



HAL
open science

Un système dynamique d'ordre réduit basé sur une approche APR-POD pour l'étude de l'interaction écoulement turbulent-particules

Nicolas Verdon

► **To cite this version:**

Nicolas Verdon. Un système dynamique d'ordre réduit basé sur une approche APR-POD pour l'étude de l'interaction écoulement turbulent-particules. Mécanique [physics.med-ph]. Université de La Rochelle, 2007. Français. NNT: . tel-00323067

HAL Id: tel-00323067

<https://theses.hal.science/tel-00323067>

Submitted on 19 Sep 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE LA ROCHELLE
UFR Sciences Fondamentales et Sciences pour l'ingénieur

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de La Rochelle

Discipline : Mécanique des fluides

par

Nicolas VERDON

Un système dynamique d'ordre réduit basé sur une approche APR-POD pour l'étude de l'interaction écoulement turbulent-particules

Thèse dirigée par A. HAMDOUNI
Thèse co-encadrée par C. ALLERY

soutenue le 19 Décembre 2007 devant le jury composé de

F. CHINESTA	Professeur, ENSAM, Paris	Rapporteur
M. MEDALE	Professeur, IUSTI, Polytech' Marseille	Rapporteur
F. ALLARD	Professeur, Université de La Rochelle	Examineur
C. ALLERY	Maître de Conférence, Université de La Rochelle	Examineur
A. HAMDOUNI	Professeur, Université de La Rochelle	Examineur
W. KRÜGER	Dr.-Ing., DLR Göttingen, Allemagne	Examineur
D. RYCKELYNCK	Maître de recherche, Ecole des Mines de Paris	Examineur
P. VILLON	Professeur, Université de Technologies de Compiègne	Examineur
C. BEGHEIN	Maître de Conférence, Université de La Rochelle	Invité

UN SYSTÈME DYNAMIQUE D'ORDRE RÉDUIT BASÉ SUR UNE APPROCHE APR-POD POUR L'ÉTUDE DE L'INTERACTION ÉCOULEMENT TURBULENT-PARTICULES

Résumé

Motivé par l'étude numérique de la dispersion de particules dans un écoulement turbulent, ce travail présente l'application et le développement de méthodes de réduction de modèles couplées à un système dynamique d'ordre bas pour les équations de Navier-Stokes. Ainsi, la première méthode appliquée est la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Couplée à un système dynamique d'ordre faible obtenu par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur la base POD, cette méthode montre son efficacité en terme de temps de simulation pour le calcul de la dispersion de particules. Cependant, la POD nécessite au préalable un échantillonnage temporel de l'écoulement, ce qui est handicapant. Afin de palier ce problème, l'alternative envisagée dans ce travail est l'utilisation d'une méthode de réduction *a priori*, l'APR, basée sur la construction itérative d'une base de l'écoulement. La méthode APR est d'abord testée dans des cas modèles simples : l'équation de convection-diffusion 2D et les équations de Burgers 1D et 2D. Comparée aux méthodes de résolution classique, l'APR permet de diminuer fortement les temps de calcul tout en conservant une précision du même ordre de grandeur. Les équations de Navier-Stokes sont ensuite résolues à l'aide d'un code volumes finis 2D, utilisant un découplage vitesse-pression de type Van Khan. Un algorithme de réduction a priori adapté à l'algorithme de projection est alors présenté et appliqué pour le cas de la cavité entraînée 2D à $Re = 10000$. Les résultats obtenus sur un court intervalle de temps sont assez encourageants. Enfin, une démarche d'avancement temporel basée sur le couplage d'APR et de systèmes dynamiques est présentée.

Mots-clés : Décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD), Système dynamique, Réduction de modèles, Ecoulements turbulents, Particules, Base A Priori

A LOW-ORDER DYNAMICAL SYSTEM BASED ON A APR-POD APPROACH FOR STUDYING TURBULENT FLOW-PARTICLES INTERACTION

Abstract

In order to study the particles' dispersion in a turbulent flow, this work presents the application and the development of reduced order models coupled with a low-order dynamical system for the Navier-Stokes equations. The first method we applied is the Proper Orthogonal Decomposition (POD). Coupled with a low-order dynamical system obtained by a Galerkin projection of the Navier-Stokes equations onto the POD basis, this method shows a great advantage in term of computational time for the computation of particles' dispersion. However, the POD needs samples of the flow over a given time interval which is the limiting step for its performance. In order to overcome this problem, this work proposes as an alternative to use a *a priori* reduction method, called APR, based on the iterative building of the basis of the flow. The method is first validated in more simple test cases : the 2D convection-diffusion equation and the 1D and 2D Burgers' equations. Compared to other classical resolution schemes, the APR allows us to obtain an accuracy of the same order, with less computational effort. The Navier-Stokes equations are then resolved with a 2D finite volume code, using a Van Kahn algorithm to achieve the decoupling between velocity and pressure. A *a priori* reduction algorithm adapted to the projection scheme is then proposed and applied for the configuration of the 2D driven cavity at $Re = 10000$. The results obtained over a short time interval are quite encouraging. At last, we present a time advance scheme based on the coupling between the APR and dynamical systems.

Keywords : Proper Orthogonal Decomposition, Dynamical system, Reduced Order Modelling, Turbulent flows, Particles, A Priori Reduction (APR)

Remerciements

On se dit toujours que ça va être la partie la plus facile à rédiger parce qu'on est sûr (là au moins !) de ce que l'on va dire. Et bien il n'en est rien. Parce que trouver les mots justes pour remercier de la façon dont il se doit toutes les personnes qui vous ont soutenu, ce n'est pas si simple !

Je tiens ainsi à remercier en premier lieu Aziz Hamdouni pour m'avoir donné, grâce à cette thèse, l'opportunité de partager son expérience et d'apprendre à ses côtés le métier de chercheur. Car une thèse, ce n'est pas seulement trois années de souffrance à travailler dans son coin, mais bel et bien une introduction au monde de la recherche. Cette vision qu'a Aziz de la recherche, son esprit d'ouverture tant au niveau scientifique qu'humain, sont autant de points qui ont rendu mes trois années à La Rochelle inoubliables.

J'ai parlé de trois années de souffrance, ce ne fut pas complètement le cas, et ça je crois que je le dois bien à Cyrille Allery, mon co-encadrant et surtout coach au quotidien. Je pourrais bien évidemment parler de toutes ces conversations scientifiques que nous avons eues tout au long de la thèse (on dit "fruitful discussion" en anglais non ?), des longues séances de réflexions sur les divers problèmes rencontrés, des – non-moins longues – heures de debuggage intensif de mes codes (aïe j'ai souffert.. mais ça a valu le coup !), des aller-retours des différentes versions de ce présent manuscrit,.. mais je crois que ce que je tiens vraiment à souligner ici, c'est sa disponibilité, sa sympathie, et sa bonne humeur omniprésente ! Sa modestie aussi. Lui m'a souvent dit que c'était son rôle de m'encadrer, mais beaucoup ne l'auraient pas fait de cette façon. Toujours à l'écoute, il a su me guider et même me remonter le moral lorsque ça n'allait pas. Il est alors tout naturel pour moi de remercier également Rachel, qui a en partie "subi" les conséquences de cet encadrement, puisque les couvre-feux ont rarement été respectés ! Merci également au petit Axel, qui est né pendant cette thèse. Promis, je me ferai pardonner plus tard d'avoir accaparé ton papa de nombreux soirs.. Pour résumer en des mots simples, bien plus qu'un coach scientifique de qualité, c'est surtout un ami que j'ai rencontré à La Rochelle.

Je profite de cette occasion pour montrer toute ma reconnaissance envers les personnes qui ont bien voulu participer à mon jury de thèse, en particulier Paco Chinnesta et Marc Médale qui ont accepté la lourde tâche de rapporter ce mémoire. Merci également à David Ryckelynck, à l'origine de la méthode que j'ai utilisée et adaptée à

mes exemples. Les différentes rencontres que j'ai pu avoir avec David et Paco ont par ailleurs contribué à l'amélioration de la compréhension des problèmes numériques rencontrés.

Ainsi, trois années s'achèvent.. Trois années bercées au rythme du quotidien d'un laboratoire de recherche : le LEPTAB, un labo dynamique où notamment les doctorants (également dénommés amicalement par Francis "les forces vives du laboratoire") vont et viennent.. Alors je ne vais malheureusement pas pouvoir citer tout le monde, mais je vais quand même en citer tout un tas juste question d'se défouler¹ !

Alors donc pour commencer, je tiens à faire une spéciale cace-dédi au bureau 62, le bureau surpeuplé du labo, où doctorants et stagiaires ont défilés. Parmi ceux-ci, Hassan, le libanais chanteur que j'ai eu à supporter 3 ans juste en face de moi (en général on remercie les gens qui ont réussi à nous supporter, mais bon, pas grave.. c'est gratuit!) ; Sylvain qui lui a subi mes choix musicaux à partir du jour où j'ai récupéré des enceintes ; les stagiaires tels Antoine, qui lui aussi s'est fait prendre dans le cercle vicieux de la réduction de modèles ou encore Jérémie, le tzigane venant de l'est, comment qu'c'est gros ? !

La salle café fut également le siège de nombreux souvenirs mémorables : pauses dé-tentes ponctuées de grosses séances de déconnades, notamment avec Marx, Patrice, Max, ou encore Michèle et Bibiche ; mais aussi conversations politico-sérieuses auxquelles, je le concède, je me suis rarement prêté. Alain, Erwan, Marco (?) et Martin y étaient eux, par contre, toujours très actifs !

Je ne puis également m'empêcher de saluer les acteurs quotidiens de ma réussite (hmmm.. hmmm..), à savoir JM, James, Clément ou Etienne qui mériteraient bien d'être sanctifiés pour tout ce qu'ils m'ont apporté les (rares) soirs de déprime. Mais toutes les soirées ne furent pas toujours sombres. Et ça je le dois essentiellement à Erwan Liberge, mon camarade de galère numérique dans la grande famille de la réduction de modèles. Même directeur de thèse, même méthode de réduction, ça partait bien ! Mais aurions nous deviné que nous avions également le même goût prononcé pour les soirées pinard / "Le château" ou encore les hôtels **** d'Ibiza ?.. Les mêmes délires également : des séances de réflexion sur le scénario d'Opération Réduction² aux histoires de clé à molette dans "Dodgeball" en passant par le tubakro© désormais célèbre, je crois que l'on peut dire que l'on ne s'est pas ennuyé ces trois ans (en plus de la thèse, bien évidemment!).

L'étai se ressère, je me rapproche de la fin de cette longue série de remerciements, rassurez vous !

Ceux qui me connaissent bien savent à quel point les femmes sont importantes pour moi, alors vous comprendrez aisément pourquoi je leur ai laissé une place de choix dans ce petit discours. Alors tout naturellement je tiens à saluer et remercier cha-

¹jeu : d'où vient cette citation ? !

²Moutarde & Cinéma Prod. Un grand merci au passage à toute l'équipe du Judo Sport Rochelais

heureusement Agota et Timi, nos deux charmantes émissaires de la Hongrie et leur petit accent si sensuel, à qui j'ai adoré donner des cours de français afin d'enrichir leur champ lexical. Mes amies judokates ont dû aussi supporter mes frasques hebdomadaires, parmi elles Claire, Marie, Willow et bien sûr Elvina, mon Kinder préféré. Ma thèse fut.. riche en événements, aussi je tiens à remercier Marie-P. pour m'avoir soutenu la première année. La deuxième année, elle, a été marquée par divers séjours en Guyane et Martinique. C'est à Céline que je dois ces souvenirs inoubliables : des réveillons de Noël et de Nouvel An à 32 ° C, des balades dans la forêt tropicale, la découverte de fruits et légumes tropicaux et d'une gastronomie nouvelle (si ! si ! J'vous jure, le tatou ça se mange.. et c'est bon !), le miracle de la ponte de tortues Luth, la découverte de sites historiques tels les Iles du Salut avec notre copain Christian le gendarme, j'en passe et des meilleures..

La toute fin de thèse, les derniers jours, les dernières heures, n'ont pas été faciles. Je tiens vraiment à mettre en avant la femme terrible qui m'a aidé à surmonter ces tous derniers moments de thèse, les plus durs psychologiquement mais aussi physiquement. Malgré l'éloignement, malgré un contexte loin d'être des plus favorables, elle m'a supporté à chaque fois que j'en ai eu besoin, de jour comme de nuit. Je n'en connais pas beaucoup qui auraient accepté de se faire réveiller à 3h30 du matin pour m'accompagner au téléphone dans ma seule pause nocturne.. Elle l'a fait, et avec le sourire et la bonne humeur qui la caractérisent tant..

Alors de la part d'un manouche heureux, merci pour tout Emmanuelle...

Enfin je tiens à remercier Pierrette et Jean-Claude, mes parents, mes supporteurs et fans de la première heure, toujours présents pour moi, toujours prêts à me remonter le moral, à me conseiller sur les durs choix que j'ai eus à prendre ; pour la confiance qu'ils me portent.

Merci à tous

DoNdoN

à Axel.

Table des matières

Liste des tableaux	xiii
Liste des figures	xvii
1 Introduction générale	1
2 La réduction de modèle	7
2.1 Modèles réduits à des problèmes de contrôle de systèmes linéaires . . .	8
2.2 Des méthodes de réduction de modèles pour des problèmes non linéaires	11
2.3 La POD ou décomposition de Karhunen-Loève	15
2.4 Modèle réduit par approche POD	17
2.4.1 Généralités	17
2.4.2 POD classique	19
2.4.3 La snapshot POD	20
2.4.4 Décomposition bi-orthogonale ou BOD	23
2.4.5 Système dynamique d'ordre faible	24
3 Application de la POD à la dispersion de particules	29
3.1 Principe de couplage fluide-particule	29
3.1.1 Modèle particulaire	29
3.1.2 Modèle fluide	32
3.1.3 Principe du couplage	34
3.2 Présentation de la LES	35
3.3 Cavité ventilée 2D	37
3.3.1 Application de la POD	37
3.3.2 Système dynamique	40
3.3.3 Dispersion de particules	41
3.3.4 Temps de calcul	45
3.4 Cavité entraînée 3D	46
3.4.1 Application de la POD	47
3.4.2 Système dynamique	48
3.4.3 Dispersion de particules	49
3.4.4 Temps de calcul	51
3.5 Conclusions	51

4	La méthode de <i>Réduction a priori</i>	53
4.1	Description de la méthode de réduction a priori	54
4.1.1	Problème étudié	54
4.1.2	Initialisation de la base	55
4.1.3	Construction du modèle d'ordre faible	55
4.1.4	Résolution du modèle d'ordre faible et calcul des résidus	56
4.1.5	Mise à jour de la base	57
4.2	Equation de convection-diffusion	61
4.2.1	Problème étudié	61
4.2.2	Application de l'APR	63
4.2.3	Application de la POD	64
4.2.4	Influence de différents paramètres de calcul	67
4.2.4.1	Influence du choix de critère de convergence	67
4.2.4.2	Influence du choix de la base initiale	69
4.2.5	Evolution avec système dynamique	69
4.2.6	Correction du système dynamique par l'APR	70
4.3	Equation de Burgers monodimensionnelle	74
4.3.1	Application de l'APR	74
4.3.2	Application de la POD	75
4.3.3	Influence de différents paramètres de calcul	79
4.3.3.1	Influence du choix de critère de convergence	79
4.3.3.2	Influence du choix de la base initiale	81
4.3.4	Evolution avec système dynamique	83
4.4	Equation de Burgers 2D	84
4.4.1	Application de l'APR	84
4.5	Conclusions	90
5	Résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode APR	91
5.1	Modèle complet	92
5.1.1	Discrétisation des équations de Navier-Stokes	92
5.1.1.1	Maillage	93
5.1.1.2	Discrétisation temporelle	94
5.1.1.3	Decouplage vitesse-pression	95
5.1.1.4	Discrétisation spatiale par volumes finis	96
5.1.1.5	Calcul des flux intermédiaires	101
5.2	Validation du modèle complet pour l'écoulement dans une cavité entraînée 2D	102
5.2.1	Problème étudié	102
5.2.2	Résultats numériques	103
5.2.2.1	Cas stationnaires	103
5.2.3	Cas instationnaire	108
5.3	La méthode APR pour les équations de Navier-Stokes	111

5.3.1	La méthode APR adaptée au schéma de projection	111
5.3.2	Système dynamique	113
5.3.3	Application de l'APR à la cavité entraînée	114
5.4	Conclusion	122
6	Conclusion générale	123

Liste des tableaux

3.3.1 Cinq premières valeurs propres obtenues par la POD appliquée au cas de la cavité ventilée 2D et énergie correspondante	39
3.4.1 Quatre premières valeurs propres obtenues par la POD appliquée au cas de la cavité entraînée 3D, énergie et résidus correspondants	47
4.2.1 Temps CPU, erreur L^2 et erreur en norme sup des méthodes APR (critère de convergence $\varepsilon = 10^{-7}$) et gradient biconjugué (BiCG) . . .	63
4.2.2 Cinq premières valeurs propres obtenues par la POD, énergie et résidu correspondants	64
4.2.3 Comparaison de l'erreur de reconstruction entre la POD et l'APR en fonction du nombre de modes retenus	67
4.2.4 Erreur sup \mathcal{E}_{sup} calculée sur les résultats du système dynamique pour différents t	70
4.2.5 Evolution des erreurs en fonction du critère de convergence choisi comparées avec le modèle complet pour $t = 0$ à $t = 6T$	72
4.2.5 Evolution des erreurs en fonction du critère de convergence choisi comparées avec le modèle complet pour $t = 10$ à $t = 15T$	72
4.2.5 Evolution des erreurs en fonction du critère de convergence choisi comparées avec le modèle complet pour $t = 16$ à $t = 20T$	73
4.2.6 Temps CPU entre la méthode APR avec $\varepsilon = 10^{-7}$ et $\varepsilon = 10^{-8}$ et pour la méthode BiCG pour $T = 0, \dots, 20T$	73
4.3.1 Cinq premières valeurs propres obtenues par la POD, énergie et résidu correspondants obtenus pour l'équation de Burgers 1D	76
4.3.2 Evolution du pourcentage de l'erreur maximale en fonction du critère de convergence ε	79
4.3.3 Nombre d'itérations nécessaires à la méthode APR pour converger en fonction du critère de convergence ε pour $n_x = 50, \dots, 250$	79
4.4.1 Comparaison du temps CPU entre les méthodes de Newton-Raphson et APR lorsque la discrétisation spatiale augmente	90

Table des figures

1.1	Schéma de principe du couplage fluide/particules.	3
2.1	Représentation schématique de la décomposition de Karhunen-Loève : les deux modes propres ϕ_1 et ϕ_2 représentent les directions princi- pales de l'ensemble de données aléatoires [■] exprimé dans les axes originaux x_1 et x_2	15
3.1	Configuration de la cavité ventilée	37
3.2	Isolignes de l'énergie $\sqrt{u^2 + v^2}$ pour le cas de la cavité ventilée à $Re = 10000$	38
3.3	Evolution du résidu r_N en fonction du nombre de modes N conservés dans la base POD	39
3.4	Evolution temporelle des 4 premiers modes obtenue par intégration du système dynamique sur la phase d'échantillonnage.	41
3.5	Evolution temporelle des particules dans la cavité (position initiale des particules $n^\circ 1$).	42
3.6	Pourcentage des particules présentes dans la cavité, attachées ou éjec- tées en fonction du temps.	43
3.7	Evolution temporelle des particules dans la cavité (position initiale des particules $n^\circ 2$).	44
3.8	Pourcentage des particules présentes dans la cavité, attachées ou éjec- tées en fonction du temps.	45
3.9	Configuration de la cavité entraînée 3D	46
3.10	Ecoulement moyen dans le plan médian vertical $z = 0$ obtenu par LES.	47
3.11	Evolution temporelle des 4 premiers modes obtenue par intégration du système dynamique sur la phase d'échantillonnage.	48
3.12	Isolignes de vitesse fluctuante au temps $t = 9s$ dans le plan $z = 0$	49
3.13	Evolution temporelle du pourcentage de particules attachées sur la paroi horizontale inférieure de la cavité ($d_p = 5\mu m$)	50
3.14	Evolution temporelle de la dispersion des particules pour différents temps après l'injection ($d_p = 5\mu m$).	50
3.15	Evolution temporelle de la dispersion des particules pour différents temps après l'injection ($d_p = 10\mu m$), en noir : $t = 20s$, en blanc : $t = 64s$	51

4.1	Evolution temporelle de la solution analytique	62
4.2	Comparaison entre les modes POD et APR	65
4.2	Comparaison entre les modes POD et APR (suite)	66
4.3	Evolution temporelle des coefficients temporels ($\varepsilon = 10^{-7}$)	68
4.4	Evolution temporelle de $a_5(t)$	69
4.5	Evolution temporelle des coefficients temporels $a_n(t)$, $n = 1, 2, 3$ sur $10T$	71
4.6	Solution APR [—] de l'équation de Burgers comparée avec la solution analytique [■] sur l'intervalle $T = 0.1s$ toutes les $0.01s$	75
4.7	Evolution temporelle de l'erreur entre la solution reconstruite par la méthode APR et la solution analytique, $\eta = 10^{-14}$ et $\varepsilon = 10^{-5}$	76
4.8	Comparaison entre les modes spatiaux POD et APR, et les coefficients temporels correspondants	77
4.8	Comparaison entre les modes spatiaux POD et APR, et les coefficients temporels correspondants (suite)	78
4.9	Evolution du temps de calcul avec le nombre de noeuds de discrétisation n_x pour le modèle complet et la méthode APR, avec deux critères de convergence ε	80
4.10	Evolution du gain de calcul avec le nombre de noeuds de discrétisation n_x pour le modèle complet et la méthode APR pour $\varepsilon = 10^{-5}$	80
4.11	Différents choix de base initiale pour la base APR	81
4.12	Comparaison entre les modes spatiaux obtenus par l'APR avec les différentes bases initiales, et les coefficients temporels correspondants	82
4.13	Mode APR 7 correspondant au choix de base initiale $\phi_0(x) = f(x)$, évolution du coefficient temporel correspondant	82
4.14	Evolution de la solution obtenue par APR + SD sur $t = 10T = 1s$ (traits rouges) en comparaison avec la solution analytique (carrés noirs)	83
4.15	Solution analytique de l'équation de Burgers 2D pour $\nu = 0.01$ au temps $t = 0.5s$	85
4.16	Solution analytique de l'équation de Burgers 2D pour $\nu = 0.01$ au temps $t = 2s$	86
4.17	Trois premiers modes propres obtenus par l'APR	87
4.17	Trois derniers modes propres obtenus par l'APR	88
4.18	Erreur relative entre les composantes de vitesse u et v obtenues par l'APR et les solutions analytiques pour $\nu = 0.01$ au temps $t = 0.5s$	89
5.1	Détails d'une cellule de contrôle d'un maillage volumes finis et schéma colocalisé utilisé	93
5.2	Configuration de la cavité entraînée 2D	102
5.3	Comparaison entre les profils de vitesse obtenus par le code développé (—) et ceux de Ghia (●) [30] pour $Re = 100$	104

5.4	Comparaison entre les profils de vitesse obtenus par le code développé (-) et ceux de Ghia (●) [30] pour $Re = 1000$	104
5.5	Isolignes de pression pour $Re = 100$ et $Re = 1000$	105
5.6	Comparaison entre les profils de vitesse obtenus par le code développé et ceux de Ghia [30]	106
5.7	Isolignes de pression pour les différents nombres de Reynolds stationnaires	106
5.8	Lignes de courant pour les différents nombres de Reynolds stationnaires	107
5.9	Evolution de u et v au point $(0.47, 0.86)$ au cours du temps	108
5.10	Lignes de courant de l'écoulement sur une période pour $Re = 10000$.	109
5.11	Isolignes de la pression sur une période pour $Re = 10000$	110
5.12	Isovaleurs des composantes u et v de la vitesse obtenue à $t = 0.1s$ par l'APR comparée avec la DNS	115
5.13	Isovaleurs de $\delta u(x, y)$ et $\delta v(x, y)$	116
5.14	Isovaleurs de la pression obtenue à $t = 0.1s$ par l'APR en comparaison avec la DNS	117
5.15	Influence du nombre d'itérations APR sur les erreurs en norme $L^2(\Omega)$	117
5.16	Isovaleurs de $u(x, y)$ à $t = 0.3s$	118
5.17	Isovaleurs de $u(x, y)$ à $t = 1.0s$	118
5.18	Divergence de la solution obtenue par l'APR à $t = 0.1s$	119
5.19	Modes propres ϕ_u issus de l'APR comparés avec ceux obtenus par la POD	120
5.20	Modes propres ϕ_v issus de l'APR comparés avec ceux obtenus par la POD	121

Chapitre 1

Introduction générale

Le calcul d'un écoulement nécessite la résolution d'une équation aux dérivées partielles (EDP). Faire du contrôle d'écoulement revient ainsi à faire du contrôle sur ces EDP ce qui peut être lourd et très coûteux. Au lieu de résoudre ces équations complètes, l'idée qui est souvent retenue consiste à construire un nouveau problème qui contiendrait les mêmes informations que le problème original, mais avec beaucoup moins de degrés de liberté, et qui serait donc beaucoup plus rapide à résoudre. On appelle ce type de démarche la *réduction de modèle*. Les modèles réduits ne sont pas construits par hasard, ils doivent conserver les propriétés propres aux phénomènes physiques étudiés. Ainsi, dans le domaine de la mécanique des fluides le critère que l'on adopte est énergétique : l'énergie que l'on va représenter avec le modèle réduit devra être aussi proche que possible de celle obtenue par le modèle complet. Les méthodes de réduction de modèles les plus performantes à l'heure actuelle s'obtiennent par projection de Galerkin sur une base empirique de l'écoulement.

Parmi ces bases, celle obtenue par la *décomposition orthogonale aux valeurs propres* (POD) est la plus utilisée puisqu'elle possède la propriété d'être énergétiquement optimale. Cette base est obtenue par résolution d'un problème aux valeurs propres associé au tenseur de corrélations spatiales en deux points – si les données sont issues de l'expérience – ou au tenseur de corrélations temporelles si les données sont issues de simulations numériques. La base POD est alors formée des vecteurs propres solutions de ce problème aux valeurs propres et très peu de vecteurs contiennent la quasi-totalité de l'énergie du système. De cette base réduite, on construit un système dynamique à l'aide d'une projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes. La résolution de ce système dynamique est très rapide. Cependant, on peut se poser la question du gain de temps d'une telle démarche puisque l'on recalcule ce que l'on connaît déjà. Un intérêt physique évident est de dégager les structures cohérentes de l'écoulement. En ce qui concerne le temps de calcul, le système dynamique permet de calculer l'écoulement sur des durées beaucoup plus

longues que la durée d'échantillonnage nécessaire à la construction de la base POD, sous réserve que le système dynamique est suffisamment robuste. Quelle est alors la limite de validité de la base POD lorsque des paramètres de l'écoulement évoluent ? En effet, il n'est pas nécessairement évident que le système dynamique se comporte bien face à des changements de ces paramètres.

Il existe cependant des perspectives intéressantes dans l'application de cette méthode aux problèmes du bâtiment, comme notamment les problèmes de contrôle actif. En particulier, comme on va le montrer dans cette thèse, dans l'application du calcul d'interaction écoulement/particules, cette approche apporte un gain de temps conséquent, ce qui constitue un réel progrès par rapport aux méthodes usuelles. Dans le contexte actuel, pour résoudre ce problème couplé, on a l'obligation de calculer le champ de vitesse sur de très faibles pas de temps imposés par la particule. Le calcul de la dispersion de particules à l'aide de l'approche *lagrangienne* nécessite en effet la connaissance de la vitesse instantanée du fluide en chaque point de l'espace où se trouve une particule puisque la résolution de l'équation de mouvement de la particule fait notamment intervenir la force de traînée subie par chaque particule qui est fonction de la vitesse de l'écoulement. Pour disposer de cette vitesse de l'écoulement, les équations de Navier-Stokes sont classiquement résolues à l'aide des méthodes suivantes :

- la *Simulation Numérique Directe* ou *Direct Numerical Simulation* (DNS) qui résout les équations de Navier-Stokes sans modèle de turbulence [10, 21, 77],
- les méthodes *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS) basées sur la résolution de l'écoulement moyen et la modélisation de fluctuations de vitesse par a des modèles stochastiques [24, 31],
- enfin la *Simulation des Grandes Echelles* ou *Large Eddy Simulation* (LES) où les grandes structures sont simulées et l'effet des petites échelles sur les grandes structures est modélisé, voir notamment [11, 50, 80].

La résolution de Navier-Stokes seules est déjà soumise à une condition sur le pas de temps Δt_f utilisé en fonction du maillage considéré. Cette condition, connue sous le nom de *condition de Courant-Friedrich-Lewy* (CFL), s'exprime de la façon suivante¹ :

$$u^* \frac{\Delta t_f}{\Delta x} < C$$

où u^* est la vitesse caractéristique du problème considéré, Δx est le pas d'espace et C est le nombre CFL, dépendant du problème traité². Le problème vient alors du fait que le pas de temps Δt_p imposé par la résolution numérique des équations de mouvement de la particule est très faible :

$$\Delta t_p \ll \Delta t_f$$

¹par exemple en 1D

²souvent $C \leq 1$

et ce pas de temps pilote le couplage fluide/particules. Avec la démarche de réduction de modèles par POD, l'écoulement est d'abord simulé sur une période d'échantillonnage avec le pas de temps fluide Δt_f . L'application de la POD permet d'obtenir une base réduite caractéristique de l'écoulement et de construire le système dynamique associé à cette base. L'obtention du champ de vitesses instantanées pour des pas de temps supérieurs à la phase d'échantillonnage, nécessaire au calcul de la dispersion de particule, est alors obtenu par résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires de petite taille (système dynamique). Cette résolution, même si elle est effectuée avec le pas de temps de la particule Δt_p , est beaucoup plus rapide que des méthodes classiques. Avec la démarche de réduction de modèle présentée au-

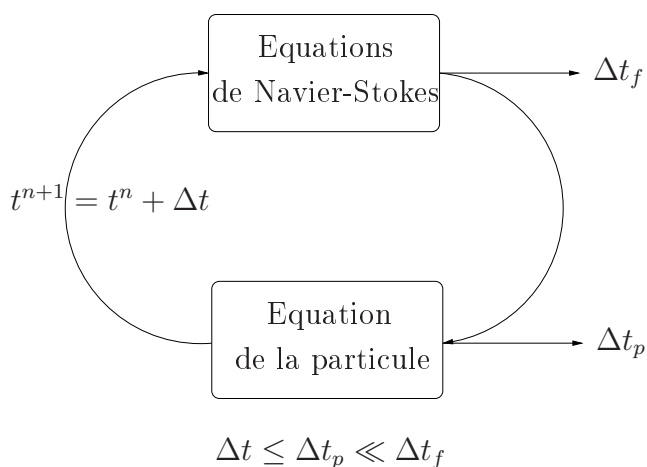


FIG. 1.1 – Schéma de principe du couplage fluide/particules.

paravant, les données de l'écoulement sont stockées facilement et le couplage entre l'écoulement et la résolution des équations de la particule s'effectue à moindre coût de calcul.

L'approche POD se justifie ainsi dans certaines applications comme la dispersion de particules par exemple. Cependant, même dans les applications où la POD est intéressante au niveau coût de calcul, la méthode reste limitée par le calcul de l'échantillon de la solution pour construire la base.

Pour accroître les performances de l'approche, une adaptation de la méthode prenant en compte la critique précédente doit être envisagée. Ainsi, nous nous intéressons à une méthode où cette fois-ci, la base n'est plus calculée *a posteriori* mais *a priori* de manière itérative. Cette approche, développée initialement par Ryckelynck en mécanique des solides [67] et appliquée à d'autres applications [6, 69], sera modifiée pour traiter les problèmes des écoulements fluides. Cette extension à la mécanique des fluides n'est pas une formalité car il ne s'agit pas d'une adaptation directe de la méthode à un autre type de problème. En effet, la difficulté principale des écoulements fluides provient du fait que les équations de Navier-Stokes se pré-

sentent sous la forme d'un problème mixte couplant la vitesse et la pression. On sait alors que si l'on traite ces équations par une technique de résolution couplant les deux problèmes, des difficultés peuvent apparaître car la condition inf/sup (ou LBB) n'est pas nécessairement vérifiée pour la base de pression et la base de vitesse puisque l'on ne garantit pas que le champ de vitesse ainsi construit est à divergence nulle. Notons au passage que ce problème ne se pose pas pour la POD classique dans la mesure où les modes propres sont par construction à divergence nulle ce qui découple le problème. L'autre difficulté majeure est le comportement à long terme du système dynamique, comme on l'a signalé avant dans l'introduction.

L'apport de cette thèse se situe donc dans les deux points mentionnés ci-dessus. Ainsi, le problème posé par la condition LBB a été résolu en utilisant une approche de découplage vitesse-pression par l'intermédiaire d'une technique de projection. De même, une démarche de correction incrémentale du système dynamique a été envisagée pour palier aux problèmes liés à la divergence du système dynamique à long terme ou lorsque les paramètres de l'écoulement changent.

Ainsi, ce mémoire sera organisé de la façon suivante :

- Dans le chapitre 2, nous présentons un état de l'art sur la réduction de modèle, en insistant sur les catégories qui nous semblent les plus importantes à l'heure actuelle, à savoir la réduction de modèle sur des systèmes linéaires dans le domaine du contrôle et de l'automatisme et la réduction de systèmes non-linéaires dont la POD fait partie.
- Dans le chapitre 3, nous appliquons l'approche POD-Galerkin à l'interaction fluide/particules dans deux configurations d'écoulement : la cavité ventilée 2D et la cavité entraînée 3D.
- Dans le chapitre 4, la méthode de *réduction a priori* APR est détaillée avant de présenter différentes applications progressives, choisies par degré de difficultés successifs afin de jauger de la performance de cette approche. Les exemples traités sont donc les suivants :
 - l'équation de convection-diffusion 2D pour traiter un cas linéaire qui comporte les termes de diffusion et de convection contenues dans les équations de Navier-Stokes
 - l'équation de Burgers 1D, pour tester un exemple non-linéaire souvent utilisé comme modèle simplifié des équations de Navier-Stokes pour l'étude de la turbulence
 - l'équation de Burgers 2D, le pendant des équations de Navier-Stokes 2D sans le terme de pression

Avec ces différents exemples, on teste ainsi la capacité de prédiction des solutions en s'intéressant tout particulièrement aux performances de la méthode en terme de temps de calcul.

- Armé de ces validations, nous présenterons dans le chapitre 5 l'adaptation de la méthode APR pour les équations de Navier-Stokes. Dans un premier temps, la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires, incompressibles, $2D^3$, à l'aide de la méthode des volumes finis sera présentée. En outre, la technique de projection utilisée sera également détaillée et la méthode de résolution sera donc validée pour l'exemple de la cavité entraînée dans des cas stationnaires et instationnaire. Ensuite, on présentera l'algorithme APR modifié en suivant le découplage vitesse-pression et les résultats de la démarche seront enfin présentés.
- Enfin, le chapitre 6 résumera le travail présenté dans ce mémoire avant de tirer les conclusions et les perspectives sur les méthodes de type APR-POD associées à une projection de Galerkin.

³l'extension en 3D ne pose pas de problème particulier

Chapitre 2

La réduction de modèle

Résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles est souvent très coûteux et dans bien des domaines on a été obligé de développer des méthodes de réduction de modèles pour diminuer ces coûts de calcul. Dans cette courte partie bibliographique, plutôt que de décrire en détails toutes les méthodes développées et de recenser les applications que l'on peut trouver dans différents domaines, on s'intéresse plus à présenter la philosophie des modèles réduits, c'est-à-dire l'objectif recherché dans la construction de modèles réduits dans diverses branches de la physique. Ainsi, on présentera la cadre général de la réduction de modèle avant d'aborder dans un premier temps le cas d'EDP linéaires provenant du domaine du contrôle, ensuite dans le cas de systèmes non-linéaires avec un accent tout particulier porté sur les systèmes à paramètre. Dans cette partie sur les méthodes appliquées aux problèmes non-linéaires, on s'intéressera plus précisément à la décomposition de Karhunen-Loève plus connue sous le nom de décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) qui est la technique la plus couramment utilisée en mécanique des fluides.

Cadre général. D'une façon générale, résoudre un phénomène physique revient à déterminer la solution $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$ d'un système d'équations aux dérivées partielles que l'on note symboliquement :

$$\begin{cases} \mathcal{A} : V \longrightarrow W \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A}(\mathbf{u}) = 0 \text{ dans un ouvert } \Omega \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ où } n = 1, 2, 3 \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où V et W sont souvent des espaces de Hilbert de dimension infinie, $\mathbf{u}(t) \in V$ l'inconnue du problème physique et \mathcal{A} l'opérateur différentiel décrivant le système d'équations du phénomène. Lorsqu'une résolution analytique n'est pas possible, il convient

de discrétiser l'équation (2.1) et de la résoudre numériquement. Ainsi, l'étude du phénomène physique se ramène à une étude dans un nouvel espace de Hilbert V_h (respectivement W_h) de dimension finie $n = O\left(\frac{1}{h}\right)$ où h est le paramètre de discrétisation spatiale. Le nouveau problème à considérer s'écrit alors :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_h : V_h \longrightarrow W_h \\ \frac{d\mathbf{u}_h}{dt} + \mathcal{A}_h(\mathbf{u}_h) = 0 \\ \mathbf{u}_h(0) = \mathbf{u}_h^0 \end{cases} \quad (2.2)$$

où maintenant l'opérateur \mathcal{A}_h est l'opérateur discret associé à la discrétisation spatiale de pas h et $\mathbf{u}_h(t) \in V_h$ représente l'inconnue du problème discret. La dimension n de l'espace dépendant de la finesse de la discrétisation du problème physique, on comprend aisément les difficultés que peut engendrer une résolution numérique directe de ce système d'équations pour n grand. De plus, pour décrire correctement la physique de certains problèmes, disposer d'un maillage fin est indispensable. D'un point de vue général, construire un modèle réduit du système (2.2) revient à trouver l'approximation $\tilde{\mathbf{u}}_h$ de la solution \mathbf{u}_h dans un sous-espace \mathcal{V}_h de l'espace V_h de dimension $N \ll n$, c'est-à-dire que cela revient à projeter la variable complète dans un espace de dimension réduite \mathcal{V}_h pour lequel des caractéristiques de la solution peuvent être bien approximées. Par exemple \mathcal{V}_h peut être de telle sorte que l'énergie de $\tilde{\mathbf{u}}_h$ dans \mathcal{V}_h soit très proche de celle de \mathbf{u}_h dans V_h . Les différences entre les différents types de réduction de modèle résident donc dans la façon de choisir, ou de construire ce sous-espace \mathcal{V}_h .

Dans la suite de ce paragraphe, comme on l'a précisé dans l'introduction de ce chapitre, on distingue deux types d'applications différentes des modèles réduits :

- les modèles réduits appliqués aux systèmes linéaires issus des problèmes de contrôle
- les méthodes de réduction de modèles pour des problèmes non-linéaires.

2.1 Modèles réduits à des problèmes de contrôle de systèmes linéaires

La réduction de modèle est très largement utilisée dans le domaine de l'automatisme depuis de nombreuses années. Pour des revues détaillées sur ces sujets, le lecteur peut consulter les revues et travaux d'Antoulas [8, 7], Antoulas *et al.* [9], Gugercin et Antoulas [34] et enfin Stykel [75, 76].

Antoulas [8] et Gugercin et Antoulas [34], dans leurs différents travaux sur les méthodes de réduction pour les systèmes contrôlables, mettent en avant les qualités

que l'on recherche dans la construction de ce modèle d'ordre réduit :

- l'erreur d'approximation due à la réduction de l'ordre du système doit être *faible* comparée au système d'ordre élevé et cette erreur doit être bornée
- les propriétés du système telles que la *stabilité* doivent être conservées
- la méthode doit être numériquement stable et performante en comparaison avec le modèle d'ordre élevé

Dans la suite de ce paragraphe, on adopte la terminologie utilisée par Gugercin et Antoulas [34]. On rappelle alors l'expression d'un système SISO (*Single Input Single Output*) à résoudre :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, $C^T \in \mathbb{R}^n$ (où C^T désigne la transposée de C), et $D \in \mathbb{R}$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est nommé l'*état* du système c'est-à-dire ici l'inconnue, $w(t) \in \mathbb{R}$ l'entrée du système et $y(t) \in \mathbb{R}$ la sortie. Ecrire un modèle réduit relatif au système d'ordre élevé (Σ) revient à construire le système (Σ_N) d'ordre réduit $N \ll n$ défini de la façon suivante :

$$\Sigma_N : \begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_N \xi(t) + B_N w(t) \\ y_N(t) = C_N \xi(t) + D_N w(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

où $A_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B_N \in \mathbb{R}^N$, $C_N^T \in \mathbb{R}^N$, et $D_N \in \mathbb{R}$. En définissant une projection Π par $\Pi = Z^T V$, où $Z, V \in \mathbb{R}^{n \times N}$, ce système réduit (Σ_N) s'écrit :

$$\Sigma_N : \begin{cases} \dot{\xi}(t) = Z^T A V \xi(t) + Z^T V B w(t) \\ y_N(t) = C V \xi(t) + D w(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

et les différentes méthodes utilisées dans ce domaine sont fonction du choix du projecteur. Antoulas [7] distingue alors deux types de méthodes de réduction d'ordre : les méthodes basées sur la *décomposition aux valeurs singulières* SVD (pour *Singular Value Decomposition*) notamment la méthode de *troncature équilibrée* (en anglais *balanced truncation*), et celles basées sur les *sous-espaces de Krylov*.

Balanced truncation. La balanced truncation peut ainsi être vue comme une méthode de projection sur l'espace engendré par les vecteurs propres φ_i associés aux valeurs propres λ_i prépondérantes de la matrice $\mathcal{P}\mathcal{Q}$, où \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont les *matrices grammiennes* relatives au système (2.3), et qui sont dans la pratique calculées comme les solutions des deux équations de Lyapunov suivantes :

$$\begin{aligned} A\mathcal{P} + \mathcal{P}A^T + BB^T &= 0, & \mathcal{P} &> 0 \\ A^T\mathcal{Q} + \mathcal{Q}A + C^TC &= 0, & \mathcal{Q} &> 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

On note alors σ_i la racine carrée des valeurs propres de la matrice $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ appelées aussi *valeurs singulières de Hankel* :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathcal{P}\mathcal{Q})}, i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

On parle de troncature équilibrée lorsque les matrices grammiennes \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont telles que

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (2.8)$$

Les matrices Z et T sont alors construites à partir des grammiennes du système à un ordre de troncature $N < n$ du système. Cette méthode possède l'avantage de conserver la stabilité du système et d'avoir une erreur bornée globalement :

$$\|\Sigma - \Sigma_N\|_\infty \leq 2(\sigma_{N+1} + \dots + \sigma_n) \quad (2.9)$$

mais elle est lourde à mettre en œuvre numériquement [34].

Méthodes de Krylov. Les méthodes de Krylov, quant à elles, peuvent être vues [7] comme une projection sur les sous-espaces de contrôlabilité et d'observabilité d'ordre N définis comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_N &= [B, AB, \dots, A^{N-1}B] \\ \mathcal{O}_N &= [C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{N-1} C^T] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Le projecteur $\Pi = Z^T V$ s'écrit alors en fonction de la décomposition¹ LU de la *matrice de Hankel* \mathcal{H}_N :

$$\mathcal{H}_N = \mathcal{O}_N \mathcal{R}_N = LU \quad (2.11)$$

et on a $Z^T = L^{-1} \mathcal{O}_N$ et $V = \mathcal{R}_N U^{-1}$.

Cette méthode possède l'avantage d'être itérative et ne requiert que des produits matrice/vecteur. On obtient ainsi directement l'approximation d'ordre N du modèle contrairement à la balanced truncation où une troncature pour ne garder que N vecteurs de base a été nécessaire. Cependant, aucun estimateur d'erreur a priori ne peut être donné pour les méthodes de ce type et la matrice relative au système réduit n'est pas nécessairement stable.

Ces techniques, largement utilisées dans le domaine du contrôle et de l'automatisme, ne s'appliquent cependant qu'à des systèmes linéaires² alors que l'on s'intéresse ici à étudier des phénomènes non-linéaires. On trouve cependant quelques applications dans des cas non-linéaires. Par exemple, un algorithme de Newton peut être couplé avec des méthodes de Krylov. En effet, chaque itération de l'algorithme de Newton fait intervenir la matrice jacobienne du système non-linéaire et on a un large système linéaire à résoudre, ce qui est effectué par des méthodes de Krylov. Une revue détaillée de ces méthodes, appelées *méthodes de Newton-Krylov* peut être trouvée dans [42].

¹L est une matrice triangulaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure
²ou linéarisés

2.2 Des méthodes de réduction de modèles pour des problèmes non linéaires

Dans le cas de systèmes non-linéaires, l'utilisation de méthodes de réduction d'ordre est assez fréquent. Ce paragraphe présente ainsi la démarche de quelques méthodes et quelques applications. En particuliers, on présentera le cas des problèmes non-linéaires à paramètres.

Un exemple de réduction de modèle non-linéaire en mécanique des solides. Kapania et Byun [41] étudient la réponse non-linéaire d'une plaque mince soumise à un chargement uniformément distribué. Ils présentent une approche basée sur la projection des équations de la dynamique sur des sous-espaces \mathcal{V}_h devant respecter les propriétés suivantes :

- les vecteurs de base doivent être linéairement indépendant
- ils doivent caractériser suffisamment la réponse dynamique non-linéaire de la structure dans le voisinage du point étudié
- ils doivent être capable d'approximer la solution sur un intervalle de temps significatif

Dans leur travail, deux choix pour l'espace \mathcal{V}_h sont présentés :

- le sous-espace engendré par les vecteurs solutions du problème aux valeurs propres associé à l'équation de vibration libre de la plaque
- le sous-espace engendré par des vecteurs de Ritz.

Les résultats qu'ils obtiennent dans cette étude ne sont pas si satisfaisants. La base de Ritz est plus performante que la base composé des vecteurs propres, mais ils ont besoin tout de même de 80 vecteurs de Ritz. Ainsi le gain en temps de calcul est faible et les auteurs concluent que pour ce type de problème une base plus efficace devrait être envisagée.

Problèmes non-linéaires à paramètres. D'autres travaux [38, 54] concernant la réduction de modèle dans le domaine de la mécanique des fluides présentent d'autres choix pour le sous-espace \mathcal{V}_h . La démarche adoptée par ces auteurs est de considérer les équations de Navier-Stokes comme une équation à un paramètre noté ici³ μ :

$$E(\mathbf{u}_h, \mu) = 0 \quad \text{pour } \mu \in \mathbb{R} \text{ et } \mathbf{u}_h \in H \quad (2.12)$$

La question abordée ici est la suivante : comment obtenir un espace qui soit valable même quand le paramètre varie ? Pour ce faire, Peterson [54] propose d'utiliser

³dans le cas des équations de Navier-Stokes, le paramètre est le nombre de Reynolds

comme espace de projection le *sous-espace de Taylor*.

