

Grandes déviations, physique statistique et systèmes dynamiques

Julien Tailleur

Sous la direction de Jorge Kurchan

Laboratoire PMMH (UMR 7636 CNRS-ESPCI-P6-P7)
10, rue Vauquelin - 75231 Paris Cedex 5 - FRANCE



Prélude : la théorie des grandes déviations

Prélude : la théorie des grandes déviations

Étude asymptotique d'événements rares

Prélude : la théorie des grandes déviations

Pile ou face $X \in \{0, 1\}$; $P(1) = P(0) = \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i; \quad s = y - \frac{1}{2}$$

Prélude : la théorie des grandes déviations

Pile ou face $X \in \{0, 1\}$; $P(1) = P(0) = \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i; \quad s = y - \frac{1}{2}$$

• $s \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

Prélude : la théorie des grandes déviations

Pile ou face $X \in \{0, 1\}$; $P(1) = P(0) = \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i; \quad s = y - \frac{1}{2}$$

- $s \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

- $s \ll 1 \quad P(s) \simeq e^{-N \cdot 2s^2}$

Prélude : la théorie des grandes déviations

Pile ou face $X \in \{0, 1\}$; $P(1) = P(0) = \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i; \quad s = y - \frac{1}{2}$$

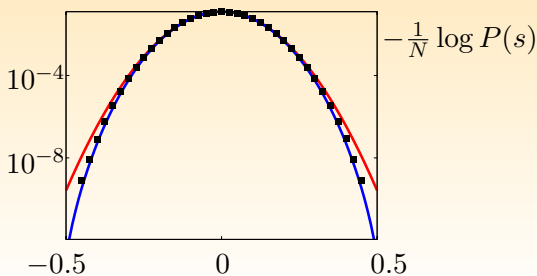
- $s \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$
- $s \ll 1$ $P(s) \simeq e^{-N \cdot 2s^2}$
- $s \sim 1$ $P(s) \simeq e^{-N \cdot \frac{1}{2} [(1+2s) \log(1+2s) + (1-2s) \log(1-2s)]}$

Prélude : la théorie des grandes déviations

Pile ou face $X \in \{0, 1\}$; $P(1) = P(0) = \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i; \quad s = y - \frac{1}{2}$$

- $s \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$
- $s \ll 1$ $P(s) \simeq e^{-N \cdot 2s^2}$
- $s \sim 1$ $P(s) \simeq e^{-N \cdot \frac{1}{2} [(1+2s) \log(1+2s) + (1-2s) \log(1-2s)]}$



- **Physique statistique** : système macroscopique
- **Systèmes dynamiques** : longs temps d'observation

- **Physique statistique** : système macroscopique
- **Systèmes dynamiques** : longs temps d'observation

- Symétries
- Fonctions thermodynamiques hors équilibre
- Calcul analytique ou numérique

Plan

- 1 **Grandes déviations et chaoticité**
- 2 **Grandes déviations et excursions**

Plan

- 1 **Grandes déviations et chaoticité**
- 2 **Grandes déviations et excursions**

Espace des phases \neq uniformément chaotique

Espace des phases \neq uniformément chaotique

- Systèmes planétaires
- Intermittence
- Solitons et modes de respiration

Espace des phases \neq uniformément chaotique

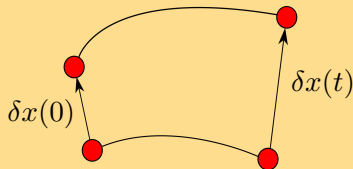
- Systèmes planétaires
- Intermittence
- Solitons et modes de respiration

\implies Chaoticité fluctuante

Chaos \Leftrightarrow Sensibilité aux conditions initiales

Fluctuations de l'exposant de Lyapunov λ

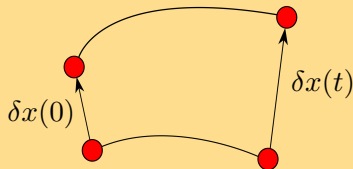
$$|\delta x(t)| \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} |\delta x(0)| \exp(\lambda t)$$



Chaos \Leftrightarrow Sensibilité aux conditions initiales

Fluctuations de l'exposant de Lyapunov λ

$$|\delta x(t)| \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} |\delta x(0)| \exp(\lambda t)$$



\Rightarrow Étudier $P(\lambda, t)$

Méthodes numériques

- Analyse en fréquence (Laskar '93)
- Analyse spectrale (Sepulveda, Badi, Pollak '95)
- Fonctions de corrélation (Pollner, Vattay, '96)
- *Fast Lyapunov indicator* (Froeschlé, Lega, Gonczi '97)
- ...

Méthodes numériques

⇒ Échantillonnage systématique

- Analyse en fréquence (Laskar '93)
- Analyse spectrale (Sepulveda, Badi, Pollak '95)
- Fonctions de corrélation (Pollner, Vattay, '96)
- *Fast Lyapunov indicator* (Froeschlé, Lega, Gonczi '97)
- ...

⇒ Difficilement applicable en haute dimension

Fonction de grandes déviations

(Ruelle '78, Benzi '84, Bohr '87, Grassberger '88)

- Microcanonique $P(\lambda_0, t) = \langle \delta(\lambda t - \lambda_0 t) \rangle$

Fonction de grandes déviations

(Ruelle '78, Benzi '84, Bohr '87, Grassberger '88)

- Microcanonique $P(\lambda_0, t) = \langle \delta(\lambda t - \lambda_0 t) \rangle$
- Canonique $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha \lambda t} \rangle$

\Rightarrow α : Température pour la chaoticité

Fonction de grandes déviations

(Ruelle '78, Benzi '84, Bohr '87, Grassberger '88)

- Microcanonique $P(\lambda_0, t) = \langle \delta(\lambda t - \lambda_0 t) \rangle$
- Canonique $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha \lambda t} \rangle$

$\implies \underline{\alpha : \text{Température pour la chaoticité}}$

- $\alpha > 0 \Leftrightarrow$ Chaos
- $\alpha < 0 \Leftrightarrow$ Régulier

Comment calculer $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha\lambda t} \rangle$?

Échantillonnage direct

- N simulations différentes
- Calcul de $\langle e^{\alpha\lambda t} \rangle$ sur cet échantillon

Comment calculer $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha\lambda t} \rangle$?

