



**HAL**  
open science

# Modélisation de la propagation d'une onde électromagnétique sur des scènes de grande taille par résolution de l'Equation Parabolique 3D vectorielle

Arnaud Ginestet

► **To cite this version:**

Arnaud Ginestet. Modélisation de la propagation d'une onde électromagnétique sur des scènes de grande taille par résolution de l'Equation Parabolique 3D vectorielle. Physique [physics]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2007. Français. NNT: . tel-00324076

**HAL Id: tel-00324076**

**<https://theses.hal.science/tel-00324076>**

Submitted on 23 Sep 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ TOULOUSE III - PAUL SABATIER**  
**UFR P.C.A.**

**THÈSE**

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ TOULOUSE III**  
**Discipline : Électronique - Micro-Ondes**  
présentée par

Arnaud GINESTET

**MODÉLISATION DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE  
ÉLECTROMAGNÉTIQUE SUR DES SCÈNES DE  
GRANDE TAILLE PAR RÉOLUTION DE L'ÉQUATION  
PARABOLIQUE 3D VECTORIELLE**

Soutenue le 04 mai 2007 à l'auditorium de l'ONERA

<b>JURY</b>	M. Pierre DEGAUQUE	Président et rapporteur
	M. Gilles BEAUQUET	Examineur
	M. Paul COMBES	Examineur
	M. Vincent FABBRO	Encadrant ONERA
	M. Jérôme SOKOLOFF	Directeur de thèse
	M. Walid TABBARA	Rapporteur



Laboratoire Antennes, Dispositifs  
et Matériaux Micro-Ondes  
118, route de Narbonne  
31062 TOULOUSE cedex



Département Électromagnétisme et Radar  
2, avenue Édouard Belin - BP 4025  
31055 TOULOUSE cedex 4



**UNIVERSITÉ TOULOUSE III - PAUL SABATIER**  
**UFR P.C.A.**

**THÈSE**

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ TOULOUSE III**  
**Discipline : Électronique - Micro-Ondes**  
présentée par

Arnaud GINESTET

**MODÉLISATION DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE  
ÉLECTROMAGNÉTIQUE SUR DES SCÈNES DE  
GRANDE TAILLE PAR RÉOLUTION DE L'ÉQUATION  
PARABOLIQUE 3D VECTORIELLE**

Soutenue le 04 mai 2007 à l'auditorium de l'ONERA

<b>JURY</b>	M. Pierre DEGAUQUE	Président et rapporteur
	M. Gilles BEAUQUET	Examineur
	M. Paul COMBES	Examineur
	M. Vincent FABBRO	Encadrant ONERA
	M. Jérôme SOKOLOFF	Directeur de thèse
	M. Walid TABBARA	Rapporteur



Laboratoire Antennes, Dispositifs  
et Matériaux Micro-Ondes  
118, route de Narbonne  
31062 TOULOUSE cedex



Département Électromagnétisme et Radar  
2, avenue Édouard Belin - BP 4025  
31055 TOULOUSE cedex 4







*À la mémoire de mon père.*



# Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Florent Christophe et Joël Lemorton, respectivement directeur adjoint du Département ÉlectroMagnétisme et Radar (DEMR) et Directeur de l'unité Antenne et PPropagation (APR), pour m'avoir accueilli à l'ONERA centre de Toulouse et permis de réaliser cette thèse.

Je voudrais également remercier M. Degauque, Professeur à l'université de Lille, et M. Tabbara, Professeur à l'école supérieure d'électricité (SUPÉLEC), pour avoir acceptés la lourde tâche du travail de rapporteur. Leurs remarques toujours très pertinentes m'ont permis de préciser et de bonifier le travail effectué.

J'adresse à M. Beauquet, Ingénieur chez Thalès Air Defence, ma sincère gratitude. Les collaborations que l'on a pu avoir tout au long de ma thèse m'ont permis de me familiariser avec les problématiques rencontrées dans le monde industriel. Nos échanges ont également permis de valoriser le travail effectué grâce à la définition de cas tests, à ce titre je l'en remercie.

Je voudrais maintenant remercier grandement M. Combes, Professeur à l'université Paul Sabatier (Toulouse). Ce dernier a su me convaincre d'effectuer le DEA qu'il dirigeait et m'a ainsi permis d'intégrer le monde de la recherche. Il a également su au cours de ces nombreux enseignements me communiquer la passion qui l'habite. C'est ainsi en partie grâce à lui que je suis arrivé ici et je le remercie pour cela.

Je tiens également à remercier le plus sincèrement possible Vincent et Jérôme. Ce sont eux qui ont eu la tâche, parfois lourde, de m'encadrer durant mon stage de DEA et ma thèse. J'ai durant ces quatre années appris énormément à leur contact aussi bien scientifiquement qu'humainement. Leurs implications professionnelles ont été irréfutables et l'implication personnelle qu'ils ont également mis en oeuvre dans notre collaboration n'a fait qu'accroître ma motivation et m'a montré leur engagement et la confiance qu'il portait en moi. Il est évident pour moi que sans eux, ma thèse n'aurait pas été celle qu'elle est aujourd'hui. Je considère ainsi que ce n'est pas que mon travail mais plutôt le travail de l'équipe que nous formions.

En effet, ils ont su me coacher de la meilleure des façons et m'ont donné l'envie de poursuivre ma carrière scientifique. Je suis maintenant un peu déçu de la fin de notre collaboration, mais je suis sûr que ce n'est pas la fin d'une histoire et que nos chemins se recroiseront tôt ou tard.

Je voudrais remercier l'ensemble du personnel du département ainsi que les nombreux doctorants et stagiaires que j'ai pu côtoyer. L'ambiance régnant dans le département y a fait pour beaucoup dans ma motivation quotidienne pour se rendre au centre. Les « extras » que j'ai pu réaliser avec quelques-uns des stagiaires et/ou doctorants restent encore aujourd'hui de très bons souvenirs.

Je tiens à encourager les doctorants actuels :

Anthony, Nico, Rémi et Julien. Je sais ce qu'ils endurent. J'ai connu tout comme eux des moments de doute et je peux leur assurer que la fin est digne de tout ce qu'on peut en raconter. Une pensée particulière pour Rémi et Julien avec lesquels j'ai eu le plaisir de partager une grande partie de mon temps en dernière année.

Et les doctorants « passés » :

Renaud, on a fini nos études et commencé notre vie active ensemble. Je pense qu'on a plutôt bien réussi à se motiver l'un l'autre durant nos thèses respectives et ainsi traverser les moments difficiles que l'on a pu rencontrer.

Frédéric, on a partagé le même bureau pendant une grande partie de notre vie commune à l'Onera et cela m'a fait chaud au cœur. Je te souhaite plein de bonheur à toi et à ta famille.

Je voudrais maintenant remercier l'ensemble de mes amis pour m'avoir permis de bien décompresser durant ma thèse. A ce titre je remercie, dans le désordre : René, la famille Culbuto, Caribou, Mimi, Harry, Maître Estève, Patrak, Nono, Kiki, l'entreprise Moto Passion, Master Laurent, Rodriguez... Ca fait du bien de les savoir à mes côtés.

J'en viens à ma famille : Maman, Karine et Cyrille. Ils ont toujours été à mes côtés dans les moments de doute et ont su m'encourager chacun à leur manière, à ce titre je ne les remercierai jamais assez. C'est un peu pour leur rendre hommage que j'ai tenté d'accomplir le meilleur.

Et je tenais à terminer par Emeline. C'est grâce à son soutien infaillible qu'il m'a été par moment possible de continuer à avancer dans les moments les plus difficiles. C'est avec le recul que maintenant je m'aperçois que, comme tout thésard en dernière année, j'ai parfois pu être difficile à vivre. Sa patience a su faire la part des choses et elle a ainsi réussi à me supporter.





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
I Contexte de l'étude . . . . .	1
II Le problème physique . . . . .	2
II.1 Influence de la basse atmosphère . . . . .	2
II.2 Influence du relief . . . . .	2
III Etat de l'art . . . . .	4
IV Intérêt et originalité du travail . . . . .	6
V Plan de l'étude . . . . .	6
<b>Chapitre 1 Méthodes de résolution du problème de propagation 3D grande distance</b>	<b>9</b>
I Introduction . . . . .	9
II Méthodes de courants et de rayons . . . . .	10
II.1 Méthodes asymptotiques de courants . . . . .	10
II.1.1 Principe . . . . .	10
II.1.2 Application au problème 3D de grande taille . . . . .	12
II.2 Méthodes asymptotiques de rayons . . . . .	13
II.2.1 Optique Géométrique . . . . .	13
II.2.2 Théorie Uniforme de la Diffraction . . . . .	17
II.3 Hybridation des deux méthodes : logiciel FERMAT . . . . .	18
II.4 Lancer de rayons en milieu inhomogène . . . . .	19
II.5 Conclusion . . . . .	20
III Méthode de l'Équation Parabolique 3D . . . . .	21
III.1 Introduction . . . . .	21
III.2 Théorie et hypothèses . . . . .	21
III.2.1 Obtention de l'Équation Parabolique 3D . . . . .	21
III.2.2 Approximation engendrant la limite paraxiale . . . . .	22
III.3 Variables de résolution . . . . .	23
III.3.1 Potentiels vecteurs . . . . .	24
III.3.2 Champ électromagnétique . . . . .	25
III.4 Condition aux limites . . . . .	27
III.4.1 Conditions aux limites supérieures et latérales du domaine . . . . .	27
III.4.2 Condition à la surface du relief . . . . .	29
III.5 Conclusion . . . . .	30
IV Conclusion générale . . . . .	31

<b>Chapitre 2 Résolution de l'Équation Parabolique 3D par la méthode Split-Step Fourier</b>		<b>33</b>
I	Introduction . . . . .	33
II	Théorie . . . . .	34
II.1	Schéma de propagation . . . . .	34
II.1.1	Résolution par Split-Step Fourier . . . . .	34
II.1.2	Choix des échantillonnages . . . . .	36
II.2	Introduction d'un relief selon l'approche de R. Janaswamy . . . . .	39
II.2.1	Traitement de la condition aux limites suivant la polarisation . . . . .	40
II.2.2	Application à un sol plan lisse horizontal . . . . .	41
II.2.3	Application sur des parois verticales . . . . .	44
III	Validations . . . . .	47
III.1	Sol lisse métallique horizontal . . . . .	47
III.1.1	Polarisation horizontale . . . . .	48
III.1.2	Polarisation verticale . . . . .	52
III.2	Discussion sur la modélisation de la condition aux limites . . . . .	54
III.2.1	Modélisation de la réflexion . . . . .	54
III.2.2	Influence du pas de progression horizontal sur la modélisation de la réflexion . . . . .	57
III.3	Prise en compte de l'atmosphère . . . . .	58
III.3.1	Atmosphère standard . . . . .	59
III.3.2	Conduit d'évaporation . . . . .	61
III.4	Prise en compte d'obstacles canoniques . . . . .	64
III.4.1	Plaque perpendiculaire au sens de propagation . . . . .	64
III.4.2	Plaque inclinée . . . . .	67
IV	Conclusion . . . . .	70
<b>Chapitre 3 Résolution de l'Équation Parabolique 3D par Différences Finies</b>		<b>73</b>
I	Introduction . . . . .	73
II	Théorie . . . . .	74
II.1	Notions mathématiques pour les Différences Finies . . . . .	74
II.2	Variables de résolution . . . . .	75
II.3	Schémas de propagation . . . . .	75
II.3.1	Schéma explicite . . . . .	77
II.3.2	Schéma implicite pur . . . . .	80
II.3.3	Schéma implicite mixte . . . . .	80
II.3.4	Méthode à pas fractionnaires . . . . .	81
II.3.5	Synthèse . . . . .	85
II.4	Introduction d'un relief . . . . .	85
II.4.1	Conditions aux limites réduites sur une surface métallique . . . . .	87
II.4.2	Conditions aux limites réduites sur une surface diélectrique . . . . .	89
II.4.3	Intégration des conditions aux limites réduites dans le schéma matriciel . . . . .	89
II.4.4	Calcul du point au sol . . . . .	93

II.5	Synthèse . . . . .	101
III	Validations . . . . .	101
III.1	Sol lisse métallique horizontal . . . . .	103
III.1.1	Polarisation horizontale . . . . .	103
III.1.2	Polarisation verticale . . . . .	105
III.2	Prise en compte de l'atmosphère . . . . .	106
III.2.1	Atmosphère standard . . . . .	107
III.2.2	Conduit d'évaporation . . . . .	109
III.3	Prise en compte d'obstacles canoniques . . . . .	111
III.3.1	Plaque perpendiculaire au sens de propagation . . . . .	111
III.3.2	Plaque inclinée . . . . .	114
III.4	Prise en compte du couplage des composantes . . . . .	120
III.4.1	Obstacle présentant une normale à deux composantes . . . . .	120
III.4.2	Obstacle présentant une normale à trois composantes . . . . .	122
IV	Conclusion . . . . .	124
<b>Chapitre 4 Mise en valeur des effets de propagation tridimensionnels</b>		<b>127</b>
I	Introduction . . . . .	127
II	Propagation en présence d'un obstacle canonique : un écran . . . . .	127
II.1	Mise en relief des effets tridimensionnels . . . . .	128
II.2	Différences de paraxialité entre les deux méthodes tridimensionnelles	130
III	Propagation au-dessus d'une montagne de forme gaussienne . . . . .	133
IV	Propagation au-dessus d'une montagne présentant un col . . . . .	138
V	Propagation dans une vallée . . . . .	147
VI	Conclusion . . . . .	154
<b>Conclusion générale</b>		<b>157</b>
<b>Liste des publications</b>		<b>161</b>
<b>Annexe A Transformée de Fourier en sinus et cosinus</b>		<b>165</b>
<b>Annexe B Décomposition d'un champ en deux polarisations indépendantes</b>		<b>167</b>
<b>Annexe C Calcul des conditions aux limites sur les parois verticales d'un obstacle</b>		<b>169</b>
<b>Annexe D Rappel sur le développement en série de Taylor</b>		<b>173</b>
<b>Annexe E Etude des différents schémas de discrétisation aux Différences Finies</b>		<b>175</b>
<b>Annexe F Consistance de la méthode à pas fractionnaires</b>		<b>183</b>
<b>Annexe G Simplification des conditions aux limites sur une surface diélectrique</b>		<b>187</b>
<b>Table des figures</b>		<b>189</b>
<b>Liste des tableaux</b>		<b>194</b>

**Bibliographie**

**195**

# Introduction

## I Contexte de l'étude

La connaissance de la propagation des ondes électromagnétiques est aujourd'hui un point clef de la prédiction de la performance des systèmes électromagnétiques. Elle est nécessaire pour améliorer leur conception, mais également pour aider à la prise de décision en contexte opérationnel. Une bonne modélisation de la propagation des ondes est donc requise car de nombreux systèmes y sont sensibles. On peut citer par exemple : les radars, les systèmes électromagnétiques passifs pour l'écoute militaire, les systèmes de brouillage ainsi que l'ensemble des systèmes de communication.

Les domaines d'application de ces systèmes sont nombreux. Ils vont des télécommunications terrestre ou Terre - espace aux systèmes aéroportés, en passant par la surveillance et la défense aérienne, les applications navales ainsi que les applications pouvant être utilisées sur les champs de bataille militaire.

Dans la pratique, la modélisation de la propagation est classiquement ramenée à un problème 2D en considérant uniquement le plan vertical passant par l'émetteur et le récepteur. Les modèles qui en découlent peuvent être très complets, permettant de prendre en compte les principaux phénomènes propagatifs tels que la réfraction et l'absorption due à l'atmosphère ainsi que la réflexion et la diffraction par le relief 2D. L'influence des surfaces diélectriques, rugueuses et des effets d'ombre peut également être modélisée.

Pour les systèmes électromagnétiques longue distance fonctionnant à basse fréquence comme les radars transhorizons, une modélisation 2D peut s'avérer suffisante ; tout comme pour les systèmes où l'émetteur est soit à haute altitude soit à basse altitude mais rayonnant sur une scène invariante transversalement, comme par exemple une surface de mer calme.

Cependant, bien qu'exhaustifs, ces modèles se limitent à une approximation bidimensionnelle du problème. Or, pour de nombreuses applications une modélisation 3D de la propagation est nécessaire.

Ainsi pour les applications liées aux radars de sol, de surveillance ou de poursuite ou pour les systèmes de télécommunications rayonnant sur des scènes présentant du relief ou en milieu urbain, une modélisation fine nécessite de considérer une résolution tridimensionnelle. On peut aussi mentionner le cas des radars de pénétration dans la forêt ou les liaisons haut débit à basse altitude pour les drones.

Pour l'ensemble de ces applications, il est nécessaire de lever l'hypothèse de résolution bi-dimensionnelle et de considérer un domaine de calcul 3D. C'est ce que nous proposons de faire dans cette étude, en ayant pour but de réaliser un outil capable de modéliser la propagation électromagnétique à basse altitude en trois dimensions et au-dessus de scènes grandes devant la longueur d'onde. Pour traiter cette problématique, il faut considérer d'une part l'influence de l'atmosphère et d'autre part les effets d'interaction entre l'onde et le sol.

## II Le problème physique

Comme souligné précédemment, lors de la propagation à basse altitude on peut distinguer l'influence de l'atmosphère et celle des effets d'interaction entre l'onde et le sol.

### II.1 Influence de la basse atmosphère

La basse atmosphère ou troposphère influe sur la propagation aux fréquences micro-ondes essentiellement au travers de la réfraction qu'elle crée. Les propriétés de la troposphère sont alors décrites par l'indice de réfraction dont les effets sont directement liés à ses variations spatiales.

Dans les conditions atmosphériques moyennes, on admet communément que l'indice de réfraction varie linéairement avec la hauteur. On parle alors d'atmosphère standard et les effets de réfraction ne compensent pas la courbure de la Terre ce qui provoque un éloignement de l'onde de la surface du sol. Dans certains cas de figure, la réfraction de l'onde peut avoir des conséquences plus spectaculaires. Ainsi, en environnement maritime, l'indice de réfraction peut présenter de forts gradients verticaux (nommés conduits) et provoque un effet de guidage de l'onde à la surface du sol.

La réfraction est donc un phénomène pouvant impliquer des changements radicaux de la propagation de l'onde et c'est pourquoi elle doit être prise en compte.

Rappelons qu'en plus du phénomène de réfraction, l'atmosphère induit une atténuation des ondes aux fréquences élevées. Ainsi, la traversée des zones de pluies, de nuages ou de brouillards atténue les ondes. Cette atténuation résulte de pertes par absorption et par diffusion et augmente rapidement avec la fréquence et l'intensité des précipitations.

### II.2 Influence du relief

La présence de relief a également une influence primordiale sur la propagation à basse altitude. En effet, ne serait-ce qu'au-dessus d'un sol plan, la recombinaison de l'onde incidente avec l'onde réfléchi par celui-ci fait apparaître une figure d'interférences modifiant de façon très marquée le front d'onde.

On peut extrapoler cette remarque en affirmant que la présence d'un relief tridimensionnel va impliquer de grands changements quant à la forme du champ obtenu. Ainsi si l'on considère la scène urbaine comme représentée sur la figure 1, la présence du sol et des immeubles introduisent des phénomènes de réflexion et de diffraction, simples ou multiples, modifiant la propagation du champ électromagnétique.

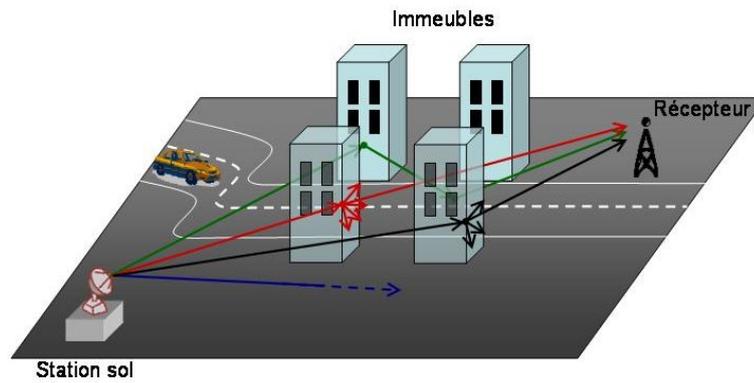


Figure 1 – Exemple de propagation en présence d'un relief tridimensionnel urbain.

Il en est de même si l'on considère une scène tridimensionnelle constituée d'un relief vallonné (cf. figure 2). Les phénomènes de réflexions et diffractions simples et multiples contribuent fortement à l'onde propagée jusqu'au récepteur.

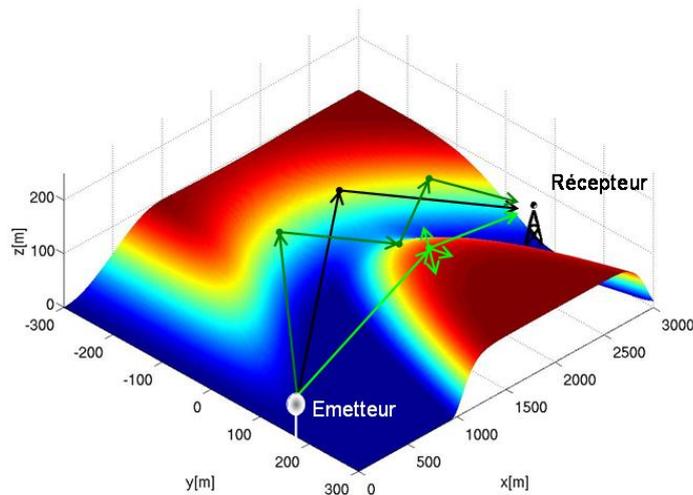


Figure 2 – Exemple de propagation en présence d'un relief tridimensionnel vallonné.

Sur ces figures, les conventions suivantes ont été adoptées :

- représente la propagation du champ,
- ↖ représente un phénomène de réflexion,
- ↗ représente un phénomène de diffraction.

Ainsi les phénomènes de propagation induits par l'atmosphère et le relief 3D sont importants

dans de nombreuses configurations basse altitude. Leur modélisation est le thème principal de ces travaux de thèse.

### III Etat de l'art

Pour modéliser la propagation d'une onde électromagnétique, il existe deux grands types de méthodes de résolution des équations de Maxwell : les méthodes rigoureuses et les méthodes asymptotiques.

Les méthodes rigoureuses sont des méthodes numériques qui permettent de modéliser sans approximation le problème électromagnétique. On peut citer la **Méthode des Moments** [24] ou la **Méthode des Éléments Finis** [26]. Cependant, du fait d'un encombrement mémoire et d'un temps de calcul prohibitifs, celles-ci sont limitées à des obstacles présentant des dimensions de l'ordre de quelques longueurs d'onde. Notre objectif étant de modéliser la propagation sur de grandes distances par rapport à la longueur d'onde, nous ne nous intéresserons pas à ces méthodes durant notre étude.

L'alternative à l'utilisation des méthodes rigoureuses repose dans les méthodes asymptotiques. Celles-ci sont basées sur des formulations approchées et tendent vers la solution exacte lorsqu'un paramètre (la taille de la cible, la distance, etc...) devient grand devant la longueur d'onde. Elles sont donc particulièrement adaptées à notre problématique de modélisation de la propagation sur de grandes distances.

Classiquement, c'est le concept de rayon qui est utilisé dans le cadre de l'Optique Géométrique [28] ou de la Théorie Uniforme de la Diffraction [27]. La propagation de l'onde est donc modélisée dans ces méthodes par des rayons satisfaisant le principe de Fermat : on les désigne par l'appellation **méthodes asymptotiques de rayons**. Cependant, ces méthodes sont rarement développées en trois dimensions. En effet, au-dessus de scènes 3D de grandes tailles, le nombre d'interactions entre l'onde et le relief peut être très important. Ainsi lorsque la scène se complexifie le nombre de rayons nécessaires « explose » ce qui augmente significativement le temps de calcul nécessaire.

Les **méthodes asymptotiques de courants** sont quant à elles basées sur l'expression asymptotique des courants surfaciques répartis sur les obstacles traités. Le champ rayonné par l'obstacle est calculé comme le rayonnement de ces courants surfaciques asymptotiques. Ces méthodes sont l'Optique Physique [6] et la Théorie Physique de la Diffraction [48]. Cependant les courants surfaciques ne sont calculés qu'à condition de connaître le champ incident à la surface considérée. Or ce dernier champ n'est dans notre contexte de scènes tridimensionnelles pas uniquement dû au champ direct de l'antenne mais est sensible aux réflexions et aux diffractions pouvant être introduites par le relief. Pour calculer le champ issu de ces interactions, on ne peut faire autrement que de faire appel aux méthodes rigoureuses ou aux méthodes asymptotiques de rayons. Mais on retombe alors sur les limitations de ces dernières.

La **méthode de l'Équation Parabolique** reste depuis de nombreuses années une des méthodes les plus efficaces pour résoudre la propagation dans des milieux inhomogènes où les variations de l'indice de réfraction atmosphérique et du relief ne permettent pas l'application d'une méthode rigoureuse.

Dans les années 1940, Leontovich et Fock [36, 20] proposèrent la méthode de l'Équation Parabolique 2D pour calculer la propagation à basse altitude. Quelques dizaines d'années plus tard, Hardin et Tappert résolurent l'Équation Parabolique 2D par une technique itérative basée sur l'utilisation de transformée de Fourier [23]. Ils appliquèrent avec succès cette méthode à la propagation acoustique. Le **formalisme SSF**, pour Split-Step Fourier, devint par la suite la méthode privilégiée à la modélisation troposphérique [30, 14, 7]. L'autre modèle de résolution de l'Équation Parabolique 2D consiste à utiliser une méthode des **Différences Finies**. Elle fut proposée par Malyuzhinets dans les années 1950 [40] et implémentée par Popov quelques années plus tard [45].

Comme nous venons de le voir, l'Équation Parabolique fit l'objet de nombreuses études depuis le milieu du siècle dernier. Ainsi, la propagation des ondes électromagnétiques a pu être modélisée de manière rapide et satisfaisante sur de grands domaines 2D. Plusieurs modèles opérationnels ont de cette manière été développés : tels que TEMPER<sup>i</sup>, TERPEM<sup>ii</sup> ou encore AREPS<sup>iii</sup>. On peut également citer les codes développés à l'ONERA : ONERA-CERT, DIFF-CERT [16], SIMU-BF ou EPEE<sup>iv</sup> [18, 22].

On peut toutefois noter que l'ensemble des théories et modèles Équation Parabolique précédemment décrits sont basés sur l'hypothèse de symétrie azimutale qui consiste à restreindre le domaine au plan vertical passant par l'émetteur et le récepteur. Pour les applications nécessitant une modélisation 3D, il faut lever cette hypothèse.

Ainsi, Zaporozhets et Levy furent les premiers à proposer l'utilisation de l'Équation Parabolique 3D vectorielle (ou 3DVPWE pour *3D Vector Parabolic Wave Equation*) comme technique itérative pour le calcul de la SER de cibles parfaitement conductrices [55, 56, 57]. Toutefois, ils ne considérèrent que des obstacles de quelques longueurs d'onde et se sont restreints à de petits domaines de calcul. Puis Zaporozhets modifia son modèle pour introduire une impédance de surface quelconque et l'appliqua à un environnement de type urbain [54], mais tout en continuant à considérer un domaine de petite taille (quelques longueurs d'onde). Ce n'est que récemment que Levy et Zaporozhets considérèrent un domaine de grande taille en résolvant l'Équation Parabolique 3D scalaire pour étudier la diffusion de cibles en milieu acoustique [39]. Zelle et Constantinou appliquèrent cette même équation scalaire à la propagation à basse altitude en proposant une étude de la propagation VHF/UHF au-dessus d'un terrain irrégulier [58]. D'autre part Janaswamy propose une approche basée sur l'application des potentiels vecteurs à l'Équation Parabolique 3D scalaire pour le calcul des pertes par propagation en environnement urbain [25]. Et dernièrement, en 2005, Awadallah, Geh-

---

<sup>i</sup>Tropospheric ElectroMagnetic Parabolic Equation Routine

<sup>ii</sup>TERrain Parabolic Equation Model

<sup>iii</sup>Advanced Refractive Effects Prediction System

<sup>iv</sup>Enhanced Parabolic Equation Emulator

man, Kuttler et Newkirk présentèrent une publication sur l'étude des effets transverses lors de la propagation au-dessus d'un relief tridimensionnel [5]. Dans ces travaux, une comparaison entre un modèle Équation Parabolique 3D scalaire et un modèle pseudo 2D (ou 2D 1/2) est effectuée afin de mettre en avant les avantages d'une résolution 3D.

## IV Intérêt et originalité du travail

Notre travail se positionne dans la continuité des travaux les plus récents : nous avons travaillé sur la **réalisation d'un modèle capable de résoudre l'Équation Parabolique 3D vectorielle sur de grandes distances**. Le but était de développer un modèle présentant l'avantage de lever les hypothèses d'une modélisation 2D et de modéliser le caractère vectoriel du champ, avec par exemple l'apparition de polarisation croisée au-dessus de certains reliefs. Pour cela, **nous avons résolu l'Équation Parabolique 3D par deux approches : un algorithme de type Split-Step Fourier et un algorithme de type Différences Finies**. Chacune des méthodes proposées est validée sur différents cas tests afin de vérifier la modélisation des principaux phénomènes propagatifs que sont la réflexion, la diffraction et la réfraction. Insistons sur le fait que grâce à l'utilisation de l'Équation Parabolique 3D nous sommes en mesure de modéliser la propagation dans un domaine tridimensionnel de grande taille et donc capable de mettre en avant les effets transverses et les rotations de polarisation dus aux variations latérales du terrain.

La méthode SSF proposée est basée sur les travaux de Janaswamy [25] tandis que la méthode Différences Finies est une approche originale implémentée par l'utilisation de la méthode à pas fractionnaires. Cette méthode permet d'alléger le volume de calcul et de conserver un temps de calcul de l'ordre de quelques heures pour un grand domaine (de l'ordre de quelques  $km^3$ ). De plus, cette seconde méthode a pu être couplée avec des conditions aux limites efficaces. **Le grand intérêt de développer deux méthodes de résolution est de pouvoir les comparer et éventuellement les inter-valider** sur des domaines d'applications qu'aucune autre méthode n'est aujourd'hui à même de prendre en compte.

Ainsi, le domaine de validité, le temps de calcul et l'efficacité des modélisations sont comparés sur des scènes de grandes tailles. **Ces cas tests nous permettront d'attester de la capacité de nos modèles à calculer la propagation sur des scènes de grandes tailles et de mettre en avant les effets transverses ainsi que la dépolarisation pouvant être générés.**

## V Plan de l'étude

La présentation de ces travaux est décomposée en quatre chapitres principaux.

Le **premier chapitre** de cette thèse est un recensement et une description des méthodes que nous pensons les plus à même de traiter notre problématique de modélisation de la propagation en trois dimensions. Tout d'abord, les méthodes asymptotiques de courants et de rayons sont succinctement décrites et leur adaptation au problème est étudiée. Ensuite, la méthode de l'Équation Parabolique est abordée et la deuxième partie de ce chapitre détaille l'obtention de sa formulation 3D et les précautions à prendre lors de sa résolution dans un domaine

de calcul fini.

Dans le **chapitre deux** est décrite la première méthode de résolution de l'Équation Parabolique 3D : la méthode de Split-Step Fourier. Cette approche est basée sur un passage dans le domaine spectral par l'utilisation d'une transformée de Fourier. Des conditions aux limites développées pour un contexte urbain sont couplées à cette résolution. Cette méthodologie est ensuite validée par comparaison avec le logiciel FERMAT<sup>v</sup> sur des cas tests canoniques comme la propagation sur un sol plan, en présence d'un écran et d'un sol ou en présence d'une plaque inclinée.

Le **troisième chapitre** correspond à la description de la seconde méthode de résolution de l'Équation Parabolique tridimensionnelle : la méthode des Différences Finies. Celle-ci est basée sur une discrétisation des dérivées partielles et est couplée avec des conditions aux limites simplifiées afin de garantir une résolution aisée de l'algorithme. Les conditions aux limites complètes sont introduites après chaque pas de progression horizontal afin de traduire le couplage entre les composantes du champ électromagnétique. De la même manière que pour la méthode SSF, cette approche est validée par comparaison avec le logiciel FERMAT, et sur des cas tests canoniques identiques.

Le **quatrième chapitre** confronte les deux méthodes de résolution. Celles-ci sont comparées en termes de domaine de validité et de temps de calcul sur différents cas tests plus « réalistes » : une montagne de forme gaussienne, une montagne présentant un col et enfin dans une vallée. Ce dernier chapitre permet de mettre en évidence les avantages d'une résolution tridimensionnelle lors de la modélisation de la propagation au-dessus de scènes 3D se rapprochant de cas réalistes.

Enfin, un **chapitre de conclusion** fait la synthèse de l'ensemble des travaux effectués et permet d'aborder les perspectives prometteuses de nos travaux montrant ainsi tout son intérêt.

---

<sup>v</sup>Fonctionnalités pour l'Électromagnétisme et le Radar par des Méthodes Asymptotiques



# Chapitre 1

## Méthodes de résolution du problème de propagation 3D grande distance

### I Introduction

L'objectif de cette thèse est de modéliser la propagation d'une onde électromagnétique au-dessus de scènes tridimensionnelles de grande taille en milieu naturel ou urbain. Notre ambition est de prendre en compte des scènes dont le domaine de calcul peut atteindre plusieurs  $km^3$ . De telles dimensions correspondent à un volume de plusieurs milliards de longueur d'onde au cube ( $\lambda^3$ ) dans la gamme des fréquences micro-ondes.

Les caractéristiques électromagnétiques et géométriques de ces scènes peuvent s'avérer très variées. En milieu urbain, les permittivités et conductivités rencontrées sont proches de celles de matériaux de type béton ou du métal ; tandis qu'en milieu naturel, on rencontre plutôt des environnements de type forestier ou agricole présentant des caractéristiques électromagnétiques tout à fait différentes. L'atmosphère au-dessus du relief est également très influente sur la propagation et le cas particulier d'un environnement marin ou côtier est intéressant car il présente fréquemment une variation d'indice importante. L'impact de la réfraction de l'onde électromagnétique est alors significatif et doit être modélisé.

L'ensemble des caractéristiques de notre problème, telles que la grande taille du domaine de calcul, la variété des caractéristiques électromagnétiques et géométriques des scènes ainsi que l'incidence rasante de l'onde propagée avec le sol, est fortement contraignant en terme de modélisation. Une résolution par une méthode rigoureuse, c'est à dire résolvant les équations de Maxwell sans approximation, est par conséquent inenvisageable. De plus, les paramètres caractéristiques de la scène sont souvent connus de manière approximative sur d'aussi larges domaines. Ainsi, la description géométrique est généralement renseignée par l'intermédiaire d'une grille topographique d'élévation de points. Il est possible de se procurer (par exemple sur internet) une telle description par l'intermédiaire de fichier de type DTED (Digital Terrain Elevation Data) [2, 3]. Cependant les fichiers accessibles sans mention de protection ne sont échantillonnés qu'avec une précision au mieux de l'ordre de  $100m$ . Cette imprécision se retrouve également dans les caractéristiques diélectriques de la scène. En ef-

fet, lorsqu'elles sont renseignées les valeurs de permittivité et de conductivité sont souvent des valeurs moyennes que l'on associe au matériau considéré.

Rappelons que le but recherché est de développer un modèle capable de prédire la portée des systèmes électromagnétiques « sol-sol » en environnement 3D en considérant le relief et les effets de réfraction. La connaissance de la topographie avec une précision d'une dizaine de mètres semble tout à fait suffisante et même si les descriptions numériques de terrain actuellement accessibles n'atteignent pas encore cette précision, on peut imaginer qu'elles y parviendront d'ici à quelques années. Mais face à une telle description, les méthodes numériques rigoureuses sont trop précises car elles engendrent une résolution avec une précision inférieure à la longueur d'onde, et sont beaucoup trop lourdes pour un domaine aussi grand. Notre choix se tourne donc vers l'utilisation de méthodes asymptotiques. On s'intéressera plus particulièrement aux méthodes dites de courants, Optique Physique et Théorie Physique de la Diffraction, ainsi qu'aux méthodes dites de rayons, Optique Géométrique et Théorie Uniforme de la Diffraction. Dans les paragraphes suivant, notre attention se portera sur ces méthodes afin de tester leur pertinence pour répondre à notre problématique. Par ailleurs, les méthodes asymptotiques de courants et de rayons sont hybridées dans un logiciel, FERMAT [8], qui servira de référence à chaque fois que cela sera possible.

Ensuite, la méthode de l'Équation Parabolique tridimensionnelle sera décrite car elle s'avère plus adaptée aux grands volumes, aux incidences rasantes et aux scènes pouvant être diélectriques.

## II Méthodes de courants et de rayons

Les méthodes asymptotiques classiquement appliquées pour les problèmes 3D sont les méthodes dites de courants et de rayons. Le calcul du champ est alors fondamentalement différent, se basant sur un rayonnement des courants à la surface des objets éclairés ou sur un concept de rayons.

### II.1 Méthodes asymptotiques de courants

#### II.1.1 Principe

Nous ne prétendons pas ici décrire l'intégralité des méthodes asymptotiques de courants ; il s'agit d'appréhender les problèmes de leurs applications à notre étude. Nous laissons aux lecteurs souhaitant plus de précision, la liberté de se référer à des ouvrages spécialisés, par exemple [46, 32, 43].

Considérons une surface fermée  $S$  séparant deux milieux  $\{1\}$  et  $\{2\}$  éclairée par une onde incidente  $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$ . Les conditions de continuités des champs et des inductions produisent les champs  $\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}$  et  $\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{H}^{(2)}$  de part et d'autre de la surface (cf. figure 1.1).

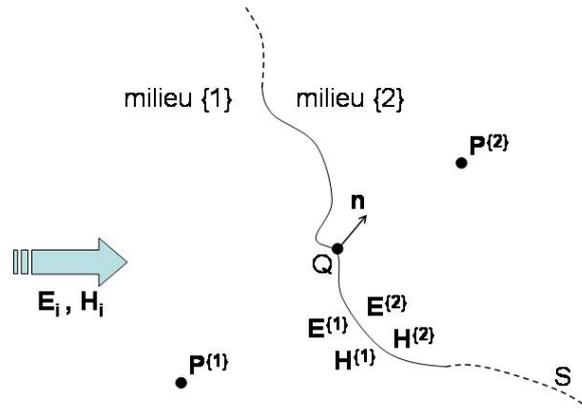


Figure 1.1 – Contexte de calcul des méthodes asymptotiques de courants.

Le théorème d'équivalence permet d'obtenir les courants surfaciques équivalents, tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_e^{(1)} &= \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{(1)} & \text{et} & & \mathbf{J}_e^{(2)} &= \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{(2)} \\ \mathbf{J}_m^{(1)} &= -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(1)} & & & \mathbf{J}_m^{(2)} &= -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(2)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Le champ électromagnétique aux points  $P^{(1|2)}$  respectivement dans le milieu {1} ou {2} est ensuite obtenu par le calcul des intégrales de rayonnement sur l'ensemble des points  $Q$  de la surface  $S$ . Selon la convention temporelle  $e^{-j\omega t}$ , ces intégrales s'expriment de la manière suivante :

$$\mathbf{E}(P^{(1|2)}) = -\frac{j\omega\mu^{(1|2)}}{4\pi} \int_S \mathbf{J}_e(Q) \Psi dS - \frac{j}{4\pi\epsilon^{(1|2)}\omega} \int_S (\mathbf{J}_e(Q) \cdot \nabla) \nabla \Psi dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{J}_m(Q) \times \nabla \Psi dS \quad (1.2)$$

$$\mathbf{H}(P^{(1|2)}) = -\frac{j\omega\epsilon^{(1|2)}}{4\pi} \int_S \mathbf{J}_m(Q) \Psi dS - \frac{j}{4\pi\mu^{(1|2)}\omega} \int_S (\mathbf{J}_m(Q) \cdot \nabla) \nabla \Psi dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{J}_e(Q) \times \nabla \Psi dS \quad (1.3)$$

avec :  $\omega$  la pulsation de l'onde propagée,  
 $\mu^{(1|2)}$  la perméabilité du milieu considéré,  
 $\epsilon^{(1|2)}$  la permittivité du milieu considéré,  
 $\Psi$  la fonction d'onde :  $\Psi = e^{jk^{(1|2)}r}/r$ ,  
 $k^{(1|2)}$  le nombre d'onde du milieu considéré,  
 $r = [QP]$  la distance entre les points  $Q$  et  $P$ ,

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \text{ l'opérateur nabla,}$$

On peut d'ores et déjà remarquer que l'obtention du champ en chaque point  $P$  nécessite le calcul d'intégrales doubles sur toute la surface  $S$ . Cela peut-être pénalisant en terme de

temps de calcul. Toutefois, si les courants  $J_e$  et  $J_m$  sont « exacts », le champ rayonné en  $P$  l'est aussi. Théoriquement, cela exige l'emploi d'une méthode rigoureuse du type Méthode des Moments [24]. Cependant comme nous l'avons vu, cela reste inenvisageable pour notre étude.

Généralement, pour des domaines de grande taille, l'obtention des courants  $J_e$  et  $J_m$  se fait par le biais de l'approximation de l'Optique Physique. En chaque point, la surface est localement remplacée par son plan tangent et on applique alors la méthode de l'Optique Géométrique. D'après les relations existantes dans cette théorie entre le champ incident et le champ réfléchi, on obtient les expressions des courants suivantes :

$$\begin{aligned} J_e^{[1]} &= \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r) & \text{et} & & J_e^{[2]} &= \mathbf{n} \times \mathbf{H}_t \\ J_m^{[1]} &= -\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) & & & J_m^{[2]} &= -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_t \end{aligned} \quad (1.4)$$

avec :  $\mathbf{E}_i$  et  $\mathbf{H}_i$  les champs incidents électrique et magnétique au point  $Q$ ,  
 $\mathbf{E}_r$  et  $\mathbf{H}_r$  les champs réfléchis électrique et magnétique au point  $Q$ ,  
 $\mathbf{E}_t$  et  $\mathbf{H}_t$  les champs transmis électrique et magnétique au point  $Q$ .

Dans le cas d'une surface métallique, les conditions de continuité sur la surface mènent à des relations simples entre les champs incidents et réfléchis. Le champ transmis est alors nul et les expressions des courants surfaciques se réduisent alors à :

$$\begin{aligned} J_e &= 2(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_i) \\ J_m &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Dans le cas d'une surface diélectrique,  $\mathbf{E}_r$ ,  $\mathbf{H}_r$ ,  $\mathbf{E}_t$  et  $\mathbf{H}_t$  ne sont pas obtenus directement. On peut les calculer par exemple en décomposant le champ incident en une superposition d'ondes planes de directions différentes (méthode du spectre angulaire d'ondes planes [18]) et en associant à chacune d'elles le coefficient de réflexion ou de transmission de Fresnel correspondant.

Généralement, cette méthode donne de bons résultats pour des objets de grandes tailles présentant des rayons de courbure grands devant la longueur d'onde et ne possédant pas d'arêtes.

### II.1.2 Application au problème 3D de grande taille

Dans cette partie, les hypothèses de l'Optique Physique sont appliquées au problème de propagation 3D de grande taille pour étudier la pertinence de l'utilisation de cette méthode dans ce contexte. Ainsi, le sol et le relief constituent la surface  $S$  où l'on souhaite calculer les courants  $J_e$  et  $J_m$ , le champ incident étant celui rayonné par l'antenne seule.

Le principal problème lié à l'Optique Physique est de calculer le rayonnement du champ électromagnétique à partir du champ incident. Or dans la plupart de nos applications, la surface du sol est éclairée sous incidence rasante et le champ incident est donc modifié par la propagation. Pour être rigoureux, il faut considérer dans le champ incident le rayonnement de l'objet sur lui-même. Ainsi comme on peut le voir sur la figure 1.2, dans certaines zones le champ incident n'est pas celui provenant de l'antenne seule. On doit lui ajouter les champs issus de diffractions 1 ou de réflexions 2 antérieures.

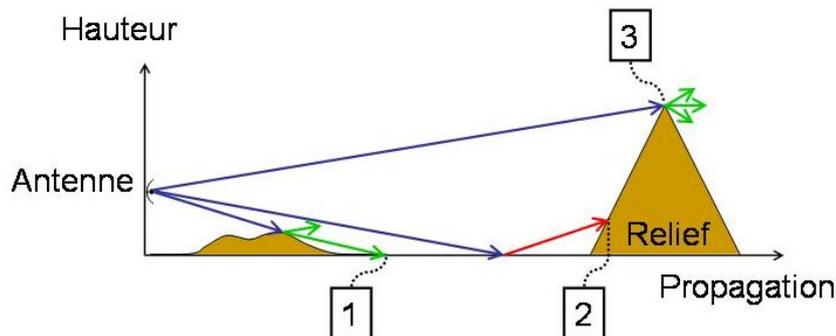


Figure 1.2 – Application de l'Optique Physique à la propagation en environnement 3D.

Dans la figure précédente, le code de couleur suivant est adopté :

- représente le champ incident
- représente le champ diffracté
- représente le champ réfléchi

On peut remarquer un autre problème lié à la présence d'arêtes. En effet, les courants de l'Optique Physique sont calculés en supposant que la surface est localement plane et sont donc faux sur l'arête et au voisinage de celle-ci. Ainsi, si l'on prend l'exemple de l'arête [3], la diffraction est mal modélisée et il faut introduire une méthode de courants traitant la diffraction. Parmi les méthodes existantes, on trouve la Théorie Physique de la Diffraction. Elle permet par l'ajout d'un courant linéique sur l'arête de corriger l'erreur issue de l'approximation de l'Optique Physique. Le lecteur désirant plus de précision peut se référer aux ouvrages spécialisés (par exemple [43]).

Tout le problème de l'application de ce type de modélisation dans notre contexte est donc le calcul du champ incident rasant en chaque point de l'objet.

## II.2 Méthodes asymptotiques de rayons

Comme pour les méthodes asymptotiques de courants, seuls les principes généraux des méthodes de rayons sont ici exposés. Pour plus de précision le lecteur pourra se référer à des ouvrages spécialisés [28, 27].

### II.2.1 Optique Géométrique

#### II.2.1.a Principe

En se basant sur le principe de Fermat, il a été établi qu'en espace libre, l'onde se propage selon des rayons rectilignes. Le champ électrique ou magnétique en tout point d'un rayon  $\mathcal{C}(Q)$  peut-être connu dès que l'on connaît le champ en un point de ce rayon  $\mathcal{C}(E)$  [51] :

$$\mathcal{C}(Q) = e^{jk_0r} \sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1+r)(\rho_2+r)}} \mathcal{C}(E) \quad (1.6)$$

## 14 Chapitre 1. Méthodes de résolution du problème de propagation 3D grande distance

avec :  $C$  le champ électrique ou le champ magnétique,  
 $r = [EQ]$  la distance entre les points  $E$  et  $Q$  sur le rayon considéré,  
 $\rho_1$  et  $\rho_2$  les rayons de courbure du front d'onde au point  $E$ .

Pour considérer une réflexion, on introduit la relation entre le champ incident  $C_i$  et le champ réfléchi  $C_r$  au point de réflexion  $Q$  :

$$C_r(Q) = [R] C_i(Q) \quad (1.7)$$

avec :  $[R]$  la matrice de réflexion.

Chacun des deux champs, incident et réfléchi, est exprimé dans la base qui lui convient, respectivement  $\mathcal{B}_i$  et  $\mathcal{B}_r$  [32, 46]. Quant à la matrice de réflexion, elle s'écrit selon la polarisation et le type de champ (électrique ou magnétique) [42] :

$$[R]^{\text{élec.}} = \begin{bmatrix} R_{\parallel} & 0 \\ 0 & R_{\perp} \end{bmatrix} \quad [R]^{\text{mag.}} = \begin{bmatrix} R_{\perp} & 0 \\ 0 & R_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

avec :  $R_{\parallel}$  et  $R_{\perp}$  les coefficients de réflexion de Fresnel.

Dans le cas d'une surface parfaitement métallique, les conditions de continuité sur la surface mènent à :

$$R_{\parallel} = 1 \quad \text{et} \quad R_{\perp} = -1 \quad (1.9)$$

On peut donc écrire l'expression matricielle du champ réfléchi  $C_r$  en un point  $R$  en fonction du champ incident  $C_i$  au point  $Q$  de la surface :

$$C_r(R) = e^{jk_0 r'} \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + r')(\rho_2 + r')}} \begin{bmatrix} R_{\parallel, \perp} & 0 \\ 0 & R_{\perp, \parallel} \end{bmatrix} C_i(Q) \quad (1.10)$$

avec :  $r' = [QR]$  la distance entre les points  $Q$  et  $R$  sur le rayon considéré,  
 $\rho_1$  et  $\rho_2$  les rayons de courbure du front d'onde au point  $Q$ .

Le champ incident au point  $Q$  étant lui même défini à partir du champ au point  $E$  (1.6), on peut déterminer le champ issu de la réflexion au point  $Q$  (cf. figure 1.3). La direction du rayon réfléchi est alors obtenue par les lois de Snell-Descartes.

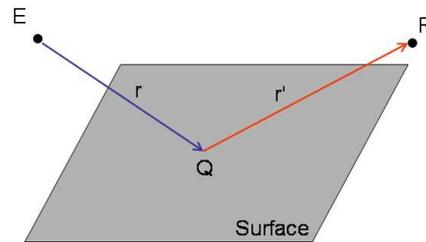


Figure 1.3 – Réflexion modélisée par Optique Géométrique.

On peut remarquer que lors de la réflexion d'une onde incidente ( $\rightarrow$ ) sur un plan, l'onde réfléchi ( $\leftarrow$ ) semble provenir d'un point virtuel symétrique de l'émetteur par rapport au plan de réflexion. Un tel point est appelé « source image » et peut-être modélisé comme illustré sur la figure 1.4. La modélisation de la propagation au-dessus d'un sol plan peut alors se faire par l'introduction d'une source image en lieu et place du sol.

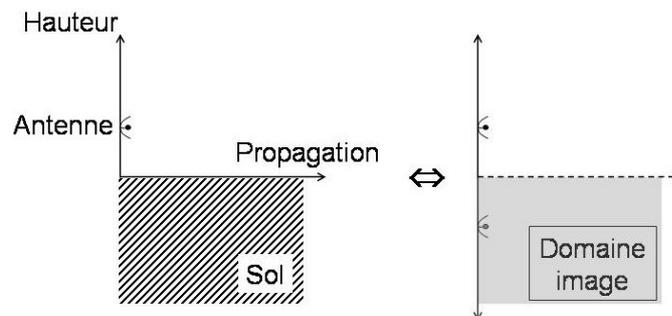


Figure 1.4 – Équivalence entre la configuration réelle et l'ajout d'un domaine image.

Le calcul du champ total issu de la réflexion sur un plan peut alors être assimilé au rayonnement de deux sources : la source réelle et la source image. La pondération de cette dernière par le coefficient de réflexion adapté permet de modéliser la propagation aussi bien en polarisation horizontale que verticale et ce pour des sols pouvant être métalliques ou diélectriques.

Lorsque le champ issu de la source réelle peut être décrit sous forme de rayons et que cette source interagit avec un sol plan, cette technique peut être considérée comme rigoureuse. Pour ce type de configurations nous la prendrons comme méthode de référence.

Notons que le modèle de la source image est encore valide dans les limites de l'approximation de Gauss pour traiter l'interaction d'un champ avec un objet présentant des rayons de courbures. Toutefois dans notre problématique 3D son utilisation ne s'avère pas pertinente.

### II.2.1.b Application au problème 3D grande distance

Dans la théorie de l'Optique Géométrique, le Principe de localité stipule que le champ réfléchi ne dépend que du champ au voisinage du point de réflexion. Telle qu'elle a été développée, l'Optique Géométrique permet de manière générale de prendre en compte les rayons de courbure locaux d'une surface. Il convient alors que l'obstacle soit décrit par des surfaces paramétrées (NURBS, courbes de Bézier, etc...). Dans la pratique on préfère souvent utiliser l'approximation du plan tangent local à l'obstacle ce qui revient à facétiser finement l'objet et donc à multiplier grandement le nombre de rayons et d'interactions entre facettes. Ainsi le relief représenté sur la figure 1.5a est modélisé comme indiqué sur la figure 1.5b.

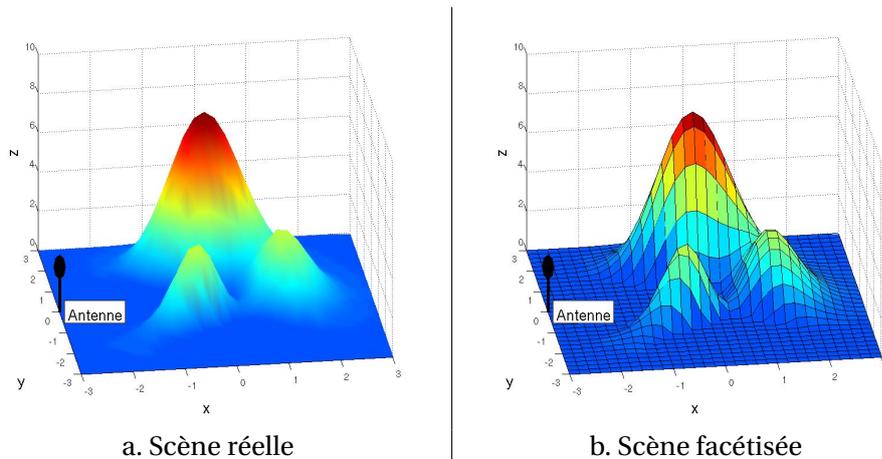


Figure 1.5 – Application de l'Optique Géométrique à la propagation en environnement 3D.

Le traitement de l'interaction d'une onde avec une facette en utilisant uniquement l'Optique Géométrique est incomplet. Succinctement, nous pouvons illustrer ce propos en traitant le cas d'une onde plane éclairant une plaque comme présenté sur la figure 1.6.

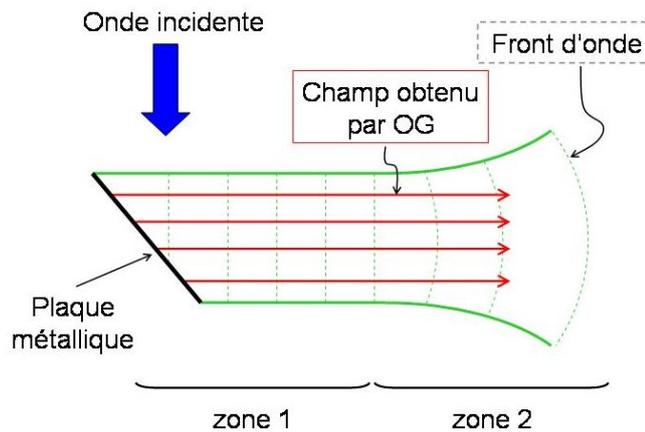


Figure 1.6 – Réflexion d'une onde plane sur une plaque de dimensions finies.

Le champ réellement rayonné par la plaque dont l'enveloppe est représentée en vert sur la figure 1.6 peut se décrire en deux zones principales :

- La zone 1, délimitée par la plaque et la distance  $D^2/2\lambda$  où  $D$  est la dimension de la plaque transversale à la propagation. Dans cette zone l'onde se propage de façon tubulaire dans la direction du spéculaire et a un front d'onde perpendiculaire à celui-ci.
- La zone 2 comprenant l'onde au-delà de la zone 1. Dans cette zone, l'onde diffracte progressivement et présente une divergence. Le front d'onde devient sphérique dont le centre se situe sur la plaque.

Le champ réfléchi obtenu par l'Optique Géométrique ne fait aucune distinction entre ces zones. Ainsi, en zone lointaine le champ obtenu ne présente aucune divergence et devient donc erroné. En zone proche, les rayons réfléchis suivent bien l'allure tubulaire du champ réel et même si localement ils n'ont pas exactement une structure d'onde plane, ils peuvent être considérés satisfaisants. Notons toutefois que dans la zone très proche située entre 0 et  $D^2/8\lambda$ , où est présente de l'énergie réactive, le champ comporte une composante longitudinale et  $E$  et  $H$  sont déphasés [33].

Pour traiter correctement ce cas, l'Optique Géométrique doit être complétée par une méthode de rayons traitant la diffraction : la Théorie Uniforme de la Diffraction.

### II.2.2 Théorie Uniforme de la Diffraction

Plusieurs méthodes de rayons sont à même de traiter la diffraction d'un rayon par une arête pour compléter la méthode de l'Optique Géométrique. On en dénombre principalement deux : la Théorie Géométrique de la Diffraction et la Théorie Uniforme de la Diffraction. Cette dernière vient compléter la Théorie Géométrique de la Diffraction afin de supprimer les non-uniformités de celle-ci. Nous avons décidé de n'explicitier ici que la Théorie Uniforme de la Diffraction.

Il a été établi qu'en haute fréquence, la diffraction reste un phénomène local. Elle ne dépend donc que des caractéristiques de la surface de l'obstacle et de l'onde incidente au voisinage du point de diffraction. De plus, les rayons diffractés doivent toujours satisfaire le principe de Fermat et donc se propager de manière rectiligne. Keller a alors pu établir que l'ensemble des rayons diffractés forment un cône dont l'axe est l'arête et le sommet le point de diffraction  $Q$  (cf. figure 1.7). Le champ diffracté en un point  $R$ ,  $C_d(R)$ , satisfait alors à l'équation (1.11).

$$C_d(R) = a [D] C_i(Q) e^{jk_0 r} \quad (1.11)$$

avec :  $a$  le facteur d'atténuation spatiale,  
 $[D]$  la matrice de diffraction,  
 $C_i(Q)$  le champ incident, électrique ou magnétique, au point  $Q$ ,  
 $r = [QR]$  la distance entre les points  $Q$  et  $R$ .

L'expression de la matrice de diffraction  $[D]$  n'est pas primordiale à la compréhension de notre exposé. Les lecteurs désirant connaître sa composition peuvent se référer à des ouvrages spécialisés, par exemple [32, 46].

On peut observer sur la figure 1.7 que pour un seul rayon incident correspond une « infinité » de rayons diffractés sur le cône de Keller. En chaque arête, un rayon incident donne donc naissance à un très grand nombre de rayons diffractés. Ces rayons diffractés peuvent très bien être les rayons incidents d'une autre arête. On comprend donc que le phénomène de diffraction engendre une explosion du nombre de rayons, grandement préjudiciable au temps de calcul.

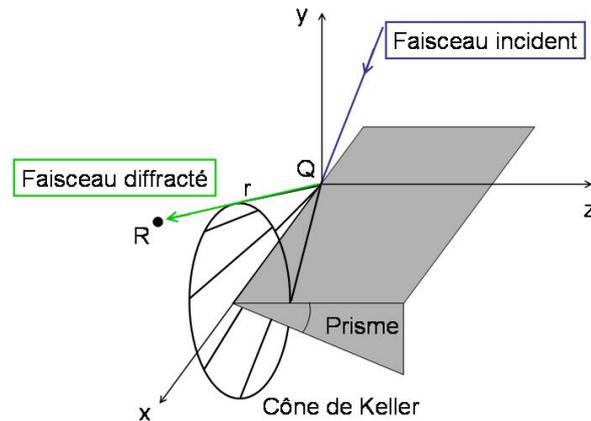


Figure 1.7 – Diffraction par une arête, représentation du cône de Keller.

### II.3 Hybridation des deux méthodes : logiciel FERMAT

Dans cette partie nous allons voir comment les méthodes asymptotiques qui viennent d'être détaillées sont couplées avec une technique de Lancer de rayons. Ce couplage est réalisé au sein du logiciel FERMAT développé à l'ONERA en partenariat avec OKTAL SE<sup>i</sup> et l'Université Paul Sabatier<sup>ii</sup>. Le logiciel est capable de considérer de multiples applications électromagnétiques : la simulation de Surface Équivalente Radar, l'étude du rayonnement d'antenne, la compatibilité électromagnétique et la modélisation de la propagation [8].

L'intérêt de FERMAT est d'hybrider de façon pertinente les méthodes asymptotiques de courants et de rayons. Pour illustrer ces propos, nous considérons le cas de deux plaques métalliques illuminés par une onde plane (cf. figure 1.8).

<sup>i</sup><http://www.oktal-se.fr/>

<sup>ii</sup><http://www.ups-tlse.fr/>

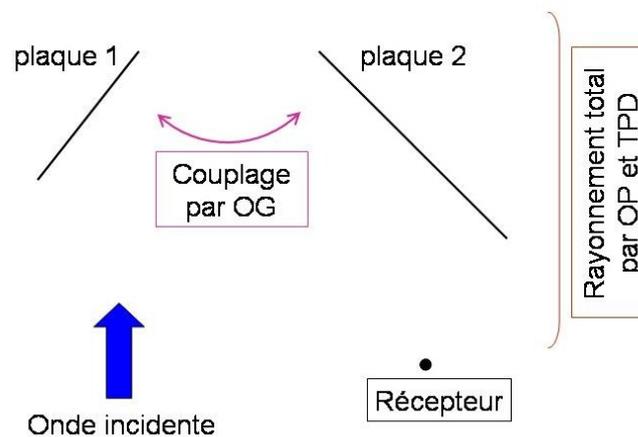


Figure 1.8 – Couplage entre deux plaques lors d’un calcul FERMAT.

Le champ total rayonné se compose du champ provenant de chaque plaque seule auquel vient s’ajouter le champ résultant du couplage entre les deux plaques.

Pour traiter ce problème FERMAT va calculer le champ réfléchi par la plaque 1 sur la plaque 2 et vice-versa par l’Optique Géométrique seule. Ensuite, le champ total est obtenu en faisant rayonner les courants de l’Optique Physique et de la Théorie Physique de la Diffraction issus du champ incident (onde plane) et du couplage entre les plaques (OG). Cela permet de traiter la diffraction sans faire « exploser » le nombre de rayons et de traiter le couplage entre les plaques de façon efficace.

#### II.4 Lancer de rayons en milieu inhomogène

FERMAT ne fonctionne qu’en atmosphère homogène et ne prend donc pas en compte les effets de réfraction de l’onde. Cependant, ceux-ci peuvent être introduits dans une technique de Lancer de rayons [38] considérant les variations de l’indice de réfraction. Nous allons dans ce qui suit introduire brièvement ce concept.

Tout d’abord présentons la définition de l’indice de réfraction modifié  $m$  dont l’utilisation est plus fréquente dans ce cas que l’indice  $n$ . La prise en compte de l’indice de réfraction modifié  $m$  permet de considérer la sphéricité de la Terre, et par conséquent de se ramener à un calcul de propagation au-dessus d’une Terre plate. Cet indice modifié est défini comme suit, [9] :

$$m(x, y, z) = n(x, y, z) + \frac{z}{R_0} \quad (1.12)$$

avec :  $R_0$  le rayon de la Terre soit approximativement 6378 km.

Ensuite, on fait l’hypothèse de considérer que l’atmosphère est composée d’une superposition de couches horizontales dans lesquelles l’indice de réfraction modifié présente une variation linéaire suivant la hauteur, ceci correspond à une atmosphère stratifiée. Entre les hauteurs  $z_A$  et  $z_B$  (cf. figure 1.9),  $m$  est donc soumis à l’équation suivante :

$$m(z) = m(z_A) + p(z - z_A) \quad (1.13)$$

avec :  $p$  la pente de la variation d'indice dans la strate considérée.

Après quelques calculs [17, 38] et en considérant une incidente rasante de l'onde, on peut à partir de la loi de Snell-Descartes déduire la valeur de l'angle du rayon avec l'horizontale au point  $P$  :

$$\sin^2(\alpha) = \sin^2(\alpha_A) + 2[m(z) - m(z_A)] \quad (1.14)$$

Ainsi que l'abscisse et l'ordonnée correspondantes :

$$x = \frac{\sin(\alpha) - \sin(\alpha_A)}{p} + x_A \quad (1.15)$$

$$z = \frac{\sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha_A)}{2p} + z_A \quad (1.16)$$

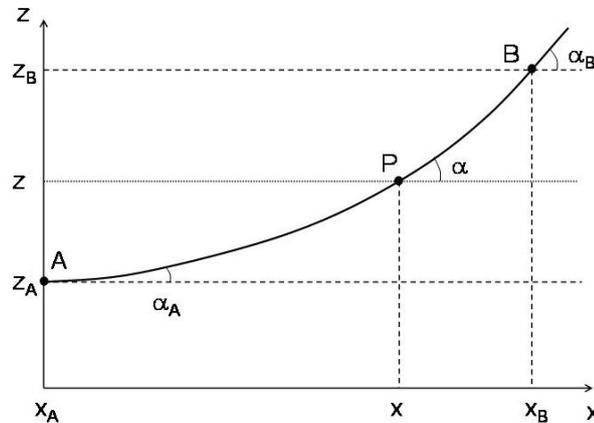


Figure 1.9 – Lancer d'un rayon dans le cas de l'atmosphère stratifiée.

Ainsi, suivant les variations de l'indice de réfraction modifié on peut positionner le point  $P$  défini par les coordonnées  $(x, z)$  et obtenir la courbure  $\alpha$  du rayon en ce point.

## II.5 Conclusion

L'application des méthodes dites de courants ou de rayons ne paraît pas adaptée à la problématique de propagation 3D grande distance si ces méthodes sont utilisées indépendamment les unes des autres. Cependant, leur couplage comme par exemple au sein du logiciel FERMAT s'avère être un choix performant. Néanmoins on peut attribuer à ce code quelques limitations dans le contexte de notre étude. En effet, initialement FERMAT a été conçu pour calculer le champ rétrodiffusé par une scène complexe éclairée par l'onde émise par un radar. Ainsi l'essentiel des calculs était mené dans une hypothèse monostatique. Dans ce cadre le logiciel présente des performances indéniables. Cependant son adaptation dans un contexte de propagation n'est à l'heure actuelle opérationnelle que pour un environnement métallique et ce sur des scènes canoniques. De plus, le rayonnement ne se faisant que par rayons

droits, l'indice de réfraction n'intervient à aucun moment et seul le cas d'une atmosphère homogène peut donc être considéré. Cette limitation peut-être contraignante dans certains cas de propagation. Il est toutefois possible d'introduire une courbure dans la trajectoire des rayons comme décrit dans la section précédente, mais une telle approche entraîne un calcul itératif de la trajectoire de chaque rayon ce qui serait lourd à considérer. Enfin, si la scène est tridimensionnelle et de très grande taille, le nombre d'interactions entre l'onde et les éléments de cette scène devient très important. Le nombre de rayons diffusés ou diffractés augmente alors considérablement, au détriment du temps de calcul. Ainsi, nous avons choisi de nous restreindre à des scènes relativement simple lors de l'utilisation de ce logiciel. Dès que les configurations des cas test étudiés seront en accord avec ces hypothèses, nous considérons les résultats de FERMAT comme notre référence.

