



HAL
open science

Guider, piéger, focaliser et contrôler les ondes. Une contribution mathématique et numérique.

Karim Ramdani

► **To cite this version:**

Karim Ramdani. Guider, piéger, focaliser et contrôler les ondes. Une contribution mathématique et numérique.. Mathématiques [math]. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2007. tel-00327377

HAL Id: tel-00327377

<https://theses.hal.science/tel-00327377>

Submitted on 8 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire présenté en vue d'obtenir le diplôme
d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques.

GUIDER, PIÉGER, FOCALISER ET CONTRÔLER LES ONDES.
UNE CONTRIBUTION MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE.

Karim RAMDANI

Rapporteurs : Xavier ANTOINE
Gilles LEBEAU
Enrique ZUAZUA

Soutenu le 19 Octobre 2007 devant le Jury composé de

Xavier ANTOINE	Professeur à l'INPL
Claude BARDOS	Professeur émérite de l'Université Paris 7
Anne-Sophie BONNET-BENDHIA	Directrice de Recherche au CNRS
François CASTELLA	Professeur à l'Université de Rennes 1
Antoine HENROT	Professeur à l'INPL
Gilles LEBEAU	Professeur à l'Université de Nice
Marius TUCSNAK	Professeur à l'Université Henri Poincaré

Table des matières

1	Introduction	5
2	Un guide d'onde supraconducteur	9
2.1	Problématique	9
2.2	Modèle vectoriel de couche mince [A2]	12
2.3	Un modèle scalaire non coercif [A3]	14
2.4	Singularités d'un problème non coercif [A1]	16
3	Diffraction par des réseaux	19
3.1	Problématique	19
3.2	Réseaux à défauts localisés [B1,B3]	20
3.3	Conception de réseaux [B2,B4]	24
4	Focalisation par retournement temporel	27
4.1	Problématique	27
4.2	Modélisation du retournement temporel	28
4.2.1	Modèle de champ lointain dans \mathbb{R}^3 [C1]	29
4.2.2	Modèle de champ lointain dans un guide d'ondes [C3]	31
4.2.3	Modèle de champ proche dans \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) [C2]	34
4.3	Focalisation sélective	35
4.3.1	Diffraction par de petits obstacles [C1,C3]	35
4.3.2	Illustrations numériques [C2,C3]	40
4.4	Quelques questions ouvertes	42
5	Méthodes fréquentielles et spectrales en contrôle	45
5.1	Problématique	45
5.2	Formulations spectrales abstraites [D1]	46
5.3	Etude de quelques systèmes continus [D1,D2]	47
5.4	Schémas uniformément stables [D2,D3,D4]	48
5.4.1	Motivation : l'approximation des problèmes LQR	48
5.4.2	Un résultat abstrait en présence de gap [D3]	50
5.4.3	Résultats en l'absence de gap [D2,D4]	51
	Appendice : Travaux de Recherche	53
	Bibliographie	60

Chapitre 1

Introduction

En parcourant la Table des Matières du présent mémoire, le lecteur se posera certainement la question suivante : que peut-il bien y avoir de commun entre des applications aussi diverses que les guides d'ondes électromagnétiques, les cristaux photoniques, les miroirs acoustiques à retournement temporel ou la stabilisation par feed-back de certains systèmes de dimension infinie ? C'est précisément la question qui s'est posée à moi lorsque j'ai entrepris de porter un regard rétrospectif sur mes travaux de recherche en rédigeant cette habilitation. Très vite, il m'est apparu que bien que très différentes, les applications mentionnées ci-dessus avaient toutefois un point commun. D'une manière ou d'une autre, l'objectif visé est toujours de concevoir (contrôle passif) un système ondulatoire ou d'agir sur lui en temps réel (contrôle actif) pour l'amener à avoir un comportement donné. Ainsi, réaliser un guide d'onde électromagnétique, c'est concevoir une structure susceptible de propager sans déformation ni atténuation des ondes électromagnétiques (les modes guidés). Pour les cristaux photoniques en optique, il s'agit de concevoir des matériaux ayant des bandes fréquentielles interdites, i.e. dans lesquelles aucune onde électromagnétique ne peut se propager. Dans ces deux situations de contrôle passif, le résultat désiré est obtenu en choisissant judicieusement les caractéristiques géométriques et physiques des différents matériaux constitutifs du système lors de sa conception. Pour le contrôle actif, on agit *a contrario* sur le système ondulatoire durant son fonctionnement. Ainsi, pour les miroirs à retournement temporel, une sortie du système est mesurée pendant l'intervalle de temps $[0, T]$, puis retournée temporellement pour générer pendant l'intervalle de temps $[T, 2T]$ une nouvelle onde acoustique. Compte tenu de la réversibilité de la propagation acoustique en milieu non dissipatif, l'onde ainsi générée présente alors certaines propriétés de focalisation. De la même manière, la commande d'un système au travers d'une boucle de rétroaction peut permettre de le stabiliser par une action en temps réel.

Venons-en maintenant à des considérations plus mathématiques. Cette fois, un fil conducteur de mes travaux pourrait être le thème de l'analyse spectrale, comme le montre la description ci-dessous des différents Chapitres du mémoire.

Chapitre 2 : Un guide d'onde supraconducteur [A1,A2,A3]*

La détermination des modes guidés d'un guide d'ondes ouvert se ramène à l'analyse spectrale d'une famille (A_β) d'opérateurs à résolvante non compacte, le paramètre β étant le nombre d'onde [BB90, BDJ90, BBJ93, JP95]. Dans le problème que j'ai plus particulièrement étudié et qui est décrit dans ce mémoire, à savoir celui des guides d'ondes supraconducteurs, les opérateurs A_β souffrent d'un défaut d'ellipticité (lié au caractère supraconducteur du guide d'ondes) qui rend leur étude mathématique (caractère autoadjoint, détermination du spectre essentiel,

*Par souci de clarté, nous avons préféré numéroter nos travaux séparément du reste des références de la Bibliographie (voir l'Appendice) .

existence du spectre ponctuel, existence de valeurs propres positives, régularité des éléments du domaine de A_β, \dots) particulièrement délicate. Nous avons apporté quelques éléments de réponse à ces difficultés dans le cadre d'un modèle vectoriel de couche mince (équations de Maxwell combinées avec condition d'impédance, cf. [A2]) et d'un modèle scalaire en couche épaisse (problème de transmission de type $\operatorname{div}(a\nabla\cdot)$ non elliptique, cf. [A1,A3]).

Chapitre 3 : Diffraction par des réseaux [B1,B2,B3,B4]

L'étude de la propagation de la lumière dans des cristaux photoniques [JMW95, Sak04] (i.e. par des structures périodiques) conduit, comme le montre la théorie de Floquet-Bloch [RS78, Kuc93], à l'analyse spectrale d'opérateurs pouvant présenter un spectre de type bande. Dans [B1,B3], nous nous sommes intéressés au problème de la diffraction par une structure périodique localement perturbée par la présence d'un défaut à support compact. Nous avons proposé une formulation variationnelle de ce problème dans le cas de géométries particulières. Ceci nous a permis d'une part de montrer que le problème relevait de l'alternative de Fredholm, et d'autre part, de proposer une méthode numérique de résolution. En vue du design optimal des réseaux, nous avons obtenu dans [B2] une borne supérieure sur le coefficient de réflexion d'un réseau bidimensionnelle constitué de deux milieux homogènes séparés par une interface périodique rapidement oscillante. Enfin, nous nous sommes intéressés dans [B4] à la caractérisation des fréquences de résonance dans les réseaux.

Chapitre 4 : Focalisation par retournement temporel [C1,C2,C3]

La propagation acoustique dans un milieu non dissipatif est un phénomène réversible. Depuis une dizaine d'années, cette propriété a connu des applications aussi innombrables qu'inattendues (médecine, communications, contrôle non destructif,...) grâce la conception par Mathias Fink et son équipe du L.O.A. de miroirs acoustiques à retournement temporel [Fin96] (notés MRT dans la suite du mémoire). L'un des aspects du retournement temporel que nous avons le plus étudié est lié à une technique expérimentale de focalisation acoustique, appelée la méthode D.O.R.T. (acronyme pour Diagonalisation de l'Opérateur de Retournement Temporel, cf. [FP94]). Comme son nom l'indique, cette méthode repose sur la diagonalisation d'une matrice hermitienne, appelée matrice de retournement temporel. Celle-ci est construite à partir des mesures expérimentales effectuées après l'émission d'excitations impulsives par le MRT. Il s'avère alors que le nombre de valeurs propres non nulles de cette matrice est précisément le nombre d'obstacles contenus dans le milieu de propagation, et que les vecteurs propres correspondant permettent de générer des ondes acoustiques focalisant sélectivement sur chacun des obstacles. Notre première contribution sur le thème du retournement temporel a consisté à en proposer une formulation en termes d'opérateurs aux dérivées partielles, par opposition à la formulation matricielle utilisée par les physiciens. L'un des objectifs tout particulièrement visés était de définir un cadre fonctionnel dans lequel le caractère autoadjoint de l'opérateur de retournement temporel était assuré (en vue de son analyse spectrale). Nous avons ainsi proposé plusieurs modèles : un modèle de champ lointain dans l'espace libre (cf. [C1]), un modèle de champ lointain dans un guide d'ondes fermé bidimensionnel (cf. [C3]) et, enfin, un modèle de champ proche (cf. [C2]). Notre seconde contribution à l'étude du retournement temporel a consisté à proposer une justification rigoureuse de la méthode D.O.R.T. dans le cadre des deux modèles de champ lointain obtenus (cf. [C1,C3]). Ceci a nécessité une analyse asymptotique assez fine du problème de la diffraction par de petits obstacles.

Chapitre 5 : Méthodes fréquentielles en contrôle [D1,D2,D3,D4]

Il est bien connu [Lio88] que la contrôlabilité des systèmes gouvernés par des EDP se ramène à la preuve d'une inégalité d'observabilité (aussi appelée inégalité inverse) que doivent

vérifier les solutions du problème d'évolution considéré. Pour établir une telle inégalité, différentes techniques existent, parmi lesquelles on peut citer l'analyse de Fourier non harmonique [AI95, BKL99], les méthodes de multiplicateurs [Kom94], les inégalités de Carleman [Ima02] ou l'analyse microlocale [BLR92, BL92]. Bien que fort différentes, ces techniques ont toutefois un point commun : ce sont des méthodes temporelles. Par opposition à ces méthodes, il existe une approche fréquentielle [Liu97, LLR01, Mil05] permettant de ramener l'étude de la contrôlabilité à la preuve d'une inégalité dans laquelle le temps n'intervient pas, mais faisant intervenir sa variable duale qu'est la fréquence. En contrepartie, l'inégalité doit être satisfaite uniformément par rapport à la fréquence. Notre contribution a porté sur l'obtention de formulations spectrales du critère fréquentiel pour la contrôlabilité et la stabilisation de systèmes abstraits de type ondes (systèmes conservatifs). Ceci nous a permis d'établir dans [D1,D2] de nouveaux résultats ou d'obtenir de nouvelles preuves de contrôlabilité pour différentes équations (Schrödinger, plaques, poutres, ondes) pour des géométries relativement simples. Nous avons également utilisé les techniques fréquentielles dans [D2,D3,D4] pour construire des schémas semi-discrétisés en espace uniformément (vis à vis du paramètre de discrétisation) exponentiellement stables de quelques systèmes continus. Ce type de résultat est crucial lorsque l'on s'intéresse à l'approximation des problèmes de type LQR.

Après ces quelques commentaires sur la structure et le contenu du mémoire, citons, à titre d'illustration, certains des outils mathématiques que nous avons utilisés dans les contextes décrits ci-dessus. **Les techniques d'équations intégrales** se sont avérées très utiles dans deux des problèmes étudiés. Tout d'abord, pour le problème de transmission non coercif étudié au Chapitre 2, elles nous ont permis de pallier le déficit d'ellipticité en reformulant le problème à l'aide d'une équation intégrale écrite sur l'interface de transmission (cf. [A1,A3]). Dans le contexte très différent de l'asymptotique de la diffraction par de petits obstacles étudié dans le Chapitre 4 (cf. [C3]), l'approche par équations intégrales nous a été doublement utile. Tout d'abord, le problème de diffraction étant posé dans le domaine extérieur aux obstacles, on est en présence d'un passage à la limite dans une EDP (l'équation de Helmholtz) posée dans un domaine non borné et variant avec la taille des obstacles. Les équations intégrales nous ont permis de nous ramener à un domaine borné (la surface des obstacles) et fixe (après changement d'échelle). Ensuite, la méthode intégrale nous a permis de résoudre une difficulté technique induite dans l'analyse asymptotique par le caractère bidimensionnel du problème. En effet, alors que c'est le cas dans \mathbb{R}^3 , la fonction de Green $(i/4)H_0^{(1)}(k|x-y|)$ de l'opérateur de Helmholtz dans \mathbb{R}^2 ne converge pas vers celle du Laplacien lorsque k tend vers 0. L'utilisation de la théorie du potentiel nous a permis de résoudre cette difficulté.

L'opérateur Dirichlet-to-Neumann a également été utilisé dans différents contextes. En effet, il est à la base de la démarche proposée pour résoudre le problème de la diffraction par des réseaux localement perturbés étudié dans le Chapitre 3 (cf. [B1,B3]). Dans le Chapitre 4, l'opérateur Dirichlet-to-Neumann dans le cas du guide d'ondes fermé nous a permis de nous ramener à un domaine borné et par là même d'envisager une résolution numérique (cf. [C3]).

Les différents Chapitres du mémoire peuvent être lus indépendamment les uns des autres. Dans leur rédaction, nous nous sommes efforcés de donner les énoncés des principaux résultats obtenus et, parfois, d'esquisser les grandes étapes des démonstrations. Enfin, **l'Appendice** regroupe la liste des travaux de l'auteur, classés par thème.

Chapitre 2

Un guide d'onde supraconducteur

Mots clés

Problèmes non coercifs, Analyse spectrale des opérateurs à résolvante non compacte, Principe du Min-Max, Equations intégrales, Caractère autoadjoint, Analyse des singularités, Transformée de Mellin

2.1 Problématique

Comment propager une onde (acoustique, électromagnétique, élastodynamique ou hydrodynamique) sans atténuation ni déformation? Tel est l'objectif visé dans un grand nombre d'applications optiques (avec les fibres optiques [SL83]) ou micro-électroniques (avec les lignes de transmission [Col92]). Les guides d'ondes sont des structures cylindriques infinies $\Omega \times \mathbb{R}$ (Ω ouvert borné ou non de \mathbb{R}^2) dans une direction donnée (notée z dans la suite) qui répondent à cet objectif, en confinant les ondes aux voisinage du cœur du guide. Ceci est réalisé en faisant en sorte que la vitesse de propagation dans cette zone centrale du guide soit plus faible que dans les autres régions de la section transverse. Pour les fibres optiques par exemple, on choisira donc des indices de réfraction $n(x)$ plus élevés au voisinage du cœur de la fibre.

Une onde décrite par la quantité physique \mathbb{U} (la pression en acoustique, les champs électrique et magnétique en électromagnétisme, le déplacement en élastodynamique, le potentiel des vitesses en hydrodynamique) susceptible de se propager dans un guide d'ondes sans atténuation ni déformation s'écrit sous la forme

$$\mathbb{U}(x, y, z, t) = U(x, y) \exp[i(\omega t - \beta z)], \quad (2.1)$$

où l'on suppose que

$$\omega, \beta \in \mathbb{R}.$$

Sa vitesse de propagation est alors $c = \omega/\beta$. Si l'on impose de plus un confinement transverse de l'énergie, i.e. si

$$U \in L^2(\Omega),$$

alors on dit que (2.1) définit un mode guidé. On parle de guide fermé lorsque la section transverse Ω est bornée et de guide ouvert si elle non bornée (ou, de manière plus réaliste, si les échelles de grandeur en présence sont telles que la section peut être considérée comme non bornée). L'analyse mathématique des guides ouverts (cf. [BB90, BDJ90, BBJ93, JP95]) est nettement plus délicate que celle des guides fermés. En effet, on peut montrer que la détermination des modes guidés se ramène à la résolution d'une famille de problèmes de valeurs propres paramétrée

par la constante de propagation β , posés dans la section transverse du guide et s'écrivant sous la forme*

$$A(\beta)U = \omega^2 U.$$

Très souvent, l'opérateur $A(\beta)$ obtenu est autoadjoint. Dans le cas des guides fermés, son analyse spectrale se fait sans grande difficulté : en effet, $A(\beta)$ est alors à résolvante compacte. En revanche, cette dernière propriété n'est plus vraie pour les guides ouverts. L'étude mathématique et la simulation numérique des problèmes de guides ouverts, qui consiste à répondre aux questions qui suivent, peut alors s'avérer très délicat :

1. Quel est le spectre continu de l'opérateur $A(\beta)$?
2. A quelles conditions le spectre ponctuel de $A(\beta)$ est-il non vide ? En d'autres termes, sous quelles conditions (sur les caractéristiques géométriques et physiques du guide) existe-t-il des modes guidés ?
3. Que peut-on dire des seuils β_n (aussi appelés fréquences de coupure) d'apparition de nouveaux modes guidés ?
4. Quelles sont les propriétés (régularité, monotonie, comportement asymptotique à basse et haute fréquences) des courbes, dites de dispersion, $\omega^2 = f(\beta)$?
5. Comment calculer numériquement les modes guidés (qui sont solutions d'un problème posé dans un domaine non borné) ?

La réponse à la première des questions ci-dessus repose en général sur l'utilisation du Théorème de Weyl (cf. [RS78]) stipulant la stabilité du spectre essentiel par perturbation compacte. L'opérateur $A(\beta)$ étant en général autoadjoint borné inférieurement, l'outil principal pour étudier les points 2-5 est le principe du Min-Max (cf. [RS78]).

Dans les références [A1,A2,A3], nous nous sommes intéressés aux questions ci-dessus dans le cadre d'un guide d'ondes électromagnétique particulier, à savoir une ligne de transmission micro-ruban supraconductrice (cf. [Col92]). Utilisées en micro-électronique pour transporter les signaux dans les micro-circuits, ces lignes sont constituées d'un substrat diélectrique $\Omega_D = \mathbb{R} \times]0, h[$, de part et d'autre duquel sont situés un plan de masse parfaitement conducteur, et un ruban supraconducteur de faible épaisseur (cf. Figure 2.1).

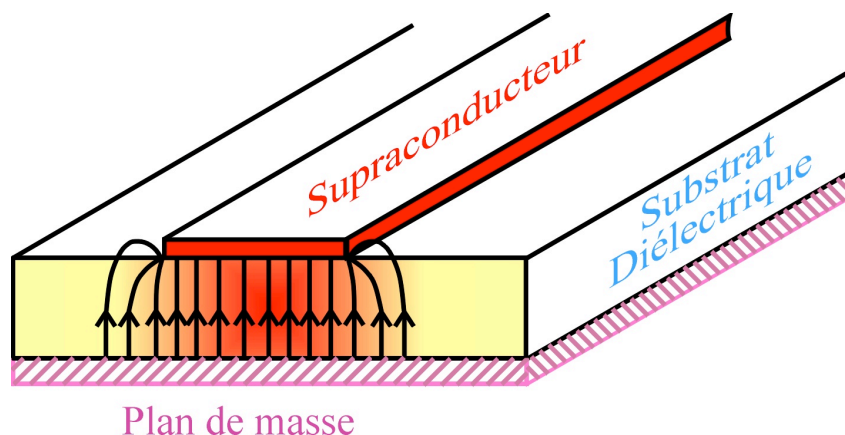


FIG. 2.1 – Ligne de transmission micro-ruban supraconductrice.

*Pour certains problèmes, la détermination des modes guidés peut se ramener à la situation inverse de celle décrite ici, autrement dit à l'étude d'une famille de problèmes spectraux dans lesquels ω joue le rôle de paramètre et β^2 celui de valeur propre.

Une telle structure constitue un guide d'ondes électromagnétiques dans la direction longitudinale de la ligne, l'énergie se trouvant confinée (verticalement par la présence du diélectrique et horizontalement par la présence du ruban) dans la zone située entre le plan de masse et le ruban.

