

Contributions of Wavelet Leaders and Bootstrap to Multifractal Analysis:

Images, Estimation Performance, Dependence Structure and
Vanishing Moments.

Confidence Intervals and Hypothesis Tests.

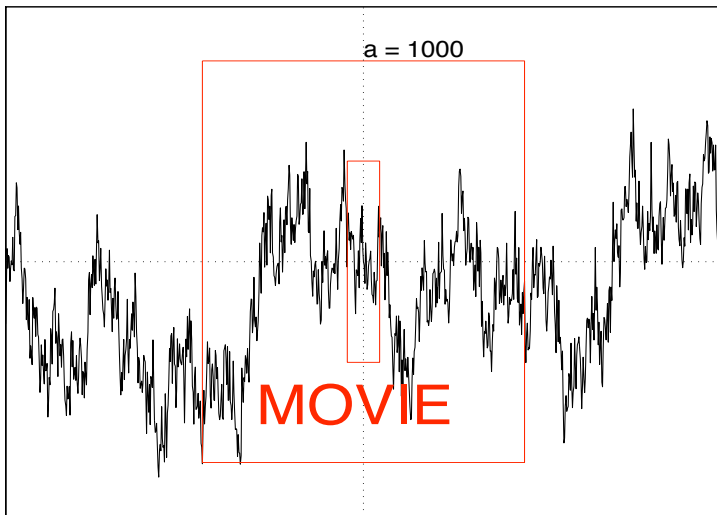
Herwig Wendt

sous la direction de Patrice Abry

Equipe SiSyPhe, Laboratoire de Physique,
Ecole normale supérieure de Lyon

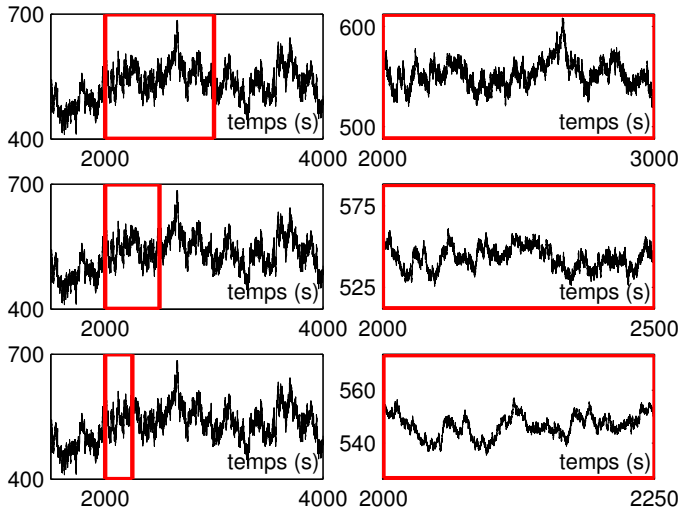


Invariance d'échelle



Données réelles

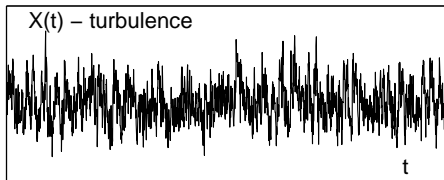
► Trafic internet :



WAND, Auckland Nouvelle-Zélande [Abry Veitch 1998]

Données réelles

- ▶ Turbulence hydrodynamique :



[Chavarria et al. 1995]

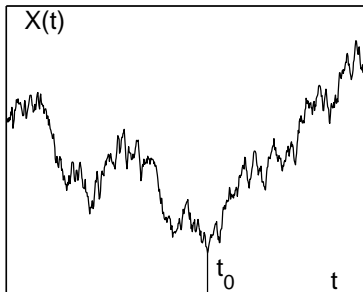
- ▶ Physiologie, rythmes biologiques (cœur, marche)
- ▶ Génome
- ▶ Géophysique (failles, tremblements de terre)
- ▶ Hydrologie (nivologie)
- ▶ Physique statistique (interactions longue portée)
- ▶ Astrophysique et cosmologie (structure de l'univers)
- ▶ Géographie (répartition de population)
- ▶ Marchés financiers

Analyse Multifractale

- **Régularité locale** de $X(t)$ à t_0 :

$$X \in C^\alpha(t_0) \quad \text{si} \quad \exists C, \alpha > 0; P_{t_0}(t); \deg(P_{t_0}) < \alpha :$$

$$|X(t) - P_{t_0}(t)| < C|t - t_0|^\alpha$$

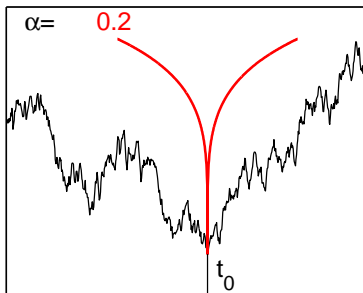


Analyse Multifractale

- **Régularité locale** de $X(t)$ à t_0 :

$$X \in C^\alpha(t_0) \quad \text{si} \quad \exists C, \alpha > 0; P_{t_0}(t); \deg(P_{t_0}) < \alpha :$$

$$|X(t) - P_{t_0}(t)| < C|t - t_0|^\alpha$$

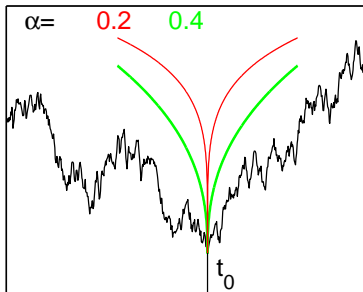


Analyse Multifractale

- **Régularité locale** de $X(t)$ à t_0 :

$$X \in C^\alpha(t_0) \quad \text{si} \quad \exists C, \alpha > 0; P_{t_0}(t); \deg(P_{t_0}) < \alpha :$$

$$|X(t) - P_{t_0}(t)| < C|t - t_0|^\alpha$$

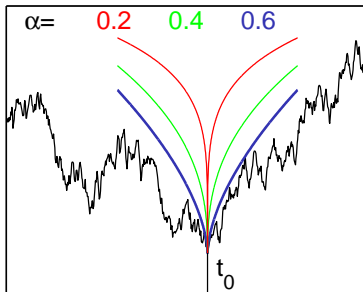


Analyse Multifractale

- **Régularité locale** de $X(t)$ à t_0 :

$$X \in C^\alpha(t_0) \quad \text{si} \quad \exists C, \alpha > 0; P_{t_0}(t); \deg(P_{t_0}) < \alpha :$$

$$|X(t) - P_{t_0}(t)| < C|t - t_0|^\alpha$$



Analyse Multifractale

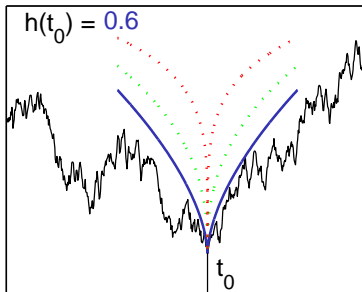
- ▶ **Régularité locale** de $X(t)$ à t_0 :

$$X \in C^\alpha(t_0) \quad \text{si} \quad \exists C, \alpha > 0; P_{t_0}(t); \deg(P_{t_0}) < \alpha :$$

$$|X(t) - P_{t_0}(t)| < C|t - t_0|^\alpha$$

- ▶ **Exposant de Hölder** :

$$h(t_0) = \sup_{\alpha} \{ \alpha : X \in C^\alpha(t_0) \}$$

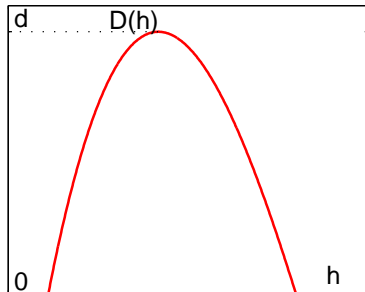
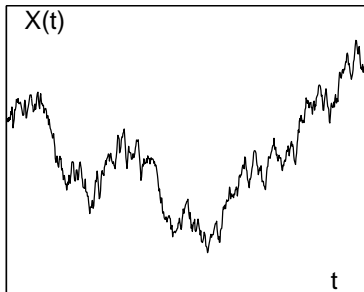


Analyse Multifractale

► **Spectre multifractal** $D(h)$:

- Variabilité de la régularité locale
- Dimension de Hausdorff des ensembles $\{t_i | h(t_i) = h\}$

$$D(h) = \dim_H \{t : h(t) = h\}$$

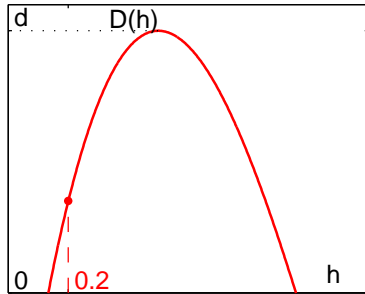
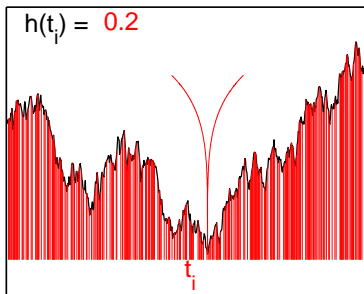


Analyse Multifractale

► **Spectre multifractal** $D(h)$:

- Variabilité de la régularité locale
- Dimension de Hausdorff des ensembles $\{t_i | h(t_i) = h\}$

$$D(h) = \dim_H \{t : h(t) = h\}$$

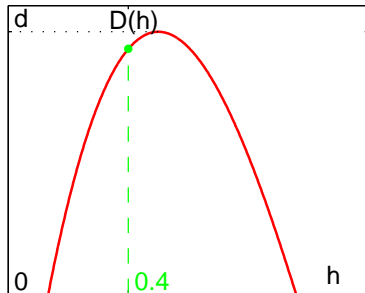
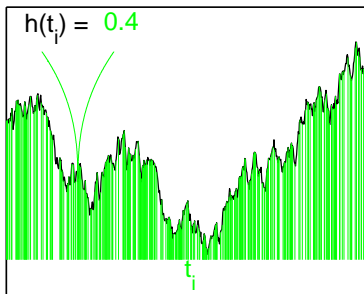


Analyse Multifractale

► **Spectre multifractal** $D(h)$:

- Variabilité de la régularité locale
- Dimension de Hausdorff des ensembles $\{t_i | h(t_i) = h\}$

$$D(h) = \dim_H \{t : h(t) = h\}$$

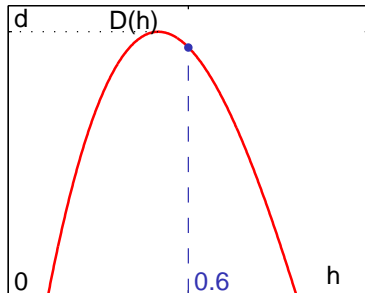
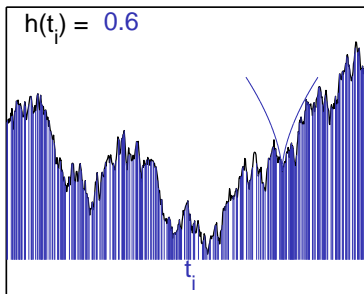


Analyse Multifractale

► **Spectre multifractal** $D(h)$:

- Variabilité de la régularité locale
- Dimension de Hausdorff des ensembles $\{t_i | h(t_i) = h\}$

$$D(h) = \dim_H \{t : h(t) = h\}$$



Analyse Multifractale

► **Spectre multifractal** $D(h)$:

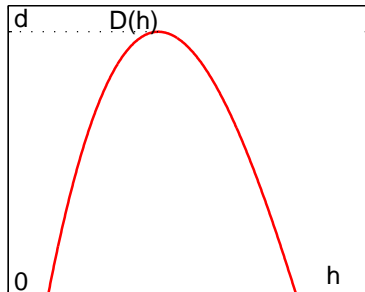
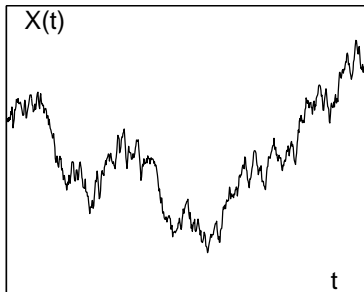
- Variabilité de la régularité locale
- Dimension de Hausdorff des ensembles $\{t_i | h(t_i) = h\}$

$$D(h) = \dim_H \{t : h(t) = h\}$$

► **Formalismes multifractals** :

→ $D(h)$ en pratique ?

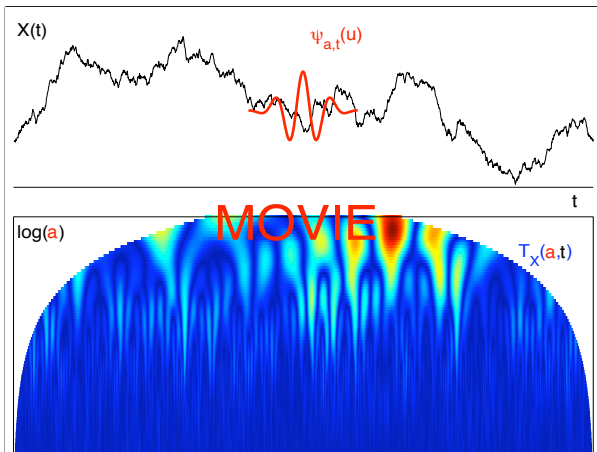
[Parisi Frisch 1985] et suivants



Formalisme Multifractal : Quantités Multirésolution

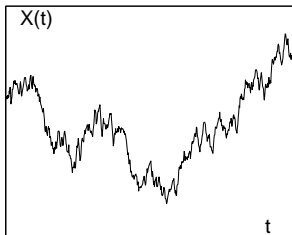
$$\blacktriangleright X(t) \longrightarrow T_X(a, t) = \langle X | \psi_{a,t} \rangle$$

$$\psi_{a,t}(u) = \frac{1}{a} \psi_0 \left(\frac{u-t}{a} \right)$$



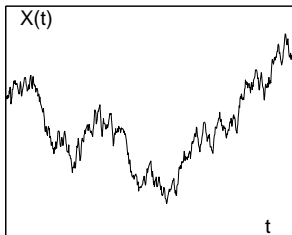
Formalisme Multifractal

$$X(t) \rightarrow T_X(a, t) = \langle X | \psi_{a,t} \rangle$$



Formalisme Multifractal

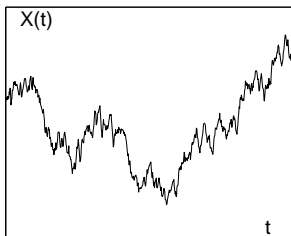
$$X(t) \rightarrow T_X(a, t) = \langle X | \psi_{a,t} \rangle$$



$$S(a, q) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} |T_X(a, k)|^q$$

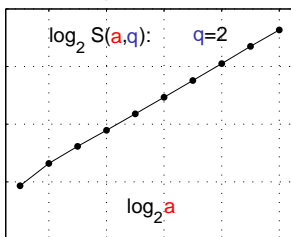
Formalisme Multifractal

$$X(t) \rightarrow T_X(a, t) = \langle X | \psi_{a,t} \rangle$$



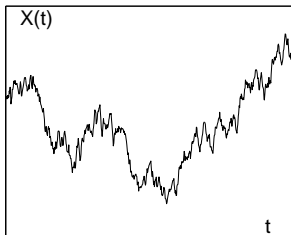
$$S(a, q) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} |T_X(a, k)|^q$$

$$S(a, q) \simeq c_q a^{\zeta(q)}, \quad a \rightarrow 0$$

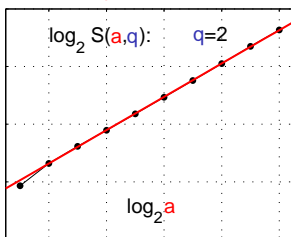


Formalisme Multifractal

$$X(t) \rightarrow T_X(a, t) = \langle X | \psi_{a,t} \rangle$$



$$S(a, q) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} |T_X(a, k)|^q$$

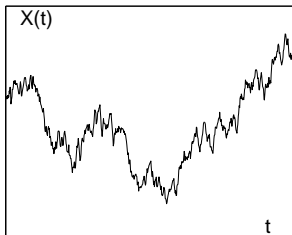


$$S(a, q) \simeq c_q a^{\zeta(q)}, \quad a \rightarrow 0$$

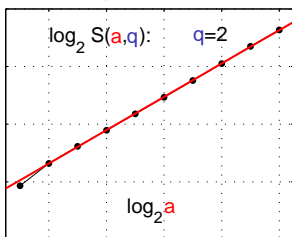
$$\zeta(q) = \liminf_{a \rightarrow 0} \frac{\ln S(a, q)}{\ln a}$$

Formalisme Multifractal

$$X(t) \rightarrow T_X(a, t) = \langle X | \psi_{a,t} \rangle$$

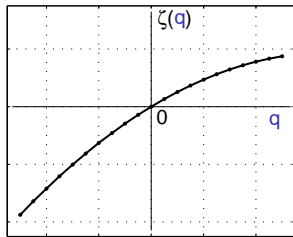


$$S(a, q) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} |T_X(a, k)|^q$$



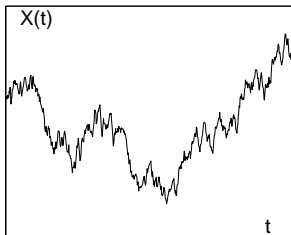
$$D(h) = \min_{q \neq 0} (d + qh - \zeta(q))$$

$$S(a, q) \simeq c_q a^{\zeta(q)}, \quad a \rightarrow 0$$

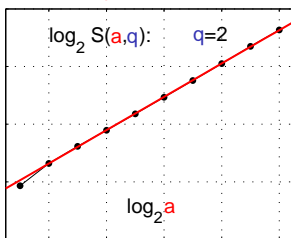


Formalisme Multifractal

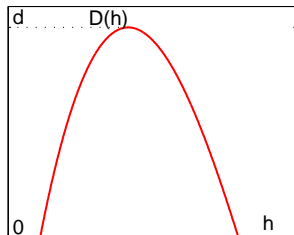
$$X(t) \rightarrow T_X(a, t) = \langle X | \psi_{a,t} \rangle$$



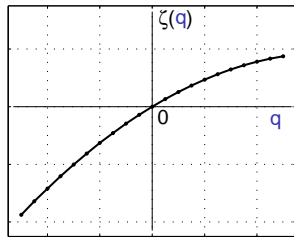
$$S(a, q) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} |T_X(a, k)|^q$$



$$D(h) = \min_{q \neq 0} (d + qh - \zeta(q))$$



$$S(a, q) \simeq c_q a^{\zeta(q)}, \quad a \rightarrow 0$$



Formalisme Multifractal : Log-cumulants

▶ $\zeta(q) = \liminf_{a \rightarrow 0} \frac{\ln S(a, q)}{\ln a}$

▶ **log-cumulants** $c_p \longrightarrow$ cumulants des $\log |T_X(a, t)|$

[Castaing et al. 1993]

▶
$$D(h) = d + \frac{c_2}{2!} \left(\frac{h-c_1}{c_2} \right)^2 + \frac{-c_3}{3!} \left(\frac{h-c_1}{c_2} \right)^3 + \frac{-c_4 + \frac{3c_3^2}{c_2}}{4!} \left(\frac{h-c_1}{c_2} \right)^4 + \dots$$

- c_1 : maximum
- c_2 : largeur
- c_3 : asymétrie
- c_4 : aplatissement ...

