



**HAL**  
open science

# Calcul numérique de la dimension fractale d'un attracteur étrange

Conrad Lausberg

► **To cite this version:**

Conrad Lausberg. Calcul numérique de la dimension fractale d'un attracteur étrange. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1987. Français. NNT: . tel-00325041

**HAL Id: tel-00325041**

**<https://theses.hal.science/tel-00325041>**

Submitted on 26 Sep 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

Présentée à

**L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

pour obtenir le  
TITRE DE DOCTEUR DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

**Conrad LAUSBERG**

OOOOO

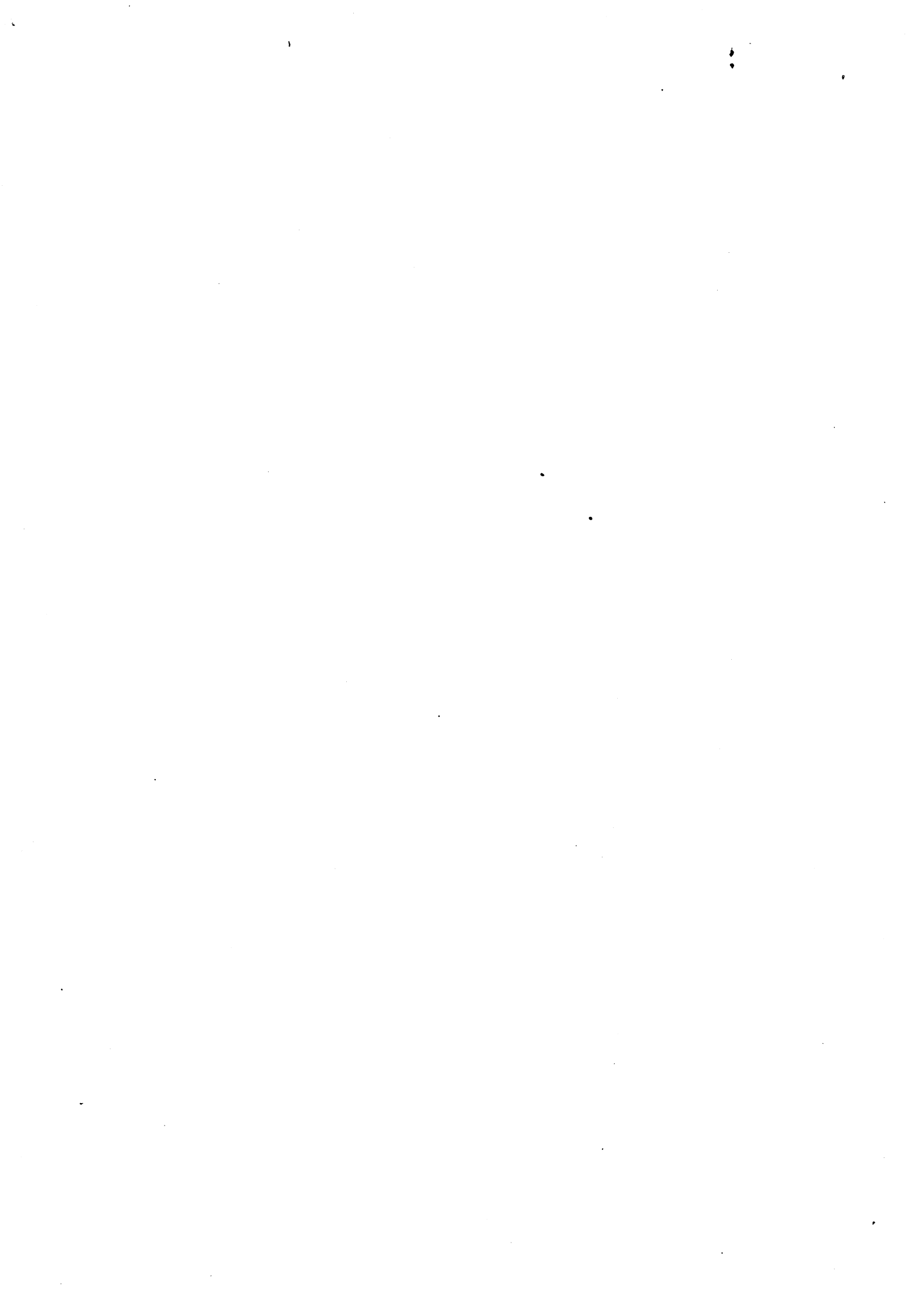
## **CALCUL NUMÉRIQUE DE LA DIMENSION FRACTALE D'UN ATTRACTEUR ÉTRANGE**

OOOOO

Thèse soutenue le 21 septembre 1987 devant la commission d'examen.

**P.J. LAURENT**      **Président**

**P. ATTEN**  
**M. COSNARD**  
**J. DEMONGEOT**      **Examineurs**  
**C. LOBRY**



# INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Président : Daniel BLOCH

Année 1987

Vice - Présidents : René CARRE  
Jean-Marie PIERRARD

## Professeurs des Universités

BARIBAUD Michel	ENSERG	GUYOT Pierre	ENSEEG
BARRAUD Alain	ENSIEG	IVANES Marcel	ENSIEG
BAUDELET Bernard	ENSPG	JAUSSAUD Pierre	ENSIEG
BEAUFILS Jean-Pierre	ENSEEG	JOUBERT Pierre	ENSIEG
BESSON Jean	ENSEEG	JOURDAIN Geneviève	ENSIEG
BLIMAN Samuel	ENSERG	LACOUME Jean-Louis	ENSIEG
BLOCH Daniel	ENSPG	LESIEUR Marcel	ENSHMG
BOIS Philippe	ENSHMG	LESPINARD Georges	ENSHMG
BONNETAIN Lucien	ENSEEG	LONGEQUEUE Jean-Pierre	ENSPG
BOUVARD Maurice	ENSHMG	LOUCHET François	ENSEEG
BRISSONNEAU Pierre	ENSIEG	MASSE Philippe	ENSIEG
BRUNET Yves	IUFA	MASSELOT Christian	ENSIEG
BUYLE-BODIN Maurice	ENSERG	MAZARE Guy	ENSIMAG
CAILLERIE Denis	ENSHMG	MOREAU René	ENSHMG
CAVAIGNAC Jean-François	ENSPG	MORET Roger	ENSIEG
CHARTIER Germain	ENSPG	MOSSIERE Jacques	ENSIMAG
CHENEVIER Pierre	ENSERG	OBLED Charles	ENSHMG
CHERADAME Hervé	UFR PGP	OZIL Patrick	ENSEEG
CHERUY Arlette	ENSIEG	PARIAUD Jean-Charles	ENSEEG
CHIAVERINA Jean	UFR PGP	PAUTHENET René	ENSIEG
CHOVET Alain	ENSERG	PERRET René	ENSIEG
COHEN Joseph	ENSERG	PERRET Robert	ENSIEG
COUMES André	ENSERG	PIAU Jean-Michel	ENSHMG
DARVE Félix	ENSHMG	POUPOT Christian	ENSERG
DELLA-DORA Jean	ENSIMAG	SAUCIER Gabrielle	ENSIMAG
DEPORTES Jacques	ENSPG	SCHLENKER Claire	ENSPG
DOLMAZON Jean-Mar	ENSERG	SCHLENKER Michel	ENSPG
DURAND Francis	ENSEEG	SERMET PIERRE	ENSERG
DURAND Jean-Louis	ENSIEG	SILVY Jacques	UFR PGP
FONLUPT Jean	ENSIMAG	SIRIEYS Pierre	ENSHMG
FOULARD Claude	ENSIEG	SOHM Jean-Claude	ENSEEG
GANDINI Alessandro	UFR PGP	SOLER Jean-Louis	ENSIMAG
GAUBERT Claude	ENSPG	SOUQUET Jean-Louis	ENSEEG
GENTIL Pierre	ENSERG	TROMPETTE Philippe	ENSHMG
GREVEN Hélène	IUFA	VEILLON Gérard	ENSIMAG
GUERIN Bernard	ENSERG	ZADWORNY François	ENSERG

**Professeur Université des Sciences Sociales  
( Grenoble II )**

BOLLIET Louis

**Personnes ayant obtenu le diplôme  
d'ABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES**

BECKER Monique  
BINDER Zdenek  
CHASSERY Jean-Marc  
COEY John  
COLINET Catherine  
COMMAULT Christian  
CORNUEJOLS Gérard  
DALARD Francis  
DANES Florin  
DEROO Daniel  
DIARD Jean-Paul  
DION Jean-Michel  
DUGARD Luc  
DURAND Robert  
GALERIE Alain  
GAUTHIER Jean-Paul  
GENTIL Sylviane  
PLA Fernand  
GHIBAUDO Gérard  
HAMAR Sylvaine  
LADET Pierre  
LATOMBE Claudine  
LE GORREC Bernard  
MADAR Roland  
MULLER Jean  
NGUYEN TRONG Bernadette  
TCHUENTE Maurice  
VINCENT Henri

**Chercheurs du C.N.R.S**

**Directeurs de recherche 1ère Classe**

CAILLET Marcel  
CARRE René  
FRUCHART Robert  
JORRAND Philippe  
LANDAU Ioan  
MARTIN

**Directeurs de recherche 2ème Classe**

ALEMANY Antoine  
ALLIBERT Colette  
ALLIBERT Michel  
ANSARA Ibrahim  
ARMAND Michel  
BINDER Gilbert  
BONNET Roland  
BORNARD Guy  
CALMET Jacques  
DAVID René  
DRIOLE Jean  
ESCUDIER Pierre  
EUSTATHOPOULOS Nicolas  
JOD Jean-Charles  
KAMARINOS Georges  
KLEITZ Michel  
KOFMAN Walter  
LEJEUNE Gérard  
MERMET Jean  
MUNIER Jacques  
SENATEUR Jean-Pierre  
SUERY Michel  
TEDOSIU  
WACK Bernard

**Personnalités agréées à titre permanent à diriger  
des travaux de  
recherche (décision du conseil scientifique  
E.N.S.E.E.G**

BERNARD Claude  
CHATILLON Catherine  
CHATILLON Christian  
COULON Michel  
DIARD Jean-Paul  
FOSTER Panayotis  
HAMMOU Abdelkader  
MALMEJAC Yves  
MARTIN GARIN Régina  
SAINTFORT Paul  
SARRAZIN Pierre  
SIMON Jean-Paul  
TOUZAIN Philippe  
URBAIN Georges

**E.N.S.E.R.G**

BOREL Joseph  
CHOVET Alain  
DOLMAZON Jean-Marc  
HERAULT Jeanny

**E.N.S.I.E.G**

DESCHIZEAUX Pierre  
GLANGEAUD François  
PERARD Jacques  
REINISCH Raymond

**E.N.S.H.G**

BOIS Daniel  
DARVE Félix  
MICHEL Jean-Marie  
ROWE Alain  
VAUCLIN Michel

**E.N.S.I.M.A.G**

BERT Didier  
COURTIN Jacques  
COURTOIS Bernard  
DELLA DORA Jean  
FONLUPT Jean  
SIFAKIS Joseph

**E.F.P.G**

CHARUEL Robert

**C.E.N.G**

CADET Jean  
COEURE Philippe  
DELHAYE Jean-Marc  
DUPUY Michel  
JOUVE Hubert  
NICOLAU Yvan  
NIFENECKER Hervé  
PERROUD Paul  
PEUZIN Jean-Claude  
TAIB Maurice  
VINCENDON Marc

**Laboratoires extérieurs  
C.N.E.T**

DEMOULIN Eric  
DEVINE  
GERBER Roland  
MERCKEL Gérard  
PAULEAU Yves

# ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE SAINT-ETIENNE

Directeur : Monsieur M.MERMET

Directeur des Etudes et de la formation: Monsieur J. LEVASSEUR

Directeur des recherches : Monsieur J. LEVY

Secrétaire Général : Mademoiselle M. CLERGUE

## PROFESSEURS DE 1ère CATEGORIE

COINDE Alexandre

GOUX Claude

LEVY Jacques

LOWYS Jean-Pierre

MATHON Albert

RIEU Jean

SOUSTELLE Michel

FORMERY Philippe

Gestion

Métallurgie

Métallurgie

Physique

Gestion

Mécanique-Résistance des matériaux

Chimie

Mathématiques Appliquées

## PROFESSEURS DE 2ème CATEGORIE

HABIB Michel

PERRIN Michel

VERCHERY Georges

TOUCHARD Bernard

Informatique

Géologie

Matériaux

Physique Industrielle

## DIRECTEUR DE RECHERCHE

LESBATS Pierre

Métallurgie

## MAITRE DE RECHERCHE

BISCONDI Michel

DAVOINE Philippe

FOURDEUX Angeline

KOBYLANSKI André

LALAUZE René

LANCELOT Francis

LE COZE Jean

THEVENOT François

TRAN MINH Canh

Métallurgie

Géologie

Métallurgie

Métallurgie

Chimie

Chimie

Métallurgie

Chimie

Chimie

## Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche

DRIVER Julian

GUILHOT Bernard

THOMAS Gérard

Métallurgie

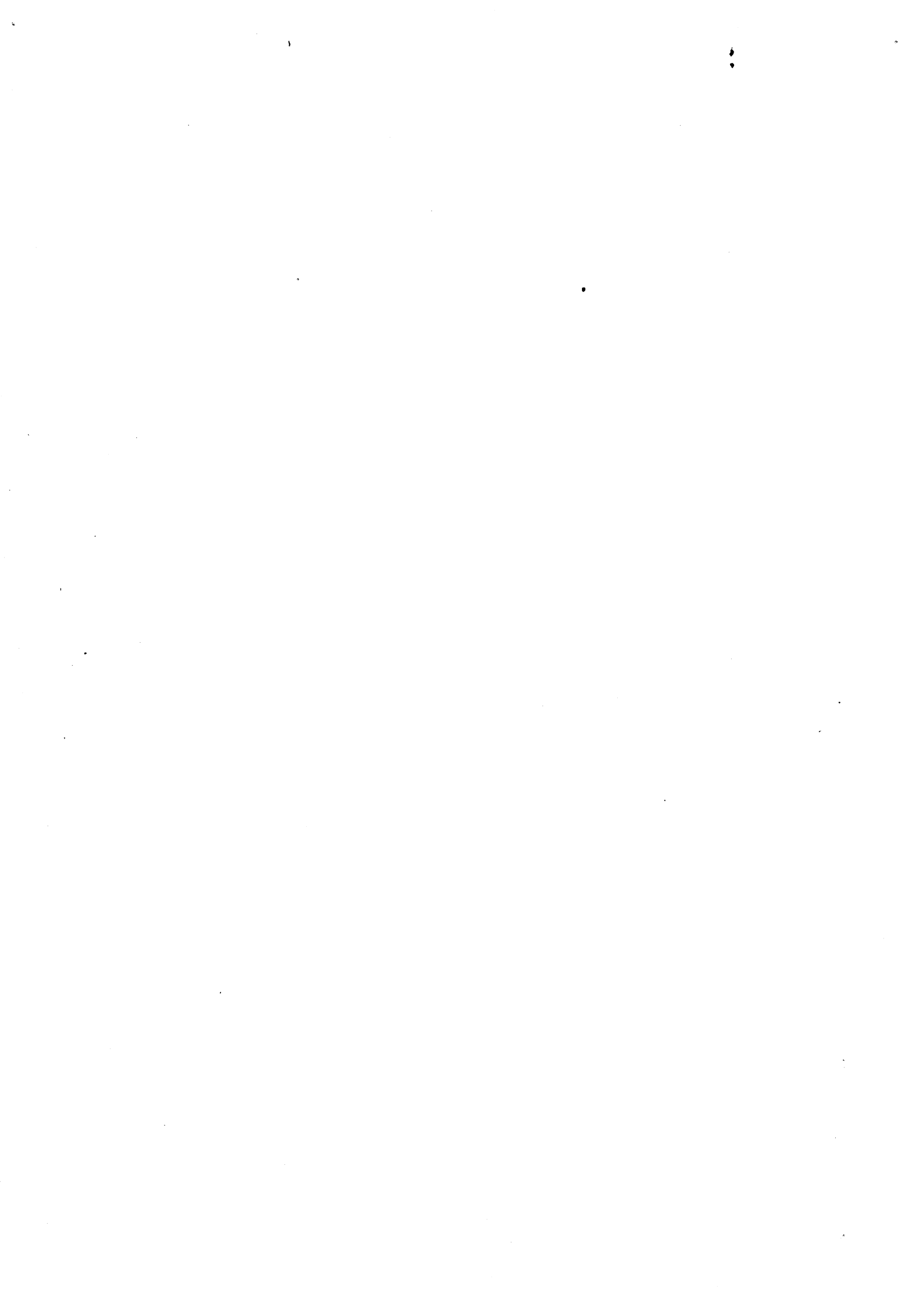
Chimie

Chimie

## Professeurs à l'UER de Sciences de Saint-Etienne

VERGNAUD Jean-Maurice

Chimie des Matériaux et  
Chimie Industrielle



## Remerciements

J'exprime ma profonde gratitude a Monsieur Michel COSNARD qui a dirigé ce travail - pour ses conseils et son encouragement.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Jacques DEMONGEOT et Monsieur Pierre ATTEN pour m'avoir confronté avec des applications de mon travail, pour leur intérêt, et pour leur participation au jury.

Je remercie Monsieur le Professeur Claude LOBRY pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse, et pour être venu de Nice pour assister à ma soutenance.

Je remercie Monsieur le Professeur Pierre Jean LAURENT, qui m'a aidé à résoudre quelques problèmes administratifs délicats, surtout au début de mon séjour à Grenoble. Sans son concours, je n'aurai pas pu faire cette dissertation.

Je remercie Monsieur le Professeur Peter GRASSBERGER pour des discussions ouvertes et instructives, qu'il m'a accordé au début de cette thèse, et Monsieur le Professeur Floris TAKENS pour sa reponse à mes questions concernant son algorithme.

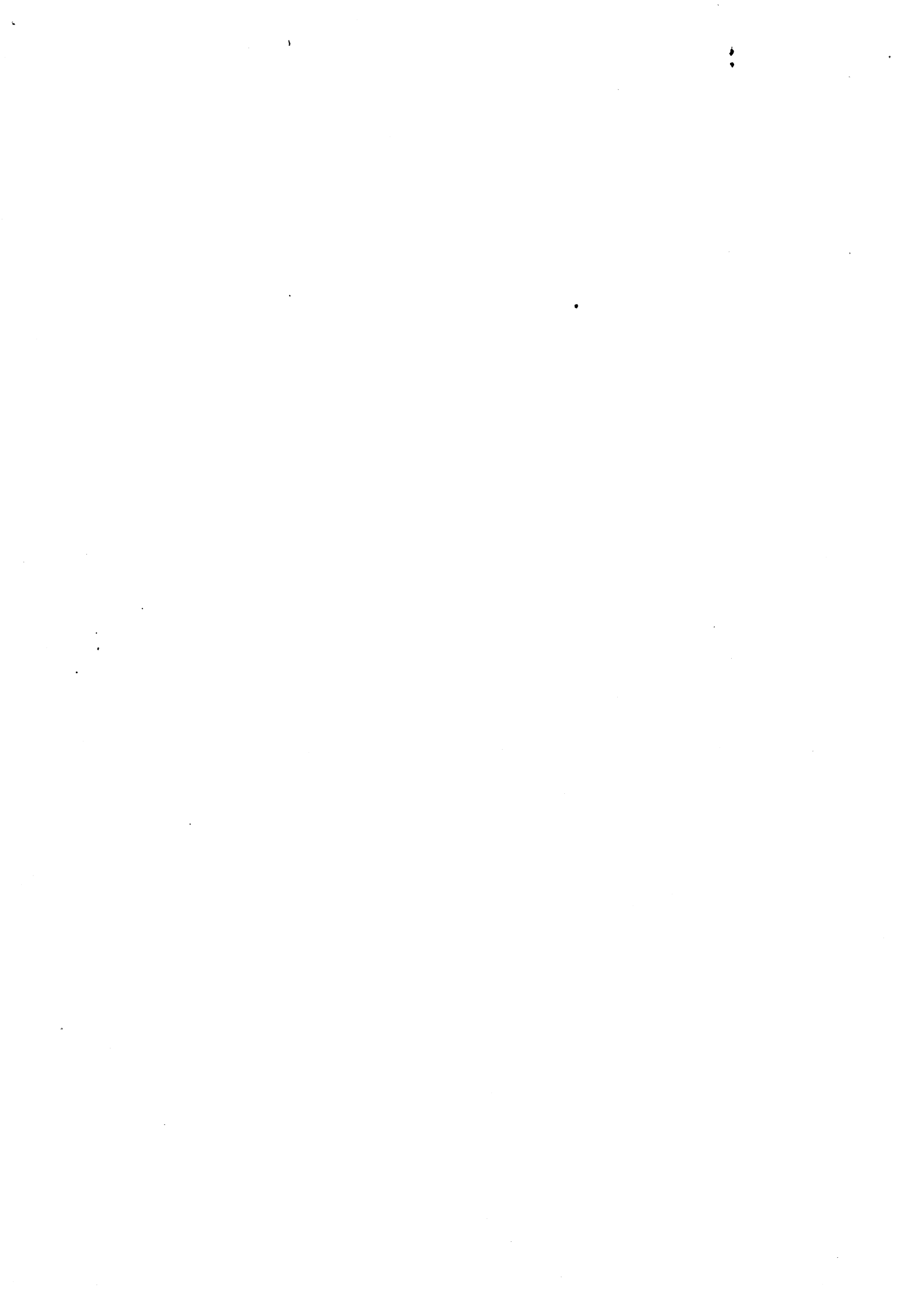
Je remercie Claire DI CRESCENZO et André EBERHARD, ainsi que J.M.MULLER et Pascal KLEIN, qui m'ont aidé dans les différents problèmes de programmation.

Je remercie Jean Louis MARTIEL et Klaus LOTT pour leurs contributions à cette thèse et Bernard MALRAISON et Jean-Guy CAPUTO pour leurs questions venant de leurs applications.

Je remercie Nourredine AKROUNE pour son intérêt particulier dans mon travail et tous les autres collègues pour leur encouragement.

Enfin, je remercie le Laboratoire TIM<sup>3</sup> pour le matériel informatique et de traitement de texte, dont je me suis servi durant toute la préparation de cette thèse, et le service de reprographie qui en a assuré le tirage.





## **TABLE DES MATIERES**

	<u>Pages</u>
Introduction .....	3
 <b>1.SYSTEMES DYNAMIQUES ET ATTRACTEURS</b>	
1.0. Définitions de base .....	9
1.1. Définitions d'un attracteur.....	10
1.2. Relations entre les différentes définitions d'attracteur .....	18
1.3. Définition d'un attracteur régulier .....	22
 <b>2. CARACTERISER L'ATTRACTEUR PAR UNE MESURE</b>	
2.0. Eléments de base de la théorie de la mesure .....	27
2.1. La mesure ergodique .....	28
2.2. La mesure d'une trajectoire partant hors de l'attracteur .....	30
2.2.1. La mesure naturelle .....	30
2.2.2. La mesure extérieure de Takens .....	34
2.3. Conséquences de la condition d'approche uniforme .....	38
2.4. Exemples où ces mesures n'existent pas .....	39
 <b>3. CERTAINES DEFINITIONS DE LA DIMENSION FRACTALE ET LEURS PROPRIETES</b>	
 <b>3A. DEFINITIONS ET EXEMPLES</b>	
3A.1. Définitions ensemblistes .....	48
3A.2. Définitions qui tiennent compte de la dynamique d'un système ..	50
3A.2.1. Choix de la définition de la fonction du temps de séjour .....	50
3A.2.2. La fonction de dimension de corrélation .....	52
3A.2.3. La fonction de dimension d'information .....	54
3A.3. Exemple: la transformation du Boulanger .....	56
3A.4. Un attracteur étrange pour lequel ni dimension de capacité, ni dimension d'information, ni dimension de corrélation ne sont définies	60
3A.5. L'invariance des dimensions fractales par rapport à une transformation des coordonnées .....	62
 <b>3B. RELATIONS ENTRE LES DIMENSIONS ET ERGODICITE</b>	
3B.1. Relations entre les dimensions généralisées: Egalités et inégalités	64

3B.1.1. Relation entre fonction de dimension de corrélation et fonction de dimension d'information .....	64
3B.1.2. Relation entre la fonction de dimension d'information et la dimension de capacité .....	66
3B.1.3. Relation entre les fonctions de dimension et la dimension d'information .....	67
3B.2. La dimension ponctuelle .....	69
3B.3. Une hypothèse de Kadanoff et coll. ....	71
3B.4. Exposants de Lyapunov, entropie topologique et dimension de l'attracteur .....	73
3B.5. Quelques conjectures sur la dimension fractale d'un attracteur ..	76
3B.6. Conjecture de Paladin et Vulpiani .....	77
Conclusion .....	79

#### 4. ALGORITHMIQUE

4.0. Introduction .....	83
4.1. Fonctions et courbes de q-corrélation (q-entropie) .....	84
4.2. Quelques exemples d'un attracteur étrange .....	85
4.3. Algorithme de boxcounting .....	87
4.4. Algorithme des points centraux .....	90
4.4.1. Le plan de l'algorithme .....	90
4.4.2. Détails de cet algorithme .....	92
4.4.3 Résumé de l'algorithme .....	98
4.4.4. Deux idées pour accélérer encore l'algorithme des points centraux .....	99
4.5. La moyenne des dimensions ponctuelles .....	100
4.6. Listes des distances autour des points centraux .....	100
4.7. Algorithme de Takens .....	102
Conclusion .....	104

#### 5. ESTIMATION D'ERREUR ET COUT DES ALGORITHMES

5.0. Introduction .....	107
5.1. Estimation d'erreur de l'algorithme des points centraux .....	108
5.1.1. Sources d'erreur .....	108
5.1.2. Calcul des erreurs .....	111
5.2. Cout des algorithmes .....	117
5.2.1. Algorithme des points centraux .....	117
5.2.2. Algorithme de boxcounting .....	120
Conclusion .....	121

## 6. RESULTATS NUMERIQUES : SYSTEMES DISCRETS

### 6A. ALGORITHME DES POINTS CENTRAUX

6A.0. Introduction .....	125
6A.1. Détails techniques du calcul .....	125
6A.2. Notations .....	127
6A.3. Exemples d'attracteurs .....	128
6A.4. Etude de la fonction de corrélation	
6A.4.1. Un cas où tout semble aller bien .....	131
6A.4.2. Oscillations dans les courbes de corrélation .....	134
6A.5. Convergence des courbes de corrélation	
6A.5.1. Augmentation du nombre des points centraux .....	137
6A.5.2. Augmentation de la longueur de la série temporelle .....	142
6A.6. Résultats pour trois dimensions .....	145
6A.6.1. Influence des oscillations de la courbe de corrélation sur les estimations des dimensions .....	146
6A.6.2. Itérations bidimensionnelles ayant des lignes critiques .....	147
6A.7. Calcul de la fonction $d_q$ cor .....	150
6A.8. Calcul de la dimension ponctuelle autour des points centraux ....	152
Résumé et Conclusion .....	157

### 6B. ALGORITHME DE TAKENS .....

158

## 7. RESULTATS NUMERIQUES : SYSTEMES CONTINUS

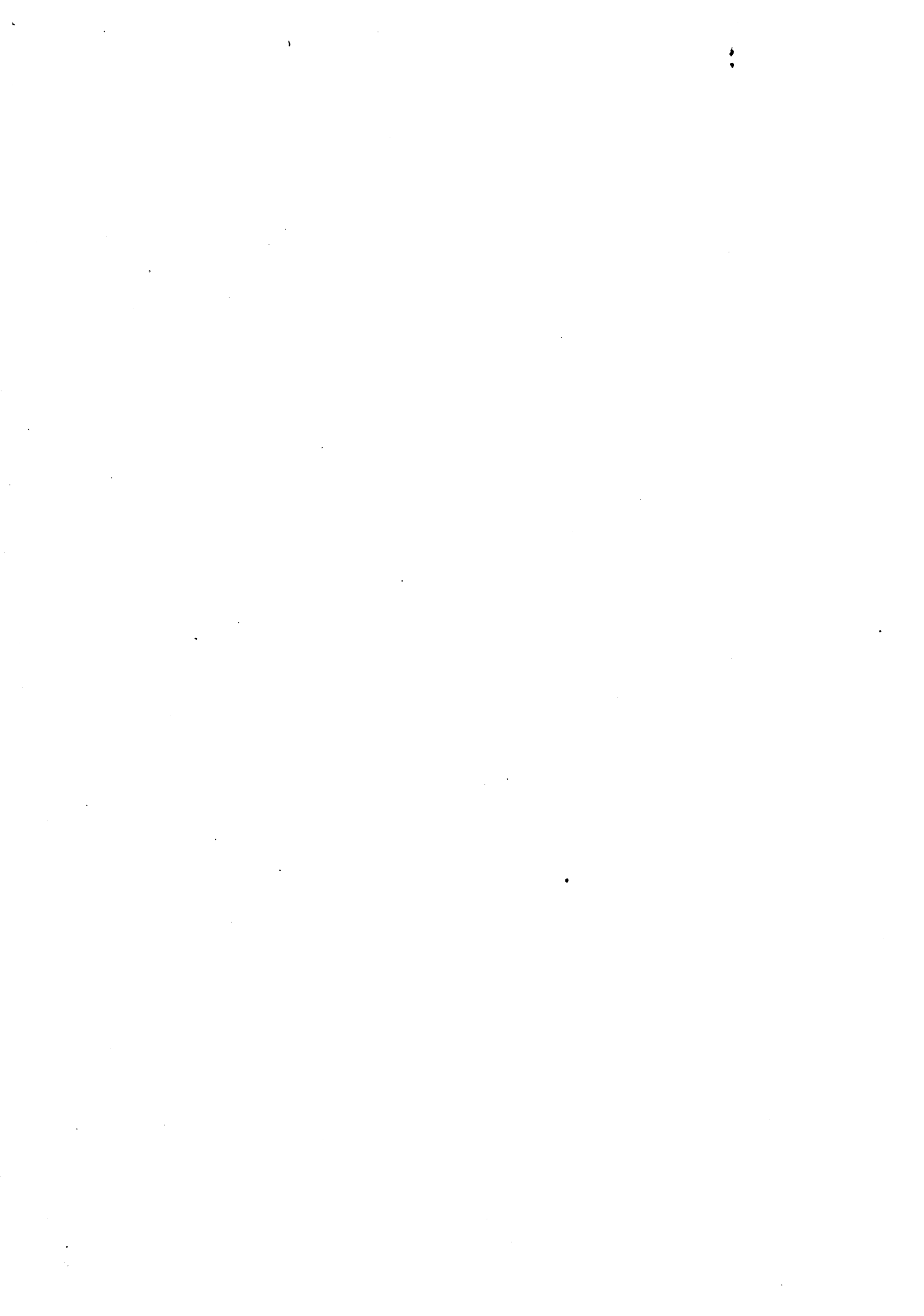
7.0. Introduction .....	163
7.1. Attracteur de Lorenz .....	163
7.2. Les dimensions fractales d'un plan de section de l'attracteur .....	167
7.3. Un objet d'étude: Génération périodique des signaux d'AMP cyclique (cAMP) chez l'amibe Dictyostelium Discoideum .....	170

### CONCLUSION .....

179

### BIBLIOGRAPHIE .....

183



# Introduction



## INTRODUCTION

Le calcul numérique des dimensions fractales fait partie d'un programme de vaste recherche de la communauté scientifique: l'étude du comportement des systèmes dynamiques chaotiques.

Depuis qu'on ose considérer l'apparence des systèmes dynamiques chaotiques non nécessairement comme un artefact d'une expérience ratée, mais comme une réalité intéressante, et donc un sujet de recherche important, on en découvre dans toutes les disciplines scientifiques. (Voir par exemple le livre de Bergé et coll. [BPV], l'article paru dans La Recherche [ABD], et le livre de Cvitanovic [Cvi])

Pour comprendre le chaos dans les expériences, il faut d'abord étudier les systèmes mathématiques qui modélisent ces systèmes. Heureusement, contrairement à ce qu'on pensait pendant longtemps, ces modèles peuvent être très simples. Il existe

- des itérations unidimensionnelles
  - des systèmes d'équations différentielles ordinaires à trois dimensions
- qui sont chaotiques.

### Le Chaos

On considère des systèmes dynamiques, dont la trajectoire reste dans une partie bornée d'espace de phases, du moins, si elle est issue de l'intérieur de cette partie. Le comportement de la trajectoire peut être très compliqué.

L'explication classique pour un comportement erratique est le bruit. La trajectoire semble erratique parce que elle est perturbée par des erreurs aléatoires, soit des erreurs d'expérimentation ou des erreurs d'arrondi du calcul numérique. Aujourd'hui on sait qu'il existe aussi des systèmes déterministes, même très simples, qui ont un comportement très compliqué. Ils ne convergent ni vers un point fixe, ni vers un cycle limite ou un tore, l'évolution du système n'est même pas quasiperiodique. Dans ce cas deux trajectoires issues de points de départ dont la différence est trop petite pour être observable, se séparent après un certain temps. Leur distance croît de façon exponentielle, jusqu'à ce que toute mémoire sur le point de départ soit perdue. On appelle ce phénomène *sensibilité aux conditions initiales* [Lor, May, Hen].

### La structure fractale du chaos

Dans beaucoup de cas la trajectoire d'un système chaotique converge vers un ensemble, qui a une structure fractale, par exemple un *ensemble de Cantor* ou une ligne infiniment pliée telle que *sa section* soit un ensemble de Cantor. Qu'est-ce un ensemble de Cantor ?

Considérons l'intervalle  $[0,1]$ . On enlève l'intervalle central ouvert de longueur  $1/3$ . Sur chacun des deux intervalles restants, on enlève l'intervalle central de longueur  $(1/3)^2$ , sur chacun des quatre intervalles restants on enlève l'intervalle



central de longueur  $(1/3)^3$ , et ainsi de suite (voir figure 1).

On appelle ensemble de Cantor l'ensemble qui reste après un nombre infini de telles opérations. Cet ensemble a une longueur nulle, mais il est non-dénombrable.

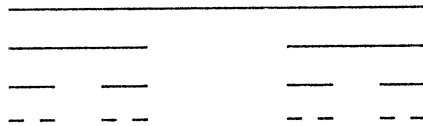


Figure 1 : Ensemble Cantorien du tiers median

On peut aussi donner une longueur différente à chacun des intervalles restants ou encore laisser plus de deux intervalles à chaque pas. Les ensembles de Cantor font partie de la classe très vaste des *ensembles fractals*, décrite dans les livres de Mandelbrot [Man]. Pour une description plus détaillée des ensembles de Cantor voir le premier chapitre du livre de Kahane et Salem [KS] ou la thèse de Tricot [Tri].

### Le calcul des dimensions fractales dans l'étude du chaos

Quand on trouve du chaos dans une expérience, on essaie de décrire plus précisément le comportement asymptotique du système, c'est à dire, son évolution ultime lorsque la variable temporelle tend vers l'infini. Pour faire ceci, on peut modéliser le système ou directement utiliser une série importante de mesures issues de l'expérience, la série temporelle. Quel que soit le procédé choisi, il existe des paramètres permettant de caractériser un système chaotique:

- les *exposants de Liapunov* décrivent l'évolution de la distance séparant deux trajectoires partant de points de départ infiniment proches. On rappelle que dans le cas d'un système chaotique deux trajectoires voisines s'éloignent de façon exponentielle. Les exposants de Liapunov mesurent la sensibilité aux conditions initiales. [FOY]
- les *dimensions fractales* décrivent une certaine 'densité' de l'attracteur dans l'espace de phases, ou en termes physiques, le nombre de degrés de liberté du système. [Man],[ACM]

Dans le cas d'un espace de phase de dimension 2, des théorèmes permettent, sous certaines conditions, de relier les dimensions fractales aux coefficients de Liapunov [You1]. Si la dimension de l'espace de phases est supérieure à deux, on dispose seulement de conjectures. ([ER] et ses références)

### Le contenu de cette thèse

Dans le premier chapitre nous expliquons ce qu'est un attracteur et nous comparons plusieurs définitions, pour donner une idée des différents cas se présentant. Comparer les définitions d'attracteur n'est pas évident, nous proposons

une nouvelle classification des définitions, pour mieux y arriver.

Dans le deuxième chapitre nous étudions les fonctions d'ensembles, qui caractérisent la répartition de temps de séjour d'une trajectoire, proposées par Farmer et coll. [FOY] et par Takens [Tak2]. Habituellement ces fonctions sont appelés des mesures, nous démontrons que ces fonctions ne sont pas des mesures au sens stricte. Puis nous modifions ces définitions pour obtenir une mesure. Cette mesure est utile dans la suite, elle permettra de définir plus clairement les dimensions fractales.

Dans le troisième chapitre nous présentons d'abord différentes définitions de dimensions fractales, dues à Hausdorff [Hau], Balatoni et Renyi [BR], Grassberger et Procaccia [GP], [Gra1], Hentschel et Procaccia [HP]. Plusieurs auteurs ont aussi défini une fonction continue de dimension, qui contient les valeurs de ces dimensions.[Gra1,HP, PV]

Dimension fractale d'un attracteur, d'une trajectoire, d'une mesure ? Il me semblait important de clarifier cette question pour un certain nombre de ces définitions.

Puis nous présentons un attracteur pour lequel les dimensions fractales admettent des valeurs différentes et nous introduisons un autre exemple, pour lequel ces définitions ne sont pas définies.

Différents auteurs ont travaillé sur les relations entre ces dimensions (Grassberger et Procaccia[GP], [Gra1], Kadanoff et coll. [Kad],[HJ]) et les relations avec les coefficients de Lyapunov (L.S.Young [You1], Yorke et coll. [FKYY]). Nous avons approfondi les travaux de Grassberger et Procaccia, en expliquant mieux les démonstrations de certaines propositions et en démontrant des conjectures.

Quelle définition caractérise le mieux l'attracteur pour des études pratiques? La question est très controversée et différentes écoles s'affrontent. Voir la conclusion du Chapitre 3A.

Des algorithmes de calcul pour les différentes dimensions fractales ont été proposés ou améliorés: L'algorithme de boxcounting par Russell et coll.[HOR], amélioré par Grassberger [Gra2], une modification par Tsang [Tsa], l'algorithme de Grassberger et Procaccia [GP], l'algorithme des points centraux [PV], d'autres algorithmes utilisant des points centraux par Termonia [Ter] et Badii et Politi [BP], l'algorithme de Takens [Tak2].

Parfois des détails importants ne sont pas explicités, ou la procédure retenue n'est pas la meilleure. Souvent la présentation de l'algorithme est maladroite. Nous avons donc précisé et amélioré l'algorithme des points centraux et l'algorithme de Takens, pour faciliter leur utilisation et améliorer leur efficacité. Nous espérons, que notre présentation de l'algorithme permettra aux lecteurs non-spécialistes de le programmer sans ambiguïté avec tous ses détails.

Dans le chapitre 5 nous commençons l'analyse d'erreur, avec un calcul de coût, pour l'algorithme des points centraux. Cette analyse est largement inspirée par nos

résultats numériques. Elle est une nouveauté, aucune analyse de ce genre n'existe dans la littérature pour cet algorithme, à la différence de l'algorithme de Takens, pour lequel une analyse d'erreur existe.

Dans le chapitre 6 nous présentons nos résultats numériques. En exécutant nos programmes, nous avons déjà une idée vague d'analyse d'erreur dans la tête, qui a guidé nos expériences. La formulation de ces idées sous la forme donnée à la fin de chapitre 4 (établie Mai 1987) est ultérieure aux résultats numériques (dont la plus importante partie est de Oct. - Déc. 1986), mais l'analyse d'erreur justifie la classification des résultats.

Nous avons aussi examiné un exemple pratique (un modèle biochimique), où le calcul de la dimension fractale est seulement un parmi plusieurs outils de description du comportement du système dynamique. Les difficultés posées par ces exemples sont des motivations pour certaines modifications algorithmiques. Il fallait adapter le programme de calcul de la dimension pour entrer dans le cadre d'une boîte à outils.

# Chapitre 1

Systemes dynamiques

et

Attracteurs



## 1. SYSTEMES DYNAMIQUES ET ATTRACTEURS

### 1.0. Définitions de base

On rappelle d'abord quelques définitions de base. On trouve ces définitions par exemple dans le livre de Guckenheimer et Holmes [GH]. Nous en profitons pour fixer les notations.

**Définition :** Un *système dynamique* est un triplet  $(X, T, f)$  où  $f$  est une application continue de  $X \times T$  dans  $X$ , appelé *flot*, avec  $f(x, 0) = x$  et  $f(f(x, t_1), t_2) = f(x, t_1 + t_2)$ .

On appelle  $X$  *l'espace d'état* (ou des *phases*).

Dans la suite on suppose que  $X$  est un sous-ensemble compact du  $\mathbb{R}^n$  ou le  $\mathbb{R}^n$  lui-même.  $n$  est la *dimension de l'espace des phases*.  $X$  est muni d'une distance  $\delta$ .

On note  $V_\varepsilon(E)$  l' $\varepsilon$ -voisinage ouvert d'un ensemble  $E \subset X$ .

$B(x, \varepsilon)$  dénote la *boule* ouverte de rayon  $\varepsilon$  autour du point  $x \in X$ .

$C(E)$  dénote le *complément* d'un ensemble  $E$ .

$T$  est *l'espace de temps* et égale  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^+$ ,  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{N}$ .

Si  $T = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^+$ , le flot  $f: X \times T \rightarrow X$  est engendré par un *système d'équations différentielles*  $F: X \rightarrow X$

Si  $T = \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ , le flot  $f$  est engendré par une *itération*  $F: X \rightarrow X$

L'ensemble des points  $f(x, T^+) = \{ f(x, t) \mid t \in T \}$  est la *trajectoire positive* de  $x$ .  
 $x$  est le *point de départ* de la trajectoire.

Nous notons  $\omega(x)$  *l'ensemble limite* de  $f(x, T^+)$

$$\omega(x) = \{ y \in X \mid \forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \in T^+ \quad \exists t \geq t_0 \text{ tel que } \delta(y, f(x, t)) < \varepsilon \}$$

$\omega(x)$  est un ensemble compact et invariant.

Un point  $x$  est *récurrent* si  $x \in \omega(x)$ . On appelle point *transitoire* un point, qui n'est pas récurrent.

On appelle *Bassin d'attraction* d'un ensemble  $A$  l'ensemble des points dont l'ensemble limite est contenu dans  $A$ , sauf  $A$  lui-même.

$$B(A) = \{ x \in X \setminus A \mid \omega(x) \in A \}$$

Actuellement aucune définition d'attracteur n'est généralement admise. Nous discutons donc des différentes définitions dans le prochain paragraphe et à la fin nous ferons un choix de la définition.

### 1.1. Définitions d'un attracteur

La discussion sur la bonne définition d'un attracteur aujourd'hui n'est pas close. Plusieurs définitions, proposées par différents auteurs, coexistent. Notre idée intuitive est de considérer comme attracteur un ensemble  $A$  qui vérifie les conditions suivantes:

- 1)  $A$  est invariant
- 2a) Attractivité:  $A$  possède un bassin d'attraction de mesure de Lebesgue non nulle ou
- 2b)  $A$  possède un bassin d'attraction contenant un voisinage de  $A$ , éventuellement sauf un ensemble de mesure nulle.
- 3)  $A$  est indécomposable, cette condition sera précisée dans la suite.
- 4) Une condition de minimalité, qui dit qu'il n'existe pas de sous-ensemble de  $A$  inclus dans  $A$ , qui est un attracteur.

Une définition d'attracteur simple a été donnée par Williams[Wil] :

**Définition :** Un ensemble  $A$ , contenu dans l'ensemble des points récurrents de  $X$  est un attracteur si

- i)  $A$  est indécomposable, c'est à dire  $A$  n'est pas union de deux ensembles invariants fermés.
- ii)  $A$  possède un voisinage  $U$  tel que  $f(U) \subset U$
- iii)  $\bigcap_{i>0} f^i(U) = A$

Quelques exemples pour illustrer les propriétés de cette définition:

**Exemple 1a) :** Cycle limite sans points fixes, attractant des deux côtés (figure 2)

$$r' = 1-r$$

$$\theta = 1$$

C'est l'exemple type d'un attracteur périodique. Le cercle unité est un attracteur selon la définition de Williams et aussi selon toutes les autres définitions d'attracteur que nous présentons dans ce chapitre.

S'il y a deux cycles limites disjoints, chacun ayant ces propriétés d'attraction, chacun des cycles est un attracteur.

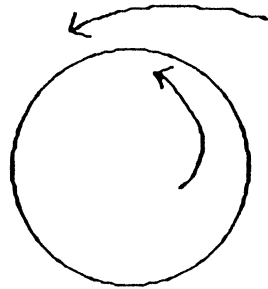


Figure 2

Exemple 2 : [GH] Deux points fixes et un col situés sur un segment invariant (Figure 3)

$$\begin{aligned} x' &= x - x^3 \\ y' &= -y \end{aligned}$$

Le segment entier  $[-1,1]$  est un ensemble invariant, mais contient des points transitoires. Donc la restriction, que l'attracteur ne doit contenir que des points récurrents, est importante dans cette définition. Seuls les points  $(-1,0)$  et  $(1,0)$  sont des attracteurs, en accord avec notre idée intuitive d'un attracteur.

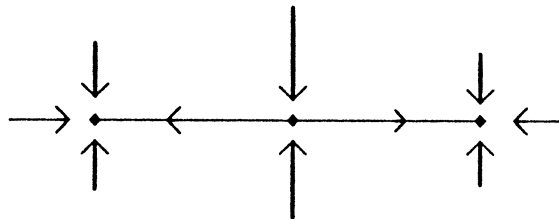


Figure 3

Exemple 1b) : Cycle limite sans points fixes, attractant d'un côté (figure 4).

$$\begin{aligned} r' &= -r|r-1| \\ \theta &= 1 \end{aligned}$$



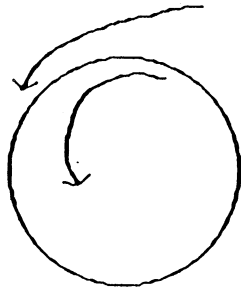


Figure 4

Le cycle limite n'est pas un attracteur selon la définition de Williams.

Soit  $x_0 = (r_0, \theta_0)$ ,  $r_0 = 1 - \delta$ ,  $0 < \delta < \varepsilon$ ,  $\theta_0$  quelconque. L'ensemble limite de  $x_0$  est l'origine. Les conditions ii) et iii) sont alors violées pour tout voisinage du cycle limite.

On peut changer la condition sur le bassin d'attraction. ii) et iii) sont remplacés par les conditions ii\* et iii\*

**Définition :** (Williams corrigée) Un ensemble  $A$ , contenu dans l'ensemble des points récurrents de  $X$  est un attracteur si

- i)  $A$  est indécomposable, c'est à dire  $A$  n'est pas union de deux ensembles invariants fermés.
- ii\*)  $A$  possède un Voisinage  $U$  et un sous-ensemble  $T \subset U$  de mesure de Lebesgue positive, tel que  $f(T) \subset T$
- iii\*)  $\bigcap_{i \geq 0} f^i(T) = A$

Selon cette définition le cycle limite de l'exemple 1b) est aussi un attracteur.

**Exemple 1c :** cycle limite constitué de points fixes (figure 5)

$$\begin{aligned} r' &= 1 - r \\ \theta' &= (1 - r)^2 \end{aligned}$$

Le cercle unité est l'ensemble limite de toute trajectoire partant hors du cercle. Mais tout point sur le cercle est point fixe. Selon la définition de Williams le cercle unité est l'unique attracteur, en accord avec notre idée intuitive.

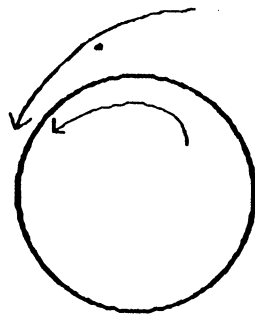


Figure 5

**Exemple 1d** Cercle contenant des points fixes, qui sont des ensembles limites pour des trajectoires venant de l'extérieur (Figure 6)

$$r' = -r |r - 1|$$

$$\theta' = 0$$

Chaque point du cercle unité est un point fixe. Toute trajectoire partant d'un point extérieur au cercle converge vers un point du cercle. Toute trajectoire partant d'un point intérieur au cercle converge vers l'origine. Le cercle unité est un attracteur, mais aussi tout segment fermé du cercle est un attracteur. Ce n'est pas en accord avec notre idée intuitive, on souhaite que seulement le cercle d'unité soit un attracteur pour cet exemple.

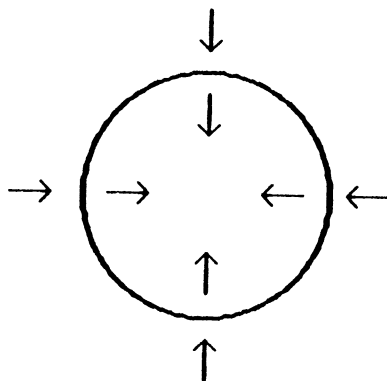


Figure 6

La notion de pseudo-orbite de Bowen [Bow] a été introduite dans la définition d'attracteur par plusieurs auteurs.

**Définition :** On dit que  $x$  est chaîné à  $y$  ( $x \mapsto y$ ) si

$\forall \varepsilon > 0$  il existe une suite de points  $\{x_i\}_{i=0, \dots, n}$ ,  $x_0 = x$ ,  $x_n = y$ , et une suite de temps  $\{t_i\}_{i=1, \dots, n}$ ,  $t_i > 1$  tel que  $\text{dist}(f(x_{i-1}, t_i), x_i) < \varepsilon$  (figure 7).

La suite de points  $\{x_i\}$  est appelée pseudo-orbite.

Le coeur de  $X$  est l'ensemble des points qui sont chaînés à eux mêmes.

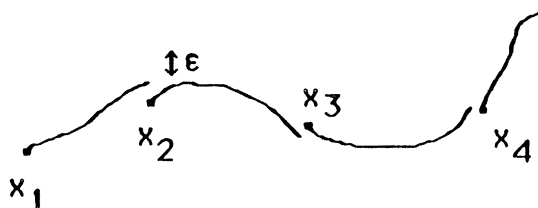


Figure 7

**Définition :** Un ensemble fermé et invariant  $A$  est *c-connexe* si, pour tout couple de points  $x, y$  de  $A$ , on a  $x \mapsto y$  et  $y \mapsto x$ .

**Définition :** (Ruelle [Rue]) Un ensemble  $A$  est un attracteur si

- i)  $A$  est invariant et fermé
- ii)  $A$  est *c-connexe*.

Dans cette définition aucune condition sur l'existence d'un bassin d'attraction de  $A$  n'est posée. Par exemple un point fixe répulsif est un attracteur selon cette définition.

**Définition :** (Guckenheimer [GH]) Un ensemble  $A$  est un attracteur si

- i)  $A$  est invariant et fermé
- ii)  $A$  est *c-connexe*. (Guckenheimer dit 'indécomposable', mais sa définition de indécomposable est identique à la définition de *c-connexe* ci-dessus.)
- iii) L'union de  $A$  avec son bassin d'attraction est de mesure de Lebesgue positive

La seule différence entre la définition de Guckenheimer et Holmes et la définition de Ruelle est que la définition de Ruelle ne comporte pas de condition concernant le bassin d'attraction.

Pour les exemples 1a) et 1b) la définition de Guckenheimer et Holmes est en accord avec celle de Williams corrigée.

Ni la définition de Guckenheimer, ni la définition de Williams ne sont complètement satisfaisantes. Considérons l'exemple suivant:

Exemple 1e : cercle contenant des points fixes limites (figure 8)

$$r' = 1-r$$

$$\theta = 0$$

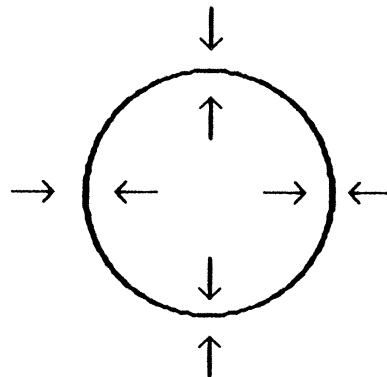


Figure 8

Chaque point du cercle unité est un point fixe. Toute trajectoire partant d'un point extérieur au cercle converge vers un point du cercle.

*Selon la définition de Guckenheimer* le cercle est  $c$ -connexe et est un attracteur. Mais aussi tout segment de longueur positive sur le cercle est un attracteur et toute union de segments est également attracteur.

*Selon la définition de Williams corrigée* le cercle est un attracteur et tout segment du cercle est attracteur, mais l'union de deux segments disjoints n'est pas un attracteur.

*Selon la définition de Williams originale* seul le cercle unité est un attracteur. Donc en corrigeant la définition de Williams on perd une propriété souhaitable.

Un remède à tous ces inconvénients a été proposé par Cosnard et Demongeot[CD].

Pour cette définition on a besoin de quelques notations supplémentaires.

On note  $B(A)$  le *bassin* de  $A$

$$B(A) = \{ x \in X \setminus A \mid \omega(x) \subset A \}$$

Un point  $x$  est appelé *super-non-récurrent* s'il n'existe aucun point  $y \in X$  tel que  $x \in \omega(y)$ .  $S$  est l'ensemble des points super-non-récurrents. On note

$$B_S(A) = S \cap B(A)$$

On note  $\omega(A)$  l'ensemble limite de  $A$

$$\omega(A) = \bigcup_{x \in A} \omega(x)$$

Définition :  $A$  est un *attracteur faible* si

- (i)  $\omega(B_S(A)) = A$
- (ii) quel que soit  $M$  composante  $c$ -connexe de  $A$ , il n'existe pas  $A'$   $c$ -connexe contenant strictement  $M$  tel que  $A' \cup A$  vérifie i)
- (iii) il n'existe pas  $A''$  strictement inclus dans  $A$  vérifiant i) et ii)

$A$  est un *attracteur fort* si  $A$  est un attracteur faible tel que

- (iv) l'intérieur du Bassin d'attraction n'est pas vide.

$A$  est un *attracteur ffort* si  $A$  est un attracteur faible tel que

- (iv')  $A \cup B(A)$  contient un voisinage de  $A$

Cette définition a comme avantage, qu'on n'utilise aucune mesure, elle est donc valable pour n'importe quel espace métrique.

Les cycles limites des exemples 1a et 1c sont des attracteurs fforts, le cycle limite de l'exemple 1b est un attracteur fort. Dans l'exemple 1d (cercle contenant des points fixes limites pour des trajectoires venant de l'extérieur), le cercle unité est un attracteur fort, il est le seul attracteur. Dans l'exemple 1e (cercle contenant des points fixes limites), le cercle unité est un attracteur ffort, ici aussi il est le seul attracteur. Dans l'exemple 2 les foyers  $(-1,0)$  et  $(1,0)$  sont des attracteurs fforts, le col  $(0,0)$  est un attracteur faible. La définition d'attracteur fort correspond bien à l'idée intuitive du départ.

### Exemple 3 (Attracteur de Feigenbaum)

Soit  $f$  une application de l'intervalle  $[0,1]$  en lui même

$$f(x) = \lambda x(1-x) \quad \lambda = 3.5700 \dots$$

Cette fonction quadratique a été étudiée par Ulam[Ula], Myrberg[Myr], Mira[Mir], May[May], Feigenbaum[Fei], Misiurewicz [Mis], pour mentionner seulement quelques contributions parmi les plus importantes. On peut étudier facilement sur cet exemple la transition vers le chaos, en augmentant  $\lambda$ . On observe une séquence de bifurcations, qui dédoublent la période des orbites périodiques.

Soit  $\lambda = 3.5700 \dots$  la plus petite valeur réelle positive pour laquelle on a une infinité d'orbites périodiques distinctes. Dans la suite nous appelons cette valeur point de transition vers le chaos et la fonction avec cette valeur pour  $\lambda$  *fonction de Feigenbaum*.

