



HAL
open science

Génération et amélioration de maillages pour éléments finis en deux et trois dimensions

Jean-Yves Talon

► **To cite this version:**

Jean-Yves Talon. Génération et amélioration de maillages pour éléments finis en deux et trois dimensions. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1989. Français. NNT: . tel-00333122

HAL Id: tel-00333122

<https://theses.hal.science/tel-00333122>

Submitted on 22 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Jean-Yves TALON

pour obtenir le titre de DOCTEUR
de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE
(arrêté ministériel du 5 juillet 1984)

en Informatique et Mathématique Appliquées
spécialité Recherche Opérationnelle

* * * *

GENERATION ET AMELIORATION DE MAILLAGES
POUR ELEMENTS FINIS
EN DEUX ET TROIS DIMENSIONS

* * * *

Thèse soutenue le 3 juillet 1989 devant la commission d'examen

Président:	Monsieur J. FONLUPT
Examineurs:	Monsieur J.L. COULOMB Monsieur J. PERIAUX Monsieur A. QUILLIOT Monsieur J.P. UHRY
Invités:	Madame LEGRAND Monsieur B. MANTEL

Thèse préparée au sein du laboratoire ARTEMIS (IMAG - INPG)

**Personnes ayant obtenu le diplôme
d'HABILITATION A DIRIGER DES
RECHERCHES**

BECKER Monique
BINDER Zdenek
CHASSERY Jean-Marc
CHOLLET Jean-Pierre
COEY John
COLINET Catherine
COMMAULT Christian
CORNUJOLS Gérard
COULOMB Jean- Louis
DALARD Francis
DANES Florin
DEROO Daniel
DIARD Jean-Paul
DION Jean-Michel
DUGARD Luc
DURAND Madeleine
DURAND Robert
GALERIE Alain
GAUTHIER Jean-Paul
GENTIL Sylviane
GHIBAUDO Gérard
HAMAR Sylvaine
HAMAR Roger
LADET Pierre
LATOMBE Claudine
LE GORREC Bernard
MADAR Roland
MULLER Jean
NGUYEN TRONG Bernadette
PASTUREL Alain
PLA Fernand
ROUGER Jean
TCHUENTE Maurice
VINCENT Henri

Chercheurs du C.N.R.S

Directeurs de recherche 1ère Classe

CARRE René
FRUCHART Robert
HOPFINGER Emile
JORRAND Philippe
LANDAU Ioan
VACHAUD Georges
VERJUS Jean-Pierre

**Directeurs de recherche
2ème Classe**

ALEMANY Antoine
ALLIBERT Colette
ALLIBERT Michel
ANSARA Ibrahim
ARMAND Michel
BERNARD Claude
BINDER Gilbert
BONNET Roland
BORNARD Guy
CAILLET Marcel
CALMET Jacques
COURTOIS Bernard
DAVID René

DRIOLE Jean
ESCUDIER Pierre
EUSTATHOPOULOS Nicolas
GUELIN Pierre
JOURD Jean-Charles
KLEITZ Michel
KOFMAN Walter
KAMARINOS Georges
LEJEUNE Gérard
LE PROVOST Christian
MADAR Roland
MERMET Jean
MICHEL Jean-Marie
MUNIER Jacques
PIAU Monique
SENATEUR Jean-Pierre
SIFAKIS Joseph
SIMON Jean-Paul
SUERY Michel
TEODOSIU Christian
VAUCLIN Michel
WACK Bernard

**Personnalités agréées à titre permanent
à diriger des travaux de
recherche (décision du conseil scienti-
fique)**

E.N.S.E.E.G

CHATILLON Christian
HAMMOU Abdelkader
MARTIN GARIN Régina
SARRAZIN Pierre
SIMON Jean-Paul

E.N.S.E.R.G

BOREL Joseph

E.N.S.I.E.G

DESCHIZEAUX Pierre
GLANGEAUD François
PERARD Jacques
REINISCH Raymond
E.N.S.H.G
ROWE Alain
E.N.S.I.M.A.G
COURTIN Jacques

E.F.P.

CHARUEL Robert

C.E.N.G

CADET Jean
COEURE Philippe
DELHAYE Jean-Marc
DUPUY Michel
JOUVE Hubert
NICOLAU Yvan
NIFENECKER Hervé
PERROUD Paul
PEUZIN Jean-Claude
TAIB Maurice
VINCENDON Marc

Laboratoires extérieurs

C.N.E.T

DEVINE Rodericq
GERBER Roland
MERCKEL Gérard
PAULEAU Yves

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Président : Georges LESPINARD

Année 1988

Professeurs des Universités

BARIBAUD Michel	ENSERG
BARRAUD Alain	ENSIEG
BAUDELET Bernard	ENSPG
BEAUFILS Jean-Pierre	ENSEEG
BLIMAN Samuel	ENSERG
BLOCH Daniel	ENSPG
BOIS Philippe	ENSHMG
BONNETAIN Lucien	ENSEEG
BOUVARD Maurice	ENSHMG
BRISSONNEAU Pierre	ENSIEG
BRUNET Yves	IUFA
CAILLERIE Denis	ENSHMG
CAVAIGNAC Jean-François	ENSPG
CHARTIER Germain	ENSPG
CHENEVIER Pierre	ENSERG
CHERADAME Hervé	UFR PGP
CHOVET Alain	ENSERG
COHEN Joseph	ENSERG
COUMES André	ENSERG
DARVE Félix	ENSHMG
DELLA-DORA Jean	ENSIMAG
DEPORTES Jacques	ENSPG
DOLMAZON Jean-Marc	ENSERG
DURAND Francis	ENSEEG
DURAND Jean-Louis	ENSIEG
FOGGIA Albert	ENSIEG
FONLUPT Jean	ENSIMAG
FOULARD Claude	ENSIEG
GANDINI Alessandro	UFR PGP
GAUBERT Claude	ENSPG
GENTIL Pierre	ENSERG
GREVEN Hélène	IUFA
GUERIN Bernard	ENSERG
GUYOT Pierre	ENSEEG
IVANES Marcel	ENSIEG
JAUSSAUD Pierre	ENSIEG
JOUBERT Jean-Claude	ENSPG
JOURDAIN Geneviève	ENSIEG

LACOUME Jean-Louis	ENSIEG
LESIEUR Marcel	ENSHMG
LESPINARD Georges	ENSHMG
LONGEQUEUE Jean-Pierre	ENSPG
LOUCHET François	ENSIEG
MASSE Philippe	ENSIEG
MASSELOT Christian	ENSIEG
MAZARE Guy	ENSIMAG
MOREAU René	ENSHMG
MORET Roger	ENSIEG
MOSSIERE Jacques	ENSIMAG
OBLÉD Charles	ENSHMG
OZIL Patrick	ENSEEG
PARIAUD Jean-Charles	ENSEEG
PERRET René	ENSIEG
PERRET Robert	ENSIEG
PIAU Jean-Michel	ENSHMG
POUPOT Christian	ENSERG
RAMEAU Jean-Jacques	ENSEEG
RENAUD Maurice	UFR PGP
ROBERT André	UFR PGP
ROBERT François	ENSIMAG
SABONNADIÈRE Jean-Claude	ENSIEG
SAUCIER Gabrielle	ENSIMAG
SCHLENKER Claire	ENSPG
SCHLENKER Michel	ENSPG
SILVY Jacques	UFR PGP
SIRIEYS Pierre	ENSHMG
SOHM Jean-Claude	ENSEEG
SOLER Jean-Louis	ENSIMAG
SOUQUET Jean-Louis	ENSEEG
TROMPETTE Philippe	ENSHMG
VEILLON Gérard	ENSIMAG
ZADWORNÝ François	ENSERG

**Professeur Université des Sciences
Sociales
(Grenoble II)**

BOLLIET Louis

ABSTRACT

This analysis presents some algorithms about the generation and improvement of meshes in simplex for the finite elements method (2D triangles and 3D tetrahedrons). In part one, we show that it is possible to triangulate any planar domain (even with holes), defined by an external contour and a set of internal points for its discretisation. We describe and we justify a simple algorithm to compute triangular meshes. It is then proved that the calculation for converting the diagonals into a convex quadrilateral enables any feasible topology to be attained.

In part two, the tridimensionnal case is examined and several properties of tetrahedrisation are given assuming that a triangular faceted mesh is used on the outer surface of the domain and a set of internal points is chosen for the discretisation. Several heuristics of topological improvement of tetrahedral meshes are described and their practical efficiency with some industrial examples taken from the fluid mechanics are compared: thus a greedy algorithm typifying the bidimensionnal procedure is shown, then another algorithm based on the statistical method of simulated annealing, and algorithms of the "divide and conquer" type, coupled with simple non topological modifications, like the barycentrage of each node of the discretisation. These last algorithms give rise to consequent improvements even on meshes of domains defined by very difficult geometries.

Keywords: Mesh, finite elements, triangulation, tétrahédrisation, heuristics, simulated annealing.

RESUME

Cette étude présente des algorithmes de génération et d'améliorations de maillages en simplexes pour la méthode des éléments finis (triangles en 2D et tétraèdres en 3D). Dans une première partie, après avoir montré que tout domaine plan défini par un contour extérieur et un ensemble de points internes représentant sa discrétisation peut être triangulé, on expose et on justifie un algorithme simple de maillages en triangles. On prouve ensuite que l'opération de changement de diagonales dans un quadrilatère convexe permet d'atteindre toutes les topologies réalisables.

Dans la seconde partie, on étudie le cas tridimensionnel et on donne quelques propriétés sur l'existence d'une tétraèdrisation quand on se fixe le maillage en facettes triangulaires de la surface extérieure du domaine et les points internes pour la discrétisation. On décrit plusieurs heuristiques d'améliorations topologiques de maillages tétraédriques et on compare leur efficacité pratique sur quelques exemples industriels tirés de la mécanique des fluides: on examine ainsi un algorithme glouton généralisant la démarche bidimensionnelle, un algorithme basé sur la méthode statistique du recuit simulé et des algorithmes de type "divide and conquer" couplés avec des procédures non topologiques simples comme le barycentrage des noeuds d'une discrétisation. Ces derniers algorithmes provoquent des améliorations conséquentes même sur des maillages de topologies très défavorables.

Mots-clés: Maillages, éléments finis, triangulations, tétraèdrisations, heuristiques, recuit simulé.

AVANT - PROPOS

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire ARTEMIS de l'Institut de l'Informatique et des Mathématiques Appliquées de Grenoble. Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance à tous les membres de ce laboratoire, et en particulier à ceux de l'équipe de recherche opérationnelle pour l'accueil et l'encadrement qu'ils ont su me réserver.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur Jean-Pierre UHRY, chargé de recherche au CNRS, pour l'intérêt qu'il a continuellement porté à cette étude et dont les compétences et le soutien ont été déterminants. Qu'il trouve ici l'expression de ma plus profonde gratitude pour sa gentillesse, sa disponibilité et sa patience.

Je veux exprimer toute ma reconnaissance aux personnalités qui ont bien voulu constituer ce jury de thèse:

Monsieur le Professeur Jean FONLUPT (INP Grenoble) pour l'honneur qu'il me fait en assurant la présidence de ce jury et pour les conseils qu'il m'a adressé tout au long de ce travail.

Messieurs les Professeurs Jean-Louis COULOMB (ENSIE Grenoble) et Alain QUILLIOT (Université de Clermont-Ferrand) pour avoir très aimablement accepté d'examiner ce rapport et de participer au jury. Je les remercie également de leur coopération et suggestions durant certaines étapes de cette étude.

Je tiens aussi à remercier vivement la société Marcel Dassault - Breguet Aviation qui m'a permis d'envisager les aboutissements industriels de ces travaux. En particulier, je souhaite exprimer ma sincère reconnaissance à Monsieur Jacques PERIAUX (service DGT/DEA) pour avoir bien voulu faire partie du jury et à Monsieur Bertrand MANTEL. L'accueil au sein de leur entreprise et leur expérience m'ont été d'un apport très précieux pour la validation des résultats.

Je ne saurai oublier la société ALMA et tous ses associés pour les facilités de travail qu'ils m'ont offertes durant la dernière partie de cette étude. Leurs encouragements et exigences professionnelles de la semaine se sont avérés parfois très motivants pour clore ce travail durant les week-end ensoleillés du printemps.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur Christophe Lacôte pour les conseils techniques et discussions houleuses mais fructueuses sur le sujet. Sa coopération a été essentielle dans les phases informatiques de ce travail.

Je souhaite de même adresser ma reconnaissance à la Direction des Recherches Etudes et Techniques (DRET), organisme qui a en partie financé ces travaux.

Enfin mes remerciements vont également aux membres du service de reprographie de l'Institut de l'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble, pour l'excellente qualité de leur travail.

INTRODUCTION

Durant ces dernières années la méthode des éléments finis a connu un essor important, permettant d'approcher par simulation numérique des phénomènes physiques réputés difficiles. Dans le domaine de l'aéronautique et de l'automobile par exemple, les progrès constatés dans l'efficacité des algorithmes de résolution d'équations aux dérivées partielles ont autorisé à réduire au maximum les études expérimentales traditionnelles en soufflerie, pour déterminer la forme optimale d'un avion, d'une navette spatiale ou d'une voiture.

Quelquesoit la formalisation mathématique et physique retenue pour modéliser le phénomène, la méthode des éléments finis nécessite toujours une discrétisation de l'espace étudié (par exemple l'intérieur d'un avion pour une étude de structures, ou bien l'extérieur de ce dernier pour des calculs sur l'écoulement des fluides concernant son aérodynamisme). La maîtrise de cette discrétisation apparaît maintenant déterminante pour assurer la fiabilité des solveurs numériques: en effet, la convergence et la précision des calculs dépendent pour une grande part de la qualité des maillages générés qui définissent la discrétisation sur les domaines analysés.

L'augmentation des moyens de calculs et la multiplication des outils de visualisation ont permis de faire progresser indiscutablement cette phase préliminaire de la méthode des éléments finis. Cependant, de nombreux travaux théoriques et appliqués ont aussi été entrepris dans ce sens, en particulier pour proposer des algorithmes de génération plus puissants, contruisant des maillages de meilleure qualité sur des domaines à géométrie toujours plus complexe.

Dans l'étude qui est présentée ici, nous nous intéressons à la construction de maillages constitués uniquement d'éléments simplexes (triangles en 2D et tétraèdres en 3D). La démarche originale consiste à traiter comme deux problèmes distincts celui de la réalisabilité et celui de l'optimisation.

Pour un domaine à mailler, en partant de la donnée de son contour extérieur et d'un ensemble de points intérieurs correspondant à la discrétisation, on cherche, dans une première étape, à construire une subdivision en triangles ou en tétraèdres sans se préoccuper de la qualité des mailles. Dans une seconde étape, on tente d'améliorer la structure du maillage généré par des modifications topologiques et non topologiques, qui ne remettent pas en cause la nature du domaine.

On a choisi de présenter ce travail en deux parties, selon la dimension du problème traité: dans la

première, réservée au cas bidimensionnel, on montre que le problème de la génération est facile et, à titre d'exemple, nous exposons un algorithme simple de génération de maillages triangulaires, dont le comportement pratique est très intéressant. Ensuite, nous détaillons des algorithmes d'amélioration du maillage ainsi généré; en particulier, on montre qu'un algorithme de type glouton, faisant intervenir le changement de diagonales dans un quadrilatère convexe, permet, au regard de critères géométriques classiques, d'approcher de très près le maillage optimal même en partant de situations initiales très désavantageuses. De ce fait, il apparaît que l'on peut se satisfaire d'un algorithme sommaire pour la génération.

Dans la seconde partie sont regroupés les résultats et algorithmes se rapportant au cas tridimensionnel. Quelques propriétés et contre-exemples suffisent pour montrer que l'étude est beaucoup plus complexe: outre le fait que l'on puisse exhiber des domaines non tétraèdrisables quand on s'est fixé le maillage de la peau et la discrétisation intérieure, des algorithmes aussi systématiques qu'en 2D et généralisant les mêmes principes ne sont plus suffisants. On expose donc après ceux-là d'autres techniques combinatoires (comme celle du recuit simulé) qui aident à la mise en place de nouvelles démarches. Le dernier algorithme d'améliorations présenté donne des résultats très encourageants, même sur des maillages initiaux défavorables. Son comportement est analysé sur des exemples industriels de grande taille et laisse à penser qu'il peut s'avérer assez performant pour valider des algorithmes de générations plus médiocres: celui exposé en fin de seconde partie repose sur un schéma très caricatural et en fournit une illustration.

PREMIERE PARTIE

ALGORITHMES DE GENERATION ET D'AMELIORATION DE MAILLAGES EN 2 DIMENSIONS

1. INTRODUCTION

2. UN ALGORITHME DE CONSTRUCTION DE MAILLAGES 2D

3. ALGORITHMES DE MODIFICATIONS NON TOPOLOGIQUES

4. UN ALGORITHME D'AMELIORATION TOPOLOGIQUE

5. QUELQUES APPLICATIONS PARTICULIERES DES ALGORITHMES

6. COMPLEXITE ET PROBLEMES DE TRIANGULATION

1. INTRODUCTION

Pour le problème en 2 dimensions étudié ici, le domaine polygonal D à mailler sera défini par une suite ordonnée de points qui détermine son contour extérieur. Si le domaine comporte des trous (polygonaux), nous montrerons au chapitre suivant qu'il est toujours possible de ramener l'étude au cas de domaines sans trous intérieurs pour simplifier l'exposé des résultats.

Soit V_{ext} l'ensemble des sommets du contour et E_{ext} l'ensemble des arêtes qui constituent ce contour obtenues en reliant 2 points de V_{ext} . D est défini par le couple $(V_{\text{ext}}, E_{\text{ext}})$. En plus du contour, on se donne aussi un ensemble V_{int} de points contenus dans D et qui représentent sa discrétisation.

Soit V l'ensemble des sommets de D et de sa discrétisation: $V = V_{\text{int}} \cup V_{\text{ext}}$

Une triangulation T de D est un ensemble de triangles $\{T_i\}$ qui doivent vérifier les conditions suivantes:

- 1) les sommets de T_i sont des éléments de V ,
- 2) $\cup_{T_i \in T} T_i = D$
- 3) l'intersection de 2 éléments différents T_i et T_j de T doit être
 - . vide
 - . ou réduite à 1 point
 - . ou égale à une arête

Autrement dit, le domaine D est exactement recouvert par l'ensemble des éléments de T , sans aucun chevauchement des triangles. L'ensemble des arêtes composant les triangles de T et reliant deux points intérieurs ou reliant un point intérieur et un point extérieur sera appelé E_{int} pour désigner les arêtes internes. Pour une triangulation T , l'ensemble des arêtes composant ses triangles sera noté E , où $E = E_{\text{int}} \cup E_{\text{ext}}$.

L'ensemble $M=(D, V_{\text{int}}, T)$ définit un maillage de topologie T sur le domaine D . On dira que la triangulation T est définie par les arêtes de E (pour un ensemble d'arêtes $E=E_{\text{ext}} \cup E_{\text{int}}$, il existe au plus une triangulation T vérifiant les conditions ci-dessus).

En plus des conditions de réalisabilité données ici, un maillage pour éléments finis doit présenter d'autres caractéristiques géométriques (bonne équilateralité moyenne des triangles) ou physiques

(densité de points variable selon les zones du domaine).

Un grand nombre d'algorithmes ont été mis au point pour construire de tels maillages. La plupart d'entre eux règlent à la fois le problème de la réalisabilité et de la qualité du maillage solution. Parmi ceux-là différentes stratégies sont développées:

Dans une première catégorie de méthodes on regroupe les algorithmes qui génèrent les noeuds internes au domaine selon différentes techniques, au cours de la construction de la triangulation [7],[12],[42],[70]. Si certaines d'entre elles permettent de bien contrôler le nombre de points générées, d'autres engendrent une discrétisation bien difficile à évaluer a priori.

Dans la seconde catégorie, on place les algorithmes qui construisent le maillage à partir de la donnée du contour du domaine et de sa discrétisation. La triangulation de Delaunay [23],[37],[38],[57] relative aux polygones de Voronoï est la plus souvent citée, d'une part parce qu'elle s'appuie sur des propriétés géométriques intéressantes qui permettent de bien la caractériser, mais aussi parce qu'elle se généralise relativement facilement au cas tridimensionnel en conservant ses caractéristiques. Cependant d'autres méthodes tout aussi performantes existent en 2 dimensions: celles qui divisent de façon récursive le domaine à mailler[51]; d'autres techniques consistent à calquer une grille régulière prédéfinie sur le domaine étudié[87], ou encore à entourer un noeud par les triangles les mieux disposés[13],[72].

Tout au long de cette partie, même si nous faisons référence à leur complexité théorique, on s'intéresse surtout au comportement pratique des algorithmes étudiés avec l'objectif de mettre en application l'idée qui consiste à résoudre comme deux problèmes distincts la réalisabilité et l'optimalité d'un maillage. La validation de notre démarche en 2D est importante essentiellement parce qu'elle est envisagée comme un prélude au cas tridimensionnel.

Dans le second chapitre de cette partie, on propose un algorithme de génération de maillage : si sa complexité théorique $O(n^2)$ est plus forte que certains algorithmes classiques (triangulation de Delaunay en $O(n \log n)$), il présente l'avantage d'un comportement pratique moyen très intéressant et celui d'une mise en oeuvre plus aisée.

Au chapitre trois, on s'intéresse à l'amélioration non topologique d'un maillage: les seules variables d'un maillage $M=(D, V_{int}, T)$ sont les positions des noeuds internes au domaine. Tout en s'assurant que l'ensemble des triangles de T définit toujours une triangulation, on cherche à déplacer les

noeuds internes pour améliorer la qualité géométrique ou physique du maillage. On décrit une méthode par approximation parabolique et un algorithme de barycentrage qui conserve la réalisabilité de la solution. Quelles qu'elles soient, ces démarches sont en général peu efficaces.

Au quatrième chapitre, on examine les améliorations topologiques d'un maillage: on cherche à transformer la triangulation de départ T , en modifiant les arêtes de E_{int} . On prouve à cette occasion un résultat combinatoire qui atteste de l'importance de l'opération locale retenue pour engendrer des topologies nouvelles.

Au chapitre cinq, on énonce quelques applications possibles des algorithmes exposés en dehors de la méthode des éléments finis. Ces nouveaux tests nous ont permis de mener quelques réflexions supplémentaires sur le problème général de la triangulation, quand on impose par exemple que la solution doit comporter un certain nombre d'arêtes internes invariantes. On étudie alors les modifications à apporter pour les algorithmes de génération et d'amélioration.

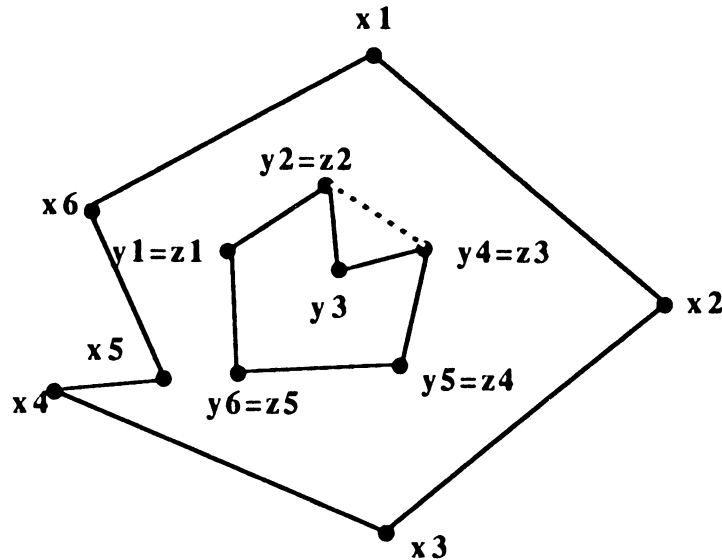
Enfin dans le chapitre six, on revient sur des résultats concernant en particulier l'étude de la complexité des problèmes de triangulation afin de situer l'efficacité des algorithmes qui sont présentés dans cette première partie.

2. UN ALGORITHME DE CONSTRUCTION DE MAILLAGES 2D

On se donne un domaine polygonal D , défini par le couple (V_{ext}, E_{ext}) où V_{ext} est l'ensemble de noeuds externes et E_{ext} l'ensemble des arêtes externes composant son contour. On se donne également V_{int} , un ensemble de points intérieurs à D , qui représente la discrétisation de D . Nous commençons par rappeler et prouver quelques résultats généraux sur la triangulation, avant de fournir un algorithme de construction d'une topologie en triangles de D . En particulier la proposition suivante montre qu'il est toujours possible de ramener l'étude au cas de domaines sans trous intérieurs. Pour ne pas alourdir l'écriture et sauf mention contraire, les domaines étudiés dans cette première partie seront considérés sans trou intérieur.

Proposition 1 :

Soit D un domaine polygonal défini par une suite de points (x_1, \dots, x_n) formant son contour extérieur et (y_1, \dots, y_m) un trou polygonal placé à l'intérieur de D . Il existe une arête de type (x_i, y_j) complètement contenue dans D qui relie le contour du trou au contour extérieur de D .

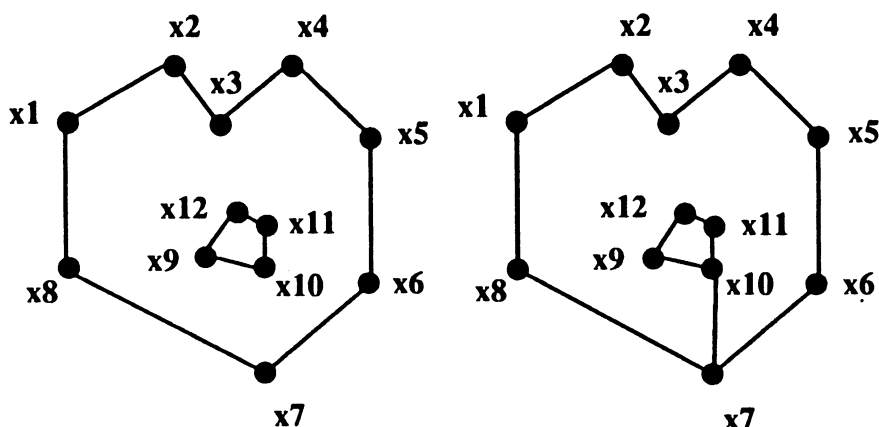


démonstration:

Considérons (z_1, \dots, z_p) la suite de sommets extraite de (y_1, \dots, y_m) correspondant à l'enveloppe convexe du polygone (y_1, \dots, y_m) formant le trou et numérotée dans le sens indirect. Pour $z_i \in \{z_1, \dots, z_p\}$ puisque z_{i-1}, z_i, z_{i+1} sont trois points consécutifs situés sur une

enveloppe convexe, au point z_i l'angle extérieur au trou formé par les vecteurs (z_i, z_{i-1}) et (z_i, z_{i+1}) est ouvert et par conséquent il existe $x_k \in \{x_1, \dots, x_n\}$ tel que l'arête (x_k, a_i) reliant le contour du trou au contour extérieur soit totalement contenue dans D . \diamond

Quand D est un polygone comportant plusieurs trous, disons q , la proposition précédente se généralise sans difficulté: on peut introduire successivement q arêtes reliant deux trous intérieurs ou un trou intérieur et le contour extérieur.



D défini par 2 suites:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$
 et $(x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12})$

D défini par une seule suite:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_9, x_{10}, x_7, x_8)$

Lemme :

Il existe une arête de la forme (xy) avec $x \in V_{\text{ext}}$ et $y \in V_{\text{ext}}$, telle que (xy) soit totalement contenue dans le domaine D .

démonstration:

1) Si D est convexe alors toute arête (xy) avec $x \in V_{\text{ext}}$ et $y \in V_{\text{ext}} - \{x\}$ est totalement contenue dans le domaine D .

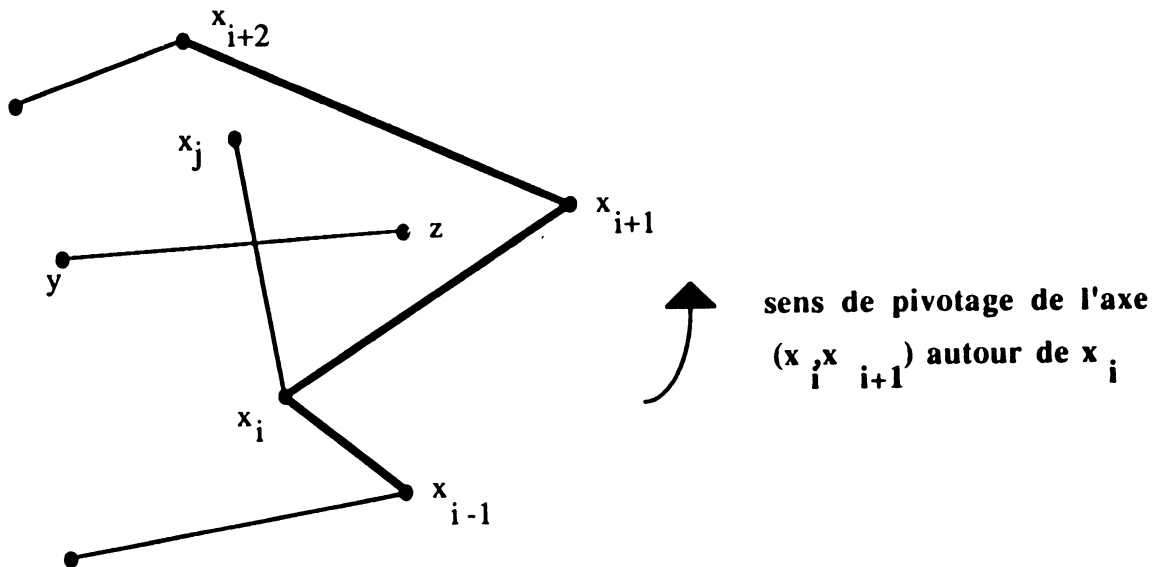
2) D non convexe

Donnons les points du contour de D ordonnés dans le sens direct (x_1, x_2, \dots, x_n) . Dans cette suite de points, il existe un noeud x_i tel que:

x_i soit un point entrant au domaine D

x_{i+1} son successeur dans la suite des points du contour de D soit un point sortant

Faisons pivoter l'axe (x_i, x_{i+1}) autour du point x_i dans le sens trigonométrique et appelons x_j le premier point ainsi rencontré dans le triangle (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) . Alors l'arête (x_i, x_j) est complètement contenue dans le domaine D . En effet si tel n'était pas le cas, l'arête (x_i, x_j) couperait une autre arête, disons (y, z) et le point y ou le point z aurait été rencontré avant le point x_j . Remarquons que l'on peut avoir $j=i+2$ quand les points x_j et x_{i+2} sont confondus. \diamond



On dira qu'un domaine polygonal D de contour (V_{ext}, E_{ext}) peut être triangulé s'il existe une triangulation T de D qui s'appuie uniquement sur les points définissant son contour.

Proposition 2 :

Tout domaine polygonal 2D peut être triangulé.

démonstration:

Raisonnons par récurrence sur le cardinal n de sommets du contour de D . Si D ne comporte que 3 points sur son contour, D est trivialement triangulé.

Prenons un domaine D défini par $n+1$ points sur son contour. Par le résultat précédent, il existe une arête complètement contenue dans ce domaine. Cette arête divise le domaine en 2 sous-domaines dont les contours contiennent au plus n points chacun. Ces deux sous-domaines peuvent donc être triangulés et par conséquent le domaine D tout entier aussi. \diamond

Proposition 3 :

Soit D un domaine polygonal défini par un contour $(V_{\text{ext}}, E_{\text{ext}})$, et V_{int} une discrétisation de D .

Soit T une triangulation quelconque de D en t triangles;

notons $n_e = |V_{\text{ext}}|$, $n_i = |V_{\text{int}}|$, $a_e = |E_{\text{ext}}|$, $a_i = |E_{\text{int}}|$ alors

$$t = 2 n_i + n_e - 2$$

démonstration:

Posons $V = V_{\text{ext}} \cup V_{\text{int}}$ et $E = E_{\text{ext}} \cup E_{\text{int}}$

Puisque T est une triangulation vérifiant les conditions énoncées en introduction, le graphe $G=(V,E)$ qu'on peut associer à la triangulation est planaire (c'est-à-dire qui peut se dessiner dans le plan sans que les arêtes se croisent). Alors si f représente le nombre de faces de G , la formule d'Euler s'écrit: $f - |E| + |V| = 2$. Les faces de G sont toutes des triangles à l'exception de la face infinie, donnée par le contour extérieur de D .

i.e. $f = t + 1$

d'où $t = 1 + |E| - |V|$

de plus $|E| = a_i + a_e$ et $|V| = n_i + n_e$

d'où $t = 1 + a_e + a_i - n_e - n_i$ (1)

d'autre part sur le contour de D il existe autant d'arêtes que de noeuds

i.e. $a_e = n_e$

une arête intérieure appartient exactement à 2 triangles, et une arête extérieure

exactement à un triangle, donc $2 a_i + a_e = 3t$ (2)

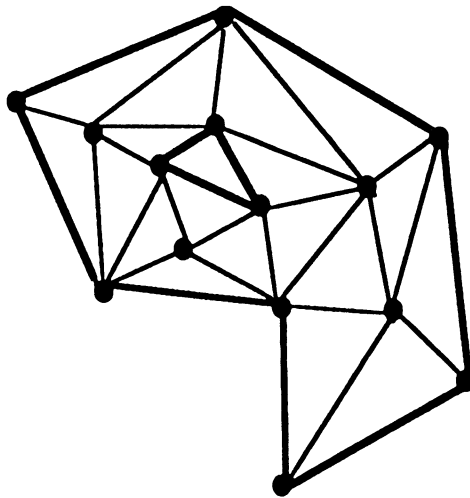
en combinant (1) et (2) on obtient :

$$t = 2 n_i + n_e - 2 \quad \diamond$$

Ce résultat nous certifie donc que le nombre de triangles de toute triangulation d'un domaine (défini avec n_e points extérieurs auxquels on a adjoint une discrétisation de n_i points intérieurs) , est invariant.

Si l'on veut considérer le domaine D avec l'ensemble de ses trous et non plus comme défini par une seule suite de points, les faces du graphe planaire associé à la triangulation représentent les triangles, la face extérieure et les trous de D . Si q désigne le nombre de trous de D , $f = t + q + 1$ et on obtient alors $t = 2 n_i + n_e + 2q - 2$

Quand on cherche à définir D par une seule suite de points pour éliminer les trous, on s'oblige à ajouter $2q$ arêtes pour déterminer le nouveau contour: q devient nul mais n_e est augmenté de 2 fois le nombre initial de trous.



$$n_e = 10, n_i = 4, a_e = 10, a_i = 22, q = 1, t = 18$$

Si nous considérons un domaine D donné par (V_{ext}, E_{ext}) la proposition 2 montre que D peut être triangulé uniquement à l'aide des points de son contour. Nous pouvons exhiber un algorithme simple qui construit cette triangulation et qui se trouve justifié par la proposition suivante:

Proposition 4 :

Soit D un domaine polygonal défini par (V_{ext}, E_{ext}) . Il existe 3 sommets consécutifs (x, y, z) sur le contour de D tels que (xz) soit une arête totalement contenue dans D .

démonstration :

Par le résultat de la proposition 2, D peut être triangulé. Considérons maintenant une discrétisation particulière de D qui ne contienne aucun point, ie $|V_{int}| = 0$. Par la proposition 2, si t est le nombre de triangles d'une triangulation de D , $t = 2 n_i + n_e - 2$, avec $n_i = 0$ d'où $t = n_e - 2$. Puisqu'il existe n_e arêtes extérieures et $n_e - 2$ triangles c'est qu'il existe forcément deux arêtes e_1 et e_2 du contour qui appartiennent au même triangle. Pour appartenir au même triangle, ces arêtes e_1 et e_2 doivent être consécutives; choisissons d'appeler y le point commun aux deux arêtes, x et z les extrémités de e_1 et e_2 non communes. Puisque le triangle (x, y, z) existe dans une triangulation de D , c'est que l'arête (xz) est complètement contenue dans D .

Nota: puisque $t = n_e - 2$, on peut même certifier qu'il existe deux couples d'arêtes (e_1, e_2) et (e_3, e_4) qui permettent de former deux triangles de ce type.

Algorithme de construction d'une triangulation de D sans points intérieurs

Supposons V_{ext} ordonné en $(x_1, x_2, \dots, x_{n_e})$

$n_{\text{contour}} = n_e$; $\text{contour} = \{x_1, \dots, x_{n_e}\}$; notons $x_{n_e+1} = x_1$ et $x_{n_e+2} = x_2$

tant que $n_{\text{contour}} > 3$

pour $i = 1, n_{\text{contour}}$

si l'arête $x_i x_{i+2}$ est contenu dans le domaine "contour"

 former le triangle $(x_i x_{i+1} x_{i+2})$

$n_{\text{contour}} = n_{\text{contour}} - 1$

$\text{contour} = \text{contour} - \{x_{i+1}\}$

 renuméroter les éléments de contour de 1 à n_{contour}

fin

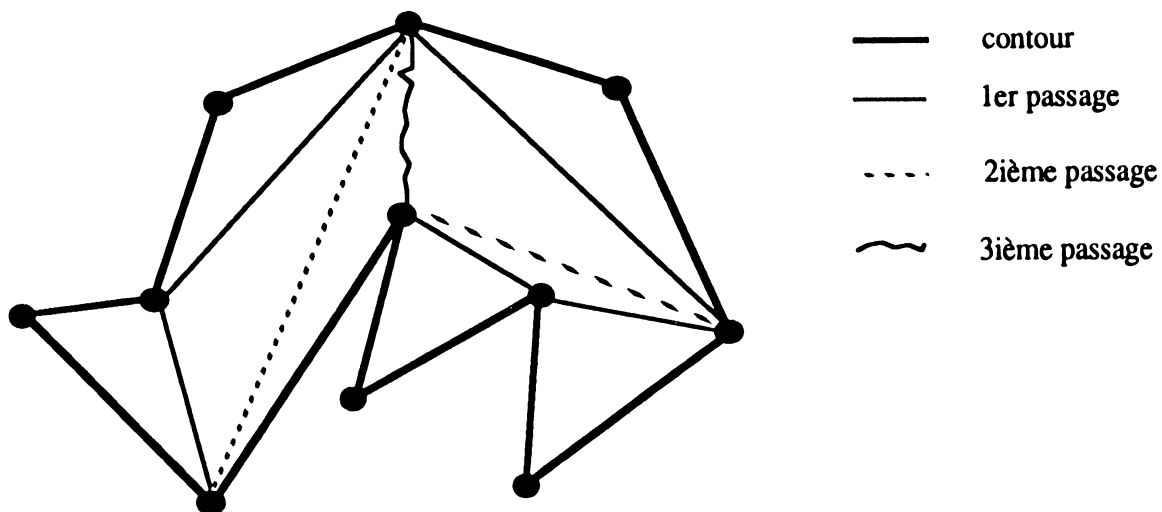
fin

fin

Le résultat précédent nous permet d'affirmer que l'algorithme est fini puisqu'à chaque passage dans la boucle **tant que**, on décrémente au moins d'une unité la taille du contour.

Au pire des cas, l'algorithme exige n_e passages dans la boucle **tant que** et le test concernant la validité de l'arête $x_i x_{i+2}$ se réalise en $O(n_e)$ opérations; l'algorithme forme donc une triangulation d'un domaine D sans point intérieur en $O(n_e^2)$ opérations.

Cette complexité théorique peut paraître forte par rapport aux algorithmes classiques de triangulations de polygones (algorithme de mise en trapèzes en $O(n_e \log n_e)$ [28]), mais d'un point de vue pratique, il s'avère très performant, puisqu'en général, en un passage dans la boucle **tant que**, le contour diminue très largement. Le comportement effectif de l'algorithme est plutôt réduit à l'ordre de $O(n_e)$ (beaucoup moins de n_e passages sont utiles et par conséquent les tests de validités ne coûtent pas $O(n_e)$ opérations à chaque fois): la complexité est effectivement $O(n_e)$ quand le domaine D est convexe.



Triangulation d'un polygone par ses points extérieurs en 3 passages

Le résultat suivant plus général tire parti des résultats prouvés jusqu'ici.

Théorème 1 :

Soit D un domaine polygonal, défini par le couple (V_{ext}, E_{ext}) . On donne aussi une discrétisation de D par un ensemble de points internes V_{int} . Alors il existe une triangulation T de D et par conséquent un maillage $M = (D, V_{int}, T)$ de D .

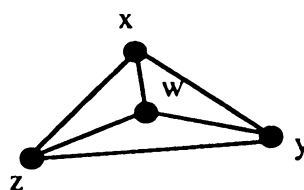
démonstration :

D'après les résultats précédents, le polygone (V_{ext}, E_{ext}) peut être triangulé. Appelons t_1, \dots, t_p les triangles obtenus par l'algorithme exposé ci-dessus, dont tous les sommets sont des points de V_{ext} . Supposons que $|V_{int}| = 1$

Soit $w \in V_{int}$, le point intérieur à D .

Deux cas peuvent se présenter:

- 1) il existe un triangle t_j tel que w soit contenu dans l'intérieur du triangle t_j . Soient (x, y, z) les trois points du triangle t_j . Une triangulation de D est obtenue en remplaçant t_j par trois nouveaux triangles (x, y, w) , (y, z, w) et (z, x, w) .



2) il existe deux triangles t_i et t_j tels que w appartient à l'arête commune aux deux triangles t_i et t_j . Soient (x,y,z) les trois points du triangle t_i et (x,y,v) les 3 points de t_j . Une triangulation de D est obtenue en remplaçant t_i et t_j par les 4 nouveaux triangles (x,w,z) , (z,w,y) , (w,v,y) et (x,v,w) .

Supposons maintenant qu'on puisse obtenir une triangulation de D lorsque $|V_{int}| \leq n_i$ et étudions le cas $|V_{int}| = n_i + 1$. Soit $x \in V_{int}$; considérons $V'_{int} = V_{int} - \{x\}$.

Puisque $|V'_{int}| = n_i$, D muni de la discrétisation V'_{int} peut être triangulé. Appelons t_1, \dots, t_p les p triangles de cette triangulation. Là encore deux cas peuvent se présenter:

- a) x est strictement contenu dans un triangle t_j $j \in]p]$ et la décomposition 1) peut être reprise pour obtenir une triangulation de D avec $|V_{int}| = n_i + 1$
- b) x se situe sur l'arête commune à 2 triangles t_j et t_k avec $j, k \in]p]$ et la décomposition 2) peut être reconduite.

Dans tous les cas on obtient donc une triangulation du domaine D muni de la discrétisation V_{int} . Ce résultat et sa démonstration nous fournissent l'algorithme de construction d'une triangulation d'un domaine D de contour (V_{ext}, E_{ext}) et de discrétisation $V_{int} = \{y_1, y_2, \dots, y_{n_i}\}$ lorsque le polygone (V_{ext}, E_{ext}) a été triangulé en (t_1, \dots, t_p) par l'algorithme précédent.

Algorithme de triangulation d'un domaine D muni de la discrétisation V_{int} .

