Décompositions d'une relation

Jacqueline Boittiaux-Zidani

THESE

Présentée à

l'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE, TECHNOLOGIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de
DOCTEUR D'ETAT
"Mathématiques"

PAR

Jacqueline BOITTIAUX-ZIDANI

DECOMPOSITIONS D'UNE RELATION

Thèse soutenue le 27 juin 1986 devant la commission d'examen

L. BOLLIET	Président
C. BENZAKEN	
C.DELOBEL	Examinateurs
E. PICHAT	
M. POUZET	
J. KUNTZMANN	Invité

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.
(RANG A)
SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

.../...

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

.../...

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie

Avant toute chose, je désire exprimer à Monsieur Kuntzmann combien je suis honorée de sa présence à mon jury. C'est en 1956 que je suis entrée comme agent technique au Laboratoire de Mathématiques Appliquées, qui était alors bien petit. Je crois que tous les anciens de ce service gardent un souvenir ému de cette époque et une grande dette de reconnaissance envers notre patron, tant pour l'attitude qu'il eut toujours à notre égard que pour la lucidité avec laquelle il a promu les mathématiques appliquées et l'informatique dans une université qui n'y croyait pas encore. J'étais maître-assistant dans son service il y a vingt ans lorsque j'ai commencé l'étude des dépendances fonctionnelles.

Je suis très touchée de ce que Monsieur BOLLIET ait bien voulu présider le jury. Nous sommes collègues depuis toujours et en particulier à l'IUT d'Informatique depuis sa création. Sa présence est un geste d'amitié qui me fait chaud au coeur.

Je ne sais comment remercier Monsieur DELOBEL pour les encouragements qu'il m'a toujours prodigués. Il s'est constamment tenu au courant de mon travail et a cru qu'il pouvait avoir quelque valeur bien avant que j'y croie moi-même. Si je l'avais écouté, j'aurais soutenu cette thèse depuis plus de dix ans - mais s'il n'avait pas été là je ne l'aurais peut-être jamais rédigée.

Je remercie Messieurs BENZAKEN, PICHAT et POUZET qui ont bien voulu faire partie de mon jury.

Un grand merci à Madame G. BOULESTEIX, qui a effectué la frappe de ma thèse avec compétence et patience.

Enfin, merci au service de reprographie et spécialement à Monsieur P. MOUNET, que j'ai retrouvé avec plaisir, fidèle au poste, après l'avoir perdu de vue pendant bien longtemps.

"La joie est dans tout ;
il faut savoir l'extraire"

Confucius

TABLE DES MATIERES

C H A P I T R E   I

PROBLEMES DE FORMALISATION

CHAPITRE I

PROBLEMES DE FORMALISATION

1. PRESENTATION

Dans ce chapitre, j'expose une formalisation assez générale de l'étude des relations à plusieurs variables, conçue pour faciliter une étude mathématique des systèmes relationnels de bases de données.
J'énonce sous cette forme des résultats qui sont déjà connus ou qui se déduisent facilement de la théorie des produits de relation. Encore que ces résultats ne soient pas neufs, leur formalisation l'est plus.
Les notations choisies sont doubles ; d'une part une notation "savante" peu pratique pour le calcul, mais permettant les démonstrations générales, d'autre part une notation indiciée (cf. 6.b) qui permet d'exprimer très simplement à peu près toutes les opérations courantes de mise à jour. Peut-être l'idée de cette notation est-elle l'aspect le plus utile de ce chapitre.
Dans les chapitres suivants nous choisirons des notations simplifiées pour l'étude des relations "à variables toutes distinctes" ou "externes".

a) Les choix et leurs justifications

- Les objets à étudier sont des ensembles de relations sur un nombre fini d'ensembles.

- Les ensembles sur lesquels portent les relations ont pour éléments des objets individuels considérés dans cette étude comme non structurés; ainsi par exemple, si un des ensembles en question est un ensemble de numéros de sécurité sociale, on ne décomposera pas ces numéros pour en tirer la date de naissance.

- Nous supposerons toujours que les ensembles d'objets sur lesquels portent les relations sont infinis.

Une telle optique est assez fidèle à la réalité lorsqu'il s'agit d'ensembles de valeurs numériques représentant des grandeurs continues ou d'ensembles d'objets en quantité finie certes, mais potentiellement non bornée (ensemble d'élèves par exemple).

Dans les autres cas - ensembles ne pouvant prendre qu'un nombre fini de valeurs (ensemble $\{0,1\}$ par exemple), les résultats démontrés ne sont plus toujours valables, mais le lecteur constatera que beaucoup de résultats peuvent alors être adaptés.

b) Définition d'une relation

- La définition d'une relation à n variables à partir de la notion de produit cartésien est peu propice au calcul sur les relations à plusieurs variables : pour décrire le lien de paternité, par exemple, elle donne à choisir entre deux relations, celle qui va du père au fils, et celle qui va du fils au père, la deuxième étant une application et pas la première. Dans notre formalisation, toutes les relations décrivant le lien de paternité entre les mêmes ensembles de personnes sont "semblables" : ce sont des "recopies" de l'une d'entre elles. De ce fait, pour décrire le lien entre père, mère, fils et les quatre grands parents au lieu de disposer des $7! = 5040$ relations de la théorie classique, ayant chacune leurs propriétés distinctes, nous disposons d'une infinité de "recopies" isomorphes de la même relation.

c) Relations "internes" ou "externes"

Pour un mathématicien pur, une relation sur $A \times B \times C$ peut toujours être prolongée en une relation sur $(A \cup B \cup C)^3$. Il n'y a donc pas lieu de distinguer entre relation interne ou externe.
Pour un gestionnaire, dans une relation de location par exemple entre loueur, locataire et logement, les ensembles de loueurs et locataires sont des ensembles de personnes dont l'intersection éventuellement non vide peut être recherchée tandis que l'ensemble des logements est conceptuellement distinct des deux autres.
Ces diverses considérations ont conduit à la formalisation que nous allons exposer.

2. ENSEMBLES DE DEPART ET VARIABLES

a) Présentation formelle

On note Ω un ensemble de n ensembles infinis et disjoints. Les éléments de Ω sont appelés ensembles de départ. Chacun d'eux est désigné par une lettre d'imprimerie majuscule.

On choisit un ensemble d'indices J infini, appelé <u>ensemble d'indices de référence</u>. Il est sans inconvénient pratique de supposer J dénombrable et c'est utile si l'on veut que tout ensemble infini ait une partie équipotente à J ; <u>nous supposerons donc J dénombrable</u>.

Pour des raisons qui tiennent seulement aux habitudes prises dans les algorithmes de "tableaux", on prend souvent $\mathbb{N}$ comme ensemble d'indices.
L'ensemble $(\bigcup_{A \in \Omega} A) \times J$ sera appelé ensemble des <u>composants</u>.
Nous écrirons plus simplement a_i le composant (a,i) où $a \in \bigcup_{A \in \Omega} A$ et $i \in J$. Le premier élément a du couple (a,i) est appelé <u>valeur</u> de a_i.
Etant donné un ensemble de départ $A \in \Omega$ et un indice $i \in J$, on appelle <u>variable</u> A_i l'ensemble des composants a_i pour lesquels $a \in A$. L'ensemble A est dit ensemble de départ de la variable A_i. Deux variables ayant même ensemble de départ sont dites <u>semblables</u>. Il y a entre deux variables semblables une bijection canonique mettant en correspondance les composants de même valeur. On remarquera que, les ensembles de départ étant disjoints, deux composants de même valeur ne peuvent qu'appartenir à des variables semblables.

L'ensemble des variables construites à partir de Ω sera appelé $\mathcal{V}$. Il existe une bijection canonique entre $\mathcal{V}$ et $\Omega \times J$ faisant correspondre $A_i = \{a_i\}_{a \in A}$ et (A,i).

b) <u>Présentation pratique - signification de Ω et J</u>

- Les ensembles de départ sont des ensembles mathématiques disjoints.

Si l'on a choisi de considérer que l'ensemble A des gendarmes et B des voleurs sont disjoints, cela signifie que l'administration, quand bien même Monsieur Untel serait gendarme et voleur refuse de tenir compte dans ses traitements que "Monsieur Untel gendarme" et "Monsieur Untel voleur" ont un air de ressemblance.
Sinon l'ensemble des gendarmes et l'ensemble des voleurs seraient considérés comme deux parties d'un même ensemble de départ: celui des personnes.

- Les indices peuvent avoir plusieurs fonctions :

. d'une part, décrire de façon plus souple la réalité :

exemples :

1) si A est un ensemble de personnes A_c, A_s, A_p, A_e, A_g, A_v peut représenter l'ensemble de ces personnes en tant que contribuables, salariés, propriétaires, locataires, gendarmes ou voleurs potentiels. Formellement, A_g par exemple, comprend tous les couples (a,g) où $a \in A$. Mais dans les relations faisant intervenir A_g, les seules valeurs utilisées sont des éléments de l'ensemble des gendarmes, on pourra d'ailleurs écrire une relation unaire $R(A_g)$ vérifiée par l'ensemble des gendarmes.

2) Si A est un ensemble d'élèves d'une école, A_{d_1}, A_{d_2} etc... peut représenter l'ensemble de ces élèves en tant que présents ou absents à la date d_1, d_2 ,...

3) L'indice peut encore être considéré comme désignant un support sur lequel on peut inscrire une partie de A.

. D'autre part, l'utilisation de ces indices va nous permettre une formalisation pratique du calcul sur les relations.

3. <u>ESPACE ENGENDRE PAR UN ENSEMBLE FINI DE VARIABLES</u>

Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ un ensemble fini de variables. On appelle <u>point</u> de l'espace engendré par $\mathcal{B}$ toute partie de $\bigcup_{V \in \mathcal{B}} V$ comportant exactement un élément dans chaque variable élément de $\mathcal{B}$.

L'<u>espace</u> engendré par $\mathcal{B}$ est l'ensemble de ses points. Tout point p ne peut être élément que d'un seul espace qu'on désigne par E_p et qu'on nomme <u>espace de définition</u> du point p.

Dans toute la suite de ce travail, le mot espace désignera toujours un espace ainsi défini engendré par une partie $\mathcal{B}$ finie de l'ensemble $\mathcal{V}$ des variables construites sur l'ensemble Ω des ensembles de départ, Ω étant donné une fois pour toutes.

<u>Notations</u> : l'espace E engendré par $\mathcal{B} = \{A_1, A_3, B_2, C_1, C_5\}$ est noté $E = < A_1\ A_3\ B_2\ C_1\ C_5 >$.

Soit E un espace et V_i une variable ; la proposition :

"V_i est élément de l'ensemble de variables qui engendre E" se dit "V_i est variable de E" et est notée V_i var E.
Soit E un espace, p($\in$ E) un de ses points et V_i(var E) une de ses variables ; on appelle coordonnée de p sur V_i et on note $coor_{V_i}(p)$ la valeur de l'unique élément de $p \cap V_i$.
Exemple soit $p = \{a_1, a'_3, b_2, c_1, c'_5\}$

$$p \in \langle A_1\ A_3\ B_2\ C_1\ C_5 \rangle$$

on voit que $coor_{A_3}(p) = a'$

4. STRUCTURE D'ORDRE DE L'ENSEMBLE $\mathcal{E}$ DES ESPACES ENGENDRES CHACUN PAR UN ENSEMBLE FINI DE VARIABLES

Ordre $\lhd$ défini sur $\mathcal{E}$: soient E_1 et E_2 des espaces éléments de $\mathcal{E}$. On dit que E_1 est un sous-espace de E_2 et on note $E_1 \lhd E_2$ si et seulement si l'ensemble des variables engendrant E_1 est incluse dans l'ensemble des variables engendrant E_2.
Cet ordre est isomorphe à l'ordre d'inclusion défini sur l'ensemble des parties finies d'un ensemble infini dénombrable (puisque l'ensemble d'indices J l'est) ; c'est donc un treillis distributif à chaînes commençantes finies.
Dans cet ordre, l'espace le plus petit est celui engendré par l'ensemble vide. Nous le noterons $\underline{0}$; $\underline{0}$ n'a qu'un seul point qui est l'ensemble vide : $\underline{0} = \{\phi\}$.
On note $E_1 \Delta E_2$ l'espace engendré par l'intersection des ensembles de variables engendrant E_1 et E_2, $E_1 \nabla E_2$ l'espace engendré par l'union de ces ensembles de variables et $E_1 \Delta \overline{E}_2$ l'espace engendré par le complément dans l'ensemble de variables engendrant $E_1 \nabla E_2$ de l'ensemble de variables engendrant E_2.
On nommera parfois $E_1 \Delta E_2$ et $E_1 \nabla E_2$, l'intersection et l'union de E_1 et E_2, par abus de langage et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
On dit que deux espaces, E_1 et E_2, sont disjoints si leurs ensembles de variables sont disjoints, c'est-à-dire si :
$E_1 \Delta E_2 = \underline{0}$ (Au sens de la théorie des ensembles deux espaces distincts seraient toujours disjoints).

<u>Notations indiciées</u> : par définition :

$$\mathop{\triangle}_{i \in \{i_0\}} E_i = E_{i_0}$$

$$\mathop{\triangle}_{i \in I \cup \{i_0\}} E_i = \left(\mathop{\triangle}_{i \in I} E_i\right) \Delta \; E_{i_0}$$

$$\mathop{\nabla}_{i \in \phi} E_i = \underline{0}$$

$$\mathop{\nabla}_{i \in I \cup \{i_0\}} E_i = E_{i_0} \nabla \left(\mathop{\nabla}_{i \in I} E_i\right)$$

5. <u>RELATIONS</u>

On appelle <u>relation</u> R entre les variables d'un espace E ou relation définie sur E le couple (E,R) où R est une partie de E.
Or, les variables constituant des ensembles disjoints, la connaissance d'un point de E et à plus forte raison d'une relation R non vide définie sur E permet de déterminer E. C'est pourquoi, par abus de langage, on dira habituellement la relation R au lieu de dire la relation (E,R).
Nous désignerons par E_R l'unique espace dont R est une partie non vide (si R est non vide) et l'appellerons <u>espace de définition de R</u>.
Toutefois, si R = ϕ , on pourrait lui attribuer un espace de définition quelconque ; nous désignerons alors par ϕ_E la relation (E, ϕ).

Remarquons que sur l'espace $\underline{0}$, on peut définir deux relations: la relation vide $\phi_{\underline{0}}$ et la relation pleine $\underline{0} = \{\phi\}$.
Nous nommerons $\mathcal{R}$ l'ensemble de toutes les relations définies sur tout espace engendré par une partie de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{R}_E$ l'ensemble de toutes les relations définies sur E ; $\mathcal{R} = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} \mathcal{R}_E$.

6. OPERATEURS DE RECOPIE-PROJECTION

On verra qu'une recopie-projection n'est que la formalisation de l'opération concrète qui consiste à recopier "ailleurs" avec éventuellement une permutation de variables une projection d'une relation.
Les propriétés d'un tel composé d'une projection et d'une permutation de variables, se déduisant immédiatement des propriétés bien connues des projections, seront données sans démonstration.
On verra à partir du chapitre III l'intérêt de cette opération condensée pour notre travail et dès le paragraphe 9 de ce chapitre, son utilisation en calcul des relations.

a) Espaces semblables

Deux espaces E_1 et E_2 sont dits semblables si, pour tout ensemble de départ $A \in \Omega$, le nombre de variables de E_1 ayant pour espace de départ A et le nombre de variables de E_2 ayant A pour ensemble de départ sont égaux.

Exemple : $E_1 = \langle C_0\ A_1\ A_2\ B_3 \rangle$ et $E_2 = \langle C_0\ A_0\ A_1\ B_2 \rangle$
sont semblables.
Etant donné deux espaces semblables E_1 et E_2, il existe au moins une bijection Ψ de l'ensemble des variables de E_1 dans celui des variables de E_2 telle que
$\forall V \text{ var } E_1 : V = A_i \Rightarrow \exists j \in J : \Psi(V) = A_j$.

Disons d'une telle bijection qu'elle est normale

Exemple : Ψ φ

Ψ			φ		
C_0	C_0	et	C_0	C_0	Sont les deux bijections
A_1	A_0		A_1	A_1	normales de l'ensemble de
A_2	A_1		A_2	A_0	variables de E_1, dans
B_3	B_2		B_3	B_2	celui des variables de

E_2, E_1 et E_2 étant les espaces semblables cités dans l'exemple précédent.

b) Opérateurs de recopie-projection

Etant donné deux espaces semblables E_1 et E_2 et une bijection normale ψ de l'ensemble des variables de E_1 dans celle de E_2, on appelle recopie-projection ordinaire (ou simplement lorsqu'il n'y a pas ambiguïté recopie-projection) associée à ψ et on note :

$$\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$$

l'application de $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ dans $\bigcup_{E \lhd E_2} E$ qui à tout point p fait correspondre le point $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$ (p) =

$$\left\{a_j / \exists A \in \Omega : \exists i \in \mathbb{N} : A_i \text{ var } (E_1 \Delta E_q) \text{ et } \psi(A_i) = A_j \text{ et } \mathrm{coor}_{A_i}(p) = a\right\}$$

Lorsque les espaces E_1 et E_2 sont donnés explicitement par énumération de leurs variables, nous désignerons la recopie projection

$\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$ en énumérant entre crochets les variables de

E_2 et en affectant chaque variable A_j de E_2 d'un indice supérieur i, qui soit tel que $\psi(A_i) = A_j$.

Exemple : la recopie-projection associée à la bijection normale donnée dans l'exemple précédent sera désignée par

$\left[C_0^0 \; A_0 \; A_1^2 \; B_2^3\right]$.

L'image du point :

$\{a_1, b_1, b_3', c_2, d_0\} \in \langle A_1 \; B_1 \; B_3 \; C_2 \; D_0 \rangle$ par cette recopie-projection est :

$$\left[C_0^0 \; A_0 \; A_1^2 \; B_2^3\right] (\{a_1, b_1, b'_3, c_2, d_0\}) = \{a_0, b_2'\} \in \langle A_0 \; B_2 \rangle$$

Lorsque $E_1 = E_2$, il existe une recopie-projection associée à la permutation identique de l'ensemble des variables de E_1 ; on l'appelle projection sur E_1 et on la désigne par :

$$\left[E_1 \xrightarrow{id} E_1\right] \quad \text{ou par} \quad \underset{E_1}{\downarrow}$$

Remarque : Si $E_1 \Delta E_p = \underline{0}$, $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right](p) =$

c) Extension à l'ensemble des parties de $\bigcup\limits_{E \in \mathcal{E}} E$:

Nous désignerons par la même notation une recopie-projection et son extension à l'ensemble des parties de $\bigcup\limits_{E \in \mathcal{E}} E$.

En particulier, étant donné un espace E, $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right](E)$

désigne l'ensemble des images des points de E par $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$; c'est un espace semblable à $E_1 \Delta E$ ayant pour ensemble de variables l'ensemble des images des variables de $E_1 \Delta E$ par la bijection normale ψ associée à $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$; nous noterons cet espace $\psi(E_1 \Delta E)$, par abus de langage.

On a donc $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right](E) = \psi(E_1 \Delta E) \lhd E_2$.

D'une façon générale si $E_i \lhd E_1$, nous noterons

$$\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right](E_i) = \psi(E_i).$$

De même, étant donnée une relation R, $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right](R)$ désigne l'ensemble des images par $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$ des points de R. C'est une relation dont l'espace de définition est $\psi(E_1 \Delta E_R)$.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\text{espace de définition}"] \arrow[d, "{\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]}"'] & E_R \arrow[d, "{\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]}"] \\
{\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right](R)} \arrow[r, "\text{espace de définition}"'] & \psi(E_1 \Delta E_R)
\end{tikzcd}$$

d) Relations semblables

On dit que deux relations R_1 et R_2 sont semblables s'il existe au moins une recopie projection $\left[E_{R_1} \xrightarrow{\psi} E_{R_2}\right]$ telle que

$\left[E_{R_1} \xrightarrow{\psi} E_{R_2}\right](R_1) = R_2$; cela implique que E_{R_1} et E_{R_2} soient semblables.

e) <u>Résultante d'une relation suivant un espace E</u>

On désigne par $\underset{\bar{E}}{\perp}$ l'opérateur défini sur $\mathbb{R}$, qui à toute relation R fait correspondre la relation

$$\underset{\bar{E}}{\perp} R = \left[E_R \Delta \bar{E} \xrightarrow{\quad id \quad} E_R \Delta \bar{E}\right](\mathbb{R}) \text{ appelée } \underline{\text{résultante}}$$

de R suivant E.

f) <u>Opérateurs de recopie-projection contractée</u>

On dit qu'il existe une <u>surjection normale</u> φ d'un ensemble de variables $\mathcal{V}_1$ sur un ensemble de variables $\mathcal{V}_2$ s'il existe une surjection φ de $\mathcal{V}_1$ sur $\mathcal{V}_2$ telle que toute variable V_i de $\mathcal{V}_1$ ait une image $\varphi(V_i) = V_j$ ayant même ensemble de départ qu'elle.

<u>Exemple</u> : il existe six surjections normales de

$$\mathcal{V}_1 = \{A_1, A_2, B_1, B_2, B_3\} \quad \text{sur} \quad \mathcal{V}_2 = \{A_1, B_3, B_5\}$$

L'une d'elles est donnée par la table ci-dessous :

$\mathcal{V}_1$	$\xrightarrow{\varphi}$
A_1	A_1
A_2	A_1
B_1	B_3
B_2	B_3
B_3	B_5

Etant donné deux espaces E_1, E_2 tels qu'il existe une surjection normale φ de l'ensemble des variables de E_1 dans celui des variables de E_2, on appelle <u>recopie-projection contractée</u> associée à φ et on note $\left[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2\right]$ la fonction de $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ dans

$\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ qui à tout point p tel que $\forall A_i$ var$(E_1 \Delta E_p)$:

$$\forall A_j \text{ var } (E_1 \Delta E_p) : \varphi(A_i) = \varphi(A_j) \Rightarrow \text{coord}_{A_i}(p) = \text{coord}_{A_j}(p)$$

fait correspondre le point $\left[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2\right](p) =$

$\left\{a_k / \exists A_i \text{ var } (E_1 \Delta E_p) : \varphi(A_i) = A_k \text{ et } \mathrm{coord}_{A_i}(p) = a\right.$

Lorsque les espaces E_1 et E_2 sont donnés explicitement par énumération de leurs variables, nous désignerons la recopie-projection contractée $\left[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2\right]$ en énumérant entre crochets les variables de E_2 et en affectant chaque variable A_j de E_2 de tous les indices supérieurs i tels que $\varphi(A_i)=A_j$.

<u>Exemple</u> : si $E_1 = < A_1\ A_2\ B_1\ B_2\ B_3 >$ et

$E_2 = < A_1\ A_2\ B_3\ B_5 >$ et si φ est la surjection

normale de l'ensemble des variables de E_1 dans celui des variables de E_2 donnée précédemment par sa table, la recopie-projection contractée $\left[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2\right]$ peut s'écrire $A_1^{1,2}\ B_3^{1,2}\ B_5^{3}$

<u>Extension à l'ensemble des parties de</u> $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$:

Nous désignerons par la même notation une recopie-projection contractée et son extension à l'ensemble des parties de $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$, c'est-à-dire l'application de $\mathcal{P}(\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E)$ dans $\mathcal{P}(\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E)$,

qui à toute partie P de $\bigcup_{E \in \mathcal{E}}$ fait correspondre l'ensemble des images de ceux des points de P qui ont une image par cette recopie-projection contractée.

- En particulier, étant donné un espace E, $\left[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2\right]$ E est un sous-espace de E_2 que nous noterons $\varphi(E_1 \Delta E)$.

Comme dans les recopies-projections ordinaires, étant donné une recopie-projection $\left[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2\right]$ et un espace F, nous n'utiliserons la notation $\varphi(F)$ pour désigner $\left[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2\right](F)$ que dans le cas où F est un sous-espace de E_1.

Etant donné des sous-espaces F_1, F_2 de E_1 et une recopie-projection $[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2]$, on a :

I-6-1. $\varphi(F_1 \nabla F_2) = \varphi(F_1) \nabla \varphi(F_2)$ et

$$\varphi(F_1 \Delta F_2) \lhd \varphi(F_1) \Delta \varphi(F_2)$$

(propriété classique des surjections). Si φ est une recopie-projection non contractée $\varphi(F_1 \Delta F_2) = \varphi(F_1) \Delta \varphi(F_2)$.

- De même, étant donné une relation R, l'ensemble des points qui sont images d'un point de R par $[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2]$ est une relation définie sur $\varphi(E_1 \Delta E_R)$ que nous désignerons par $[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2]R$;

7. <u>PROPRIETES DES OPERATEURS $[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2]$ DE RECOPIE-PROJECTION OU DE RECOPIE-PROJECTION CONTRACTEE PORTANT SUR L'ENSEMBLE $\mathcal{R}$ DE TOUTES LES RELATIONS DEFINISSABLES A PARTIR DE Ω</u>

a) <u>Utilisation des opérateurs dans des cas particuliers</u>

(I-7-1) $[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2](\phi_E) = \phi_{\psi(E_1 \Delta E)}$

(I-7-2) $E_1 \Delta E_R = \underline{0} \Rightarrow ((R \neq \phi_{E_R} \Rightarrow [E_1 \xrightarrow{\psi} E_2](R) = \underline{0})$

$\underline{\text{et}}$ $(R = \phi_{E_R} \Rightarrow [E_1 \xrightarrow{\psi} E_2](R) = \phi_{\underline{0}}))$

En particulier l'opérateur $[\underline{0} \xrightarrow{id} \underline{0}]$ donne donc pour image $\underline{0}$ à toute relation non vide et $\phi_{\underline{0}}$ à toute relation vide.

(I-7-3) Si $[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2]$ est une recopie-projection ordinaire, et si $E_R \lhd E_1$, alors R et $[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2](R)$ sont semblables.

(I-7-4) <u>Croissance</u> $(E_{R_1} = E_{R_2}$ et $R_1 \subset R_2) \Rightarrow$

$$[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2](R_1) \subset [E_1 \xrightarrow{\psi} E_2](R_2)$$

b) <u>Composition des projections</u> :

(I-7-5) $\quad \underset{E_2}{\perp} \circ \underset{E_1}{\perp} = \underset{E_1 \Delta E_2}{\perp}$

(I-7-6) $\quad \underset{\overline{\overline{E}}_2}{\perp} \circ \underset{\overline{\overline{E}}_1}{\perp} = \underset{\overline{\overline{E_1 \nabla E_2}}}{\perp}$

c) <u>Composition des recopies-projections ordinaires ou contractées</u>

Soit $[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2]$ une recopie-projection ordinaire ; la recopie-projection de E_2 dans E_1 associée à la bijection ψ^{-1} réciproque de la bijection normale ψ de l'ensemble des variables de E_1 dans celui des variables de E_2 sera notée

$[E_2 \xrightarrow{\psi^{-1}} E_1]$

(I-7-7) $\quad [E_2 \xrightarrow{\psi^{-1}} E_1] \circ [E_1 \xrightarrow{\psi} E_2] = [E_1 \xrightarrow{id} E_1] = \underset{E_1}{\perp}$

(I-7-8) $\quad [E_1 \xrightarrow{\psi} E_2] \circ [E_2 \xrightarrow{\psi^{-1}} E_1] = [E_2 \xrightarrow{id} E_2] = \underset{E_2}{\perp}$

Soit $[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2]$ une recopie-projection contractée et soit E un sous-espace de E_2, on désignera par $\psi^{-1}(E)$ l'espace engendré par l'ensemble des variables V_i de E_1 telles que $\psi(V_i)$ soit variable de E.

Soient $[E_3 \xrightarrow{\psi} E_4]$ et $[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2]$ deux recopies-projections, ordinaires ou contractées ; soit $\psi \circ \varphi$ la surjection normale obtenue en composant la restriction de φ à l'ensemble des variables de $\varphi^{-1}(E_2 \Delta E_3)$ et celle de ψ à l'ensemble des variables de $E_2 \Delta E_3$. Alors

(I-7-9) $\quad [E_3 \xrightarrow{\psi} E_4] \circ [E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2] = [\varphi^{-1}(E_2 \Delta E_3) \xrightarrow{\psi \circ \varphi} (E_2 \Delta E_3)]$

<u>Premier exemple</u>

$$[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2] = [A_1^2\ A_3^4\ B_1^4\ C_2^2\ C_3^1\ D_2^1\ F_2^3]$$

$$[E_3 \xrightarrow{\psi} E_4] = [A_1^2\ A_2^3\ A_3^5\ B_1^1\ B_2^3\ C_1^2\ D_1^2]$$

variables de E_1	A_2	A_4		B_4		C_2	C_1	D_1	F_3	φ
variables de E_2	A_1	A_3		B_1		C_2	C_3	D_2	F_2	
variables de E_3	A_2	A_3	A_5	B_1	B_3	C_2		D_2		ψ
variables de E_4	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	C_1		D_1		
variables de $^{-1}(E_2 \quad E_3)$		A_4		B_4		C_2		D_1		$\psi \circ \varphi$
variables de $(E_2 \quad E_3)$		A_2		B_1		C_1		D_1		

On voit que

$$\left[A_1^2 \; A_2^2 \; A_3^5 \; B_1^1 \; B_2^3 \; C_1^2 \; D_1^2\right] \circ \left[A_1^2 \; A_3^4 \; B_1^4 \; C_2^2 \; C_3^1 \; D_2^1 \; F_2^3\right] = \left[A_2^4 \; B_1^4 \; C_1^2 \; D_1^1\right]$$

<u>Deuxième exemple</u>

$$\left[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2\right] = \left[A_1^{23} \; A_2^{45} \; A_3^{6} \; B_3^{34} \; B_4^{5} \; C_5^{6}\right]$$

$$\left[E_3 \xrightarrow{\psi} E_4\right] = A_2^{12} \; A_3^{34} \; A_4^{5} \; B_4^{4} \; C_7^{67}$$

$$E_2 \,\Delta\, E_3 = \langle A_1 \; A_2 \; A_3 \; B_4 \rangle$$

$$\varphi^{-1}(E_2 \,\Delta\, E_3) = \langle A_2 \; A_3 \; A_4 \; A_5 \; A_6 \; B_5 \rangle$$

$$\psi\,(E_2 \,\Delta\, E_3) = \langle A_2 \; A_3 \; B_4 \rangle$$

$$\left[A_2^{12} \; A_3^{34} \; A_4^{5} \; B_4^{4} \; C_7^{67}\right] \circ \left[A_1^{23} \; A_2^{45} \; A_3^{6} \; B_3^{34} \; B_4^{5} \; C_5^{6}\right] = \left[A_2^{2345} \; A_3^{6} \; B_4^{5}\right]$$

<u>Règle pratique</u> = Pour que dans l'écriture indiciée du composé P_2 o P_1 des recopies projections ordinaires ou contractées P_2 et P_1 figure $A_i^{\cdot\cdot j \cdot\cdot\cdot}$, il faut qu'il existe un indice k tel que $A_i^{\cdot\cdot k \cdot\cdot\cdot}$ figure dans l'écriture de P_2 et $A_k^{\cdot\cdot j \cdot\cdot\cdot}$ dans celle de P_1.

8. MORPHISMES PROJECTIFS

Soit E_1 un espace. Associons à chaque variable A_i de E_1 une application h_{A_i} de A dans A, A étant l'ensemble de départ de A_i.

Le <u>morphisme projectif</u> H de $\bigcup\limits_{E \lhd E_1} E$ dans lui-même ayant pour <u>applications composantes</u> les applications h_{A_i} est l'application de $\bigcup\limits_{E \lhd E_1} E$ dans lui-même qui, à tout point $p \in \bigcup\limits_{E \lhd E_1} E$ fait correspondre $H(p) = \{a_i / \exists a'_i \in p : h_{A_i}(a') = a\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
p \arrow[r, "coor_{A_i}"'] \arrow[d, "H"'] & a' = coor_{A_i}(p) \arrow[d, "h_{A_i}"] \\
H(p) \arrow[r, "coor_{A_i}"'] & a = coor_{A_i}(H(p))
\end{tikzcd}$$

$$= h_{A_i}(coor_{A_i}(p))$$

par abus de langage nous dirons parfois de H que c'est un morphisme projectif de E_1 dans lui-même.

I-8-1 : Si H est défini sur E_1 et si $E'_1 \lhd E_1$, alors

$$\perp_{E'_1} \circ H = H \circ \perp_{E_1}$$

On désignera aussi par H son extension à l'ensemble des parties de $\bigcup\limits_{E \lhd E_1} E$; en particulier si $E_R \lhd E_1$, H(R) est une relation définie sur E_R.

Si les applications h_{A_i} sont des bijections, H est appelé un <u>isomorphisme projectif</u>.

Deux relations qui se correspondent par un isomorphisme projectif sont dites <u>projectivement isomorphes.</u>

Deux relations R_1 et R_2 sont dites déconnectées si l'union des ensembles de coordonnées de tous les points de R_1 est un ensemble disjoint de l'union des ensembles de coordonnées de tous les points de R_2.

Puisque les ensembles de départ sont infinis et qu'aucune structuration de ces ensembles n'intervient dans nos définitions, étant donné une relation R, il est toujours possible de construire deux relations projectivement isomorphes à R, donc projectivement isomorphes entre elles, et déconnectées entre elles. Cette propriété pourra intervenir dans certaines démonstrations ultérieures qui ne resteraient donc plus valables si les variables étaient finies.

9. OPERATEURS BINAIRES SUR R : *,+,-

a) Définitions

Par définition, et en confondant parfois par abus de langage (E_R, R) avec R,

$$R_1 * R_2 = \left(E_{R_1} \nabla E_{R_2}, \left\{ p \in E_{R_1} \nabla E_{R_2} / \underset{E_{R_1}}{\perp}(p) \in R_1 \ \underline{\text{et}} \ \underset{E_{R_2}}{\perp}(p) \in R_2 \right\}\right)$$

$$R_1 + R_2 = \left(E_{R_1} \nabla E_{R_2}, \left\{ p \in E_{R_1} \nabla E_{R_2} / \underset{E_{R_1}}{\perp}(p) \in R_1 \ \underline{\text{ou}} \ \underset{E_{R_2}}{\perp}(p) \in R_2 \right\}\right)$$

$$R_1 - R_2 = \left(E_{R_1}, \left\{ p \in R_1 / \underset{E_{R_2}}{\perp}(p) \notin \underset{E_{R_1}}{\perp}(R_2) \right\}\right)$$

L'opération * s'appelle produit.

b) Intérêt pratique de ces opérateurs et de l'opérateur de recopie projection

Montrons sur un exemple comment ces opérateurs et spécialement la recopie-projection et le produit permet de "composer" les relations.
Soit A un ensemble de personnes.

Soit R une relation définie sur $\langle A_f \; A_p \; A_m \rangle$ et vérifie par $\{r_f, s_p, t_m\}$ si r a pour père s et "a" ou "a eu" pour maître t.
La relation entre père et maître d'un même enfant est simplement

$$\underset{\langle A_p \; A_m \rangle}{\perp} (R).$$

Celle vérifiée par $\{r_f, s_p\}$ si s est père de r et si r et s ont eu le même maître est $\underset{\langle A_f A_p \rangle}{\perp} \left(R * \left[A_f^p A_m^m\right](R)\right)$.

Quant à la relation ci-dessous définie sur $\langle A_1 \; A_2 \rangle$:

$$\underset{\langle A_1 \; A_2 \rangle}{\perp} \left(\left[A_1^f \; A_3^m\right](R) * \left[A_1^f \; A_3^p\right](R) * \left[A_2^f \; A_3^m \; A_4^p\right](R) * \left[A_4^f \; A_5^p\right](R) * \left[A_3^f \; A_5^m\right](R)\right)$$

Elle est vérifiée par $\{x_1, y_2\}$

si x et y ont ou ont eu le même maître qui est père de x, mais élève du grand-père paternel de y.
L'écriture de cette relation pourrait être légèrement simplifiée en utilisant une recopie-projection contractée :

$$\underset{\langle A_1 \; A_2 \rangle}{\perp} \left(\left[A_1^f \; A_3^{mp}\right](R) * \left[A_2^f \; A_3^m \; A_4^p\right](R) * \left[A_4^f \; A_5^p\right](R) * \left[A_3^f \; A_5^m\right](R)\right)$$

On voit apparaître le besoin de définir des opérateurs complexes et d'en faire une étude algébrique.
Par exemple, on pourrait noter ainsi l'opérateur qui à toute relation définie sur $\langle A_f \; A_p \; A_m \rangle$ fait correspondre la relation définie sur $\langle A_1 \; A_2 \rangle$ et désignée quelques lignes plus haut :

$$\underset{\langle A_1 \; A_2 \rangle}{\perp} \circ \left(\left[A_1^f \; A_3^{mp}\right]\left[A_2^f \; A_3^m \; A_4^p\right]\left[A_4^f \; A_5^p\right]\left[A_3^f \; A_5^m\right]\right)$$

En particulier, à partir de ce type de formalisme, on pourrait introduire assez facilement des généralisations de la notion de fermeture transitive à des relations à plusieurs variables.
Dans ce travail, je me contente de définir les opérateurs complexes de décomposition construits à partir des opérateurs de recopies-projections ordinaires et de produits.

Je n'utiliserai les autres opérateurs qu'exceptionnellement au cours de démonstrations.

Signalons toutefois que les opérateurs + et - ont été choisis de façon à permettre de formaliser les opérations de mise à jour, ce qui explique le choix de E_{R_1} plutôt que de $E_{R_1} \nabla E_{R_2}$ pour l'espace de définition de $R_1 - R_2$.

Je vais maintenant citer quelques propriétés immédiates des opérations qui viennent d'être définies. J'ai cru utile de le faire pour faciliter les calculs ultérieurs mais inutile de donner sous cette forme des démonstrations qui ne sont pas nouvelles. La lecture des formules peut être fastidieuse ; je suggèrerai au lecteur pressé, après avoir pris connaissance du cylindrage, de ne s'y reporter qu'en cas de besoin.

c) <u>Cas particulier du cylindrage</u>

L'opération qui, à toute relation R fait correspondre $E * R$ est appelée <u>cylindrage</u> suivant E.

Nous la noterons souvent $\overset{E}{\top}$. Elle a les propriétés ci-dessous:

I-9-1. $E \lhd E_R \Rightarrow \overset{E}{\top}(R) = R$

I-9-2. $\underset{F}{\bot} \circ \overset{E}{\top}(R) = \overset{E \Delta F}{\top} \circ \underset{F}{\bot}(R)$; en particulier $\underset{E_R}{\bot} \circ \overset{E}{\top}(R) = R$

I-9-3. $R \neq \phi_{E_R} \Rightarrow \underset{E \Delta \overline{E}_R}{\bot} \circ \overset{E}{\top}(R) = E \,\Delta\, \overline{E}_R$

$$\underset{E \Delta \overline{E}_R}{\bot} \circ \overset{E}{\top}(\phi_{E_R}) = \phi_{E \Delta \overline{E}_R}$$

d) <u>Propriétés des opérateurs binaires</u>

- <u>Eléments remarquables</u> : en désignant par E un espace quelconque:

I-9-5. $R * \phi_E = \phi_{E \nabla E_R}$; $R + \phi_E = E * R$; $R - \phi_E = R$

I-9-6. $R * \underline{0} = R$; $R + \underline{0} = E_R$; $R - \underline{0} = \phi_{E_R}$

Et plus généralement : $R + E = E_R \nabla E$; $R - E = \phi_{E_R}$;

$$E_R \,\Delta\, E_{R'} = \underline{0} \Rightarrow R - R' = \phi_{E_R}$$

Cas particulier :

I-9-7. $E_{R_1} = E_{R_2} \Rightarrow$

$(R_1 * R_2 = R_1 \cap R_2$ et $R_1 + R_2 = R_1 \cup R_2$ et

$R_1 - R_2 = \complement_{R_1} (R_1 \cap R_2))$

Commutativité :

I-9-8. $R_1 * R_2 = R_2 * R_1$; $R_1 + R_2 = R_2 + R_1$

Associativité :

I-9-9. $R_1 * (R_2 * R_3) = (R_1 * R_2) * R_3$;

$R_1 + (R_2 + R_3) = (R_1 + R_2) + R_3$

Distributivité

I-9-10. $R_1 + (R_2 * R_3) = (R_1 + R_2) * (R_1 + R_3)$;

$R_1 * (R_2 + R_3) = (R_1 * R_2) + (R_1 * R_3)$

Absorption

I-9-11. $R_1 + (R_1 * R_2) = E_{R_2} * R_1$; $R_1 * (R_1 + R_2) = E_{R_2} * R_1$

Croissance par rapport aux opérandes

I-9-12. $(E_{R_1} = E_{R_2}$ et $R_1 \subset R_2) \Rightarrow (R_1 * R_3 \subset R_2 * R_3$

et $R_1 + R_3 \subset R_2 + R_3)$

Complément

I-9-13. $R_1 - (R_2 * R_3) = (R_1 - R_2) + (R_1 - R_3)$;

$$R_1 - (R_2 + R_3) = (R_1 - R_2) * (R_1 - R_3)$$

e) Notations indiciées - Par définition :

$$\mathop{*}_{i\in\emptyset} R_i = \underline{0} \qquad \mathop{*}_{i\in I\cup\{i_o\}} R_i = (\mathop{*}_{i\in I} R_i) * R_{i_o}$$

$$\sum_{i\in\emptyset} R_i = \underline{\emptyset_0} \qquad \sum_{i\in I\cup\{i_o\}} R_i = (\sum_{i\in I} R_i) + R_{i_o}$$

10. OPERATEURS BINAIRES ET RECOPIES-PROJECTION

Quoique par la suite nous ayions surtout à utiliser les recopies-projections ordinaires, j'ai établi les formules pour toutes les recopies-projections, sauf indication contraire.
Dans tout le paragraphe, les symboles E_i représentent des espaces quelconques et les symboles R ou R_i des relations.

a) Recopie-projection d'un produit, d'une somme, d'un complément

I-10-1. $[E_1 \xrightarrow{\Psi} E_2] \, (\overset{E_3}{\top} (R)) = (\Psi(E_1 \,\Delta\, E_3)) * ([E_1 \xrightarrow{\Psi} E_2] \, (R))$

I-10-2. $[E_1 \xrightarrow{\Psi} E_2] \, (R_3 * R_4) \subset ([E_1 \xrightarrow{\Psi} E_2] \, (R_3)) * ([E_1 \xrightarrow{\Psi} E_2] (R_4))$

I-10-3. Si $[E_1 \xrightarrow{\Psi} E_2]$ est une recopie-projection ordinaire,

alors :

$$E_{R_3} \,\Delta\, E_{R_4} \lhd E_1 \Rightarrow ([E_1 \xrightarrow{\Psi} E_2] \, (R_3 * R_4) =$$

$$([E_1 \xrightarrow{\Psi} E_2] \, (R_3)) * ([E_1 \xrightarrow{\Psi} E_2] \, (R_4))$$

I-10-4. $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right] (R_3 + R_4) = \left(\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right](R_3)\right) + \left(\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right](R_4)\right)$

I-10-5. Si $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$ est une recopie-projection ordinaire, alors

$$\left(\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right] (R_3)\right) - \left(\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right] (R_4)\right) \subset \left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right] (R_3 - R_4)$$

I-10-6. Si $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$ est une recopie-projection ordinaire, alors

$$E_{R_3} \,\Delta\, E_{R_4} \lhd E_1 \Rightarrow \left(\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right](R_3)\right) - \left(\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right](R_4)\right) = \left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right] (R_3 - R_4)$$

b) Produit de projections d'une relation

(rappel des résultats connus)

I-10-7. $\underset{E_1 \nabla E_2}{\perp} R \subset \left(\underset{E_1}{\perp} R\right) * \left(\underset{E_2}{\perp} R\right)$

I-10-8. $\underset{E_1}{\perp} \left(\left(\underset{E_2}{\perp} R\right) * \left(\underset{E_3}{\perp} R\right)\right) \subset \left(\underset{E_1 \Delta E_2}{\perp} R\right) * \left(\underset{E_1 \Delta E_3}{\perp} R\right)$

I-10-9. $E_2 \,\Delta\, E_3 \,\Delta\, E_R \lhd E_1 \Rightarrow \underset{E_1}{\perp} \left(\left(\underset{E_2}{\perp} R\right) * \left(\underset{E_3}{\perp} R\right)\right) =$

$$\left(\underset{E_1 \Delta E_2}{\perp} R\right) * \left(\underset{E_1 \Delta E_3}{\perp} R\right)$$

c) Produit de recopies-projections d'une relation

I-10-10. Si les recopies-projections $\left[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2\right]$ et $\left[E_3 \xrightarrow{\psi} E_4\right]$ sont telles que les restrictions des surjections normales qui leur sont associées à l'ensemble des variables de $E_1 \,\Delta\, E_3$ soient égales, alors, en notant H l'extension commune de φ et de ψ à l'ensemble des variables de $E_1 \nabla E_3$

I-10-10. $\left[E_1 \nabla E_3 \xrightarrow{H} E_2 \nabla E_4\right] (R) \subset \left(\left[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2\right](R)\right) * \left(\left[E_3 \xrightarrow{\psi} E_4\right](R)\right)$

I-10-11. $\left[E_5 \xrightarrow{\eta} E_6\right] \left(\left(\left[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2\right](R)\right) * \left(E_3 \xrightarrow{\psi} E_4 (R)\right)\right) \subset$

$$\left(\left[E_5 \xrightarrow{\eta} E_6\right] \circ \left[E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2\right](R)\right) * \left(\left[E_5 \xrightarrow{\eta} E_6\right] \circ \left[E_3 \xrightarrow{\psi} E_4\right](R)\right)$$

I-10-12. $[E_5 \xrightarrow{\eta} E_6]\left(\left([E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2](R)\right) * \left([E_3 \xrightarrow{\psi} E_4](R)\right)\right)$

$$\left([\varphi^{-1}(E_2 \Delta E_5) \xrightarrow{\eta\circ\varphi} \eta(E_2 \Delta E_5)](R)\right) * \left([\psi^{-1}(E_4 \Delta E_5) \xrightarrow{\eta\circ\psi} \eta(E_4 \Delta E_5)](R)\right)$$

I-10-13. Si $[E_5 \xrightarrow{\eta} E_6]$ est une recopie-projection ordinaire, et si $\varphi(E_1 \Delta E_R) \Delta \psi(E_3 \Delta E_R) \lhd E_5$, alors dans les formules 11 et 12, on peut remplacer $\subset$ par $=$.

d) Produit d'un ensemble fini de projections

I-10-14. $\perp_{\nabla_{E\in\mathcal{F}} E} R \subset \underset{E\in\mathcal{F}}{*} (\perp_E R)$

I-10-15. $[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2]\left(\underset{i\in I}{*}\left([E_i \xrightarrow{\varphi_i} E'_i](R)\right)\right) \subset$

$$\underset{i\in I}{*}\left([E_1 \xrightarrow{\psi} E_2] \circ [E_i \xrightarrow{\varphi_i} E'_i](R)\right)$$

I-10-16. $[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2]\left(\underset{i\in I}{*}\left([E_i \xrightarrow{\varphi_i} E'_i](R)\right)\right) \subset$

$$\underset{i\in I}{*}\left([\varphi_i^{-1}(E_1 \Delta E'_i) \xrightarrow{\psi\circ\varphi_i} \psi(E_1 \Delta E'_i)](R)\right)$$

I-10-17. Si $[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2]$ est une recopie-projection ordinaire

et Si $\forall i \in I : \forall j \in I : i \neq j \Rightarrow \varphi_i(E_i \Delta E_R) \Delta \varphi_j(E_j \Delta E_R) \lhd E_1$,

alors dans les formules 15 et 16, on peut remplacer $\subset$ par $=$.

11. CONCLUSION

La formalisation qui a été présentée dans ce chapitre est très générale ; elle devrait permettre l'étude d'un ensemble de plusieurs relations -ou - ce qui revient pratiquement au même, à l'étude de relations internes.

Nous allons maintenant restreindre l'étude à celle d'une unique relation "externe", c'est-à-dire définie sur un espace dont les variables proviennent d'ensembles de départ distincts. Nous prendrons donc un certain nombre de notations simplifiées.

Notre but sera d'étudier divers ensembles d'opérateurs "de décomposition" portant sur des ensembles de relations externes. Nous distinguerons les décompositions simples qui sont des produits de projections et les décompositions généralisées qui sont des projections de produits de recopies-projections ordinaires.

C H A P I T R E II

OPERATEURS DE DECOMPOSITIONS SIMPLES SUR UN ENSEMBLE DE RELATIONS EXTERNES

CHAPITRE II

OPERATEURS DE DECOMPOSITIONS SIMPLES SUR UN ENSEMBLE DE RELATIONS EXTERNES

Il est bien connu que si le contenu d'une base de données peut être considéré comme une relation qui a la propriété d'être égale au produit de certaines de ses projections, il existe toutes sortes de bonnes raisons (économie - sécurité - facilité de mise à jour - cf Réf n° 107) pour en tenir compte en enregistrant cette relation par l'intermédiaire de ses projections. Certaines relations peuvent ainsi être "décomposées" de plusieurs manières, dont certaines, conséquences des autres, sont à découvrir. Nous allons donc procéder à l'étude des opérateurs de "décomposition simple" qui, à toute relation, fait correspondre le produit de certaines de ses projections. Mais il se peut que l'espace de définition de la décomposition à étudier soit un sous-espace strict de E_R, autrement-dit, que ce soit non pas R, mais une projection de R qui soit "décomposable", ce qui complique l'étude mathématique.

C'est pourquoi nous commencerons notre étude par celle des "décompositions cylindrées" sur un sous-espace donné E, lesquelles sont des fermetures sur R_E et peuvent être étudiées comme telles. Auparavant, notre étude ne devant plus porter que sur des relations "externes", nous allons proposer quelques simplifications de notations.

1. ESPACE E_Ω ; RELATIONS EXTERNES

a) Définitions

Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble d'indices de référence (cf. I-2).

Nous choisirons dans cet ensemble et pour toute la suite un élément particulier que nous nommerons 0.

Etant donné un ensemble $\Omega = \{A,B,C,\ldots,X\}$ d'ensembles de départ, on peut le mettre en bijection avec l'ensemble des variables d'indice 0 construit sur lui, de telle sorte que pour tout $V \in \Omega$, V et V_0 se correspondent. Pour simplifier l'écriture, on identifiera les ensembles de départ aux variables d'indice 0. L'espace engendré par ces variables est noté E_Ω ; on notera $\mathcal{E}_\Omega$ l'ensemble des sous-espaces de E_Ω et $\mathcal{R}_\Omega$ l'ensemble des relations dont l'espace de définition est sous-espace de E_Ω.

Si l'on qualifie d'externe une relation définie sur un espace dont toutes les variables ont des espaces de départ distincts, alors toute relation externe est semblable à une relation définie sur un sous-espace de E_{Ω}. L'étude des relations externes se ramène à l'étude des relations de $\mathcal{R}_{\Omega}$.

b) Ordre et préordre sur R

Nous définirons sur $\mathcal{R}_{\Omega}$ un ordre partiel noté $\subset$ en disant que

$(E_{R_1}, R_1) \subset (E_{R_2}, R_2) \Leftrightarrow (E_{R_1} = E_{R_2}$ et $R_1 \subset R_2)$

Remarque : si $R_1 \neq \emptyset$, $(E_{R_1}, R_1) \subset (E_{R_2}, R_2) \Leftrightarrow R_1 \subset R_2$,

si bien que l'abus de langage consistant à écrire R au lieu de (E_R, R) n'est pas gênant.

Nous définirons aussi sur $\mathcal{R}_{\Omega}$ un préordre noté $\leqslant^*$ en disant que:

$$R_1 \leqslant^* R_2 \Leftrightarrow \forall\, p \in E \ : \left[E_{R_1}\right] p \in R_1 \Rightarrow \left[E_{R_2}\right] p \in R_2$$

$$\Leftrightarrow E_{\Omega} * R_1 \subset E_{\Omega} * R_2$$

si $R_1 \subset R_2$, alors $R_1 \leqslant^* R_2$.

c) Simplification des notations pour les recopies-projections

On remarquera que si E est semblable à un sous-espace E_o de E_{Ω} (cf. I-6.a), alors il existe une seule recopie-projection $\left[E_o \xrightarrow{\psi} E\right]$ et une seule recopie-projection $\left[E \xrightarrow{\psi^{-1}} E_o\right]$.
Ces recopies seront notées respectivement $[E]$ et $\left[E^{-1}\right]$;
on peut aussi nommer $[E]$ en énumérant les variables de E entre crochets, ce qui revient à éliminer les indices o dans l'écriture employée au chapitre précédent.
Nous noterons parfois E_o le sous-espace de E semblable à E, lorsqu'il existe. Dans ce cas, $E_o = \left[E^{-1}\right](E)$.
Enfin, l'opérateur de projection $\underset{E_{\Omega}}{\perp}$ qui est souvent utilisé sera noté simplement $\perp$.

Exemples

Anciennes notations	Nouvelles notations
si $E = \langle A_o\ B_o\ C_1\ D_2 \rangle$	si $E = \langle A\ B\ C_1\ D_2 \rangle$
alors : $E_o = \langle A_o\ B_o\ C_o\ D_o \rangle$	alors : $E_o = \langle A\ B\ C\ D \rangle$
$\left[E_o \xrightarrow{\psi} E\right] = \left[A_o^o\ B_o^o\ C_1^o\ D_2^o\right]$	$\left[E\right] = \left[A\ B\ C_1\ D_2\right]$
$\left[E \xrightarrow{\psi^{-1}} E_o\right] = \left[A_o^o\ B_o^o\ C_o^1\ D_o^2\right]$	$\left[E^{-1}\right] = \left[A\ B\ C^1\ D^2\right]$
$\left[E \xrightarrow{\psi^{-1}} E_o\right](E) = \langle A_o\ B_o\ C_o\ D_o \rangle$	$\left[E^{-1}\right](E) = \langle A\ B\ C\ D \rangle$
$\underset{E_\Omega}{\perp} E = \langle A_o\ B_o \rangle$	$\perp E = \langle A\ B \rangle = E_\Omega \Delta E$
si $F = \langle A_o\ B_o\ C_o \rangle$	si $F = \langle A\ B\ C \rangle$
alors $\underset{F}{\perp} = \left[F \xrightarrow{Id} F\right] = \left[A_o^o\ B_o^o\ C_o^o\right]$	alors $\underset{F}{\perp} = \left[F\right] = \left[A\ B\ C\right]$

Remarque : il ne faut pas confondre $\left[E\right] = \left[A_o^o\ B_o^o\ C_1^o\ D_2^o\right]$ et

$$\underset{E}{\perp} = \left[A_o^o\ B_o^o\ C_1^1\ D_2^2\right]$$

d) Composition de ces recopies projections

II-1-1. Soient F et E deux espaces quelconques semblables à des sous-espaces de E_Ω

$$\left[F\right] \circ \left[E\right] = \left[\left[F\right](F_o \Delta E)\right] = \left[\left[F\right](\perp E)\right]$$

en effet : $[F] \circ [E] = [F_0 \xrightarrow{\psi} F] \circ [E_0 \xrightarrow{\varphi} E]$

$= [\varphi^{-1}(F_0 \Delta E) \xrightarrow{\psi \circ \varphi} \psi(F_0 \Delta E)]$ (I-7-8)

$= [F_0 \Delta E \xrightarrow{\psi \circ \varphi} [F] (F_0 \Delta E)]$

$= [[F] (F_0 \Delta E)]$

II-1-2. $E \lhd E_\Omega \Rightarrow [F] \circ [E] = [[F] (E)]$

II-1-3. $F \lhd E_\Omega \Rightarrow [F] \circ [E] = [F \Delta E]$

Donc si $E \lhd E_\Omega$ et $F \lhd E_\Omega$, alors $[F] \circ [E] = [E] \circ [F]$

Exemple d'application de la formule II-1-1. :

$[A\ B_1\ C_2\ E\ F_2\ H_1] \circ [A\ B\ C\ D\ E_1\ F_2\ G_3] = [[AB_1\ C_2\ E\ F_2\ H_1] (<ABC>)]$

$= [A\ B_1\ C_2]$

2. TREILLIS DES FERMETURES SUR L'ENSEMBLE $\mathcal{R}_E$ DES RELATIONS AYANT POUR ESPACE DE DEFINITION UN SOUS-ESPACE E de E_Ω.

$\mathcal{R}_E$ est l'ensemble des parties de E ; $(\mathcal{R}_E, \subset)$ est donc un treillis de Boole. L'ensemble des fermetures définies sur $(\mathcal{R}_E, \subset)$ ordonné par l'ordre : $f_1 \leqslant f_2 \Leftrightarrow \forall R \in \mathcal{R}_E : f_1(R) \subset f_2(R)$

est un treillis dont les propriétés ont été étudiées dans l'annexe, paragraphe 4. Rappelons quelques résultats :

Soient f_1 et f_2 deux fermetures ; la borne inférieure de $\{f_1, f_2\}$ dans le treillis des fermetures sur $(\mathcal{R}_E, \subset)$ est égale à la borne inférieure de $\{f_1, f_2\}$ dans le treillis des applications sur $(R_E, \subset)$; c'est donc la fermeture que nous noterons $f_1 * f_2$ ou plus simplement $f_1\ f_2$ et que nous nommerons produit des fermetures f_1 et f_2, qui à toute relation R R_E fait correspondre $f_1 * f_2(R) = f_1(R) * f_2(R)$ $(= f_1(R) \cap f_2(R))$; la borne supérieure de $\{f_1, f_2\}$ est la fermeture ayant pour ensemble d'invariants l'ensemble des relations R de $\mathcal{R}_E$ invariantes à la fois par f_1 et par f_2.

On prendra soin de ne pas confondre $f_1\, f_2$ avec $f_1 \circ f_2$, qui n'est pas en général une fermeture.
On rappelle que lorsque $f_1 \circ f_2$ est une fermeture, c'est la borne supérieure de $\{f_1, f_2\}$ dans le treillis des fermetures.

3. DECOMPOSITIONS CYLINDREES DANS E

a) Projections cylindrées

Soit E un sous-espace de E_Ω et F un sous-espace de E.
La restriction à $\mathcal{R}_E$ du composé $\overset{E}{\top} \circ \underset{F}{\perp}$ (ou "$\overset{E}{\top} \circ [F]$") des opérateurs de projection $[F]$ et de cylindrage $\overset{E}{\top}$ est une fermeture sur $\mathcal{R}_E$ que nous nommerons <u>projection suivant F cylindrée dans E</u>.

L'ensemble ordonné des projections cylindrées dans E, muni de l'ordre induit par celui du treillis des fermetures est un treillis de Boole isomorphe au dual du treillis des sous-espaces de E.

Soient deux projections cylindrées dans E : $\overset{E}{\top} \circ [F]$ et $\overset{E}{\top} \circ [G]$;

$$(\overset{E}{\top} \circ [G]) \circ (\overset{E}{\top} \circ [F]) = \overset{E}{\top} \circ [G \Delta F];$$

le composé de deux projections cylindrées est une projection cylindrée et donc une fermeture ; c'est donc la borne supérieure de l'ensemble de ces deux projections cylindrées aussi bien dans le treillis des projections cylindrées que dans celui des fermetures. Le treillis des projections cylindrées dans E est un U-sous-demi-treillis du treillis des fermetures isomorphe au dual du treillis booléen des sous-espaces de E.

b) Décomposition cylindrée dans E

Soit $\mathbf{F}$ un ensemble non vide de sous-espaces de E. La borne inférieure dans le treillis des fermetures de l'ensemble des projections cylindrées de la forme $\overset{E}{\top} \circ [F]$ où F est élément de $\mathbf{F}$ est la fermeture sur $\mathcal{R}_E$ égale à $\underset{F \in \mathbf{F}}{*} (\overset{E}{\top} \circ [F])$ qui, à toute relation R $\mathbf{R}_E$, fait correspondre la relation

$$\underset{F \in \mathbf{F}}{*} (\overset{E}{\top} \circ [F] (R)) = \overset{E}{\top} (\underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F] (R)).$$

Nous noterons cette fermeture $\overset{E}{\top} \circ (\underset{F\in\mathbf{F}}{*} [F])$ et nous dirons que c'est une <u>décomposition cylindrée dans E</u>, ou encore une <u>décomposition simple cylindrée dans E</u>.

Les éléments de $\mathbf{F}$ s'appellent <u>facteurs</u> de la décomposition.

Dans le cas où $\bigvee_{F\in\mathbf{F}} F = E$, alors $\overset{E}{\top} \circ (\underset{F\in\mathbf{F}}{*} [F]) = \underset{F\in\mathbf{F}}{*} [F]$.

Dans le cas où $\mathbf{F} = \emptyset$, $\overset{E}{\top} \circ (\underset{F\in\mathbf{F}}{*} [F])$ est la fermeture qui, à tout $R \in \mathcal{R}_E$ fait correspondre E puisque c'est la projection cylindrée $\overset{E}{\top} \circ \underline{0}$.

Lorsque $\mathbf{F}$ est cité en extension, il arrive souvent que $\overset{E}{\top} \circ (\underset{F\in\mathbf{F}}{*} [F])$ soit nommé en utilisant une énumération des facteurs de $\mathbf{F}$.

Exemple : si $\mathbf{F} = \{\langle ABC\rangle, \langle BCD\rangle, \langle AD\rangle\}$, on notera $\overset{E}{\top} \circ (\underset{F\in\mathbf{F}}{*} [F])$ qui à toute relation R $\mathbf{R}_E$ fait correspondre $\overset{E}{\top}([ABC](R)*[BCD](R)*[AD](R))$ par l'écriture :

$\overset{E}{\top} \circ ([ABC] * [BCD] * [AD])$ ou, plus simplement $\overset{E}{\top} \circ ([ABC][BCD][AD])$

c) <u>Décomposition cylindrée en tant que fermeture</u>

Soit $C = \overset{E}{\top} \circ (\underset{F\in\mathbf{F}}{*} [F])$ une décomposition cylindrée dans E.

Nous avons vu que c'est une fermeture sur $(\mathcal{R}_E, \subset)$.

L'ensemble de ses invariants est donc un $\cap$-sous-treillis complet de $(\mathcal{R}_E, \subset)$, donc :

II-3-1. $\forall \mathcal{R} \subset \mathcal{R}_E : (\forall R \in \mathcal{R} : C(R) = R) \Rightarrow C(\underset{R\in\mathcal{R}}{*} R) = \underset{R\in\mathcal{R}}{*} R$

Autrement-dit, l'intersection d'un ensemble de relations de $\mathcal{R}_E$ invariantes par la décomposition cylindrée C est invariante par C.

D'autre part, C est un U-homorphisme, et la borne supérieure de $C(R_1)$ et $C(R_2)$ dans le treillis des relations invariantes par C étant $C(C(R_1) + C(R_2))$, on en déduit :

II-3-2. $\forall R_1 \in \mathcal{R}_E : \forall R_2 \in \mathcal{R}_E : C(R_1 + R_2) = C(C(R_1)+C(R_2))$

4. <u>ECRITURE STANDARDISEE OU MAXIMALE D'UNE DECOMPOSITION CYLINDREE</u>

a) <u>Formes maximales et standardisées</u>

Soit C une décomposition cylindrée ; il existe plusieurs ensembles **F** tels que :

$$\overset{E}{\top} \circ \left(\underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F] \right) = C$$

La règle ci-dessous est connue depuis longtemps, et découle de la structure d'ordre de l'ensemble des projections sur les sous-espaces de E :

on ne change pas une décomposition cylindrée en adjoignant à l'ensemble de ses facteurs dans une écriture donnée, ou en supprimant de cet ensemble un sous-espace d'un autre facteur.

A tout ensemble $\mathbf{F} \subset \mathcal{E}_\Omega$, on peut faire correspondre l'ensemble $\mathbf{F}^M$ qui est, si $\mathbf{F} \neq \emptyset$, la section commençante engendrée par **F** dans l'algèbre de Boole finie $(\mathcal{E}_\Omega, \lhd)$ et si $\mathbf{F} = \emptyset$ le singleton $\underline{0}$.

On nomme $\mathbf{F}^S$ l'ensemble des éléments maximaux de $\mathbf{F}^M$ dans l'ordre $\lhd$. D'après la règle énoncée, les décompositions cylindrées ayant pour ensembles de facteurs $\mathbf{F}, \mathbf{F}^M$ et $\mathbf{F}^S$ sont égales.

Posons $C = \overset{E}{\top} \circ \left(\underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F] \right)$, on dit que $\overset{E}{\top} \circ \left(\underset{F \in \mathbf{F}^M}{*} [F] \right)$ est une <u>forme maximale</u> de C et que $\overset{E}{\top} \circ \left(\underset{F \in \mathbf{F}^S}{*} [F] \right)$ est une <u>forme standardisée</u> de C.

Exemple : $C = \overset{E}{\top} \circ ([ABC][AB][CD])$
a pour écriture maximale

$$\overset{E}{\top} \circ ([ABC][AB][AC][BC][A][B][C] \; \underline{o} \; [CD][D])$$

et pour écriture standardisée :

$$\overset{E}{\top} \circ ([ABC][CD])$$

b) <u>Relations-reflet d'un ensemble de facteurs</u>

Dans ce paragraphe, nous supposons que toutes les relations considérées ont E (sous-espace de E_{Ω}) comme espace de définition. Soit **F** un ensemble de k sous-espaces de E.

On indicie **F** en prenant $[1,k]$ pour ensemble d'indices. Alors $\mathbf{F} = \{F_i \;/\; i \in [1,k]\}$

Choisissons k+1 points p^i $(0 \leqslant i \leqslant k)$ de E tels que les singletons $\{p^i\}$ soient déconnectés deux à deux. Pour chaque valeur de i comprise entre 1 et k, nommons q^i le point de E tel que, pour toute variable A de E, si A var F_i, alors $coor_A(q^i) = coor_A(p^o)$, et sinon $coor_A(q^i) = coor_A(p^i)$.

La relation vérifiée par les k points q^i et par eux seuls, est appelée <u>relation reflet dans E</u> de l'ensemble de facteurs **F**, et notée $R_{\mathbf{F}}$. Les diverses relations-reflets de **F** dans E sont projectivement isomorphes.

Exemple : $E = \langle ABC \rangle$; $\mathbf{F} = \{\langle AB \rangle, \langle AC \rangle\}$; $p^o = \{a,b,c\}$;

$$p^1 = \{a^1,b^1,c^1\} \; ; \; p^2 = \{a^2,b^2,c^2\} \; ; \; R_{\mathbf{F}} = \{\{a,b,c^1\},\{a,b^2,c\}\}$$

<u>Notation</u> : dans la suite du texte, p^o désignera toujours le point qui joue le rôle indiqué ici dans la construction des relations-reflets dont il sera question

II-4-1. Soient $C_1 = \overset{E}{\top} \circ (\underset{F \in \mathbf{F}_1}{*} [F])$ et $C_2 = \overset{E}{\top} \circ (\underset{F \in \mathbf{F}_2}{*} [F])$;

Alors $p^o \in C_2(R_{\mathbf{F}_1}) \Leftrightarrow \mathbf{F}_2{}^M \subset \mathbf{F}_1{}^M$

en effet $p^o \in C_2(R_{\mathbf{F}_1}) \Leftrightarrow \forall F \in \mathbf{F}_2 \; \exists F' \in \mathbf{F}_1 : F \lhd F'$

II-4-2. $p^o \in C_1(R_{\mathbf{F}_1})$

c) Unicité de la forme standardisée

Soient $C_1 = \overset{E}{\top} \circ (\underset{F \in \mathbf{F}_1}{*} \lfloor F \rfloor)$ et $C_2 = \overset{E}{\top} \circ (\underset{F \in \mathbf{F}_2}{*} \lfloor F \rfloor)$

D'après a) $C_1 = \overset{E}{\top} \circ (\underset{F \in \mathbf{F}_1^M}{*} \lfloor F \rfloor)$ et $C_2 = \overset{E}{\top} (\underset{F \in \mathbf{F}_2^M}{*} \lfloor F \rfloor)$

D'après II-4-2, $p^o \in C_1(R_{\mathbf{F}_1^M})$; d'après II-4-1, si $\mathbf{F}_2^M$ n'est pas inclus dans $\mathbf{F}_1^M$, alors $p^o \notin C_2(R_{\mathbf{F}_1^M})$, donc $C_2 \neq C_1$;
on montre de même que si $\mathbf{F}_1$ n'est pas inclus dans $\mathbf{F}_2^M$, alors $C_2 \neq C_1$.

Par conséquent :

$$\mathbf{F}_1^M = \mathbf{F}_2^M \Leftrightarrow C_1 = C_2$$

ou encore : $\mathbf{F}_1^S = \mathbf{F}_2^S \Leftrightarrow C_1 = C_2$

Toute décomposition cylindrée a une forme standardisée (ou maximale) unique.

5. TREILLIS DES DECOMPOSITIONS CYLINDREES DANS E.

a) Ce treillis est une partie de Moore du treillis des fermetures sur E

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de décompositions cylindrées dans E. Le treillis des fermetures sur $(\mathbb{R}_E, \subset)$ étant un $\cap$-sous-demi-treillis complet du treillis des applications de $(\mathbb{R}_E, \subset)$ dans $(\mathbb{R}_E, \subset)$, l'application $\underset{C \in \mathcal{C}}{*} C$ qui à toute relation R de $\mathbb{R}_E$ fait correspondre $\underset{C \in \mathcal{C}}{*} (C(R))$ est la borne inférieure de $\mathcal{C}$ dans le treillis des fermetures. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des ensembles de facteurs dans l'écriture choisie pour les décompositions éléments de $\mathcal{C}$.

$$\underset{C\in\mathcal{C}}{*} C = \underset{F\in\mathcal{F}}{*} \left(\overset{E}{\top} \circ \left(\underset{F\in F}{*} [F] \right)\right)$$

$$= \overset{E}{\top} \circ \left(\underset{F\in\mathcal{F}}{*} \left(\underset{F\in F}{*} [F] \right)\right)$$

$$= \overset{E}{\top} \circ \left(\underset{F\in \bigcup_{F\in\mathcal{F}}}{*} [F] \right)$$

$\underset{C\in\mathcal{C}}{*} C$ est donc une décomposition cylindrée.

Puisque d'autre part la fermeture sur E la plus grande est

$\overset{E}{\top} \circ \underline{0}$, décomposition cylindrée qui, à toute relation $R \in \mathcal{R}_E$ fait correspondre $_E$, on voit que l'ensemble des décompositions cylindrées dans E est une partie de Moore du treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_E$.