On note alors \mathbf{u}_h^* la solution de l'équation (2.12) à une valeur μ^* donnée du paramètre. De plus, on considère les équations pour la variable $\mathbf{u}_h^k = \frac{\partial^k \mathbf{u}_h}{\partial \mu^k}$ pour tout $k = 1, \dots, N$ obtenues par dérivations successives de l'équation (2.12) par rapport au paramètre et évaluées en μ^* . On postule donc que l'inconnue du problème 2.12 est fonction du paramètre $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h(\mu)$. Dérivons alors la relation (2.12) par rapport au paramètre. On obtient :

$$\frac{\partial E}{\partial \mu} + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mu} = 0 \quad (2.13)$$

En évaluant la relation précédente en $\mu = \mu^*$ et $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h^*$, on obtient :

$$\frac{\partial E}{\partial \mu}(\mathbf{u}_h^*, \mu^*) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^*, \mu^*) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mu}(\mathbf{u}_h^*, \mu^*) = 0 \quad (2.14)$$

En reconnaissant que $\mathbf{u}_h^1 = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mu}(\mathbf{u}_h^*, \mu^*)$, \mathbf{u}_h^1 est solution du problème :

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^*, \mu^*) \mathbf{u}_h^1 = -\frac{\partial E}{\partial \mu}(\mathbf{u}_h^*, \mu^*) \quad (2.15)$$

D'une manière générale, on peut montrer que \mathbf{u}_h^k est solution des problèmes consécutifs suivants :

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^*, \mu^*) \mathbf{u}_h^k = f(\mathbf{u}_h^*, \mathbf{u}_h^1, \dots, \mathbf{u}_h^{k-1}, \mu^*) \quad (2.16)$$

Remarquons que, comme dans l'approche MAN⁴ (voir [18, 19]), on obtient une succession de problèmes linéaires ayant la même nature puisque seul le second membre change.

Alors, le sous-espace de Taylor est le sous-espace engendré par \mathbf{u}_h^* ainsi que les solutions $\frac{\partial^k \mathbf{u}_h}{\partial \mu^k}$ de l'équation (2.12) dérivée N fois. On a donc dans ce cas :

$$\mathcal{V}_h = Vect \left\{ \mathbf{u}_h^j = \left. \frac{\partial^j \mathbf{u}_h}{\partial \mu^j} \right|_{\mu=\mu^*}, j = 0, \dots, N \right\} \quad (2.17)$$

L'autre sous-espace utilisé conjointement par par Ito et Ravindran [38] et Peterson [54] est le *sous-espace de Lagrange*, engendré lui par les solutions de l'équation (2.12) pour différentes valeurs du paramètre μ . Le sous-espace \mathcal{V}_h s'écrit dans ce cas :

$$\mathcal{V}_h = Vect \{ \mathbf{u}_h^j = \mathbf{u}_h(\mu_j), j = 1, \dots, N \} \quad (2.18)$$

Le dernier sous-espace présenté dans [38] est le *sous-espace d'Hermite* engendré par la solution de l'équation (2.12) et de la dérivée première pour différentes valeurs du paramètre μ :

$$\mathcal{V}_h = Vect \left\{ \mathbf{u}_h^j = \mathbf{u}_h(\mu_j) \text{ et } \left. \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_j}, j = 1, \dots, N \right\} \quad (2.19)$$

⁴Méthode Asymptotique Numérique

Peterson [54] a utilisé avec succès les espaces de Taylor (2.17) et de Lagrange (2.18) pour une cavité entraînée et une *marche* (*forward facing step*) jusqu'à un nombre de Reynolds $Re = 1000$. Ito et Ravindran [38] étudient également le problème de la cavité entraînée stationnaire et une configuration *marche* avec les espaces de Lagrange (2.18) et d'Hermite (2.19), avec cette fois-ci des applications dans le domaine du contrôle de l'écoulement.

Cependant, dans les applications présentées par ces auteurs, le nombre de modes conservé pour représenter correctement la solution est arbitraire : les auteurs ne mentionnent pas de critère particulier pour ce choix. De plus, les bases peuvent être lourdes à calculer. Par ailleurs, les exemples cités restent dans des régimes à bas Reynolds, pour des écoulements laminaires, alors que les applications qui nous intéressent rentrent dans le cadre d'écoulements turbulents. Enfin, la critique fondamentale que l'on peut faire à une telle approche est qu'elle suppose l'unicité de la solution \mathbf{u}_h en fonction de μ . L'intérêt d'une telle approche aurait été justifiée par l'étude des bifurcations quand μ varie qui sont des problèmes de non-unicité de solutions, mais la méthode présentée ici n'est pas adaptée dans cette optique. A notre avis, une telle démarche est donc intéressante, mais il est nécessaire de l'adapter pour tenir compte de l'objection que nous avons formulée ci-dessus, par exemple en l'associant à une formulation de type MAN.

Une méthode de réduction basée sur les modes propres de l'opérateur de Navier-Stokes. Une autre méthode appliquée aux problèmes de contrôle actif d'écoulements a été introduite par Gadoin *et al.* [29]. Le principe consiste à étudier la réponse de l'écoulement au voisinage d'une solution stationnaire.

On étudie le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{A}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Soit $\bar{\mathbf{u}}$ une solution stationnaire du problème (2.20). On cherche à étudier la stabilité de cette solution. Pour cela, on introduit une perturbation $\tilde{\mathbf{u}}$ de telle sorte que l'on ait :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.21)$$

et on considère le problème linéarisé de (2.20) :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.22)$$

où $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{u}}}$ est le Jacobien de l'opérateur de Navier-Stokes. Soit alors $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{u}}}^*$ l'adjoint de l'opérateur de Navier-Stokes. Les auteurs déterminent alors les modes propres du Jacobien ainsi que ceux de l'adjoint du Jacobien. Rappelons au passage que les problèmes directs et adjoints possèdent le même spectre lorsque les opérateurs sont

réels. On note alors les vecteurs propres associés au Jacobien de l'opérateur de Navier-Stokes $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ représente les modes propres associés à l'adjoint du Jacobien. La perturbation $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ de l'écoulement est alors décomposée sur la base engendrée par les modes propres φ_n :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \varphi_k(\mathbf{x}) \quad (2.23)$$

Puisque l'opérateur de Navier-Stokes et son adjoint ne sont pas nécessairement symétriques définis positifs, on n'a pas de propriétés particulières sur les valeurs et vecteurs propres solutions des problèmes relatifs au Jacobien et à l'adjoint du Jacobien, notamment l'orthogonalité des bases obtenues. Cependant, dans ce cas les vecteurs de bases associés au Jacobien φ_n , $n = 1, \dots, N$ sont orthogonaux aux vecteurs propres ψ_n , $n = 1, \dots, N$ associés à l'adjoint du Jacobien (N représente l'ordre de troncature des bases). Dans ce cas, le système dynamique associé au problème linéarisé est obtenu par projection du problème (2.22) sur la base $(\psi_n)_{n=1, \dots, N}$ associée à l'adjoint du Jacobien en utilisant la décomposition (2.23) sur la base $(\varphi_n)_{n=1, \dots, N}$ associée au Jacobien. On a alors :

$$\frac{da_n}{dt} = \lambda_n a_n - \sum_{j,k=1}^N \mu_{njk} a_j a_k \quad (2.24)$$

où λ_n est la valeur propre correspondant à $\varphi_n(\mathbf{x})$ et $\mu_{njk} = (\psi_n, \varphi_j \cdot \nabla \varphi_k)$ représente les termes de couplage non-linéaires.

Cet méthode a été appliqué pour le cas de la cavité différentiellement chauffée et les problèmes suivants ont été mis en avant avec cette exemple :

- la base a besoin d'un nombre élevé de modes pour décrire convenablement le système étudié, en pratique supérieur ou égal à une centaine de modes
- la sélection des modes n'est pas aisée. En effet, comme les modes ne sont pas à valeur décroissante, il faut trouver un procédé permettant de ne sélectionner que les valeurs les plus importantes
- enfin, au dessus du *seuil critique*, la prédiction du système dynamique n'est plus correcte, même lorsque l'on conserve un grand nombre de modes.

Cette technique a donc été utilisée avec succès mais voit son usage limité à certaines configurations, où les instabilités sont faibles.

Une alternative : la POD. Il a été mis en évidence que l'on pouvait dégager des écoulements turbulents ce que l'on appelle des *structures cohérentes* et ainsi un modèle d'ordre faible en mécanique des fluides peut être considéré comme performant s'il arrive à représenter la dynamique de ces structures cohérentes. Un point de vue commun a été en partie adopté depuis 1967 où Lumley [48] associe les structures cohérentes d'un écoulement aux modes propres issue de la décomposition orthogonale aux valeurs propres. En effet, même si certaines divergences subsistent encore

quant à la définition et la nature de ces structures cohérentes (voir en guise d'illustration la thèse de Picard [55] par exemple), il a été établi numériquement que la POD parvient efficacement à capturer la plupart de ces structures. Ainsi, cette technique de réduction de modèle est la méthode de réduction de modèles appliquée à des systèmes non-linéaires qui est la plus utilisée dans le domaine de la mécanique des fluides. Pour cette raison, et puisque c'est cette méthode qui a été choisie pour l'étude de la dispersion de particules, le paragraphe suivant a pour but d'expliquer plus en détails les idées directrices de la POD connue sous le nom général de décomposition de Karhunen-Loève, de la présenter dans plusieurs domaines différents et de donner quelques exemples d'applications.

2.3 La POD ou décomposition de Karhunen-Loève

La décomposition de Karhunen-Loève est une méthode statistique proposée indépendamment par Karhunen en 1946 et par Loève en 1955. Il s'agit d'une méthode permettant de passer d'une représentation d'un très grand nombre de données aléatoires à une représentation déterministe d'ordre réduit, caractérisée par des modes obtenus par un problème de maximisation. Elle a été développée dans bien d'autres domaines que les statistiques et il existe actuellement un grand nombre de méthodes dérivées, avec des noms propres aux différents domaines d'application. L'objectif

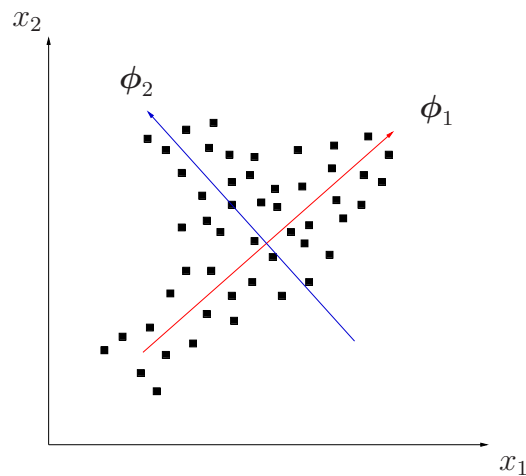


FIG. 2.1 – Représentation schématique de la décomposition de Karhunen-Loève : les deux modes propres ϕ_1 et ϕ_2 représentent les directions principales de l'ensemble de données aléatoires [■] exprimé dans les axes originaux x_1 et x_2

commun de toutes les méthodes de ce type est de capturer une grandeur – la variance dans le domaine statistique, l'inertie en océanographie, l'énergie de l'écoulement en

mécanique des fluides – en un nombre optimal de modes, comme illustré sur la figure 2.1.

Dans le domaine de la reconnaissance de forme et l'imagerie mais aussi de l'analyse des données, la décomposition de Karhunen-Loève est connue sous le nom d'analyse en composantes principales (*PCA* pour *Principal Component Analysis*). Pour une revue plus détaillée sur cette application de la PCA, le lecteur pourra se référer à [1]. Dans cet article, les limites de la PCA pour la reconnaissance de visage sont mises en avant, et d'autres méthodes de réduction telles que la LEA (*Linear Discriminant Analysis*) et la ICA (*Independent Component Analysis*)⁵, sont citées comme alternative à la PCA pour ce type de travaux. Comme exemple d'illustration dans le domaine de l'analyse d'image, Luttman *et al.* [49] effectuent une analyse aux composantes principales sur un échantillon vidéo représentant le phénomène d'ouvertures de stomates. Ils utilisent par ailleurs une variante de la PCA plus efficace dans le cas d'une distribution non-elliptique des données : l'analyse archétypale détaillée dans [74]. En effet, dans une distribution elliptique, les composantes principales représentent les principaux axes du *nuage* de données et sont facilement exploitables, ce qui n'est pas le cas lorsque la forme de l'échantillon de données n'est plus la même. L'analyse archétypale, au lieu de déterminer les directions de plus grande variance statistique comme le fait la PCA, détermine l'enveloppe convexe de l'ensemble de données, ce qui rend les modes issus de cette décomposition plus exploitables dans le cas de domaines non-elliptiques. Un exemple probant est donné dans [74].

Dans le domaine de l'océanographie et de la prévision météorologique, dont Lorenz [47] est un des instigateurs, les composantes principales sont plutôt appelées fonctions propres empiriques (*EOF* pour *Empirical Orthogonal Functions*), par exemple [16, 66]. Ainsi Blayo *et al.* [16] traitent un modèle océanique basé sur les équations quasi-géostrophiques, l'océan étant divisé en N couches superposées impliquant un système de N équations couplées. L'étude du modèle de circulation générale océanique passe par un problème d'optimisation défini à partir de la fonction de courant. Les résultats obtenus dans une configuration assez simple, un domaine carré fermé divisé en 3 couches selon la verticale, montrent une division du nombre d'itérations de calcul de l'ordre de 20 à 30 pour une erreur de résolution comparable au modèle complet. Les modes empiriques obtenus possèdent également selon les auteurs une grande aptitude à représenter les circulations des couches profondes de la géométrie dû au fait que ces modes contiennent la structure dynamique des écoulements.

⁵cette méthode peut être vue comme une généralisation de la PCA : au contraire de la PCA qui exploite uniquement les statistiques d'ordre 1 et 2, la ICA exploite les statistiques d'ordres supérieurs

Dans le domaine de la mécanique des fluides, la décomposition de KL est connue sous le nom de décomposition orthogonale aux valeurs propres (*POD* pour *Proper Orthogonal Decomposition*) et les modes propres issus de cette décomposition sont associés aux structures cohérentes de l'écoulement. La méthode sera détaillée dans le paragraphe suivant. Elle est devenue dans ce domaine la méthode de réduction de modèle la plus utilisée. Elle est relativement peu coûteuse et les divers types d'écoulements qui ont été étudiés depuis la fin des années 80 ont montré que la méthode donne des résultats satisfaisants dans bien des cas. Allery [4] dresse un panorama rapide des différents types d'écoulement étudiés ces dernières années : allant de la couche de mélange axisymétrique à l'étude d'un jet plan en passant par des applications à des écoulements comportant des particules. Pour plus de détails, Cordier [23], Holmes *et al.* [36] et Solari *et al.* [73] présentent également un grand nombre d'applications dans le domaine de la mécanique des fluides.

Bien d'autres domaines comme l'électromagnétique, la chimie ou encore la biologie utilisent à présent la décomposition de KL pour résoudre les équations aux dérivées partielles qui leurs sont propres. Des travaux dans ce sens sont par ailleurs de plus en plus courant.

2.4 Modèle réduit par approche POD

Dans ce qui suit on considère des fonctions complexes $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ définies par

$$\begin{cases} \mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{C}^n \\ (\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \end{cases}$$

où Ω est un sous espace de \mathbb{R}^n et $n = 2$ ou 3 .

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n \\ \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{u}(t)(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \end{cases}$$

Dans la suite, quand aucune confusion n'est possible, nous noterons \mathbf{u} pour $\mathbf{u}(t)$.

2.4.1 Généralités

Dans cette sous section, afin de simplifier la démonstration, la POD est présentée pour des fonctions à valeurs réelles⁶. Le fondement de la POD revient à chercher une

⁶La POD est en général présentée pour des fonctions complexes pour tenir compte des transformées de Fourier qui apparaissent dans les directions de périodicité

fonction déterministe ϕ qui approxime au mieux en moyenne un champ aléatoire \mathbf{u} . Ce problème consiste donc à chercher ϕ qui appartient à un espace d'Hilbert complexe noté H tel que :

$$\frac{\langle (\phi, \mathbf{u})^2 \rangle}{(\phi, \phi)} = \max_{\Phi \in H} \frac{\langle (\Phi, \mathbf{u})^2 \rangle}{(\Phi, \Phi)} \quad (2.25)$$

où (\bullet, \bullet) désigne le produit scalaire et $\langle \bullet \rangle$ l'opérateur moyenne.

Le problème (2.25) peut encore s'écrire

$$\langle (\phi, \mathbf{u})^2 \rangle = \max_{\Phi \in \mathcal{B}} \langle (\Phi, \mathbf{u})^2 \rangle \quad (2.26)$$

où \mathcal{B} est la sphère unité de H c'est à dire $\mathcal{B} = \{\Phi \in H \text{ tel que } \|\Phi\|^2 = 1\}$.

Alors, si l'on suppose que

$$\delta \langle f \rangle = \langle \delta f \rangle$$

ϕ est solution de l'équation :

$$\text{il existe } \lambda \text{ tel que } \langle (\Phi, \mathbf{u})(\delta\Phi, \mathbf{u}) \rangle = \lambda(\Phi, \delta\Phi) \quad \text{pour tout } \delta\Phi \in H$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange, lié à l'appartenance de Φ à \mathcal{B} .

Ce qui peut encore s'écrire

$$\langle ((\Phi, \mathbf{u})\mathbf{u}, \delta\Phi) \rangle = \lambda(\Phi, \delta\Phi) \quad (2.27)$$

De plus si on suppose que \mathbf{u} est aléatoire et que Φ est déterministe alors :

$$\langle (\mathbf{u}, \Phi) \rangle = (\langle \mathbf{u} \rangle, \Phi) \quad (2.28)$$

Sous ces hypothèses l'équation (2.27) s'écrit

$$(\langle (\Phi, \mathbf{u})\mathbf{u} \rangle, \delta\Phi) = \lambda(\Phi, \delta\Phi)$$

c'est à dire

$$\langle (\Phi, \mathbf{u})\mathbf{u} \rangle = \lambda\Phi$$

Le problème de maximisation (2.25) se ramène donc à la résolution d'un problème aux valeurs propres. On cherche donc ϕ solution du problème :

$$\langle (\Phi, \mathbf{u})\mathbf{u} \rangle = \lambda\Phi \quad \text{dans } H \quad (2.29)$$

Si on suppose que l'espace H correspond à l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré sommable⁷ dans le domaine Ω , le produit scalaire est défini par

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x).g(x)dx \quad (2.30)$$

Dans ce cas le problème (2.29) s'écrit :

$$\langle \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}') . \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rangle = \lambda \phi(\mathbf{x})$$

Introduisant dans cette relation le tenseur de corrélation en deux points $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, défini par $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \rangle$, on est amené à résoudre l'intégrale de Fredholm :

$$\int_{\Omega} \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda \phi(\mathbf{x}) \quad (2.31)$$

La solution ϕ de l'équation intégrale de Fredholm (2.31) étant déterministe, elle a été supposée indépendante⁸ de l'opérateur de moyenne $\langle \bullet \rangle$. De plus cet opérateur moyenne a été supposé quelconque à la seule condition de vérifier l'égalité (2.28). Selon l'ensemble statistique des réalisations de l'écoulement utilisé pour évaluer la moyenne $\langle \bullet \rangle$, différents types de décomposition orthogonale sont obtenus (classique, snapshots, bi-orthogonale...). Selon les décompositions, la moyenne est évaluée de manières différentes :

- dans le cas de la méthode classique, la moyenne d'ensemble est assimilée à une moyenne temporelle sous hypothèse d'ergodicité dans un écoulement statistiquement stationnaire. L'opérateur moyenne s'écrit donc :

$$\langle h \rangle = \frac{1}{T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T h(t) dt \quad (2.32)$$

- dans le cas de la méthode des snapshots, on utilise une moyenne spatiale évaluée à partir de réalisations prises aux instants t_n .
- dans le cas de la méthode bi-orthogonale, introduite par Aubry *et al.* [12], la moyenne spatiale ou temporelle est évaluée à partir de réalisations spatio-temporelles de l'écoulement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ sans qu'aucune hypothèse de stationnarité ou d'ergodicité du signal ne soit nécessaire.

2.4.2 POD classique

Dans cette partie on se place dans le cas de la POD classique et la moyenne est donnée par l'équation (2.32). Le tenseur de corrélation spatial \mathcal{R} est symétrique et

⁷c'est à dire d'énergie finie

⁸c'est à dire $\langle \phi \rangle = \phi$

défini positif. Ainsi, en accord avec la théorie d'Hilbert-Schmidt, l'équation (2.31) possède un ensemble de solutions orthogonales dénombrables ϕ^n associées à des valeurs propres λ^n réelles et positives.

Les valeurs propres et vecteurs propres obtenus par résolution du problème (2.31) possèdent les propriétés suivantes :

- les vecteurs propres spatiaux ϕ^n sont orthogonaux et peuvent être normalisés :

$$(\phi^n, \phi^m) = \int_{\Omega} \phi^n(\mathbf{x})\phi^m(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \delta_{nm} \quad (2.33)$$

- toute réalisation du champ aléatoire $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ peut s'écrire sur la base de fonctions propres déterministes ϕ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n(t)\phi^n(\mathbf{x}) \quad \text{au sens de } L^2 \quad (2.34)$$

- les coefficients aléatoires $a^n(t)$, projection de $\mathbf{u}(t)$ sur ϕ^n , sont déterminés de la façon suivante :

$$a^n(t) = (\mathbf{u}(t), \phi^n) \quad (2.35)$$

Ces coefficients sont incorrélés et leurs valeurs moyennes sont les valeurs propres λ^n :

$$\langle a^n(t)a^m(t) \rangle = \delta_{nm}\lambda^n \quad (2.36)$$

- Par construction, la POD est optimale au sens de l'énergie. Cela signifie que tout autre ensemble de N modes contient moins d'énergie que les N premières fonctions propres issues de la POD. Cette propriété laisse espérer, que lors d'une projection de Galerkin, un nombre relativement faible de fonctions propres suffisent, pour reproduire la dynamique d'un écoulement turbulent.
- Les fonctions propres ϕ^n vérifient les conditions aux limites, respectent les symétries de l'écoulement et sont à divergence nulle pour un écoulement incompressible.

2.4.3 La snapshot POD

Le calcul du tenseur de corrélations spatiales $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est très coûteux lorsque l'on utilise des maillages très fins. En effet, si l'on note n le nombre de points du maillage utilisé pour la discrétisation du domaine Ω , la dimension du problème aux valeurs propres à résoudre est $2n$ dans le cas 2D et vaut $3n$ dans le cas 3D, ce qui peut être très coûteux. Sirovich [72] introduit une manière équivalente de traiter

le problème en considérant des *clichés* temporels (*snapshots*) de l'écoulement. Le nouveau problème à résoudre est alors de taille M , où $M \ll N$ représente le nombre de ces clichés de l'écoulement.

Soit alors $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i)\}_{i=1, \dots, M}$ l'ensemble des M snapshots et $\phi_i(\mathbf{x})$ un vecteur propre de la décomposition orthogonale. Alors la snapshot POD consiste à déterminer les coefficients a_k , pour tout $k = 1, \dots, M$ tels que :

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^M a_k \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k) \quad (2.37)$$

Si l'on suppose l'hypothèse d'ergodicité réalisée, la moyenne $\langle \bullet \rangle$ peut être évaluée comme une moyenne temporelle, et le tenseur de corrélations spatiales peut donc se récrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) dt \simeq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i) \mathbf{u}(\mathbf{x}', t_i) \end{aligned} \quad (2.38)$$

et le problème aux valeurs propres (2.31) se récrit alors :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i) \mathbf{u}(\mathbf{x}', t_i) \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda \phi(\mathbf{x}) \quad (2.39)$$

On récrit alors la relation (2.39) en utilisant l'expression (2.37) et on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i) \mathbf{u}(\mathbf{x}', t_i) \sum_{k=1}^M a_k \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k) d\mathbf{x}' = \lambda \sum_{k=1}^M a_k \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k) \quad (2.40)$$

qui peut être réarrangé :

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M a_k \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i) \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}', t_k) \mathbf{u}(\mathbf{x}', t_i) d\mathbf{x}' = \lambda \sum_{k=1}^M a_k \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k)$$

où l'on reconnaît dans le premier membre la définition du produit scalaire $(\bullet, \bullet)_{L^2(\Omega)}$.

On a alors :

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M (\mathbf{u}(t_k), \mathbf{u}(t_i))_{L^2(\Omega)} a_k \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i) = \lambda \sum_{k=1}^M a_k \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k) \quad (2.41)$$

Si l'ensemble $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i)\}_{i=1, \dots, M}$ forme une famille linéairement indépendante⁹, alors le problème (2.41) se simplifie en :

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M C_{ki} a_k = \lambda a_i \text{ pour } i = 1, \dots, M \quad (2.42)$$

⁹cette condition sous-entend que les clichés de l'écoulement sont indépendants, c'est-à-dire qu'ils sont pris à des pas de temps suffisamment espacés. Elle est généralement vérifiée en pratique.

avec

$$\mathcal{C}_{ki} = \frac{1}{M} (\mathbf{u}(t_k), \mathbf{u}(t_i))_{L^2(\Omega)} \quad \forall k, i = 1, \dots, M \quad (2.43)$$

L'équation (2.42) représente le nouveau problème aux valeurs propres pour la snapshot POD. Le tenseur de corrélation \mathcal{C}_{ki} est cette fois-ci de taille $M \ll N$ ce qui justifie le fait que la snapshot POD est utilisée au détriment de la POD classique pour les simulations numériques. Là encore, les coefficients spatiaux et temporels ont les mêmes propriétés que ceux obtenus avec la POD classique. Dans la suite de notre étude, nous utiliserons la méthode de la snapshot POD.

Remarque. Nous avons présenté la POD dans le paragraphe 2.4.2 et sa version snapshot ci-dessus dans un cadre où les fonctions considérées sont aléatoires (en tout cas c'est le langage que l'on a adopté). Ceci se justifie par le cadre visé, qui relève des écoulements turbulents. Cependant, il est tout à fait possible d'écrire une formulation du problème de construction de la base dans un cadre déterministe (voire stationnaire), où la variable t joue dans ce cas le rôle d'indexation des données. En effet, on considère un espace de Hilbert X réel. Soit alors \mathcal{V} l'ensemble engendré par les vecteurs $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in X$ qui correspondent aux données que l'on dispose sur l'écoulement étudié, c'est-à-dire que l'on a :

$$\mathcal{V} = \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \quad (2.44)$$

On note par ailleurs d la dimension de cet espace, c'est-à-dire $d = \dim(\mathcal{V})$.

En considérant une base orthonormée $\{\boldsymbol{\psi}_k\}_{k=1, \dots, d}$ de l'ensemble \mathcal{V} , on peut écrire chaque élément $\mathbf{u}_i \in \mathcal{V}$ sur cette base :

$$\mathbf{u}_i = \sum_{k=1}^d (\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\psi}_k)_X \boldsymbol{\psi}_k \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.45)$$

où $(\bullet, \bullet)_X$ est le produit scalaire associé à l'espace X . La décomposition orthogonale aux valeurs propres consiste donc à trouver la base orthonormale $\{\boldsymbol{\phi}_k\}_{k=1, \dots, N}$ de rang $N \in \{1, \dots, d\}$ où $N \ll n$ qui représente au mieux tous les éléments \mathbf{u}_i , $i = 1, \dots, n$ de \mathcal{V} suivant la décomposition (2.45). Cela revient à minimiser l'erreur entre les éléments $\mathbf{u}_i \in \mathcal{V}$ et leur décomposition sur la base $\{\boldsymbol{\psi}_k\}_{k=1, \dots, N}$ au sens des moindres carrés :

$$\min_{\{\boldsymbol{\psi}_k\}_{k=1, \dots, N}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| \mathbf{u}_i - \sum_{k=1}^N (\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\psi}_k)_X \boldsymbol{\psi}_k \right\|_X^2 \quad (2.46)$$

avec $(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_j)_X = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, $\|\bullet\|_X$ est la norme associée au produit scalaire sur X . Dans ce cas, il est possible d'estimer l'erreur de troncature

commise par la POD correspond à l'énergie des modes négligés, comme l'indiquent Kunisch et Volkwein dans [44] :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| \mathbf{u}_i - \sum_{k=1}^N (\mathbf{u}_i, \phi_k)_X \phi_k \right\|_X^2 = \sum_{k=N+1}^d \lambda_k \quad (2.47)$$

2.4.4 Décomposition bi-orthogonale ou BOD

Une autre approche plus générale que les deux précédentes, car ne nécessitant ni hypothèse de stationnarité ni hypothèse d'indépendance des snapshots, a été introduite par Aubry *et al.* [12]. La méthode, appelée *décomposition Bi-orthogonale (BOD pour Bi-Orthogonal Decomposition)*, consiste en une description spatio-temporelle des écoulements qui permet de déterminer à la fois des modes propres spatiaux et temporels. En d'autres termes, appliquer la BOD revient à chercher les fonctions spatiales $\{\phi_k(\mathbf{x})\}_{k=1,\dots,N}$ et temporelles $\{\psi_k(t)\}_{k=1,\dots,N}$ telles que :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k(\mathbf{x}) \psi_k(t) \quad (2.48)$$

où les fonctions $\phi_k(\mathbf{x})$, appelés modes *topos*, sont les fonctions propres du problème spatial considéré sur le domaine Ω :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \phi(\mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' = \lambda \phi(\mathbf{x}) \\ \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int_T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \, dt \end{cases} \quad (2.49)$$

et les fonctions $\psi_k(t)$, appelés modes *chronos*, sont les fonctions propres du problème temporel considéré sur l'intervalle de temps T :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \mathbf{C}(t, t') \psi(t') \, dt' = \lambda \psi(t) \\ \mathbf{C}(t, t') = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t') \, d\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.50)$$

Les coefficients α_k correspondent à la racine carrée des valeurs propres λ_k , solutions communes des deux problèmes aux valeurs propres (2.49) et (2.50).

On a donc, pour tout $k = 1, \dots, N$ $\alpha_k = \sqrt{\lambda_k}$ donc les coefficients α_k vérifient les mêmes propriétés que les valeurs propres de la POD, vues au paragraphe 2.4.2, c'est-à-dire que l'on a :

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_N \geq 0 \quad (2.51)$$

De la même façon que pour la POD classique, la projection du signal sur la base spatiale est optimale au sens de la norme $L^2(T)$ et la projection du signal sur la base temporelle est optimale au sens de la norme $L^2(\Omega)$.

De plus, les modes spatiaux et temporels sont liés suivant les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_k(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\alpha_k} \int_T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \psi_k(t) dt \\ \psi_k(t) &= \frac{1}{\alpha_k} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \phi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\end{aligned}\tag{2.52}$$

Enfin, cette méthode, contrairement à la POD, ne nécessite aucune hypothèse d'ergodicité ou de stationnarité du signal. Remarquons que toutefois, les expressions des tenseurs de corrélations spatiales et temporelles ne sont pas définies comme des moyennes. En toute rigueur, sans autre hypothèse sur le signal, si celui-ci est purement aléatoire, alors les modes calculés le seront également, ils ne sont donc pas déterministes. Cette méthode nécessite donc tout de même des hypothèses supplémentaires pour pouvoir prétendre construire des bases déterministes.

Cette méthode, bien que plus générale, voit son usage limité à de rares cas où la description spatio-temporelle est nécessaire à la bonne compréhension des processus physiques, par exemple l'intermittence spatio-temporelle (STI) comme le soulignent les auteurs de [12] ou l'interaction fluide-structure (IFS) comme expliqué par Hémon et Santi [37] qui montrent que l'application de la POD seule pose des problèmes dus à l'hétérogénéité de la pression moyenne.

2.4.5 Système dynamique d'ordre faible

La principale caractéristique de la POD est son optimalité énergétique. Comme avec très peu de vecteurs (N), la base POD représente la quasi-totalité de l'énergie du système étudié, il est courant de construire un système dynamique d'ordre faible par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur les N premiers vecteurs de cette base.

Ainsi, on obtient un système d'équations différentielles ordinaires de taille N . Le coût de calcul nécessaire à la résolution d'un tel système est alors bien inférieur à celui requis pour résoudre le modèle complet. Enfin, puisque les modes POD sont censés représenter les structures cohérentes de l'écoulement, on peut espérer que la dynamique de l'écoulement soit bien représentée par ces modes, au moins sur des intervalle de temps proches de l'échantillonnage sur lequel la base a été construite.

Cette démarche, initiée par Aubry *et al.* [13], a été par la suite reprise de nombreuses fois pour différentes applications. Ainsi, Rempfer [63] observe dans sa thèse le comportement du système dynamique pour l'étude des structures cohérentes observées lors de la transition laminaire-turbulente pour la couche limite d'une plaque. Cazemier [20] construit un système dynamique pour l'étude de l'écoulement dans cavité entraînée 3D. Plus récemment, Johansson *et al.* [39] construisent un système

dynamique pour étudier l'écoulement dans un canal plan. Allery *et al.* [5] utilisent un système dynamique pour étudier la dispersion de particules dans une cavité ventilée 2D. Enfin, dans le but d'appliquer la POD aux domaines mobiles, et plus précisément à l'interaction fluide structure, Liberge *et al.* [46] introduisent un domaine de référence, fixe et contenant toutes les configurations mobiles et leurs évolutions pendant la période de snapshot. Des fonctions caractéristiques sont utilisées afin de suivre l'évolution de ces domaines dans l'espace de référence et la POD est effectuée pour le champ de vitesse globale obtenu sur le domaine de référence. Un système dynamique est ensuite établi pour l'interaction fluide solide rigide en utilisant une méthode de type domaine fictif et testé sur le cas monodimensionnel de l'équation de Burgers couplé avec un ressort.

On décrit succinctement dans ce paragraphe la construction du système dynamique d'ordre faible. Les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

où l'on rappelle que $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est la vitesse du fluide, p est la pression, ρ la masse volumique du fluide et ν sa viscosité cinématique. Enfin \mathbf{f} caractérise l'action des forces extérieures appliquées sur le fluide, ici on considère que $\mathbf{f} = 0$. Après avoir effectué la décomposition orthogonale aux valeurs propres sur un échantillon de M snapshots $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i)$ ($i = 1, \dots, M$) de l'écoulement, tout vecteur vitesse $u(\mathbf{x}, t)$ peut alors s'écrire sous la forme de la décomposition suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^M a_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) \quad \text{au sens de } L^2(\Omega) \quad (2.54)$$

En se basant sur des considérations énergétiques, on conserve le nombre de modes $N < M$ nécessaire à la bonne représentation de l'écoulement.

On réécrit donc l'équation de quantité de mouvement en utilisant cette décomposition, on obtient alors la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) \right) - \nu \Delta \left(\sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) \right) \\ + \left(\left(\sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) \right) \\ + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

On effectue ensuite une projection de Galerkin sur la base POD. On obtient, en tenant compte des propriétés d'orthonormalité des modes POD, l'équation suivante :

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N C_{ijk} a_j a_k + \sum_{j=1}^N B_{ij} a_j + D_i \quad (2.56)$$

où l'on a introduit le terme quadratique C_{ijk} , qui représente le terme convectif projeté, le terme linéaire B_{ij} qui représente la diffusion et enfin le terme D_i de pression. Ces termes s'écrivent :

$$C_{ijk} = (\phi_i, \nabla \phi_j \cdot \phi_k) \quad B_{ij} = \nu (\phi_i, \Delta \phi_j) \quad D_i = -\frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} p \phi_i \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.57)$$

Le système dynamique fait intervenir le terme D_i qui représente le terme de pression projeté sur la base POD. Or, on ne peut pas décomposer directement la pression sur la base POD. Ce terme est donc handicapant puisqu'il sous-entend que l'on doit connaître la pression pour tous les temps que l'on veut résoudre. Cependant, pour des applications de type cavité (fermée), ce terme est exactement nul puisque les modes propres ϕ_n sont nuls à la paroi¹⁰. Dans les autres cas, il faut soit le modéliser soit utiliser une autre formulation qui ne fait pas intervenir la pression, comme la formulation en vorticité [4, 64]. Rempfer [64] propose également de relier la pression au champ de vitesses par l'intermédiaire d'une équation de Poisson. Il obtient ainsi une expression de la pression sous la forme d'une fonctionnelle non linéaire en ϕ_n . Le problème de la pression étant traité, on n'a alors plus qu'à résoudre (2.56) pour tout $i = 1, \dots, N$, c'est-à-dire un système de N équations différentielles ordinaires. On peut ainsi résoudre ce système dynamique sur des longs intervalles de temps¹¹ de manière très rapide, puisque N est en général très faible¹², et avec des pas de temps aussi faibles qu'on le souhaite, ce qui rend son utilisation très intéressante dans la dispersion de particules, au vu des problèmes numériques du couplage fluide/particules évoqués dans l'introduction.

Il a été souvent constaté dans la littérature (voir [4, 20, 65] notamment) que le système dynamique diverge pour des temps plus ou moins longs après la phase d'échantillonnage. En effet, puisque l'on n'a conservé qu'un faible nombre de modes POD pour la construction du système dynamique, l'influence des petites échelles – correspondant aux modes POD les plus faibles énergétiquement et que l'on a négligés – n'est pas prise en compte par le système dynamique. Or ces petites échelles sont responsables de la dissipation énergétique. Pour palier à ce problème, il est alors nécessaire de modéliser l'influence de ces échelles sur le système dynamique et plusieurs travaux font référence d'une stabilisation du système dynamique par des approches plus ou moins empiriques.

La façon la plus simple est de considérer une viscosité corrigée constante $\nu_{eff} = \nu + \nu_t$, que l'on détermine par expérimentations numériques [4, 40]. Rempfer dans [63] calcule la viscosité intervenant effectivement dans le système dynamique et la

¹⁰les modes propres vérifient en effet les conditions aux limites

¹¹c'est-à-dire sur des temps bien plus longs que la durée de l'échantillonnage nécessaire pour la construction de la base POD

¹²cel   dépend de la complexité du problème, mais généralement de l'ordre de la dizaine au maximum

compare à la viscosité du problème physique. Le calcul de cette *viscosité effective* est basée sur des considérations énergétiques.

En notant e_i la contribution énergétique du mode ϕ_i , on a la relation suivante :

$$e_i(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a_i(t) \phi_i(\mathbf{x}))^2 d\Omega = \frac{1}{2} a_i^2 (\phi_i, \phi_i) = \frac{1}{2} \lambda_i a_i^2(t) \quad (2.58)$$

La dérivée de l'équation (2.58) fait intervenir la dérivée des coefficients temporels :

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \lambda_i a_i^2 \right) = \lambda_i a_i \frac{da_i}{dt} \quad (2.59)$$

et en remplaçant $\frac{da_i}{dt}$ par son expression dans (2.56) (avec le terme de pression pris égal à 0), on obtient la relation :

$$\frac{de_i}{dt} = \lambda_i \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N C_{ijk} a_i a_j a_k + \lambda_i \nu \sum_{j=1}^N \tilde{B}_{ij} a_i a_j \quad (2.60)$$

où $\tilde{B}_{ij} = \frac{1}{\nu} B_{ij}$. Puisque l'énergie est bornée, la moyenne temporelle de la dérivée temporelle (2.60) est nulle :

$$\left\langle \frac{de_i}{dt} \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{de_i}{dt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e_i(T) - e_i(0)}{T} = 0 \quad (2.61)$$

La viscosité physique vérifie donc l'expression (2.60) lorsque la moyenne de la dérivée temporelle de l'énergie est nulle. Pour calculer la viscosité effective ν_i^{eff} correspondant à chaque mode i , Rempfer effectue un bilan énergétique sur une période T_0 de simulation du système dynamique :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{de_i}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{de_i}{dt} dt = \frac{e_i(T_0) - e_i(0)}{T_0} \\ &= \lambda_i \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N C_{ijk} \langle a_i a_j a_k \rangle + \lambda_i \nu_i^{eff} \sum_{j=1}^N \tilde{B}_{ij} \langle a_i a_j \rangle \end{aligned} \quad (2.62)$$

Or, en rappelant que $\langle a_i a_j \rangle = \delta_{ij}$, l'expression de ν_i^{eff} peut alors être calculée de l'expression précédente comme suit :

$$\nu_i^{eff} = \frac{\frac{e_i(T_0) - e_i(0)}{\lambda_i T_0} - \sum_{k=1}^N C_{ijk} \langle a_i a_j a_k \rangle}{\tilde{B}_{ii}} \quad (2.63)$$

Dans sa thèse, Rempfer calcule donc la viscosité effective qui rentre en compte dans le système dynamique en utilisant les coefficients temporels issus de la projection de la solution DNS sur la base POD (2.35). Il constate ainsi qu'il existe un comportement

quasi-linéaire de la viscosité ajoutée à la viscosité physique en fonction de l'index du mode. Ainsi, la viscosité effective peut s'écrire de la façon suivante :

$$\nu_i^{eff} = \nu(1 + \nu_i^{add}) \text{ avec } \nu_i^{add} = i \times \text{Constante} \quad (2.64)$$

où la constante est ajustée empiriquement.

Cazemier [20] utilise également cette approche, et la formalise par l'introduction d'un coefficient d'amortissement linéaire dans l'équation du système dynamique.

Vigo [79] ajoute quant à lui un terme cubique au système dynamique dont l'obtention s'avère coûteuse en temps de calcul. Allery [4] propose également une méthode de correction du système dynamique. Cette méthode revient à prendre en compte des éventuelles erreurs des simulations numériques en séparant le champ de vitesse en un champ de vitesse vérifiant effectivement les équations de Navier-Stokes et un champ de correction. La réécriture du système dynamique fait alors intervenir des termes supplémentaires correctifs qui sont obtenus par la résolution d'un autre système dynamique faisant intervenir les coefficients temporels issus de la projection du champ sur la base POD (2.35). Il a appliqué avec succès cette méthode dans le cas de la cavité entraînée et de l'écoulement dans un diffuseur long.

Enfin, Bergmann [15] utilise des *méthodes à région de confiance* pour recalibrer le modèle réduit. La validité du système dynamique est étudiée à l'aide d'informations sur le modèle détaillé et le modèle réduit est actualisé par un processus d'optimisation. Cette méthode appelée TRPOD (Trust Region POD) a été adoptée pour le contrôle d'écoulement autour d'un cylindre en régime laminaire.

Chapitre 3

Application de la POD à la dispersion de particules

Dans ce chapitre, on présente l'application de la POD couplée avec un système dynamique d'ordre faible pour calculer la dispersion de particules. On présente dans un premier temps le modèle particulaire utilisé avant de s'intéresser à la modélisation de la partie fluide. Puis on présente la façon dont le couplage est traité entre le calcul de l'écoulement et la résolution des équations des particules.

Enfin, cette démarche va être appliquée pour le calcul de l'écoulement dans deux configurations différentes :

- la cavité ventilée 2D
- la cavité entraînée 3D

3.1 Principe de couplage fluide-particule

3.1.1 Modèle particulaire

Hypothèses. Dans toute la suite de l'étude, on considère que :

- les particules sont solides et sphériques.
- l'aérosol étudié est dilué et est considéré comme isotherme et monodisperse.
- les particules ne coagulent pas et ne modifient pas l'écoulement.
- les grandeurs qui caractérisent les particules sont leur diamètre d_p et leur masse volumique ρ_p .

Comme on a supposé que les particules ne modifient pas l'écoulement, une approche *one-way coupling* est utilisée pour la résolution de la dispersion de particules. Afin

de pouvoir calculer la trajectoire de chaque particule, l'approche lagrangienne est adoptée dans ce travail.

Equations du mouvement. Pour décrire le mouvement des particules, on applique le principe fondamental de la dynamique à chaque particule. Ainsi, on obtient :

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \mathbf{F}_p \quad (3.1)$$

où m_p et \mathbf{u}_p désignent respectivement la masse et la vitesse de la particule, et \mathbf{F}_p les forces qui s'appliquent sur une particule.

Parmi les forces qui peuvent intervenir dans l'équation de la particule (3.1), on trouve :

- la force de gravité \mathbf{F}_g définie par :

$$\mathbf{F}_g = m_p \mathbf{g} \quad (3.2)$$

où \mathbf{g} est l'accélération de la gravité. Elle n'est négligeable que dans le cas de très petites particules où son ordre de grandeur est bien inférieur aux autres forces.

- la force de traînée \mathbf{F}_d , due à l'accélération du fluide déplacé dans le mouvement de la particule, qui s'exprime par la relation :

$$\mathbf{F}_d = \frac{1}{2} C_d \frac{\pi d_p^2}{4} \rho \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\| (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) \quad (3.3)$$

où on rappelle que \mathbf{u} est la vitesse du fluide, C_d est appelé le coefficient de traînée de la particule, et peut selon Hinds [35] être calculé comme fonction du nombre de Reynolds particulaire Re_p défini comme suit :

$$Re_p = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\| d_p}{\nu} \quad (3.4)$$

Ainsi, dans le *régime de Stokes*, c'est-à-dire pour $Re_p < 1$, on a l'expression suivante du coefficient de traînée :

$$C_d = \frac{24}{Re_p} \quad (3.5)$$

Pour une valeur du nombre de Reynolds particulaire comprise entre 1 et 1000, on se trouve en *régime transitoire* et le coefficient de traînée s'exprime alors de la façon suivante :

$$C_d = \frac{24}{Re_p} \left(1 + \frac{Re_p^{\frac{2}{3}}}{6} \right) \quad (3.6)$$

Enfin lorsque $Re_p > 1000$, on se trouve en *régime newtonien* et le coefficient de traînée est alors constant et vaut $C_d = 0.44$.

- la force due au mouvement Brownien, qui a de l'importance seulement pour des particules de très petite taille[35].
- les forces dues à la rotation des particules, à savoir la force de Saffman, engendrée par le cisaillement au voisinage des parois et la force de Magnus engendrée elle par la rotation propre de la particule. L'étude de Ahmadi et Li [3] indique par ailleurs que la force de Saffman peut être négligée lorsque les particules considérées sont suffisamment petites.
- la force de Basset F_B , qui dépend de la diffusion de la vorticité dans le fluide environnant. Cette force est une force de *mémoire* qui s'exprime sous la forme intégro-différentielle du premier ordre suivante :

$$F_B = K_B d_p^2 \sqrt{\pi \rho \mu} \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt} \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\|}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \quad (3.7)$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide et K_B une constante dépendant du régime de l'écoulement. Ce terme tient compte de l'histoire de l'accélération de la particule aux instants passés. Pour plus de détails sur cette force, le lecteur pourra consulter la thèse de Abbad [2]

- la force de masse ajoutée F_{ma} , indépendante de la viscosité et qui est due à l'accélération d'un volume du fluide sous l'effet de l'accélération de la particule. Son expression est la suivante :

$$F_{ma} = K_{ma} \rho_p V_p \frac{d}{dt} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\| \quad (3.8)$$

où $V_p = \frac{\pi}{6} d_p^3$ est le volume de la particule et K_{ma} une constante dépendant du régime de l'écoulement.

- les forces électrostatiques qui sont importantes mais dans notre cas, elles seront négligées puisque les parois ne sont pas chargées

Dans notre cas, le fluide considéré est de l'air, sa masse volumique vaut environ $\rho \approx 1 \text{ kg/m}^3$ et la masse volumique des particules a été prise égale à $\rho_p = 2000 \text{ kg/m}^3$. Le rapport de masse volumique entre les particules et le fluide est alors très élevé, ce qui caractérise le fait que les particules sont essentiellement soumises aux forces de gravité et de traînée visqueuse, toutes les autres forces sont négligées par ailleurs, voir Armenio et Fioretto [10]. De plus, les particules considérées ici sont de diamètre supérieur à $1 \mu\text{m}$ ce qui assure qu'elles ne sont pas soumises au mouvement Brownien.