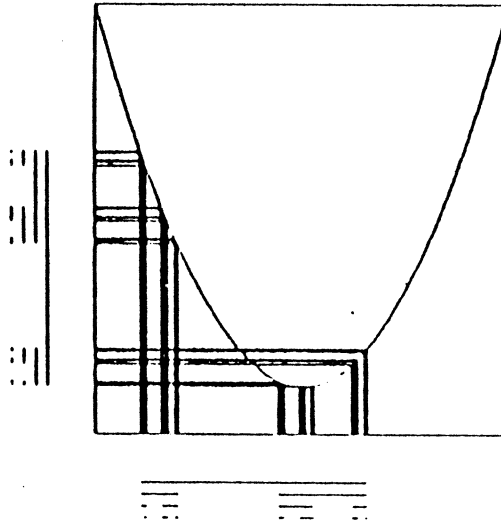


Fig. 2. The unique attractor for the map  $x \mapsto x^2 - 1.4011\dots$  on an appropriate interval is the indicated Cantor set

Ce dessin de l'attracteur de Feigenbaum est pris d'un article de Milnor [Mil]

La description suivante du comportement dynamique de cette application a été donnée par Misiurewicz (cité par Milnor[Mil]):

Pour presque tout point de départ  $x_0$ , la trajectoire admet comme ensemble limite un ensemble de Cantor  $A$ . Dans tout voisinage de  $A$  on trouve une infinité de points exceptionnels qui sont périodiques, les cycles périodiques auxquels ils appartiennent, sont instables.

$A$  est un attracteur fort au sens de Cosnard et Demongeot et un attracteur au sens de Guckenheimer. Selon la définition de Williams  $A$  n'est pas un attracteur, mais  $A$  est un attracteur selon la définition de Williams corrigée.  $A$  est appelé attracteur de Feigenbaum.

Une définition d'attracteur très originale a été proposée par Milnor:

**Définition :** (Milnor [Mil]) Soit  $\rho(A) = A \cup B(A)$  Un ensemble fermé  $A$  est un attracteur si

- (i)  $\rho(A)$  a une mesure non-nulle.
- (ii) Il n'existe pas de sous-ensemble fermé  $A' \subset A$ , tel que  $\rho(A')$  soit identique à  $\rho(A)$  sauf un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Propriétés de A :

- A est contenu dans le coeur de l'espace de phases X.
- La fermeture d'une union d'attracteurs quelconque est un attracteur.

Pour rapprocher la définition de l'idée intuitive d'attracteur, Milnor utilise la notion suivante.

Définition : A est un attracteur *minimal au sens de Milnor*, si A est un attracteur et si A n'a aucun sous-ensemble strict, qui est un attracteur.

Cette notion de minimalité n'est pas à confondre avec la notion d'un ensemble compact, invariant et minimal, introduite par Birkhoff et présentée dans paragraphe 1.3. .

Dans les exemples 1a, 1b et 1c (cycle limite attractant, attractant d'un côté, constitué de points fixes) le cercle unité est le seul attracteur, donc un attracteur minimal. Dans l'exemple 2 les foyers  $(-1,0)$  et  $(1,0)$  sont des attracteurs minimaux, l'intervalle  $[-1,1]$  n'est pas un attracteur. Dans l'exemple 3 (attracteur de Feigenbaum) l'ensemble cantorien A est l'unique attracteur.

Un attracteur minimal n'existe pas toujours. Dans l'exemple 1d (cercle constitué de points fixes limites) et exemple 1e (cercle constitué de points fixes limites pour des trajectoires venant de l'extérieur) tout segment du cercle unité est un attracteur, il n'existe aucun attracteur minimal.

Les définitions de Milnor et de Guckenheimer se ressemblent dans leurs propriétés, du point de vue des exemples présentés. Les deux sont différentes de la définition de Cosnard et Demongeot en ce qui concerne les exemple 1d et 1e. Dans cette thèse nous comprenons sous un attracteur un attracteur fort dans le sens de Cosnard et Demongeot.

1.2. Relations entre les différentes définitions d'attracteur

Pour systématiser la comparaison, nous traitons la condition sur le bassin d'attraction à part. Dans les définitions d'attracteur cités dans ce chapitre, on trouve quatre conditions différentes sur le bassin d'attraction (tous auteurs confondus).

- 0) Aucune condition sur l'existence du bassin d'attraction (définition de Ruelle).
- 1) Un bassin d'attraction, éventuellement de mesure nulle, existe. (définition d'attracteur faible de Cosnard et Demongeot)
- 2) Le bassin d'attraction doit avoir mesure positive. (définitions de Guckenheimer et Holmes, de Milnor, attracteur fort au sens de Cosnard et Demongeot).
- 3) Le bassin d'attraction inclut un voisinage de l'attracteur. (définition de Williams, attracteur ffort au sens de Cosnard et Demongeot)

Condition 3  $\Rightarrow$  condition2  $\Rightarrow$  condition1  $\Rightarrow$  "aucune condition"

Nous avons vu, qu'on peut changer la condition sur le bassin d'attraction dans une définition donnée. Pour comparer les définitions nous considérons deux définitions d'attracteur qui sont différentes seulement dans leur condition sur le bassin d'attraction, comme équivalentes.

Dans ce sens les définitions de Ruelle et de Guckenheimer et Holmes sont équivalentes.

**Attention :** Les propriétés d'une définition d'attracteur ne restent pas toujours préservées, si on change la condition sur le bassin d'attraction. Par exemple selon la définition de Williams dans l'exemple 1d)(cercle constitué de points fixes limites) le cercle unité est un attracteur, mais aucun sous-ensemble du cercle unité n'est attracteur. Mais selon la version corrigée de cette définition tout segment fermé du cercle unité est aussi un attracteur, parce qu'on ne pose pas la condition que le bassin d'attraction comporte le voisinage entier.

Nous présentons maintenant un exemple, introduit par Cosnard et Demongeot, qui est technique, mais très utile pour montrer certaines différences entre les définitions d'attracteur.

**Exemple 4** (voir (figure 10))

Soit  $X = [0,1] \times [0,2]$

$$x' = 0$$

$$y' = x(1-x) \cdot g(y)$$

où  $g(y) = (y^{-1} - [y^{-1}]) ([y^{-1}] - y^{-1} + 1)$   
 $[y]$  dénote la partie entière de  $y$ .

La partie de l'espace de phases laissée invariante par l'opérateur  $\omega \circ B_S$  est

$$\text{Attr}_{CD} = \{ (x,y) \mid x \neq 0, y = 1/m, m \in \mathbb{N} \}$$

Le coeur de  $X$  est

$$C(X) = \text{Attr}_{CD} \cup \{ (x,y) \mid x=0 \text{ ou } y=0 \}$$

Le coeur entier est  $c$ -connexe. Donc  $\text{Attr}_{CD}$  est un attracteur faible. Le bassin de  $\text{Attr}_{CD}$  comporte tous les points transitoires de  $X$ , et est donc identique à  $X \setminus C(X)$ . Donc  $\text{Attr}_{CD}$  est aussi un attracteur fort, mais n'est pas un attracteur ffort, parce que la fermeture de  $\text{Attr}_{CD}$  contient des points de  $C(X)$ , qui ne sont pas éléments du bassin d'attraction.



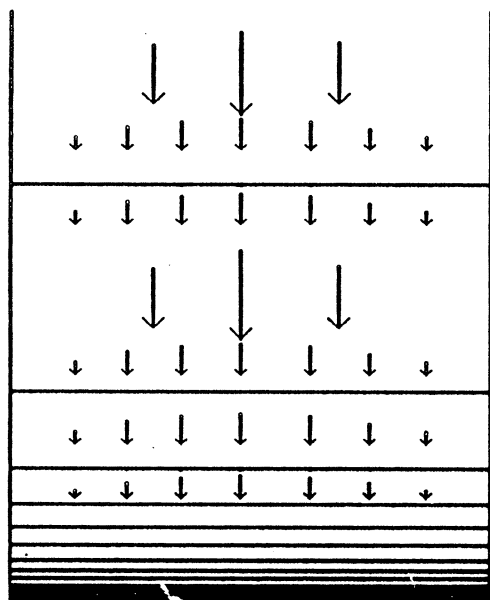


Figure 10

Remarque : Un attracteur selon la définition de Cosnard et Demongeot n'est donc pas toujours fermé.

Pour la comparaison entre les définitions d'attracteur on utilise les abréviations suivantes:

$\Lambda_{Wil}$  = Attracteur selon la définition de Williams

$\Lambda_{GH}$  = Attracteur selon la définition de Guckenheimer et Holmes

$\Lambda_{CD}$  = Attracteur selon la définition de Cosnard et Demongeot

$\Lambda_{Mil}$  = Attracteur selon la définition de Milnor

$\Lambda_{Wil} \Rightarrow \Lambda_{CD}$  veut dire que un attracteur selon la définition de Williams est toujours un attracteur selon la définition de Cosnard et Demongeot.

Proposition :

- i)  $\Lambda_{Wil} \not\Rightarrow \Lambda_{GH}$  ,  $\Lambda_{Wil} \not\Rightarrow \Lambda_{CD}$  ,  $\Lambda_{Wil} \not\Rightarrow \Lambda_{Mil}$
- ii)  $\Lambda_{CD} \not\Rightarrow \Lambda_{GH}$  ,  $\Lambda_{CD} \not\Rightarrow \Lambda_{Mil}$  ,  $\Lambda_{CD} \not\Rightarrow \Lambda_{Wil}$
- iii)  $\Lambda_{GH} \not\Rightarrow \Lambda_{CD}$  ,  $\Lambda_{GH} \not\Rightarrow \Lambda_{Wil}$  ,  $\Lambda_{GH} \not\Rightarrow \Lambda_{Mil}$
- iv)  $\Lambda_{Mil} \not\Rightarrow \Lambda_{Wil}$  ,  $\Lambda_{Mil} \not\Rightarrow \Lambda_{CD}$  ,  $\Lambda_{Mil} \not\Rightarrow \Lambda_{GH}$

Démonstration : Par contre-exemple:

i) Dans l'exemple 4 l'ensemble des points fixes  $C(X)$  est  $A_{Wil}$  mais n'est pas  $A_{CD}$ , comme nous avons vu ci-dessus.  $C(X)$  n'est pas  $A_{Mil}$  parce que l'ensemble  $Attr_{Mil} = \{ (x,y) \mid y=0 \text{ ou } y=1/m \text{ } m \in \mathbb{N} \}$  a le même bassin d'attraction que  $C(X)$ , est contenu dans  $C(X)$  et est aussi invariant et fermé.  $Attr_{Mil}$  est attracteur selon la définition de Milnor.

Toujours dans l'exemple 4,  $Attr_{CD}$  est un attracteur au sens de Williams, il n'est pas dit dans la définition de Williams qu'un attracteur doit être fermé. Mais  $Attr_{CD}$  n'est pas un attracteur au sens de Guckenheimer et Holmes.

ii) Dans l'exemple 4  $Attr_{CD}$  n'est ni  $A_{GH}$  ni  $A_{Mil}$ , parce que  $Attr_{CD}$  n'est pas fermé.

Pour montrer  $A_{CD} \not\Rightarrow A_{Wil}$  il nous faut un nouvel exemple:

Exemple 5: Oscillateur harmonique (= pendule )

Soit  $X = \mathbb{R} * [-1,1]$ . Soit l'angle  $\theta$  la première coordonnée et sa dérivée  $\theta'$  la deuxième coordonnée.

On considère le cas où le pendule a juste assez d'énergie pour atteindre la position de l'énergie potentielle maximale, c'est donc un point d'équilibre instable.

L'équation de ce système est

$$\theta'' = \sin \theta$$

avec l'énergie tel que

$$\theta' = 1 - \cos \theta$$

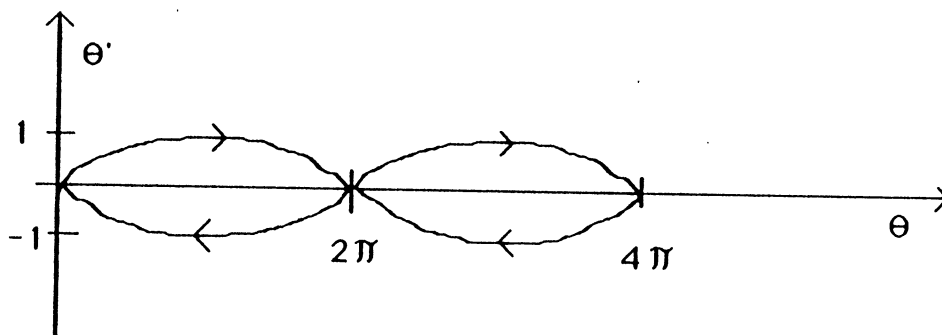


Figure 11 : Diagramme des phases de l'oscillateur harmonique

L'ensemble  $A = \{ (\theta, \theta') \mid \theta = 0 \text{ mod } 2\pi, \theta' = 0 \}$  est un attracteur faible au sens de Cosnard et Demongeot. Mais  $A$  n'est pas indécomposable: chaque point de l'ensemble est invariant et fermé et est pour lui seul un attracteur au sens de

Williams.

iii) Dans l'exemple 4  $C(X)$  est un attracteur au sens de Guckenheimer et Holmes. Mais comme nous avons vu,  $C(X)$  n'est ni  $A_{CD}$  ni  $A_{Mil}$ .

Dans l'exemple 1d (cercle constitué de points fixes limites) l'union de deux segments fermés, disjoints est un attracteur au sens de Guckenheimer et Holmes mais décomposable au sens de Williams et donc n'est pas  $A_{Wil}$ .

iv) Dans l'exemple 1d l'union de deux segments fermés, disjoints est un attracteur au sens de Milnor, mais n'est pas  $A_{Wil}$  comme nous avons vu ci-dessus, et n'est pas non plus  $A_{CD}$ .

Il est facile de trouver des exemples d'attracteurs au sens de Milnor, qui ne sont pas c-connexes et donc ne sont pas  $A_{GH}$ .

Soit  $X = \mathbb{R}$

$$x' = \begin{cases} (1-x)x & \text{si } x > 0 \\ (x+1)x & \text{sinon} \end{cases}$$

Les deux points fixes -1 et 1 sont stables. L'union des points fixes est  $A_{Mil}$  mais n'est pas  $A_{GH}$ .

Conjecture : Un attracteur au sens de Milnor, qui est minimal au sens de Milnor, est toujours  $A_{GH}$

### 1.3. Définition d'un Attracteur régulier

La notion d'attracteur régulier a été introduite par Birkhoff pour classer les systèmes dynamiques selon ordre ou absence d'ordre de leur comportement. Comme le nom suggère, la régularité limite l'imprévisibilité de l'évolution d'un système dynamique. En particulier tous les systèmes périodiques ou quasipériodiques ont des attracteurs réguliers. On pourrait définir le chaos comme l'absence de régularité d'un attracteur.

Définition : Un sous-ensemble compact et invariant de  $X$  est minimal s'il ne contient aucun sous-ensemble compact et invariant.

Théorème : (Birkhoff[Bir], rapporté dans Nemyskii et Stepanov[NS]):

$\omega(x)$  est minimal, si et seulement si  $f(x, T^+)$  approche  $\omega(x)$  uniformément, c'est à dire, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0, \forall t \in T^+ \quad \forall y \in \omega(x) \\ \exists t' \quad t-T \leq t' \leq t+T \quad \text{tel que } d(y, f(x, t')) < \varepsilon$$

**Définition :**  $A$  est un *attracteur régulier* si  $A$  est un attracteur minimal.

Notons que l'attracteur des itérations chaotiques contient un ensemble de points non-périodiques, dense dans l'attracteur, mais une infinité de cycles périodiques est contenue dans sa fermeture [Mis]. Yorke définit le chaos par cette propriété même [LY]. Donc un attracteur chaotique en général n'est pas un attracteur régulier.



## Chapitre 2

### Caracteriser L'Attracteur par une Mesure



## 2. CARACTERISER L'ATTRACTEUR PAR UNE MESURE

Pour caractériser la dynamique d'un flot d'un système dynamique, il convient d'introduire une mesure de la répartition du temps de séjour d'une trajectoire dans l'espace des phases. On suppose que la dimension de l'espace des phases est finie.

### 2.0 Eléments de base de la théorie de la mesure

On rappelle ces définitions qui se trouvent dans tout livre de la théorie de mesures, par exemple voir Halmos [Hal] .

#### Tribu et tribu héréditaire

Une fonction d'ensembles est une fonction qui est définie sur une classe d'ensembles. Une fonction d'ensembles réelle  $\mu$  sur une classe d'ensembles  $\mathcal{C}$  est dénombrable additive si pour toute suite  $\{E_n\}$  disjointe d'ensembles de  $\mathcal{C}$ , dont l'union est contenue dans  $\mathcal{C}$  :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)$$

dénombrable subadditive si pour toute suite  $\{E_n\}$  d'ensembles de  $\mathcal{C}$ , dont l'union est contenue dans  $\mathcal{C}$  :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)$$

Un *anneau* est une classe non vide d'ensembles  $\mathcal{A}$  tels que

si  $E \in \mathcal{A}$ ,  $F \in \mathcal{A}$  alors  $E \cup F \in \mathcal{A}$  et  $E - F \in \mathcal{A}$

Un anneau  $\mathcal{H}$  est *héréditaire* si

si  $E \in \mathcal{H}$  et  $F \subseteq E$  alors  $F \in \mathcal{H}$

Une *tribu*  $\mathcal{C}$  est un anneau, qui contient toute union dénombrable de ces éléments, et le complément de chacun de ses éléments.

#### La tribu de Borel

L'ensemble des ouverts  $\mathcal{O}$  contenus dans  $\mathbb{R}^n$  n'est pas un anneau, parce que la différence de deux ouverts en général n'est pas un ouvert. Si on élargit la classe des



ouverts de  $\mathbb{R}^n$  par leurs différences et l'union finie de ces différences, on obtient un anneau, la tribu de Borel  $\mathfrak{B}$  de  $\mathbb{R}^n$ . En particulier  $\mathfrak{B}$  contient tout sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^n$ .

### Mesure et mesure extérieure

Une mesure extérieure est une fonction d'ensembles réelle  $\mu^*$ , définie sur une tribu héréditaire  $\mathfrak{H}$ , qui est nonnégative, monotone, dénombrable subadditive et satisfait  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .

Une mesure est une fonction d'ensembles réelle  $\mu$ , définie sur une tribu  $\mathfrak{C}$ , qui est nonnégative, dénombrable additive et satisfait  $\mu(\emptyset) = 0$ .

#### 2.1. La mesure ergodique (voir [Bil])

Soit  $\mu$  une mesure quelconque sur une tribu de l'espace des phases. On suppose dans la suite que  $\mu$  est définie sur la tribu des boréliens.

Définition : La mesure  $\mu$  est *ergodique* si

(i) elle est invariante par rapport au flot  $f$ , c'est à dire

$$\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$$

(ii) elle ne contient aucun ensemble invariant non-trivial, c'est à dire

$$\text{il n'existe aucun } A \text{ tel que } 0 < \mu(A) < 1 \text{ et } A = f^{-1}(A)$$

On appelle la condition (ii) condition d'*ergodicité*. En général peuvent exister plusieurs mesures ergodiques par rapport au même flot. Par exemple la fonction de Feigenbaum (voir paragraphe 1.1.) a une infinité de cycles périodiques de longueur finie. Si on choisit un de ces cycles, de longueur  $N$  et si on donne à chaque point de ce cycle le poids  $1/N$ , on a défini une mesure ergodique.

Les systèmes dynamiques n'ont pas tous des mesures ergodiques convenables. Par exemple le cercle limite, constitué de points fixes (exemple 1c du chapitre précédent) a comme seule mesure ergodique toute mesure qui est concentrée sur un des points fixes. La distribution uniforme sur le cercle n'est pas ergodique.

Revenons à la fonction de Feigenbaum. La mesure ergodique qui nous intéresse est celle qui a l'attracteur comme support. Cette mesure existe et elle est construite comme suit:

$\mu[0,1] = 1$ . L'intervalle de base se divise en deux intervalles, chacun des intervalles se divise en deux intervalles e.t.c. . Soit  $I$  un intervalle obtenu après  $i$  divisions, alors

$$\mu(I) = 2^{-i}.$$

En considérant le comportement dynamique de  $f$  (voir [Mis]), on peut montrer, que  $\mu$  est ergodique.  $\mu$  satisfait même une propriété plus forte que l'ergodicité, elle est *mélangeante*, c'est à dire que pour tout paire d'ensembles boréliens  $A$  et  $B$  on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap f^{-n}(B)) = \mu(A) \mu(B)$$

Est-ce que la répartition du temps de séjour d'une trajectoire va converger vers la mesure ergodique de son attracteur ? Le théorème ergodique qui suit répond à cette question, si le point de départ de la trajectoire est sur l'attracteur.

**Définition:** Soit  $B \subset X$  un ensemble borélien. Soit  $x \in X$  le point de départ de la trajectoire  $f(x, T)$ .

La *moyenne du temps de séjour* de la trajectoire jusqu'à l'instant  $t$  est :

$$\nu_{x,t}(B) = 1/t \ m\{ t' \leq t \mid f(x, t') \in B \}$$

où  $m$  est la mesure de Lebesgue.

$\nu_{x,t}$  est toujours bien définie. C'est évident dans le cas d'un système à temps discret.

Dans le cas d'un système à temps continu on remarque que  $\{ t' \leq t \mid f(x, t') \in B \}$  est un ensemble borélien, donc la mesure de Lebesgue est définie.

**Théorème :** (théorème ergodique de Birkhoff)

Soit  $\mu$  une mesure ergodique, dont  $A \subset X$  est le support. Pour  $\mu$ -presque tout point de départ la moyenne du temps de séjour de la trajectoire converge vers  $\mu$ . C'est à dire, pour tout ensemble  $B$  mesurable et pour  $\mu$ -presque tout  $x \in A$  on a

$$\mu(B) = \lim_{t \rightarrow \infty} \nu_{x,t}(B)$$

Que se passe-t-il si le point de départ  $x$  n'est pas sur l'attracteur, mais seulement dans son bassin d'attraction ? Est-ce que la moyenne du temps de séjour de la trajectoire va toujours converger vers la mesure ergodique de l'attracteur ? Cette question nous intéresse le plus parce qu'en général on ne dispose pas d'une description géométrique de l'attracteur et par conséquent on n'a pas un point de départ d'une trajectoire sur l'attracteur. Dans le cas d'un cycle limite composé de points fixes, la mesure ergodique est concentrée sur un point fixe. Par conséquent, en général

$\nu_{x,t}(B)$  ne converge pas vers cette mesure. Pour la plupart des cas chaotiques on ne connaît pas la réponse. Mais dans certains cas, comme des attracteurs de Asonov ou des attracteurs Axiom A de Smale, une réponse affirmative a été donnée :

Dans ces cas on peut définir une mesure  $\rho$ , la mesure de Sinai-Bowen-Ruelle. Il existe alors un sous-ensemble du bassin d'attraction de mesure de Lebesgue strictement positive, tel que pour un point de départ donné  $x$  de cet ensemble, la fonction  $\nu_{x,t}$  tend vers  $\rho$ . Pour le lecteur intéressé nous renvoyons au paragraphe correspondant de l'article de revue de Eckmann et Ruelle [ER] et à ses références.

## 2.2. La mesure d'une trajectoire partant hors de l'attracteur

On est alors souvent contraint à caractériser la mesure d'un attracteur par une ou plusieurs trajectoires, qui partent dans son bassin d'attraction. En général la mesure dépend du point de départ de la trajectoire, nous allons donc définir la mesure de temps de séjour relative à une trajectoire précise.

### 2.2.1. La mesure naturelle

Pour caractériser la répartition du temps de séjour d'une trajectoire dans l'espace de phases, la définition suivante semble simple et naturelle:

**Définition :** Soit  $\mathcal{B}$  la tribu des boréliens de  $X$ , soit  $B \in \mathcal{B}$

$$\mu_x(B) = \lim_{t \rightarrow \infty} \nu_{x,t}(B)$$

Nous appellerons  $\mu_x$  la *mesure "naturelle"*.

Cette définition a été proposée par Yorke [Far]. Les propriétés mathématiques de cette fonction n'ont à notre connaissance jamais été examinés. Nous allons combler cette lacune dans la suite et montrer en particulier, que cette fonction en général n'est pas une mesure. Nous maintenons quand même le nom "mesure naturelle" pour cette fonction.

Si le point de départ de la trajectoire est extérieur à l'attracteur,  $\mu_x$  en général n'est pas définie sur la tribu borélienne.

Contre-exemple :

Soit  $X = \mathbb{R}^2$  et  $F$  en coordonnées polaires

$$r' = -r$$

$$\theta' = 1$$

Soit le point de départ  $(r_0, \theta_0)$ ,  $r_0 > 1$ ,  $\theta_0 = 0$

L'origine est un point fixe et est l'attracteur du système. C'est l'attracteur le plus simple qu'on puisse imaginer. On intègre la trajectoire

$$r_t = r_0 e^{-t}$$

$$\theta_t = t$$

Maintenant nous allons définir un ensemble borélien  $B$  pour lequel  $\mu_x$  n'est pas définie. Soient  $A_k$  des anneaux autour de l'origine.

$$A_k = \{ (r, \theta) \mid e^{-2^{k+1}} < r < e^{-2^k} \}$$

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

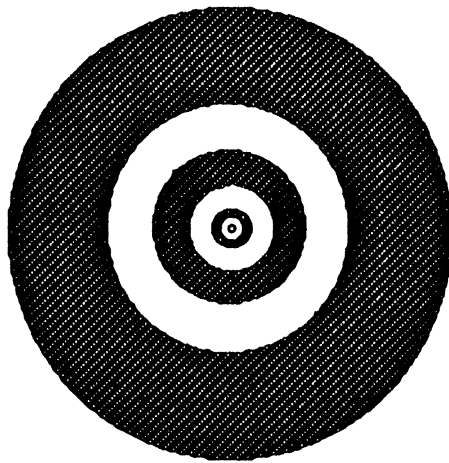


Figure 1 L'ensemble B

La limite supérieure et la limite inférieure de la moyenne de temps de séjour de la trajectoire dans  $B$  sont

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \nu_{x,t}(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{x, \theta^{-2^{k+1}}}(B) = \frac{2}{3}$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \nu_{x,t}(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{x, e^{-2^k}}(B) = \frac{1}{3}$$

Donc  $\mu_x$  n'est pas définie sur l'ensemble borélien B.

Il est possible de généraliser ce contre-exemple pour des cycles attractifs, des tores et probablement aussi pour des attracteur chaotiques. Cependant, pour cet exemple,  $\mu_x$  est définie pour toute boule ou boîte ouverte ou fermée, donc  $\mu_x$  est une fonction d'ensembles non-triviale.

$\mu_x$  est une fonction réelle d'ensembles avec les propriétés suivantes.

Proposition 1:

i) -  $\mu_x(X) = 1$

-  $\mu_x(\emptyset) = 0$

-  $\mu_x$  est non-négative

-  $\mu_x$  est monotone. C'est à dire ,si pour  $A, B \subset X$  tel que  $A \subset B$   $\mu(A)$  et  $\mu(B)$  sont définies ,alors  $\mu(A) \leq \mu(B)$

ii)  $\mu_x$  est f-invariante. C'est à dire

dans le cas d'un système discret, si  $\mu_x(E)$  est définie, alors  $\mu_x(f^{-1}(E))$  est aussi définie et  $\mu_x(E) = \mu_x(f^{-1}(E))$

dans le cas d'un système continu, si  $\mu_x(E)$  est définie, alors  $\forall t > 0$   $\mu_x(f^{-t}(E))$  est aussi définie et  $\mu_x(E) = \mu_x(f^{-t}(E))$

On rappelle que la f-invariance d'une mesure est une des deux conditions, pour que une mesure soit ergodique.

iii)  $\mu_x$  est additive . C'est à dire ,si pour  $A, B \subset X$  tel que  $A \cap B = \emptyset$   $\mu_x(A)$  et  $\mu_x(B)$  sont définies ,alors  $\mu_x(A \cup B)$  est aussi définie et  $\mu_x(A \cup B) = \mu_x(A) + \mu_x(B)$

Démonstration :

i) la démonstration est immédiate.

ii) cas d'un système continu:

On voit facilement, que pour tout  $E \subset X, t > 0$

$$v_{x,t-\tau}(f(E,-\tau)) + t \geq v_{x,t}(E) \geq v_{x,t-\tau}(f(E,-t))$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) v_{x,t-\tau}(f(E,-\tau)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) v_{x,t}(E)$$

d'où on obtient l'affirmation . La démonstration dans le cas d'un système discret est analogue et donc  $\mu_x$  est f-invariante.

iii)

$$\begin{aligned} \mu_x(A) + \mu_x(B) &= \lim_{t \rightarrow \infty} v_{x,t}(A) + \lim_{t \rightarrow \infty} v_{x,t}(B) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} ( m \{ t' \leq t \mid f(x,t') \in A \} + m \{ t' \leq t \mid f(x,t') \in B \} ) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} m \{ t' \leq t \mid f(x,t') \in A \cup B \} = \lim_{t \rightarrow \infty} v_{x,t}(A \cup B) \\ &= \mu_x(A \cup B) \end{aligned}$$

Attention :  $\mu_x$  en général n'est pas dénombrable additive et n'est même pas dénombrable subadditive.

Contre-exemple : Soit le système dynamique celui du contre-exemple ci-dessus.

On pose

$$\bar{A}_k = \{ (r,\theta) \mid e^{-2k+1} < r \leq e^{-2k} \}$$

$$\bar{B} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k$$

On a  $\forall k \mu_x(\bar{A}_k) = 0$  mais  $\mu_x(\bar{B}) = 1/2$ .

Commentaires :

1) Même pour des ensembles simples comme une boule ou une boîte  $\mu_x^*$  n'est pas définie pour tout système dynamique. Nous verrons un contre-exemple dans le

paragraphe 2.4. .

2) Supposons donnée une trajectoire, qui tend vers l'attracteur sans l'atteindre. La mesure de l'attracteur est nulle dans ce cas. Cette propriété contredit l'idée intuitive d'une mesure caractérisant un attracteur. Cependant dans le cadre de cette thèse cette contradiction ne se révèle pas gênante.

### 2.2.2. La mesure de Takens

**Définition :** Soit  $\mathcal{H}$  la classe de tous les sous-ensembles de  $X$ ,  $\mathcal{H}$  est une tribu héréditaire. Soit  $x \in X$  et  $E \in \mathcal{H}$  .

$$\mu_x^*(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \nu_{x,t}(V_\varepsilon(E)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_x(V_\varepsilon(E))$$

est la *mesure de Takens* .

Cette définition a été proposée par Takens [Tak2]. Takens n'a pas examiné les propriétés de cette fonction, qu'il appelle une mesure. Dans la suite nous allons combler cette lacune.

La mesure de Takens n'est pas une mesure sur la tribu borélienne et même pas une mesure extérieure, bien qu'on serait tenté de le croire.

Remarquons tout de suite que la limite  $\mu_x^*$  n'est pas toujours définie. Nous présentons des contre-exemples dans le paragraphe 2.4.

#### Etude des propriétés de la mesure de Takens

On voit immédiatement que  $\mu_x^*$  est une fonction d'ensembles sur  $\mathcal{H}$ , non-négative,

$\mu_x^*(\emptyset) = 0$  et  $\mu_x^*$  est monotone.

Mais  $\mu_x^*$  n'est pas dénombrable subadditive.

**Contre-exemple :** Contre la subadditivité dénombrable de la mesure de Takens.

On choisit le même exemple qui montre que la mesure naturelle n'est pas subadditive.

Soit  $X = \mathbb{R}^2$  et  $F$  en coordonnées polaires

$$r' = -r$$

$$\theta' = 1$$

$$\bar{A}_k = \{ (r, \theta) \mid e^{-2k+1} < r \leq e^{-2k} \}$$

$$\bar{B} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k$$

On a  $\forall k \mu_X^*(\bar{A}_k) = 0$  mais  $\mu_X^*(\bar{B}) = 1$ .

Ci-dessous un autre exemple, qui montre que  $\mu_X^*$  n'est pas une mesure sur la tribu borélienne de  $\mathbb{R}^n$ .

Contre-exemple :  $\mathbb{Q}^n$  et  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$  sont des ensembles boréliens disjoints, dont tout  $\varepsilon$ -voisinage remplit  $\mathbb{R}^n$ . Donc  $\mu_X^*(\mathbb{Q}^n) + \mu_X^*(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n) = 2 > \mu_X^*(\mathbb{R}^n) = 1$ . Alors  $\mu_X^*$  n'est pas additive.

Proposition 2: (sur les propriétés élémentaires de la mesure extérieure de Takens)

i)  $\mu_X^*(X) = 1$

ii) Pour tout  $E \subset X$  si  $\mu_X^*(E)$  existe, alors

$$\mu_X^*(\bar{E}) = \mu_X^*(E) \quad \text{où } \bar{E} \text{ dénote la fermeture de } E$$

iii)  $\mu_X^*$  est  $f$ -invariante.

Démonstration: i) est immédiate

ii)  $V_\varepsilon(\bar{E}) = V_\varepsilon(E)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , d'où suit le reste.

iii) On remarque que  $\forall \varepsilon > 0 \exists k > 1$  tel que

$$V_{k\varepsilon}(f^{-1}(E)) \supset f^{-1}(V_\varepsilon(E)) \supset V_{\varepsilon/k}(f^{-1}(E)).$$

Le reste de la démonstration est analogue à la démonstration de l'invariance de la mesure naturelle.

Nous donnons maintenant des inégalités entre la mesure extérieure de Takens et la mesure naturelle.

Proposition 3: Soit  $B \subset X$  un ensemble borélien. On suppose que  $\mu_X(B)$ ,  $\mu_X^*(B)$  et  $V_\varepsilon(B)$  sont définies. Alors



- i)  $\mu_x^*(B) \geq \mu_x(B)$   
 ii)  $\mu_x(V_\varepsilon(B)) \geq \mu_x^*(B)$

Démonstration:

$v_{x,t}(V_\varepsilon(B)) \geq v_{x,t}(B)$  donc  
 $\lim_{t \rightarrow \infty} v_{x,t}(V_\varepsilon(B)) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} v_{x,t}(V_\varepsilon(B)) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} v_{x,t}(B)$   
 ce qu'il fallait démontrer.

La proposition et le lemme suivant disent que la mesure extérieure de Takens est concentrée et est définie sur l'ensemble limite de la trajectoire. Tout ensemble, qui est à une distance positive de l'ensemble limite est de mesure nulle. Ensuite nous présentons un corollaire concernant la mesure naturelle.

Lemme:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu_x^*(C(V_\varepsilon(\omega(x)))) = 0$$

Démonstration: (Par l'absurde)

On suppose que  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $\mu_x^*(C(V_\varepsilon(\omega(x)))) > 0$ . On couvre  $C(V_\varepsilon(\omega(x)))$  par un ensemble dénombrable  $\mathfrak{B}$  d'ouverts bornés  $B$  tel que

$$\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B \cap V_{\varepsilon/2}(\omega(x)) = \emptyset$$

Il existe au moins un ouvert  $B$  avec  $\mu_x^*(B) > 0$ . Cet ouvert contient au moins un point élément de  $\omega(x)$ , ce qui est une contradiction.

Proposition 4:

- i)  $\mu_x^*(\omega(x)) = 1$   
 ii) Pour tout fermé  $F \subset X$  tel que  $F \cap \omega(x) = \emptyset$   
 $\mu_x^*(F) = 0$

Démonstration :

i) Par subadditivité  $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu_x^*(V_\varepsilon(\omega(x))) + \mu_x^*(C(V_\varepsilon(\omega(x)))) \geq 1$ . Par le lemme ci-dessus on en déduit  $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu_x^*(V_\varepsilon(\omega(x))) = 1$  et donc  $\mu_x^*(\omega(x)) = 1$

ii) On montre d'abord que, si  $F \cap \omega(x) = \emptyset$ , alors  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $V_\varepsilon(F) \cap \omega(x) = \emptyset$ .

On suppose le contraire :  $\forall \varepsilon > 0 \quad V_\varepsilon(F) \cap \omega(x) \neq \emptyset$ . Soit  $\{\varepsilon_n\}$  une suite de nombres réels positifs tel que pour  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  il existe une suite de points  $\{y_n\}$ ,  $y_n \rightarrow y$  tels que  $\forall n \quad y_n \in V_{\varepsilon(n)}(F)$  et  $y_n \in \omega(x)$ . Comme  $F$  fermé  $y \in F$  et comme  $\omega(x)$  est compact  $y \in \omega(x)$  ce qui est contradictoire.

Donc  $F \subset C(V_\varepsilon(\omega(x)))$  et par le lemme ci-dessus  $\mu_x^*(F) = 0$ .

Corollaire : (sur les propriétés de la mesure naturelle)

i)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu_x(C(V_\varepsilon(\omega(x)))) = 0$

ii) Pour tout fermé  $F \subset X$  tel que  $F \cap \omega(x) = \emptyset$   
 $\mu_x(F) = 0$

Démonstration :

i) est corollaire du lemme et de proposition 3

ii) est corollaire de proposition 4 et de proposition 3.

On aimerait avoir une proposition du genre "tout ensemble ouvert qui a une intersection non vide avec l'ensemble limite de la trajectoire, a une mesure positive." Mais nous avons trouvé un contre-exemple

Contre-exemple :

L'idée est de considérer un mouvement brownien d'une variable partant de l'origine. La variable repasse une infinité de fois dans tout voisinage de l'origine, mais de plus en plus rarement, si bien que la mesure de toute boule autour de l'origine tend vers zéro. Le hasard du mouvement brownien est remplacé par un pseudo-hasard, c'est à dire une application déterministe.

Le système dynamique suivant a le comportement décrit ci-dessus.

$$X = \mathbb{R} \times [0,1], \quad x_0 = 0 \quad y_0 \in [0,1]$$

$$x_{n+1} = x_n + (y_n - 0.5)$$

$$y_{n+1} = 2y_n \text{ mod } 1$$

La variable  $y$  génère le pseudo-hasard.

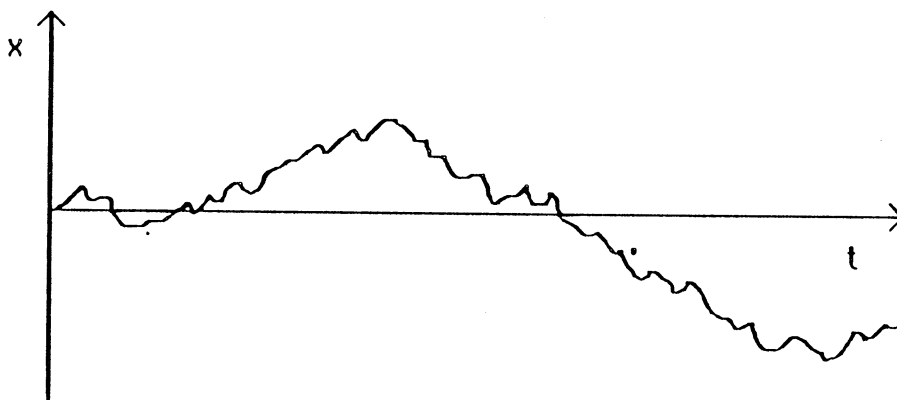


Figure 2 Mouvement Brownien

Pour presque tout point de départ  $\omega(x) = X$ .

Soit  $\mu_x$  la mesure naturelle ou la mesure de Takens. On peut alors montrer, que pour presque tout  $y_0$  et pour toute partie bornée de l'espace des phases de forme  $I = [-a,b] \times [0,1]$   $a,b \in \mathbb{R}^+$   $\mu_x(I) = 0$  et  $\mu_x(C(I)) = 1$ , bien que  $I$  soit contenu dans l'ensemble limite  $\omega(x)$ .

### 2.3. Conséquences de la condition d'approche uniforme

Si un système dynamique  $(X,T,f)$  possède un attracteur régulier, est-ce que pour  $E \subset X$  quelconque la limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} \nu_{x,t}(V_\epsilon(E))$  existe ?  $\mu_x^*$  serait alors bien définie

sur  $\mathcal{H}$  et serait une mesure extérieure. Nous le conjecturons, mais la question demeure ouverte. Toutefois nous avons démontré le résultat suivant :

**Proposition 5:** *S'il existe  $x$  tel que  $f(x,t)$  approche uniformément son ensemble limite  $\omega(x)$ , alors pour tout ouvert  $O \subset X$  tel que  $O \cap \omega(x) \neq \emptyset$  on a*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \nu_{x,t}(V_\epsilon(O)) > 0$$

Donc si  $\mu_x^*(O)$  existe, alors  $\mu_x^*(O) > 0$

et si  $\mu_x(O)$  existe, alors  $\mu_x(O) > 0$

**Démonstration:** Soit  $y \in O \cap \omega(x)$ . Alors  $\exists \varepsilon > 0$  tel que la boule centrée autour de  $y$   $B(y, 2\varepsilon) \subset O$ . On montre que cette boule a une mesure positive. Par approche uniforme il existe  $T > 0$  tel qu'il existe une suite de temps  $\{t_i\}$  croissante avec  $t_{i-1} - t_i < 2T$  et  $\forall t_i \quad f(x, t_i) \in B(y, \varepsilon)$ . Si la trajectoire a atteint  $B(y, \varepsilon)$ , elle passe un certain temps dans  $B(y, 2\varepsilon)$ . Soit  $f_{\max}$  la vitesse maximale sur  $V_{2\varepsilon}(\omega(x))$  ( $f_{\max}$  existe, car  $\omega(x)$  est compact et  $f$  est continue), alors le temps de séjour dans  $B(y, 2\varepsilon)$  est supérieur ou égal à  $2\varepsilon/f_{\max}$ . Divisons l'axe de temps en intervalles  $[2nT, 2(n+1)T]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dans chaque intervalle la trajectoire passe au moins le temps  $2\varepsilon/f_{\max}$  dans  $B(y, 2\varepsilon)$ . Par conséquent

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \nu_{x,t}(O) > \frac{2\varepsilon}{2f_{\max}} > 0$$

d'où suit immédiatement le reste.

#### 2.4. Exemples où la mesure naturelle et la mesure de Takens n'existent pas

Dans ce paragraphe on fera toutes les démonstrations avec la mesure extérieure de Takens. On peut aussi bien utiliser la mesure naturelle ou la mesure engendrée, les résultats ne changent pas.

La proportion du temps de séjour d'une trajectoire dans un ensemble donné n'admet pas toujours une limite. Lanford mentionne deux contre-exemples [Lan] que nous présentons maintenant.

Le premier est celui d'une trajectoire qui s'approche d'un *cercle* de l'extérieur, et fait le tour du cercle une infinité de fois sans jamais l'atteindre. Le cercle contient *deux points fixes* et à cause d'eux la trajectoire se ralentit de telle sorte qu'une mesure limite n'est pas admise.

Le deuxième est celui d'un *attracteur cantorien*. Chaque trajectoire est représentée par un nombre compris entre 0 et 1, écrit en chiffres binaires. Le premier chiffre indique si le point de départ est sur la partie droite ou gauche de l'intervalle  $[0, 1]$ . Chaque chiffre suivant indique, s'il est sur la gauche ou la droite de l'intervalle précédent. Les points suivants de la trajectoire sont obtenus par un décalage du nombre vers la gauche. Certains points de départ génèrent une trajectoire, où la probabilité de tomber sur un intervalle donné oscille avec le temps de telle sorte qu'une limite de cette probabilité n'est pas admise. L'ensemble de ces points de départ a mesure de Lebesgue nulle. Il a été démontré qu'il existe des systèmes dynamiques admettant des tels attracteurs ([Cos], voir la fin du paragraphe 3A.4).

Nous présentons ici un troisième contre-exemple. Cet exemple, dont l'idée est due à K. Lott, est très simple et offre l'avantage qu'on peut intégrer la trajectoire de façon analytique.

Exemple 1:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , en coordonnées polaires:

$$\begin{aligned} r' &= -(r-1) \\ \theta' &= \begin{cases} 1/\ln|r-1| & \text{si } r \neq 1 \\ 0 & \text{si } r=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Le cercle unité est, selon notre définition, l'unique attracteur du système, bien que tout point sur le cercle unité soit point fixe. Une trajectoire, qui part de l'extérieur du cercle, s'enroule autour du cercle, mais est fortement ralentie.

Soit  $x$  le point de départ de la trajectoire,  $1 < \|x\| < 2$ . On intègre la trajectoire : en substituant  $u := r-1$

$$\begin{aligned} u' &= -u \\ \theta' &= 1/\ln(u) \end{aligned}$$

Solution :

$$\begin{aligned} u_t &= u_0 e^{-t} \\ \theta_t &= \theta_0 + \int_0^t (\ln(u_0) + \ln(e^{-t'}))^{-1} dt' \end{aligned}$$

On pose  $c := -\ln(u_0)$  et on obtient

$$\theta_t = \theta_0 + \int_0^t -(c+t')^{-1} dt' = \theta_0 + \ln(t+c) - \ln(c)$$

Posant  $\theta_0 = 0$ ,  $c=1$  nous avons

$$\theta_t = \ln(t+c) - \ln c$$

On considère un morceau de tube  $B$  de diamètre  $\varepsilon$  et de longueur  $\delta$  autour du cercle unité  $B = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 1-\varepsilon < r < 1+\varepsilon \text{ et } 0 < \theta < \delta \}$ . Soit  $(r_0, \theta_0)$  le point de départ de la

trajectoire avec  $1 < r_0 < 1 + \varepsilon$ ,  $\theta_0 = 0$ . On obtient une suite de temps où la trajectoire entre dans B

$$\{ t_j \} = e^{2\pi j} + 1 \quad j=0,1,\dots$$

et une suite de temps où la trajectoire sort de B

$$\{ t_j + \Delta_j \} = e^\delta e^{2\pi j} + 1$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{v_t(B)}{t} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^j (e^\delta - 1) e^{2\pi k}}{e^\delta e^{2\pi j}} = \frac{e^\delta - 1}{e^\delta} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k} \right)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{v_t(B)}{t} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{j-1} (e^\delta - 1) e^{2\pi k}}{e^{2\pi j}} = (e^\delta - 1) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k}$$

Avec l'égalité

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k} = \frac{e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}}$$

et pour  $\delta$  proche de 0, on voit que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{v_t(B)}{t} \gg \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{v_t(B)}{t}$$

L'existence des points fixes sur un cercle limite n'implique pas la non-existence de la mesure. Cela est illustré par l'exemple suivant, qui a le même comportement qualitatif que le contre-exemple ci-dessus, avec la différence que la trajectoire est moins fortement ralentie en s'approchant du cercle.

Exemple 2 :  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , en coordonnées polaires; nous avons

$$\begin{aligned} r' &= -(r-1)^2 \quad \text{si } r \geq 1 \\ & \quad (r-1)^2 \quad \text{si } r < 1 \\ \theta' &= \pi \sqrt{|r-1|} \end{aligned}$$

Le cercle unité est l'unique attracteur. Tout point  $x$  du cercle unité est point fixe, donc  $\mu_x$  est concentrée sur  $x$ . Maintenant, calculons  $\mu_x$  pour  $x$  hors du cercle unité.

Pour faciliter le calcul on pose  $\theta_0 = 0$ .

Intégrons le système dynamique; en posant

$$u = r-1$$

le flot est noté

$$\begin{aligned} u' &= -u^2 \quad \text{si } r \geq 1 \\ & \quad u^2 \quad \text{si } r < 1 \\ \theta' &= \pi \sqrt{u} \end{aligned}$$

Pour un point de départ à l'extérieur du cercle ( $u_0 > 0$ ) on obtient comme solution

$$\begin{aligned} u_t &= u_0 / (u_0 t + 1) \\ \theta_t &= (2\pi / \sqrt{u_0}) (\sqrt{u_0 t + 1} - 1) \end{aligned}$$

Pour simplifier le calcul on fixe le point de départ  $(u_0, \theta_0) = (1, 0)$ . On a le même résultat pour tout autre point de départ. On considère

$$B = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 1, 0 \leq r \leq 2\pi\delta \}$$

La série des instants où la trajectoire entre dans B

$$\{ t_i' \} = \{ i^2 - 1 \} \quad i=1, 2, \dots$$

La série des instants où la trajectoire sort de B

$$\{ t_i' + \Delta_i \} = \{ (i+\delta)^2 - 1 \} \quad i=1, 2, \dots$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{v_t(B)}{t} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^k (2\delta i + \delta^2)}{(k+\delta)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2\delta \left(\frac{k}{2}\right) (k+1)}{k^2} = \delta$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_t(B)}{t} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} (2\delta i + \delta^2)}{k^2} = \delta$$

Alors  $\mu_x(B) = \delta$ . Contrairement à l'exemple 1,  $\mu_x(B)$  existe quel que soit  $x$ , bien que dans les deux cas l'attracteur soit un cercle constitué de points fixes.

Remarque : On peut obtenir le même résultat, sans que l'attracteur ait un point fixe. Il suffit de rajouter au système d'équations différentielles une troisième variable : L'attracteur est maintenant un tore.

Avec les coordonnées adaptées:  $x_1 = \cos\varphi (2+r \cos\theta)$ ,  $x_2 = \sin\varphi (2+r \cos\theta)$ ,

$x_3 = r \sin\theta$  on pose

$$\begin{aligned} r' &= -(r-0.5)^2 \text{ si } r \geq 1 \\ &= (r-0.5)^2 \text{ si } r < 1 \\ \theta' &= \pi \sqrt{r-0.5} \\ \psi' &= \pi \end{aligned}$$

Les point fixes sont remplacés par des cercles sur le tore. Le comportement du système reste essentiellement le même.

Rajouter des variables de cette façon à des systèmes dynamiques simples est un moyen très courant pour argumenter pour ou contredire des conjectures.

### Conclusion du chapitre :

Nous avons étudié deux fonctions d'ensembles, la mesure naturelle et la mesure de Takens, qui expriment la repartition du temps de séjour d'une seule trajectoire. Ces fonctions devraient être utiles si on ne sait pas si un attracteur avec une mesure ergodique invariante existe. Ces deux fonctions d'ensemble sont en général ni des mesures, ni des mesures extérieures. Cependant elles vérifient un ensemble de propriétés qui permettent de les utiliser dans les définitions des dimensions fractales: notamment la monotonie et la subadditivité.

La mesure naturelle a l'avantage d'être additive (mais non dénombrable additive). L'additivité sera utile dans un certain nombre des démonstrations du prochain chapitre.

Si la mesure invariante et ergodique ayant l'attracteur comme support existe, elle est sûrement la fonction qu'il faut utiliser pour la définition de ses dimensions fractales. Si l'attracteur n'est pas ergodique, la mesure invariante sur l'attracteur n'est pas



unique et cela peut poser des problèmes. Par exemple sur un cercle limite, constitué de points fixes on peut définir une mesure invariante continue ou discrète, et ainsi obtenir des dimensions fractales différentes.

Nous avons vu des exemples où aucune des deux fonctions, qui caractérisent le temps de séjour d'une trajectoire, n'est définie.

## Chapitre 3

### Certaines Définitions de la Dimension fractale et leurs propriétés



### 3. CERTAINES DEFINITIONS DE LA DIMENSION FRACTALE ET LEURS PROPRIETES

Plusieurs définitions de dimension fractale ont été proposées depuis le début de ce siècle. Certaines ont un intérêt purement théorique, pour une étude de ces définitions nous renvoyons à [Man], [KS],[Tri], [Fal] , d'autres sont plus faciles à calculer numériquement, et de ces dimensions on parlera dans ce chapitre.

Nous présentons brièvement la dimension de Hausdorff, qui est la plus connue parmi les dimensions fractales en mathématiques pures, puis nous présentons des dimensions qui sont actuellement calculées de façon numérique.

L'idée de dimension habituellement enseignée en mathématiques est proche de la dimension topologique. Cette dimension admet uniquement des valeurs entières. Un nombre fini de points est de dimension 0, un ensemble qui est isomorphe aux nombres réels est de dimension 1 , un ensemble isomorphe au plan est de dimension 2 e.t.c. .

Les définitions de dimension fractale partent toutes d'une idée d'ordre physique: Quelle est la loi de densité d'une boule autour d'un point de l'ensemble par rapport à son rayon? Considérons une ligne dont la mesure soit continue et dérivable. Pour un point sur cette ligne la densité de la boule autour de ce point est une fonction linéaire de son rayon. Pour un carré, la fonction est quadratique. Le terme "densité" peut être relié à une notion de volume ou de mesure et dépend de la définition.

L'ensemble de Cantor, que nous avons présenté dans l'introduction est ,dans ce sens, l'intermédiaire entre un ensemble de points fini et une ligne. Cet ensemble admet une dimension fractale non-entière.

#### 3.A DEFINITIONS ET EXEMPLES

Il existent deux sortes de définition de dimension fractale :

- Ceux, qui définissent la dimension d'un ensemble. Cet ensemble peut être un sous-ensemble d'un espace métrique quelconque, un attracteur ou non. Nous présentons la dimension de Hausdorff [Hau] et la dimension de capacité (voir [Man]) (paragraphe 3A.1.)
- Ceux, qui tiennent compte de la dynamique d'un système. Ce sont la dimension d'information [BR] et la dimension de corrélation [GP]. Habituellement on dit qu'on définit la dimension fractale d'un attracteur. Ce n'est pas précis, on montrera pourquoi.

Dans ce paragraphe nous présentons aussi des fonctions de dimension qui ont été introduites par Grassberger [Gra1], et Paladin et Vulpiani [PV].

Ensuite nous présentons un exemple pour lequel ces dimensions sont différentes et un autre exemple pour lequel toutes ces dimensions (à l'exception de la dimension de Hausdorff) ne sont pas définies.

Une étude des relations entre ces dimensions sera présentée dans chapitre 3B.

### 3.A1 Définitions ensemblistes

#### Dimension de Hausdorff

La définition d'une dimension non entière la plus connue et la plus utilisée théoriquement est la dimension de Hausdorff. Nous la présentons succinctement en renvoyant à Kahane et Salem [KS], et Billingsley [Bil] pour une étude plus complète.

Soit  $E$  un sous-ensemble de  $X$  (compact de  $\mathbb{R}^n$ ). Un recouvrement de  $E$  est une collection de boules dont l'union est  $E$ . Le diamètre du recouvrement  $S$  de  $E$  est le diamètre maximum des boules de  $S$ . Pour  $d$  et  $\varepsilon$  positifs, définissons:

$$\alpha(d, \varepsilon) = \inf_S \sum_{s \in S} (\text{diam } s)^d$$

$\text{diam}(S) \leq \varepsilon$

et

$$\alpha(d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(d, \varepsilon)$$

$\alpha(d, \varepsilon)$  est une fonction croissante de  $\varepsilon$ , donc  $\alpha(d)$  existe. On peut alors montrer l'existence d'un unique  $D$  tel que

$$d < D \Rightarrow \alpha(d) = \infty$$

$$d > D \Rightarrow \alpha(d) = 0$$

Ce nombre  $D$  est, par définition, la dimension de Hausdorff de  $E$ , notée  $D(E)$ .

Les principales propriétés de  $D$  sont les suivantes. Si  $E' \subset E$ , alors  $D(E') < D(E)$ . Un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  a une dimension de Hausdorff égale à  $n$ , ainsi que tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  de mesure de Lebesgue positive.

La dimension de Hausdorff existe toujours. C'est une propriété qui la différencie des autres dimensions fractales que nous présentons dans cette thèse.

Le calcul numérique de  $D(E)$  est délicat, parce qu'il est difficile de trouver le recouvrement minimal. Pour une méthode de calcul voir Chorin [Cho].

#### Dimension de capacité ou de Hausdorff-Besicovitch [Man],[HOR]

Soit  $E$  un sous-ensemble de  $X$  (compact de  $\mathbb{R}^n$ ). On suppose que  $X$  est recouvert par une grille  $G$  de pas  $\varepsilon$ . Chaque boîte de cette grille est semiouverte,

de forme  $\prod_{i=1}^n [a_i, a_i + \varepsilon[$ . Ainsi chaque point de  $X$  appartient à exactement une boîte.

$N_{\varepsilon, G}(E)$  est le nombre des boîtes de la grille  $G$  de pas  $\varepsilon$ , contenant au moins un point de  $E$ .

**Proposition :** La limite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln N_{\varepsilon, G} / (-\ln \varepsilon)$  ne dépend pas de l'emplacement des

grilles

**Démonstration :** Soient G et H deux grilles différentes de même pas  $\epsilon$ . On note  $N_{\epsilon,G}(E)$  le nombre de boîtes de la grille G contenant au moins un point de E.