L'ensemble des décompositions cylindrées, partie de Moore du treillis des fermetures est donc un treillis ; par contre, ce n'est pas un U-sous-demi-treillis de l'ensemble des fermetures:

Exemple : E = < A B C >

$$R_1 = \{a,b,c\}, \{a,b,c'\}, \{a',b',c\}$$ est un invariant

pour $C_1 = \overset{E}{\top} \circ [AB][AC]$ et pour $C_2 = \overset{E}{\top} \circ [AB][BC]$ et donc un invariant pour la borne supérieure de $\{C_1, C_2\}$ dans le treillis des fermetures. Par contre, R_1 n'est pas invariante pour le borne supérieure de $\{C_1, C_2\}$ dans le treillis des décompositions cylindrées, cette borne étant $\overset{E}{\top} \circ [AB][C]$, comme nous allons le voir.

b) <u>Le treillis des décompositions cylindrées dans E est isomorphe au dual du treillis des sections commençantes non vides de l'algèbre de Boole</u> ($\mathcal{E}_E$, $\lhd$).

Soit $\mathcal{E}_E$ l'ensemble des sous-espaces de E. D'après le paragraphe 4, il y a bijection entre l'ensemble des décompositions cylindrées dans E et l'ensemble des sections commençantes non vides de ($\mathcal{E}_E$, $\lhd$). Montrons que, étant donné deux décompositions cylindrées dans E, C_1 et C_2, ayant respectivement pour écritures maximales $C_1 = \overset{E}{\top} o (\underset{F \in \mathbf{F}_1^M}{*} [F])$ et $C_2 = \overset{E}{\top} o(\underset{F \in \mathbf{F}_2^M}{*} [\bar{F}])$, on a l'équivalence :

$$C_1 \leqslant C_2 \Leftrightarrow \mathbf{F}_2^M \subset \mathbf{F}_1^M$$

Supposons d'abord que $\mathbf{F}_2^M \subset \mathbf{F}_1^M$;

$$\forall G \in \mathbf{F}_2^M : \overset{E}{\top} o [G] \geqslant C_1$$

Or C_2 est la borne inférieure de l'ensemble des projections cylindrées $\overset{E}{\top} o \lfloor G \rfloor$ pour $G \in \mathbf{F}_2^M$ dans le treillis des décompositions cylindrées ; donc

$$C_2 \geqslant C_1$$

Réciproquement, supposons que $C_1 \leqslant C_2$; alors, d'après II-4-2. $p^o \in C_1 \quad (R_{\mathbf{F}_1})$, donc $p^o \in C_2 \quad (R_{\mathbf{F}_1})$, donc, d'après II-4-1. $\mathbf{F}_2^M \subset \mathbf{F}_1^M$.

Le treillis des décompositions cylindrées dans E est isomorphe au dual du treillis des sections commençantes non vides de l'algèbre de Boole finie ($\mathcal{E}_E$, $\lhd$), c'est-à-dire au dual du treillis distributif libre privé d'un point ; le treillis distributif libre étant auto-dual, on peut dire que le treillis des décompositions cylindrées dans E est isomorphe au treillis distributif libre privé de son plus grand élément. Ce treillis a été étudié en détail dans l'annexe, paragraphe **10**. Nous en retiendrons pratiquement l'idée que le cardinal de l'ensemble des décompositions cylindrées dans un espace E de plus de 4 variables est beaucoup trop grand pour que l'on puisse fonder un algorithme pratique quelconque sur son énumération.

6. DECOMPOSITIONS SIMPLES

a) Définitions

On appelle décomposition simple (ou décomposition lorsqu'il n'y a pas ambiguïté) construite sur $\mathbf{F} \subset \mathcal{E}_\Omega$ l'application de $\mathcal{R}_\Omega$ dans $\mathcal{R}_\Omega$ qui, à toute relation $R \in \mathbf{R}_\Omega$ fait correspondre la relation $(\underset{E \in \mathbf{F}}{*}[E]\ (R))$. Cet opérateur est noté $\underset{E \in \mathbf{F}}{*}[E]$.

L'ensemble $\mathbf{F}$ est appelé un ensemble de facteurs de la décomposition.

Comme dans les paragraphes précédents, il arrive souvent que l'opérateur soit nommé par énumération des facteurs.

Exemple : si $\mathbf{F} = \langle AB \rangle, \langle AC \rangle, \langle AD \rangle$,

$$\underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F] \quad \text{peut s'écrire} \quad [AB][AC][AD]$$

b) Espace de définition d'une décomposition simple

Etant donné une décomposition $D = \underset{E \in \mathbf{F}}{*} [E]$ et une relation R,

$$E_{D(R)} = \bigtriangledown_{E \in \mathbf{F}} (E \,\Delta\, E_R)$$

$$= E_R \,\Delta\, (\bigtriangledown_{E \in \mathbf{F}} E)$$

L'espace $\bigtriangledown_{E \in \mathbf{F}} E$ est donc constant pour D donnée, quel que soit l'ensemble des facteurs $\mathbf{F}$ choisi pour son écriture. Nous le noterons E_D et le nommerons espace de définition de la décomposition D.

c) Décompositions simples et décompositions cylindrées

Il y a une bijection triviale φ entre l'ensemble des décompositions simples sur $\mathcal{R}_\Omega$ et celui des décompositions cylindrées sur E_Ω telle que $\varphi(D) = \top \circ D$ et $\varphi^{-1}(c) = [E_D] \circ C \circ \top$.

(Par abus de langage, on a nommé D la décomposition D définie sur $\mathcal{R}_\Omega$ et sa restriction à $\mathcal{R}_{E_\Omega}$).

Remarquons 1- que la restriction d'une décomposition simple D à $\mathcal{R}_{E_D}$ est une décomposition cylindrée d'un type particulier sur $\mathcal{R}_{E_D}$ et par conséquent une fermeture.

2- que si E est un surespace de E_D, c'est-à-dire si $E_D \lhd E$, alors la restriction de la décomposition simple D à $\mathcal{R}_E$ est un opérateur de la forme $[E_D] \circ C$ où C est une décomposition cylindrée sur E.

3- que si $D = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F]$ est une décomposition simple quelconque et R une relation quelconque $D(R) = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F \Delta E_R] ([E_D] R)$;

si bien qu'on peut faire l'étude de D(R) en posant $D(R) = D'(R')$, où la restriction de $D' = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F \Delta E_R]$ à $(E_D \Delta E_R)$ est une fermeture et où $R' = [E_D] R$ est élément de $\mathcal{R}_{(E_D \Delta E_r)}$

d) <u>Quelques formules utiles</u>

Posons $D = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F]$; soit $R \in \mathcal{R}_\Omega$ et $E \lhd E_\Omega$;

posons de même $D_i = \underset{F \in \mathbf{F}_i}{*} [F]$

II-6-1. $D(R) = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F \Delta E_R]([E_D](R))$ - déjà vu en c)

II-6-2. $D(\overset{E}{\top}(R)) = \overset{E \Delta E_D}{\top} (D(R))$

En effet $\underset{F \in \mathbf{F}}{*} ([F] (\overset{E}{\top}(R))) = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} (\overset{E \Delta F}{\top} ([F] (R)))$ (I-9-2)

$= \underset{F \in \mathbf{F}}{*} ((E \Delta F) * ([F] (R)))$

(définition de $\overset{E \Delta F}{\top}$)

$= (\underset{F \in \mathbf{F}}{*} E \Delta F) * (\underset{F \in \mathbf{F}}{*} ([F](R)))$

(associativité et commutativité de *)

$= (E \Delta E_D) * D(R)$

$= \overset{E \Delta E_D}{\top} (D(R))$

II-6-3. $D(\overset{E_{\Omega}}{\top}(R)) = \overset{E_D}{\top}(D(R))$

$= D(\overset{E_D}{\top}(R))$

II-6-4. $[E](D(R)) \subset D([E](R))$ d'après I-10-15 et II-1-3.

$[E](D(R)) \subset \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [E \Delta F](R)$ d'après I-10-15 et II-1-3.

II-6-5. $(\exists F \in \mathbf{F} : E \Delta E_R \lhd F) \Rightarrow [E](D(R)) = [E](R)$

ou : $(\exists F \in \mathbf{F} : E \lhd F) \Rightarrow [E] \circ D = [E]$

II-6-6. $(\forall F \in \mathbf{F} : \forall F' \in \mathbf{F} : F \neq F' \Rightarrow F \Delta F' \lhd E) \Rightarrow$
$[E] \circ D = D_O [E]$

(d'après I-10-17)

II-6-7. $D_2 \circ D_1 (R) \subset \underset{F \in \mathbf{F}_1}{*} \; \underset{F \in \mathbf{F}_2}{*} [E \Delta F](R)$

II-6-8. $\mathbf{F}_2^M \quad \mathbf{F}_1^M \Leftrightarrow D_2 \circ D_1 = D_2$

car $\forall R \in \mathcal{R}_{\Omega} : \mathbf{F}_2^M \subset \mathbf{F}_1^M \Leftrightarrow \underset{F \in \mathbf{F}_1}{*} \; \underset{F \in \mathbf{F}_2}{*} [E \Delta F](R) = D_2(R)$

REMARQUE : en général, les composés $[E] \circ D$ et $D_2 \circ D_1$ ne sont pas des décompositions simples ; cela explique l'intérêt qu'il y a à plonger l'ensemble des décompositions simples dans l'ensemble plus vaste des décompositions généralisées qui est stable par composition des opérateurs.

7. DECOMPOSITIONS SIMPLES COMME PSEUDO-FERMETURES

Si l'on choisit sur $\mathcal{R}_{\Omega}$ l'ordre partiel $\subset$, alors toute décomposition D est croissante, idempotente mais non-extensive, R et D(R) n'étant pas en général d'ordre comparable. Autrement-dit :

III-7-1. $\forall R_1 \in \mathcal{R}_{\Omega} : \forall R_2 \quad \mathcal{R}_{\Omega} : R_1 \subset R_2 \Rightarrow D(R_1) \subset D(R_2)$

III-7-2. $\forall R \in \mathcal{R}_{\Omega} : D(D(R)) = D(R)$

III-7-3. $\forall\, R \in \mathcal{R}_\Omega : \left[E_D\right](R) \subset D(R)$ (pseudo-extensivité)

Seule la restriction de D à $\mathcal{R}_{E_D}$ est une fermeture.

Si l'on choisit sur $\mathcal{R}_\Omega$ le préordre $\leq^*$ défini en 1.f), alors D est croissante, idempotente et extensive, mais sur un ensemble qui n'est que préordonné.
Pour généraliser la notion d'invariant d'une fermeture, nous dirons qu'une relation R <u>admet</u> la décomposition simple D si et seulement si $D(R) = \left[E_D\right](R)$. Pour que R admette D, il faut et il suffit que $\overset{E_D}{\top}$ o $\left[E_D\right]$ (R) soit un invariant de la restriction de D à $\mathcal{R}_{E_D}$.

En général, étant donné un ensemble $\mathcal{R}$ de relations définies sur le même espace $E \lhd E_\Omega$, il ne suffit pas que toutes les relations de R admettent une décomposition D donnée pour que l'intersection des relations éléments de $\mathcal{R}$ l'admette.

Exemple : E = < A B C > $\quad D = \left[A\right]\left[B\right]$

$$R_1 = \{\{a,b,c\},\ \{a,b',c\},\ \{a',b,c\},\{a',b',c\}\}$$

$$R_2 = \{\{a,b,c\},\ \{a,b',c'\},\ \{a',b,c'\},\ \{a',b',c\}\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{\{a,b,c\},\ \{a',\ b',\ c\}\}$$

Par contre, la restriction de D à $\mathcal{R}_{E_D}$ étant une fermeture, on peut énoncer le théorème :

<u>**Théorème I**</u> **: Si toutes les relations d'un ensemble $\mathcal{R}$ de relations ont même espace de définition que la décomposition simple D et admettent cette décomposition, alors leur intersection $\underset{R\in\mathcal{R}}{*} R$ admet aussi cette décomposition.**

On démontre aussi que R_1 et R_2 étant deux relations quelconques de $\mathcal{R}_\Omega$, la formule II-3-2. est valable pour les décompositions simples, c'est-à-dire que :
II-7-1. $\forall\, R_1 \in \mathcal{R}_\Omega : \forall\, R_2 \in \mathcal{R}_\Omega : D(R_1 + R_2) = D(D(R_1)+D(R_2))$

Pour démontrer cette formule, on se ramène au cas d'une décomposition définie sur $E = E_D \Delta (E_{R_1} \nabla E_{R_2})$ portant sur des relations définies sur E.

Supposons que $D = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F]$

Posons $D' = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F \Delta (E_{R_1} \nabla E_{R_2})]$; on remarque que si

$E_R \lhd E_{R_1} \nabla E_{R_2}$, alors $D'(R) = D(R)$

Posons aussi $R'_1 = \overset{E_{R_2} \nabla E_D}{\top} \circ [E_D] (R_1)$ et

$R'_2 = \overset{E_{R_1} \nabla E_D}{\top} \circ [E_D] (R_2)$

Alors D', R'_1 et R'_2 ont le même espace de définition $E = E_D \Delta (E_{R_1} \nabla E_{R_2})$

La formule II-3-2. peut donc s'appliquer :

$D' (R'_1 + R'_2) = D' (D'(R'_1) + D'(R'_2))$

Or, $D'(R'_1 + R'_2) = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F \Delta E_{R_1 + R_2}] ([E_D] (R_1 + R_2))$

et, d'après II-6-1, $= D(R_1 + R_2)$

D'autre part, $D'(R'_1) = \overset{E_{R_2} \Delta E_D}{\top} (D'(R_1))$ d'après II-6-2.

$= \overset{E_{R_2} \Delta E_D}{\top} (D(R_1))$ (puisque $E_{R_1} \lhd E_{R_1} \nabla E_{R_2}$)

de même $D'(R'_2) = \overset{E_{R_1} \Delta E_D}{\top} (D(R_2))$

$D'(R'_1) + D'(R'_2) = \overset{E_{D(R_2)}}{\top} (D(R_1)) + \overset{E_{D(R_1)}}{\top} (D(R_2))$

$= D(R_1) + D(R_2)$

Mais $D(R_1) + D(R_2)$ ayant $E_D \Delta (E_{R_1} \nabla E_{R_2})$ pour espace de définition,

$$D(D(R_1)+D(R_2)) = D'(D(R_1)+D(R_2))$$
$$= D'(D'(R'_1)+D'(R'_2))$$
$$= D'(R'_1+R'_2)$$
$$= D(R_1 + R_2)$$

8. TREILLIS DES DECOMPOSITIONS SIMPLES

Soit $D = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F]$ une décomposition simple.

Si $\mathbf{F} = \mathbf{F}^M$, on dit que D a une forme maximale et si $\mathbf{F} = \mathbf{F}^S$, on dit que D a une forme standardisée. Puisqu'il existe une bijection de l'ensemble des décompositions simples sur $\mathbb{R}_\Omega$ sur l'ensemble des projections cylindrées sur $\mathbf{R}_{E_\Omega}$ définie par : $\varphi(D) = \overset{E}{\top} \circ D$ et puisque toute décomposition cylindrée a une écriture maximale (ou standardisée) unique, toute décomposition simple a elle aussi une écriture maximale (ou standardisée) unique.

Nommons $\mathcal{S}_\Omega$ l'ensemble des décompositions simples sur $\mathbb{R}_\Omega$ et $\mathcal{C}_\Omega$ l'ensemble des décompositions cylindrées sur $\mathbb{R}_{E_\Omega}$.

Soient D_1 et D_2 éléments de $\mathcal{S}_\Omega$, et soient $\overset{E}{\top} \circ D_1 = C_1$ et $\overset{E}{\top} \circ D_2 = C_2$ leurs images dans $\mathcal{C}_\Omega$.

$$C_1 \leqslant C_2 \Leftrightarrow \forall R \in \mathbf{R}_{E_\Omega} : C_1(R) \subset C_2(R)$$
$$\Leftrightarrow \forall R \in \mathbb{R}_\Omega : C_1(\overset{E_\Omega}{\top}(R)) \subset C_2(\overset{E_\Omega}{\top}(R))$$
$$\Leftrightarrow \forall R \in \mathbf{R}_\Omega : \overset{E_\Omega}{\top} \circ D_1(\overset{E_\Omega}{\top}(R)) \subset \overset{E_\Omega}{\top} \circ D_2(\overset{E_\Omega}{\top}(R))$$

$$\Leftrightarrow \forall R \in R_{\Omega} : \overset{E_{\Omega}}{\top} \circ D_1(R) \subset \overset{E_{\Omega}}{\top} \circ D_2(R)$$

(cf. II-5-3.)

$$\Leftrightarrow \forall R \in R_{\Omega} : D_1(R) \leqslant^* D_2(R)$$

On peut définir sur $\mathcal{D}_{\Omega}$ un ordre isomorphe à celui défini sur $\mathcal{E}_{\Omega}$, en disant que, <u>par définition</u> :

$$D_1 \leqslant D_2 \Leftrightarrow \forall R \in \mathcal{R}_{\Omega} : D_1(R) \leqslant^* D_2(R)$$

Ayant déjà étudié l'ensemble ordonné ($\mathcal{E}_{\Omega}$, $\leqslant$), ayant établi la formule II-6-8 et ayant remarque que, si R_{F_1} est la relation reflet dans E de F_1, E_{D_2} p^o $D_2(R_{F_1})$ $\Leftrightarrow$ F^M F^M, nous pouvons énoncer le théorème :

<u>Théorème II</u> : Soit R_{F_1} la relation de F_1 dans E

Soient deux décompositions simples D_1 et D_2 ayant F_1 et F_2 pour ensemble de facteurs ;

$$D_1 \leqslant D_2 \Leftrightarrow F_2^M \subset F_1^M$$

$$\Leftrightarrow D_2 \circ D_1 = D_2$$

$$\Leftrightarrow [E_{D_2}]\ p^o \in D_2(R_{F_1})$$

L'ordonné ($\mathcal{D}_{\Omega}$, $\leqslant$) est isomorphe au treillis distributif libre engendré par un ensemble équipotent à Ω , privé de son élément maximum.

<u>Complément sur la relation reflet d'un ensemble de facteurs</u> :

Pour simplifier le discours, sauf avis contraire, on appellera relation-reflet d'un ensemble de facteurs $F \subset \mathcal{P}(\mathcal{E}_{\Omega})$ sa relation reflet dans E_{Ω} ; on la notera encore R_F. De plus, si F_S est l'ensemble de facteurs standardisé de la décomposition D, on pourra désigner par R_D la relation R_{F_S}.

9. ENSEMBLE DES DEPENDANCES SIMPLES

D_1 est moins fine que D_2, par définition, si pour toute relation $R \in \mathcal{R}_\Omega$: "R admet D_2" $\Rightarrow$ "R admet D_1". Cette relation définie sur $\mathcal{D}_\Omega$ est évidemment réflexive et transitive ; toutes les relations R admettent les décompositions à un facteur qui sont donc équivalentes dans le préordre de finesse ; nous appellerons ces décompositions, décompositions banales et leur classe d'équivalence dépendance banale. Nous appellerons dépendance simple une classe d'équivalence de $\mathcal{D}_\Omega$ dans le préordre de finesse. Nous allons montrer maintenant que toute dépendance simple non banale est un singleton. Pour cela nous allons d'abord énoncer 4 propriétés, qui présentent peut-être aussi un intérêt propre.

Proposition 1) Soit $D_1 = \underset{F \in F_1}{*} [F]$; si D_1 est non banale,

$\left[E_{D_1}\right](p^o) \in \left[E_{D_1}\right](R_{F_1})$ et pour toute relation

$R \in \mathcal{R}_\Omega$, si $\left[E_{D_1}\right](R_{F_1}) \subset \left[E_{D_1}\right](R)$ et si R admet D_1,

alors $\left[E_{D_1}\right](p^o) \in \left[E_{D_1}\right](R)$.

Cette proposition est une conséquence immédiate des définitions, mais méritait d'être énoncée pour faciliter les raisonnements ultérieurs.

Proposition 2) Si D_1 est une décomposition non banale moins fine que D_2, alors $E_{D_1} \lhd E_{D_2}$

En effet, soit F_1 l'ensemble des facteurs de D_1, supposons que E_{D_1} ne soit pas sous-espace de E_{D_2}. Alors, il existe une variable A telle que A var E_{D_1} et non A var E_{D_2}.

Construisons une relation R définie sur E_Ω en faisant l'union de R_{F_1} et de $\{p\} * D_2(R_{F_1})$, où p est un point de $E_\Omega \Delta \overline{E}_{D_2}$ tel que $coor_A(P) \neq coor_A(p^o)$; $R = R_{F_1} + \{p\} * D_2(R_{F_1})$

$$\left[E_{D_2}\right] R = \left[E_{D_2}\right] R_{F_1} + \left[E_{D_2}\right] D_2(R_{F_1})$$

$$= D_2(R_{F_1})$$

$$= D_2(R) \text{ ; R admet } D_2$$

Mais $R_{F_1} \subset R$ tandis que $\left[E_{D_1}\right] p^o \notin \left[E_{D_1}\right] (|p| * D_2(R_{f_1})$ puisque $coor_\Lambda(p^o) \neq coor_\Lambda(p)$; si D_1 est non banale $\left[E_{D_1}\right] p^o \notin \left[E_{D_1}\right] R$; R n'admet pas D_1. On voit que D_1 ne pourrait être moins fine que D_2.

Proposition 3) **D_1 est moins fine que D_2 si et seulement si**

$$D_1 \circ D_2 = \left[E_{D_1}\right] \circ D_2 \text{ et } E_{D_1} \lhd E_{D_2}$$

En effet - si $D_1 \circ D_2 = \left[E_{D_1}\right] \circ D_2$ alors, soit R une relation admettant D_2 ; alors $\left[E_{D_2}\right] (R) = D_2 (R)$;

si $E_{D_1} \lhd E_{D_2}$, $D_1 (R) = D_1(\left[E_{D_2}\right](R))$

Donc $D_1 (R) = D_1 \circ D_2(R)$

$$= \left[E_{D_1}\right](D_2(R)) = \left[E_{D_1}\right] (R)$$

Toute relation qui admet D_2 admet D_1 et D_1 est moins fine que D_2.

Réciproquement si D_1 est moins fine que D_2, $\forall R \in \mathcal{R}_\Omega$:

$D_1 \circ D_2 (R) = D_1 (D_2(R))$

$= \left[E_{D_1}\right] (D_2(R))$ puisque $D_2(R)$, admettant D_2, admet D_1.

$D_1 \circ D_2 = \left[E_{D_1}\right] \circ D_2$

Proposition 4) **Si $E_{D_1} = E_{D_2}$, alors :**

"D_1 moins fine que D_2" $\Leftrightarrow D_1 \leq D_2$

$$\Leftrightarrow D_2 \circ D_1 = D_2$$

$$\Leftrightarrow F_2^M \subset F_1^M$$

En effet, si D_1 est moins fine que D_2, l'ensemble des invariants de la restriction C_2 de D_2 à $R_{E_{D_2}}$ est inclus dans celui de la restriction C_1 de D_1 à $R_{E_{D_1}}$, alors $C_1 \leqslant C_2$ donc $D_1 \leqslant D_2$,

$D_2 \circ D_1 = D_2$ et $\mathbf{F}_2^M \subset \mathbf{F}_1^M$.

D'après ce qui précède, pour que deux décompositions non banales aient même finesse, il faut et il suffit que $E_{D_1} = E_{D_2}$, $D_1 \leqslant D_2$ et $D_2 \leqslant D_1$; donc :

<u>Proposition 5</u> : toute dépendance simple non banale est un singleton.

REMARQUE : la proposition 5 tendrait à faire confondre les notions de décomposition et de dépendance, mais la proposition ne sera plus vraie pour les dépendances généralisées.

10. <u>ORDRE DE FINESSE SUR L'ENSEMBLE DES DEPENDANCES SIMPLES</u>

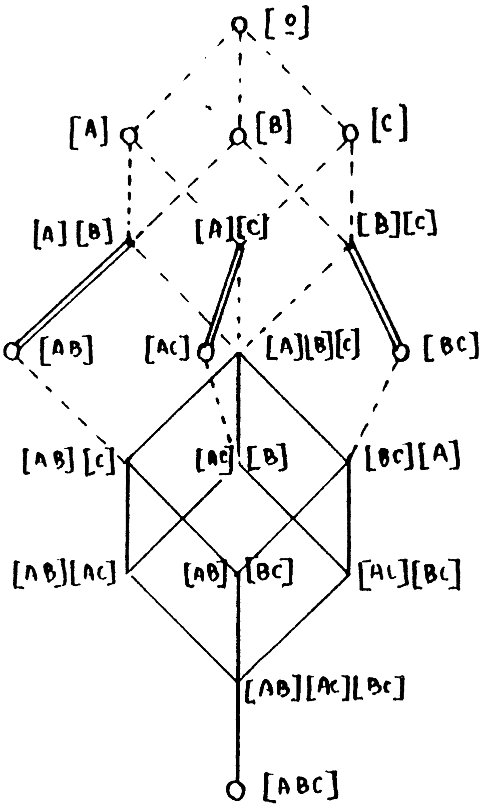
a) <u>Ordre de finesse</u>

<u>Définition</u>. On note $\{D\}^*$ l'ensemble des décompositions moins fines que D.

L'ordre induit sur l'ensemble des dépendances par le préordre de finesse est isomorphe à l'ordre d'inclusion sur l'ensemble des $\{D\}^*$.

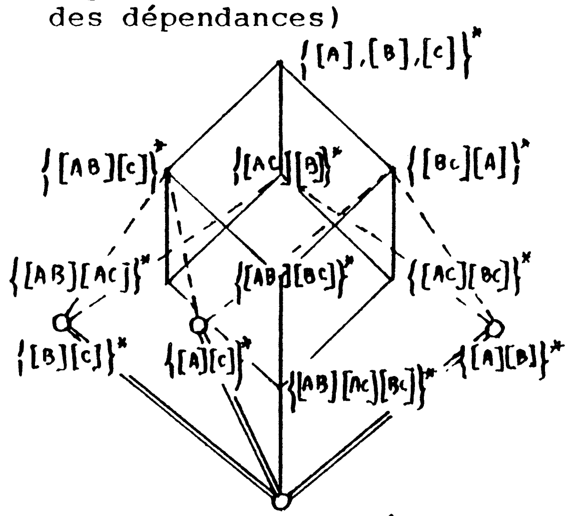
L'ensemble des $\{D\}^*$ ainsi ordonné n'est pas un treillis (sauf lorsque Ω n'a que deux ensembles de départ) ; mais si $(\mathcal{D}_E, \leqslant)$ est le sous-treillis de $(\mathcal{D}_\Omega, \leqslant)$ ayant pour éléments les décompositions ayant E pour espace de définition, on remarque que l'ensemble $\{\{D\}^* / D \in \mathcal{D}_E\}$ ordonné par inclusion est isomorphe à $(\mathcal{D}_E, \leqslant)$, qui lui-même est isomorphe au dual du treillis des recouvrements libres de l'ensemble des variables de E (cf.annexe 11). A titre d'exemple pour $E_\Omega = < ABC >$ comparons le treillis $(\mathcal{D}_\Omega, \leqslant)$ et l'ensemble ordonné $(\{\{D\}^* / D \in \mathcal{D}_\Omega\}, \subset)$:

Treillis ($\mathfrak{S}_{\Omega}$, $\leqslant$) :



Ordre d'inclusion des $\{D\}^*$

(isomorphe à l'ordre de finesse des dépendances)



Dépendance Banale

Le diagramme du sous-treillis ($\mathfrak{S}$< ABC >, $\leqslant$) est tracé en trait plein ; ceux des sous-treillis ($\mathfrak{S}$< AB > , $\leqslant$), ($\mathfrak{S}$< AC >, $\leqslant$) et ($\mathfrak{S}$< BC >, $\leqslant$) en traits doubles. Les décompositions banales sont marquées du signe o.

b) Enumération des éléments de $\{D\}^*$ où D est une décomposition simple

Le théorème ci-dessous permet de construire un algorithme effectif pour énumérer les éléments de D * :

Théorème III - Etant donné une décomposition simple $D = \underset{E \in F}{*}[E]$

- les éléments de $\mathfrak{S}_{E_D} \cap \{D\}^*$ sont les décompositions $\Delta = \underset{F \in F_1}{*}[F]$

obtenues à partir de D par alourdissement, c'est-à-dire telles que $F^M \subset F'^M$ et $E_\Delta = E_D$.

- les éléments de $\{D\}^* \cap \overline{\mathfrak{S}_{E_D}}$ sont les décompositions obtenues à partir des éléments Δ de $\mathfrak{S}_{E_D} \cap \{D\}^*$ par allègement, c'est-à-dire en remplaçant certains facteurs E de la forme standardisée de Δ par un de leur sous-espace E' de telle sorte que toute

variable de E figurant dans au moins un autre facteur de F^S soit aussi variable de E'.

<u>Exemple d'utilisation</u> : Soit $D = [AB][BC][BD][CD]$.

Les éléments de $\{D\}^*$ sont énumérés ci-dessous, on retourne évidemment après chaque alourdissement ou allègement, à la forme standardisée. On énumère les alourdissements possibles en énumérant les parties de $\mathcal{E}_\Omega - F^M$ qui sont des parties libres pour l'ordre $\lhd$; c'est dire que cette énumération est dans la plupart des cas impraticable parce que le cardinal de $\{D\}^*$ est beaucoup trop grand. Le théorème n'en présente pas moins l'intérêt de guider les recherches heuristiques de décompositions "intéressantes" figurant dans $\{D\}^*$.

Décompositions obtenues par alourdissement	Décompositions non banales obtenues par allègement
[AB][BC][BD][CD] (décomposition D Donnée) →	[BC][BD][CD]
[AB][BC][BD][CD][AC]	
[AB][BC][BD][CD][AD]	
[AB][BC][BD][CD][AC][AD]	
[BD][CD][ABC]	
[BD][CD][ABC][AD]	
[BC][[CD][ABD]	
[BC] [CD][ABD][AC]	
[CD][ABD][ABC]	
[AB][BC][BD] [ACD]	
[BD] [ACD][ABC]	
[BC][[ACD][ABD]	
[ACD][ABD][ABC]	
[AB] [BCD] →	[AB][BC]
	[AB][BD]
[AB] [BCD][AC] →	[AB][BC][AC]
[AB] [BCD][AD] →	[AB][BD][AD]
[AB] [BCD][AC][AD]	
[BCD][ABC]	
[BCD][ABC][AD]	
[BCD][ABD]	
[BCD][ABD][AC]	
[BCD][ABD][ABC]	
[AB] [BCD][ACD]	
[BCD][ACD][ABC]	
[BCD][ACD][ABD]	
[BCD][ACD][ABD][ABC]	
[ABCD] (banale)	

<u>Démonstration</u> : d'après la proposition 4 du 9., nous savons déjà que l'ensemble $\mathcal{D}_{E_D} \cap \{D\}^*$ des décompositions Δ de $\{D\}^*$ telles que $E_\Delta = E_D$ sont celles obtenues par alourdissement à partir de D.

- Soit Δ_2 une décomposition obtenue par allègement d'une décomposition $\Delta_1 \in \mathcal{O}_{E_D} \cap \{D\}^*$

soit $\mathbf{F}_1$ un ensemble de facteurs de Δ_1

$$\Delta_2 = \underset{F \in \mathbf{F}_1}{*} [F \Delta E_{\Delta_2}]$$

$$= \Delta_1 \circ [E_{\Delta_2}]$$

$$= [E_{\Delta_2}] \circ \Delta_1 \quad \text{(d'après II-6-6)}$$

$$\Delta_2 \circ \Delta_1 = [E_{\Delta_2}] \circ \Delta_1 \quad (\text{car } \Delta_1 \text{ est idempotente}) \;;$$

Δ_2 est moins fine que Δ_1, donc moins fine que D (proposition 3 du 9.).

- Réciproquement, soit $\Delta_2 \in \{D\}^* - \mathcal{O}_{E_D}$; on sait (proposition 2 du 9.) que $E_{\Delta_2} \lhd E_D$

Nous allons montrer qu'il existe une décomposition Δ_1 dans $\{D\}^* \cap \mathcal{O}_{E_D}$ telle que Δ_2 soit obtenue par allègement de Δ_1.

Nous allons suivre la démonstration sur un exemple.

Posons $D = \underset{E \in \mathbf{F}^S}{*} [E]$ et $\Delta_2 = \underset{F \in \mathbf{F}_2^S}{*} [F]$

Soit $R_{\mathbf{F}_2}$ la relation reflet dans E_D de l'ensemble standardisé de facteurs de Δ_2. Si $q \in R_{\mathbf{F}_2^S}$, nous noterons F_q le facteur dont q est le reflet, c'est-à-dire le sous-espace de E_D dont les variables sont les variables V telles que $\text{coor}_V q = \text{coor}_V p^o$.

Puisque $D(R_{\mathbf{F}_2^S})$ admet D et que Δ_2 est moins fine que D, $D(R_{\mathbf{F}_2^S})$ admet Δ_2. Donc $[E_{\Delta_2}](p^o) \in [E_{\Delta_2}] \circ D(R_{\mathbf{F}_2^S})$ d'après la proposition 1 du 9.).

<u>Exemple</u>

$D = [ABD][ABG][BDG][BCF]$

$E_D = \langle ABCDFG \rangle$

$\Delta_2 = [ABC][AF][BCF]$

$E_{\Delta_2} = \langle A\ B\ C\ F \rangle$

$R_{\mathbf{F}_2} = \{ \{a^o b^o c^o d^1 f^1 g^1\}, \{a^o b^2 c^2 d^2 f^o g^2\}, \{a^3 b^o c^o d^3 f^o g^3\} \}$

Si $q = \{a^o\ b^2\ c^2\ d^2\ f^o g^2\}$

$F_q = \langle A\ F \rangle$

Nous nommerons q',q",q'" les 3 points de $R_{\mathbf{F}_2^S}$ dans l'ordre où ils sont cités.

<table>
<tr>
<td>Alors il existe une application f de F^S dans $R_{F_2^S}$ telle que
$\underset{E\in F^S}{*}\,[E]\,(\,f(E)\,)$ se projette sur
E_{Δ_2} suivant $[E_{\Delta_2}]\,(\,p^o\,)$</td>
<td>

F^S	f	$R_{F_2^S}$
$\langle A\ B\ D\rangle$	•	$a^ob^oc^od^1f^1g^1$
$\langle A\ B\ G\rangle$	•	$a^ob^2c^2d^2f^og^2$
$\langle B\ D\ G\rangle$	•	
$\langle B\ C\ F\rangle$	•	$a^3b^oc^od^3f^og^3$

$\langle A\ B\ D\rangle \mapsto a^ob^oc^od^1f^1g^1$
$\langle A\ B\ G\rangle \mapsto a^ob^oc^od^1f^1g^1$
$\langle B\ D\ G\rangle \mapsto a^ob^oc^od^1f^1g^1$
$\langle B\ C\ F\rangle \mapsto a^3b^oc^od^3f^og^3$
$\underset{E\in F^S}{*}[E](\,f(E)\,) = \{a^ob^oc^od^1f^og^1\}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Pour chaque point $q \in f\,(F^S)$
posons $E_q = \underset{E/f(E)=q}{\bigtriangledown} E$
$\underset{E\in F_S}{*}\,[E]\,(\,f(E)\,) = \underset{q\in f(F^S)}{*}\,[E_q](\,q\,)$</td>
<td>$E_{q'} = \langle A\ B\ D\ G\rangle$
$E_{q''} = \langle B\ C\ F\rangle$</td>
</tr>
<tr>
<td>$[E_{\Delta_2}](\,p^o\,) \in [E_{\Delta_2}](\,\underset{q\in f(F^S)}{*}\,[E_q](\{q\}))$
donc $\forall\, q \in f(F^S) : E_q\,\Delta\,E_{\Delta_2} \lhd F_q$</td>
<td>$E_{q'}\,\Delta\,E_{\Delta_2} = \langle AB\rangle \lhd \langle ABC\rangle$
$E_{q''}\,\Delta\,E_2 = \langle BCF\rangle = \langle BCF\rangle$</td>
</tr>
<tr>
<td>Pour tout $q \in R_{F_2^S}$, posons
$F'_q = \begin{cases} \text{si } q \in f(F^S), \text{ alors } E_q \bigtriangledown F_q \\ \text{sinon } F_q \end{cases}$</td>
<td>$F'_{q'} = \langle A\ B\ C\ D\ G\rangle$
$F'_{q''} = \langle A\ F\rangle$
$F'_{q'''} = \langle B\ C\ F\rangle$</td>
</tr>
<tr>
<td>Posons $\Delta_1 = \underset{q\in R_{F_2^S}}{*}\,[F'_q]$
Pour tout facteur E de D, si q=f(E), $E \lhd F'_q$, donc Δ_1 est obtenue par alourdissement de D.</td>
<td>$\Delta_1 = [ABCDG][AF][BCF]$</td>
</tr>
</table>

Montrons que, si pour un facteur F'_{q_i} de Δ_1, il existe une variable V de F'_{q_i} qui n'est pas variable de F_{q_i}, alors V n'est variable d'aucun autre facteur F'_q de Δ_1.

Soit V var $F'_{q_i} \Delta \overline{F_{q_i}}$; si une telle variable existe, c'est que $q_i \in f(F^S)$; alors $E_{q_i} \Delta E_{\Delta_2}$ F_{q_i} et V n'est pas variable de E_{Δ_2}.	D est variable de $F'_{q'} \Delta \overline{F}_{q'}$ D n'est pas variable de E_{Δ_2}
V n'est variable d'aucun facteur $F_q \in F_2^s$; donc les coordonnées sur V des divers points de R_{F_2} sont toutes distinctes ; il faut alors que V ne soit variable que d'un seul espace $E_q \in f(F^S)$ puisque $\underset{q \in f(F^S)}{*} \left[E_q^q\right](q)$ n'est pas vide. On en déduit que V n'est variable que du facteur F'_{q_i} de Δ_1 dans l'écriture choisie et que sa suppression est un allègement de Δ_1.	effectivement dans R_{F_2}, D prend les valeurs d_1, d_2, d_3 D n'est variable que de $E_{q'}$ et non de $E_{q'}$"

On peut faire un tel allègement pour toute variable V de E_{Δ_1} qui n'est pas variable de E_{Δ_2} ; Δ_2 s'obtient par allègement de Δ_1.

11. REPRESENTATION D'UNE DECOMPOSITION SIMPLE PAR UN RESEAU ET TYPOLOGIE DES DECOMPOSITIONS SIMPLES.

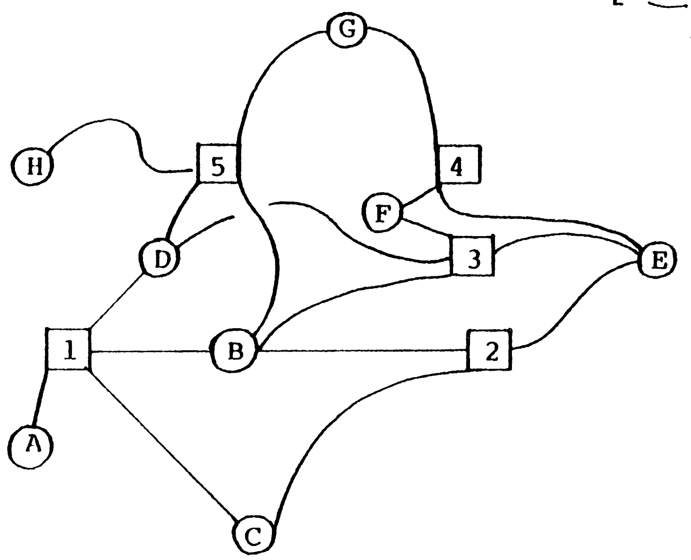
Soit une décomposition simple D. On peut lui associer un réseau de noeuds et d'étoiles en affectant à chaque facteur de sa forme standardisée un noeud, et à chaque variable de son espace de définition une étoile, puis en joignant chaque noeud aux étoiles représentant les variables du facteur auquel il est affecté.
Nous appellerons ce réseau, réseau représentatif de D. Cette représentation permet de visualiser la structure d'une décomposition simple ; elle permet aussi par là de définir plus simplement certaines notions utiles.

a) Représentation graphique et allègement

On dit qu'une variable A est marginale pour la décomposition D si elle ne figure que dans un seul des facteurs de la forme standardisée de D. La représentation d'une telle variable est une étoile située à une extrémité du réseau. Alors la décomposition obtenue en allégeant D de la variable A est élément de $\{D\}^*$. Les variables non marginales de E_D sont dites centrales. L'espace qu'elles engendrent est le centre de la décomposition.

Les variables centrales qui sont marginales dans une décomposition non banale obtenue à partir de E_D par alourdissement sônt dites marginalisables ; on les reconnaît à ce que l'union des facteurs dont elles sont variables est un sous-espace strict de E_D.

Exemple de représentation : $D = \underbrace{[ABCD]}_{1}\underbrace{[BCE]}_{2}\underbrace{[BDEF]}_{3}\underbrace{[EFG]}_{4}\underbrace{[BDGH]}_{5}$



A et H sont marginales. Les autres variables sont centrales. C, E, F, G sont marginalisables. B et D ne le sont pas.

b) Connexité

On dit qu'une décomposition D est connexe si le réseau qui la représente est connexe.

Si D est connexe et si deux relations déconnectées R_1 et R_2 admettent D, leur union admet D.

On appelle sous-décomposition connexe d'une décomposition D toute décomposition représentée par un des sous-réseaux connexes maximaux du réseau représentant D.

On appelle classe connexe de l'ensemble des variables pour la décomposition D l'ensemble des variables de l'espace de définition d'une sous-décomposition connexe de D. L'ensemble des classes connexes de variables pour D est la partition de Ω_D en classes connexes définie par D, "Ω_D étant l'ensemble des éléments de Ω qui sont variables de E_D".

Une décomposition dont chaque sous-décomposition connexe n'a qu'un seul facteur sous forme standardisée, est une décomposition dont tous les facteurs standards sont disjoints. Nous l'appellerons décomposition en <u>produit direct</u>, ou plus rapidement produit direct. L'ensemble des décompositions en produit direct, défini sur un espace donné E est un sous U-demi-treillis de $\mathcal{S}_E$; c'est un treillis isomorphe au treillis des partitions de l'ensemble des variables de E. Si $\mathcal{S}'$ est l'ensemble des sousdécompositions connexes d'une décomposition D, alors $\underset{\Delta \in \mathcal{S}'}{*} \left[E_\Delta\right]$ est la plus fine des décompositions en produit direct qui sont moins fines que D. Si D est connexe, $\underset{\Delta \in \mathcal{S}'}{*} \left[E_\Delta\right]$ se réduit à une décomposition banale.

c) <u>Déconnection d'une décomposition D par un sous-espace de E_D</u>

<u>Définitions</u> : Etant donné une décomposition $D = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} \left[F\right]$ et un sous-espace E de E_D, on appelle <u>coupe</u> de D par E la décomposition

$${}^{E)}D = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} \left[F \Delta \bar{E}\right]$$; son espace de définition est $E_D \Delta \bar{E}$;

$${}^{E)}D = D \circ \underset{\bar{E}}{\perp}.$$

Etant donné une relation R et un point p, on appelle <u>coupe</u> de R <u>par</u> p la relation notée ${}^{P)}R$ définie sur $E_R \Delta \bar{E}_p$ par :

$${}^{P)}R = \underset{E_R \Delta \bar{E}_p}{\perp} (\{p\} * R)$$

Cette coupe est non vide si et seulement si $\left[E_R\right] p \in \left[E_P\right] R$

On dit qu'une décomposition connexe D est <u>déconnectable</u> par un sous-espace E de E_D si la coupe de D par E_D est non connexe. On dit qu'un espace F est un <u>connecteur</u> de D si D est déconnectable par F et si F est égal à un des facteurs standards de D.

<u>Remarque</u> : lorsque D est mise sous forme standard, sa coupe ${}^{E)}D$ par un sous-espace E de E_D dont l'écriture est obtenue en barrant les variables de E dans les facteurs de D ne se présente pas en général sous forme standard ; dans tout algorithme utilisant

de telles coupes, il faut donc introduire un sous-programme de standardisation.

Soit E un sous-espace de E_D et p un point défini sur un sous-espace de E ; si $[E_R]\,p \not\subset [E_p]\,R$, ${}^{p)}R$ est vide et admet donc toutes les décompositions simples ; supposons que $[E_R]\,p \in [E_p]R$;

Alors $({}^{E)}D)({}^{p)}R) \subset {}^{p)}D(R)$

Si R admet D, alors

$$
\begin{aligned}
{}^{p)}D(R) &= {}^{p)}[E_D]R \\
&= [E_D]\,({}^{p)}R) \quad \text{puisque } E_p \lhd E_D
\end{aligned}
$$

Donc, si une relation R admet D, si $E_p \lhd E$ et $E \lhd E_D$, alors ${}^{p)}R$ admet ${}^{E)}D$.

De ce qui précède, on déduit aisément la proposition 6.

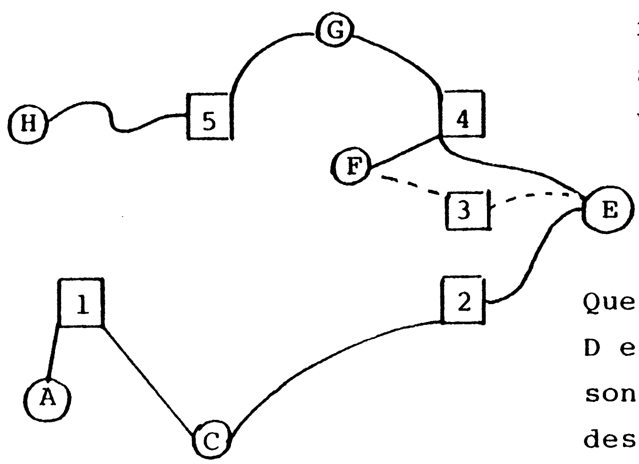
Proposition 6

Soit D une décomposition simple connexe et un sous-espace E de E_D ; les 5 propositions ci-dessous sont équivalentes.

1. **D est déconnectable par E (autrement-dit ${}^{E)}D$ n'est pas connexe)**
2. **Il existe une décomposition non connexe D' ayant $E_D \Delta \overline{E}$ pour espace de définition et telle que pour toute relation R admettant D, et pour tout point $p \in E$, ${}^{p)}R$ admette D'.**
3. **Il existe dans $\{D\}^*$ une décomposition D_1 non banale dont toutes les variables centrales sont variables de E.**
4. **Il existe dans $\{D\}^*$ une décomposition D_1 telle que ${}^{E)}D_1$ soit un produit direct.**
5. **Il existe une décomposition en produit direct D_1 ayant $E_D \Delta \overline{E}$ pour espace de définition et telle que pour toute relation R admettant D et pour tout point $p \in E$, ${}^{p)}R$ admette D_1.**
6. **Enfin, si D est déconnectable par E, toute variable non marginalisable de D est variable de E.**

On peut imaginer facilement quelques algorithmes peu performants pour énumérer les espaces qui déconnectent D et les coupes correspondantes. Je préfère indiquer le procédé heuristique qui consiste à chercher quels espaces déconnectent la coupe de D par l'espace engendré par les variables non marginalisables ; on utilise pour cela la représentation graphique de D sur laquelle on a supprimé les étoiles des variables non marginalisables et éventuellement les noeuds des facteurs devenus non standards dans la coupe. Les solutions intéressantes apparaissent souvent au 1er coup d'oeil.

<u>Exemple</u> : reprenons l'exemple de a)
Le réseau obtenu après suppression de B et D variables non marginalisables, est tracé ci-dessous ; 3 peut être supprimé par standardisation.



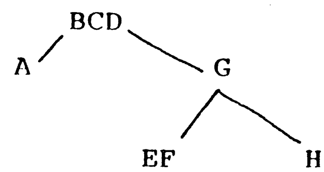
On voit que pour obtenir un réseau non connexe, il faut supprimer au moins une des variables ci-dessous :
C, E, G.

Quelques espaces déconnectant D et les coupes correspondantes sont données par le tableau ci-dessous :

Espaces E_1 tels que D soit déconnectable par E_1	$E_1)D$ sous forme standardisée
$\langle B\ C\ D \rangle$	[A][EFG][GH]
$\langle B\ D\ E \rangle$	[AC][FG][GH]
$\langle B\ D\ G \rangle$	[AC][CE][EF][H]
$\langle B\ C\ D\ G \rangle$	[A][EF][H]
$\langle B\ C\ E\ G \rangle$	[AC][F][H]

Dans chaque coupe, si elle n'est pas produit direct, chaque sous-décomposition connexe peut être traitée de la même façon, ce qui suggère une organisation de données arborescente :
exemple : $[EFG][GH]$ est déconnectable par G

on obtient l'organisation :



12. DECOMPOSITIONS ARBORESCENTES ET DECOMPOSITION SANS FACTEURS GENANTS

a) Types de facteurs

Etant donné un ensemble non vide de facteurs $\mathbf{F}$ on dit que $F \in \mathbf{F}$ est une branche de $\mathbf{F}$ ou bien si $\mathbf{F}$ est un singleton et F son unique élément ou bien si $\mathbf{F}$ a plusieurs éléments et si l'espace engendré par les variables centrales de F est sous-espace d'au moins un autre facteur de $\mathbf{F}$; on appelle branche d'une décomposition simple non banale, toute branche de l'ensemble de facteurs de sa forme standard. On remarque que si F est une branche de D, alors pour tout sous-espace E de E_D, $F \wedge E$ est ou bien éliminé par standardisation de l'écriture de $D_O[E]$ ou bien branche de $D_O[E]$. On appelle attache d'une branche l'espace engendré par ses variables centrales. Etant donné une branche B, pour tout facteur F surespace de l'attache de B, on dit que B se greffe sur F.

Une décomposition en n facteurs dans laquelle tout facteur standard est un surespace du centre, a été appelée embranchement (J.Boittiaux, contrat DGRST 69) ou plus récemment, dépendance multivaluée.

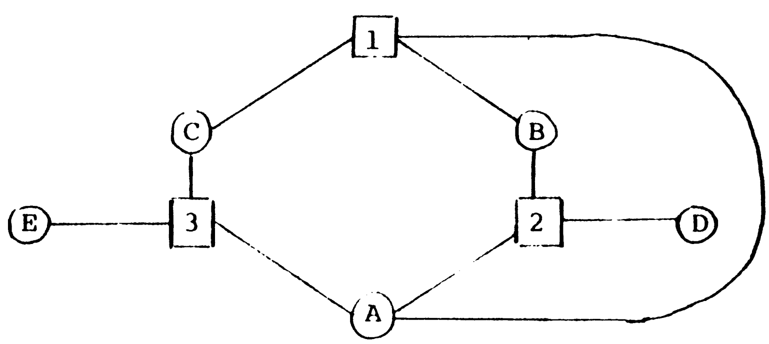
Dans un embranchement, tous les facteurs sont des branches ; si de plus le nombre des facteurs est supérieur ou égal à 3, ce sont à la fois des branches et des connecteurs. L'attache commune aux branches de l'embranchement s'appelle racine de l'embranchement. Pour qu'un facteur F d'une décomposition D non banale soit une branche ou un connecteur de D, il faut et il suffit qu'il existe un embranchement égal à D ou obtenu par alourdissement de D dont la racine soit sous-espace de F. Soit une décomposition $D = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F]$ mise sous forme standardisée, et soit $F_O \in \mathbf{F}$. On dit que F_O est un <u>facteur gênant</u> de D si F_O n'est ni branche ni connecteur de D, ou s'il existe un sous-espace E de E_D tel que $F_O \Delta E$ ne soit pas éliminé par standardisation de $D_O [E] = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [E \Delta F]$ et ne soit ni branche ni connecteur de $D_O [E]$.

<u>Remarques</u> : 1. Si B est une branche de D, pour tout sous-espace E de E_D, $B \Delta E$ est soit éliminé par standardisation, soit branche de $D_O [E]$; une branche de D ne peut donc pas être un facteur gênant de D.

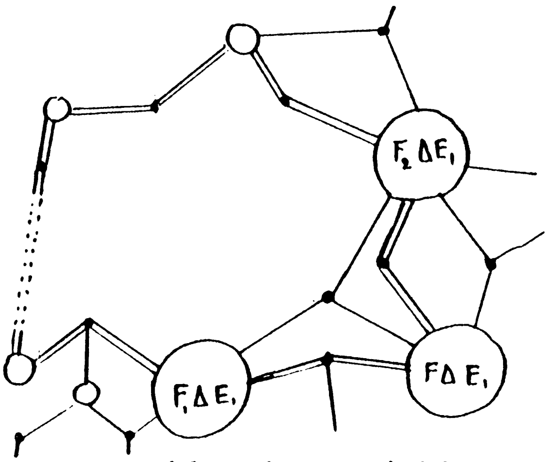
2. Si $F \Delta E$ est facteur gênant de $D_O [E]$, alors F est facteur gênant de D ; donc si D n'a pas de facteurs gênants, $D_O [E]$ n'en a pas non plus.

<u>Proposition 7</u> : Soit $D = \underset{F' \in \mathbf{F}}{*} [F']$ une décomposition mise sous forme standardisée et $F \in \mathbf{F}$ un de ses facteurs. F est un facteur gênant de D si et seulement si il existe un sous-espace E de E_D tel que $F \Delta E$ ait deux variables et que l'ensemble standardisé de facteurs de $D_O [E]$ soit un ensemble d'au moins trois facteurs, tous à deux variables dont le réseau représentatif soit un circuit où alternent variables et facteurs.

<u>Attention</u> : il ne suffit pas qu'un circuit comportant au moins 3 facteurs existe : exemple : $B = [\underbrace{ABC}_{1}][\underbrace{ABD}_{2}][\underbrace{ACE}_{3}]$ n'a pas de facteur gênant. On voit que $D_O [ABC]$ est banale et que son réseau n'a pas de circuit.



<u>Démonstration</u> : Si un tel espace E existe, dans $D_0[E]$ les facteurs ne sont ni branches ni connecteurs.
Réciproquement, si F est gênant, alors il existe un sous-espace E_1 tel que dans la forme standardisée de $D_0[E_1]$, $F \Delta E_1$ figure et ne soit ni connecteur ni branche (donc en particulier, pas isolé).
Pour que $F \Delta E_1$ ne soient pas branche, il faut qu'il existe deux facteurs F_1 et F_2 tels que $F \Delta F_1 \Delta \bar{F}_2 \Delta E_1 = \underline{0}$ et $F \Delta \bar{F}_1 \Delta F_2 \Delta E_1 = \underline{0}$, mais pour que $F \Delta E_1$ ne soit pas connecteur

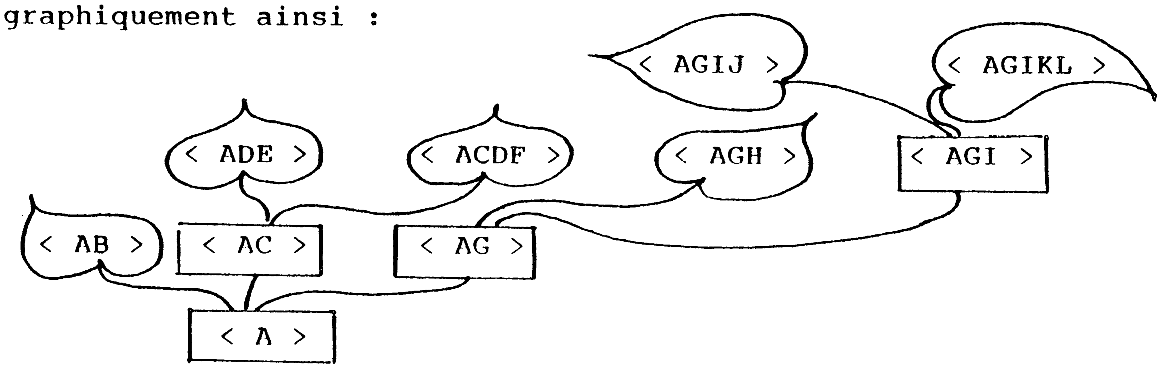


de $D_0[E_1]$, il faut que $F_1 \Delta E_1$ et $F_2 \Delta E_1$ soient reliés par une suite de variables ne figurant pas dans $F \Delta E_1$ et de facteurs.

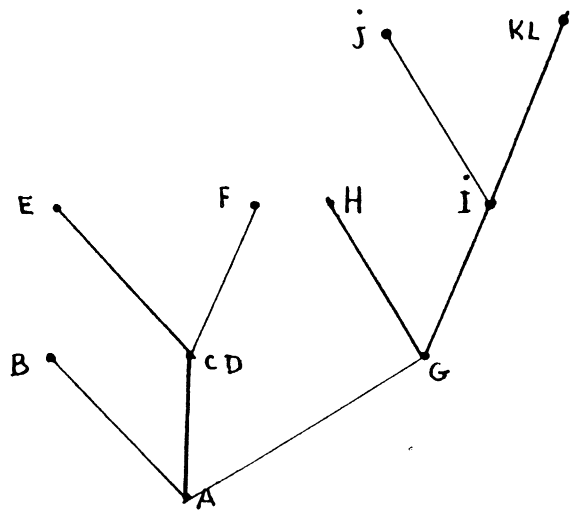
En prenant pour variables de E un ensemble de variables minimal réalisant cette jonction et une variable dans chacun des espaces $F \Delta F_1 \Delta \bar{F}_2 \Delta E_1$ et $F \Delta \bar{F}_1 \Delta F_2 \Delta E_1$, $D_0[E]$ a pour réseau représentatif un circuit de la forme annoncée.

b) <u>Décompositions arborescentes</u>
Soit **F** l'ensemble de facteurs d'une décomposition D mise sous forme standard. Soit $\mathbf{F}^{\Delta}$ la clôture de **F** par l'opération Δ sur les sous-espaces. Si $(\mathbf{F}^{\Delta}, \lhd)$ est une arborescence, on dit que D est une <u>décomposition arborescente</u>.

<u>Exemple</u> : [AB][ACDE][ACDF][AGH][AGIJ][AGIKL] est une décomposition arborescente. L'arborescence $(\mathbf{F}^{\Delta}, \Delta)$ peut être représentée graphiquement ainsi :



ou plus simplement, en lisant le nom des sous-espaces le long des branches à partir de la racine : cette deuxième représentation a de plus l'avantage de mettre en évidence les variables marginales représentées à l'emplacement des feuilles.



De telles décompositions sont intéressantes pour l'informatique puisqu'on peut les réaliser en rapprochant les projections de la relation traitée sans avoir à les retrier si chaque projection est triée successivement sur les valeurs des variables dans l'ordre où elles se présentent à partir de la racine sur la branche de l'arborescence correspondant à la projection considérée.
Le plus petit élément de $\mathbf{F}$ est appelé <u>racine</u> de la décomposition arborescente. Si cette racine est <u>0</u> la décomposition n'est pas connexe. On remarquera que tout embranchement est une décomposition arborescente et que les deux définitions de la racine d'un embranchement sont équivalentes.
Dans une décomposition arborescente D tout facteur standard est branche de D : en effet, soit $\mathbf{F}$ l'ensemble standardisé de ses facteurs, soit $F \in \mathbf{F}$. L'ensemble des espaces $F \Delta F_i$ pour $F_i \in \mathbf{F} - \{F\}$ est un ensemble de prédécesseurs de F dans $(\mathbf{F}^{\Delta}, \lhd)$; il est donc totalement ordonné et F se greffe dans tout facteur F_i assurant à $F \Delta F_i$ sa valeur maximum qui est l'attache de F.

On peut associer à chaque facteur F d'une décomposition arborescente D un embranchement ayant pour branches F et l'union des autres facteurs. Pour qu'une relation admette D, il faut et il suffit qu'elle admette l'ensemble de ces embranchements.
Enfin, la façon la plus simple de reconnaître une décomposition arborescente est sans doute d'utiliser la définition, ce qui revient à pratiquer l'algorithme ci-dessous :

<u>calcul de la valeur logique</u> de "D est arborescente"

<u>Commentaire</u> : D est écrite sous forme standardisée ayant $\mathbf{F}$ pour ensemble de facteurs ;

$$I \leftarrow \underset{F \in \mathbf{F}}{\triangle} F$$

<u>Si</u> D est banale
  Alors D est arborescente
  <u>Sinon</u> <u>si</u> $^{I)}D$ est connexe
    <u>alors</u> D n'est pas arborescente
    <u>sinon</u> Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des sous-décompositions connexes de $^{I)}D$ que l'on écrit sous forme standard.
    $\boxed{\text{valeur logique de "D est arborescente"}} \leftarrow \boxed{\text{valeur logique de : } \forall\, D' \in \mathcal{C} : \text{"D' est arborescente".}}$
  <u>finsi</u>
<u>finsi</u>

Exemple : $D = [AB][ACDE][ACDF][AGH][AGIJ][AGIKL]$

$I = \langle A \rangle$

sous-décompositions connexes de $^{\langle A \rangle)}D$:

$$\begin{cases} D_1 = [B] & \text{banale} \\ D_2 = [CDE][CDF] & I_2 = \langle CD \rangle \\ D_3 = [GH][GIJ][GIKL] & I_3 = \langle G \rangle \end{cases}$$

$^{I_2)}D_2 = [E][F]$ - décompositions connexes: $[E]$banale
$[F]$banale

D_2 est arborescente

$^{I_3)}D_3 = [H][IJ][IKL]$

ayant pour sous-décompositions connexes :

$$\begin{cases} D_{31} = [H] \text{ Banale} \\ D_{32} = [IJ]\,[IKL] \;;\; I_{32} = \langle I \rangle \;; \end{cases}$$

$^{I_{32}})D_{32} = [J]\,[KL]$ ayant pour sous-décompositions connexes :

$[J]$ banale

$[KL]$ banale

D_{32} est arborescente ;

D_3 est arborescente ;

D est arborescente ;

c) <u>Décompositions sans facteurs gênants</u>

<u>Proposition 8</u> : Soit $D = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F]$ une décomposition écrite sous forme standardisée ; soit C son centre ; pour que D n'ait pas de facteurs gênants, il faut et il suffit que D ou bien soit égale à $\underline{0}$, ou bien ait des variables marginales et que D_0 C mise sous forme standardisée n'ait pas de facteurs gênants.

D'où l'algorithme pratique : tant que cela est possible, je barre les variables marginales de D, je standardise l'écriture de décomposition ainsi obtenue et je recommence ; si je m'arrête parce que la décomposition standardisée obtenue, bien qu'ayant des facteurs différents de $\underline{0}$ n'a plus de marginales, alors D a des facteurs gênants ; si je m'arrête parce qu'il n'y a plus que le facteur $\underline{0}$, D n'a pas de facteurs gênants.

<u>Exemple</u> :

$D = [ABC]\,[BCE]\,[ADFK]\,[BCG]\,[DHK]\,[AIK]\,[IJK]$

$D_1 = [ABC]\,\cancel{[BC]}\,[ADK]\,\cancel{[BC]}\,\cancel{[DK]}\,[AIK]\,\cancel{[IK]}$

$D_2 = [ABC] \qquad [AK] \qquad \cancel{[AK]}$

$D_3 = [A] \qquad \cancel{[A]}$

$D_4 = \underline{0}$

D n'a pas de facteurs gênants.

Démonstration

Soit D une décomposition sans facteurs gênants, écrite sous forme standardisée et de centre D. Par définition d'un facteur gênant, $D_o[C]$ est sans facteur gênant. Montrons que D a des marginales. Si elle n'a que 1 ou 2 facteurs et si elle est distincte de $\underline{0}$, elle a évidemment des variables marginales.

Supposons que toute décomposition standardisée sans facteurs gênants et possédant au plus n-1 facteurs ait des marginales.

Alors soit D_n une décomposition sans facteurs gênants à n facteurs. Soit F_n un facteur particulier de D_n. Si c'est une branche, il a des variables marginales ; si c'est un connecteur, alors ${}^{F_n)}D$ n'est pas connexe. Soit D_1 une sous-décomposition connexe de ${}^{F_n)}D$; $D_1 = D_o[E_{D_1}]$; donc D_1 n'a pas de facteur gênant. Elle a moins de n facteurs ; elle a donc des variables marginales qui ne peuvent qu'être marginales de D.

Si $D \neq \underline{0}$, D a donc des marginales.

Réciproquement

Soit D une décomposition standardisée ayant des variables marginales et telle que $D_o[C]$ soit sans facteurs gênants, C étant le centre de D.

Si D avait un facteur gênant, il existerait un espace E tel que le réseau représentatif de $D_o[E]$ soit un circuit d'au moins trois facteurs de deux variables ; mais puisque E ne pourrait qu'être inclus dans C, on aurait $D_o[C] \circ [E] = D_o[E]$ et le réseau représentatif de $D_o[C] \circ [E]$ serait aussi un circuit sur lequel figurent au moins 3 facteurs, si bien que $D_o[C]$ aurait des facteurs gênants, ce qui est contraire à l'hypothèse.

d) Conclusions

Nous prouverons au chapitre IV que les décompositions sans facteurs gênants sont les décompositions à 0, 1 ou 2 facteurs, et les décompositions D admises par toute relation qui admet tout embranchement obtenu par alourdissement de D et que les décompositions ayant au moins un connecteur, sont les décompositions D admises par toute relation qui admet toute décomposition distincte de D obtenue par alourdissement de D.

C H A P I T R E   III

OPERATEURS DE DECOMPOSITION GENERALISEE SUR UN ENSEMBLE DE RELATIONS EXTERNES

CHAPITRE III

OPERATEURS DE DECOMPOSITION GENERALISEE SUR UN ENSEMBLE DE RELATIONS EXTERNES

1. DEFINITION ET PROPRIETES SIMPLES

a) Présentation : l'ensemble $\mathcal{D}_\Omega$ des décompositions simples n'est pas stable par composition des opérateurs, si bien que pour en faire une étude un peu plus approfondie, il faut le plonger dans un ensemble d'opérateurs stable par composition. L'ensemble que j'ai choisi et appelé ensemble des décompositions généralisées n'est pas le plus petit ensemble d'opérateurs incluant $\mathcal{D}_\Omega$ et stable par composition. Ainsi, la décomposition généralisée que nous noterons $\perp [AB_1]\,[A_1B_1]\,[A_1B]$ ne peut pas être obtenue en composant des décompositions simples. Malheureusement, l'étude des décompositions généralisées est rendue difficile par deux particularités : d'une part, la grande variété d'écritures représentant le même opérateur ; d'autre part, le fait que contrairement aux décompositions simples, les décompositions généralisées ne sont pas idempotentes.

b) Définitions et notations

Soit E un espace semblable à un sous-espace de E_Ω

$[E]$ désigne alors une recopie projection ordinaire ; sa restriction à $\mathcal{R}_\Omega$ est une application croissante de $\mathcal{R}_\Omega$ dans $\mathcal{R}$ si l'on prend sur $\mathcal{R}_\Omega$ et sur $\mathcal{R}$ l'ordre partiel $\subset$.

Soit **F** un ensemble d'espaces E, chacun semblable à un sousespace de E_Ω .

On désigne par $\underset{E \in \mathbf{F}}{*}[E]$ l'application de $\mathcal{R}_\Omega$ dans $\mathcal{R}$ qui, à toute relation externe $R \in \mathcal{R}_\Omega$ fait correspondre $\underset{E \in \mathbf{F}}{*}[E]\,R$, relation qui, en général, n'est plus externe. On remarquera que $\underset{E \in \mathbf{F}}{*}[E]$ est encore une application croissante de $\mathcal{R}_\Omega$ dans $\mathcal{R}$.

Définition - Etant donné un ensemble **F** d'espaces semblables à des sous-espaces de E_Ω , on appelle décomposition généralisée admettant **F** pour ensemble de facteurs, l'application de $\mathcal{R}_\Omega$ dans $\mathcal{R}_\Omega$ définie par $\perp \circ \left(\underset{E \in \mathbf{F}}{*}[E] \right)$. Nous noterons cette décomposition $\underset{E \in \mathbf{F}}{\perp}[E]$.

Rappelons que $\perp$ désigne la projection $\underset{E_\Omega}{\perp} = \left[E_\Omega \xrightarrow{Id} E_\Omega \right]$

Lorsque **F** est donné en extension, $\underset{E \in F}{\ast} [E]$ et $\underset{E \in F}{\perp} [E]$ peuvent être nommés respectivement par la suite des symboles $[E]$ pour $E \in F$, et par cette suite précédée de $\perp$.

Exemple : si $F = \{ < ABD_1 >, < BC_1D_1 >, < ACD_2 >, < BC_1D_2 > \}$, on prend les notations :

$$\underset{E \in F}{\ast} [E] = [ABD_1][BC_1D_1][ACD_2][BC_1D_2]$$

$$\underset{E \in F}{\perp} [E] = \perp [ABD_1][BC_1D_1][ACD_2][BC_1D_2]$$

Nous verrons que deux ensembles de facteurs distincts peuvent donner la même décomposition généralisée.

On appelle <u>espace image</u> de la décomposition généralisée $D = \underset{E \in F}{\perp} [E]$ et on note E_{ID} le sous-espace de E défini par

$$E_{ID} = \underset{E \in F}{\nabla} (\perp E)$$

$$= \perp (\underset{E \in F}{\nabla} E)$$

L'espace E_{ID} est l'espace de définition de D(R) si R est une relation définie sur E_Ω ; il est donc caractéristique de l'opérateur D et non de l'ensemble de facteurs utilisé pour le décrire. Par contre $\underset{E \in F}{\nabla} ([E^{-1}](E)) = E_{DF}$ dépend de **F**.

Mais nous verrons que l'ensemble des espaces E_{DF} aux diverses écritures d'une même décomposition généralisée D a un minimum. C'est ce minimum que nous noterons E_D et que nous nommerons <u>espace de définition</u> de D.

Bien-sûr, on a toujours $E_{ID} \lhd E_{DF}$; lorsqu'il existe une écriture de D telle que $E_{ID} = E_{DF}$, autrement-dit, lorsque $E_{ID}=E_D$, on dit que la décomposition est une <u>décomposition pleine</u>.

La restriction de D à $\mathcal{R}_{E_{ID}}$ est toujours égale à la restriction à $\mathcal{R}_{E_{ID}}$ d'une décomposition pleine qui est $D \circ \underset{E_{ID}}{\perp} = \underset{E \in F}{\perp} \left[[E] (E_{ID}) \right]$ si $D = \underset{E \in F}{\perp} [E]$. Pour que D soit pleine, il faut et il suffit que $D \circ \underset{E_{ID}}{\perp} = D$.

c) Premières propriétés

Soit $D = \underset{E \in F}{\perp} [E]$ une décomposition généralisée.