### III Méthode de l'Équation Parabolique 3D

#### III.1 Introduction

Depuis de nombreuses années, la méthode de l'Équation Parabolique 2D est couramment utilisée pour modéliser la propagation des ondes électromagnétiques ou acoustiques. Des solutions algorithmiques offrant des temps de calcul quasi instantanés pour des scènes bidimensionnelle de centaines de kilomètres existent. Cette méthode a ainsi pu prouver son efficacité à modéliser la propagation en milieu inhomogène et au-dessus de relief, ce qui fait d'elle une méthode privilégiée par les opérationnels. Si l'Équation Parabolique 2D a été étudiée dans de nombreux travaux scientifiques, l'Équation Parabolique 3D reste très marginalement abordée dans la littérature.

Dans cette partie, nous allons tout d'abord détailler l'obtention de l'Équation Parabolique 3D, décrivant la théorie et soulignant les hypothèses réalisées. Puis, nous présenterons la condition aux limites que nous avons choisi de développer. Ainsi, les équations tridimensionnelles permettant de traiter le problème seront posées, restera ensuite à les résoudre et c'est ce qui sera proposé dans les chapitres suivants.

#### III.2 Théorie et hypothèses

##### III.2.1 Obtention de l'Équation Parabolique 3D

L'équation de propagation des ondes vectorielle, également connue sous le nom d'équation d'Helmholtz, se présente sous la forme suivante dans un milieu sans charge ni courant :

$$\nabla^2 C + k_0^2 n^2 C = 0 \quad (1.17)$$

avec :  $\nabla^2$  le Laplacien tridimensionnel,  
 $C$  le vecteur champ électrique  $E$  ou magnétique  $H$ ,  
 $n$  l'indice de réfraction.

Après développement du Laplacien, il est possible de factoriser cette équation en deux termes : le premier correspondant à la propagation vers l'avant ( $x$  croissant) et le second correspondant à la rétropropagation.

$$\left(\partial_x - j\sqrt{\partial_y^2 + \partial_z^2 + k_0^2 n^2}\right)\left(\partial_x + j\sqrt{\partial_y^2 + \partial_z^2 + k_0^2 n^2}\right)\mathbf{C} = 0 \quad (1.18)$$

avec :  $\partial_x, \partial_y$  et  $\partial_z$  les notations simplifiées respectives de  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$  et  $\frac{\partial}{\partial z}$ .

La direction de propagation principale étant l'axe  $x$  (cf. figure 1.10), l'Équation Parabolique est établie en privilégiant la propagation en avant et en négligeant la rétropropagation. Selon la convention temporelle  $e^{-j\omega t}$ , cette hypothèse se résume à considérer uniquement :

$$\left(\partial_x - j\sqrt{\partial_y^2 + \partial_z^2 + k_0^2 n^2}\right)\mathbf{C} = 0 \quad (1.19)$$

L'indice de réfraction présent dans l'Équation Parabolique permet de caractériser l'influence de l'atmosphère sur la propagation. Il est le paramètre fondamental permettant de décrire les propriétés du milieu atmosphérique, les effets de réfraction étant directement liés aux variations de l'indice de réfraction. Dans la suite, nous le substituerons dans les équations par l'indice modifié  $m$  qui permettra de considérer la propagation au-dessus d'une Terre plate.

### III.2.2 Approximation engendrant la limite paraxiale

L'Équation Parabolique (1.19) obtenue ne peut être résolue en atmosphère inhomogène sans simplifier la racine carrée. Afin d'être en mesure d'approximer celle-ci, la mise en facteur du nombre d'onde dans le vide  $k_0$  est nécessaire. L'Équation Parabolique se met alors sous la forme suivante :

$$\left(\partial_x - jk_0\sqrt{1+T}\right)\mathbf{C} = 0 \quad (1.20)$$

avec :  $T = \frac{1}{k_0^2}(\partial_y^2 + \partial_z^2) + m^2 - 1$ .

Les approximations proposées sont toutes basées sur l'hypothèse que l'opérateur  $T$  reste petit devant un et par conséquent que l'on s'écarte peu de la direction de propagation privilégiée  $x$ . Cette hypothèse restreint la validité de la méthode à un cône dont le sommet est l'antenne (ou une source secondaire), d'axe de révolution la direction de propagation principale et caractérisé par son demi-angle au sommet (cf. figure 1.10).

– Les premières approximations proposées sont basées sur un développement de type Padé de l'opérateur  $\sqrt{1+T}$  :

$$\sqrt{1+T} = 1 + \sum_{i=1}^{\mathcal{O}} \frac{a_{i,\mathcal{O}} T}{1 + b_{i,\mathcal{O}} T} \quad (1.21)$$

Les coefficients  $a_{i,\mathcal{O}}$  et  $b_{i,\mathcal{O}}$  peuvent être obtenus en égalant le développement limité à l'ordre  $\mathcal{O}$  du membre de gauche à la fraction rationnelle du membre de droite.

1. Au premier ordre (formulation dite de Tappert), ce développement se simplifie sous la forme suivante :

$$\sqrt{1+T} \approx 1 + \frac{1}{2} T \quad (1.22)$$

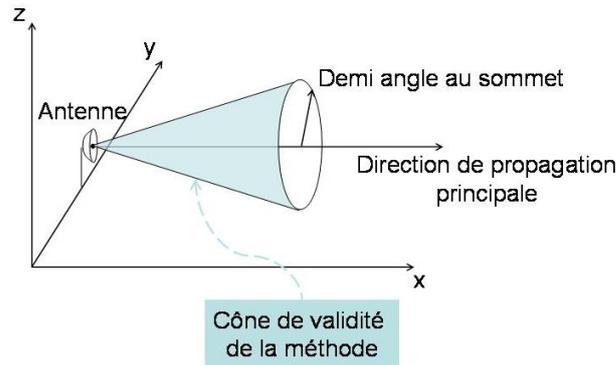


Figure 1.10 – Représentation du cône de paraxialité.

Cette première approximation permet d'obtenir un cône de validité de l'ordre de 15° de demi-angle au sommet [38, 29].

2. Si on envisage un développement à l'ordre 2 de la racine carrée (formulation dite de Clearbout), l'approximation de Padé devient :

$$\sqrt{1+T} \simeq \frac{1 + \frac{3}{4}T}{1 + \frac{1}{4}T} \quad (1.23)$$

Cette approximation permet d'augmenter le demi-angle au sommet du cône de validité à une valeur théorique de 45° [38].

- Feit and Fleck [19] ont eux proposé le développement suivant :

$$\sqrt{T_{yz} + T_m + 1} \simeq \sqrt{T_{yz} + 1} + \sqrt{T_m + 1} - 1 \quad (1.24)$$

avec :  $T_{yz} = \frac{1}{k_0^2} (\partial_y^2 + \partial_z^2)$ ,  
 $T_m = m^2 - 1$ .

Cette approximation permet d'obtenir un cône de validité théorique de demi-angle au sommet égal à 20° [52].

Notons que les valeurs d'ouverture théoriques annoncées peuvent varier d'un auteur à l'autre [29].

### III.3 Variables de résolution

Rappelons que l'objectif est de modéliser la propagation dans un domaine tridimensionnel, cela nécessite de connaître les six composantes du champ électromagnétique. Le but de cette partie est de voir comment il est possible de réduire le nombre d'inconnues nécessaires en espace libre.

Dans un premier temps, à l'image des travaux de R. Janaswamy [25], cette étude est réalisée sur les potentiels vecteurs. Puis une résolution sur le champ électromagnétique est proposée.

### III.3.1 Potentiels vecteurs

C'est Ramakrishna Janaswamy qui a suggéré de résoudre l'Équation Parabolique sur les potentiels vecteurs [25]. Ce choix est motivé par le fait que grâce aux équations de Maxwell, le champ électromagnétique peut être entièrement connu à partir des deux potentiels vecteurs électrique et magnétique :  $\mathbf{A}^e$  et  $\mathbf{A}^m$ , soit :

$$\mathbf{E} = j\omega\mathbf{A}^e + \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div}\mathbf{A}^e - \frac{1}{\epsilon_0} \overrightarrow{\text{rot}}\mathbf{A}^m \quad (1.25)$$

$$\mathbf{H} = j\omega\mathbf{A}^m + \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div}\mathbf{A}^m + \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}}\mathbf{A}^e \quad (1.26)$$

Cependant, rappelons que le but est ici de réduire le nombre d'inconnues afin de simplifier le calcul. Or les potentiels vecteurs présentent chacun trois composantes tout comme le champ électromagnétique. L'hypothèse qui est faite par Janaswamy est de considérer que les potentiels vecteurs sont orientés uniquement suivant  $z$  :

$$\mathbf{A}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z^e = A^e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z^m = A^m \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Si l'on introduit cette hypothèse dans les équations (1.25) et (1.26), on obtient les équations suivantes :

$$\mathbf{E} = j\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A^e \end{pmatrix} + \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \begin{pmatrix} \partial_{xz}^2 A^e \\ \partial_{yz}^2 A^e \\ \partial_z^2 A^e \end{pmatrix} - \frac{1}{\epsilon_0} \begin{pmatrix} \partial_y A^m \\ -\partial_x A^m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{H} = j\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A^m \end{pmatrix} + \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \begin{pmatrix} \partial_{xz}^2 A^m \\ \partial_{yz}^2 A^m \\ \partial_z^2 A^m \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \partial_y A^e \\ -\partial_x A^e \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Cette hypothèse permet de réduire à deux le nombre d'inconnues,  $A_z^e$  et  $A_z^m$ , mais autorise néanmoins à traiter les deux cas de polarisation principale. En effet, on peut remarquer que si seul le potentiel vecteur électrique est non nul, le champ est principalement électrique et dirigé suivant  $z$ . Ce choix permet donc de représenter une onde polarisée verticalement. À l'inverse, si seul le potentiel vecteur magnétique est non nul, le champ est principalement magnétique et dirigé suivant  $z$ . Ce choix permet donc de représenter une onde polarisée horizontalement.

Les relations de passage champs / potentiels vecteurs sont obtenues en introduisant les potentiels vecteurs définis par les relations (1.27) dans les équations (1.25) et (1.26) :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_{xz}^2 A^e - \frac{1}{\epsilon_0} \partial_y A^m & H_x &= \frac{1}{\mu_0} \partial_y A^e + \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_{xz}^2 A^m \\ E_y &= \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_{yz}^2 A^e + \frac{1}{\epsilon_0} \partial_x A^m & H_y &= -\frac{1}{\mu_0} \partial_x A^e + \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_{yz}^2 A^m \\ E_z &= \left( j\omega + \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_z^2 \right) A^e & H_z &= \left( j\omega + \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_z^2 \right) A^m \end{aligned} \quad (1.30)$$

On a donc réduit à deux le nombre d'inconnues en considérant les potentiels vecteurs orientés suivant la verticale. Il est ainsi possible de connaître tout le champ électromagnétique à partir de la seule connaissance des deux potentiels vecteurs.

### III.3.2 Champ électromagnétique

Nous allons voir qu'en espace libre, la connaissance de deux composantes du champ électromagnétique suffit à connaître l'intégralité de celui-ci.

Supposons que les composantes transverses  $E_y$  et  $E_z$  du champ électromagnétique soient connues dans un plan  $P$  perpendiculaire à l'axe de propagation  $x$  positionné en  $x_0$ . L'objectif est d'obtenir les quatre autres composantes du champ électromagnétique, à savoir :  $E_x$ ,  $H_x$ ,  $H_y$  et  $H_z$ .

Tout d'abord, on réalise une décomposition en spectre angulaire d'ondes planes [18] de  $E_y$  et  $E_z$ . On obtient alors le spectre de ces deux composantes dans l'espace dual :

$$\tilde{E}_y(x_0, k_y, k_z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E_y(x_0, y, z) e^{-j(k_y y + k_z z)} dy dz \quad (1.31)$$

$$\tilde{E}_z(x_0, k_y, k_z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E_z(x_0, y, z) e^{-j(k_y y + k_z z)} dy dz \quad (1.32)$$

avec :  $k_y$  le nombre d'onde suivant la direction  $y$ ,  
 $k_z$  le nombre d'onde suivant la direction  $z$ .

Ainsi la distribution du champ au plan  $P$  peut être décrite comme une superposition d'ondes planes de direction  $\mathbf{k}$  telle que :

$$\mathbf{k} = \begin{vmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{vmatrix} \quad (1.33)$$

$k_x$  étant défini différemment suivant le signe du vecteur d'onde  $k_0$ , ainsi :

$$k_x = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - k_y^2 - k_z^2} & \text{pour } k_0^2 \geq k_y^2 + k_z^2, \text{ ce qui correspond aux ondes propagatives,} \\ j\sqrt{k_y^2 + k_z^2 - k_0^2} & \text{pour } k_0^2 \leq k_y^2 + k_z^2, \text{ correspondant aux ondes évanescentes.} \end{cases} \quad (1.34)$$

Chaque onde plane se propage suivant la direction  $\mathbf{k}$  et s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{E}^{OP} = \begin{vmatrix} E_x^{OP} \\ E_y^{OP} = \tilde{E}_y(k_y, k_z) e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ E_z^{OP} = \tilde{E}_z(k_y, k_z) e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} \end{vmatrix} \quad (1.35)$$

La composante suivant  $x$  de l'onde plane considérée,  $E_x^{OP}$ , peut être trouvée grâce à la relation de divergence du champ :

$$\operatorname{div} \mathbf{E}^{OP} = 0 \iff \partial_x E_x^{OP} + \partial_y E_y^{OP} + \partial_z E_z^{OP} = 0 \quad (1.36)$$

En dérivant les expressions des composantes  $E_y^{OP}$  et  $E_z^{OP}$  issues de (1.35) dans l'équation (1.36), on obtient :

$$\partial_x E_x^{OP} = -jk_y E_y^{OP} - jk_z E_z^{OP} \quad (1.37)$$

La relation devant satisfaire  $E_x^{OP}$  est obtenue en intégrant l'équation précédente par rapport à  $x$  :

$$E_x^{OP} = -\frac{k_y E_y^{OP} + k_z E_z^{OP}}{k_x} \quad (1.38)$$

$$= -\frac{k_y \tilde{E}_y + k_z \tilde{E}_z}{k_x} e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (1.39)$$

Le champ magnétique peut à présent être connu à partir du champ électrique grâce à l'équation de Maxwell-Faraday écrite en régime harmonique dans un milieu sans charge ni courant :

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{E}^{OP} = j\omega\mu_0 \mathbf{H}^{OP} \iff \mathbf{H}^{OP} = -\frac{j}{\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} E_x^{OP} \\ E_y^{OP} \\ E_z^{OP} \end{vmatrix} \quad (1.40)$$

En développant l'opérateur rotationnel, on obtient les relations suivantes pour chacune des composantes du champ magnétique :

$$\mathbf{H}^{OP} = \begin{vmatrix} H_x^{OP} \\ H_y^{OP} \\ H_z^{OP} \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega\mu_0} \begin{vmatrix} k_z E_y^{OP} - k_y E_z^{OP} \\ k_x E_z^{OP} - k_z E_x^{OP} \\ k_y E_x^{OP} - k_x E_y^{OP} \end{vmatrix} \quad (1.41)$$

Le champ est ensuite recomposé comme étant la somme de toutes les ondes planes :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \begin{vmatrix} -\left(k_y \tilde{E}_y + k_z \tilde{E}_z\right) / k_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{vmatrix} \cdot e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_y dk_z \quad (1.42)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi^2 \omega\mu_0} \iint_{-\infty}^{+\infty} \begin{vmatrix} k_z \tilde{E}_y - k_y \tilde{E}_z \\ k_x \tilde{E}_z + \frac{k_z}{k_x} \left(k_y \tilde{E}_y + k_z \tilde{E}_z\right) \\ -\frac{k_y}{k_x} \left(k_y \tilde{E}_y + k_z \tilde{E}_z\right) - k_x \tilde{E}_y \end{vmatrix} \cdot e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_y dk_z \quad (1.43)$$

On peut conclure en affirmant qu'en espace libre la connaissance de deux composantes du champ électromagnétique à l'abscisse  $x_0$  suffisent pour calculer l'intégralité de celui-ci quel que soit  $x \geq x_0$ .

À l'image des travaux effectués en deux dimensions [18], nous choisirons de résoudre l'Équation Parabolique sur le champ dont les composantes principales sont parallèles au sol, soit : le champ électrique en polarisation horizontale et le champ magnétique en polarisation verticale. Ceci se justifie par le fait qu'au-dessus d'un sol parfaitement plan, le champ électrique

ne présente que deux composantes non nulles,  $E_x$  et  $E_y$ , en polarisation horizontale, tandis que le champ magnétique en présente trois; et inversement en polarisation verticale. Cette subtilité permet alors de diminuer le nombre d'inconnues dans le cas d'une propagation au-dessus d'un sol plan. Bien sûr au-dessus d'un relief 3D une résolution sur les trois composantes est nécessaire, mais nous verrons que dans le cadre de l'approximation paraxiale nous pouvons ramener le calcul de la propagation du champ comme étant la superposition des polarisations principales citées ci-dessus.

Nous venons de voir qu'il est équivalent, en terme de nombre d'inconnues, de modéliser la propagation en espace libre soit sur les potentiels vecteurs soit sur les deux composantes du champ électromagnétique. Nous verrons par la suite que l'application de l'une ou l'autre de ces variables présente des avantages et des inconvénients en présence de relief.

### III.4 Condition aux limites

L'Équation Parabolique 3D a été établie à partir de l'équation d'Helmholtz. Pour la résoudre numériquement dans un volume fini, il est nécessaire de définir et d'appliquer des conditions aux limites de ce volume. On distingue les conditions aux limites supérieures et latérales du domaine de la condition limite au sol.

#### III.4.1 Conditions aux limites supérieures et latérales du domaine

En pratique, on souhaite modéliser le champ électromagnétique dans un certain domaine de dimensions finies, que l'on nomme domaine utile. Dans la réalité ce domaine n'admet qu'une limite au niveau du sol. Pour des raisons évidentes d'optimisation de la taille du volume de calcul, il convient de borner artificiellement le domaine utile aux limites supérieures et latérales. Pour éviter les effets de bord que peuvent entraîner ces limites artificielles, il faut considérer la condition de rayonnement à l'infini de Sommerfeld [38] :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\partial_r C + j k_0 C) = 0 \quad (1.44)$$

avec :  $r$  la distance entre l'antenne émettrice et le point considéré à l'infini,  
 $C$  la variable de résolution considérée.

La solution approchée, visant à simuler la décroissance naturelle du champ dans l'atmosphère, consiste en une apodisation du champ. Ce traitement permet de diminuer progressivement l'amplitude du signal jusqu'à 0, par exemple au moyen d'une fonction de Hamming. On considère donc un domaine de calcul plus grand que le domaine utile afin de permettre l'apodisation du champ. En pratique, un agrandissement d'un facteur 1.5, aussi bien en hauteur qu'en largeur, est suffisant [18].

Si l'on se réfère à l'exemple illustré sur la figure 1.11. Le domaine utile est représenté par un rectangle blanc. La zone dans laquelle le champ est apodisé est représentée en turquoise.

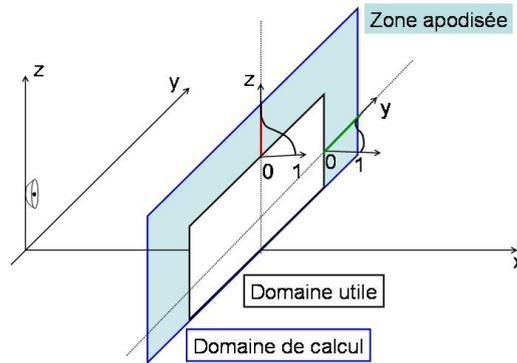


Figure 1.11 – Application d’une apodisation au domaine de calcul 3D.

Concrètement, apodiser le champ revient à appliquer une fonction d’atténuation telle que celle illustrée sur la figure 1.12 à la répartition du champ électromagnétique. Le domaine utile correspond à la zone où l’atténuation est nulle, cette dernière tendant progressivement vers l’atténuation totale (ici de valeur 1) aux limites du domaine de calcul.

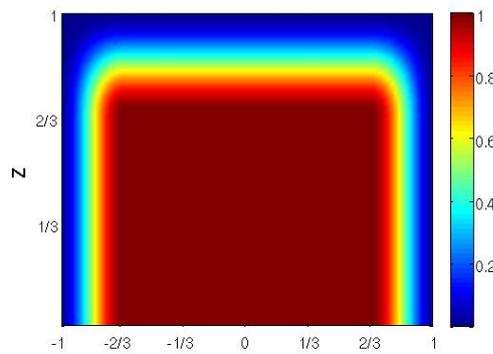


Figure 1.12 – Atténuation d’apodisation 3D.

Cette fenêtre d’apodisation est réalisée par l’intermédiaire de fonction de Hanning. sur la figure 1.13 on représente alors une verticale et une horizontale de cette fonction d’atténuation.

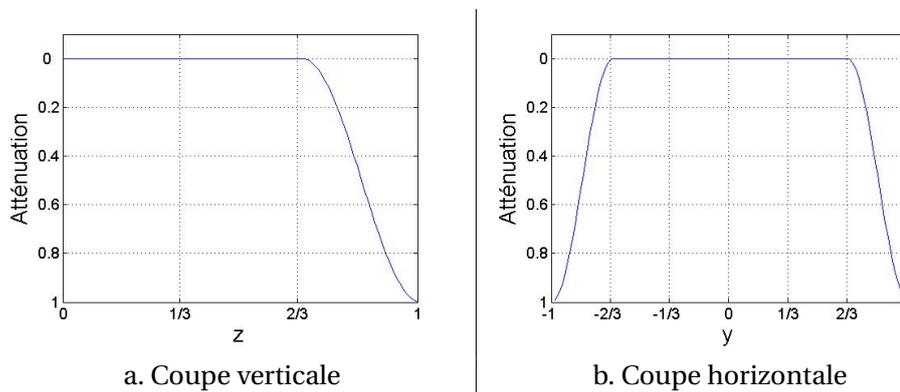


Figure 1.13 – Représentation en coupe de la fonction d'atténuation.

Cette solution présente l'avantage d'être simple et efficace, mais a pour inconvénient un agrandissement du domaine et donc un allongement du temps de calcul. Ainsi, classiquement on agrandit et on alargit le domaine d'un facteur 1/3. Notons toutefois que dans de nombreux cas (où la taille du domaine en distance est faible) le champ est atténué naturellement aux limites supérieures et latérales par le diagramme de rayonnement de l'antenne.

#### III.4.2 Condition à la surface du relief

À la limite inférieure du domaine, une condition aux limites en impédance surfacique est appliquée : la condition aux limites de Léontovich [37]. En 3D, celle-ci s'écrit :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = Z \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \quad (1.45)$$

avec :  $\mathbf{n}$  la normale unitaire extérieure à l'obstacle,  
 $\mathbf{E}$  le vecteur champ électrique,  
 $\mathbf{H}$  le vecteur champ magnétique,  
 $Z$  l'impédance de surface de l'obstacle considéré.

Cette impédance surfacique est souvent exprimée dans l'hypothèse d'un milieu dense par la relation suivante[10] :

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon + i\sigma/\omega}} \quad (1.46)$$

où  $\mu$ ,  $\varepsilon$  et  $\sigma$  sont respectivement la perméabilité, la permittivité et la conductivité de l'obstacle.

La propriété de cette condition aux limites en impédance est de ramener l'interaction globale du champ avec l'obstacle au niveau de sa limite. On peut ainsi faire abstraction de tout ce qui a lieu sous la surface de l'obstacle.

Celle-ci se développe de la manière suivante :

$$\begin{vmatrix} n_y E_z - n_z E_y \\ n_z E_x - n_x E_z \\ n_x E_y - n_y E_x \end{vmatrix} = Z \begin{vmatrix} n_y (n_x H_y - n_y H_x) - n_z (n_z H_x - n_x H_z) \\ n_z (n_y H_z - n_z H_y) - n_x (n_x H_y - n_y H_x) \\ n_x (n_z H_x - n_x H_z) - n_y (n_y H_z - n_z H_y) \end{vmatrix} \quad (1.47)$$

avec :  $n_x, n_y$  et  $n_z$  les projections de la normale  $\mathbf{n}$  dans l'espace cartésien,  
 $E_x, E_y$  et  $E_z$  les projections du champ électrique  $\mathbf{E}$ ,  
 $H_x, H_y$  et  $H_z$  les projections du champ magnétique  $\mathbf{H}$ .

La condition aux limites peut-être développée sur une seule grandeur du champ électromagnétique. Les équations de Maxwell (1.48) et (1.49) sont alors utilisées pour se ramener à l'une ou l'autre des grandeurs, électrique ou magnétique.

$$\vec{\text{rot}}\mathbf{E} = j\omega\mu_0\mathbf{H} \quad (1.48)$$

$$\vec{\text{rot}}\mathbf{H} = -j\omega\epsilon_0\mathbf{E} \quad (1.49)$$

On aboutit à deux expressions de la condition aux limites suivant la variable choisie.

– Sur le champ électrique  $\mathbf{E}$ , la condition aux limites se développe de la manière suivante :

$$\begin{vmatrix} n_y E_z - n_z E_y \\ n_z E_x - n_x E_z \\ n_x E_y - n_y E_x \end{vmatrix} = \frac{Z}{j\omega\mu_0} \begin{vmatrix} n_y [n_x (\partial_z E_x - \partial_x E_z) - n_y (\partial_y E_z - \partial_z E_y)] \\ n_z [n_y (\partial_x E_y - \partial_y E_x) - n_z (\partial_z E_x - \partial_x E_z)] \\ n_x [n_z (\partial_y E_z - \partial_z E_y) - n_x (\partial_x E_y - \partial_y E_x)] \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} n_z [n_z (\partial_y E_z - \partial_z E_y) - n_x (\partial_x E_y - \partial_y E_x)] \\ n_x [n_x (\partial_z E_x - \partial_x E_z) - n_y (\partial_y E_z - \partial_z E_y)] \\ n_y [n_y (\partial_x E_y - \partial_y E_x) - n_z (\partial_z E_x - \partial_x E_z)] \end{vmatrix} \quad (1.50)$$

– Sur le champ magnétique  $\mathbf{H}$ , on obtient le système suivant :

$$\begin{vmatrix} n_y [\partial_x H_y - \partial_y H_x] - n_z [\partial_z H_x - \partial_x H_z] \\ n_z [\partial_y H_z - \partial_z H_y] - n_x [\partial_x H_y - \partial_y H_x] \\ n_x [\partial_z H_x - \partial_x H_z] - n_y [\partial_y H_z - \partial_z H_y] \end{vmatrix} = -Zj\omega\epsilon_0 \begin{vmatrix} n_y [n_x H_y - n_y H_x] - n_z [n_z H_x - n_x H_z] \\ n_z [n_y H_z - n_z H_y] - n_x [n_x H_y - n_y H_x] \\ n_x [n_z H_x - n_x H_z] - n_y [n_y H_z - n_z H_y] \end{vmatrix} \quad (1.51)$$

Nous verrons dans les chapitres suivants comment ces conditions aux limites sont introduites dans chacun des algorithmes de propagation.

### III.5 Conclusion

Nous venons de détailler l'obtention de l'Équation Parabolique en trois dimensions. On a ainsi pu constater que celle-ci est dépendante de l'indice de réfraction et peut par conséquent prendre en compte les phénomènes de réfraction. De plus, on impose une condition aux limites en impédance à la limite inférieure du domaine, ce qui présente l'avantage de pouvoir considérer des sols d'impédance surfacique quelconque.

Pour toutes ces raisons, une méthode de résolution de l'Équation Parabolique 3D semble adaptée à la modélisation de la propagation en atmosphère inhomogène au-dessus de surfaces 3D.

Cependant, l'Équation Parabolique 3D présente quelques limitations. En effet, elle est obtenue en ne considérant qu'un sens de propagation. La rétropropagation ou rétrodiffusion n'est donc pas modélisée. De plus, la condition aux limites de Léontovich ramène l'interaction globale d'un obstacle au niveau de son interface, les phénomènes de transmission internes à un obstacle ne peuvent donc pas être pris en compte. Enfin, l'Équation Parabolique n'est valide que dans un certain cône de validité et il apparaît que plus ce cône est grand, plus l'algorithme de résolution s'avère complexe et lourd à mettre en oeuvre.

## IV Conclusion générale

Nous venons de détailler quelques unes des méthodes envisageables pour répondre à notre problématique de modélisation de la propagation au-dessus de scènes tridimensionnelles de grandes tailles. Compte tenu de la dimension des scènes envisagées, notre choix s'est porté sur les méthodes asymptotiques et plus précisément sur les méthodes de courants et de rayons ainsi que sur la méthode de l'Équation Parabolique 3D.

Les méthodes asymptotiques de courants et de rayons s'avèrent performantes pour la modélisation de la propagation grâce au couplage de celles-ci avec une technique de Lancer de rayons. Cependant leur utilisation doit se restreindre à des scènes relativement simples pour qu'il n'y ait pas un trop grand nombre de rayons et donc un volume et un temps de calcul trop élevés. De plus, la prise en compte des effets de réfraction s'avère possible (rayons courbés par l'atmosphère) mais difficile à réaliser sans alourdir l'algorithme.

Quant à la méthode de l'Équation Parabolique 3D, elle présente des avantages certains. En effet, elle permet intrinsèquement de tenir compte de la réfraction de l'onde. De plus, l'application d'une condition aux limites tridimensionnelle permet de considérer des obstacles de forme et d'impédance surfacique quelconques. Malgré le faible nombre de publications sur un développement 3D de cette méthode, nous avons choisi de travailler sur différentes approches permettant de résoudre l'Équation Parabolique tridimensionnelle.



## Chapitre 2

# Résolution de l'Équation Parabolique 3D par la méthode Split-Step Fourier

### I Introduction

La méthode la plus efficace de résolution de l'Équation Parabolique en deux dimensions est basée sur une résolution de type Split-Step Fourier (SSF). Celle-ci tire son nom du fait que la propagation est modélisée par un processus itératif, grâce à un passage dans le domaine spectral et par l'utilisation de transformée de Fourier. Cette résolution a été développée par R.H Harding et F.D. Tappert [23] pour la première fois en 1973. Elle utilise une transformée de Fourier complète, c'est à dire dont l'intégrande est une fonction de type exponentielle complexe. Cependant, pour être en mesure de propager implicitement une condition limite sur une surface métallique avec l'algorithme SSF, des transformées de Fourier en cosinus et en sinus sont appliquées. Cette technique a été perfectionnée [14, 31] pour permettre de considérer un sol d'impédance quelconque en tenant compte de la condition aux limites de Léontovich dans la résolution SSF, cette méthode est connue sous le nom de DMFT : *Discrete Mixed Fourier Transform*. Malheureusement, l'utilisation de techniques dépendantes de transformées de Fourier en cosinus et en sinus n'est pas applicable en trois dimensions. En effet, le principe physique sous-jacent à la DMFT est le principe de la source image (cf. section II.2.1.a du chapitre 1) qui ne peut pas être appliqué pour un relief de géométrie transverse variable. Un développement est mené en annexe A pour montrer cette limitation.

Dans ce chapitre, il est fait état de la résolution de l'Équation Parabolique en trois dimensions par la méthode de Split-Step Fourier. Celle-ci a été développée pour la première fois par Ramakrishna Janawamy en 2003 [25]. L'algorithme de propagation et les précautions à prendre pour que la résolution soit correcte sont présentés. Ensuite, l'introduction d'un relief est considérée par la prise en compte de la condition aux limites de Léontovich. Enfin ce chapitre est conclu par plusieurs cas tests de validation.

## II Théorie

### II.1 Schéma de propagation

La résolution de l'Équation Parabolique par la méthode de Split-Step Fourier est basée sur une décomposition en un spectre angulaire d'ondes planes de la variable  $C$  que l'on souhaite propager. La distribution de cette variable sur un plan  $\langle yz \rangle$  situé à l'abscisse  $x$  peut être considérée comme étant la somme d'une infinité d'ondes planes se propageant dans des directions différentes. Mathématiquement, cela revient à lui appliquer une transformée de Fourier, le retour à la distribution spatiale se faisant par l'application d'une transformée de Fourier inverse. Ces transformées sont définies de la manière suivante :

$$TF[C(x, y, z)] = \tilde{C}(x, k_y, k_z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} C(x, y, z) e^{-j(k_y y + k_z z)} dy dz \quad (2.1)$$

$$TF^{-1}[\tilde{C}(x, k_y, k_z)] = C(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{C}(x, k_y, k_z) e^{j(k_y y + k_z z)} dk_y dk_z \quad (2.2)$$

avec :  $C$  une composante du champ électromagnétique ou l'un des potentiels vecteurs,  
 $\tilde{C}$  sa transformée de Fourier,  
 $k_y$  et  $k_z$  les projections du vecteur d'onde selon les axes respectifs  $y$  et  $z$ .

On rappelle que ces transformées vont être appliquées afin de résoudre l'Équation Parabolique ci-dessous :

$$\left( \partial_x - j k_0 \sqrt{1 + T} \right) C = 0 \quad (2.3)$$

avec :  $T = \frac{1}{k_0^2} (\partial_y^2 + \partial_z^2) + m^2 - 1$ .

#### II.1.1 Résolution par Split-Step Fourier

L'Équation Parabolique (2.3) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\partial_x C = \mathcal{A} C \quad (2.4)$$

avec :  $\mathcal{A} = j k_0 \sqrt{1 + T}$ .

Dans le cas où l'on considère une atmosphère inhomogène, il est nécessaire de simplifier la racine carrée présente dans l'opérateur  $\mathcal{A}$  pour être en mesure de résoudre cette équation. Suivant l'approximation réalisée, celui-ci s'exprime de la manière suivante :

$$\mathcal{A} = \begin{cases} \frac{j k_0}{2} (m^2 + 1) + \frac{j}{2 k_0} (\partial_y^2 + \partial_z^2) & \text{pour une approche « petit angle » (1.22)} \\ j k_0 (m - 1) + j \sqrt{k_0^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2} & \text{pour une approche « grand angle » (1.24)} \end{cases} \quad (2.5)$$

La solution de l'équation différentielle (2.4) du premier ordre en  $x$  est de la forme suivante :

$$C(x + \Delta x, y, z) = e^{\mathcal{A} \Delta x} C(x, y, z) \quad (2.6)$$

avec :  $\Delta x$  le pas de progression horizontal.

La décomposition de la distribution de  $C$  en une infinité d'ondes planes, conduit au fait que chaque onde plane doit satisfaire à l'équation suivante :

$$\tilde{C}(x + \Delta x, k_y, k_z) = e^{\tilde{\mathcal{A}}\Delta x} \tilde{C}(x, k_y, k_z) \quad (2.7)$$

L'intérêt du passage dans le domaine de Fourier réside dans le fait que dans ce domaine les dérivées partielles sont substituées par de simples multiplications. Ainsi l'opérateur  $\tilde{\mathcal{A}}$ , dual de  $\mathcal{A}$  dans l'espace de Fourier, s'exprime en fonction de l'approximation choisie de la manière suivante :

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{cases} \frac{jk_0}{2}(m^2 + 1) - \frac{j}{2k_0}(k_y^2 + k_z^2) & \text{pour une approche petit angle} \\ jk_0(m - 1) + jk_x & \text{pour une approche grand angle} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\text{avec : } k_x = \sqrt{k_0^2 - k_y^2 - k_z^2}.$$

Le retour à la distribution spatiale de  $C$  se fait grâce à la recombinaison du spectre angulaire d'ondes planes, ce qui revient mathématiquement à faire une transformée de Fourier inverse :

$$C(x + \Delta x, y, z) = \text{TF}^{-1} \left[ e^{\tilde{\mathcal{A}}\Delta x} \text{TF} [C(x, y, z)] \right] \quad (2.9)$$

La transformée inverse (2.2) correspondant à une intégration selon les nombres d'onde  $k_y$  et  $k_z$ , il est possible de décomposer l'opérateur  $\tilde{\mathcal{A}}$  en deux termes :

- un terme dépendant des nombres d'onde  $k_y$  et  $k_z$ , que nous nommerons  $\tilde{\mathcal{D}}$ ,
- et un terme indépendant de ces nombres d'onde, appelé  $\mathcal{B}$ .

Selon l'approche angulaire choisie, ces termes s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \frac{jk_0}{2}(m^2 + 1) & \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{D}} = \frac{-j}{2k_0}(k_y^2 + k_z^2) & \quad \text{pour une approche petit angle} \\ \mathcal{B} = jk_0(m - 1) & \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{D}} = jk_x & \quad \text{pour une approche grand angle} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Le plus simple développement du terme  $e^{\tilde{\mathcal{A}}\Delta x}$  présent dans l'équation (2.9) est le suivant :

$$e^{\tilde{\mathcal{A}}\Delta x} = e^{\mathcal{B}\Delta x} e^{\tilde{\mathcal{D}}\Delta x} \quad (2.11)$$

Étant donné que le terme  $\mathcal{B}$  varie très faiblement avec la hauteur, on le suppose constant et il peut dans ce cas être appliqué après la transformée de Fourier inverse [38]. Ceci conduit à :

$$C(x + \Delta x, y, z) = e^{\mathcal{B}\Delta x} \text{TF}^{-1} \left[ e^{\tilde{\mathcal{D}}\Delta x} \text{TF} [C(x, y, z)] \right] \quad (2.12)$$

Dans la mesure où l'indépendance de  $m$  par rapport à  $x$  n'est pas rigoureusement vérifiée, l'erreur engendrée par l'application de l'exponentielle  $e^{\mathcal{B}\Delta x}$  hors de la transformée de Fourier inverse est du second ordre en  $x$ . Il est possible de ramener cette erreur à une erreur du troisième ordre en considérant le développement suivant [38] :

$$e^{\tilde{\mathcal{A}}\Delta x} = e^{\mathcal{B}\Delta x/2} e^{\tilde{\mathcal{D}}\Delta x} e^{\mathcal{B}\Delta x/2} \quad (2.13)$$

## 36 Chapitre 2. Résolution de l'Équation Parabolique 3D par la méthode Split-Step Fourier

La distribution spatiale de  $C$  à l'abscisse  $x + \Delta x$  est alors obtenue par la résolution de l'équation suivante :

$$C(x + \Delta x, y, z) = e^{\frac{\partial}{\partial x} \Delta x} \text{TF}^{-1} \left[ e^{\tilde{\mathcal{D}} \Delta x} \text{TF} \left[ e^{\frac{\partial}{\partial x} \Delta x} C(x, y, z) \right] \right] \quad (2.14)$$

Grâce aux équations (2.12) et (2.14), nous sommes en mesure de propager en atmosphère inhomogène la variable  $C$  d'un pas de progression horizontal  $\Delta x$ .

### II.1.2 Choix des échantillonnages

Pour la résolution de l'Équation Parabolique par la méthode SSF nous utilisons des transformées de Fourier rapide (ou FFT pour *Fast Fourier Transform*), ce qui engendre des contraintes quant au choix de l'échantillonnage du champ. En effet, il existe une relation entre les nombres de points d'échantillonnage du champ dans le domaine spatial,  $N_y$  et  $N_z$ , et les limites du domaine spectral,  $k_y^{max}$  et  $k_z^{max}$ .

Considérons un champ défini dans le domaine spatial de la manière suivante (cf. figure 2.1) :

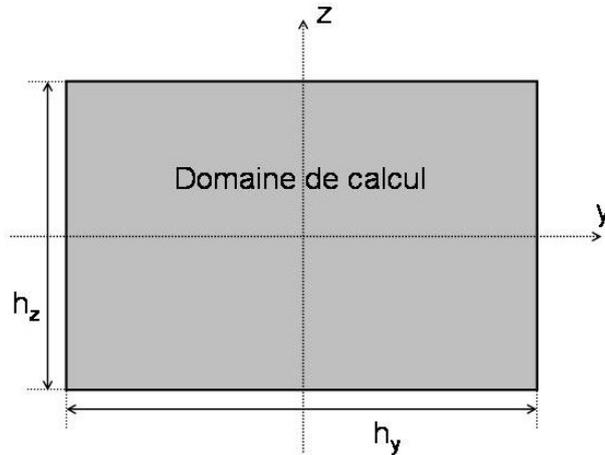


Figure 2.1 – Définition du domaine de calcul spatial.

Lorsque l'on utilise une transformée de Fourier rapide, le balayage spectral est fixé par les caractéristiques spatiales d'échantillonnage du champ par les relations suivantes [4] :

$$\begin{aligned} k_{0y} &\in \left[ -k_y^{max}, k_y^{max} \right] && \text{avec } k_y^{max} = \pi N_y / h_y && \text{suivant } y \\ k_{0z} &\in \left[ -k_z^{max}, k_z^{max} \right] && \text{avec } k_z^{max} = \pi N_z / h_z && \text{suivant } z \end{aligned} \quad (2.15)$$

Cependant, les limites du domaine spectral  $k_y^{max}$  et  $k_z^{max}$  ne sont pas libres et sont fixées dans notre étude par l'approximation paraxiale que l'on peut représenter dans le domaine spectral comme suit :

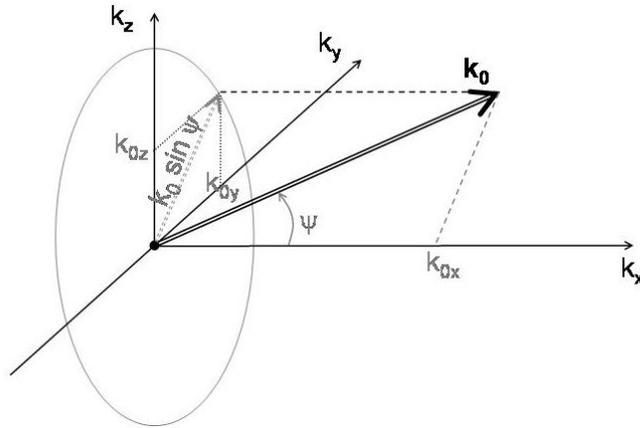


Figure 2.2 – Projection du vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0$  dans la base  $\{k_x, k_y, k_z\}$ .

Le cône de paraxialité est alors défini par l'angle  $\psi^{max}$  valant théoriquement  $15^\circ$  pour l'approximation petit angle et  $45^\circ$  pour l'approximation grand angle (cf. section III.2.2 du chapitre 1).

Ainsi, les limites spectrales sont déterminées par l'équation (2.16) :

$$(k_y^{max})^2 + (k_z^{max})^2 = \mathbf{k}_0^2 \sin^2 \psi^{max} \quad (2.16)$$

Afin d'aboutir à un domaine spectral de taille optimale, respectant toujours ce critère, on prendra les relations suivantes :

$$k_y^{max} = k_z^{max} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{k}_0 \sin \psi^{max} \quad (2.17)$$

En introduisant les précédentes valeurs de  $k_y^{max}$  et  $k_z^{max}$  dans les équations (2.15), il est possible d'obtenir les valeurs auxquelles doivent satisfaire  $N_y$  et  $N_z$  :

$$\begin{aligned} N_y &= \sqrt{2} h_y \mathbf{k}_0 \sin \psi^{max} / (2\pi) \\ N_z &= \sqrt{2} h_z \mathbf{k}_0 \sin \psi^{max} / (2\pi) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Les pas d'échantillonnages spectraux peuvent ensuite être obtenus à partir des dimensions de la fenêtre de la transformée de Fourier grâce aux équations (2.15) :

$$\Delta k_y = \frac{2\pi}{h_y} \quad \text{et} \quad \Delta k_z = \frac{2\pi}{h_z} \quad (2.19)$$

La nécessité de bien échantillonner le champ nous a amené à introduire des critères sur la taille du domaine de calcul spatial à adopter. Il faut toutefois garder à l'esprit que notre méthode est itérative, par conséquent le choix du pas de progression horizontal est également soumis à condition. En effet comme il est montré dans [18], le pas  $\Delta_x$  est borné afin de permettre une bonne description du champ lors de la propagation dans l'atmosphère. Néanmoins, cette limitation n'est plus adaptée lors de la prise en compte d'une condition aux

## 38 Chapitre 2. Résolution de l'Équation Parabolique 3D par la méthode Split-Step Fourier

limites et c'est pourquoi nous ne nous attardons pas sur ce critère.

Un exemple de l'influence de l'échantillonnage est ici étudiée lors de la propagation d'un champ électromagnétique en espace libre dans une configuration représentée par la figure 2.3.

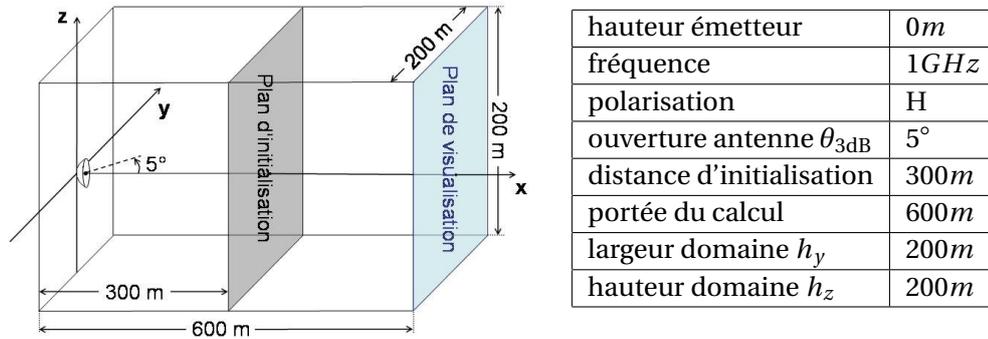


Figure 2.3 – Configuration de calcul en espace libre pour la visualisation des effets du choix de l'échantillonnage sur la propagation par la méthode SSF.

La configuration est composée par un émetteur positionné au centre du domaine de calcul et dont la direction de visée est parallèle à l'axe  $Ox$ . La polarisation est horizontale et orientée principalement suivant  $y$ . Le diagramme d'antenne est gaussien et son ouverture à  $-3dB$  est caractérisée par un demi-angle égal à  $5^\circ$ . Le domaine est quant à lui long de  $600m$ , large de  $200m$  et haut de  $200m$ , la propagation se faisant à partir de l'abscisse d'initialisation  $x = 300m$  avec un pas de progression horizontal  $\Delta x = 10m$ . On présente le module du champ électrique au niveau du plan transversal  $\langle yz \rangle$  positionné en  $x = 600m$  (plan de visualisation représenté en turquoise sur la figure 2.3).

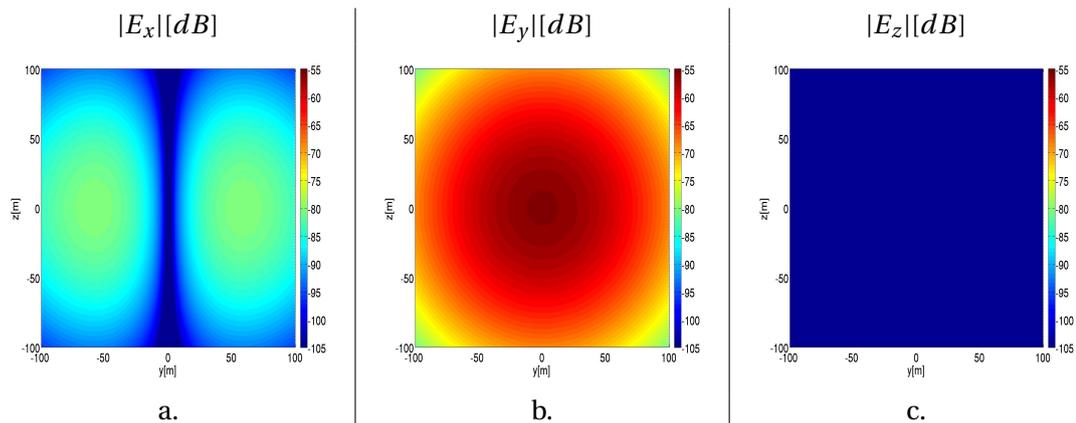


Figure 2.4 – Composantes du champ électrique modélisées par la méthode SSF en espace libre en prenant un échantillonnage suffisant.

Dans cette configuration, les critères obtenus (2.18) nous imposent dans le cas de l'approximation dite grand angle des nombres de points  $N_y$  et  $N_z$  égaux au minimum à 500. Ainsi, si l'on considère  $N_y = N_z = 600$ , on obtient les cartographies représentées sur la figure 2.4.

Elles correspondent aux trois composantes du champ électrique  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$ . Si l'on observe tout d'abord la composante principale  $E_y$  (cf. figure 2.4b.), on retrouve l'allure du diagramme d'antenne. Quant à la composante  $E_x$  (cf. figure 2.4a.), on observe les effets combinés de la projection du champ électrique dans la direction  $x$  et du diagramme d'antenne. Pour ce qui est de la composante  $E_z$  (cf. figure 2.4c.), elle reste nulle sur tout le domaine conformément à la polarisation d'émission choisie (cf. section III.3.2 du chapitre 1).

En revanche, si les échantillonnages sont choisis tels que les relations (2.18) ne sont pas satisfaites ( $N_y = N_z = 400$ ), on obtient comme résultats les cartographies présentées en figure 2.5.

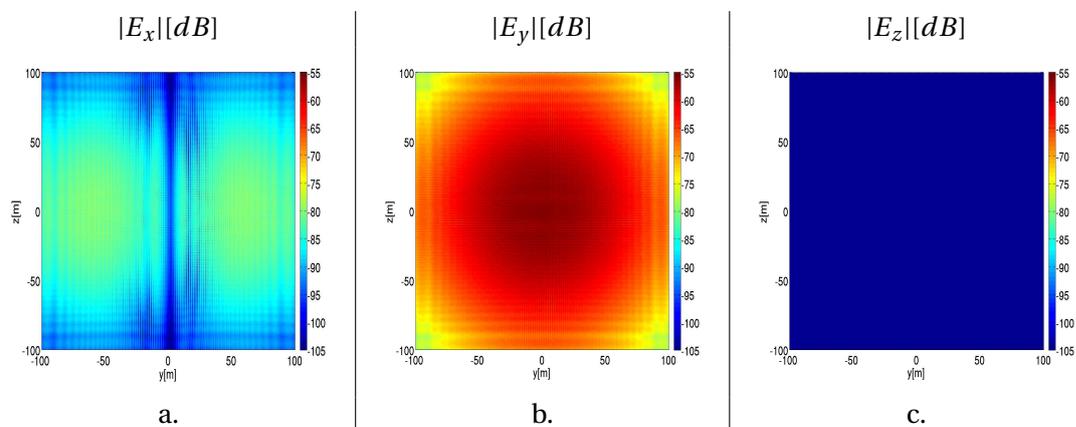


Figure 2.5 – Composantes du champ électrique modélisées par la méthode SSF en espace libre en prenant un échantillonnage insuffisant.

On constate alors que la propagation est mal modélisée. Sur cet exemple apparaît l'importance du choix de l'échantillonnage et de la satisfaction des équations (2.18). Nous nous efforcerons donc de satisfaire à ces relations pour toutes les simulations que nous effectuerons par la suite.

## II.2 Introduction d'un relief selon l'approche de R. Janaswamy

Comme décrit à la section III.4.2 du chapitre 1, il est nécessaire d'introduire une condition à la limite inférieure du domaine de propagation. En deux dimensions, on fait classiquement appel à une transformation conforme. Cette technique a été introduite selon le principe qu'il existe toujours une fonction permettant de ramener le domaine de calcul incluant un relief accidenté à un domaine plus simple. L'approche 2D la plus efficace est de décrire le relief par une série de segments de pentes différentes [15]. Dans le principe, la transformation conforme fait alors correspondre à la pente du relief dans le domaine spatial un décalage dans le domaine spectral. Ceci permet de ramener le problème à une propagation sur sol

plan. L'adaptabilité de cette technique au 3D paraît possible mais très complexe [50]. En effet, la transformée peut devenir très compliquée suivant le relief tridimensionnel considéré. Après avoir étudié ces approches pour une application au problème 3D, la résolution nous est apparue très difficile à mettre en oeuvre au-dessus d'une scène réaliste et nous sommes revenus à une solution plus classique.

Rappelons que la résolution de l'Équation Parabolique 3D ici proposée est une méthode itérative. Ainsi, on propage vers l'avant, pas à pas, la répartition initiale de champ connu jusqu'à l'abscisse finale du calcul. À chaque pas, lorsque le plan transverse de calcul intercepte un obstacle (cf. figure 2.6), le champ est annulé à l'intérieur de celui-ci et la condition aux limites est appliquée aux surfaces de l'obstacle [25].

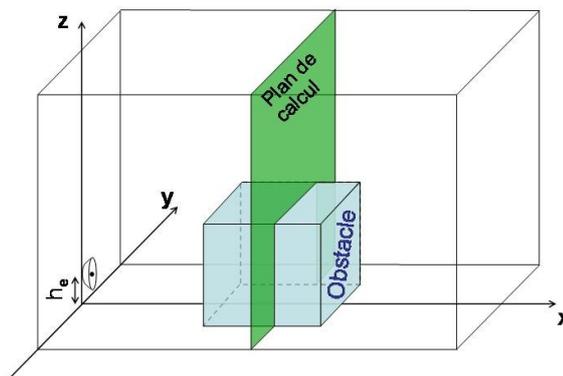


Figure 2.6 – Prise en compte de l'obstacle dans l'algorithme de propagation SSF.

L'introduction de la condition aux limites de Léontovich peut se faire de différentes manières. Nous allons considérer ici une introduction de la condition aux limites par une approche spectrale, celle-ci a été proposée par R. Janaswamy [25]. Le principe est d'exprimer dans la condition aux limites, le champ et ses dérivées par un passage dans le domaine spectral.

Cette approche a été développée pour modéliser la condition aux limites de Léontovich dans un environnement de type urbain. Ainsi, on distingue la formulation de la condition aux limites appliquée sur une surface plane horizontale (comme le sol ou le toit des immeubles), de celle appliquée sur des parois verticales (comme les murs des immeubles).

### II.2.1 Traitement de la condition aux limites suivant la polarisation

De manière générale, il est souvent utile de décomposer un champ en deux polarisations indépendantes afin de traiter chacune d'elle de façon optimale. C'est la démarche que nous adoptons. La polarisation horizontale sera traitée avec le champ électrique  $\mathbf{E}$  et la polarisation verticale avec le champ magnétique  $\mathbf{H}$ . Cependant si cette décomposition permet de décrire n'importe quel champ de manière complète en 2D, cela nécessite quelques justifications en 3D.

En effet, il est possible de décrire un champ quelconque connu en un plan  $\langle yz \rangle$  comme la superposition de deux ondes polarisées respectivement horizontalement (indice H) et verti-

calement (indice V). On peut ainsi écrire :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x^H \\ E_y^H \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_x^V \\ 0 \\ E_z^V \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Les composantes longitudinales  $E_x^H$  et  $E_x^V$  associées respectivement aux polarisations transverses de  $E_y^H$  et  $E_z^V$  s'obtiennent directement par la relation de divergence du champ. Ainsi la propagation du champ initial  $\mathbf{E}$  peut être traitée séparément uniquement par la connaissance des composantes transverses  $E_y$  et  $E_z$ .

Cependant dans le cadre de notre étude faisant intervenir des incidences rasantes et des reliefs à faible pente, la polarisation verticale portée par  $E_z$  est principalement normale à la surface. Afin de modéliser correctement l'interaction de cette composante avec l'obstacle, il est préférable de passer par le champ magnétique  $\mathbf{H}$  dual de  $\mathbf{E}^V$ . Toutefois en trois dimensions le champ magnétique dual de  $\mathbf{E}^V$ , obtenu par  $\text{rot}\mathbf{E}^V = j\omega\mu\mathbf{H}$ , a trois composantes. Cela complique le traitement de cette polarisation. Néanmoins, nous montrons en annexe B que le champ magnétique dual de  $\mathbf{E}^V$  peut se ramener dans le cadre de l'approximation paraxiale à un vecteur à deux composantes tel que :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

La composante principale est alors  $H_y$  et  $H_x$  la composante longitudinale s'obtient aisément par la relation de divergence.

### II.2.2 Application à un sol plan lisse horizontal

Si l'on considère un sol plan lisse horizontal, la normale ne présente qu'une composante suivant la verticale et la condition aux limites de Léontovich (1.47) se réduit à :

$$\frac{E_y}{H_x} = -\frac{E_x}{H_y} = Z \quad (2.22)$$

avec :  $Z$  l'impédance de surface du sol considéré.

Selon que l'on choisisse d'effectuer la résolution sur le champ électrique ou le champ magnétique, les égalités (2.22) se ramènent respectivement à :

$$\begin{cases} E_y = \frac{Z}{j\omega\mu_0} [\partial_y E_z - \partial_z E_y] \\ E_x = -\frac{Z}{j\omega\mu_0} [\partial_z E_x - \partial_x E_z] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} H_x = -\frac{1}{jZ\omega\epsilon_0} [\partial_z H_x - \partial_x H_z] \\ H_y = \frac{1}{jZ\omega\epsilon_0} [\partial_y H_z - \partial_z H_y] \end{cases} \quad (2.23)$$

avec :  $\omega$  la pulsation de l'onde,  
 $\mu_0$  la perméabilité du vide,  
 $\epsilon_0$  la permittivité du vide.

## 42 Chapitre 2. Résolution de l'Équation Parabolique 3D par la méthode Split-Step Fourier

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, nous avons choisi de traiter la polarisation horizontale par le champ électrique ( $E_z = 0$ ) et la polarisation verticale par le champ magnétique ( $H_z = 0$ ). Selon la polarisation, le système (2.23) se réduit alors à :

Polarisation horizontale	Polarisation verticale	(2.24)
$E_x = -\frac{Z}{j\omega\mu_0} \partial_z E_x$ $E_y = -\frac{Z}{j\omega\mu_0} \partial_z E_y$	$H_x = -\frac{1}{jZ\omega\epsilon_0} \partial_z H_x$ $H_y = -\frac{1}{jZ\omega\epsilon_0} \partial_z H_y$	

On constate alors que les équations aux limites sont totalement découplées entre elles. De plus, si l'on considère un sol métallique,  $Z = 0$ , on retrouve les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann, soit respectivement :

Polarisation horizontale	Polarisation verticale	(2.25)
$E_x = 0$ $E_y = 0$	$\partial_z H_x = 0$ $\partial_z H_y = 0$	

L'objectif du calcul de ces conditions aux limites est d'exprimer le champ au sol inconnu en fonction du champ connu au-dessus du sol, pour cela on utilise la définition d'une transformée de Fourier discrète inverse [41]. Pour exprimer plus simplement le principe du calcul, ce dernier est exprimé en 2D en première approche. Pour un sol plan infini, les expressions présentées ici sont donc valables. Si l'on introduit la variable  $\xi$  définissant la translation verticale entre la référence de notre base cartésienne et la hauteur  $H_b$  de l'obstacle considéré (cf. figure 2.7), telle que  $\xi = z - H_b$ , la transformée de Fourier discrète inverse s'exprime de la manière suivante :

$$C(\xi) = \frac{1}{N_z} \sum_{n_\xi=-N_z/2+1}^{N_z/2} \tilde{C}(k_\xi) e^{jk_\xi \xi} \quad (2.26)$$

avec :  $C$  la composante du champ considérée,  
 $\tilde{C}$  le spectre de  $C$ ,  
 $N_z$  le nombre de point sur la verticale,  
 $k_\xi = 2n_\xi \pi / (N_z \Delta z)$ .

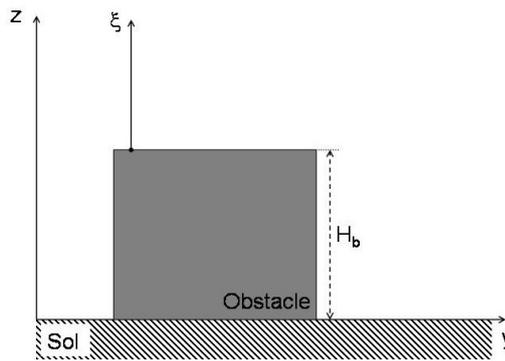


Figure 2.7 – Définition de la variable  $\xi$  introduite lors du calcul de la condition aux limites sous une approche spectrale.

Afin de faciliter la lecture, on adopte la notation suivante de l'opérateur somme  $\sum$  :

$$\sum_{n_\xi=-N/2+1}^{N/2} = \sum_{n_\xi} \quad (2.27)$$

Dans le système (2.24), on observe qu'il est nécessaire d'exprimer la dérivée partielle par rapport à la verticale de la composante du champ considérée. En dérivant l'équation (2.26) par rapport à  $\xi$ , on obtient :

$$\partial_\xi C = \frac{1}{N_z} \sum_{n_\xi} j k_\xi \tilde{C}(k_\xi) e^{j k_\xi \xi} \quad (2.28)$$

avec :  $C$  la composante sur laquelle est appliquée la dérivée partielle.

Rappelons que l'objectif est ici de trouver une relation entre le champ au sol inconnu,  $C(0)$ , et le champ au-dessus du sol connu. En se basant sur l'expression de la transformée de Fourier discrète directe, il est possible en sortant le champ inconnu au sol  $C(0)$  de la somme d'obtenir une relation entre celui-ci et le spectre du champ connu au-dessus du sol :

$$\tilde{C}(k_\xi) = \sum_q C(q\Delta z) e^{-j k_\xi q\Delta z} \quad \text{avec} \quad \xi = q\Delta z \quad (2.29)$$

$$= C(0) + \sum_{q, q \neq 0} C(q\Delta z) e^{-j k_\xi q\Delta z} \quad (2.30)$$

$$\triangleq C(0) + \tilde{C}^K(k_\xi) \quad (2.31)$$

Dans le calcul précédent, la notation suivante a été introduite :

$$\sum_{q, q \neq 0} = \sum_{\substack{q=-N/2+1 \\ q \neq 0}}^{N/2} \quad (2.32)$$

Si l'on introduit la relation (2.31) dans l'expression de la dérivée partielle par rapport à  $\xi$  (2.28), on obtient l'équation suivante :

$$\partial_\xi C = \frac{1}{N_z} \sum_{n_\xi} j k_\xi \left[ C(0) + \tilde{C}^K(k_\xi) \right] e^{j k_\xi \xi} \quad (2.33)$$

En dissociant les champs connus et inconnus, on exprime l'équation précédente de la manière suivante :

$$\partial_\xi C = \frac{1}{N_z} \sum_{n_\xi} j k_\xi C(0) e^{j k_\xi \xi} + \frac{1}{N_z} \sum_{n_\xi, n_\xi \neq 0} j k_\xi \tilde{C}^K(k_\xi) e^{j k_\xi \xi} \quad (2.34)$$

Les conditions aux limites (2.24) devant être appliquées en  $\xi = 0$ , les termes  $e^{j k_\xi \xi}$  se simplifient et l'équation (2.34) se réduit donc à :

$$\partial_\xi C = \frac{1}{N_z} \sum_{n_\xi} j k_\xi C(0) + \frac{1}{N_z} \sum_{n_\xi, n_\xi \neq 0} j k_\xi \tilde{C}^K(k_\xi) \quad (2.35)$$

## 44 Chapitre 2. Résolution de l'Équation Parabolique 3D par la méthode Split-Step Fourier

Dans le premier terme de l'équation précédente, seul  $k_\xi$  est dépendant de l'indice de sommation  $n_\xi$ . Compte tenu de sa définition,  $k_\xi = 2n_\xi\pi / (N_z\Delta z)$ , il est possible de simplifier  $\sum_{n_\xi} k_\xi$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{n_\xi} k_\xi &= \frac{2\pi}{N_z\Delta z} \sum_{n_\xi} n_\xi \\ &= \frac{\pi}{\Delta z} \end{aligned} \quad (2.36)$$

En introduisant cette simplification dans l'équation 2.35, on se ramène alors à :

$$\partial_\xi C = \frac{j\pi}{N_z\Delta z} C(0) + \frac{1}{N_z} \sum_{n_\xi, n_\xi \neq 0} jk_\xi \tilde{C}^K(k_\xi) \quad (2.37)$$

Si l'on introduit l'expression de la dérivée partielle par rapport à  $\xi$  (2.37) dans la condition aux limites sur le champ électrique (2.24), on arrive à l'égalité suivante :

$$\begin{vmatrix} E_x(0) \\ E_y(0) \end{vmatrix} \left[ 1 + \frac{Z\pi}{\omega\mu_0 N_z \Delta z} \right] = -\frac{Z}{j\omega\mu_0 N_z} \sum_{n_\xi, n_\xi \neq 0} jk_\xi \begin{vmatrix} \tilde{E}_x^K(k_\xi) \\ \tilde{E}_y^K(k_\xi) \end{vmatrix} \quad (2.38)$$

De la même façon, on peut déduire l'expression duale sur le champ magnétique :

$$\begin{vmatrix} H_x(0) \\ H_y(0) \end{vmatrix} \left[ 1 + \frac{\pi}{Z\omega\epsilon_0 N_z \Delta z} \right] = -\frac{1}{jZ\omega\epsilon_0 N_z} \sum_{n_\xi, n_\xi \neq 0} jk_\xi \begin{vmatrix} \tilde{H}_x^K(k_\xi) \\ \tilde{H}_y^K(k_\xi) \end{vmatrix} \quad (2.39)$$

Les équations obtenues ci-dessus permettent de calculer le point au sol en fonction des points connus au-dessus du sol dans le contexte d'un sol plan ou du toit d'un immeuble et cela par l'intermédiaire d'une approche spectrale.

Comme le propose Janaswamy [25], le calcul de la condition aux limites peut être effectué sur les potentiels vecteurs. Le résultat est alors un système d'équation tel que les systèmes (2.38) ou (2.39) mais dont les inconnues sont  $A^e$  et  $A^m$ . L'utilisation de ces potentiels vecteurs n'est dans ce cas pas avantageuse dans la mesure où elle oblige à l'utilisation des relations de passage (1.30) qui alourdissent le temps de calcul. Ce n'est que dans la partie suivante que va se révéler l'intérêt du passage à ces potentiels.

### II.2.3 Application sur des parois verticales

De manière analogue aux travaux de Janaswamy [25], le second cas de relief que l'on considère est un obstacle présentant des parois verticales. Il faut alors considérer une normale présentant l'expression suivante :

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{vmatrix} \quad (2.40)$$

Dans ce cas de figure, la condition aux limites de Léontovich (1.47) s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{vmatrix} n_y E_z \\ -n_x E_z \\ n_x E_y - n_y E_x \end{vmatrix} = Z \begin{vmatrix} n_y (n_x H_y - n_y H_x) \\ -n_x (n_x H_y - n_y H_x) \\ -(n_x^2 + n_y^2) H_y \end{vmatrix} \quad (2.41)$$

Les deux premières équations de ce système étant équivalentes, celui-ci se réduit à :

$$\begin{vmatrix} E_z \\ n_x E_y - n_y E_x \end{vmatrix} = Z \begin{vmatrix} n_x H_y - n_y H_x \\ -(n_x^2 + n_y^2) H_y \end{vmatrix} \quad (2.42)$$

On peut écrire l'équation précédente en fonction d'un unique champ,  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{H}$ . Ainsi, si l'on écrit cette condition aux limites intégralement sur le champ électrique, le système (1.50) se ramène à :

$$\begin{vmatrix} E_z \\ n_x E_y - n_y E_x \end{vmatrix} = \frac{Z}{j\omega\mu_0} \begin{vmatrix} n_x (\partial_z E_x - \partial_x E_z) - n_y (\partial_y E_z - \partial_z E_y) \\ -(n_y^2 + n_z^2) [\partial_x E_y - \partial_y E_x] \end{vmatrix} \quad (2.43)$$

Rappelons que les dérivées se substituent dans le domaine spectral par de simples multiplications. Néanmoins, on constate que les deux équations précédentes forment un système à trois inconnues qu'il est par conséquent impossible de résoudre.

