Problèmes d'estimation dans les séries temporelles stationnaires avec données manquantes

Salim Ladjouze

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE 3ème CYCLE
«Mathématiques appliquées»

par

Salim LADJOUZE

PROBLEMES d'ESTIMATION dans les SERIES TEMPORELLES STATIONNAIRES avec DONNEES MANQUANTES.

Thèse soutenue le 9 janvier 1986 devant la commission d'examen

A. LE BRETON	Président
F. BRODEAU	Examinateurs
T. PHAM – DINH	
J.L. SOLER	

PROBLEMES d'ESTIMATION
dans les
SERIES TEMPORELLES STATIONNAIRES
avec
DONNEES MANQUANTES.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

.../...

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

.../...

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie

A mes parents
et toute ma famille.
A Chahinez.

Je suis très reconnaissant à Mr A. Le Breton, Professeur à l'U.S.M.G et Responsable de l'équipe de Statistique du laboratoire TIM3, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le Jury et pour avoir accepté, malgré ses contraintes, de critiquer la rédaction de mon travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Mr Tuan Pham-Dinh, chargé de recherches au C.N.R.S, qui a dirigé cette thèse et dont j'ai pu apprécier la disponibilité. Ses enseignements m'ont été précieux, sinon indispensables, dans l'accomplissement de ce travail.

Je remercie vivement Mr F. Brodeau, Professeur à l'Université des Sciences Sociales de Grenoble, pour avoir aimablement accepté de juger mon travail et de prendre part au Jury.

Je remercie également Mr J.L Soler, Maître de conférences à l'I.N.P.G et membre du Jury : je dois à son incitation ma venue au sein de l'équipe de Statistique et m'a depuis prodigué maints conseils et encouragements.

J'adresse enfin mes remerciements à Hélène qui a bien voulu frapper cette thèse, ainsi qu'aux agents du service Reprographie qui en ont assuré l'impression avec soin.

Je suis très redevable à mes amis Djilali, Ameur et Rabah pour leurs aide et soutien moral : je ne saurais terminer sans leur exprimer ma profonde sympathie.

TABLE DES MATIERES.

pages

INTRODUCTION.

Notre travail concerne le problème d'estimation dans les séries temporelles stationnaires avec données manquantes. L'approche que nous y avons adoptée le situe dans le cadre de l'estimation des séries temporelles modulées en amplitude.

L'intérêt de ce problème, qui a été assez peu abondamment étudié dans la littérature, est justifié par la rencontre fréquente de séries avec données manquantes dans la réalité des problèmes pratiques. En effet, on a souvent à faire à des séries que l'on n'observe que pendant quelques heures de la journée, voire quelques jours de la semaine, à cause des rythmes de la vie sociale ou économique. En général, les données manquantes peuvent être attribuées à des origines diverses tenant - par exemple - à la nature du phénomène observé, à l'appareil de mesure, etc... . On peut citer des exemples de séries avec données manquantes plus systématiques, comme dans **[17(4)]** : enregistrer l'écho réfléchi d'un signal radar émis vers la lune nécessite l'arrêt de l'émission durant la période de réception de l'écho, période pour laquelle on ne disposera pas d'écho - faute d'émission. D'autres exemples figurent dans l'expérience océanographique décrite par Clinger et Van Ness dans **[5]** ou dans l'étude des cycles circadiens effectuée par Haggan dans **[10]**.

Avant de présenter notre travail, introduisons d'abord notre problème, sa nature spécifique; définissons en premier l'objet : dans le cadre statistique inférentiel, la série temporelle

$$\{X(1),X(2),\dots,X(N)\},\ N\in\mathbb{N}^*$$

est considérée comme une réalisation complète, de longueur N, d'un processus d'observation $X = \{X(t),\ t\in\mathbb{Z}\}$ défini sur un espace probabilisé et à valeurs dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}^p,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^p})$, $p\in\mathbb{N}^*$. Elle consiste en la donnée - chronologiquement ordonnée - de la suite des enregistrements effectués sur le phénomène représenté par X. S'il arrive que certains enregistrements soient incomplets ou bien inexistants selon un processus d'occurence indépendant du processus en cours d'observation, on se trouve alors en présence d'une série temporelle avec données manquantes (voir **[21]**). Cette hypothèse d'indépendance attachée à la définition même des données manquantes dans une série est ici nommée "<u>hypothèse de base</u>"; elle exclut le cas des données censurées.

Pour exhiber la difficulté spécifique de notre problème, considérons une série avec données manquantes scalaire (p=1) : elle peut s'écrire

$$\{X(j), j=n_1,\ldots,n_M,\ 1\leq M< N\},\ N\in\mathbb{N}^*,$$

les données manquantes y figurant aux rangs j, $j = \{1,\ldots,N\}\setminus\{n_1,\ldots,n_M\}$. La théorie classique d'estimation dans les séries temporelles stationnaires complètes - laquelle a déjà fait l'objet d'importants ouvrages fondamentaux (tels **[1]**,**[10]**...) - repose sur l'hypothèse que les enregistrements sont régulièrement espacés dans le temps : tel n'est plus le cas pour la série précédente et notre problème ne relève plus, dès lors, de cette théorie.

Parzen l'a étudié dans un cas particulier dans **[17(4)]** en préconisant une approche qui a donné lieu à certains développements concernant l'aspect non paramétrique du problème, tels ceux de Dunsmuir et Robinson dans **[9(1)]** consacrés au domaine temporel et ceux de Sheïnok **[25]** et Bloomfield **[2]** consacrés au domaine spectral; quant à l'aspect paramétrique, il a diversement intéressé, dès1979, des auteurs comme Jones **[12(3)]**, Dunsmuir et Robinson **[9(1 et 2)]**, Sakaï, Soeda et Tokumaru **[23]** et Tan **[26]**. Dans ces articles on ne trouve pas, notamment quant à l'aspect non paramétrique, de méthodes d'estimation unifiées ou élaborées dans un cadre général d'hypothèses; les estimateurs proposés par exemple dans le domaine spectral sont des estimateurs ad-hoc pour les modèles particuliers étudiés.

Dans cette thèse, nous tentons de mener une approche unifiée du problème général d'estimation dans les séries temporelles modulées en amplitude, notamment dans son aspect non paramétrique tant dans le domaine spectral que temporel.

Commençons par présenter succintement l'approche que nous utilisons. Elle consiste à attribuer les données manquantes à l'effet d'un mécanisme de caractère aléatoire ou déterministe et à le traduire par un processus $A = \{A(t), t\in\mathbb{Z}\}$ ou une suite numérique réelle $A = (A(t))_{t\in\mathbb{Z}}$: A(j) de valeur zéro si X(t) est manquant dans l'observation, et de valeur un sinon. Ce faisant, nous sommes amenés à introduire le processus modulé en amplitude $Y = \{A(t)X(t), t\in\mathbb{Z}\}$, complètement observé. Nous pouvons aborder notre problème comme celui de l'estimation concernant un processus stationnaire à partir de sa version modulée en amplitude. Notons que s'il relève de la théorie classique, il n'évolue plus nécessairement dans un cadre de processus stationnaires.

Pour répondre aux exigences d'une approche unifiée à notre problème, nous commençons par généraliser le cadre précédent en introduisant les processus et les suites asymptotiquement stationnaires où nous situerons nos processus modulés en amplitude. D'une part nous examinons leurs propriétés de type ergodique en définissant la notion de processus ergodique au k-ème degré; celle-ci est étudiée pour $k \leq 2$ en vue de l'estimation non paramétrique consistante des caractéristiques du second ordre d'un processus stationnaire. D'autre part nous envisageons l'analyse harmonique de tels processus (ou suites) asymptotiquement stationnaires en leur associant fonctions de covariance et de densité spectrale asymptotiques. Ayant défini le cadre de travail et munis des outils fondamentaux, nous sommes alors à même d'étudier le problème d'estimation des fonctions de covariance et de densité spectrale d'un processus stationnaire basé sur une observation avec données manquantes.

Le premier problème a été abordé sous l'hypothèse unique très générale que le processus ou la suite de modulation d'amplitude est asymptotiquement stationnaire. Deux estimateurs ont été étudiés; leur consistance découle des propriétés ergodiques au 2-ième degré du processus modulé en amplitude cité plus haut. Nous avons aussi obtenu une expression analytique des variances et covariances asymptotiques de l'un de ces estimateurs.

En ce qui concerne le second problème, nous proposons une méthode générale analogue, à une modification près du périodogramme, à celle dite indirecte en analyse spectrale classique. Nous définissons cette modification à partir de l'un des estimateurs de la fonction de covariance introduits précédemment et nous montrons que l'estimateur $\hat{\varphi}_X$ de la densité spectrale obtenu généralise tous ceux déjà proposés par différents auteurs (voir [2] [25] [17(4)]). Ce dernier est exploré systématiquement du point de vue biais et variance asymptotiques. Partant d'une expression de notre estimateur à l'aide d'un estimateur de la fonction de densité spectrale asymptotique du processus modulé en amplitude associé (complètement observé), nous avons pu en évaluer les covariances asymptotiques dans le cas d'une modulation aléatoire et généraliser les résultats qui avaient été obtenus dans [2] et [25]. Toutefois, dans le cas où l'observation est modulée par une suite déterministe (numérique), nous n'avons pas pu obtenir un résultat analogue. Nous obtenons, sous des hypothèses très larges, une formule montrant que le biais asymptotique n'est pas affecté par la modulation choisie.

Par contre, la variance de l'estimateur est affectée par l'introduction de la modulation d'amplitude : on a pu montrer, comme on peut s'y attendre, que celle-ci est toujours plus grande que celle correspondant à la situation où le processus est complètement observé. Ceci est également vrai en ce qui concerne l'estimateur de la fonction de covariance utilisé.

L'attention que nous avons portée à l'aspect paramétrique de notre problème est surtout d'ordre bibliographique. On distingue deux types de méthodes d'estimation de paramètres d'un modèle paramétrique : le premier comprend les méthodes basées sur le périodogramme modifié, dont celles basées sur les équations de Yule-Walker dans le cas du processus autoregressif; le deuxième est concerné par les méthodes qui sont apparentées à celles du maximum de vraisemblance. Nous décrivons ces méthodes et leurs motivations et présentons les résultats principaux concernant la consistance et/ou la normalité asymptotique des estimateurs. Nous discutons quelques aspects calculatoires, notamment le calcul de la fonction de vraisemblance.

Nous avons organisé ce travail en quatre chapitres. Le premier chapitre concerne l'élaboration du cadre de travail. Notre approche du problème est décrite dans la partie A du deuxième chapitre, sa partie B étant consacrée à l'estimation de la fonction de covariance. L'estimation de la fonction de densité spectrale fait l'objet du chapitre III. Au chapitre IV, nous avons présenté des méthodes d'estimation de modèles paramétriques.

Notations et Système de références.

Notations.

Dans tout ce qui suit, $\mathfrak{P}$ est l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ et $\mathfrak{V}$ est l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \beta_{\mathbb{R}})$.

On désignera fréquemment par U le processus $\{U(t), t \in \mathbb{Z}\}$ défini sur $\mathfrak{P}$ et à valeurs dans $\mathfrak{V}$.

Si χ est un vecteur ou une matrice, on note ${}^t\chi$ le vecteur ou la matrice transposé(e) de χ.