On suppose  $N_{\epsilon,G}(E) \geq N_{\epsilon,H}(E)$ .

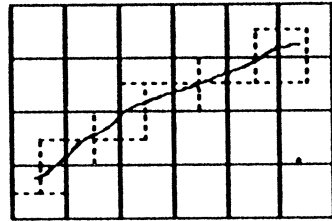
Puisque toute boîte non vide d'une grille intersecte au plus  $2^n$  boîtes d'une grille de même pas, on a  $N_{\epsilon,G}(E) \leq 2^n N_{\epsilon,H}(E)$ . La limite et donc la dimension sont indépendantes de l'emplacement des grilles.

**Définition:** La dimension de capacité est

$$\text{DIM}(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln N_{\epsilon} / (-\ln \epsilon)$$

si cette limite existe.

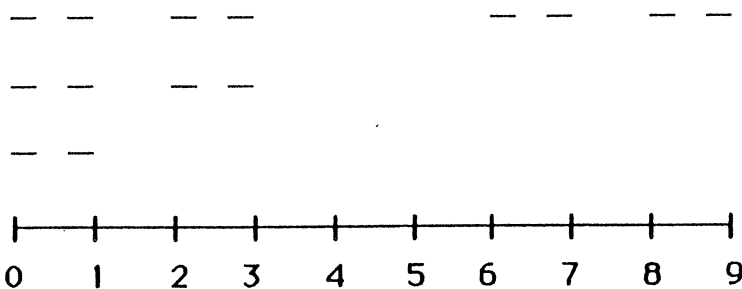
On omet l'indice, qui dénote le choix de la grille, parce qu'il n'influe pas sur la dimension.



**Remarque :**

Des ensembles qui ne sont pas contenus dans un compact de  $\mathbb{R}^n$  pourraient avoir un nombre infini de boîtes occupées.

**Exemple :** On considère l'ensemble de Cantor du tiers médian. On définit une extension  $\bar{C}$  de cet ensemble de la manière suivante: Si  $x \in [0,1]$  est élément de l'ensemble de Cantor,  $\forall k \in \mathbb{N}$   $3^k x$  est élément de  $\bar{C}$ .  $\bar{C}$  contient alors l'ensemble de Cantor sur l'intervalle  $[0,1]$ , le même ensemble translaté sur l'intervalle  $[2,3]$ , l'union de ces deux intervalles, translaté sur l'intervalle  $[6,9]$  et ainsi de suite.



La définition de la dimension de capacité n'a aucun sens pour l'ensemble  $\bar{C}$ .

On pourrait définir une dimension fractale  $\text{DIM}_\infty$  pour des ensembles non-bornés de la façon suivante. Soit  $B_p = [-p, p]^n$  la boîte de longueur  $2p$  autour de l'origine. Alors

$$\text{DIM}_\infty(E) = \lim_{p \rightarrow \infty} \text{DIM}_\infty(E \cap B_p)$$

### 3.A2 Définitions qui tiennent compte de la dynamique d'un système

La dimension précédente est une définition ensembliste, indépendante des caractéristiques dynamiques de l'ensemble considéré. Nous introduisons ici de nouvelles définitions qui ne s'appliquent qu'à des ensembles définis par un système dynamique. Ces dimensions sont définies par rapport à une fonction d'ensembles réelle  $\mu$ , qui satisfait certaines critères. Cette fonction, qu'on appelle généralement mesure, même s'il ne s'agit souvent pas d'une mesure au sens strict, représente le temps de séjour que passe une trajectoire dans les différentes parties de l'espace des phases. Le choix de cette fonction de temps de séjour pose des problèmes, que nous discutons maintenant.

#### 3A.2.1. Choix de la définition de la fonction du temps de séjour

Plusieurs fonctions du temps de séjour ont été utilisées par différents auteurs pour définir la dimension fractale d'un attracteur. Nous les présentons d'abord, puis nous décrivons notre approche.

Baltoni et Renyi définissent, dans leur article de 1956, la dimension d'information, dont nous présentons la définition dans ce paragraphe, par rapport à une mesure de probabilité.

Farmer, Ott et Yorke [FOY] utilisent la mesure naturelle que nous avons présentée dans le chapitre 2. Nous avons aussi présenté dans le même chapitre la mesure utilisée par Takens [Tak2]. Halsey et Yensen [HJ] utilisent la définition suivante.

**Définition :** Supposons donnée une série temporelle  $\{x_i\}_{i=1,2,\dots}$  sur l'attracteur. On définit la mesure  $\mu$  d'une boîte  $C$  de l'espace des phases comme

$$\mu(C) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{card} \{x_i \in C \mid i \leq N\}}{N}$$

Il est sous entendu, dans cette définition, que la mesure  $\mu$  est la même pour presque tout point de départ proche de l'attracteur et que la mesure ne dépend pas du délai de

temps avec laquelle la série temporelle a été prise.

Grassberger et Procaccia ont choisi une solution semblable [GP]. Il supposent donnée une série temporelle  $\{x_i\}_{i=1,2,\dots}$  sur l'attracteur.

"Due to the exponential divergence of trajectories, most pairs (of points)  $x_i, x_j$  with  $i \neq j$  will be dynamical uncorrelated pairs of essentially random points". Dans la suite ils sous entendent que pour toute boîte  $C$  de l'espace des phases la limite

$$\mu(C) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{card} \{x_i \in C \mid i \leq N\}}{N}$$

où card dénote la cardinalité d'un ensemble

existe. Le délai de temps de la série temporelle est indiqué pour chaque résultat numérique.

Les définitions ci-dessus, à l'exception de celle de Balatoni et Renyi, supposent qu'on se trouve dans une des situations suivantes:

- 1) On sait ou on suppose que tous les trajectoires partant proche d'un point de l'attracteur, ont la même mesure limite.
- 2) On ne sait pas si un attracteur existe, et si on a une trajectoire qui converge vers cet attracteur. On définit alors les dimensions fractales par rapport à la mesure limite d'une trajectoire précise.

Mais on peut se retrouver aussi dans des situations plus favorables:

- 1) On sait qu'une mesure ergodique existe, qui a l'attracteur comme support.
- 2) On sait que l'attracteur est le support d'une mesure de Sinai-Bowen -Ruelle.

Dans ces cas on aimerait définir la dimension de l'attracteur par cette mesure.

La définition de Balatoni et Renyi est trop stricte pour notre contexte, lorsque en général ni la mesure naturelle, ni la mesure extérieure de Takens ne sont des mesures.

On dira que une fonction d'ensembles réelle  $\mu$  satisfait l'hypothèse H si

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu$  est non-négative
- $\mu$  est définie sur toute boule ouverte ou fermée de  $X$  et sur tout hypercube de  $X$ , ouvert, semiouvert ou fermé

On dira que  $\mu$  satisfait l'hypothèse H1, si en plus

- $\mu$  est additive

L'additivité facilite certaines démonstrations, mais n'est dans aucun cas une propriété d'importance essentielle dans cette thèse.

Toute mesure satisfait H1 tandis qu'une mesure extérieure en général satisfait H mais ne satisfait pas H1.

Nous définissons les dimensions fractales qui suivent, par rapport à une fonction



d'ensembles qui satisfait l'hypothèse H ou l'hypothèse H1, selon les cas.

La mesure engendrée par la mesure de Takens satisfait, sauf dans des cas exceptionnelles, l'hypothèse H1, et peut donc être utilisée dans les définitions qui suivent. On est libre d'utiliser la mesure ergodique ou la mesure de Sinai-Bowen-Ruelle, si on la connaît.

### 3A.2.2. La fonction de dimension de corrélation

#### Equivalence de la norme

Deux normes  $\delta, \delta'$  sont dites *régulièrement équivalentes* (voir p.e. [Ber]), s'il existe des constantes  $K_1, K_2 > 0$  telles que pour tout  $x, y \in X$

$$K_1 \delta'(x, y) \leq \delta(x, y) \leq K_2 \delta'(x, y)$$

Par exemple la 1-norme (somme des valeurs absolues des différences des coordonnées) et la  $\infty$ -norme (maximum sur les valeurs absolues des différences des coordonnées) sont régulièrement équivalentes à la norme euclidienne.

#### Dimension de corrélation

Soit  $X$  l'espace des phases muni d'une norme  $\delta$ , régulièrement équivalente à la norme euclidienne. Nous notons  $B_\delta(x, \varepsilon)$  la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$ , par rapport à la norme  $\delta$ .

**Définition :** L'*intégrale de corrélation* d'une fonction d'ensembles réelle  $\mu$  au rayon  $\varepsilon$ , qui satisfait l'hypothèse H, est

$$C_\delta(\varepsilon, \mu) = \int_X \mu(B_\delta(y, \varepsilon)) d\mu(y)$$

Considérons la limite

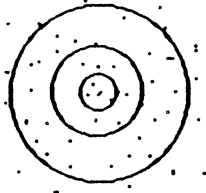
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln C_\delta(\varepsilon, \mu) / \ln \varepsilon$$

Par équivalence régulière cette limite ne dépend pas de la norme. On peut donc indépendamment de la norme définir la dimension de corrélation par cette limite.

**Définition :** La *dimension de corrélation* par rapport à la fonction d'ensembles réelle  $\mu$ , qui satisfait l'hypothèse H est

$$d_{\text{cor}}(\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln C(\varepsilon, \mu) / \ln \varepsilon$$

si cette limite existe. Cette définition est due à Grassberger et Procaccia [GP] et indépendamment à Takens [Tak1].



### La fonction de dimension de corrélation [Gra],[PV]

On peut généraliser la dimension de corrélation en utilisant une quantité bien connue en statistique: les moments d'une variable aléatoire. Au lieu de faire une moyenne arithmétique entre les mesures des boules autour des points centraux différents, on fait une moyenne sur une puissance quelconque, non-nulle des mesures.

Soit  $q$  un nombre réel non nul. Soit  $\mu$  une fonction d'ensembles réelle  $\mu$ , qui satisfait l'hypothèse H

$$C_{\delta,q}(\epsilon,\mu) = \int_X \mu(B_{\delta}(y,\epsilon))^q d\mu(y)$$

est l'intégrale de  $q$ -corrélation au rayon  $\epsilon$  par rapport à la norme  $\delta$ . ( si  $q < 0$ , et si  $\mu(B(y,\epsilon))=0$  alors on définit  $\mu(B(y,\epsilon))^q=0$  )

Définition : La dimension de  $q$ -corrélation est

$$d_q \text{ cor}(\mu) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln C_q(\epsilon,\mu) / (q \ln \epsilon)$$

si la limite existe.

On appelle la dimension de  $q$ -corrélation en fonction de  $q$  la *fonction de dimension de corrélation*.

Egalement par équivalence régulière ces limites ne dépendent pas de la norme.

Pour  $q = 1$  on retrouve la dimension de corrélation.

**3A.2.3. La fonction de dimension d'information**

**Dimension d'information [BR]**

Soit  $\mu$  une fonction d'ensembles réelle, qui satisfait l'hypothèse H1. On suppose que  $X \subset \mathbb{R}^n$  est recouvert par une grille  $G$  de pas  $\epsilon$ . La définition des boîtes  $Box_i$  de la grille est la même que pour la dimension de capacité. Soit  $N_\epsilon$  le nombre des boîtes de mesure  $\mu$  non nulle. On note  $p_i = \mu(Box_i(x))$ .

**Définition :** L'entropie, dépendant du pas de la grille  $\epsilon$ , est

$$H_{\epsilon, G}(\mu) = - \sum_{i=1}^{N_\epsilon} p_i \ln p_i$$

**Définition :** Supposons donnée une famille de grilles  $\{G(\epsilon)\}$  en fonction du pas  $\epsilon$ . La dimension d'information est

$$d_{inf}(\mu) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_{\epsilon, G(\epsilon)}(\mu) / (-\ln \epsilon)$$

**Proposition 3:** La dimension d'information ne dépend pas du choix des grilles.

**Démonstration :** Soit  $H_{\epsilon, G}(\mu)$  l'entropie par rapport à la grille  $G$  et  $H_{\epsilon, G^*}(\mu)$  l'entropie par rapport à la grille  $G^*$ , qui est de même pas, mais décalée par rapport à  $G$ .

Une boîte  $Box_i$  de la grille  $G$  contient des morceaux de  $2^n$  boîtes  $B_{k(i)}$  de  $G^*$ . On note  $p_{i, k(i)} = \mu(B_i \cap B_{k(i)})$ . On majore  $H_{\epsilon, G^*}$  par l'entropie, définie par ces morceaux de boîtes

$$H_{\epsilon, G^*} \leq - \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \sum_{k(i)=1}^{2^n} p_{i, k(i)} \ln p_{i, k(i)} = \sum_{i=1}^{N_\epsilon} p_i (\ln p_i + \sum_{k(i)=1}^{2^n} \frac{p_{i, k(i)}}{p_i} \ln \frac{p_{i, k(i)}}{p_i})$$

$$\leq H_{\epsilon, G} + n \ln 2$$

Alors

$$H_{\epsilon, G} - n \ln 2 \leq H_{\epsilon, G^*} \leq H_{\epsilon, G} + n \ln 2$$

la limite en  $\epsilon \rightarrow 0$  est alors indépendante.

Cette proposition a été démontrée indépendamment par Alexander et Yorke [AY], cité dans [OWY]

Remarque : Dans cette définition il n'est pas supposé, que l'ensemble soit compact.

La fonction de dimension d'information [Gra1],[HP]

On peut généraliser la dimension d'information en procédant d'une façon analogue à la dimension de corrélation.

Soit  $\mu$  une fonction d'ensembles réelle, qui satisfait l'hypothèse H1.

On suppose que  $X \subset \mathbb{R}^n$  est recouvert par une grille  $G$  de pas  $\varepsilon$ .

L'entropie d'ordre  $q$  au pas de grille  $\varepsilon$  est définie par

$$I_{q,G}(\varepsilon, \mu) = \frac{N_\varepsilon}{(q-1)} \left( \ln \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} p_i^q \right)$$

Définition : Supposons donnée une famille de grilles  $\{G(\varepsilon)\}$  en fonction du pas  $\varepsilon$ . Pour  $q \geq 0$  la dimension de  $q$ -information est

$$d_{q \text{ inf}}(\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I_{q,G(\varepsilon)}(\varepsilon, \mu)}{\ln \varepsilon}$$

si la limite existe. Cette définition est due à Grassberger [Gra1].

Pour  $q < 0$  la dimension de  $q$ -information n'est pas définie, parce que la limite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{q,G(\varepsilon)}(\varepsilon) / \ln \varepsilon$  n'est pas invariante par rapport à un changement des grilles.

Exemple : Soit  $\mu$ , définie sur  $X \subset \mathbb{R}$  borné, une fonction d'ensembles réelle, qui satisfait l'hypothèse H1. On suppose en plus qu'il n'y a pas de points avec un poids positif, c'est à dire  $\forall x \in \mathbb{R} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(B(x, \varepsilon)) = 0$

On va montrer maintenant que pour toute valeur  $A > 0 \forall \varepsilon > 0$  on peut trouver une grille de pas  $\varepsilon$  telles que la valeur absolue de l'intégrale de  $q$ -corrélation est supérieure à  $A$ . Il en suit que l'existence de la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I_{q,G}(\varepsilon, \mu)}{\ln \varepsilon}$$

dépend du choix des grilles. Donc  $d_{q \text{ inf}}(\mu)$  n'est pas définie.

Soit  $G$  une grille de pas  $\varepsilon$  qui recouvre  $X$ . Soient  $B_i = [a+i\varepsilon, a+(i+1)\varepsilon[$  les boîtes de

cette grille.  $\exists i$  tel que  $\mu(B_i) > 0$ , mais  $\forall j > i \mu(B_j) = 0$ .  $\exists b$  tel que  $a < b < a + \epsilon$   
 $\mu[b + i\epsilon, b + (i+1)\epsilon] = 0$  mais  $\forall a' < b \mu[a' + i\epsilon, b + (i+1)\epsilon] > 0$ . Puisqu'il n'y a pas de points avec un poids positif,  
 $\forall \delta > 0 \exists a'$  tel que  $0 < \mu[a' + i\epsilon, a' + (i+1)\epsilon] < \delta$   
 Donc, si on fixe  $\delta$  tel que  $\delta^q > A$  ( $q > 1$ ), il en suit immédiatement  
 $I_{q,G}(\epsilon, \mu) > A$   
 ce qu'il fallait démontrer.

On peut généraliser cet exemple pour  $\mathbb{R}^n$ . Les mesures fractales vérifient en général la condition stipulant qu'aucun point n'a un poids positif.

On pourrait modifier la définition de dimension d'information de sorte qu'elle soit aussi définie pour  $q < 0$

$$\bar{d}_{q \text{ inf}}(\mu) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{G(\epsilon)} \frac{I_{q,G}(\epsilon, \mu)}{\ln \epsilon}$$

Cette définition devrait poser de grands problèmes au calcul numérique, lorsqu'on ne connaît pas la grille pour laquelle le minimum de la  $q$ -entropie est admise.

### 3.A3 Exemple: la transformation du Boulanger (voir [FOY])

La transformation du boulanger (due à Yorke et publiée la première fois dans un article de Farmer [Far]) est souvent utilisée comme un modèle qui représente le mécanisme qui engendre le chaos dans un système dynamique.

Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une itération discrète, tel que

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n & \text{si } y_n \leq p & & 0 < \lambda < 1/2, & 0 < p < 1 \\ &= (1-\xi) x_n & \text{si } y_n \geq p & & 0 < \xi < 1/2 & \\ y_{n+1} &= 2 y_n \text{ mod } 1 & & & & \end{aligned}$$

Sous l'action de cette application tout carré est d'abord étiré, puis compressé, puis plié (voir figure 1).

L'attracteur de cette application est le produit d'un ensemble de Cantor pour l'intervalle  $[0,1]$ .

On peut réduire cette application à une itération unidimensionnelle de plusieurs manières. On peut, par exemple, considérer la variable  $y$  purement comme un générateur de hasard. L'itération  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  n'est alors plus déterministe. On la note

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= \lambda x_n && \text{avec probabilité } p \\
 &= (1-\xi) x_n && \text{avec probabilité } 1-p
 \end{aligned}$$

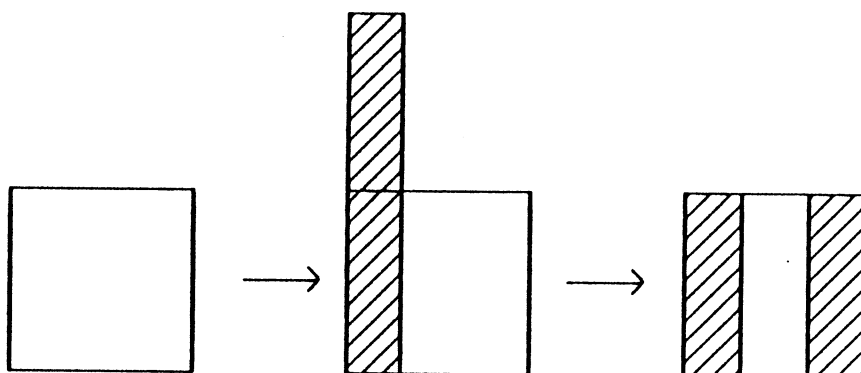


Figure 1 : L'action de la transformation du boulanger

L'ensemble limite de la trajectoire partant d'un point  $x_0 \in [0,1]$  est contenu dans un ensemble de Cantor asymétrique, qui se décrit de la façon suivante (voir figure 2):

De l'intervalle  $[0,1]$  on garde à gauche l'intervalle  $[0,\lambda]$ , à droite l'intervalle  $[1-\xi,1]$ . De même on garde de tout intervalle de longueur  $l$  à gauche un intervalle de longueur  $\lambda l$  et à droite un intervalle de longueur  $\xi l$ .

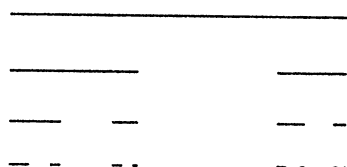


Figure 2 : Ensemble de Cantor asymétrique:  $\lambda = 0.4$      $\xi = 0.2$

Pour exprimer la mesure de tout intervalle, nous utilisons une écriture symbolique (voir [Lan]):

On appelle intervalle d'ordre  $j$  un intervalle obtenu après  $j$  subdivisions de l'intervalle  $[0,1]$ . Tout point  $y$  de l'ensemble de Cantor est caractérisé par une série infinie de chiffres binaires  $\{b_j\}_{j \in \mathbb{N}}$

$b_1 = 0$  si  $y$  appartient au premier intervalle de gauche  $[0,\lambda]$   
 1 sinon

$b_j = 0$  si  $y$  appartient à la partie gauche de l'intervalle d'ordre  $j-1$   
 1 sinon

Un intervalle d'ordre  $j$  est caractérisé par les  $j$  premiers chiffres de tout point contenu dans cet intervalle.

L'itération probabiliste  $f$  ci-dessus admet pour presque tout point de départ, par rapport à la mesure de Lebesgue, la mesure naturelle suivante:

Pour un intervalle d'ordre  $j$

$$\mu(I_j) = p^k (1-p)^{j-k}$$

où  $k$  est le nombre de zéros parmi les chiffres qui caractérisent l'intervalle.

Conjecture :  $\mu$  est une mesure ergodique.

On peut calculer les valeurs des dimensions généralisées de cette mesure de façon analytique, le résultat figure dans la proposition suivante.

Proposition : (Grassberger [Gra])

On suppose, qu'on a un ensemble de Cantor avec une fonction d'ensembles  $\mu$ , qui satisfait l'hypothèse H1. On suppose que  $\mu$  vérifie les propriétés suivantes

Soit  $[a,b]$  un intervalle de l'ensemble de Cantor d'ordre  $k$ , alors il contient les intervalles  $[a, a+\lambda(b-a)]$  et  $[b-\xi(b-a), b]$  d'ordre  $k+1$ . Alors

$$\mu[a, a+\lambda(b-a)] = p\mu[a, b] \quad \text{et}$$

$$\mu[b-\xi(b-a), b] = (1-p)\mu[a, b]$$

La dimension d'information généralisée, pour  $q \geq 0$ , est alors donnée par la formule

$$1 = p^q \lambda^{(1-q) d_q \text{ inf}(I)} + (1-p)^q \xi^{(1-q) d_q \text{ inf}(I)}$$

Pour la démonstration on renvoie à la référence.

On déduit de cette formule que la dimension d'information généralisée n'est pas constante par rapport à  $q$  si  $p \neq 1/2$  ou  $\lambda \neq \xi$ .

On peut aussi trouver des versions déterministes de la transformation du boulanger unidimensionnelle, l'exemple suivant a été trouvé par K. Lott [CDLL]:

On pose  $I = [0,1]$ ,  $f: I \rightarrow I$

Chaque  $x \in I$  peut être représenté de la façon suivante:

$$x = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \cdot 10^{-i} \quad a_i \in \{0,1,2,3\}$$

Pour obtenir  $f(x)$ , on fait les deux opérations suivantes :

- i) un décalage vers la gauche, c'est à dire  $x \rightarrow 4x \text{ mod } 1$
  - ii) on remplace le premier 1 et le premier 3 dans la représentation par un 0.
- exemple:  $0,30202311 \rightarrow 0,0202001$

On voit facilement que  $A = \{ 0, a_1 a_2 \dots \mid a_i \in \{0, 2\} \}$  est un attracteur fort.

La mesure  $\mu$  est la même pour presque chaque  $x \in X$ .

$$\mu([0, a_1 a_2 \dots a_n ; 0, a_1 a_2 \dots (a_n + 1)]) = \prod_{i=1}^n b_i \quad \text{où } b_i = \begin{cases} 3/4 & \text{si } a_i = 0 \\ 1/4 & \text{si } a_i = 2 \\ 0 & \text{si } a_i = 1, 3 \end{cases}$$

Par l'application des formules dans [FOY],[Gra] ou par calcul élémentaire on obtient  $\text{DIM}(\omega(x)) = 1/2$ ,  $d_{\text{inf}}(\mu) = 0.405639\dots$  et  $d_{\text{cor}}(\mu) = 0.339036\dots$  pour presque tout  $x$ .

#### Commentaire: l'importance de cet exemple

Pour toute transformation du boulanger tel que  $p=1/2$  et  $0 \leq \lambda \leq \xi < 1/2$  il existe une itération unimodale qui admet le même attracteur et la même mesure limite pour presque tout point de départ. Une méthode de construction de cette itération a été décrite par Cosnard [Cos].

Il y a quelques années, beaucoup de chercheurs ont accepté la conjecture que pour tout attracteur ergodique la dimension de capacité, la dimension d'information et la dimension de corrélation sont toutes égales. Ici on a le contre exemple d'un attracteur qui est ergodique et pour lequel ces dimensions sont différentes. Pour mesurer l'importance de cet exemple considérons l'attracteur de Hénon (voir paragraphe 5.2. pour ses équations et son comportement). L'intersection de cet attracteur qui est deux-dimensionnel avec une ligne verticale ressemble à un ensemble de Cantor. Voir figure 3 ci-dessous, tirée d'un article de Farmer [Far].

Soit  $x=c$  la ligne d'intersection. On définit une mesure de l'intersection  $\mu_c$  par

$$\nu_c(I) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu([c-\varepsilon, c+\varepsilon] \times I)}{\varepsilon}$$

et

$$\mu_c(I) = \nu_c(I) / \nu_c(\mathbb{R})$$

où  $I$  est un ensemble borélien de  $\mathbb{R}$  quelconque.

#### Conjecture 1 :

Pour tout coefficient  $q$   $d_q \text{ cor}(\mu_c)$  ne dépend pas de la section.

#### Conjecture 2 :

Les dimensions fractales de l'attracteur de Hénon vérifient

$$d_q \text{ cor}(\mu) = d_q \text{ cor}(\mu_c) + 1$$

pour toute valeur de section  $c$ .



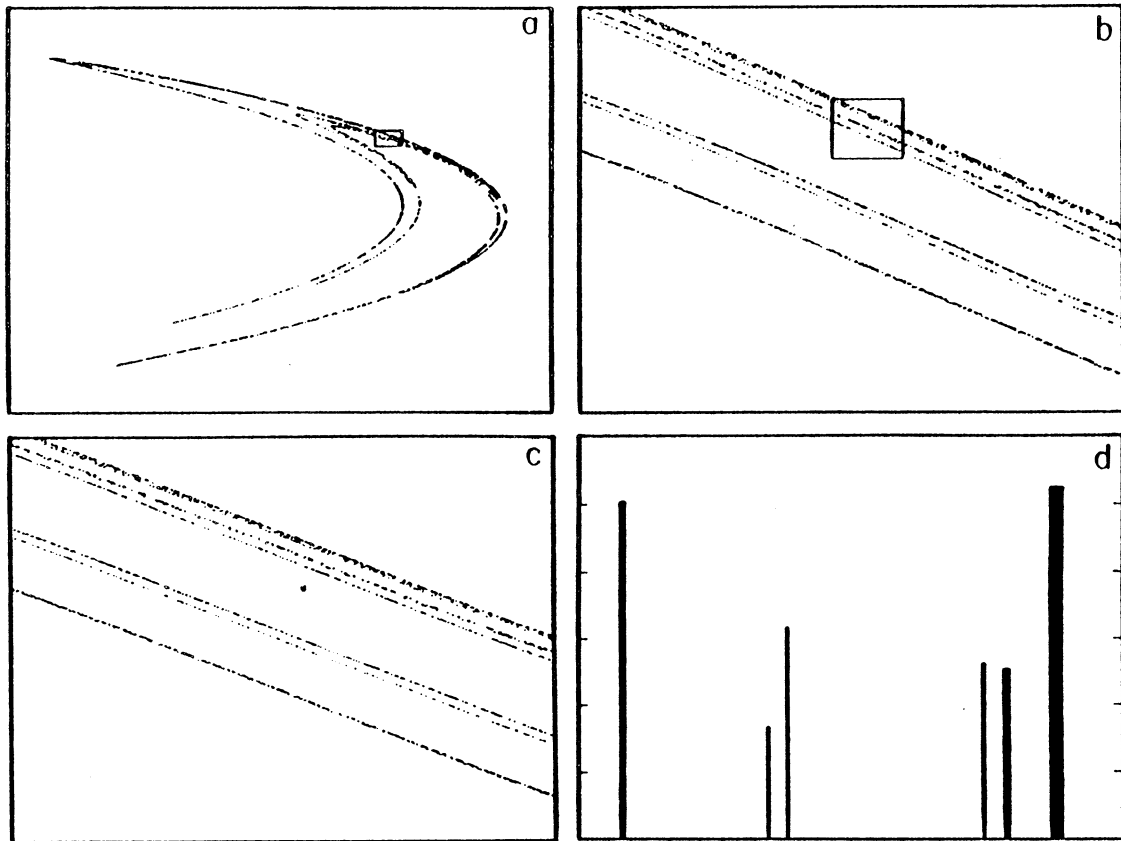


Fig. 5. The Henon attractor, see Equation (17). Figures 5(b) and 5(c) show successive blowups of the regions inside the box of the previous figure. Resolving the fractal structure of Fig. 5(c) into six "leaves", the relative probabilities of these leaves are plotted in Figure 5(d). The width of each bar is roughly the width of the corresponding leaf. This unequal distribution of probabilities persists on all scales, making the Henon attractor a "measure fractal".

Figure 3 : Structure fine de l'attracteur de Hénon [Far]

3.A4 Un attracteur étrange pour lequel ni dimension de capacité ,ni dimension d'information , ni dimension de corrélation ne sont définies (voir [CDLL])

On définit un ensemble cantorien pour lequel les dimensions ci-dessus n'existent pas. La question de l'existence d'un système dynamique qui possède cet ensemble comme attracteur , sera abordée plus bas. L'exemple est inspiré par [Tri].

Exemple 5 :

L'ensemble cantorien A que nous allons construire, peut être recouvert par  $2^n$  intervalles de longueur  $l_n$  . Soit  $l_0 = 1$  et  $0 < l_{n+1} / l_n < 1/2$  . Nous définissons les intervalles suivants:

$$I_i(n) = [a_i(n) , a_i(n) + l_n ] \quad i=1 \dots 2^n$$

où les  $a_i(n)$  sont définis par récurrence

$$a_1(0) = 0$$

$$a_{2i-1}(n+1) = a_i(n)$$

$$a_{2i}(n+1) = a_i(n) + l_n - l_{n+1}$$

$$A_n := \bigcup_{i=1}^{2^n} I_i(n)$$

$A_n$  est un recouvrement de  $A$ .

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

On pose  $k(n)$  tel que  $2^k < n \leq 2^{k+1}$

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = \begin{cases} a & \text{si } k(n) \text{ pair} \\ b & \text{si } k(n) \text{ impair} \end{cases}$$

On pose  $f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k(n) \text{ pair} \\ 1 & \text{si } k(n) \text{ impair} \end{cases}$

On pose  $g(n) = \sum_{m=1}^n f(m)$

La longueur d'un intervalle  $l_i(n)$  vaut

$$l_n = b^{g(n)} \cdot a^{(n-g(n))}$$

La fraction  $g(n)/n$  admet des maxima pour la suite des indices  $n_i = 4^i$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{g(n_i)}{n_i} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots \right) = \frac{2}{3}$$

Dimension de capacité

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_{\epsilon}}{-\ln \epsilon} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{l(n_i)}}{-\ln l(n_i)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{4^i \ln 2}{-\ln (b^{g(n_i)} a^{n-g(n_i)})} = \frac{\ln 2}{\frac{2}{3} \ln \frac{1}{b} + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{a}}$$

de façon analogue, on calcule en posant  $n_i = 2 \cdot 4^i$

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_{\epsilon}}{-\ln \epsilon} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{l(n_i)}}{-\ln l(n_i)} = \frac{\ln 2}{\frac{1}{3} \ln \frac{1}{b} + \frac{2}{3} \ln \frac{1}{a}}$$

$\Rightarrow$  si  $a \neq b$ ,  $\text{DIM}(A)$  n'est pas définie.

Nous posons la mesure  $\mu$  du temps de séjour  $\mu(I_j(n)) = 1/2^n$ .  
 Pour simplifier le calcul, on pose dans la suite  $0 < a < b \leq 1/4$ .

### Dimension de corrélation

$$C_{I(n)} = \int_X \mu(B(x, I_n)) d\mu(x) = \sum_{j=1}^{2^n} \mu(I_j(n))^2 = 2^{-n} = 1/N_{I(n)}$$

et on continue comme pour la dimension de capacité. Donc  $d_{\text{cor}}(\mu)$  n'est pas définie.

### Dimension d'information

$$H_{I(n)} = - \sum_{j=1}^{2^n} 2^{-n} \ln 2^{-n} = -\ln 2^{-n} = \ln N_{I(n)}$$

Alors  $d_{\text{inf}}(\mu)$  n'est pas définie.

Il existe une itération unimodale ( $f: I \rightarrow I$ ), qui admet l'ensemble cantorien classique ( $I_n = 3^{-n}$ ) comme attracteur étrange [Cos]. Soient  $I_j(n)$  les intervalles de cet ensemble et  $I_j^*(n)$  ceux de l'ensemble cantorien de notre exemple  $A$ . Il est facile de donner un homéomorphisme  $\rho: [0,1] \rightarrow [0,1]$  de manière que  $\rho(I_j(n)) = I_j^*(n)$ .

$g := \rho \circ f \circ \rho^{-1}$  est une itération qui admet  $A$  comme attracteur étrange. On peut montrer que la mesure du temps de séjour de  $f(1, T)$  est donnée par  $\mu(I_j(n)) = 2^{-n}$ , comme on l'avait posé dans les calculs ci-dessus.

### 3A.5. L'invariance des dimensions fractales par rapport à une transformation des coordonnées

#### Transformation linéaire

Nous avons vu dans paragraphe 3A.2., que la fonction de dimension de corrélation est invariante par rapport à un changement de normes qui sont équivalentes.

Par définition la fonction de dimension de corrélation est invariante par rapport à une translation de coordonnées, si la norme est équivalente à la norme euclidienne.

**Corollaire :** Si la norme est équivalente à la norme euclidienne,  $\forall q \neq 0$  la dimension de  $q$ -corrélation est invariante par rapport à un changement de coordonnées linéaire.

$\forall q > 1$  la dimension de  $q$ -information est invariante par rapport à une transformation linéaire de coordonnées, puisque dans ce cas on a  $d_{(q-1) \text{ cor}}(\mu) = d_q \text{ inf}(\mu)$

#### Transformation discontinue

Ott, Withers et Yorke [OWY] étudient l'invariance de la dimension de  $q$ -information par rapport à une transformation de coordonnées avec un nombre fini de discontinuités. Il démontrent, que la dimension d'information est invariante par rapport à ce type de changement de coordonnées. Ils affirment que pour tout autre coefficient  $q$  la dimension de  $q$ -information n'est pas invariante par rapport à ce type de changement de coordonnées.

Ott, Withers et Yorke concluent que parmi les dimensions de  $q$ -information seule la dimension d'information mérite d'être appelé une dimension. Nous pensons, que ce jugement est précoce, puisque l'utilité des différentes définitions dépendra du succès dans les applications.

### 3.B RELATIONS ENTRE LES DIMENSIONS ET ERGODICITE

D'abord nous présentons les relations qui existent entre les dimensions fractales, que nous avons présentées dans chapitre 3A. Nous démontrons une conjecture fréquemment utilisée entre les deux fonctions de dimension.

Puis nous présentons la dimension ponctuelle. Cette notion joue un rôle important dans les récentes travaux de Kadanoff et coll., dont nous donnons un résumé succinct. Enfin nous présentons quelques théorèmes et conjectures sur les relations entre les dimensions fractales.

#### 3.B1 Relations entre les dimensions généralisées: Egalités et inégalités

Dans ce paragraphe on démontrera, que chacune des dimensions généralisées englobe la dimension de capacité, la dimension d'information et la dimension de corrélation. On obtiendra aussi des inégalités entre ces dimensions.

##### 3B.1.1. Relation entre fonction de dimension de corrélation et fonction de dimension d'information

On conjecture, que les deux définitions de dimensions généralisées sont, en fait, équivalentes. Donc  $d_{q \text{ cor}}(\mu)$  correspond à  $d_{(q+1) \text{ inf}}(\mu)$ .  $\text{Box}_i(y)$  dénote, dans tout ce qui suit, la boîte de la grille contenant  $y$ .

Proposition 1 : Soit  $\mu$  une fonction d'ensembles, qui satisfait l'hypothèse H1. Si pour un nombre réel  $q \geq -1$ , la dimension de  $q+1$ -information  $d_{q+1 \text{ inf}}(\mu)$  et la dimension de  $q$ -corrélation  $d_{q \text{ cor}}(\mu)$  existent, alors

- i)  $d_{q \text{ cor}}(\mu) \geq d_{(q+1) \text{ inf}}(\mu)$
- ii) si  $q > 0$ , alors  $d_{q \text{ cor}}(\mu) = d_{(q+1) \text{ inf}}(\mu)$

##### Démonstration :

- i) Nous notons  $\text{Box}_\varepsilon(x)$  la boîte de diamètre  $\varepsilon$ , qui contient  $x$ . Les notations  $\text{Box}_i(x)$  et  $\text{Box}_\varepsilon(x)$  dénotent exactement le même ensemble et sont utilisés l'un ou l'autre selon contexte. La boîte de diamètre  $2\varepsilon$ , centrée autour d'un point  $x$ , qui est élément d'une boîte  $\text{Box}_\varepsilon(x)$  de diamètre  $\varepsilon$ , contient  $\text{Box}_\varepsilon(x)$ . Donc  $\mu(B(x, 2\varepsilon)) \geq \mu(\text{Box}_\varepsilon(x))$  d'où suit l'affirmation.
- ii) On recouvre l'espace de phases de dimension  $n$  avec une grille  $G_\varepsilon$ . On note  $N_{G(\varepsilon)}$  pour le nombre de boîtes de mesure positive. Alors

$$C_{q, \varepsilon/2}(\mu) = \sum_{i=1}^{N_{G(\varepsilon)}} \int_{\text{Box}_i} \mu(B(x, \varepsilon/2))^q d\mu(x)$$

Si  $q > 0$  alors  $\int_{\text{Box}_i} \mu(B(x, \varepsilon/2))^q \leq \mu(V_{\varepsilon/2}(\text{Box}_i))^{q+1}$

On note que  $V_{\varepsilon/2}(\text{Box}_i)$  est une boîte de taille  $2\varepsilon$ .

Ces observations sont la clé de la démonstration. On majore maintenant la  $q$ -corrélation au rayon  $\varepsilon/2$  par la  $q+1$ -entropie de la somme de plusieurs grilles de taille  $2\varepsilon$ .

Pour recouvrir toutes les boîtes de taille  $\varepsilon$  par des boîtes de taille  $2\varepsilon$  centrées autour de ces boîtes on a besoin de  $2^n$  grilles de taille  $2\varepsilon$  (Figure 3). On note  $H_j(2\varepsilon)$   $j=1, \dots, 2^n$  pour ces grilles.

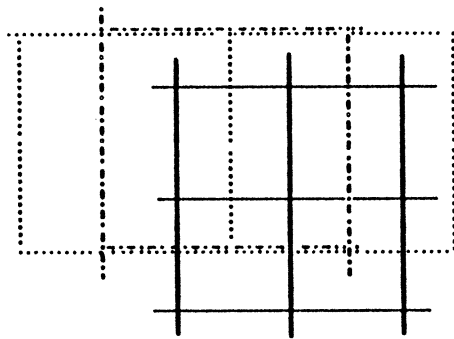


Figure 4: La grille  $G(\varepsilon)$  (lignes continues) est couverte par des grilles différents de taille  $2\varepsilon$  (lignes en pointillé et en ? )

On note  $\text{Box}_{k,j(i)}$   $k=1, \dots, H_j(2\varepsilon)$  pour les boîtes de taille  $2\varepsilon$  qui recouvrent la boîte  $\text{Box}_i$  de taille  $\varepsilon$ . On note

$p_{k,j(i)} = \mu(\text{Box}_{k,j(i)})$ . Alors

$$\forall x \in \text{Box}_i \quad \mu(B(x, \varepsilon/2)) \leq p_{k,j(i)}$$

Car  $q > 0$  il suit

$$\int_{\text{Box}_i} \mu(B(x, \varepsilon/2))^q d\mu(x) \leq p_{k,j(i)}^{q+1}$$

Remarquons que ici la démonstration ne marche pas pour  $-1 \leq q \leq 0$  parce que on peut seulement déduire

$$\int_{\text{Box}_i} \mu(B(x, \varepsilon/2))^q d\mu(x) \geq \mu(\text{Box}_i) p_{k,j(i)}^q$$

et cela n'est pas suffisant pour compéter la démonstration.  
Retournons au cas  $q > 0$

$$C_{q,\epsilon/2}(\mu) = \sum_{i=1}^{N_G(\epsilon)} \int_{\text{Box}_i} \mu(B(x,\epsilon/2))^q d\mu(x) \leq \sum_{j=1}^{2^n H_j(2\epsilon)} \sum_{k=1}^{p_{k,j(i)}} p_{k,j(i)}^{q+1}$$

Parce que  $I_{q,H_j(2\epsilon)}(\mu)$  est indépendant de la position de la grille sauf un sommand borné, il existe une constante  $K > 0$  tel que

$$\ln C_{q,\epsilon/2}(\mu) \leq I_{q,H_j(2\epsilon)}(\mu) + K$$

L'affirmation

$$d_q \text{ cor}(\mu) \leq d_{(q+1)} \text{ inf}(\mu)$$

suit.

La question, si l'égalité est vraie pour  $-1 \leq q \leq 0$ , reste ouverte. Pour démontrer  $d_q \text{ cor}(\mu) = d_{(q+1)} \text{ inf}(\mu)$  pour  $-1 < q < 0$ , il nous faut une hypothèse supplémentaire :

Proposition 2 : Soit  $\mu$  une fonction d'ensembles, qui satisfait l'hypothèse H1. On suppose que pour un nombre réel  $p$ , les dimensions

$d_{(q+1)} \text{ inf}(\mu)$  et  $d_q \text{ cor}(\mu)$  existent.

On note

$$K_q(\epsilon) = I_{q+1}(\epsilon, \mu) / C_q(\epsilon, \mu) \\ = \int_X \mu(\text{Box}_\epsilon(y))^q d\mu(y) / \int_X \mu(B(y,\epsilon))^q d\mu(y)$$

Si  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} K_q(\epsilon) / \ln \epsilon = 0$  alors  $d_q \text{ cor}(\mu) = d_{(q+1)} \text{ inf}(\mu)$

Exemple : L'ensemble de Cantor

Soit  $\mu([0,1]) = 1$ ,  $\mu([0,1/3]) = \mu([2/3,1]) = 1/2$  et ainsi de suite. Pour tout intervalle  $[a,b]$ ,  $0 \leq a < b \leq 1$  soit  $\mu[a,b] = 2 \cdot \mu[a/3, b/3]$

Par conséquent on a pour tout facteur  $k = (1/3)^n$   $n \in \mathbb{N}$

$$K_q(\epsilon) = K_q(k\epsilon)$$

si les grilles sont bien choisies.

Les conditions de proposition 2 sont alors vérifiés.

3B.1.2. Relation entre la fonction de dimension d'information et la dimension de capacité

Pour relier la dimension de capacité, qui est ensembliste, avec la dimension d'information généralisée, qui fait référence à une fonction de temps de séjour, il faut une hypothèse supplémentaire.

**Hypothèse H2 :** Soit  $\mu$  la mesure naturelle ou la mesure extérieure de Takens. On suppose que  $\mu$  satisfait H. On pose  $N_{\varepsilon, G}^*$  le nombre de boîtes d'une grille  $G$ , avec mesure  $\mu$  non-nulle.

Alors  $\exists k > 1$  tel que  $1/k < N_{\varepsilon, G}^* / N_{\varepsilon}(\omega(x)) < k$

En particulier cette hypothèse est vérifiée pour la mesure naturelle et la mesure extérieure de Takens, si la trajectoire approche un attracteur régulier.

**Proposition 3 :** Soit  $\mu$  la mesure naturelle ou la mesure extérieure de Takens. On suppose que  $\mu$  satisfait H2. Alors

$$\text{DIM}(\omega(x)) = d_0 \inf(\mu_x)$$

**Démonstration :**

$$N_{\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} p_i^0 = N_{\varepsilon}^* \quad \text{ce qui implique que}$$

$$\text{DIM}(\omega(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln N_{\varepsilon} / -\ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln N_{\varepsilon}^* / -\ln \varepsilon = d_0 \inf(\mu_x)$$

### 3B.1.3. Relation entre les fonctions de dimension et la dimension d'information

**Proposition 4 :** (Grassberger [Gra1])

Soit  $\mu$  une fonction d'ensembles, qui satisfait l'hypothèse H1.

Si la dimension d'information existe, alors

$$\lim_{q \rightarrow 1} d_q \inf(\mu) = d \inf(\mu).$$

**Démonstration:** On montre que  $\lim_{q \rightarrow 1} I_q(\varepsilon) = H_{\varepsilon}(\mu)$  en utilisant la règle de l'Hospital:

$$\lim_{q \rightarrow 1} I_q = \frac{\lim_{q \rightarrow 1} \frac{d}{dq} \ln \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} p_i^q}{\lim_{q \rightarrow 1} \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{q-1} \right)} = \frac{d}{dq} \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} p_i^q \ln p_i \Big|_{q=1} = \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} p_i^q \ln p_i \Big|_{q=1} = H_{\varepsilon}(\mu)$$



La limite de  $I_q$  en  $q$  vers 1 existe toujours parce que c'est le quotient de deux fonctions continues à l'extérieur du pôle  $q=1$ .

**Corollaire :**

Soit  $\mu$  une fonction d'ensembles, qui satisfait l'hypothèse H1. Si la dimension d'information de  $\mu$  existe, alors

$$d_{\text{inf}}(\mu) = \lim_{p \rightarrow 0} d_q \text{cor}(\mu)$$

**Démonstration :** Par proposition 4

$$d_{\text{inf}}(\mu) = \lim_{p \rightarrow 1} d_q \text{inf}(\mu)$$

$$\text{Par proposition 1 ii) } \lim_{p \rightarrow 1} d_q \text{inf}(\mu) = \lim_{p \rightarrow 0} d_q \text{cor}(\mu)$$

**Proposition 5 :** [Gra1] Soit  $\mu$  une fonction d'ensembles, qui satisfait l'hypothèse H. Si la dimension de  $q$ -corrélacion existe pour tout nombre réel  $q$  différent de 0, alors la dimension de  $q$ -corrélacion est monotone décroissante par rapport à  $q$ .

**Démonstration :**

On applique le théorème de probabilité [Fel] suivant :

Soient  $X$  une variable aléatoire et  $E(X)$  son espérance.

La fonction de  $t$   $u(t) = \ln E(|X|^t)$ ,  $t \geq 0$  est convexe.

En appliquant ce résultat à  $X^{-1}$  on obtient que

$$v(t) = \ln E(|X|^{-t}), \quad t \geq 0 \text{ est aussi convexe.}$$

Pour démontrer la proposition on considère la variable aléatoire

$$X_\varepsilon = \mu(B(x, \varepsilon))$$

Alors

$$\ln C_q(\varepsilon) = \ln \int_X \mu(B(x, \varepsilon))^q d\mu(x) = \ln E(|X_\varepsilon|^q)$$

$\ln C_q(\varepsilon)$  est aussi convexe en 0 car

$$\lim_{q \rightarrow 0} \ln C_q(\varepsilon) = \lim_{q \rightarrow 0} \ln C_q(\varepsilon) = \ln C_0(\varepsilon) = 0$$

$$q > 0 \qquad q < 0$$

Donc  $\ln C_q(\varepsilon)$ ,  $q \in \mathbb{R}$  est une fonction convexe de  $q$ . Pour  $\varepsilon < 1$ , la fonction de  $q$ ,

$\ln C_q(\varepsilon) / \ln \varepsilon$  est concave. La limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln C_q(\varepsilon) / \ln \varepsilon \text{ lorsqu'elle existe, est également concave.}$$

Donc  $d_{q \text{ cor}}(\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln C_q(\varepsilon) / q \ln \varepsilon$  est monotone décroissante .

**Proposition 6 :** Soit  $\mu$  une fonction d'ensembles , qui satisfait l'hypothèse H1. Si la dimension de  $q$ -information de la mesure  $\mu$  existe pour tout  $q \geq 0$  , alors elle est monotone décroissante par rapport à  $q$  .

La démonstration est analogue.

On suppose que la mesure naturelle  $\mu_x$  de la trajectoire partant du point  $x$  satisfait les hypothèses H1. On suppose de plus que pour  $q \geq -1$  les dimensions de  $q$ -corrélation et les dimensions de  $q+1$ -information de  $\mu_x$  sont bien définies. On suppose que toute boîte ouverte contenant un point de l'attracteur a mesure positive ou que la trajectoire approche un attracteur régulier. Alors on peut résumer les propositions sur les relations entre les dimensions généralisées par l'inégalité suivante

$$\text{DIM}(\omega(x)) = d_0 \text{ inf}(\mu_x) \geq d_{\text{inf}}(\mu_x) = d_0 \text{ cor}(\mu_x) \geq d_2 \text{ inf}(\mu_x) = d_{\text{cor}}(\mu_x)$$

Et si l'attracteur est à homothétie interne, on obtient pour tout nombre réel  $p \geq -1$

$$d_p \text{ inf}(\mu_x) = d_{(p+1) \text{ cor}}(\mu_x)$$

et donc  $\text{DIM}(\omega(x)) = d_{-1} \text{ cor}(\mu_x)$

Nous avons vu que pour la transformation du boulanger ces inégalités sont strictes

$$\text{DIM}(\omega(x)) > d_{\text{inf}}(\mu_x) > d_{\text{cor}}(\mu_x) .$$

### 3.B2 La dimension ponctuelle

Nous introduisons la dimension ponctuelle pour deux raisons. D'abord elle est intéressante en elle même, par exemple dans l'étude des ensembles complexes fractales en thermodynamique où on s'intéresse au voisinage de certains points critiques, on appelle alors la dimension ponctuelle exposant critique (voir [Akr]). Puis elle a un rôle important si la mesure de l'attracteur est ergodique.

**Définition :** Soit  $y$  un point de l'attracteur. Soit  $\mu$  une fonction d'ensembles qui satisfait l'hypothèse H.

$$d_{\text{point}}(y, \mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(B(y, \varepsilon)) / \ln \varepsilon$$

est la dimension ponctuelle du point  $y$ , si cette limite existe. Cette dimension est

invariante par rapport aux normes qui sont équivalentes.

La proposition suivante a été énoncée dans [ER], sans démonstration.

**Proposition :** *Si le flot  $f$  est  $C_1$ , et si  $\mu$  est ergodique, alors pour presque tout point du support de  $\mu$  la dimension ponctuelle est la même.*

**Démonstration :** (par l'absurde)

Parce que  $f$  est  $C_1$  il existe un nombre réel  $0 < k < 1$  tel que

$$B(f(y), k\varepsilon) \subset f(B(y, \varepsilon)) \subset B(f(y), k^{-1}\varepsilon)$$

et donc pour tout point  $x$  de l'attracteur

$$d_{\text{point}}(x, \mu) = d_{\text{point}}(f(x), \mu)$$

Supposons qu'il existe un réel  $\alpha$  et des sous-ensembles  $S, S_1$  de  $A$  disjoints et de mesure non-nulle, tel que

$$\text{pour } y \in S \text{ on a } d_{\text{point}}(y, \mu) > \alpha$$

$$\text{pour } z \in S_1 \text{ on a } d_{\text{point}}(z, \mu) \leq \alpha$$

A cause de l'ergodicité il existent des points  $y \in S$  tel que  $f(y) \in S_1$ , donc on a une contradiction.

**Attention :** *La condition, que la dimension ponctuelle a la même valeur presque partout, n'implique pas que les fonctions de la dimension de corrélation et de la dimension d'information soient constantes.*

**Contreexemple :** Nous considérons la mesure de la transformation du boulanger, que nous avons calculé dans le dernier paragraphe. Supposons que  $\lambda \neq \xi$ , donc nous avons comme attracteur un ensemble de Cantor asymétrique.

**Proposition :** *Dans le cas de la transformation du boulanger, la dimension ponctuelle est égale à  $d_{\text{inf}}(\mu)$   $\mu$ -presque partout sur l'attracteur.*

**Démonstration :** Soit  $x$  un point sur l'attracteur et  $I_j(x)$  l'intervalle d'ordre  $j$  auquel il appartient. On considère les chiffres de la représentation binaire de  $x$  comme une suite de variables aléatoires indépendantes.

On rappelle, que  $\mu(I_j(x)) = p^k (1-p)^{j-k}$  où  $k$  est le nombre de zéros parmi les chiffres qui caractérisent l'intervalle et  $p$  la probabilité de chaque chiffre de la représentation symbolique de  $x$  d'être zéro. La longueur de cet intervalle est  $\lambda \xi^j$ .

On a alors

$$d_{\text{point}}(x, \mu) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln (p^k (1-p)^{j-k})}{\ln \lambda^k \xi^{j-k}}$$

Soit

$$\text{quot}(k, x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{k}{j}$$

$$d_{\text{point}}(x, \mu) = \frac{\ln (p^{\text{quot}(k, x)} (1-p)^{1-\text{quot}(k, x)})}{\ln (\lambda^{\text{quot}(k, x)} \xi^{1-\text{quot}(k, x)})}$$

Par la loi du grand nombre de Khintchine (voir p.e. [Fis]) on a avec probabilité 1  $\text{quot}(k, x) = p$ .

Donc presque sûrement

$$d_{\text{point}}(x, \mu) = \frac{p \ln p + (1-p) \ln(1-p)}{p \ln \lambda + (1-p) \ln \xi}$$

ce qui est exactement la formule donnée par Farmer et coll. [FOY] pour la dimension d'information de cette mesure.

On voit dans cet exemple aussi que

$$d_{\text{point}}(0, \mu) = \frac{\ln p}{\ln \lambda}$$

et

$$d_{\text{point}}(1, \mu) = \frac{\ln (1-p)}{\ln \xi}$$

Nous avons vu que la dimension ponctuelle d'un point dépend de la fraction de zéros dans sa représentation binaire. Cette fraction est indépendante de la fraction de zéros dans les premiers  $j$  chiffres, si  $j$  est un nombre entier fini. Par conséquent dans tout intervalle de l'attracteur et pour toute valeur entre 0 et 1 on trouve des points qui admettent cette valeur comme fraction de zéros. Alors tous les valeurs de dimension ponctuelle entre ces deux extrêmes sont admises par certains points dans tout l'intervalle.

### 3.B3 Une hypothèse de Kadanoff et coll. [Kad], [HJ]

Soit  $f(\alpha)$  la dimension fractale du support des points, qui ont la dimension ponctuelle  $\alpha$ . Les auteurs ne spécifient pas, de quelle dimension fractale il s'agit. Kadanoff et coll. conjecturent que cette fonction est lisse et reliée à la dimension

d'information généralisée (pour les formules nous renvoyons à [Kad] )  
 La mesure de la transformation du boulanger est cité comme exemple. Pour les valeurs  $\lambda = 1/4$ ,  $\xi = 2/5$ ,  $p = 3/5$  Kadanoff et coll. obtiennent la courbe de  $f(\alpha)$  suivante

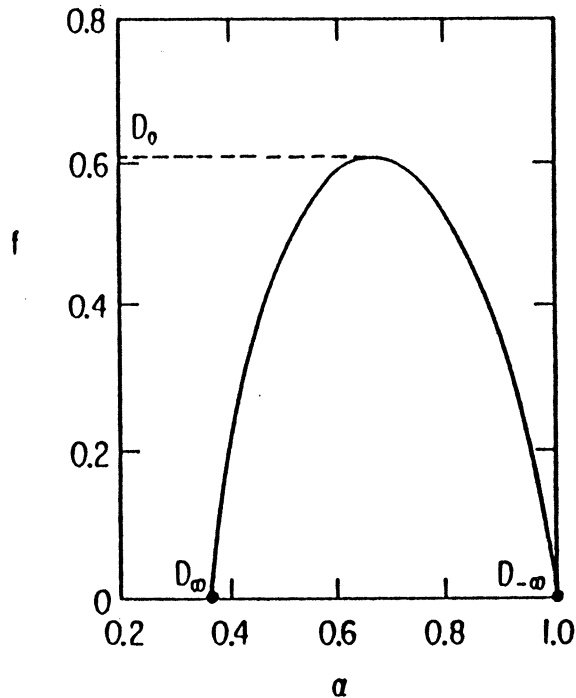


Fig. 1. a). The construction of a two-scale Cantor set. For this example we have chosen the rescalings as  $l_1 = 0.25$ ,  $l_2 = 0.4$ , and the corresponding densities  $p_1 = 0.6$ ,  $p_2 = 0.4$ . b). The corresponding  $f$ - $\alpha$  spectrum. Note that  $\alpha_{\min} = D_{\infty} = \ln(0.6)/\ln(0.25) = 0.3684$  and  $\alpha_{\max} = D_{-\infty} = \ln(0.4)/\ln(0.4) = 1$  (ref. 2).

