueurs caractéristiques ( $l_c = 0,18 \text{ m}$  et  $l_c = 0,28 \text{ m}$ ). Pour l'approche en gradient, le paramètre  $c$  a été calé de telle sorte que les zones d'endommagement aient la même largeur dans les deux approches (voir Figure 1.9), soit, respectivement  $c = 0,005 \text{ m}^2$  et  $c = 0,012 \text{ m}^2$ . Il est à noter que dans le cas d'une barre en traction, avec la largeur de la Fracture Process Zone (FPZ) comme équivalence, la relation entre les deux paramètres est :

$$\frac{l_c}{\sqrt{c}} \approx 2,55 \quad (1.21)$$

alors que Jason (2004) avait trouvé dans le cas de la flexion 3 points un rapport de l'ordre de 4 en fixant son critère d'équivalence sur la réponse globale.

#### Remarque

- Comme nous allons le voir par la suite (Figure 1.8), à profil d'endommagement égal en largeur, le profil des déformations est plus étroit pour l'approche en gradient, que celui obtenu par l'approche non locale. Par conséquent, si on regarde la largeur du profil d'endommagement ou si on regarde l'évolution du snap-back, lié à la localisation des déformations, le rapport  $l_c/\sqrt{c}$  diffère.

La réponse globale de la structure, avec ce jeu de paramètres, est donnée à la Figure 1.8 sur laquelle on peut remarquer que :

- la convergence EF (réponse indépendante du maillage) est atteinte avec 61 éléments,
- plus la longueur caractéristique est petite, plus le snap-back est prononcé,
- le snap-back sur la réponse obtenue par le modèle gradient est plus important que dans la cas de l’approche intégrale. Cet effet est causé par une zone de localisation des déformations plus réduite dans l’approche gradient (voir Figure 1.10) et, par conséquent, une décharge élastique du reste de la barre plus importante.

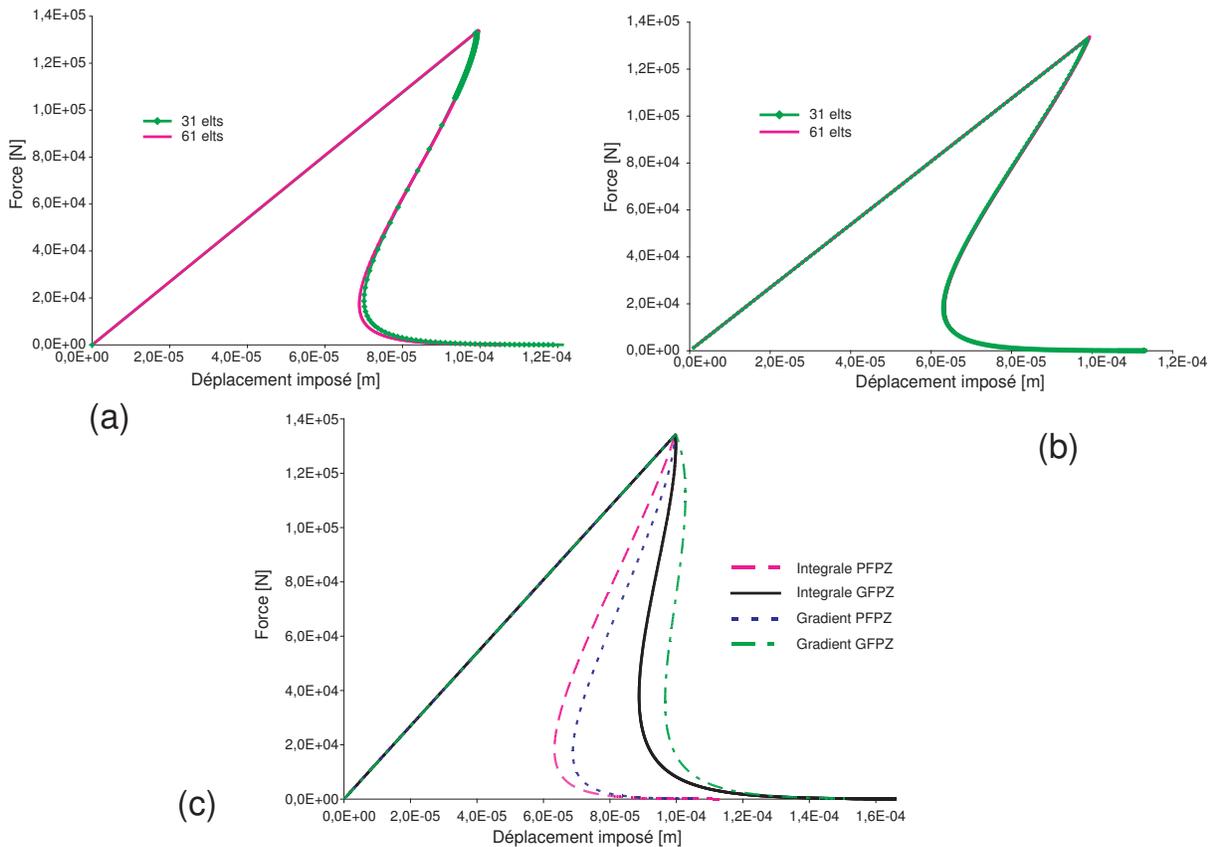


FIG. 1.8 – Réponse force-déplacement de la barre en traction pour l’approche en gradient (a) et l’approche intégrale (b) pour les deux maillages de 31 et 61 éléments. (c) Avec le maillage fin, comparaison entre l’approche gradient et l’approche intégrale pour les deux tailles de FPZ, grande (GFPZ) et petite (PPFZ).

**Profils d’endommagement et de déformation** Les douze profils d’endommagement et de déformation sont tracés pour des incréments correspondants à une force qui vaut  $\{1.0; 0.9; \dots; 0.1; 0.05; 0.01\}$  la force au pic. Dès l’amorçage de l’endommagement, la process zone se développe sur sa largeur et reste constante

pendant le développement de l'endommagement (voir Figure 1.9) qui atteint une valeur proche de 1 tout lui en restant strictement inférieure selon l'Equation (1.9). Les différences entre les deux approches ne sont pas flagrantes sur ces profils du fait des longueurs intrinsèques relatives aux deux modèles.

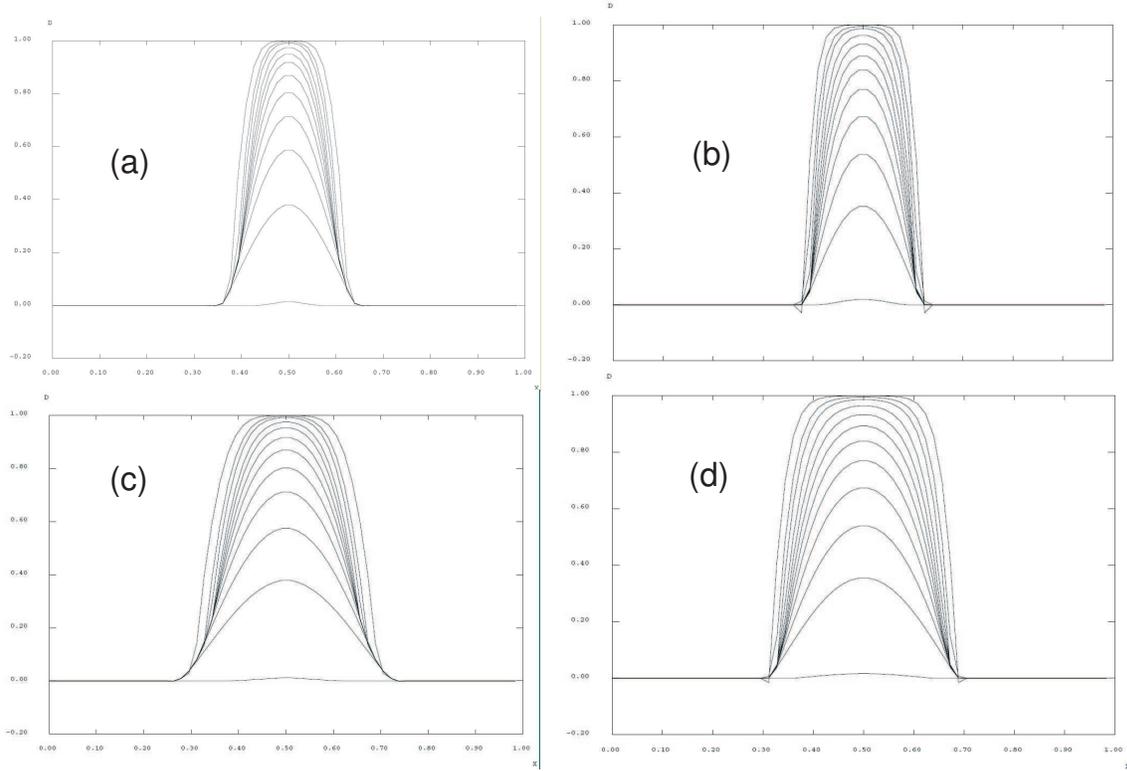


FIG. 1.9 – Profils d'endommagement pour les différents niveaux de chargement. (a) Gradient, petite FPZ, (b) Intégrale petite FPZ, (c) Gradient grande FPZ et (d) Intégrale grande FPZ.

La Figure 1.10 montre, pour ces mêmes étapes du chargement, les profils de la déformation locale issue du calcul EF. Contrairement à l'endommagement, on peut remarquer que l'approche en gradient donne un profil plus "pointu", autrement dit plus proche du Dirac de l'approche en discontinuité forte. Il faut rappeler ici que Peerlings *et al.* (1996) ont montré que l'approche en gradient est équivalente à l'approche intégrale avec la fonction de Green comme fonction poids. Cette fonction s'écrit en 1D :

$$G(\|x - s\|) = \frac{1}{2l_c} \exp\left(-\frac{\|x - s\|}{l_c}\right) \quad (1.22)$$

Cette fonction est plus "pointue" que les fonctions poids classiques de l'approche intégrale puisque sa dérivée est finie non nulle en zéro alors que dans l'approche intégrale les dérivées des fonctions poids classiques sont nulles.

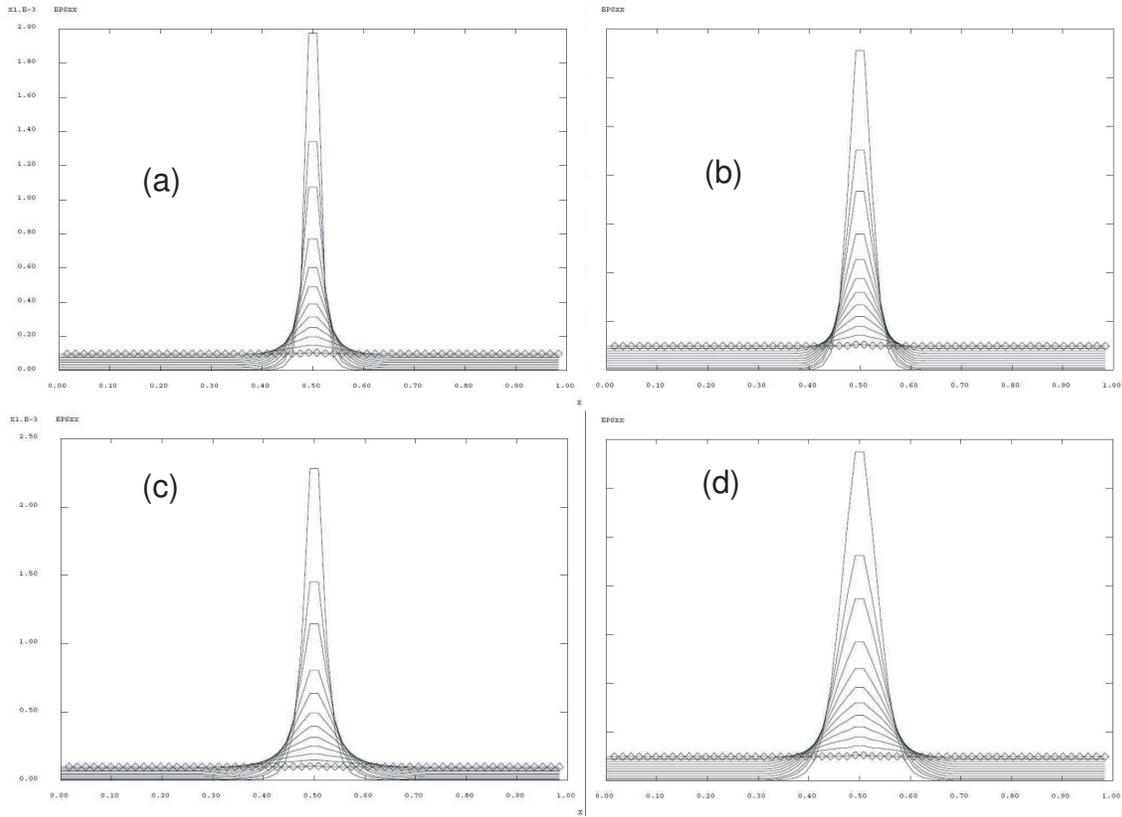


FIG. 1.10 – Profils de déformations pour les différents niveaux de chargement. (a) Gradient, petite FPZ, (b) Intégrale petite FPZ, (c) Gradient grande FPZ et (d) Intégrale grande FPZ.

**Calcul de l'erreur** Par définition de notre saut en déplacement  $[U]$  (Equation (1.19)) et pour une force qui vaut un centième de la force au pic (dans la phase adoucissante), les deux profils, de la déformation équivalente non locale  $\bar{\varepsilon}_{eq}$  du calcul éléments finis et de la déformation régularisée de l'approche en discontinuité forte  $\bar{\varepsilon}_{sd}$  coïncident au centre de la barre et ont la forme de la fonction poids du post-traitement (voir illustration à la Figure 1.11.(a) et (b) dans le cas de la petite FPZ) pour les deux techniques de régularisation. On peut déjà remarquer que l'écart entre ces deux profils est plus grand pour l'approche intégrale, ce qui est vérifié par une erreur (Equation (1.20)) asymptotique (Figure 1.12.(b)) de l'ordre de 2% pour l'approche en gradient et de 4% pour l'approche intégrale. Donc, à déplacement imposé égal, la régularisation par la méthode gradient semble légèrement plus performante suivant notre critère. Ceci s'explique par un profil de déformation moins "pointu" pour l'approche intégrale et donc plus éloigné du Dirac théorique de l'approche en discontinuité forte. Au contraire, à la Figure 1.12.(d), on peut déduire que pour une déformation maximale donnée, l'erreur est plus faible pour l'approche intégrale. En effet, étant donné la forme des fonctions poids, à déformation maximale donnée l'endommagement est plus fort avec l'approche intégrale. On se trouve donc plus proche de la rupture et d'un champ de déplacement discontinu. Nous avons illustré

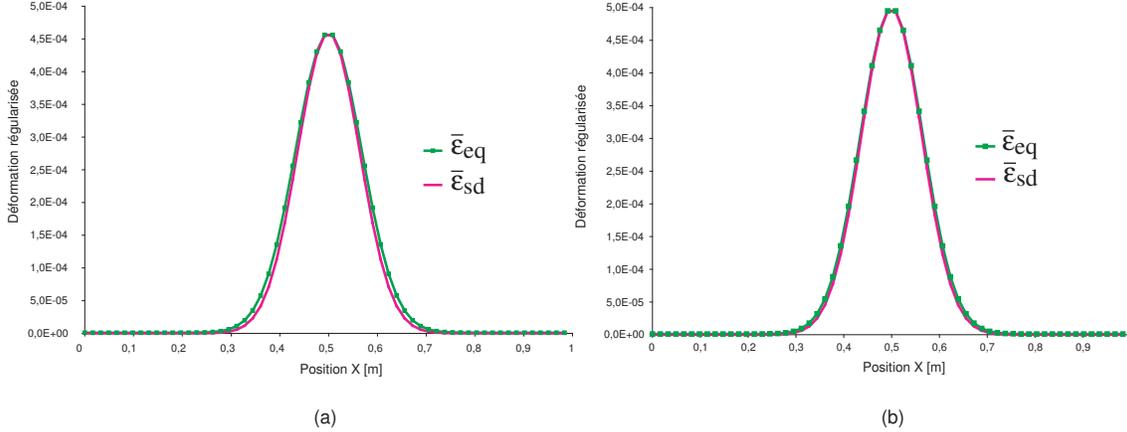


FIG. 1.11 – Profils des déformations régularisées  $\bar{\epsilon}_{sd}$  et  $\bar{\epsilon}_{eq}$  pour l’approche intégrale (a) et gradient (b) obtenus avec le maillage fin et la petite FPZ.

notre propos par les résultats sur la petite FPZ, mais les mêmes tendances sont observées sur la grande.

Il est à noter que le calcul par l’approche intégrals n’a pas pu être poursuivi pour de plus grands déplacements imposés, car l’endommagement a atteint les bords du maillage du fait de la diffusion numérique de l’endommagement caractéristique de cette approche. Ce phénomène est à relier aux résultats obtenus dans les simulations de la partie 4.2 pour lesquelles nous avons observé que pour des fonctions poids classiques, l’endommagement est “attiré” par les bords.

Une autre possibilité pour la définition de  $[U]$  aurait été de minimiser l’erreur entre ces deux profils. Ce calcul aurait permis d’atteindre une erreur encore plus petite. Cependant, nous avons privilégié une approche plus physique que mathématique.

De plus, si la déformation se localise dans un seul élément, cela revient à dire que la solution cinématique dépend du maillage. Toutefois, comme cette localisation se fait à un stade où les contraintes sont quasiment nulles, il ne devrait pas y avoir de dépendance au maillage de l’énergie de rupture. D’après des discussions avec A. Simone et R. Peerlings, ces résultats sont atteints avec une approche en gradient et un modèle d’endommagement linéaire dans sa partie adoucissante.

Malgré tout, il serait conceptuellement plus correct d’utiliser une approche où la macrofissure serait décrite par une ligne en 2D et un plan en 3D qui ne dépendent pas du maillage. En effet, pour les couplages qui nous intéressent, il est essentiel non seulement d’avoir la courbe réponse mécanique globale la plus correcte possible, mais il est aussi important de calculer des profils d’endommagement ou de déformation précis lorsqu’ils sont intégrés dans des lois couplées. Nous pensons particulièrement à la méthode X-FEM (Moes *et al.*, 2002) qui représente une fissure grâce à une Level Set et le saut en déplacement est introduit via la méthode de la partition de l’unité (Melenk et Babuska, 1996).

Comme anticipé, relativement à notre concept de la discontinuité forte pris uniquement avec un saut (pas

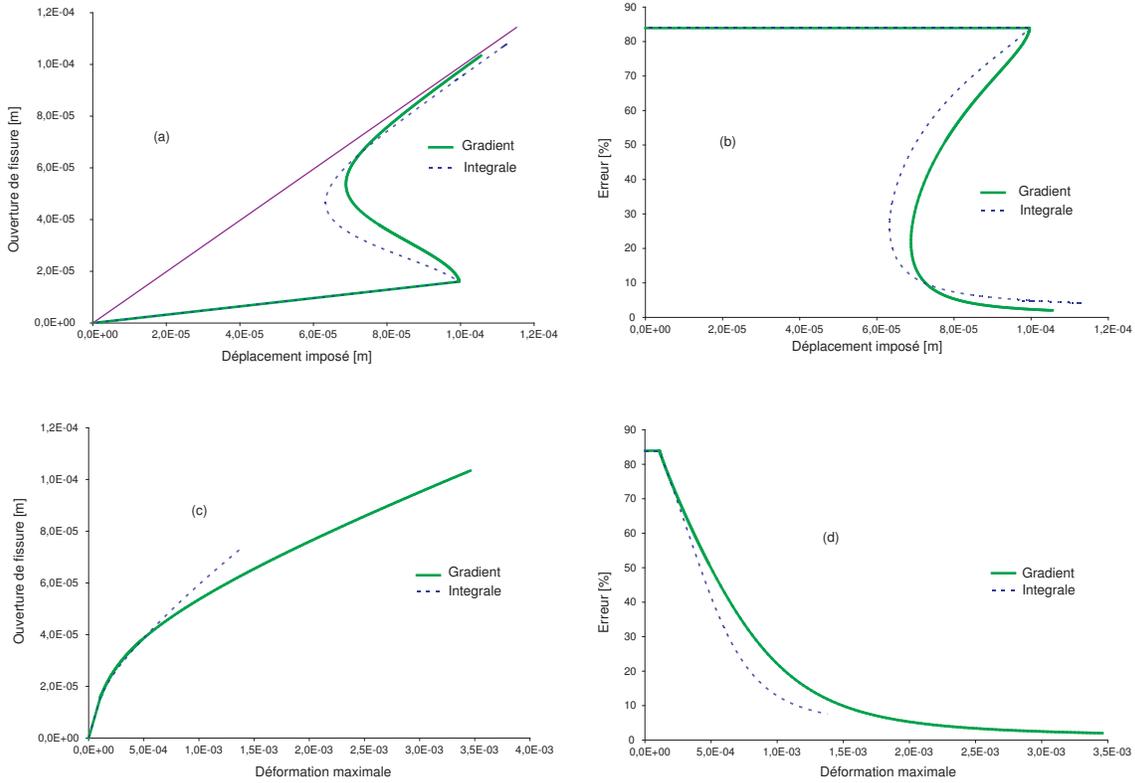


FIG. 1.12 – (a) et (c) Evolution de l’ouverture de fissure au cours du chargement en fonction du déplacement imposé ou de la déformation maximale respectivement ; (b) et (d) Evolution de l’erreur au cours du chargement en fonction du déplacement imposé ou de la déformation maximale respectivement. Ces profils sont tracés pour la petite FPZ.

de partie continue du champ de déplacement), l’erreur est importante au pic de force et décroît rapidement au fur et à mesure que l’endommagement évolue (voir Figure 1.12.(b)), c’est-à-dire au fur et à mesure que le matériau se décharge et que la partie continue du champ de déplacement tend vers 0. A la rupture, les erreurs de 4% et 2% représentent la capacité des modèles d’endommagement régularisés à représenter la rupture d’un point de vue cinématique. Le léger écart enregistré entre l’approche intégrale et les milieux enrichis est en accord avec les résultats obtenus par Peerlings *et al.* (2001), qui ont relevé que le profil des déformations est plus localisé à la rupture pour l’approche en gradient. Ils utilisent le modèle à écrouissage linéaire décrit par :

$$D = \begin{cases} \frac{Y_c}{Y} \frac{Y - Y_0}{Y_c - Y_0} & \text{si } Y < Y_c \\ 1 & \text{si } Y \leq Y_c \end{cases} \quad (1.23)$$

où  $Y_c$  est une valeur critique pour laquelle  $D$  atteint la valeur 1. Ils obtiennent même une localisation des déformations, dans le cas de l’approche en gradient, sur un seul élément. Cette loi d’évolution de l’endommagement sera testée avec notre procédure car nous nous attendons à obtenir une erreur nulle dans

ce cas précis.