Système de références.

Si dans un chapitre donné, on veut se référer à un paragraphe ou un énoncé situé dans un autre chapitre, on fera précéder le numéro affecté à ce paragraphe ou à cet énoncé par le chiffre romain du chapitre dans lequel il se trouve.

CHAPITRE I.

NOTIONS FONDAMENTALES.

1. Processus stationnaires. Processus et suites asymptotiquement stationnaires.

Après un rappel de la définition et des propriétés générales d'un processus stationnaire au n-ième ordre, on introduit ici la notion plus générale de processus asymptotiquement stationnaire au n-ième ordre et la notion de suite numérique asymptotiquement stationnaire au n-ième ordre.

1.1 : Processus stationnaires.

1.1.1: Définitions et propriétés générales.

Définition 1 :

Un processus X est dit stationnaire (ou encore, strictement stationnaire) si, pour tout ensemble fini d'instants

$$\{t_1, \dots, t_k\}$$

la loi conjointe du vecteur

$$'(X(t+t_1), \dots, X(t+t_k))$$

ne dépend pas de t.

Définition 2 :

Un processus X, admettant des moments d'ordre n, $n \geq 2$, est dit stationnaire au n-ième ordre si $\mathbb{E}\{X(t)\}$ ne dépend pas de t et si, de plus, pour tout j, j = 1, 2, ... , n-1, la quantité

$$\mathbb{E}\{X(t)X(t+t_1) \dots X(t+t_j)\}$$

ne dépend pas de t.

Pour les processus stationnaires au 2-ième ordre, la constante $\mathbb{E}\{X(t)\}$ - notée μ_X - est appelée "moyenne du processus X".

La fonction

$$\gamma_X : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

$$l \mapsto \gamma_X(l) = \mathbb{E}\{(X(t) - \mu_X)(X(t+l) - \mu_X)\}$$

est appelée "fonction de covariance du processus X"; celle-ci est paire puisque X est ici un processus réel.

Pour un processus stationnaire d'ordre n > 2, le moment d'ordre n :

$$\mathbb{E}\{X(t)X(t+t_1) \ldots X(t+t_{n-1})\},\ t, t_1, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{Z},$$

indépendant de t, est noté

$$\mathcal{M}_X^n(t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

Tout processus stationnaire admettant des moments d'ordre n est stationnaire au n-ième ordre. Comme les moments d'ordre 2 d'un processus gaussien définissent complètement la loi de ce processus, tout processus gaussien stationnaire au 2-ième ordre est stationnaire.

I.1.2. Cumulants d'un processus stationnaire au n-ième ordre.

Si $\mathrm{Cum}\{X(t_1),X(t_2), \ldots ,X(t_n)\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, désigne le cumulant des variables aléatoires $X(t_1)$, $X(t_2)$, … , $X(t_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, du processus X, et si $\mathcal{P}(n)$ désigne l'ensemble des partitions P de $\{1,2, \ldots , n\}$ en les parties P_1, P_2 …, P_m, $m \in \mathbb{N}^*$ et $m \leq n$, la formule

$$\mathbb{E}\{X(t_1)X(t_2)\ldots X(t_n)\} =$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}(n)} \mathrm{Cum}\{X(t_j), j \in P_1\}\mathrm{Cum}\{X(t_j), j \in P_2\} \ldots \mathrm{Cum}\{X(t_j), j \in P_m\}$$

(cf. par exemple **[18]**, p. 65), permet de montrer que si X est un processus stationnaire au n-ième ordre, alors $\mathrm{Cum}\{X(t),X(t+t_1), \ldots ,X(t+t_{n-1})\}$ est indépendant de t. On donne la

Définition 3:

On appelle fonction de cumulants d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$, d'un processus X stationnaire au n-ième ordre et on note $\mathbf{Q}_X^n(.,\ldots,.)$, la fonction

$$\mathbb{Z}^{n-1} \to \mathbb{R}$$

$$(t_1, \ldots ,t_{n-1}) \mapsto \mathbf{Q}_X^n(t_1, \ldots ,t_{n-1}) = \mathrm{Cum}\{X(t), X(t+t_1), \ldots , X(t+t_{n-1})\}$$

$Q_X^n(t_1, \dots, t_{n-1})$ est appelé "Cumulant d'ordre n en $(t_1, \dots, t_{n-1})$ de X".

On a en particulier le

Lemme 1:

Si X est un processus stationnaire au 4-ième ordre, alors avec les notations précédentes :

$\forall\ (q,r,s) \in \mathbb{Z}^3$

(i) $$Q_X^3(q,r) = \mathcal{M}_X^3(q,r) - \mu_X(\gamma_X(q) + \gamma_X(r) + \gamma_X(q-r) - \mu_X^2)$$

(ii) $$\begin{aligned} Q_X^4(q,r,s) = \mathcal{M}_X^4(q,r,s) & \\ & -\mu_X(Q_X^3(q,r) + Q_X^3(q,s) + Q_X^3(r,s) + Q_X^3(r-q,s-q)) \\ & - (\gamma_X(q)\gamma_X(r-s) + \gamma_X(r)\gamma_X(q-s) + \gamma_X(s) + \gamma_X(q-r)) \\ & - \mu_X^2(\gamma_X(r-s) + \gamma_X(r) + \gamma_X(q)) - \mu_X^4 \end{aligned}$$

Si, en plus des hypothèses du lemme 1, X est <u>centré</u> (i.e. $\mu_X = 0$), (ii) devient

(ii') $$Q_X^4(q,r,s) = \mathcal{M}_X^4(q,r,s) - Q_X(q,r,s),$$

où

$$Q_X(q,r,s) = \gamma_X(q)\gamma_X(r-s) + \gamma_X(r)\gamma_X(q-s) + \gamma_X(s)\gamma_X(q-r).$$

On sait que si X est <u>gaussien</u>, alors :

$$Q_X^4(q,r,s) = 0.$$

1.2. <u>Processus asymtotiquement stationnaires.</u> <u>Suites asymptotiquement stationnaires.</u>

Définition 4:

Un processus X admettant des moments d'ordre $n \geq 2$ est dit asymptotiquement stationnaire au n-ième ordre (et on écrira AS au n-ième ordre) si

$$\lim_N N^{-1}\sum_{t=1,N} \mathbb{E}\{X(t)\}$$

existe, et si de plus

$$\lim_N N^{-1}\sum_{t=1,N} \mathbb{E}\{X(t)X(t+t_1)\ldots X(t+t_j)\}$$

existe pour tout j, j=1, 2, ... , n-1 et $t_1, \ldots, t_j \in \mathbb{Z}$.

Pour un tel processus, on note $\tilde{\mu}_X$ et $v_X(t_1, \ldots, t_j)$, respectivement, les limites précédentes.

Définition 5:

Une suite numérique réelle $(A(t))_{t\in\mathbb{Z}}$ est dite asymptotiquement stationnaire au n-ième ordre (on écrira aussi AS au n-ième ordre) si

$$\lim_N N^{-1}\sum_{t=1,N} A(t)A(t+t_1)\ldots A(t+t_{n-1})$$

existe pour tout $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$.

On note aussi $v_A(t_1, \ldots, t_{n-1})$ la limite précédente.

Remarque 1:

Tout processus X stationnaire au n-ième ordre, n ≥ 2, est AS au n-ième ordre. Si n = 2, alors :

$$\tilde{\mu}_X = \lim_N N^{-1}\sum_{t=1,N} \mathbb{E}\{X(t)\} = \mathbb{E}\{X(t)\} = \mu_X$$

et $\forall l \in \mathbb{Z}$:

$$v_X(l) = \lim_N N^{-1}\sum_{t=1,N} \mathbb{E}\{X(t)X(t+l)\} = (\gamma_X(l) + \mu_X{}^2).$$

2. Ergodicité de processus.

Fondamentale en statistique dans la mesure où elle concerne des propriétés de convergence du type "lois des grands nombres", la notion d'ergodicité de processus est surtout connue au sens de la définition 6; on introduit et étudie la notion plus générale d'ergodicité au k-ième degré (terminologie due à Mr PHAM DINH Tuan).

2.1. Processus ergodiques au k-ième degré : Définitions.

***Définition 6*:**

1°) Un processus X est dit ergodique au 1er degré en moyenne quadratique (resp. presque sûrement) si la quantité

$$N^{-1}\sum_{t=1,N} X(t)$$

tend vers une constante en moyenne quadratique (resp. presque sûrement) quand N tend vers l'infini.

2°) Le processus X est dit ergodique au k-ième dégré, $k \geq 2$, en moyenne quadratique (resp. presque sûrement) s'il est ergodique au 1er degré en moyenne quadratique (resp. presque sûrement) et si les quantités

$$N^{-1}\sum_{t=1,N} X(t)X(t+u_1) \ldots X(t+u_j), \quad u_1, \ldots, u_j \in \mathbb{Z}$$

tendent en moyenne quadratique (resp. presque sûrement) vers des constantes quand N tend vers l'infini, quel que soit j, $j = 1, 2, \ldots, k-1$.

Pour abréger, on écrira par la suite, pour tout $j \geq 1$ "mq(resp. ps)-ergodique au j-ième degré" pour "ergodique au j-ième degré en moyenne quadratique (resp. presque sûrement)".

***Remarque 2*:**

Si X est mq-ergodique au k-ième degré et s'il admet des moments d'ordre k, alors les limites des moyennes temporelles des produits croisés (décalés) précédents pour j, $j = 1, \ldots, k-1$, sont les limites des moyennes temporelles des moments correspondantes $v_X(u_1, \ldots, u_j)$, $j = 1, \ldots, k-1$.

Si X est ps-ergodique au k-ième degré, il n'y a pas nécessairement convergence des moyennes temporelles des produits croisés de ce processus vers les limites des moyennes temporelles des moments correspondantes; mais cela sera vrai sous des conditions assez générales que l'on dégagera au paragraphe suivant, en proposition 2.

2.2. Ergodicité au 1er degré de processus.

On suppose ici que X est un processus admettant des moments d'ordre 2, et on pose :

$$\Gamma_X(s,t) = \mathrm{Cov}\{X(s), X(t)\}$$

Théorème 1 :

1°) Supposons que le processus X est tel que

$$\lim_N N^{-1}\sum_{t=1,N} \mathbb{E}\{X(t)\} = \tilde{\mu}_X$$

existe. Alors X est mq-ergodique au 1^{er} degré si

$$t^{-1}\sum_{s=1,t} \Gamma_X(s,t) \underset{t\infty}{\rightarrow} 0.$$

2°) Réciproquement, si les moments d'ordre 2 du processus X sont <u>bornés</u> et s'il est mq-ergodique au 1^{er} degré, alors :

$$t^{-1}\sum_{s=1,t} \Gamma_X(s,t) \underset{t\infty}{\rightarrow} 0.$$

Démonstation :

<u>1°)</u> Elle est basée sur le

Lemme 2 :

Si Z est un processus admettant des moments d'ordre 2, alors

$$\sigma^2\{N^{-1}\sum_{t=1,N} Z(t)\} = 2N^{-2}\sum_{t=1,N} \sum_{s=1,t} \Gamma_Z(s,t)$$
$$- N^{-2}\sum_{t=1,N} \sigma^2\{Z(t)\}.$$

Ce dernier permet d'obtenir l'inégalité

$$\sigma^2\{N^{-1}\sum_{t=1,N} X(s)\} + N^{-2}\sum_{t=1,N} \sigma^2\{X(s)\} \leq$$
$$2N^{-1}\sum_{t=1,N} |t^{-1}\sum_{s=1,t} \Gamma_X(s,t)|.$$

Puisque par hypothèse :

$$t^{-1}\sum_{s=1,t} \Gamma_X(s,t) \underset{t\infty}{\rightarrow} 0,$$

alors, le deuxième membre de l'inégalité tend vers zéro quand N tend vers l'infini : ce qui entraîne

$$\sigma^2\{N^{-1} \Sigma_{s=1,N} X(s)\} \underset{N\infty}{\to} 0.$$

Il reste à remarquer que par hypothèse $\mathbb{E}\{N^{-1}\Sigma_{s=1,N} X(s)\}$ converge vers une constante quand N tend vers l'infini.