Cette courbe est obtenue indirectement, utilisant les valeurs analytiques de la dimension de corrélation généralisée, qu'on peut obtenir par la formule de Grassberger (paragraphe 3A.3). Pour conclure à partir de la fonction de la dimension de corrélation sur la dimension du support des points, qui ont une dimension ponctuelle  $\alpha$  donnée, les auteurs utilisent la formule

$$d_{q \text{ inf}}(\mu) = \frac{1}{q-1} (q \alpha(q) - f(\alpha(q)))$$

$$\text{où } \alpha(q) = \frac{d}{dq} (q-1) d_{q \text{ inf}}(\mu)$$

Pour la validité de cette formule les auteurs donnent une argumentation heuristique et, à mon avis, fautive. Aucun calcul numérique direct de la dimension fractale du support des points qui ont une dimension ponctuelle  $\alpha$ , n'a été fait.

On note  $\text{Supp}(\alpha)$  l'ensemble des points qui ont la dimension ponctuelle  $\alpha$ .

**Proposition:** *On considère la mesure ergodique  $\mu$  engendrée par la transformation du boulanger. Pour tout  $\alpha$  tel que  $d_{\text{point}}(0, \mu) \leq \alpha \leq d_{\text{point}}(1, \mu)$ , la dimension de capacité de  $\text{Supp}(\alpha)$  est égale à la dimension de capacité de l'attracteur. Ade cette transformation.*

**Démonstration :** Nous avons vu dans le dernier paragraphe, que tout intervalle de l'ensemble cantorien contient des point de dimension ponctuelle  $\alpha$ . Donc, si on recouvre l'intervalle  $[0,1]$  avec une grille, toute boîte dont l'intérieur contient un point de l'ensemble cantorien, contient des points de dimension ponctuelle  $\alpha$ . Soit  $N_\varepsilon(A)$  le nombre de boîtes contenant un point de l'ensemble cantorien, et  $N_\varepsilon^*(A)$  le nombre de boîtes, dont l'intérieur contient un point de l'ensemble cantorien. On voit facilement que  $1 \leq N_\varepsilon(A) / N_\varepsilon^*(A) \leq 3$  et avec  $N_\varepsilon(A) \geq N_\varepsilon(\text{Supp}(\alpha)) \geq N_\varepsilon^*(A)$  on obtient  $\text{DIM}(A) = \text{DIM}(\text{supp}(\alpha))$  ce qu'il fallait démontrer.

### 3.B4 Exposants de Lyapunov, entropie topologique et dimension de l'attracteur

Les exposants de Lyapunov, l'entropie et les dimensions fractales d'un attracteur sont reliés. Plusieurs auteurs ont conjecturé ou démontré des équations qui expriment les dimensions fractales en fonction des coefficients de Lyapunov et de l'entropie. Après un rappel succinct des définitions nous en présentons les plus importants. Ces équations peuvent être intéressantes pour le calcul numérique des dimensions fractales. Il est souvent plus facile de calculer les coefficients de Lyapunov d'un système dynamique, que de calculer les dimensions fractales par des méthodes directes. Malheureusement pour des espaces des phases de dimension supérieur à deux on ne dispose que des conjectures.

#### Les exposants de Lyapunov

Nous considérons un système dynamique dont, pour rendre les définitions plus facilement compréhensibles, nous supposons que l'espace de temps est discret. Soit  $\mathbb{R}^n$  son espace de phases, et  $f$  son flot, généré par l'itération  $F$ . Soit  $J(x)$  la matrice jacobienne de  $F(x)$ .

$$\text{Soit } J_m(x_0) = \frac{\partial (F^m(x_0))}{\partial x} = J(x_m) J(x_{m-1}) \cdot \dots \cdot J(x_0)$$

Nous notons les valeurs absolues des valeurs propres de  $J_n(x_0)$  en ordre décroissant

$$j_1(m, x_0) \geq j_2(m, x_0) \geq \dots \geq j_n(m, x_0)$$

Les exposants de Lyapunov de la trajectoire  $f(x_0, T)$  sont

$$\lambda_i(x_0) = \ln \left( \lim_{m \rightarrow \infty} j_i(m, x_0)^{1/m} \right)$$

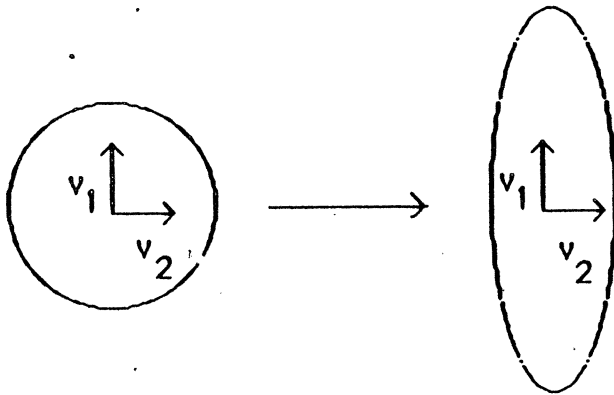


Figure 5 : Action des coefficients de Lyapunov : on a une variété stable et un coefficient de Lyapunov négatif dans la direction de  $v_1$ , et on a une variété instable et un coefficient de Lyapunov positif dans la direction de  $v_2$ .

Un exposant de Lyapunov  $\lambda_i$  positif signifie, que deux trajectoires des points de départ proches, dont la distance est collinéaire avec le vecteur propre correspondant à  $\lambda_i$ , vont s'éloigner de façon exponentielle. Un exposant de Lyapunov négatif signifie, que deux trajectoires des points de départ proches, dont la distance est collinéaire avec le vecteur propre correspondant, se rapprochent de façon exponentielle.

L'existence des exposants de Lyapunov sous des conditions très générales a été démontré par Oseledec [Ose].

En général les exposants de Lyapunov dépendent du point de départ de la trajectoire. Si le système est ergodique, les mêmes exposants de Lyapunov, sont admises pour presque tout point de départ, par rapport à la mesure ergodique.

### L'entropie topologique

Supposons, qu'on a un système dynamique chaotique avec un flot continu. Le point de départ d'une trajectoire est donné avec une précision finie. En observant l'évolution de la trajectoire, on peut situer plus exactement le point de départ.

Dans l'image présent ( figure 6 ) chaque rectangle correspond à un point avec son voisinage, contenant les points, qui sont confondus avec lui même, dans la précision donnée. Une trajectoire partant du rectangle A peut, apres un temps t, tomber dans une des six rectangles, qui ont une intersection avec l'ovale.

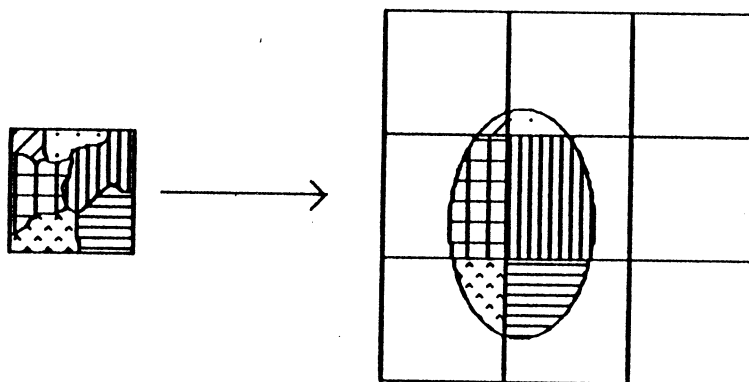


Figure 6

Soit A la boîte d'origine.

Soit  $\{B_i\}$  l'ensemble des rectangles qui ont une intersection avec  $f^t(A)$  non-vide.

On note  $A_i = f^t(A) \cap B_i$ .  $\{A_i\}$  est la partition  $\mathcal{A}(t)$  de A.

Soit  $p_i = \mu(A_i) / \mu(A)$

Le gain d'information sur le point de départ de la trajectoire apres un temps t est :

$$H(\mathcal{A}(t)) = \sum_{A_i \in \mathcal{A}(t)} p_i \ln p_i$$

L'entropie topologique (qui n'est pas à confondre avec l'entropie utilisée dans la définition de la dimension d'information) est

$$h(\mu, f) = \lim_{t \rightarrow \infty} 1/t H(\mathcal{A}(t))$$

Pour une description plus complète de cette définition nous référons à [Bil] ,[ER] .

Relations entre dimension fractale, exposants de Lyapunov, et entropie

Pour tout ce qui concerne ce paragraphe voir [ER] .

Théorème : (Ruelle)

Soit  $(X, T, f)$  un système dynamique . X est de dimension n finie. On suppose que le système possède une mesure ergodique avec support compact. Alors

$$h(\mu, f) \leq \sum_{i=1}^n \max(\lambda_i, 0)$$

Théorème : (Pesin) Avec les mêmes hypothèses que au théorème précédent, on suppose en plus, que le système dynamique possède un attracteur Axiom A. Alors l'inégalité précédente devient une égalité:



$$h(\mu, f) = \sum_{i=1}^n \max(\lambda_i, 0)$$

**Théorème :** (L.S. Young [You])

Soit  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un  $C^2$ -difféomorphisme,  $\mu$  une mesure ergodique borélienne,  $A$  le support de  $\mu$ , et  $h(\mu, f)$  l'entropie topologique du flot. Soit  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$  les coefficients de Lyapunov de ce système, alors

$$\text{DIM}(A) = d_{\text{inf}}(\mu) = d_{\text{cor}}(\mu) = h(\mu, f) (1/\lambda_1 - 1/\lambda_2)$$

Si en plus le système possède un attracteur Axiom A, et si  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ , alors

$h(\mu, f) = \lambda_1$  et donc

$$\text{DIM}(A) = d_{\text{inf}}(\mu) = d_{\text{cor}}(\mu) = 1 + \lambda_1/|\lambda_2|$$

**Conjecture :** (de Kaplan et Yorke, voir [FKYY])

Soit  $(X, T, f)$  un système dynamique.  $X$  est de dimension  $n$  finie. On suppose que le système possède une mesure ergodique  $\mu$  avec support compact. Soit

$\lambda_1 > \dots > \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1} > \dots > \lambda_n$  Alors

$$d_{\text{inf}}(\mu) = k + \sum_{i=1}^k \lambda_i / |\lambda_{k+1}|$$

Cette conjecture n'est pas toujours vraie, pour des contre-exemples voir [ER].

### 3.B5 Quelques conjectures sur la dimension fractale d'un attracteur

Exeptée la dimension de Hausdorff, les dimensions présentées ci-dessus ne sont pas toujours définies (voir le contre-exemple de paragraphe 3A.4). Il y a là un problème théorique très important.

De plus les dimensions dépendent de la trajectoire choisie. Certaines conjectures peuvent être faites à ce sujet :

**Conjecture :** Si  $x$  et  $y$  sont tels que  $\omega(x) = \omega(y)$  alors

$$\forall q \neq 0 \quad d_q \text{ cor}(\mu_x) = d_q \text{ cor}(\mu_y)$$

Sous réserve de la véracité de cette conjecture, on peut donc parler de la dimension de  $\omega(x)$ . En particulier si  $A$  est un attracteur régulier,  $d_q \text{ cor}(\mu_x)$  sera noté  $d_q \text{ cor}(A)$ .

On est aussi souvent tenté de restreindre encore en ne calculant l'intégrale de corrélation que sur un voisinage d'un point de  $A$ . Ceci pose le problème de savoir si la dimension d'une partie de l'attracteur est la même pour chaque partie (lui même relié au problème d'autosimilarité des attracteurs). En ce qui concerne la dimension de capacité, le problème peut être présenté ainsi (une formulation proche existe pour les autres dimensions) : soit  $A$  un attracteur régulier tel que  $\text{DIM}(A)$  existe, soit  $x$  dans  $A$  on pose  $A_x = B(x, \epsilon) \cap A$

-  $\text{DIM}(A_x)$  existe-t-elle ?

- a-t-on  $\text{DIM}(A_x) = \text{DIM}(A)$  ?

Nous conjecturons que la réponse est oui.

### 3.B6 Conjecture de Paladin et Vulpiani (voir [PV])

L'approche de Paladin et Vulpiani de la dimension généralisée avait l'air d'être différente de l'approche de Grassberger. Donc nous avons fait un résumé de cet article. En fait, par rapport à l'article de Grassberger sur les dimensions généralisées [Gra1], ce papier n'apporte aucune conclusion nouvelle. Le lecteur non spécialiste peut sauter ce paragraphe.

Paladin et Vulpiani conjecturent que, si  $d_{q\text{cor}}(A)$  et  $\text{DIM}(A)$  existent, alors

i)  $d_{-1\text{cor}}(A) = \text{DIM}(A)$

ii) Pour  $q$  croissant,  $d_{q\text{cor}}$  est monotone décroissante

Nous résumons et commentons dans la suite le raisonnement de Paladin et Vulpiani pour conjecture i)

Comment un attracteur peut-il avoir une structure fractale? Paladin et Vulpiani proposent un modèle d'un mécanisme, qui serait la cause :

On considère un grand nombre  $M$  de points, uniformément distribués dans une boîte  $B_0 \subset X$  de longueur  $l_0$ . Après un temps  $t_1$  les points de  $B_0$  seront distribués dans  $k_1$  boîtes  $B_1(j)$   $j=1 \dots k_1$  de longueur  $l_1 = l_0/a$   $a > 1$  un réel. A l'instant  $t_{i+1}$  chaque boîte  $B_i(j)$  se fragmente en un nombre  $k_{i+1}(j)$  de boîtes (pouvant différer selon la boîte), de longueur  $l_{i+1} = l_i/a$ . On appelle  $k_i$  le "nombre de fraction". On note  $K_n$  le nombre des boîtes obtenus à temps  $t_n$ .

On suppose, que les nombre de points dans toutes les boîtes provenant de la même boîte d'origine sont égaux. Pour faciliter le calcul, on suppose que les  $K_n$  boîtes ont une distance entre elles supérieure ou égale à  $l_n$ . On suppose, que la mesure  $m$  d'une trajectoire s'approchant de l'attracteur, à une échelle  $l_n$  près, est bien représentée par les boîtes obtenus à temps  $t_n$ . (Les auteurs semblent croire, que cette conjecture est justifié par le théorème érgodique, cela ne semble pas convaincant.) On note

$n_j$  le nombre des points dans la boîte  $j$

Par calcul simple on obtient ,à l'instant  $t_n$

$$n_j = M \prod_{i=1}^n k_{i(j)}^{-1}$$

On a simplifié pour l'indice  $j$ , qui est en vérité différent à chaque instant, dépendant de la suite des boîtes origines. On considère l'intégrale de  $q$ -corrélation

$$C_q(l_n) = \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} (n_j/M)^q = \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} \prod_{i=1}^n (k_{i(j)})^{-q} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^{k_i} (k_{i(j)})^{-q}$$

$$d_q \text{ cor}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(C_q(l_n))}{q \ln(l_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \prod_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^{k_i} (k_{i(j)})^{-q}}{q \ln(l_n)}$$

Pour  $q=-1$  le terme  $\frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^{k_i} k_{i(j)}$  représente la moyenne du nombre de fraction

à l'instant  $t_i$ . Donc

$$K_n = \prod_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^{k_i} k_{i(j)} \quad \text{et}$$

$$d_{-1} \text{ cor}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln K_n}{-\ln(l_n)} = \text{DIM}(A)$$

Le modèle proposé est très heuristique et surement simpliste: dès que le flot est non-linéaire, la forme de l'image d'une boîte est plus compliquée. De plus l'image d'une boîte doit être connexe ce qui contredit une des hypothèses dans le calcul ci-dessus. En conclusion ce modèle n'aboutit pas à plus de résultats que les arguments purement statistiques de Grassberger sur la dimension généralisée.

### Conclusion

Nous venons de présenter cinq définitions, qui sont couramment utilisées pour caractériser la dimensionalité de l'attracteur d'un système dynamique chaotique. Dont 3 définitions de dimension fractale

- la dimension de capacité
- la dimension d'information
- la dimension de corrélation

2 fonctions de dimension

- la fonction de dimension de corrélation
- la fonction de dimension d'information

La question lesquelles de ces définitions seront utiles dans les applications, est ouverte. Les valeurs de ces définitions peuvent être différentes pour le même attracteur. Il existent des attracteurs pour lesquels aucune des ces dimensions n'est définie. Dans la suite on donnera à l'ensemble des cinq définitions le nom "*dimension fractale d'un attracteur*". Il sera alors sous-entendu qu'on sait ou on suppose l'existence d'un attracteur fort, et que ces dimensions et fonctions de dimension sont définies par rapport à la mesure engendrée d'une trajectoire partant de son bassin d'attraction.

La fonction de dimension d'information englobe les trois définitions de dimension fractale. La fonction de dimension de corrélation contient sûrement la dimension de corrélation et la dimension d'information. On conjecture qu'elle contient aussi la dimension de capacité, mais nous n'avons pas pu le démontrer. Ici la fonction de dimension d'information a un avantage.

Mais la fonction de dimension d'information est seulement définie pour l'ensemble des coefficients non-négatifs, tandis que la fonction de dimension de corrélation est définie pour tous les coefficients réels non-nuls.

Nous verrons dans les chapitres suivants, que la fonction de dimension de corrélation offre aussi des avantages au point de vue calcul numérique.



**Chapitre 4**  
**Algorithmique**



## 4. ALGORITHMIQUE

### 4.0. Introduction

Des différents algorithmes de calcul des dimensions fractales ont été proposées [GP,HOR,PV,BP,Tak2] . Un certain nombre de problèmes est commun à tous les algorithmes, nous les décrivons maintenant.

Pour la plupart des exemples des systèmes dynamiques chaotiques, on ne connaît pas la forme géométrique de l'attracteur. La seule possibilité de décrire l'attracteur est de calculer un ensemble d'un grand nombre de points situés sur l'attracteur, nous appelons cet ensemble la *série temporelle* .

Pour calculer cette série, il faut avoir un point de départ, qui est sur l'attracteur, à précision numérique près. Ici on se fie généralement à l'expérience, car le plus souvent on ne sait pas, combien d'itérations il faut pour éliminer tout état transitoire. Grassberger et Kantz [GK] et Grebogi et coll. [GOY] ont observé des états transitoires, qu'on appelle métastable, sur lesquels on peut itérer des milliers et des millions de fois, avant qu'on tombe sur le vrai attracteur.

Dans la pratique souvent on rencontre encore un autre problème: On ne connaît pas la dimension de l'espace des phases. Nous évoquons comme exemple les travaux de Atten et coll. [ACM]. Ils ont fait des expériences physiques sur un écoulement de Raleigh - Bénard, qui a un espace des phases de dimension éventuellement infinie. Ces expériences permettaient d'obtenir la série temporelle d'une variable seulement. De cette série il fallait reconstruire l'espace des phases.

On fait cela en regroupant  $n$  points de la série temporelle dans un vecteur, chaque vecteur est alors un point dans un espace des phases "tentatif" de dimension  $n$ . On calcule une série de  $N$  vecteurs, qui forment une série temporelle. Donnant à chaque vecteur le même poids (= probabilité)  $1 / N$  , on calcule la dimension de corrélation de cette série. (On choisit la dimension de corrélation parce qu'elle semble être la plus facile à calculer) En augmentant la dimension de l'espace des phases  $n$ , la dimension de corrélation ainsi calculée augmente aussi, jusqu'elle atteint, éventuellement, un seuil. Si on peut montrer l'existence de ce seuil, et cela est très difficile en général, on peut conclure, qu'on a alors calculé la dimension fractale de l'attracteur.

Ainsi Atten et coll. ont montré l'existence d'un attracteur de dimension trois environ.

Nous ne reviendrons pas sur ce problème, nous nous restreignons sur le cas d'un espace des phases de dimension finie.

Nous donnons maintenant le plan du chapitre. Après l'introduction de quelques définitions utiles nous présentons l'algorithme de box-counting (= comptage des boîtes). Ensuite nous décrivons de façon détaillée l'algorithme des points centraux. Nous donnerons un résumé de cet algorithme. Enfin nous présentons l'algorithme de Takens de façon détaillé et quelques autres algorithmes de façon succincte.



#### 4.1. Fonctions et courbes de q-corrélation (q-entropie)

Toutes les dimensions fractales d'un attracteur sont définies avec une limite du rayon  $\varepsilon$  vers 0, soit ce le pas de grille de la q-entropie ou le rayon de la q-corrélation. Il y a des difficultés principales de calculer cette limite.

- La précision des nombres réels représentés sur l'ordinateur est limitée.
- Si on a un système continu, l'intégration de la trajectoire avec très grande précision est très coûteuse.
- Représenter la structure de l'attracteur à des échelles très petites nécessite un nombre de points énorme.

Russell et coll. [HOR] et Greenside et coll. [GPSW] ont observé en calculant la dimension de capacité, que si on fait un dessin du logarithme du nombre de boîtes contenant un point de l'attracteur  $A$ , en fonction du pas de grille  $\varepsilon$ , les points approchent une ligne.

Au lieu de calculer directement les fractions  $\ln N_\varepsilon(A) / \ln \varepsilon$ , qui convergent trop lentement, on calcule la pente d'une droite, qui approche bien ces points, par exemple la droite des moindres carrés.

A titre juste Greenside et coll. ont remarqué, que pour un ensemble fractale  $A$  la relation

$$\ln N_\varepsilon(A) = B + \text{DIM}(A) \ln \varepsilon + \Psi(\ln \varepsilon)$$

où  $\Psi$  est une fonction bornée, à petite amplitude

souvent est vérifiée et implique alors l'existence de la dimension de capacité. L'analogie est vraie pour le calcul de toutes les dimensions fractales d'un attracteur. Motivé ainsi nous introduisons les définitions suivantes.

**Définition :** La *fonction de q-entropie* (à la famille des grilles  $\{G(\varepsilon)\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+}$ ) est la fonction de la quantité  $I_q(\varepsilon, G(\varepsilon), \mu)$  en fonction de  $\ln \varepsilon$ .

Dans la suite on ne précisera pas le choix des grilles et parle de la fonction de q-entropie tout court.

**Définition :** La *courbe de q-entropie* est l'ensemble des points  $(I_q^*(\varepsilon_k, \mu), \ln \varepsilon_k)$  pour une suite de pas  $\{\varepsilon_k\}_{k=1, \dots, L}$  où  $I_q^*(\varepsilon_k, \mu)$  dénote une valeur pour  $I_q(\varepsilon_k, \mu)$  calculée numériquement.

Comme dans la définition précédente on ne précisera pas le choix des grilles, bien qu'il puisse influencer sur la courbe.

Dans la suite toutes les quantités avec un astérisque sont des valeurs calculées de façon numérique ou des estimateurs au sens statistique.

**Définition :** La fonction de  $q$ -corrélation est la fonction de la quantité  $\ln C_q(\varepsilon, \mu)$  en fonction de  $\ln \varepsilon$ .

**Définition :** La courbe de  $q$ -corrélation est l'ensemble des points  $(\ln C_q^*(\varepsilon_k, \mu), \ln \varepsilon_k)$  pour une suite de rayons  $\{\varepsilon_k\}_{k=1, \dots, L}$ . Nous appelons aussi courbe de capacité la courbe de  $-1$ -corrélation. Voir paragraphe 4.4.1. pour la définition (analogue) de courbe d'entropie (à ne pas confondre avec la courbe de  $q$ -entropie).

Donc les données de tout algorithme de calcul des dimensions fractales sont

- 1) la dimension  $n$  de l'espace des phases
- 2) une série temporelle  $\{x_i\}_{i=1, \dots, N}$ , où  $x_i$  dénote des points de l'espace des phases. Les coordonnées de ces points sont réels ou entiers.
- 3) la longueur  $N$  de cette série temporelle.

La série temporelle contient des points sur l'attracteur. Si on donne à chacun des  $N$  points le poids (= probabilité)  $1/N$ , on approche la mesure d'une trajectoire, qui approche l'attracteur. Du moins c'est ce qu'on espère.

La série temporelle peut être remplacée par un point départ de la trajectoire et une procédure qui permet de calculer rapidement tous les points suivants de la série temporelle.

## 4.2. Quelques exemples d'un attracteur étrange

Avant de décrire les différents algorithmes nous présentons quelques exemples qu'on retrouve fréquemment dans la littérature, pour mieux définir le problème.

### Attracteur de Feigenbaum (voir chapitre 1)

L'itération

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1-x_n) \quad \lambda=3.5700\dots$$

admet un attracteur étrange, que nous appelons "Attracteur de Feigenbaum". Pour cet attracteur les valeurs de trois dimensions fractales sont connus.

	valeur théorique	nos résultats
$\text{DIM}(A)$	0.538...	0.58 ( pour $d_{-1 \text{ cor}}(\mu)$ )
$d_{\text{inf}}(\mu)$	0.5170...	0.53
$d_{\text{cor}}(\mu)$	$>0.4926$ $< 0.5024$	0.50

**Attracteur de Hénon**

L'itération suivante, introduite par Hénon (figure 1), est souvent considérée comme un exemple type d'un attracteur étrange

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= -a x_n^2 + 1 + y_n \\
 y_{n+1} &= b x_n
 \end{aligned}
 \qquad
 a = 1.4, \quad b = 0.3$$

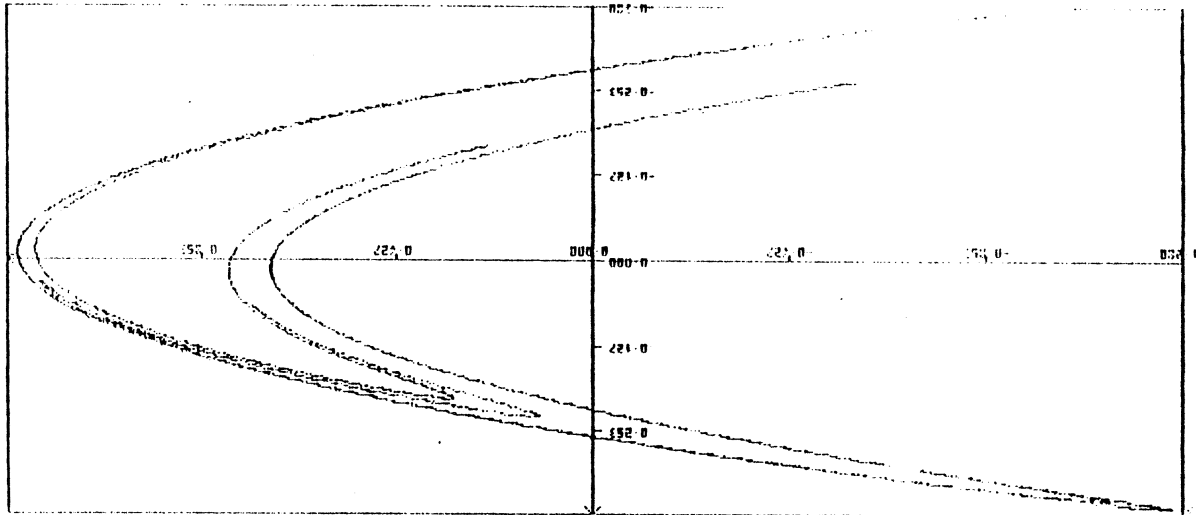


Figure 1: Attracteur de Hénon

On ne connaît pas la valeur exacte de la dimension fractale, on ne sait même pas s'il s'agit d'un attracteur étrange. On ne peut comparer qu'avec des résultats numériques, obtenus par d'autres auteurs.

N	m	d <sub>-1cor</sub>	d <sub>inf</sub>	d <sub>cor</sub>	t <sub>dim</sub>
nos résultats		1.28	1.26	1.22	80min
ref:[GP], [Gra],[Gra1]		1.28	1.26	1.21	.

**Attracteur de Lorenz: Exemple d'un système dynamiques à temps continu**

Dans le cas d'un système continu il faut un espace des phases de dimension supérieur ou égale à 3 pour avoir un attracteur chaotique. L'attracteur de Lorenz est le premier (1963) et le plus célèbre exemple d'un système dynamique chaotique continu. (figure 2) Les équations sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
 x' &= \sigma (y-x) \\
 y' &= -y+rx-xz; \quad \sigma = 10 \quad r = 28 \quad b = 8/3 \\
 z' &= xy-bz
 \end{aligned}$$

Il n'est pas possible de suivre précisément et longtemps la trajectoire d'un système chaotique, parce que les erreurs de calcul sont amplifiées de façon exponentielle. Mais on peut espérer, que le comportement limite de la trajectoire, qu'on a calculée de façon numérique, est le même, que celui d'une trajectoire mathématique.

On suppose qu'il existe un attracteur étrange, mais rien n'est démontré.

Les dimensions de l'attracteur, selon les observations numériques, sont proches de deux. Les difficultés de calcul sont considérables pour cet exemple, les limites de certains algorithmes déviennent apparent, voir p.e. Greenside et coll. [GPSW].

	$d_{-1 \text{ cor}}$	DIM	$d_{\text{inf}}$	$d_{\text{cor}}$
Nos résultats	1.95		1.90	2.03
Références [GP],[Gul],[PV]	2.05	1.98		2.05

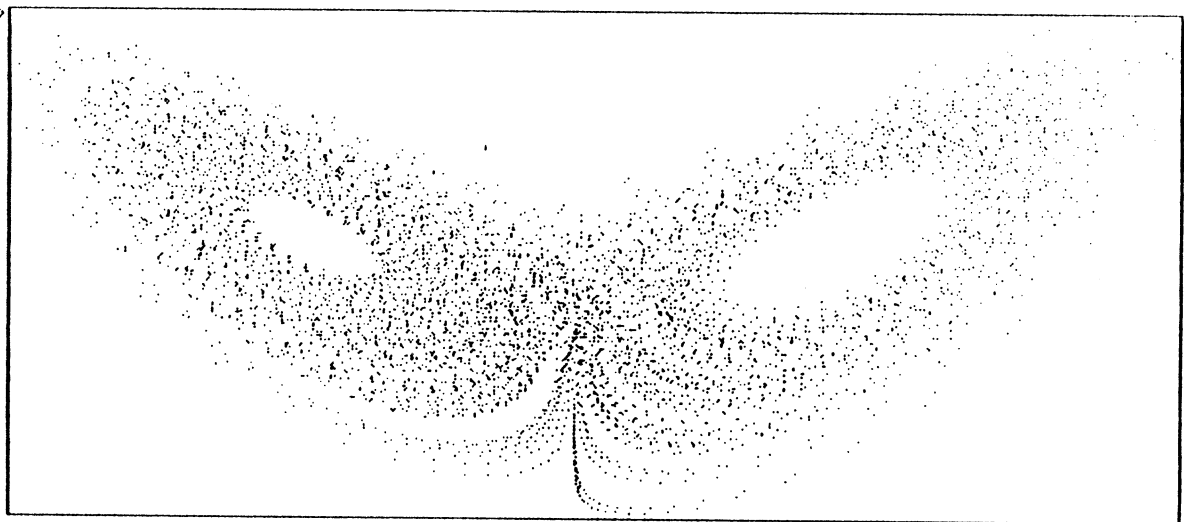


Figure 2: Attracteur de Lorenz: projection sur le plan x-z

### 4.3. Algorithmes de Boxcounting

L'algorithme de boxcounting sert à calculer la fonction de dimension d'information. L'idée de cet algorithme est due à Russell, Hanson et Ott [HOR], qui ont seulement calculé la dimension de capacité. La version, que nous décrivons ci-dessous, est due à Grassberger [Gra2].

Soit  $\mathbb{R}^n$  l'espace de phases, dont alors la dimension est fixée. Nous supposons, qu'on dispose d'une série temporelle  $\{x_i\}_{i=1, \dots, N}$  dont on connaît les bornes. On peut déterminer ces bornes par exemple en enregistrant le minimum et le maximum de chaque variable de la série temporelle lors de son enregistrement.

D'abord on fait une *transformation de coordonnées*, qui fait que la différence entre minimum et maximum de chaque coordonnée est égale, les boîtes ont la même longueur dans chaque direction. Selon la proposition/ conjecture de paragraphe 3A.5 cette transformation ne change pas les dimensions.

Puis on recouvre la partie bornée de l'espace de phases, qui contient la trajectoire, par une *grille*  $G$ . Les boîtes de cette grille ont la même longueur  $\epsilon$  dans chaque direction.

Puis on peut, en principe, procéder de la façon suivante. On définit un tableau, qui contient un compteur pour chaque boîte de la grille. Pour chaque point de la série temporelle, on calcule, dans quelle boîte il tombe, puis on incrémente le compteur. Lorsque on peut considérer la grille comme un système de coordonnées entiers, le calcul de la boîte dans laquelle un point est contenu, est une transformation en coordonnées entiers, c'est donc une opération très simple.

Soit  $n_i$  le nombre de points dans la boîte  $B_i$ . On obtient une approximation de la mesure de chaque boîte

$$\tilde{\mu}(B_i) = \frac{n_i}{N}$$

Maintenant on estime la  $q$ -entropie

$$I_q(\epsilon, \mu) = \frac{\ln \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \mu(B_i)^q}{q-1}$$

par

$$I_q(\epsilon, \tilde{\mu}) = \frac{\ln \sum_{i=1}^{N_\epsilon^*} \left(\frac{n_i}{N}\right)^q}{q-1} = \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^{N_\epsilon^*} n_i^q\right) - \ln N^q}{q-1}$$

où  $N_\epsilon^*$  est le nombre de boîtes, qui contiennent au moins un point de la série temporelle.

On estime l'entropie

$$H_\epsilon(\mu) = \sum_{i=1}^{N_\epsilon} p_i \ln p_i$$

par

$$H_{\varepsilon}(\tilde{\mu}) = \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}^*} \frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}^*} n_i \ln n_i}{N} - \ln N$$

Ainsi on évite de diviser chaque compteur non-nulle par  $N$ .

On évite de répéter ce calcul pour des pas différents. Pour cela on définit au départ une série de pas  $\{\varepsilon_k\}_{k=1, \dots, L}$  décroissante, de telle manière, que tous les pas sont des multiples du plus petit pas  $\varepsilon_L$ . Puis on fait le calcul des mesures des boîtes de la grille la plus fine, comme nous l'avons décrit ci-dessus. Pour calculer les mesures des boîtes des grilles plus grossières, il suffit d'additionner les compteurs des boîtes de la grille la plus fine, qui sont contenus dans la même boîte de la grille plus grossière. (Ce détail n'a pas été explicité par Grassberger, une description de cette procédure en langage algorithmique se trouve dans la thèse de N.Akroune [Akr]).

Pour estimer la dimension de  $q$ -entropie on utilise la pente d'une droite qui approche la courbe de la  $q$ -entropie (voir paragraphe 4.1.). La méthode d'approximation habituellement choisie est la méthode des moindres carrées.

Sous cette forme (sauf la transformation des coordonnées) l'algorithme a été utilisé par N.Akroune [Akr] pour calculer la dimension de capacité et la dimension d'information de l'attracteur de Hénon, avec des résultats de qualité satisfaisante (voir paragraphe 6A.5)

En définissant un tableau des compteurs pour toutes les boîtes d'une grille, qui couvre l'attracteur, on réserve beaucoup d'espace mémoire pour des boîtes, qui sont vides. Or le grand besoin d'espace mémoire limite la précision de cet algorithme (voir paragraphe 5.2.), il importe de l'économiser.

Une solution consiste en stockant les boîtes, qui contiennent au moins un point de la série temporelle, avec leurs compteurs, dans une liste. Pour chaque point on vérifie, si la boîte qu'il occupe, est déjà dans la liste. Si oui, on incrémente le compteur, sinon, on rajoute la boîte dans la liste. Cette méthode a été utilisée par Hansen et coll. [HOR] (sans compteurs), et peut-être aussi par Greenside et coll. [GPSW], qui n'explicitent pas leur algorithme dans ce point. Malheureusement les recherches dans la liste des boîtes rendent cet algorithme très lent.

Grassberger a introduit une autre méthode pour réduire le besoin d'espace mémoire de la grille. L'attracteur est d'abord recouvert par une grille grossière. Avant de définir la grille la plus fine, on fait un calcul court pour estimer le nombre des boîtes de cette grille grossière, qui ne sont pas vides. Soit ce nombre estimé à  $N_0$ . Ces boîtes sont numérotées en même temps. Puis on définit une grille fine, en réservant seulement de l'espace mémoire pour les boîtes de cette grille, qui sont contenus dans les premiers  $N_0$  boîtes de la grille plus grossière.

Quelque soit la version de l'algorithme utilisée, le besoin d'espace mémoire croît exponentiellement avec la dimension de l'attracteur. A l'état technique actuel, pour des

attracteurs de dimension supérieur à trois cet algorithme devient inutilisable. (voir paragraphe 5.2.)

#### 4.4. Algorithme des points centraux

L'algorithme des points centraux sert à calculer la fonction de dimension de corrélation. Les idées essentielles de cet algorithme sont dues la première à Grassberger et Procaccia [GP] et la deuxième à Paladin et Vulpiani [PV]. Nous avons rajouté des précisions et modifications dans le détail. Nous présentons l'algorithme avec toutes les possibilités de modification, qui nous semblent importants, en justifiant chaque pas. A la fin du paragraphe nous donnons comme résumé l'algorithme tel que nous l'avons retenu pour nos calculs.

##### 4.4.1. Le plan de l'algorithme

On dispose d'une série temporelle  $\{x_i\}_{i=1, \dots, N}$ , contenue dans une partie d'espace de phases  $\mathbb{R}^n$  bornée.

On se fixe une série décroissante de rayons  $\{\varepsilon_k\}_{k=1, \dots, L}$  qui tend vers zéro. Nous reviendrons sur le choix de cette série dans la suite.

On approche les intégrales de corrélation pour cette série de rayons

$$C_q(\varepsilon_k, \mu) = \int_X \mu(B(y, \varepsilon_k))^q d\mu(y)$$

par

$$C_q^*(\varepsilon_k, \mu) = \int_X \tilde{\mu}(B(y, \varepsilon_k))^q d\hat{\mu}(y)$$

Pour obtenir l'approximation  $\hat{\mu}$  de la mesure  $\mu$ , on choisit un nombre de points  $y$  assez grand, et on calcule la mesure des boîtes centrées autour d'eux. Nous appelons ces points *points centraux*. Soit  $m$  le nombre des points centraux. On estime l'intégrale de corrélation par

$$= \sum_{j=1}^m \tilde{\mu}(B(y_j, \varepsilon_k))^q / m$$

Donc l'approximation  $\hat{\mu}$  est une mesure ponctuelle avec le poids  $1 / m$  sur chaque point.

En principe on pourrait calculer la dimension d'information en calculant les dimensions de  $q$ -corrélation et en laissant tendre le coefficient  $q$  vers 1. (voir proposition 4 de paragraphe 3B.3.3.) Nous avons choisi une autre méthode. On remplace l'entropie par

$$H_\varepsilon(\mu) = \int_X \ln \mu(B(y, \varepsilon_k)) d\mu(y)$$

Et cette quantité est estimée de façon analogue

$$H_\varepsilon^*(\mu) = \int_X \ln \tilde{\mu}(B(y, \varepsilon_k)) d\hat{\mu}(y)$$

Nous appelons *courbe d'entropie (par l'algorithme des points centraux)* les valeurs  $H_\varepsilon^*(\mu)$  en fonction de  $\ln \varepsilon$ .

Il existe deux méthodes pour obtenir l'approximation  $\tilde{\mu}$  de la mesure d'une boîte de rayon  $\varepsilon_k$  autour d'un point  $y_j$  donné.

#### Première méthode: les compteurs des boules [PV]

On compte les points de la série temporelle dont la distance à  $y_j$  est inférieure à  $\varepsilon_k$  et on divise par leur nombre total.

$$\tilde{\mu}(B(y_j, \varepsilon_k)) = \frac{\sum_{i=1, i \neq j}^N l(x_i, y_j, \varepsilon_k)}{(N-1)}$$

$$\text{où } l(x_i, y_j, \varepsilon_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x_i - y_j\| \leq \varepsilon_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans la suite on notera  $n_{j,k}$  le nombre de points dans la boule  $B(y_j, \varepsilon_k)$ . Donc

$$n_{j,k} = (N-1) \tilde{\mu}(B(y_j, \varepsilon_k))$$

#### Deuxième méthode: les temps de retour [Gra1]

Partant d'un point central  $y_j$  on compte le nombre d'itérations  $T$  avant d'obtenir un point qui a une distance inférieure à  $\varepsilon_k$ . Ainsi on obtient

$$\tilde{\mu}(B(y_j, \varepsilon_k)) = 1 / T$$

Pour justifier ce calcul, il faut partir de l'hypothèse, que les points itérés sont des variables aléatoires indépendants. Bien sur cette hypothèse est fautive, mais pour l'attracteur de Hénon cela n'a pas empêché Grassberger d'avoir des résultats conformes à ceux obtenus par d'autres algorithmes (voir paragraphe 6A.5.).

#### Accélérer le calcul de la somme des compteurs

Pour chaque coefficient  $q$  pour lequel on veut calculer la dimension, on fait pour chaque rayon  $\varepsilon_k$  la somme des compteurs  $n_{j,k}$  sur les points centraux. On estime l'intégrale de  $q$ -corrélation par



$$C_q^*(\epsilon_k, \tilde{\mu}) = \sum_{j=1}^m \frac{\left(\frac{n_{j,k}}{N-1}\right)^q}{m} = \frac{\sum_{j=1}^m n_{j,k}^q}{(N-1)^q m}$$

De façon analogue on calcule

$$H_\epsilon^*(\tilde{\mu}) = \frac{\sum_{j=1}^m \ln n_{j,k}}{m} - \ln(N-1)$$

Ainsi on fait une division de la somme au lieu de faire une division de chaque compteur.

#### Calcul de la dimension à partir du graphe de q-corrélation

Pour approcher la courbe de q-corrélation, on utilise habituellement la méthode des moindres carrés. Lorsque en général on n'a pas de connaissances précises sur la fonction de q-corrélation, nous n'avons pas de meilleure proposition à faire.

#### 4.4.2. Détails de cet algorithme

##### Choix des points centraux

Les points centraux devraient être répartis sur l'attracteur selon la mesure  $\mu_x$  qu'on veut approcher. Or deux points consécutifs de la série temporelle sont fortement corrélés. Pour éviter, autant que possible les corrélations entre les points centraux, nous avons choisi le procédé suivant: On découpe la série temporelle en des *intervalles*, et de chaque intervalle on tire par une procédure de *hasard*, un point central. Nous utilisons une procédure de hasard pour éviter de corrélations accrues dans le cas d'un flot périodique. Dans le cas d'un flot chaotique l'utilisation du hasard n'est pas important, si les points sont assez éloignés dans la série temporelle, à cause de la sensibilité aux conditions initiales toute corrélation entre deux points est perdue.

On peut aussi choisir des points centraux, qui ne sont pas contenus dans la série temporelle. Quand la trajectoire est suffisamment proche de l'attracteur, on enrégistre les points centraux, avant le calcul de la série temporelle. Dans ce cas nous avons observé des précautions analogues

- dans le cas d'un système discret on itère un nombre variable de fois, avant d'enregistrer un point central. Le nombre d'itérations est calculé avec la valeur d'une fonction de pseudohasard.
- dans le cas d'un système continu on suit la trajectoire pendant un intervalle de temps, qui est recalculé avec la valeur d'une fonction de pseudohasard pour chaque point central.

Après le dernier point central on commence à enrégistrer la série temporelle.

Pour accélérer le calcul et économiser de l'espace mémoire on transforme les coordonnées des points centraux en coordonnées entières

Calculer les mesures des boules autour des points centraux

Soient  $\{y_j\}_{j=1,\dots,m}$  les points centraux

$\{\varepsilon_k\}_{k=1,\dots,L}$  les rayons

On définit un tableau de compteurs

$\{c_{j,k}\}_{j=1,\dots,m \ k=1,\dots,L}$

qui contient le nombre de points, dont la distance au point central  $x_j$  est inférieure égal à  $\varepsilon_k$  et supérieur à  $\varepsilon_{k+1}$

Pour chaque point de la série temporelle  $x_i$  on calcule sa distance à chacun des points centraux  $y_j$ . Si la distance est inférieure au rayon maximal  $\varepsilon_1$ , on calcule le plus grand rayon auquel la distance est supérieure. C'est à dire on cherche  $k$  tel que

$$\varepsilon_k \geq \text{dist}(x_i, x_j) > \varepsilon_{k+1}$$

On incrémente le compteur  $c_{j,k}$  correspondant.

Pour obtenir le nombre de points, dont la distance au point central  $x_j \leq \varepsilon_k$ , on fait l'addition

$$n_{j,k} = \sum_{k'=k}^L c_{j,k'}$$

Il y a donc  $m \cdot N$  distances à calculer et à traiter. C'est le pas qui consomme le plus de temps de calcul et qui donc doit être choisi avec soin.

D'abord on transforme les coordonnées de chaque point de la série temporelle en coordonnées entiers, le système de coordonnées doit être le même que pour les points centraux.

La rapidité du calcul de la *distance* dépend du choix de la norme de l'espace des phases. Nous avons vu dans paragraphe 3.A.2 que la valeur de la dimension de  $q$ -corrélacion est invariante pour toute classe de normes équivalentes.

Donc, au lieu de choisir la norme euclidienne (comme l'a fait Grassberger[Gra1]), on choisit la norme pour laquelle le calcul de la distance est la plus rapide. Cela peut être la *1-norme* (somme des différences des coordonnées), c'est la solution que nous avons choisi, ou la  *$\infty$ -norme* (maximum des différences des coordonnées), que ont utilisée Atten et coll.[ACM]. Il dépend de l'ordinateur laquelle des normes est la plus rapide à exécuter.

Si la différence de la première coordonnée de deux points, dont on calcule la distance, est supérieure au plus grand rayon  $\varepsilon_1$ , on sait déjà, que aucun compteur ne sera augmenté après le calcul de cette distance, et donc on arrête le calcul de la distance.

La recherche du plus grand rayon auquel la distance est supérieure

Pour trouver le plus grand rayon auquel la distance est supérieure, il existe plusieurs possibilités. Le résultat est bien sur le même pour chacune de ces méthodes, mais l'économie de temps d'exécution par un bon choix de la méthode peut être importante.

1) La comparaison "directe"

On stocke la série de rayons dans un vecteur. Pour chaque distance calculée on la compare d'abord avec le plus grand rayon, puis avec le deuxième rayon, et ainsi de suite jusqu'à obtenir un rayon qui est inférieur à la distance. On a intérêt à commencer la comparaison par le plus grand rayon et non par le plus petit, parce que la plupart des distances sont comparable aux plus grands rayons.

2) La comparaison avec des rayons, qui sont des puissances de deux

On peut éviter de stocker les rayons dans un vecteur, on stocke seulement le plus grand rayon. Si la distance est inférieure à ce rayon, on divise le rayon par deux et obtient ainsi le deuxième rayon. On compare avec ce rayon, si la distance est toujours inférieure, on divise le rayon par deux et ainsi de suite. Il faut retenir le nombre des divisions du rayon par deux. La division d'un entier par deux peut être plus rapide que la lecture d'un rayon dans un vecteur.

3) Repérer le premier bit non-nul de la distance [GP]

Certains langages de programmation permettent de repérer le premier bit non-nulle d'un entier rapidement. Par exemple on fait un décalage vers la gauche de l'entier jusqu'à un 1 apparait à la première place. Il suffit de retenir le nombre de shifts exécutés.

4) La comparaison accélérée

Supposons qu'on a choisi la série de rayons tel que  $\epsilon_k/\epsilon_{k+1} = \Delta_\epsilon$  est une constante proche de 1 et que la dimension de l'attracteur est inférieure à 1. Si on suit la méthode de la comparaison directe il faut comparer en moyenne beaucoup de rayons avant de trouver le bon. On a donc intérêt à sauter un nombre de rayons fixe  $s$  entre deux comparaisons. Ainsi on trouve

$$\epsilon_{r-s} \geq \text{dist}(x_i, x_j) > \epsilon_{(r+1)s} \quad r, s \in \mathbb{N}$$

Si  $s$  a été choisi comme une puissance de 2, on peut continuer à partir de ce point par une méthode de bisection, c'est à dire on compare la distance avec  $\epsilon_{(r+1/2)s}$  e.t.c.

On peut aussi continuer par une comparaison descendante un par un à partir du rayon  $\epsilon_{(r+1)s-1}$

Choix de la longueur du pas de comparaison

On minimise le nombre de comparaisons nécessaires en moyenne pour trouver le rayon, tel que

$$\epsilon_k \geq \text{dist}(x_i, x_j) > \epsilon_{k+1}$$

Soit  $\text{comp}_1$  le nombre de comparaisons exécutées en moyenne jusqu'à obtenir  $r$  tel que  $\varepsilon_{r-s} \geq \text{dist}(x_i, x_j) > \varepsilon_{(r+1)s}$   $r, s \in \mathbb{N}$

Soit  $p$  la probabilité que  $\text{dist} < \varepsilon_{(r+1)s}$  si on sait que  $\text{dist} < \varepsilon_{rs}$ . Alors

$$\text{comp}_1 = 1/(1-p)$$

où

$$p = \frac{C(\varepsilon_{(p+1)s}, \mu)}{C(\varepsilon_{ps}, \mu)} = \frac{C(\Delta_\varepsilon^{-(p+1)s}, \mu)}{C(\Delta_\varepsilon^{-ps}, \mu)} = (\Delta_\varepsilon^s)^{-d_{\text{cor}}(\mu)}$$

On suppose, qu'on calcule le plus grand rayon inférieur à la distance par une méthode de bisection. Soit  $\text{comp}_2$  le nombre de comparaisons nécessaires dans cette étape.

Alors

$$\text{comp}_2 = \log_2 s$$

Le but est de minimiser la somme  $\text{comp}_1 + \text{comp}_2$ . Pour estimer  $s$  il faut entrer une estimation préalable de la dimension de corrélation, qu'on note  $\text{dim}$ .

$$\min = 1/(1-p) + \log_2 s$$

$$0 = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{1-p} + \log_2 s \right)$$

$$= -\frac{d}{ds} p \frac{1}{(1-p)^2} + \frac{1}{s \ln 2}$$

$$\frac{d}{ds} p = \frac{d}{ds} \Delta_\varepsilon^{-\text{dim} s} = -\text{dim} \ln \Delta_\varepsilon \Delta_\varepsilon^{-\text{dim} s}$$

Le résultat est

$$(1) \quad 0 = -\text{dim} \ln \Delta_\varepsilon \frac{\Delta_\varepsilon^{-\text{dim} s}}{(1 - \Delta_\varepsilon^{-\text{dim} s})^2} + \frac{1}{s \ln 2}$$

Cette équation peut être résolue par une méthode itérative.

Valeurs de  $s$  en fonction de  $\Delta_\varepsilon$  obtenus par cette méthode

$$\Delta_\varepsilon = \sqrt[4]{2^7}$$

nom de l'attracteur	dimension	$s$ (equ.1)	$s$ <sup>1)</sup>	nombre d'itérations	nombre d'itérations méthode directe
Attracteur cantorien (tiers médian)	0.63	6.75	8		
Hénon	1.2	3.54	4		
Lorenz	2.0	2.13	2		

$$\Delta_\varepsilon = 2$$

nom de l'attracteur	dimension	$s$ (equ.1)	$s$ <sup>1)</sup>	nombre d'itérations	nombre d'itérations méthode directe
Attracteur cantorien (tiers médian)	0.63	1.54	2		
Hénon	1.2	0.8	1		
Lorenz	2.0	0.49	1		

1) longueur de pas  $s$  pour lequel le nombre de comparaisons est minimal, si  $s$  doit être une puissance de 2.

### Conclusion :

La comparaison accélérée est avantageuse, si l'écart entre deux rayons consécutifs est petit, ou si la dimension de l'attracteur est très petite. Si on choisit  $\Delta_\varepsilon = 2$ , la comparaison accélérée a peu d'intérêt.

### Le choix des rayons

Nous avons laissé ouvert jusqu'ici le problème du choix de la série de rayons pour lesquels on calcule les intégrales de  $q$ -corrélation. Ce choix est influencé par des expériences numériques. On aimerait avoir une série de rayons qui approche zéro autant que possible, et qui en même temps recouvre un domaine large de rayons. D'autre part les mesures des boules très petites, et donc de mesure très faible, sont très influencées par des fluctuations statistiques.

Il est naturel de choisir la suite  $\{\varepsilon_k\}_{k=1, \dots, L}$  tel que la fraction  $\Delta_\varepsilon = \varepsilon_k / \varepsilon_{k+1}$  est une constante.

Grassberger [Gra1] a utilisé une série de rayons, tel que  $\Delta_\varepsilon = 2$  et, pour l'attracteur de Hénon,  $\varepsilon_1 = 2^{-4}$ ,  $\varepsilon_L = 2^{-12}$ .

On pourrait avoir l'idée de choisir la suite  $\{\varepsilon_k\}$  tel que  $\varepsilon_k = (k-L+1) \varepsilon_L$ . La fraction  $\Delta_\varepsilon$  de cette suite n'est pas constante.

Nous avons choisi  $\Delta_\varepsilon$  une racine de 2, le plus souvent  $4\sqrt{2}$ . Cette valeur permet un dessin assez précis de la courbe de corrélation, tout en restant dans les limites de l'espace mémoire imposé par le micro-ordinateur utilisé (voir paragraphe 5.2.1).

Si on n'a pas d'informations préalables sur la structure de l'attracteur, on choisit le plus grand rayon proche de la taille de l'attracteur. On choisit, au départ du calcul, le plus petit rayon le plus petit possible, en respectant deux limitations :

- les points de la série temporelle sont en coordonnées entiers. Pour des rayons très petits on a une erreur dans le calcul de la distance, causée par cette discrétisation. Nous avons choisi 8 comme plus petit rayon, exprimé en coordonnées entiers. Cette limitation peut être sensible, si les entiers sont de simple longueur.
- la limitation imposée par l'espace mémoire.

On calcule alors les quantités  $n_{j,k}$  (nombre de points de la série temporelle, ayant une distance inférieure à  $\varepsilon_k$  du point central  $y_j$ ).

On rappelle que pour calculer l'intégrale de q-corrélation du rayon  $\varepsilon_k$  on fait la somme

$$\sum_{j=1}^m n_{j,k}^q$$

Pour  $q > 0$  on peut alors calculer l'intégrale de q-corrélation pour tous les rayons.

Pour  $q < 0$  cette somme n'est pas définie s'il y a un nombre  $n_{j,k}$  qui égale zéro. Donc on ne calcule l'intégrale de q-corrélation que pour les rayons où tous les  $n_{j,k}$  sont positifs.

Dans le calcul de l'entropie, on fait la somme

$$\sum_{j=1}^m n_{j,k} \ln n_{j,k}$$

qui également n'est pas définie, s'il y a un nombre  $n_{j,k}$  qui égale zéro.

Ainsi on obtient pour tout coefficient  $q$  auquel on s'intéresse, une courbe de corrélation. De cette courbe on écarte, avant le calcul de la droite des moindres carrées, les valeurs des intégrales de corrélation des rayons trop grands et des rayons trop petits. Actuellement aucune théorie statistique sur la question, comment décider, quels valeurs il faut écarter, n'existe. Pour les grands rayons nous décidons à l'oeil nu, ayant dessiné la courbe de q-corrélation. Quant aux rayons petits, pour tout coefficient  $q$ , nous enlevons ceux, pour lesquels le nombre des distances inférieure au rayon, sommé sur tous les points centraux, a été inférieur à 50. Nous revenons sur la question, en ce qui concerne les petits rayons, au paragraphe 5.1.