Maintenant si l'on choisit d'écrire cette même condition aux limites en utilisant les potentiels vecteurs, on applique les relations de passage (1.30) à l'équation (2.42). On peut alors écrire celle-ci de la manière suivante :

$$\begin{vmatrix} j\omega A^e + \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_z^2 A^e \\ n_x \left( \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_{yz}^2 A^e + \frac{1}{\epsilon_0} \partial_x A^m \right) - n_y \left( \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_{xz}^2 A^e - \frac{1}{\epsilon_0} \partial_y A^m \right) \end{vmatrix} = Z \begin{vmatrix} n_x \left( \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_{yz}^2 A^m - \frac{1}{\mu_0} \partial_x A^e \right) - n_y \left( \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_{xz}^2 A^m + \frac{1}{\mu_0} \partial_y A^e \right) \\ -(n_x^2 + n_y^2) \left[ \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_{yz}^2 A^m - \frac{1}{\mu_0} \partial_x A^e \right] \end{vmatrix} \quad (2.44)$$

Dans ce cas de figure, on voit apparaître l'intérêt d'une résolution sur les potentiels vecteurs. En effet, le système (2.43) écrit sur le champ électrique est insoluble, tandis que le système (2.44) écrit sur les potentiels vecteurs et traduisant exactement la même condition aux limites est soluble. Par conséquent, c'est une résolution de la condition aux limites sur les potentiels vecteurs qui est considérée pour cette configuration.

Rappelons que le but est ici de calculer les potentiels vecteurs sur les parois verticales d'un obstacle. Pour chaque paroi, on considère un domaine de taille  $N_{sy} \times N_{sz}$  tel qu'il englobe l'intégralité de la hauteur de l'obstacle (cf. figure 2.8).

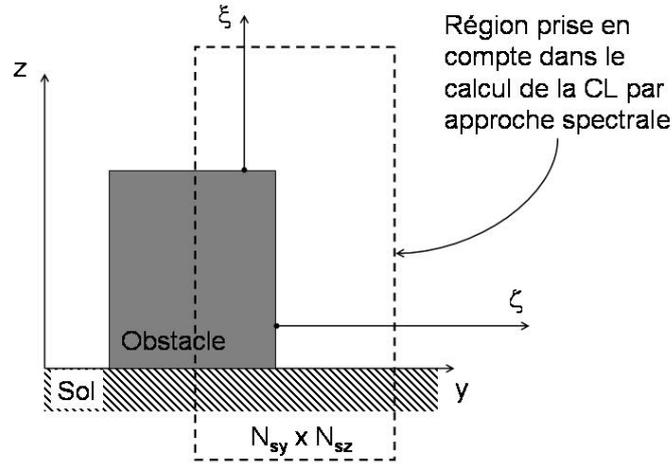


Figure 2.8 – Zone de calcul du champ électromagnétique pour le calcul des conditions aux limites sur les parois verticales d'un obstacle par une approche spectrale.

La méthodologie est la même que pour un sol plan. En effet, on cherche à exprimer les potentiels vecteurs inconnus à la surface de l'obstacle à l'aide de transformée de Fourier discrète qui sont cette fois bidimensionnelles. On introduit alors la variable  $\zeta$  définie comme suivant l'axe transverse  $y$  (cf. figure 2.8) et dont la valeur  $\zeta = 0$  correspond à l'ordonnée de la paroi considérée. La transformée de Fourier discrète inverse bidimensionnelle qu'il est nécessaire d'utiliser s'écrit sous la forme suivante :

$$A(\zeta, \xi) = \frac{1}{N_{sy}N_{sz}} \sum_{n_\zeta} \sum_{n_\xi} \tilde{A}(k_\zeta, k_\xi) e^{j(k_\zeta \zeta + k_\xi \xi)} \quad (2.45)$$

avec :  $A$  le potentiel vecteur considéré,  
 $\tilde{A}$  le spectre du potentiel vecteur considéré,  
 $k_\zeta = 2\pi n_\zeta / (\Delta_y N_{sy})$ ,  
 $k_\xi = 2\pi n_\xi / (\Delta_z N_{sz})$ ,  
 $\zeta = p\Delta_y$ ,  
 $\xi = q\Delta_z$ .

Il est possible de dériver l'équation précédente (2.45) par rapport à  $\xi$  et  $\zeta$  pour obtenir une expression de l'ensemble des dérivées présentes dans le système (2.44).

L'expression de la transformée de Fourier discrète inverse permet ensuite de dissocier les potentiels vecteurs inconnus sur la paroi verticale, positionnée en  $\zeta = 0$  (ou  $p = 0$ ), des potentiels vecteurs connus de la manière suivante :

$$\tilde{A}(k_\zeta, k_\xi) = \sum_q A_0(q\Delta_z) e^{-jk_\xi q\Delta_z} + \sum_q \sum_{p, p \neq 0} A(p\Delta_y, q\Delta_z) e^{-j(k_\zeta p\Delta_y + k_\xi q\Delta_z)} \quad (2.46)$$

$$\triangleq \tilde{A}_0(k_\xi) + \tilde{A}_K(k_\zeta, k_\xi) \quad (2.47)$$

L'équation (2.47) est introduite dans le système (2.44) et l'ensemble des dérivées partielles est exprimé grâce aux dérivations de la transformée de Fourier discrète inverse (2.45). Un système matriciel dont les inconnues sont l'ensemble des potentiels vecteurs électrique et magnétique situés le long de la paroi verticale est obtenu. Ce calcul est détaillé en annexe C pour des raisons de clarté et il s'écrit de la manière suivante :

$$[M] \begin{bmatrix} \tilde{A}_0^e \\ \tilde{A}_0^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$v$  et  $\omega$  contiennent respectivement l'information liée aux potentiels vecteurs électriques et magnétiques connus en dehors de la paroi exprimés dans l'espace spectral.  $M$  est une matrice de dimension  $(2n_\zeta n_\xi) \times (2n_\zeta n_\xi)$ .

Les potentiels vecteurs sont ensuite obtenus dans l'espace réel par une transformée de Fourier inverse.

Ainsi, les formulations de Janaswamy des conditions aux limites pour les surfaces lisses horizontales, puis pour des parois verticales ont été présentées. La première peut être formulée sur les champs ou sur les potentiels vecteurs alors que la seconde impose une écriture sur les potentiels. Ce dernier point implique l'utilisation de relations de passage à chaque fois qu'un retour au champ est souhaité, pour la visualisation par exemple.

### III Validations

Le but de cette partie est de valider qualitativement chacune des méthodologies introduites précédemment. L'efficacité en terme de rapidité et de domaine de validité fera l'objet du dernier chapitre de ce manuscrit. Nous allons ainsi effectuer des simulations en présence de phénomènes de réflexion, réfraction et diffraction pouvant influencer la propagation d'une onde électromagnétique en milieu naturel. En corollaire, il est possible de se rendre compte des propriétés tridimensionnelles des phénomènes modélisés et de quantifier l'intérêt d'une modélisation 3D.

Les résultats présentés sont exprimés soit en module du champ soit en facteur de propagation. Classiquement les résultats d'un modèle de propagation sont fournis en facteur de propagation, ce dernier étant défini comme le champ électromagnétique propagé normé par le champ qui aurait été propagé en espace libre [38]. L'avantage de cette représentation est de mettre en avant les effets propagatifs « inhabituels ». Cependant, pour certains cas de polarisation certaines composantes du champ sont nulles en espace libre, cela entraîne une indétermination du facteur de propagation. C'est pour pallier cette indétermination que les résultats seront présentés soit en module du champ électromagnétique soit en facteur de propagation.

#### III.1 Sol lisse métallique horizontal

Nous commençons tout d'abord par considérer le cas de la propagation au-dessus d'un sol plan métallique. Celui-ci permet d'étudier la modélisation du phénomène de réflexion, pour

cela on considère le domaine représenté par la figure 2.9.

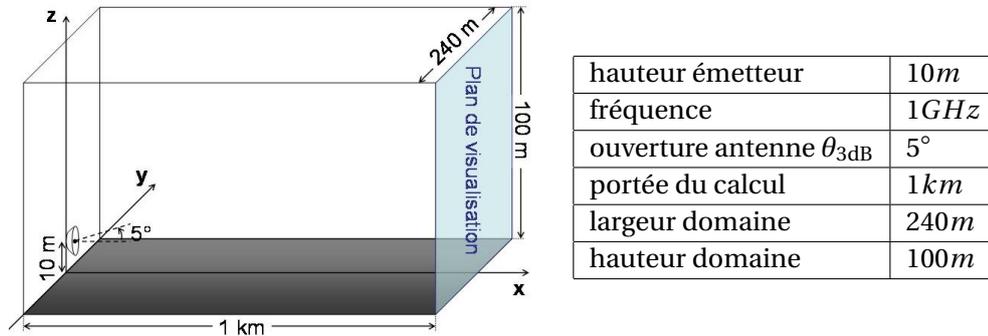


Figure 2.9 – Configuration d'un cas de propagation au-dessus d'un sol plan par la méthode SSF.

Ce cas test est donc constitué d'un émetteur situé en  $(x = 0m, y = 0m, z = 10m)$  éclairant un plan métallique horizontal infini dans les dimensions  $y$  et  $x$ . Le diagramme d'antenne est une gaussienne de 5° de demi ouverture à 3dB et celle-ci émet à 1GHz. La polarisation est successivement prise horizontale et verticale. Soulignons que l'indice de l'atmosphère est choisi égal à 1 sur tout le domaine.

Rappelons sommairement les principales étapes du modèle employé : on propage une répartition de champ connu sur un plan transverse  $\langle yz \rangle$  d'un certain pas  $\Delta x$ . Ensuite, à la nouvelle abscisse on impose la condition aux limites à l'interface avec le sol et on annule le champ sous la surface de celui-ci. Cette méthode est applicable à tous les obstacles que nous allons modéliser. Cependant, au-dessus d'une configuration telle que celle qui est ici considérée, c'est à dire invariante transversalement et longitudinalement, il est possible de modéliser très rapidement la propagation. Cela se fait en considérant un domaine défini par  $z$  positif et son domaine image (cf. section II.2.1.a du chapitre 1). La méthode de la Source Image sera utilisée comme référence dans ce cas.

### III.1.1 Polarisation horizontale

Nous commençons tout d'abord par considérer le cas de la polarisation horizontale. Les premières cartographies présentées sont les coupes  $\langle yz \rangle$  de chaque composante du champ électrique à l'abscisse finale du calcul  $(x = 1km)$ , soit sur le plan de visualisation turquoise représenté sur la figure 2.9. Les composantes  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  du champ électrique sont reportées de gauche à droite sur la figure 2.10.

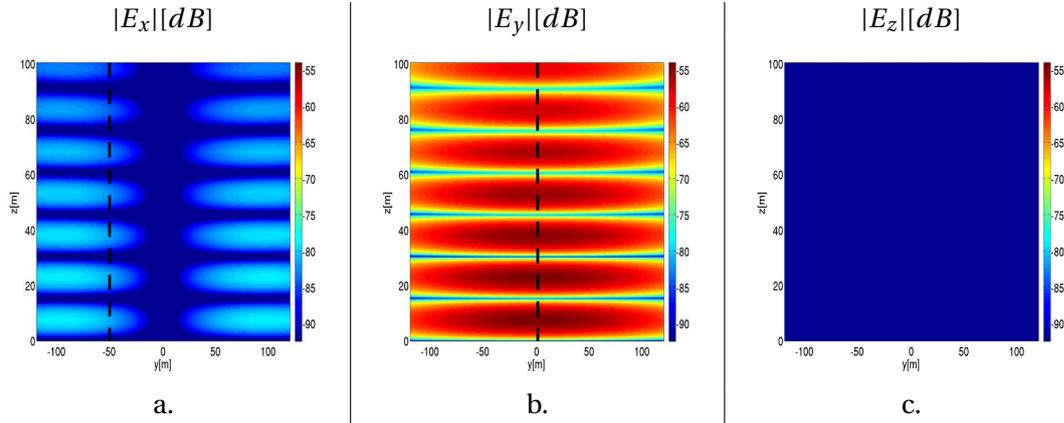


Figure 2.10 – Cartographies  $\langle yz \rangle$  du champ électrique issues d'un calcul par la méthode SSF au-dessus d'un sol plan en polarisation horizontale.

Les trois composantes du champ électrique ont été tracées suivant le même code couleur, on peut donc remarquer la supériorité en amplitude de la composante  $E_y$  (cf. figure 2.10b.) par rapport à celle de la composante  $E_x$  (cf. figure 2.10a.). Quant à la composante  $E_z$  (cf. figure 2.10c.), elle reste nulle tout au long de la propagation. Ceci se justifie par le fait que dans cette configuration, les conditions aux limites n'introduisent pas de couplage entre les composantes.

Sur les composantes du champ non nulles, on peut observer plusieurs effets. Tout d'abord, l'influence du diagramme d'antenne qui donne au champ cette variation d'amplitude gaussienne. Ensuite, on constate la présence d'une figure d'interférences régulières avec la hauteur due à la recombinaison du champ incident et du champ réfléchi sur le sol, celles-ci suivent la loi [11] :

$$\Delta h = \frac{\lambda d}{2h_e} \quad (2.49)$$

avec :  $\Delta h$  la périodicité des interférences en hauteur,  $15m$  pour cet exemple,  
 $\lambda$  la longueur d'onde, soit  $30cm$  à  $1GHz$ ,  
 $d$  la distance émetteur - récepteur,  $1km$  dans cet exemple,  
 $h_e$  la hauteur de l'émetteur, ici  $10m$ .

Afin d'avoir une meilleure vision de l'aspect tridimensionnel de notre modélisation plusieurs coupes sont présentées, toutes celles-ci montrent l'évolution de la composante principale du champ électrique  $E_y$  pour le cas test considéré. L'ensemble des coupes représentées sont positionnées dans le domaine de calcul comme indiqué sur la figure 2.11.

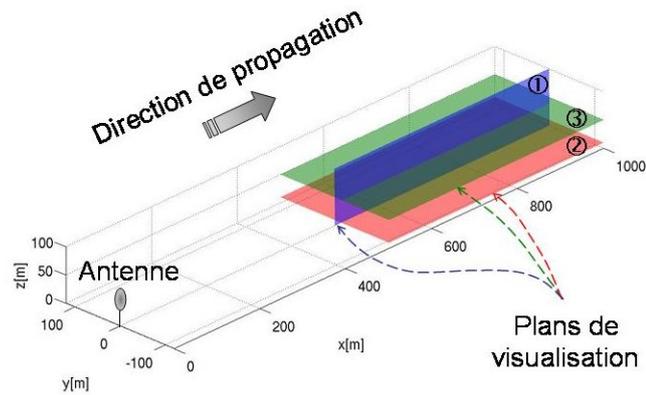


Figure 2.11 – Positionnement des plans de visualisation dans l'espace de calcul.

On représente sur la figure 2.12 une coupe  $\langle xz \rangle$  située à l'ordonnée  $y = 0m$ , plan bleu indicé 1. On y retrouve la figure d'interférences déjà aperçues sur les figures 2.10. Celles-ci suivent la loi (2.49) et il est donc normal de les voir augmenter en fonction de la distance.

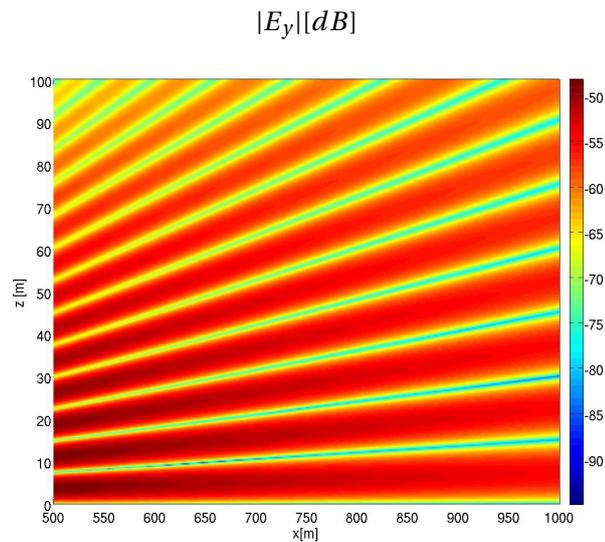


Figure 2.12 – Coupe  $\langle xz \rangle$  de la composante  $E_y$  modélisée au-dessus d'un sol plan par la méthode SSF en polarisation horizontale.

Si maintenant on représente la variation du champ en fonction de la distance sur des sections horizontales, soit des coupes  $\langle xy \rangle$ , on obtient aux hauteurs  $z = 10m$  (plan 2) et  $z = 50m$  (plan 3) les coupes représentées sur la figure 2.13.

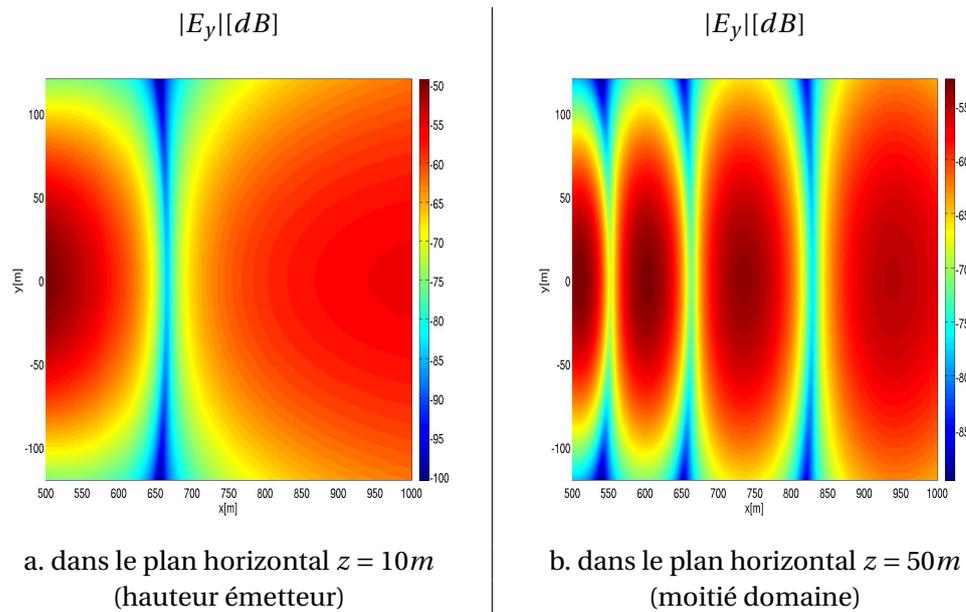


Figure 2.13 – Coupes  $\langle xy \rangle$  de la composante  $E_y$ , modélisée au-dessus d'un sol plan par la méthode SSF en polarisation horizontale.

On constate la présence d'une figure d'interférences également due à la recombinaison du champ incident et du champ réfléchi sur le sol. La taille des lobes suit la loi classique suivante [11] :

$$\Delta d = \frac{\lambda d^2}{2h_e h_r} \quad (2.50)$$

avec :  $\Delta d$  la périodicité des interférences en distance,  
 $d$  la distance,  
 $\lambda$  la longueur d'onde, soit  $30cm$  à  $1GHz$ ,  
 $h_e$  la hauteur de l'émetteur, ici  $10m$ ,  
 $h_r$  la hauteur de visualisation, soit respectivement  $10$  et  $50m$  pour les figures 2.13.

Afin de valider le modèle de propagation par la méthode SSF, deux comparaisons sont faites avec la méthode de la source image (cf. section II.2.1.a du chapitre 1) que nous prenons ici pour référence : l'une portant sur la composante  $E_y$  dans le plan  $x = 1km$  et pour  $y = 0m$  (cf. pointillés figure 2.10b.), l'autre sur la composante  $E_x$  dans le même plan  $x = 1km$  mais en  $y = -50m$  (cf. pointillés figure 2.10a.) afin que le champ ait une amplitude significative. Les résultats sont reportés sur la figure 2.14, sur laquelle on peut constater une parfaite concordance entre le modèle ici à l'étude et la référence.

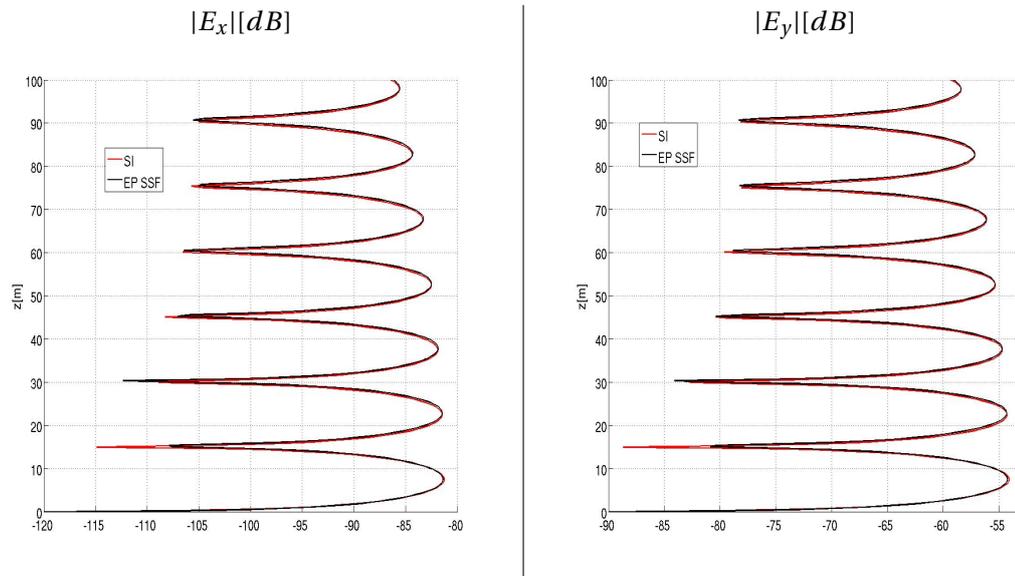


Figure 2.14 – Comparaisons entre la méthode SSF et le modèle Source Image de la modélisation de la propagation au dessus d'un sol plan en polarisation horizontale.

### III.1.2 Polarisation verticale

Nous abordons maintenant le cas de la polarisation verticale au-dessus d'un sol plan métallique. Ce cas de figure est réalisé dans la même configuration que précédemment (cf. figure 2.9), seule la polarisation d'émission est différente.

On représente tout d'abord les trois composantes du champ magnétique en  $x = 1 km$  au niveau du plan de visualisation. Les composantes  $H_x$ ,  $H_y$  et  $H_z$  du champ magnétique sont donc représentées, de gauche à droite, sur la figure 2.15.

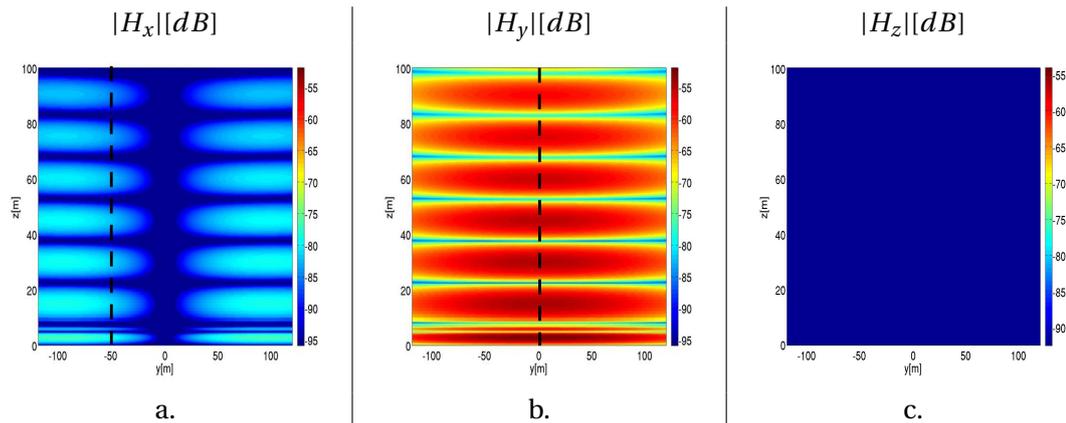


Figure 2.15 – Cartographies  $\langle yz \rangle$  du champ magnétique issues d'un calcul par la méthode SSF au-dessus d'un sol plan en polarisation verticale.

Les trois composantes du champ magnétique ont été tracées suivant le même code couleur que précédemment, on peut donc remarquer la supériorité en amplitude de la composante  $H_y$  (cf. figure 2.15b.) par rapport à celle de la composante  $H_x$  (cf. figure 2.15a.). Quant à la composante  $H_z$  (cf. figure 2.15c.), elle reste nulle tout au long de la propagation. Ceci se justifie par le fait que dans cette configuration, les conditions aux limites n'introduisent pas de couplage entre les composantes.

Sur les composantes  $H_x$  et  $H_y$ , on retrouve une figure d'interférences régulières avec la hauteur due à la recombinaison du champ incident et du champ réfléchi au sol et dont la taille satisfait toujours à l'équation classique (2.49). Cependant, on peut observer que le champ est perturbé au voisinage du sol. Pour observer plus clairement les distributions de champ obtenues, nous allons représenter celles-ci sur deux verticales : positionnées en  $y = -50m$  pour la composante  $H_x$  (cf. pointillés figure 2.15a.) et en  $y = 0m$  pour la composante  $H_y$  (cf. pointillés figure 2.15b.). La visualisation de la composante  $H_x$  ne s'effectue pas dans l'axe de l'antenne ( $y = 0m$ ) afin d'éviter de réaliser celle-ci là où le champ est théoriquement nul. Sur la figure 2.16, les résultats issus de notre modélisation SSF sont comparés avec une modélisation par la méthode de la Source Image que l'on peut dans ce cas considérer comme une référence.

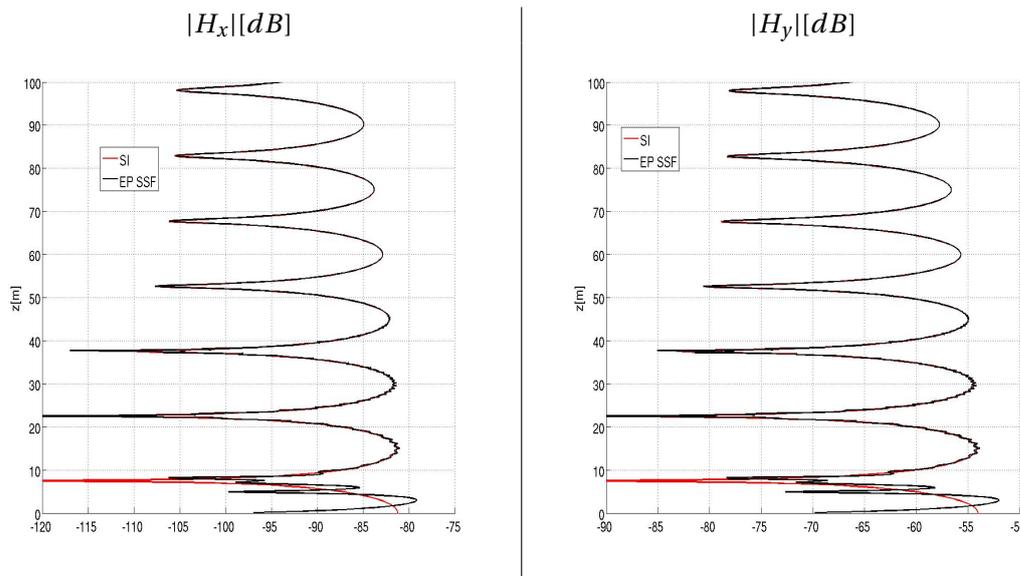


Figure 2.16 – Comparaisons entre la méthode SSF et le modèle Source Image de la modélisation de la propagation au dessus d'un sol plan en polarisation verticale.

Nous constatons la présence de fluctuations parasites à proximité du sol. Celles-ci ne disparaissent pas même en utilisant un échantillonnage très fin. Nous pensons que ce problème est lié à la discontinuité du champ au niveau du sol (discontinuité absente en polarisation horizontale). En effet, dans le cas de la polarisation verticale au-dessus d'un sol plan métallique, c'est la condition aux limites de Neumann qui doit être imposée. Celle-ci revient à imposer au niveau de l'interface avec l'obstacle considéré un champ égal au double du

champ incident. Dans l'algorithme utilisé, on annule le champ sous le sol avant d'effectuer la transformée de Fourier du champ sur tout le domaine. Cela fait apparaître une discontinuité importante de la distribution du champ au niveau du sol. La décomposition de celui-ci en somme d'ondes planes par transformée de Fourier provoque un élargissement important du spectre, induisant même des ondes évanescentes. Or, nous avons vu que la résolution de l'Équation Parabolique 3D par SSF nécessitait une approximation paraxiale c'est à dire valide pour des ondes dont l'axe de propagation est proche de l'axe  $x$ . Cela implique des valeurs de  $k_y$  et  $k_z$  petites et donc une troncature du spectre telle que  $k_y^2 + k_z^2 \leq k_0^2 \sin^2 \psi_{\max}$ . Ainsi toutes les ondes planes du spectre ne sont pas propagées de  $x$  à  $x + \Delta x$  et ne décrivent donc pas correctement l'allure du champ en  $x + \Delta x$ .

La solution utilisée en 2D mais qui n'a pu être étendue au 3D (comme signalé en introduction de ce chapitre) est de considérer des transformées de Fourier en cosinus permettant de propager implicitement la condition aux limites de Neumann lors de la résolution de l'Équation Parabolique par Split-Step Fourier. Nous verrons dans le chapitre suivant que ce problème est résolu par l'approche Différences Finies.

On peut noter que ce problème de discontinuité ne se restreint pas au cas de la polarisation verticale au-dessus d'un sol métallique. En effet, les discontinuités sont absentes uniquement si le coefficient de réflexion au sol est égal à  $-1$ . Dans ce cas, le champ incident et le champ réfléchi présentent le même module mais sont en opposition de phase, ce qui implique une valeur nulle du champ total au sol. Dans tous les autres cas, le coefficient de réflexion est tel qu'il implique une discontinuité du champ total au niveau de l'interface avec l'obstacle. Celle-ci est impossible à modéliser convenablement par la méthode ici présentée. Notons que le cas présenté précédemment (condition de Neumann) correspond au pire cas de discontinuité.

Néanmoins, dans la plupart des cas qui nous intéressent, c'est à dire correspondant à la modélisation de la propagation sous incidence rasante, les coefficients de réflexion tendent tous vers  $-1$  quelque soit la nature du sol (cf. [35]) et impliquent un champ total nul au sol n'engendrant donc pas de discontinuités.

### III.2 Discussion sur la modélisation de la condition aux limites

Les deux exemples précédents nous permettent d'aborder de manière simple une discussion sur la modélisation de la réflexion par cette méthode.

#### III.2.1 Modélisation de la réflexion

Il peut paraître choquant de calculer le champ au niveau du sol à partir des conditions aux limites et du champ au-dessus pris sans tenir compte du sol. De plus, une fois le champ au sol calculé, on conserve le champ au-dessus identique avant de le faire propager à l'abscisse  $x + \Delta x$ . Dans un cadre général, cette modélisation est fautive. On peut le voir de façon évidente en prenant une onde plane arrivant avec une direction verticale sur un sol métallique (cf. figure 2.17).

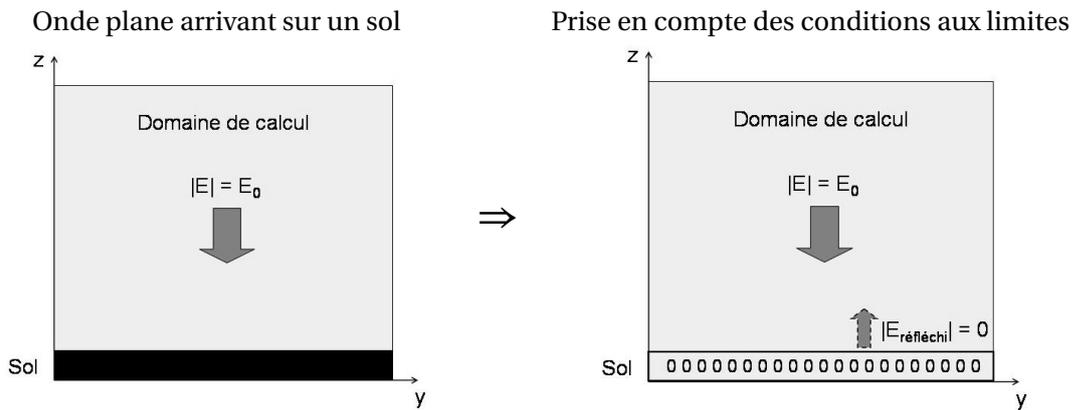


Figure 2.17 – Application de notre méthode dans la prise en compte des conditions aux limites sur un cas critique.

Le calcul des conditions aux limites ici réalisé modifie uniquement le champ à l’interface du sol. On constate donc qu’avec ce modèle l’amplitude du champ reste constante au-dessus du sol alors qu’elle devrait faire apparaître des interférences liées aux recombinaisons constructives et destructives du champ incident et du champ réfléchi.

En revanche, cette modélisation reste pertinente si l’on suppose que lorsqu’il y a un changement brutal des conditions aux limites (apparition d’un obstacle, changement de pente, ...), l’angle que fait l’onde incidente avec le sol (ou l’obstacle) est faible.

Si l’on prend l’exemple d’une onde plane éclairant le commencement d’un sol plan métallique (cf. figure 2.18).

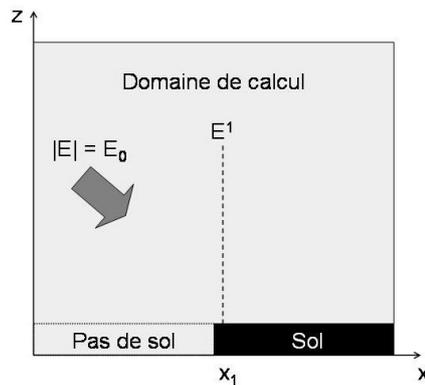


Figure 2.18 – Exemple d’une onde plane éclairant le commencement d’un sol.

La méthodologie est alors la suivante :

- Tout d’abord, on annule le champ au sol (cf. figure 2.19).

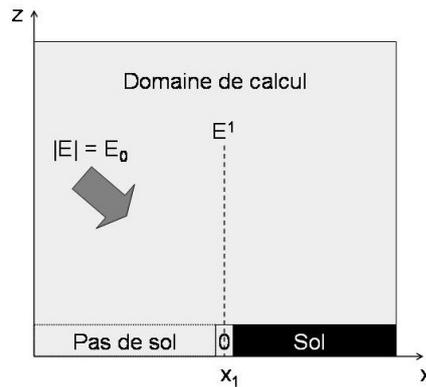


Figure 2.19 – Annulation du champ sous la surface du sol.

- Ensuite, on propage le champ sur la verticale à l'abscisse  $x_1 + \Delta x$ . Le champ que l'on prend pour effectuer la propagation est le champ initial à l'abscisse  $x_1$  annulé au niveau du sol (cf. figure 2.20). Ici, cette hypothèse n'est pas totalement fautive car le champ réfléchi modélisé par la prise en compte des conditions aux limites ne se recombina avec l'onde incidente qu'à partir de l'abscisse  $x_1 + \Delta x$ .

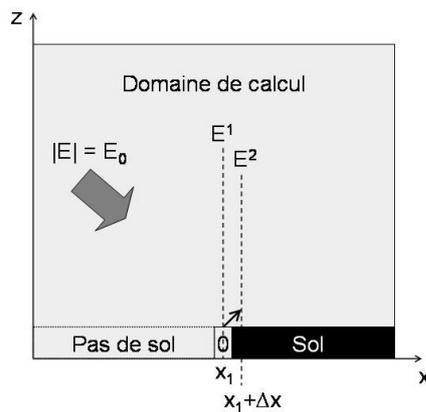


Figure 2.20 – Commencement des interférences au niveau du sol.

Ainsi, le champ  $E^2$  à l'abscisse  $x_1 + \Delta x$  présentera un début d'interférence au niveau du sol. De proche en proche, la réflexion sera donc modélisée.

Cette remarque peut se formuler différemment. On peut dire que lorsqu'à une étape donnée, le champ est peu modifié par la présence du sol (de l'obstacle), c'est à dire que le champ ne change qu'au niveau du sol et de son environnement très proche, cette modélisation est efficace. Cependant, lorsque le sol change brutalement de pente impliquant une « forte » incidence, dans la limite de l'approximation paraxiale, avec l'onde incidente, l'erreur sur le champ sera sensible durant les premières itérations. Mais une fois que la première interférence sera apparue, le champ au niveau du sol ne changera que très peu d'itération en itéra-

tion et la méthode sera alors efficace (cf. figure 2.21).

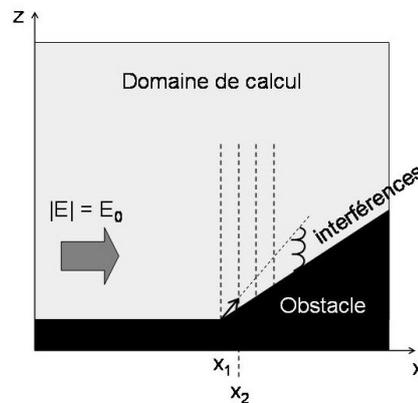


Figure 2.21 – Création des interférences.

L'hypothèse induite par l'approche proposée par R. Janaswamy est donc pénalisante, mais pour les applications visées et sous certaines conditions elle peut amener des résultats corrects. Nous avons donc réalisé une étude paramétrique pour quantifier l'influence de cette modélisation du sol.

### III.2.2 Influence du pas de progression horizontal sur la modélisation de la réflexion

Cette étude spécifique a pour but d'estimer la modélisation de la réflexion faite par ce modèle en fonction de l'incidence et du pas de progression horizontal choisi. La configuration de celle-ci est représentée par la figure 2.22.

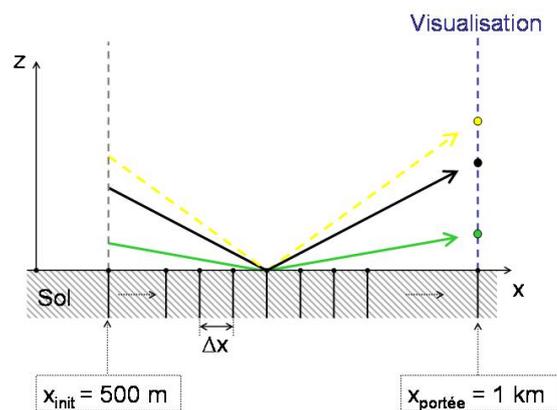


Figure 2.22 – Configuration de l'étude paramétrique de la modélisation de la réflexion par la méthode SSF en fonction de l'angle d'incidence et du pas de progression.

Soit une antenne située dans le plan  $\langle y0z \rangle$  et émettant à une fréquence de  $1GHz$ . À partir de l'abscisse initiale  $x = 500m$ , nous propageons la distribution de champ jusqu'à l'abscisse  $x = 1km$ . La démarche consiste alors à faire varier l'inclinaison de l'onde, par l'intermédiaire de la hauteur émetteur, ainsi que le pas de progression horizontal et d'observer la modélisation de la réflexion.

Ainsi on présente sur la figure 2.23 le rapport entre le champ réfléchi modélisé et le champ réfléchi référence en  $x = 1km$  en fonction du pas de progression adopté ; un rapport égal à un équivaut donc à une modélisation parfaite de la réflexion. Chaque courbe correspond à une inclinaison de l'onde différente avec le sol.

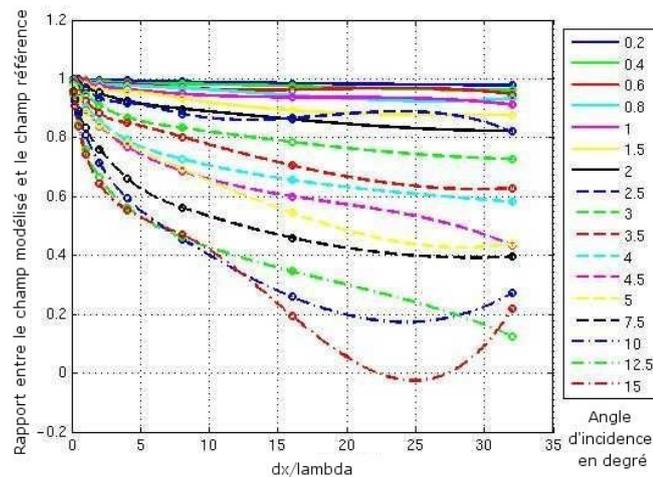


Figure 2.23 – Étude paramétrique de la modélisation de la réflexion par la méthode SSF en fonction de l'angle d'incidence et du pas de progression.

On peut observer que plus l'incidence de l'onde électromagnétique est élevée, plus le pas de progression nécessaire pour conserver un rapport entre le champ réfléchi modélisé et le champ réfléchi de référence proche de un est fin. Cependant, dans le cadre de cette étude et en cohérence avec le cône de validité de l'Équation Parabolique, les angles d'incidence considérés sont rasants : c'est pourquoi cette modélisation reste pertinente. Néanmoins, cette étude révèle un inconvénient à la méthode SSF 3D. En effet, contrairement à la méthode SSF 2D qui autorisait de larges pas de discrétisation dans le sens de la propagation, la méthode tridimensionnelle nécessite un pas de progression fin quelle que soit la configuration.

### III.3 Prise en compte de l'atmosphère

Comme énoncé au cours du chapitre d'introduction, la prise en compte de l'atmosphère est un aspect à ne pas négliger lors de la modélisation de la propagation à basse altitude sur de grandes distances. En effet, celle-ci peut avoir une grande influence sur la propagation des ondes électromagnétiques. Afin de valider l'introduction de la variation de l'indice de réfraction faite dans notre modèle, deux cas d'atmosphères sont considérés. Tout d'abord,

nous traitons le cas de l'atmosphère standard. Puis, nous modéliserons la propagation en présence d'un conduit d'évaporation. Ce type d'atmosphère se rencontre fréquemment en environnement maritime.

Pour ces deux cas tests, la configuration est la propagation au-dessus d'un sol plan métallique en polarisation horizontale. Ce choix de polarisation se justifie car nous avons montré que par SSF la modélisation de la condition aux limites pour ce type de configuration était satisfaisante. Afin d'accentuer les effets de réfraction, la fréquence a été élevée jusqu'à  $5GHz$  et la demi-ouverture d'antenne a été diminuée à  $1.5^\circ$ . De plus, la hauteur de l'émetteur a été fixée à  $10m$ , la hauteur du domaine à  $300m$  et la portée du calcul est de  $20km$  (cf. figure 2.24).

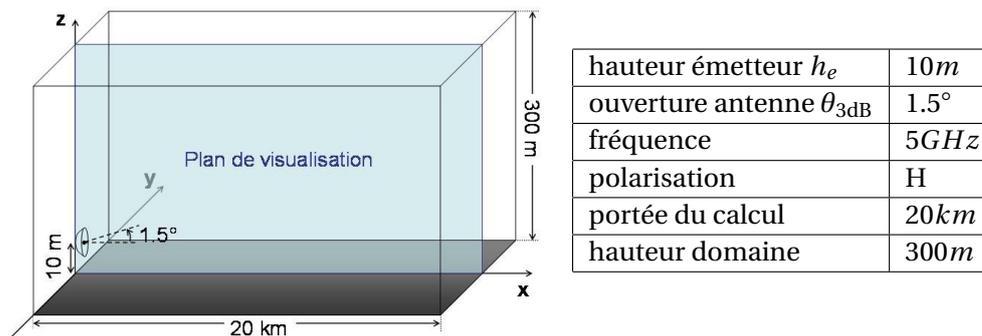


Figure 2.24 – Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'une atmosphère par la méthode SSF.

L'objectif de cette partie étant de valider la prise en compte de l'indice de réfraction faite dans notre modèle, on considère une atmosphère présentant des variations uniquement suivant la hauteur. Ainsi, le modèle tridimensionnel ici à l'étude peut être comparé à un modèle de résolution de l'Équation Parabolique 2D (EP 2D) déjà validé lors des travaux précédents [16, 22, 18] et que l'on considère comme référence.

### III.3.1 Atmosphère standard

Le premier cas d'atmosphère que nous considérons est le cas de l'atmosphère standard, celle-ci est définie comme représentative des conditions moyennes de l'atmosphère terrestre. Le coindice de réfraction modifié  $M$  la caractérisant varie en fonction de la hauteur  $z$  de la manière suivante :

$$M(z) = M_0 + 117.10^{-3}z \quad (2.51)$$

avec :  $M_0 \approx 340$  la valeur du coindice de réfraction modifié au niveau de la mer ou du sol,  $z$  la hauteur.

La variation de ce coindice modifié en fonction de la hauteur se représente dans ce cas d'atmosphère comme illustrée sur la figure 2.25.

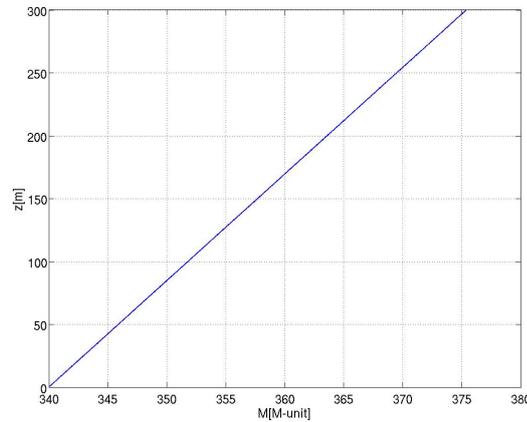


Figure 2.25 – Variation du coindice de réfraction de l'atmosphère standard en fonction de l'altitude.

Afin de représenter l'influence de la réfraction sur la propagation, on trace sur la figure 2.26 l'évolution du facteur de propagation de la composante  $E_y$  dans le plan  $\langle x0z \rangle$  défini en  $y = 0m$  et représenté par le plan turquoise sur la figure 2.24. Nous noterons  $F_y$  le facteur de propagation de la composante  $E_y$ .

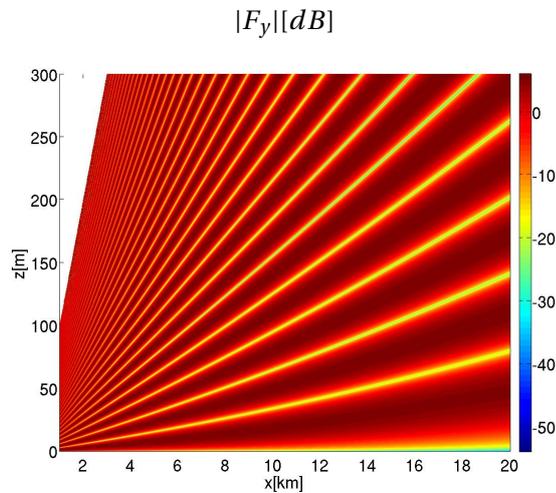


Figure 2.26 – Coupe  $\langle x0z \rangle$  du facteur de propagation de  $E_y$  issue de la modélisation de la propagation par la méthode SSF en présence d'une atmosphère standard.

On remarque tout d'abord la présence de figures d'interférences dues à la recombinaison des champs incidents et réfléchis sur le sol. En accord avec la théorie, la courbure de la trajectoire de l'onde est supérieure à la courbure de la Terre dans ce cas d'atmosphère. Dans le cas d'une propagation au-dessus d'une Terre plate, telle que représentée sur la figure 2.26, l'onde

s'éloigne de la surface terrestre.

Afin de valider la prise en compte du phénomène de réfraction dans notre modèle, on compare le résultat précédent avec le résultat obtenu par une modélisation bidimensionnelle. Cette comparaison, réalisée en  $x = 20\text{km}$  et  $y = 0\text{m}$ , est représentée sur la figure 2.27.

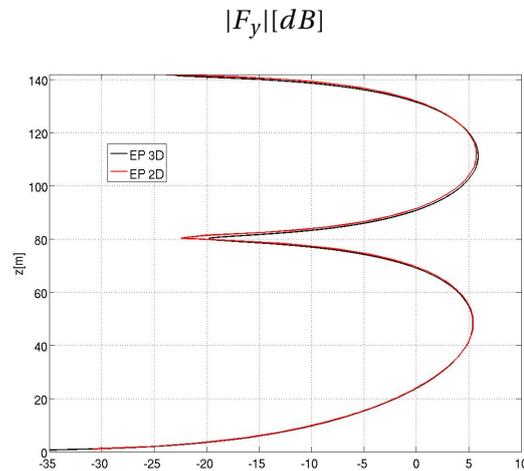


Figure 2.27 – Comparaison entre la méthode SSF 3D (EP 3D) et le modèle EP 2D dans le cas d'une atmosphère standard.

On constate un bon accord entre les deux méthodes, ce qui justifie la bonne prise en compte de ce type d'atmosphère dans le modèle de résolution de l'Équation Parabolique 3D. On peut remarquer la supériorité en taille du premier lobe d'interférence traduisant l'éloignement de l'onde de la surface de la Terre.

### III.3.2 Conduit d'évaporation

Dans cette section, nous allons introduire une variation plus complexe de l'indice de réfraction : un conduit d'évaporation. Ce type d'atmosphère se rencontre très fréquemment au-dessus de la mer. Pour un tel cas, le coindice de réfraction modifié peut être modélisé par la loi suivante (2.52) et est représenté sur la figure 2.28.

$$M(z) = M_0 + 117.10^{-3} \left[ z - h_c \log \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right) \right] \quad (2.52)$$

avec :  $h_c = 20\text{m}$  la hauteur du conduit fixée aléatoirement,  
 $z_0 = 1.5.10^{-4}$  une constante.

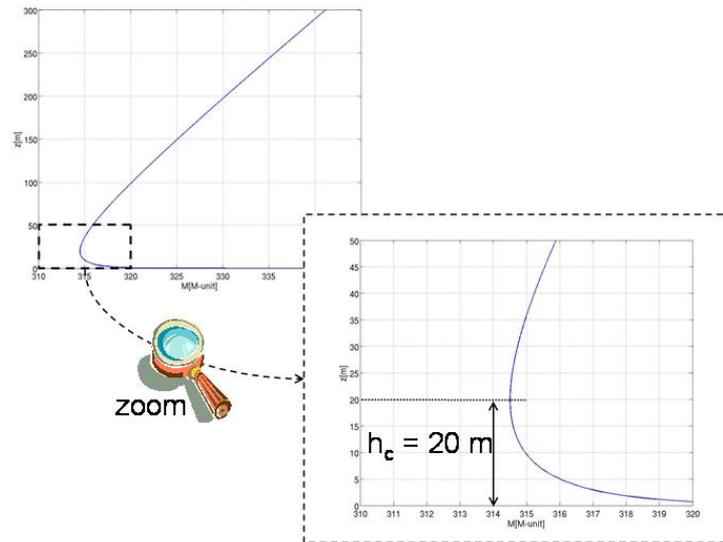


Figure 2.28 – Variation du coindice de réfraction d'un conduit d'évaporation en fonction de l'altitude.

L'évolution du facteur de propagation de la composante  $E_y$  dans le plan  $\langle x0z \rangle$  défini en  $y = 0m$  est présentée sur la figure 2.29.

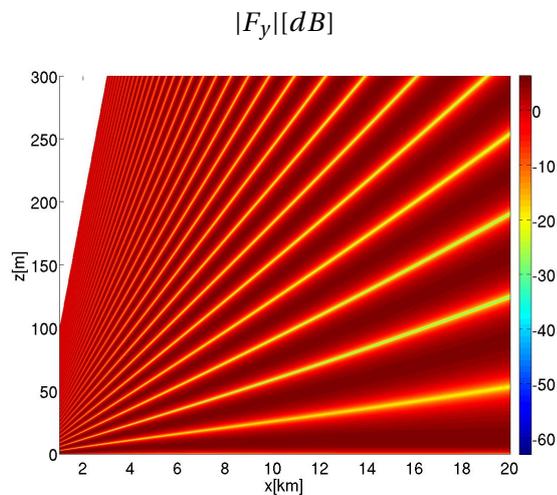
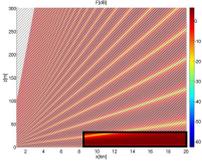


Figure 2.29 – Coupe  $\langle x0z \rangle$  du facteur de propagation de  $E_y$  issue de la modélisation de la propagation par la méthode SSF en présence d'un conduit d'évaporation.

*Remarque : pour mettre en relief une zone précise d'un des résultats obtenus, nous l'illustrerons par l'introduction d'une « vignette ». Ainsi, dans le paragraphe suivant, nous souhaitons mettre en relief la zone située en bas à droite de la figure, le commentaire associé à cette zone*

est positionné sur la droite de la vignette. Ce type d'illustration sera fréquemment utilisé dans la suite de ce manuscrit.



Sur la zone mise en relief ci-contre, on observe de fortes valeurs du champ électrique au voisinage du sol. Cette particularité due à la présence du conduit d'évaporation implique un phénomène de guidage de l'onde pouvant se poursuivre au-delà de l'horizon optique.

Afin de tester la validité de l'introduction d'une telle atmosphère dans notre modèle, nous avons comparé le résultat précédent avec une modélisation bidimensionnelle que l'on considère toujours comme une référence. La comparaison s'effectue sur une verticale positionnée en  $x = 20\text{km}$  et en  $y = 0\text{m}$ , le résultat est reporté sur la figure 2.30.

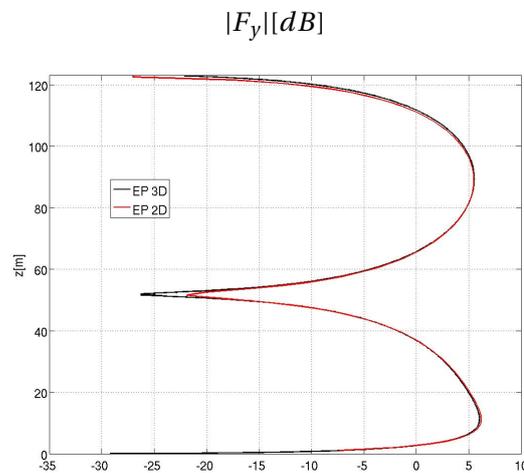
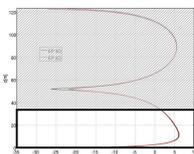


Figure 2.30 – Comparaison entre la méthode SSF 3D (EP 3D) et le modèle EP 2D dans le cas d'un conduit d'évaporation.

On retrouve un bon accord entre notre modélisation tridimensionnelle et la référence bidimensionnelle, ce qui permet de valider la prise en compte de ce type d'atmosphère.



On peut, sur cette coupe, observer plus finement le phénomène de guidage de l'onde en présence de ce conduit. En effet, on constate une déformation du premier lobe d'interférence qui canalise le champ à la surface du sol, autorisant des propriétés de guidage très intéressantes.

Pour conclure cette section, on constate un bon accord entre notre modèle et la référence choisie pour les deux cas d'atmosphères considérés, ce qui confirme la bonne prise en compte des phénomènes de réfraction par notre modèle.

### III.4 Prise en compte d'obstacles canoniques

Dans cette partie, la méthode de résolution de l'Équation Parabolique 3D par Split-Step Fourier est utilisée pour modéliser la propagation en présence d'obstacles canoniques. Ainsi, nous considérerons la propagation au-dessus d'une configuration constituée d'un sol et d'une plaque métallique perpendiculaire au sens de propagation puis inclinée.

#### III.4.1 Plaque perpendiculaire au sens de propagation

Le premier cas test envisagé est un cas de propagation au-dessus d'un sol plan métallique et en présence d'une plaque (ou écran) métallique perpendiculaire au sens de propagation. Cette configuration est illustrée par la figure 2.31.

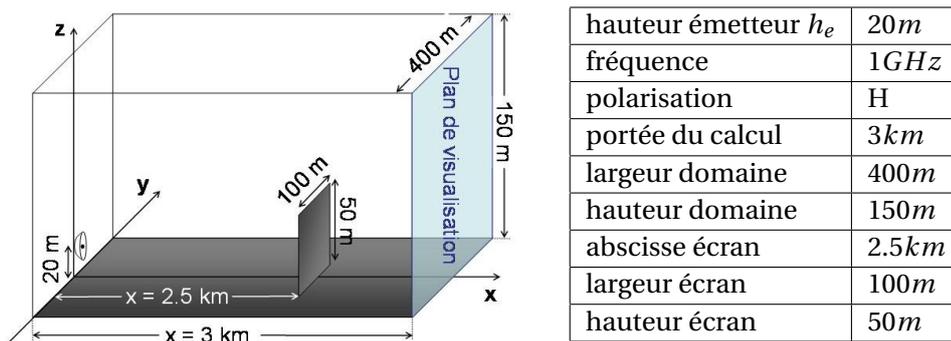


Figure 2.31 – Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'un écran et d'un sol par la méthode SSF.

La scène est constituée d'une antenne émettant à 1GHz en polarisation horizontale et dont le diagramme de rayonnement est omnidirectionnel. Celle-ci éclaire un écran métallique positionné à l'abscisse  $x = 2.5km$  et dont les dimensions sont 50m de haut par 100m de large, ce dernier étant placé au-dessus d'un sol métallique infini dans les dimensions  $x$  et  $y$ .

En premier lieu, nous présentons des coupes  $\langle yz \rangle$  du module du champ électrique au niveau de la portée du calcul, en  $x = 3km$ . L'emplacement de ces coupes dans le domaine de calcul est représenté par le parallélogramme turquoise sur la figure 2.31. Les composantes  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  sont représentées de gauche à droite sur la figure 2.32.

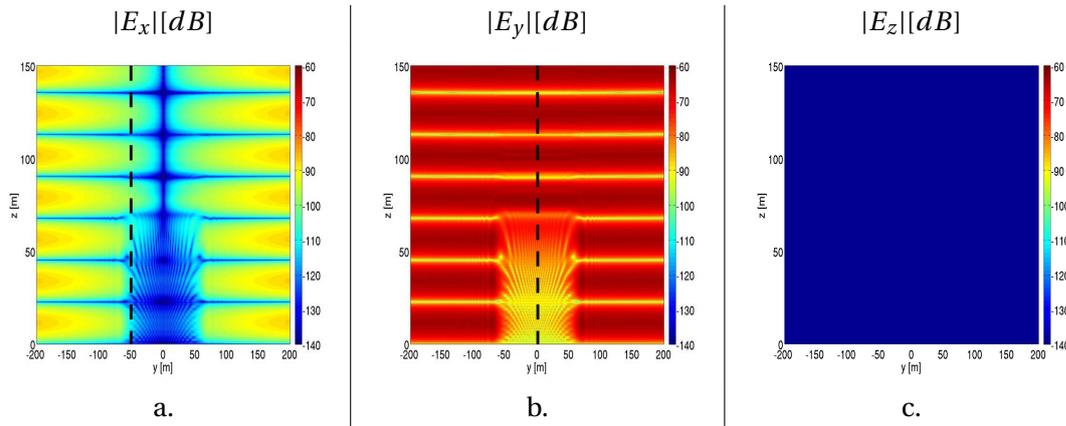
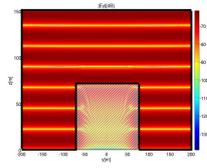


Figure 2.32 – Cartographies  $\langle yz \rangle$  du champ électrique issues d’un calcul par la méthode SSF en présence d’un écran et d’un sol.

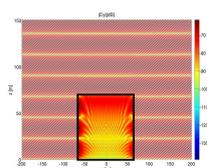
Les trois composantes du champ électrique ont été tracées suivant le même code de couleur, on peut donc remarquer la supériorité en amplitude de la composante  $E_y$  (figure b.) par rapport à celle de la composante  $E_x$  (figure a.). Quant à la composante  $E_z$  (figure c.), elle reste nulle tout au long de la propagation. Ceci se justifie par le fait que dans cette configuration, les conditions aux limites n’introduisent pas de couplage entre les composantes.

On s’intéresse maintenant aux phénomènes propagatifs entrant jeu dans cette configuration.



Hors de la zone d’ombre de la plaque, on retrouve les variations du champ électrique que l’on avait observées au-dessus d’un sol plan (cf. figure 2.10), avec notamment la figure d’interférences due à la recombinaison du champ direct et du champ réfléchi au sol. Dans ce cas, ceux-ci sont de périodicité  $22.5m$  conformément à la relation (2.49).

À cela vient s’ajouter l’effet de l’écran.



On constate ainsi une diminution du champ électrique dans la zone, non grisée sur la figure ci-contre, où l’antenne est masquée par l’écran. Dans cette zone, le champ n’est dû qu’aux diffractions par les trois arêtes de l’écran. De plus, on peut observer des interférences dans cette zone de masquage, celles-ci sont dues à la recombinaison entre eux des champs diffractés issus des trois arêtes mais également avec les champs diffractés réfléchis au sol.

Dans le cadre de cette modélisation SSF 3D, nous parlons de diffraction d’arête pour des raisons de clarté des explications. Ceci n’est pas exact car implicitement nous nous sommes placés dans une hypothèse similaire à celle de l’Optique Physique. En effet, nous remplaçons l’objet par un champ nul sans intégrer les perturbations liées aux effets de bords. Cependant cet abus de langage reste justifié par la taille des objets traités. Ainsi la perturbation de l’objet sur le champ est principalement liée aux effets de surface du masquage. Les effets de bords des arêtes restent par comparaison qualitativement très faibles. De plus, ils interviennent sur des lobes lointains, c’est à dire pour des zones angulaires qui dépassent le cône de validité imposé par la méthode SSF.

Pour valider tous ces phénomènes de réflexion et de diffraction, nous allons comparer les résultats issus de notre modèle avec ceux provenant du logiciel FERMAT. On compare ces deux modèles sur une coupe verticale : celle-ci est positionnée en  $y = 0m$  pour la comparaison de la composante majoritaire  $E_y$  (cf. pointillés figure 2.32b.), tandis qu'elle est placée en  $y = -50m$  pour la composante  $E_x$  (cf. pointillés figure 2.32a.), ceci afin d'éviter de réaliser cette dernière dans l'axe  $y = 0m$  où cette composante est théoriquement nulle.

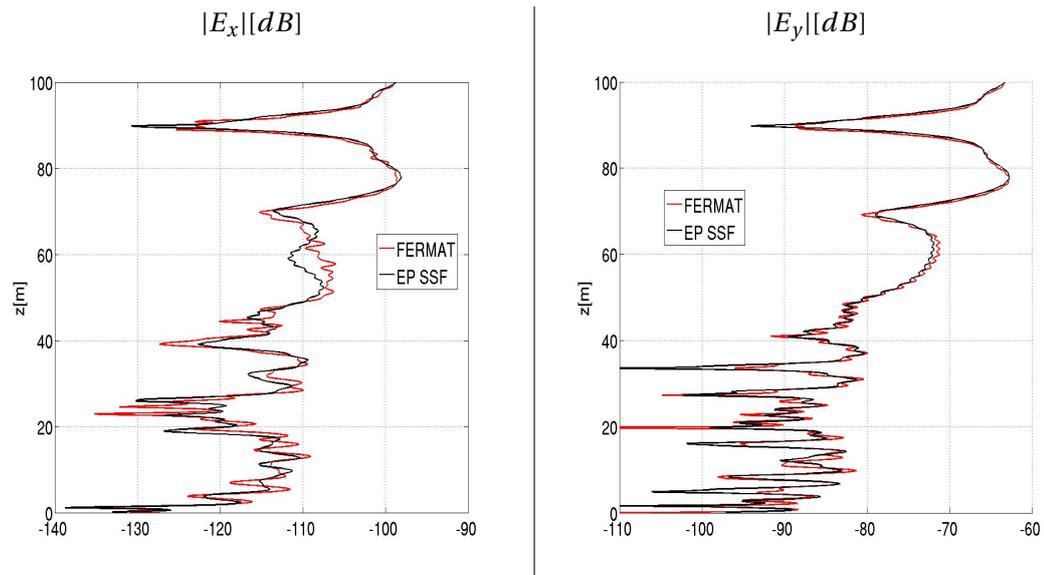
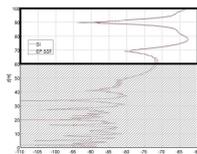


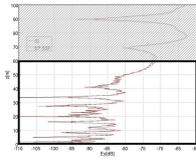
Figure 2.33 – Comparaisons entre la méthode SSF et le logiciel FERMAT dans le cas de la propagation en présence d'un écran et d'un sol.

Tout d'abord, on constate une très bonne concordance entre les deux méthodes. En effet, la position des lobes est très bien retranscrite et les différences que l'on peut observer sur les niveaux de champ n'excèdent pas quelques  $dB$  pour la composante  $E_x$  et seulement  $0.5dB$  pour la composante principale  $E_y$ . Ces faibles écarts peuvent être justifiés par les différences de méthodologie entre le logiciel FERMAT et la méthode Équation Parabolique 3D.

Le rayonnement du champ sur les comparaisons présentées (cf. figure 2.33) peut se décomposer en deux zones principales.



Sur la partie supérieure de ces coupes ( $z > 60m$ ), on retrouve la figure d'interférences due à la réflexion sur le sol plan. À ce champ vient s'ajouter le champ diffracté par les arêtes de l'écran, ce qui justifie la présence de petites interférences.



Sur la partie inférieure ( $z \leq 60m$ ), le champ est uniquement dû aux composantes diffractées par les trois arêtes de l'écran.

### III.4.2 Plaque inclinée

Le deuxième obstacle que nous allons considérer est une plaque inclinée métallique. Le cas test en question se décrit comme illustré par la figure 2.34 et se compose d'une antenne positionnée en  $x = 0m$ ,  $y = 25m$  et  $z = 0m$  émettant à  $1GHz$  en polarisation verticale et d'une plaque dont l'abscisse initiale est  $x = 500m$ , de taille  $20m$  par  $20m$  et d'inclinaison  $15^\circ$  par rapport au plan  $\langle x0z \rangle$ . La visualisation des résultats se fait  $100m$  au-delà de la plaque dans le plan turquoise représenté sur la configuration.

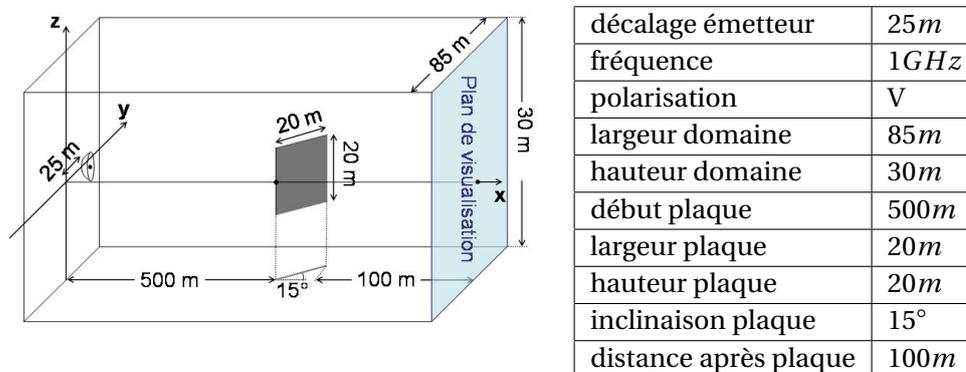


Figure 2.34 – Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'une plaque inclinée par la méthode SSF 3D.