<u>2°</u>) L'inégalité de Shwarz donne :

$$|t^{-1}\Sigma_{s=1,t}\, \Gamma_X(s,t)| \leq \sigma\{t^{-1}\Sigma_{s=1,t}\, X(s)\}\, \sigma\{X(t)\},$$

$\sigma\{X(t)\}$ est borné puisque les moments d'ordre 2 de X sont bornés; de plus

$$\sigma\{t^{-1}\Sigma_{s=1,t}\, X(s)\} \underset{t\infty}{\to} 0$$

du fait que X est mq-ergodique au 1er degré. Donc, le deuxième membre de l'inégalité précédente tend vers zéro quand t tend vers l'infini. Il s'ensuit que :

$$t^{-1}\Sigma_{s=1,t}\, \Gamma_X(s,t) \underset{t\infty}{\to} 0;$$

cqfd.

<u>Preuve du lemme 2</u>.

Puisque

$$\sigma^2\{N^{-1}\Sigma_{t=1,N} Z(t)\} = (1/N^2)\Sigma_{t=1,N}\, \Sigma_{s=1,N}\, \Gamma_Z(s,t),$$

on a :

$$\sigma^2\{N^{-1}\Sigma_{t=1,n}\, Z(t)\} = (1/N^2)\Sigma_{t=1,N}\, \Sigma_{s=1,t}\, \Gamma_Z(s,t)$$

$$+ (1/N^2)\Sigma_{t=1,N}\, \Sigma_{s=t+1,N}\, \Gamma_Z(s,t).$$

Comme

$$\Gamma_Z(s,t) = \Gamma_Z(t,s)$$

pour tout $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$\sum_{s=t'+1,N} \Gamma_Z(s,t') = \sum_{t=s'+1,N} \Gamma_Z(s',t),$$

pour tout $(s',t') \in \{(x,x),\ x \in \{1, \dots ,N\}^2\}$; donc :

$$\sum_{t=1,N} \sum_{s=t+1,N} \Gamma_Z(s,t) = \sum_{s=1,N} \sum_{t=s+1,N} \Gamma_Z(s,t).$$

Le résultat découle alors du fait que

$$\sum_{t=1,N} \sum_{s=t+1,N} \Gamma_Z(s,t) = \sum_{t=1,N} \sum_{s=1,t} \Gamma_Z(s,t) - \sum_{t=1,N} \Gamma_Z(t,t).$$

□

Théorème 2 : ("a.s. stability theorem", de LOEVE - cf. **[14]**, p.154).

Si le processus X est centré, et vérifie

a) il existe une constante $K > 0$, telle que

$$\Gamma_Z(t,t) \leq K$$

b) il existe deux constantes $K' > 0$ et $\alpha > 0$, telles que

$$n^{-2} \sum_{s=1,n} \sum_{t=1,n} \Gamma_X(s,t) \leq K'/n^{\alpha}$$

pour n suffisamment grand ; alors, X est ps-ergodique au 1^{er} degré et

$$n^{-1} \sum_{t=1,n} X(t) \underset{p.s}{\rightarrow} 0,$$

quand n tend vers l'infini.

2.3. Ergodicité au 2-ième degré de processus :

Pour un processus X admettant des moments d'ordre 1, on note $\overline{X}$ le processus centré défini par :

$$\overline{X}(t) = X(t) - \mathbb{E}\{X(t)\},\ \forall t \in \mathbb{Z}.$$

S'il admet des moments d'ordre 2, on introduit ici, pour tout $l \in \mathbb{Z}$, le processus X^l défini par

$$X^l(t) = X(t)X(t+l), \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

et le processus centré $\bar{X}^l$ défini par

$$\bar{X}^l(t) = X^l(t) - \mathbb{E}\{X(t)X(t+l)\}, \ \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 1 :

Soit X un processus AS au 2-ième ordre, admettant des moments d'ordre 4. S'il vérifie les conditions

(i) $$t^{-1}\Sigma_{s=1,t}\, \Gamma_X(s,t) \underset{t\infty}{\to} 0$$

(ii) $$(\forall l \in \mathbb{Z})\,(t^{-1}\Sigma_{s=1,t}\, \Gamma_{X^l}(s,t)) \underset{t\infty}{\to} 0$$

alors le processus X est mq-ergodique au 2-ième degré.

Réciproquement, si X est un processus admettant des moments d'ordre 4 bornés et s'il est mq-ergodique au 2-ième degré, alors les assertions (i) et (ii) précédentes sont vraies.

Démonstation :

Le processus X étant AS au 2-ième ordre, alors $\tilde{\mu}_{X^l}$ existe pour tout $l \in \mathbb{Z}$ ($\tilde{\mu}_{X^l}$ désignant la quantité $\lim_n n^{-1}\Sigma_{t=1,n}\, \mathbb{E}\{X^l(t)\}$ conformément à nos notations); et puisque (ii) a lieu, X^l est - pour tout $l \in \mathbb{Z}$ - mq-ergodique au 1er degré d'aprés le théorème 1-1°).

Par ailleurs, X est mq-ergodique au 1er degré en vertu du même théorème parce que $\tilde{\mu}_X$ existe et que (i) a lieu. Pour montrer la réciproque, il suffit d'appliquer le théorème 1-2°) d'abord au processus X, ensuite au processus X^l pour tout $l \in \mathbb{Z}$, ce dernier possédant des moments d'ordre 2 bornés. □

Proposition 2 :

Soit X un processus AS au 2-ième ordre, admettant des moments d'ordre 4 bornés.

S'il existe des constantes strictement positives K, K', α et α' telles que, pour t suffisament grand, on ait :

(i) $$t^{-1}\Sigma_{s=1,t}\, \Gamma_X(s,t) \leqslant K/t^{\alpha}$$

(ii) $\quad (\forall\ l\in\mathbb{Z})\,(\,t^{-1}\sum_{s=1,t} \Gamma_X{}^{l}(s,t) \leq K'/t^{\alpha'})$

alors, le processus X est ps-ergodique au 2-ième degré, et de plus :

$$n^{-1}\sum_{t=1,n} X(t) \underset{p.s}{\rightarrow} \tilde{\mu}_X$$

et

$$n^{-1}\sum_{t=1,n} X(t)X(t+l) \underset{ps}{\rightarrow} v_X(l),\quad \forall\ l\in\mathbb{Z}$$

quand n tend vers l'infini.

---

démonstration :

On peut, sans perte de généralité, montrer la proposition pour $\alpha<1$. En effet, si (i) (ou(ii)) est vérifiée pour $\beta \geq 1$, alors elle le sera pour $\beta' < 1$, car pour tout $t \geq 1$, on a :

$$K/t^{\beta} \leq K/t^{\beta'}.$$

Soit donc $\alpha < 1$.

Montrons d'abord que X est ps-ergodique au 1er degré. En vertu de (i), on a l'inégalité $\mathfrak{I}_1$:

$$(\mathfrak{I}_1):\quad (2/n^2)\sum_{t=1,n} \sum_{s=1,t} \Gamma_X(s,t) \leq (2K/n^2)\sum_{t=1,n} t^{1-\alpha}$$

pour n suffisament grand. Le deuxième membre de $\mathfrak{I}_1$ est majoré par :

$$(2K/n^2) \int_0^{n+1} u^{1-\alpha}\,du = (2K/n^2)\,(2-\alpha)^{-1}\,[\,u^{2-\alpha}]_0^{n+1}$$

$$= (2K/n^2)\,(2-\alpha)^{-1}\,(n+1)^{2-\alpha}.$$

Pour n suffisament grand, il existe $C > 1$, tel que

$$\frac{(n+1)^2}{n^2}\ \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \leq C\,(1/n^{\alpha}).$$

Le deuxième membre de $\mathfrak{I}_1$ est donc majoré par $C(2K/2-\alpha)(1/n^{\alpha})$ pour n suffisament grand; et grâce au lemme 2, on obtient a fortiori l'inégalité $\mathfrak{I}_2$

$$(\mathfrak{I}_2): \quad (1/n^2)\Sigma_{t=1,n}\Sigma_{s=1,n}\ \Gamma_X(s,t) \leq 2KC/(2-\alpha)(1/n^\alpha).$$

Celle-ci entraîne grâce au théorème 2 que le processus $\bar{X}$ est ps-ergodique au 1^er^ degré, et que :

$$n^{-1}\Sigma_{t=1,n}\bar{X}(t) \underset{ps}{\to} 0.$$

Ensuite, puisque X est AS au 2-ième ordre, alors en particulier, $\tilde{\mu}_X$ existe et donc

$$n^{-1}\Sigma_{t=1,n}X(t) \underset{ps}{\to} \tilde{\mu}_X.$$

Il reste maintenant à montrer que la moyenne temporelle des produits croisés $n^{-1}\Sigma_{t=1,n}X(t)X(t+l)$ tend presque sûrement vers $v_X(l)$ quand n tend vers l'infini, quel que soit $l\in\mathbb{Z}$. Pour cela, il suffit de remarquer - en invoquant les mêmes arguments que précédemment pour $\bar{X}$ - que $\bar{X}^l$ est ps-ergodique au 1^er^ degré et que

$$n^{-1}\Sigma_{t=1,n}\bar{X}^l(t) \underset{p.s}{\to} 0$$

pour tout $l\in\mathbb{Z}$, en utilisant (ii) et le fait que $\Gamma_{X^l}(t,t)$ est borné pour tout $t\in\mathbb{Z}$, puisque X admet des moments d'ordre 4 bornés; ensuite, X étant AS au 2-ième ordre, $\tilde{\mu}_{X^l}$ existe pour tout $l\in\mathbb{Z}$. Et

$$\tilde{\mu}_{X^l} = v_X(l).$$

D'où le résultat. □

Il ressort de la proposition précédente que sous ses hypothèses, les limites des moyennes temporelles de produits croisés de ce processus - évoquées en Remarque 2 (cf. §2) - jusqu'à l'ordre 2, coïncident avec les limites des moyennes temporelles correspondantes des moments du processus, jusqu'à l'ordre 2.