Du point de vue mathématique, les modes guidés recherchés sont des solutions particulières des équations de Maxwell, harmoniques en temps, se propageant dans la direction longitudinale z de la ligne et d'énergie transverse finie. Plus précisément, si $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ désigne la section transverse du guide, il s'agit de rechercher des champs non nuls de la forme

$$\begin{cases} \mathbb{E}(x, y, z, t) = E(x, y) \exp[i(\omega t - \beta z)] \\ \mathbb{H}(x, y, z, t) = H(x, y) \exp[i(\omega t - \beta z)] \\ \omega, \beta \in \mathbb{R} \quad E, H \in [L^2(\Omega)]^3 \end{cases} \quad (2.2)$$

solutions des équations de Maxwell. Dans le cadre du modèle macroscopique de London pour la supraconductivité (cf. [Tix95]) que nous avons retenu pour modéliser le ruban supraconducteur, celui-ci se comporte comme un matériau à **permittivité diélectrique négative** dépendant de la fréquence et de perméabilité magnétique constante égale à celle du vide $\mu = \mu_0$ (dans la suite, on supposera que $\mu_0 = 1$). Ainsi, la permittivité dans la section du guide est décrite par

$$\varepsilon(\omega) = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{dans l'air } \Omega_A \\ \varepsilon_D > \varepsilon_0 & \text{dans le diélectrique } \Omega_D \\ \varepsilon_S(\omega) < 0 & \text{dans le ruban supraconducteur } \Omega_S \end{cases}$$

Compte tenu de la dépendance particulière des champs \mathbb{E} et \mathbb{H} vis à vis de t et de z , on voit en injectant les formules (2.2) dans les équations de Maxwell que la détermination des modes guidés revient à rechercher $\omega, \beta \in \mathbb{R}$ et $E \in [L^2(\Omega)]^3, E \neq 0$, vérifiant

$$\begin{cases} \operatorname{rot}_\beta \operatorname{rot}_\beta E = \omega^2 \varepsilon E & (\Omega) \\ \operatorname{div}_\beta (\varepsilon(\omega) E) = 0 & (\Omega) \\ E \times n = 0 & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (2.3)$$

où les indices β indiquent que la dérivation dans la direction z s'interprète comme une multiplication par $-i\beta$ dans les opérateurs rotationnel et divergence usuels. Si l'on choisit de conserver comme inconnue le champ magnétique $H \in [L^2(\Omega)]^3, H \neq 0$, on a cette fois à résoudre le problème

$$\begin{cases} A(\beta, \omega)H := \operatorname{rot}_\beta \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} \operatorname{rot}_\beta H \right) = \omega^2 H & (\Omega) \\ \operatorname{div}_\beta H = 0 & (\Omega) \\ H \cdot n = 0 & (\partial\Omega). \end{cases} \quad (2.4)$$

Outre les difficultés intrinsèques liées à l'étude des guides d'ondes ouverts (détermination du spectre continu, étude du spectre ponctuel), le problème de la ligne supraconductrice présente une particularité qui complique considérablement son étude. En effet, si l'on choisit de conserver comme inconnue le champ magnétique H comme dans (2.4), alors **le changement de signe de la permittivité** $\varepsilon(\omega)$ (négative dans le supraconducteur et positive à l'extérieur) **détruit la coercivité** de l'opérateur $A(\beta, \omega)$. Cette perte de coercivité est fâcheuse à double titre. Tout d'abord, il n'est pas clair que l'opérateur $A(\beta, \omega)$, bien qu'étant symétrique, soit autoadjoint (le caractère autoadjoint étant obtenu par exemple par un résultat de surjectivité pour $I + A(\beta, \omega)$). La seconde conséquence de la perte de coercivité de l'opérateur $A(\beta, \omega)$ est que ce dernier n'est plus borné inférieurement (il ne l'est bien évidemment pas supérieurement), ce qui est rédhibitoire pour l'application du principe du Min-Max. Enfin, soulignons que de surcroît, le problème spectral (2.4) est non linéaire, au sens où l'on veut déterminer les valeurs propres ω^2

d'un opérateur $A(\beta, \omega)$ lui-même dépendant de ω (conséquence de la dépendance fréquentielle de la permittivité dans le ruban supraconducteur).

Compte tenu de ces difficultés, on peut être tenté de choisir comme inconnue le champ électrique E , et donc d'étudier (2.3). Cette fois, la difficulté vient du fait que le membre de droite de l'équation conduit variationnellement à un terme du type $\int_{\Omega} \varepsilon(\omega) E \cdot F$, qui ne définit pas un produit scalaire sur $[L^2(\Omega)]^3$ puisque $\varepsilon(\omega)$ ne garde pas un signe constant.

Pour appréhender isolément ces difficultés, nous avons développé deux approches. La première d'entre elles (cf. [A2]) a consisté à tirer parti de la faible épaisseur du ruban pour obtenir un modèle asymptotique de couche mince qui s'est avéré elliptique. La seconde approche (cf. [A3]) était destinée à examiner en détail les difficultés liées aux caractères non elliptique et non linéaire du problème, et cela, dans le cadre d'un modèle scalaire simplifié. Les résultats théoriques obtenus ont été corroborés par des simulations numériques des modes guidés obtenus par éléments finis. Enfin, dans la Note [A1], nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'étude du caractère autoadjoint d'un opérateur scalaire de transmission du type $Au = -\operatorname{div}(\varepsilon \nabla u)$ où ε n'est pas de signe constant, notamment lorsque l'interface de transmission n'est pas régulière.

Très récemment, l'étude des problèmes non coercifs a connu un nouvel essor suite à la découverte des métamatériaux (aussi appelés matériaux gauches (left-handed materials)). Utilisés en optique, ces matériaux présentent la particularité d'avoir des indices de réfraction négatifs, et ouvrent de ce fait de nouvelles perspectives d'applications [SPW04]. Parmi les travaux mathématiques les plus récents sur cette question, citons en deux. Le premier résultat, établi dans [FR05], concerne le cas des équations de Maxwell faisant intervenir des permittivités diélectrique et magnétique ε, μ complexes (de partie réelle de signe arbitraire). L'existence et l'unicité de la solution sont établis, moyennant des hypothèses de dissipativité du milieu (ε et μ devant avoir des parties imaginaires non nulles). Plus récemment, dans [BBCZ07], les auteurs ont établi des résultats d'existence et d'unicité valables pour des problèmes faisant intervenir des métamatériaux (non dissipatifs) grâce à une formulation "mixte" du problème.

Nous présentons ci-dessous plus en détail les travaux effectués.

2.2 Modèle vectoriel de couche mince [A2]

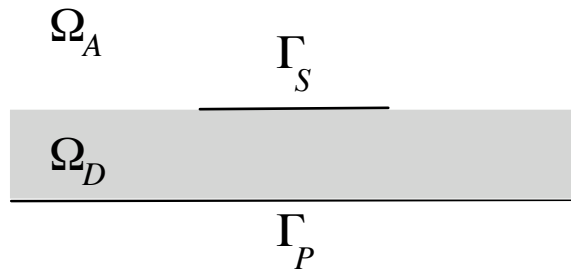


FIG. 2.2 – Modèle vectoriel de couche mince.

Dans cette section, on suppose que le ruban supraconducteur

$$\Gamma_S = \{|x| \leq w, y = h\}$$

est d'épaisseur nulle, de sorte que le domaine de propagation devient

$$\Omega = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \setminus \Gamma_S$$

et la permittivité électrique est maintenant définie par

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{dans l'air } \Omega_A = \mathbb{R} \times]h, \infty[\\ \varepsilon_D > \varepsilon_0 & \text{dans le diélectrique } \Omega_D = \mathbb{R} \times]0, h[. \end{cases}$$

Le modèle de couche mince étudié est obtenu formellement à partir du modèle de London, en faisant tendre à la même vitesse l'épaisseur du ruban vers 0 et sa permittivité vers $-\infty$. Le caractère supraconducteur est dans ce cas pris en compte à l'aide d'une condition d'impédance écrite sur la frontière du ruban :

$$\begin{cases} \operatorname{rot}_\beta \operatorname{rot}_\beta E = \omega^2 \varepsilon E & (\Omega) \\ \operatorname{div}_\beta (\varepsilon(\omega) E) = 0 & (\Omega) \\ [E \times n] = 0 & (\Gamma_S) \\ E \times n = \frac{1}{\Lambda} [\operatorname{rot}_\beta E \times n] \times n & (\Gamma_S) \\ E \times n = 0 & (\Gamma_P) = \mathbb{R} \times \{0\}, \end{cases} \quad (2.5)$$

où le paramètre d'impédance Λ est une constante strictement positive. On notera que le cas limite $\Lambda \rightarrow +\infty$ correspond au cas où le ruban est considéré comme parfaitement conducteur.

Afin de prendre en compte la condition $\operatorname{div}_\beta (\varepsilon(\omega) E) = 0$, on utilise la technique de régularisation des équations de Maxwell, qui peut être vue comme une méthode de pénalisation **exacte** de la contrainte de divergence nulle. L'un des avantages de cette technique est de permettre une approximation numérique par des éléments finis de Lagrange (par opposition aux éléments d'arête de type Nédélec). L'espace $[L^2(\Omega)]^3$ étant muni du produit scalaire

$$(E, F) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \varepsilon E \cdot \bar{F},$$

on introduit donc le sous-espace W de $[L^2(\Omega)]^3$ défini par

$$W = \left\{ E \in [L^2(\Omega)]^3, \operatorname{rot}_\beta E \in [L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)]^3, \operatorname{div}_\beta (\varepsilon E) \in [L^2(\Omega)]^3 \right. \\ \left. (E \times n)|_{\Gamma_S} \in L^2(\Gamma_S), (E \times n)|_{\Gamma_P} = 0 \right\}.$$

Soit $A(\beta)$ l'opérateur non borné de $[L^2(\Omega)]^3$ de domaine $\mathcal{D}(A(\beta))$ associé à la forme bilinéaire $a(\beta; \cdot, \cdot)$ définie sur $V \times V$ par

$$a(\beta; E, F) = \int_{\Omega} \operatorname{rot}_\beta E \cdot \overline{\operatorname{rot}_\beta F} + \operatorname{div}_\beta (\varepsilon E) \overline{\operatorname{div}_\beta (\varepsilon F)} + \Lambda \int_{\Gamma_S} (E \times n) \cdot \overline{(F \times n)}.$$

On peut alors montrer (Lemme 3.3 de [A2]) qu'à $\beta > 0$ fixé, les modes guidés recherchés sont les couples $(\omega, E) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A(\beta))$, avec $\omega < \beta$ et $E \neq 0$, tels que

$$A(\beta)E = \omega^2 E.$$

Spectre essentiel

L'opérateur $A(\beta)$ étant positif autoadjoint, son spectre est inclus dans \mathbb{R}^+ . Avant d'utiliser le principe du Min-Max pour établir des résultats d'existence de modes guidés, une étape

préalable consiste à déterminer le spectre essentiel $\sigma_{ess}(A(\beta))$ de l'opérateur $A(\beta)$. En raison du couplage des composantes induit par la stratification du milieu d'une part, et de la régularisation des équations de Maxwell d'autre part, cette détermination s'avère particulièrement délicate. Le premier résultat important de [A2] (voir Théorème 2.5.) découle de la compacité de la perturbation que constitue le ruban et peut s'énoncer comme suit.

Théorème 2.1.

$$\sigma_{ess}(A(\beta)) = \sigma_{ess}(A_\infty(\beta)) = [\gamma_{TM}(\beta), +\infty[$$

où $A_\infty(\beta)$ est l'opérateur correspondant au milieu non perturbé (i.e. ne contenant pas le ruban supraconducteur) et où l'on a posé

$$\gamma_{TM}(\beta) = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^+), u \neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\varepsilon_\infty(y)} \left(\left| \frac{du}{dy} \right|^2 + \beta^2 |u|^2 \right) dy}{\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2}$$

Spectre ponctuel et modes guidés

Une fois ce spectre essentiel déterminé, le principe du Min-Max nous permet d'établir (cf. [A2, Théorème 3.7].) des résultats d'existence pour le mode fondamental à basse fréquence et pour les modes d'ordre supérieur à haute fréquence.

Théorème 2.2. *A basse fréquence, le mode fondamental du guide d'onde existe toujours, i.e. le nombre de modes guidés $\mathcal{N}(\beta)$ vérifie*

$$\exists \beta_0 > 0 \quad \text{tel que} \quad \mathcal{N}(\beta) \geq 1 \quad \forall \beta < \beta_0.$$

De plus, si la hauteur h du substrat diélectrique et si largeur w du ruban supraconducteur vérifient la condition

$$\frac{w}{2h} > m,$$

pour un entier $m \in \mathbb{N}^*$ donné, alors il existe au moins m modes guidés à haute fréquence :

$$\exists \beta_m > 0 \quad \text{tel que} \quad \mathcal{N}(\beta) \geq m \quad \forall \beta > \beta_m.$$

Simulation numérique

La Figure 2.3 montre un exemple de simulation numérique effectuée à l'aide du code de calcul éléments finis MÉLINA* développée par Daniel Martin de l'IRMAR à Rennes. On retrouve bien le confinement du champ sous le ruban supraconducteur.

2.3 Un modèle scalaire non coercif [A3]

Comme nous venons de le voir, le modèle de couche mince vectoriel décrit dans la Section 2.2 présente l'avantage d'être coercif (contrairement au modèle en couche épaisse de départ). Afin d'examiner les difficultés liées à la perte de coercivité de l'opérateur (perte induite par le ruban supraconducteur), nous avons étudié un modèle scalaire bidimensionnel non coercif.

Soit $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ la section transverse du guide et A l'opérateur non borné de $L^2(\Omega)$ de domaine

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in H^1(\Omega), \operatorname{div} \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla u \right) \in L^2(\Omega), \partial_n u|_{\Gamma_P} = 0 \right\}, \quad (2.6)$$

*<http://www.maths.univ-rennes1.fr/dmartin/melina/www/homepage.html>

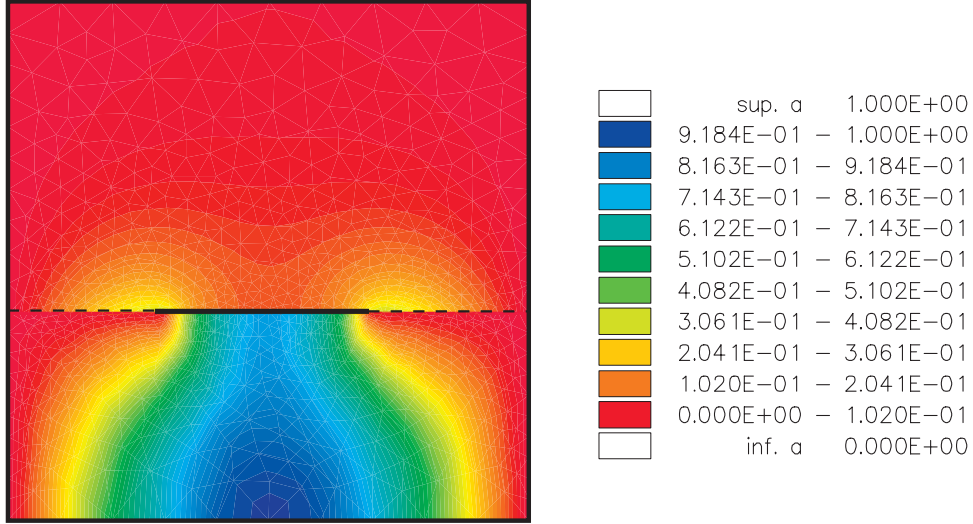


FIG. 2.3 – Composante E_y du mode fondamental.

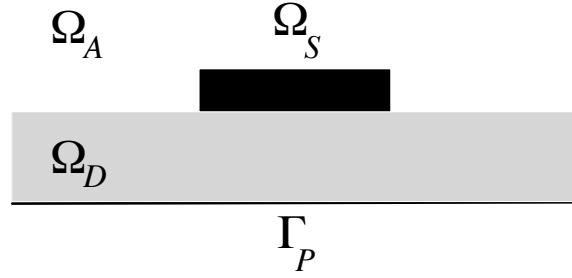


FIG. 2.4 – Modèle scalaire de couche épaisse.

tel que

$$Au = -\operatorname{div} \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla u \right) + \frac{\beta^2}{\varepsilon} u \quad \forall u \in \mathcal{D}(A) \quad (2.7)$$

où la permittivité ε est donnée par

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{dans l'air } \Omega_A \\ \varepsilon_D > \varepsilon_0 & \text{dans le diélectrique } \Omega_D \\ \varepsilon_S < 0 & \text{dans le ruban supraconducteur } \Omega_S \end{cases} \quad (2.8)$$

Les modes guidés recherchés sont alors les couples $(\omega, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A)$, avec $u \neq 0$, tels que

$$A(\beta)u = \omega^2 u.$$

Caractère autoadjoint

Il est clair que l'opérateur A est symétrique. Une condition suffisante pour qu'il soit autoadjoint est donc qu'il soit surjectif (ou que $A + \lambda I$ le soit, pour un réel λ donné). Malheureusement, l'opérateur A n'étant pas coercif, sa surjectivité est loin d'être évidente. La stratégie que nous avons retenue pour répondre à cette question repose sur la reformulation de l'équation $Au = f$

comme une équation intégrale écrite sur l'interface Γ séparant les régions où ε est de signe constant (l'intérieur et l'extérieur du ruban). Ceci est fait à l'aide des opérateurs de Dirichlet-Neumann $T_S : H^{1/2}(\Gamma_S) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_S)$ et $T_E : H^{1/2}(\Gamma_S) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_S)$ respectivement associés aux problèmes elliptiques intérieur et extérieur. Cette technique nous permet de ramener que l'étude de la surjectivité de A à celle de l'opérateur $\frac{1}{\varepsilon_S} T_S - T_E$. Ceci nous permet d'obtenir un premier résultat de type asymptotique (cf. [A3, Théorème 2.4.]) établissant le caractère autoadjoint de A pour $|\varepsilon_S|$ assez grand ou assez petit.

Théorème 2.3. *Il existe une constante $c \geq 1$ telle que pour tout $\varepsilon_S \in]-\infty, -c[\cup]-c^{-1}, 0[$, l'opérateur symétrique A défini par les relations (2.6), (2.7) et (2.8) soit inversible, et donc autoadjoint.*

La permittivité d'un matériau supraconducteur étant en réalité de l'ordre de 10^6 fois plus importante que celle d'un matériau diélectrique usuel, ce résultat asymptotique, bien que partiel, répondait de manière satisfaisante à l'application étudiée.

Spectre ponctuel et existence de modes guidés

Une fois établi le caractère autoadjoint de A et après avoir déterminé son spectre essentiel, on a étudié son spectre ponctuel pour mettre en évidence des conditions suffisantes d'existence de modes guidés (valeurs propres positives). En abordant cette question, on est de nouveau confronté à une difficulté directement liée au défaut de coercivité de A . En effet, A n'étant borné ni inférieurement ni supérieurement, on ne peut lui appliquer le principe du Min-Max. En revanche, l'opérateur A^{-1} est quant à lui borné. L'existence de valeurs propres positives (et donc de modes guidés) est alors établie en appliquant le principe du Min-Max à l'opérateur A^{-1} . En particulier, on a le résultat suivant (cf. Théorème 5.6. de [A3]) :

Théorème 2.4. *Pour tout entier $m \geq 1$ donné, il existe $\varepsilon_S^m < 0$ et $w_m > 0$ tel que le nombre de modes guidés soit au moins égal à m , et cela pour tout $\varepsilon_S < \varepsilon_S^m$ et tout $w \geq w_m$ (w désignant la largeur du ruban).*

2.4 Singularités d'un problème de transmission non coercif [A1]

Le caractère autoadjoint de l'opérateur A dans le cadre du modèle scalaire en couche épaisse étudié en Section 2.3 a été obtenu à l'aide d'un résultat de perturbation, reposant sur la forte permittivité d'un matériau supraconducteur. Une question demeurait donc en suspens : que se passait-il lorsque le contraste (rapport des permittivités à l'intérieur et à l'extérieur du ruban) prenait des valeurs (négatives) arbitraires ?

Afin de tenter de répondre à cette question, nous nous sommes intéressés dans la Note [A1] à l'analyse spectrale d'un opérateur A de partie principale $\operatorname{div}(\varepsilon \nabla \cdot)$, lorsque la fonction ε prend deux valeurs constantes ε^+ et ε^- et de signes opposés de part et d'autre d'une interface. L'étude du caractère autoadjoint de ces opérateurs nous a conduit à étudier plus généralement le caractère bien posé des **problèmes de transmission non elliptiques**. Dans le cas d'une interface régulière, nous avons obtenu la réponse à cette question par une méthode d'équations intégrales, suivant en cela la démarche de Martin Costabel et *al.* dans [CS85]. Lorsque l'interface présente des coins, cette approche ne permet plus de conclure en raison d'une perte de compacité pour certains opérateurs intégraux. Ceci nous a conduit à comparer la régularité des éléments de $\mathcal{D}(A^*)$ à celle des éléments de $\mathcal{D}(A)$ à l'aide de la transformée de Mellin. On a établi que l'opérateur A est autoadjoint si et seulement si le contraste entre les deux milieux n'appartient pas à un certain intervalle contenant la valeur -1 . Plus précisément, on a le résultat suivant (voir les Théorèmes 1 et 3 de [A1]).

Théorème 2.5. Soit Ω un ouvert borné de frontière Σ régulière, contenant un ouvert connexe Ω^- de frontière vérifiant $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$. Soit ε la fonction constante par morceaux valant $\varepsilon^+ > 0$ dans Ω^+ et $\varepsilon^- > 0$ dans Ω^- . Enfin, soit A l'opérateur de domaine $\mathcal{D}(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div}(\varepsilon \nabla u) \in L^2(\Omega)\}$ et tel que

$$Au = -\operatorname{div}(\varepsilon \nabla u), \quad \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

i) Si l'interface Γ est régulière (de classe \mathcal{C}^2), alors l'opérateur A est autoadjoint pour tout contraste $\mu := \frac{\varepsilon^+}{\varepsilon^-} \neq -1$.

ii) Si l'interface Γ présente un coin d'angle $\omega < \pi$ (et est régulière en dehors du coin), l'opérateur A est autoadjoint pour tout contraste vérifiant

$$\mu := \frac{\varepsilon^+}{\varepsilon^-} \notin I_\omega := \left[\frac{\omega - 2\pi}{\omega}, \frac{\omega}{\omega - 2\pi} \right].$$

Ce résultat peut s'expliquer comme suit. On peut montrer à l'aide de la transformée de Mellin que les exposants de singularité d'un élément $u \in \mathcal{D}(A)$ sont les racines complexes $\lambda \in \mathbb{C}$ de l'équation caractéristique

$$(\mu + 1) \sin(\lambda\pi) = \pm(1 - \mu) \sin(\lambda(\pi - \omega)) \quad \operatorname{Re} \lambda$$

situées dans la bande $\operatorname{Re} \lambda \in]-1, 1[$. Or, pour un contraste μ négatif n'appartenant pas à l'intervalle I_ω , on peut montrer que ces racines sont réelles et opposées (comme c'est le cas pour le Laplacien). En revanche, pour $\mu \in I_\omega$, ces racines sont purement imaginaires et conjuguées. Par conséquent, les fonctions singulières correspondantes

$$S(r, \theta) = \eta(r)r^\lambda \varphi(\theta) \quad S^*(r, \theta) = \eta(r)r^{-\lambda} \varphi(\theta)$$

vérifient dans le premier cas où $\mu \notin I_\omega$ les relations

$$S \in H^1(\Omega) \quad S^* \in L^2(\Omega) \setminus H^1(\Omega),$$

alors que dans le second cas (i.e. pour $\mu \in I_\omega$)

$$S, S^* \in L^2(\Omega) \setminus H^1(\Omega).$$

et par suite

$$S, S^* \in \mathcal{D}(A^*) \setminus \mathcal{D}(A).$$

Les extensions autoadjointes de l'opérateur A sont alors obtenues en complétant son domaine $\mathcal{D}(A)$ par la fonction $\alpha \operatorname{Re}(S) + \beta \operatorname{Im}(S)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.