Formalisme Multifractal : Log-cumulants

▶ $\zeta(q) = c_1 q + \frac{c_2}{2} q^2 + \frac{c_3}{6} q^3 + \dots$

▶ **log-cumulants** $c_p \longrightarrow$ cumulants des $\log |T_X(\mathbf{a}, t)|$

[Castaing et al. 1993]

▶ $D(h) = d + \frac{c_2}{2!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^2 + \frac{-c_3}{3!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^3 + \frac{-c_4 + \frac{3c_3^2}{c_2}}{4!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^4 + \dots$

- c_1 : maximum
- c_2 : largeur
- c_3 : asymétrie
- c_4 : aplatissement ...

Formalisme Multifractal : Log-cumulants

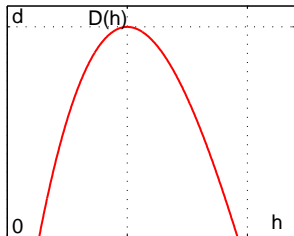
▶ $\zeta(q) = c_1 q + \frac{c_2}{2} q^2 + \frac{c_3}{6} q^3 + \dots$

▶ **log-cumulants** $c_p \longrightarrow$ cumulants des $\log |T_X(\mathbf{a}, t)|$

[Castaing et al. 1993]

▶ $D(h) = d + \frac{c_2}{2!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^2 + \frac{-c_3}{3!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^3 + \frac{-c_4 + \frac{3c_3^2}{c_2}}{4!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^4 + \dots$

- c_1 : maximum
- c_2 : largeur
- c_3 : asymétrie
- c_4 : aplatissement ...



Formalisme Multifractal : Log-cumulants

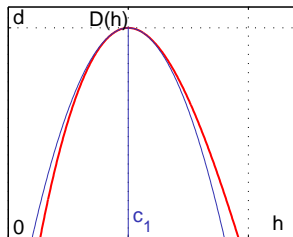
▶ $\zeta(q) = c_1 q + \frac{c_2}{2} q^2 + \frac{c_3}{6} q^3 + \dots$

▶ **log-cumulants** $c_p \longrightarrow$ cumulants des $\log |T_X(a, t)|$

[Castaing et al. 1993]

▶ $D(h) = d + \frac{c_2}{2!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^2 + \frac{-c_3}{3!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^3 + \frac{-c_4 + \frac{3c_3^2}{c_2}}{4!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^4 + \dots$

- c_1 : maximum
- c_2 : largeur
- c_3 : asymétrie
- c_4 : aplatissement ...



Formalisme Multifractal : Log-cumulants

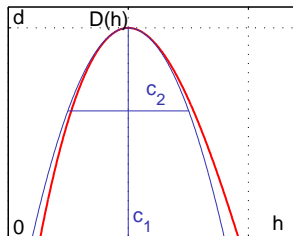
▶ $\zeta(q) = c_1 q + \frac{c_2}{2} q^2 + \frac{c_3}{6} q^3 + \dots$

▶ **log-cumulants** $c_p \longrightarrow$ cumulants des $\log |T_X(\mathbf{a}, t)|$

[Castaing et al. 1993]

▶ $D(h) = d + \frac{c_2}{2!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^2 + \frac{-c_3}{3!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^3 + \frac{-c_4 + \frac{3c_3^2}{c_2}}{4!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^4 + \dots$

- c_1 : maximum
- c_2 : largeur
- c_3 : asymétrie
- c_4 : aplatissement ...



Formalisme Multifractal : Log-cumulants

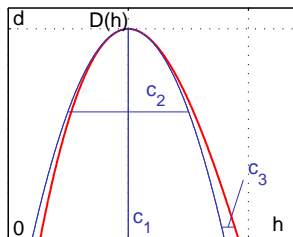
▶ $\zeta(q) = c_1 q + \frac{c_2}{2} q^2 + \frac{c_3}{6} q^3 + \dots$

▶ **log-cumulants** $c_p \longrightarrow$ cumulants des $\log |T_X(a, t)|$

[Castaing et al. 1993]

▶ $D(h) = d + \frac{c_2}{2!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^2 + \frac{-c_3}{3!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^3 + \frac{-c_4 + \frac{3c_3^2}{c_2}}{4!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^4 + \dots$

- c_1 : maximum
- c_2 : largeur
- c_3 : asymétrie
- c_4 : aplatissement ...



Formalisme Multifractal : Log-cumulants

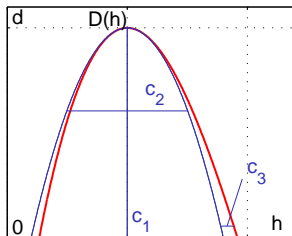
► $\zeta(q) = c_1 q + \frac{c_2}{2} q^2 + \frac{c_3}{6} q^3 + \dots$

► **log-cumulants** $c_p \longrightarrow$ cumulants des $\log |T_X(a, t)|$

[Castaing et al. 1993]

► $D(h) = d + \frac{c_2}{2!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^2 + \frac{-c_3}{3!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^3 + \frac{-c_4 + \frac{3c_3^2}{c_2}}{4!} \left(\frac{h-c_1}{c_2}\right)^4 + \dots$

- c_1 : maximum
- c_2 : largeur
- c_3 : asymétrie
- c_4 : aplatissement ...

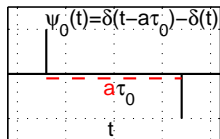


Formalisme Multifractal : Choix de ψ_0

$$\psi_{a,t}(u) = \frac{1}{a} \psi_0 \left(\frac{u-t}{a} \right)$$

Formalisme Multifractal : Choix de ψ_0

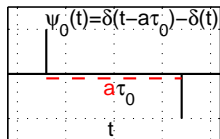
Accroissements :



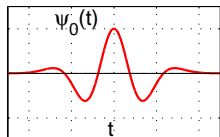
$$\psi_{a,t}(u) = \frac{1}{a} \psi_0\left(\frac{u-t}{a}\right)$$

Formalisme Multifractal : Choix de ψ_0

Accroissements :



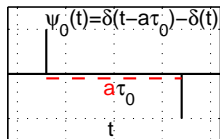
Ondelettes :



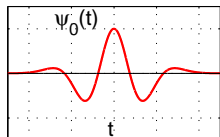
$$\psi_{a,t}(u) = \frac{1}{a} \psi_0\left(\frac{u-t}{a}\right)$$

Formalisme Multifractal : Choix de ψ_0

Accroissements :

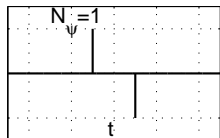


Ondelettes :



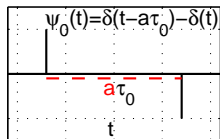
$$\psi_{a,t}(u) = \frac{1}{a} \psi_0\left(\frac{u-t}{a}\right)$$

Régularité :

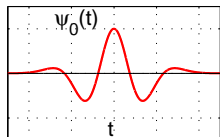


Formalisme Multifractal : Choix de ψ_0

Accroissements :

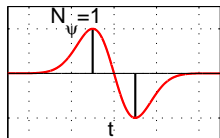


Ondelettes :



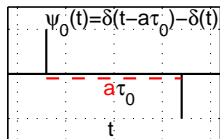
$$\psi_{a,t}(u) = \frac{1}{a} \psi_0\left(\frac{u-t}{a}\right)$$

Régularité :

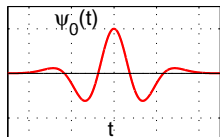


Formalisme Multifractal : Choix de ψ_0

Accroissements :

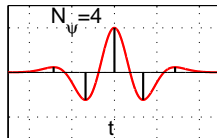
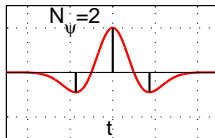
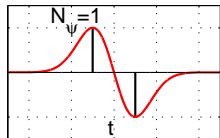


Ondelettes :



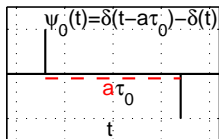
$$\psi_{a,t}(u) = \frac{1}{a} \psi_0\left(\frac{u-t}{a}\right)$$

Moments nuls $N_\psi \bullet \int_{\mathbb{R}} t^n \psi_0(t) dt \equiv 0 \ (n = 0, \dots, N_\psi - 1) \bullet \int_{\mathbb{R}} u^{N_\psi} \psi_0(u) du \neq 0$

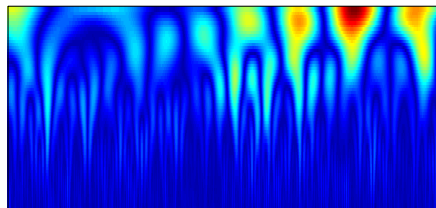
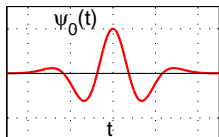


Formalisme Multifractal : Choix de ψ_0

Accroissements :

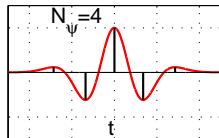
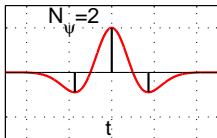
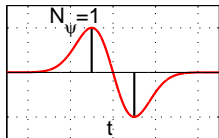
 $t \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$

Ondelettes :

 t

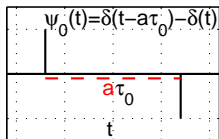
$$\psi_{a,t}(u) = \frac{1}{a} \psi_0\left(\frac{u-t}{a}\right)$$

Moments nuls $N_\psi \bullet \int_{\mathbb{R}} t^n \psi_0(t) dt \equiv 0 \ (n = 0, \dots, N_\psi - 1) \bullet \int_{\mathbb{R}} u^{N_\psi} \psi_0(u) du \neq 0$



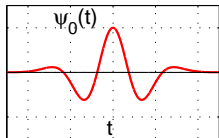
Formalisme Multifractal : Choix de ψ_0

Accroissements :



Transformée en ondelettes discrète :

Ondelettes :

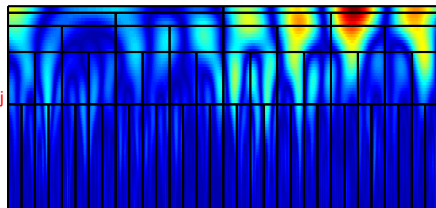


$$t = 2^j k$$

$$a = 2^j$$

$$j, k \in \mathbb{Z}$$

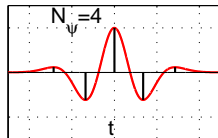
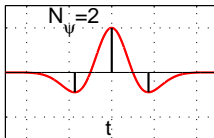
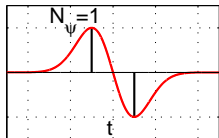
$$a=2^j$$



$$t=2^j k$$

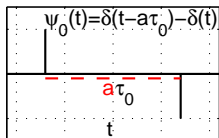
$$\psi_{a,t}(u) = \frac{1}{a} \psi_0\left(\frac{u-t}{a}\right)$$

Moments nuls $N_\psi \bullet \int_{\mathbb{R}} t^n \psi_0(t) dt \equiv 0 \ (n = 0, \dots, N_\psi - 1) \bullet \int_{\mathbb{R}} u^{N_\psi} \psi_0(u) du \neq 0$



Formalisme Multifractal : Choix de ψ_0

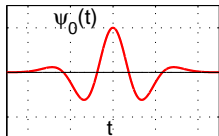
Accroissements :



Transformée en ondelettes discrète :

$$d_X(j, k) = \langle X | \psi_{j,k} \rangle$$

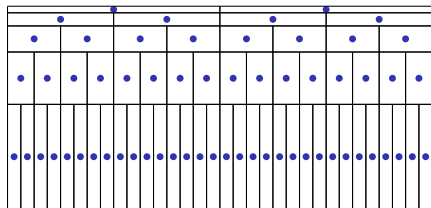
Ondelettes :



$$t = 2^j k$$

$$a = 2^j$$

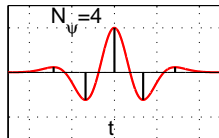
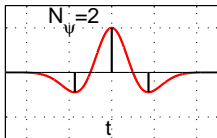
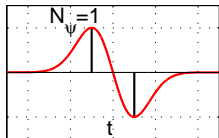
$$j, k \in \mathbb{Z}$$



$$\psi_{a,t}(u) = \frac{1}{a} \psi_0\left(\frac{u-t}{a}\right)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j} \psi_0(k - 2^{-j}t)$$

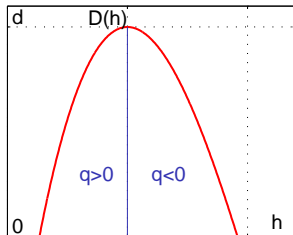
Moments nuls $N_\psi \bullet \int_{\mathbb{R}} t^n \psi_0(t) dt \equiv 0 \ (n = 0, \dots, N_\psi - 1) \bullet \int_{\mathbb{R}} u^{N_\psi} \psi_0(u) du \neq 0$



Formalisme Multifractal : "Leaders"

$$S(2^j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |d_X(j, k)|^q$$

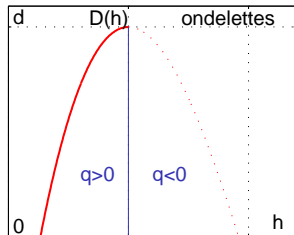
coefficients d'ondelette



Formalisme Multifractal : "Leaders"

$$S(2^j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |d_X(j, k)|^q$$

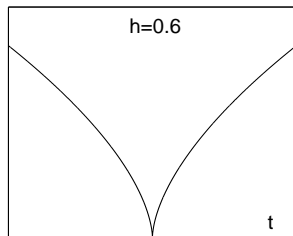
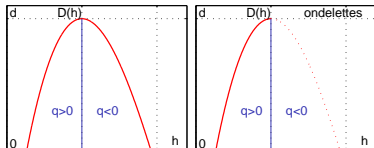
- Moments $q < 0$:
coefficients d'ondelette ✗



Formalisme Multifractal : "Leaders"

$$S(2^j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |d_X(j, k)|^q$$

1. Moments $q < 0$:
coefficients d'ondelette \times
2. Singularités "cusp" :
coefficients d'ondelette ok

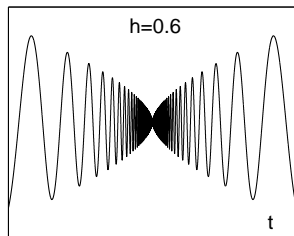
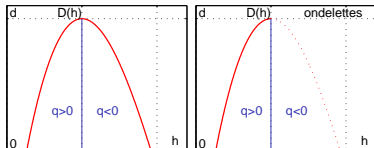


Formalisme Multifractal : "Leaders"

$$S(2^j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |d_X(j, k)|^q$$

1. Moments $q < 0$:
coefficients d'ondelette ✗

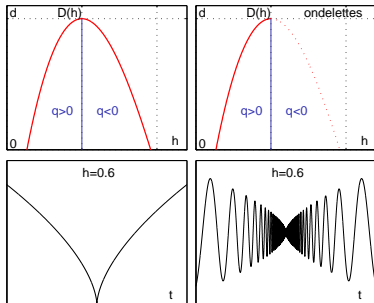
2. Singularités "oscillantes" :
coefficients d'ondelette ✗



Formalisme Multifractal : "Leaders"

$$S(2^j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |d_X(j, k)|^q$$

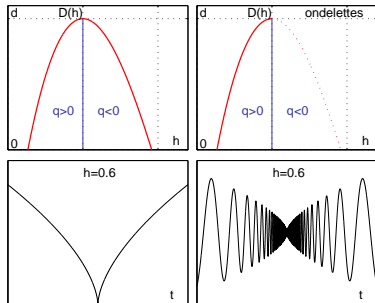
1. Moments $q < 0$:
coefficients d'ondelette ✗
2. Singularités "oscillantes" :
coefficients d'ondelette ✗



Formalisme Multifractal : "Leaders"

$$S(2^j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |d_X(j, k)|^q$$

1. Moments $q < 0$:
coefficients d'ondelette ✗
2. Singularités "oscillantes" :
coefficients d'ondelette ✗



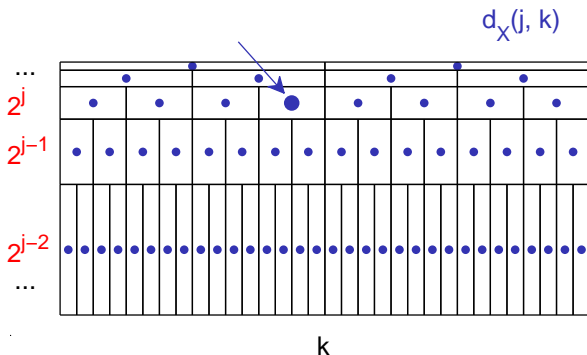
Quantités multirésolution hiérarchiques :

Leaders

[Jaffard 2004]

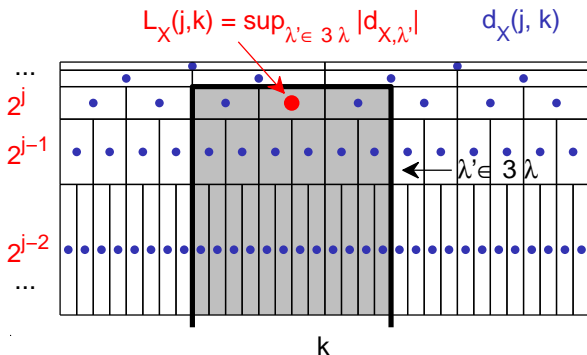
Formalisme Multifractal : "Leaders"

► $d_X(j, k) \longrightarrow L_X(j, k) :$



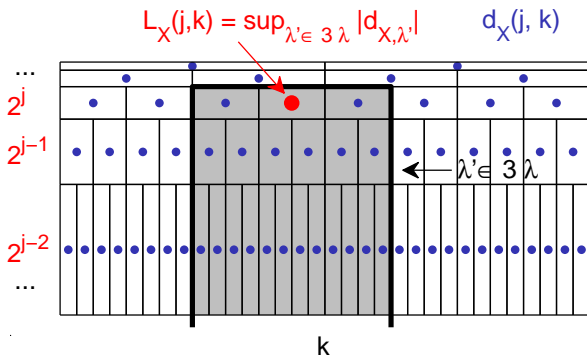
Formalisme Multifractal : "Leaders"

► $d_X(j, k) \longrightarrow L_X(j, k) :$



Formalisme Multifractal : "Leaders"

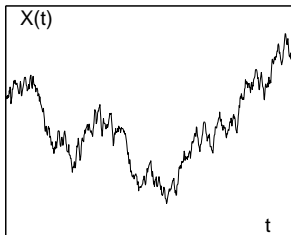
► $d_X(j, k) \longrightarrow L_X(j, k) :$