D est une application croissante de $\mathcal{R}_\Omega$ dans $\mathcal{R}$ puisque c'est la composée des opérateurs croissants $\underset{E \in F}{*} E$ et $\perp$; autrement dit,

III-1.1. $\forall R_1 \in \mathcal{R}_\Omega : \forall R_2 \in \mathcal{R}_\Omega : R_1 \subset R_2 \Rightarrow D(R_1) \subset D(R_2)$

III-1.2. $\forall R \in \mathcal{R}_\Omega : [E_{ID}](R) \subset D(R)$, autrement dit :

$\forall R \in \mathcal{R}_\Omega : R \lesssim^* D(R)$: D est "pseudo-extensive".

En effet $\forall p \in R : D(\{p\}) = [E_{ID}](\{p\})$ et $D(\{p\}) \subset D(R)$;

par conséquent, $\forall p \in R : [E_{ID}](p) \in D(R)$

La restriction de D à $\mathcal{R}_{E_{ID}}$ est une application extensive de $\mathcal{R}_{E_{ID}}$ dans $\mathcal{R}_{E_{ID}}$. C'est donc une préfermeture sur $\mathcal{R}_{E_{ID}}$.

III-1.3. $\forall R \in \mathcal{R}_\Omega : D(R) \subset D(D(R))$

Mais en général $D \neq D \circ D$; D n'est pas idempotente.

La restriction de D à $\mathcal{R}_{E_{ID}}$ est une préfermeture ; l'ordre algébrique de cette préfermeture D sur $\mathcal{R}_{E_{ID}}$ (cf.Annexe 7) est inférieur ou égal au nombre de facteurs figurant dans l'ensemble **F** utilisé pour l'écriture de D. Il est donc fini borné.

Nommons $D^\uparrow$ la limite inductive de la préfermeture D définie sur $\mathcal{R}_{E_{ID}}$. Alors $\forall R \in \mathcal{R}_{E_{ID}} : D^\uparrow(R) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D^{(n)}(R)$ où

$D^{(o)}(R) = R$ et $D^{(n)}(R) = D(D^{n-1}(R))$ pour $n \geqslant 1$.

$D^\uparrow$ est d'ordre fini, mais généralement non borné.

Exemple : $D = \perp [AB_1][A_1B][A_1B_1]$ est d'ordre 3

Prenons pour R la relation définie sur < A,B > et vérifiée par les points

$$\begin{cases} (a,b) \\ (a,b'),(a',b''),\dots(a^{(n)},b^{(n+1)})\dots \\ \\ (a',b),(a'',b'),\dots(a^{(n+1)},b^{(n)})\dots \end{cases}$$

Parmi les points de D (R), $(a',b') \in D(\{(a,b),(a,b'),(a',b)\})$
$\in D^{\uparrow}(\{(a,b),(a,b'),(a',b)\})$

$(a'',b'') \in D^2(\{(a,b),(a,b'),(a',b),(a',b''),(a'',b')\})$
$D^{\uparrow}(\{(a,b),(a,b'),(a',b),(a',b''),(a'',b')\})$

$(a^{(n)},b^{(n)}) \in D^{\uparrow}(R)$ et le plus petit cardinal d'une partie A de R telle que $(a^{(n)},b^{(n)}) \in D^{\uparrow}(A)$ augmente indéfiniment avec n.

2. COMPOSITION DES DECOMPOSITIONS GENERALISEES

a) Projections d'une décomposition généralisée

Rappelons d'abord les formules I-10-15, I-10-16, I-10-17.

On en déduit immédiatement :

III-2-1. $\left[E_a \xrightarrow{\Psi} E_b\right]((\underset{F\in \mathbf{F}}{*}[F])(R)) \subset (\underset{F\in \mathbf{F}}{*}\left[\Psi(E_a \Delta F)\right])(R)$

III-2-2. Si toute variable figurant dans au moins deux facteurs éléments de $\mathbf{F}$ est variable de E_a, alors

$$\left[E_a \xrightarrow{\Psi} E_b\right] \circ (\underset{F\in \mathbf{F}}{*}[F]) = \underset{F\in \mathbf{F}}{*}\left[\Psi(E_a \Delta F)\right]$$

III-2-3. $[E] \circ \underset{F\in \mathbf{F}}{\perp}[F] = [E] \circ (\underset{F\in \mathbf{F}}{*}[F])$ (car $[E] \circ \perp = [E]$)

III-2-4. $[E] \circ (\underset{F\in \mathbf{F}}{\perp} F)(R) \subset \underset{F\in \mathbf{F}}{*}\left[[E](F)\right](R)$

III-2-5. $(\exists F \in \mathbf{F} : \left[E^{-1}\right](E) \lhd F) \Rightarrow [E] \circ \underset{F\in \mathbf{F}}{\perp}[F] = [E]$

b) Composition de deux décompositions généralisées, démonstration générale

Soit $D_1 = \underset{F\in \mathbf{F}_1}{\perp}[F]$ et $D_2 = \underset{G\in \mathbf{F}_2}{\perp}[G]$

on pose $E_1 = \underset{F\in \mathbf{F}_1}{\nabla} F$ et $E_2 = \underset{G\in \mathbf{F}_2}{\nabla} G$

On veut exprimer $D_2 \circ D_1$

Faisons d'abord correspondre à chaque facteur G de D_2 une recopie-projection ordinaire $\left[E_1 \xrightarrow{\Psi_G} \Psi_G(E_1)\right]$

telle que $\Psi_G(E_1 \Delta \left[G^{-1}\right](G)) \lhd G$

et que $\overline{\Psi_G(E_1 \Delta \left[G^{-1}\right](G))}$ soit disjoint de E_Ω, de E_1, de E_2 et de tout $\Psi_{G'}(E_1)$ pour $G' \neq G$.

On remarque que pour toute relation R définie sur E_1 ou sur un sous-espace de E_1 (donc pas nécessairement externe),

$$\left[G\right](R) = \underset{G}{\perp} \left[E_1 \xrightarrow{\psi_G} \psi_G(E_1)\right](R)$$
$$= \underset{E_2}{\perp} \left[E_1 \xrightarrow{\psi_G} \psi_G(E_1)\right](R)$$

Alors, pour tout $G \in F_2$:

$$\left[G\right](D_1(R)) = \left[G\right]\Big(\underset{F\in F_1}{*}\left[F\right](R)\Big) \qquad \text{(III-2-3)}$$
$$= \underset{E_2}{\perp} \left[E_1 \xrightarrow{\psi_G} \psi_G(E_1)\right]\Big(\underset{F\in F_1}{*}\left[F\right](R)\Big)$$
$$= \underset{E_2}{\perp}\Big(\underset{F\in F_1}{*}\left[\psi_G(F)\right](R)\Big) \qquad \text{(III-2-2)}$$

On en déduit que :

$$D_2 \circ D_1 = \perp \circ \underset{G\in F_2}{*}\Big(\underset{E_2}{\perp} \circ \Big(\underset{F\in F_1}{*}\left[\psi_G(F)\right]\Big)\Big)$$

Or, toute variable figurant dans les deux expressions $\underset{F\in F_1}{*}\left[\psi_G(F)\right]$ et $\underset{F\in F_1}{*}\left[\psi_{G'}(F)\right]$, pour deux éléments différents G et G' de F_2 est variable de $G \Delta G'$ et donc de E_2 d'après la définition de ψ_G et $\psi_{G'}$; donc

$$D_2 \circ D_1 = \perp \circ \underset{E_2}{\perp} \circ \Big(\underset{G\in F_2}{*}\Big(\underset{F\in F_1}{*}\left[\psi_G(F)\right]\Big)\Big)$$
$$= \perp\Big(\underset{G\in F_2}{*}\ \underset{F\in F_1}{*}\left[\psi_G(F)\right]\Big)$$

Puisque toute variable de $E_\Omega \,\Delta\, \Big(\underset{G\in F_2}{\nabla}\ \underset{F\in F_1}{\nabla} \psi_G(F)\Big)$ est variable de E_2.

On a démontré le

<u>Théorème IV.</u> **Soient $D_1 = \underset{F\in F_1}{\perp}\left[F\right]$ et $D_2 = \underset{G\in F_2}{\perp}\left[G\right]$ deux décompositions généralisées ; on pose $E_1 = \underset{F\in F_1}{\nabla} F$, $E_2 = \underset{G\in F_2}{\nabla} G$ et pour tout $G \in F_2$, on définit une recopie projection ordinaire $\left[E_1 \xrightarrow{\psi_G} \psi_G(E_1)\right]$ telle que**

$\psi_G(E_1 \Delta \left[G^{-1}\right](G))) \lhd G$ et que $\psi_G(E_1 \Delta \overline{\left[G^{-1}\right](G))}$ soit disjoint de E_Ω, E_1, E_2 et de tout $\psi_{G'}(E_1)$ pour $G' \neq G$.

Alors D_2 o D_1 est la décomposition généralisée D_2 o $D_1 = \underset{F \in F_1, G \in F_2}{\perp} \left[\psi_G(F)\right]$.

L'ensemble des décompositions généralisées est stable par composition des opérateurs.

c) Traitement d'un exemple

$D_1 = \perp [A_1BC]\,[B_1CD]\,[AB_1D_1]\,[AB_2D_1]\,[B_2CF]$; $E_1 = \langle ABCDFA_1B_1D_1B_2 \rangle$

$D_2 = \perp [AB_1C]\,[B_1CD]\,[AB_2DE]\,[B_2CE]$; $E_2 = \langle ACDEB_1B_2 \rangle$

G	$\left[E_1 \xrightarrow{\psi_G} \psi_G(E_1)\right]$	D_2 o D_1
$\langle AB_1C \rangle$	$AB_1CD_3F_3A_4^1B_4^1D_4^1B_5^2$	$\perp[A_4B_1C]\,[B_4CD_3]\,[AB_4D_4]\,[AB_5D_4]\,[B_5CF_3]$
$\langle B_1CD \rangle$	$A_7B_1CDF_7A_8^1B_8^1D_8^1B_9^2$	$[A_8B_1C]\,[B_8CD]\,[A_7B_8D_8]\,[A_7B_9D_8]\,[B_9CF_7]$
$\langle AB_2DE \rangle$	$AB_2C_{10}DF_{10}A_{11}^1B_{11}^1D_{11}^1B_{12}^2$	$[A_{11}B_2C_{10}]\,[B_{11}C_{10}D]\,[AB_{11}D_{11}]\,[AB_{12}D_{11}]\,[B_{12}C_{10}F_{10}]$
$\langle B_2CE \rangle$	$A_{13}B_2CD_{13}F_{13}A_{14}^1B_{14}^1D_{14}^1B_{15}^2$	$[A_{14}B_2C]\,[B_{14}CD_{13}]\,[A_{13}B_{14}D_{14}]\,[A_{13}B_{15}D_{14}]\,[B_{15}CF_{13}]$

Nous allons par la suite apprendre à simplifier l'expression trouvée.

Remarque : si D_1 et D_2 sont pleines et que $E_{ID_1} \lhd E_{ID_2}$, alors D_2 o D_1 est pleine. Mais si E_{ID_1} n'est pas sous-espace de E_{ID_2}, D_2 o D_1 n'est pas pleine.

3. PREMIERES REGLES POUR MODIFIER L'ECRITURE D'UNE DECOMPOSITION

a) Recopies-projections fidèles

Une recopie projection ordinaire ou contractée $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$ est dite fidèle si $\psi(E_1 \Delta E_\Omega) = E_2 \Delta E_\Omega$. Lorsque la recopie-projection est nommée par une suite de variables doublement indiciée écrite entre crochets, alors la recopie-projection est fidèle si toute occurrence d'une variable ayant au moins un indice supérieur nul, a un indice inférieur nul.

Exemple : $\left[A_0^{01} \quad A_4^{23} \quad B_0^1 \quad C_0^o \quad D_3^2\right]$ est une recopie-projection fidèle.

Une recopie-projection ordinaire $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$ est <u>bi-fidèle</u> si elle est fidèle et si la recopie-projection $\left[E_2 \xrightarrow{\psi^{-1}} E_1\right]$ est fidèle aussi.

Nous avons, au chapitre I, d'abord défini les opérateurs de recopie projection $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$ ordinaires ou contractés sur $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$, puis défini leur extension à l'ensemble des parties de $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$. Nous allons maintenant définir leur extension à l'ensemble des parties de l'ensemble des parties de $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$. Nous désignerons encore cette extension par $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$ qui peut donc désigner l'application de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup_{E \in \mathcal{E}} (E)))$ dans elle-même, faisant correspondre à toute partie de $\mathcal{P}(\bigcup_{E \in \mathcal{E}} (E))$ l'ensemble de ses images par $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$. En particulier, étant donné un ensemble $\mathbf{F}$ d'espaces, $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$ $(\mathbf{F})$ désigne l'ensemble des images des éléments de $\mathbf{F}$ par $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$.

Si $\bigtriangledown_{F \in \mathbf{F}} F \lhd E_1$, $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right](\mathbf{F})$ pourra être noté $\psi(\mathbf{F})$.

Nous dirons que deux espaces ou deux ensembles de facteurs sont <u>semblables</u> s'ils sont image l'un de l'autre par une recopie-projection ordinaire et qu'ils sont <u>fidèlement semblables</u> si cette recopie-bijection est bi-fidèle.

<u>Exemple</u> : $\left\{\langle ABC_1\rangle, \langle BC_1D\rangle, \langle ACD_1\rangle, \langle BC_2D_1\rangle, \langle BC_2D_1\rangle, \langle AC_2D\rangle\right\}$

et $\left\{\langle ABC_3\rangle, \langle BC_3D\rangle, \langle ACD_1\rangle, \langle BC_1D_1\rangle, \langle AC_1D\rangle\right\}$

sont fidèlement semblables, car le deuxième ensemble est image du premier dans la recopie projection bi-fidèle : $\left[ABC_3^1DD_1^1C_1^2\right]$

Règle de recopie bi-fidèle

Si F_1 et F_2 sont fidèlement semblables, les décompositions généralisées $\perp_{E \in F_1} [E]$ et $\perp_{E \in F_2} [E]$ sont égales.

Dans ces conditions, les indices non nuls qui figurent dans l'écriture d'une décomposition généralisée par énumération de son ensemble de facteurs jouent le rôle de variables muettes. Il serait plus conforme à la tradition mathématique de les désigner par des lettres, mais les habitudes prises dans les algorithmes de tableaux poussent à les désigner par des chiffres - d'où notre façon d'écrire.

b) **Règle d'adjonction et de suppression de facteurs**

On ne change pas une décomposition généralisée en adjoignant à l'ensemble de ses facteurs dans une écriture donnée ou en supprimant de cet ensemble un sous-espace d'un autre facteur.

Autrement dit :

III-3-1. $\forall E_1 \in \mathcal{E} : (\exists E \in \mathbf{F} : E_1 \lhd E) \Rightarrow \perp_{F \in \mathbf{F} \cup \{E_1\}} [F] = \perp_{F \in \mathbf{F}} [F]$

Cela découle immédiatement des définitions.

c) **Elagage et Formatage des écritures de décompositions généralisées**

Règles

1) On obtient une décomposition égale à $\perp_{F \in \mathbf{F}} [F]$ dans laquelle A_i n'est pas variable de $\bigtriangledown_{F \in \mathbf{F}} F$ en remplaçant dans $\mathbf{F}$ un facteur $F_1 \in \mathbf{F}$ tel que A ne soit pas variable de $\left[F^{-1}\right](F)$ par $F_1 \bigtriangledown \langle A_i \rangle$.

2) On obtient une décomposition égale à $\perp_{F \in \mathbf{F}} [F]$ en supprimant d'un facteur $F_2 \in \mathbf{F}$ une variable d'indice non nul qui ne figure que dans ce facteur.

Cela découle immédiatement des définitions.

Le jeu d'écriture qui consiste à supprimer ainsi une variable d'indice non nul ne figurant que dans un facteur, sera appelée <u>élagage</u>.

On dira d'une décomposition généralisée $\underset{E \in F}{\perp}[E]$ qu'elle est écrite sous <u>forme élaguée</u> si toute variable d'indice non nul qui est variable de $\underset{E \in F}{\perp}[E]$ est variable d'au moins deux facteurs de F et si aucun facteur n'est sous-espace d'un autre. On dira que son <u>écriture</u> est <u>formatée</u> si tous les facteurs de F sont semblables. L'espace de $\mathcal{E}_\Omega$ semblable aux facteurs de F s'appelle leur <u>format</u>. Etant donné une décomposition écrite $D = \underset{F \in F}{\perp}[F]$, on peut toujours formater cette écriture en prenant pour format E_{DF} ou un de ses sur-espaces, en particulier E_Ω. Toute décomposition a au moins une écriture formatée.

<u>Exemple</u> : $\perp[ABC_1][C_1B_2D][B_2CE]$ et

$$\perp[ABC_1D_1E_1][A_2B_2C_1DE_2][A_3B_2CD_3E][AB_4C_1D_4E_4]$$

sont une forme élaguée et une écriture formatée de la même décomposition.

4. <u>RELATION-REFLET D'UNE ECRITURE D'UNE DECOMPOSITION FORMATEE SUR LE FORMAT E_Ω.</u>

a) <u>Définitions</u>

Soit J l'ensemble d'indices de référence (cf.I.2.). On définit <u>une fois pour toutes</u> une application de J dans E_Ω qui à tout $i \in J$ fait correspondre un point p^i tel que pour toute paire $\{i,j\}$ d'indices distincts, $\{p^i\}$ et $\{p^j\}$ soient déconnectés, ce qui est toujours possible puisque les ensembles de départ sont supposés infinis et que J est supposé dénombrable.

Etant donné un espace F semblable à E_Ω, on appelle <u>point reflet</u> de F et on note p^F le point de E_Ω tel que pour toute variable A de E_Ω, $coor_A(p^F) = coor_A(p^i) \Leftrightarrow A_i$ var F.

Le point reflet de E_Ω est noté p^o.

L'application <u>reflet</u> est donc une injection de l'ensemble des espaces semblables à E_Ω dans E_Ω définie à partir de l'injection : $J \longrightarrow E_\Omega$

$$i \longmapsto p^i$$

L'extension de l'application reflet à l'ensemble des parties est alors une injection de l'ensemble des ensembles $\mathbf{F}$ d'espaces semblables à E_Ω, c'est-à-dire de l'ensemble des ensembles $\mathbf{F}$ de facteurs formatés sur E_Ω, dans $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ qui à $\mathbf{F}$ fait correspondre $R_{\mathbf{F}} = \left\{ p^F / F \in \mathbf{F} \right\}$ que l'on appelle <u>relation-reflet</u> de l'ensemble de facteurs $\mathbf{F}$.

<u>Exemples</u>

1) $\langle AB_1CD_1 \rangle$, $\langle A_2B_1CD_2 \rangle$, $\langle AB_3C_3D \rangle$ a pour relation reflet $\left\{ \{a^ob^1c^od^1\}, \{a^2b^1cd^2\}, \{a^ob^3c^3d^o\} \right\}$

2) Si l'on prend soin de formater une décomposition simple $[AB]$ $[AC][BCD]$ en ajoutant au $n^{\text{ème}}$ facteur des variables d'indice n, ce qui donne dans l'exemple $[ABC_1D_1]\,[AB_2CD_2]\,[A_3BCD]$, la définition de la relation reflet de l'ensemble de facteurs ainsi formaté est la même que la relation reflet de l'ensemble de facteurs de la décomposition simple telle qu'elle a été définie en II-4.

b) <u>Recopies-projections et morphismes projectifs</u>

Soit $\mathbf{F}$ un ensemble de facteurs formaté sur E_Ω et $R_{\mathbf{F}}$ sa relation reflet. Nommons E_1 l'espace $\underset{F \in \mathbf{F}}{\nabla} F$ et considérons une recopie projection quelconque de la forme $[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2]$. Posons $\mathbf{F'} = [E_1 \xrightarrow{\psi} E_2](\mathbf{F})$; soit $R_{\mathbf{F'}}$ la relation-reflet de $\mathbf{F'}$. Alors il existe un morphisme projectif H_ψ tel que $R_{\mathbf{F'}} = H_\psi(R_{\mathbf{F}})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F} \arrow[r, "\text{reflet}"] \arrow[d, "{\text{recopie-projection } [E_1 \xrightarrow{\psi} E_2]}"'] & R_{\mathbf{F}} \arrow[d, "\text{morphisme projectif } H_\psi"] \\
\mathbf{F'} \arrow[r, "\text{reflet}"'] & R_{\mathbf{F'}} = H_\psi(R_{\mathbf{F}})
\end{tikzcd}$$

En effet, soit A un ensemble de départ et soit J_A l'ensemble non vide d'indices i tel que A_i var E_1. Nommons f_A une application de J dans J telle que sa restriction à J_A soit donnée par $\forall\, i \in J_A : \psi(A_i) = A_{f_A(i)}$ et h_A une application de A dans A, dont la restriction à l'ensemble des coordonnées des p^i sur A soit

donnée par $h_A(coor_A(p^i)) = coor_A(p^{f_A(i)})$. Le morphisme projectif de E_Ω dans lui-même ayant les applications h_A pour applications composantes, est le morphisme H_ψ.
Réciproquement, soit un morphisme projectif H de E_Ω dans luimême, dont toute application composante h_V donne, pour tout point p^i, à $coor_V p^i$ une image $h_V(coor_V p^i)$ qui soit elle-même coordonnée suivant V d'un des points p^j. On peut alors définir, pour toute variable V de E_Ω une application f_V de J dans lui-même telle que $coor_V H(p_i) = coor_V p^{f_V(i)}$. Alors, étant donné un espace E_1 dont au moins un sousespace est semblable à E_Ω, on peut définir une recopie-projection $\left[E_1 \xrightarrow{\psi_H} E_2\right]$ telle que, pour tout ensemble $\mathbf{F}$ de facteurs formaté sur E_Ω et ayant la propriété $\bigvee_{F \in \mathbf{F}} F \lhd E_1$, la relation-reflet de $\psi_H(\mathbf{F})$ soit égale à $H(R_{\mathbf{F}})$. Il suffit de prendre pour ψ_H une application qui à toute variable V_i de E_1 fasse correspondre la variable $V_{f_A(i)}$.

Soit $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$ une recopie-projection dans laquelle un sous-espace de E_1 est semblable à E_Ω ; pour qu'on puisse lui associer un morphisme projectif H_ψ qui soit un isomorphisme projectif, il faut et il suffit que $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$ soit une recopie-projection ordinaire.

Nous appellerons <u>morphisme projectif fidèle</u> un morphisme projectif dans lequel p^o est invariant.
Etant donné un espace quelconque E_1, et un morphisme projectif fidèle H, si on peut leur associer une recopie-projection $\left[E_1 \xrightarrow{\psi_H} E_2\right]$, celle-ci est fidèle ; réciproquement à une recopie-projection fidèle $\left[E_1 \xrightarrow{\psi} E_2\right]$, on peut toujours associer au moins un morphisme projectif fidèle H_ψ, mais si $E_1 \Delta E_\Omega \neq E_\Omega$, on peut aussi lui associer des morphismes projectifs non fidèles.
A un isomorphisme projectif fidèle, on ne peut associer qu'une recopie-projection ordinaire bi-fidèle, et à une recopie projection ordinaire bi-fidèle, on peut toujours associer un isomorphisme projectif fidèle.
Deux relations définies sur E_Ω sont dites <u>fidèlement isomorphes</u> si elles sont projectivement isomorphes dans un isomorphisme projectif fidèle.

D'après ce qui précède, deux ensembles de facteurs formatés sur E_Ω sont fidèlement semblables si et seulement si leurs relations-reflet sont fidèlement isomorphes.

c) Propriétés des relations reflets

Proposition 9

Etant donné une décomposition $D = \underset{F \in \mathbf{F}}{\perp} [F]$ dont l'écriture est formatée sur E_Ω, une relation $R \in \mathcal{R}_\Omega$ et un point $p \in E_R \Delta E_{ID}$, pour que $p \in D(R)$, il faut et il suffit qu'il existe un morphisme projectif H de E_Ω dans E_Ω tel que $[E_R](H(R_{\mathbf{F}})) \subset R$ et $[E_R \Delta E_{ID}](H(p^o)) = p$ (ou $H([E_R \Delta E_{ID}](p^o)) = p$) d'après I-8-1).

En effet, pour que $p \in D(R)$, il faut et il suffit qu'il existe une application f de $\mathbf{F}$ dans R telle que $\underset{F \in \mathbf{F}}{\overset{*}{\perp}} ([F](\{f(F)\})) = \{p\}$;

pour cela il faut et il suffit que la conjonction des deux propositions ci-dessous soit vraie :

$\forall f \in \mathbf{F} : [\perp F](f(F)) = [\perp F](p)$

et $\forall A_i : \forall F_1 \in \mathbf{F} : \forall F_2 \in \mathbf{F} : (A_i \text{ var } ([F_1] E_R)$ <u>et</u> $A_i \text{ var } [F_2] E_R) \Rightarrow coor_A f(F_1) = coor_A f(F_2)$.

Alors si $p \in D(R)$, on peut définir au moins un morphisme projectif H par ses applications composantes, en imposant que pour toute variable V de E_R, h_V ait les propriétés ci-dessous :

$$h_V(coor_V(p^o)) = coor_V(p) \text{ si V est variable de } E_{ID}$$

$$h_V(coor_V(p^i)) = coor_V(f(A_i)) \text{ si } V_i \text{ var } ([\underset{F \in \mathbf{F}}{\nabla} F] E_R)$$

et l'on a bien alors $[E_R](H(R_{\mathbf{F}}))$ R et $[E_R \Delta E_{ID}](H(p^o)) = p$ et $i \neq 0$.

Réciproquement si un morphisme projectif H ayant ces propriétés existe, on peut définir une application f de $\mathbf{F}$ dans R telle que pour tout facteur F de $\mathbf{F}$, f(F) soit l'image par H du point reflet de F. Il est immédiat que f a les propriétés voulues.

De la proposition 9, en posant $R = R_{\mathbf{F}_1}$, on déduit immédiatement la proposition 10 :

<u>Proposition 10</u>

Etant donné deux décompositions $D_1 = \underset{F \in \mathbf{F}_1}{\perp} \left[F\right]$ et $D_2 = \underset{F \in \mathbf{F}_2}{\perp} \left[F\right]$ formatées sur le format E_{Ω}, pour que $\left[E_{ID_2}\right](p^o) \in D_2(R_{\mathbf{F}_1})$, il faut et il suffit qu'il existe un morphisme fidèle H tel que $H(R_{\mathbf{F}_2}) \subset R_{\mathbf{F}_1}$ – ou encore qu'il existe une recopie-projection fidèle $\left[\underset{F \in \mathbf{F}_2}{\nabla} F \xrightarrow{\psi} \psi(\underset{F \in \mathbf{F}_2}{\nabla} F)\right]$ telle que $\psi(\mathbf{F}_2) \subset \mathbf{F}_1$.

<u>Exemple</u>

Soient D_1 et D_2 données par énumération de leurs facteurs.

$$D_1 = \perp \left[ABCD_1E_1F_1G_1\right]\left[A_2BCD_2E_2F_2G_2\right]\left[A_2B_3C_5D_3E_3F_2G\right]\left[A_2B_5C_5DE_2FG_2\right]$$

$$D_2 = \perp \left[ABC_1D_1E_1F_1G_1\right]\left[A_2BCD_2E_2F_2G_2\right]\left[A_3B_3CD_3E_3F_3G_3\right]\left[A_4B_4C_4E_4FG_4\right]\left[A_3B_5C_5DE_4F_5G_5\right]$$

on vérifie sur l'exemple qu'il revient au même de dire qu'il existe une application f de $\mathbf{F}_2$ dans $R_{\mathbf{F}_1}$ telle que

$\underset{F \in \mathbf{F}_2}{\perp} \left[F\right] f(F) = \left[E_{ID_2}\right] p^o$, ou de dire qu'il existe un morphisme fidèle H tel que $H(R_{\mathbf{F}_2}) \subset R_{\mathbf{F}_1}$, ou de dire qu'il existe une recopie-projection fidèle $\left[\underset{F \in \mathbf{F}_1}{\nabla} \xrightarrow{\psi} \psi(\underset{F \in \mathbf{F}_2}{\nabla} F)\right]$ tel que $\psi(\mathbf{F}_2) \subset \mathbf{F}_1$.

$$\mathbf{F}_2 \left\{ \begin{array}{l} \{\langle ABC_1D_1E_1F_1G_1 \rangle \\ \langle A_2BCD_2E_2F_2G_2 \rangle \\ \langle A_3B_3CD_3E_3F_3G_3 \rangle \\ \langle A_4B_4C_4D_4E_4FG_4 \rangle \\ \langle A_3B_5C_5DE_4F_5G_5 \rangle\} \end{array} \right. \xrightarrow{\psi} \left. \begin{array}{l} \{\langle ABCD_1E_1F_1G_1 \rangle \\ \langle A_2BCD_2E_2F_2G_2 \rangle \\ \langle A_2B_3C_5D_3E_3F_2G \rangle \\ \langle A_2B_5C_5DE_2FG_2 \rangle\} \end{array} \right\} \mathbf{F}_1$$

$$\xrightarrow{f}$$

$$R_{\mathbf{F}_2} \left\{ \begin{array}{l} \{\{a\ b\ c^1\ d^1\ e^1\ f^1\ g^1\} \\ \{a^2\ b\ c\ d^2\ e^2\ f^2\ g^2\} \\ \{a^3\ b^3\ c\ d^3\ e^3\ f^3\ g^3\} \\ \{a^4\ b^4\ c^4\ d^4\ e^4\ f\ g^4\} \\ \{a^3\ b^5\ c^5\ d\ e^4\ f^5 g^5\}\} \end{array} \right. \xrightarrow{H} \left. \begin{array}{l} \{\{a\ b\ c\ d^1\ e^1\ f^1\ g^1\} \\ \{a^2\ b\ c\ d^2\ e^2\ f^2\ g^2\} \\ \{a^2\ b^3\ c^5\ d^3 e^3\ f^2\ g\} \\ \{a^2\ b^5\ c^5 d\ e^2\ f\ g^2\}\} \end{array} \right\} R_{\mathbf{F}_1}$$

Remarque - par souci de simplification on a omis les indices 0 dans l'écriture des relations reflets.

La recopie-projection ψ est égale à

$$\left[ABC^{1}D^{1}_{1}E^{1}_{1}F^{1}_{1}G^{1}_{1}A^{2}_{2}CD^{2}_{2}E^{2}_{2}F^{2}_{2}G^{2}_{2}A^{3}_{2}B^{3}D^{3}_{2}E^{3}_{2}F^{3}_{2}G^{3}_{2}A^{4}_{2}B^{4}_{5}C^{4}_{5}D^{4}E^{4}_{2}FG^{4}_{2}B^{5}_{5}C^{5}_{5}F^{5}G^{5}_{2}\right] \quad \text{ou,}$$

en notations contractées :

$$\left[A^{0}_{0}B^{0,3}_{0}C^{0,1}_{0}D^{4}_{0}F^{0,5}_{0}D^{1}_{1}E^{1}_{1}F^{1}_{1}G^{1}_{1}A^{2,3,4}_{2}D^{2,3}_{2}E^{2,3,4}_{2}F^{2,3}_{2}G^{2,3,4,5}_{2}B^{4,5}_{5}C^{4,5}_{5}\right]$$

Enfin, de la proposition 9, on peut aussi déduire immédiatement la formule :

III-4-1. Si K est un morphisme projectif et D une décomposition généralisée, $\forall\, R \in \mathcal{R}_{\Omega}$: $K(D(R)) \subset D(K(R))$

En effet, soit $D = \underset{F \in \mathbf{F}}{\perp} [F]$. Si $p \in D(R)$, il existe un morphisme projectif H tel que $[E_R]\,(H(R_F)) \subset R$ et $[E_R \Delta\, E_{ID}](H(p^o)) = p$

Alors le morphisme projectif $K \circ H$ est tel que

$K([E_R]\,(H(R_F))) \subset K(R)$ donc $[E_R]((K\circ H)(R_F)) \subset K(R)$

et $K\,([E_R\ \Delta\, E_{ID}](H(p^o))) = K(p)$ donc $[E_R\ \Delta\ E_{ID}]((K\circ H(p^o))=K(p)$

$$[E_R\ \Delta\ E_{ID}]((K\circ H)(p^o)) \in D(K(R))$$

$K(p)$ est donc élément de $D(K(R))$.

Tout point $K(p)$ élément de $K(D(R))$ est élément de $D(K(R))$. D'où la formule III-4-1.

5. ORDRE $\leqslant$ SUR L'ENSEMBLE DES DECOMPOSITIONS GENERALISEES.

a) Définition

On désigne par $(\mathcal{D}_G, \leqslant)$ l'ensemble des décompositions généralisées ordonné par l'ordre $\leqslant$ défini par

$D_1 \leqslant D_2 \Leftrightarrow \forall\, R \in \mathcal{R}_{\Omega}$: $D_1(R) \leqslant^{*} D_2(R)$

Théorème V

Pour tout ensemble de deux décompositions généralisées $D_1 = \underset{F \in \mathbf{F}_1}{\perp} [F]$ et $D_2 = \underset{F \in \mathbf{F}_2}{\perp} [F]$, dont l'écriture est formatée sur E_{Ω} , $D_1 \leqslant D_2$, si et seulement si il existe une recopie-projection fidèle ordinaire ou contractée

$$\left[\underset{F \in \mathbf{F}_2}{\nabla} \xrightarrow{\ \psi\ } \psi\big(\underset{F \in \mathbf{F}_2}{\nabla}\big)\right] \quad \textbf{telle que } \psi(\mathbf{F}_2) \subset \mathbf{F}_1, \textbf{ ou encore si et}$$

seulement si $[E_{ID_2}]\,(p^o) \in D_2(R_{F_1})$

Démonstration

1) - Hypothèse $D_1 \leqslant D_2$

$E_{ID_2} \lhd E_{ID_1}$ (il suffit de remarquer que si $p \in E_\Omega$, $D_1(\{p\}) \leqslant D_2(\{p\}))$

$[E_{ID_1}]\ p^o \in D_1\ (R_{\mathbf{F}_1})$

$$\top[E_{ID_1}]\{p^o\} \subset \top D_1(R_{\mathbf{F}_1}) \subset \top D_2(R_{\mathbf{F}_1}) \text{ par hypothèse}$$

$$[E_{ID_1}]\ (p^o) \in \overset{E_{ID_1}}{\top} D_2(R_{\mathbf{F}_1})$$

$$[E_{ID_2}](p^o) \in [E_{ID_2}] \overset{E_{ID_1}}{\top} D_2(R_{\mathbf{F}_1}) \in D_2(R_{\mathbf{F}_1})$$

Donc $D_1 \leqslant D_2 \Rightarrow [E_{ID_2}]\ (p^o) \in D_2(R_{\mathbf{F}_1})$

D'après la proposition 10

$[E_{ID_2}]\ p^o \in D_2\ (R_{\mathbf{F}_1}) \Leftrightarrow$ il existe un morphisme projectif fidèle H de E_Ω dans lui-même tel que $H(R_{\mathbf{F}_2}) \subset R_{\mathbf{F}_1}$ ou encore

$[E_{ID_2}]\ p^o \in D_2(R_{\mathbf{F}_1}) \Leftrightarrow$ il existe une recopie projection fidèle $\left[\bigtriangledown_{F \in \mathbf{F}_2} F \xrightarrow{\ \psi\ } \psi(\bigtriangledown_{F \in \mathbf{F}_2} F)\right]$ telle que $\psi(\mathbf{F}_2) \subset \mathbf{F}_1$.

2) - Hypothèse : il existe un morphisme fidèle H tel que $H(R_{\mathbf{F}_2}) \subset R_{\mathbf{F}_1}$.

Soit R une relation quelconque et $p \in D_1(R)$. D'après la proposition 9, il existe un morphisme projectif H' tel que

$[E_R \Delta E_{ID_1}]\ H'(p^o) = p$ et $[E_R] H'(R_{\mathbf{F}_1}) \subset R$.

Alors, puisque H est un morphisme projectif fidèle, $H(p^o) = p^o$ donc $[E_R\ \Delta\ E_{ID_1}]\ (H' o H)(p^o) = p$ et puisque

$H(R_{F_2}) \subset R_{F_1}$, $[E_R](H'oH)(R_{F_2}) \subset R$. Mais

de $H(R_{F_2}) \subset R_{F_1}$, on déduit $E_{ID_2} \lhd E_{ID_1}$, puisque H est fidèle.

Donc $[E_R \Delta E_{ID_2}]\ (H'oH)(p^o) = [E_{ID_2}](p)$

D'après la proposition 9, $[E_{ID_2}]\ (p) \in D_2(R)$.

Donc $\forall\ p' \in E_\Omega\ :\ p' \in \top D_1(R) \Rightarrow p' \in \top D_2(R)$

$\forall\ R \in \mathcal{R}_\Omega\ :\ D_1(R) \leqslant^* D_2(R)$ et $D_1 \leqslant D_2$.

b) Ordre, alourdissements et projections

Définition : on dit qu'un ensemble de facteurs $\mathbf{F}_1$ est obtenu par alourdissement d'un ensemble de facteurs $\mathbf{F}_2$ si $\perp(\bigtriangledown_{F_1 \in \mathbf{F}_1} F_1) = \perp(\bigtriangledown_{F_2 \in \mathbf{F}_2} F_2)$ et $\forall\ F_2 \in \mathbf{F}_2\ :\ \exists F_1 \in \mathbf{F}_1\ :\ F_2 \lhd F_1$.

Remarque : si $\mathbf{F}_2$ est obtenu par alourdissement de $\mathbf{F}_1$ et distinct de lui, les décompositions $\perp_{F \in \mathbf{F}_1} [F]$ et $\perp_{F \in \mathbf{F}_2} F$ peuvent être suivant les cas, distinctes ou égales ; par exemple le formatage est un alourdissement de l'écriture qui ne change pas la décomposition représentée.

Proposition 11

Etant donné deux décompositions

$D_2 = \perp_{F_2 \in \mathbf{F}_2} F_2$ **et** D_1, $D_1 \leqslant D_2$ **si et seulement si il existe un ensemble de facteurs** $\mathbf{F}$ **obtenu par alourdissement de** $\mathbf{F}_2$ **et tel que** $[E_{ID_2}]\ o\ D_1 = \perp_{F \in \mathbf{F}} [F]$.

En effet, supposons d'abord que $E_{ID_1} = E_{ID_2}$ et démontrons la proposition dans ce cas.

Hypothèse

$D_1 = \perp_{F \in \mathbf{F}} [F]$ et $\mathbf{F}$ est obtenu par alourdissement de $\mathbf{F}_2$.

Alors $D_1 = \perp_{F \in \mathbf{F} \cup \mathbf{F}_2} [F]$ puisque $\mathbf{F}$ est obtenu à partir de $\mathbf{F} \cup \mathbf{F}_2$

en y supprimant des facteurs qui sont sous-espaces de facteurs de $\mathbf{F}$ (formule III-3-1). Soit R une relation quelconque

$$D_1(R) = \perp\Big(\mathop{*}_{F \in \mathbf{F} \cup \mathbf{F}_2} [F]\Big)(R)$$

$$= \perp\Big(\Big(\Big(\mathop{*}_{F \in \mathbf{F}} [F]\Big)(R)\Big) * \Big(\Big(\mathop{*}_{F \in \mathbf{F}_2} [F]\Big)(R)\Big)\Big)$$

$$\subset \Big(\perp\Big(\mathop{*}_{F \in \mathbf{F}} [F]\Big)(R)\Big) * \Big(\perp\Big(\mathop{*}_{F \in \mathbf{F}_2} [F]\Big)(R)\Big)$$

$$\subset (D_1(R)) * (D_2(R)) \subset D_2(R)$$

$$D_1 \leqslant D_2.$$

Réciproque, en supposant encore $E_{ID_1} = E_{ID_2}$.

Hypothèse

$D_1 \leqslant D_2$

Soit $D_2 = \mathop{\perp}\limits_{F \in \mathbf{F}_2} [F]$ la forme sous laquelle D_2 est donné.

On peut écrire encore $D_2 = \mathop{\perp}\limits_{F \in \mathbf{F}'_2} [F]$ où $\mathbf{F}'_2$ est un ensemble de facteurs formaté sur E_Ω et obtenu par alourdissement de $\mathbf{F}_2$.

D_1 a au moins une écriture formatée $D_1 = \mathop{\perp}\limits_{F \in \mathbf{F}'_1} [F]$ où il est loisible de supposer que tous les indices différents de 0 sont distincts de ceux utilisés dans $\mathbf{F}'_2$. Puisque $D_1 \leqslant D_2$, il existe une recopieprojection fidèle $\Big[\mathop{\nabla}\limits_{F \in \mathbf{F}'_2} F \xrightarrow{\psi} \psi\Big(\mathop{\nabla}\limits_{F \in \mathbf{F}'_2} F\Big)\Big]$ telle que $\psi(\mathbf{F}'_2) \subset \mathbf{F}'_1$.

Alors on peut construire une application normale ψ_1 de l'ensemble des variables de $\mathop{\nabla}\limits_{F \in \mathbf{F}'_1 \cup \mathbf{F}'_2} F$ qui, à toute variable V_i de $\mathbf{F}'_2$ fasse correspondre $\psi(V_i)$ et à toute variable V_i de $\mathbf{F}'_1$ fasse correspondre elle-même puisque $\Big(\mathop{\nabla}\limits_{F \in \mathbf{F}'_1} F\Big) \Delta \Big(\mathop{\nabla}\limits_{F \in \mathbf{F}'_2} F\Big) \trianglelefteq E_\Omega$.

Alors la recopie-projection $\Big[\mathop{\nabla}\limits_{F \in \mathbf{F}'_1 \cup \mathbf{F}'_2} F \xrightarrow{\psi} \psi\Big(\mathop{\nabla}\limits_{F \in \mathbf{F}'_1 \cup \mathbf{F}'_2} F\Big)\Big]$

est une recopie projection fidèle telle que $\psi(\mathbf{F}'_1 \cup \mathbf{F}'_2) \subset \mathbf{F}'_1$.

Donc $D_1 \leqslant \underset{F \in \mathbf{F}'_1 \cup \mathbf{F}'_2}{\perp} [F]$

Etant donné que $\mathbf{F}'_1 \cup \mathbf{F}'_2$ est plus lourd que $\mathbf{F}'_1$, on a aussi

$$\underset{F \in \mathbf{F}'_1 \cup \mathbf{F}'_2}{\perp} [F] \leqslant D_1$$

Donc $D_1 = \underset{F \in \mathbf{F}'_1 \cup \mathbf{F}'_2}{\perp} [F]$ où $\mathbf{F}'_1 \cup \mathbf{F}'_2$ est obtenu par alourdissement de $\mathbf{F}_2$.

Voyons maintenant le cas où $E_{ID_1} \neq E_{ID_2}$

Supposons $\left[E_{ID_2}\right] \circ D_1 = \underset{F \in \mathbf{F}_1}{\perp} [F]$ où $\mathbf{F}_1$ est obtenu par alourdissement d'un ensemble de facteurs $\mathbf{F}_2$ de D_2. Alors d'après ce qui précède

$$\left[E_{ID_2}\right] \circ D_1 \leqslant D_2$$

mais $D_1 \leqslant \left[E_{ID_2}\right] \circ D_1$

donc $D_1 \leqslant D_2$

Réciproquement supposons $D_1 \leqslant D_2$

Alors $E_{ID_2} \lhd E_{ID_1}$, $\left[E_{ID_2}\right] \circ D_1 \leqslant D_2$ et $\left[E_{ID_2}\right] \circ D_1$ a même espace image que D_2, donc quelque soit $\mathbf{F}_2$ tel que $D_2 = \underset{F \in \mathbf{F}_2}{\perp} [F]$ il existe un ensemble de facteurs $\mathbf{F}_1$ obtenu par alourdissement de $\mathbf{F}_2$ tel que $\left[E_{ID_2}\right] \circ D_1 = \underset{F \in \mathbf{F}_1}{\perp} [F]$.

c) Structure de l'ensemble ordonné $(\mathcal{D}_G, \leqslant)$

A toute décomposition généralisée D, on peut faire correspondre $\top \circ D$ dont la restriction à $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ est une préfermeture sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$; appelons $\mathcal{D}_{cyl}$ l'ensemble de ces préfermetures et décompositions cylindrées généralisées les éléments de $\mathcal{D}_{cyl}$. On voit que l'application de $(\mathcal{D}_G, \leqslant)$ dans $(\mathcal{D}_{cyl}, \leqslant)$ qui a toute décomposition généralisée D fait correspondre la restriction de $\top \circ D$ à $\mathcal{R}_{E_\Omega}$, est un isomorphisme d'ordre si $(\mathcal{D}_{cyl}, \leqslant)$ est ordonné selon l'ordre habituel des préfermetures.

Etudions donc $(\mathcal{O}_{cyl}, \leq)$.

L'ordre de l'ensemble des préfermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ est un **treillis complètement distributif** (annexe 7).

$(\mathcal{O}_{cyl}, \leq)$ est un $\cap$ demi-sous-treillis de cette algèbre de Boole ; en effet, soit $D_1 = \underset{F \in \mathbf{F}_1}{\perp} [F]$ et $D_2 = \underset{F \in \mathbf{F}_2}{\perp} [F]$; on suppose que l'ensemble des indices non nuls utilisés dans $\mathbf{F}_1$ est entièrement disjoint de celui utilisé dans $\mathbf{F}_2$, ce qui est toujours possible ;

$$\forall R \in \mathcal{R}_{E_\Omega} : (\top \circ D_1(R)) \cap (\top \circ D_2(R)) = (\top \circ D_1(R)) * (\top \circ D_2(R))$$

$$= \top \circ (D_1(R) * D_2(R))$$

$$= \top \circ ((\perp(\underset{F \in \mathbf{F}_1}{*} [F] (R))) * (\perp(\underset{F \in \mathbf{F}_2}{*} [F](R))))$$

mais si j'appelle E_1 l'espace de définition de $\underset{F \in \mathbf{F}_1}{*} [F](R)$ et E_2 celui de $\underset{F \in \mathbf{F}_2}{*} [F](R)$, $E_1 \Delta E_2 \lhd E_\Omega$; donc

$$\forall R \in \mathcal{R}_{E_\Omega} : (\top \circ D_1(R) \cap \top \circ D_2(R)) = \top \circ \perp((\underset{F \in \mathbf{F}_1}{*} [F](R)) * (\underset{F \in \mathbf{F}_2}{*} [F](R)))$$

$$= \top \circ \underset{F \in \mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2}{\perp} [F] (R)$$

L'application de $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ dans lui-même qui à toute $R \in \mathcal{R}_{E_\Omega}$ donne pour image $\top \circ D_1(R) \cap \top \circ D_2(R)$ est la borne inférieure de $\top \circ D_1$ et $\top \circ D_2$ dans le treillis des préfermetures.

Elle est égale au cylindrage de la décomposition généralisée $\underset{F \in \mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2}{\perp} [F]$, d'où le résultat.

Par contre, la borne inférieure d'une partie non finie de $\mathcal{O}_{cyl}$ risque fort de ne pas être un cylindrage de décomposition généralisée puisqu'une décomposition généralisée n'a qu'un nombre fini de facteurs $(\mathcal{O}_{cyl}, \leq)$ n'est sans doute pas un $\cap$ demi-treillis complet du treillis des préfermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$.

En général la borne supérieure de deux cylindrages de décompositions généralisées dans le treillis des préfermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ n'est pas un cylindrage de décomposition généralisée.

On peut se demander si tout ensemble $\{T \circ D_1, T \circ D_2\}$ de deux éléments de $\mathcal{D}_{cyl}$ a une borne supérieure dans $(\mathcal{D}_{cyl}, \leq)$, ou ce qui revient au même si tout ensemble $\{D_1, D_2\}$ de deux éléments de $\mathcal{D}_G$ a une borne supérieure dans $(\mathcal{D}_G, \leq)$. Un tel ensemble a des majorants, par exemple $D_1 \circ D_2$, $D_2 \circ D_1$ et la borne inférieure de $\{D_1 \circ D_2, D_2 \circ D_1\}$, mais la question de savoir s'il a une borne supérieure reste ouverte.
Résumons nos résultats.

Théorème VI

$(\mathcal{D}_G, \leq)$ est isomorphe à un $\cap$-demi-sous-treillis du treillis des préfermetures sur R_{E_Ω} ; si $D_1 = \underset{F \in F_1}{\perp} [F]$, $D_2 = \underset{F \in F_2}{\perp} [F]$ et si l'ensemble des indices non nuls utilisé dans F_1 est disjoint de celui utilisé dans F_2, alors la borne inférieure de D_1, D_2 dans $(\mathcal{D}_G, \leq)$ est $D_1 * D_2 = \underset{F \in F_1 \cup F_2}{\perp} [F]$.

6. ECRITURE STANDARDISEE D'UNE DECOMPOSITION GENERALISEE

a) Comparaison de deux écritures formatées de D

On peut toujours ramener deux écritures d'une décomposition généralisée D à deux écritures formatées sur le même format en ajoutant à chaque facteur les variables voulues affectées d'indices ne figurant nulle part dans l'écriture et distincts pour chaque facteur.

Soient $D = \underset{F \in F_1}{\perp} [F]$ et $D = \underset{F \in F_2}{\perp} [F]$ deux écritures de D écrites sur le même format E ; alors $[E_{ID}](p^o) \in D(R_{F_1})$ et $[E_{ID}](p^o) \in D(R_{F_2})$. Donc il existe un morphisme projectif fidèle H_1 de E dans E et un morphisme projectif fidèle H_2 de E dans E tels que $H_1(R_{F_2}) \subset R_{F_1}$ et $H_2(R_{F_1}) \subset R_{F_2}$.

Alors $H_1 \circ H_2 (R_{F_1}) \subset H_1(R_{F_2}) \subset R_{F_1}$

et $H_2 \circ H_1 (R_{F_2}) \subset H_2(R_{F_1}) \subset R_{F_2}$

<u>1er cas</u> $H_1 \circ H_2\ (R_{\mathbf{F}_1}) = R_{\mathbf{F}_1}$ et $H_2 \circ H_1\ (R_{\mathbf{F}_2}) = R_{\mathbf{F}_2}$.

Alors $H_1(R_{\mathbf{F}_2}) = R_{\mathbf{F}_1}$ et $H_2\ (R_{\mathbf{F}_1}) = R_{\mathbf{F}_2}$;

la restriction de H_1 à $R_{\mathbf{F}_2}$ et celle de H_2 à $R_{\mathbf{F}_1}$ sont des isomorphismes. $R_{\mathbf{F}_1}$ et $R_{\mathbf{F}_2}$ sont fidèlement isomorphes ; $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ sont fidèlement semblables.

<u>2ème cas</u> $H_1 \circ H_2\ (R_{\mathbf{F}_1}) = R_{\mathbf{F}_1}$ mais $H_2 \circ H_1(R_{\mathbf{F}_2}) \neq R_{\mathbf{F}_2}$

Posons $H_2(R_{\mathbf{F}_1}) = R$; $R \subset R_{\mathbf{F}_2}$; d'autre part, puisque $H_1(R) = R_{\mathbf{F}_1}$ et $H_2(R_{\mathbf{F}_1}) = R$, R est fidèlement semblable à $R_{\mathbf{F}_1}$. Remarquons que $R \neq R_{\mathbf{F}_2}$, car si R était égal à $R_{\mathbf{F}_2}$, $H_2 \circ H_1(R_{\mathbf{F}_2})$ serait égal à $R_{\mathbf{F}_2}$. $R_{\mathbf{F}_1}$ est donc fidèlement semblable à une partie stricte de $R_{\mathbf{F}_2}$ et a donc un cardinal strictement inférieur à celui de $R_{\mathbf{F}_2}$.

<u>3ème cas</u> $H_1 \circ H_2\ (R_{\mathbf{F}_1}) \neq R_{\mathbf{F}_1}$

Alors $H_1 \circ H_2\ (R_{\mathbf{F}_1}) \subset R_{\mathbf{F}_1}$

Soit D' la décomposition généralisée telle que $D' = \underset{F\ \mathbf{F}_1'}{\perp}[F]$ et $H_1 \circ H_2\ (R_{\mathbf{F}_1}) = R_{\mathbf{F}_1'}$.

$R_{\mathbf{F}_1'} \subset R_{\mathbf{F}_1}$ et $R_{\mathbf{F}_1'} \neq R_{\mathbf{F}_1}$ donc $\mathbf{F}_1' \subset \mathbf{F}_1$ et le nombre de facteurs de $\mathbf{F}_1'$ est strictement inférieur à celui de $\mathbf{F}_1$; enfin $R_{\mathbf{F}_1'}$ est l'image de $R_{\mathbf{F}_1}$ par le morphisme fidèle $H_2 \circ H_1$. Donc il existe une recopie-projection fidèle $\left[\underset{F \in \mathbf{F}_1}{\nabla} F \xrightarrow{\psi} \psi(\underset{F \in \mathbf{F}_1}{\nabla} F)\right.$ telle que $\psi(\mathbf{F}_1) = \mathbf{F}_1'$.

Alors d'après le théorème V, $\underset{F \in \mathbf{F}_1'}{\perp}[F] \leqslant D$ et puisque $\mathbf{F}_1' \subset \mathbf{F}_1$, d'après la proposition 11, $D \leqslant \underset{F \in \mathbf{F}_1'}{\perp} F$ donc $D = \underset{F \in \mathbf{F}_1'}{\perp}[F]$.

b) Ecriture formatée standardisée

Soit $\underset{F \in \mathbf{F}_1}{\perp} F$ une écriture formatée sur E, d'une décomposition D. Alors, ou bien il existe une recopie-projection contractée fidèle de $\mathbf{F}_1$ dans une de ses parties strictes que nous nommerons $\mathbf{F}_1'$ et $D = \underset{F \in \mathbf{F}_1'}{\perp} [F]$ - ou bien, il n'en existe pas ; pour toute autre écriture formatée sur E, $\underset{F \in \mathbf{F}_2}{\perp} [F]$ de D, on est alors dans un des cas 1° ou 2°, c'est-à-dire que tout ensemble formaté sur E de facteurs $\mathbf{F}_2$ équipotent à $\mathbf{F}_1$ et tel que $D = \underset{F \in \mathbf{F}_2}{\perp} [F]$ est fidèlement semblable à $\mathbf{F}_1$; tout ensemble de facteurs $\mathbf{F}_2$ formaté sur E non équipotent à $\mathbf{F}_1$ et tel que $D = \underset{F \in \mathbf{F}_2}{\perp} [F]$ a une partie stricte fidèlement semblable à $\mathbf{F}_1$.

Donc soit $\underset{F \in \mathbf{F}_1}{\perp} [F]$ une écriture formatée sur E mais quelconque de D, $\mathbf{F}_1$ étant fini, on trouvera en quelques étapes un sous-ensemble $\mathbf{F}$ de $\mathbf{F}_1$ image de $\mathbf{F}_1$ dans une recopie-projection fidèle et telle qu'il n'existe aucune partie stricte de $\mathbf{F}$ qui soit image de $\mathbf{F}$ dans une recopie-projection fidèle.

D'où le théorème :

Théorème VII

Pour toute décomposition généralisée D ayant au moins une écriture formatée sur un espace $E \lhd E_\Omega$, il existe une écriture formatée $D = \underset{F \in \mathbf{F}}{\perp} [F]$ telle que :

1) Tout ensemble F' formaté sur E de facteurs de D équipotent à F lui soit fidèlement semblable.

2) Tout autre ensemble F" formaté sur E de facteurs de D ait une partie stricte fidèlement semblable à F et soit telle qu'il existe une recopie-projection fidèle $\left[\underset{F \in \mathbf{F}''}{\nabla} F \xrightarrow{\psi} \psi(\underset{F \in \mathbf{F}''}{\nabla} F)\right]$ pour laquelle $\psi(\mathbf{F}'') = \mathbf{F}$.

Corollaire du théorème VII

Pour toute décomposition généralisée D, il existe une écriture élaguée $D = \underset{F \in \mathbf{F}}{\perp} [F]$, telle que :

1) Tout ensemble élagué F' de facteurs de D équipotent à F lui soit fidèlement semblable.

2) Tout autre ensemble élagué F" de facteurs de D a une partie stricte F'" telle que l'ensemble de facteurs obtenu en supprimant de ceux de F'" les variables d'indice non nul qui ne figurent pas dans un autre facteur de F'", soit fidèlement semblable à F.

Les écritures de D avec un nombre minimum de facteurs, lorsqu'elles sont formatées ou élaguées, sont dites "<u>écriture formatée standardisée</u>" ou "<u>forme élaguée standardisée</u>". Les ensembles de facteurs de deux écritures formatées standardisées sur le même format sont fidèlement semblables ; il en est de même pour les ensembles de facteurs de deux formes élaguées standardisées.

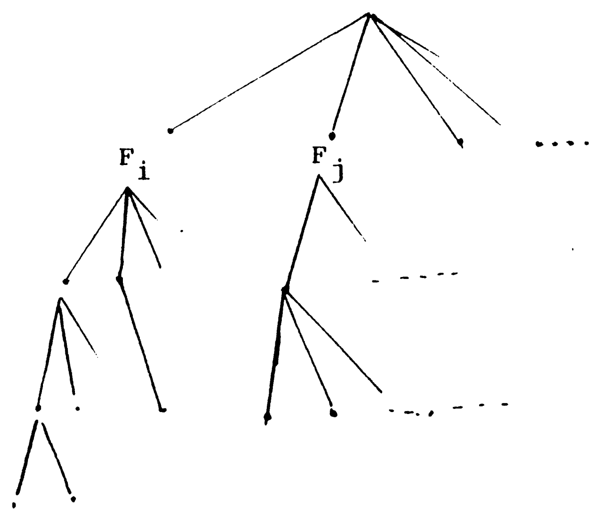
7. <u>PRATIQUE DE LA STANDARDISATION</u>

Etant donné une décomposition $D = \mathop{\perp}\limits_{F \in \mathbf{F}} [F]$ donnée dans une écriture formatée, on cherchera s'il existe une recopie-projection fidèle ψ de $\mathbf{F}$ dans une partie stricte $\psi(\mathbf{F})$ de $\mathbf{F}$. Si oui, on cherche à nouveau s'il existe une recopie-projection de $\psi(\mathbf{F})$ dans une de ses parties strictes ... etc ... jusqu'à temps d'obtenir l'écriture standardisée.

La recherche d'une recopie-projection acceptable est assez laborieuse. Un algorithme systématique pourrait être le suivant: on ordonne totalement et arbitrairement l'ensemble $\mathbf{F}$ puis, successivement, à chaque élément F de $\mathbf{F}$, on fait correspondre l'ensemble $\mathbf{F}_F \subset \mathbf{F}$ des facteurs F' tels que $\perp F \sqsubset \perp F'$; dans toute recopie-projection fidèle ψ, $\psi(F) \in \mathbf{F}_F$. On va alors parcourir de proche en proche l'arbre des possibles en éliminant les branches inutiles jusqu'à l'obtention d'une recopie-projection convenable:

Ensemble $\mathbf{F}_{F_1}$

Ensemble $\mathbf{F}_{F_2}$



Si l'on choisit par exemple F_i pour image de F_1, alors toutes les images des variables de F_i dans la surjection normale ψ sont fixées. Les ensembles $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... d'images possibles pour F_2, F_3, ... sont remplacés par un de leurs sous-ensembles. Si aucun n'est vide, on peut choisir une image de F_2 ; l'image de toutes les variables de F_2 est alors fixée et les ensembles $\mathbf{F}_3'$, $\mathbf{F}_4'$ ... vont à nouveau être restreints. Si un des ensembles $\mathbf{F}_i$ devient vide, il faut remonter jusqu'à un noeud dont tous les successeurs n'aient pas été étudiés et repartir avec un autre successeur de ce noeud.

S'il n'y a aucune recopie-projection ψ possible telle que $\psi(\mathbf{F})$ soit une partie stricte de $\mathbf{F}$, c'est que l'écriture étudiée est standardisée.

Lorsqu'on travaille à la main, un tel algorithme est trop lourd. Pour faciliter l'intuition, on remplacera d'abord l'ensemble de facteurs donné par un ensemble de facteurs élagué servant à l'écriture de la même décomposition et on le représente par un réseau de noeuds et d'étoiles, comme en II-11., les étoiles pouvant représenter cette fois des variables indiciées. Soit $\mathbf{F}$ un ensemble élagué de facteurs. A tout facteur $F \in \mathbf{F}$, on peut faire correspondre un facteur formaté que nous noterons f(F), de telle sorte que f soit une bijection de $\mathbf{F}$ dans $f(\mathbf{F})$ et que $\mathbf{F}$ soit la forme élaguée de $f(\mathbf{F})$. Alors, il existe une recopie-projection fidèle $\left[\bigtriangledown_{F \in \mathbf{F}} f(F) \xrightarrow{\psi} \psi(\bigtriangledown_{F \in \mathbf{F}} f(F))\right]$ telle que

$(f(\mathbf{F}))$ soit une partie stricte de $f(\mathbf{F})$ si et seulement si il existe une recopie-projection fidèle $\left[\bigtriangledown_{F \in \mathbf{F}} F \xrightarrow{\psi'} \psi'(\bigtriangledown_{F \in \mathbf{F}} F)\right]$ et une partie stricte $\mathbf{F}_1$ de $\mathbf{F}$ telle que tout facteur de $\psi'(\mathbf{F})$ soit sous-espace d'un facteur de $f(\mathbf{F}_1)$. Dans ce cas $\perp_{F \in \mathbf{F}}[F] = \perp_{F \in \mathbf{F}_1}[F]$ et $\perp_{F \in \mathbf{F}}[F]$ peut s'écrire en prenant pour ensemble de facteurs celui obtenu en supprimant de tout facteur de $\mathbf{F}_1$ les variables d'indice non nul qui ne figurent pas dans un autre facteur de $\mathbf{F}_1$.

En particulier, on remarquera que si la décomposition élaguée est déconnectable par F et si certaines des sous-décompositions connexes de la coupe de D par F ne comportent que des variables d'indice non nul, on peut, par une recopie-projection fidèle appropriée, faire disparaitre les facteurs où ces variables figurent. Montrons sur un exemple comment peut se pratiquer la standardisation d'une décomposition.

<u>Exemple</u> : prenons pour décomposition à standardiser la décomposition trouvée au 3., comme décomposition D_2 o D_1.

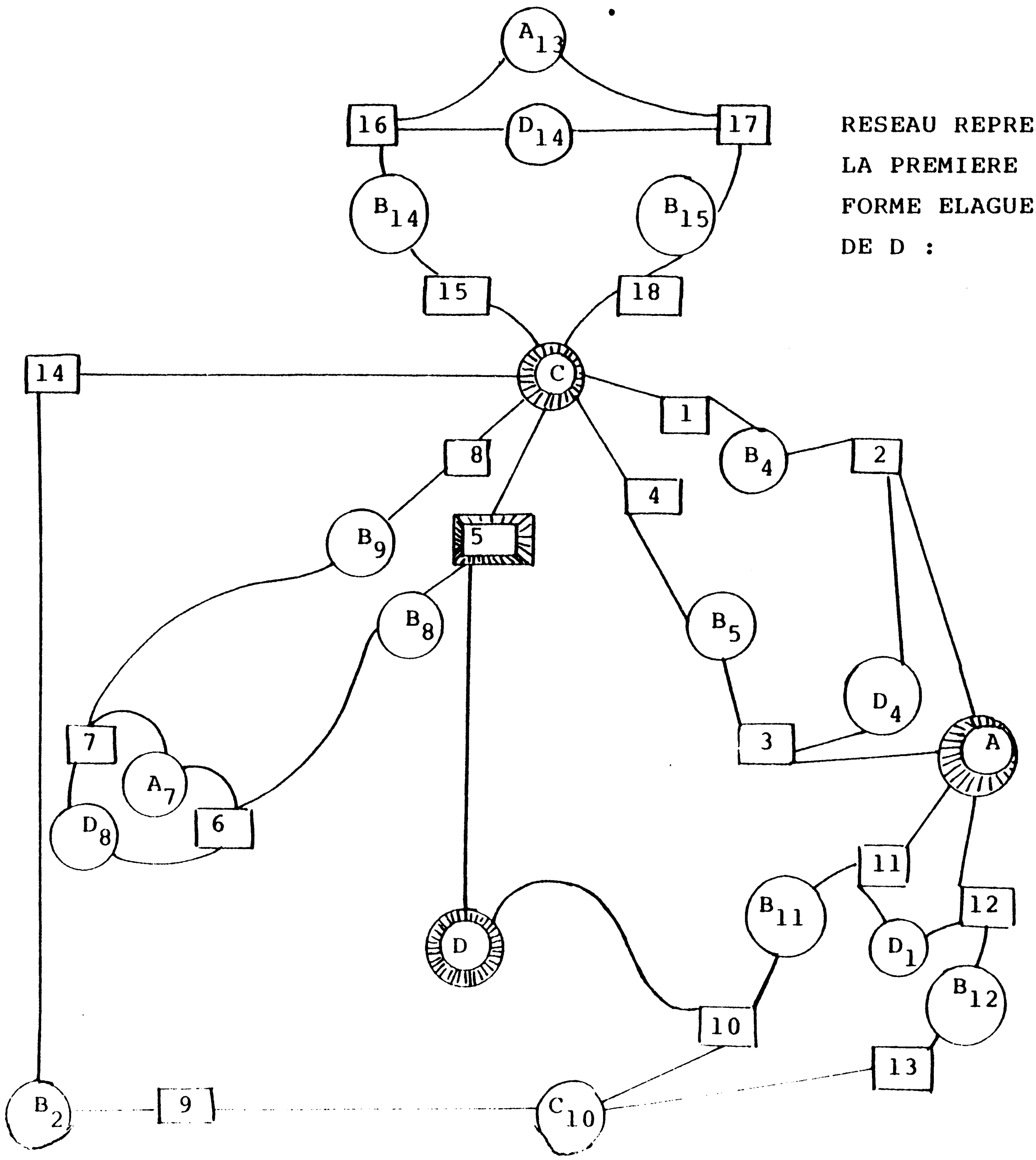
Ecrivons-la sous forme élaguée :

$$\perp \left[\underbrace{B_4C}_{1}\right] \left[\underbrace{AB_4D_4}_{2}\right] \left[\underbrace{AB_5D_4}_{3}\right] \left[\underbrace{B_5C}_{4}\right] \left[\underbrace{B_8CD}_{5}\right] \left[\underbrace{A_7B_8D_8}_{6}\right] \left[\underbrace{A_7B_9D_8}_{7}\right] \left[\underbrace{B_9C}_{8}\right]$$

$$\left[\underbrace{B_2C_{10}}_{9}\right] \left[\underbrace{B_{11}C_{10}D}_{10}\right] \left[\underbrace{AB_{11}D_{11}}_{11}\right] \left[\underbrace{AB_{12}D_{11}}_{12}\right] \left[\underbrace{B_{12}C_{10}}_{13}\right] \left[\underbrace{B_2C}_{14}\right] \left[\underbrace{B_{14}C}_{15}\right]$$

$$\left[\underbrace{A_{13}B_{14}D_{14}}_{16}\right] \left[\underbrace{A_{13}B_{15}D_{14}}_{17}\right] \left[\underbrace{B_{15}C}_{18}\right]$$

RESEAU REPRESENTANT LA PREMIERE FORME ELAGUEE DE D :



Après avoir visualisé cet ensemble de facteurs par le réseau ci-dessus, on constate que F_5 y joue le rôle de connecteur et que, après déconnection par F_5, deux des trois sous-décompositions connexes obtenues n'ont pas de variables d'indice 0. On peut donc formater F_5 sur < ABCD > en remplaçant B_8CD par A_8B_8CD par exemple, puis trouver une recopie-projection fidèle dans laquelle tous les facteurs figurant dans ces deux sous-décompositions ont pour image un sous-espace de $\langle A_8B_8CD \rangle$. A titre d'exercice, écrivons cette recopie-projection :

$$\left[A\ A_8^7 A_8^8 A_8^{13} B_2^2 B_4^4 B_5^5 B_8^8 B_8^9 B_{11}^{11} B_{12}^{12} B_8^{14} B_8^{15} C C_{10}^{10} D D_4^4 D^8 D_{11}^{11} D^{14}\right]$$

Après avoir pris l'image de l'ensemble des facteurs de D par cette recopie-projection, on obtient pour nouvelle écriture de D :

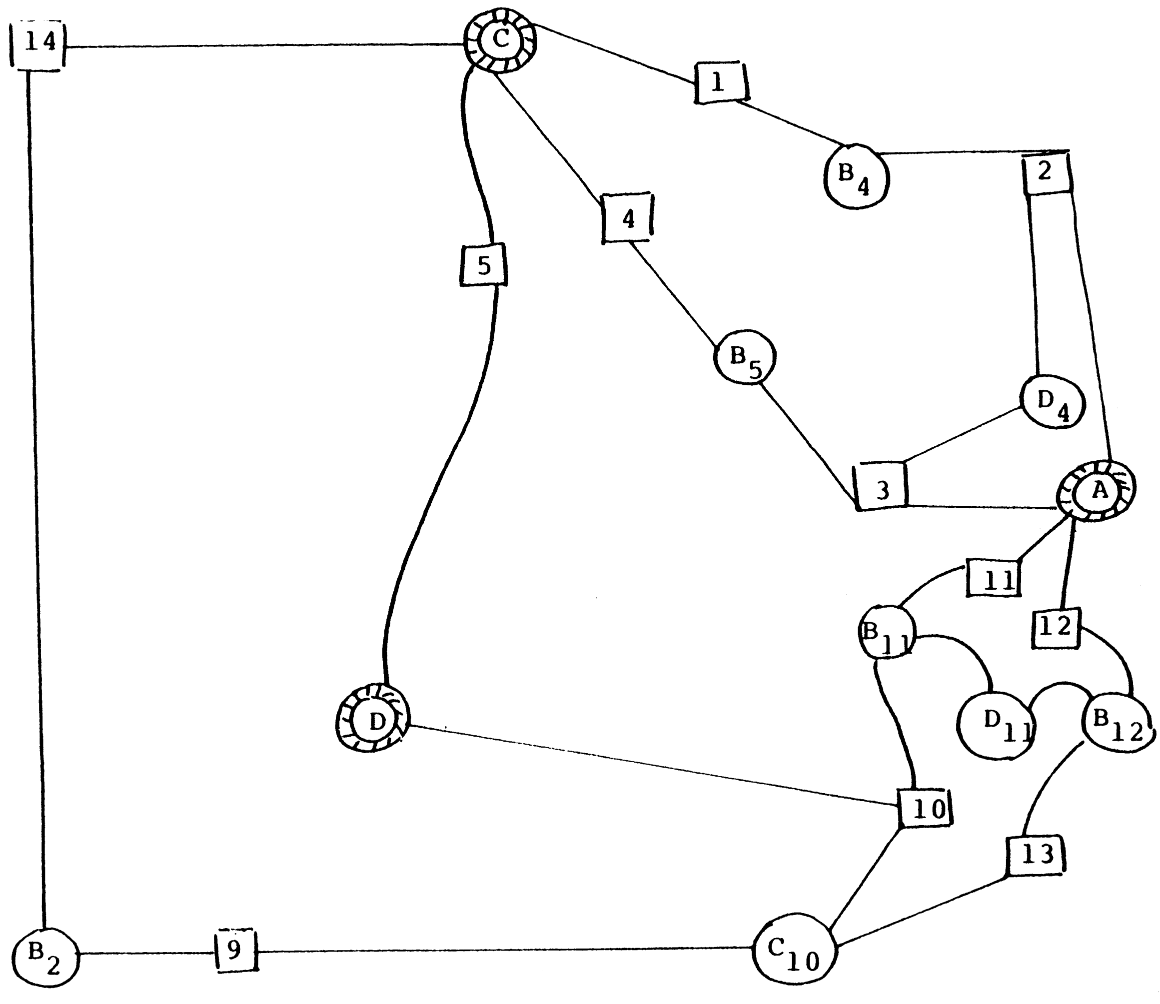
$$\underbrace{[B_4C]}_{1}\ \underbrace{[AB_4D_4]}_{2}\ \underbrace{[AB_5D_4]}_{3}\ \underbrace{[B_5C]}_{4}\ \underbrace{[A_8B_8CD]}_{5}\ \underbrace{[A_8B_8D]}_{6}\ \underbrace{[A_8B_8D]}_{7}\ \underbrace{[B_8C]}_{8}\ \underbrace{[B_2C_{10}]}_{9}$$

$$\underbrace{[B_{11}C_{10}D]}_{10}\ \underbrace{[AB_{11}D_{11}]}_{11}\ \underbrace{[AB_{12}D_{11}]}_{12}\ \underbrace{[B_{12}C_{10}]}_{13}\ \underbrace{[B_2C]}_{14}\ \underbrace{[B_8C]}_{15}\ \underbrace{[A_8B_8D]}_{16}\ \underbrace{[A_8B_8]}_{17}\ \underbrace{[DB_8C]}_{18}$$

Les facteurs $F_6, F_7, F_8, F_{15}, F_{16}, F_{17}, F_{18}$ sont sous-espace de $\langle A_8B_8CD \rangle$ et peuvent être supprimés. Après élagage, la décomposition s'écrit donc :

$\underbrace{[B_4C]}_{1}$ $\underbrace{[AB_4D_4]}_{2}$ $\underbrace{[AB_5D_4]}_{3}$ $\underbrace{[B_5C]}_{4}$ $\underbrace{[CD]}_{5}$ $\underbrace{[B_2C_{10}]}_{9}$ $\underbrace{[B_{11}C_{10}D]}_{10}$ $\underbrace{[AB_{11}D_{11}]}_{11}$
$\underbrace{[AB_{12}D_{11}]}_{12}$ $\underbrace{[B_{12}C_{10}]}_{13}$ $\underbrace{[B_2C]}_{14}$

Représentons le réseau relatif à cette nouvelle forme qui est extrait du réseau précédent :



Un coup d'oeil au graphe obtenu nous montre que les variables B_4 et B_5 jouent des rôles similaires et les variables B_{11} et B_{12} des rôles presque similaires ; au lieu de chercher une recopie-projection utile par une méthode générale, guidée par la représentation graphique, je cherche à construire une recopie-projection fidèle telle que :

$$\psi(F_4) = F_1, \quad \psi(F_3) = F_2, \quad \psi(F_{12}) = F_{11} \text{ et } \psi(F_{13}) \lhd F_{10}$$

Je prends donc la recopie-projection fidèle :

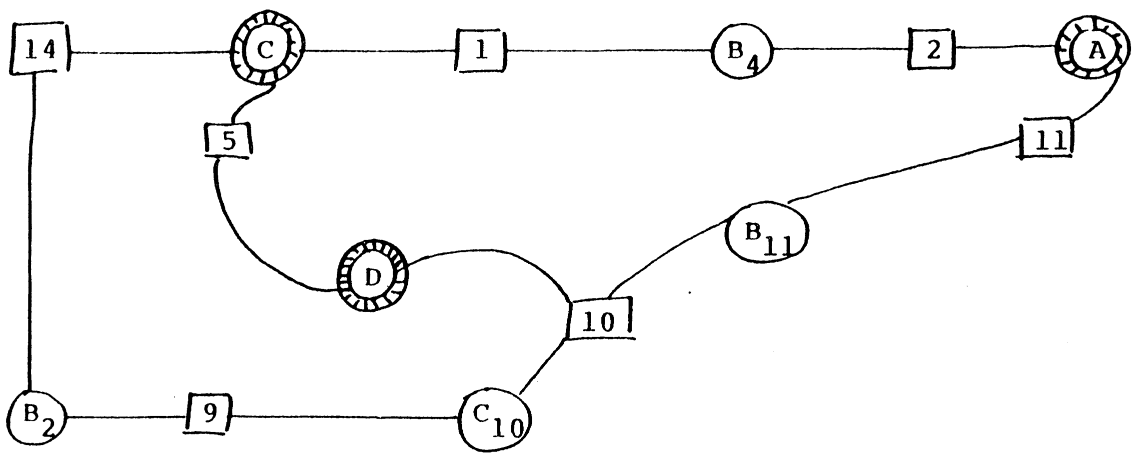
$\left[AB_2^2 B_4^4 B_4^5 B_{11}^{11} B_{11}^{12} CC_{10}^{10} DD_4^4 D_{11}^{11}\right]$ qui donne de la 2ème écriture élaguée de D l'image :

$$\perp \underbrace{[B_4C]}_{1}\ \underbrace{[AB_4D_4]}_{2}\ \cancel{\underbrace{[AB_4B_4]}_{3}}\ \cancel{\underbrace{[B_4C]}_{4}}\ \underbrace{[CD]}_{5}\ \underbrace{[B_2C_{10}]}_{9}\ \underbrace{[B_{11}C_{10}D]}_{10}\ \underbrace{[AB_{11}D_{11}]}_{11}$$
$$\cancel{\underbrace{[AB_{11}D_{11}]}_{12}}\ \underbrace{[B_{11}C_{10}]}_{13}\ \underbrace{[B_2C]}_{14}$$

Le 13° facteur est sous-espace du 10° et on obtient finalement

$$\perp \underbrace{[B_4C]}_{1}\ \underbrace{[AB_4]}_{2}\ \underbrace{[AB_{11}]}_{11}\ \underbrace{[B_{11}C_{10}D]}_{10}\ \underbrace{[B_2C_{10}]}_{9}\ \underbrace{[B_2C]}_{14}\ \underbrace{[CD]}_{5}$$

que je représente graphiquement :



Une recherche systématique ne fait trouver aucun morphisme fidèle de l'ensemble formaté des facteurs dans une partie de cet ensemble; on a obtenu une forme élaguée standardisée : $\perp [B_4C]\ [AB_4]\ [CD]$ $[B_2C_{10}]\ [B_{11}C_{10}D]\ [AB_{11}]\ [B_2C]$.