Chapitre 3

Diffraction par des réseaux

Mots clés

Cristaux photoniques, Diffraction, Opérateur de Floquet-Bloch, Opérateurs Dirichlet-to-Neumann

3.1 Problématique

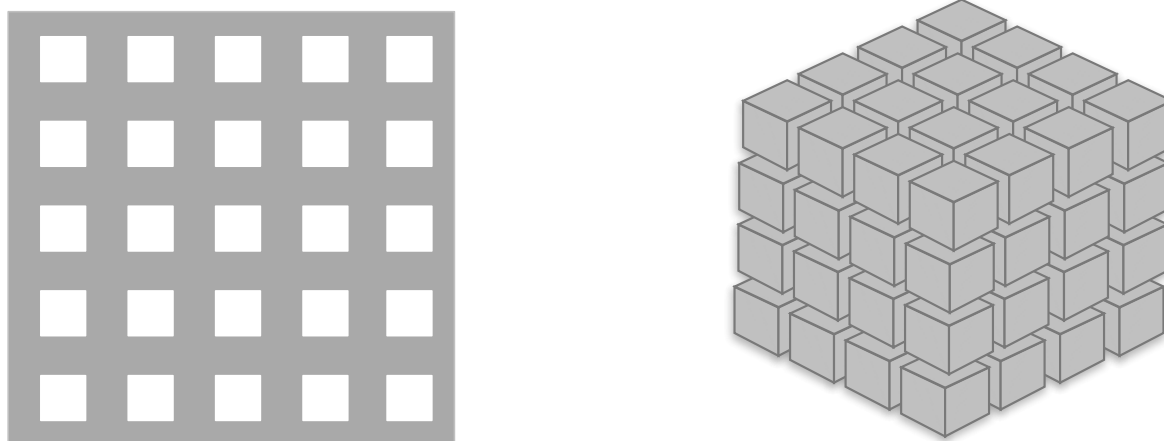


FIG. 3.1 – Exemples de réseaux $2D$ et $3D$.

Les cristaux photoniques sont des structures électromagnétiques décrites par des caractéristiques géométriques et physiques périodiques (voir Figure 3.1), la période typique de ces structures (aussi appelées réseaux) est de l'ordre de la longueur d'onde. D'après la théorie de Floquet-Bloch [RS78, Kuc93], on sait que les cristaux photoniques, et c'est là leur principal intérêt, présentent la particularité d'avoir un spectre pouvant avoir une structure de bande ("band gap structure"). A ce titre, elles ouvrent des perspectives très importantes dans un grand nombre d'applications [JMW95, Sak04], puisque les fréquences situées dans un gap du spectre ne peuvent pas se propager dans le réseau. Grâce à cette propriété, on peut concevoir à l'aide des cristaux photoniques des filtres optiques (les fréquences interdites ne peuvent s'y propager), des cavités optiques (par l'introduction d'un défaut localisé dans le réseau) ou encore

des guides d'ondes optiques (par l'introduction d'une ligne ou d'une surface de défauts localisés). Alors que les physiciens ont exhibé depuis un certain nombre d'années des structures 2D ou 3D présentant des gaps, la preuve mathématique de l'existence de telles structures date d'une dizaine d'années [FK96a, FK96b]. On notera toutefois que la démonstration de ce résultat est de type asymptotique et qu'il n'existe pas de résultat général (en dimension 2 ou 3) permettant d'affirmer si le spectre d'un réseau donné présente ou non des gaps.

Dans les articles [B1,B3], qui constituent nos principaux travaux sur les réseaux, nous nous sommes intéressés au problème de la diffraction par des réseaux imparfaits, i.e. des réseaux présentant un défaut à support compact. Dans [B2,B4], nous avons abordé certaines questions qui relèvent de la problématique de la conception de réseaux en vue d'obtenir certaines propriétés optiques (design optimal).

3.2 Réseaux à défauts localisés [B1,B3]

Suite à de récents résultats expérimentaux, une nouvelle question mathématique s'est faite jour : Comment est modifié le spectre d'un cristal photonique par l'introduction dans la structure d'un défaut localisé ? Par défaut, on entend ici une rupture (localisée en espace) dans la structure périodique (voir Figure 3.2).

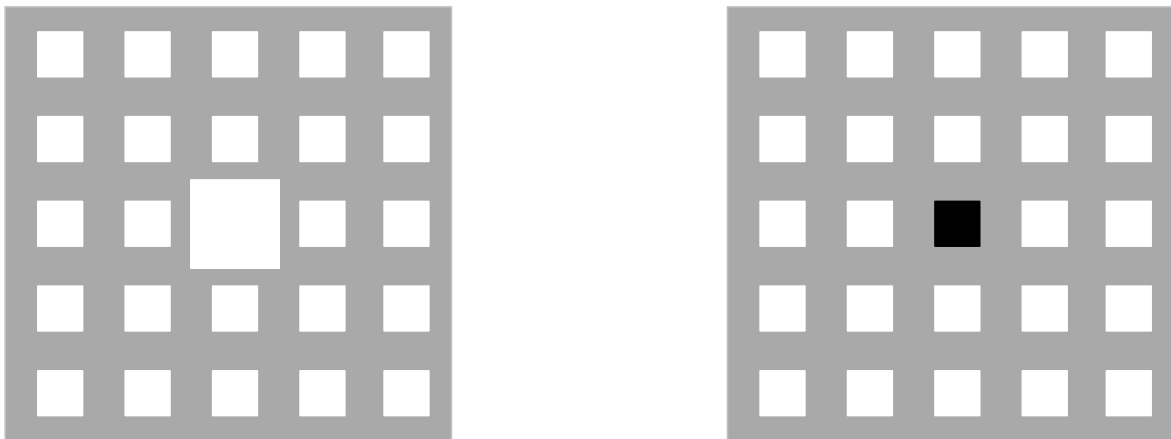


FIG. 3.2 – Exemples de défauts localisés dans un réseau 2D.

Dans [FK97], les auteurs étudient l'influence d'une perturbation compacte sur le spectre d'un opérateur scalaire ($Au = -\operatorname{div}(\varepsilon \nabla u)$, avec ε périodique) dont le spectre présente des bandes interdites. Le défaut étant localisé en espace, ils montrent que cette opération ne modifie le spectre essentiel de l'opérateur, et donc la structure (de type bande) de son spectre. Il en découle que la conséquence de l'introduction d'un défaut localisé ne peut être que l'apparition dans un gap du spectre d'une valeur propre isolée de multiplicité finie. On peut aisément montrer que le mode propre correspondant est alors exponentiellement décroissant. De tels modes, appelés modes de défauts, sont ainsi piégés à l'intérieur du cristal photonique, et permettent de réaliser des cavités optiques. Dans [FK98], les auteurs fournissent une estimation du nombre de modes générés dans un gap par l'introduction d'un défaut. Enfin, dans [AS04], les auteurs considèrent le cas d'une ligne de défaut dans un cristal photonique bidimensionnel. Dans un article récent [JLFar], P. Joly *et al.* ont proposé des conditions transparentes pour des guides d'ondes localement perturbés.

Nos travaux sur les réseaux ont principalement porté sur une question similaire à celle développée ci-dessus (l'introduction d'une perturbation compacte dans un réseau), mais dans un contexte quelque peu différent, celui de la diffraction d'ondes. La question de la diffraction d'ondes par un réseau parfaitement périodique a été largement étudiée depuis le début des années 90 (cf. [NS91, BBS94, AAL95, Amm99, CD99],...). Que ce soit pour l'analyse mathématique de ce problème ou pour sa simulation numérique, le point clé réside dans le fait que l'on peut se ramener (par transformée de Floquet-Bloch) à l'étude d'une famille de problèmes aux limites posés dans la cellule de référence du réseau. Plus précisément, chacun de ces problèmes correspond au cas où l'on impose sur la frontière de la cellule de référence des conditions de quasi-périodicité données. Analyser et simuler numériquement la diffraction d'une onde par un réseau qui n'est plus parfaitement périodique, mais contient une perturbation localisée, est la question que l'on a abordé dans les travaux [B1,B3]. Avant de voir dans la Section 3.2 les réponses que nous y avons apportées, soulignons que cette question est loin d'être triviale, pour au moins deux raisons :

- la définition dans ce contexte du caractère sortant de la solution, notion si importante dans un problème de diffraction, n'est pas claire.
- la solution n'étant plus quasi-périodique (comme c'est le cas pour un réseau parfait), on ne peut plus se ramener à un problème posé dans une cellule du réseau, ce qui rend l'approximation numérique de la solution particulièrement délicate.

Nous nous sommes intéressés à des réseaux optiques bidimensionnels constitués d'un demi-plan homogène $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et du demi-plan $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$, ce dernier étant décrit par un indice de réfraction périodique dans la direction verticale y . Plus précisément, nous avons examiné dans [B1] le cas d'un réseau de plaques semi-infinies occupant le demi-plan $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ et contenant un obstacle borné \mathcal{O} (voir Figure 3.3). L'onde incidente est un mode propre du guide contenant l'obstacle.

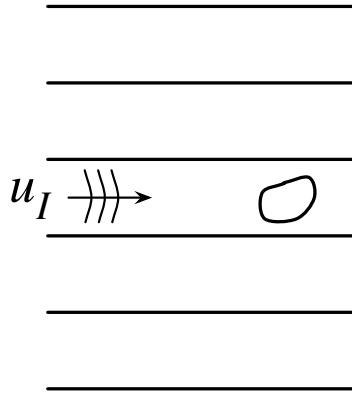


FIG. 3.3 – Configuration traitée dans [B1].

Dans [B3], nous avons considéré le cas où l'obstacle est à l'extérieur d'un milieu périodique $\Omega^- = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ supposé décrit par une constante de propagation $k^- = k^-(y)$ indépendante de la variable horizontale x et périodique de période unité dans la direction verticale y . L'obstacle borné \mathcal{O} est supposé cette fois contenu dans le demi-plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ (voir Figure 3.4) et la structure est éclairée par une onde plane.

Les grandes lignes de la démarche retenue pour aborder ces deux problèmes étant communes, nous allons nous restreindre à la configuration de la Figure 3.4. Si l'on pose $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{O}}$ et $\Gamma = \partial\mathcal{O}$,

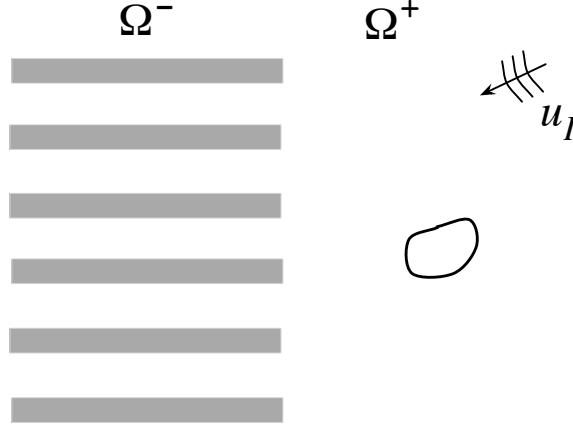


FIG. 3.4 – Configuration traitée dans [B3].

le problème de diffraction à résoudre consiste à trouver un champ φ solution

$$\begin{cases} \Delta\varphi + k^2\varphi = 0 & (\Omega) \\ \partial_n\varphi = g & (\Gamma) \\ \varphi \text{ sortant} \end{cases} \quad (3.1)$$

où g est une donnée définie par l'onde incidente et où

$$k(x, y) = \begin{cases} k^+ & \text{si } x > 0 \\ k^-(y) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La caractérisation d'une onde sortante sera précisée ultérieurement.

La démarche suivie pour étudier le caractère bien posé et résoudre numériquement le problème de diffraction (3.1) a été introduite pour la première fois dans [BBT01a], en vue d'étudier le rayonnement d'un guide semi-infini. Elle consiste à tirer parti du fait (comme c'est le cas pour les deux configurations étudiées ici) que la géométrie est "simple" de part et d'autre de l'interface fictive $\Sigma = \{0\} \times \mathbb{R}$ séparant les domaines Ω^- et Ω^+ . Plus précisément, supposons que l'on connaisse la trace u du champ diffracté sur la droite Σ . Alors, en utilisant la transformée de Floquet-Bloch* unidimensionnelle dans la direction verticale y , on peut trouver une représentation relativement explicite de la transformée de Floquet-Bloch de $\varphi^- = \varphi|_{\Omega^-}$ (voir la relation (9) de [B3]). Soulignons que cette formule fait intervenir les valeurs propres $(\lambda_p(\theta))_{p \geq 1}$

*On rappelle que la transformée de Floquet-Bloch d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est définie par

$$\mathcal{F}(y, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(y+n) e^{in\theta}.$$

On notera que cette fonction est 2π périodique en la variable θ et θ -quasi-périodique en la variable y (i.e. $\mathcal{F}f(y+1, \theta) = e^{-i\theta} \mathcal{F}f(y, \theta)$). De plus, \mathcal{F} peut être prolongée en application continue de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2((0, 2\pi), L^2(0, 1))$, en vertu de l'inégalité type Parseval

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2((0, 2\pi), L^2(0, 1))} = \sqrt{2\pi} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Pour plus de détails, voir par exemple [RS78].

et les fonctions propres $(\psi_p^\theta)_{p \geq 1}$ de l'opérateur A_θ défini pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ par

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A_\theta) = \left\{ v \in H^2(0, 1); v(1) = e^{-i\theta} v(0), v'(1) = e^{-i\theta} v'(0) \right\} \\ A_\theta v = -v'' - (k^-(y))^2 v \quad \forall v \in \mathcal{D}(A_\theta) \end{cases} \quad (3.2)$$

D'autre part, dans Ω^+ , la bonne transformation permettant de "relever" la trace u pour obtenir $\varphi^+ = \varphi|_{\Omega^+}$ serait la transformée de Fourier... si le demi-plan $x > 0$ ne contenait pas d'obstacle! Qu'à cela ne tienne, en retranchant à φ^+ le relèvement φ^∞ obtenu en utilisant la transformation de Fourier, on obtient que $\varphi^{obs} = \varphi^+ - \varphi^\infty$ résout un problème de diffraction usuel (milieu homogène contenant un obstacle borné), dont on peut donner une formulation équivalente posée en domaine bornée (pour ce faire, on suit la démarche de couplage avec une représentation intégrale de la solution donnée dans [JL78]).

Afin de s'assurer que la trace u est bien celle de la solution du problème de diffraction, la dernière étape consiste à écrire le raccord des dérivées normales des représentations du champ diffracté ainsi obtenues. On montre alors que la trace u résout une équation pseudo-différentielle écrite sur Σ couplée à un problème de diffraction classique posé dans un domaine borné Ω' entourant l'obstacle et n'intersectant pas Γ . Enfin, grâce à une technique variationnelle, on prouve le résultat principal de [B3], qui s'énonce comme suit.

Théorème 3.1. *Soit A_θ l'opérateur défini par (3.2). On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*

(A) : A_θ est inversible pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$,

(B) : $\exists \theta^* \in [0, 2\pi]$ tel que $\lambda = 0$ est valeur propre simple de A_{θ^*} .

Alors, le problème (3.1) relève de l'alternative de Fredholm.

Les hypothèses (A) et (B) appellent quelques commentaires. Tout d'abord, commençons par rappeler (cf. [RS78]) que le spectre de l'opérateur

$$\mathcal{A} = \int_{\oplus}^{[0, 2\pi]} A_\theta$$

a une structure de type bande :

$$\sigma = \bigcup_{p \geq 1} I_p, \quad I_p = \left[\inf_{\theta \in [0, 2\pi]} \lambda_p(\theta), \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \lambda_p(\theta) \right].$$

Par conséquent, l'hypothèse (A) équivaut à dire que 0 est situé dans un gap du spectre σ .

D'autre part, toujours d'après [RS78], on sait que pour tout entier $p \geq 1$, la fonction $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \lambda_p(\theta)$ est symétrique par rapport à $\theta = \pi$ et continue sur $[0, \pi]$ pour tout $p \geq 1$. De plus,

$$\begin{cases} \theta \in [0, \pi] \mapsto \lambda_{2p+1}(\theta) & \text{est strictement croissante,} \\ \theta \in [0, \pi] \mapsto \lambda_{2p}(\theta) & \text{est strictement décroissante,} \end{cases}$$

et (voir la Figure 3.5)

$$\lambda_1(0) < \lambda_1(\pi) \leq \lambda_2(\pi) < \lambda_2(0) \leq \dots$$

$$\dots \leq \lambda_{2p-1}(0) < \lambda_{2p-1}(\pi) \leq \lambda_{2p}(\pi) < \lambda_{2p}(0) \leq \dots$$

Par conséquent, les valeurs propres de A_θ sont simples pour $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$. Ceci montre que la condition (B) ne peut être violée que si 0 est une valeur propre des opérateurs A_0 ou A_π correspondant respectivement à des conditions aux limites périodique et anti-périodiques.

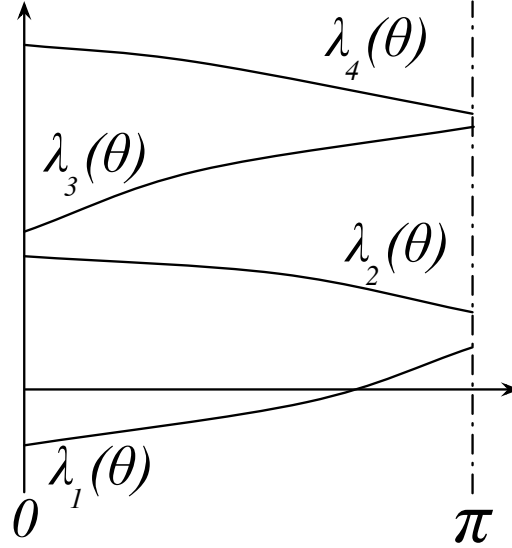


FIG. 3.5 – Allure des valeurs propres $\lambda_p(\theta)$.

Dans [B1], nous avons établi un résultat similaire au Théorème 3.1 pour la configuration de la Figure 3.3. Dans ce cas, le problème se ramène à une équation pseudo-différentielle écrite sur l'interface verticale Σ , couplée à un problème de diffraction classique posé dans un domaine obtenu en tronquant la cellule contenant l'obstacle de manière à obtenir un domaine borné entourant l'obstacle.

Soulignons pour finir quelques points forts de la méthode suivie pour obtenir ce résultat.

Tout d'abord, le passage par les représentations du champ diffracté de part et d'autre de Σ fournit une définition naturelle de ce qu'est une onde sortante pour notre problème. Ainsi, après transformation de Floquet-Bloch dans Ω^- , il est tentant de définir les ondes sortantes comme constituées d'une superposition de modes propagatifs se propageant dans la direction $x \rightarrow -\infty$ (en nombre fini et correspondant aux entiers p tels que $\lambda_p(\theta) < 0$) et de modes évanescents (exponentiellement décroissants) lorsque $x \rightarrow -\infty$ (en nombre infini et correspondant aux entiers p tels que $\lambda_p(\theta) > 0$). Une justification rigoureuse de cette définition intuitive nécessite la preuve d'un résultat d'absorption limite similaire à celui établi dans [BBT01b] pour le cas de la jonction de guides.

Le second avantage de notre démarche est qu'elle fournit, grâce à son caractère variationnel, une méthode d'approximation de la solution par une approche de type Galerkin. On a alors à résoudre (par exemple par éléments finis) un problème couplant l'inconnue $u = \varphi|_{\Sigma}$ à l'inconnue $\varphi' = \varphi|_{\Omega'}$, où Ω' étant un domaine borné entourant l'obstacle et n'intersectant pas Σ . La Figure 3.6 fournit une illustration des résultats numériques obtenus à l'aide du code de calcul MÉLINA dans le cas de la configuration de la Figure 3.3.