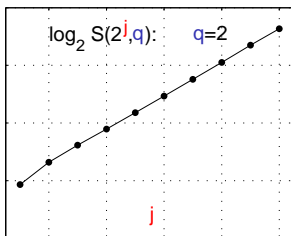
1. Moments $q < 0$: ok
2. Singularités "oscillantes" : ok

Formalisme Multifractal : Etat de l'art

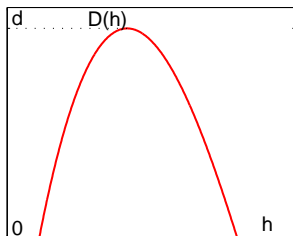
$$X(t) \rightarrow L_X(j, k)$$



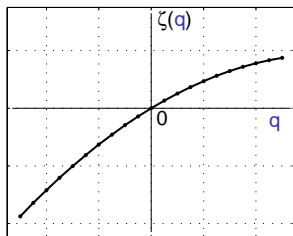
$$S(2^j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} L_X(j, k)^q$$



$$D(h) = \min_{q \neq 0} (d + qh - \zeta(q))$$



$$S(2^j, q) \simeq c_q 2^{j\zeta(q)}, \quad 2^j \rightarrow 0$$



Plan des contributions

1. Autour des Leaders

- ▶ Propriétés statistiques
- ▶ **Performances d'estimation**
- ▶ Extension aux fonctions non bornées
- ▶ Signaux 2d : Images
- ▶ Effet de linéarisation
- ▶ Discrétisation

2. Bootstrap pour l'analyse multifractale

3. Structure de dépendance

Performances d'estimation : Etude numérique

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}(q) &= \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 S(2^j, q) \\ \hat{c}_p &= (\log_2 e) \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}(2^j, p) \\ \hat{D}(h) &= \min_{q \neq 0} (d + qh - \hat{\zeta}(q))\end{aligned}$$

Performances d'estimation : Etude numérique

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}(q) &= \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 S(2^j, q) \\ \hat{c}_p &= (\log_2 e) \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}(2^j, p) \\ \hat{D}(h) &= \min_{q \neq 0} (d + qh - \hat{\zeta}(q))\end{aligned}$$

► Processus synthétiques :

$$\left. \begin{array}{l} \zeta(q) \\ c_p \\ D(h) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{connu} \\ \text{contrôlé} \end{array}$$

Performances d'estimation : Etude numérique

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}(q) &= \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 S(2^j, q) \\ \hat{c}_p &= (\log_2 e) \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}(2^j, p) \\ \hat{D}(h) &= \min_{q \neq 0} (d + qh - \hat{\zeta}(q))\end{aligned}$$

- ▶ biais
- écart-type
- eqm

- ▶ Processus synthétiques :

$$\left. \begin{array}{l} \zeta(q) \\ c_p \\ D(h) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{connu} \\ \text{contrôlé} \end{array}$$

Performances d'estimation : Etude numérique

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}(q) &= \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 S(2^j, q) \\ \hat{c}_p &= (\log_2 e) \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}(2^j, p) \\ \hat{D}(h) &= \min_{q \neq 0} (d + qh - \hat{\zeta}(q))\end{aligned}$$

- ▶ biais
- écart-type
- eqm

▶ Processus synthétiques :

$$\left. \begin{array}{l} \zeta(q) \\ c_p \\ D(h) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{connu} \\ \text{contrôlé} \end{array}$$

▶ Etude :

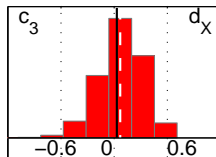
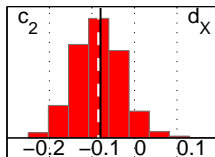
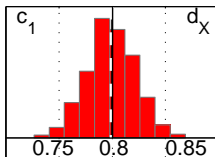
- d_X et L_X
- Taille d'échantillon N
- Paramètres processus
- Paramètres d'estimation
(j_1, j_2, w_j)
- Différents processus
mono- et multi-fractal
 H -sssi
CMC
CPC
...

Performances d'estimation : Cumulants

$$\hat{c}_p = \log_2 e \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}(2^j, p)$$

$N = 2^{14}$, $(j_1, j_2) = (3, 14)$, 1000 réalisations

coefficients

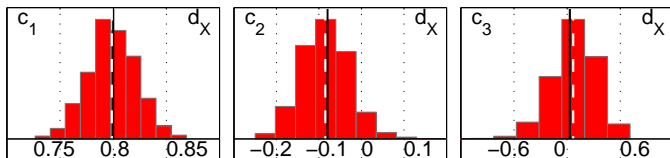


Performances d'estimation : Cumulants

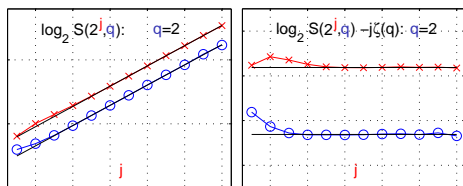
$$\hat{c}_p = \log_2 e \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}(2^j, p)$$

$N = 2^{14}$, $(j_1, j_2) = (3, 14)$, 1000 réalisations

coefficients



Leaders



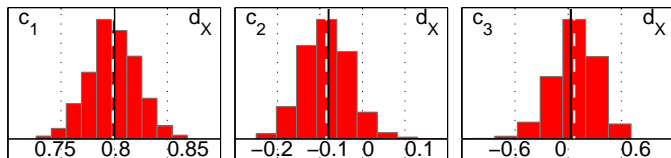
× petites échelles j

Performances d'estimation : Cumulants

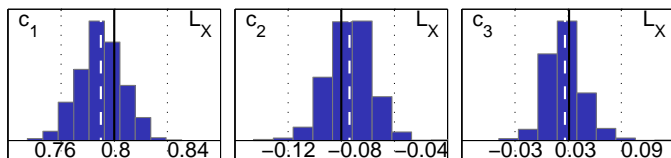
$$\hat{c}_p = \log_2 e \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}(2^j, p)$$

$N = 2^{14}$, $(j_1, j_2) = (3, 14)$, 1000 réalisations

coefficients



Leaders



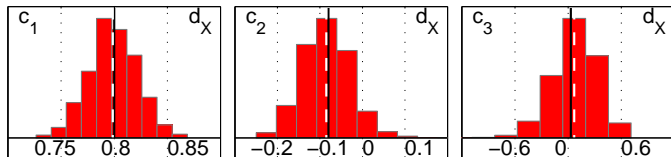
× petites échelles j

Performances d'estimation : Cumulants

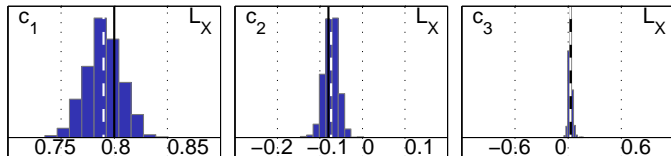
$$\hat{c}_p = \log_2 e \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}(2^j, p)$$

$N = 2^{14}$, $(j_1, j_2) = (3, 14)$, 1000 réalisations

coefficients



Leaders



✗ petites échelles j

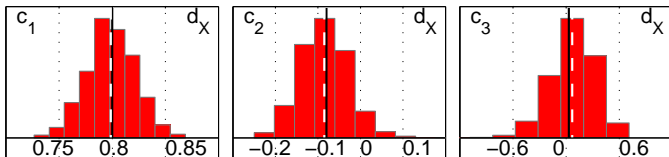
▶ variance réduite

Performances d'estimation : Cumulants

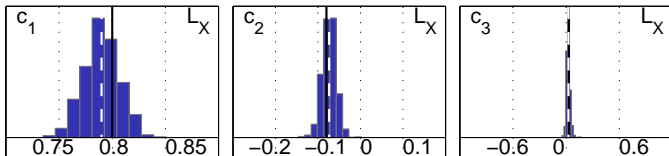
$$\hat{c}_p = \log_2 e \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}(2^j, p)$$

$N = 2^{14}$, $(j_1, j_2) = (3, 14)$, 1000 réalisations

coefficients



Leaders



✗ petites échelles j

▶ variance réduite

▶ $L_X \gg d_X$ ★

Plan des contributions

1. Autour des Leaders

- ▶ Propriétés statistiques
- ▶ Performances d'estimation
- ▶ **Extension aux fonctions non bornées**
- ▶ Signaux 2d : Images
- ▶ Effet de linéarisation
- ▶ Discrétisation

2. Bootstrap pour l'analyse multifractale

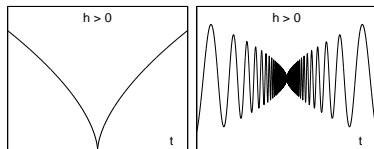
3. Structure de dépendance

Extension aux fonctions non bornées

- ▶ Leaders : $|X(t)| < \infty, \quad t \in \mathbb{R}$

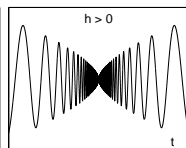
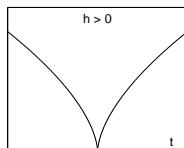
Extension aux fonctions non bornées

- Leaders : $|X(t)| < \infty, \quad t \in \mathbb{R}$
Condition suffisante : $h_{min} > 0$

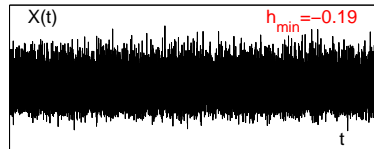


Extension aux fonctions non bornées

- ▶ Leaders : $|X(t)| < \infty, t \in \mathbb{R}$
Condition suffisante : $h_{min} > 0$

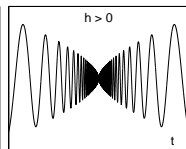
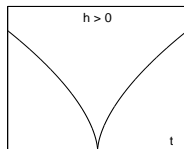


- ▶ $h_{min} < 0$: Leaders ✗

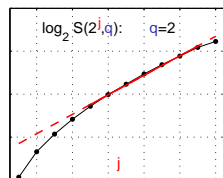
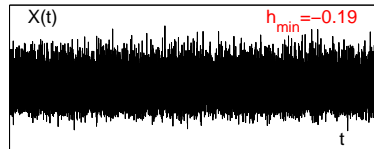


Extension aux fonctions non bornées

- ▶ Leaders : $|X(t)| < \infty, t \in \mathbb{R}$
Condition suffisante : $h_{min} > 0$

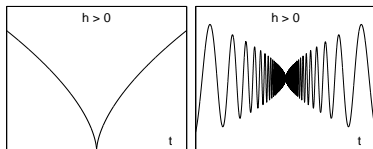


- ▶ $h_{min} < 0$: Leaders ✗

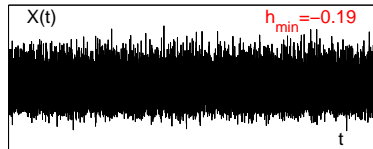


Extension aux fonctions non bornées

- ▶ Leaders : $|X(t)| < \infty, \quad t \in \mathbb{R}$
Condition suffisante : $h_{min} > 0$



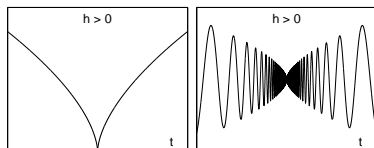
- ▶ $h_{min} < 0$: Leaders ✗
- ▶ Intégration fractionnaire de α
- ▶ Réalisé par coefficients :
 1. $\tilde{d}_X^\alpha(j, k) = 2^{j\alpha/2} d_X(j, k)$
 2. $\tilde{L}_X^\alpha(j, k) = \sup_{\lambda' \in 3\lambda} \tilde{d}_{X, \lambda'}^\alpha$



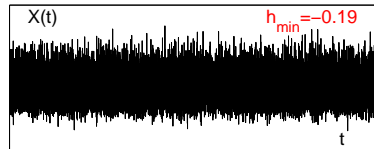
- ▶ $\alpha > -h_{min}$: Leaders ok

Extension aux fonctions non bornées

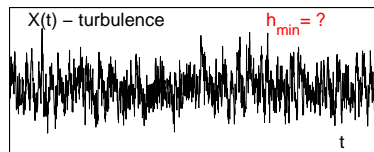
- ▶ Leaders : $|X(t)| < \infty, t \in \mathbb{R}$
Condition suffisante : $h_{min} > 0$



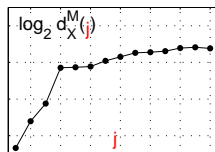
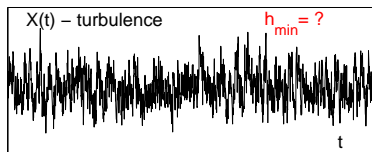
- ▶ $h_{min} < 0$: Leaders ✗
- ▶ Intégration fractionnaire de α
- ▶ Réalisé par coefficients :
 1. $\tilde{d}_X^\alpha(j, k) = 2^{j\alpha/2} d_X(j, k)$
 2. $\tilde{L}_X^\alpha(j, k) = \sup_{\lambda' \in 3\lambda} \tilde{d}_{X, \lambda'}^\alpha$



- ▶ $\alpha > -h_{min}$: Leaders ok
- ▶ $h_{min} = ?$ - a priori !

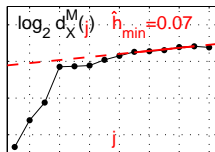
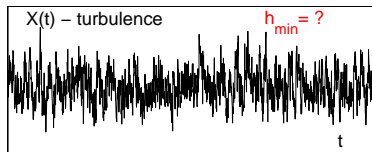


Extension aux fonctions non bornées : estimateur \hat{h}_{min}



► $d_X^M(j) = \sup_k |d_X(j, k)|$

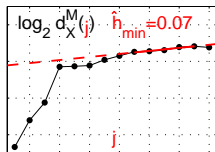
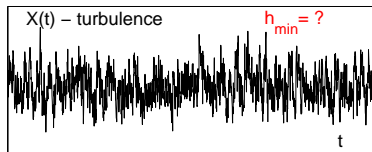
Extension aux fonctions non bornées : estimateur \hat{h}_{min}



- ▶ $d_X^M(j) = \sup_k |d_X(j, k)|$
- ▶ $h_{min} = \lim_{2^j \rightarrow 0} \inf \frac{\ln d_X^M(j)}{\ln 2^j}$

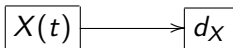
$$\hat{h}_{min} = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 d_X^M(j)$$

Extension aux fonctions non bornées : estimateur \hat{h}_{min}

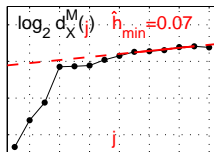
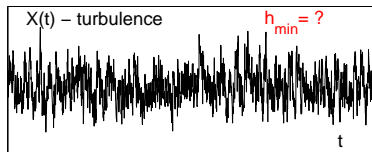


- ▶ $d_X^M(j) = \sup_k |d_X(j, k)|$
- ▶ $h_{min} = \lim_{2^j \rightarrow 0} \inf \frac{\ln d_X^M(j)}{\ln 2^j}$

$$\hat{h}_{min} = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 d_X^M(j)$$

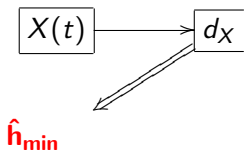


Extension aux fonctions non bornées : estimateur \hat{h}_{min}

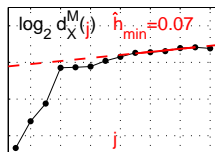
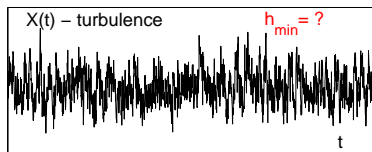


- ▶ $d_X^M(j) = \sup_k |d_X(j, k)|$
- ▶ $h_{min} = \lim_{2^j \rightarrow 0} \inf \frac{\ln d_X^M(j)}{\ln 2^j}$

$$\hat{h}_{min} = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 d_X^M(j)$$

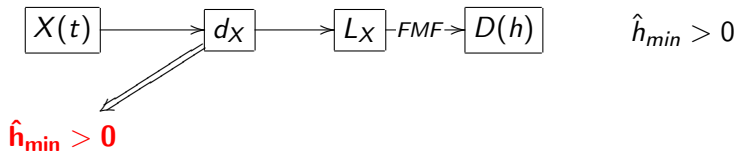


Extension aux fonctions non bornées : estimateur \hat{h}_{min}

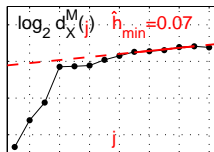
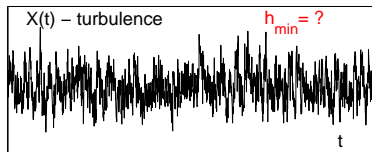


- ▶ $d_X^M(j) = \sup_k |d_X(j, k)|$
- ▶ $h_{min} = \lim_{2^j \rightarrow 0} \inf \frac{\ln d_X^M(j)}{\ln 2^j}$

$$\hat{h}_{min} = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 d_X^M(j)$$

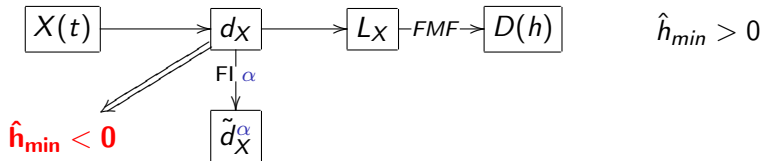


Extension aux fonctions non bornées : estimateur \hat{h}_{min}

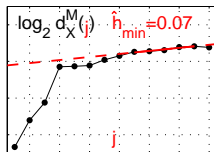
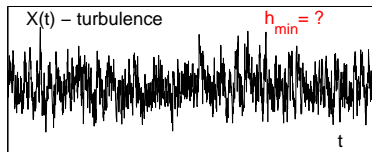


- ▶ $d_X^M(j) = \sup_k |d_X(j, k)|$
- ▶ $h_{min} = \lim_{2^j \rightarrow 0} \inf \frac{\ln d_X^M(j)}{\ln 2^j}$

$$\hat{h}_{min} = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 d_X^M(j)$$

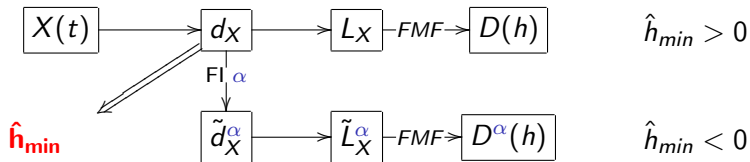


Extension aux fonctions non bornées : estimateur \hat{h}_{min}

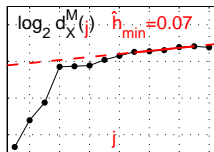
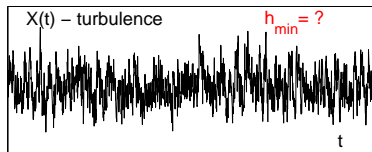


- ▶ $d_X^M(j) = \sup_k |d_X(j, k)|$
- ▶ $h_{min} = \lim_{2^j \rightarrow 0} \inf \frac{\ln d_X^M(j)}{\ln 2^j}$

$$\hat{h}_{min} = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 d_X^M(j)$$