Échantillonnage direct

- N simulations différentes
- Calcul de $\langle e^{\alpha\lambda t} \rangle$ sur cet échantillon

⇒ Mauvais échantillonnage

⇒ Les trajectoires sont **typiques**

Dynamique biaisée par les Lyapunov (DBL)

[JT, J. Kurchan, Nat. Phys. **3**, 203, (2007)]

Dynamique de population de type *Diffusion Monte Carlo*

- \mathcal{N} clones

Dynamique biaisée par les Lyapunov (DBL)

[JT, J. Kurchan, Nat. Phys. **3**, 203, (2007)]

Dynamique de population de type *Diffusion Monte Carlo*

- \mathcal{N} clones
- Évolution \leftrightarrow dynamique naturelle + bruit

Dynamique biaisée par les Lyapunov (DBL)

[JT, J. Kurchan, Nat. Phys. **3**, 203, (2007)]

Dynamique de population de type *Diffusion Monte Carlo*

- \mathcal{N} clones
- Évolution \leftrightarrow dynamique naturelle + bruit
- Pour chaque clone, on calcule à chaque pas $\exp(\lambda dt) = \frac{|\delta x(t+dt)|}{|\delta x(t)|}$

Dynamique biaisée par les Lyapunov (DBL)

[JT, J. Kurchan, Nat. Phys. **3**, 203, (2007)]

Dynamique de population de type *Diffusion Monte Carlo*

- \mathcal{N} clones
- Évolution \leftrightarrow dynamique naturelle + bruit
- Pour chaque clone, on calcule à chaque pas $\exp(\lambda dt) = \frac{|\delta x(t+dt)|}{|\delta x(t)|}$
- Taux de réplication : $\exp(\alpha \lambda dt)$

Dynamique biaisée par les Lyapunov (DBL)

[JT, J. Kurchan, Nat. Phys. **3**, 203, (2007)]

Dynamique de population de type *Diffusion Monte Carlo*

- \mathcal{N} clones
- Évolution \leftrightarrow dynamique naturelle + bruit
- Pour chaque clone, on calcule à chaque pas $\exp(\lambda dt) = \frac{|\delta x(t+dt)|}{|\delta x(t)|}$
- Taux de réplication : $\exp(\alpha \lambda dt)$

1 clone \longrightarrow $e^{\alpha \lambda t}$ clones

Dynamique biaisée par les Lyapunov (DBL)

[JT, J. Kurchan, Nat. Phys. **3**, 203, (2007)]

Dynamique de population de type *Diffusion Monte Carlo*

- \mathcal{N} clones
- Évolution \leftrightarrow dynamique naturelle + bruit
- Pour chaque clone, on calcule à chaque pas $\exp(\lambda dt) = \frac{|\delta x(t+dt)|}{|\delta x(t)|}$
- Taux de réplication : $\exp(\alpha \lambda dt)$

1 clone $\longrightarrow e^{\alpha \lambda t}$ clones \Rightarrow mesure biaisée $\propto e^{\alpha \lambda t}$

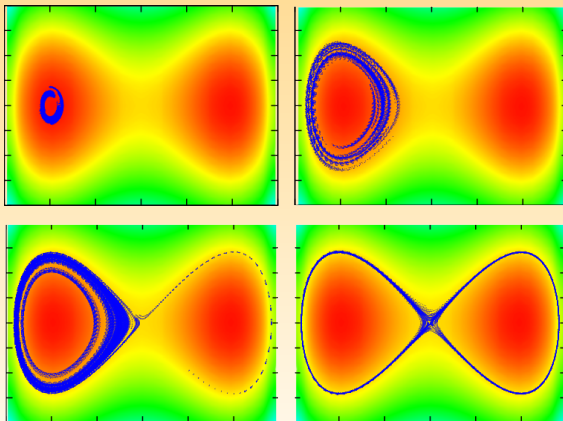
\Rightarrow Thermostat numérique à température α

Double puits de potentiel

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} + (1 - q^2)^2$$

Double puits de potentiel

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} + (1 - q^2)^2$$



DBL avec $\alpha = 1 \Rightarrow$ Séparatrice

Transition vers le chaos

L'application standard

- $p_{n+1} = p_n$

$$q_{n+1} = q_n + \delta p_{n+1}$$

Transition vers le chaos

L'application standard

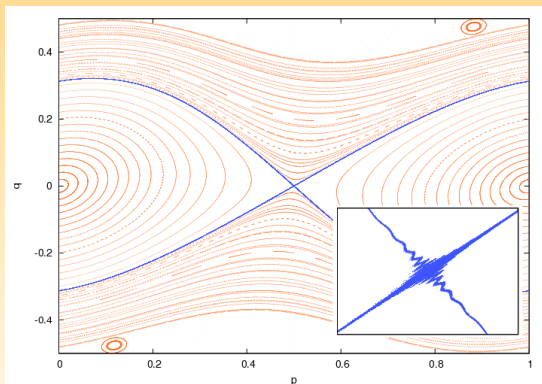
- $p_{n+1} = p_n - \frac{k\delta}{2\pi} \sin(2\pi q)$ $q_{n+1} = q_n + \delta p_{n+1}$

Transition vers le chaos

L'application standard

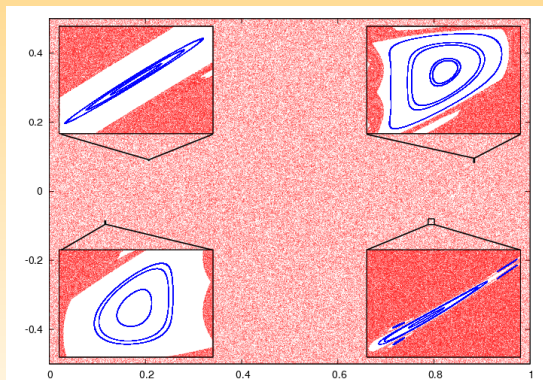
- $p_{n+1} = p_n - \frac{k\delta}{2\pi} \sin(2\pi q)$ $q_{n+1} = q_n + \delta p_{n+1}$
- chaos ↗ avec k et δ

Quasi-intégrable ($\delta = 0.45$, $k = 1$)



DBL $\alpha = 1 \Leftrightarrow$ Chaos

Mer chaotique ($k = 7.8$, $\delta = 1$)



DBL $\alpha = -1 \Leftrightarrow$ Régulier

Énergie libre dynamique

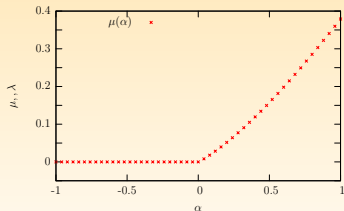
$$\mu(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \langle \exp(\alpha \lambda t) \rangle$$

- $\mu(\alpha) \Leftrightarrow$ **taux de réplication moyen** à « température » α

Énergie libre dynamique

$$\mu(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \langle \exp(\alpha \lambda t) \rangle$$