Remarque 3: **Cas particulier des processus 0-1.**

Pour tout processus 0-1, on a

$$X(t)^n \equiv X(t), \quad \forall n \geq 1.$$

Donc, l'existence de la limite des moyennes temporelles des produits

croises (resp. des moyennes des moments) de k facteurs, $k \geq 2$, d'un processus 0-1 entraîne l'existence de la limite des moyennes temporelles des produits croisés (resp. des moyennes des moments) de j facteurs, $j < k$, de ce processus.
Ainsi les propositions 1 et 2 demeurent vraies sans la condition (i); et dans ce cas

$$\tilde{\mu}_X = v_X(0).$$

On indique ici que le même argument vaut pour une suite numérique $(A(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\{0,1\}$: l'existence de $\lim_N N^{-1}\sum_{t=1,N} A(t)A(t+l)$ pour tout $l\in\mathbb{Z}$, suffit pour assurer la stationnarité asymptotique au 2-ième ordre d'une telle suite.

2.4. Ergodicité de processus stationnaires.

Dans le cas où X est un processus stationnaire au 2-ième ordre, les théorèmes 1 et 2 permettent d'obtenir des résultats classiques d'ergodicité qu'on trouvera, par exemple, dans [18], p. 37. On les énonce dans la

Proposition 4 :

Supposons que X est un processus stationnaire au 2-ième ordre, centré. Alors :

1°) X est mq-ergodique au 1^{er} degré si et seulement si

$$t^{-1}\sum_{s=0,t-1}\gamma_X(s) \underset{t\infty}{\rightarrow} 0,$$

2°) s'il existe deux constantes K' et α, strictement positives, telles que :

$$t^{-1}\sum_{|s|<t}\gamma_X(s)(1-|s|/t) \leq K'/t^{\alpha}$$

pour t suffisamment grand, le processus X est ps-ergodique au 1^{er} degré.

On donne dans la proposition suivante des conditions suffisantes d'ergodicité au 2-ième degré d'un processus stationnaire au 4-ième ordre, basées sur les cumulants de ce processus; cette proposition généralise dans le cas d'un processus non centré, le résultat classique concernant un processus centré. Auparavant, on aura besoin d'un lemme technique :

Lemme 3 :

Soit X un processus stationnaire au 4-ième ordre, d'espérance mathématique μ_X. Pour tout $u,v,w \in \mathbb{Z}$:

$$\mathrm{Cov}\{X(t)X(t+u), X(t+w)X(t+w+v)\} = \xi_X(u,w,v+w),$$

où l'on a posé :

$$\xi_X(u,w,v+w) = A_1(u,w,v+w) + A_2(u,w,v+w) + A_3(w)$$

et, avec les notations introduites au paragraphe 1.1 :

$$A_1(u,w,v+w) = \mathbf{Q_X}^4(u,w,v+w)$$
$$+ \mu_X(\mathbf{Q_X}^3(u,w) + \mathbf{Q_X}^3(u,w+v) + \mathbf{Q_X}^3(w,w+v) + \mathbf{Q_X}^3(u-w,v)),$$

$$A_2(u,w,v+w) = \gamma_X(w)\gamma_X(w-u+v) + \gamma_X(w+v)\gamma_X(u-w),$$

$$A_3(w) = \mu_X^2\,\gamma_X(w).$$

Preuve :

La covariance précédente est égale à :

$$\mathcal{M}_\mathbf{X}^4(u,w,w+v) - (\gamma_X(u) + \mu_X^2)(\gamma_X(v) + \mu_X^2).$$

Le résultat découle alors de l'application de la formule du lemme1 calculant $\mathcal{M}_\mathbf{X}^4(u,w,w+v)$ en termes de cumulants, covariances et moyenne de X. □

Proposition 5 :

Soit X un processus stationnaire au 4-ième ordre, non nécessairement centré.
X est mq(resp. ps)-ergodique au 2-ième degré, si avec les notations introduites au paragraphe1.1, il vérifie pour tout $l \in \mathbb{Z}$, les conditions

$$mq_X(i): \qquad t^{-1} \sum_{w=0,t-1} \gamma_X^2(w) \underset{t\infty}{\rightarrow} 0$$

$$mq_X(ii): \; t^{-1}\Sigma_{w=0,t-1} \{Q_X^4(1,w,w+1) + \mu_X(Q_X^3(1,w) + Q_X^3(1,w+1) + Q_X^3(w,w+1) + Q_X^3(w-1,v))\} \underset{t\infty}{\to} 0$$

(resp.

$ps_X(i)$: il existe des constantes K et α, strictement positives, telles que pour t suffisamment grand, on ait :

$$t^{-1}\Sigma_{w=0,t-1} \gamma_X^2(w) \leqslant K/t^{\alpha}$$

$ps_X(ii)$: il existe des constantes K' et α', strictement positives, telles que pour t suffisamment grand, on ait :

$$t^{-1}\Sigma_{w=0,t-1} \{Q_X^4(1,w,w+1) + \mu_X(Q_X^3(1,w) + Q_X^3(1,w+1) + Q_X^3(w,w+1) + Q_X^3(w-1,v))\} \leqslant K'/t^{\alpha'}).$$

Démonstration :

Remarquant que

$$\Gamma_X 1\,(s,t) = \mathrm{Cov}\{X(s)X(s+t),\, X(s+(t-s))X(s+(t-s)+1\},$$

et posant w = t-s, le lemme 3 permet d'écrire, pour u = v = 1 :

$$t^{-1}\Sigma_{s=1,t}\, \Gamma_X 1\,(s,t) = A_1{}^1(t) + A_2{}^1(t) + A_3{}^1(t)$$

où

$$A_1{}^1(t) = t^{-1}\Sigma_{w=0,t-1}\, A_1\,(1,w,1+w)$$

$A_1(.,.,.)$ étant défini dans ce lemme,

$$A_2{}^1(t) = t^{-1}\Sigma_{w=0,t-1}\, (\gamma_X^2(w) + \gamma_X(w+1)\gamma_X(w-1))$$

et

$$A_3(t) = t^{-1}\Sigma_{w=0,t-1}\, (\mu_X^2\gamma_X(w)).$$

a) on établit d'abord que X est mq-ergodique au 2-ième degré; pour cela, il suffit de montrer que X est mq-ergodique au 1^er^ degré et que la condition (ii) de la proposition 1- i.e. la condition $\mathfrak{C}$ suivante - est réalisée :

$$(\mathfrak{C}) : \qquad (\forall l\in\mathbb{Z})\ (t^{-1}\Sigma_{s=1,t}\ \Gamma_X{}^l(s,t) \underset{t\infty}{\to} 0).$$

La mq-ergodicité de X au 1^er^ degré découle de la proposition 4.1°) parce que l'inégalité $\mathfrak{J}$

$$(\mathfrak{J}) : \qquad |n^{-1}\Sigma_{t=1,n}\ \gamma_X(t)| \leqslant \sqrt{n^{-1}\Sigma_{t=1,n}\ \gamma_X{}^2(t)}$$

entraîne

$$(1) \qquad t^{-1}\Sigma_{u=0,t-1}\ \gamma_X(u) \underset{t\infty}{\to} 0,$$

i.e. que mq_X (i) a lieu.

Pour montrer que la condition $\mathfrak{C}$ est réalisée, on constate d'abord que, grâce à (1), on a :

$$(2) \qquad (\forall l\in\mathbb{Z})\ (A_2{}^l(t) + A_3(t) \underset{t\infty}{\to} 0),$$

ensuite, il suffit de remarquer que la condition :

$$(\forall l\in\mathbb{Z})\ (A_1{}^l(t) \underset{t\infty}{\to} 0)$$

est l'hypothèse mq_X (ii).

b) pour établir que X est ps-ergodique au 2-ième degré, on constate d'abord que sous ps_X(i), l'inégalité $\mathfrak{J}$ donne :

$$(1') \qquad t^{-1}\Sigma_{u=0,t-1}\ \gamma_X(u) \leqslant \sqrt{k}\ /t^{\alpha/2}$$

pour t suffisamment grand. Donc :

$$(2') \qquad (\exists K'' > 0)\ ((\forall l\in\mathbb{Z})\ (A_2{}^l(t) + A_3(t)) \leqslant K''/t^{\alpha/2}),$$

pour t suffisamment grand.

(1') réalise la condition (i) de la proposition 2. ps_X(ii) et (2') en réalisent ensemble la condition (ii). X est donc ps-ergodique au 2-ième degré. □

Remarque 4: **Une autre approche en ergodicité pour des processus stationnaires.**

L'approche utilisée ici pour étudier la ps-ergodicité de processus est induite par le théorème 2 de Loève; elle suppose une certaine décroissance de la fonction $\Gamma(.,.)$ de ce processus.

On peut trouver une autre approche dans l'ouvrage de Doob (cf. **[7]**, chapter X), laquelle concerne la ps-ergodicité de processus strictement stationnaires : celle-ci est construite à partir d'un opérateur T mesurable conservant la probabilité, défini sur un espace probabilisé $(\chi,\mathfrak{F},\mathbf{P})$ et appelé opérateur de décalage (ou "shift" dans la littérature anglo-saxone). Elle aboutit à l'important théorème de Birkhoff (cf. **[7]**, Th. 2.1, p. 465, ou **[18]**, Th. 5, p. 34) qui trouve son utilité dans le cas où la sous-tribu $\mathfrak{I}$ de $\mathfrak{F}$ des évènements invariants par T est réduite aux événements de $\mathbf{P}$-probabilité 0 ou 1, c'est à dire, dans le cadre des processus stationnaires transitifs. Ici nous choisissons l'approche de Loève car nos processus ne sont ni stationnaires transitifs, ni même nécessairement stationnaires.

3. Aspect spectral des processus et suites asymptotiquement stationnaires au 2-ième ordre.

Le théorème de Bochner (cf. par exemple, [18], Th.1 p. 23), parce qu'il fournit une représentation d'une fonction de type défini positif à l'aide de la transformée de Fourier d'une mesure positive définie sur le tore, est à la base de l'aspect spectral des processus stationnaires au 2-ième ordre. En associant une fonction de type défini positif aux processus et aux suites AS au 2-ième ordre, on étend dans ce paragraphe cet aspect à de tels processus ou suites; on rappelle donc le

Théorème 3: (BOCHNER)

Soit une fonction

$$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}.$$

Les assertions (i) et (ii) suivantes sont équivalentes :

(i) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n)\ (\forall (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n)$

$$\left(\sum_{i,j} \varphi(t_i - t_j)\, c_i \bar{c}_j \geq 0\right)$$

(ii) il existe une mesure positive ν définie sur le tore $[-\pi,\pi] = \Pi$, vérifiant

$$\varphi(n) = \int_{\Pi} e^{i\lambda n}\, \nu(d\lambda).$$

ν est unique.

(i) signifie que φ est une fonction de type défini positif.

3.1. <u>Cas d'un processus AS au 2-ième ordre</u>.

lemme 4:

Soit X un processus AS au 2-ième ordre. La fonction $\tilde{\gamma}_X$ définie par :

$$\tilde{\gamma}_X : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$k \mapsto \tilde{\gamma}_X(k) = v_X(k) - \tilde{\mu}_X{}^2$$

est une fonction de type défini positif.