Dans la suite

$\varepsilon_L$  est le plus petit rayon utilisé pour le calcul des dimensions de q-corrélation si  $q$

est négatif

$\varepsilon_L +$  est le plus petit rayon utilisé pour le calcul des dimensions de q-corrélation si q est positif

### La méthode de Grassberger et Procaccia

Si on se limite au calcul de la dimension de corrélation, on n'a pas besoin de compteurs séparés pour chaque point central, on définit donc un compteur pour l'intégrale de corrélation à chaque rayon.

Cette économie d'espace mémoire permet d'augmenter le nombre de points centraux. Dans la version originale de cet algorithme (voir [GP]) tous les points de la série temporelle sont considérés comme points centraux. Il suffit de calculer les distances de toutes les paires de points  $(x_i, x_j) \ i < j$ .

#### 4.4.3. Résumé de l'algorithme

Supposons, qu'on dispose d'une série temporelle  $\{x_i\}_{i=1, \dots, N}$ .

i) D'abord on tire une série de points centraux. Si le calcul de la série temporelle est coûteux (c'est par exemple le cas si on calcule les points d'un plan de section), on choisit les points parmi les points de la série temporelle. Sinon on calcule les points centraux avant d'enregistrer la série temporelle.

Dans tous les cas nous utilisons une fonction de hasard pour calculer le délai de temps d'intégration de la trajectoire ou le nombre d'itérations entre deux points centraux successives. Comme fonction d'hasard nous utilisons la fonction  $f(x) = ax \bmod 1$ , où  $a=3.897$ .

Il faut entrer une valeur de  $x$  pour le premier appel de la fonction. Cet hasard (il s'agit, bien sûr, d'un pseudo-hasard) a l'avantage d'être réproductible, ce qui peut être utile, si on veut comparer deux algorithmes différents.

ii) Pour le calcul des distances nous avons choisi la 1-norme. On transforme les coordonnées des points de la série temporelle et des points centraux en coordonnées entiers. Ces coordonnées sont choisies tel que la différence entre minimum et maximum de chaque coordonnée est de

$$\text{MAXINT} / n$$

où MAXINT est l'entier maximal (32767, si on a des entiers de simple longueur)

$n$  est la dimension de l'espace des phases.

iii) On définit une série décroissante de rayons  $\{\varepsilon_k\}_{k=1, \dots, L}$ , tel que  $\Delta_\varepsilon = \varepsilon_k / \varepsilon_{k+1}$ . Les rayons sont également transformés en coordonnées entiers. Le plus souvent nous avons choisi le rayon  $\varepsilon_1 = \text{MAXINT} / 2$

iv) Les points centraux sont contenus dans un tableau, pour avoir un accès rapide pendant le calcul. Les points de la série temporelle peuvent être contenus dans un

fichier ou être calculé directement pendant l'exécution du programme. Dès que un point de la série temporelle est lu du fichier, où calculé, on calcule sa distance à tous les points centraux.

Si une distance est inférieure au rayon  $\varepsilon_1$ , on calcule  $k$  tel que  $\varepsilon_k$  tel que

$\varepsilon_k \leq |x_i - x_j| \leq \varepsilon_{k+1}$ . On incrémente le compteur correspondant  $c_{j,k}$ .

v) Si les points centraux sont choisis parmi les points de la série temporelle, en calculant la distance d'un point de la série temporelle à tous les points centraux, il arrive, une fois pour chaque point central, que on calcule la distance entre le point et lui-même. Donc à la fin du calcul de tous les distances on en tient compte en diminuant le compteur  $c_{j,j}$  de la plus petite distance pour chaque point central par un.

Après le calcul de tous les distances, pour obtenir le nombre de points dans la boule  $B(y_j, \varepsilon_k)$  on obtient

$$n_{j,k} = \sum_{k'=k}^L c_{j,k'}$$

vi) pour chaque coefficient  $q$  auquel on s'intéresse, on calcule les valeurs des intégrales de  $q$ -corrélation et de l'entropie de la façon décrite ci-dessus (voir le paragraphe "plan de l'algorithme"), en respectant les restrictions pour les petits rayons, comme nous l'avons indiqué dans la description détaillée de l'algorithme.

On dessine la courbe de  $q$ -corrélation et on choisit le domaine de rayons, qu'on va utiliser pour le calcul de la dimension de  $q$ -corrélation. Puis on calcule la droite des moindres carrés, dont la pente, divisée par  $q$ , est la valeur de la dimension.

#### 4.4.4. Deux idées pour accélérer encore l'algorithme des points centraux

Nous n'avons pas programmé les méthodes présentés dans ce chapitre.

L'intégrale de  $q$ -corrélation est plus rapidement approché pour des grands rayons que pour des petits rayons (voir les résultats numériques de paragraphe 6A.5.2.) On pourrait alors arrêter le calcul des intégrales de  $q$ -corrélation après le calcul des distances pour quelques milliers de points de la série temporelle pour les grands rayons. Pour le reste de la série temporelle on choisit le plus grand rayon plus petit, donc pour la plupart des distances calculés on n'aura plus à chercher le plus grand rayon, auquel la distance est supérieure. La recherche du rayon, une fois que la distance est calculée, consomme à peu près autant de temps de calcul, que le calcul de la distance. Donc cette méthode devrait permettre de diviser *par deux* le temps de calcul, si la série temporelle est longue.

Si le plus grand rayon est petit par rapport au diamètre de l'attracteur, on peut éviter de calculer tous les distances, si on fait un *préconditionnement* des points centraux. On couvre l'attracteur avec une grille. Le pas de la grille est choisi égal au plus grand rayon. Puis on fait un tri des points centraux. Pour chaque boîte de la grille on aura une liste des points centraux contenus dans cette boîte. Pour chaque point de



la série temporelle on calcule d'abord, dans quelle boîte de la grille il est contenu. Cela revient à une transformation en coordonnées entiers et est donc une procédure rapide. Puis on calcule les distances de ce point aux points centraux contenus dans la même boîte ou une des boîtes voisines. On n'a pas besoin de calculer la distance de ce point aux autres points centraux parce que on sait déjà, que la distance est supérieure au plus grand rayon.

*Cette méthode devrait permettre de diviser le temps de calcul par un facteur important, si la série temporelle est très longue.*

#### 4.5. La moyenne des dimensions ponctuelles

Un attracteur peut avoir des régions de mesure très faible. Si des points centraux tombent dans ces régions, le rayon  $\varepsilon_L$  peut être trop grand pour estimer les dimensions de q-corrélation à q négatif.

Pour éviter ces problèmes on peut calculer une dimension ponctuelle autour de chaque point. Le plus grand rayon  $\varepsilon_1$  et le plus petit rayon  $\varepsilon_L$  dépendent alors du point central. On calcule la dimension ponctuelle autour d'un point central  $x_j$  par la pente de la ligne des moindres carrés, qui interpole les valeurs  $\ln n_{j,k}$  en fonction de  $\ln \varepsilon_k$ . Après on calcule la moyenne arithmétique des dimensions ponctuelles sur les points centraux. On note

$$d_{\langle \text{point} \rangle}^*(\mu) = \sum_{j=1}^m d_{\langle \text{point} \rangle}^*(x_j) / m$$

De façon analogue on pourrait définir une nouvelle dimension

$$d_{\langle \text{point} \rangle}(\mu) = \int_X d_{\text{point}(x)}(\mu) d\mu(x)$$

Nous rappelons la proposition 1 de paragraphe 3B.2. qui dit, que pour une mesure ergodique la dimension ponctuelle est la même partout.

Corollaire : Soit  $\mu$  une mesure ergodique, alors

$$d_{\langle \text{point} \rangle}(\mu) = d_{\text{inf}}(\mu)$$

#### 4.6. Listes des distances autour des points centraux (voir [BP])

Badii et Politi ont introduit une autre famille de dimensions généralisées, que nous appelons dimension du  $n^{\text{ème}}$  voisin, à cause de son algorithme de calcul. Nous présentons cette définition et une courte description de l'algorithme par souci d'être complet. Les relations entre les q-dimensions du  $n^{\text{ème}}$  voisin et les autres fonctions de dimension ne sont pas claires.

Au lieu de mesurer les mesures des boules autour des points sur l'attracteur en fonction du rayon, on mesure le rayon en fonction de la mesure de la boule autour de

tout point sur l'attracteur.

Définition :

Soit  $\varepsilon(x, m, \mu)$  le rayon qui vérifie  $\mu(B(x, \varepsilon)) = m$ . On note

$$\varepsilon^q(m, \mu) = \int_X \varepsilon(x, m, \mu)^q d\mu(x)$$

la q-dimension du n<sup>ème</sup> voisin est

$$d_{q\langle \text{ray} \rangle}(\mu) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\ln m}{q \ln \varepsilon^q(m, \mu)}$$

si cette limite existe.

Algorithme :

Pour calculer ces dimensions, on se fixe d'abord une série décroissante de mesures des boules  $\{m_k\}_{k=1, \dots, L}$ . On choisit les  $m_k$  comme des multiples de  $1/N$  où  $N$  est la longueur de la série temporelle. Puis on choisit un ensemble de points centraux  $\{y_j\}_{j=1, \dots, m}$  de la même façon que dans l'algorithme des points centraux.

Pour estimer le rayon de la boule autour de chaque point central  $x_j$  en fonction de la mesure  $m_k$ , il y a deux possibilités :

1) On calcule la distance du point central  $y_j$  à  $m_k^{-1}$  points de la série temporelle, et on retient la distance la plus petite. Donc pour cette distance la boule autour du point central contient un parmi  $m_k^{-1}$  points. Alors on note

$$\varepsilon_{k,j} = \min_{\substack{1 \leq i \leq m_k^{-1} \\ i \neq j}} \text{dist}(x_i, x_j)$$

et on obtient la valeur

$$m_k = \tilde{\mu}(B(y_j, \varepsilon_{k,j}))$$

2) Soit  $N_k = m_k \cdot N$

On veut calculer pour chaque point central  $y_j$  un rayon  $\varepsilon$ , pour lequel on a  $N_k$  points distincts de  $y_j$  dans la boule  $B(y_j, \varepsilon)$ . Pour faire ceci, on retient la distance du  $N_k$ <sup>ème</sup> voisin à chaque point central. On a alors besoin pour chaque point central d'une liste ordonnée des  $N_1$  plus petites distances. Chaque fois qu'une nouvelle distance calculée est inférieure au plus grand élément de la liste de son point central, on l'insère dans la liste et on enlève la plus grande distance de la liste.

On note  $\varepsilon_{k,j}$  la  $N_k$ <sup>ème</sup> distance autour du point  $y_j$  à la fin de ce calcul. Donc on obtient la valeur

$$m_k = \tilde{\mu}(B(y_j, \varepsilon_{k,j}))$$

A la fin on calcule

$$\varepsilon^q(m, \mu)^* = 1/m \sum_{j=1}^m \varepsilon_{k,j}^q$$

On calcule la dimension par la méthode de moindres carrés de la même façon que dans l'algorithme des points centraux.

Les relations entre les q-dimensions du n<sup>ème</sup> voisin et les autres dimensions généralisées ne sont pas claires. Cependant la conjecture suivante a été énoncée par Badii et Politi.

Conjecture : (Badii et Politi)

Soit  $\mu$  une mesure quelconque sur un support borné de l'espace de phases. On définit l'itération suivante sur la q-dimension du n<sup>ème</sup> voisin

$$q_0 = 1$$

$$q_{n+1}(\mu) = d_{q_n < \text{ray} >}(\mu)$$

Alors q converge vers la dimension de capacité .

#### 4.7. L'algorithme de Takens

L'algorithme de Takens a été conçu pour le calcul de la dimension de corrélation. Il peut être appliqué aussi pour le calcul des dimensions ponctuelles.

Afin de pouvoir appliquer des méthodes statistiques puissantes, Takens introduit l'hypothèse suivante:

Hypothèse : Il existe un rayon  $\varepsilon_0$  tel que pour  $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$C(\varepsilon, \mu) = a \varepsilon^{d_{\text{cor}}(\mu)}, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Des résultats numériques sur certains systèmes, comme l'attracteur de Hénon et l'attracteur de Lorenz, justifient cette hypothèse. Mais il y a d'autres exemples, dont l'ensemble de Cantor du tiers médian où cette hypothèse n'est pas vérifiée. Voir paragraphe 6A.3.

On tire un grand nombre de paires de points. Ces paires sont supposées être des variables aléatoires indépendantes. On calcule la distance entre chaque paire de points, et on retient seulement les distances, qui sont inférieures à  $\varepsilon_0$ . On obtient un échantillon de distances  $\{r_i\}_{i=1, \dots, M}$  qui sont des variables aléatoires indépendantes

ayant comme distribution la courbe  $C(\varepsilon, \mu)$  c'est à dire

$$P(r_i < \varepsilon) = \frac{C(\varepsilon, \mu)}{C(\varepsilon_0, \mu)} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{d_{\text{cor}}(\mu)}$$

Pour estimer  $d_{\text{cor}}(\mu)$  à partir d'un échantillon  $\{r_i\}$  donné, on peut appliquer l'estimateur de maximum de vraisemblance. (voir p. e. [Fis] )

Pour simplifier le calcul on pose  $r_i' = r_i/\varepsilon_0$ , on obtient

$$d_{\text{cor}}^*(\mu, \varepsilon_0) = \left(-1/M \sum_{i=1}^M \ln r_i'\right)^{-1}$$

et l'erreur standard de cet estimateur est de

$$(1/\sqrt{M}) d_{\text{cor}}^*(\mu, \varepsilon_0)^{-1}$$

La déduction de cet estimateur est décrite de façon détaillée dans [Tak2]

Pour la réalisation de cet algorithme il faut prendre quelques précautions:

1) On ne connaît pas  $\varepsilon_0$

L'hypothèse

$$C(\varepsilon, \mu) = a \varepsilon^{d_{\text{cor}}(\mu)}, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

n'est pas toujours vérifiée.

Donc on ne se réstraint pas au calcul de l'estimateur de la dimension de corrélation pour un seul rayon, mais on se donne une série décroissante de rayons.

2) Il faut choisir un nombre de points centraux qui est petit par rapport au nombre de points de la série temporelle. Même si on considère la série temporelle  $\{x_i\}_{i=1, \dots, N}$  comme série des variables indépendants l'ensemble des distances entre les points,  $\{|x_i - x_j|\}_{i=1, \dots, N, j=1, \dots, N}$  est un ensemble de variables aléatoires corrélés. [LT] Mes résultats numériques montrent que ces corrélations influencent la valeur de dimension de corrélation, si on choisit  $m=N$  (voir chapitre 6B)

### Description de notre algorithme

Supposons, qu'on dispose d'une série temporelle  $\{x_i\}_{i=1, \dots, N}$ .

i) D'abord on tire un nombre de points centraux, parmi les points de la série temporelle ou indépendant de cette série. On procède de la même façon que dans l'algorithme des points centraux.

ii) On définit une série décroissante de rayons  $\{\varepsilon_k\}_{k=1, \dots, L}$

On définit pour chaque rayon un compteur  $n_k$  des distances inférieur à ce rayon et un

compteur  $s_k$  des logarithmes des distances.

iii) Pour chaque point de la série temporelle on calcule sa distance à chacun des points centraux. Aussitôt qu'une distance est calculée, on cherche le plus grand rayon inférieur à cette distance. Pour la recherche de ce rayon on choisit parmi les méthodes que nous avons mentionnés dans la description de l'algorithme des points centraux. Puis on incrémente le compteur  $n_k$  et on additionne le logarithme de la distance au compteur  $s_k$ .

iv) On fait l'addition des compteurs pour obtenir le nombre de distances  $M_k$  inférieur à  $\varepsilon_k$  et la somme des logarithmes de ces distances  $S_k$ .

v) On calcule pour chaque rayon un estimateur de la dimension de corrélation

$$d_{\text{cor}}^*(\mu, \varepsilon_k) = - S_k / M_k + \ln \varepsilon_k$$

A la fin on choisit un des estimateurs, ou on fait une moyenne pour donner une estimation de la dimension de corrélation.

Pour accélérer le calcul on transforme tous les points en coordonnées entiers, avant de calculer les distances.

L'algorithme ci-dessus est différent de la version de l'algorithme proposée par Takens lui-même dans deux points

- Takens n'utilise pas la méthode des points centraux, c'est à dire il choisit  $m=N$
- Takens propose de calculer l'estimateur de la dimension pour un seul rayon, au lieu de le calculer pour toute une série.

Takens n'a pas présenté des résultats numériques de son algorithme. Nous discutons les effets de nos modifications de l'algorithme au chapitre 6B.

On peut appliquer le même algorithme pour le calcul des dimensions autour de chaque point central. Il faut installer des compteurs séparés pour chaque point central. Il n'est pas évident, s'il est possible de modifier cet algorithme pour calculer les dimensions de q-corrélation.

### Conclusion :

Nous avons présenté plusieurs algorithmes de calcul des dimensions fractales. Nous avons précisé et décrit en détail les algorithmes que nous avons programmés: L'algorithme, que nous avons baptisé algorithme des points centraux et l'algorithme de Takens.

Nous pouvons déjà donner des champs d'application de ces algorithmes:

- L'algorithme des points centraux est apte pour le calcul de la fonction de dimension de corrélation
- L'algorithme de Takens peut être appliqué, si on est seulement intéressé dans la dimension de corrélation.
- L'algorithme de boxcounting peut être appliqué pour des attracteurs de basse dimension, il est indiqué, si on est spécialement intéressé dans la dimension de capacité.

## Chapitre 5

### Estimation d'Erreur et Coût des Algorithmes



## 5. ESTIMATION D'ERREUR ET COUT DES ALGORITHMES

### 5.0. Introduction

Peu est connu sur l'erreur des algorithmes de calcul des dimensions fractales. Nous résumons d'abord les résultats qui existent. Puis nous présentons une estimation d'erreur de l'algorithme des points centraux. Ensuite nous calculons le coût de cet algorithme et aussi le coût de l'algorithme de boxcounting.

Pour donner une estimation d'erreur de l'algorithme des points centraux, il faut d'abord bien poser le problème. Souvent on dispose seulement d'un système d'équations différentielles et des observations numériques, qui suggèrent l'existence d'un attracteur étrange. Avec ce renseignement seul on ne peut rien dire sur l'erreur d'un algorithme de calcul des dimension fractales. Il faut des hypothèses:

Hypothèse 1: *Un attracteur existe et correspond à ce qu'on observe numériquement.*

Hypothèse 2: *La fonction de dimension de l'attracteur, qu'on veut calculer, est définie.*

Si on veut faire des énoncées sur la vitesse de convergence, il faut en plus une hypothèse sur la forme de courbe de corrélation. Par exemple Takens suppose que la courbe de corrélation est une droite. Nous donnons une hypothèse moins restrictive au début du paragraphe 5.1.

#### Algorithme de boxcounting

Plusieurs auteurs ont traité la question de sous-estimation du nombre de boîtes non-vides. Si la mesure d'une boîte est positive, mais faible, c'est à dire de l'ordre  $1/N$  où  $N$  est le nombre de points de la série temporelle, la probabilité que cette boîte ne contient aucun point de la série temporelle est non-négligeable. Plus fine est la grille, plus faible est la mesure moyenne des boîtes, et la proportion de boîtes qui ont une mesure positive, mais ne contiennent aucun point de la série temporelle, est croissante. Cet erreur peut induire une sous-estimation de la dimension de capacité. Grassberger [Gra2] et Caswell et Yorke [CY] ont déduit une formule heuristique pour corriger cette sous-estimation.

Les autres sources d'erreur de cet algorithme (voir 5.1.) n'ont pas été étudiés.

#### Algorithme de Takens

Takens a stipulé que la fonction de corrélation est une droite pour des rayons inférieur à un nombre  $\epsilon_0$  positif. Avec cette hypothèse et avec l'hypothèse supplémentaire que les paires de points ne sont pas corrélés, il calcule l'erreur standard de l'algorithme, voir paragraphe 4.7.



Algorithme de Grassberger-Procaccia

Denker et Keller [DK] ont proposé une estimation d'erreur de cet algorithme, sous l'hypothèse que la fonction de corrélation est une droite. Cette méthode utilise la théorie de "U-statistics".

Quant à l'algorithme des points centraux, aucune contribution à l'estimation d'erreur de l'algorithme n'est à ma connaissance. Nous présentons ici une première tentative.

5.1. Estimation d'erreur de l'algorithme des points centraux

Dans ce chapitre on utilisera des notations simplifiées. On supprime  $\mu$ , ainsi on note  $C_q(\epsilon)$  au lieu de  $C_q(\epsilon, \mu)$

$d_q \text{ cor}$  au lieu de  $d_q \text{ cor}(\mu)$

Hypothèse 3: Il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que  $\forall \epsilon \leq \epsilon_0$

$$C_q(\epsilon) = A + q d_q \text{ cor} \cdot \ln \epsilon + \Psi(\ln \epsilon)$$

où  $\Psi$  est une fonction de perturbation et  $\exists K \in \mathbb{R}$ , tel que

$$\max_{\ln \epsilon_1, \ln \epsilon_2} \int_{\ln \epsilon_1}^{\ln \epsilon_2} \Psi(\ln \epsilon) d(\ln \epsilon) < K < \infty$$

Cette hypothèse est vérifiée pour les attracteurs cantorien. Pour l'attracteur cantorien du tiers median  $\Psi(\ln \epsilon)$  est une fonction périodique.

Elle est aussi en accord avec les résultats numériques sur l'attracteur de Hénon, l'attracteur de Feigenbaum et l'attracteur cantorien asymétrique (voir 6.3). On dira dans la suite que la fonction  $C_q(\epsilon) = A + q d_q \text{ cor} \cdot \ln \epsilon + \Psi(\ln \epsilon)$  *oscille* autour de la

droite  $A + q d_q \text{ cor} \cdot \ln \epsilon$ .

Avec cette hypothèse on peut partager l'erreur total du calcul de la dimension de q-corrélation en trois *sources d'erreur*, que nous décrivons ci-dessous

5.1.1. Sources d'erreur1. Erreur par les oscillations de la fonction de corrélation

On remplace la limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C_q(\epsilon)}{q \ln \epsilon}$$

par la pente de la droite des moindres carrés de la fonction de q-corrélation définie sur

l'intervalle entre le rayon maximal  $\varepsilon_1$  et le rayon minimal  $\varepsilon_L$ . Il faut choisir  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ .

Habituellement on ne parle pas de la droite des moindres carrés d'une fonction à domaine de définition continue. Nous rappelons la définition.

Définition : Soit  $f(x)$  définie sur  $[x_1, x_2]$ . Soit  $g(x) = ax + b$  la droite tel que l'intégrale sur le carré d'écart entre  $f(x)$  et  $g(x)$  est minimal.

$$\min_{a,b} \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - (ax + b))^2 dx$$

$g(x)$  est la droite des moindres carrés de  $f(x)$ .

$\bar{d}_{q \text{ cor}}$  est obtenu par la droite des moindres carrés suivante

$$\min_{\bar{d}_{q \text{ cor}}, b} \int_{\varepsilon_L}^{\varepsilon_1} (\ln C_q(\varepsilon) - (q \cdot \bar{d}_{q \text{ cor}} \cdot \ln \varepsilon + b))^2 d(\ln \varepsilon)$$

et on obtient

$$\text{err}_1 = |d_{q \text{ cor}} - \bar{d}_{q \text{ cor}}|$$

## 2. Erreur par l'écart entre deux rayons

On va calculer l'erreur qu'on commet quand on remplace la fonction de corrélation définie sur l'intervalle  $[\varepsilon_1, \varepsilon_L]$  par les valeurs de la fonction de q-corrélation pour une série de rayons  $\{\varepsilon_k\}_{k=1, \dots, L}$  en ordre décroissante contenus dans cet intervalle.

Définition : On suppose que

$$\Delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}}$$

est une constante. Nous appelons  $\Delta_\varepsilon$  l'écart des rayons.

Définition :

$$D_{\text{rayon}} = \ln \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_L} \right) = L \ln \Delta_\varepsilon$$

est la longueur du domaine de rayons.

Donc on remplace

$$\min_{a,b} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_L} (\ln C_q(\varepsilon) - (a \ln \varepsilon + b))^2 d(\ln \varepsilon)$$

par la somme

$$\min_{a,b} \sum_{k=1}^L (\ln C_q(\varepsilon_k) - (a \ln \varepsilon_k + b))^2$$

Donc

$$\text{err}_2 = |\bar{d}_{q \text{ cor}} - \tilde{d}_{q \text{ cor}}|$$

où  $\tilde{d}_{q \text{ cor}}$  est déterminée par

$$\min_{\tilde{d}_{q \text{ cor}}, b} \sum_{k=1}^L (\ln C_q(\varepsilon_k) - (q \cdot \tilde{d}_{q \text{ cor}} \cdot \ln \varepsilon_k + b))^2$$

Il est clair que en serrant les rayons, c'est à dire avec  $\Delta_\varepsilon \rightarrow 1$  la droite des moindres carrés de la somme approche la droite des moindres carrés de la fonction de corrélation.

### 3. Erreurs sur la courbe de corrélation

Erreur de la droite des moindres carrés causé par l'erreur qu'on commet en calculant de façon numérique la valeur de l'intégrale de corrélation pour cette série de rayons.

Donc

$$\text{err}_3 = |d^*_{q \text{ cor}} - \tilde{d}_{q \text{ cor}}|$$

où  $d^*_{q \text{ cor}}$  est déterminé par

$$\min_{d^*_{q \text{ cor}}, b} \sum_{k=1}^L (\ln C^*_q(\varepsilon_k) - (q \cdot d^*_{q \text{ cor}} \cdot \ln \varepsilon_k + b))^2$$

On rappelle que  $C^*_q(\varepsilon_k)$  dénote les valeurs des intégrales de q-corrélation obtenus par la méthode des points centraux.

On considère que l'erreur de calcul total est la somme des trois erreurs

$$\text{err} = \text{err}_1 + \text{err}_2 + \text{err}_3$$

5.1.2. Calcul des erreurs

Nous commençons le calcul des erreurs par la troisième source.

Erreurs sur la courbe de corrélation

On compare la pente de la droite des moindres carrés aux valeurs idéales  $\ln C_q(\epsilon_k)$  avec la pente de la droite des moindres carrés aux valeurs estimés  $\ln C_q^*(\epsilon_k)$ .

D'abord nous calculons l'influence de la variation d'une valeur d'une courbe quelconque sur la pente de sa droite des moindres carrés. On obtiendra le résultat surprenant, que cette variation ne dépend pas de la forme de la courbe, mais seulement des valeurs des abscisses.

Proposition 1:

Soient données les valeurs d'une fonction  $f(x_k)$  aux abscisses  $x_k$   $k=1, \dots, L$ . On note  $\bar{a}$  la pente de la droite des moindres carrés des points  $(x_k, f(x_k))$ . Alors

$$\frac{d\bar{a}}{df(x_k)} = \frac{\frac{1}{L} x_k - \frac{1}{L} \langle x \rangle}{\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L x_k^2 - \langle x \rangle^2}$$

Démonstration :

Avec les Notations

$$\langle x \rangle = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L x_k$$

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L f(x_k)$$

on obtient  $\bar{a}$  par la formule

$$\bar{a} = \frac{\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L x_k f(x_k) - \langle x \rangle \langle f(x) \rangle}{\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L x_k^2 - \langle x \rangle^2}$$

d'où on obtient l'affirmation en calculant tout droit la dérivée.

Conséquence : La variation de la pente de la droite des moindres carrés dépend uniquement des abscisses.

**Corollaire :** Soit  $\bar{a}$  la pente de la droite des moindres carrés de l'ensemble  $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=1, \dots, L}$ . Alors la pente de l'ensemble  $\{(x_k, f(x_k) + b + cx_k)\}$  est de  $\bar{a} + c$ .

Pour appliquer cette formule à l'algorithme des points centraux on insère

$$x_k := \ln \epsilon_k = \ln \epsilon_1 + (k-1) \ln \Delta_\epsilon$$

$$f(x_k) := \ln C_q(\epsilon_k)$$

donc

$$\frac{d\bar{a}}{d \ln C_q(\epsilon_k)} = \frac{-\frac{k}{L} \ln \Delta_\epsilon + \frac{1}{2} \ln \Delta_\epsilon}{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L i^2 \ln \Delta_\epsilon^2 - \frac{(L+1)^2}{4} \ln \Delta_\epsilon^2} = \frac{\frac{k}{L} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{12} \ln \Delta_\epsilon (L^2 - 1)}$$

L'influence de l'erreur sur une seule valeur d'intégrale de q-corrélation est

- inverse proportionnel au nombre de rayons
- inverse proportionnel à la distance des rayons

Dans la suite nous nous restreignons, pour simplifier le calcul, au cas  $q = 1$ .  $C(\epsilon_k)$  est donc estimé par le nombre de distances inférieure au rayon  $\epsilon_k$ .

**Erreur sur le nombre des distances inférieure à un rayon**

On calcule les distances entre  $m$  points centraux et  $N-1$  points de la série temporelle. On obtient donc les distances de  $m(N-1)$  paires de points. Pour simplifier le calcul on suppose que les distances soient indépendants. Chaque distance a la probabilité  $C(\epsilon_k)$  d'être inférieure au rayon  $\epsilon_k$ .

Donc le nombre de distances inférieure à  $\epsilon_k$ , qu'on note  $M_k$ , est une variable binomiale. On peut alors appliquer le théorème de Moivre-Laplace (voir p.e. [Fis]):

**Théorème :** Soit  $\{X_n\}$  une suite de variables binomiales, qui peuvent admettre les valeurs  $r=0,1,2, \dots$  avec probabilité

$$p(X_n = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

On considère les variables normés

$$Y_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Soit  $F_n(y)$  la distribution de la variable  $Y_n$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Ce théorème dit, que pour  $n$  grand la variable binomiale  $X_n$  admet approximativement une distribution gaussienne avec espérance  $n \cdot p$  et une déviation standard de  $\sqrt{n \cdot p}$ , si  $p$  est proche de zéro.

On note le nombre de distances total

$$N_{\text{dist}} = m(N-1)$$

On obtient la valeur de  $C_q(\epsilon_k)$  par le nombre  $M_k$  de distances inférieures au rayon  $\epsilon_k$

$$C_q^*(\epsilon_k) = M_k / N_{\text{dist}}$$

On suppose  $M_k \ll N_{\text{dist}}$  donc la déviation standard de la variable  $M_k$  est de  $\sqrt{M_k}$

Au départ on a simplifié par l'hypothèse fautive, que les distances des paires de points soient des variables indépendantes. En fait il y a la plusieurs problèmes.

- Si  $m=1$  les paires de points sont fortement corrélées, car un des deux points est identique pour toutes les paires. L'expérience montre, qu'il faut choisir  $m \gg 1$  (voir paragraphe 6A.5.1. et aussi 6A.8. pour les résultats numériques).
- Si  $m=N$ , les paires de points sont aussi corrélées et l'estimation des intégrales de corrélation est influencée de façon significative. Voir les résultats numériques concernant l'algorithme de Takens du chapitre 6B et les remarques faites au paragraphe 4.8. . Selon cette expérience il semble être meilleur de choisir  $N \gg m$ .

Pour calculer l'influence des erreurs des intégrales de corrélation sur la pente de la droite des moindres carrés on suppose, qu'on a cumulé des erreurs.

C'est à dire

$$\text{err}(\bar{a}) = \sum_{k=1}^l \text{err}(\ln C_q(\epsilon_k)) \frac{d\bar{a}}{d \ln C_q(\epsilon_k)}$$

On a cumulé des erreurs, si les intégrales de corrélation sont tous sous-estimés, ou sur-estimés pour la moitié inférieure des rayons (voir figure 1) . C'est une hypothèse trop pessimiste, mais pas très loin de la réalité, puisque les intégrales de corrélation sont corrélés. En plus cette hypothèse simplifiera le calcul dans la suite.

Par la règle de chaîne on a

$$\text{err}(\ln C^*(\epsilon_k)) = \frac{d(\ln C^*(\epsilon_k))}{d C^*(\epsilon_k)} \text{err} C^*(\epsilon_k)$$

Puisque  $C^*(\epsilon_k) = M_k / N_{\text{dist}}$  et  $\text{err}(C^*(\epsilon_k)) = \sqrt{M_k} / N_{\text{dist}}$  on obtient par insertion dans (2)

$$\text{err}(\ln C^*(\epsilon_k)) = \frac{1}{\sqrt{M_k}}$$

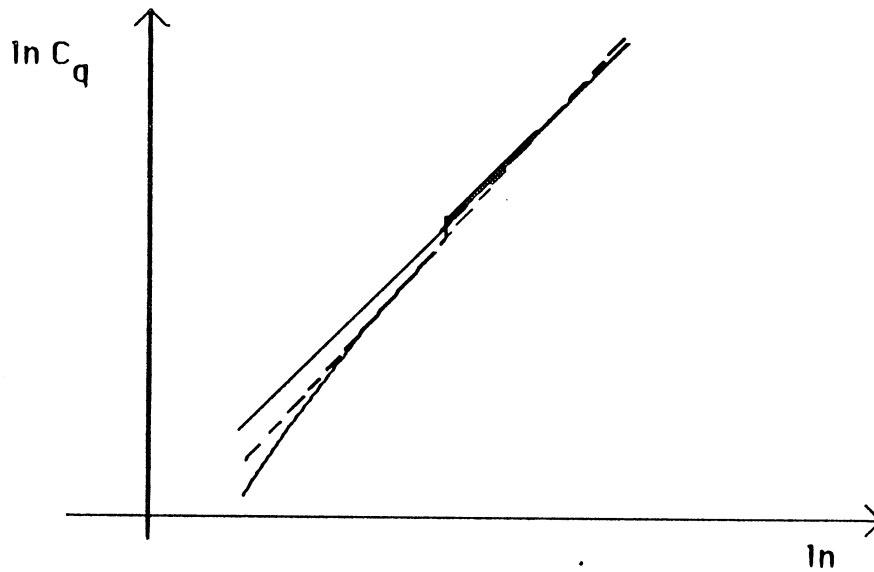


Figure 1 : Influence de l'erreur de la courbe de corrélation sur la pente de la droite des moindres carrés

Legende :

droite continue : fonction  $C_q(\epsilon)$  non-perturbée

courbe:  $C_q^*(\epsilon)$

droite pointillée : droite des moindres carrés de  $C_q^*(\epsilon)$

En inserant dans (1) on obtient

$$\text{err}(\bar{a}) = \sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{M_k}} h(k)$$

où

$$h(k) = \frac{\frac{k}{L} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{12} \ln \Delta_\epsilon (L^2 - 1)}$$

Donc on a une estimation de la troisième source d'erreur de calcul, sous l'hypothèse, que les paires de points soient indépendantes.

Pour diviser cette erreur par deux, il faut multiplier la longueur de la série temporelle par quatre, en laissant la série de rayons constante.

Erreur par les oscillations de la fonction de corrélation

Nous rappelons le problème:

La fonction de corrélation a la forme

$$C_q(\epsilon) = A + q d_{q \text{ cor}} \cdot \ln \epsilon + \Psi (\ln \epsilon)$$

Supposons qu'elle est connue sur l'intervalle  $[\epsilon_L, \epsilon_1]$

On note  $\bar{d}_{q \text{ cor}}$  la pente de la droite des moindres carrés de  $C_q(\epsilon)$ . Quel est l'erreur

$$\text{err}_1 = | \bar{d}_{q \text{ cor}} - d_{q \text{ cor}} | ?$$

On simplifie d'abord les notations

$$x = \ln \epsilon$$

$$x_2 = \ln \epsilon_L \quad x_1 = \ln \epsilon_1$$

$$g(x) = C_q(\ln \epsilon)$$

et on pose  $q=1$ . Le traitement du cas  $q \neq 1$  est analogue.

Il faut calculer

$$\min_{\bar{d}_{q \text{ cor}}, b} \int_{x_2}^{x_1} (g(x) - (\bar{d}_{q \text{ cor}} x + b))^2 dx$$

où  $g(x) = d_{q \text{ cor}} x + \Psi(x) + A$

Par le corollaire de proposition 1 de ce paragraphe on voit que la différence  $| \bar{d}_{q \text{ cor}} - d_{q \text{ cor}} |$  ne change pas si on pose  $A=0$  et  $d_{q \text{ cor}} = 0$ . On calcule donc

$$\min_{\bar{a}_\Psi, b} \int_{x_2}^{x_1} (\Psi(x) - (\bar{a}_\Psi x + b))^2 dx$$

et on obtient  $\text{err}_1 = \bar{a}_\Psi$ .

On note

$$I_\Psi = \int_{x_2}^{x_1} (\Psi(x) - (\bar{a}_\Psi x + b))^2 dx$$

On doit résoudre les équations



$$(1) \quad \frac{d I_{\Psi}}{d b} = 0$$

et

$$(2) \quad \frac{d I_{\Psi}}{d \bar{a}_{\Psi}} = 0$$

En resolvant (1) on obtient

$$0 = 2 \int_{x_2}^{x_1} b - \Psi(x) + \bar{a}_{\Psi} dx$$

$$b = 1/x_2 - x_1 \int_{x_2}^{x_1} \bar{a}_{\Psi} - \Psi(x) dx$$

En resolvant (2) on obtient

$$0 = 2 \int_{x_2}^{x_1} \bar{a}_{\Psi} x^2 + x (b - \Psi(x)) dx$$

Il en suit

$$\bar{a}_{\Psi} = \frac{\int_{x_2}^{x_1} x (\Psi(x) - b) dx}{\int_{x_2}^{x_1} x^2 dx}$$

En revenant aux notations de départ cette formule admet la forme

$$(3) \quad \text{err}_1 = \frac{\int_{\varepsilon_L}^{\varepsilon_1} \ln \varepsilon (\Psi(\ln \varepsilon) - b) d(\ln \varepsilon)}{\int_{\varepsilon_L}^{\varepsilon_1} (\ln \varepsilon)^2 d(\ln \varepsilon)}$$

On peut donner une estimation de  $\text{err}_1$  en utilisant l'hypothèse 3.

$$\int_{\varepsilon_L}^{\varepsilon_1} \ln \varepsilon (\Psi(\ln \varepsilon) - b) d(\ln \varepsilon) \leq \int_{\varepsilon_L}^{\varepsilon_1} \ln \varepsilon \cdot \Psi(\ln \varepsilon) d(\ln \varepsilon) < K \max(\ln \varepsilon_1, \ln \varepsilon_L)$$

Pour simplifier le calcul on suppose que  $\ln \varepsilon_1 = 0$ , donc on a  $|\ln \varepsilon_L| = D_{\text{rayon}}$  et on obtient

$$\text{err}_1 < \frac{K |\ln \varepsilon_L|}{\int_{\varepsilon_L}^0 (\ln \varepsilon)^2 d \ln \varepsilon} = \frac{K D_{\text{rayon}}}{\int_{-D_{\text{rayon}}}^0 (\ln \varepsilon)^2 d(\ln \varepsilon)} = \frac{K}{3 D_{\text{rayon}}^2}$$

**Conjecture 1:** Dans la limite  $\varepsilon_L \rightarrow 0$ , l'erreur  $\text{err}_1$  est inverse proportionnel au carré de la longueur du domaine des rayons.

Pour donner une estimation de  $\text{err}_1$ , nous suggérons le procédé suivant

- i) calculer  $d_{q \text{ cor}}^*$
- ii) estimer  $\Psi$  par la formule suivante

$$\Psi^*(\varepsilon_k) = C_{q \text{ cor}}^*(\varepsilon_k) - d_{q \text{ cor}}^* q \ln \varepsilon_k - b$$

- iii) En faisant varier  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_L$  on calcule le maximum de  $\text{err}_1$  par la formule (3)

## 5.2. Coût des algorithmes

Greenside et coll. ont testé la faisabilité de l'algorithme de boxcounting [GPSW], mais leur travail ne contient pas un calcul de coût de l'algorithme. En plus l'algorithme a été amélioré depuis. Aucune contribution contenant un calcul de coût d'un algorithme de calcul d'une dimension fractale n'est à ma connaissance.

### 5.2.1 Algorithme des points centraux

Le coût d'un algorithme est composé de deux parties: besoin d'espace mémoire et temps d'exécution. L'espace mémoire peut être calculé en bit ou en nombre entiers ou réels, comme nous le ferons. Le temps d'exécution est exprimé habituellement en analyse numérique en nombre d'opérations élémentaires. Il faut spécifier de quel type d'opérations élémentaires il s'agit.

On fera le calcul de coût de l'algorithme des points centraux en deux étapes. D'abord on calcule le coût d'une exécution en fonction de ses données. Ces données sont : la dimension de l'espace de phases, la longueur de la série temporelle, le

nombre de points centraux, le nombre de rayons prévus.

Puis on traite la question quelle sera l'erreur de l'algorithme en fonction de ces paramètres et quelle est la relation coût - erreur.

### Coût de l'algorithme en fonction des données d'exécution

#### Espace mémoire :

i) Un tableau pour le *stockage des points centraux* . Si  $d$  est la dimension de l'espace des phases, alors le tableau occupe  $m \times d$  entiers .

ii) Un tableau pour les *compteurs des boules* autour des points centraux. Si  $k$  est le nombre de rayons considérés, alors ce tableau occupe  $m \times L$  entiers .

iii) Pour le stockage des rayons et le stockage d'une *intégrale de q-corrélation* on a besoin de  $2L$  réels . Aussitôt, qu'une intégrale de q-corrélation est calculée, on calcule sa dimension, et on évite ainsi son stockage.

Par exemple, pour le calcul des dimensions de l'attracteur de Hénon et de l'attracteur de Lorenz, nous avons utilisé 200 points centraux et 50 rayons, soit un espace de mémoire d'environ 10000 entiers. Les réels sont négligeables. Les capacités d'un IBM-PC compatible, environ 32000 entiers ne sont pas épuisés.

#### Temps de Calcul

$m \times N$  distances sont à calculer, et selon l'exemple, souvent la distance est à comparer aux rayons données. Pour simplifier nous considérons chacune de ces opérations comme opération élémentaire. (En réalité chacune de ces opérations vaut, selon nos expériences, en moyenne de 2 à 4 additions.) Donc on a  $2 m \times N$  opérations élémentaires . Le calcul des dimensions généralisées à partir du tableau des compteurs est négligeable.

Pour l'attracteur de Hénon, nous avons choisi  $N=20000$  et  $m=200$  donc 8 millions d'opérations élémentaires qui correspondent à un temps d'exécution de 28 minutes sur un Olivetti IBM-PC compatible.

#### L'erreur de calcul en fonction du coût

L'erreur de calcul dépend essentiellement

- du nombre des distances aux petits rayons (auquel  $err_1$  est relié)
- de la longueur du domaine de rayons (à laquelle  $err_3$  est reliée)

On néglige , au premier temps, la deuxième source d'erreur. Selon nos expériences numériques cette source contribue peu à l'erreur total. Pour l'attracteur de Hénon seulement la quatrième décimale a été modifiée en passant de  $\Delta_\epsilon = 2$  à  $\Delta_\epsilon = 4\sqrt{2}$ .

Si on fixe le nombre de distances au plus petit rayon, la longueur du domaine de rayons est une fonction du nombre des distances calculés. Pour examiner cette relation nous faisons l'hypothèse simplificatrice, que la fonction de corrélation est une droite.

On note

$\epsilon_L$  le plus petit rayon

$M_L$  le nombre de distances inférieur au plus petit rayon

$N_{\text{dist}} = m \cdot N$  le nombre de distances total

On a

$$(1) \quad C_q^*(\epsilon_L) = \frac{M_L}{N_{\text{dist}}}$$

$$(2) \quad C_q^*(\epsilon_L) = C_q^*(\epsilon_1) \left( \frac{\epsilon_L}{\epsilon_1} \right)^{d_{\text{cor}}}$$

En insérant (1) dans (2) on obtient

$$(3) \quad \left( \frac{\epsilon_L}{\epsilon_1} \right)^{d_{\text{cor}}} = \frac{M_L}{N_{\text{dist}} C_q^*(\epsilon_1)}$$

$$(4) \quad D_{\text{rayon}} = \ln \epsilon_1 - \ln \epsilon_L = \frac{\ln N_{\text{dist}} + \ln C_q^*(\epsilon_1) - \ln M_L}{d_{\text{cor}}}$$

La longueur du domaine de rayons est inverse proportionnel à la dimension de corrélation de l'attracteur.

Pour doubler la longueur du domaine de rayons il faut, à peu près, élever au carré le nombre de distances calculés.

De équation (4) on peut tirer aussi des conclusions comment la troisième source d'erreur dépend des autres paramètres

$$\ln M_L = - D_{\text{rayon}} \cdot d_{\text{cor}} + \ln N_{\text{dist}} + \ln C_q^*(\epsilon_1)$$

Pour commenter cette formule remarquons d'abord, que  $d_{\text{cor}}$  fait partie de la condition du problème.

On considère que  $\ln C_q^*(\epsilon_1)$  fait également partie de la condition du problème. Fixer le plus grand rayon  $\epsilon_1$  trop grand introduit une quatrième source d'erreur: On observe que la pente de la courbe de corrélation diminue, parce qu'on a dépassé la taille de la structure fractale de l'attracteur. Les quantités  $M_L$  ( nombre des distances au plus petit rayon) et  $N_{\text{dist}}$  (nombre de distances total) peuvent être variés. Le cout du calcul est proportionnel à  $N_{\text{dist}}$ .

A un coût de calcul constant, on peut diminuer  $\text{err}_1$  en augmentant  $\text{err}_3$ . Il est relativement peu couteux de laisser tendre  $\text{err}_3$  vers 0. En fixant  $\text{err}_1$ ,  $\text{err}_3$  est inverse proportionnel à la racine du coût. En fixant  $\text{err}_3$ ,  $\text{err}_1$  est, selon la conjecture 1 du

paragraphe 5.1., inverse proportionnel au logarithme du coût . Pour un coût fixe on cherche à minimiser  $err_1 + err_3$  . Si l'erreur tolérée est très petit,  $err_1$  est le terme dominant et donc l'algorithme devient très coûteux.

Nous avons négligé  $err_2$  dans ce raisonnement, d'abord parce que, selon nos expériences, il est peu coûteux de laisser converger  $err_2$  vers 0, en diminuant  $\Delta_\epsilon$  , et parce nous n'avons pas trouvé un algorithme simple pour calculer  $err_2$  .

### 5.2.2. Algorithme de boxcounting

#### Espace mémoire

Notations:

$d$  dimension de l'espace des phases

$n_\epsilon$  la longueur de la grille en unités de longueur des boîtes

Le tableau des compteurs des boîtes de la grille, qui recouvre l'attracteur, contient  $n_\epsilon^d$  nombres entiers ou booléens.

#### Temps de calcul

Les coordonnées de  $N$  points sont transformées en coordonnées entières, cela demande  $d$  multiplications de nombres réels par point. Le temps de calcul pour l'addition des compteurs est proportionnel au nombre des boîtes de la grille, et dépend du choix de la série de rayons, pour lesquels on calcule la capacité ou l'entropie. Soit  $L$  le nombre de ces rayons, alors on a au plus  $L \cdot n_\epsilon^d$  additions de nombres entières. Pour simplifier on considère la multiplication des réels et l'addition des entières comme opérations élémentaires. Donc on a

$$K \cdot n_\epsilon^d + d \cdot N \text{ opérations élémentaires.}$$

Selon l'exemple choisi le premier ou le deuxième terme peut être le plus important.

#### Exemples:

##### Espace mémoire

Habituellement on considère  $n_\epsilon = 100$  comme juste suffisant pour un calcul des dimensions fractales.  $n_\epsilon = 1000$  serait mieux.

Pour l'attracteur de Hénon ( $d=2$ ) le tableau de compteurs occupe un espace mémoire de  $n_\epsilon^d = 10^4$  nombres booléens ou entières, ce qui ne dépasse pas l'espace mémoire d'un IBM-PC compatible. Si on veut atteindre  $n_\epsilon = 1000$ , il faut économiser de l'espace mémoire, par exemple par la méthode de Grassberger [Gra2].

Pour l'attracteur de Lorenz ( $d=3$ ) , si on pose  $n_\epsilon = 100$  , on obtient  $n_\epsilon^d = 10^6$  et seulement des très grands ordinateurs peuvent offrir autant d'espace mémoire. La méthode de Grassberger pourrait apporter un remède, mais n'a pas encore été essayé sur cet exemple.

Temps d'exécution

$10^6$  opérations élémentaires sont exécutés en environ 15 minutes sur un micro-ordinateur IBM-PC compatible et devraient être suffisants pour obtenir des bons résultats pour les deux exemples.

Temps d'exécution de l'algorithme des points centraux  
quelques exemples

nom de l'attracteur	N	m	$t_{\text{théor}}$ [opérations élémentaires]	$t_{\text{exec}}$ [sec]
Cantor	10 000	200	$2 \cdot 10^6$	609
Henon	20 000	200	$8 \cdot 10^6$	944

Légende

$t_{\text{théor}}$  nombre de opérations élémentaires selon la formule de paragraphe 6.2

$t_{\text{exec}}$  temps d'exécution de l'algorithme des points centraux

Par rapport au nombre d'opérations élémentaires le calcul est plus rapide pour l'attracteur de Hénon, parce que le plus grand rayon a été choisi plus petit et parce qu'on a besoin en moyenne de moins de comparaisons pour trouver le plus grand rayon auquel la distance est supérieure.

Conclusion : On a vu que, si les hypothèses du début du chapitre sont données, l'algorithme des points centraux converge.

Pour la dimension de corrélation, on a obtenu une idée, comment coût de calcul et erreur sont reliés. Nous sommes convaincus, qu'on peut montrer la convergence du même algorithme pour toute dimension de q-corrélation, en modifiant l'argumentation. De façon similaire on devrait pouvoir montrer la convergence de l'algorithme de boxcounting vers la fonction de dimension d'information.



## Chapitre 6

### Résultats Numériques Systèmes Discrèts





## 6. RESULTATS NUMERIQUES : SYSTEMES DISCRETS

### 6A. ALGORITHME DES POINTS CENTRAUX

#### 6A.0. Introduction

La première tâche était de voir, si l'algorithme des points centraux marche et quels sont ses résultats sur des différents exemples en utilisant le micro-ordinateur, que nous avons à notre disposition. Quelques unes des détails de l'algorithme ont été rajoutés après des premiers expériences.

Nous avons dessiné des courbes de corrélation (voir paragraphe 6A.4.). Ces dessins ont été la motivation pour l'hypothèse sur la fonction de corrélation, qui est au début du calcul d'erreur de l'algorithme des points centraux (voir paragraphe 5.1.)

Nous avons testé la convergence des courbes de corrélation en augmentant le nombre de points de la série temporelle, ou le nombre de points centraux. Nous n'avons pas élaboré une méthode de quantifier cette convergence, les dessins sont donc indispensables.

Nous avons calculé les histogrammes des valeurs numériques des dimensions ponctuelles autour les points centraux.

Nous avons calculé la fonction de dimension de q-corrélation pour un attracteur cantorien asymétrique et pour l'attracteur de Hénon.

Nous avons choisi pour les expériences numériques de ce chapitre des exemples simples d'itérations discrètes. Le cas des systèmes dynamiques continus pose des problèmes de calcul supplémentaires et est donc remis au chapitre 7.

#### Plan du chapitre

Au début nous indiquons l'ordinateur et le langage utilisé, et quelques détails techniques des algorithmes, qui dépendent du matériel. Puis on donne quelques notations utilisés au chapitre 6 et 7. Après on présentera les résultats numériques. Nous avons ajouté beaucoup de dessins, pas seulement pour donner une meilleure idée des phénomènes observés, mais aussi parce que certaines constatations et observations ne sont pas encore quantifiés.

#### 6A.1. Détails techniques du calcul

Tous les programmes sont écrits en Pascal, les résultats ont été obtenus en partie sur un microordinateur Micral, en partie sur un Olivetti IBM-PC compatible. Les points de la série temporelle ont été calculés en double précision en nombres réels (15 décimales), puis transformés en *entier simple longueur* (entre  $-2^{15}$  et  $2^{15}$ ).

Tous les résultats numériques de la partie 6A et du chapitre 7 ont été obtenus par *l'algorithme des points centraux*, les résultats de la partie 6B ont été obtenus par l'algorithme de Takens.

Généralement nous avons calculé *trois dimensions fractales* différents par exécution: la dimension de corrélation, la dimension d'information et la dimension de capacité, que nous avons estimée par la dimension de -1-corrélation. Nous n'avons jamais

exécuté l'algorithme de boxcounting.

Nous avons choisi la norme  $\| \cdot \|_1$  (somme des différences des coordonnées), parce qu'elle était plus rapide à calculer que la norme  $\| \cdot \|_\infty$  (maximum des différences). Sauf cas contraire, la série des rayons est telle que:

$$\varepsilon_k = \sqrt[4]{2} \cdot \varepsilon_{k+1} .$$

### Une limite de la longueur de la série temporelle

Les compteurs du nombre de points dans chaque boule sont des entiers. Si on dépasse l'entier maximal pour la longueur de la série temporelle, il faut prendre des précautions. On peut par exemple définir soi-même des entiers de double longueur et définir les opérations pour ce nouveau type d'entier, mais cela coûte plus cher en espace mémoire et ralentit le calcul.

### Choix des points centraux

Dans certaines exécutions les points centraux ont été choisis parmi les points de la série temporelle, dans les autres exécutions les points centraux ont été d'abord choisis, et après le dernier point central, nous avons commencé l'enregistrement de la série temporelle.

Nous avons utilisé comme générateur de hasard pour le choix des points centraux pour la plupart des exécutions *l'horloge* du micro-ordinateur. L'inconvénient est, que le générateur de hasard est appelé plusieurs fois pendant la même exécution, en des délais de temps très courts. Donc les nombres de hasard risquent d'être fortement corrélés. Dans les exécutions les plus récentes nous avons utilisé le générateur

$$y_{n+1} = 3.87 \cdot y_n \text{ mod } 1$$

Il faut donc entrer le premier numéro du générateur de hasard, les numéros de hasard suivants sont générés par cette équation. Cette procédure a l'avantage d'avoir des résultats strictement *réproductibles*.

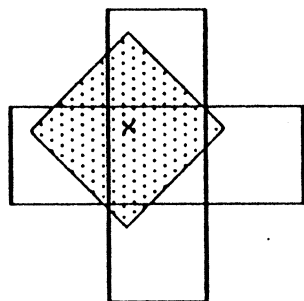
### Erreur par la discrétisation des coordonnées pour les petits rayons

Par le fait, que les coordonnées de chaque point ont été transformées en coordonnées entières, les distances sont aussi des nombres entiers. Cela induit un erreur de discrétisation pour les petits rayons. Les boules autour des points centraux aux petits rayons ne sont pas bien centrées, à cause de la discrétisation du système de coordonnées.

La boule de rayon 0 autour du point central contient une boîte de longueur 1. Si la dimension de l'espace de phases est de 1, la boule de rayon 1 contient 3 boîtes de longueur 1, la boule de rayon 2 en contient 5 et ainsi de suite. Dans ce cas, il est facile d'ajouter un facteur de correction de rayon au calcul, si on ne tient pas compte du fait que les boules sont décentrées. Si la valeur numérique du rayon de la boule est de  $l$ , la boule a en réalité un rayon de  $l+0.5$ .

Ce facteur de correction est juste pour toute dimension d'espace des phases, si on utilise la norme  $\| \cdot \|_\infty$  (norme du maximum). Pour tout autre norme le facteur de correction dépend peut-être de la dimension de l'espace des phases, mais nous n'avons pas résolu ce problème. Dans nos calculs nous n'avons pas tenu compte des

boules d'un rayon inférieur à 8 . Nous n'avons pas ajouté de facteur de correction.



x = point central

La surface en pointillée est la vraie boule de rayon 1 (norme  $\| \cdot \|_1$ ) autour du point central.

La boule de rayon 1 dans le système de coordonnées entières comprend les 5 carrés dessinés.

Dans les exemples présentés dans ce travail les courbes ont souvent la même allure pour le graphe de l'entropie et le graphe de capacité, calculé par le biais de la corrélation d'ordre -1. Dans ces cas nous présentons une courbe, si les courbes ont des différences importantes, on l'indiquera.