8. <u>ETUDE D'UN ENSEMBLE $\mathcal{T}$ DE FERMETURES INCLUANT L'ENSEMBLE DES DECOMPOSITIONS CYLINDREES GENERALISEES ET D'UN ENSEMBLE $\gamma(\mathcal{T})$ D'OPERATEURS INCLUANT L'ENSEMBLE DES DECOMPOSITIONS GENERALISEES ; LIMITE INDUCTIVE</u>.

a) <u>Etude de l' $\cap$ -sous-demi-treillis $(\mathcal{T}, \leq)$ du treillis des préfermetures sur $\mathfrak{R}_{E_\Omega}$</u>

Soit $\mathcal{D}_G$ l'ensemble des décompositions généralisées.

Soit $D \in \mathcal{D}_G$; la restriction à $\mathfrak{R}_{E_\Omega}$ de $\top \circ D$ est une préfermeture sur $\mathfrak{R}_{E_\Omega}$; l'idée peut donc venir naturellement d'étudier l'ensemble des $(\top \circ D)_{D \in \mathcal{D}_G}$ et d'en déduire des propriétés de $\mathcal{D}_G$. Mais il s'avère que si $\{\top \circ D\}_{D \in \mathcal{D}_G}$ est stable par $*$ fini et par o, il n'est pas stable par passage à la limite inductive $\uparrow$; nous allons donc étudier un ensemble plus vaste. Par souci de simplicité, j'ai choisi d'étudier un ensemble de préfermetures ayant celles des propriétés des $\top \circ D$ qui me seront utiles dans les démonstrations.

Soit Π l'ensemble des préfermetures f sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ ayant les propriétés ci-dessous :

- f est d'ordre algébrique fini borné ou non
- il existe un sous-espace de E_Ω noté E_f et appelé espace image de f tel que :
  $\forall R \in \mathcal{R}_{E_\Omega}$: $f(R) = \top(R')$ où R' est une relation définie sur E_f et $R' \subset \underset{V \text{ var } E_f}{*} [V](R)$
  (Remarque $R' = \underset{E_f}{\perp} f(R)$)
- f transforme un "cylindre" en un "cylindre", c'est-à-dire que si $R = \top \circ \underset{E}{\perp} R$ est une relation définie sur E_Ω , E étant un sous-espace de E_Ω, alors $f(R) = \top \circ \underset{E}{\perp} f(R)$.

On voit que l'ensemble $\mathcal{D}_{cyl} = \{\top \circ D / D \in \mathcal{D}_G\}$ des décompositions cylindrées généralisées est inclus dans Π.

Ordonnons Π par la restriction à Π de l'ordre habituel du treillis des préfermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$.

Alors $\forall f_1 \in \Pi : \forall f_2 \in \Pi : f_1 \leqslant f_2 \Rightarrow E_{f_2} \lhd E_{f_1}$.

Soit deux préfermetures f_1 et f_2 éléments de Π .

La borne inférieure $f_1 * f_2$ de leur ensemble
- est d'ordre fini

- est telle que $(f_1 * f_2)(R) = \top(R'_1) * \top(R'_2)$

(où R'_1 est définie sur E_{f_1} et R'_2 sur E_{f_2})

$$(f_1 * f_2)R = \top(R'_1 * R'_2)$$

où $R'_1 * R'_2$ est définie sur $E_{f_1} \nabla E_{f_2}$

et $R'_1 * R'_2 \subset \underset{V \text{ var } E_{f_1} \nabla E_{f_2}}{*} [V] R$

- $f_1 * f_2$ transforme tout "cylindre"

$R = \top \circ \perp_E (R)$ en l'intersection de "cylindres" :

$(\top \circ \perp_E \circ f_1(R)) * (\top \circ \perp_E \circ f_2(R))$ qui est égale à

$\top \circ \perp_E \circ (f_1(R) * f_2(R))$

Donc $f_1 * f_2 \in \widetilde{\Pi}$ et a pour espace image $E_{f_1} \nabla E_{f_2}$. Par contre, $\widetilde{\Pi}$ n'est pas stable par intersection infinie, car la borne inférieure d'un ensemble infini d'éléments de $\widetilde{\Pi}$ n'est pas en général d'ordre fini.

$(\widetilde{\Pi}, \leq)$ est un $\cap$ demi-treillis non complet du treillis des fermetures sur $\mathbb{R}_{E_\Omega}$.

$(\widetilde{\Pi}, \leq)$ n'est pas stable non plus en général par passage à la borne supérieure sur le treillis des préfermetures.

Pourtant la borne supérieure d'un ensemble d'éléments f de $\widetilde{\Pi}$ ayant le même espace image est élément de $\widetilde{\Pi}$. En effet :

soit $\mathcal{G}$ un tel ensemble d'éléments de $\widetilde{\Pi}$

- $\underset{f \in \mathcal{G}}{\mathrm{Sup}}(f)$ est d'ordre algébrique fini puisque

$$p \in (\underset{f \in \mathcal{G}}{\mathrm{Sup}}(f))(R) \Rightarrow \exists f \in \mathcal{G} : p \in f(R)$$

- $(\forall f \in \mathcal{G} : f(R) = \top(R'_f)$ et $R'_f \subset \underset{V \text{ var } E_f}{*} [V](R)) \Rightarrow$

$$\underset{f \in \mathcal{G}}{\mathrm{Sup}}(f(R)) = \top \underset{f \in \mathcal{G}}{\mathrm{Sup}}(R'_f) \text{ et } \underset{f \in \mathcal{G}}{\mathrm{Sup}}(R'_f) \subset \underset{V \text{ var } E_f}{*} [V](R)$$

- si $R = \top(\perp_E R) \Rightarrow \forall f \in \mathcal{G} : f(R) = \top \circ \perp_E (f(R))$

alors $R = \top(\perp_E R) \Rightarrow \underset{f \in \mathcal{G}}{\mathrm{Sup}}(f(R)) = \top \perp_E (\underset{f \in \mathcal{G}}{\mathrm{Sup}}(f(R)))$

Enfin $(\widetilde{\Pi}, \leqslant)$ est manifestement stable par composition des applications. L'espace de définition de $f_2 \circ f_1$ est $E_{f_1} \Delta E_{f_2}$ puisque

$$f_2 \circ f_1(R) = f_2(\top \circ \underset{E_{f_1}}{\perp} \circ f_1(R))$$

$$= \top \circ \underset{E_{f_1}}{\perp} \circ f_2(f_1(R))$$

$$= \top \circ \underset{E_{f_1}}{\perp} (\top \circ \underset{E_{f_2}}{\perp} (f_2(f_1(R))))$$

$$= \top \circ \underset{E_{f_1} \Delta E_{f_2}}{\perp} \circ f_2 \circ f_1(R)$$

$$\text{et } \underset{E_{f_1} \Delta E_{f_2}}{\perp} (f_2 \circ f_1(R)) \subset \underset{V \text{ var } E_{f_1} \Delta E_{f_2}}{*} [V] (R)$$

Si f^n est le composé $n^{\text{ème}}$ de f et si $f \in \widetilde{\Pi}$, $f^n \in \widetilde{\Pi}$ et $E_{f^n} = E_f$; donc $\underset{n \in \mathbb{N}}{\operatorname{Sup}}(f^n) \in \widetilde{\Pi}$. Or $f^{\uparrow} = \underset{n \in \mathbb{N}}{\operatorname{Sup}}(f^n)$ puisque f est d'ordre algébrique fini.

Donc, si $f \in \widetilde{\Pi}$, sa limite inductive $f^{\uparrow}$ est élément de $\widetilde{\Pi}$ (cf. annexe 7) et l'espace image $E_{f^{\uparrow}}$ de $f^{\uparrow}$ est égal à E_f.

b) <u>Ensemble d'applications de $\mathcal{R}_\Omega$ dans $\mathcal{R}_\Omega$ isomorphe à l'$\cap$ - demi-treillis $(\widetilde{\Pi}, \leqslant)$.</u>

A toute application f de $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ dans $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ élément de $\widetilde{\Pi}$, faisons correspondre l'application $\gamma(f)$ de $\mathcal{R}_\Omega$ dans $\mathcal{R}_\Omega$ qui à toute relation R de $\mathcal{R}_\Omega$ donne pour image $(\gamma(f))(R) = \underset{E_f \Delta E_R}{\perp} \circ f(R)$; $(\gamma(f))R$ est alors une relation définie sur l'espace $E_f \Delta E_R$.

L'application γ est injection de $\widetilde{\Pi}$ dans l'ensemble des applications de $\mathcal{R}_\Omega$ dans $\mathcal{R}_\Omega$. On appellera $\gamma(\widetilde{\Pi})$ son ensemble image. Montrons que γ est bien injective :

Soit $f' \in \gamma(\widetilde{\Pi})$. Il existe une application $f \in \widetilde{\Pi}$ telle que $f' = \gamma(f)$. Montrons qu'elle est unique. Pour toute relation $R \in \mathcal{R}_{E_\Omega}$, $\top \circ f'(R) = \top \circ \underset{E_f}{\perp} \circ f(R)$ puisque $E_R = E_\Omega$

$= f(R)$ par définition de E_f.

Donc si nous appelons par abus de langage f' à la fois l'application f' de $\mathcal{R}_\Omega$ dans $\mathcal{R}_\Omega$ et sa restriction à $\mathcal{R}_{E_\Omega}$, $f = \top \circ f'$.

Définissons sur $\gamma(\widehat{\Pi})$ la relation $\leqslant$ par :

$$\forall f'_1 \in \gamma(\widehat{\Pi}) : \forall f'_2 \in \gamma(\widehat{\Pi}) : f'_1 \leqslant f'_2 \Leftrightarrow \forall R \in \mathcal{R}_\Omega : f'_1(R) \leqslant^* f'_2(R)$$

On démontre immédiatement que

$$\forall f'_1 \in \gamma(\widehat{\Pi}) \; \forall f'_2 \in \gamma(\widehat{\Pi}) : f'_1 \leqslant f'_2 \Leftrightarrow \gamma^{-1}(f'_1) \leqslant \gamma^{-1}(f'_2)$$

la relation $\leqslant$ définie sur $\gamma(\widehat{\Pi})$ est donc un ordre ;
$(\widehat{\Pi}, \leqslant)$ et $(\gamma(\widehat{\Pi}), \leqslant)$ sont deux $\cap$ -demi-treillis isomorphes.
On remarque que $(\mathfrak{G}_{cyl}, \leqslant)$ et $(\mathfrak{G}_G, \leqslant)$ sont respectivement sous $\cap$-demi-treillis de $(\widehat{\Pi}, \leqslant)$ et de $(\gamma(\widehat{\Pi}), \leqslant)$.

c) <u>Correspondance entre les diverses structures de $\widehat{\Pi}$ et de $\gamma(\widehat{\Pi})$</u>

Les éléments de $\widehat{\Pi}$ sont des préfermetures ; voyons d'abord quelles propriétés des préfermetures sont conservées par les éléments de $\gamma(\widehat{\Pi})$.
Nous ne rédigeons que les démonstrations présentant quelque difficulté.

<u>Croissance</u>

$$\forall f \in \gamma(\widehat{\Pi}) : \forall R_1 \in \mathcal{R}_\Omega : \forall R_2 \in \mathcal{R}_\Omega : R_1 \subset R_2 \Rightarrow f(R_1) \subset f(R_2)$$

<u>Pseudo-croissance</u> (pour le préordre $\leqslant^*$)

$$\forall f \in \gamma(\widehat{\Pi}) : \forall R_1 \in \mathcal{R}_\Omega : \forall R_2 \in \mathcal{R}_\Omega : R_1 \leqslant^* R_2 \Rightarrow f(R_1) \leqslant^* f(R_2)$$

Démonstration : si $R_1 \leqslant^* R_2$, alors $\top R_1 \subset \top R_2$

$$\text{or } \top R_1 = \top \circ \perp_{E_{R_1}} R_1 \text{ et } \top R_2 = \top \circ \perp_{E_{R_2}} R_2$$

$$\top \circ \perp_{E_{R_1}} R_1 \subset \top \circ \perp_{E_{R_2}} R_2 \text{ ; soit } f \in \gamma(\widehat{\Pi}) ;$$

$$(\gamma^{-1}(f))(\top \circ \perp_{E_{R_1}} R_1) \subset (\gamma^{-1}(f))(\top \circ \perp_{E_{R_2}} R_2)$$

$$\top \circ \perp_{E_{R_1}} (\gamma^{-1}(f))(\top R_1) \subset \top \circ \perp_{E_{R_2}} (\gamma^{-1}(f))(\top R_2)$$

$$\top \circ (\perp_{E_{R_1} \Delta E_f} \circ (\gamma^{-1}(f)) \circ \top)(R_1) \subset \top \circ (\perp_{E_{R_2} \Delta E_f} \circ (\gamma^{-1}(f)) \circ \top)(R_2)$$

$$\top \circ f(R_1) \subset \top \circ f(R_2)$$

<u>Pseudo-extensivité</u>

$\forall f \in \gamma(\Pi) : \forall R \in \mathcal{R}_\Omega : \perp_{E_f}(R) \subset f(R)$

ou encore

$\forall f \in \gamma(\widehat{\Pi}) : \forall R \in \mathcal{R}_\Omega : R \leq_* f(R)$

<u>Image d'un cylindre par $f \in \gamma(\Pi)$</u> : Si $R = \top^{E_R} \perp_E (R)$ et si $f \in \gamma(\widehat{\Pi})$, alors :

$$f(R) = (\perp_{E_f \Delta E_R} \circ (\gamma^{-1}(f)) \circ \top)(R)$$

$$= \perp_{E_f \Delta E_R} (\gamma^{-1}(f))(\top \circ \perp_E (R))$$

$$= \perp_{E_f \Delta E_R} (\top \circ \perp_E (\gamma^{-1}(f))(\top(R)))$$

$$= \top^{E_f \Delta E_R} \circ \perp_{E_F \Delta E_R \Delta E} (\gamma^{-1}(f))(\top(R))$$

$$= \top^{E_f \Delta E_R} \circ \perp_E f(R)$$

<u>Image par γ d'une application composée</u>

$\forall f_1 \in \Pi : \forall f_2 \in \Pi : \gamma(f_1 \circ f_2) = \gamma(f_1) \circ \gamma(f_2)$

Démonstration :

Pour tout couple de préfermetures $(f_1, f_2) \in \Pi^2$

Pour toute relation $R \in \mathcal{R}_\Omega$:

$$(\gamma(f_2)) \circ (\gamma(f_1))(R) = \perp_{E_{f_1} \Delta E_{f_2} \Delta E_R} \circ f_2 \circ \top \circ \perp_{E_{f_1} \Delta E_R} \circ f_1 \circ \top (R)$$

$$= \Big|_{E_{f_1} \Delta E_{f_2} \Delta E_R} \circ f_2 \circ \top \circ \bot_{E_{f_1}} \circ \top \circ \bot_{E_R} \circ f_1 \circ \top (R)$$

$$= \Big|_{E_{f_1} \Delta E_{f_2} \Delta E_R} \circ f_2 \circ \top \circ \bot_{E_{f_1}} \circ \top \circ \bot_{E_R} \circ f_1 \circ \top \circ \bot_{E_R} (R)$$

$$= \Big|_{E_{f_1} \Delta E_{f_2} \Delta E_R} \circ f_2 \circ \top \circ \bot_{E_{f_1}} \circ f_1 \circ \top \circ \bot_{E_R} (R)$$

(cf. définition de $\widetilde{\Pi}$)

$$= \Big|_{E_{f_1} \Delta E_{f_2} \Delta E_R} \circ f_2 \circ f_1 \circ \top \circ \bot_{E_R} (R)$$

(définition de E_{f_1})

$$= \Big|_{E_{f_1} \Delta E_{f_2} \Delta E_R} \circ (f_2 \circ f_1) \circ \top (R)$$

Or $E_{f_2 \circ f_1} = E_{f_2} \Delta E_{f_1}$

Donc $\gamma(f_2) \circ \gamma(f_1) = \gamma(f_2 \circ f_1)$

Les ensembles des éléments idempotents de $\widetilde{\Pi}$ et de $\gamma(\widetilde{\Pi})$ sont donc mis en bijection par γ .

<u>Image d'une limite inductive</u>

$(\widetilde{\Pi}, \leq)$ et $(\gamma(\widetilde{\Pi}), \leq)$ étant des ensembles ordonnés isomorphes,

Pour tout élément f de $\widetilde{\Pi}$,

$$\gamma(f^{\uparrow}) = \gamma(\operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} f^n)$$

$$= \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \gamma(f^n)$$

$$= \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} (\gamma(f))^n$$

Posons $\forall g \in \gamma(\widetilde{\Pi}) : g^{\uparrow} = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} (g^n)$; alors $\gamma(f^{\uparrow}) = (\gamma(f))^{\uparrow}$

D'après ce qui précède, les éléments idempotents de $\widetilde{\Pi}$, comme ceux de $\gamma(\widetilde{\Pi})$ sont les opérateurs f tels que $f = f^{\uparrow}$. En particulier les décompositions simples D étant idempotentes sont telles que $D = D^{\uparrow}$.

d) Premières propriétés des limites inductives

Utilisons les résultats donnés au paragraphe 8 de l'annexe :

$$\forall f \in \widetilde{\Pi} : f \leq f^{\uparrow} \;;\; \forall f_1 \in \widetilde{\Pi} : \forall f_2 \in \widetilde{\Pi} : f_1 \leq f_2 \Rightarrow f_1^{\uparrow} < f_2^{\uparrow}.$$

Donc :

$$\forall f \in \gamma(\widetilde{\Pi}) : f \leq f^{\uparrow} \;;\; \forall f_1 \in \gamma(\widetilde{\Pi}) : \forall f_2 \in \gamma(\widetilde{\Pi}) : f_1 \leq f_2 \Rightarrow f_1^{\uparrow} \leq f_2^{\uparrow}.$$

En particulier, pour les décompositions généralisées, on obtient le résultat :

Proposition 2 : Si D^o = Identité, $D^n = DoD^{n-1}$ et $D^{\uparrow} = \sup_{n \in \mathbb{N}} D^n$, alors pour toute décomposition $D \in \mathcal{D}_G$, $D \leq D^{\uparrow}$ et $D_1 \leq D_2 \Rightarrow D_1^{\uparrow} \leq D_2^{\uparrow}$

Soient f_1 et f_2 deux éléments de $\widetilde{\Pi}$.

La borne supérieure de $\{f_1^{\uparrow}, f_2^{\uparrow}\}$ dans le treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ est $(f_1 o f_2)^{\uparrow}$. L'ensemble des $f^{\uparrow}$ ordonné de façon habituelle est donc un $\cup$ -sous-treillis du treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$. On remarque que si f_1 et f_2 sont de la forme $f_1 = \top o D_1$ et $f_2 = \top o D_2$, D_1 et D_2 étant les restrictions à $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ de décompositions généralisées, alors, la borne supérieure de $\{f_1^{\uparrow}, f_2^{\uparrow}\}$ est de la forme $(\top o D_3)^{\uparrow}$ où D_3 est la restriction à $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ de la décomposition généralisée D_1 o D_2, puisque

$$f_1 \text{ o } f_2 = \top \text{ o } D_1 \text{ o } \top \text{ o } D_2$$
$$= \top \text{ o } D_1 \text{ o } D_2$$

L'isomorphisme entre $\widetilde{\Pi}$ et $\gamma(\widetilde{\Pi})$ nous permet de dire que si f_1 et f_2 sont éléments de $\gamma(\widetilde{\Pi})$, la borne supérieure de $\{f_1^{\uparrow}, f_2^{\uparrow}\}$ existe et est $(f_1 \text{ o } f_2)^{\uparrow}$.

En particulier, on obtient la proposition ci-dessous :

Proposition 13 : l'ensemble ordonné des limites inductives de décompositions généralisées est un U demi-treillis dans lequel

la borne supérieure de $\{D_1^{\uparrow}, D_2^{\uparrow}\}$ est $(D_1 o D_2)^{\uparrow}$ qui est égale à $(D_2 o D_1)^{\uparrow}$; si C_1 et C_2 sont des décompositions cylindrées généralisées, la borne supérieure $(C_1 o C_2)^{\uparrow}$ de $\{C_1, C_2\}$ dans l'ensemble ordonné des limites inductives de décompositions cylindrées généralisées est égal à la borne supérieure de $\{C_1^{\uparrow}, C_2^{\uparrow}\}$ dans le treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$.

Si l'on considère les préfermetures f_1 et $f_2 \in \widetilde{\Pi}$, on sait que

$$f_1^{\uparrow} \leq f_2^{\uparrow} \Leftrightarrow f_1^{\uparrow} \circ f_2^{\uparrow} = f_2^{\uparrow}$$

$$\Leftrightarrow f_2^{\uparrow} \circ f_1^{\uparrow} = f_2^{\uparrow}$$

L'isomorphie conduit à dire que les formules restent vraies si $f_1 \in \gamma(\widetilde{\Pi})$ et $f_2 \in \gamma(\widetilde{\Pi})$; en particulier lorsque l'on a affaire à des décompositions, on obtient la proposition:

<u>Proposition 14</u> : étant donné deux décompositions quelconques D_1 et D_2 :

$$D_1^{\uparrow} \leq D_2^{\uparrow} \Leftrightarrow D_1^{\uparrow} \circ D_2^{\uparrow} = D_2^{\uparrow}$$

$$\Leftrightarrow D_2^{\uparrow} \circ D_1^{\uparrow} = D_2^{\uparrow}$$

on remarquera que cette propriété avait déjà été établie dans le cas des décompositions simples où $D^{\uparrow} = D$.

9. <u>PREORDRE $\succ\!\!\!=\!\!>$ SUR $\widetilde{\Pi}$ ET PREORDRE DE FINESSE SUR $\gamma(\widetilde{\Pi})$</u>

a) <u>Définitions</u> : <u>invariants ; applications pleines</u>.

Si $f \in \widetilde{\Pi}$ et $R \in \mathcal{R}_{E_\Omega}$, on dit que R est un invariant de f si f(R)=R.

Puisque $f(R) = \top \circ \underset{E_f}{\perp} R$, cela implique que tout invariant R de f est de la forme $R = \top \circ \underset{E_f}{\perp} R$: c'est un "cylindre".

Dans la pratique, étant donné une application $f \in \gamma(\widetilde{\Pi})$, on pourrait dire qu'une relation R est pseudo-invariante par f en choisissant par définition un des trois critères suivants :

-1: $\top R$ est invariant de $\gamma^{-1}(f)$; ce qui reviendrait à ne considérer comme pseudo-invariantes que les relations R telles que $E_R \lhd E_f$ ou les relations obtenues par cylindrage des précédentes. Ce point de vue présente peu d'intérêt car nous désirons pouvoir parler des propriétés d'une projection sur E_f d'une relation $R \neq \overset{E_R}{\top} \circ \underset{E_f}{\perp} R$.

-2: $\top \circ \underset{E_f}{\perp} R$ est invariant par $\gamma^{-1}(f)$; ce qui reviendrait à dire que R est pseudo-invariante par f si sa projection sur E_f est invariante par f ; ce point de vue a l'inconvénient de ne pas distinguer l'étude par exemple de $\perp [AC_1][BC_1]$ et de $[A][B]$.

-3: $f(R) = \underset{E_f}{\perp} R$; ce qui revient à dire que R est pseudo-invariante par f si R et f(R) ont même projection sur E_f. Ce troisième point de vue n'est pas le plus simple mais c'est celui que nous retiendrons comme le plus utile.

<u>Exemple</u> : Soit la décomposition $[AB_1][B_1C]$;
quelles relations peut-on considérer comme pseudo-invariantes par elle ?

La relation $< B > * \{a,a'\} * \{c,c'\}$ vérifie les critères 1,2,3.
La relation $\{\{a,b,c\}, \{a,b,c'\}, \{a',b',c\}, \{a',b'',c'\}\}$ vérifie les critères 2,3.
La relation $\{\{a,b,c\}, \{a,b,c'\}, \{a',b',c\}\}$ vérifie le critère 3.

<u>Définitions</u> : on dit qu'une relation $R \in \mathcal{R}_\Omega$ <u>admet</u> $f \in \gamma(\Pi)$ si et seulement si $f(R) = \underset{E_f}{\perp} R$.

Les applications de $\mathcal{R}_\Omega$ dans $\mathcal{R}_\Omega$ éléments de $\gamma(\Pi)$ admises par toutes les relations sont les projections. On qualifie ces applications de <u>banales</u>. En particulier une décomposition qualifiée de banale est une projection.
Une application $f \in \Pi$ est dite <u>pleine</u> si et seulement si $f = f \circ \top \circ \underset{E_f}{\perp}$; une application $f \in \gamma(\Pi)$ est dite <u>pleine</u> si et seulement si $f = f \circ \underset{E_f}{\perp}$. On vérifie que

$\forall f \in \Pi$: f est pleine $\Leftrightarrow \gamma(f)$ est pleine.

<u>Propriétés</u>

III-9-1. $\forall\ f \in \Pi\ :\ \forall\ R \in \mathcal{R}_{E_\Omega}\ :\ f(R)=R \Leftrightarrow (R = \top \underset{E_f}{\perp} R \text{ et } \underset{E_f}{\perp} R \text{ admet } \gamma(f))$

$$\Leftrightarrow (R = \top \underset{E_f}{\perp} R \text{ et } R \text{ admet } \gamma(f))$$

III-9-2. $\forall\ f \in \Pi : \forall\ R \in \mathcal{R}_\Omega\ :\ f(\top \underset{E_f}{\perp} R) = \top \underset{E_F}{\perp} (R) \Leftrightarrow R \text{ admet } \gamma(f) o \underset{E_f}{\perp}$

$$\Leftrightarrow \underset{E_f}{\perp} R \text{ admet } \gamma(f)$$

III-9-3. Si $f \in \Pi$ est pleine, alors

$$\forall\ R \in \mathcal{R}_\Omega\ :\ f(\top \underset{E_f}{\perp} (R)) = \top \underset{E_f}{\perp} (R) \Leftrightarrow R \text{ admet } \gamma(f)$$

III-9-4. $\forall\ f \in \gamma\ (\Pi)\ :\ f^{\uparrow} = (f\ o \underset{E_f}{\perp})^{\uparrow}$ et $f^{\uparrow}$ est pleine.

III-9-5. $\forall\ f \in \Pi\ :\ f^{\uparrow} = (f\ o \top o \underset{E_f}{\perp})^{\uparrow}$ et $f^{\uparrow}$ est pleine.

Démontrons III-9-4 d'où III-9-5 se déduit puisque

$$\gamma(f\ o \top o \underset{E_f}{\perp}) = \gamma(f)\ o \underset{E_f}{\perp}$$

Soit $f \in \gamma\ (\Pi)$

on sait que $f = \underset{E_f}{\perp}\ o\ f$

Donc $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ :\ f^n = (\underset{E_f}{\perp}\ o\ f)^n$

$$= \underset{E_f}{\perp}\ o\ (f\ o \underset{E_f}{\perp})^{n-1}\ o\ f$$

$$= (f\ o \underset{E_f}{\perp})^{n-1}\ o\ f$$

$$f^{\uparrow} = \underset{n \in \mathbb{N}^*}{\mathrm{Sup}}\ (f\ o \underset{E_f}{\perp})^{n-1}\ o\ f$$

$$\geqslant \underset{n \in \mathbb{N}^*}{\mathrm{Sup}}\ (f\ o \underset{E_f}{\perp})^{n-1}$$

$$\geqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} (f \circ \perp_{E_f})^n$$

$$\geqslant (f \circ \perp_{E_f})^{\uparrow}$$

Or $f \leqslant (f \circ \perp_{E_f})$ et donc $f^{\uparrow} \leqslant (f \circ \perp_{E_f})^{\uparrow}$

$$= (f \circ \perp_{E_f})^{\uparrow}$$

$$(f \circ \perp_{E_f})^{\uparrow} \leqslant (f \circ \perp_{E_f})^{\uparrow} \circ \perp_{E_f} \leqslant (f \circ \perp_{E_f})^{\uparrow} \circ (f \circ \perp_{E_f}) = (f \circ \perp_{E_f})^{\uparrow}$$

donc $(f \circ \perp_{E_f})^{\uparrow} \circ \perp_{E_f} = (f \circ \perp_{E_f})^{\uparrow}$; $(f \circ \perp_{E_f})^{\uparrow}$ est plein et $f^{\uparrow}$ aussi.

b) <u>Préordre de finesse-définition</u>

Nous définirons sur Π la relation $>\!\Rightarrow$ par :

"$f_2 >\!\Rightarrow f_1$ si l'ensemble des invariants de f_2 est inclus dans l'ensemble des invariants de f_1". $>\!\Rightarrow$ est la restriction à Π du préordre régulier associé à la fermeture "limite inductive" $\uparrow$ sur le treillis des préfermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$.

Donc (cf. annexe, 8.) :

$\forall f \in \Pi$: $f >\!\Rightarrow f^{\uparrow}$ et $f^{\uparrow} >\!\Rightarrow f$ ce que nous noterons $f \asymp f^{\uparrow}$.

De plus, $\forall f_1 \in \Pi$: $\forall f_2 \in \Pi$: $f_2 >\!\Rightarrow f_1 \Leftrightarrow f_1^{\uparrow} \leqslant f_2^{\uparrow}$

On en déduit que $f_2 >\!\Rightarrow f_1 \Leftrightarrow f_1 \circ f_2^{\uparrow} = f_2^{\uparrow}$

et que $\quad f_2 >\!\Rightarrow f_1 \Rightarrow E_{f_2} \lhd E_{f_1}$

Enfin, $\uparrow$ étant croissante, $f_1 \leqslant f_2 \Rightarrow f_1^{\uparrow} \leqslant f_2^{\uparrow}$

$$\Rightarrow f_2 >\!\Rightarrow f_1$$

Pour pouvoir utiliser ces résultats en vue de l'établissement de résultats similaires sur $\gamma(\Pi)$, nous allons d'abord définir sur $\gamma(\Pi)$ la relation $\rightsquigarrow$ par : "$f_2 \rightsquigarrow f_1$ si toute relation admettant f_2 admet f_1. On constate immédiatement que $\rightsquigarrow$ est un préordre sur $\gamma(\Pi)$. Nous désignerons par $\rightsquigarrow\!\!\leftarrow$ la relation d'équivalence associée et nous appellerons <u>dépendances sur $\gamma(\Pi)$</u> les classes d'équivalence du préordre de finesse sur $\gamma(\Pi)$.

Remarquons dès maintenant que :

III-9-6. $\forall f_1 \in \gamma(\Pi) : \forall f_2 \in \gamma(\Pi) : (f_2 \rightsquigarrow f_1$ et

$$f_1 \text{ non banale}) \Rightarrow E_{f_1} \lhd E_{f_2}.$$

En effet, soit R une relation définie sur E_{f_1} et n'admettant pas f_1 ; il en existe une si f_1 est non banale. Alors il existe au moins un point $p \in f_1(R)$ tel que $p \notin R$. Supposons qu'il existe une variable V de E_{f_1} qui ne soit pas variable de E_{f_2} ; alors, soit $v = coor_V(p)$; construisons une relation incluant R et admettant f_2 ; pour cela nous prendrons une relation R_1 sur E_{f_1} incluant R et telle que $\underset{E_{f_2}}{\perp} R_1 = f_2(\underset{E_{f_2}}{\perp} R)$ de la façon suivante:

soit $p' \in E_{f_1} \Delta \overline{E}_{f_2}$ tel que $coor_V(p') \neq v$ et $R_1 = R \cup \{p'\} * f_2^{\uparrow}(\underset{E_{f_2}}{\perp} R)$.

Alors $p \notin R_1$ et, puisque $R \subset R_1$, $p \in f_1(R_1)$. R_1 admet f_2 et non non R_1 ; on n'a donc pas $f_2 \rightsquigarrow f_1$.

III-9-7. $\forall f_1 \in \gamma(\Pi) : \forall f_2 \in \gamma(\Pi) : (f_1 \leqslant f_2$ et

$$E_{f_1} = E_{f_2}) \Rightarrow f_2 \rightsquigarrow f_1$$

en effet, si $f_1 \leqslant f_2$ et $E_{f_1} = E_{f_2}$, alors :

$$\forall R \in \mathcal{R}_\Omega : \underset{E_{f_1}}{\perp}(R) \leqslant f_1(R) \leqslant f_2(R).$$

c) <u>Correspondance entre les préordres $(\widehat{\Pi}, \succ\!\!\Rightarrow)$ et $(\gamma(\widehat{\Pi}), \rightsquigarrow)$.</u>

III-9-8. Si $f_1 \in \widehat{\Pi}$, $f_2 \in \widehat{\Pi}$ et si f_2 est pleine, alors

$$f_2 \succ\!\!\Rightarrow f_1 \Rightarrow (E_{f_2} \lhd E_{f_1} \text{ et } \gamma(f_2) \rightsquigarrow \gamma(f_1) \circ \underset{E_{f_2}}{\perp}$$

III-9-9. Si $f_1 \in \widetilde{\Pi}$, $f_2 \in \widetilde{\Pi}$, alors

$$\gamma(f_2) \rightsquigarrow \gamma(f_1) \Rightarrow \left(E_{f_1} \lhd E_{f_2} \text{ et } \top \circ \underset{E_{f_1}}{\perp} \circ f_2 \twoheadrightarrow f_1\right)$$

Démonstration du III-9-8.

Supposons $f_1 \in \widetilde{\Pi}$, $f_2 \in \widetilde{\Pi}$ et $f_2 \twoheadrightarrow f_1$;

Alors $E_{f_2} \lhd E_{f_1}$ (d'après b)

$f_1 \lesssim f_2$ (d'après b)

Soit R admettant $\gamma(f_2)$; alors d'après III-9-3, $\top \circ \underset{E_{f_2}}{\perp} R$ est invariant de f_2 puisque f_2 est pleine donc $\top \circ \underset{E_{f_2}}{\perp} R$ est invariant de f_1.

Donc $\underset{E_{f_1} \Delta (E_{f_2} \Delta E_R)}{\underline{\quad | \quad}} \left(f_1\left(\top \circ \underset{E_{f_2}}{\perp} R\right)\right) = \underset{E_{f_1} \Delta E_{f_2} \Delta E_R}{\underline{\quad | \quad}} \left(\top \circ \underset{E_{f_2}}{\perp} R\right)$

$$\gamma(f_1)\left(\underset{E_{f_2}}{\perp}(R)\right) = \underset{E_{f_1}}{\perp}\left(\underset{E_{f_2}}{\perp}(R)\right)$$

or $E_{f_1} \Delta E_{f_2}$ est l'espace image de $\gamma(f_1) \circ \underset{E_{f_2}}{\perp}$

$$\gamma(f_1) \circ \underset{E_{f_2}}{\perp}(R) = \underset{E_{f_1} \Delta E_{f_2}}{\perp}(R)$$

R admet $\gamma(f_1) \circ \underset{E_{f_2}}{\perp}$

$$\gamma(f_2) \rightsquigarrow \gamma(f_1) \circ \underset{E_{f_2}}{\perp}$$

Démonstration de III-9-9.

Supposons $f_1 \in \widetilde{\Pi}$, $f_2 \in \widetilde{\Pi}$ et $\gamma(f_2) \rightsquigarrow \gamma(f_1)$

$E_{f_1} \lhd E_{f_2}$ (d'après III-9-6.)

Soit R une relation définie sur E_Ω et invariant de $\top \circ \underset{E_{f_1}}{\perp} \circ f_2$, décomposition qui a E_{f_1} pour espace image, puisque $E_{f_2} \Delta E_{f_1} = E_{f_1}$.

Alors $R = \top \circ \underset{E_{f_1}}{\perp}(R)$ et $\underset{E_{f_1}}{\perp}(R)$ admet $\gamma(\top \circ \underset{E_{f_1}}{\perp} \circ f_2)$ d'après III-9-2, mais

$$\gamma((\top \circ \underset{E_{f_1}}{\perp}) \circ f_2) = \gamma(\top \circ \underset{E_{f_1}}{\perp}) \circ \gamma(f_2)$$
$$= \underset{E_{f_1}}{\perp} \circ \gamma(f_2)$$

Donc $\underset{E_{f_1}}{\perp} \circ \gamma(f_2)\,(\underset{E_{f_1}}{\perp}(R)) = \underset{E_{f_1}}{\perp}(R)$

or $\gamma(f_2)(\underset{E_{f_1}}{\perp}(R))$ est une relation définie sur $E_{f_1} \Delta E_{f_2} = E_{f_1}$

$$\gamma(f_2)\,(\underset{E_{f_1}}{\perp}(R)) = \underset{E_{f_1}}{\perp}(R)$$
$$= \underset{E_{f_2} \Delta E_{f_1}}{\perp}(R)$$

$\underset{E_{f_1}}{\perp}(R)$ admet $\gamma(f_2)$ donc $\gamma(f_1)$

Mais par hypothèse $R = \top \circ \underset{E_{f_1}}{\perp} R$;

$$= \top \circ \gamma(f_1)\, R$$

$$= f_1\,(R)$$

R est invariant de f_1.

$$\top \circ \underset{E_{f_1}}{\perp} \circ f_2 \rightsquigarrow f_1$$

d) <u>Propriétés du préordre de finesse ($\gamma(\Pi)$, $\rightsquigarrow$)</u>

Utilisons les formules ci-dessus pour établir celles qui suivent:

Soient $f_1 \in \gamma(\Pi)$ et $f_2 \in \gamma(\Pi)$

III-9-10. $f_2 \rightsquigarrow f_1 \Rightarrow (E_{f_1} \lhd E_{f_2}$ et $f_1^{\uparrow} \leqslant (\underset{E_{f_1}}{\perp} \circ f_2)^{\uparrow}$)

III-9-11. Si f_1 et f_2 sont pleines et si $E_{f_1} = E_{f_2}$, alors :

$$f_2 \rightsquigarrow f_1 \Leftrightarrow f_1^{\uparrow} \leqslant f_2^{\uparrow}$$

III-9-12. $f_1 \leftrightsquigarrow f_2 \Rightarrow f_1^{\uparrow} = f_2^{\uparrow}$

III-9-13. Si f_1 et f_2 sont pleines $f_1 \leftrightsquigarrow f_2 \Leftrightarrow f_1^{\uparrow} = f_2^{\uparrow}$

en particulier si f est pleine $f \leftrightsquigarrow f^{\uparrow}$

III-9-14. $\forall\, f \in \widehat{\Pi}$: $f^{\uparrow} \asymp f \circ \top \circ \underset{E_f}{\perp}$ et $f^{\uparrow} \succ\!\Rightarrow f$.

III-9-15. $\forall\, f \in \gamma(\widehat{\Pi})$: $f^{\uparrow} \leftrightsquigarrow f \circ \underset{E_f}{\perp}$ et $f \circ \underset{E_f}{\perp} \rightsquigarrow f$

Démonstration de III-9-10.

$f_2 \rightsquigarrow f_1 \Rightarrow (E_{f_1} \lhd E_{f_2}$ et $\gamma^{-1}(\underset{E_{f_1}}{\perp} f_2) \succ\!\Rightarrow \gamma^{-1}(f_1))$ (III-9-9)

$\Rightarrow (E_{f_1} \lhd E_{f_2}$ et $(\gamma^{-1}(\underset{E_{f_1}}{\perp} f_2))^{\uparrow} \succ\!\Rightarrow (\gamma^{-1}(f_1))^{\uparrow})$

$\Rightarrow (E_{f_1} \lhd E_{f_2}$ et $(\gamma^{-1}(f_1))^{\uparrow} \leqslant (\gamma^{-1}(\underset{E_{f_1}}{\perp} f_2))^{\uparrow})$

$\Rightarrow (E_{f_1} \lhd E_{f_2}$ et $f_1^{\uparrow} \leqslant (\underset{E_{f_1}}{\perp} \circ f_2)^{\uparrow})$

Démonstration de III-9-11

$(E_{f_1} = E_{f_2}$ et $f_1^{\uparrow} \leqslant f_2^{\uparrow}) \Rightarrow \gamma^{-1}(f_2) \succ\!\Rightarrow \gamma^{-1}(f_1)$

si f_2 est pleine $\Rightarrow f_2 \rightsquigarrow f_1 \circ \underset{E_{f_1}}{\perp}$ (III-9-8 et $E_{f_1} = E_{f_2}$)

si f_1 est pleine $\Rightarrow f_2 \rightsquigarrow f_1$.

L'implication dans l'autre sens découle de III-9-10.

Démonstration de III-9-12.

$f_1 \leftrightsquigarrow f_2 \Rightarrow E_{f_1} = E_{f_2}$ (puisque $f_1 \rightsquigarrow f_2 \Rightarrow E_{f_2} \lhd E_{f_1}$)

$(E_{f_1} = E_{f_2}$ et $f_2 \rightsquigarrow f_1) \Rightarrow f_1^{\uparrow} \leqslant f_2^{\uparrow}$ (III-9-10)

$(E_{f_1} = E_{f_2}$ et $f_1 \rightsquigarrow f_2) \Rightarrow f_2^{\uparrow} \leqslant f_1^{\uparrow}$ (III-9-10)

$f_1 \leftrightsquigarrow f_2 \Rightarrow f_1^{\uparrow} = f_2^{\uparrow}$

Démonstration de III-9-13.

Si $E_{f_1} = E_{f_2}$ et si f_1 et f_2 sont pleines, alors

$f_1^{\uparrow} = f_2^{\uparrow} \Rightarrow f_2 \leftrightsquigarrow f_1$ d'après III-9-11.

Démonstration de III-9-14.

Soit $f \in \widetilde{\Pi}$

$f^{\uparrow} \twoheadrightarrow f \quad ; \; f \circ \top \circ \underset{E_f}{\perp} \bowtie (f \circ \top \circ \underset{E_f}{\perp})^{\uparrow}$

$$\text{Or} \quad \gamma((f \circ \top \circ \underset{E_f}{\perp})^{\uparrow}) = (\gamma(f) \circ \gamma(\top \circ \underset{E_f}{\perp}))^{\uparrow}$$

$$= (\gamma(f) \circ \underset{E_f}{\perp})^{\uparrow}$$

$$= (\gamma(f))^{\uparrow} \quad \text{d'après III-9-4}$$

$$= \gamma(f^{\uparrow})$$

donc $(f \circ \top \circ \underset{E_f}{\perp})^{\uparrow} = f^{\uparrow}$

et $f^{\uparrow} \bowtie f \circ \top \circ \underset{E_f}{\perp}$

Démonstration de III-9-15

Soit $f \in \gamma(\widetilde{\Pi})$

$f^{\uparrow} = (f \circ \underset{E_f}{\perp})^{\uparrow}$. Or $f \circ \underset{E_f}{\perp}$ est pleine ; donc $f \circ \underset{E_f}{\perp} \leftrightsquigarrow f^{\uparrow}$

(III-9-13)

D'autre part, $f \leqslant f \circ \underset{E_f}{\perp}$ et $f \leqslant f \circ \underset{E_f}{\perp} \Rightarrow f \circ \underset{E_f}{\perp} \rightsquigarrow f$

(III-9-7)

Donnons encore deux formules utiles :

III-9-16. $\forall f_1 \in \gamma(\widetilde{\Pi}) : \forall f_2 \in \gamma(\widetilde{\Pi}) : f_2 \rightsquigarrow f_1 \Rightarrow f_1 \circ f_2 = \underset{E_1}{\perp} \circ f_2$

III-9-17. Si f_1 et f_2 sont pleines et élément de $\gamma(\widetilde{\Pi})$, alors

$f_2 \rightsquigarrow f_1 \Leftrightarrow (E_{f_1} \lhd E_{f_2}$ et $f_1 \circ f_2^{\uparrow} = \underset{E_1}{\perp} \circ f_2^{\uparrow})$

Démonstration du III-9-16

$\forall\, R \in \mathcal{R}_{\Omega}$: $f_2^{\uparrow}(R)$ admet f_2

Démonstration du III-9-17

Supposons $E_{f_1} \lhd E_{f_2}$ et $f_1 \circ f_2^{\uparrow} = \underset{E_1}{\perp} \circ f_2^{\uparrow}$

Soit $R \in \mathcal{R}_{\Omega}$ une relation admettant f_2 ;

Si f_2 est pleine, R admet $f_2^{\uparrow}$, autrement dit $f_2^{\uparrow}(R) = \underset{E_{f_2}}{\perp}(R)$.

On sait que $f_1 \leqslant f_1 \circ \underset{E_{f_2}}{\perp} \leqslant f_1 \circ \underset{E_{f_1}}{\perp}$

puisque $E_{f_1} \lhd E_{f_2}$; or $f_1 = f_1 \circ \underset{E_{f_1}}{\perp}$ puisque f_1 est pleine;

donc $f_1 = f_1 \circ \underset{E_{f_2}}{\perp}$

Alors $f_1(R) = f_1 \circ \underset{E_{f_2}}{\perp}(R)$

$= f_1 \circ f_2^{\uparrow}(R)$ puisque R admet f_2

$= \underset{E_{f_1}}{\perp} \circ f_2^{\uparrow}(R)$ par hypothèse

$= \underset{E_{f_1}}{\perp} \circ \underset{E_{f_2}}{\perp}(R)$ puisque R admet $f_2^{\uparrow}$

$= \underset{E_{f_1}}{\perp}(R)$ puisque $E_{f_1} \lhd E_{f_2}$

R admet f_1.

10. SYNTHESE ET COMPLEMENTS APPLIQUES A$(\mathcal{O}_G, \rightsquigarrow)$

Le théorème ci-dessous résume un certain nombre des résultats précédents.

THEOREME VIII.

L'ensemble $\mathcal{D}_{\uparrow}$ des images des décompositions généralisées par l'application $\uparrow$ appelée limite inductive qui, à toute décomposition $D \in \mathcal{D}_G$, fait correspondre l'application de $\mathcal{R}_\Omega$ dans R_Ω : $D = \sup_{n \in \mathbb{N}} D^n$,

peut être ordonné par l'ordre $\leqslant$ défini par :

$$D_1^{\uparrow} \leqslant D_2^{\uparrow} \Leftrightarrow \forall R \in \mathcal{R}_\Omega : D_1^{\uparrow}(R) \leqslant^* D_2^{\uparrow}(R).$$

$(\mathcal{D}_{\uparrow}, \leqslant)$ est isomorphe à un U-sous-demi-treillis du treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_{\uparrow}$ et si $\mathcal{A} = \{ D_i^{\uparrow} / i \in [1,k] \}$ avec $\forall i \in [1,k]$: $i \neq j \Rightarrow D_i \neq D_j$, la borne supérieure de $\mathcal{A}$ dans $(\mathcal{D}_{\uparrow}, \leqslant)$ est $(\mathop{o}\limits_{i=1}^{k} D_i)^{\uparrow}$.

Pour toutes décompositions généralisées D_1 et D_2, si $E_{D_1} = E_{D_2}$, alors :

$D_2 \rightsquigarrow D_1 \Rightarrow D_1^{\uparrow} \leqslant D_2^{\uparrow}$; si de plus D_1 et D_2 sont pleines,
$D_2 \rightsquigarrow D_1 \Leftrightarrow D_1^{\uparrow} \leqslant D_2^{\uparrow}$.

Nous remarquons :

- que les décompositions pleines sont celles pour lesquelles $E_D = E_{ID}$; que la composée de deux décompositions même simples n'ayant pas même espace image n'est pas pleine en général.
- que les classes d'équivalence de la restriction du préordre de finesse à l'ensemble des décompositions généralisées ne sont pas des singletons en général, contrairement à ce qui se passait pour les décompositions simples.

Par exemple, en général $D_1 \circ D_2 \neq D_2 \circ D_1$ et $(D_1 \circ D_2)^{\uparrow} = (D_2 \circ D_1)^{\uparrow}$ si D_1 et D_2 sont des décompositions pleines ayant même espace image, $D_1 \circ D_2$ et $D_2 \circ D_1$ sont pleines, si bien que :

$(D_1 \circ D_2)^{\uparrow} \rightsquigarrow\!\!\!< D_1 \circ D_2$
$(D_2 \circ D_1)^{\uparrow} \rightsquigarrow\!\!\!< D_2 \circ D_1$
$D_1 \circ D_2 \rightsquigarrow\!\!\!< D_2 \circ D_1$

On a coutume d'appeler <u>dépendances généralisées</u> les classes d'équivalence de la restriction du préordre de finesse à $\mathcal{D}_G \cup \mathcal{D}_\uparrow$. J'appellerai dépendances pleines celles qui contiennent un $D^\uparrow$ et par conséquent au moins une application pleine.

Ce qui précède nous permet de deviner que l'étude de l'ensemble des applications pleines de γ (Π) ayant même espace image, ou des décompositions pleines définies sur le même espace, ou, pour rester plus proche des applications pratiques, des décompositions simples définies sur le même espace, va être plus facile que l'étude d'ensemble d'applications même pleines définies sur des espaces différents puisque deux applications pleines f_1 et f_2 ayant des espaces-images différents ont des composées $f_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_1$ non pleines, de finesses différentes et souvent telles qu'aucun f n'ait la même finesse.

Soit E un sous-espace de E_Ω . Nommons $\mathcal{D}_{PE}$ l'ensemble des décompositions pleines d'espace image E et $\mathcal{D}_{PE\uparrow}$ l'ensemble des fermetures inductives de ces décompositions. $(\mathcal{D}_{PE}, \leqslant)$ est un sous-$\cap$-demi-treillis de $\mathcal{D}_G$; les classes d'équivalence du préordre de finesse sur $\mathcal{D}_{PE}$ ordonné par l'ordre induit par $\rightsquigarrow$ est isomorphe au dual de $(\mathcal{D}_{PE\uparrow}, \leqslant)$. La restriction de tout élément de $\mathcal{D}_{PE}$ à $\mathcal{R}_E$ est une préfermeture ; $(\mathcal{D}_{PE}, \leqslant)$ est isomorphe à un sous-$\cap$-demi-treillis des préfermetures sur R_E.
Soit $D \in \mathcal{D}_{PE}$; la restriction de $D^\uparrow$ à $\mathcal{R}_E$ est la limite inductive de la restriction de D à $\mathcal{R}_E$; c'est une fermeture sur $\mathcal{R}_E$. Dans $(\mathcal{D}_{PE}, \leqslant)$, la borne supérieure de $\{D_1^\uparrow, D_2^\uparrow\}$ est $(D_1 \circ D_2)^\uparrow$ dont la restriction à $\mathcal{R}_E$ est la borne supérieure de l'ensemble des restrictions à $\mathcal{R}_E$ de $D_1^\uparrow$ et $D_2^\uparrow$ dans le treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_E$.

$(\mathcal{D}_{PE\uparrow}, \leqslant)$ est donc isomorphe à un sous-U-demi-treillis du treillis des fermetures sur R_E.

De ce qui précède découle immédiatement la démonstration du théorème :

THEOREME IX

Pour tout ensemble fini de décompositions pleines $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ définies sur le même espace E et pour toute relation R définie sur E, $(D_1 \circ D_2 \circ \ldots \circ D_n)^\uparrow(R)$ est la plus petite relation

incluant R et admettant toutes les décompositions de l'ensemble donné. Etant donné un ensemble $\mathcal{R}$ quelconque de relations définies sur le même espace E et une décomposition pleine D définie aussi sur E, si toutes les relations de $\mathcal{R}$ admettent D, leur intersection admet D.

11. PRINCIPE D'UN ALGORITHME POUR RECONNAITRE SI UNE DECOMPOSITION D_1 EST MOINS FINE QU'UNE DECOMPOSITION PLEINE D_2

Le théorème ci-dessous conduit à la méthode dite des "tableaux", qui date déjà de quelques années.

THEOREME X : si D_1 est non banale et si D_2 est pleine, alors pour toute écriture $D_1 = \underset{F \in F_1}{\perp} [F]$ de D_1 formatée sur E_Ω $D_2 \rightsquigarrow D_1$ si et seulement si $\left[E_{ID_1}\right](p_o) \in \left[E_{ID_1}\right](D_2^{\uparrow}(R_{F_1}))$.

Démonstration : Soit D_1 une décomposition non banale.

- si D_1 est moins fine que D_2, alors $E_{ID_1} \lhd E_{ID_2}$ et

$D_1 \circ D_2^{\uparrow} = \left[E_{ID_1}\right] \circ D_2^{\uparrow}$ (formules III-9-6 et III-9-16).

Mais $D_1 \leqslant D_1 \circ \left[E_{ID_2}\right] \leqslant D_1 \circ D_2^{\uparrow}$

donc $D_1 \leqslant \left[E_{ID_1}\right] \circ D_2^{\uparrow}$

D_1 et $\left[E_{ID_1}\right] \circ D_2^{\uparrow}$ sont des opérateurs ayant même espace image.

Or $\left[E_{ID_1}\right](p^o) \in D_1(R_{F_1})$, donc $\left[E_{ID_1}\right](p^o) \in \left[E_{ID_1}\right] \circ D_2^{\uparrow}(R_{F_1})$

- si $\left[E_{ID_1}\right](p^o) \in \left[E_{ID_1}\right] \circ D_2^{\uparrow}(R_{F_1})$

Soit R une relation définie sur E_Ω et admettant D_2 et par conséquent $D_2^{\uparrow}$ puisque D_2 est pleine.

Soit $p \in D_1(R)$. Puisque $p \in D_1(R)$ il existe un morphisme projectif H tel que $H(R_{F_1}) \subset R$ et $H(\left[E_{ID_1}\right](p^o)) = p$.

Mais $\left[E_{ID_1}\right](p^o) \in \left[E_{ID_1}\right](D_2^{\uparrow}(R_{F_1}))$ par hypothèse.

$$\left[E_{ID_1}\right](p^o) \in \left[E_{ID_1}\right](\sup_{n \in \mathbb{N}} D_2(R_{F_1}))$$

Donc $\exists\, n \in \mathbb{N} : \left[E_{ID_1}\right](p^o) \in (\left[E_{ID_1}\right] \circ D_2^n)(R_{F_1})$

$\left[E_{ID_1}\right] \circ D_2^n$ est une décomposition ayant E_{ID_1} pour espace image et que j'appellerai Δ_n

$$\left[E_{ID_1}\right](p^o) \in \Delta_n(R_{\mathbf{F}_1})$$

Posons $\Delta_n = \underset{F \in \mathbf{F}_n}{\perp} [F]$

Il existe donc un morphisme H_n tel que $H_n(R_{\mathbf{F}_n}) \subset R_{\mathbf{F}_1}$ et

$H_n(\left[E_{ID_1}\right](p^o)) = \left[E_{ID_1}\right](p^o)$.

Alors le morphisme Ho H_n est tel que

Ho $H_n(R_{\mathbf{F}_n}) \subset R$ et Ho $H_n\left[E_{ID_1}\right](p_o) = p$

D'où $p \in \Delta_n(R)$

$p \in \left[E_{ID_1}\right] D_2^n(R)$

$p \in \left[E_{ID_1}\right] D_2^{\uparrow}(R)$

et, puisque R admet D_2 et $E_{ID_1} \lhd E_{ID_2}$

$p \in \left[E_{ID_1}\right] (R)$

$\forall\, p \in D_1(R) : p \in \left[E_{ID_1}\right]R$; R admet D_1

Remarquons que la relation $R_{\mathbf{F}_1}$ étant finie et $D_2^{\uparrow}(R_{\mathbf{F}_1})$ étant compris dans le produit direct des projections de $\left[E_{ID_2}\right] R_{\mathbf{F}_1}$ sur chacune de ses variables, le calcul de $\left[E_{ID_1}\right] (D_2(R_{\mathbf{F}_1}))$ se termine toujours.

Montrons sur un contre-exemple que le théorème est faux si D_2 n'est pas pleine : $E_{\Omega} = \langle ABCD \rangle$

$D_1 = [AB][BC]$, $D_2 = \perp\ [ABD_1][BCD_1]$

D_1 n'est pas moins fine que D_2 puisque si $R = \{\{a'b'c'd'\}, \{a''b'c''d''\}\}$,
$D_2(R) = [ABC]\ (R)$ et $D_1(R) \neq [ABC]\ (R)$;

même, on peut montrer que D_2 obtenu par alourdissement de D_1 est moins fine que D_1.

Pourtant $[ABC]\ (p^o) \in D_2^{\uparrow}(R_{\mathbf{F}_1})$: D_2 n'étant pas pleine n'a pas la même finesse que $D_2^{\uparrow}$.

C H A P I T R E IV

ENSEMBLES DE DECOMPOSITIONS SIMPLES DEFINIES SUR E_{Ω}

CHAPITRE IV
ENSEMBLES DE DECOMPOSITIONS SIMPLES DEFINIES SUR E_Ω

1. TREILLIS $(\mathcal{D}_{E_\Omega}, \leqslant)$ ET TREILLIS $(\mathcal{T}^x, \subset)$, $(\mathcal{T}^x, \leqslant)$ ET $(\mathcal{T}^x, \rightsquigarrow)$.

Nous allons étudier des ensembles de décompositions simples toutes définies sur le même espace E. On peut sans inconvénient supposer que cet espace est E_Ω : on adapterait immédiatement les résultats trouvés au cas où E est un sous-espace strict de E_Ω puisque, D étant simple, $\forall R \in \mathcal{R}_\Omega$: $D(R) = D([E_D]R)$

a) Treillis $(\mathcal{D}_{E_\Omega}, \leqslant)$

Soit $\mathcal{D}_{E_\Omega}$ l'ensemble des décompositions simples d'espace E_Ω et $\mathcal{P}(\mathcal{D}_{E_\Omega})$ l'ensemble des parties de $\mathcal{D}_{E_\Omega}$.

L'ensemble ordonné $(\mathcal{D}_{E_\Omega}, \leqslant)$ est isomorphe à l'ensemble ordonné de façon habituelle des restrictions des éléments de $\mathcal{D}_{E_\Omega}$ à $\mathcal{R}_{E_\Omega}$. Par abus de langage nous nommerons aussi $(\mathcal{D}_{E_\Omega}, \leqslant)$ l'ensemble ordonné de ces fermetures.

Le plus grand élément de $\mathcal{D}_{E_\Omega}$ est $[A][B][C] \ldots [V]$, si A, B, C, ... V sont les variables de E_Ω. $\mathcal{D}_{E_\Omega}$ est donc une partie de l'ensemble des fermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ inférieures ou égales à $[A][B][C] \ldots [V]$, c'est-à-dire une partie de la section commençante principale engendrée par $[A][B][C] \ldots [V]$ dans le treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ qui est elle-même un treillis complet. Si $D_1 \in \mathcal{D}_{E_\Omega}$ et $D_2 \in \mathcal{D}_{E_\Omega}$, alors $D_1 * D_2 \in \mathcal{D}_{E_\Omega}$. Donc, puisque $\mathcal{D}_{E_\Omega}$ est fini, $(\mathcal{D}_{E_\Omega}, \leqslant)$ est une partie de Moore du treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ inférieures ou égales à $[A][B][C] \ldots [V]$

Par ailleurs $(\mathcal{D}_{E_\Omega}, \leqslant)$ est un sous-treillis complet de $(\mathcal{D}_\Omega, \leqslant)$. C'est donc un treillis distributif. Il est isomorphe au dual du treillis des recouvrements libres de Ω (cf. annexe 11).

b) Treillis $(\mathcal{T}^x, \rightsquigarrow)$

Définitions : Soit $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_{E_\Omega}$; on dit qu'une relation $R \in \mathcal{R}_\Omega$ admet $\mathcal{D}_1$ si et seulement si elle admet tous les éléments de $\mathcal{D}_1$; soient $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_{E_\Omega}$ et $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_{E_\Omega}$, on dit que $\mathcal{D}_2$ est *plus fine* que $\mathcal{D}_1$ et on note $\mathcal{D}_2 \rightsquigarrow \mathcal{D}_1$, si toute relation $R \in \mathcal{R}_\Omega$ admettant $\mathcal{D}_2$ admet $\mathcal{D}_1$.

On remarque que $\mathcal{D}_2 \rightsquigarrow \mathcal{D}_1$ si et seulement si toute relation $R \in R_{E_\Omega}$ admettant $\mathcal{D}_2$ admet $\mathcal{D}_1$.
Le préordre $(\mathcal{P}(\mathcal{D}_{E_\Omega}), \rightsquigarrow)$ est un préordre régulier sur $\mathcal{P}(\mathcal{D}_{E_\Omega})$ puisque $\forall\, \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_{E_\Omega}$: $\forall\, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_{E_\Omega}$:
$\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \quad \Rightarrow \mathcal{D}_2 \rightsquigarrow \mathcal{D}_1$ et $(\mathcal{D}_3 \rightsquigarrow \mathcal{D}_1$ et
$\mathcal{D}_3 \rightsquigarrow \mathcal{D}_2) \Rightarrow \mathcal{D}_3 \rightsquigarrow (\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2)$
(on pourra se reporter aux paragraphes 3 et 5 de l'annexe pour l'étude de ces préordres).
Notons x la fermeture associée au préordre régulier $\rightsquigarrow$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{D}_{E_\Omega})$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2 \rightsquigarrow \mathcal{D}_1 &\Leftrightarrow \mathcal{D}_2^x \rightsquigarrow \mathcal{D}_1^x \\ &\Leftrightarrow \mathcal{D}_1^x \subset \mathcal{D}_2^x \end{aligned}$$

L'ensemble des invariants de la fermeture x ordonné par inclusion est un treillis U-homomorphe à $\mathcal{P}(\mathcal{D}_{E_\Omega})$ et un sous-$\cap$-demi-treillis de cette algèbre de Boole.

Remarque : Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_{E_\Omega}$. $\mathcal{A}$ est obligatoirement fini puisque $\mathcal{D}_{E_\Omega}$ l'est. Posons $\mathcal{A} = \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$; l'ensemble des composés des éléments de $\mathcal{A}$ est le plus souvent infini car le nombre de fois où chaque D_i y figure n'est pas borné, mais la limite inductive d'un composé des éléments de $\mathcal{A}$ où chaque élément figure au moins une fois est unique et égale à
$(D_1 \circ D_2 \ldots \circ D_k)^{\uparrow}$ qui est la limite inductive d'une décomposition généralisée pleine d'espace de définition E_Ω.