L'équation de mouvement de la particule (3.1) s'écrit donc, en considérant donc que les seules forces appliquées sont les forces de gravité et de traînée, de la façon suivante :

$$\frac{\pi}{6} d_p^3 \rho_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = C_d \frac{\pi}{8} \rho d_p^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\| (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) + \rho_p \frac{\pi}{6} d_p^3 \mathbf{g} \quad (3.9)$$

3.1.2 Modèle fluide

La force de traînée présentée dans le paragraphe précédent (3.3) fait intervenir la connaissance de la vitesse de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ du fluide. Cette vitesse est obtenue par résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles rappelées ici :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

où l'on rappelle que p est la pression, ρ la masse volumique du fluide et ν sa viscosité cinématique. Enfin \mathbf{f} caractérise l'action des forces extérieures appliquées sur le fluide. L'approche one-way coupling a été envisagée ici, cela signifie que les particules n'ont pas d'effet sur le mouvement du fluide, par conséquent le terme $\mathbf{f} = 0$.

La résolution des équations de Navier-Stokes peut se faire à l'aide des différentes techniques que l'on a déjà évoquées rapidement dans le premier chapitre, à savoir les méthodes DNS, LES ou RANS. Sans rentrer dans les détails de ces méthodes de résolution numérique, on présente ici succinctement les différentes approches, leurs avantages et inconvénients :

- Tout d'abord on peut résoudre les équations de Navier-Stokes discrétisées de façon directe, c'est-à-dire à toutes les échelles spatiales sans modélisation. Cette méthode, la DNS, nécessite donc des maillages très fins pour pouvoir prédire correctement la physique des phénomènes complexes, et son utilisation reste encore limitée au domaine théorique et fondamental puisque les temps de calcul nécessaires à la résolution de ces problèmes demeurent très importants. En effet, lorsque les problèmes font intervenir de nombreuses échelles, ce qui est le cas de la turbulence, on doit représenter toutes ces échelles. Pour l'exemple d'un écoulement turbulent homogène isotrope, le ratio entre l'échelle la plus énergétique L et la plus petite échelle dynamique η est évalué par la relation :

$$\frac{L}{\eta} = O\left(Re^{\frac{3}{4}}\right) \quad (3.11)$$

où Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement, qui mesure le rapport entre les forces d'inertie et les effets visqueux. On l'exprime de la façon suivante :

$$Re = \frac{U_{ref} l_{ref}}{\nu} \quad (3.12)$$

avec U_{ref} et l_{ref} sont respectivement des vitesses et longueurs de référence du problème étudié et ν la viscosité cinématique. Ainsi, le nombre de degrés de libertés nécessaires pour représenter toutes les échelles de cet écoulement doit être proportionnel à $O\left(Re^{\frac{9}{4}}\right)$ pour un volume cubique. Pour des écoulements où le nombre de Reynolds est très élevé, typiquement $Re \sim 10^6 - 10^8$ ce qui

est couramment le cas pour des applications industrielles, notamment en aéronautique, ce type de résolution fait intervenir une discrétisation spatiale trop importante. Il est ainsi nécessaire de séparer les échelles spatiales pour pouvoir traiter ce type d'applications.

- Ainsi, la deuxième technique, utilisée dans de nombreux solveurs fluides, se base sur la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées temporellement. On les obtient en considérant la vitesse \mathbf{u} comme la somme de sa partie moyenne $\langle \mathbf{u} \rangle$ et d'une fluctuation \mathbf{u}' :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle + \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (3.13)$$

où

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle \approx \widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dt \quad (3.14)$$

En récrivant les équations de Navier-Stokes (3.10) en utilisant la décomposition (3.13), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{u}_i \widetilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial \widetilde{u}'_i \widetilde{u}'_j}{\partial x_j} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Ces méthodes appelées RANS introduisent cependant un terme supplémentaire dans les équations, le tenseur de Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$ qu'il convient de modéliser à l'aide de modèles de turbulence. Les modèles RANS ne requièrent donc pas de maillages aussi fins que ceux utilisés pour la DNS, et sont donc moins coûteux en terme de temps de calcul mais leur performances restent limitées à la finesse des modèles de turbulence et certains phénomènes ne peuvent être capturés précisément. De plus, dans le cas de dispersion de particules, c'est la vitesse instantanée du fluide qui doit être prise en compte. Ainsi, les méthodes RANS sont associées à des modèles stochastiques pour calculer les fluctuations de vitesse. Beaucoup d'étude de dispersion de particules s'effectuent donc à l'aide des modèles RANS en utilisant le modèle d'*interaction tourbillon - particule* (ou EIM pour *Eddy Interaction model*) proposé par Gosman et Ioannides en 1981, on citera par exemple Graham et James en 1996 [31].

- L'alternative la plus souvent utilisée, tant au niveau fondamental qu'industriel, est la LES. Cette méthode est basée sur la résolution directe des grosses échelles de l'écoulement alors que l'influence des plus petites est modélisée. Intermédiaire entre la DNS et les modèles RANS, cette méthode a l'avantage d'être moins coûteuse que la DNS et plus précise que les techniques RANS.

3.1.3 Principe du couplage

Le problème de la dispersion de particules provient du fait que les forces qui s'exercent sur les particules sont calculées à partir des données de l'écoulement fluide. Ainsi, il faut résoudre les équations de Navier-Stokes pour chaque pas de temps de calcul du mouvement de la particule.

Le couplage s'effectue donc de la façon suivante :

1. à l'instant t^n , on résout les équations de Navier-Stokes (3.10), on obtient alors les expressions de la pression et de la vitesse du fluide à cet instant.
2. à partir de la vitesse du fluide, on calcule la force de traînée à l'aide de (3.3)
3. l'équation du mouvement de la particule (3.9) est alors résolue pour ce pas de temps, on obtient \mathbf{u}_p
4. la position de la particule \mathbf{x}_p est déduite en intégrant la vitesse de la particule obtenue à l'étape précédente :

$$\mathbf{u}_p = \frac{d\mathbf{x}_p}{dt} \quad (3.16)$$

5. on incrémente le temps $t^{n+1} = t^n + \Delta t_p$ où Δt_p est le pas de temps lié à la résolution de l'équation de la particule (3.9), et on retourne à l'étape 1.

Comme on l'a déjà mentionné dans le chapitre 2, une des difficultés de la résolution numérique de la dispersion de particules est liée au fait que le pas de temps Δt_p imposé par l'équation (3.9) est très petit. L'équation (3.10) doit être alors résolue avec un pas de temps $\Delta t < \Delta t_f$ ce qui rend l'utilisation de méthodes telles que la DNS ou même la LES très coûteuses. L'alternative choisie dans ce travail est l'utilisation de modèles réduits pour le calcul de l'écoulement et plus particulièrement la POD. Ainsi, la démarche de couplage écoulement/particule avec l'approche POD-système dynamique se résume de la façon suivante :

1. On calcule un échantillonnage de l'écoulement par LES ou DNS
2. La base POD est calculée en résolvant le problème aux valeurs propres (2.42)
3. Les coefficients du système dynamique sont calculés à partir de (2.57)
4. Pour chaque pas de temps, on calcule :
 - la vitesse de l'écoulement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ par résolution du système dynamique
 - la force de traînée F_d qui est appliquée sur chaque particule
 - la trajectoire des particules par résolution de l'équation de mouvement et intégration temporelle de la vitesse de la particule

Les étapes 1., 2. et 3. sont effectuées une fois pour toute ce qui constitue l'avantage principal de la méthode et qui permet un gain de temps important dans le calcul de la dispersion de particules. Comme on l'a déjà mentionné, l'application de la POD

nécessite un échantillonnage de l'écoulement. Dans ce chapitre, l'échantillonnage étant obtenu par LES, nous allons faire dans le paragraphe suivant une brève description de la LES.

3.2 Présentation de la LES

Le principe de la LES repose sur la décomposition du champ de vitesse $\mathbf{u} = u(\mathbf{x}, t)$ en grandes structures notées $\bar{u}(\mathbf{x}, t)$ et en petites échelles ou *structures de sous-maille* $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$:

$$u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \quad (3.17)$$

Le principe de la LES est basée sur une opération de filtrage pour séparer les différentes échelles de l'écoulement. La grandeur filtrée $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ s'écrit :

$$\bar{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \bar{\Delta}) \mathbf{u}(\mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \quad (3.18)$$

où Ω représente toujours l'espace considéré, $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \bar{\Delta})$ désigne la fonction filtre avec $\bar{\Delta}$ la largeur du filtre, c'est-à-dire la longueur d'onde de la plus petite échelle retenue dans l'opération de filtrage. La fonction filtre détermine alors la taille et la structure des petites échelles. Des illustrations de différentes fonctions de filtrage sont référencées par exemple dans [56].

Lorsque cet opérateur est appliqué aux équations de Navier-Stokes (3.10), on obtient les équations filtrées suivantes, écrites ici en notation tensorielle en utilisant la convention de sommation sur les indices :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{cases} \quad (3.19)$$

où τ_{ij} est le tenseur de sous-maille qui s'écrit :

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (3.20)$$

et qui représente l'influence des échelles de sous-maille sur les grandes échelles. Afin de fermer le système d'équations obtenu par le procédé de filtrage (3.18), ce tenseur doit être modélisé.

Dans la littérature, de très nombreux modèles ont été élaborés pour exprimer ce tenseur de sous-maille, le lecteur trouvera les informations nécessaires dans l'ouvrage de Sagaut [70]. Une très bonne revue synthétique de ces différents modèles se trouve

également dans la thèse de Razafindralandy [58], qui propose également des modèles de sous-maillages qui respectent les symétries des équations de Navier-Stokes, voir par exemple [59, 61, 62] et une extension de cette approche en écoulement anisotherme [60].

Dans un souci de simplicité, on ne présente ici que le modèle qui a été retenu dans tous les calculs LES. Dans cette étude, on a utilisé un modèle à viscosité de sous-maille, en rappelant que l'on peut écrire le tenseur de sous-maillages (3.20) de la façon suivante :

$$\tau_{ij} = -2\nu_{sm}\bar{S}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} \quad (3.21)$$

où \bar{S}_{ij} le tenseur taux de déformation des grandes échelles défini par :

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

et ν_{sm} est la viscosité de sous-maille. Elle s'exprime à l'aide de la relation suivante :

$$\nu_{sm} = C_\nu \bar{\Delta} \sqrt{k_{sm}} \quad (3.22)$$

où k_{sm} est l'énergie cinétique des échelles de sous-maille définie par :

$$k_{sm} = \frac{1}{2} \tau_{kk} \quad (3.23)$$

Dans le modèle considéré, l'énergie cinétique des échelles de sous-maille est déterminée par l'équation de transport suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_{sm}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x_j} (k_{sm} \bar{u}_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_i u_j} - \bar{u}_j \overline{u_i u_i}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{p u_j} - \bar{p} \bar{u}_j) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k_{sm}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} \bar{u}_i) \\ &- \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.24)$$

que l'on obtient à partir de l'équation de quantité de mouvement des petites échelles, obtenue elle en soustrayant la deuxième équation de (3.19) à l'équation de quantité de mouvement non-filtrée (3.10). Les différents termes inconnus de l'équation (3.24) sont alors modélisés suivant différentes hypothèses qui sont rappelées dans [70] :

- les termes correspondants à la diffusion sont modélisés de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} + \overline{u'_j p} \right) = C_k \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\Delta} \sqrt{k_{sm}} \frac{\partial k_{sm}}{\partial x_j} \right) \quad (3.25)$$

- le terme de dissipation est modélisée par des considérations dimensionnelles de la façon suivante :

$$\varepsilon = \frac{\nu \overline{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}{2} = C_\varepsilon \frac{k_{sm}^{3/2}}{\bar{\Delta}} \quad (3.26)$$

Finalement, l'équation de transport pour l'énergie cinétique de sous-maille à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial k_{sm}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(k_{sm}\bar{u}_j) = -\tau_{ij}\bar{S}_{ij} - C_\varepsilon \frac{k_{sm}^{3/2}}{\Delta} + C_k \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\Delta} \sqrt{k_{sm}} \frac{\partial k_{sm}}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 k_{sm}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.27)$$

où les constantes C_ε et C_k peuvent être déterminées par une théorie analytique de la turbulence, comme le souligne Sagaut [70]. Les valeurs qui ont été utilisées sont $C_\varepsilon = 1$ et $C_k = 0.05$.

3.3 Cavité ventilée 2D

Le premier exemple étudié est une cavité ventilée 2D, comme présentée sur le schéma 3.1. La cavité est carrée de longueur 2.5m, l'entrée et la sortie d'air sont respectivement à 0.31m de la face supérieure sur la face gauche, et à 0.31m de la face inférieure sur la face droite, et sont de largeur 0.07m.

La vitesse moyenne à l'entrée de la cavité vaut $u_0 = 0.446m.s^{-1}$ correspondant à un nombre de Reynolds égal à 10000 et l'intensité turbulente à l'entrée est égale à 10%.

Le domaine de calcul a été discrétisé en utilisant un maillage non-uniforme de 18477

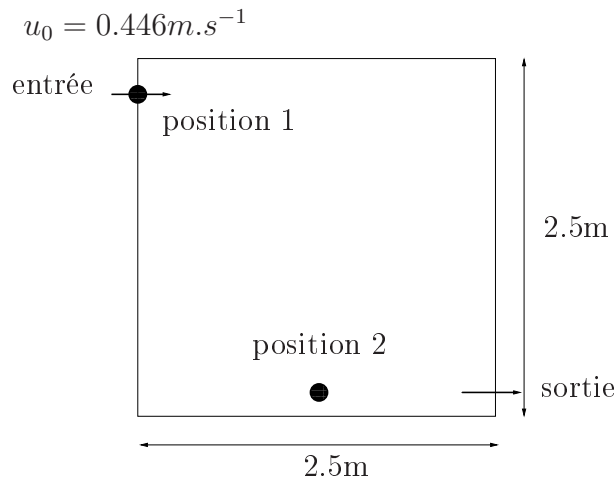


FIG. 3.1 – Configuration de la cavité ventilée

cellules. La figure 3.2 présente l'allure de l'énergie cinétique obtenue par la LES.

3.3.1 Application de la POD

Pour pouvoir appliquer la POD, on a besoin d'un échantillonnage de l'écoulement. Celui-ci a été obtenu par LES avec un pas de temps fluide $\Delta t_f = 0.005s$ pour assurer

un CFL inférieur¹ à 0.5. La snapshot POD décrite au paragraphe 2.4.3 a été alors appliquée sur la vitesse fluctuante $\hat{u}(\mathbf{x}, t)$ avec 99 échantillons de l'écoulement pris à intervalles réguliers toutes les 0.01s. On a déjà souligné l'optimalité de la POD en

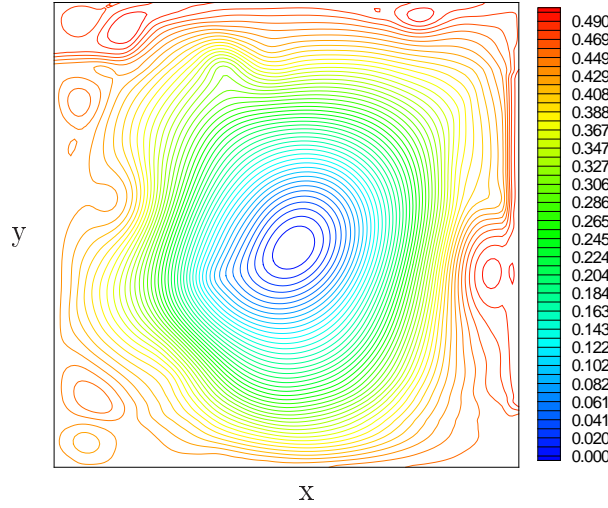


FIG. 3.2 – Isolignes de l'énergie $\sqrt{u^2 + v^2}$ pour le cas de la cavité ventilée à $Re = 10000$.

terme de représentation énergétique de l'écoulement. Ainsi, on calcule le pourcentage d'énergie représentée par les N premiers modes en fonction de l'énergie totale du système, c'est-à-dire celle obtenue lorsque l'on conserve les M modes. Ce pourcentage d'énergie est donné par la relation suivante :

$$E_c = \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i}{\sum_{i=1}^M \lambda_i} \quad (3.28)$$

La contribution énergétique de chaque mode est également représentée par E_n défini donc par :

$$E_n = \frac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^M \lambda_i} \quad (3.29)$$

Ces pourcentages d'énergie fluctuante sont rapportés dans le tableau 3.3.1 pour les cinq premiers modes POD. On constate effectivement que les premiers modes sont les plus énergétiques : le premier mode à lui seul contient plus de 78% de l'énergie fluctuante du système et avec seulement 5 modes on représente plus de 99% de l'énergie. De plus, on constate bien que la contribution énergétique de chaque mode diminue : ainsi le cinquième mode contient moins d'1% de l'énergie totale du système.

¹avec le maillage considéré

Mode n	λ_n	$100 \times E_c$	$100 \times E_n$
1	$0.53 \cdot 10^{-2}$	78.62948	78.62948
2	$0.99 \cdot 10^{-3}$	93.18179	14.55231
3	$0.29 \cdot 10^{-3}$	97.48127	4.29948
4	$0.96 \cdot 10^{-4}$	98.89760	1.41632
5	$0.33 \cdot 10^{-4}$	99.38720	0.48960

TAB. 3.3.1 – Cinq premières valeurs propres obtenues par la POD appliquée au cas de la cavité ventilée 2D et énergie correspondante

La capacité de la base POD à reproduire la solution avec N modes est également testée à l'aide du résidu r_N entre la solution reconstruite par la POD avec N modes et la solution LES de référence. Ce résidu est défini par :

$$r_N = \sqrt{\frac{\left\| \int_{\Omega} [\mathbf{u}_{LES}(\mathbf{x}, t) - \sum_{k=1}^N a_k(t) \phi_k(\mathbf{x})]^2 d\Omega \right\|_{\infty}}{\left\| \int_{\Omega} [\mathbf{u}_{LES}(\mathbf{x}, t)]^2 d\Omega \right\|_{\infty}}} \quad (3.30)$$

où $\|\bullet\|_{\infty}$ est la norme infinie définie par :

$$\|f(t)\|_{\infty} = \sup f(t) \quad (3.31)$$

La figure 3.3 montre l'évolution du résidu entre la solution POD reconstruite et la solution de référence en fonction du nombre de modes retenus dans la base POD. Elle montre qu'avec 4 modes, on reconstruit la solution avec un résidu inférieur à

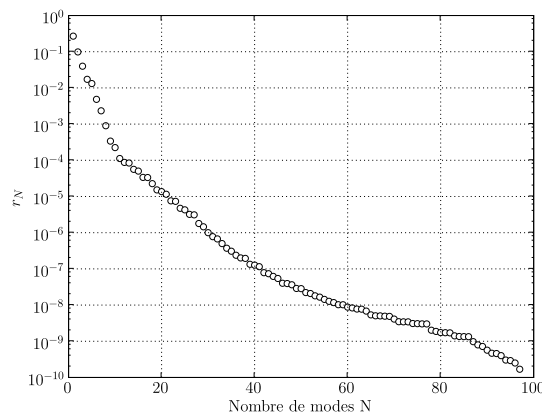


FIG. 3.3 – Evolution du résidu r_N en fonction du nombre de modes N conservés dans la base POD

$2 \cdot 10^{-2}$ en norme $L^2(\Omega)$ ce qui correspond à une erreur relative de seulement $3.2 \cdot 10^{-4}$,

ce qui est satisfaisant. Le système dynamique va donc être construit à partir de ces quatre modes.

3.3.2 Système dynamique

La POD a été effectuée sur le champ de vitesse fluctuante $\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ tel que :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (3.32)$$

où $\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ est le champ de vitesse moyen. De même que pour la vitesse, la pression s'écrit de la façon suivante :

$$p(\mathbf{x}, t) = \widetilde{p}(\mathbf{x}) + \widehat{p}(\mathbf{x}, t) \quad (3.33)$$

Le système dynamique est construit sur le champ fluctuant. Les équations de Navier-Stokes aux grandeurs fluctuantes sont obtenues en utilisant les décompositions (3.32) et (3.33) dans les équations de Navier-Stokes et en soustrayant l'expression moyennée :

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathit{grad} \widetilde{u} \cdot \widehat{\mathbf{u}} + \mathit{grad} \widehat{\mathbf{u}} \cdot \widetilde{\mathbf{u}} + \mathit{grad} \widehat{\mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{u}} - \widetilde{\mathit{grad} \widehat{\mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}} = -\frac{1}{\rho} \mathit{grad} \widehat{p} + \nu \Delta \widehat{\mathbf{u}} \quad (3.34)$$

Cette fois-ci, c'est la décomposition de la vitesse fluctuante sur la base POD que l'on écrit :

$$\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N \widehat{a}_k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \quad (3.35)$$

Le système dynamique pour la vitesse fluctuante s'écrit donc en remplaçant l'expression de la vitesse fluctuante (3.35) dans les équations de navier-Stokes (3.34) et en effectuant une projection de Galerkin sur la base POD $\phi_k, k = 1, \dots, N$. On obtient alors :

$$\frac{d\widehat{a}_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N C_{ijk} \widehat{a}_j \widehat{a}_k + \sum_{j=1}^N B_{ij} \widehat{a}_j + D_i + H_i \quad (3.36)$$

avec

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= (\phi_i, \nabla \phi_j \cdot \phi_k) \\ B_{ij} &= \nu (\phi_i, \Delta \phi_j) - (\phi_i, \mathit{grad} \widetilde{u} \cdot \phi_j + \mathit{grad} \phi_j \cdot \widetilde{u}) \\ D_i &= -\frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} p' \phi_i \cdot \mathbf{n} \, dS \\ H_i &= (\phi_i, -\mathit{grad} \widetilde{p} - \mathit{grad} \widetilde{u} \cdot \widetilde{u}) + \nu (\phi_i, \Delta \widetilde{u}) \end{aligned}$$

Le calcul du terme D_i lié à la pression fluctuante est très handicapant car il nécessite de connaître la pression à chaque instant. Nous allons tester l'influence de ce terme sur le comportement du système dynamique. La figure 3.4 présente donc l'évolution temporelle des coefficients $a_i(t)$, pour $i = 1, \dots, 4$ obtenus par résolution du système dynamique :

- en prenant en compte le terme D_i de pression dans (3.36) (noté *SD avec pression* dans la figure 3.4)
- en négligeant le terme de pression (noté *SD sans pression*)

Ces coefficients sont alors comparés à ceux obtenus en projetant la solution de référence, c'est-à-dire ici la LES, sur la base POD obtenue. Elle est repérée par *REF* sur la figure 3.4. Sur cette figure, on constate que l'évolution des coefficients obtenus

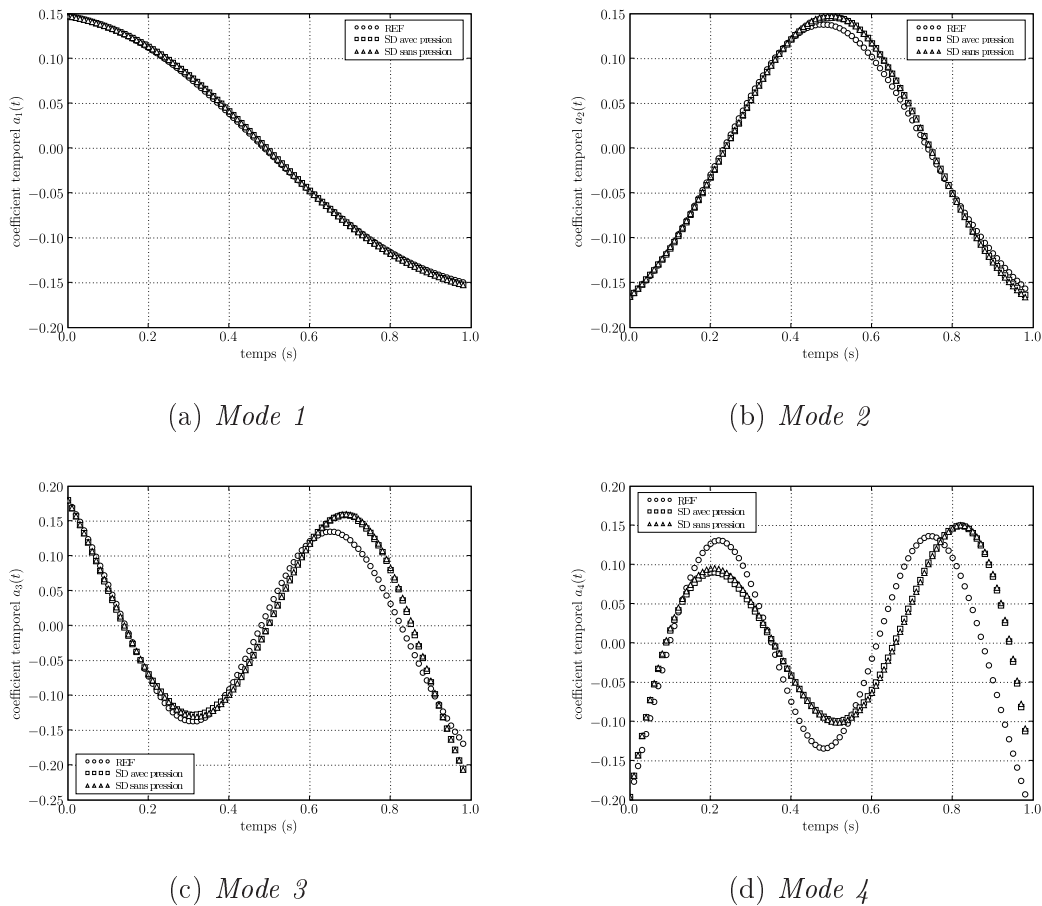


FIG. 3.4 – Evolution temporelle des 4 premiers modes obtenue par intégration du système dynamique sur la phase d'échantillonnage.

par résolution du système dynamique reproduisent assez bien l'évolution observée par la solution de référence. De plus, on constate que ce terme de pression dans le système dynamique influence très peu la prédiction des coefficients temporels. Dans la suite de l'étude, on choisit donc de le négliger.

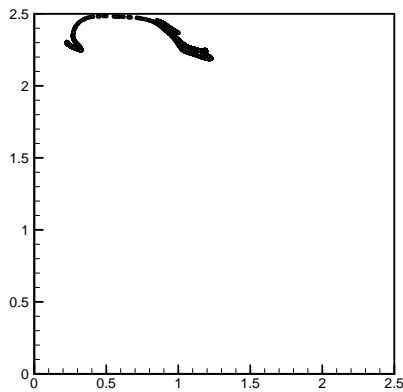
3.3.3 Dispersion de particules

Dans cette partie, on présente les résultats obtenus en simulant le système dynamique sur une durée $T = 30s$, c'est-à-dire 30 fois la durée de l'échantillonnage. Deux

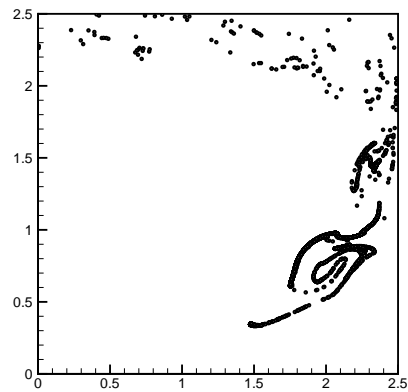
cas de figures différents on été étudiées. Un nuage de 10000 particules a été injecté dans les deux positions (1 et 2) repérées sur le schéma de la configuration 3.1 par les ronds noirs :

- la première position coïncide avec l'entrée d'air
- la deuxième position se situe à 10cm de la face inférieure, à égale distance entre les faces gauches et droites.

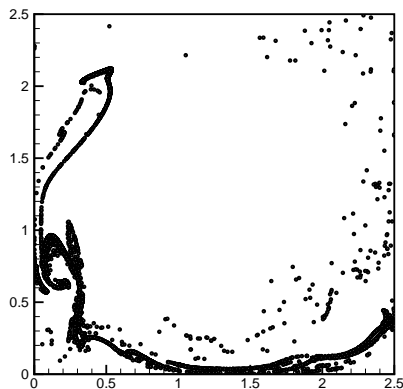
Grâce à la POD, les caractéristiques de l'écoulement sont contenues uniquement dans les modes POD. Il n'est pas alors nécessaire de recalculer l'écoulement pour chaque configuration que l'on veut étudier, contrairement à ce que l'on aurait à faire avec la LES. Ici on n'a qu'à résoudre un système d'équations différentielles ordinaires couplé avec l'équation de la particule, donc on peut traiter simplement et aisément plusieurs configurations de dispersion de particules. Le pas de temps pour



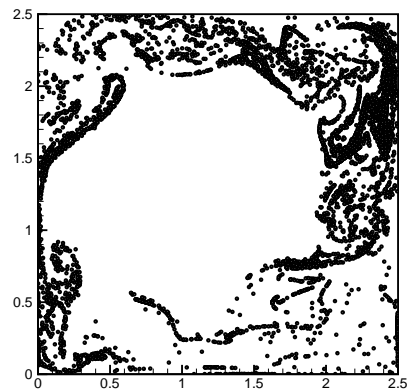
(a) $t = 4s$



(b) $t = 12s$



(c) $t = 20s$



(d) $t = 30s$

FIG. 3.5 – Evolution temporelle des particules dans la cavité (position initiale des particules $n^{\circ}1$).

l'intégration de la particule a été pris égal à $\Delta t_p = 0.0002s$ et 150000 pas de temps

ont été effectués pour chaque position initiale du nuage de particules.

La figure 3.5 présente l'évolution temporelle de la dispersion des particules sur l'intervalle T , pour l'injection en position 1, c'est-à-dire au milieu de l'entrée d'air de la cavité. De cette figure, on constate bien que les particules suivent l'écoulement représenté sur la figure 3.2. Ainsi, sur la figure 3.5(a), on constate déjà que quelques particules sont coincées dans la recirculation situées dans la partie supérieure gauche de la cavité. La figure 3.5(b) montre bien que les particules suivent la circulation du vortex primaire. Enfin, au bout de 20s et 30s, respectivement figures figure 3.5(c) et figure 3.5(d), on constate que certaines particules sont sorties de la cavité tandis que d'autres sont restées collées sur les parois. On constate également que beaucoup de particules sont coincées dans les recirculations des coins de la cavité. Toutes ces

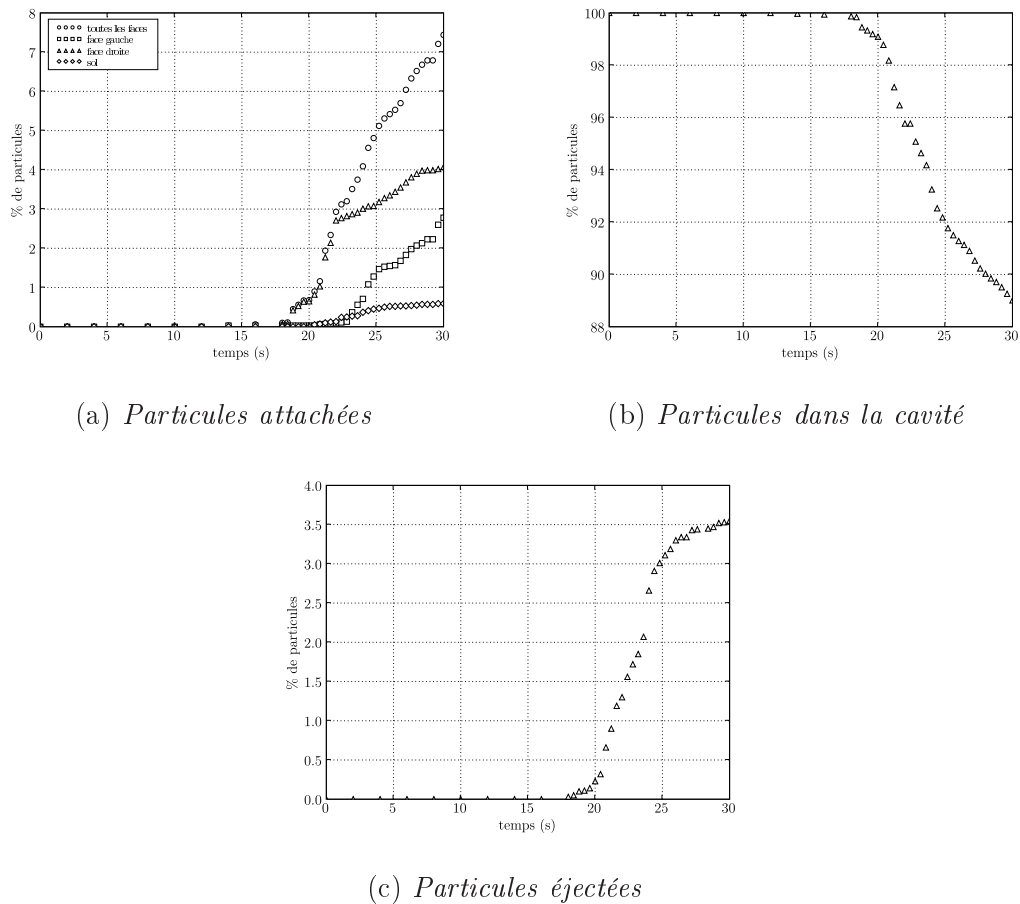
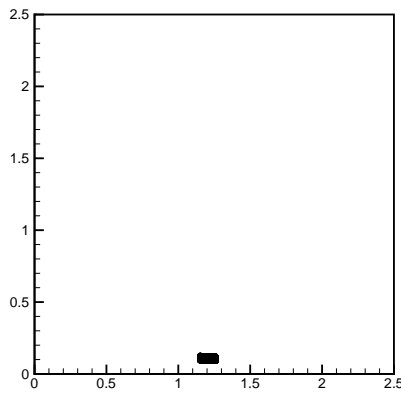


FIG. 3.6 – Pourcentage des particules présentes dans la cavité, attachées ou éjectées en fonction du temps.

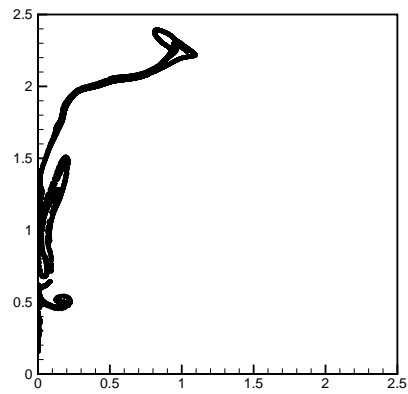
constatations qualitatives sont étayées par un traitement statistique effectué sur les particules. La figure 3.6 présente donc l'évolution temporelle du pourcentage de particules encore présentes dans la cavité, de particules éjectées de la cavité, et enfin l'évolution du pourcentage de particules collées au différentes parois de la

cavité. Ces résultats confirment bien le fait que des particules sont éjectées de la cavité aux environs du temps $t = 17s$, c'est-à-dire quand les particules ont atteint la recirculation dans la partie inférieure droite où se situe la sortie d'air de la cavité. On constate aussi qu'un nombre assez important de particules vient se coller aux parois ($\approx 8\%$ à la fin de la simulation), essentiellement les parois droite et gauche. En effet les particules sont petites donc l'effet de la gravité est minime comparé aux forces dues à l'écoulement, ce qui explique bien le fait que peu de particules restent collées sur le sol.

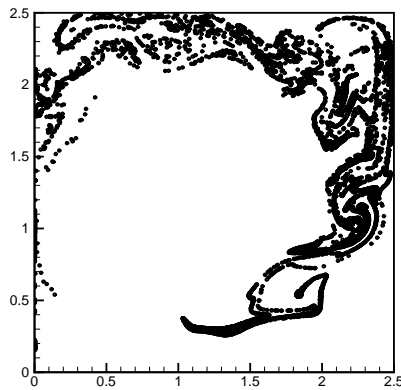
Des résultats similaires sont observés sur la figure 3.7 pour la deuxième position où sont injectées les particules. Là encore on constate bien que dans l'ensemble les particules suivent l'écoulement d'air. Le même traitement statistique que précé-



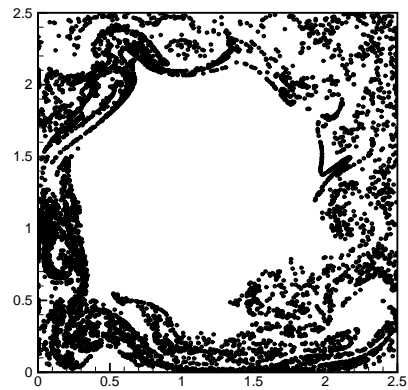
(a) $t = 0s$



(b) $t = 12s$



(c) $t = 20s$



(d) $t = 30s$

FIG. 3.7 – Evolution temporelle des particules dans la cavité (position initiale des particules $n^{\circ}2$).

demment est effectué pour les résultats de la deuxième configuration. Les résultats

obtenus sont présentés sur la figure 3.8. Pour cette configuration, des analyses similaires peuvent être faites. Des particules restent coincées dans les recirculations (voir figure 3.7(d)) et finalement peu sont éjectées de la cavité (à peine 5% au bout de 30 secondes). Puisque les particules sont injectées au bas de la cavité et que le sens de l'écoulement est horaire, les particules rencontrent donc en premier la paroi gauche, contrairement au premier cas où elles rencontraient la paroi droite, donc la différence ici est que l'on trouve un plus grand nombre de particules collées sur la paroi gauche que la paroi droite.

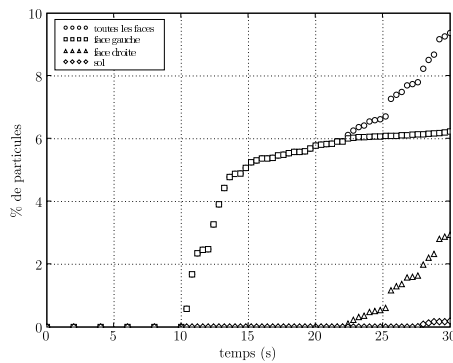
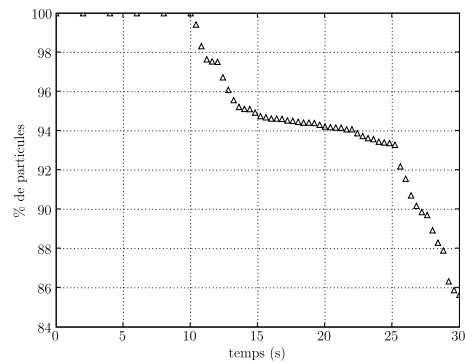
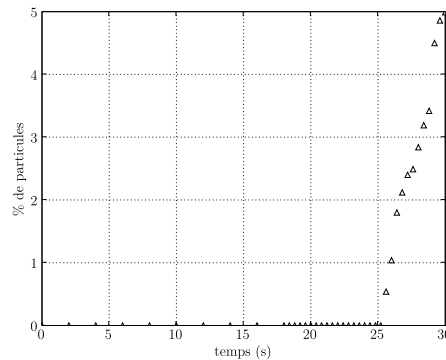
(a) *Particules attachées*(b) *Particules dans la cavité*(c) *Particules éjectées*

FIG. 3.8 – Pourcentage des particules présentes dans la cavité, attachées ou éjectées en fonction du temps.

3.3.4 Temps de calcul

En termes de coûts de calcul, l'approche POD/système dynamique se révèle être très avantageuse pour l'application à la dispersion de particules, en comparaison avec

l'approche par LES². On estime alors que le calcul de la dispersion de particules nécessite 19 jours de temps de calcul alors que l'approche par POD et système dynamique ne demande que 3 jours et 10 heures de temps CPU³.

3.4 Cavité entraînée 3D

Dans cette partie, on présente les résultats obtenus sur le calcul de la dispersion de particule dans une cavité entraînée cubique unitaire ($l_{ref} = 1$). La configuration du problème est rappelée sur le schéma 3.9. Comme indiqué sur le schéma, la face

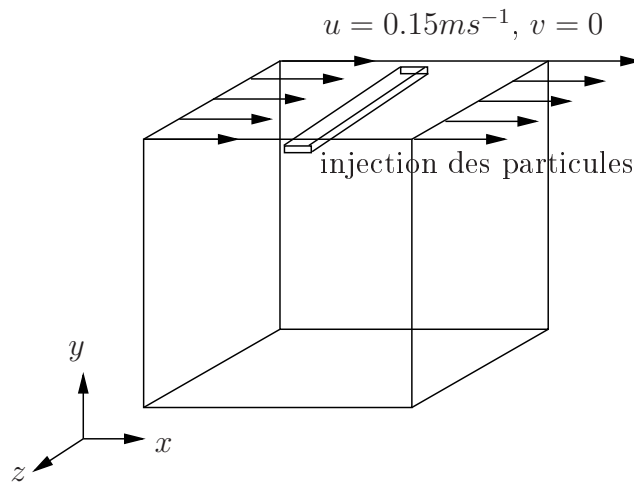


FIG. 3.9 – Configuration de la cavité entraînée 3D

supérieure entraîne le fluide de viscosité cinématique $\nu = 15 \times 10^{-6}$ à une vitesse égale à $U_{ref} 0.15 m s^{-1}$ ce qui correspond à un nombre de Reynolds valant $Re = 10000$. Le nuage de particules est lâché dans la partie haute de la cavité, proche de la paroi horizontale supérieure. Le domaine où se situe les particules à l'instant $t = 0s$ est repéré par les coordonnées suivantes :

$$0.03m < x_p < 0.07m \quad 0.48m < y_p < 0.49 \quad -0.05m < z_p < 0.05m$$

Le domaine de calcul a été discrétisé en utilisant un maillage non-uniforme de $58 \times 58 \times 58$ cellules. La figure 3.10 présente l'écoulement moyen dans le plan médian

²La simulation LES-particules n'a pas été faite pour cause d'incompatibilité entre le code Star-CD et le code particules. Cependant, à partir du temps de simulation LES faite sur l'échantillonnage et du temps de calcul du programme particule seul, on peut faire une estimation du temps de calcul de l'approche couplée.

³Le temps de calculs rapportés ont été obtenus par des calculs sur un ordinateur IBM SP.

vertical $z = 0$ obtenu par le calcul LES à partir duquel les particules vont être injectées.

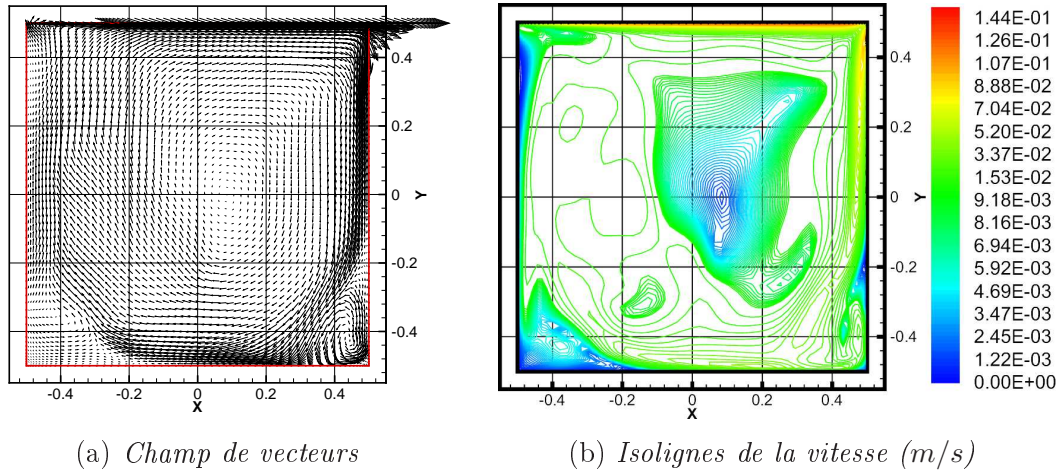


FIG. 3.10 – Écoulement moyen dans le plan médian vertical $z = 0$ obtenu par LES.

3.4.1 Application de la POD

Une fois que l'écoulement turbulent simulé par LES est établi, la POD est alors appliquée sur la vitesse fluctuante avec 100 snapshots pris toutes les 0.1s. Comme dans la partie 3.3.1, on calcule la contribution énergétique de chaque mode ainsi que le résidu entre la solution reconstruite avec N modes et la solution de référence défini par la relation (3.30), en norme $L^2(\Omega)$. Le tableau 3.4.1 résume les différents résultats obtenus pour les quatre premiers modes. Là encore, on constate que le premier mode

Mode n	λ_n	$100 \times E_c$	r_N
1	$4.61 \cdot 10^{-6}$	85.24	$2.31 \cdot 10^{-1}$
2	$6.76 \cdot 10^{-7}$	97.73	$5.33 \cdot 10^{-2}$
3	$9.94 \cdot 10^{-8}$	99.56	$1.44 \cdot 10^{-2}$
4	$1.90 \cdot 10^{-8}$	99.81	$3.95 \cdot 10^{-3}$

TAB. 3.4.1 – Quatre premières valeurs propres obtenues par la POD appliquée au cas de la cavité entraînée 3D, énergie et résidus correspondants

contient la quasi-totalité de l'énergie du système. Ainsi, les quatre premiers modes contiennent 99.81% de l'énergie et le résidu correspondant est inférieur à $4 \cdot 10^{-3}$. La vitesse fluctuante est donc bien reconstruite avec ces 4 modes. Le système dynamique va donc construit avec ces modes.