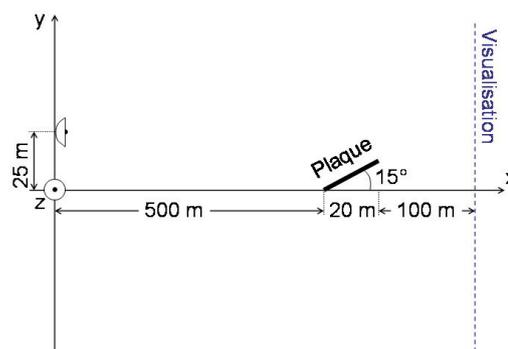


Figure 2.35 – Vue de dessus, plan  $\langle x0y \rangle$ , de la configuration de modélisation de la propagation par SSF 3D au-dessus d'une plaque (cf. figure 2.34).

## 68 Chapitre 2. Résolution de l'Équation Parabolique 3D par la méthode Split-Step Fourier

Pour faciliter la vision de ce cas test, une coupe  $\langle x0y \rangle$  (ou vue de dessus) est présentée sur la figure 2.35.

On se concentre sur la composante principale du champ électrique,  $E_z$ , issue de la modélisation de la propagation en présence de cet obstacle et on représente celle-ci sur la figure 2.36.

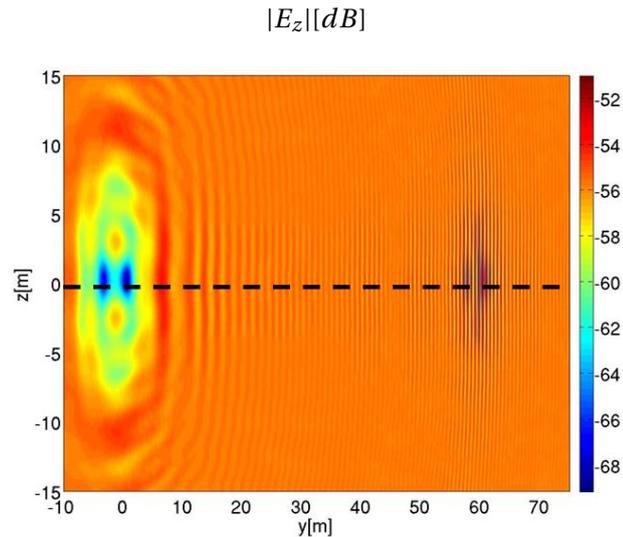
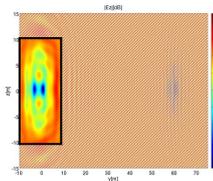
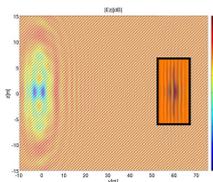


Figure 2.36 – Coupe  $\langle yz \rangle$  de la composante  $E_z$  du champ électrique issue de la modélisation de la propagation en présence d'une plaque inclinée par la méthode SSF.

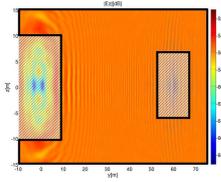
On peut distinguer plusieurs zones de rayonnement sur cette cartographie et nous allons détailler chacune d'entre elles.



Ainsi, dans la zone  $-10m < y < 10m$  et  $-10m < z < 10m$  mise en relief ci-contre, le champ électromagnétique présente une valeur très faible. Cela se justifie par le fait que dans cette zone l'antenne est masquée par la plaque, le champ présent n'est donc dû qu'à la recombinaison du champ diffracté par les arêtes de la plaque.



Dans la zone mise en relief ci-contre, définie par  $52m < y < 67m$  et  $-7.5m < z < 7.5m$ , le champ électrique présente une valeur élevée. Cela est dû au fait que dans cette zone, celui-ci est la recombinaison de trois champs : le champ incident, le champ diffracté par les arêtes de la plaque et le champ réfléchi sur celle-ci.



Partout ailleurs, le champ total est une recombinaison du champ incident et du champ diffracté par les quatre arêtes de la plaque.

Pour valider la modélisation de ce cas test, une comparaison entre notre modèle et le logiciel FERMAT est réalisée. Celle-ci s’effectue sur une horizontale de champ positionnée en  $z = 0m$  représentée par des pointillés sur la figure 2.36. Le résultat de cette comparaison est reporté sur la figure 2.37.

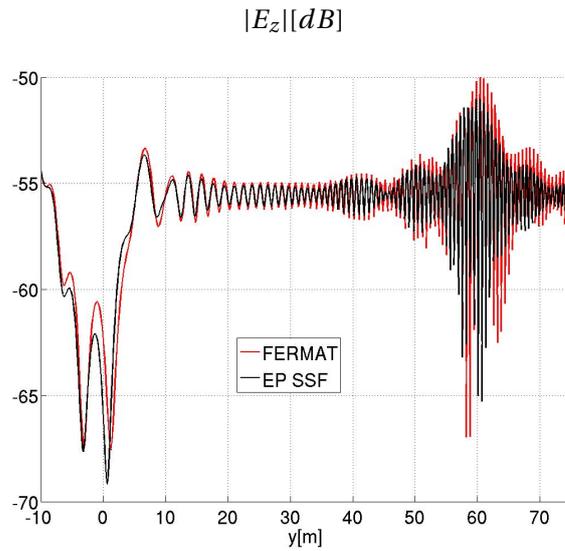
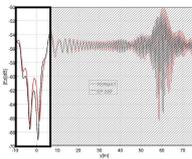
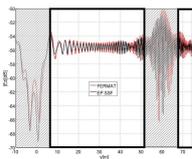


Figure 2.37 – Comparaisons entre la méthode SSF et le logiciel FERMAT dans le cas de la propagation en présence d’une plaque inclinée.

Sur cette figure, on retrouve les principales zones de rayonnement déjà décrites précédemment.



Pour les ordonnées comprises dans le domaine  $-10m \leq y \leq 10m$ , le champ est dû à la recombinaison des champs diffractés par les quatre arêtes de la plaque. On constate ici que l’on a une bonne concordance entre le modèle Équation Parabolique 3D et le logiciel FERMAT.



Pour les ordonnées comprises dans l’intervalle  $10m \leq y \leq 52m$  et pour  $y > 67m$ , le champ est ici la somme du champ incident et des champs diffractés par les arêtes de la plaque. On constate que la concordance est également très bonne dans cette zone.

Pour les ordonnées comprises entre  $52m$  et  $67m$ , le champ est la recombinaison de trois champs : le champ incident, le champ diffracté par les arêtes de la plaque et le champ réfléchi sur cette dernière. À première vue, la concordance semble convenable. Cependant, dans la mesure où nous sommes ici en présence d'une plaque présentant une inclinaison relativement élevée et compte tenu de l'étude de la modélisation de la réflexion en fonction de l'angle d'incidence réalisée précédemment (cf. figure 2.23), il est intéressant de s'attarder sur la modélisation de la réflexion. Ainsi, si l'on agrandit la visualisation de la partie où est présente l'onde réfléchie sur la plaque, on obtient la figure 2.38.

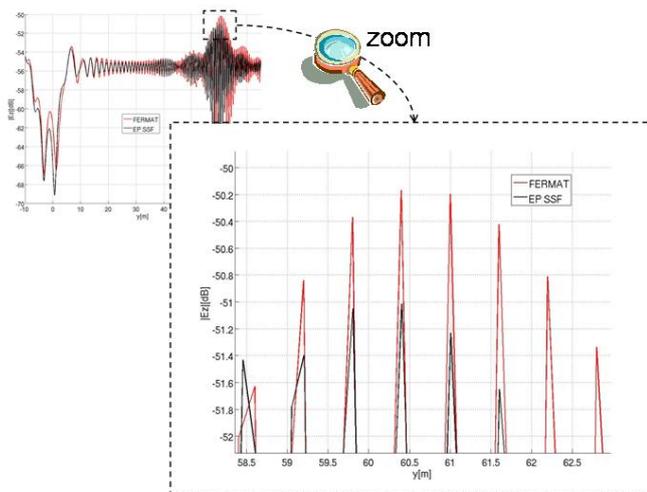
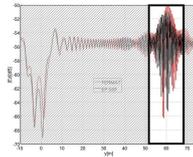


Figure 2.38 – Différences lors la modélisation de la réflexion entre le modèle SSF 3D et le logiciel FERMAT.

On peut voir sur le zoom réalisé, que le champ modélisé par résolution de l'Équation Parabolique présente un niveau inférieur de  $1dB$  en moyenne au modèle de référence. Ce niveau de champ plus faible est dû à la mauvaise modélisation de la réflexion. En effet, comme il a été vu lors de l'étude paramétrique réalisée précédemment (cf. figure 2.23), compte tenu de l'inclinaison de la plaque, la réflexion est correctement modélisée uniquement si l'on considère un pas de progression suffisamment fin. Ainsi, le cas présenté est le résultat optimal de la méthode SSF et les légères différences que l'on peut observer sont dues à une modélisation imparfaite de la réflexion.

## IV Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode de résolution de l'Équation Parabolique 3D selon l'algorithme de Split-Step Fourier a été présentée. Celle-ci est itérative et permet de propager vers l'avant

le champ électromagnétique ou les potentiels vecteurs à partir d'une distribution initiale connue. L'approximation paraxiale réalisée est de type grand angle et autorise à considérer un cône de validité de demi-angle au sommet théoriquement égal à  $45^\circ$ . Pour veiller à la bonne résolution de cet algorithme, des critères d'échantillonnage ont été proposés permettant de propager toutes les composantes présentes dans le cône de validité. Enfin, des conditions aux limites sous une approche spectrale proposée par R. Janaswamy ont été développées dans l'objectif d'une application à un environnement urbain.

Cette résolution de l'Équation Parabolique 3D a été testée sur différents cas. La réflexion a ainsi pu être validée lors de la modélisation de la propagation au-dessus d'un sol plan métallique en polarisation horizontale. En revanche, le cas test réalisé en polarisation verticale a permis de mettre en évidence l'incapacité de cette méthode à modéliser correctement la propagation d'un champ présentant une valeur non nulle au sol. C'est pourquoi nous nous sommes ensuite restreints à des cas métalliques en polarisation horizontale. De plus, nous avons mis en relief les difficultés de modélisation de la réflexion et la nécessité de considérer un pas de progression horizontal fin au détriment du temps du calcul. Un test de convergence a ainsi été réalisé pour montrer l'impact de l'incidence et de ce pas sur la modélisation de la réflexion.

Quant à la réfraction, elle est prise en compte via l'indice de réfraction et a été validée par la considération de deux différents types d'atmosphère : une atmosphère standard et en présence d'un conduit d'évaporation.

La diffraction est modélisée correctement comme on a pu le constater lors de l'application de la méthode en présence d'une plaque métallique perpendiculaire puis inclinée par rapport au sens de propagation.

Pour conclure, on peut affirmer que la méthode ici présentée est capable de modéliser les principaux phénomènes propagatifs 3D. Elle présente toutefois l'inconvénient majeur de prendre en compte des conditions aux limites incomplètes qui ne nous paraissent pas convenablement adaptées pour modéliser le couplage entre les composantes du champ lors de l'interaction de l'onde avec un obstacle quelconque. De plus, en deux dimensions la méthode SSF est l'approche la plus performante car elle permet l'utilisation de pas de progression en distance très supérieurs à la longueur d'onde et donc induit des temps de calcul bien plus courts que ceux obtenus par les approches Différences Finies. En 3D, nous avons constaté que le pas de progression doit être fin et ainsi le principal intérêt de la méthode SSF par rapport à une approche Différences Finies est remis en cause. De plus, l'utilisation de transformée de Fourier complète (contrairement au 2D où l'on utilise des transformées de Fourier en cosinus ou en sinus) ne permet pas de modéliser correctement la propagation d'un champ présentant une valeur non nulle au sol. Pour l'ensemble de ces raisons, une méthode de résolution de l'Équation Parabolique 3D plus performante a été recherchée et une approche Différences Finies a été développée.



## Chapitre 3

# Résolution de l'Équation Parabolique 3D par Différences Finies

### I Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons détaillé la résolution de l'Équation Parabolique 3D par l'algorithme de Split-Step Fourier ainsi que la prise en compte des conditions aux limites par une approche spectrale. Ces travaux ont été développés à partir de la publication de R. Janaswamy [25].

La seconde méthode classiquement utilisée pour résoudre l'Équation Parabolique bidimensionnelle est la méthode des Différences Finies. Celle-ci est basée sur une approximation locale des dérivées partielles présentes dans l'Équation Parabolique à l'aide de développements en série de Taylor. La discrétisation du problème revient alors à inverser un système matriciel. En deux dimensions, la résolution de l'Équation Parabolique par Split-Step Fourier est préférée dans la mesure où le pas de propagation en distance pouvant être utilisé est plus grand et permet d'accélérer la résolution [18]. Cependant, nous venons de voir qu'en trois dimensions la résolution de l'Équation Parabolique par Split-Step Fourier perd ses qualités de vitesse du fait de la modélisation des obstacles. Il apparaît alors intéressant de résoudre l'Équation Parabolique 3D par un algorithme de type Différences Finies.

Dans ce chapitre, il est donc fait état d'une résolution originale de l'Équation Parabolique 3D selon la méthodologie des Différences Finies. Nous détaillerons l'algorithme de propagation et les précautions à prendre pour que sa résolution soit correcte. Ensuite, nous considérerons l'introduction d'un relief et la prise en compte de la condition aux limites de Léontovich. Nous montrerons qu'en effectuant des approximations adaptées, il est possible de modéliser le couplage entre les composantes du champ en préservant l'efficacité de la méthode. Enfin ce chapitre sera conclu par plusieurs cas tests de validation.

## II Théorie

### II.1 Notions mathématiques pour les Différences Finies

Nous allons dans cette partie détailler les notions mathématiques [34] relatives à la discrétisation d'un problème par Différences Finies.

Soit une équation aux dérivées partielles quelconques  $L(f) = g$  où  $f$  est la fonction inconnue et  $x_1, x_2, \dots, x_N$  les variables. Cette équation est définie dans un domaine spatial  $\Omega$  à partir de l'abscisse initiale  $x_0$ . La possibilité de résoudre cette équation implique que soient connues des relations  $B(f) = h$  sur la frontière du domaine  $\Gamma$  (conditions aux limites), éventuellement des données pour  $f$  et certaines de ses dérivées à l'abscisse  $x_0$ . Cette équation est notée symboliquement :

$$\begin{cases} L(f) = g & \text{dans } \Omega \\ B(f) = h & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.1)$$

avec :  $g$  la condition à laquelle  $f$  doit satisfaire dans  $\Omega$ ,  
 $h$  la condition aux limites à appliquer sur  $\Gamma$ .

Sous forme discrétisée, ces équations seront notées :

$$\begin{cases} L_{\Delta}(f) = g & \text{dans } \Omega \\ B_{\Delta}(f) = h & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.2)$$

Les relations (3.2) sont obtenues à partir de (3.1) en remplaçant les dérivées qui y interviennent par des approximations discrètes aux différences. C'est pourquoi les méthodes de résolution de (3.2) sont appelées **méthodes aux différences finies**. L'opérateur  $L_{\Delta}$  est indifféremment appelé opérateur discret ou schéma de discrétisation, tandis que l'indice  $\Delta$  symbolise la discrétisation réalisée.

Avant d'admettre que la solution  $f_{\Delta}$  du schéma aux différences finies (3.2) est une approximation valable de la solution de  $f$ , il faut d'abord être certain que le schéma discrétisé représente correctement l'équation d'origine. Il faut ensuite que la méthode numérique adoptée pour résoudre (3.2) conduise à une solution de  $f_{\Delta}$  qui vérifie effectivement l'équation (3.2). Il convient enfin de s'assurer que cette solution  $f_{\Delta}$  est une approximation convenable de la solution exacte  $f$ .

Ces trois exigences sont celles de la représentativité du système discrétisé. On les nomme successivement :

- la consistance (ou cohérence) du schéma (3.2) avec l'équation d'origine (3.1),
- la stabilité de la résolution du schéma (3.2),
- la convergence de  $f_{\Delta}$  vers  $f$ .

L'objectif est maintenant d'appliquer cette discrétisation de type Différences Finies à l'Équation Parabolique que nous rappelons ici :

$$\left( \partial_x - j k_0 \sqrt{1+T} \right) C = 0 \quad (3.3)$$

avec :  $T = (\partial_y^2 + \partial_z^2) / k_0^2 + m^2 - 1$ .

La discrétisation des dérivées partielles étant basée sur un développement en série de Taylor, un rappel de ceux-ci est donné en annexe (cf. annexe D).

## II.2 Variables de résolution

On introduit les fonctions réduites  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  associées à la direction de propagation  $x$ , celles-ci sont définies à partir des champs électrique et magnétique de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) &= \mathbf{E}(x, y, z) e^{-jk_0x} \\ \mathbf{v}(x, y, z) &= \mathbf{H}(x, y, z) e^{-jk_0x} \end{aligned} \quad (3.4)$$

L'intérêt de l'utilisation de ces fonctions réduites est que leurs variations en fonction de la distance  $x$  sont plus lentes que celles du champ électromagnétique pour des angles voisins de la direction de propagation [38]. Ces définitions confèrent aux fonctions réduites des propriétés numériques intéressantes, notamment la possibilité de résoudre l'Équation Parabolique écrite sur ces fonctions avec des pas de progression en distance plus large. Cependant, l'introduction des fonctions réduites comme variables de l'Équation Parabolique entraîne une modification de la forme (3.3) qu'on lui connaît. Ainsi, si l'on considère l'exemple de la fonction réduite  $\mathbf{u}$ , les variations de celle-ci avec la distance  $x$  induisent un développement différent de la dérivée partielle suivant  $x$  :

$$\partial_x \mathbf{E} = (\partial_x + jk_0) \mathbf{u} e^{jk_0x} \quad (3.5)$$

L'Équation Parabolique s'écrit alors de la manière suivante :

$$\left[ \partial_x + jk_0 \left( 1 - \sqrt{1+T} \right) \right] \mathbf{u} = 0 \quad (3.6)$$

Dans la mesure où la résolution est équivalente sur l'une ou l'autre des deux fonctions réduites, nous prendrons tant que cela est possible l'unique exemple de la résolution sur la fonction  $\mathbf{u}$ .

## II.3 Schémas de propagation

Dans un premier temps, on s'intéresse aux discrétisations classiques d'une équation aux dérivées partielles. Il est alors nécessaire d'indiquer la fonction réduite selon les trois dimensions. On adopte la notation suivante :  $\mathbf{u}_l^{p,q}$  avec  $l$ ,  $p$  et  $q$  les indices associés respectivement aux dimensions  $x$ ,  $y$  et  $z$  (cf. figure 3.1).

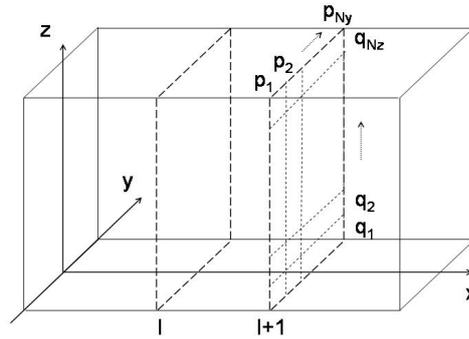


Figure 3.1 – Indices de discrétisation.

L'équation (3.6) devant être satisfaite en chaque point du domaine de calcul, la résolution de celle-ci sur l'intégralité du domaine revient à considérer une équation en chaque point. Pour le domaine de taille  $N_y$  par  $N_z$  points représenté sur la figure 3.1, cela correspond à  $N_y \times N_z$  équations. Pour résoudre l'ensemble de ces équations de façon optimale, il faut les mettre sous la forme d'un système matriciel. Pour cela, la fonction réduite inconnue  $u$  doit être ordonnée dans un vecteur. Ce dernier pris à l'abscisse  $l$  peut être représenté par le vecteur (3.7).

$$\mathcal{U}_l = \begin{bmatrix} u^{p_1, q_1} \\ u^{p_2, q_1} \\ u^{p_3, q_1} \\ \vdots \\ u^{p_{N_y}, q_1} \\ u^{p_1, q_2} \\ \vdots \\ u^{p_{N_y}, q_{N_z}} \end{bmatrix}_l \quad (3.7)$$

Il existe plusieurs discrétisations possibles de l'Équation Parabolique 3D (3.6) écrite sur la fonction réduite. Cependant avant d'être en mesure de résoudre celle-ci, il est nécessaire d'approximer la racine carrée qui y est présente. Afin de conserver une résolution aisée du problème, nous avons choisi de considérer une approximation au premier ordre de cette racine engendrant par conséquent un développement dit « petit angle ». Sous cette hypothèse, l'équation (3.6) se simplifie de la manière suivante :

$$\left\{ \partial_x - \frac{jk_0}{2} \left[ \frac{1}{k_0^2} (\partial_y^2 + \partial_z^2) + m^2 - 1 \right] \right\} \mathbf{u} = 0 \quad (3.8)$$

Rappelons que le but est ici de discrétiser cette équation entre l'abscisse d'indice  $l$  et l'abscisse d'indice  $l+1$ , ceci de manière à déduire la répartition de champ inconnue située à l'indice  $l+1$  à partir de la répartition connue à l'indice  $l$ .

### II.3.1 Schéma explicite

La discrétisation la plus simple envisageable pour l'équation (3.8) est le schéma explicite. Dans celui-ci, tous les termes sont discrétisés à l'abscisse d'indice  $l$ . Si l'on note  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  les pas de discrétisation adoptés dans les dimensions  $x$ ,  $y$  et  $z$ , une discrétisation autour du point  $u_l^{p,q}$  aboutit à :

$$\frac{u_{l+1}^{p,q} - u_l^{p,q}}{\Delta x} - \frac{jk_0}{2} \left[ \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{u_l^{p+1,q} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p-1,q}}{\Delta y^2} + \frac{u_l^{p,q+1} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p,q-1}}{\Delta z^2} \right) + (m^2 - 1) u_l^{p,q} \right] = 0 \quad (3.9)$$

Le point inconnu  $u_{l+1}^{p,q}$  est donc solution de l'équation :

$$u_{l+1}^{p,q} = \alpha_e u_l^{p,q} + \left[ r_y (u_l^{p+1,q} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p-1,q}) + r_z (u_l^{p,q+1} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p,q-1}) \right] \Delta x \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } \quad \alpha_e &= 1 + jk_0 \Delta x (m^2 - 1) / 2, \\ r_y &= \tau / \Delta y^2, \\ r_z &= \tau / \Delta z^2, \\ \tau &= j / 2k_0. \end{aligned}$$

Si l'on considère un domaine de calcul discrétisé sur trois lignes ( $N_z = 3$ ) et quatre colonnes ( $N_y = 4$ ), alors la résolution de l'équation (3.10) sur ce domaine se met sous la forme matricielle représentée dans le tableau 3.1, dans lequel tous les espaces laissés blanc correspondent à des valeurs nulles.

La première ligne du système correspond à la discrétisation de l'équation (3.10) autour du point  $u^{p_1, q_1}$ , la deuxième autour du point  $u^{p_2, q_1}$ , et ainsi de suite. Les  $N_y$  premières lignes correspondent donc à la discrétisation des points présents sur la première ligne du domaine de calcul ( $q = 1$ ). On fait de même pour les  $N_z$  lignes du domaine de calcul. Il en résulte que les matrices entrant en jeu dans la résolution de ce système sont de tailles  $[N_y \times N_z, N_y \times N_z]$ . Dans un souci de lisibilité, on note  $\mathcal{A}_y$  et  $\mathcal{A}_z$  les matrices tridiagonales issues respectivement des discrétisations des dérivées secondes en  $y$  et en  $z$  (cf. tableau 3.2).

La mise en forme du vecteur  $\mathcal{U}$  (3.7) fait que la matrice  $\mathcal{A}_y$  est tridiagonale alors que  $\mathcal{A}_z$  est tridiagonale par blocs. La forme de cette dernière résulte du fait que la discrétisation de la dérivée partielle suivant  $z$  en un point  $(p, q)$  nécessite les points sur les lignes précédente  $(p, q - 1)$  et suivante  $(p, q + 1)$  dans le maillage de discrétisation. Rappelons que les matrices  $\mathcal{A}_y$  et  $\mathcal{A}_z$  sont de formes tridiagonales car l'approximation paraxiale réalisée est de type petit angle, avec une approximation d'ordre plus élevée celles-ci auraient été plus « remplies ».

Le schéma explicite s'écrit alors selon l'équation matricielle suivante :

$$\mathcal{U}_{l+1} = [\alpha_e \mathcal{I} + (\mathcal{A}_y + \mathcal{A}_z) \Delta x] \mathcal{U}_l \quad (3.13)$$

avec :  $\mathcal{I}$  la matrice identité.

Le principal avantage de ce schéma explicite est qu'il est de résolution très aisée. En effet, l'obtention de  $\mathcal{U}_{l+1}$ , effectuée pour chaque composante  $(\mathcal{U}_x, \mathcal{U}_y, \mathcal{U}_z)$ , est immédiate et ne nécessite aucun calcul lourd (inversion, ...). On peut cependant lui reprocher de n'être stable





que sous condition et d'être peu précis (précision à l'ordre 1 en  $x$  et à l'ordre 2 en  $y$  et en  $z$ , cf. annexe E).

Notons qu'en fonction des pas de discrétisation en  $y$  et en  $z$  choisis, les nombres d'échantillons  $N_y$  et  $N_z$  peuvent devenir très importants et les matrices intervenant dans le calcul sont alors très coûteuses en espace mémoire.

### II.3.2 Schéma implicite pur

Le deuxième schéma étudié est le schéma implicite pur. Ce schéma diffère du schéma explicite par le fait que les dérivées transverses à la propagation sont exprimées non plus en l'indice  $l$  mais en l'indice  $l + 1$ . L'Équation Parabolique (3.8) se discrétise alors de la manière suivante :

$$\frac{u_{l+1}^{p,q} - u_l^{p,q}}{\Delta x} - \frac{jk_0}{2} \left[ \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{u_{l+1}^{p+1,q} - 2u_{l+1}^{p,q} + u_{l+1}^{p-1,q}}{\Delta y^2} + \frac{u_{l+1}^{p,q+1} - 2u_{l+1}^{p,q} + u_{l+1}^{p,q-1}}{\Delta z^2} \right) + (m^2 - 1)u_{l+1}^{p,q} \right] = 0 \quad (3.14)$$

Matriciellement, ce schéma s'écrit :

$$[\alpha_i \mathcal{I} - (\mathcal{A}_y + \mathcal{A}_z) \Delta x] \mathcal{U}_{l+1} = \mathcal{U}_l \quad (3.15)$$

avec :  $\alpha_i = 1 - jk_0 \Delta x (m^2 - 1) / 2$ .

On s'aperçoit que la résolution de ce schéma est beaucoup plus difficile que celle du précédent. En effet, pour connaître  $\mathcal{U}_{l+1}$  il faut inverser la matrice  $[\alpha_i \mathcal{I} - (\mathcal{A}_y + \mathcal{A}_z) \Delta x]$ . Or celle-ci dépend de la somme de  $\mathcal{A}_y$  et  $\mathcal{A}_z$  : c'est donc une matrice pentadiagonale. Cette inversion est possible [53, 34] mais elle requiert un long temps de calcul et une place mémoire conséquente.

Néanmoins, ce schéma est avantageux dans la mesure où sa stabilité est inconditionnelle, tout en conservant une précision équivalente à celle du schéma explicite (cf. annexe E).

### II.3.3 Schéma implicite mixte

On vient de voir que le schéma implicite pur permet une stabilité inconditionnelle, mais sa précision reste la même que celle du schéma explicite. On montre qu'il est possible d'augmenter la précision dans la dimension  $x$  en pondérant ces deux schémas pour n'en faire plus qu'un : le schéma implicite mixte.

$$\{(1 - \theta) + \theta [\alpha_i \mathcal{I} - (\mathcal{A}_y + \mathcal{A}_z) \Delta x]\} \mathcal{U}_{l+1} = \{\theta + (1 - \theta) [\alpha_e \mathcal{I} + (\mathcal{A}_y + \mathcal{A}_z) \Delta x]\} \mathcal{U}_l \quad (3.16)$$

avec :  $\theta$  le coefficient de pondération.

Dans la pratique, le choix de  $\theta = \frac{1}{2}$  est habituellement adopté [34]. Le schéma implicite mixte se réduit alors à la forme matricielle suivante :

$$(\beta \mathcal{I} - \mathbb{B} \Delta x) \mathcal{U}_{l+1} = (\gamma \mathcal{I} + \mathbb{A} \Delta x) \mathcal{U}_l \quad (3.17)$$

avec :  $\beta = (\alpha_i + 1) / 2$  ,  
 $\gamma = (\alpha_e + 1) / 2$  ,  
 $\mathbb{B} = (\mathcal{A}_y + \mathcal{A}_z) / 2$  ,  
 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_y + \mathcal{A}_z) / 2$  .

Ce schéma implicite mixte, établi selon une pondération des schémas explicite et implicite pur, tire profit de ce dernier en étant inconditionnellement stable. De plus, il est avantageux par rapport aux deux schémas précédents dans la mesure où il est précis à l'ordre 2 dans les trois dimensions (cf. annexe E).

Toutefois, la résolution de ce système nécessite toujours l'inversion d'une matrice pentadiagonale. Cette résolution demande un temps de calcul long et un espace mémoire conséquent. Mais, ces qualités conjointes de stabilité et de précision font de lui le schéma le plus avantageux. C'est donc lui que nous allons chercher à résoudre tout en cherchant une solution alternative permettant d'accélérer le temps de calcul.

**II.3.4 Méthode à pas fractionnaires**

Pour remédier à une résolution directe du schéma implicite mixte, il est ici proposé d'utiliser la méthode à pas fractionnaires. Celle-ci a été introduite en 1955 par MM. Peaceman et Rachford Jr. Son but est de modifier le schéma initial de façon à remplacer sa résolution difficile, ou impossible (à cause de la limitation en place mémoire des calculateurs par exemple), par plusieurs résolutions intermédiaires plus aisées.

Le principe est de scinder en plusieurs itérations la résolution de l'équation sur l'intervalle  $[l\Delta x, (l + 1)\Delta x]$ . On définit donc  $N$  pas intermédiaires auxquels on associe les équations :

$$(\beta \mathcal{I} - \mathbb{B}_k \Delta x_k) \mathcal{U}_{l+\frac{k}{N}} = (\gamma \mathcal{I} + \mathbb{A}_k \Delta x_k) \mathcal{U}_{l+\frac{k-1}{N}} \tag{3.18}$$

avec :  $k \in \mathbb{N}^*$  l'indice du pas intermédiaire considéré,  
 $\Delta x_k = \Delta x / N$  le pas intermédiaire considéré.

Les matrices  $\mathbb{B}_k$  et  $\mathbb{A}_k$  sont choisies en fonction de la consistance, de la stabilité et de la facilité de résolution. En raison de la notation fractionnaire des pas intermédiaires, on nomme la méthode : **méthode à pas fractionnaires**.

La méthode à pas fractionnaires que nous avons choisi de développer est la méthode à pas fractionnaires réels. Elle assure la consistance pour chaque pas intermédiaire avec le schéma qu'elle représente, celle-ci peut être illustrée par la figure 3.2.

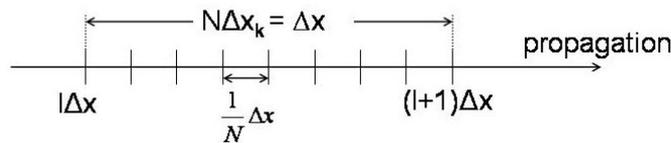


Figure 3.2 – Schématisation de la méthode à pas fractionnaires réels.

Cette méthode ne peut être utilisée de façon simple en dehors du choix  $N = 2$ , ce qui se rapproche de la méthode de Crank-Nicholson [12]. Sous ces conditions, l'équation (3.18) s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} (\beta \mathcal{F} - \mathcal{A}_y \frac{\Delta x}{2}) \mathcal{U}_{l+\frac{1}{2}} = (\gamma \mathcal{F} + \mathcal{A}_z \frac{\Delta x}{2}) \mathcal{U}_l \\ (\beta \mathcal{F} - \mathcal{A}_z \frac{\Delta x}{2}) \mathcal{U}_{l+1} = (\gamma \mathcal{F} + \mathcal{A}_y \frac{\Delta x}{2}) \mathcal{U}_{l+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (3.19)$$

On remarque que le premier demi-pas est implicite en  $y$  et explicite en  $z$ , c'est à dire que la discrétisation de la dérivée seconde en  $y$  se fait sur la répartition de champ inconnue tandis que la discrétisation de la dérivée seconde en  $z$  se fait sur la répartition de champ connue. À l'inverse, le second demi-pas est explicite en  $y$  et implicite en  $z$ . D'où le nom de **directions alternées** donné à la méthode.

La propriété importante que doit vérifier cette méthode est la consistance. En effet, on substitue la résolution du schéma implicite mixte par celle des pas fractionnaires. Il faut donc que la méthode à pas fractionnaires soit consistante avec le schéma implicite mixte, c'est à dire que les deux méthodes représentent bien le même problème. Pour s'assurer de cette propriété, il faut veiller à ce que les erreurs dues à l'utilisation d'une méthode à pas fractionnaires soient le plus faibles possibles. On peut distinguer deux types d'erreur :

- l'erreur de troncature entre l'équation d'origine (3.8) et le schéma en pas entier (3.17),
- l'erreur d'éclatement entre le schéma en pas entier (3.17) et le schéma à pas fractionnaires (3.19).

De très nombreuses études ont été réalisées relativement à ces erreurs [44, 21]. Intéressons nous plus particulièrement à l'erreur de troncature, car l'étude de celle-ci (cf. annexe F) permet d'aboutir à un critère entre les différents pas de discrétisation minimisant l'erreur réalisée. Les critères obtenus sont les suivants :

$$\begin{cases} \tau \Delta x - \Delta y^2 / 6 = 0 \\ \tau \Delta x - \Delta z^2 / 6 = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

La satisfaction de ces critères permet d'assurer la consistance de la méthode et donc permet d'affirmer que la résolution de la méthode à pas fractionnaires est équivalente à celle de l'Équation Parabolique d'origine. Afin d'illustrer l'importance de ces relations de consistance (3.20), nous allons considérer la propagation d'une onde électromagnétique en espace libre selon la configuration représentée par la figure 3.3, identique à la configuration du chapitre précédent.

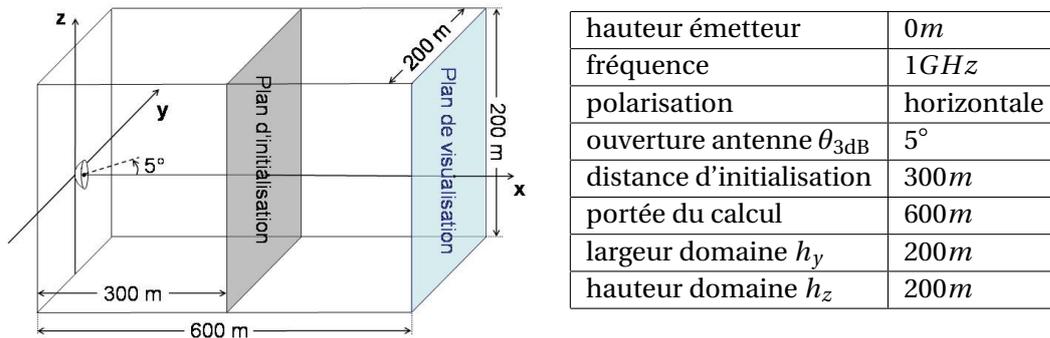


Figure 3.3 – Configuration de calcul en espace libre pour la visualisation des effets de la consistance sur la propagation par la méthode DF à pas fractionnaires.

Dans un premier temps, on considère des pas de discrétisations satisfaisant les relations de consistance, soit par exemple :

$\Delta x$	$2\lambda$	<b>Consistance assurée</b>
$\Delta y$	$\lambda$	
$\Delta z$	$\lambda$	

On représente alors sur la figure 3.4 les trois composantes du champ électrique obtenues.

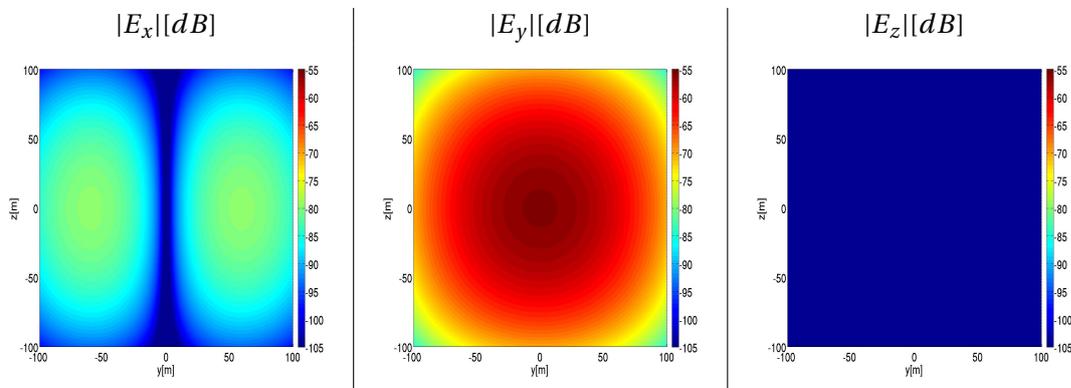


Figure 3.4 – Composantes du champ électrique modélisées par la méthode DF en espace libre satisfaisant les relations de consistance.

On retrouve les résultats corrects obtenus au chapitre précédent.

Si dans un second temps, on considère des pas de discrétisations ne satisfaisant pas les relations de consistance, soit par exemple :

$\Delta x$	$2\lambda$	<b>Consistance non assurée</b>
$\Delta y$	$3\lambda$	
$\Delta z$	$3\lambda$	

On obtient les cartographies du champ électrique représentée sur la figure (3.5).

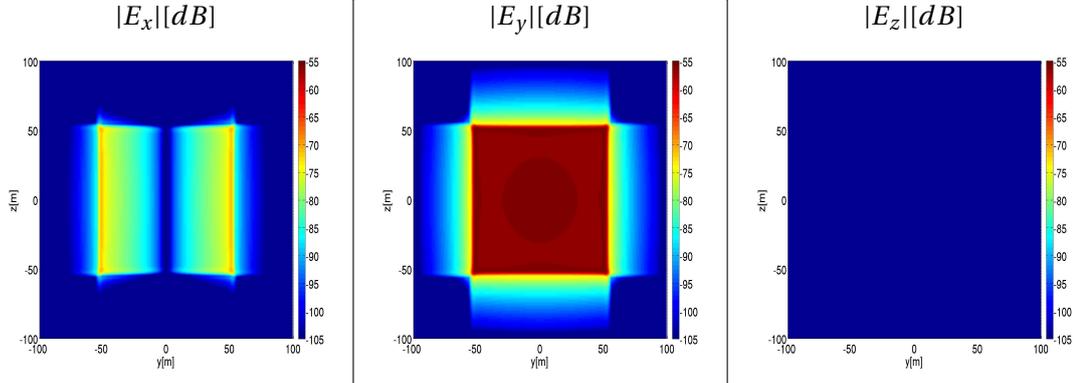


Figure 3.5 – Composantes du champ électrique modélisées par la méthode DF en espace libre ne satisfaisant pas les relations de consistance.

On constate dans ce cas que la propagation est mal modélisée. Il apparaît donc impératif de satisfaire les relations de consistance et nous nous assurerons que les pas d'échantillonnage vérifient celles-ci pour tous les cas que nous considérerons par la suite.

On peut remarquer que la résolution du système (3.19) nécessite au premier demi-pas l'inversion de la matrice  $\mathcal{A}_y$  tridiagonale, tandis qu'au second demi-pas, elle requiert l'inversion de la matrice  $\mathcal{A}_z$  tridiagonale par bloc. Pour simplifier son inversion, le système traduisant le second demi-pas peut être réécrit sous la forme d'un système tridiagonal [49]. Cela se fait en réordonnant les vecteurs présents au second demi pas,  $\mathcal{U}_{l+\frac{1}{2}}$  et  $\mathcal{U}_{l+1}$ , non plus ligne par ligne mais colonne par colonne comme présenté à l'équation (3.21). De cette manière, la résolution des deux demi-pas est équivalente à l'inversion d'un système tridiagonal et est par conséquent plus aisée.

$$\mathcal{U}_{l_i} = \begin{bmatrix} u^{p_1, q_1} \\ u^{p_1, q_2} \\ u^{p_1, q_3} \\ \vdots \\ u^{p_1, q_{nz}} \\ u^{p_2, q_1} \\ \vdots \\ u^{p_{ny}, q_{nz}} \end{bmatrix}_{l_i} \quad \text{avec } l_i = l + \frac{1}{2} \text{ ou } l + 1 \quad (3.21)$$

### II.3.5 Synthèse

Le cheminement naturel nous a amené à résoudre l'Équation Parabolique tridimensionnelle par Différences Finies à l'aide d'un schéma implicite mixte, ceci pour assurer le meilleur compromis stabilité/précision. Bien que la propagation dans l'atmosphère n'induisse pas de couplage entre composantes et que la résolution puisse être réalisée composante par composante, une telle résolution s'avère très lourde en trois dimensions en termes de temps de calcul et d'espace mémoire utilisé. Pour contourner ce problème, la méthode à pas fractionnaires réels a été développée. Le but de cette dernière est de modifier le schéma initial de résolution difficile par plusieurs résolutions intermédiaires plus aisées, le principe étant ici de scinder en deux le pas de progression  $\Delta x$  considéré.

Une illustration possible pour chacun des différents schémas de discrétisation présentés est proposée sur la figure 3.6, sur laquelle nous avons utilisé le code couleur suivant :

●	Point inconnu recherché
●	Point connu
●	Point inconnu mais non recherché

Ainsi, on peut distinguer les caractéristiques des différents schémas de propagation :

- le *schéma explicite* permet d'exprimer la valeur du champ en un point à l'abscisse d'indice  $l + 1$  à partir de cinq points à l'abscisse d'indice  $l$ ,
- le *schéma implicite* permet lui de déduire la valeur du point  $u_{l+1}^{p,q}$  à partir de la connaissance d'un point à l'abscisse d'indice  $l$  et de quatre points à l'abscisse d'indice  $l + 1$ ,
- le *schéma implicite mixte* étant une pondération des deux schémas précédents, il apporte la connaissance d'un point à l'abscisse d'indice  $l + 1$  à partir de cinq points à l'abscisse d'indice  $l$  et de quatre points à l'abscisse d'indice  $l + 1$ ,
- quant à la *méthode à pas fractionnaires*, elle permet d'obtenir un point à chaque demi-pas en fonction de trois points du demi-pas précédent et de deux points au demi-pas du point recherché, ceci en propageant successivement dans les dimensions  $y$  et  $z$ .

## II.4 Introduction d'un relief

Une résolution de l'Équation Parabolique 3D par Différences Finies basée sur une méthode à pas fractionnaires a donc été élaborée. Elle permet de calculer la propagation des ondes dans l'atmosphère. Cependant il reste à introduire une condition limite au sol dans la résolution. Comme pour la résolution SSF, c'est la condition aux limites de Léontovich qui est appliquée. Rappelons qu'elle peut être exprimée sur le champ électrique selon :

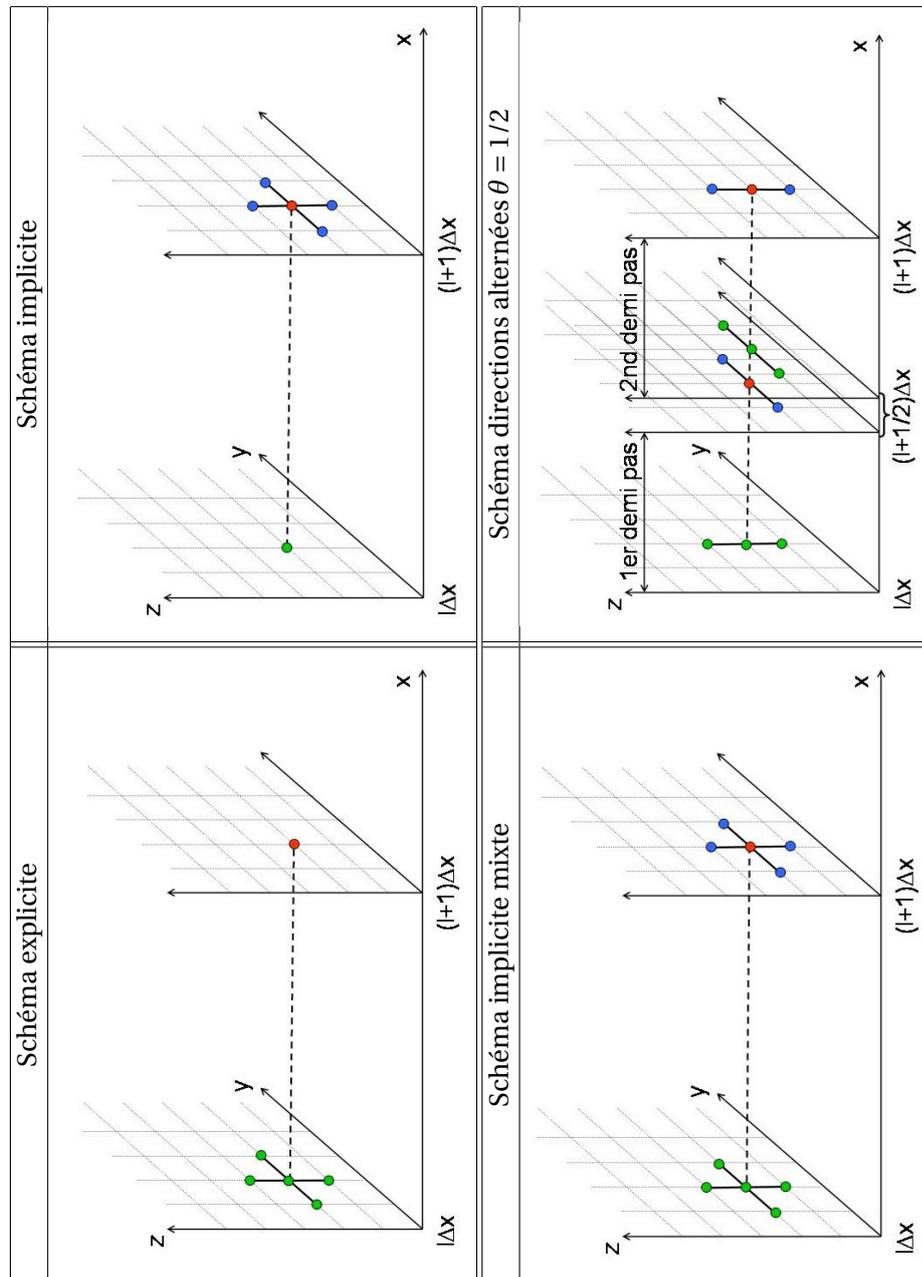


Figure 3.6 – Illustrations des différents schémas de discrétisation par Différences Finies.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} n_y E_z - n_z E_y \\ n_z E_x - n_x E_z \\ n_x E_y - n_y E_x \end{vmatrix} &= \frac{Z}{j\omega\mu_0} \begin{vmatrix} n_y [n_x (\partial_z E_x - \partial_x E_z) - n_y (\partial_y E_z - \partial_z E_y)] \\ n_z [n_y (\partial_x E_y - \partial_y E_x) - n_z (\partial_z E_x - \partial_x E_z)] \\ n_x [n_z (\partial_y E_z - \partial_z E_y) - n_x (\partial_x E_y - \partial_y E_x)] \end{vmatrix} \\ &\quad - \begin{vmatrix} n_z [n_z (\partial_y E_z - \partial_z E_y) - n_x (\partial_x E_y - \partial_y E_x)] \\ n_x [n_x (\partial_z E_x - \partial_x E_z) - n_y (\partial_y E_z - \partial_z E_y)] \\ n_y [n_y (\partial_x E_y - \partial_y E_x) - n_z (\partial_z E_x - \partial_x E_z)] \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ou sur le champ magnétique suivant :

$$\begin{vmatrix} n_y [\partial_x H_y - \partial_y H_x] - n_z [\partial_z H_x - \partial_x H_z] \\ n_z [\partial_y H_z - \partial_z H_y] - n_x [\partial_x H_y - \partial_y H_x] \\ n_x [\partial_z H_x - \partial_x H_z] - n_y [\partial_y H_z - \partial_z H_y] \end{vmatrix} = -Zj\omega\epsilon_0 \begin{vmatrix} n_y [n_x H_y - n_y H_x] - n_z [n_z H_x - n_x H_z] \\ n_z [n_y H_z - n_z H_y] - n_x [n_x H_y - n_y H_x] \\ n_x [n_z H_x - n_x H_z] - n_y [n_y H_z - n_z H_y] \end{vmatrix} \quad (3.23)$$

Ces expressions couplent toutes les composantes du champ électromagnétique et une résolution considérant toutes celles-ci à la fois en découle. Pour une formulation Différences Finies cela induit d'inverser une matrice non tridiagonale de grande taille. Une telle résolution paraît possible mais très lourde.

Cependant nous verrons que la discrétisation par Différences Finies permet l'application des conditions limites exactes (3.22) et (3.23) sur les points au sol. En revanche pour les points au-dessus du sol, il n'est pas possible de l'introduire telle quelle dans l'inversion sans alourdir la résolution. Ainsi les paragraphes suivants portent sur la modélisation de l'influence des conditions aux limites dans le calcul du champ aux points au-dessus du sol. Pour conserver une méthode efficace, l'idée est de simplifier ces expressions pour le calcul des points au-dessus du sol en traitant chaque composante de manière optimale tout en conservant sa forme tridiagonale au schéma matriciel.

Pour plus de clarté, la démarche est exposée sur une surface métallique dans le paragraphe suivant, puis pour une surface diélectrique.

#### II.4.1 Conditions aux limites réduites sur une surface métallique

Les conditions aux limites sur une surface métallique s'obtiennent à partir des systèmes (3.22) et (3.23) en prenant une impédance nulle. Ainsi pour le champ électrique on obtient :

$$\begin{vmatrix} n_y E_z - n_z E_y \\ n_z E_x - n_x E_z \\ n_x E_y - n_y E_x \end{vmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

On observe que dans ces expressions toutes les composantes sont couplées. Nous proposons de négliger ce couplage, soit une condition limite réduite ne considérant que l'influence d'une composante sur elle-même. Cela ramène le système (3.24) aux trois couples d'équations suivants :

$$\begin{vmatrix} n_y E_x = 0 \\ n_z E_x = 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} n_x E_y = 0 \\ n_z E_y = 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} n_x E_z = 0 \\ n_y E_z = 0 \end{vmatrix} \quad (3.25)$$

Ces relations de type Dirichlet sont d'autant plus vraies que les composantes sont tangentes à la surface, soit en choisissant les équations faisant apparaître la composante principale de la normale. Par exemple en présence d'une surface horizontale, la normale est orientée suivant  $z$  et parmi les six équations (3.25) nous choisisons :

$$\begin{cases} n_z E_x \\ n_z E_y \end{cases} = 0 \quad (3.26)$$

qui correspondent à la condition limite de Dirichlet. On remarque que dans ce cas particulier les équations portant sur  $E_z$  sont indéterminées. On ne peut donc pas calculer  $E_z$ .

Ce problème se retrouve à chaque fois que deux composantes de la normale sont nulles.

Toujours sur ce cas particulier, notre objectif est de trouver une nouvelle équation permettant l'obtention de la composante normale  $E_z$ . Pour résoudre ce problème on fait classiquement appel à la condition aux limites de Neumann qui s'exprime pour une surface horizontale selon :

$$\begin{cases} \partial_z H_x \\ \partial_z H_y \end{cases} = 0 \quad (3.27)$$

L'idée est d'introduire cette condition aux limites dans l'expression de  $E_z$ . Suivant les équations de Maxwell,  $E_z$  s'exprime en fonction du champ magnétique selon :

$$E_z = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0} (\partial_y H_x - \partial_x H_y) \quad (3.28)$$

Si on dérive suivant  $z$  :

$$\partial_z E_z = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0} [\partial_z (\partial_y H_x) - \partial_z (\partial_x H_y)] \quad (3.29)$$

On peut alors permuter les dérivées :

$$\partial_z E_z = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0} [\partial_y (\partial_z H_x) - \partial_x (\partial_z H_y)] \quad (3.30)$$

En introduisant (3.27) dans cette dernière expression, on obtient la condition recherchée sur  $E_z$  :

$$\partial_z E_z = 0 \quad (3.31)$$

Remarquons que cette condition traduit un maximum de  $E_z$  au niveau de la surface ce qui se vérifie pour une polarisation verticale sur un métal.

Ainsi en tenant compte de nos hypothèses, les conditions aux limites à appliquer sur les trois composantes sont :

$$\begin{cases} n_z E_x \\ n_z E_y \\ \partial_z E_z \end{cases} = 0 \quad (3.32)$$

Nous appliquerons ces relations tant que  $n_z$  est la composante principale de la normale. Si la composante principale est suivant  $n_x$  ou  $n_y$  il faut permuter de manière cohérente les indices de ces équations.

Ces approximations permettent d'appliquer la condition de Dirichlet sur les composantes majoritairement tangentielles et la condition de Neumann sur la composante majoritairement normale.

#### II.4.2 Conditions aux limites réduites sur une surface diélectrique

Nous adoptons la même démarche pour le cas plus général d'une surface caractérisée par son impédance  $Z$  et de normale principalement suivant  $z$ . Comme démontré en annexe G nous obtenons :

$$\begin{cases} n_z E_x \\ n_z E_y \\ \partial_z E_z \end{cases} = Z \begin{cases} -\frac{1}{j\omega\mu_0} \left[ (n_x^2 + n_z^2) \partial_z E_x + n_x n_y \partial_y E_x \right] \\ -\frac{1}{j\omega\mu_0} \left[ (n_y^2 + n_z^2) \partial_z E_y + n_x n_z \partial_x E_y \right] \\ -j\omega\epsilon_0 n_z E_z \end{cases} \quad (3.33)$$

Ce système peut également être résolu composante par composante, et après discrétisation des dérivées par pas alternés les matrices à inverser seront tridiagonales.

Nous rappelons que aussi bien sur le cas métallique que diélectrique, les approximations faites ne portent que sur l'influence des conditions aux limites pour le calcul du champ aux points au-dessus du sol. Les conditions aux limites de Léontovitch complètes tenant compte du couplage entre les composantes seront appliquées sur les points au sol.

#### II.4.3 Intégration des conditions aux limites réduites dans le schéma matriciel

Il ne faut pas oublier que la résolution de l'Équation Parabolique a été réalisée sur la fonction réduite  $\mathbf{u}$ . Par conséquent il faut exprimer la condition aux limites (3.33) sur cette variable. On obtient :

$$\begin{cases} n_z u_x \\ n_z u_y \\ \partial_z u_z \end{cases} = Z \begin{cases} -\frac{1}{j\omega\mu_0} \left[ (n_x^2 + n_y^2) \partial_z u_x + n_x n_y \partial_y u_x \right] \\ -\frac{1}{j\omega\mu_0} \left[ (n_y^2 + n_z^2) \partial_z u_y + n_z n_x (\partial_x u_y + jk_0 u_y) \right] \\ -j\omega\epsilon_0 n_z u_z \end{cases} \quad (3.34)$$

Rappelons que le souhait d'introduire la condition aux limites dans le schéma matriciel de propagation (3.19) se justifie par le fait que cela permet de propager implicitement celle-ci lors de la résolution du système composante par composante. Cette introduction reste partielle puisque c'est une condition aux limites simplifiée qui est incorporée à la résolution. La condition aux limites complète est quant à elle appliquée au sol à chaque itération après propagation.

Par définition la condition aux limites s'applique à l'interface de l'obstacle considéré. L'idée est donc de discrétiser son expression afin d'obtenir la valeur des points au sol en fonction de celle des points situés dans l'atmosphère. L'expression ainsi obtenue permet d'éliminer les points au sol du système matriciel ce qui aura effectivement pour conséquence de propager

implicitement la condition aux limites lors de l'inversion de celui-ci.

La propagation se faisant toujours selon la méthode à pas fractionnaires, la discrétisation des dérivées partielles au premier demi-pas fait apparaître le point au sol (représenté par un carré sur la figure 3.7) sur la répartition de champ connu à l'abscisse d'indice  $l$ .

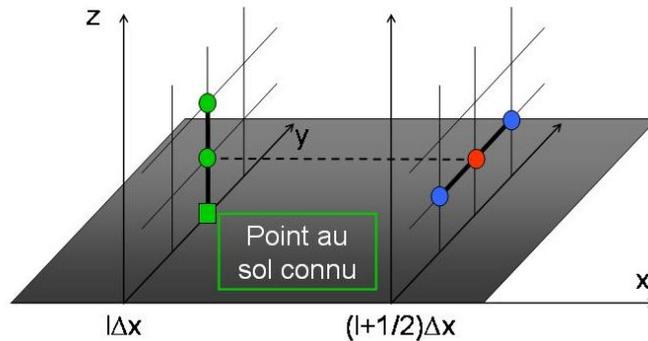


Figure 3.7 – Intégration des conditions aux limites au premier demi-pas

Par contre, au second demi-pas, la discrétisation des dérivées partielles fait apparaître le point au sol inconnu à l'abscisse d'indice  $l + 1$  (cf. figure 3.8).

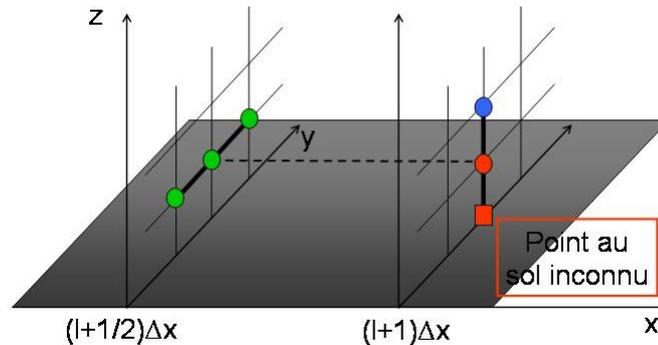


Figure 3.8 – Intégration des conditions aux limites au second demi-pas

Afin de tenir compte de ce point au sol sans qu'il apparaisse directement dans le calcul, il est nécessaire de substituer ce point dans le calcul (cf. figure 3.9).

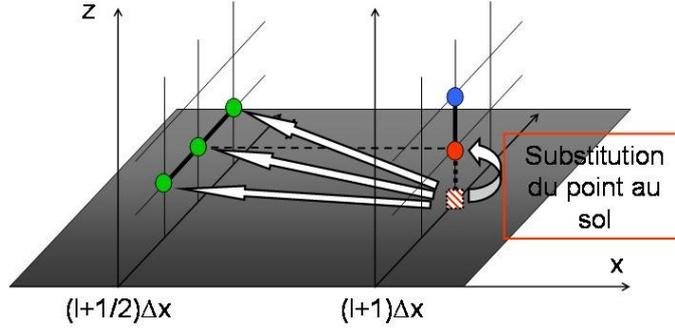


Figure 3.9 – Substitution du point au sol au second demi-pas

Cette substitution se fait par l'intermédiaire de la condition aux limites. Ainsi, si l'on prend l'exemple de la polarisation horizontale, il faut discrétiser le système d'équations (3.33) au second demi-pas pour obtenir une expression du point au sol. Si l'on considère la composante  $u_x$  de la fonction réduite associée au champ électrique  $E_x$ , sa discrétisation au voisinage du sol aboutit à :

$$n_z u_{x_{l+1}}^{p,q0} = -\frac{Z}{j\omega\mu_0} \left[ (n_x^2 + n_z^2) \frac{u_{x_{l+1}}^{p,q1} - u_{x_{l+1}}^{p,q0}}{\Delta z} + n_x n_y \frac{u_{x_{l+1/2}}^{p-1,q1} - 2u_{x_{l+1/2}}^{p,q1} + u_{x_{l+1/2}}^{p+1,q1}}{\Delta y^2} \right] \quad (3.35)$$

avec :  $u_{x_{l+1}}^{p,q0}$  le point au sol inconnu de la verticale définie en  $y = p$ ,  
 $u_{x_{l+1}}^{p,q1}$  le point inconnu situé juste au-dessus du point  $u_{x_{l+1}}^{p,q0}$  sur la même verticale,  
 $u_{x_{l+1/2}}$  les points connus à l'abscisse d'indice  $l + 1/2$ .

On choisit de noter l'équation précédente de la manière suivante :

$$u_{x_{l+1}}^{p,q0} = \kappa_x u_{x_{l+1}}^{p,q1} + \kappa'_x u_{x_{l+1/2}} \quad (3.36)$$

avec :  $\kappa_x = [\mathcal{Z}(n_x^2 + n_z^2)] / [n_z \Delta z + \mathcal{Z}(n_x^2 + n_z^2)]$ ,  
 $\kappa'_x u_{x_{l+1/2}} = [\mathcal{Z} \Delta z n_x n_y (u_{x_{l+1/2}}^{p-1,q1} - 2u_{x_{l+1/2}}^{p,q1} + u_{x_{l+1/2}}^{p+1,q1}) / \Delta y^2] / [n_z \Delta z + \mathcal{Z}(n_x^2 + n_z^2)]$ ,  
 $\mathcal{Z} = -Z / (j\omega\mu_0)$ .

Cette expression du point au sol (3.36) est ensuite introduite dans l'équation de propagation. En atmosphère homogène, l'Équation Parabolique s'en trouve modifiée au voisinage du sol de la manière suivante :

$$\frac{\beta u_{x_{l+1}}^{p,q1} - \gamma u_{x_{l+1/2}}^{p,q1}}{\Delta x/2} = \tau \left( \frac{u_{x_{l+1/2}}^{p+1,q1} - 2u_{x_{l+1/2}}^{p,q1} + u_{x_{l+1/2}}^{p-1,q1}}{\Delta y^2} + \frac{u_{x_{l+1}}^{p,q2} + u_{x_{l+1}}^{p,q1} (-2 + \kappa_x)}{\Delta z^2} \right) + \kappa'_x u_{x_{l+1/2}} \quad (3.37)$$

La matrice  $\mathcal{A}_z$  est alors modifiée au second demi-pas comme représentée sur le tableau 3.3.

La matrice  $\mathcal{A}_y$  est également modifiée par la présence du terme  $\kappa'_x u_{x_{l+1/2}}$ . Cependant, celle-ci ne complexifie pas la résolution dans la mesure où ce n'est pas cette matrice qui est inversée.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \xrightarrow{N} \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} \xrightarrow{N_y \times N_z} \\ \hline \end{array} \\
 \left[ \begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} -2 + \kappa_x \\ \vdots \\ -2 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} -2 + \kappa_x \\ \vdots \\ -2 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} -2 + \kappa_x \\ \vdots \\ -2 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} -2 + \kappa_x \\ \vdots \\ -2 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$\mathcal{A}_z = \tau_z$

Tableau 3.3 – Modification de la matrice  $\mathcal{A}_z$  pour l'intégration de la condition aux limites simplifiée dans le schéma matriciel.

La complexité de cette dernière n'a donc pas d'influence sur le calcul.

La méthodologie pour intégrer la condition aux limites simplifiée dans le schéma matriciel est identique pour les composantes  $u_y$  et  $u_z$ . Le développement est donc analogue au précédent et nous ne répétons pas celui-ci afin de ne pas alourdir l'exposé.

De même, la méthodologie pour introduire les conditions aux limites sur le champ magnétique nécessaire pour propager implicitement la condition aux limites en polarisation verticale est identique à celle venant d'être explicitée.

Remarque : les conditions aux limites étant introduites dans la résolution matricielle de l'Équation Parabolique, les points présents sous la surface de l'obstacle pris en compte en SSF ne sont plus considérés en Différences Finies.

#### II.4.4 Calcul du point au sol

L'objectif de la section précédente a été d'intégrer la condition aux limites dans l'algorithme de propagation pour être en mesure de propager le champ au-dessus du sol en tenant compte implicitement de celle-ci.

Une fois la propagation réalisée, après chaque itération le champ au sol est calculé de manière à satisfaire la condition aux limites complète. Ce calcul permet d'introduire le couplage entre composantes du champ. Ainsi, pour une surface quelconque métallique par exemple, les composantes tangentielles du champ électrique doivent satisfaire la condition de Dirichlet et la composante normale la condition de Neumann. Pour appliquer correctement ces conditions, il est nécessaire d'introduire une base locale à l'obstacle considéré et d'écrire la condition aux limites dans ce nouveau repère.

##### II.4.4.a Écriture de la condition aux limites dans un repère local

Le repère local est défini en un point  $Q$  de la surface de l'obstacle (3.38) et est représenté sur la figure 3.10.

$$(Q, \mathbf{e}_{tx}, \mathbf{e}_{ty}, \mathbf{e}_n) \tag{3.38}$$

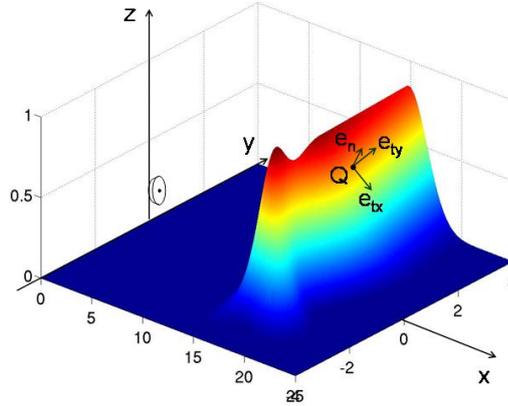


Figure 3.10 – Illustration du repère local sur un relief tridimensionnel quelconque.

L'ensemble des vecteurs de cette base est normé et ils sont déterminés suivant les propriétés suivantes :  $\mathbf{e}_n$  est le vecteur normal à l'obstacle,  $\mathbf{e}_{tx}$  est le vecteur tangent à la surface et portant la direction de propagation principale et  $\mathbf{e}_{ty}$  est le vecteur tangent à la surface et portant principalement la composante transverse du champ. Les expressions des vecteurs  $\mathbf{e}_{tx}$  et  $\mathbf{e}_{ty}$  sont les suivantes :

$$\mathbf{e}_{ty} = \frac{\mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_x}{\|\mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_x\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_{tx} = \frac{\mathbf{e}_{ty} \times \mathbf{e}_n}{\|\mathbf{e}_{ty} \times \mathbf{e}_n\|} \quad (3.39)$$

Compte tenu du fait que la propagation est calculée dans la base cartésienne  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , il est nécessaire de définir une matrice de passage entre cette base, dite globale, et la base locale  $(\mathbf{e}_{tx}, \mathbf{e}_{ty}, \mathbf{e}_n)$ . Celle-ci est notée de la manière suivante :  $M_{g \rightarrow l}$ , et définie par l'équation (3.40) :

$$\mathbf{u}_l = M_{g \rightarrow l} \mathbf{u}_g \iff \begin{cases} u_{tx} \\ u_{ty} \\ u_n \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{tx} \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_{tx} \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_{tx} \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_{ty} \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_{ty} \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_{ty} \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \begin{cases} u_x \\ u_y \\ u_z \end{cases} \quad (3.40)$$

avec :  $\mathbf{u}_l$  la fonction réduite exprimée dans la base locale,  
 $\mathbf{u}_g$  la fonction réduite exprimée dans la base globale.