L'ensemble $\mathcal{L}$ ayant pour éléments les limites inductives des composées de décompositions simples définies sur E_Ω est donc fini. On remarque au passage que $\mathcal{D}_{E_\Omega} \subset \mathcal{L}$.
Pour toute relation $R \in \mathcal{R}_{E_\Omega}$, donc pour toute relation $R \in \mathcal{R}_\Omega$, R admet $\{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$ si et seulement si R admet $(D_1 \circ D_2 \ldots \circ D_k)^{\uparrow}$; les treillis $(\mathcal{L}, \rightsquigarrow)$ et

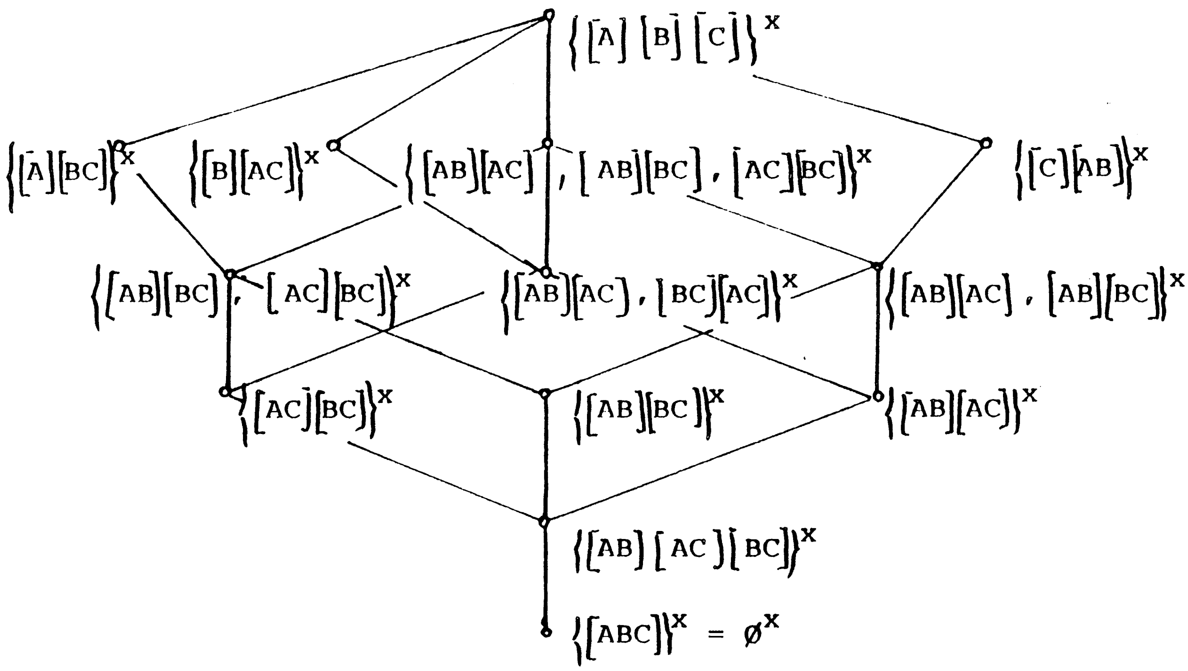
$(\mathcal{T}^x, \rightsquigarrow)$ sont donc isomorphes.

Dans le treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ ordonné par $\leqslant$, $(D_1 o D_2 \ldots o D_k)^\uparrow$ est la borne supérieure de $\{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$ (cf. Théorème IX). On en déduit que $(\mathcal{I}, \leqslant)$ est un demi-U-sous-treillis du treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ ordonné par $\leqslant$; $\mathcal{I}$ étant fini, ce demi-U-sous-treillis est complet. La fermeture identique, plus petit élément du treillis des fermetures, est élément de $\mathcal{I}$; $(\mathcal{I}, \leqslant)$ est donc une partie de Moore duale du treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ ordonné par $\leqslant$, donc une partie de Moore du treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ ordonné par inclusion de leurs ensembles d'invariants. On retrouve que $(\mathcal{I}, \leqslant)$, son dual $(\mathcal{I}, \rightsquigarrow)$ et par conséquent $(\mathcal{T}^x, \subset)$ et $(\mathcal{T}^x, \rightsquigarrow)$ sont des treillis.

Résumons ces résultats :

<u>Proposition 15</u> : **Soit $\mathcal{T}^x$ l'ensemble des invariants de la fermeture x définie sur $\mathcal{P}(\mathcal{D}_{E_\Omega})$ par $\mathcal{D}_1^x = \{D \in \mathcal{D}_{E_\Omega} : \mathcal{D}_1 \rightsquigarrow \{D\}\}$; $(\mathcal{T}^x, \subset)$ est un treillis ; c'est une partie de Moore de $\mathcal{P}(\mathcal{D}_{E_\Omega})$ et son dual $(\mathcal{T}^x, \rightsquigarrow)$ est isomorphe à une partie de Moore du treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ ordonné par inclusion des ensembles d'invariants de ces fermetures, c'est-à-dire par l'ordre dual de l'ordre $\leqslant$ habituel ; enfin, si $\mathcal{D}_1 = \{D_i \in \mathcal{D}_{E_\Omega} / i \in [1,k]\}$, $\mathcal{D}_1^x =$ $\{D \in \mathcal{D}_{E_\Omega} / D \leqslant (\overset{k}{\underset{i=1}{o}} D_i)^\uparrow\}$.**

<u>Exemple</u> : $\Omega = \{A, B, C\}$; $(\mathcal{T}^x, \subset)$ peut être représenté par le graphe ci-dessous. On voit sur cet exemple que le treillis n'est en général pas modulaire puisque l'intersection de $\{[A][BC]\}^x$ et $\{[B][AC]\}^x$ qui sont prédécesseurs immédiats de $\{[A][B][C]\}^x$ ne les précède pas immédiatement.



c) <u>Fermeture $\mathcal{S}_i^x$ sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$</u>

Soit $\mathcal{S}_i = \{D_j / j \in [1,k_i]\}$ une partie de $\mathcal{S}_{E_\Omega}$.

$\forall R \in \mathcal{R}_{E_\Omega}$: R admet $\mathcal{S}_i \iff$ R admet $(\mathop{O}\limits_{j=1}^{k_i} D_j)^\uparrow$

Or $(\mathop{O}\limits_{j=1}^{k_i} D_j)^\uparrow$ est une fermeture qui à toute relation $R \in \mathcal{R}_{E_\Omega}$ fait correspondre la relation $(\mathop{O}\limits_{j=1}^{k_i} D_j)^\uparrow(R)$, qui est la plus petite relation incluant R et admettant $(\mathop{O}\limits_{j=1}^{k_i} D_j)^\uparrow$, autrement dit, la plus petite relation incluant R et admettant $\mathcal{S}_i^x$. Par abus de langage, nous noterons $\mathcal{S}_i^x$ la fermeture $(\mathop{O}\limits_{j=1}^{k_i} D_j)^\uparrow$ sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$. L'ensemble des invariants d'une telle fermeture $\mathcal{S}_i^x$ ordonné par inclusion, est une partie de Moore de $\mathcal{R}_{E_\Omega}$. On peut étendre l'application $\mathcal{S}_i^x$ à $\mathcal{R}_\Omega$ en décidant que $\forall R \in \mathcal{R}_\Omega$: $\mathcal{S}_i^x(R) = \perp_{E_R} \circ \mathcal{S}_i^x(\top R)$.

Alors $\mathcal{S}_i^x(R)$ est la plus petite relation définie sur E_R, incluant R et admettant $\mathcal{S}_i$. Si on définit sur T^x la relation $\leq$ par:

$\forall\ \mathcal{D}_1^x \in T^x : \forall\ \mathcal{D}_2^x \in T^x : \mathcal{D}_1^x \leq \mathcal{D}_2^x \Leftrightarrow \forall\ R \in \mathcal{R}_\Omega$: $\mathcal{D}_1^x(R) \subset \mathcal{D}_2^x(R)$, alors $(T^x, \leq)$ est un treillis isomorphe à $(T^x, \subset)$ et aux treillis des fermetures $\mathcal{D}_i^x$ sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ égales aux restrictions à $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ des applications $\mathcal{D}_i^x$ que l'on vient de définir sur $\mathcal{R}_\Omega$. Enfin, on peut définir sur $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\Omega)$ un préordre régulier $\underset{x}{\rightarrowtail}$ par $\forall\ \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R} : \forall\ \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R} : \mathcal{R}_1 \underset{x}{\rightarrowtail} \mathcal{R}_2$ $\Leftrightarrow \forall\ D \in \mathcal{D}_{E_\Omega}$: $(\forall\ R \in \mathcal{R}_1$: R admet D$) \Rightarrow (\forall\ R \in \mathcal{R}_2$: R admet D). Notons $\mathcal{D}_{\mathcal{R}_1}^x$ l'ensemble de toutes les décompositions simples définies sur E_Ω et admises par toutes les relations éléments de $\mathcal{R}_1$. La fermeture f_x associée au préordre régulier $\underset{x}{\rightarrowtail}$ fait correspondre à tout ensemble de relations $\mathcal{R}_1 \in \mathcal{R}_\Omega$ la plus grande partie $f_x(\mathcal{R}_1)$ de $\mathcal{R}_\Omega$ telle que $\mathcal{D}_{\mathcal{R}_1}^x = \mathcal{D}_{f_x(\mathcal{R}_1)}^x$. Le treillis des invariants de la fermeture f_x ordonné par inclusion est une partie de Moore de $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\Omega)$; il est isomorphe à $(T^x, \rightarrowtail)$.

2. <u>ALGORITHME TESTANT LA VALEUR LOGIQUE DE D $\in \mathcal{D}_1^x$</u>

<u>THEOREME XI</u> - Soient D = $\underset{F' \in \mathbf{F'}}{*} [F']$ une décomposition simple définie sur E_Ω ayant $R_{F'}$ pour relation-reflet et $\mathcal{D}_1$ un ensemble de décompositions simples définies sur E_Ω ; alors D $\in \mathcal{D}_1^x$ si et seulement si $p^o \in \mathcal{D}_1^x(R_{F'})$.

C'est une conséquence immédiate du théorème X et de la proposition 15.

b) <u>Pratique de l'algorithme</u>

Pour reconnaître si D $\in \mathcal{D}_1^x$, on cherche si $p^o \in \mathcal{D}_1^x(R_{F'})$; pour cela on énumère les points de $R_{F'}$, ce qui est un simple jeu d'écriture puis on cherche à former progressivement $\mathcal{D}_1^x(R_{F'})$, ce qui pose des problèmes de cheminement si l'on veut éviter des recherches inutiles, mais se termine toujours puisque $\mathcal{D}_1^x(R_{F'})$ est finie.

C'est la "méthode des tableaux".

Voici par exemple un cheminement possible :

Notations : q_i point inscrit à la $i^{ème}$ ligne du tableau ; R_i ensemble des q_i premiers points. Soit r le nombre de points de R_D, alors $R_r = R_{F'}$. Etant donnée une décomposition $\Delta \in \mathcal{D}_1$ et une ligne $x \geqslant 2$ du tableau, on note $\mathbf{A}(\Delta, x)$ l'ensemble des applications f de $\mathbf{F}_\Delta$ dans R_x telles que $q_x \in f(\mathbf{F}_\Delta)$ et que $f(\mathbf{F}_\Delta)$ ait au moins deux éléments.

Enfin, étant donné un ensemble E et une mémoire M, l'ordre "prendre(M,E)" effectue la double affectation : "envoyer dans M un élément de E" et "$E \longleftarrow E-\{M\}$", l'algorithme de choix de l'élément de E n'étant pas précisé ; on a supposé que D n'était pas banale.

Algorithme :

Initialisation : $R_r \leftarrow R_{\mathbf{F}'}$; $x \leftarrow 2$; $i \leftarrow r+1$;

"$p^o \in \mathcal{S}_1^x$" $\leftarrow$ faux ;

tant qu'il y a un point q_x inscrit en ligne x et que non "$p^o \in \mathcal{S}_1^x$"

début $\mathcal{S}_1' \leftarrow \mathcal{S}_1$

  Tant que $\mathcal{S}_1' \neq \emptyset$ et non "$p^o \in \mathcal{S}_1^x$"

  début Prendre $(\Delta, \mathcal{S}_1')$;

    $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A}(\Delta, x)$

    Tant que $\mathbf{A} \neq \emptyset$ et non "$p^o \in \mathcal{S}_1^x$"

    début

      Prendre $(f, \mathbf{A})$;

      Former le produit $\underset{F \in \mathbf{F}_\Delta}{\ast} \{[F] \quad f(F)\}$;

      si ce produit est un singleton $\{p\}$

        (commentaire : sinon il est vide)

        alors si $p = p^o$:

          alors "$p^o \in \mathcal{S}_1^x$" $\leftarrow$ vrai

          sinon si $p \notin R_{i-1}$

            alors $q_i \leftarrow p$;

              $i \leftarrow i + 1$;

            fin si

          fin si

      fin si

    fin

  fin

  $x \leftarrow x+1$;

fin

Remarques : l'utilisation brutale de cet algorithme pourrait donner des temps de calculs astronomiques si le tableau est long et si les décompositions ont beaucoup de facteurs car $\mathbf{A}(\Delta, x)$ a alors un cardinal trop élevé. Pour rendre ce temps de calcul acceptable, il faudrait d'abord ne parcourir qu'une partie de $\mathbf{A}(\Delta, x)$ en évitant les applications que l'on sait d'avance infructueuses.

On peut aussi faire remarquer qu'il est préférable, lorsque cela est possible, de substituter à $\mathcal{D}_1$ un ensemble de décompositions $\mathcal{D}_1''$ tel que $\mathcal{D}_1^x = \mathcal{D}_1''^x$ et tel que les décompositions figurant dans $\mathcal{D}_1''$ soient des décompositions de $\mathcal{D}_{E_\Omega}$ ayant un nombre de facteurs aussi petit que possible, même si l'ensemble $\mathcal{D}_1''$ comporte plus de décompositions que $\mathcal{D}_1$.

A la main, des cheminements rapides peuvent être trouvés heuristiquement. Dans l'exemple qui suit toutefois, nous procédons en suivant l'algorithme indiqué.

c) Exemple : $\mathcal{D}_1 = \{\Delta^a, \Delta^b, \Delta^c, \Delta^d\}$ avec

$\Delta^a = [ABC][AD][CDE]$

$\Delta^b = [ABE][ACDE]$

$\Delta^c = [ABCD][ABDE]$

$\Delta^d = [ACDE][BCDE]$

$$D = [ACE][ADE][BCD]$$

i	A B C D E	
1	0 1 0 1 0	R_D
2	0 2 2 0 0	R_D
3	3 0 0 0 3	R_D

Remarque : pour accélérer l'écriture, on a noté 0 1 0 1 0 pour désigner le point $a^o\ b^1\ c^o\ d^1\ e^o$; le même chiffre écrit dans des colonnes différentes ne représente donc pas la même valeur; les valeurs notées 0 sont les coordonnées de p^o

i	A B C D E	x	Δ	numéro des images des facteurs de dans l'application f
4	0 1 2 0 0	2	b	1, 2
5	0 2 0 1 0	2	b	2, 1
6	0 1 0 0 3	3	a	1, 2, 3
7	0 2 0 0 3	5	a	5, 2, 3
8	0 1 2 0 3	6	c	4, 6
9	0 1 0 0 0	6	c	6, 4
10	3 1 0 0 3	6	d	3, 6
11	0 0 0 0 3	6	d	6, 3
12	0 2 2 0 3	7	c	2, 7

13	0 2 0 0 0	7	c	7, 2
14	3 2 0 0 3	7	d	3, 7
15	3 0 0 0 0	9	a	3, 3, 9
16	3 1 0 0 0	10	a	10, 3, 9
17	0 0 0 0 0	11	a	11, 2, 9
				$D \in \mathcal{D}_1^x$

en travaillant à la main et avec "flair", on aurait pu se contenter de produire les lignes 4, 6, 9, 11, 17, qui sont les seules qui interviennent réellement.

d) Corollaire du théorème XI

Si $D \in \mathcal{D}_{E_\Omega}$, $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_{E_\Omega}$, $D \in \mathcal{D}_1^x$, et $E \lhd E_\Omega$ / alors toute relation admettant toutes les décompositions $\Delta \circ [E]$ où $\Delta \in \mathcal{D}_1$ admet $D \circ [E]$.

En effet, si l'algorithme des tableaux permet de conclure à $D \in \mathcal{D}_1^x$, en prenant pour espace de référence E au lieu de E_Ω, l'algorithme des tableaux permettrait de conclure à $D \circ [E] \in \{\Delta \circ [E] \,/\, \Delta \in \mathcal{D}_1\}^x$.

3. ENUMERATION DE $\mathcal{D}_1^x$

a) Position du problème

Supposons $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_{E_\Omega}$ donné.

Quoique l'énumération exhaustive de $\mathcal{D}_1^x$ soit sans intérêt pratique parce que son cardinal est bien trop élevé en général, il est bon de remarquer qu'elle est théoriquement possible puisque $\mathcal{D}_{E_\Omega}$ est énumérable et fini et que l'on sait tester la proposition $D \in \mathcal{D}_1^x$ pour tout $D \in \mathcal{D}_{E_\Omega}$.

Il peut être intéressant de se demander si l'ensemble $\mathcal{D}_1^x$ peut être obtenu à partir de $\mathcal{D}_1$ en prenant dans $\mathcal{P}(\mathcal{D}_{E_\Omega})$ la fermeture de $\mathcal{D}_1$ par un certain nombre de règles de dérivation simples dont l'ensemble reste à déterminer.

Il s'avère que cela n'est pas possible avec les règles de dérivation usuelles. Par contre, nommons E_c un espace semblable à E_Ω et dont toutes les variables ont un indice différent de 0 que nous nommerons c et nommons $\mathcal{D}_c$ l'ensemble des décompositions généralisées pleines définies sur E_Ω et ayant au moins un ensemble de facteurs $\mathbf{F}$ tel que $\underset{F \in \mathbf{F}}{\nabla} F \lhd E_\Omega \nabla E_c$.

Soit G_c l'ensemble des ensembles de facteurs $\mathbf{F}$ tels que $E_\Omega \lhd \underset{F \in \mathbf{F}}{\nabla} F \lhd E_\Omega \nabla E_c$; il existe une surjection f de G_c dans $\mathcal{D}_c$ qui, à tout ensemble de facteurs $\mathbf{F}$ donne pour image $f(\mathbf{F}) = \underset{F \in \mathbf{F}}{\perp} [F]$; nous noterons aussi f son extension à l'ensemble des parties, c'est-à-dire l'application de $\mathcal{P}(G_c)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{D}_c)$ qui, à toute partie $\mathcal{A}$ de G_c fait correspondre $f(\mathcal{A}) = \{D \in \mathcal{D}_c / \exists \mathbf{F} \in \mathcal{A} : D = \underset{F \in \mathbf{F}}{\perp} [F]\}$. Nous allons définir sur G_c un ensemble $\mathcal{D}$ér de règles de dérivation qui soient telles que, si je note $\square$ la fermeture sur $\mathcal{P}(G_c)$ qui, à toute partie $\mathcal{A}$ de G_c fait correspondre la plus petite partie $\mathcal{A}^\square$ de G_c stable par l'ensemble de règles de dérivation $\mathcal{D}ér_\square$, alors

$$\forall \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_{E_\Omega} : \forall \mathcal{A} \subset G_c : f(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_1 \Rightarrow \mathcal{D}_1^x = \mathcal{D}_{E_\Omega} \cap f(\mathcal{A}^\square).$$

Les ensembles $\mathcal{D}_c$ et G_c étant finis, la fermeture $\square$ sera <u>théoriquement</u> calculable.

b) <u>Ensemble $\mathcal{D}$ér $\square$ de règles de dérivation sur G_c</u>

1. <u>Alourdissement</u>

$\mathbf{F} \to \mathbf{F} \cup \{F\}$

2. <u>Affinement d'un facteur F_1 de $\mathbf{F}_1$ par $\mathbf{F}_2$</u>

Si $F_1 \lhd E_\Omega$ et si C_2 est l'espace engendré par l'ensemble des variables figurant dans au moins deux facteurs de $\mathbf{F}_2$

$$\mathbf{F}_1 = \{F_1\} \cup \mathbf{F}_3,\ \mathbf{F}_2 \to \{F / \exists E \in \mathbf{F}_2 : F = (E \Delta F_1) \nabla [E_c][E^{-1}] (C_2 \Delta E \Delta \bar{F}_1)\} \cup \mathbf{F}_3$$

3. <u>Simplification d'écriture</u>

S'il existe une projection fidèle $[E_\Omega \nabla E_c \xrightarrow{\Psi} \Psi(E_\Omega \nabla E_c)]$ telle que $\Psi(\mathbf{F}) \subset \mathbf{F}$:

$\mathbf{F} \to \Psi(\mathbf{F})$;

si $\exists F' \in \mathbf{F} : F \lhd F' : \mathbf{F} \cup \{F\} \to \mathbf{F}$

- Quelques remarques :

l'alourdissement suivi de simplifications permet de remplacer un facteur par un de ses surespaces, ou de remplacer dans un facteur une variable V_c par la variable V_o correspondante.

L'affinement de F_1 par F_2 revient à remplacer le facteur F_1 par un ensemble de facteurs obtenu à partir d'un ensemble de facteurs de la décomposition généralisée $[F_1] \circ \underset{F \in F_2}{\perp} [F]$, en mettant à la place de chaque indice non nul de variable l'indice c.

- Exemple d'affinement :

L'affinement de $< ABC >$ par $\{< ADEF_c >, < A_c \; B \; E_c \; F_c >, < CEF >, < A_c \; C \; E_c >\}$ dans $F_1 = \{< ABC >, < B \; E_c \; D >, < D \; E_c \; F >\}$ donne :

$\{< A \; E_c \; F_c >, < A_c \; B \; E_c \; F_c >, < C \; E_c >, < A_c \; C \; E_c >, < B \; E_c \; D >, < D \; E_c \; F >\}$

qui, après simplification, peut s'écrire :

$\{< A \; E_c \; F_c >, < A_c \; B \; E_c \; F_c >, < A_c \; C \; E_c >, < B \; E_c \; D >, < D \; E_c \; F >\}$

c) <u>Théorème et sa démonstration</u>

<u>THEOREME XII</u>

Soit $\mathcal{G}$ un ensemble d'ensembles de facteurs tel que pour tout $F \in \mathcal{G}$, $\Delta = \underset{F \in F}{*} [F]$ soit une décomposition simple définie sur E_Ω ; soit $\mathcal{D}_1$ l'ensemble des décompositions Δ qui peuvent s'écrire $\Delta = \underset{F \in F}{*} [F]$ avec $F \in \mathcal{G}$; soit F' un ensemble de facteurs tel que $D = \underset{F \in F'}{*} [F']$ soit une décomposition simple définie sur E_Ω ; alors $D \in \mathcal{D}_1^x \Leftrightarrow F' \in \mathcal{G}^\square$.

<u>Démonstration</u>

1. Démontrons que $(F' \in \mathcal{G}^\square$ et $D = \underset{F' \in F'}{*} [F']) \Rightarrow D \in \mathcal{D}_1^x$

Tout ensemble de facteurs de $\mathcal{G}^\square$ est obtenu en appliquant les règles de dérivation un nombre fini de fois. Il suffit donc de démontrer :

- que toute relation admettant une décomposition $D_1 \in \mathfrak{D}_c$ admet toute décomposition D'_1 obtenue par alourdissement de D_1 ; il suffit pour cela de remarquer que $E_{D'_1} = E_{D_1}$, et que $D'_1 \leq D_1$, ce qui entraîne $D_1 \rightsquigarrow D'_1$.

- que toute relation R admettant $D_1 = \perp_{F' \in \{F_1\} \cup F_3} [F']$ et $D_2 = \perp_{E \in F_2} [E]$ où F_2 et F_3 sont éléments de G_c, admet, si $F_1 \lhd E_\Omega$, la décomposition obtenue en affinant dans l'écriture de D_1, F_1 par F_2 ; nommons C_2 l'espace engendré par les variables figurant dans au moins deux facteurs de F_2.

Si R admet D_2, $[F_1](R) = [F_1] \circ D_2 (R)$

Or $[F_1] \circ D_2 \geqslant \perp_{E \in F_2} [(F_1 \Delta E) \nabla [E_c] [E^{-1}](C_2 \Delta E \Delta \bar{F}_1)] \geqslant [F_1]$

Donc $[F_1](R) = (\perp_{E \in F_2} [(F_1 \Delta E) \nabla [E_c] [E^{-1}](C_2 \Delta E \Delta \bar{F}_1)]) (R)$

D'autre part R admet D_1 ; donc

$$
\begin{aligned}
R &= D_1(R) \\
&= \perp([F_1](R) * (\ast_{F' \in F_3} [F'])) \\
&= \perp((\perp_{E \in F_2} [(F_1 \Delta E) \nabla [E_c] [E^{-1}](C_2 \Delta E \Delta \bar{F}_1)])R) * (\ast_{F' \in F_3} [F'])) \\
&= \perp_{F' \in \mathbf{F}'} [F'](R) \text{ où } \mathbf{F}' = \{ F / \exists\, E \in F_2 : F = (F_1 \Delta E) \nabla [E_c] [E^{-1}](C_2 \Delta \bar{F}_1)\} \cup F_3
\end{aligned}
$$

R admet la décomposition obtenue en affinant dans l'écriture de D_1 le facteur F_1 par D_2.

- et de remarquer que la simplification d'une écriture d'une décomposition remplace cette écriture par une autre écriture de la même décomposition.

3. Démontrons que si $D = \ast_{F' \in \mathbf{F}'} [F']$, $D \in \mathfrak{D}_1^x \Rightarrow \mathbf{F}' \in \mathcal{G}^{\circ}$

Si $D \in \mathfrak{D}_1^x$, alors on peut tester que $D \in \mathfrak{D}_1^x$ par l'algorithme des tableaux. Pour décrire ce qui se passe au cours de son déroulement, conservons les notations utilisées en 3. b) et complétons-les en nommant :

C l'espace engendré par l'ensemble des variables figurant dans au moins deux facteurs de **F'** ; on remarque que $C \lhd E_{\Omega}$.

E_i l'espace ayant q_i pour point reflet.
Par formatage de **F'**, on obtient l'ensemble des facteurs $E_j (j \in [1,r])$

$\mathbf{F}_i$ l'ensemble des r facteurs F'_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant r)$

$F'_{ij} = \left[E_i^{-1}\right] (E_i \Delta E_j) \nabla \left[E_c\right] (C \Delta E_j \Delta \overline{E}_i)$

on remarque qu'à la fin de l'algorithme $E_i = E_{\Omega}$ et $\mathbf{F}_i = \mathbf{F'}$

C_i l'espace engendré par les variables figurant dans au moins deux facteurs de $\mathbf{F}_i$

$F'_{ij} \Delta C_i = (C \Delta E_i \Delta E_j) \nabla \left[E_c\right] (C \Delta E_j \Delta \overline{E}_i)$

donc $F'_{ij} \Delta C_i$ est semblable à $C \Delta E_j$

$D_i = \underset{j \in [1,r]}{\perp} \left[F'_{ij}\right]$; on peut remarquer sans que cela soit utilisé dans la démonstration, que :

$D_i = \left[E_i^{-1}\right] \circ \left(\underset{j \in [1,r]}{*} \left[E_j\right] \right)$ et que par conséquent, à la fin de l'algorithme $D_i = D$, comme nous l'avions déjà vu.

Δ_i la décomposition élément de $\mathfrak{S}_1$ utilisée dans l'algorithme pour construire le point q_i (et non la $i^{\text{ème}}$ citée dans $\mathfrak{S}_1$.

s_i le nombre de facteurs de Δ_i dans l'écriture utilisée dans l'algorithme.

$F_{i,s}$ le $s^{\text{ème}}$ facteur de Δ_i dans l'écriture utilisée dans l'algorithme.

φ_i l'application de $[1, s_i]$ dans $[1, i-1]$ telle que si $f \in A(\Delta_i, x)$ est l'application utilisée pour construire le point q_i, $f(F_{i,s}) = q_{\varphi_i(s)}$. Alors les sous-espaces de E_i et de $E_{\varphi_i(s)}$ semblables à $F_{i,s}$ sont égaux. Autrement dit, $\forall\ j \in [1, r]$: $F_{i,s}\ \Delta([E_i^{-1}](E_j \Delta E_i)) =$
$F_{i,s}\ \Delta([E^{-1}_{\varphi_i(s)}](E_j \Delta E_{\varphi_i(s)}))$.

Remarquons, sans toutefois en rédiger la démonstration, car ce résultat n'est pas utilisé dans celle de notre théorème, qu'un algorithme de tableau dérivant du théorème XI prouverait que toute relation admettant $\mathcal{D}_1$ admet D_i ; c'est cette idée qui a suggéré la démonstration en conduisant à l'écriture de D_i.
Voyons seulement comment cela se présente en reprenant l'exemple du 3.

$\mathcal{D}_1 = \{\Delta^a, \Delta^b, \Delta^c, \Delta^d\}$ avec $\Delta^a = [ABC][AD][CDE]$, $\Delta^b = [ABE][ACDE]$,
$\Delta^c = [ABCD][ABDE]$, $\Delta^d = [ACDE][BCDE]$; $D = [ACE][ADE][BCD]$.

Voyons par exemple comment on arrive jusqu'à la ligne 7 et comment un algorithme calqué sur le précédent nous permettrait de reconnaître que toute relation admettant D_1 admet D_7 en vérifiant que $p^o \in \Delta^5 \circ \Delta^2\, R_{D_7}$
$D_7 = [ACE_c][ABDE_c][CDE]$

	i	A B C D E	Δ_i	numéro des images images des facteurs de dans l'application f	A B C D E	
R_{F_D}	1	0 1 0 1 0			0 1 0 1 c	$R_{F_{D_7}}$
	2	0 2 2 0 0			0 0 2 0 c	
	3	3 0 0 0 3			3 3 0 0 0	
	5	0 2 0 1 0	Δ^b	2, 1	0 0 0 1 c	
	7	0 2 0 0 3	Δ^a	5, 2, 3	0 0 0 0 0	

Procédons maintenant à la démonstration ;
on peut, si on le désire, en suivre la trace sur l'exemple du 3, un peu plus loin en d).

- Les r premières valeurs de F_i sont toutes égales à $\{E_\Omega\}$

Elles peuvent être obtenues à partir de n'importe quel ensemble de facteurs par alourdissement et simplification. Donc $F_i \in \mathcal{A}^\square$

Supposons que $\forall\ i' < i : F_{i'} \in \mathcal{A}^\square$ et montrons que l'on peut en déduire que $F_i \in \mathcal{A}^\square$

Nous allons construire une suite de s_i+1 ensembles de facteurs $F''_{i,s}(s \in [o,s_i])$ de façon à ce que la propriété P_s que nous allons énoncer reste vraie pour tout $s \in [o,s_i]$: $\boxed{P_s} \Leftrightarrow$

$$F''_{i,s} \in \mathcal{A}^\square \ \underline{\text{et}} \quad \exists F \subset F_i : F''_{i,s} = F \cup \{F_{i,t} / s < t \leqslant s_i\}$$

Nous prendrons $F''_{i,o} = \{F_{i,t}\}_{t \in [1,s_i]}$; alors $F''_{i,o} \in \mathcal{A}$,

donc $F''_{i,o} \in \mathcal{A}^\square$ et la proposition P_o est démontrée.

Supposons que P_{s-1} soit vraie et construisons $F''_{i,s}$ pour que P_s soit vraie.

Pour cela, nous procèderons de deux façons, suivant la valeur de $\varphi_i(s)$.

Si $\varphi_i(s) \in [1,r]$, nous remplacerons $F_{i,s}$ dans $F''_{i,s-1}$ par $F'_{i,\varphi_i(s)}$, ce qui constitue un simple alourdissement suivi de simplification de $F''_{i,s-1}$ puisque $F_{i,s} \lhd [E_i^{-1}](E_i \Delta E_{\varphi_i(s)})$.

Si $\varphi_i(s) > r$, nous allons d'abord construire l'ensemble de facteurs $G_{i,s} \in \mathcal{A}^\square$ obtenu en affinant dans $F''_{i,s-1}$ le facteur $F_{i,s}$ par $F_{\varphi_i(s)}$; le facteur $F_{i,s}$ est alors remplacé par l'ensemble des facteurs $G_{i,s,j}$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ ayant pour valeur

$$G_{i,s,j} = (F'_{\varphi_i(s),j} \Delta F_{i,s}) \nabla [E_c][F'^{-1}_{\varphi_i(s),j}](C_{\varphi_i(s)} \Delta F'_{\varphi_i(s),j} \Delta \overline{F}_{i,s})$$

autrement-dit :

$$G_{i,s,j} = \left(F_{i,s} \Delta \left[E^{-1}_{\varphi_i(s)}\right] (E_{\varphi_i(s)} \Delta E_j)\right) \nabla \left[E_c\right]\left[F'^{-1}_{\varphi_i(s),j}\right](C_{\varphi_i(s)} \Delta F'_{\varphi_i(s),j} \Delta \bar{F}_{i,s})$$

$$= \left(F_{i,s} \Delta \left[E_i^{-1}\right](E_i \Delta E_j)\right) \nabla \left[E_c\right]\left[F'^{-1}_{\varphi_i(s),j}\right](C_{\varphi_i(s)} \Delta F'_{\varphi_i(s),j} \Delta \bar{F}_{i,s})$$

Toute variable d'indice 0 de $G_{i,s,j}$ est variable d'indice 0 de $F'_{i,j}$. D'autre part, les variables d'indice c de $G_{i,s,j}$ sont toutes variables de $C_{\varphi_i(s)} \Delta F'_{\varphi_i(s),j}$ qui est, comme nous l'avions remarqué dans la définition de la notation C_i, semblable à $C \Delta E_j$; or $C_i \Delta F'_{i,j}$ lui aussi est semblable à $C \Delta E_j$. Donc, à toute variable d'indice c de $G_{i,s,j}$ correspond une variable d'indice 0 ou c de F'_{ij} ayant même ensemble de départ.

Dans l'ensemble de facteurs obtenu en remplaçant dans $F_{i,s}$ par $G_{i,s}$ dans $F''_{i,s-1}$, on peut donc par alourdissement ajouter à G_{is} l'ensemble $\mathbf{F}_i$ des facteurs F'_{ij}, puis par simplification remplacer l'union de $\mathbf{F}_i$ et de l'ensemble des facteurs $G_{i,s,j}$ ($j \in [1,r]$) par $\mathbf{F}_i$ puisqu'il existe une projection fidèle qui donne $\mathbf{F}_i$ comme image à cette union.

On obtient ainsi un ensemble de facteurs $\mathbf{F}''_{i,s}$ pour lequel la proposition P_s est démontrée.

Nous avons démontré par récurrence

$$\forall s \in [0,s_i] : \mathbf{F}''_{i,s} \in \mathcal{A}^{\square} \text{ et } \exists \mathbf{F} \subset \mathbf{F}_i : \mathbf{F}''_{i,s} = \mathbf{F} \cup \{F_{i,t} / t > s\}$$

alors $\mathbf{F}''_{i,s_i} \subset \mathbf{F}_i$. Ou bien $\mathbf{F}''_{i,s_i} = \mathbf{F}_i$, ou bien

$\mathbf{F}_i$ est obtenu par alourdissement de $\mathbf{F}''_{i,s_i}$. Dans tous les cas

$\mathbf{F}_i \in \mathcal{A}^{\square}$.

Nous avons montré par récurrence que, $\forall i$: $\mathbf{F}_i \in \mathcal{A}^{\square}$; or à la fin de l'algorithme $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}'$ donc $\mathbf{F}' \in \mathcal{A}^{\square}$.

d) <u>Trace des constructions utilisées dans la démonstration sur l'exemple du 3.</u>

$F' = \{ < ACE >, < ADE >, < BCD > \};$

Le centre C est C = < ACDE > ; r = 3;

$C \triangle E_1 = < ACE >$; $C \triangle E_2 = < ADE >$; $C \triangle E_3 = < CD >$;

Les lignes effectivement utilisées sont les lignes 4, 6, 9, 11, 17.

<u>**Pour i = 4**</u> $F''_{4,0} = \{ < ABE >, < ACDE > \}$ $(\Delta_4 = \Delta^b)$

$\varphi_4(1) = 1$; $F''_{4,1} = \{ < A\ B\ C_c\ E >, < A\ C\ D\ E > \}$

(car $< A\ B\ C_c\ E >' = F'_{4,1}$)

$\varphi_4(2) = 2$; $F''_{4,2} = \{ < A\ B\ C_c\ E >, < A\ C\ D\ E > \}$

(car $< ACDE > = F'_{4,2}$)

donne • $F_4 = \{ < A\ B\ C_c\ E >, < ACDE >, < C_c\ D > \}$

par alourdissement.

<u>**Pour i = 6**</u> $F''_{6,0} = \{ < ABC >, < AD >, < CDE > \}$

$\varphi_6(1) = 1$; $F''_{6,1} = \{ < ABC\ E_c >, < AD >, < CDE > \}$

car $F'_{6,1} = < ABC\ E_c >$

$\varphi_6(2) = 2$; $F''_{6,2} = \{ < ABC\ E_c >, < AD\ E_c >, < CDE > \}$

car $F'_{6,2} = < AD\ E_c >$

$\varphi_6(3) = 3$; $F''_{6,3} = \{ < ABC\ E_c >, < AD\ E_c >, < CDE > \}$

car $F'_{6,3} = < CDE >$

$= F_6$

Pour i = 9 $F''_{9,0} = \{<ABCD>, <ABDE>\}$

$\varphi_9(1) = 6$ $G_{9,1} = \{\underbrace{<ABC\,E_c>}_{G_{9,1,1}}, \underbrace{<AD\,E_c>}_{G_{9,1,2}}, \underbrace{<CD>}_{G_{9,1,3}}, <ABDE>\}$

$F''_{9,1} = \{\underbrace{<ABCE>}_{F'_{9,1}}, \underbrace{<ADE>}_{F'_{9,2}}, \underbrace{<CD>}_{F'_{9,3}}, <ABDE>\}$

car $F_9 = \{<ABCE>, <ADE>, <CD>\}$

$\varphi_9(2) = 4$ $G_{9,2} = \{\underbrace{<ABCE>}_{F'_{9,1}}, \underbrace{<ADE>}_{F'_{9,2}}, \underbrace{<CD>}_{F'_{9,3}}, \underbrace{<ABC_cE>}_{G_{9,2,1}}, \underbrace{<ADE>}_{G_{9,2,2}}, \underbrace{<C_c\,D>}_{G_{9,2,3}}\}$

$F''_{9,2} = \{<ABCE>, <ADE>, <CD>\}$

$= F_9$

Pour i = 11 $F''_{11,0} = \{<ACDE>, <BCDE>\}$

$\varphi_{11}(1) = 6$; $G_{11,1} = \{<ACE_c>, <ADE_c>, <CDE>, <BCDE>\}$

$F''_{11,1} = \{<ACE_c>, <ADE_c>, <BCDE>\}$

$\varphi_{11}(2) = 3$ $F''_{11,2} = \{<ACE_c>, <ADE_c>, <BCDE>\}$

$= F_{11}$

Pour i = 17 $F''_{17,0} = \{<ABC>, <AD>, <CDE>\}$

$\varphi_{17}(1) = 11$ $G_{17,1} = \{<ACE_c>, <AD_cE_c> <BCD_c>, <AD>, <CDE>\}$

$F''_{17,1} = \{<ACE>, <ADE>, <BCD>, <AD>, <CDE>\}$

$\varphi_{17}(2) = 2$ $F''_{17,2} = \{<ACE>, <ADE>, <BCD>, <CDE>\}$

$\varphi_{17}(3) = 9$ $G_{17,3} = \{<ACE>, <ADE>, <BCD>, <A_cCE>, <A_cDE>, <CD>\}$

$F''_{17,3} = \{<ACE>, <ADE>, <BCD>\}$

$= F_{17} = F'$

Note

Dans le journal de l'ACM d'Avril 1982, Edward Sciore, sous une autre présentation, propose un ensemble de règles de dérivation dans G_c voisin de celui proposé ici. Sa démonstration suit plus ou moins la même démarque que celle utilisée au chapitre V dans le cas général : étude successive pour i décroissant à partir de sa dernière valeur des décompositions ayant R_i pour relation reflet ; il s'exprime en utilisant un graphe dont les noeuds représentent des décompositions rencontrées en cours d'algorithme. Le principe de ma démonstration me paraît plus simple, même si je n'ai pas toujours réussi à traduire cette simplicité dans l'expression.

4. ETUDE DES DECOMPOSITIONS EN PRODUIT DIRECT ELEMENTS DE $\mathcal{D}_1^x$

Une relation $\{p_1, p_2\}$ formée de l'union de deux singletons déconnectés admet toutes les décompositions connexes et aucune décomposition non connexe. Donc, si toutes les décompositions de $\mathcal{D}_1$ sont connexes, il n'y a pas de décomposition en produit direct dans $\mathcal{D}_1^x$. Supposons que $\mathcal{D}_1$ comporte des décompositions non connexes. A toute décomposition non connexe D définie sur E_Ω, je vais faire correspondre le produit direct le plus fin D^{pr} qui soit moins fin que D, c'està-dire la décomposition en produit direct ayant pour ensemble de facteurs l'ensemble des espaces de définition de chacune des sous-décompositions connexe de D.

Si $D \in \mathcal{D}_1$, $D^{pr} \in \mathcal{D}_1^x$. Soit Δ la décomposition en produit direct qui définit comme partition de Ω en classes connexes la moins fine des partitions de Ω qui soit plus fine que chacune des partitions de Ω en classes connexes définies par les décompositions éléments de $\mathcal{D}_1$; Δ est élément de $\mathcal{D}_1^x$; en effet Δ est obtenue en affinant les facteurs d'une des décompositions D^{pr} (avec $D \in \mathcal{D}_1$) successivement par les diverses autres décompositions D^{pr} (avec $D \in \mathcal{D}_1$).

Soit maintenant Δ' une décomposition en produit direct strictement plus fine que Δ . Pour que $\Delta' \in \mathcal{D}_1^x$, il faut que l'algorithme des tableaux puisse prouver que $\Delta' \in \mathcal{D}_1^x$; mais un facteur F

de Δ' au moins est soit disjoint, soit strictement sous-espace de tous les espaces de définition des sous-décompositions connexes des éléments de $\mathcal{D}_1$; le point reflet de ce facteur F ne pourra jamais être utilisé dans la construction des points q_i et la projection d'aucun de ces points sur F ne sera égale à $[F]\, p^o$. Donc $\Delta' \notin \mathcal{D}_1^x$.
On en déduit que toute décomposition en produit direct élément de $\mathcal{D}_1^x$ est moins fine que Δ .
En effet, si $\Delta'' \in \mathcal{D}_1^x$ et si Δ'' n'est pas moins fine que Δ , $\Delta \circ \Delta''$ est strictement moins fine que Δ et est élément de $\mathcal{D}_1^x$, ce qui est contraire au résultat précédent.
Enfin on en déduit que toute décomposition $D \in \mathcal{D}_1^x$ a une partition en classe connexe moins fine que celle de Δ ; de plus, toute décomposition D maximale de $(\mathcal{D}_1^x, \lesssim)$ a une partition en classe connexe égale à celle de Δ , sans quoi on pourrait affiner un de ses facteurs par Δ et en déduire l'existence dans $\mathcal{D}_1^x$ d'une décomposition strictement plus grande que $\mathcal{D}_1^x$. Nous avons démontré le théorème :

THEOREME XIII

Soit $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_{E_\Omega}$. Si toutes les décompositions de $\mathcal{D}_1$ sont connexes, toutes celles de $\mathcal{D}_1^x$ le sont aussi. Sinon il existe dans $\mathcal{D}_1^x$ une décomposition en produit direct Δ définissant comme partition de Ω en classes connexes la moins fine des partitions de Ω qui soit plus fine que chacune des partitions en classes connexes de Ω définies par les décompositions éléments de $\mathcal{D}_1$. Toutes les décompositions maximales de $(\mathcal{D}_1^x, \lesssim)$ définissent la même partition de Ω en classes connexes que Δ .

5. ETUDE DU TEST "$D \in \mathcal{D}_1^x$?" LORSQUE D EST UN EMBRANCHEMENT DEFINI SUR E_Ω ; ENUMERATION DES EMBRANCHEMENTS DE $\mathcal{D}_1^x$.

a) Etude théorique

Soit G_{E_Ω} l'ensemble des ensembles de facteurs tels que $\bigtriangledown_{F \in \mathcal{F}} F = E_\Omega$.

Il existe une application f de G_{E_Ω} dans $\mathcal{D}_{E_\Omega}$ définie par $f(\mathcal{F}) = \ast_{F \in \mathcal{F}} [F]$. Nous allons définir un ensemble $\mathcal{D}ér_\partial$ de règles de dérivation sur G_{E_Ω}, de telle sorte que pour toute partie $\mathcal{A}$ de G_{E_Ω} , la plus petite partie $\mathcal{A}^\partial$ de G_{E_Ω} incluant $\mathcal{A}$ et stable par $\mathfrak{D}$ér∂ ait la propriété que, pour tout embranchement $[F_1][F_2]$ défini sur E_Ω, $[F_1][F_2] \in f(\mathcal{C}^{\partial}) \Leftrightarrow [F_1][F_2] \in (f(\mathcal{C}))^x$.

Ensemble $\mathfrak{D}$ér∂ de règles de dérivation sur G_E

Rappel : tous les ensembles de facteurs utilisés ont la propriété

$$\underset{F \in \mathbf{F}}{\nabla} F = E_\Omega$$

$$\mathfrak{D}\text{ér}\partial \begin{cases} \text{1. \underline{Alourdissement}} \\ \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F} \cup \{F\} \\ \\ \text{2. \underline{Affinement d'un facteur}} \quad F \text{ par } \{F_1, F_2\} \text{ avec} \\ F_1 \nabla F_2 = E_\Omega \\ \{F\} \cup G \ , \quad \{F_1, F_2\} \longrightarrow \{(F \nabla F_2)\Delta F_1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (F \nabla F_1)\Delta F_2\} \cup G \\ \\ \text{3. \underline{Simplification d'écriture}} \\ \text{Si } \exists F' \in \mathbf{F} : F \sqsubset F' \\ \mathbf{F} \cup \{F\} \longrightarrow \mathbf{F} \end{cases}$$

THEOREME XIV

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble d'ensembles de facteurs tel que pour tout $\mathbf{F} \in \mathcal{C}$, $\Delta = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F]$ soit une décomposition simple définie sur E_Ω ; soit $\mathfrak{D}_1$ l'ensemble des décompositions Δ qui peuvent s'écrire $\Delta = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F]$ avec $\mathbf{F} \in \mathcal{C}$; soit $\mathbf{F}'$ un ensemble de facteurs tel que $\underset{F \in \mathbf{F}'}{*} [F]$ soit un embranchement simple défini sur E_Ω, alors $\underset{F \in \mathbf{F}'}{*} [F] \in \mathfrak{D}_1^x \Leftrightarrow \mathbf{F}' \in \mathcal{C}^{\partial}$.

Il est trivial que $\mathbf{F}' \in \mathcal{C}^{\partial} \Rightarrow \underset{F \in \mathbf{F}'}{*} [F] \in \mathfrak{D}_1^x$. Voyons la réciproque.

Considérons d'abord le cas où $\mathbf{F}'$ n'a que deux facteurs F_1, F_2.
Je n'expose pas entièrement la démonstration de ce théorème qui pourrait être calquée sur celle du théorème XII avec toutefois des calculs très simplifiés. Je me contenterai de souligner les points où des différences s'introduisent.

Lorsque D est un embranchement à deux facteurs, sa racine C est sous-espace de tous les E_i ; toutes les décompositions $D_i = [F'_{i1}][F'_{i2}]$ sont donc simples et $\forall\, i \in \mathbb{N}\colon \forall\, j \in \{1,2\}$: $C = F'_{i1} \Delta F'_{i2}$

et $F'_{ij} = [E_i^{-1}](E_i \Delta E_j)$.

Alors, dans l'étape de la démonstration où l'on construit $F''_{i,s}$,

- ou bien $\varphi_i(s) \in 1,2$; on remplace $F_{i,s}$ par $[E_i^{-1}](E_i \Delta E_{\varphi_i(s)})$ qui est sous-espace de E_Ω et surespace de $F_{i,s}$

- ou bien $\varphi_i(s) > 2$. On remplace $F''_{i,s-1}$ par l'ensemble de facteurs obtenu en affinant dans $F''_{i,s-1}$ le facteur $F_{i,s}$ par $F_{\varphi_i(s)}$ suivant la règle d'affinement ∂ ; l'ensemble de facteurs remplaçant $F_{i,s}$ est alors $\{(F_{i,s} \nabla F'_{\varphi_i(s),2}) \Delta F'_{\varphi_i(s),1},\ (F_{i,s} \nabla F'_{\varphi_i(s),1}) \Delta F'_{\varphi_i(s),2}\}$

$= \{(F_{i,s} \Delta F'_{\varphi_i(s),1}) \nabla C,\ (F_{i,s} \Delta F'_{\varphi_i(s),2}) \nabla C\}$

$$F_{i,s} \Delta F'_{\varphi_i(s),1} = F_{i,s} \Delta [E_{\varphi_i(s)}^{-1}]\ (E_{\varphi_i(s)} \Delta E_1)$$

$$= F_{i,s} \Delta [E_i^{-1}]\ (E_i \Delta E_1) \quad \text{(construction de } q_i\text{)}$$

$$\lhd F'_{i,1}$$

$(F_{i,s} \Delta F'_{\varphi_i(s),1}) \nabla C \lhd F'_{i,1}$

De même,

$(F_{i,s} \Delta F'_{\varphi_i(s),2}) \nabla C \lhd F'_{i,2}$; aussi, l'ensemble de facteurs

$(F''_{i,s-1} - \{F_{i,s}\}) \cup \{F'_{i,1}, F'_{i,2}\}$ est-il obtenu par alourdissement suivi de simplification à partir de l'ensemble de facteurs que l'on avait trouvé en affinant dans $F''_{i,s-1}$ le facteur $F_{i,s}$ par $F_{\varphi_i(s)}$ en suivant la règle d'affinement ∂ ; on a bien $F''_{i,s} \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}^{\partial}$.

En poursuivant la démonstration comme celle du théorème XII, on prouve que si $[F_1][F_2] \in \mathcal{D}_1^{\times}$, $\{F_1, F_2\} \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}^{\partial}$.

Soit maintenant $D = \mathop{\times}\limits_{i=1} [C \nabla B_i]$ un embranchement de centre C;

on note D_i l'embranchement à deux facteurs

$$D_i = \left[C \nabla B_i\right]\left[C \nabla \left(\bigvee_{j \in [1,n]-\{i\}} B_j\right)\right]$$

$\forall\ i \in [1,n-1]$: $D \rightsquigarrow D_i$; on remarque que D_i est aussi de centre C. D peut être obtenu à partir de D_1 par une suite de n-2 affinements de facteurs par les décompositions D_i $(i \in [2,n-1])$.

Si $D \in \mathcal{D}_1^x$, les D_i sont éléments de $\mathcal{D}_1^x$ et leurs ensembles de facteurs éléments de $\mathcal{A}^{\partial}$ (si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des ensembles de facteurs utilisés dans l'écriture des décompositions de $\mathcal{D}_1$); l'ensemble des facteurs de D est donc bien élément de $\mathcal{A}^{\partial}$.

b) <u>Pratique de la recherche des embranchements de $\mathcal{D}_1^x$</u>

En observant le déroulement de l'algorithme des tableaux, on constate que si $[F_1][F_2] \in \mathcal{D}_1^x$, alors la racine de $[F_1][F_2]$ est "égale à" ou "surespace de" la racine d'un embranchement élément de $\mathcal{D}_1$ ou d'un embranchement obtenu par alourdissement d'une des décompositions éléments de $\mathcal{D}_1$.

L'idée vient donc pour chercher les embranchements de $\mathcal{D}_1^x$ de se restreindre à la recherche des embranchements dont on a déjà prévu la racine ;

Mais un embranchement D de racine C est élément de $\mathcal{D}_1^x$ si et seulement si le produit direct $^{C)}D = D \circ \left[E_\Omega \Delta \bar{C}\right]$ est élément de l'ensemble $\mathcal{D}_1'^x$ de décompositions obtenues en prenant $\mathcal{D}_1' = \left\{D' \circ \left[E_\Omega \Delta \bar{C}\right] / D' \in \mathcal{D}_1\right\}$ et en considérant que $\mathcal{D}_1'^x$ est obtenue à partir de $\mathcal{D}_1'$ par la fermeture X en prenant $E_\Omega \Delta \bar{C}$ pour espace de référence au lieu de E_Ω.

La recherche des embranchements de racine C se ramène donc à la recherche des produits directs de $\mathcal{S}'^{x}$ dont le plus fin est celui qui définit comme partition de l'ensemble des variables de $E_{\Omega} \Delta \overline{C}$ en classes connexes, la moins fine des partitions parmi celles qui sont plus fines que toutes les partitions en classes connexes définies par des éléments de $\mathcal{S}'_1$.

<u>Exemple</u> Soit $\mathcal{S}_1 = \{[ABC][CDE][AEFG],\ [ADE][BEF][CDG]\}$

Les embranchements maximaux parmi ceux qui sont moins fins que $[ABC][CDE][AEFG]$

sont $[\underline{AC}B][\underline{AC}DEFG]$ (1)

$[\underline{AE}BCD][\underline{AE}FG]$ (2)

$[\underline{CE}D][\underline{CE}ABFG]$ (3)

$[\underline{ACE}B][\underline{ACE}D][\underline{ACE}FG]$ (4)

Ceux moins fins que $[AED][BEF][CDG]$

sont : $[\underline{E}BF][\underline{E}ACDG]$ (5)

$[\underline{D}CG][\underline{D}ABEF]$ (6)

$[\underline{DE}A][\underline{DE}BF][\underline{DE}CG]$ (7)

Afin d'énumérer les embranchements maximaux de $\mathcal{S}_1^{x}$, je chercherai dans $\mathcal{S}_1^{x}$ les embranchements ayant pour racine soit une de celles déjà rencontrée, soit une union de ces racines. J'obtiens ainsi pour embranchements maximaux de $\mathcal{S}_1^{x}$ (dans l'ordre $\lesssim$):

Racine	coupe selon cette racine d'un embranchement de $\mathcal{D}_1^x$	justification	embranchement de $\mathcal{D}_1^x$
< AC >	[B] [DEFG]	(1)	[ABC] [ACDEFG]
< D >	[ABEF] [CG]	(6)	[ABDEF] [CDG]
< ACD >	[B] [EF] [G]	(1),(6)	[ABCD] [ACDEF] [ACDG]
< E >	[ACDG] [BF]	(5)	[ACDEG] [BEF]
< AE >	[B] [CD] [F] [G]	(2),(5)	[ABE] [ACDE] [AEF] [AEG]
< CE >	[AG] [BF] [D]	(3),(5)	[ACEG] [BCEF] [CDE]
< ACE >	[B] [D] [F] [G]	(4),(5)	[ABCE] [ACDE] [ACEF] [ACEG]
< DE >	[A] [BF] [CG]	(7)	[ADE] [BDEF] [CDEG]
< ADE >	[B] [F] [C] [G]	(2),(7)	[ABDE] [ADEF] [ACDE] [ADEG]

Les embranchements de racine CDE et ACDE ne sont pas maximaux.

6. QUELQUES ELEMENTS REMARQUABLES DU TREILLIS ($\mathcal{T}^x$, $\leqslant$)

Nous avons déjà étudié au 1er paragraphe de ce chapitre le treillis ($\mathcal{T}^x$, $\leqslant$) qui est isomorphe au treillis ($\mathcal{T}^x$, $\subset$). Nous allons dans la mesure du possible, chercher à compléter cette étude en recherchant les $\cup$ et $\cap$ irrédictibles de ($\mathcal{T}^x$, $\leqslant$).

a) Atomes et co-atomes

Le plus petit élément de $\mathcal{T}^x$ est $\phi^x = \{[E_\Omega]\}^x$

$\mathcal{T}^x$ n'a qu'un seul atome qui est de la forme $\{D_a\}^x$ où D_a est l'atome de $\mathcal{D}_{E_\Omega}$ c'est-à-dire la décomposition ayant pour ensemble de facteurs l'ensemble de tous les sous-espaces de E_Ω ayant toutes les variables de E_Ω sauf une : exemple : si E = <ABCD>, D_a = [ABC] [ABD] [ACD] [BCD]

pour $n \geqslant 2$, $\{D_a\}^x$ lui-même a n successeurs immédiats qui sont de la forme $\{D\}^x$ où D est un successeur immédiat de D_a dans ($\mathcal{D}_{E_\Omega}$, $\leqslant$), c'est-à-dire une décomposition ayant sous forme standardisée n-1 facteurs ayant chacun n-1 variables.

Le <u>plus grand élément</u> de $\mathcal{T}^x$ est la décomposition en produit direct d'espaces n'ayant qu'une variable ;
exemple : si E_Ω = < ABCD >, c'est $[A][B][C][D]$.

<u>Chaque co-atome</u> est associé à un sous-espace E_1 de E_Ω ayant au moins deux variables et est engendré par l'ensemble de toutes les décompositions définissant une partition de Ω en classes connexes dont une classe est égale à l'ensemble des variables de E_1, les autres étant des singletons.

<u>Exemple</u> : si E = < ABCD >
il y a 11 co-atomes : 6 du type $\{[A][B][CD]\}^x$, 4 du type
$\{[A][BC][BD], [A][BC][CD], [A][BD][CD]\}^x$, et
$\{[AB][AC][AD], [AB][BC][BD], [AC][BC][CD], [AD][BD][CD]\}^x$
remarquons que dans cet exemple on n'a pas cité toutes les décompositions des ensembles $\mathcal{D}_i^x$ ni même dans la dernière, les 16 décompositions les plus fines, mais seulement un ensemble de décompositions engendrant $\mathcal{D}_i^x$.
Je ne rédige pas la démonstration, du fait que l'on obtient ainsi tous les co-atomes et eux seuls. Cette démonstration assez simple s'appuie sur le théorème XIII.

$\mathcal{T}^x$ a $2^n - n - 1$ co-atomes si Ω a n ensembles de départ.

b) <u>U-irréductibles</u>
Tout élément du treillis fini $(\mathcal{T}^x, \leq)$ est borne supérieure de l'ensemble des U-irréductibles plus petits que lui.
L'ensemble $\mathcal{T}^x_{E_\Omega}$ des restrictions à $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ des éléments $\mathcal{D}^x$ de $\mathcal{T}^x$ considérées comme des applications est un ensemble de fermetures, qui, ordonné de façon habituelle par $\leq$, est isomorphe à $(\mathcal{T}^x, \leq)$ et est un U-sous-demi-treillis du treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$. Tout élément de $\mathcal{T}^x_{E_\Omega}$ est donc égal à la borne supérieure dans le treillis des fermetures sur $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ d'un ensemble de restriction à $\mathcal{R}_{E_\Omega}$ d'U-irréductibles de $(\mathcal{T}^x, \leq)$.
Les U-irréductibles de $(\mathcal{T}^x, \leq)$ sont les singletons $\{D\}^x$ tels que $D \notin (\{D\}^x - \{D\})^x$. Le théorème XV permet de les caractériser.

THEOREME XV

Une décomposition $D \in \mathcal{D}_{E_\Omega}$ non banale est sans connecteurs si et seulement si $D \notin (\{D\}^x - \{D\})^x$.

Démonstration : Soit $D = \underset{E \in F^S}{*} [E]$ une décomposition définie sur E_Ω écrite sous forme standardisée et ayant un connecteur F.

Alors ${}^{F)}D$ est une décomposition non connexe ; nommons $\mathcal{D}' = \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$ l'ensemble des sous-décompositions connexes de ${}^{F)}D$.

Considérons une sous-décomposition connexe D_1 de ${}^{F)}D$. Nommons F_1 la partie de F^S dont les éléments sont les facteurs E de F^S, tels que $E \Delta \bar{F} \lhd E_{D_1}$.

Alors $\Delta = [E_{D_1} \nabla F] * (\underset{E \in F^S - F_1}{*} [E])$

et $\Delta' = (\underset{E \in F_1}{*} [E]) * [(\underset{D_i \in \mathcal{D}' - \{D_1\}}{\nabla} E_{D_i}) \nabla F]$ sont définies

sur E_D, distinctes de D puisque aucun sur-espace strict de F n'est facteur de D et sont obtenues à partir de D par alourdissement. Elles sont donc toutes deux élément de $\{D\}^x - D$.

Par ailleurs les variables de $E_{D_i} \Delta \bar{F}$, pour i = 1, sont dans un seul facteur de Δ'. On peut donc obtenir par allègement de Δ' la décomposition Δ'' définie sur $E_{D_1} \nabla F$:

$\Delta'' = [F] * (\underset{E \in F_1}{*} [E])$. Toute relation qui admet Δ' admet Δ''. De plus, toute relation R pour laquelle $\Delta(R) = R$ et $\Delta''(R) = [E_{\Delta_1} \nabla F](R)$ est telle que $[F] * (\underset{E \in F_1}{*} [E]) * (\underset{E \in F - F_1}{*} [E])(R) = R$ donc que $D(R) = R$; $D \in \{\Delta, \Delta'\}^x$; $D \in (\{D\}^x - \{D\})^x$

- Réciproquement, soit $D = \underset{j\in[1,r]}{*}[F'_j]$ une décomposition non banale,

définie sur E_Ω et telle que $D \in (\{D\}^x - \{D\})^x$. Les éléments les plus fins de $\{D\}^x - \{D\}$ sont les décompositions de la forme $\Delta = (\underset{1\leq j\leq r}{*}[F'_j]) * [E]$ où E est un élément minimal de l'ensemble des espaces qui ne sont sous-espaces d'aucun des facteurs F'_j de D. Soit $\mathcal{D}_1$ l'ensemble de ces décompositions Δ ; par hypothèse $D \in \mathcal{D}_1^x$. On peut donc le prouver par la méthode des tableaux ; soit Δ_{r+1} la décomposition de $\mathcal{D}_1^x$ utilisée pour construire le point q_{r+1} du tableau (on rappelle que l'on avait nommé r le nombre de facteurs de D) ;

$\forall\, j \in [1,r] : q_{r+1} \neq q_j$; d'autre part, il existe un sous-espace E qui n'est sous-espace d'aucun facteur F'_j de D tel que

$\Delta_{r+1} = (\underset{j\in[1,r]}{*}[F'_j]) * [E]$.

Enfin, il existe une application f de l'ensemble des facteurs de Δ_{r+1} dans $[1,r]$ telle que $q_{r+1} = *\,(\underset{j\in[1,r]}{*}[F'_j]\, q_{f(F'_j)}) * E\, q_{f(E)}$

Or E n'est pas sous-espace de $F'_{f(E)}$ donc il existe au moins une variable que je note V dans $E \Delta \overline{F'_{f(E)}}$, telle que $coor_V(q_{f(E)}) \neq coor_V(\overset{o}{p})$; pour que le point q_{r+1} existe, il faut que l'image par f de tout facteur F'_j où figure cette variable (et il en existe puisque $\underset{j\in[1,r]}{\nabla} F'_j = E_\Omega$) soit égale à f(E).

Nommons J_1 l'ensemble des indices des facteurs F'_j de D dont l'image par f est f(E) et posons $J_2 = [1,r] - J$; on a vu que V est variable de $\underset{j \in J_1}{\nabla} F'_j$ et pas de $\underset{j \in J_2}{\nabla} F'_j$; d'autre part $\underset{j \in J_1}{\nabla} F'_j \neq E_\Omega$ sans quoi on aurait $q_{r+1} = q_{f(E)}$; il y a donc des variables qui sont variables de $\underset{j \in J_2}{\nabla} F'_j$ et pas de $\underset{j \in J_1}{\nabla} F'_j$.
Pour montrer que $F'_{f(E)}$ est un connecteur de D, il nous suffit donc de montrer que $\left(\underset{j \in J_1}{\nabla} F'_j\right) \Delta \left(\underset{j \in J_2}{\nabla} F'_j\right) \lhd F'_{f(E)}$. Montrons que toute variable commune à $\underset{j \in J_1}{\nabla} F'_j$ et $\underset{j \in J_2}{\nabla} F'_j$ est variable de $F'_{f(E)}$.
Soit $k \in J_1$, $l \in J_2$ et une variable A qui soit variable de F'_k et F'_l. Pour que le point q_{r+1} existe, il faut que $coor_A q_{f(k)} = coor_A q_{f(l)}$, donc que $coor_A q_{f(E)} = coor_A q_{f(l)}$ et que $coor_A q_{f(E)} = v_o$; alors A var $F'_{f(E)}$.
$F'_{f(E)}$ est connecteur de D.

Si D est U-irréductible de $(\mathcal{D}_{E_\Omega}, \leq)$, alors on est dans un cas particulier du cas où $\{D\}^x$ est U-irréductible de $(\mathcal{T}^x, \leq)$. Le prédécesseur immédiat de $\{D\}^x$ dans $(\mathcal{T}^x, \leq)$ est alors $\{D'\}^x$ où D' est le prédécesseur immédiat de D dans $(\mathcal{D}_{E_\Omega}, \leq)$. Ce cas se présente lorsque D a au moins deux facteurs, chacun d'eux ayant exactement n-1 variables, si n est le nombre de variables de E - Exemple : E = < ABCD >. Les U-irréductibles dont le prédécesseur est engendré par un singleton sont les $\{D\}^x$ où les valeurs possibles pour D sont :

les 6 décompositions du type [ABC] [ABD]

les 4 décompositions du type [ABC] [ABD] [ACD]

la décomposition [ABC][ABD][ACD][BCD](voir l'annexe, paragraphe 11)

Il y a 2^n-n-1 décompositions D telles que $\{D\}^x$ soit un U-irréductible précédé d'un élément du type $\{D'\}^x$, où l'ensemble de facteurs de D' est $\mathcal{F} \cup \{ \nabla_{F \in \mathcal{F}} (E_\Omega \Delta \overline{F}) \}$ si $\mathcal{F}$ est l'ensemble de facteurs de D.

c) <u>A la recherche des $\cap$-irréductibles de $(\mathcal{T}^x, \leq)$</u>

Ces $\cap$-irréductibles seraient très agréables à connaître puisque tout élément de $(\mathcal{T}^x, \subset)$ peut être obtenu par une intersection ensembliste finie d' $\cap$ -irréductibles.

Je n'ai pu que trouver certains types d' $\cap$ -irréductibles, sans savoir s'il y en a d'autres.

- un premier lot d' $\cap$ -irréductibles est constitué par l'ensemble des co-atomes décrits en a).

- un deuxième lot est constitué par les inter-irréductibles engendrés par un singleton.

Nous allons les étudier.

Soit $\{D\}^x$ un inter-irréductible de $\mathcal{T}^x$.

Alors soit $\mathcal{D}_1^x$ son unique successeur immédiat.

Soit $D_1 \in \mathcal{D}_1^x - \{D\}^x$

Alors $\forall \Delta \in \mathcal{D}_{E_\Omega} - \{D\}^x : D_1 \in \{D, \Delta\}^x$

Nommons $\mathrm{Sup}_{\mathcal{D}_{E_\Omega}}$ et $*$ les opérations borne supérieure et borne inférieure dans le treillis $(\mathcal{D}_{E_\Omega}, \leq)$.

$\forall\ \Delta \in \mathcal{D}_{E_\Omega} - \{D\}^x : D_1 \leq \mathrm{Sup}_{\mathcal{D}_{E_\Omega}} (D, \Delta)$

$D_1 \leq \underset{\Delta \in \mathcal{D}_{E_\Omega} - \{D\}^x}{*} (\mathrm{Sup}_{\mathcal{D}_{E_\Omega}} (D,\Delta))$

et, puisque $\mathcal{D}_{E_\Omega}$ est distributif,

$D_1 \leq \mathrm{Sup}_{\mathcal{D}_{E_\Omega}} (D, \underset{\Delta \in \mathcal{D}_{E_\Omega} - \{D\}^x}{*} (\Delta))$

posons $D_m = \underset{\Delta \in \mathcal{D}_{E_\Omega} - \{D\}^x}{*} (\Delta)$. $D_m \notin \{D\}^x$ sans quoi

D_1 serait $\leq$ D.

Alors $\{D\}^x$ et $[D_m$ forment un idéal et un filtre principaux et complémentaires de $(\mathcal{D}_{E_\Omega}, \leq)$.

Donc, (cf.annexe 9.), D est un $\cap$-irréductible et D_m un U-irréductible de $(\mathcal{D}_{E_\Omega}, \leq)$.

Le successeur immédiat $\mathcal{D}_1^x$ de D^x dans $\mathcal{T}^x$ est

$\mathcal{D}_1^x = \{D, D_m\}^x$; alors (cf.annexe 11), on sait qu'il existe un sous-espace E_1 de E_Ω ayant au moins deux variables, tel que

$D = [E_1] * (\underset{V var\ E_\Omega \Delta \bar{E}_1}{*} [<V>])$

et $D_m = \underset{V' var\ E_1}{*} [E_\Omega \Delta <\bar{V'}>]$

La décomposition D' obtenue en affinant chaque facteur de D_m par D est élément de $\mathcal{D}_1^x = \{D, D_m\}^x$.

Or $D' = \underset{V var\ E_\Omega \Delta \bar{E}_1}{*} [<V>] * (\underset{V' var\ E_1}{*} [E_1 \Delta <\bar{V'}>])$

D' est plus fine que D et que D_m, donc $\mathcal{D}_1^x = \{D'\}^x$

Nous avons démontré la proposition :

Proposition 16

Ceux des $\cap$ -irréductibles de $(\mathcal{T}^x_{,\leq})$ qui ont un maximum D dans l'ordre de finesse ont pour maximum un $\cap$ -irréductible de $\mathcal{D}_{E_\Omega}$. Leur successeur immédiat dans $(\mathcal{T}^x_{,\leq})$ a aussi un maximum qui est le successeur immédiat de D dans $\mathcal{D}_{E_\Omega}$.

7. DECOMPOSITIONS EQUIVALENTES A UN ENSEMBLE D'EMBRANCHEMENTS DEFINIS SUR E

Je dois d'abord signaler que les décompositions en deux facteurs que j'avais nommées embranchement depuis 1969 (J. Boittiaux - contrat DGRST), ont été rebaptisées dépendances multivaluées par d'autres auteurs.

Dans une publication commune (Sagiv, C. Delobel, D. Stott Parker et R. Fagin, Journal de l'ACM Juin 1981), ont exposé une élégante correspondance entre l'étude des ensembles de dépendances fonctionnelles et multivaluées et un certain type de logique propositionnelle, ce qui leur permet de construire un algorithme d'algèbre binaire de Boole généralisant celui utilisé pour l'étude des dépendances fonctionnelles.

Il est donc tout à fait naturel de se demander dans quel cas on peut remplacer l'étude d'une décomposition simple par l'étude d'un ensemble de décompositions en deux facteurs, ou, ce qui revient au même, par un ensemble d'embranchements : tout embranchement B est élément de l'image par la fermeture X de l'ensemble des décompositions en deux facteurs obtenues par alourdissement de B et gardant même racine que B.

Soit $D = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F]$ une décomposition simple définie sur E_{Ω} et écrite sous forme standardisée ; soit $\mathbf{B}$ l'ensemble des embranchements définis sur E_{Ω} et moins fins que D.