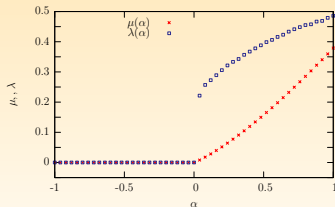
- $\mu(\alpha) \Leftrightarrow$ **taux de réplication moyen** à « température » α



Énergie libre dynamique

$$\mu(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \langle \exp(\alpha \lambda t) \rangle$$

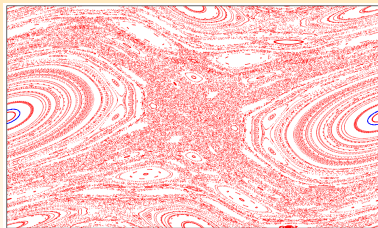
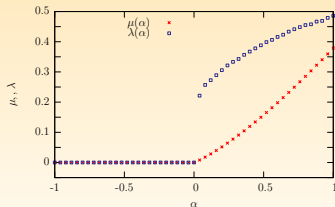
- $\mu(\alpha) \Leftrightarrow$ **taux de réplication moyen** à « température » α
- $\mu'(\alpha) = \langle \lambda \rangle_\alpha$



Énergie libre dynamique

$$\mu(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \langle \exp(\alpha \lambda t) \rangle$$

- $\mu(\alpha) \Leftrightarrow$ **taux de réplication moyen** à « température » α
- $\mu'(\alpha) = \langle \lambda \rangle_\alpha$

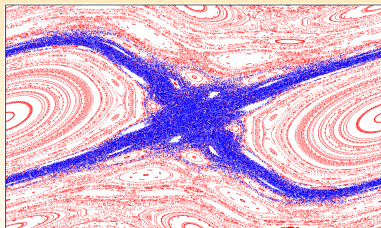
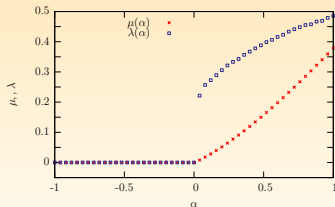


$\alpha < 0$

Énergie libre dynamique

$$\mu(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \langle \exp(\alpha \lambda t) \rangle$$

- $\mu(\alpha) \Leftrightarrow$ **taux de réplication moyen** à « température » α
- $\mu'(\alpha) = \langle \lambda \rangle_\alpha$



$$\alpha > 0$$

Le réseau d'Arnold

H_0 Système intégrable

- 1 constante du mouvement/degré de liberté

Le réseau d'Arnold

H_0 Système intégrable

- 1 constante du mouvement/degré de liberté
- Mouvement sur un tore \Leftrightarrow fréquences $(\omega_1 \cdots \omega_N)$

Le réseau d'Arnold

H_0 Système intégrable

- 1 constante du mouvement/degré de liberté
- Mouvement sur un tore \Leftrightarrow fréquences $(\omega_1 \cdots \omega_N)$

$H = H_0 + \mu H_1 \neq$ intégrable

- Fine couche chaotique pour $\sum_i n_i \omega_i = 0 \quad n_i \in \mathbb{Z}$

Le réseau d'Arnold

H_0 Système **intégrable**

- 1 constante du mouvement/degré de liberté
- Mouvement sur un tore \Leftrightarrow fréquences $(\omega_1 \cdots \omega_N)$

$H = H_0 + \mu H_1 \neq$ **intégrable**

- Fine couche chaotique pour $\sum_i n_i \omega_i = 0 \quad n_i \in \mathbb{Z}$

\Rightarrow **Pour $N > 2$, la zone chaotique forme une toile connexe**

Un modèle simple

- $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{p_i^2}{2} + p_N$
- Résonances $\sum_{i=1}^{N-1} n_i p_i = n_N \quad n \in \mathbb{Z}^N$

Un modèle simple

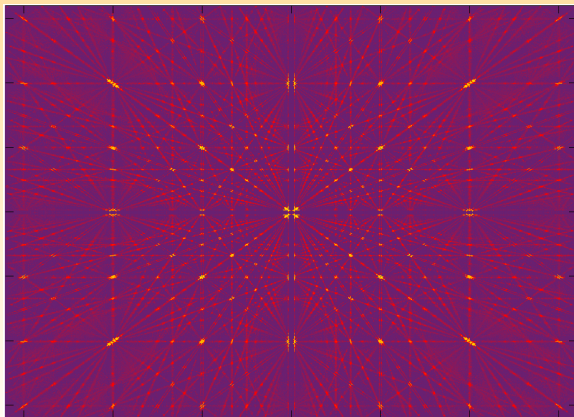
- $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{p_i^2}{2} + p_N$
- Résonances $\sum_{i=1}^{N-1} n_i p_i = n_N \quad n \in \mathbb{Z}^N$
- Pour $N = 3$ $n_1 p_1 + n_2 p_2 = n_3$

Un modèle simple

- $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{p_i^2}{2} + p_N + \frac{\mu}{\sum_{i=1}^N \cos q_i + N + 1}$
- Résonances $\sum_{i=1}^{N-1} n_i p_i = n_N \quad n \in \mathbb{Z}^N$
- Pour $N = 3$ $n_1 p_1 + n_2 p_2 = n_3$

Un modèle simple

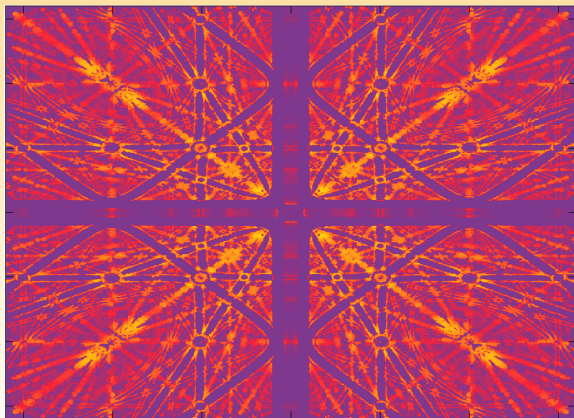
- $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{p_i^2}{2} + p_N + \frac{\mu}{\sum_{i=1}^N \cos q_i + N + 1}$
- Résonances $\sum_{i=1}^{N-1} n_i p_i = n_N \quad n \in \mathbb{Z}^N$
- Pour $N = 3$ $n_1 p_1 + n_2 p_2 = n_3$