On peut se rendre compte que les produits scalaires présents sur la dernière ligne de cette matrice correspondent aux projections de la normale à l'obstacle  $\mathbf{n}$  dans la base cartésienne. On choisit donc de noter la matrice  $M_{g \rightarrow l}$  de la manière suivante :

$$M_{g \rightarrow l} = \begin{bmatrix} M^{1,1} & M^{1,2} & M^{1,3} \\ M^{2,1} & M^{2,2} & M^{2,3} \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

La méthodologie consiste alors à exprimer le champ électromagnétique dans la base locale grâce à la matrice de passage  $M_{g \rightarrow l}$ . Dans ce nouveau repère, la condition aux limites est appliquée sur les fonctions réduites en bénéficiant du fait que la normale est uniquement dirigée selon la composante  $\mathbf{e}_n$ . Le retour dans la base cartésienne se fait ensuite grâce à la matrice de passage inverse  $M_{l \rightarrow g}$ .

### II.4.4.b Conditions de type Dirichlet et Neumann

Dans un premier temps si l'on considère une scène constituée d'obstacles métalliques, il faut appliquer les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann aux fonctions réduites.

#### Application de la condition aux limites de Dirichlet

On peut remarquer qu'il est aisé d'appliquer les conditions aux limites de type Dirichlet, celles-ci se résumant à annuler les composantes des fonctions réduites soumises à cette condition. Cependant, il faut garder à l'esprit que le problème considéré est un problème discret et par conséquent il se peut que le point à la limite,  $Q$ , ne se présente pas sur une intersection de la grille d'échantillonnage (cf. figure 3.11). On introduit alors un point virtuel [58],  $P_0$ , distant de  $Q$  de la grandeur  $\delta$  et situé sous la surface du sol. Celui-ci est virtuel car rappelons que dans la méthodologie Différences Finies les points de la grille d'échantillonnage situés sous la surface du sol ne sont pas considérés.

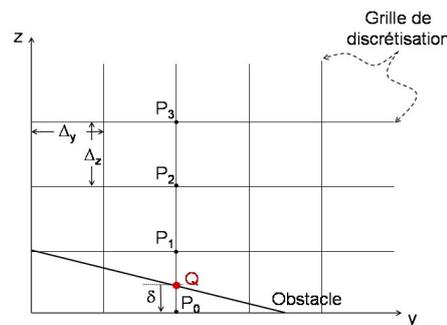


Figure 3.11 – Prise en compte de la condition aux limites à l'interface exacte de l'obstacle.

Comme nous venons de le signaler, le point à la limite  $Q$  peut ne pas se trouver à une intersection de la grille d'échantillonnage. La condition aux limites est donc calculée au point  $P_0$  par l'intermédiaire d'un développement en série de Taylor. Ainsi, en considérant le développement en série de Taylor autour du point à la limite  $Q$ , on peut écrire les développements limités des fonctions réduites aux points  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} C(P_0) = C(Q) + \delta \Delta_z \partial_z C(Q) + \delta^2 \Delta_z^2 \partial_z^2 C(Q) / 2 \\ C(P_1) = C(Q) + (1 + \delta) \Delta_z \partial_z C(Q) + (1 + \delta)^2 \Delta_z^2 \partial_z^2 C(Q) / 2 \\ C(P_2) = C(Q) + (2 + \delta) \Delta_z \partial_z C(Q) + (2 + \delta)^2 \Delta_z^2 \partial_z^2 C(Q) / 2 \end{cases} \quad (3.42)$$

avec :  $C$  une composante des fonctions réduites  $u$  ou  $v$ .

Ces trois équations peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel qu'il est possible d'inverser afin d'obtenir une expression analytique de la variable  $C$  au point  $Q$  ainsi que de

ces dérivées premières et secondes suivant  $z$ . Cette inversion conduit à :

$$\begin{vmatrix} C(Q) \\ \partial_z C(Q) \\ \partial_z^2 C(Q) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} (2+3\delta+\delta^2)/2 & -\delta^2-2\delta & (\delta+\delta^2)/2 \\ -(3+2\delta)/(2\Delta_z) & (2+2\delta)/\Delta_z & -(1+2\delta)/(2\Delta_z) \\ 1/(2\Delta_z^2) & -1/\Delta_z^2 & 1/(2\Delta_z^2) \end{bmatrix} \begin{vmatrix} C(P_0) \\ C(P_1) \\ C(P_2) \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

L'application de la condition aux limites de Dirichlet en un point  $Q$ , qui consiste à imposer  $C(Q)$  nul, se discrétise alors de la manière suivante :

$$\frac{2+3\delta+\delta^2}{2}C(P_0) - (\delta^2+2\delta)C(P_1) + \frac{\delta+\delta^2}{2}C(P_2) = 0 \quad (3.44)$$

Où  $C$  correspond aux composantes tangentielles devant satisfaire à la condition aux limites de Dirichlet, soit respectivement  $u_{tx}$  et  $u_{ty}$ .

La résolution de cette équation au point virtuel  $P_0$  permet ainsi d'appliquer rigoureusement la condition aux limites au point  $Q$ .

### Application de la condition aux limites de Neumann

L'application de la condition aux limites de Neumann n'est quant à elle pas si triviale. Il faut en effet garder à l'esprit que le problème qui nous concerne est un problème discret, par conséquent le champ électromagnétique n'est connu que sur une certaine grille de points. Il est alors impossible de calculer le champ ailleurs que sur cette grille. La dérivée partielle suivant la normale pouvant être orientée de manière quelconque, celle-ci doit par conséquent être ramenée dans l'espace cartésien afin de pouvoir être discrétisée. Grâce à la matrice de passage  $M_{g \rightarrow l}$ , on peut exprimer cette dérivée de la manière suivante :

$$\partial_n = n_x \partial_x + n_y \partial_y + n_z \partial_z \quad (3.45)$$

On peut ainsi substituer l'application d'une dérivée partielle suivant la normale  $\partial_n$  par une combinaison de dérivées partielles selon les dimensions cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Les expressions des dérivées partielles suivant la verticale  $z$  étant déjà connues par l'intermédiaire du système (3.43), il reste à ce stade à voir comment discrétiser les dérivées partielles suivant les dimensions  $y$  et  $x$ .

#### – Discrétisation des dérivées suivant $y$

L'obtention des expressions discrétisées des dérivées partielles suivant  $y$  n'est pas aussi immédiate que cela était le cas dans la dimension  $z$ . En effet, un simple développement de Taylor a permis d'obtenir une expression de la discrétisation de la valeur des fonctions réduites et de leurs dérivées au sol dans la dimension  $z$ . Cependant, les fonctions réduites n'étant connues qu'aux intersections de la grille d'échantillonnage, il devient impossible d'effectuer un développement en série de Taylor autour du point  $Q$  directement dans la dimension  $y$ . Comme représenté sur la figure 3.12, les points ( $\times$ ) présents sur l'horizontale du point à la limite  $Q$  n'existent pas car ils ne se situent pas à une intersection de la grille d'échantillonnage.

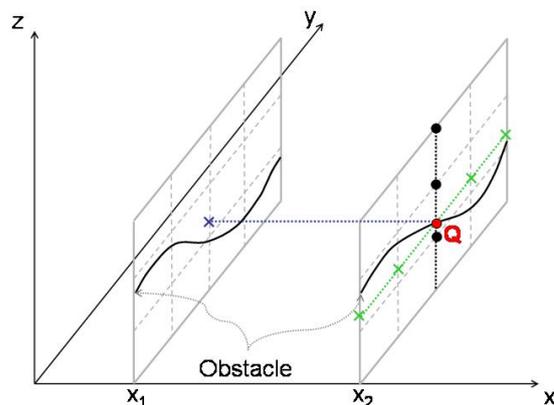


Figure 3.12 – Problème lors de la discrétisation des dérivées partielles en 3D.

Pour calculer la dérivée partielle du champ suivant la dimension  $y$ , il est alors nécessaire de considérer tout d’abord un développement en série de Taylor suivant la verticale.

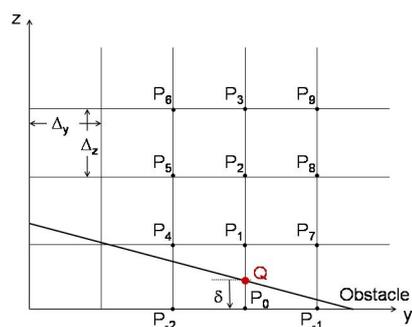


Figure 3.13 – Discrétisation de la dérivée partielle en  $y$ .

Dans le cas de la figure 3.13, un développement en série de Taylor suivant  $z$  autour du point  $Q$  mettant en jeu les points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  aboutit au système suivant :

$$\begin{cases} C(P_1) = C(Q) + (1 + \delta) \Delta_z \partial_z C(Q) + (1 + \delta)^2 \Delta_z^2 \partial_z^2 C(Q) / 2 \\ C(P_2) = C(Q) + (2 + \delta) \Delta_z \partial_z C(Q) + (2 + \delta)^2 \Delta_z^2 \partial_z^2 C(Q) / 2 \\ C(P_3) = C(Q) + (3 + \delta) \Delta_z \partial_z C(Q) + (3 + \delta)^2 \Delta_z^2 \partial_z^2 C(Q) / 2 \end{cases} \quad (3.46)$$

La résolution du système inverse à 3.46 permet d’obtenir une expression analytique du champ au point  $Q$  en fonction du champ aux points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  :

$$C(Q) = \left( \frac{\delta^2}{2} + \frac{5\delta}{2} + 3 \right) C(P_1) + (-\delta^2 - 4\delta - 3) C(P_2) + \left( \frac{\delta^2}{2} + \frac{3\delta}{2} + 1 \right) C(P_3) \quad (3.47)$$

C’est cette dernière équation qui sert de base à l’obtention de l’expression des dérivées partielles suivant la dimension  $y$ . En effet, si on dérive l’équation (3.47) par rapport à  $y$ , on ob-

tient :

$$\partial_y C(Q) = \left( \frac{\delta^2}{2} + \frac{5\delta}{2} + 3 \right) \partial_y C(P_1) + (-\delta^2 - 4\delta - 3) \partial_y C(P_2) + \left( \frac{\delta^2}{2} + \frac{3\delta}{2} + 1 \right) \partial_y C(P_3) \quad (3.48)$$

Les dérivées partielles suivant  $y$  aux points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  sont quant à elle discrétisées de manière conventionnelle. Ainsi dans le cas de la figure 3.13, on obtient les développements suivants par des discrétisations centrées :

$$\begin{cases} \partial_y C(P_1) = [C(P_7) - C(P_4)] / (2\Delta_y) \\ \partial_y C(P_2) = [C(P_8) - C(P_5)] / (2\Delta_y) \\ \partial_y C(P_3) = [C(P_9) - C(P_6)] / (2\Delta_y) \end{cases} \quad (3.49)$$

En introduisant les expressions (3.49) dans l'équation (3.48), il est possible d'obtenir une expression de la dérivée partielle en  $y$  du champ au point  $Q$  :

$$\begin{aligned} \partial_y C(Q) = \left( \frac{\delta^2}{2} + \frac{5\delta}{2} + 3 \right) \frac{C(P_7) - C(P_4)}{2\Delta_y} + (-\delta^2 - 4\delta - 3) \frac{C(P_8) - C(P_5)}{2\Delta_y} \\ + \left( \frac{\delta^2}{2} + \frac{3\delta}{2} + 1 \right) \frac{C(P_9) - C(P_6)}{2\Delta_y} \end{aligned} \quad (3.50)$$

On peut remarquer à ce stade la nécessité de ne considérer que des points au-dessus de la surface de l'obstacle. En effet, on a pris garde lors du développement en série de Taylor suivant la dimension  $z$  (équation 3.46) de ne pas prendre en compte le point  $P_0$ . Dans le cas contraire, l'équation (3.48) aurait fait apparaître une dérivée en  $y$  du point  $P_0$  qu'il aurait fallu substituer par la discrétisation appropriée. Cette dernière étape aurait entraîné l'introduction de points tels que les points  $P_{-1}$  et  $P_{-2}$  définis sur la figure 3.13. Or ceux-ci étant en-dessous de la limite de l'obstacle, ils sont également inconnus. On aurait ainsi ajouté des inconnues au système.

La même précaution est à prendre lors de la discrétisation des dérivées partielles en  $y$  autour des points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ . En effet, il faut prendre garde de ne considérer que des points qui se situeraient au-dessus de l'interface de l'obstacle. De cette manière, si on considère le cas représenté sur la figure 3.14a., il ne faut plus prendre en compte le point  $P_4$  car celui-ci est sous la limite de l'obstacle. Pour remédier à ce problème, il faut discrétiser par la droite les dérivées partielles en  $y$  (au moins celle au point  $P_4$ ). Dans le cas contraire, il faut discrétiser par la gauche certaines dérivées partielles en  $y$  (cf. figure 3.14b.). Un simple test sur le signe de la normale permet d'effectuer ce choix.

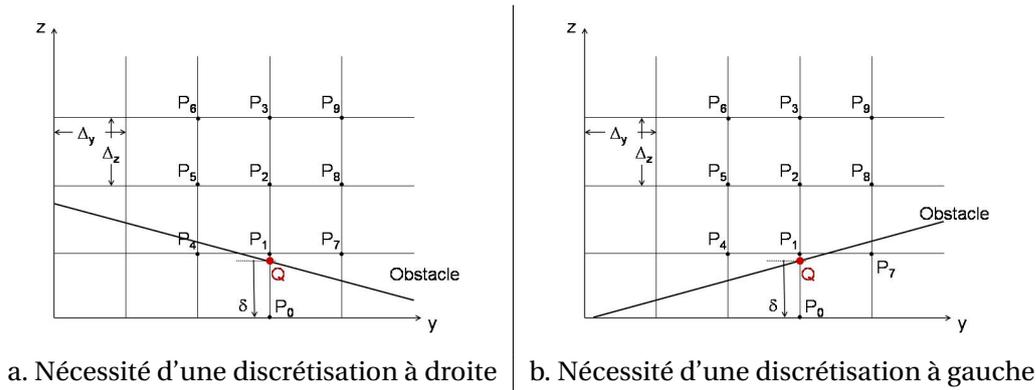


Figure 3.14 – Problèmes de discrétisation selon l'obstacle.

– *Discrétisation des dérivées en x*

Il reste à ce stade à discrétiser la dérivée partielle suivant la dimension  $x$ . Le problème est le même que lors de la discrétisation dans la dimension  $y$  et il est impossible de discrétiser directement cette dérivée partielle. Ainsi, comme on peut le voir sur la figure 3.12, le point à la limite  $Q$  ne se trouvant pas sur la grille d'échantillonnage, celui-ci ne présente pas de vis-à-vis d'une itération à l'autre. (Cela s'illustre par le fait que le point ( $\times$ ) n'existe pas). Pour pallier ce problème, on introduit l'Équation Parabolique qui permet de substituer la dérivée partielle selon  $x$  par les dérivées partielles secondes selon  $y$  et  $z$ . Si l'on considère l'Équation Parabolique petit angle en atmosphère homogène, elle s'exprime de la manière suivante :

$$\partial_x C = \tau (\partial_y^2 + \partial_z^2) C \quad (3.51)$$

avec :  $\tau = j / (2k_0)$ .

Il est alors nécessaire de connaître les dérivées secondes en  $y$  et en  $z$ . La dérivée seconde en  $z$  est directement issue du système (3.43). Pour celle en  $y$ , il faut considérer la dérivée seconde de l'expression du point à la limite  $Q$  (3.47) :

$$\begin{aligned} \partial_y^2 C(Q) = & \left( \frac{\delta^2}{2} + \frac{5\delta}{2} + 3 \right) \partial_y^2 C(P_1) + (-\delta^2 - 4\delta - 3) \partial_y^2 C(P_2) \\ & + \left( \frac{\delta^2}{2} + \frac{3\delta}{2} + 1 \right) \partial_y^2 C(P_3) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Les dérivées partielles suivant  $y$  étant discrétisées de manière identique à (3.49) en prenant les mêmes précautions que précédemment énoncées, à savoir de ne considérer aucun point sous la surface de l'obstacle lors de la discrétisation des dérivées partielles en  $y$ .

Rappelons que l'objectif est ici de calculer la condition aux limites de Neumann définie dans la base locale par l'équation (3.45). L'introduction de (3.51) dans l'équation (3.45) conduit ainsi à :

$$\left[ n_x \tau (\partial_y^2 + \partial_z^2) + n_y \partial_y + n_z \partial_z \right] C = 0 \quad (3.53)$$

L'ensemble des dérivées partielles présentes dans l'équation (3.53) est maintenant connu et permet d'aboutir à une expression discrétisée de la condition aux limites de Neumann possédant une unique inconnue : la fonction réduite au point  $P_0$ . Ainsi la résolution de l'expression obtenue au point  $P_0$  permet d'appliquer la condition de Neumann au point  $Q$ .

#### II.4.4.c Condition aux limites de Léontovich

Pour être en mesure de considérer des surfaces diélectriques, la méthodologie est identique. La seule différence réside dans le fait qu'il est nécessaire de considérer la condition aux limites de Léontovich en lieu et place des conditions de Neumann et de Dirichlet.

Pour appliquer cette équation de Léontovich, on utilise toujours le passage dans la base locale à l'obstacle. Cette subtilité permet de simplifier les équations dans la mesure où dans cette base, la normale ne présente qu'une composante suivant la variable  $z_{\text{local}}$ . Si l'on raisonne sur le champ électromagnétique, la condition aux limites de Léontovich se développe alors de la manière suivante :

$$\frac{E_{ty}}{H_{tx}} = -\frac{E_{tx}}{H_{ty}} = Z \quad (3.54)$$

Les composantes du champ électromagnétique sont couplées entre elles par cette équation. Compte tenu du fait que la résolution se fait soit sur le champ électrique soit sur le champ magnétique suivant la polarisation d'émission, il faut dissocier les deux.

Grâce à l'équation de Maxwell-Faraday, on peut exprimer le champ magnétique en fonction du champ électrique dans le repère local :

$$\begin{vmatrix} \partial_{y_t} E_n - \partial_n E_{ty} \\ \partial_n E_{tx} - \partial_{x_t} E_n \\ \partial_{x_t} E_{ty} - \partial_{y_t} E_{tx} \end{vmatrix} = j\omega\mu_0 \begin{vmatrix} H_{tx} \\ H_{ty} \\ H_n \end{vmatrix} \quad (3.55)$$

L'introduction des expressions du champ magnétique dans l'équation (3.54) aboutit à :

$$\begin{vmatrix} E_{ty} = \frac{Z}{j\omega\mu_0} (\partial_{y_t} E_n - \partial_n E_{ty}) \\ E_{tx} = \frac{Z}{j\omega\mu_0} (\partial_{x_t} E_n - \partial_n E_{tx}) \end{vmatrix} \quad (3.56)$$

L'écriture de l'équation de Maxwell-Ampère permet quant à elle d'obtenir une expression sur la composante normale du champ électrique :

$$\begin{vmatrix} \partial_{y_t} H_n - \partial_n H_{ty} \\ \partial_n H_{tx} - \partial_{x_t} H_n \\ \partial_{x_t} H_{ty} - \partial_{y_t} H_{tx} \end{vmatrix} = -j\omega\epsilon_0 \begin{vmatrix} E_{tx} \\ E_{ty} \\ E_n \end{vmatrix} \quad (3.57)$$

L'introduction dans cette équation des expressions des composantes transverses du champ magnétique issues de (3.55) permet d'exprimer cette dernière seulement sur le champ électrique :

$$E_n = \frac{j}{\omega\epsilon_0} \frac{1}{j\omega\mu_0} \left[ \partial_{x_t n}^2 E_{tx} - \partial_{x_t}^2 E_n - \partial_{y_t}^2 E_n + \partial_{y_t n}^2 E_{ty} \right] \quad (3.58)$$

Les équations (3.56) et (3.58) forment un système de trois équations à trois inconnues dans lequel il reste à exprimer les dérivées partielles. À l'image de ce qui a été réalisé pour la dérivée

partielle  $\partial_n$  (cf. équation (3.45)), il est nécessaire d'exprimer les dérivées partielles  $\partial_{tx}$  et  $\partial_{ty}$  dans l'espace cartésien. Ceci se fait par application de la matrice de passage et aboutit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}\partial_{x_t} &= M^{1,1}\partial_x + M^{1,2}\partial_y + M^{1,3}\partial_z \\ \partial_{y_t} &= M^{2,1}\partial_x + M^{2,2}\partial_y + M^{2,3}\partial_z\end{aligned}\tag{3.59}$$

Les expressions (3.59) sont ensuite reportées dans les équations (3.56) et (3.58) et discrétisées selon la même méthodologie que précédemment afin d'obtenir un système de trois équations à trois inconnues :  $E_{tx}(P_0)$ ,  $E_{ty}(P_0)$  et  $E_n(P_0)$ . Un raisonnement dual est tout à fait applicable pour obtenir un système d'équation sur le champ magnétique.

Les équations obtenues sont ensuite écrites sur les fonctions réduites pour être intégrées à l'algorithme Différences Finies.

## II.5 Synthèse

Le but de cette partie est de synthétiser la partie théorique que nous venons de détailler afin de permettre aux lecteurs de prendre du recul sur l'ensemble des étapes de la méthodologie présentée. Une itération du schéma de propagation est donc représentée sur la figure 3.15.

Rappelons que le leitmotiv de notre étude Différences Finies était de conserver une résolution 3D la plus simple possible. Ainsi à l'image de la propagation dans l'atmosphère n'induisant pas de couplage entre composantes, nous avons souhaité conserver un calcul de la propagation 3D dans l'atmosphère composante par composante. Cette propagation est réalisée par la méthode des directions alternées qui consiste à réaliser une itération en deux demi-pas successifs. Ceci est représenté sur la figure 3.15 par une propagation découplée des trois composantes du champ. Cependant, en présence d'obstacles toutes les composantes du champ sont couplées entre elles. Pour conserver la simplicité de la résolution, des conditions aux limites simplifiées sont intégrées propageant ainsi implicitement l'effet du sol composante par composante. Le couplage entre les trois composantes est introduit après chaque pas de propagation par l'application des conditions aux limites complètes en tout point du relief 3D.

## III Validations

Tout comme au chapitre précédent, le but de cette partie est de valider qualitativement chacune des méthodologies introduites. L'efficacité en terme de rapidité et de domaine de validité fera l'objet du dernier chapitre. L'objectif de cette partie est donc de mettre en avant les capacités de cet algorithme à prendre en compte les phénomènes de réflexion, réfraction et diffraction que peut subir une onde électromagnétique au cours de sa propagation. Pour cela nous reprendrons des cas tests identiques à ceux considérés au chapitre précédent. De plus, nous concluerons cette partie par la modélisation de la propagation au-dessus d'un sol de pente 3D pour mettre en avant la capacité de la méthode Différences Finies à prendre en compte la dépolarisation.

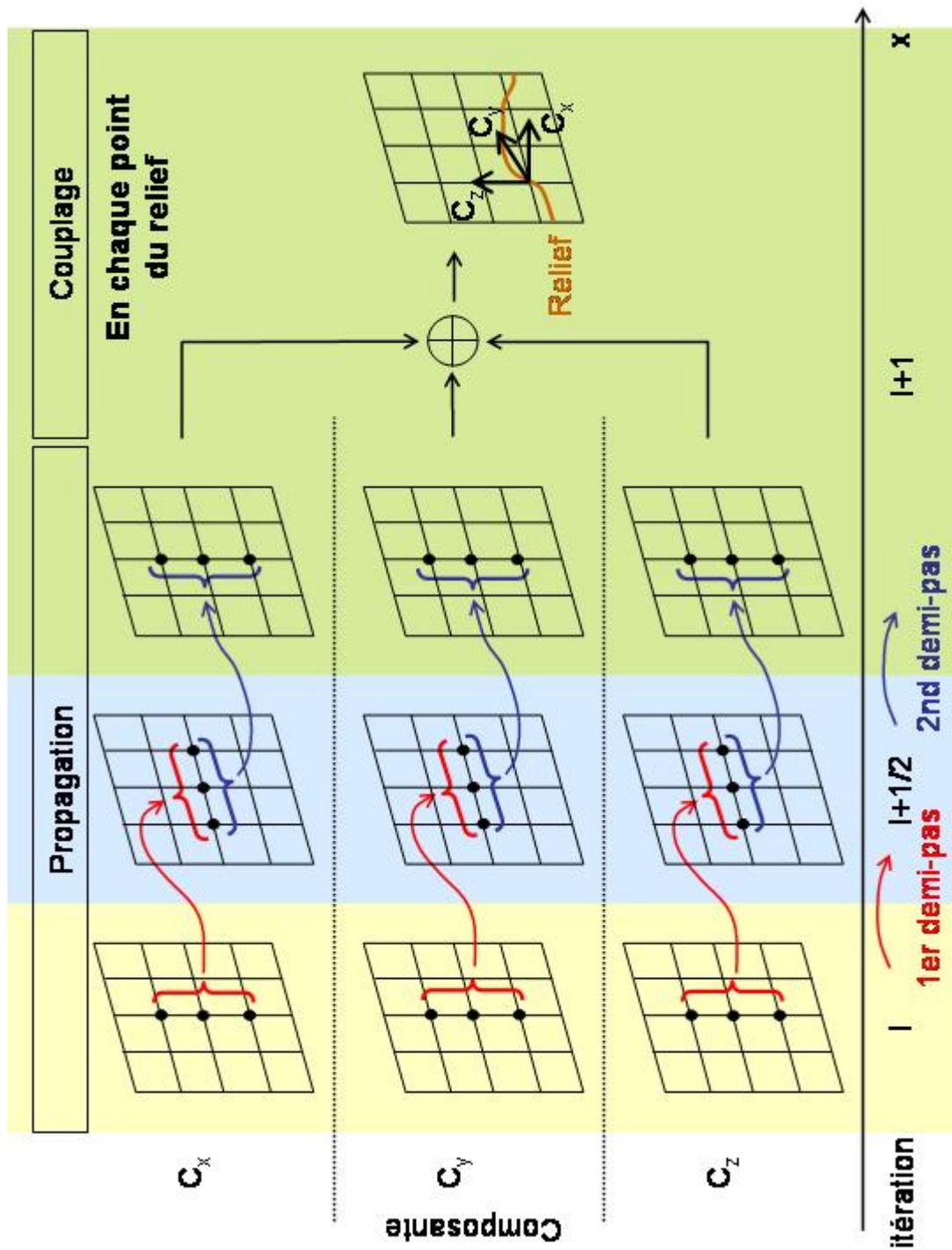


Figure 3.15 – Algorithme de propagation par Différences Finies.

### III.1 Sol lisse métallique horizontal

On considère tout d'abord la propagation en présence d'un sol plan métallique. Ce cas test est équivalent à celui présenté au chapitre précédent (cf. figure 2.9) et est rappelé sur la figure 3.16.

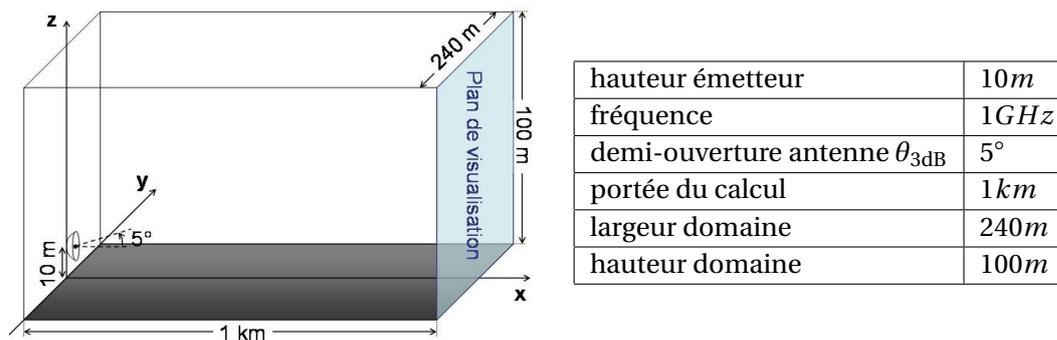


Figure 3.16 – Configuration de test de propagation au-dessus d'un sol plan par la méthode DF.

Le parallélogramme symbolise le domaine de calcul dont les dimensions sont 1km de long, 240m de large et 100m de haut. Celui-ci est borné par un rectangle gris symbolisant un sol métallique parfaitement plat, correspondant au plan  $\langle x0y \rangle$  positionné en  $z = 0m$ . L'antenne est située en  $x = 0m$ ,  $y = 0m$  et  $z = 10m$  et émet à 1GHz selon un diagramme gaussien de demi-ouverture à  $-3dB$  égale à  $5^\circ$ . La visualisation se fait en bout du domaine en  $x = 1km$  sur le plan représenté en turquoise.

#### III.1.1 Polarisation horizontale

La première polarisation que l'on considère est la polarisation horizontale. Dans cette configuration le champ électrique est tangent à la surface du sol et orienté principalement suivant la dimension  $y$ . En premier lieu, on représente sur la figure 3.17 les trois composantes du champ électrique au niveau du plan de visualisation.

Les composantes  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  du champ électrique sont ainsi représentées de gauche à droite. Les commentaires pouvant être réalisés sur la physique des phénomènes mis en jeu sont les mêmes que ceux effectués lors du cas test similaire (cf. section III.1 du chapitre 2) mais dont la résolution était effectuée par l'algorithme SSF. On reconnaît ainsi l'influence du sol métallique (figure d'interférences) et du diagramme d'antenne.

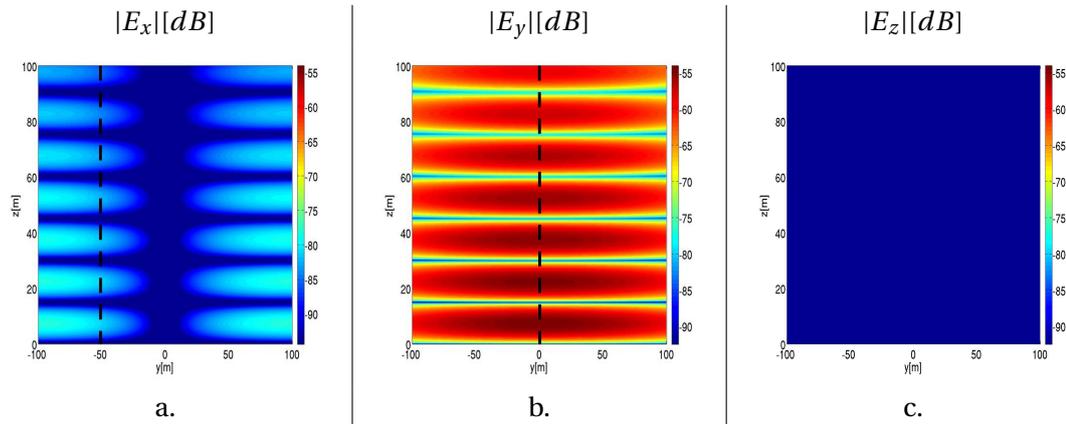


Figure 3.17 – Cartographies  $\langle yz \rangle$  du champ électrique issues d'un calcul par la méthode DF au-dessus d'un sol plan métallique en polarisation horizontale.

Pour valider la modélisation de la propagation au-dessus de ce sol plan métallique, une comparaison entre les modèles SSF, DF et la méthode de la source image est réalisée pour les deux composantes non nulles du champ électrique. Ces comparaisons s'effectuent dans le plan de visualisation ( $x = 1 \text{ km}$ ) et soit dans l'axe  $y = 0 \text{ m}$  pour la composante  $E_y$  (cf. pointillés figure 3.17b.) soit dans l'axe  $y = -50 \text{ m}$  pour la composante  $E_x$  (cf. pointillés figure 3.17a.), ceci afin de ne pas effectuer cette dernière comparaison dans l'axe  $y = 0 \text{ m}$  où la composante  $E_x$  est nulle. Les résultats sont reportés sur la figure 3.18.

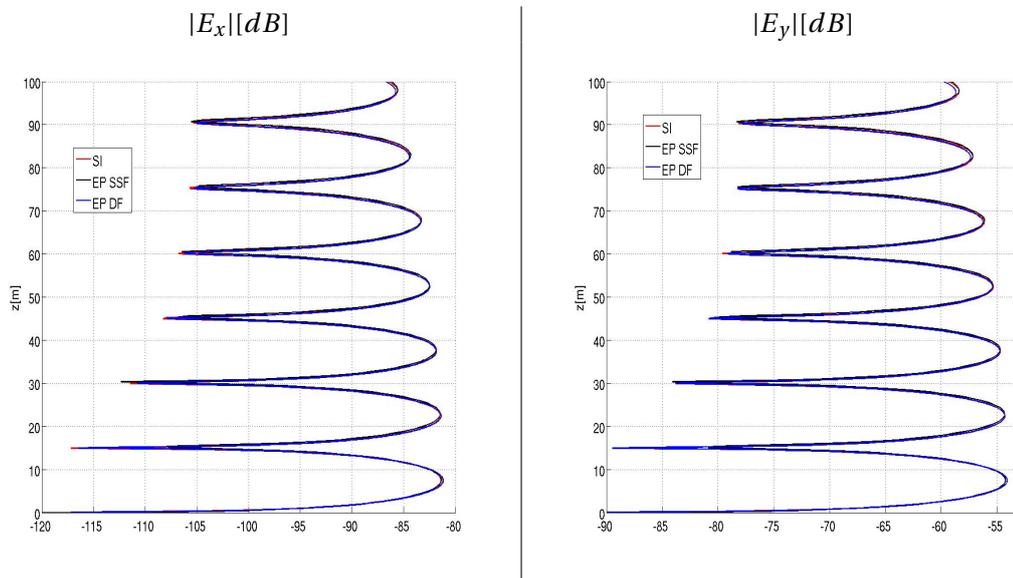


Figure 3.18 – Comparaisons entre les méthodes SSF, DF et le modèle Source Image de la modélisation de la propagation au-dessus d'un sol plan métallique en polarisation horizontale.

On peut constater que les trois méthodes sont en parfaite adéquation, ce qui permet de vali-

der ce premier cas test de résolution de l'Équation Parabolique 3D par Différences Finies.

III.1.2 Polarisation verticale

Le cas de la polarisation verticale au-dessus d'une scène métallique est ici traité. La configuration, ainsi que les paramètres caractéristiques de la scène, sont inchangés par rapport au cas test précédent effectué en polarisation horizontale (cf. figure 3.16).

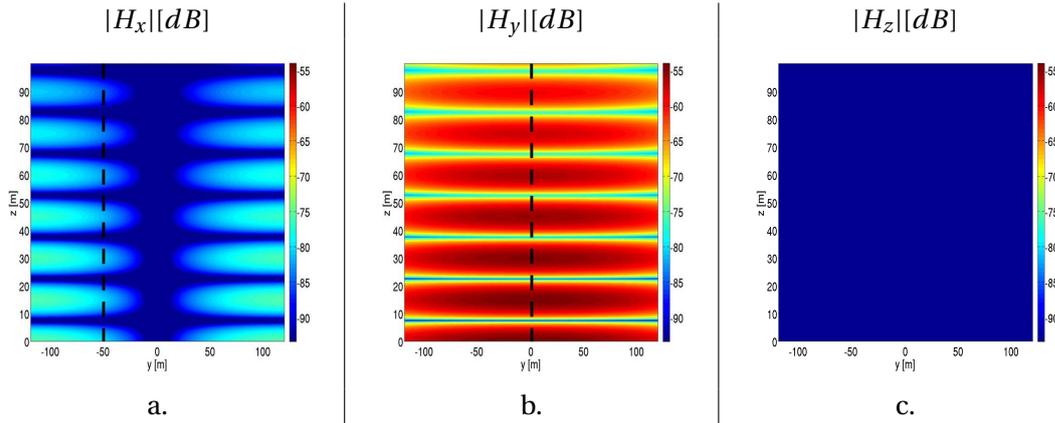
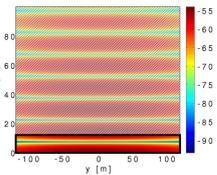


Figure 3.19 – Cartographies  $\langle yz \rangle$  du champ magnétique issues d'un calcul par la méthode DF au-dessus d'un sol plan métallique en polarisation verticale.

Les premiers résultats que nous présentons sont les cartographies  $\langle yz \rangle$  du champ magnétique au niveau du plan de visualisation en  $x = 1 km$ . Les composantes  $H_x$ ,  $H_y$  et  $H_z$  du champ magnétique sont donc représentées de gauche à droite sur la figure 3.19.

Comme dans le cas de la polarisation horizontale, on retrouve principalement l'influence du diagramme d'antenne et la figure d'interférences due aux recombinaisons entre l'onde incidente et l'onde réfléchie au sol.



Cependant comme nous l'avons souligné au chapitre précédent, section III.1.2, le champ au voisinage du sol ne présente pas un minimum comme dans le cas de la polarisation horizontale, mais un maximum. Cela vérifie le fait que dans ce cas de polarisation, le champ satisfait la condition de Neumann.

Afin de valider ce cas test, nous réalisons une comparaison avec les modèles SSF et DF et la méthode de la source image que nous prenons ici comme référence. Cette comparaison est réalisée sur les deux composantes non nulles du champ magnétique et située dans le plan de visualisation ( $x = 1 km$ ) dans l'axe  $y = 0 m$  pour la composante  $H_y$  (cf. pointillés figure 3.19b.) et dans l'axe  $y = -50 m$  pour la composante  $H_x$  (cf. pointillés figure 3.19a.) afin de ne pas réaliser cette comparaison en  $y = 0 m$  où cette dernière composante est nulle.

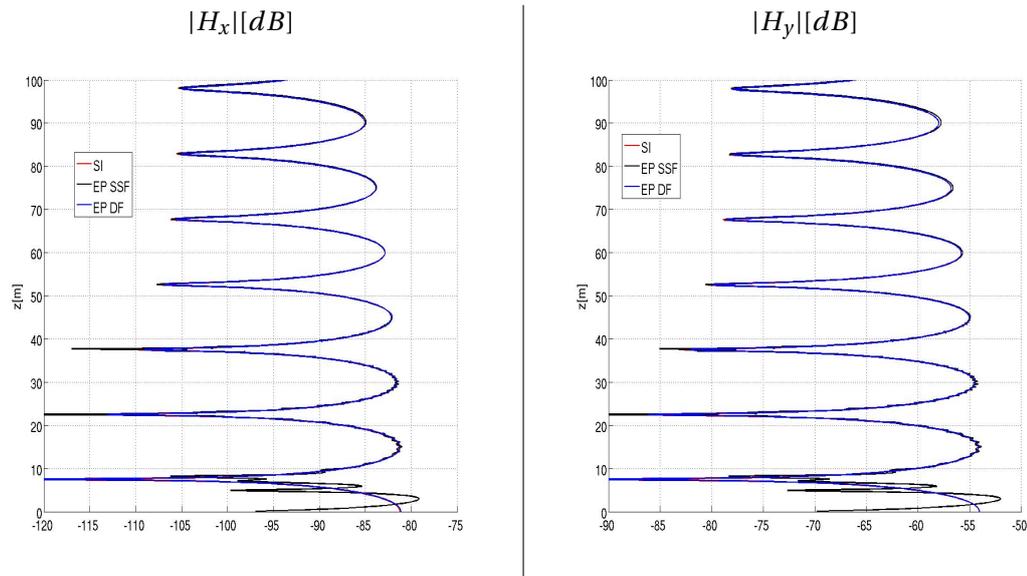


Figure 3.20 – Comparaisons entre les méthodes SSF, DF et le modèle Source Image de la modélisation de la propagation au-dessus d'un sol plan métallique en polarisation verticale.

On constate une très bonne concordance des résultats entre le modèle Différences Finies et la méthode de la Source Image. Les fluctuations parasites présentes lors de la modélisation SSF ont totalement disparu avec la méthode Différences Finies, ceci grâce à l'introduction d'une condition aux limites plus efficace au sein de la résolution. On démontre ainsi la capacité de cette méthode à prendre en compte les deux types de polarisation principale.

La condition aux limites de Léontovich sur un sol lisse et plan de nature diélectrique est une combinaison linéaire des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. Ainsi en démontrant la capacité de la méthode Différences Finies à modéliser la propagation en considérant les conditions aux limites de Dirichlet et Neumann, on peut généraliser sa capacité à modéliser la condition aux limites de Léontovich générale.

### III.2 Prise en compte de l'atmosphère

La prise en compte de l'atmosphère est un aspect à ne pas négliger lors de la modélisation de la propagation à basse altitude. En effet, celle-ci peut avoir une influence non négligeable sur la propagation des ondes électromagnétiques. Afin de valider l'introduction de l'indice de réfraction faite dans notre modèle, nous reprenons les deux cas d'atmosphères considérés au chapitre précédent (cf. section III.3 du chapitre 2). Tout d'abord, nous traitons le cas de l'atmosphère standard. Puis, nous modéliserons la propagation en présence d'un conduit d'évaporation.

Pour ces deux cas tests, la configuration est la propagation au-dessus d'un sol plan en polarisation horizontale. La fréquence a été fixée à  $2\text{GHz}$  et la demi-ouverture d'antenne à  $1.5^\circ$ . De plus, la hauteur de l'émetteur est de  $10\text{m}$ , la hauteur du domaine de  $100\text{m}$  et la portée du calcul de  $5\text{km}$  (cf. figure 3.21).

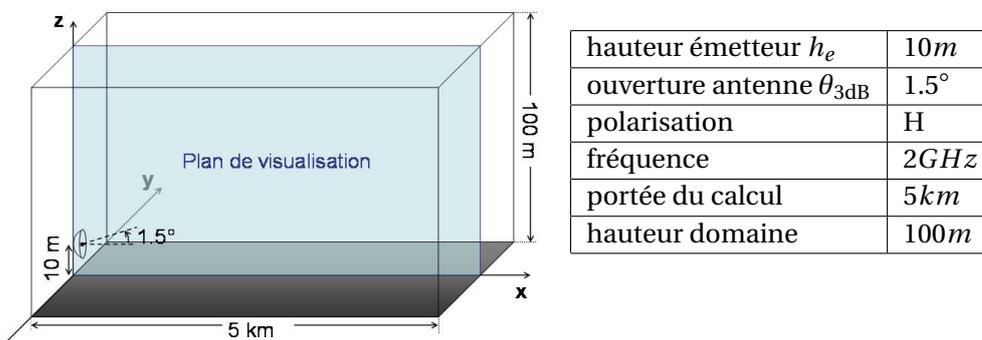


Figure 3.21 – Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d’une atmosphère par la méthode DF.

Tout comme au chapitre précédent, l’introduction de l’indice de réfraction dans notre modèle Différences Finies va être validée par comparaison avec un modèle bidimensionnel (EP 2D).

### III.2.1 Atmosphère standard

Le premier cas d’atmosphère que nous considérons est le cas de l’atmosphère standard, celle-ci est définie comme représentative des conditions moyennes de l’atmosphère terrestre et est défini par son coindice de réfraction modifié de manière identique au chapitre précédent (cf. équation (2.51)).

La variation de ce coindice modifié en fonction de la hauteur se représente dans ce cas d’atmosphère comme illustrée sur la figure 3.22.

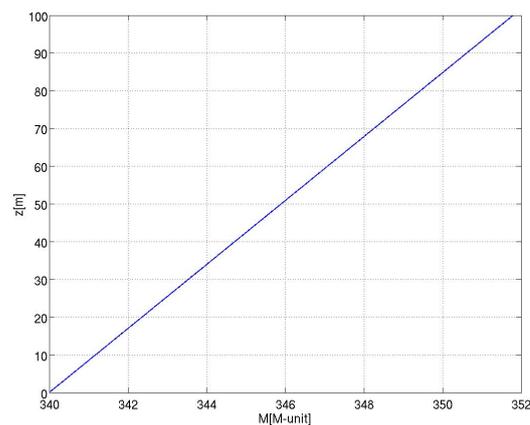


Figure 3.22 – Variation du coindice de réfraction de l’atmosphère standard en fonction de l’altitude.

Afin de représenter l'influence de la réfraction sur la propagation, on trace sur la figure 3.23 l'évolution du module de la composante  $E_y$  dans le plan  $\langle x0z \rangle$  défini en  $y = 0m$  et représenté par le plan turquoise sur la figure 3.21.

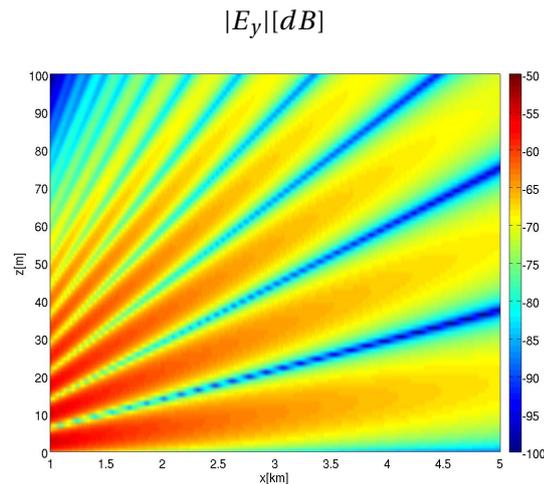


Figure 3.23 – Coupe  $\langle x0z \rangle$  du module de  $E_y$  issue de la modélisation de la propagation par la méthode DF en présence d'une atmosphère standard.

On remarque tout d'abord la présence de figures d'interférences dues à la recombinaison des champs incidents et réfléchis sur le sol. En accord avec la théorie, le rayon de courbure de la trajectoire de l'onde est supérieur au rayon de courbure de la Terre dans ce cas d'atmosphère standard. Dans le cas d'une propagation au-dessus d'une Terre plate, telle que représentée sur la figure 3.23, l'onde s'éloigne de la surface de la Terre.

Afin de valider la prise en compte du phénomène de réfraction dans notre modèle, on compare le résultat précédent avec le résultat obtenu par une modélisation bidimensionnelle de l'Équation Parabolique. Cette comparaison, réalisée en  $x = 5km$  et  $y = 0m$ , est représentée sur la figure 3.24.

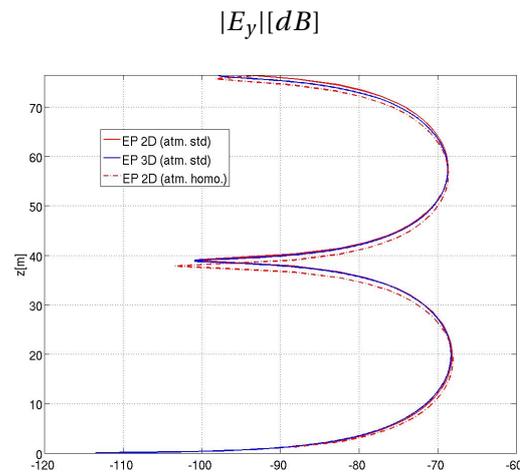


Figure 3.24 – Comparaison entre la méthode Équation Parabolique Différences Finies 3D et un modèle Équation Parabolique 2D dans le cas d’une atmosphère standard.

On constate un bon accord entre les deux méthodes, ce qui justifie la bonne prise en compte de ce type d’atmosphère dans le modèle de résolution de l’Équation Parabolique 3D. Nous avons rajouté sur la figure 3.24 le résultat obtenu dans le cas d’une atmosphère homogène. On peut ainsi constater la taille légèrement supérieure du premier lobe d’interférence dans le cas de l’atmosphère standard (par rapport au cas de l’atmosphère homogène) traduisant l’éloignement de l’onde de la surface de la Terre.

### III.2.2 Conduit d’évaporation

Dans cette section, nous allons introduire une variation plus complexe de l’indice de réfraction : un conduit d’évaporation défini de manière identique au chapitre précédent par l’équation (2.52). La variation du coindice associée à ce type d’atmosphère est rappelée sur la figure 3.25.

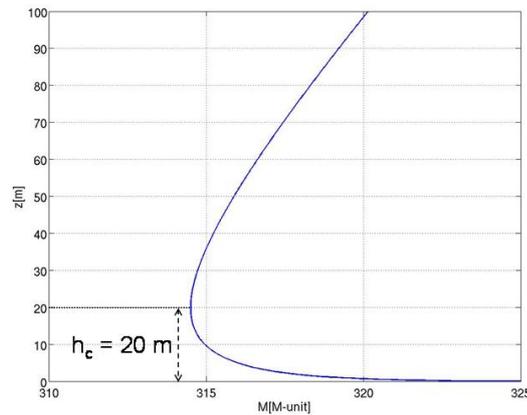


Figure 3.25 – Variation du coindice de réfraction d'un conduit d'évaporation en fonction de l'altitude.

L'évolution du module de la composante  $E_y$  dans le plan  $\langle x0z \rangle$  défini en  $y = 0m$  est présentée sur la figure 3.26.

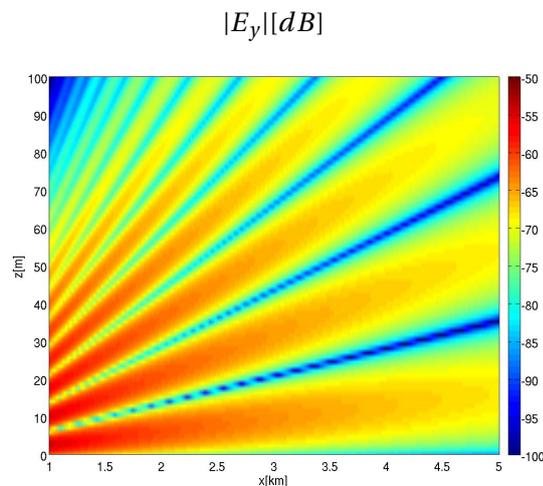


Figure 3.26 – Coupe  $\langle x0z \rangle$  du module de  $E_y$  issue de la modélisation de la propagation par la méthode DF en présence d'un conduit d'évaporation.

Afin de tester la validité de l'introduction d'une telle atmosphère dans notre modèle, nous avons comparé le résultat précédent avec une modélisation bidimensionnelle de l'Équation Parabolique que l'on considère comme une référence. La comparaison s'effectue sur une verticale positionnée en  $x = 5km$  et en  $y = 0m$ , le résultat est reporté sur la figure 3.27.

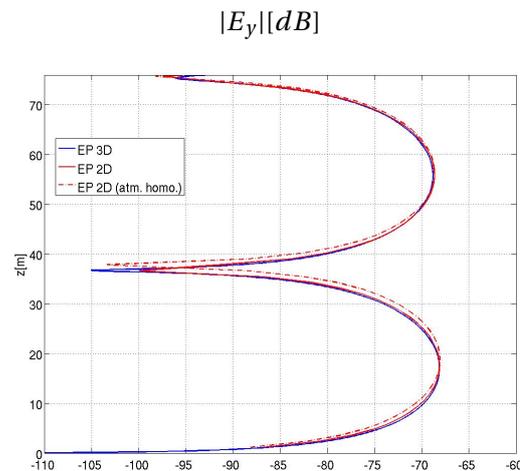


Figure 3.27 – Comparaison entre la méthode Équation Parabolique Différences Finies 3D et un modèle Équation Parabolique 2D dans le cas d'un conduit d'évaporation.

On retrouve un bon accord entre notre modélisation tridimensionnelle et la référence bidimensionnelle, ce qui permet de valider la prise en compte de ce type d'atmosphère. De plus, nous avons rajouté le résultat obtenu en présence d'une atmosphère homogène. On peut ainsi constater qu'en présence du conduit d'évaporation la taille du premier lobe d'interférences diminue (par rapport au cas de l'atmosphère homogène) traduisant ainsi l'effet du conduit d'évaporation.

Pour conclure cette section, on peut affirmer avoir relevé un bon accord entre notre modèle Différences Finies et la référence choisie pour les deux cas d'atmosphères considérées, ce qui confirme la bonne prise en compte des phénomènes de réfraction par notre modèle.

On peut néanmoins faire la remarque selon laquelle les effets de la réfraction ne sont dans cette configuration pas très marqués. Ceci est dû au fait que l'on ait considéré un domaine de calcul « court » en distance.

### III.3 Prise en compte d'obstacles canoniques

De la même manière que cela a été réalisé au chapitre précédent, cette partie a pour but d'appliquer la méthode ici en question en présence de divers obstacles canoniques. Ainsi, nous considérerons la propagation au-dessus d'une configuration constituée d'un écran et d'un sol puis en présence d'une plaque inclinée.

#### III.3.1 Plaque perpendiculaire au sens de propagation

Le premier cas test envisagé est un cas de propagation en présence d'une scène constituée d'un sol plan métallique et d'une plaque (ou écran) perpendiculaire au sens de propagation.

Celui-ci est similaire au cas présenté au chapitre précédent (cf. section III.4.1 du chapitre 2). Pour faciliter la lecture, la configuration est rappelée par la figure 3.28.

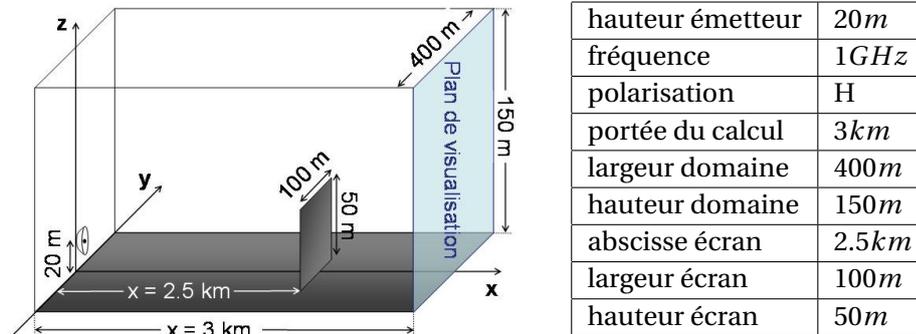


Figure 3.28 – Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'un écran et d'un sol par la méthode DF.

Ce cas test est constitué d'une antenne positionnée en  $x = 0m$ ,  $y = 0m$  et  $z = 20m$  émettant une onde sphérique polarisée horizontalement à 1GHz. Cette antenne éclaire une scène constituée d'un sol et d'un écran faisant 50m de haut par 100m de large positionné en  $x = 2.5km$ , ces deux éléments étant métalliques.

On représente sur la figure 3.29 les trois composantes du champ électrique au niveau du plan de visualisation turquoise (cf. figure 3.28) positionné en  $x = 3km$ .

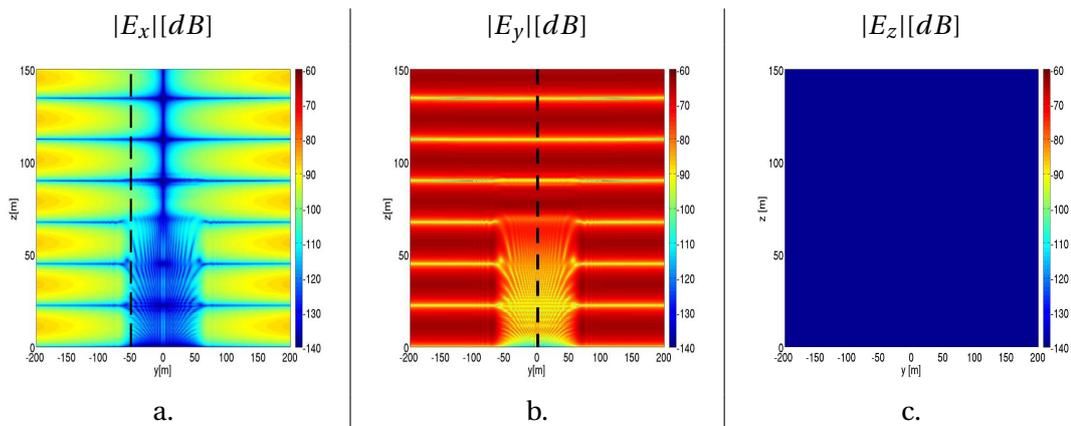
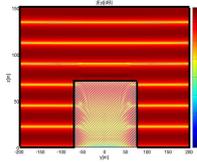


Figure 3.29 – Cartographies  $\langle yz \rangle$  du champ électrique issues d'un calcul par la méthode DF en présence d'un écran et d'un sol.

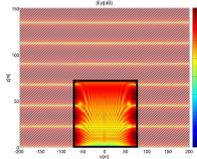
Les trois composantes du champ électrique ont été tracées suivant le même code de couleurs, on peut donc remarquer la supériorité en amplitude de la composante  $E_y$  (cf. figure 3.29b.) par rapport à celle de la composante  $E_x$  (cf. figure 3.29a.). Quant à la composante  $E_z$  (cf. figure 3.29c.), elle reste nulle tout au long de la propagation. Ceci se justifie par le fait que dans cette configuration, les conditions aux limites n'introduisent pas de couplage entre les

composantes.

On s'intéresse maintenant aux phénomènes propagatifs entrant en jeu dans cette configuration.



On retrouve sur la zone mise en relief ci-contre la figure d'interférences due à la recombinaison du champ incident et du champ réfléchi sur le sol.



Derrière l'écran, on retrouve une zone (mise en relief sur la figure ci-contre) où le champ présente une valeur plus faible. Ceci est dû au fait que le champ est ici la recombinaison des champs diffractés par les arêtes de l'écran et des champs diffractés réfléchis au sol.

Les résultats obtenus par la modélisation Différences Finies vont être confrontés à ceux obtenus par SSF et par FERMAT. Cette comparaison est réalisée dans l'axe  $y = 0m$  pour la composante  $E_y$  (cf. pointillée figure 3.29b.) et dans l'axe  $y = -50m$  pour la composante  $E_x$  (cf. pointillés figure 3.29a.) afin de ne pas effectuer cette dernière dans une zone où cette composante est théoriquement nulle. Ces comparaisons apparaissent sur la figure 3.30.

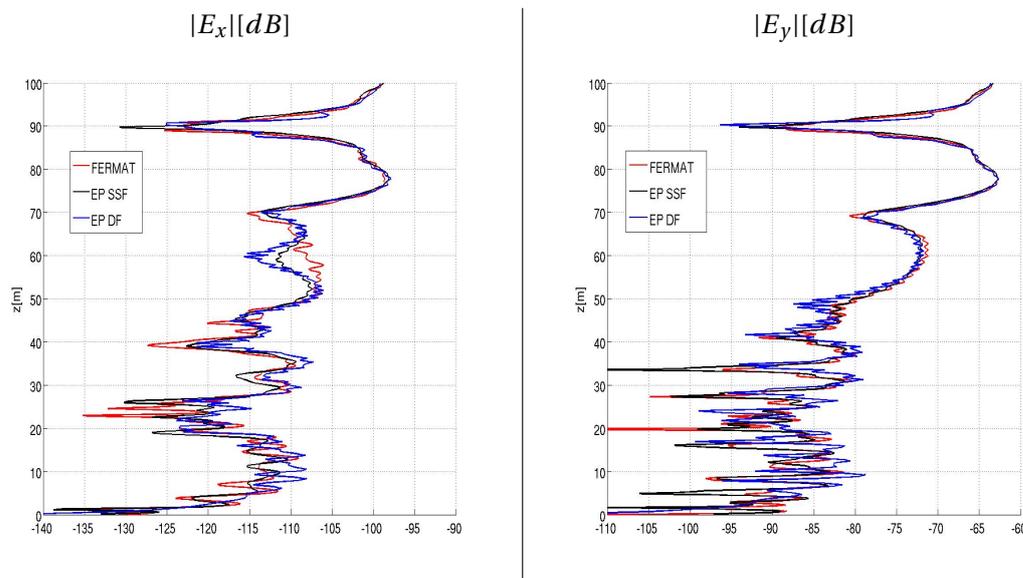
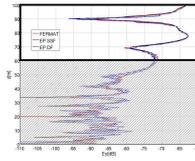
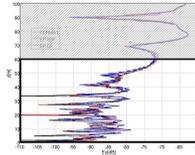


Figure 3.30 – Comparaisons entre les méthodes DF, SSF et le logiciel FERMAT dans le cas de la propagation en présence d'un écran et d'un sol.

Comme lors de la comparaison effectuée au chapitre précédent (cf. section III.4.1 du chapitre 2), on peut distinguer deux zones de rayonnement.



Sur la partie supérieure ( $z > 60m$ ) le champ est dû à la recombinaison du champ incident et du champ réfléchi au sol donnant les interférences de tailles importantes. À cela s'ajoute le champ diffracté qui provoque les interférences de petites tailles.

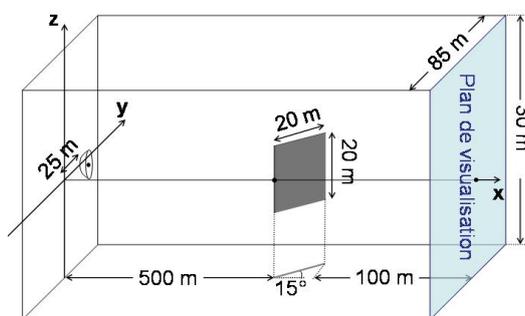


Sur la partie inférieure ( $z \leq 60m$ ), le champ est uniquement dû aux composantes diffractées par les trois arêtes de l'écran.

On constate une très bonne concordance entre les trois méthodes. En effet, la position des lobes est très bien retranscrite et les différences que l'on peut observer dans les niveaux de champ n'excèdent pas quelques  $dB$  pour la composante  $E_x$  et seulement  $0.5dB$  pour la composante principale  $E_y$ . Ces faibles écarts peuvent être justifiés par les différences de méthodologie entre FERMAT et les méthodes Équation Parabolique 3D, ainsi que par la différence d'ouverture du cône de paraxialité de l'Équation Parabolique 3D résolue suivant les méthodes SSF (2.3) et DF (3.8).

### III.3.2 Plaque inclinée

Comme lors du chapitre précédent, le second cas test que l'on propose d'étudier est constitué d'une plaque inclinée (cf. section III.4.2 du chapitre 2). La configuration est illustrée par la figure 3.31.



décalage émetteur (en $y$ )	$25m$
fréquence	$1GHz$
polarisation	V
largeur domaine	$85m$
hauteur domaine	$30m$
début plaque	$500m$
largeur plaque	$20m$
hauteur plaque	$20m$
inclinaison plaque	$15^\circ$
distance après plaque	$100m$

Figure 3.31 – Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'une plaque inclinée par la méthode DF.

On se concentre sur la composante principale du champ électrique,  $E_z$  dans cette polarisation, issue de la modélisation de la propagation en présence de cet obstacle et on représente ce champ au niveau du plan de visualisation sur la figure 3.32.

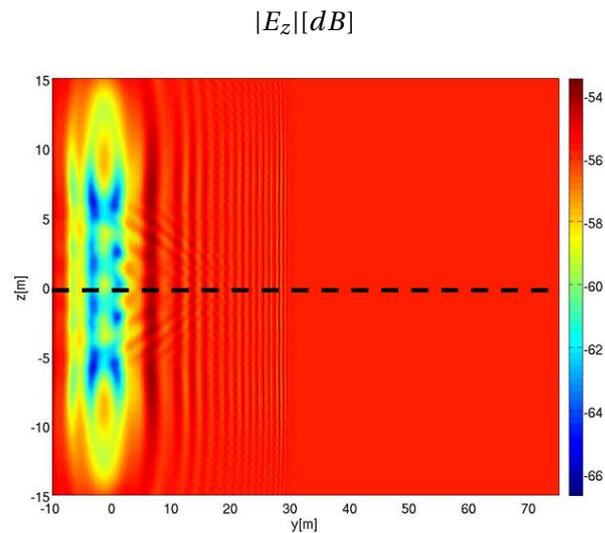
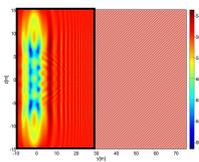
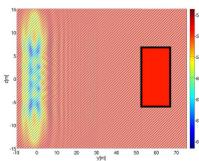


Figure 3.32 – Coupe  $\langle yz \rangle$  de la composante  $E_z$  du champ électrique issue de la modélisation de la propagation en présence d'une plaque inclinée par la méthode DF.



On peut constater que l'on trouve des interférences uniquement dans la zone mise en relief ci-contre correspondant à des ordonnées inférieures à  $30m$ .



Par comparaison avec la figure 2.36, on remarque que l'on ne retrouve pas les interférences dues à la recombinaison des champs incidents, diffractés et réfléchis.

Afin d'observer plus finement la modélisation de la propagation faite dans cette configuration par la résolution Différences Finies de l'Équation Parabolique 3D, nous allons représenter sur la figure 3.33 une coupe du champ électrique sur une horizontale définie en  $z = 0m$  positionnée selon les pointillés sur la figure 3.32. Le résultat Différences Finies est alors confrontés avec le modèle SSF et le logiciel FERMAT.

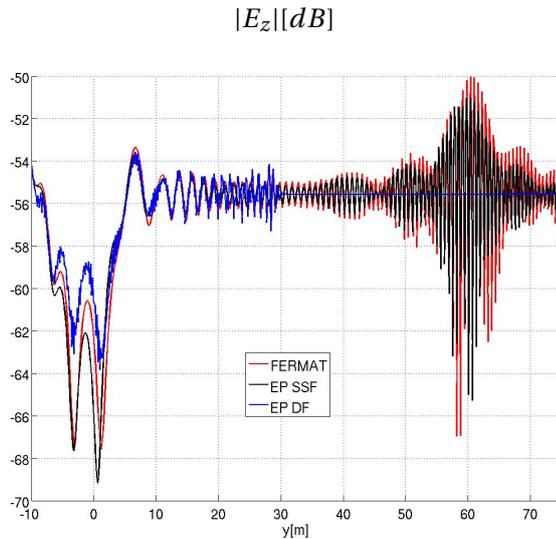


Figure 3.33 – Comparaisons entre les méthodes SSF et DF et le logiciel FERMAT dans le cas de la propagation en présence d'une plaque inclinée.

On constate que la méthode Différences Finies ne modélise pas le champ réfléchi sur la plaque inclinée entre  $y \approx 50$  et  $y \approx 70m$ . Cette restriction est due au fait que la résolution Différences Finies de l'Équation Parabolique présente un cône de validité plus étroit que la résolution SSF. En effet, l'Équation Parabolique résolue par SSF est de type grand angle tandis que celle résolue par Différences Finies est de type petit angle. Or l'inclinaison de la plaque étant égale à  $15^\circ$ , l'angle moyen de réflexion sur celle-ci est de  $30^\circ$ . Une onde réfléchie se propageant suivant cette direction est impossible à modéliser par la méthode Différences Finies ici présentée.

Rappelons que nous avons choisi de résoudre l'Équation Parabolique par Différences Finies selon une approche petit angle pour faciliter la résolution de celle-ci. L'idée était de développer une première approche afin de résoudre les points durs d'une telle méthode avant de considérer la résolution d'une Équation Parabolique grand angle, plus complexe. Ainsi, grâce à l'approche développée, le système de résolution se restreint à un système tridiagonal aisément et rapidement soluble.