Une fois la macrofissure formée, son ouverture représente directement le déplacement appliqué en condition limite, puisque la déformation est nulle en tout point de la barre (Figure 1.12.(a)). Le léger écart, entre la bissectrice ( $[U] = U_{impo}$ ) et le saut, est encore une fois dû aux déformations qui restent dans les éléments voisins de l'élément central où se produit la macrofissure.

## 1.4.2 Approche 3D

Pour appliquer la méthode décrite au paragraphe 1.4.1 dans un cadre industriel sur des structures tridimensionnelles, il faut être capable de représenter une fissure à partir d'un calcul aux éléments finis, puis d'appliquer le long de celle-ci la procédure unidimensionnelle précédente. Pour des raisons de simplicité, nous présentons la méthode dans un cadre bi-dimensionnel appliquée à une poutre en flexion quatre points décentrée (Figure 1.13) mais l'extension en 3D est directe.

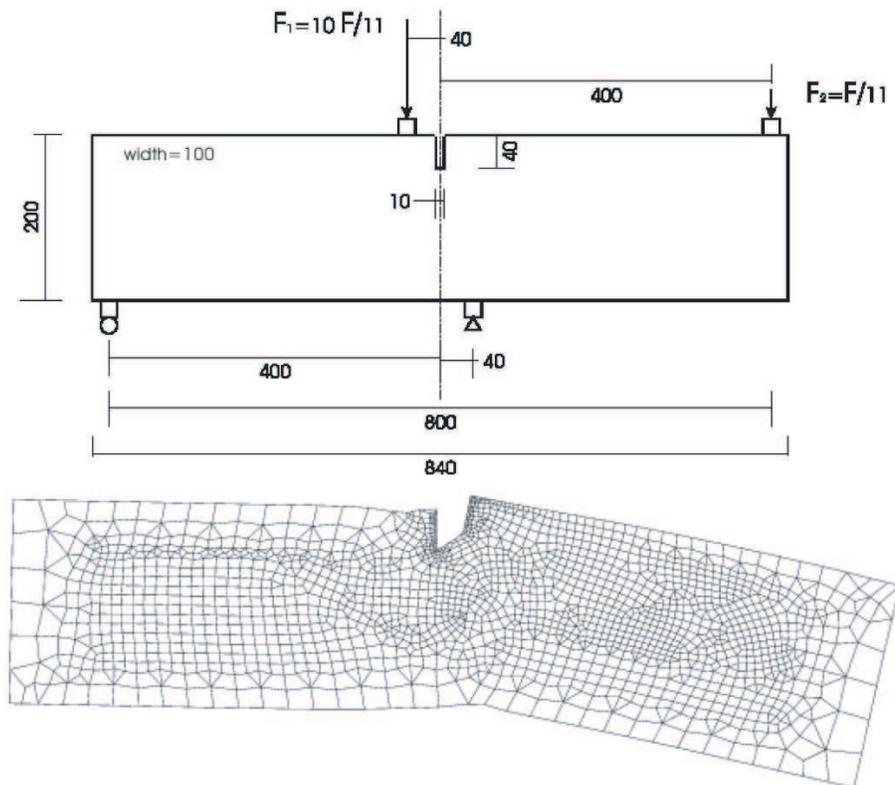


FIG. 1.13 – Géométrie et maillage de la simulation d'une poutre en flexion quatre points décentrée.

### 1.4.2.1 Position de la fissure

Nous partons de l’hypothèse, qu’au droit de la fissure le tenseur des déformations atteint sa plus grande valeur principale positive perpendiculaire à l’axe de la fissure (Patzak et Jirasek (2003) et Areias et Belytschko (2005)). Il s’agit donc de trouver une ligne orthogonale aux valeurs propres positives du tenseur de déformation. Pour cela, nous nous inspirons du travail d’Oliver et Huespe (2002) qui recherchent la direction de propagation en pointe de fissure.

On cherche les isovalues d’un champ scalaire  $\theta$  tangentes à un champ de direction  $\mathbf{T}$  (i.e.  $\partial\theta/\partial\mathbf{T} = 0$ ). Les isovalues sont les fissures “potentielles” et les directions sont perpendiculaires aux directions propres du tenseur de déformation, associé à la plus grande valeur propre. On est donc amené à résoudre un problème secondaire de thermique pour trouver la température  $\theta$  définie par :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{q}) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{q} &= -\mathbf{K}\nabla\theta \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_q \\ \theta &= \theta^d \quad \text{sur } \Gamma_\theta \end{aligned} \tag{1.24}$$

où la matrice de conductivité  $\mathbf{K}$  est définie par :

$$\mathbf{K} = [\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_x^2 & T_x T_y \\ T_x T_y & T_y^2 \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

et  $\mathbf{q}$  est le flux. Le vecteur unitaire  $\mathbf{T}$  est calculé comme la perpendiculaire au vecteur propre du tenseur de déformation associé à la plus grande valeur propre.

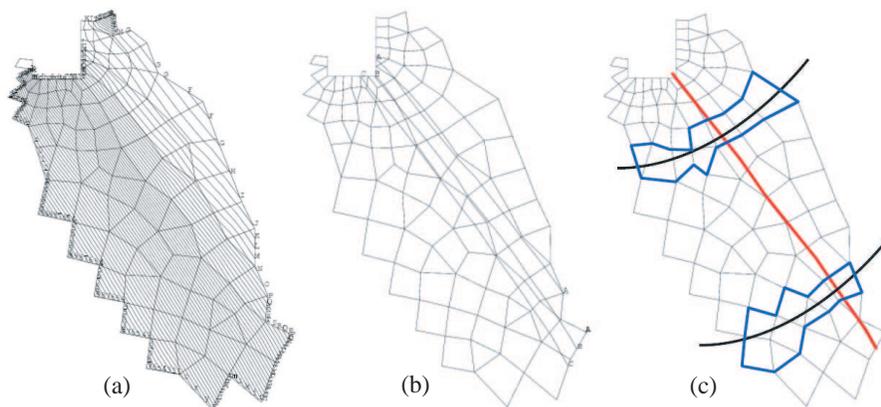


FIG. 1.14 – (a) Calculs des isovalues pour les fissures potentielles, (b) sélection de l’isovaleur B passant par le point de Gauss le plus déformé et (c) maillage de la fissure et coupe transversale pour extraire les profils unidimensionnels.

Dans la pratique, pour éviter la solution triviale, on applique une condition limite en deux points de la structure en température avec des valeurs différentes. Parmi toutes les isovaleurs (Figure 1.14.(a)), nous choisissons, pour représenter la fissure, celle passant par le point de Gauss contenant la plus forte valeur propre positive du tenseur de déformation (Figure 1.14.(b)). D'après notre hypothèse, cela est synonyme du point où la fissure est la plus ouverte. Physiquement, nous aurions pu envisager de prendre comme point de départ, l'isovaleur avec le point de Gauss le plus endommagé, mais, dans la pratique du calcul numérique, beaucoup de points d'intégration ont la même valeur (e.g. 0,999) pour l'endommagement.

#### 1.4.2.2 Calcul du saut le long de la fissure

Cette partie est en cours de développement et de validation, on en présente donc que les idées retenues. Une fois la ligne de la fissure trouvée, il faut la discrétiser pour pouvoir calculer le saut en différents points le long de cette ligne. L'idée est donc de créer un maillage, dont le support est l'ensemble des noeuds placés à l'intersection de la fissure avec les arêtes du maillage déjà existant (Figure 1.14.(c)). Les éléments de la fissure sont des éléments barre linéaires avec un point de Gauss. Au niveau de ce point d'intégration, le profil des déformations équivalentes non locales est calculé le long d'une ligne perpendiculaire aux isovaleurs ou à l'isovaleur représentant la fissure. On applique ensuite la méthode unidimensionnelle pour trouver le saut de déplacement, qui est l'inconnue nodale du problème le long de la fissure. Il reste à valider cette approche par la mesure expérimentale d'un champ de déplacement via la méthode de la corrélation d'image, dont la discontinuité correspond à l'ouverture de la fissure (voir les premiers tests de ces essais au paragraphe 4.1).



# Chapitre 2

## Couplage fluage-endommagement

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>35</b>
2.1.1	Cadre de travail	35
2.1.2	Problématique industrielle	35
2.1.3	Verrous scientifiques	36
<b>2.2</b>	<b>Mise en évidence expérimentale</b>	<b>37</b>
2.2.1	Caractérisation du matériau	37
2.2.2	Caractérisation des propriétés à rupture	37
2.2.3	Caractérisation à long terme : Essai de fluage propre	38
2.2.4	Caractérisation résiduelle : effet d'échelle	40
<b>2.3</b>	<b>Analyses qualitatives</b>	<b>42</b>
2.3.1	Analyse des bifurcations	42
2.3.2	Analyse discrète	43
<b>2.4</b>	<b>Analyse quantitative</b>	<b>45</b>
2.4.1	Modèle de fluage	45
2.4.2	Modèle d'endommagement	46
2.4.3	Couplage endommagement-fluage	46
2.4.4	Premiers résultats numériques	47
<b>2.5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>47</b>

---

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 Cadre de travail

Ce thème a été initié par Gilles Pijaudier-Cabot et Ahmed Loukili dans l'ERT lors de la thèse de Mirvat Omar (2004) dont les principaux résultats expérimentaux sont résumés dans la partie 2.2. Ces travaux comportaient deux principaux objectifs d'un point de vue expérimental. Le premier était de mettre en évidence l'interaction entre le fluage et l'endommagement par la mesure du fluage tertiaire (voir paragraphe 2.2.3). Le second était de mesurer les caractéristiques à rupture d'une structure ayant subi du fluage, et notamment, de savoir si les effets d'échelle étaient modifiés après fluage (voir paragraphe 2.2.4).

L'idée que nous avons poursuivie, avec Gilles Pijaudier-Cabot, était de comprendre d'un point de vue qualitatif, ce couplage entre les propriétés à rupture et les propriétés viscoélastiques du matériau. Deux études ont été réalisées par Theocharis Baxevanis lors de son séjour d'un an à l'institut de Recherche GeM dans le cadre du projet européen RTN-DIGA en tant que post-doctorant. La première est basée sur l'étude analytique des bifurcations des ondes harmoniques dans un milieu non local viscoélastique endommagé, alors que la seconde, fait appel au modèle numérique discret ZIP (Delaplace *et al.*, 2001) qui étudie les redistributions des contraintes au voisinage de la pointe de fissure dans un milieu viscoélastique. Finalement, une étude quantitative, par la simulation des essais expérimentaux avec un code aux éléments finis, et le développement d'un nouveau modèle couplé, sont en cours, dans le cadre de la thèse de Marina Bottoni, dirigée par Marco Savoia à l'Université de Bologne (Italie), dont j'encadre partiellement la dernière année (soutenance prévue en mars 2008). Marina Bottoni est restée 4 mois dans le cadre du projet européen RTN-DIGA et 1 mois sur un contrat avec EDF R&D. Des démarches sont en cours pour lui proposer un post-doctorat de 18 mois.

**Production scientifique associée** Baxevanis *et al.* (2008), Bottoni *et al.* (2007), Baxevanis *et al.* (2006), Desiassyifayanty *et al.* (2004)

### 2.1.2 Problématique industrielle

Cette problématique est primordiale pour les structures en béton armé ou précontraint, dont les charges d'exploitation sont très faibles, ce qui signifie que leur dimensionnement a été effectué, essentiellement en prenant en compte les charges permanentes, et que le matériau est fortement sollicité tout au long de sa vie. C'est le cas pour les structures de stockage (château d'eau, réservoir à gaz liquide, barrage, etc ...) ou fortement précontraintes sans charge de service (enceinte de confinement de centrale nucléaire).

La question est donc de connaître les caractéristiques à rupture (charge à rupture et fragilité) de ce type de structures après plus de 50 ans de charges permanentes relativement élevées par rapport à la résistance du matériau.

### 2.1.3 Verrous scientifiques

Le premier verrou est la compréhension du phénomène de fluage. On distingue tout d'abord, le fluage propre (sans échange hydrique avec le milieu environnant), du fluage de dessiccation, lié à la perte d'eau. Evidemment, ce dernier est directement lié à la présence d'eau initiale dans le matériau, au contraste d'humidité relative entre le matériau et son environnement, et enfin, à la porosité du matériau qui favorise les échanges. Les différentes mesures ont montré que ce fluage est proportionnel à l'hygrométrie interne du matériau (Kovler, 1995; Acker, 1988; Huet *et al.*, 1982) qui est sans doute le facteur prépondérant. Par ailleurs, la composition du béton, et surtout la quantité de pâte de ciment, influe sur la quantité de fluage (Li et Yao, 2001). En effet, le comportement viscoélastique du béton est principalement dû à celui de la pâte. Dans tous les cas, le niveau de contrainte joue un rôle très important.

Mazzotti et Savoia (2002) ont montré trois phases dans le fluage en compression qui seront d'ailleurs retrouvées dans les essais de la thèse d'Omar (2004) sur des essais en flexion trois points. Dans une première phase, le fluage, dit primaire, augmente rapidement, mais avec une vitesse qui décroît jusqu'à une valeur seuil. Puis, le fluage secondaire a lieu à une vitesse constante. Pour rendre compte de ces deux phases et de la dépendance de la quantité de fluage proportionnellement à la contrainte appliquée, les modèles de fluage linéaires sont suffisants. Finalement, si le niveau de charge est suffisamment élevé, de l'ordre de 80% de la contrainte à rupture, le fluage tertiaire a lieu avec une vitesse croissante qui mène à la rupture. Cette dernière phase est directement reliée à la création d'endommagement dans le matériau qui favorise le fluage.

Si les différentes mesures expérimentales concordent, les mécanismes du fluage propre font toujours débat. Powers (1965) attribue le fluage propre à la migration par diffusion des molécules d'eau adsorbées entre les feuillettes de C-S-H, dont la distance, et par conséquent l'équilibre avec les forces d'interaction, est modifiée par le chargement extérieur. Plus récemment, Neville *et al.* (1983) attribuent à l'eau uniquement un rôle de lubrifiant, qui va favoriser le glissement des feuillettes de C-S-H. Enfin, Bazant et Prasannan (1989) supposent, que l'eau joue le rôle de dissolvant d'hydrates sous contrainte, qui se redéposent dans les zones à contraintes nulles. Toutes ces hypothèses se situent à l'échelle nanométrique qui explique le fluage sur une grande échelle de temps. Les phénomènes de fluage sur une échelle de temps plus réduite ont aussi été observés (Guénot-Delahaie, 1997; Ulm et Acker, 1998; Ulm *et al.*, 1999). Comme l'échelle de temps est plus réduite, cela signifie que la migration de l'eau a lieu dans un milieu plus poreux, c'est le réseau des capillaires.

Nous n'abordons pas la thématique du fluage en tant que telle, car elle est abondamment étudiée par différentes équipes à l'échelle de la matrice cimentaire. Par conséquent, nous utiliserons pour les modèles de fluage, des modèles de la littérature (Benboudjema *et al.*, 2005) ou rhéologiques (Kelvin ou Maxwell).

Le second verrou est la compréhension et la modélisation du couplage entre le fluage et la rupture d'une structure en béton. S'il est admis que l'endommagement crée des vides à l'intérieur du matériau, ce qui favorise la migration de l'eau, et donc le fluage, par le biais d'un des phénomènes précédemment cités, l'in-

fluence du fluage sur les propriétés à rupture reste mal connue. Est-ce dû à la redistribution des contraintes ? aux déformations différées permanentes ? à l'épuisement d'un potentiel visqueux ? C'est à ces questions que nous allons apporter un début de réponse.

## 2.2 Mise en évidence expérimentale

Le programme expérimental, qui nous intéresse ici, est extrait de la thèse d'Omar (2004). Il se divise en trois parties. Dans la première, le matériau est caractérisé sous chargement statique instantané. Puis dans la deuxième, il est caractérisé du point de vue de ses propriétés à long terme sous chargement constant. Enfin, dans une dernière partie, ses propriétés résiduelles après fluage sont évaluées par des essais statiques instantanés. Chaque essai sera réalisé sur trois éprouvettes afin de faire la moyenne des résultats. Les résultats présentés ci-après, sont donc à considérer comme la moyenne de trois résultats, sauf indication contraire.

### 2.2.1 Caractérisation du matériau

Les essais statiques instantanés de caractérisation sont classiquement l'essai de compression sur un cylindre  $16 \times 32 \text{ cm}^2$  et l'essai de fendage sur le même type d'éprouvette pour déterminer le module d'Young, la résistance à la compression et à la traction. Ces essais normalisés sont complétés par des essais en flexion trois points sur des poutres entaillées de différentes tailles pour les propriétés de rupture.

Les résistances en compression à 28 et 90 jours notées  $f_{c28}$  et  $f_{c90}$  respectivement et en traction à 90 jours  $f_{t90}$  ainsi que le module dynamique à 90 jours  $E_{dyn90}$  ont été mesurés sur des essais standards et sont présentés au tableau 2.1.

$$\begin{array}{ll} f_{c28} = 41,25 \text{ MPa} & f_{c90} = 53 \text{ MPa} \\ f_{t90} = 3,48 \text{ MPa} & E_{dyn90} = 39000 \text{ MPa} \end{array}$$

TAB. 2.1 – Propriétés du matériau utilisé.

### 2.2.2 Caractérisation des propriétés à rupture

Avant de caractériser l'évolution des propriétés à rupture (énergie de fissuration et longueur caractéristique) des structures en béton après fluage, il faut caractériser leurs propriétés initiales. Il a donc été réalisé des essais sur trois tailles de poutres homothétiques de 10, 20 et 40 cm de haut (Figure 2.2.(d)) respectivement notées D1, D2 et D3. Un résultat typique est présenté à la Figure 2.1.

L'analyse de ces résultats est faite selon la loi d'effet d'échelle, initiée par Bazant (1983), et dont on peut trouver un recueil exhaustif des dérivées de la loi originale dans Bazant (2002), à partir du module d'Young

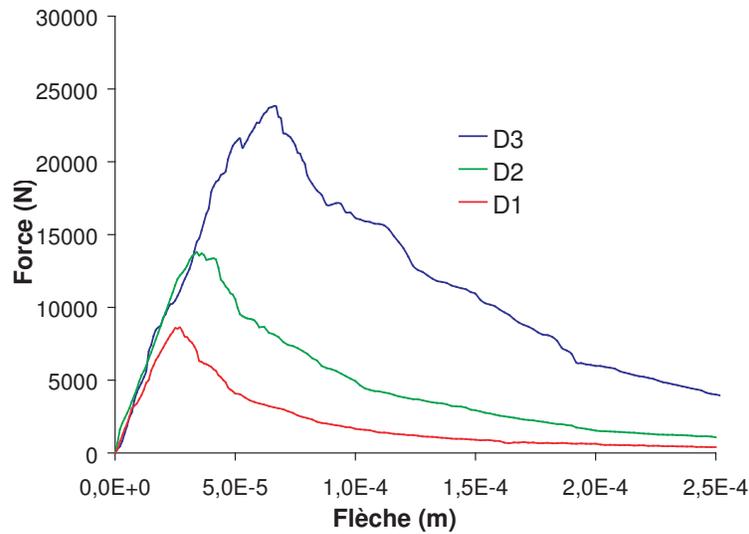


FIG. 2.1 – Courbes moyennes effort-flèche pour les trois tailles.

et des forces maximales. Une autre méthode, que nous n'appliquons pas, est de mesurer la fragilité d'une structure à partir de l'aire sous la courbe force-flèche (norme ACI).

Dans le cas de poutres entaillées homothétiques, soumises à de la flexion trois points, la loi d'effet d'échelle de Bazant s'écrit :

$$\sigma_N = \frac{B \cdot f_t}{\sqrt{1 + \frac{D}{D_0}}} \quad (2.1)$$

où  $\sigma_N$  est la contrainte nominale de la structure, liée par un facteur géométrique, à la force au pic mesurée pendant l'essai,  $B$  est un nombre adimensionnel dépendant uniquement de la forme de la structure (pas de la taille),  $f_t$  est la contrainte à rupture en traction du matériau,  $D$  est la taille caractéristique de la structure et  $D_0$  est la taille caractéristique du matériau, qui marque la transition entre le domaine ductile et le domaine fragile (voir la représentation graphique de cette loi à la Figure 2.5). La connaissance de  $D$  et la mesure de  $\sigma_N$  permettent de calculer les deux paramètres de la loi  $B \cdot f_t$  et  $D_0$ , à partir desquels, on peut calculer l'énergie de fissuration  $G_f$  et la taille de la FPZ  $c_f$  par régression linéaire (pour plus de détails sur cette dérivation, voir Dufour (2007)). Dans le cas présent, nous trouvons l'énergie de fissuration  $G_f$  et la taille de la FPZ  $c_f$  respectivement égales à 180 N/m et 3,29 mm.

### 2.2.3 Caractérisation à long terme : Essai de fluage propre

Les essais en traction directe étant toujours difficiles à maîtriser et souhaitant réaliser une analyse d'effet d'échelle, le choix s'est porté sur un essai en flexion trois points sur des poutres entaillées (voir Figure 2.2).

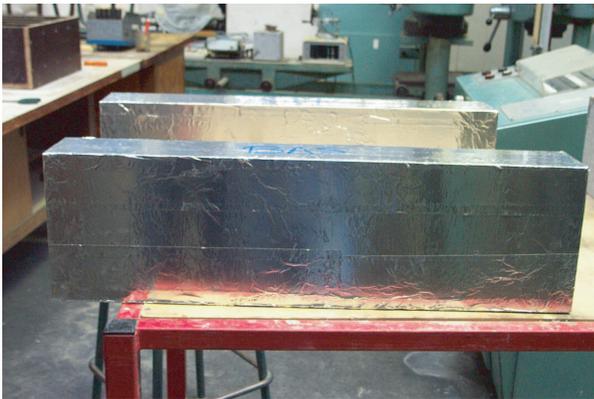
Toutefois, cet essai est critiquable du point de vue du fluage, car il ne permet pas de différencier le fluage en traction de celui en compression. Par ailleurs, bien que les échanges avec l'extérieur soient annihilés par le papier d'aluminium enveloppant les poutres (Figure 2.2.(c)), le gradient de contrainte peut faire migrer l'eau d'un point de la structure vers un autre, et par conséquent, à l'échelle du matériau le fluage ne sera pas vraiment intrinsèque ou propre. Malgré tout, on parlera de fluage propre homogénéisé.