3.3 Conception de réseaux [B2,B4]

Le problème inverse de l'optimisation des réseaux en vue d'obtenir un certain comportement (se traduisant par un profil de réflexion et/ou de transmission donné(s)) constituent une question importante dans nombre d'applications industrielles. Dans ce contexte, il est important de savoir de quelles informations on dispose *a priori* concernant les propriétés de réflexion et de

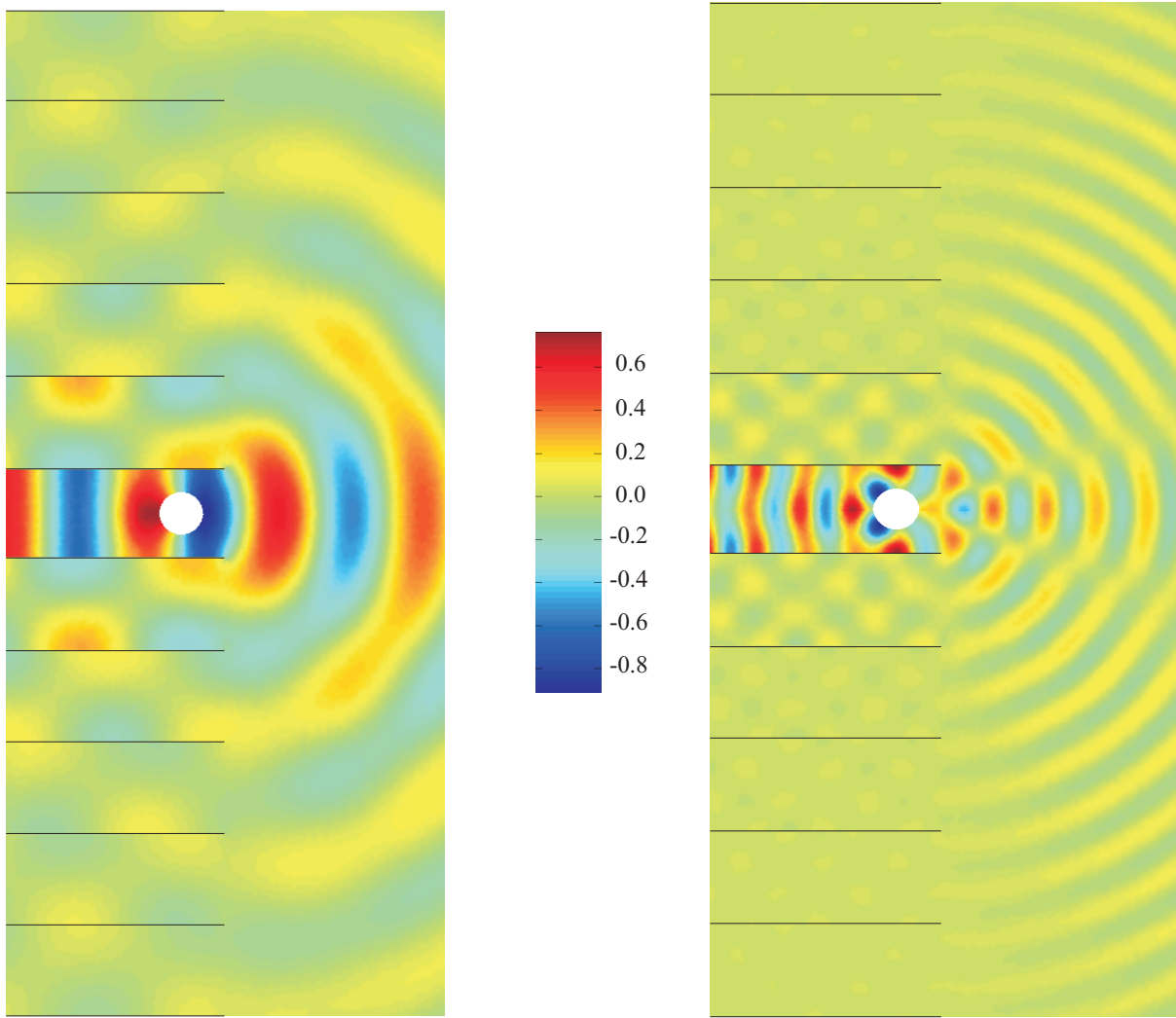


FIG. 3.6 – Champ diffracté par un réseau de plaques rigides semi-infinies contenant un obstacle sphérique après émission du mode fondamental du guide central (à gauche à basse fréquence, à droite à fréquence intermédiaire).

transmission d'une structure donnée. Dans [B2], nous avons étudié cette question dans le cas des réseaux bidimensionnels constitués de deux milieux homogènes séparés par une interface périodique (décrite comme étant le graphe d'une certaine fonction) rapidement oscillante. On montre alors que lorsque la période du réseau tend vers zéro, le coefficient de réflexion est majoré par celui correspondant à une interface plane. Dans [B4], nous avons abordé une autre question intéressante pour la conception des réseaux. Il s'agit de la détermination des fréquences de résonance (cf. [SV03]) d'une structure périodique donnée.

Chapitre 4

Focalisation par retournement temporel

Mots clés

Opérateur de champ lointain, Guides d'ondes, Equations intégrales, Diffraction par de petits obstacles

4.1 Problématique

La propagation acoustique en milieu non dissipatif est un phénomène réversible. Bien que connu depuis fort longtemps, ce résultat n'a pu être exploité dans des applications pratiques que très récemment, avec la réalisation par Mathias Fink et son équipe du Laboratoire d'Ondes et d'Acoustique de l'ESPCI de Miroirs à Retournement Temporel (MRT) (cf. [FP01]). Ces miroirs sont constitués de transducteurs (appareils acoustiques pouvant fonctionner alternativement comme émetteurs (haut-parleurs) ou récepteurs (microphones)) reliés à un dispositif électronique permettant un traitement en temps réel des signaux mesurés. Avec les MRT, la réversibilité de la propagation acoustique se traduit de la manière suivante : lorsqu'une source ponctuelle émet un signal impulsionnel, le signal émis est mesuré par les transducteurs, puis renversé temporellement avant d'être ré-émis par les mêmes transducteurs, fonctionnant cette fois comme des émetteurs. On constate alors une focalisation spatio-temporelle du signal ainsi généré dans un voisinage du point source. On constate par ailleurs que la qualité de cette focalisation est d'autant plus importante que le miroir est fermé (i.e. du fait qu'il entoure complètement la source ou non) et que le milieu de propagation est inhomogène (et, à la limite, aléatoire). Soulignons que le phénomène du retournement temporel a connu avec la conception des MRT un grand nombre d'applications ces dernières années, allant de la destruction de calculs rénaux au contrôle non destructif, en passant par la communication sous-marine (voir [Fin96, PKCF02]).

La plupart des travaux mathématiques sur le retournement temporel concernent la propagation en milieu aléatoire [BPR02, BPZ02, BPTB02, TP02, BR03, BV04, FGN04, PRS04, BP05, FP06] : en effet, ce type de milieux donne lieu à un phénomène dit de super-résolution, qui améliore considérablement la qualité de la focalisation. Si l'on s'intéresse au retournement temporel en milieu non aléatoire, les travaux mathématiques se font rares [MNW97, CIL01]. En 2002, C. Bardos et M. Fink ont proposé dans [BF02] la première justification mathématique du phénomène du retournement temporel en milieu déterministe et en régime transitoire. Ils ont notamment montré que la qualité de la reconstruction d'une source par retournement temporel dans une cavité acoustique peut être reliée à la décroissance locale de l'énergie pour le problème

extérieur. Un peu plus tard, un point de vue de type contrôle du retournement temporel a été étudié dans [JGWdH04].

Nos travaux sur le retournement temporel concernent la propagation en milieu déterministe et en régime harmonique établi, le retournement temporel se ramenant sous cette dernière hypothèse à une conjugaison de phase. Notre objectif, lorsque nous avons commencé à étudier le phénomène du retournement temporel, concernait les deux aspects suivants :

1. Modèles EDP pour le retournement temporel (§4.2) : Les modèles du retournement temporel existant étant soit matriciels (dans la communauté des physiciens), soit aléatoires, soit déterministes en régime transitoire, il nous a semblé important de voir si l'on pouvait obtenir des modèles EDP du retournement temporel en milieu déterministe et en régime harmonique. Nous avons répondu à cette question dans le cadre de trois modèles types (respectivement étudiés dans [C1,C3,C2]) : un modèle de champ lointain dans \mathbb{R}^3 (§4.3.1), un modèle de champ lointain dans un guide d'onde fermé bidimensionnel $\mathbb{R} \times (0, d)$ (§4.2.2) et enfin un modèle de champ proche (§4.2.3). Soulignons que ce dernier modèle fait l'objet de la thèse de C. Ben Amar, que je co-encadre avec C. Hazard.

2. La méthode D.O.R.T. (§4.3) : C'est une technique expérimentale permettant de focaliser des ondes acoustiques de manière sélective sur des obstacles impénétrables (de nombre, de positions et de nature inconnues) grâce aux éléments propres d'une matrice, dite de retournement temporel [FP94]. Plus précisément, celle-ci est définie de la manière suivante : soit $\mathbb{R}(\omega)$ la matrice carrée, de taille le nombre de transducteurs, dont le coefficient $R_{ij}(\omega)$ représente la transformée de Fourier, évaluée à la fréquence ω , du signal mesuré par le récepteur j du MRT après diffraction par les obstacles d'un signal impulsionnel émis par l'émetteur i du MRT. Par définition, la matrice de retournement temporel est la matrice

$$\mathbb{T}(\omega) = \mathbb{R}(\omega)^* \mathbb{R}(\omega).$$

On constate alors expérimentalement que le nombre de valeurs propres non nulles (ou, de manière plus réaliste, significatives) de la matrice de retournement temporel \mathbb{T} est précisément le nombre d'obstacles contenus dans le milieu de propagation. De plus, il s'avère que les vecteurs propres associés permettent de focaliser de manière sélective sur les différents obstacles. Nos travaux fournissent d'une part une justification mathématique de ce résultat et, d'autre part, des informations sur ses limites de validité, et cela dans le cas de deux modèles de champ lointains. Plus précisément, dans le cas de l'espace libre, on montre que la méthode D.O.R.T. est valide dans le régime de la diffraction par de petits obstacles éloignés ($\varepsilon \ll \lambda < d$, où ε est la taille typique des obstacles, λ la longueur d'onde et d la distance inter-obstacles). Dans le cas d'un guide fermé bidimensionnel, un résultat similaire est obtenu pour de petits obstacles lorsque le nombre de modes propagatifs du guide d'ondes tend vers l'infini.

4.2 Modèles EDP pour le retournement temporel en régime harmonique

On considère un milieu de propagation homogène Ω_∞ caractérisé par une vitesse de propagation c contenant un ou plusieurs obstacles impénétrables occupant l'ouvert \mathcal{O} de frontière Γ . En régime harmonique (i.e. pour une dépendance en temps de la forme $e^{-i\omega t}$), la propagation acoustique est régie par l'équation de Helmholtz

$$(\Delta + k^2) u = 0,$$

posée dans le domaine extérieur aux obstacles noté $\Omega = \Omega_\infty \setminus \overline{\mathcal{O}}$ (ci-dessus, $k = \omega/c$ désigne le nombre d'onde). Notre objectif dans ce paragraphe est de décrire de manière synthétique les modèles mathématiques que nous avons utilisé dans [C1,C2,C3] pour décrire à l'aide d'EDP le phénomène du retournement temporel en régime harmonique. Nous considérerons successivement trois modélisations : un modèle en champ lointain dans \mathbb{R}^3 , un modèle en champ lointain dans un guide d'ondes fermé bidimensionnel et un modèle en champ proche dans \mathbb{R}^3 .

Pou chacun de ces trois modèles, il s'agit de proposer une formulation EDP des trois phases successives intervenant dans le processus de retournement temporel, à savoir : l'émission, la réception et le retournement temporel (ou plutôt la conjugaison de phase, puisque l'on se place en régime harmonique). L'un des objectifs visés est d'obtenir des formulations garantissant le caractère autoadjoint de l'opérateur de retournement temporel. Nous verrons que l'un des ingrédients principaux pour établir ce caractère autoadjoint est un principe de réciprocité, que nous préciserons pour chaque modèle étudié. Muni de ce résultat, on établit que l'opérateur de retournement temporel peut être défini comme un opérateur d'un espace de Hilbert \mathcal{H} dans lui-même, et qu'il s'écrit sous la forme

$$\mathcal{T} = \mathcal{R}^* \mathcal{R}.$$

Dans la relation ci-dessus, l'opérateur $\mathcal{R} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ (qui sera précisé dans chacune des trois situations mentionnées ci-dessus) est tel que $\mathcal{R}f$ représente la mesure du miroir après émission et diffraction par les obstacles de l'une onde incidente décrite par l'excitation $f \in \mathcal{H}$. Ce résultat est doublement précieux. Tout d'abord, il nous fournit un cadre fonctionnel adéquat pour effectuer l'analyse spectrale de l'opérateur de retournement temporel \mathcal{T} sur lequel repose la méthode D.O.R.T. (\mathcal{R} étant compact, comme nous le verrons plus tard, \mathcal{T} est compact autoadjoint et positif). D'autre part, il montre que la plus grande valeur propre de $\mathcal{T} = \mathcal{R}^* \mathcal{R}$, notée $|\lambda_{max}|^2$, est donnée par la relation

$$|\lambda_{max}|^2 = \sup_{f \in \mathcal{H}, f \neq 0} \frac{\|\mathcal{R}f\|_{\mathcal{H}}^2}{\|f\|_{\mathcal{H}}^2}$$

En particulier, un vecteur propre $f^* \in \mathcal{H}$ associé à $|\lambda_{max}|^2$ maximise la norme $\|\mathcal{R}f\|_{\mathcal{H}}$, qui n'est autre que le champ mesuré par le MRT. En d'autres termes, l'excitation f^* constitue la meilleure façon d'éclairer les obstacles.

Afin de donner dans ce Chapitre une formulation unifiée des différents modèles proposés, nous avons préféré adopté des notations légèrement différentes de celles des articles [C1,C2,C3].

4.2.1 Modèle de champ lointain dans \mathbb{R}^3 [C1]

Phase d'émission

Dans ce premier modèle, on suppose que $\Omega_\infty = \mathbb{R}^3$ et que les ondes incidentes utilisées pour éclairer les obstacles sont des ondes de Herglotz, c'est à dire des superpositions d'ondes planes. L'opérateur d'émission est donc défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \mathcal{H} = L^2(S^2) &\longrightarrow H_{loc}^1(\Omega_\infty) \\ f &\longmapsto u_I \end{aligned}$$

où

$$(\mathcal{E}f)(x) = u_I(x) = \int_{S^2} f(\alpha) e^{ik\alpha \cdot x} d\alpha \quad \forall x \in \Omega_\infty. \quad (4.1)$$

Phase de réception

On suppose que le MRT est situé à l'infini et qu'il mesure le champ lointain associé au champ diffracté u_D (dans toutes les directions) lorsque les obstacles sont illuminés par l'onde incidente u_I donnée par (4.1) :

$$\begin{cases} \Delta u_D + k^2 u_D = 0, & (\Omega) \\ u_D = -u_I, & (\Gamma) \\ u_D \text{ sortant.} \end{cases}$$

Le caractère sortant de l'onde diffractée est décrit par la condition de radiation de Sommerfeld, i.e.

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u_D}{\partial \nu} - iku_D \right|^2 dx = 0. \quad (4.2)$$

Par linéarité de l'équation, on a

$$u_D(x) = \int_{S^2} f(\alpha) u_D^\alpha(x) d\alpha.$$

où u_D^α est le champ diffracté correspondant à une onde incidente plane $u_I^\alpha(x) = e^{ik\alpha \cdot x}$, c'est à dire la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u_D^\alpha + k^2 u_D^\alpha = 0, & (\Omega) \\ u_D^\alpha = -u_I^\alpha, & (\Gamma) \\ u_D^\alpha \text{ sortant.} \end{cases}$$

On sait de plus (voir par exemple [CK98]) que u_D admet à l'infini le comportement asymptotique directionnel

$$u_D(\beta \|x\|) = \frac{e^{ik\|x\|}}{\|x\|} Ff(\beta) + O(\|x\|^{-2}),$$

où $Ff(\beta)$ désigne le champ lointain dans la direction $\beta \in S^2$. Rappelons que l'opérateur de champ lointain $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est l'opérateur intégral dont le noyau est l'amplitude de scattering $A(\cdot, \cdot)$ (cf. [CK98]) :

$$Ff(\beta) = \int_{S^2} A(\alpha, \beta) f(\alpha) d\alpha. \quad (4.3)$$

Dans le modèle retenu, on suppose que lorsque qu'il fonctionne en mode de réception, le MRT nous donne accès à l'opérateur de champ lointain F . L'opérateur de réception \mathcal{R} dans ce premier modèle est donc défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ f &\longmapsto \mathcal{R}f = Ff. \end{aligned} \quad (4.4)$$

On sait d'après [CK98] que $\mathcal{R} = F$ est un opérateur compact (car l'amplitude de scattering est infiniment différentiable) et normal, dont l'adjoint est l'opérateur intégral de noyau $\overline{A(\beta, \alpha)}$.

Opérateur de retournement temporel

Pour définir l'opérateur de retournement temporel \mathcal{T} pour une donnée $f \in \mathcal{H}$, on commence par éclairer les obstacles par l'onde incidente de Herglotz $u_I = \mathcal{E}f$ associée à f . Après diffraction, le MRT mesure en mode réception le champ lointain $\mathcal{R}f$ et ré-émet l'onde incidente associée à la densité directionnelle $g \in \mathcal{H}$ définie par

$$g = \overline{\sigma \mathcal{R}f}, \quad (4.5)$$

où σ est l'opérateur de symétrie sur la sphère unité, défini par

$$(\sigma f)(\alpha) = f(-\alpha) \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Précisons que dans la relation (4.5), la présence de l'opérateur de symétrie σ est due au fait que durant le processus de retournement temporel, le champ lointain mesuré dans une direction $\beta \in S^2$ est utilisé pour ré-émettre une onde dans la direction opposée $(-\beta)$. Par définition, l'opérateur de retournement temporel \mathcal{T} correspond à deux itérations du processus décrit ci-dessus :

$$\mathcal{T}f = \overline{\sigma \mathcal{R}g} = \overline{\sigma \mathcal{R} \overline{\sigma f}}. \quad (4.6)$$

Afin de mettre en évidence le caractère autoadjoint de l'opérateur \mathcal{T} , on utilise un principe de réciprocité. Plus précisément, il est bien connu [CK98] que l'amplitude de scattering vérifie la formule de réciprocité

$$A(\alpha, \beta) = A(-\beta, -\alpha), \quad (4.7)$$

formule qui stipule simplement que la mesure du champ lointain dans une direction β lorsque l'on éclaire les obstacles par une onde plane de direction α est identique au champ lointain qui serait mesuré dans la direction $(-\alpha)$ si l'on éclairait les obstacles par une onde plane de direction $(-\beta)$. Ce résultat montre en particulier que l'adjoint \mathcal{R}^* de l'opérateur intégral $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ n'est autre que l'opérateur intégral de noyau $\overline{A(\beta, \alpha)} = A(-\alpha, -\beta)$. Il en découle que

$$\mathcal{R}^*f = \overline{\sigma \mathcal{R} \overline{\sigma f}} \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Compte tenu de (4.6), la relation ci-dessus entraîne donc le résultat suivant.

Théorème 4.1. *Soit $\mathcal{H} = L^2(S^2)$. L'opérateur de retournement temporel*

$$\mathcal{T} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

est donné par la relation

$$\mathcal{T} = \mathcal{R}^* \mathcal{R} \quad (4.8)$$

où \mathcal{R} est l'opérateur de champ lointain défini par (4.3)-(4.4). En particulier, l'opérateur de retournement temporel \mathcal{T} est compact autoadjoint et positif.

Dans [C1], nous avons également étudié la configuration plus réaliste des miroirs ouverts, dans laquelle le MRT n'entoure que partiellement les obstacles diffractants. De nouveau, on peut montrer le caractère autoadjoint de l'opérateur de retournement temporel.

4.2.2 Modèle de champ lointain dans un guide d'ondes [C3]

On s'intéresse cette fois au retournement temporel dans un guide fermé bidimensionnel $\Omega_\infty = \mathbb{R} \times (0, d)$. Commençons par introduire quelques notations. On suppose que le MRT est localisé sur la frontière

$$\Gamma_A = \{x_1 = 0, 0 < x_2 < d\}$$

et que les obstacles sont contenus dans la bande $(\ell, L) \times (0, d)$, où $0 < \ell < L$ (voir Figure 4.1). Notons $\Omega = \Omega_\infty \setminus \overline{\mathcal{O}}$ le domaine extérieur aux obstacles, $\Gamma_B = \{x_1 = L, 0 < x_2 < d\}$ et $\Gamma_C = \{x_1 = \ell, 0 < x_2 < d\}$. On suppose que $kd/\pi \notin \mathbb{N}$ (k désigne le nombre d'onde) et on définit alors l'entier

$$N = \text{Card} \{m \in \mathbb{N}^* \mid m\pi/d < k\} = \lfloor kd/\pi \rfloor. \quad (4.9)$$

Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \Omega_\infty$, on définit les modes guidés $(\Phi_m^\pm)_{m \geq 1}$ par

$$\Phi_m^\pm(x) = \Phi_m^\pm(x_1, x_2) = \exp(\pm i\beta_m x_1) \phi_m(x_2), \quad (4.10)$$

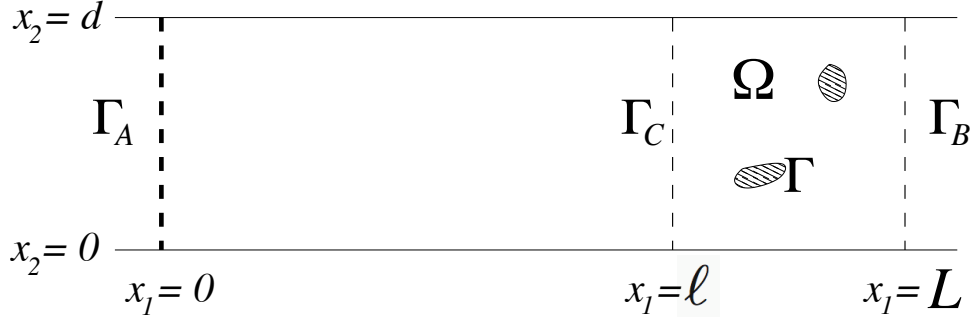


FIG. 4.1 – Le guide d’ondes, les obstacles et le MRT.

où l’on a posé

$$\phi_m(\xi) = \sqrt{2/d} \sin(m\pi\xi/d), \quad \forall \xi \in (0, d), \quad (4.11)$$

et où β_m sont les constantes de propagation du guide, i.e.

$$\beta_m = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (m\pi/d)^2} & \text{si } 1 \leq m \leq N, \\ i\sqrt{(m\pi/d)^2 - k^2} & \text{si } m > N. \end{cases} \quad (4.12)$$

On notera que la famille finie $(\Phi_m^\pm)_{1 \leq m \leq N}$ correspond à des modes propagatifs (ou guidés) se propageant dans la direction $x_1 \rightarrow \pm\infty$. *A contrario*, la famille dénombrable $(\Phi_m^\pm)_{m > N}$ correspond à des modes évanescents lorsque $x_1 \rightarrow \pm\infty$.