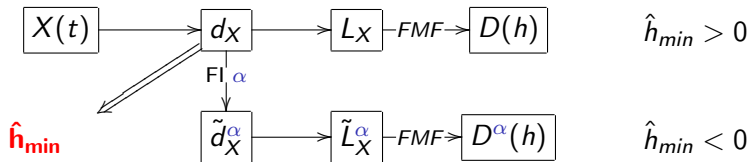


Extension aux fonctions non bornées : estimateur \hat{h}_{min}



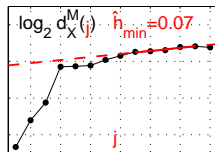
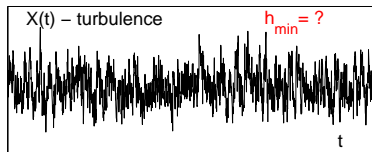
- ▶ $d_X^M(j) = \sup_k |d_X(j, k)|$
- ▶ $h_{min} = \lim_{2^j \rightarrow 0} \inf \frac{\ln d_X^M(j)}{\ln 2^j}$

$$\hat{h}_{min} = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 d_X^M(j)$$



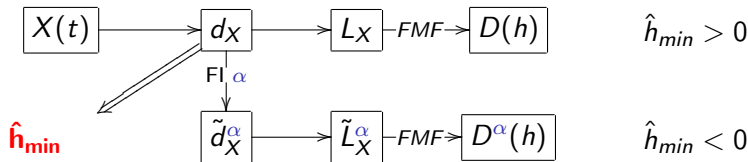
- ▶ Analyse **conjointe** $d_X + L_X$ ★

Extension aux fonctions non bornées : estimateur \hat{h}_{min}



- ▶ $d_X^M(j) = \sup_k |d_X(j, k)|$
- ▶ $h_{min} = \lim_{2^j \rightarrow 0} \inf \frac{\ln d_X^M(j)}{\ln 2^j}$

$$\hat{h}_{min} = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 d_X^M(j)$$



- ▶ Analyse **conjointe** $d_X + L_X$ ★
- ▶ Difficulté théorique : $h_{min} < 0$ + singularités oscillantes

Plan des contributions

1. Autour des Leaders

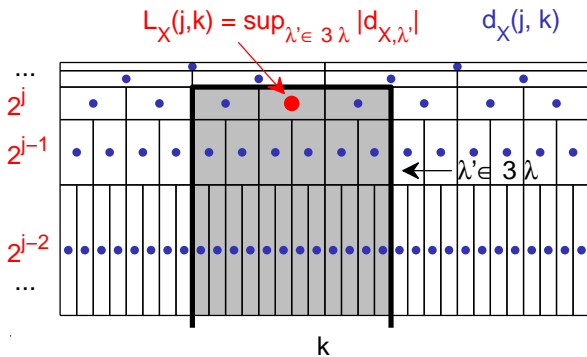
- ▶ Propriétés statistiques
- ▶ Performances d'estimation
- ▶ Extension aux fonctions non bornées
- ▶ **Signaux 2d : Images**
- ▶ Effet de linéarisation
- ▶ Discrétisation

2. Bootstrap pour l'analyse multifractale

3. Structure de dépendance

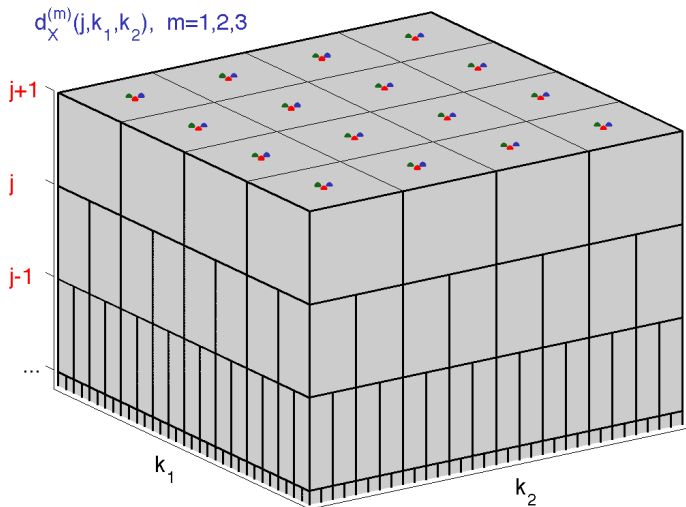
Images : Leaders 2d

► $d_X(j, k) \longrightarrow L_X(j, k) : \text{Signaux 1d}$



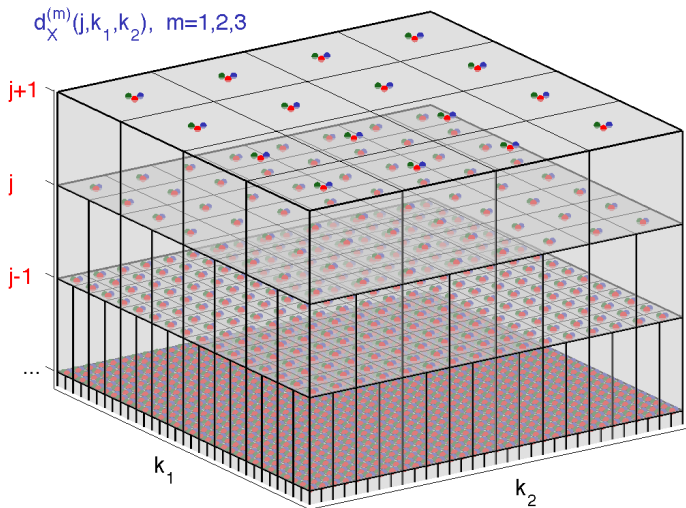
Images : Leaders 2d

► $d_X^{(m)}(j, k_1, k_2) \longrightarrow L_X(j, k_1, k_2)$



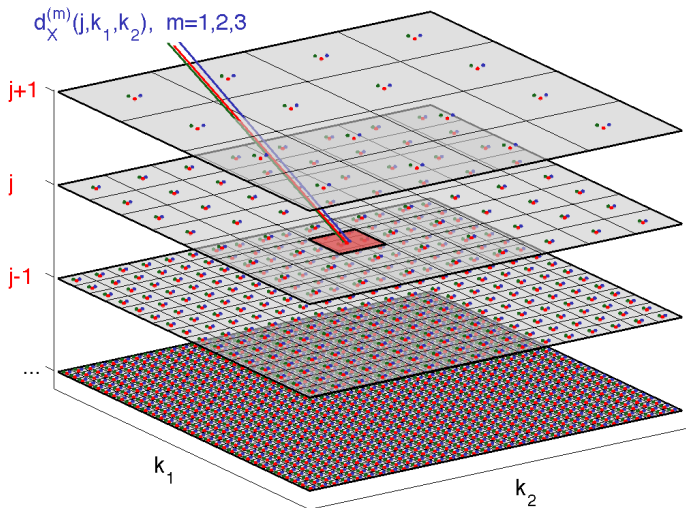
Images : Leaders 2d

► $d_X^{(m)}(j, k_1, k_2) \longrightarrow L_X(j, k_1, k_2)$



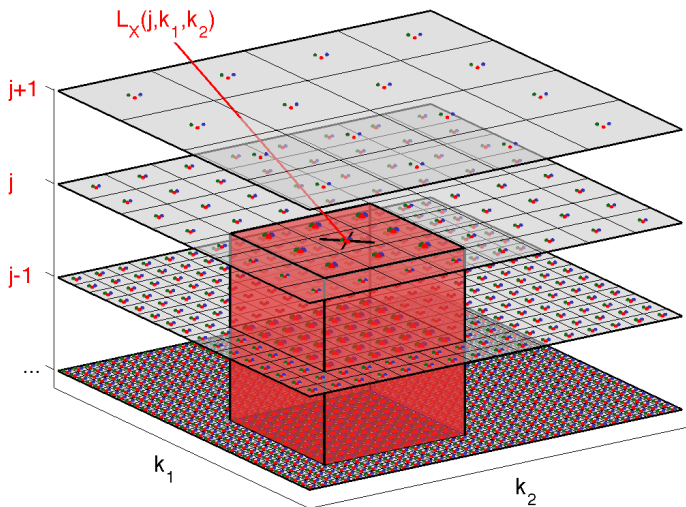
Images : Leaders 2d

► $d_X^{(m)}(j, k_1, k_2) \longrightarrow L_X(j, k_1, k_2)$



Images : Leaders 2d

► $d_X^{(m)}(j, k_1, k_2) \longrightarrow L_X(j, k_1, k_2) = \sup_{m, \lambda' \in 3\lambda} |d_{X, \lambda'}^{(m)}|$

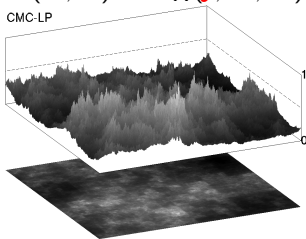


Formalisme Multifractal : Images

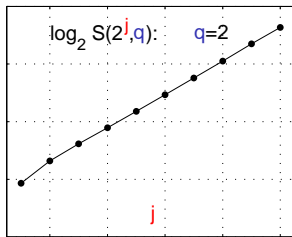


$$X(t_1, t_2) \rightarrow L_X(j, k_1, k_2)$$

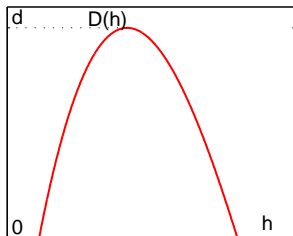
CMC-LP



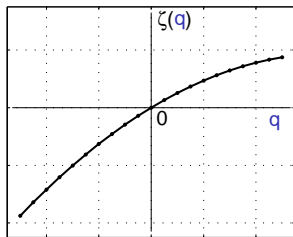
$$S(2^j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k_1, k_2} L_X(j, k_1, k_2)^q$$



$$D(h) = \min_{q \neq 0} (d + qh - \zeta(q))$$



$$S(2^j, q) \simeq c_q 2^{j\zeta(q)}, \quad 2^j \rightarrow 0$$



Formalisme Multifractal : Images

Validation : Etude numérique

$$\hat{\zeta}(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 S(2^j, q)$$

$$\hat{c}_p = (\log_2 e) \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}(2^j, p)$$

$$\hat{D}(h) = \min_{q \neq 0} \left(d + qh - \hat{\zeta}(q) \right)$$

- ▶ biais
- écart-type
- eqm

▶ Processus synthétiques :

$$\left. \begin{array}{l} \zeta(q) \\ c_p \\ D(h) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{connu} \\ \text{contrôlé} \end{array}$$

▶ Etude :

- d_X et L_X
- Taille d'échantillon N
- Paramètres processus
- Paramètres d'estimation
(j_1, j_2, w_j)

Conclusions :

- × petites échelles j
- ▶ variance réduite
- ▶ $L_X \gg d_X$ ★

Formalisme Multifractal : Images

Validation : Etude numérique

$$\hat{\zeta}(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 S(2^j, q)$$

$$\hat{c}_p = (\log_2 e) \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}(2^j, p)$$

$$\hat{D}(h) = \min_{q \neq 0} \left(d + qh - \hat{\zeta}(q) \right)$$

► biais
écart-type
eqm

► Processus synthétiques :

$$\left. \begin{array}{l} \zeta(q) \\ c_p \\ D(h) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{connu} \\ \text{contrôlé} \end{array}$$

► Etude :

- d_X et L_X
- Taille d'échantillon N
- Paramètres processus
- Paramètres d'estimation
(j_1, j_2, w_j)

Conclusions :

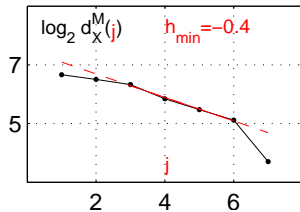
- ✗ petites échelles j
- variance réduite
- $L_X \gg d_X$ ★

Formalisme multifractal : Image de texture

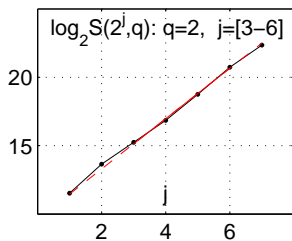
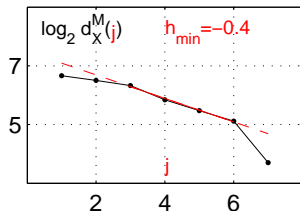


[Xu et al. 2006]

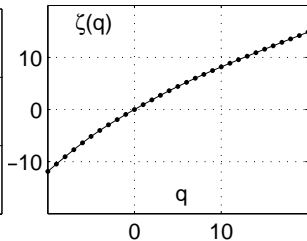
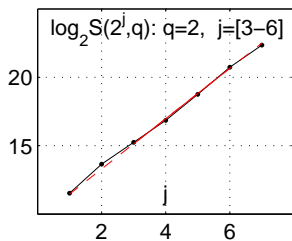
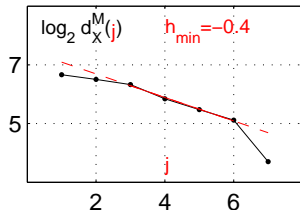
Formalisme multifractal : Image de texture



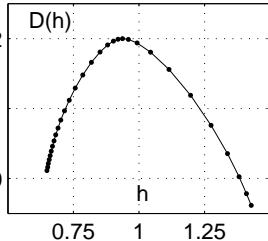
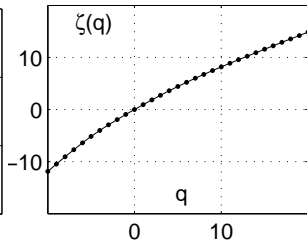
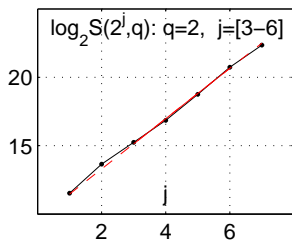
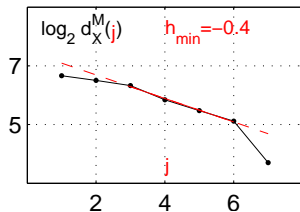
Formalisme multifractal : Image de texture



Formalisme multifractal : Image de texture



Formalisme multifractal : Image de texture



Contributions 1. - Conclusions

1. Autour des Leaders

- ▶ Propriétés statistiques
- ▶ Performances d'estimation
- ▶ Extension aux fonctions non bornées
- ▶ Signaux 2d : Images
- ▶ Effet de linéarisation
- ▶ Discrétisation

2. Bootstrap pour l'analyse multifractale

3. Structure de dépendance

→ Analyse multifractale 1d et 2d ★

→ Estimation contrôlée et validée ★

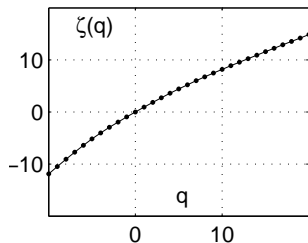
Contributions 1. \longrightarrow 2.

- \rightarrow Analyse multifractale 1d et 2d ★
 - \rightarrow Estimation contrôlée et validée ★
-



Contributions 1. → 2.

- Analyse multifractale 1d et 2d ★
- Estimation contrôlée et validée ★



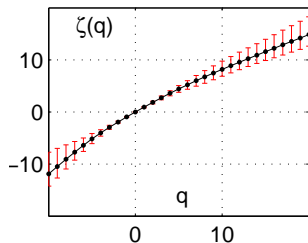
Inférence statistique :

- ▶ à partir d'une seule réalisation

- Détection ?
- Interprétation ?

Contributions 1. → 2.

- Analyse multifractale 1d et 2d ★
- Estimation contrôlée et validée ★



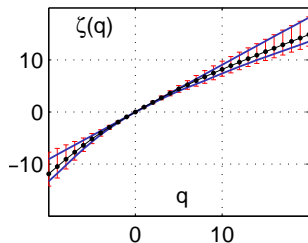
Inférence statistique :

- ▶ à partir d'une seule réalisation
- ▶ intervalles de confiance ?

- Détection ?
- Interprétation ?

Contributions 1. → 2.

- Analyse multifractale 1d et 2d ★
- Estimation contrôlée et validée ★



- Détection ?
- Interprétation ?

Inférence statistique :

- ▶ à partir d'une seule réalisation
- ▶ intervalles de confiance ?
- ▶ tests d'hypothèse ?

$$\zeta(q) \stackrel{?}{=} c_1 q$$

ou

$$\zeta(q) \stackrel{?}{=} c_1 q + c_2 / 2 q^2 + c_3 / 6 q^3$$

$$c_2 \stackrel{?}{=} 0 \quad c_3 \stackrel{?}{=} 0$$

Analyse multifractale : Inférence statistique ?

- ▶ Processus multifractals : Propriétés statistiques difficiles
 - distributions : non gaussien, à aile lourde
 - dépendances compliquées
 - large diversité de processus
- ▶ Expressions analytiques des performances d'estimation ?
 - dérivation générale, même asymptotique, pas faisable
 - par conséquent, pas d'intervalles de confiance, de tests d'hypothèse, ...
- ▶ **Bootstrap** non paramétrique [Efron 1979]

Analyse multifractale : Inférence statistique ?

- ▶ Processus multifractals : Propriétés statistiques difficiles
 - distributions : non gaussien, à aile lourde
 - dépendances compliquées
 - large diversité de processus
- ▶ ~~Expressions analytiques des performances d'estimation~~ ✕
 - dérivation générale, même asymptotique, pas faisable
 - par conséquent, pas d'intervalles de confiance, de tests d'hypothèse, ...
- ▶ **Bootstrap** non paramétrique [Efron 1979]

Analyse multifractale : Inférence statistique ?

- ▶ Processus multifractals : Propriétés statistiques difficiles
 - distributions : non gaussien, à aile lourde
 - dépendances compliquées
 - large diversité de processus
- ▶ ~~Expressions analytiques des performances d'estimation~~ ✕
 - dérivation générale, même asymptotique, pas faisable
 - par conséquent, pas d'intervalles de confiance, de tests d'hypothèse, ...
- ▶ **Bootstrap** non paramétrique [Efron 1979]

Plan des contributions

1. Autour des Leaders
2. **Bootstrap pour l'analyse multifractale**
 - ▶ Bootstrap temps-échelle
 - ▶ Intervalles de confiance
 - ▶ Tests d'hypothèse
 - ▶ Validation
 - ▶ Test de stationnarité
3. Structure de dépendance

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

► Situation:

- échantillon $X = \{x_1, \dots, x_N\} : x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} P_X(x)$
- estimateur $\hat{\theta} = \theta(X)$

propriétés statistiques de $\hat{\theta}$?