$$\mu = 0.001$$

Un modèle simple

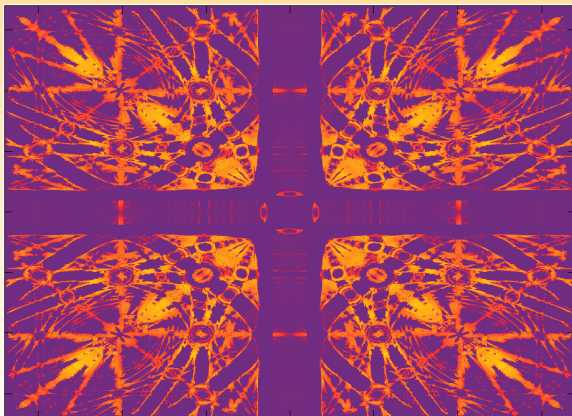
- $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{p_i^2}{2} + p_N + \frac{\mu}{\sum_{i=1}^N \cos q_i + N + 1}$
- Résonances $\sum_{i=1}^{N-1} n_i p_i = n_N \quad n \in \mathbb{Z}^N$
- Pour $N = 3$ $n_1 p_1 + n_2 p_2 = n_3$



$$\mu = 0.03$$

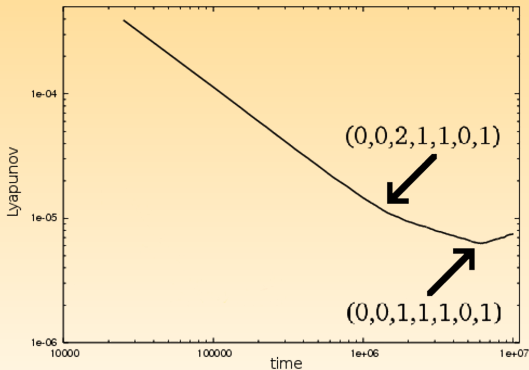
Un modèle simple

- $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{p_i^2}{2} + p_N + \frac{\mu}{\sum_{i=1}^N \cos q_i + N + 1}$
- Résonances $\sum_{i=1}^{N-1} n_i p_i = n_N \quad n \in \mathbb{Z}^N$
- Pour $N = 3$ $n_1 p_1 + n_2 p_2 = n_3$



$$\mu = 0.1$$

En plus haute dimension $N = 7$

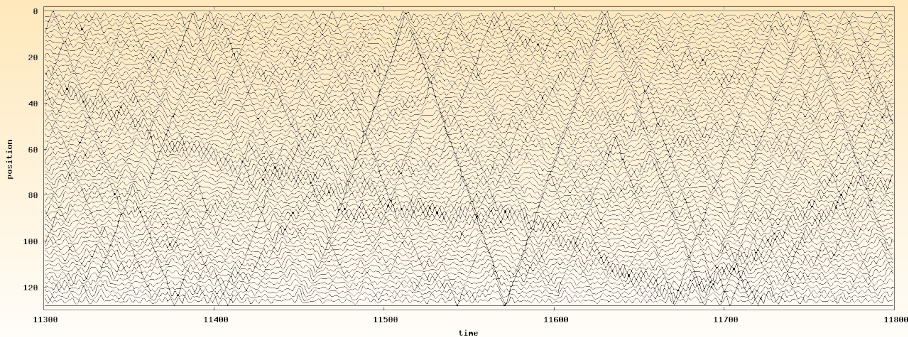


Résonances $n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4 p_4 + n_5 p_5 + n_6 p_6 = n_7$

Fermi Pasta Ulam

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} (q_i - q_{i+1})^2 + \frac{\beta}{4} (q_i - q_{i+1})^4 \right)$$

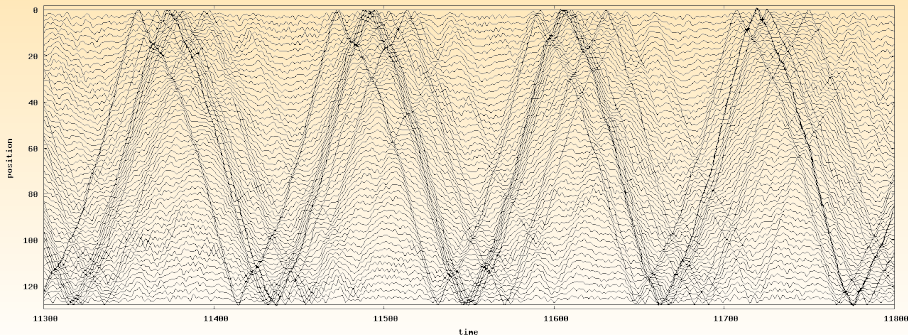
Équilibre



Fermi Pasta Ulam

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} (q_i - q_{i+1})^2 + \frac{\beta}{4} (q_i - q_{i+1})^4 \right)$$

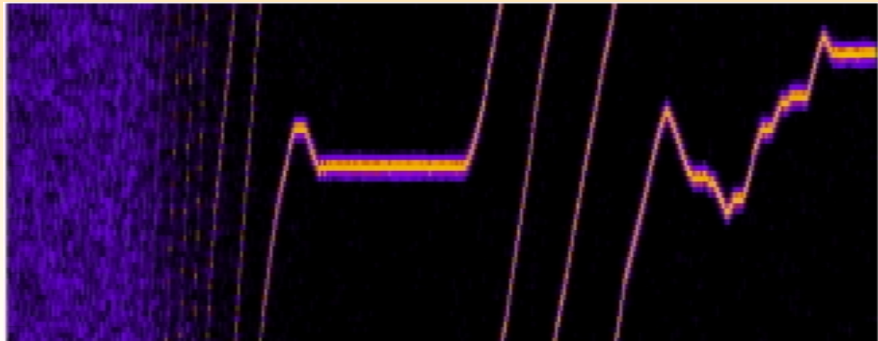
DBL avec $\alpha \ll -1$



Fermi Pasta Ulam

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} (q_i - q_{i+1})^2 + \frac{\beta}{4} (q_i - q_{i+1})^4 \right)$$

DBL avec $\alpha \gg 1$



Conclusion

- Réalisation d'un thermostat pour la chaotité
- Applicable en haute dimension
- Énergie libre dynamique \Leftrightarrow Transition de phase dynamique

Plan

- 1 Grandes déviations et chaotité
- 2 Grandes déviations et excursions**

Fonctions thermodynamiques hors équilibre

- Système de spin à l'équilibre canonique
- Aimantation moyenne m

$$P_{eq.}(m) = e^{-N\beta f_{eq}(m)}$$

Fonctions thermodynamiques hors équilibre

- Système de spin à l'équilibre canonique
- Aimantation moyenne m

$$P_{eq.}(m) = e^{-N\beta f_{eq}(m)}$$

⇒ $f_{eq}(m) \Leftrightarrow$ fonction de grandes déviations

Fonctions thermodynamiques hors équilibre

- Système de spin à l'équilibre canonique
- Aimantation moyenne m

$$P_{eq.}(m) = e^{-N\beta f_{eq}(m)}$$

⇒ $f_{eq}(m) \Leftrightarrow$ fonction de grandes déviations

- Hors équilibre $P_{st.}(m) = e^{-Nf_{st}(m)}$
- $f_{st}(m) = ?$

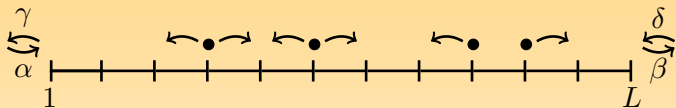
Fonctions thermodynamiques hors équilibre