#### 6A.2. Notations :

N dénote le nombre de points de la série temporelle

m dénote le nombre de points centraux

Dans les descriptions des expériences, pour indiquer la valeur du rayon d'une boule, nous n'utilisons pas les coordonnées en valeurs entières, mais un autre système de coordonnées. On obtient ces coordonnées par une transformation des coordonnées de l'espace des phases, telle que la différence entre maximum et minimum de chaque coordonnée est de  $1/n$  où n est la dimension de l'espace des phases. Pour des exemples, où les bornes de l'attracteur ne sont pas connues, nous avons estimé les bornes.

Exemple: pour l'attracteur de Hénon nous avons estimé les bornes comme suit

$$x_{\min} = -1.3 \quad x_{\max} = 1.3$$

$$y_{\min} = -0.39 \quad y_{\max} = 0.39$$

Soient  $P=(x_1, y_1)$  et  $Q=(x_2, y_2)$  deux points de la série temporelle en coordonnées de l'espace des phases: La distance en coordonnées transformées est de

$$\text{dist}(P, Q) = |x_1 - y_2|/5.2 + |y_1 - y_2|/1.56$$

$\varepsilon_1 = 1/2$  par défaut. Si ce n'est pas indiqué autrement, la série est choisie telle que  $\varepsilon_k = \sqrt[4]{2} \cdot \varepsilon_{k+1}$ .

- $L^+$  l'indice du plus petit rayon utilisé pour le calcul des dimensions de corrélation à coefficient  $q$  positif
- $L^-$  l'indice du plus petit rayon utilisé pour le calcul des dimensions de corrélation à coefficient  $q$  négatif
- $L_{\max}$  l'indice du plus grand rayon utilisé pour le calcul de tous les dimensions de  $q$ -corrélation,  $L_{\max} = 1$  par défaut.

Le plus petit rayon est calculé de façon différente pour le calcul de  $d_{\text{inf}}(\mu_X)$  et de  $d_{-1\text{cor}}(\mu_X)$  d'une part et de  $d_{\text{cor}}(\mu_X)$  d'autre part. Pour le calcul de  $d_{\text{cor}}(\mu_X)$  on ne considère que les rayons pour lesquels il existe au moins 50 paires de points dont la distance est inférieure à ce rayon. Pour le calcul de  $d_{\text{inf}}(\mu_X)$  et de  $d_{-1\text{cor}}(\mu_X)$ , on calcule le plus petit rayon, tel que pour chaque point central on a trouvé au moins une distance inférieure à ce rayon. Le maximum entre ce rayon, et le plus petit rayon pour le calcul de la dimension de corrélation sera le plus petit rayon pour le calcul de la dimension d'information, et les dimensions de  $q$ -corrélation à coefficient  $q$  négatif.

### 6A.3. Exemples d'attracteurs

En outre des exemples présentés dans paragraphe 4.3. on utilise dans ce chapitre les exemples suivants.

#### Attracteur Cantorien du tiers median d'une fonction unimodale [Cos]

L'ensemble de Cantor est l'exemple type d'un ensemble fractal. Soit  $x_n$  la suite réelle suivante :

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 & x_1 &= 1 \\ x_{n+1} &= -x_n + 1 - (1/3)^{i+1} \\ &\text{où } i \text{ est tel que } x_n \in [ (2/3) \cdot (1/3)^i, (1/3)^i ] \end{aligned}$$

Les points de cette suite sont situés sur l'ensemble de Cantor du tiers médian. L'itération vérifie la condition d'homothétie suivante:

$$\begin{aligned} \mu[a, a+3^{-i}] &= 2^{-i} \\ \text{où } a &= \sum b_j 3^{-j} \text{ et } b_j \in \{0,2\}. \end{aligned}$$

On sait que dans cet exemple, pour toute valeur  $q$ ,  $d_{(q+1)\text{inf}}(\mu) = d_{q\text{cor}}(\mu) = \ln 2 / \ln 3$ .

Attracteur cantorien asymétrique d'une fonction unimodale [Cos]

Soit  $x_n$  la suite réelle suivante :

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 1$$

$$x_{n+1} = -(3/4)^{i-1} x_n + 1$$

$$\text{où } i \text{ est tel que } x_n \in [ (2/3) \cdot (1/3)^i, (1/3)^i ]$$

Les points de cette suite se situent sur un ensemble de Cantor. Cet ensemble est construit de la façon suivante: Au départ on enlève de l'intervalle  $[0,1]$  le morceau entre le tiers gauche et le quart à droite. Ensuite on laisse sur l'intervalle gauche le quart gauche et le tiers droit. Sur l'intervalle droit on laisse le tiers gauche et le quart droite. (figure 1) L'intervalle droit et l'intervalle gauche ont la même mesure.

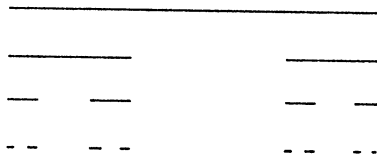


Figure 1 Attracteur cantorien asymétrique

Attracteur de Lauwerier : Le système d'équations suivant a été étudié par Lauwerier [Lau] à cause de sa ressemblance visuelle avec l'attracteur de Hénon et parce que d'importantes propriétés sont connues.

$$x_{n+1} = b x_n (1 - 2 y_n) + y_n$$

$$y_{n+1} = 4 y_n (1 - y_n)$$

$$b = 1/3$$

Cet attracteur (figure 2) possède une *mesure invariante* pour presque tout point de départ dans l'intervalle  $[0,1] \times [0,1]$ , par rapport à la mesure de Lebesgue. Mais on ne peut pas appliquer le théorème de L.S. Young sur la relation entre dimension fractale, entropie et coefficients de Lyapunov (voir paragraphe 3B.4), car l'itération n'est pas réversible. Les exposants de Liapunov sont  $\lambda_1 = \ln 2$  et  $\lambda_2 = -\ln 2 b^{-1}$

Selon la conjecture de Kaplan-Yorke [FKYY], on obtient

$$d_{\text{inf}} = 1 - \lambda_1 / \lambda_2 = 1 + \ln 2 / (\ln 2 + \ln b^{-1}) = 1.3868 \dots$$

mais il n'est pas démontré que cette formule s'applique sur cet exemple.

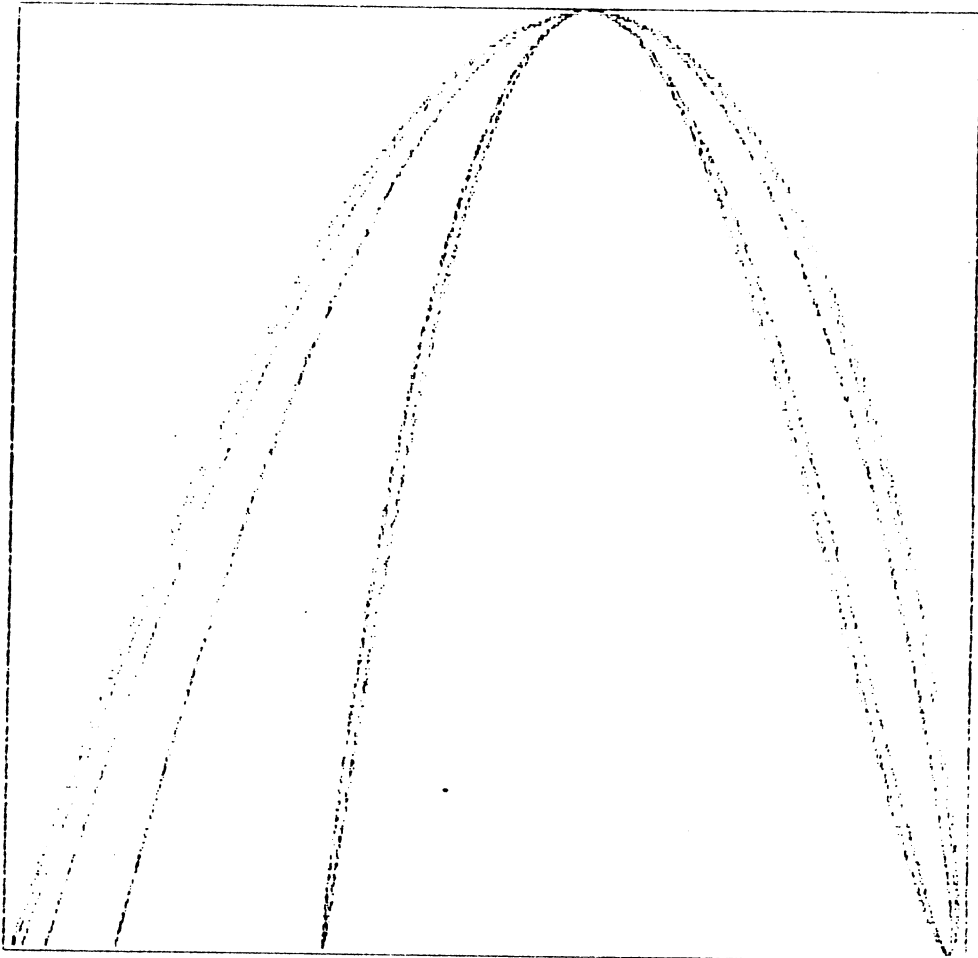


Figure 2 : Attracteur de Lauwerier

**Attracteur de Thibault :** L'attracteur étudié par Thibault [Thi](figure 3) est un ensemble limite d'un système d'équations linéaires par morceaux. Contrairement à l'attracteur de Hénon ou de Lauwerier, le flot n'est pas différentiable dans tous les points.

$$x_{n+1} = \alpha x_n + y_n$$

$$y_{n+1} = -x_n + \lambda |y_n| - 1$$

$$\lambda = \sqrt{2} \quad \alpha = 0.3$$

Cet attracteur a aussi des lignes critiques.

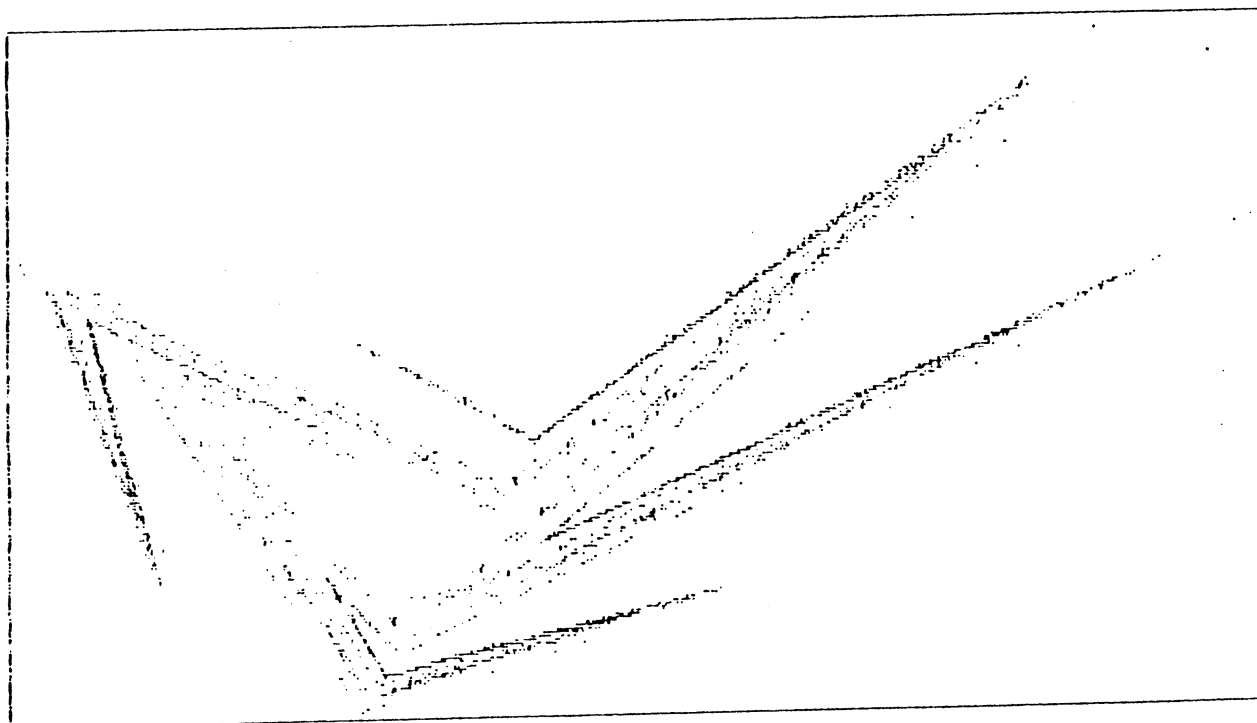


Figure 3 : Attracteur de Thibault

#### 6A.4. Etude de la fonction de corrélation

Dans ce chapitre nous présentons des exemples de "fonctions de corrélation", qui ont des particularités différentes. Malheureusement une expression analytique des fonctions de corrélation n'existe pour aucun des exemples. Donc ce que nous montrons sont des courbes de corrélation, dont on va vérifier ultérieurement par calcul numérique, qu'ils approchent bien la fonction de corrélation. Lorsque tout calcul analytique de l'écart entre la courbe de corrélation, qu'on obtiendra par nos calculs et fonction de corrélation part des hypothèses, qui ne sont pas entièrement vérifiées (voir Chapitre 5), un reste de incertitude reste sur la vraie allure des fonctions de corrélation.

Les dessins des courbes de corrélation ont été obtenues sur une table traçante *Benson*.

##### 6A.4.1. Un cas où tout semble aller bien

Attracteur de Hénon (voir paragraphe 4.3.)

On ne connaît pas la valeur exacte des dimensions fractales de l'attracteur de Hénon, on ne sait même pas s'il s'agit d'un attracteur étrange. On ne peut comparer qu'avec des résultats numériques, obtenus par d'autres auteurs.



Nous avons calculé la dimension de capacité (figure 4), la dimension d'information (figure 5) et la dimension de corrélation (figure 6). La courbe de corrélation approche bien une ligne droite, dont la pente diminue de façon significative pour le rayon supérieur à  $2^{-3}$ . Dans les calculs, qui suivent, nous avons fixé le plus grand rayon à  $2^{-4}$ .

#### Constatations :

- Les trois courbes de corrélation, pour  $q=1$ ,  $q=-1$  et la dimension d'information, approchent une ligne droite, avec une précision étonnante.
- Pour des rayons de l'ordre de la taille de l'attracteur la pente de la courbe de corrélation commence à diminuer. Donc il faut écarter ces rayons.
- Rien n'indique un changement de la pente de ces courbes en laissant tendre  $\ln \varepsilon$  vers  $-\infty$ .

De nombreux chercheurs ont conclu que l'allure théorique de la courbe de corrélation d'un attracteur étrange est toujours une droite. Cette opinion est fausse, comme on verra dans l'étude d'un attracteur cantorien ci-dessous.

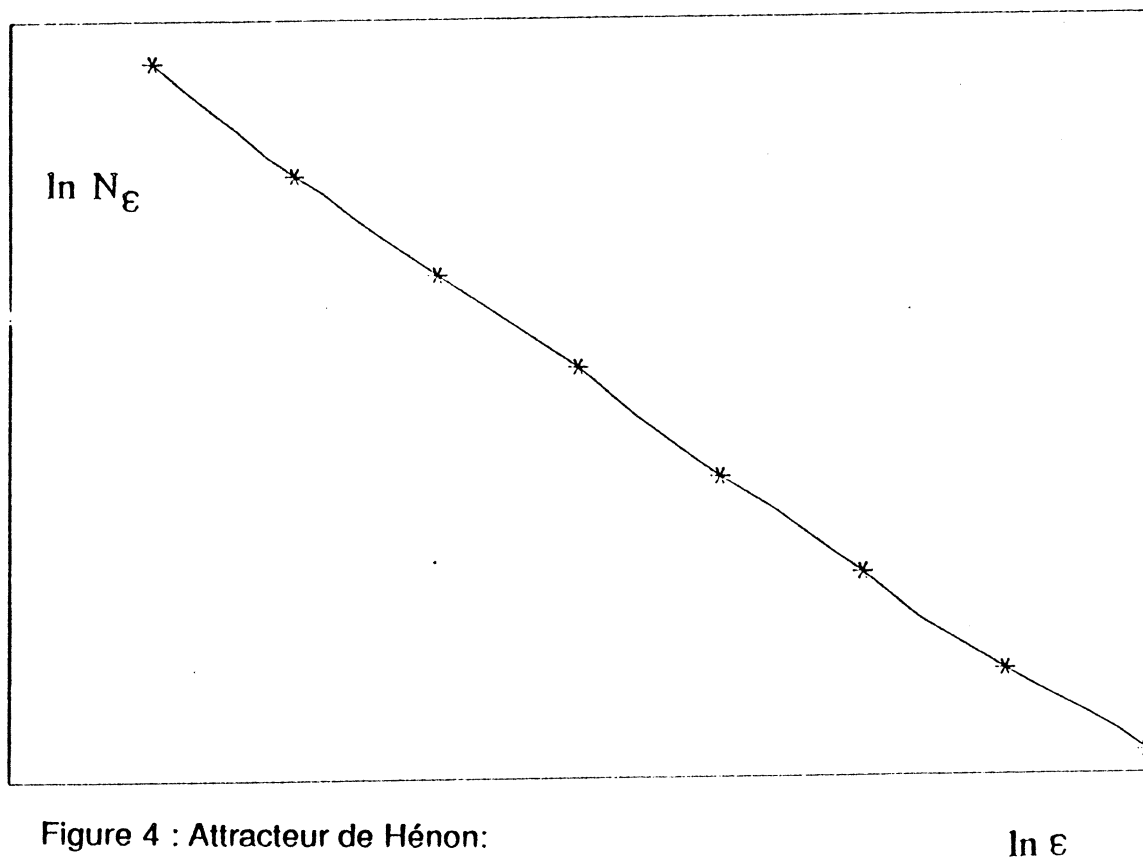


Figure 4 : Attracteur de Hénon:

La courbe de capacité

$N = 20\ 000$        $m = 200$

Série de rayons:  $\Delta_\varepsilon = \sqrt[4]{2}$

Tous les 5 rayons un symbole a été dessiné

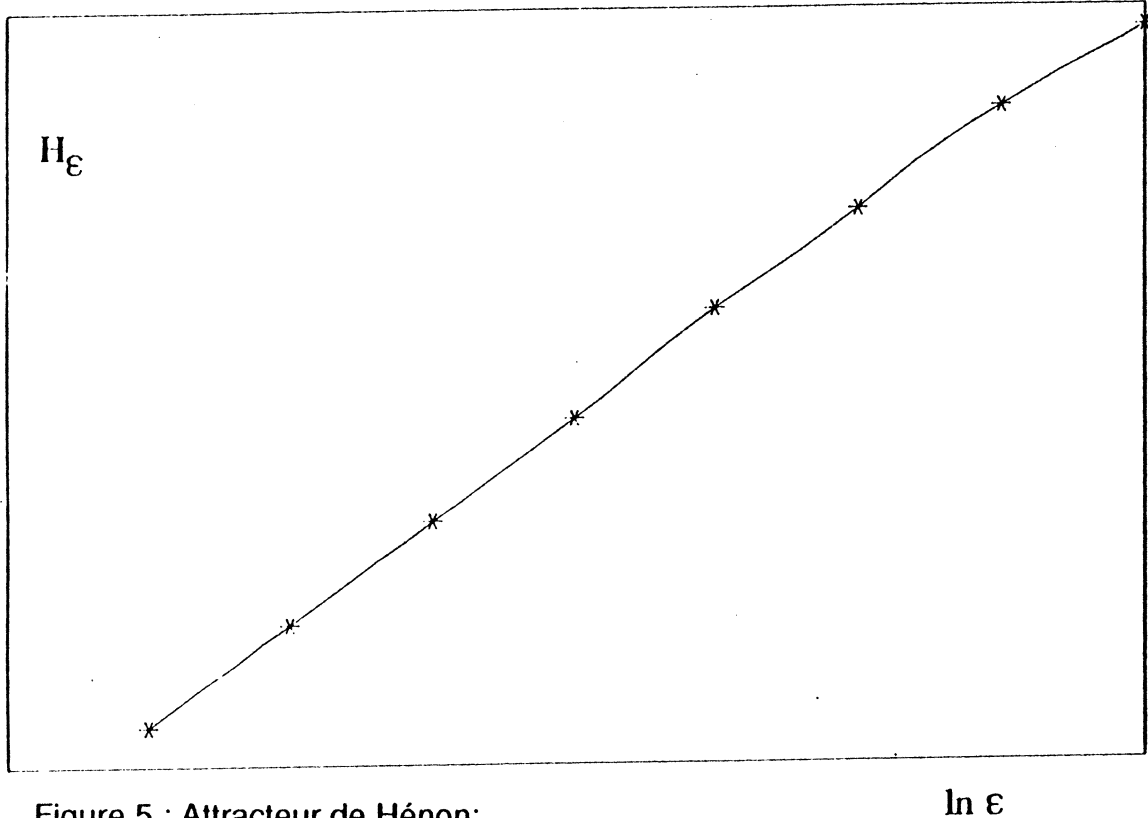


Figure 5 : Attracteur de Hénon:  
La courbe d'entropie (par l'algorithme des points centraux)  
même calcul que pour figure 4

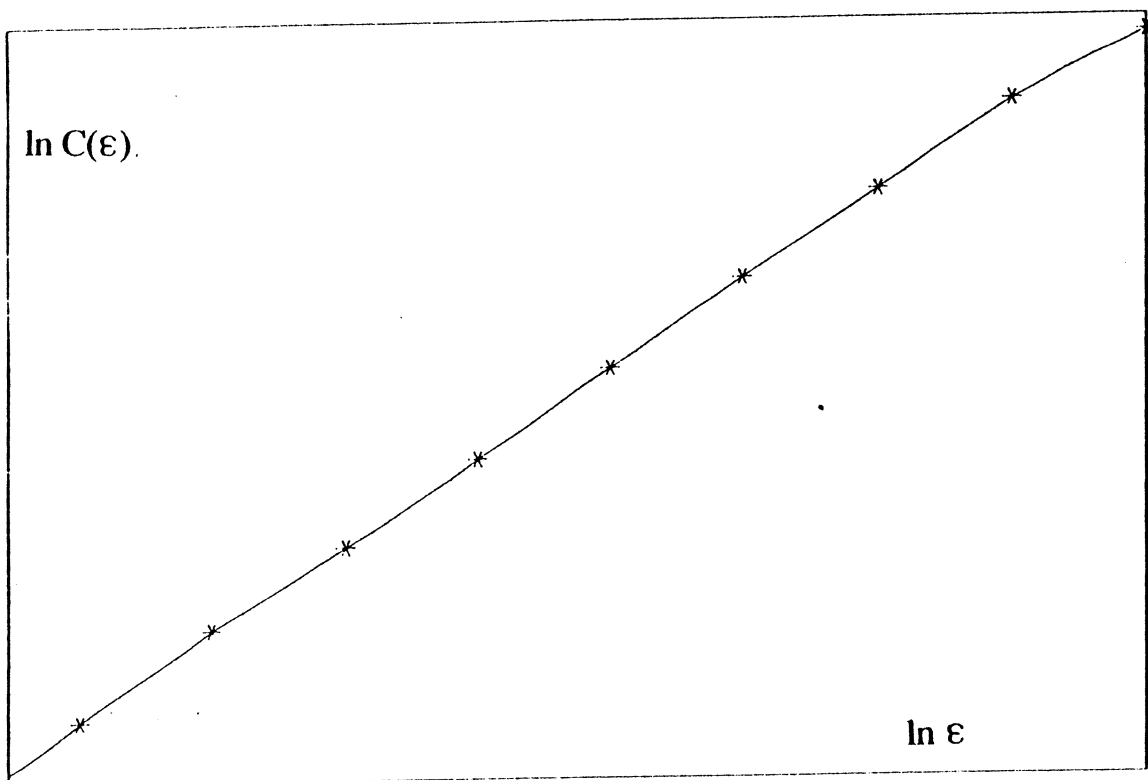


Figure 6 : Attracteur de Hénon:  
La courbe de corrélation  
même calcul que pour figure 4

### 6A.4.2. Oscillations dans les courbes de corrélation

#### Attracteur Cantorien du tiers median d'une fonction unimodale [Cos]

Cet attracteur (voir 6A.2) est l'exemple type d'un ensemble fractal.

On sait que dans cet exemple, pour toute valeur  $q$ ,  $d_{(q+1)} \text{inf}(\mu) = d_q \text{cor}(\mu) = \ln 2 / \ln 3$ .

#### Constatation : (voir figure 7)

- La courbe de corrélation n'est pas une droite.

Pour un ensemble de Cantor symétrique il faut s'attendre à obtenir des *oscillations périodiques* autour d'une droite [FSS].

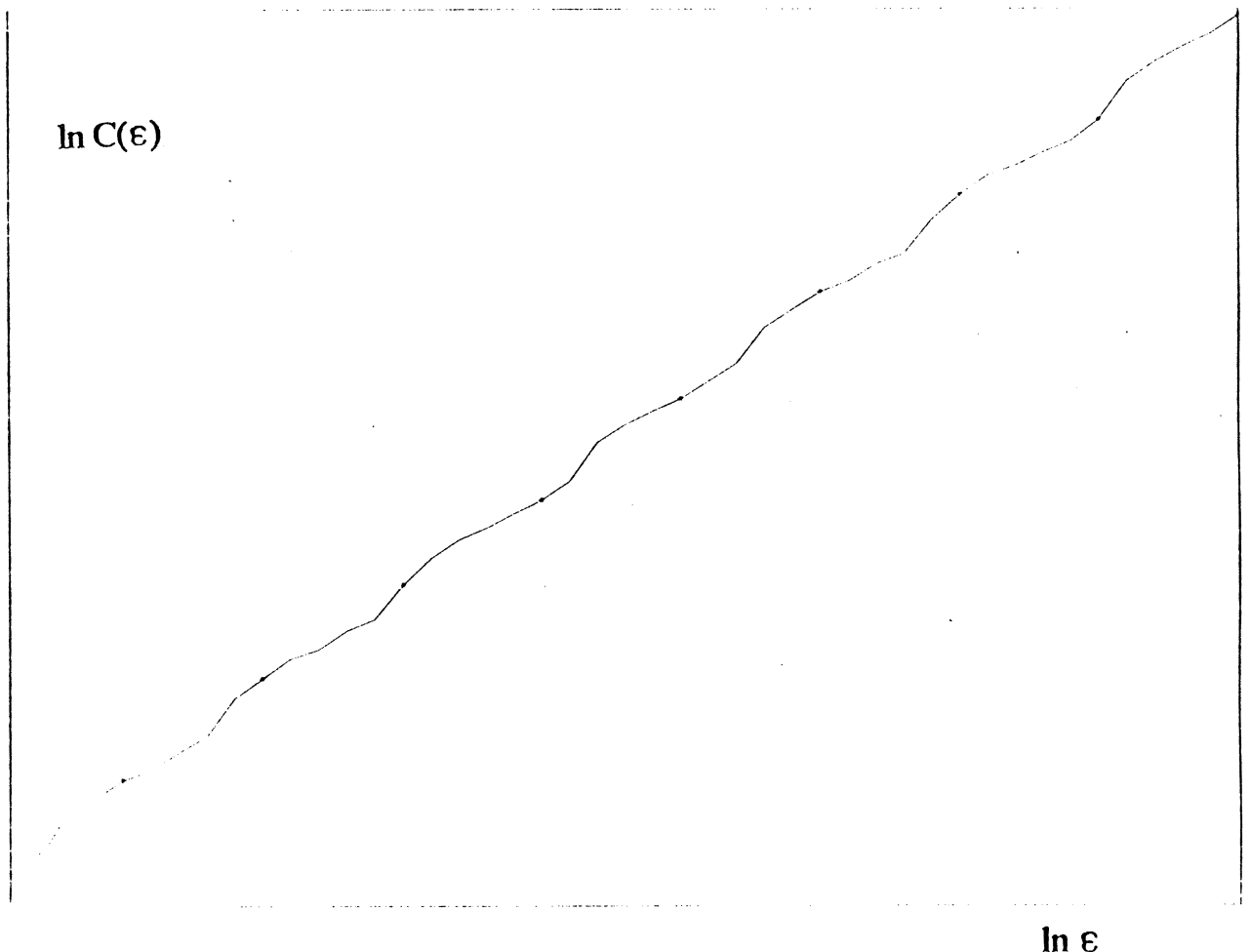


Figure 7 : Attracteur cantorien symétrique:

La courbe de corrélation

$N = 10\ 000$        $m = 200$

Série de rayons:  $\Delta_\varepsilon = \sqrt[4]{2}$

Tous les 5 rayons un symbole a été dessiné

**Proposition :** Il existent des attracteurs, dont les courbes de  $q$ -corrélation ont des plateaux.

**Démonstration :** On considère un ensemble de Cantor, défini sur l'intervalle  $[0,1]$ , où au lieu d'enlever les tiers médians, on enlève les deux quarts médians. Pour cet ensemble il n'existe aucune paire de points ayant une distance supérieure à  $1/4$  et inférieure à  $1/2$ . De même, pour tout  $i \in \mathbb{N}$  il existe aucune paire de points tel que  $4^{-i} < \text{distance} < 2 \cdot 4^{-i}$ .

On considère l'attracteur, qui admet cet ensemble comme ensemble limite (un tel attracteur existe, voir paragraphe 3A.4). L'intégrale de corrélation est le même pour un rayon  $\varepsilon$  quelconque de l'intervalle  $[1/4, 1/2]$ , il en est de même pour tout intervalle  $[4^{-i}, 2 \cdot 4^{-i}]$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

Nous avons calculé et dessiné la courbe de corrélation de cet ensemble cantorien. Nous avons créé une série temporelle qui est distribuée de telle manière sur l'ensemble, que chaque intervalle du même ordre  $i$  (voir paragraphe 3A.3) a le même nombre de points. Puis nous avons calculé la courbe de corrélation (figure 8). L'existence des plateaux dans la courbe de corrélation correspond à la proposition ci-dessus.

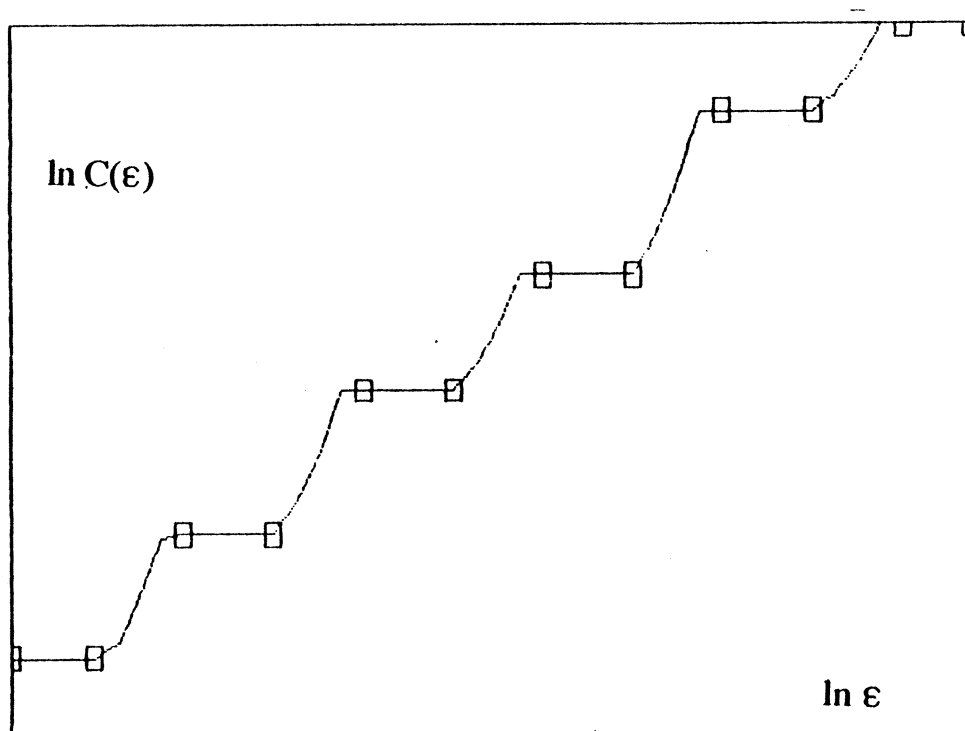


Figure 8: Ensemble cantorien des deux quarts medians:

La courbe de corrélation

$N = 16384$        $m = 100$

Série de rayons:  $\Delta_\varepsilon = 4\sqrt{2}$

Tous les 4 rayons un symbole a été dessiné.

**Attracteur de Feigenbaum** (voir 4.3.)

On a démontré [Lan], [Eps], que l'attracteur de Feigenbaum est un ensemble Cantorien. On ne connaît pas la forme géométrique précise de l'attracteur, mais on a des informations assez précises sur sa structure, quand l'échelle tend vers 0 (voir [Fei]). Ces informations sont suffisantes pour donner une estimation analytique de ses dimensions. Grassberger et Procaccia [GP] obtiennent ainsi

$$\text{DIM}(A) = 0.538\dots$$

$$d_{\text{inf}}(\mu) = 0.5170\dots$$

$$0.4926 < d_{\text{cor}}(\mu) < 0.5024$$

Nous avons calculé les dimensions fractales de cet attracteur et nous avons dessiné la courbe d'entropie (figure 9)

Constatation : La courbe d'entropie montre clairement des oscillations autour d'une droite. Contrairement à l'attracteur cantorien il n'est pas possible de reconnaître une période dans les oscillations.

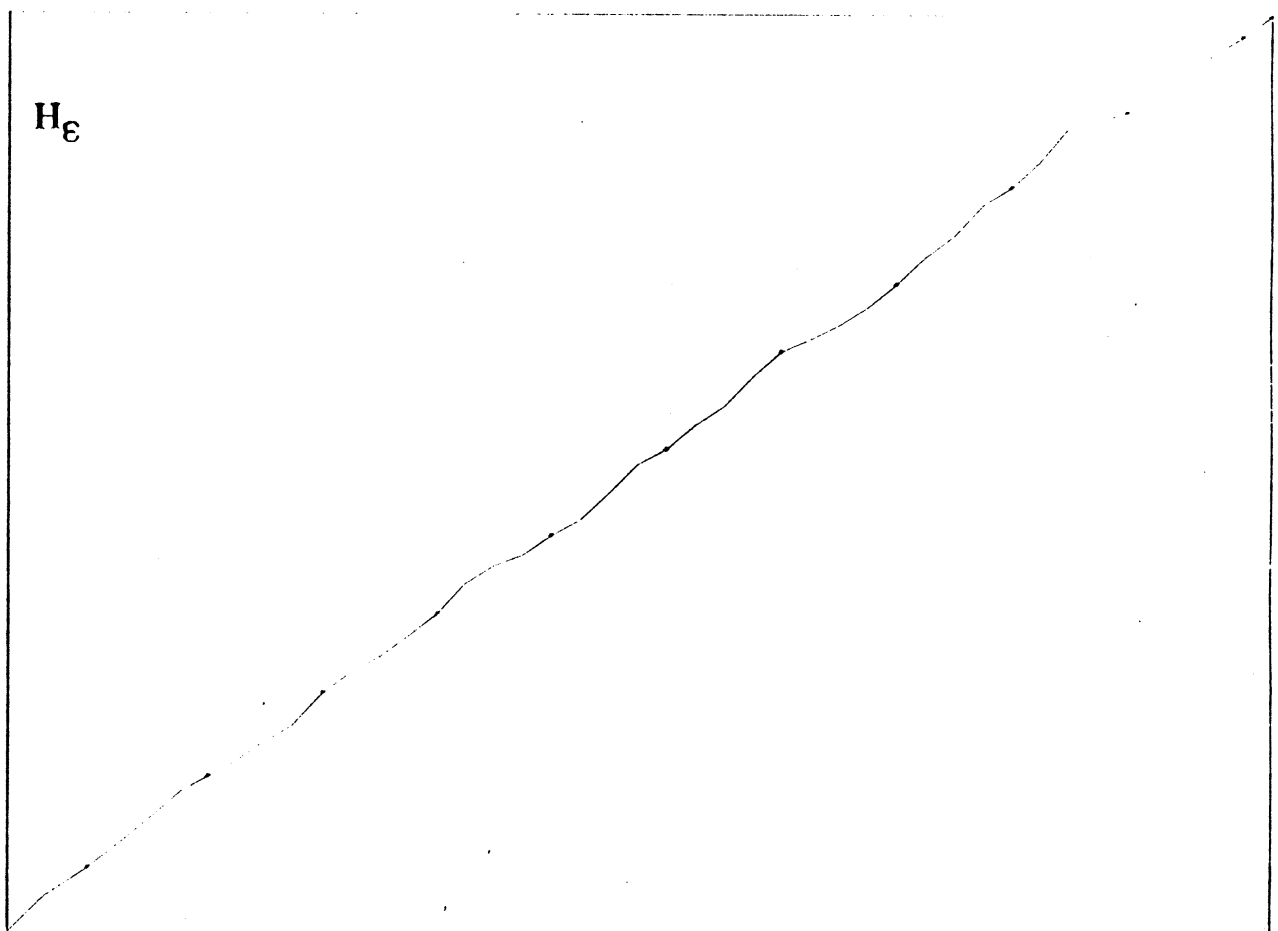


Figure 9 : Attracteur de Feigenbaum:  
La courbe d'entropie (par l'algorithme des points centraux)

$N = 10\ 000$        $m = 200$

Série de rayons:  $\Delta_\epsilon = \sqrt[4]{2}$

Tous les 4 rayons un symbole a été dessiné

### 6A.5. Convergence des courbes de corrélation

Les courbes de corrélation présentés ci-dessus, sont elles bien proches des fonctions de corrélation? Pour répondre à cette question, on va d'abord faire varier le nombre de points centraux, en laissant constant la longueur de la série temporelle. Quand en augmentant le nombre des points centraux la courbe de corrélation semble avoir admise une courbe limite, on augmente la longueur de la série temporelle, en laissant le nombre de points centraux constant.

Si alors l'allure de la courbe de corrélation semble admettre une fonction limite, on suppose, que cette limite est la fonction de corrélation.

#### 6A.5.1. Augmentation du nombre des points centraux

##### Description de l'expérience

Etant donnée une série temporelle, dont la longueur reste fixe, on choisit au hasard un certain nombre de points centraux. En augmentant ce nombre, on observe les variations des courbes de corrélation .

On a calculé la dimension de corrélation généralisée aux coefficients -1 et 1 et la dimension d'information d'un attracteur par la méthode des points centraux. On se fixe une série croissante  $\{m_k\}$   $k=1, \dots, k_{\max}$  du nombre des points centraux. Le nombre de points de la série temporelle reste fixe. On choisit d'abord les  $m_1$  premiers points centraux, puis on rajoute  $m_2 - m_1$  points centraux et ainsi de suite. Pour chaque nombre  $m_k$  de points centraux nous avons calculé les courbes de corrélation et les dimensions fractales.

(figures 10 (Attracteur de Hénon), 11 (Attracteur cantorien du tiers median), 12 (Attracteur de Feigenbaum), 13 (Attracteur de Lauwerier))

##### Constatation :

Pour tous les exemples on observe un gain de précision, en augmentant le nombre de points centraux. Les courbes de corrélation pour chaque coefficient semblent converger vers une courbe limite, à la quelle on devrait être très proche avec 100 ou 200 points centraux. Pour l' attracteur cantorien et pour l'attracteur de Feigenbaum la courbe limite semble osciller autour d'une droite. Il serait souhaitable de poursuivre cette expérience pour des nombres de points centraux encore plus grands, au moins pour la dimension de corrélation.

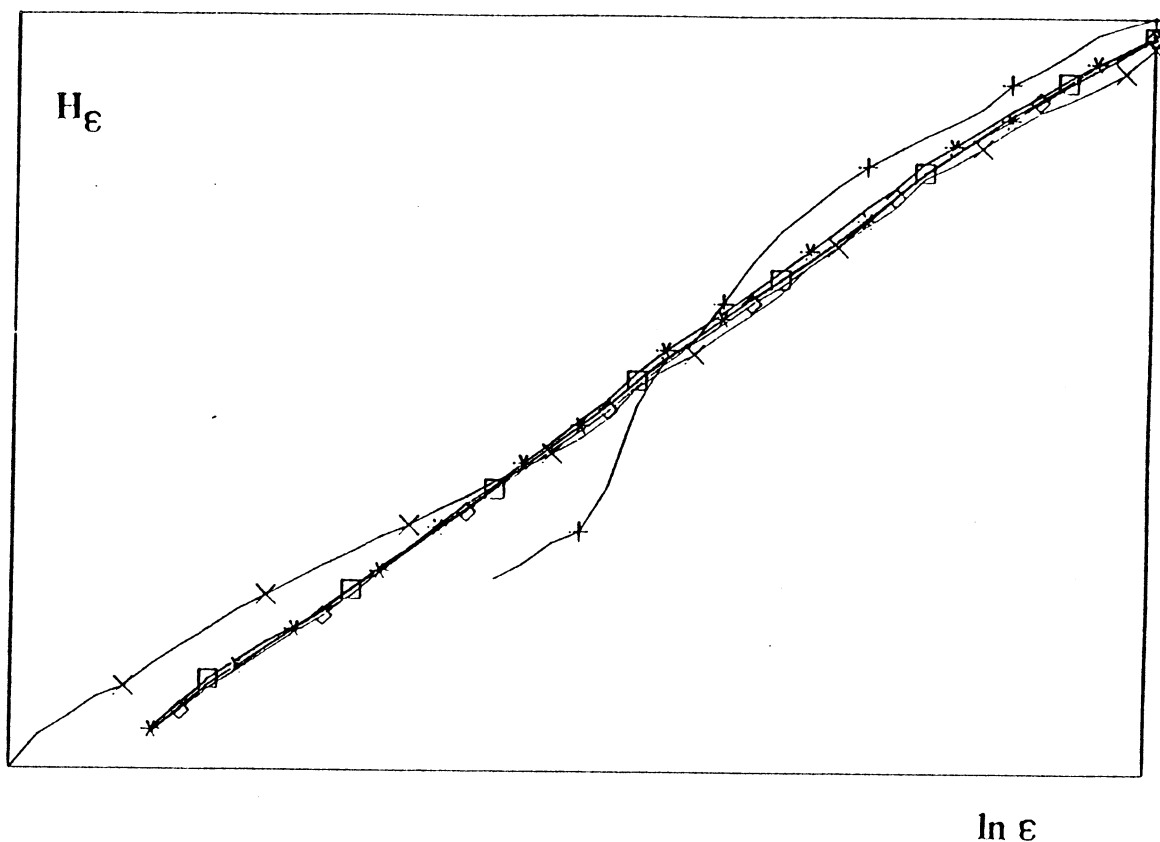


Figure 10 Attracteur de Hénon

Les courbes d'entropie (par l'algorithme des points centraux) en variant le nombre de points centraux

$N = 20\ 000$

Points centraux:  $+ = 1$     $\times = 5$     $\ast = 20$   
 $\square = 50$     $\diamond = 100$     $\ast = 200$

Série de rayons:  $\Delta_\epsilon = 4\sqrt{2}$  Tous les 5 rayons un symbole a été dessiné.

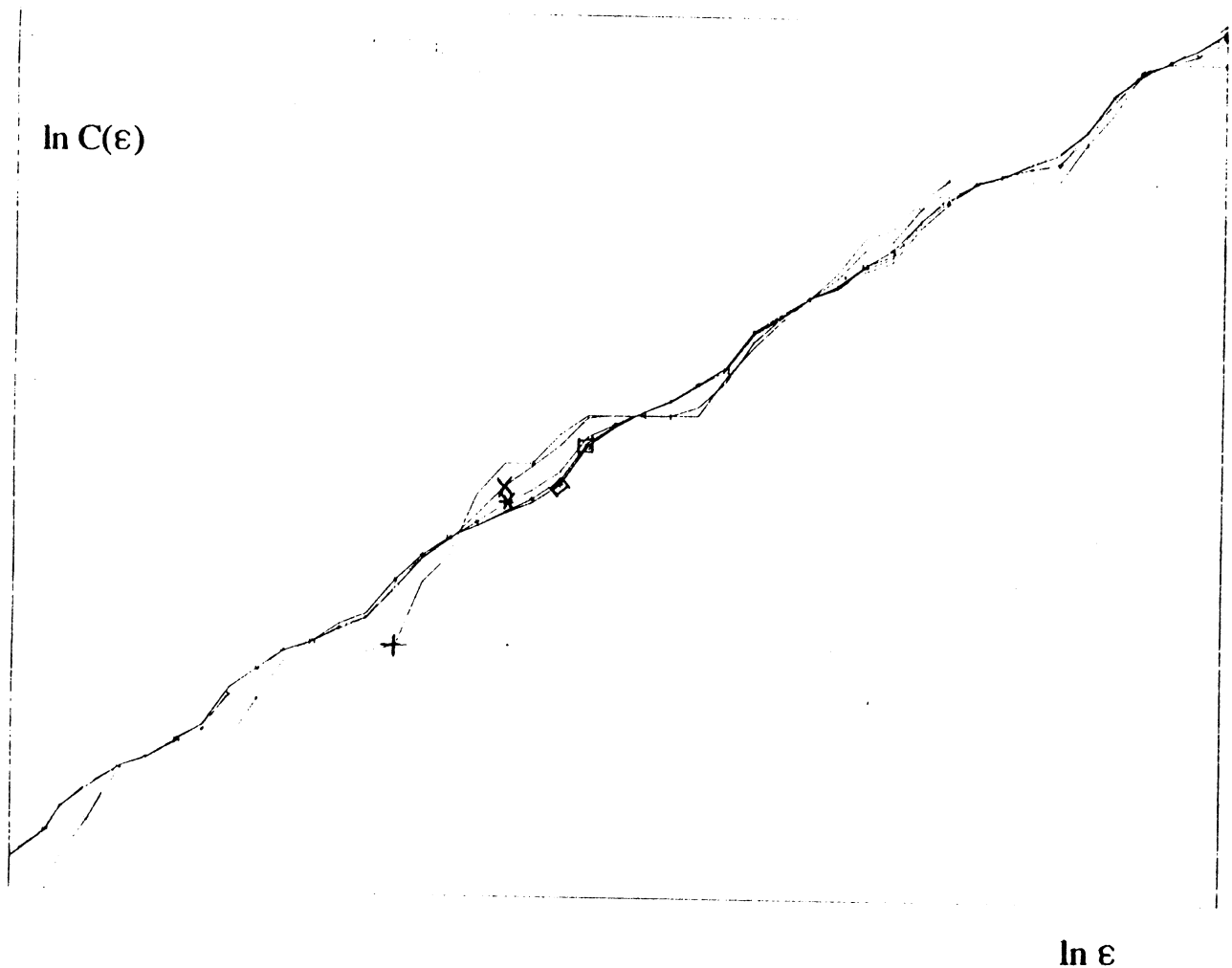


Figure 11 Attracteur cantorien du tiers median  
 Les courbes de corrélation en variant le nombre de points centraux  
 $N = 10\,000$

Points centraux:  $+$  = 1     $\times$  = 5     $\times$  = 20  
 $\square$  = 50     $\diamond$  = 100     $\times$  = 200

Série de rayons:  $\Delta_\varepsilon = 4\sqrt{2}$  Tous les 5 rayons un symbole a été dessiné.



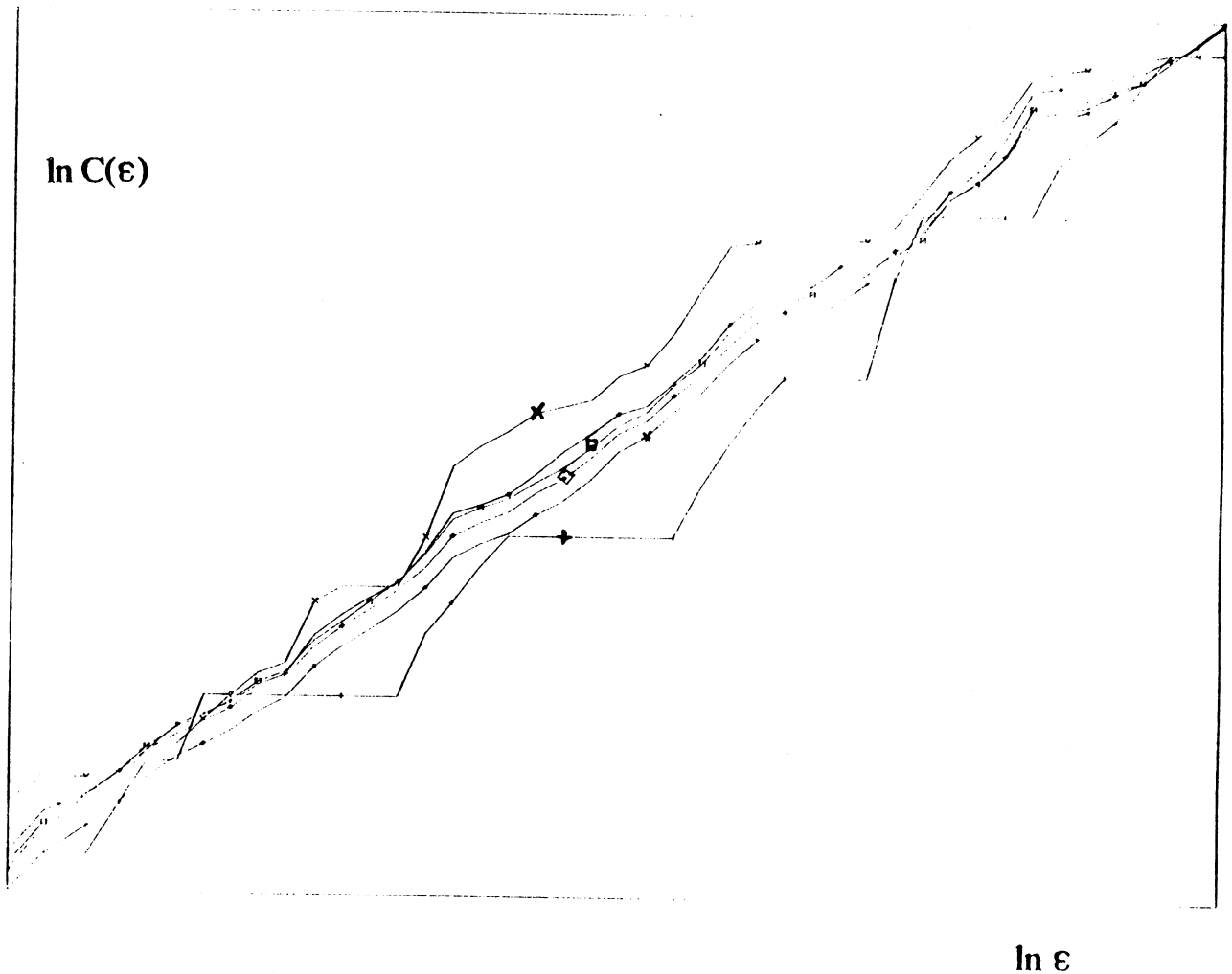


Figure 12 Attracteur de Feigenbaum:  
 Les courbes de corrélation en variant le nombre de points centraux  
 $N = 10\ 000$

Points centraux:  $+$  = 1     $\times$  = 5     $\times$  = 20  
 $\square$  = 50     $\diamond$  = 100     $\times$  = 200

Série de rayons:  $\Delta_\epsilon = 4\sqrt{2}$

Tous les 4 rayons un symbole a été dessiné.

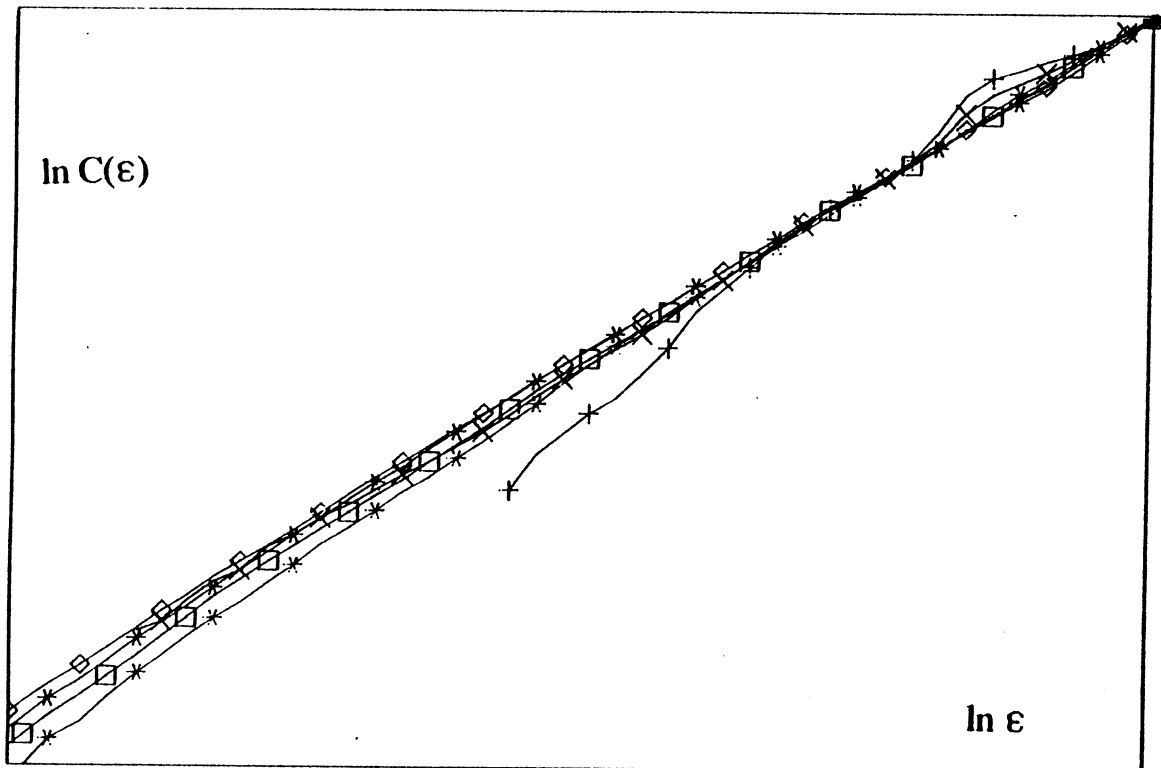


Figure 13 Attracteur de Lauwerier :  
 Les courbes de corrélation en variant le nombre de points centraux  
 $N = 20\,000$

Points centraux:  $+ = 1$     $\times = 5$     $\times = 20$   
 $\square = 50$     $\diamond = 100$     $\times = 200$

Série de rayons:  $\Delta_\varepsilon = 4\sqrt{2}$

Tous les 3 rayons un symbole a été dessiné.

### 6A.5.2 Augmentation de la longueur de la série temporelle

En plus de la question de convergence des courbes de corrélation on va traiter la question suivante

- Est-ce que la prolongation du domaine de rayons donne des informations nouvelles, inattendues sur la structure fine de l'attracteur?

#### Description de l'expérience

Nous avons calculé les dimensions de corrélation avec les paramètres 1 et -1 et la dimension d'information par la méthode des points centraux. L'ensemble des points centraux, choisi une fois pour toute l'expérience, reste fixe. Nous avons choisi une série croissante  $\{N_k\}$   $k=1, \dots, k_{\max}$  de nombres de points de la série temporelle. Nous avons compté le nombre de points de la série temporelle dans chaque boule autour de chaque point central, d'abord pour les premiers  $N_1$  points. Nous avons calculé les courbes de corrélation, puis nous avons continué à compter, pour les  $N_2 - N_1$  points suivants. Nous avons ensuite calculé le nombre de points dans chaque boule, calculé les courbes de corrélation pour les premiers  $N_2$  points et ainsi de suite.

Le rayon, le plus grand reste le même pour tous les nombres de points de la série temporelle. Les indices des plus petit rayons  $L^+$  et  $L^-$  sont recalculés pour chaque nombre  $N_k$ . Les figures 14 à 15 montrent les résultats pour l'attracteur de Lauwerier et de Thibault ( voir paragraphe 6A.6.2) .

L'augmentation de la longueur de la série temporelle permet d'allonger le domaine de rayons. Les résultats deviennent donc plus fiables. Il serait souhaitable d'augmenter encore la longueur de la série temporelle, mais cela entraîne des difficultés supplémentaires de programmation et une augmentation du coût de calcul, voir paragraphe 6A.1.

Nous n'avons pas fait cette expérience pour les attracteurs des itérations unidimensionnelles, parce que pour ces exemples le domaine de rayons est limité par la discrétisation des coordonnées.