► Approche bootstrap non paramétrique :

- $P_X(x)$ inconnue \longleftarrow distribution empirique de X
- tirage avec remise

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

► Situation:

- échantillon $X = \{x_1, \dots, x_N\} : x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} P_X(x)$
- estimateur $\hat{\theta} = \theta(X)$
- $P_X(x)$ inconnue \rightarrow propriétés statistiques de $\hat{\theta}$ ✗

► Approche bootstrap non paramétrique :

- $P_X(x)$ inconnue \leftarrow distribution empirique de X
- tirage avec remise

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

► Situation:

- échantillon $X = \{x_1, \dots, x_N\} : x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} P_X(x)$
- estimateur $\hat{\theta} = \theta(X)$
- $P_X(x)$ inconnue \longrightarrow propriétés statistiques de $\hat{\theta}$ ✗

► Approche bootstrap non paramétrique :

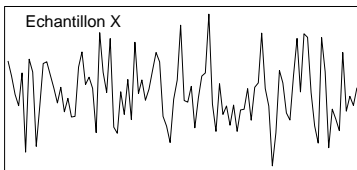
- $P_X(x)$ inconnue \longleftarrow distribution empirique de X
- tirage avec remise

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$

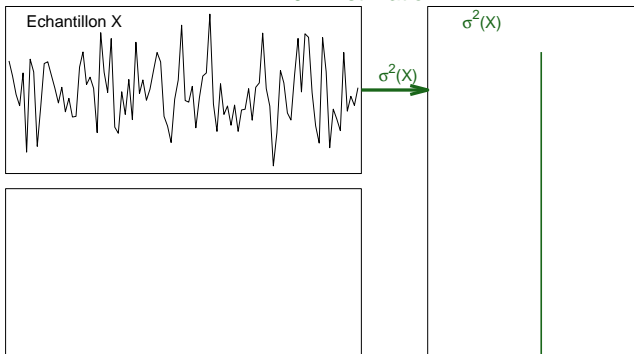


Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

Exemple :

- $x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$
- $\theta(X) = \text{Var}(X)$

0 - Estimation

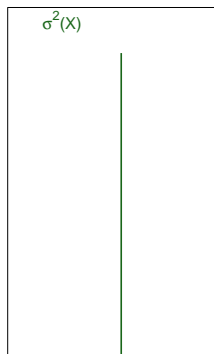
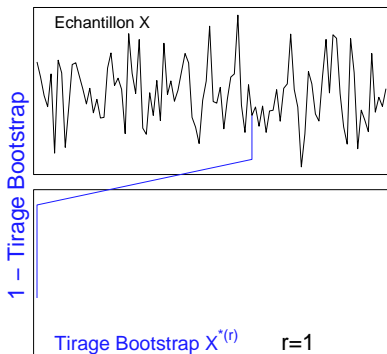


Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$



I.

1. Tirage : Au hasard, avec remise

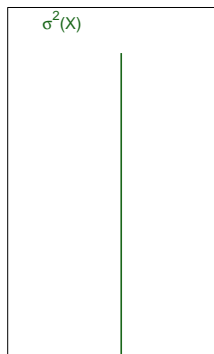
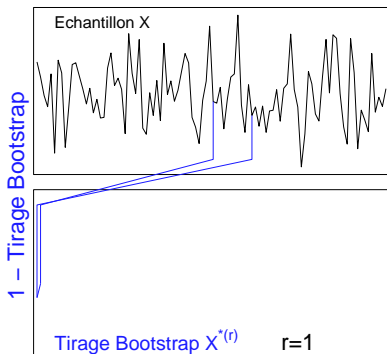
$$X \longrightarrow X^{*(r)}$$

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$



I.

1. **Tirage** : Au hasard, **avec remise**

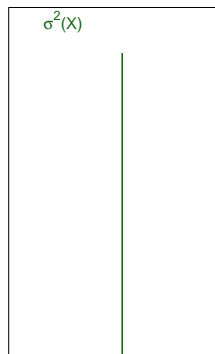
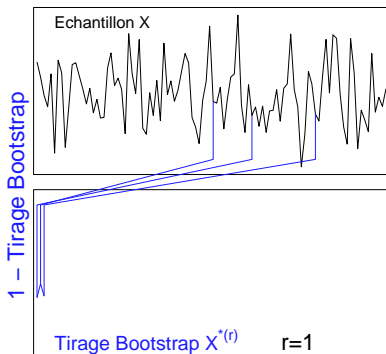
$$X \longrightarrow X^{*(r)}$$

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$



I.

1. **Tirage** : Au hasard, **avec remise**

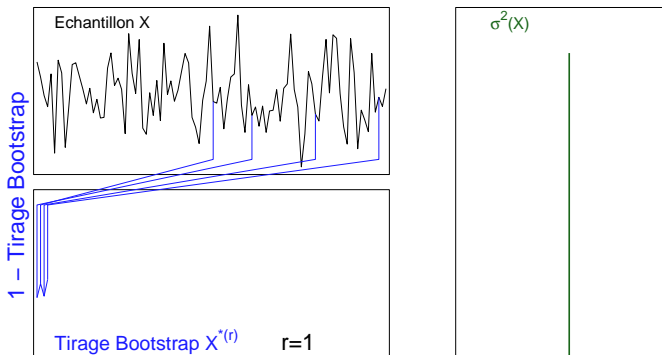
$$X \longrightarrow X^{*(r)}$$

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$



I.

1. **Tirage** : Au hasard, **avec remise**

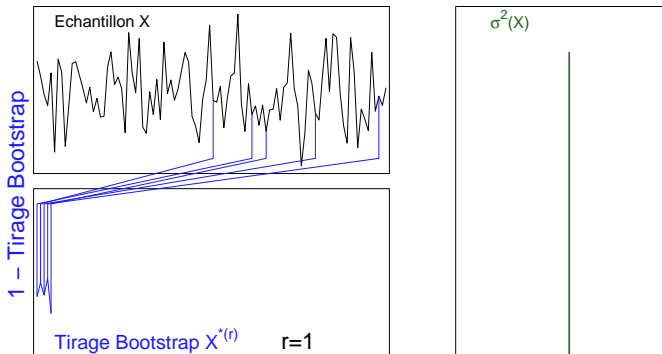
$$X \longrightarrow X^{*(r)}$$

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$



I.

1. **Tirage** : Au hasard, **avec remise**

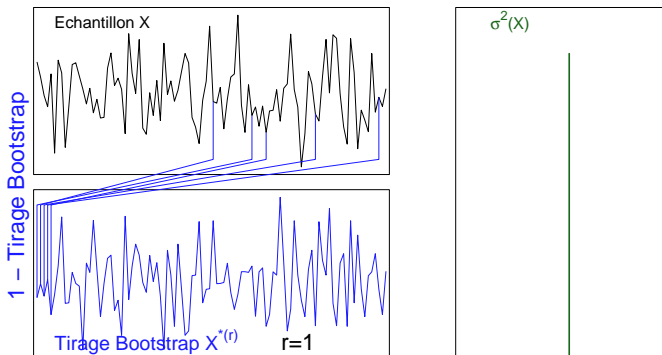
$$X \longrightarrow X^{*(r)}$$

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$



I.

1. **Tirage** : Au hasard, **avec remise**

$$X \longrightarrow X^{*(r)}$$

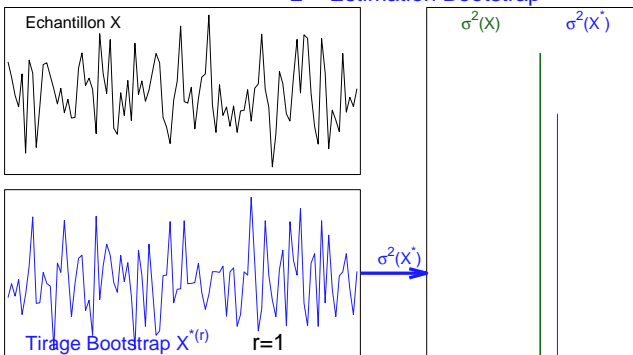
Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

2 – Estimation Bootstrap

Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$



I.

1. **Tirage** : Au hasard, **avec remise**

$$X \longrightarrow X^{*(r)}$$

2. **Estimation** :

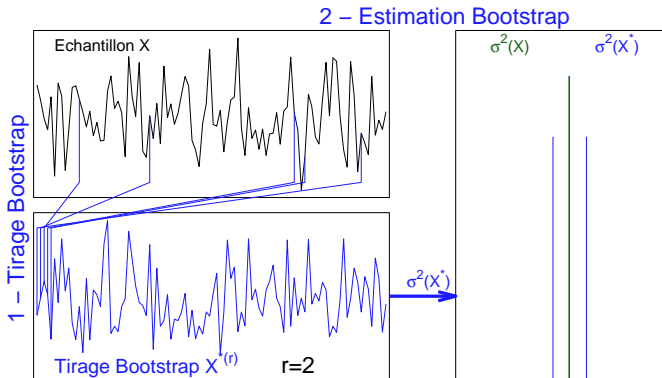
$$X^{*(r)} \longrightarrow \hat{\theta}^{*(r)} = \theta(X^{*(r)})$$

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$



I. Pour r de 1 à R :

1. **Tirage** : Au hasard, **avec remise**

$$X \longrightarrow X^{*(r)}$$

2. **Estimation** :

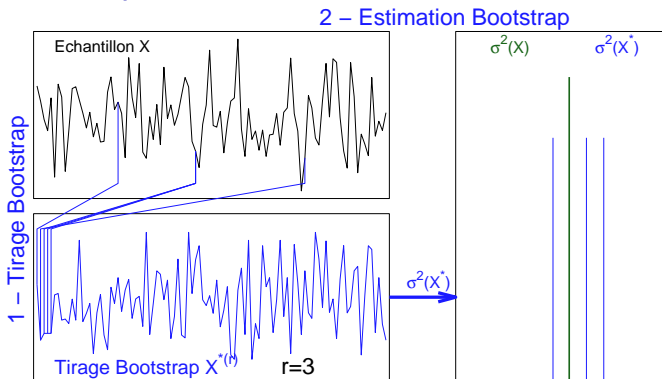
$$X^{*(r)} \longrightarrow \hat{\theta}^{*(r)} = \theta(X^{*(r)})$$

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$



I. Pour r de 1 à R :

1. **Tirage** : Au hasard, **avec remise**

$$X \longrightarrow X^{*(r)}$$

2. **Estimation** :

$$X^{*(r)} \longrightarrow \hat{\theta}^{*(r)} = \theta(X^{*(r)})$$

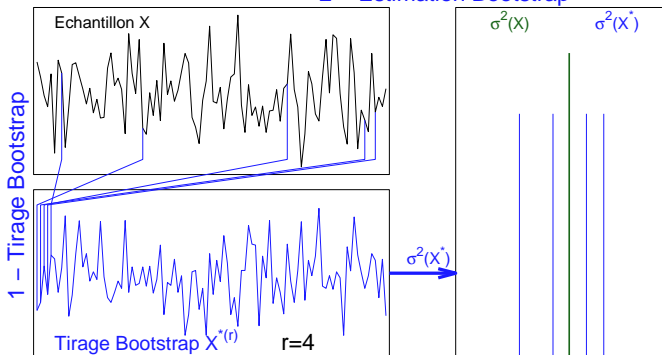
Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$

2 – Estimation Bootstrap



I. Pour r de 1 à R :

1. **Tirage** : Au hasard, **avec remise**

$$X \longrightarrow X^{*(r)}$$

2. **Estimation** :

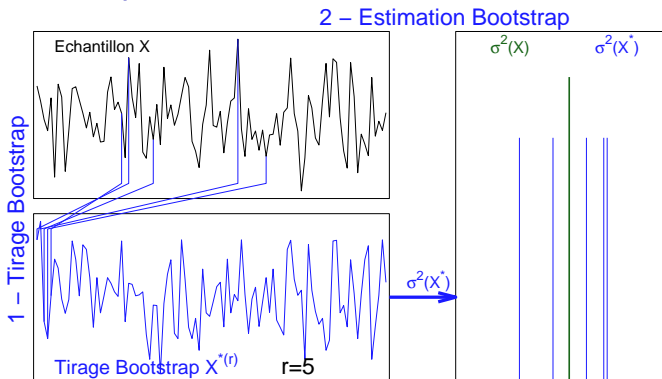
$$X^{*(r)} \longrightarrow \hat{\theta}^{*(r)} = \theta(X^{*(r)})$$

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$



I. Pour r de 1 à R :

1. **Tirage** : Au hasard, **avec remise**

$$X \longrightarrow X^{*(r)}$$

2. **Estimation** :

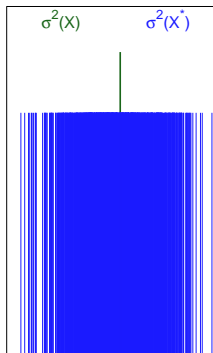
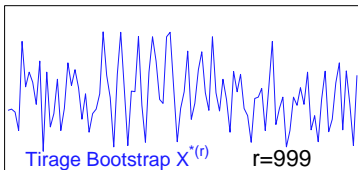
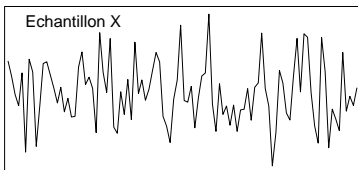
$$X^{*(r)} \longrightarrow \hat{\theta}^{*(r)} = \theta(X^{*(r)})$$

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$



I. Pour r de 1 à R :

1. **Tirage** : Au hasard, **avec remise**

$$X \longrightarrow X^{*(r)}$$

2. **Estimation** :

$$X^{*(r)} \longrightarrow \hat{\theta}^{*(r)} = \theta(X^{*(r)})$$

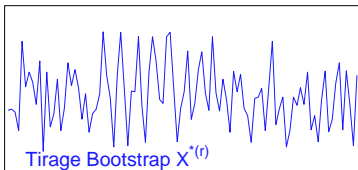
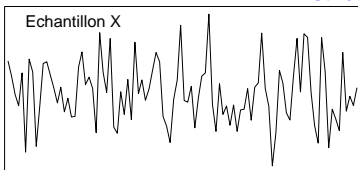
II. Distribution empirique $\{\hat{\theta}^*\}$ \longrightarrow propriétés statistiques de $\hat{\theta}$

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

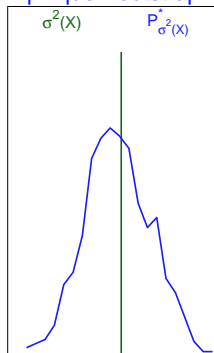
Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$



Distribution Empirique Bootstrap



I. Pour r de 1 à R :

1. **Tirage** : Au hasard, **avec remise**

$$X \longrightarrow X^{*(r)}$$

2. **Estimation** :

$$X^{*(r)} \longrightarrow \hat{\theta}^{*(r)} = \theta(X^{*(r)})$$

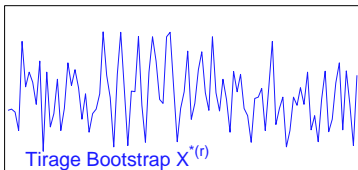
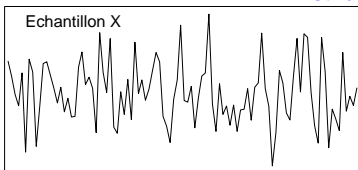
II. Distribution empirique $\{\hat{\theta}^*\}$ \longrightarrow propriétés statistiques de $\hat{\theta}$

Principe du bootstrap : Cas i.i.d.

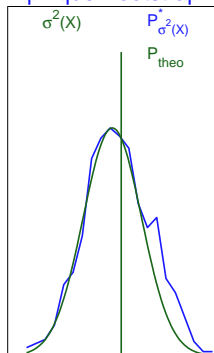
Exemple :

$$-x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-\theta(X) = \text{Var}(X)$$



Distribution Empirique Bootstrap



I. Pour r de 1 à R :

1. **Tirage** : Au hasard, **avec remise**

$$X \longrightarrow X^{*(r)}$$

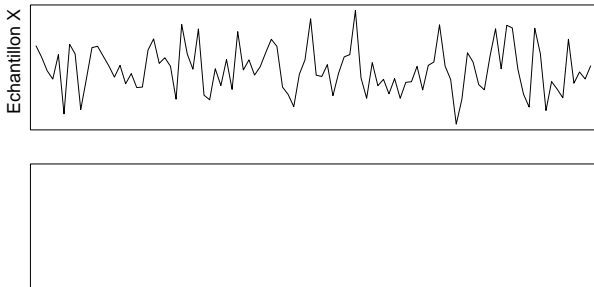
2. **Estimation** :

$$X^{*(r)} \longrightarrow \hat{\theta}^{*(r)} = \theta(X^{*(r)})$$

II. Distribution empirique $\{\hat{\theta}^*\} \longrightarrow$ propriétés statistiques de $\hat{\theta}$

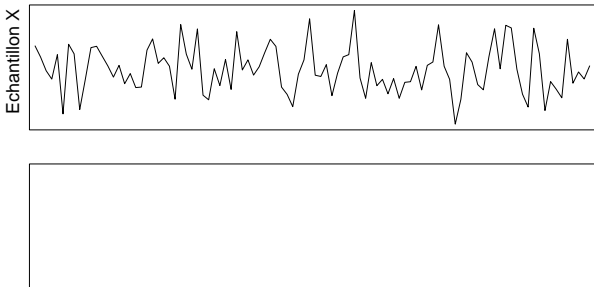
Cas non i.i.d. : Bootstrap par bloc

- ▶ $X = \{x_i\}$ avec échantillons $x_i \sim P_X(x)$ **dépendantes**
- ▶ Procédure bootstrap adaptée : Tirage $X \longrightarrow X^*$
 - au hasard
 - avec remise
 - **par bloc** d'échantillons $\{x_i, \dots, x_{i+l-1}\}$



Cas non i.i.d. : Bootstrap par bloc

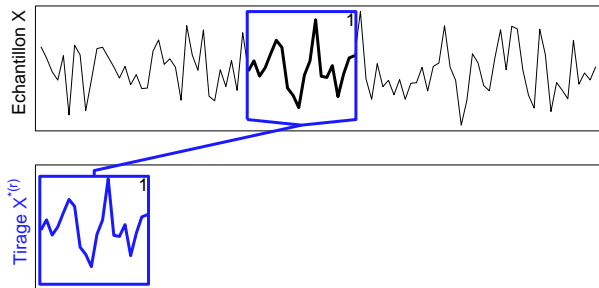
- ▶ $X = \{x_i\}$ avec échantillons $x_i \sim P_X(x)$ **dépendantes**
- ▶ Procédure bootstrap adaptée : Tirage $X \longrightarrow X^*$
 - au hasard
 - avec remise
 - **par bloc** d'échantillons $\{x_i, \dots, x_{i+l-1}\}$



- ▶ Idée : dépendance conservée dans chacun des blocs

Cas non i.i.d. : Bootstrap par bloc

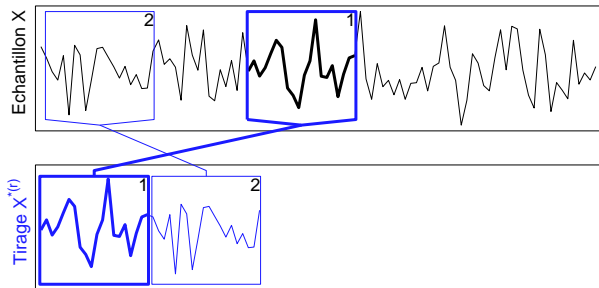
- ▶ $X = \{x_i\}$ avec échantillons $x_i \sim P_X(x)$ **dépendantes**
- ▶ Procédure bootstrap adaptée : Tirage $X \longrightarrow X^*$
 - au hasard
 - avec remise
 - **par bloc** d'échantillons $\{x_i, \dots, x_{i+l-1}\}$