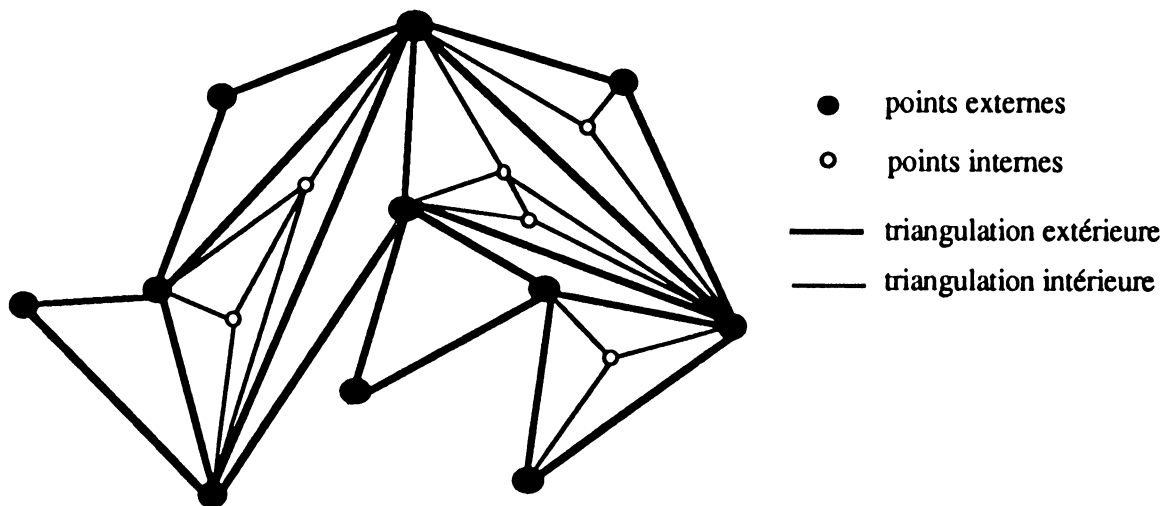
```

pour  $i=1, p$ 
    trouver les points de  $V_{int}$  contenus dans le triangle  $t_i$ 
fin
pour  $j=1, n_i$ 
    si  $y_j$  appartient à un seul triangle  $t_i$  formé des trois points  $(x,y,z)$ 
        former les 3 triangles  $(x,y,y_j)$ ,  $(y,z,y_j)$  et  $(z,x,y_j)$ 
        répartir les noeuds  $y_k$ ,  $k > j$  figurant dans le triangle  $(x,y,z)$  dans les 3 nouveaux
    sinon
         $y_j$  appartient à 2 triangles  $(x,y,z)$  et  $(x,y,w)$ 
        former les 4 nouveaux triangles  $(x,y_j,z)$ ,  $(z,y_j,y)$ ,  $(y_j,w,y)$  et  $(x,w,y_j)$ 
        répartir les noeuds  $y_k$   $k > j$  figurant dans les triangles  $(x,y,z)$  et  $(x,y,w)$ 
    fin
fin

```

Si on considère la mise en oeuvre la plus triviale pour cet algorithme, la première phase

nécessite $O(n_e * n_i)$ opérations et dans le cas le plus défavorable où tous les noeuds internes sont toujours situés dans le dernier triangle formé, la complexité de la seconde boucle s'exprime en $O(n_i^2)$. D'un point de vue pratique, comme les noeuds internes sont plus raisonnablement répartis, la seconde phase requiert une quantité bien plus faible d'opérations. Notons toutefois qu'il existe des algorithmes plus sophistiqués en $O(n \log n)$ pour résoudre la première phase et la seconde boucle peut aussi se réaliser en $O(n \log n)$ quand on exploite le résultat général de Edelsbrunner, Preparata et West [25]: si un simplexe en d dimensions contient n points $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, il existe un point $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ qui permette de subdiviser le simplexe en $d+1$ simplexes de telle sorte que chacun des simplexes créés contienne au plus $\lfloor d.n / (d+1) \rfloor$ noeuds parmi les $n-1$ points $\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$ à redistribuer (où $\lfloor a \rfloor$ représente la partie entière de a). En dimension 2, si un triangle contient n points, il existe un point x_i qui permette de subdiviser ce triangle en 3 triangles dont le plus dense contiendra au plus $\lfloor 2*n / 3 \rfloor$ points.



Triangulation finale du domaine par décomposition des triangles

Il est bien évident que le seul objectif de ces deux algorithmes (triangulation externe puis triangulation avec les noeuds internes) est de construire un maillage initial réalisable sans se préoccuper d'un quelconque critère géométrique ayant rapport par exemple à la régularité des triangles.

Ces algorithmes simples et surtout très performants dans la pratique, nous ont paru

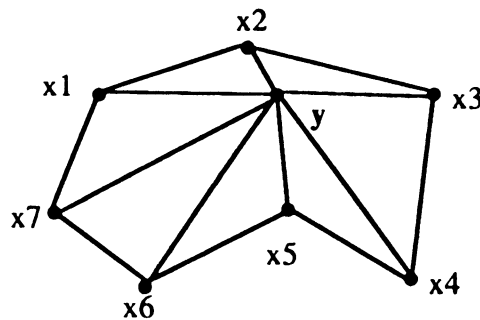
préférables aux approches classiques souvent plus compliquées à mettre en oeuvre et qui opèrent pour aboutir directement à des topologies géométriquement satisfaisantes (triangulations de Delaunay[38], "quadtree technic"[85],...).

Le maillage réalisable obtenu ici n'est pas acceptable d'un point de vue géométrique et dans les chapitres suivants, nous proposons des algorithmes d'améliorations non topologiques qui repositionnent les noeuds, et un algorithme d'amélioration topologique rapide, dont la mise en oeuvre est très aisée et qui provoque des modifications spectaculaires.

3. ALGORITHMES DE MODIFICATIONS NON TOPOLOGIQUES

Soit D un domaine polygonal défini par (V_{ext}, E_{ext}) et $M=(D, V_{int}, T)$ un maillage sur D de topologie T . L'objet de ce paragraphe est de proposer un algorithme d'amélioration du maillage M au regard d'une certaine fonction objective, lorsque les seules variables sont les coordonnées des points de V_{int} (nous parlons alors de modifications non topologiques du maillage). Nous détaillons ici la méthode pour des critères géométriques, mais la démarche a été reconduite pour des critères physiques (faisant intervenir par exemple la densité des points internes selon les zones du domaine D , ou encore tenant compte en chaque noeud interne d'un vecteur gradient, représentatif des caractéristiques physiques).

On considère un noeud y de V_{int} et l'ensemble de ses noeuds voisins dans la topologie T .



Différents critères géométriques peuvent être retenus pour mesurer la qualité de la position de y dans le polygone formé par ses voisins (x_1, x_2, \dots, x_m) :

. **minimisation des distances:** $f(y) = \min \sum_{i=1, m} d(y, x_i)$

. **équilatéralité des triangles:** $f(y) = \min \sum_{i=1, m} (1 - C_{Ti} / C_{eq})$, où C_{Ti} est un coefficient qui mesure l'équilatéralité du triangle T_i , et C_{eq} est la valeur de ce coefficient pour le triangle équilatéral. T_i est un triangle de la topologie T de la forme (y, x_i, x_j) avec $1 \leq i, j \leq m$.

C_{Ti} peut désigner le rapport:

$$1) \quad \frac{\text{surface du cercle inscrit au triangle } T_i}{\text{surface du triangle } T_i}$$

Si S_i est la surface de T_i et P_i son périmètre, alors:

$$C_{T_i} = 4\pi S_i / P_i^2 \quad \text{et} \quad C_{eq} = \pi / 3\sqrt{3}$$

La fonction objective s'écrit alors: $\min \sum_{i=1,m} 1 - 12\sqrt{3}S_i / P_i^2$

- 2) surface du cercle inscrit au triangle T_i
 surface du cercle circonscrit au triangle T_i

$C_{T_i} = 64 S_i^4 / P_i^2 a^2 b^2 c^2$ où a, b, c désignent la longueur des 3 côtés du triangle T_i ; $C_{eq} = 1/4$ et l'objectif devient:

$$\min \sum_{i=1,m} 1 - (4S_i)^4 / (P_i^2 a^2 b^2 c^2) \quad \text{avec} \quad P = a + b + c$$

. critère d'égalisation des surfaces des triangles T_1, T_2, \dots, T_m

$$\text{soit} \quad S = \sum_{i=1,m} S_i / m$$

la fonction objective peut s'écrire $\min \sum_{i=1,m} |S_i - S|$

Pour ce dernier critère CUA [20] a développé une méthode de sous-gradient qui converge en très peu d'itérations pour placer le point y à la position optimale dans le polygone x_1, \dots, x_m . Notons aussi que des méthodes simples sont fréquemment utilisées indépendamment des critères retenus: méthode de barycentrage et méthode de positionnement par déformation élastique[63]. Ces deux dernières approches très rapides, si elles sont largement satisfaisantes dans le cas où le polygone x_1, \dots, x_m est convexe, ne sont pas très fiables quand le polygone est non convexe (il n'est pas possible de placer y au barycentre de ses voisins si ce barycentre est situé à l'extérieur du polygone).

La méthode que nous proposons paraît beaucoup plus performante dans le cas de polygones non convexes. Dans une direction donnée dans le polygone, quand on déplace le point y , on estime la variation de l'objectif par une parabole. Cette approximation semble très tolérable puisque les critères géométriques (et souvent physiques) s'expriment de manière quadratique par rapport aux coordonnées du point y (ou comme rapport de fonctions quadratiques).

Dans le cas de critères géométriques comme ceux détaillés ci-dessus, pour une itération, on choisit de se déplacer dans la direction y, x_{\max} , où x_{\max} est tel que:

$$d(y, x_{\max}) = \max \{d(y, x_i), i=1, \dots, m\}$$

Pour approximer la parabole, on estime la valeur de la fonction objective en :

$$z_j = \lambda_j y + (1 - \lambda_j) x_{\max} \quad \text{pour } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 - \varepsilon, \lambda_3 = 1 - 2\varepsilon \quad (\varepsilon \text{ petit})$$

En choisissant ε suffisamment petit, on s'assure que les points z_j sont contenus dans le noyau $\text{Ker}(x_1, \dots, x_m)$ du polygone x_1, \dots, x_m . (le noyau du polygone x_1, \dots, x_m contient l'ensemble des points x du polygone tels que le segment $[x_i, x]$ pour $i=1, \dots, m$, soit totalement contenu dans le polygone).

On déplace ensuite le noeud y au point qui réalise le minimum de la parabole sur $[x, x_j] \cap \text{Ker}(x_1, \dots, x_m)$. En pratique, en 3 ou 4 itérations, la méthode converge. On reproduit la même démarche pour chaque point de V_{int} . De même, sur l'ensemble des noeuds internes, 2 ou 3 itérations suffisent pour assurer la convergence. La procédure d'optimisation se présente donc sous la forme suivante:

Données: $M = (D, V_{\text{int}}, T)$

f une fonction objective

un nombre d'itérations globales (nombre de fois que sera examiné l'ensemble du maillage)

un nombre d'itérations locales (nombre de fois qu'un point y particulier sera étudié)

Début

pour $iter1=1, \text{nombre_itérations_globales}$

pour $y \in V_{\text{int}}$

pour $iter2=1, \text{nombre_itérations_locales}$

soit $\{x_1, \dots, x_m\}$ le polygone des voisins de x

rechercher x_{\max} tel que $d(y, x_{\max}) = \max \{d(y, x_i), i=1, \dots, m\}$

choisir ε petit

calculer $f[y], f[(1-\varepsilon)y + \varepsilon x_{\max}], f[(1-2\varepsilon)y + 2\varepsilon x_{\max}]$

estimer la parabole passant par ces 3 points
 calculer le point z correspondant au minimum de cette parabole
 avec $z \in [y, x_j] \cap \text{Ker}(x_1, \dots, x_m)$

fin

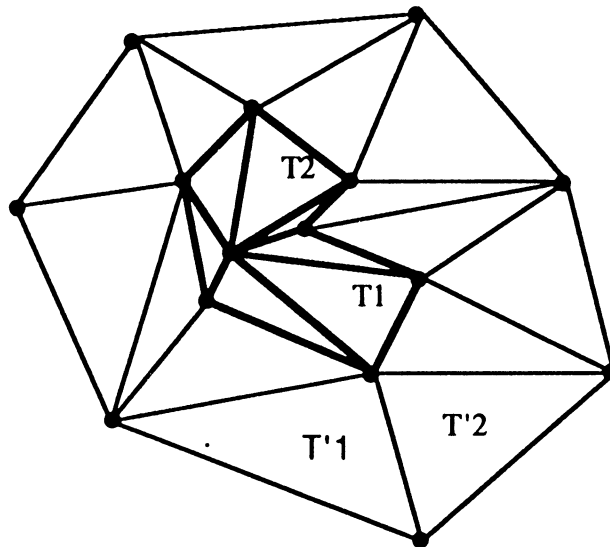
fin

fin

D'un point de vue pratique pour trouver le point z on ne calcule pas entièrement le noyau $\text{Ker}(x_1, \dots, x_m)$; on estime le point z qui minimise la parabole sur tout le segment $[y, x_j]$ et on teste localement la réalisabilité de la triangulation quand on déplace y en z. Si la triangulation devient irréalisable on calcule le segment du noyau qui coupe $[y, x_j]$ et y est alors déplacé à l'intersection des deux segments.

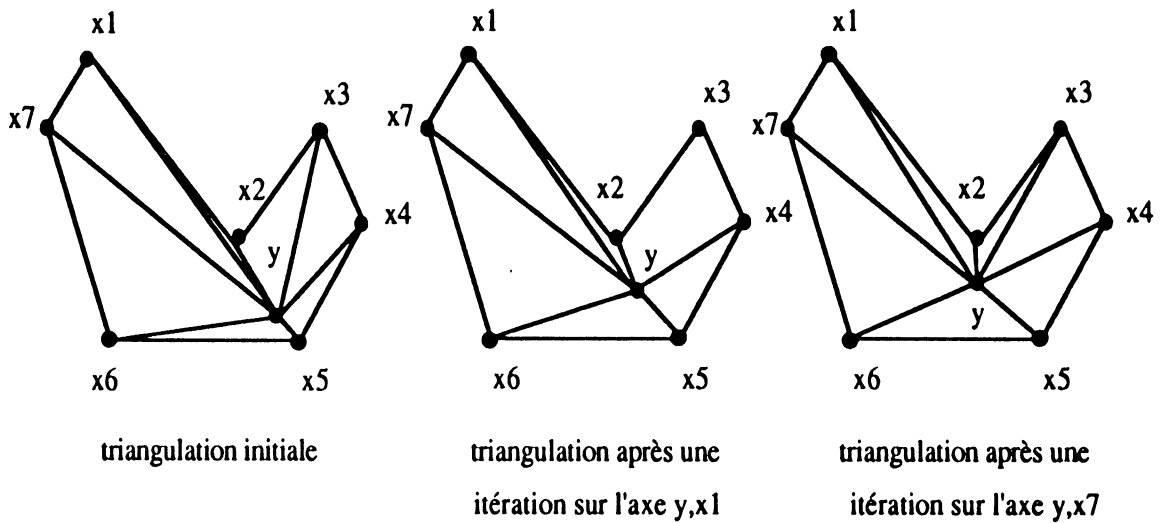
Pour certains critères comme l'égalisation des surfaces des triangles, il faut prendre garde que l'amélioration de la position du point y ne détériore pas la position d'un de ses noeuds voisins. On doit pour cela faire intervenir dans la fonction objective tous les triangles contenant x_1, \dots, x_m . Ainsi, si T_1, \dots, T_p désignent les triangles contenant x_1, \dots, x_m mais ne contenant pas y et T_1, \dots, T_m les triangles contenant le point y, alors l'objectif peut s'écrire par exemple:

$$\min \sum_{i=1, m} (1 - C_{T_i} / C_{eq}) + \sum_{i=1, p} (1 - C_{T'_i} / C_{eq})$$

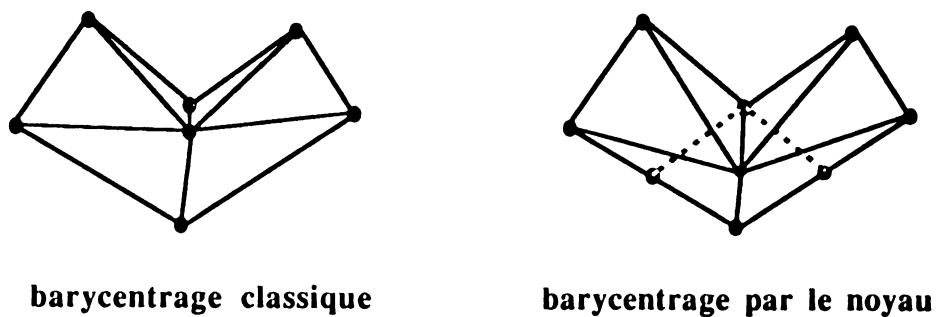


Pour l'évaluation de la fonction objective, prise en compte du voisinage direct de l et du voisinage des noeuds voisins de l .

Exemple d'amélioration non topologique par affinement parabolique:



Nous avons également développé un algorithme qui consiste à placer le point y au barycentre des noeuds définissant $\text{Ker}(x_1, \dots, x_m)$, entourant le noeud y . Dans le cas de polygones convexes, le résultat est évidemment identique au barycentrage classique; dans le cas de polygones non convexes, et indépendamment du critère de qualité choisi, l'algorithme fournit des solutions meilleures que le barycentrage classique, et converge en très peu d'itérations sur l'ensemble des points de V_{int} .



Si l'approche parabolique et le barycentrage par le noyau donnent des solutions plus affinées, ces deux méthodes ont le désavantage de nécessiter plus d'efforts en temps calcul, efforts qui ne sont pas toujours justifiés par l'amélioration globale du maillage. En fait, comme le soulignera le chapitre suivant, les améliorations topologiques sont bien plus performantes et spectaculaires, tout en étant peu gourmandes en temps de calcul.

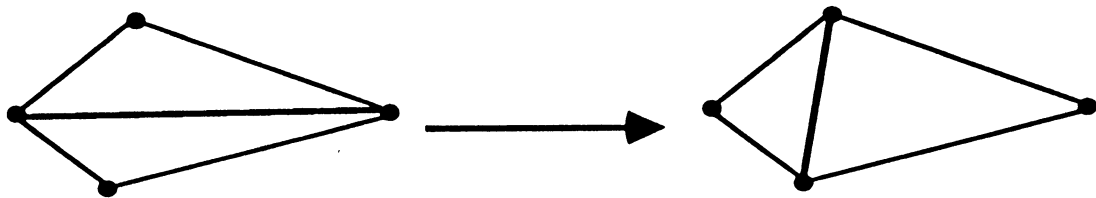
4. UN ALGORITHME D'AMELIORATION TOPOLOGIQUE

L'objectif de ce chapitre est de proposer un algorithme qui améliore le maillage d'un domaine 2D, en modifiant les liaisons internes, mais sans modifier les coordonnées des noeuds.

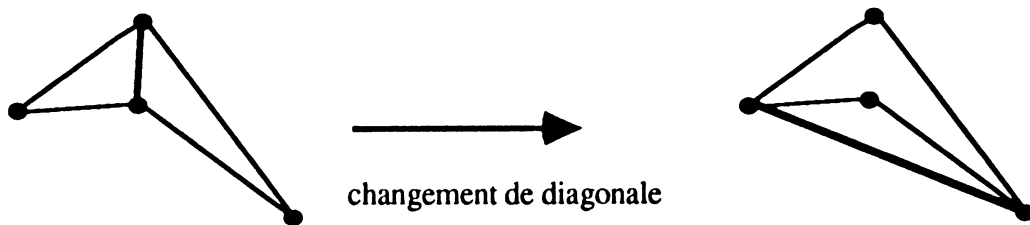
Soit D un domaine polygonal (V_{ext}, E_{ext}) et $M=(D, V_{int}, T)$ un maillage sur D de topologie T . Etant donné M , l'objet de ce paragraphe est de trouver la triangulation T' regroupant les triangles (T'_1, \dots, T'_n) telle que T' soit la triangulation qui parmi toutes les triangulations de D donne à la quantité $1/n \sum_{i=1, n} (1 - C_{T_i} / C_{eq})$ sa valeur minimale. Si C_{T_i} est un critère qui mesure l'équilatéralité du triangle T_i , l'objectif est alors de trouver la topologie T' qui donnera la meilleure régularité moyenne des mailles.

Nous savons par le résultat de la proposition 3 que toutes les triangulations T pour le maillage de D ont un nombre identique de triangles. Si nous souhaitons provoquer des modifications topologiques, nous devons choisir une opération qui conserve le nombre de triangles.

Considérons l'opération locale qui consiste à changer la diagonale de deux triangles adjacents par une arête quand on conserve une topologie réalisable (au sens des 3 critères fournis en introduction).



Changement de diagonale autorisé



changement de diagonale
interdit

Il s'avère que cette opération est très intéressante d'un point de vue algorithmique et pratique, mais aussi d'un point de vue combinatoire: en particulier, comme les résultats suivants le prouvent, par une suite d'opérations de changements de diagonales autorisés, toute

triangulation de D peut être transformée en toute autre triangulation de D , et par conséquent toutes les triangulations (donc tous les maillages de D) peuvent être générées par une succession de changements de diagonales à partir d'une topologie initiale réalisable.

Proposition 5 :

Soit D un domaine polygonal avec un contour $(V_{\text{ext}}, E_{\text{ext}})$ et V_{int} une discrétisation de D .

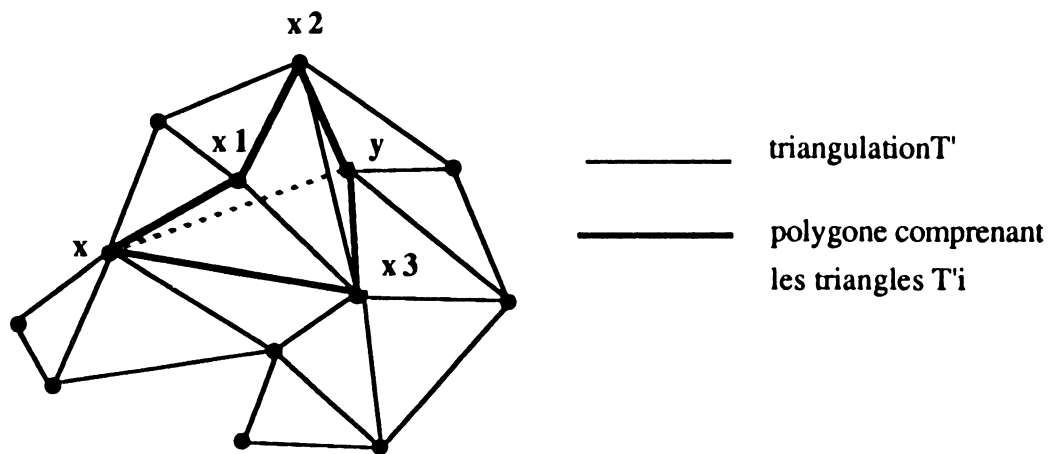
$$V = V_{\text{ext}} \cup V_{\text{int}}$$

Pour toute arête (x,y) avec $x \in V$, $y \in V$, totalement contenue dans le domaine D , et telle que sur le segment $[x,y]$ ne figure aucun point de V autres que x et y il existe une triangulation T , telle que l'arête (x,y) figure dans un des triangles $\{T_1, \dots, T_n\}$ définissant T .

démonstration:

Le théorème 1 nous permet d'affirmer qu'il existe une triangulation T' de D (obtenue par les algorithmes exposés dans la section 2). Appelons (T'_1, \dots, T'_m) les triangles de la triangulation T' qui coupent l'arête (x,y) . x,y figurent obligatoirement dans l'ensemble des sommets qui définissent les triangles (T'_1, \dots, T'_n) , sinon T' ne serait pas une triangulation puisque x ou y serait situé à l'intérieur de l'un de ces triangles.

Notons $(x, x_1, \dots, x_i, y, x_{i+1}, \dots, x_j)$ le polygone défini par ces triangles. Les sous-suites de sommets (x, x_1, \dots, x_i, y) et $(y, x_{i+1}, \dots, x_j, x)$ définissent aussi deux polygones 2D dont les algorithmes de la section 2 peuvent construire des triangulations T_1 et T_2 . Pour ces deux polygones, (x,y) est une arête externe qui apparaîtra donc dans les deux triangulations. $T_1 \cup T_2$ fournira une triangulation du polygone $(x, x_1, \dots, x_i, y, x_{i+1}, \dots, x_j)$ où l'arête (x,y) figure. Alors $T = T' - \{T'_1, \dots, T'_m\} \cup T_1 \cup T_2$ est une triangulation de D tout entier dans laquelle l'arête (x,y) apparaît. \diamond



Proposition 6 :

Soit D un domaine polygonal avec un contour (V_{ext}, E_{ext}) et V_{int} une discrétisation de D .

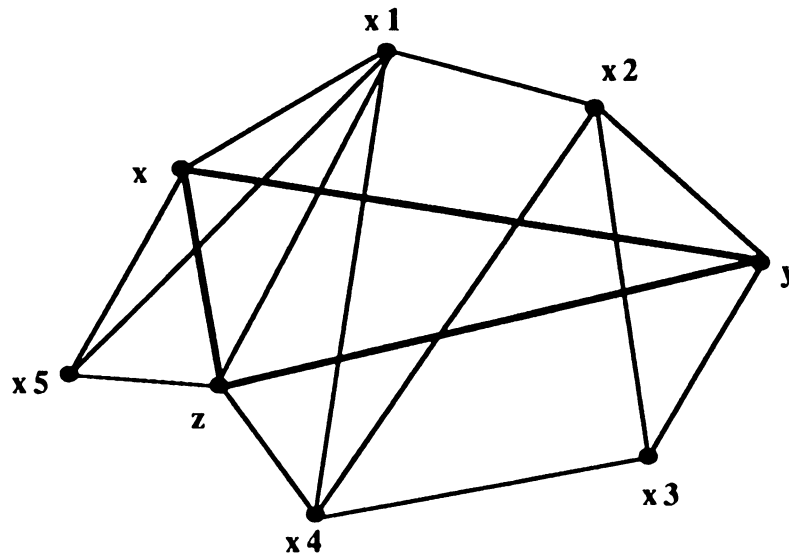
$$V = V_{ext} \cup V_{int}$$

Pour tout triangle (x, y, z) avec $x \in V$, $y \in V$, $z \in V$ totalement contenu dans le domaine D , et tel qu'aucun point de V autre que x, y et z ne figure dans le triangle (x, y, z) , il existe une triangulation T , telle que le triangle (x, y, z) soit un des triangles $\{T_1, \dots, T_n\}$ définissant T .

démonstration:

Soit T' une triangulation de D et appelons (T'_1, \dots, T'_m) les triangles de la triangulation T' qui coupent le triangle (x, y, z) . x, y, z sont des sommets représentés dans les noeuds définissant les triangles (T'_1, \dots, T'_m) , sinon T' ne serait pas une triangulation. Notons $(x, x_1, \dots, x_i, y, x_{i+1}, \dots, x_j, z, x_{j+1}, \dots, x_k)$ le polygone défini par ces triangles. Les sous-suites de sommets (x, x_1, \dots, x_i, y) , $(y, x_{i+1}, \dots, x_j, z)$ et $(z, x_{j+1}, \dots, x_k, x)$ définissent trois polygones 2D dont les algorithmes de la section 2 peuvent construire des triangulations T_1 , T_2 et T_3 .

Alors $T = T' - \{T'_1, \dots, T'_m\} \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup \{(x, y, z)\}$ est une triangulation de D tout entier dans laquelle figure le triangle (x, y, z) . \diamond



Soit $M_1 = (D, V_{int}, T_1)$ et $M_2 = (D, V_{int}, T_2)$ deux maillages réalisables du domaine D de topologies respectives T_1 et T_2 .

Théorème 2 :

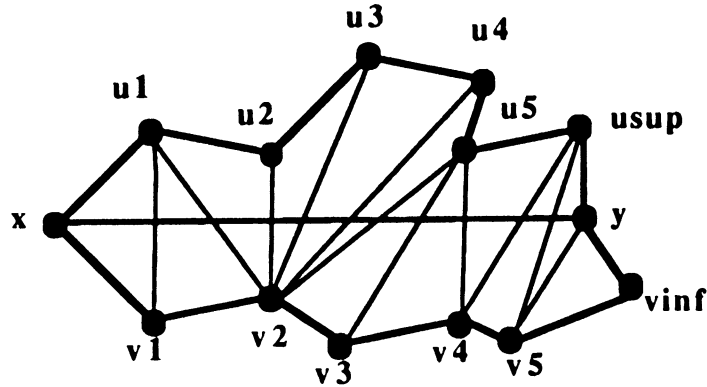
La topologie T_1 peut être transformée en la topologie T_2 par une suite d'opérations de changements de diagonales (c'est-à-dire que le maillage M_1 peut se ramener au maillage M_2 par cette série de modifications).

démonstration :

Considérons A l'ensemble des arêtes qui apparaissent dans la topologie T_1 mais pas dans la topologie T_2 . Montrons que nous savons faire décroître d'une unité le nombre d'arêtes de A par une série d'opérations de changements de diagonales, et ce quelque soit l'ensemble A ; dans ce cas nous aurons bien prouvé le théorème ci-dessus.

Soit (x,y) une arête de A . Notons alors qu'aucun point de V , autre que x et y , ne peut se trouver sur le segment $[x,y]$. Appelons $\{ T_1, \dots, T_m \}$, l'ensemble des triangles de la topologie T_2 qui coupent l'arête (x,y) et notons $(x, u_1, u_2, \dots, u_{sup}, y, v_{inf}, v_{inf-1}, \dots, v_1)$ la suite orientée des points définissant le contour du polygone formé par la réunion des surfaces des triangles T_1, \dots, T_m . Remarquons que les points x et y figurent obligatoirement dans cette suite: dans le cas contraire un triangle T_i parmi T_1, \dots, T_m contiendrait x ou y sans que x ou y

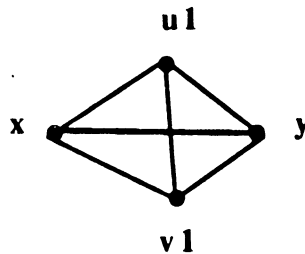
soit un de ses sommets, ce qui contredirait le fait que T_2 soit une triangulation. Nommons D' le sous-domaine de D défini par ce polygone.



Notons qu'aucune des arêtes de la forme (u_i, v_j) qui figure dans T_2 ne figure dans T_1 et le sous-domaine D' ne contient aucun point intérieur de V_{int} , sinon T_2 ne serait pas une triangulation. D' contient exactement $(sup+inf+2)$ points sur son contour, et la restriction de T_2 à D' comporte alors $t=(sup+inf)$ triangles.

Nous montrons par récurrence sur t que la restriction de T_2 à D' peut être transformée par changements de diagonales successifs pour faire apparaître l'arête (x,y) ; appelons P_t cette proposition.

pour P_2



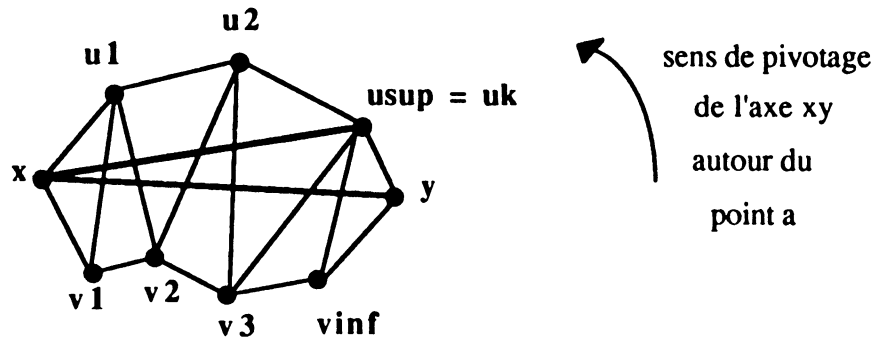
La topologie $(x u_1 v_1), (y u_1 v_1)$ est transformée en $(x y u_1), (x y v_1)$ par un changement de diagonale.

Supposons la propriété P_i vraie pour $2 \leq i \leq t-1$, montrons alors que P_t est aussi vraie.

Faisons pivoter l'axe (x,y) autour du point x vers le point u_{sup} et appelons u_k le premier point de la liste (u_1, \dots, u_{sup}) ainsi rencontré.

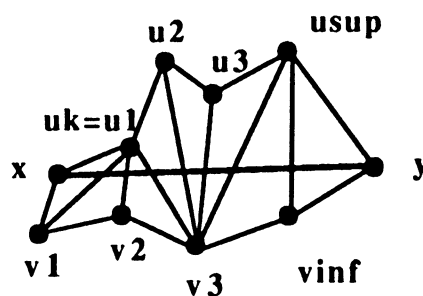
si $k > 1$ l'arête (x, u_k) est complètement contenue dans le sous domaine D' , sinon

u_k n'aurait pas été le premier point rencontré. Appelons v_i le sommet de plus petit rang dans la suite (v_1, \dots, v_{inf}) tel que l'arête (v_i, u_k) soit une arête de la topologie T_2 ; soit le domaine D'' défini par le contour $(x, u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, \dots, v_1)$; l'arête (x, u_k) est complètement contenue dans D'' et la restriction de la topologie T_2 à D'' contient t'' triangles avec $t'' < t$. Par hypothèse de récurrence l'arête (x, u_k) peut être introduite dans D'' par une série de changements de diagonales.



Considérons maintenant le sous-domaine $(x, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{sup}, y, v_{inf}, \dots, v_1) = D'''$ qui comporte un nombre t''' de triangles avec $t''' < t$. Par hypothèse de récurrence, $P_{t'''}$, l'arête (x, y) peut être introduite dans le sous-domaine D''' par une suite de changements de diagonales, donc dans le domaine D' et par conséquent dans le domaine D tout entier.

si $k = 1$. Dans ce cas, u_1 est le premier point rencontré lorsque l'axe xy pivote autour du point x dans le sens y vers u_{sup} .



cas 1 : $sup > 1$

alors l'arête (u_1, y) est totalement contenue dans le domaine D' . Appelons v_i un sommet de la

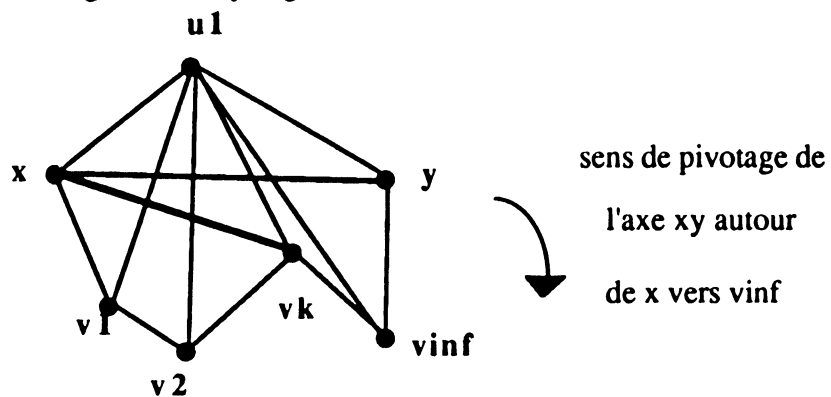
suite $(v_1, \dots, v_{\text{inf}})$ tel que l'arête (u_1, v_i) figure dans la topologie T_2 . Par hypothèse de récurrence, l'arête (u_1, y) peut être introduite par changements de diagonales dans le sous-domaine $D'' = (u_1, \dots, u_{\text{sup}}, y, v_{\text{inf}}, \dots, v_i)$ puisque D'' comporte strictement moins de t triangles. Puis par hypothèse de récurrence encore, l'arête (x, y) peut être introduite dans le sous-domaine $D''' = (x, u_1, y, v_{\text{inf}}, v_{\text{inf}-1}, \dots, v_1)$ puisque D''' contient au plus $t-1$ triangles. Et donc (x, y) peut être dessinée dans D' et par conséquent dans D tout entier par une série de changements de diagonales appliqués à la topologie T_2 .

cas 2 : sup = 1

Puisque $t > 2$ alors $\text{inf} > 1$. Reprenons les raisonnements des cas précédents en intervertissant les rôles de u_i en v_j .

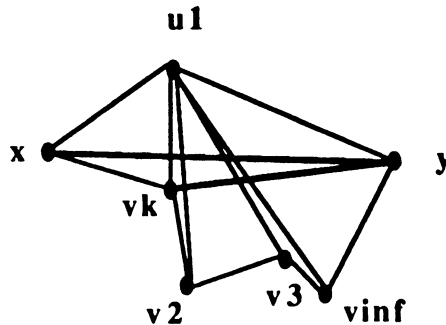
Soit v_k le premier sommet rencontré quand on fait pivoter l'axe xy autour du point x , de y vers v_{inf} .

si $k > 1$: Puisque $\text{sup} = 1$ toutes les arêtes de la forme (u_1, v_i) $i=1, \dots, \text{inf}$, existent dans la topologie T_2 . Considérons alors le sous domaine $D'' = (x, u_1, v_{\text{inf}}, v_{\text{inf}-1}, \dots, v_1)$. D'' contient exactement $t-1$ triangles. Par hypothèse de récurrence l'arête (x, v_k) peut être introduite par changements de diagonales. Soit $D''' = (x, u_1, y, v_{\text{inf}}, \dots, v_k)$. D''' contient un nombre de triangles strictement inférieur à t et par hypothèse de récurrence, puisque (x, y) est totalement contenue dans D''' , (x, y) peut être introduite dans D''' par une succession de changements de diagonales. (x, y) figurera donc dans D tout entier.



si $k = 1$: alors l'arête (y, v_1) est totalement contenue dans le sous-domaine D' . Comme $\text{sup} = 1$, l'arête (u_1, v_1) existe dans la topologie T_2 . Le sous-domaine

$D''=(v_1,u_1,y,v_{inf},...,v_2)$ contient (y,v_1) et comporte exactement $t-1$ triangles. Donc par hypothèse de récurrence l'arête (y,v_1) peut être introduite dans D'' par changements de diagonales. Soit $D''' = (x,u_1,y,v_1)$; D''' contient 2 triangles et l'arête (x,y) est obtenue en remplacement de l'arête (u_1,v_1) par un changement de diagonale et apparaîtra dans le domaine D .



◇

Cette démonstration prouve que les deux maillages M_1 et M_2 de D peuvent s'obtenir l'un à partir de l'autre par des changements de diagonales. Ce résultat dénote donc l'importance de cette opération. Nous donnons maintenant l'algorithme d'amélioration de maillages basé sur cette opération de changement de diagonales.

Cet algorithme est de type glouton et descendant: une opération de changement de diagonale sera effectuée seulement si elle fait décroître la fonction objective choisie. Jamais un changement de diagonale aura lieu s'il détériore cette fonction objective, même si à plus long terme cette concession pourrait s'avérer bénéfique.

Considérons le critère géométrique qui consiste à mesurer l'équilatéralité des triangles par le rapport des surfaces du cercle inscrit et du triangle, et la fonction objective à minimiser qui représente la moyenne de ce critère sur tous les triangles de la topologie.

Soit D un domaine polygonal (V_{ext}, E_{ext}) et $M = (D, V_{int}, T)$ un maillage réalisable de D . Le problème est donc de trouver les n triangles T_i tels que la somme $\sum_{i=1,n} (1 - C_{T_i} / C_{eq})$ soit la plus petite possible, où C_{T_i} est la mesure du critère pour le triangle T_i .

Algorithme de changement de diagonale

pour $i := 1, n$

calculer C_{T_i}

possible(i) := vrai (initialement tous les triangles sont candidats au changement)

```

    recherche de voisin(1,i), voisin(2,i), voisin(3,i) les 3 triangles voisins de i
fin
tant que il existe i tel que possible(i) := vrai faire
    change:=faux
1    pour un triangle voisin  $T_j$  de  $T_i$  { avec  $T_i = (x,y,z)$  et  $T_j = (x,y,w)$  }
        si le changement de diagonale est possible
            calculer  $C_{(x,z,w)}$  et  $C_{(z,y,w)}$  les critères associés aux 2 triangles
            si  $C_{(x,z,w)} + C_{(z,y,w)} < C_{(x,y,z)} + C_{(x,y,w)}$  alors
                remplacer les triangles  $(x,y,z)$  et  $(x,y,w)$  par  $(x,z,w)$  et  $(z,y,w)$ 
                 $T_i$  devient le triangle formé par les points  $(x,z,w)$ 
                 $T_j$  devient le triangle formé par les points  $(z,y,w)$ 
                change=vrai
                pour tous les triangles voisins  $T_k$  des nouveaux triangles  $T_i$  et  $T_j$ 
                    possible(k) := vrai
                finpour
                allera 1
            finsi
        finsi
    finpour
    si change := faux alors possible(i) := faux
fin

```

Lorsque l'algorithme se termine, plus aucun changement de diagonales n'est possible dans le maillage courant. La rapidité de convergence de l'algorithme dépend de l'interprétation de la boucle **tant que**. Plutôt que de procéder à des balayages successifs de l'ensemble des triangles, nous suggérons pour plus d'efficacité une méthode de propagation des changements de diagonales à travers le domaine tout entier par l'intermédiaire des voisins des triangles. Mais d'un point de vue théorique, dans le plus mauvais des cas, $O(n^2)$ tests peuvent être nécessaires avant de constater la convergence de l'algorithme.

En pratique, cet algorithme glouton s'avère très performant puisqu'il mène très souvent à la topologie optimale. Toutefois nous pouvons fabriquer des géométries particulières pour lesquelles le cheminement glouton descendant ne conduit pas à la configuration la meilleure: en juxtaposant des exemples comme celui représenté ci-dessous, on construit un domaine pour lequel l'algorithme

envisagé s'écarte autant que l'on veut de la situation optimale.

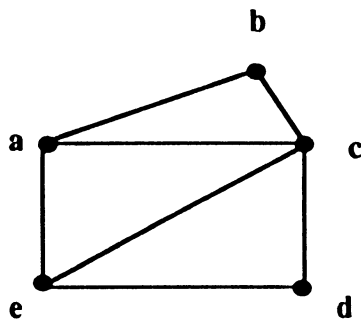


figure 1

$a = (0,2)$
 $b = (3,3)$
 $c = (4,2-x)$
 $d = (4,0)$
 $e = (0,0)$
 avec x petit

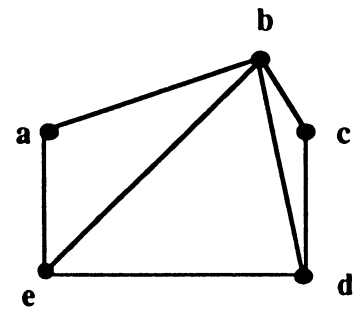


figure 2

Aucun changement de diagonale améliorant n'est possible sur la figure 1 bien que la situation de la figure 2 soit meilleure pour le critère (surface du cercle inscrit / surface du triangle) et la fonction objective qui consiste à minimiser le critère moyen. Pour pouvoir passer de la figure 1 à la figure 2, il faudrait accepter de dégrader sensiblement par une opération de changement de diagonale, ce que notre algorithme glouton n'autorise pas. Mais en pratique, nous n'avons que très rarement rencontrer de tels contre-exemples constituant des situations bloquantes, et lorsque cela se produisait, la topologie trouvée donnait à la fonction objective une valeur suffisamment proche de l'optimum pour que nous puissions nous satisfaire de cet algorithme.

Nous avons construit des contre-exemples analogues pour des critères géométriques différents, mais jamais en pratique l'écart entre la valeur optimale de la fonction objective et sa valeur donnée par l'algorithme n'a atteint 0,2%.

Nous appliquons en particulier cet algorithme d'amélioration au maillage réalisable généré par les 2 algorithmes exposés dans le chapitre 2. En pratique l'algorithme d'amélioration converge en temps quasi-linéaire par rapport au nombre de triangles, vers une topologie qui correspond dans la très forte majorité des cas à la topologie optimale.

Pour des critères géométriques quelconques, il est aussi à noter la remarquable stabilité pratique de l'algorithme d'amélioration par changements de diagonales. A moins de se trouver confronté à des contre-exemples bloquants (en pratique extrêmement rares), l'algorithme converge invariablement vers la même solution finale quelque soit la topologie initiale proposée. Il n'est donc pas gênant de partir d'un maillage réalisable très mauvais, comme ceux créés par les algorithmes du chapitre 2.

5. QUELQUES APPLICATIONS PARTICULIERES DES ALGORITHMES

Les maillages en triangles sont bien sûr utilisés pour mettre en oeuvre la méthode des éléments finis. Il existe cependant d'autres applications intéressantes de la discrétisation triangulaire qui nous ont permis de valider notre démarche en prouvant la souplesse et l'efficacité pratique de nos algorithmes.

Une collaboration avec l'Institut de Mécanique de Grenoble nous a amené à étudier le problème des arêtes imposées dans un maillage: il s'agit de construire une triangulation dont certaines arêtes sont fixées à l'avance. Cet ensemble d'arêtes contient les arêtes frontières qui déterminent les conditions aux limites, mais aussi un certain nombre d'arêtes internes. Dans l'exemple pratique qui est traité dans ce contexte, le maillage est celui d'une pièce mécanique sur laquelle on veut analyser l'effet déformateur d'un poinçon appliqué avec une pression connue; la technique de mesure est une application particulière de la stéréophotogrammétrie [22]; pour tracer les isovaleurs des déplacements, la démarche consiste en une interpolation linéaire où les composantes de la fonction sont approchées à partir d'un maillage triangulaire du domaine; mais pour rendre compte de la réalité expérimentale, les triangles ne doivent pas recouvrir à la fois une zone de fort gradient et une zone de faible gradient; les arêtes imposées correspondront donc aux séparations entre les régions du domaine de gradients très différents.

Notons tout d'abord que l'existence d'une triangulation s'appuyant sur un ensemble d'arêtes imposées peut être prouvée comme une extension de la preuve constructive de la proposition 5:

Proposition 7:

Soit D un domaine polygonal avec un contour (V_{ext}, E_{ext}) et V_{int} une discrétisation de D .

$$V = V_{ext} \cup V_{int}$$

Pour tout ensemble A d'arêtes qui ne se coupent pas et dont les extrémités sont des points de V , il existe une triangulation T telle que toutes les arêtes de A figurent dans un triangle (ou 2 triangles si l'arête est interne) définissant T .

démonstration:

En effet dans la démonstration de la proposition 5, pour introduire une arête particulière (x,y) , seules les arêtes coupant (x,y) disparaissent. Puisque les arêtes de A ne se coupent pas, le résultat de la proposition 5 peut être reconduit indépendamment pour chacune des arêtes de A et la preuve algorithmique permet de construire une triangulation T qui contient toutes les arêtes de A , à partir

d'une triangulation initiale T' .