Supposons que $\{D\}^{X} = \mathbf{B}^{X}$

Alors la méthode des tableaux peut prouver que $D \in \mathbf{B}^{X}$, et puisque D est la décomposition la plus fine de $\mathbf{B}^{X}$, il faut que le point reflet de chaque facteur de D soit utilisé dans l'algorithme. Pour qu'il puisse être utilisé une première fois, il faut qu'il contienne la racine d'au moins un embranchement élément de $\mathbf{B}$, c'est-à-dire obtenu par alourdissement de D. Mais si la méthode des tableaux prouve que $D \in \mathbf{B}^{X}$, elle prouve aussi, pour tout espace E que $D \circ [E]$ est élément de $\mathbf{B}_{E}^{X}$ (j'appelle $\mathbf{B}_{E}$ l'ensemble des décompositions non banales de la forme $B \circ [E]$ où $B \in \mathbf{B}$).
Les éléments de $\mathbf{B}_{E}$ sont des embranchements.

Si D contient un facteur gênant, il existe une suite d'au moins trois variables $V_1, V_2, \ldots, V_n$, telles que si E est l'espace qu'elles engendrent, $D \circ [E] = [V_1\ V_2][V_2\ V_3] \cdots [V_i\ V_{i+1}] \cdots$

$$[V_{n-1}\ V_n][V_n\ V_1] \ ;$$

un raisonnement élémentaire montre qu'aucun alourdissement de cette décomposition n'est un embranchement défini sur E dont la racine est comprise dans un des facteurs.

Donc $\{D \circ [E]\}^x \neq B_E^x$ et $\{D\}^x \neq B^x$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
Nous avons démontré que si $\{D\}^x = B^x$, D n'a pas de facteurs gênants.
Réciproquement, supposons que D n'ait pas de facteur gênant ; alors, si C est le centre de D, D d'une part, et $D \circ [C]$ d'autre part, ont des variables marginales ; on peut en déduire que D a au moins une branche. D'autre part, si $D = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} F$ est sans facteur gênant et si F_1 est une branche de D, alors $\underset{F \in \mathbf{F}-\{F_1\}}{*}[F]$ est aussi sans facteur gênant (attention ! il n'en serait pas de même si F_1 était connecteur) puisque $\underset{F \in \mathbf{F}-\{F_1\}}{*}[F]$ est la décomposition $D \circ [E]$ où E est l'espace engendré par l'ensemble de toutes les variables sauf les marginales de D figurant dans F_1.
$\underset{F \in \mathbf{F}-\{F_1\}}{*}[F]$ si elle n'est pas banale a donc au moins une branche.

Supposons que la forme standardisée de D ait k facteurs, on peut numéroter ces facteurs de 1 à k de façon à ce que si $D = \underset{i \in [1,k]}{*}[F_i]$ F_i soit branche de $D'_i = \underset{j \in [i,k]}{*}[F_j]$ tant que D'_i n'est pas banale.

A chaque facteur F_i pour $i \leq k-1$, on peut attacher un embranchement $B_i = \left[\underset{F_j \in \mathbf{F}_i}{\nabla} F_j\right]\left[\underset{F_j \in \mathbf{F}-\mathbf{F}_i}{\nabla} F_j\right]$, où $\mathbf{F}_i$ est l'ensemble ayant pour élément le facteur F_i et, pour tout facteur F_j pour lequel $j < i$ qui, dans D'_j, se branchait en F_i, tous les facteurs éléments du $\mathbf{F}_j$ correspondant. Ainsi la racine de B_i est sous-espace de F_i ; les B_i sont évidemment obtenus par alourdissement de D. Montrons que $D \in \{B_i / i \in [1,k-1]\}^x$.

Posons $D_i = (\underset{j\in[1,i]}{*}[F_j]) * [\underset{j\in[i+1,k]}{\nabla} F_j]$

Pour $i = 1$, $D_1 = B_1$ et pour $i \in [2,k-1]$, D_i est obtenu en affinant le dernier facteur de D_{i-1} par B_i ; en effet, la racine de B_i étant sous-espace de F_i est sous-espace du dernier facteur de D_{i-1} et, d'autre part,

$(\underset{F_j\in F_i}{\overline{\nabla}} F_j)\ \Delta\ (\underset{j\in[i,k]}{\nabla} F_j) = F_i$ et

$(\underset{F_j\in F-F_i}{\nabla} F_j)\Delta(\underset{j\in[i,k]}{\nabla} F_j) = \underset{j\in[i+1,k]}{\nabla} F_j$

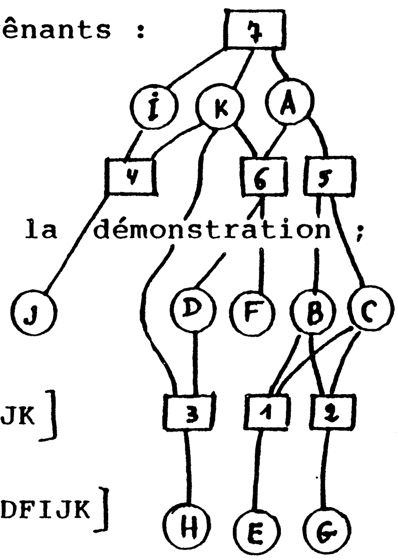
donc, $D_{i-1} \in \{B_i/i\in[1,k]\}^x \Rightarrow D_i \in \{B_i/i\in[1,k]\}^x$

et puisque $D_1 \in \{B_i/i\in[1,k]\}^x$,

$\forall\ i \in [1,k-1]$: $D_i \in \{B_i/i\in[1,k]\}^x$; or $D = D_{k-1}$.

Donc si D n'a pas de facteurs gênants, $\{D\}^x = B^x$.

<u>Exemple</u> donnant la trace du raisonnement utilisé dans la réciproque : soit la décomposition sans facteurs gênants :



$$D = \begin{array}{ccccccc}[ABC] & [BCE] & [ADFK] & [BCG] & [DHK] & [AIK] & [IJK] \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 3 & 7 & 4\end{array}$$

Nous avons numéroté les facteurs comme dans la démonstration ;

alors $B_1 = [BCE][ABCDFGHIJK]$; $D_1 = B_1$

$B_2 = [BCEG][ABCDFHIJK]$; $D_2 = [BCE][BCG][ABCDFHIJK]$

$B_3 = [DHK][ABCDEFGIJK]$; $D_3 = [BCE][BCG][DHK][ABCDFIJK]$

$B_4 = [IJK][ABCDEFGHIK]$; $D_4 = [BCE][BCG][DHK][IJK][ABCDFIK]$

$B_5 = [ABCEG][ADFHIJK]$; $D_5 = [BCE][BCG][DHK][IJK][ABC][ADFIK]$

$B_6 = [ABCDEFGHK][AIJK]$; $D_6 = [BCE][BCG][DHK][IJK][ABC][ADFK][AIK]$

Nous avons démontré le théorème XVI :

THEOREME XVI

Etant donnée une décomposition simple D définie sur E_Ω et B l'ensemble des embranchements définis sur E_Ω et moins fins que D, c'est-à-dire l'ensemble des embranchements obtenus par alourdissement de D, pour que $\{D\}^x = B^x$, il faut et il suffit que D soit une décomposition sans facteurs gênants.

8. EXISTENCE D'UNE RELATION FINIE ADMETTANT TOUTES LES DECOMPOSITIONS DE $\mathfrak{D}_1^x$ ET AUCUNE AUTRE DECOMPOSITION DE $\mathfrak{D}_{E_\Omega}$ POUR $\mathfrak{D}_1$ DONNEE

THEOREME XVII

Pour tout élément $\mathfrak{D}_1^x$ de $\mathcal{T}^x$, il existe une relation finie définie sur E_Ω admettant toutes les décompositions de $\mathfrak{D}_1^x$ et aucune autre décomposition simple définie sur E .

Démonstration

- cas où toutes les décompositions de $\mathfrak{D}_1^x$ sont connexes.

Alors soit D $\notin \mathfrak{D}_1^x$ et R_D sa relation reflet.

$\mathfrak{D}_1^x(R_D)$ admet $\mathfrak{D}_1^x$ mais pas D (conséquence du théorème XI).

$\mathfrak{D}_1^x(R_D)$ est une relation finie ; $\mathfrak{D}_{E_\Omega}$ étant un ensemble fini, formons la famille finie de relations $\left\{(\mathfrak{D}_1^x(R_D))'\right\}_{D \in \mathfrak{D}_{E_\Omega} - \mathfrak{D}_1^x}$ où les $(\mathfrak{D}_1^x(R_D))'$ sont des relations déconnectées deux à deux et chacune semblable à la relation $\mathfrak{D}_1^x(R_D)$ correspondante. L'union de ces relations est finie ; elle admet $\mathfrak{D}_1^x$ mais aucune des décompositions D qui ne sont pas élément de $\mathfrak{D}_1^x$.

- cas où certaines décompositions de $\mathfrak{D}_1^x$ ne sont pas connexes.

Soit $\widetilde{\Pi}$ l'ensemble des espaces engendrés par les classes connexes de l'ensemble des variables pour une décomposition maximale de $\mathfrak{D}_1^x$ (cf. théorème XIII). Pour chaque E $\in \widetilde{\Pi}$ et pour chaque décomposition D maximale de $\mathfrak{D}_1^x$ dans l'ordre de finesse, D a une sous-décomposition connexe D_E définie sur E.

Notons Θ la fermeture sur $\mathcal{P}(\mathcal{D}_E)$ qui à tout ensemble $\mathcal{D}$ de décompositions définies sur E fait correspondre l'ensemble des décompositions D définies sur E telles que : $\forall\ R \in \mathcal{R}_{\Omega} : (\forall \Delta \in \mathcal{D}$:

R admet Δ) $\Rightarrow$ R admet D. On peut former une relation finie R_E définie sur E admettant toutes les décompositions de $\{ D_E / D$ maximale de $\mathcal{D}_1^{x} \}^{\Theta}$ et n'admettant aucune autre décomposition. Alors,

$R = \underset{E \in \Pi}{*} R_E$ admet toutes les décompositions de $\mathcal{D}_1^{x}$ et n'en admet aucune autre.

C H A P I T R E V

ENSEMBLE DE DECOMPOSITIONS SIMPLES QUELCONQUES

ETUDE CONJOINTE D'UN ENSEMBLE DE DECOMPOSITIONS SIMPLES ET D'UN ENSEMBLE DE DEPENDANCES FONCTIONNELLES

CHAPITRE V

ENSEMBLE DE DECOMPOSITIONS SIMPLES QUELCONQUES

ETUDE CONJOINTE D'UN ENSEMBLE DE DECOMPOSITIONS SIMPLES ET D'UN ENSEMBLE DE DEPENDANCES FONCTIONNELLES

1. TREILLIS $(\mathcal{S}_\Omega, \leqslant)$ ET TREILLIS $(\mathcal{T}^*, \subset)$ ET $(\mathcal{T}^*, \rightsquigarrow)$

a) Rappels sur $(\mathcal{S}_\Omega, \leqslant)$

Soit $\mathcal{S}_\Omega$ l'ensemble des décompositions simples ;
on rappelle que l'ordre $\leqslant$ sur $\mathcal{S}_\Omega$ est défini par :
$\forall D_1 \in \mathcal{S}_\Omega : \forall D_2 \in \mathcal{S}_\Omega : D_1 \leqslant D_2 \Leftrightarrow \forall R \in \mathbb{R}_\Omega : D_1(R) \leqslant^* D_2(R)$.

$(\mathcal{S}_\Omega, \leqslant)$ ainsi ordonné est isomorphe au treillis distributif libre engendré par les variables de E_Ω.
On rappelle aussi que l'on peut définir sur $\mathcal{S}_\Omega$ un préordre de finesse dont la restriction à l'ensemble des décompositions non banales est un ordre, mais, si j'appelle $(\mathcal{S}'_\Omega, \rightsquigarrow)$ l'ensemble des classes d'équivalence (encore appelées dépendances) de ce préordre ordonné par l'ordre induit, l'ensemble $(\mathcal{S}'_\Omega, \rightsquigarrow)$ n'est pas un treillis lorsque le cardinal de Ω est supérieur à 2. On rappelle aussi que $\mathcal{S}_\Omega$ n'est pas fermé par composition des applications et que le composé $D_1 \circ D_2$ de deux décompositions telles que E_{D_2} ne soit pas sous-espaces de E_{D_1} est une décomposition généralisée non pleine.

b) Treillis $(\mathcal{T}^*, \rightsquigarrow)$

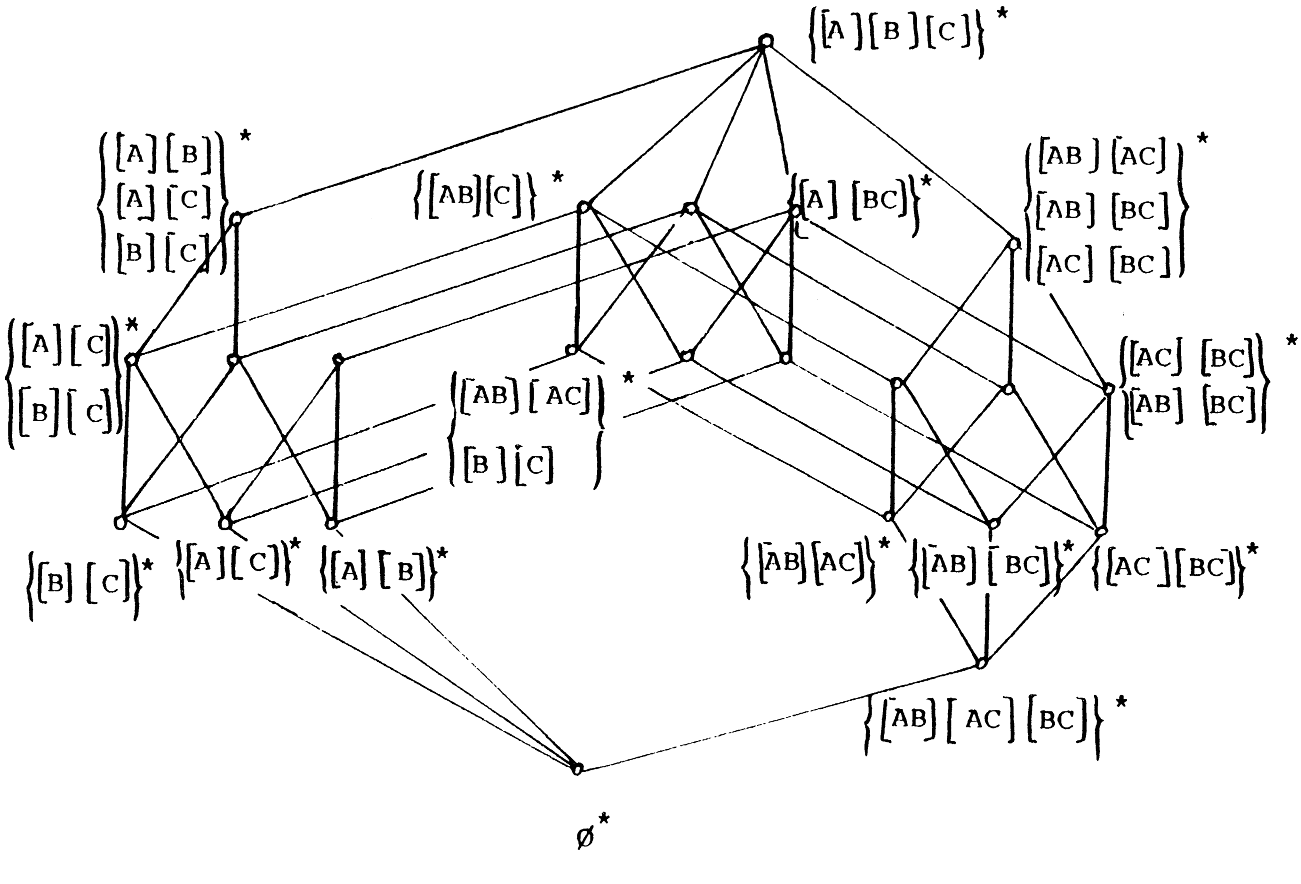
On peut sur $\mathcal{P}(\mathcal{S}_\Omega)$ définir le préordre $\rightsquigarrow$ par :

$\forall \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_\Omega : \forall \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_\Omega : \mathcal{S}_1 \rightsquigarrow \mathcal{S}_2 \Leftrightarrow$

$\forall R \in \mathbb{R}_\Omega : (\forall D \in \mathcal{S}_1 : R \text{ admet } D) \Rightarrow \forall D \in \mathcal{S}_2 : R \text{ admet } D.$

Ce préordre est régulier ; on peut donc lui associer la fermeture définie sur $\mathcal{P}(\mathcal{S}_\Omega)$ par $\mathcal{S}^*_1 = \{D \in \mathcal{S}_\Omega \,/\, \forall R \in \mathbb{R}_\Omega :$
$(\forall D' \in \mathcal{S}_1 : R \text{ admet } D') \Rightarrow R \text{ admet } D\}$

L'ensemble des invariants de cette fermeture ordonné par l'ordre $\leadsto$ induit par le préordre $\leadsto$ est un treillis $(\mathcal{T}^*, \leadsto)$ dual du treillis $(\mathcal{T}^*, \subset)$ qui est lui-même un inter-demi-treillis de $\mathcal{P}(\mathcal{S}_\Omega)$. On remarquera que $\mathcal{S}_\Omega$, $\mathcal{P}(\mathcal{S}_\Omega)$ et par conséquent $\mathcal{T}^*$ sont tous des ensembles finis, quoique d'un cardinal si élevé pour $n > 5$ qu'il dépasse toutes nos possibilités de manipulation. Donnons à titre d'exemple le diagramme de succession immédiate de $(\mathcal{T}^*, \subset)$ lorsque $\Omega = \{A, B, C\}$.

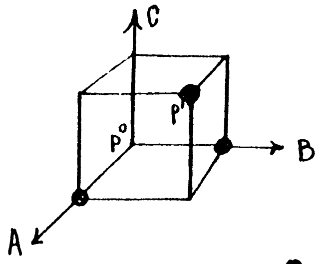


En faisant l'inventaire des parties du "cube" R_C de <ABC> engendré par $\{p^o, p'\}$ où p^o et p' sont des points déconnectés de <ABC>, on constate que pour chaque élément $\mathcal{S}^*$ de $\mathcal{T}^*$, lorsque Ω = <ABC>, il existe une partie de R_C admettant les décompositions de $\mathcal{S}^*$ et aucune autre décomposition.

Nous donnons ici cet inventaire sous forme visualisée traditionnelle.

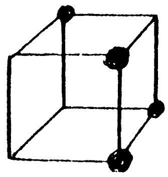
Relations admettant seulement :

$\emptyset^*$



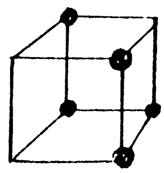
(8 relations)

$\{[A]\,[C]\}^*$



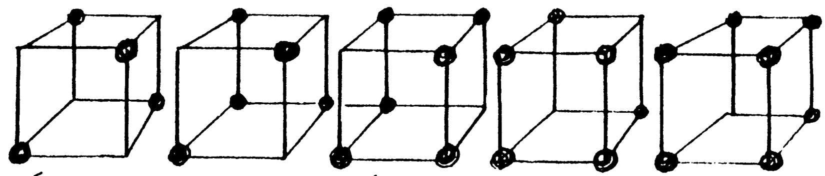
(8 relations x 3 (nombre de décompositions de même "forme"))

$\{[A]\,[B]\,,\,[A]\,[C]\}^*$



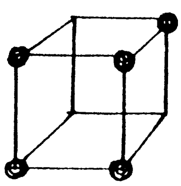
(8 relations x 3)

$\{[A]\,[B]\,,\,[A]\,[C]\,,\,[B]\,[C]\}^*$



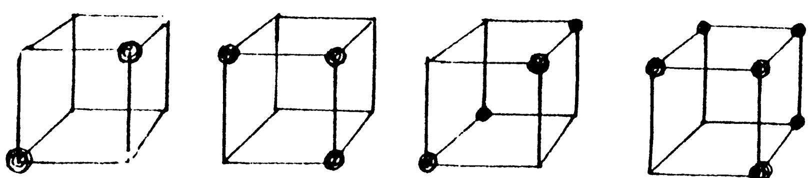
2 relations + 8 + 4 + 12 + 8

$\{[B]\,[C]\,,\,[AB]\,[AC]\}^*$

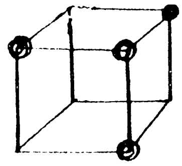


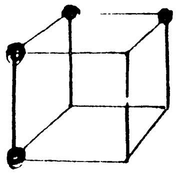
(8 relations x 3)

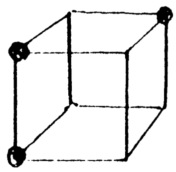
$\{[A]\,[BC]\}^*$

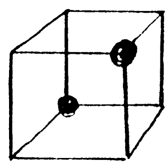


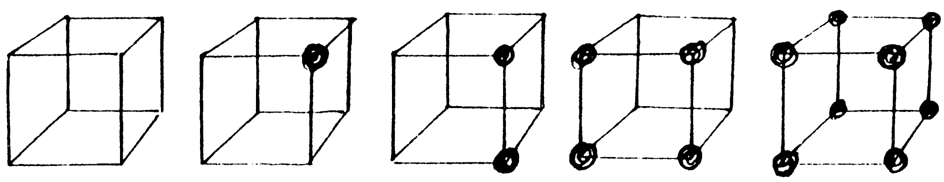
(4 relations x 3) + 8 x 3 + 2 x 3 + 4 x 3

$\{[AB][AC][BC]\}^*$  (8 relations)

$\{[AB][AC]\}^*$  (8 relations x 3)

$\{[AB][AC],\ [AB][BC]\}^*$  (8 relations x 3)

$\{[AB][AC],[AB][BC],[AC][BC]\}^*$  (4 relations)

$\mathcal{O}_{E_\Omega}$ 

1 relation vide + 8 + 12 + 6 + 1

Contrairement à ce qui se passait pour T^{x}, il est impossible en général d'associer à un élément de T^{*} une fermeture sur R_{E_Ω}.

Mais on peut encore construire un treillis isomorphe à $(\mathcal{T}^*, \rightsquigarrow)$ (donc au dual de $\mathcal{T}^*, \subset$), de la façon suivante: définissons sur $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\Omega)$ un préordre régulier $\twoheadrightarrow$ par
$\forall \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_\Omega : \forall \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_\Omega : \mathcal{R}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{R}_2 \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{S}_\Omega :$
$(\forall R \in \mathcal{R}_1$: R admet D$) \Rightarrow (\forall R \in \mathcal{R}_2$: R admet D$)$. La fermeture f associée à ce préordre régulier est telle que $\forall \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_\Omega$:
$f(R_1) = \{R \in \mathcal{R}_\Omega / \forall D \in \mathcal{S}_\Omega : (\forall R' \in \mathcal{R}_1 : R'$ admet $D) \Rightarrow$ R admet $D\}$.

Les invariants de cette fermeture forment évidemment une partie de Moore de $\mathcal{P}(\mathcal{R}_\Omega)$. De plus, si je note $\mathcal{S}^*_{\mathcal{R}_1}$ l'ensemble des décompositions de $\mathcal{S}_\Omega$ admises par toute relation de $\mathcal{R}_1$, c'est-à-dire l'intersection des ensembles de décompositions de $\mathcal{S}_\Omega$ admises par chacune des relations $R \in \mathcal{R}_1$, on voit que $f(\mathcal{R}_1)$ est le plus grand ensemble de relations de $\mathcal{R}_\Omega$ tel que :
$\mathcal{S}^*_{\mathcal{R}_1} = \mathcal{S}^*_{f(\mathcal{R}_1)}$; d'autre part $\forall \mathcal{R}_1 \in \mathcal{S}_\Omega : \forall \mathcal{R}_2 \in \mathcal{S}_\Omega$:
$f(\mathcal{R}_1) \subset f(\mathcal{R}_2) \Leftrightarrow \mathcal{S}^*_{\mathcal{R}_2} \subset \mathcal{S}^*_{\mathcal{R}_1}$ d'où l'isomorphie annoncée entre le treillis $(\mathcal{F}^*, \subset^c)$ des $f(\mathcal{R}_i)$ ordonné par inclusion et le treillis $(\mathcal{T}^*, \rightsquigarrow)$;on remarque au passage que la correspondance $\mathcal{S}^*_{\mathcal{R}_1} \longleftrightarrow f(\mathcal{R}_1)$ est un un exemple de correspondance de Galois.

c) <u>Étude des parties d'un hypercube et applications à l'étude de $(\mathcal{T}^*, \rightsquigarrow)$</u>

Nous avons vu que si Ω est de cardinal 3, pour tout $\mathcal{S}^* \in T^*$, il existe une relation incluse dans le cube $[A] \{p^o, p^1\} * [B] \{p^o, p^1\} * [C] \{p^o, p^1\}$ admettant toutes les décompositions de $\mathcal{S}^*$ et aucune autre.

Il me semble qu'une propriété semblable ne doit pas être vérifiée pour un cardinal élevé car je crois que le cardinal d'un ensemble de parties du cube $\{p^o, p^1\}$ non images l'une de l'autre dans une permutation des variables doit être nettement inférieur au plus grand cardinal d'une partie de $\mathcal{T}^*$ dont les éléments ne sont pas images l'un de l'autre dans une permutation de variables - ce qui resterait à vérifier.

De plus, il n'est pas prouvé que pour tout élément $\mathcal{S}^*$ de $\mathcal{T}^*$, il existe une relation admettant toutes les décompositions de $\mathcal{S}^*$ et aucune autre. Enfin, si $D \notin \mathcal{S}^*$, par définition, il existe une relation R admettant toutes les décompositions de $\mathcal{S}^*$ et n'admettant pas D, mais j'ignore si cela implique qu'il existe une relation finie admettant $\mathfrak{S}^*$ et n'admettant pas D.

L'idée d'étudier des relations incluses dans l'hypercube engendré dans E_Ω par un ensemble $\{p^o, p^1\}$ de deux points déconnectés de E_Ω peut toutefois être fructueuse : pour chaque relation R remarquable étudiée, l'ensemble de toutes les décompositions admises par R est un élément de $\mathcal{T}^*$ et on peut tirer des conclusions de son existence. Nous en donnerons deux exemples.

1- La relation $\{p^o, p^1\}$ admet toutes les décompositions connexes sur E_Ω et tous ses sous-espaces et n'admet aucune décomposition non connexe sur E_Ω ou un de ses sous-espaces. D'où la

Proposition 17

Si toutes les décompositions éléments de $\mathfrak{S}_1$ sont connexes, toutes les décompositions éléments de $\mathfrak{S}_1^*$ sont connexes elles aussi.

2 - Supposons que le cardinal de Ω soit au moins égal à deux. Soit E un sous-espace de E_Ω, soit $\mathcal{G} = \{F \lhd E_\Omega \;/\; \text{non } E \lhd F\}$. La relation $\bigvee_{F \in \mathcal{G}} ([F]\, p^o \;*\; \{E_\Omega \Delta \bar{F}\}\, p^1)$ admet toute décomposition en produit direct définie sur un espace $F \in \mathcal{G}$ et n'admet pas $\underset{V \text{ var } E}{\overset{*}{V}} [E \Delta \langle V \rangle]$ qui est la moins fine des décompositions non banales définies sur E. Alors,

$\forall\, \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_\Omega : \forall D \in \mathfrak{S}_\Omega : ((\forall \Delta \in \mathfrak{S}) : \text{non } E_D \lhd E_\Delta) \text{ et } D \in \mathfrak{S}^*) \Longrightarrow$ D est banale.

Proposition 18

L'espace de définition de toute décomposition non banale élément de $\mathfrak{S}_1^*$ est sous-espace de l'espace de définition d'au moins une décomposition de $\mathfrak{S}_1$.

2. EXISTENCE POUR CERTAINS ELEMENTS $\mathfrak{S}^*$ DE $\mathcal{T}^*$ DE RELATIONS ADMETTANT TOUTES LES DECOMPOSITIONS DE $\mathfrak{S}^*$ ET ELLES-SEULES.

a) Etude des ensembles de décompositions connexes

Soit un ensemble $\mathfrak{S}^*$ de décompositions toutes connexes ; par définition de $\mathfrak{S}^*$ pour toute décomposition simple $D \notin \mathfrak{S}^*$, il est possible de choisir une relation R(D) finie ou infinie, admettant toutes les décompositions de $\mathfrak{S}^*$, mais n'admettant pas D. Les décompositions R(D) sont en nombre fini et il est possible de définir pour chaque $D \notin \mathfrak{S}^*$ une isomorphie projective φ_D telle que les relations $\varphi_D(R_D)$ soient déconnectées deux à deux. L'union des relations $\varphi_D(R_D)$ admet alors toutes les décompositions de $\mathfrak{S}^*$ et aucune autre décomposition simple.

Si de plus toutes les décompositions de $\mathfrak{S}$ sont définies sur E_Ω, on peut, pour chaque $D \in \mathfrak{S}_\Omega - \mathfrak{S}^*$ trouver une relation **R(D)** finie : il suffit de prendre la fermeture $\mathfrak{S}^x$ d'une relation reflet de D dans E_Ω.

Exemple : si $\mathfrak{S} = \{[ACD][BDE], [ABCE][BD]\}$ et $D = [AB][BC]$

on prend $R(D) = \mathfrak{S}^x(\{\{a^ob^oc^1d^1e^1\}, \{a^2b^oc^od^2e^2\}\})$

$$R(D) = \{\{a^ob^oc^1d^1e^1\}, \{a^2b^oc^od^2e^2\},$$
$$\{a^ob^oc^1d^2e^1\}, \{a^2b^oc^od^1e^2\},$$
$$\{a^ob^oc^1d^1e^2\}, \{a^2b^oc^od^1e^1\}, \{a^2b^oc^od^2e^1\}, \{a^ob^oc^1d^2e^2\}\}$$

Il existe alors une relation finie admettant toutes les décompositions de $\mathfrak{S}^*$ et aucune autre.

On peut donner du fait que, si toutes les décompositions de $\mathfrak{S}^*$ sont connexes, il existe une relation R(D) admettant toutes les décompositions de $\mathfrak{S}^*$ et aucune autre, une autre démonstration assez voisine mais présentant un intérêt propre :

Soit $\mathfrak{S}^*_1$ un élément $\cap$-irréductible de $(\mathcal{T}^*, \subset)$. Soit $\mathcal{R}_1$ l'ensemble des relations admettant toutes les décompositions de $\mathfrak{S}^*_1$. $\mathcal{R}_1$ est un invariant de la fermeture f définie en 1.b) et un $\cup$-irréductible de $(\mathcal{C}^*, \subset)$. Il existe une relation R qui est élément de $\mathcal{R}_1$ et non de son prédécesseur immédiat dans $(\mathcal{C}^*, \subset)$

et cette relation R admet toutes les décompositions de $\mathfrak{S}^*_1$ et aucune autre. On peut toujours supposer R définie sur E .

Alors soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de décompositions toutes connexes.

$\mathfrak{S}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}^*_i$ où les $\mathfrak{S}^*_i$ sont $\cap$-irréductibles de $(T^*, \subset)$.

A chaque $\mathfrak{S}^*_i$ faisons correspondre une relation R_i définie sur E admettant toutes les décompositions de $\mathfrak{S}^*_i$ et aucune autre, puis appelons R l'union d'un ensemble de relations R'_i, chacune projectivement isomorphes à une des R_i et déconnectées deux à deux. R admet toutes les décompositions de $\mathfrak{S}^*$ et aucune autre.

b) Etude d'un type d'ensemble $\mathfrak{S}$ de décompositions non toutes connexes

Supposons $\mathfrak{S}^*$ engendré par un ensemble $\mathfrak{S}$ de décompositions tel que l'ensemble de leurs espaces de définition ait un maximum E dans l'ordre $\vartriangleleft$; supposons de plus que les décompositions en produit direct de $\mathfrak{S}^*$ soient ou bien définies sur E, ou bien obtenues par allègement d'un produit direct défini sur E et élément de $\mathfrak{S}^*$. Parmi les produits directs définis sur E et éléments de $\mathfrak{S}^*$, il en existe un plus fin que tous les autres ; notons le $D_o = \underset{E' \in \mathbf{F}}{\ast} [E']$ où $\underset{E' \in \mathbf{F}}{\nabla} E' = E$ et

$\forall E' \in \mathbf{F} : \forall E'' \in \mathbf{F} : E' \neq E'' \Rightarrow E' \Delta E'' = \underline{0}$.

$\mathfrak{S}^*$ peut être engendré par l'ensemble $\mathfrak{S}'$ de ses éléments maximaux dans l'ordre de finesse. Toute décomposition $D \in \mathfrak{S}'$ a autant de sous-décompositions connexes qu'il y a de facteurs non nuls dans la décomposition en produit direct $\underset{E' \in \mathbf{F}}{\ast} [E' \Delta E_D]$. Pour chaque espace $E' \in \mathbf{F}$, il existe une relation $R_{E'}$ définie sur E' et admettant toutes les décompositions $D \circ [E']$ où $D \in \mathfrak{S}^*$

et elles seules car ces décompositions sont toutes connexes ;
Alors $\underset{E' \in F}{*} R_{E'}$ admet toutes les décompositions de $\mathfrak{S}^*$ et elles seules.
En particulier si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de décompositions définies sur E , il existe une relation définie sur E_Ω, admettant toutes les décompositions de $\mathfrak{S}^*$ et elles seules.

D'ailleurs, si $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_{E_\Omega}$, nous allons montrer que $\mathfrak{S}^*$ s'obtient immédiatement à partir de $\mathfrak{S}^x$.

c) <u>Etude de $\mathfrak{S}^*$ lorsque $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_{E_\Omega}$</u>

Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de décompositions simples définies sur E_Ω
$\mathfrak{S}^x \subset \mathfrak{S}^*$ et l'ensemble des décompositions obtenues par allègement d'au moins une décomposition de $\mathfrak{S}^x$ est inclus dans $\mathfrak{S}^*$.
Réciproquement, considérons une décomposition $D \in \mathfrak{S}^*$;
si $E_D = E_\Omega$, alors $D \in \mathfrak{S}^x$; supposons $E_D \neq E_\Omega$.
Soit R_D une décomposition reflet de D dans E_Ω ; $\mathfrak{S}^x(R_D)$ admet toutes les décompositions éléments de $\mathfrak{S}$, donc toutes celles éléments de $\mathfrak{S}^*$ et en particulier D ; on a donc $[E_D]p^o \in [E_D](\mathfrak{S}^x(R_D))$.

Il existe donc dans $\mathfrak{S}^x(R_D)$ un point que nous nommerons q, tel que $[E_D]\, q = [E_D]\, p^o$. Il existe un isomorphisme projectif φ de E_Ω dans lui-même, dont les applications composantes h_V sont, lorsque V var E_D, les applications identiques, et sont, lorsque V var $(E_\Omega \Delta \overline{E}_D)$ telles que $h_V\,(coor_V(q)) = coor_V(p^o)$ et que pour toute coordonnée $v \neq coor_V(q)$ d'un point de R_D, $h_V(v)=v$.

Dans ces conditions $\varphi(q) = p^o$. Il existe une décomposition simple D' définie sur E_Ω , ayant $\varphi(R_D)$ pour relation reflet ; les variables de $E \Delta \overline{E}_D$ ne figurent que dans un facteur de D' ; D peut donc être obtenu par allègement de D' ; or $p^o \in \mathfrak{S}^x(R_{D'})$.

Donc $D' \in \mathfrak{S}^x$. D est obtenu par allègement d'un élément de $\mathfrak{S}^x$.

Nous avons démontré la proposition ci-dessous :

<u>Proposition 19</u>

Si $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_{E_\Omega}$, alors $\mathfrak{S}^*$ est égal à l'union de $\mathfrak{S}^x$ et de l'ensemble des décompositions obtenues par allègement d'au moins une décomposition de $\mathfrak{S}^x$.

3. <u>CALCUL DE LA VALEUR DE VERITE DE LA PROPOSITION $D \in \mathfrak{S}^*$: PSEUDO-ALGORITHME DES TABLEAUX</u>

a) <u>Présentation</u>

On se propose de trouver si $D \in \mathfrak{S}^*$ en pratiquant par une méthode dérivée de celle "des tableaux", qui a été exposée au chapitre IV, **2**.

Comme au chapitre IV, on partira d'une relation-reflet R_D de D dans E_Ω, quoique cette fois, E_D puisse être un sous-espace strict de E_Ω. Puis on cherchera à construire une relation incluant R_D et admettant toutes les décompositions de $\mathfrak{S}$ en construisant de proche en proche des relations R_i par adjonction à R_{i-1} d'un point q_i tel que pour une certaine décomposition $\Delta_i \in \mathfrak{S}$, $\left[E_{\Delta_i}\right](q_i) \in \Delta_i(R_{i-1})$. Mais contrairement à ce qui se produisait au chapitre IV, on peut avoir $E_{\Delta_i} \neq E_\Omega$; c'est pourquoi, ayant le choix des coordonnées de q_i sur les variables V de $E \,\Delta\, \overline{E}_{\Delta_i}$, on a décidé de prendre $coor_V(q_i) = coor_V(p^i)$.

<u>Notations</u> - nous reprenons celles du chapitre **IV** :

q_i point inscrit à la $i^{ème}$ ligne du tableau R_i ensemble des i premiers points du tableau. Si r est le nombre de points de R_D, alors $R_r = R_D$. Etant donnée une décomposition $\Delta \in \mathfrak{S}_1$ et une ligne $x \geqslant 2$ du tableau, on note $\mathbf{A}(\Delta, x)$ l'ensemble des applications f de $\mathbf{F}_\Delta$ dans R_x telles que $q_x \in f(\mathbf{F}_\Delta)$ et que $f(\mathbf{F}_\Delta)$ ait au moins deux éléments.

b) Pseudo-Algorithme

Initialisation : $R_r \leftarrow R_D$; $x \leftarrow 2$; $i \leftarrow r+1$;
"$D \in \mathfrak{S}^*$" $\leftarrow$ faux ;
tant qu'il y a un point q_x inscrit en ligne x et que "$D \notin \mathfrak{S}^*$"

```
début 𝔖' ← 𝔖 ;
    tant que 𝔖' ≠ ∅ et "D ∉ 𝔖*"
        début Prendre (Δ , 𝔖') ;
            A ← A (Δ , x) ;
            tant que A ≠ ∅ et "D ∉ 𝔖*"
              début Prendre (f,A) ;
                Former le produit   *      [F] (f(F))  ;
                                  F ∈ F_Δ
                si ce produit est un singleton {p}
                  (commentaire : sinon il est vide)
                  alors si [E_D](p) = [E_D]_*(p°)
                             alors "D ∈ 𝔖*" ← vrai
                             sinon si p ∉ [E_Δ] R_{i-1}
                                      alors q_i ← p * [E_Ω ∧ Ē_Δ](p^i) ;
                                      i ← i+1
                                   finsi
                        finsi
                finsi
              fin
        fin
    x → x+1 ;
fin
```

c) Résultat obtenu ou non obtenu

- lorsque le programme s'arrête ; alors

. ou bien, il s'arrête en indiquant "$D \in \mathfrak{S}^*$" ; dans ce cas, toute relation R incluant R_D et admettant toutes les décompositions de $\mathfrak{S}$ est telle que $[E_D]\, p^o \in [E_D]\, R$.

Soit R' une relation n'admettant pas D.

Il existe alors un morphisme projectif Ψ tel que $\Psi(R_D) \subset R'$ et $\Psi([E_D]\, p^o) \notin [E_D]\, R'$; mais on sait que :
$\forall \Delta \in \mathfrak{S}$: $\forall R_i \in \mathcal{R}_{E_\Omega}$: $\Psi(\Delta(R_i)) \subset \Delta(\Psi(R_i))$; donc si R' admettait toutes les décompositions de $\mathfrak{S}$, on aurait $\Psi([E_D]\, p^o) \in [E_D]\, R'$; $\forall R' \in \mathcal{R}_\Omega$: R' n'admet pas D $\Rightarrow$ $\exists \Delta \in \mathfrak{S}$: R' n'admet pas Δ . $D \in \mathfrak{S}^*$ est bien démontré.

. ou bien, il s'arrête en indiquant "$D \notin \mathcal{S}^*$" ;
alors on a construit une relation R_i admettant toutes les décompositions de $\mathcal{S}$ et pas D ; il est bien exact que $D \notin \mathcal{S}^*$.

- Lorsque le programme ne s'arrête pas alors la relation $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i$ admet toutes les décompositions de $\mathcal{S}$ mais pas D, donc $D \notin \mathcal{S}^*$; malheureusement, dans ce cas, l'algorithme que nous avons proposé pour calculer la valeur logique de "$D \in \mathcal{S}^*$" n'est pas effectif et ne fournit pas le moyen de reconnaître qu'on est dans le cas où $D \notin \mathcal{S}^*$.

Exemple de cas où le programme "boucle" :
tester si $[AB][AC][BC]$ est élément de
$\mathcal{S}^* = \{[A][B],\ [A][C],\ [AD][BCD]\}$
On remarquera que la réponse est non puisque :
$\{\{a,b,c,d\},\ \{a,b',c',d\},\ \{a',b',c,d'\},\ \{a',b,c',d'\}\}$
toutes les décompositions de $\mathcal{S}$ mais pas D.

4. ENUMERATION DE $\mathcal{S}^*$

a) Position du problème

Soit **G** l'ensemble des ensembles de facteurs de décompositions généralisées. Il existe une surjection f de **G** dans l'ensemble $\mathcal{S}_G$ des décompositions généralisées qui à tout ensemble de facteurs **F** fait correspondre la décomposition $f(\mathbf{F}) = \perp_{F \in \mathbf{F}} [F]$. On désignera aussi par f l'extension de f à l'ensemble des parties, c'est-à-dire l'application de $\mathcal{P}(\mathbf{G})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{S}_G)$ qui à toute partie $\mathcal{G}$ de **G** fait correspondre l'ensemble $f(\mathcal{G})$ des décompositions $f(\mathbf{F})$ pour lesquelles $\mathbf{F} \in \mathcal{G}$. On va décrire un ensemble $\text{Dér}_{\boxtimes}$ de règles de dérivation sur **G** telles que, si $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\Omega$, si $\mathcal{G}$ est l'ensemble des ensembles de facteurs utilisés pour écrire les décompositions de $\mathcal{S}$, et si $\mathcal{G}^{\boxtimes}$ est la clôture de $\mathcal{G}$ par $\text{Dér}_{\boxtimes}$ c'est-à-dire la plus petite partie de **G** incluant $\mathcal{G}$ et stable par $\text{Dér}_{\boxtimes}$, alors $f(\mathcal{G}^{\boxtimes}) \cap \mathcal{S}_\Omega = \mathcal{S}^*$.
Ce traitement est assez semblable à celui pratiqué en IV.3. Mais cette fois on plonge $\mathcal{S}$ dans l'ensemble $\mathcal{S}_G$ de toutes les

décompositions généralisées, qui est infini et quoique, pour tout $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_\Omega$, $f(\mathfrak{A}^{\boxtimes}) \cap \mathfrak{S}_\Omega$ soit fini, il peut advenir que, $\mathfrak{A}^{\boxtimes}$ étant infini, on ne puisse pas savoir, à une étape donnée de son énumération, si tous les éléments de $\mathfrak{S}^* = f(\mathfrak{A}^{\boxtimes})$ ont été trouvés ou non.

b) <u>Ensemble Dér$_{\boxtimes}$ des règles de dérivation</u>

1. <u>Alourdissement</u> ; si $F \Delta E_\Omega \lhd \bigtriangledown_{F' \in \mathbf{F}} F'$, alors :
$\mathbf{F} \to \mathbf{F} \cup \{F\}$

2. <u>Affinement</u> d'un facteur F_1 de $\mathbf{F}_1$ par un ensemble de facteurs $\mathbf{F}_2$ tel que $\forall F \in \mathbf{F}_2$: $F \lhd E_\Omega$ et que $[F_1^{-1}]F_1 \lhd \bigtriangledown_{F \in \mathbf{F}_2} F$.
Soit F'_1 un facteur obtenu à partir de F_1 par formatage sur $\bigtriangledown_{F \in \mathbf{F}_2} F$, c'est-à-dire en ajoutant à l'écriture de F_1 les variables obtenues en munissant les variables de $\bigtriangledown_{F \in \mathbf{F}_2} F \Delta \overline{[F_1^{-1}]F_1}$ d'indices $\neq 0$ ne figurant pas dans les variables de F_1.

$\mathbf{F}_1 = \{F_1\} \cup \mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_2 \to \{F / \exists F' \in \mathbf{F}_2 : F = [F'_1]\,(F')\} \cup \mathbf{F}_3$

3. <u>Allègement</u> si V var $F_1 \Delta E_\Omega$ et $\nexists F \in \mathbf{F}_3$: V var F
$\mathbf{F}_1 = \{F_1\} \cup \mathbf{F}_3 \to \{F_1 \Delta \langle \overline{V} \rangle\} \cup \mathbf{F}_3$

4. <u>Simplification d'écriture</u>
<u>1ère règle</u> : <u>élagage</u>
Si V_i var $F_1 \Delta \overline{E_\Omega}$ et $\nexists F \in \mathbf{F}_3$: V_i var F
alors :
$\mathbf{F}_1 = F_1 \cup \mathbf{F}_3 \to \{F_1 \Delta \langle \overline{V_i} \rangle\} \cup \mathbf{F}_3$

<u>2ème règle</u> : <u>suppression de facteurs</u>
Si F est sous-espace d'un facteur de $\mathbf{F}$:
$\mathbf{F} \cup \{F\} \to \mathbf{F}$

<u>Remarques</u> : la règle d'affinement choisie ici diffère de celle choisie au chapitre IV en ce que cette fois ce sont les facteurs de $\mathbf{F}_2$ et non F_1 qui sont sous-espaces de E_Ω, ce qui va nous conduire à une contruction différente de la démonstration ; j'ai choisi chaque fois celles des règles de production qui me paraissaient conduire à la démonstration la plus simple ; plusieurs choix sont possibles pour un ensemble de règles de production permettant de construire $\mathfrak{S}^*$ (ou $\mathfrak{S}^x$) et il y a bien-sûr un certain arbitraire dans le choix retenu.

De même les règles de simplification d'écriture, suffisantes pour produire les formes standardisées de $\mathcal{S}_1^*$ à partir de $\mathcal{S}_1$ ne suffiraient pas pour trouver la forme standardisée d'une décomposition généralisée quelconque.

c) <u>Théorème et sa démonstration</u>

<u>THEOREME XVIII</u> - Soit $\mathcal{G}$ un ensemble d'ensembles de facteurs, chacun sous-espace de E_Ω ; soit $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des décompositions Δ qui peuvent s'écrire $\Delta = \mathop{*}\limits_{F \in \mathbf{F}} [F]$ avec $\mathbf{F} \in \mathcal{G}$; soit $\mathbf{F}'$ un ensemble de facteurs, chacun sous-espace de E_Ω et $D = \mathop{*}\limits_{F \in \mathbf{F}'} [F]$; alors $D \in \mathcal{S}_1^* \Leftrightarrow \mathbf{F}' \in \mathcal{G}^{\boxtimes}$.

<u>Démonstration</u>

1) Démontrons que $\mathbf{F}' \in \mathcal{G}^{\boxtimes} \Rightarrow D \in \mathcal{S}_1^*$.

Tout ensemble de facteurs de $\mathcal{G}^{\boxtimes}$ est obtenu en appliquant les règles de dérivation $\mathrm{Dér}_{\boxtimes}$ un nombre fini de fois. Il suffit donc de montrer :

- que toute relation qui admet $D = \mathop{\perp}\limits_{F' \in \mathbf{F}} [F']$ admet

$D' = \mathop{\perp}\limits_{F' \in \mathbf{F} \cup \{F\}} [F']$ à condition que $F \Delta E_\Omega \dashv \mathop{\nabla}\limits_{F' \in \mathbf{F}} F'$; il suffit pour cela de remarquer que D et D' ont le même espace image et que $\forall R \in \mathcal{R}_\Omega$: $D'(R) \leq D(R)$

- que toute relation qui admet $D_1 = \mathop{\perp}\limits_{F \in \{F_1\} \cup \mathbf{F}_3} [F]$ et

$D_2 = \mathop{*}\limits_{F \in \mathbf{F}_2} [F]$ admet $D_3 = \mathop{\perp}\limits_{F \in \mathbf{F}_3 \cup \{[F_1]\, F'\}_{F' \in \mathbf{F}_2}} [F]$ à condition que F_1 soit formaté sur E_{D_2}. En effet, si

$D_2(R) = [E_{D_2}]\,(R)$, alors

$[F_1](D_2(R)) = [F_1][E_{D_2}](R)$

$= [F_1]\,(R)$;

or $[F_1] \circ D_2 = \mathop{*}\limits_{F' \in \mathbf{F}_2} [F_1] F'$; alors $\mathop{\perp}\limits_{F \in \{F_1\} \cup \mathbf{F}_3} [F](R) = D_3(R)$

et puisque R admet D_1, R admet D_3.

- l'effet de l'allègement et de la simplification d'écriture a déjà été étudié.

2) Démontrons que, réciproquement, si $D = \underset{F' \in \mathbf{F}'}{*} [F']$, $D \in \mathcal{D}_1^* \Rightarrow \mathbf{F}' \in \mathcal{G}^{\boxtimes}$

Si $D \in \mathcal{D}_1^*$, alors la méthode des tableaux se termine sur une ligne numéro f avec $[E_D]\, q_f = [E_D]\, p^o$

Pour décrire ce qui se passe au cours du déroulement de l'algorithme, conservons les notations utilisées en 3° et complétons-les en nommant :

- E_i l'espace dont q_i est point reflet
- D'_i la décomposition dont R_i est la relation reflet.

On remarque que $D'_r = D$ et que D'_f est banale.

- $\mathbf{F}'_i$ l'ensemble de facteurs de D'_i
- Δ_i la décomposition élément de $\mathcal{D}_1$ utilisée dans l'algorithme pour construire le point q_i.
- $\mathbf{F}_{\Delta_i}$ l'ensemble de facteurs de Δ_i.

D'_f est banale ; donc tout ensemble de facteurs de D'_f peut être obtenu par alourdissement, simplification et allègement de n'importe quelle décomposition dont l'espace de définition est surespace de E_D et il en existe une dans $\mathcal{D}_1$ si $D \in \mathcal{D}_1^*$.

Montrons que si $\mathbf{F}'_i \in \mathcal{G}^{\boxtimes}$ pour i>r, alors $\mathbf{F}'_{i-1} \in \mathcal{G}^{\boxtimes}$. Les variables de E_i dont l'ensemble de départ ne figure pas dans E_{Δ_i} portent toutes l'indice i. Or cet indice ne figure que sur la ligne i.

Leur suppression qui conduit à remplacer dans $\mathbf{F}'_i$ le facteur E_i par $[E_i]\, E_{\Delta_i}$ est donc un simple élagage. L'ensemble de facteurs $\mathbf{F}''_i$ ainsi obtenu est élément de $\mathcal{G}^{\boxtimes}$ si $\mathbf{F}'_i$ l'est. L'ensemble $\mathbf{F}_{\Delta_i}$ des facteurs de Δ_i est élément de $\mathcal{G}^{\boxtimes}$; donc le résultat de l'affinement du facteur $[E_i]\, E_{\Delta_i}$ de $\mathbf{F}''_i$ par $\mathbf{F}_{\Delta_i}$ est élément de $\mathcal{G}^{\boxtimes}$; l'ensemble de facteurs ainsi produit est

$F'_{i-1} \cup \left\{ \left[E_i \right] F_{i,s} \right\}_{F_{i,s} \in F_{\Delta_i}}$ mais, pour tout $F_{i,s} \in F_{\Delta_i}$, $\left[E_i \right] F_{i,s}$ est sous-espace du facteur qui a $f(F_{i,s})$ pour point reflet et qui est donc élément de F'_{i-1} ; F'_{i-1} est donc obtenu à partir de $F'_{i-1} \cup \left\{ \left[E_i \right] F_{i,s} \right\}_{F_{i,s} \in F_{\Delta_i}}$ par simplification d'écriture et par conséquent $F_{i-1} \in \mathcal{G}^{\boxtimes}$.

Dans ces conditions $F'_r \in \mathcal{G}^{\boxtimes}$; or $F' = F'_r$.

Dans le journal de l'ACM - Avril 82 -, F. Sadri et J.D. Ullman développent une théorie semblable à celle exposée dans ce chapitre: pseudo-algorithmique des tableaux et clôture de l'ensemble des écritures des décompositions de $\mathcal{D}$ par des règles de dérivation dans le cas où $\mathcal{D}$ est un ensemble de décompositions généralisées.
Je n'ai pas cru devoir pour autant supprimer de ce texte la rédaction des paragraphes 3 et 4, ce qui aurait rendu l'ensemble d'autant plus incohérent que ma recherche avait débuté il y a dix ans par l'étude de l'algorithme des tableaux.

5. ATOMES, CO-ATOMES ET U-IRREDUCTIBLES DE $(\mathcal{T}^*, \subset)$

a) Atomes et co-atomes

Les atomes de $(\mathcal{T}^*, \subset)$ sont les successeurs immédiats du plus petit élément ϕ^*, ensemble de toutes les décompositions banales.
L'ensemble des atomes de $(\mathcal{T}^*, \subset)$ peut être mis en bijection avec l'ensemble des sous-espaces de E_Ω ayant au moins deux variables. Chaque atome étant la plus petite décomposition non banale définie sur le sous-espace qui lui correspond.
Exemple : si $\Omega = \{A,B,C,D\}$, les atomes de $(\mathcal{T}^*, \subset)$ sont :

$\{[A][B]\}^*$, $\{[A][C]\}^*$, $\{[A][D]\}^*$, $\{[B][C]\}^*$, $\{[B][D]\}^*$, $\{[C][D]\}^*$
$\{[AB][AC][BC]\}^*$, $\{[AB][AD][BD]\}^*$, $\{[AC][AD][CD]\}^*$, $\{[BC][BD][CD]\}^*$
$\{[ABC][ABD][ACD][BCD]\}^*$

Cherchons les co-atomes de $(\mathcal{T}^*, \subset)$ c'est-à-dire les prédécesseurs immédiats de la décomposition en produit direct ayant pour ensemble de facteurs l'ensemble de tous les sous-espaces engendrés par une variable.
L'ensemble de toutes les décompositions connexes ne peut qu'être

un co-atome. Tout autre co-atome sera donc engendré par un ensemble de décompositions dont une au moins est non connexe. Le seul co-atome ne comportant aucune décomposition définie sur E_Ω est l'ensemble de toutes les décompositions définies sur un sous-espace strict de E_Ω ; il est engendré par l'ensemble des décompositions en produit direct ayant n-1 facteurs d'une variable, si n est le cardinal de Ω .

Les autres co-atomes comportent une décomposition en produit direct définie sur E_Ω . L'ensemble des décompositions en produit direct définies sur E_Ω qui sont élément d'un co-atome donné comporte obligatoirement un maximum qui ne peut être ni la décomposition produit direct de tous les sous-espaces d'une variable puisque celle-ci engendre le maximum de $(\mathcal{T}^*, \subset)$, ni une décomposition dont au moins deux facteurs auraient plus d'une variable car une telle décomposition a plusieurs successeurs. Soit donc **F** un ensemble de facteurs du type $\{E, \langle V_1\rangle, \langle V_2\rangle \ldots \langle V_k\rangle\}$ où les V_i sont toutes les variables non variables de E, et soit $D = \underset{F \in \mathbf{F}}{*} [F]$; pour qu'un élément $\mathcal{D}^*$ de $(\mathcal{T}^*, \subset)$ ayant D pour élément soit co-atome, il faut et il suffit que

$\mathcal{D}^* = (\{D\} \cup \mathcal{D}')^*$ et que $(\mathcal{D}')^*$ soit un prédécesseur immédiat de $\{\underset{V \text{ var } E}{*} [\langle V\rangle]\}^*$ dans $(\mathcal{T}^*, \subset)$. Alors $(\mathcal{D}')^*$ est co-atome du treillis $\mathcal{T}_E^*$ des ensembles fermés par * des ensembles de dépendances définies sur E ou un de ses sous-espaces.

Puisque D est le produit direct défini sur E le plus fin de $\mathcal{D}^*$, $\mathcal{D}'^*$ ne peut comporter de décomposition en produit direct défini sur E.

$\mathcal{D}'^*$ ne peut donc prendre que deux valeurs :

1- l'ensemble de toutes les décompositions connexes définies sur E et ses sous-espaces.

2- l'ensemble de toutes les décompositions définies sur un sous-espace strict de E.

En regroupant ces résultats, on trouve que, à tout sous-espace E de E_Ω engendré par au moins deux variables, correspond deux co-atomes de $(\mathcal{T}^*, \subset)$; ces deux co-atomes sont de la forme

$\mathcal{D}_1^* = (\{D\} \cup \mathcal{D}'_1)^*$ et $\mathcal{D}_2^* = (\{D\} \cup \mathcal{D}'_2)^*$ avec

. $D = [E]^* \; (\underset{V \text{ var } E_\Omega \, \Delta \, E}{*} [\langle V \rangle])$

(si $E = E_\Omega$ cette décomposition est banale)

. $\mathcal{D}_1'^*$ est l'ensemble de toutes les décompositions connexes sur E et ses sous-espaces.

. Si E a k variable, $\mathcal{D}_2'$ est l'ensemble des produits directs ayant k-1 facteurs dont chacun est l'espace engendré par une variable de E.

L'ensemble des co-atomes de $(\mathcal{T}^*, \subset)$ est l'ensemble de tous les co-atomes ainsi construits à partir des sous-espaces E de E ayant au moins deux variables.

<u>Exemple</u> : si $\Omega = \{A,B,C,D\}$, les co-atomes de $(\mathcal{T}^*, \subset)$ sont :
$\{[AB][AC][AD],\ [AB][BC][BD],\ [AC][BC][CD],\ [AD][BD][CD]\}^*$

$\{[A][B][C],\ [A][B][D],\ [A][C][D],\ [B][C][D]\}^*$

4 co-atomes du type : $\{[ABC][D],\ [AB][AC],\ [AB][BC],\ [AC][BC]\}^*$

4 co-atomes du type : $\{[ABC][D],\ [A][B],\ [A][C],\ [B][C]\}^*$

6 co-atomes du type : $\{[AB][C][D]\}^*$

b) <u>U-irréductibles de $(\mathcal{T}^*, \subset)$</u>
Les U-irréductibles de $(\mathcal{T}^*, \subset)$ sont les éléments du type $\{D\}^*$ où $D \notin \{\{D\}^* - \{D\}\}^*$.
Le théorème ci-dessous nous permet de reconnaître de telles décompositions D.

<u>THEOREME XIX</u> - Etant donnée une décomposition $D \in \mathcal{D}_\Omega$, pour que $D \notin \{\{D\}^* - \{D\}\}^*$, il faut et il suffit que D soit non banale, sans connecteur et qu'aucune décomposition non banale de $\{D\}^* - D$ ne puisse être obtenue par allègement de D.

En effet, si D est banale, $D \in \emptyset^*$; si D a au moins un connecteur, alors $D \in \{(\{D\}^* - \{D\}) \cap \mathcal{D}_{E_D}\}^*$ (d'après le théorème XV, Chapitre IV, 6°). Enfin, s'il existe une décomposition non banale obtenue par allègement de D ; alors il existe une variable A qui figure dans un facteur E de D et dans aucun autre, alors $[E_D \Delta \langle\overline{A}\rangle][E] \in \{D\}^* - \{D\}$ et D peut être obtenue en affinant le premier facteur de $[E_D \Delta \langle\overline{A}\rangle][E]$ par D o $[\langle\overline{A}\rangle]$ qui est elle aussi élément de $\{D\}^* - \{D\}$; donc $D \in (\{D\}^* - \{D\})^*$. Réciproquement, soit $D \in \mathcal{D}_\Omega$ une décomposition non banale sans connecteur et telle qu'aucune décomposition de $\{D\}^* - \{D\}$ ne puisse être obtenue par allègement de D.

Prenons l'ensemble des variables de E_D pour ensemble de référence: alors $E_\Omega = E_D$. D'après le théorème III chapitre II, tout élément de $\{D\}^* - \{D\}$ est soit élément de $\{D\}^x$, soit obtenu par allègement d'un élément de $\{D\}^x$ qui, par hypothèse n'est pas D. Il existe une relation admettant toutes les décompositions de $\{D\}^x - \{D\}$ et pas D puisque D est sans connecteur. Cette relation admet aussi les autres décompositions de $\{D\}^* - \{D\}$ puisque chacune d'elles obtenue par allègement d'une décomposition de $\{D\}^x - \{D\}$ ne peut être que moins fine qu'elle.

6. ETUDE CONJOINTE D'UN ENSEMBLE $\mathcal{D}$ DE DECOMPOSITIONS SIMPLES ET D'UN PREORDRE $\Rrightarrow$ SUR $\mathcal{P}(\Omega)$ LIE A DES DEPENDANCES FONCTIONNELLES.

Pour la définition des dépendances fonctionnelles se reporter à l'annexe 6. Pour ne pas introduire de complications inutiles, nous supposerons que les relations étudiées sont définies sur E_Ω.

La question qui se pose est : sachant qu'une relation R définie sur E_Ω admet toutes les décompositions simples éléments de $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\Omega$ et admet toutes les dépendances fonctionnelles d'un ensemble **A** engendrant un préordre régulier $(\mathcal{P}(\Omega), \Rrightarrow)$, que peut-on en conclure ?

a) Méthode des tableaux pour reconnaître si toute relation définie sur E_Ω admettant **A** admet une décomposition donnée D.

L'algorithme ci-dessous, étant donnée une relation R incluse dans le "cube" engendré par l'ensemble des points p^i servant à la construction des points-reflets, calcule l'image de R par un morphisme projectif fidèle que nous noterons $H_{\mathbf{A},R}$ qui est tel que : - si R admet **A**, alors $H_{\mathbf{A},R}(R) = R$

- $H_{\mathbf{A},R}(R)$ admet **A**

- pour tout morphisme projectif H tel que H(R) admette R, il existe un morphisme projectif H' tel que $H(R) = H' \circ H_{\mathbf{A},R}(R)$

<u>Calcul de $H_{\mathbf{A},R}(R)$</u>

La relation R est supposée donnée comme un ensemble de r points q_k où $k \in [1,r]$; pour chaque variable V, $coor_V(q_k)$ est notée v^s ; l'indice s servant à distinguer les valeurs de ces coordonnées, est élément de $\mathbb{N}$.

<u>Début</u> "ça continue" ← <u>vrai</u> ; i ← r ;
    <u>Tant que</u> "ça continue"
        <u>Début</u> "ça continue" ← <u>faux</u> ; **A'** ← **A**
            <u>Tant que</u> **A'** $\neq \emptyset$
                <u>Début</u> <u>Prendre</u> (E ⤖ V, **A'**)
                    <u>Pour j allant de 1 à i</u>
                        <u>s'il</u> existe q_k R_i tel que $[E]q_k = [E]q_j$ <u>et</u>
                        $coor_V(q_k) \neq coor_V(q_i)$
                        <u>alors</u> "ça continue" ← vrai ;
                            α ← minimum des indices de coordonnées de V
                                aux points q_k tels que $[E]q_k = [E]q_j$
                                <u>pour k allant de 1 à i</u>
                                    <u>si</u> $[E]q_k = [E]q_j$
                                        <u>alors</u> $q_k \leftarrow [E_\Omega \Delta \overline{<V>}]\, q_k * \{v_\alpha\}$
                                    <u>fin si</u> ;
                                <u>fin</u> ;
                        <u>fin si</u>;
                    <u>fin</u> ;
                <u>fin</u> ;
        <u>fin</u> ;

$H_{\mathbf{A},R}(R)$ ← ensemble des points q_i obtenus ;

<u>Commentaire</u> - dans l'expression $H_{\mathbf{A}}(R)$ trouvée, il se peut qu'un même point soit nommé plusieurs fois, autrement-dit que $j \neq k$ et $q_j = q_k$; cela n'est pas gênant théoriquement, mais il faudra en tenir compte plus tard pour tester explicitement si $H_{\mathbf{A}}(R) = R'$ où R' est une autre relation, puisqu'il s'agit d'égalité d'ensembles et non d'égalité de suites.

<u>fin</u> ;

Pour que toute relation définie sur E_Ω admettant **A** admette D, il faut et il suffit que $[E_D]\, \mathring{p} \in H_{\mathbf{A},R_D}([E_D]R_D)$.

En effet :

$H_{\mathbf{A},R_D}$ est fidèle ; donc $[E_D]\, p^\circ = H_{\mathbf{A},R_D}([E_D]p^\circ)$

Si $\left[E_D\right] p^\circ \notin H_{\mathbf{A},R_D}(\left[E_D\right]R_D)$, alors $H_{\mathbf{A},R_D}(R_D)$ admet **A** mais pas D puisque $H_{\mathbf{A},R_D}(R_D) \subset H_{\mathbf{A},R_D}(R_D)$ et $H_{\mathbf{A},R_D}(\left[E_D\right]p^\circ) \notin H_{\mathbf{A},R_D}(\left[E_D\right](H_{\mathbf{A},R_D}(R_D)))$, cette dernière relation étant égale à $H_{\mathbf{A},R_D}(\left[E_D\right]R_D)$.

Réciproquement, si $\left[E_D\right]p^\circ \in H_{\mathbf{A},R_D}(\left[E_D\right]R_D)$, alors on va montrer que pour toute relation R définie sur E_Ω et admettant **A**, s'il existe un morphisme projectif H tel que $H(R_D) \subset R$, alors $H(\left[E_D\right]p^o) \in \left[E_D\right]R$; supposons donc $H(R_D) \subset R$; puisque R admet **A**, $H(R_D)$ admet **A**. Donc il existe un morphisme projectif H' tel que $H(R_D) = H' \circ H_{\mathbf{A},R_D}$; puisque $\left[E_D\right] p^o \in H_{\mathbf{A},R_D}(\left[E_D\right]R_D)$, $H'(\left[E_D\right]p^o) \in H' \circ H_{\mathbf{A},R_D}(\left[E_D\right](R_D))$; $H'(\left[E_D\right]p^o) \in H(\left[E_D\right]R_D)$; enfin, puisque $H_{\mathbf{A},R_D}$ est fidèle, $H'(H_{\mathbf{A},R_D}(\left[E_D\right]p^\circ)) \in H(\left[E_D\right]R_D)$; $H(\left[E_D\right]p^\circ) \in H(\left[E_D\right]R_D)$.

b) <u>Méthode des tableaux pour reconnaître si toute relation admettant $\mathcal{S}$ et **A** admet une décomposition simple donnée D</u>

L'idée est de construire à partir de R_D une suite de relations R_i ($i \geqslant r$, nombre de points éléments de R_D) qui, d'une façon qui sera précisée, tende vers une relation R_f admettant $\mathcal{S}$ et **A**, en faisant de telle sorte que si et seulement s'il existe un rang $i \geqslant r$ pour lequel $\left[E_D\right] p^\circ \in \left[E_D\right] R_i$, alors toute relation R admettant $\mathcal{S}$ et **A** admette D.

On prend $R_r = H_{\mathbf{A},R_D}(R_D)$, ainsi R_r admet **A**. On part avec $i = r$; Pour tout $i \geqslant r$, il y a trois possibilités;

1. $\left[E_D\right]p^\circ \in \left[E_D\right]R_i$ on arrête alors la construction et nous verrons qu'on peut conclure que toute relation admettant $\mathcal{S}$ et **A** admet D. Remarquons tout de suite que, d'après a), si cela se produit pour $i = r$, toute relation qui admet **A** admet D.
2. $\left[E_D\right] p^\circ \notin \left[E_D\right] R_i$ et R_i admet $\mathcal{S}$; nous verrons qu'alors R_i admet $\mathcal{S}$ et **A** et pas D (ce qui découle de a) lorsque $i = r$).
3. $\left[E_D\right]p^\circ \notin \left[E_D\right] R_i$ et R_i n'admet pas $\mathcal{S}$; alors on choisit dans $\mathcal{S}$ une décomposition Δ non admise par R_i puis on choisit un point p de $\Delta(R_i) - \left[E_D\right] R_i$. Si $E_D = E_\Omega$, on pose $q_{i+1} = p$, sinon, on pose $q_{i+1} = p * \left[E_\Omega \,\Delta\, E_\Delta\right] p^{i+1}$. Enfin on pose $R'_{i+1} = R_i \cup \{q_{i+1}\}$ et $R_{i+1} = H_{\mathbf{A},R'_{i+1}}(R'_{i+1})$.

Voyons la situation lorsque l'algorithme s'arrête (s'il le fait).
Dans le cas 2, soit R_f la dernière valeur de R_i.
R_f admet $\mathbf{A}$ et $\mathfrak{S}$; le morphisme $H_f = H_{\mathbf{A},R'_f} \circ H_{\mathbf{A},R'_{f-1}} \cdots \circ$
$H_{\mathbf{A},R'_{i+1}} \circ H_{\mathbf{A},R_D}$ est tel que $H_f(R_D) \subset R_f$; puisque ce morphisme est fidèle, $H_f(\left[E_D\right]p^\circ) = \left[E_D\right]p^\circ$, et puisque $\left[E_D\right]p^\circ \notin R_f$, R_f n'admet pas D.
Il existe une relation admettant $\mathbf{A}$ et $\mathfrak{S}$ mais pas D.
Dans le cas 1, montrons que toute relation admettant $\mathbf{A}$ et $\mathfrak{S}$ admet D. Soit R une relation admettant $\mathbf{A}$ et $\mathfrak{S}$;
Nous devons montrer que s'il existe un morphisme H tel que $H(R_D) \subset R$, alors $H(\left[E_D\right]p^\circ) \in \left[E_D\right]R$.
Supposons donc qu'il existe un morphisme H tel que $H(R_D) \subset R$.
Puisque R admet $\mathbf{A}$, $H(R_D)$ admet $\mathbf{A}$ aussi ; il existe donc un morphisme $H^{(r)}$ tel que $H(R_D) = H^{(r)} \circ H_{\mathbf{A},R_D}(R_D)$ d'où $H(R_D) = H^{(r)}(R_r)$.

Pour toute valeur de l'indice i utilisée dans l'algorithme, nous poserons $H_i = H_{\mathbf{A},R'_i} \circ H_{\mathbf{A},R'_{i-1}} \circ \ldots \circ H_{\mathbf{A},R'_{i+1}} \circ H_{\mathbf{A},R_D}$;
H_i est un morphisme projectif fidèle tel que $H_i(R_D) \subset R_i$.
Nous allons d'autre part construire un morphisme $H^{(i)}$ tel que $H^{(i)}(R_i) \subset R$ et $H(R_D) = H^{(i)} \circ H_i(R_D)$.
Pour $i = r$, $H^{(r)}$ a bien les propriétés voulues.
Supposons que pour une valeur de i, un tel $H^{(i)}$ existe et montrons comment on peut construire $H^{(i+1)}$, lorsque l'algorithme conduit à construire R_{i+1}.
Remarquons d'abord que si $H^{(i)}$ a les propriétés voulues, tout morphisme projectif $K^{(i)}$ dont les applications composantes donnent la même image que $H^{(i)}$ aux coordonnées des points de R^i a aussi les propriétés $K^{(i)}(R_i) \subset R$ et $H(R_D) = K^{(i)} \circ H_i(R_D)$.