- ▶ Idée : dépendance conservée dans chacun des blocs

Cas non i.i.d. : Bootstrap par bloc

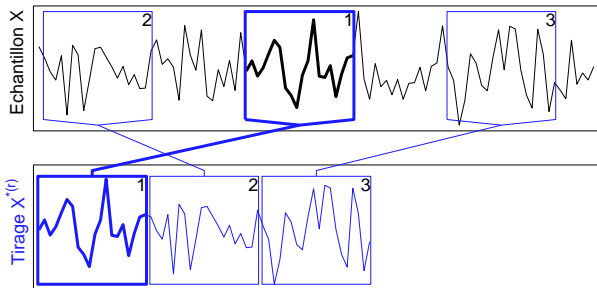
- ▶ $X = \{x_i\}$ avec échantillons $x_i \sim P_X(x)$ **dépendantes**
- ▶ Procédure bootstrap adaptée : Tirage $X \longrightarrow X^*$
 - au hasard
 - avec remise
 - **par bloc** d'échantillons $\{x_i, \dots, x_{i+l-1}\}$



- ▶ Idée : dépendance conservée dans chacun des blocs

Cas non i.i.d. : Bootstrap par bloc

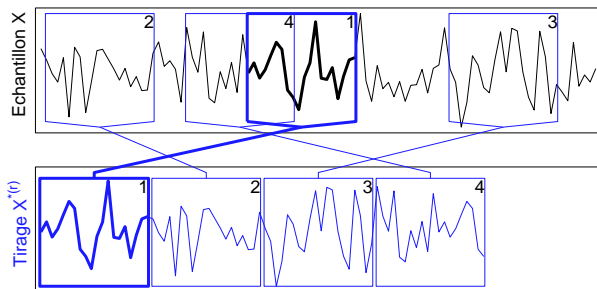
- ▶ $X = \{x_i\}$ avec échantillons $x_i \sim P_X(x)$ **dépendantes**
- ▶ Procédure bootstrap adaptée : Tirage $X \longrightarrow X^*$
 - au hasard
 - avec remise
 - **par bloc** d'échantillons $\{x_i, \dots, x_{i+l-1}\}$



- ▶ Idée : dépendance conservée dans chacun des blocs

Cas non i.i.d. : Bootstrap par bloc

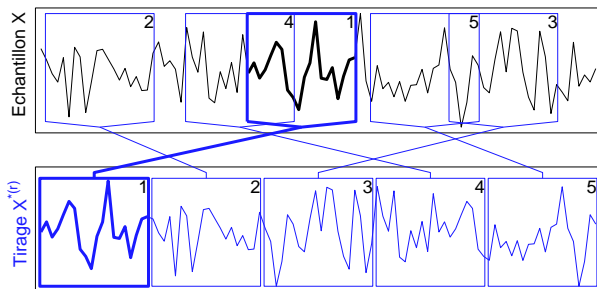
- ▶ $X = \{x_i\}$ avec échantillons $x_i \sim P_X(x)$ **dépendantes**
- ▶ Procédure bootstrap adaptée : Tirage $X \longrightarrow X^*$
 - au hasard
 - avec remise
 - **par bloc** d'échantillons $\{x_i, \dots, x_{i+l-1}\}$



- ▶ Idée : dépendance conservée dans chacun des blocs

Cas non i.i.d. : Bootstrap par bloc

- ▶ $X = \{x_i\}$ avec échantillons $x_i \sim P_X(x)$ **dépendantes**
- ▶ Procédure bootstrap adaptée : Tirage $X \longrightarrow X^*$
 - au hasard
 - avec remise
 - **par bloc** d'échantillons $\{x_i, \dots, x_{i+l-1}\}$



- ▶ Idée : dépendance conservée dans chacun des blocs

Plan des contributions

1. Autour des Leaders
2. **Bootstrap pour l'analyse multifractale**
 - ▶ **Bootstrap temps-échelle**
 - ▶ **Intervalles de confiance**
 - ▶ **Tests d'hypothèse**
 - ▶ Validation
 - ▶ Test de stationnarité
3. Structure de dépendance

Bootstrap par bloc temps-échelle

- ▶ Processus multifractals $X(t)$:
 - dépendances compliquées, potentiellement à longue portée
 - non stationnaire
- ▶ Transformé en ondelettes : $d_X(j, k)$ et $L_X(j, k)$:
 - $d_X(j, \cdot)$ stationnaire à chaque échelle 2^j
 - propriété de décorrélation

→ Bootstrap par bloc temps-échelle

Bootstrap par bloc temps-échelle

- ▶ Processus multifractals $X(t)$:
 - dépendances compliquées, potentiellement à longue portée
 - non stationnaire
- ▶ Transformé en ondelettes : $d_X(j, k)$ et $L_X(j, k)$:
 - $d_X(j, \cdot)$ stationnaire à chaque échelle 2^j
 - propriété de décorrélation

→ Bootstrap par bloc temps-échelle

Bootstrap par bloc temps-échelle

- ▶ Processus multifractals $X(t)$:
 - dépendances compliquées, potentiellement à longue portée
 - non stationnaire
- ▶ Transformé en ondelettes : $d_X(j, k)$ et $L_X(j, k)$:
 - $d_X(j, \cdot)$ stationnaire à chaque échelle 2^j
 - propriété de décorrélation

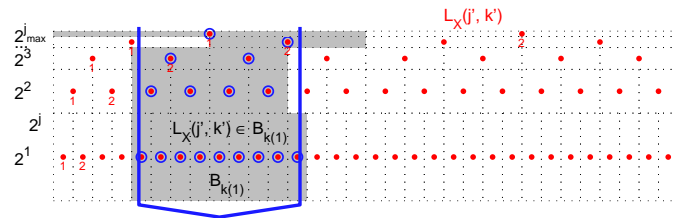
→ Bootstrap par bloc temps-échelle

Bootstrap par bloc temps-échelle

► Construction d'un bloc de coefficients (1d) :

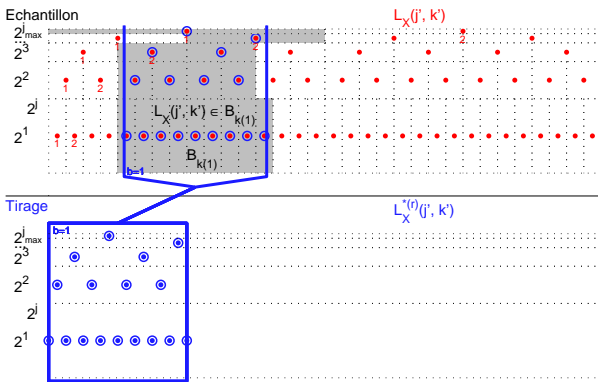
- bande dans le plan temps-échelle
- de longueur temporelle 2^l
- à travers toutes les échelles 2^j

$$\mathcal{B}_k = \{L_X(j', k') : |k - k'2^{j'}| \leq l, 1 \leq j' \leq j_{\max}\}, 1 \leq k \leq n$$



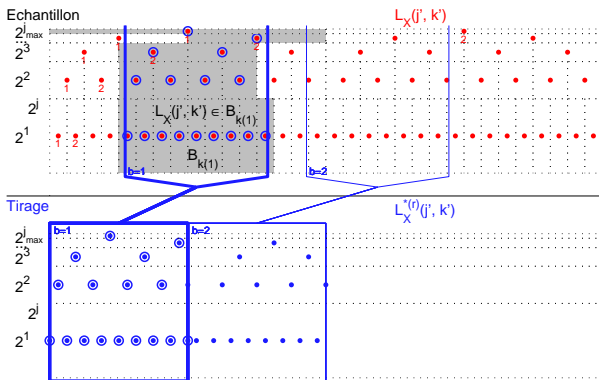
Bootstrap par bloc temps-échelle

- **Tirage** $\{L(j, k)\} \longrightarrow \{L_X^{*(r)}(j, k)\}$:
- tirer, avec remise, $B = \lceil \frac{N}{2l} \rceil$ blocs \mathcal{B}_k :
 - les enchaîner en temps $\longrightarrow \{L_X^{*(r)}(j, k)\}$



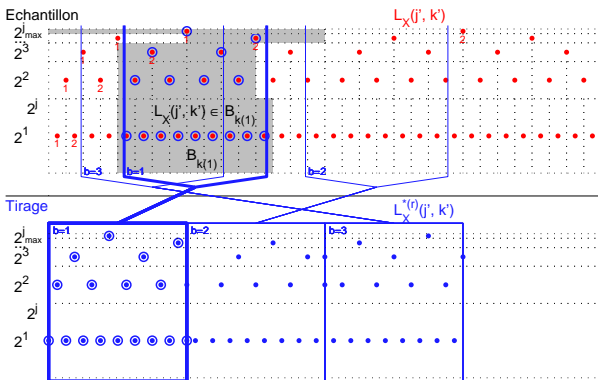
Bootstrap par bloc temps-échelle

- **Tirage** $\{L(j, k)\} \longrightarrow \{L_X^{*(r)}(j, k)\}$:
- tirer, avec remise, $B = \lceil \frac{N}{2l} \rceil$ blocs \mathcal{B}_k :
 - les enchaîner en temps $\rightarrow \{L_X^{*(r)}(j, k)\}$



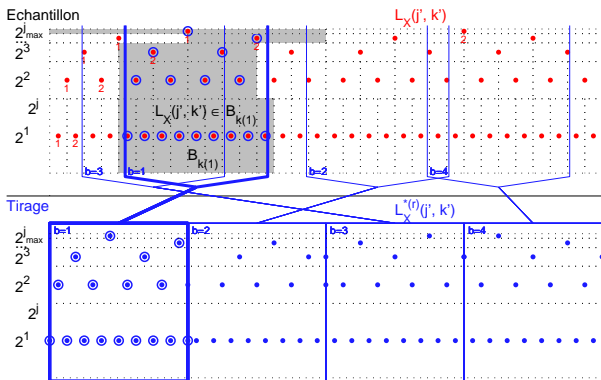
Bootstrap par bloc temps-échelle

- **Tirage** $\{L(j, k)\} \longrightarrow \{L_X^{*(r)}(j, k)\}$:
- tirer, avec remise, $B = \lceil \frac{N}{2l} \rceil$ blocs \mathcal{B}_k :
 - les enchaîner en temps $\rightarrow \{L_X^{*(r)}(j, k)\}$



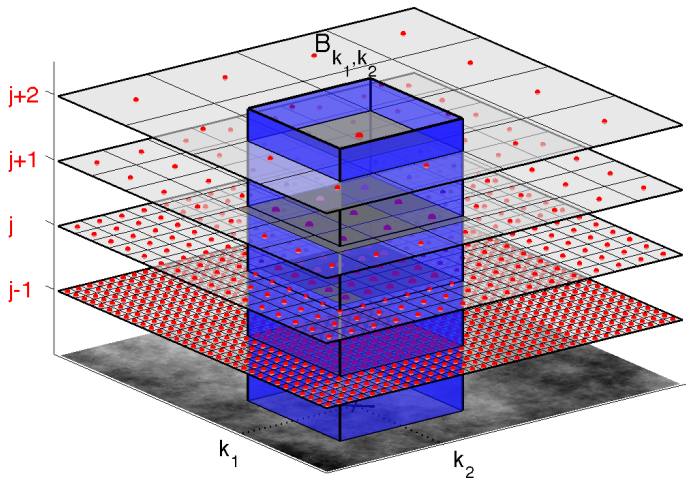
Bootstrap par bloc temps-échelle

- **Tirage** $\{L(j, k)\} \longrightarrow \{L_X^{*(r)}(j, k)\}$:
- tirer, avec remise, $B = \lceil \frac{N}{2l} \rceil$ blocs \mathcal{B}_k :
 - les enchaîner en temps $\rightarrow \{L_X^{*(r)}(j, k)\}$



Bootstrap par bloc temps-échelle

- Construction d'un bloc de coefficients (2d) :



Bootstrap par bloc temps-échelle

I. Pour r de 1 à R :

1. **Tirage** : $\{L_X(j, k)\} \longrightarrow \{L_X^{*(r)}(j, k)\}$

2. **Estimation** : Formalisme multifractal

▷ $S^{*(r)}(2^j, q)$ (moments empiriques de $L_X^{*(r)}(j, \cdot)$)

$\hat{C}^{*(r)}(2^j, p)$ (cumulants de $\ln L_X^{*(r)}(j, \cdot)$)

▷ $\hat{\zeta}^{*(r)}(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 S^{*(r)}(j, q)$

$\hat{\zeta}_p^{*(r)} = \log_2 e \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}^{*(r)}(j, p)$

▷ $\hat{D}^{*(r)}(h) = \min_{q \neq 0} (1 + qh - \hat{\zeta}^{*(r)}(q))$

II. Distribution empirique $\{\hat{\theta}^*\} \longrightarrow$ propriétés statistiques de $\hat{\theta}$

III. Intervalles de confiance

Bootstrap par bloc temps-échelle

I. Pour r de 1 à R :

1. **Tirage** : $\{L_X(j, k)\} \longrightarrow \{L_X^{*(r)}(j, k)\}$

2. **Estimation** : Formalisme multifractal

▷ $S^{*(r)}(2^j, q)$ (moments empiriques de $L_X^{*(r)}(j, \cdot)$)

$\hat{C}^{*(r)}(2^j, p)$ (cumulants de $\ln L_X^{*(r)}(j, \cdot)$)

▷ $\hat{\zeta}^{*(r)}(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 S^{*(r)}(j, q)$

$\hat{c}_p^{*(r)} = \log_2 e \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}^{*(r)}(j, p)$

▷ $\hat{D}^{*(r)}(h) = \min_{q \neq 0} (1 + qh - \hat{\zeta}^{*(r)}(q))$

II. Distribution empirique $\{\hat{\theta}^*\}$ \longrightarrow propriétés statistiques de $\hat{\theta}$

III. Intervalles de confiance

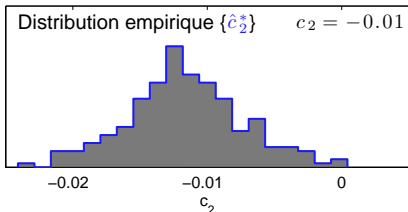
Bootstrap par bloc temps-échelle

I. Pour r de 1 à R :

1. **Tirage** : $\{L_X(j, k)\} \longrightarrow \{L_X^{*(r)}(j, k)\}$
2. **Estimation** : Formalisme multifractal
 - ▷ $S^{*(r)}(2^j, q)$ (moments empiriques de $L_X^{*(r)}(j, \cdot)$)
 - ▷ $\hat{C}^{*(r)}(2^j, p)$ (cumulants de $\ln L_X^{*(r)}(j, \cdot)$)
 - ▷ $\hat{\zeta}^{*(r)}(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 S^{*(r)}(j, q)$
 - ▷ $\hat{c}_p^{*(r)} = \log_2 e \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}^{*(r)}(j, p)$
 - ▷ $\hat{D}^{*(r)}(h) = \min_{q \neq 0} (1 + qh - \hat{\zeta}^{*(r)}(q))$

II. Distribution empirique $\{\hat{\theta}^*\}$ \longrightarrow propriétés statistiques de $\hat{\theta}$

III. Intervalles de confiance



Bootstrap par bloc temps-échelle

I. Pour r de 1 à R :

1. **Tirage** : $\{L_X(j, k)\} \longrightarrow \{L_X^{*(r)}(j, k)\}$

2. **Estimation** : Formalisme multifractal

▷ $S^{*(r)}(2^j, q)$ (moments empiriques de $L_X^{*(r)}(j, \cdot)$)

$\hat{C}^{*(r)}(2^j, p)$ (cumulants de $\ln L_X^{*(r)}(j, \cdot)$)

▷ $\hat{\zeta}^{*(r)}(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 S^{*(r)}(j, q)$

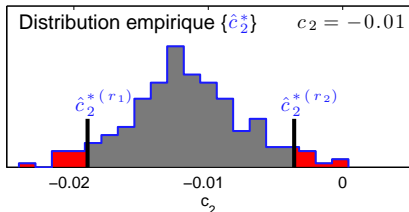
$\hat{c}_p^{*(r)} = \log_2 e \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}^{*(r)}(j, p)$

▷ $\hat{D}^{*(r)}(h) = \min_{q \neq 0} (1 + qh - \hat{\zeta}^{*(r)}(q))$

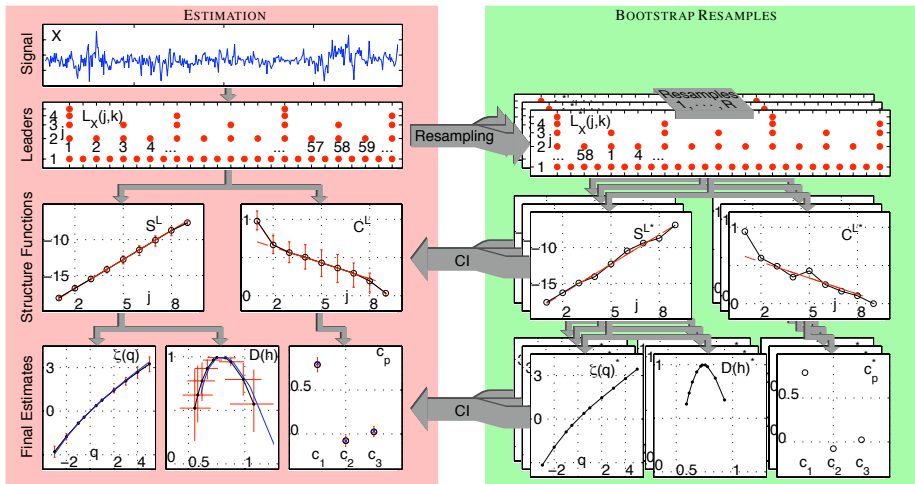
II. Distribution empirique $\{\hat{\theta}^*\}$ \longrightarrow propriétés statistiques de $\hat{\theta}$

III. Intervalles de confiance

IV. Tests d'hypothèse



Procédure d'estimation bootstrap



Plan des contributions

1. Autour des Leaders
2. **Bootstrap pour l'analyse multifractale**
 - ▶ Bootstrap temps-échelle
 - ▶ Intervalles de confiance
 - ▶ Tests d'hypothèse
 - ▶ **Validation**
 - ▶ Test de stationnarité
3. Structure de dépendance

Intervalles de confiance et tests d'hypothèse

► Estimation et bootstrap

$$\hat{\zeta}(q) - \{\hat{\zeta}^*(q)\}$$

$$\hat{c}_p - \{\hat{c}_p^*\}$$

$$\hat{D}(h) - \{\hat{D}^*(h)\}$$

→ intervalles de confiance (CI)

→ tests d'hypothèse (HT)

► Processus synthétiques :

$$\left. \begin{array}{l} \zeta(q) \\ c_p \\ D(h) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{connu} \\ \text{contrôlé} \end{array}$$