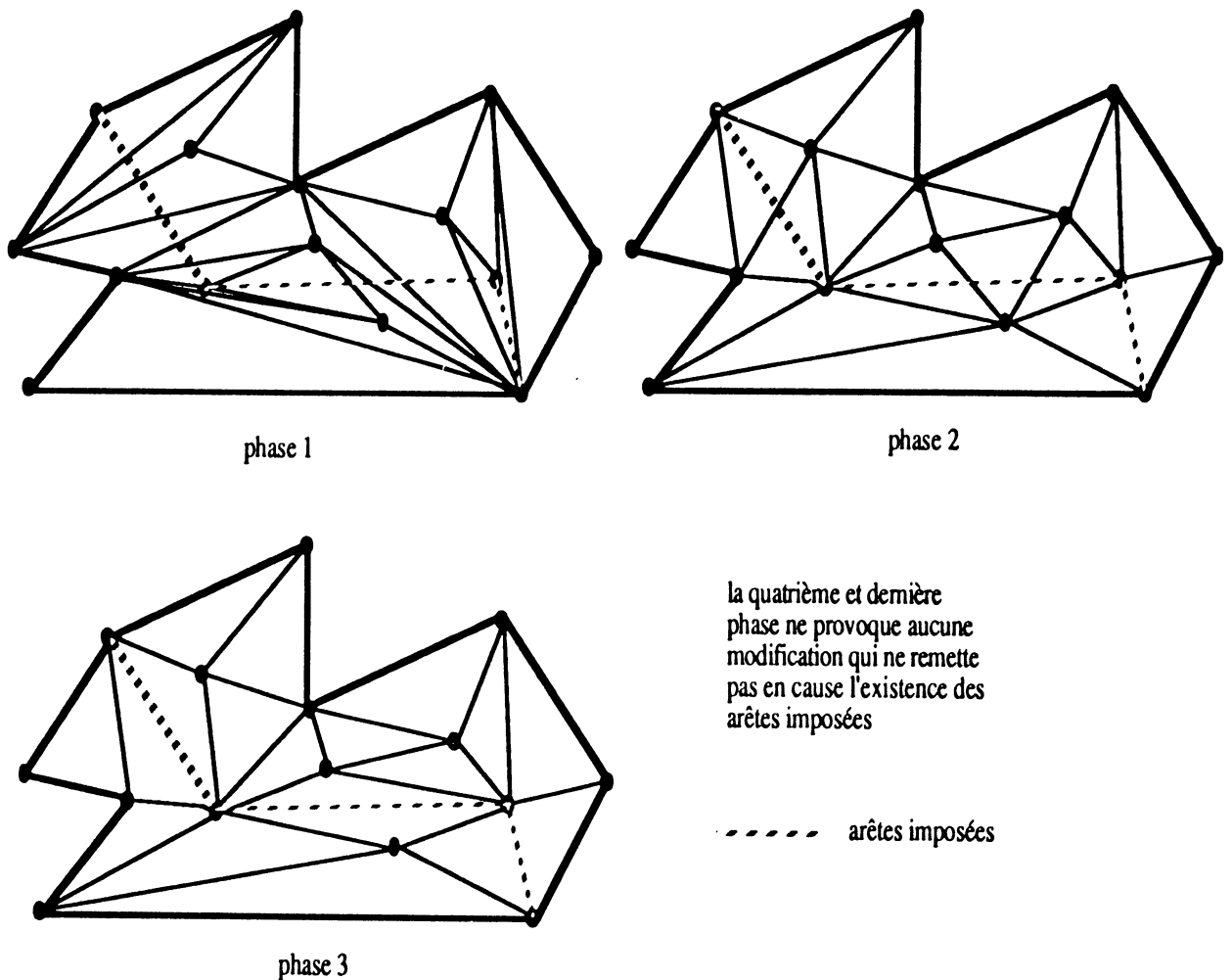
Pour satisfaire la contrainte des arêtes imposées tout en recherchant la meilleure équilatéralité moyenne des triangles, la démarche algorithmique suivante fournit une solution très efficace en temps :

- Dans une première phase on génère une triangulation réalisable par l'algorithme exposé au chapitre 2 (et donc sans se préoccuper de l'existence des arêtes imposées dans ce maillage initial);
- Dans un deuxième temps par l'algorithme de changements de diagonales du chapitre 4, on modifie cette solution pour améliorer l'équilatéralité moyenne des mailles;
- Dans une troisième phase on recherche pour chacune des arêtes imposées l'ensemble des triangles qui intersectent cette arête, et on définit une nouvelle triangulation partielle du polygone ainsi engendré pour introduire l'arête imposée.
- Enfin dans une dernière étape, on répète l'algorithme d'amélioration en interdisant les changements de diagonales qui font intervenir la suppression des arêtes imposées.

Il est à noter qu'il est plus efficace d'appliquer deux fois l'algorithme d'amélioration par changements de diagonales: lors de la première exécution on ne teste pas la présence des arêtes imposées et on obtient une topologie très régulière; lors de la troisième phase, si une arête imposée ne figure pas dans la triangulation en cours, pour des raisons géométriques simples, le polygone formé des triangles qui coupent cette arête, est beaucoup plus restreint qu'il ne pouvait l'être sitôt après la première étape; la construction de la nouvelle triangulation dans ce polygone devient alors très sommaire. La dernière phase est ensuite très réduite, puisque les modifications possibles ne peuvent se propager qu'à partir des triangles contenant les arêtes imposées.

Ce raisonnement vaut bien sûr quand le nombre d'arêtes imposées est réduit par rapport au nombre total d'arêtes figurant dans une triangulation. Dans le cas opposé, le procédé le plus efficace consiste à supprimer la seconde étape.

exemple de construction d'une triangulation avec arêtes imposées:

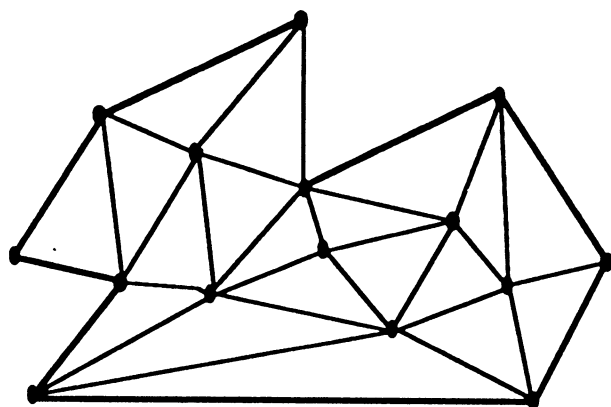


Dans le cadre de la même application, nous avons aussi développé un module qui permet de supprimer ou d'ajouter des noeuds internes dans une triangulation déjà construite; dans le cas d'une suppression d'un point, on forme une nouvelle triangulation du polygone composé des triangles qui contiennent ce noeud; pour l'ajout d'un point on subdivise le triangle qui contient ce nouveau noeud en trois nouveaux triangles. A l'issue de ces modifications sur le nombre de noeuds internes, l'algorithme de changements de diagonales permet d'améliorer la topologie.

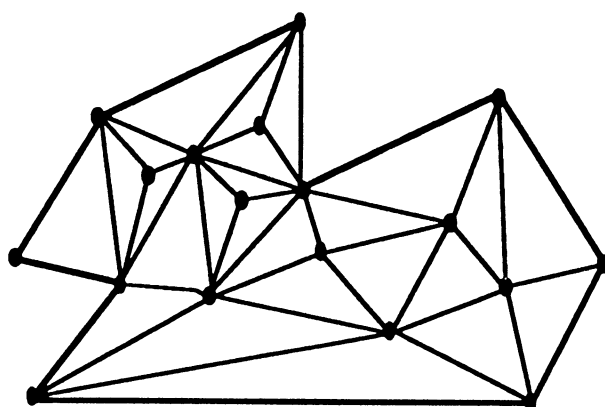
Cette possibilité de contrôler le nombre de noeuds internes est aussi classiquement utilisée dans la méthode des éléments finis: après une phase de calcul, il est souvent recommandé de modifier la

densité du maillage en certaines zones plus sensibles; la démarche décrite ci-dessus autorise cet affinement tout en assurant la conservation de la qualité géométrique moyenne du maillage; cette dernière propriété est essentielle puisqu'elle permettra à l'ingénieur de comparer entre elles des convergences qui sont effectivement comparables et non pas tributaires de la qualité du maillage utilisé en support.

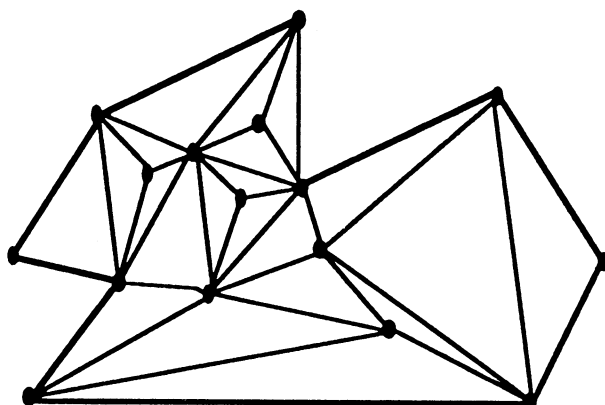
exemple d'ajouts et de suppression de points internes:



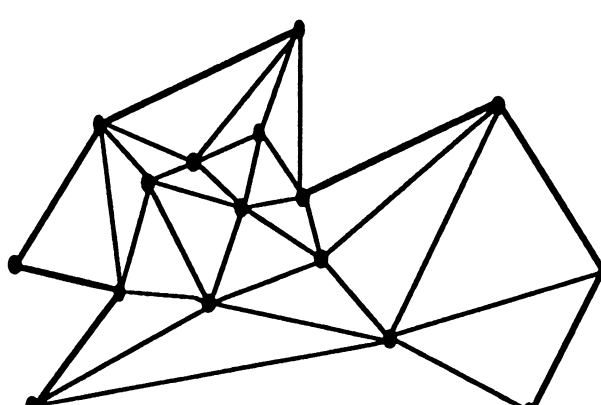
maillage initial



ajout de noeuds internes



suppression de noeuds internes



amélioration par changements de diagonales

6. COMPLEXITE ET PROBLEMES DE TRIANGULATION

Dans ce chapitre, on rappelle quelques résultats sur la complexité du problème général de la triangulation en 2 dimensions.

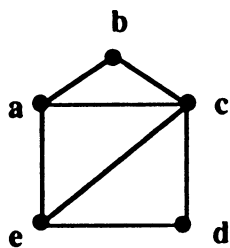
Nous avons déjà mentionné dans les chapitres précédents que l'algorithme de changements de diagonales ne conduisait pas nécessairement à l'optimum pour les critères géométriques que nous avons envisagés.

Soit X un ensemble de n points dans le plan et D l'enveloppe convexe de X . Considérons maintenant l'objectif plus classique qui consiste à rechercher sur le domaine D la triangulation telle que la longueur totale des arêtes utilisées pour former la topologie soit la plus petite possible. Garey et Johnson [31] faisaient figurer la triangulation minimum au sens de la longueur des arêtes avec 10 autres problèmes dont l'appartenance à la classe P restait une question ouverte (la classe P regroupe les problèmes pour lesquels il existe un algorithme dont la complexité s'écrit comme un polynôme du nombre de données) . Si depuis la parution de l'ouvrage, la plupart de ces 10 problèmes ont été affectés soit à la classe P (comme la programmation linéaire depuis les travaux de Kachiyan et plus récemment de Karmarkar), soit à la classe NP -complet (comme le problème de la coloration des sommets d'un graphe en un nombre minimum de couleurs), la triangulation minimum reste encore aujourd'hui non classée.

Essentiellement deux algorithmes ont été envisagés pour résoudre le problème de la triangulation minimum:

- . l'algorithme de Delaunay basé sur les polygones de Voronoï [38]
- . l'algorithme glouton qui consiste à classer par ordre croissant de leur longueur l'ensemble des arêtes possibles; on examine ensuite une à une les arêtes dans cet ordre. Une arête est ajoutée à la topologie en cours quand elle ne coupe aucune des arêtes figurant déjà dans cette topologie.

Si ces deux algorithmes présentent des comportements moyens très satisfaisants [52],[53],[56], on sait aussi qu'ils ne fournissent pas à coup sûr la triangulation minimum; l'illustration suivante constitue un contre-exemple pour l'algorithme glouton:



$$\begin{aligned} a &= (0,2) \\ b &= (1,2+x) \\ c &= (2,2) \\ d &= (2,0) \\ e &= (0,0) \end{aligned}$$

figure 1

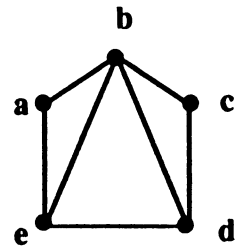


figure 2

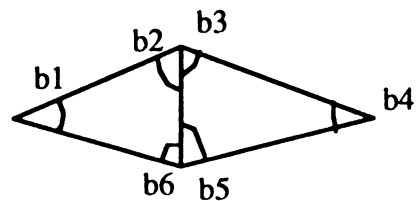
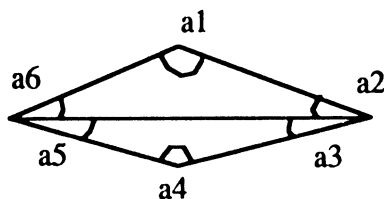
Pour $0 \leq x \leq \sqrt{3}$, la triangulation gloutonne donne la configuration 1, mais la situation optimale correspond à la figure 2.

Remarque:

L'algorithme par changements de diagonales proposé au chapitre 4 ne peut pas améliorer le résultat de la triangulation gloutonne.

En effet soient (x,y,z) et (x,y,w) deux triangles quelconques d'un domaine D , voisins par l'arête (x,y) et résultant de l'algorithme glouton. Si l'algorithme par changements de diagonales fournit une amélioration, en remplaçant l'arête (x,y) par l'arête (z,w) , alors la longueur de l'arête (xy) est inférieure à celle de l'arête (zw) ce qui contredit le fait que (x,y) ait été choisie avant (z,w) par l'algorithme glouton.

Si on ne sait pas caractériser géométriquement la triangulation fournie par l'algorithme glouton, on connaît quelques propriétés concernant la triangulation de Delaunay (par exemple, le cercle circonscrit à chaque triangle de cette triangulation ne contient aucun autre point de la discrétisation du domaine). De plus, dans [75], Sibson prouve que la triangulation de Delaunay est celle qui rend localement et globalement l'angle minimum le plus grand possible: c'est-à-dire que localement, quand on considère un quadrilatère, l'algorithme de Delaunay revient à choisir entre les deux configurations possibles la diagonale telle que l'angle le plus petit parmi les 6 angles formés soit le plus grand; il s'avère aussi que sur le domaine tout entier l'angle le plus petit est maximum dans la triangulation de Delaunay.



Si on pose $A = \min(a1, a2, a3, a4, a5, a6)$ et $B = \min(b1, b2, b3, b4, b5, b6)$, la configuration retenue localement par l'algorithme de Delaunay est la première si $A > B$, la seconde si $B > A$.

Le problème de la caractérisation de la solution donnée par l'algorithme de changements de diagonales du chapitre 4 reste ouvert: en partant d'une triangulation initiale quelconque, l'algorithme de changements de diagonales permet-il d'aboutir à chaque fois à une triangulation qui soit optimale localement et globalement pour un certain critère (en particulier le résultat de l'algorithme de changements de diagonales est-il celui de la triangulation de Delaunay quand on choisit comme objectif la maximisation de l'angle minimum). En ce qui concerne la minimisation de la longueur totale des arêtes utilisées, selon la situation initiale du maillage, on peut exhiber des exemples pour lesquels l'algorithme par changements de diagonales peut engendrer des solutions meilleures ou pires que celles obtenues par les algorithmes glouton et de Delaunay.

Un autre type d'heuristique paraît a priori envisageable pour résoudre le problème de la triangulation minimum: il consisterait à suivre la démarche duale de l'algorithme glouton; dans un premier temps, on classe par ordre décroissant de leur longueur les arêtes du domaine; on considère ensuite la solution irréalisable qui consiste à prendre toutes les arêtes; dans une seconde étape, en examinant dans l'ordre du tri, on enlève une arête pourvu que l'existence d'une triangulation dans l'ensemble des arêtes restantes soit assurée. Cependant la mise en oeuvre d'une telle heuristique n'est pas réalisable à l'heure actuelle: en effet Lloyd [54] montre que le problème de l'existence d'une triangulation dans un ensemble d'arêtes est NP-complet. Pour comparaison, notons que les meilleures implémentations de l'algorithme de Delaunay et de l'algorithme glouton requièrent de l'ordre de $O(n \log n)$ opérations. Quant à l'algorithme de changements de diagonales, il peut nécessiter jusqu'à $O(n^2)$ opérations pour prouver sa convergence.

DEUXIEME PARTIE

ALGORITHMES DE GENERATION ET D'AMELIORATION DE MAILLAGES EN 3 DIMENSIONS

1. INTRODUCTION

2. QUELQUES RESULTATS GENERAUX SUR LA TETRAEDRISATION

3. ALGORITHMES D'AMELIORATIONS TOPOLOGIQUES

4. VERS UN ALGORITHME DE GENERATION DE MAILLAGES EN 3D

1. INTRODUCTION

On aborde dans cette partie le problème de l'amélioration (et dans une moindre mesure celui de la génération) de maillages tétraédriques en 3 dimensions. Comme dans le cas bidimensionnel, on se donne encore les conditions aux limites, sous la forme cette fois d'une surface fermée décomposée en facettes triangulaires (le maillage de la peau du domaine). On se donne également un ensemble de points internes qui représentent la discrétisation du domaine et l'on recherche une tétraèdrisation réalisable du domaine qui vérifie certaines contraintes géométriques (comme une bonne équilatéralité moyenne des mailles). Par tétraèdrisation réalisable, on entend une subdivision du domaine en tétraèdres qui ne se recoupent pas et tels que leurs sommets soient les points de la discrétisation; bien sûr les faces extérieures au domaine doivent coïncider avec les facettes de la peau.

De façon plus formelle, soit D un domaine polyédral tridimensionnel défini par un ensemble de points extérieurs V_{ext} et un ensemble de faces triangulaires F_{ext} formant son contour surfacique. D peut contenir des cavités polyédrales fermées dont les faces sont aussi des triangles de F_{ext} . On se donne également un ensemble de points intérieurs à D , V_{int} qui représente la discrétisation de D . Nous poserons $V = V_{\text{ext}} \cup V_{\text{int}}$. Une tétraèdrisation réalisable T de D est un ensemble de tétraèdres T_i qui doivent vérifier les conditions suivantes:

1) les sommets des tétraèdres T_i sont des points éléments de V .

2) $\cup_{T_i \in T} T_i = D$

3) l'intersection de 2 éléments différents T_i et T_j de T doit être

- . vide
- . ou réduite à un point
- . ou réduite à une arête
- . ou égale à une face

Alors $M = (D, V_{\text{int}}, T)$ définit un maillage du domaine D de topologie T .

Dans le cas tridimensionnel, les algorithmes de maillages dépendent très souvent de la nature du domaine à mailler (convexe, non convexe, avec trous...) et certains d'entre eux nécessitent une large intervention de l'utilisateur qui doit décomposer au préalable le domaine initial en sous-domaines moins complexes dont la géométrie spécifique autorise des constructions triviales de maillages. Les conceptions descendantes sont des méthodes fréquemment développées [34]: de

manière interactive, l'opérateur détermine les propriétés géométriques du domaine (symétries, rotations,...) pour restreindre l'élaboration du maillage à des zones modèles.

On peut reprendre la même classification pour ces algorithmes que celle que nous proposons en deux dimensions. Notons que certaines méthodes 2D peuvent être généralisées au cas trois dimensions, par exemple la triangulation de Delaunay [38],[14]. Dans [59] Nguyen-Van-Phai propose une extension au cas 3D de la méthode bidimensionnelle qui consiste à encercler au mieux les sommets: en 3D, l'algorithme revient à entourer complètement les arêtes en progressant vers l'intérieur du domaine. Shepard et Yerry [74] envisagent une adaptation 3D de l'algorithme basé sur l'approche "quadtree technic". Une autre technique souvent appliquée revient à "bégayer" des maillages 2D: le domaine est subdivisé par couches dont les surfaces sont triangulées; les liaisons entre les triangles de couches voisines engendrent des éléments géométriques simples (pentaèdres par exemple) qui peuvent facilement se décomposer en tétraèdres.

Toutes ces méthodes sont affinées pour fournir des maillages réalisables dans le cas de domaines non convexes. Les aménagements apportés pour conserver la réalisabilité tendent à faire décroître la qualité géométrique des solutions et dans tous les cas, des améliorations a posteriori se trouvent justifiées. Dans cette seconde partie, nos efforts se portent sur la construction d'algorithmes d'amélioration performants qui soient moins dépendants du maillage initial proposé.

Dans le second chapitre, on examine quelques résultats généraux sur la tétraèdrisation de l'espace; la plupart d'entre eux sont à considérer comme des généralisations ou des contre-exemples aux résultats bidimensionnels prouvés dans la première partie.

Au chapitre 3, on analyse les opérations topologiques élémentaires qui seront utilisées dans les algorithmes d'amélioration décrits par la suite. Ces opérations peuvent être comprises comme une extension en 3D du changement de diagonales bidimensionnel. On passe ensuite en revue les différents algorithmes d'améliorations géométriques que nous avons mis au point: un algorithme glouton descendant, un algorithme de recuit simulé et un dernier algorithme qui procède par sous-polyèdres et dont les performances sont intéressantes. Ces différents algorithmes utilisent à des degrés divers les mêmes opérations topologiques élémentaires. Dans la dernière section on présente les résultats comparatifs de ces différents algorithmes sur des exemples réels tirés d'études aérodynamiques et électro-magnétiques.

Enfin le chapitre 4 est consacré à l'étude d'algorithmes simples de génération de maillages réalisables dont on pourrait se satisfaire quand on leur associe un bon algorithme d'amélioration. On propose aussi quelques réflexions sur l'amélioration du maillage triangulaire du contour

surfactive d'un domaine tridimensionnel. La topologie de la peau doit aussi être soignée pour ne pas pénaliser l'élaboration d'un maillage sur le domaine tout entier.

Dans cette seconde partie, nous ne revenons pas sur la description d'algorithmes d'améliorations non topologiques qui modifient uniquement la position des noeuds: ceux présentés dans la première partie peuvent être étendus sans difficultés au cas 3D. Cependant, plus encore qu'en 2D, leurs performances sont bien faibles en comparaison des résultats fournis par les algorithmes topologiques et leur implémentation demeure très coûteuse en temps de calcul.

2. QUELQUES RESULTATS GENERAUX SUR LA TETRAEDRISATION

Dans ce chapitre, on énonce quelques propriétés des tétraèdrisations d'un domaine D tridimensionnel. Rappelons que nous considérons le contour surfacique du domaine défini par un ensemble de faces triangulaires et on se donne aussi un ensemble de points intérieurs qui représentent la discrétisation. Les différents résultats mentionnés ci-après doivent être compris comme des confirmations ou des contre-exemples pour la généralisation des propriétés les plus communes des maillages bidimensionnels.

Proposition 1:

Le nombre de tétraèdres des topologies T sur D n'est pas invariant.

En deux dimensions, nous avons montré que lorsqu'on se donne un nombre de points n_e sur le contour et n_i points intérieurs pour un domaine polygonal 2D contenant q trous polygonaux, le nombre de triangles de toute triangulation réalisable de D est constant, égal à

$$t = 2 n_i + n_e + 2 q - 2.$$

En trois dimensions, le nombre de tétraèdres de différentes tétraèdrisations d'un même domaine D comportant q cavités fermées, n'est plus forcément constant. En effet, la formule de POINCARÉ en trois dimensions s'écrit:

$$n - a + f - (t + 1 + q) = 0$$

où n désigne le nombre total de noeuds (externes n_e et internes n_i , $n = n_e + n_i$)

a représente le nombre total d'arêtes (externes a_e et internes a_i , $a = a_e + a_i$)

f le nombre total de faces (externes f_e et internes f_i) et t le nombre de tétraèdres d'une tétraèdrisation. Le nombre de tétraèdres t serait constant s'il pouvait s'écrire uniquement en fonction de n_e , n_i , f_e , a_e et q qui constituent les données du domaine D sans tétraèdrisation muni d'une discrétisation.

Chaque face extérieure appartient à un seul tétraèdre, et chaque face intérieure est partagée par deux tétraèdres; par conséquent, en comptant toutes les faces de chaque tétraèdre, on obtient la relation liant les faces et les tétraèdres:

$$f_e + 2f_i = 4 t$$

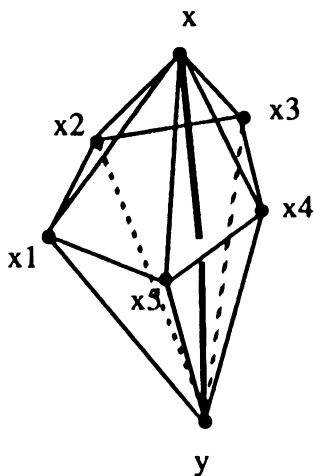
De plus chaque arête extérieure appartient exactement à deux faces triangulaires extérieures d'où la relation

$$2 a_e = 3 f_e$$

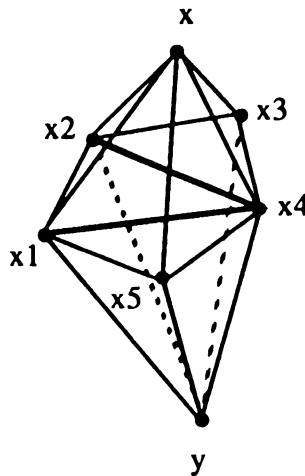
Par conséquent, le nombre total de tétraèdres s'exprime par la quantité:

$$t = f_e + a_i + q + 1 - n_e - n_i$$

Nous ne pouvons écrire aucune autre relation qui nous permettrait d'éliminer a_i de l'expression. Le nombre d'arêtes internes peut être variable -comme sur l'exemple de la figure ci-dessous-, ce qui explique que le nombre de tétraèdres ne soit pas invariant.



une arête interne (xy) et 5 tétraèdres
 $(x1,x2,x,y)$ $(x2,x3,x,y)$ $(x3,x4,x,y)$
 $(x4,x5,x,y)$ $(x5,x1,x,y)$



deux arêtes internes $(x2,x4)$, $(x1,x4)$ et six tétraèdres
 $(x,x2,x3,x4)$ $(y,x2,x3,x4)$ $(x,x1,x2,x4)$
 $(y,x1,x2,x4)$ $(x,x1,x4,x5)$ $(y,x1,x4,x5)$

Soit D défini par (V_{ext}, F_{ext}) les ensembles de points extérieurs et de faces extérieures triangulaires; soit V_{int} l'ensemble des points de la discrétisation, et appelons V l'ensemble des points donnés: $V = V_{int} \cup V_{ext}$. Pour ne pas alourdir les écritures, nous supposons par la suite que quatre points de V ne sont jamais coplanaires.

Proposition 2:

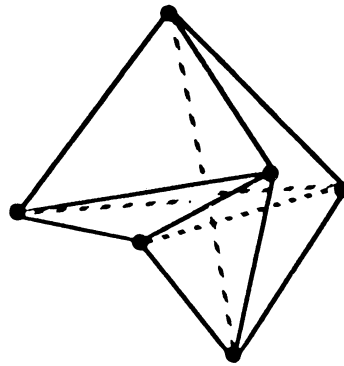
Si D est convexe et si $|V_{ext}| \geq 4$ alors il existe une topologie réalisable T telle que $M=(D, V_{int}, T)$ constitue un maillage réalisable du domaine D (D sera dit tétraèdrisable).

En effet soit $x \in V_{ext}$; formons les tétraèdres possibles en joignant x à toutes les faces de F_{ext} qui ne contiennent pas x . Puisque D est convexe on obtient ainsi une tétraèdrisation de D qui ne contient aucun point intérieur. Introduisons dans une seconde étape un à un les points de V_{int} dans la topologie obtenue de la façon suivante: si $y \in V_{int}$ est à l'intérieur du tétraèdre $T_i = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, on remplace T_i par les 4 nouveaux tétraèdres (y, z_1, z_2, z_3) , (y, z_1, z_2, z_4) , (y, z_1, z_3, z_4) et (y, z_2, z_3, z_4) . \diamond

Proposition 3:

Si D n'est pas convexe, il n'existe pas nécessairement une topologie réalisable T qui permette de construire un maillage sur D avec F_{ext} représentant les conditions aux limites.

La figure suivante fournit un contre-exemple: le domaine contient 6 points externes engendrant 8 faces externes (pour plus de clarté on n'a inséré aucun point intérieur).



Proposition 4:

Soit N le noyau de D , c'est-à-dire l'ensemble des points de l'espace contenus dans D qui sont visibles de n'importe quel point situé sur la surface de D . Si $N \cup V \neq \emptyset$ alors D est tétraèdrisable.

En effet pour $x \in N \cap V$ il suffit de répéter les deux étapes considérées pour le maillage d'un convexe: dans un premier temps x est relié à toutes les faces extérieures de D et puisque $x \in N$ on obtient de cette manière une tétraèdrisation de D avec un seul point intérieur si $x \in V_{\text{int}}$ ou sans point intérieur si $x \in V_{\text{ext}}$. Dans un deuxième temps, les autres points intérieurs sont introduits un à un par subdivisions des tétraèdres existants. \diamond

Proposition 5:

Divisons D en m sous-domaines D_i : les points appartenant aux contours surfaciques des sous-domaines sont tous des éléments de V_{ext} ; toutes les faces de ces contours sont des triangles: soit des facettes triangulaires qui figuraient sur le contour de D , soit des triangles obtenus par une triangulation supplémentaire; l'intersection de deux de ces sous-domaines est supposée soit vide, soit réduite à un ensemble de points de V_{ext} ou à un ensemble d'arêtes appartenant à la triangulation des contours, soit à un ensemble de triangles formant une surface séparatrice. Appelons N_i , le noyau de chacun des sous-domaines D_i . Si pour tout i , $N_i \cap V \neq \emptyset$ alors D est tétraèdrisable.

Appelons F_{ext}^i l'ensemble des faces triangulaires extérieures de D_i (celles issues de la triangulation des surfaces et celles, initiales, communes à D_i et à D ; puisque pour tout i , $N_i \cap V \neq \emptyset$, il existe $x \in N_i \cap V$ tel que l'ensemble des tétraèdres formés de x et des trois points d'une face de F_{ext}^i constitue une tétraèdrisation T_i de D_i sans point intérieur; la tétraèdrisation de D_i avec les points intérieurs contenus dans D_i est obtenue par le processus de subdivision. Evidemment parce qu'elles s'appuient sur des surfaces triangulées de façon identique, les tétraèdrisations T_i juxtaposées forment une tétraèdrisation de D . \diamond

La question reste ouverte de savoir si cette condition nécessaire à la tétraèdrisation d'un domaine est aussi suffisante: quand D est tétraèdrisable, existe-il une subdivision de D en sous-domaines de telle sorte que l'intersection du noyau de chacun de ceux-ci avec V soit non vide. La décomposition de D à partir d'une topologie réalisable ne pourra bien sûr se faire qu'au prix de modifications locales de T . Notons que le contre-exemple illustrant la propriété 3 ne satisfait pas cette condition.

Proposition 6:

Supposons D convexe. Soit x, y deux points de V : si aucun autre point de V ne figure sur le segment $[x, y]$, alors il existe une tétraèdrisation T de D qui contient l'arête (x, y) (c'est-à-dire que l'un au moins des tétraèdres de la topologie T possède les points x et y comme sommets).

En effet puisque D est convexe tous les segments de la forme $[x, z]$ ou $[y, z]$, avec z élément de V sont totalement contenus dans D .

- si $x \in V_{\text{ext}}$ et $y \in V_{\text{ext}}$ alors en reliant x (ou y) avec tous les points de V_{ext} on construit une tétraèdrisation de D sans point intérieur dans laquelle figure l'arête (x, y) . Les points intérieurs sont introduits par subdivision et cette opération ne remet pas en cause l'existence de l'arête (x, y) dans la tétraèdrisation.

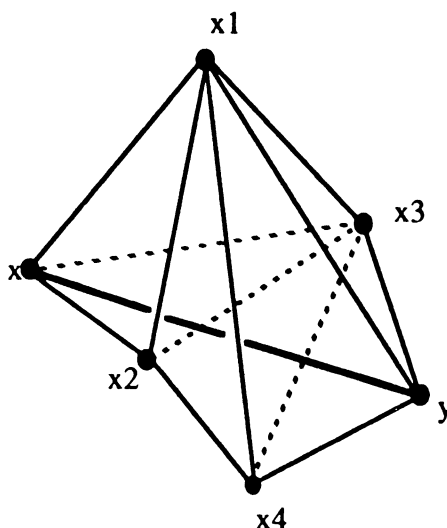
- si $x \in V_{\text{ext}}$ et $y \in V_{\text{int}}$ alors en reliant y à tous les éléments de V_{ext} (donc à x) on obtient une tétraèdrisation avec un seul point intérieur. Les autres points intérieurs sont introduits un à un par subdivision. La tétraèdrisation finale construite contient l'arête (x, y) .

- si $x \in V_{\text{int}}$ et $y \in V_{\text{int}}$ alors en reliant x à tous les points de V_{ext} on obtient une tétraèdrisation T_{ext} de D sans point intérieur autre que x ; soit $T_i = (x, z_1, z_2, z_3)$ le tétraèdre de T_{ext} qui contient le noeud y ; on commence le processus de subdivision en remplaçant T_i par les quatre tétraèdres (x, y, z_1, z_2) , (x, y, z_1, z_3) , (x, y, z_2, z_3) et (y, z_1, z_2, z_3) . Les subdivisions suivantes ne remettront pas en cause l'existence de l'arête (x, y) . \diamond

Proposition 7:

Supposons D non convexe et D tétraèdrisable; soient x et y deux points de V tels que le segment $[x,y]$ soit totalement contenu dans D alors il n'existe pas nécessairement de tétraèdrisation de D qui contient l'arête (x,y) , (la proposition 6 est fautive dans le cas général, quand D n'est pas convexe).

Dans l'exemple ci-dessous, l'arête (x,y) est complètement contenue dans le domaine, mais la seule tétraèdrisation possible comprend les tétraèdres (x,x_1,x_2,x_3) , (x_1,x_2,x_3,x_4) et (x_1,x_3,x_4,y) . En effet on peut placer x_2 x_4 et y de telle sorte que les arêtes (xx_4) et (x_2y) se situent à l'extérieur du domaine ce qui interdit la construction d'une autre tétraèdrisation.



En conséquence, on peut aussi construire des exemples de domaines tridimensionnels qui admettent un maillage réalisable, mais tels qu'une face particulière (et a fortiori un tétraèdre particulier) complètement contenue dans le domaine ne puisse figurer dans aucune des topologies réalisables du domaine. \diamond

Remarque:

Dans un domaine convexe pour montrer que pour toute face puis pour tout tétraèdre il existe une tétraèdrisation contenant cette face ou ce tétraèdre, il est difficile d'utiliser localement les propriétés du domaine. En effet, même dans un convexe, il peut se faire que localement la configuration topologique soit celle du contre-exemple.

Définition 1:

Soit D un domaine tridimensionnel et T une topologie sur D . Supposons que toutes les faces extérieures de D appartiennent exactement à un tétraèdre de T et que toutes les faces intérieures

appartiennent exactement à deux tétraèdres de T . Soit $(xyzw)$ un tétraèdre de T . Nous appellerons volume du tétraèdre $(xyzw)$ le déterminant suivant non nécessairement positif:

$$V = 1/6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Notons que $|V|$ représente le volume au sens usuel du tétraèdre $(xyzw)$.

Définition 2:

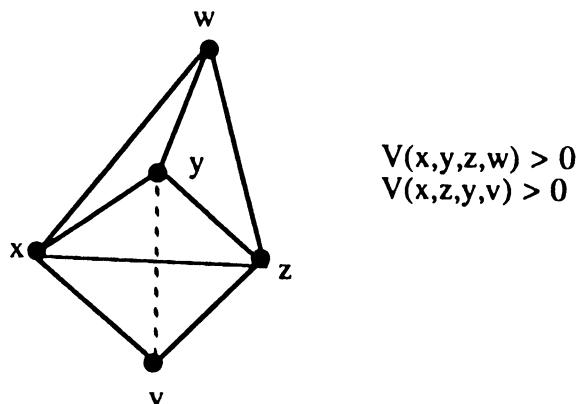
On appellera "numérotation conforme" une numérotation des sommets des tétraèdres telle que le sens de parcours d'une face soit différent pour les deux tétraèdres auxquels elle appartient.

Remarque:

Cette "numérotation conforme" existe toujours pour toute topologie dont les faces extérieures appartiennent à un tétraèdre et les faces intérieures à deux tétraèdres. Pour s'en convaincre, il suffit de raisonner par récurrence sur le nombre de tétraèdres. Pour une topologie de deux tétraèdres (x,y,z,w) et (x,y,z,v) communs par la face intérieure (x,y,z) , une numérotation conforme est par exemple (x,y,z,w) et (x,z,y,v) . Si T est une topologie de n tétraèdres, on considère un tétraèdre (x,y,z,w) dont l'une des faces au moins est extérieure. $T - \{(x,y,z,w)\}$ possède une numérotation conforme et trois au plus de ses tétraèdres ont une face commune avec (x,y,z,w) . Par exhaustivité des numérotations possibles de ces trois tétraèdres, on exhibe une numérotation de T .

Proposition 8:

T est une topologie réalisable ssi tous les volumes des tétraèdres de T sont de même signe pour une numérotation conforme des sommets.



Considérons deux tétraèdres quelconques d'une topologie T réalisable, $(xyzw)$ et $(xzyv)$ voisins

par la face (xyz). Supposons que le volume du premier tétraèdre soit positif:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \end{vmatrix} > 0$$

alors

$$\begin{vmatrix} x_1-w_1 & y_1-w_1 & z_1-w_1 \\ x_2-w_2 & y_2-w_2 & z_2-w_2 \\ x_3-w_3 & y_3-w_3 & z_3-w_3 \end{vmatrix} < 0$$

L'équation du plan au point t passant par les trois points x,y et z est donnée par le déterminant:

$$\begin{vmatrix} x_1-t_1 & y_1-t_1 & z_1-t_1 \\ x_2-t_2 & y_2-t_2 & z_2-t_2 \\ x_3-t_3 & y_3-t_3 & z_3-t_3 \end{vmatrix} = 0$$

T est réalisable alors v est situé de l'autre côté du plan (xyz) par rapport à w et donc:

$$\begin{vmatrix} x_1-v_1 & y_1-v_1 & z_1-v_1 \\ x_2-v_2 & y_2-v_2 & z_2-v_2 \\ x_3-v_3 & y_3-v_3 & z_3-v_3 \end{vmatrix} > 0$$

par conséquent:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & z_1 & y_1 & v_1 \\ x_2 & z_2 & y_2 & v_2 \\ x_3 & z_3 & y_3 & v_3 \end{vmatrix} > 0$$

Réciproquement, si $V(xyzw) > 0$ et $V(xzyv) > 0$ alors w et v sont situés de part et d'autre du plan passant par la face (xyz) et la topologie T contenant les tétraèdres du type (xyzw) et (xzyv) est réalisable. \diamond

Propriété 9:

Soit D un domaine tridimensionnel donné par (V_{ext}, F_{ext}) son contour surfacique muni d'une discrétisation V_{int} . A un ensemble d'arêtes dont les sommets sont des éléments de $V_{ext} \cup V_{int}$ correspond au plus une tétraèdrisation réalisable de D.

Pour démontrer cette propriété, nous montrons que deux topologies réalisables qui s'appuient sur les mêmes arêtes ont nécessairement les mêmes faces. Si les faces sont identiques, les tétraèdres qu'elles définissent seront évidemment les mêmes (il est clair qu'un ensemble de faces définit au

plus une topologie réalisable).

Considérons T_1 et T_2 , deux tétraèdrisations réalisables sur D s'appuyant sur un même ensemble d'arêtes. Soit (xyz) une face de T_1 qui n'est pas une face de T_2 . Nommons $(x,y,w_1,w_2), (x,y,w_2,w_3), \dots, (x,y,w_n,w_1)$ les tétraèdres de T_2 qui entourent l'arête (xy) .

cas 1:

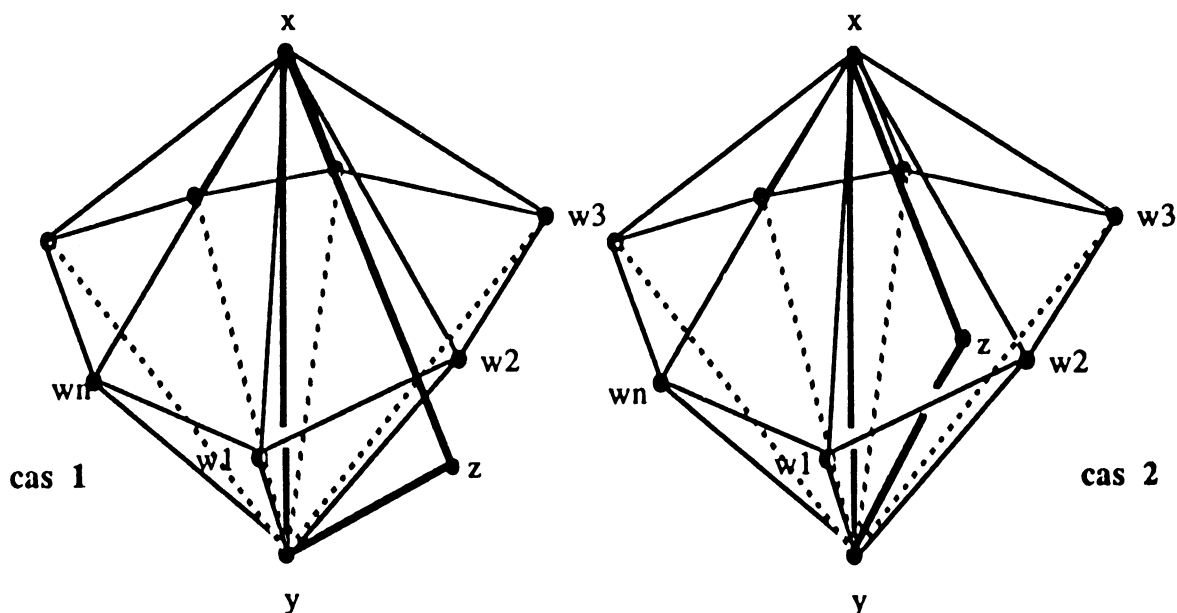
le cycle (w_1,w_2,\dots,w_n,w_1) coupe la face (xyz) disons par le segment (w_k,w_{k+1}) . Puisque (w_k,w_{k+1}) est une arête apparaissant aussi dans la topologie T_1 , ceci contredit le fait que (xyz) soit une face de T_1 .

cas 2 :

le cycle (w_1,w_2,\dots,w_n,w_1) ne coupe pas la face (xyz) ; par conséquent z est à l'intérieur du sous-polyèdre défini par les tétraèdres de T_2 entourant l'arête (xy) . Ceci contredirait le fait que T_2 soit une tétraèdrisation réalisable de D .

Donc z se trouve nécessairement sur le cycle (w_1,w_2,\dots,w_n,w_1) et (xyz) est aussi une face de T_2 .

◇



Remarque:

Il peut se faire qu'il n'existe aucune tétraèdrisation réalisable correspondant à un ensemble d'arêtes, comme l'indique les contre-exemples déjà mentionnés.