Preuve :

Soit $P \in \mathbb{N}^*$. Si $(l_1,\dots,l_p) \in \mathbb{Z}^p$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$, on doit établir que la quantité A

$$A = \sum_{j=1,p} \sum_{k=1,p} \tilde{\gamma}_X(l_j - l_k)\, \alpha_j \bar{\alpha}_k$$

est positive ou nulle. Or

$$A = A_1 - A_2$$

où :

$$A_1 = \sum_{j,k} \lim_n ((1/n) \sum_{t=1,n} \mathbb{E}\{X(t+l_j) X(t+l_k)\}\, \alpha_j \bar{\alpha}_k$$

$$A_2 = \sum_{j,k} (\lim_n ((1/n) \sum_{t=1,n} \mathbb{E}\{X(t)\})^2\, \alpha_j \bar{\alpha}_k .$$

On va donc montrer que

$$A_2 \leqslant A_1.$$

D'abord, on a :

$$A_1 = \lim_n (1/n) \sum_{t=1,n} \Sigma_{j,k} \alpha_j \bar{\alpha}_k \mathbb{E}\{X(t+l_j)X(t+l_k)\}$$

$$= \lim_n (1/n) \sum_{t=1,n} \mathbb{E}|\Sigma_j \alpha_j X(t+l_j)|^2 .$$

Ensuite :

(1) $$A_2 = |\Sigma_j \alpha_j|^2 |\lim_n (1/n) \sum_{t=1,n} \mathbb{E}\{X(t)\}|^2$$

$$= \lim_n |(1/n) \sum_{t=1,n} \mathbb{E}\{(\Sigma_j \alpha_j) X(t)\}|^2 .$$

X étant AS au 2-ième ordre, on a, pour tout $l_j \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_n (1/n) \sum_{t=1,n} \mathbb{E}\{X(t+l_j)\} = \lim_n (1/n) \sum_{t=1,n} \mathbb{E}\{X(t)\}.$$

On peut donc écrire :

$$\lim_n (1/n) \sum_{t=1,n} (\Sigma_j \alpha_j \mathbb{E}\{X(t+l_j)\}) = \lim_n (1/n) \sum_{t=1,n} (\Sigma_j \alpha_j \mathbb{E}\{X(t)\}).$$

D'après (1), on obtient l'égalité

$$A_2 = \lim_n |(1/n) \sum_{t=1,n} \mathbb{E}\{\Sigma_j \alpha_j X(t+l_j)\}|^2 .$$

Si l'on pose, pour tout t

$$\beta_t = \mathbb{E}\{\Sigma_j \alpha_j X(t+l_j)\},$$

alors, l'inégalité numérique

$$|(1/n) \sum_{t=1,n} \beta_t|^2 \leqslant (1/n) \sum_{t=1,n} |\beta_t|^2$$

entraîne l'inégalité

$$A_2 \leqslant \lim_n (1/n) \sum_{t=1,n} |\mathbb{E}\{\Sigma_j \alpha_j X(t+l_j)\}|^2 .$$

Appelons A_3 le deuxième membre de l'inégalité précédente : puisque

$$|\beta_t|^2 \leqslant \mathbb{E}|\Sigma_j \alpha_j X(t+l_j)|^2 ,$$

il vient

$$A_3 \leqslant \lim_n (1/n) \sum_{t=1} \mathbb{E}|\Sigma_j \alpha_j X(t+l_j)|^2 = A_1 .$$

On a donc montré

$$A_2 \leqslant A_3 \leqslant A_1 .$$

□

Ce lemme, grâce au théorème 3, permet maintenant d'énoncer

Proposition 6 et définitions:

Soit X un processus AS au 2-ième ordre. La fonction $\tilde{\gamma}_X$ associée à ce processus et définie au lemme précédent est appelée "fonction de covariance asymtotique" du processus X. Il existe une mesure positive - notée $\tilde{F}_X$ - définie sur le tore Π, vérifiant

B1 :
$$\tilde{\gamma}_X(k) = \int_\Pi e^{-i\lambda k}\, d\tilde{F}_X(\lambda), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Cette mesure $\tilde{F}_X$, uniquement associée au processus AS au 2-ième ordre X est appelée "mesure spectrale asymptotique" de X.
La fonction de densité de $\tilde{F}_X$ - notée $\tilde{f}_X$ - si elle existe est appelée "densité spectrale asymptotique" de X; et l'on a :

B2 :
$$\tilde{\gamma}_X(k) = \int_\Pi e^{-i\lambda k}\, \tilde{f}_X(\lambda)\, d\lambda, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

La suite $(\tilde{\gamma}_X(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier de la densité spectrale $\tilde{f}_X$ si elle existe.
Réciproquement, si $(\tilde{\gamma}_X(k))_k$ est une suite absolument sommable, alors le processus AS au 2-ième ordre X admet la densité spectrale asymptotique

$$\tilde{f}_X(\lambda) = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \tilde{\gamma}_X(h)\, e^{-i\lambda k}, \quad \lambda \in \Pi.$$

On note que dans le cas présent où X est un processus scalaire réel, $\tilde{f}_X$ est une fonction paire.

Remarques 5:

1°) Cette proposition généralise dans le cas d'un processus AS au 2-ième ordre le résultat classique concernant un processus stationnaire au 2-ième ordre : en effet, d'après la remarque 1, il est aisé de constater que $\tilde{\gamma}_X$ coïncide alors avec la fonction de covariance γ_X du processus stationnaire au 2-ième ordre X; par suite de l'unicité de $\tilde{F}_X$

dans la formule **B1**, $\tilde{F}_X$ coïncide avec la mesure spectrale du processus X. Il en est de même de $\tilde{f}_X$ qui, si elle existe, est identique à la densité spectrale de X.

Si X est stationnaire au 2-ième ordre, on notera F_X et f_X respectivement la mesure spectrale et la fonction de densité spectrale (si elle existe) de ce processus.

2°) X étant un processus AS au 2-ième ordre, si γ'_X désigne la fonction

$$\gamma'_X : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \gamma'_X(u) = \lim_n (1/n)\Sigma_{t=1,n} \Gamma_X(t, t+u),$$

il paraît naturel de prendre γ'_X comme un homologue asymptotique d'une fonction de covariance, par analogie au cas où X est stationnaire au 2-ième ordre. On a :

$$\gamma'_X(u) = \tilde{\gamma}_X(u) - \alpha_X(u), \ \forall u \in \mathbb{Z}$$

où

$$\alpha_X(u) = \lim_n (1/n)\Sigma_{t=1,n} \mathbb{E}\{X(t)\} \mathbb{E}\{X(t+u)\} - \tilde{\mu}_X^2$$

$$= \lim_n (1/n)\Sigma_{t=1,n} [\mathbb{E}\{X(t)\} - (1/n)\Sigma_{t=1,n} \mathbb{E}\{X(t)\}][\mathbb{E}\{X(t+u)\}$$

$$- (1/n)\Sigma_{t=1,n} \mathbb{E}\{X(t+1\}].$$

En général, $\alpha_X(u) \neq 0$ et donc $\gamma'_X \neq \tilde{\gamma}_X$, et la fonction γ'_X n'est pas nécessairement de type défini positif, contrairement à $\tilde{\gamma}_X$.

3.2. <u>Cas d'une suite AS au 2-ième ordre</u>.

Si $A = (A(t))_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite AS au 2-ième ordre, on peut définir la fonction $\tilde{\gamma}_A$ par :

$$\tilde{\gamma}_A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$k \mapsto \tilde{\gamma}_A(k) = v_A(k) - \tilde{\mu}_A^2$$

où $v_A(.)$ est comme dans la définition 5 et $\tilde{\mu}_A = \lim_n (1/n)\Sigma_{t=1,n} A(t)$.

$\tilde{\gamma}_A$ est comme la fonction $\tilde{\gamma}_X$ du lemme 4 une fonction de type défini positif. En procédant comme au paragraphe précédent, on peut associer à la suite A, grâce au théorème 3, une mesure positive unique $\tilde{F}_A$, vérifiant

B1' : $$\tilde{\gamma}_A(k) = \int_\Pi e^{i\lambda k}\, \tilde{F}_A(d\lambda), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Si $\tilde{F}_A$ admet une densité - qu'on notera $\tilde{f}_A$- par rapport à la mesure de Lebesgue, alors on a :

B2' : $$\tilde{\gamma}_A(k) = \int_\Pi e^{i\lambda k}\, \tilde{f}_A(\lambda)d\lambda, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Note sur un point de vocabulaire :

Un processus stationnaire au 2-ième ordre X, grâce à la formule

$$\gamma_X(k) = \int_\Pi e^{i\lambda k}\, F_X(d\lambda), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

admet une analyse dite "harmonique".

Si X est un processus AS au 2-ième ordre, ou bien si A est une suite AS au 2-ième ordre, la fonction $\tilde{\gamma}_X$, ou bien $\tilde{\gamma}_A$, n'a qu'une existence asymptotique. Grâce aux formules **B1** ou **B1'**, les processus ou suite AS au 2-ième ordre admettent - asymptotiquement - une analyse harmonique : Parzen dans **[17(4)]** dit de ces processus ou suite qu'ils admettent une "analyse harmonique généralisée".

4. Rappels concernant l'estimation non paramétrique des caractéristiques du 2-ième ordre d'un processus stationnaire au 2-ième ordre.

On se donne ici une série temporelle de longueur N

$$\{X(1), X(2), \dots, X(N)\},$$

réalisation du processus stationnaire au 2-ième ordre X. On présente l'estimateur courant de la fonction de covariance et ses propriétés ainsi que la méthode dite indirecte d'estimation de la fonction de densité spectrale.

4.1. Généralités

L'estimateur naturel de la fonction de covariance $\gamma_X(l)$, $l\in\mathbb{Z}$, est l'estimateur $C_X^N(l)$ défini par

$$C_X^N(l) = \begin{cases} (1/N)\sum_{t=1,N} X(t)X(t+|l|), \text{ si } |l| < N \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

On appelle cet estimateur "fonction de covariance empirique"; c'est une fonction de type défini positif.
$C_X^N(l)$ est un estimateur biaisé de $\gamma_X(l)$, de biais $(|l|/N)\gamma_X(l)$, donc asymptotiquement sans biais.