3.4.2 Système dynamique

Dans un premier temps, le système dynamique fluctuant⁴ (3.36) est résolu sur la phase d'échantillonnage. Sur la figure 3.11, n a représenté l'évolution temporelle des coefficients $a_n(t)$. sans le terme de pression pour une durée de 120 secondes, c'est-à-dire 12 fois supérieure à la période nécessaire à la construction de la base ($T_{POD} = 10s$). Là encore, on s'intéresse à l'évolution temporelle des coefficients $a_n(t)$ sur la période d'échantillonnage, comme représenté sur la figure 3.11. La solution de référence, notée REF, est obtenue par projection de la solution LES sur la base POD obtenue. On constate sur la figure 3.11 que le système dynamique ne dissipe pas assez

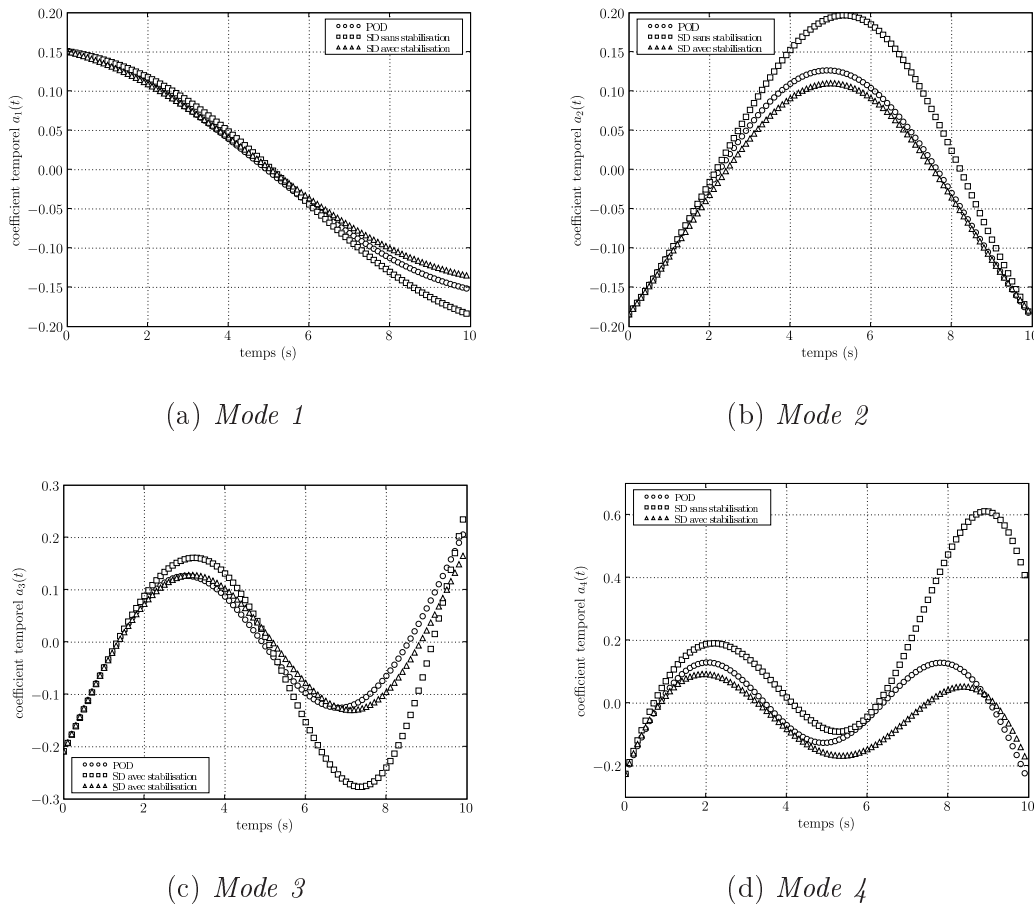


FIG. 3.11 – Evolution temporelle des 4 premiers modes obtenue par intégration du système dynamique sur la phase d'échantillonnage.

d'énergie, puisque l'on a négligé les plus petits modes. Comme on l'a mentionné dans la partie bibliographique, ce problème a largement été rencontré dans la littérature, et la méthode la plus simple et la plus utilisée, est d'ajouter une viscosité artificielle

⁴dans cet exemple, le terme de pression est exactement nul car les modes propres ϕ_i respectent les conditions aux limites, c'est-à-dire $\phi_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N$.

constante pour que le système dynamique dissipe plus d'énergie. Cette approche a été utilisée dans cet exemple. La viscosité rajoutée ν_t a été prise égale à $\nu_t = 2 \times 10^{-5}$ et les résultats obtenus (notés *SD avec stabilisation*) sont comparés avec ceux obtenus par résolution directe du système dynamique. On constate une large amélioration des résultats, surtout pour les modes les moins énergétiques. La figure 3.12 présente

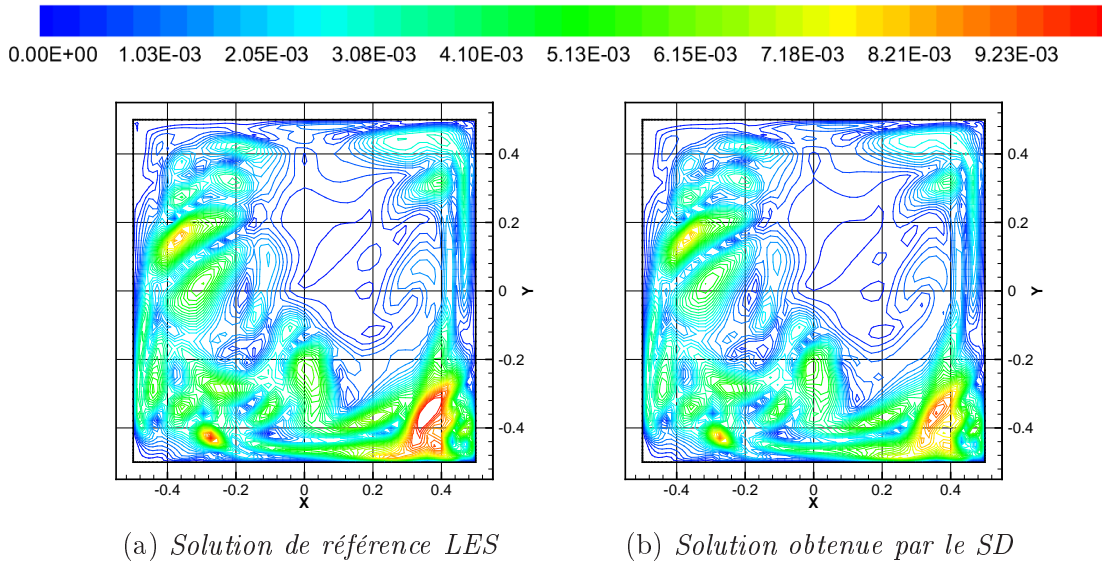


FIG. 3.12 – Isolignes de vitesse fluctuante au temps $t = 9s$ dans le plan $z = 0$.

une comparaison qualitative entre la vitesse de référence obtenue par LES et la vitesse obtenue par le système dynamique avec 4 modes au bout de $t = 9s$ dans le plan médian vertical $z = 0$. Sur cette figure on constate que, malgré quelques petites différences entre les deux vitesses, le système dynamique est capable de reproduire assez fidèlement l'écoulement.

3.4.3 Dispersion de particules

Dans cette partie, on traite la dispersion de particules sur un intervalle de 120 secondes pour deux tailles de particules, c'est-à-dire de diamètres $d_p = 5\mu m$ et $d_p = 10\mu m$. Le pas de temps imposé par l'équation de mouvement de la particule vaut ici $\Delta t_p = 2 \cdot 10^{-4}s$. Pour la première taille de particules, on teste tout d'abord l'influence du nombre de particules injectées dans la cavité. La figure 3.13 montre l'évolution du pourcentage de particules attachées sur la paroi horizontale inférieure de la cavité au cours du temps pour des nuages de 1000, 5000 et enfin 10000 particules. On constate ainsi qu'à partir de 5000 particules on obtient des résultats statistiquement indépendants. Dans la suite de l'étude on ne considère donc plus que le cas d'un nuage de 5000 particules.

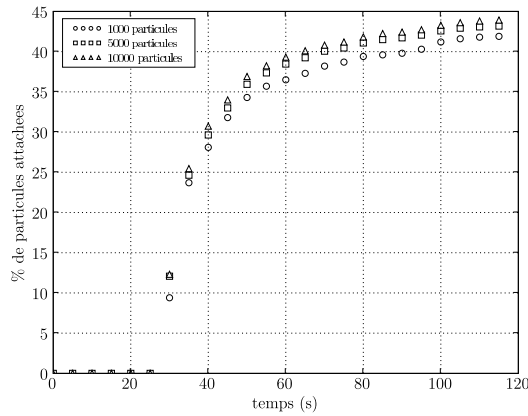
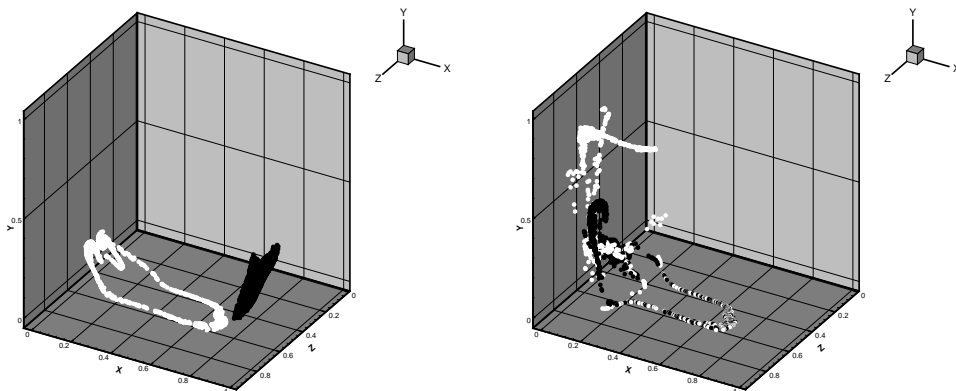


FIG. 3.13 – Evolution temporelle du pourcentage de particules attachées sur la paroi horizontale inférieure de la cavité ($d_p = 5\mu m$)

La figure 3.14 montre l'évolution temporelle des particules dans la cavité. On constate



(a) en noir : $t = 20s$, en blanc : $t = 64s$ (b) en noir : $t = 80s$, en blanc : $t = 120s$

FIG. 3.14 – Evolution temporelle de la dispersion des particules pour différents temps après l'injection ($d_p = 5\mu m$).

là encore sur cette figure que les petites particules suivent l'écoulement présenté sur la figure 3.10. La figure 3.15 montre quand à elle l'évolution temporelle de la dispersion de particules pour des particules de diamètre $d_p = 10\mu m$ cette fois-ci. Les particules dans ce cas sont bien plus lourdes donc l'importance de la force de gravité est nettement plus importante. Ainsi, l'écoulement n'est pas suffisamment important pour parvenir à soulever les particules jusqu'en haut de la cavité et donc la quasi-totalité des particules est attachée au bout de seulement⁵ $t \approx 80s$.

⁵contre seulement 35% environ pour $d_p = 5\mu m$

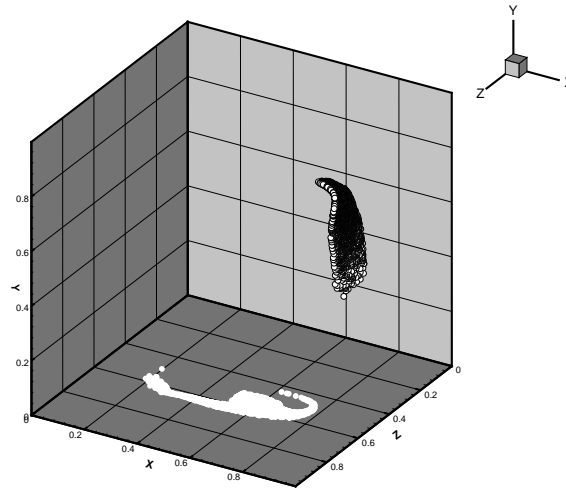


FIG. 3.15 – Evolution temporelle de la dispersion des particules pour différents temps après l’injection ($d_p = 10\mu m$), en noir : $t = 20s$, en blanc : $t = 64s$.

3.4.4 Temps de calcul

Le calcul de l’écoulement par LES a été parallélisé et effectué avec 10 processeurs. Le pas de temps utilisé pour cette simulation vaut $\Delta t_f = 0.01s$. Résoudre $T_{sample} = 10s$ de l’écoulement avec ces paramètres a donc nécessité environ 40 minutes. Le temps de calcul de la base à partir des 100 snapshots est de 10 minutes alors que la résolution du problème couplé SD/particules sur $T_{tot} = 120s$ a nécessité 40 heures de calcul avec un processeur.

Il a été estimé que le temps nécessaire pour la résolution sur 120 secondes du problème avec une approche LES/particules et un pas de temps $\Delta t_f = 2 \cdot 10^{-4}$ aurait été supérieur à une semaine avec 10 processeurs alors que la simulation POD (échantillonnage compris) n’a requis que 41 heures.

L’approche POD couplée avec un système dynamique se révèle donc très performante pour l’application à la dispersion de particules.

3.5 Conclusions

Dans ce chapitre, l’approche système réduit par POD a été appliqué à la dispersion de particules. La base POD a été construite à partir de snapshots obtenus par LES. Le système dynamique fluctuant construit à partir des modes prépondérants au niveau énergétique est alors capable de décrire la dynamique de l’écoulement. De plus, le stockage des caractéristiques de l’écoulement nécessitant uniquement de

sauvegarder les modes POD, il est aisé de tester plusieurs configurations – tailles de particules différentes, positions différentes de l’injection – avec un effort réduit en terme de temps CPU. L’approche a donc montré son efficacité en terme de temps de calcul en comparaison avec des approches DNS ou même LES. Cependant, il a été constaté que l’essentiel du temps de calcul dans l’approche POD est imputable à la phase d’échantillonnage nécessaire à la construction de la base POD. Ainsi, les performances de la POD sont limitées par la résolution de l’écoulement sur l’échantillonnage de l’écoulement.

Pour faire face à cette limitation, on se propose d’utiliser une méthode de construction itérative de la base, basée sur des améliorations et enrichissements successifs de la base afin de construire sur l’intervalle T_{sample} une base qui décrive correctement l’écoulement. Le chapitre suivant présente cette méthode de construction de la base *a priori*, la méthode APR.

Chapitre 4

La méthode de *Réduction a priori*

Les méthodes basées sur la décomposition de Karhunen-Loève sont des méthodes de réduction de données *a posteriori*. Le problème est ramené ainsi à un nombre réduit de degrés de liberté mais cela nécessite néanmoins la connaissance préalable de données de l'écoulement. On a vu dans le chapitre précédent que, numériquement, l'obtention de ces données est très coûteuse. Ryckelynck [67, 68] a ainsi développé une méthode de réduction *a priori* pour des problèmes thermomécaniques. Il utilise une procédure incrémentale basée sur des améliorations de la qualité de la base sur un intervalle de temps donné pour résoudre ces problèmes. Ammar *et al.* [6] et Ryckelynck *et al.* [69] utilisent également l'approche de réduction *a priori* pour des problèmes d'élasticité non-linéaire et d'éléments de frontière.

Dans ce chapitre, on présente cette approche de réduction en insistant sur les étapes importantes de la construction itératives de la base de projection des équations, et on l'applique sur différentes équations de transfert. L'objectif étant de traiter les équations de Navier-Stokes, les équations de transfert étudiées ont été choisies par degré de complexité croissant afin de se rapprocher des équations de Navier-Stokes. Ainsi, le cas de l'équation de convection-diffusion 2D a été étudié. Cette équation linéaire, instationnaire, nous a donc servi de premier exemple simple pour valider la méthode. Ensuite l'étude s'est portée sur l'équation de Burgers 1D. Cette équation, identique à l'équation de quantité de mouvement dans Navier-Stokes sans le terme de pression est donc souvent étudiée comme modèle simplifié des équations de Navier-Stokes, voire notamment les articles de Kunisch et Volkwein [43, 44] qui appliquent la POD sur l'équation de Burgers, en présentant également une approche de contrôle. Elle est également très importante pour de nombreuses autres applications dans des domaines allant de la physique statistique à la cosmologie en passant par l'étude de la turbulence hydrodynamique. Plus de détails sur ces exemples peuvent être trouvés dans la récente revue bibliographique de Bec et Khanin [14] sur la turbulence analysée par les équations de Burgers. Enfin un dernier

exemple, l'équation de Burgers 2D, sera également rapidement abordé de façon à aborder un cas non-linéaire en 2D.

Les résultats seront, pour les deux premiers exemples cités ci-dessus, présentés de la façon suivante :

- dans un premier temps on présente le cas-test étudié ainsi que sa solution analytique associée qui sert de solution de référence tout au long de l'étude.
- Ensuite la méthode APR est appliquée sur un intervalle de temps T que l'on a appelé période de construction de la base dans la partie 4.
- La snapshot POD est également appliquée à chaque problème et les modes POD et APR sont comparés. Les résultats obtenus par l'APR sont alors comparés à ceux obtenus par la POD à l'aide de la solution de référence.
- Enfin, une approche par système dynamique pour simuler la solution sur des temps plus longs que la durée de construction de la base (POD ou APR) est présentée.

La partie 4.5 donnera enfin quelques conclusions intermédiaires sur les différents résultats de cette étude.

4.1 Description de la méthode de réduction a priori

4.1.1 Problème étudié

Dans toute cette partie, on note l'inconnue du problème $u(\mathbf{x}, t)$ définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (4.1)$$

où Ω est un sous-espace de \mathbb{R}^n . Lorsque aucune confusion n'est possible, l'inconnue $u(\mathbf{x}, t)$ est notée \mathbf{u} . Le problème que l'on cherche à étudier ici est le suivant :

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \text{ tel que } \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathcal{G} & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ + \text{conditions aux limites} \\ + \text{condition initiale} \end{cases} \quad (4.2)$$

La forme discrète associée au problème (4.2) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}_h}{dt} + \mathcal{F}_h(\mathbf{u}_h) = \mathcal{G}_h & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ + \text{conditions aux limites} \\ + \text{condition initiale} \end{cases} \quad (4.3)$$

où on note $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h(t)$ l'inconnue du problème que l'on a discrétisé spatialement. De même, \mathcal{F}_h et \mathcal{G}_h sont les opérateurs discrets relatifs à \mathcal{F} et \mathcal{G} de la formulation continue (4.2). Cette forme discrète peut être indifféremment obtenue par une méthode différences finies comme ce sera le cas par la suite pour l'équation de Burgers, mais aussi par une méthode volumes finis, comme pour les équations de convection-diffusion et de Navier-Stokes, ou encore par éléments finis.

L'objectif de la méthode APR (*A Priori Reduction*) est, tout comme la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD), d'obtenir une décomposition de la solution $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t)$ sur une base spatiale $\{\phi_k(\mathbf{x})\}_{k=1, \dots, N}$ de dimension N très faible comparée à la taille du système discrétisé, telle que l'on puisse écrire :

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \quad (4.4)$$

La différence par rapport à la POD, décomposition de KL et autres SVD vient de la construction de la base. En effet, si dans toutes ces méthodes la base est construite à partir de la connaissance de la solution pour un échantillon temporel, la méthode APR, quant à elle, n'utilise aucune connaissance préalable pour construire sa base, d'où le terme *a priori* par opposition aux autres méthodes qui elles sont des méthodes *a posteriori*. La philosophie de la méthode APR est une correction itérative de la base jusqu'à en obtenir une qui décrit le mieux possible la solution $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t)$ sur tout l'intervalle de temps considéré.

4.1.2 Initialisation de la base

La première étape de l'algorithme de réduction a priori est donc, puisqu'il s'agit d'une méthode itérative, l'initialisation de la base. Il est à noter que l'on peut partir de n'importe quelle base pour initialiser l'algorithme. Dans ce document, la plupart du temps on a choisi de considérer comme base initiale la condition initiale du problème étudié. L'influence du choix de cette base sera étudié dans la suite de ce chapitre.

4.1.3 Construction du modèle d'ordre faible

Dans cette partie, et dans la suite, puisque l'on se place dans l'espace $L^2(\Omega)$, on note dans un souci de simplification le produit scalaire¹ $(\bullet, \bullet)_{L^2(\Omega)} = (\bullet, \bullet)$. On se

¹Ryckelynck dans ses travaux utilise quant à lui la norme euclidienne

place ici à la $j^{\text{ème}}$ itération de la méthode APR. A cette itération, le nombre de modes retenus est noté N_j et la décomposition de l'inconnue s'écrit alors :

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \quad (4.5)$$

Il faut alors construire le modèle réduit. Pour ce faire, on introduit cette relation dans l'expression du problème 4.3. On obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right] + \mathcal{F}_h \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right] = \mathcal{G}_h \quad (4.6)$$

Ensuite, l'expression (4.6) est projetée sur la base APR. Pour tout $n = 1, \dots, N_j$, on a alors :

$$\left(\frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right] + \mathcal{F}_h \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right], \phi_n(\mathbf{x}) \right) = (\mathcal{G}_h, \phi_n(\mathbf{x})) \quad (4.7)$$

En réarrangeant l'expression (4.7), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{N_j} (\phi_k(\mathbf{x}), \phi_n(\mathbf{x})) \frac{da^k(t)}{dt} + \left(\mathcal{F}_h \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right], \phi_n(\mathbf{x}) \right) = (\mathcal{G}_h, \phi_n(\mathbf{x})) \quad (4.8)$$

L'expression (4.8) représente alors la nouvelle équation à résoudre, de dimension réduite N_j , respectif à la $j^{\text{ème}}$ itération. Le problème peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} + f_h(a(t), t) = g_h \\ a(0) = a_0 \end{cases} \quad (4.9)$$

où les nouvelles inconnues sont les coefficients temporels $a(t) = (a^1(t), \dots, a^{N_j}(t))^T$; f_h et g_h désignent les opérateurs discrets associés au modèle d'ordre faible et $a_0 = (a^1(0), \dots, a^{N_j}(0))^T$ est la condition initiale du système réduit.

4.1.4 Résolution du modèle d'ordre faible et calcul des résidus

Notons maintenant T la durée de résolution du problème (4.2) que l'on va appeler période de construction de la base APR². Cette période est discrétisée temporellement en M pas de temps, que l'on note $t_i \in T$, $i = 1, \dots, M$. La résolution

²même si l'on résout également le problème, dans la démarche de couplage de la méthode APR avec un système dynamique, cette phase correspond principalement à la détermination itérative de la base.

du système (4.9) fournit les coefficients temporels $a(t_i)$, pour tout $i = 1, \dots, M$. Connaissant les $a_n(t)$, la solution complète est donc reconstruite pour chaque pas de temps t_i en utilisant la relation (4.4) et les résidus du modèle complet correspondants peuvent ainsi être évalués. On définit les résidus de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right] + \mathcal{F}_h \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right] - \mathcal{G}_h \end{array} \right. \quad (4.10)$$

La norme de ce résidu est également évaluée et comparée au critère de convergence ε fixé par l'utilisateur qui détermine la fin des itérations APR. Ce résidu représente par ailleurs la qualité de la base en cours. Si le critère de convergence n'est pas vérifié pour un pas de temps $t_i \in T$, $i = 1, \dots, M$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)\| < \varepsilon \quad \forall t < t_i \text{ et } \|\mathbf{R}(\mathbf{x}, t_i)\| > \varepsilon \quad (4.11)$$

Celà signifie que la base ne représente pas correctement la dynamique du système sur tout l'intervalle de temps. Elle doit donc être *mise à jour* afin de tenir compte de nouveaux éléments de la dynamique du problème. Dans ce cas, le critère d'arrêt de l'algorithme n_{CV} vaut 0. L'algorithme s'arrête lorsque, pour tout $t \in T$, on a :

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)\| < \varepsilon$$

et dans ce cas là, le critère d'arrêt de l'algorithme n_{CV} vaut 1, la base est sauvegardée et la solution est correcte sur tout l'intervalle de temps.

4.1.5 Mise à jour de la base

La mise à jour de la base s'effectue en deux étapes :

- une première étape d'*amélioration* qui a pour but de ne garder que les éléments significatifs de la base avec laquelle on vient de projeter le système complet.
- une deuxième étape d'*enrichissement* de la base où le manque d'informations caractérisé par les résidus va être pris en compte.

Amélioration. Dans un premier temps, on se sert des informations recueillies sur les coefficients temporels obtenus lors de la résolution du système réduit (4.9) à la j -ème itération APR. Pour ce faire, on extrait les informations principales de la résolution de (4.9) à l'aide d'une décomposition de Karhunen-Loève effectuée sur l'ensemble des coefficients temporels, noté ici $\Xi = \{a(t_i), i = 1, \dots, M\}$. Le problème se ramène donc à déterminer les solutions du problème aux valeurs propres suivant :

$$[K] \mathbf{V} = \lambda \mathbf{V} \quad (4.12)$$

où $[K]$ est la matrice de corrélation de taille³ $N_j \times N_j$ associée à l'ensemble Ξ , définie de la façon suivante :

$$K_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M a_i(t_k) a_j(t_k) \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, N_j \quad (4.13)$$

La résolution de ce problème conduit à N_j valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{N_j}$ dont on ne garde que celles qui ont une contribution significative dans l'ensemble des données Ξ . Ainsi, on ne garde que les q valeurs propres, où $q \in \{1, \dots, N_j\}$, telles que :

$$\lambda_q > \eta \lambda_1 \quad \text{et} \quad \lambda_{q+1} < \eta \lambda_1 \quad (4.14)$$

où η est le critère de sélection des modes propres fixé par l'utilisateur. La base améliorée $\tilde{\phi}$ s'obtient grâce à la relation :

$$\tilde{\phi}_k = \sum_{i=1}^N \phi_i V_i^k \quad \text{pour } k = 1, \dots, q \quad (4.15)$$

où V^k est le vecteur propre associé à la valeur propre λ_k , pour tout $k = 1, \dots, q$.

Enrichissement. Après avoir retenu toutes les informations issues de la résolution du système réduit, on s'intéresse maintenant à la deuxième phase de la mise à jour, c'est-à-dire la phase d'enrichissement de la base à partir des résidus calculés.

En effet, comme il a déjà été souligné auparavant, si à un instant $t^+ \in T$ la norme du résidu $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t^+)$ dépasse le critère de convergence fixé, c'est-à-dire si l'on a :

$$\forall t < t^+, \quad \|\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|\mathbf{R}(\mathbf{x}, t^+)\| = \|\mathbf{R}^+\| > \varepsilon \quad (4.16)$$

celà signifie que la base de l'itération courante est capable de reproduire la solution uniquement jusqu'à ce temps t^+ – exclus – et qu'après la base n'est pas suffisante.

Le vecteur qui va être retenu pour l'enrichissement est donc le premier résidu qui ne satisfait pas le critère de convergence choisi par l'utilisateur $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t^+) = \mathbf{R}^+$. A partir de ce résidu, on forme le sous-espace de Krylov d'ordre m correspondant :

$$\mathcal{K}^m = \{\mathbf{R}^+, \mathbf{J}\mathbf{R}^+, \mathbf{J}^2\mathbf{R}^+, \dots, \mathbf{J}^{m-1}\mathbf{R}^+\} \quad (4.17)$$

où \mathbf{J} est la matrice jacobienne du système (4.3).

³on rappelle que N_j est le nombre de modes à l'itération j

Nouvelle base. Ainsi, la nouvelle base ϕ^{j+1} pour l'itération $(j + 1)$ de l'APR est constituée de la base améliorée $\tilde{\phi}$ enrichie avec le sous-espace de Krylov \mathcal{K}^m associé au résidu \mathbf{R}^+ :

$$\phi^{j+1} = \{\tilde{\phi}, \mathcal{K}^m\} \quad (4.18)$$

Tous les vecteurs de cette base ont par ailleurs été normé mais ne sont pas nécessairement orthogonaux. On peut d'ores et déjà noter que dans nos applications, nous avons considéré le sous-espace de Krylov d'ordre 1.

L'algorithme 1 résume la démarche adoptée par la suite pour traiter une équation de transfert quelconque à l'aide de la méthode APR. Dans le cas des équations de Navier-Stokes, qui représentent un problème mixte, l'algorithme présenté ici devra subir quelques modifications. Celles-ci seront présentées dans le chapitre 5.

Algorithme 1 Méthode APR

Problème: Equation de transfert discrète : $\frac{d\mathbf{u}_h}{dt} + \mathcal{F}_h(\mathbf{u}_h) = \mathcal{G}_h$, condition initiale :
 $\mathbf{u} = \mathbf{CI}$

But: Trouver $\phi_k, k = 1, \dots, N$ tel que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N a^k(t)\phi_k(\mathbf{x})$

INITIALISATION DE LA BASE $\phi^{init} = \{\mathbf{CI}\}$ ou choix aléatoire

$\phi \leftarrow \phi^{init}$

pour $j = 1$ à N_{APR} **faire**

INITIALISATION DE n_{CV} POUR LE CALCUL DU RÉSIDU $n_{CV} = 1$

PROJECTION DE (4.2) SUR LA BASE $\phi \rightarrow (4.7)$, $dim(\phi) = N_j$

pour $t_i \in T, i = 1$ à M **faire**

RÉSOLUTION DE (4.9) $\Rightarrow a_k(t_i) \quad \forall k = 1, \dots, N_j$

RECONSTRUCTION DE LA SOLUTION $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_j)$ AVEC (4.4)

si $n_{CV} = 1$ **alors**

CALCUL DU RÉSIDU $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t_j)$

fin si

CRITÈRE DE CONVERGENCE

si $\|\mathbf{R}(\mathbf{x}, t_i)\| > \varepsilon$ **alors**

$\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}(\mathbf{x}, t_i)$

$n_{CV} = 0$

sinon

$n_{CV} = 1$

fin si

fin pour

si $n_{CV} = 0$ **alors**

AMÉLIORATION DE LA BASE ϕ PAR KL (4.15) $\rightarrow \tilde{\phi}$

ENRICHISSEMENT DE LA BASE $\tilde{\phi}$ PAR SOUS-ESPACE DE KRYLOV \mathcal{K}^m (4.17)

NOUVELLE BASE FORMÉE $\phi \leftarrow \{\tilde{\phi}, \mathcal{K}^m\}$

sinon

ALGORITHME CONVERGÉ

fin si

fin pour

4.2 Equation de convection-diffusion

4.2.1 Problème étudié

Dans cette partie, on étudie l'équation de convection-diffusion bidimensionnelle rappelée ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \theta - \nu \Delta \theta = 0 \text{ dans }]0, 2[\times]0, 2[\times]0, T[\\ \mathbf{V} = \alpha(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \\ \theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y) = \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{\nu} - \frac{(y-y_0)^2}{\nu}\right) \\ + \text{conditions aux limites, voir (4.20)} \end{cases} \quad (4.19)$$

où \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y représentent respectivement les deux vecteurs unitaires dans les directions x et y et (x_0, y_0) représentent les coordonnées de la valeur maximale de la variable scalaire.

Cet exemple a été traité en utilisant la méthode des volumes finis. Il permet de tester la méthode sur une configuration 2D, avec la connaissance d'une solution analytique comme élément de comparaison.

La solution analytique que l'on trouve dans [78] est rapportée ci-dessous :

$$\theta(x, y, t) = \frac{1}{4t+1} \exp\left[-\frac{(x-\alpha t-x_0)^2}{\nu(4t+1)} - \frac{(y-\alpha t-y_0)^2}{\nu(4t+1)}\right] \quad (4.20)$$

Les conditions aux limites sont calculées à partir de cette solution analytique. Dans la suite de l'étude, sauf précision contraire, le coefficient de convection α a été pris égal à 0.8 et la diffusivité vaut $\nu = 10^{-2}$. De plus la solution initiale a été centrée au point $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$. Dans toute la suite de l'étude sur l'équation de convection-diffusion, le maillage utilisé est un maillage uniforme 200×200 et le pas de temps de calcul a été fixé à $\Delta t = 1.25 \cdot 10^{-4} s$. Le schéma temporel utilisé est un schéma de Crank-Nicholson. La résolution du modèle dit *complet*, c'est-à-dire la résolution numérique directe des équations discrétisées, a été quant à elle effectuée en utilisant la méthode gradient biconjugué (implémentée à l'aide des routines que l'on peut trouver dans [57]), que l'on notera par la suite BiCG pour *BiConjugate Gradient*. La figure 4.1 montre l'évolution de la solution analytique pour quatre instants différents. La vitesse de convection valant $\mathbf{V} = \alpha(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$, la solution se déplace le long de la diagonale tout en voyant son intensité diminuer du fait de la diffusion ν .

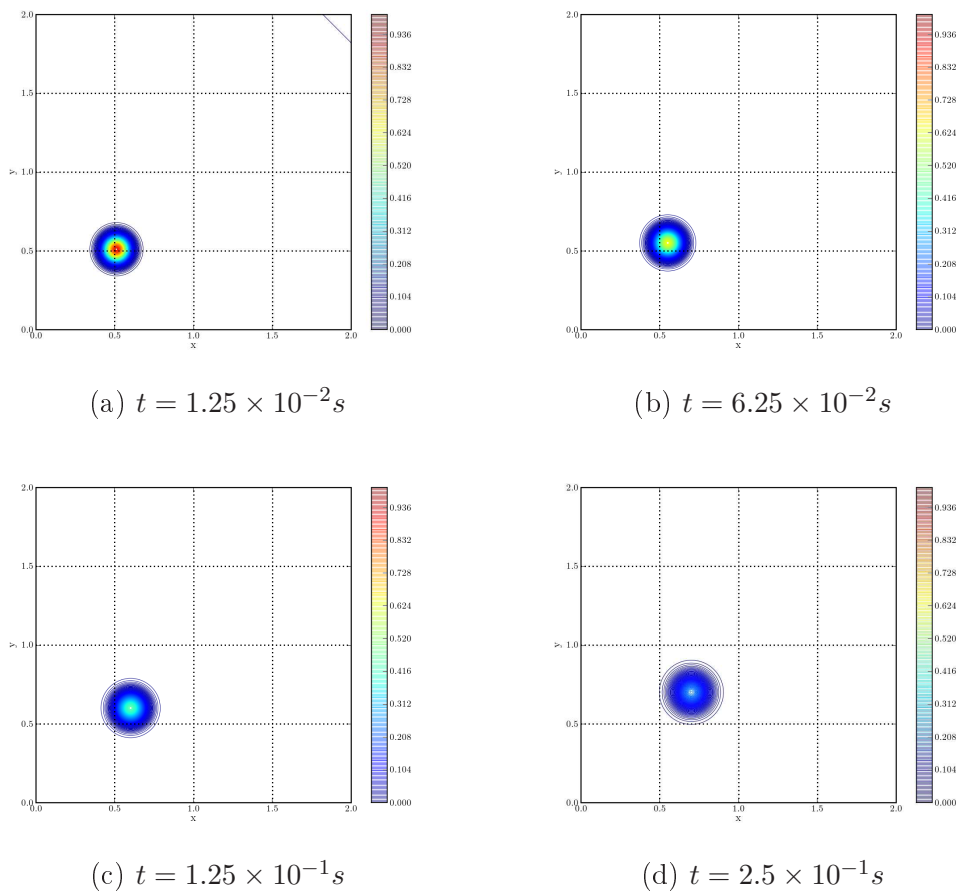


FIG. 4.1 – Evolution temporelle de la solution analytique

4.2.2 Application de l'APR

Dans cette partie, les paramètres de calculs suivants ont été adoptés :

- La période sur laquelle la base APR a été calculée, et ainsi sur laquelle l'équation est en même temps résolue a été choisie égale à $T = 100\Delta t = 1.25 \cdot 10^{-2}s$.
- le critère de convergence a été pris égal à $\varepsilon = 10^{-7}$.
- le critère de sélection des modes propres pour la phase d'amélioration de la base APR a été pris égal à $\eta = 10^{-14}$.
- le mode APR initial a été pris égal à la condition initiale du problème traité.

On a donc :

$$\phi^{init}(x, y) = \theta_0(x, y) = \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{\nu} - \frac{(y - y_0)^2}{\nu}\right)$$

La résolution de l'équation de convection-diffusion par la méthode APR sur l'intervalle d'échantillonnage T s'effectue avec tous les paramètres précédemment définis en seulement 5 itérations de calcul, représentant un temps de calcul de 5.2s. La base obtenue à la fin du calcul comporte par ailleurs 5 modes.

Afin de tester la précision de la solution, on introduit ici plusieurs définitions de l'erreur de calcul comparée à la solution analytique. Tout d'abord on définit l'erreur en norme $L^2(\Omega)$ de la façon suivante :

$$\mathcal{E}_{L^2}(t) = \|\theta_{calc}(\mathbf{x}, t) - \theta_{an}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.21)$$

où $\theta_{calc}(\mathbf{x}, t)$ représente la solution calculée aussi bien par la méthode *complète* que par une méthode *réduite* (POD ou APR), et $\theta_{an}(\mathbf{x}, t)$ est la solution analytique pour le temps t considéré. Ensuite, puisque la norme $L^2(\Omega)$ a tendance à *lisser* l'erreur sur le domaine Ω , on introduit également une erreur définie en norme sup comme suit :

$$\mathcal{E}_{sup}(t) = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\theta_{calc}(\mathbf{x}, t) - \theta_{an}(\mathbf{x}, t)| \quad (4.22)$$

Le tableau ci-dessous 4.2.1 résume les résultats obtenus par l'APR au niveau vitesse de calcul et précision en comparaison avec le modèle complet. On

	temps CPU	$\mathcal{E}_{L^2}(t = T)$	$\mathcal{E}_{sup}(t = T)$
APR	5.21s	$5.68 \cdot 10^{-5}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$
BiCG	8.63s	$5.68 \cdot 10^{-5}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$

TAB. 4.2.1 – Temps CPU, erreur L^2 et erreur en norme sup des méthodes APR (critère de convergence $\varepsilon = 10^{-7}$) et gradient biconjugué (BiCG)

constate sur cet exemple que la méthode APR est 1.5 plus rapide tout en conservant

une erreur identique à celle obtenue par le modèle complet, résolu par la méthode du gradient biconjugué.

4.2.3 Application de la POD

Afin de tirer des informations sur les modes obtenus par la méthode, on effectue une POD sur le même échantillon temporel qu'a été résolue l'équation de convection-diffusion avec la méthode APR. La base POD a été calculée sur l'échantillon temporel T , en prenant $M = 100$ snapshots⁴ tous les Δt . Les cinq premières valeurs propres sont représentés dans le tableau 4.2.2. De plus, il présente aussi l'énergie et le résidu correspondants à chaque mode, comme définis par les relations (3.28) et (3.30) dans le chapitre 3. On constate sur cet exemple que les deux premiers modes

Mode n	λ_n	$100 \times E_c$	res_N
1	$0.15 \cdot 10^{-1}$	99.83	$4.87 \cdot 10^{-3}$
2	$0.26 \cdot 10^{-4}$	≈ 100	$5.45 \cdot 10^{-6}$
3	$0.18 \cdot 10^{-7}$	≈ 100	$3.36 \cdot 10^{-9}$
4	$0.84 \cdot 10^{-11}$	≈ 100	$1.44 \cdot 10^{-12}$
5	$0.30 \cdot 10^{-14}$	≈ 100	$4.75 \cdot 10^{-16}$

TAB. 4.2.2 – Cinq premières valeurs propres obtenues par la POD, énergie et résidu correspondants

contiennent à eux seuls la quasi-totalité de l'énergie. De même, on constate que le résidu diminue très rapidement avec le nombre de modes que l'on conserve pour la reconstruction de la solution. Pour seulement 5 modes, on atteint un résidu de l'ordre de la précision machine. Sur la figure 4.2, les modes APR sont comparés aux modes POD. On observe que les modes APR obtenus sont très proches des modes propres issus de la POD. Pour comparer quantitativement les différences entre les modes obtenus par l'APR et les modes POD, on calcule l'erreur de reconstruction (en norme $L^2(\Omega)$ et norme sup) des solutions POD et APR en fonction du nombre de modes retenus. Le tableau 4.2.3 présente les résultats obtenus. On constate que l'erreur de reconstruction varie très peu en fonction du nombre de modes retenus dans la reconstruction de la solution à partir de $N = 3$. L'influence des derniers modes est donc relativement faible et l'erreur de reconstruction obtenue par l'APR est du même ordre de grandeur que pour la POD. Ainsi, les modes obtenus par l'APR sont très similaires aux modes POD. Afin de confirmer ce résultat la figure 4.3 présente également l'évolution des coefficients temporels $a(t)$ sur l'intervalle d'échantillonnage T . Là encore, on s'aperçoit que l'évolution temporelle des coefficients correspondants aux premiers modes APR est très proche de ceux correspondants aux modes POD.

⁴calculés à partir de la solution analytique

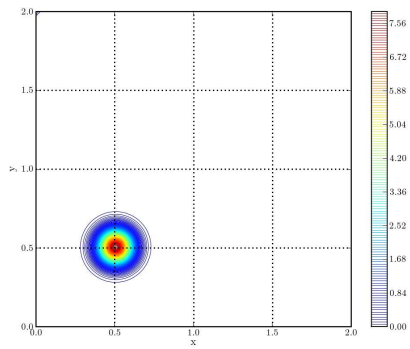
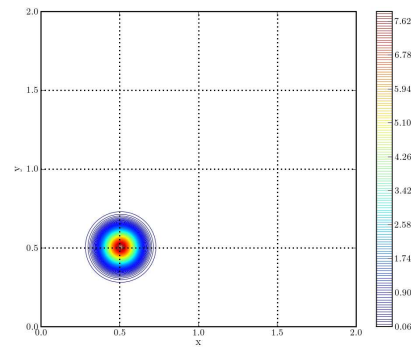
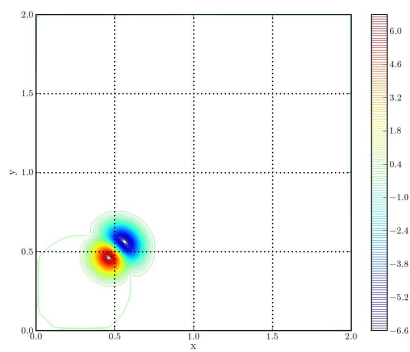
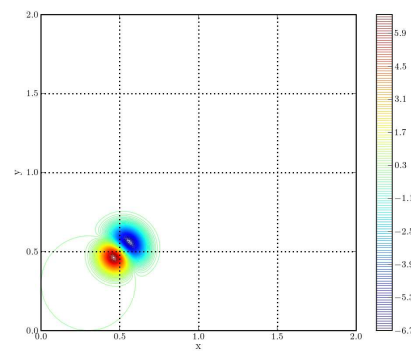
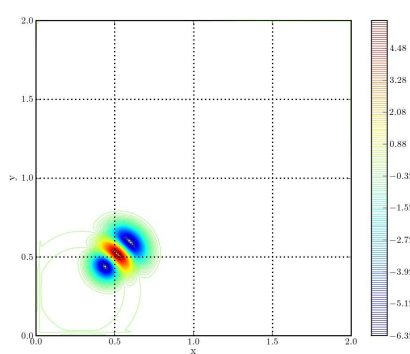
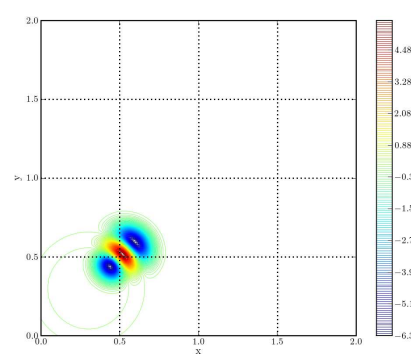
(a) *Mode APR 1*(b) *Mode POD 1*(c) *Mode APR 2*(d) *Mode POD 2*(e) *Mode APR 3*(f) *Mode POD 3*

FIG. 4.2 – Comparaison entre les modes POD et APR

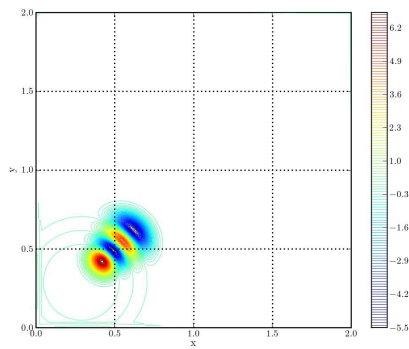
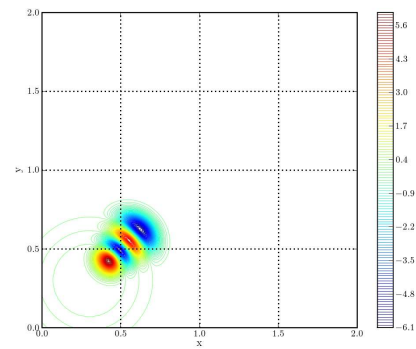
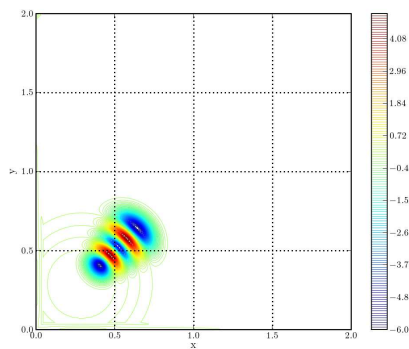
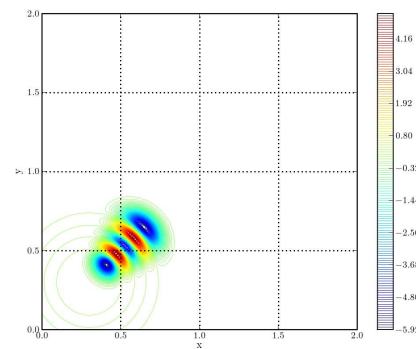
(g) *Mode APR 4*(h) *Mode POD 4*(i) *Mode APR 5*(j) *Mode POD 5*

FIG. 4.2 – Comparaison entre les modes POD et APR (suite)

Le dernier mode cependant est très éloigné du mode mode POD. Ce comportement est probablement dû au choix du critère de convergence, ce qui sera étudié dans une autre partie du travail.

Mode N	\mathcal{E}_{sup}		\mathcal{E}_{L^2}	
	POD	APR	POD	APR
2	$1.02 \cdot 10^{-3}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$	$5.69 \cdot 10^{-5}$	$5.69 \cdot 10^{-5}$
3	$1.02 \cdot 10^{-3}$	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$5.69 \cdot 10^{-5}$	$5.69 \cdot 10^{-5}$
4	$1.01 \cdot 10^{-3}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$	$5.60 \cdot 10^{-5}$	$5.66 \cdot 10^{-5}$
5	$2.27 \cdot 10^{-3}$	$2.27 \cdot 10^{-3}$	$1.41 \cdot 10^{-4}$	$1.41 \cdot 10^{-4}$

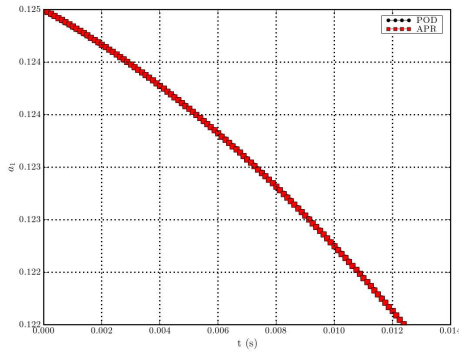
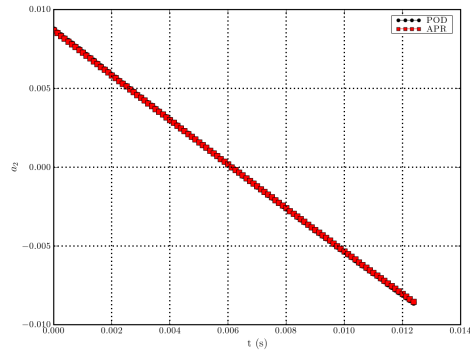
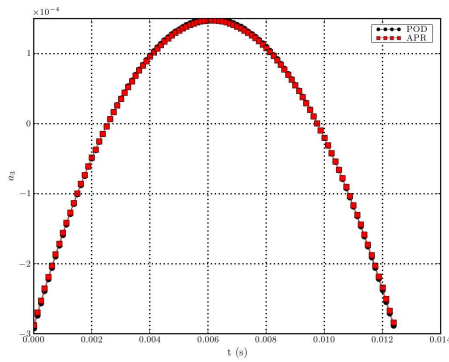
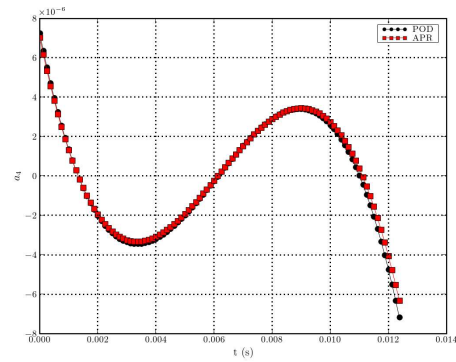
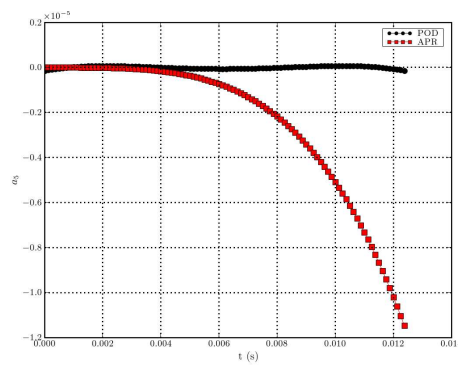
TAB. 4.2.3 – Comparaison de l’erreur de reconstruction entre la POD et l’APR en fonction du nombre de modes retenus

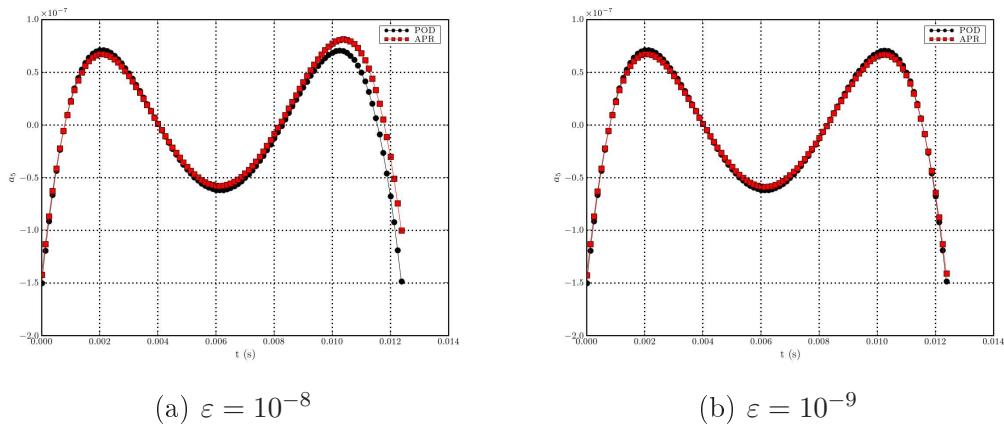
Par la suite, nous allons présenter les différents tests numériques que nous avons effectués pour déterminer les performances de la méthode, à savoir comment l’algorithme réagit en fonction d’une perturbation de la base initiale, mais également lorsque les paramètres de contrôle changent.