Phase d’émission

On suppose dans notre modèle que le MRT est situé loin des obstacles (i.e. que ℓ est assez grand). Sous cette hypothèse, il est raisonnable de supposer qu’en phase d’émission, le MRT émet une onde incidente u_I qui est une superposition de modes guidés se propageant en direction des obstacles. L’opérateur d’émission est donc défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \quad \mathcal{H} = \mathbb{C}^N & \longrightarrow H_{loc}^1(\Omega_\infty) \\ \mathbf{X}_I = (a_1^I, \dots, a_N^I)^\mathbf{T} & \longmapsto u_I \end{aligned}$$

où

$$(\mathcal{E}f)(\mathbf{X}_I) = u_I(x) = \sum_{m=1}^N a_m^I \Phi_m^+(x) \quad \forall x \in \Omega_\infty. \quad (4.13)$$

Une onde incidente est donc décrite par le vecteur $\mathbf{X}_I = (a_1^I, \dots, a_N^I)^\mathbf{T} \in \mathcal{H}$ où

$$a_m^I = (u_I|_{\Gamma_A}, \phi_m) \quad \forall m = 1, \dots, N.$$

Phase de réception

Le champ diffracté u_D est la solution sortante du problème suivant (que l’on suppose bien posé) :

$$\begin{cases} \Delta u_D + k^2 u_D = 0 & (\Omega) \\ u_D = -u_I & (\Gamma) \\ u_D = 0 & (\partial\Omega_\infty). \end{cases} \quad (4.14)$$

Le caractère sortant se traduit ici par le fait d'imposer que le champ diffracté lorsque $|x_1| \rightarrow +\infty$ est une superposition de modes évanescents et de modes propagatifs se propageant vers l'infini. Autrement dit, ceci revient à supposer que u_D vérifie

$$\begin{cases} \text{Pour } x_1 < 0 : & u^D(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} a_m^D \Phi_m^-(x), \\ \text{Pour } x_1 > L : & u^D(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} b_m^D \Phi_m^+(x). \end{cases}$$

On suppose qu'en phase de réception, le MRT mesure les composantes propagatives de la trace du champ diffracté sur le miroir. En d'autres termes, l'opérateur de réception \mathcal{R} dans ce modèle est donc

$$\mathcal{R} : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} = \mathbb{C}^N & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ \mathbf{X}_I = (a_1^I, \dots, a_N^I)^{\mathbf{T}} & \longmapsto & \mathbf{X}_D = (a_1^D, \dots, a_N^D)^{\mathbf{T}} \end{array} \quad (4.15)$$

où

$$a_m^D = (u_{D|_{\Gamma_A}}, \phi_m) \quad \forall m = 1, \dots, N. \quad (4.16)$$

Opérateur de retournement temporel

L'opérateur de retournement temporel correspond à la succession de deux cycles "Emission-Réception-Conjugaison" et est donc décrit par l'endomorphisme \mathcal{T} de \mathcal{H} défini par

$$\mathcal{T} = \overline{\mathcal{R}}\mathcal{R},$$

où, par définition, le conjugué $\overline{\mathcal{R}}$ de l'opérateur \mathcal{R} est l'opérateur tel que

$$\overline{\mathcal{R}}f = \overline{\mathcal{R}f} \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (4.17)$$

Afin d'établir un résultat similaire au Théorème 4.1 dans le contexte du guide d'ondes traité ici, on commence par établir dans le Lemme 3.4. de [C1] un principe de réciprocité (l'équivalent de la relation (4.7)). Le résultat obtenu montre en particulier que si l'on munit \mathcal{H} du produit scalaire

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_\beta = \sum_{m=1}^N \beta_m X_m \overline{Y_m} \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{H} \quad (4.18)$$

alors

$$\langle \mathcal{R}\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_\beta = \langle \mathbf{X}, \overline{\mathcal{R}}\mathbf{Y} \rangle_\beta$$

ce qui montre que pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\beta$, on a

$$\mathcal{R}^* = \overline{\mathcal{R}}.$$

On obtient ainsi le résultat attendu, à savoir le

Théorème 4.2. *On munit l'espace vectoriel $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ du produit scalaire défini par (4.18). Alors, l'opérateur de retournement temporel est l'endomorphisme $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que*

$$\mathcal{T} = \mathcal{R}^*\mathcal{R},$$

et est donc diagonalisable et positif.

4.2.3 Modèle de champ proche dans \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) [C2]

Dans les deux modèles de champ lointain précédemment décrits, le MRT est supposé suffisamment éloigné des obstacles diffractants pour que leur interaction puisse être négligée. On a donc supposé que le champ diffracté n'était pas perturbé par la présence du miroir. Dans ce paragraphe, nous décrivons au contraire le cas d'un MRT intrusif en phases d'émission et de réception. Soit donc \mathcal{M} l'ouvert de \mathbb{R}^d occupé par le MRT, $\partial\mathcal{M}$ sa frontière et $\Omega_\infty = \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{M}}$ le milieu de propagation avant introduction des obstacles.

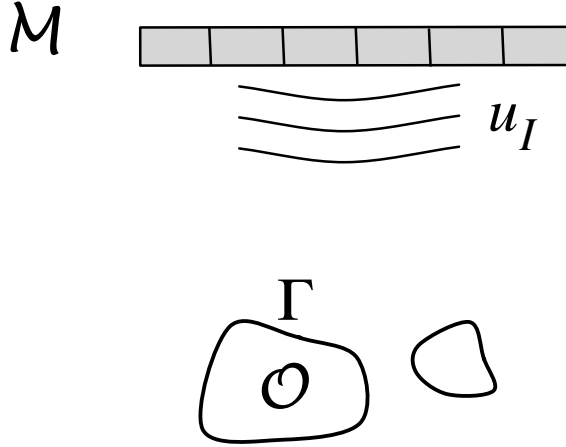


FIG. 4.2 – Les obstacles et le MRT en champ proche.

Phase d'émission

Afin de définir les ondes incidentes utilisées dans ce modèle, introduisons la fonction de Green $G_I(\cdot, \cdot)$ solution du problème extérieur

$$\begin{cases} \Delta G_I(x, \cdot) + k^2 G_I(x, \cdot) = \delta_x, & (\Omega_\infty) \\ \frac{\partial G_I}{\partial n} + \mu G_I = 0, & (\partial\mathcal{M}) \\ G_I \text{ sortant,} \end{cases} \quad (4.19)$$

où le coefficient $\mu > 0$ représente l'inverse de l'impédance acoustique du TRM, et où le caractère sortant de l'onde est traduit par la condition de radiation de Sommerfeld (4.2). On suppose que les ondes incidentes émises par le MRT sont décrites par le potentiel de simple couche associé à G_I . En d'autres termes, l'opérateur d'émission est l'opérateur

$$\mathcal{E} : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} = L^2(\partial\mathcal{M}) & \longrightarrow & H_{loc}^1(\Omega_\infty) \\ f & \longmapsto & u_I, \end{array}$$

défini par

$$(\mathcal{E}f)(x) = u_I(x) = \int_{\partial\mathcal{M}} G_I(x, y) f(y) d\sigma_y \quad \forall x \in \Omega_\infty. \quad (4.20)$$

On notera qu'une onde incidente de la forme ci-dessus est solution du problème de diffraction

$$\begin{cases} \Delta u_I + k^2 u_I = 0, & (\Omega_\infty) \\ \frac{\partial u_I}{\partial n} + \mu u_I = f, & (\partial\mathcal{M}) \\ u_I \text{ sortant.} \end{cases}$$

Phase de réception

Soit $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus (\overline{\mathcal{M}} \cup \overline{\mathcal{O}})$ le milieu de propagation après introduction d'obstacles. Le champ diffracté résout le problème

$$\begin{cases} \Delta u_D + k^2 u_D = 0, & (\Omega) \\ \frac{\partial u_D}{\partial n} = -\frac{\partial u_I}{\partial n}, & (\Gamma) \\ \frac{\partial u_D}{\partial n} + \mu u_D = 0, & (\partial\mathcal{M}) \\ u_D \text{ sortant.} \end{cases} \quad (4.21)$$

On suppose que le TRM mesure la trace du champ diffracté, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ f &\longmapsto \mathcal{R}f = u_{D|_{\mathcal{M}}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Opérateur de retournement temporel

Après deux cycles "Emission-Réception-Conjugaison", on obtient que l'opérateur de retournement temporel est l'opérateur de \mathcal{H} dans \mathcal{H} défini par

$$\mathcal{T} = \overline{\mathcal{R}}\mathcal{R},$$

où le conjugué $\overline{\mathcal{R}}$ de l'opérateur \mathcal{R} est défini par la relation (4.17). Comme précédemment, le point clé pour établir le caractère autoadjoint de \mathcal{T} est un résultat de réciprocité. Dans le contexte du modèle de champ proche décrit ici, ce résultat découle de la Proposition 3.1. de [C2], selon laquelle l'opérateur \mathcal{R} est un opérateur intégral sur l'espace $\mathcal{H} = L^2(\partial\mathcal{M})$ dont le noyau $G_{\mathcal{R}}$ est symétrique et appartient à $L^2(\partial\mathcal{M} \times \partial\mathcal{M})$. Ce dernier résultat, assez technique, repose sur l'utilisation du produit tensoriel d'espaces de Hilbert [Aub87]. L'opérateur \mathcal{R} est donc un opérateur de Hilbert-Schmidt d'adjoint $\mathcal{R}^* = \overline{\mathcal{R}}$. Ceci fournit le

Théorème 4.3. *Soit $\mathcal{H} = L^2(\partial\mathcal{M})$. L'opérateur de retournement temporel*

$$\mathcal{T} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

est donné par la relation

$$\mathcal{T} = \mathcal{R}^*\mathcal{R}, \quad (4.23)$$

où \mathcal{R} est l'opérateur défini par les relations (4.20), (4.21) et (4.22). En particulier, l'opérateur de retournement temporel est compact autoadjoint et positif.

4.3 Focalisation sélective

4.3.1 Diffraction par de petits obstacles [C1,C3]

Cette Section présente nos résultats concernant le comportement asymptotique de la solution d'un problème de diffraction par des obstacles impénétrables lorsque leur taille caractéristique, notée ε dans la suite, tend vers 0. Outre leur intérêt intrinsèque, ces résultats constituent l'un des principaux ingrédients permettant de donner une justification mathématique de la méthode D.O.R.T. (cf. introduction du présent Chapitre). Soulignons que de tels résultats asymptotiques ont récemment été étudiés par H. Ammari *et. al.* [AK04, AIK05, AIL05] dans le cas de la diffraction par de petites homogénéités. Nous avons considéré les deux situations

$$\Omega_\infty = \mathbb{R}^3 \qquad \Omega_\infty = \mathbb{R} \times (0, d).$$

La difficulté technique principale pour établir le résultat asymptotique est liée au défaut de compacité du problème auquel conduit le caractère non borné du milieu de propagation. Dans le cas de l'espace libre $\Omega_\infty = \mathbb{R}^3$, la démarche retenue (cf. l'Annexe de [C1]) consiste à se ramener à un problème de diffraction équivalent au problème initial, posé dans un domaine borné entourant l'obstacle (ou les) obstacle(s). Ceci est effectué en écrivant sur les frontières fictives entourant les obstacles des conditions aux limites transparentes, basées sur la formule de représentation intégrale de la solution.

Dans le cas du guide $\Omega_\infty = \mathbb{R} \times (0, d)$, la preuve est considérablement plus délicate. Tout d'abord, le fait que l'on ne soit plus en présence d'un problème tridimensionnel mais bidimensionnel fait que les singularités de la fonction de Green sont différentes. Pour cette raison, certains termes qui disparaissaient précédemment (pour $\Omega_\infty = \mathbb{R}^3$) dans le passage à la limite ne disparaissent plus. La seconde difficulté est également liée au caractère bidimensionnel du problème. En effet, contrairement à ce qui se passe dans \mathbb{R}^3 , la solution élémentaire de l'opérateur de Helmholtz $\frac{i}{4}H_0^1(k|x-y|)$ dans \mathbb{R}^2 ne converge pas vers celle du Laplacien lorsque k tend vers 0 (la limite petits obstacles s'apparentant à la limite basse fréquence, comme le montre un changement de variables). Cette particularité, bien connue pour les problèmes de diffraction 2D, pose des difficultés techniques importantes, et nous a conduit à utiliser une approche basée sur la théorie du potentiel, inspirée de celle développée dans [Wer86, Kre87] pour l'analyse asymptotique basse fréquence d'un problème de diffraction.

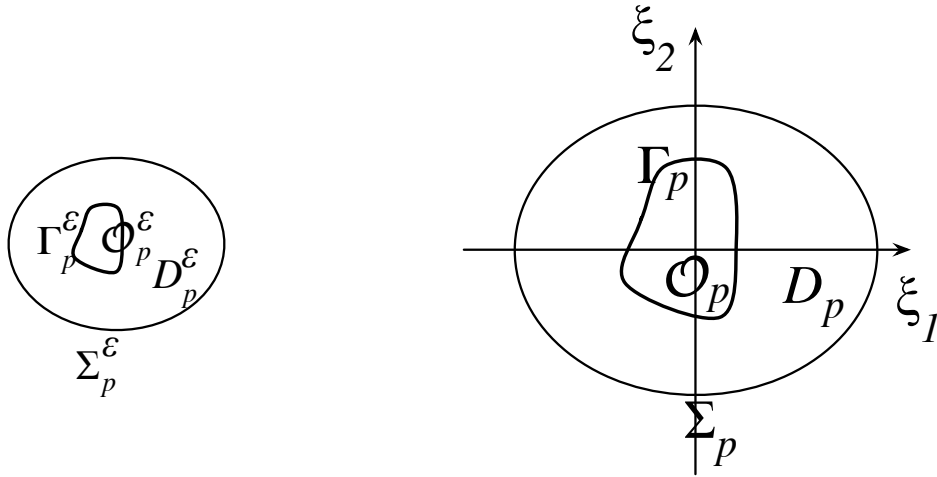


FIG. 4.3 – Les petits obstacles (à gauche) sont obtenus par les changements de variables $x = \varepsilon\xi + s_p$ effectués sur les domaines de référence (à droite).

Passons maintenant à la description de nos résultats. On rappelle que les ondes incidentes considérées sont des ondes de Herglotz dans le premier cas ($\Omega_\infty = \mathbb{R}^3$) et des superpositions de modes guidés se propageant vers les obstacles dans le second cas ($\Omega_\infty = \mathbb{R} \times (0, d)$). Commençons par introduire les notations utilisées. On suppose que le milieu de propagation Ω_∞ contient M obstacles $\{\mathcal{O}_p^\varepsilon; 1 \leq p \leq M\}$. On suppose donc que chaque obstacle $\mathcal{O}_p^\varepsilon$ de frontière Γ_p^ε est centré sur un point $s_p = (s_p^1, s_p^2) \in \mathbb{R}^d$ donné, et qu'il est obtenu à partir d'un ouvert de référence \mathcal{O}_p de frontière Γ_p contenant l'origine (voir Figure 4.3), par la relation

$$\mathcal{O}_p^\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^d; \xi = \frac{(x - s_p)}{\varepsilon} \in \mathcal{O}_p \right\}.$$

On note

$$\Gamma^\varepsilon = \bigcup_{1 \leq p \leq M} \Gamma_p^\varepsilon \quad \mathcal{O}^\varepsilon = \bigcup_{1 \leq p \leq M} \mathcal{O}_p^\varepsilon \quad \Gamma = \bigcup_{1 \leq p \leq M} \Gamma_p \quad \mathcal{O} = \bigcup_{1 \leq p \leq M} \mathcal{O}_p.$$

et on désigne l'extérieur des obstacles par

$$\Omega^\varepsilon = \Omega_\infty \setminus \overline{\mathcal{O}^\varepsilon}$$

Soit alors u_ε^D la solution du problème de diffraction

$$\begin{cases} \Delta u_D^\varepsilon + k^2 u_D^\varepsilon = 0 & (\Omega^\varepsilon) \\ u_D^\varepsilon = -u_I & (\Gamma^\varepsilon) \\ u_D^\varepsilon \text{ sortant.} \end{cases} \quad (4.24)$$

Dans le cas où $\Omega_\infty = \mathbb{R} \times (0, d)$, on suppose que le champ diffracté vérifie sur les bords du guide la condition aux limites supplémentaire

$$u_D^\varepsilon(x_1, 0) = u_D^\varepsilon(x_1, d) = 0 \quad p.p.t. \ x_1 \in \mathbb{R}.$$

Autour de chaque obstacle \mathcal{O}_p , on définit un ouvert borné D_p de frontière extérieure Σ_p n'intersectant pas Γ_p . On dénote par D_p^ε et Σ_p^ε les images respectives de D_p et Σ_p par le changement de variables $x = \varepsilon\xi + s_p$ et on pose

$$D^\varepsilon = \bigcup_{1 \leq p \leq M} D_p^\varepsilon \quad \Sigma^\varepsilon = \bigcup_{1 \leq p \leq M} \Sigma_p^\varepsilon \quad D = \bigcup_{1 \leq p \leq M} D_p \quad \Sigma = \bigcup_{1 \leq p \leq M} \Sigma_p$$

Enfin, pour tout $x = s_p + \varepsilon\xi \in D_p^\varepsilon$, avec $\xi \in D_p$, on pose

$$\varphi_p^\varepsilon(\xi) = u_\varepsilon^D(x).$$

Théorème 4.4. *Soit Θ_p le potentiel statique, i.e. la solution de*

$$\begin{cases} \Delta \Theta_p = 0 & (\mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{O}_p}), \\ \Theta_p = 1 & (\Gamma_p), \\ C.R. \end{cases}$$

où *C.R. désigne la condition de radiation*

$$\Theta_p = \begin{cases} o(1) & \text{si } \Omega_\infty = \mathbb{R}^3 \\ O(1) & \text{si } \Omega_\infty = \mathbb{R} \times (0, d) \end{cases} \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow \infty.$$

Avec les notations ci-dessus, on a pour tout $1 \leq p \leq M$ l'estimation suivante

$$\|\varphi_p^\varepsilon - u_I(s_p) \Theta_p\|_{H^1(D_p)} = \begin{cases} O(\varepsilon) & \text{si } \Omega_\infty = \mathbb{R}^3 \\ O\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right) & \text{si } \Omega_\infty = \mathbb{R} \times (0, d). \end{cases}$$

Muni de ce résultat, on peut d'obtenir une justification mathématique de la méthode D.O.R.T. de focalisation sélective. Pour ce faire, nous partons de l'expression de l'opérateur de retournement temporel obtenue à la Section 4.2 pour les différents modèles étudiés, expression que l'on réécrit ici en explicitant la dépendance vis-à-vis de la taille caractéristique des obstacles ε sous la forme

$$\mathcal{T}^\varepsilon = (\mathcal{R}^\varepsilon)^* \mathcal{R}^\varepsilon.$$

On voit alors que l'asymptotique de \mathcal{T}^ε découle de celle de l'opérateur \mathcal{R}^ε décrivant la mesure du MRT après émission et diffraction par les obstacles d'une onde incidente donnée.

Cas de l'espace libre \mathbb{R}^3

Rappelons que dans ce cas (cf. Section 4.2.1), l'opérateur $\mathcal{R}^\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, avec $\mathcal{H} = L^2(S^2)$, n'est autre que l'opérateur connu en théorie classique de la diffraction comme l'opérateur de champ lointain, c'est à dire l'opérateur intégral de \mathcal{H} dans \mathcal{H} noyau l'amplitude de scattering $A^\varepsilon(\cdot, \cdot)$. Or, on dispose (cf. [CK98]) de l'expression de l'amplitude scattering en fonction du champ diffracté u_D^ε :

$$A^\varepsilon(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma^\varepsilon} \frac{\partial u_T^{\alpha, \varepsilon}}{\partial n}(y) e^{-ik\beta \cdot y} d\gamma_y, \quad (4.25)$$

où $u_T^{\alpha, \varepsilon} = u_I^\alpha + u_D^{\alpha, \varepsilon}$ est le champ total associé à l'onde incidente plane de direction α : $u_I^\alpha(x) = e^{ik\alpha \cdot x}$. Le Théorème 4.4, qui fournit en particulier le comportement asymptotique du champ diffracté $u_D^{\alpha, \varepsilon}$ au voisinage de Γ^ε , nous permet alors de montrer le résultat suivant.