Intervalles de confiance et tests d'hypothèse

► Estimation et bootstrap

$$\hat{\zeta}(q) \quad - \quad \{\hat{\zeta}^*(q)\}$$

$$\hat{c}_p \quad - \quad \{\hat{c}_p^*\}$$

$$\hat{D}(h) \quad - \quad \{\hat{D}^*(h)\}$$

→ intervalles de confiance (CI)

→ tests d'hypothèse (HT)

► Processus synthétiques :

$$\left. \begin{array}{l} \zeta(q) \\ c_p \\ D(h) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{connu} \\ \text{contrôlé} \end{array}$$

► Etude :

- d_X et L_X
- Taille d'échantillon N
- Paramètres processus
- Types de CI et HT

Intervalles de confiance et tests d'hypothèse

► Estimation et bootstrap

$$\hat{\zeta}(q) \quad - \quad \{\hat{\zeta}^*(q)\}$$

$$\hat{c}_p \quad - \quad \{\hat{c}_p^*\}$$

$$\hat{D}(h) \quad - \quad \{\hat{D}^*(h)\}$$

→ intervalles de confiance (CI)

→ tests d'hypothèse (HT)

► Processus synthétiques :

$$\left. \begin{array}{l} \zeta(q) \\ c_p \\ D(h) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{connu} \\ \text{contrôlé} \end{array}$$

► Etude :

- d_X et L_X
- Taille d'échantillon N
- Paramètres processus
- Types de CI et HT

→ Couverture empirique (CI)

→ Taux de rejet (HT)

Intervalles de confiance et tests d'hypothèse

► Estimation et bootstrap

$$\begin{array}{ll} \hat{\zeta}(q) & - \{ \hat{\zeta}^*(q) \} & \longrightarrow \text{intervalles de confiance (CI)} \\ \hat{c}_p & - \{ \hat{c}_p^* \} & \longrightarrow \text{tests d'hypothèse (HT)} \\ \hat{D}(h) & - \{ \hat{D}^*(h) \} & \end{array}$$

► Processus synthétiques :

$$\left. \begin{array}{l} \zeta(q) \\ c_p \\ D(h) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{connu} \\ \text{contrôlé} \end{array}$$

► Etude :

- d_X et L_X
- Taille d'échantillon N
- Paramètres processus
- Types de CI et HT

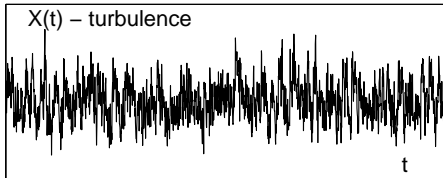
→ Couverture empirique (CI)

→ Taux de rejet (HT)

→ Performances satisfaisantes ★

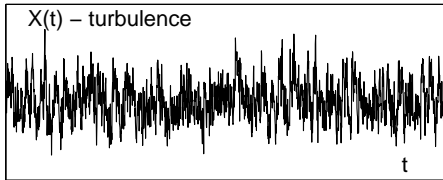
→ Seule procédure disponible ★

Données de turbulence : Intervalles de confiance

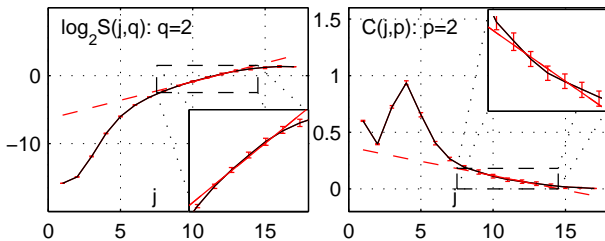


[Chavarría et al. 1995]

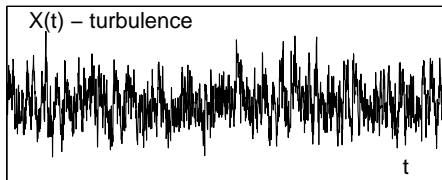
Données de turbulence : Intervalles de confiance



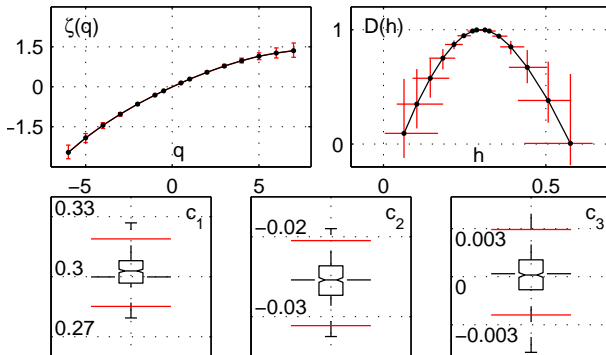
[Chavarría et al. 1995]



Données de turbulence : Intervalles de confiance



[Chavarria et al. 1995]



Données de turbulence : Tests d'hypothèse

1. Modèle **autosimilaire, monofractal** ? [Kolmogorov 1941]

Modèle:	$c_{2,nulle} = 0$
taux de rejet	98.8%
p -value	0.005

2. Modèle **log-Normal** ? [Obukhov Kolmogorov 1962]

Modèle:	$c_{2,nulle} = -0.025$	$c_{3,nulle} = 0$
taux de rejet	42.5%	18.8%
p -value	0.23	0.36

3. Modèle **log-Poisson** ? [She Lévêque 1994]

Modèle:	$c_{2,nulle} = -0.0365$	$c_{3,nulle} = 0.0049$
taux de rejet	98.8%	95.0%
p -value	0.005	0.009

Données de turbulence : Tests d'hypothèse

1. Modèle **autosimilaire, monofractal** ? [Kolmogorov 1941]

Modèle:	$c_{2,nulle} = 0$
taux de rejet	98.8%
p -value	0.005

2. Modèle **log-Normal** ? [Obukhov Kolmogorov 1962]

Modèle:	$c_{2,nulle} = -0.025$	$c_{3,nulle} = 0$
taux de rejet	42.5%	18.8%
p -value	0.23	0.36

3. Modèle **log-Poisson** ? [She Lévêque 1994]

Modèle:	$c_{2,nulle} = -0.0365$	$c_{3,nulle} = 0.0049$
taux de rejet	98.8%	95.0%
p -value	0.005	0.009

Données de turbulence : Tests d'hypothèse

1. Modèle **autosimilaire, monofractal** ? [Kolmogorov 1941]

Modèle:	$c_{2,nulle} = 0$
taux de rejet	98.8%
p -value	0.005

2. Modèle **log-Normal** ? [Obukhov Kolmogorov 1962]

Modèle:	$c_{2,nulle} = -0.025$	$c_{3,nulle} = 0$
taux de rejet	42.5%	18.8%
p -value	0.23	0.36

3. Modèle **log-Poisson** ? [She Lévêque 1994]

Modèle:	$c_{2,nulle} = -0.0365$	$c_{3,nulle} = 0.0049$
taux de rejet	98.8%	95.0%
p -value	0.005	0.009

Image de texture : Intervalles de confiance



[Xu et al. 2006]

Image de texture : Intervalles de confiance

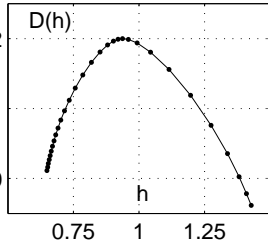
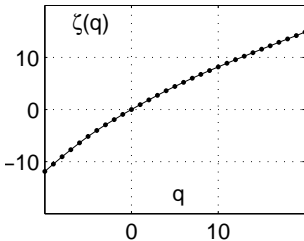
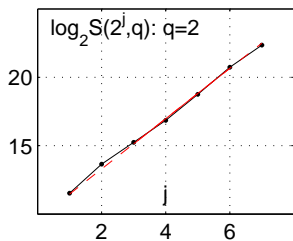
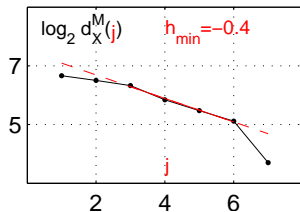
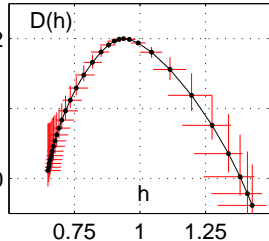
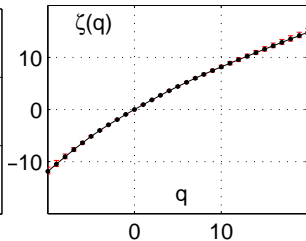
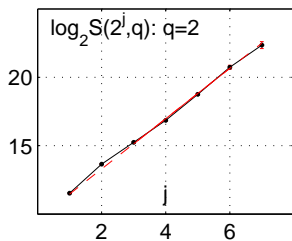
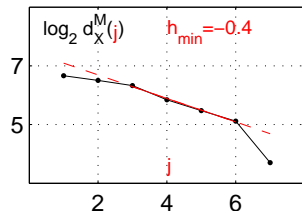


Image de texture : Intervalles de confiance

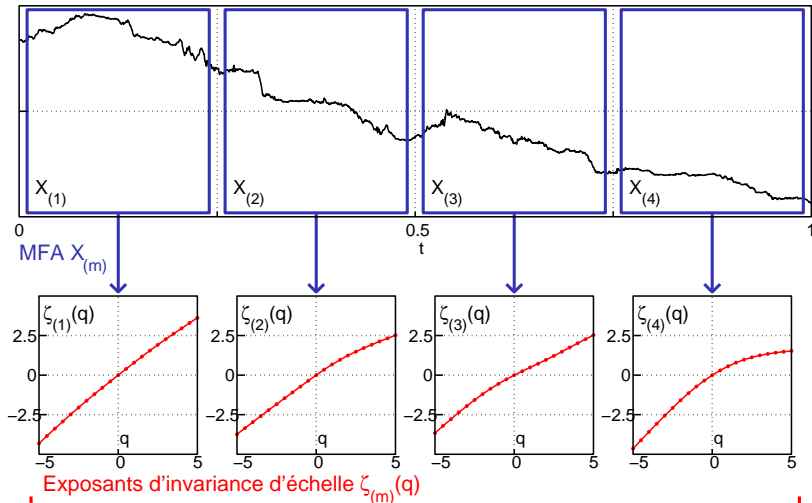


Plan des contributions

1. Autour des Leaders
2. **Bootstrap pour l'analyse multifractale**
 - ▶ Bootstrap temps-échelle
 - ▶ Intervalles de confiance
 - ▶ Tests d'hypothèse
 - ▶ Validation
 - ▶ **Test de stationnarité**
3. Structure de dépendance

Test de stationnarité

Processus multifractal : mrw



statistiquement cohérent ?

Plan des contributions

1. Autour des Leaders
2. Bootstrap pour l'analyse multifractale
3. **Structure de dépendance**
 - ▶ **Rôle des moments nuls**

Bootstrap par blocs : Quelques propriétés théoriques

- ▶ Estimation par bootstrap :
 - asymptotiquement consistante
 - plus précise qu'une approximation asymptotique
- ▶ Conditions : [Lahiri 2003]
 1. estimateur fonction lisse des moments
 2. $\mathbb{E}|x_i|^\eta < \infty$ pour $\eta < \eta_M$
 3. décroissance suffisamment rapide de la dépendance

Bootstrap par blocs : Quelques propriétés théoriques

- ▶ Estimation par bootstrap :
 - asymptotiquement consistante
 - plus précise qu'une approximation asymptotique
- ▶ Conditions : [Lahiri 2003]
 1. estimateur fonction lisse des moments
 2. $\mathbb{E}|x_i|^\eta < \infty$ pour $\eta < \eta_M$
 3. décroissance suffisamment rapide de la dépendance

Bootstrap par blocs : Quelques propriétés théoriques

- ▶ Estimation par bootstrap :
 - asymptotiquement consistante
 - plus précise qu'une approximation asymptotique
- ▶ Conditions : [Lahiri 2003]
 1. estimateur fonction lisse des moments ok
 2. $\mathbb{E}|x_i|^\eta < \infty$ pour $\eta < \eta_M$ ok
 3. décroissance suffisamment rapide de la dépendance ?

Mouvement Brownien fractionnaire

- | | |
|-----------------|---|
| – autosimilaire | – $\mathbb{E} B_H(t+a) - B_H(t) ^q = c_q a^{\zeta(q)}$ |
| – Gaussien | – $\zeta(q) = qH : c_1 = H, c_{p \geq 2} \equiv 0$ |
| $0 < H < 1$ | – longue portée : $H > 1/2$ [$2(1-H) < 1$] |
-

Mouvement Brownien fractionnaire

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> - autosimilaire - Gaussien | $\left \begin{array}{l} - \mathbb{E} B_H(t+a) - B_H(t) ^q = c_q a^{\zeta(q)} \\ - \zeta(q) = qH : c_1 = H, c_{p \geq 2} \equiv 0 \\ - \text{longue portée} : H > 1/2 \quad [2(1-H) < 1] \end{array} \right.$ |
| $0 < H < 1$ | |

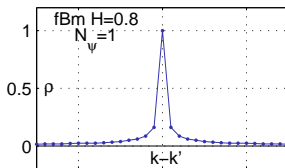
- ▶ $d_X(j, k) = \langle B_H | \psi_{j,k} \rangle \quad \psi_0(t) \longleftarrow N_\psi$
- ▶ $\mathbb{E} d_X(j, k) d_X(j, k') \simeq c |k - k'|^{-2(N_\psi - H)}, \quad [\text{Flandrin 1992}]$
 $|k - k'| \rightarrow \infty$

Mouvement Brownien fractionnaire

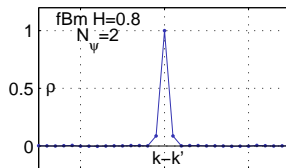
- autosimilaire
 - Gaussien
 - $0 < H < 1$
- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> - $\mathbb{E} B_H(t+a) - B_H(t) ^q = c_q a^{\zeta(q)}$ - $\zeta(q) = qH : c_1 = H, c_{p \geq 2} \equiv 0$ - longue portée : $H > 1/2$ [$2(1-H) < 1$] |
|---|

- ▶ $d_X(j, k) = \langle B_H | \psi_{j,k} \rangle$ $\psi_0(t) \leftarrow N_\psi$
- ▶ $\mathbb{E} d_X(j, k) d_X(j, k') \simeq c |k - k'|^{-2(N_\psi - H)}$, [Flandrin 1992]
 $|k - k'| \rightarrow \infty$

$2(N_\psi - H) \leq 1$
longue portée



$2(N_\psi - H) > 1$
courte portée

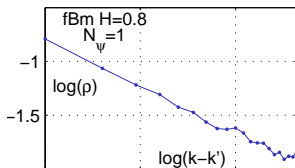


Mouvement Brownien fractionnaire

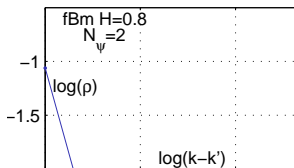
- autosimilaire
 - Gaussien
 - $0 < H < 1$
- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> - $\mathbb{E} B_H(t+a) - B_H(t) ^q = c_q a^{\zeta(q)}$ - $\zeta(q) = qH : c_1 = H, c_{p \geq 2} \equiv 0$ - longue portée : $H > 1/2$ [$2(1-H) < 1$] | |
|---|--|

- ▶ $d_X(j, k) = \langle B_H | \psi_{j,k} \rangle \quad \psi_0(t) \leftarrow N_\psi$
- ▶ $\mathbb{E} d_X(j, k) d_X(j, k') \simeq c |k - k'|^{-2(N_\psi - H)}, \quad [Flandrin 1992]$
 $|k - k'| \rightarrow \infty$

$2(N_\psi - H) \leq 1$
longue portée



$2(N_\psi - H) > 1$
courte portée

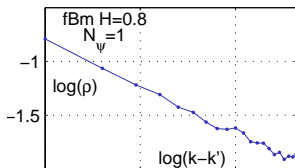


Mouvement Brownien fractionnaire

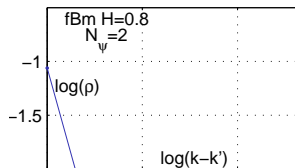
- autosimilaire
 - Gaussien
 - $0 < H < 1$
- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> - $\mathbb{E} B_H(t+a) - B_H(t) ^q = c_q a^{\zeta(q)}$ - $\zeta(q) = qH : c_1 = H, c_{p \geq 2} \equiv 0$ - longue portée : $H > 1/2$ [$2(1-H) < 1$] | |
|---|--|

- ▶ $d_X(j, k) = \langle B_H | \psi_{j,k} \rangle$ $\psi_0(t) \leftarrow N_\psi$
- ▶ $\mathbb{E} d_X(j, k) d_X(j, k') \simeq c |k - k'|^{-2(N_\psi - H)}$, [Flandrin 1992]
 $|k - k'| \rightarrow \infty$

$2(N_\psi - H) \leq 1$
longue portée



$2(N_\psi - H) > 1$
courte portée



- ▶ Processus multifractals ?
- ▶ Leaders ?