4.2.4 Influence de différents paramètres de calcul

4.2.4.1 Influence du choix de critère de convergence

Dans les calculs présentés précédemment, le critère de convergence était fixé à $\varepsilon = 10^{-7}$ et on a vu que le dernier mode APR est sensiblement différent du mode POD, notamment les comportements du coefficient temporel correspondant sont assez différents, voir figure 4.3(e). Pour tester l’influence de ce paramètre, nous avons respectivement fixé le critère de convergence à $\varepsilon = 10^{-8}$ puis $\varepsilon = 10^{-9}$. Comme les quatre premiers modes restent inchangés, les résultats sont présentés pour le cinquième mode uniquement sur la figure 4.4. On constate alors que, plus ε est petit, plus les modes APR tendent vers les modes POD, notamment pour l’évolution du dernier coefficient temporel. Cependant, on a observé dans la partie précédente que l’influence des derniers modes est négligeable sur l’erreur de reconstruction. Ainsi, dans la suite du calcul, nous avons choisi de conserver $\varepsilon = 10^{-7}$ étant donné que c’est le paramètre qui nécessite le moins de temps de calcul, et la précision n’étant pas altérée de façon significative (puisque l’on a la même erreur que le modèle complet et la POD) en comparaison avec un critère de convergence plus restrictif.

(a) $a_1(t)$ (b) $a_2(t)$ (c) $a_3(t)$ (d) $a_4(t)$ (e) $a_5(t)$ FIG. 4.3 – Evolution temporelle des coefficients temporels ($\varepsilon = 10^{-7}$)

FIG. 4.4 – Evolution temporelle de $a_5(t)$

4.2.4.2 Influence du choix de la base initiale

Dans ce paragraphe on présente l'influence des résultats de la méthode APR lorsque l'on choisit une autre base que la condition initiale. En effet, si choisir la condition initiale comme base initiale du processus itératif semble être le choix le plus *physique*, il convient de voir comment la méthode *se comporte* devant un changement de base. Dans le cas, présent, nous avons choisi une base totalement non-physique, c'est-à-dire non représentative de la condition initiale du problème puisque nous avons pris

$$\phi(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (4.23)$$

Les erreurs que l'on obtient avec cette base initiale non-physique sont les mêmes que celles obtenues avec la base initiale prise égale à la condition initiale du problème, à savoir :

$$\mathcal{E}_{L^2} = 5.68 \cdot 10^{-5} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{sup} = 1.02 \cdot 10^{-3}$$

La différence fondamentale entre les deux calculs réside dans le temps CPU. En effet, la base étant physiquement *moins bonne*, l'algorithme a besoin de plus d'itérations pour converger : ici 20 itérations sont nécessaires pour converger, c'est-à-dire 21s de calcul contre 5 itérations dans le cas le plus favorable, effectuées en seulement 5.2s. Par ailleurs, les modes obtenus dans les deux cas sont, à l'exception de légères différences localement, sensiblement identiques.

4.2.5 Evolution avec système dynamique

Une fois la base APR obtenue (de nombre de modes N), de la même façon que ce qui est couramment fait avec la base POD, on construit le système dynamique

correspondant à l'équation de convection-diffusion. Son expression est rappelée ci-dessous :

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^N (\phi_n, -\mathbf{V} \cdot \nabla \phi_m + \nu \Delta \phi_m) a_j \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (4.24)$$

On rappelle ici que les modes issus de l'APR ne sont pas nécessairement orthogonaux c'est pourquoi on les a orthogonalisé au préalable à l'aide de la méthode de Gram-Schmidt. Par la suite, ce système dynamique est alors résolu sur des temps bien plus longs que la période T qui a été nécessaire pour construire la base APR.

Ainsi, comme premier test, on résout le système dynamique sur une période égale à 10 fois la durée de construction de la base, c'est-à-dire $t = 10T$, et on regarde l'erreur obtenue à différents instants. Dans le tableau 4.2.4, on présente les résultats obtenus en considérant l'erreur définie à l'aide de la norme sup (4.22). Dans ce

temps t	T	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$	$6T$	$7T$	$8T$	$9T$	$10T$
$\mathcal{E}_{sup} (\times 10^{-3})$	1.02	1.88	2.49	3.1	4.24	7.06	13.9	25.8	43.2	66.9

TAB. 4.2.4 – Erreur sup \mathcal{E}_{sup} calculée sur les résultats du système dynamique pour différents t .

tableau, on constate que l'erreur augmente de façon importante sur l'intervalle de temps simulé par le système dynamique et dépasse $5 \cdot 10^{-3}$ après $5T = 0.06s$. De la même façon, on regarde l'évolution des trois premiers coefficients temporels sur cet intervalle. Sur la figure 4.5, les coefficients temporels calculés en résolvant le système dynamique (notés *APR+SD* sur la figure) sont comparés aux coefficients temporels dits de référence (notés *REF*) calculés par projection de la solution analytique de référence sur la base obtenue :

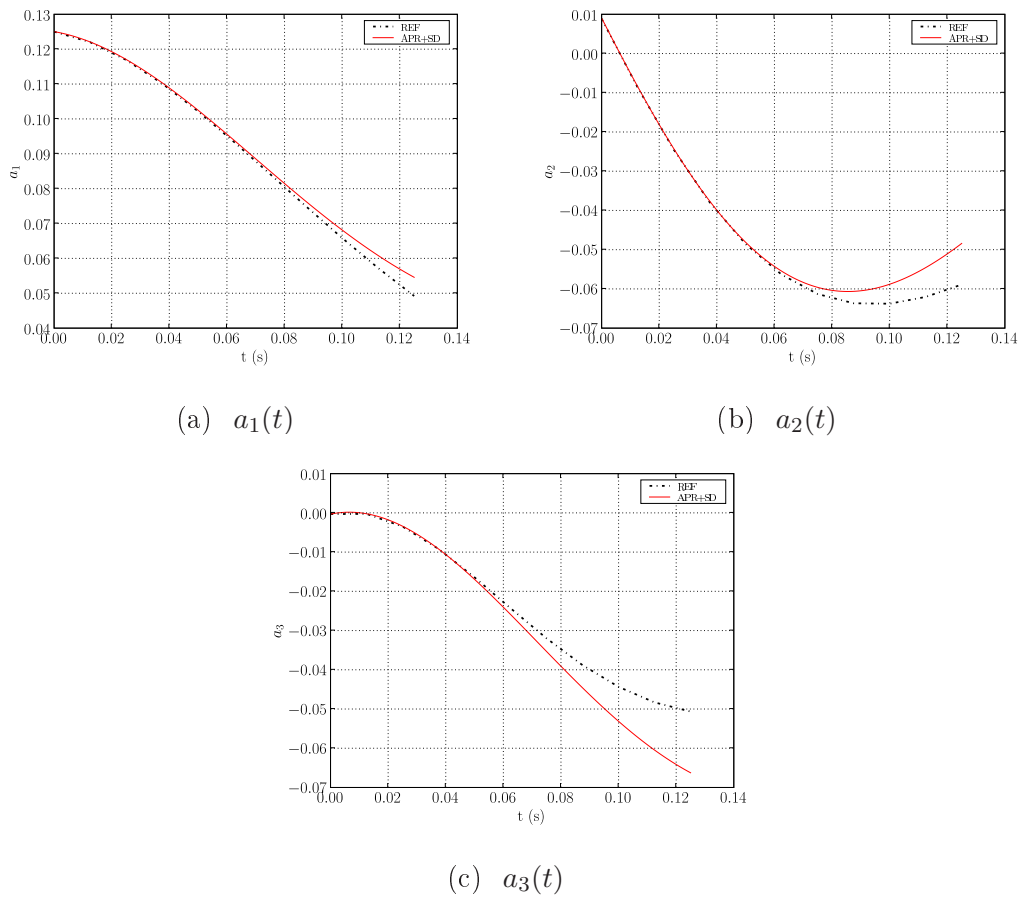
$$a_k^{REF}(t) = (\theta_{an}, \phi_k) = \int_{\Omega} \theta_{an}(\mathbf{x}, t) \phi_k(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad (4.25)$$

Là encore, on constate que les coefficients calculés à partir du système dynamique s'écartent des coefficients de référence à partir de $t \approx 0.06s \approx 5T$. On décide alors de tester l'aptitude de la méthode APR à corriger la prédiction du système dynamique.

4.2.6 Correction du système dynamique par l'APR

La stratégie d'avancement temporel que nous avons utilisé pour corriger la base lorsque le système dynamique ne se comporte plus bien est la suivante :

1. on résout l'équation de convection-diffusion (4.19) avec la méthode APR de $t_1 = 0$ à T .

FIG. 4.5 – Evolution temporelle des coefficients temporels $a_n(t)$, $n = 1, 2, 3$ sur $10T$

2. on calcule les coefficients du système dynamique associés à la base APR que l'on vient de calculer.
3. on résout le système dynamique (4.24) de $t_{i-1} + T$ à $t_i = t_{i-1} + \beta T$.
4. on améliore la base en utilisant la méthode APR de t_i à $t_i + T$. Les conditions initiales pour la méthode APR correspondent alors à la dernière prédiction du système dynamique et la base initiale pour l'APR est cette fois-ci l'ancienne base utilisée dans le système dynamique.

On répète alors les étapes 2,3 et 4 jusqu'à ce que t_i soit égal au temps de fin de la simulation. Une stratégie similaire a par ailleurs été utilisée par Sirisup *et al.* [71] pour les équations de Navier-Stokes incompressibles. Dans leur cas, la base est améliorée par POD à l'aide de nouveaux snapshots obtenus par simulations DNS. Dans notre cas, au vu du comportement des coefficients temporels, on a choisi $\beta = 4$ et on a utilisé cette procédure jusqu'à $t = 20T$, c'est-à-dire 4 itérations de l'avancement temporel proposé. Le tableau 4.2.5 présente l'évolution des erreurs (en norme sup et en norme $L^2(\Omega)$) sur tout l'intervalle de temps simulé. Ainsi, on vérifie

	$t = T$		$t = 5T$		$t = 6T$	
	\mathcal{E}_{L^2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L^2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L^2}	\mathcal{E}_{sup}
BiCG	$5.7 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-7}$	$5.7 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$7.1 \cdot 10^{-4}$	$8.9 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-4}$	$8.2 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-8}$	$5.7 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$

TAB. 4.2.5 – Evolution des erreurs en fonction du critère de convergence choisi comparées avec le modèle complet pour $t = 0$ à $t = 6T$

	$t = 10T$		$t = 11T$		$t = 15T$	
	\mathcal{E}_{L^2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L^2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L^2}	\mathcal{E}_{sup}
BiCG	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-7}$	$8.3 \cdot 10^{-4}$	$11.2 \cdot 10^{-3}$	$7.6 \cdot 10^{-4}$	$10.5 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$17.5 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-8}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$9.1 \cdot 10^{-3}$	$4.0 \cdot 10^{-4}$	$6.8 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$	$13.3 \cdot 10^{-3}$

TAB. 4.2.5 – Evolution des erreurs en fonction du critère de convergence choisi comparées avec le modèle complet pour $t = 10$ à $t = 15T$

l'aptitude de la méthode à corriger l'erreur induite par la résolution du système dynamique. On constate qu'au bout de $t = 10T$, la démarche de correction de la base APR permet de réduire significativement l'erreur de la solution. En effet, sans contrôle sur la base, on observait (voir 4.2.4) pour $t = 10T$ une erreur $\mathcal{E}_{sup} \approx 6.6 \cdot 10^{-2}$ alors qu'au même instant on n'obtient qu'une erreur de $\mathcal{E}_{sup} \approx 9 \cdot 10^{-3}$. De même,

	$t = 16T$		$t = 20T$		$t = 21T$	
	\mathcal{E}_{L^2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L^2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L^2}	\mathcal{E}_{sup}
BiCG	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$16.7 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$29.0 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$26.9 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-8}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-4}$	$12.9 \cdot 10^{-3}$	$8.2 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-3}$

TAB. 4.2.5 – Evolution des erreurs en fonction du critère de convergence choisi comparées avec le modèle complet pour $t = 16$ à $t = 20T$.

l'erreur obtenue à la fin de l'intervalle de temps considéré, c'est-à-dire $20T$ est encore 6 fois inférieure à l'erreur obtenue au bout de $10T$ pour l'évolution du système dynamique sans correction.

Ainsi, non seulement la base APR est adaptée par rapport à l'évolution du système dynamique, mais la méthode APR est également capable de *réduire* l'erreur à un temps supérieur au dernier temps simulé par le système dynamique. On constate par exemple qu'à la fin du premier système dynamique résolu de $t = T$ à $t = 5T$, l'erreur vaut $\mathcal{E}_{sup} \approx 4.2 \cdot 10^{-3}$ (pour $\varepsilon = 10^{-8}$). En utilisant la méthode APR sur un intervalle T supplémentaire, on obtient alors une erreur qui vaut $\mathcal{E}_{sup} \approx 4.0 \cdot 10^{-3}$ alors que l'erreur correspondant au même temps résolu uniquement par le système dynamique vaut $\mathcal{E}_{sup} \approx 7.1 \cdot 10^{-3}$. Ainsi, l'application de la méthode APR parvient à *réduire* l'erreur introduite par le calcul du système dynamique.

	$t = T$	$t = 5T$	$t = 6T$	$t = 10T$	$t = 11T$	$t = 15T$	$t = 16T$	$t = 20T$	$t = 21T$
$\varepsilon = 10^{-7}$	5.2s	6.2s	13.0s	14.0s	28.1s	29.2s	51.7s	52.8s	76.5s
$\varepsilon = 10^{-8}$	6.8s	7.8s	22.2s	23.2s	63.5s	64.6s	99.5s	100.6s	129.8s
BiCG	8.6s	35.2s	41.6s	60.5s	70.6s	102.4s	118.0s	156.0s	170.2s

TAB. 4.2.6 – Temps CPU entre la méthode APR avec $\varepsilon = 10^{-7}$ et $\varepsilon = 10^{-8}$ et pour la méthode BiCG pour $T = 0, \dots, 20T$

Les résultats en terme de temps de calcul sont présentés dans le tableau 4.2.6 qui compare les performances de la méthode APR pour deux critères de convergence avec la méthode du gradient biconjugué. On constate que le gain en temps de calcul est relativement faible pour le cas $\varepsilon = 10^{-8}$ (seulement 1.5 fois plus rapide) alors que le calcul est trois fois plus rapide lorsque $\varepsilon = 10^{-7}$. Cependant, ce gain de temps est mineur par rapport à ce qu'on pouvait espérer. Cela vient probablement du fait que le problème étudié est linéaire. Le gain de temps pour les problèmes non-linéaires est supposé être plus important, c'est pourquoi le paragraphe suivant traite l'équation non-linéaire de Burgers.

4.3 Equation de Burgers monodimensionnelle

Dans ce paragraphe, on considère l'équation de Burgers monodimensionnelle rappelée ici :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.26)$$

où l'on note ν la viscosité et $u = u(x, t)$. Dans cette partie, on considère les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sin(\pi x) & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

Sous ces conditions, il a été montré que l'on peut trouver une solution analytique de la forme suivante :

$$u(x, t) = 2\pi\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2\nu t} n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2\nu t} \cos(n\pi x)} \quad (4.28)$$

où les coefficients de Fourier sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 \exp\{-(2\pi\nu)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} dx \\ a_n &= 2 \int_0^1 \exp\{-(2\pi\nu)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} \cos(n\pi x) dx \end{aligned}$$

Ce problème a été discrétisé en utilisant la méthode des différences finies et un schéma Crank-Nicholson a été utilisé pour la discrétisation temporelle.

4.3.1 Application de l'APR

Dans cette partie, la viscosité a été prise égale à $\nu = 0.1$, les paramètres de calcul pour la résolution de la méthode APR sur l'intervalle de construction itérative de la base T sont les suivants :

- le nombre de noeuds vaut $n_x = 50$,
- le pas de temps a été fixé à $\Delta t = 10^{-3}s$, et l'intervalle d'échantillonnage vaut $T = 100\Delta t = 0.1s$.
- le critère de convergence a été fixé à $\varepsilon = 10^{-5}$,
- le critère de sélection des modes propres η a été choisi valant $\eta = 10^{-14}$,
- la base initiale a été choisie égale à la solution initiale du problème.

La résolution de cet exemple a nécessité un temps de calcul d'à peine 0.2 secondes et à l'issue de cette période de construction de la base, on obtient 6 modes APR. Sur la figure 4.6, on présente la solution obtenue par la méthode APR pour différents pas de temps pris sur la période de construction de la base. Cette solution est comparée avec la solution analytique. On constate que qualitativement, la méthode

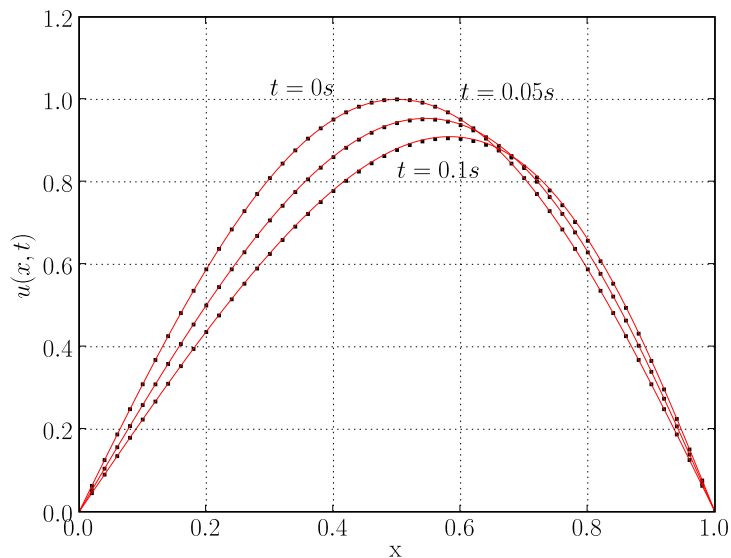


FIG. 4.6 – Solution APR [—] de l'équation de Burgers comparée avec la solution analytique [■] sur l'intervalle $T = 0.1s$ toutes les $0.01s$

APR semble bien représenter la solution de l'équation de Burgers sur l'échantillon temporel considéré. Pour quantifier la précision de la méthode, on calcule l'erreur relative de la solution $u_{APR}(\mathbf{x}, t)$ obtenue par la méthode APR avec la solution analytique de référence $u_{REF}(\mathbf{x}, t)$ comme défini ci-dessous :

$$err(\mathbf{x}, t) = \frac{u_{APR}(\mathbf{x}, t) - u_{REF}(\mathbf{x}, t)}{u_{REF}(\mathbf{x}, t)} \quad (4.29)$$

La figure 4.7 montre ainsi l'évolution de l'erreur obtenue sur tout l'intervalle de temps. On constate que celle-ci croît le long de l'intervalle de temps mais ne dépasse pas 1.1%. La résolution de l'équation de Burgers sur l'intervalle $T = [0, 0.1]$ est donc satisfaisante en terme de précision du résultat.

4.3.2 Application de la POD

Dans cette partie, nous présentons les résultats de la POD appliquée sur un échantillon de 1000 snapshots⁵ pris à intervalles réguliers sur la période $T = 0.1s$.

⁵calculés à partir de la solution analytique (4.28)

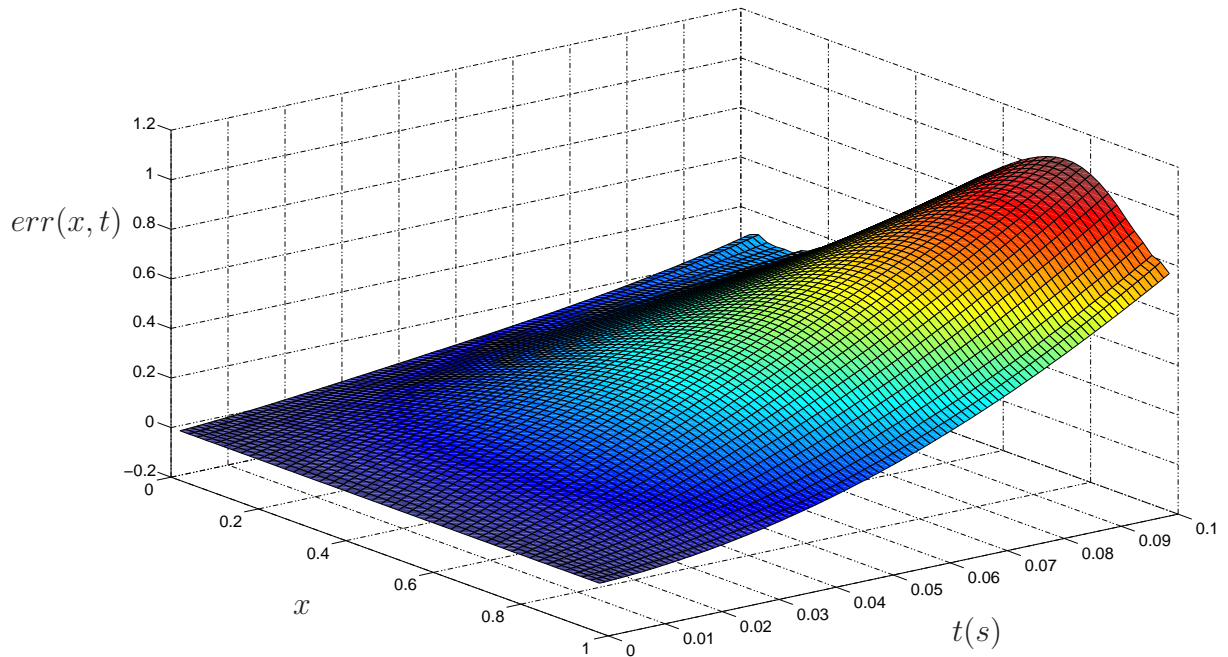


FIG. 4.7 – Evolution temporelle de l’erreur entre la solution reconstruite par la méthode APR et la solution analytique, $\eta = 10^{-14}$ et $\varepsilon = 10^{-5}$

Les cinq premières valeurs propres sont là encore représentées dans le tableau 4.3.1, ainsi que les énergies et les résidus correspondants. Comme pour le cas précédem-

Mode n	λ_n	$100 \times E_c$	res_N
1	$9.60 \cdot 10^{-1}$	99.97	$1.22 \cdot 10^{-5}$
2	$2.64 \cdot 10^{-4}$	≈ 100	$7.13 \cdot 10^{-8}$
3	$1.96 \cdot 10^{-6}$	≈ 100	$5.29 \cdot 10^{-10}$
4	$1.68 \cdot 10^{-8}$	≈ 100	$4.09 \cdot 10^{-12}$
5	$1.49 \cdot 10^{-10}$	≈ 100	$3.18 \cdot 10^{-14}$

TAB. 4.3.1 – Cinq premières valeurs propres obtenues par la POD, énergie et résidu correspondants obtenus pour l’équation de Burgers 1D

ment traité sur la convection-diffusion, très peu de modes propres POD arrivent à capturer la quasi-totalité de l’énergie. Le résidu est par ailleurs inférieur à 10^{-10} en considérant uniquement 4 modes. La figure 4.8 confronte alors les modes APR aux modes obtenus par la snapshot POD, ainsi que l’évolution temporelle des coefficients $a_n(t)$, $n = 1, \dots, 6$ correspondants. Sur cette figure, on observe une légère différence pour l’évolution du premier coefficient temporel, correspondant pourtant au mode prépondérant. Nous n’avons pas réussi à déterminer la cause de cette différence. On constate néanmoins que les 5 premiers modes spatiaux sont très proches, et l’on ob-

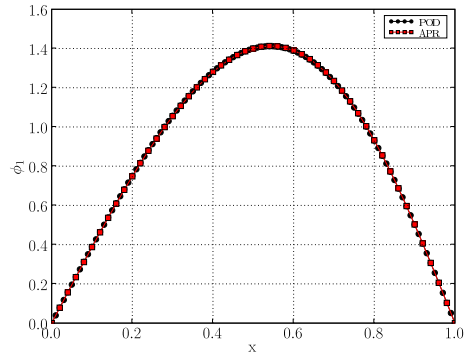
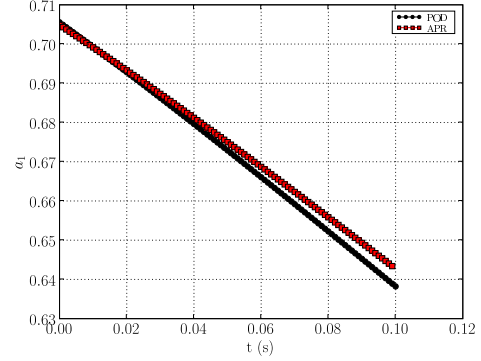
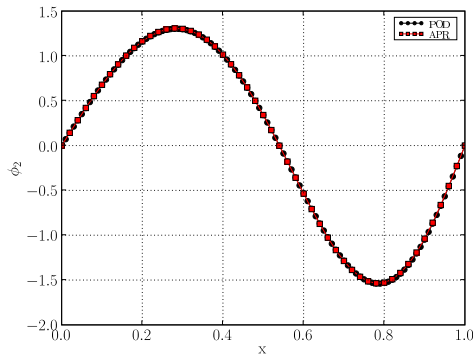
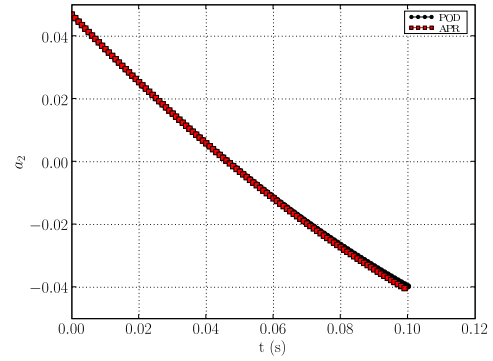
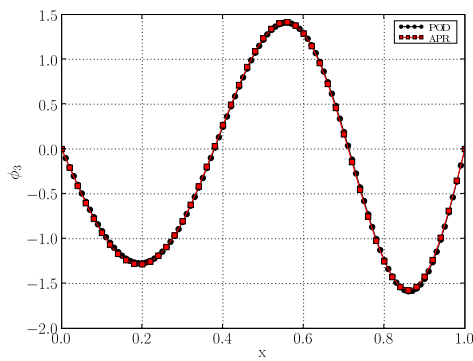
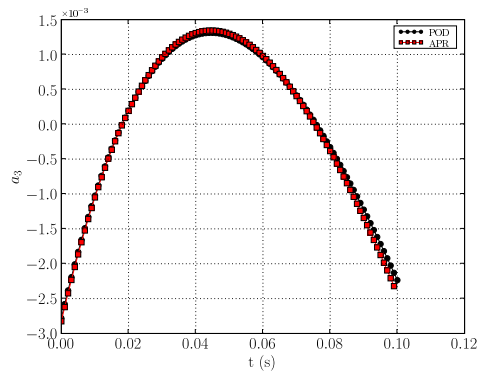
(a) Mode spatiaux $\phi_1(x)$ (b) Coefficients temporels $a_1(t)$ (c) Modes spatiaux $\phi_2(x)$ (d) Coefficients temporels $a_2(t)$ (e) Modes spatiaux $\phi_3(x)$ (f) Coefficients temporels $a_3(t)$

FIG. 4.8 – Comparaison entre les modes spatiaux POD et APR, et les coefficients temporels correspondants

serve des oscillations près des bords pour le dernier mode. De même, les coefficients temporels sont similaires entre la méthode APR et la POD, à part pour le dernier mode où l'évolution du coefficient temporel n'est pas du tout similaire.

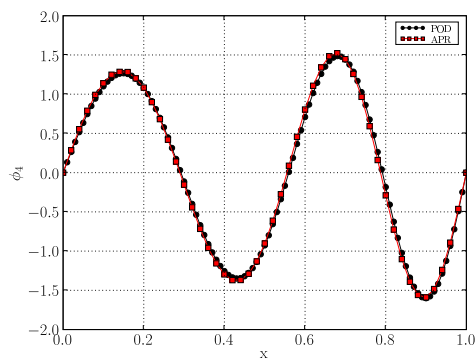
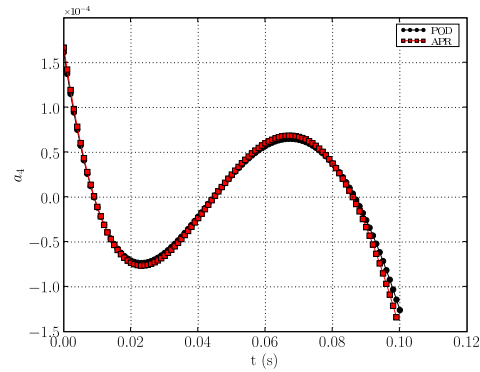
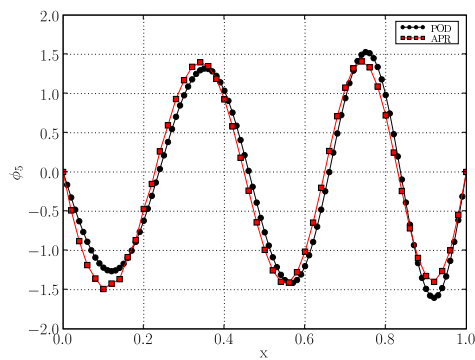
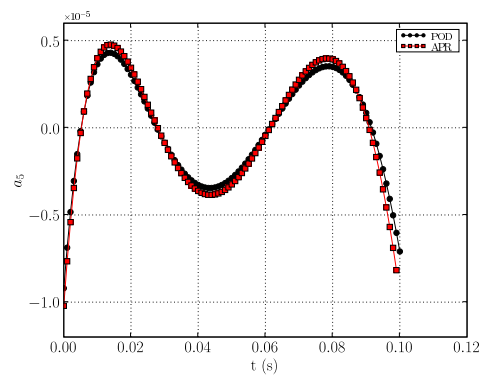
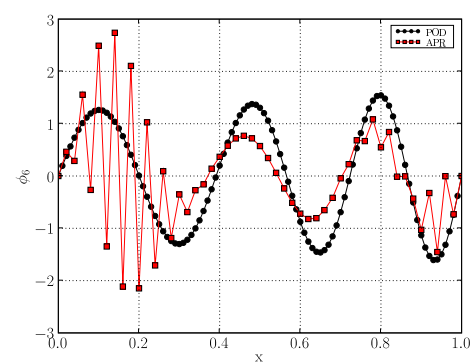
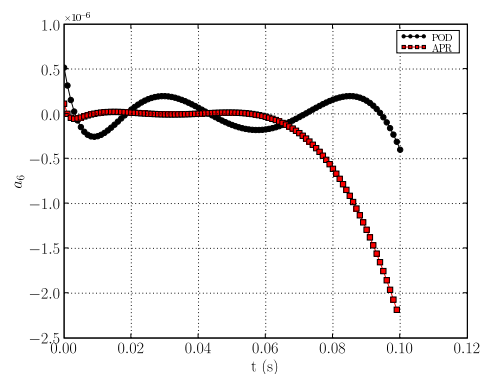
(g) Modes spatiaux $\phi_4(x)$ (h) Coefficients temporels $a_4(t)$ (i) Modes spatiaux $\phi_5(x)$ (j) Coefficients temporels $a_5(t)$ (k) Modes spatiaux $\phi_6(x)$ (l) Coefficients temporels $a_6(t)$

FIG. 4.8 – Comparaison entre les modes spatiaux POD et APR, et les coefficients temporels correspondants (suite)

4.3.3 Influence de différents paramètres de calcul

4.3.3.1 Influence du choix de critère de convergence

Tout d'abord, nous avons étudié les performances de la méthode APR en faisant varier le critère de convergence ε . Les calculs ont été effectués avec quatre critères de convergence différents : $\varepsilon = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-5}$ et $\varepsilon = 10^{-6}$. Pour chacun de ces critères de convergence, on a résolu l'équation de Burgers pour un nombre de noeuds allant de $n_x = 50$ à $n_x = 250$. Nous avons par ailleurs fixé le pas de temps à $\Delta t = 10^{-4}s$ (pour pouvoir augmenter le nombre de noeuds sans avoir de problèmes) et les simulations sont effectuées sur 1000 pas de temps, de façon à simuler 0.1s de la solution. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par le modèle complet non-linéaire, résolu par la méthode de Newton-Raphson.

Tout d'abord, l'influence du critère de convergence sur la précision de la méthode a été testée, voir tableau 4.3.2. Avec le critère $\varepsilon = 10^{-3}$, l'erreur maximale obtenue

ε	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$\max_{\mathbf{x} \in \Omega, t \in T} (err(\mathbf{x}, t))$ (%)	5.90	1.94	1.06	1.06

TAB. 4.3.2 – Evolution du pourcentage de l'erreur maximale en fonction du critère de convergence ε

avoisine les 6% puisque la méthode a convergé en une seule itération. Ce critère de convergence est donc trop lâche. Ensuite l'erreur décroît avec le critère de convergence : pour $\varepsilon = 10^{-4}$, elle vaut à peine 2% et à partir de $\varepsilon = 10^{-5}$, on constate que l'erreur ne varie plus.

L'influence du choix du critère sur le temps de calcul a également été testé. Ainsi, sur la figure 4.9, nous avons tracé le temps CPU de résolution de l'équation en fonction du nombre de noeuds pour différents ε . On constate que l'efficacité de la méthode APR croît avec le nombre de noeuds. Il est par ailleurs clair que le critère de convergence influe sur le temps de calcul. On constate que le gain de temps est significatif uniquement pour $\varepsilon = 10^{-5}$. En effet, pour satisfaire un tel critère de convergence, la méthode a besoin de beaucoup plus d'itérations pour une amélioration de la solution très peu significative. Le tableau 4.3.3 rapporte le nombre d'itérations nécessaires pour converger dans les deux cas étudiés. On constate bien que pour satisfaire le

$\varepsilon \backslash n_x$	50	100	150	200	250
10^{-5}	5	8	12	17	22
10^{-6}	15	55	133	260	443

TAB. 4.3.3 – Nombre d'itérations nécessaires à la méthode APR pour converger en fonction du critère de convergence ε pour $n_x = 50, \dots, 250$

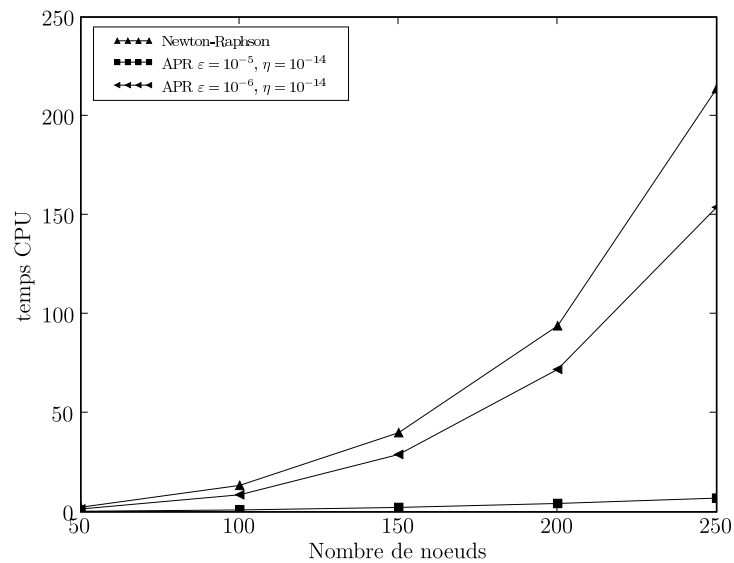


FIG. 4.9 – Evolution du temps de calcul avec le nombre de noeuds de discrétisation n_x pour le modèle complet et la méthode APR, avec deux critère de convergence ε

critère $\varepsilon = 10^{-6}$, la méthode APR a besoin de plus de 400 itérations alors qu'une vingtaine est suffisante dans l'autre cas.

Ainsi, le choix $\varepsilon = 10^{-5}$ semble être un bon compromis entre temps de calcul et précision de résultat pour ce problème.

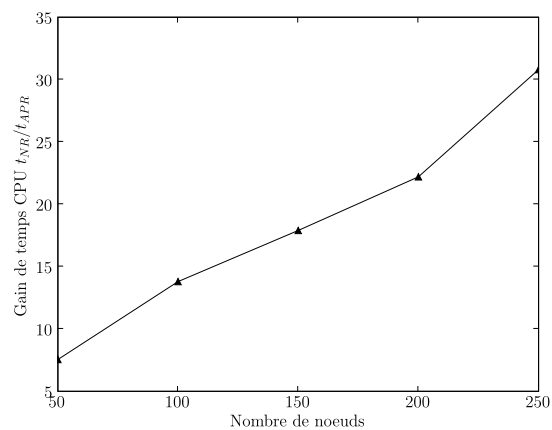


FIG. 4.10 – Evolution du gain de calcul avec le nombre de noeuds de discrétisation n_x pour le modèle complet et la méthode APR pour $\varepsilon = 10^{-5}$

Dans ce cas, le gain de temps par rapport à la méthode de Newton-Raphson, pour une erreur similaire, est assez important, comme présenté dans la figure 4.10.

4.3.3.2 Influence du choix de la base initiale

Dans cette partie, on étudie l'influence du choix de la base initiale sur l'efficacité de la méthode APR. Ainsi, on a testé les trois choix suivants :

- la base initiale correspond à la condition initiale, c'est-à-dire $\phi_0(x) = \sin(\pi x)$, voir figure 4.11(a) (choix *CI 1*),
- la base initiale est le vecteur unitaire $\phi_0(x) = 1$ (choix *CI 2*),
- la base initiale est une fonction affine par morceaux $f(x)$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \forall x \in [0, 0.5] \\ 2(1-x) & \forall x \in]0.5, 1] \end{cases}$$

comme représenté sur la figure 4.11(b) (choix *CI 3*).

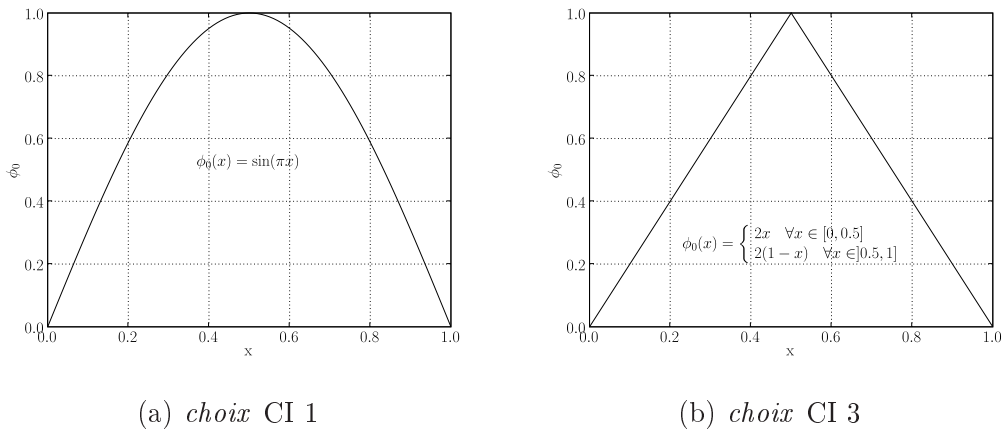


FIG. 4.11 – Différents choix de base initiale pour la base APR

Quel que soit le choix de la base initiale, on a constaté que les 4 premiers modes obtenus sont rigoureusement identiques. La même observation a été également faite pour l'évolution des coefficients temporels. Par ailleurs, on note que, pour les deux premiers choix de base initiale, on obtient 6 modes APR alors que pour le dernier choix, c'est-à-dire la fonction affine, la méthode a besoin de 7 modes pour converger. On constate des différences dans les cinquième et sixième modes, ainsi que des oscillations non-physiques pour le sixième mode. Il en va de même pour le septième mode obtenu dans le dernier choix de base initiale (voir figure 4.13). L'origine de ces oscillations reste inexpliqué mais il demeure que l'influence du dernier mode pris en compte par la méthode APR est assez faible. Ainsi, il convient de préciser qu'ici, seuls les 5 premiers vecteurs de base, les plus significatifs, ont été pris en compte pour la construction du système dynamique.

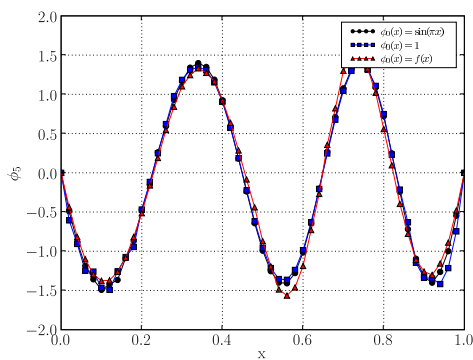
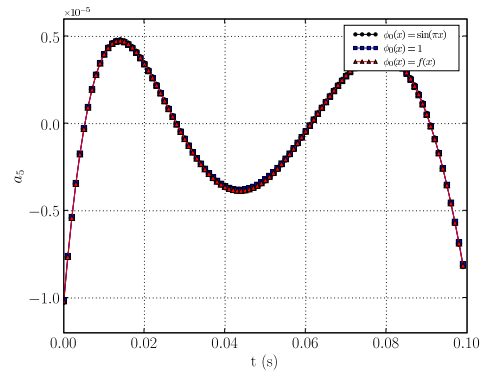
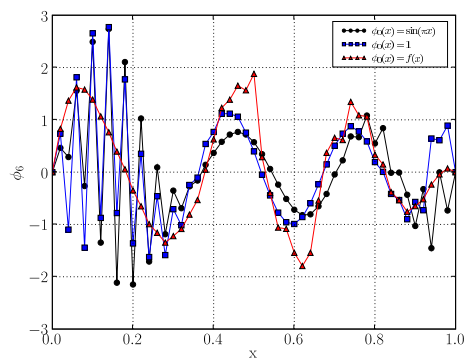
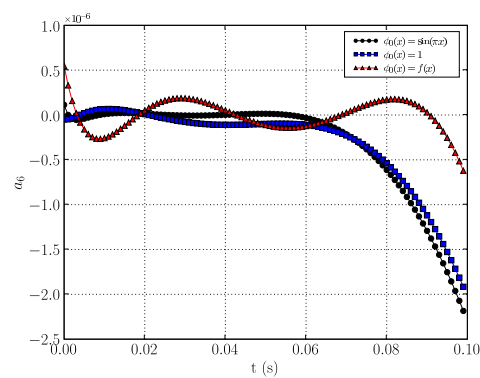
(i) Modes spatiaux $\phi_5(x)$ (j) Coefficients temporels $a_5(t)$ (k) Modes spatiaux $\phi_6(x)$ (l) Coefficients temporels $a_6(t)$

FIG. 4.12 – Comparaison entre les modes spatiaux obtenus par l'APR avec les différentes bases initiales, et les coefficients temporels correspondants

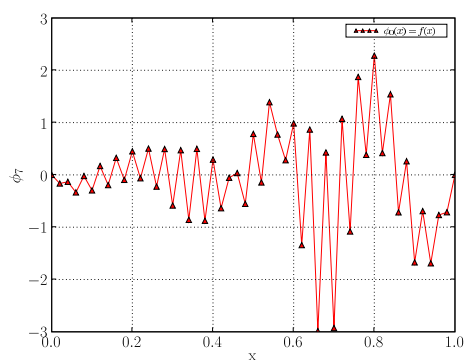
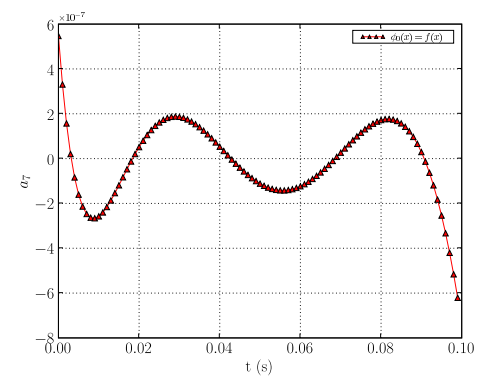
(a) Mode spatiaux $\phi_1(x)$ (b) Coefficients temporels $a_1(t)$

FIG. 4.13 – Mode APR 7 correspondant au choix de base initiale $\phi_0(x) = f(x)$, évolution du coefficient temporel correspondant

4.3.4 Evolution avec système dynamique

Dans cette partie, tout comme pour l'exemple de la convection-diffusion, la solution a été calculée sur des plus intervalles de temps que la période de construction de la base APR par un système dynamique dont l'expression est rappelée ci-dessous :

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \left(\phi_i, \nu \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} \right) a_j - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\phi_i, \phi_j \frac{d\phi_k}{dx} \right) a_j a_k \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (4.30)$$

Comme on l'a précisé, le système dynamique a été construit avec seulement 5 modes. La durée de résolution du système dynamique T_{SD} a été prise égale à $T_{SD} = 10T$ ce qui correspond à une durée de 1s. Le résultat est présenté en comparaison avec la solution analytique sur la figure 4.14. Là encore, on constate que le système

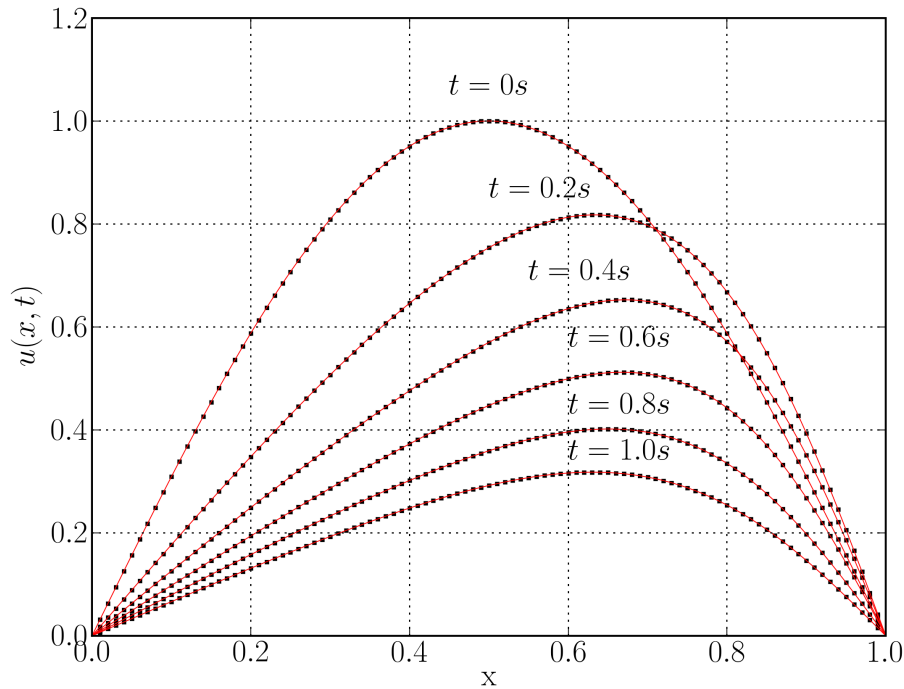


FIG. 4.14 – Evolution de la solution obtenue par APR + SD sur $t = 10T = 1s$ (traits rouges) en comparaison avec la solution analytique (carrés noirs)

dynamique est capable de reproduire très fidèlement la solution analytique, en terme d'erreur, on obtient un maximum d'environ 2% pour le temps $t = 0.4s$. Dans ce cas, la résolution du système dynamique est suffisamment performante pour que l'on ne nécessite pas la même démarche temporelle de *restart* comme pour l'équation de convection-diffusion présentée au paragraphe 4.2.5. Enfin, pour résoudre l'équation de Burgers 1D sur l'intervalle de temps $T_{SD} = 10T$, le temps de calcul pour la

méthode de Newton-Raphson vaut pour une précision égale à environ . Ainsi, le gain de temps obtenu par l'approche POD-système dynamique par rapport à l'algorithme de Newton-Raphson est très important dans cet exemple.