Afin de ne pas se positionner hors du domaine de validité de la méthode Différences Finies et afin de s'assurer du bon comportement de cette méthode sur un type de configuration équivalent, nous allons reprendre le même scénario en diminuant l'inclinaison de la plaque. La configuration est alors telle que représentée par la figure 3.34.

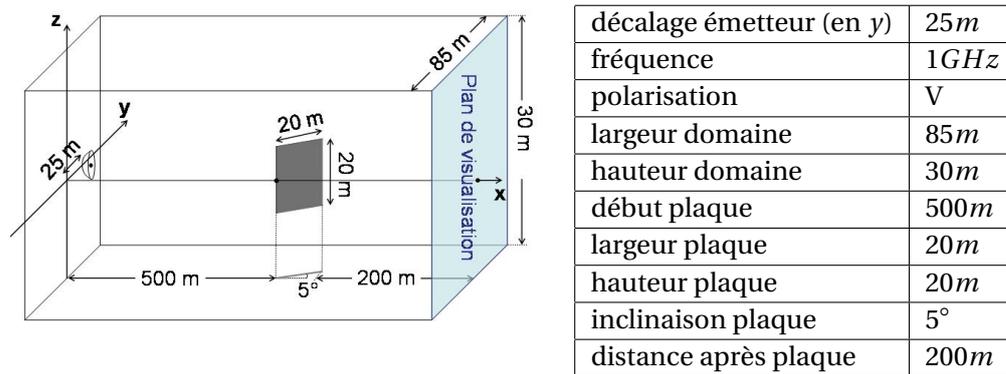


Figure 3.34 – Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d’une plaque inclinée de 5° par la méthode DF.

Pour faciliter la vision de ce cas test, une coupe  $\langle x0y \rangle$  est présentée sur la figure 3.35.

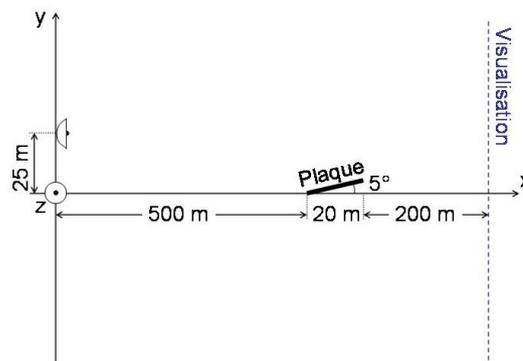


Figure 3.35 – Vue de dessus, plan  $\langle x0y \rangle$ , de la configuration de modélisation de la propagation par Différences Finies au-dessus d’une plaque inclinée (cf. figure 3.34).

Parallèlement à la diminution de l’inclinaison de la plaque, la distance de propagation après cette dernière a été allongée. De cette manière, les différentes zones de rayonnement se distinguent plus aisément. On s’intéresse ici à la composante principale du champ électrique et on trace celle-ci sur la figure 3.36 au niveau du plan de visualisation  $\langle yz \rangle$  représenté en turquoise sur la figure 3.34.

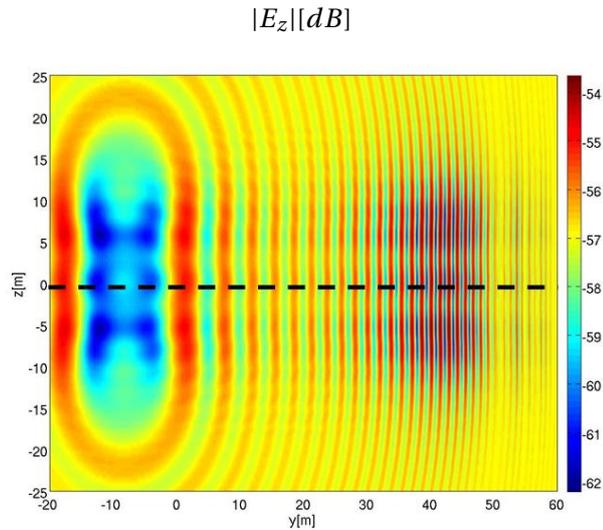
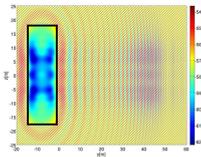
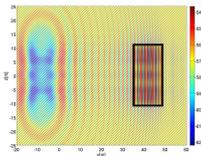


Figure 3.36 – Coupe  $\langle yz \rangle$  de la composante  $E_z$  du champ électrique issue de la modélisation de la propagation en présence d'une plaque inclinée de  $5^\circ$  par la méthode DF.

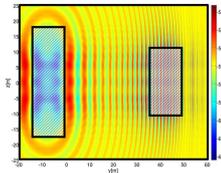
Il est possible de distinguer plusieurs zones de rayonnement et nous allons détailler chacune d'entre elles :



La zone de visualisation se trouvant masquée par la plaque, dans laquelle on trouve un minimum de champ uniquement dû aux diffractions par les quatre arêtes de la plaque.



La zone mise en relief ci-contre où le champ électrique présente une valeur élevée. Cela est dû au fait que dans cette zone, celui-ci est la recombinaison de trois champs : le champ incident, le champ diffracté par les arêtes de la plaque et le champ réfléchi sur celle-ci.



Partout ailleurs, l'émetteur n'est plus masqué par la plaque et le champ total est alors une recombinaison du champ incident et du champ diffracté par les quatre arêtes de la plaque.

Pour valider la modélisation de la propagation faite lors de ce cas test, on réalise sur la figure 3.37 une comparaison avec le logiciel FERMAT au niveau des pointillés représentés sur la figure 3.36.

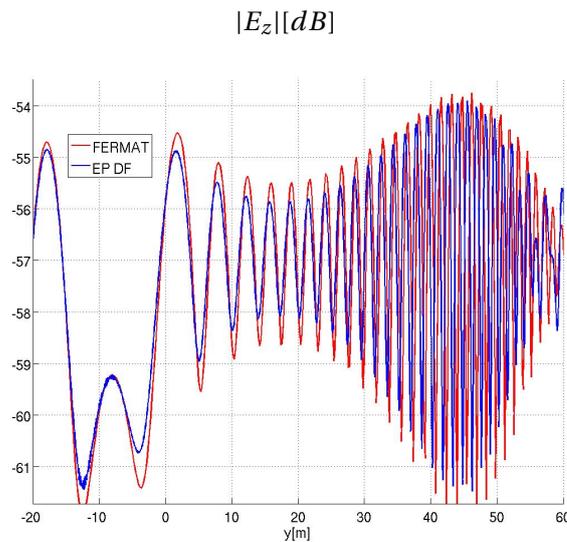
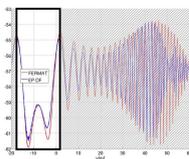
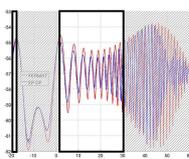


Figure 3.37 – Comparaison entre la méthode DF et le logiciel FERMAT dans le cas de la propagation en présence d’une plaque inclinée de  $5^\circ$ .

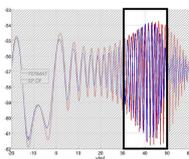
La diminution de l’inclinaison de la plaque ainsi que l’éloignement de la distance de visualisation permettent à tous les phénomènes propagatifs étudiés d’apparaître sur la coupe 3.37. Sur cette nouvelle visualisation, il est possible de distinguer les différentes zones de rayonnement principales.



Pour les ordonnées comprises dans le domaine  $-18m \leq y \leq 2m$ , le champ est dû à la recombinaison des champs diffractés par les quatre arêtes de la plaque. On constate ici que l’on a une bonne concordance entre le modèle Équation Parabolique 3D et le logiciel FERMAT.

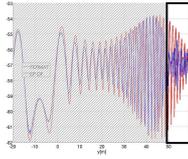


Pour les ordonnées comprises dans l’intervalle  $2m \leq y \leq 30m$  et pour  $y > 67m$ , le champ est ici la somme du champ incident et des champs diffractés par les arêtes de la plaque. On constate que la concordance est également bonne dans cette zone et les différences que l’on peut constater sont inférieures à  $1dB$ .



Pour les ordonnées comprises entre  $30m$  et  $50m$ , le champ est la recombinaison de trois champs : le champ incident, le champ diffracté par les arêtes de la plaque et le champ réfléchi sur cette dernière. La concordance est tout à fait convenable. On peut remarquer que l’on ne retrouve pas les problèmes de modélisation de la réflexion rencontrés dans le cas précédent.

La diminution de l’inclinaison de la plaque a permis de contenir tous les phénomènes propagatifs dans le cône de validité de la méthode. Cependant cette limite angulaire existe toujours.



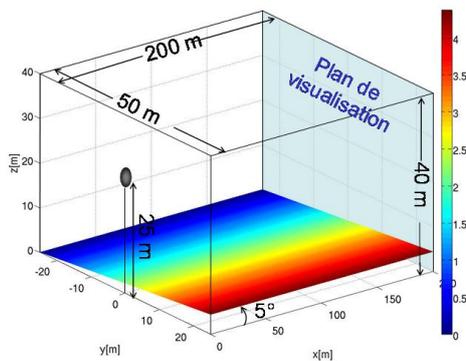
On peut ainsi remarquer que dans la zone où  $y$  est supérieur à  $50m$ , le champ modélisé par Différences Finies devient très perturbé et n'est plus en accord avec celui calculé par le logiciel FERMAT.

### III.4 Prise en compte du couplage des composantes

Nous avons vu dans la théorie que la méthode Différences Finies implémentée est capable de prendre en compte la normale tridimensionnelle au relief considéré et est donc potentiellement capable de modéliser la dépolarisation créée par un relief 3D. Les cas tests que nous allons maintenant considérer ont pour but de mettre en avant la création de polarisation croisée lors de la propagation en présence d'un relief dont la normale est tridimensionnelle.

#### III.4.1 Obstacle présentant une normale à deux composantes

Dans un premier temps, on considère un obstacle présentant une normale à deux composantes non nulles tel que représenté sur la figure 3.38.



hauteur émetteur	25m
fréquence	1GHz
polarisation	H
largeur domaine	50m
hauteur domaine	40m
portée du calcul	200m
demi-ouverture antenne $\theta_{3dB}$	2.5°
inclinaison de l'obstacle	5°

Figure 3.38 – Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'un obstacle à deux normales.

On présente sur la figure 3.39, les trois composantes du champ électrique au niveau d'un plan de visualisation  $\langle yz \rangle$  situé en  $x = 200m$  et représenté en turquoise sur la figure 3.38.

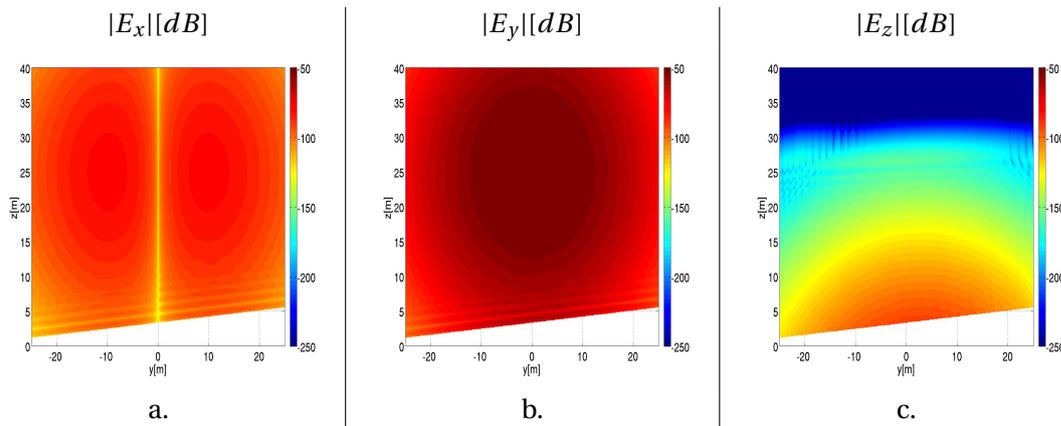
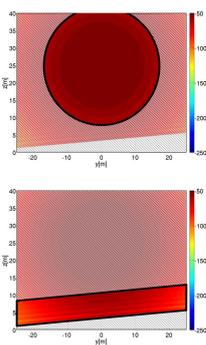


Figure 3.39 – Cartographies  $\langle yz \rangle$  du champ électrique issues d’un calcul par la méthode DF en présence d’un obstacle présentant deux normales.

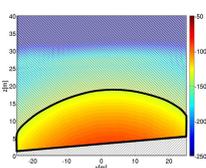
Nous allons détailler les principaux phénomènes propagatifs présents dans cette configuration. Focalisons nous tout d’abord sur les composantes principales  $E_x$  et  $E_y$  (cf. figure 3.39a. et b.). Le raisonnement pouvant être fait de manière identique sur ces deux composantes, nous l’illustrerons sur la composante  $E_y$ .



Tout d’abord, on observe l’influence du diagramme d’antenne donnant au champ électrique sa variation gaussienne.

Ensuite, on retrouve une figure d’interférences parallèle à la surface de l’obstacle traduisant la recombinaison du champ incident et du champ réfléchi sur l’obstacle.

En ce qui concerne la composante  $E_z$  (cf. figure 3.39c.), on constate que contrairement à la propagation au-dessus d’un sol plan, celle-ci bien que très faible, est différente de zéro. Ainsi cette composante a été générée au travers des conditions aux limites par la pente de l’obstacle.



Cette composante présente également une forme gaussienne due au diagramme de rayonnement de l’antenne. De plus, on constate que celle-ci ne présente aucune interférence. En effet il ne peut pas y avoir de recombinaison dans la mesure où elle est uniquement générée par la pente de l’obstacle et que le champ incident ne comporte pas cette composante.

Afin de s’assurer de la validité des résultats obtenus, nous allons comparer les résultats précédents avec ceux issus d’une modélisation par la méthode de la source image. Celle-ci peut être considérée comme une référence et nous reportons sur la figure 3.40 les trois composantes du champ électrique modélisées par cette méthode.

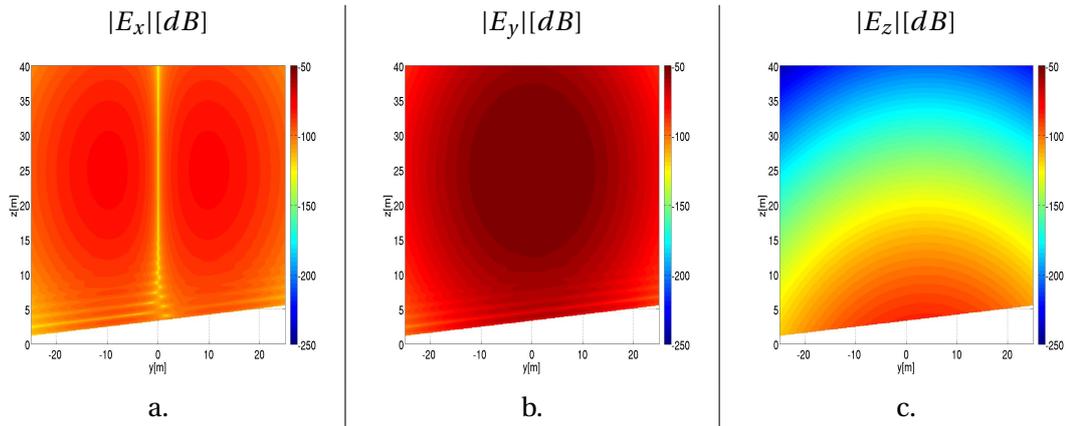
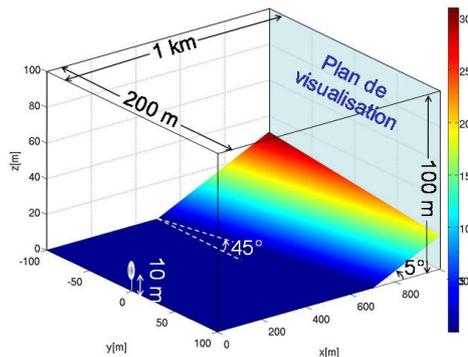


Figure 3.40 – Champ électrique référence au-dessus d'un obstacle présentant deux composantes.

Ces dernières cartographies ont été tracées avec un code de couleur identique à celles obtenues par Différences Finies pour faciliter les comparaisons. On remarque ainsi un très bon accord entre les composantes  $E_x$  et  $E_y$  modélisées et la référence. Pour la composante de polarisation croisée,  $E_z$ , l'amplitude du champ modélisé est inférieure de 2-3 dB à la référence. On a néanmoins pu constater qu'une diminution des pas de discrétisation permettait de combler l'écart entre la méthode Différences Finies et la référence. C'est à ce jour l'hypothèse que nous privilégions pour justifier cet écart.

### III.4.2 Obstacle présentant une normale à trois composantes

Dans un second temps, nous considérons un sol présentant une pente à trois composantes et nous représentons celui-ci (accompagné des paramètres principaux) sur la figure 3.41.



hauteur émetteur	10m
fréquence	1GHz
polarisation	H
largeur domaine	200m
hauteur domaine	100m
portée du calcul	1km
demi-ouverture antenne $\theta_{3dB}$	5°

Figure 3.41 – Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'un obstacle à trois composantes.

On représente ensuite sur la figure 3.42 une vue de dessus et de face de cet obstacle.

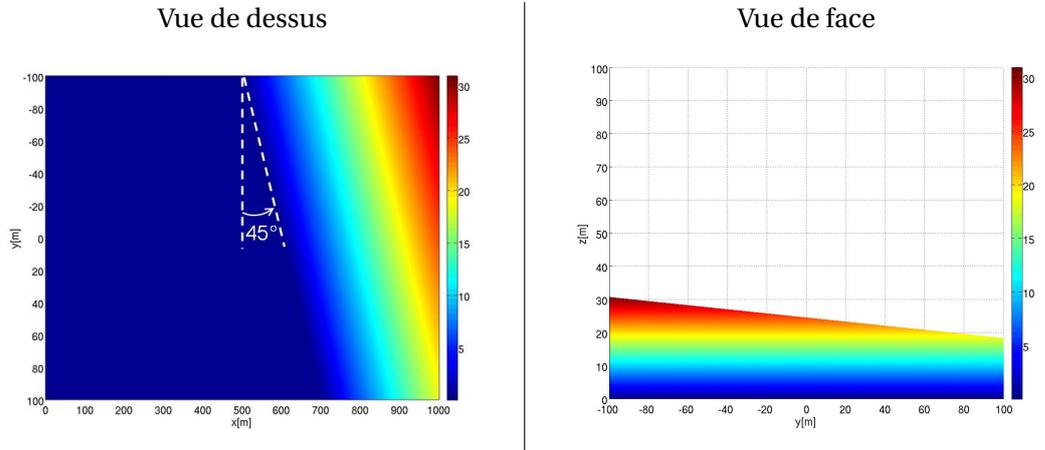


Figure 3.42 – Vues de dessus et depuis l'émetteur de l'obstacle.

On présente sur la figure 3.43, les trois composantes du champ électrique au niveau d'un plan de visualisation  $\langle yz \rangle$  situé en  $x = 1\text{km}$  et représenté en turquoise sur la figure 3.41.

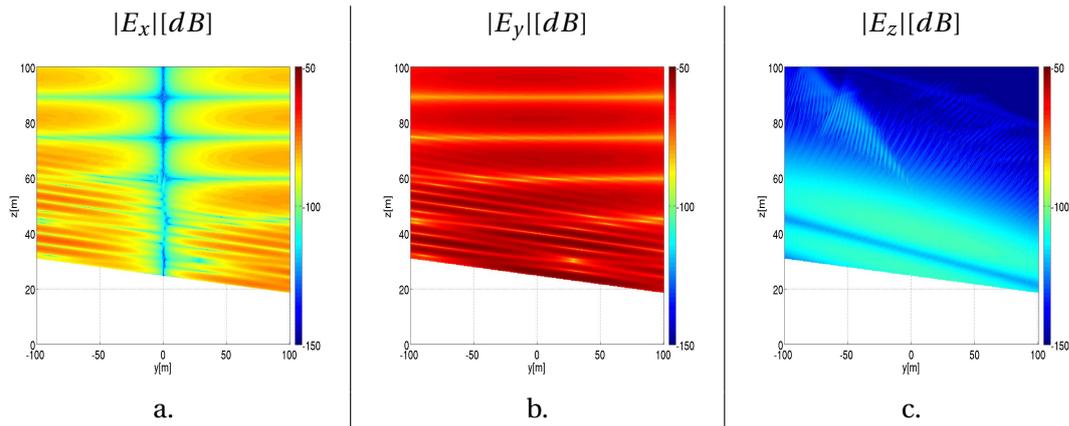
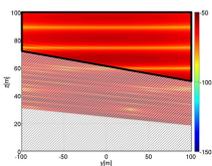


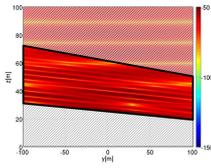
Figure 3.43 – Cartographies  $\langle yz \rangle$  du champ électrique issues d'un calcul par la méthode DF en présence d'un obstacle à trois composantes.

Les trois composantes du champ ont été tracées suivant un code de couleur identique, on constate ainsi la supériorité en amplitude de la composante  $E_y$  (cf. figure 3.43b.) sur celle de la composante  $E_x$  (cf. figure 3.43a.) et on constate à nouveau que la composante  $E_z$  (cf. figure 3.43c.), bien que très faible, est différente de zéro.

Si dans un premier temps on se concentre sur les composantes majoritaires,  $E_x$  et  $E_y$ , on observe plusieurs phénomènes.



Tout d'abord, on retrouve une figure d'interférences verticale due à la recombinaison du champ incident et du champ réfléchi sur le sol plan. La périodicité verticale de celles-ci est de  $15\text{m}$  conformément à la relation (2.49).

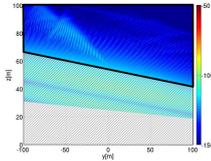


En plus de ces dernières interférences, on retrouve sur la partie inférieure de la cartographie de champ des interférences de plus petites tailles et inclinées. Celles-ci sont dues à la présence supplémentaire du champ réfléchi sur le sol incliné, il y a donc dans la zone mise en relief ci-contre recombinaison de trois champs : le champ incident, le champ réfléchi sur le sol plan et le champ réfléchi sur le sol incliné.

Nous avons ici illustré nos propos par des vignettes représentant la composante dominante  $E_y$  mais des commentaires équivalents peuvent être réalisés sur la composante  $E_x$ .

Si on s'intéresse maintenant à la composante minoritaire  $E_z$ , comme signalé précédemment on constate que celle-ci est différente de zéro. Or l'onde émise étant polarisée horizontalement, elle ne présente au-dessus d'un sol plan aucune composante suivant la verticale. C'est donc la présence du sol pentu et sa prise en compte par les conditions aux limites qui a généré cette composante. L'apparition de cette dernière est par conséquent un effet de dépolarisation.

On constate que cette composante présente une interférence inclinée. Or celle-ci étant uniquement générée par la pente de l'obstacle au travers des conditions aux limites, elle ne devrait pas en présenter. En revanche le champ incident éclairant le plan incliné présente une figure d'interférences régulière due au sol plan (de périodicité  $15m$ ). Ainsi les deux premiers lobes de cette figure d'interférences viennent se réfléchir sur le plan incliné et ce dernier induit une rotation de polarisation. Remarquons que le minimum d'interférence observé sur cette composante  $E_z$  est incliné de  $10^\circ$  soit le double de la pente de l'obstacle.



Sur la partie haute de la cartographie de la composante  $E_z$ , on constate la présence de fluctuations parasites. Celles-ci sont de très faible niveau, inférieur à  $-120dB$ , et probablement dû à du bruit numérique.

## IV Conclusion

Dans ce chapitre, une seconde méthode de résolution de l'Équation Parabolique 3D basée sur une résolution de type Différences Finies a été présentée. Tout comme la résolution SSF, celle-ci est itérative et permet de propager vers l'avant le champ électromagnétique à partir d'une distribution initiale connue. Afin de garantir une résolution aisée, l'approximation paraxiale réalisée est de type petit angle et autorise à considérer un cône de validité de demi-angle au sommet théorique égal à  $15^\circ$ . Plusieurs schémas de propagation ont été présentés et le choix original de la méthode à pas fractionnaires a été fait afin de simplifier la résolution car à chaque itération les matrices à inverser sont tridiagonales. Pour veiller à une bonne utilisation de celle-ci, des relations de consistance conditionnant les pas d'échantillonnage du champ ont été proposées. Elles permettent de s'assurer que la résolution de la méthode à pas fractionnaires est équivalente à celle de l'Équation Parabolique d'origine. Ensuite, un traitement innovant des conditions aux limites a permis d'intégrer celles-ci dans le calcul de

la propagation. La propagation de chaque composante du champ se faisant indépendamment les unes des autres en considérant des conditions aux limites simplifiées, le couplage entre celles-ci est introduit par le calcul des conditions aux limites générales à l'interface de l'obstacle qui peut être de forme quelconque. Ainsi cette approche est plus rigoureuse au niveau de la prise en compte des conditions aux limites que la méthode SSF proposée dans le chapitre précédent.

Cette résolution de l'Équation Parabolique 3D a été validée sur différents cas tests. La modélisation de la réflexion a ainsi pu être validée lors de la propagation au-dessus d'un sol plan métallique. On a aussi pu constater la capacité de cette méthode à modéliser les deux types de polarisation principale.

La réfraction est également prise en compte et a été validée par la considération de deux différents types d'atmosphère : une atmosphère standard et en présence d'un conduit d'évaporation.

La diffraction est modélisée correctement comme on a pu le constater lors de l'application de la méthode en présence d'une plaque métallique perpendiculaire puis inclinée par rapport au sens de propagation. Ce dernier cas test a néanmoins mis en relief la limitation induite par l'approximation paraxiale introduite dans cette résolution par Différences Finies. Cependant, à l'image des travaux [13] réalisés en deux dimensions, une résolution grand angle de l'Équation Parabolique par Différences Finies est possible. Celle-ci permettrait d'outrepasser ce que l'on peut considérer comme l'inconvénient majeur de la méthode Différences Finies proposée. Néanmoins le développement de cette dernière nous a amené à résoudre tous les points durs d'une telle approche tout en conservant une méthode rapide et originale.

Les validations sur les cas tests canoniques ayant été concluantes. Il est intéressant de comparer plus finement les deux méthodes Différences Finies et SSF sur différentes configurations 3D afin de caractériser leurs avantages et inconvénients : c'est le thème du chapitre suivant.



## Chapitre 4

# Mise en valeur des effets de propagation tridimensionnels

### I Introduction

Dans les deux chapitres précédents, nous avons étudié la résolution de l'Équation Parabolique tridimensionnelle par la méthode de Split-Step Fourier et par Différences Finies. Nous avons pu constater la pertinence des résultats obtenus par celles-ci sur des cas canoniques, ce qui nous a permis de conclure sur la validité et les limites de ces méthodes.

Le but de ce chapitre est de mettre en valeur les avantages d'une résolution tridimensionnelle de l'Équation Parabolique. Ceux-ci sont déjà visibles sur certains cas tests réalisés dans les chapitres précédents. En effet, lors de la modélisation de la propagation au-dessus d'un sol et d'un écran ou en présence d'une plaque inclinée, la prise en compte des diffractions issues de toutes les arêtes de la scène considérée a permis de montrer des effets 3D. Ici nous proposons de mettre en valeur les méthodes développées sur des scènes tridimensionnelles de grande taille considérant en première approche un simple écran, puis une montagne de forme gaussienne et nous complexifierons le terrain en le faisant évoluer vers un flanc de montagne présentant un col. Enfin nous modéliserons la propagation en terrain vallonné.

L'ensemble de ces cas seront traités par SSF et par Différences Finies. En effet pour des domaines de telles tailles, nous ne disposons d'aucun logiciel de référence permettant de valider nos simulations. Ainsi, ces deux méthodes basées sur des résolutions différentes pourront « s'intervalider » et leur comparaison permettra de dresser un bilan de leurs avantages et inconvénients. Notons enfin que les obstacles seront choisis métalliques, d'une part pour faciliter l'analyse et d'autre part afin de satisfaire aux conditions restrictives propres à la méthode SSF développée.

### II Propagation en présence d'un obstacle canonique : un écran

Dans cette première section, nous allons nous intéresser à la modélisation effectuée en présence d'une scène constituée d'un sol plan et d'un écran, nous reprenons ainsi les cas tests

2.31 et 3.28 présentés respectivement aux chapitres 2 et 3. Sur la figure 4.1 la configuration de calcul géométrique est rappelée pour faciliter la lecture de l'exposé.

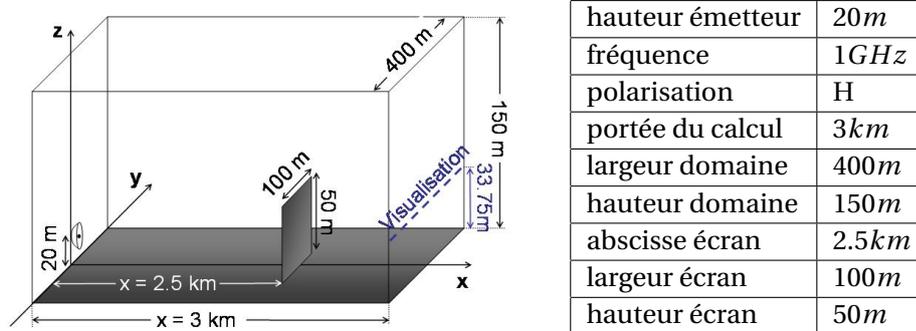


Figure 4.1 – Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'un écran et d'un sol.

## II.1 Mise en relief des effets tridimensionnels

La finitude de l'écran fait de ce cas test un très bon exemple de modélisation d'effets tridimensionnels. En effet, lors de la modélisation de la propagation en présence de cette scène des diffractions interviennent à partir des trois arêtes de l'écran. Or, les diffractions engendrées par les arêtes verticales de l'écran sont impossibles à modéliser par une approche bidimensionnelle.

Ainsi, pour mettre en avant les avantages d'une résolution 3D, nous allons comparer les résultats issus de nos modèles SSF et DF à celui issu d'un modèle 2D. Ce dernier est une résolution de l'Équation Parabolique 2D grand angle par SSF [18, 22]. La comparaison est effectuée sur une coupe horizontale positionnée en  $z = 33.75m$  (cf. pointillés représentés sur la figure 4.1). Pour obtenir le champ sur cette coupe par un modèle bidimensionnel, une série de simulations 2D ont été réalisées en partant de l'émetteur et en les décalant angulairement l'une par rapport à l'autre comme illustré sur la figure 4.2.

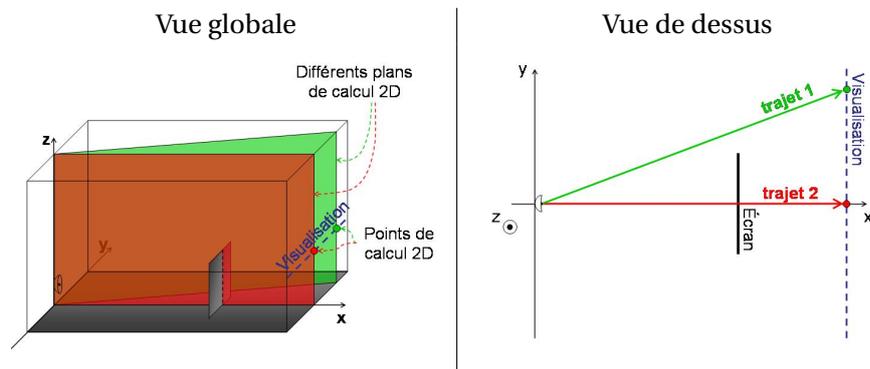


Figure 4.2 – Traitement de l'écran par une succession de simulations 2D.

Il en résulte qu'un modèle bidimensionnel approxime la configuration géométrique du cas présent soit à un sol plan et à une simple arête diffractante (cf. trajet 2), soit à un seul sol plan (cf. trajet 1). Le seul champ diffracté qu'est donc en mesure de prendre en compte un modèle 2D est celui issu de l'arête horizontale de l'écran.

La comparaison entre les modèles bi et tridimensionnels est reportée sur la figure 4.3.

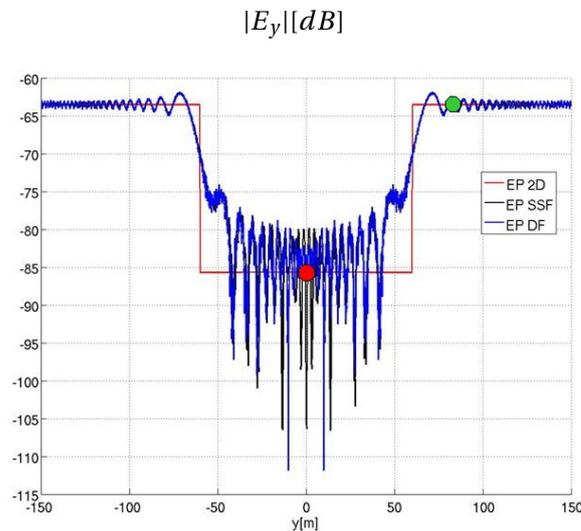
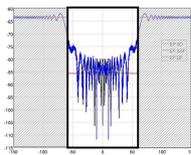
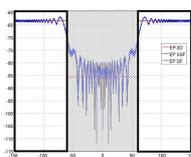


Figure 4.3 – Comparaison entre la résolution SSF 3D (EP SSF), DF 3D (EP DF) et un modèle 2D (EP 2D) dans le cas de la propagation en présence d'un écran et d'un sol.

On remarque que le niveau moyen du champ électrique est identique pour les trois modèles.



On retrouve un champ présentant une valeur plus faible dans la zone définie par  $-60m < y < 60m$ . Cette diminution est due au masquage par l'écran de l'onde émise.



Pour  $|y| > 60m$ , le champ présente une valeur plus élevée et les niveaux moyens concordent entre les trois modélisations.

Néanmoins, on remarque que les méthodes tridimensionnelles présentent des interférences contrairement au résultat issu du modèle bidimensionnel. En effet, ces dernières proviennent de la diffraction par les deux arêtes verticales de l'écran et ne sont donc pas modélisées par l'approche 2D.

Ainsi, au niveau de la hauteur de visualisation choisie, le champ issu d'un modèle bidimensionnel se décompose de la manière suivante :

- soit on se trouve dans la zone de masquage de l'écran et le champ présente une valeur

faible, tel que le point rouge (cf. figure 4.3). Il est ici dû à la recombinaison du champ diffracté par l'arête horizontale avec le champ diffracté réfléchi au sol.

- soit on est hors de cette zone et le champ est dû à la recombinaison des champs direct et réfléchi au sol comme le champ obtenu au niveau du point vert (cf. figure 4.3).

Pour nos modèles 3D on retrouve la même décomposition, à laquelle vient s'ajouter en tous points les champs diffractés par les deux arêtes verticales. On voit donc ici apparaître un grand intérêt au choix d'une modélisation tridimensionnelle dans ce type de configuration. En effet, l'approche 3D permet de considérer la scène dans son ensemble et donc de prendre en considération tous les phénomènes propagatifs présents dans celle-ci.

## II.2 Différences de paraxialité entre les deux méthodes tridimensionnelles

On a pu constater sur la figure 4.3 la supériorité des méthodes tridimensionnelles par rapport à un modèle bidimensionnel. Maintenant, si l'on compare les deux modèles 3D entre eux, on observe des différences. En effet, si l'on zoome sur la figure 4.3 au niveau de la zone  $[-125m < y < -85m]$ , on obtient la figure 4.4.

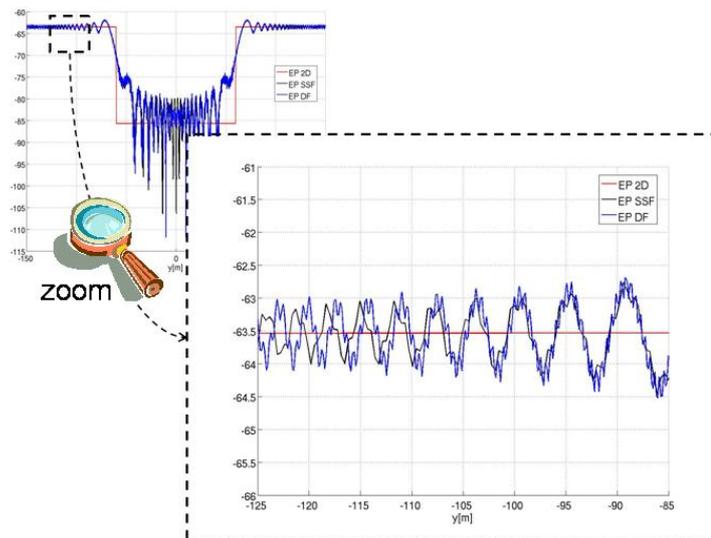


Figure 4.4 – Visualisation de la limitation angulaire de la méthode Différences Finies due à la paraxialité plus réduite de cette méthode.

On peut constater que les interférences concordent entre les deux modèles tridimensionnels tant que  $y$  est supérieur à  $-110m$ , puis les courbes diffèrent l'une de l'autre. Cette limite provient de l'hypothèse de paraxialité due aux approximations différentes de la racine carrée présente dans l'Équation Parabolique (1.20) (cf. section III.2.2 du chapitre 1) et qui engendre un cône de validité plus étroit pour la méthode Différences Finies que pour la résolution SSF. Si l'on représente le cas en question vu de dessus, on obtient la configuration représentée sur la figure 4.5.

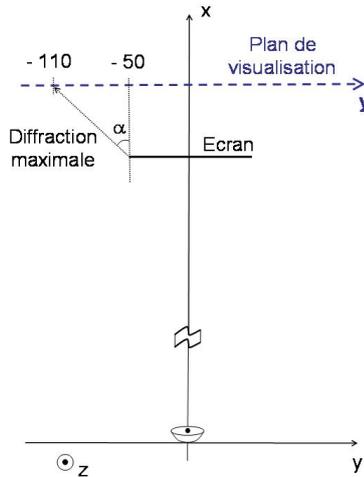


Figure 4.5 – Visualisation de l’angle de diffraction maximal.

L’angle  $\alpha$  représentant l’angle de diffraction maximal autorisé est donné pour la méthode Différences Finies par la relation suivante :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{110 - 50}{500}\right) \approx 7^\circ \tag{4.1}$$

On trouve donc une limite paraxiale de  $7^\circ$  à la méthode Différences Finies, à comparer avec les  $15^\circ$  annoncés théoriquement. Néanmoins, on a pu remarquer que l’ouverture angulaire de la méthode Différences Finies était fortement dépendante de l’échantillonnage considéré lors de la résolution. Les résultats présentés ont ainsi été obtenus avec les caractéristiques d’échantillonnage suivantes :

	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta z$	taille du domaine complet [ $x \times y \times z$ ]	temps
<b>SSF</b>	$2m$	$0.3m = \lambda$	$0.3m = \lambda$	$3000 \times 400 \times 150 [m^3]$	$38min$
<b>DF</b>		$0.15m = \lambda/2$	$0.15m = \lambda/2$		$4h17min$

On constate que pour un domaine de calcul équivalent, la méthode Différences Finies nécessite un échantillonnage plus fin suivant les dimensions  $y$  et  $z$  que la méthode SSF. Cela implique un temps de calcul plus important : ainsi  $38min$  ont été nécessaires pour modéliser la propagation par la SSF alors que le temps de calcul s’élève à  $4h17min$  par Différences Finies.

Pour observer l’influence de l’échantillonnage sur la méthode Différences Finies, nous modélisons la propagation par cette méthode en utilisant un maillage identique à celui pris en compte lors de la résolution SSF. Les pas  $\Delta y$  et  $\Delta z$  ont donc été fixés à une valeur égale à la longueur d’onde et nous obtenons le résultat présenté sur la figure 4.6.

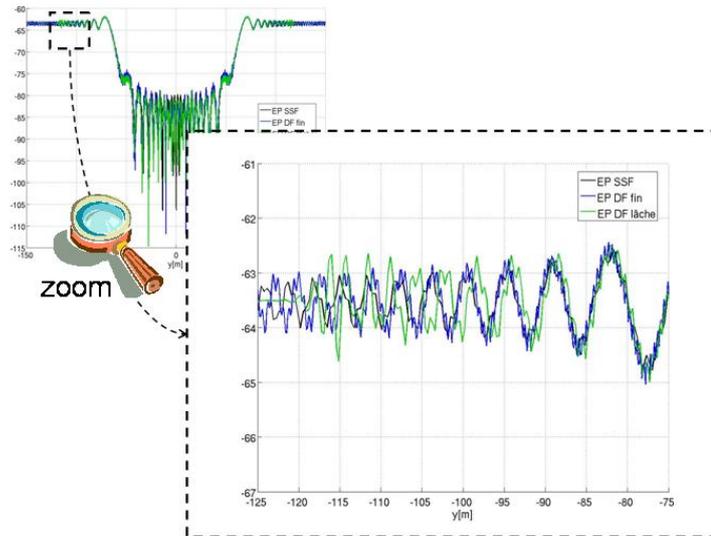


Figure 4.6 – Comparaisons des résultats obtenus par Différences Finies suivant l'échantillonnage utilisé.

Le relachement des pas de discrétisations a provoqué une diminution de l'ouverture angulaire de la méthode Différences Finies. On peut ainsi constater que le résultat obtenu en utilisant des pas d'échantillonnage plus lâches (représenté en vert) ne concorde avec la méthode SSF que pour  $y > -85m$ . L'ouverture angulaire a donc été réduite à  $4^\circ$ .

Les caractéristiques des calculs numériques des méthodes Différences Finies utilisées sont reportés dans le tableau suivant :

	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta z$	<b>validité angulaire obtenue</b>	<b>temps</b>
<b>DF fine</b>	$2m$	$0.15m = \lambda/2$	$0.15m = \lambda/2$	$7^\circ$	$4h17min$
<b>DF lâche</b>		$0.3m = \lambda$	$0.3m = \lambda$	$4^\circ$	$1h04min$

On peut ainsi vérifier, comme énoncé précédemment, qu'il existe une relation étroite entre l'échantillonnage choisi pour une résolution Différences Finies et l'ouverture angulaire de cette dernière. En effet, la diminution des pas d'échantillonnage permet d'augmenter le cône de validité de la méthode Différences Finies. Cependant cette augmentation se concrétise par un accroissement du temps de calcul.

Notons que cette nécessité de mailler finement le domaine pour une résolution Différences Finies a également des conséquences en terme d'espace mémoire nécessaire. Ainsi pour des grands domaines tels que ceux qui nous intéressent dans ce chapitre, la limitation des calculateurs à notre disposition nous impose un espace mémoire maximal que nous ne pouvons dépasser. Ce qui engendre, par l'intermédiaire des pas d'échantillonnage, une limitation quant à l'ouverture angulaire des résultats qu'il nous est possible d'obtenir par Différences Finies.

### III Propagation au-dessus d'une montagne de forme gaussienne

Le deuxième cas test que l'on propose d'étudier ici est un cas de propagation en présence d'un obstacle plus réaliste : une montagne de forme gaussienne. La configuration est représentée par la figure 4.7.

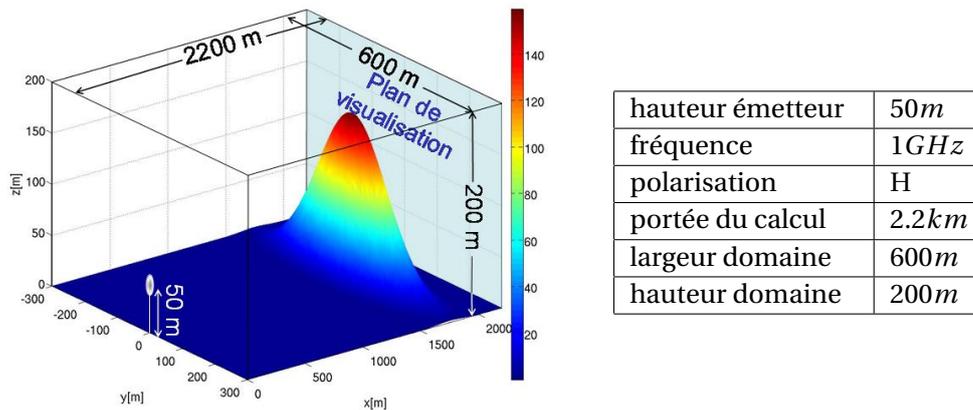


Figure 4.7 – Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'une montagne de forme gaussienne.

La hauteur de la montagne est représentée selon un code de couleur positionné à droite de l'illustration précédente (cf. figure 4.7) dans lequel les couleurs évoluent du bleu foncé vers le rouge foncé en même temps que l'altitude de l'obstacle augmente.

Afin de mieux observer l'aspect tridimensionnel de cette montagne, on représente sur la figure 4.8 une vue de dessus et une vue de face de celle-ci.

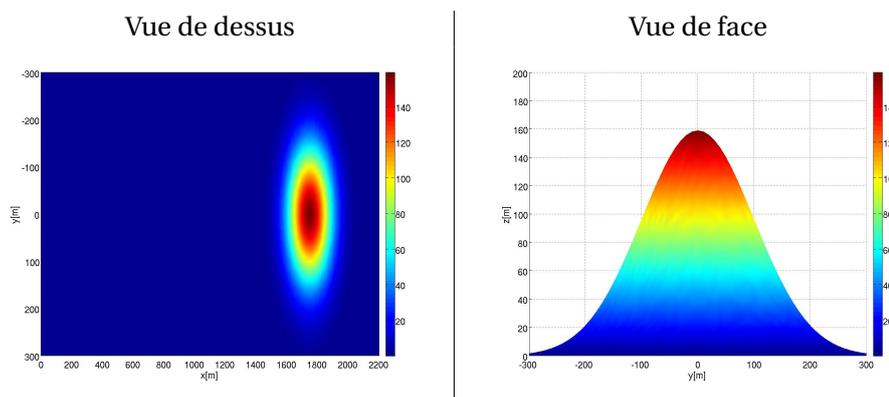
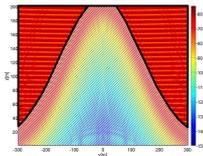


Figure 4.8 – Vues de dessus et de face de la montagne de forme gaussienne.

On propose ici de visualiser le module du champ électrique sur un plan  $\langle yz \rangle$  positionné juste au-delà de la montagne gaussienne en  $x = 2200m$ , celui-ci est illustré en turquoise sur

la figure 4.7. On regroupe sur la figure 4.9 les cartographies de toutes les composantes du champ électrique obtenues par les modélisations SSF et Différences Finies.

Hormis la composante  $E_z$  correspondant à la polarisation croisée sur laquelle nous nous attarderons par la suite, on remarque que d'une manière générale les résultats obtenus par les deux méthodes présentent une bonne concordance. Les phénomènes de propagation de type réflexion et diffraction induits par cette scène sont nombreux et décrits en détails dans les paragraphes suivants. L'analyse étant identique sur les composantes  $E_x$  et  $E_y$ , nous illustrerons notre raisonnement sur la composante principale  $E_y$ .



Premièrement, la montagne de forme gaussienne est placée au-dessus d'un sol plan. Ainsi, on retrouve dans la zone mise en relief ci-contre la figure d'interférences due à la recombinaison du champ incident et du champ réfléchi sur le sol. Celles-ci sont de périodicité égale à  $6.6m$  conformément à la relation classique (2.49).

Dans cette configuration, le phénomène de réflexion n'intervient pas uniquement sur le sol, il existe un phénomène de réflexion sur la montagne.

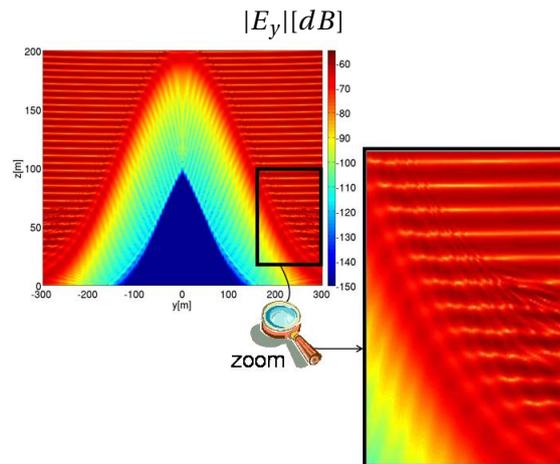
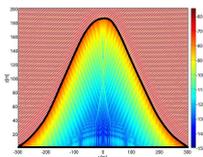


Figure 4.10 – Réflexion sur un bord de la montagne de forme gaussienne.

Ainsi sur la figure 4.10, on peut constater que le champ est « chahuté » dans la partie encadrée. Ceci est dû fait que dans cette région le champ est la recombinaison de trois champs distincts : le champ incident, le champ réfléchi sur le sol et le champ réfléchi sur la montagne. Étudions plus spécifiquement la modélisation de l'effet de masquage de la montagne.



Ainsi, sur la zone mise en relief ci-contre, on constate que le champ présente une valeur plus faible dans l'ombre de la montagne où le champ n'est dû qu'aux composantes diffractées par les flancs de la montagne.

Si l'on s'attarde sur ces zones d'ombre et que l'on souhaite comparer les résultats obtenus

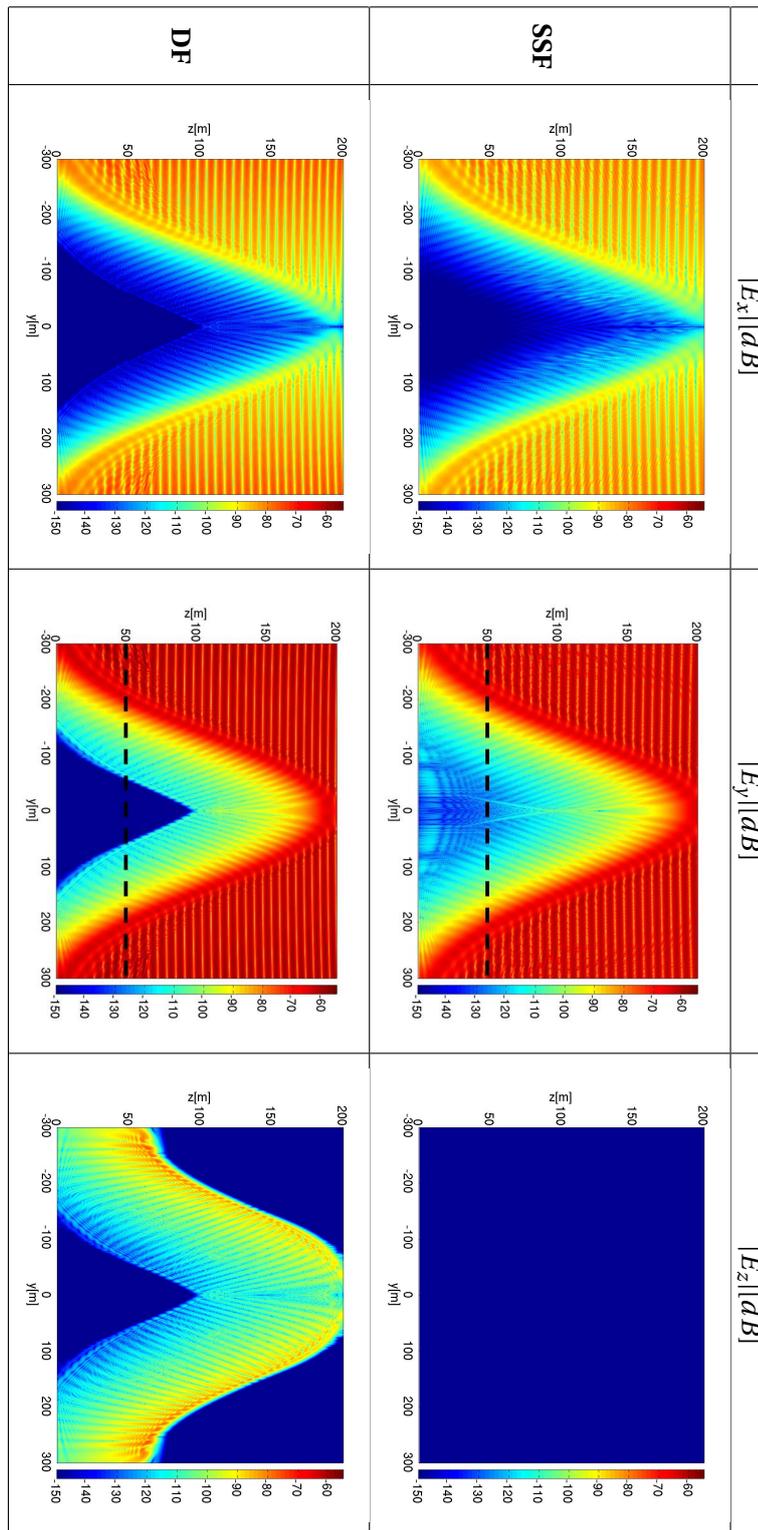
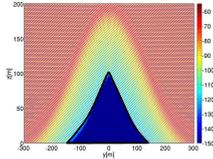


Figure 4.9 – Coupes  $\langle yz \rangle$  du champ électrique obtenu lors de la modélisation de la propagation au-dessus d'une montagne de forme gaussienne par les méthodes SSF et DF.

par les deux méthodes de résolutions, on remarque une différence. En effet, sur la vignette ci-dessus reprenant le résultat de la composante  $E_y$  par la méthode SSF, on remarque que le champ se propage dans toute la zone d'ombre.



Par la méthode Différences Finies (dont les résultats sont rappelés ci-contre), le fait que son cône de validité soit plus étroit entraîne que le champ diffracté par le pourtour de la montagne ne se propage pas dans toute cette zone.

Ceci permet donc de visualiser à nouveau l'étroitesse du cône de validité de la méthode Différences Finies. Il faut toutefois noter que si le plan de visualisation avait été positionné à une abscisse plus élevée (soit plus éloigné de l'obstacle), le champ diffracté par les flancs de la montagne se serait propagé dans toute la zone d'ombre et l'étroitesse du cône de validité de la méthode Différences Finies aurait été moins pénalisante.

D'autre part, si l'on s'intéresse à la composante de polarisation croisée  $E_z$ , on constate au premier coup d'oeil que celle-ci est nulle par une modélisation SSF. Au contraire par Différences Finies, les conditions aux limites introduites dans cet algorithme sont telles qu'elles permettent de prendre en compte la normale tridimensionnelle à l'obstacle et ainsi de générer la dépolarisation. La faculté de la méthode Différences Finies à prendre en compte une normale locale 3D sur l'obstacle et par conséquent de modéliser les composantes croisées est un avantage indéniable sur la méthode SSF.

Pour comparer plus finement les résultats obtenus par les deux méthodes de résolution, on représente le module de la composante principale du champ électrique,  $E_y$ , sur une coupe horizontale positionnée au niveau du plan de visualisation, en  $x = 2200m$ , et à une hauteur  $z = 50m$  (cf. pointillés figure 4.9). Cette comparaison est reportée sur la figure 4.11.

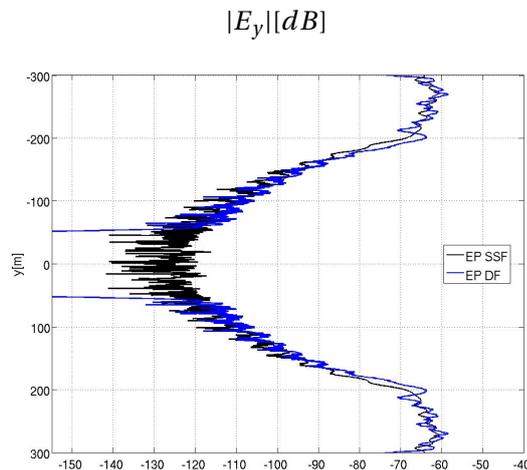
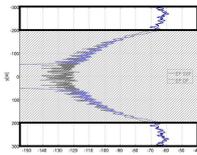
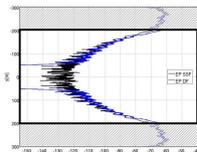


Figure 4.11 – Comparaison des méthodes SSF et Différences Finies sur une horizontale dans le cas de la propagation en présence d'une montagne de forme gaussienne.

On peut constater que l'accord entre les deux méthodes est tout à fait convenable sur une partie du domaine d'observation.



Sur la partie mise en relief ci-contre, correspondant à la zone où il y a recombinaison du champ direct, réfléchi sur le sol et réfléchi sur la montagne, on trouve une bonne concordance entre les deux méthodes de résolution.



Sur la partie centrale correspondant à la zone d'ombre de l'antenne créée par la montagne, la concordance semble également tout à fait convenable.

Toutefois si l'on se focalise sur le milieu de cette zone, pour  $-50m < y < 50m$ , on retrouve l'inconvénient principal de la méthode Différences Finies que nous allons détailler. Ainsi, sur la figure 4.12, on réalise un agrandissement de la partie centrale de la zone d'ombre et on peut constater que la méthode SSF propage le champ électrique sur toute la largeur de cette zone tandis que par Différences Finies le résultat « s'effondre » pour  $-50m < y < 50m$ . En effet dans cette zone, on est hors du cône de validité de cette méthode et le champ n'y est donc plus propagé.

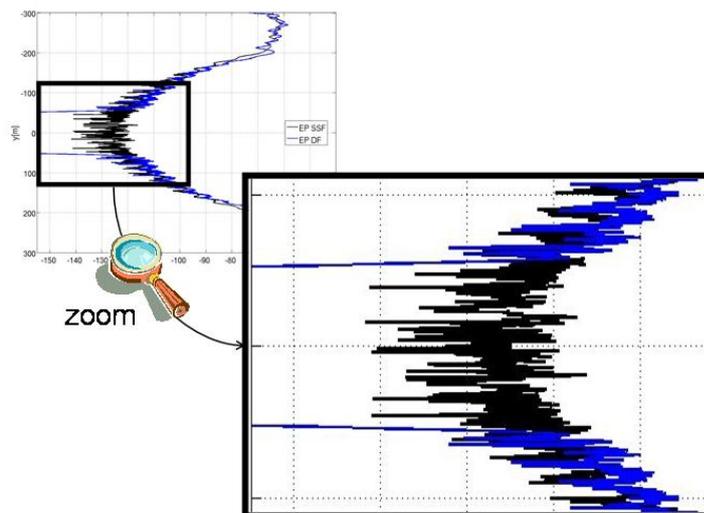


Figure 4.12 – Visualisation de la différence entre les ouvertures angulaires des méthodes SSF et Différences Finies dans le cas de la propagation en présence d'une montagne de forme gaussienne.

La comparaison entre les deux modèles aboutit donc à une bonne concordance des résultats dans la mesure où la validité des méthodes est assurée.

Rappelons qu'il aurait été possible d'obtenir un résultat Différences Finies présentant un

cône de validité angulaire moins étroit en discrétisant plus finement le domaine de calcul. Cependant, ceci nécessite un espace mémoire important que les calculateurs à notre disposition ne pouvaient nous offrir.

Si l'on s'intéresse maintenant aux caractéristiques des calculs numériques mis en oeuvre lors de la résolution par les deux méthodes, on obtient les valeurs réunies dans le tableau suivant :

	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta z$	taille du domaine complet [ $x \times y \times z$ ]	temps
<b>SSF</b>	$2m$	$0.45m = 3/2\lambda$	$0.45m = 3/2\lambda$	$2200 \times 600 \times 200 [m^3]$	$1h59min$
<b>DF</b>					$3h34min$

Pour ce cas test, on a choisi d'utiliser les mêmes échantillonnages pour les deux résolutions. Le pas de progression horizontal a donc été fixé à  $2m$ , tandis que les pas  $\Delta y$  et  $\Delta z$  ont été pris égal à  $3/2\lambda$ . En considérant que l'on initialise le calcul à  $1350m$ , la taille du domaine de résolution est de  $850 \times 600 \times 200 [m^3]$ , soit  $340 \cdot 10^6 \lambda^3$ .

Nous avons ajouté en fin de ce tableau le temps de calcul nécessaire à la modélisation de la propagation sur tout le domaine. Ainsi,  $1h59min$  ont été requises pour la résolution SSF et  $3h34min$  par Différences Finies (celles-ci ayant toutes deux été réalisées sur un PC de type Pentium IV à  $3GHz$ ). Le surcroît de temps de calcul nécessaire pour modéliser la propagation par Différences Finies s'explique essentiellement par le fait que le traitement des conditions aux limites intégrées à cette résolution est plus complexe et nécessite par conséquent un temps de calcul plus important.

À partir de l'étude des résultats qui vient d'être réalisée, il est possible de se faire une première idée quant aux avantages et inconvénients que l'on peut attribuer à chacune des deux méthodes. Ainsi, ce sont des méthodes 3D et par conséquent elles sont capables de modéliser les effets transverses. La méthode SSF présente un large cône de validité, ce qui constitue un avantage certain sur la méthode Différences Finies. Néanmoins, la méthode Différences Finies possède l'avantage d'intégrer dans sa résolution des conditions aux limites complètes. Celles-ci prennent en compte la normale au relief suivant ces trois dimensions et permettent de coupler toutes les composantes du champ. Mais ceci a un coût et augmente le temps de calcul.

#### IV Propagation au-dessus d'une montagne présentant un col

Nous allons dans cette section considérer la propagation en présence d'une montagne complexe présentant un col. Ce cas test a été principalement défini par M. BEAUQUET de la société Thalès Air Defence et nous tenons à ce titre à le remercier.

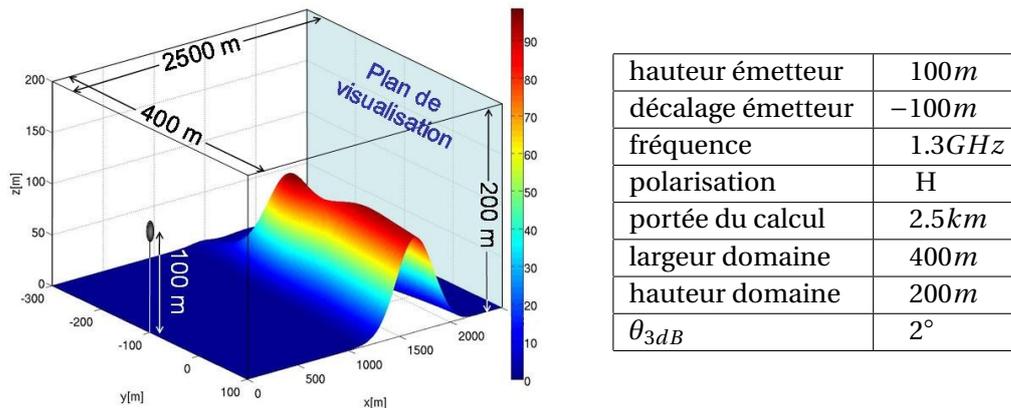


Figure 4.13 – Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'une montagne complexe présentant un col.

La montagne modélisée est plus complexe que la montagne de forme gaussienne dans la mesure où elle ne présente ni symétries, ni axes de révolution. Cette montagne est représentée sur la figure 4.13 selon un principe de code de couleur comme dans le cas test précédent. Afin de mieux observer l'aspect tridimensionnel de cette montagne, on représente sur la figure 4.14 une vue de dessus et une vue de face de celle-ci. On peut ainsi se rendre compte que le flanc de la montagne n'est pas perpendiculaire à l'axe de propagation  $x$  et présente une inclinaison quelconque. De plus, la crête de la montagne n'est en aucune manière uniforme et présente même un col en son extrémité gauche. Toutes ces particularités vont permettre de mettre en avant les effets tridimensionnels liés à la propagation en présence de telles scènes 3D.

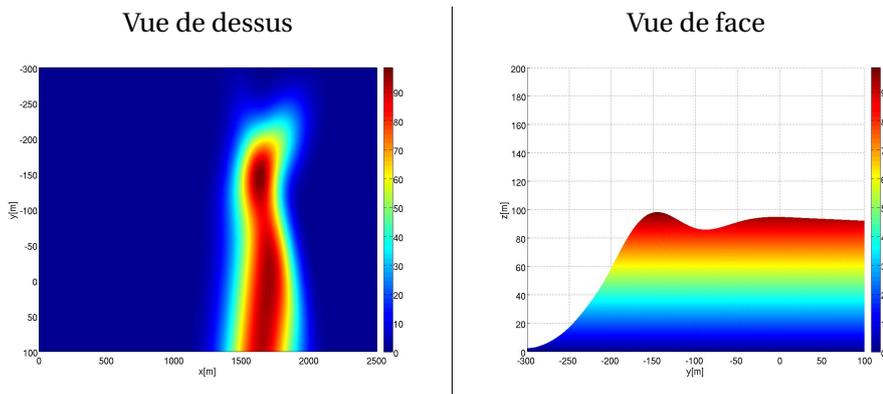
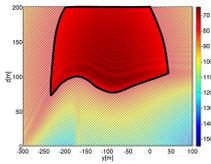


Figure 4.14 – Vues de dessus et de face de la montagne complexe présentant un col.

On propose de visualiser le module du champ électrique sur un plan  $\langle yz \rangle$  positionné en  $x = 2500m$ , celui-ci est illustré en turquoise sur la figure 4.13. On regroupe sur la figure 4.15 les cartographies de toutes les composantes du champ électrique obtenues par les modélisa-

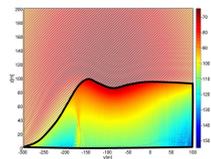
tions SSF et Différences Finies.

Hormis la composante croisée  $E_z$  sur laquelle nous nous attarderons par la suite, on remarque que d'une manière générale les résultats obtenus suivant les deux méthodes semblent présenter une bonne concordance. Il est cependant possible de réaliser un certain nombre de commentaires que nous proposons dans ce qui suit.



Si l'on se focalise sur la modélisation de la composante principale du champ électrique, on constate qu'une très grande partie de celui-ci se situe dans une région du plan de visualisation que l'on peut délimiter de la manière ci-contre. Ceci se justifie par le fait que la demi-ouverture de l'antenne présente une valeur faible et de ce fait la propagation du champ ne se retrouve pas sur tout le domaine de calcul. Précisons que nous avons imposé une faible ouverture du lobe d'antenne afin que le champ se concentre sur la partie du relief d'aspect tridimensionnel le plus varié, à savoir le col. Ce choix permet d'accroître les effets du relief 3D sur la propagation de l'onde électromagnétique.

Dans la zone soulignée précédemment, on peut constater que l'on retrouve une figure d'interférences. Celles-ci est due à la recombinaison du champ incident et du champ réfléchi sur la cime de la montagne.



Parallèlement aux effets du diagramme d'antenne et de réflexion sur la cime de la montagne, il est possible de remarquer l'effet de masquage par cette dernière de l'antenne. Ainsi, dans la zone ci-contre, le champ électrique présente une valeur faible dans la mesure où il n'est ici dû qu'au champ diffracté par la cime de la montagne.

D'autre part, si l'on s'intéresse à la composante  $E_z$ , on trouve une valeur nulle de celle-ci par une modélisation SSF pour les raisons invoquées précédemment. La modélisation Différences Finies permet de décrire la polarisation croisée provenant du couplage entre les composantes sur les flancs de la montagne.

Pour comparer plus finement les résultats obtenus par les deux méthodes de résolution, on représente le module de la composante principale du champ électrique,  $E_y$ , sur une verticale positionnée au niveau du plan de visualisation, en  $x = 2500m$ , et à une ordonnée  $y = -100m$  (cf. pointillés figure 4.15). Cette comparaison est reportée sur la figure 4.16.