3. ALGORITHMES D'AMELIORATIONS TOPOLOGIQUES

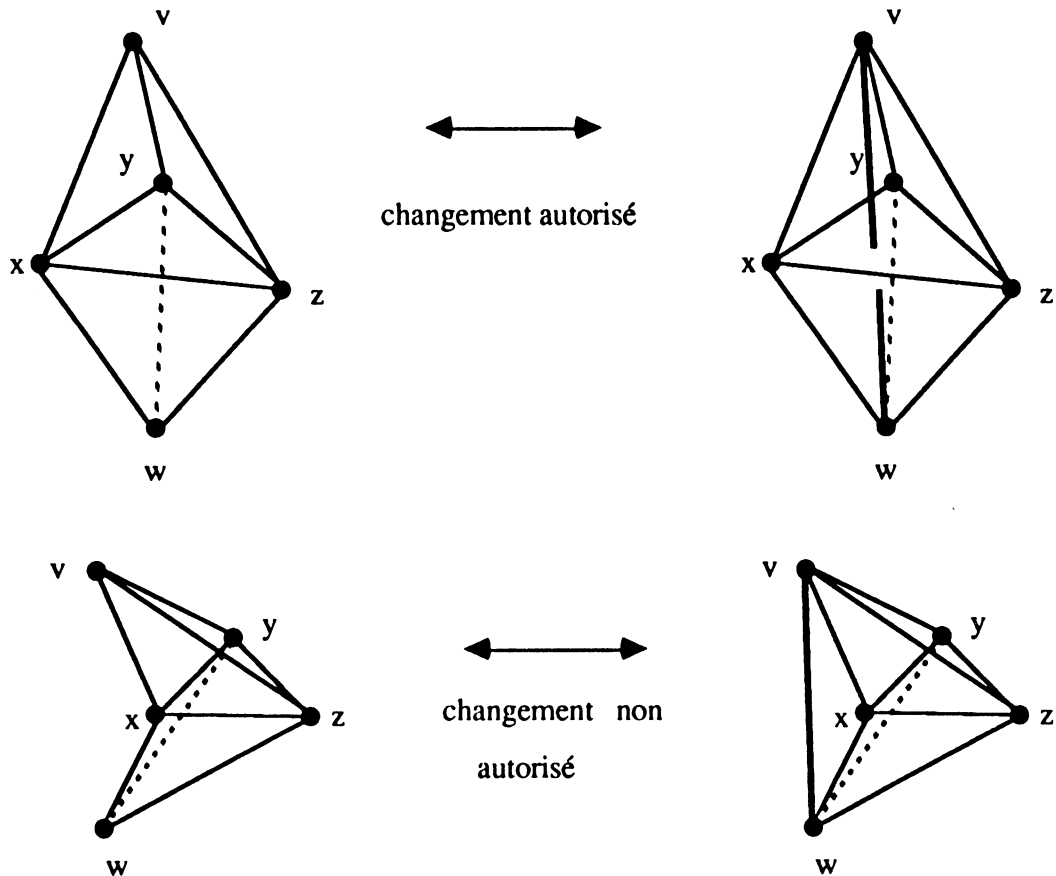
Puisque tous les maillages d'un même domaine tridimensionnel ne comportent pas un nombre identique de tétraèdres, on peut s'attendre à trouver des opérations topologiques locales de modifications d'un maillage qui ne laissent pas invariant le nombre d'éléments.

3.1. OPERATIONS TOPOLOGIQUES

Nous avons retenu deux opérations réciproques élémentaires qui permettent de modifier le nombre des tétraèdres:

1ère opération: ajout d'une arête

on considère deux tétraèdres (x,y,z,w) et (x,y,z,v) communs par la face (x,y,z) ; si le segment $[w,v]$ coupe le triangle (x,y,z) , l'opération d'ajout consistera à remplacer les deux tétraèdres par trois nouveaux éléments (x,y,w,v) , (x,z,w,v) et (y,z,w,v) qui conservent la réalisabilité de la topologie.



2ième opération: suppression d'une arête

On considère l'opération réciproque de la première; pour trois tétraèdres (x,y,w,v) , (x,z,w,v) et (y,z,w,v) entourant complètement une arête commune (w,v) , si l'arête (w,v) coupe le triangle (x,y,z) , on engendre deux nouveaux tétraèdres (x,y,z,w) et (x,y,z,v) , en supprimant l'arête (w,v) .

Le problème qui reste posé et qui subsiste encore à l'état de conjecture, est de savoir si ces deux opérations topologiques sont aussi puissantes que le changement de diagonale en 2D: c'est-à-dire, pour un domaine polyédral 3D muni d'un maillage réalisable, ces deux opérations duales utilisées en séquence permettent-elles de générer tous les maillages réalisables possibles de D . On peut même imaginer que les opérations peuvent être étendues au cas où l'on ne conserve pas la réalisabilité du maillage (c'est-à-dire lorsqu'on accepte l'ajout ou la suppression d'une arête même quand cette arête ne coupe pas le triangle intermédiaire).

Conjecture 1: Soit D un domaine convexe et M un maillage réalisable de topologie T sur D . Toutes les autres topologies réalisables sur D peuvent être obtenues à partir de T par une suite d'opérations d'ajout et de suppression d'arêtes appliquées seulement lorsqu'il y a conservation de la réalisabilité (le chemin qui mène d'une topologie réalisable à une autre topologie réalisable ne passe que par des topologies réalisables).

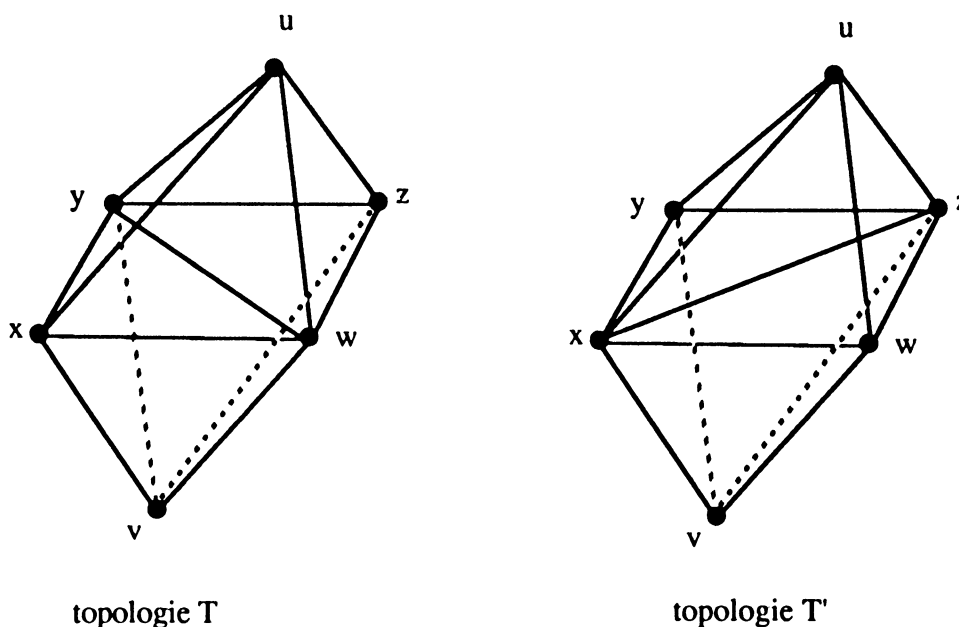
Conjecture 2: Soit D un domaine non nécessairement convexe et M un maillage réalisable de topologie T sur D . Toutes les autres topologies réalisables sur D peuvent être obtenues à partir de T par une suite d'opérations d'ajout et de suppression d'arêtes appliquées seulement lorsqu'il y a conservation de la réalisabilité (le chemin qui mène d'une topologie réalisable à une autre topologie réalisable ne passe que par des topologies réalisables).

Notons cependant que des démonstrations utilisant les mêmes types d'arguments que celle fournie en 2D ne peuvent plus être valides ici: en particulier, pour passer d'une topologie T réalisable à une topologie T' réalisable, la propriété 7 du chapitre précédent signifie qu'il est parfois nécessaire d'augmenter le nombre d'arêtes qui ne sont pas communes aux deux topologies (la démonstration du théorème en 2D s'appuyait sur le fait qu'on réussissait, quelle que soit la configuration, à faire décroître - lors de chaque changement de diagonale- d'une unité le nombre d'arêtes différentes entre deux topologies réalisables).

Quelle que soit la réponse à ces deux conjectures (la deuxième paraît beaucoup plus incertaine), il

faut parfois envisager des cas de dégénérescence qui obligent à passer provisoirement par des topologies admettant des tétraèdres de volumes nuls - mais pas négatifs - correspondant à la situation où les quatre points sont situés dans le même plan, comme l'illustre l'exemple ci-dessous:

Considérons le cas d'un domaine composé de 4 points coplanaires (x,y,z,w) définissant exactement un rectangle, d'un point supérieur u et d'un point inférieur v et qui admet la topologie initiale T formée de 4 tétraèdres $(x,y,w,u), (y,z,w,u), (x,y,w,v)$ et (y,z,w,v) . Supposons de plus que u et v soient disposés de telle manière que l'axe (u,v) coupe le rectangle en son barycentre, intersection du segment $[w,y]$ et du segment $[x,z]$. Nous allons chercher à modifier la topologie T pour obtenir une topologie T' réalisable à l'aide des deux opérations topologiques que nous avons définies:



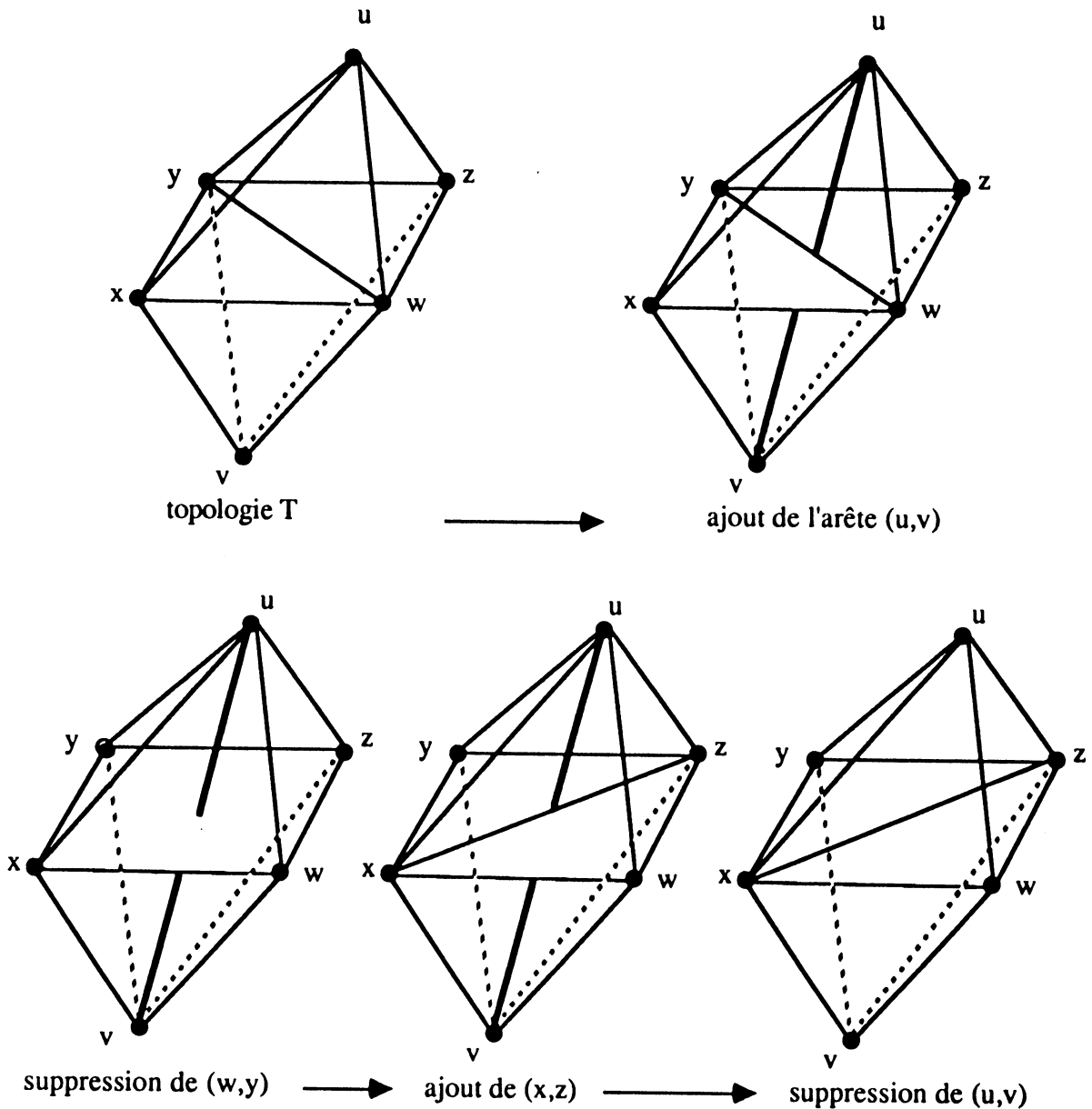
Pour engendrer la topologie T' à partir de la topologie T , on peut utiliser deux suites d'opérations différentes:

1) . ajout de l'arête (u,v) : les deux tétraèdres (x,y,w,u) et (x,y,w,v) communs par la face (x,y,w) sont transformés en trois nouveaux tétraèdres (x,y,u,v) , (x,w,u,v) , (w,y,u,v) dont le dernier est de volume nul.

. suppression de l'arête (w,y) : les trois tétraèdres (w,y,u,v) , (y,z,w,u) et (y,z,w,v) entourant complètement l'arête (y,w) sont remplacés par deux tétraèdres (y,z,u,v) et (w,z,u,v) .

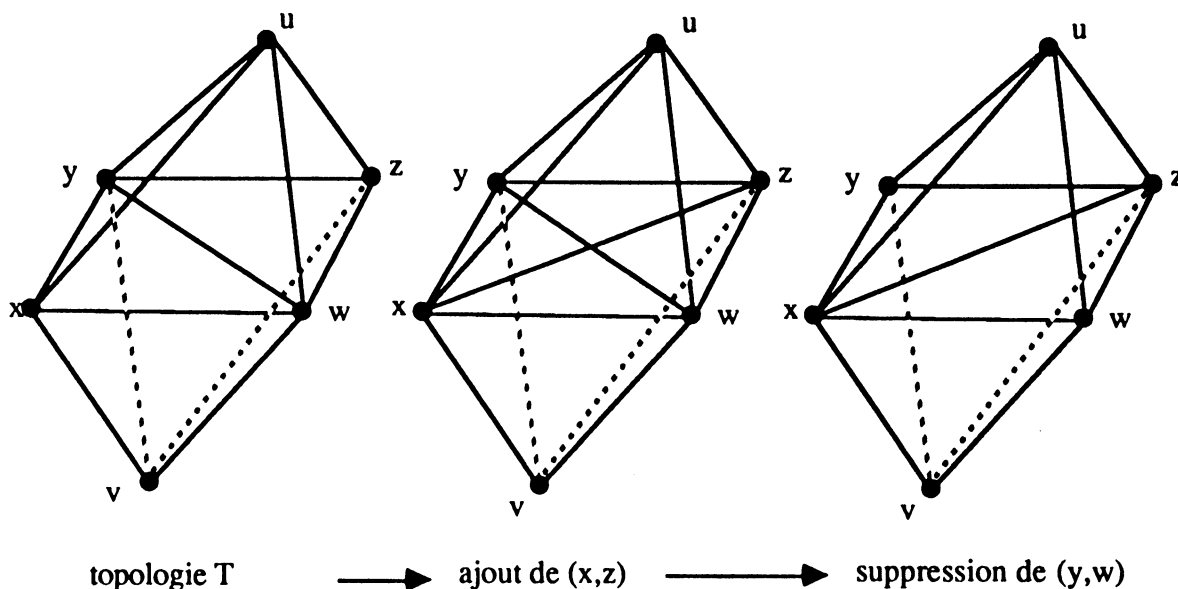
. ajout de l'arête (x,z) : les deux tétraèdres (z,u,v,w) et (x,u,v,w) communs par la face (u,v,w) sont transformés en trois nouveaux tétraèdres (x,z,u,v) , (x,z,w,u) et (x,z,v,w) dont le premier est de volume nul.

. suppression de l'arête (u,v) : les trois tétraèdres (x,y,u,v) , (y,z,u,v) et (x,z,u,v) entourant complètement l'arête (u,v) sont transformés en deux nouveaux tétraèdres (x,y,z,u) et (x,y,z,v) . On aboutit ainsi à la topologie T' , mais en passant par des tétraèdres de volume nul.



2) . ajout de l'arête (x,z): les deux tétraèdres (x,y,w,u) et (y,w,z,u) communs par la face (y,w,u) sont remplacés par trois nouveaux tétraèdres (x,z,y,u), (x,z,w,u) et (x,z,y,w) dont le dernier est de volume nul.

. suppression de l'arête (y,w): les trois tétraèdres (x,z,y,w), (x,y,w,v) et (y,w,z,v) sont supprimés et remplacés par deux tétraèdres (x,z,w,v) et (x,y,z,v) pour obtenir la topologie T'.



Proposition:

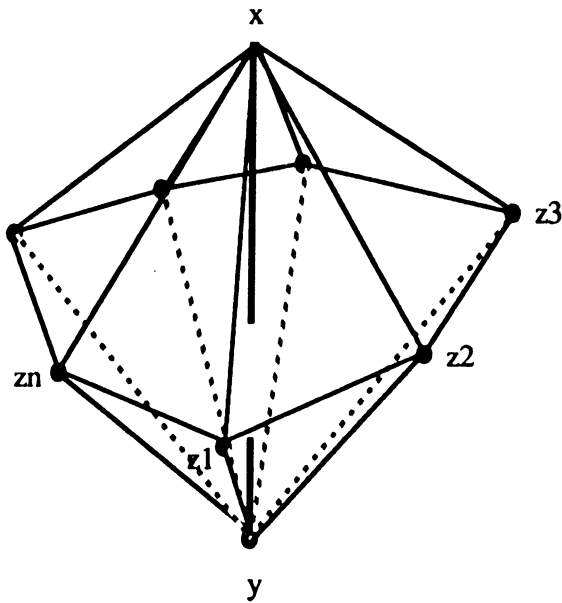
Considérons une topologie T_1 constituée d'une arête (x,y) totalement entourée par n tétraèdres (t_1, t_2, \dots, t_n) , avec $t_1=(x,y,z_1,z_2)$, $t_2=(x,y,z_2,z_3), \dots$ et $t_n=(x,y,z_n,z_1)$, $n \geq 3$. Soit U un ensemble de triangles $\{(u,v,w), u,v,w \in \{z_1, z_2, \dots, z_n\}\}$ qui respecte les trois conditions suivantes:

- 1) le graphe défini par les triangles de U vérifie la formule d'Euler pour les graphes planaires en deux dimensions
- 2) les arêtes du cycle (z_1, z_2, \dots, z_n) n'appartiennent qu'à un seul triangle de U et les autres arêtes figurant dans les triangles de U appartiennent à exactement deux triangles de U
- 3) l'arête (x,y) ne coupe qu'un seul des triangles de U

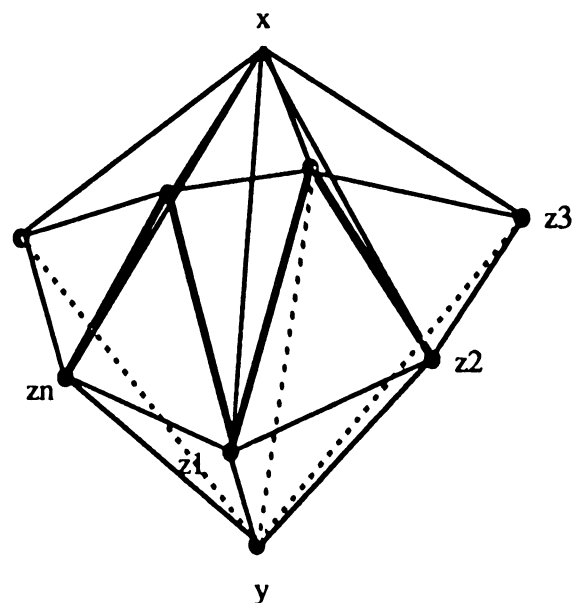
La topologie T_2 composée des tétraèdres $(t'_1, t'_2, \dots, t'_{2(n-2)})$, avec $t'_i=(x,u,v,w)$, $(u,v,w) \in U$, pour $i=1, \dots, n-2$ et $t'_i=(y,u,v,w)$, $(u,v,w) \in U$, pour $i=n-1, \dots, 2(n-2)$, peut être obtenue à partir de la topologie T_1 par une suite d'ajouts et de suppressions d'arêtes.

Démonstration:

Les triangles de U déterminent une surface triangulée S . Les conditions 1) et 2) permettent de montrer que U contient exactement $n-2$ triangles (première partie, chapitre 2, proposition 2). Nous montrons par récurrence sur n que la topologie T_2 qui s'appuie sur cette surface et comporte $n-2$ tétraèdres de part et d'autre de la surface S peut se déduire de la topologie T_1 par des opérations d'ajouts et de suppressions d'arêtes.



Topologie T_1



Topologie T_2

Si $n=3$, la suppression de l'arête (x,y) permet de construire 2 tétraèdres s'appuyant sur la même face triangulaire (il s'agit de l'opération élémentaire de suppression d'arête).

Supposons maintenant que T_1 soit constituée d'exactly n tétraèdres. Les conditions 1) et 2) assurent qu'il existe deux triangles de U de la forme (z_i, z_{i+1}, z_{i+2}) et (z_k, z_{k+1}, z_{k+2}) $k, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ - (première partie, chapitre 2, proposition 4) -.

Dans T_1 , les 2 tétraèdres (x, y, z_i, z_{i+1}) et (x, y, z_{i+1}, z_{i+2}) sont voisins par la face (x, y, z_{i+1}) . Nous étudions les deux configurations possibles.

a) l'arête (z_i, z_{i+2}) coupe la face (x, y, z_{i+1})

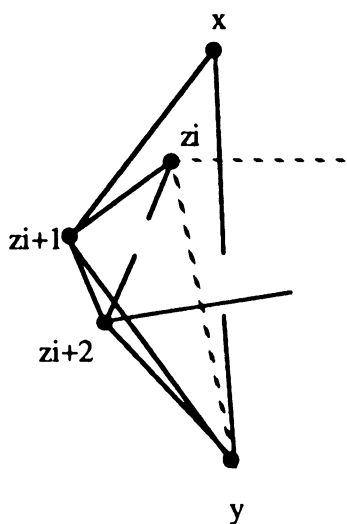
L'arête (x,y) ne coupe pas le triangle (z_i, z_{i+1}, z_{i+2}) . On ajoute l'arête (z_i, z_{i+2}) pour former les trois tétraèdres (z_i, z_{i+2}, x, y) , $(z_i, z_{i+2}, x, z_{i+1})$ et $(z_i, z_{i+2}, y, z_{i+1})$. Dans cette nouvelle topologie, l'arête (x,y) n'est plus entourée que par $(n-1)$ tétraèdres. L'ensemble $U' = U - \{(z_i, z_{i+1}, z_{i+2})\}$ vérifie par réduction les conditions 1) et 2), l'arête (x,y) coupe un seul des triangles de U' et par hypothèse de récurrence la topologie $T_2 - \{(z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, x), (z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, y)\}$ peut être obtenue

par des opérations d'ajout et de suppression d'arêtes à partir de la topologie $T_1 - \{(x,y,z_i,z_{i+1}), (x,y,z_{i+1},z_{i+2})\} \cup \{(x,y,z_i,z_{i+2})\}$.

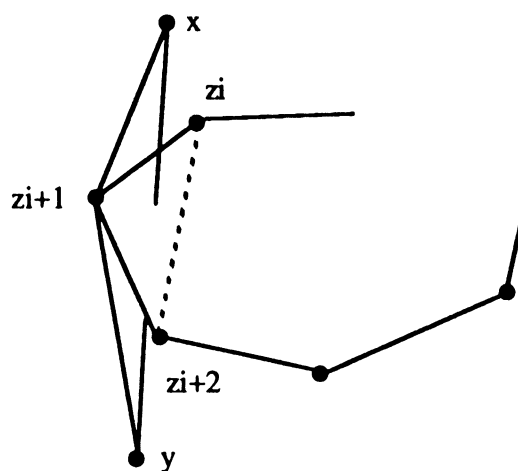
b) l'arête (z_i,z_{i+2}) ne traverse pas la face (x,y,z_{i+1})

L'arête (x,y) traverse alors la face (z_i,z_{i+1},z_{i+2}) , et (x,y) ne traverse donc pas le triangle (z_k,z_{k+1},z_{k+2}) . On se trouve ainsi ramener au cas a) pour le point z_k .

◇



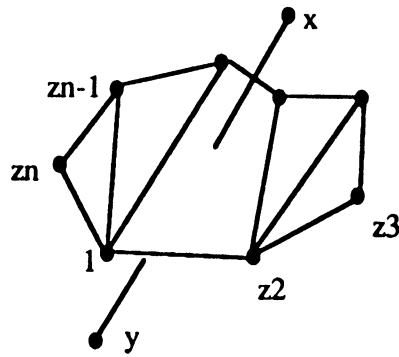
l'arête (z_i,z_{i+2}) traverse la face (x,y,z_{i+1})



l'arête (z_i,z_{i+2}) ne traverse pas la face (x,y,z_{i+1})

Remarque 1: Les conditions de la proposition signifient que les tétraèdrisations du type T_1 et T_2 se construisent l'une à partir de l'autre pourvu que la membrane séparatrice S triangulée dans T_2 ne soit pas exagérément perturbée. Il ne s'agit pas de conditions sur la convexité du polyèdre formé par les tétraèdres entourant l'arête (x,y) dans la topologie T_1 .

Remarque 2: Si la topologie T_2 est composée de tétraèdres formés à partir d'une triangulation partielle de la surface S et de tétraèdres continuant à entourer l'arête (x,y) , la démonstration ci-dessus reste valide (dans les hypothèses 1) 2) et 3) on substitue la notion de faces à la notion de triangles et il suffit de suspendre le processus d'ajout d'arêtes dès que toutes les arêtes de la triangulation partielle auront été introduites). Dans ce cas, la dernière étape qui consiste en une suppression d'arête (lorsque n vaut 3) ne sera jamais implantée et les seules modifications pour mener de T_1 à T_2 seront des ajouts d'arêtes.



triangulation partielle de la surface séparatrice

3.2. CRITERES GEOMETRIQUES ET FONCTIONS OBJECTIVES

Les différents algorithmes qui sont présentés dans les paragraphes suivants ont tous le même but: améliorer - d'un point de vue géométrique - la topologie initiale du domaine considéré. Plus ses tétraèdres se rapprochent de l'équilatéralité, meilleur est le maillage. Comme en deux dimensions pour la régularité d'un maillage à base de triangles, plusieurs critères peuvent être retenus, qui rendent compte de l'équilatéralité d'un élément tétraédrique t :

$$1) \quad C = \frac{\text{volume de la sphère inscrite à } t}{\text{volume du tétraèdre } t}$$

Soient V le volume du tétraèdre t et S sa surface, alors le coefficient C peut s'écrire:

$$C = \frac{36\pi V^2}{S^3}$$

et on cherche à rendre C le plus proche possible de

$$C_{eq} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

où C_{eq} désigne le coefficient associé au tétraèdre équilatéral.

$$2) \quad C = \frac{\text{volume du tétraèdre } t}{\text{volume de la sphère circonscrite à } t}$$

$$3) \quad C = \frac{\text{volume de la sphère inscrite à } t}{\text{volume de la sphère circonscrite à } t}$$

$$4) \quad C = \frac{\text{volume du tétraèdre } t}{\text{volume du cube circonscrit à } t}$$

D'autres critères peuvent être envisagés, mais tous sont très proches les uns des autres; pour notre part, pour les évaluations qui seront utilisées dans les algorithmes, nous retiendrons essentiellement le premier critère parce qu'étant celui qui nécessite le moins de calcul (mis à part le quatrième qui ne donne cependant pas toujours une idée juste de la géométrie du tétraèdre).

En ce qui concerne les fonctions objectives à optimiser, la plus classique consiste à calculer un critère moyen de régularité sur tout le maillage considéré. Par exemple, pour un des critères présenté ci-dessus, améliorer un maillage initial au sens géométrique peut consister à minimiser la quantité:

$$1/n (\sum_{i=1,n} (1 - C_i / C_{eq}))$$

où n désigne le nombre de tétraèdres associé à la topologie évaluée; on choisit donc ainsi de minimiser le coefficient moyen mesurant l'équilatéralité des tétraèdres: si tous les tétraèdres sont équilatéraux, la somme est nulle, et à la limite, quand tous les tétraèdres deviennent plats, la fonction objective tend vers 1. Nous avons retenu cette fonction objective dans les différents algorithmes qui sont présentés ici. Le critère C_i intégré à la fonction objective sera celui correspondant au rapport des volumes de la sphère inscrite et du tétraèdre. Dans ce cas, les tétraèdres ne seront donc pas pondérés en fonction de leur position ou de leur taille: l'équilatéralité d'un gros tétraèdre entrera dans le calcul de la fonction objective dans la même proportion que celle d'un petit tétraèdre. En fait les zones sensibles d'un maillage seront indirectement pondérées par le nombre de tétraèdres qui les découpent puisqu'en général le maillage y est construit de façon plus fine avec davantage de tétraèdres.

Cependant d'autres fonctions objectives peuvent s'avérer intéressantes, comme celle par exemple qui consiste à égaliser les volumes des tétraèdres:

$$\min (\sum_{i=1,n} |V_i - \underline{V}|) \quad \text{avec } \underline{V} = 1/n (\sum_{i=1,n} V_i)$$

où V_i désigne le volume du tétraèdre i et \underline{V} le volume moyen d'une tétraèdrisation de n tétraèdres.

On peut encore envisager une fonction objective qui se rapporte aux arêtes de la topologie évaluée et non à ses tétraèdres. En deux dimensions, à un point entouré uniquement de triangles

équilatéraux correspond un degré égal à 6 (6 triangles encerclent ce point). En trois dimensions, nous pouvons généraliser cette notion: on associe à chaque arête de la topologie un degré qui correspond au nombre de tétraèdres qui partagent cette arête dans la topologie. Si en deux dimensions il existe des pavages réguliers à base de triangles équilatéraux, en 3D, il n'est pas possible de construire des pavages composés uniquement de tétraèdres équilatéraux; en effet l'angle α entre deux faces d'un tétraèdre équilatéral est tel que $\cos \alpha = 1/3$ c'est-à-dire que α vaut à peu près $70,5^\circ$. Le degré moyen d'une arête entourée de tétraèdres équilatéraux serait donc idéalement de l'ordre de 5,10. La fonction objective qu'on peut associer consiste à minimiser la quantité

$$\sum_{i=1,a} |d(i) - 5.10|$$

où $d(i)$ est le degré de l'arête i , dans une topologie contenant a arêtes au total. Bien sûr, pour les arêtes situées sur la surface du domaine, il convient de corriger le degré associé en fonction de l'angle extérieur formé par les deux faces triangulaires contenant cette arête et qui appartiennent à la surface du domaine étudié.

3.3. STRUCTURE DE DONNEES

Comme pour tous les algorithmes qui seront présentés ici, la structure de données mise en oeuvre et qui paraît suffisante pour traiter les différents problèmes relatifs à l'implémentation se compose des tableaux suivants (où n désigne le nombre de tétraèdres et m le nombre de points de la topologie considérée):

- **xyz [1...3,1...m]** contient les trois coordonnées de chacun des noeuds
- **nst [1...4,1...n]** contient les quatre noeuds de chaque tétraèdre
- **voisin [1...4,1...n]** contient pour chaque tétraèdre ses quatre tétraèdres voisins par une face (dans le cas où le tétraèdre contient une face externe, certains voisins n'existent pas)
- **coef[1...n]** associe à chaque tétraèdre un coefficient géométrique pour le calcul de la fonction objective.

Cette structure simple contient toutes les informations nécessaires aux mises à jour des maillages après chaque opération topologique. Notons que le tableau **voisin** peut se construire à partir de **nst**; mais dans un souci de rapidité, il convient dans une étape intermédiaire de constituer auparavant des listes qui à chaque noeud associent tous les tétraèdres qui le contiennent. En comparant ensuite judicieusement ces listes, on déduit **voisin**.

3.4 UN ALGORITHME DE TREMPE

On se donne un domaine D et un maillage M en tétraèdres de topologie T sur D , où T est une topologie réalisable au sens où nous l'avons défini en introduction.

On donne à ce premier algorithme d'amélioration itérative le nom d'algorithme de trempe par analogie aux phénomènes de thermodynamique qui seront décrits dans le chapitre suivant.

Cet algorithme de type descendant à rapprocher de l'algorithme décrit en deux dimensions; la méthodologie mise en oeuvre est la suivante: ayant choisi une fonction objective à minimiser (avec le cas échéant un critère géométrique), pour chaque tétraèdre T_i , on recherche parmi ses voisins s'il en est un qui permet d'effectuer la première modification topologique (ajout d'une arête). Si ce voisin existe, on effectue véritablement le changement topologique si et seulement s'il y correspond une diminution de la fonction objective retenue.

Si un tel voisin n'existe pas (soit que l'ajout de l'arête centrale rende la topologie irréalisable, soit que l'opération dégrade la fonction objective), on teste alors si le tétraèdre T_i possède une de ses arêtes qui soit totalement entourée de trois tétraèdres pour pouvoir appliquer le second changement topologique (suppression de cette arête pour créer deux nouveaux tétraèdres); cela revient à rechercher deux voisins du tétraèdre T_i par une face qui soient aussi voisins entre eux par une face. Si ces deux voisins existent, le changement de topologie avec les mises à jour qu'il suppose sera effectué si et seulement s'il améliore l'état de la fonction objective.

L'algorithme se termine quand il n'existe plus aucune possibilité d'effectuer la première ou la seconde opération topologique, c'est-à-dire que pour tous les couples de tétraèdres on a bien vérifié qu'il était impossible d'ajouter l'arête centrale (topologie irréalisable ou dégradation de la fonction objective) et que pour toutes les arêtes entourées d'exactly trois tétraèdres il était impossible de les supprimer (soit que leur suppression entraîne l'irréalisabilité de la topologie - ceci pour les arêtes externes disposées sur la surface du domaine étudié -, soit que cette suppression induise une dégradation de la fonction objective pour les arêtes internes). Pour accélérer ce test de fin, on peut introduire quelques artifices algorithmiques qui consistent par exemple à répertorier et à mettre à jour lors de chaque modification topologique la liste des tétraèdres candidats à une opération d'ajout ou de suppression d'arêtes.

Cet algorithme doit être comparé à l'algorithme de changement de diagonales en deux dimensions qui est lui aussi de type descendant: un changement topologique réalisable est accepté seulement lorsqu'il améliore la fonction objective à minimiser et ce choix n'est jamais remis directement en

cause; bien sûr, il se peut qu'une arête ajoutée à un instant se trouve supprimée par une modification topologique ultérieure, mais jamais par l'opération duale de celle qui a permis de la faire apparaître.

L'algorithme peut donc se formaliser comme suit, lorsque la fonction objective choisie consiste à minimiser la valeur moyenne d'un critère géométrique (ici le rapport du volume de la sphère inscrite au tétraèdre et du volume de ce tétraèdre).

début

n = nombre de tétraèdres de la topologie de départ

pour i := 1, n

 candidat(i) := vrai

 { T_i est donné par les 4 points (x,y,z,w) }

 calcul du coefficient associé au tétraèdre T_i coef(i)

 recherche des 4 voisins par face du tétraèdre T_i :

 voisin(1,i); voisin(2,i); voisin(3,i); voisin(4,i);

finpour

calcul du coefficient $C_{\text{moy}} := \sum_{i=1,n} (1 - \text{coef}(i)/c_{\text{eq}})$

tant qu'il existe i tel que candidat(i) = vrai

 { opération ajout d'une arête }

pour j :=1,4

 k:=voisin(j,i)

 { soit (x,y,z,v) les 4 points du tétraèdre T_k }

 { T_k et T_i sont voisins par la face (x,y,z) }

si l'arête (w,v) coupe le triangle (x,y,z) **alors**

 calculer les coefficients c_1 c_2 c_3 des tétraèdres (x,y,w,v) (x,z,w,v)
 et (y,z,w,v)

si $(C_{\text{moy}} + c_1 + c_2 + c_3 - \text{coef}(i) - \text{coef}(k)) / (n+1) < C_{\text{moy}} / n$ **alors**
 { le changement est avantageux }

$C_{\text{moy}} := C_{\text{moy}} + c_1 + c_2 + c_3 - \text{coef}(i) - \text{coef}(k)$

 n := n + 1

 { le nouveau tétraèdre T_i correspond aux 4 points (x,y,w,v) }

 { le nouveau tétraèdre T_k correspond aux 4 points (x,z,w,v) }

 { le nouveau tétraèdre T_n correspond aux 4 points (y,z,w,v) }

```

mise à jour des voisins de ces 3 tétraèdres
candidat(i) := vrai
candidat(k) := vrai
candidat(n) := vrai
mise à vrai également du tableau candidat pour tous les voisins des
tétraèdres  $T_j, T_k$  et  $T_n$ 
    finsi
    finsi
    finpour
        {opération de suppression d'une arête }
    pour ( $T_j, T_k$ ) une paire de tétraèdres voisins de  $T_i$  par une face

    si  $T_j$  et  $T_k$  sont déclarés voisins par une face alors
        {soient (x,y,w,v) les 4 points définissant le tétraèdre  $T_j$ }
        {soient (x,y,z,v) les 4 points définissant le tétraèdre  $T_k$ }
        {l'arête (x,y) est alors complètement entourée par les 3 tétraèdres  $T_i, T_j, T_k$ }
        si l'arête (x,y) coupe le triangle (z,w,v) alors
            calcul des coefficients  $c_1$  et  $c_2$  des tétraèdres (x,z,w,v) et (y,z,w,v)
            si  $(C_{moy} + c_1 + c_2 - coef(i) - coef(j) - coef(k)) / (n - 1) < C_{moy} / n$ 
                {la suppression est avantageuse}
                 $C_{moy} := C_{moy} + c_1 + c_2 - coef(i) - coef(j) - coef(k)$ 
                 $n := n - 1$ 
                {le nouveau tétraèdre  $T_i$  est défini par les points (x,z,w,v)}
                {le nouveau tétraèdre  $T_j$  est défini par (y,z,w,v)}
                {le tétraèdre  $T_k$  n'existe plus}
                mise à jour des voisins des tétraèdres  $T_i$  et  $T_j$ 
                candidat(i) := vrai
                candidat(j) := vrai
                mise à vrai du tableau candidat pour tous les voisins de  $T_i$  et  $T_j$ 
            finsi
        finsi
    finpour
    candidat(i) := faux
finpour
fin

```

On peut construire des variantes de l'algorithme de trempe qui feraient intervenir les deux opérations topologiques d'ajout et de suppression d'arêtes dans un ordre différent. De même, l'ordre d'examen des tétraèdres peut être lui aussi modifié, par exemple en choisissant d'étudier en priorité les tétraèdres aux plus forts coefficients géométriques. Pour disposer de plusieurs solutions initiales, nous générons aléatoirement des opérations d'ajouts ou de suppression d'arêtes en acceptant les changements topologiques dès qu'ils conservent la réalisabilité du maillage. Nous appliquons ensuite l'algorithme sur ces différentes solutions initiales.

Sur tous les exemples pour lesquels nous avons testé ces différentes méthodes, nous avons constaté une remarquable stabilité de l'algorithme: à chaque fois il converge vers des solutions topologiques, certes variables, mais qui donnent à la fonction objective une valeur quasiment constante. Nous avons aussi observé cette stabilité en deux dimensions pour l'algorithme de changement de diagonales.

Toutefois, si en deux dimensions l'algorithme glouton de changement de diagonales, analogue à celui exposé ici pour le cas 3D, permettait d'obtenir pratiquement à coup sûr la topologie optimale au regard d'une certaine fonction objective, il faut bien convenir que cet algorithme d'ajout et de suppression d'arêtes utilisé en 3D est loin de fournir des résultats aussi performants; même si la notion de topologie optimale est plus difficile à cerner en 3D, nous avons pu facilement nous rendre compte que l'algorithme de trempe ne générât pas des améliorations suffisantes de la topologie: l'amélioration moyenne de la fonction objective que nous avons constatée sur les différents exemples traités (exemples d'école et exemples industriels) était de l'ordre de 6%. On peut se rapporter à la dernière section de ce chapitre qui fait état de quelques comparaisons de performances.

Cependant cet algorithme reste intéressant dans la mesure où son temps d'exécution est très restreint en comparaison des autres algorithmes présentés ci-après (de l'ordre de quelques minutes sur micro-ordinateur APRICOT XEN-i, compatible AT, processeur 80286, vitesse 10 MHz, pour des topologies comportant 3000 tétraèdres). Il est à noter, que ses performances dépendent fortement de la manière dont a été générée la topologie initiale qui lui est soumise; en particulier, nous avons pu observer que ses performances les meilleures étaient atteintes sur des topologies initiales créées par des algorithmes de type Delaunay [38] sur des domaines aux structures géométriques assez simples (diminution de l'ordre de 12% de la fonction objective qui consiste à minimiser le rapport moyen des volumes de la sphère inscrite et du tétraèdre). Par contre ses performances sont très faibles pour des maillages générés par couches 2D bégayées sur des géométries plus complexes; cette méthode de génération consiste à superposer des plans triangulés et à relier entre eux deux plans successifs pour construire des tétraèdres. Dans ce cas, il semble que

la disposition des noeuds soit trop préjudiciable et même en faisant intervenir des modules de barycentrage, on parvient difficilement à améliorer le rendement de l'algorithme (améliorations limitées à 3 ou 4%).

Ce premier algorithme nous a permis de nous rendre compte de l'allure très perturbée de la fonction objective sur l'ensemble des topologies admissibles. Même s'il semble que les deux opérations duales d'ajout et de suppression d'arêtes permettent d'atteindre une très grande partie des solutions réalisables (et peut-être la totalité si la conjecture posée au paragraphe précédent est vraie), il paraît clair que la fonction à optimiser admet un nombre très important d'optima locaux qui défavorisent fortement un algorithme de trempe de type descente comme celui présenté ici. Les algorithmes suivants font appel à des méthodologies différentes qui minimisent l'importance des pièges constitués par les optima locaux.

3.5. UN ALGORITHME DE RECUIT SIMULE

Soit un domaine polyédral D en trois dimensions donné par un contour à faces triangulaires F_{ext} s'appuyant sur un ensemble de points extérieurs V_{ext} et muni d'un ensemble de noeuds internes définissant la discrétisation de D . L'ensemble des topologies réalisables qui peuvent fournir des maillages admissibles sur D peut être très vaste. Choisissons de représenter comme voisines deux topologies réalisables quand elles diffèrent seulement par une opération d'ajout ou de suppression d'une arête. Si la conjecture 2 énoncée au paragraphe 3.1. n'est pas vérifiée, le champ des solutions ne constitue pas un domaine continu.

Chaque topologie réalisable est ensuite évaluée par une fonction objective reposant par exemple sur un critère géométrique; quelque'elle soit, la fonction objective est en général très perturbée sur ce champ de solutions. L'algorithme de trempe décrit au paragraphe précédent se bloque dans le premier optimum local rencontré; sa stabilité expérimentale signifie qu'il existe beaucoup d'optima locaux qui se situent approximativement "à la même profondeur" dans les cas concrets.

3.5.1. Principe général de l'algorithme de recuit simulé

L'idée de l'algorithme de recuit simulé présenté ci-après est de fournir une méthode d'exploration différente qui ne se termine pas nécessairement au premier optimum local rencontré. Il s'agit, en règle générale, d'accepter judicieusement des dégradations de la fonction objective dans le but de pouvoir ensuite examiner d'autres vallées et d'autres optima locaux.

Historiquement, le recuit est utilisé par les métallurgistes pour faire disparaître les défauts cristallins dans un métal. Cette méthode consiste à réchauffer le métal puis à le laisser refroidir progressivement pour en éliminer les défauts. Ce procédé permet aux particules de se repositionner d'elles-mêmes pour amener le métal dans son état d'énergie minimum, pourvu que la température atteigne un seuil assez élevé et que sa décroissance soit ensuite suffisamment lente. A partir de la valeur maximale de la température, le processus de recuit peut se décrire de la manière suivante: a chaque seuil de température T , le métal peut atteindre un équilibre thermique; la probabilité que le système se trouve dans un état d'énergie E suit une distribution de Boltzmann et est donnée par la valeur

$$P(E) = \exp(-E / K_B T) / Z(T)$$

où T est la température courante du système exprimée en Kelvin, K_B la constante de Boltzmann et $Z(T)$ représente un facteur de normalisation dépendant de la température. La valeur $\exp(-E/K_B T)$ est identifiée sous le nom de facteur de Boltzmann.

Quand la température décroît, la distribution de Boltzmann se concentre sur les états de faible

énergie, et à la limite, quand la température devient très faible, seuls les états d'énergie minimum ont une probabilité non nulle d'être atteints par le système.

Les physiciens savent simuler ce schéma de refroidissement: dans les années 1950, Métropolis propose une méthode de Monte-Carlo pour imiter l'évolution du métal jusqu'à son équilibre thermique pour une température donnée T . Cette méthode génère des séquences d'états du métal caractérisés par la position des particules. Etant donné un état courant, une perturbation est appliquée sous la forme d'un petit déplacement aléatoire sur une particule choisie elle aussi de façon aléatoire. Si la différence d'énergie ΔE entre les deux états est négative, c'est-à-dire si la perturbation a amené le métal dans un état d'énergie inférieur, l'état ainsi généré devient l'état courant et le processus continue d'évoluer à partir de ce nouvel état. Si la différence d'énergie ΔE est positive, la probabilité d'accepter ce nouvel état comme état courant est déterminée par la valeur $\exp(-E/K_B T)$. Cette règle d'acceptation constitue le critère de Métropolis.