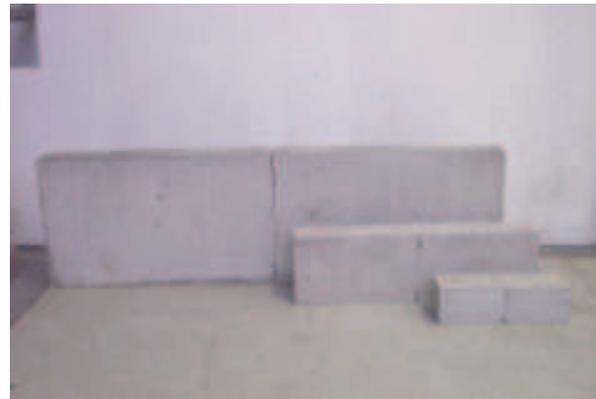
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 2.2 – (a) Mise en charge par poids mort utilisant le principe de la balance romaine. (b) Capteurs d'émission acoustique pour enregistrer la microfissuration. (c) Poutres enveloppées dans du papier aluminium pour éviter les échanges d'humidité avec l'extérieur et (d) trois tailles d'éprouvettes.

Tous les résultats observés sont similaires à ceux de la Figure 2.3. Après une réponse instantanée de la structure à la mise en charge et une courte période de fluage primaire, on mesure une évolution linéaire dans le temps de la flèche due au fluage secondaire.

La principale conclusion de cette campagne d'essai est : la cinétique de fluage ne dépend pas de la charge pour de faibles niveaux (voir Figure 2.3 (b)). Par contre, à partir d'un niveau de l'ordre de 60%, cette

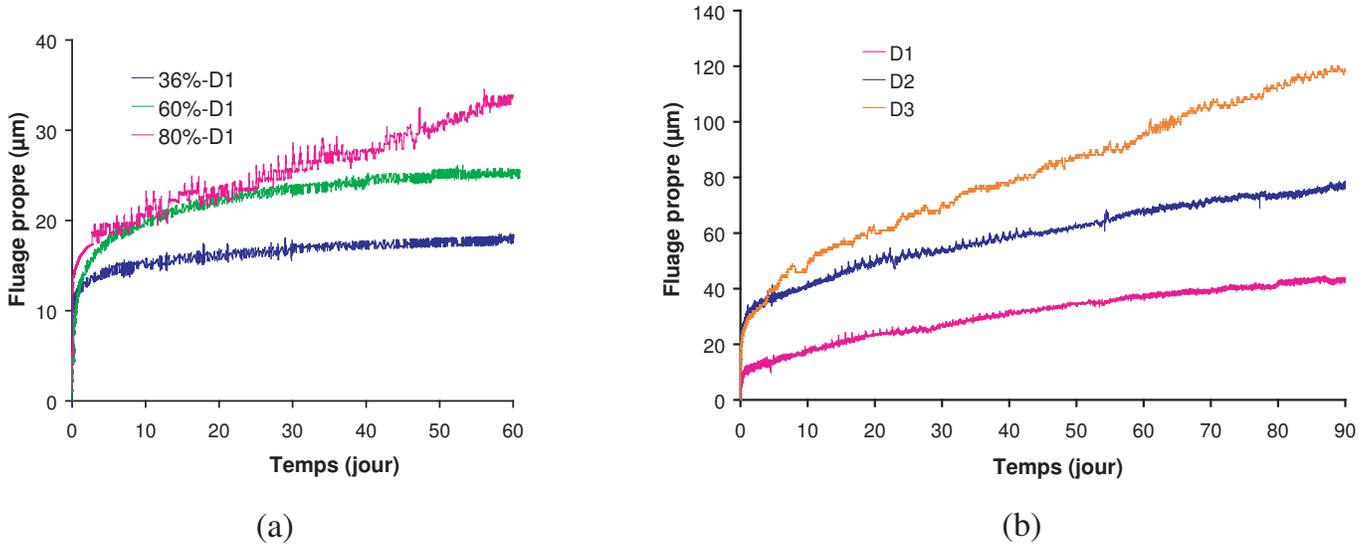


FIG. 2.3 – Courbes de fluage propre pour la poutre de petite taille soumise à différents niveaux de contraintes (a) et pour les trois tailles de poutres avec différents niveaux de charge (b).

cinétique augmente jusqu'à engendrer une rupture, qui apparaît d'autant plus tôt, que le niveau de charge est élevé. Par ailleurs, cette transition vers le fluage tertiaire se fait, à niveau de charge relatif égal, plus tôt pour des spécimens de grande dimension (voir Figure 2.3 (a)).

L'enregistrement des événements acoustiques a permis d'attribuer cet accroissement de la cinétique de fluage, à l'apparition de microfissures, et, nous a confortés dans l'idée que l'endommagement doit être couplé au fluage.

#### 2.2.4 Caractérisation résiduelle : effet d'échelle

On fait subir aux éprouvettes, qui ont "survécues" au test de fluage à un niveau de charge donné pendant trois mois (une seule a survécu pour la grande taille), un test à rupture instantanée (voir Figure 2.4 pour comparaison des réponses mécaniques avec et sans fluage).

A partir des forces au pic mesurées sur la Figure 2.4, on déduit la position des points dans le diagramme de la loi d'effet d'échelle (voir Figure 2.5). Les différentes tailles d'éprouvette permettent d'en déduire, par analyse d'effet d'échelle, les caractéristiques à rupture, à savoir, l'énergie de fissuration  $G_f$  de 105,4 N/m et la largeur de la FPZ  $c_f$  égale à 1,17 mm.

Cette analyse permet de réaliser que, malgré des écarts qui peuvent paraître faibles sur les comportements des éprouvettes de laboratoire, l'énergie de fissuration est pratiquement divisée par deux après fluage, car elle correspond à une rupture d'une éprouvette de taille infinie.

Ce résultat est primordial pour de grandes structures de type ouvrages d'art, car il signifie, qu'il faut pra-

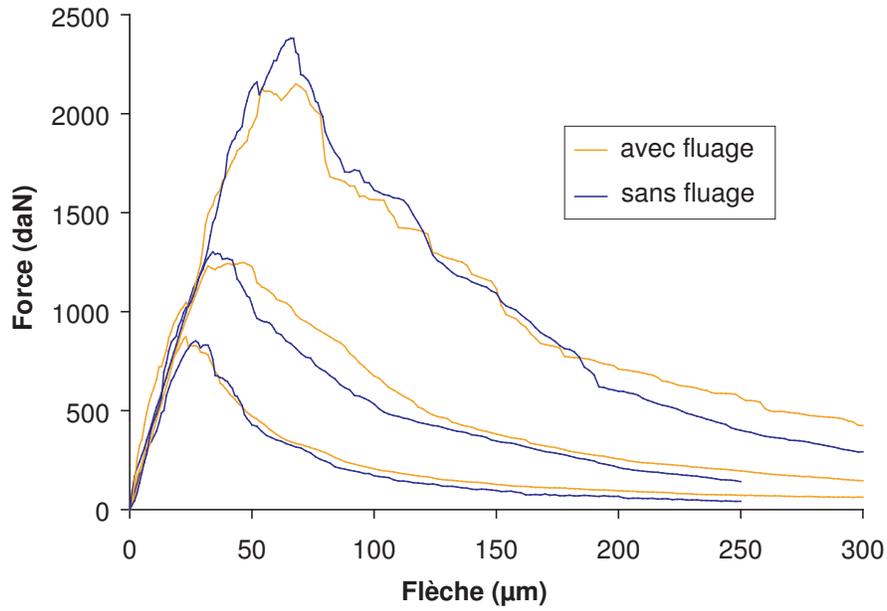


FIG. 2.4 – Courbes force-flèche moyennes des résultats sur les trois tailles avant et après fluage.

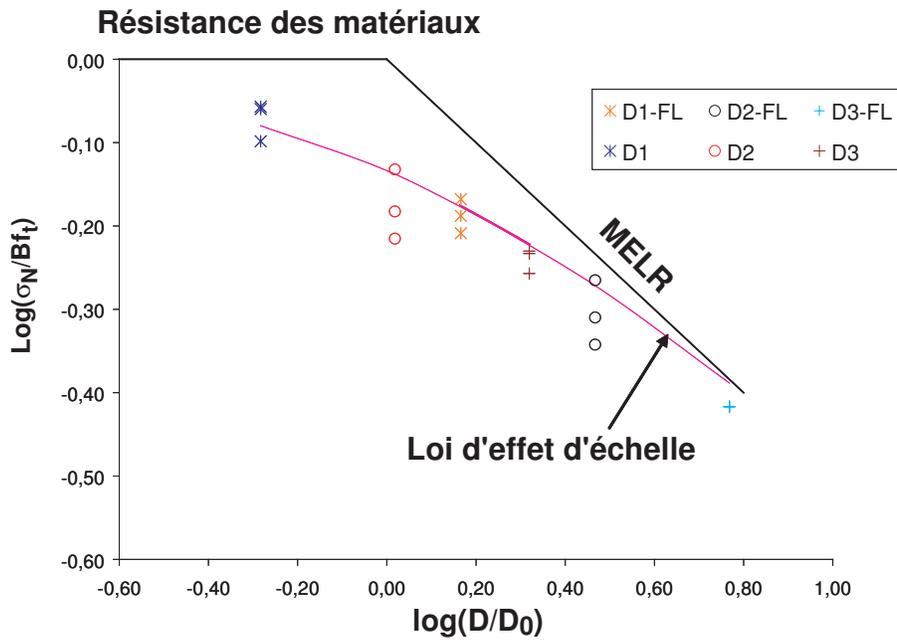


FIG. 2.5 – Diagramme de la loi d'effet d'échelle pour les trois tailles d'éprouvette avant et après fluage.

tiquement deux fois moins d'énergie pour rompre une structure qui a subi un fluage important au cours de sa vie. On notera que ce facteur 2 a été mesuré après 90 jours seulement, mais il est vrai à des niveaux de charge permanente que la réglementation pour le dimensionnement des structures n'autorisent pas.

Pour mieux comprendre ces résultats, nous avons poursuivi nos études par une analyse qualitative avec un modèle analytique et un modèle discret. Puis un modèle continu est proposé pour simuler le comportement des structures à rupture par la méthode des éléments finis.

## 2.3 Analyses qualitatives

### 2.3.1 Analyse des bifurcations

Cette étude est relative à l'article de Baxevanis *et al.* (2008) qui est l'extension, au domaine viscoélastique, des travaux de Pijaudier-Cabot et Benallal (1993). Pour des raisons de simplicité dans le développement du modèle analytique, le comportement viscoélastique est modélisé par une chaîne de Kelvin. Le couplage entre l'endommagement et le fluage est introduit par la biais d'un facteur  $(1 - \beta)$  compris entre 0 et 1, qui permet de prendre en compte uniquement une fraction de la déformation de fluage dans la déformation équivalente qui pilote l'endommagement.

A partir d'un état initial d'endommagement  $D_0$  et de déformation  $\varepsilon_0^{el,d}$ , à partir duquel les grandeurs  $\mathcal{E}_0^{el,d}$  et  $e_0^{el,d}$  sont calculées pour une direction  $\mathbf{n}$  donnée de propagation de l'harmonique. Si on perturbe le milieu par une onde harmonique, tout en vérifiant l'équation d'équilibre de propagation de cette onde dans un milieu viscoélastique. Après une transformation de Fourier, l'écriture de la condition de bifurcation, à savoir le déterminant du tenseur acoustique nul, donne une condition qui a la forme d'une ellipse dans le plan de Mohr des déformations (voir Figure 2.6).

Le premier point de bifurcation est atteint lorsque le plus grand des trois cercles de Mohr, représentatif d'un état de déformation, est tangent à la plus petite ellipse, celle qui correspond à une longueur d'onde infinie. Par construction géométrique, à partir d'un état de déformation donné, qui correspond à trois cercles dans le plan de Mohr, au-delà du premier point de bifurcation, la plus petite ellipse coupe le plus grand cercle. Dans la zone de recouvrement, il existe plusieurs longueurs d'onde  $l(\mathbf{n})$  (voir Equation 2.2), qui vérifient la condition de bifurcation.

$$l(\mathbf{n}) = \frac{\pi l_c}{\sqrt{0,5 \log \left( \left( 4\mu(\mathcal{E}_0^{el,d})^2 + \frac{4\mu^2}{\lambda+2\mu} (e_0^{el,d} + \frac{\lambda}{2\mu} \text{tr}(\varepsilon_0^{el,d}))^2 \right)^{0,5} \frac{(1+\beta+\frac{1-\beta}{\kappa_0}) F(\bar{y}_0)}{(1-D_0)} \right)}}. \quad (2.2)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé,  $F$  est la loi d'évolution de l'endommagement pilotée par la variable non locale  $\bar{y}$  qui vaut initialement  $\bar{y}_0$ ,  $l_c$  est la longueur caractéristique du modèle non local, et  $\kappa_0$  est la fraction de la déformation élastique sur la déformation totale à l'état initial.

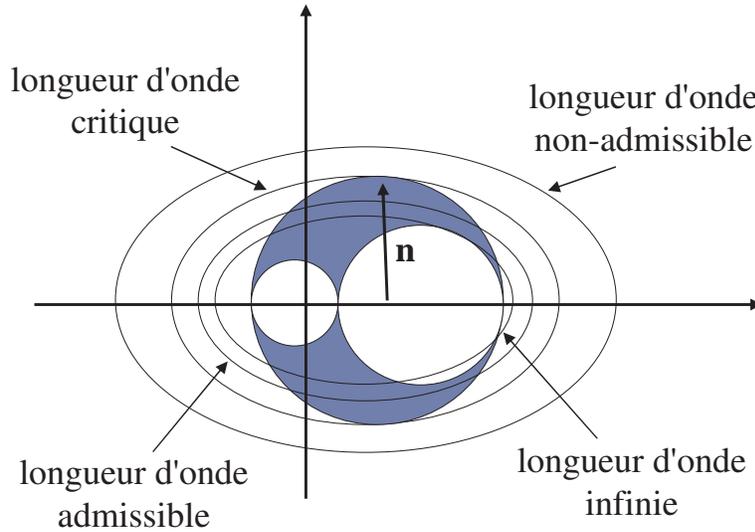


FIG. 2.6 – Solution géométrique du problème de bifurcation au-delà du premier état critique.

Pour une direction de propagation donnée, la plus petite longueur d’onde critique (Equation 2.2) diminue lorsque la part de fluage augmente dans l’état initial (i.e.  $\kappa_0$  augmente). Par ailleurs, si on introduit une part croissante du fluage dans l’endommagement (i.e.  $\beta$  diminue), les longueurs d’onde critiques diminuent aussi. Dans les deux cas, cela revient à dire, que la zone de localisation de l’endommagement se réduit lorsqu’on prend en compte la viscoélasticité dans le matériau, ou encore que, toute chose étant par ailleurs égale, le matériau est d’autant plus fragile qu’il est visqueux.

### 2.3.2 Analyse discrète

Cette étude, comme la précédente est une extension d’un modèle existant (Delaplace *et al.*, 2001) à un milieu viscoélastique (Baxevanis *et al.*, 2006). Soit une fissure dans un matériau hétérogène avec une zone de microfissures en pointe, si on considère que la fissure est un axe de symétrie, alors on peut représenter le matériau par une poutre, et la fissure par une série de fibres en parallèle, dont les résistances sont distribuées de manière aléatoire (Figure 2.7). Pour obtenir la propagation de la fissure en régime permanent, on déplace le coin à vitesse constante suivant la direction  $x$ .

En enregistrant l’évolution de la force appliquée à la poutre au cours du temps, on observe une réponse très fluctuante (Figure 2.8) en fonction des ruptures aléatoires de fibres, et des forces qu’elles redistribuent dans leur voisinage. A chaque pic de force, on trace une avalanche, dont la taille est définie par le nombre de fibres qui ont rompu, avant de retrouver au moins le même niveau d’effort. Autrement dit, quand une fibre de forte résistance se rompt, elle redistribue beaucoup d’effort, ce qui engendre, par “effet boule de neige” (avalanche), la rupture des fibres voisines. On obtient alors une avalanche de taille importante.

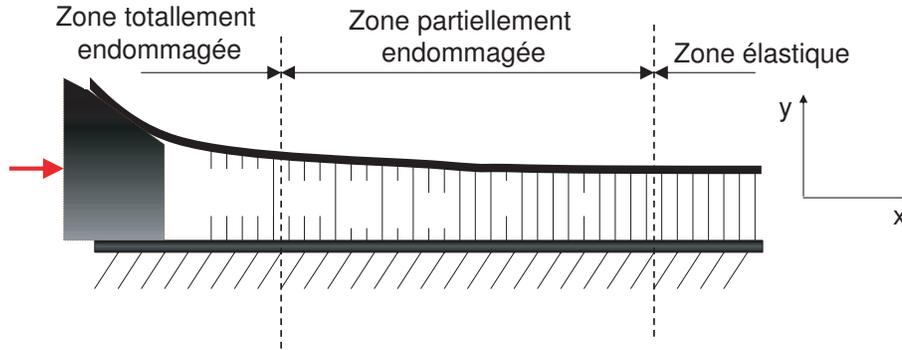


FIG. 2.7 – Schéma du modèle ZIP.

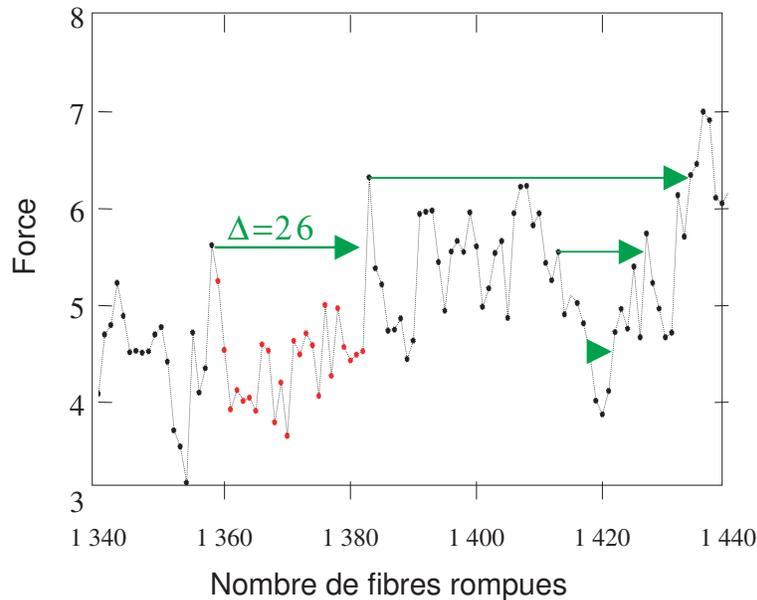


FIG. 2.8 – Evolution de la force au cours du temps. Définition d'une avalanche de taille 26 par exemple

Evidemment, les petites avalanches sont plus nombreuses que les grandes. Mais, ce qui est très intéressant dans cette approche, est que dans un diagramme logarithmique du nombre d'avalanches enregistrées en fonction de leur taille, deux droites apparaissent distinctement, une pour les petites avalanches de pente  $-1,5$  et une autre pour les grandes avalanches de pente  $-2,05$  (voir Figure 2.9). L'analyse statistique de ces exposants dit que, pour  $-1,5$ , on a un comportement aléatoire sans corrélation, et pour  $-2$ , on a des événements corrélés. La taille de l'avalanche, où les deux régimes se croisent, est donc relative à la taille de la zone de microfissuration (FPZ). On peut ainsi définir une longueur caractéristique.

En faisant varier les propriétés de la poutre et des fibres, on observe que le cas où les fibres et la poutre sont

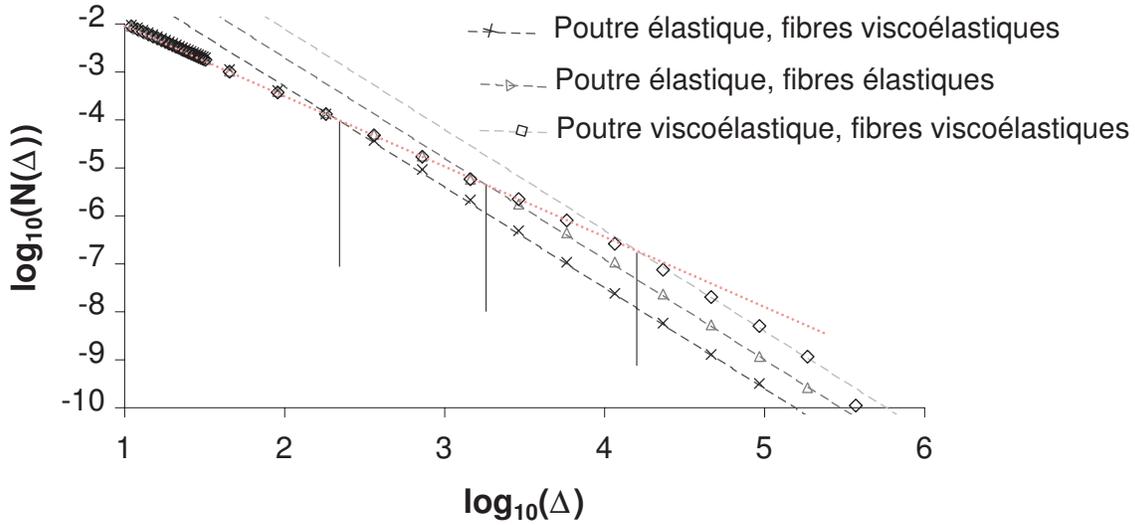


FIG. 2.9 – Nombre d’avalanches en fonction de leur taille.

élastiques ( $\triangle$ ) correspond à une longueur caractéristique plus petite, que si seule la poutre est viscoélastique ( $\diamond$ ), mais plus grande que si seules les fibres sont viscoélastiques ( $\times$ ).