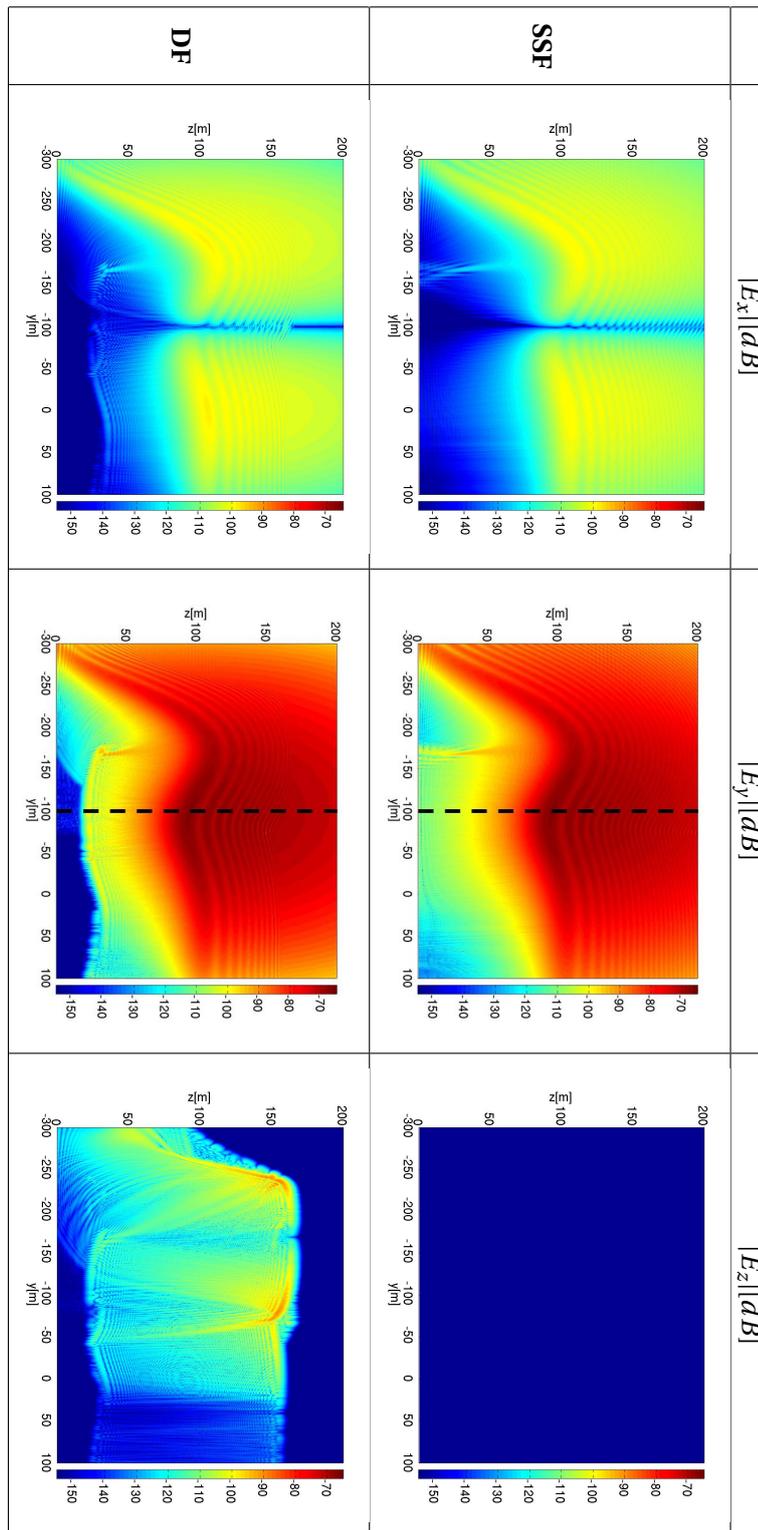


Figure 4.15 – Coupes  $\langle yz \rangle$  du champ électrique obtenu lors de la modélisation de la propagation au-dessus d'une montagne complexe présentant un col par les méthodes SSF et DF.

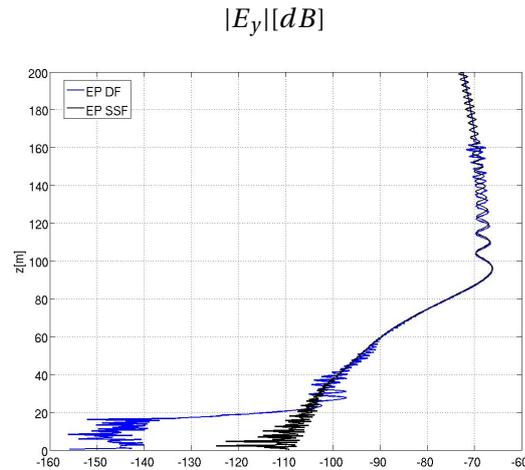
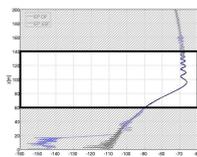
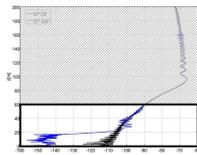


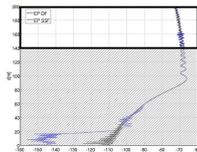
Figure 4.16 – Comparaison des méthodes SSF et Différences Finies sur une verticale dans le cas de la propagation en présence d’une montagne complexe présentant un col.



Dans la zone de rayonnement correspondant à l’intervalle  $60m < z < 140m$ , on constate une bonne concordance entre les deux modélisations. Rappelons que les lobes que nous trouvons ici sont dus à la recombinaison du champ incident avec le champ réfléchi sur la cime de la montagne.



Dans la partie basse de cette comparaison, pour  $z < 60m$ , on peut observer la limitation angulaire de la méthode Différences Finies. Ainsi pour  $z < 20m$ , le champ obtenu par cette méthode est erroné et la discontinuité induite engendre des effets de bords pour  $20m < z < 60m$ .



Cette limitation angulaire est également visible dans la partie haute de la comparaison. Pour  $z > 160m$ , le champ modélisé par Différences Finies ne présente plus aucune interférence, ceci est dû au fait que le champ réfléchi n’est plus inclus dans le cône de validité de la méthode et n’est donc plus modélisé. De la même manière, le décalage progressif des lobes que l’on observe dans l’intervalle  $140m < z < 160m$  est également dû à la limitation angulaire de la méthode Différences Finies.

Rappelons qu’il aurait été possible d’augmenter le cône de validité de la méthode Différences Finies en maillant plus finement le domaine de calcul. Cependant cela nécessite un espace mémoire plus conséquent que celui que les calculateurs à notre disposition pouvaient nous offrir.

Néanmoins, la comparaison entre les deux modèles aboutit donc à une bonne concordance des résultats dans la mesure où la validité des méthodes est assurée.

Afin de mieux observer les influences de ce relief 3D sur la modélisation de la propagation,

nous allons comparer les résultats obtenus avec ceux issus d'une modélisation dans un environnement invariant transversalement, c'est à dire équivalent à une approche bidimensionnelle. Pour cela, une nouvelle montagne a été élaborée. Une visualisation 3D est proposée sur la figure 4.17 ainsi qu'une vue de dessus et une vue de face sur la figure 4.18.

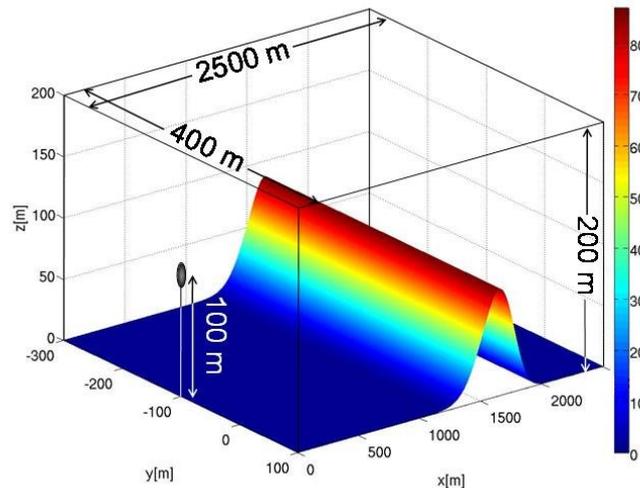


Figure 4.17 – Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'une montagne 2D, transversalement infinie.

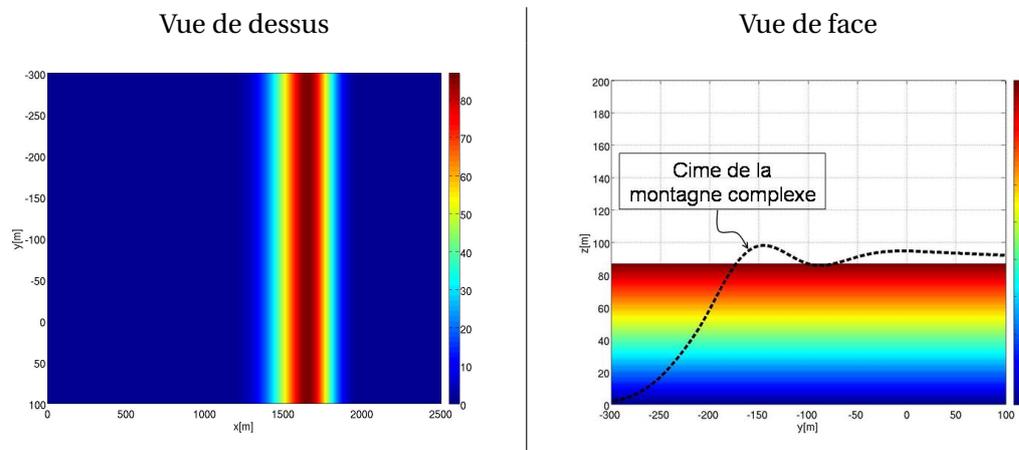


Figure 4.18 – Vues de dessus et de face de la montagne 2D transversalement invariante.

Sur la vue de face de la montagne transversalement invariante (2D), il a été reporté la courbe de niveau de la cime de la montagne tridimensionnelle considérée précédemment. On peut ainsi constater l'invariance suivant la dimension  $y$  de ce nouvel obstacle.

Nous allons comparer les modélisations réalisées en présence de la montagne réaliste 3D à

celles sur cette nouvelle montagne 2D et sur deux plans de visualisation distincts : un plan vertical  $\langle yz \rangle$  positionné en  $x = 2500m$  et un plan horizontal  $\langle xy \rangle$  situé en  $z = 100m$ , défini dans l'intervalle  $-200m < y < 0m$ .

Débutons par la comparaison réalisée sur le plan de visualisation vertical. On représente sur la figure 4.19 le module de la composante principale du champ électrique  $E_y$  obtenu dans les deux configurations.

Nous avons rajouté en pointillés sur les coupes  $\langle yz \rangle$  du champ électrique le profil de la cime de la montagne prise en considération. On peut ainsi constater que lors de la modélisation au-dessus de la montagne réaliste, les interférences verticales épousent bien la forme du col de la montagne. Dans le cas de la montagne 2D, ces mêmes interférences sont rectilignes tout comme la cime de cette dernière. Cette remarque justifie la provenance de ces interférences comme étant la recombinaison du champ direct et du champ réfléchi sur la cime de la montagne.

Par cette visualisation, on a ainsi pu mettre en évidence un effet 3D très visuel qu'une méthodologie bidimensionnelle ne peut pas modéliser.

La seconde comparaison proposée est une coupe dans un plan horizontal  $\langle xy \rangle$  positionné en  $z = 100m$ . Les composantes principales du champ électrique  $E_y$  obtenu dans les cas de la configuration réaliste et de la configuration 2D sont reportées sur la figure 4.20.

Nous avons ajouté sur les cartographies de champ obtenues les courbes de niveau d'isoaltitudes des obstacles considérés. On remarque ainsi la complexité des phénomènes mis en jeu au-dessus de la montagne 3D avec la présence du col, qui contrastent avec l'uniformité de ceux obtenus en présence de la montagne 2D.

Ces cartographies permettent ainsi de mettre en avant la déformation du front d'onde lors de la propagation du champ au-dessus du col de la montagne. Ainsi, dans le cas où le profil est transversalement invariant les interférences horizontales observées sont rectilignes. Tandis que dans le cas de la montagne complexe, ces interférences sont déformées par la présence du col.

Cette seconde visualisation, comparant la propagation en présence de la montagne 3D et de la montagne 2D montre l'intérêt de considérer la scène dans sa globalité afin de modéliser les effets de déformation du front d'onde.

Si l'on s'intéresse aux caractéristiques des calculs numériques mis en oeuvre lors de la résolution par les deux méthodes, on obtient les valeurs réunies dans le tableau suivant :

	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta z$	taille du domaine $[x \times y \times z]$	temps
<b>SSF</b>	$2m$	$0.45m = 3/2\lambda$	$0.45m = 3/2\lambda$	$2500 \times 400 \times 200 [m^3]$	$4h01min$
<b>DF</b>					$6h42min$

Nous avons choisi d'utiliser les mêmes échantillonnages pour les deux résolutions : ainsi le pas de progression horizontal a été fixé à  $2m$  et les pas  $\Delta y$  et  $\Delta z$  ont été pris égaux à  $3/2\lambda$ . Le critère de consistance développé pour l'approche Différences Finies est rempli par les pas

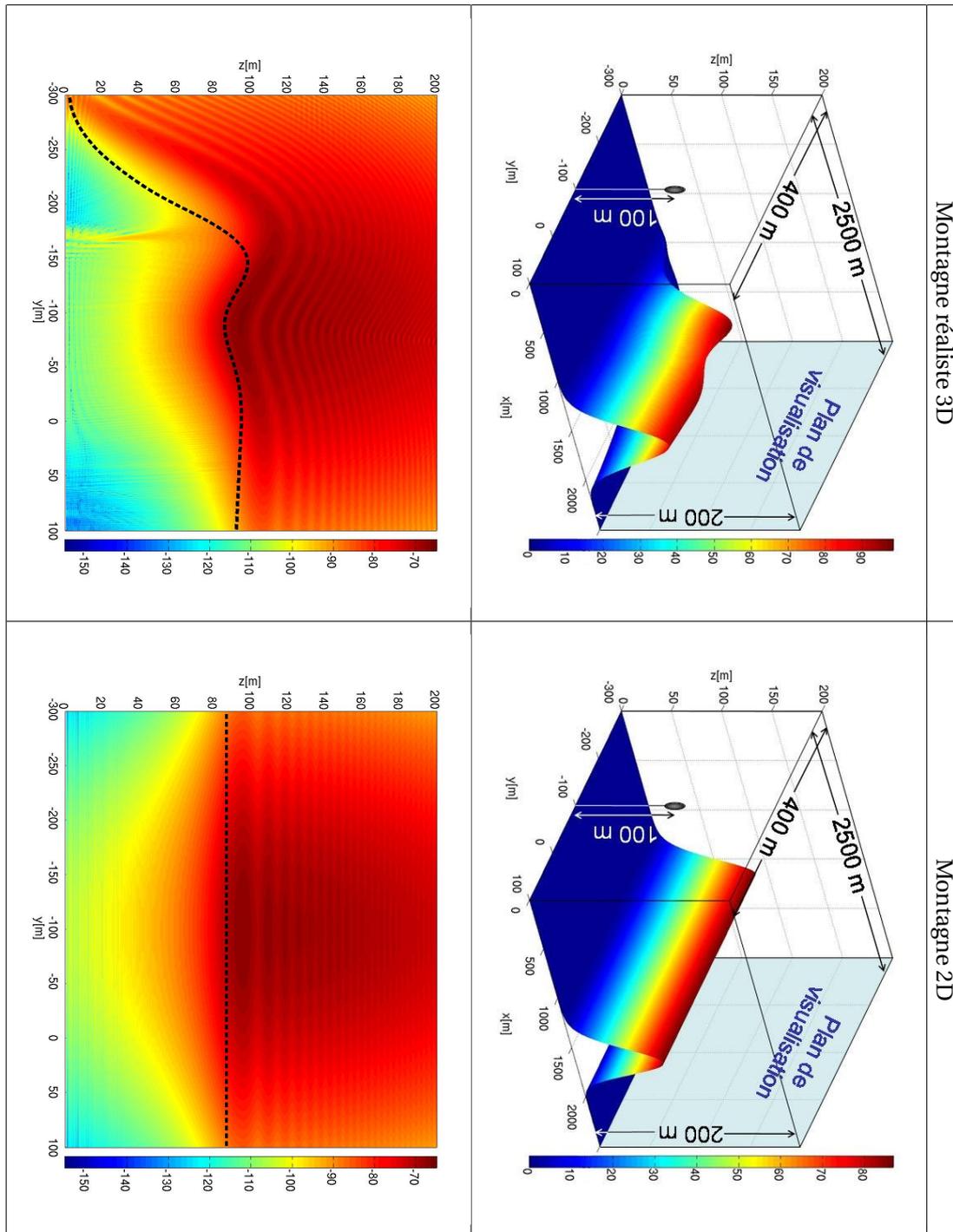


Figure 4.19 – Comparaison des coupes  $\langle yz \rangle$  du module en dB de la composante  $E_y$  du champ électrique obtenu lors de la modélisation SSF de la propagation au-dessus d'une montagne réaliste présentant un col et d'une montagne 2D.

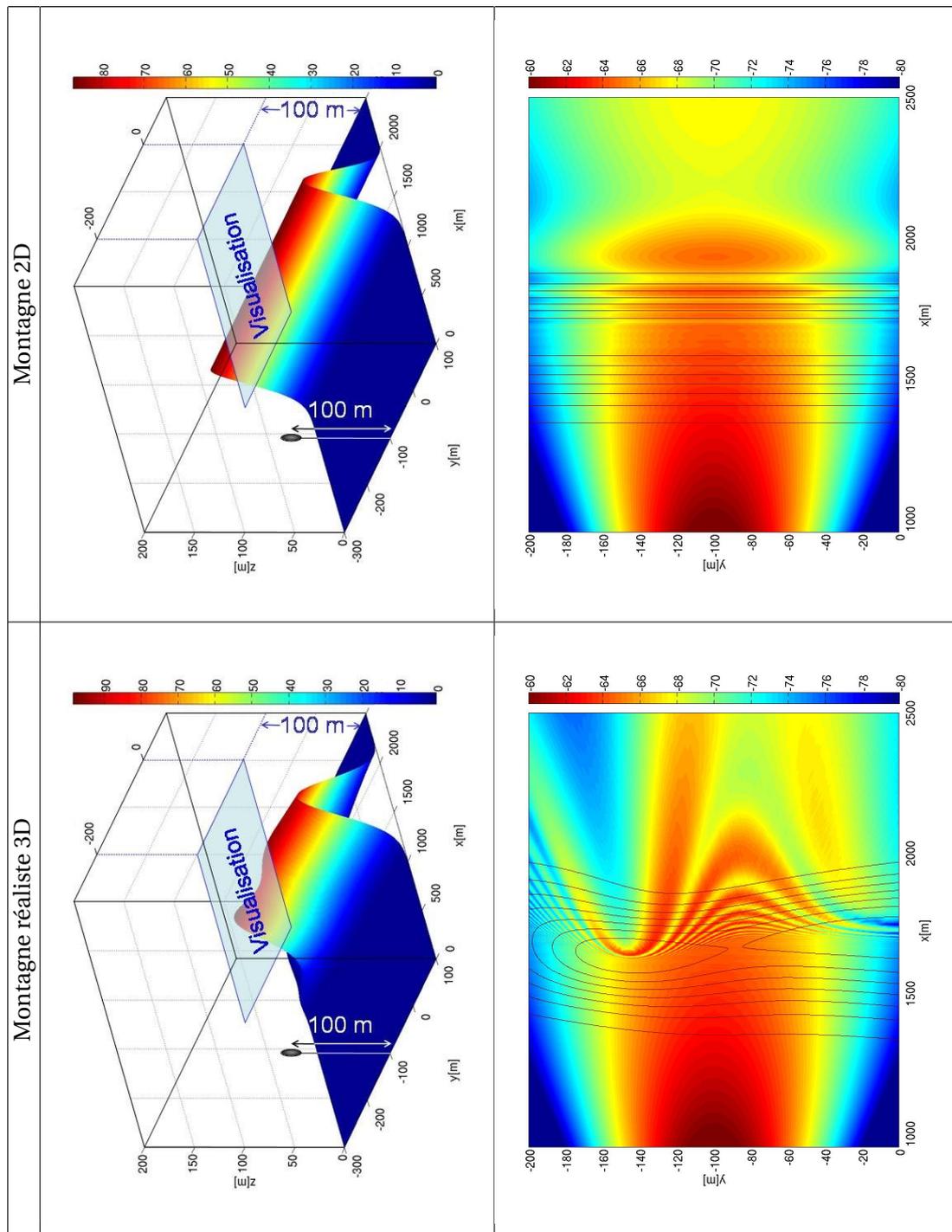


Figure 4.20 – Comparaison des coupes  $\langle xy \rangle$  du module en dB de la composante  $E_y$  du champ électrique obtenu lors de la modélisation SSF de la propagation au-dessus d'une montagne réaliste présentant un col et d'une montagne 2D.

de calcul choisis (cf. section II.3.4 du chapitre 3). En considérant que l'on initialise à  $950m$ , le domaine de résolution est  $1550 \times 400 \times 200 [m^3]$ .

Nous avons ajouté en fin de ce tableau les temps de calcul nécessaires à la modélisation de la propagation par chaque méthode sur tout le domaine. Ainsi,  $4h$  ont été nécessaires pour la résolution SSF et  $6h42min$  par Différences Finies (celles-ci ayant toutes deux été réalisées sur un PC de type Pentium IV à  $3GHz$ ). Le surcroît de temps de calcul nécessaire pour modéliser la propagation par Différences Finies s'explique là encore par le fait que le traitement des conditions aux limites intégrées à cette résolution est plus complexe.

## V Propagation dans une vallée

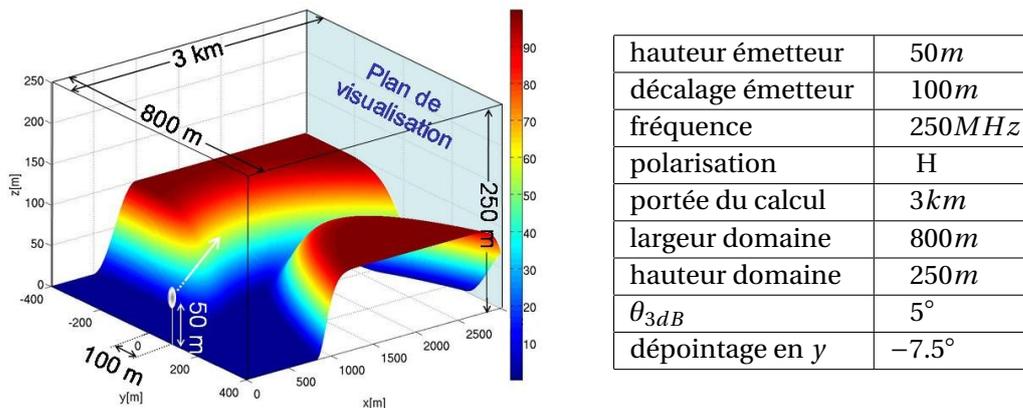


Figure 4.21 – Configuration géométrique pour la modélisation de la propagation dans une vallée.

Le dernier cas test réalisé est un cas de propagation en présence d'un relief 3D constitué d'une vallée induisant un masquage du trajet direct entre l'émetteur et le récepteur. Nous représentons celle-ci sur la figure 4.21 selon un code de couleur passant du bleu au rouge lorsque l'altitude augmente.

Afin de mieux observer l'aspect tridimensionnel de cette vallée nous présentons sur la figure 4.22 deux vues de celle-ci. Tout d'abord une vue de dessus qui permet d'apprécier la courbure de la vallée et le dépointage de l'antenne, puis une vue depuis la position de l'émetteur qui permet d'illustrer le masquage de la vallée et par conséquent la nécessité d'employer une méthode 3D dans ce type de configuration.

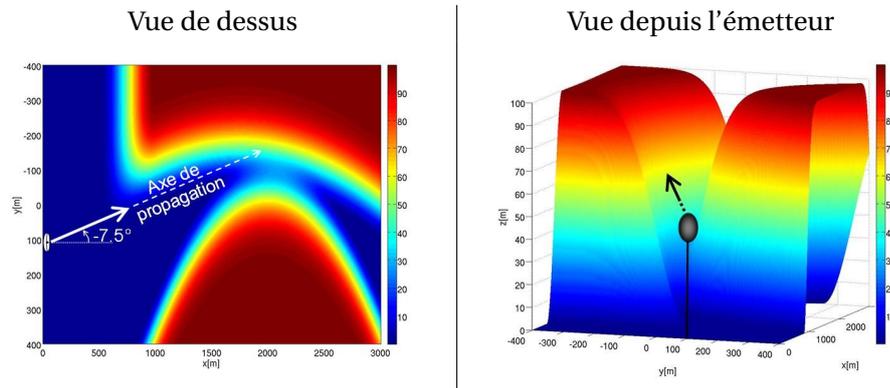
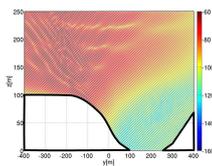


Figure 4.22 – Vues de dessus et depuis l'émetteur de la vallée.

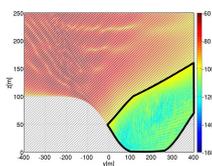
On propose ici de visualiser le module du champ électrique sur un plan  $\langle yz \rangle$  positionné en  $x = 3km$ , celui-ci est illustré en turquoise sur la figure 4.21. On regroupe sur la figure 4.23 les cartographies de toutes les composantes du champ électrique obtenues par les modélisations SSF et Différences Finies à la distance de  $3km$ , correspondant à la sortie de la vallée.

Tout comme dans les deux cas tests précédents, on peut d'ores et déjà pointer l'inconvénient majeur de la méthode SSF développée qui est de ne pas prendre en compte la normale tridimensionnelle à l'obstacle et par conséquent de ne pas générer de polarisation croisée. La composante  $E_z$  du champ électrique modélisée par SSF reste donc nulle tout au long de la propagation.

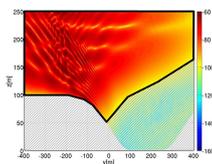
Globalement et si l'on ne considère que les composantes  $E_x$  et  $E_y$ , on peut constater une bonne concordance entre les deux méthodes de modélisation. Une analyse plus détaillée de ces résultats est proposée ci-dessous.



Tout d'abord, lors de la représentation en coupes verticales la partie de l'espace correspondant au relief est représentée en blanc.



Ensuite, sur la partie soulignée ci-contre, on constate une diminution du niveau de champ. Celle-ci est due au masquage de l'antenne par la vallée. Le champ présent dans cette zone est alors uniquement dû au champ diffracté par le pourtour du relief et au champ réfléchi à l'intérieur de la vallée.



Partout ailleurs, le champ apparaît très « perturbé » car il résulte de la superposition de différents phénomènes de réflexion et de diffraction. L'origine de ces derniers est commentée ci-après.

Pour comparer plus finement les résultats obtenus par les deux méthodes de résolution, on

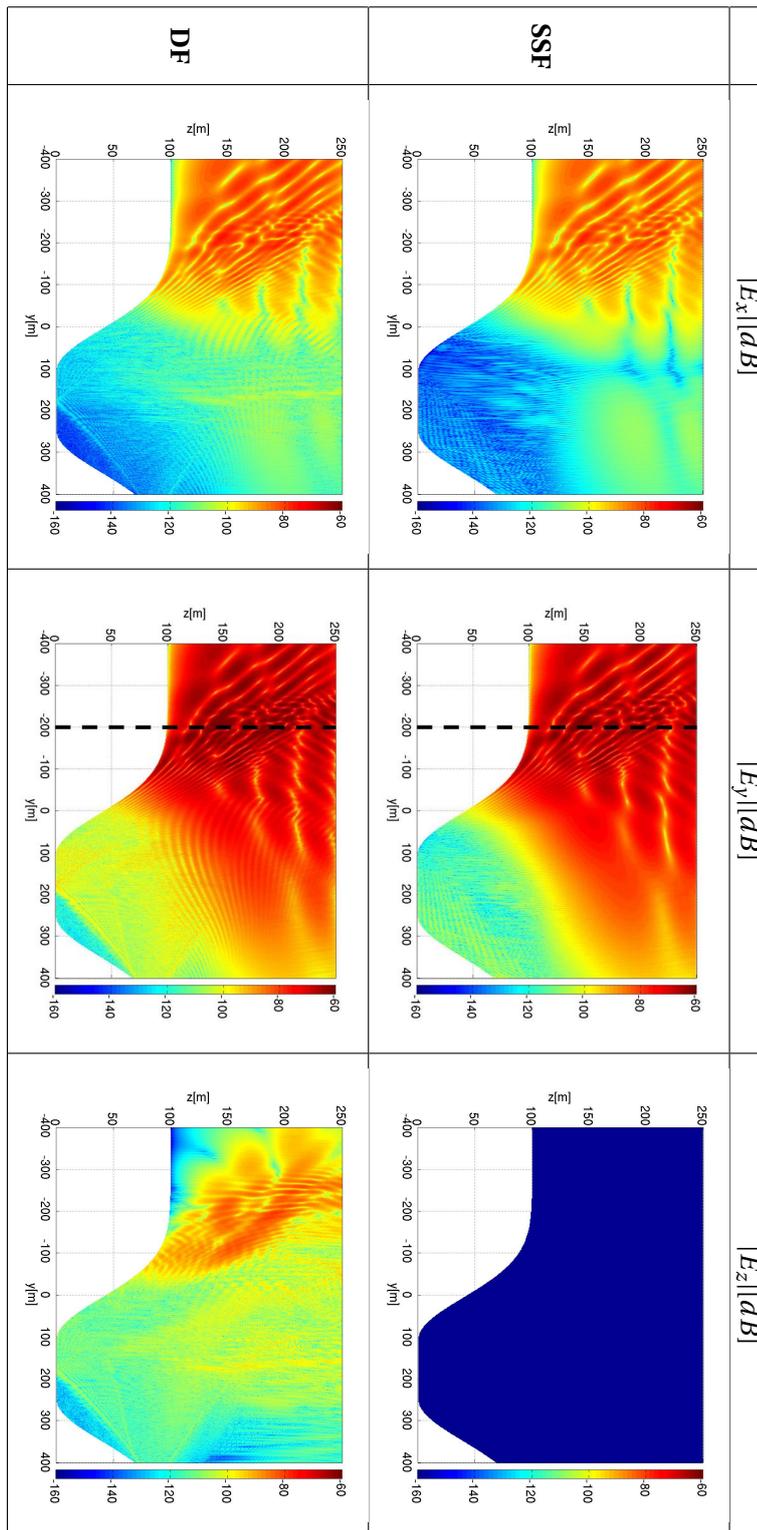


Figure 4.23 – Coupes  $\langle yz \rangle$  du champ électrique obtenu lors de la modélisation de la propagation à l'intérieur d'une vallée par les méthodes SSF et DF.

représente le module de la composante principale du champ électrique,  $E_y$ , sur une verticale positionnée au niveau du plan de visualisation, en  $x = 3km$ , et à une ordonnée  $y = -200m$  (cf. pointillés figure 4.23). Cette comparaison est reportée sur la figure 4.24.

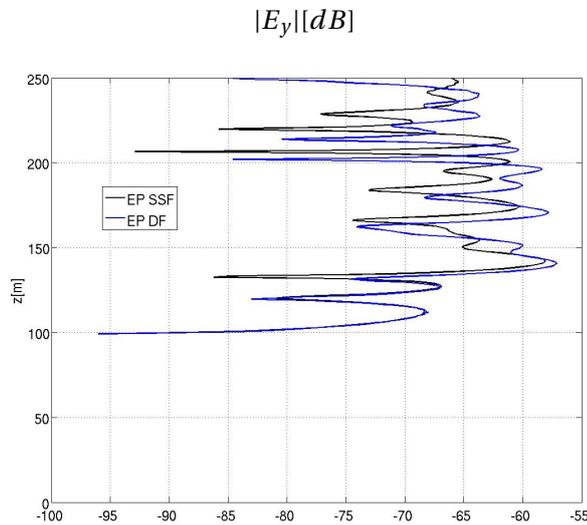
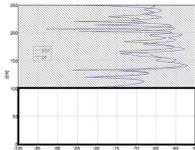
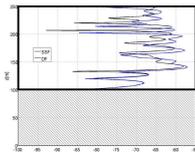


Figure 4.24 – Comparaison des méthodes SSF et Différences Finies sur une verticale dans le cas de la propagation dans une vallée.



Tout d'abord, il n'y a pas de champ dans la zone encadrée ci-contre car pour  $z < 100m$  nous nous trouvons sous la surface de la vallée.

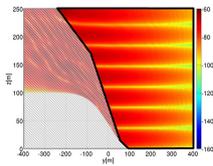


Dans la partie supérieure correspondant à  $z > 100m$ , le champ présente un grand nombre d'interférences. On peut constater que les interférences modélisées par la méthode SSF et par la méthode Différences Finies ne concordent pas sur toute la verticale, néanmoins le niveau moyen du champ est respecté et le résultat est tout à fait acceptable.

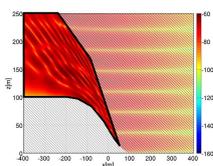
Ces écarts sont essentiellement liés à l'hypothèse de paraxialité plus sévère pour la méthode Différences Finies qui conduit à ne pas prendre en compte toutes les réflexions modifiant ainsi la recombinaison des champs.

Dans ce qui suit, nous allons rechercher l'origine des champs apparaissant au niveau des plans de visualisation  $\langle yz \rangle$  présentés. Pour ce faire, nous allons « découper » la vallée en deux en considérant successivement le flanc droit puis le flanc gauche de celle-ci et nous présentons sur la figure 4.25 la composante  $E_y$  du champ électrique modélisée au niveau du plan de visualisation  $\langle yz \rangle$  situé en  $x = 3km$  suivant le flanc de la vallée considéré.

Commençons tout d'abord par analyser les différents phénomènes propagatifs entrant en jeu lorsque le relief n'est constitué que du flanc gauche de la vallée (cf. description figure 4.25, graphe de gauche).



On retrouve sur la zone mise encadrée ci-contre des interférences verticales. Celles-ci sont dues à la recombinaison du champ incident et du champ réfléchi sur le sol plan et sont de périodicité égale à  $36m$  conformément à la relation (2.49).



Quant à la partie mise en valeur ci-contre, elle met l'accent sur la présence d'interférences supplémentaires. Ces dernières proviennent de la recombinaison du champ incident avec le champ réfléchi sur le flanc gauche de la vallée. Ce phénomène de recombinaison est illustré par la figure 4.26.

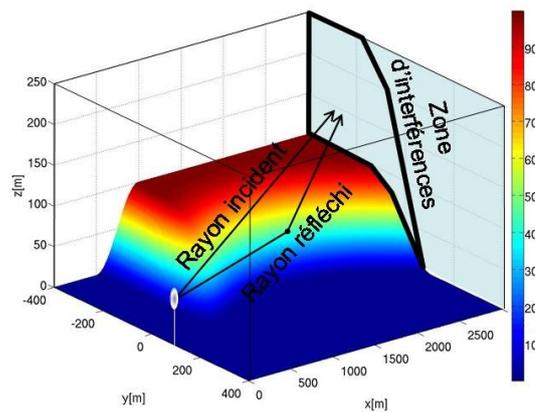
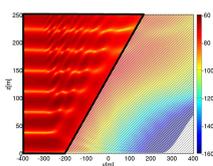


Figure 4.26 – Recombinaison du champ incident et du champ réfléchi sur le flanc gauche de la vallée.

Prenons maintenant en considération le second flanc de la vallée : le flanc droit (cf. description figure 4.25, graphe de droite).



Nous avons également pu observer que la cartographie de champ obtenue en présence de ce relief présentait des interférences. Tout comme dans le cas précédent, celles-ci sont dues à la recombinaison du champ incident avec le champ réfléchi sur le flanc de la vallée et ce phénomène s'illustre par la figure 4.27.

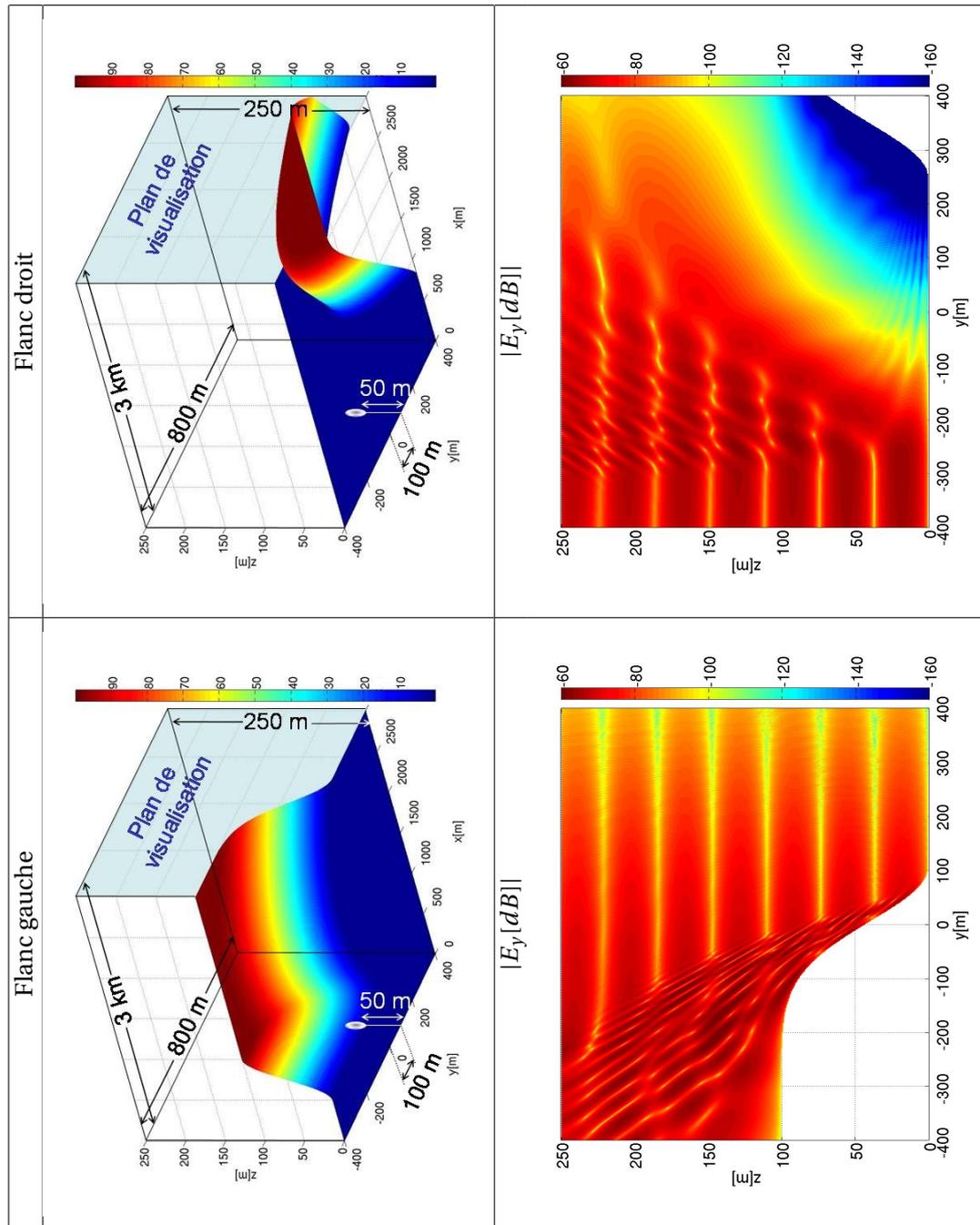


Figure 4.25 – Comparaison des coupes  $\langle yz \rangle$  de la composante  $E_y$  du champ électrique obtenu lors de la modélisation SSF de la propagation en présence successivement des deux flancs de la vallée.

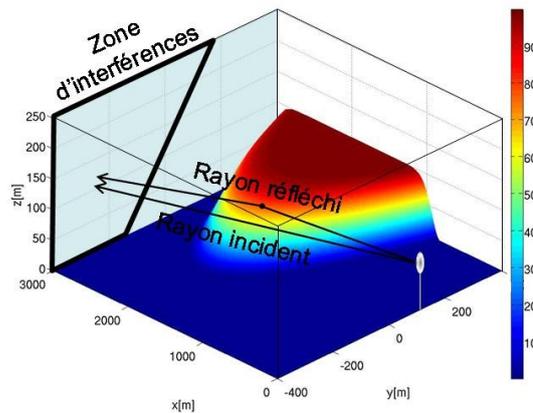
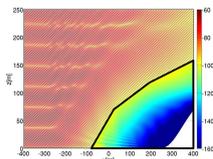


Figure 4.27 – Recombinaison du champ incident et du champ réfléchi sur le flanc droit de la vallée.



Dans cette configuration, on peut également mettre en relief l'effet de masquage de l'antenne par le flanc de la vallée qui induit la diminution de champ dans la zone mise en évidence ci-contre.

On peut remarquer que les phénomènes d'interférence que nous venons d'isoler les uns après les autres sont créés pas des reliefs d'inclinaison opposée. On a ainsi distingué sur la figure 4.28 cette différence d'inclinaison suivant le flanc de la vallée considéré.

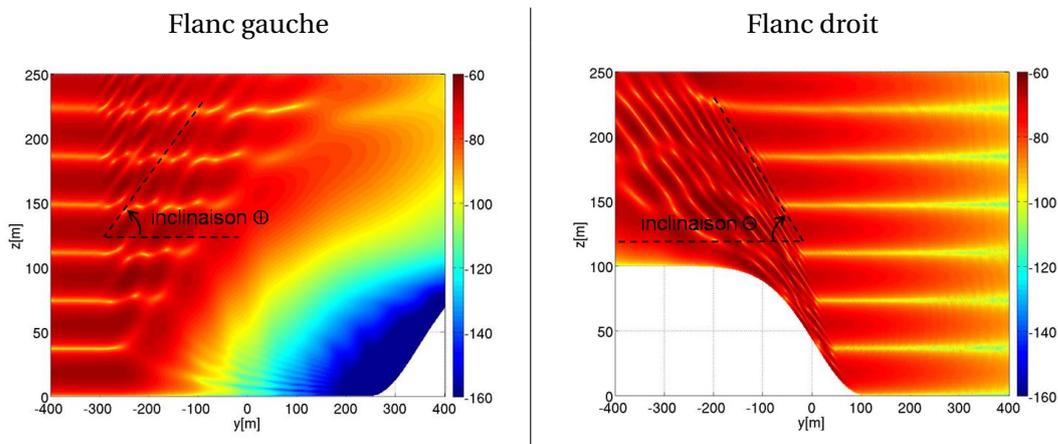
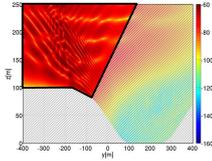


Figure 4.28 – Différences d'inclinaison des interférences suivant le flanc de la vallée pris en compte.

On peut ainsi constater que les interférences dues à la réflexion sur un flanc de la vallée « reprennent » l'inclinaison du flanc sur lequel l'onde incidente s'est réfléchi. Cette remarque nous permet de localiser l'origine des interférences.

L'analyse du cas de la vallée complète est ainsi facilitée en explicitant clairement la contribution de chaque flanc.



Ainsi, si l'on néglige les réflexions multiples à l'intérieur de la vallée, on peut dire que les interférences présentes dans la zone mise en relief ci-contre sont dues à la recombinaison du champ incident, du champ réfléchi sur le flanc gauche de la vallée et du champ réfléchi sur le flanc droit de la vallée.

Si l'on s'intéresse maintenant aux caractéristiques des calculs numériques mis en oeuvre lors de la résolution par les deux méthodes, on obtient les valeurs réunies dans le tableau suivant :

	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta z$	taille du domaine $[x \times y \times z]$	temps
<b>SSF</b>	$2m$	$0.6m = \lambda/2$	$0.6m = \lambda/2$	$3000 \times 800 \times 250 [m^3]$	$6h12min$
<b>DF</b>					$13h30min$

Nous avons choisi d'utiliser les mêmes échantillonnages pour les deux résolutions : ainsi le pas de progression horizontal a été fixé à  $2m$  et les pas  $\Delta y$  et  $\Delta z$  ont été pris égaux à  $\lambda/2$ , soit  $0.6m$ . En considérant que l'on initialise le calcul à  $500m$ , la taille du domaine de résolution est de  $2500 \times 800 \times 250 [m^3]$ .

Nous avons ajouté en fin de ce tableau le temps de calcul nécessaire à la modélisation de la propagation sur tout le domaine. Ainsi,  $6h12min$  ont été requises pour la résolution SSF et  $13h30min$  par Différences Finies, toutes deux étaient réalisées sur un PC de type Pentium IV à  $3GHz$ . Le surcroît de temps de calcul nécessaire pour modéliser la propagation par Différences Finies s'explique par le fait que le traitement des conditions aux limites intégrées à cette résolution est plus complexe et nécessite par conséquent un temps de calcul plus important. Cependant, ce coût permet de bénéficier d'une meilleure prise en compte des conditions aux limites en tenant compte du couplage entre les composantes.

Pour conclure, il est possible de récapituler les avantages et inconvénients des deux modélisation par le tableau suivant :

	Avantages	Inconvénients
<b>SSF</b>	Prise en compte des effets transverses Large de cône de validité	Non-prise en compte de la dépolarisation
<b>DF</b>	Prise en compte des effets transverses Prise en compte de la dépolarisation	Cône de validité étroit Temps de calcul plus important : $t_{DF} \approx 2t_{SSF}$

## VI Conclusion

Le but de ce chapitre était d'appliquer les méthodes de résolutions développées à des cas tests tridimensionnels réalistes, ceci afin de mettre en avant l'intérêt d'une modélisation tridimensionnelle de la propagation tout en comparant les deux approches développées. Dès le premier cas test, on a ainsi démontré la supériorité des modèles présentés par rapport à une

modélisation bidimensionnelle par la prise en compte des effets transverses. Les cas tests suivants se rapprochaient de scènes réalistes et ont permis de mettre en évidence les effets propagatifs tridimensionnels pouvant apparaître au-dessus de telles scènes 3D. On a ainsi pu observer de nombreux effets transverses : comme la réflexion sur les flancs de la montagne gaussienne, la déformation des interférences et du front d'onde en présence de la montagne présentant un col et les multiples réflexions sur les flancs de la vallée.

Parallèlement à cela, ce chapitre a été l'occasion de comparer entre elles les deux méthodes de résolution de l'Équation Parabolique 3D. On a ainsi pu se rendre compte que toutes deux sont capables de modéliser les effets transverses décrits précédemment ce qui constitue une qualité irréfutable que l'on peut accorder à ces deux modèles 3D. Cependant elles se distinguent sur plusieurs points : premièrement la validité angulaire est différente selon la méthode de résolution adoptée, la méthode SSF autorise un large cône de validité tandis que la méthode Différences Finies présente un cône plus étroit. Deuxièmement, les conditions aux limites ont été introduites différemment selon la résolution considérée. Ainsi, seule la méthode Différences Finies prend en compte la normale tridimensionnelle à l'obstacle et permet par conséquent de modéliser le couplage entre composantes. Ce dernier point constitue un atout pour la méthode Différences Finies, cependant cette qualité est acquise au détriment du temps de calcul.

En termes d'échantillonnage, on a pu constater la nécessité de mailler fin le domaine de calcul pour modéliser correctement la propagation et ce pour les deux méthodes de résolution.

Aucune des méthodes développées n'est donc parfaite et chacune d'elles peut être améliorée. Ainsi, il pourrait être intégré des conditions aux limites complètes à la méthode Split-Step Fourier. Cela permettrait à cette méthode de modéliser la dépolarisation et par conséquent de combler cette lacune que ne présente pas la méthode Différences Finies. Cependant son intégration ne nous semble pas directe car comme nous l'avons signalé au chapitre 2 le traitement de la polarisation normale à un obstacle reste délicat. En effet l'introduction de la condition limite de Janaswamy impose une discontinuité du champ au niveau de l'interface qui est difficilement décrite par le spectre angulaire d'ondes planes.

Quant à la méthode Différences Finies, elle pourrait être résolue pas une approche grand angle ce qui permettrait d'outrepasser son inconvénient majeur (à savoir sa limitation angulaire). À l'image des travaux réalisés en deux dimensions par M. Levy [38, 13], une résolution grand angle de l'Équation Parabolique par Différences Finies semble possible. On peut enfin noter que le traitement de surfaces diélectriques par le modèle Différences Finies que nous avons développé est possible (cf. section II.4.2 du chapitre 3). Il restera alors toujours le problème de la validation.

En ce qui concerne les temps de calcul, les méthodes ici présentées ont été développées grâce au logiciel MATLAB. Or celui-ci est un langage interprété, l'utilisation d'un langage compilé (comme le fortran ou le C) aurait sans aucun doute permis de diminuer sensiblement les temps de calcul nécessaires.



# Conclusion générale

L'objectif de cette thèse était de réaliser un modèle de prédiction de la propagation d'une onde électromagnétique dans un domaine tridimensionnel de grande taille.

Dans un premier temps, nous avons énuméré les différentes méthodes de résolution qui nous semblaient les plus adaptées à modéliser la propagation en trois dimensions sur de grands domaines. Nous nous sommes ainsi focalisés sur les méthodes asymptotiques de courants et de rayons ainsi que sur la méthode de l'Équation Parabolique.

La méthode de l'Équation Parabolique 3D a retenu notre préférence et nous avons donc envisagé la résolution de celle-ci. Pour ce faire, nous avons développé deux algorithmes : la méthode de Split-Step Fourier et la méthode des Différences Finies.

La résolution de l'Équation Parabolique par la méthode de Split-Step Fourier (SSF), initiée par R.Janaswamy, est basée sur une décomposition en un spectre d'ondes planes d'une répartition de champ initialement connue. Cette décomposition fait appel à des transformées de Fourier 2D et des critères d'échantillonnage ont donc été proposés pour garantir la bonne résolution de cet algorithme. L'approximation paraxiale réalisée est de type grand angle et l'introduction des conditions aux limites sous une approche spectrale a été développée dans l'objectif d'une application à un environnement urbain.

Par comparaison avec le logiciel FERMAT, cette résolution a pu être validée sur différents cas tests et on a ainsi mis en évidence la capacité de celle-ci à modéliser les phénomènes de réflexion, réfraction et diffraction. Cependant, ce modèle s'avère limité lorsque le coefficient de réflexion est différent de moins un dans la mesure où le champ au sol ne peut être modélisé correctement. De plus, pour garantir une bonne modélisation de la réflexion, une étude de convergence a montré qu'un pas de progression horizontal fin était nécessaire.

Compte tenu des limitations présentées par la méthode SSF, une résolution de l'Équation Parabolique 3D par Différences Finies a été envisagée. En effet, dans la mesure où l'approche SSF nécessite des pas de discrétisation fins, une résolution par Différences Finies de l'Équation Parabolique devenait intéressante. En première approche et pour lever les points durs de la résolution, nous avons adopté une approximation paraxiale dite petit angle. Une originalité a été d'appliquer une méthode à pas fractionnaires permettant de conserver des matrices de formes tridiagonales facilement inversibles. Pour assurer une bonne résolution de celle-ci, des relations de consistance ont été proposées.

Une seconde originalité à la méthode réside dans l'introduction de conditions aux limites réduites dans les inversions matricielles afin de conserver la forme tridiagonale des matrices et donc d'avoir une résolution plus rapide. Ce n'est qu'après chaque pas de propagation que le couplage entre composantes est effectué par le calcul de la condition aux limites complète de Léontovich.

Ce second modèle de propagation a également pu être validé par comparaison avec le logiciel FERMAT et il a ainsi été possible de s'assurer de la bonne modélisation des phénomènes de réflexion, diffraction et réfraction. On a aussi pu vérifier que l'intégration de conditions aux limites, même simplifiées, est efficace. En effet, le calcul des conditions aux limites complètes après chaque pas de propagation permet de modéliser la dépolarisation comme ce fut mis en évidence lors de la modélisation de la propagation au-dessus d'un sol pentu.

Dans le chapitre final de cette thèse, nous avons voulu mettre en évidence les effets propagatifs tridimensionnels et comparer nos deux modèles de résolution en termes de temps de calcul et de domaine de validité. Ainsi en comparant nos modèles 3D à un modèle Équation Parabolique 2D, nous avons pu mettre en évidence les avantages d'une résolution tridimensionnelle. Ensuite, nous avons appliqué nos deux modèles dans des configurations se rapprochant de cas réalistes telles qu'une montagne gaussienne, une montagne présentant un col et une vallée. Ces trois derniers cas tests ont permis de démontrer la capacité des deux modèles développés à modéliser certains effets transverses. Cependant on a également pu mettre en évidence quelques différences entre les deux approches. Premièrement, elles se distinguent au niveau de leur domaine de validité angulaire : la méthode SSF autorise un large cône de validité tandis que la méthode Différences Finies présente un cône plus étroit. Deuxièmement, l'introduction des conditions aux limites se faisant de manière différente selon les modèles, seule la méthode Différences Finies permet de modéliser le couplage entre composantes. Ce dernier point confère à la méthode Différences Finies une qualité de modèle 3D plus complet, cependant celle-ci est acquise au détriment du temps de calcul. En effet, on a également pu remarquer que le temps de calcul de la méthode Différences Finies correspondait approximativement au double du temps nécessaire pour une résolution par la méthode SSF.

En conclusion, ces travaux ont permis de mettre en avant l'intérêt d'une modélisation tridimensionnelle de la propagation. En effet dans certaines configurations 3D il est nécessaire de prendre en compte des effets transverses au plan émetteur - récepteur ainsi que de la dépolarisation. Pour cela les deux modèles développés sont très prometteurs, cependant actuellement aucun des deux n'est parfait.

Ainsi la méthode SSF pourrait être améliorée en lui intégrant des conditions aux limites plus complètes, ce qui lui permettrait de modéliser la dépolarisation. Une telle évolution ne sera possible qu'en introduisant une transformation conforme de l'espace de propagation 3D. Cette opération est triviale en 2D mais paraît très complexe en 3D. Quant à la méthode Différences Finies, sa principale limitation réside dans son ouverture angulaire. Cependant, à l'image des travaux [13, 38] réalisés en deux dimensions, une résolution grand angle de l'Équation Parabolique 3D par Différences Finies est possible. En effet en 2D la résolution de l'Équation Parabolique grand angle par Différences Finies conserve la forme tridiagonale des ma-

trices. En 3D et par une approche par pas alternés il en sera de même, c'est l'introduction des conditions aux limites qui sera plus complexe.

Enfin, il serait intéressant de confronter nos modèles à des mesures, ce qui permettrait de valider expérimentalement l'outil développé. Plusieurs comparaisons nous paraissent ainsi prometteuses. Par exemple au-dessus d'un relief 3D vallonné, la comparaison avec des mesures permettrait de valider expérimentalement les effets transverses et la création de polarisation croisée qu'implique ce type de relief.



# Liste des publications

**Arnaud GINESTET, Vincent FABBRO, Jérôme SOKOLOFF**

« *Comparison of lateral terrain variation effects between Parabolic Wave Equation and Physical Optics models* »

LAPC (Loughborough Antennas and Propagation Conference), Loughborough (Royaume-Uni), avril 2006

**Arnaud GINESTET, Vincent FABBRO, Jérôme SOKOLOFF**

« *Study of transversal propagation effects using 3D vector Parabolic Wave Equation method* »

ECPS (European Conference on Propagation and System), Brest (France), mars 2005



ANNEXE



## Annexe A

# Transformée de Fourier en sinus et cosinus

En deux dimensions et au-dessus d'un sol plan métallique, les transformées de Fourier utilisées dans un algorithme de Split-Step Fourier se ramènent à des transformées de Fourier en sinus ou en cosinus suivant la polarisation considérée. Cette propriété présente l'avantage de propager implicitement les conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann et par conséquent de prendre en compte les deux types de polarisation principale.

Le but de cette annexe est de montrer la limitation de cette méthode lors de son extension en trois dimensions. En effet, on va pouvoir constater que celle-ci est restreinte aux domaines invariants transversalement et qu'elle est par conséquent inapte à considérer des domaines tridimensionnels quelconques.

La transformée de Fourier directe d'un champ  $C$  quelconque s'exprime en deux dimensions de la manière suivante :

$$\tilde{C}(x, k_y, k_z) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{z=0}^{+\infty} C(x, y, z) e^{-j(k_y y + k_z z)} dy dz \quad (\text{A.1})$$

En présence d'un relief quelconque, le champ total  $C$  est la combinaison du champ incident  $C_i$  et du champ réfléchi, ce dernier étant la pondération du champ incident par le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}$  adapté.

L'équation (A.1) peut donc se décomposer de la manière suivante :

$$\tilde{C}(x, k_y, k_z) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{z=0}^{+\infty} [C_i(x, y, z) + \mathcal{R}C_i(x, y, -z)] e^{-j(k_y y + k_z z)} dy dz \quad (\text{A.2})$$

Par un changement de variable, on aboutit à :

$$\tilde{C}(x, k_y, k_z) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{z=0}^{+\infty} C_i(x, y, z) \left[ e^{-jk_z z} + \mathcal{R}e^{jk_z z} \right] e^{-jk_y y} dy dz \quad (\text{A.3})$$

Dans le cas métallique, le coefficient de réflexion de Fresnel vaut  $\pm 1$  suivant la polarisation

considérée, le champ total satisfait alors à la condition aux limites de Dirichlet ou de Neumann. On rappelle que celles-ci s'expriment respectivement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C(x, y, 0) = 0 & \quad \text{pour la condition aux limites de Dirichlet,} \\ \partial_z C(x, y, 0) = 0 & \quad \text{pour la condition aux limites de Neumann.} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Si on considère une polarisation verticale, le coefficient de réflexion est égal à +1 et suite à une recombinaison des exponentielles en  $z$  l'équation (A.3) se ramène à :

$$TF_{cos}[C(x, y, z)] = \tilde{C}_{\cos}(x, k_y, k_z) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{z=0}^{+\infty} 2C_i(x, y, z) \cos(k_z z) e^{-jk_y y} dy dz \quad (\text{A.5})$$

On voit ici apparaître une transformée de Fourier en cosinus suivant la dimension  $z$ . Celle-ci permet de propager implicitement la condition aux limites de Neumann dans la mesure où  $\cos(0) = 1$  et implique un maximum au sol.

Si on considère cette fois une polarisation horizontale, le coefficient de réflexion est égal à -1 et la combinaison des exponentielles conduit à l'équation suivante :

$$TF_{sin}[C(x, y, z)] = \tilde{C}_{\sin}(x, k_y, k_z) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{z=0}^{+\infty} -2jC_i(x, y, z) \sin(k_z z) e^{-jk_y y} dy dz \quad (\text{A.6})$$

On aboutit cette fois à une transformée de Fourier en sinus suivant la dimension  $z$  permettant de satisfaire à la condition aux limites de Dirichlet dans la mesure où  $\sin(0) = 0$ .

On constate donc que dans les cas particuliers où le coefficient de réflexion est égal à  $\pm 1$  la transformée de Fourier directe se ramène à une transformée de Fourier en cosinus ou en sinus suivant la polarisation considérée. Ceci a pour effet de propager implicitement les conditions aux limites de Neumann ou de Dirichlet.

Cependant, celles-ci n'autorisent qu'à considérer un sol plan invariant transversalement. Ainsi, cette hypothèse enlève tout fondement à une méthodologie tridimensionnelle et c'est pourquoi elle n'a pas été développée dans notre étude.

## Annexe B

# Décomposition d'un champ en deux polarisations indépendantes

Le but de cette annexe est de justifier que tout champ peut se décomposer en deux polarisations indépendantes.

Soit un électrique quelconque :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

On choisit ici de décomposer le champ  $\mathbf{E}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x^H \\ E_y^H \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_x^V \\ 0 \\ E_z^V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x^H + E_x^V \\ E_y^H \\ E_z^V \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

On sait que la connaissance de  $E_y^H$  entraîne celle de  $E_x^H$  grâce à la relation de divergence du champ, il en est de même entre les composantes  $E_z^V$  et  $E_x^V$ . On peut donc connaître le champ  $\mathbf{E}^H$  uniquement à partir de  $E_y^H$  et  $\mathbf{E}^V$  uniquement à partir de  $E_z^V$ . Seules les composantes  $E_y^H$  et  $E_z^V$  sont donc nécessaires pour connaître tout le champ électrique  $\mathbf{E}$  et on peut ainsi traiter sa propagation par la somme des deux polarisations indépendantes.

L'étude qui suit porte sur le choix des polarisations qu'il est possible de faire pour décomposer le champ électromagnétique. Dans ce qui précède, nous avons vu que le champ pouvait se décomposer en deux polarisations dépendantes uniquement sur le champ électrique, le champ magnétique étant ensuite obtenu grâce aux équations de Maxwell.

Nous allons voir maintenant qu'il est possible sous certaines conditions de modéliser une polarisation grâce au champ électrique et la seconde grâce au champ magnétique.

On constate que si l'on prend le champ magnétique correspondant à  $\mathbf{E}^V$ , on obtient à l'aide des équations de Maxwell le champ suivant :

$$\mathbf{H}^V = \frac{-1}{j\omega\mu} \begin{vmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} E_x^V \\ 0 \\ E_z^V \end{vmatrix} = \frac{-1}{j\omega\mu} \begin{vmatrix} \partial_y E_z^V \\ \partial_z E_x^V - \partial_x E_z^V \\ -\partial_y E_x^V \end{vmatrix} \quad (\text{B.3})$$

On remarque donc que le champ magnétique associé au champ  $\mathbf{E}^V$  présente trois composantes non nulles. On sait que  $\mathbf{E}^V$  peut être décrit par une superposition infinie d'ondes planes. Ainsi l'étude de l'une d'entre elles permettra de généraliser l'étude à  $\mathbf{E}^V$ .

Soit le champ  $\mathbf{E}^V = \begin{vmatrix} E_x^V \\ 0 \\ E_z^V \end{vmatrix}$  une onde plane de vecteur  $\mathbf{k} = \begin{vmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{vmatrix}$  et de composante verticale

$E_z^V = E_0 e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)}$ , alors  $E_x^V$  est obtenu par la relation de divergence du champ,  $\vec{\text{div}} \mathbf{E}^V = 0$  :

$$\partial_x E_x^V + 0 + \partial_z E_0 e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\partial_x E_x^V = -j k_z E_z^V \quad (\text{B.5})$$

$$E_x^V = -j k_z \int E_z^V dx \quad (\text{B.6})$$

$$E_x^V = \frac{-j k_z}{j k_x} E_z^V \quad (\text{B.7})$$

On en déduit donc :

$$\mathbf{E}^V = \begin{vmatrix} \frac{-k_z}{k_x} E_0 e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ 0 \\ E_0 e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} \end{vmatrix} \quad (\text{B.8})$$

En introduisant l'expression du champ électrique précédente dans la relation (B.3), il est possible d'obtenir le champ  $\mathbf{H}$  correspondant :

$$\mathbf{H} = \frac{-E_0 e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)}}{j\omega\mu} \begin{vmatrix} k_y \\ -(k_z^2 - k_x^2) / k_x \\ k_y k_z / k_x \end{vmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Le champ magnétique correspondant à  $\mathbf{E}^V$  présente effectivement trois composantes non nulles. Cependant dans le cadre de notre étude, on rappelle que la direction principale de propagation est dirigée suivant  $x$ . Il apparaît alors possible de considérer  $k_y$  et  $k_z$  petits devant  $k_x$ , ainsi si on néglige les termes du deuxième ordre suivant ces directions, on a :

$$\mathbf{H} \approx \frac{-E_0 e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)}}{j\omega\mu} \begin{vmatrix} k_y \\ k_x \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Dans le cadre de cette étude, seules la composante principale suivant  $y$  (horizontale) et la composante secondaire suivant  $x$  (longitudinale) du champ magnétique  $\mathbf{H}^V$  correspondant à  $\mathbf{E}^V$  sont différentes de zéro.

## Annexe C

# Calcul des conditions aux limites sur les parois verticales d'un obstacle

Le calcul que nous exposons ici est celui des conditions aux limites de Léontovich sur une paroi verticale. Le système auquel doivent satisfaire les potentiels vecteurs sur les parois verticales correspond à l'équation (2.44), que nous rappelons ici :

$$\left| \begin{array}{l} j\omega A^e + \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_z^2 A^e \\ n_x \left( \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_{yz}^2 A^e + \frac{1}{\epsilon_0} \partial_x A^m \right) - n_y \left( \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_{xz}^2 A^e - \frac{1}{\epsilon_0} \partial_y A^m \right) \end{array} \right. = Z \left| \begin{array}{l} n_x \left( \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_{yz}^2 A^m - \frac{1}{\mu_0} \partial_x A^e \right) - n_y \left( \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_{xz}^2 A^m + \frac{1}{\mu_0} \partial_y A^e \right) \\ - (n_x^2 + n_y^2) \left[ \frac{j}{\omega\epsilon_0\mu_0} \partial_{yz}^2 A^m - \frac{1}{\mu_0} \partial_x A^e \right] \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

Comme dans le cas de calcul de la condition aux limites sur un sol plan, le but est d'exprimer les dérivées partielles dans le système précédent à l'aide de la définition des transformées de Fourier discrètes bidimensionnelles. En profitant du fait que dans l'espace dual, les dérivées partielles se réduisent à de simples multiplications par les nombres d'onde correspondants, l'exemple de la dérivation partielle selon la dimension  $\xi$  est exprimé ci-dessous :

$$\partial_\xi A(\xi, \zeta) = \frac{1}{N_{sy}N_{sz}} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \partial_\xi \left[ \tilde{\tilde{A}}(k_\xi, k_\zeta) e^{j(k_\xi \xi + k_\zeta \zeta)} \right] \quad (\text{C.2})$$

$$= \frac{1}{N_{sy}N_{sz}} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} j k_\xi \tilde{\tilde{A}}(k_\xi, k_\zeta) e^{j(k_\xi \xi + k_\zeta \zeta)} \quad (\text{C.3})$$

Du spectre  $\tilde{\tilde{A}}(k_\xi, k_\zeta)$ , on distingue les parties connue et inconnue grâce à l'équation (2.47). L'équation précédente s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\partial_\xi A(\xi, \zeta) = \frac{1}{N_{sy}N_{sz}} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} j k_\xi \left[ \tilde{A}_0(k_\xi) + \tilde{\tilde{A}}_K(k_\xi, k_\zeta) \right] e^{j(k_\xi \xi + k_\zeta \zeta)} \quad (\text{C.4})$$

Il est possible, selon la même méthodologie d'exprimer les dérivées partielles suivant  $\zeta$  et  $x$ .