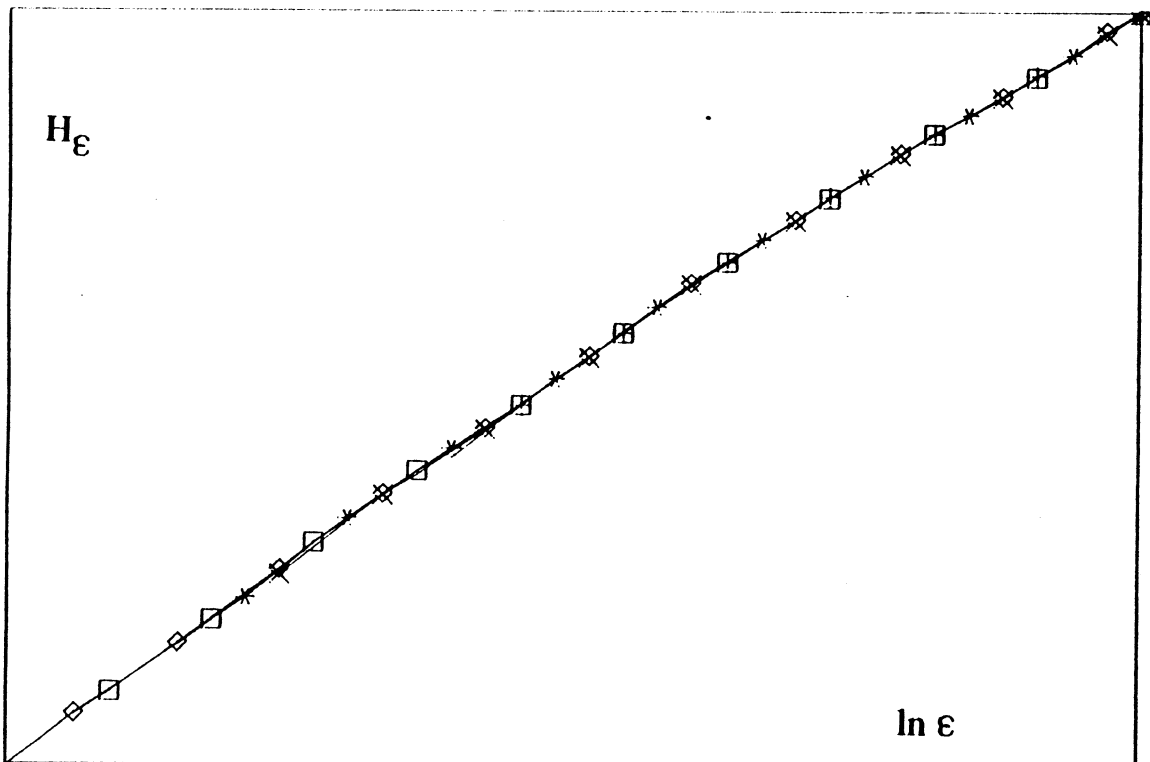


Figure 14 Attracteur de Lauwerier  
 Les courbes d'entropie en variant la longueur de la série temporelle

Série temporelle :      + = 1000    X = 4000

                          \* = 8000      □ = 16 000      ◇ = 32 000

$m = 200$

Série de rayons:  $\Delta_\epsilon = 4\sqrt{2}$     Tous les 3 rayons un symbole a été dessiné.

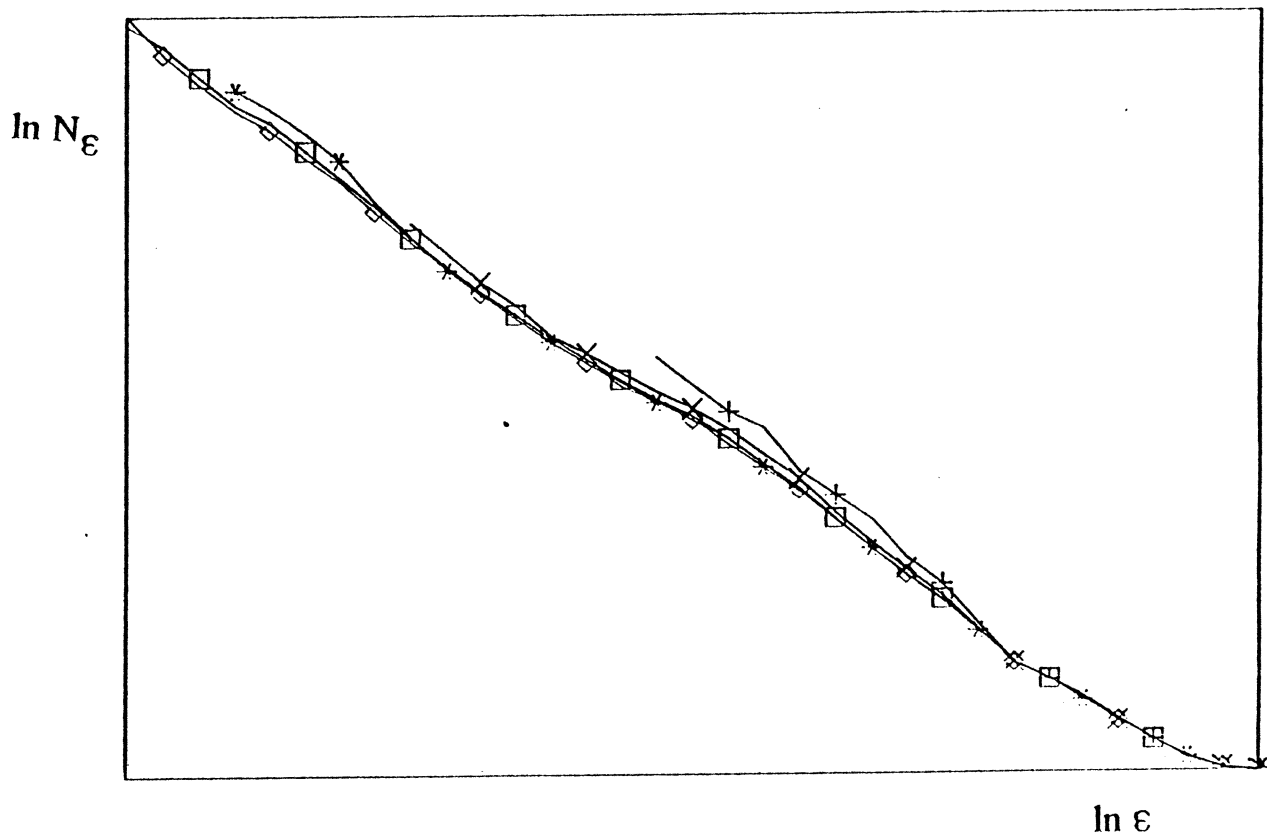


Figure 15 Attracteur de Thibault :  
 Les courbes de capacité en variant la longueur de la série temporelle

Série temporelle :      + = 1000    x = 4000  
                                   \* = 8000    square = 16 000    diamond = 32 000

$m = 200$

Série de rayons:  $\Delta_\epsilon = 4\sqrt{2}$

Tous les 3 rayons un symbole a été dessiné.

**6A.6. Résultats numériques pour trois dimensions : différents exemples**

Nous avons calculé la dimension de capacité ( par la dimension de -1-corrélation), la dimension d'information et la dimension de corrélation pour des différents exemples .

Attracteur de Hénon

N	m	d <sub>-1cor</sub>	d <sub>inf</sub>	d <sub>cor</sub>	t <sub>dim</sub>
20 000	200	1.27	1.24	1.21	16min
ref:[GP], [Gra1],[Gra2]		1.28	1.26	1.21	

Valeurs des dimensions fractales de l'attracteur de Henon obtenus par d'autres auteurs

par l'algorithme de boxcounting

	DIM	d <sub>inf</sub>	d <sub>cor</sub>
Grassberger [Gra2]	1.28		
Russel et coll. [HOR]	1.26		
Giorgilli et coll. [Gio]	1.27		
Caswell et Yorke [CY]		1.26	
Arneodo et coll. [AGK]	1.26	1.24	1.20

par l'algorithme des points centraux

	d <sub>-1 cor</sub>	d <sub>inf</sub>	d <sub>cor</sub>
Grassberger [Gra1]	1.29	1.26	1.23
Paladin et Vulpiani [PV]	1.20		

Autres algorithmes

Badii et Politi [BP]	1.27		
Grassberger et Procaccia [GP]			1.21

Quant au calcul de la dimension fractale par les coefficients de Lyapunov, avec la formule

$$d_{Lyap} = 1 + \lambda_1 / |\lambda_2|$$

Grassberger et Procaccia, Russel et coll. et Caswell et Yorke ont obtenu tous 1.26 comme valeur.

La relation  $DIM(\omega(x)) \leq d_{inf}(\mu_x) \leq d_{cor}(\mu_x)$  est vérifiée. t<sub>dim</sub> est le temps de calcul pour obtenir la dimension, qui ne comprend pas le temps de calcul pour obtenir la série temporelle .

**Attention** : Il est habituel de donner une *estimation d'erreur* de la dimension calculée en utilisant les écarts de la droite des moindres carrées, qui interpole la courbe de

corrélation. Cette méthode cache l'influence de certaines erreurs systématiques qui apparemment sont la plus grande source d'erreurs dans ces calculs.

### 6A.6.1. Influence des oscillations de la courbe de corrélation sur les valeurs des dimensions fractales

Pour l'attracteur cantorien du tiers median on a étudié la dépendance de la valeur numérique de la dimension de corrélation en fonction du plus grand et du plus petit rayon. Pour ce calcul on a utilisé une série de rayons  $\{2^{-1}, \dots, 2^{-L}\}$ ,  $L \in \mathbb{N}$ . Le nombre de points total est égal à  $N=10^4$ , et le nombre de points centraux à  $m=100$ . Nous avons fait varier  $L$  entre 2 et 13. Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 16. On comprend bien les oscillations des résultats numériques pour la dimension fractale autour de la valeur théorique, si on les compare avec les oscillations de la courbe de corrélation du même attracteur cantorien (6A.3, fig. 7)

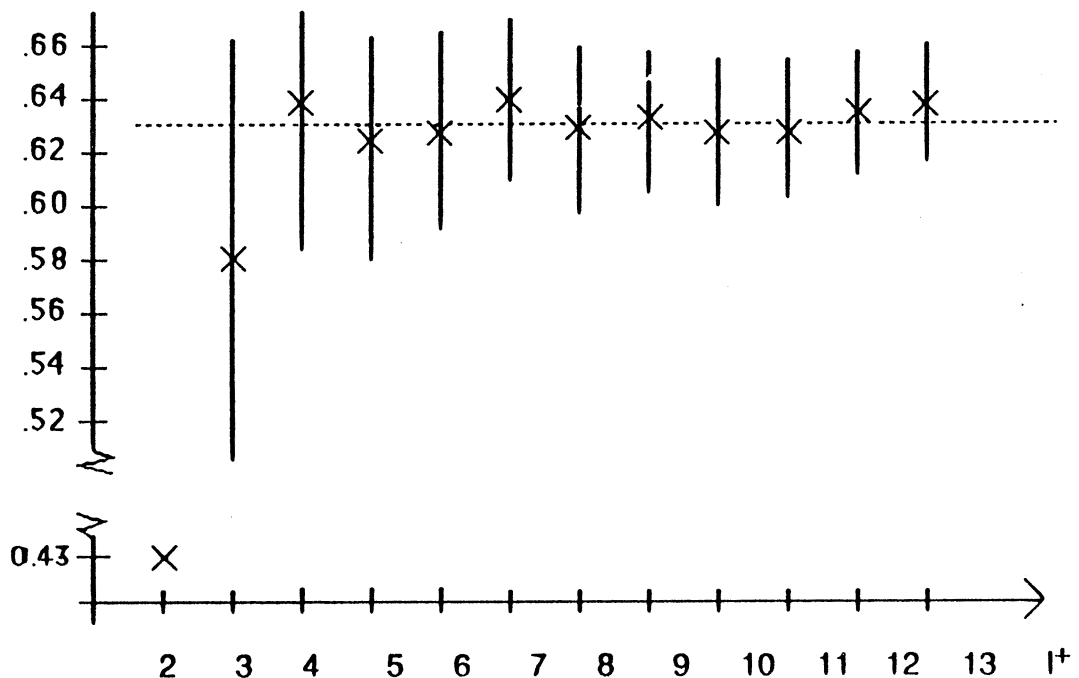


figure 16 Attracteur cantorien du tiers median  
la valeur de la dimension de corrélation en fonction du rayon minimal

Avec des rayons de la forme  $3^{-k}$  (correspondant à l'homothétie interne de l'ensemble de Cantor), on obtient des résultats de meilleure qualité, par exemple avec  $10^4$  points et 100 points centraux, on a obtenu  $d_{\text{cor}}(\mu_X) = 0.630$ .

Attracteur de FeigenbaumRésultats :

N	m	$d_{-1cor}$	$d_{inf}$	$d_{cor}$
$10^4$	200	0.584	0.534	0.503
valeurs théoriques		0.538...	0.5170...	$0.4926 < d_{cor} < 0.5024$

L'écart entre résultat numérique et valeur théorique pour la dimension de capacité est inquiétant. On verra dans paragraphe 6A.7. que les valeurs numériques des dimensions ponctuelles varient énormément. Peut - être on a un nombre de points centraux trop petit.

Attracteur cantorien asymétrique: (à comparer paragraphe 6A.6)

q	-1	$d_{inf}(\mu)$	1
$d_{q+1 inf}(\mu)$ (valeurs théoriques)	.5605	.5578	.5553
$d_q cor(\mu)$ (valeurs numériques)	.561	.559	.557

L'accord entre résultats théoriques et résultats numériques est excellent.

6A.6.2 Itérations bidimensionnelles ayant des lignes critiques

Attracteur de Lauwerier : Selon la conjecture de Kaplan-Yorke [FKYY], on obtient

$$d_{inf} = 1 - \lambda_1 / \lambda_2 = 1 + \ln 2 / (\ln 2 + \ln b^{-1}) = 1.3868 \dots$$

mais il n'est pas démontré que cette formule s'applique sur cet exemple.

Résultats : ( N=32 000 m=100 )

dimension de capacité: 1.32

dimension d'information: 1.22

dimension de corrélation: 1.10

Bien que point de vue optique cet attracteur ressemble à l'attracteur de Hénon, les résultats numériques pour les dimension fractales sont différents.

Il faut considérer les résultats avec précaution. En effet, la valeur de la dimension fractale augmente, si on tient compte seulement des plus petits rayons.

Observation : La pente de la courbe de corrélation augmente pour les rayons les plus petits (voir [figure 17](#)).



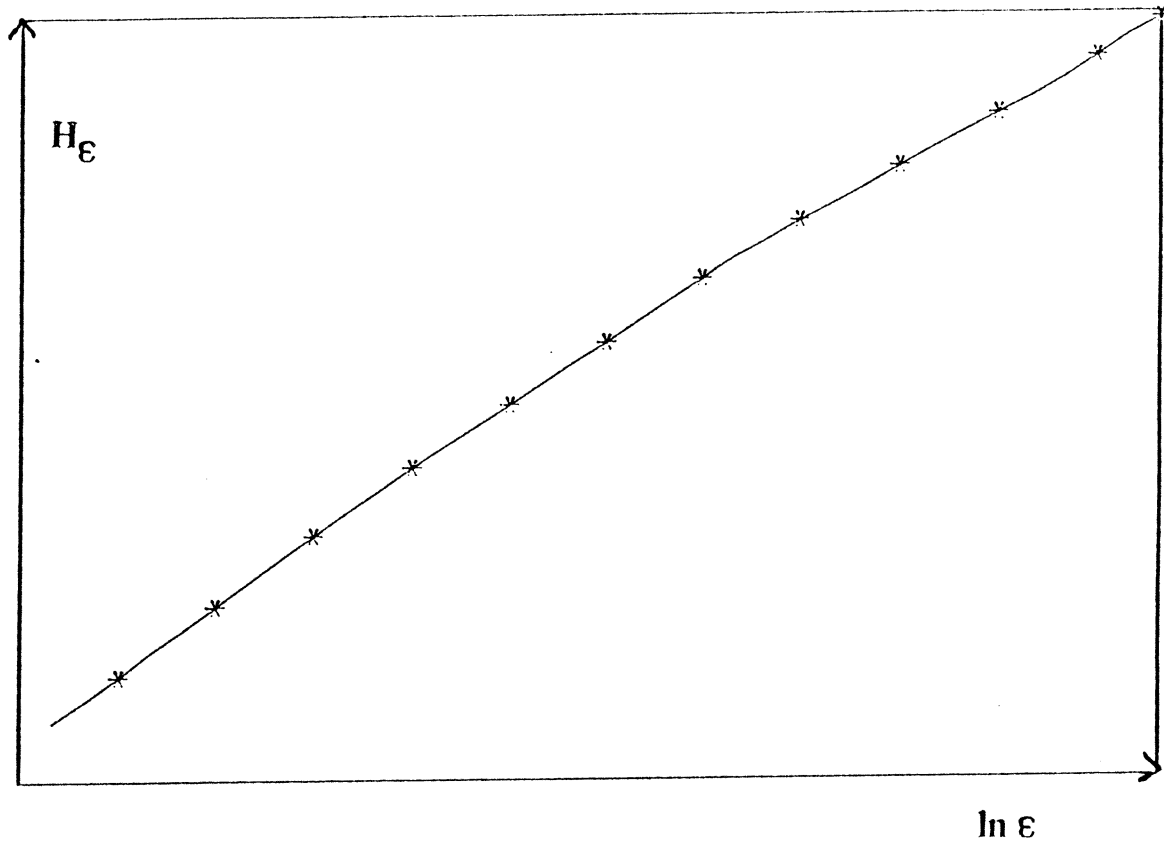


Figure 17 Attracteur de Lauwerier :  
 La courbe d'entropie (par l'algorithme des points centraux)  
 $N = 20\,000$        $m = 200$   
 Série de rayons:  $\Delta_\epsilon = 4\sqrt{2}$   
 Tous les 5 rayons un symbole a été dessiné

Pour vérifier cette impression, nous avons divisé la série de rayons en quatre domaines: les dix plus grands rayons, les dix suivants et ainsi de suite. Nous avons calculé la pente de la ligne des moindres carrés interpolant les courbes de corrélation sur chacun de ces domaines.

On note

- $L_{\max}$  l'indice du plus grand rayon du domaine
- $L_{\min}$  l'indice du plus petit rayon du domaine

	N = 20 000		m = 200	
$L_{\max}$	$L_{\min}$	DIM	$d_{\text{inf}}$	$d_{\text{cor}}$
1	11	1.11	1.08	1.05
11	21	1.33	1.20	1.05
21	35	1.47	1.35	1.14
35	43			1.26

On rappelle que  $\varepsilon_k = \sqrt[4]{2} \cdot \varepsilon_{k+1}$ .

Par exemple, si  $L_{\min} - L_{\max} = 10$ , alors  $\varepsilon_{L_{\min}} / \varepsilon_{L_{\max}} = 2^{2.5} \sim 5.65$

Il ne faut pas s'attendre à des résultats précis avec des domaines de rayons tellement réstricts. Les résultats obtenus sont conformes à l'observation que la pente des courbes de corrélation augmente vers les petits rayons.

Le domaine de rayons n'est pas assez large pour donner une convergence claire des valeurs estimées des dimensions fractales vers des valeurs limites. Ces difficultés sont probablement dues à l'existence de lignes critiques (pour la définition de lignes critiques voir Cathala [BC].) Donc toute conclusion sur la vraie valeur des dimensions fractales est précoce.

#### Une possibilité d'interpréter les différences des valeurs numériques des dimensions aux coefficients q différents

Considérons l'intersection de l'attracteur avec la ligne

$$y = c \quad 0 < c < 1$$

C'est un ensemble de Cantor. Le sous-intervalle droit et le sous-intervalle gauche de chaque intervalle n'ont pas la même longueur. Considérons la mesure d'une bande autour de cette ligne. Soit  $I \subset [0, 1]$  un intervalle. Nous posons

$$\nu_c(I) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(I \times [c-\varepsilon, c+\varepsilon]) / \varepsilon$$

$$\mu_c(I) = \nu_c(I) / \nu_c[0, 1]$$

On suppose, que pour tout coefficient q

$$d_q \text{ inf}(\mu) = d_q \text{ inf}(\mu_c) + 1$$

où  $\mu$  est la mesure invariante sur l'attracteur de Lauwerier. Il faut alors s'attendre à ce que la dimension généralisée de l'attracteur varie avec le coefficient q. La taille de ces variations dans les résultats numériques est tout de même étonnant.

**Attracteur de Thibault :** Contrairement à l'attracteur de Hénon ou de Lauwerier, le flot n'est pas différentiable dans tous les points.

Cet attracteur a aussi des lignes critiques.

**Résultats :** ( N=20 000 m=200 )

dimension de capacité: 1.48  
 dimension d'information: 1.36  
 dimension de corrélation: 1.30

N = 20 000		m = 200		
L <sub>max</sub>	L <sub>min</sub>	DIM	d <sub>inf</sub>	d <sub>cor</sub>
5	15	1.61	1.36	1.29
15	25	1.29	1.33	1.26
25	33	1.64	1.44	1.29
33	43			1.38

Comme dans le calcul pour l'attracteur de Hénon, nous avons enlevé quelques trop grands rayons avant le calcul de la droite des moindres carrés. Comme pour l'attracteur de Lauwerier, les résultats numériques sont à considérer avec précaution. La pente de la courbe de corrélation varie selon le domaine de rayons, en particulier pour la dimension de capacité. Il faudrait élargir le domaine de rayons total pour avoir des résultats plus fiables.

#### 6A.7. Calcul de la fonction d<sub>q cor</sub>

Pour l'attracteur cantorien du tiers median la fonction de q-corrélation est une constante. Ce n'est pas le cas pour l'*attracteur cantorien asymétrique* introduit dans paragraphe 6A.3. . On peut calculer les valeurs exactes des dimensions fractales de cet attracteur, en appliquant les formules pour les dimensions fractales de la transformation du boulanger (paragraphe 3A.3. ). Selon la formule de Grassberger pour la dimension de q-information on a

$$1 = p^q \lambda^{(1-q) d_{q \text{ inf}}(\mu)} + (1-p)^q \xi^{(1-q) d_{q \text{ inf}}(\mu)}$$

où  $p = 1/2$   $\lambda = 1/3$  et  $\xi = 1/4$  pour cet exemple.

Si on pose  $q=2$ , on obtient pour la dimension de corrélation

$$4 = 3^{d_{\text{cor}}(\mu)} + 4^{d_{\text{cor}}(\mu)}$$

Donc  $d_{\text{cor}}(\mu) = 0.5553...$

En posant  $q=0$  on obtient selon la proposition 3 de paragraphe 3B3.2. la dimension de capacité

$$1 = \frac{1}{3} \text{ DIM(A)} + \frac{1}{4} \text{ DIM(A)}$$

Donc  $\text{DIM(A)} = 0.5605\dots$

Pour calculer la dimension d'information on applique la formule de [FOY] (voir aussi paragraphe 3B.1.)

$$d_{\text{inf}}(\mu) = \frac{p \ln p + (1-p) \ln (1-p)}{p \ln \lambda + (1-p) \ln \xi}$$

avec  $p = 1/2$   $\lambda = 1/3$  et  $\xi = 1/4$  on obtient

$$d_{\text{inf}}(\mu) = 0.5578\dots$$

### Résultats numériques

Partant du point 1.0 nous avons d'abord enregistré 200 points centraux parmi 10000 itérations. La série temporelle contient 10000 points, ce sont les points itérés suivant le 10000<sup>ème</sup> point itéré à partir du point 1.0.

Nous avons calculé numériquement la dimension de corrélation généralisée aux coefficients -20, -10, -3, -1, 1, 3, 10, 20 et la dimension d'information. Dans le tableau suivant ces valeurs sont comparées aux valeurs théoriques, qu'on obtient en appliquant la formule de Grassberger pour la transformation du boulanger. Pour des coefficients négatifs nous avons également donné les valeurs calculées par la formule de Grassberger, bien que pour ces valeurs la dimension de q-information n'est pas définie.

q	-20	-10	-3	-1	$d_{\text{inf}}(\mu)$	1	3	10	20
$d_{q+1 \text{ inf}}(\mu)$ (valeurs théoriques)	.6008	.5833	.5658	.5605	.5578	.5553	.5504	.5360	.5232
$d_q \text{ cor}(\mu)$ (valeurs numériques)	.593	.582	.566	.561	.559	.557	.552	.536	.522

La proposition de Grassberger recouvre seulement la dimension de q-information aux coefficients q non-négatifs. La formule est en excellent accord avec les résultats numériques, même pour les coefficient q négatifs.

Vu ce résultat nous émettons la conjecture suivante.

Conjecture :

On suppose, que l'itération discrète  $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$  admet un ensemble de Cantor comme attracteur. On suppose que la mesure engendrée  $\mu$  vérifie les propriétés suivantes. Soit  $[a,b]$  un intervalle de l'ensemble de Cantor d'ordre  $k$ , alors il contient les intervalles  $[a,a+\lambda(b-a)]$  et  $[b-\xi(b-a),b]$  d'ordre  $k+1$ . Alors

$$\mu [a,a+\lambda(b-a)] = p \mu[a,b] \quad \text{et}$$

$$\mu [b-\xi(b-a),b] = (1-p) \mu[a,b]$$

La dimension de  $q$ -corrélation pour tout nombre réel  $q \neq 0$  est donnée par la formule

$$1 = p^{q-1} \lambda^{-q} d_q \text{ cor}(\mu) + (1-p)^{q-1} \xi^{-q} d_q \text{ cor}(\mu)$$

La conjecture est vraie pour  $q > 0$  par la proposition sur l'égalité entre dimension de  $q$ -corrélation et dimension de  $q+1$  information (paragraphe 3B.3.1. Prop. 1 ).

Attracteur de Hénon

Des valeurs théoriques pour les dimensions de  $q$ -corrélation n'existent pas.

Résultats

$N = 32\ 000$	$m = 200$	$\epsilon_1 = 2^{-9/4}$											
$q$	-40	-20	-10	-3	-1	$d_{\text{inf}}(\mu)$	1	3	10	20	40		
$d_q \text{ cor}(\mu)$ (valeurs numériques)	1.37	1.36	1.36	1.31	1.27	1.24	1.21	1.09	0.95	0.92	0.91		
$d_{q+1} \text{ inf}(\mu)$ (Ref. [AGK])							1.26	1.24	1.20	1.04	0.87	0.83	0.82

Les valeurs de référence ont été obtenus par un algorithme de boxcounting, par conséquence seulement des dimensions à coefficient non-négatif ont été calculés. Au point de vue qualitatif les résultats sont en accord. Cependant il y a un écart significatif entre les résultats, peut-être du à la différence de l'algorithme ou à un choix de série de rayons différent.

6A.8. Calcul de la dimension ponctuelle autour des points centraux

Pour certains attracteurs nous avons calculé la dimension ponctuelle de chacun des points centraux en même temps, que les dimensions généralisées de l'attracteur. Nous avons fait cette expérience pour répondre à la question

- Combien de points centraux faut-il pour calculer les dimension généralisées?

En plus on pourrait espérer de détecter ainsi des régions de dimension ponctuelle inégale, si l'attracteur n'est pas ergodique.

### Description de l'algorithme

Le début de l'algorithme est le même que pour le calcul des dimensions généralisées par la méthode des points centraux. On se fixe une série de rayons, on choisit les points centraux, on calcule les nombres des points de la série temporelle dans chaque boîte autour de chaque point central. Nous avons utilisé le même plus petit rayon pour le calcul de la dimension ponctuelle autour de chaque point central: C'est le rayon que nous avons calculé pour le calcul de la dimension d'information. On rappelle, qu'on obtient ainsi pour chaque point central  $x_j$  les estimateurs de la mesure pour chacune des boules autour de ce point

$$\mu^*(B(x_j, \varepsilon_k)) = n_{j,k} / N - 1 \quad k=1, \dots, L^-$$

Puis on calcule la pente de la droite des moindres carrés, qui interpole les valeurs  $\ln \mu^*(B(x_j, \varepsilon_k))$  aux abscisses  $\ln \varepsilon_k$ .

1. Remarque: On n'a pas besoin de diviser les compteurs  $n_{j,k}$  avant le calcul de la droite des moindres carrés, car  $\ln \mu^*(B(x_j, \varepsilon_k)) = \ln n_{j,k} - \ln N - 1$  et le terme  $\ln N - 1$  disparaît dans le calcul de la pente.

2. Remarque: On peut aussi fixer le plus petit rayon pour chaque point central. Dans beaucoup d'exemples il devient ainsi possible d'utiliser un domaine de rayons plus long pour une grande partie des points centraux. Mais nous avons aussi voulu répondre à la question "Combien de points centraux faut-il?", et nous avons évité d'influencer les résultats pour des rayons, dont on ne tient pas compte dans le calcul des dimensions généralisées.

### Résultats:

Attracteur de Hénon (voir figure 18)

Nous avons fixé

$$N = 32\,000 \quad m = 200 \quad \varepsilon_1 = 2^{-9/4}$$

Nous avons obtenu comme plus petit rayon  $L^- = 30$

La variation des dimensions ponctuelles en fonction des points centraux est importante. En augmentant beaucoup la longueur de la série temporelle cette variation devrait diminuer lentement, mais nous n'avons pas fait d'expériences.

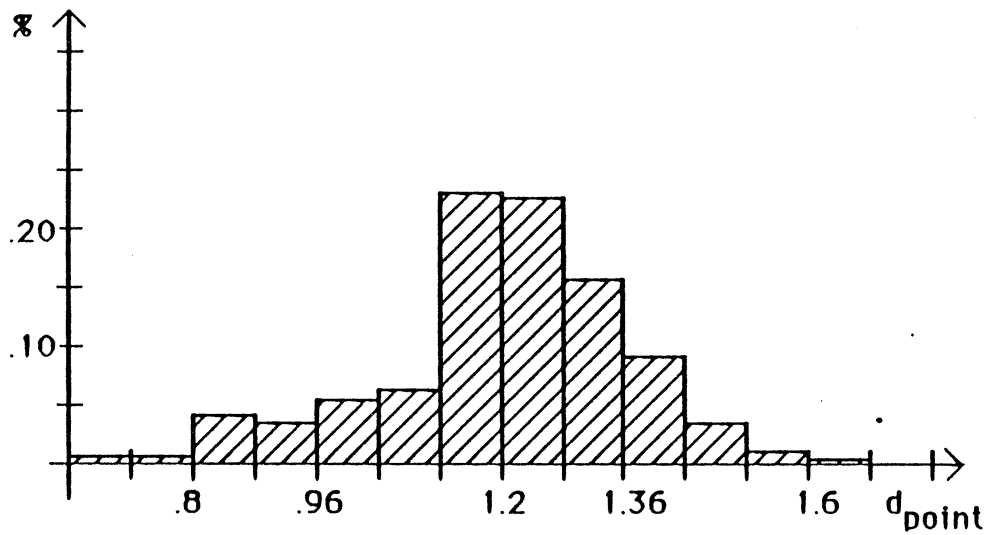


Figure 18 : Variation de la dimension ponctuelle de l'attracteur de Hénon

Attracteur Cantorien du tiers median ( voir figure 19 )

Nous avons fixé

$N = 10\ 000$        $m = 200$

Nous avons obtenu comme plus petit rayon  $L = 45$

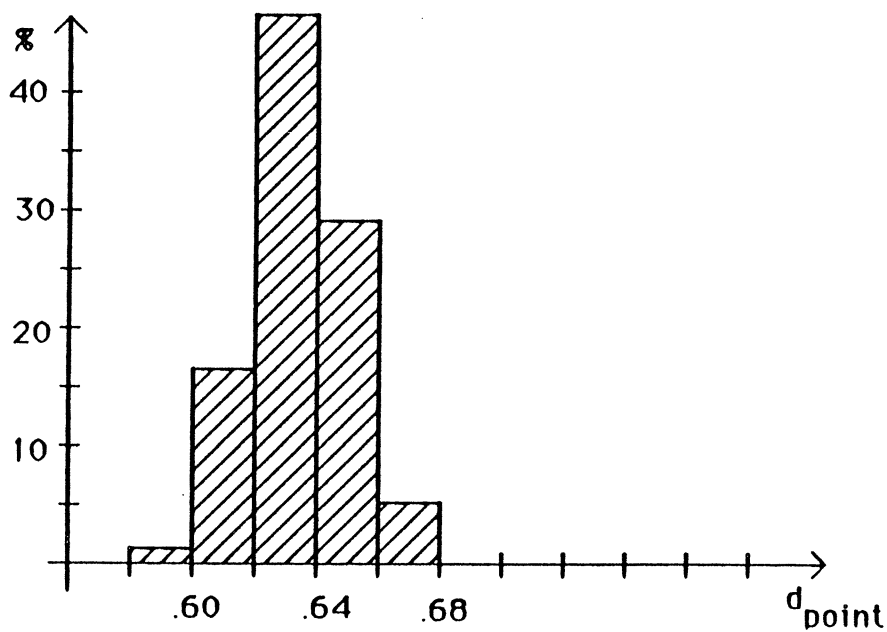


Figure 19 : Variation de la dimension ponctuelle de l'attracteur cantorien du tiers median

On sait que pour cet exemple la dimension ponctuelle en tous les points de l'attracteur est égale  $\ln 2 / \ln 3 = 0.6309 \dots$

Comparé à l'attracteur de Hénon, la variation des dimensions ponctuelles est moins grande. C'est du au fait que la mesure de cet attracteur est très uniforme, tandis que la mesure de l'attracteur de Hénon a des fortes concentrations locales. Dans cet exemple l'écart est du à la forme oscillante du logarithme de la mesure des boules autour d'un point central. (voir paragraphe 6A.5.1. fig. 11)

#### Attracteur cantorien asymétrique (voir figure 20)

Nous avons fixé

$$N = 10\,000 \quad m = 200$$

Nous avons obtenu comme plus petit rayon  $L^- = 45$

On sait que la dimension ponctuelle des points sur cet attracteur est presque partout, égale à la dimension d'information, mais différente pour un nombre infini de points sur l'attracteur.

$$\min_{x \in A} d_{\text{point}}(x) = 1/2$$

$$x \in A$$

$$\max_{x \in A} d_{\text{point}}(x) = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309 \dots$$

$$x \in A$$

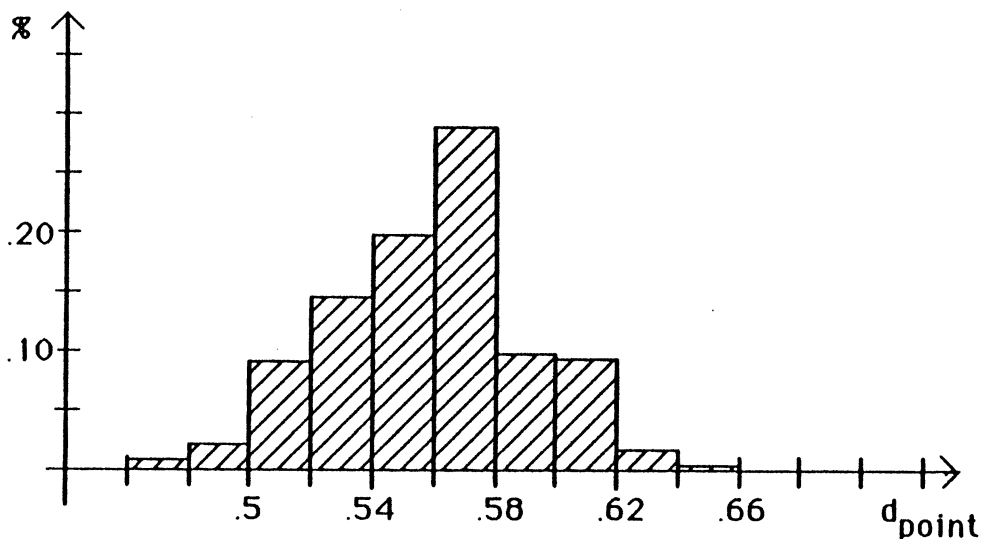


Figure 20 : Variation de la dimension ponctuelle de l'attracteur cantorien asymétrique

La variation est plus grande, que pour l'attracteurs cantorien du tiers median, mais inférieure à l'écart observé pour l'attracteur de Hénon.



Attracteur de Feigenbaum (voir figure 21)

On a fixé

 $N = 10\ 000$        $m = 200$ 

On a obtenu comme plus petit rayon

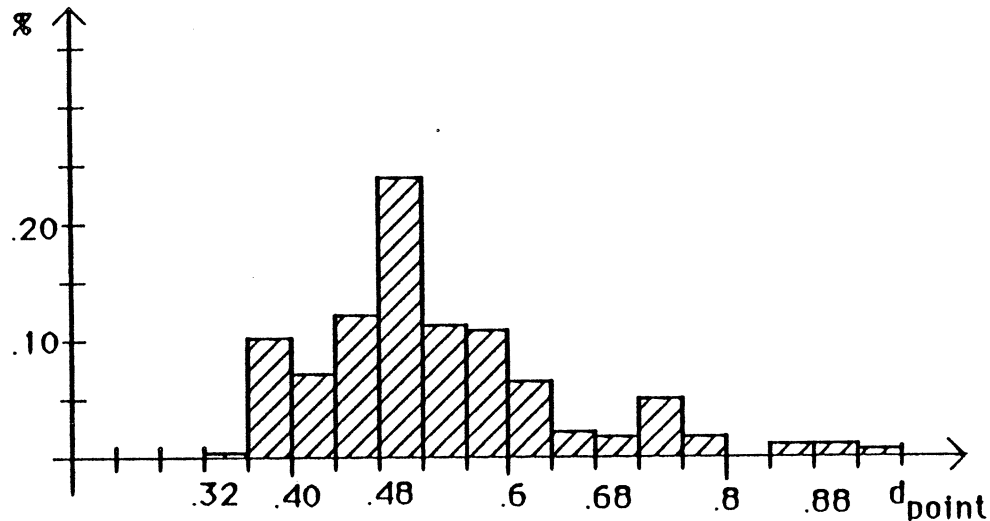
 $L^- = 45$ 

Figure 21 : Variation de la dimension ponctuelle de l'attracteur de Feigenbaum

Maximum et minimum de la dimension ponctuelle des points sur l'attracteur sont connus [HJ]

$$\min_{x \in A} d_{\text{point}}(x) = 0.37775\dots$$

$$x \in A$$

$$\max_{x \in A} d_{\text{point}}(x) = 0.75551\dots$$

$$x \in A$$

L'énorme écart des dimensions ponctuelles est surprenant. Peut-être c'est la cause des difficultés de calculer numériquement la dimension de capacité.

Il serait erroné de déduire de ces résultats un lien entre la distribution des points aux dimensions ponctuelles différents et les dimensions de q-corrélation. L'attracteur cantorien du tiers median, pour le quel tous les dimensions de q-corrélation sont égaux, a tout même un écart type non-nul sur les valeurs numériques des dimensions ponctuelles. En ce qui concerne les autres attracteurs l'écart entre les dimensions ponctuelles a été supérieur à l'écart des dimensions de q-corrélation (Attracteur de Hénon, Attracteur cantorien asymétrique), et surtout devrait dépendre de la longueur du domaine de rayons.

### Résumé et Conclusion

Une des premières découvertes était, que les capacités d'un micro-ordinateur sont suffisantes pour obtenir des bons résultats sur des différents exemples, contrairement à une opinion répandue. Il est plus important d'améliorer l'algorithme et les possibilités d'analyse des résultats que de passer sur des ordinateurs plus puissants. Nous nous sommes aperçus que, avant de juger la fiabilité d'un résultat numérique pour une dimension fractale, il faut dessiner et étudier la courbe de corrélation.

La fonction de corrélation peut avoir des différents propriétés péculaires, qui rendent incontrôlable l'erreur de l'estimation de la dimension fractale, même si la courbe de corrélation approche parfaitement la fonction de corrélation. Donc notre étude se décompose en deux parties:

- étudier l'allure de la fonction de corrélation.
  - étudier la convergence de la courbe de corrélation vers la fonction de corrélation.
- La fonction de corrélation peut osciller autour d'une droite. Cependant nous n'avons pas observé ces oscillations pour tous les exemples.

Dans tous les cas nous observons une convergence des courbes en augmentant le nombre des points centraux et la longueur de la série temporelle. Les valeurs numériques de la dimension ponctuelle calculée autour des points centraux varient dans une bande très large pour la plupart des exemples.

Il est parfois très délicat de faire une extrapolation des courbes de corrélation pour les rayons inférieurs aux rayons observés. C'est un grand problème dans le calcul des dimensions fractales.

**6.B. ALGORITHME DE TAKENS**

Nous avons testé l'algorithme de Takens sur l'attracteur de Hénon. Nous avons d'abord testé la version originale, pour la quelle tous les points de la série temporelle sont considérés comme des points centraux; puis nous avons modifié cet algorithme en utilisant des points centraux.

D'abord nous avons enregistré chaque itération à partir du point de départ de la série temporelle ( série 1) . Puis nous avons seulement enregistré chaque 25ème itérée (série 2). Le but de cette modification était de diminuer les corrélations entre les points de la série temporelle, pour améliorer le résultat.

Comme nous avons déjà expliqué dans paragraphe 4.8. , nous avons estimé la dimension pour toute une série de rayons maximaux. Nous avons choisi ces rayons distants d'un facteur 2.

**Résultats :**

N = 500		m = 500
série 1	série 2	$L_{\max}$
$d_{\text{cor}}$	$d_{\text{cor}}$	
$1.12 \pm 0.01$	$1.19 \pm 0.01$	3
$1.16 \pm 0.01$	$1.20 \pm 0.01$	4
$1.12 \pm 0.02$	$1.16 \pm 0.02$	5
$1.16 \pm 0.03$	$1.09 \pm 0.03$	6
$1.11 \pm 0.04$	$1.07 \pm 0.05$	7
$1.04 \pm 0.07$	$1.10 \pm 0.07$	8
$1.10 \pm 0.09$	$1.13 \pm 0.09$	9
moyenne: 1.11	1.13	

N = 2500		m = 100
série 1	série 2	$L_{\max}$
$d_{\text{cor}}$	$d_{\text{cor}}$	
$1.21 \pm 0.01$	$1.16 \pm 0.01$	3
$1.20 \pm 0.01$	$1.21 \pm 0.01$	4
$1.17 \pm 0.01$	$1.23 \pm 0.01$	5
$1.25 \pm 0.02$	$1.23 \pm 0.02$	6
$1.22 \pm 0.03$	$1.15 \pm 0.03$	7
$1.20 \pm 0.05$	$1.11 \pm 0.05$	8
$1.01 \pm 0.09$	$1.23 \pm 0.07$	9
moyenne: 1.21 *)	1.19	

\*) nous n'avons pas tenu compte de la valeur du plus petit rayon pour le calcul de la moyenne

Commentaire : Dans l'exécution de la version originale de l'algorithme, c'est à dire avec  $m=N$  la dimension de corrélation est systématiquement sousestimée. L'utilisation d'une série temporelle de points peu corrélés (série 2) n'améliorait guère le résultat. Par contre l'utilisation d'une série temporelle plus longue, avec la technique des points centraux, donne un résultat, qui reste dans les bornes d'erreur. L'explication est que, même si les points de la série temporelle sont indépendants, les paires de points sont corrélées. Les corrélations entre ces paires diminuent beaucoup, si on utilise la technique des points centraux.

Il serait souhaitable d'exécuter l'algorithme de Takens sur d'autres exemples, pour lesquels on connaît la valeur théorique de la dimension de corrélation (comme les attracteurs cantorien présentés dans ce chapitre).

L'algorithme de Takens est lent, du moins sur un micro-ordinateur Micral, parce que le calcul d'un logarithme est environ dix fois plus lent que le traitement d'une distance dans l'algorithme des points centraux.

Cet algorithme est peut-être le meilleur candidat pour utiliser au mieux des séries temporelles courtes, par exemple des données d'expériences physiques. Il faudrait plus d'expériences pour comparer cet algorithme à l'algorithme des points centraux.



# Chapitre 7

## Résultats numériques Systèmes continus



## 7. RESULTATS NUMERIQUES : SYSTEMES CONTINUS

### 7.0. Introduction

Ce chapitre contient les résultats sur deux exemples d'attracteurs de systèmes dynamiques à temps continu. Le premier est l'attracteur de Lorenz, découvert en 1963, et devenu célèbre. Le deuxième exemple est un modèle pour une réaction d'enzyme qui intervient dans le cycle de vie d'un genre d'amibes. Ce modèle a été formulé par Martiel, qui a constaté un comportement chaotique.

Par rapport aux itérations discrètes on a ici un problème de calcul supplémentaire: il faut intégrer la trajectoire. Il existe beaucoup de méthodes d'intégration pour des systèmes d'équation différentielles ordinaires. Les plus connus sont

- La méthode de Runge-Kutta-Merson (dont la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et la méthode de Euler sont des cas particuliers).
- La méthode de Adams-Smith
- La méthode de Gear

A priori on ne sait pas, quelle est la bonne méthode pour intégrer la trajectoire d'un système dynamique donné. Pour l'étude du comportement dynamique d'un système chaotique il est indispensable d'essayer plusieurs méthodes d'intégration. Il est aussi conseillé de faire varier la précision d'une même méthode d'intégration d'une ou plusieurs puissances de dix. Si ces variations ne modifient pas le comportement limite de la trajectoire, on peut supposer qu'on a trouvé le vrai comportement limite du système.

Le fait que le système soit chaotique, n'implique pas, qu'on ait besoin d'une méthode d'intégration sophistiquée pour décrire son attracteur.

On trouve ces méthodes d'intégration dans les libraries de routines de calcul scientifique, comme Nag, qui est implémenté sur l'ordinateur du centre de calcul de Grenoble. Si on doit soi-même programmer une méthode d'intégration ( par exemple parce que on travaille avec un micro-ordinateur), on choisit d'abord une méthode simple, c'est à dire la méthode de Runge-Kutta. Nous avons utilisée cette méthode, avec un control de pas et une possibilité de donner un poids différent à l'erreur de chaque variable.

### 7.1. Attracteur de Lorenz

Dans le cas d'un système continu il faut un espace des phases de dimension supérieure ou égale à 3 pour avoir un attracteur chaotique. L'attracteur de Lorenz est le premier (1963) et le plus célèbre exemple de système dynamique chaotique continu. Les équations sont les suivantes:

$$\begin{aligned} x' &= \sigma (y-x) \\ y' &= -y+rx-xz; & \sigma &= 10 & r &= 28 & b &= 8/3 \\ z' &= xy-bz \end{aligned}$$



Voir figure 2 du paragraphe 4.2. pour une image de l'attracteur.

Plusieurs auteurs ont essayé différentes méthodes d'intégration sur l'attracteur de Lorenz. Les résultats pour les paramètres choisis ci-dessus, sont restés les mêmes. Nous avons essayé la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 d'abord à pas fixe, puis avec un contrôle de pas. La trajectoire avait parfaitement la même allure. Dans la suite nous avons choisi la méthode à pas fixe, qui est plus rapide pour cet exemple et permet d'enregistrer facilement une série temporelle à délai de temps constant.

On choisit un point de départ quelconque dans le bassin d'attraction, différent des points fixes  $(0,0,0)$ ,  $(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$  et  $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ . On laisse évoluer la trajectoire pendant plusieurs milliers de pas d'intégration pour avoir un point de départ qu'on suppose être proche de l'attracteur. Nous indiquons pour chaque expérience le délai de temps d'intégration de la trajectoire et le délai de temps pour l'enregistrement de la série temporelle.

Nous avons calculé les courbes de corrélation de cette série temporelle.

Constatation : La courbe de corrélation (figure 22) approche très bien une droite. Par contre la courbe de capacité (figure 23) et la courbe d'entropie approchent mal une droite. Le domaine des rayons est trop court pour obtenir une valeur fiable de la dimension d'information et la dimension de -1-corrélation.

Nous avons obtenu les valeurs suivantes pour les dimensions fractales de l'attracteur

N	$\tau$	$\Delta t$	$t_{\text{série}}$	m	$L^+$	$L^-$	$L_{\text{max}}$	$\Delta_{\epsilon}$
$2.5 \cdot 10^4$	0.01	0.1	100min	200	11	7	4	2

$d_{-1\text{cor}}$	$d_{\text{inf}}$	$d_{\text{cor}}$	$t_{\text{dim}}$
1.95	1.90	2.03	50min

légende :

$t_{\text{série}}$  temps de calcul pour la série temporelle

$t_{\text{dim}}$  temps de calcul pour les dimensions fractales

$\tau$  délai de temps d'intégration

$\Delta t$  délai de temps de l'enregistrement de la série temporelle

Il n'y a pas de valeurs analytiques pour les dimensions fractales de cet attracteur. On n'a même pas démontré qu'il s'agit d'un attracteur étrange. Il faut donc comparer les résultats aux valeurs calculés par d'autres auteurs.

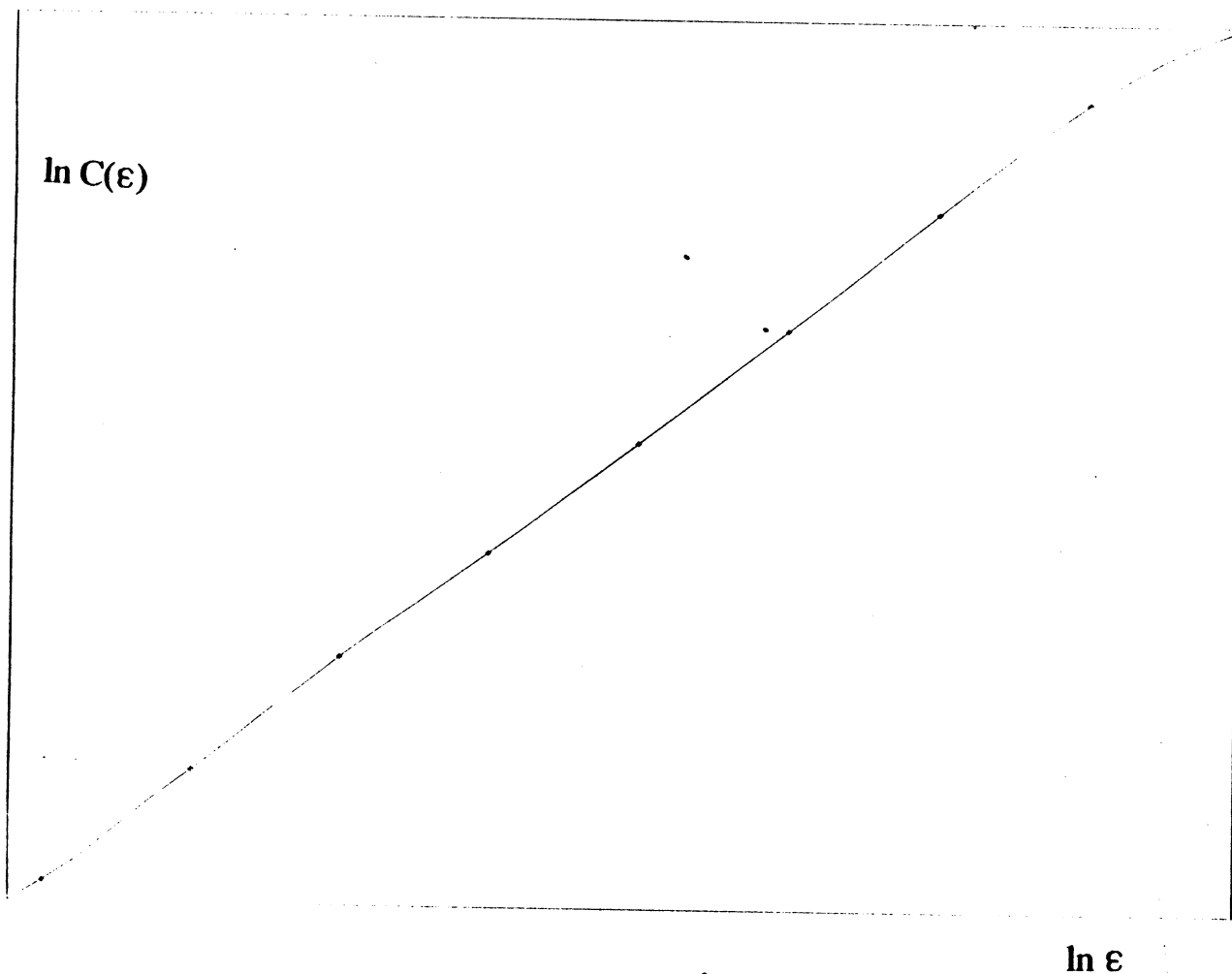


Figure 22 Attracteur de Lorenz :  
 La courbe de corrélation  
 $N = 32\ 000$        $m = 200$   
 Série de rayons:  $\Delta_\epsilon = 4\sqrt{2}$   
 Tous les 4 rayons un symbole a été dessiné

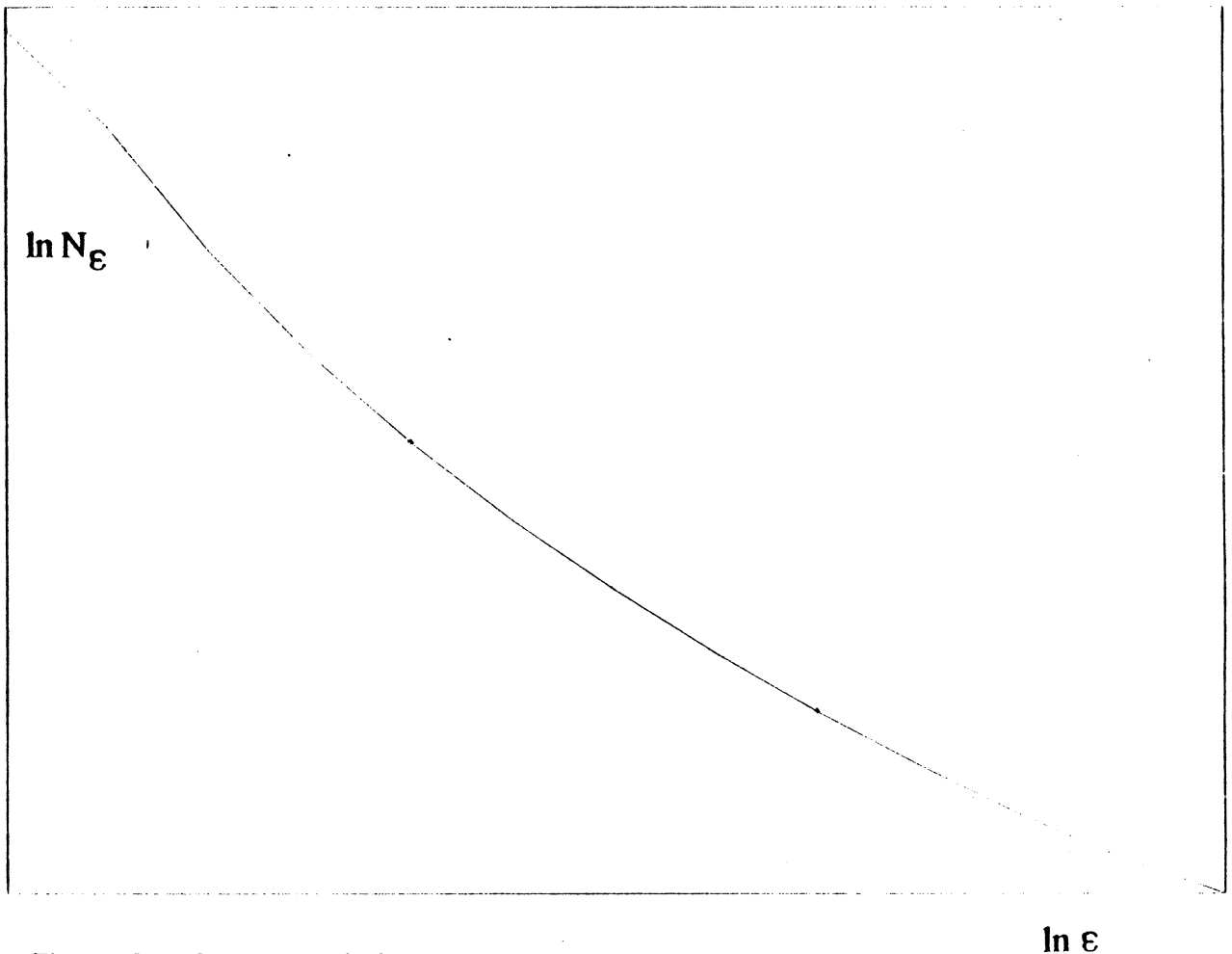


Figure 23 Attracteur de Lorenz :  
 La courbe de capacité  
 même calcul que pour la figure 22  
 Tous les 4 rayons un symbole a été dessiné

On peut calculer les coefficients de Lyapunov de cet attracteur numériquement et en déduire la dimension d'information par la conjecture de Kaplan-Yorke. La dimension ainsi calculée est notée  $d_{Lyap}$ .