Nous interprétons ces résultats en supposant qu’une fissure passe préférentiellement dans la pâte de ciment (résistance plus faible), qui est plus visqueuse que les granulats, car le fluage a essentiellement lieu dans les C-S-H de la pâte de ciment. Par conséquent, nous sommes dans le cas de fibres viscoélastiques et d’une poutre élastique, qui d’après le modèle ZIP présente une longueur caractéristique plus faible que le cas purement élastique. Il y a donc concordance, d’un point de vue qualitatif, des résultats donnés par le modèle ZIP avec les résultats expérimentaux.

## 2.4 Analyse quantitative

Afin de réaliser des simulations numériques du comportement de structures en béton, en tenant compte des effets du fluage sur la rupture du matériau, nous avons proposé de coupler un modèle de fluage (Benboudjema *et al.*, 2005) à un modèle d’endommagement (Badel, 2001).

### 2.4.1 Modèle de fluage

Ce modèle est basé sur le comportement micromécanique des hydrates. Les déformations  $\epsilon$  sont traditionnellement séparées en une partie élastique  $\epsilon_e$  et une partie de fluage  $\epsilon_{cr}$ . La déformation de fluage s’écrit comme la somme d’une partie réversible et d’une partie irréversible. Chacune d’elles est décomposée en

une partie sphérique et une partie déviatorique, pour donner finalement :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{cr} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{cr}^{sr} + \boldsymbol{\varepsilon}_{cr}^{si} + \boldsymbol{\varepsilon}_{cr}^{dr} + \boldsymbol{\varepsilon}_{cr}^{di} \quad (2.3)$$

Chacune des composantes de fluage peut être incrémentée en fonction de l'état de contrainte sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{cr,n} = \boldsymbol{\varepsilon}_{cr,n-1} + \mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n + \mathbf{C}_n \boldsymbol{\sigma}_n \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont des matrices dépendantes de la déformation de fluage, de l'humidité relative et du temps.

**Remarque :** Comme ce modèle ne comporte pas de limite asymptotique, la déformation de fluage tend linéairement vers l'infini au cours du temps (fluage secondaire).

## 2.4.2 Modèle d'endommagement

Nous utilisons dans cette partie, un modèle d'endommagement scalaire isotrope non symétrique, capable de modéliser la refermeture de fissures, et de prendre en compte le confinement du matériau. Ce qui nous intéresse surtout dans ce modèle est la simplicité du comportement en traction uniaxiale, à écrouissage linéaire. Le seuil d'endommagement s'écrit :

$$\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 \cdot tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot H(-tr(\boldsymbol{\varepsilon})) \quad (2.5)$$

où  $\kappa_0$  et  $\kappa_1$  sont des constantes. La loi d'évolution de l'endommagement s'écrit en fonction d'une énergie :

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\lambda}{2} tr^2(\boldsymbol{\varepsilon}) H(tr(\boldsymbol{\varepsilon})) + \mu \varepsilon_j^2 H(\varepsilon_j) \quad (2.6)$$

où  $H$  est la fonction Heaviside et  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes élastiques de Lamé. Dans sa version non locale, on introduit dans la relation (2.6) la déformation régularisée, issue de l'approche en gradient (1.13), à savoir :

$$W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{\lambda}{2} tr^2(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) H(tr(\boldsymbol{\varepsilon})) + \mu \bar{\varepsilon}_j^2 H(\varepsilon_j) \quad (2.7)$$

Finalement, la loi d'évolution de l'endommagement s'exprime de la façon suivante :

$$d = \frac{1}{\gamma} \left( \sqrt{\frac{1+\gamma}{\kappa} W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})} - 1 \right) \quad (2.8)$$

où  $\gamma = E_0/E_1$  avec  $E_0$  et  $E_1$  respectivement le module d'Young et la pente d'écrouissage négatif.

### 2.4.3 Couplage endommagement-fluage

Le couplage entre ces deux modèles se fait par l'introduction, d'une part, d'une fraction de la déformation de fluage dans l'évolution de l'endommagement et, d'autre part, de la notion de contrainte effective pour le calcul du fluage.

Dans un premier temps, la contrainte effective  $\sigma'$  définie par :

$$\sigma' = \frac{\sigma}{1 - D} = E\epsilon^e \quad (2.9)$$

est introduite dans l'Equation (2.4) en lieu et place de la contrainte totale  $\sigma$ .

Dans un second temps, nous introduisons la déformation de fluage dans le calcul de la déformation régularisée qui pilote l'endommagement. On peut choisir un couplage fort, soit :

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_e + \bar{\epsilon}_{cr} \quad (2.10)$$

Les premiers calculs ont montré, que le fluage tertiaire apparaît très tôt dans le temps, même pour de faibles niveaux de chargement. Nous proposons d'affaiblir le couplage, en ne prenant en compte qu'une partie de la déformation de fluage dans la variable qui pilote l'endommagement, soit :

$$\bar{\epsilon} = (1 - \beta) \bar{\epsilon} + \beta \bar{\epsilon}_e = \bar{\epsilon} - \beta \bar{\epsilon}_{cr} = \bar{\epsilon}_e + (1 - \beta) \bar{\epsilon}_{cr} \quad (2.11)$$

où  $\beta$  est un coefficient compris entre 0 et 1.

Relativement à la remarque du paragraphe 2.4.1, comme la déformation de fluage tend vers l'infini, quel que soit le niveau de chargement lors des essais de fluage, le fluage tertiaire apparaîtra toujours à cause de ce couplage. Or, le retour d'expériences semble indiquer qu'en-deçà d'une limite (non définie à ce jour), il ne peut y avoir de rupture sous chargement constant ... à moins que l'on n'ait pas attendu assez longtemps. Ce modèle de fluage atteindra donc une de ses limites, lorsqu'on s'intéressera à des durées de plusieurs dizaines d'années pour lesquelles un comportement asymptotique est nécessaire.

### 2.4.4 Premiers résultats numériques

Les premiers résultats numériques, réalisés sur la poutre de taille moyenne, ont été effectués avec un modèle d'endommagement local, en calant la taille des éléments sur la taille de la FPZ estimée.

La Figure 2.10 montre que, pour une charge donnée, plus  $\beta$  est grand, plus on prend en compte les déformations de fluage dans le calcul de l'endommagement, et plus le fluage tertiaire apparaît tôt. Nous retrouvons sur cette courbe les trois phases caractéristiques (fluage primaire, secondaire et tertiaire) d'un essai de fluage à fort niveau de contrainte.

Pour une valeur donnée de  $\beta$ , on retrouve à la Figure 2.11, que plus la charge de fluage est élevée, plus le fluage tertiaire apparaît tôt, comme mesuré expérimentalement (voir Figure 2.3).

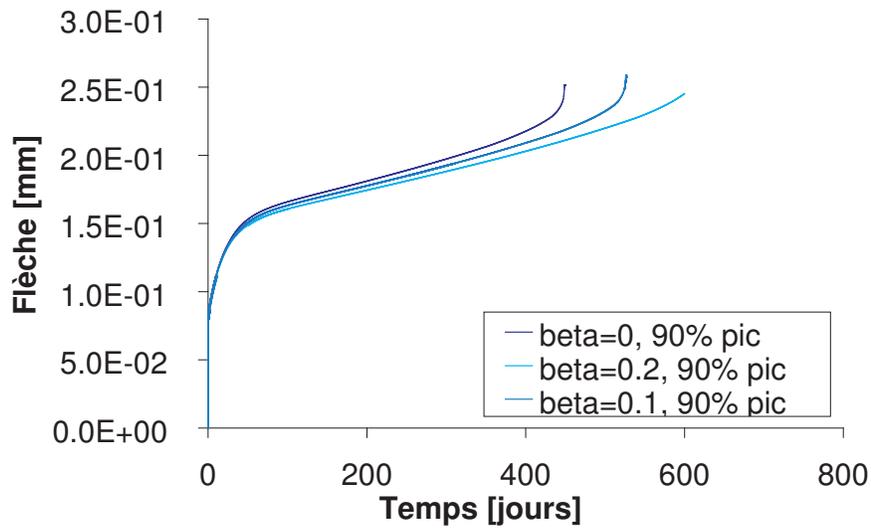


FIG. 2.10 – Evolution de la flèche au cours du temps pour différentes valeurs du coefficient de couplage  $\beta$ .

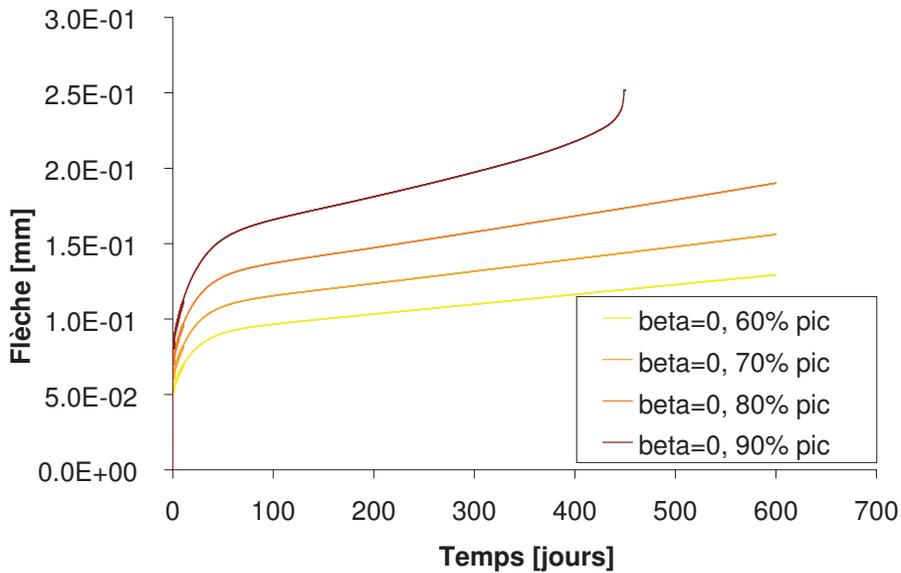


FIG. 2.11 – Evolution de la flèche au cours du temps pour différentes valeurs de la charge de fluage.

Par ailleurs, lorsque le niveau de chargement de la phase de fluage augmente, sur la Figure 2.12 on observe que le décalage vers la mécanique élastique linéaire de la rupture est d'autant plus important. Finalement, cela signifie que plus le couplage entre l'endommagement et le fluage est fort, plus le matériau devient fragile.

Ces résultats sont à comparer avec les résultats expérimentaux de la Figure 2.5.

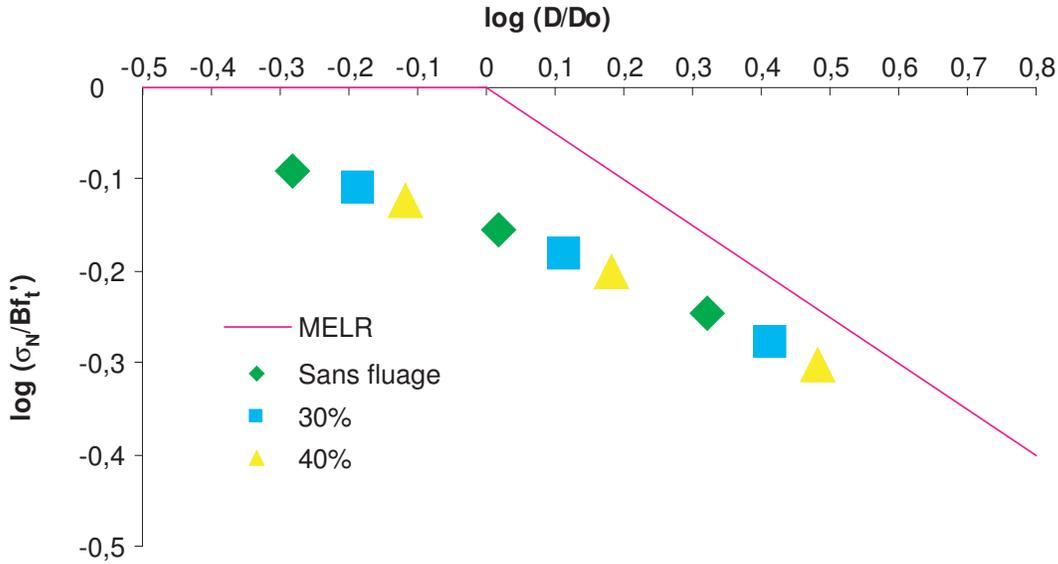


FIG. 2.12 – Influence du niveau de charge de fluage sur la fragilité de la structure.

## 2.5 Conclusions et perspectives

La fragilisation des structures en béton après fluage, observée expérimentalement, a été corroborée qualitativement par des calculs analytique et numérique, pour lesquels une réduction de la longueur caractéristique a été observée à chaque fois que la viscosité du matériau est introduite.

Il reste à valider quantitativement les simulations numériques à partir des résultats expérimentaux. Pour ce faire, les paramètres du modèle d'endommagement non local seront calés sur les essais à rupture avant fluage et, les paramètres du modèle de fluage sur la partie linéaire des essais sous chargement constant. Finalement, le coefficient  $\beta$  sera calé sur les essais mécaniques à rupture réalisés sur des éprouvettes de différentes tailles, et notamment, sur le décalage sur la courbe d'effet d'échelle dû au fluage. Si la validation est positive, alors on pourra considérer  $\beta$  comme un paramètre matériau et une campagne d'essais sera lancée sur d'autres types de chargement. Sinon, il faudra concevoir un nouveau couplage.

Malgré tout, nous ne pouvons toujours pas répondre à la question fondamentale, en quoi le fluage influence-t-il les propriétés à rupture ? Le couplage réalisé dans l'approche continue, et que nous retrouvons en partie dans l'analyse des bifurcations, dit que la prise en compte des déformations de fluage dans l'évolution de l'endommagement rend le matériau plus fragile.

Toutefois, expérimentalement, il a aussi été relevé des événements acoustiques pendant la phase de fluage secondaire, est-ce donc l'endommagement initial lors des essais à rupture qui entraîne cette fragilité ? Pour répondre partiellement à cette interrogation, nous envisageons de reproduire le même type d'essais réalisés pendant la thèse d'Omar (2004). Cependant, pour différencier le rôle de l'endommagement de celui de la

déformation de fluage, nous devons découpler ces deux phénomènes. D'une part, nous chercherons à obtenir la même déformation de fluage mais avec un niveau d'endommagement différent, par des essais à différents niveaux de chargement sur des durées différentes. D'autre part, sur une même série d'essai, nous laisserons une partie des déformations de fluage recouvrer, entre l'essai de fluage et celui de rupture, on aura ainsi le même endommagement initial, mais pas la même déformation de fluage. Les mesures d'effet d'échelle à rupture permettront donc de dissocier les effets des déformations de ceux de l'endommagement. On peut aussi imaginer de "retourner" la poutre entre les essais de fluage et les essais à rupture. Lors des essais de fluage, l'endommagement a lieu en partie inférieure qui est tendue. Si la rupture s'opère à partir de la partie haute, alors on pourra estimer le rôle relatif de l'endommagement et de la déformation de fluage.

Par ailleurs, étant donné les explications physico-chimiques du fluage à l'échelle des C-S-H, on peut se demander si le matériau ne posséderait pas un "potentiel" visqueux de fluage. Or, à l'échelle microstructurale, la propagation d'une fissure est dynamique. On sait que sa vitesse de propagation dépend de la viscosité du milieu, qui aurait diminué après les essais de fluage, car l'eau aurait déjà migrée. La vitesse de propagation serait alors plus élevée après fluage, ce qui correspond à une fragilisation du matériau. Cette explication pourra être confrontée à des essais où le chargement à rupture sera différent de celui de fluage. Par exemple, le fluage sera réalisé en traction et la rupture en flexion trois points.

Une autre perspective intéressante serait de coupler la perméabilité avec le fluage. En effet, nous avons vu qu'à cause du fluage les déformations augmentent dans le temps. Dans les parties tendues, une des conséquences doit être l'augmentation de l'ouverture des microfissures et donc de la perméabilité. Par ailleurs, si le fluage est dû à la migration de l'eau dans le matériau, suivant les directions relatives des contraintes de fluage et des chemins de percolation, on peut imaginer que des pores se vident de l'eau interstitielle, comme par effet de séchage, et deviennent disponibles pour la percolation du gaz. Nous envisageons donc de faire fluer des éprouvettes en traction et en compression, puis de mesurer la perméabilité à l'air sec.



# Chapitre 3

## Fissuration des structures en béton précontraint

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>53</b>
3.1.1	Cadre de travail	53
3.1.2	Contexte industriel	53
3.1.3	Verrous scientifiques	53
<b>3.2</b>	<b>Modèle élasto-endo-plastique</b>	<b>54</b>
3.2.1	Modèle plastique	54
3.2.2	Couplage plasticité-endommagement	56
3.2.3	Estimation de l'opérateur tangent	57
<b>3.3</b>	<b>Validation du modèle</b>	<b>58</b>
3.3.1	Tests élémentaires	58
3.3.2	Poutre de grande hauteur	59
3.3.3	Simulation d'un Volume Structurel Représentatif	62
<b>3.4</b>	<b>Perspectives</b>	<b>64</b>

---

## 3.1 Introduction

### 3.1.1 Cadre de travail

Ce thème est la suite du travail de thèse de Ludovic Jason (2004) qui a débuté dans le cadre du programme européen *MAECENAS*. Lors de ce projet, avait été développé et intégré dans un code aux éléments finis, un modèle d'endommagement couplé à la plasticité avec une approche locale.

Ce chapitre est relatif à la thèse d'Abbas Krayani (2007). Les objectifs de cette thèse sont l'amélioration numérique du modèle et son extension avec une approche non locale.

**Production scientifique associée** Krayani *et al.* (2007)

### 3.1.2 Contexte industriel

Le contexte industriel est celui des enceintes de confinement des centrales nucléaires à double paroi, dont on veut étudier le comportement mécanique, aussi bien en phase de service qu'à rupture. Dans ce type de structure, le matériau béton est confiné par l'intermédiaire de la précontrainte verticale et orthoradiale, et par une épaisseur de près de 1 m. L'état de contrainte fortement triaxial engendre pour le béton, comme pour tout géomatériau, une résistance accrue et un changement de mode de rupture préférentiel de mode I à mode II. Toutefois, dans des zones singulières (sas d'entrée, gousset, etc.) des contraintes de traction peuvent entraîner des modes de rupture "classiques" en mode I. Il est donc nécessaire d'utiliser un modèle capable de reproduire le comportement mécanique du matériau soumis à tout type de chargements.

Par ailleurs, l'objectif du gestionnaire du parc nucléaire est d'estimer les taux de fuite, en cas d'accident du circuit primaire de refroidissement. Il est donc crucial non seulement de simuler la réponse globale de la structure, mais aussi, et surtout, de bien prévoir le champ des variables d'état.

Par ailleurs, comme la géométrie étudiée est de grande taille, il est important d'avoir un modèle robuste et rapide. Il faut donc développer les opérateurs tangents associés aux modèles.

### 3.1.3 Verrous scientifiques

Le béton est certainement un des seuls matériaux, qui nécessite d'être modélisé jusqu'à sa rupture, car dans les structures, l'association avec des aciers permet encore de supporter des charges même en présence de fissures ouvertes.

Le verrou scientifique est donc de disposer d'un modèle suffisamment élaboré pour modéliser le comportement du matériau béton sous tout type de chargement, de la phase élastique à la rupture ; un modèle capable de reproduire la refermeture de fissure, la localisation des déformations au bord des lèvres de la fissure

tout en régularisant l'endommagement, et évidemment, dont l'utilisation dans un code numérique permet d'obtenir rapidement des résultats précis de manière robuste.

Un tel modèle n'est pas encore disponible dans la littérature. En revanche, il existe un grand nombre de modèles capables de représenter le comportement du matériau pour un type et un niveau donnés de sollicitations mécaniques. Ils sont divisés en deux grandes classes, la première se situe dans le cadre de la mécanique des milieux continus et s'intéresse surtout à l'amorçage de la (micro) fissuration, alors que les approches discontinues modélisent la propagation des macrofissures en utilisant la mécanique élastique (ou plastique) de la rupture.

Les approches discontinues ont été initiées pour le béton par Ngo et Scordelis (1967), puis améliorées par Hillerborg *et al.* (1976) en prenant en compte une zone de microfissuration en pointe de fissure, par l'introduction de la notion de fissure fictive. Nous omettons volontairement les méthodes discrètes (Cundall et Strack, 1979) ou sans maillage (Gingold et Monaghan, 1977; Belytschko *et al.*, 1996) qui n'ont jamais fait leurs preuves pour des calculs structurels, où le nombre de discontinuités reste très limité. La difficulté est surtout d'un point de vue numérique, pour représenter des discontinuités des champs cinématiques, qui ne soient pas dépendants de la discrétisation spatiale. La méthode X-FEM (Moes *et al.*, 1999) représente certainement, l'aboutissement de toutes les recherches dans le domaine numérique, par l'introduction de level sets, lieux des discontinuités, qui peuvent se propager au travers des éléments finis.

Dans les approches continues, les modèles plastiques représentent les déformations différées, alors que les modèles d'endommagement reproduisent la perte de rigidité par décohésion du matériau.

Récemment, l'idée de réaliser une transition entre une approche continue et une approche discontinue a émergé. Or, malgré les efforts de plusieurs équipes de recherche (Mazars et Pijaudier-Cabot (1996), Simone *et al.* (2003), Comi *et al.* (2007), etc.), la transition entre ces deux modes de description du comportement mécanique, reste difficile à mettre en œuvre, car ils font appel à des variables internes non compatibles entre elles, ou alors, basée sur la micromécanique, la transition se limite à des modes de propagation bien définis (Pichler *et al.*, 2007).

Dans notre étude, nous nous intéressons essentiellement au comportement en service de structures où le matériau est fortement confiné. Nous proposons donc de rester dans le cadre de la mécanique de l'endommagement en intégrant un modèle de plasticité pour reproduire le comportement volumique du béton.

## 3.2 Modèle élasto-endo-plastique

### 3.2.1 Modèle plastique

Si la perte de raideur du matériau est représentée par la partie endommagement du modèle, il faut que la partie plastique reproduise, d'une part, les déformations irréversibles observées pour les bétons (Ramtani, 1990) à cause de la non refermeture des fissures, et d'autre part, le comportement multiaxial, à savoir le

passage de contractant à dilatant (Figure 1.1) et l'influence de la contrainte isotrope sur la résistance du matériau (effet de confinement). Ce dernier effet, comme pour tous les géomatériaux, peut entraîner des ruptures en cisaillement. Nous choisissons donc le modèle de Crouch et Tahar (2000) qui est une version modifiée du modèle d'Etse et Willam (1994).