- Système de spin à l'équilibre canonique
- Aimantation moyenne m

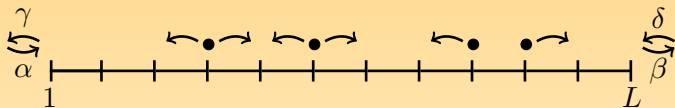
$$P_{eq.}(m) = e^{-N\beta f_{eq}(m)}$$

⇒ $f_{eq}(m) \Leftrightarrow$ fonction de grandes déviations

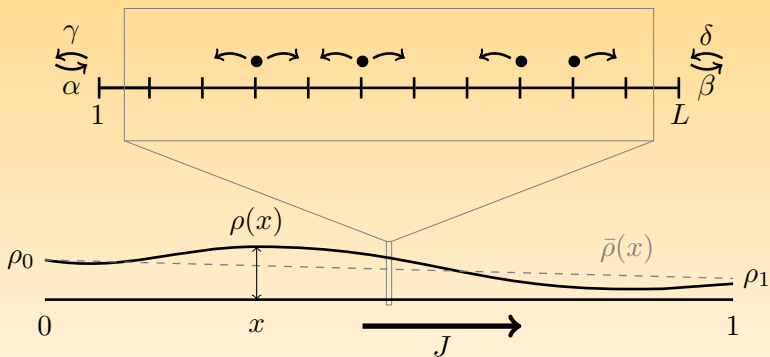
- Hors équilibre $P_{st.}(m) = e^{-Nf_{st}(m)}$
- $f_{st}(m) = ?$
- Manière systématique de calculer $f_{st}(m)$?



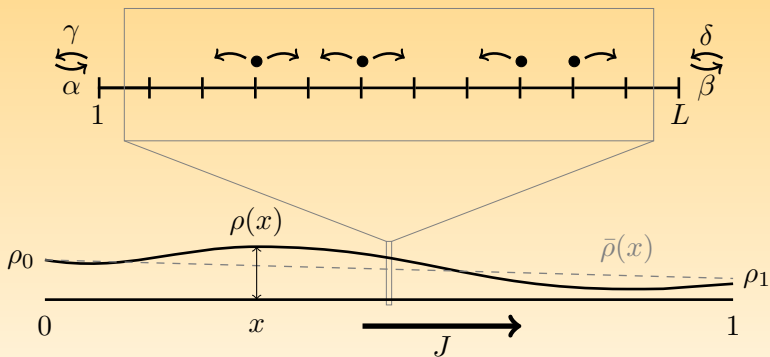
SSEP



Limite hydrodynamique du SSEP

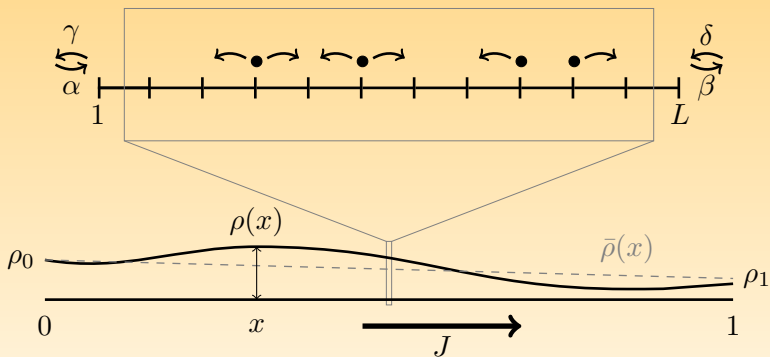


Limite hydrodynamique du SSEP



$$\dot{\rho} = -\nabla J; \quad J = -\frac{1}{2}\nabla\rho - \sqrt{\sigma}\eta \quad [\text{Spohn '83}]$$

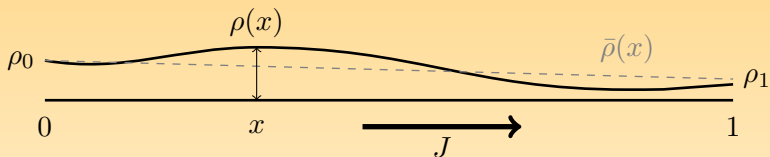
Limite hydrodynamique du SSEP



$$\dot{\rho} = -\nabla J; \quad J = -\frac{1}{2}\nabla\rho - \sqrt{\sigma}\eta \quad [\text{Spohn '83}]$$

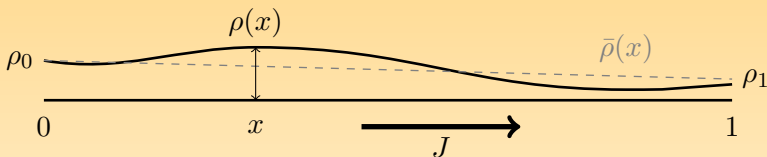
- variance de $\eta \propto L^{-1}$

Grandes déviations du profil de densité



$$P_{st.}[\rho(x)] \simeq e^{-L\mathcal{F}[\rho(x)]}; \quad \mathcal{F} = ???$$

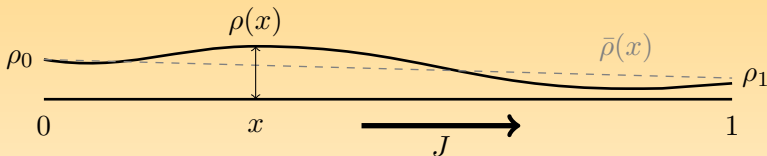
Grandes déviations du profil de densité



$$P_{st.}[\rho(x)] \simeq e^{-L\mathcal{F}[\rho(x)]}; \quad \mathcal{F} = ???$$

- Calcul exact [Derrida et al. '94] \Rightarrow Calcul de \mathcal{F} [Derrida et al. '01]

Grandes déviations du profil de densité



$$P_{st.}[\rho(x)] \simeq e^{-L\mathcal{F}[\rho(x)]}; \quad \mathcal{F} = ???$$

- Calcul exact [Derrida et al. '94] \Rightarrow Calcul de \mathcal{F} [Derrida et al. '01]
- Solution **purement macroscopique** [Bertini et al. '01]