Avec ce critère, et après un grand nombre de perturbations aléatoires, le système évolue vers un équilibre thermique et la distribution de probabilité des états approche la distribution de Boltzmann.

Plus récemment, Kirkpatrick [45], en 1982, a appliqué ce principe de la physique statistique à une classe de problèmes d'optimisation, en particulier dans le champ combinatoire. L'auteur propose un algorithme de recuit dont le principe très général peut s'énoncer de la manière suivante:

considérons un problème d'optimisation pour lequel on cherche à minimiser une fonction objective f .

soit T un paramètre dont la valeur initiale est très élevée

soit S_i une solution initiale réalisable pour le problème d'optimisation considéré

tant que T est suffisamment grand

tant que le processus est non stationnaire

générer une solution réalisable S_a voisine de la solution S_i

$\Delta E = f(S_a) - f(S_i)$

si $\Delta E < 0$ **alors**

$S_i \leftarrow S_a$

sinon

$P = \exp(-\Delta E / T)$

tirer un nombre aléatoire x entre 0 et 1

si $x < P$ **alors**

$S_i \leftarrow S_a$

finsi

finsi
fin tantque
diminuer le paramètre T
fin tantque

Nous suggérons de se reporter au livre de Aarts et Laarhoven [1]. En particulier, on pourra lire avec intérêt les résultats sur la convergence asymptotique de l'algorithme de recuit simulé: quand le nombre de perturbations (de transition d'un état à un autre) tend vers l'infini, pour une décroissance suffisamment faible de la température, l'algorithme converge vers l'optimum global sous certaines conditions sur les matrices de transitions (qui donnent les probabilités de générer un état e_j à partir d'un état e_i).

On le voit, il s'agit d'un schéma très général qui demande à être précisé pour chaque problème d'optimisation:

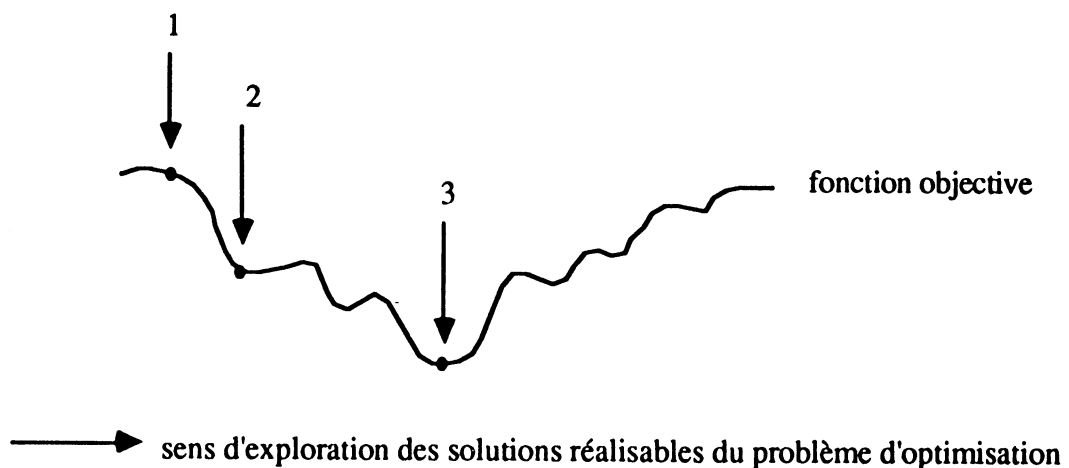
Le paramètre T simule la température des problèmes physiques; pour chaque application, il faut être en mesure de définir sa valeur initiale et la manière dont il va décroître au cours d'exécution de l'algorithme. Au départ sa valeur doit être telle qu'elle autorise la plupart des situations, même très défavorables vis-à-vis de la fonction objective, c'est-à-dire que chaque solution même très mauvaise a une probabilité non négligeable d'être atteinte par le système. Dans la pratique des métallurgistes, la température est abaissée de façon linéaire ou géométrique et à chaque seuil le système évolue jusqu'à atteindre son état stationnaire, ce qui se traduit dans l'algorithme exposé ci-dessus par une boucle **tant que**.

Quand on abaisse brutalement la température à une valeur nulle, le système se fige avec la plupart de ses défauts; il s'agit alors du phénomène de trempe auquel nous faisons référence dans le paragraphe précédent. L'algorithme de trempe provoque uniquement des changements locaux qui font décroître le niveau d'énergie.

Pour débiter l'algorithme, il faut fournir une solution admissible, et pouvoir générer ensuite d'autres solutions réalisables. L'algorithme de recuit permet au système d'évoluer de façon très locale et pour cela, on définit une notion de voisinage dans le domaine de réalisabilité du problème d'optimisation posé. Evidemment cette définition de voisinage est très délicate à mettre en oeuvre puisqu'elle oblige à disposer d'opérations élémentaires locales: une solution S' sera voisine d'une autre solution réalisable S si une opération élémentaire permet de transformer S en S' . Il est alors important que les opérations élémentaires choisies permettent d'accéder à toutes ou du moins à un très grand nombre de solutions réalisables.

A chaque pas de l'algorithme on compare une solution courante S_i du problème et une de ses solutions réalisables voisines S_a générée aléatoirement à l'aide d'opérations élémentaires. Si la fonction objective à minimiser possède une valeur plus petite en S_a qu'en S_i , la solution courante S_i devient la nouvelle solution réalisable: le changement est accepté avec une probabilité 1 puisqu'il y a amélioration de la fonction objective. Par contre si la fonction objective prend une valeur plus élevée en S_a qu'en S_i , le changement dégradant est accepté avec une probabilité qui dépend de la température du système (le paramètre T). Au début du processus, quand la température est élevée, la probabilité d'autoriser un changement dégradant est proche de 1, et lorsque la température décroît, cette probabilité qui dépend aussi de la variation de la fonction objective diminue. En fin d'exécution, à température très faible, seuls les changements très peu dégradants seront acceptés; quand la température avoisine 0, plus aucune variation défavorable ne sera permise et le système se figera alors sur un optimum local qui ne sera plus forcément le premier rencontré.

On espère, en procédant de la sorte, éviter des optima locaux "peu profonds", où se bloque un algorithme de descente itératif tel celui exposé au paragraphe précédent. Le schéma suivant illustre de façon très sommaire le déroulement comparé d'un algorithme simple de descente et d'un algorithme basé sur le principe de recuit simulé.



1. valeur de la fonction objective pour une solution réalisable initiale
2. optimum local correspondant à la solution trouvée par un algorithme de descente itératif (algorithme de trempe)
3. solution (ici optimum global) espérée par un algorithme de type recuit, après avoir examiné puis dépassé deux optima locaux

Les performances d'un algorithme utilisant le recuit simulé dépendent de la manière dont on choisit les opérations élémentaires qui permettront de générer les solutions réalisables de proche en proche. Si le schéma ci-dessus peut paraître des plus optimistes, il faut reconnaître que des tests très probants ont été effectués, en particulier sur des problèmes d'optimisation combinatoire comme celui du voyageur de commerce [45]. Sur des tels exemples, l'algorithme de type recuit basé sur des opérations élémentaires judicieuses s'avérait plus performant que la plupart des heuristiques connues, mais sa vitesse de convergence était plus lente. En fait, puisque pour chaque problème, on décide de la façon dont on va faire décroître le paramètre simulant la température, on peut réguler facilement la vitesse de convergence d'un algorithme de recuit et par conséquent agir sur son temps d'exécution.

3.5.2. Application du recuit simulé pour l'amélioration de maillages tétraédriques

L'analogie constatée entre les défauts cristallins d'un métal et les imperfections d'un maillage nous a laissé penser que la méthode de recuit pouvait être appliquée avec intérêt sur les problèmes d'améliorations de maillages tétraédriques en trois dimensions.

3.5.2.1. solution initiale

Pour un domaine D polyédral tridimensionnel, dont le contour est formé de facettes triangulaires, et dont l'intérieur est discrétisé par un ensemble de points internes, on se donne un maillage admissible de D qui constituera la solution initiale du problème. On ne se préoccupe pas ici de la manière dont est générée la première topologie réalisable correspondant à ce maillage initial.

3.5.2.2. fonction objective

Chaque topologie qui sera engendrée par l'algorithme sera évaluée par un coefficient mesurant le rapport moyen sur tous les tétraèdres qui la composent des volumes de la sphère inscrite et du tétraèdre, plus exactement sous la forme:

$$\left(\sum_{i=1,n} (1 - C_i / C_{eq}) \right) / n$$

où n désigne le nombre de tétraèdres de la topologie évaluée, C_i mesure le rapport du volume de la sphère inscrite au tétraèdre T_i et du volume de T_i ; C_{eq} correspond à ce rapport pour un tétraèdre équilatéral.

Le coefficient moyen est donc compris entre 0 et 1; il tend vers 1 quand la topologie contient un grand nombre de tétraèdres mauvais, (C_i se rapproche de 0 quand les quatre points définissant le tétraèdre tendent à apparaître dans le même plan). L'objectif est de minimiser ce rapport moyen; s'il

était ramené à 0, cela signifierait que tous les tétraèdres composant la topologie sont équilatéraux.

3.5.2.3. Opérations élémentaires et voisinage

Les opérations élémentaires retenues sont les deux modifications duales d'ajout et de suppression d'arêtes et deux topologies réalisables seront dites voisines lorsqu'elles peuvent s'obtenir l'une à partir de l'autre par une de ces opérations. Même si nous ne savons pas encore si ces deux modifications peuvent générer toutes les topologies, on sait par contre qu'elles permettent de visiter un grand nombre de solutions réalisables à partir d'une topologie initiale.

Une solution voisine d'une topologie courante sera générée en choisissant d'abord de façon aléatoire un tétraèdre T_i de la topologie, par un tirage uniforme; ensuite on applique l'une des deux opérations, chacune d'elles ayant une même probabilité d'apparaître:

. si l'opération d'ajout est sélectionnée, il faut choisir un tétraèdre voisin de T_i par une face qui puisse autoriser l'ajout de l'arête centrale; pour que l'opération soit topologiquement admissible, il faut bien sûr que l'arête centrale coupe la face commune aux deux tétraèdres. Evidemment, il peut se faire qu'aucun voisin de T_i ne permette d'effectuer l'opération d'ajout, auquel cas le tirage est rejeté puisqu'il n'a pas permis d'engendrer une solution voisine. On passe alors au tirage d'un autre tétraèdre.

. si l'opération de suppression est retenue, parmi les voisins du tétraèdre T_i , il faut en choisir deux qui finissent d'entourer complètement une arête de T_i . L'arête entourée peut alors être supprimée si elle traverse le triangle formé des trois points qui n'étaient pas en commun aux trois tétraèdres, T_i et ses deux voisins. Là encore, il se peut qu'aucune possibilité de suppression ne soit admissible topologiquement (pour conserver la réalisabilité du maillage) quand on a sélectionné le tétraèdre T_i . Ce tétraèdre est alors abandonné et on passe à un autre tirage aléatoire.

3.5.2.4. Température initiale

Nous l'avons déjà signalé, le paramètre simulant la température doit être au départ suffisamment élevé pour permettre à n'importe quelle solution réalisable, même mauvaise au regard de la fonction objective, d'avoir une probabilité non négligeable d'être atteinte par le système. Dans l'application qui nous intéresse ici, il est donc souhaitable qu'au début de l'algorithme, n'importe quelle topologie, même comportant beaucoup de tétraèdres plats, puisse être admise par le test sur les variations d'énergie: si pour $x \in [0,1]$ tiré de façon aléatoire, $x < P(\Delta E) = \exp(-\Delta E / T)$

Nous choisissons d'accepter avec une probabilité P_{deb} une dégradation de l'objectif de 3 unités qui correspond à la situation limite (et irréaliste) où l'on remplacerait deux tétraèdres équilatéraux par 3

tétraèdres plats avec l'ajout d'une arête. P_{deb} sera un paramètre d'entrée valant par exemple 0,8. Ainsi, T_0 la température initiale devra être choisie de telle sorte que:

$$\exp (- 3 / (T_0 \cdot n_i)) = P_{deb}$$

où n_i désigne le nombre de tétraèdres de la topologie initiale fournie.

3.5.2.5. *Température finale et tests d'arrêt*

Dans l'algorithme que nous avons implémenté, deux types de tests d'arrêt ont été envisagés:

- . soit l'algorithme s'arrête lorsque la température courante atteint une température finale T_f .
- . soit après un certain nombre d'itérations sans le moindre changement de la topologie.

Ce deuxième type d'arrêt a été ajouté parce que nous avons constaté que le système pouvait se figer bien avant d'atteindre la température limite T_f .

Pour définir la température finale T_f , on choisit d'accepter une dégradation très peu importante de l'ordre de 0,01 avec une probabilité faible P_{fin} , valant par exemple 0,1. Cette probabilité constituera une autre donnée du problème, et T_f sera calculée de telle sorte que:

$$\exp (- 0,01/ (T_f \cdot n_c)) = P_{fin}$$

et n_c désigne le nombre de tétraèdres de la topologie courante.

Dans le second test d'arrêt, le nombre d'itérations sans changement qui amène la fin de l'exécution peut par exemple être écrit comme une fonction linéaire du nombre de tétraèdres de la topologie initiale:

$$N = K_N \cdot n_i$$

K_N constituera aussi un paramètre de l'algorithme qu'on pourra modifier selon les domaines étudiés.

3.5.2.6. *Décroissance de la température*

Dans l'algorithme qu'il a présenté [45], Kirkpatrick fait décroître la température par pallier, de façon géométrique, et à chaque seuil s'effectue un certain nombre d'itérations. La méthode que nous avons implémentée, mieux adaptée à notre problème est quelque peu différente. La température diminue toujours géométriquement : $T' = \alpha T$ avec $\alpha < 1$ mais nous avons choisi d'appliquer cette transformation à chaque fois qu'une topologie voisine a effectivement été générée (nous avons vu plus haut que certaines itérations ne permettaient pas de construire des solutions voisines, puisque les opérations d'ajout et de suppression d'arêtes pouvaient être impossibles pour un tétraèdre particulier tiré au sort). L'idée est de faire varier la température de façon plus continue, ce qui suppose de choisir α très petit pour assurer une convergence suffisamment lente.

Plutôt que de poser α comme un nouveau paramètre d'entrée, nous avons choisi de le calculer pour maîtriser le nombre de fois où l'on diminue la température. Si en Q itérations la température T_0 baisse jusqu'à la température d'arrêt T_f , alors:

$$T_f = \alpha Q T_0$$

Nous avons choisi d'écrire Q le nombre total d'itérations comme une fonction linéaire du nombre de tétraèdres de la topologie initiale: $Q = K_\alpha \cdot n_i$, où K_α sera considéré comme un paramètre de l'algorithme.

3.5.2.7. Recuit local

L'ensemble des paramètres d'entrée (P_{deb} , P_{fin} , K_N , K_α) permettent d'avoir un contrôle intéressant sur le déroulement de l'algorithme, en particulier sur sa vitesse de convergence. Cependant, empiriquement, on se rend compte que sur un vaste domaine polyédral la qualité du maillage est variable selon les zones; il est bien évident qu'il serait souhaitable de passer plus de temps à améliorer une partie défavorisée du domaine, plutôt que de chercher à optimiser une zone déjà bien maillée. En effet les algorithmes de type recuit commencent par provoquer de grosses turbulences au départ; si on procède sur tout le domaine pour le problème de maillage, on va d'abord complètement dégrader le maillage initial, puis la topologie se réarrangera au fur et à mesure que la température baissera. Provoquer d'importantes dégradations dans des zones plutôt bien maillées constitue une perte de temps.

Aussi, nous avons imaginé deux artifices pour éviter ce processus. Le premier consiste à instaurer au départ une température qui n'est pas la même sur tout le domaine à étudier; la température initiale T_0 sera choisie plus haute dans les zones mal tétraèdrisées du domaine, et plus basse dans les parties comportant des tétraèdres moins allongés. En conservant le tirage uniforme des tétraèdres pour la recherche de topologies voisines, on s'assure ainsi de mettre moins de désordre dans les zones pour lesquelles le maillage est convenable. Nous avons testé cette méthodologie et en fait nous avons retenu la deuxième qui donne les mêmes résultats mais qui est plus facile à mettre en oeuvre.

Cette seconde technique consiste à ne plus tirer les tétraèdres selon une loi uniforme, mais à accorder à chaque tétraèdre une probabilité de tirage qui dépend de sa géométrie et de celle de ses voisins. Ainsi les tétraèdres plus plats seront tirés en priorité, et le recuit s'appliquera avant tout aux zones plus défavorisées.

L'algorithme général que nous avons implémenté peut se décrire comme suit, où T est une topologie initiale réalisable d'un domaine D:

Algorithme de recuit (P_{deb} , P_{fin} , K_N , K_α , T)

début

n := nombre de tétraèdres de la topologie T

pour i := 1, n

calculer le coefficient coef(i) du tétraèdre T_i coef(i) = $1 - C_i / C_{eq}$

finpour

$C_{moy} := \sum_{i=1,n} (1 - C_i / C_{eq})$

calculer T_0 telle que $\exp(-3 / (T_0 \cdot n)) = P_{deb}$

calculer T_f telle que $\exp(-0,01 / (T_f \cdot n)) = P_{fin}$

calculer α tel que $T_f = \alpha (K_\alpha \cdot n) T_0$

$N := K_N \cdot n$

pas_change := 0

Temp := T_0

tant que (Temp > T_f)

tant que (pas_change < N)

tirer un tétraèdre T_i défini par les 4 points (x,y,z,w)

tirer une des deux opérations élémentaires ajout ou suppression d'une arête

si ajout **alors**

s'il existe un tétraèdre T_j donné par (x,y,z,v) voisin de T_i par la face (x,y,z)

alors

{(w,v) coupe le triangle (x,y,z) - l'ajout de l'arête est alors réalisable -}

calculer les coefficients c_1, c_2, c_3 des tétraèdres (x,y,w,v), (x,z,w,v), (y,z,w,v)

$E1 := (C_{moy} + c_1 + c_2 + c_3 - \text{coef}(i) - \text{coef}(j)) / (n + 1)$

$E2 ::= C_{moy} / n$

tirer un nombre aléatoire x entre 0 et 1

si ($E1 < E2$) ou (**si** $E1 \geq E2$ et **si** $x < \exp((E1 - E2) / \text{Temp})$) **alors**

{la modification topologique est acceptée}

$C_{moy} = C_{moy} + c_1 + c_2 + c_3 - \text{coef}(i) - \text{coef}(j)$

n := n+1

{le nouveau tétraèdre T_i correspond aux 4 points (x,y,w,v)}

{le nouveau tétraèdre T_j correspond aux 4 points (x,z,w,v)}

{le tétraèdre T_n correspond aux 4 points (y,z,w,v)}

```

        pas_change := 0
        Temp :=  $\alpha$  . Temp
    sinon
        pas_change := pas_change + 1
    finsi
sinon
    pas_change := pas_change + 1
finsi
si suppression alors
    s'il existe ( 2 tétraèdres  $T_j$  donné par  $(x,y,z,v)$  et  $T_k$  donné par  $(x,y,w,v)$ 
    voisins de  $T_i$  tels que  $(x,y)$  soit complètement entourée par les 3
    tétraèdres  $T_i T_j T_k$  ) alors
        calculer les coefficients  $c_1, c_2$  des tétraèdres  $(x,z,w,v), (y,z,w,v)$ 
         $E1 := (C_{moy} + c_1 + c_2 - \text{coef}(i) - \text{coef}(j) - \text{coef}(k)) / (n - 1)$ 
         $E2 := C_{moy} / n$ 
        tirer un nombre aléatoire  $x$  entre 0 et 1
        si  $(E1 < E2)$  ou (si  $E1 \geq E2$  et si  $x < \exp((E1 - E2) / \text{Temp})$ ) alors
            {la modification topologique est acceptée}
             $C_{moy} := C_{moy} + c_1 + c_2 - \text{coef}(i) - \text{coef}(j) - \text{coef}(k)$ 
             $n := n - 1$ 
            {le nouveau tétraèdre  $T_i$  correspond aux 4 points  $(x,z,w,v)$ }
            {le nouveau tétraèdre  $T_j$  correspond aux 4 points  $(y,z,w,v)$ }
            {le tétraèdre  $T_k$  n'existe plus}
            pas_change := 0
            Temp :=  $\alpha$  . Temp
        sinon
            pas_change := pas_change + 1
        finsi
    sinon
        pas_change := pas_change + 1
    finsi
finsi
fin tant que
Temp :=  $T_f$ 
fin tant que
fin

```


3.5.2.8. Quelques conclusions empiriques sur la méthode du recuit

Pour les différents exemples que nous avons testés, l'algorithme de recuit a toujours donné des solutions finales meilleures que l'algorithme de trempe exposé au chapitre précédent. Cependant si on n'introduit pas la technique du recuit local (par température non uniforme sur l'ensemble du domaine, ou par tirage des tétraèdres selon une loi de probabilité qui prend en compte la géométrie de leur voisinage) les améliorations par rapport au premier algorithme sont relativement faibles et en tout cas ne justifient pas l'augmentation prohibitive du temps d'exécution.

Par contre, l'algorithme faisant intervenir le recuit local, même s'il exige une convergence tout aussi lente, donne des résultats meilleurs. Alors qu'en moyenne l'algorithme glouton provoque une diminution de la fonction objective de l'ordre de 6%, la technique du recuit local permet d'améliorer l'objectif jusqu'à 13% et même plus dans les cas les plus favorables; en règle générale, nous avons constaté que les performances de ce dernier algorithme étaient encore plus sensibles lorsque la taille du problème augmentait, c'est-à-dire le nombre de tétraèdres de la topologie initiale.

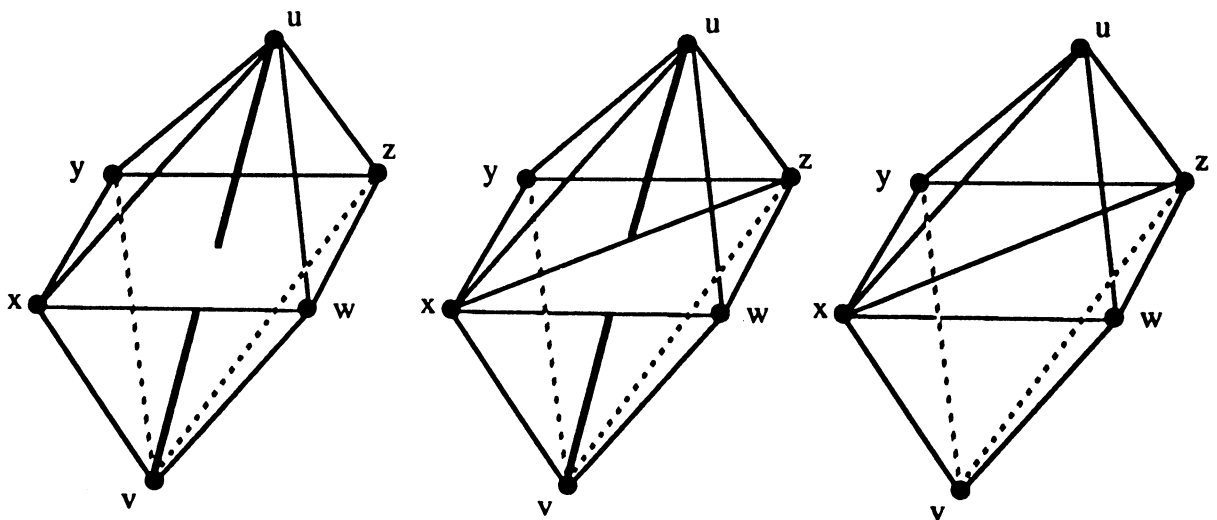
Les différents paramètres de l'algorithme permettent en fait de contrôler son temps d'exécution puisqu'ils agissent sur le nombre d'itérations. Ainsi selon le matériel dont on dispose, on peut exiger une vitesse de convergence plus ou moins rapide. Bien sûr, la qualité de la solution finale dépend de cette vitesse de convergence: en faisant décroître trop vite la température, par exemple, le système se fige rapidement et l'algorithme équivaut alors, après quelques itérations de dégradation à un algorithme de descente: dès le départ si on pose $T_0 = 0$, l'algorithme de recuit est exactement l'algorithme de trempe, puisqu'aucune dégradation ne sera permise.

Il est aussi à noter qu'au delà d'un certain seuil, la diminution de la vitesse de convergence n'est plus d'aucune incidence sur la qualité de la solution.

Nous avons testé l'algorithme sur micro-ordinateur APRICOT XEN-i pour des maillages comportant de l'ordre de 3000 tétraèdres. Alors que l'algorithme glouton converge en quelques minutes pour fournir des améliorations de l'ordre de 6%, l'algorithme de recuit est intéressant lorsqu'il provoque des améliorations de l'ordre de 10% de la fonction objective, mais la vitesse de convergence lente exige un temps d'exécution vingt à trente fois supérieur. Sur les exemples les plus défavorables testés, l'algorithme de type glouton apportait en quelques minutes des améliorations de 3 ou 4%, et en plusieurs heures, le recuit ne permettait de passer qu'à des pourcentages de l'ordre de 5 ou 6%.

3.5.2.9. Algorithme de recuit en adjoignant d'autres opérations topologiques

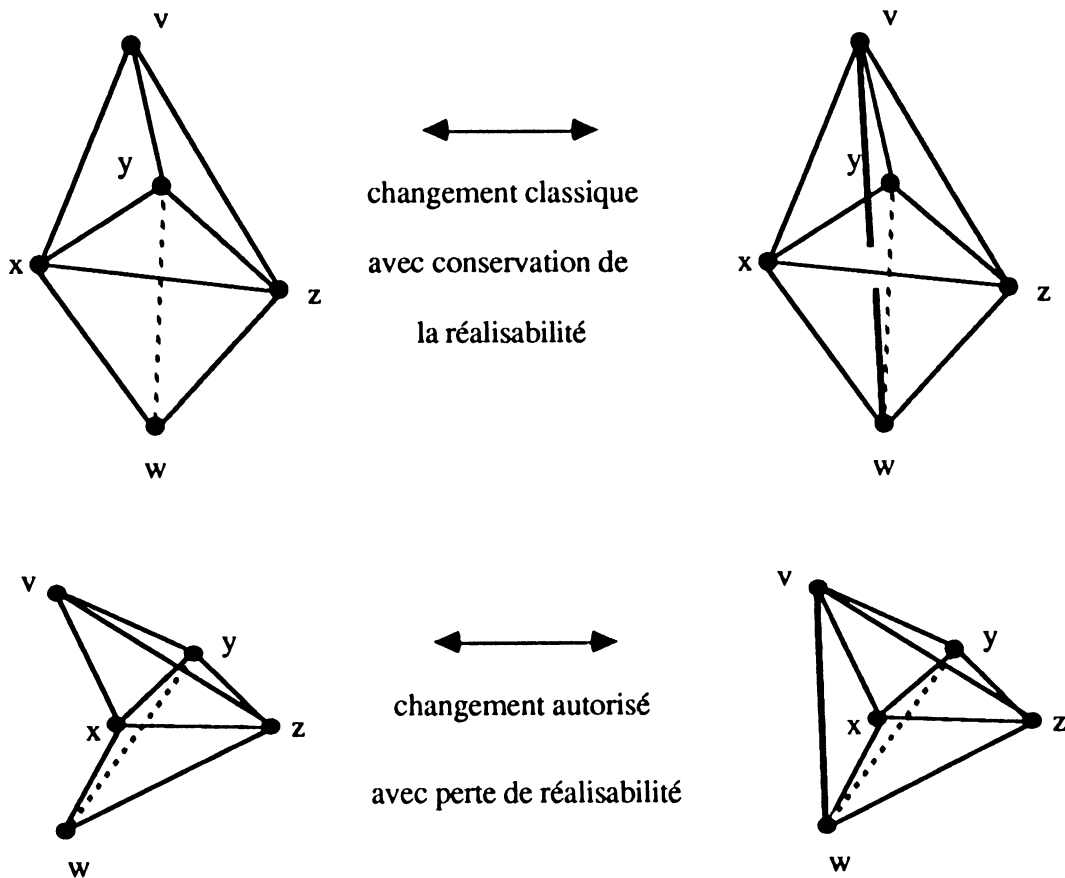
L'algorithme de recuit décrit ci-dessus n'ayant pas apporté de résultats spectaculaires, nous avons cherché à le modifier en mettant en place d'autres opérations topologiques. Nous avons par exemple ajouté aux deux changements duaux retenus les modifications un peu moins locales qui correspondent au cas où une arête n'est plus entourée de trois, mais de quatre tétraèdres. Nous savons que les changements dans cette configuration sont équivalents à une suite d'opérations d'ajout et de suppression, mais nous espérons que ce début de généralisation permette d'économiser du temps tout en assurant des solutions aussi bonnes. En fait cet essai s'est avéré infructueux. Cette tentative nous a conforté dans l'idée que nous avons que les opérations utilisées dans le recuit doivent être très locales comme les deux opérations duales d'ajout et de suppression, même si par l'algorithme de recuit, elles obligent parfois à passer par des états de très haute énergie.



Des opérations supplémentaires ont été incorporées à l'algorithme de recuit; elles permettent de générer directement les différents maillages de polyèdres composés de 6 points comme ceux de la figure ci-dessus. On sait que ces opérations sont des suites d'opérations élémentaires d'ajout et de suppression d'arêtes. Elles ont été introduites dans le but de gagner du temps en évitant d'avoir à passer par des niveaux de très haute énergie : en voulant passer de la figure de gauche à celle de droite par les simples opérations d'ajout et de suppression d'arêtes, il faudrait accepter une très forte dégradation de la fonction objective. Les nouvelles opérations topologiques permettent d'éviter ce passage, mais les essais n'ont pas été concluants.

3.5.2.10. Algorithme de recuit avec perte de réalisabilité

Nous avons aussi mis au point un algorithme de recuit mais qui n'agit plus seulement sur les topologies réalisables du domaine considéré; le système est autorisé à passer par des tétraèdrisations non admissibles, correspondant au cas où certains tétraèdres sont emboîtés les uns dans les autres. Pour ce faire, les deux opérations élémentaires d'ajout et de suppression sont aussi acceptées en fonction de la variation d'énergie même si l'arête centrale (w,v) ne coupe plus le triangle (x,y,z). On continue toutefois à vérifier que chaque face intérieure est partagée par deux tétraèdres exactement.



Le coefficient attribué aux tétraèdres non réalisables, (ce sont ceux dont le volume devient négatif quand on impose un sens de parcours de la topologie) ne dépend plus de sa géométrie mais correspond à une pénalité constante : nous avons choisi un facteur identique pour tous les tétraèdres irréalisables puisqu'un tétraèdre très plat mais de volume négatif n'est pas plus, ni moins désavantageux qu'un tétraèdre équilatéral qui admet aussi un volume négatif. Ce coefficient constant doit être fixé suffisamment élevé pour qu'en fin d'algorithme, quand la température est faible, il devienne interdit d'accepter des dégradations qui engendrent des tétraèdres au volume négatif; il faut bien entendu que ce coefficient ne soit pas aussi trop fort pour que les itérations au

début du recuit, lorsque la température est haute, permettent de passer facilement à l'irréalisabilité.

Deux types de motivations nous ont amenés à admettre l'irréalisabilité: d'une part, nous espérions qu'en autorisant plus de désordre dans le maillage, au début de l'exécution, nous pouvions parvenir, en baissant lentement la température, à des solutions plus affinées; d'autre part, nous souhaitions aussi pouvoir régler par ce biais le problème général de la construction initiale d'une topologie réalisable.

En fait, il est difficile de trouver un coefficient intéressant pour les tétraèdres irréalisables, qui assure que la solution finale sur laquelle se figera le système corresponde à une topologie réalisable. Le coefficient 3 a été attribué aux tétraèdres admettant un volume négatif, c'est-à-dire trois fois le coefficient du tétraèdre défini par quatre points coplanaires; ainsi, au début, si on se reporte aux paramètres d'entrée de l'algorithme, chaque dégradation amenant une irréalisabilité est acceptée avec une probabilité P_{deb} . Pour trouver les topologies voisines, les tétraèdres sont tirés selon une loi de probabilité qui tient compte du coefficient qui leur a été attribué; le tirage des tétraèdres irréalisables paraît donc prioritaire, surtout lorsque la température devient faible, mais même cette précaution ne garantit pas de revenir à une solution réalisable.

Parmi les tests qui ont été effectués, deux types de résultats ont été observés:

. d'une part, les exemples pour lesquels l'algorithme de recuit est allé beaucoup trop loin dans l'irréalisabilité; la solution finale obtenue comporte un très grand nombre de tétraèdres aux volumes négatifs; le coefficient moyen que l'on cherchait à minimiser prend une valeur finale supérieure à 1 (rappelons que pour chaque tétraèdre réalisable ce coefficient est compris entre 0, cas équilatéral, et la valeur 1, cas limite où les quatre points sont dans le même plan; pour les tétraèdres irréalisables, le coefficient a été posé égal à 3). La solution est alors inexploitable, parce que trop éloignée d'une topologie réalisable.

. d'autre part, les exemples pour lesquels le coefficient moyen final atteint une valeur inférieure à celle obtenue par le recuit classique conservant la réalisabilité, mais correspondant à une solution finale comportant encore des tétraèdres irréalisables, en petit nombre évidemment. Ces situations sont encourageantes puisqu'elles signifient qu'en faisant la concession de quelques irréalisabilités, on est parvenu à améliorer la qualité moyenne du maillage. Mais malheureusement, ces solutions ne sont pas plus exploitables que les premières, n'ayant aucun moyen de réduire l'irréalisabilité dans le cas général, même localement sur des parties précises du domaine.

Finalement, nous avons aussi abandonné cette voie, d'autant plus facilement que les secondes situations étaient plus rares que les premières.

3.6. UN ALGORITHME D'OPTIMISATION SOUS - POLYEDRALE

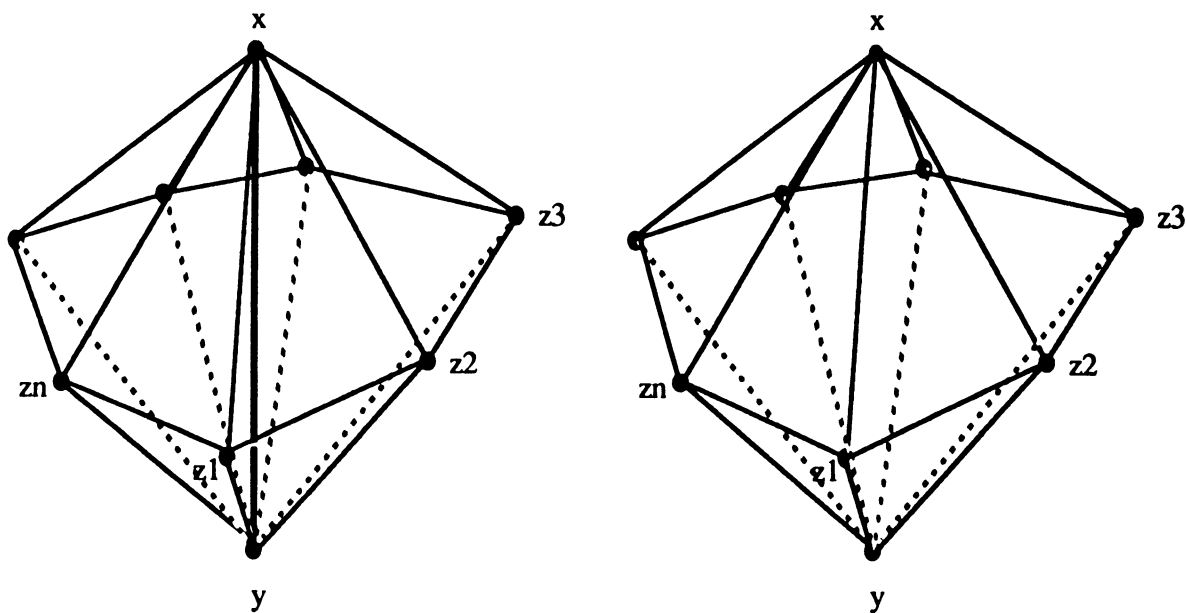
L'algorithme prototype de recuit que nous avons proposé n'apporte pas de résultats spectaculaires et sa vitesse de convergence doit être relativement faible. Sans doute faudrait-il l'affiner pour mettre au point d'autres méthodes de régulation de la température.

L'algorithme que nous décrivons maintenant à l'énorme avantage de procéder par itération dont la complexité peut s'exprimer de façon linéaire par rapport au nombre d'arêtes de la topologie considérée. L'idée de la démarche est de subdiviser le domaine tout entier en sous-domaines suffisamment petits de telle sorte que la taille de chacun de ces sous-domaines nous autorise à procéder de manière quasi-exhaustive pour trouver leurs topologies optimales.

En fait, l'algorithme de trempe du chapitre 3 développe lui aussi cette méthodologie mais de façon très locale: en effet nous considérons dans la topologie initiale fournie, toutes les paires et tous les triplets de tétraèdres pour savoir s'il était préférable d'ajouter ou de supprimer une arête.

Maintenant, on considère comme polyèdre de base à optimiser, le sous-domaine formé par les tétraèdres entourant une arête particulière. Nous avons déjà mentionné qu'une arête ne peut pas être complètement encerclée uniquement par des tétraèdres équilatéraux; le degré moyen idéal serait alors de 5,10 tétraèdres par arête. Dans les plus mauvaises topologies que nous avons rencontrées lors des tests, le nombre maximal de tétraèdres qui entouraient une arête ne dépassait jamais 12. Le polyèdre associé à une arête est donc en général très petit et on va pouvoir par des générations faciles rechercher son maillage optimal - ou du moins un maillage très bon - en comparant toutes ou une grande partie des topologies réalisables de ce sous-domaine.

Pour chaque arête de type (x,y) entourée de n tétraèdres $(x,y,z_1,z_2), (x,y,z_2,z_3), \dots, (x,y,z_n,z_1)$, on cherche donc à trouver la meilleure topologie du sous-polyèdre $P_{x,y}$ constitué par la surface contenant les points $(x,y,z_1,z_2,z_3, \dots, z_n)$ et donnée par les faces triangulaires $(z_1,z_2,x), (z_2,z_3,x), \dots, (z_n,z_1,x), (z_1,z_2,y), (z_2,z_3,y), \dots, (z_n,z_1,y)$. $P_{x,y}$ est un domaine polyédral tridimensionnel, ne comportant pas de points internes et pour lequel les n tétraèdres cités au-dessus fournissent une topologie initiale réalisable. On pourrait donc appliquer les algorithmes déjà présentés; l'algorithme de trempe appliqué successivement aux sous-polyèdres de toutes les arêtes, donnerait les mêmes résultats qu'en l'appliquant de façon globale; le recuit fournirait aussi une heuristique, mais la lenteur nécessaire de la convergence, qui se répèterait pour chaque sous-polyèdre $P_{x,y}$, nous a persuadé de laisser de côté une telle démarche.



Choix d'une arête (x,y) qui induit un petit polyèdre sans point intérieur, dont la surface est donnée par des faces triangulaires et pour lequel on connaît une topologie réalisable.

La méthode mise en oeuvre pour trouver une bonne topologie du sous-polyèdre $P_{x,y}$ s'appuie sur une méthode de Monte - Carlo: à partir de la topologie initiale de $P_{x,y}$ comportant n tétraèdres, on tire aléatoirement une des opérations ajout ou suppression d'une arête:

Si l'opération d'ajout est choisie, on sélectionne, toujours de manière aléatoire, deux tétraèdres de $P_{x,y}$ voisins par une face. Si l'ajout est possible entre ces deux tétraèdres, - s'il n'entraîne pas de tétraèdres à volume négatif -, on l'effectue à chaque fois, même si l'objectif se dégrade à la suite de ce changement.

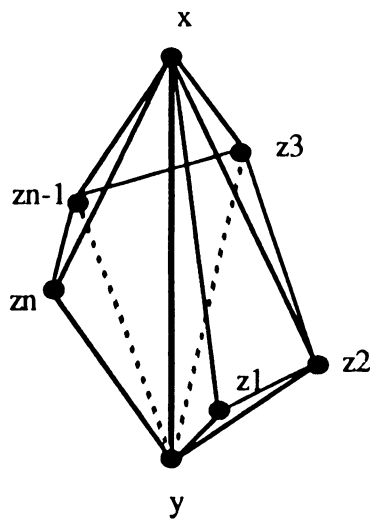
Si l'opération de suppression est retenue, on tire de façon aléatoire une arête interne (w,v) au sous-polyèdre $P_{x,y}$ qui soit exactement entourée de 3 tétraèdres (au départ la seule arête interne est (x,y) si n vaut 3 et si n est différent de 3, il n'existe pas d'arête interne (w,v) entourée de 3 tétraèdres). Si (w,v) existe et si sa suppression permet de remplacer les trois tétraèdres qui l'entouraient par deux nouveaux tétraèdres, en conservant une topologie réalisable, on opère effectivement sa suppression sans se préoccuper de la variation positive ou négative de l'objectif.

A la suite d'un ajout ou d'une suppression, on obtient une autre topologie réalisable dont on calcule la valeur correspondante de la fonction objective. On répète un certain nombre de fois le processus de tirage et on retient parmi toutes les topologies ainsi visitées celle qui a donné le plus faible objectif. En réalisant un nombre de tirages relativement important par rapport au nombre n de tétraèdres de la topologie initiale de $P_{x,y}$, on peut raisonnablement espérer générer une très grande partie des topologies réalisables de $P_{x,y}$, même s'il n'est pas certain que les opérations d'ajout et

de suppression d'arêtes permettent d'accéder à toutes les solutions réalisables; la meilleure des topologies engendrées sera donc une très bonne topologie de $P_{x,y}$.

Encore une fois, il faut insister sur le fait que n est généralement très petit et le nombre de tirages aléatoires utiles pour chaque sous-polyèdre n'est jamais très grand; d'un point de vue pratique, nous avons pu constater qu'en réalisant $2n^2$ générations aléatoires, on parvenait à passer en revue une grande partie des topologies réalisables de $P_{x,y}$; n peut facilement être majoré par une constante ce qui signifie que le coût d'optimisation d'un sous-polyèdre $P_{x,y}$ peut lui aussi être approximé par une constante. Notons de plus que les mise-à-jour de structure à effectuer sont minimales, puisqu'elles concernent uniquement les tétraèdres de $P_{x,y}$.

Pour un domaine polyédral D tridimensionnel, muni d'une topologie réalisable initiale T , la même démarche est reproduite pour chacune des arêtes de T , y compris les arêtes qui se situent sur la surface de D . Pour une arête (x,y) sur la surface de D , le polyèdre associé à (x,y) est défini par les tétraèdres contenant (x,y) , mais qui ne l'entourent que partiellement; dans ce cas-là, le sous-polyèdre $P_{x,y}$ admet une première topologie réalisable qui ne contient pas d'arête interne (et donc la première opération élémentaire qui peut effectivement être appliquée pour générer une topologie réalisable, est obligatoirement l'ajout d'une arête).



cas où l'arête (x,y) est extérieure au domaine. Le polyèdre $P_{x,y}$ défini par les points $(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$ ne contient pas le tétraèdre (x,y,z_n,z_1) , puisque (x,y) n'est pas totalement entourée.

Une itération de l'algorithme sera constituée par l'optimisation successive de tous les sous-polyèdres $P_{x,y}$, c'est-à-dire en procédant à autant d'optimisations qu'il existe d'arêtes dans la topologie étudiée. Le temps nécessaire à l'optimisation d'un sous-polyèdre $P_{x,y}$ pouvant être considéré comme constant, la complexité d'une itération peut donc s'exprimer de façon linéaire par rapport aux nombres d'arêtes de la topologie.