Une des caractéristiques de ce modèle est qu'il comporte une surface seuil fermée, décrite par une seule variable interne  $k_h$ . Il s'écrit à partir des trois invariants normalisés de contraintes  $(\bar{\xi}, \bar{\rho}, \theta)$  :

$$\bar{\xi} = \frac{tr(\boldsymbol{\sigma})}{\sqrt{3}r_c}, \quad \bar{\rho} = \frac{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}}{r_c}, \quad \theta = \frac{1}{3} \arcsin \left( -\sqrt{6} \frac{\mathbf{s} : \mathbf{s} : \mathbf{s}}{(\mathbf{s} : \mathbf{s})^{3/2}} \right) \quad (3.1)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{s}$  respectivement les tenseurs des contraintes totales et déviatoriques.  $r_c$  est une constante du modèle relative à la résistance en compression du matériau.

La surface seuil a pour équation :

$$F = \bar{\rho}^2 - \frac{\hat{k}(\bar{\xi}, k_h) \bar{\rho}_c(\bar{\xi})}{r^2(\bar{\xi}, \theta)} \quad (3.2)$$

La fonction d'écroûissage  $\hat{k}$  quantifie l'évolution de la surface de charge avec la déformation plastique. Elle est donnée par :

$$\hat{k} = k^{2p} \left( 1 - \frac{\bar{\xi}^2}{\xi_h^2} \right), \quad \text{où} \quad \xi_h = \frac{A}{1-k} \quad \text{et} \quad k = k_0 + (1-k_0) \sqrt{k_h(2-k_h)} \quad (3.3)$$

avec  $p$ ,  $A$  et  $k_0$  trois paramètres du modèle. L'invariant deviatorique,  $\bar{\rho}_c$ , est défini par :

$$\bar{\rho}_c = \left( \frac{1}{6} \right)^\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \left( -n + \sqrt{n^2 - 12\sqrt{3}n\bar{\xi} + 36} \right)^\gamma \quad (3.4)$$

dans lequel

$$n = \frac{3 \left( 1 - \bar{f}_t^{\frac{2}{\gamma}} \right)}{\bar{f}_t + 2\bar{f}_t^{\frac{1}{\gamma}}} \quad \text{avec} \quad \bar{f}_t = \frac{r_t}{r_c} \quad (3.5)$$

où  $\gamma$  est une constante et  $r_t$  représente la résistance en traction dans la forme originale du modèle.

Enfin,  $r$  est la fonction de forme déviatorique initialement développée par Bhowmik et Long (1990), et correspond à un cas particulier de la surface elliptique de Willam et Warnke (1974),

$$r = \frac{2d_0}{d_1 - \sqrt{d_1^2 - 4d_0d_2}} \quad (3.6)$$

avec

$$\begin{aligned}
 d_o &= c_1 \cos^2 \theta - c_2 \sin^2 \theta + c_3 \sin \theta \cos \theta, & c_0 &= \frac{(2 - \sqrt{3}B_1)(2B_0 - \sqrt{3}B_1)}{(B_1(1 + B_0) - \sqrt{3}B_0)}, \\
 d_1 &= 2(c_4 \sqrt{3} \cos \theta - c_5 \sin \theta), & c_1 &= 3 - c_0(1 + B_0)^2, \\
 d_2 &= B_0(4 - 3B_0 c_0), & c_2 &= 1 + 3c_0(1 - B_0^2)^2, \\
 B_0 &= \frac{\bar{\rho}_e}{\bar{\rho}_c}, & c_3 &= 2c_0 \sqrt{3}(1 - B_0^2), \\
 B_1 &= \frac{\sqrt{3}(1 - \alpha)B_0}{1 + B_0} + \frac{2\alpha B_0}{\sqrt{3}}, & c_4 &= (1 + B_0)(1 - B_0 c_0), \\
 \bar{\rho}_e &= \left(\frac{1}{3}\right)^\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-n + \sqrt{n^2 - 3\sqrt{3}n\bar{\xi} + 9}\right)^\gamma, & c_5 &= (1 - B_0)(1 - 3B_0 c_0),
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

où  $\alpha$  un paramètre du modèle.

En utilisant les résultats d'Etse et Willam (1994), l'évolution de la variable interne  $k_h$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \dot{k}_h &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon^p : \varepsilon^p}}{\zeta(\sigma')} \quad \text{si } k_h < 1, \\
 \dot{k}_h &= 0 \quad \text{si } k_h = 1,
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

avec  $\zeta$  qui dépend du premier invariant normalisé :

$$\begin{aligned}
 \zeta &= -A_h + \sqrt{A_h^2 - B_h \bar{\xi} + C_h} \quad \text{si } \bar{\xi} \leq 0, \\
 \zeta &= -A_h + \sqrt{A_h^2 + C_h} \quad \text{si } \bar{\xi} > 0,
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$A_h$ ,  $B_h$  et  $C_h$  sont trois paramètres du modèle. Le modèle de plasticité nécessite donc au total la connaissance de 10 coefficients. Notons que l'Equation (3.8) suppose pour  $k_h$  des valeurs comprises entre 0 et 1. Pour  $k_h = 1$ , la surface seuil devient une surface limite, pour laquelle aucun écrouissage n'est plus possible. Pour de plus amples détails sur le comportement élémentaire de ce modèle, et sur l'influence des paramètres sur la réponse mécanique, voir les travaux de Jason (2004).

### 3.2.2 Couplage plasticité-endommagement

Le modèle d'endommagement est celui de Mazars (1984), régularisé avec une approche en gradient (voir paragraphe 1.4.1.1). Le couplage se fait simplement en utilisant, comme pour le fluage (paragraphe 2.4.3) le principe des contraintes effectives  $\sigma'$  qui sont les contraintes réellement reprises dans le matériau, contrairement aux contraintes totales  $\sigma$  homogénéisées. On a :

$$\sigma' = \frac{\sigma}{1 - D} = E\varepsilon^e \tag{3.10}$$

Le couplage se fait par l'introduction des contraintes effectives dans le modèle de plasticité en lieu et place des contraintes totales.

Le jeu d'équations à résoudre s'écrit finalement :

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon &= d\varepsilon^e + d\varepsilon^p && \text{(décomposition des déformations)} \\
 \boldsymbol{\sigma}' &= \mathbf{E}\varepsilon^e && \text{(relation hypoélastique en contrainte effective)} \\
 \dot{\varepsilon}^p &= \dot{\lambda} \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}', k_h) && \text{(équation des flux)} \\
 \dot{k}_h &= \dot{\lambda} \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}', k_h) && 
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

où  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^e$  et  $\varepsilon^p$  sont respectivement les déformations totales, élastiques et plastiques.  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique,  $\mathbf{m}$  le vecteur flux et  $\mathbf{h}$  la fonction d'écrouissage.

Nous supposons que la plasticité est associée, c'est-à-dire que le vecteur flux est perpendiculaire à la surface seuil, soit :

$$\mathbf{m} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \tag{3.12}$$

A chaque incrément de charge, c'est-à-dire de déformation totale, la résolution se fait par le calcul des contraintes effectives ( $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{E}\varepsilon^e$ ), qui nécessite des itérations sur la loi plastique aux points d'intégration, en supposant initialement que tout l'incrément est élastique. Puis, la partition des déformations ( $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ ) peut être calculée, et, à partir de la déformation élastique, l'endommagement est estimé ( $D(\varepsilon^e)$ ). La connaissance de  $D$  permet de calculer les contraintes totales ( $\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\boldsymbol{\sigma}'$ ) qui, tant que l'équilibre n'est pas atteint, sont réintégréées dans le calcul de la plasticité par un incrément de déformation totale ( $\varepsilon$ ).

Aussi bien la résolution locale du modèle plastique, que la résolution globale du problème élasto-plastique endommageable, nécessitent une convergence, avec une bonne vitesse, pour des applications industrielles. Il faut donc développer l'opérateur tangent dans le cadre de la méthode de résolution de Newton-Raphson.

### 3.2.3 Estimation de l'opérateur tangent

L'application de la méthode de résolution de Newton-Raphson est la seule qui permet une convergence quadratique, si l'estimation de l'opérateur tangent est précise. Le calcul de cet opérateur, aussi bien pour le problème local que global, fait apparaître des termes de dérivée première du vecteur flux et de la fonction d'écrouissage, en fonction des contraintes et de la variable d'écrouissage. Ces dérivées sont en fait des dérivées secondes de la fonction seuil. Bien que celle-ci soit dérivable analytiquement, le calcul numérique de ses dérivées secondes nécessite un tel nombre d'opérations, que les erreurs d'arrondi engendreraient une estimation non exacte de la matrice tangente. Quitte à ne pas l'exprimer de manière exacte, nous préférons l'approximer efficacement par un calcul numérique, en suivant l'idée de Pérez-Foguet *et al.* (2000b). Pour illustrer cette méthode, considérons le cas particulier de la dérivée du vecteur flux par rapport aux contraintes :

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \sigma'_i}(\boldsymbol{\sigma}', k_h) = \frac{\mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}' + h\mathbf{e}_i, k_h) - \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}' - h\mathbf{e}_i, k_h)}{2h} \tag{3.13}$$

où  $e_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  vecteur unité et  $h$  est le pas de discrétisation. Le choix de  $h$  est le point crucial de cette méthode. Mathématiquement, la dérivée (3.13) est d'autant mieux estimée que  $h$  est petit, or, numériquement, il faut que  $h$  soit plus grand que les erreurs d'arrondi pour rester significatif. Il doit donc exister une valeur optimale pour ce coefficient. Pérez-Foguet *et al.* (2000a) ont proposé d'écrire :

$$h^{opt} = h_r^{opt} \max\{|x|, typ_x\} = \sqrt[3]{mecheps} \times \max\{|x|, typ_x\} \quad (3.14)$$

où *mecheps* est la précision machine,  $h_r$  est le pas de discrétisation relatif et  $|x|$  est la norme du vecteur, par rapport auquel on dérive, qui est bornée par une valeur typique de  $x$  ( $typ_x$ ), au cas où la norme soit quasi-nulle.

### 3.3 Validation du modèle

L'incrément apporté par Abbas Krayani, par rapport au travail de Ludovic Jason, est une meilleure approximation de la matrice tangente utilisée dans les résolutions (locale et globale) par la méthode de Newton-Raphson, et l'expression du modèle dans le cadre régularisé en gradient. La validation s'est donc faite sur la vitesse de convergence, et sur l'indépendance des résultats par rapport au maillage. Des applications industrielles ont été réalisées. Cependant l'utilisation d'un modèle gradient nécessite un maillage trop fin pour les capacités de calcul à notre disposition (trois à cinq éléments dans la largeur de la FPZ), elles ont donc été réalisées avec une approche locale du modèle, en calant la taille des éléments sur la taille estimée de la FPZ.

#### 3.3.1 Tests élémentaires

**Convergence quadratique** Nous avons fait subir différents chargements à un élément fini avec un comportement uniquement plastique. Un résultat typique de convergence est présenté à la Figure 3.1, où nous retrouvons les effets de nos modifications, à savoir une amélioration de la vitesse de convergence quand  $h_r$  diminue jusqu'à une valeur optimale de  $10^{-3}$ , puis une détérioration de cette vitesse pour  $h_r$  plus petit. Il est à noter que cette influence n'a lieu que pour la quatrième itération, qui est déjà à un niveau d'erreur rarement recherché dans un calcul industriel. Le point important à retenir, est une convergence quasi quadratique obtenue pour une large plage de valeurs de  $h_r$ . Ceci rend cette méthode très facile d'usage.

Malheureusement, la convergence quadratique est perdue, dès que l'on introduit l'endommagement pour des chargements non radiaux en déformations élastiques, c'est-à-dire pour  $d\alpha_c \neq 0$  ou  $d\alpha_t \neq 0$  (voir Equation 1.7). Or, cette hypothèse est faite pour dériver la matrice tangente, qui perd cette propriété, dès que les coefficients  $\alpha$  changent au cours du chargement. La raison de cette hypothèse est l'expression des  $\alpha$  qui fait intervenir la fonction  $\langle \rangle_+$ , qui n'est pas dérivable en zéro. Une idée serait de proposer un raccordement continuellement dérivable en zéro, sur la base de ce qui a été repris par Dufour (2002) dans

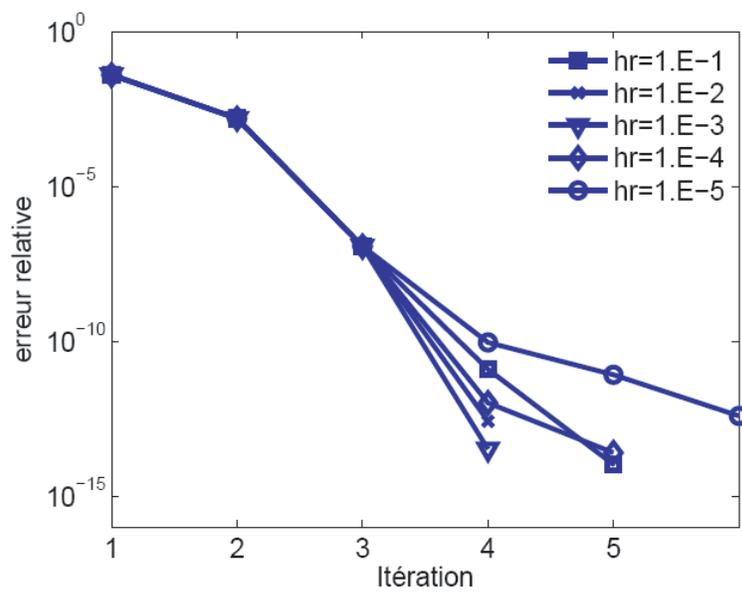


FIG. 3.1 – Convergence globale pour différentes valeurs du paramètre  $h_r$ .

sa thèse pour le modèle visqueux de Bingham. Nous pourrions ainsi écrire mathématiquement la matrice tangente sans modifier physiquement le modèle.

**Régularisation** Un test unidimensionnel sur une barre a été réalisé pour montrer la propriété régularisatrice de notre modèle. Le champ d’endommagement (Figure 3.2.(a)) s’étend sur plusieurs éléments, et le paramètre  $c$  modifie bien la fragilité de la réponse (Figure 3.2.(b)).

Cette analyse a été complétée par une sensibilité au maillage de la réponse, qui disparaît dès que le maillage est suffisamment fin, pour décrire les champs à l’intérieur de la FPZ.

### 3.3.2 Poutre de grande hauteur

Nous devons, à présent, valider le modèle vis-à-vis de résultats expérimentaux sur des structures en béton pour lesquelles la ruine est atteinte à la fois en mode I et en mode mixte (I et II). Nous avons retenu les essais sur des poutres en béton armé de grande hauteur de Asin (1992). Il s’agit d’une poutre de 1 m de haut, 15 cm de large sur trois appuis. Chacune des travées mesure 2 m et est chargée en son centre. Etant donné le grand rapport entre la taille de la structure et la taille des granulats (longueur caractéristique du matériau), il a été impossible d’utiliser l’approche non locale avec nos moyens de calcul. Toutefois, la taille des éléments est proche de la taille estimée de la FPZ à savoir trois fois la taille des plus gros granulats. La quantité d’armatures peut varier d’un essai à l’autre, nous avons choisi la poutre la moins armée.

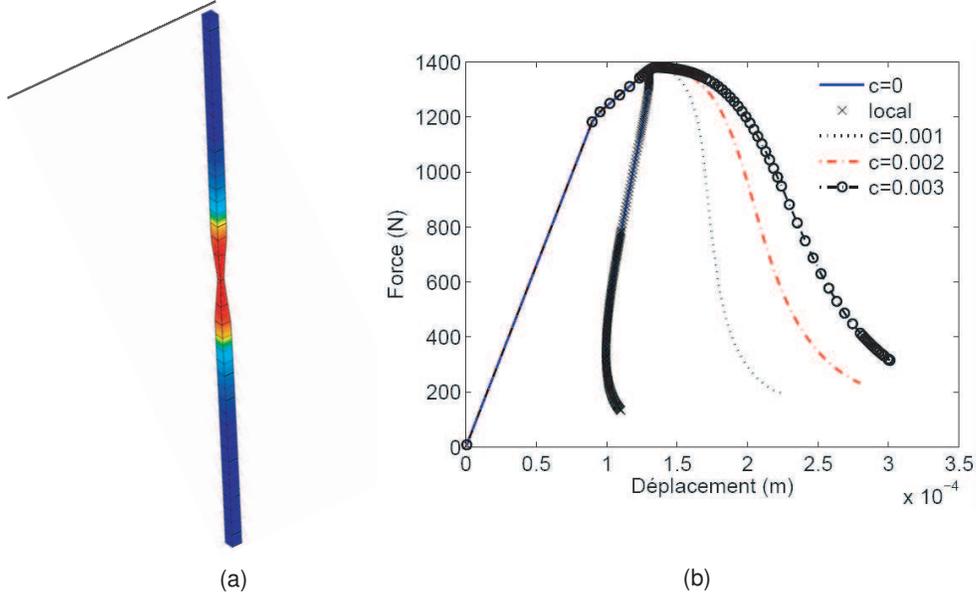


FIG. 3.2 – (a) Champ d'endommagement dans la barre. (b) Réponse force-déplacement pour différentes valeurs de la longueur caractéristique  $\sqrt{c}$ .

Dans cette étude, nous comparons les réponses données par notre modèle élasto-plastique endommageable (voir paragraphe 3.2) et par deux modèles d'endommagement scalaire, à savoir celui de Mazars (1984) succinctement décrit au paragraphe 1.4.1.1, et celui de de Vree *et al.* (1995) dont la déformation équivalente est définie par :

$$\varepsilon_{eq} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1 + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^2 + \frac{6k}{(1+\nu)^2} J_2} \quad (3.15)$$

où  $I_1$  et  $J_2$  sont respectivement le premier et le deuxième invariant du tenseur de déformation,  $k = \frac{f_c}{f_t}$  est le rapport entre la résistance uniaxiale du matériau en compression  $f_c$  et en traction  $f_t$ . La définition de la loi d'évolution de l'endommagement est semblable à celle de Mazars avec uniquement la partie en traction :

$$D = 1 - \frac{1-A}{\varepsilon_{eq}} + \frac{A}{\exp(B(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{D_0}))} \quad (3.16)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux paramètres du modèle équivalent aux  $A_t$  et  $B_t$  du modèle de Mazars. Les paramètres de tous ces modèles sont calés sur les résultats en traction-compression uniaxiale.

Nous comparons, à la Figure 3.3, les faciès expérimentaux de fissuration avec les champs d'endommagement, obtenus par les modèles numériques. Dans un premier temps, une fissure en mode I s'ouvre au droit du point d'application de la charge, qui correspond au changement de raideur observé sur la courbe réponse

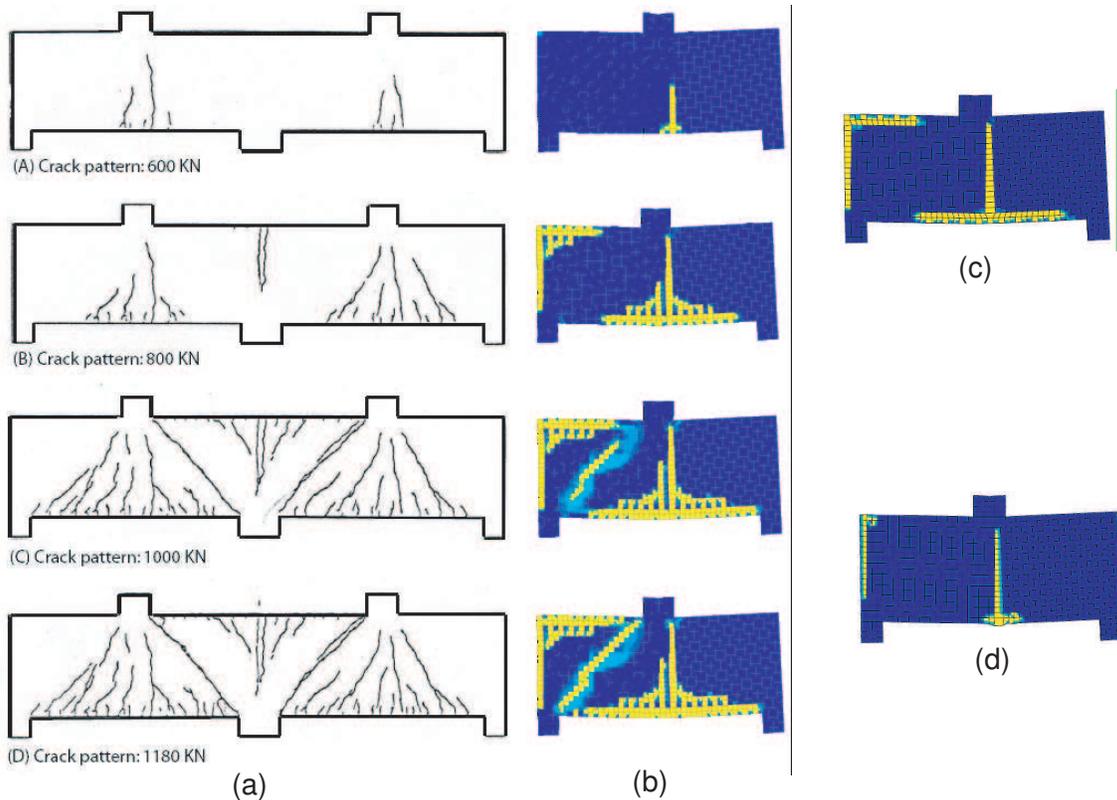


FIG. 3.3 – (a) Faciès expérimental de fissuration avec les forces correspondantes. Champs d’endommagement avec le modèle élasto-plastique endommageable pour les niveaux de chargement correspondants (b), pour la charge maximale avec le modèle de Mazars (c) et le modèle de de Vree (d).

(Figure 3.4) vers 600 kN. Cette fissuration est à peu près correctement prédite par tous les modèles. Ensuite, alors que les armatures reprennent les efforts au travers de la fissure, et font diffuser l’endommagement le long des barres, une fissure apparaît brutalement à 45° sur le chemin des efforts entre l’appui et le point de chargement.