Un estimateur naturel de la densité spectrale f_X en $\lambda\in\Pi$, est le périodogramme $I_X^N(\lambda)$, défini par

$$I_X^N(\lambda) = (2\pi N)^{-1} \left| \sum_{t=1} e^{-i\lambda t} X(t) \right|^2, \quad \lambda\in\Pi.$$

I_X^N et C_X^N sont inverses l'un de l'autre par transformation de Fourier, en particulier on a la relation

$$I_X^N(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{u\in\mathbb{Z}} e^{-i\lambda u} C_X^N(u) \ , \quad \lambda\in\Pi.$$

$I_X^N(\lambda)$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $f_X(\lambda)$; si la suite $(\gamma_X(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est absolument sommable, on montre que

$$\mathbb{E}\{I_X^N(\lambda)\} \underset{N\infty}{\rightarrow} f_X(\lambda)$$

uniformément en λ; si $(n\gamma_X(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est absolument sommable, on montre que

$$\mathbb{E}\{I_X^N(\lambda) - f_X(\lambda)\} = (1/N)\, O(1).$$

4.2. Quelques propriétés de la fonction de covariance empirique C_X^N.

La consistence de l'estimateur $C_X^N(l)$, $l\in\mathbb{Z}$, dépend de l'ergodicité au 2-ième degré du processus X, générateur de la série temporelle donnée. La proposition 5 du paragraphe 2.4 fournit des conditions suffisantes de consistance en moyenne quadratique et presque sûre de cet estimateur. Notons que le

processus X étant ici supposé centré, les conditions mq(ii) et ps(ii) de cette proposition se simplifient en remplaçant μ_X par zéro. Concernant les covariances asymptotiques de $C_X^N(.)$, on donne l'analogue du théorème 3 dans [18], p. 67, par la

Proposition 7:

Soit X un processus stationnaire au 4-ième ordre centré, de fonction de covariance γ_X vérifiant

$$\sum_{w\in\mathbb{Z}} \gamma_X^2(w) < +\infty$$

et de fonction de cumulants d'ordre 4 Q_X^4 vérifiant

$$\sum_{w\in\mathbb{Z}} |Q_X^4(u, w, w+v)| < +\infty \ , \ u,v \in\mathbb{Z}.$$

Alors pour tout u,v $\in\mathbb{Z}$:

$$N \operatorname{Cov}\{C_X^N(u), C_X^N(v)\} \underset{N\infty}{\rightarrow} \sum_{w\in\mathbb{Z}} \{\gamma_X^2(w)+\gamma_X(w+v)\gamma_X(w-u)+Q_X^4(u,w,w+v)\}$$

Cette proposition indique que $\sigma^2\{C_X^N(u)\}$ est asymptotiquement de l'ordre (1/N) O(1).

4.3. Eléments d'analyse spectrale non paramétrique : la méthode indirecte.

Le périodogramme n'est pas un estimateur consistant de la densité spectrale f_X, même si X est mq-ergodique au 2-ième degré; mais néanmoins il joue un rôle fondamental en analyse spectrale des séries temporelles stationnaires; cette analyse est surtout concernée par les méthodes d'estimation consistante de f_X (cf. par exemple [10] [17(1 et 2)] [18] et [19]).

4.3.1. Présentation de l'estimateur $\hat{f}_X$ de f_X obtenu par la méthode indirecte.

La méthode indirecte (ou encore "méthode des noyaux") fournit à partir du périodogramme I_X^N un estimateur de $f_X(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$ - noté $\hat{f}_X(\lambda)$ - mq-consistant, de forme générale

F1 : $$\hat{f}_X(\lambda) = \int_\Pi K_N(\lambda - s)\, I_X^N(s)\, ds \equiv (K_N * I_X^N)(\lambda), \quad \lambda \in \Pi$$

où $K_N(.)$ est une certaine fonction de pondération.

Si $(k_N(u))_{u\in\mathbb{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier de $K_N(.)$, on obtient l'expression de l'estimateur précédent sous la forme équivalente suivante :

F2 $$\hat{f}_X(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{u\in\mathbb{Z}} k_N(u)\ C_X^N(u)\, e^{-i\lambda u}, \quad \lambda \in \Pi.$$

Les coefficients $k_N(.)$ sont appelés "fenêtres spectrales" de $\hat{f}_X$; <u>en général</u>, ils sont choisis de la forme

$$k_N(u) = k(u/M), \quad u \in \mathbb{Z}$$

(i.e. du type "scale parameter" selon l'expression de Priestley (cf. **[19]**, chapter 6)) où

1°) M est une fonction de N telle que

$$M = o(N)$$

et M tend vers l'infini avec N.

2°) k(.) est une fonction
   a) paire, bornée, dans L^2
   b) continue sauf peut-être en un nombre fini de points distincts de zéro.

On écrira quelquefois $k_N^M(u)$ à la place de $k_N(u)$ pour ce type de fenêtres.

4.3.2. <u>Variance et biais asymptotiques de</u> $\hat{f}_X$.

On dispose d'un résultat concernant la variance asymptotique de $\hat{f}_X(\lambda)$. **(cf. par exemple, [18], chap.** IV **ou bien [11],** Th. 9 p. 280). **Dans le cas présent où** X **est un processus scalaire réel, on le donne sous la forme du**

<u>Théorème 4</u>:

Supposons que X soit un processus stationnaire au 4-ième ordre centré, de fonction de covariance γ_X et de fonction de cumulants d'ordre 4 $\mathbf{Q_X}^4$ vérifiant respectivement

$$\sum_u |\gamma_X(u)| < +\infty ,$$

$$\sum_{u,v,w} |\mathbf{Q_X}^4(u,v,w)| < +\infty .$$

Soit la série temporelle

$$\{X(1), X(2), \ldots , X(N)\}$$

issue du processus X.

Considérons l'estimateur $\hat{f}_X(\lambda)$ de $f_X(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, obtenu par la méthode indirecte sous la forme **F2**.

Pour des fenêtres spectrales $k_N(.)$ telles que

$$k_N(u) = k(u/M), \quad u \in \mathbb{Z}$$

où $M = o(N)$ au voisinage de l'infini, et M tend vers l'infini avec N, et où de plus $k(.)$ est une fonction paire, bornée, de support compact, continue par morceaux alors :

$$\lim_N (N/M) \operatorname{Cov}\{\hat{f}_X(\lambda), \hat{f}_X(\lambda')\} = (\delta(\lambda-\lambda') + \delta(\lambda+\lambda')) \left(\int_{\mathbb{R}} k^2(\alpha)\, d\alpha\right) f_X^2(\lambda)$$

où

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \pmod{2\Pi} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Des conditions plus générales que celle du théorème 4, concernant le noyau K_N et entraînant le résultat du théorème 4 peuvent être trouvées dans **[19]**, p.450.

Concernant le biais de $\hat{f}_X$, on donne le théorème 7 dans **[18]**, sous la forme du

Théorème 5:

Supposons que $k(.)$ est une fonction bornée, vérifiant $k(0) = 1$, et que pour un $q > 0$, on ait :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - k(x)}{|x|^q} = k_q , \; k_q \neq 0$$

CHAPITRE II.

ESTIMATION DANS LES SERIES A DONNEES MANQUANTES ET ESTIMATION DANS LES SERIES MODULEES EN AMPLITUDE : L'ESTIMATION NON PARAMÈTRIQUE DE COVARIANCE.

PARTIE A

Le problème d'estimation dans les séries temporelles stationnaires avec données manquantes comme problème d'estimation dans les séries temporelles modulées en amplitude.

Si un processus X donne lieu à la série temporelle avec données manquantes, de longueur N, que l'on a écrite (voir l'introduction)

$$\{X(j),\ j = n_1, \dots, n_M\},$$

le problème d'estimation des caractéristiques de ce processus ne peut être étudié à partir de la série précédente qui - telle quelle - ne se prête à aucune analyse statistique. Parzen (**[17(4)]**) a proposé une approche qui permet

1°) de prendre en compte le problème des données manquantes dans cette série.

2°) de procéder ensuite - dans ce cadre - à l'étude du problème d'estimation.

On y considère la série donnée comme la série

$$\{X(1), \dots, X(N)\},$$

définie en des instants également espacés, et où les données sont manquantes selon un mode aléatoire ou bien déterministe. On introduit une représentation des données manquantes

- soit par un processus aléatoire $A = \{A(t),\ t\in\mathbb{Z}\}$, défini sur $\mathfrak{B}$, à valeurs dans $\{0,1\}$, si l'on a fait l'hypothèse que les données sont manquantes selon le mode aléatoire ["randomly missed" en anglais]; auquel cas, l'hypothèse de base - émise dans l'introduction - se traduit par l'indépendance des processus A et X.

- soit par une suite $A = (A(t))_{t\in\mathbb{Z}}$, à valeurs dans $\{0,1\}$, si l'on a fait l'hypothèse que les données sont manquantes selon le mode déterministe ["regularly missed" en anglais].

Dans tous les cas, A est tel(le) que :

$$A(t) = \begin{cases} 1, \text{ si } X(t) \text{ est observé} \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Considérons la série notée

$$\{Y(1), \ldots, Y(N)\}$$

où

$$Y(j) = \begin{cases} X(j), \text{ si } j = n_1, \ldots, n_M \\ 0, \text{ si } j \in \{1, \ldots, N\} \setminus \{n_1, \ldots, n_M\}. \end{cases}$$

C'est une série <u>complète</u>, réalisation de longueur N du processus $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{Z}\}$ défini par

$$Y(t) = A(t)X(t), \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Celle-ci contient toute l'information contenue dans la série d'origine, la valeur zéro étant attribuée aux rangs où y figuraient les données manquantes : c'est la série de travail à partir de laquelle on peut procéder à l'étude du problème d'estimation posé.

L'approche précédente fait l'hypothèse implicite que l'observation porte sur le couple (A,Y).

En particulier, on y suppose que la suite A est connue, ou bien que la structure du processus A est connue; pour ce dernier cas, on dispose d'une réalisation complète, de longueur N, dès que l'on est en présence d'une série temporelle avec données manquantes de longueur N.

Le processus Y précédent appartient à la classe des processus modulés en amplitude. Le processus (resp. la suite) A est appelé (resp. appelée) "processus (resp. suite) de modulation d'amplitude ". On écrira Y = AX pour signifier que Y est le processus d'étude X modulé en amplitude par le processus (ou la suite) A.

Si Y = AX, une réalisation de Y est une série modulée en amplitude, cette dernière - telle la série

$$\{Y(1), \ldots, Y(N)\}$$

précédente - sera plus précisemment appelée "version de X modulée en amplitude" pour signifier que X est le processus étudié.

Le problème d'estimation des caractéristiques du processus X, posé dans le cadre de cette approche apparaît comme un cas particulier d'un problème plus général d'estimation, à savoir, celui de l'estimation des caractéristiques d'un processus à partir d'une version modulée en amplitude de ce processus : on sera concerné dans ce chapitre et le suivant, par l'aspect non paramétrique de ce problème; au dernier chapitre, nous discuterons de son aspect paramétrique.

Pour ce faire, on se donne dorénavant un processus d'étude X, défini sur $\mathfrak{D}$ à valeurs dans $\mathcal{V} = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$, stationnaire au 2-ième ordre, centré.

On désigne par A

- soit un processus $A = \{A(t),\ t\in\mathbb{Z}\}$, défini sur $\mathfrak{D}$ à valeurs dans $\mathcal{V}$ indépendant de X et de structure connue,

- soit une suite numérique réelle $(A(t))_{t\in\mathbb{Z}}$.

En premier lieu on étudie, en partie B, le problème d'estimation non paramétrique de la fonction de covariance γ_X à partir d'une réalisation du processus Y = AX; celui de la fonction de densité spectrale f_X fera ensuite l'objet du chapitre III.

N.B :

Une approche distincte - par laquelle on ne sera pas concerné - a été aussi utilisée pour traîter le problème des données manquantes dans certaines séries (cf. par exemple **[8(1)] [15] [20]**). Elle relève d'un point de vue différent de celui qui prévaut pour l'approche précédente : une série avec données manquantes y est considérée comme un échantillonnage d'un processus en temps continu $X = \{X(t),\ t\in\mathbb{R}\}$ à des intervalles de temps inégaux.

PARTIE B

Estimation non paramétrique de covariance dans les séries temporelles modulées en amplitude.