Soit Δ la décomposition de $\mathfrak{S}$ servant à la construction de q_{i+1}; $H^{(i)}(\Delta R_i) \subset \Delta$ R et puisque R admet Δ, $H^{(i)}(\Delta R_i) \subset \left[E_\Delta\right] R$; donc $H^{(i)}(\left[E_\Delta\right] q_{i+1}) \in \left[E_\Delta\right] R$; si $E_\Delta \neq E_\Omega$, on peut toujours remplacer $H^{(i)}$ par un morphisme $K^{(i)}$ donnant la même image de R_i en choisissant l'image de p^{i+1} par $K^{(i)}$ de façon à ce que $K^i(q_{i+1}) \in R$; si $E_\Delta = E_\Omega$, il suffit de prendre $K^{(i)} = H^{(i)}$. Posons $R'_{i+1} = R_i \cup \left\{q_{i+1}\right\}$.

$K^{(i)}(R'_{i+1}) \subset R$ et, puisque R admet $\mathbf{A}$, $K^{(i)}(R'_{i+1})$ admet $\mathbf{A}$; il existe donc un morphisme $H^{(i+1)}$ tel que

$$K^{(i)}(R'_{i+1}) = H^{(i+1)} \circ H_{\mathbf{A},R'_{i+1}}(R'_{i+1})$$
$$= H^{(i+1)}(R_{i+1})$$

On a bien $H^{(i+1)}(R_{i+1}) \subset R$

D'autre part $K^{(i)}(H_i(R_D)) = H(R_D)$

mais, puisque $H_i(R_D) \subset R'_{i+1}$, $K^{(i)}(H_i(R_D)) = H^{i+1} \circ H_{\mathbf{A},R'_{i+1}} \circ H_i(R_D)$

$$= H^{i+1} \circ H_{i+1}(R_D)$$

Pour tout R_i, en particulier pour celui qui nous intéresse et qui est tel que $\left[E_D\right] p^o \in \left[E_D\right](R_i)$, $H^{(i)}(R_i) \subset R$.

Si $\left[E_D\right] p^o \in \left[E_D\right] R_i$, alors $H^{(i)}(\left[E_D\right]p^o) \in \left[E_D\right] R$;

mais H_i étant fidèle $\left[E_D\right] p^o = H_i\ (\left[E_D\right] p^o)$;

$H^{(i)} \circ H_i(\left[E_D\right]p^o) \in \left[E_D\right] R$; or on a montré que pour tout i,

$H(R_D) = H^{(i)} \circ H_i(R_D)$, ce qui entraîne $H(\left[E_D\right]p^o) = H^{(i)} \circ H_i(\left[E_D\right] p^o)$.

$H(\left[E^D\right] p^o) \in \left[E_D\right] R$, ce qu'il fallait démontrer.

Avant de me poser la question de savoir dans quelles situations l'algorithme peut ne pas être effectif, je vais formaliser plus précisément cet algorithme, car le résultat n'est convenable que si l'on veille à ce que le cheminement, s'il se prolonge indéfiniment refasse utiliser chaque décomposition de $\mathcal{S}$ au bout d'un temps fini et d'une façon convenable.

<u>Calcul de la valeur logique de "D est conséquence de $\mathcal{S}$ et **A**"</u>

(pseudo-algorithme)

<u>Commentaire</u> : afin de ne pas alourdir l'exposé d'un schéma déjà un peu lourd à suivre, je ne chercherai pas du tout à avoir un cheminement économique. J'appelle **Appl**(Δ ,i-1) l'ensemble des applications f de l'ensemble des facteurs de Δ dans la relation R_{i-1} ; je garde par ailleurs les mêmes notations que dans les autres algorithmes de tableaux (cf.chapitre IV, 2.) ; en particulier r est le nombre de facteurs de D.

<u>Début</u> <u>Initialisation</u> $R \leftarrow H_{\mathbf{\Lambda},R_D}(R_D)$; $i \leftarrow r+1$;

"D est conséquence de $\mathcal{S}$ et $\mathbf{\Lambda}$" $\leftarrow$ <u>faux</u> ; "ça marche" $\leftarrow$ vrai ;

<u>Tant que</u> "ça marche" et <u>non</u> "D est conséquence de $\mathcal{S}$ et $\mathbf{\Lambda}$"

<u>Début</u> "ça marche" $\leftarrow$ <u>faux</u> ;

$\mathcal{S}' \leftarrow \mathcal{S}$;

<u>Tant que</u> $\mathcal{S}' \neq \emptyset$ et <u>non</u> "D est conséquence de $\mathcal{S}$ et $\mathbf{\Lambda}$"

<u>Début</u> Prendre $(\Delta, \mathcal{S}')$;

$\mathcal{A} \leftarrow$ Appl $(\Delta, (i-1))$;

<u>Tant que</u> $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et non "D est conséquence de $\mathcal{S}$ et $\mathbf{\Lambda}$"

<u>Début</u> Prendre $(f, \mathcal{A})$;

Former le produit $\underset{F \in \mathbf{F}_\Delta}{*} [F](f(F))$

<u>si</u> ce produit est un singleton $\{p\}$ (commentaire : sinon il est vide) et si $p \notin [E_\Delta]\, R_{i-1}$

<u>alors</u> $q_i \leftarrow p * [E_\Omega \Delta \overline{E_\Delta}](p^i)$;

$R'_i \leftarrow R_{i-1} \cup \{q_i\}$;

$R_i \leftarrow H_{\mathbf{\Lambda},R'_i}(R'_i)$

TEST <u>si</u> $\exists\, p \in R_i : [E_D]p = [E_D]p^o$

<u>alors</u>

"D est conséquence de $\mathcal{S}$ et $\mathbf{\Lambda}$" $\leftarrow$ <u>vrai</u>

<u>finsi</u>

<u>si</u> $R_i \neq R_{j-1}$ (voir commentaire du calcul de $H_{\mathbf{\Lambda},R}(R)$)

<u>alors</u> "ça marche" $\leftarrow$ <u>vrai</u>

$i \leftarrow i+1$;

<u>finsi</u>

<u>finsi</u>

<u>fin</u> de l'étude d'une application f pour la construction d'un point q_i et de la fabrication de R_i

<u>fin</u> de l'étude d'une $\Delta \in \mathcal{S}$

<u>fin</u> d'un parcours de $\mathcal{S}$

<u>fin</u> du pseudo-algorithme.

Si le programme s'arrête avec "D est conséquence de $\mathcal{S}$ et **A**" = <u>vrai</u>, alors toute relation admettant $\mathcal{S}$ et **A** admet D, comme nous l'avons déjà vu.
S'il s'arrête avec "D est conséquence de $\mathcal{S}$ et **A** " = <u>faux</u>, la relation R_i obtenue à la fin admet $\mathcal{S}$ et **A** et non D.
Enfin, si le programme "boucle", on ne peut pas conclure. Mais ce cas ne se produit que lorsqu'il existe une relation admettant $\mathcal{S}$ et **A** et non D.
En effet, pour toute ligne i du tableau et pour toute variable V si $q_i(t)$ est le point figurant à la ligne i à l'instant t, l'indice $j(i,V,t)$ tel que $coor_V q_i(t) = coor_V\, p^{j(i,V,t)}$ est une fonction décroissante de t prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$; à partir d'un certain moment ces valeurs sont donc constantes. Soit $q_{i,f}$ la limite de $q_i(t)$ quand $t \to \infty$. La relation R_f égale à l'ensemble des points $q_{i,f}$ admet $\mathcal{S}$ et **A** mais pas D, puisque si j'appelle $R_{i,f}$ la relation formée des points $q_{j,f}$ inscrits dans les i premières lignes, pour tout $\Delta \in \mathcal{S}$ l'algorithme produit au bout d'un temps fini tous les points de $\Delta(R_{i,f})$ et les inscrit dans $[E_\Delta]R_f$.

c) <u>Méthode des tableaux pour reconnaître si toute relation admettant $\mathcal{S}$ et **A** admet une dépendance fonctionnelle $E \succ\!\!\Rightarrow V$</u>.

Le calcul de la valeur logique de "$E \succ\!\!\Rightarrow V$" est conséquence de $\mathcal{S}$ et **A** peut se faire par le même algorithme que précédemment à ceci près

1. que l'on note bien les indices i des points q_i parce que ces indices vont intervenir dans le test,
2. que, dans l'étape initiale, on pose

$$R'_2 \leftarrow [E_\Omega \Delta \overline{<V>}]\, p^o * [<V>]\, p^1,\ [E \triangledown <V>]\, p^o * [E_\Omega \Delta (\overline{E\triangledown <V>})]\, p^2$$

ou encore seulement

$$R'_2 \leftarrow [E]\, p^o * [E_\Omega \Delta \bar{E}]\, p^1,\ [E \triangledown <V>]\, p^o * [E_\Omega \Delta (\overline{E \triangledown <V>})]\, p^2$$

et $R_2 = H_{\mathbf{A},R'_2}(R'_2)$

3. et que la condition étiquettée "TEST" est remplacée par "si $coor_V(q_1) = coor_V(p^o)$".
   Encore une fois, dans le cas où $E \succ\!\!\Rightarrow V$ est admise par toute relation admettant $\mathcal{S}$ et **A**, l'algorithme se termine en donnant

la réponse exacte. Dans les autres cas, ou il se termine en indiquant que E $>\Rightarrow$ V n'est pas conséquence de $\mathcal{S}$ et **A**, ou il ne se termine pas.

d) Exemples d'utilisation de l'algorithme des tableaux.

1- $\mathcal{S} = \{[ABC][BDE]\}$ $\mathbf{A} = \{BC \Rightarrow D\}$ D = [BE][BD][ABC]

	$R_3 = R_D$	R'_4	R_4	$R'_5=R_5$	$R'_6=R_6$
i	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E
1	1 0 1 1 0	1 0 1 1 0	1 0 1 0 0	1 0 1 0 0	1 0 1 0 0
2	2 0 2 0 2	2 0 2 0 2	2 0 2 0 2	2 0 2 0 2	2 0 2 0 2
3	0 0 0 3 3	0 0 0 3 3	0 0 0 3 3	0 0 0 3 3	0 0 0 3 3
4		1 0 1 0 2	1 0 1 0 2	1 0 1 0 2	1 0 1 0 2
5				2 0 2 0 0	2 0 2 0 0
5					0 0 0 0 0

D est conséquence de **A** et $\mathcal{S}$

2- $\mathcal{S} = \{[BC][BDE]\}$ $\mathbf{A} = \{BC \Rightarrow D\}$; on veut tester si B $\Rightarrow$ D est conséquence de $\mathcal{S}$ et **A** (E_Ω = < ABCDE >).

	$R'_2 = R_2$	R'_3	R_3	
i	A B C D E	A B C D E	A B C D E	
1	0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 $\boxed{0}$ 0	⟷ B $\Rightarrow$ D est
2	2 0 2 0 2	2 0 2 0 2	2 0 2 0 2	conséquence
3		3 0 0 0 2	3 0 0 0 2	de $\mathcal{S}$ et **A**

3- $\mathcal{S}$ et **A** sont les mêmes qu'en 2. On veut tester si B $\Rightarrow$ E est conséquence de $\mathcal{S}$ et **A**.

	$R'_2=R_2$	R'_3	R_3
i	A B C D E	A B C D E	A B C D E
1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1
2	2 0 2 2 0	2 0 2 2 0	2 0 2 2 0
3		3 0 0 2 0	3 0 0 0 0

R_3 admet $\mathcal{D}$ et $\mathbf{A}$ mais pas $B \succ\!\!\Rightarrow E$; $B \succ\!\!\Rightarrow E$ n'est pas conséquence de et $\mathbf{A}$ (par contre $[BCD][BE]$ l'est).

4-$\mathcal{D} = \{[A][B],\ [A][C]\}$ $\quad \mathbf{A} = \{BC \succ\!\!\Rightarrow D\}$;
$D = [AB][AC][BC]$; le "programme boucle"
D'ailleurs, la relation
$\{\{a^o,b^o,c',d'\},\ \{a^o,b',c^o,d^o\},\ \{a',b^o,c^o,d^2\},\ \{a',b^o,c',d'\}$
$\{a',b',c^o,d^o\}$ admet $\mathbf{A}$ et $\mathcal{D}$ mais pas D.

7. UNE AUTRE INTERPRETATION DE LA METHODE DES TABLEAUX.

a) Présentation du théorème

Afin de rapprocher les notions de dépendance fonctionnelle et de décomposition, on peut remarquer que si une relation R admet la dépendance fonctionnelle $E \succ\!\!\Rightarrow V$, alors, quelle que soit la relation R' définie sur $E_R \nabla \langle Z\rangle$ (Z non variable de E_R),
$[E_R]R' = R \Rightarrow R'$ admet la décomposition $[E \nabla \langle V\rangle][(E_\Omega \nabla \langle z\rangle) \Delta \overline{\langle V\rangle}]$; nommons $D_{E \succ\!\!\Rightarrow V}$ cette décomposition ; réciproquement, si R n'admet pas la dépendance fonctionnelle $E \succ\!\!\Rightarrow V$, alors il y a dans R deux points q_1 et q_2 tels que $[E]q_1 = [E]q_2$ et $coor_V(q_1) \neq coor_V(q_2)$.
On peut toujours construire R' en prenant l'ensemble des points $q * \{z^i\}$ où $q \in R$ et $z^i = z^1$ si $coor_V(q) = coor_V(q_1)$,
$z^i = z^2 (\neq z^1)$ si $coor_V(q) \neq coor_V(q_1)$.
R' alors n'admet pas $D_{E \succ\!\!\Rightarrow V}$ ni même $[E \nabla \langle V\rangle][E \nabla \langle Z\rangle]$
Si $\mathcal{D}$ est un ensemble de décompositions simples et $\mathbf{A}$ de dépendances fonctionnelles, il peut venir à l'idée de remplacer Ω par $\Omega \cup \{z\}$ et de remplacer l'étude du couple $(\mathcal{D}, \mathbf{A})$ par l'étude de l'ensemble de décompositions simples $\mathcal{D} \cup \{D_{E \succ\!\!\Rightarrow V} / E \succ\!\!\Rightarrow V \in \mathbf{A}\}$ définies sur $E_{\Omega \cup \{z\}}$

Posons $\mathcal{D}_{\mathbf{A}} = \{D_{E \succ\!\!\Rightarrow V} / E \succ\!\!\Rightarrow V \in \mathbf{A}\}$ et $\mathcal{D}'_{\mathbf{A}}$ l'ensemble des décompositions obtenues à partir de celles de $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ par allègement de la variable Z, c'est-à-dire l'ensemble des décompositions $D'_{E \succ\!\!\Rightarrow V} = [E \nabla \langle V\rangle][E_\Omega \Delta \overline{\langle V\rangle}]$ telles que $E \succ\!\!\Rightarrow V \in \mathbf{A}$.
Toute relation admettant $\mathbf{A}$ admet $\mathcal{D}'_{\mathbf{A}}$. Enfin nommons $\underline{E_\Omega\ Z}$ /

$\mathfrak{D}_{\omega Z}$, $\overset{xZ}{-}$, $\overset{*Z}{-}$, etc... les objets définis comme E_Ω, $\mathfrak{D}_\Omega$, ^{x}, *, ...
lorsque l'on remplace Ω par $\Omega \cup \{Z\}$.

Nous pouvons maintenant exprimer la correspondance entre l'étude de $(\mathfrak{D}, \Lambda)$ et celle de $(\mathfrak{D} \cup \mathfrak{D}_\Lambda)$ dans un théorème que nous démontrerons par un examen du pseudo-algorithme des tableaux et une réinterprétation de son déroulement.

Théorème XX

Soit $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}_\Omega$ et Λ un ensemble de dépendances fonctionnelles ; alors pour toute décomposition $D \in \mathfrak{D}_\Omega$:

$$D \in (\mathfrak{D} \cup \mathfrak{D}_\Lambda)^{\underline{*Z}} \Leftrightarrow D \in (\mathfrak{D} \cup \mathfrak{D}'_\Lambda)^*$$

et $$D \in (\mathfrak{D} \cup \mathfrak{D}_\Lambda)^{\underline{*Z}} \Leftrightarrow \forall R \in \mathcal{R}_\Omega : (R \text{ admet } \mathfrak{D} \text{ et } R \text{ admet } \Lambda) \Rightarrow R \text{ admet } D$$

Pour toute décomposition $D \in \mathfrak{D}_{\Omega Z} - \mathfrak{D}_\Omega$.

$$D \in (\mathfrak{D} \cup \mathfrak{D}_\Lambda)^{\underline{*Z}} \Leftrightarrow \begin{cases} D \circ [E_\Omega] \in (\mathfrak{D} \cup \mathfrak{D}'_\Lambda)^* \\ \underline{\text{et}} \text{ il existe dans l'ensemble des facteurs de } D \text{ un facteur } F_Z \text{ ayant} \\ Z \text{ pour variable tel que} \\ (F_Z \,\Delta\, \overline{\langle Z \rangle}) \rightarrowtail (E_D \,\Delta\, \overline{\langle Z \rangle}) \text{ dans le} \\ \text{préordre régulier} \rightarrowtail \text{engendré par} \\ \text{les dépendances fonctionnelles de} \\ \text{toute relation qui admet } \mathfrak{D} \text{ et } \Lambda. \end{cases}$$

Démonstration

Lors du déroulement de l'algorithme des tableaux, on peut toujours considérer que, au lieu de remplacer les points de R'_i par leur image dans le morphisme projectif H_{Λ,R'_i}, je laisse les points de R'_i à leur place et je note à la suite de R'_i les points $H_{\Lambda,R'_i}(q)$ tels que $q \in R'_i$ et $H_{\Lambda,R'_i}(q) \neq q$.

Le seul inconvénient est que l'indice i n'indiquera plus la ligne du tableau et ne sera plus indiqué par elle ; mais je peux noter la valeur de i dans une colonne supplémentaire, et même considérer que le i correspondant à un point q du nouveau tableau représente la coordonnée suivant Z du point $q^Z = q * \{z^i\}$ où les z^i sont des éléments de Z tels que $i \neq j \Rightarrow z^i \neq z^j$.

Exemples : reprenons notre premier exemple.

Le calcul serait présenté ainsi :

Z	A B C D E
1	1 0 1 1 0
2	2 0 2 0 2
3	0 0 0 3 3
4	1 0 1 0 2
1	1 0 1 0 0
5	2 0 2 0 0
6	0 0 0 0 0

Pour le deuxième exemple, il serait présenté ainsi :

Z	A B C D E
1	0 0 0 1 0
2	2 0 2 0 2
3	3 0 0 0 2
1	0 0 0 0 0

b) <u>Etude du cas où $D \in \mathcal{D}_\Omega$</u>

On voit que dans la nouvelle présentation du tableau, on a écrit sur les r premières lignes la relation reflet de D dans $E_{\underline{\Omega Z}}$.

Lorsqu'on construit une nouvelle ligne du tableau en utilisant une décomposition Δ, la ligne assortie de son indice est exactement celle que l'on obtiendrait par l'algorithme des tableau dans $E_{\underline{\Omega Z}}$ pour tester $D \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{\underline{*Z}}$; lorsqu'on construit une nouvelle ligne du tableau en écrivant une ligne portant un indice i déjà rencontré, c'est qu'on utilise une dépendance fonctionnelle $E \rightarrowtail\!\!\Rightarrow V \in \mathbf{A}$.

Soit $q^Z = \left[E_\Omega\right] q * \left\{z^i\right\}$ le point de $E_{\underline{\Omega Z}}$ que l'on construit.

Il existait donc dans les lignes précédentes un point $q'^Z = \left[E_\Omega\right] q' * \left\{z^i\right\}$ et un point $q''^z = \left[E_\Omega\right] q'' * \left\{z^j\right\}$ tels que $\left[E_\Omega \Delta \langle \bar{V} \rangle\right] q' = \left[E_\Omega \Delta \langle \bar{V} \rangle\right] q$ et $\left[E \nabla \langle V \rangle\right] q'' = \left[E \nabla \langle V \rangle\right] q$.

Cette ligne peut être construite à partir des précédentes dans le tableau T_2 établi pour tester $D \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{\underline{*z}}$ par rapprochement des points q'^z et q''^z à l'aide de la décomposition $D_{E \rightarrowtail\!\!\Rightarrow V}$ de $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$.

Le tableau T_1 établi pour tester "D est-il conséquence de $\mathcal{D}$ et $\mathbf{A}$?" sous sa nouvelle présentation peut être considéré comme une partie du tableau T_2".

Si T_1 contient un point q tel que $[E_D]q = E_D\, p^o$, le tableau T_2 le contient aussi, donc si D est conséquence de $\mathcal{D}$ et $\mathbf{A}$, alors $D \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{\underline{*Z}}$.

Si D n'est pas conséquence de $\mathcal{D}$ et $\mathbf{A}$, il existe une relation R définie sur E_{Ω} qui admet $\mathcal{D}$ et $\mathbf{A}$ mais pas D. Toute relation R' définie sur $E_{\Omega\underline{Z}}$ telle que $[E_{\Omega}]R' = R$ admet $\mathcal{D}$ puisque $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{\Omega}$, admet $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ mais n'admet pas D.

Nous avons démontré que $D \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{\underline{*Z}} \Leftrightarrow \forall R \in \mathcal{R}_{\Omega}$:
(R admet $\mathcal{D}$ et R admet $\mathbf{A}$) $\Rightarrow$ R admet D. De plus, si $D \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'_{\mathbf{A}})^*$, toute relation admettant $\mathbf{A}$ admet $\mathcal{D}'_{\mathbf{A}}$ et toute relation admettant $\mathcal{D}$ et $\mathbf{A}$ admet $(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'_{\mathbf{A}})^*$ donc D ; $D \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{\underline{*Z}}$; réciproquement si $D \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{*Z}$, Z n'étant pas variable de E_D ni variable centrale d'aucun élément de $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$, l'algorithme des tableaux indique que $D \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'_{\mathbf{A}})^*$.

c) <u>Etude du cas où $D \in \mathcal{D}_{\Omega\overline{Z}} - \mathcal{D}_{\Omega}$</u>

Soit D une décomposition telle que $\langle Z \rangle \lhd E_D$.

Supposons que $D \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{\underline{*Z}}$.

Alors l'algorithme des tableaux testant $D \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{\underline{*Z}}$ se termine sur une ligne f où figure un point $q = [E_{\Omega}]\, q * \{z^o\}$ tel que $[E_{\Omega} \Delta E_D]q = [E_{\Omega} \Delta E_D]p^o$.

Mais alors, si on portait en place des premiers points q_i du tableau, les points $q'_i = [E_{\Omega}]\, q_i * \{z^i\}$, la méthode des tableaux utilisant les mêmes décompositions de $(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{\underline{*Z}}$ dans le même ordre et de la même façon que précédemment, aboutirait à ligne f au point $[E]\, q * \{z^j\}$ (où $1 \leqslant j \leqslant r$) puisque les décompositions de $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ ayant Z dans leur espace de définition ne l'admettent jamais comme variable centrale.

On en déduit 1- que l'algorithme des tableaux dans E_{Ω} donnerait $D \circ [\langle \overline{Z} \rangle] \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'_{\mathbf{A}})^*$.

2- qu'il existe une décomposition $D_1 \in (\mathcal{D} \circ \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{\underline{*Z}}$ obtenue à partir de D en y supprimant la variable Z de tous les facteurs sauf un (le $j^{\text{ème}}$) que nous noterons F_Z.

3- que la décomposition $[F_Z][E_\Omega \Delta E_D]$ qui est moins fine que D_1 et toutes les décompositions $[F_Z][(F_Z \Delta E_\Omega) \nabla \langle V\rangle]$ (pour V var $(E_D \Delta \overline{F_Z})$) qui sont obtenues par allègement de la précédente sont éléments de $(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{\underline{*Z}}$.

Soit R une relation définie sur E_Ω admettant $\mathcal{D}$ et admettant $\mathbf{A}$; soit R' une relation définie sur $E_{\underline{\Omega Z}}$ et telle que $[E_\Omega]R' = R$; R' admet $\mathcal{D}$ et admet $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$, donc admet $(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{\underline{*Z}}$ et admet, pour toute variable V de $E_D \Delta \overline{F_Z}$ la décomposition $[F_Z][(F_Z \Delta E_\Omega) \overline{\nabla} \langle V\rangle]$; d'après ce qui a été dit au début, R admet la dépendance fonctionnelle $(F_Z \Delta \overline{\langle Z\rangle}) \rightarrowtail V$.

Dans le préordre engendré par l'ensemble des dépendances fonctionnelles de R, $(F_Z \Delta \langle\overline{Z}\rangle) \rightarrowtail (E_D \Delta \langle\overline{Z}\rangle)$.

Réciproquement - Soient $\mathcal{D}$ un ensemble de décompositions, $\mathbf{A}$ un ensemble de dépendances fonctionnelles, D' une décomposition définie sur un sous-espace de E_Ω, F un facteur de D'.

Supposons que $D' \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'_{\mathbf{A}})^*$ et que pour toute relation R définie sur E_Ω et admettant $\mathcal{D}$ et $\mathbf{A}$, on ait $F \rightarrowtail E_{D'}$.

Alors $D' \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'_{\mathbf{A}})^*$; d'autre part, pour chaque variable V de $E_{D'} \Delta \overline{F}$ et pour toute relation définie sur E_Ω et admettant $\mathcal{D}$ et $\mathbf{A}$, $F \rightarrowtail V$. En testant $F \rightarrowtail V$ on construit une partie du tableau du test " $[E_{\underline{\Omega Z}} \Delta \langle\overline{V}\rangle][F \nabla V] \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{\underline{*Z}}$?" et en trouvant que $F \rightarrowtail V$, on prouve que $\forall$ V var $E_{D'} \Delta \overline{F}$:

$[E_{\underline{\Omega Z}} \Delta \langle\overline{V}\rangle][F \nabla V] \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{\underline{*Z}}$.

En affinant le premier facteur facteur d'une de ces décompositions par les autres, puis en pratiquant un alourdissement, une simplification et un allègement, on en déduit que $[F \nabla \langle Z\rangle][E_{D'}] \in (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_{\mathbf{A}})^{\underline{*Z}}$.

Alors en affinant le deuxième facteur de cette décomposition par D' et en supprimant le facteur F qui est sous-espace du facteur $F \triangledown \langle Z \rangle$, on trouve que la décomposition obtenue à partir de D' en remplaçant le facteur F par le facteur $F \triangledown \langle z \rangle$ est élément de $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}_{A})^{*Z}$; il en sera évidemment de même pour toute décomposition D où on opère de plus le remplacement d'autres facteurs F' par $F' \triangledown \langle Z \rangle$ puisqu'elles sont obtenues par alourdissement des précédentes.

<u>Corollaire du théorème XX</u>

Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{\Omega}$ et Λ un ensemble de dépendances fonctionnelles ;

Soit $E \lhd E_{\Omega}$ et $V \in \Omega$

$(\forall R \in \mathcal{R}_{E_{\Omega}}$: (R admet $\mathcal{S}$ et R admet Λ) $\Rightarrow$ R admet $E \twoheadrightarrow V) \Leftrightarrow$

$([E \triangledown \langle V \rangle][E_{\Omega} \vartriangle \langle \bar{V} \rangle] \in (\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'_{\Lambda})^{*}$ <u>et</u> $\exists F \lhd E_{\Omega} \vartriangle \langle \bar{V} \rangle : F \twoheadrightarrow V \in \Lambda$.

C'est une conséquence immédiate du théorème.

A N N E X E

RAPPELS ET COMPLEMENTS EN THEORIE DES TREILLIS

ANNEXE

RAPPELS ET COMPLEMENTS EN THEORIE DES TREILLIS

L'étude des ensembles de décompositions repose sur l'étude de nombreuses fermetures et préfermetures sur treillis. Pour en rendre l'accès plus facile et pour ne pas avoir à rappeler à chaque page les propriétés de ce type d'application qui sont nécessaires à mon exposé, il m'a semblé judicieux de rassembler dans cette annexe les quelques résultats élémentaires utilisés dans ma thèse. J'ai développé un peu plus longuement les énoncés relatifs aux U-irréductibles ou $\cup$ -irréductibles des treillis finis parce que ma démarche pour étudier les treillis finis que j'ai pu rencontrer a souvent été d'en chercher un U-codage ou un $\cap$ -codage minimum. J'en ai profité pour rappeler les techniques d'études de l'ensemble des dépendances fonctionnelles d'une relation: ces résultats m'ont paru trop anciens pour être exposés dans le corps de ma thèse, mais il est nécessaire de les connaître pour aborder leurs prolongements développés dans le chapitre V. Je termine par une étude succincte du treillis distributif libre sur n variables, qui est isomorphe au treillis des décompositions simples lorsque le cardinal de Ω est n.

1. ENSEMBLES ORDONNES - VOCABULAIRE ET NOTATIONS

Soit $(E,\leqslant)$ un ensemble ordonné.

Soit $A \subset E$; l'ordre induit par $\leqslant$ sur A sera noté aussi $\leqslant$; $(A,\leqslant)$ représente donc l'ensemble ordonné tel que, pour deux éléments quelconques x et y de A, $x \leqslant y$ dans A si et seulement si $x \leqslant y$ dans T. Soit $C \subset E$; c'est une chaîne de $(E,\leqslant)$ si et seulement si $(C,\leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

On appelle chaîne maximale de $(E,\leqslant)$ un élément maximal de l'ensemble des chaînes de $(E,\leqslant)$ ordonné par inclusion.

L'existence de chaînes maximales incluant toute chaîne donnée dans tout ensemble ordonné est équivalent à l'axiome de choix.

Une section commençante de $(E,\leqslant)$ est une partie A de E telle que $\forall x \in A : \forall y \in E : y \leqslant x \Rightarrow y \in A$.

Une partie commençante qui a un maximum a et qui par conséquent est l'ensemble des éléments de E inférieurs ou égaux à a est appelée <u>section commençante principale engendrée par a</u> et notée $a]$.

<u>Une chaîne commençante</u> (ou encore descendante) de $(E,\leqslant)$ est une chaîne maximale d'une section commençante principale de $(E,\leqslant)$.

On définit de même en remplacant dans le texte $\leqslant$ par $\geqslant$, une <u>section finissante</u>, une <u>section finissante principale</u> (notée $[a)$, <u>une chaîne finissante</u> (ou encore ascendante).

Soit $A \subset E$. <u>La section commençante engendrée par A</u> et notée A^c est $A^c = \bigcup_{x \in A} x]$.

Si a et b sont deux éléments de E, on appelle <u>intervalle</u> $[a,b]$ la partie de E définie par : $[a,b] = \{x \in E / a \leqslant x \leqslant b\}$.

Soit $A \subset E$. Si l'ensemble des majorants de A a un minimum a, a est nommée <u>borne supérieure</u> de A dans $(E,\leqslant)$. On devrait la noter $a = \operatorname{Sup}_{(E,\leqslant)}\limits_{x \in A}(x)$, mais s'il n'y a pas ambiguïté sur l'ensemble de référence $(E,\leqslant)$, on la note $a = \operatorname{Sup}\limits_{x \in A}(x)$

On définit de même la <u>borne inférieure</u> dans $(E,\leqslant)$ d'une partie A de E comme le maximum de l'ensemble des minorants de A dans $(E,\leqslant)$, lorsque ce maximum existe. On la note $a = \operatorname{Inf}\limits_{x \in A}(x)$

Une partie A d'un ordonné $(E,\leqslant)$ est dite <u>libre</u> si et seulement si $\forall x \in A : \forall y \in A : x \leqslant y \Rightarrow x = y$.

Une chaîne $(C,\leqslant)$ est <u>bien ordonnée</u> si chacune de ses parties non vides a un minimum. Tout élément de C sauf éventuellement le plus grand s'il existe, y a donc un successeur immédiat. La <u>longueur</u> d'une chaîne bien ordonnée est le cardinal de l'ensemble des couples de la chaîne qui sont en relation de succession immédiate. Lorsque la chaîne $(C,\leqslant)$ est finie, longueur $(C,\leqslant) = \text{card}(c) - 1$; lorsqu'elle est infinie, longueur $(C,\leqslant) = \text{card}(c)$.

Un ordonné $(E,\leqslant)$ est <u>partiellement bien ordonné</u> si toute partie non vide de E a des éléments minimaux, ou encore si toute chaîne de $(E,\leqslant)$ est bien ordonnée.

2. TREILLIS

a) Vocabulaire et notations

Un ordonné $(T,\leqslant)$ dans lequel :

- Toute partie finie non vide a une borne supérieure est un U-demi-treillis
- Toute partie finie non vide a une borne inférieure est un demi-treillis
- Toute partie finie non vide a des bornes supérieures et inférieures est un treillis
- Toute partie a des bornes supérieures et inférieures est un treillis complet
- Toute partie non vide majorée et minorée a des bornes supérieures et inférieures est un treillis conditionnellement complet.

On montre que si $(E,\leqslant)$ est un $\cap$-demi-treillis dans lequel toutes les parties ont une borne inférieure, c'est un treillis complet et qui, si $(E,<)$ est un $\cap$-demi-treillis dans lequel toutes les parties non vides ont une borne inférieure, c'est un treillis conditionnellement complet.

J'appelle dual du treillis $(T,\leqslant)$ le treillis (T,R) où R désigne la relation d'ordre réciproque de $\leqslant$ $(x \, R \, y \Leftrightarrow y \leqslant x)$.
Je noterai $\mathrm{Sup}(a,b)$ et $\mathrm{Inf}(a,b)$ les bornes supérieures et inférieures de $\{a,b\}$.

b) Eléments U ou $\cap$-irréductibles

Dans un treillis $(T,\leqslant)$, on dit qu'un élément est :
complément U-irréductible si, pour toute partie A de T,

$$a = \mathrm{Sup}_{x \in A}(x) \Rightarrow a \in A$$

U-irréductible (ou U-fini-irréductible) si pour toute partie finie A de T, $a = \mathrm{Sup}_{x \in A}(x) \Rightarrow a \in A$.

Si a n'est pas U-irréductible, on dit qu'il est U-irréductible (ou U-fini-réductible).
Si le treillis $(T,\leqslant)$ est complet ou conditionnellement complet, alors pour qu'un élément a de T soit complètement U-irréductible, il faut et il suffit qu'il ait un prédécesseur immédiat unique.

- Pour qu'un élément a d'un treillis soit U-fini-réductible, il faut et il suffit qu'il soit borne supérieure d'une partie libre du treillis formée de deux éléments.

Si un élément a est U-réductible sans être complètement U-irréductible, il est borne supérieure de chacune des chaînes maximales de $a] - \{a\}$.

Soit $(T,\leqslant)$ un treillis. S'il a un minimum, nous noterons 0 ce minimum et s'il a un maximum nous noterons 1 ce maximum.

$0 = \underset{x \in \emptyset}{\mathrm{Sup}}(x)$: 0 n'est donc pas U-irréductible.

On dit que le treillis $(T,\leqslant)$ est <u>U-engendré</u> par une des parties A de T si $\forall x \in T : \exists B \subset A : \underset{y \in B}{\mathrm{Sup}}(y) = x$.

On dit que le treillis $(T,\leqslant)$ est <u>U-fini-engendré</u> par une des parties A de T si tout élément de T est borne supérieure d'au moins une partie finie de A.

On dit que $B \subset T$ est un <u>U-générateur</u> d'un élément x de T si $\underset{y \in B}{\mathrm{Sup}}(y) = x$; on dit que cet U-générateur est <u>irredondant</u> si de plus, pour toute partie stricte P de B, $\underset{y \in P}{\mathrm{Sup}}(y) \neq x$

Un U-générateur irredondant fini de x est aussi appelé une <u>base irredondante</u> de x.

Les définitions des mots ci-dessous se déduisent par dualité des précédentes : <u>complètement $\cap$-irréductible</u>, <u>$\cap$-irréductible</u> (ou <u>$\cap$-fini-irréductible</u>), <u>$\cap$-réductible</u>, <u>$\cap$-engendré</u>, <u>$\cap$-générateur</u>, <u>irredondant</u>, <u>$\cap$-base irredondante</u>.

Soit $(T,\leqslant)$ un treillis ayant un 0. On appelle <u>atome</u> de $(T,\leqslant)$ tout successeur immédiat de 0. Tout atome est complètement U-irréductible.

Soit $(T,\leqslant)$ un treillis ayant un 1. On appelle <u>co-atome</u> de $(T,\leqslant)$ tout prédécesseur immédiat de 1. Tout co-atome est complètement $\cap$-irréductible.

c) <u>Idéaux et filtres</u>

Soit $(T,\leqslant)$ un treillis.

Une section commençante I de $(T,\leqslant)$ est un <u>idéal</u> si et seulement si elle contient la borne supérieure de chacune de ses parties finies.

Un idéal ne peut avoir plus d'un élément maximal.
Tout idéal qui a un élément maximal est une section commençante principale de $(T,\leqslant)$ qu'on appelle aussi idéal principal.
Une section finissante F de $(T,\leqslant)$ est un filtre si et seulement si elle contient la borne inférieure de chacune de ses parties finies.
Un filtre ne peut avoir plus d'un élément minimal. S'il en a un, c'est une section finissante principale de $(T,\leqslant)$ qu'on appelle aussi filtre principal.
Si un idéal I et un filtre F de $(T,\leqslant)$ sont deux parties complémentaires de T (au sens de l'inclusion ensembliste), et non vides, on dit que I est un idéal premier et T un filtre premier.
Si $[x$ est un filtre premier, alors x est $\cup$-irréductible.
Si $y]$ est un idéal premier, alors y est $\cap$-irréductible.
Si $[x$ et $y]$ sont deux parties complémentaires de T, alors x est complètement $\cup$-irréductible et y complètement $\cap$-irréductible.

Dans un treillis quelconque, les réciproques de ces implications sont en général fausses.

3. FERMETURES, PARTIES DE MOORE ET PREORDRE REGULIER SUR UN TREILLIS COMPLET

a) Définitions

- une fermeture sur un ensemble ordonné $(E,\leqslant)$ est une application de E dans E qui est croissante, idempotente et extensive.

Un $\cap$-sous-treillis à un treillis $(T,\leqslant)$ est une partie A de T telle que, pour toute partie finie non vide B de A, $\operatorname{Inf}_{x\in B}(x) \in A$.

Un $\cap$-sous-treillis complet d'un treillis complet $(T,\leqslant)$ est un partie A de T telle que, pour toute partie B de A, $\operatorname{Inf}_{x\in B}(x) \in A$.

C'est un treillis complet et $\forall\, B \subset A$: $\operatorname{Inf}_{(A,\leqslant)}\limits_{x\in B}(x) = \operatorname{Inf}_{(T,\leqslant)}\limits_{x\in B}(x)$

et $\operatorname{Sup}_{(A,\leqslant)}\limits_{x\in B}(x) > \operatorname{Sup}_{(T,\leqslant)}\limits_{x\in B}(x)$.

Un $\cap$-sous-treillis complet d'un treillis complet $(T,\leqslant)$ s'appelle aussi partie de Moore de $(T,\leqslant)$.
On définit de même les $\cup$-sous-treillis et $\cup$-sous-treillis complets.

- Un préordre régulier sur un treillis complet $(T,\leqslant)$ est un préordre que nous noterons $(T, \succ\!\!\Rightarrow)$ et qui est tel que :

$$\forall x \in T : \forall y \in T : y \leqslant x \Rightarrow x \succ\!\!\Rightarrow y$$

$$\forall x \in T : (\forall y \in A : x \succ\!\!\Rightarrow y) \Rightarrow x \succ\!\!\Rightarrow \operatorname*{Sup}_{y \in A}(y)$$

b) Correspondance entre les trois notions : soit $(T,\leqslant)$ un treillis complet

- Etant donnée une fermeture f sur $(T,\leqslant)$, l'ensemble M_f image de T par f, qui est aussi l'ensemble des invariants de f, est stable par intersection. C'est donc une partie de Moore de $(T,\leqslant)$. $(M_f,\leqslant)$ est alors un treillis complet et l'application f de $(T,\leqslant)$ dans $(M_f,\leqslant)$ est un U-homomorphisme, c'est-à-dire que

$$\forall A \subset T : f(\operatorname*{Sup}_{(T,\leqslant),\, x \in A}(x)) = \operatorname*{Sup}_{(M_f,\leqslant),\, x \in A}(x)$$

La relation $\succ\!\!\Rightarrow$ définie sur T par $\forall x : \forall y : f(x) \leqslant f(y) \Leftrightarrow y \succ\!\!\Rightarrow x$

est un préordre régulier.

- Etant donné un préordre régulier $(T, \succ\!\!\Rightarrow)$ défini sur un treillis $(T,\leqslant)$, associons à tout $x \in T$ sa classe d'isovalence $\mathcal{C}(x)$.

$\operatorname*{Sup}_{y \in \mathcal{C}(x)}(y) \in \mathcal{C}(x)$ et l'application $x \to \operatorname*{Sup}_{y \in \mathcal{C}(x)}(y)$ est une fermeture sur $(T,\leqslant)$.

- Etant donnée une partie de Moore M de $(T,\leqslant)$, l'application f_M de T dans T qui à tout $x \in T$ fait correspondre $f_M(x) = \operatorname*{Inf}_{T,\; y \in M \cap [x)}(y)$ est une fermeture ayant M pour ensemble d'invariants.

c) U et $\cap$ -irréductibles d'une partie de Moore d'un treillis complet

Soit f une fermeture sur le treillis complet $(T,\leqslant)$, M_f la partie de Moore et $(T, \underset{f}{\succ\!\!\Rightarrow})$ le préordre régulier associés à f.

Dans tout ce paragraphe, a désignera un élément quelconque de M_f, $a]$ la section commençante principale de $(T,\leqslant)$ engendrée par a et $\mathcal{C}(a)$ la classe d'isovalence de a dans le préordre $\underset{f}{\succ\!\!\Rightarrow}$ défini sur T. On remarque que $a] - \mathcal{C}(a)$ est une section commençante de $(T,\leqslant)$.

1) Soit $b \in T$. Pour que b soit élément maximal de $a] - \mathcal{C}(a)$, il faut et il suffit que b soit élément de M_f et prédécesseur immédiat de a dans $(M_f, \leqslant)$.

2) Pour que a soit U-irréductible dans $(M_f, \leqslant)$, il faut et il suffit que $a] - \mathcal{C}(a)$ soit un idéal de $(T, \leqslant)$. En effet, si $a] - \mathcal{C}(a)$ n'est pas un idéal, alors il existe deux éléments c et d de $a] - \mathcal{C}(a)$ tels que $\mathrm{Sup}(c,d) \in \mathcal{C}(a)$. Alors f(c) et f(d) sont deux éléments distincts de $a] - \mathcal{C}(a)$, tels que

$$\begin{aligned} \mathrm{Sup}_{(M_f,\leqslant)}(f(c),f(d)) &= f(\mathrm{Sup}_{(T,\leqslant)}(c,d)) \\ &= a \end{aligned}$$

Réciproquement, si a est U-réductible dans $(M_f, \leqslant)$, il existe deux éléments x et y de M_f tels que $\mathrm{Sup}_{(M_f,\leqslant)}(x,y) = a$.

$$\begin{aligned} f(\mathrm{Sup}_{(T,\leqslant)}(x,y)) &= \mathrm{Sup}_{(M_f,\leqslant)}(x,y) \\ &= a \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Sup}_{(T,\leqslant)}(x,y) \in \mathcal{C}(a)$. Mais x et y sont éléments de $a] - \mathcal{C}(a)$ qui n'est donc pas un idéal.

3) Pour que a soit complètement U-irréductible dans $(M_f, \leqslant)$, il faut et il suffit que $a] - \mathcal{C}(a)$ soit un idéal principal $b]$ de $(T, \leqslant)$. L'élément b qui engendre $b]$ dans $(T, \leqslant)$ est alors le prédécesseur immédiat unique de a dans M_f.

4) Si $(\mathcal{C}(a), \leqslant)$ a des éléments minimaux, alors, pour que a soit U-irréductible (respectivement complètement U-irréductible) dans $(M_f, \leqslant)$, il faut que tous les éléments minimaux de $(\mathcal{C}(a), \leqslant)$ soient U-irréductibles (respectivement complètement U-irréductibles) dans $(T, \leqslant)$.

5) <u>Cas particulier de $(\mathcal{P}(E), \subset)$</u>

Soit f une fermeture sur $(\mathcal{P}(E), \subset)$. Soit A un invariant de cette fermeture.

- Si A est U-irréductible dans $(M_f, \subset)$ et si $\mathcal{C}(A)$ a un élément minimum, cet élément ne peut être qu'un singleton puisque les singletons sont les seuls U-irréductibles de $(\mathcal{P}(E), \subset)$.

- Si A est complètement U-irréductible dans M_f, alors A est image par f d'au moins un singleton. Plus précisément, soit B l'unique prédécesseur immédiat de A ; A est image par f de tous les singletons inclus dans A-B.

6) Si a est $\cap$-irréductible dans $(T,\leqslant)$, il l'est dans $(M_f,\leqslant)$.

7) Cas particulier de $(\mathcal{P}(E),\subset)$

Soit f une fermeture sur $(\mathcal{P}(E),\subset)$ et A un invariant de cette fermeture. Pour que A soit complètement $\cap$-irréductible dans $(M_f,\subset)$, il faut et il suffit qu'il existe au moins un co-atome $E-\{x\}$ de $(\mathcal{P}(E),\subset)$ tel que A soit un élément maximal de $M_f \cap ((E-\{x\})]$.

Toute partie B de E élément de M_f et incluant A possède alors l'élément x, et $f(A\cup\{x\})$ est l'unique successeur de A dans M_f.

4. TREILLIS DES FERMETURES DEFINIES SUR UN TREILLIS COMPLET

La plupart des résultats énoncés dans ce paragraphe, spécialement ceux de c), proviennent de la thèse de F. Lapscher (réf.n° 140) où l'on en retrouvera démonstration.

Soit T, $\leqslant$ un treillis complet. Soit 1 son maximum.

a) Treillis $(\mathcal{C}_M,\subset)$

Soit $(\mathcal{C}_M,\subset)$ l'ensemble ordonné par inclusion des parties de Moore de $(T,\leqslant)$.

$(\mathcal{C}_M,\subset)$ est une partie de Moore de $(\mathcal{P}(T),\subset)$; c'est donc un treillis complet. Son plus petit élément est 1 ; ses atomes sont du type $\{1,x\}$ où $x \in T-\{1\}$ et sont les seuls complètement U-irréductibles de $(\mathcal{C}_M,\subset)$; ils U-engendrent $(\mathcal{C}_M,\subset)$. La borne inférieure dans $(\mathcal{C}_M,\subset)$ d'un ensemble de parties de Moore est l'intersection ensembliste de ces parties.

b) Treillis $(\mathcal{C}_F,\leqslant)$ et $(\mathcal{C}_p,\alpha)$

Soit $(\mathcal{C}_F,\leqslant)$ l'ensemble des fermetures sur $(T,\leqslant)$ ordonné par

$$f_1 \leqslant f_2 \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in T : f_1(x) \leqslant f_2(x).$$

C'est une partie de Moore de l'ensemble des applications de T dans T ordonné par $f_1 \leqslant f_2 \Leftrightarrow \forall x \in T : f_1(x) \leqslant f_2(x)$.

La borne inférieure d'un ensemble **F** de fermetures dans le treillis des fermetures sur T est donc égale à la borne inférieure de **F** dans le treillis des applications de T dans T.
La borne supérieure d'un ensemble **F** de fermetures dans le treillis des fermetures sur T est la fermeture ayant pour ensemble d'invariants l'intersection des ensembles d'invariants des éléments de **F**. Elle est supérieure ou égale à la borne supérieure de **F** dans le treillis des applications de T dans T.
Soit $(\mathcal{C}_p, \propto)$ l'ensemble des préordres réguliers sur $(T, \leqslant)$ ordonné par inclusion des graphes de ces préordres, ou, ce qui revient au même ici, par l'ordre des relations d'équivalence qui leur sont associées. C'est une partie de Moore du treillis des préordres définis sur $(T,\leqslant)$; il est isomorphe à une partie de Moore du treillis des relations d'équivalence définies sur T.
$(\mathcal{C}_{p}, \propto)$ est un treillis complet isomorphe à $(\mathcal{C}_{F}, \leqslant)$ et au dual de $(\mathcal{C}_M, \subset)$. Pour qu'un préordre régulier $(T, \ggg)$ soit un élément complètement U-irréductible de $(\mathcal{C}_p, \propto)$, il faut et il suffit qu'il existe dans T un élément A ayant un successeur immédiat s(A) tel que $(T, \ggg)$ soit le plus petit préordre régulier défini sur T dans lequel $A \ggg s(A)$. Le préordre considéré est alors un atome de $(\mathcal{C}_p, \propto)$ si et seulement si A est un $\cap$-irréductible de $(T,\leqslant)$.

c) <u>Treillis des Parties de Moore d'un treillis fini</u>
Soit $(T,\leqslant)$ un treillis fini de cardinal n et $(\mathcal{C}_M, \subset)$ le treillis de ses parties de Moore.
$(\mathcal{C}_M, \subset)$ possède n-1 atomes qui sont ses seuls U-irréductibles et sont de la forme $\{1,x\}$ où x est un élément quelconque $\neq 1$ de T. Chaque élément M_i de $\mathcal{C}_M$ est U-généré par une base irrédondante unique d'atomes formé par ceux des ensembles $\{1,x\}$ où x est $\cap$-irréductible de $(M_i, \subset)$.
Les $\cap$-irréductibles de $(\mathcal{C}_M, \subset)$ sont les ensembles $M_{\ggg}$ de maxima des classes d'isovalences d'un préordre régulier $(T, \ggg)$ attaché à un couple (x,y) de T tel que y soit successeur immédiat de x dans $(T,<)$ et que $\ggg$ soit le plus petit préordre régulier tel que $x \ggg y$. Parmi eux, les co-atomes de $(\mathcal{C}_M, \subset)$ sont les parties

de Moore de la forme $T - \{x\}$ où x est un $\cap$-irréductible de T. Il peut exister pour certains éléments de $\mathcal{E}_M$ plusieurs $\cap$-bases irrédondantes d'$\cap$-irréductibles. Toutes les chaînes maximales de $(\mathcal{E}_M, \subset)$ sont de longueur n-1.

- Enfin si M_2 est un successeur immédiat de M_1 dans $(\mathcal{E}_M, \subset)$ c'est-à-dire s'il existe $x \in T$ tel que $M_2 = M_1 \cup \{x\}$, alors pour tout $M_3 \in \mathcal{E}_M$, $(M_2 \cup M_3)^M$ est successeur immédiat de $(M_1 \cup M_3)^M$ ou égal à $(M_1 \cup M_3)^M$ (on dit que le dual de $(\mathcal{E}_M, \subset)$ est semi modulaire) ;
on a désigné par $(M_i \cup M_j)^M$ la plus petite partie de Moore de $(T, \leqslant)$ incluant $M_i \cup M_j$, c'est-à-dire la borne supérieure de $\{M_i, M_j\}$ dans $(\mathcal{E}_M, \subset)$.

5. PREORDRE REGULIER SUR L'ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

a) Génération du treillis des préordres réguliers sur $\mathcal{P}(E)$, par l'ensemble des attributions simples.

Définition : on appelle attribution simple $X \Rrightarrow x$ sur $\mathcal{P}(E)$ le plus petit préordre régulier $(E, \Rrightarrow)$ défini sur $(\mathcal{P}(E), \subset)$ dans lequel $X \Rrightarrow \{x\}$; la notation $X \Rrightarrow x$ pour désigner ce préordre est donc un abus de langage. D'après 4.b), les propositions suivantes sont équivalentes :
- $(\mathcal{P}(E), \Rrightarrow)$ est une attribution simple sur $\mathcal{P}(E)$
- $(\mathcal{P}(E), \Rrightarrow)$ est un U-complètement-irréductible du treillis $\mathcal{E}_p$ des préordres réguliers sur $(\mathcal{P}(E), \subset)$.

Tout préordre régulier sur $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est complètement-U-engendré par l'ensemble des attributions simples qui lui sont inférieures ou égales.
Soit $(\mathcal{P}(E), \Rrightarrow)$ un préordre régulier donné sur $\mathcal{P}(E)$. On appelle attribution élémentaire de $(\mathcal{P}(E), \Rrightarrow)$ tout élément maximal de l'ensemble des attributions simples inférieurs à $(\mathcal{P}(E), \Rrightarrow)$.
Une attribution simple $A \Rrightarrow a$ inférieure ou égale au préordre $(\mathcal{P}(E), \Rrightarrow)$ est donc une attribution élémentaire si et seulement si pour toute partie stricte B de A, l'attribution simple $B \Rrightarrow a$ n'est pas inférieure ou égale à $(\mathcal{P}(E), \Rrightarrow)$.
Si E est infini, certains préordres réguliers sur $\mathcal{P}(E)$ sont engendrés par leurs attributions élémentaires, d'autres non. Par exemple, soit E un ensemble infini et f la fermeture telle que si $X \subset E$ est cofinie, alors $f(X) = E$ et sinon $f(X) = X$. Le préordre régulier associé à cette fermeture n'a aucune attribution élémentaire.

b) <u>Cas où E est un ensemble fini</u>

$(\mathcal{P}(E), \succ\!\!\Rightarrow)$ est alors engendré par au moins une $\bigcup$-base irredondante d'attributions élémentaires.

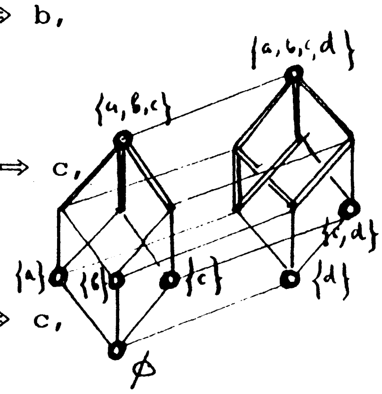
<u>Exemple</u> : le préordre régulier sur $\mathcal{P}(\{a,b,c,d\})$ associé à la partie de Moore $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b,c\}, \{d\}, \{c,d\}, \{a,b,c,d\}$ de $\mathcal{P}(\{a,b,c,d\}, \subset)$ est U-engendré par 4 bases irredondantes d'attributions élémentaires :

$B_1 = \{\{a,b\} \succ\!\!\Rightarrow c,\ \{a,c\} \succ\!\!\Rightarrow b,\ \{b,c\} \succ\!\!\Rightarrow a,\ \{a,d\} \succ\!\!\Rightarrow b,$
$\{b,d\} \succ\!\!\Rightarrow a\}$

$B_2 = \{\{a,b \succ\!\!\Rightarrow c,\ \{a,c\} \succ\!\!\Rightarrow b,\ \{b,c\} \succ\!\!\Rightarrow a,\ \{a,d\} \succ\!\!\Rightarrow b,$
$\{b,d\} \succ\!\!\Rightarrow c\{$

$B_3 = \{\{a,b\} \succ\!\!\Rightarrow c,\ \{a,c\} \succ\!\!\Rightarrow b,\ \{b,c\} \succ\!\!\Rightarrow a,\ \{a,d\} \succ\!\!\Rightarrow c,$
$\{b,d\} \succ\!\!\Rightarrow a\}$

$B_4 = \{\{a,b\} \succ\!\!\Rightarrow c,\ \{a,c\} \succ\!\!\Rightarrow b,\ \{b,c\} \succ\!\!\Rightarrow a,\ \{a,d\} \succ\!\!\Rightarrow c,$
$\{b,d\} \succ\!\!\Rightarrow c\}$.



c) <u>Expression booléenne associée à un préordre régulier sur l'ensemble des parties d'un ensemble fini</u>

Soit $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble de cardinal n

$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un ensemble de n variables et h la bijection de E dans $\mathcal{V}$ telle que $h(a_i) = v_i$.

Soit $\mathcal{A}_n$ l'algèbre de Boole libre engendrée par $\mathcal{V}$.

Soit Ψ la bijection de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ dans $\mathcal{A}_n$ définie par :

$\forall A \in \mathcal{P}(E) : \Psi(\{A\}) = \prod_{x \in A} f(x) \times \prod_{y \notin A} f'(y)$

$\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) : \Psi(X) = \sum_{A \in X} \Psi(A)$

Exemple : si $E = \{a,b,c,d\}$ et si, pour simplifier l'écriture on note aussi abcd les variables de $\mathcal{V}$, alors :

$\Psi(\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c,d\}) = abc'd' + ab'cd' + a'bcd.$

Ψ est une isomorphie d'algèbre de Boole

$\Psi(a_1 \cup a_2) = \Psi(a_1) + \Psi(a_2)$

$\Psi(a_1 \cap a_2) = \Psi(a_1) \times \Psi(a_2)$

$\Psi(\mathcal{P}(E) - a_1) = \Psi'(a_1)$

$\Psi(a)$ est appelée <u>image booléenne</u> de a.

Soit $(\mathcal{P}(E), \rightarrowtail)$ un préordre régulier sur $(\mathcal{P}(E), \subset)$ et M la partie de Moore ayant pour éléments les maxima de ses classes d'isovalence, on appelle <u>image booléenne du préordre régulier $(\mathcal{P}(E), \rightarrowtail)$</u> l'expression $\varphi((\mathcal{P}(E), \rightarrowtail)) = \Psi'(M)$.
C'est l'image par Ψ de $\mathcal{P}(E)$ - M.
L'étude de l'image booléenne $\varphi((\mathcal{P}E, \rightarrowtail))$ du préordre $(\mathcal{P}(E), \rightarrowtail)$ est une technique de calcul pratique pour l'étude de ce préordre et de la partie de Moore qui lui est associée (cf Zidani réf n° 13).
En particulier on montre : - que l'image par φ d'une attribution simple $\{a_1, a_2, a_3\} \rightarrowtail a_4$ est le monôme $v_1\ v_2\ v_3\ v'_4$;
- qu'un monôme est monôme premier de $((\mathcal{P}(E), \rightarrowtail))$ si et seulement si il est l'image par φ d'une attribution élémentaire de $(\mathcal{P}(E), \rightarrowtail)$;
- que les U-bases-irredondantes d'attributions élémentaires de $(\mathcal{P}(E), \rightarrowtail)$ ont pour image par Ψ les bases irredondantes de monômes premiers de $((\mathcal{P}(E), \rightarrowtail))$;
- enfin, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie A de $\mathcal{P}(E)$ soit partie de Moore de $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est que chaque monôme premier de $\Psi'(A)$ ait exactement une lettre primée.

d) <u>Etude d'un treillis fini à partir de ses U ou de ses $\cap$-irréductibles (cf Bouchet, réf. n° 132)</u>

Soit $(E, \leq)$ un ordonné fini.
Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des U-irréductibles de $(E, \leq)$.
Soit f l'application de E dans $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ définie par :
$\forall x \in E : f(x) = \{t \in \mathcal{U} / t \leq x \text{ dans } (E, \leq)\}$, autrement-dit :
$\forall x \in E : f(x) = x] \cap \mathcal{U}$. Si f est une isomorphie de $(E, \leq)$ sur $(f(E), \subset)$, on dit que f est le <u>U-codage</u> de $(E, \leq)$ par ses U-irréductibles ou U-codage minimum de $(E, \leq)$. Pour que $(E, \leq)$ soit un treillis, il faut et il suffit que $(E, \leq)$ admette un U-codage f par ses U-irréductibles et que f(E) soit une partie de Moore de $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \subset)$; ou encore que $(E, \leq)$ admette un U-codage f

par ses U-irréductibles et que, si $\psi(f(E))$ est l'image booléenne de f(E), alors tout monôme premier de $\psi'(f(E))$ ait une lettre primée et une seule.

Lorsque $(E,\leq)$ est un treillis fini, $(f(E),\subset)$ étant une partie de Moore de $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ est entièrement déterminé par ses $\cap$-irréductibles. Donc deux treillis finis ayant le même ensemble $\mathcal{U}$ de U-irréductibles et dont les deux ensembles d'$\cap$-irréductibles ont la même image par f dans $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, sont égaux. Si $(T,\leq)$ est un treillis fini, son dual $(T,\geq)$ en est un aussi. Il existe donc une application f_1 de T dans $\mathcal{P}(J)$, où J est l'ensemble d'$\cap$-irréductibles de $(T,\leq)$ telle que $f_1(T)$ soit une partie de Moore de $(\mathcal{P}(J),\subset)$ isomorphe à $(T,\geq)$.

Remarque : Soit E un ensemble fini. Supposons qu'une étude nous amène à définir une fermeture f sur $\mathcal{P}(E)$ ayant pour ensemble d'invariants la partie de Moore M de $\mathcal{P}(E)$. Alors, il peut être intéressant de trouver une interprétation de l'ensemble I des $\cap$-irréductibles de $(M,\subset)$ et de la fermeture f_1 sur $\mathcal{P}(I)$ définie par $\forall A \in \mathcal{P}(I)$: $f_1(A) = \{t \in I / t \geq \underset{x\in A}{\mathrm{Inf}}_{(M,\subset)}(x)$ dont le treillis d'invariants est isomorphe au dual de $(M,\subset)$.

c) Recherche des $\cap$-irréductibles d'une partie de Moore de $\mathcal{P}(E)$:

Soit M une partie de Moore de $(\mathcal{P}(E),\subset)$ et $\psi(M)$ son image booléenne. Supposons l'ensemble des monômes canoniques de $\psi(M)$ ordonné suivant l'ordre d'inclusion des ensembles de variables qui y figurent sous forme directe. Alors, d'après 3.c-7, pour qu'un élément X de $\mathcal{P}(E)$ soit $\cap$-irréductible dans $(M,\subset)$, il faut et il suffit qu'il existe une variable $v_i \in \mathcal{V}$ telle que $\psi(\{X\})$ soit élément maximal de l'ensemble des monômes canoniques de $v'_i.\psi(M)$.

Exemple : $\varphi(\mathcal{P}(E), \Rightarrow) = \psi'(M) = abc' + bcd' + adb'$

	monômes canoniques maximaux	$\cap$-irréductibles de M
$a'.\psi(M) = (a+\varphi(\mathcal{P}(E)\Rightarrow))' = a'b'+a'c'+a'd$	a'bcd	$\{b,c,d\}$
$b'.\psi(M) = (b+\varphi(\mathcal{P}(E),\Rightarrow))' = b'a' + b'd'$	a'b'cd, ab'cd'	$\{c,d\}$, $\{a,c\}$
$c'.\psi(M) = c'a' + c'b'd'$	a'bc'd, ab'c'd'	$\{b,d\}$, $\{a\}$
$d'.\psi(M) = d'b' + d'a'c'$	ab'cd', a'bc'd'	$\{a,c\}$, $\{b\}$

M a 6 $\cap$-irréductibles: $I = \{\{a\},\{b\},\{a,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{b,c,d\}\}$

6. UN EXEMPLE DE FERMETURE : STRUCTURATION DE L'ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE DE VARIABLES PAR UNE RELATION.

Soit R(A,B,C,D,F) une relation entre les variables A,B,C,D et F. Nous posons $\mathcal{V} = \{A,B,C,D,F\}$. On dit que, par exemple, R définit D en fonction de A,B,C ou que R admet la dépendance fonctionnelle $\{A,B,C\} \succ\!\!\!\Rightarrow D$, si, quels que soient $\{a,b,c,d^1,f^1\} \in \langle A\ B\ C\ D\ F\rangle$ et $\{a,b,c,d^2,f^2\} \in \langle A\ B\ C\ D\ F\rangle$, "$\{a,b,c,d^1,f^1\}$ et $\{a,b,c,d^2,f^2\}$ vérifient R" implique que $d^1 = d^2$. La relation définie sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ par "$X \succ\!\!\!\Rightarrow Y$ si et seulement si R définit chaque variable de Y en fonction des variables de X" est un préordre régulier sur $(\mathcal{P}(\mathcal{V}), \subset)$.

Les techniques booléennes évoquées au 5.b) permettent d'étudier ce préordre. Elles permettent en particulier d'énumérer les dépendances fonctionnelles du préordre régulier engendré par un un ensemble de dépendances fonctionnelles données et de trouver les parties minimales dans l'ordre d'inclusion de l'ensemble des parties de $\mathcal{V}$ isovalentes à $\mathcal{V}$ dans le préordre régulier $\succ\!\!\!\Rightarrow$.

Les applications aux modèles relationnels de bases de données en sont intéressantes (cf. Delobel, réf n° 107). Réciproquement, étant donnés un ensemble fini $\mathcal{V}$ de varaibles, une partie de Moore M de $(\mathcal{P}(\mathcal{V}), \subset)$ et $\succ\!\!\!\Rightarrow$ son préordre associé, on peut toujours construire une relation finie R, telle que l'ensemble des dépendances fonctionnelles de R soit égal à l'ensemble des attributions simples de $\succ\!\!\!\Rightarrow$; il faut toutefois supposer que chaque variable peut prendre au moins k+1 valeurs distinctes où k est le nombre d'$\cap$-irréductibles de $(M, \subset)$.

En effet, soient $X_1, X_2, \ldots, X_k$ les $\cap$-irréductibles de $(M, \subset)$. Sur chaque variable $V \in \mathcal{V}$ prenons k+1 valeurs notées $v^o\, v^1, v^2 \ldots v^k$ toutes distinctes.

Pour simplifier le discours, supposons que :

$$\begin{cases} P^o = (a^o, b^o, c^o, d^o, g^o) \\ \forall i \in [1,k] : P^i = \{\alpha^i, \beta^i, \gamma^i, \delta^i, \chi^i\} \end{cases}$$

$$\text{où} \begin{cases} \alpha^i = a^o \text{ si } A \in X_i \\ \alpha^i = a^i \text{ si } A \notin X_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta^i = b^o \text{ si } B \in X_i \\ \beta^i = b^i \text{ si } B \notin X_i \end{cases} \quad \ldots \text{ etc } \ldots$$

Soit R la relation vérifiée par les k+1 points P^i $(o \leqslant i \leqslant k)$ et par eux seulement.
Les éléments de M sont des X_i ou des intersections de X_i ; on vérifie qu'aucune dépendance fonctionnelle de R ne peut être de la forme $X_i \Rrightarrow V$ en comparant les points P^o et P^i. Les X_i sont donc éléments de la partie de Moore M_1 associée au préordre $(\wp(V), \Rrightarrow_1)$ U-engendré par les dépendances fonctionnelles de R. M_1 étant stable par intersection, $M \subset M_1$ et $(\wp(v), \Rrightarrow_1) \subset (\wp(v), \Rrightarrow)$.
Soit maintenant $Y \Rrightarrow W$ une attribution élémentaire de $(\wp(v), \Rrightarrow)$; dans chaque point p^i, si toutes les variables V de Y prennent la valeur v^o, alors W prend la valeur w^o ; la relation R admet la dépendance fonctionnelle $Y \Rrightarrow W$; on a donc $(\wp(v), \Rrightarrow) \subset$ $(v), \Rrightarrow_1)$ et par conséquent $(\wp(v), \Rrightarrow_1) = (\wp(v), \Rrightarrow)$.

<u>Exemple</u> : Ecriture d'une relation entre les variables A, B, C, D, qui admette les dépendances fonctionnelles $\{A,B\} \Rrightarrow C$, $\{B,C\} \Rrightarrow D$, $\{A,D\} \Rrightarrow D$, et celles du préordre régulier qu'elles engendrent, mais aucune autre : soit M la partie de Moore associée à ce préordre régulier.

$\wp'(M) = abc' + bcd' + adb'$

en 5.c), on a trouvé que les $\cap$ -irréductibles de M sont $\{A\}$, $\{B\}$, $\{A,C\}$, $\{B,D\}$, $\{C,D\}$ et $\{B,C,D\}$.
Une relation R ayant les propriétés cherchées et celle vérifiée par les points : $\{a^o\ b^o\ c^o\ d^o\}$,

$\{a^o\ b^1\ c^1\ d^1\}$,

$\{a^2\ b^o\ c^2\ d^2\}$,

$\{a^o\ b^3\ c^o\ d^3\}$,

$\{a^4\ b^o\ c^4\ d^o\}$,

$\{a^5\ b^5\ c^o\ d^o\}$,

$\{a^6\ b^o\ c^o\ d^o\}$ et par eux seulement.

(avec $i \neq j \Rightarrow v^i \neq v^j$).

7. PREFERMETURES SUR UN TREILLIS COMPLET ; LIMITE INDUCTIVE D'UNE PREFERMETURE

a) Treillis des applications de T dans T (lorsque $(T,\leqslant)$ est un treillis complet).

Soit $(T,\leqslant)$ un treillis complet.

L'ensemble A_T des applications de T dans T ordonné par la relation $\forall f \in A_T : \forall g \in A_T : f \leqslant g \Leftrightarrow \forall x \in T : f(x) \leqslant g(x)$ est un treillis complet dont le cardinal est $(card(T))^{card(T)}$. Rappelons que

si $(T,\leqslant)$ est distributif, $(A_T,\leqslant)$ l'est aussi ;

si $(T,\leqslant)$ est complémenté, c'est-à-dire si $\forall x \in T : \exists y : Sup(x,y) = 1$ et $Inf(x,y) = 0$, $(A_T,\leqslant)$ l'est aussi;

si $(T,\leqslant)$ est atomique, A_T l'est aussi : ses atomes sont les applications qui donnent pour image un atome de T à un des éléments de T et 0 à tous les autres. Donc si $(T,\leqslant)$ est isomorphe à $(\mathcal{P}(E),\subset)$, A_T est isomorphe à l'ensemble des parties d'un ensemble de cardinal : $card(E) \times 2^{(card)E}$

b) Treillis des préfermetures sur $(T,\leqslant)$

Définition : on appelle préfermeture sur un treillis complet $(T,\leqslant)$ toute application croissante et extensive de T dans T.

L'ensemble des applications croissantes de $(T,\leqslant)$ dans $(T,\leqslant)$ ordonné par l'ordre habituel sur l'ensemble des applications est un sous-treillis complet de $(A_T,\leqslant)$ car les bornes supérieures et inférieures d'un ensemble d'applications croissantes sont des applications croissantes. De même l'ensemble des applications extensives de $(T,\leqslant)$ dans $(T,\leqslant)$ est aussi un sous-treillis complet de $(A_T,\leqslant)$.