Les réponses effort-flèche correspondant aux trois modèles utilisés sont tracées à la Figure 3.4.

Il est à remarquer que notre modèle prédit la charge maximale à 8% près et, qu’à une charge donnée, le profil d’endommagement correspond bien au faciès de fissuration relevé expérimentalement. En ce qui concerne les deux autres modèles d’endommagement scalaire, ils ne prédisent pas du tout une réponse semblable aux essais. Evidemment, le modèle de Mazars ne prédit que la fissure de mode I, quel que soit le confinement dû aux armatures, car il ne fait intervenir dans l’écriture de son critère, que la partie positive des déformations, mais, bien que le second invariant des déformations intervienne dans le critère de Von Mises modifié, ce modèle ne prédit une fissure en mode mixte qu’avec une grande quantité d’armature (fort confinement).

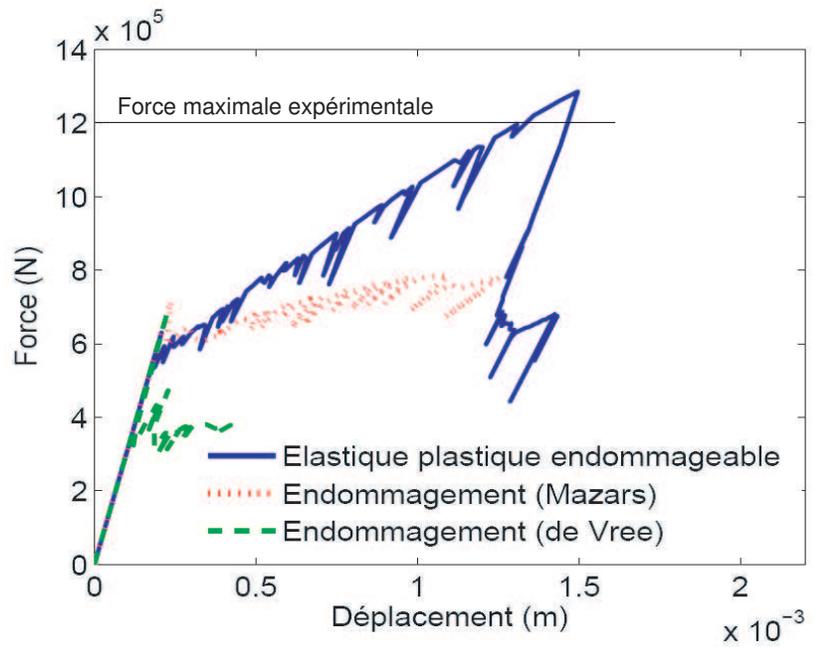


FIG. 3.4 – Réponses mécaniques de la poutre de grande hauteur avec les trois modèles étudiés.

### 3.3.3 Simulation d'un Volume Structurel Représentatif

Pour la validation de modèles de mécanique, de fluage, de retrait et de perméabilité, un essai à l'échelle 1 sera réalisé sur un volume structurel représentatif de taille approximative  $2m \times 2m \times 1m$  d'une enceinte de confinement. Il est représentatif car il aurait dû contenir quatre câbles horizontaux et trois verticaux. Pour des raisons liées aux moyens techniques, l'essai ne permet pas de mettre en tension les câbles verticaux. Il a tout de même été décidé d'en laisser un, pour jouer le rôle d'inclusion qui doit amorcer la fissuration. L'étude, à laquelle nous avons répondu sur un contrat avec EDF R&D, consiste à simuler les différentes phases de la mise en charge, notamment la mise en précontrainte, et à estimer la pression interne de l'enceinte à rupture. Comme le modèle avec plasticité diffère assez peu de celui purement endommageable, nous nous concentrerons, dans ce document, exclusivement sur la comparaison entre deux modes de représentation des câbles.

Pour la phase de mise en précontrainte, il nous a été demandé de comparer deux approches pour l'introduction des efforts dus au câbles. Dans la première, les câbles sont modélisés par des éléments filaires, dont le module correspondant dans *Code\_Aster* permet une mise en précontrainte avec glissement dans la maille béton. Cette approche permet aussi d'avoir des maillages indépendants du béton et des câbles puisque les éléments câbles peuvent traverser les éléments volumiques du béton. Dans la deuxième, les câbles sont modélisés par un maillage 3D qui doit être conforme avec celui du béton (voir Figure 3.6). Ce dernier maillage, très complexe, nous a été fourni, et nous ne pouvons pas le modifier. Dans le cas de la

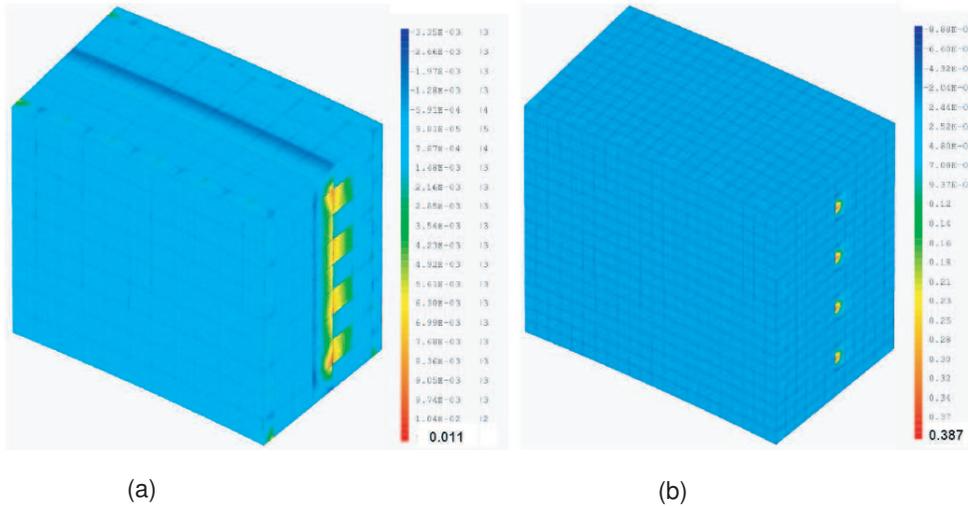


FIG. 3.5 – Profils d’endommagement à la mise en précontrainte pour le maillage grossier (a) et pour le maillage fin (b) avec une représentation filaire des câbles.

représentation 3D, nous avons placé un câble 1D de section nulle (pour ne pas modifier la raideur), afin de toujours utiliser le module de *Code\_Aster* avec glissement. Cette approche nécessite évidemment plus de degrés de liberté à résoudre, mais elle semble plus proche de la réalité physique.

La Figure 3.5 montre la carte des endommagements dans le cas filaire pour deux finesses de maillage. Une coupe du maillage permet de visualiser l’endommagement créé le long du câble, par l’introduction des efforts du câble sur le béton à cause de la légère courbure du spécimen. Cet endommagement est d’autant plus grand que le maillage béton est petit. Nous pouvons lire sur la Figure 3.5 un endommagement de 0,0111 pour le maillage grossier, et de 0,387 pour le maillage fin au même niveau de chargement. En effet, le câble filaire crée une singularité qui est d’autant mieux “captée” que les éléments béton sont petits, ce qui entraîne des contraintes et un endommagement plus élevés. Par ailleurs, à cause d’une rigidité locale accrue, le câble 1D vertical ne joue pas, hormis par effet de poisson, le rôle d’inclusion comme dans la réalité. La fissuration à rupture dépend alors fortement des conditions aux limites, qui ont été spécifiées pour les faces horizontales.

Au contraire, comme la représentation 3D procure une surface physique finie pour l’introduction des efforts du câble vers le béton, l’endommagement à la mise en précontrainte reste limité. Lors de la mise en pression, la Figure 3.6.(b) montre que le câble vertical 3D joue bien le rôle d’inclusion géométrique et mécanique qui concentre les contraintes, et donc l’endommagement pour amorcer la rupture en son droit.

Aucune de ces deux approches est entièrement satisfaisante. La réponse de l’approche filaire, à cause de la singularité, dépend du maillage et l’approche 3D est très lourde à gérer d’un point de vue numérique. Ceci est d’autant plus vrai, que la courbe réponse force-déplacement varie peu entre les deux approches. En effet,

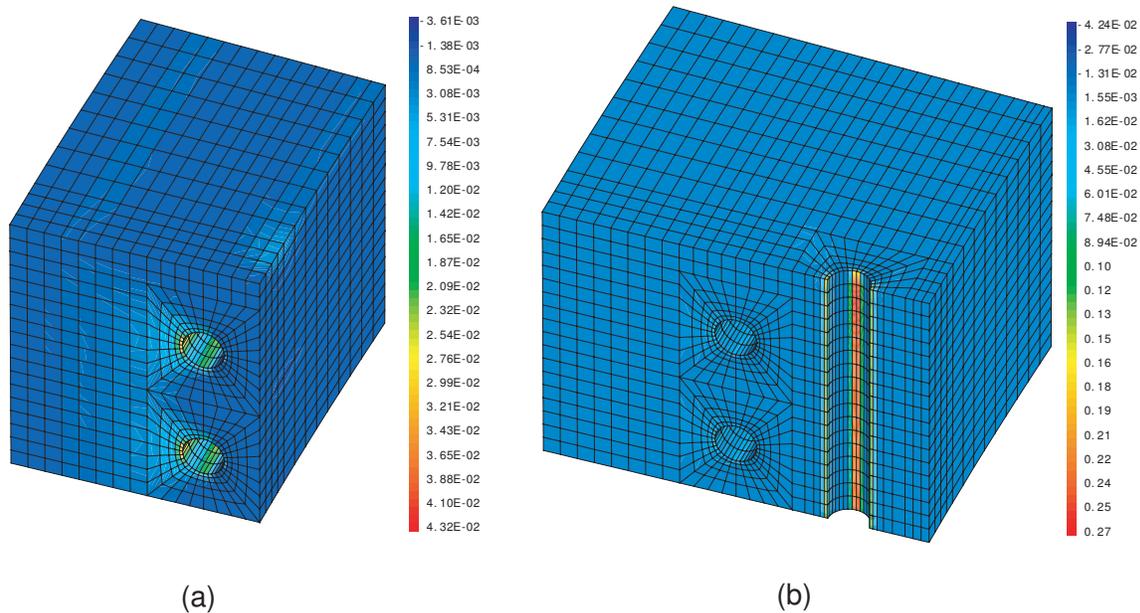


FIG. 3.6 – Profils d’endommagement avec un maillage 3D des câbles (a) à la mise en précontrainte et (b) à la mise en pression.

pour une structure d’une telle ampleur, ce qui se passe localement au niveau d’un câble a un impact limité sur la réponse structurelle, à moins qu’on s’intéresse à des réponses dépendant fortement de ce qui se passe localement comme ... la perméabilité structurelle.

### 3.4 Perspectives

Nous venons de voir que la représentation des câbles de précontrainte dans un volume de béton est un point très critique pour le comportement structurel, surtout pour l’utilisation du champ d’endommagement dans des modèles couplés. Si la représentation filaire du câble est plus économique d’un point de vue numérique, avec moins de degrés de liberté à résoudre, et un maillage béton qui n’a pas la nécessité de “coller” au maillage du câble, les résultats dépendent fortement de la taille des éléments, dans la zone de transfert des efforts du câble vers le béton.

Ceci s’explique par la singularité que crée le câble, et qui est captée d’autant mieux, que le maillage est fin. En effet, les efforts du câble vers le béton, d’un point de vue numérique, se transmettent à partir d’un nœud du câble, dont les efforts non équilibrés sont répartis grâce aux fonctions d’interpolation sur les nœuds de la maille béton, à laquelle le nœud du câble appartient. Par conséquent, à un effort donné, fonction de la tension dans le câble et de sa courbure, plus l’élément volumique représentatif du béton sera petit, plus les contraintes seront grandes. Or, à cause de la taille de la structure, nous sommes dans l’impossibilité

d'utiliser un modèle non local, ce qui signifie *in fine*, que plus les éléments volumiques sont petits, plus l'endommagement sera grand, car les déformations locales sont importantes.

Cependant, cette singularité n'est pas physique, puisque le câble a une section transversale finie, qui lorsqu'elle est prise en compte par un maillage 3D n'induit pas de singularité, car l'effort du câble est transmis sur une surface finie. Ainsi, les contraintes, et par conséquent l'endommagement, ne dépendent pas du maillage. Malheureusement, dans ce cas, le maillage est très lourd à construire et contient beaucoup de degrés de liberté inutiles d'un point de vue mécanique.

L'idée à mettre en œuvre s'inspire des modèles non locaux pour lesquels les variables sont moyennées. En effet, avec un modèle d'endommagement local, lorsque la taille des éléments tend vers zéro, on applique toujours une loi de comportement homogénéisée qui a été identifiée sur un volume élémentaire représentatif, alors que l'élément peut théoriquement devenir plus petit qu'un granulats ou que la zone de redistribution des efforts suite à la création d'une microfissure (voir partie 4.2). Cela n'a pas de sens physique, car pour employer des lois homogénéisées, il faut que le volume du point considéré (i.e. la taille de l'élément) soit d'au-moins la taille du volume élémentaire représentatif. Il en est de même avec le problème des câbles, où lorsque la taille du maillage tend vers zéro, un élément fini ayant le comportement du béton occupe physiquement la place du câble. En d'autres termes, lorsque la discrétisation spatiale est de l'ordre de la finesse des hétérogénéités du matériau, il faut utiliser une description explicite des constituants du matériau avec leur propre loi de comportement, ou alors, moyenniser certaines variables sur un volume élémentaire représentatif, ce que fait l'approche intégrale des modèles non locaux.

Nous proposons donc de poursuivre deux voies de recherche, pour éviter des localisations trop importantes d'endommagement, à cause de la singularité du câble, tout en utilisant un maillage filaire pour celui-ci.

- Comme pour l'approche intégrale des modèles non locaux, à proximité du câble, une moyenne des déformations sera réalisée, pour le calcul de la variable qui pilote l'endommagement (i.e.  $\bar{\varepsilon}_{eq}$ ). Cette moyenne spatiale se fera sur un domaine, dont la taille sera directement liée au diamètre du câble. Autrement dit, loin du câble, la procédure intégrale se fera sur un domaine de taille caractéristique  $l_c$  liée au matériau, et proche du câble, sur un domaine de taille caractéristique liée au diamètre du câble.
- Les contraintes, au lieu d'être réparties uniquement sur la maille béton entourant le nœud du câble, pourront être réparties sur tous les nœuds d'un domaine dont la taille  $\phi_i$  est liée au diamètre du câble  $\phi_g$ .

Dans les deux cas, la nouvelle procédure ne sera active que si la taille des éléments finis, dans le voisinage du câble, est inférieure à son diamètre.

Par ailleurs, on aura besoin de la distance entre un nœud du maillage béton et le câble. L'introduction de Level Sets pour représenter le câble sera très utile. En 3D, les Level sets sont des plans, il en faut donc deux qui se coupent pour représenter une ligne. Les isovaleurs associées sont alors directement la distance signée au câble, le câble étant lui l'iso-zéro.

Il reste à déterminer le type de fonction poids à utiliser dans ces deux procédures. En ce qui concerne la répartition des contraintes, elle pourra être, dans un premier temps, considérée comme uniforme sur

l'espace occupé par le câble. Dans un deuxième temps, on pourra proposer une forme de pondération, issue du champ de contrainte analytique, calculé sur un problème axisymétrique où le câble est représenté explicitement avec son diamètre  $\phi_g$ . Dans ce calcul, on étudiera essentiellement le cas, où le câble transmet des efforts perpendiculairement à l'interface entre les deux matériaux. Cet enrichissement ne sera valable qu'au-delà du câble et une répartition uniforme des efforts demeurera à l'intérieur du volume du câble.

En revanche, la procédure de régularisation de la variable pilotant l'endommagement doit, pour des raisons numériques, présenter une certaine continuité spatiale avec la partie loin du câble, dans le cas de l'utilisation d'une approche non locale, ou même locale qui correspond à une longueur caractéristique nulle. Il faudra donc proposer un raccordement entre deux longueurs internes, d'une part, celle du matériau  $l_c$  loin du câble, qui peut être nulle dans le cas du modèle local, d'autre part, celle du câble  $l_g$ . Un schéma de principe de ce raccordement est présenté à la Figure 3.7.

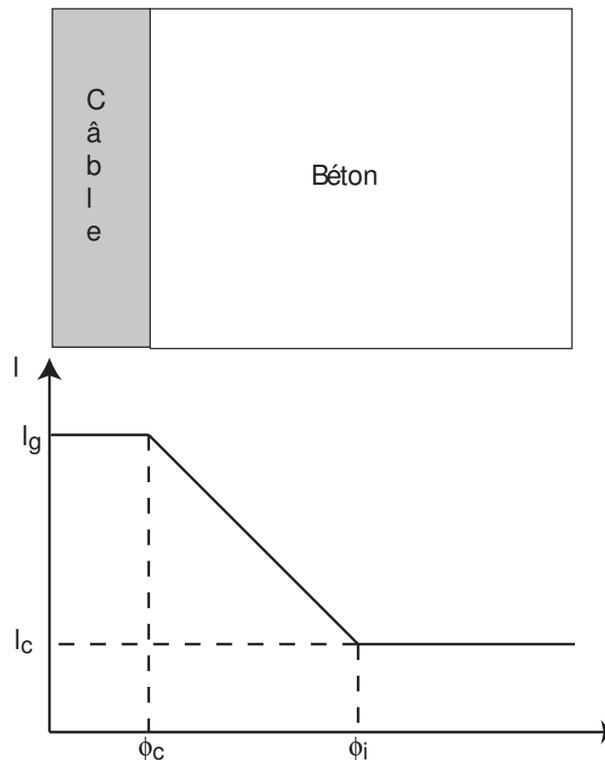


FIG. 3.7 – Proposition de loi d'évolution de la longueur caractéristique entre la longueur matériau  $l_c$ , la longueur liée au câble  $l_g$  en fonction du diamètre du câble  $\phi_g$  et d'une longueur d'influence  $\phi_i$ .



# Chapitre 4

## Conclusions et perspectives

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Modélisation des taux de fuite d'une structure</b>	<b>69</b>
4.1.1	Méthodes proposées	69
4.1.2	Validations expérimentales	69
<b>4.2</b>	<b>Amélioration du modèle non local</b>	<b>72</b>
4.2.1	Méthodes existantes	72
4.2.2	Méthodes proposées	73
4.2.3	Validation	75
4.2.4	D'un bord libre vers une fissure	78

---

## 4.1 Modélisation des taux de fuite d'une structure

Nous avons proposé deux méthodes pour estimer les taux de fuite d'une structure en béton. Elles sont toutes les deux basées sur un calcul mécanique en endommagement non local, et peuvent être implantées dans des codes de calcul comme des modules de post-traitement (voir parties 1.3 et 1.4).

### 4.1.1 Méthodes proposées

**Méthode du raccordement** Cette méthode se base sur une loi de raccordement de la perméabilité en fonction de l'endommagement. Pour les faibles endommagements, on peut choisir une des nombreuses lois empiriques de la littérature et pour les forts endommagements, on utilise la loi de Poiseuille après un changement de variable ( $[U] \leftrightarrow D$ ), qui serait d'ailleurs intéressant d'améliorer, en prenant en compte les résultats de la méthode de calcul de l'ouverture de fissure en fonction du champ de déformation issu d'un calcul aux éléments finis. Nous pouvons déjà prévoir que cette méthode donnera des résultats acceptables, surtout pour les faibles endommagements, à condition que le modèle mécanique donne une bonne carte d'endommagement. Il sera d'ailleurs instructif de comparer les résultats donnés par le modèle d'endommagement, avec celui couplé à la plasticité présenté au chapitre 3. En effet, pour un point du chargement donné sur la courbe force-déplacement de la réponse globale, le premier modèle donne un endommagement plus élevé que celui couplé à la plasticité. Or, expérimentalement les relations perméabilité-endommagement sont calées sur les pentes de déchargement, qui tiennent compte des déformations irréversibles. Il est donc nécessaire de les introduire dans le modèle de comportement mécanique.

**Méthode de l'ouverture de fissure** Dans cette méthode, à partir du champ de déformation issu d'un calcul aux éléments finis, nous sommes capables de positionner une fissure, et de calculer son ouverture en tout point avec une précision de quelques pourcents à la rupture. L'application de la loi de Poiseuille permettra d'estimer les taux de fuite, avec une précision liée à l'estimation de l'ouverture. Comme les fuites se font surtout dans les fissures ouvertes, cette méthode est très intéressante d'un point de vue industriel.

### 4.1.2 Validations expérimentales

Une campagne d'essais est en cours, pour valider ces deux approches par un essai de fendage sur un disque. Une vue d'ensemble est présentée à la Figure 4.1. Une pression est mise dans l'enceinte qui est fixée de manière étanche au disque, et le débit de fuite massique est mesuré.

Sur la face du disque restée disponible, on projette une peinture en nuage pour créer un mouchetis de niveau de gris (Figure 4.2.(a)), le plus fin possible pour une bonne précision du champ mesuré. Une méthode de corrélation d'image est alors employée pour obtenir les champs cinématiques (i.e. déplacements



FIG. 4.1 – Vue d'ensemble du dispositif de mesure de la perméabilité sur un essai de fendage sur un disque.

et déformations) à la surface de l'éprouvette (voir Figure 4.2.(b)). La valeur qui nous intéresse principalement, est le champ de déplacement horizontal, qui présente un saut associé à l'ouverture de la fissure (Figure 4.2.(c)). Nous sommes donc capables de mesurer expérimentalement une ouverture de fissure par cette méthode, avec une précision de l'ordre de quelques microns, si on veut mesurer le champ sur toute l'éprouvette. Cette précision est divisée par 2, à chaque fois qu'on réduit de moitié l'espace observé, jusqu'à atteindre la limite imposée par la finesse du mouchetis.

En ce qui concerne la perméabilité sur le disque en fendage, elle sera comparée à celle estimée par les deux méthodes proposées dans ce mémoire. La principale difficulté qu'on envisage dans la comparaison, est la capacité de la loi de comportement et du modèle mécanique à simuler la rupture du disque. Des écarts importants ne signifieront pas obligatoirement que nos deux méthodes sont imprécises. En effet, une partie de l'erreur provient des champs d'endommagement et de déformations, qui sont la base de nos méthodes, estimés par la simulation numérique. Le champ numérique de déplacement pourra être comparé au champ expérimental sur la surface et le champ d'endommagement pourra être comparé qualitativement à la cartographie des émissions acoustiques (Granger *et al.*, 2007) enregistrées lors de l'essai. Malheureusement, le champ de déformation obtenu sur toute l'éprouvette par corrélation d'image n'est pas assez précis pour pouvoir être comparé au champ numérique.