	$d_{-1\text{ cor}}$	$d_{inf}$	$d_{cor}$	$d_{Lyap}$
[PV]	2.05			
[GP]			2.05	2.06

Nos résultats pour la dimension de -1-corrélation sont inférieurs aux valeurs qu'on trouve dans la littérature. La série temporelle était trop courte. Cela induit 2 erreurs

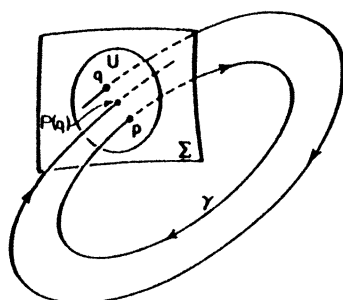
- le domaine de rayons est trop court
- la discrétisation de la trajectoire baisse la dimension

### 7.2. Les dimensions fractales d'un plan de section de l'attracteur

Pour éviter ces problèmes nous avons essayé de calculer la dimension fractale en prenant un plan de section de l'attracteur.

#### La section de Poincaré (voir [GH])

La section de Poincaré est une variété de dimension  $n-1$ , qui a des intersections orthogonales partout avec le flot du système dynamique. En général la section de Poincaré n'est pas plan.



(a)

Figure 1.5.1. The Poincaré map. (a) The cross section and the map;

Pour le calcul numérique on remplace la section de Poincaré, qui en général n'a pas une forme analytique simple, par un plan de section. Il faut bien choisir le plan, pour éviter, que les intersections non-orthogonales de la trajectoire avec le plan faussent le résultat.

On enregistre tous les points d'intersection de la trajectoire avec le plan, si la trajectoire vient du côté que l'on s'est fixé par avance (par exemple, si le plan vérifie  $x=c$   $c \in \mathbb{R}$ , on peut poser comme condition  $x' > 0$ )

Pour le calcul des plans de section de l'attracteur de Lorenz nous avons aussi utilisé la méthode de Runge-kutta d'ordre 4 à pas fixe et à contrôle de pas. Nous avons calculé les points d'intersection de la trajectoire avec le plan par la méthode de Hénon [Hen2]. Nous avons choisi 3 plans de section différents (figure 24, 25 et 26)

Commentaire : Ces images apportent plusieurs surprises:

- 1) Sur aucune des images on ne peut reconnaître de façon sûre une structure fractale de l'attracteur. Une explication possible est que le seul coefficient de Lyapunov négatif est très grand en valeur absolue par rapport aux coefficients de Lyapunov positifs. La dimension de Kaplan-Yorke est donc proche de 2. La structure fractale de l'attracteur risque alors d'être fortement compressée.
- 2) Les images des plans de section sont très différentes. Nous verrons dans la suite, que les valeurs numériques des dimensions fractales varient selon le choix du plan de section

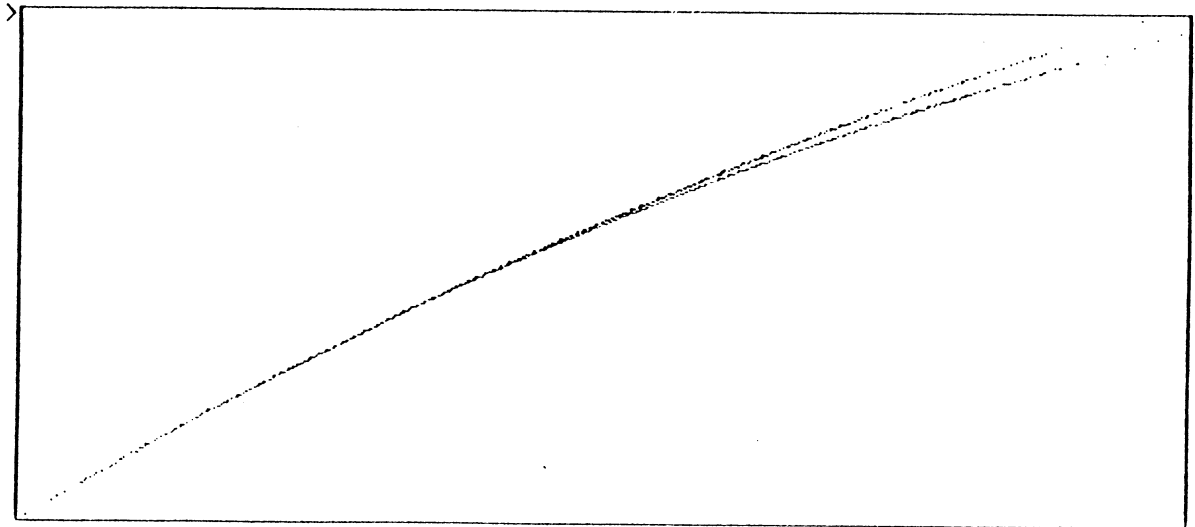


Figure 24 Attracteur de Lorenz  
Plan de section :  $x = -8$   
2000 points

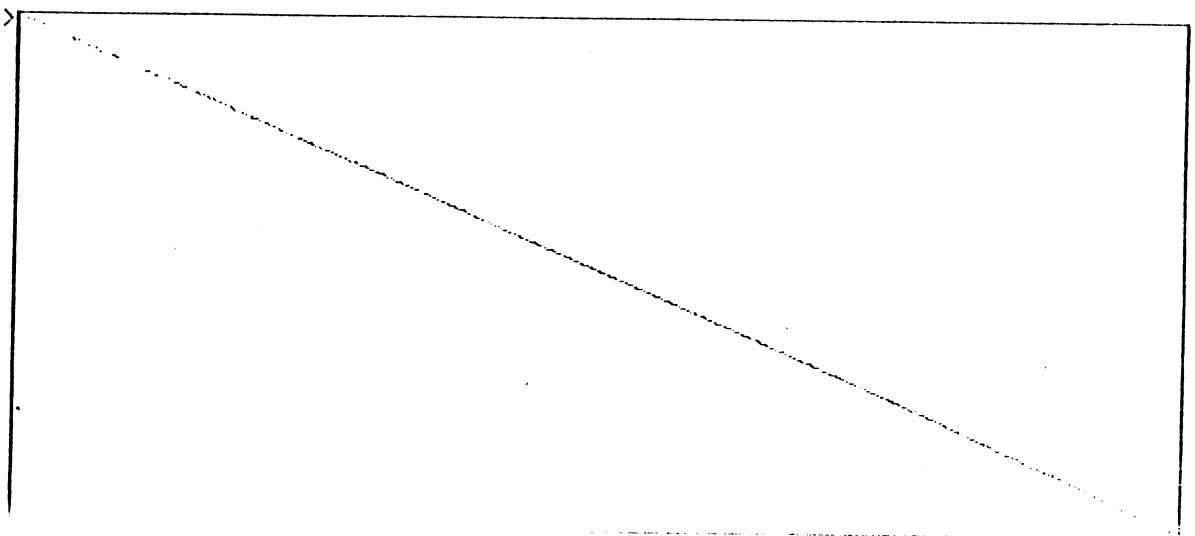


Figure 25 Attracteur de Lorenz  
Plan de section :  $y = -8.45$   
1000 points

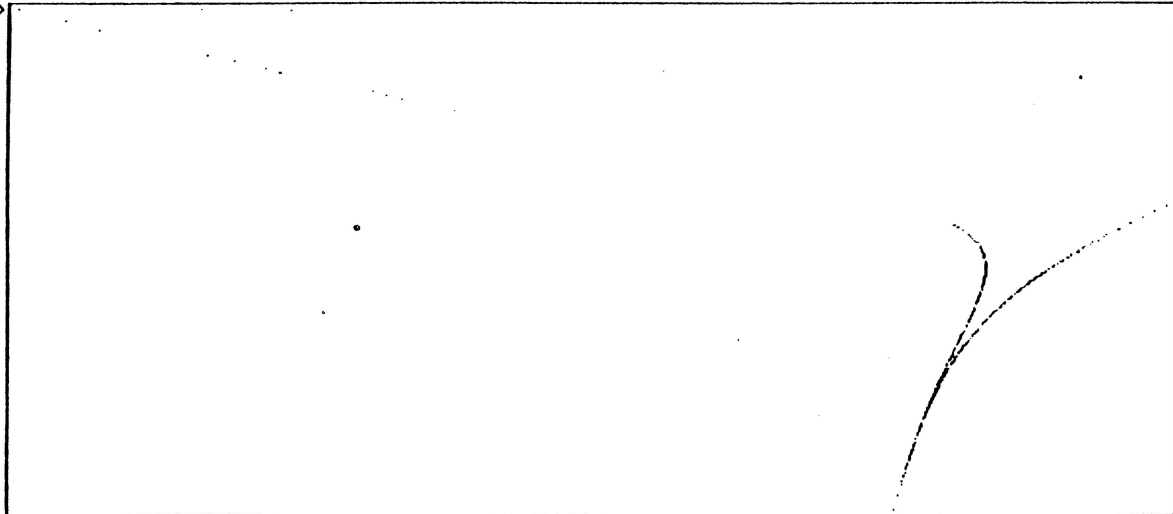


Figure 26 Attracteur de Lorenz  
 Plan de section :  $y = 6.3$   
 1000 points

Calcul numérique des dimensions fractales d'un plan de section

L'intégration de la trajectoire a été exécutée par une méthode Runge-Kutta d'ordre 4 à pas contrôlé [SB]. L'erreur maximal par pas d'intégration est de  $10^{-5}$ . Pour obtenir 2500 points de section il fallait 3 heures de calcul.

plan de section	N	m	dim <sub>-1</sub>	d <sub>inf</sub>	dim <sub>1</sub>	t <sub>dim</sub>	t <sub>sec</sub>
$x=-8 \quad x'<0$	2500	200	1.25	1.02	1.12	7min	3h
$y=-8.45$	2000	200	1.27(?)	1.00	1.00	3min	30min
méthode		L <sup>+</sup>	L <sup>-</sup>	L <sub>max</sub>	$\epsilon_k/\epsilon_{k+1}$		
contrôle de pas		13	7	4	2		
pas fixe( $\tau=0.02$ )		40	16	1	$4\sqrt{2}$		$\epsilon_0 = 2^{-9/4}$

Les temps d'exécution pour le calcul d'un plan de section avec quelques milliers de points sont déjà très longs. Les résultats dépendent du choix du plan d'une façon significative. Pour cet exemple il n'est pas possible de calculer la dimension fractale de l'attracteur avec un seul plan de section, sans avoir des informations supplémentaires.

Nous n'avons aucune explication pour la valeur 1.27 pour la dimension de capacité du plan  $y=-8.45$ , qui est peut-être due à une erreur de calcul. La dimension d'information et la dimension de corrélation sont très proches de 1 pour ce plan, correspondant aux prévisions.

Le dessin des plans de section s'est révélé très utile pour la compréhension de la structure de l'attracteur.

**7.3. Un objet d'étude: Génération périodique des signaux d'AMP cyclique (cAMP) chez l'amibe *Dictyostelium discoideum* (co-auteur de ce paragraphe: J.L. Martiel, voir aussi [DGM])**

L'amibe *D. discoideum* vit dans le sol des forêts et présente un cycle de vie intéressant à modéliser. Ce cycle de vie est présenté dans le schéma 1. Durant la phase de croissance, les amibes isolées (taille  $10\ \mu\text{m}$ ) consomment des bactéries et se multiplient tant que cette nourriture est présente. L'absence de bactéries enclenche la phase d'agrégation. Les observations en laboratoire permettent de mettre en évidence deux séries d'évènements

a) quelques cellules synthétisent de façon périodique et autonome une molécule signal (cAMP) qui sert de chimio-attracteur pour les cellules qui entourent;  
 b) les cellules qui entourent ont deux comportements concomitants: (i) elles amplifient le signal chimique qu'elles reçoivent (ce qui permet la propagation de ces signaux sur des distances de l'ordre du cm) et (ii) elles se meuvent vers l'origine des signaux. Par ce mécanisme les centres contrôlent la formation d'amas qui comportent jusqu'à  $10^6 - 10^7$  cellules. Durant la dernière phase du cycle il y a formation de spores (forme de vie résistante) et la germination de ces spores aura lieu lorsque de nouvelles conditions favorables seront réunies.

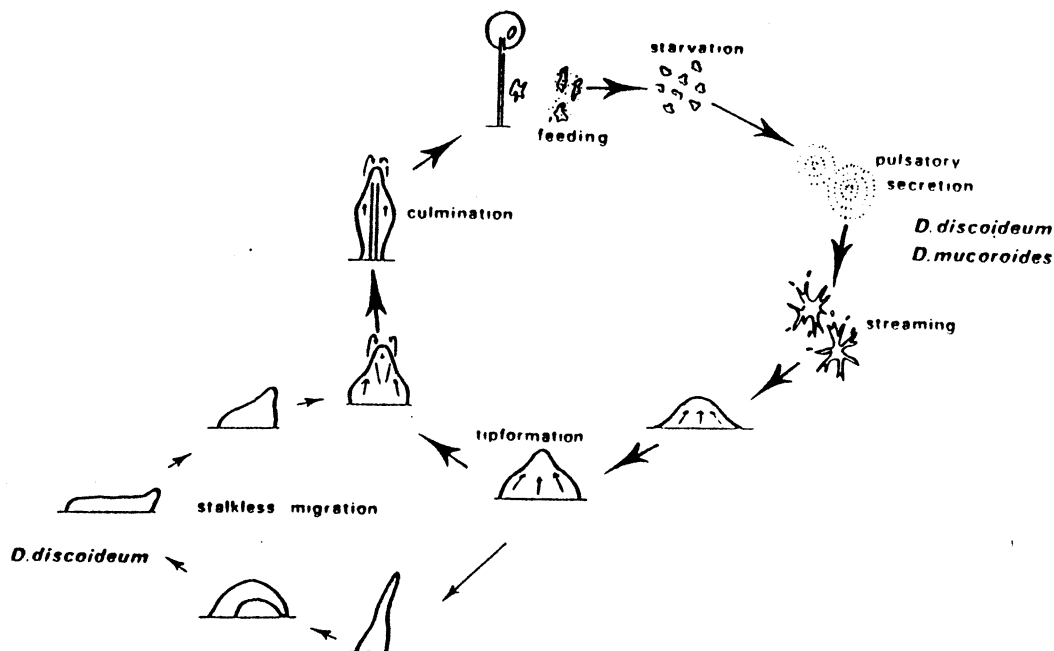


Schéma 1 (ce schéma est pris d'un article de P. Schaap [Sch] )

Le but du modèle est de présenter des équations qui rendent compte de l'ensemble des réactions chimiques à l'origine de la systhèse périodique du signal cAMP. Les biochimistes sont en accord sur quelques faits (cf. schéma 2)

- (i) la molécule du signal extracellulaire se fixe sur un récepteur spécifique attaché à la face externe de la membrane
- (ii) le récepteur activé par cette fixation, active à son tour un enzyme intracellulaire, l'adénylate cyclase, qui synthétise le cAMP à partir de l'ATP (substrat)
- (iii) le récepteur possède deux formes capables de fixer ce signal: une forme active (R) et une forme désensibilisée (D) . La forme D est incapable d'activer l'adénylate cyclase. La forme R est prépondérante lorsque la concentration de cAMP est nulle, mais le cAMP se fixe plus facilement sur D
- (iv) il existe des enzymes (phosphodiésterases) qui détruisent les molécules de cAMP et empêchent son accumulation.

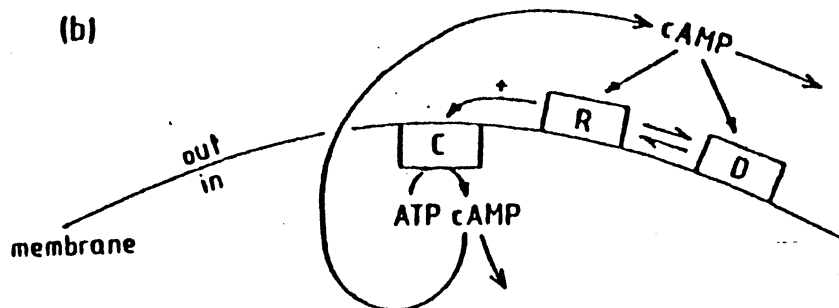


Fig. 3. Models for the cAMP signalling system of *D. discoideum* based on coupling of the cAMP receptor (R) to adénylate cyclase (C). In (b) , the receptor undergoes a reversible transition from the active (R) to the desensitized (D) state of the receptor.

### Schéma 2 (pris de [DGM] )

Le modèle présenté tient compte de ces faits. Les équations du modèle sont présentés ci-après

$$x' = -A(y)x + (1-x)B(x)$$

$$y' = \Phi(x,y,z) - k_c y$$

$$z' = (v - \Phi(x,y,z)) / F$$

avec

$$A(y) = \frac{k_1 + k_2 y^2}{1 + y^2}$$



$$B(y) = k_1 L_1 + k_2 L_2 c^2 y^2 / (1 + c^2 y^2)$$

$$\psi(x,y,z) = \frac{\sigma z \left( \lambda \theta + \varepsilon \frac{x y^2}{1 + y^2} \right)}{1 + \theta z + \varepsilon \frac{x y^2}{1 + y^2} (1 + z)}$$

où

$x$  fraction des récepteurs dans l'état actif . On a toujours  $0 < x < 1$

$y$  concentration du signal cAMP normalisée

$z$  concentration du substrat ATP normalisée

$A(y)$  est la proportion du flux des récepteurs passant à l'état actif

$B(y)$  est la proportion du flux des récepteurs passant à l'état désensibilisé

$\Phi(x,y,z)$  est la fraction de cAMP actifs.  $\Phi$  vérifie toujours  $0 < \Phi < 1$

$\sigma$  représente la valeur maximum de l'activité de l'adénylate cyclase

$v$  est la production constante de ATP dans la cellule

$k_e$  est le taux de destruction de cAMP

Les autres paramètres ( $F, \lambda, \theta, \varepsilon$ ) ont une signification biologique qu'il est inutile d'exposer dans le cadre de ce travail.

Le mécanisme des oscillations peut se décrire comme suit:

- (i) dans un premier temps, la concentration de cAMP est très faible et le récepteur est essentiellement dans l'état R.
- (ii) le récepteur fixe le cAMP (état R) et donc peut activer l'adénylate cyclase. Il en résulte une explosion de la production de cAMP et une augmentation de la concentration de cAMP
- (iii) comme la forme désensibilisée du récepteur (D) fixe plus facilement cAMP que R, il y a un déplacement de l'équilibre entre les deux formes vers la forme désensibilisée, incapable d'activer l'adénylate cyclase.
- (iv) cet effet, conjugué à la destruction du cAMP, induit une décroissance de la concentration de cAMP
- (v) lorsque cAMP atteint de faibles valeurs, le récepteur sous forme D revient à son état actif R, état prépondérant aux faibles concentrations de cAMP.

Selon le choix de paramètres des équations ci-dessus on observe un comportement stable, périodique, ou chaotique.

Le premier jeu de paramètres, que nous avons étudié, est le suivant:

$$k_1 = 0.015 \quad k_2 = 0.006$$

$$L_1 = 316.2277... = 10^{2.5}$$

$$c^2 = 10^4 \quad \sigma = 3.2$$

$$k_c = 0.035 \quad F = 320$$

$$L_2 = 0.03162277... = 10^{-1.5}$$

$$\lambda = \theta = 0.01 \quad \varepsilon = 0.02$$

$$v = 1.87594... \cdot 10^{-2}$$

Martiel supposait l'existence d'un attracteur chaotique, après le dessin d'une trajectoire. Il nous a communiqué le point de départ d'une trajectoire chaotique suivant.

$$x_0 = 0.61934...$$

$$y_0 = 0.073008...$$

$$z_0 = 1.3919...$$

Il avait suivi la trajectoire par une méthode de Gear et obtenu le dessin suivant (figure 27)

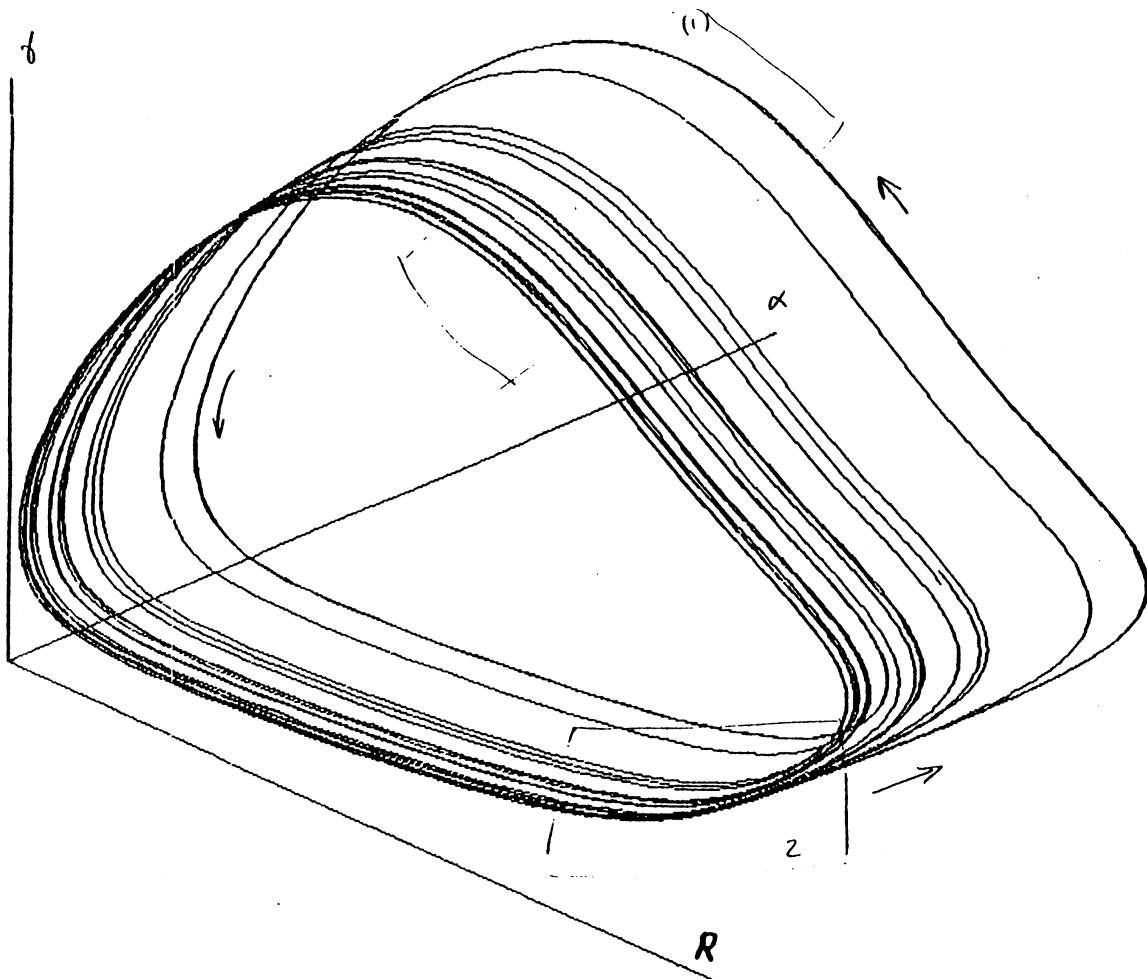


Figure 27 Attracteur de Martiel par la méthode d'intégration de Gear (Auteur de cet image: Martiel)

Traduction des coordonnées:  $R = x$     $\gamma = y$     $\alpha = z$

Nous avons d'abord essayé de suivre la trajectoire par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à pas fixe, nous n'y sommes pas arrivé. Puis nous avons essayé la méthode de Runge-Kutta à contrôle de pas, cette fois ci nous avons réussi de suivre la trajectoire (voir [figure 28](#)).

La trajectoire ressemble à la trajectoire obtenue par Martiel, mais nous avons choisi une autre projection. Cet attracteur a comme particularité une bande vide dans l'anneau, sur lequel la trajectoire a l'air de rester. Cette bande était invisible sur le dessin de Martiel.

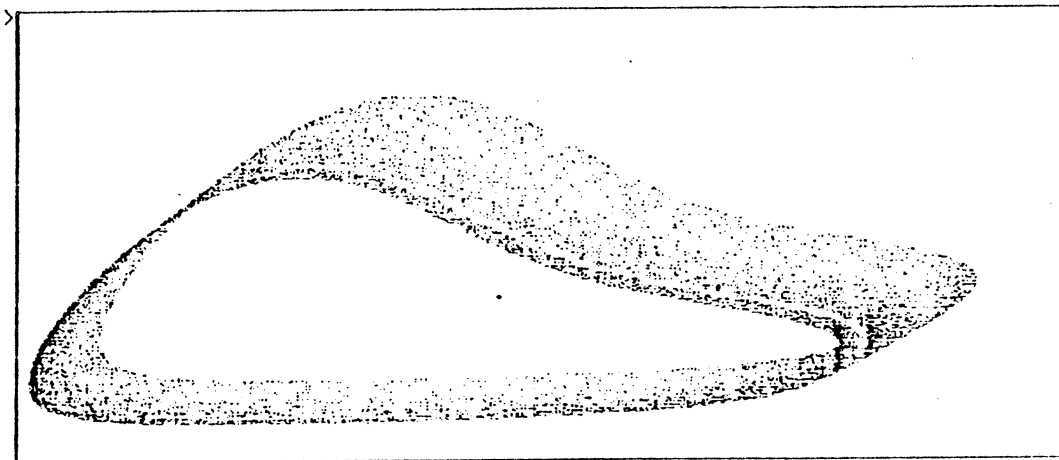


Figure 28 Attracteur de Martiel, méthode de Runge-Kutta à contrôle de pas  
projection du plan x-y  
15 000 points

Nous avons essayé de calculer la dimension fractale de l'attracteur par une série temporelle. Nous avons obtenu  $d_{cor} = 1.2$ ,  $d_{-1cor} = 1.8$ , c'était donc un échec. Probablement ces résultats sont influencés par le fait que la trajectoire reste longtemps dans certains régions. Cela permet aussi d'expliquer, pourquoi la méthode de Runge-Kutta à pas fixe n'a pas été efficace.

Puis nous avons calculé trois plans de section différents de l'attracteur. Deux de ces plans sont dessinés ([figure 29 et 30](#)). Cette fois les plans de section se ressemblent tous. On retrouve l'espace vide dans l'anneau qu'on avait déjà observé dans le dessin de la trajectoire.

Nous avons calculé les dimensions fractales pour deux des sections. Nous avons obtenu

plan	N	$d_{-1cor}$	$d_{inf}$	$d_{cor}$
y=1.0	4000	1.06	0.99	0.96
z=0.67	1000	1.13	1.00	1.07

Donc les dimensions fractales de l'attracteur sont proches de deux, ce qui correspond à l'impression visuelle.

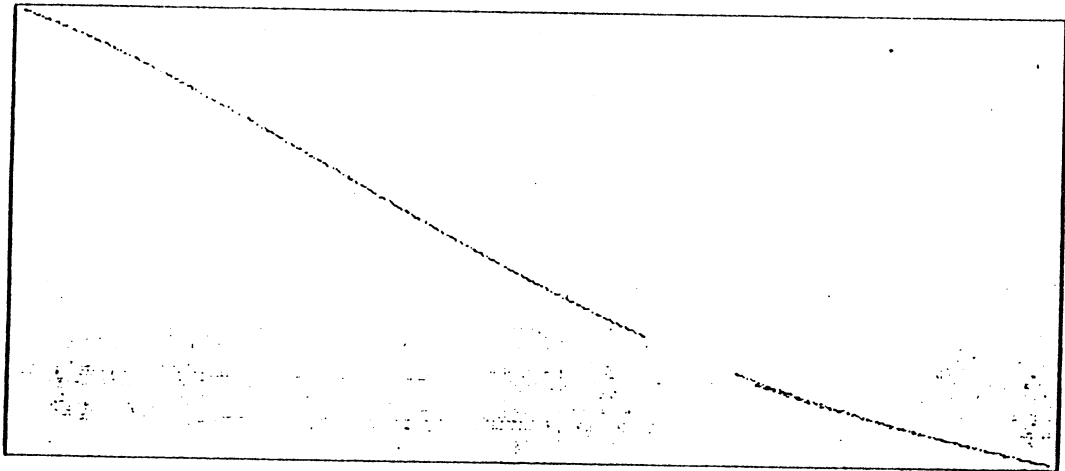


Figure 29 Attracteur de Martiel  
Plan de section :  $z = 0.67$   
1000 points

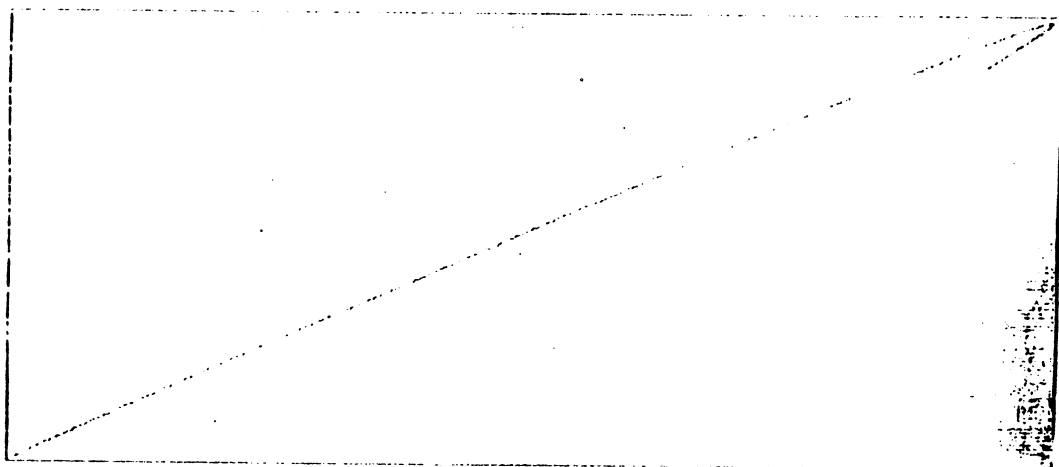


Figure 30 Attracteur de Martiel  
Plan de section :  $y = 1$   
4000 points

**Commentaire des résultats:** On ne peut pas voir sur les figures des sections la structure fine de l'attracteur. Les variations des valeurs numériques autour de un ont plusieurs raisons: Le pli dans le plan qui semble contenir l'attracteur augmente la valeur numérique des dimensions fractales, sans qu'il représente la structure fractale. Des concentrations de points aléatoires sur la section baissent les résultats des dimensions fractales. Cet effet est le plus fort pour la dimension de corrélation. La structure fractale de l'attracteur est tellement compressée, que probablement elle n'influence pas les valeurs numériques des dimensions fractales. Donc les valeurs numériques des dimensions fractales ne permettent aucune conclusion sur la structure fractale de l'attracteur. Les informations fournis par les dessins de l'attracteur et ses sections sont riches, le calcul des dimensions fractales ne pouvait que confirmer ces informations.

Il était donc très important dans ce cas de faire des dessins de l'attracteur et des sections, pour vérifier les valeurs numériques des dimensions fractales, et pour mieux comprendre la structure de l'attracteur.

Si par contre il n'est pas possible de faire un dessin de l'attracteur, parce que la dimension de l'espace des phases est trop grande, le calcul de la dimension fractale, et d'autres quantités dynamiques du système, comme les exposants de Lyapunov et l'entropie, sont les seules sources d'information sur la structure de l'attracteur et ont donc une grande importance.

## Conclusion



## 8. CONCLUSION

Comment caractériser un attracteur par ses dimensions fractales? Deux fonctions de dimension sont utilisées couramment aujourd'hui : la fonction de dimension de corrélation et la fonction de dimension d'information. Contrairement à une opinion répandue ces deux fonctions ne sont pas équivalentes: Seule la fonction de dimension de corrélation est définie sur toute l'axe réelle, tandis que la fonction de dimension d'information est définie seulement pour des coefficients positifs. Nous avons établie une égalité entre ces fonctions pour la plus grande partie du domaine des coefficients, et une inégalité valable pour tous les coefficients, pour les quels les deux fonctions sont définies.

Ces fonctions de dimension contiennent chacune deux dimensions fractales: la dimension d'information et la dimension de corrélation. La dimension de capacité est incluse dans la fonction de dimension d'information, si une proportion assez grande des boîtes contenant un point de l'attracteur ont une mesure positive.

Nous avons vu des exemples d'un attracteur d'une itération discrète, pour les quels ces trois dimensions sont inégales, et les fonctions de dimension ne sont pas des constantes. Est-ce qu'il en est de même pour les systèmes dynamiques chaotiques continus, comme l'attracteur de Lorenz par exemple?

Il est certain, que la connaissance d'une des trois dimensions fractales d'un attracteur, c'est à dire de la dimension de corrélation, de la dimension de capacité ou de la dimension d'information, n'est pas suffisante, pour déduire la structure géométrique et dynamique de l'attracteur. Est-ce qu'on peut, à partir de la connaissance d'une des deux fonctions de dimension, déduire cette structure? Cette question reste ouverte. Il n'est pas clair non plus, lesquels de ces dimensions sont les plus utiles pour décrire la dynamique d'un système.

Nous avons décrit en détail un algorithme pour calculer la fonction de dimension de corrélation, que nous avons baptisé l'algorithme des points centraux. Cet algorithme n'est pas nouveau, mais nous espérons que la notice d'emploi donnée permettra à l'utilisateur d'éviter des recherches dans des différentes références. Nos améliorations de l'algorithme dans le détail devraient permettre de accélérer l'algorithme.

Nous avons avancé vers un calcul d'erreur de cet algorithme. Cette analyse n'est pas achevée mais permet déjà de discerner quelques difficultés dans le calcul numérique.

- L'erreur causé par les oscillations de la fonction de q-corrélation
- L'erreur par le fait que les rayons considérés dans le calcul ne sont pas assez proches de zéro.

Ces erreurs sont très difficiles à contrôler.

Nos résultats numériques permettent d'observer certains problèmes de convergence de cet algorithme. Il est facile d'approcher la fonction de q-corrélation pour des rayons pas trop petits. Par contre il est très coûteux d'élargir le domaine de rayons. Nous avons observé les oscillations de la fonction de q-corrélation pour certains exemples. L'erreur causé par le fait, que le domaine des rayons ne soit pas assez proche de zéro, semble être important dans certain cas.

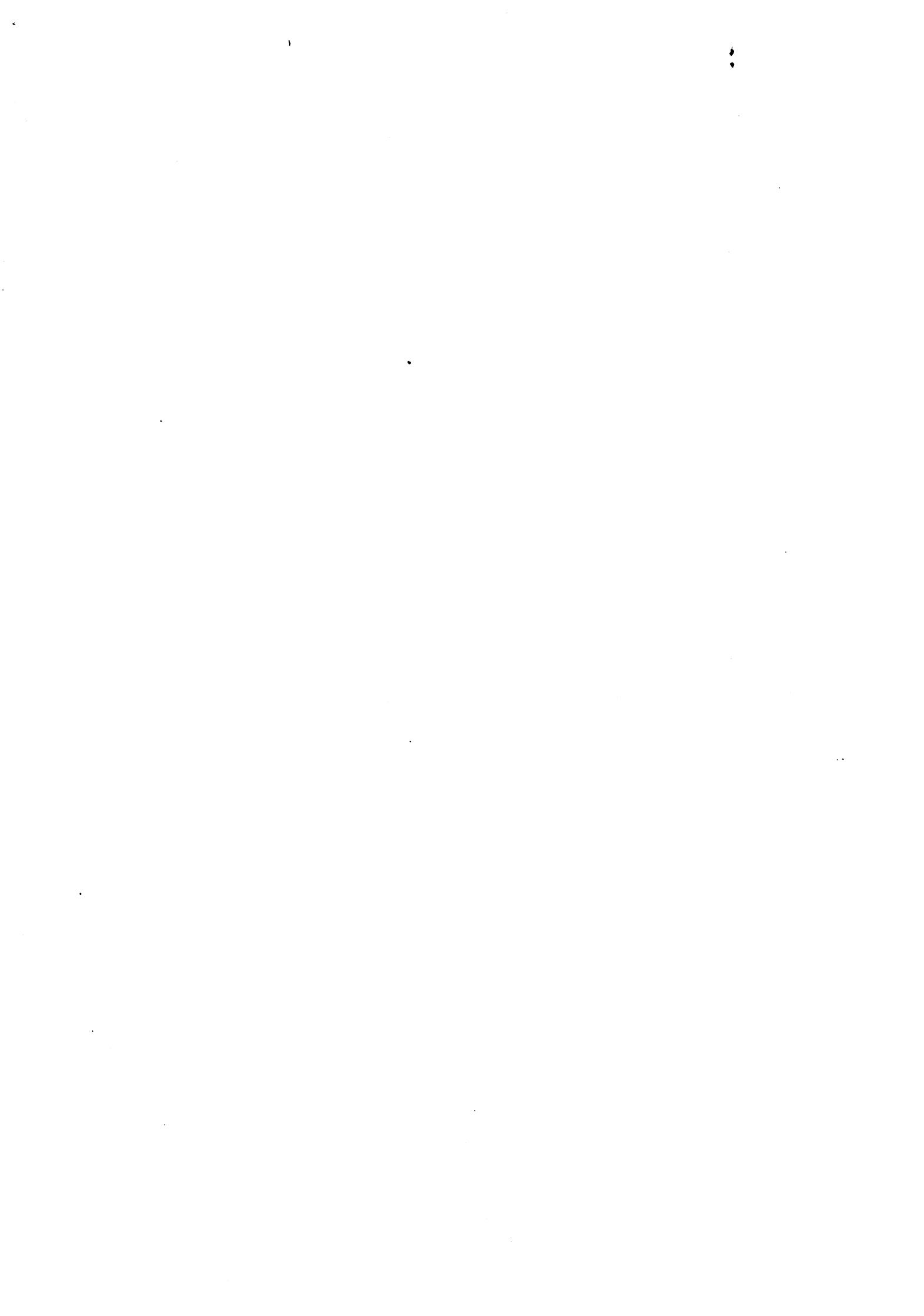
A la fin nous essayons notre algorithme sur un exemple d'un système dynamique de la biochimie. Le résultat est satisfaisant pour le calcul des dimensions fractales de ses



### *Conclusion*

plans de section, mais le calcul a échoué, quand nous avons essayé de calculer les dimensions fractales directement à partir d'une série temporelle. Un ordinateur plus puissant aurait peut être permis d'améliorer les résultats dans ce dernier cas.

# Bibliographie



**BIBLIOGRAPHIE**

- [ABD] ATTEN P. , BERGE P. et DUBOIS M. : l'ordre chaotique, La Recherche, Vol 18, (1987), p. 190
- [ACM] ATTEN P. , MALRAISON B. et CAPUTO J.G. :  
"Traitement numérique des attracteurs étranges", Séminaire du CNRS, Grenoble, 1985
- [AGK] ARNEODO A. , GRASSEAU G. et KOSTELICH E.J. : Fractal dimensions and  $f(\alpha)$  spectrum of the Hénon attractor, preprint Austin, Univ. of Texas, (1987)
- [AJ] ALEXANDER J.C. et YORKE J.A. Dynamical Systems and ergodic Theory, in press
- [Akr] AKROUNE N. : Thèse de doctorat , USMG Grenoble, (1987)
- [BC] BARUGOLA A. et CATHALA J.C. : Endomorphismes de dimension deux et attracteurs étranges, dans "Traitement numérique des attracteurs étranges", Séminaire du CNRS, Grenoble, 1985
- [Ber] BERTRANDIAS J.P. : Analyse Fonctionelle, Collection U, Armand Colin, Paris (1970)
- [Bil] BILLINGSLEY P. : Ergodic theory and information , Wiley, New York, (1965)
- [Bir] BIRKHOFF G.D. : Dynamical systems , Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. vol. 9 New York (1927)
- [BP] BADII R. et POLITI A.: Statistical Description of Chaotic attractors: The dimension function J. Stat. Phys. 40 p.725 (1985)
- [BPV] BERGE P. , POMEAU Y. et VIDAL C. : L'ordre dans le chaos, Hermann, Paris, (1984)
- [BR] BALATONI , RENYI A. : Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 1 (1956) 9 (en hongrois), traduction en anglais : Selected Papers Academiai Budapest (1976) p.558
- [CD] COSNARD M. et DEMONGEOT J. : Attracteurs : une approche déterministe, C.R. Acad. Sc. Paris t.300 Série I , n° 15 (1985)
- [CDLL] COSNARD M., DEMONGEOT J., LAUSBERG C. ET LOTT K. : Quelques exemples sur la dimension fractale des attracteurs, Rapp. Rech. IMAG à paraître
- [Cho] CHORIN A.J. : Estimates of intermittency, Spectra and blow-up in developed turbulence, Comm. on pure and appl. math. 34 (1981), 853  
The evolution of a turbulent vortex, Comm. math. Phys. 83 (1982), 517
- [Cos] COSNARD M. : Etude des solutions de l'équation de Feigenbaum, Astérisque 98-99 (1982) p.143  
Contributions à l'étude du comportement itératif des transformations unidimensionnelles, Thèse d'Etat, Grenoble (1983)
- [Cvi] CVITANOVIC P. : Universality in Chaos, Hilger, Bristol (1984)
- [CY] CASWELL W.E. et YORKE J.A. : Invisible errors in dimension calculations: geometric and systematic effects, preprint Univ. Maryland (1985))
- [DGM] DECROLY O., GOLDBETER A. et MARTIEL J.-L. : From excitability and oscillations to biorhythmicity and chaos in biochemical systems, in "Dynamics of biochemical systems", ed. J. Ricard et A. Cornish-Bowden, Plenum Press, New York (1984)

## Bibliographie

- [DK] DENKER M. et KELLER G. : Rigorous statistical procedures for data from dynamical systems, *J. of stat. Phys.* **44** (1986), 67
- [Eps] EPSTEIN H. : New proofs of the existence of the Feigenbaum functions, *Comm. Math. Phys.* **106** (1986), 395
- [ER] ECKMANN J.P. et RUELLE D. : Ergodic Theory of chaos and strange attractors , *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) p.617-657
- [Fal] FALCONER : The geometry of fractal sets, Cambridge Univ. Press (1985)
- [Far] FARMER J.D. : Information dimension and the probabilistic structure of chaos, *Z. Naturforsch.* **37a**, 1304 (1982)
- [Fei] FEIGENBAUM M.J. : Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.* **19** (1978), 25  
FEIGENBAUM M.J. : The universal metric properties of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.* **21** (1979), 669
- [Fis] FISZ M. : Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1980)
- [FKYY] FREDERICSON P. et coll. : The Liapunov dimension of strange attractors, *J. Diff. Equ.* **49** , p.185 (1983)
- [FOY] FARMER J.D. , OTT E. et YORKE J. A. : The dimension of chaotic attractors, *Physica7D* , (1983) p.153-180
- [FSS] J.D. FOURNIER et coll. : Lacunarity and Intermittency in Fluid Turbulence, *Phys. Lett.***114 A** (1986) p. 465
- [GH] GUCKENHEIMER J. et HOLMES P.: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer, New York (1983)
- [Gio] GIORGILLI A. et coll. : An efficient procedure to compute fractal dimensions by box-counting, *Phys. Lett.* **115A**, (1986), 202
- [GK] GRASSBERGER P. et KANTZ H. : Repellers, semi-attractors and long-lived chaotic transients, *Physica* **17D** (1985), 75
- [GM] GUMOWSKI I. et MIRA C. : Ordre - désordre, Dynamique chaotique, Transformations ponctuelles, Transition, CEPADEUS ed. Toulouse, (1980)
- [GOY] GREBOGI , OTT E. et YORKE J.A. : Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos, *Physica* **7D** (1983), 181
- [GP] GRASSBERGER P. et PROCCACIA I. : Measuring the strangeness of strange attractors , *Physica* **9D** (1983) , p.189-207
- [GPSW] GREENSIDE H.S., PIGNATARO T. , SWIFT J. et WOLF A. : Impracticability of a boxcounting algorithm for calculating the dimensionality of strange attractors, *Phys. Rev.* **25A** (1982), 3453
- [Gra1] GRASSBERGER P.: Generalised dimensions of strange attractors, *Phys. Rev. Lett.* **97A** (1983), p.227
- [Gra2] GRASSBERGER P. : On the fractal dimension of the Henon attractor, *Phys. Rev. Lett.* **97A** (1983), p.224
- [Gui] Mc GUINNESS M. J. : The fractal dimension of the Lorenz attractor, *Phys. Lett.* **99A**, (1983), 5
- [Hal] HALMOS P.R. : Measure theory Springer , New York (1974)
- [Hau] HAUSDORFF F. : Dimension und äusseres Mass, *Math. Annalen* **79** (1919), 157

## Bibliographie

- [Hen] HENON M. : A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Comm. Math. Phys.* **50** (1976), 69
- [Hen2] HENON M. : On the numerical computation of Poincaré maps, *Physica* **5D** (1982), 412
- [HJ] HALSEY T.C. et JENSEN M.H. : Spectra of scaling indices for fractal measures: Theory and experiment, *Physica* **23D** (1986) 112
- [HP] HENTSCHEL H.G.E. et PROCACCIA I. : The infinite number of generalised dimensions of fractals and strange attractors, *Physica* **8D** (1983) 435-44
- [HOR] HANSON J.D. , OTT E. et RUSSELL D.A. : dimension of strange attractors, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980), 1175
- [Kad] KADANOFF L.P. et coll. : Fractal measures and their singularities: The characterisation of strange sets, *Phys. Rev.* **33A** (1986) p.1141
- [KS] KAHANE J.P. et SALEM R. : Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann, Paris (1963)
- [Lan] LANFORD O.E. : Son cours dans LesHouches SessionXXXVI , Chaotic Behaviour of Dynamical Systems , North Holland Amsterdam (1983) p.20 et p.38
- [Lan1] LANFORD O.E. : A computer assisted proof of the Feigenbaum conjecture, *Bull. AMS* **6**, (1982), 427
- [Lau] LAUWERIER H.A. : The structure of a strange attractor, *Physica* **21D** (1986), 146
- [LT] LOTT K. et TAKENS F. : Communications privées indépendantes
- [Lor] LORENZ E. Déterministic nonperiodic flows, *J. Atmos. Sci.* **20**, (1963) p. 130
- [LY] LI T. et YORKE J. : Period three implies chaos *Am. Math. Monthly* **82** (1975) p.985
- [Man] MANDELBROT B.B. *Forme, Hasard et Dimension*, Flammarion, Paris (1975)
- The fractal geometry of nature* , Freeman, New York (1983)
- [May] MAY R.M. : Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261**(1976) p.459
- [Mil] MILNOR J. : On the concept of attractor , *Comm. Math. Phys.* **99** (1985) p.177-195
- [Mis] MISIUREWICZ : Les Houches SessionXXXVI , Chaotic Behaviour of Dynamical Systems , North Holland Amsterdam (1983) pp.566
- [Myr] MYRBERG P.J. : *Ann. Akad. Sc. Fennicae A*, I, N° 336/3 (1963)
- [Ose] OSELEDEC V.T. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.* **1** (1968) p. 197
- [OWY] OTT E. , WITHERS W.D. et YORKE J.A. : Is the dimension of chaotic attractors invariant under coordinate changes, *J. of Stat. Phys.* **36** (1984) , 687
- [PV] PALADIN G. et VULPIANI A. : Characterization of strange attractors as inhomogeneous fractals, *Lett. Nuovo Cimento* **41** (1984) p.82
- [Rue] RUELE D. : Small random perturbations of dynamical systems and the definitions of attractors, *Comm. Math. Phys.* **82**, 137
- [Sch] SCHAAP P. : Regulation of size and pattern in the cellular slime molds, *Differentiation* **33** (1986), 1-16
- [Tak1] TAKENS F.: Invariants related to dimension and entropy , *Atas do 13°*

## Bibliographie

- coloquio brasileiro de matematica, Rio de Janeiro,(1983)
- [Tak2] TAKENS F. : On the numerical determination of the Dimension of an Attractor, Springer Lect. Notes Math. 1125, (1985), p99-106
- [Thi] THIBAUT R. : Competition between attractive cycles and strange attractors, dans Springer Lect. Notes 1163 (1985) p.203
- [Tri] TRICOT C. Jr. : Mesures et Dimension, Thèse d'Etat, Paris (1983)
- [Tsa] TSANG K.Y. : Dimensionality of strange attractors determined analytically, Phys. Rev. Lett. 57 (1986), 1390
- [Ula] ULAM S.M. : Proc Int. Congr. Math. 1950, Cambridge, Mass. ; Vol 2, ,264, AMS, Providence R.I. , (1950)
- [Wil] WILLIAMS R.F. : The zeta fonction of an attractor in Conference on the Topology of Manifolds, ed. J.G.Hocking, Prindle Weber Schmidt, Boston (1968)
- [You] YOUNG L. S. : Dimension, entropy and Lyapunov exponents , Ergod. Th. & Dyn. Syst. (1982) 2 , p.109
- [Yor] YORKE J.A. et coll. : Fractal basin boundaries, Physica 17D (1985) , 125

### Rélevé des dessins qui sont prises d'autres ouvrages

- page 17 : [Mil]  
page 60 : [Far]  
page 72 : [Kad]  
page 167 : [GH]  
page 170 : [Sch]  
page 171 : [DGM]

A U T O R I S A T I O N de S O U T E N A N C E

VU les dispositions de l'article 15 Titre III de l'arrêté du 5 juillet 1984 relatif aux études doctorales

VU les rapports de présentation de

- . Monsieur J. DEMONGEOT, Professeur
- . Monsieur C. LOBRY, Professeur

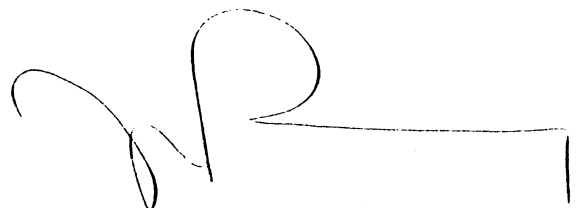
**Monsieur LAUSBERG Conrad**

est autorisé(e) à présenter une thèse en soutenance en vue de l'obtention du diplôme de DOCTEUR de L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, spécialité "Mathématiques appliquées".

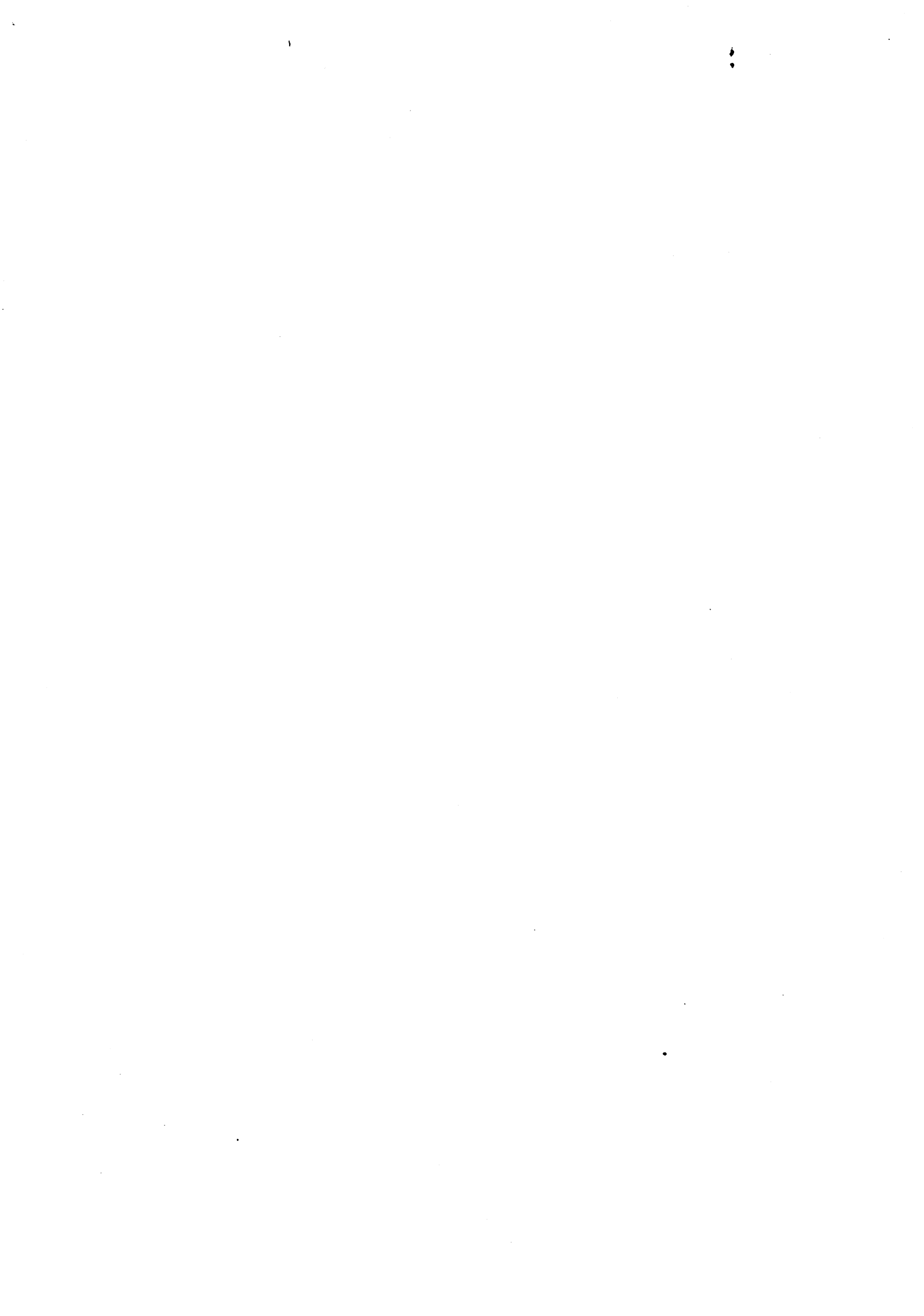
Fait à Grenoble, le 8 septembre 1987

**Georges LESPINARD**  
Président  
de l'Institut National Polytechnique  
de Grenoble

*P.O. le Vice-Président,*









## RESUME

Cette thèse se veut d'abord une étude mathématique qui donne des bases théoriques au calcul numérique des dimensions fractales d'un attracteur. Des nombreuses expériences numériques relient la théorie aux exigences qui apparaissent dans les applications.

L'algorithme de calcul des dimensions fractales proposé par Paladin et Vulpiani, que nous appelons algorithme des points centraux, nous semble être le plus puissant parmi tous les algorithmes proposés.

Nous donnons la description détaillée de cet algorithme, et espérons qu'elle est aussi compréhensible pour un non-spécialiste.

Une méthode d'estimation d'erreur pour cet algorithme est proposée et justifiée par des résultats des expériences numériques. Le coût de l'algorithme est calculé.

La thèse est complétée par l'étude d'un système dynamique, qui modélise une réaction biochimique chaotique, qui intervient dans le cycle de vie d'un genre d'amibes.

**Mots-clés:** Dimension fractale, attracteur étrange

## ABSTRACT

This thesis intends to study the theoretic foundations of the numerical calculus of the fractal dimensions of an attractor. Numerical experiences link the theory to the problems which appear in the applications.

The algorithm of calculus of the fractal dimensions proposed by Paladin and Vulpiani, which we baptise the algorithm of central points, seems to us to be the most powerful of all the algorithms proposed.

We give the detailed description of this algorithm and hope that it can also be understood by a non-specialist.

A method of error-estimation for this algorithm is proposed and justified by the result of numerical experiences. The cost of the algorithm is calculated.

The thesis is completed by the study on a dynamical system, which modelises a chaotic bio-chemical reaction, which occurs in the cycle of life of a genus of amoeba

**Key-words:** Fractal dimension, strange attractor