Proposition 4.5. *Il existe M constantes positives $\kappa_1, \dots, \kappa_M$ ne dépendant que de la géométrie des obstacles de référence $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_M$ telles que*

$$\frac{A^\varepsilon(\alpha, \beta)}{\varepsilon} = A^{(1)}(\alpha, \beta) + O(\varepsilon) \quad (4.26)$$

où l'on a posé

$$A^{(1)}(\alpha, \beta) = \frac{-1}{4\pi} \sum_{p=1, M} \kappa_p u_I^\alpha(s_p) \overline{u_I^\beta(s_p)}, \quad (4.27)$$

et où la borne $O(\varepsilon)$ est uniforme pour tout $(\alpha, \beta) \in S^2 \times S^2$.

L'opérateur intégral compact $\mathcal{R}^{(1)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ de noyau $A^{(1)}(\alpha, \beta)$ est de rang au plus M , et admet donc au plus M valeurs propres non nulles. De plus, si l'on désigne alors par $\lambda = 2\pi/k$ la longueur d'onde du problème et par

$$d = \min_{1 \leq p \neq q \leq N} \|s_p - s_q\|$$

la distance inter-obstacles, alors on montre dans [C1] que dans le régime

$$\varepsilon \ll \lambda \ll d$$

les fonctions

$$e_p(\alpha) = \frac{e^{-ik\alpha \cdot s_p}}{2\sqrt{\pi}} \quad \forall p = 1, \dots, M$$

constituent une famille quasi-orthogonale de fonctions propres approchées de $\mathcal{R}^{(1)}$, puisque

$$\mathcal{R}^{(1)} f = - \sum_{p=1, M} \kappa_p (f, e_p)_\mathcal{H} e_p \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

et

$$(e_p, e_q)_\mathcal{H} = j_0(k\|s_p - s_q\|) = \frac{\sin(k\|s_p - s_q\|)}{k\|s_p - s_q\|} = \begin{cases} 1 & \text{si } q = p, \\ O\left(\frac{\lambda}{d}\right) & \text{si } q \neq p, \end{cases}$$

où l'on a utilisé l'identité

$$j_0(k|x - y|) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} e^{ik\alpha \cdot (x-y)} d\alpha. \quad (4.28)$$

Enfin, chaque fonction propre approchée $e_p \in \mathcal{H}$, $p = 1, \dots, M$, définit une onde incidente de Herglotz $u_{I,p}$ qui focalise sur le $p^{\text{ième}}$ obstacle, puisque

$$u_{I,p}(x) = \int_{S^2} e_p(\alpha) e^{ik\alpha \cdot x} d\alpha = 2\sqrt{\pi} j_0(k\|x - s_p\|). \quad (4.29)$$

On retrouve ainsi le résultat expérimental qui est la base de la méthode D.O.R.T.

Cas du guide d'onde

D'après la Section 4.2.2, l'opérateur $\mathcal{R}^\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ est défini par la relation (4.15). Comme dans le paragraphe précédent, le point de départ de l'analyse réside dans l'obtention du comportement asymptotique de l'opérateur \mathcal{R}^ε lorsque ε tend vers 0. Pour ce faire, on introduit la fonction de Green $G(\cdot, \cdot)$ du guide définie pour tout $x = (x_1, x_2) \in \Omega_\infty$ par

$$\begin{cases} \Delta G(x, \cdot) + k^2 G(x, \cdot) = \delta_x & (\Omega_\infty), \\ G(x, \cdot) = 0 & (\partial\Omega_\infty), \\ G(x, \cdot) \text{ sortant.} \end{cases}$$

On montre que si $\mathbb{R}^\varepsilon = (R_{mn})_{1 \leq m, n \leq N}$ désigne la matrice carrée représentant l'endomorphisme $\mathcal{R}^\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dans la base canonique de $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$, alors

$$R_{mn}^\varepsilon = - \int_{\Gamma^\varepsilon} G_m(y) \frac{\partial u_T^{n, \varepsilon}}{\partial n}(y) d\gamma_y, \quad \forall 1 \leq m, n \leq N \quad (4.30)$$

où $u_T^{n, \varepsilon} = u_I^n + u_D^{n, \varepsilon}$ désigne le champ total correspondant à la diffraction du $n^{\text{ième}}$ mode guidé

$$u_I^n(x) = e^{i\beta_m x_1} \phi_n(x_2) \quad (4.31)$$

et où

$$G_m(y) = (G(\cdot, y)|_{\Gamma_A}, \phi_m) = \frac{1}{2i\beta_m} e^{i\beta_m y_1} \phi_m(y_2). \quad (4.32)$$

Encore une fois, grâce au Théorème 4.4 fournissant le comportement asymptotique du champ diffracté $u_D^{n, \varepsilon}$ au voisinage de Γ^ε , l'expression (4.30) nous permet de montrer le résultat suivant (Proposition 4.1. de [C3]).

Proposition 4.6. *Il existe M constantes positives $\kappa_1, \dots, \kappa_M$ ne dépendant que de la géométrie des obstacles de référence $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_M$ telles que la matrice \mathbb{R}^ε représentant l'opérateur $\mathcal{R}^\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dans la base canonique de $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ admette l'asymptotique*

$$\mathbb{R}^\varepsilon = \mathbb{R}^0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right) = \left(\sum_{p=1}^M \mathbb{R}^{0,p}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right), \quad (4.33)$$

où les matrices $\mathbb{R}^{0,p} = (R_{mn}^{0,p})_{1 \leq m, n \leq N}$ est définie par

$$\mathbb{R}^{0,p} = \kappa_p \mathbf{U}_p \mathbf{V}_p^T \quad \forall 1 \leq p \leq M,$$

où les vecteurs $\mathbf{U}_p = (U_m^p)$, $\mathbf{V}_p = (V_m^p) \in \mathcal{H}$ sont donnés par

$$\begin{cases} U_m^p = \frac{1}{2i\beta_m} e^{i\beta_m s_p^1} \phi_m(s_p^2), \\ V_m^p = e^{i\beta_m s_p^1} \phi_m(s_p^2), \end{cases} \quad 1 \leq m \leq N.$$

La relation (4.33) entraîne en particulier que la matrice carrée \mathbb{T} représentant l'opérateur de retournement temporel $\mathcal{T}^\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dans la base canonique de $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ s'écrit

$$\mathbb{T}^\varepsilon = \mathbb{T}^0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right),$$

avec

$$\mathbb{T}^0 = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \kappa_p \kappa_q (\mathbf{V}_q^* \mathbf{U}_p) \overline{\mathbf{U}_q} \mathbf{V}_p^{\mathbf{T}}. \quad (4.34)$$

et où le produit scalaire $\mathbf{V}_q^* \mathbf{U}_p$ s'écrit

$$\mathbf{V}_q^* \mathbf{U}_p = \sum_{m=1}^N \frac{1}{2i\beta_m} e^{i\beta_m(s_p^1 - s_q^1)} \phi_m(s_p^2) \phi_m(s_q^2). \quad (4.35)$$

La relation (4.34) indique que l'image de \mathbb{T}^0 vérifie

$$\text{Im}(\mathbb{T}^0) \subset \langle \overline{\mathbf{U}_1}, \dots, \overline{\mathbf{U}_M} \rangle$$

et donc le nombre de valeurs propres non nulles de \mathbb{T}^0 est au plus égal au nombre d'obstacles M .

Si l'on s'intéresse maintenant à la question de la sélection sélective par la méthode D.O.R.T., son étude s'avère dans le cas du guide nettement plus technique que dans le cas de l'espace libre pour au moins deux raisons. Tout d'abord, contrairement au cas de l'espace libre où l'on dispose d'une expression explicite de la fonction de Green, celle-ci est maintenant donnée par la somme d'une série (les fonctions ϕ_m et les constantes β_m sont respectivement définies par (4.11) et (4.12)) :

$$G(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2i\beta_m} \exp(i\beta_m |x_1 - y_1|) \phi_m(x_2).$$

Ceci rend l'obtention de vecteurs propres approchés notablement plus délicate que précédemment. La seconde raison qui complique l'étude de la méthode D.O.R.T. dans un guide d'ondes tient au fait qu'une fois obtenus les vecteurs propres approchés de l'opérateur de retournement temporel, il n'est pas immédiat de voir que ceux-ci génèrent des champs qui focalisent sélectivement sur les obstacles. En effet, on dispose pas d'une formule analogue à l'identité (4.28) qui nous permettrait d'estimer asymptotiquement des sommes d'exponentielles complexes. De ce fait, l'espoir s'éloigne d'obtenir une formule aussi explicite que (4.29) pour quantifier la notion de focalisation. L'un des principaux outils pour résoudre ces difficultés est le Lemme de Van der Corput sur le comportement asymptotique des sommes d'exponentielles (voir par exemple [Ten95, p.94]). Grâce à ce résultat, on peut obtenir des vecteurs propres approchés \mathbb{T}^0 lorsque le nombre de modes propagatifs N du guide tend vers l'infini. Compte tenu de la relation (4.9), ce régime correspond au cas où la hauteur d du guide est grande comparativement à la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$. On retrouve alors les résultats expérimentaux de la méthode D.O.R.T.

4.3.2 Illustrations numériques [C2,C3]

Modèle de champ lointain dans un guide d'ondes

Les simulations présentées dans cette Section ont été obtenus à l'aide d'une boîte à outils EDP pour Scilab développée par Bruno Pinçon*.

Dans un premier test numérique, on considère le cas où le guide ne contient qu'un seul obstacle, à savoir un disque de rayon r . On suppose que la longueur d'onde est $\lambda = 1$ (i.e. $k = 2\pi$). Le Tableau 4.1 montre la dépendance du rapport des deux plus grandes valeurs propres de la matrice de retournement temporel vis-à-vis du rayon r . On retrouve bien le fait que pour un obstacle suffisamment petit, il n'y a qu'une seule valeur propre significative.

*Pour plus de détails, voir : <http://www.iecn.u-nancy.fr/~pincon/scilab/scilab.html>

r	$d/50$	$d/100$	$d/150$	$d/200$
λ_1/λ_2	2.1	11.2	34.9	80.6

TAB. 4.1 – Rapport entre les deux plus grandes valeurs propres de la matrice de retournement temporel \mathbb{T} en fonction de la taille de l’obstacle.

Afin d’examiner la focalisation sélective, on examine dans un deuxième temps le cas où le guide contient trois disques de rayons $r_1 = d/200$, $r_2 = d/400$ et $r_3 = d/800$ centrés respectivement aux points $s_1 = (\ell+4(L-\ell)/5; 9d/10)$, $s_2 = (\ell+4(L-\ell)/5; d/10)$ et $s_3 = (\ell+(L-\ell)/2; d/2)$. La Figure 4.4 montre les champs incidents correspondant aux vecteurs propres associés aux 4 plus grandes valeurs propres de la matrice de retournement temporel \mathbb{T} pour $N = 10$ modes propagatifs pour une longueur d’onde $\lambda = 2$. On retrouve bien la focalisation sélective attendue. En réduisant la longueur d’onde à $\lambda = 0.5$, i.e. si $N = 40$ modes propagatifs, on améliore la qualité de la focalisation comme le montre la Figure 4.5.

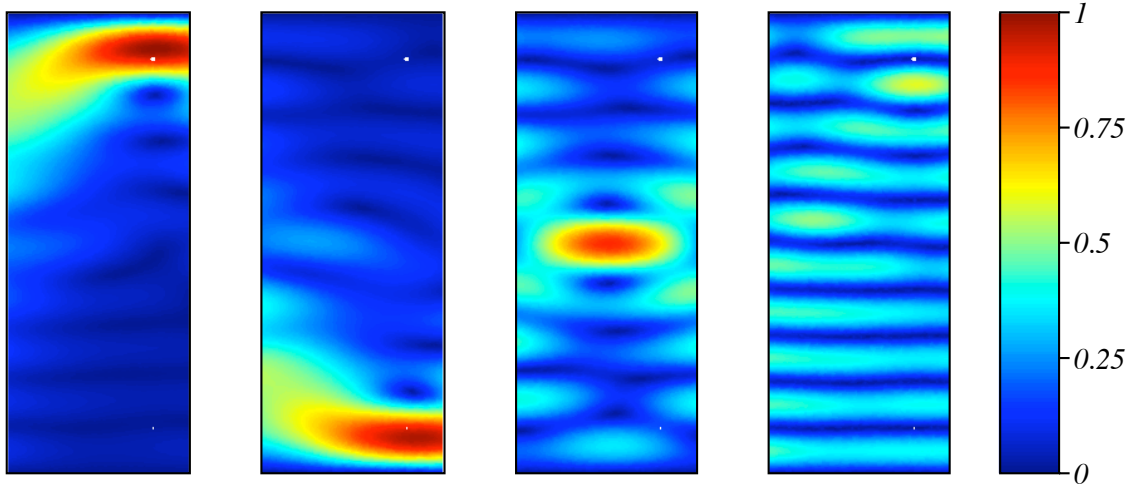


FIG. 4.4 – Champs incidents correspondant aux vecteurs propres associés aux 4 plus grandes valeurs propres de la matrice de retournement temporel \mathbb{T} pour $N = 10$ modes propagatifs.

Modèle de champ proche

Les résultats numériques de cette Section ont été obtenus par Chokri Ben Amar dans le cadre de sa thèse que je co-encadre avec C. Hazard, à l’aide du code de calcul éléments finis MÉLINA développé par Daniel Martin* à l’IRMAR.

On considère un MRT rectangulaire de largeur 8 et de hauteur 1 éclairant deux demi-disques de diamètre 4 and 2 distants d’une distance égale à 2. La distance entre le miroir et les obstacles vaut, selon la configuration, $D = 8$ ou $D = 3$. Pour une condition de Neumann sur le bord ∂M du MRT, les vecteurs propres associés aux 3 plus grandes valeurs propres de l’opérateur de retournement temporel sont donnés par les Figures 4.6, 4.7 et 4.8.

*<http://www.maths.univ-rennes1.fr/dmartin/melina/www/homepage.html>

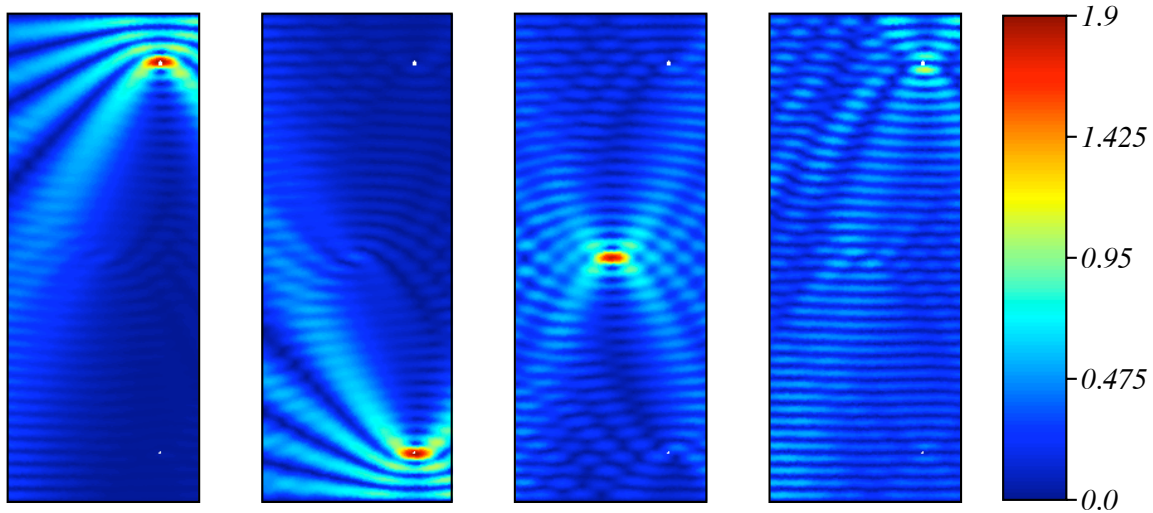


FIG. 4.5 – Champs incidents correspondant aux vecteurs propres associés aux 4 plus grandes valeurs propres de la matrice retournement temporel \mathbb{T} pour $N = 40$ modes propagatifs.

4.4 Quelques questions ouvertes

Comme nous l’avons vu dans ce chapitre, la méthode D.O.R.T est une méthode expérimentale permettant de focaliser des ondes acoustiques de manière sélective sur des obstacles contenus dans un milieu de propagation donné. L’étude de ce phénomène ouvre un certain nombre de pistes de recherche intéressantes.

Tout d’abord, la justification théorique (grâce à une analyse asymptotique) de cette méthode et les simulations numériques que nous avons obtenus montrent bien que la focalisation sélective correspond à des situations de diffraction simple. Un prolongement naturel consiste à étudier le cas de la **diffraction multiple**, où les interactions entre obstacles sont prises en compte. En particulier, le nombre de valeurs propres significatives dans ce cas est clairement supérieur au nombre d’obstacles contenus dans le milieu. Notre conjecture est qu’il représente une “mesure” du degré d’interaction entre les obstacles.

Par construction, le retournement temporel n’est théoriquement possible que dans des milieux non dissipatifs puisqu’il repose sur la réversibilité de l’équation des ondes. Toutefois, on peut légitimement supposer que dans des **milieux faiblement dissipatifs**, le retournement temporel permettrait d’obtenir une focalisation approchée des ondes acoustiques. Ce point est notamment intéressant pour une application telle que l’imagerie médicale du cerveau, dans laquelle la boîte crânienne présente des effets dissipatifs. Une analyse mathématique du retournement temporel dans des milieux faiblement dissipatifs par des techniques de perturbation permettrait de prédire les effets induits par l’introduction d’une faible viscosité.

Enfin, l’équipe de Mathias Fink a récemment développé des miroirs à retournement temporel pour les **ondes électromagnétiques**, visant des applications en télécommunications. Les résultats que l’on a obtenus pour l’opérateur de Helmholtz dans le cadre de l’acoustique devraient pouvoir être étendus au cas de l’opérateur de Maxwell.

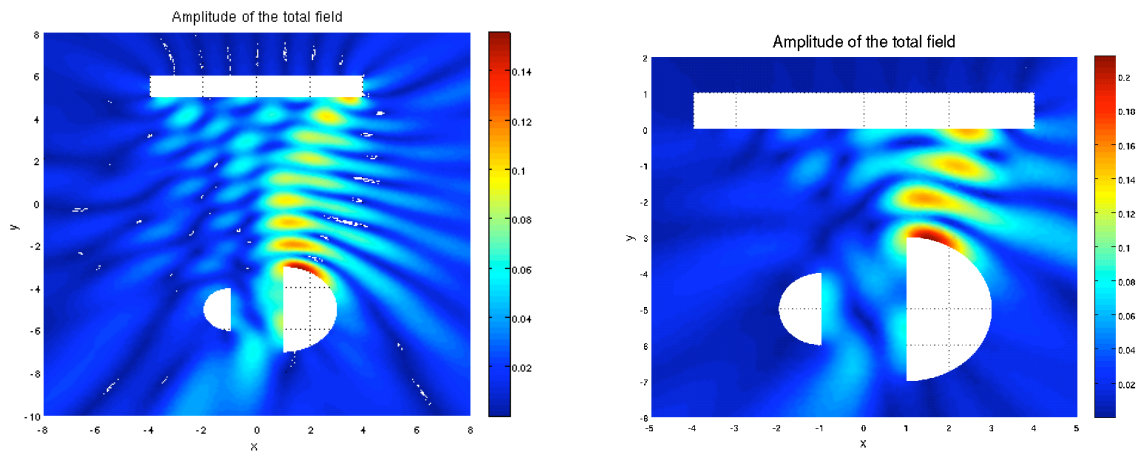


FIG. 4.6 – Emission du premier vecteur propre (à gauche $D = 8$, à droite $D = 3$).

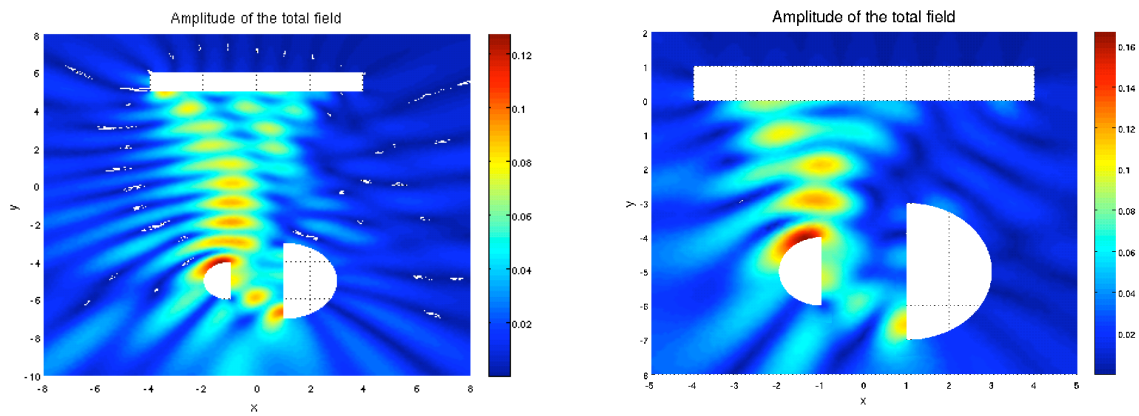


FIG. 4.7 – Emission du deuxième vecteur propre (à gauche $D = 8$, à droite $D = 3$).