De plus, une campagne d'essais importante sera réalisée en 2008 dans le cadre du projet national *CEOSfr*,

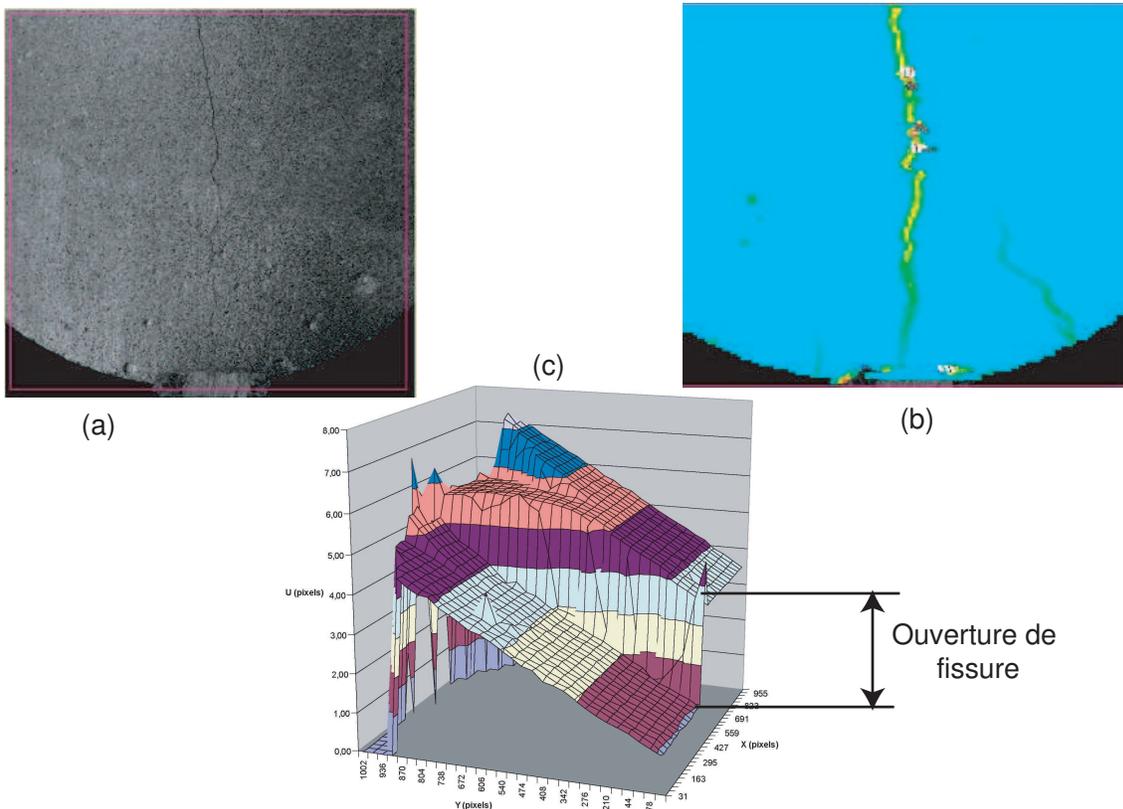


FIG. 4.2 – (a) Vue du mouchetis prise par la caméra. (b) Champ des déformations horizontales après analyse des déplacements. (c) Champ de déplacement dans la direction horizontale.

pour lequel nous avons répondu à l'étude de faisabilité. L'objectif global est d'estimer les ouvertures de fissure pour des structures en béton soumises à des sollicitations extérieures. Nous avons proposé trois types d'essai :

- *Flexion trois points* : cet essai réalisé sur des éprouvettes de différentes tailles permettra de caler les paramètres des lois de comportement, y compris la longueur caractéristique. Il sera aussi réalisé sur des éprouvettes armées afin de valider les méthodes de positionnement des fissures (multifissuration). Sur cet essai, la capacité des modèles pour estimer l'ouverture de fissure sera testée.
- *Flexion quatre points déviée* : cet essai permettra de valider les modèles "capables" de reproduire les modes mixtes de fissuration. Il permettra aussi d'analyser la capacité des modèles à reproduire une fissure courbe et de calculer son ouverture. Sur cet essai la validation des modèles se fera en aveugle, c'est-à-dire que les participants au projet ne disposeront pas des résultats avant de tester leurs modèles.
- *Traction sur tirant armé* : cet essai permettra de valider les modèles avec prise en compte de la refermeture de fissure (La La Borderie (1999)). Nous ne réaliserons pas de simulation de cet essai.

En ce qui concerne les modèles que nous avons développés, ces essais permettront de caler/valider la méthode de recherche de la position de la fissure pour une fissure unique rectiligne, pour plusieurs fissures et pour une fissure courbe.

Les modèles mécaniques de loi de comportement et d'estimation des ouvertures de fissures avec leur localisation seront validés sur ces essais.

## 4.2 Amélioration du modèle non local

**Production scientifique associée** Krayani *et al.* (2008)

### 4.2.1 Méthodes existantes

Dans la méthode classique, sans prise en compte des effets de bord, la déformation équivalente qui pilote l'endommagement s'écrit :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \varepsilon_{eq}(\boldsymbol{\xi}) d\xi \quad (4.1)$$

Afin de retrouver pour un champ homogène une variable régularisée égale à la variable locale et, afin de tenir compte de la diminution du domaine d'intégration au bord du domaine de calcul, Pijaudier-Cabot et Bazant (1987) ont proposé de normaliser cette relation en écrivant :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \frac{\int_{\Omega} \Psi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \varepsilon_{eq}(\boldsymbol{\xi}) d\xi}{\int_{\Omega} \Psi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\xi} \quad (4.2)$$

Un large choix existe pour la fonction  $\Psi$ , nous allons en présenter plusieurs de la littérature et en proposer deux nouvelles. Une des plus courante est la Gaussienne, mais tout autre fonction symétrique (*Bell function*, polynôme d'ordre 4, etc.) de la littérature est aussi efficace et possède des propriétés semblables :

$$\Psi_G(x, \xi) = \exp\left(-\frac{4 \|x - \xi\|^2}{l_c^2}\right) \quad (4.3)$$

Cette relation possède l'inconvénient numérique de ne pas être symétrique au voisinage du bord car la partie tronquée est répartie au prorata sur tout le reste du domaine, ce qui ne permet pas d'optimiser l'utilisation de solveurs performants au niveau de la matrice de raideur. Polizzotto (2003) a récemment proposé la relation symétrique suivante, où la partie tronquée est placée uniquement sur le point  $\mathbf{x}$  grâce à la fonction Dirac :

$$\Psi_S(x, \xi) = \left(1 - \frac{\Omega_r(x)}{\Omega_{\infty}}\right) \delta(x, \xi) + \frac{\Psi(x, \xi)}{\Omega_{\infty}} \quad (4.4)$$

où  $\Psi_0$  est, par exemple, la Gaussienne de l'Equation (4.4) et

$$\Omega_r = \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\xi \quad (4.5)$$

avec  $\Omega_{\infty}$  qui vaut  $\Omega_r$  lorsque le domaine d'intégration n'est pas tronqué.

### 4.2.2 Méthodes proposées

Plusieurs études analytiques basées sur la mécanique de la rupture en mode I d'une fissure sur des cas simples (Hu et Wittmann, 2000) ont montré que les effets de bord sont responsables des effets d'échelle mesurés sur l'énergie de fissuration des éprouvettes (Duan *et al.*, 2006). Ce phénomène a été expliqué par l'impossibilité pour la FPZ de se développer pleinement au voisinage d'un bord (Hu et Duan, 2007). Les effets d'échelle sur la contrainte nominale d'une structure sont dus à la redistribution des contraintes et font intervenir une bande de largeur finie. Or, il semblerait, que cette bande ne puisse pas être aussi large au voisinage d'un bord qu'au cœur de la matière, comme si le matériau était "plus local" au bord de l'éprouvette. Il sera d'ailleurs intéressant, lorsque la précision de la localisation des événements acoustiques le permettra, de conduire des expériences dans ce sens, pour mesurer la largeur de la bande sur laquelle se produisent les microfissures.

Or, pour des applications industrielles, il faut d'abord déterminer avec un critère performant le lieu de la première fissuration qui, dans la plupart des cas, s'amorce sur un bord. Pour cette raison, nous avons décidé de rester avec une approche continue et de modifier la fonction poids du modèle intégrale afin de prendre en compte les effets de bord. Plusieurs possibilités ont déjà été étudiées par Jirasek *et al.* (2004) qui ont montré l'importance du rôle joué par la forme de la fonction poids sur les effets d'échelle de l'énergie de fissuration. Toutefois, les solutions proposées sont surtout basées sur des critères géométriques (champ régularisé égal au champ local s'il est homogène (Equation 4.2) et réduction de la FPZ proche du bord (Equation 4.4)). Aucune des lois proposées tient compte du bord en tant que condition limite du champ de contrainte ( $\sigma \cdot n = 0$  sur  $\partial\Omega$ ).

**Considérations micromécaniques** Soit un milieu infini élastique chargé par une contrainte isotrope contenant deux vides sphériques de diamètre  $a_1$  et  $a_2$  à une distance  $r$  l'un de l'autre (Figure 4.3). Pijaudier-Cabot *et al.* (2004) ont montré que la contrainte en un point peut finalement s'écrire :

$$\sigma(\mathbf{x}) \approx -\sigma_\infty (1 + l_{x1}^2 + l_{x2}^2) \quad (4.6)$$

où  $l_{x1} \propto a_1/r(x, 1)$ ,  $l_{x2} \propto a_2/r(x, 2)$  et  $r(x, i)$  est la distance entre le point de coordonnées  $\mathbf{x}$  et le vide  $i$ . Par souci de simplicité, nous ne présentons que l'interaction entre deux vides, mais la généralisation à  $n$  vides n'apporte aucune difficulté et a été développée dans Pijaudier-Cabot *et al.* (2004). Il faut remarquer dans l'Equation (4.6) que la contrainte en un point s'écrit comme la contrainte du milieu sans les vides, augmentée des contraintes créées par les vides. Autrement dit, la contrainte totale est la somme de la contrainte "locale" et de la contrainte d'interactions.

**Prise en compte du bord libre** Si à présent, on prend un milieu semi-infini (Figure 4.4) avec deux vides distribués symétriquement de part et d'autre d'une ligne. Supposons maintenant que la pression dans chacun

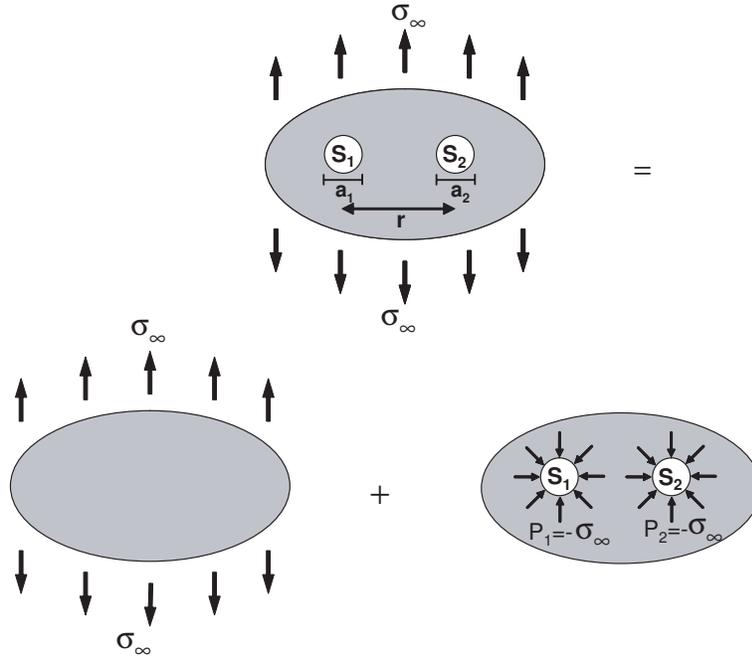


FIG. 4.3 – Effet des interactions entre deux micro-vides et (b) prise en compte d'un bord libre.

des vides est de signe opposé, il en résulte une contrainte en tout point  $x$  du domaine égale à :

$$\sigma(x) \approx -\sigma_\infty (1 + l_{x1}^2 - l_{x2}^2) \quad (4.7)$$

Le long de la ligne, l'effet du vide  $S_2$  est annulé par l'effet de l'anti-void (pression opposée)  $S_1$  parce que  $l_{x1}^2 = l_{x2}^2$ . En d'autres termes, cette méthode permet de vérifier la condition limite  $\sigma \cdot n = 0$  sur  $\partial\Omega$  aussi pour les contraintes dites d'interaction, contrairement aux autres méthodes proposées dans la littérature (Jirasek *et al.*, 2004). La fonction poids, généralisant ce concept à un milieu homogène continu élastique et correspondant à la relation (4.7) s'écrit :

$$\Psi^*(x, \xi) = \left(1 - \frac{\Omega_r(x)}{\Omega_\infty} + \frac{\Omega_r(x^*)}{\Omega_\infty}\right) \delta(x, \xi) + \frac{\Psi(x, \xi)}{\Omega_\infty} - \frac{\Psi(x^*, \xi)}{\Omega_\infty} \quad (4.8)$$

où  $x^*$  est le vecteur position de l'anti-void symétrique de  $x$  par rapport au bord libre.

Toutefois, cette approche a pour inconvénient d'annuler la totalité du tenseur des contraintes, y compris tangentiellement au bord ( $\sigma \cdot t = 0$  sur  $\partial\Omega$ ). C'est pour cela que le concept développé ci-dessus est validé uniquement en 1D (voir paragraphe 4.2.3). Mais nous retenons l'idée que la projection dans la direction normale du tenseur des contraintes d'interaction doit être nulle sur les bords libres.

Dans les cas bi et tri-dimensionnels, nous proposons donc de modifier la forme de la fonction poids de sorte à vérifier la condition mentionnée ci-dessus. Nous proposons, pour tenir compte des effets de bord, de

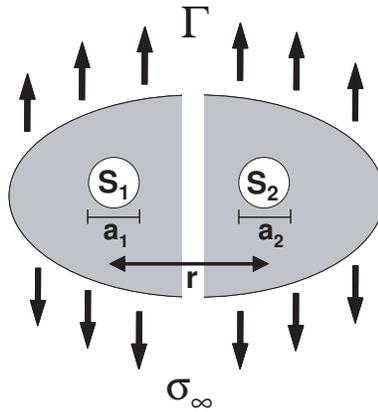


FIG. 4.4 – Effet des interactions entre deux micro-vides avec prise en compte d’un bord libre.

modifier la relation (4.3) par le *mapping* suivant :

$$\Psi_E(x, \xi) = \exp\left(-\frac{4\|x - \xi\|^2}{l_c^2}\right) \quad \text{avec} \quad \|x - \xi\| = l_c \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2/a_1^2 + (x_2 - \xi_2)^2/a_2^2} \quad (4.9)$$

où l’indice 1 fait référence à un vecteur normal au point du bord le plus proche et 2 au vecteur orthogonal au précédent,  $a_1$  est le minimum entre  $l_c$  et la distance au bord le plus proche, et  $a_2$  est le minimum entre  $l_c$  et la distance au bord le plus proche dans la direction orthogonale. En d’autres termes, la forme de la fonction poids est modifiée en une ellipse pour que loin du bord on retrouve un disque, et sur le bord un segment dans la direction tangente au bord afin d’être “local” dans la direction normale au bord tout en étant “non local” dans la direction tangente. Cette approche est validée dans le cas d’une plaque en traction.

### 4.2.3 Validation

**Barre unidimensionnelle** Nous simulons le problème de la demie barre d’Hopkinson (voir Figure 4.5), à savoir une barre impactée à une vitesse  $c$  sur une extrémité pendant un temps  $t_0$ . Une onde de compression en forme de créneau se propage donc à la vitesse  $v = \sqrt{E/\rho}$ . Lorsqu’elle atteint l’extrémité libre, elle se réfléchit en une onde de traction se superposant à l’onde incidente. La résultante des deux ondes produit pour la première fois de la traction à une distance  $v.t_0/2$  du bord libre, et va provoquer l’amorçage de l’endommagement en ce point, si l’amplitude est suffisante.

Les essais réalisés montrent que la barre va se rompre en deux parties à partir de ce point, c’est un essai d’écaillage (*spalling*). Nous réalisons la simulation de cet essai, avec un code en dynamique explicite, en faisant appel alternativement aux quatre fonctions poids  $\Psi_G$ ,  $\Psi_S$ ,  $\Psi^*$ , et  $\Psi_E$  présentées respectivement aux

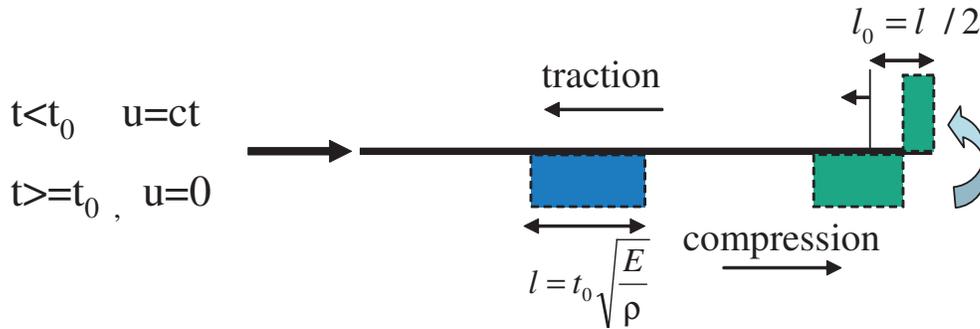
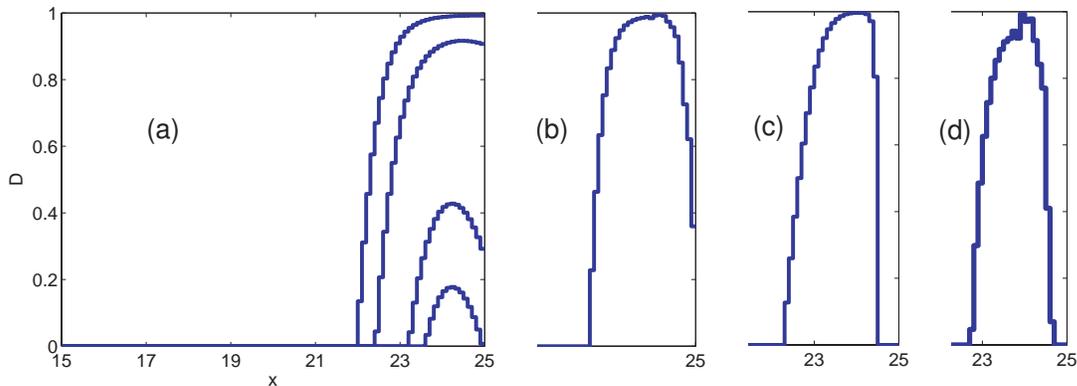


FIG. 4.5 – Schéma du modèle mécanique de la demie barre d’Hopkinson.

Equations (4.3), (4.4), (4.8) et (4.9). Les résultats en terme de profil de déformation à rupture ( $D = 1$  en un point) sont tracés à la Figure 4.6.

FIG. 4.6 – Profils d’endommagement le long de la barre avec la fonction Gaussienne  $\Psi_G$  (a), la fonction de Polizzotto  $\Psi_S$  (b), la fonction ellipse  $\Psi^*$  (c) et la solution avec un anti-vide  $\Psi_E$  (d).

Toutes les fonctions poids représentent bien le point d’amorçage. Alors que dans le cas de la Gaussienne, l’endommagement semble “attiré” par le bord, les autres relations maintiennent un endommagement maximal au point d’amorçage. Toutefois, la relation de Polizzotto (2003) présente un léger endommagement sur le bord alors qu’il est libre de contrainte. Seules les deux relations, que nous proposons, laissent vierge l’extrémité de la barre, ce qui se rapproche de la réalité physique. Nous jugeons, arbitrairement, sur cet essai unidimensionnel, qu’elles sont équivalentes en terme de profil d’endommagement et de réponse force-déplacement. Or, la fonction poids elliptique, contrairement à celle issue de la micromécanique, est généralisable en 2 et 3D.

**Plaque en traction** Nous simulons la rupture en traction d’une plaque avec deux entailles pour amorcer l’endommagement. Nous utilisons la fonction poids originale (Equation 4.3) et la relation elliptique que nous proposons (Equation 4.9).

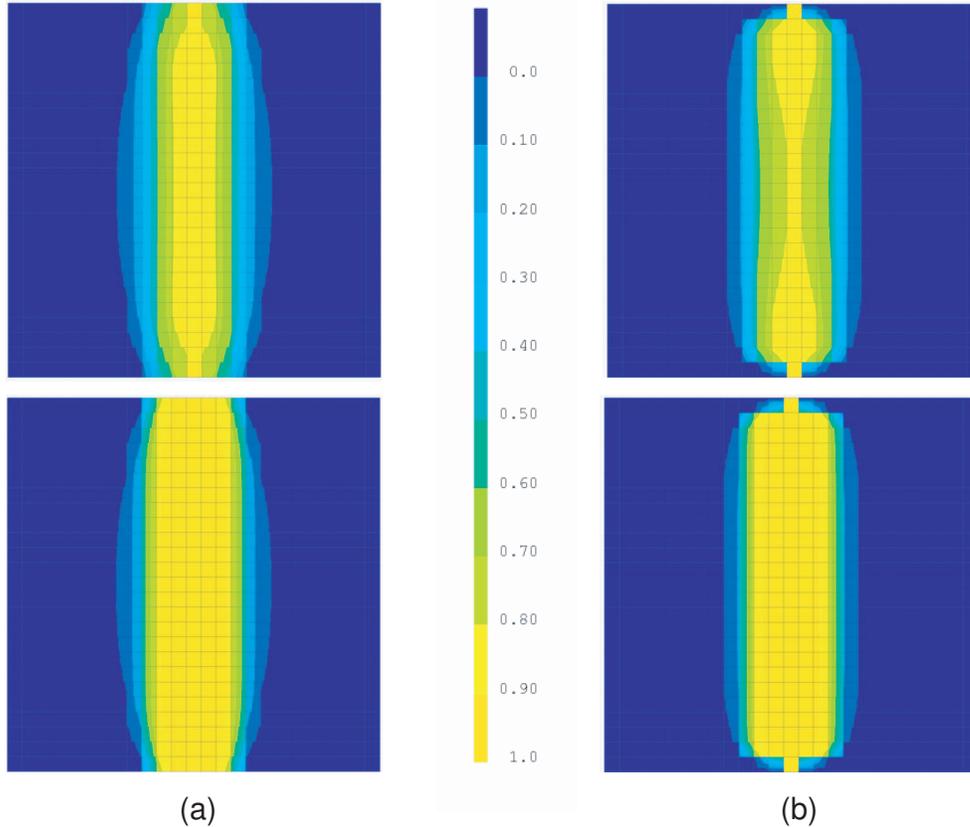


FIG. 4.7 – Profils d’endommagement dans le cas de la Gaussienne (a) et dans le cas de l’ellipse (b).