1. Introduction.

L'estimation consistante non paramétrique de la fonction de covariance d'un processus stationnaire au 2-ième ordre à partir d'une version modulée en amplitude de ce processus a été abordée par Parzen dans **[17(4)]** qui a introduit l'estimateur $C'_X{}^N$ ci-dessous dans le cas d'une suite A AS au 2-ième ordre, puis aussi par Dunsmuir et Robinson dans **[9(1)]** qui ont considéré indifféremment une suite A AS au 2-ième ordre ou un processus A ps-ergodique au 2-ième degré.

A et X étant définis comme précédemment, notre problème consiste à proposer des estimateurs consistants de γ_X à partir de l'observation

$$\{Y(1), \dots, Y(N)\}$$

du processus Y = AX.

Il est à remarquer que ce dernier n'est pas en général un processus stationnaire au 2-ième ordre. On va exhiber des solutions sous l'hypothèse minimale que A est AS au 2-ième ordre : c'est une condition nécessaire et suffisante pour que le processus Y = AX soit AS au 2-ième ordre.

2. La méthode d'estimation.

Elle est basée sur la quantité empirique notée $C_Y{}^N(l)$ et définie pour tout $l \in \mathbb{Z}$ par

$$C_Y{}^N(l) = \begin{cases} (1/N)\sum_{t=1,\, N-|l|} Y(t)Y(t+|l|), \text{ si } |l| < N \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

Considérons d'abord le cas où A est un processus AS au 2-ième ordre; il en est alors de même de Y, et pour tout $l \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_N \mathbb{E}\{C_Y{}^N(l)\} = v_Y(l)$$

où on rappelle que :

$$v_Y(l) = \lim_N (1/N)\sum_{t=1,N} \mathbb{E}\{Y(t)Y(t+l)\}$$

comme dans la définition I-4.
Puisque Y est centré, on a :

$$v_Y(l) = \tilde{\gamma}_Y(l).$$

On a aussi

$$\tilde{\gamma}_Y(l) = \gamma_X(l)\,(\lim_N (1/N)\sum_{t=1,N-|l|} \mathbb{E}\{A(t)A(t+|l|)\}),$$

c'est à dire

(1) $$\tilde{\gamma}_Y(l) = \gamma_X(l)v_A(l).$$

Faisons maintenant l'hypothèse que le processus Y est mq-ergodique au 2-ième degré ou bien ps- ergodique au 2-ième degré, alors, pour tout $l\in\mathbb{Z}$:

(2) $$\tilde{\gamma}_Y(l) = \lim_N C_Y{}^N(l), \text{ mq (ou ps)}.$$

Comparant les égalités (2) et (1) précédentes, on obtient la propriété :

$$(\forall\, l\in\mathbb{Z})\ \ (C_Y{}^N(l) \underset{N\infty}{\to} \gamma_X(l)v_A(l), \text{ mq (ou ps)}).$$

Elle permet de proposer comme estimateur mq (ou ps)-consistant de $\gamma_X(l)$, pour tout $l\in\mathbb{Z}$ tel que $v_A(l) \neq 0$, l'estimateur noté $C'_X{}^N(l)$ et défini par

$$C'_X{}^N(l) = C_Y{}^N(l) \,/\, v_A(l).$$

Si on suppose <u>de plus</u> que A est un processus ps-ergodique au 2-ième degré, ayant donné lieu à la série temporelle

$$\{A(1), \ldots, A(N)\},$$

alors, désignant par $C_A{}^N(l)$ la quantité empirique définie par

$$C_A^N(l) = \begin{cases} (1/N)\sum_{t=1,\, N-|l|} A(t)A(t+|l|), \text{ si } |l| < N \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

l'estimateur $C''_X{}^N(l)$, défini pour tout $l \in \mathbb{Z}$ tel que $C_A^N(l) \neq 0$ par

$$C''_X{}^N(l) = C_Y^N(l) \,/\, C_A^N(l)$$

est un estimateur ps-consistant de $\gamma_X(l)$.

Considérons maintenant le cas où A est une suite AS au 2-ième ordre; si $v_A(l)$ désigne $\lim_{t=1,N} A(t)A(t+l)$ comme dans la définition I-5, et si Y est comme précédemment, la propriété

$$(\forall\, l \in \mathbb{Z}) \;\; (C_Y^N(l) \underset{N\infty}{\rightarrow} \gamma_X(l)v_A(l), \text{ mq (ou ps)})$$

demeure vraie. On peut alors proposer comme estimateur mq(ou ps)-consistants de $\gamma_X(l)$ les estimateurs $C'_X{}^N(l)$ et $C''_X{}^N(l)$ définis par

$$C'_X{}^N(l) = C_Y^N(l) \,/\, v_A(l), \text{ pourvu que } v_A(l) \neq 0$$

et

$$C''_X{}^N(l) = C_Y^N(l) / \, C_A^N(l), \text{ pourvu que } C_A^N(l) \neq 0,$$

$(C_A^N(.))_N$ désignant cette fois la suite numérique définie par

$$C_A^N(l) = \begin{cases} (1/N)\sum_{t=1,N-|l|} A(t)A(t+|l|), \text{ si } |l| < N \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque I :

L'existence de $C'_X{}^N$ et $C''_X{}^N$ comme estimateurs consistants de γ_X - outre qu'elle est due à la stationnarité asymptotique au 2-ième ordre du processus ou de la suite A - est indissolublement liée à l'ergodicité au 2-ième degré du processus Y = AX. Cette hypothèse est peu naturelle, une telle ergodicité étant obtenue par des conditions sur A et X : on étudie des conditions d'ergodicité au 2-ième degré de processus modulés en amplitude au paragraphe suivant.

On signale ici que disposer de telles conditions, c'est disposer aussi en C_Y^N d'une solution à un problème d'estimation plus général, à savoir celui de l'estimation consistante de la fonction de covariance asymptotique $\tilde{\gamma}_Y$ d'un processus Y modulé en amplitude.

3. Ergodicité au 2-ième degré des processus modulés en amplitude.

Grâce aux propositions I-1 et I-2, on exhibe ici des conditions d'ergodicité au 2-ième degré du processus modulé en amplitude Y = AX. En ce qui concerne la mq-ergodicité on donne un résultat bien plus général que celui impliqué par Parzen (cf. [17(3 et 4)]) qui a considéré un processus X gaussien modulé en amplitude par une suite périodique.
Auparavant, on aura besoin d'un lemme technique:

***Lemme I*:**

Soit $Z = \{Z(t),\ t\in\mathbb{Z}\}$ un processus défini sur $\mathfrak{D}$ à valeurs dans $\mathcal{V}$, admettant des moments d'ordre 2.

1°) Si $U = \{U(t),\ t\in\mathbb{Z}\}$ est un processus défini sur $\mathfrak{D}$ à valeurs dans $\mathcal{V}$, admettant des moments d'ordre 2 et indépendant de Z, alors :

$$\mathrm{Cov}\{U(s)Z(s),\ U(t)Z(t)\} = \Gamma_Z(s,t)\,\mathbb{E}\{U(s)U(t)\} + \Gamma_U(s,t)\,\mathbb{E}\{Z(s)\}\,\mathbb{E}\{Z(t)\}$$

2°) Si U désigne une suite numérique réelle $(U(t))_{t\in\mathbb{Z}}$, alors :

$$\mathrm{Cov}\{U(s)Z(s),\ U(t)Z(t)\} = U(s)U(t)\,\Gamma_Z(s,t).$$

***Corollaire I*:**

Soit $X = \{X(t),\ t\in\mathbb{Z}\}$ un processus centré, stationnaire au 4-ième ordre de fonction de covariance γ_X et de fonction de cumulants d'ordre 4 Q_X^4.
Posons:

$$\xi_X(u,t-s,v) = Q_X^4(u,t-s,t-s+v) + \gamma_X(t-s)\gamma_X(t-s+v-u)$$
$$+ \gamma_X(t-s+v)\gamma_X(t-s-u).$$

Considérons le processus modulé en amplitude Y=AX, et posons pour tout $s,t,u,v \in\mathbb{Z}$:

$$T(s,t,u,v) = \mathrm{Cov}\{Y(s)Y(s+u),\ Y(t)Y(t+v)\}.$$

Alors, pour tout $s,t,u,v \in\mathbb{Z}$, on a :

1°) $T(s,t,u,v) = \mathbb{E}\{A(s)A(s+u)A(t)A(t+v)\}\ \xi_X(u,t-s,v)$

$$+ \operatorname{Cov}\{A(s)A(s+u),\ A(t)A(t+v)\}\ \gamma_X(u)\gamma_X(v)$$

si A est un processus indépendant de X, admettant des moments d'ordre 4, et

2°) $T(s,t,u,v) = A(s)A(s+u)A(t)A(t+v)\ \xi_X(u,t-s,v)$

si A est une suite numérique.

Démonstration :

Posons, pour $j = u,v$:

$$U^j(s) = A(s)A(s+j)$$

et

$$Z^j(s) = X(s)X(s+j)\ .$$

On peut alors écrire :

$$T(s,t,u,v) = \operatorname{Cov}\{U^u(s)Z^u(s),\ U^v(t)Z^v(t)\}.$$

Si A est le processus du corollaire 1, en appliquant le lemme 1.1°) à $U^u(s)$, $Z^u(s)$, $U^v(t)$ et $Z^v(t)$, on obtient l'égalité (1) suivante :

(1) $$T(s,t,u,v) = \operatorname{Cov}\{Z^u(s),\ Z^v(t)\}\ \mathbb{E}\{U^u(s)U^v(t)\}$$
$$+ \operatorname{Cov}\{U^u(s),\ U^v(t)\}\ \mathbb{E}\{Z^u(s)\}\,\mathbb{E}\{Z^v(t)\}.$$

Appelons $T1(s,t,u,v)$ et $T2(s,t,u,v)$ les premier et deuxième termes respectivement, du deuxième membre de (1). On a :

$$T1(s,t,u,v) = \mathbb{E}\{A(s)A(s+u)A(t)A(t+v)\} + \operatorname{Cov}\{X(s)X(s+u),\ X(t)X(t+v)\}$$

et

$$T2(s,t,u,v) = \operatorname{Cov}\{A(s)A(s+u),\ A(t)A(t+v)\}\ \gamma_X(u)\gamma_X(v).$$

Pour montrer 1°), il suffit de remarquer que

$$\operatorname{Cov}\ \{X(s)X(s+u),\ X(t)X(t+v)\} = \xi_X(u,t-s,v),$$

où $\xi_X(u,w,v)$ est donnée par le lemme I-3 en posant $w = t-s$ et $\mu_X=0$.

Le même raisonnement vaut pour montrer 2°) si l'on a remarqué que, d'après le lemme 1.2°), $T(s,t,u,v)$ se réduit à un terme analogue à $T1(s,t,u,v)$. □

Au paragraphe 5.1 sont établies deux propositions générales d'ergodicité au 2-ième degré, formulées à partir des conditions mq (i) et mq (ii), et ps (i) et ps (ii) de la proposition I-5. Si X est centré, on notera $\underline{mq}_X$(ii) et $\underline{ps}_X$(ii) les conditions mq_X(ii) et ps_X(ii) sans les termes contenant μ_X (car celui-ci est nul). Ce sont les propositions 1 et 2 suivantes :

Proposition 1 :

Soit X un processus stationnaire au 4-ième ordre centré, de fonction de covariance γ_X et de fonction de cumulants d'ordre 4 $Q_X{}^4$ vérifiant les conditions mq_X(i) et $\underline{mq}_X$(ii).