4.4 Equation de Burgers 2D

Pour se rapprocher encore des équations de Navier-Stokes, on présente ici les résultats de la méthode APR pour la version 2D de l'équation de Burgers, rappelée ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \\ + \text{conditions aux limites} \\ + \text{condition initiale} \end{array} \right.$$

où l'on note encore ν la viscosité et $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))$. Ainsi, le problème à étudier se réécrit : défini sur le domaine $\Omega = \{0 \leq x \leq 0.5, 0 \leq y \leq 0.5\}$ et sur l'intervalle de temps $]0, T[$. Une solution analytique peut être trouvée en utilisant une transformation de Hopf-Cole [28]. Elle s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{3}{4} - \left[4 \left(1 + \exp \left((-4x + 4y - t) \frac{1}{32\nu} \right) \right) \right]^{-1} \\ v(x, y, t) &= \frac{3}{4} + \left[4 \left(1 + \exp \left((-4x + 4y - t) \frac{1}{32\nu} \right) \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.31)$$

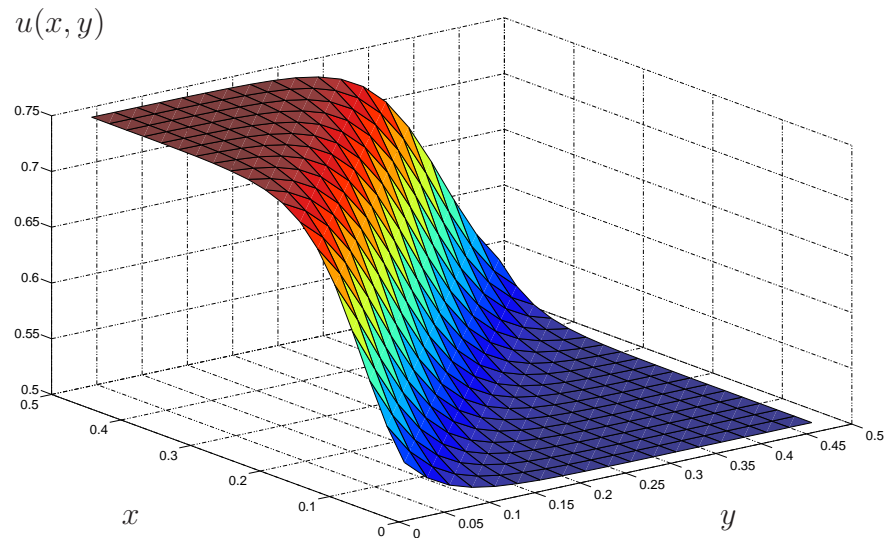
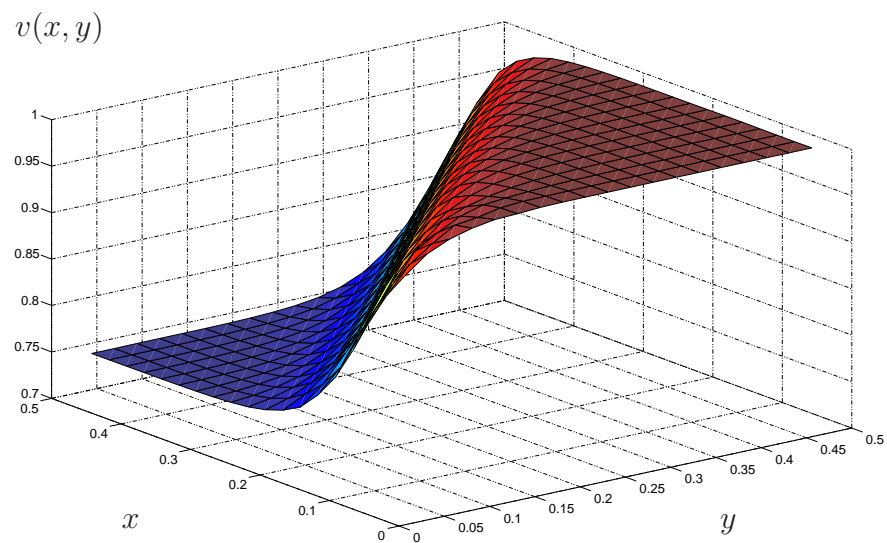
Les conditions initiales et aux limites du problème sont calculées à partir de cette solution analytique. La solution analytique est présentée pour une viscosité égale à $\nu = 0.01$, aux temps $t = 0.5s$ et $t = 2s$, sur les figures 4.15 et 4.16.

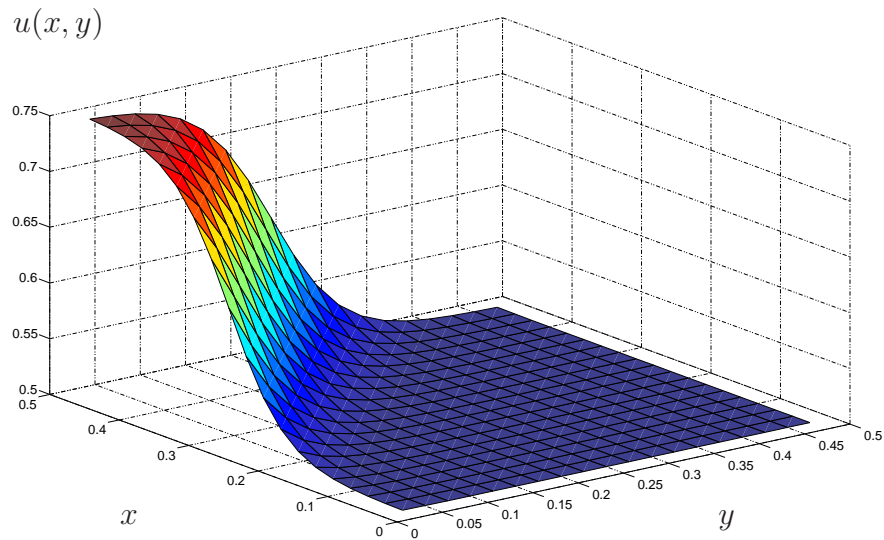
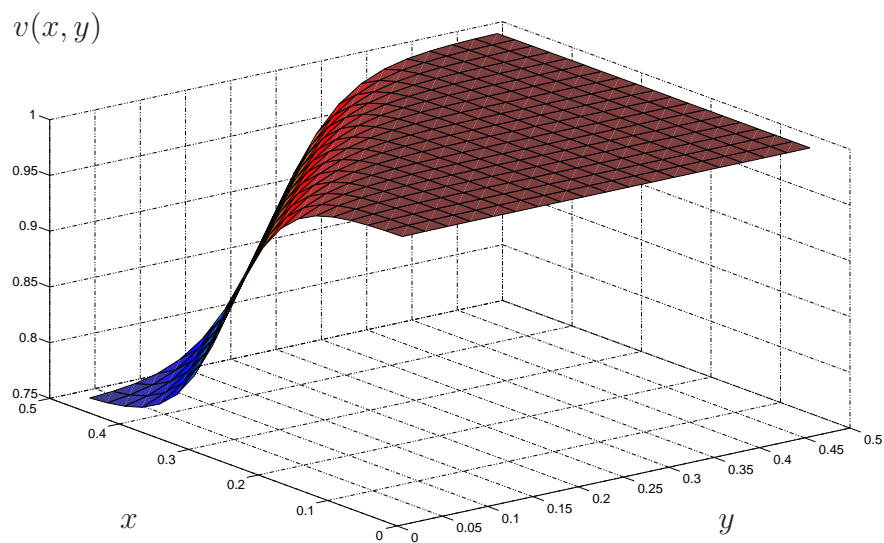
Cet exemple a été traité à l'aide d'une discrétisation en volumes finis (schémas centrés) et le schéma temporel utilisé est le schéma de Crank-Nicholson. Il est par ailleurs à noter que les conditions aux limites de ce problème varient en fonction du temps, ce qui est un cas des plus limitant pour la méthode APR, puisque l'on a à recalculer les conditions aux limites à chaque itération de la méthode.

4.4.1 Application de l'APR

Les paramètres de calcul pour la résolution de la méthode APR sur l'intervalle de construction itérative de la base T sont les suivants :

- le domaine a été discrétisé en 20×20 noeuds,
- le pas de temps a été fixé à $\Delta t = 5.10^{-4}s$, et l'intervalle d'échantillonnage vaut $T = 1000\Delta t = 0.5s$.

(a) $u(x, y)$ (b) $v(x, y)$ FIG. 4.15 – Solution analytique de l'équation de Burgers 2D pour $\nu = 0.01$ au temps $t = 0.5s$

(a) $u(x, y)$ (b) $v(x, y)$ FIG. 4.16 – Solution analytique de l'équation de Burgers 2D pour $\nu = 0.01$ au temps $t = 2s$

- le critère de convergence a été fixé à $\varepsilon = 10^{-5}$,
- le critère de sélection des modes propres η a été choisi valant $\eta = 10^{-12}$,
- la base initiale a été choisie égale à la solution initiale du problème.

La méthode APR converge ainsi en 8 itérations et environs 700s. La base est alors constituée de 6 modes qui sont représentés sur la figure 4.17. Là encore, comme dans l'exemple de Burgers 1D, on constate que le dernier mode présente des oscillations non-physiques. Dans l'optique de la construction d'un système dynamique, il est donc important de ne pas conserver ce mode. La figure 4.18 présente l'erreur relative

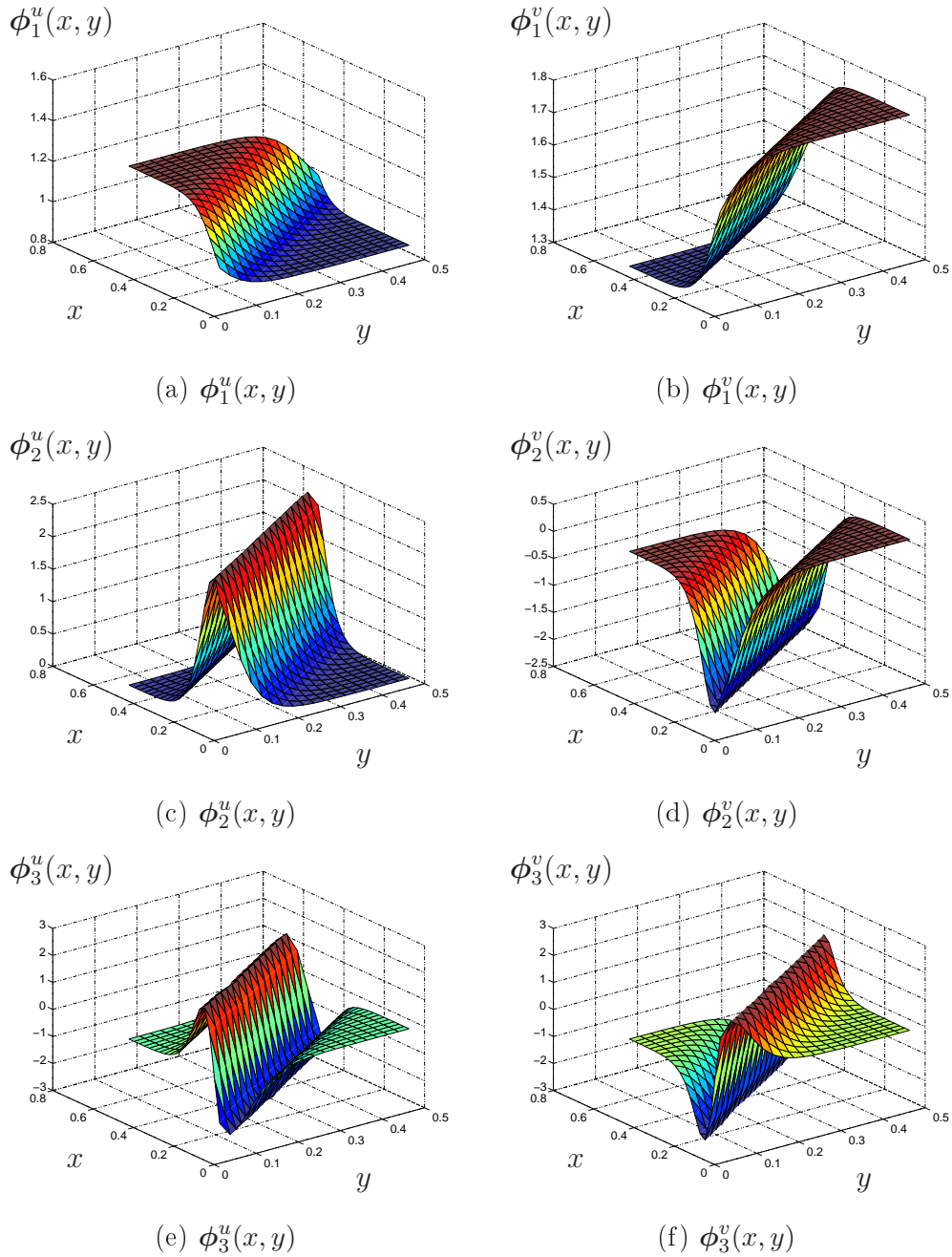


FIG. 4.17 – Trois premiers modes propres obtenus par l'APR

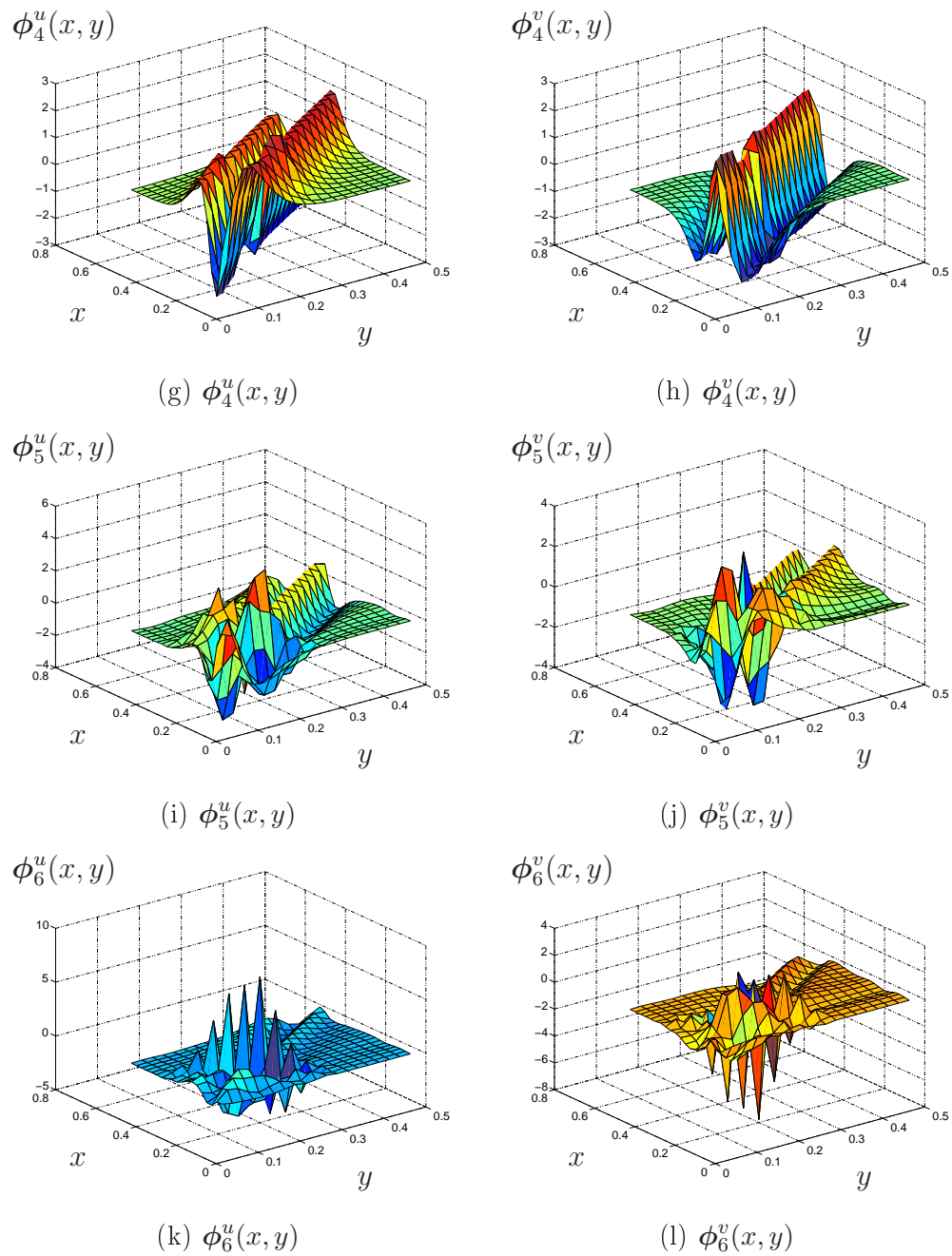
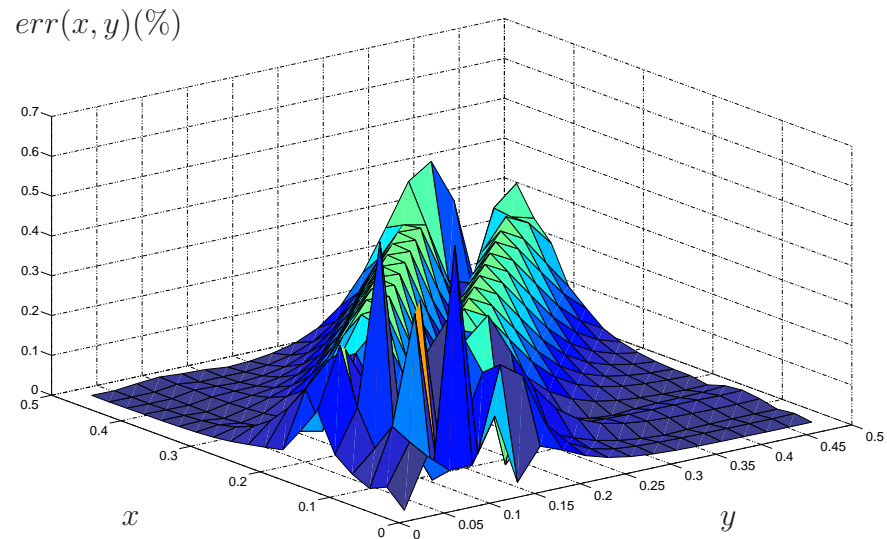
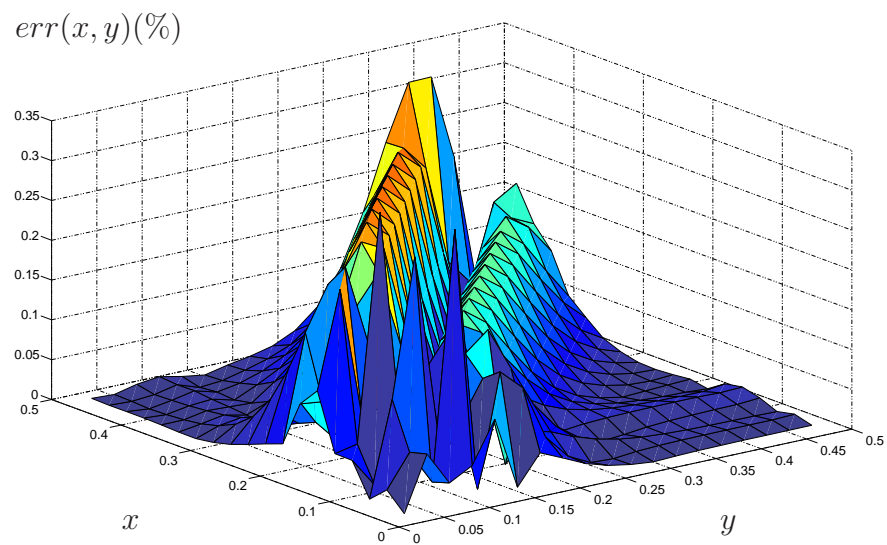


FIG. 4.17 – Trois derniers modes propres obtenus par l'APR



(a) Erreur relative entre $u_{APR}(x, y)$ et $u_{an}(x, y)$



(b) Erreur relative entre $v_{APR}(x, y)$ et $v_{an}(x, y)$

FIG. 4.18 – Erreur relative entre les composantes de vitesse u et v obtenues par l'APR et les solutions analytiques pour $\nu = 0.01$ au temps $t = 0.5s$

(en %) définie par la relation (4.29). L'erreur maximale obtenue en pourcentage à la fin de l'intervalle de temps vaut donc $\approx 0.35\%$ pour $u(x, y)$ et $\approx 0.65\%$ pour $v(x, y)$ ce qui est du même ordre de grandeur que l'erreur observée par la méthode de Newton-Raphson.

Enfin, le tableau 4.4.1 compare les temps de calcul respectifs de la méthode APR et de la méthode de Newton-Raphson lorsque l'on augmente la discrétisation spatiale. Ainsi, le gain de temps obtenu par la méthode APR est là encore très important

$n = n_x = n_y$	11	12	13	14	15	16	17
temps CPU NR (s)	28.81	52.75	105.91	197.90	343.74	516.19	989.94
temps CPU APR (s)	11.46	16.62	33.93	52.99	63.51	103.08	158.96

TAB. 4.4.1 – Comparaison du temps CPU entre les méthodes de Newton-Raphson et APR lorsque la discrétisation spatiale augmente

(plus de 6 fois), alors que le cas envisagé n'est pas le plus favorable puisque les conditions aux limites doivent être recalculées à chaque pas de temps, et également à chaque itération APR, au contraire de la méthode de Newton-Raphson qui n'a besoin de les calculer qu'une fois. Enfin la POD a été également appliquée à cet exemple. Là encore, les modes obtenus par l'APR sont très proches des modes POD, ils ne seront donc pas encore représentés ici.

4.5 Conclusions

Dans ce chapitre, la méthode APR a été appliquée pour l'équation de convection-diffusion 2D, ainsi que les équations de Burgers 1D et 2D. Elle s'est révélée être assez performante au niveau du gain de temps de calcul, notamment pour les exemples nonlinéaires. En effet, la méthode APR est environ 30 fois plus rapide que la méthode de Newton-Raphson pour l'équation de Burgers 1D, et jusqu'à 6 fois plus rapide pour le cas 2D, malgré les conditions aux limites dépendant du temps. De plus, on a constaté pour les trois exemples que les modes obtenus par l'APR sont très proches des modes POD. Ainsi, la méthode APR permet de calculer avec précision la solution : l'erreur relative observée est en effet toujours du même ordre de grandeur qu'avec les méthodes de résolution classique, à savoir la méthode de Newton-Raphson et le gradient biconjugué. On peut toutefois remarquer qu'elle ne s'est pas révélée très performante pour le cas linéaire puisque le gain en temps de calcul ne vaut que 1.5 par rapport au modèle complet. Cependant, pour cet exemple, nous avons mis en place une démarche d'avancement temporel couplant la méthode avec un système dynamique. Cette démarche a ainsi permis de corriger l'erreur due à la résolution du système dynamique par des itérations de la méthode APR. Elle sera adaptée dans le dernier chapitre de la thèse aux équations de Navier-Stokes.

Chapitre 5

Résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode APR

Dans cette partie, nous allons présenter la résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode APR. Nous avons vu dans le chapitre précédent la mise en œuvre de la méthode sur différentes équations de transfert et les résultats obtenus ont été très satisfaisants. Dans le chapitre 3, nous avons par ailleurs constaté que le gain de temps par rapport à la POD peut se faire sur le calcul de l'échantillonnage de la solution pour construire la base POD. Ainsi, l'objectif de ce chapitre est de montrer la possibilité de l'APR d'engendrer la base nécessaire pour la construction du système dynamique présenté dans le chapitre 2.

La difficulté de la mise en œuvre de l'APR sur les équations de Navier-Stokes provient de la formulation mixte du problème. Pour le mettre en avant, nous introduisant formellement la discrétisation en éléments finis des équations de Navier-Stokes. Ainsi on aboutit à l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}_h}{dt} + \mathcal{N}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + A_h \mathbf{u}_h + B_h p_h = \mathbf{f}_h \\ B^T \mathbf{u}_h = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

où $\mathbf{u}_h(t) \in V_h$ et $p_h \in H_h$ sont les espaces d'approximation associés au problème de Navier-Stokes, $\mathcal{N}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)$ le terme issu de la discrétisation du terme non-linéaire, A_h représente la partie linéaire et B_h la discrétisation de la pression. Enfin, $B^T \mathbf{u}_h = 0$ traduit l'incompressibilité, pour plus de détails, se référer à [25]. Pour avoir de bonnes solutions, il faut que les espaces V_h et H_h vérifient la condition inf-sup ou LBB :

$$\begin{aligned} & \exists \alpha > 0 \text{ tel que} \\ & \inf_{q_h \in H_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{|(B^T \mathbf{v}_h, q_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_{V_h} \|q_h\|_{H_h}} \geq \alpha \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ce problème intervient lorsque l'on étudie un problème en formulation mixte. Cela n'arrive pas avec la POD car les vecteurs de base obtenus par cette méthode sont à

divergence nulle. Ainsi, la projection des équations de Navier-Stokes sur cette base permet d'obtenir une équation pour la vitesse seule, donc la condition inf-sup n'intervient pas.

Au contraire, lorsque l'on effectue une projection des équations de Navier-Stokes sur une base hilbertienne où les vecteurs de base ne sont pas à divergence nulle (comme c'est le cas en éléments finis), on obtient un problème discret mixte couplant vitesse et pression et on sait que ce problème ne donne pas de bonnes solutions si la condition inf-sup n'est pas satisfaite [33, 45]. Or, dans la phase de résolution du problème réduit de l'APR, les vecteurs ne sont pas à divergence nulle (ils le seront uniquement à convergence, s'il y a convergence) et donc dans chaque étape du problème réduit on se trouve confronté au problème signalé plus haut. Autrement dit, comment choisir les bases APR sur la vitesse et sur la pression pour que la condition inf-sup soit vérifiée ? Chinesta [22] avait constaté ce problème sur les équations de Stokes stationnaires. Il a remédié à cette difficulté en ne considérant un enrichissement de la base pour la pression que toutes les 3 itérations alors que la base de vitesse est enrichie à chaque itération.

Dans ce mémoire, nous proposons d'appliquer l'approche APR sur une méthode de discrétisation des équations de Navier-Stokes de type volumes finis découplant partiellement la vitesse et la pression par un algorithme de projection. Ainsi, ce chapitre sera structuré de la façon suivante :

- La discrétisation des équations de Navier-Stokes utilisée pour la résolution du modèle complet et pour la construction de la base APR va être détaillée.
- Le code, que l'on va appeler dans la suite par abus de langage *code DNS* va ensuite être validé sur l'exemple de la cavité entraînée 2D.
- Enfin, cette configuration sera résolue à l'aide de la méthode APR.

5.1 Modèle complet

5.1.1 Discrétisation des équations de Navier-Stokes

Dans cette partie, on rappelle la discrétisation utilisant la méthode des volumes finis. Notre choix s'est porté vers cette méthode puisqu'elle présente l'avantage important de discrétiser les équations de Navier-Stokes sous une forme conservative. Ainsi, cela permet notamment de pouvoir suivre des discontinuités comme des chocs. Dans cette partie, on rappelle les principes fondamentaux de la méthode en précisant les choix que nous avons faits, notamment au niveau des discrétisations spatiale et temporelle. Pour de plus amples informations et des détails sur la méthode des volumes finis, le lecteur pourra se référer aux ouvrages de [26] et [53]. Afin de découpler vitesse et pression, une technique de projection a également été utilisée. Elle

sera détaillée dans ce paragraphe.

Tout d'abord, on rappelle les équations de Navier-Stokes en formulation vitesse-pression, pour un fluide incompressible dans un domaine borné Ω de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega \\ + \text{conditions initiales} \end{cases} \quad (5.3)$$

où ν est la viscosité cinématique, ρ la masse volumique du fluide qui va être prise par la suite égale à 1 pour des raisons de simplification d'écriture, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ est la vitesse, p la pression, $\partial\Omega$ la frontière du domaine Ω et \mathbf{f} les forces extérieures par unité de masse agissant sur le fluide. Dans notre cas, ces forces sont nulles.

5.1.1.1 Maillage

La méthode des volumes finis consiste à discrétiser la forme intégrale du problème à résoudre sur des volumes de contrôles, que l'on note par la suite Ω_{ij} . Le domaine Ω est donc partitionné en cellules de contrôles de telle sorte que l'on ait $\bar{\Omega} = \bigcup_{ij} \bar{\Omega}_{ij}$ et $\Omega_{ij} \cap \Omega_{kl} \neq \emptyset$ pour tout $(i, j) \neq (k, l)$. Cette discrétisation est représentée sur la figure 5.1. Par ailleurs, le domaine a été discrétisé suivant un arrangement en variables colocalisées comme présenté sur la même figure, c'est-à-dire que toutes les variables – vitesse $\mathbf{u} = (u, v)$ et pression p – ont été calculées aux centres des cellules de contrôle. Le choix de l'arrangement en variable colocalisées par rapport

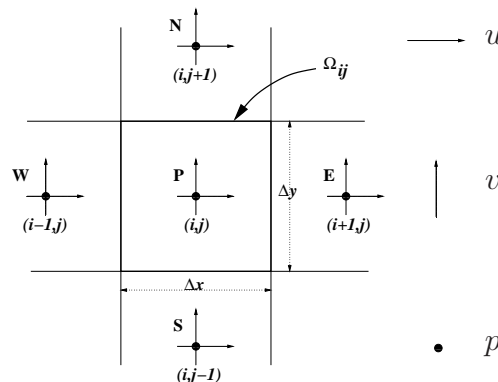


FIG. 5.1 – Détails d'une cellule de contrôle d'un maillage volumes finis et schéma colocalisé utilisé

aux variables décalées est essentiellement un choix d'implémentation numérique. En

effet, dans ce type de maillage, toutes les variables sont stockées au même noeuds alors que les grilles à maillage décalées stockent les variables u , v et p à des endroits différent du maillage, ce qui introduit plusieurs ensembles de cellules de contrôle, un pour chaque variable. Traiter des géométries complexes avec des maillages décalés devient alors plus compliqué, et l’extension à des exemples tridimensionnels n’est pas aisée. Pourtant, ce type de maillage est le plus populaire parce qu’il est réputé être plus efficace dans la manière dont la vitesse et la pression sont couplées. En effet, l’utilisation de maillages colocalisés peut conduire à des gradients de pression nuls aux noeuds du maillage même s’il existe des oscillations dans le champ de pression, ce qui n’est pas physique. Cependant, des progrès sur les schémas colocalisés ont été effectués depuis la fin des années 90, comme le soulignent les auteurs de [52]. Pour utiliser cette approche et s’affranchir du problème expliqué avant, une “astuce” dans le calcul des flux inspirée de Patankar [51] et Perić *et al.* [53] a été utilisée avec succès par Faure [27] dans le cas de la cavité entraînée. C’est cette astuce que nous utiliserons dans notre travail.

5.1.1.2 Discrétisation temporelle

Les méthodes de discrétisation temporelle des équations de Navier-Stokes sont très diverses. D’une façon générale, les schémas de résolution faisant intervenir deux itérations temporelles successives, que l’on notera $(\bullet)^n$ et $(\bullet)^{n+1}$ pour une variable quelconque (\bullet) , sont les plus populaires. Dans cette catégorie, on trouve le schéma *explicite*, conditionnellement stable mais facile à implémenter numériquement, et les schémas *Euler implicite* et *Crank-Nicholson* plus difficiles à mettre en œuvre et qui requièrent plus de mémoire mais qui ont l’avantage d’être inconditionnellement stables. Le schéma de Crank-Nicholson étant d’ordre 2 alors que le schéma implicite n’est que du premier ordre, nous avons choisi dans notre étude de l’utiliser pour la discrétisation temporelle des termes diffusifs et de pression. Le terme convectif, quant à lui, peut être linéarisé, ou pris complètement explicite¹ pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Dans notre cas, ce terme a été discrétisé à l’aide d’un schéma d’*Adams-Bashforth*, schéma *multi-points* qui fait intervenir les deux pas de temps précédents n et $n - 1$, lui aussi du second ordre. Une explication plus détaillée des schémas Adams peut être trouvée dans l’ouvrage de Perić [53].

Les équations de Navier-Stokes (5.3) sont donc réécrites en utilisant ces différentes

¹c’est suffisant dans les applications qui nous intéressent. Cependant, pour des études sur les bifurcations, il est nécessaire de conserver le caractère non-linéaire des équations de Navier-Stokes.

discrétisations temporelles, on obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - B(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, p^n, p^{n+1}) + C(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1}) = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ \mathbf{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} \\ + \text{condition initiale} \end{cases} \quad (5.4)$$

Où $B(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, p^n, p^{n+1})$ est le terme linéaire regroupant les termes diffusifs et de pression, et $C(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1})$ est le terme convectif. On a donc :

$$B(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, p^n, p^{n+1}) = \nu \Delta \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2} \right) + \nabla \left(\frac{p^{n+1} + p^n}{2} \right) \quad (5.5)$$

$$C(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1}) = \frac{3}{2}(\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n - \frac{1}{2}(\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n-1} \quad (5.6)$$

5.1.1.3 Decouplage vitesse-pression

Lorsque l'on discrétise les équations de Navier-Stokes (5.3), on a le choix de considérer comme inconnue du problème le couple (\mathbf{u}, p) ou alors de découpler la vitesse et la pression. Or, il a été maintes reprises constaté que considérer les deux inconnues couplées pose des problèmes numériquement puisque la matrice $[A]$ obtenue lors de la discrétisation est mal conditionnée. Le problème a néanmoins été traité sous cette forme et les résultats obtenus par cette approche seront présentés dans le paragraphe 5.2.2. On verra en effet que la matrice mal conditionnée conduit à une mauvaise résolution du problème, même pour des nombres de Reynolds faibles. Dans tous les autres cas présentés dans ce travail, un algorithme de projection a été mis en place pour découpler la vitesse et la pression. Une liste assez complète peut être consultée dans Guermond et Shen [32] mais dans cette étude, seul le schéma de Van Kahn a été utilisé. Faure [27] utilise ce schéma de Van Kahn et obtient des résultats satisfaisants dans le cas de la cavité entraînée 2D.

De manière générale, les algorithmes de projection appartiennent à la catégorie des méthodes de *prédiction-correction*. Dans un premier temps, c'est l'équation de la conservation de quantité de mouvement qui est résolue seule en considérant une pression initiale estimée, en général on prend la pression au pas de temps précédent. L'inconnue de cette équation est la vitesse $\tilde{\mathbf{u}}$ que l'on appellera par la suite vitesse intermédiaire ou vitesse estimée. On doit donc résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \nu \Delta \left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}^n + \mathbf{u}^n}{2} \right) + C(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1}) + \nabla p^n = 0 \quad (5.7)$$

où la vitesse intermédiaire vérifie également les conditions aux limites de Dirichlet :

$$\tilde{\mathbf{u}}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} \quad (5.8)$$

Cette vitesse doit alors être corrigée en utilisation le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\nabla\tilde{p} \\ \text{div } \mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

où $\tilde{p} = p^{n+1} - p^n$. Pour calculer la correction de pression \tilde{p} , on prend la divergence de l'équation (5.9) qui donne, en utilisant le fait que la divergence de la vitesse au pas de temps $n + 1$ est nulle, l'équation de Poisson suivante pour la pression :

$$\Delta\tilde{p} = \frac{2}{\Delta t}\text{div } \tilde{\mathbf{u}}^n \quad (5.10)$$

où \tilde{p} respecte des conditions aux limites de type Neumann. En effet, en utilisant (5.9) prolongée sur le bord, on a :

$$(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = -\frac{\Delta t}{2}\nabla\tilde{p} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} \quad (5.11)$$

où \mathbf{n} est la normale sortante au volume de contrôle Ω . Or on a :

$$\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \tilde{\mathbf{u}}^n \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} \quad (5.12)$$

d'où finalement on obtient :

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (5.13)$$

En résumé, la démarche adoptée par l'algorithme de Van Kahn que l'on va utiliser par la suite dans tous nos calculs peut se résumer de la façon suivante :

1. L'équation de conservation de la quantité de mouvement pour la vitesse estimée $\tilde{\mathbf{u}}$ (5.7) est résolue en utilisant des conditions aux limites de Dirichlet (5.8).
2. L'équation de Poisson pour la correction de pression \tilde{p} (5.10) est résolue en utilisant des conditions aux limites de Neumann (5.13).
3. La vitesse est alors corrigée suivant l'expression (5.9) où la divergence nulle est assurée par la résolution de l'équation de Poisson.

5.1.1.4 Discrétisation spatiale par volumes finis

On présente ici les différents choix de discrétisation spatiale que nous avons effectués en suivant l'algorithme de projection. Ainsi, la formulation en volumes finis s'obtient en intégrant les équations (5.7) et (5.9) sur les volumes de contrôle

Ω_{ij} définis lors de la discrétisation, comme indiqué sur la figure 5.1 :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_{ij}} \left[\frac{\tilde{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \nu \Delta \left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}^n + \mathbf{u}^n}{2} \right) + C(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1}) + \frac{1}{\rho} \nabla p^n \right] d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega_{ij}} \left[\Delta \tilde{p} - \frac{2}{\Delta t} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}^n \right] d\Omega = 0 \\ \tilde{\mathbf{u}}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} \\ \left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

Tout d'abord, on réécrit l'expression de l'intégrale du terme instationnaire sur le volume de contrôle Ω_{ij} :

$$\int_{\Omega_{ij}} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} d\Omega \simeq \Omega_{ij} \frac{\mathbf{u}_{ij}^{n+1} - \mathbf{u}_{ij}^n}{\Delta t} \quad (5.15)$$

Les intégrales de volumes intervenant dans la formulation (5.14) se ramène alors à des intégrales sur les surfaces. On obtient ainsi l'expression suivante pour la conservation de la quantité de mouvement :

$$|\Omega_{ij}| \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{ij}^n - \mathbf{u}_{ij}^n}{\Delta t} = \int_{\partial\Omega_{ij}} \left[\left[\frac{\nu}{2} \nabla (\tilde{\mathbf{u}}^n + \mathbf{u}^n) - \frac{1}{\rho} p^n \right] \cdot \mathbf{n} - \frac{3}{2} \mathbf{u}^n (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n-1} (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \mathbf{n}) \right] dS \quad (5.16)$$

où $|\Omega_{ij}| = \int_{\Omega_{ij}} d\Omega$ représente la *mesure* de Ω .

Pour calculer les intégrales de surface, on introduit le flux F d'une quantité $f = \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}$ à travers les surfaces d'un volume de contrôle Ω_{ij} :

$$F = \int_{\partial\Omega_{ij}} f dS \simeq \sum_k F_k \simeq \sum_k \int_{\partial\Omega_{ij}^k} f dS \quad (5.17)$$

où $\partial\Omega_{ij}^k$ représente la surface entre deux noeuds de calcul, F_k représente le flux de la variable f à travers la surface S_k , respectivement k prend les valeurs 'e', 'w', 'n' et 's' pour les surfaces situées entre les points de contrôle P et E, W et P, P et N, et enfin S et P (voir figure 5.1). L'approximation de l'intégrale de surface que nous avons choisie est la méthode des rectangles exprimée comme suit pour la surface $\partial\Omega_{ij}^k$:

$$F_k = \int_{\partial\Omega_{ij}^k} f dS \approx f_k S_k \quad (5.18)$$

où f_k est la valeur au milieu de la surface S_k , approximée par un schéma centré à l'aide des deux points alentours, ce qui permet d'avoir une approximation du second ordre de l'intégrale de surface.

Pour l'intégrale sur la surface 'e' par exemple, on va donc avoir (voir schéma 5.1) :

$$\int_{\partial\Omega_{ij}^e} f dS \approx f_e S_e \simeq \frac{f_P + f_E}{2} S_e = \frac{f_{ij} + f_{i+1j}}{2} S_e \quad (5.19)$$

On obtient des expressions similaires pour les autres surfaces de la cellule de contrôle. On réécrit donc les différents termes de l'équation (5.14) en utilisant cette approximation et en considérant le maillage régulièrement espacé (on peut donc écrire dans ce cas : $S_e = S_w = \Delta y$ et $S_n = S_s = \Delta x$) suivant \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y , où \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y sont les vecteurs unitaires suivant x et y . On obtient alors :

- Pour le terme diffusif :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{ij}} \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS &\simeq \sum_k \int_{\partial\Omega_{ij}^k} \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \approx \sum_k \nu (\nabla \mathbf{u})_k \cdot \mathbf{n} S_k \\ &\simeq \nu \left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)_{|e} S_e - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)_{|w} S_w + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)_{|n} S_n - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)_{|s} S_s \right) \\ &\approx \nu \left(\frac{\mathbf{u}_{i+1j} - \mathbf{u}_{ij}}{\Delta x} \Delta y - \frac{\mathbf{u}_{ij} - \mathbf{u}_{i-1j}}{\Delta x} \Delta y \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{u}_{ij+1} - \mathbf{u}_{ij}}{\Delta y} \Delta x - \frac{\mathbf{u}_{ij} - \mathbf{u}_{ij-1}}{\Delta y} \Delta x \right) \end{aligned}$$

- Le gradient de pression s'écrit quant à lui :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{ij}} p \cdot \mathbf{n} \, dS &\simeq \sum_k \int_{\partial\Omega_{ij}^k} p \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &\simeq (p_e S_e - p_w S_w) \cdot \mathbf{e}_x + (p_n S_n - p_s S_s) \cdot \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

- Pour le terme convectif, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{ij}} \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS &\simeq \sum_k \int_{\partial\Omega_{ij}^k} \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS \\ &\simeq (\mathbf{u} \cdot u)_{|e} S_e - (\mathbf{u} \cdot u)_{|w} S_w + (\mathbf{u} \cdot v)_{|n} S_n - (\mathbf{u} \cdot v)_{|s} S_s \\ &\approx \left(F_e^u \frac{u_{i+1j} + u_{ij}}{2} - F_w^u \frac{u_{ij} + u_{i-1j}}{2} \right. \\ &\quad \left. + F_n^v \frac{u_{ij+1} + u_{ij}}{2} - F_s^v \frac{u_{ij} + u_{ij-1}}{2} \right) \cdot \mathbf{e}_x \\ &\quad + \left(F_e^u \frac{v_{i+1j} + v_{ij}}{2} - F_w^u \frac{v_{ij} + v_{i-1j}}{2} \right. \\ &\quad \left. + F_n^v \frac{v_{ij+1} + v_{ij}}{2} - F_s^v \frac{v_{ij} + v_{ij-1}}{2} \right) \cdot \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

- La divergence de la vitesse s'écrit quant à elle :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{ij}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega &= \int_{\partial\Omega_{ij}} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega \\ &\simeq \sum_k \tilde{F}_k^{\mathbf{u}} = \tilde{F}_e^u - \tilde{F}_w^u + \tilde{F}_n^v - \tilde{F}_s^v \end{aligned}$$

où l'on a introduit les expressions des flux de vitesse $F_k^{\mathbf{u}}$ (resp. les flux de vitesse estimée $\tilde{F}_k^{\mathbf{u}}$) à travers la surface S_k . On fait donc intervenir les flux de

vitesse à travers les surfaces S_e et S_w : F_e^u et F_w^u , et à travers les surfaces S_n et S_s : F_n^v et F_s^v et ces flux seront calculés en utilisant l'approximation (5.19) décrite auparavant. Pour le flux à travers la surface 'e' par exemple, on a :

$$F_e^u = \frac{u_{ij} + u_{i+1j}}{2} \Delta y \quad (5.20)$$

et les autres flux s'obtiennent de façon similaire.