La différence entre les deux fonctions est limitée à la couche limite. Alors que le développement de la FPZ n’est pas modifié par l’entaille dans le cas de la Gaussienne, la fonction elliptique ne permet pas à la FPZ de se développer entre la pointe de l’entaille et le bord libre. La force au pic est ainsi légèrement diminuée, ce qui devrait modifier les effets d’échelle. Nous prévoyons avec notre approche de mettre en évidence un effet d’échelle sur l’énergie de fissuration telle qu’elle est définie par Bazant à l’issue de l’analyse d’effet d’échelle sur la contrainte nominale de la structure.

En effet, pour l’analyse des contraintes nominales on choisira deux jeux de trois tailles de specimen. Pour le premier jeu, avec des tailles très grandes, l’influence de la couche limite sera négligeable, et on obtiendra donc la même énergie de fissuration quelle que soit la fonction poids utilisée. Par contre, pour le jeu de tailles plus petites, la couche limite jouera un rôle non négligeable et l’utilisation de la fonction elliptique qui “tient compte” de l’entaille produira une énergie de fissuration plus petite que par l’analyse avec la Gaussienne.

Par conséquent, la fonction elliptique, contrairement à la Gaussienne, induira un effet d'échelle sur l'énergie de fissuration comme observé expérimentalement par Wittmann *et al.* (1990), résultats sur lesquels nous allons faire une analyse quantitative en simulant les essais *wedge*.

#### 4.2.4 D'un bord libre vers une fissure

Il est bien évident qu'une macrofissure, une fois ouverte, représente un bord libre interne à la structure d'un point de vue mécanique. Il faudra, par conséquent, appliquer les mêmes modifications de la fonction poids à une macrofissure. Toutefois, elle devra être décrite explicitement pour pouvoir appliquer notre approche, car nous avons besoin de la position du bord pour positionner les anti-vides ( $x^*$ ). Une fois encore, la méthode X-FEM (Moes *et al.*, 1999) pourra être d'une grande utilité, car la Level Set représentant la fissure sera directement considérée comme le bord.

Par conséquent, il doit exister un état transitoire entre un milieu élastique isotrope avec des interactions suivant une fonction poids isotrope (e.g. la Gaussienne), et une macrofissure, forcément orientée et donc orthotrope. Cet état est un matériau qui s'endommage progressivement. Nous appliquerons à la macrofissure notre concept d'anti-vide pour imposer les conditions de bord libre, y compris pour les contraintes d'interaction.

Dans nos simulations, nous avons utilisé pour la partie endommagement, le modèle de Mazars (1984) dont la variable d'endommagement est pilotée par une déformation régularisée  $\bar{\varepsilon}_{eq}$  fonction du tenseur des déformations. Or, cette variable croît au voisinage de la FPZ au fur et à mesure que le matériau est affaibli par l'endommagement. Ce modèle donne donc un poids relatif croissant aux points qui se situent dans la zone de localisation des déformations. Par contre, c'est précisément en ces points que les contraintes diminuent, et que la création d'un nouveau micro-vide entraîne une redistribution plus faible des contraintes en son voisinage. C'est ce paradoxe qui devra être résolu pour réaliser une transition avec une description continue de l'endommagement entre un milieu élastique et un milieu contenant une macrofissure.

Pour réaliser cette transition, nous envisageons deux voies qui devront être validées au moins qualitativement par des approches micromécaniques du type celle développée au paragraphe 4.2.2. La première consiste à réduire le domaine des interactions en faisant varier la longueur interne, alors que la deuxième garde le même rayon d'interaction, mais donne des poids relatifs plus faibles aux points à contraintes plus faibles.

**Réduction orthotrope du domaine d'interaction** En fait, la première voie de réduction du domaine d'interaction reprend l'idée de l'ellipse développée au paragraphe 4.2.2. Puisqu'une macrofissure qui se crée est orientée, il faut modifier le domaine des interactions de manière orthotrope. Nous proposons donc de réaliser un *mapping* dont les coefficients  $a_i$  de l'Equation (4.9) seront respectivement relatifs aux directions principales  $i$  du tenseur des contraintes. Chacun de ces facteurs sera calculé en fonction de la contrainte

principale. On pourra utiliser une relation de la forme :

$$a_i = l_c \left( \frac{\langle \sigma_i \rangle_+}{f_t} \right) \quad (4.10)$$

Dans une direction  $i$  donnée, la longueur d'interaction sera  $l_c$  au pic de contrainte et 0 pour des contraintes nulles, comme sur un bord libre, ou négatives. Les contraintes négatives ne créent pas d'endommagement, si on choisit un critère en contrainte (Jirasek, 2002) :

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{E} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma'_i \rangle_+^2} \quad (4.11)$$

où  $\sigma'_i$  sont les contraintes principales effectives.

Malheureusement, par rapport au modèle de Mazars (1984), on perd la possibilité d'endommager le matériau en compression par dilatation (i.e. effet de Poisson). Toutefois, même pour une compression macroscopique uniaxiale, à l'échelle des hétérogénéités (i.e. granulats), des composantes du tenseur de contraintes doivent devenir positives autour des inclusions rigides que représentent les granulats. Pour pouvoir modéliser l'endommagement par compression, tout en utilisant un critère en contrainte, on pourra tenir compte d'une fraction des contraintes négatives dans le critère. Cette fraction pourra être déterminée analytiquement avec l'hypothèse d'une inclusion circulaire soumise à un champ lointain de compression uniaxiale et en se fixant le contraste des propriétés élastiques. On calculera la contrainte de traction à l'interface dans la direction orthogonale à la direction de chargement.

**Réduction relative des poids** Même si cette modélisation paraît attractive et pourra donner des résultats numériques améliorés, elle ne correspond pas à la description micromécanique que nous avons faite au paragraphe 4.2.2. En effet, les contraintes d'interaction en un point  $\boldsymbol{x}$  sont dues à la redistribution des contraintes suite à la création d'un micro-void distant. Par conséquent, la régularisation en un point  $\boldsymbol{x}$  ne doit pas dépendre de l'état de contrainte en ce point, mais de l'état de contrainte distant. Dans le modélisation, il faut donc modifier, non pas le rayon d'interaction, mais les poids  $\Psi$  qui font intervenir la position  $\boldsymbol{\xi}$  du point distant. On rejoint ici la proposition faite à l'Equation (4.8) avec une modification des poids sans modification du rayon d'interaction.

# Bibliographie

- P. ACKER : Comportement mécanique du béton : apports de l'approche physico-chimique. Rapport technique 152, Rapport de recherche du LCPC, 1988.
- P. M. A. AREIAS et T. BELYTSCHKO : Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(5):760–788, 2005.
- M. ASIN : Behavior of statically indeterminate deep beams. *In Progress in Concrete research*, volume 3, pages 45–58, Delf University of technology, 1992.
- P. BADEL : *Contributions à la simulation numérique de structures en béton armé*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2001.
- B. BARY : *Etude du couplage hydraulique-mécanique dans le béton endommagé*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 1996.
- T. BAXEVANIS, F. DUFOUR et G. PIJAUDIER-CABOT : Interface crack propagation in porous and time-dependent materials analyzed with discrete models. *International Journal of Fracture*, 141(3-4):561–571, 2006.
- T. BAXEVANIS, G. PIJAUDIER-CABOT et F. DUFOUR : Bifurcation and creep effects in a viscoelastic non-local damageable continuum. *European Journal of Mechanics A/Solids*, page 25 pages, 2008.
- Z. P. BAZANT : *Scaling of Structural Strength*. Lavoisier, 2002.
- Z. P. BAZANT et S. PRASANNAN : Solidification theory for concrete creep : I formulation. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 115(8):1691–1725, 1989.
- Z.P. BAZANT : *Pager Symposium on Mechanics of Geomaterials ; Rocks, Concretes, Soils.*, chapitre Fracture in concrete and reinforced concrete, pages 281–316. Northwestern University, 1983.
- T. BELYTSCHKO, Y. KRONGAUZ, D. ORGAN, M. FLEMING et P. KRYSL : Meshless methods : An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:3–47, 1996.

- F. BENBOUDJEMA, F. MEFTAH et J.-M. TORRENTI : Interaction between drying, shrinkage, creep and cracking phenomena in concrete. *27(2):239–250*, 2005.
- E. BENVENUTI, A. TRALLI et G. VENTURA : A regularized xfm model for the transition from continuous to discontinuous displacements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007. In press.
- S.K. BHOWMIK et J.H. LONG : A general formulation for a cross-sections of yield surfaces in octahedral planes. In G.N PANDE et J. Middleton (EDS.), éditeurs : *NUMENTA 90*, pages 795–803. Elsevier, 1990.
- M. BOTTONI, F. DUFOUR et G. PIJAUDIER-CABOT : Coupling creep and damage in concrete through a constant parameter. In A. CARPINTERI, P. GAMBAROVA, G. FERRO et G. PLIZZARI, éditeurs : *Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*, volume 1, pages 509–515. Taylor & Francis, 2007.
- G. CHATZIGEORGIOU : Coupling between damage, temperature and permeability of concrete : Experimental and numerical study. Rapport technique, Ecole Centrale Nantes, 2004.
- A. Dufour F. CHOINSKA, M. Khelidj et G. PIJAUDIER-CABOT : Etude expérimentale de l'interaction endommagement-température-état de contrainte-perméabilité du béton. *REGC*, 11(6):839–853, 2007.
- M. CHOINSKA : *Effets de la température, du chargement mécanique et de leurs interactions sur la perméabilité du béton des structures*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Nantes / Universités de Nantes, 2006.
- M. CHOINSKA, F. DUFOUR et G. PIJAUDIER-CABOT : Matching permeability law from diffuse damage to discontinuous crack opening. In A. CARPINTERI, P. GAMBAROVA, G. FERRO et G. PLIZZARI, éditeurs : *Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*, volume 1, pages 541–547. Taylor & Francis, 2007.
- C. COMI, S. MARIANI et U. PEREGO : An extended fe strategy for transition from continuum damage to mode i cohesive crack propagation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31(2):213–238, 2007.
- R.S. CROUCH et B. TAHAR : Application of a stress return algorithm for elasto-plastic hardening-softening models with high yield surface curvature. In *Proceedings of European Congress on computational methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona, 2000.
- P. A. CUNDALL et O. D. L. STRACK : A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29:47–65, 1979.

- S. DAL PONT, B. A. SCHREFLER et A. EHRLACHER : Intrinsic permeability evolution in high temperature concrete : An experimental and numerical analysis. *Transport in Porous Media*, 60:43–74, 2005.
- J.H.P. de VREE, W.A.M. BREKELMANS et A. VAN : Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers and Structures*, 55:581–588, 1995.
- A. DELAPLACE, S. ROUX et G. PIJAUDIER-CABOT : Avalanche statistics of interface crack propagation in fiber bundle model : Characterization of cohesive crack. *Journal of Engineering Mechanics*, 127:646–652, July 2001.
- R. DESIASSYIFAYANTY, F. DUFOUR et H. PURMONO : Numerical simulation for coupling creep and damage of concrete on size effect. *Construction and Structural Engineering Studies Center*, 5(2):39–58, 2004.
- K. DUAN, X. HU et F. WITTMANN : Scaling of quasi-brittle fracture : Boundary and size effect. *Mechanics of Materials*, 38:128–141, 2006.
- F. DUFOUR : *Développements de la méthode des éléments finis avec des points d'intégration Lagrangiens : Application à la géomécanique*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2002.
- F. DUFOUR : Size effect in geomaterials. *Revue Européenne de Génie Civil*, 11(7-8):963–975, 2007.
- F. DUFOUR et G. PIJAUDIER-CABOT : Numerical modeling of concrete flow : Homogeneous approach. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29(4):395–416, 2005. doi :10.1002/nag.419.
- F. DUFOUR, G. PIJAUDIER-CABOT, M. CHOINSKA et A. HUERTA : How to extract a crack opening from a continuous damage finite element computation? In A. CARPINTERI, P. GAMBAROVA, G. FERRO et G. PLIZZARI, éditeurs : *Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*, volume 1, pages 125–131. Taylor & Francis, 2007.
- F. DUFOUR, G. PIJAUDIER-CABOT, M. CHOINSKA et A. HUERTA : Extraction of a crack opening from a continuous approach using regularized damage models. *Journal of Computers and Concrete*, 2008.
- G. ETSE et K.J. WILLAM : Fracture energy formulation for inelastic behavior of plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 106(9):1013–1203, 1994.
- D. GAWIN, C. ALONSO, C. ANDRADE et C. E. MAJORANA : Effect of damage on permeability and hygro-thermal behaviour of hpcs at elevated temperatures : Part 1 experimental results. *Computers and Concrete*, 2(3):189–202, 2005.

- B. GÉRARD, D. BREYSSE, A. AMMOUCHE, O. HOUDUSSE et O. DIRDRY : Cracking and permeability of concrete under tension. *Materials and Structures*, 29:141–151, 1996.
- R. A. GINGOLD et J. J. MONAGHAN : Smoothed particules hydrodynamics. 181:375–389, 1977.
- S. GRANGER, A LOUKILI, G. PIJAUDIER-CABOT et G. CHANVILLARD : Experimental characterization of the self healing of cracks in an ultra high performance cementitious material : mechanical tests and acoustic emission analysis. *Cement and Concrete Research*, 37(4):519–527, 2007.
- I. GUÉNOT-DELAHAIE : *Contribution à l'analyse physique et à la modélisation du fluage propre du béton*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- A. HILLERBORG, M. MODEER et P. E. PERTERSSON : Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6:773–782, 1976.
- X. HU et K. DUAN : Size effect : Influence of proximity of fracture process zone to specimen boundary. *Engineering Fracture Mechanics*, 74:1093–1100, 2007.
- X. HU et F. WITTMANN : Size effect on toughness induced by crack close to free surface. *Engineering Fracture Mechanics*, 65:209–221, 2000.
- C. HUET, P. ACKER et J. BARON : *Le béton hydraulique*, chapitre Fluage et autres effets rhéologiques différés du béton, pages 340–355. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1982.
- L. JASON : *Relation endommagement perméabilité pour les bétons application au calcul de structures*,. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, France, 2004.
- M JIRASEK : Objective modeling of strain localization. *Revue Française de Génie Civil*, 6(6):1119–1132, 2002.
- M. JIRASEK, S. ROLSHOVEN et P. GRASSL : Size effect on fracture energy induced by non-locality. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(7-8):653–670, 2004.
- K. KOVLER : Interdependence of creep and shrinkage for concrete under tension. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 7(2):96–101, 1995.
- A. KRAYANI : *Simulation numérique des structures en béton précontraint avec un modèle élasto-plastique endommageable et prise en compte des effets de bord*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Nantes, 2007.

- A. KRAYANI, F. DUFOUR et G. PIJAUDIER-CABOT : Elastoplastic nonlocal damage model for concrete and size effect analysis. In A. CARPINTERI, P. GAMBAROVA, G. FERRO et G. PLIZZARI, éditeurs : *Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*, volume 1, pages 343–349. Taylor & Francis, 2007.
- A. KRAYANI, G. PIJAUDIER-CABOT et F. DUFOUR : Boundary effect on weight function in non-local damage model. 2008. en cours de rédaction.
- C. LA BORDERIE : *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse des structures en béton*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1999.
- G. LEGRAIN, F. DUFOUR, A. HUERTA et G. PIJAUDIER-CABOT : Extraction of crack opening from a non-local damage field. In E. OÑATE, D.R.J. OWEN et B. SUÁREZ, éditeurs : *Proceedings of IX International Conference on Computational Plasticity*, volume 1, pages 462–465, September 2007.
- J. LI et Y. YAO : A study on creep and drying shrinkage of high performance concrete. *Cement and Concrete Research*, 31:1203–1206, 2001.
- J. MAZARS : *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture de béton de structure*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1984. In French.
- J. MAZARS et G. PIJAUDIER-CABOT : From damage to fracture mechanics and conversely : a combined approach. *International Journal of Solids and Structures*, 33:3327–3342, 1996.
- C. MAZZOTTI et M. SAVOIA : Nonlinear creep, poisson's ratio, and creep-damage interaction of concrete in compression. *ACI Materials Journal*, 99:450–457, 2002.
- J. M. MELENK et I. BABUSKA : The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:289–314, 1996.
- H. MEZIANI et F. SKOCZYLAS : An experimental study of the mechanical behaviour of a mortar and of its permeability under deviatoric loading. *Materials and Structures*, 32:403–409, 1999.
- N. MOES, J. DOLBOW et T. BELYTSCHKO : A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:131–150, 1999.
- N. MOES, A. GRAVOUIL et T. BELYTSCHKO : Non planar crack growth by extended finite element and level set updates. part i : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:2549–2586, 2002.
- A. M. NEVILLE, W. H. DILGER et J. J. BROOKS : *Creep of plain and structural concrete*. Construction press, London, 1983.

- D. NGO et A. C. SCORDELIS : Finite element analysis of reinforced beams. *Journal of American Concrete Institute*, 64(3):152–163, 1967.
- J. OLIVER et A. E. HUESPE : On strategies for tracking strong discontinuities in computational failure mechanics. *In WCCM V Proceedings*, 2002.
- J. OLIVER, A. E. HUESPE, M. D. G. PULIDO et E. W. V. CHAVES : From continuum mechanics to fracture mechanics : the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:113–136, 2002.
- M. OMAR : *Déformations différées du béton : Etude expérimentale et modélisation numérique de l'interaction fluage - endommagement*,. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, France, 2004.
- C. O'NEILL, L. MORESI, D. MÜLLER, R. ALBERT et F. DUFOUR : Ellipsis 3d : A particle-in-cell finite element hybrid code for modelling mantle convection and lithospheric deformation. *Computers & Geosciences*, 32:1769–1779, 2006.
- B. PATZAK et M. JIRASEK : Process zone resolution by extended finite elements. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(7-8):957–977, 2003.
- R. H. J. PEERLINGS, R. de BORST, W. A. M. BREKELMANS, J. H. P. de VREE et I. SPEE : Some observations on localisation in non-local and gradient damage models. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 15(6):937–953, 1996.
- R. H. J. PEERLINGS, M. G. D. GEERS, R. de BORST et W. A. M. BREKELMANS : A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures*, 38:7723–7746, 2001.
- A. PÉREZ-FOGUET, A. RODRIGUEZ-FERRAN et A. HUERTA : Numerical differentiation for local and global tangent operators in computational plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:159–184, 2000a.
- A. PÉREZ-FOGUET, A. RODRIGUEZ-FERRAN et A. HUERTA : Numerical differentiation for non-trivial consistent tangent matrices : an application to the mrs-lade model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189:277–296, 2000b.
- V. PICANDET : *Influence d'un endommagement mécanique sur la perméabilité et sur la diffusivité hydrique des bétons*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2001.
- V. PICANDET, A. KHELIDJ et G. BASTIAN : Effect of axial compressive damage on gas permeability of ordinary and high performance concrete. *Cement and Concrete Research*, 31:1525–1532, 2001.

- B. PICHLER, C. HELLMICH et H. MANG : A combined fracture-micromechanics model for tensile strain-softening in brittle materials, based on propagation of interacting microcracks. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31:111–132, 2007.
- G. PIJAUDIER-CABOT et Z. BAZANT : Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113:1512–1533, 1987.
- G. PIJAUDIER-CABOT et A. BENALLAL : Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum. *International Journal of Solids and Structures*, 30:1761–1775, 1993.
- G. PIJAUDIER-CABOT, K. HAIDAR et J.-F. DUBE : Nonlocal damage model with evolving internal length. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28:633–652, 2004.
- J. PLANAS, M. ELICES et G. V. GUINEA : Cohesive cracks versus nonlocal models : Closing the gap. *International Journal of Fracture*, 63:173–187, 1993.
- C. POLIZZOTTO : Gradient elasticity and nonstandard boundary conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 40(26):7399–7423, 2003.
- T. C. POWERS : *The structure of concrete and its behaviour under load*, chapitre Mechanics of shrinkage and reversible creep of hardened cement paste, pages 319–344. Proceedings, London, 1965.
- H. RAMTANI : *Contribution à la modélisation de comportement multiaxial du béton endommagé avec description de l'effet unilatéral*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1990.
- N. ROUSSEL, M. GEIKER, F. DUFOUR, L. THRANE et P. SZABO : Computational modeling of concrete flow : State of the art. *Cement and Concrete Research*, 37(9):1298–1307, 2007.
- J. C. SIMO, J. OLIVER et F. ARMERO : An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12:277–296, 1993.
- A. SIMONE, G. N. WELLS et L. J. SLUYS : From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(41-42):4581–4607, 2003.
- T. SUGIYAMA, T.W. BREMMER et T.A. HOLM : Effect of stress on gas permeability in concrete. *ACI Materials Journal*, 93:443–450, 1996.
- F.-J. ULM et P. ACKER : Le point sur le fluage et la recouvrance du béton. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, XX:73–82, 1998.

- F.-J. ULM, F. LE MAOU et C. BOULAY : Creep and shrinkage coupling : new review of some evidence. *Revue Française de Génie Civil*, 3:21–37, 1999.
- K. WANG, S. P. JANSEN, D.C. ans Shah et A. F. KARR : Permeability study of cracked concrete. *Cement and Concrete Research*, 27:381–393, 1997.
- K. WILLAM et E. P. WARNKE : Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *In IABSE Seminar on Concrete Structures subjected to triaxial sresses*, volume III-1, 1974.
- F. WITTMANN, H. MIHASHI et N. NOMURA : Size effect on fracture energy of concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 35:107–115, 1990.