Grandes déviations et trajectoires extrémales

$$P(\text{traj.}) \sim \int \mathcal{D}[\rho, \eta] \delta(\dot{\rho} + \nabla J) e^{-L \int dt dx \frac{\eta^2}{2}}$$

Grandes déviations et trajectoires extrémales

$$\begin{aligned} P(\text{traj.}) &\sim \int \mathcal{D}[\rho, \eta] \delta(\dot{\rho} + \nabla J) e^{-L \int dt dx \frac{\eta^2}{2}} \\ &\sim \int \mathcal{D}[\rho, \hat{\rho}, \eta] e^{-L \int dt dx \left\{ \hat{\rho} \left[\dot{\rho} - \frac{1}{2} \Delta \rho - \nabla(\sqrt{\sigma_\rho} \eta) \right] + \frac{\eta^2}{2} \right\}} \end{aligned}$$

Grandes déviations et trajectoires extrémales

$$\begin{aligned} P(\text{traj.}) &\sim \int \mathcal{D}[\rho, \eta] \delta(\dot{\rho} + \nabla J) e^{-L \int dt dx \frac{\eta^2}{2}} \\ &\sim \int \mathcal{D}[\rho, \hat{\rho}, \eta] e^{-L \int dt dx \left\{ \hat{\rho} \left[\dot{\rho} - \frac{1}{2} \Delta \rho - \nabla(\sqrt{\sigma_\rho} \eta) \right] + \frac{\eta^2}{2} \right\}} \\ &\sim \int \mathcal{D}[\hat{\rho}, \rho] \underbrace{e^{-L \int dt dx \left\{ \hat{\rho} \dot{\rho} - \frac{1}{2} \sigma(\nabla \hat{\rho})^2 - \frac{1}{2} \hat{\rho} \Delta \rho \right\}}}_{\exp(-LS[\hat{\rho}, \rho])} \end{aligned}$$

Grandes déviations et trajectoires extrémales

$$P(\text{traj.}) \sim \int \mathcal{D}[\hat{\rho}, \rho] \underbrace{e^{-L \int dt dx \{ \hat{\rho} \dot{\rho} - \frac{1}{2} \sigma (\nabla \hat{\rho})^2 - \frac{1}{2} \hat{\rho} \Delta \rho \}}}_{\text{exp}(-LS[\hat{\rho}, \rho])}$$

Grandes déviations et trajectoires extrémales

$$P(\text{traj.}) \sim \int \mathcal{D}[\hat{\rho}, \rho] \underbrace{e^{-L \int dt dx \{ \hat{\rho} \dot{\rho} - \frac{1}{2} \sigma (\nabla \hat{\rho})^2 - \frac{1}{2} \hat{\rho} \Delta \rho \}}}_{\text{exp}(-LS[\hat{\rho}, \rho])}$$

Extrémaliser $S[\rho, \hat{\rho}] = \int \hat{\rho} \dot{\rho} - \mathcal{H}[\hat{\rho}, \rho] \Rightarrow$ Équations de Hamilton

Grandes déviations et trajectoires extrémales

$$P(\text{traj.}) \sim \int \mathcal{D}[\hat{\rho}, \rho] \underbrace{e^{-L \int dt dx \{ \hat{\rho} \dot{\rho} - \frac{1}{2} \sigma (\nabla \hat{\rho})^2 - \frac{1}{2} \hat{\rho} \Delta \rho \}}}_{\text{exp}(-LS[\hat{\rho}, \rho])}$$

Extrémaliser $S[\rho, \hat{\rho}] = \int \hat{\rho} \dot{\rho} - \mathcal{H}[\hat{\rho}, \rho] \Rightarrow$ Équations de Hamilton

$$P(\rho) = P(\bar{\rho} \rightarrow \rho, T)$$

Grandes déviations et trajectoires extrémales

$$P(\text{traj.}) \sim \int \mathcal{D}[\hat{\rho}, \rho] \underbrace{e^{-L \int dt dx \{ \hat{\rho} \dot{\rho} - \frac{1}{2} \sigma (\nabla \hat{\rho})^2 - \frac{1}{2} \hat{\rho} \Delta \rho \}}}_{\text{exp}(-LS[\hat{\rho}, \rho])}$$

Extrémaliser $S[\rho, \hat{\rho}] = \int \hat{\rho} \dot{\rho} - \mathcal{H}[\hat{\rho}, \rho] \Rightarrow$ Équations de Hamilton

$$P(\rho) = P(\bar{\rho} \rightarrow \rho, T)$$

- Conditions aux limites spatio-temporelles

C'est un problème de mécanique classique

Grandes déviations et trajectoires extrémales

$$P(\text{traj.}) \sim \int \mathcal{D}[\hat{\rho}, \rho] \underbrace{e^{-L \int dt dx \{ \hat{\rho} \dot{\rho} - \frac{1}{2} \sigma (\nabla \hat{\rho})^2 - \frac{1}{2} \hat{\rho} \Delta \rho \}}}_{\text{exp}(-LS[\hat{\rho}, \rho])}$$

Extrémaliser $S[\rho, \hat{\rho}] = \int \hat{\rho} \dot{\rho} - \mathcal{H}[\hat{\rho}, \rho] \Rightarrow$ Équations de Hamilton

$$P(\rho) = P(\bar{\rho} \rightarrow \rho, T)$$

- Conditions aux limites spatio-temporelles

C'est un problème de mécanique classique

\Rightarrow En général, on ne sait pas le résoudre

L'équilibre ($\rho_0 = \rho_1$), simple grâce au bilan détaillé

$$H[\hat{\rho}, \rho] = \frac{1}{2} \nabla \hat{\rho} \sigma \nabla \left[\hat{\rho} - \log \frac{\rho}{1 - \rho} \right]$$

L'équilibre ($\rho_0 = \rho_1$), simple grâce au bilan détaillé

$$H[\hat{\rho}, \rho] = \frac{1}{2} \nabla \hat{\rho} \sigma \nabla \left[\hat{\rho} - \log \frac{\rho}{1 - \rho} \right]$$

Relaxation diffusive

$$\dot{\hat{\rho}} = 0; \quad \dot{\rho} = \frac{1}{2} \Delta \rho$$

L'équilibre ($\rho_0 = \rho_1$), simple grâce au bilan détaillé

$$H[\hat{\rho}, \rho] = \frac{1}{2} \nabla \hat{\rho} \sigma \nabla \left[\hat{\rho} - \log \frac{\rho}{1 - \rho} \right]$$

Relaxation diffusive

$$\dot{\hat{\rho}} = 0; \quad \dot{\rho} = \frac{1}{2} \Delta \rho$$

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho} + \log \frac{\rho}{1 - \rho} \text{ puis } (\hat{\rho}, t) \rightarrow (-\hat{\rho}, T - t)$$