- Enfin, le laplacien de pression qui intervient dans l'équation de Poisson s'écrit de la même façon que le laplacien de la vitesse, à savoir :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{ij}} \Delta \tilde{p} \, d\Omega &= \int_{\partial\Omega_{ij}} \nabla \tilde{p} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &\simeq \sum_k \int_{\partial\Omega_{ij}^k} \nabla \tilde{p} \cdot \mathbf{n} \, dS \approx \sum_k (\nabla \tilde{p})_k \cdot \mathbf{n} \, S_k \\ &\simeq \left(\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \right)_{|e} S_e - \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \right)_{|w} S_w + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \right)_{|n} S_n - \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \right)_{|s} S_s \right) \\ &\approx \left(\frac{\tilde{p}_{i+1j} - \tilde{p}_{ij}}{\Delta x} \Delta y - \frac{\tilde{p}_{ij} - \tilde{p}_{i-1j}}{\Delta x} \Delta y + \frac{\tilde{p}_{ij+1} - \tilde{p}_{ij}}{\Delta y} \Delta x - \frac{\tilde{p}_{ij} - \tilde{p}_{ij-1}}{\Delta y} \Delta x \right) \end{aligned}$$

Toutes ces approximations ont été injectées dans le système d'équations (5.14). Ainsi, l'algorithme de projection de Van Kahn discrétisé s'écrit :

1. On résout l'équation de quantité de mouvement pour la vitesse intermédiaire $\tilde{\mathbf{u}}$.

- On a donc, sur \mathbf{e}_x :

$$\begin{aligned} |\Omega_{ij}| \frac{\tilde{u}_{ij}^n - u_{ij}^n}{\Delta t} &- \frac{\nu}{2} \left(\frac{\tilde{u}_{i+1j}^n - \tilde{u}_{ij}^n}{\Delta x} \Delta y - \frac{\tilde{u}_{ij}^n - \tilde{u}_{i-1j}^n}{\Delta x} \Delta y + \frac{\tilde{u}_{ij+1}^n - \tilde{u}_{ij}^n}{\Delta y} \Delta x \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{u}_{ij}^n - \tilde{u}_{ij-1}^n}{\Delta y} \Delta x \right) \\ &= \frac{\nu}{2} \left(\frac{u_{i+1j}^n - u_{ij}^n}{\Delta x} \Delta y - \frac{u_{ij}^n - u_{i-1j}^n}{\Delta x} \Delta y + \frac{u_{ij+1}^n - u_{ij}^n}{\Delta y} \Delta x \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_{ij}^n - u_{ij-1}^n}{\Delta y} \Delta x \right) \\ &- \frac{3}{2} \left(F_e^{u^n} \frac{u_{i+1j}^n + u_{ij}^n}{2} - F_w^{u^n} \frac{u_{ij}^n + u_{i-1j}^n}{2} \right. \\ &\quad \left. + F_n^{v^n} \frac{u_{ij+1}^n + u_{ij}^n}{2} - F_s^{v^n} \frac{u_{ij}^n + u_{ij-1}^n}{2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(F_e^{u^{n-1}} \frac{u_{i+1j}^{n-1} + u_{ij}^{n-1}}{2} - F_w^{u^{n-1}} \frac{u_{ij}^{n-1} + u_{i-1j}^{n-1}}{2} \right. \\ &\quad \left. + F_n^{v^{n-1}} \frac{u_{ij+1}^{n-1} + u_{ij}^{n-1}}{2} - F_s^{v^{n-1}} \frac{u_{ij}^{n-1} + u_{ij-1}^{n-1}}{2} \right) \\ &- \frac{\Delta y}{2} (p_{i+1j}^n - p_{i-1j}^n) \end{aligned} \quad (5.21)$$

- Et sur \mathbf{e}_y :

$$\begin{aligned}
 |\Omega_{ij}| \frac{\tilde{v}_{ij}^n - v_{ij}^n}{\Delta t} &= \frac{\nu}{2} \left(\frac{\tilde{v}_{i+1j}^n - \tilde{v}_{ij}^n}{\Delta x} \Delta y - \frac{\tilde{v}_{ij}^n - \tilde{v}_{i-1j}^n}{\Delta x} \Delta y + \frac{\tilde{v}_{ij+1}^n - \tilde{v}_{ij}^n}{\Delta y} \Delta x \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\tilde{v}_{ij}^n - \tilde{v}_{ij-1}^n}{\Delta y} \Delta x \right) \\
 &= \frac{\nu}{2} \left(\frac{v_{i+1j}^n - v_{ij}^n}{\Delta x} \Delta y - \frac{v_{ij}^n - v_{i-1j}^n}{\Delta x} \Delta y + \frac{v_{ij+1}^n - v_{ij}^n}{\Delta y} \Delta x \right. \\
 &\quad \left. - \frac{v_{ij}^n - v_{ij-1}^n}{\Delta y} \Delta x \right) \\
 &\quad - \frac{3}{2} \left(F_e^{u^n} \frac{v_{i+1j}^n + v_{ij}^n}{2} - F_w^{u^n} \frac{v_{ij}^n + v_{i-1j}^n}{2} \right. \\
 &\quad \left. + F_n^{v^n} \frac{v_{ij+1}^n + v_{ij}^n}{2} - F_s^{v^n} \frac{v_{ij}^n + v_{ij-1}^n}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(F_e^{u^{n-1}} \frac{v_{i+1j}^{n-1} + v_{ij}^{n-1}}{2} - F_w^{u^{n-1}} \frac{v_{ij}^{n-1} + v_{i-1j}^{n-1}}{2} \right. \\
 &\quad \left. + F_n^{v^{n-1}} \frac{v_{ij+1}^{n-1} + v_{ij}^{n-1}}{2} - F_s^{v^{n-1}} \frac{v_{ij}^{n-1} + v_{ij-1}^{n-1}}{2} \right) \\
 &\quad - \frac{\Delta x}{2} (p_{ij+1}^n - p_{ij-1}^n)
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

On note qu'un algorithme de gradient biconjugué a été utilisé ici.

2. On calcule la correction de pression \tilde{p} en résolvant² l'équation de Poisson :

$$\begin{aligned}
 &\frac{\tilde{p}_{i+1j} - \tilde{p}_{ij}}{\Delta x} \Delta y - \frac{\tilde{p}_{ij} - \tilde{p}_{i-1j}}{\Delta x} \Delta y + \frac{\tilde{p}_{ij+1} - \tilde{p}_{ij}}{\Delta y} \Delta x - \frac{\tilde{p}_{ij} - \tilde{p}_{ij-1}}{\Delta y} \Delta x \\
 &= \frac{2}{\Delta t} (\tilde{F}_e^u - \tilde{F}_w^u + \tilde{F}_n^v - \tilde{F}_s^v)
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

où l'on a noté $\tilde{F}^{\mathbf{u}_k}$ le flux associé à la vitesse intermédiaire au travers de la surface k .

3. La vitesse est corrigée, donc on calcule \mathbf{u}^{n+1} et on *update* les flux à l'aide des relations suivantes :

$$|\Omega_{ij}| \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2\rho} \left(\frac{\Delta y}{2} (\tilde{p}_{i+1j} - \tilde{p}_{i-1j}) \mathbf{e}_x + \frac{\Delta x}{2} (\tilde{p}_{ij+1} - \tilde{p}_{ij-1}) \mathbf{e}_y \right) \tag{5.24}$$

et

$$\frac{\tilde{F}_e^u - \tilde{F}_w^u}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \Delta y \frac{\tilde{p}_{i+1j} - \tilde{p}_{ij}}{\Delta x} \tag{5.25}$$

$$\frac{\tilde{F}_n^v - \tilde{F}_s^v}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \Delta x \frac{\tilde{p}_{ij+1} - \tilde{p}_{ij}}{\Delta y} \tag{5.26}$$

²également avec un algorithme de gradient biconjugué

5.1.1.5 Calcul des flux intermédiaires

La critique souvent faite aux schémas colocalisés par rapport aux schémas décalés est la mauvaise condition de couplage entre la vitesse et la pression. Cela a été numériquement mis en évidence par Patankar [51], Perić *et al.* [53] ou encore plus récemment par Faure dans [27]. Dans la partie précédente, on a introduit les flux des vitesses intermédiaire et l'interpolation linéaire utilisée pour le calcul de ces flux est à l'origine des problèmes numériques rencontrés. En effet, lorsque le nombre de Reynolds augmente, la pression et les vitesses ne sont plus suffisamment couplées, comme cela est très bien expliqué dans [27]. Si on calcule les flux intermédiaires à l'aide de l'interpolation linéaire (5.20) :

$$\tilde{F}_e^u = \frac{\tilde{u}_{ij} + \tilde{u}_{i+1j}}{2} \Delta y \quad (5.27)$$

où \tilde{u}_{ij} est solution de l'équation (5.21). La contribution de la pression dans le flux \tilde{F}_e^u vaut alors :

$$- \left(\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \nu \frac{\Delta y}{\Delta x} + \nu \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^{-1} \frac{\Delta y}{4} (p_{i+2j}^n + p_{i+1j}^n - p_{ij}^n - p_{i-1j}^n) \quad (5.28)$$

ce qui implique que la contribution de la pression dans le terme $(\tilde{F}_e^u - \tilde{F}_w^u)$ dans le second membre de l'équation de Poisson (5.23) est $p_{i+2j}^n - 2p_{ij}^n - p_{i-2j}^n$. Ainsi, les pressions des noeuds $(i+1, j)$ et $(i-1, j)$ n'interviennent pas dans la divergence de la vitesse, ce qui sous-entend que la vitesse et la pression sont découplées dans ce cas. Afin de surmonter ce problème, les auteurs de [27, 53] proposent de recalculer les flux intermédiaires en modifiant la contribution de pression dans la vitesse intermédiaire. Au lieu de considérer l'expression centrée de la pression, on considère une contribution *upwind*. Si l'on note :

$$\tilde{\tilde{u}}_{ij} = \tilde{u}_{ij} + \beta \frac{\Delta y}{2} (p_{i+1j}^n - p_{i-1j}^n) \quad (5.29)$$

où $\beta = \left(\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \nu \frac{\Delta y}{\Delta x} + \nu \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^{-1}$, on obtient alors :

$$\tilde{F}_e^u = \left[\frac{\tilde{\tilde{u}}_{i+1j} + \tilde{\tilde{u}}_{ij}}{2} - \beta \Delta y (p_{i+1j}^n - p_{ij}^n) \right] \Delta y \quad (5.30)$$

Cette *astuce numérique* a pour conséquence de coupler plus efficacement vitesse et pression dans l'équation de Poisson. Comme ce n'est pas le propos de ce travail, le lecteur trouvera une explication plus détaillée dans [27]. Dans toute la suite de l'étude, c'est ce calcul des flux qui a été utilisé.

5.2 Validation du modèle complet pour l'écoulement dans une cavité entraînée 2D

5.2.1 Problème étudié

La validation du code a été effectuée en étudiant la configuration de la cavité entraînée 2D. Cet exemple, souvent traité dans la littérature, voir [5, 17, 27, 30], est intéressant du fait de sa géométrie simple à mettre en œuvre et de l'abondance de résultats, numériques mais aussi expérimentaux, sur les différents régimes rencontrés. C'est par ailleurs un bon cas test puisque la physique de ce problème est riche. Le problème possède une solution stationnaire pour des nombres de Reynolds faibles. On observe par ailleurs une bifurcation de Hopf située, selon les auteurs, aux alentours de $Re = 8000$, où le nombre de Reynolds est basé sur la longueur de la cavité et la vitesse d'entraînement du fluide³. Pour un nombre de Reynolds égal à 10000, la solution que l'on trouve est alors instationnaire et périodique. Pour revenir à la configuration, il s'agit d'un domaine carré unitaire ($L = 1$) où l'on impose une vitesse d'entraînement sur la paroi horizontale supérieure alors que toutes les autres sont fixes, comme présenté sur la figure 5.2. Cela correspond donc aux conditions

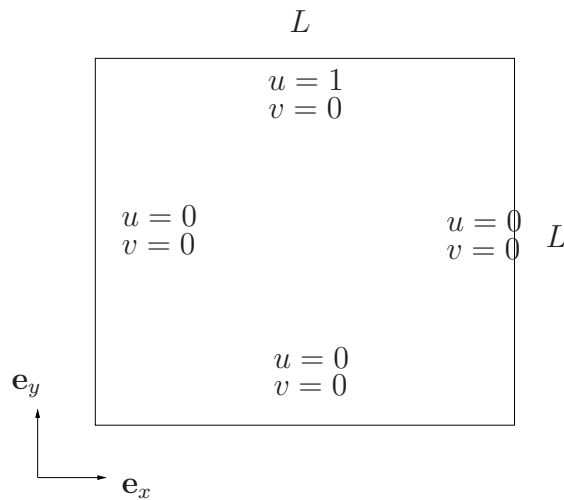


FIG. 5.2 – Configuration de la cavité entraînée 2D

aux limites suivantes :

$$\begin{cases} g_u(0, y) = g_u(1, y) = g_u(x, 0) = 0 \\ g_v(0, y) = g_v(1, y) = g_v(x, 0) = g_v(x, 1) = 0 \\ g_u(x, 1) = 1 \end{cases} \quad (5.31)$$

³on note que la longueur L et la vitesse d'entraînement restent fixes, c'est donc la viscosité cinématique ν qui pilote le nombre de Reynolds.

5.2.2 Résultats numériques

5.2.2.1 Cas stationnaires

Le code a donc été validé dans un premier temps sur les régimes stationnaires de la cavité entraînée. Ainsi, nous avons calculé les solutions pour un nombre de Reynolds valant successivement, $Re = 100$, $Re = 1000$, $Re = 3200$ et enfin $Re = 5000$. Les résultats obtenus ont alors été comparés aux résultats de Ghia *et al.* [30], souvent cités comme résultats de référence pour la configuration de la cavité entraînée. Le critère de convergence utilisé pour déterminer si le calcul est convergé s'est effectué sur l'énergie cinétique totale définie comme suit :

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|^2 \, d\Omega \quad (5.32)$$

et calculée sur le maillage de taille $n_x \times n_y$ de la façon suivante :

$$E \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} (u_{ij}^2 + v_{ij}^2) \Omega_{ij} \quad (5.33)$$

En pratique, on arrête donc les calculs dès lors que l'on obtient, entre deux itérations de calcul k et $k + 1$:

$$|E_k - E_{k+1}| < \varepsilon \quad (5.34)$$

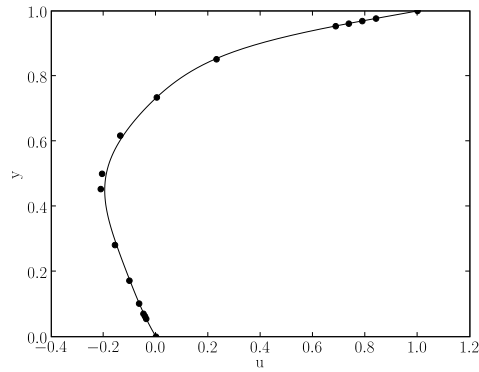
Dans la pratique, on a choisi $\varepsilon = 10^{-4}$.

Résolution des équations de Navier-Stokes avec vitesse-pression couplées.

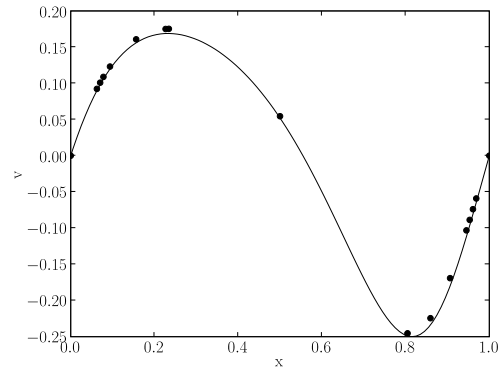
Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la résolution directe du problème (5.3), c'est-à-dire en considérant le problème (\mathbf{u}, p) couplé. Comme on l'a mentionné dans le paragraphe 5.1.1.3, des problèmes numériques surviennent lorsque l'on essaie de traiter les équations de Navier-Stokes entièrement couplées parce que la matrice issue de la discrétisation est mal conditionnée. On précise ici que le calcul, effectué de façon directe, diverge si l'on ne pénalise pas la pression. Les résultats présentés dans ce paragraphe ont donc été obtenus en résolvant, à la place de l'équation d'incompressibilité, l'équation suivante :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1}{\kappa} p = 0 \quad (5.35)$$

où $\kappa \rightarrow \infty$ est le coefficient de pénalisation, qui en pratique a été pris égal à $\kappa = 10^{-5}$. Dans ce cas, on doit alors résoudre l'équation de quantité de mouvement du système (5.3) et l'équation d'incompressibilité pénalisée (5.35). Ce problème a été discrétisé par la méthode des volumes finis présentée dans le début du chapitre et

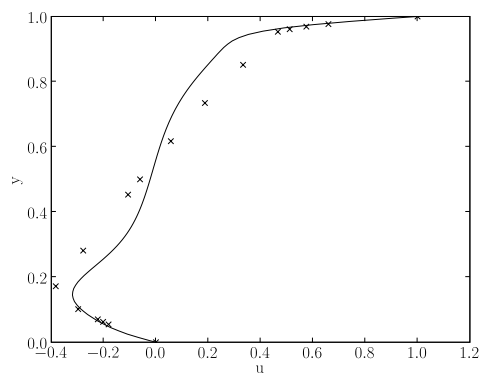


(a) *Profils de vitesse horizontale*

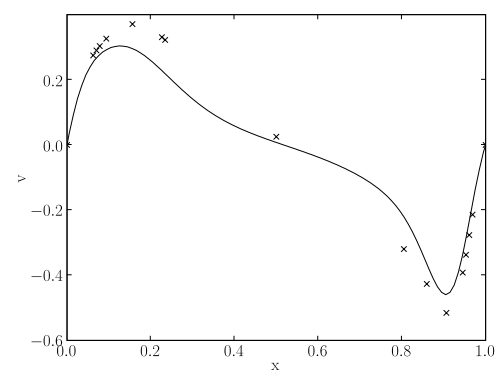


(b) *Profils de vitesse verticale*

FIG. 5.3 – Comparaison entre les profils de vitesse obtenus par le code développé (–) et ceux de Ghia (●) [30] pour $Re = 100$



(a) *Profils de vitesse horizontale*



(b) *Profils de vitesse verticale*

FIG. 5.4 – Comparaison entre les profils de vitesse obtenus par le code développé (–) et ceux de Ghia (●) [30] pour $Re = 1000$

le problème a été résolu pour deux nombres de Reynolds assez faibles, typiquement on a choisi $Re = 100$ et $Re = 1000$. Ainsi, la figure 5.3 présente les profils de vitesse dans les axes médians de la cavité à $Re = 100$ en comparaison avec les résultats de Ghia.

Sur cette figure, on constate que la vitesse est correctement calculée par notre code. De plus, la figure 5.4 présente la même comparaison pour un nombre de Reynolds plus élevé. On constate dans ce cas que la résolution couplée des équations de Navier-Stokes ne permet pas d'obtenir une bonne estimation de la vitesse. La figure 5.5

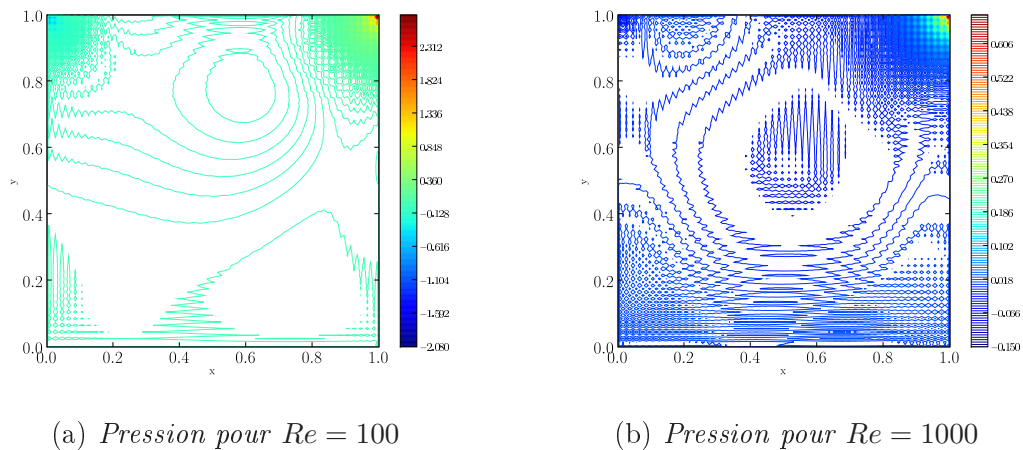
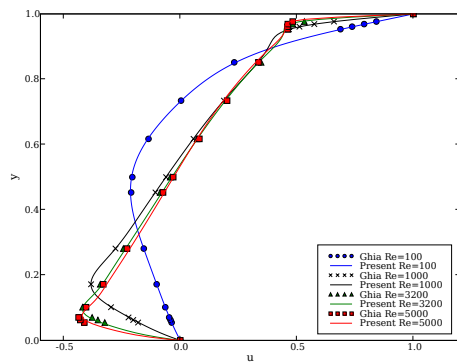


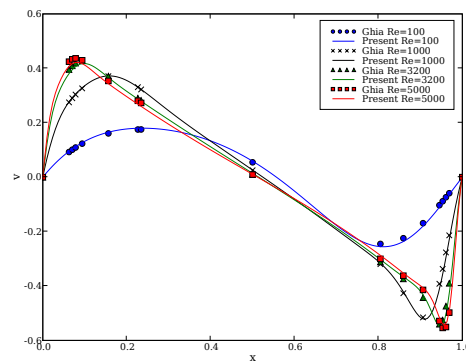
FIG. 5.5 – Isolignes de pression pour $Re = 100$ et $Re = 1000$

montre alors les champs de pression obtenus pour ces deux calculs. On constate sur cette figure que, même à $Re = 100$, la pression est assez mal déterminée. En effet, on observe des oscillations non-physiques de la pression. On se rend alors compte que c'est la détermination de la pression qui est cruciale pour obtenir une vitesse correcte. Par la suite, on utilisera alors l'algorithme découplant la vitesse et la pression présenté dans la partie 5.1.1.3.

Résolution par découplage vitesse-pression. La figure 5.6 présente les profils de vitesse dans les axes médians de la cavité pour les quatre nombres de Reynolds étudiés. La figure 5.6(a) montre l'évolution de la composante verticale de la vitesse suivant x pour $y = 0.5$ alors que la figure 5.6(b) montre l'évolution de la composante horizontale de la vitesse suivant y pour $x = 0.5$. On constate avec ces deux résultats que le code *complet* est capable de reproduire les solutions stationnaires de l'écoulement. Pour s'assurer de la validité des résultats, on représente également sur les figures 5.7 et 5.8 respectivement les isolignes de pression et les lignes de courant de l'écoulement pour les quatre valeurs du nombre de Reynolds étudiées. Tout d'abord, par rapport aux résultats présentés sur la figure 5.5 pour la résolution du problème couplé, on constate que la pression est mieux estimée, c'est-à-dire que dans le cas de la résolution découplée, on n'observe plus d'oscillations de pression. Les résultats

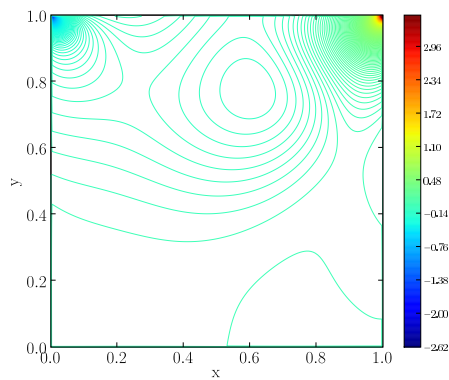


(a) *Profils de vitesse horizontale*

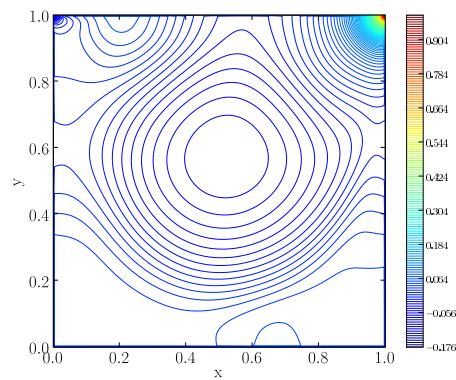


(b) *Profils de vitesse verticale*

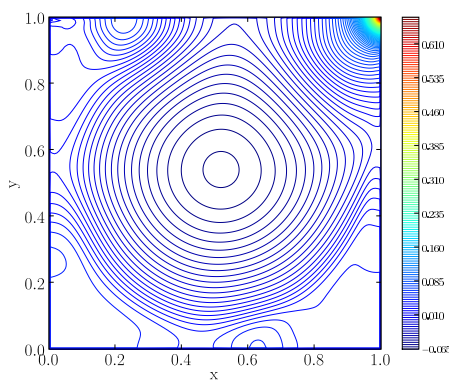
FIG. 5.6 – Comparaison entre les profils de vitesse obtenus par le code développé et ceux de Ghia [30]



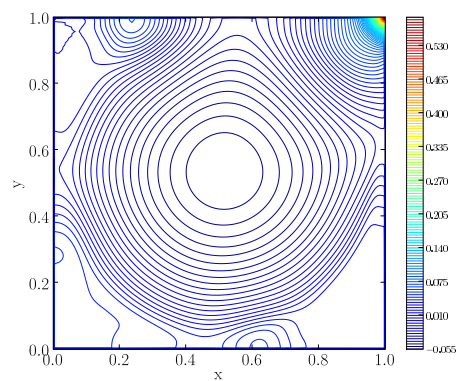
(a) *Pression pour Re = 100*



(b) *Pression pour Re = 1000*



(c) *Pression pour Re = 3200*



(d) *Pression pour Re = 5000*

FIG. 5.7 – Isolignes de pression pour les différents nombres de Reynolds stationnaires

pour la pression sont par ailleurs conformes aux résultats de la littérature, comme présentés par exemple dans [17, 27]. Enfin, les lignes de courant caractérisent l'écoulement pour les différents régimes stationnaires. A $Re = 100$, on observe un petit vortex en bas à droite de la cavité qui grandit à mesure que le nombre de Reynolds croît. De plus, à partir de $Re = 1000$, un autre vortex se forme en bas à gauche de la cavité, alors que le vortex principal situé au centre de la cavité est déjà formé.

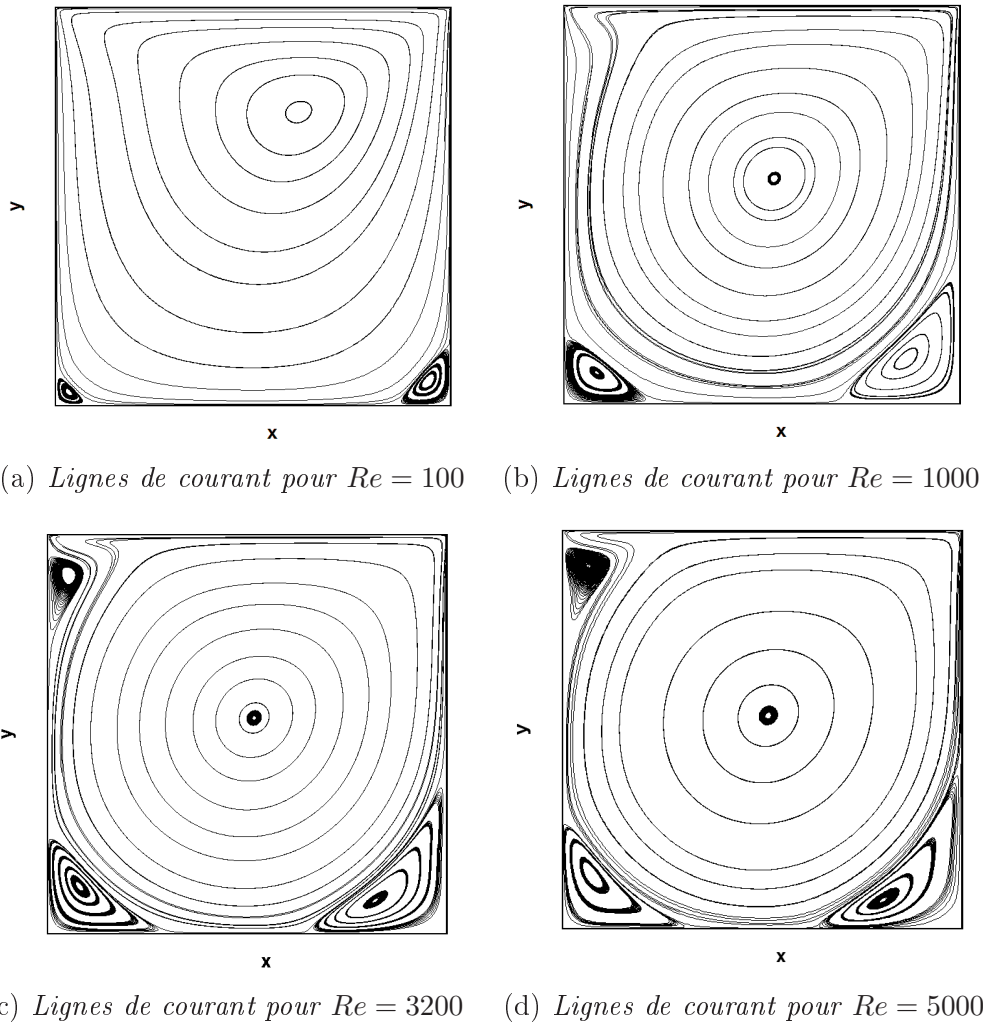


FIG. 5.8 – Lignes de courant pour les différents nombres de Reynolds stationnaires

Enfin, à $Re = 5000$, on observe trois zones de recirculation, en bas à gauche et à droite, mais également en haut à gauche, due à la vitesse d'entraînement de la face supérieure. Ces observations sont conformes à celles trouvées dans la littérature.

5.2.3 Cas instationnaire

Dans ce paragraphe, on présente les résultats obtenus par le calcul DNS pour un nombre de Reynolds $Re = 10000$. Les résultats sont analysés une fois que l'énergie cinétique totale E définie par l'équation (5.33) oscille autour d'une valeur moyenne. En effet, au delà de la bifurcation de Hopf, on observe une solution instationnaire périodique. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à l'évolution temporelle des grandeurs de l'écoulement à quelques noeuds de calcul choisis dans les recirculations. La figure 5.9 montre ainsi l'évolution de la composante horizontale de la vitesse au point de coordonnées $(0.47, 0.86)$.

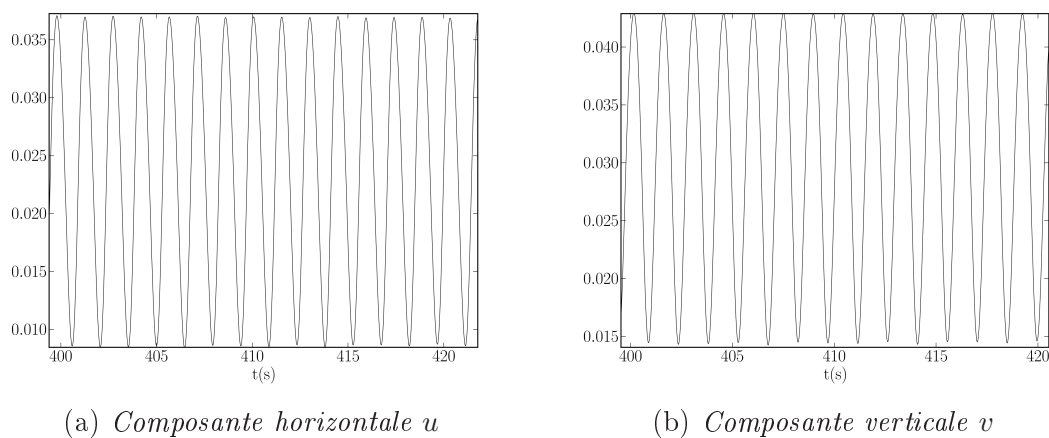


FIG. 5.9 – Evolution de u et v au point $(0.47, 0.86)$ au cours du temps

Cette figure confirme bien le fait qu'à $Re = 10000$, on observe une solution périodique. Une lecture précise de l'évolution temporelle des grandeurs de l'écoulement aboutit à une période valant $T \approx 1.51s$, ce qui est légèrement inférieur à l'évaluation de Bruneau *et al.* [17] qui annoncent une période principale de $T = 1.64s$. Cette légère différence peut s'expliquer par le fait qu'ils utilisent des schémas d'ordre élevé sur des maillages plus fins.

La figure 5.10 montre l'évolution de la solution sur une période principale en terme de lignes de courant. On retrouve bien les comportements décrits dans [4, 17, 20]. On observe dans le coin en bas à gauche deux structures qui se déplacent en suivant le gros vortex central pour venir s'apparier au bout de $t \approx 0.35s$. De la même façon, une petite structure est périodiquement incorporée dans la grande structure située en haut à gauche de la cavité (à $t = 0.7s$). La pression évolue également de façon périodique, son évolution est représentée sur la figure 5.11. On constate que pour ce nombre de Reynolds, on n'observe toujours pas d'oscillations de pression. Toutes ces résultats nous permettent ainsi de valider le code qui a présent peut être utilisé pour la méthode APR.

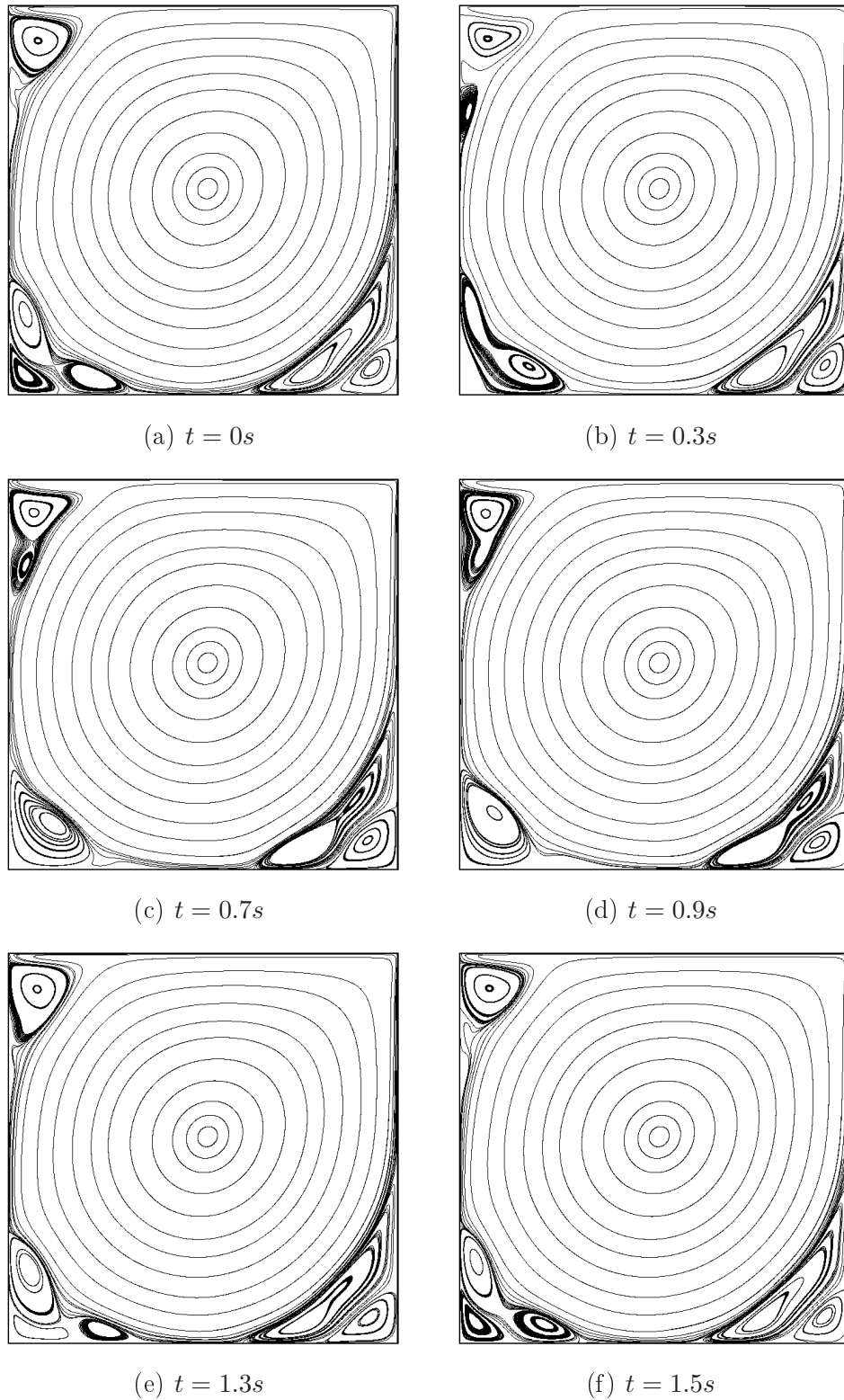


FIG. 5.10 – Lignes de courant de l'écoulement sur une période pour $Re = 10000$

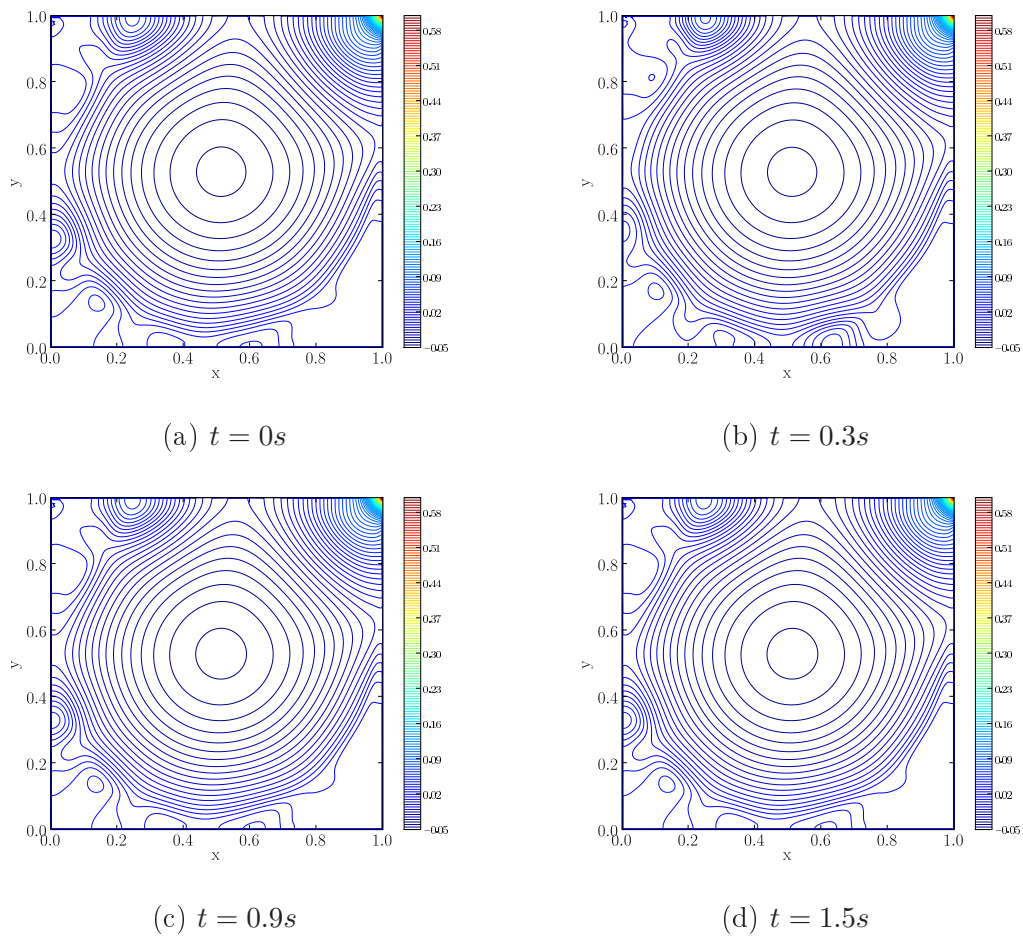


FIG. 5.11 – Isolignes de la pression sur une période pour $Re = 10000$

5.3 La méthode APR pour les équations de Navier-Stokes

Dans le chapitre 4, on a présenté la méthode APR pour des équations de transfert et montré les performances de cette approche. Si l'on pouvait résoudre les équations de Navier-Stokes directement, alors on pourrait utiliser la formulation du chapitre 4. Au vu des résultats présentés dans le paragraphe précédent, on constate que considérer la vitesse et la pression couplées pose des problèmes quand le nombre de Reynolds est grand. Par rapport à l'algorithme dit *traditionnel* 1, il faut donc modifier certaines étapes en suivant la démarche de découplage de vitesse-pression que l'on a présentée dans le début de ce chapitre.

Dans ce paragraphe, nous présentons donc cet algorithme modifié qui suit toutes les étapes de l'algorithme de projection de Van Kahn.

5.3.1 La méthode APR adaptée au schéma de projection

Pour la résolution des équations, on a choisi de découpler la vitesse et la pression avec l'algorithme de projection de Van Kahn. La méthode APR a pour but de résoudre des équations de taille réduite en déterminant des bases de leurs solutions. De ce fait, on va définir une base pour la vitesse estimée $\tilde{\mathbf{u}}$ notée $\phi^{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ et une base pour la correction de pression \tilde{p} notée $\phi^p(\mathbf{x})$ qui vont être les bases de projection des différentes équations utilisées par l'algorithme de projection. L'algorithme se présente donc sous la forme suivante :

1. Pour la phase d'initialisation, on considèrera les bases initiales pour la vitesse et la pression égales aux conditions initiales respectives.
2. Ensuite l'algorithme de projection prend d'abord en considération l'équation de quantité de mouvement (5.7) pour la vitesse estimée $\tilde{\mathbf{u}}$. On cherche alors la solution de cette équation comme décomposition sur la base de vitesse $\phi^{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^{N_{\mathbf{u}}} \tilde{a}_l(t) \phi_l^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad (5.36)$$

où $N_{\mathbf{u}}$ est le nombre de vecteurs propres de la base APR pour la vitesse estimée. En réécrivant l'équation (5.7) en utilisant la décomposition ci-dessus et en projetant sur la base de vitesse, on obtient l'équation réduite pour les coefficients temporels de la vitesse estimée suivante :

$$\sum_{l=1}^{N_{\mathbf{u}}} \left(\frac{1}{\Delta t} \phi_l^{\mathbf{u}} - \frac{\nu}{2} \Delta \phi_l^{\mathbf{u}}, \phi_m^{\mathbf{u}} \right) \tilde{a}_l = (\mathbf{S}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1}, p^n), \phi_m^{\mathbf{u}}) \quad (5.37)$$

où $\mathcal{S}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1}, p^n)$ est le second membre de l'équation de quantité de mouvement réduite qui ne dépend que des grandeurs aux instants passés. Il s'écrit :

$$\mathcal{S}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1}, p^n) = \frac{\nu}{2}\mathbf{u}^n - C(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1}) - \frac{1}{\rho}\nabla p^n \quad (5.38)$$

3. La résolution de l'équation (5.37) fournit les \tilde{a}_n , pour tout $n = 1, \dots, N$ ce qui nous permet alors de reconstruire la vitesse estimée.
4. La vitesse doit ensuite être corrigée à l'aide de la relation (5.9) où la correction de pression \tilde{p} est obtenue en résolvant l'équation de Poisson (5.10). En pratique c'est cette équation qui est la plus coûteuse à résoudre. On va alors résoudre ici une équation de Poisson réduite en considérant la décomposition de la correction de pression sur la base $\phi^p(\mathbf{x})$:

$$\tilde{p}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^{N_p} \tilde{b}_l(t) \phi_l^p(\mathbf{x}) \quad (5.39)$$

où N_p est le nombre de vecteurs propres de la base APR pour la correction de pression. L'équation de Poisson réduite est donc là encore obtenue en réécrivant l'équation de Poisson complète en utilisant la décomposition de la correction de Pression ci-dessus et en la projetant sur la base de pression, on obtient alors :

$$\sum_{l=1}^{N_p} (\Delta \phi_l^p(\mathbf{x}), \phi_m^p(\mathbf{x})) \tilde{b}_l = (\mathcal{S}^p(\tilde{\mathbf{u}}), \phi_m^p(\mathbf{x})) \quad (5.40)$$

où $\mathcal{S}^p(\tilde{\mathbf{u}})$ est le second membre de l'équation de Poisson réduite ne dépendant que de la valeur précédemment calculée de la vitesse estimée. Il s'écrit :

$$\mathcal{S}^p(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{2}{\Delta t} \text{div } \tilde{\mathbf{u}} \quad (5.41)$$

5. l'équation de Poisson réduite est alors résolue ce qui fournit les coefficients temporels de la correction de pression \tilde{b}_n . Connaissant ces coefficients, on reconstruit donc la correction de pression \tilde{p} .
6. La vitesse est alors corrigée en utilisant (5.9), et la pression est calculée à l'aide de $p^{n+1} = p^n + \tilde{p}$

On effectue cette démarche de projection *réduite* pour tout l'intervalle de temps T considéré, et à la fin de l'intervalle, de la même façon que pour une équation de transfert quelconque (voir chapitre 4), on effectue les étapes d'amélioration et d'enrichissement sur respectivement les bases de vitesse et de pression, en utilisant les résidus et matrices de corrélation respectivement à l'équation (5.37) de quantité de mouvement réduite et à l'équation (5.40) de Poisson réduite. Ensuite, on revient à l'étape 1 jusqu'à ce que le calcul soit convergé.

On note que les bases que l'on a calculées $\phi^{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ et $\phi^p(\mathbf{x})$ sont les bases respectives

de la vitesse estimée $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ et de la correction de pression $\tilde{p}(\mathbf{x}, t)$ et non les bases de la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et de la pression $p(\mathbf{x}, t)$, ce qui est gênant pour la construction du système dynamique. Puisque la méthode APR permet de déterminer la solution $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ des équations de Navier-Stokes sur un intervalle T , on effectue une snapshot POD sur des échantillons issus de l'APR sur cette période, et la base que l'on va obtenir sera alors une base POD avec toutes les propriétés qui ont été mentionnées dans la partie introductive sur la réduction de modèle.

5.3.2 Système dynamique

Comme on l'a présenté dans le chapitre 4 pour le cas de l'équation de convection-diffusion 2D, l'intérêt de la méthode APR réside dans le fait qu'elle est capable de réduire l'erreur introduite par la résolution du système dynamique. Or, dans le cas des équations de Navier-Stokes un problème supplémentaire survient : le traitement de la pression dans ce système dynamique. En effet, si l'on veut effectuer une APR sur le champ obtenu par le système dynamique, on a besoin d'une pression de départ, qui n'est pas fournie par le système dynamique.

On rappelle ci-dessous l'expression du système dynamique⁴ :

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N C_{ijk} a_j a_k + \sum_{j=1}^N B_{ij} a_j + D_i \quad (5.42)$$

La résolution de ce système d'équations fournit les coefficients temporels $a_n(t)$ avec lesquels on peut reconstruire la vitesse selon l'équation⁵ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^{N_u} a_l(t) \phi_l^u(\mathbf{x}) \quad (5.43)$$

C'est alors ce champ de vitesse que l'on considère comme condition initiale pour la méthode APR. Pour construire la condition initiale pour la pression, on utilise sa décomposition sur la base de pression⁶ :

$$p(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^{N_p} b_l(t) \phi_l^p(\mathbf{x}) \quad (5.44)$$

⁴les coefficients du système dynamiques sont ceux donnés dans le chapitre 2, équation (2.57)

⁵on note ici que la base $\phi_n^u(\mathbf{x})$ n'est pas la même que dans le paragraphe précédent, celle-ci correspond à la décomposition de la vitesse et non de la vitesse estimée.

⁶par contre la base pour la pression est la même que pour la correction de pression \tilde{p} puisque l'on a la relation $\tilde{p} = p^{n+1} - p^n$

En prenant la divergence de l'équation de quantité de mouvement (on rappelle que l'on a toujours $\rho = 1$), on obtient l'équation de Poisson suivante pour la pression :

$$\Delta p = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \quad (5.45)$$

On récrit cette expression en tenant alors compte des décompositions (5.43) et (5.44). Après projection sur la base de la pression, on obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{N^p} (\Delta \phi_k^p(\mathbf{x}), \phi_l^p(\mathbf{x})) b_k(t) = \left(\nabla \cdot \left[\sum_{i=1}^{N^u} \sum_{j=1}^{N^u} a_i(t) a_j(t) \phi_i^u(\mathbf{x}) \nabla \phi_j^u(\mathbf{x}) \right], \phi_l^p(\mathbf{x}) \right) \quad (5.46)$$

La divergence du terme au second membre peut alors se récrire :

$$\nabla \cdot \left[\sum_{i=1}^{N^u} \sum_{j=1}^{N^u} a_i(t) a_j(t) \phi_i^u(\mathbf{x}) \nabla \phi_j^u(\mathbf{x}) \right] = \sum_{i=1}^{N^u} \sum_{j=1}^{N^u} a_i(t) a_j(t) tr [\nabla \phi_i^u(\mathbf{x}) \nabla \phi_j^u(\mathbf{x})] \quad (5.47)$$

où $tr[\bullet]$ représente l'opérateur trace. Finalement, l'expression (5.46) se récrit :

$$M_{lk} b_k(t) = L_{ijl} a_i(t) a_j(t) \quad (5.48)$$

où :

$$\begin{aligned} M_{lk} &= \sum_{k=1}^{N^p} (\Delta \phi_k^p(\mathbf{x}), \phi_l^p(\mathbf{x})) \\ L_{ijl} &= \sum_{i=1}^{N^u} \sum_{j=1}^{N^u} (tr [\nabla \phi_i^u(\mathbf{x}) \nabla \phi_j^u(\mathbf{x})], \phi_l^p(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (5.49)$$

Cette relation permet donc de calculer les coefficients temporels pour la base de pression qui vont ainsi permettre de reconstruire une pression initiale pour pouvoir appliquer l'APR. La démarche d'avancement temporel qui est envisagée sera alors la même que celle proposée pour l'équation de convection-diffusion dans le chapitre 4.