En général l'algorithme ne converge pas en une seule itération; en effet des arêtes, dont le sous-polyèdre associé a été optimisé, peuvent réapparaître ultérieurement lors de l'optimisation de sous-polyèdres voisins, en induisant alors un autre sous-polyèdre dont on ne peut juger a priori de l'optimalité. En pratique, très peu d'itérations suffisent pour constater la convergence du système: nous avons testé l'algorithme pour des domaines dont la topologie initiale comporte jusqu'à 20000 tétraèdres, et dans tous les cas, la convergence était évidente dès la cinquième ou sixième itération. De façon plus systématique, on peut se donner ϵ petit et arrêter le processus dès que la variation de l'objectif sur toute une itération ne dépasse pas ϵ . Le schéma global de l'algorithme d'optimisation sous-polyédrale d'un domaine D muni d'une topologie initiale T , peut donc s'énoncer de la manière suivante:

Algorithme d'optimisation sous-polyédrale (T, ϵ)

début

n : nombre de tétraèdres de la topologie T

calculer $C_{\text{moy}} := \sum_{i=1,n} (1 - C_i / C_{\text{eq}}) / n$

$T_{\text{meilleur}} := T$ { la topologie la meilleure est initialisée par T }

$C_{\text{meilleur}} := C_{\text{moy}}$

répéter

construire A l'ensemble des arêtes figurant dans la topologie T

$C_{\text{avant}} := C_{\text{meilleur}}$

pour $(x,y) \in A$ **faire**

extraction du sous-polyèdre $P_{x,y}$

{ i.e. parmi les n tétraèdres de T retenir les $n_{x,y}$ qui contiennent l'arête (x,y) }

pour $i := 1, 2 \dots n_{x,y}^2$ **faire**

tirer une des deux opérations élémentaires ajout ou suppression d'une arête avec une probabilité d'un demi chacune.

si ajout alors

parmi les $n_{x,y}$ tétraèdres de $P_{x,y}$ tirer 2 tétraèdres T_i et T_j voisins par une face

{ T_i défini par les 4 points (c,d,e,f) }

{ T_j défini par les 4 points (c,d,e,g) }


```

    {x et y peuvent figurer parmi les 5 points (c,d,e,f,g)}
    si l'arête (f,g) traverse le triangle (c,d,e) alors
        T := T U {(c,d,f,g) , (c,e,f,g), (d,e,f,g)}
            - {(c,d,e,f) ,(c,d,e,g)}
        n := n + 1
        calculer  $C_{moy} := \sum_{T_k \in T} (1 - C_{T_k} / C_{eq}) / n$ 
        si  $C_{moy} < C_{meilleur}$  alors
             $C_{meilleur} := C_{moy}$ 
             $T_{meilleur} := T$ 
        finsi
    finsi

    si suppression alors
        constituer l'ensemble  $A_1$  des arêtes internes à  $P_{x,y}$  qui soient
        exactement entourées de 3 des  $n_{x,y}$  tétraèdres de  $P_{x,y}$ .
        si  $A_1$  non vide alors
            tirer une des arêtes (c,d) de E
            {soit  $T_i, T_j$  et  $T_k$  les 3 tétraèdres qui entourent (c,d)}
            {  $T_i$  défini par les 4 points (c,d,e,g);
            {  $T_j$  défini par les 4 points (c,d,e,f)
            {  $T_k$  défini par les 4 points (c,d,f,g)}
            T := T U {(c,e,f,g) , (d,e,f,g)}
                - {(c,d,e,f) ,(c,d,e,g),(c,d,f,g)}
            n := n - 1
            calculer  $C_{moy} := \sum_{T_i' \in T} (1 - C_{T_i'} / C_{eq}) / n$ 
            si  $C_{moy} < C_{meilleur}$  alors
                 $C_{meilleur} := C_{moy}$ 
                 $T_{meilleur} := T$ 
            finsi
        finsi
    finsi
    finpour
    finpour
    jusqu'à ( $C_{avant} - C_{meilleur} < \epsilon$ )
fin

```

L'algorithme s'est avéré très performant sur les tests qui ont été effectués: d'abord la décroissance de l'objectif atteint à peu près 14% sur l'ensemble des exemples, ce qui représente une amélioration non négligeable par rapport à l'algorithme de recuit présenté dans le chapitre précédent, et d'autre part le temps d'exécution est plus facile à évaluer.

Des tests ont été faits sur deux types de maillages: ceux construits à partir d'un algorithme de Delaunay appliqué à des géométries relativement simples et d'autres construits à partir de topologies 2D répétées sur des domaines 3D à géométries plus compliquées. Dans le premier cas, les maillages initiaux déjà très performants (admettant un coefficient moyen de l'ordre de 0,35) sont améliorés de l'ordre de 15%; les seconds exemples sont beaucoup moins bons (coefficient moyen de l'ordre de 0,75) et l'amélioration sous-polyédrale provoque une diminution de l'objectif de l'ordre de 12%. Dans ce dernier cas, on sent bien que la répartition des noeuds par couches est préjudiciable, et le paragraphe suivant propose une solution simple pour en atténuer l'effet.

Une autre démarche pourrait être envisagée pour optimiser chaque sous-polyèdre $P_{x,y}$ se rapportant à l'arête (x,y) : plutôt que de générer des topologies différentes par une méthode de Monte-Carlo, une programmation plus exhaustive serait possible en considérant les cas où le polyèdre $P_{x,y}$ admet 2,3,4... arêtes en comparant directement toutes les topologies réalisables. Dans la version actuelle, il a été partiellement utilisé: pour les sous-polyèdres comportant 2,3 ou 4 tétraèdres l'énumération des topologies se fait de manière exhaustive, et elle est réalisée par la méthode de Monte-Carlo pour les sous-domaines plus grands.

3.7. UN MODULE DE BARYCENTRAGE ASSOCIE A L'OPTIMISATION SOUS-POLYEDRALE

Dans ce dernier algorithme, nous joignons à l'optimisation sous-polyédrale un module de barycentrage des noeuds internes entre chaque itération. En effet nous avons observé que la position des noeuds pouvaient être en certains cas assez désavantageuse pour l'optimisation; l'idée est alors de les répartir un peu mieux pour favoriser l'optimisation sous-polyédrale qui suivra.

Pour un domaine polyédral tridimensionnel D muni d'un maillage réalisable de topologie T , la nouvelle position de chaque noeud interne de D est calculée comme le barycentre de tous ses noeuds voisins dans la topologie T du maillage (quand on conserve la réalisabilité de la topologie); deux points de D sont déclarés voisins s'il existe au moins un tétraèdre de T qui les contient tous les deux.

En général, quand le domaine étudié comporte un nombre important de points internes, le barycentrage ne converge pas en une seule itération: quand on s'impose un ordre de visite sur les noeuds, il peut se faire qu'un noeud précédemment examiné ne se retrouve plus au barycentre de ses voisins, quand ceux-ci ont été à leur tour barycentrés. Dans l'algorithme qui suit, on suppose qu'on effectue des balayages successifs de tous les noeuds internes jusqu'à ce que le système atteigne une stabilité; en fait cette convergence apparaît au bout de très peu d'itérations (cinq ou six). Pour un domaine D muni d'une topologie T , le schéma global du nouvel algorithme est donc le suivant:

Algorithme de barycentrage et d'optimisation sous-polyédrale (T, ϵ)

début

répéter

 calcul du coefficient moyen C_{moy} associé à la topologie T

pour chaque noeud interne i **faire**

 constitution de la liste des voisins de i dans la topologie T

finpour

répéter

pour chaque noeud interne i **faire**

 mettre i au barycentre de ses voisins

finpour

jusqu'à ce que la position des noeuds internes devienne stable

 appliquer l'algorithme d'optimisation sous-polyédrale (T, ϵ)

 calcul du coefficient moyen C_{moy}' associé à la nouvelle topologie T

jusqu'à $C_{\text{moy}} - C_{\text{moy}}' < \epsilon$

fin

Les tests qui ont été étudiés et dont certains sont exposés au paragraphe suivant, nous ont permis de constater que les performances de l'algorithme d'optimisation polyédrale étaient largement accrues quand on associait l'algorithme simple de barycentrage. La démarche est d'autant plus intéressante que les opérations de barycentrage sont quasi-instantanées et ne gonflent pas le temps d'exécution. Sur tous ces tests, l'amélioration finale du coefficient moyen assure avec ce nouveau procédé des pourcentages d'améliorations de l'ordre de 25%. En particulier, pour des topologies initiales construites à partir de topologies 2D en triangles, superposées et convenablement reliées pour constituer des tétraèdres, nous avons déjà mentionné que le coefficient initial était fort (de l'ordre de 0,75); une amélioration de 25% permet de l'abaisser jusqu'à 0,56 ce qui n'est pas négligeable. Dans ces exemples, il paraît intuitif que les opérations de barycentrage ne pouvaient être que positives puisqu'elles amènaient une répartition moins systématique des noeuds qui étaient disposés auparavant par couches; lorsqu'on s'intéresse à la distribution des coefficients des tétraèdres dans l'intervalle $[0,1]$, on constate la nette diminution du nombre de tétraèdres quasiment plats (dont le coefficient est supérieur à 0,9). Ce gain est évidemment appréciable pour les calculs numériques qui suivent la construction du maillage.

Si par un calcul intermédiaire on évalue le coefficient moyen après chaque barycentrage, et avant l'optimisation sous-polyédrale, on s'aperçoit qu'en règle générale, les opérations de barycentrage ne sont pas en elles-mêmes très avantageuses: elles dégradent la fonction objective, mais alors que l'optimisation polyédrale avait précédemment convergée, le barycentrage permet d'engendrer lors de l'optimisation sous-polyédrale suivante, d'autres modifications topologiques très bénéfiques. Ceci prouve encore une fois que les opérations non topologiques (qui ne changent que la position des noeuds) ne sont pas intéressantes en elles-mêmes (elles ne font pas diminuer la fonction objective), mais elles le deviennent dès qu'elles sont associées à des modifications topologiques puisqu'elles permettent d'accroître nettement les performances de ces dernières .

Nous avons déjà mentionné que la stabilité pour la position des noeuds était obtenue avec le barycentrage en cinq ou six itérations. Si la première optimisation sous-polyédrale nécessite parfois cinq ou six balayages des arêtes de la topologie avant de constater une convergence, lors des phases suivantes, seulement un ou deux balayages sont suffisants. Puis, en règle générale en quatre ou cinq itérations complètes (barycentrage + optimisation sous-polyédrale) on aboutit à une topologie stable pour laquelle ni le barycentrage ni l'optimisation ne provoque des améliorations du coefficient moyen. Il faut toutefois noter que pour des domaines dont les points internes sont initialement bien répartis (comme les maillages construits par des algorithmes de type Delaunay), la convergence est beaucoup plus rapide (deux itérations suffisent); par contre les quatre ou cinq itérations sont parfois nécessaires pour les maillages dont les noeuds sont d'abord disposés en

couches (génération par bégaiement).

En tenant compte de ces différentes constatations empiriques, l'algorithme combinant opérations topologiques et non topologiques pourrait sommairement s'écrire comme ci-dessous dans le cas le plus désavantageux:

```
pour i = 1 à 5 faire  
    pour j = 1 à 6 faire  
        faire un barycentrage de tous les noeuds internes  
    finpour  
    si i = 1 alors  
        k = 5  
    sinon  
        k = 2  
    finsi  
    pour j = 1 à k faire  
        balayage de toutes les arêtes pour l'optimisation polyédrale  
    finpour  
fin
```

La dernière remarque qui peut être faite sur cet algorithme concerne sa stabilité: quelque soit le processus de tirage aléatoire qu'on adopte pour rechercher une bonne topologie de chaque sous-polyèdre, la topologie globale obtenue après convergence de l'algorithme est toujours la même; ceci signifie bien qu'en $2n^2$ générations on passe en revue une très grande partie des topologies réalisables de chacun des sous-polyèdres (et probablement la totalité des topologies réalisables).

Si on parcourt l'ensemble des arêtes selon des ordres différents pour l'optimisation sous-polyédrale, on obtient à la fin des topologies qui peuvent être différentes, mais qui donnent à la fonction objective des valeurs sensiblement égales (à 0,1% près). Il paraît donc inutile de choisir un ordre qui permettrait d'examiner d'abord les arêtes les plus désavantageuses (c'est-à-dire celles qui sont entourées par le plus grand nombre de tétraèdres et qui engendrent ainsi les plus gros sous-polyèdres).

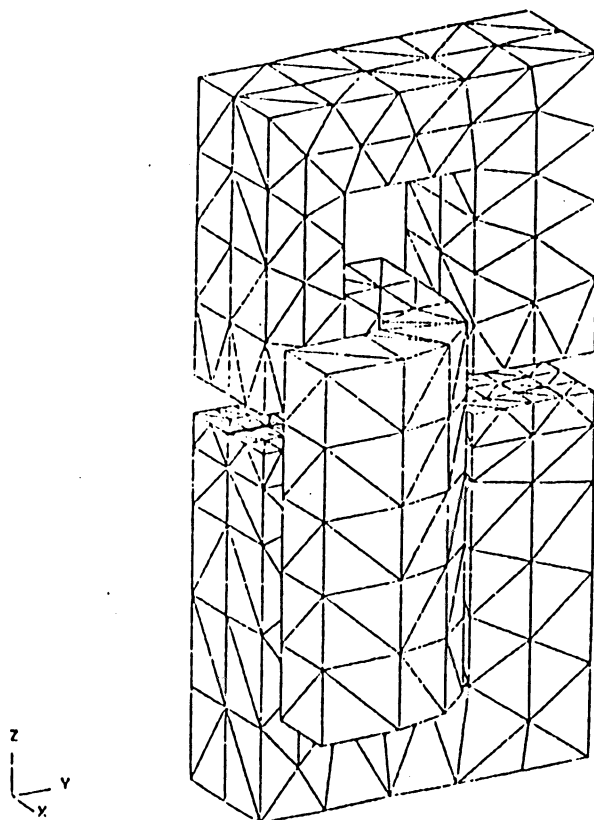
3.8. COMPORTEMENT DES ALGORITHMES SUR QUELQUES EXEMPLES

3.8.1. Comparaisons des algorithmes sur exemples de faible dimension

Nous examinons maintenant le résultat des différents algorithmes sur trois exemples issus de problèmes industriels réels. Le premier (exemple E1) est tiré d'une étude d'électro-magnétisme: il a été fourni par le laboratoire d'électro-technique de l'Ecole Nationale Supérieure des Ingénieurs Electriciens de Grenoble (ENSIEG); il s'agit d'améliorer le maillage d'un domaine représentant une bobine électrique et l'enveloppe d'air qui l'entoure. La géométrie extérieure est donnée dans la figure ci-dessous, où l'on peut voir également le maillage surfacique en triangles de la bobine et des aimants. Sur ce dessin, la boîte d'air n'a pas été représenté pour plus de clarté.

Le domaine est en fait composé de 6 volumes distincts correspondant aux différents constituants; le sous-domaine le plus important est celui qui désigne la couche d'air périphérique: la topologie initiale fournie était composée de 3181 tétraèdres dont 1884 pour l'air. Pour réaliser l'optimisation du domaine tout entier, il a fallu améliorer individuellement chacun des 6 sous-volumes, - puisqu'il était interdit de modifier la topologie existante sur les surfaces séparatrices délimitant les différents composants - et procéder ensuite au collage des sous-domaines. Les résultats reportés dans les statistiques qui suivent tiennent compte de ces 6 sous-volumes dans leur ensemble.

Les maillages initiaux des différentes parties ont été construits à l'ENSIEG par un algorithme faisant intervenir la méthode de Delaunay. La qualité moyenne du maillage initial est très satisfaisante, mais peut encore être améliorée comme le prouvent les résultats des différents algorithmes.



Les deux autres exemples sont tirés de la mécanique des fluides, pour étudier les problèmes d'écoulement d'air autour des parois d'une partie d'un avion (exemple E2) et autour de l'avant de la navette spatiale européenne HERMES (exemple E3). Ces deux domaines ont été proposés par la société des Avions Marcel Dassault / Breguet Aviation (AMD / BA). Leur géométrie est complexe et le maillage initial généré par "bégaiement " de couches 2D triangulées est assez mauvais dans les deux cas. Le principe de la génération du maillage par bégaiement consiste à relier deux couches successives de triangles de manière judicieuse pour former des tétraèdres; cette méthode permet de mailler des structures complexes, mais il faut bien reconnaître qu'elle peut fournir des topologies très défavorables.

Dans le tableau ci-dessous, sont donnés pour chacun des trois exemples, le nombre de tétraèdres de la topologie initiale fournie, son nombre total de noeuds, son nombre de noeuds internes, son nombre d'arêtes, et la valeur du coefficient moyen que l'on cherche à minimiser. Rappelons que le coefficient géométrique qui a été retenu s'exprime: $1 / n (\sum_{i=1,n} (1 - C_{Ti} / C_{eq}))$ où C_{Ti} désigne le rapport du volume de la sphère inscrite au tétraèdre T_i et du volume de T_i , C_{eq} représentant la valeur de ce rapport pour le tétraèdre équilatéral, et n le nombre de tétraèdres de la topologie évaluée. Pour plus de lisibilité, nous avons multiplié ici ce rapport par 1000: le coefficient moyen sera donc compris dans l'intervalle [0,1000[, tendra vers 0 quand tous les tétraèdres deviendront équilatéraux, et au contraire augmentera vers 1000 pour signifier que la topologie est très mauvaise, à la limite tous ses tétraèdres devenant plats.

	E1	E2	E3
nombre total de noeuds	625	661	995
nombre de noeuds internes	169	165	499
nombre de tétraèdres	3181	2246	3248
nombre d'arêtes	4036	3401	4737
coefficient moyen initial	386	708	762

Le tableau suivant donne pour les trois exemples les résultats des quatre algorithmes présentés; pour chaque algorithme, on indique le coefficient moyen obtenu, c'est-à-dire la valeur finale de la fonction objective; pour comparaisons, sont aussi mentionnés les pourcentages d'amélioration et les temps d'exécution des différents algorithmes sur le micro-ordinateur APRICOT XEN-i (compatible AT, processeur 80286, vitesse 10MHz, mémoire centrale de 1 MO). Les temps reportés ci-après ont été enregistrés pour les versions prototypes des différents algorithmes sans souci d'économie et de rentabilité. Depuis ces premiers tests, une programmation plus poussée et minutieuse a permis de réduire d'un facteur 10 à 15 les durées d'exécutions.

Il faut noter que la fonction objective présentant une allure très perturbée, il est difficile de se faire une idée très précise sur l'interprétation des pourcentages d'amélioration. Néanmoins, sur quelques représentations graphiques qui ont pu être tracées, les diminutions de l'ordre de 10% du coefficient moyen sont nettement visibles sur la géométrie globale du maillage.

Pour chaque exemple traité, l'algorithme qui associe les améliorations non topologiques (barycentrage) à l'optimisation polyédrale donne toujours largement les meilleurs résultats. On peut remarquer que son efficacité relativement aux trois autres algorithmes est la plus évidente pour les deux exemples E2 et E3 pour lesquels la topologie initiale se présentait par couches. La répartition plus judicieuse des points a donc jouée à plein dans ces cas-là permettant d'obtenir un pourcentage d'amélioration comparable et même supérieur à celui de l'exemple E1, dont le maillage initial était très bon (coefficient initial 386 pour E1 contre 708 et 762 pour E2 et E3).

Pour le dernier algorithme nous n'avons reporté ni le nombre d'itérations ni les performances intermédiaires de l'algorithme de barycentrage. Sur E1, E2 et E3 cinq itérations globales ont suffi; cependant mentionnons que lors de la première des cinq itérations, le barycentrage dégrade la fonction objective pour l'exemple E3 et l'améliore de l'ordre de 0,5% dans les deux autres exemples. Lors des itérations suivantes, le barycentrage est dégradant pour E1, E2 et E3, mais permet ensuite d'apporter des modifications plus conséquentes par l'optimisation sous-polyédrale.

	E1	E2	E3
coefficient moyen avant optimisation	386	708	762
TREMPE			
coefficient moyen	340	692	733
pourcentage d'amélioration	11,9%	2,25%	3,8%
temps d'exécution	7 mn	8mn	15 mn
RECUIT			
coefficient moyen	335	668	717
pourcentage d'amélioration	13,21%	5,50%	5,90%
temps d'exécution	13 h	11 h	24 h
OPTIMISATION POLYEDRALE			
coefficient moyen	327	629	664
pourcentage d'amélioration	15,28%	11,51%	12,86%
temps d'exécution	3 h 30	3 h	4h
optimisation polyédrale + barycentrage			
coefficient moyen	291	527	577
pourcentage d'amélioration	24,61%	25,56%	24,27%
temps d'exécution	3 h 30	3 h	4 h

Rappelons que même à partir d'autres solutions initiales générées de manière aléatoire, l'algorithme de trempe s'avère très stable: il fournit les mêmes pourcentages d'amélioration quand on l'applique 30 fois sur des topologies initiales différentes générées aléatoirement (30 passages correspondent à peu près en temps calcul à l'exécution d'une optimisation sous-polyédrale).

Enfin, pour chaque exemple, nous avons reporté dans les pages suivantes différentes statistiques qui permettent de juger des changements engendrés entre le maillage initial et le maillage amélioré par le dernier algorithme (optimisation sous-polyédrale + barycentrage).

Dans un premier tableau, on rappelle tout d'abord les caractéristiques des maillages initial et amélioré: nombre de tétraèdres, plus faible coefficient, plus fort coefficient, coefficient moyen et nombre d'arêtes. Un plus fort coefficient de 999 signifie que le plus mauvais tétraèdre de la topologie est pratiquement plat.

Le second tableau donne la répartition avant et après l'amélioration des coefficients des tétraèdres dans l'intervalle $[0,1000[$. Pour chaque intervalle $[0,100[$, $[100,200[$, , $[900, 1000[$ on fournit le nombre de tétraèdres dont le coefficient est compris dans cet intervalle. On distingue alors très nettement un déplacement global des tétraèdres vers la gauche du tableau et les différences sont les plus importantes pour les derniers intervalles $[800,900[$ et $[900,1000[$. Cette constatation est très intéressante; en effet, elle signifie que l'algorithme accorde implicitement une priorité à l'élimination des tétraèdres les plus mauvais qui sont ceux qui posent le plus de problèmes pour les calculs numériques qui suivront la construction du maillage.

Le dernier tableau montre la répartition du degré des arêtes pour la topologie initiale et la topologie améliorée. Rappelons que le degré d'une arête correspond au nombre de tétraèdres qui partagent cette arête; évidemment, quand l'arête est externe, c'est-à-dire composée de deux points situés sur la surface du domaine, son degré est corrigé en fonction de l'angle défini par les deux faces extérieures ayant en commun cette arête. Rappelons que le degré idéal moyen serait de l'ordre de 5,10 puisque l'angle entre deux faces d'un tétraèdre équilatéral est à peu près $70,5^\circ$ (son cosinus vaut exactement $1/3$). On espère bien sûr un resserrement des tétraèdres autour des degrés 5 et 6.

Remarque:

Puisqu'une arête ne peut pas être entourée uniquement par des tétraèdres équilatéraux, le coefficient moyen minimum que l'on peut atteindre n'est certainement pas zéro (0 correspondrait au cas irréaliste où tous les tétraèdres seraient équilatéraux). Pour tenter de donner une borne inférieure à ce coefficient moyen, on peut évaluer la meilleure manière d'entourer une arête par cinq tétraèdres identiques dont les faces forment entre elles un angle de 72° .

EXEMPLE E1

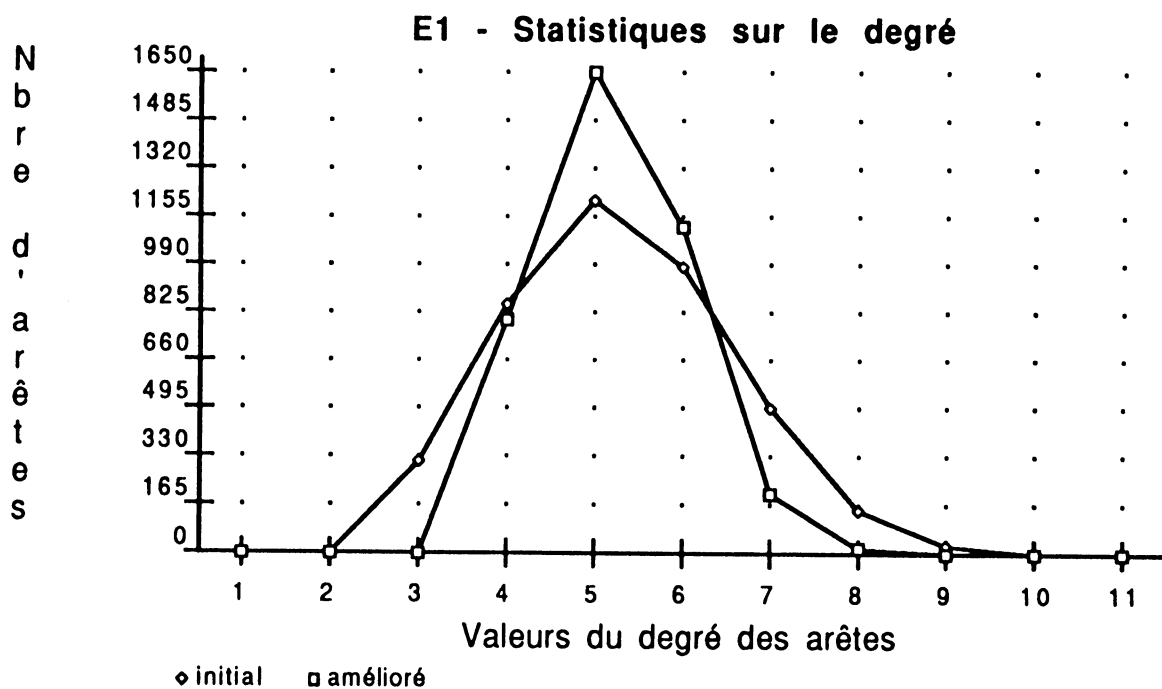
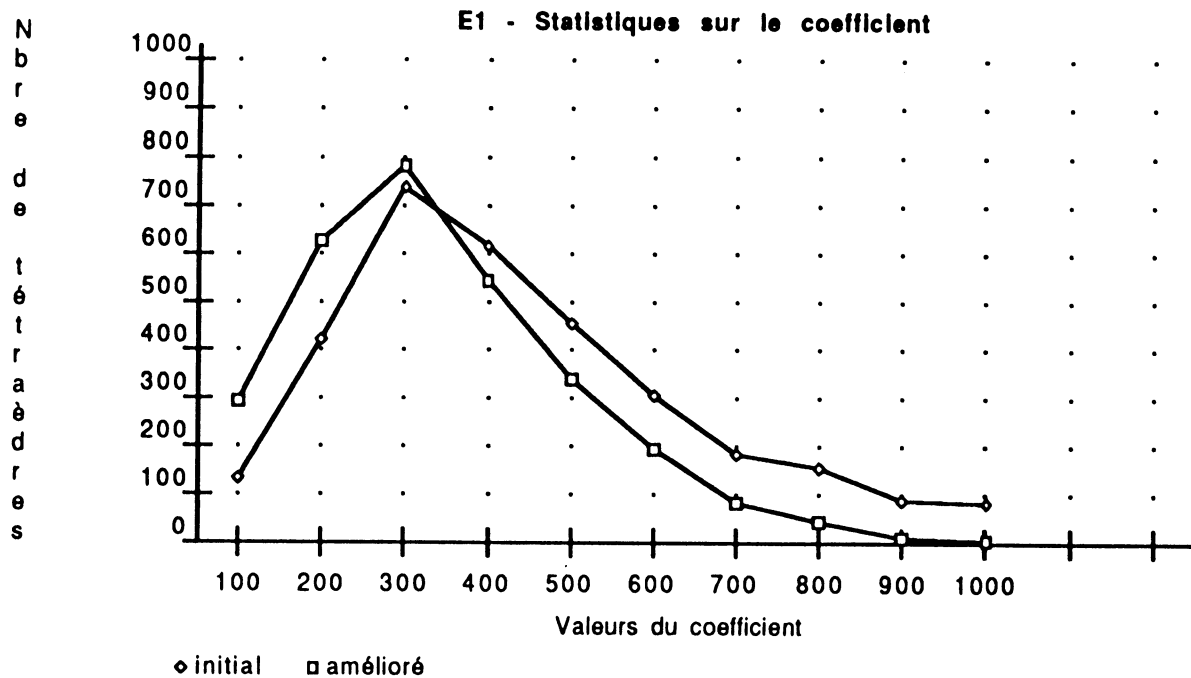
	nombre de tétraèdres	plus faible coefficient	plus fort coefficient	coefficient moyen	nombre d'arêtes
maillage initial	3181	17	999	386	4036
maillage amélioré	2934	7	999	291	3789

STATISTIQUES SUR LE COEFFICIENT DES TETRAEDRES

	100	200	300	400	500	600	700	800	900	
maillage initial	132	421	741	619	453	307	185	154	87	82
maillage amélioré	296	629	785	546	339	197	85	43	10	4

STATISTIQUES SUR LE DEGRE DES ARETES

degré des arêtes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	≥11
maillage initial	0	0	314	857	1213	983	496	144	27	2	0
maillage amélioré	0	0	0	797	1649	1118	203	22	0	0	0



EXEMPLE E2

	nombre de tétraèdres	plus faible coefficient	plus fort coefficient	coefficient moyen	nombre d'arêtes
maillage initial	2246	108	999	708	3401
maillage amélioré	2192	9	999	527	3347

STATISTIQUES SUR LE COEFFICIENT DES TETRAEDRES

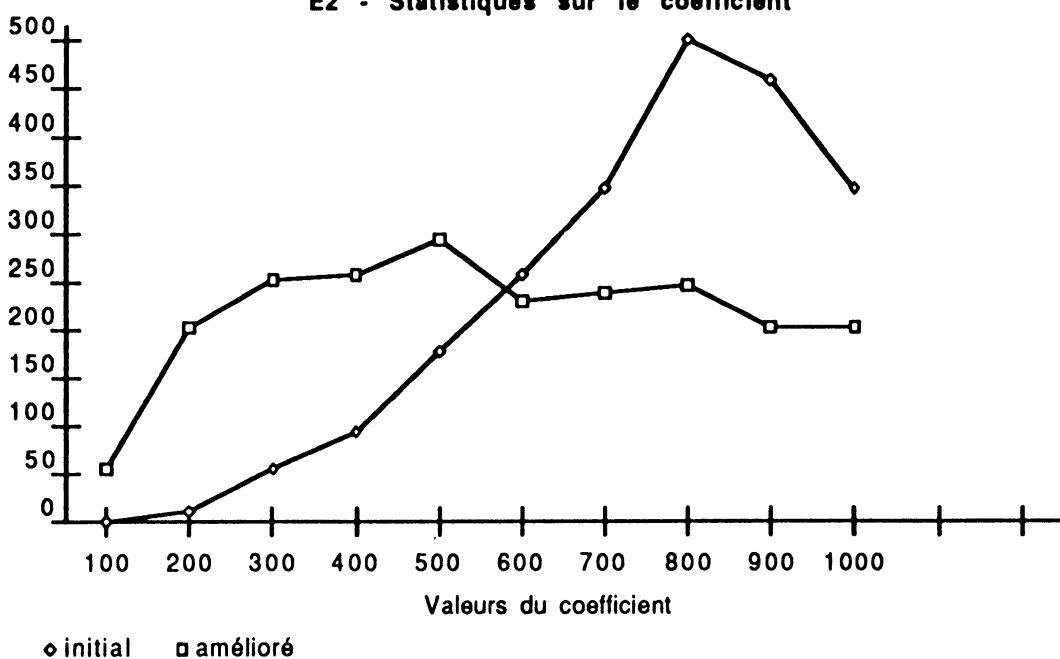
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	
maillage initial	0	10	55	94	178	257	347	499	458	348
maillage amélioré	56	203	254	259	295	231	239	248	203	204

STATISTIQUES SUR LE DEGRE DES ARETES

degré des arêtes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	≥11
maillage initial	0	5	78	873	1269	747	260	136	22	7	4
maillage amélioré	0	0	40	770	1361	861	248	49	17	1	0

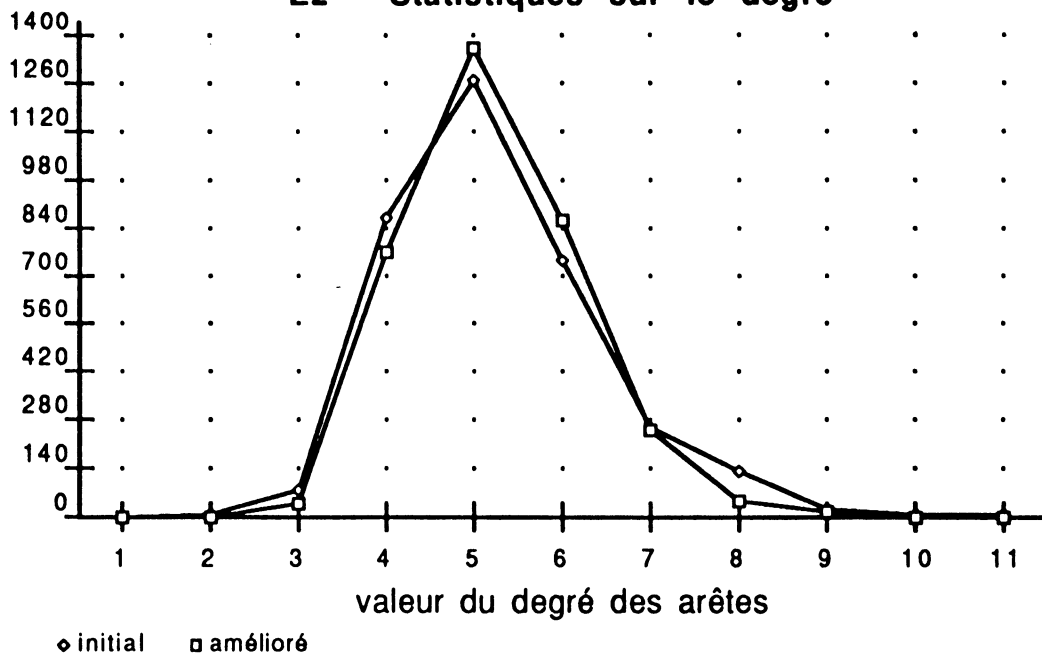
N
b
r
e
d
e
t
é
t
r
a
è
d
r
e
s

E2 - Statistiques sur le coefficient



N
b
r
e
d
'a
r
ê
t
e
s

E2 - Statistiques sur le degré



EXEMPLE E3

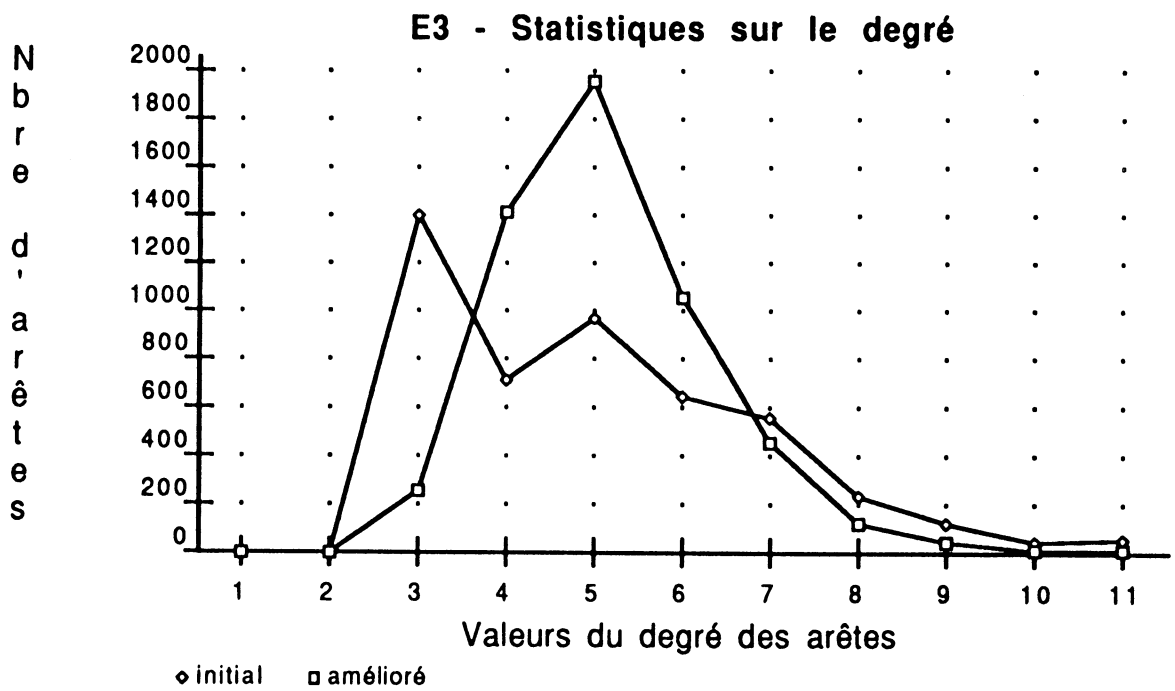
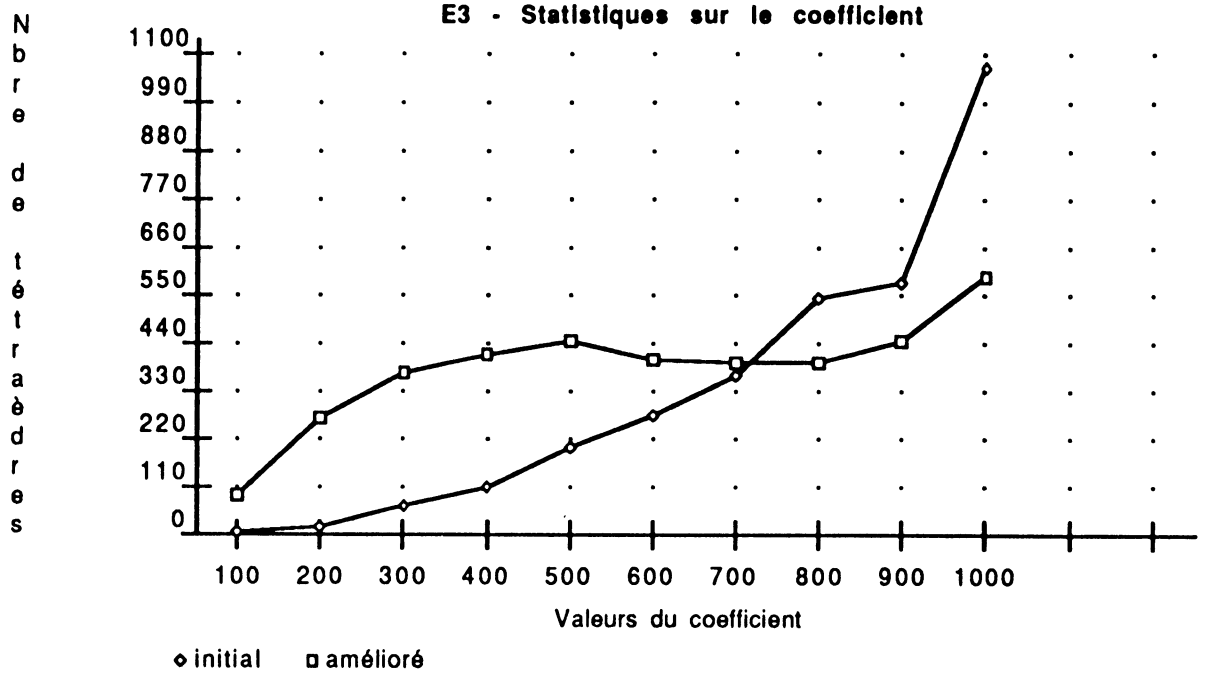
	nombre de tétraèdres	plus faible coefficient	plus fort coefficient	coefficient moyen	nombre d'arêtes
maillage initial	3248	39	999	762	4737
maillage amélioré	3823	3	999	577	5312

STATISTIQUES SUR LE COEFFICIENT DES TETRAEDRES

	100	200	300	400	500	600	700	800	900	
maillage initial	5	20	70	110	204	276	365	545	583	1070
maillage amélioré	89	269	373	413	444	402	400	396	444	593

STATISTIQUES SUR LE DEGRE DES ARETES

degré des arêtes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	≥11
maillage initial	0	4	1398	714	964	642	556	230	127	48	54
maillage amélioré	0	0	253	1411	1955	1052	461	119	42	13	6



La dernière remarque à faire sur ces chiffres concerne l'évolution du nombre de tétraèdres. Nous avons déjà montré que ce nombre n'est pas constant pour toutes les topologies réalisables d'un même domaine. Il est bien difficile de dire a priori si après l'optimisation ce nombre va croître ou diminuer. Nous avons seulement constaté que pour les exemples dont la topologie initiale était construite à partir de polygones de Voronoï (algorithme de type Delaunay), le nombre de tétraèdres diminue dans une large mesure (au total des six sous-volumes traités, l'optimisation a permis de supprimer 247 tétraèdres sur 3181 au départ, ce qui représente une réduction de l'ordre de 7,75%). Par contre, si pour l'exemple E2 le nombre de tétraèdres est à peu près conservé, l'optimisation sous-polyédrale associée au barycentrage a ajouté 575 tétraèdres dans l'exemple E3, ce qui équivaut à peu près à une augmentation de 17,7%.

3.8.2. Applications en milieu industriel

Les deux tests présentés maintenant ont été réalisés en collaboration avec la société Avions Marcel Dassault / Bréguet Aviation (AMD / BA). Le premier concerne l'amélioration d'un maillage autour d'une ellipse composée initialement de 2011 noeuds, 9638 tétraèdres et 12321 arêtes. Le coefficient mesurant la qualité initiale vaut 511; le processus d'optimisation a été le suivant:

	valeur du coefficient
- maillage initial	511
- 2 itérations de l'algorithme d'optimisation sous-polyédrale	482
- 5 itérations de barycentrage	426
- 5 itérations de l'algorithme d'optimisation sous-polyédrale	337
- 5 itérations de barycentrage	331
- 1 itération de l'algorithme d'optimisation sous-polyédrale	318

25 mn CPU sur IBM 3090 ont permis d'aboutir à ce résultat pour ce qui concerne la version prototype de l'algorithme: la topologie finale comporte 9712 tétraèdres et 12395 arêtes; l'amélioration du coefficient moyen représente un pourcentage de 37,7%. Le nombre de tétraèdres reste stable puisqu'il n'y a eu que 74 éléments supplémentaires créés au cours de l'optimisation.