Cascades - processus multifractals

- ▶ $Q_r(t)$ – cascade multiplicative, Poisson composé : $\varphi(q)$
 - $A(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(s) ds$
 - $V_H(t) = B_H(A(t))$
 - $Z_H(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(s) dB_H(s)$
- ▶ $\varphi(q)$: Propriétés multifractales → $\zeta(q)$

Cascades - processus multifractals

- ▶ $Q_r(t)$ – cascade multiplicative, Poisson composé : $\varphi(q)$
 - $A(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(s) ds$
 - $V_H(t) = B_H(A(t))$
 - $Z_H(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(s) dB_H(s)$
- ▶ $\varphi(q)$: Propriétés multifractales → $\zeta(q)$

Cascades - processus multifractals

- ▶ $Q_r(t)$ – cascade multiplicative, Poisson composé : $\varphi(q)$
 - $A(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(s) ds$
 - $V_H(t) = B_H(A(t))$
 - $Z_H(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(s) dB_H(s)$
 - ▶ $\varphi(q)$: Propriétés multifractales $\longrightarrow \zeta(q)$
-

- ▶ Accroissements $X_\tau^{(N)}(t)$ d'ordre N : $N_\psi = N$
 - $X_\tau^{(1)}(t) = X(t + \tau) - X(t)$
 - $X_\tau^{(2)}(t) = X(t + 2\tau) - 2X(t + \tau) + X(t)$

Cascades - processus multifractals

- ▶ $Q_r(t)$ – cascade multiplicative, Poisson composé : $\varphi(q)$
 - $A(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(s) ds$
 - $V_H(t) = B_H(A(t))$
 - $Z_H(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(s) dB_H(s)$
 - ▶ $\varphi(q)$: Propriétés multifractales $\longrightarrow \zeta(q)$
-

- ▶ Accroissements $A_\tau^{(N_\psi)}(t)$ d'ordre N_ψ de $A(t)$:

$$A_\tau^{(1)}(t) = A(t + \tau) - A(t)$$

$$A_\tau^{(2)}(t) = A(t + 2\tau) - 2A(t + \tau) + A(t)$$

Cascades - processus multifractals

- ▶ $Q_r(t)$ – cascade multiplicative, Poisson composé : $\varphi(q)$
 - $A(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(s) ds$
 - $V_H(t) = B_H(A(t))$
 - $Z_H(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(s) dB_H(s)$
- ▶ $\varphi(q)$: Propriétés multifractales $\longrightarrow \zeta(q)$

- ▶ Accroissements $A_\tau^{(N_\psi)}(t)$ d'ordre N_ψ de $A(t)$:

$$A_\tau^{(1)}(t) = A(t + \tau) - A(t)$$

$$A_\tau^{(2)}(t) = A(t + 2\tau) - 2A(t + \tau) + A(t)$$

- ▶ Corrélation : $\varphi(2) < 0$, en pratique : $-1 < \varphi(2) < 0$

$$N_\psi = 1 \quad \mathbb{E}A_\tau^{(1)}(t)A_\tau^{(1)}(s) \simeq c|t - s|^{\varphi(2)} \quad \text{longue portée}$$

Cascades - processus multifractals

- ▶ $Q_r(t)$ – cascade multiplicative, Poisson composé : $\varphi(q)$
 - $A(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(s) ds$
 - $V_H(t) = B_H(A(t))$
 - $Z_H(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(s) dB_H(s)$
- ▶ $\varphi(q)$: Propriétés multifractales $\longrightarrow \zeta(q)$

- ▶ Accroissements $A_\tau^{(N_\psi)}(t)$ d'ordre N_ψ de $A(t)$:

$$A_\tau^{(1)}(t) = A(t + \tau) - A(t)$$

$$A_\tau^{(2)}(t) = A(t + 2\tau) - 2A(t + \tau) + A(t)$$

- ▶ Corrélation : $\varphi(2) < 0$, en pratique : $-1 < \varphi(2) < 0$

$N_\psi = 1$	$\mathbb{E}A_\tau^{(1)}(t)A_\tau^{(1)}(s) \simeq$	$c t - s ^{\varphi(2)}$	longue portée
$N_\psi = 2$	$\mathbb{E}A_\tau^{(2)}(t)A_\tau^{(2)}(s) \simeq$	$c t - s ^{\varphi(2)-2}$	courte portée

Cascades - processus multifractals

- ▶ $Q_r(t)$ – cascade multiplicative, Poisson composé : $\varphi(q)$
 - $A(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(s) ds$
 - $V_H(t) = B_H(A(t))$
 - $Z_H(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(s) dB_H(s)$
- ▶ $\varphi(q)$: Propriétés multifractales $\longrightarrow \zeta(q)$

- ▶ Accroissements $A_\tau^{(N_\psi)}(t)$ d'ordre N_ψ de $A(t)$:

$$A_\tau^{(1)}(t) = A(t + \tau) - A(t)$$

$$A_\tau^{(2)}(t) = A(t + 2\tau) - 2A(t + \tau) + A(t)$$

- ▶ Corrélation : $\varphi(2) < 0$, en pratique : $-1 < \varphi(2) < 0$

$$N_\psi = 1 \quad \mathbb{E}A_\tau^{(1)}(t)A_\tau^{(1)}(s) \simeq c|t - s|^{\varphi(2)} \quad \text{longue portée}$$

$$N_\psi = 2 \quad \mathbb{E}A_\tau^{(2)}(t)A_\tau^{(2)}(s) \simeq c|t - s|^{\varphi(2)-2} \quad \text{courte portée}$$

$$N_\psi \geq 2 \quad \mathbb{E}A_\tau^{(N_\psi)}(t)A_\tau^{(N_\psi)}(s) \simeq c|t - s|^{-(2N_\psi - (\varphi(2) + 2))} \quad \text{courte portée}$$

$N_\psi \longrightarrow$ décorrélation

(Accroissements stationnaires + invariance d'échelle)

Structure de dépendance : Accroissements

- $N_\psi = 1, q \geq 2, q \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}A_\tau^{(1)}(t)^q A_\tau^{(1)}(s)^q}{c|\tau|^{2(q+\varphi(q))}} = |t-s|^{\varphi(2q)-2\varphi(q)}$$

$$\boxed{-1 < \varphi(2q) - 2\varphi(q) < 0, \quad q < q_M} \implies \text{longue portée}$$

- $N_\psi = 2, q = 2$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}A_\tau^{(2)}(t)^q A_\tau^{(2)}(s)^q}{c|\tau|^{2(q+\varphi(q))}} = |t-s|^{\varphi(2q)-2\varphi(q)}$$

- N_ψ - contrôle de :

- corrélation ok
- dépendance $\times N_{\overline{\psi}}$ ★

Structure de dépendance : Accroissements

- $N_\psi = 1, q \geq 2, q \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}A_\tau^{(1)}(t)^q A_\tau^{(1)}(s)^q}{c|\tau|^{2(q+\varphi(q))}} = |t-s|^{\varphi(2q)-2\varphi(q)}$$

$$\boxed{-1 < \varphi(2q) - 2\varphi(q) < 0, \quad q < q_M} \implies \text{longue portée}$$

- $N_\psi = 2, q = 2$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}A_\tau^{(2)}(t)^q A_\tau^{(2)}(s)^q}{c|\tau|^{2(q+\varphi(q))}} = |t-s|^{\varphi(2q)-2\varphi(q)}$$

- N_ψ - contrôle de :

- corrélation ok
- dépendance $\times N_\psi$ ★

Structure de dépendance : Accroissements

- $N_\psi = 1, q \geq 2, q \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}A_\tau^{(1)}(t)^q A_\tau^{(1)}(s)^q}{c|\tau|^{2(q+\varphi(q))}} = |t-s|^{\varphi(2q)-2\varphi(q)}$$

$$\boxed{-1 < \varphi(2q) - 2\varphi(q) < 0, \quad q < q_M} \implies \text{longue portée}$$

- $N_\psi = 2, q = 2$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}A_\tau^{(2)}(t)^q A_\tau^{(2)}(s)^q}{c|\tau|^{2(q+\varphi(q))}} = |t-s|^{\varphi(2q)-2\varphi(q)}$$

- N_ψ - contrôle de :

- corrélation ok
- dépendance $\times N_\psi$ ★

Structure de dépendance : Accroissements

- ▶ $N_\psi = 1, q \geq 2, q \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}A_\tau^{(1)}(t)^q A_\tau^{(1)}(s)^q}{c|\tau|^{2(q+\varphi(q))}} = |t-s|^{\varphi(2q)-2\varphi(q)}$$

$$\boxed{-1 < \varphi(2q) - 2\varphi(q) < 0, \quad q < q_M} \implies \text{longue portée}$$

- ▶ $N_\psi = 2, q = 2$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}A_\tau^{(2)}(t)^q A_\tau^{(2)}(s)^q}{c|\tau|^{2(q+\varphi(q))}} = |t-s|^{\varphi(2q)-2\varphi(q)}$$

- ▶ N_ψ - contrôle de :

- corrélation ok
- dépendance ✗ $N_{\bar{\psi}}$ ★

Structure de dépendance : Quantités multirésolution

$$T_X : \quad X_T^{(N)} \quad d_X \quad L_X$$

Conjecture (Corrélations des $|T_X(\mathbf{a}, \cdot)|^q$)

$$\mathbb{E}|T_X(\mathbf{a}, k)|^q |T_X(\mathbf{a}, k')|^q \simeq c |k - k'|^{\varphi(2q) - 2\varphi(q)}, \quad |k - k'| \text{ grand}$$

$$\boxed{-1 < \varphi(2q) - 2\varphi(q) < 0, \quad 0 < q < q_M} \implies \text{longue portée}$$

Structure de dépendance : Quantités multirésolution

$$T_X : \quad X_\tau^{(N)} \quad d_X \quad L_X$$

Conjecture (Corrélations des $|T_X(\mathbf{a}, \cdot)|^q$)

$$\mathbb{E}|T_X(\mathbf{a}, k)|^q |T_X(\mathbf{a}, k')|^q \simeq c |k - k'|^{\varphi(2q) - 2\varphi(q)}, \quad |k - k'| \text{ grand}$$

$$\boxed{-1 < \varphi(2q) - 2\varphi(q) < 0, \quad 0 < q < q_M} \implies \text{longue portée}$$

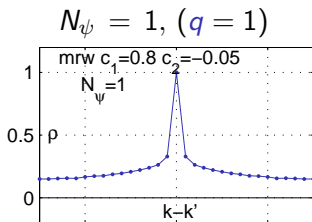
Structure de dépendance : Quantités multirésolution

$$T_X : \quad X_\tau^{(N)} \quad d_X \quad L_X$$

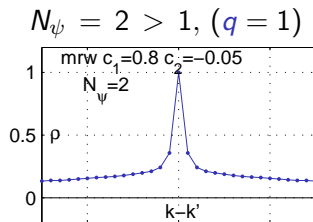
Conjecture (Corrélations des $|T_X(\mathbf{a}, \cdot)|^q$)

$$\mathbb{E}|T_X(\mathbf{a}, k)|^q |T_X(\mathbf{a}, k')|^q \simeq c|k - k'|^{\varphi(2q) - 2\varphi(q)}, \quad |k - k'| \text{ grand}$$

$$\boxed{-1 < \varphi(2q) - 2\varphi(q) < 0, \quad 0 < q < q_M} \implies \text{longue portée}$$



longue portée



longue portée

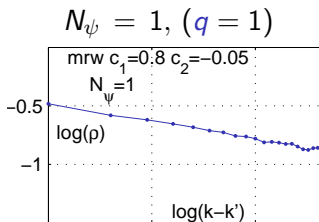
Structure de dépendance : Quantités multirésolution

$$T_X : \quad X_\tau^{(N)} \quad d_X \quad L_X$$

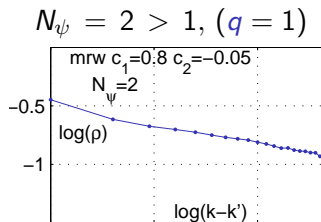
Conjecture (Corrélations des $|T_X(\mathbf{a}, \cdot)|^q$)

$$\mathbb{E}|T_X(\mathbf{a}, k)|^q |T_X(\mathbf{a}, k')|^q \simeq c|k - k'|^{\varphi(2q) - 2\varphi(q)}, \quad |k - k'| \text{ grand}$$

$$-1 < \varphi(2q) - 2\varphi(q) < 0, \quad 0 < q < q_M \implies \text{longue portée}$$



longue portée



longue portée

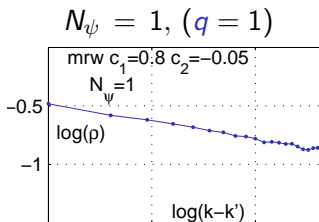
Structure de dépendance : Quantités multirésolution

$$T_X : \quad X_\tau^{(N)} \quad d_X \quad L_X$$

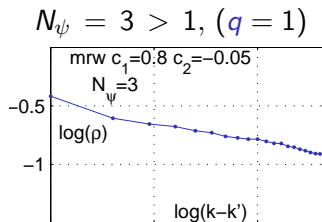
Conjecture (Corrélations des $|T_X(\mathbf{a}, \cdot)|^q$)

$$\mathbb{E}|T_X(\mathbf{a}, k)|^q |T_X(\mathbf{a}, k')|^q \simeq c|k - k'|^{\varphi(2q) - 2\varphi(q)}, \quad |k - k'| \text{ grand}$$

$$-1 < \varphi(2q) - 2\varphi(q) < 0, \quad 0 < q < q_M \implies \text{longue portée}$$



longue portée



longue portée

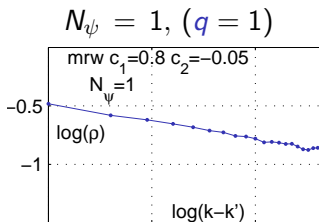
Structure de dépendance : Quantités multirésolution

$$T_X : \quad X_\tau^{(N)} \quad d_X \quad L_X$$

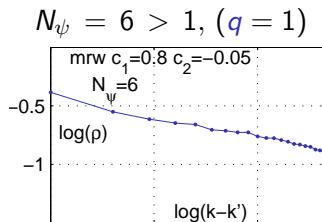
Conjecture (Corrélations des $|T_X(\mathbf{a}, \cdot)|^q$)

$$\mathbb{E}|T_X(\mathbf{a}, k)|^q |T_X(\mathbf{a}, k')|^q \simeq c|k - k'|^{\varphi(2q) - 2\varphi(q)}, \quad |k - k'| \text{ grand}$$

$$-1 < \varphi(2q) - 2\varphi(q) < 0, \quad 0 < q < q_M \implies \text{longue portée}$$



longue portée



longue portée

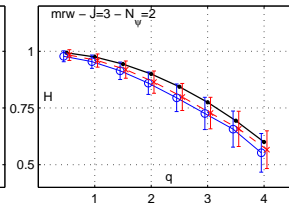
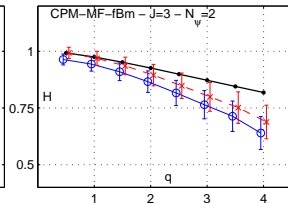
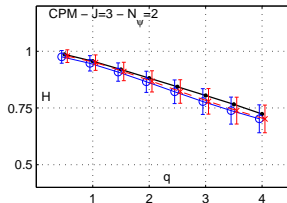
Structure de dépendance : Quantités multirésolution

$$T_X : \quad X_\tau^{(N)} \quad d_X \quad L_X$$

Conjecture (Corrélations des $|T_X(\mathbf{a}, \cdot)|^q$)

$$\mathbb{E}|T_X(\mathbf{a}, k)|^q |T_X(\mathbf{a}, k')|^q \simeq c|k - k'|^{\varphi(2q) - 2\varphi(q)}, \quad |k - k'| \text{ grand}$$

$$-1 < \varphi(2q) - 2\varphi(q) < 0, \quad 0 < q < q_M \implies \text{longue portée}$$



— conjecture

— d_X

— L_X

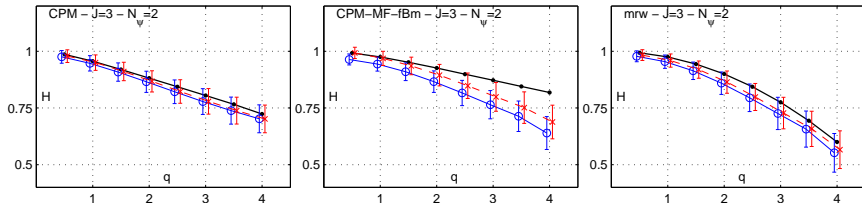
Structure de dépendance : Quantités multirésolution

$$T_X : \quad X_\tau^{(N)} \quad d_X \quad L_X$$

Conjecture (Corrélations des $|T_X(\mathbf{a}, \cdot)|^q$)

$$\mathbb{E}|T_X(\mathbf{a}, k)|^q |T_X(\mathbf{a}, k')|^q \simeq c |k - k'|^{\varphi(2q) - 2\varphi(q)}, \quad |k - k'| \text{ grand}$$

$$-1 < \varphi(2q) - 2\varphi(q) < 0, \quad 0 < q < q_M \implies \text{longue portée}$$



— conjecture

— d_X

— L_X




Dépendance : N_ψ \times - longue portée



Structure de dépendance et bootstrap

- ▶ N_ψ : 
 - corrélation ok
 - dépendance  $N_{\bar{\psi}}$
- ▶ Bootstrap 
- ▶ Résultats empiriques : ok
 - dépendance inter-échelles ?
 - résultats analytiques ?

Structure de dépendance et bootstrap

- ▶ N_{ψ} : 
 - corrélation **ok**
 - dépendance  $N_{\bar{\psi}}$
- ▶ Bootstrap 
- ▶ Résultats empiriques : **ok**
 - dépendance inter-échelles ?
 - résultats analytiques ?

Plan des contributions

1. Autour des Leaders

- ▶ Propriétés statistiques
- ▶ Performances d'estimation
- ▶ Extension aux fonctions non bornées
- ▶ Signaux 2d : Images
- ▶ Effet de linéarisation
- ▶ Discrétisation

2. Bootstrap pour l'analyse multifractale

- ▶ Bootstrap temps-échelle
- ▶ Intervalles de confiance
- ▶ Tests d'hypothèse
- ▶ Validation
- ▶ Test de stationnarité

3. Structure de dépendance

- ▶ Rôle des moments nuls

Conclusions

- ▶ Analyse multifractale :
 - Leaders + coefficients
 - bootstrap
 - 1d, 2d
 - performance, validation, documentation
 - codes opérationnels sur données expérimentales
- ▶ Structure de dépendance
- ▶ Applications :
 - classification d'images de texture
 - turbulence
- ▶ Questions ouvertes :
 - fonctions non bornées et singularités oscillantes
 - validation théorique bootstrap
- ▶ Perspectives :
 - n dimensions
 - traitement d'image
 - multivarié
 - biomedical

Conclusions

- ▶ Analyse multifractale :
 - Leaders + coefficients
 - bootstrap
 - 1d, 2d
 - performance, validation, documentation
 - codes opérationnels sur données expérimentales
- ▶ Structure de dépendance
- ▶ Applications :
 - classification d'images de texture
 - turbulence
- ▶ Questions ouvertes :
 - fonctions non bornées et singularités oscillantes
 - validation théorique bootstrap
- ▶ Perspectives :
 - n dimensions
 - traitement d'image
 - multivarié
 - biomedical

Conclusions

- ▶ Analyse multifractale :
 - Leaders + coefficients
 - bootstrap
 - 1d, 2d
 - performance, validation, documentation
 - codes opérationnels sur données expérimentales
- ▶ Structure de dépendance
- ▶ Applications :
 - classification d'images de texture
 - turbulence
- ▶ Questions ouvertes :
 - fonctions non bornées et singularités oscillantes
 - validation théorique bootstrap
- ▶ Perspectives :
 - n dimensions
 - traitement d'image
 - multivarié
 - biomedical

Conclusions

- ▶ Analyse multifractale :
 - Leaders + coefficients
 - bootstrap
 - 1d, 2d
 - performance, validation, documentation
 - codes opérationnels sur données expérimentales
- ▶ Structure de dépendance
- ▶ Applications :
 - classification d'images de texture
 - turbulence
- ▶ Questions ouvertes :
 - fonctions non bornées et singularités oscillantes
 - validation théorique bootstrap
- ▶ Perspectives :
 - *n* dimensions
 - traitement d'image
 - multivarié
 - biomedical

Conclusions

- ▶ Analyse multifractale :
 - Leaders + coefficients
 - bootstrap
 - 1d, 2d
 - performance, validation, documentation
 - codes opérationnels sur données expérimentales
- ▶ Structure de dépendance
- ▶ Applications :
 - classification d'images de texture
 - turbulence
- ▶ Questions ouvertes :
 - fonctions non bornées et singularités oscillantes
 - validation théorique bootstrap
- ▶ Perspectives :
 - n dimensions
 - traitement d'image
 - multivarié
 - biomedical

Publications :

Codes :

perso.ens-lyon.fr/herwig.wendt

Merci de votre attention !

perso.ens-lyon.fr/herwig.wendt