- $S[\hat{\rho}, \rho] \rightarrow S[\hat{\rho}, \rho] + [\text{termes de bord}]$

L'équilibre ($\rho_0 = \rho_1$), simple grâce au bilan détaillé

$$H[\hat{\rho}, \rho] = \frac{1}{2} \nabla \hat{\rho} \sigma \nabla \left[\hat{\rho} - \log \frac{\rho}{1 - \rho} \right]$$

Relaxation diffusive

$$\dot{\hat{\rho}} = 0; \quad \dot{\rho} = \frac{1}{2} \Delta \rho$$

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho} + \log \frac{\rho}{1 - \rho} \text{ puis } (\hat{\rho}, t) \rightarrow (-\hat{\rho}, T - t)$$

- $S[\hat{\rho}, \rho] \rightarrow S[\hat{\rho}, \rho] + [\text{termes de bord}]$
- **relaxations** \rightarrow **excursions**

L'équilibre ($\rho_0 = \rho_1$), simple grâce au bilan détaillé

$$H[\hat{\rho}, \rho] = \frac{1}{2} \nabla \hat{\rho} \sigma \nabla \left[\hat{\rho} - \log \frac{\rho}{1-\rho} \right]$$

Relaxation diffusive

$$\hat{\rho} = 0; \quad \dot{\rho} = \frac{1}{2} \Delta \rho \quad \rightarrow \quad \hat{\rho} = \log \frac{\rho}{1-\rho} - \log \frac{\rho_0}{1-\rho_0}; \quad \dot{\rho} = -\frac{1}{2} \Delta \rho$$

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho} + \log \frac{\rho}{1-\rho} \text{ puis } (\hat{\rho}, t) \rightarrow (-\hat{\rho}, T - t)$$

- $S[\hat{\rho}, \rho] \rightarrow S[\hat{\rho}, \rho] + [\text{termes de bord}]$
- **relaxations** \rightarrow **excursions**

L'équilibre ($\rho_0 = \rho_1$), simple grâce au bilan détaillé

$$H[\hat{\rho}, \rho] = \frac{1}{2} \nabla \hat{\rho} \sigma \nabla \left[\hat{\rho} - \log \frac{\rho}{1-\rho} \right]$$

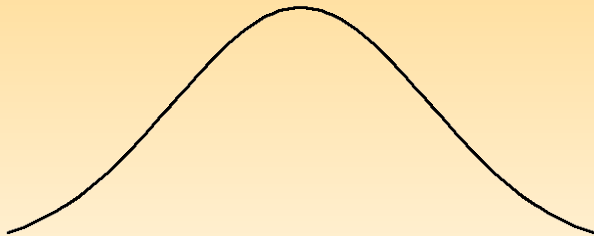
Relaxation diffusive \rightarrow Excursion anti-diffusive

$$\hat{\rho} = 0; \quad \dot{\rho} = \frac{1}{2} \Delta \rho \quad \rightarrow \quad \hat{\rho} = \log \frac{\rho}{1-\rho} - \log \frac{\rho_0}{1-\rho_0}; \quad \dot{\rho} = -\frac{1}{2} \Delta \rho$$

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho} + \log \frac{\rho}{1-\rho} \text{ puis } (\hat{\rho}, t) \rightarrow (-\hat{\rho}, T - t)$$

- $S[\hat{\rho}, \rho] \rightarrow S[\hat{\rho}, \rho] + [\text{termes de bord}]$
- relaxations \rightarrow excursions

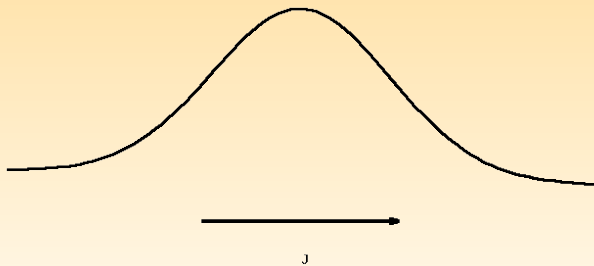
\implies Symétrie d'Onsager Machlup



$\rho_0 \neq \rho_1$ les bords brisent la symétrie

- Solution diffusive toujours acceptable
- Solution anti-diffusive viole CL spatiales

⇒ Pas de relation simple excursions ⇔ relaxations



- **Grandes déviations \leftrightarrow Excursions**

- Équilibre : facile grâce au bilan détaillé

- Hors équilibre : pas de relation générale entre excursions et relaxations

- Bertini et al. ont trouvé une telle relation

- Grandes déviations \leftrightarrow Excursions
- Équilibre : facile grâce au bilan détaillé
- Hors équilibre : pas de relation générale entre excursions et relaxations
- Bertini et al. ont trouvé une telle relation

- Grandes déviations \leftrightarrow Excursions
- Équilibre : facile grâce au bilan détaillé
- Hors équilibre : pas de relation générale entre excursions et relaxations
- Bertini et al. ont trouvé une telle relation

- Grandes déviations \leftrightarrow Excursions
- Équilibre : facile grâce au bilan détaillé
- Hors équilibre : pas de relation générale entre excursions et relaxations
- Bertini et al. ont trouvé une telle relation

- Grandes déviations \leftrightarrow Excursions
- Équilibre : facile grâce au bilan détaillé
- Hors équilibre : pas de relation générale entre excursions et relaxations
- Bertini et al. ont trouvé une telle relation

\implies Comment est-ce possible ?

Changement de variables canonique

$$F = \frac{\rho}{\rho + (1 - \rho)e^{\hat{\rho}}} \quad \hat{F} = (1 - \rho)(e^{\hat{\rho}} - 1) - \rho(e^{-\hat{\rho}} - 1)$$

Changement de variables canonique

$$F = \frac{\rho}{\rho + (1 - \rho)e^{\hat{\rho}}} \quad \hat{F} = (1 - \rho)(e^{\hat{\rho}} - 1) - \rho(e^{-\hat{\rho}} - 1)$$

$$\mathcal{H}[\hat{F}, F] = -\frac{1}{2}\hat{F}(\nabla F)^2 \left[\hat{F} - \frac{\Delta F}{(\nabla F)^2} \right]$$

Changement de variables canonique

$$F = \frac{\rho}{\rho + (1-\rho)e^{\hat{\rho}}} \quad \hat{F} = (1-\rho)(e^{\hat{\rho}} - 1) - \rho(e^{-\hat{\rho}} - 1)$$

$$\mathcal{H}[\hat{F}, F] = -\frac{1}{2}\hat{F}(\nabla F)^2 \left[\hat{F} - \frac{\Delta F}{(\nabla F)^2} \right]$$

$$\hat{F} \rightarrow \hat{F} + \frac{\Delta F}{(\nabla F)^2}; \quad \text{puis} \quad (\hat{F}, t) \rightarrow (-\hat{F}, T - t)$$