L'ensemble φ_T des préfermetures sur $(T,\leqslant)$ qui est l'intersection des deux ensembles précédents est donc lui aussi un sous-treillis complet de $(A_T,\leqslant)$. Donc si $(T,\leqslant)$ est complètement distributif (en particulier s'il existe E tel que $(T,\leqslant) = (\mathcal{P}(E),\subset)$), $(\varphi_T,\leqslant)$

est lui aussi complètement distributif.

Soit $\mathcal{C}_F$ l'ensemble des fermetures sur $(T,\leqslant)$.

$\mathcal{C}_F \subset \mathcal{P}_T$ et $(\mathcal{C}_F,\leqslant)$ est un $\cap$-sous-treillis complet de $(\mathbf{A}_T,\leqslant)$; c'est donc un $\cap$-sous-treillis complet de $(\mathcal{P}_T,\leqslant)$; d'autre part, l'élément maximum de $\mathcal{P}_T$ est une fermeture. Il existe donc une fermeture sur $(\mathcal{P}_T,\leqslant)$ qui à toute préfermeture f sur $(T,\leqslant)$ fait correspondre la plus petite fermeture $f^{\uparrow}$ sur T qui majore f.

Tout invariant de $f^{\uparrow}$ ne peut qu'être invariant de f puisque $\forall x : x \leqslant f(x) \leqslant f^{\uparrow}(x)$. Toute préfermeture sur un treillis complet a donc au moins un invariant (ou point fixe). Réciproquement, on montre que l'ensemble des invariants d'une préfermeture f sur un treillis complet $(T,\leqslant)$ est une partie de Moore de $(T,\leqslant)$ et on en déduit que $f^{\uparrow}$ est la fermeture ayant les mêmes invariants que f.

Dans la démonstration classique du "théorème du point fixe", on montre que, pour tout $x \in T$, la plus petite partie X inductive (c'est-à-dire telle que toute chaîne incluse dans X a une borne supérieure élément de X), stable pour f (c'est-à-dire telle que $\forall t \in X : f(t) \in X$) et dont x soit élément, lorsqu'on la munit de l'ordre induit par celui de $(T,\leqslant)$, est une chaîne bien ordonnée ayant $f^{\uparrow}(x)$ pour maximum ; $f^{\uparrow}$ est appelée <u>limite inductive</u> de f. On en déduit que si une partie inductive de $(T,\leqslant)$ est stable pour f, elle est stable pour $f^{\uparrow}$.

c) <u>Opérations dans le treillis $(\mathbf{A}_T,\leqslant)$ - notations</u>.

Nous noterons Sup sans autre indication, la borne supérieure dans les treillis $(\mathbf{A}_T,\leqslant)$ et $(\mathcal{P}_T,\leqslant)$.

Donc $\operatorname{Sup}_{f \in \mathbf{A}}(f)$ est l'application qui à tout $x \in T$ fait correspondre la borne supérieure dans $(T,\leqslant)$ de l'ensemble des $f(x)$ où $f \in \mathbf{A}$.

Nous noterons $*$ l'opération borne inférieure dans les trois treillis $(\mathbf{A}_T,\leqslant)$, $(\mathcal{P}_T,\leqslant)$ et $(\mathcal{C}_F,\leqslant)$. Donc $\underset{f \in \mathbf{A}}{*} f$ est l'application qui à tout $x \in T$ fait correspondre la borne inf dans T de l'ensemble des $f(x)$ où $f \in \mathbf{A}$; de même $(f_1 * f_2)(x) = \operatorname{Inf}_T(f_1(x), f_2(x))$.

Nous notons o la composition des applications.
Si f_1 et f_2 sont des préfermetures, $f_1 \circ f_2$ en est une.
Par définition, nous posons $f^{(o)} = I$ (application identique) et $f^{(n)} = f^{(0)} \circ f^{(n-1)}$.

Si f est une préfermeture, alors, pour tout entier n, $f^{(n)}$ est une préfermeture et $\operatorname{Sup}_{n \in \mathbb{N}}(f^{(n)})$ est une préfermeture telle que

$$f^{\uparrow} \geqslant \operatorname{Sup}_{n \in \mathbb{N}} (f^{(n)})$$

Si $(T,\leqslant)$ est fini, alors $f^{\uparrow} = \operatorname{Sup}_{n \in \mathbb{N}} (f^{(n)})$

d) <u>Quelques formules utiles</u> : elles peuvent être aisément établies et ne sont donc qu'énoncées.
Soient f_1 et f_2 deux préfermetures sur le treillis complet $(T,\leqslant)$.

- $f_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_1$ ont toutes deux pour ensemble d'invariants l'intersection des ensembles d'invariants de f_1 et de f_2.
- $\operatorname{Sup}(f_1,f_2) \leqslant \operatorname{Sup}(f_1^{\uparrow},f_2^{\uparrow}) \leqslant f_1^{\uparrow} \circ f_2^{\uparrow} \leqslant \operatorname{Sup}_{(\mathcal{C}_F,\leqslant)} (f_1^{\uparrow},f_2^{\uparrow})$
- $f_1^{\uparrow} \leqslant f_2^{\uparrow} \Leftrightarrow f_1^{\uparrow} \circ f_2^{\uparrow} = f_2^{\uparrow}$ et $f_1^{\uparrow} \leqslant f_2^{\uparrow} \Leftrightarrow f_2^{\uparrow} \circ f_1^{\uparrow} = f_2^{\uparrow}$
- $\operatorname{Sup}(f_1,f_2) \leqslant f_1 \circ f_2 \leqslant f_1^{\uparrow} \circ f_2^{\uparrow}$
- $$\begin{aligned}(\operatorname{Sup}(f_1,f_2))^{\uparrow} &= \operatorname{Sup}_{(\mathcal{C}_F,\leqslant)} (f_1^{\uparrow},f_2^{\uparrow}) \\ &= (f_1 \circ f_2)^{\uparrow} \\ &= (f_2 \circ f_1)^{\uparrow} \\ &= (f_1^{\uparrow} \circ f_2^{\uparrow})^{\uparrow}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_1^{\uparrow} \circ f_2^{\uparrow} \leqslant f_2^{\uparrow} \circ f_1^{\uparrow} &\Rightarrow (f_1^{\uparrow} \circ f_2^{\uparrow})^{\uparrow} = f_2^{\uparrow} \circ f_1^{\uparrow} \\ &\Rightarrow f_2^{\uparrow} \circ f_1^{\uparrow} \in \mathcal{C}_F\end{aligned}$$

Soit A un ensemble de préfermetures ($A \subset \mathcal{P}_T$)

- $\operatorname{Sup}_{f \in A}(f^{\uparrow}) \in \mathcal{P}_T$ mais en général $\operatorname{Sup}_{f \in A}(f^{\uparrow})$ n'est pas élément de $\mathcal{E}_F$

- $(\operatorname{Sup}_{f \in A}(f))^{\uparrow} = (\operatorname{Sup}_{f \in A}(f^{\uparrow}))^{\uparrow}$

$$= \operatorname{Sup}_{f \in A}{}_{(\mathcal{E}_F, \leqslant)} (f^{\uparrow})$$

- $\underset{f \in A}{*} (f^{\uparrow}) \in \mathcal{E}_F$

- $(\underset{f \in A}{*} (f))^{\uparrow} \leqslant \underset{f \in A}{*} (f^{\uparrow})$

e) <u>Ordre algébrique d'une préfermeture sur ($\mathcal{P}(E), \subset$)</u>

<u>Définition</u> : étant donné un ensemble A et un cardinal α, on désignera par $\mathcal{P}_{\alpha}(A)$ l'ensemble des parties de A dont le cardinal est inférieur ou égal à α ; étant donnée une préfermeture f sur ($\mathcal{P}(E), \subset$), on appelle <u>ordre algébrique</u> de f le plus petit cardinal α tel que $\forall A \subset E : f(A) = \bigcup_{X \in \mathcal{P}_{\alpha}(A)} f(X)$.

Lorsque α est un cardinal fini, ou un autre cardinal ayant un prédécesseur immédiat dans l'ordre des cardinaux, cette définition ne présente pas de difficulté, mais si α est un cardinal limite, alors deux cas peuvent se présenter : nommons $\mathcal{P}_{<\alpha}(A)$ l'ensemble des parties de A dont le cardinal est strictement inférieur à α ; alors il se peut que $\forall A \subset E : f(A) = \bigcup_{X \in P_{<\alpha}(A)} f(X)$, on dit alors que f admet α pour ordre limite ; sinon on dit que f est strictement d'ordre α .

Si, pour tout $A \subset E$, f(A) est l'union des images des parties finies de A, on dit que f est <u>d'ordre fini</u> ; cela peut se produire soit parce que f est d'ordre entier n ; on dit alors que f est <u>d'ordre fini borné</u> soit parce que f admet le dénombrable pour ordre limite ; alors f est d'ordre fini non borné.
Notons Ord(f) l'ordre de la préfermeture f
On démontre que $\operatorname{Ord}(f_1 \circ f_2) \leqslant \operatorname{Ord}(f_1) \times \operatorname{Ord}(f_2)$

$$\operatorname{Ord}(f_1 * f_2) \leqslant \operatorname{Ord}(f_1) + \operatorname{Ord}(f_2)$$

$$\operatorname{Ord}(\operatorname{Sup}(f_1, f_2)) \leqslant \operatorname{Max}(\operatorname{Ord}(f_1), \operatorname{Ord}(f_2))$$

Si f est d'ordre 1, $f^{\uparrow}$ est aussi d'ordre 1.

Si f est d'ordre fini borné ou non, $f^{\uparrow}$ est aussi d'ordre fini, mais le plus souvent non borné et

$\forall A \subset E : f^{\uparrow}(A) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} f^{(n)}(A).$

Enfin si f est d'ordre infini, l'ordre de $f^{\uparrow}$ est inférieur ou égal à celui de f ;

Remarque : soit f une préfermeture exactement d'ordre α sur $(\mathcal{P}(E), \subset)$; pour qu'une partie A de E soit un invariant de f, il faut et il suffit que l'image de toute partie de A dont le cardinal est inférieur ou égal à α soit incluse dans A. Soit f une préfermeture sur $(\mathcal{P}(E), \subset)$ admettant α pour ordre limite; pour qu'une partie A de E soit un invariant de f, il faut et il suffit que l'image de toute partie de A dont le cardinal est strictement inférieur à α soit incluse dans A.

Exemples - 1) E est un groupe, f fait correspondre à toute partie A de E l'ensemble des $t \in E$ tels que $t \in A$ ou $-t \in A$ ou $\exists t_1 \in A : \exists t_2 \in A : t = t_1 + t_2$; f est d'ordre 2 ; $f^{\uparrow}$ est d'ordre fini le plus souvent non borné.

2) Soit un préordre régulier $(\mathcal{P}(E), \Rrightarrow)$ sur $(\mathcal{P}(E), \subset)$ qui est U-engendré par l'ensemble de ses attributions élémentaires. Soit α la borne supérieure des cardinaux des parties X telles que, pour un x convenable, $X \Rrightarrow x$ soit une attribution élémentaire de X. La fermeture f associée à ce préordre est d'ordre α. Elle est strictement d'ordre α si et seulement si il existe au moins une attribution élémentaire $X \Rrightarrow x$ de $\Rrightarrow$ pour laquelle X soit de cardinal α. Si E est fini, l'ordre α de $f_{\Rrightarrow}$ est le plus grand nombre de variables non complémentées figurant dans un monôme premier de $\varphi(\mathcal{P}(E), \Rrightarrow)$.

8. TREILLIS DISTRIBUTIFS

a) Généralités

Un treillis $(T,\leq)$ est dit distributif si

$\forall\ a \in T : \forall\ b \in T : \forall\ c \in T :$ Sup(a,Inf(b,c)) = Inf(Sup(a,b),Sup(a,c))

On montre qu'un treillis $(T,\leq)$ est distributif si et seulement si :

$\forall\ a \in T : \forall\ b \in T : \forall\ c \in T :$ Inf(a,Sup(b,c)) = Sup(Inf(a,b),Inf(a,c))

Un treillis complet $(T,\leq)$ est dit infiniment distributif pour la borne inférieure si et seulement si

$$\forall\ x \in T : \forall\ A \subset T : \mathrm{Inf}(x, \underset{a \in A}{\mathrm{Sup}}(a)) = \underset{a \in A}{\mathrm{Sup}}(\mathrm{Inf}(x,a))$$

Il est dit infiniment distributif pour la borne supérieure si et seulement si

$$\forall\ x \in T : \forall\ A \subset T : \mathrm{Sup}(x, \underset{a \in A}{\mathrm{Inf}}(a)) = \underset{a \in A}{\mathrm{Inf}}(\mathrm{Sup}(x,a))$$

Il est dit infiniment distributif s'il l'est pour les bornes inférieure et supérieure.

Un treillis complet est dit complètement distributif si

$$\forall\ \mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(T)) : \underset{X \in \mathcal{A}}{\mathrm{Sup}}\ (\underset{x \in X}{\mathrm{Inf}}(x)) = \underset{\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{A})}{\mathrm{Inf}}\ (\underset{X \in \mathcal{A}}{\mathrm{Sup}}\ \varphi(X)).$$

où $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ est l'ensemble des applications φ de $\mathcal{A}$ dans l'union de ses éléments telle que $\forall\ X \in \mathcal{A} ; \varphi(X) \in X$ (fonctions de choix sur $\mathcal{A}$).

Un treillis complet est complètement distributif si et seulement si $\forall\ \mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(T)) : \underset{X \in \mathcal{A}}{\mathrm{Inf}}\ (\underset{x \in X}{\mathrm{Sup}}\ (x)) = \underset{\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{A})}{\mathrm{Sup}}\ (\underset{X \in \mathcal{A}}{\mathrm{Inf}}\ \varphi(X)).$

b) U et $\cap$ -irréductibles d'un treillis distributif

Les réciproques des implications énoncées à la fin de 2.c) sont toujours vraies dans un treillis distributif - c'est-à-dire que:

1- Dans un treillis distributif un élément x est U-irréductible si et seulement si $[x$ est un filtre premier.

2- Dans un treillis distributif un élément y est $\cap$ -irréductible si et seulement si $y]$ est un idéal premier.

3- Dans un treillis complètement distributif $(T,\leq)$, pour que x soit complètement U-irréductible, il faut et il suffit qu'il existe un élément y tel que $[x$ et $y]$ soient deux parties complémentaires de l'ensemble T.

4- Dans un treillis complètement distributif $(T,\leq)$, pour que y soit complètement $\cap$ -irréductible, il faut et il suffit qu'il existe un élément x tel que $[x$ et $y]$ soient deux parties complémentaires de T.

5- de 3 et 4 on déduit que dans un treillis complètement distributif, les ensembles de complètement U-irréductibles et de complètement $\cap$ -irréductibles munis de l'ordre induit par celui du treillis, sont deux ensembles ordonnés isomorphes. Ils peuvent toutefois être tous deux vides.

. démontrons à titre d'exemple que si $(T,\leq)$ est distributif, alors si x est U-irréductible, $[x$ est un filtre premier.

$[x$ est un filtre principal. Pour montrer que si x est U-irréductible, $[x$ est premier, il suffit de montrer que deux éléments y et z non éléments de $[x$ ne peuvent avoir une borne supérieure supérieure ou égale à x.

Si $\mathrm{Sup}(y,z) \geq x$, alors

$$\mathrm{Inf}(x,\mathrm{Sup}(y,z)) = x$$

$$\mathrm{Sup}(\mathrm{Inf}(x,y),\ \mathrm{Inf}(x,z)) = x$$

Or $\mathrm{Inf}(x,y) \neq x$ et $\mathrm{Inf}(x,z) \neq x$ puisque $y \ngeq x$ et $z \ngeq x$.

x n'est pas U-irréductible.

c) <u>Fermeture d'ordre 1 sur $(\mathcal{P}(E),\subset)$</u>

Soit f une fermeture d'ordre 1 sur l'ensemble des parties d'un ensemble quelconque. Alors

$$\forall\ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E) : f(\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X) = \bigcup_{X\in\mathcal{A}} f(X)$$

L'ensemble des invariants de f est stable par union (finie ou infinie) ; c'est donc un sous-treillis complet de $(\mathcal{P}(E),\subset)$ et un treillis complètement distributif. Le préordre associé est alors U-engendré par l'ensemble des attributions élémentaires du type $\{x\} \twoheadrightarrow y$ où x et y sont des éléments de E tels que $y \in f(\{x\})$.

En particulier, la fermeture ^{c} qui à toute partie A d'un ordonné $(E,\leq)$ fait correspondre la section commençante A^{c} qu'elle engendre est d'ordre 1.
D'où :

<u>Proposition</u> : Le treillis des sections commençantes d'un ordonné $(E,\leq)$ est complètement distributif.

Plus généralement, la démonstration de la proposition ci-dessous est quasi-immédiate :

<u>Proposition</u> : Toute partie de Moore de $\mathcal{P}(E)$ stable par union quelconque est un treillis complet et complètement distributif; toute partie de Moore de $\mathcal{P}(E)$ stable par union finie est un treillis complet et infiniment distributif pour la borne supérieure.

9. <u>ETUDE DES TREILLIS DISTRIBUTIFS FINIS A PARTIR DE LEURS U-IRREDUCTIBLES</u>

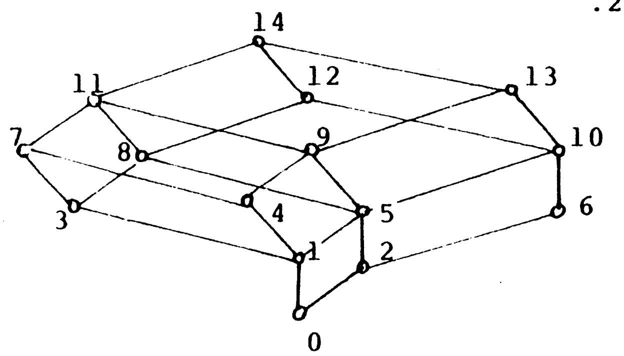
Soit $(A,\leq)$ un ordonné fini ; l'ensemble de ses sections commençantes, ordonné par inclusion étant stable par union et intersection, est un treillis distributif dont les U-irréductibles sont les sections commençantes principales et les $\cap$ -irréductibles les compléments des sections finissantes principales.
Réciproquement, soit $(E,\leq)$ un ordonné fini. Pour que $(E,\leq)$ soit un treillis, il faut qu'il admette un U-codage f stable par intersection (cf.5.d) ; $(E,\leq)$ est alors isomorphe à $(f(E),\subset)$, qui est une partie de l'ensemble $\mathcal{S}$ des sections commençantes de l'ensemble $\mathcal{U}$ des U-irréductibles de $(E,\leq)$, une partie de Moore de $\mathcal{P}(\mathcal{U},\subset)$ et d'ailleurs aussi une partie de Moore de $(\mathcal{S},\subset)$. Puisque $(\mathcal{S},\subset)$ est un treillis distributif, pour que $(E,\leq)$ en soit un, il suffit que $f(E) = \mathcal{S}$. On montre que cette condition est aussi nécessaire en montrant que si $(E,\leq)$ est un treillis distributif, toute section commençante S de $(\mathcal{U},\leq)$ est l'image par f de sa borne supérieure dans $(E,\leq)$.
D'où l'énoncé :

Pour que l'ordonné fini $(E,\leqslant)$ soit un treillis distributif, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à l'ensemble des sections commençantes, ordonné par inclusion, de l'ensemble des U-irréductibles de $(E,\leqslant)$ muni de l'ordre induit par celui de $(E,\leqslant)$.

On peut déduire de ce théorème que, pour que $(E,\leqslant)$ soit un treillis distributif, il faut et il suffit que $(E,\leqslant)$ soit un U-codage et que son image f(E) dans ce U-codage soit l'ensemble des invariants d'une fermeture du premier ordre sur $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ où U est l'ensemble des U-irréductibles de $(E,\leqslant)$; ou encore il faut et il suffit que $(E,\leqslant)$ ait un U-codage, que son image f(E) par le U-codage soit une partie de Moore telle que le préordre régulier associé $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \Rrightarrow)$ soit engendré par un ensemble d'attributions simples du type $\{x\} \Rrightarrow y$ où x et y sont des éléments de $\mathcal{U}$; $\{x\} \Rrightarrow y$ est alors attribution simple de $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \Rrightarrow)$ si et seulement si $y \leqslant x$ dans $\mathcal{U}$.
Soit $(E,\leqslant)$ un ordonné fini admettant un U-codage f(E) ; soit $\Psi(f(E))$ l'image booléenne de la partie f(E) de $\mathcal{P}(\mathcal{U})$; pour que $(E,\leqslant)$ soit un treillis distributif, il faut et il suffit que tout monôme premier de $\Psi'(f(E))$ n'ait que deux variables, l'une sous forme directe, l'autre sous forme complémentée.

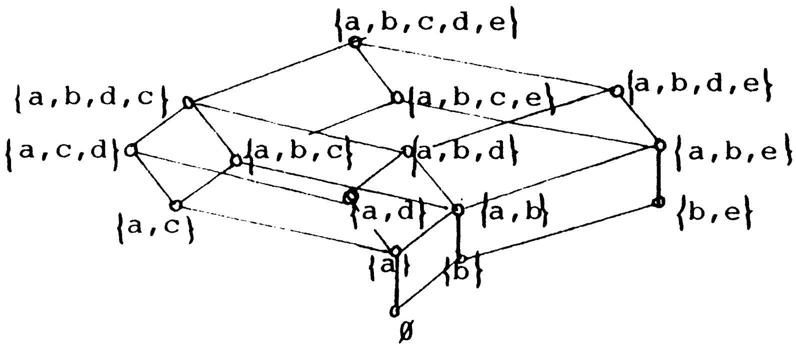
<u>Remarque</u> : soit E un ensemble quelconque et g une fermeture sur $\mathcal{P}(E)$; pour que l'ensemble des invariants de g ordonné par inclusion soit un sous-treillis complet de $\mathcal{P}(E)$ et par conséquent un treillis complètement distributif, il suffit que g soit une fermeture du premier ordre mais la condition n'est pas nécessaire, même dans le domaine fini s'il existe des éléments x de E tels que g(x) ne soit pas U-irréductible de $(g(\mathcal{P}(E)),\subset))$; Exemple: $E = \{a,b,c\}$ $g(\mathcal{P}(E)) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{abc\}\}$. On voit que $g(c) = \{abc\} = g(\{a\} \cup \{b\})$.

<u>Exemple d'application à la reconnaissance du caractère distributif d'un treillis fini</u> : soit l'ordonné fini $(E,\leqslant)$ représenté ci-dessous par son graphe. On vérifie que l'on peut en faire un U-codage.



Les U-irréductibles sont les éléments numérotés 1,2, 3,4,6.
Pour plus de commodité, nommons-les a,b,c,d,e.

$(E,\leqslant)$ est susceptible du U-codage f dont les images f(x) sont indiquées sur le graphe ci-dessous aux emplacements correspondants à ceux des éléments x de E.



Soit $\psi(f(E))$ l'image booléenne de f(E)

$$\begin{aligned}\psi(f(E)) = \; & a'b'c'd'e' \\ & + a\,b'c'd'e' \\ & + a'b\,c'd'e' \\ & + a\,b\,c'd'e' \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & + a\,b\,c\,d\,e\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(f(E)) &= ae' + ab + bc'd' + c'd'e' \\ &= (a + c'd')\,(e' + b)\end{aligned}$$

$$\psi'(f(E)) = eb' + ca' + da'$$

Tout monôme premier de ψ' contient exactement une variable complémentée, donc $(E,\leqslant)$ est un treillis, et contient de plus exactement une variable sous forme directe - le treillis est distributif.

Longueur des chaînes (rappel des résultats classiques).

Soient $(T,\leqslant)$ un treillis distributif fini de bornes 0 et 1, $\mathcal{U}$ son ensemble de U-irréductibles, I son ensemble d'$\cap$-irréductibles et soit $x \in T$.

Les U-irréductibles de l'intervalle $[0,x]$ muni de l'ordre induit par celui du treillis, sont les éléments de $\mathcal{U} \cap [0,x]$ et les -irréductibles de $[x,1]$ les éléments de $I \cap [x,1]$.

Toutes les chaînes maximales de $[0,x]$ ont pour longueur card($[0,x] \cap \mathcal{U}$) et toutes les chaînes maximales de $[x,1]$ ont pour longueur maximale card($[x,1] \cap I$).

10. TREILLIS DES SECTIONS COMMENCANTES D'UNE ALGEBRE DE BOOLE FINIE

a) Généralités

Soit E_n un ensemble fini de cardinal n et ($\mathcal{P}(E_n)$, $\subset$) l'ensemble de ses parties ordonné par inclusion.

Soit $\mathcal{C}(E_n)$ l'ensemble des sections commençantes de $(\mathcal{P}(E_n),\subset)$
$\mathcal{C}(E_n)$ peut être mis en bijection avec l'ensemble des parties libres de $(\mathcal{P}(E_n),\subset)$

Le treillis ($\mathcal{C}(E_n)$, $\subset$) présente un grand intérêt car il est isomorphe :

- au treillis distributif libre engendré par n variables,
- à l'ensemble des applications croissantes de $\mathbf{B}^n$ dans $\mathbf{B}$, si $\mathbf{B} = \{0,1\}$,
- au treillis de l'ensemble des décompositions simples que l'on peut définir sur des relations à n variables lorsqu'on l'ordonne de façon voulue. Nous rencontrons donc ce treillis dans notre étude.

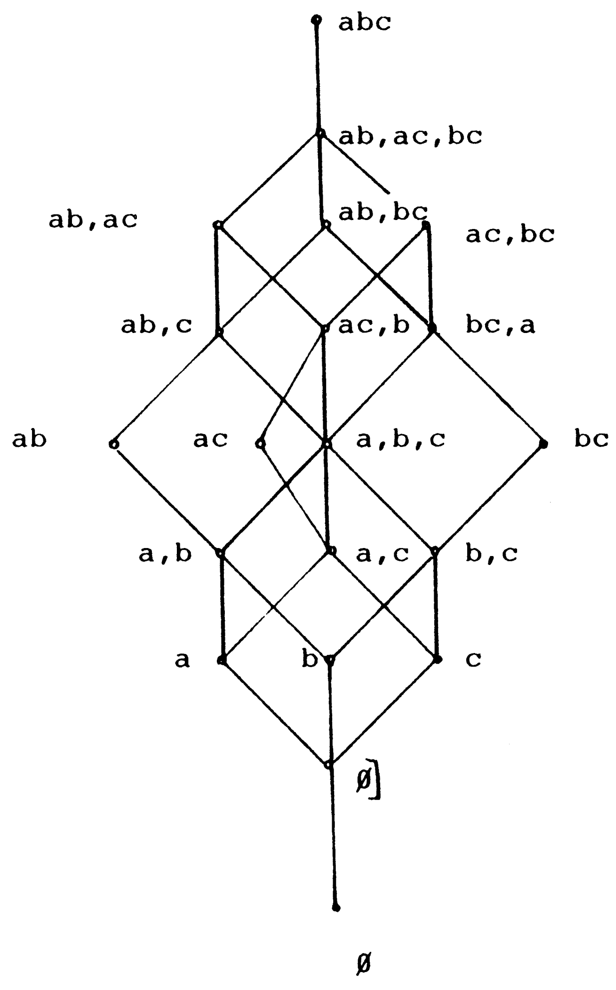
C'est un treillis complètement distributif et autodual de hauteur 2^n. Ses U-irréductibles sont les sections commençantes principales de ($\mathcal{P}(E_n)$, $\subset$) et ses $\cap$-irréductibles sont les sections commençantes engendrées par des ensembles de co-atomes de ($\mathcal{P}(E_n)$, $\subset$).

b) Représentation graphique pour n = 3 et n = 4

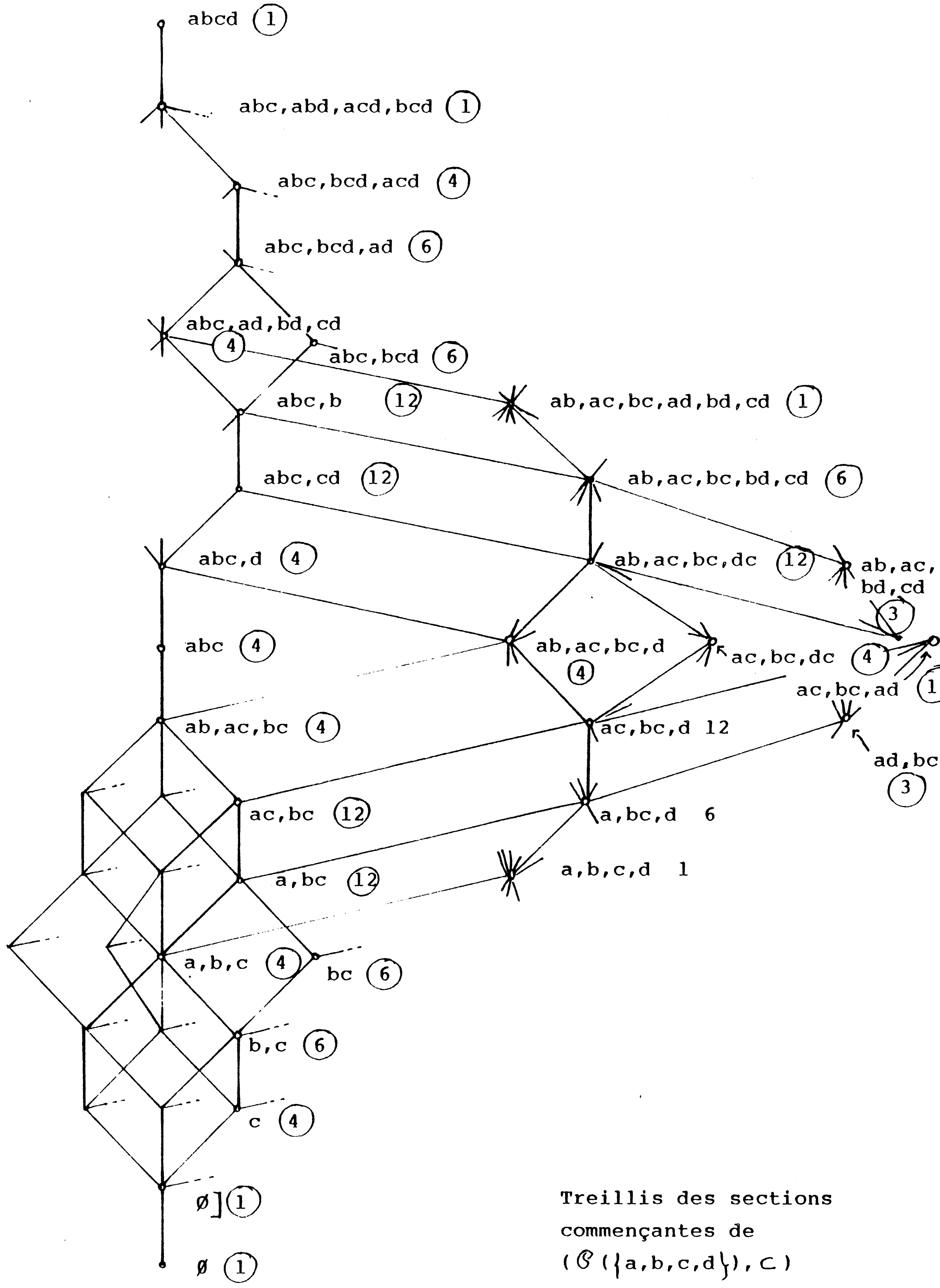
Afin de faciliter l'intuition de cette structure, je donne le diagramme de succession immédiate de $\mathcal{C}(E_3)$ et $\mathcal{C}(E_4)$.

Pour alléger l'écriture, chaque élément de $\mathcal{C}(E_n)$ est représenté par la partie libre qui l'engendre, les accolades ont été supprimées et la virgule n'est utilisée comme séparateur qu'entre les parties de E. Ainsi, $\{\{a,b\}, \{a,c\}, \{d\}\}^c$ est noté ab,ac,d.

J'ai entièrement donné le diagramme de $\mathcal{C}(E_3)$. Par contre, dans $\mathcal{C}(E_4)$, je n'ai représenté qu'une partie du diagramme : en considérant comme équivalents deux éléments de $\mathcal{C}(E_4)$ images l'un de l'autre par une bijection de E_4 dans E_4, je n'ai représenté qu'un élément de chaque classe d'équivalence en indiquant à côté le cardinal de sa classe d'équivalence. J'ai toutefois représenté, mais sans indication de nom, tous les éléments de $\mathcal{E}(E_4)$ inclus dans $\{\{a,b,c\}\}^c$.



Treillis des sections
commençantes de $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}),\subset)$



Treillis des sections
commençantes de
$(\mathcal{P}(\{a,b,c,d\}), \subset)$

c) <u>Dénombrement</u>

Le dénombrement du treillis distributif libre s'avère difficile. Je n'ai pas connaissance d'une amélioration des résultats connus depuis quelques années (cf. Bouchet réf. n° 140).

Pour

$n =$	$\mathrm{Card}(\mathcal{C}(E_n))$
0	2
1	3
2	6
3	20
4	168
5	7581
6	7828354

Diverses approximations de $\mathrm{card}(\mathcal{C}(E_n))$ ont été données. Citons les plus simples :

$$2^{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}} \leqslant \mathrm{card}(\mathcal{C}(E_n)) \leqslant 3^{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}}$$

où $\left[\frac{n}{2}\right]$ représente la partie entière de $\frac{n}{2}$ et C_n^p le coefficient du binôme

et $\mathrm{card}(\mathcal{C}(E_n)) \geqslant \mathrm{card}(\mathcal{C}(E_{n-1})) \times \mathrm{card}(\mathcal{C}(E_{n-2}))$

Remarquons que $\mathrm{card}(\mathcal{C}(E_n))$ est égal au nombre de monômes canoniques de l'image booléenne $\psi(\mathcal{C}(E_n))$ de $\mathcal{C}(E_n)$ considérée comme une partie de Moore de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E_n))$. $\psi'(\mathcal{C}(E_n))$ est la somme des $n\ 2^{n-1}$ monômes du type yx' où x et y sont deux variables associées à des éléments X et Y de $\mathcal{P}(E)$ tels que Y soit successeur immédiat de X dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$.

Exemple - $E_3 = a,b,c$.

Associons aux éléments de $\mathcal{C}(\{a,b,c\})$ des variables booléennes:

$$\underset{x_o}{\emptyset},\ \underset{x_1}{\{a\}},\ \underset{x_2}{\{b\}},\ \underset{x_3}{\{a,b\}},\ \underset{x_4}{\{c\}},\ \underset{x_5}{\{a,c\}},\ \underset{x_6}{\{b,c\}},\ \underset{x_7}{\{a,b,c\}}$$

$$\psi'(\mathcal{C}_{E_3}) = x_1\,x'_o + x_2\,x'_o + x_3\,x'_1 + x_3\,x'_2 + x_4\,x'_o + x_5\,x'_1 + x_5\,x'_4$$
$$+ x_6\,x'_2 + x_6\,x'_4 + x_7\,x'_3 + x_7\,x'_5 + x_7\,x'_6$$

Mais les formes disjonctives de ces expressions ou de leurs compléments sont très lourdes et je n'ai pas trouvé d'algorithme satisfaisant pour dénombrer l'ensemble de leurs monômes canoniques. A titre de curiosité, je me suis amusée à dénombrer l'ensemble d'éléments de $\mathcal{C}(E_n)$ en fonction de n jusqu'à la hauteur 16 du treillis. Soit $K_n(h)$ le nombre d'éléments de $\mathcal{C}(E_n)$ figurant à la hauteur h du treillis, la colonne des $K_n(h)$ $(0 \leqslant h \leqslant 16\ldots)$ est obtenue en effectuant la multiplication matricielle du tableau de coefficients ci-dessous par la colonne des C_n^p ;

j'ai effectué le calcul de ces $K_n(h)$ pour $n \leqslant 15$.

$K_n(0)$		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1
$K_n(1)$		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		C_n^0
$K_n(2)$		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		C_n^1
$K_n(3)$		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		C_n^2
$K_n(4)$		0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		C_n^3
$K_n(5)$		0	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		C_n^4
$K_n(6)$		0	0	0	0	3	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		C_n^5
$K_n(7)$		0	0	0	0	1	15	10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		C_n^6
$K_n(8)$	=	0	0	0	0	1	20	45	15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	x	C_n^7
$K_n(9)$		0	0	0	0	0	19	120	105	21	1	0	0	0	0	0	0	0		C_n^8
$K_n(10)$		0	0	0	0	0	18	220	455	210	28	1	0	0	0	0	0	0		C_n^9
$K_n(11)$		0	0	0	0	0	13	322	1385	1330	378	36	1	0	0	0	0	0		C_n^{10}
$K_n(12)$		0	0	0	0	0	10	420	3243	6020	3276	630	45	1	0	0	0	0		C_n^{11}
$K_n(13)$		0	0	0	0	0	6	500	6325	20979	20531	7140	990	55	1	0	0	0		C_n^{12}
$K_n(14)$		0	0	0	0	0	4	560	10925	59619	99680	58989	14190	1485	66	1	0	0		C_n^{13}
$K_n(15)$		0	0	0	0	0	1	600	17335	145050	393540	379764	149115	26235	2145	78	1	0		C_n^{14}
$K_n(16)$		0	0	0	0	0	1	616	25855	314335	1313260	1992144	1226799	341220	45760	3003	91	1		C_n^{15}

Tableau des $K_n(h)$ pour $n \in [0,15]$, $h \in [0,16]$

h \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3			1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105
4			1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560
5				3	13	35	75	140	238	378	570	825	1155	1573	2093	2730
6				3	18	61	156	336	644	1134	1872	2937	4422	6435	9100	12558
7				1	19	95	306	777	1694	3318	6000	10197	16489	25597	38402	55965
8				1	24	155	605	1786	4404	9570	18930	34815	60412	99957	158951	244400
9					19	215	1110	3941	11159	27099	58845	117315	218592	385528	649649	1053390
10					18	310	2045	8645	28028	76021	181240	391765	783970	1473901	2631629	4499040
11					13	387	3512	18242	68740	209868	551695	1296185	2789655	5595161	10589579	19090799
12					10	470	5913	37891	166460	573426	1665135	4257892	9865164	21122608	42394716	80615535
13					6	530	9415	75964	393883	1542219	4969275	13869460	34658284	79317394	$1{,}6896\times10^{8}$	$3{,}3907\times10^{8}$
14					4	580	14345	147994	914172	4091157	14680170	44830830	$1{,}2103\times10^{8}$	$2{,}9642\times10^{8}$	$6{,}7073\times10^{8}$	$1{,}4214\times10^{9}$
15					1	605	20950	279030	2072990	10675290	42853815	$1{,}4364\times10^{8}$	$4{,}1988\times10^{8}$	$1{,}1022\times10^{9}$	$2{,}6522\times10^{9}$	$5{,}9397\times10^{9}$
16					1	621	29566	508291	4586446	27377106	$1{,}2355\times10^{8}$	$4{,}5605\times10^{8}$	$1{,}4468\times10^{9}$	$4{,}0772\times10^{9}$	$1{,}0446\times10^{10}$	$2{,}4746\times10^{10}$

11. TREILLIS DES RECOUVREMENTS LIBRES D'UN ENSEMBLE FINI E_n

L'ensemble S_n des singletons de E_n est une partie libre de E_n. La section commençante S_n qu'elle engendre dans $(\mathcal{P}(E_n), \subset)$ est un élément remarquable de $\mathcal{C}(E_n)$.

Soit $A \subset \mathcal{P}(E_n)$. Nous dirons que A est un recouvrement de E_n si S_n est incluse dans la section commençante A^C engendrée par A dans $(\mathcal{P}(E_n, \subset)$. A est dit recouvrement libre de E_n, si c'est un recouvrement de E_n égal à l'ensemble des éléments maximaux de A^C. L'ensemble des recouvrements libres de E_n peut être ordonné suivant l'ordre d'inclusion des sections commençantes de $(\mathcal{P}(E_n), \subset)$ qu'il engendre. Soit $(\mathfrak{R}(E_n), \subset)$ l'ensemble ordonné ainsi obtenu. $(\mathfrak{R}(E_n), \subset)$ est isomorphe à la section finissante principale $[S_n^c$ de $(\mathcal{C}(E_n), \subset)$. $(\mathfrak{R}(E_n), \subset)$ est donc un treillis distributif. Ses $\cap$-irréductibles sont les recouvrements libres A tels que A^C soit $\cap$-irréductibles de $(\mathcal{C}(E_n), \subset)$. Ce sont donc des ensembles de co-atomes de $(\mathcal{P}(E_n), \subset)$ comportant au moins deux co-atomes.

Les U-irréductibles de $(\mathfrak{R}(E_n), \subset)$ s'obtiennent en prenant la borne inférieure des parties de $\mathfrak{R}(E_n)$ qui sont de la forme $\mathfrak{R}(E_n)$-A$]$ où A est un $\cap$-irréductible de $(\mathfrak{R}(E_n), \subset)$ puisque $(\mathfrak{R}(E_n), \subset)$ est un treillis distributif fini. Ce sont les recouvrements libres dont un élément et un seul n'est pas un singleton.

$(\mathfrak{R}(E_n), \subset)$ a donc 2^n-n-1 U-irréductibles et 2^n-n-1 $\cap$-irréductibles.

<u>Exemple</u> : Soit $E_5 = \{a,b,c,d,e\}$

$\mathfrak{R}(E_5)$ a pour $\cap$-irréductibles

10 recouvrements du type $\{\{a,b,c,d\}, \{a,b,c,e\}\}$

10 recouvrements du type $\{\{a,b,c,d\}, \{a,b,c,e\}, \{a,b,d,e\}\}$

5 recouvrements du type $\{\{a,b,c,d\}, \{a,b,c,e\}, \{a,b,d,e\}, \{a,c,d,e\}\}$

1 recouvrement $\{\{a,b,c,d\}, \{a,b,c,e\}, \{a,b,d,e\}, \{a,c,d,e\}, \{b,c,d,e\}\}$

$\mathfrak{R}(E_5)$ a pour U-irréductibles :

10 recouvrements du type $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d,e\}\}$

10 recouvrements du type $\{\{a\}, \{b\}, \{c,d,e\}\}$

5 recouvrements du type $\{\{a\}, \{b,c,d,e\}\}$

1 recouvrement $\{\{a,b,c,d,e\}\}$.

B I B L I O G R A P H I E

BIBLIOGRAPHIE

I - PREMIERS TRAVAUX PORTANT SUR LES DEPENDANCES FONCTIONNELLES ET LES EMBRANCHEMENTS - 1969-1976

1. ARCHER, DELOBEL C., PECCOUD F., 1969
"MODSIN : Méthode générale d'analyse des systèmes d'informations"
Contrat DGRST n° 67 010015, France.

2. ARMSTRONG 1974
"Dependency structures of Database relationships"
Proc IFIP 1974, pp. 580-583, North-Holland.

3. BERNSTEIN P.A. 1975
"Normalization and functional dependencies in the relational data base model"
Ph. D thesis Department of Computer Science, University of Toronto.

4. BERNSTEIN P.A. 1976
"Synthesizing third normal form relations from functional dependencies"
ACM Trans. Database Syst. 1,4 (Dec.76), pp. 277-298.

5. BOITTIAUX J. 1969
"Etude mathématique d'un ensemble de notions"
Contrat DGRST 67 01.015.

6. CODD E.F. 1970
"A relational model for large shared data banks"
Commun. ACM 13,6 (June 70).

7. CODD E.F. 1972
"Further Normalization of the Data Base Relational Model"
Data Base Systems (R. Rustin ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., pp. 34-64.

8. CODD E.F. 1972
"Relational completeness of data base sublanguages"
In Data Base Systems, R. Rustin, Ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1972, pp 65-98.

9. DELOBEL C. 1973
"Contributions théoriques à la conception d'un système d'information"
Thèse d'Etat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

10. DELOBEL C., CASEY R.G. 1973
"Decomposition of database and the theory of boolean switching functions"
IBM, Journal Research and Development, Vol. 17, n° 5, pp. 374-386.

11. DELOBEL C., LEONARD M. 1974
"The decomposition process in a relational model"
International Workshop on Data Structures, IRIA Namur (Belgique).

12. ZANIOLO C. 1976
"Analysis and design of relational schemata for database systems"
Tech. Rep. UCLA-ENG-7769, Dept. Computer Science, UCLA, Los Angeles, July 1976.

13. ZIDANI J. 1970
"Structuration de l'ensemble des sous-ensembles d'un espace par une relation"
Journal de la R.I.R.O. (4° année R-3, 1970, p. 83-89)

II - ETUDE SYSTEMATIQUE DES EMBRANCHEMENTS ("Dépendances multivaluées" - "Dépendances hiérarchiques") - 1977-1982

14. ARMSTRONG W, DELOBEL C. 1980
"Decompositions and functional dependencies in relations"
ACM TODS, 5.4.80.

15. BEERI C., FAGIN R., HOWARD J.H. 1977
"A complete Axiomatization for Functional and Multivalued Dependencies in Database Relations"
Proc ACM-SIGMOD Conf. Toronto.

16. BEERI C. and BERNSTEIN P.A. 1979
"Computational problems related to the design of normal form relational schemas"
ACM Trans. Database Syst. 4,1 (Mar.79), 30-59.

17. BEERI C. 1980
"On the membership problem for functional and multivalued dependencies in relational databases"
ACM Trans. Database Syst. 5,3 (Sept.80), 241-259.

18. BISKUP J. 1978
"On the complementation rule for multivalued dependencies in data base relations"
Acta Inf. 10 (78), 297-305.

19. BISKUP J. 1980
"Inferences of multivalued dependencies in fixed and undetermined universe"
Theor. Comput. Sci. 10 (80), 93-105.

20. CHANDRA A.K., LEWIS H.R. and MAKOWSKY J.A. 1981
"Embedded implicational dependencies and their inference problem"
in Proceedings of the 13th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (Milwaukee, Wisc., May 11-13), ACM, New-York, 81, pp. 342-354.

21. DELOBEL C. 1978
"Normalization and hierarchical dependencies in the relational data model",
ACM TODS, 3.3.78.

22. DELOBEL C., PARKER D.S. 1978
"Functional and multivalued dependencies in a relational database and the theory of boolean switching functions"
Rapport Technique IMAG n° 142, Grenoble.

23. FAGIN R. 1977
"Multivalued dependencies and a new normal form for relational databases"
ACM Trans. Database Syst. 2.3 (Sept.77), 262-278.

24. FAGIN R. 1977
"Functional dependencies in a relational database and propositional logic"
IBM J. Res. Devel. 21,6 (Nov.77), 534-544.

25. FAGIN R. 1980
"Horn clauses and database dependencies"
Proc. 12th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing, Los Angeles, Calif., 1980, pp. 123-134 (extended abstract).

26. FAGIN R. 1981
"A normal form for relational database that is based on domains and keys"
ACM Trans. Database Syst., 6.3 (Sept.81), 387-415.

27. LEONARD M., REYNAUD F. 1976
"Existence du concensus et caractérisation des couvertures et bases irredondantes d'une fonction $\mu_i A_i$"
Rapport de recherche IMAG Université de Grenoble.

28. LEONARD M., 1976
"Aides algorithmiques à la conception de bases de données"
Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Grenoble, Juin 1976.

29. MENDELZON A.O. 1979
"On axiomatizing multivalued dependencies in relational databases"
J. ACM 26,1 (Jan.79), 37-44.

30. PARKER D.S., DELOBEL C. 1979
"Algorithmic applications for a new result on multivalued dependencies"
Proc. Very Large Data Base Conference, Rio de Janeiro, pp. 67-74.

31. SAGIV Y., DELOBEL C., PARKER D., FAGIN R. 1981
"An equivalence between relational database dependencies and a fragment of propositional logic",
JACM, 28.3.81.

32. SAGIV Y. and WALECKA S.F. 1982
"Subset dependencies and a completeness result for a subclass of embedued multivalued dependencies"
J. ACM 29,1 (Jan.1982), 103-117.

33. TANAKA K., KAMBAYASHI Y.
"Properties of embedded multivalued dependencies in relational databases"
The transactions of the IECE of Japan, Vol. E62, n° 8.

34. TANAKA Y., TSUDA T. 1977
"Decomposition and composition of a relational database"
Proc. Very Large Data Base Conf. Tokyo, pp. 454-461.

III - Début de l'étude des décompositions simples ("join dependencies") - décompositions définies sur E ("template dependencies"). Algorithme des tableaux : 1977-1981

35. AHO A., BEERI C., ULLMAN J; 1977
"The theory of joins in relational databases"
Proc. 18th Symposium on Foundations of Computer Science, Providence, ACM TODS, 43, 79, 297-314.

36. AHO A.V., SAGIV Y. and ULLMAN J.D. 1979
"Equivalence among relational expressions"
SIAM J. Comput.8 (79), 218-246.

37. AHO A.V., SAGIV Y., ULLMAN J.D. 1978
"Efficient optimization of a class of relational expressions"
Proc ACM-SIGMOD Conf. Austin, Texas, TODS ACM Vol.4 n° 3 (79).

38. BEERI C. and VARDI M.Y. 1980
"A proof procedure for data dependencies"
Tech. Rep., Hebrew Univ. of Jerusalem, Jerusalem, Israël, Aug.80.

39. BEERI C. and VARDI M.Y. 1980
"On the complexity of testing implication of data dependencies"
Res.Rep.Dept.Computer Science, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, Israël, 80.

40. BEERI C. and VARDI M.Y. 1981
"The implication problem for data dependencies"
In Proc. 8th Int. Conf. on Automata, Languages, and Programming, Lecture Notes in Computer Science 115, Springer-Verlag, New York, 81, pp. 73-85.

41. BEERI C. and VARDI M.Y. 1981
"Formal systems for tuple and equality-generating dependencies"
Tech. Rep., Hebrew Univ. of Jerusalem, Jerusalem, Israël, Apr.81.
in SIAM J. Comput. 13,1 (Feb.84), pp. 76-98.

42. DAYAL U., BERNSTEIN P.A. 1978
"The fragmentation problem : lossless decomposition of relation into files"
Technical Report CCA - 78-13.

43. DEMOLOMBE R. and NICOLAS J.M. 1981
"On the characterization fo 'valid' formulas for database querying
Tech.Rep., ONERA-CERT, Toulouse, Sept.1981.

44. DEMOLOMBE R. 1981
"A syntactical characterization of a subset of definite and safe formulas"
Tech.Rep., ONERA-CERT, Toulouse, Sept.1981.

45. GRAHAM M.H. 1980
"A new proof that the chase is a Church-Rosser replacement system"
In Proceedings of the XPl Workshop on Relational Database Theory (Stony Brook, June) 80.

46. HULL R. 1981
"Implicational dependency and finite specification"
Tech.Rep., Univ. of Southern California, Los Angeles, Calif.81.

47. KANELLAKIS P.C. 1980
"On the computational complexity of cardinality constraints in relational databases"
Inf.Proc.Lett.11,2 (Oct.80), 98-101.

48. MAIER D., MENDELZON A.O. and SAGIV Y. 1979
"Testing implications of data dependencies"
ACM Trans. Datab. Syst. 4.4 (Dec.79), 455-469.

49. MAIER D., SAGIV Y. and YANNAKAKIS M. 1981
"On the complexity of testing implications of functional and join dependencies"
J. ACM 28,4 (Oct.81), 680-695.

50. MENDELZON A.O. and MAIER D. 1979
"Generalized mutual dependencies and the decomposition of database relations"
Proc.5th Int. Conf. on Very Large Data Bases, Rio de Janeiro, Brazil, 79, pp. 75-82.

51. NICOLAS J.M. 1978
"First-order logic formalization for functional, multivalued, and mutual dependencies"
Proc. ACM SIGMOD Int. Conf. on Managemenet of Data, Austin, Texas, 78, pp. 40-46.

52. PARKER D.S. and PARSAYE-GHOMI K. 1980
"Inference involving embedded multivalued dependencies and transitive dependencies"
Proc. Int. ACM-SIGMOD Conf. on Management of Data, Los Angeles, Calif. 80, pp. 52-57.

53. SADRI R. and ULLMAN J.D. 1980
"A complete axiomatization for a large class of dependencies in relational databases"
Proc. 12th ACM Symp. on the Theory of Computing, Los Angeles, Calif. 80, pp. 117-122.

54. SILVA A.M. and MELKANOFF M.A.
"A method for helping discover the dependencies of a relation"
In Advance in Data Base Theory, Vol.1, H. Gallaire, J. Minker, and J.M. Nicolas, Eds., Plenum Publishing, New York, 81.

55. VARDI M.Y. 1980
"Inferring multivalued dependencies from functional and join dependencies"
Res. Rep., Dept. of Appl. Math., Weizmann Inst. of Sci., Rehovot, Israël, Mar.80.

56. VARDI M.Y. 1980
"Axiomatization of functional and join dependencies in the relational model"
M.Sc.Thesis, Dept. Applied Mathematics, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israël, 80.

57. VARDI M.Y. 1981
"The implication problem for data dependencies in relational databases"
Ph.D.Thesis (en Hébreu), The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, Israël, 81.

58. VARDI M.Y. 1981
"The decision problem for database dependencies"
Inf. Proc. Lett. 12, (Oct.81), 251-254.

IV - <u>DECOMPOSITIONS SIMPLES ("template and embedded dependencies") ET GENERALISEES. ALGORITHME DES TABLEAUX, FERMETURES * et x ; ETUDE CONJOINTE DES DECOMPOSITIONS ET DES DEPENDANCES FONCTIONNELLES ; RECHERCHE DES RELATIONS MODELES D'UN ENSEMBLE DE DEPENDANCES.</u>

59. BEERI C., DOWD M., FAGIN R., STATMAN R. 1984
"Armstrong relations for functional dependencies"
J. ACM 31-1 (Janvier 84), pp. 30-46.

60. BEERI C., VARDI M.Y. 1984
"A Proof Procedure for Data Dependencies"
J. ACM 31-4 (Oct.84) pp. 718-741.

61. BEERI C. and VARDI M.Y. 1984
"Formal system for tuple and equality generating dependencies"
SIAM J. Comput. 13 (84), 76-98.

62. FAGIN R. 1982
"Armstrong databases"
Proc. 7th IBM Symp. on Mathematical Foundations of Computer Science, Kanagawa, Japan, May 1982.

63. FAGIN R. 1982
"Horn Clauses and database dependencies"
J. ACM 29-4 (Oct.1982) pp. 952-985.

64. FAGIN R., MAIER D., ULLMAN J.D. and YANNAKAKIS M. 1983
"Tools for template dependencies"
SIAM J. Comput. 12 (1983), 36-59.

65. GINSBURG S., SAÏDDAN S.M. 1982
"Properties of functional dependency families"
J. ACM 29-3 (Juillet 82).

66. GRANDT S. et JACOBS B.E. 1982
"On the family of generalized dependency constraints"
J. ACM 29-4 (Oct.1982) 986-997.

67. GUREVICH Y. and LEWIS H.R. 1982
"The inference problem for template dependencies"
Proc. 1st ACM SIGACT-SIGMOD Symp. on the Principles of Database Systems, Los Angeles, Calif., 82, pp.221-229.

68. HULL R. 1983
"Non-finite specifiability of projections of functional dependency families"
Tech. Rep. TR-83-209, Dept. of Computer Science, Univ. of Southern California, Los Angeles, Apr.83.

69. HULL R. 1984
"Finitely Specifiable implicational dependency families"
J.ACM 31.2 (Avril 84) 210-226.

70. ITO M., TANIGUCHI K. and KASAMI T. 1983
"Membership problem for embedded multivalued dependencies under some restricted conditions"
Theor. Comput. Sci. 23 (83), 175-194.

71. PAREDAENS J. and JANSSENS D. 1981
"Decompositions of relations - A comprehensive approach"
In Advances in Database Theory, H. Gallaire, J. Minker, and J.M. Nicolas, Eds.Plenum Press, New York, 81, pp. 73-100.

72. PAREDAENS J. 1982
"A universal formalism to express decomposition, functional dependencies and other constraints in a relational database"
Theor. Comput. Sci. 19 (82), 143-160.

73. SADRI F. and ULLMAN J.D. 1982
"The theory of functional and template dependencies"
Theor. Comput. Sci. 17 (82),317-332.

74. SADRI F. and ULLMAN J.D. 1982
"Template dependencies : a large class of dependencies in relational databases and their complete axiomatization"
J.ACM 29,2 (April 1982), 363-372.

75. SAGIV Y. and WALECKA S.F. 1982
"Subset dependencies and a completeness result for a subclass of embedded multivalued dependencies"
J.ACM 29,1 (Jan.82), 103-117.

76. SCIORE E. 1982
"A complete axiomatization of full join dependencies"
J.ACM 29,2 (Apr.82), 373-393.

77. VARDI M.Y. 1982
"The implication and finite implication problems for typed template dependencies"
Proc. 1st ACM SIGACT-SIGMOD Conf. on Principles of Database Systems, Los Angeles, Calif., 82, pp. 230-238.

78. VARDI M.Y. 1982
"On the decomposition of relational databases"
In Proceedings of the 23rd IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science, (Chicago, Nov. 3-5), IEEE, New York, 82, pp. 176-187.

79. VARDI M.Y. 1983
"Inferring multivalued dependencies from functional and join dependencies"
Acta Inf. 19 (1983), 305-324.

80. VARDI M.Y. 1984
"The implication and the finite implication problems for typed template dependencies"
J. Comput. System Sci. 28, 1 (Feb.84), 3-28.

V - RESEAUX DE NOEUDS ET D'ETOILES REPRESENTANT UNE RELATION-HYPERGRAPHES ACYCLIQUES - 1981-1985

81. D'ATRI A. and MOSCARINI M. 1982
"Acyclic hypergraphs : their recognition and top-down versus bottom-up generation"
Tech. Rep. R.29, Consiglio Nazionale Delle Richerche, Istituto di Analisi dèi Sistemi ed Informatica, 82.

82. AUSIELLO G., D'ATRI A. and MOSCARINI M. 1982
"Minimal coverings of acyclic database schemata"
Proc. ONERA-CERT Toulouse Workshop on Logical Bases for Data Bases, Toulouse, France, 82.

83. AUSIELLO G., D'ATRI A. and SACCA D. 1983
"Graph algorithms for functional dependency manipulation"
J.ACM 30,4 (Oct.83), 752-766.

84. BEERI C. and RISSANEN J. 1980
"Faithful representation of relational database schemes"
IBM Res.Rep.IBM, San Jose, 80.

85. BEERI C., VARDI M.Y. 1979
"On the properties of total join dependencies"
Workshop CERT-DERI, Toulouse, France - in Advances in Database Theory (H. Gallaire, J. Minker, J.M. Nicolas Ed.).

86. BEERI C., FAGIN R., MAIER D., MENDELZON A.O., ULLMAN J.D. and YANNAKAKIS M. 1981
"Properties of acyclic database schemes"
In Proc.13th Ann.ACM Symp. on Theory of Computing (Milwaukee, Wisc., May 11-13, 1981), ACM, New York, 81, pp. 355-362.

87. BEERI C., FAGIN R., MAIER D. and YANNAKAKIS M. 1983
"On the desirability of acyclic database schemes"
J.ACM 30, 3 (July 83), 479-513.

88. CASANOVA M.A., FAGIN R. and PAPADIMITRIOU C. 1982
"Inclusion dependencies and their interaction with functional dependencies"
In Proc. ACM Symp. on Principles of Database Systems (Los Angeles, Calif., Mar.29-31, 1982), ACM, New York, 82, pp. 171-176.

89. CHASE K. 1981
"Join graphs and acyclic data base schemes"
In Proc. 7th Int. Conf. on Very Large Databases (Cannes, France, Sept.9-11, 1981), ACM, New York, 81, pp. 95-100.

90. FAGIN R., MENDELZON A.O. and ULLMAN J.D. 1982
"A simplified universal relation assumption and its properties"
ACM Trans. Datab. Syst. 7,3 (Sept.82), 343-360.

91. FAGIN R. 1983
"Degrees of acyclicity for hypergraphs and relational database schemes"
J.ACM 30,3, July 83, 514-550.

92. GOODMAN N., SHMUELI O. 1983
"Syntactic characterization of tree database schemas"
J.ACM 30-4 (Oct.83), 767-786.

93. HULL R. 1981
"Acyclic join dependency and database projections"
Tech.Rep., Univ. of Southern California, Los Angeles, Calif., June 81.

94. KATSUNO H. 1984
"An extension of conflict - Free Multivalued dependency sets"
KATSUNO H, ACM TODS, 9,2 Juin 84.

95. MAIER D. and ULLMAN J.D. 1982
"Connections in acyclic hypergraphs"
In Proc.ACM Symp. on Principles of Database Systems, (Los Angeles, Calif., Mar.29-31, 1982), ACM New York, 1982, pp. 34-39.

96. MAIER D., ULLMAN J.D. and VARDI M.Y. 1983
"The revenge of the JD"
In Proc. 2nd ACM Symp. on Principles of Database Systems (Atlanta, Ga., Mar.21-23, 1983), ACM, New York, 83, pp. 279-287.

97. RISSANEN J. 1982
"On equivalence of database schemes"
In Proceedings of the ACM Symposium on Principles of Database Systems (Los Angeles, Calif., Mar.29-31), ACM New York, 82, pp. 23-26.

98. SACCA D., MANFREDI F. and MECCHIA A. 1984
"Properties of database schemata with functional dependencies"
In Proceedings of the 3rd ACM SIGACT-SIGMOD Symposium on Principles of Database Systems (Waterloo, Ont., Canada, Apr.2-4), ACM, New York, 84, pp. 19-28.

99. SACCA D. 1985
"Closures of database hypergraphs"
J.ACM 32-4 (Oct.85), pp. 774-803.

100. TARJAN R.E. and YANNAKAKIS M. 1982
"Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs"
Tech. Rep., Bell Labs, Murray Hill, N.J., Mar. 82.

101. TARJAN R.E. and YANNAKAKIS M. 1984
"Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs test acyclicity of hypergraphs, and selectivity reduce acyclic hypergraphs"
Siam J. Comput. 13,3 (Aug.84), 566-579.

102. YANNAKAKIS M. 1981
"Algorithms for acyclic database schemes"
In Proceedings of the 7th International Conference on Very Large Data Bases (Cannes, France, Sept. 9-11), ACM, New York, 81, pp. 82-94.

103. YANNAKAKIS M. 1982
"Algorithms for acyclic database schemes"
In Proc. 7th Int. Conf. on Very Large Databases (Cannes, France, Mar.29-31,82), ACM, New York, 1982, pp. 82-94.

VI - DISCUSSION DU MODELE RELATIONNEL - PROBLEME DES VALEURS BLANCHES (questions non abordées dans cette thèse, mais en constituant l'environnement)

104. BEERI C., BERNSTEIN P.A. and GOODMAN N. 1978
"A sophisticate's introduction to database normalization theory"
In Proceedings of the 4th International Conference on Very Large Data Bases (West Berlin, Germany, Sept. 13-15), ACM New York, 78, pp. 113-124.

105. BISKUP J. 1981
"A formal approach to null values in database relations"
In Advances in Database Theory, H. Gallaire, J. Minker and J.M. Nicolas, Eds. Plenum Press, New York, 81, pp. 299-341.

106. CODD E.F. 1979
"Extending the database relational model to capture more meaning"
ACM Trans. Database Syst. 4,4 (Dec. 79) 397-434.

107. DELOBEL C., ADIBA M. 1982
"Bases de données et systèmes relationnels"
Ed. Dunod.

108. GRAHAM M.H. and VARDI M.Y. 1984
"On the complexity and axiomatizability of consistent database states"
In Proceedings of the 3rd Annual ACM Symposium on Principles of Database Systems (Waterloo, Ont., Canada, Apr.2-4), ACM New York, 84, pp. 281-289.

109. GRAHAM M.H. and YANNAKAKIS M. 1984
"Independent database schemas"
J. Comput. Syst. Sci. 28 (84), 121-141.

110. GRAHAM M., MELDELSON A., VARDI M.Y. 1986
"Notions of dependency satisfaction"
J. ACM 33 - 1 Janvier 86.

111. GRANT J. 1977
"Null values in a relational data base"
Inf. Process. Lett. 6,5 (Oct.1977), 156-157.

112. HONEYMAN P. 1982
"Testing satisfaction of functional dependencies"
J.ACM 29, 3 (July 82), 668-677.

113. IMIELINSKI T. and LIPSKI W. 1981
"On representing incomplete information in a relational data base"
In Proceedings of the 7th International Conference on Very Large Data Bases (Cannes, France, Sept.9-11) ACM, New York, 81, pp. 388-397.

114. IMIELINSKI T. and LIPSKI W. 1982
"A technique for translating states between database schemata"
In Proceedings of the ACM SIGMOD International Conference on Management of Data (Orlando, Fla., June 2-4), ACM, New York, 82, pp. 61-68.

115. IMIELINSKI T. and LIPSKI W. 1983
"Inverting relational expressions - a uniform and natural technique for various database problems"
In Proceedings of the ACM SIGACT-SIGMOD Symposium on Principles of Database Systems (Atlanta, Ga., March 21-23), ACM, New York, 83, pp. 305-311.

116. IMIELINSKI T. and LIPSKI W. 1983
"Incomplete information and dependencies in relational databases"
In Proceedings of the ACM SIGMOD International Conference on Management of Data (San Jose, Calif., May 23-26), ACM, New York, 83, pp. 178-184.

117. IMIELINSKI T. and LIPSKI W. 1984
"The relational model of data and cylindric algebras"
J. Comput. System Sci. 28,1 (Feb. 84), 80-102.

118. IMIELINSKI T. and LIPSKI W. 1984
"Incomplete information in relational databases"
J.ACM 31-4 (Oct.84).

119. LIPSKI W. 1976
"Informational systems with incomplete information"
In Proceedings of the 3rd International Colloquium on Automata Languages and Programming (Edinburgh, Scotland, July 20-23), Edinburgh University Press, Edinburgh, Scotland, 1976, pp. 120-130.

120. LIPSKI W. 1979
"On semantic issues connected with incomplete information databases"
ACM Trans. Database Syst. 4,3 (Sept. 79), 262-296.

121. LIPSKI W. 1981
"On databases with incomplete information"
J.ACM 28,1 (Jan.81), 41-70.

122. LIPSKI W. 1983
"Logical problems related to incomplete information in databases"
Tech. Rep. 138, Laboratoire de Recherche en Informatique, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Sept. 83.

123. LIPSKI W. 1984
"On relational algebra with marked nulls"
In Proceedings of the 3rd ACM SIGACT-SIGMOD Symposium on Principles of Database Systems (Waterloo, Ont., Canada, April 2-4), ACM, New York, 84, pp. 201-203.

124. MAIER D., MENDELZON A., SADRI F., ULLMAN J. 1980
"Adequacy of decompositions of relational data base"
Proc. 20th IEEE Symp. on foundations of Computer Science, J. Computer System Science, 21.3, 80 et In Advances in Database Theory, H. Gallaire, J. Minker and J.M. Nicolas, Ed. Plenum Press, New York, 81, pp. 101-114.

125. MAIER D., ULLMAN J.D. and VARDI M.Y. 1984
"On the foundations of the universal relation model"
ACM Trans. Database Syst. 9,2 (June 84), 282-308.

126. MENDELZON A.O. 1984
"Database states and their tableaux"
ACM Trans. Database Syst. 9,2 (June), 264-282.

127. REITER R. 1984
"Towards a logical reconstruction of relational database theory"
In Conceptual Modelling, Perspectives from Artificial Intelligence, Databases and Programming Languages, M.L. Brodie, J. Mylopoulos and J. Schmidt, Eds. Springer-Verlag, New York, 84, pp. 191-233.

128. SAGIV Y. 1981
"Can we use the universal instance assumption without using nulls?"
In Proceedings of the ACM Conference on Management of Data, ACM, New York, 1981, 108-120.

129. SCIORE E. 1980
"The universal instance and database design"
Ph.D. Dissertation, Princeton, Univ., Princeton, N.J. 80.

130. SCIORE E. 1980
"Some observations on real-world data dependencies"
Proc. XP1 Workshop, Stony Brook, N.Y., June 80.

131. SCIORE E. 1981
"Real-world MVDs"
In Proc. Int. Conf. on Management of Data (Ann Arbor, Mich., Apr. 29-May 1, 1981), ACM, New York, 81, pp. 121-132.

132. SIKLOSSY L. 1981
"Efficient query evaluation in relational databases with missing values"
Inf. Process. Lett. 13, 4/5 (End 81), 160-163.

133. ULLMAN J.D. 1980
"Principles of Database Systems"
Computer Science Press, Woodland Hills, Calif., 80.

134. YANNAKAKIS M. and PAPADIMITRIOU C.H. 1982
"Algebraic dependencies"
J. Comput. Syst. Sci. 25, 1 (Aug. 82), 2-41.

135. VASSILIOU Y. 1979
"Null values in data base management : A denotational semantics approach"
In Proceedings of the ACM-SIGMOD International Symposium on Management of Data (Boston, Mass., May 30-June 1), ACM, New York, 79, pp. 162-169.

136. VASSILIOU Y. 1980
"Functional dependencies and incomplete information"
In Proceedings of the 6th International Conference on Very Large Data Bases (Montreal, Ont., Canada, Oct. 1-3), ACM, New York, 80, pp. 260-269.

137. ZANIOLO C. 1982
"Database relations with null values"
In Proceedings of the ACM SIGACT-SIGMOD Symposium on Principles of Database Systems (Los Angeles, Calif., March 29-31), ACM, New York, 82, pp. 27-33.

VII - TREILLIS ET THEORIE DES FERMETURES

138. BOUCHET A. 1971
"Etude combinatoire des ordonnés finis - Applications"
Thèse d'Etat Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 13 Mai 1971.

139. GRÄTZER G. 1978
"General Latice theory"
Academic Press, New York.

140. LAPSCHER F. 1968
"Application de la notion de fermeture à l'étude des fonctions booléennes"
Thèse d'Etat Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 6 Septembre 1968.

141. PONASSE D., CARREGA J.C. 1979
"Algèbre et topologie booléennes"
Ed. Masson.

142. SZASZ G. 1971
"Théorie des treillis"

DERNIERE PAGE DE LA THESE

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT D'ETAT

Vu les dispositions de l'article 5 de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M.r. Delobel Claude..............

M. Pichat - E.........................

M. Pouzet.............................

Mme ..BOITTIAUX-ZIDANI.............................. est autorisé à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES.

Transmis avec avis favorable

C. Delobel

Président de la Commission des Thèse

Fait à Grenoble, le 2 Juin 86

Le Président de l'U.S.M.G.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Le Président

M. TANCHE