ELLIPSOIDE

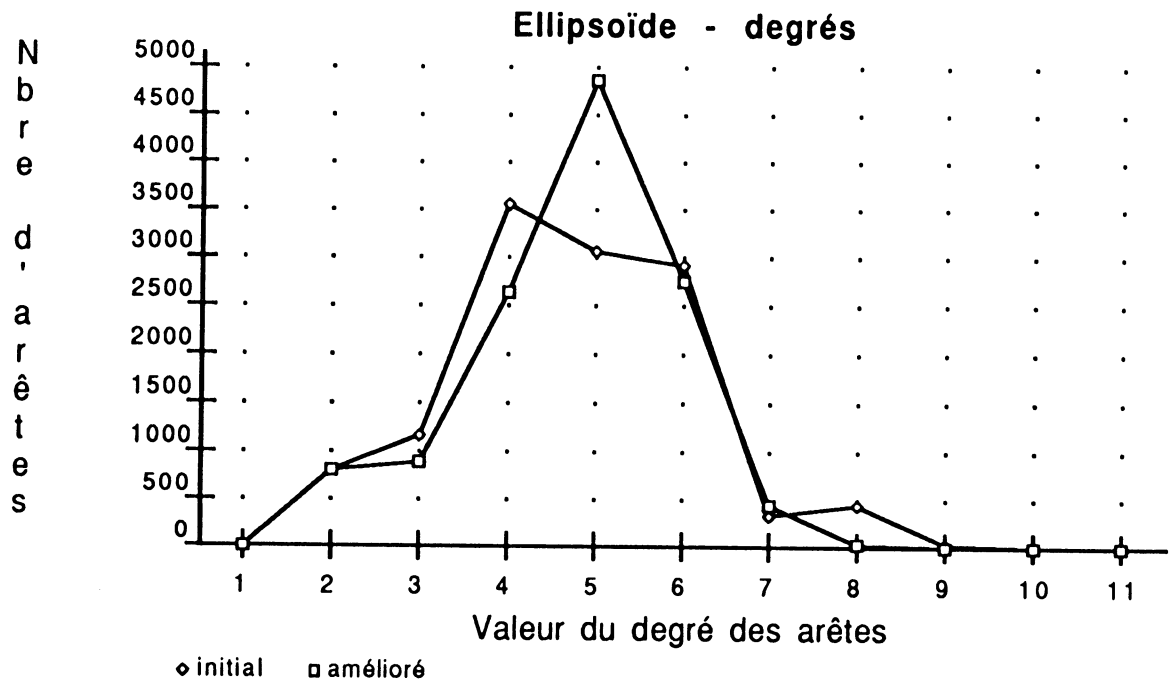
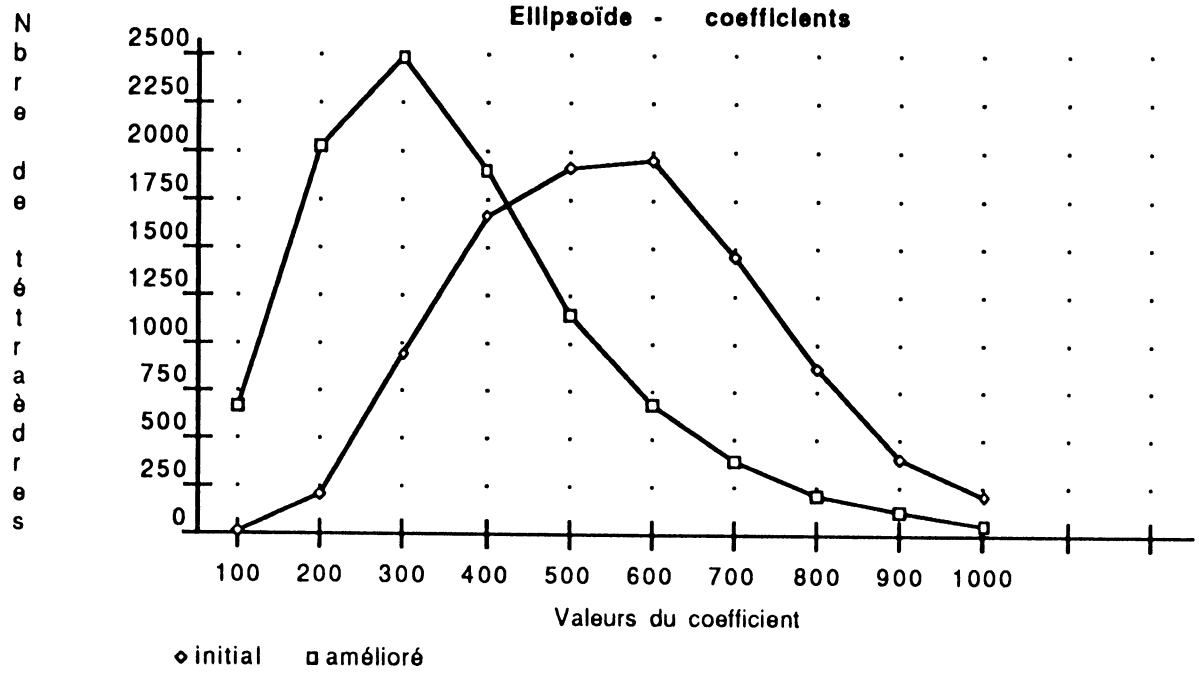
	nombre de tétraèdres	plus faible coefficient	plus fort coefficient	coefficient moyen	nombre d'arêtes
maillage initial	9638	32	999	511	12321
maillage amélioré	9712	3	999	318	12395

STATISTIQUES SUR LE COEFFICIENT DES TETRAEDRES

	100	200	300	400	500	600	700	800	900	
maillage initial	14	202	940	1668	1921	1952	1453	871	405	212
maillage amélioré	660	2033	2490	1902	1157	686	388	213	128	55

STATISTIQUES SUR LE DEGRE DES ARETES

degré des arêtes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	≥11
maillage initial	0	793	1156	3562	3069	2929	327	445	37	1	2
maillage amélioré	0	795	887	2643	4855	2737	441	36	1	0	0



Le second test a été effectué sur une géométrie difficile située autour d'une aile d'avion; le maillage était composé initialement de 3950 noeuds, 20473 tétraèdres et 25355 arêtes. Le coefficient mesurant la qualité initiale valait 523; la démarche suivie pour l'optimisation est retracée ci-dessous:

	valeur du coefficient
- maillage initial	523
- 5 itérations de barycentrage	478
- 5 itérations de l'algorithme d'optimisation sous-polyédrale	
itération 1	445
itération 2	425
itération 3	414
itération 4	408
itération 5	404
- 5 itérations de barycentrage	414
- 5 itérations de l'algorithme d'optimisation sous-polyédrale	
itération 1	388
itération 2	370
itération 3	360
itération 4	355
itération 5	353

Le résultat a été obtenu en 70 mn CPU sur IBM 3090 toujours avec la version prototype de l'algorithme: la topologie finale comporte 20528 tétraèdres et 25410 arêtes; l'amélioration du coefficient moyen représente un pourcentage de 32,5%. Le nombre de tétraèdres là aussi est resté stable puisque l'optimisation n'a ajouté que 55 mailles. Lors de sa première exécution, le barycentrage fait décroître le coefficient moyen; ensuite, on observe la convergence de l'algorithme d'optimisation après cinq itérations; une autre application du module de barycentrage dégrade la solution (le coefficient passe de 404 à 414) mais permet de relancer l'optimisation sous-polyédrale dans de nouvelles conditions puisque la convergence est apparente seulement après cinq autres itérations. Le processus tel qu'il est exposé ici, n'a pas encore définitivement convergé: après une autre application du module de barycentrage, l'optimisation sous-polyédrale serait à nouveau efficace, dans une moindre mesure bien sûr.

MAILLAGE AUTOUR D'UNE AILE D'AVION

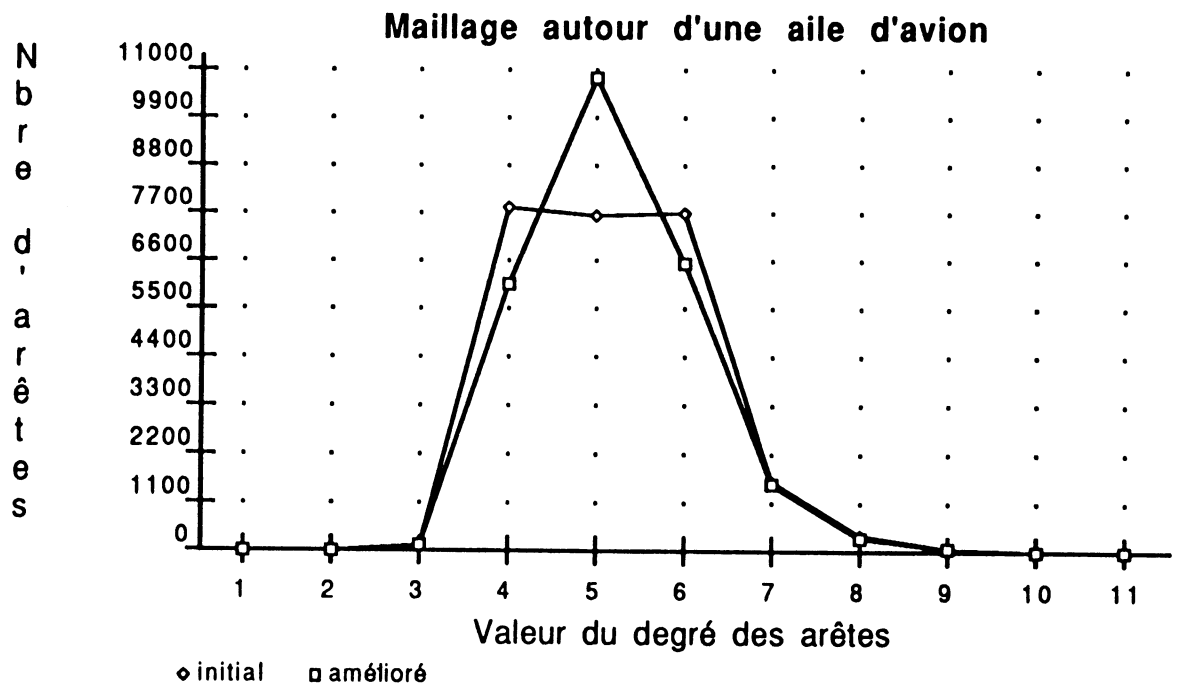
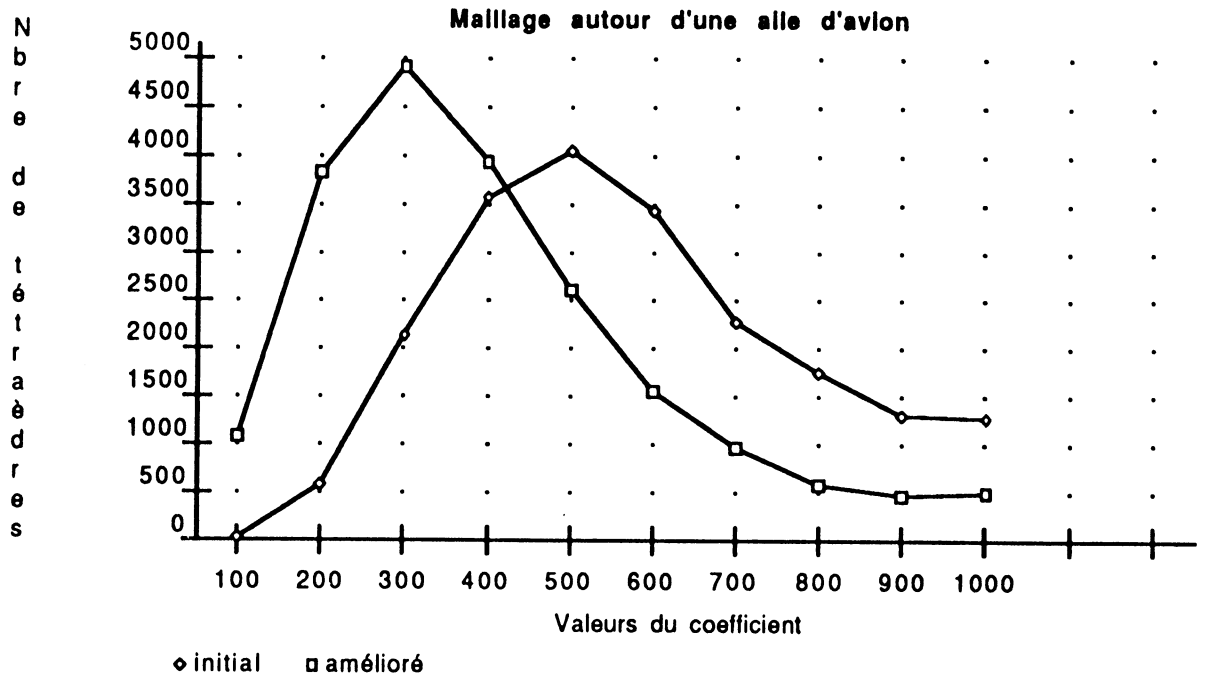
	nombre de tétraèdres	plus faible coefficient	plus fort coefficient	coefficient moyen	nombre d'arêtes
maillage initial	20473	39	999	523	25355
maillage amélioré	20528	9	999	353	25410

STATISTIQUES SUR LE COEFFICIENT DES TETRAEDRES

	100	200	300	400	500	600	700	800	900	
maillage initial	21	593	2151	3594	4051	3455	2280	1755	1300	1273
maillage amélioré	1085	3844	4904	3956	2623	1562	985	593	479	497

STATISTIQUES SUR LE DEGRE DES ARETES

degré des arêtes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	≥11
maillage initial	0	2	123	7843	7637	7674	1597	376	78	21	4
maillage amélioré	0	0	130	6062	10804	6524	1530	313	41	5	1



4. VERS UN ALGORITHME DE GENERATION DE MAILLAGES EN 3D

Ce dernier chapitre regroupe quelques idées qui mènent à l'élaboration d'un générateur de maillages tridimensionnels. La méthode qu'on présente ici tente de généraliser la démarche qui a été adoptée pour le cas 2D et qui consiste à traiter en deux étapes les problèmes de réalisabilité et d'optimisation de maillages. Au chapitre précédent nous avons étudié un algorithme d'optimisation dont les performances semblent a priori suffisantes pour se satisfaire d'un maillage initial moins soigné.

Soit D un domaine polyédral tridimensionnel à mailler; le contour de D est donné par un ensemble de points externes V_{ext} et un ensemble de faces externes triangulaires F_{ext} qui définissent le maillage de la peau de D . On donne également un ensemble V_{int} de points internes à D qui constitue sa discrétisation. Posons $V=V_{ext}\cup V_{int}$. On recherche une tétraèdrisation réalisable T de D (au sens où elle a été définie en introduction) pour obtenir un maillage $M=(D,V_{int},T)$ du domaine D de topologie T .

Le chapitre est divisé en quatre paragraphes qui traitent chacun d'une fonction particulière du processus de génération de maillages tridimensionnels. Dans la première partie on propose une solution pour améliorer le maillage de la peau du domaine, c'est-à-dire la qualité des faces triangulaires extérieures à D . La seconde partie est consacrée à l'étude de la génération proprement dite du maillage en tétraèdres à partir du contour de D . Les troisième et quatrième parties donnent des solutions simples pour ajouter et supprimer des points dans une tétraèdrisation réalisable en vue d'affiner le maillage.

4.1. Amélioration du maillage de la peau

La qualité du maillage de la peau du domaine D va influencer celle du maillage tout entier. A condition que l'on dénature pas le contour, on a donc intérêt à rechercher une topologie sur la peau du domaine qui soit la plus avantageuse possible.

Notons que le nombre de triangles qui composent le contour de D est fixé par le nombre de points extérieurs de V_{ext} . En effet puisque la surface fermée de D définit aussi un graphe planaire, la formule d'Euler nous permet d'identifier le nombre de faces (de triangles) t en fonction du nombre d'arêtes a et de points $n_e=|V_{ext}|$:

$$t = 2 + a - n_e$$

(contrairement au cas du maillage bidimensionnel, il n'existe ici aucune face infinie). Puisque

chaque arête appartient exactement à 2 triangles nous déduisons que $2a = 3t$ et que par conséquent

$$t = 2n_e - 4$$

Nous proposons de reprendre l'algorithme glouton présenté pour le cas bidimensionnel basé sur le changement de diagonales entre deux triangles voisins par une arête. En considérant que la fonction objective à optimiser représente l'équilatéralité moyenne des triangles sur le contour, le changement de diagonales entre deux triangles voisins ne sera effectué réellement seulement si, d'une part il conserve la réalisabilité du maillage (en 2D si le quadrilatère formé par les quatre points des deux triangles est convexe) et d'autre part si cette modification entraîne une amélioration de la fonction objective.

En 3D la réalisabilité du maillage ne se teste évidemment pas de la même manière. La conservation de la réalisabilité signifie que l'on doit assurer que les triangles ne s'intersectent pas ailleurs qu'en leurs points ou arêtes mais aussi que l'on n'a pas modifié la nature du contour en imposant un trop grand éloignement entre les surfaces contenant les deux triangles initiaux et les deux triangles formés après le changement de diagonale. D'un point de vue pratique, pour une valeur paramètre ϵ bien choisie, il suffit de tester que la distance entre les deux segments de droite correspondant aux deux diagonales ne dépasse pas ϵ . Par exemple, en posant $\epsilon=0$, on impose que les seuls changements de diagonales sur le contour seront réalisés pour deux triangles voisins par une arête qui se situent dans le même plan et tels que le quadrilatère composé des quatre points soit convexe (pour $\epsilon=0$, les deux segments doivent s'intersecter).

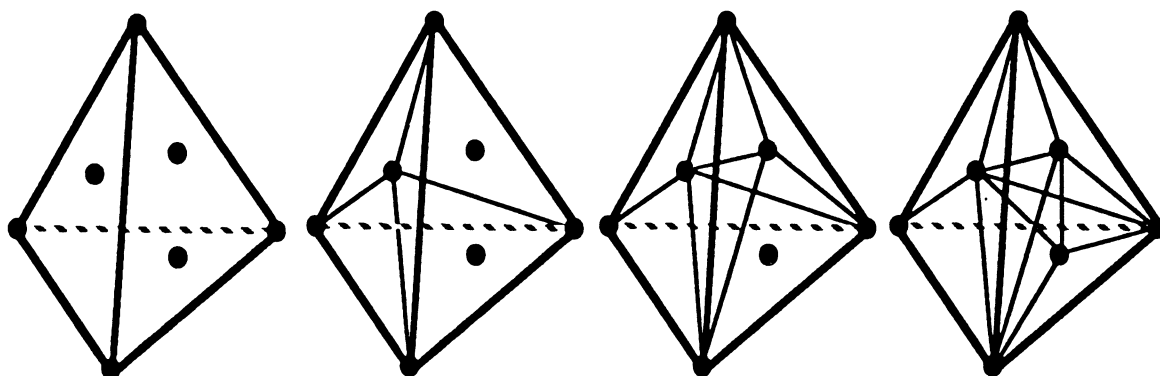
4.2. Génération à partir du maillage de la peau

Dans cette section, on s'intéresse à une méthode de génération du maillage du domaine D à partir des faces triangulaires du contour. Dorénavant, pour simplifier nos propos nous supposerons qu'il n'existe pas quatre points de V coplanaires (si tel n'est pas le cas, les idées exprimées ici restent valides, mais nécessitent quelques aménagements spécifiques). Rappelons que nous ne nous préoccupons pas de la qualité du maillage dans cette phase, le seul objectif étant de construire une topologie réalisable sur D .

D convexe:

N'importe quel segment de droite $[x,y]$ avec $x,y \in V$ est totalement contenu dans D . En choisissant un point $x \in V_{\text{ext}}$ et en créant toutes les arêtes de la forme $(x,y), y \in V, y \neq x$, on réalise une

tétraèdrisation de D qui ne comporte aucun point interne. Dans une seconde étape, pour chaque tétraèdre t formé, on relève l'ensemble des points internes qu'il contient; un point intérieur à t est introduit dans la topologie courante en le reliant aux quatre noeuds de t pour constituer quatre nouveaux tétraèdres qui remplaceront le tétraèdre t . En appliquant récursivement le principe de subdivision pour chaque point intérieur à t , on engendre une tétraèdrisation réalisable de D qui comprend tous les points de V_{int} et qui s'appuie sur les faces triangulaires du contour (dans le cas de dégénérescence où quatre points sont coplanaires, cette dernière étape doit intégrer les figures particulières où les points intérieurs ajoutés se trouvent sur une arête -ou une face- commune à plusieurs tétraèdres; de même le point x qui permet de construire la première tétraèdrisation sans point interne peut nécessiter un choix plus soigneux).



principe de subdivision pour l'introduction des points internes

Algorithme tétraèdrisation (convexe)

1. construire la tétraèdrisation initiale à partir d'un point x
2. constituer pour chaque tétraèdre la liste des points internes qu'il contient
3. pour chaque noeud interne (contenu dans le tétraèdre t)
 - remplacer t par les quatre tétraèdres obtenus par subdivision
 - mettre à jour la liste des points internes contenus dans ces nouveaux tétraèdres

fin

La première étape est réalisée en $O(|V_{ext}|)$ opérations; la seconde étape peut être exécutée en $O(|V|. \log |V|)$ en utilisant un système de projections qui permet de se ramener au problème de localisation de points dans le plan [26]. Enfin la dernière étape peut être achevée en $O(|V|)$ opérations en exploitant le résultat d'Edelsbrunner - Preparata - West [27] que nous citons pour l'algorithme de triangulation en 2D: pour un tétraèdre t renfermant m points internes $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, il existe un point $x_j \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ qui permette de subdiviser t en quatre

tétraèdres contenant chacun au plus $3m/4$ points des $(m-1)$ points restants $\{x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m\}$ et ce point peut être identifié en $O(m)$ opérations. La tétraèdrisation complète d'un convexe muni d'une discrétisation et d'un maillage de peau peut donc être construite en $O(|V| \cdot \log |V|)$ opérations.

Puisque le maillage de peau comporte $2|V_{ext}| - 4$ triangles, la première phase de l'algorithme construit $2|V_{ext}| - 4$ tétraèdres. Si le point choisi lors de cette étape est un point extérieur la phase de subdivision engendre $3|V_{int}|$ tétraèdres supplémentaires et $3(|V_{int}| - 1)$ tétraèdres dans le cas où il s'agit d'un point intérieur (les cas de dégénérescence amenés par la coplanarité de quatre points modifient sensiblement ce nombre).

D non convexe:

Définition:

On dira qu'une face $f=(x,y,z)$ est vue par un point w de V si le tétraèdre (w,x,y,z) est totalement contenu dans le domaine D .

On suppose que toutes les faces de F_{ext} peuvent être vues par au moins un point de V (dans le cas contraire, il n'existe évidemment pas de tétraèdrisation s'appuyant sur ce maillage de peau).

Soit w un noeud de V et $f=(x,y,z)$ une face extérieure de F_{ext} vue par le point w . Notons F_{vu} un ensemble de faces; à la première itération F_{vu} contient uniquement la face f . Une itération du processus consiste à augmenter F_{vu} en y intégrant parmi les faces voisines des faces figurant déjà dans F_{vu} , celles qui sont vues par w . On forme alors de nouveaux tétraèdres en joignant w à ces nouvelles faces. Quand F_{vu} ne peut plus être agrandi, on a constitué une tétraèdrisation d'un sous domaine connexe D' de D sans point intérieur. Par le processus de subdivision mentionné au paragraphe précédent on réalise la tétraèdrisation complète de ce sous-domaine D' en incorporant les points intérieurs qui apparaissent dans D' . On recommence alors le même procédé sur le domaine $D''=D-D'$, jusqu'à obtenir un domaine vide. A chaque nouvelle itération le nouveau maillage de peau de D'' est constitué par les faces de $F_{ext} - F_{vu}$ complétées par des faces triangulaires nouvelles apparues lors de la création de tétraèdres du type (w,x,y,z) ; ces faces peuvent facilement être identifiées au cours de la construction de ces tétraèdres.

Si la répartition des noeuds internes est satisfaisante et s'ils sont en suffisamment grand nombre, on aboutit sans problème au maillage complet de D . Toutefois même si initialement toutes les faces sont vues par un point de V , il peut se faire qu'à une étape précise l'une d'entre elles ne puisse plus être atteinte parce que les points par lesquelles elle était vue initialement ont été éliminés lors de la

réduction de D . Une manière d'éviter cette situation est de tester si la construction d'un nouveau tétraèdre ne fera pas disparaître de D des points internes ou externes qui restent indispensables pour continuer à atteindre l'ensemble des faces.

Grossièrement, l'algorithme général qui réalise la tétraèdrisation d'un domaine quelconque D pourrait s'écrire de la façon suivante (où F_{ext} représente l'ensemble des faces triangulaires qui délimitent son contour, V_{int} l'ensemble des noeuds internes correspondant à la discrétisation):

Tétraèdrisation (D, V_{int}, T)

{ T représente l'ensemble des tétraèdres construits par l'algorithme}

choisir $w \in V$ et $f \in F_{\text{ext}}$ et f vue par le point w

{soit x, y, z les 3 points de la face f }

$F_{\text{vu}} := \{f\}$; $T := \{(w, x, y, z)\}$

booleen:=vrai

tant que (booleen := vrai)

$F_{\text{cand}} := \{f_j / f_j \in F_{\text{ext}}, f_j \notin F_{\text{vu}} \text{ et } \exists f \in F_{\text{vu}} \text{ tq } f \text{ voisine de } f_j\}$

booleen:=faux

pour $j:=1, |F_{\text{cand}}|$

{soit (x_j, y_j, z_j) les trois points définissant f_j }

si f_j vu par w **alors**

si toutes les faces de $F_{\text{ext}} - F_{\text{vu}}$ restent vues par un point quand on enlève

les points de V contenus dans le tétraèdre (w, x_j, y_j, z_j) **alors**

$T := T \cup \{(w, x_j, y_j, z_j)\}$

booleen:=vrai

finsi

finsi

finpour

fin tantque

subdivision (T, V_{int}) {appliquer le principe de subdivision aux tétraèdres de T }

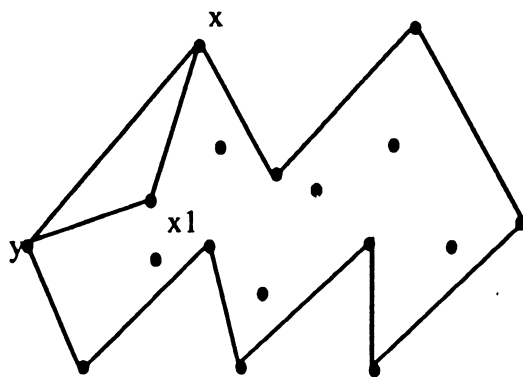
mise à jour de V et F_{ext} { D privé du sous-domaine constitué des tétraèdres de T }

si $V \neq \emptyset$ **alors** **Tétraèdrisation** (D, V_{int}, T)

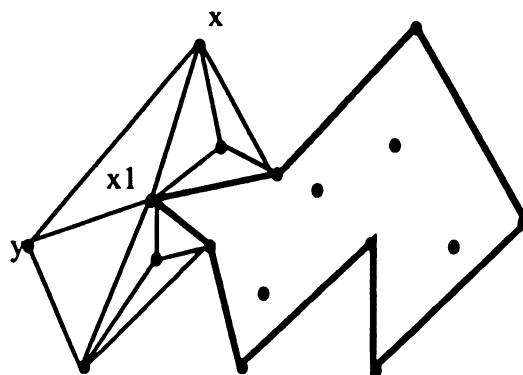
fin

S'il est délicat d'illustrer le raisonnement de l'algorithme sur un exemple tridimensionnel, nous pouvons toutefois le simuler sur un domaine plan non convexe en faisant ressortir les différentes

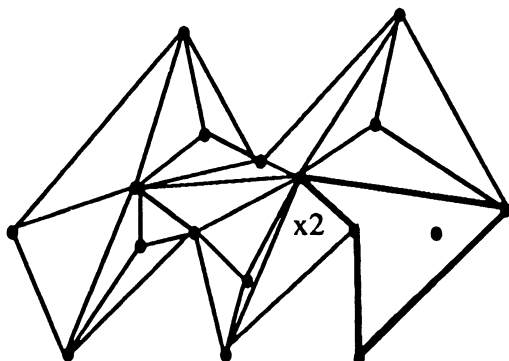
étapes (la notion de faces est bien sûr remplacée par celle d'arêtes); il est à noter cependant que dans le cas 2D, la traduction du test qui consiste à regarder si la construction d'un tétraèdre rend des faces extérieures non visibles devient ici obsolète (quelle que soit la forme du contour, n'importe quelle arête extérieure peut être vue par au moins un point - se rapporter au lemme du chapitre 2 de la première partie).



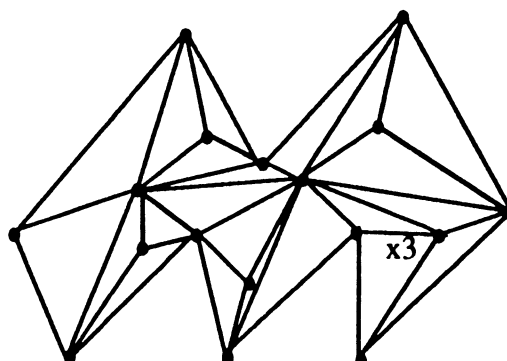
début de la procédure avec $w=x1$
l'arête extérieure f est ici (x,y)



première "tétraèdrisation" à partir de
suivie de la subdivision



"tétraèdrisation" à partir de $x2$
suivie de la subdivision



"tétraèdrisation" à partir de $x3$

après chaque itération le trait gras indique le domaine restant à mailler
(domaine obtenu après l'opération $D''=D-D'$)

Comme le montre l'exemple, la démarche appliquée au cas bidimensionnel conduit à un maillage réalisable en triangles; l'algorithme est cependant moins efficace que celui décrit au chapitre 2 de la première partie, mais sa justification repose sur les mêmes propriétés.

En 3 dimensions, le test pour conserver la visibilité de toutes les faces extérieures à tout moment de l'algorithme risque d'augmenter considérablement la complexité; toutefois les exemples réels comportent suffisamment de noeuds internes pour réduire cette phase à une vérification simple; en pratique la complexité totale de l'algorithme se résume donc à celle de la localisation des points (pour déterminer si une face $f=(x,y,z)$ est vue par un point w et pour rechercher les points internes situés dans le tétraèdre (w,x,y,z) dans le cas où ce tétraèdre est effectivement formé) [26].

Le cas des domaines non convexes avec trous se traite de façon analogue en choisissant à chaque appel de la procédure de tétraèdrisation un point w situé de préférence sur le maillage de la peau d'un trou.

Le nombre final de tétraèdres générés par un tel procédé reste assez complexe à évaluer puisqu'il dépend du nombre de fois que l'algorithme est obligé de considérer un domaine réduit; si dès le premier appel à la procédure de tétraèdrisation, chaque face extérieure a permis de construire un tétraèdre, le nombre total est identique au cas convexe : $2 |V_{ext}| + 3 |V_{int}| - 7$: en effet, dans le cas où le domaine D admet un noyau $Ker(D)$ non vide, en choisissant le point w à l'intérieur de ce noyau ($w \in V \cap Ker(D)$), on obtient ce nombre de tétraèdres, puisqu'un seul appel à la procédure de tétraèdrisation sera utile (quel que soit le numéro d'appel de la procédure de tétraèdrisation, le choix de w dans $V \cap N$ - si $V \cap N \neq \emptyset$ - permet de terminer l'algorithme puisque toutes les faces extérieures restantes seront vues par w).

affinement de l'algorithme et améliorations de la topologie

Les tétraèdres générés par cet algorithme seront en moyenne très plats (en particulier à cause de la phase de subdivision). L'algorithme d'amélioration que nous proposons au chapitre précédent permet de corriger la topologie ainsi obtenue. Toutefois, la question qui reste posée est de savoir si l'algorithme d'optimisation sous-polyédrale est suffisamment puissant pour faire disparaître complètement la structure du maillage liée à la méthode de génération qui est proposée ici. Sur de petits domaines non convexes (quelques centaines de points), la méthode de génération suivie d'une phase d'amélioration à l'aide de l'algorithme d'optimisation sous-polyédrale a permis d'obtenir des topologies de très bonne qualité, comparables à celles que l'on peut construire avec un algorithme de type Delaunay (le coefficient moyen qui mesure l'équilatéralité des mailles vaut aux alentours de 850 après la génération et est ramené vers 300 après l'optimisation).

Cependant sur des géométries plus grandes et plus complexes, il est fort probable que les performances soient beaucoup moindres: la mauvaise topologie livrée par l'algorithme de génération s'avèrera trop préjudiciable pour l'optimisation. Le moyen le plus sûr qui puisse

atténuer cet effet consiste à alterner régulièrement l'algorithme de génération et celui d'optimisation: après une phase de génération partielle (comportant par exemple la tétraèdrisation à partir d'un seul point w et la subdivision seulement sur un nombre très restreint de points internes) l'algorithme de d'amélioration est appliqué pour réorganiser la topologie sur une partie du domaine; le phénomène d'aplatissement des tétraèdres inhérent à la démarche de subdivision par les points internes est ainsi considérablement réduit (à la limite, pour un tétraèdre (w,x,y,z) enfermant m points internes qui nécessitent donc m subdivisions, on peut choisir d'appliquer très localement l'algorithme d'optimisation sous-polyédrale à chaque fois que l'on a opéré trois subdivisions).

4.3. Ajout de points

Pour permettre de raffiner le maillage en certaines zones du domaine, l'ajout de noeuds internes dans une topologie réalisable T peut devenir indispensable. Une démarche simple pour introduire un noeud v consiste à rechercher le tétraèdre T_i défini par les points (x,y,z,w) de T qui enferme v et à remplacer T_i en le subdivisant en 4 nouveaux tétraèdres (v,x,y,z) , (v,x,y,w) , (v,y,z,w) et (v,y,z,w) . Ensuite l'algorithme d'optimisation sous-polyédrale appliqué autour des nouveaux tétraèdres créés permettra d'améliorer localement la nouvelle topologie.

La recherche du tétraèdre T_i peut être coûteuse. Cependant, l'algorithme d'optimisation devient très sommaire puisqu'efficace que très localement; on évite par ce procédé trivial de devoir reconstruire une topologie ex-nihilo, en assurant pour le nouveau maillage des propriétés géométriques comparables au précédent.

4.4. Suppression de points

De même, dans le cas opposé où l'analyse de la solution détermine une trop forte densité de points en certaines parties du domaine, la suppression de noeuds peut être envisagée de la manière suivante: pour éliminer le noeud v , on répertorie dans la topologie tous les tétraèdres qui admettent v comme un de leurs sommets; ces tétraèdres forment un petit domaine - non nécessairement convexe- qu'on tétraèdrise à l'aide de l'algorithme présenté au paragraphe 4.2. Comme dans le cas de l'ajout de points, la phase d'optimisation sous-polyédrale qu'on fait suivre est très réduite car efficace que très localement. Précisons aussi que la recherche des tétraèdres admettant le noeud v comme sommet est simple puisqu'elle découle de la notion de voisinage entre tétraèdres.

CONCLUSIONS

L'étude présentée ici propose une démarche originale pour résoudre le problème de la génération de maillages triangulaires en deux dimensions et tétraédriques en trois dimensions: on choisit de traiter en deux étapes distinctes l'obtention d'un maillage réalisable et l'amélioration du maillage généré, suivant par exemple des critères géométriques faisant intervenir l'équilatéralité des mailles.

Dans la première partie de cette thèse nous avons étudié le cas bidimensionnel. On se donne un polygone défini par un contour non nécessairement convexe et un ensemble de points intérieurs qui représente sa discrétisation; on montre que la génération d'un maillage triangulaire s'appuyant sur les points du contours et de la discrétisation est toujours possible. L'algorithme exposé a une complexité théorique $O(n^2)$ plus élevée que les meilleurs algorithmes classiques ($O(n \log n)$) mais présente l'avantage d'avoir un comportement pratique très intéressant.

L'algorithme d'amélioration topologique que nous avons suggéré est à la fois de mise en oeuvre facile et efficace dans la pratique puisqu'il conduit très souvent à l'optimum et dans tous les cas à une solution très proche de la triangulation optimale. Il utilise l'opération élémentaire simple du changement de diagonale: entre deux triangles voisins par une arête, définissant un quadrilatère convexe, on retient la diagonale qui optimise localement la triangulation. On montre que cette opération élémentaire permet, à partir d'une solution initiale admissible, d'atteindre toutes les autres triangulations réalisables.

Cet algorithme itératif paraît suffisamment robuste et fiable pour se satisfaire en 2D d'algorithmes de génération très sommaires, qui ne prennent pas en compte directement une quelconque régularité des triangles.

Dans la seconde partie consacrée au cas tridimensionnel, on a mis l'accent sur la construction d'algorithmes d'amélioration topologique qui restent très efficaces même sur des maillages initiaux déjà réguliers.

Les différentes approches qui sont proposées ici utilisent toutes, à des degrés divers, les mêmes opérations élémentaires: pour deux tétraèdres reposant sur une même face triangulaire, on ajoute l'arête reliant le quatrième point des deux tétraèdres quand celle-ci traverse le triangle commun; dans la nouvelle topologie, on remplace les deux tétraèdres par trois nouveaux apparus avec l'ajout de l'arête. L'opération réciproque consiste à supprimer une arête entourée par exactement trois tétraèdres pour former deux nouveaux tétraèdres. La question reste ouverte de savoir si cette opération est aussi puissante que le changement de diagonale en 2D: à partir d'une tétraèdrisation initiale admissible, les opérations d'ajout et de suppression d'arêtes utilisées en séquence, permettent-elles de visiter toutes les topologies réalisables?

Nous analysons et comparons sur des exemples industriels, le comportement de trois algorithmes: le premier est de type descendant; ses performances sont très limitées puisqu'il se bloque très rapidement dans un optimum local peu profond. Le second algorithme, fondé sur le principe du recuit simulé, est plus efficace que le précédent mais exige une vitesse de convergence lente qui risque de le rendre inexploitable d'un point de vue industriel sur des topologies constituées de plusieurs dizaines de milliers de tétraèdres. Toutefois, l'analyse que nous proposons vaut pour un algorithme prototype, pour lequel on peut affiner les paramètres: en particulier il paraît souhaitable d'envisager d'autres modes de décroissance de la température.

Enfin le dernier algorithme semble très prometteur puisqu'il provoque des améliorations spectaculaires sur des maillages initiaux bien disposés comme ceux générés par des algorithmes de type Delaunay, mais aussi sur des solutions initiales moins régulières comme celles obtenues à la suite de génération par couches bidimensionnelles habilement jointes. Il consiste à optimiser de manière quasi-exhaustive le polyèdre formé des tétraèdres qui entourent une arête de la topologie. Pour que la position des noeuds ne reste pas trop préjudiciable, on lui a associé un module de barycentrage qui repositionne chaque point de la discrétisation. A chaque itération, la complexité de l'algorithme peut s'exprimer de façon linéaire par rapport au nombre d'arêtes de la topologie traitée. Nous avons montré cependant qu'il est très utile de prévoir plusieurs itérations pour converger.

Dans le dernier chapitre, on a exposé un algorithme de génération à partir du maillage de la peau et de la discrétisation donnée par un ensemble de points intérieurs. L'objectif est de fournir une topologie réalisable quelle que soit la configuration du domaine (convexe ou non convexe, avec ou sans trou intérieur). La solution que nous imaginons construit des topologies très irrégulières mais sur lesquelles les algorithmes exposés plus haut induisent des améliorations conséquentes. Dès que la taille du domaine devient importante, l'efficacité pratique de l'algorithme de génération se résume aux problèmes de localisation de points.

A travers cet algorithme simple de génération, l'objectif était de montrer qu'en 3D aussi on peut se satisfaire d'algorithmes de génération ne considérant pas la régularité des mailles. Toutefois, sur les quelques tests que nous avons effectués, il apparaît qu'il faut prendre soin de prévoir convenablement des phases d'optimisation au cours du processus de génération pour ne pas engendrer de géométries irrémédiables.

Le dernier algorithme d'amélioration présenté ici - associant changements topologiques et non topologiques - paraît aussi pouvoir être utilisé de façon intéressante lors de la phase d'adaptation du maillage nécessitant l'ajout et la suppression de noeuds, pour garantir des calculs sur des topologies aux propriétés géométriques similaires.

Enfin les différents algorithmes tridimensionnels étudiés ici se prêteront facilement à des analyses de parallélisation: intuitivement les subdivisions, ne serait-ce que géométriques, d'un problème de maillages de grande taille en sous-problèmes restreints paraissent presque naturelles et devraient apporter d'autres solutions encourageantes pour les applications industrielles, au moins en terme de complexité de calculs. Il est probable également que l'approche "parallèle" du problème de tétraèdrisation aide à comprendre comment faire varier la température dans l'algorithme de recuit simulé pour que ses performances pratiques rejoignent celles de l'algorithme sous-polyédral.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **AARTS - LAARHOVEN:**
Simulated annealing: Theory and Applications.
Mathematics and its Application
Published by D. Reidel Publishing Company - Holland
- [2] **AFZALI:**
Plane intersections of a three-dimensional mesh
Short Communications, January 1982, p1253 - 1259
- [3] **ARTEMIS (laboratoire):**
Journées sur la génération automatique et l'adaptation de maillages
1 et 2 octobre 1987 - laboratoire ARTEMIS - GRENOBLE
- [4] **AZENCOTT:**
Algorithmes de recuit en imagerie
Société Mathématique de France - Assemblée générale du 25 - 01 - 86
- [5] **BANK - SHERMAN - WEISER:**
Refinement algorithms and data structures for regular local mesh
refinement
Scientific Computing - R. Stepleman et al (eds)
IMACS / North Holland Publishing Company - 1983
- [6] **BARNHILL - BIRKHOFF - GORDON:**
Smooth interpolation in triangles
Journal of Approximation Theory - Vol 8 - p114 - 128 ; 1973
- [7] **BARTEN:**
Automated finite element grid break-up method - a verification of the six
node averaging approach
Computer and Graphics - Vol 2 - p75 - 79
- [8] **BOWYER:**
Computing Dirichlet tessellations
The Computer Journal - Vol 14, N°2 - 1981
- [9] **BROWN:**
A non-interactive method for the automatic generation of finite element
meshes using the SCHWARZ - CHRISTOFFEL transformation
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering
Vol 25 - p101 - 126; 1981
- [10] **BUELL - BUSH:**
Mesh generation - a survey
Journal of engineering for industry - February 1973 p332 - 338
Transactions of the ASME
- [11] **BURKARD - RENDL:**
A thermodynamically motivated simulation procedure for combinatorial
optimization problems
European Journal of Operational Research - 1983
- [12] **BYKAT :**
Automatic generation of triangular grid:
1. subdivision of a general polygon into convex subregions
2. triangulation of convex polygons
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol 10, p1329 - 1342; 1976
- [13] **CAVENDISH:**
Automatic triangulation of arbitrary planar domains for the finite element
method
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol 8, p679 - 696; 1974

- [14] **CAVENDISH:**
Local mesh refinement using rectangular blended finite elements
Journal of computational physics - Vol 19 - p211 - 228; 1975
- [15] **HAZELLE - INCERPI:**
Triangulation and shape-complexity
ACM Transactions on graphics
Vol 3 - Number 2 - April 1984 -p135-152
- [16] **CHEW:**
Constrained Delaunay triangulations
1987 ACM 0-89791-231-4/87/0006/0215
- [17] **CHRISTENSEN:**
A note on geodesic polyedra: triangulation and contouring of spheres
Computer and Graphics - Vol 3 - p163- 165
- [18] **COHEN:**
A method for the automatic generation of triangular elements on a surface
Short Communications, August 1979, p470 - 473
- [19] **COOK:**
Body oriented (natural) co-ordinates for generating three dimensional meshes
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol 8, p27 - 43; 1974
- [20] **CUA :**
Amélioration de maillages par des méthodes de sous-gradient
Thèse de 3ième cycle - Octobre 1985
Université Scientifique Technologique et Médicale de Grenoble.
Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [21] **DENAYER:**
Automatic generation of finite element meshes
Computers and structures - Vol 9 - p359 - 364; 1978
- [22] **DESRUES:**
Sur l'application de la stéréophotogrammétrie à la mesure des grandes déformations
Revue française de mécanique. N° 1983 - 3
- [23] **DILLEN COURT:**
Toughness and Delaunay triangulations
1987 ACM 0-89791-231-4/87/0006/0186
- [24] **DILLEN COURT:**
A non-hamiltonian, non degenerate triangulation
Information Processing Letters 25 - 1987 - p 149-1516
- [25] **DUROCHER - GASPER:**
A versatile two-dimensional mesh generator with automatic bandwidth reduction
Computers and structures - Vol 10 - p561 - 575; 1979
- [26] **EDELSBRUNNER :**
Algorithms in combinatorial geometry
EATCS - Springer Verlag
- [27] **EDELSBRUNNER - PREPARATA -WEST:**
Tetrahedrizing point sets in three dimensions
Department of computer science report n°1310
University of Illinois at Urbana - Champaign ; november 1986

- [28] FOURNIER - MONTUNO :
Triangulating simple polygons and equivalent problems
ACM Transactions on Graphics. Vol 3 n°2, April 1984.
- [29] FREDERICK - WONG - EDGE:
Two-dimensional automatic mesh generation for structural analysis
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol 2, p133 - 144; 1970
- [30] GANAPATHY - DENNEHY:
A new general triangulation method for planar contours
Computer Graphics - Vol 16 - Number 3 -July 1982
- [31] GAREY - JOHNSON:
Computer and Intractability, a Guide to the Theory of NP-Completeness
Freeman, San Francisco, 1979
- [32] GAREY - JOHNSON - PREPARATA - TARJAN:
Triangulating a simple polygon
Information Processing Letters - Vol 7 - N° 4 - June 1978
- [33] GEORGE:
La conception descendante appliquée à la réalisation concrète d'un maillage
Rapport technique n°52 - INRIA - France
- [34] GEORGE: MODULEF: génération automatique de maillages
INRIA Rocquencourt FRANCE
- [35] GHASSEMI:
Automatic mesh generation scheme for a two or three dimensional triangular curved surface
Computers and Structures - Vol 15 - Number 6 - p613-626; 1982
- [36] GORDON - HALL:
Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol 7, p461 - 477; 1973
- [37] GREEN - SIBSON:
Computing Dirichlet tessalations in the plane
The Computer Journal - Vol 21 - number 2
- [38] HERMELINE :
Triangulation automatique d'un polyèdre en dimension N
RAIRO Vol 16 n°3, 1982, p 211 - 242.
- [39] IMAKUFU - KODERA - SAYAWAKI - KONO :
A generalized automatic mesh generation scheme for finite element method
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol 15, p713- 731; 1980
- [40] INRIA:
Journées sur la génération automatique et la visualisation des maillages
15 - 16 décembre 1982 Rocquencourt - Clamart - FRANCE
- [41] JONES :
A self-organizing mesh generation program
Journal of Pressure Vessel Technology - August 1974 - p193 - 199
Transactions of the ASME