Il faut à ce stade considérer les deux équations du système (C.1). Considérons tout d'abord, la première de ces équations, dans laquelle nous exprimons les potentiels vecteurs par l'intermédiaire des transformées de Fourier discrètes bidimensionnelles.

$$\begin{aligned}
 & j\omega \frac{1}{N_{sy}N_{sz}} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \left( \tilde{A}_0^e + \tilde{A}_K^e \right) e^{j(k_\xi \xi + k_\zeta \zeta)} + \frac{j}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \frac{1}{N_{sy}N_{sz}} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \left( -k_\xi^2 \right) \left[ \tilde{A}_0^e + \tilde{A}_K^e \right] e^{j(k_\xi \xi + k_\zeta \zeta)} \\
 & = Z \left[ n_x \left( \frac{j}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \frac{1}{N_{sy}N_{sz}} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \left( -k_\xi k_\zeta \right) \left[ \tilde{A}_0^m + \tilde{A}_K^m \right] e^{j(k_\xi \xi + k_\zeta \zeta)} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{N_{sy}N_{sz}} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} j \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \left[ \tilde{A}_0^e + \tilde{A}_K^e \right] e^{j(k_\xi \xi + k_\zeta \zeta)} \right) \right. \\
 & \quad \left. - n_y \left( \frac{j}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \frac{1}{N_{sy}N_{sz}} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \left( - \right) k_\xi \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \left[ \tilde{A}_0^m + \tilde{A}_K^m \right] e^{j(k_\xi \xi + k_\zeta \zeta)} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{N_{sy}N_{sz}} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} j k_\zeta \left[ \tilde{A}_0^e + \tilde{A}_K^e \right] e^{j(k_\xi \xi + k_\zeta \zeta)} \right) \right] \quad (C.5)
 \end{aligned}$$

On remarque que le terme  $1/(N_{sy}N_{sz})$  est présent dans tous les termes de l'équation et peut donc être simplifié, de même que le nombre imaginaire  $j$ . De plus, la condition aux limites doit être calculée au niveau de l'interface de la paroi, c'est à dire en  $\zeta = 0$ . Il en résulte que le terme  $e^{jk_\zeta \zeta}$  est égal à un.

En appliquant toutes ces remarques et en regroupant les potentiels vecteurs connus et inconnus, on aboutit au système suivant :

$$\begin{aligned}
 & \omega \sum_{n_\xi} \tilde{A}_0^e e^{jk_\xi \xi} - \frac{1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} k_\xi^2 \tilde{A}_0^e e^{jk_\xi \xi} - Z \left[ n_x \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi k_\zeta \tilde{A}_0^m e^{jk_\xi \xi} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_0^e e^{jk_\xi \xi} \right) - n_y \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_0^m e^{jk_\xi \xi} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\zeta \tilde{A}_0^e e^{jk_\xi \xi} \right) \right] \\
 & = -\omega \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \tilde{A}_K^e e^{jk_\xi \xi} + \frac{j}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi^2 \tilde{A}_K^e e^{jk_\xi \xi} \\
 & + Z \left[ n_x \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi k_\zeta \tilde{A}_K^m e^{jk_\xi \xi} - \frac{1}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_K^e e^{jk_\xi \xi} \right) \right. \\
 & \quad \left. - n_y \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_K^m e^{jk_\xi \xi} + \frac{1}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} j k_\zeta \tilde{A}_K^e e^{jk_\xi \xi} \right) \right] \quad (C.6)
 \end{aligned}$$

Il faut à présent faire de même pour la seconde équation du système (C.1).

La méthodologie est la même : on exprime les potentiels vecteurs par leurs transformées de Fourier discrètes en séparant potentiels connus et inconnus.

$$\begin{aligned}
& n_x \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi k_\zeta \left[ \tilde{A}_0^e + \tilde{A}_K^e \right] e^{jk_\xi \xi} + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \left[ \tilde{A}_0^m + \tilde{A}_K^m \right] e^{jk_\xi \xi} \right) \\
& - n_y \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \left[ \tilde{A}_0^e + \tilde{A}_K^e \right] e^{jk_\xi \xi} - \frac{1}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\zeta \left[ \tilde{A}_0^m + \tilde{A}_K^m \right] e^{jk_\xi \xi} \right) \\
& = Z \left[ \left( n_x^2 + n_y^2 \right) \frac{1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi k_\zeta \left[ \tilde{A}_0^m + \tilde{A}_K^m \right] e^{jk_\xi \xi} - \frac{1}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \left[ \tilde{A}_0^e + \tilde{A}_K^e \right] e^{jk_\xi \xi} \right]
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Compte tenu du fait que dans le cas de figure ici considéré, la normale ne présente que deux composantes non nulles,  $n_x$  et  $n_y$ , et compte tenu du fait que celle-ci est normée par rapport à un, le terme  $-n_x^2 - n_y^2$  est égal à  $-1$ .

En dissociant les potentiels vecteurs inconnus et connus de part et d'autre du signe égal, l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned}
& n_x \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi k_\zeta \tilde{A}_0^e e^{jk_\xi \xi} + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_0^m e^{jk_\xi \xi} \right) \\
& - n_y \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_0^e e^{jk_\xi \xi} - \frac{1}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\zeta \tilde{A}_0^m e^{jk_\xi \xi} \right) \\
& - Z \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi k_\zeta \tilde{A}_0^m e^{jk_\xi \xi} - \frac{1}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_0^e e^{jk_\xi \xi} \right) \\
& = -n_x \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi k_\zeta \tilde{A}_K^e e^{jk_\xi \xi} + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_K^m e^{jk_\xi \xi} \right) \\
& + n_y \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_K^e e^{jk_\xi \xi} - \frac{1}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\zeta \tilde{A}_K^m e^{jk_\xi \xi} \right) \\
& Z \left[ \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi k_\zeta \tilde{A}_K^m e^{jk_\xi \xi} - \frac{1}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_K^e e^{jk_\xi \xi} \right]
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Les équations (C.6) et (C.8) forment ainsi un système de deux équations à deux inconnues. Celui-ci peut se condenser sous la forme suivante :

$$[M] \begin{bmatrix} \tilde{A}_0^e \\ \tilde{A}_0^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \tag{C.9}$$

avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} \Lambda & \Theta \\ \Omega & \Xi \end{bmatrix} \tag{C.10}$$

et

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \omega \sum_{n_\xi} e^{jk_\xi \xi} - \frac{1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} k_\xi^2 e^{jk_\xi \xi} + Z \left( \frac{n_x}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} e^{jk_\xi \xi} - \frac{n_y}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\zeta e^{jk_\xi \xi} \right) \\
 \Theta &= Z \left( \frac{n_x}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi k_\zeta e^{jk_\xi \xi} + \frac{-n_y}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} e^{jk_\xi \xi} \right) \\
 \Omega &= \frac{-n_x}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi k_\zeta e^{jk_\xi \xi} + \frac{n_y}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} e^{jk_\xi \xi} + \frac{Z}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} e^{jk_\xi \xi} \\
 \Xi &= \frac{n_x}{\epsilon_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} e^{jk_\xi \xi} + \frac{n_y}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\zeta e^{jk_\xi \xi} + \frac{Z}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi k_\zeta e^{jk_\xi \xi} \\
 v &= -\omega \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \tilde{A}_K^e e^{jk_\xi \xi} + \frac{j}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\zeta^2 \tilde{A}_K^e e^{jk_\xi \xi} \\
 &\quad + Z \left[ n_x \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi k_\zeta \tilde{A}_K^m e^{jk_\xi \xi} - \frac{1}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_K^e e^{jk_\xi \xi} \right) \right. \\
 &\quad \left. - n_y \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_K^m e^{jk_\xi \xi} + \frac{1}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} j k_\zeta \tilde{A}_K^e e^{jk_\xi \xi} \right) \right] \\
 \omega &= -n_x \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi k_\zeta \tilde{A}_K^e e^{jk_\xi \xi} + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_K^m e^{jk_\xi \xi} \right) \\
 &\quad + n_y \left( \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_K^e e^{jk_\xi \xi} - \frac{1}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\zeta \tilde{A}_K^m e^{jk_\xi \xi} \right) \\
 &\quad + Z \left[ \frac{-1}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} k_\xi k_\zeta \tilde{A}_K^m e^{jk_\xi \xi} - \frac{1}{\mu_0} \sum_{n_\xi} \sum_{n_\zeta} \sqrt{k_0^2 - k_\zeta^2 - k_\xi^2} \tilde{A}_K^e e^{jk_\xi \xi} \right]
 \end{aligned}
 \tag{C.11}$$

## Annexe D

# Rappel sur le développement en série de Taylor

Dans cette annexe est rappelé la théorie des développements en série de Taylor suivant une dimension [47].

Soit la fonction  $f$  discrétisée autour du point  $x$  avec un intervalle  $\Delta x$  :

$$f(x + \varepsilon \Delta x) = f(x) + \frac{\varepsilon \Delta x}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\varepsilon \Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + o(\Delta x^3) \quad (\text{D.1})$$

avec :  $\varepsilon$  un entier relatif ( $\varepsilon \in \mathbb{N}$ )

$o(\Delta x^3)$  désigne toutes les dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 3 dont on a négligé l'écriture.

On dit alors que l'équation aux dérivées partielles est discrétisée à l'ordre 2 :  $O(\Delta x^2)$  [1].

L'obtention des méthodes aux différences est basée sur une combinaison de divers développements en série de Taylor. Ainsi, à partir de l'équation (D.1), on peut obtenir directement l'expression de la dérivée partielle première en  $x$  en prenant  $\varepsilon = 1$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{D.2})$$

Les dérivées partielles d'ordre supérieur sont obtenues grâce à la combinaison de plusieurs développements de Taylor. De cette manière, on peut aboutir à la dérivée partielles du second ordre en  $x$  en combinant les équations prises pour  $\varepsilon = \pm 1$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{D.3})$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(-\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{D.4})$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{D.5})$$

Les équations (D.2) et (D.5) permettent de discrétiser des dérivées partielles d'ordre 1 et 2.



## Annexe E

# Etude des différents schémas de discrétisation aux Différences Finies

## I Stabilité

La modélisation de la propagation d'une onde électromagnétique se fait couramment grâce à la résolution de schéma itératif. A l'abscisse en question, le champ (ou toute autre grandeur) dépend du champ voisin mais aussi du champ à l'itération précédente. Supposons qu'à l'abscisse  $l$ , on ajoute au champ une erreur très petite, qui peut être l'arrondi d'un calculateur numérique par exemple. Pour que la solution aux abscisses suivantes ait un sens, il est indispensable que ces erreurs minimales et inévitables ne s'amplifient pas.

Par définition, on dit qu'un processus de calcul itératif est stable si les erreurs d'arrondis ne s'amplifient pas au fur et à mesure que les calculs progressent.

### I.1 Cas général

Prenons le cas d'une équation d'évolution numérique qui comporte trois dimensions d'espace indicées  $l, p$  et  $q$ . On peut donc écrire le développement en série de Fourier complexe de la solution :

$$u(x, y, z) = \sum_{m_y, m_z} a_{m_y, m_z}(x) e^{j(\omega_{m_y} y + \omega_{m_z} z)} \quad (\text{E.1})$$

$$\text{avec : } \omega_{m_y} = m_y \frac{\pi}{n_{y+1}}, \\ \omega_{m_z} = m_z \frac{\pi}{n_{z+1}}.$$

On peut écrire un développement analogue pour le schéma discret, mais on ne dispose que d'un nombre fini ( $J + 1$ ) de points de discrétisation sur l'espace  $[0, L]$ . Le développement se limitera donc à  $2J + 1$  harmoniques indicés de  $-J$  à  $0$  et de  $0$  à  $J$ . On aura donc :

$$U_{i,j}^n = \sum_{m_y, m_z} A_{m_y, m_z}^n e^{j(\omega_{m_y} j \Delta y + \omega_{m_z} j \Delta z)} \quad (\text{E.2})$$

$$\text{avec : } \omega_{m_y} \Delta y = m_y \frac{\pi}{L} \frac{L}{J+1} = m_y \frac{\pi}{J+1}, \\ \omega_{m_z} \Delta z = m_z \frac{\pi}{L} \frac{L}{J+1} = m_z \frac{\pi}{J+1}.$$

et où  $A_{m_y, m_z}^n$  désigne l'amplitude de l'harmonique  $(m_y, m_z)$  à l'abscisse  $n\Delta x$ . On désigne par  $\xi_{m_y, m_z}$  le coefficient d'amplification de l'harmonique  $(m_y, m_z)$  entre deux abscisses consécutives.

## I.2 Schéma explicite

Écrivant que chaque harmonique vérifie l'équation d'origine (3.9), il vient :

$$\xi_{m_y, m_z} = 1 + r_y \left( e^{i\omega_{m_y} \Delta y} - 2 + e^{-i\omega_{m_y} \Delta y} \right) + r_z \left( e^{i\omega_{m_z} \Delta z} - 2 + e^{-i\omega_{m_z} \Delta z} \right) \quad (\text{E.3})$$

On pose :

$$\alpha_{m_y, m_z} = r_y \frac{1 - \cos(\omega_{m_y} \Delta y)}{2} + r_z \frac{1 - \cos(\omega_{m_z} \Delta z)}{2} \quad (\text{E.4})$$

$$= r_y \sin^2 \frac{\omega_{m_y} \Delta y}{2} + r_z \sin^2 \frac{\omega_{m_z} \Delta z}{2} \geq 0 \quad (\text{E.5})$$

On obtient immédiatement :

$$\xi_{m_y, m_z} = 1 - 4\alpha_{m_y, m_z} \quad (\text{E.6})$$

La stabilité est assurée si on a quel que soit  $m_y, m_z$ ,

$$-1 \leq \xi_{m_y, m_z} \leq 1 \quad (\text{E.7})$$

$\alpha_{m_y, m_z}$  étant  $\geq 0$ , l'égalité de droite est toujours vérifiée et il reste donc comme condition de stabilité :

$$-1 \leq \xi_{m_y, m_z} \quad (\text{E.8})$$

On obtient donc comme condition de stabilité :

$$-1 \leq 1 - 4\alpha_{m_y, m_z} \quad (\text{E.9})$$

soit

$$\alpha_{m_y, m_z} \leq \frac{1}{4} \quad (\text{E.10})$$

On obtient donc une stabilité conditionnelle de ce schéma explicite en fonction de la valeur de  $\alpha_{m_y, m_z}$ .

## I.3 Schéma implicite pur

Si cette fois-ci, on écrit que chaque harmonique satisfait à l'équation (3.14), on obtient :

$$\left[ 1 + r_y \left( e^{i\omega_{m_y} \Delta y} - 2 + e^{-i\omega_{m_y} \Delta y} \right) + r_z \left( e^{i\omega_{m_z} \Delta z} - 2 + e^{-i\omega_{m_z} \Delta z} \right) \right] \xi_{m_y, m_z} = 1 \quad (\text{E.11})$$

En reprenant la notation du cas explicite, on aboutit à :

$$(1 + 4\alpha_{m_y, m_z}) \xi_{m_y, m_z} = 1 \quad (\text{E.12})$$

soit

$$\xi_{m_y, m_z} = \frac{1}{1 + 4\alpha_{m_y, m_z}} \quad (\text{E.13})$$

Dans la mesure où  $\alpha_{m_y, m_z}$  est  $\geq 0$ , la condition de stabilité  $\xi_{m_y, m_z} \geq -1$  est toujours vérifiée dans le cas d'un schéma implicite pur.

### I.4 Schéma implicite mixte

Pour ce qui concerne ce schéma, chaque harmonique doit satisfaire l'équation :

$$\xi_{m_y, m_z} - 1 = [\theta \xi_{m_y, m_z} + (1 - \theta)] \times \left[ r_y \left( e^{j\omega_{m_y} \Delta y} - 2 + e^{-j\omega_{m_y} \Delta y} \right) + r_z \left( e^{j\omega_{m_z} \Delta z} - 2 + e^{-j\omega_{m_z} \Delta z} \right) \right] \quad (\text{E.14})$$

On a alors en adoptant les mêmes notations que dans les cas précédents :

$$-1 = -4\alpha_{m_y, m_z} (\theta \xi_{m_y, m_z} + 1 - \theta) \quad (\text{E.15})$$

soit

$$\xi_{m_y, m_z} = 1 - \frac{4\alpha_{m_y, m_z}}{1 + 4\alpha_{m_y, m_z}} \leq 1 \quad (\text{E.16})$$

La relation de stabilité se ramène donc dans ce cas à :

$$2\alpha_{m_y, m_z} (1 - 2\theta) \leq 1 \quad (\text{E.17})$$

Pour  $\theta \geq \frac{1}{2}$  la stabilité est toujours assurée, pour  $\theta < \frac{1}{2}$  la condition est obtenue en remplaçant  $\alpha_{m_y, m_z}$  par son majorant  $r_y + r_z$  :

$$\begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{1}{2} & r_y + r_z \leq \frac{1}{2(1-2\theta)} \\ \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1 & \text{toujours stable} \end{cases} \quad (\text{E.18})$$

## II Consistance

La précision d'un schéma aux Différences Finies est définie par l'erreur commise lors de l'approximation du schéma exact par le schéma discrétisé. Ainsi, on appelle erreur de troncature (ou erreur de discrétisation) l'expression littérale définie par :

$$R_{\Delta}(u) \triangleq L_{\Delta}(u) - L(u) \quad (\text{E.19})$$

C'est l'erreur qui est faite systématiquement lorsqu'un opérateur continu est approché par un opérateur discret aux Différences Finies.

L'approximation de  $L$  par  $L_{\Delta}$  est dite consistante ou, cohérente, si l'erreur de troncature  $R_{\Delta}(u)$  tend vers zéro lorsque tous les pas de discrétisation tendent eux-mêmes vers zéro ( $\Delta \rightarrow 0$ ).

On dit alors que le schéma de discrétisation  $L_{\Delta}$  est consistant, ou cohérent, avec l'opérateur aux dérivées partielles  $L$ . La consistance d'un opérateur discret assure à celui-ci de pouvoir représenter exactement l'équation d'origine lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéro.

## II.1 Schéma explicite

Pour le schéma explicite, l'opérateur aux dérivées partielles de l'Équation Parabolique 3D se définit de la manière suivante :

$$L(u) = \frac{u_{l+1}^{p,q} - u_l^{p,q}}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0(\Delta x^2) - \sigma \left[ \frac{u_l^{p+1,q} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p-1,q}}{\Delta y^2} - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - O(\Delta y^4) \right. \\ \left. + \frac{u_l^{p,q+1} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p,q-1}}{\Delta z^2} - \frac{\Delta z^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - O(\Delta z^4) \right] \quad (\text{E.20})$$

Quant au schéma de discrétisation que l'on adopte, il se développe de la manière suivante :

$$L_{\Delta}(u) = \frac{u_{l+1}^{p,q} - u_l^{p,q}}{\Delta x} - \sigma \left( \frac{u_l^{p+1,q} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p-1,q}}{\Delta y^2} + \frac{u_l^{p,q+1} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p,q-1}}{\Delta z^2} \right) \quad (\text{E.21})$$

Par définition, l'erreur de troncature est donc :

$$R_{\Delta}(u) = \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0(\Delta x^2) + \sigma \left[ -\frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - O(\Delta y^4) - \frac{\Delta z^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - O(\Delta z^4) \right] \quad (\text{E.22})$$

On remarque que les pas de discrétisation  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  tendent vers zéro, l'erreur de troncature  $R_{\Delta}(u)$  tend elle aussi vers zéro. On peut donc affirmer que l'approximation faite par le schéma explicite  $L_{\Delta}$  est consistante avec  $L$ .

## II.2 Schéma implicite pur

Une analyse de la consistance équivalente à la précédente est réalisée sur le schéma implicite pur. Pour ce schéma, l'opérateur aux dérivées partielles de l'Équation Parabolique se définit de la manière suivante :

$$L(u) = \frac{u_{l+1}^{p,q} - u_l^{p,q}}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0(\Delta x^2) - \sigma \left[ \frac{u_{l+1}^{p+1,q} - 2u_{l+1}^{p,q} + u_{l+1}^{p-1,q}}{\Delta y^2} - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - O(\Delta y^4) \right. \\ \left. + \frac{u_{l+1}^{p,q+1} - 2u_{l+1}^{p,q} + u_{l+1}^{p,q-1}}{\Delta z^2} - \frac{\Delta z^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - O(\Delta z^4) \right] \quad (\text{E.23})$$

Quant au schéma de discrétisation que l'on adopte, il se développe de la manière suivante :

$$L_{\Delta}(u) = \frac{u_{l+1}^{p,q} - u_l^{p,q}}{\Delta x} - \sigma \left( \frac{u_{l+1}^{p+1,q} - 2u_{l+1}^{p,q} + u_{l+1}^{p-1,q}}{\Delta y^2} + \frac{u_{l+1}^{p,q+1} - 2u_{l+1}^{p,q} + u_{l+1}^{p,q-1}}{\Delta z^2} \right) \quad (\text{E.24})$$

L'erreur de troncature que l'on obtient présente la même expression que pour le schéma explicite (E.22). Le schéma implicite pur est donc lui aussi consistant.

### II.3 Schéma implicite mixte

Le schéma implicite mixte est une pondération des deux précédents schémas. L'opérateur  $L$  s'écrit sous la forme suivante :

$$L(u) = \frac{u_{l+1}^{p,q} - u_l^{p,q}}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - O(\Delta x^2) - \sigma \left\{ \theta \left[ \frac{u_{l+1}^{p+1,q} - 2u_{l+1}^{p,q} + u_{l+1}^{p-1,q}}{\Delta y^2} - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - O(\Delta y^4) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{u_{l+1}^{p,q+1} - 2u_{l+1}^{p,q} + u_{l+1}^{p,q-1}}{\Delta z^2} - \frac{\Delta z^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - O(\Delta z^4) \right] + (1-\theta) \left[ \frac{u_l^{p+1,q} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p-1,q}}{\Delta y^2} - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right. \right. \\ \left. \left. - O(\Delta y^4) + \frac{u_l^{p,q+1} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p,q-1}}{\Delta z^2} - \frac{\Delta z^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - O(\Delta z^4) \right] \right\} \quad (\text{E.25})$$

Le schéma de discrétisation adopté se présente, quant à lui, sous la forme suivante :

$$L_{\Delta}(u) = \frac{u_{l+1}^{p,q} - u_l^{p,q}}{\Delta x} - \sigma \left\{ \theta \left[ \frac{u_{l+1}^{p+1,q} - 2u_{l+1}^{p,q} + u_{l+1}^{p-1,q}}{\Delta y^2} + \frac{u_{l+1}^{p,q+1} - 2u_{l+1}^{p,q} + u_{l+1}^{p,q-1}}{\Delta z^2} \right] \right. \\ \left. + (1-\theta) \left[ \frac{u_l^{p+1,q} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p-1,q}}{\Delta y^2} + \frac{u_l^{p,q+1} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p,q-1}}{\Delta z^2} \right] \right\} \quad (\text{E.26})$$

L'erreur de troncature est donc :

$$R(u) = \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) + \sigma \left\{ \theta \left[ -\frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - O(\Delta y^4) - \frac{\Delta z^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - O(\Delta z^4) \right] \right. \\ \left. + (1-\theta) \left[ -\frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - O(\Delta y^4) - \frac{\Delta z^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - O(\Delta z^4) \right] \right\} \quad (\text{E.27})$$

Le schéma implicite est donc un schéma consistant dans la mesure où si les pas de discrétisation tendent vers zéro, l'erreur de troncature tend elle aussi vers zéro.

Pour des questions de stabilité, on a vu que  $\theta$  devait rester supérieur à 1/2. Le choix habituel, minimisant l'erreur de troncature, est  $\theta = \frac{1}{2}$  correspondant au schéma de Crank-Nicholson.

## III Précision

La précision consiste à trouver l'ordre des développements en série de Taylor réalisés lors de la discrétisation des dérivées partielles.

### III.1 Schéma explicite et implicite

Pour ce qui est des schémas explicite et implicite mixte

$$u_{l+1}^{p,q} = u_l^{p,q} + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{E.28})$$

De cette équation, on trouve facilement la relation concernant la dérivée première en  $x$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{l+1}^{p,q} - u_l^{p,q}}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{E.29})$$

$$= \frac{u_{l+1}^{p,q} - u_l^{p,q}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{E.30})$$

On voit donc que le schéma explicite est d'ordre 1 en  $x$ .

Pour ce qui est de la précision dans les dimensions transverses  $y$  et  $z$ , elle est équivalente à celle obtenue à partir des développements de Taylor (D.3) et (D.4).

Cela est vrai pour tous les schémas de discrétisation.

### III.2 Schéma de Crank-Nicholson

Pour obtenir l'ordre en  $x$  du schéma de Crank-Nicholson, il faut discrétiser en faisant une demi-somme. Cela équivaut à discrétiser autour d'un point virtuel  $u_{l+\frac{1}{2}}^{p,q}$  :

$$u_{l+\frac{1}{2}}^{p,q} = u_l^{p,q} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{E.31})$$

$$u_{l+\frac{1}{2}}^{p,q} = u_{l+1}^{p,q} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\left(\frac{-\Delta x}{2}\right)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{E.32})$$

En égalant les seconds membres des deux équations précédentes, on aboutit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{l+1}^{p,q} - u_l^{p,q}}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{E.33})$$

On s'aperçoit donc que le schéma de Crank-Nicholson est d'ordre 2 en  $x$  alors que les schémas explicite et implicite sont d'ordre 1 en  $x$ .

## IV Convergence

### IV.1 Définition

Les notions de consistance et de stabilité qui ont été étudiées n'ont pas encore fait apparaître la relation qui existe entre la solution approchée  $U_\Delta$  et la solution exacte  $U$ . Pour l'instant, on a choisi un schéma d'approximation de l'équation aux dérivées partielles susceptible de représenter aussi bien que possible l'équation d'origine et on a énoncé les conditions qui garantissent la stabilité du schéma. Mais nous n'avons pas encore prouvé que la solution approchée  $U_\Delta$  est bien représentative de  $U$ . A cette représentativité correspond la définition de la convergence.

On dit que le schéma aux différences finies est convergent si la quantité  $U(x, y, z) - U_\Delta(x, y, z)$  tend vers zéro lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéro.

Il est bien évident que la notion de convergence est la seule qui nous intéresse en fin de compte puisque le problème posé est en fait de trouver une solution approchée aussi voisine

que possible de  $U(x, y, z)$ . Les notions de consistance et de stabilité n'ont d'importance qu'au regard de la notion de convergence.

#### IV.2 Théorème de Lax

On appelle problème bien posé, un problème dont la solution est unique et dépend de façon continue des conditions aux limites. Tout problème physique est susceptible d'être bien posé, et sa solution est alors représentative de la réalité.

Théorème de Lax : pour un problème linéaire, bien posé et satisfaisant la condition de consistance, alors convergence et stabilité sont deux notions équivalentes

Ce théorème s'énonce encore :

Pour un problème linéaire et bien posé, la consistance et la stabilité sont nécessaires et suffisantes pour assurer la convergence.

Les trois discrétisations que l'on a envisagé pour l'Équation Parabolique 3D étant stables et consistantes, par application de ce théorème on peut déclarer qu'elles sont également convergentes.



## Annexe F

# Consistance de la méthode à pas fractionnaires

Considérons  $L_\Delta$  la forme discrétisée du schéma d'origine  $L$ . L'erreur de troncature ou erreur de discrétisation est définie par :

$$R_\Delta(u) \triangleq L_\Delta(u) - L(u) \quad (\text{E1})$$

L'approximation de  $L$  par  $L_\Delta$  est dite consistante si l'erreur de troncature tend vers zéro lorsque tous les pas de discrétisation tendent eux-mêmes vers zéro. La consistance d'un opérateur discret assure à celui-ci de pouvoir représenter exactement l'équation d'origine. Si l'on considère l'Équation Parabolique tridimensionnelle (3.8), on note :

$$L_\Delta(u) \triangleq \left\{ \partial_x - \frac{jk_0}{2} \left[ \frac{1}{k_0^2} (\partial_y^2 + \partial_z^2) + m^2 - 1 \right] \right\} u = 0 \quad (\text{E2})$$

Par le biais de développement en série de Taylor (cf. annexe D), on exprime l'ensemble des dérivées partielles présentes dans l'équation précédente. Ainsi, les développements en série de Taylor selon les dimensions  $x$  et  $y$  aboutissent respectivement aux deux équations suivantes :

$$u_{l+1}^{p,q} = u_l^{p,q} + \Delta x (\partial_x u)_l^{p,q} + \frac{\Delta x^2}{2} (\partial_x^2 u)_l^{p,q} + O(\Delta x^3) \quad (\text{E3})$$

$$u_l^{p+\epsilon,q} = u_l^{p,q} + \epsilon \Delta y (\partial_y u)_l^{p,q} + \epsilon^2 \frac{\Delta y^2}{2} (\partial_y^2 u)_l^{p,q} + \epsilon^3 \frac{\Delta y^3}{6} (\partial_y^3 u)_l^{p,q} + \epsilon^4 \frac{\Delta y^4}{24} (\partial_y^4 u)_l^{p,q} + \epsilon^5 \frac{\Delta y^5}{120} (\partial_y^5 u)_l^{p,q} + O(\Delta y^6) \quad (\text{E4})$$

Rappelons que le but est ici de discrétiser l'ensemble des dérivées partielles présentes dans l'équation (E2).

Une expression de la dérivée partielle discrétisée suivant la dimension  $x$  peut être obtenue directement à partir de l'équation (E3) :

$$(\partial_x u)_l^{p,q} = \frac{u_{l+1}^{p,q} - u_l^{p,q}}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} (\partial_x^2 u)_l^{p,q} + O(\Delta x^3) \quad (\text{E5})$$

L'expression discrétisée de la dérivée partielle suivant la dimension  $y$  est elle obtenue à partir de la sommation des expressions (E4) prises pour  $\epsilon = \pm 1$ . On aboutit à :

$$\left(\partial_y^2 u\right)_l^{p,q} = \frac{u_l^{p+1,q} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p-1,q}}{\Delta y^2} - \frac{\Delta y^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_l^{p,q} + O(\Delta y^6) \quad (\text{E6})$$

Un développement de Taylor selon la dimension  $z$  permet d'aboutir à une expression similaire de l'équation précédente.

L'ensemble des expressions discrétisées des dérivées partielles est alors introduit dans l'équation qui nous concerne ici (E2) et conduit à la relation suivante :

$$L(u) = \frac{u_{l+1}^{p,q} - u_l^{p,q}}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \partial_x^2 u + O(\Delta x^3) - \frac{jk_0}{2} \left[ \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{u_l^{p+1,q} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p-1,q}}{\Delta y^2} - \frac{\Delta y^2}{12} \left(\partial_y^4 u\right)_l^{p,q} \right) \right. \\ \left. + O(\Delta y^6) + \frac{u_l^{p,q+1} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p,q-1}}{\Delta z^2} - \frac{\Delta z^2}{12} \left(\partial_z^4 u\right)_l^{p,q} + O(\Delta z^6) \right] + (m^2 - 1) u_l^{p,q} = 0 \quad (\text{E7})$$

Cette expression discrétisée a été obtenue selon une méthodologie explicite, en effet toutes les dérivées partielles sont exprimées à l'abscisse d'indice  $l$ . Une discrétisation selon les méthodologies implicite ou implicite mixte est tout à fait envisageable et conduit au même résultat.

Le schéma discret que nous avons utilisé dans le cas de ce type de discrétisation a été explicité à l'équation (3.9) et est rappelé ici :

$$L_\Delta(u) = \frac{u_{l+1}^{p,q} - u_l^{p,q}}{\Delta x} - \frac{jk_0}{2} \left[ \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{u_l^{p+1,q} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p-1,q}}{\Delta y^2} + \frac{u_l^{p,q+1} - 2u_l^{p,q} + u_l^{p,q-1}}{\Delta z^2} \right) \right. \\ \left. + (m^2 - 1) u_l^{p,q} \right] \quad (\text{E8})$$

À partir des expressions (E5) et (E6) et selon la définition de l'erreur de troncature, on peut exprimer celle-ci de la manière suivante :

$$R_\Delta(u) = \frac{\Delta x}{2} \partial_x^2 u + O(\Delta x^3) - \frac{j}{2k_0} \left[ \frac{\Delta y^2}{12} \left(\partial_y^4 u\right)_l^{p,q} + O(\Delta y^6) + \frac{\Delta z^2}{12} \left(\partial_z^4 u\right)_l^{p,q} + O(\Delta z^6) \right] \quad (\text{E9})$$

Il faut à ce stade trouver une relation entre la dérivée partielle en  $x$  et celles en  $y$  et  $z$ . Celle-ci nous est fournie par l'intermédiaire de l'Équation Parabolique qui en atmosphère homogène donne la relation suivante :

$$\partial_x u = \tau \left( \partial_y^2 + \partial_z^2 \right) u \quad (\text{E10})$$

Grâce à cette équation, il est possible d'exprimer la dérivée partielle selon la dimension  $x$  en fonction des dérivées partielles dans les dimensions transverses  $y$  et  $z$ . Ainsi, si l'on dérive par rapport à  $x$  l'équation précédente, on obtient :

$$\partial_x [\partial_x u] = \partial_x \left[ \tau \left( \partial_y^2 + \partial_z^2 \right) \right] u \quad (\text{E11})$$

Ce qui par application du théorème de Cauchy-Schwarz peut s'écrire :

$$= \tau \left[ \partial_y^2 \partial_x + \partial_z^2 \partial_x \right] u \quad (\text{E12})$$

Il est possible de réintroduire l'expression de l'Équation Parabolique afin de simplifier la présence des dérivées partielles suivant  $x$  :

$$= \tau \left[ \partial_y^2 \tau \left( \partial_y^2 + \partial_z^2 \right) + \partial_z^2 \tau \left( \partial_y^2 + \partial_z^2 \right) \right] u \quad (\text{E13})$$

$$= \tau^2 \left[ \partial_y^4 + \partial_z^4 + 2\partial_y^2 \partial_z^2 \right] u \quad (\text{E14})$$

L'introduction de cette relation dans l'expression de l'erreur de troncature (E9) aboutit à :

$$R_\Delta(u) = \left\{ \frac{\Delta x}{2} \tau^2 \left( \partial_y^4 + \partial_z^4 + 2\partial_y^2 \partial_z^2 \right) + O(\Delta x^3) - \tau \left[ \frac{\Delta y^2}{12} \partial_y^4 + O(\Delta y^6) + \frac{\Delta z^2}{12} \partial_z^4 + O(\Delta z^6) \right] \right\} u \quad (\text{E15})$$

$$= \left\{ \left( \frac{\Delta x}{2} \tau^2 - \tau \frac{\Delta y^2}{12} \right) \partial_y^4 + \left( \frac{\Delta x}{2} \tau^2 - \tau \frac{\Delta z^2}{12} \right) \partial_z^4 + \tau^2 \Delta x \partial_y^2 \partial_z^2 + O(\Delta y^6) + O(\Delta z^6) \right\} u \quad (\text{E16})$$

On voit ainsi apparaître que le choix suivant des pas de discrétisation minimise l'erreur de troncature et améliore donc la consistance du schéma si :

$$\begin{cases} \tau \Delta x - \Delta y^2 / 6 = 0 \\ \tau \Delta x - \Delta z^2 / 6 = 0 \end{cases} \quad (\text{E17})$$



## Annexe G

# Simplification des conditions aux limites sur une surface diélectrique

À partir des conditions aux limites générales sur le champ électrique (3.22) et en ne conservant que l'influence d'une composante sur elle-même, on obtient sur le champ électrique des équations découplées de la forme :

$$\begin{vmatrix} n_z E_x \\ n_z E_y \\ n_x E_z \end{vmatrix} = -\frac{Z}{j\omega\mu_0} \begin{vmatrix} (n_x^2 + n_z^2) \partial_z E_x + n_x n_y \partial_y E_x \\ (n_y^2 + n_z^2) \partial_z E_y + n_x n_z \partial_x E_y \\ (n_x^2 + n_z^2) \partial_x E_z + n_x n_y \partial_y E_z \end{vmatrix} \quad (\text{G.1})$$

Observons que dans certaines configurations ces équations sont mal choisies. En effet si on analyse le système obtenu pour une surface métallique horizontale soit :

$$Z = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (\text{G.2})$$

On constate que les deux premières équations se ramènent aux conditions limites de Dirichlet et qu'une indétermination sur  $E_z$  apparaît. Il faut donc rechercher une nouvelle équation pour  $E_z$ .

Si on exprime les équations sur le champ magnétique (3.23) en ne considérant que l'influence d'une composante sur elle-même, on a :

$$\begin{vmatrix} \partial_z H_x \\ \partial_z H_y \\ \partial_x H_z \end{vmatrix} = -Z j\omega\epsilon_0 \begin{vmatrix} n_z H_x \\ n_z H_y \\ n_x H_z \end{vmatrix} \quad (\text{G.3})$$

L'idée est d'introduire ces équations dans l'expression de  $E_z$ . Suivant les équations de Maxwell,  $E_z$  s'exprime en fonction du champ magnétique selon :

$$E_z = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0} (\partial_x H_y - \partial_y H_x) \quad (\text{G.4})$$

Si on dérive suivant  $z$  :

$$\partial_z E_z = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0} [\partial_z (\partial_x H_y) - \partial_z (\partial_y H_x)] \quad (\text{G.5})$$

On peut alors permuter les dérivées :

$$\partial_z E_z = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0} [\partial_x (\partial_z H_y) - \partial_y (\partial_z H_x)] \quad (\text{G.6})$$

En introduisant les deux premières lignes du système (G.3) dans cette dernière expression, on obtient la condition recherchée sur  $E_z$  :

$$\partial_z E_z = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0} (-Z j\omega\epsilon_0) [\partial_x H_y - \partial_y H_x] \quad (\text{G.7})$$

En effet, on reconnaît les dérivées sur le champ magnétique de (G.4). Si l'on remplace par cette dernière, on obtient :

$$\partial_z E_z = -(Z j\omega\epsilon_0) n_z E_z \quad (\text{G.8})$$

Ainsi les conditions aux limites à appliquer sur les trois composantes sont :

$$\begin{cases} n_z E_x \\ n_z E_y \\ \partial_z E_z \end{cases} = Z \begin{cases} -\frac{1}{j\omega\mu_0} [(n_x^2 + n_z^2) \partial_z E_x + n_x n_y \partial_y E_x] \\ -\frac{1}{j\omega\mu_0} [(n_y^2 + n_z^2) \partial_z E_y + n_x n_z \partial_x E_y] \\ -j\omega\epsilon_0 n_z E_z \end{cases} \quad (\text{G.9})$$

# Table des figures

1	Exemple de propagation en présence d'un relief tridimensionnel urbain. . . .	3
2	Exemple de propagation en présence d'un relief tridimensionnel vallonné. . .	3
1.1	Contexte de calcul des méthodes asymptotiques de courants. . . . .	11
1.2	Application de l'Optique Physique à la propagation en environnement 3D. . .	13
1.3	Réflexion modélisée par Optique Géométrique. . . . .	14
1.4	Équivalence entre la configuration réelle et l'ajout d'un domaine image. . . .	15
1.5	Application de l'Optique Géométrique à la propagation en environnement 3D.	16
1.6	Réflexion d'une onde plane sur une plaque de dimensions finies. . . . .	16
1.7	Diffraction par une arête, représentation du cône de Keller. . . . .	18
1.8	Couplage entre deux plaques lors d'un calcul FERMAT. . . . .	19
1.9	Lancer d'un rayon dans le cas de l'atmosphère stratifiée. . . . .	20
1.10	Cône de paraxialité . . . . .	23
1.11	Application d'une apodisation au domaine de calcul 3D. . . . .	28
1.12	Atténuation d'apodisation 3D. . . . .	28
1.13	Représentation en coupe de la fonction d'atténuation. . . . .	29
2.1	Définition du domaine de calcul spatial. . . . .	36
2.2	Projection du vecteur d'onde $\mathbf{k}_0$ dans la base $\{k_x, k_y, k_z\}$ . . . . .	37
2.3	Configuration de calcul en espace libre pour la visualisation des effets du choix de l'échantillonnage sur la propagation par la méthode SSF. . . . .	38
2.4	Composantes du champ électrique modélisées par la méthode SSF en espace libre en prenant un échantillonnage suffisant. . . . .	38
2.5	Composantes du champ électrique modélisées par la méthode SSF en espace libre en prenant un échantillonnage insuffisant. . . . .	39
2.6	Prise en compte de l'obstacle dans l'algorithme de propagation SSF . . . . .	40
2.7	Définition de la variable $\xi$ introduite lors du calcul de la condition aux limites sous une approche spectrale. . . . .	42
2.8	Zone de calcul du champ électromagnétique pour le calcul des conditions aux limites sur les parois verticales d'un obstacle par une approche spectrale. . . .	46
2.9	Configuration d'un cas de propagation au-dessus d'un sol plan par la méthode SSF. . . . .	48
2.10	Cartographies $\langle yz \rangle$ du champ électrique issues d'un calcul par la méthode SSF au-dessus d'un sol plan en polarisation horizontale. . . . .	49
2.11	Positionnement des plans de visualisation dans l'espace de calcul. . . . .	50

2.12	Coupe $\langle xz \rangle$ de la composante $E_y$ modélisée au-dessus d'un sol plan par la méthode SSF en polarisation horizontale. . . . .	50
2.13	Coupes $\langle xy \rangle$ de la composante $E_y$ modélisée au-dessus d'un sol plan par la méthode SSF en polarisation horizontale. . . . .	51
2.14	Comparaisons entre la méthode SSF et le modèle Source Image de la modélisation de la propagation au dessus d'un sol plan en polarisation horizontale. .	52
2.15	Cartographies $\langle yz \rangle$ du champ magnétique issues d'un calcul par la méthode SSF au-dessus d'un sol plan en polarisation verticale. . . . .	52
2.16	Comparaisons entre la méthode SSF et le modèle Source Image de la modélisation de la propagation au dessus d'un sol plan en polarisation verticale. . . .	53
2.17	Application de notre méthode dans la prise en compte des conditions aux limites sur un cas critique. . . . .	55
2.18	Exemple d'une onde plane éclairant le commencement d'un sol. . . . .	55
2.19	Annulation du champ sous la surface du sol. . . . .	56
2.20	Commencement des interférences au niveau du sol. . . . .	56
2.21	Création des interférences. . . . .	57
2.22	Configuration de l'étude paramétrique de la modélisation de la réflexion par la méthode SSF en fonction de l'angle d'incidence et du pas de progression. .	57
2.23	Étude paramétrique de la modélisation de la réflexion par la méthode SSF en fonction de l'angle d'incidence et du pas de progression. . . . .	58
2.24	Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'une atmosphère par la méthode SSF. . . . .	59
2.25	Variation du coindice de réfraction de l'atmosphère standard en fonction de l'altitude. . . . .	60
2.26	Coupe $\langle x_0z \rangle$ du facteur de propagation de $E_y$ issue de la modélisation de la propagation par la méthode SSF en présence d'une atmosphère standard. . .	60
2.27	Comparaison entre la méthode SSF 3D (EP 3D) et le modèle EP 2D dans le cas d'une atmosphère standard. . . . .	61
2.28	Variation du coindice de réfraction d'un conduit d'évaporation en fonction de l'altitude. . . . .	62
2.29	Coupe $\langle x_0z \rangle$ du facteur de propagation de $E_y$ issue de la modélisation de la propagation par la méthode SSF en présence d'un conduit d'évaporation. . . .	62
2.30	Comparaison entre la méthode SSF 3D (EP 3D) et le modèle EP 2D dans le cas d'un conduit d'évaporation. . . . .	63
2.31	Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'un écran et d'un sol par la méthode SSF. . . . .	64
2.32	Cartographies $\langle yz \rangle$ du champ électrique issues d'un calcul par la méthode SSF en présence d'un écran et d'un sol. . . . .	65
2.33	Comparaisons entre la méthode SSF et le logiciel FERMAT dans le cas de la propagation en présence d'un écran et d'un sol. . . . .	66
2.34	Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'une plaque inclinée par la méthode SSF 3D. . . . .	67

2.35	Vue de dessus, plan $\langle x0y \rangle$ , de la configuration de modélisation de la propagation par SSF 3D au-dessus d'une plaque (cf. figure 2.34). . . . .	67
2.36	Coupe $\langle yz \rangle$ de la composante $E_z$ du champ électrique issue de la modélisation de la propagation en présence d'une plaque inclinée par la méthode SSF. . . . .	68
2.37	Comparaisons entre la méthode SSF et le logiciel FERMAT dans le cas de la propagation en présence d'une plaque inclinée. . . . .	69
2.38	Différences lors la modélisation de la réflexion entre le modèle SSF 3D et le logiciel FERMAT. . . . .	70
3.1	Indices de discrétisation. . . . .	76
3.2	Schématisation de la méthode à pas fractionnaires réels. . . . .	81
3.3	Configuration de calcul en espace libre pour la visualisation des effets de la consistance sur la propagation par la méthode DF à pas fractionnaires. . . . .	83
3.4	Composantes du champ électrique modélisées par la méthode DF en espace libre satisfaisant les relations de consistance. . . . .	83
3.5	Composantes du champ électrique modélisées par la méthode DF en espace libre ne satisfaisant pas les relations de consistance. . . . .	84
3.6	Illustrations des différents schémas de discrétisation par Différences Finies. . . . .	86
3.7	Intégration des conditions aux limites au premier demi-pas . . . . .	90
3.8	Intégration des conditions aux limites au second demi-pas . . . . .	90
3.9	Substitution du point au sol au second demi-pas . . . . .	91
3.10	Illustration du repère local sur un relief tridimensionnel quelconque. . . . .	94
3.11	Prise en compte de la condition aux limites à l'interface exacte de l'obstacle. . . . .	95
3.12	Problème lors de la discrétisation des dérivées partielles en 3D. . . . .	97
3.13	Discrétisation de la dérivée partielle en $y$ . . . . .	97
3.14	Problèmes de discrétisation selon l'obstacle. . . . .	99
3.15	Algorithme de propagation par Différences Finies. . . . .	102
3.16	Configuration de test de propagation au-dessus d'un sol plan par la méthode DF . . . . .	103
3.17	Cartographies $\langle yz \rangle$ du champ électrique issues d'un calcul par la méthode DF au-dessus d'un sol plan métallique en polarisation horizontale. . . . .	104
3.18	Comparaisons entre les méthodes SSF, DF et le modèle Source Image de la modélisation de la propagation au-dessus d'un sol plan métallique en polarisation horizontale. . . . .	104
3.19	Cartographies $\langle yz \rangle$ du champ magnétique issues d'un calcul par la méthode DF au-dessus d'un sol plan métallique en polarisation verticale. . . . .	105
3.20	Comparaisons entre les méthodes SSF, DF et le modèle Source Image de la modélisation de la propagation au-dessus d'un sol plan métallique en polarisation verticale. . . . .	106
3.21	Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'une atmosphère par la méthode DF . . . . .	107

3.22	Variation du coindice de réfraction de l'atmosphère standard en fonction de l'altitude. . . . .	107
3.23	Coupe $\langle x0z \rangle$ du module de $E_y$ issue de la modélisation de la propagation par la méthode DF en présence d'une atmosphère standard. . . . .	108
3.24	Comparaison entre la méthode Équation Parabolique Différences Finies 3D et un modèle Équation Parabolique 2D dans le cas d'une atmosphère standard. .	109
3.25	Variation du coindice de réfraction d'un conduit d'évaporation en fonction de l'altitude. . . . .	110
3.26	Coupe $\langle x0z \rangle$ du module de $E_y$ issue de la modélisation de la propagation par la méthode DF en présence d'un conduit d'évaporation. . . . .	110
3.27	Comparaison entre la méthode Équation Parabolique Différences Finies 3D et un modèle Équation Parabolique 2D dans le cas d'un conduit d'évaporation. .	111
3.28	Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'un écran et d'un sol par la méthode DF . . . . .	112
3.29	Cartographies $\langle yz \rangle$ du champ électrique issues d'un calcul par la méthode DF en présence d'un écran et d'un sol. . . . .	112
3.30	Comparaisons entre les méthodes DF, SSF et le logiciel FERMAT dans le cas de la propagation en présence d'un écran et d'un sol. . . . .	113
3.31	Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'une plaque inclinée par la méthode DF . . . . .	114
3.32	Coupe $\langle yz \rangle$ de la composante $E_z$ du champ électrique issue de la modélisation de la propagation en présence d'une plaque inclinée par la méthode DF . . . . .	115
3.33	Comparaisons entre les méthodes SSF et DF et le logiciel FERMAT dans le cas de la propagation en présence d'une plaque inclinée. . . . .	116
3.34	Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'une plaque inclinée de $5^\circ$ par la méthode DF . . . . .	117
3.35	Vue de dessus, plan $\langle x0y \rangle$ , de la configuration de modélisation de la propagation par Différences Finies au-dessus d'une plaque inclinée (cf. figure 3.34). . . . .	117
3.36	Coupe $\langle yz \rangle$ de la composante $E_z$ du champ électrique issue de la modélisation de la propagation en présence d'une plaque inclinée de $5^\circ$ par la méthode DF . . . . .	118
3.37	Comparaison entre la méthode DF et le logiciel FERMAT dans le cas de la propagation en présence d'une plaque inclinée de $5^\circ$ . . . . .	119
3.38	Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'un obstacle à deux normales. . . . .	120
3.39	Cartographies $\langle yz \rangle$ du champ électrique issues d'un calcul par la méthode DF en présence d'un obstacle présentant deux normales. . . . .	121
3.40	Champ électrique référence au-dessus d'un obstacle présentant deux composantes. . . . .	122
3.41	Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'un obstacle à trois composantes. . . . .	122
3.42	Vues de dessus et depuis l'émetteur de l'obstacle. . . . .	123

3.43	Cartographies $\langle yz \rangle$ du champ électrique issues d'un calcul par la méthode DF en présence d'un obstacle à trois composantes. . . . .	123
4.1	Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'un écran et d'un sol. . . . .	128
4.2	Traitement de l'écran par une succession de simulations 2D. . . . .	128
4.3	Comparaison entre la résolution SSF 3D (EP SSF), DF 3D (EP DF) et un modèle 2D (EP 2D) dans le cas de la propagation en présence d'un écran et d'un sol. . . . .	129
4.4	Visualisation de la limitation angulaire de la méthode Différences Finies due à la paraxialité plus réduite de cette méthode. . . . .	130
4.5	Visualisation de l'angle de diffraction maximal. . . . .	131
4.6	Comparaisons des résultats obtenus par Différences Finies suivant l'échantillonnage utilisé. . . . .	132
4.7	Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'une montagne de forme gaussienne. . . . .	133
4.8	Vues de dessus et de face de la montagne de forme gaussienne. . . . .	133
4.10	Réflexion sur un bord de la montagne de forme gaussienne. . . . .	134
4.9	Coupes $\langle yz \rangle$ du champ électrique obtenu lors de la modélisation de la propagation au-dessus d'une montagne de forme gaussienne par les méthodes SSF et DF . . . . .	135
4.11	Comparaison des méthodes SSF et Différences Finies sur une horizontale dans le cas de la propagation en présence d'une montagne de forme gaussienne. . . . .	136
4.12	Visualisation de la différence entre les ouvertures angulaires des méthodes SSF et Différences Finies dans le cas de la propagation en présence d'une montagne de forme gaussienne. . . . .	137
4.13	Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'une montagne complexe présentant un col. . . . .	139
4.14	Vues de dessus et de face de la montagne complexe présentant un col. . . . .	139
4.15	Coupes $\langle yz \rangle$ du champ électrique obtenu lors de la modélisation de la propagation au-dessus d'une montagne complexe présentant un col par les méthodes SSF et DF . . . . .	141
4.16	Comparaison des méthodes SSF et Différences Finies sur une verticale dans le cas de la propagation en présence d'une montagne complexe présentant un col. . . . .	142
4.17	Configuration pour la modélisation de la propagation en présence d'une montagne 2D, transversalement infinie. . . . .	143
4.18	Vues de dessus et de face de la montagne 2D transversalement invariante. . . . .	143
4.19	Comparaison des coupes $\langle yz \rangle$ du module en dB de la composante $E_y$ du champ électrique obtenu lors de la modélisation SSF de la propagation au-dessus d'une montagne réaliste présentant un col et d'une montagne 2D. . . . .	145
4.20	Comparaison des coupes $\langle xy \rangle$ du module en dB de la composante $E_y$ du champ électrique obtenu lors de la modélisation SSF de la propagation au-dessus d'une montagne réaliste présentant un col et d'une montagne 2D. . . . .	146

4.21	Configuration géométrique pour la modélisation de la propagation dans une vallée. . . . .	147
4.22	Vues de dessus et depuis l'émetteur de la vallée. . . . .	148
4.23	Coupes $\langle yz \rangle$ du champ électrique obtenu lors de la modélisation de la propagation à l'intérieur d'une vallée par les méthodes SSF et DE . . . . .	149
4.24	Comparaison des méthodes SSF et Différences Finies sur une verticale dans le cas de la propagation dans une vallée. . . . .	150
4.26	Recombinaison du champ incident et du champ réfléchi sur le flanc gauche de la vallée. . . . .	151
4.25	Comparaison des coupes $\langle yz \rangle$ de la composante $E_y$ du champ électrique obtenu lors de la modélisation SSF de la propagation en présence successivement des deux flancs de la vallée. . . . .	152
4.27	Recombinaison du champ incident et du champ réfléchi sur le flanc droit de la vallée. . . . .	153
4.28	Différences d'inclinaison des interférences suivant le flanc de la vallée pris en compte. . . . .	153

## Liste des tableaux

3.1	Mise en forme matricielle de la discrétisation explicite de l'Équation Parabolique. . . . .	78
3.2	Matrices de discrétisation des dérivées partielles d'ordre 2. . . . .	79
3.3	Modification de la matrice $\mathcal{A}_z$ pour l'intégration de la condition aux limites simplifiée dans le schéma matriciel. . . . .	92

# Bibliographie

- [1] « Big-O notation ». <http://en.wikipedia.org/wiki/BigOnotation>.
- [2] « DTED files ». <http://www.terrain.org/Elevation/dted.html>.
- [3] « Performance Specification Digital Terrain Elevation Data (DTED) ». <http://tools.sedris.org/dted2stf3.1.htm>.
- [4] « Théorie de l'information ». <http://fr.wikipedia.org/>.
- [5] R.S. Awadallah, J.Z. Gehman, J.R. Kuttler, et M.H. Newkirk. « Effects of Lateral Terrain Variations on Tropospheric Radar Propagation ». *IEEE Transactions on Antenna and Propagation*, 53(1) :420–434, Janvier 2005.
- [6] C. A. Balanis. « *Advanced Engineering Electromagnetics* ». John Wiley and Sons, 1989.
- [7] A.E. Barrios. « A Terrain Parabolic Equation Model for Propagation in the Troposphere ». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 42 :90–98, Janvier 1994.
- [8] A. Bergès, J. Latger, et H.J. Mametsa. « FERMAT : a new radar simulation approach ». Dans *RADAR 2004 - Internation Conference on Radar Systems*. SEE, Octobre 2004.
- [9] L. Boithias. « *Propagation des ondes radioélectriques dans l'environnement terrestre* ». DUNOD, 1984.
- [10] L.M. Brekhovskikh. « *Waves in Layered Media* ». Academic Press, 1980.
- [11] P.F. Combes. « *Micro-ondes* », volume 2. Circuits passifs, propagation, antennes. DUNOD, 1997.
- [12] J. Couot et J. Souhait. « *Algorithme numérique* », 1986/1987. Note de cours ENSAE (Sup Aéro).
- [13] F. Dargeou. « Application de la méthode de l'Équation Parabolique à la propagation en milieu urbain ». Mémoire de fin d'études ENAC - juin 1997, Janvier 1997.
- [14] G.D. Dockery et J.R. Kuttler. « An Improved-Boundary Algorithm for Fourier Slipt-Step Solutions of the Parabolic Wave Equation ». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 44(12) :1592–1599, 1996.
- [15] D.J. Donohue et J.R. Kuttler. « Propagation Modelling Over Terrain Using the Parabolic Wave Equation ». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 48 :260–277, Février 2000.
- [16] N. Douchin. « *Étude de l'influence du conduit d'évaporation atmosphérique sur des liaisons satellites-navires entre 1 et 10GHz. Contribution à l'élaboration d'une méthode de caractérisation de ce conduit* ». Thèse de Doctorat, ENSAE, 1992.

- [17] R. Douvenot. « Modélisation de l'Indice de Réfraction par Inversion des Échos Radar de Mer. Application à la Prédiction des Systèmes Électromagnétiques Embarqué sur Navires ». Rapport de suivi de thèse - 1ère année, Septembre 2006.
- [18] V. Fabbro. « *Diffraction d'une onde électromagnétique par une cible plongée dans un milieu hétérogène. Application à la détection radar à basse altitude au-dessus de la mer* ». Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Octobre 1999.
- [19] M. D. Feit et J.A. Fleck. « Light propagation in graded-index fibers ». *Applied Optics*, 17 :3990–3998, 1978.
- [20] V.A. Fock. « *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems* ». Pergamon, New-York, USA, 1965.
- [21] G.E. Forsythe et W.R. Wasow. « *Finite-Differences Methods for Partial Differential Equations* ». John Wiley and Sons, 1960.
- [22] N. Guillet. « *Diffusion par une cible complexe d'une onde électromagnétique se propageant en milieu hétérogène au-dessus d'une surface irrégulière* ». Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Septembre 2003.
- [23] R.H. Harding et F.D. Tappert. « Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of non-linear and variable coefficient wave equations ». *SIAM revue*, 15(423), 1973.
- [24] R.F. Harrington. « *Field Computation by Moment Methods* ». Mac Millan, New-york, 1968.
- [25] R. Janaswamy. « Path Loss Predictions in the Presence of Buildings on Flat Terrain : A 3D Vector Parabolic Equation Approach ». *IEEE Transaction on Antennas Propagation*, 51(8) :1716–1728, Août 2003.
- [26] J. Jin. « *The Finite Element Method in Electromagnetics* ». Wiley interscience, 1993.
- [27] J.B. Keller. « Geometrical Theory of Diffraction ». *Journal of Optical Society of America*, 52 :116–130, Février 1962.
- [28] Y.A. Krastov et Y.I. Orlov. « *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media* ». Springer Verlag, Berlin, Allemagne, 1990.
- [29] J.R. Kuttler. « Differences Between the Narrow-Angle and Wide-Angle Propagators in the Split-Step Fourier Solution of the Parabolic Wave Equation ». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 47(7) :1131–1140, Juillet 1999.
- [30] J.R. Kuttler et G.D. Dockery. « Theoretical description of the parabolic approximation/Fourier split-step method of representing electromagnetic propagation in the troposphere ». *Radio Science*, 26 :381–393, 1991.
- [31] J.R. Kuttler et R. Janaswamy. « Improved Fourier transform methods for solving the parabolic wave equation ». *Radio Science*, 37(2), 2002.
- [32] S. Laybros. « *Utilisation du Lancer de Rayons pour le calcul de l'interaction d'un rayonnement électromagnétique avec des objets complexes métalliques et diélectriques* ». Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Octobre 2004.

- [33] S. Laybros, P.F. Combes, et H.J. Mametsa. « The very near field region of equiphase radiating apertures ». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation magazine*, 47(4) :50–66, Août 2005.
- [34] A. Le Pourhiet. « *Résolution Numérique des Équations aux Dérivées Partielles* ». CEPADUES, 1988.
- [35] J. F. Legendre. « *Etude de modèles de prédiction de la propagation basés sur la Théorie Géométrique de la Diffraction* ». Thèse de Doctorat, INSA Rennes, 1995.
- [36] M. Leontovich et V. Fock. « Solution of the problem of propagation of electromagnetic waves along the Earth's surface by the method of Parabolic Equation ». *Journal of Physics*, X(1) :13–24, 1946.
- [37] M. A. Leontovich. « Investigations on Radiowave Propagation ». *Academy of Sciences*, 1948. Part II.
- [38] M. Levy. « *Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation* ». Electromagnetic Waves Series 45. The institution of Electrical Engineers, London, 2000.
- [39] M.F. Levy et A.A. Zaporozhets. « Target scattering calculations with the parabolic equation method ». *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(2), Février 1998.
- [40] G.D. Malyuzhinets. « Progress in understanding diffraction phenomena ». *Sov. Phys. Uspekhi*, 69 :321–334, 1969.
- [41] L. Mazet. « théorie du signal », Septembre 2002. Note de cours ENAC.
- [42] D.A. McNamara, C.W.I. Pistorius, et J.A.G. Malherbe. « *Introduction to the Uniform Geometrical Theory Diffraction* ». 1990.
- [43] F. Molinet, I. Andronov, et D. Bouche. « *Asymptotic and Hybrid Methods in Electromagnetics* ». Electromagnetic Waves Series 45. The institution of Electrical Engineers, London, 2005.
- [44] D.W. Peaceman et H.H. Rachford Jr. « The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations ». *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 3(1) :28–41, Mars 1955.
- [45] A.V. Popov. « Solution of the parabolic equation of diffraction theory by a finite-difference method ». *USSR Comp. Math. and Math. Phys.*, 8(5) :282–288, 1968.
- [46] G. Ramière. « *Couplage de méthodes asymptotiques et de la technique du Lancer de Rayons pour le calcul du champ rayonné par des objets métalliques 3D complexes* ». Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Septembre 2000.
- [47] M. Reggio. « Mth6201 : Systèmes différentiels ». École Polytechnique de Montréal, Septembre 2004.
- [48] J. F. Rouvière. « *Calcul de la diffraction par des dièdres et des prismes diélectriques ou métalliques par la Théorie Uniforme de la Diffraction. Validations par des méthodes exactes* ». Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 1997.
- [49] Y. Saad. « *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* ». Siam, second edition, 2003.
- [50] P. Sava et S. Fomel. « riemannian wavefield extrapolation ». *Geophysics*, 70(3) :45–56, Mai-Juin 2005.

- 
- [51] S Silver. « *Microwave antennas theory and design* », volume 12. MIT Rad Lab Series, 1949.
- [52] D.J. Thomson et N.R. Chapman. « a wide-angle split-step algorithm for the parabolic equation ». *Journal of the Acoustical Society of America*, pages 1848–1854, 1983.
- [53] J. Weickert, B. M. ter Haar Romeny, et M. A. Viergever. « Efficient and Reliable Schemes for Nonlinear Diffusion Filtering ». *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3) :398–410, 1998.
- [54] A.A. Zaporozhets. « Applications of vector parabolic equation method to urban radiowave propagation problems ». *Proc. Inst. Elect. Eng. Microwaves, Antennas Propagation*, 146(4), Août 1999.
- [55] A.A. Zaporozhets et M.F. Levy. « Modeling of radiowave propagation in urban environment with parabolic equation method ». *Electronics Letters*, 32(17) :1615–1616, 1996.
- [56] A.A. Zaporozhets et M.F. Levy. « Radar cross section calculation with marching methods ». *Electronics Letters*, 34(20) :1971–1972, 1998.
- [57] A.A. Zaporozhets et M.F. Levy. « Bistatic RCS calculations with the vector parabolic equation method ». *IEEE Transactions on Antennas Propagation*, 47(11) :1688–1696, Octobre 1999.
- [58] C.A. Zelle et C.C. Costantinou. « A Three-Dimensional Parabolic Equation Applied to VHF/UHF Propagation over Irregular Terrain ». *IEEE Transactions on Antennas Propagation*, 47(10) :1586–1596, Octobre 1999.











**TITLE :** Electromagnetic waves propagation modelling above large scene by a 3D vectorial Parabolic Wave Equation resolution.

---

**ABSTRACT :**

The numerical simulation of long-distance, over-terrain propagation of electromagnetic waves has received considerable attention due to its strong impact on radar and communication technology. Usually, a bidimensional modelling is considered to treat with these topics. However, this kind of approach can consider neither transversal effects respect to emitter receiver vertical plane nor wave depolarization. To palliate these problems, a three dimensional approach must be consider.

The modelling method proposed is based on 3D Parabolic Wave Equation (3DPWE). Two resolutions are considered : Split-Step Fourier (SSF) and Finite Differences (FD) ones. SSF resolution is based on a plane waves spectrum decomposition using Fourier transforms. As to 3DPWE FD resolution uses a Crank-Nicholson algorithm. In order to optimize computational time and space memory required, alternating direction method is applied to solve the propagation equation. Both have been coupled with Leontovich boundary condition for taking into account 3D relief.

Both methods have been implemented and validated on different canonical test cases. We have noticed capacity of these methods to model reflection, diffraction and refraction phenomena. These methods have been applied over realistic three dimensional scenes. These applications allow to compare both developed methods and to put in relief 3D effects due to terrain and to underline three dimensional resolution advantages.

**AUTEUR :** Arnaud GINESTET.

**TITRE :** Modélisation de la propagation d'une onde électromagnétique sur des scènes de grande taille par résolution de l'Équation Parabolique 3D vectorielle.

**DIRECTEUR DE THÈSE :** Jérôme SOKOLOFF.

**LIEU ET DATE DE SOUTENANCE :** Auditorium de L'ONERA, centre de Toulouse, le 04 juillet 2007.

---

**RÉSUMÉ :**

La simulation numérique de la propagation des ondes électromagnétiques sur de longues distances et au-dessus de terrain a ces dernières années reçu une attention particulière du fait de son fort impact sur les systèmes radar et de télécommunications. Habituellement, il est considéré une modélisation bidimensionnelle pour traiter ces problématiques, cependant par une telle approche il est impossible de considérer les effets transverses au plan vertical passant par l'émetteur et le récepteur ainsi que la dépolarisation de l'onde. Pour pallier ces problèmes, une approche tridimensionnelle doit obligatoirement être considérée.

La méthode de modélisation proposée est basée sur l'Equation Parabolique 3D (EP3D). Deux résolutions de celle-ci ont été considérées : nommées Split-Step Fourier (SSF) et Différences Finies (DF). La résolution SSF est basée sur une décomposition en un spectre angulaire d'ondes planes par l'intermédiaire d'une transformée de Fourier. La résolution de l'EP3D par DF développée utilise quant à elle un algorithme dit de Crank-Nicholson. Afin d'optimiser le temps de calcul et l'espace mémoire nécessaire, la méthode des directions alternées a été appliquée pour résoudre cette équation de propagation. Toutes deux ont été couplées avec la condition aux limites de Léontovich pour pouvoir prendre en compte le relief 3D.

Ces deux méthodes ont été implémentées et validées sur différents cas tests canoniques. On a ainsi pu constater la capacité de ces méthodes à modéliser les phénomènes de réflexion, diffraction et réfraction. Celles-ci ont ensuite été appliquées au-dessus de scènes tridimensionnelles réalistes. Ces applications ont permis de comparer les deux méthodes développées ainsi que de mettre en relief les effets 3D dus au terrain et souligné les avantages d'une résolution tridimensionnelle.

---

**MOTS-CLEFS :** Équation Parabolique 3D vectorielle, Split-Step Fourier, Différences Finies, Domaine de grande taille, Modélisation, Propagation.

---

**DISCIPLINE ADMINISTRATIVE :** Électronique Micro-Ondes

---

**LABORATOIRE :** Laboratoire AD2M (Antennes, Dispositifs et Matériaux Micro-Ondes), UFR PCA - Bat. III R1 - Université Paul Sabatier - Toulouse III - 118, Route de Narbonne- F-31062 Toulouse cedex 4.