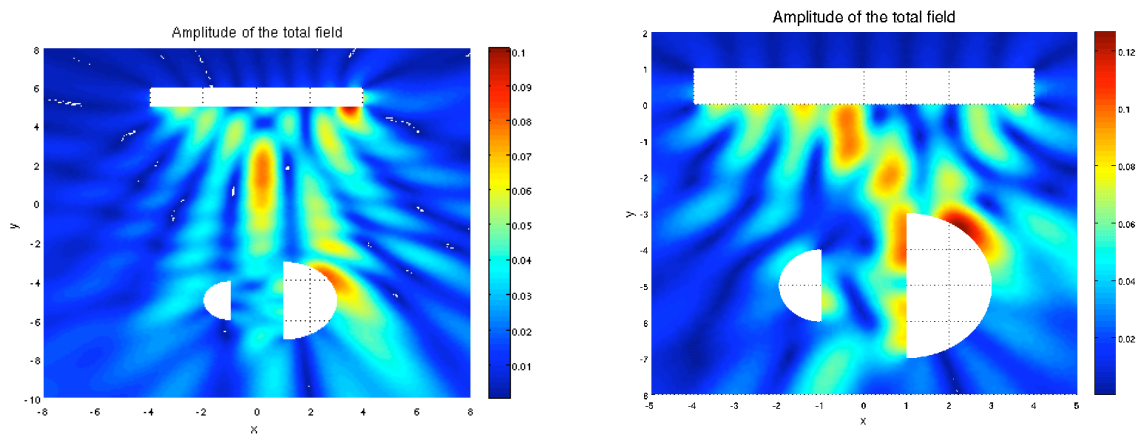


FIG. 4.8 – Emission du troisième vecteur propre (à gauche $D = 8$, à droite $D = 3$).

Chapitre 5

Méthodes fréquentielles et spectrales pour le contrôle et la stabilisation des systèmes linéaires conservatifs

5.1 Problématique

Nombre de systèmes vibratoires de dimension infinie sont régis par des équations de la forme

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), & t > 0, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

où $z(t) \in X$ désigne l'état du système, X un espace de Hilbert et A un opérateur non borné antiadjoint $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$. Dans les applications que nous avons considérées, l'opérateur A est typiquement un opérateur aux dérivées partielles sur un ouvert borné Ω . Les systèmes infini-dimensionnels du type (5.1) sont dits linéaires et conservatifs. On notera que d'après le Théorème de Stone, A est le générateur d'un groupe continu d'isométries $\mathbb{T} = (\mathbb{T}_t)_{t \geq 0}$ sur X , de sorte que l'on peut définir une solution de (5.1) par la relation $z(t) = \mathbb{T}_t z_0$. Etant donné par ailleurs un espace de Hilbert Y et un opérateur dit d'observation $C \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A), Y)$, on définit une observation y du système (5.1) en posant

$$y(t) = Cz(t). \quad (5.2)$$

On dira que l'observation (ou, par extension, que l'opérateur d'observation) est bornée si l'opérateur d'observation C admet une extension comme opérateur borné de $\mathcal{L}(X, Y)$ (c'est typiquement le cas de l'observation interne sur un sous-domaine $\omega \subset \Omega$). Dans le cas contraire, on parle d'observation non bornée (c'est le cas de l'observation frontière).

Le système (5.1)-(5.2) (ou le système (A, C)) est dit exactement observable (cf. [Lio88]) s'il existe un temps $T > 0$ et une constante $k > 0$ (dépendant de T) telle que

$$\int_0^T \|y(t)\|_Y^2 dt \geq k^2 \|z_0\|_X^2 \quad \forall z_0 \in \mathcal{D}(A). \quad (5.3)$$

On sait [DR77] que la notion d'observabilité exacte définie ci-dessus est duale de celle de contrôlabilité exacte, dans laquelle on s'intéresse aux états finaux atteignables à l'instant T pour les systèmes de la forme

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), & t > 0, \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

lorsque le contrôle $u(t)$ décrit l'espace des contrôles admissibles.

La plupart des travaux sur l'observabilité et la contrôlabilité des systèmes gouvernés par des EDP repose sur une approche temporelle, dans laquelle on considère les solutions de l'équation (5.1) et l'on essaye d'établir l'inégalité (5.3). Pour ce faire, différentes techniques existent : **l'analyse de Fourier non harmonique** [AI95, BKL99], **les méthodes de multiplicateurs** [Kom94, Lio88], **les inégalités de Carleman** [Ima02] ou **l'analyse microlocale** [BLR92, BL92]. De manière complémentaire à ces techniques temporelles, il existe une approche fréquentielle dans laquelle on ne s'intéresse pas directement à l'équation d'évolution (5.1). Inspirée du critère d'Hautus [Hau69, CZ95] pour les systèmes de dimension finie, cette approche fréquentielle permet de ramener l'étude de l'observabilité du système (5.1)-(5.2) à la preuve d'une inégalité dans laquelle le temps n'intervient pas, mais qui fait intervenir les opérateurs A et C ainsi qu'un paramètre (la fréquence) par rapport auquel l'inégalité doit être uniforme. Dans le cas d'un opérateur d'observation borné, un critère fréquentiel a été proposé dans [Liu97] et [LLR01]. Dans [BZ04, Mil05], ce critère a été étendu au cas des observations non bornées.

Notre contribution à l'étude de l'observabilité et de la contrôlabilité des systèmes de dimension infinie par une approche fréquentielle a porté sur les trois aspects suivants :

1. L'obtention de formulations spectrales du critère fréquentiel pour l'observabilité de systèmes conservatifs abstraits **[D1]**,
2. L'application des formulations spectrales obtenues à l'étude de la contrôlabilité, de l'observabilité et de la stabilité exponentielle de quelques systèmes continus **[D1,D2]**,
3. L'application des formulations spectrales à la construction de schémas semi-discrétisés uniformément exponentiellement stables de quelques systèmes continus **[D2,D3,D4]**.

Nous décrivons plus précisément dans les trois prochaines Sections les résultats obtenus.

5.2 Formulations spectrales du critère fréquentiel pour des systèmes conservatifs abstraits **[D1]**

Dans **[D1]**, nous avons obtenu un équivalent du critère spectral de Hautus pour caractériser les systèmes (5.1)-(5.2) exactement observables. On se place pour ce faire dans le cas où l'opérateur A décrivant la dynamique est un opérateur à résolvante compacte. Comme A est antiadjoint, son spectre est donc de la forme $\sigma(A) = \{i\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ où la suite (λ_n) est réelle. On désigne par $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée formée de fonctions propres de A associées aux valeurs propres $(i\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le résultat principal de **[D1]** est le suivant (cf. Théorème 1.3.).

Théorème 5.1. *Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, soit*

$$J_\varepsilon(\omega) = \{m \in \mathbb{N} \text{ such that } |\lambda_m - \omega| < \varepsilon\}. \quad (5.4)$$

Alors, le système (5.1)-(5.2) est exactement observable si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. *Il existe $\varepsilon, \delta > 0$ tels que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et tout $z = \sum_{m \in J_\varepsilon(\omega)} c_m \Phi_m$:*

$$\|Cz\|_Y \geq \delta \|z\|_X. \quad (5.5)$$

2. *Il existe $\varepsilon, \delta > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z = \sum_{m \in J_\varepsilon(\lambda_n)} c_m \Phi_m$:*

$$\|Cz\|_Y \geq \delta \|z\|_X. \quad (5.6)$$

Dans le cas d'un opérateur d'observation C borné, le résultat ci-dessus est prouvé dans [LLR01, Théorème 3.2]. Pour C non borné, mais sous l'hypothèse supplémentaire que la suite de valeurs propres $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ présente un gap, i.e. s'il existe $\gamma > 0$ tel que $|\lambda_n - \lambda_m| > \gamma$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, la nécessité de la condition (5.5) découle de [RW94, Théorème 4.4]. On notera que dans ce cas, la condition (5.6) équivaut à l'observabilité uniforme des fonctions propres, i.e. qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|C\Phi_n\|_Y \geq \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, le Théorème 5.1 montre qu'en l'absence de gap, l'observabilité du système (A, C) est assurée par le fait que les paquets d'ondes constitués de fonctions propres associées à des valeurs propres voisines sont uniformément observables.

Nous avons également donné dans [D1] (cf. Proposition 4.5.) l'équivalent du Théorème 5.1 pour les systèmes conservatifs d'ordre 2, i.e. pour les systèmes abstraits de la forme

$$\begin{cases} \ddot{w}(t) + A_0 w(t) = 0, & t > 0 \\ w(0) = w_0, \\ \dot{w}(0) = w_1, \end{cases}$$

où $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \rightarrow H$ est un opérateur autoadjoint positif à résolvante compacte d'un espace de Hilbert H .

5.3 Application à l'étude de la contrôlabilité de quelques systèmes de dimension infinie [D1, D2]

Nous avons appliqué le Théorème 5.1 à l'étude de quelques systèmes conservatifs (l'équation de Schrödinger traitée par exemple dans [Leb92], l'équation des plaques traitée dans [Jaf90, Bur93], l'équation des ondes [Lio88]), dans lesquels la géométrie est suffisamment simple pour que les fonctions propres de l'opérateur A soient connues explicitement. A titre d'illustration, on a établi dans [D1] les résultats suivants concernant le contrôle frontière de l'équation de Schrödinger :

1. Pour un contrôle frontière de type Dirichlet, on a contrôlabilité exacte pour l'équation de Schrödinger dans un carré dès que la zone de contrôle est non vide.

2. Pour un contrôle frontière de type Neumann, on a contrôlabilité exacte pour l'équation de Schrödinger dans un carré dès que la zone de contrôle contient au moins un segment horizontal et segment vertical de tailles arbitrairement petites.

On notera que la zone de contrôle ci-dessus ne satisfait clairement pas la condition d'optique géométrique. Notre preuve repose sur le Théorème 5.1, combiné à une inégalité de type Ingham. Cette dernière est obtenue à partir du Théorème de Beurling [Beu89] et d'un résultat nouveau de théorie des nombres (cf. [D1, Théorème 7.4]). Celui-ci stipule qu'étant donné trois entiers M, N, V , si $Z = Z(M, N, V)$ désigne l'ensemble des entiers n tels que $M < n \leq M + N$ et $V - n^2$ est un carré, alors il existe une constante absolue $C \geq 1$ telle que

$$\text{Card } Z \leq C \sqrt{N \log(2N)}. \quad (5.7)$$

Ce résultat admet une interprétation géométrique très simple (voir Figure 5.1) : il permet d'estimer asymptotiquement (pour N tendant vers l'infini) dans un intervalle de longueur donnée N , le nombre d'entiers n tels qu'il existe un point de coordonnées entières (m, n) sur un cercle. L'estimation obtenue (5.7) montre en particulier que la densité de la suite de ces entiers n est nulle.

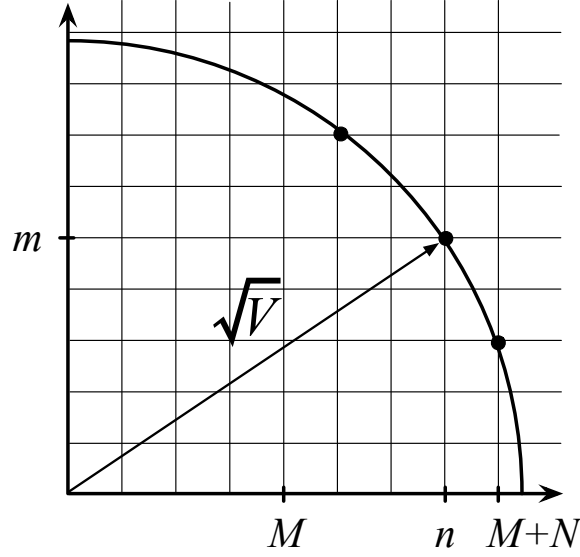


FIG. 5.1 – Interprétation géométrique.

Outre le fait que le critère fréquentiel nous permet d’obtenir de nouveaux résultats, il fournit également de nouvelles preuves de résultats déjà connus. Ainsi, dans [D2], nous donnons une nouvelle preuve d’un résultat sur la stabilisation interne pour l’équation des plaques dans un carré qui découle d’un résultat de Jaffard [Jaf90]. Là encore, pour montrer que le critère fréquentiel est satisfait, on établit un résultat de type Ingham (cf. [Theorem 2.2,D2]) dans \mathbb{R}^d , avec $d \geq 1$. De la même manière, nous donnons dans [D1] une nouvelle preuve de l’observabilité frontière (de Neumann) de l’équation des ondes dans un carré.

5.4 Construction de semi-discrétisations uniformément exponentiellement stables [D2,D3,D4]

5.4.1 Motivation : l’approximation des problèmes LQR

Considérons le système contrôlé d’ordre deux

$$\begin{cases} \ddot{w}(t) + A_0 w(t) = B_0 u(t), \\ w(0) = w_0, \\ \dot{w}(0) = w_1, \end{cases} \quad (5.8)$$

où $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \rightarrow H$ est un opérateur autoadjoint positif à résolvante compacte et $B_0 \in \mathcal{L}(U, H)$ un opérateur de contrôle borné (H, U sont deux espaces de Hilbert). Si l’on introduit le vecteur d’état du système d’ordre un associé à (5.8)

$$z(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \in X := \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right) \times H,$$

alors le problème LQR consiste à chercher le contrôle optimal u_{opt} minimisant la fonctionnelle

$$J(w_0, w_1; u) = \int_0^\infty (\|u(t)\|_U^2 + \|z(t)\|_X^2) dt.$$

On sait (cf. [CZ95, p.294]) que si pour tout $(w_0, w_1) \in X$, il existe un contrôle $u \in L^2(0, \infty; U)$ tel que $J(w_0; w_1; u) < \infty$, alors il existe un opérateur autoadjoint positif $P \in \mathcal{L}(X)$, appelé opérateur de Riccati, tel que le coût minimal soit donné par la relation

$$J(w_0, w_1; u_{opt}) = \left\langle \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}, P \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} \right\rangle_X.$$

De plus, le contrôle optimal u_{opt} est donné par la loi de rétroaction (feedback law)

$$u_{opt}(t) = -B^* P \mathbb{S}_t \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix},$$

où l'on a posé

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_0) \times \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \end{bmatrix}$$

et où $\mathbb{S} = (\mathbb{S}_t)_{t \geq 0}$ est le semi-groupe continu de générateur infinitésimal $A - BB^*P$. L'opérateur P est solution de l'équation de Riccati algébrique

$$\langle Az_1, Pz_2 \rangle + \langle Pz_1, Az_2 \rangle - \langle B^*Pz_2, B^*Pz_1 \rangle + \langle z_2, z_1 \rangle = 0$$

pour tous $z_1, z_2 \in \mathcal{D}(A)$. Soulignons que l'unicité de la solution de l'équation de Riccati est assurée dès que le système (A, B) est exponentiellement stabilisable [CZ95, p. 299].

En pratique, les opérateurs A, B étant souvent des opérateurs aux dérivées partielles, on en construit des approximations de dimension finie (A_h, B_h) (par exemple par éléments finis). Une question naturelle dans le cadre de l'approximation LQR consiste alors à savoir quelles sont les approximations pour lesquelles la convergence des opérateurs de Riccati discrets P_h vers l'opérateur de Riccati P du problème continu est garantie. Cette question a été traitée dans un certain nombre de travaux [BK84, Gib81, GA91, KS90], qui fournissent des conditions suffisantes pour cette convergence des opérateurs de Riccati soit assurée. Parmi ces conditions (cf. [D3, Théorème 5.2.]), la plus contraignante est sans aucun doute celle qui stipule que la famille (A_h, B_h) est uniformément stabilisable, i.e. qu'il existe une suite d'opérateurs (K_h) uniformément bornés dans $\mathcal{L}(X_h)$ telle que le semigroupe \mathbb{S}_h généré par $A_h - B_h K_h$ vérifie

$$\|\mathbb{S}_h(t)\|_{\mathcal{L}(X_h)} \leq M e^{-\alpha_1 t} \quad \forall t \geq 0,$$

pour certaines constantes M and α **indépendantes** de h . La question qui se pose est donc la suivante :

Une approximation de dimension finie (A_h, B_h) "raisonnable" d'un système de dimension infinie (A, B) exponentiellement stabilisable est-t-elle toujours uniformément exponentiellement stabilisable ?

Malheureusement, la réponse à cette question est négative. En effet, il s'avère que des discrétisations usuelles par différences ou éléments finis de problèmes de stabilisation interne ou frontière conduisent à des schémas ne fournissant pas des taux de décroissance exponentielle de l'énergie qui sont uniformes. Ce phénomène est directement lié à l'apparition, lors de la discrétisation numérique, de modes parasites hautes fréquences que le terme de dissipation n'est pas à même de stabiliser. Soulignons que le même problème apparaît pour l'approximation des problèmes de contrôle. Cette fois, les modes parasites hautes fréquences constituent des paquets d'ondes dont la vitesse de groupe peut tendre vers 0 avec le pas de discrétisation h , de sorte que le temps nécessaire pour contrôler ces modes parasites numériques devient infini !

L'apparition de tels modes parasites a été soulignée dans de nombreux travaux [GLL90, IZ99, TTZ03] et de nombreuses méthodes ont été proposées pour pallier cette difficulté. Parmi les principales solutions retenues, on peut citer **la régularisation de Tychonoff** [GLL90], **les éléments finis mixtes** (cf. [BIW91] pour la stabilisation frontière des ondes), **le filtrage des hautes fréquences** (voir [IZ99] pour l'observabilité frontière des ondes en 1D, [Mic02] pour le contrôle frontière des ondes en 1D, [LZ02] pour le contrôle frontière des poutres), et l'utilisation d'une **viscosité numérique artificielle** (cf. [TTZ03] pour la stabilisation des ondes en 1D). On renvoie à l'article [Zua05] pour un panorama complet de cette problématique. Soulignons que pour les problèmes paraboliques, un problème de même nature a récemment été étudié dans [LT06]. Enfin, la question de la discrétisation complète (en espace et en temps) a également été étudiée [Mün05, NZ06].

5.4.2 Un résultat abstrait en présence de gap [D3]

Dans [D3], on a établi un résultat abstrait de stabilité exponentielle uniforme pour l'approximation par éléments finis d'une famille de systèmes de dimension infinie. Plus précisément, considérons un système en boucle fermé de la forme

$$\begin{cases} \ddot{w}(t) + A_0 w(t) + B_0 B_0^* \dot{w}(t) = 0, & t > 0 \\ w(0) = w_0, \\ \dot{w}(0) = w_1, \end{cases} \quad (5.9)$$

où $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \longrightarrow H$ est un opérateur autoadjoint positif à résolvante compacte et $B_0 \in \mathcal{L}(U, H)$ un opérateur de contrôle borné (H, U sont deux espaces de Hilbert). On suppose que le système (A_0, B_0) vérifie les hypothèses suivantes :

1. L'énergie ($\|\cdot\|$ désignant la norme de H)

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \|\dot{w}(t)\|^2 + \|A_0^{\frac{1}{2}} w(t)\|^2 \right\},$$

du système présente une décroissance exponentielle, i.e. il existe des constantes positives M, α telles que

$$E(t) \leq M e^{-\alpha t} \quad \forall t > 0.$$

2. L'opérateur $A_0^{\frac{1}{2}}$ admet des valeurs propres simples $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ vérifiant est une condition de gap : il existe une constante $\gamma_0 > 0$ telle que

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Il existe une constante $\beta_0 > 0$ telle que pour tout vecteur propre normalisé φ de $A_0^{\frac{1}{2}}$, on ait

$$\|B_0^* \varphi\|_U \geq \beta_0.$$

Alors, sous des hypothèses classiques sur les approximations A_{0h} et B_{0h} et sur les espaces d'approximation éléments finis V_h et U_h de l'espace des états et de l'espace des contrôles, la famille de systèmes

$$\begin{cases} \ddot{w}_h(t) + A_{0h} w_h(t) + B_{0h} B_{0h}^* \dot{w}_h(t) + h^\theta A_{0h} w_h(t) = 0, \\ w_h(0) = w_{0h} \in V_h, \\ \dot{w}_h(0) = w_{1h} \in V_h, \end{cases}$$

est uniformément exponentiellement stable. Dans le schéma semi-discrétisé ci-dessus, le terme $h^\theta A_{0h} w_h(t)$ est un terme de viscosité numérique artificielle destiné à stabiliser les modes parasites haute fréquence (l'exposant θ est lié au degré des éléments finis utilisés). Soulignons

que l'une des différences majeures de ce résultat avec les résultats existant dans la littérature est qu'il ne suppose pas la connaissance explicite des éléments propres du système continu, et encore moins celles du système discrétisé. En particulier, il permet de traiter des problèmes à coefficients variables. Toutefois, la condition de gap limite le champ des applications possibles de ce résultat au cas monodimensionnel.

5.4.3 Résultats en l'absence de gap [D2,D4]

Afin de pouvoir étudier des résultats en dimension d'espace supérieure à 1, il nous a semblé important de considérer des problèmes où la condition de gap est violée. Dans [D2], nous avons étudié la semi-discrétisation de l'équation des plaques dans un carré avec stabilisation interne sur un ouvert arbitrairement petit. On a obtenu un schéma semi-discrétisé avec viscosité numérique qui satisfait la propriété de stabilité exponentielle uniforme. Pour ce faire, on a utilisé la caractérisation fréquentielle suivante de la stabilité exponentielle uniforme d'une famille de semi-groupes de contractions (cf. [LZ99]).