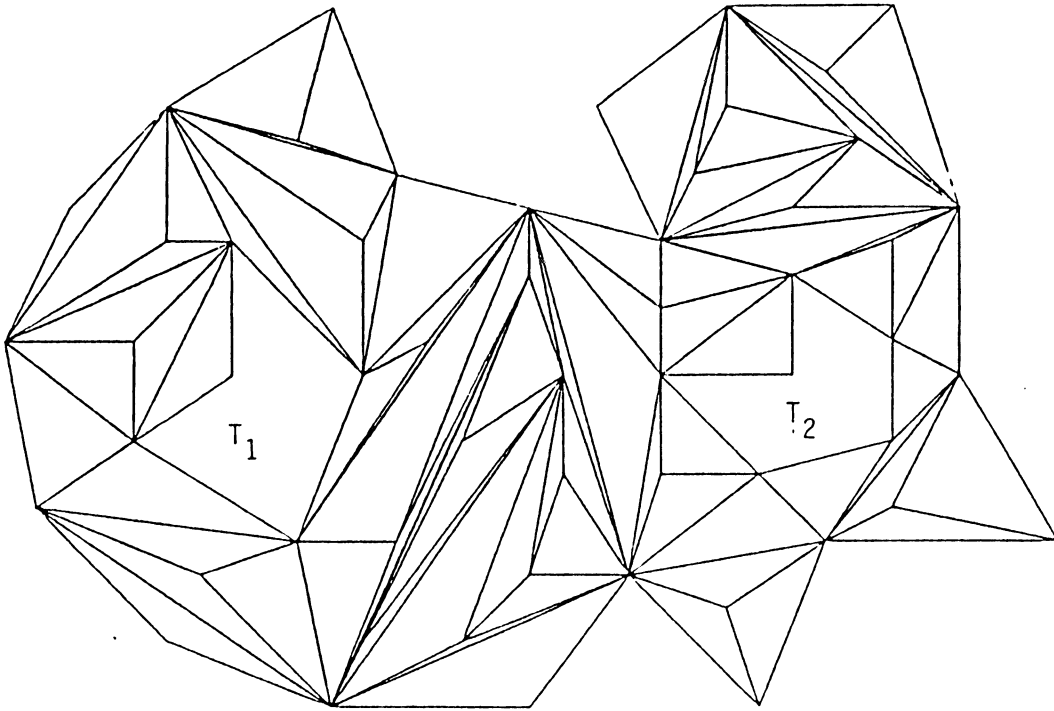
- [42] **KAMEL - EISENSTEIN:**
Automatic mesh generation in two and three dimensional inter-connected domains
High Speed Computing of elastic Structures, Proc. Symp. Int. Union of Theoretical and Applied Mechanics, Liège, August 23 - 28, 1970
Les congrès et colloques de l'Université de Liège, 1971 - Vol 61
- [43] **KAMEL - SHANTA:**
A solids mesh generator and result display package
Journal of Pressure Vessel Technology - August 1974 - p207 - 213
Transactions of the ASME
- [44] **KIRKPATRICK:**
A note on Delaunay and optimal triangulations
Information Processing Letters - Vol 10 - Number 3 ; 1980
- [45] **KIRKPATRICK - GELATT - VECCHI :**
Optimization by simulated annealing
Science 220, p671 1983
- [46] **KLEINSTREUER - HOLDEMAN:**
A triangular finite element mesh generator for fluid dynamic systems of arbitrary geometry
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol 15, p1325- 1334; 1980
- [47] **LAWSON:**
Properties of n-dimensional triangulations
Computer Aided Geometric Design 3 (1986) p231 - 246
North - Holland
- [48] **LEE:**
Two-dimensional voronoi diagrams in the L_p -metric
Journal of the association for Computing Machinery
Vol 27 - Number 4 - October 1980 - p604 - 618
- [49] **LEE - PENNINGTON - SHAW:**
Automatic finite element mesh generation from geometric models - a point-based approach
ACM Transactions on Graphics - Vol 3 - N° 4 - October 1984- p287-311
- [50] **LEICK - POTVIN:**
Automated mesh generation for tubular joint stress analysis
Computers and structures - Vol 7- p73 - 91; 1977
- [51] **LEWIS - ROBINSON:**
Triangulation of planar regions with applications
The Computer Journal - Vol 21 - number 4
- [52] **LINGAS :**
The greedy and the Delaunay triangulation are not bad in the average case.
Information Processing Letters 22, 1986 North Holland.
- [53] **LINGAS:**
The greedy triangulation heuristic for minimum weight triangulation of convex polygons approximates the optimum
Research report LITH - IDA - R 86 - 11 - ISSN - 0281 - 4250
Linköping -Sweden
- [54] **LLOYD:**
On Triangulations of a set of points in the plane
Proceedings of the 18th annual IEEE Conference on the Foundations of Computer Science, Providence

- [55] LUNDY - MEES:
Convergence of an annealing algorithm
Mathematical Programming - Vol 34 - p111 - 124; 1986
- [56] MANACHER - ZOBRIST :
Neither the greedy nor the Delaunay triangulation of a planar set
of points approximates the optimum triangulation.
Information Processing Letters Vol 9 n°1, July 1979.
- [57] MAUS:
Delaunay triangulation and the convex hull of n points in expected linear
time
BIT - Vol 24; 1984 - p151-163
- [58] McLAIN:
Two Dimensional interpolation from random data
The Computer Journal - Vol 19 - number 2
- [59] NGUYEN-Van-Phai :
Automatic Mesh Generation with Tetrahedron Elements
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol 18, p273 - 289; 1982
- [60] OOSTEROM:
Triangulating the human torso
The Computer Journal - Vol 21 - number 3
- [61] PISSANETZKY:
KUBIK: An automatic 3D finite element mesh generator
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol 17, p255 - 269; 1981
- [62] PLAISTED - HONG:
A heuristic triangulation algorithm
Journal of Algorithmes 8, p405-437 ; 1987
- [63] POULETTY :
Génération et optimisation de maillages en éléments finis
Application à la résolution de quelques équations en mécanique
des fluides. Thèse de Docteur - Ingénieur. Décembre 1985
Ecole Centrale des Arts et Manufactures . Paris.
- [64] PREPARATA - HONG:
Convex hulls of finite sets of points in 2 and 3 dimensions
Programming technics - Communications of ACM
February 1977 - Vol 20 - number 2
- [65] PREPARATA - SHAMOS:
Computational Geometry: An Introduction
Springer-Verlag - New-York - 1985
- [66] RENNELAER POLYTECHNIC INSTITUTE:
Workshop on the integration of finite element modeling with geometric
modeling - May 1987
Center for interactive computer graphics
Rensselaer Polytechnic Institute - Troy, New-York 12180 -3590
- [67] RIVARA:
Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptative
and multigrid techniques
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol 20, p745 - 756; 1984
- [68] ROTHSCHILD - STRAUS:
On triangulations of the convex hull of n points
Combinatorica - Vol 5- Number 2; 1985 - p167-179

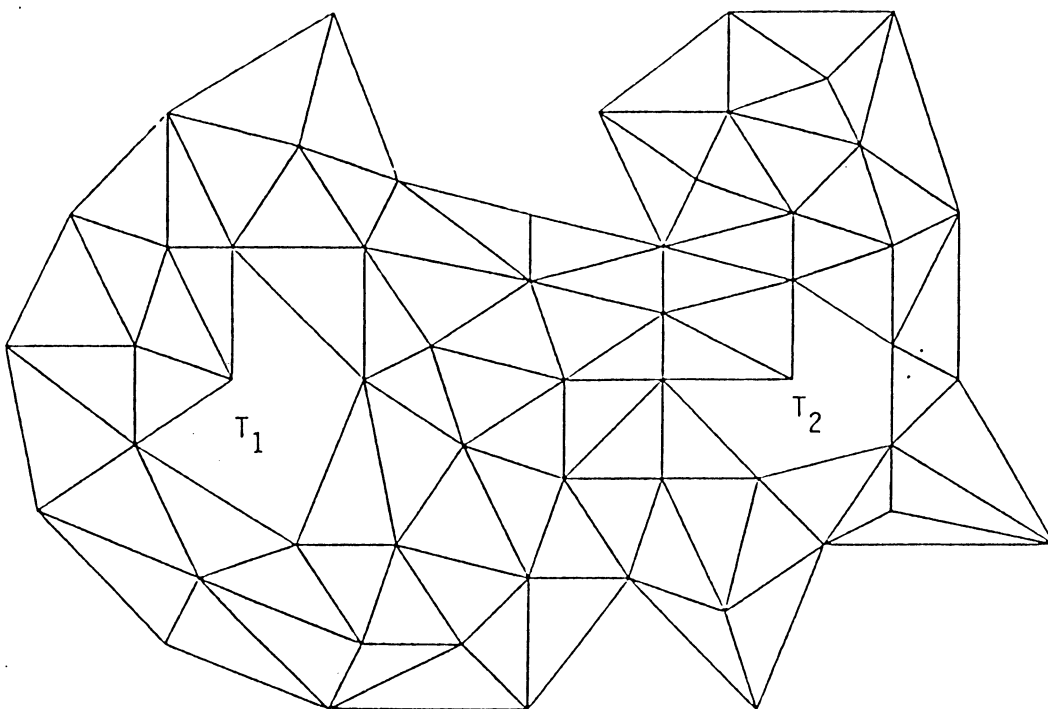
- [69] SAALFELD:
Joint triangulations and triangulation maps
1987 ACM 0-89791-231-4/87/0006/0195
- [70] SADEK:
A scheme for the automatic generation of triangular finite elements
International Journal of Numerical Methods in Engineering
Vol 15, p1813- 1822; 1980
- [71] SCHUMAKER:
Triangulation Methods
Communication au congrès Approximation à Siantago du CHILI
Decembre 1986 - A paraître dans Academic Press
- [72] SHAW - PITCHEN:
Modifications to the SUHARA-FUKUDA method of network generation
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol 12, p93 - 99; 1978
- [73] SHEPARD :
Finite element modeling within an integrated geometric modeling
environment; part1: mesh generation
Engineering with Computers - Vol 1 - p61 - 71; 1985
- [74] SHEPARD - YERRY:
Automatic 3D mesh generation by the modified-octree technic
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol 20, p1965 - 1990; 1984
- [75] SIBSON:
Locally equiangular triangulations
The Computer Journal - Vol 21 - number 3
- [76] SIEDEL:
On the number of faces in higher-dimensional Voronoï diagrams
1987 ACM 0-89791-231-4/87/0006/0181
- [77] STEFANOÛ - SYRMAKEZIS:
Automatic triangular mesh generation in flat plates for finite elements
Computers and structures - Vol 11- p439 - 464 - 1980
- [78] STEINMULLER:
Restrictions in the application of automatic mesh generation schemes by
'isoparametric' co-ordinates
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol 8, p289 - 294 ; 1974
- [79] TALON:
Algorithmes de génération et d'amélioration de maillages en 2D
Rapport technique n°20 - Mars 1987
laboratoire ARTEMIS - IMAG - GRENOBLE
- [80] TALON:
Algorithmes d'amélioration de maillages en 3D
Rapport technique n°25 - Juin 1987
laboratoire ARTEMIS - IMAG - GRENOBLE
- [81] TOULOUSE:
Applications de la physique statistique aux problèmes complexes
preprint - 1985
- [82] WANG - SCHUBERT:
An optimal algorithm for constructing the Delaunay triangulation of
a set of line segments
1987 ACM 0-89791-231-4/87/0006/0223

- [83] WATSON:**
Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application
to Voronoi polytopes
The Computer Journal, Vol24 - N°2 - 1981
- [84] WORDENWEBER:**
Finite element mesh generation
Computer-aided design - Vol 16 - Number 5 - September 1984
- [85] YERRY - SHEPARD :**
A modified quadtree approach to finite element mesh generation
IEEE CG & A January / February 1983
- [86] YEUNG - HSU:**
A mesh generation method based on set theory
Computers and structures - Vol 3 - p1063 - 1077; 1973
- [87] ZIENKIEWICZ - PHILLIPS:**
An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by
isoparametric co-ordinates
International Journal for Numerical Methods in Engineering
Vol 3, p519 - 528; 1971

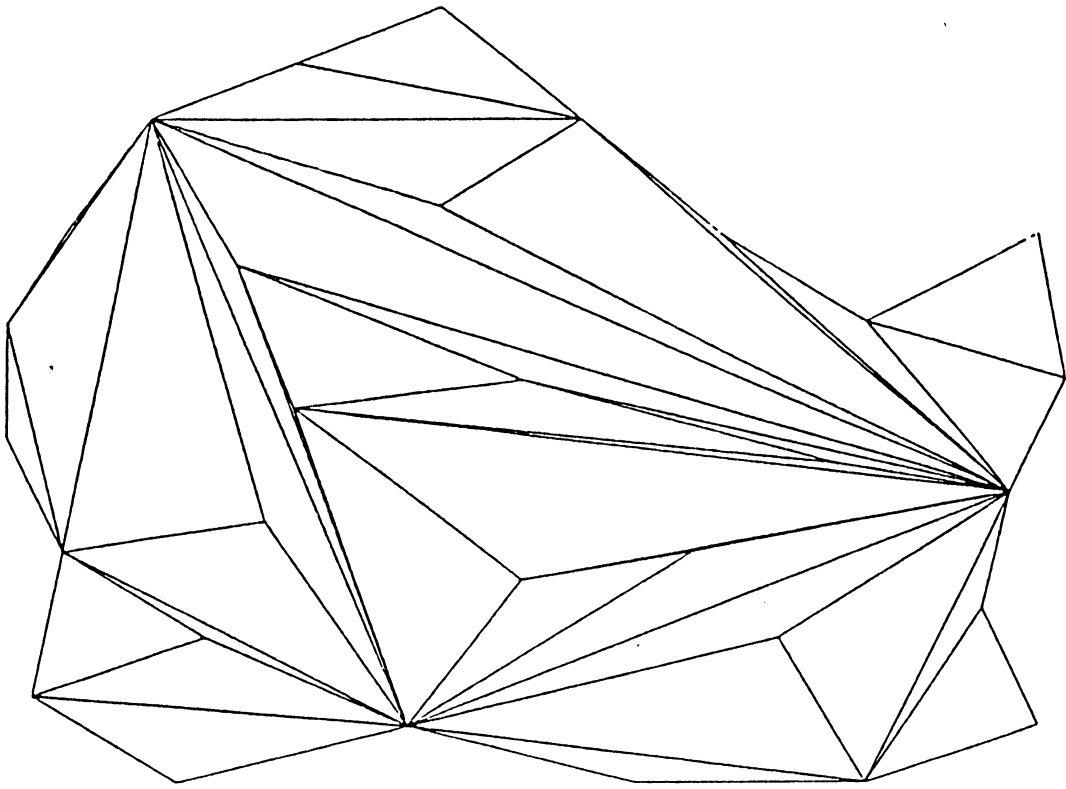
ANNEXES



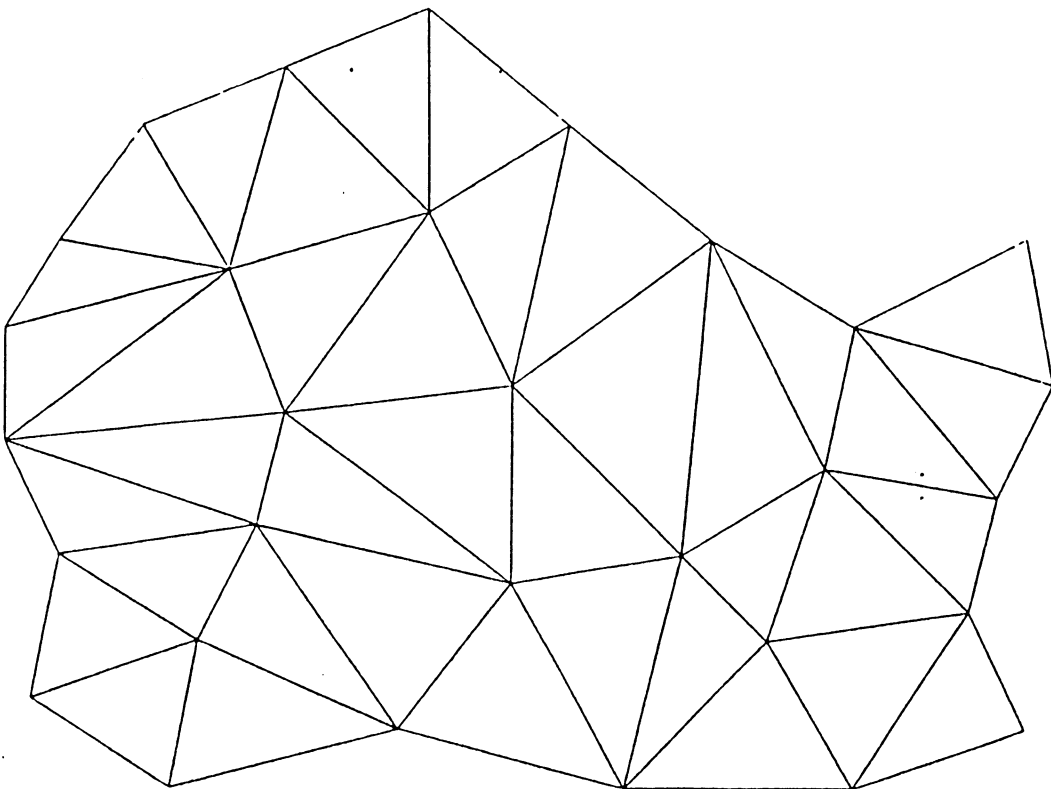
Construction du maillage initial par l'algorithme de génération avec 2 trous T_1 et T_2



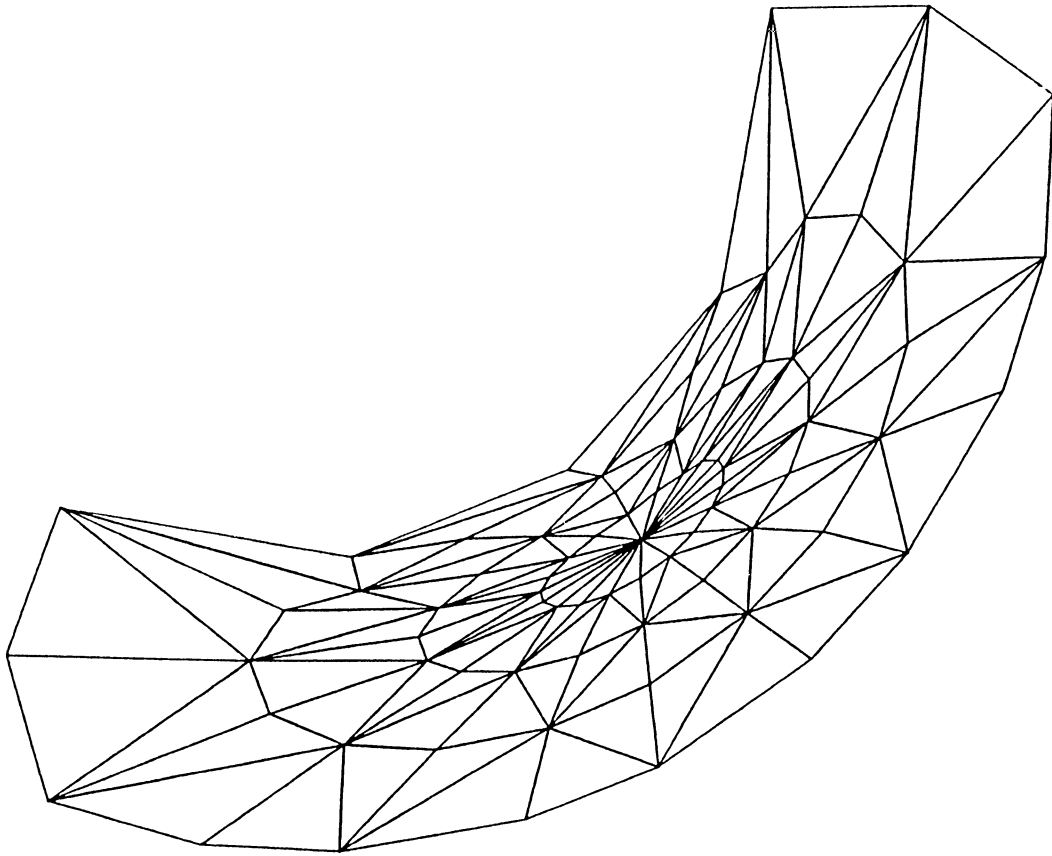
Amélioration du maillage initial par changements de diagonales.



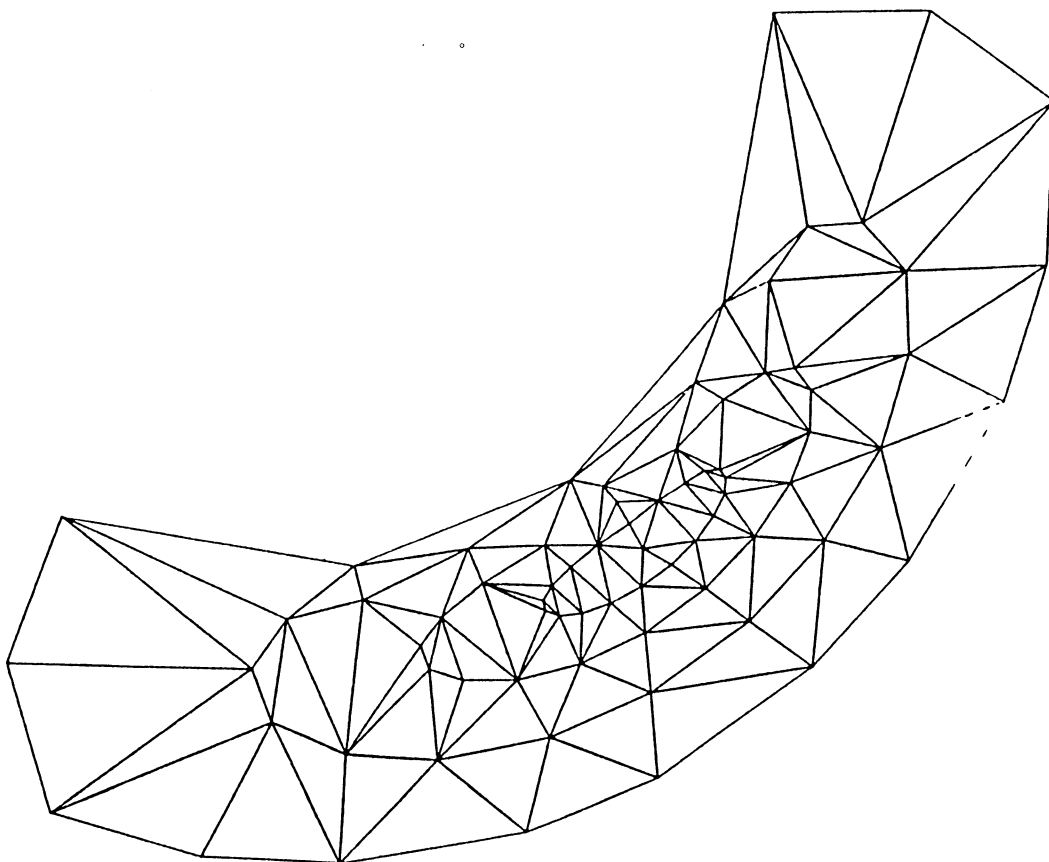
Construction du maillage initial par l'algorithme de générations



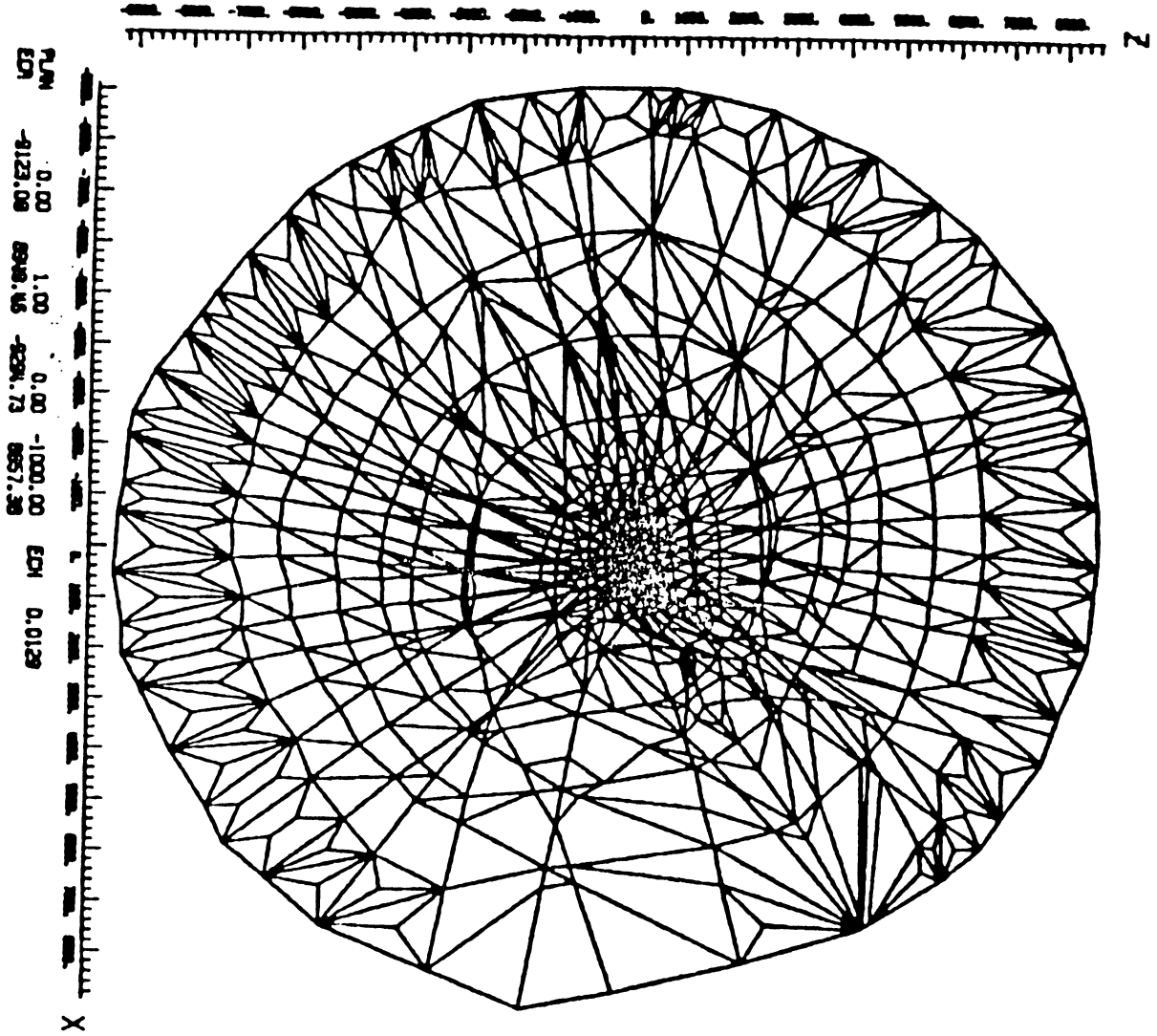
Amélioration du maillage initial par changements de diagonales.



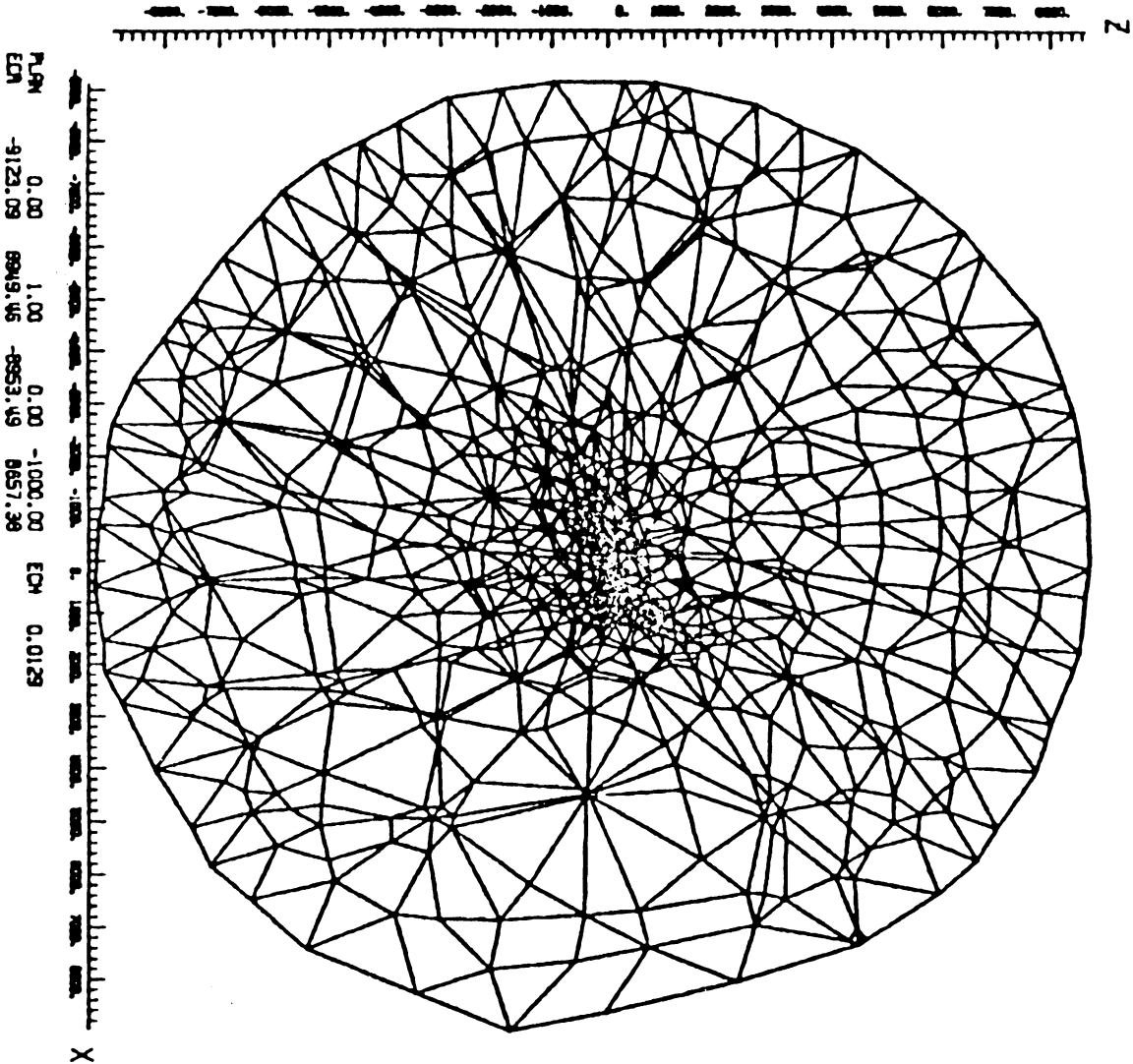
Maillage initial par Avions Marcel Dassault/Breguet Aviations
entrée d'air d'un avion



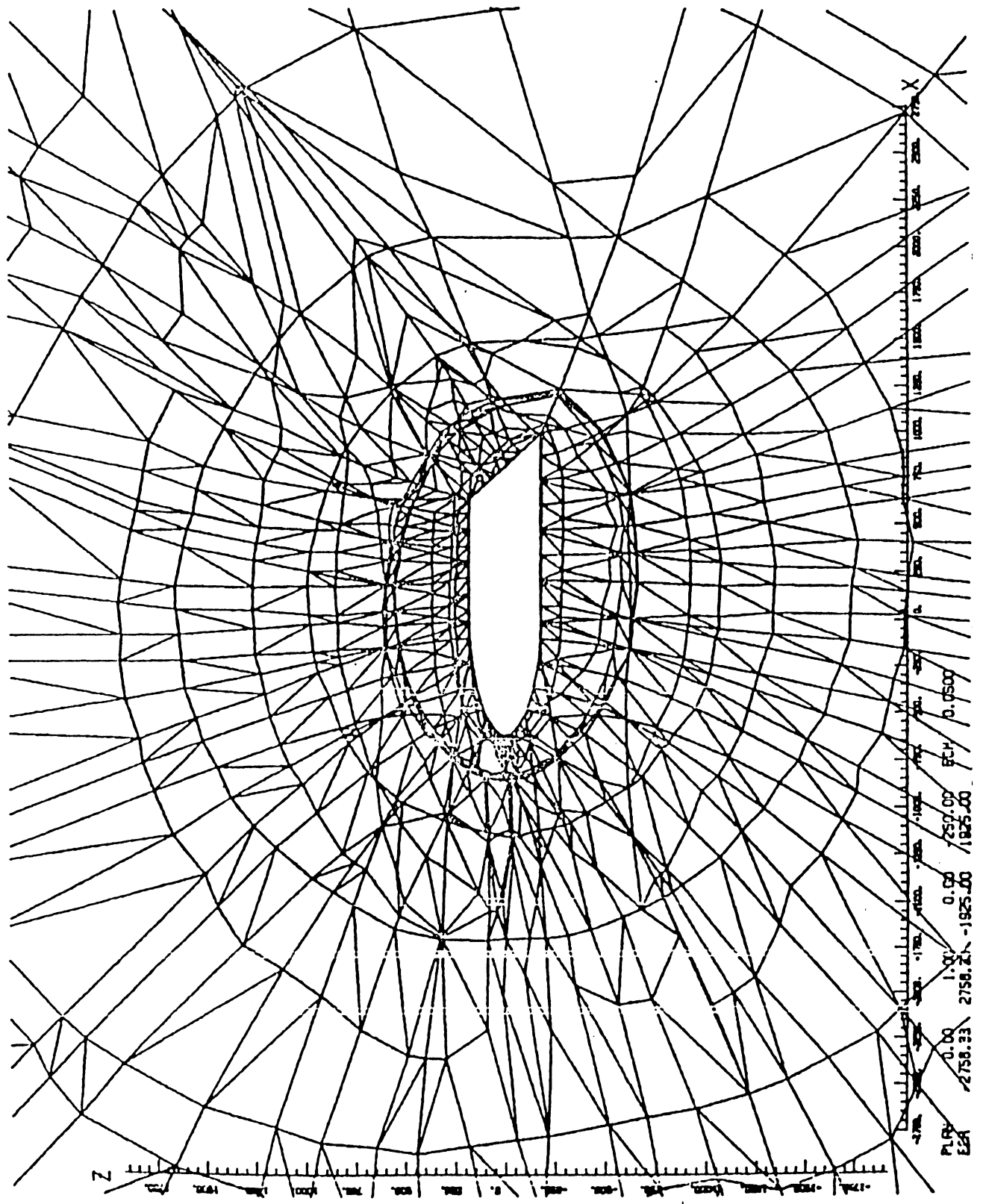
Amélioration par changements de diagonales pour minimiser
la moyenne d'un critère géométrique.



Coupe transversale du maillage d'une ellipsoïde
avant amélioration

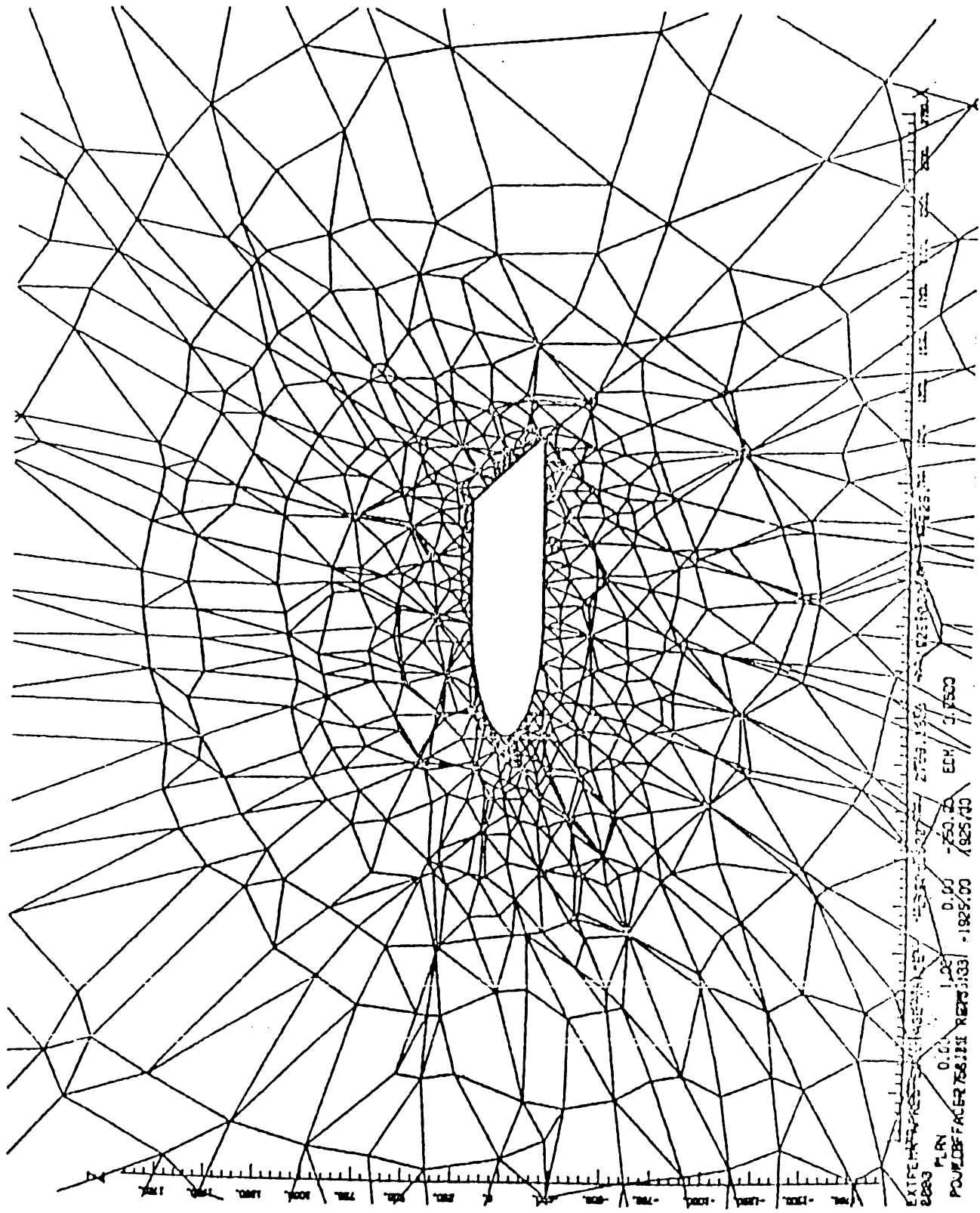


**Coupe transversale du maillage d'une ellipsoïde
après amélioration sous-polyédrale**

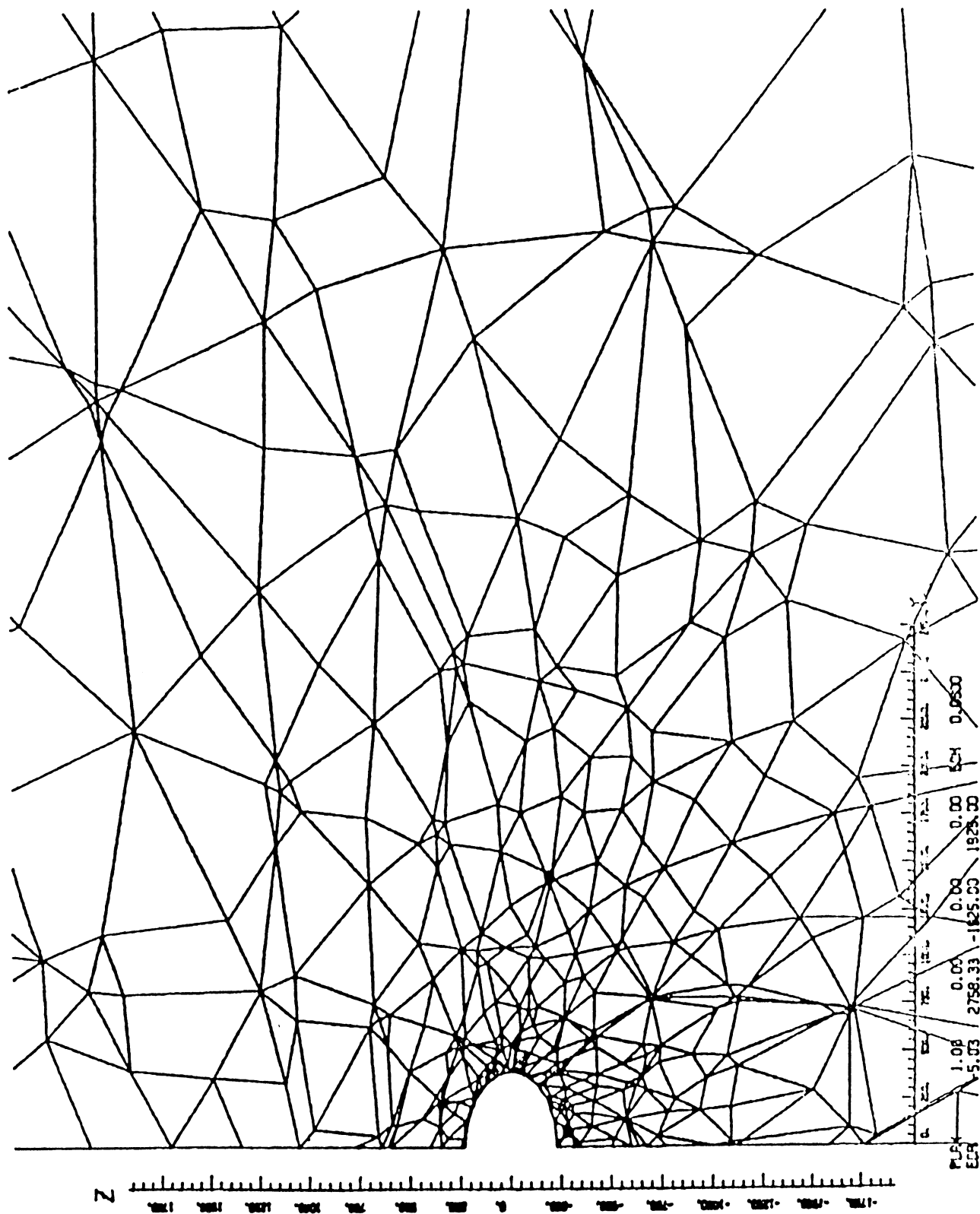


Autre coupe transversale de l'ellipsoïde

PLR
E2A
0.00 1.00
2758.33 2758.33
0.00 7257.00 85.00 0.0500
1925.00 1925.00



Autre coupe transversale de l'ellipsoïde
après amélioration



Autre coupe transversale de l'ellipsoïde
après amélioration

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
PREMIERE PARTIE	3
1. INTRODUCTION	4
2. UN ALGORITHME DE CONSTRUCTION DE MAILLAGES 2D	7
3. ALGORITHMES DE MODIFICATIONS NON TOPOLOGIQUES	17
4. UN ALGORITHME D'AMELIORATIONS TOPOLOGIQUES	23
5. QUELQUES APPLICATIONS PARTICULIERES DES ALGORITHMES	33
6. COMPLEXITE ET PROBLEMES DE TRIANGULATION	37
DEUXIEME PARTIE	40
1. INTRODUCTION	41
2. QUELQUES RESULTATS GENERAUX SUR LA TETRAEDRISATION	44
3. ALGORITHMES D'AMELIORATIONS TOPOLOGIQUES	52
3.1. Opérations topologiques	52
3.2. Critères géométriques et fonctions objectives	59
3.3. Structure de données	61
3.4. Un algorithme de trempe	62
3.5. Un algorithme de recuit simulé	67
3.5.1. Principe général de l'algorithme de recuit simulé	67
3.5.2. Application du recuit simulé à l'amélioration de maillages	71
3.5.2.1. Solution initiale	71
3.5.2.2. Fonction objective	71
3.5.2.3. Opérations élémentaires et voisinage	72
3.5.2.4. Température initiale	72
3.5.2.5. Température finale et tests d'arrêt	73
3.5.2.6. Décroissance de la température	73
3.5.2.7. Recuit local	74
3.5.2.8. Quelques conclusions empiriques sur la méthode	77
3.5.2.9. Algorithme de recuit en adjoignant d'autres opérations topologiques	78
3.5.2.10. Algorithme de recuit avec perte de réalisabilité	79

3.6. Un algorithme d'optimisation sous-polyédrale	81
3.7. Un module de barycentrage associé à l'optimisation sous-polyédrale	87
3.8. Comportement des algorithmes sur quelques exemples	90
3.8.1. Comparaisons des algorithmes sur exemples de faible dimension	90
3.8.2. Applications en milieu industriel	101
4. VERS UN ALGORITHME DE GENERATION DE MAILLAGES EN 3D	107
4.1. Amélioration du maillage de la peau	107
4.2. Génération à partir du maillage de la peau	108
4.3. Ajout de points	114
4.4. Suppression de points	114
CONCLUSIONS	115
BIBLIOGRAPHIE	118
ANNEXES	125

A U T O R I S A T I O N de S O U T E N A N C E

VU les dispositions de l'Arrêté du 23 novembre 1988 relatif aux Etudes doctorales

VU les rapports de présentation de Messieurs

- . COULOMB Jean-Louis
- . QUILLIOT Alain

Monsieur TALON Jean-Yves

est autorisé(e) à présenter une thèse en soutenance en vue de l'obtention du diplôme de DOCTEUR de L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, spécialité " Recherche Opérationnelle "

Fait à Grenoble, le 12 juin 1989

Pour le Président de l'I.N.P.G.
et par délégation
Le Vice-Président

C. GAUBERT