5.3.3 Application de l'APR à la cavité entraînée

Dans cette partie, on présente les résultats obtenus par la méthode APR sur la configuration de la cavité entraînée présentée dans la partie 5.2.1. Les paramètres de calcul utilisés ici sont les suivants :

- le domaine a été discrétisé en 250×250 cellules de contrôle,
- le pas de temps a été pris égal à $\Delta t = 10^{-3}s$ et la solution a été calculée sur un intervalle $T = 100\Delta t = 0.1s$,
- le critère de convergence pour la vitesse $\varepsilon_{\mathbf{u}}$ a été fixé à $\varepsilon_{\mathbf{u}} = 5.10^{-7}$ et celui pour la pression vaut $\varepsilon_p = 10^{-4}$,

- les coefficients de sélection pour l'amélioration respectivement de la base de vitesse $\eta_{\mathbf{u}}$ et de la base de pression η_p ont été pris égaux à $\eta_{\mathbf{u}} = 10^{-8}$ et $\eta_p = 10^{-4}$.

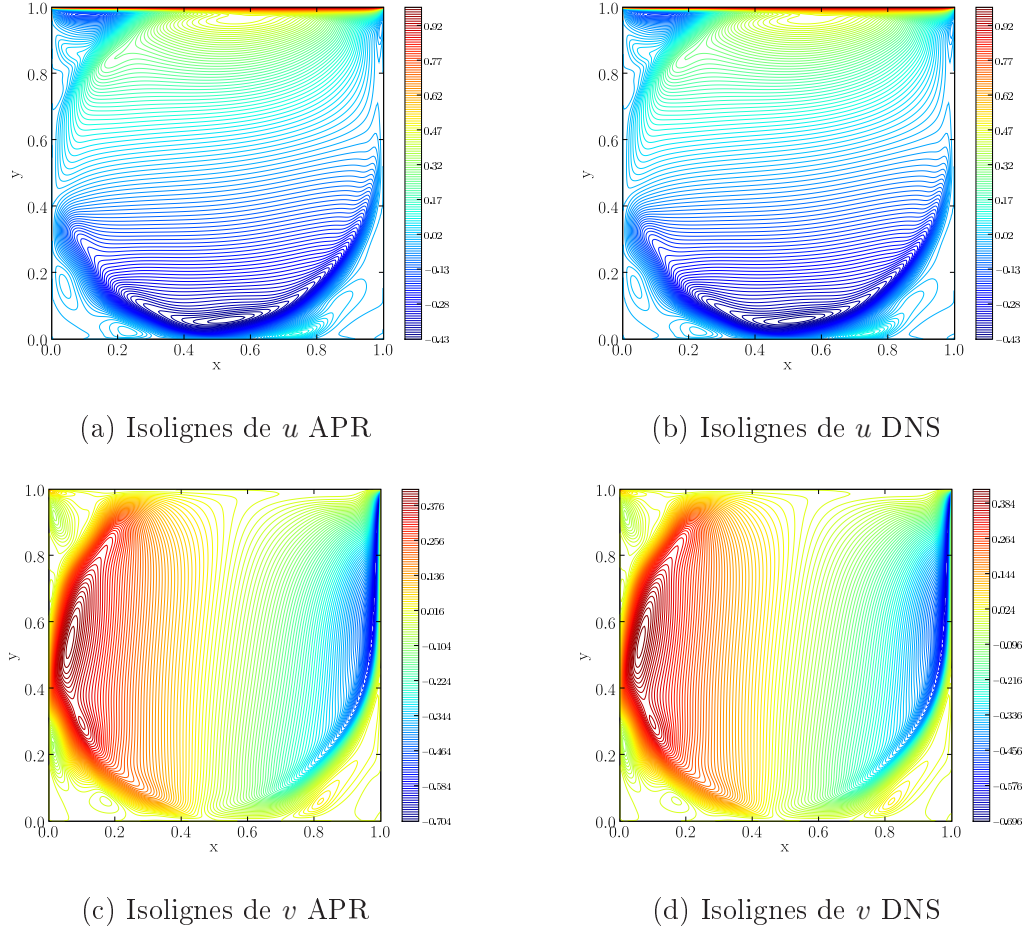


FIG. 5.12 – Isovaleurs des composantes u et v de la vitesse obtenue à $t = 0.1s$ par l'APR comparée avec la DNS

Au bout de 20 itérations APR, ce qui correspond à environ 700s – contre 3200s pour le modèle complet – on obtient une base de la vitesse constituée de 3 modes alors que la base de pression en contient 4. La précision de la méthode est comparée aux résultats DNS de référence à l'aide de l'erreur en norme $L^2(\Omega)$ définie par l'équation rappelée ici :

$$\mathcal{E}_{L^2}(t) = \|\mathbf{u}_{calc}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_{ref}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.50)$$

A la fin de la période de résolution T , l'erreur obtenue vaut donc, pour la composante horizontale u de la vitesse $\mathcal{E}_{L^2(\Omega)}^u = 4.4 \cdot 10^{-4}$ et pour la composante verticale v , on obtient $\mathcal{E}_{L^2(\Omega)}^v = 4.3 \cdot 10^{-4}$. La figure 5.12 présente les isovaleurs des composantes horizontales et verticales de la vitesse, respectivement obtenues par la DNS et par l'APR. Afin de visualiser plus précisément l'écart entre la méthode APR, la figure

5.13 présente les isolignes des quantités $\delta u(x, y)$ et $\delta v(x, y)$ définies comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_{DNS}(x, y) &= u_{DNS}(x, y, T) - u_{DNS}(x, y, 0) \\ \delta u_{APR}(x, y) &= u_{APR}(x, y, T) - u_{APR}(x, y, 0) \\ \delta v_{DNS}(x, y) &= v_{DNS}(x, y, T) - v_{DNS}(x, y, 0) \\ \delta v_{APR}(x, y) &= v_{APR}(x, y, T) - v_{DNS}(x, y, 0) \end{aligned}$$

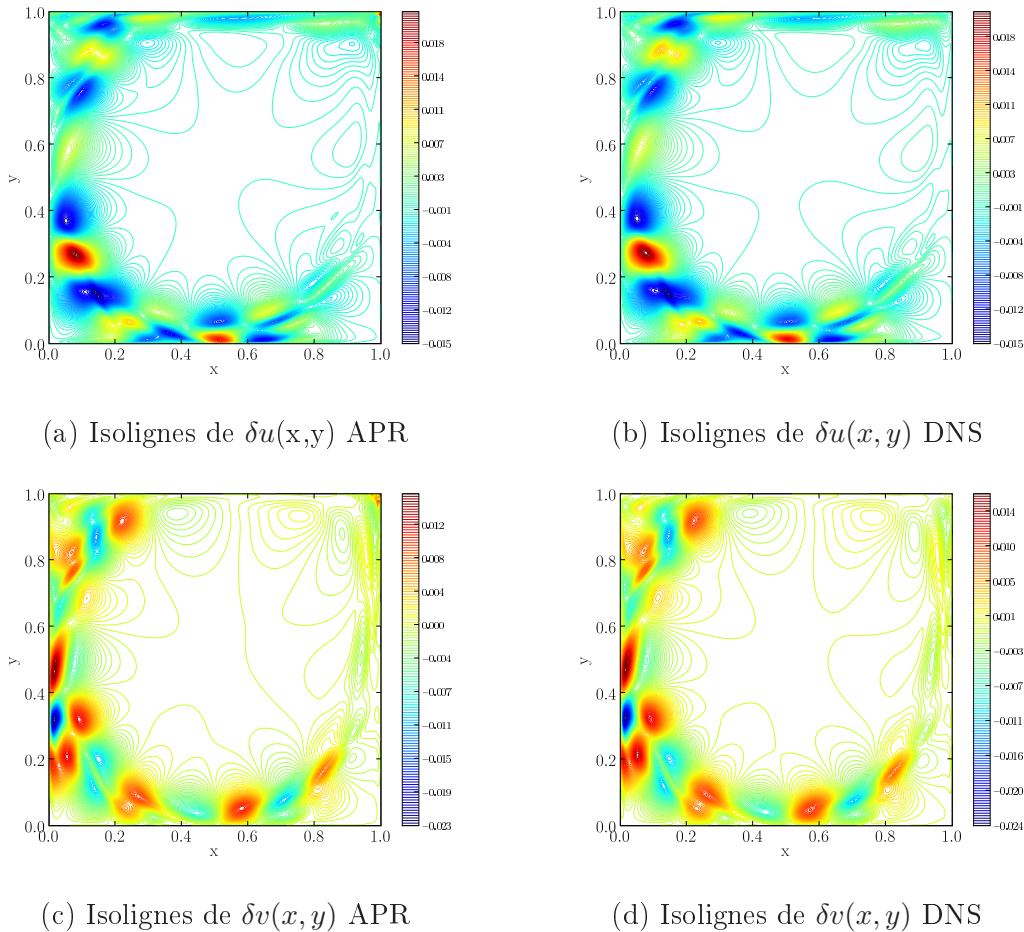


FIG. 5.13 – Isovaleurs de $\delta u(x, y)$ et $\delta v(x, y)$

On constate sur cette figure que la méthode APR arrive à reproduire l'évolution de la vitesse sur l'intervalle $T = 0.1s$. Il est alors intéressant de vérifier également la prédiction de la pression. Ainsi, la figure 5.14 compare la pression obtenue par la méthode APR à la fin de l'intervalle T à la pression issue du calcul DNS au même instant. On constate alors que l'évolution de la pression n'est pas très bien déterminée par la méthode APR.

En effet, la méthode APR ne converge pas au bout de 20 itérations, on constate que le résidu utilisé pour la phase d'enrichissement est environ toujours sélectionné au même pas de temps. On teste donc l'influence du nombre d'itérations de l'APR sur la qualité de la reconstruction de la solution.

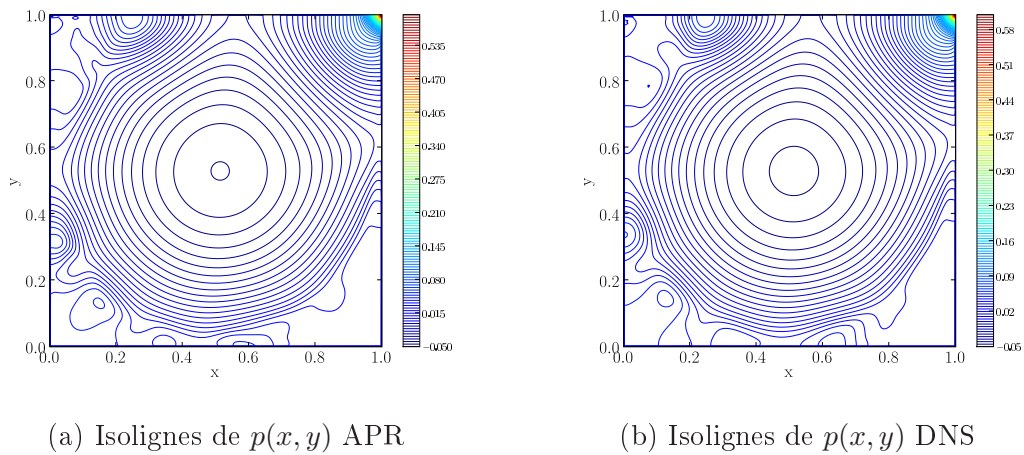


FIG. 5.14 – Isovaleurs de la pression obtenue à $t = 0.1s$ par l'APR en comparaison avec la DNS

Ainsi, la figure 5.15 représente l'évolution de l'erreur de reconstruction en norme $L^2(\Omega)$ pour les deux composantes de la vitesse ainsi que pour la pression, lorsque le nombre d'itérations varie de 5 à 50. Cette figure met en évidence le fait que la pression est moins bien déterminée que la vitesse. De plus, l'influence des itérations APR n'est évidente que pour l'erreur sur la vitesse. La pression ne reste pas forcément bien déterminée. Ainsi on constate sur cet exemple que les résultats obtenus pour 10 itérations APR sont presque les meilleurs obtenus pour un temps de calcul raisonnable. On note par ailleurs qu'au bout de 100 itérations, la méthode ne converge toujours pas.

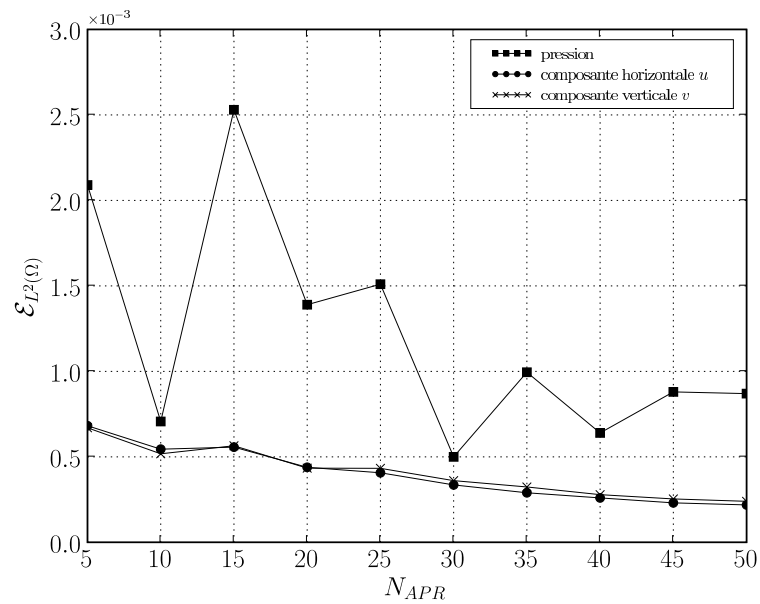


FIG. 5.15 – Influence du nombre d'itérations APR sur les erreurs en norme $L^2(\Omega)$

Ensuite, la méthode a également été testée sur des intervalles plus longs, à savoir 0.3s et 1s. Sur la figure 5.16, on présente les isolignes de la composante horizontale de la vitesse à l'instant $t = 0.3s$.

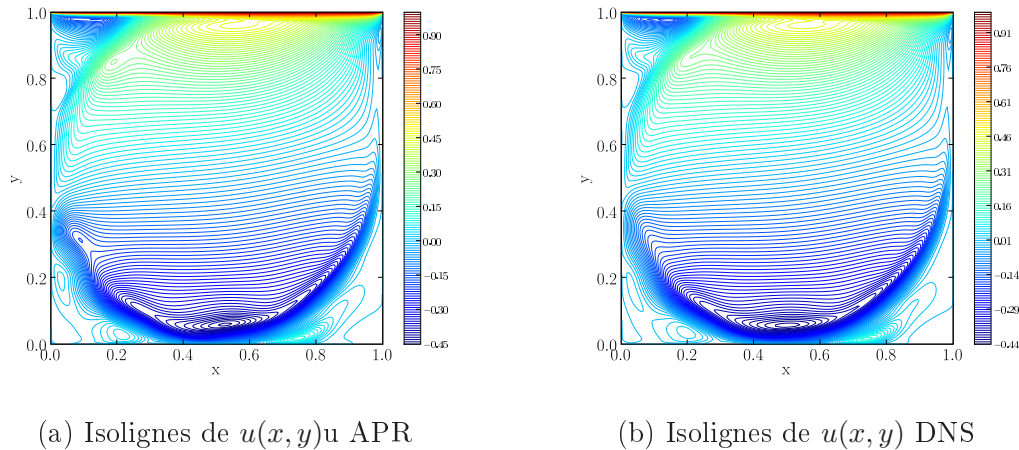


FIG. 5.16 – Isovaleurs de $u(x, y)$ à $t = 0.3s$

On constate que jusqu'à cet instant, la méthode APR est capable de traduire l'évolution dynamique de l'écoulement, en terme de vitesse. Ainsi, l'APR reproduit assez bien la dynamique de l'écoulement calculé sur 300 pas de temps. Quand on effectue un calcul sur 1000 pas de temps, la qualité de la solution prédite par la méthode APR se dégrade, comme on peut l'observer sur la figure 5.17 qui présente les isolignes de la composante horizontale de la vitesse à l'instant $t = 1s$.

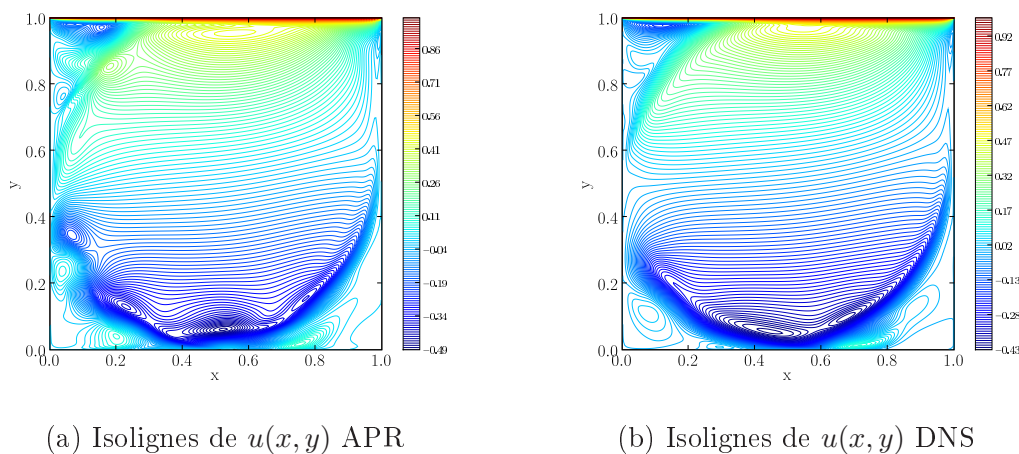


FIG. 5.17 – Isovaleurs de $u(x, y)$ à $t = 1.0s$

Celà semble provenir de la prédiction de la pression. Contrairement à la solution de référence, il existe un pic sur l'erreur dans le coin en haut à droite comme on le voit dans la figure 5.14 (la valeur maximale de la pression estimée par l'APR vaut 0.53 contre 0.58 pour la solution de référence). Ce pic est localisé au même endroit où la

divergence du champ de vitesse, représentée sur la figure 5.18, est de l'ordre de 10^{-5} alors que partout ailleurs elle est de l'ordre de 10^{-10} . C'est cette singularité qui se

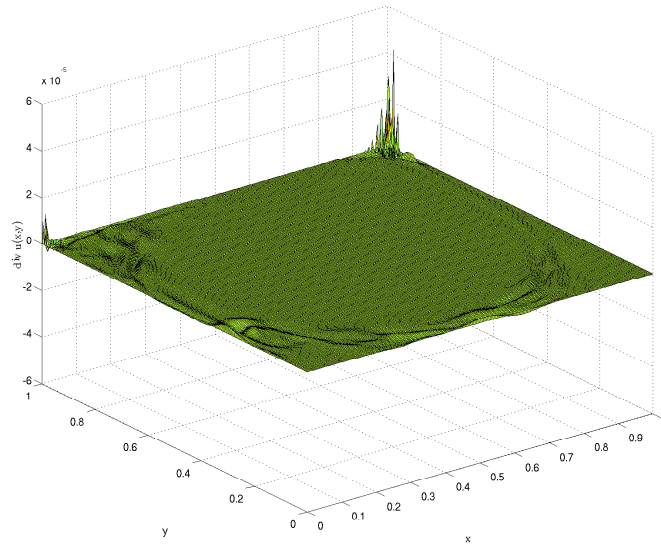


FIG. 5.18 – Divergence de la solution obtenue par l'APR à $t = 0.1s$

propage au cours du temps et qui dégrade la solution. Enfin, la base APR obtenue après 10 itérations est présentée sur les figures 5.19 et 5.20. Ces figures présentent respectivement les modes ϕ_u et ϕ_v obtenues par l'APR, en comparaison avec les modes POD de références calculés sur le champ instantané de référence.

Là encore, on observe que les modes obtenus par l'APR sont finalement assez proches des modes POD, à part un “pic” local dans le coin supérieur droit de la cavité, essentiellement pour le troisième mode. Il est à noter que ce pic est handicapant pour faire des prédictions sur des longs intervalles de temps.

Enfin, en terme de temps de calcul, la méthode APR, dans son cas le plus favorable, c'est-à-dire pour la résolution des équations de Navier-Stokes sur l'intervalle de $0.1s$ avec 10 itérations, ne requiert qu'environ 170 secondes de temps CPU alors que la résolution pour le modèle complet s'est effectuée en environ 1600 secondes, c'est-à-dire un gain de temps de l'ordre de 10 fois plus rapide.

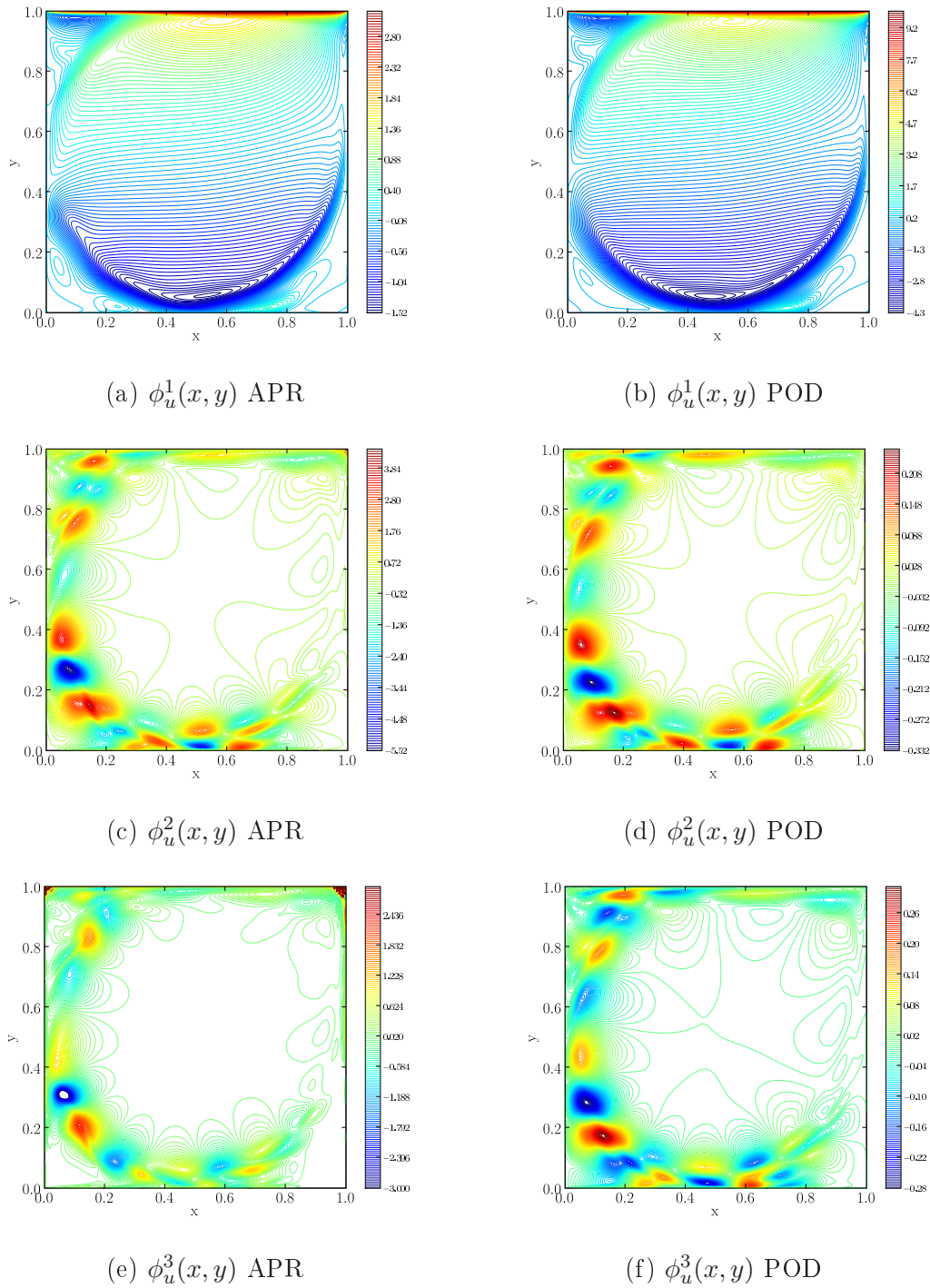


FIG. 5.19 – Modes propres ϕ_u issus de l'APR comparés avec ceux obtenus par la POD

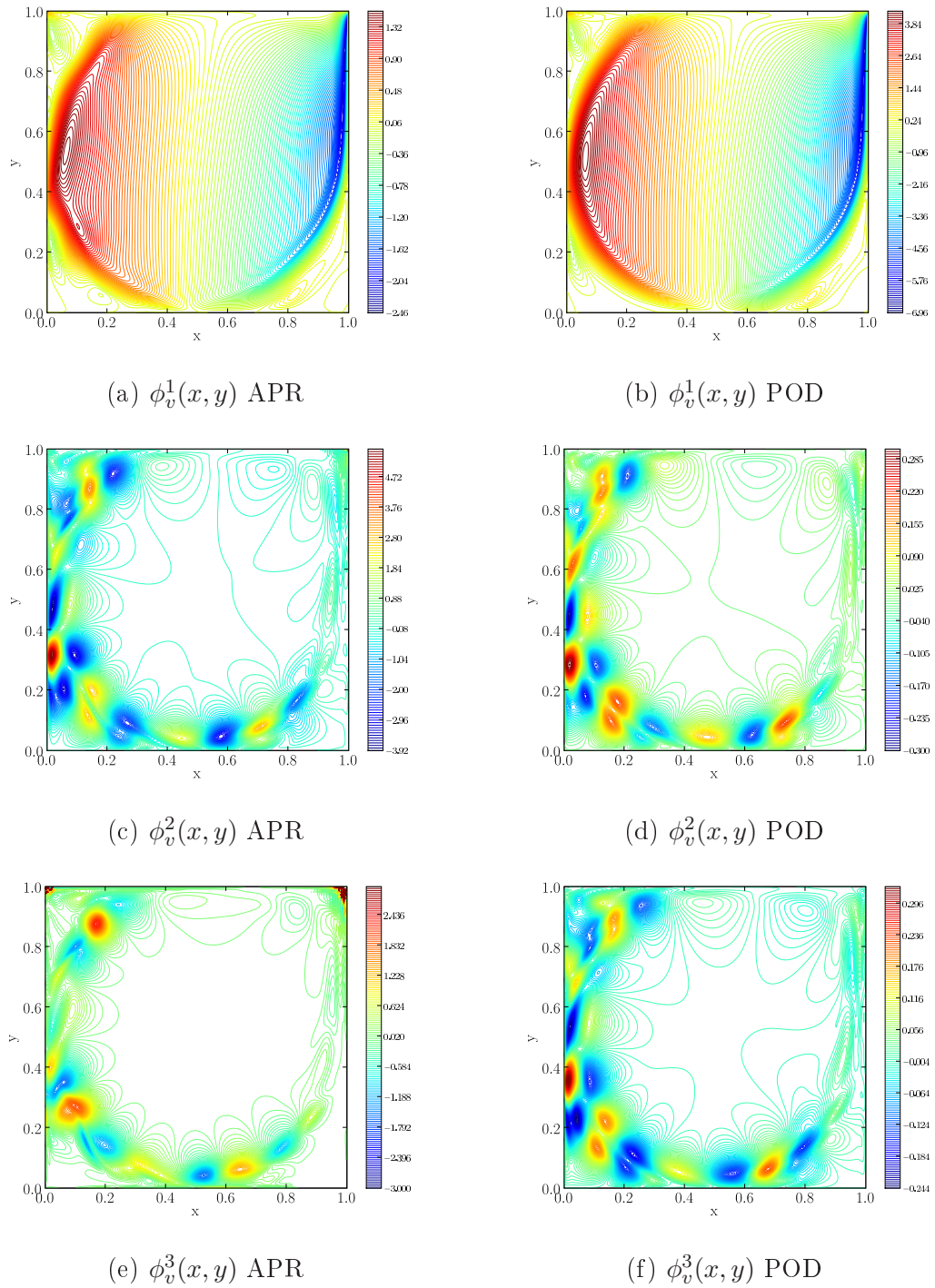


FIG. 5.20 – Modes propres ϕ_v issus de l'APR comparés avec ceux obtenus par la POD

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu les équations de Navier-Stokes par la méthode APR. Pour ce faire nous avons développé un code utilisant la méthode des volumes finis pour résoudre les équations de façon complète. Ce code a ainsi été présenté dans une première partie du chapitre. La méthode des volumes finis a été utilisée sur un maillage colocalisé et la vitesse et la pression ont été découplées en utilisant l'algorithme de projection de Van Kan. Après avoir montré les problèmes dus à la résolution directe des équations de Navier-Stokes avec vitesse et pression couplés, nous avons validé le code avec l'algorithme de projection sur le cas de la cavité entraînée 2D, d'abord à faibles nombre de Reynolds, puis à $Re = 10000$ qui correspond à un régime instationnaire périodique souvent étudié dans la littérature. Les résultats qualitatifs et quantitatifs obtenus sont en accord avec ceux de la littérature.

Dans la deuxième partie, nous avons présenté la modification de l'algorithme de l'APR adapté au schéma de découplage de la vitesse et de la pression. De plus, une démarche d'avancement temporel, couplant un système dynamique et la méthode APR a été présentée. Le problème de la pression initiale pour une nouvelle itération de la méthode APR est traité en résolvant une équation de Poisson réduite pour la pression et en reliant les coefficients temporels de la pression à ceux obtenus pour la vitesse. Cette démarche n'a cependant pas été mise en application puisque la bonne qualité de la solution APR s'est vue limitée à des courts intervalles de temps, pas suffisants pour construire un système dynamique. Toutefois, la vitesse est correctement estimée sur ces courts intervalles et le temps de calcul a été divisé par un facteur 10. Ce problème de détérioration de la qualité de la solution provient certainement de la mauvaise estimation de la pression, très ponctuellement comme le suggère la divergence de la vitesse. Ainsi, la perspective envisagée à court terme pour pallier ce problème serait de stabiliser le système réduit construit dans chaque boucle APR.

Chapitre 6

Conclusion générale

Motivés par l'étude de la dispersion de particules, nous avons présenté dans ce travail plusieurs méthodes de réduction de modèles basées sur une approche de type POD-Galerkin pour le calcul de l'écoulement fluide. Ces méthodes permettent d'obtenir une base de l'écoulement de faible dimension ce qui permet, à l'aide d'une projection de Galerkin, de n'avoir à traiter qu'un système différentiel aux dérivées ordinaires de faible taille, au lieu du problème initial qui est un système d'équations aux dérivées partielles de très grande taille.

La première méthode, la décomposition orthogonale aux valeurs propres, a été appliquée sur deux configurations de type cavité. Les résultats obtenus sont en accord avec la solution de référence donnée par une prédiction LES. En outre, les temps de calculs mis en jeu dans les deux cas ont montré un réel avantage à utiliser une approche POD couplée avec un système dynamique pour l'application de la dispersion de particules.

Cependant, il s'avère que le gain de temps de calcul est limité par la phase d'échantillonnage de la solution préalable, nécessaire à la construction de la base POD. De plus, la base POD donne de mauvaises prédictions lorsque les paramètres de l'écoulement sont modifiés. La méthode que nous présentons dans la deuxième partie de ce travail a pour but de pallier ces problèmes.

Ainsi, nous avons introduit dans le troisième chapitre la méthode APR, présentée pour une équation de transfert quelconque. Elle a donc ensuite été testée sur différents cas tests de difficulté croissante :

- l'équation de convection-diffusion
- l'équation de Burgers 1D et 2D

Les résultats en terme d'erreur et de temps de calcul ont été comparés à des méthodes de résolution classique, connaissant les solutions analytiques des problèmes étudiés. On a donc constaté que la méthode APR couplée avec un système dynamique est très performante en terme de temps de calcul, essentiellement pour les problèmes

non-linéaires, tout en conservant une erreur du même ordre de grandeur que celles obtenues par les méthodes classiques. Une démarche d'avancement temporel a également été présentée pour le cas de la convection-diffusion 2D. Cette démarche montre que la méthode APR est capable d'adapter *rapidement* la base APR aux perturbations apportées par la résolution du système dynamique, et également de réduire l'erreur comise par ce dernier. On a également vérifié que la méthode ne détériore pas la précision de la solution.

Dans la dernière partie de ce mémoire, les équations de Navier-Stokes ont été résolues par la méthode APR en ayant au préalable validé le code développé pour le modèle complet. Ce code 2D, basé sur la méthode des volumes finis et utilisant un algorithme de projection pour le découplage vitesse-pression, a ainsi été validé sur l'exemple de la cavité entraînée 2D avant de résoudre la même configuration avec la méthode APR. Le gain de temps apporté par la méthode APR est assez important puisque l'on a réussi à diviser le temps de calcul par un facteur 10 pour une erreur *raisonnable* par rapport à la solution de référence.

Cependant, les limites de la méthode se sont révélées sur cet exemple. La pression n'est pas totalement bien déterminée ce qui induit un pic sur la divergence de la vitesse. En effectuant une POD sur un échantillonnage de solutions obtenues par l'APR, cette erreur *locale* est transmise aux modes POD ce qui induit une forte déstabilisation du système dynamique.

Ainsi, la méthode parvient à déterminer la vitesse de l'écoulement assez précisément. La faible erreur comise est cependant cumulée ce qui est actuellement un handicap pour faire des prédictions sur des longs intervalles de temps.

La perspective de notre travail, est donc, dans un court terme de construire une stabilisation pertinente du système pour le rendre insensible au pic de pression. Afin de diminuer ce pic de pression, il sera également important de modifier la détermination de la base pour corriger les effets des petites incompressibilités numériques. A moyen terme, il serait intéressant d'associer la méthode APR pour les équations de Navier-Stokes à paramètres en utilisant une approche MAN/APR. Enfin, l'objectif à long terme serait d'intégrer la méthode APR dans une boucle associée à un problème de contrôle.

Bibliographie

- [1] ABATE, A. F., NAPPI, M., RICCIO, D., AND SABATINO, G. 2d and 3d face recognition : A survey. *Pattern Recognition Letters* 28, 14 (Oct. 2007), 1885–1906.
- [2] ABBAD, M. *Contribution sur les forces d'histoire exercées sur des inclusions solides ou fluides à faibles nombres de Reynolds*. PhD thesis, INPL, 2004.
- [3] AHMADI, G., AND LI, A. Computer simulation of particle transport and deposition near a small isolated building. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 84, 1 (Jan. 2000), 23–46.
- [4] ALLERY, C. *Contribution à l'identification des bifurcations et à l'étude des écoulements fluides par des systèmes dynamiques d'ordre faible (P.O.D.)*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2002.
- [5] ALLERY, C., BEGHEIN, C., AND HAMDOUNI, A. Applying proper orthogonal decomposition to the computation of particle dispersion in a two-dimensional ventilated cavity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 10, 8 (Dec. 2005), 907–920.
- [6] AMMAR, A., RYCKELYNCK, D., CHINESTA, F., AND KEUNINGS, R. On the reduction of kinetic theory models related to finitely extensible dumbbells. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 134 (2006), 136–147.
- [7] ANTOULAS, A. An overview of approximation methods for large-scale dynamical systems. *Annual Reviews in Control* 29, 2 (2005), 181–190.
- [8] ANTOULAS, A. C. A new result on passivity preserving model reduction. *Systems & Control Letters* 54, 4 (Apr. 2005), 361–374.
- [9] ANTOULAS, A. C., SORENSEN, D. C., AND GUGERCIN, S. A survey of model reduction methods for large-scale systems. *Contemporary Mathematics* 280 (2001), 193–219.
- [10] ARMENIO, V., AND FIOROTTO, V. The importance of the forces acting on particles in turbulent flows. *Physics of Fluids* 13, 8 (2001), 2437–2440. Cited By (since 1996) : 30.
- [11] ARMENIO, V., PIOMELLI, U., AND FIOROTTO, V. Effect of the subgrid scales on particle motion. *Phys. Fluids* 11, 10 (1999), 3030–3042.

- [12] AUBRY, N., GUYONNET, R., AND LIMA, R. Spatiotemporal analysis of complex signals : Theory and applications. *Journal of Statistical Physics* 64, 3 (Aug. 1991), 683–739.
- [13] AUBRY, N., HOLMES, P., LUMLEY, J. L., AND STONE, E. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics* 192 (1988), 115–173.
- [14] BEC, J., AND KHANIN, K. Burgers turbulence. *Physics Reports* 447, 1-2 (Aug. 2007), 1–66.
- [15] BERGMANN, M. *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal. Application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004.
- [16] BLAYO, E., BLUM, J., AND VERRON, J. 'Equations aux dérivées partielles et applications'. *Articles dédiés à Jacques-Louis Lions*. 1998, ch. Assimilation variationnelle de données en océanographie et réduction de la dimension de l'espace de contrôle, pp. 199–219.
- [17] BRUNEAU, C.-H., AND SAAD, M. The 2d lid-driven cavity problem revisited. *Computers & Fluids* 35, 3 (Mar. 2006), 326–348.
- [18] CADOU, J., POTIER-FERRY, M., AND COCHELIN, B. A numerical method for the computation of bifurcation points in fluid mechanics. *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 25, 2 (2006), 234–254.
- [19] CADOU, J. M. *Méthode Asymptotique Numérique pour le calcul des branches solutions et des instabilités dans les fluides et pour des problèmes d'interaction fluide-structure*. PhD thesis, Université de Metz, 1997.
- [20] CAZEMIER, W. *Proper Orthogonal Decomposition and Low Dimensional Models for Turbulent Flows*. PhD thesis, Groningen, 1998.
- [21] CHEN, M., AND MCCLAUGHLIN, J. B. New correlation for the aerosol deposition rate in vertical ducts. *J Colloid Interface Sci* 169, 2 (1995), 437–455.
- [22] CHINESTA, F. Sur la méthode apr pour l'équation de stokes. Communication personnelle, 2006.
- [23] CORDIER, L. *Etude de systèmes dynamiques basés sur le décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Application à la couche de mélange turbulente et à l'écoulement entre deux disques contra-rotatifs*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1996.
- [24] DESJONQUERES, P., BERLEMONT, A., AND GOUESBET, G. A lagrangian approach for the prediction of particle dispersion in turbulent flows. *J Aerosol Sci* 19, 1 (1988), 99–103.
- [25] ERN, A., AND GUERMOND, J. *Theory and Practice of Finite Elements*, vol. 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 2004.

- [26] EYMARD, R., GALLOUËT, T., AND HERBIN, R. *Handbook of numerical analysis*, vol. VII. North-Holland, Amsterdam, 2000, ch. Finite volume methods, pp. 713–1020.
- [27] FAURE, S. *Ch. 3 : Colocated finite volume schemes for fluid flows*. PhD thesis, University of Paris sud, 2003.
- [28] FLETCHER, C. Generating exact solutions of the two-dimensional burgers' equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 3, 3 , May-Jun. 1983 (1983), 213–216.
- [29] GADOIN, E., LE QUÉRÉ, P., AND DAUBE, O. A general methodology for investing flow instabilities in complex geometries : application to natural convection in enclosures. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 37 (2001), 175–208.
- [30] GHIA, U., GHIA, K. N., AND SHIN, C. T. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics* 48 (Dec. 1982), 387–411.
- [31] GRAHAM, D. I., AND JAMES, P. W. Turbulent dispersion of particles using eddy interaction models. *International Journal of Multiphase Flow* 22, 1 (Feb. 1996), 157–175.
- [32] GUERMOND, J., MINEV, P., AND SHEN, J. An overview of projection methods for incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195, 44-47 (Sept. 2006), 6011–6045.
- [33] GUERMOND, J.-L. Faedo-galerkin weak solutions of the navier-stokes equations with dirichlet boundary conditions are suitable. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 88, 1 (July 2007), 87–106.
- [34] GUGERCIN, S., AND ANTOULAS, A. C. Model reduction of large-scale systems by least squares. *Linear Algebra and its Applications* 415, 2-3 (June 2006), 290–321.
- [35] HINDS, W. *Aerosol technology : properties, behaviour, and measurement of airborne particles*. John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [36] HOLMES, P., LUMLEY, J. L., AND BERKOOZ, G. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge University Press, 1996.
- [37] HÉMON, P., AND SANTI, F. Applications of biorthogonal decompositions in fluid–structure interactions. *Journal of Fluids and Structures* 17 (2003), 1123–1143.
- [38] ITO, K., AND RAVINDRAN, S. S. A reduced-order method for simulation and control of fluid flows. *Journal of Computational Physics* 143, 2 (July 1998), 403–425.
- [39] JOHANSSON, P., ANDERSSON, H., AND RONQUIST, E. Reduced-basis modeling of turbulent plane channel flow. *Computers & Fluids* 35, 2 (Feb. 2006), 189–207.

- [40] JOHANSSON, P., GEORGE, W., AND WOODWARD, S. Proper orthogonal decomposition of an axisymmetric turbulent wake behind a disk. *Phys. Fluids* 14, 7 (2002), 2508–2514.
- [41] KAPANIA, R. K., AND BYUN, C. Reduction methods based on eigenvectors and ritz vectors for nonlinear transient analysis. *Computational mechanics* 11 (1993), 65–82.
- [42] KNOLL, D. A., AND KEYES, D. E. Jacobian-free newton-krylov methods a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics* 193 (2004), 357–397.
- [43] KUNISCH, K., AND VOLKWEIN, S. Control of the burgers equation by a reduced-order approach using proper orthogonal decomposition. *Journal of Optimization Theory and Applications* 102, 2 (August 1999), 347–371.
- [44] KUNISCH, K., AND VOLKWEIN, S. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems. *Numerische Mathematik* 90 (2001), 117–148.
- [45] LEBORGNE, G. An optimally consistent stabilization of the inf-sup condition. *Numer. Math.* 91, 1 (2002), 35–56.
- [46] LIBERGE, E., BENAOUICHA, M., AND HAMDOUNI, A. Proper orthogonal decomposition investigation in fluid structure interaction. *Revue Européenne de Mécanique Numérique* 16 (2007), 401–418.
- [47] LORENZ, E. N. *Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction*. MIT press, Cambridge, 1956.
- [48] LUMLEY, J. L. The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation In A.M. Yaglom and Tararsky* (1967), 166–178.
- [49] LUTTMAN, A., STONE, E., AND BARDSLEY, J. Numerical analysis of pattern formation on the surface of transpiring leaves. *Physica D : Nonlinear Phenomena* 232, 2 (Aug. 2007), 142–155.
- [50] PANDYA, R. V. R., AND MASHAYEK, F. Two-fluid large-eddy simulation approach for particle-laden turbulent flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45, 24 (Nov. 2002), 4753–4759.
- [51] PATANKAR, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [52] PERIC, M., AND FERZIGER, J. H. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 1998.
- [53] PERIC, M., KESSLER, R., AND SCHEUERER, G. Comparison of finite-volume numerical methods with staggered and colocated grids. *Computers & Fluids* 16, 4 (1988), 389–403.
- [54] PETERSON, J. S. The reduced basis method for incompressible viscous flow calculations. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 10, 4 (1989), 777–786.

- [55] PICARD, C. *Etude expérimentale de l'identification de sources acoustiques dans les jets par l'analyse de la fluctuation de pression en champ proche*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2001.
- [56] PIOMELLI, U. Large-eddy simulation : achievements and challenges. *Progress in Aerospace Sciences* 35, 4 (May 1999), 335–362.
- [57] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P., AND METCALF, M. *Numerical Recipes in Fortran 90, Vol. 2*. Cambridge University Press, 1996.
- [58] RAZAFINDRALANDY, D. *Contribution à l'étude mathématique et numérique de la simulation des grandes échelles*. PhD thesis, Université de La Rochelle, 2005.
- [59] RAZAFINDRALANDY, D., AND HAMDOUNI, A. Analysis of subgrid models of heat convection by symmetry group theory. *Comptes Rendus Mécanique* 335, 4 (Apr. 2007), 225–230.
- [60] RAZAFINDRALANDY, D., AND HAMDOUNI, A. Invariant subgrid modelling in large-eddy simulation of heat convection turbulence. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 21, 4 (July 2007), 231–244.
- [61] RAZAFINDRALANDY, D., HAMDOUNI, A., AND BEGHEIN, C. A class of subgrid-scale models preserving the symmetry group of navier-stokes equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 12, 3 (June 2007), 243–253.
- [62] RAZAFINDRALANDY, D., HAMDOUNI, A., AND OBERLACK, M. Analysis and development of subgrid turbulence models preserving the symmetry properties of the navier-stokes equations. *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 26, 4 (2007), 531–550.
- [63] REMPFER, D. *Kohärente Strukturen und Chaos beim laminar-turbulenten Grenzschichtumschlag*. PhD thesis, Stuttgart, 1991.
- [64] REMPFER, D. Investigations of boundary layer transition via galerkin projections on empirical eigenfunctions. *Phys. Fluids* 8, 1 (1996), 175–188.
- [65] REMPFER, D. On low-dimensional galerkin models for fluid flow. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 14, 2 (June 2000), 75–88.
- [66] RINNE, J., AND JÄRVENOJA, S. A rapid method of computing empirical orthogonal functions from a large dataset. *Monthly Weather Review* 114, 12 (Dec. 1986), 2571–2577.
- [67] RYCKELYNCK, D. Reduction a priori de modeles thermomecaniques. *Comptes Rendus Mécanique* 330, 7 (2002), 499–505.
- [68] RYCKELYNCK, D. A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics* 202 (2005), 346–366.
- [69] RYCKELYNCK, D., HERMANN, L., CHINESTA, F., AND ALARCON, E. An efficient a priori model reduction for boundary element models. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 29 29 (2005), 796–801.

- [70] SAGAUT, P. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*, third edition ed. Springer-verlag, 2006.
- [71] SIRISUP, S., KARNIADAKIS, G. E., XIU, D., AND KEVREKIDIS, I. G. Equation-free/galerkin-free pod-assisted computation of incompressible flows. *Journal of Computational Physics* 207, 2 (Aug. 2005), 568–587.
- [72] SIROVICH, L. Turbulence and the dynamics of coherent structures, part 1 : Coherent structures. part 2 : Symmetries and transformations. part 3 : Dynamics and scaling. *Quartely of Applied Mechanics* 45 (1987), 561–590.
- [73] SOLARI, G., CARASSALE, L., AND TUBINO, F. Proper orthogonal decomposition in wind engineering. part 1 : A state-of-the-art and some prospects. *Wind Struct Int J* 10, 2 (2007), 153–176.
- [74] STONE, E., AND CUTLER, A. Introduction to archetypal analysis of spatio-temporal dynamics. *Physica D : Nonlinear Phenomena* 96, 1-4 (Sept. 1996), 110–131.
- [75] STYKEL, T. *Analysis and numerical solution of generalized Lyapunov equations*. PhD thesis, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin, 2002.
- [76] STYKEL, T. Balanced truncation model reduction for semidiscretized stokes equation. *Linear Algebra and its Applications* 415, 2-3 (June 2006), 262–289.
- [77] THAKURTA, D. G., CHEN, M., MCLAUGHLIN, J. B., AND KONTOMARIS, K. Thermophoretic deposition of small particles in a direct numerical simulation of turbulent channel flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 41, 24 (Oct. 1998), 4167–4182.
- [78] TIAN, Z., AND GE, Y. A fourth-order compact adi method for solving two-dimensional unsteady convection-diffusion problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 198, 1 (Jan. 2007), 268–286.
- [79] VIGO, G. La décomposition orthogonale propre appliquée aux équations de navier-stokes compressible instationnaire. Tech. Rep. RR-3385, INRIA, 1998.
- [80] YEH, F., AND LEI, U. On the motion of small particles in a homogeneous isotropic turbulent flow. *Physics Fluids A : Fluid Dynamics* 3, 11 (1991), 2571–2586.