Changement de variables canonique

$$F = \frac{\rho}{\rho + (1-\rho)e^{\hat{\rho}}} \quad \hat{F} = (1-\rho)(e^{\hat{\rho}} - 1) - \rho(e^{-\hat{\rho}} - 1)$$

$$\mathcal{H}[\hat{F}, F] = -\frac{1}{2}\hat{F}(\nabla F)^2 \left[\hat{F} - \frac{\Delta F}{(\nabla F)^2} \right]$$

$$\hat{F} \rightarrow \hat{F} + \frac{\Delta F}{(\nabla F)^2}; \quad \text{puis} \quad (\hat{F}, t) \rightarrow (-\hat{F}, T - t)$$

laissent l'**action invariante** modulo des termes de bord

relaxations diffusives \Rightarrow excursions

conditions aux limites spatio-temporelles satisfaites

- Relation entre relaxation et excursion
- Symétrie non-locale

⇒ Palliatif à l'absence de bilan détaillé

Ce modèle mis hors équilibre par les bords est en fait relié à un modèle isolé via un changement de variable non-local

- Relation entre relaxation et excursion
- Symétrie non-locale

⇒ Palliatif à l'absence de bilan détaillé

Ce modèle **mis hors équilibre par les bords** est en fait relié à un modèle **isolé** via un **changement de variable non-local**

Le modèle dual

[JT, J. Kurchan, V. Lecomte, Phys. Rev. Lett., sous-presse]

Un changement de variable non-local

$$\hat{F}' = \nabla F; \quad F' = \frac{1}{\hat{F}'} + \int dx \hat{F}'$$

Le modèle dual

[JT, J. Kurchan, V. Lecomte, Phys. Rev. Lett., sous-presse]

Un changement de variable non-local

$$\hat{F}' = \nabla F; \quad F' = \frac{1}{\hat{F}'} + \int dx \hat{F}'$$

$$S_F[F, \hat{F}] = [\text{termes de bords}] + S_F[F', \hat{F}']$$

Le modèle dual

[JT, J. Kurchan, V. Lecomte, Phys. Rev. Lett., sous-presse]

Un changement de variable non-local

$$\hat{F}' = \nabla F; \quad F' = \frac{1}{\hat{F}'} + \int dx \hat{F}'$$

$$S_F[F, \hat{F}] = [\text{termes de bords}] + S_F[F', \hat{F}']$$

On poursuit la transformation

$$(\rho, \hat{\rho}) \longrightarrow (F, \hat{F}) \xrightarrow{\text{non locale}} (F', \hat{F}')$$

Le modèle dual

[JT, J. Kurchan, V. Lecomte, Phys. Rev. Lett., sous-presse]

Un changement de variable non-local

$$\hat{F}' = \nabla F; \quad F' = \frac{1}{\hat{F}'} + \int dx \hat{F}'$$

$$S_F[F, \hat{F}] = [\text{termes de bords}] + S_F[F', \hat{F}']$$

On poursuit la transformation

$$(\rho, \hat{\rho}) \longrightarrow (F, \hat{F}) \xrightarrow{\text{non locale}} (F', \hat{F}') \longrightarrow (\rho', \hat{\rho}')$$

Le modèle dual

[JT, J. Kurchan, V. Lecomte, Phys. Rev. Lett., sous-presse]

Un changement de variable non-local

$$\hat{F}' = \nabla F; \quad F' = \frac{1}{\hat{F}'} + \int dx \hat{F}'$$

$$S_F[F, \hat{F}] = [\text{termes de bords}] + S_F[F', \hat{F}']$$

On poursuit la transformation

$$(\rho, \hat{\rho}) \longrightarrow (F, \hat{F}) \xrightarrow{\text{non locale}} (F', \hat{F}') \longrightarrow (\rho', \hat{\rho}')$$

$$S[\rho, \hat{\rho}] = [\text{termes de bords}] + S[\rho', \hat{\rho}']$$

Comparaison entre les modèles initial et dual

modèle dual

- limite hydrodynamique d'un SSEP
- isolé
- bilan détaillé

Comparaison entre les modèles initial et dual

modèle dual

- limite hydrodynamique d'un SSEP
- **isolé**
- **bilan détaillé**

Comparaison entre les modèles initial et dual

modèle dual

- limite hydrodynamique d'un SSEP
 - **isolé**
 - **bilan détaillé**
-
- **bilan détaillé** du modèle dual \Rightarrow relation entre excursions et relaxations du modèle initial

Comparaison entre les modèles initial et dual

modèle dual

- limite hydrodynamique d'un SSEP
 - **isolé**
 - **bilan détaillé**
-
- **bilan détaillé** du modèle dual \Rightarrow relation entre excursions et relaxations du modèle initial
 - $(\rho, \hat{\rho}) \rightarrow (\rho', \hat{\rho}')$ est notre résultat central

Conclusion

- La limite hydrodynamique d'un SSEP mis hors équilibre par les bords peut être ramenée à l'équilibre via un changement de variables non local
- Une telle transformation existe pour les modèles non-triviaux résolus par Hamilton-Jacobi (σ quadratique, D constant)
- Elle semble être à la base de la possibilité d'un calcul purement macroscopique

Conclusion

- La limite hydrodynamique d'un SSEP mis hors équilibre par les bords peut être ramenée à l'équilibre via un changement de variables non local
- Une telle transformation existe pour les modèles non-triviaux résolus par Hamilton-Jacobi (σ quadratique, D constant)
- Elle semble être à la base de la possibilité d'un calcul purement macroscopique

Conclusion

- La limite hydrodynamique d'un SSEP mis hors équilibre par les bords peut être ramenée à l'équilibre via un changement de variables non local
- Une telle transformation existe pour les modèles non-triviaux résolus par Hamilton-Jacobi (σ quadratique, D constant)
- Elle semble être à la base de la possibilité d'un calcul purement macroscopique

Conclusion

- La limite hydrodynamique d'un SSEP mis hors équilibre par les bords peut être ramenée à l'équilibre via un changement de variables non local
- Une telle transformation existe pour les modèles non-triviaux résolus par Hamilton-Jacobi (σ quadratique, D constant)
- Elle semble être à la base de la possibilité d'un calcul purement macroscopique
 - ⇒ Extension vers le modèle microscopique ?
 - ⇒ Extension vers une classe plus large de modèles ?
 - ⇒ Application en physique du solide ? (Chaînes de spins)