Théorème 5.2. *Soit $(\mathbb{T}_h)_{h>0}$ une famille de semigroupes of contractions et soit A_h le générateur infinitésimal associé à \mathbb{T}_h . Alors, la famille $(\mathbb{T}_h)_{h>0}$ est uniformément exponentiellement stable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- i) Pour tout $h > 0$, $i\mathbb{R}$ est contenu dans l'ensemble résolvant $\rho(A_h)$ de A_h ,*
- ii) La résolvante de A_h est uniformément bornée sur l'axe imaginaire :*

$$\sup_{h>0, \omega \in \mathbb{R}} \|(i\omega - A_h)^{-1}\| < +\infty.$$

L'une des questions qui demeurent en suspens est celle de savoir si le terme de viscosité artificielle introduit dans le schéma est nécessaire pour assurer la stabilité exponentielle uniforme (notre résultat montrant uniquement que l'ajout de ce terme est une condition suffisante). Dans [D4], nous avons abordé le cas de l'équation des poutres et on a pu établir qu'il y a stabilité exponentielle uniforme sans introduire de viscosité numérique. Ceci s'explique d'une part par le fait que d'une part, les valeurs propres $\lambda_{n,h}$ de $A_{0h}^{\frac{1}{2}}$ satisfont une propriété de gap uniforme en 1D :

$$\exists \gamma > 0 \quad \text{tel que} \quad \lambda_{n+1,h} - \lambda_{n,h} \geq \gamma, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et que, d'autre part, les vecteurs propres correspondants $\varphi_{n,h}$ sont uniformément observables :

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \|B_{0h}^* \varphi_{n,h}\| \geq \delta \|\varphi_{n,h}\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La première propriété n'étant clairement plus satisfaite en dimension supérieure à un, on ne sait pas si l'adjonction d'une viscosité numérique est nécessaire.

Appendice : Travaux de Recherche

Publications dans des revues internationales

[A] Guide d'ondes supraconducteur

[A1] A-S. Bonnet-Bendhia, M. Dauge, K. Ramdani. *Analyse spectrale et singularités d'un problème de transmission non coercif*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 328(8) :717–720, 1999.

[A2] A-S. Bonnet-Ben Dhia, K. Ramdani. *Mathematical analysis of conducting and superconducting transmission lines*. SIAM J. Appl. Math., 60(6) :2087–2113 (electronic), 2000.

[A3] A-S. Bonnet-Bendhia, K. Ramdani. *A non elliptic spectral problem related to the analysis of superconducting micro-strip lines*. M2AN Math. Model. Numer. Anal., 36(3) :461–487, 2002.

[B] Réseaux

[B1] A-S. Bonnet-Bendhia, K. Ramdani, A. Tillequin. *Diffraction par un obstacle situé dans un réseau de plaques semi-infinies*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 331(12) :977–982, 2000.

[B2] G. Bao, D.C. Dobson, K. Ramdani. *A constraint on the maximum reflectance of rapidly oscillating dielectric gratings*. SIAM J. Control Optim., 40(6) :1858–1866 (electronic), 2002.

[B3] A-S. Bonnet-Bendhia, K. Ramdani. *Diffraction by an acoustic grating perturbed by a bounded obstacle*. Adv. Comput. Math., 16(2-3) :113–138, 2002. Modeling and computation in optics and electromagnetics.

[B4] G. Bao, K. Ramdani. *Resonant frequencies for diffraction gratings*. Appl. Math. Letters, 15(6) :755–760, 2002.

[C] Retournement temporel

[C1] C. Hazard, K. Ramdani. *Selective acoustic focusing using time-harmonic reversal mirrors*. SIAM J. Appl. Math., 64(3) :1057–1076, 2004.

[C2] C. BenAmar, N. Gmati, C. Hazard, K. Ramdani. *Numerical simulation of acoustic time reversal mirrors*. SIAM J. Appl. Math., à paraître.

[C3] B. Pinçon, K. Ramdani. *Selective focusing on small scatterers in acoustic waveguides using time reversal mirrors*. Inverse Problems, 23 :1–25, 2007.

[D] Méthodes fréquentielles en contrôle

[D1] K. Ramdani, T. Takahashi, G. Tenenbaum, M. Tucsnak. *A spectral approach*

for the exact observability of infinite dimensional systems with skew-adjoint generator. *Journal of Functional Analysis*, 226(1) :193–229, 2005.

[D2] K. Ramdani, T. Takahashi, M. Tucsnak. *Internal stabilization of the plate equation in a square : the continuous and the semi-discretized problems*. *J. Math. Pures Appl.*, 85(1) :17–37, 2006.

[D3] K. Ramdani, T. Takahashi, M. Tucsnak. *Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations. Application to LQR optimization problems*. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 13(3) :503–527, 2007.

[D4] K. Ramdani, T. Takahashi, M. Tucsnak. *Semi-discrétisation en espace du problème de la stabilisation interne de l'équation des poutres*. *ESAIM Proc.*, à paraître.

Actes de congrès

- *A uniformly exponentially stable semi-discretization for an abstract wave-type system*, WAVES'07, 544–546, 2007.

- *Numerical study of time reversal in a 2-D waveguide*, WAVES'07, 571– 573, 2007.

- *A uniformly stable finite difference space semi-discretization for the internal stabilization of the plate equation in a square*, ENUMATH'05, 1068–1076, Springer, 2006.

- *Mathematical modelisation of a time reversal mirror*, WAVES'05, 2005.

- *Scilab tools for PDE's : Application to time-reversal*, CCA/ISIC/CACSD'04 (IEEE), 2004.

- *Global and selective focusing using acoustic time reversal mirrors in the frequency domain*. WAVES'03, 643–648, 2003.

- *Diffraction by a locally perturbed acoustic grating. In Mathematical and numerical aspects of wave propagation*. WAVES'03, 221–226, Springer, 2003.

- *Self-adjointness of non elliptic transmission problems*, ICIAM'99, 1999.

- *Mathematical study of conducting and superconducting transmission lines*, International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetics, 1998.

Articles soumis

- X. Antoine, C. Chniti, K. Ramdani. *Numerical approximation of high-frequency multiple scattering problems by circular cylinders*, soumis à *J. Comput. Phys.*

- K. Ramdani, S. Shipman. *Transmission through a thick periodic slab*, soumis à *Math. Models Methods Appl. Sci. (M3AS)*.

Bibliographie

- [AAL95] T. Abboud, H. Ammari, and G. Lebeau. Analyse asymptotique de la diffraction par un réseau convexe. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(9) :1085–1090, 1995.
- [AI95] S. A. Avdonin and S. A. Ivanov. *Families of exponentials - The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [AIK05] H. Ammari, E. Iakovleva, and H. Kang. Reconstruction of a small inclusion in a two-dimensional open waveguide. *SIAM J. Appl. Math.*, 65(6) :2107–2127 (electronic), 2005.
- [AIL05] H. Ammari, E. Iakovleva, and D. Lesselier. Two numerical methods for recovering small inclusions from the scattering amplitude for a fixed frequency scattering amplitude at a fixed frequency. *SIAM J. Sci. Comput.*, 27(1) :130–158 (electronic), 2005.
- [AK04] H. Ammari and H. Kang. *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*, volume 1846 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Amm99] H. Ammari. Finite gratings at high frequencies. *J. Math. Anal. Appl.*, 239(2) :245–263, 1999.
- [AS04] H. Ammari and F. Santosa. Guided waves in a photonic bandgap structure with a line defect. *SIAM J. Appl. Math.*, 64(6) :2018–2033 (electronic), 2004.
- [Aub87] J. P. Aubin. *Analyse Fonctionnelle Appliquée (Tome II)*. Presses Universitaires de France, 1987.
- [BB90] A. Bamberger and A.-S. Bonnet. Mathematical analysis of the guided modes of an optical fiber. *SIAM J. Math. Anal.*, 21(6) :1487–1510, 1990.
- [BBCZ07] A.-S. Bonnet BenDhia, P. Jr. Ciarlet, and C. M. Zwölf. Two-field and three-field formulations for wave transmission between media with opposite sign dielectric constants. *J. Comp. Appl. Math.*, 204 :408–417, 2007.
- [BBJ93] A.-S. Bonnet BenDhia and P. Joly. Mathematical analysis of guided water waves. *SIAM J. Appl. Math.*, 53(6) :1507–1550, 1993.
- [BBS94] A.-S. Bonnet BenDhia and F. Starling. Guided waves by electromagnetic gratings and nonuniqueness examples for the diffraction problem. *Math. Methods Appl. Sci.*, 17(5) :305–338, 1994.
- [BBT01a] A.-S. Bonnet BenDhia and A. Tillequin. A generalized mode matching method for scattering problems with unbounded obstacles. *J. Comput. Acoust.*, 9(4) :1611–1631, 2001.

- [BBT01b] A.-S. Bonnet BenDhia and A. Tillequin. A limiting absorption principle for scattering problems with unbounded obstacles. *Math. Methods Appl. Sci.*, 24(14) :1089–1111, 2001.
- [BDJ90] A. Bamberger, Y. Dermenjian, and P. Joly. Mathematical analysis of the propagation of elastic guided waves in heterogeneous media. *J. Differential Equations*, 88(1) :113–154, 1990.
- [Beu89] A. Beurling. *The collected works of Arne Beurling. Vol. 2.* Contemporary Mathematicians. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1989. Harmonic analysis, Edited by L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger and J. Wermer.
- [BF02] C. Bardos and M. Fink. Mathematical foundations of the time reversal mirror. *Asymptot. Anal.*, 29 :157–182, 2002.
- [BIW91] H. T. Banks, K. Ito, and C. Wang. Exponentially stable approximations of weakly damped wave equations. In *Estimation and control of distributed parameter systems (Vorau, 1990)*, volume 100 of *Internat. Ser. Numer. Math.*, pages 1–33. Birkhäuser, Basel, 1991.
- [BK84] H. T. Banks and K. Kunisch. The linear regulator problem for parabolic systems. *SIAM J. Control Optim.*, 22(5) :684–698, 1984.
- [BKL99] C. Baiocchi, V. Komornik, and P. Loreti. Ingham type theorem and applications to control theory. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B*, 8 :33–63, 1999.
- [BL92] N. Burq and G. Lebeau. Micro-local approach to the control for the plates equation. In *Optimization, optimal control and partial differential equations (Iasi, 1992)*, volume 107 of *Internat. Ser. Numer. Math.*, pages 111–122. Birkhäuser, Basel, 1992.
- [BLR92] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.*, 30 :1024–1065, 1992.
- [BP05] G. Bal and O. Pinaud. Time-reversal-based detection in random media. *Inverse Problems*, 21(5) :1593–1619, 2005.
- [BPR02] G. Bal, G. Papanicolaou, and L. Ryzhik. Self-averaging in time reversal for the parabolic wave equation. *Stoch. Dyn.*, 2(4) :507–531, 2002.
- [BPTB02] L. Borcea, G. Papanicolaou, C. Tsogka, and J. Berryman. Imaging and time reversal in random media. *Inverse Problems*, 18(5) :1247–1279, 2002.
- [BPZ02] P. Blomgren, G. Papanicolaou, and H. Zhao. Super-resolution in time-reversal acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 11 :230–248, 2002.
- [BR03] G. Bal and L. Ryzhik. Time reversal and refocusing in random media. *SIAM J. Appl. Math.*, 63(5) :1475–1498 (electronic), 2003.
- [Bur93] N. Burq. Contrôle de l'équation des plaques en présence d'obstacles strictement convexes. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (55) :126, 1993.
- [BV04] G. Bal and R. Verástegui. Time reversal in changing environments. *Multiscale Model. Simul.*, 2(4) :639–661 (electronic), 2004.
- [BZ04] N. Burq and M. Zworski. Geometric control in the presence of a black box. *J. Amer. Math. Soc.*, 17 :443–471, 2004.
- [CD99] S.J. Cox and D.C. Dobson. Maximizing band gaps in two-dimensional photonic crystals. *SIAM J. Appl. Math.*, 59(6) :2108–2120 (electronic), 1999.

- [CIL01] M. Cheney, D. Isaacson, and M. Lassas. Optimal acoustic measurements. *SIAM J. Appl. Math.*, 61 :1628–1647, 2001.
- [CK98] D. L. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.
- [Col92] R. E. Collin. *Foundations for microwave engineering*. Electrical Engineering. Mc Graw-Hill, Inc., 1992.
- [CS85] M. Costabel and E. Stephan. A direct boundary integral equation method for transmission problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 106(2) :367–413, 1985.
- [CZ95] R. F. Curtain and H. Zwart. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, volume 21 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [DR77] S. Dolecki and David L. Russell. A general theory of observation and control. *SIAM J. Control Optim.*, 15 :185–220, 1977.
- [FGN04] J.-P. Fouque, J. Garnier, and A. Nachbin. Time reversal for dispersive waves in random media. *SIAM J. Appl. Math.*, 64(5) :1810–1838 (electronic), 2004.
- [Fin96] M. Fink. Time-reversal in acoustics. *Contemp. Phys.*, 37(2) :95–109, 1996.
- [FK96a] A. Figotin and P. Kuchment. Band-gap structure of spectra of periodic dielectric and acoustic media. I. Scalar model. *SIAM J. Appl. Math.*, 56 :68–88, 1996.
- [FK96b] A. Figotin and P. Kuchment. Band-gap structure of spectra of periodic dielectric and acoustic media. II. Two-dimensional photonic crystals. *SIAM J. Appl. Math.*, 56(6) :1561–1620, 1996.
- [FK97] A. Figotin and A. Klein. Localized classical waves created by defects. *J. Stat. Phys.*, 86(1/2) :165–177, 1997.
- [FK98] A. Figotin and A. Klein. Midgap defect modes in dielectric and acoustic media. *SIAM J. Appl. Math.*, 58(6) :1748–1773 (electronic), 1998.
- [FP94] M. Fink and C. Prada. Eigenmodes of the time-reversal operator : A solution to selective focusing in multiple-target media. *Wave Motion*, 20 :151–163, 1994.
- [FP01] M. Fink and C. Prada. Acoustic time-reversal mirrors. *Inverse Problems*, 17(1) :1761–1773, 2001.
- [FP06] J.-P. Fouque and O. V. Poliannikov. Time reversal detection in one-dimensional random media. *Inverse Problems*, 22(3) :903–922, 2006.
- [FR05] P. Fernandes and M. Raffetto. Existence, uniqueness and finite element approximation of the solution of time-harmonic electromagnetic boundary value problems involving metamaterials. *COMPEL*, 24(4) :1450–1469, 2005.
- [GA91] J. S. Gibson and A. Adamian. Approximation theory for linear-quadratic-Gaussian optimal control of flexible structures. *SIAM J. Control Optim.*, 29(1) :1–37, 1991.
- [Gib81] J. S. Gibson. An analysis of optimal modal regulation : convergence and stability. *SIAM J. Control Optim.*, 19(5) :686–707, 1981.

- [GLL90] R. Glowinski, C. H. H. Li, and J.-L. Lions. A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation. I. Dirichlet controls : description of the numerical methods. *Japan J. Appl. Math.*, 7(1) :1–76, 1990.
- [Hau69] M. L. J. Hautus. Controllability and observability conditions of linear autonomous systems. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A*, 72 :443–448, 1969.
- [Ima02] O. Y. Imanuvilov. On Carleman estimates for hyperbolic equations. *Asymptot. Anal.*, 32(3-4) :185–220, 2002.
- [IZ99] J. A. Infante and E. Zuazua. Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1-D wave equation. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(2) :407–438, 1999.
- [Jaf90] S. Jaffard. Contrôle interne exact des vibrations d’une plaque rectangulaire. (internal exact control for the vibrations of a rectangular plate). *Port. Math.*, 47(4) :423–429, 1990.
- [JGWdH04] B. L. G. Jonsson, M. Gustafsson, V. H. Weston, and M. V. de Hoop. Retrofocusing of acoustic wave fields by iterated time reversal. *SIAM J. Appl. Math.*, 64(6) :1954–1986 (electronic), 2004.
- [JL78] A. Jami and M. Lenoir. A variational formulation for exterior problems in linear hydrodynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 16 :341–359, 1978.
- [JLFar] P. Joly, J.R. Li, and S. Fliss. Exact boundary conditions for periodic waveguides containing a local perturbation. *Communications in Computational Physics*, To appear.
- [JMW95] J.D. Joannopoulos, R.D. Meade, and J.N. Winn. *Photonic Crystals, Molding the Flow of Light*. Princeton University Press, Basel, 1995.
- [JP95] P. Joly and Ch. Poirier. Mathematical analysis of electromagnetic open waveguides. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 29(5) :505–575, 1995.
- [Kom94] V. Komornik. *Exact Controllability and Stabilization - The Multiplier Method*. John Wiley and Masson, Chichester and Paris, 1994.
- [Kre87] R. Kress. On the low wave number asymptotics for the two-dimensional exterior Dirichlet problem for the reduced wave equation. *Math. Methods Appl. Sci.*, 9(3) :335–341, 1987.
- [KS90] F. Kappel and D. Salamon. An approximation theorem for the algebraic Riccati equation. *SIAM J. Control Optim.*, 28(5) :1136–1147, 1990.
- [Kuc93] P. Kuchment. *Floquet theory for partial differential equations*, volume 60 of *Operator Theory : Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [Leb92] G. Lebeau. Contrôle de l’équation de Schrödinger. *J. Math. Pures Appl.*, 71(3) :267–291, 1992.
- [Lio88] J.-L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, volume 8 of *Recherches en Mathématiques Appliquées*. Masson, Paris, 1988.
- [Liu97] K. Liu. Locally distributed control and damping for the conservative systems. *SIAM J. Control Optim.*, 35(5) :1574–1590, 1997.

- [LLR01] K. Liu, Z. Liu, and B. Rao. Exponential stability of an abstract nondissipative linear system. *SIAM J. Control Optim.*, 40(1) :149–165, 2001.
- [LT06] S. Labbé and E. Trélat. Uniform controllability of semidiscrete approximations of parabolic control systems. *Systems Control Lett.*, 55(7) :597–609, 2006.
- [LZ99] Z. Liu and S. Zheng. *Semigroups associated with dissipative systems*, volume 398 of *Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.
- [LZ02] L. León and E. Zuazua. Boundary controllability of the finite-difference space semi-discretizations of the beam equation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 8 :827–862 (electronic), 2002. A tribute to J. L. Lions.
- [Mic02] S. Micu. Uniform boundary controllability of a semi-discrete 1-D wave equation. *Numer. Math.*, 91(4) :723–768, 2002.
- [Mil05] L. Miller. Controllability cost of conservative systems : resolvent condition and transmutation. *J. Funct. Anal.*, 218(2) :425–444, 2005.
- [MNW97] T.D. Mast, A.I. Nachman, and R.C. Waag. Focusing and imaging using the eigenfunctions of the scattering operator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102 :715–725, 1997.
- [Mün05] A. Münch. A uniformly controllable and implicit scheme for the 1-D wave equation. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(2) :377–418, 2005.
- [NS91] J.-C. Nédélec and F. Starling. Integral equation methods in a quasi-periodic diffraction problem for the time-harmonic Maxwell’s equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 22(6) :1679–1701, 1991.
- [NZ06] M. Negreanu and E. Zuazua. Discrete Ingham inequalities and applications. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(1) :412–448 (electronic), 2006.
- [PKCF02] C. Prada, E. Kerbrat, D. Cassereau, and M. Fink. Time reversal techniques in ultrasonic nondestructive testing of scattering media. *Inverse Problems*, 18(6) :1761–1773, 2002. Special section on electromagnetic and ultrasonic nondestructive evaluation.
- [PRS04] G. Papanicolaou, L. Ryzhik, and K. Sølna. Statistical stability in time reversal. *SIAM J. Appl. Math.*, 64(4) :1133–1155 (electronic), 2004.
- [RS78] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [RW94] D. L. Russell and G. Weiss. A general necessary condition for exact observability. *SIAM J. Control Optim.*, 32(1) :1–23, 1994.
- [Sak04] K. Sakoda. *Optical Properties of Photonic Crystals*. Optical Sciences. Springer, 2 edition, Basel, 2004.
- [SL83] A.W. Snyder and J. Love. *Optical Waveguide Theory*. Springer, 1983.
- [SPW04] D. R. Smith, J. B. Pendry, and M. C. K. Wiltshire. Metamaterials and negative refractive index. *Science*, 305(5) :737–900, 2004.
- [SV03] S. P. Shipman and S. Venakides. Resonance and bound states in photonic crystal slabs. *SIAM J. Appl. Math.*, 64(1) :322–342 (electronic), 2003.

- [Ten95] G. Tenenbaum. *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, volume 46 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Tix95] P. Tixador. *Les supraconducteurs*. Matériaux. Hermes Science Publications, 1995.
- [TP02] C. Tsogka and G. Papanicolaou. Time reversal through a solid-liquid interface and super-resolution. *Inverse Problems*, 18(6) :1639–1657, 2002.
- [TTZ03] L.R. Tcheougoué Tebou and E. Zuazua. Uniform exponential long time decay for the space semi-discretization of a locally damped wave equation via an artificial numerical viscosity. *Numerische Math.*, 95(3) :563–598, 2003.
- [Wer86] P. Werner. Low frequency asymptotics for the reduced wave equation in two-dimensional exterior spaces. *Math. Methods Appl. Sci.*, 8(1) :134–156, 1986.
- [Zua05] E. Zuazua. Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods. *SIAM Review*, 47(2) :197–243, 2005.