Alors le processus Y = AX est mq-ergodique au 2-ième degré si A est :

1°) une suite $(A(t)_{t\in\mathbb{Z}}$, bornée, AS au 2-ième ordre,

ou

2°) un processus $\{A(t),\ t\in\mathbb{Z}\}$ défini sur $\mathfrak{D}$ à valeurs dans $\mathcal{V}$, admettant des moments d'ordre 4 bornés et tel que :

$$t^{-1} \sum_{s=1,\,t} \Gamma_A{}^1(s,t) \underset{t\infty}{\rightarrow} 0,$$

où l'on rappelle que $\Gamma_A{}^1(s,t)$ est défini comme au paragraphe I-2.3 par

$$\Gamma_A{}^1(s,t) = \mathrm{Cov}\{A(s)A(s+1),\ A(t)A(t+1)\}.$$

Proposition 2 :

Soit X un processus stationnaire au 4-ième ordre, centré, de fonctions de covariance γ_X et de cumulants d'ordre 4 $Q_X{}^4$ vérifiant les conditions ps_X(i) et $\underline{ps}_X$(ii).

Alors, le processus Y = AX est ps-ergodique au 2-ième degré si A est :

1°) une suite $(A(t)_{t\in\mathbb{Z}}$, bornée, AS au 2-ième ordre.

ou

2°) un processus $\{A(t),\ t\in\mathbb{Z}\}$ défini sur $\mathfrak{D}$ à valeurs dans $\mathcal{V}$, admettant des moments d'ordre 4 bornés et tel que :

$$(\exists\beta>0)(\exists K>0)(t^{-1}\sum_{s=1,t} |\Gamma_A|(s,t) < K/t^{\beta}),$$

pour t suffisamment grand.

Remarque 2:

Il n'est pas supposé dans la proposition 1. 2°) que A est un processus mq-ergodique au 2-ième degré ; si tel était le cas, puisque les moments d'ordre 4 de A sont bornés, la proposition I-1.2°) donnerait :

$$(1/t)\sum_{s=1,t} |\Gamma_A|(s,t) \underset{t\infty}{\rightarrow} 0$$

et

$$(1/t)\sum_{s=1,t} \Gamma_A(s,t) \underset{t\infty}{\rightarrow} 0.$$

Il est à remarquer que cette dernière condition n'est pas une hypothèse requise par la proposition 1.2°).

De même, une condition du type

$$(\exists\alpha>0)(\exists K>0)((1/t)\sum_{s=1,t} \Gamma_A(s,t) < (K/t^{\alpha})$$

(pour t suffisamment grand) et qui concerne la ps-ergodicité de A au 1er degré, n'est pas requise par la proposition 2.2°).

Dans le cas où A est un certain processus stationnaire, on obtient le

Corollaire 2:

Soit X un processus stationnaire au 4-ième ordre, centré de fonction de covariance γ_X et de fonction de cumulants d'ordre 4 $\mathbf{Q_X}^4$.

Soit A un processus stationnaire au 4-ième ordre, d'espérance $\mu_A \neq 0$, de fonction de cumulants d'ordre 4 $\mathbf{Q_A}^4$, de fonction de cumulants d'ordre 3 $\mathbf{Q_A}^3$ et de fonction de covariance γ_A.

1°) Supposons que X vérifie $mq_X(i)$ et $\underline{mq}_X(ii)$ et que A vérifie $mq_A(i)$ et $mq_A(ii)$; alors, A est mq-ergodique au 2-ième degré et le processus modulé en amplitude Y = AX est mq-ergodique au 2-ième degré.

2°) Supposons que X vérifie $ps_X(i)$ et $\underline{ps}_X(ii)$ et que A vérifie $ps_A(i)$

et $ps_A(ii)$; alors, A est ps-ergodique au 2-ième degré et le processus modulé en amplitude Y = AX est ps-ergodique au 2-ième degré.

Preuve :

L'ergodicité au 2-ième degré du processus A découle de la proposition I-5.

L'ergodicité au 2-ième degré de Y découle du fait que sous les hypothèses faites sur A, les conditions concernant A des propositions 1.2°) et 2.2°) sont vérifiées. □

On peut trouver d'autres types de conditions de ps-ergodicité au 2-ième degré de processus modulés en amplitude dûs à Dunsmuir et Robinson dans [9(1)]. Toutes supposent que le processus A est au moins ps-ergodique au 2-ième degré. On en cite deux dans la

Proposition 3 : (DUNSMUIR et ROBINSON)

Soient $A = \{A(t), t\in\mathbb{Z}\}$ et $X = \{X(t), t\in\mathbb{Z}\}$ deux processus indépendants, définis sur $\mathfrak{D}$ et à valeurs $\mathcal{V}$. Supposons X centré.
Sous l'une ou l'autre des conditions A1 et A2 suivantes :

(A1) : A est un processus strictement stationnaire et mélangeant, admettant des moments d'ordre 2.
X est un processus stationnaire et ps-ergodique au 1erdegré.

(A2) : X est un processus stationnaire au 2-ième ordre, admettant des moments d'ordre 4, vérifiant :

$$\sum_{u=0,\infty} \gamma_X^2(u) < +\infty$$

et

$$\sum_{s,t,u,v} (\mathcal{K}_X(s,t,u,v))^2 < +\infty$$

où $\mathcal{K}_X(s,t,u,v)$ désigne ici $\mathrm{Cum}\{X(s),X(t),X(u),X(v)\}$.
A est un processus ps-ergodique au 2-ième degré, admettant des moments d'ordre 4 <u>bornés</u>.

le processus Y = AX est ps-ergodique au 2-ième degré.

On note que sous A2, le processus A n'est pas nécessairement stationnaire au 4-ième ordre; une condition de mélangeance sur A - plus forte que la ps-ergodicité au 2-ième degré - est requise sous A1.

Commentaire :

En général, tout affaiblissement des hypothèses sur A nécessite un renforcement des hypothèses sur X pour assurer l'ergodicité au 2-ième degré du processus Y = AX.

Dans le cadre de l'application en vue de l'étude des séries temporelles avec données manquantes, les conditions les plus utiles semblent être celles qui nécessitent le moins de contraintes sur le processus A : elles permettent ainsi plus de souplesse dans le choix de la représentation des données manquantes dans la série.

4. Variance et covariances asymptotiques des estimateurs C_Y^N et $C'_X{}^N$.

4.1 : Les résultats :

On étudie ici le comportement asymptotique de $\mathrm{Cov}\{C_Y^N(u), C_Y^N(v)\}$ et, partant, de $\mathrm{Cov}\{C'_X{}^N(u), C'_X{}^N(v)\}$.

On a distingué le cas où A est une suite AS au 2-ième ordre en proposition 4, du cas où A est un processus AS au 2-ième ordre en proposition 5, propositions dont les démonstrations sont déplacées au paragraphe 5.2.

Dans ce qui suit, on rappelle que $v_A(.,.,.)$ et $v_A(.)$ sont définis dans la définition I-5 si A est une suite numérique et dans la définition I-4 si A est un processus.

Proposition 4 :

Soit X un processus stationnaire au 4-ième ordre, centré, vérifiant

$$\sum_{u\in\mathbb{Z}} \gamma_X^2(u) < +\infty$$

et

$$\sum_{w\in\mathbb{Z}} |Q_X^4(v,w,u+w)| < +\infty, \quad \forall u,v \in\mathbb{Z}.$$

Si A est une suite numérique AS au 4-ième ordre, bornée, alors :

1°) $$N\mathrm{Cov}\{C_Y^N(u), C_Y^N(v)\} \underset{N\infty}{\rightarrow} \sum_{w\in\mathbb{Z}} v_A(u,w,v+w)\, \xi_X(u,w,v+w)$$

pour tout $u,v \in\mathbb{Z}$

2°) $N\mathrm{Cov}\{C'_X{}^N(u), C'_X{}^N(v)\} \underset{N\infty}{\rightarrow} \sum_{w\in\mathbb{Z}}(v_A(u,w,v+w)/v_A(u)v_A(v))\xi_X(u,w,v+w)$

pour tous $u,v \in \mathbb{Z}$ tels que $v_A(u)v_A(v) \neq 0$.

On rappelle que $\xi_X(u,w,v+w)$ défini dans le lemme I-3, est ici donné par :

$$\xi_X(u,w,v+w) = \mathbf{Q_X}^4(u,w,v+w) + \gamma_X(w)\gamma_X(w+v-u) + \gamma_X(w+v)\gamma_X(w-u).$$

Proposition 5:

Soit X le processus de la proposition précédente. Soit A un processus stationnaire au 4-ième ordre, d'espérance mathématique μ_A, ayant des moments d'ordre 4 bornés. Supposons que les fonctions de covariance γ_A, de cumulants d'ordre 4 $\mathbf{Q_A}^4$ et de cumulants d'ordre 3 $\mathbf{Q_A}^3$ vérifient, respectivement :

(i) $$\sum_u \gamma_A(u) < +\infty$$

(ii) $$\sum_{w\in\mathbb{Z}} |\mathbf{Q_A}^4(v,w,u+w)| < +\infty, \ \forall u,v \in \mathbb{Z}$$

(iii) $$\sum_w |\mathbf{Q_A}^3(u,w) + \mathbf{Q_A}^3(u,w+v) + \mathbf{Q_A}^3(w,w+v) + \mathbf{Q_A}^3(u-w,w)| < +\infty, \ \forall u,v \in \mathbb{Z}$$

Alors :

1°) pour tous $u,v \in \mathbb{Z}$,

$$N\,\mathrm{Cov}\{C_Y{}^N(u), C_Y{}^N(v)\} \underset{N\infty}{\rightarrow} \sum_{w\in\mathbb{Z}} v_A(v,w,u+w)\,\xi_X(u,w,v+w) + (\gamma_X(u)\gamma_X(v))\sum_{w\in\mathbb{Z}} \xi_A(u,w,v+w)$$

2°) pour tous $u,v \in \mathbb{Z}$ tels que $v_A(u)v_A(v) \neq 0$,

$$N\,\mathrm{Cov}\{C'_X{}^N(u), C'_X{}^N(v)\} \underset{N\infty}{\rightarrow} (1/v_A(u)v_A(v))\sum_{w\in\mathbb{Z}}(v_A(v,w,u+w)\xi_X(u,w,v+w) + \gamma_X(u)\gamma_X(v)\xi_A(u,w,v+w))$$

où $\xi_X(u,w,v+w)$ est comme dans la proposition 4 et $\xi_A(u,w,v+w)$ est défini dans le lemme I-3 par :

$$\begin{aligned}\xi_A(u,w,v+w) = \mathbf{Q_A}^4(u,w,v+w) &+ \mu_A(\mathbf{Q_X}^3(u,w) + \mathbf{Q_X}^3(u,w+v) \\ &+ \mathbf{Q_A}^3(w,w+v) + \mathbf{Q_A}^3(u-w,w)) \\ &+ \gamma_A(w)\gamma_A(w+v-u) + \gamma_A(w+v)\gamma_A(w-u) \\ &+ \mu_A{}^2\, \gamma_A(w).\end{aligned}$$

On note que sous les hypothèses de la proposition 4, X est mq-ergodique au 2-ième degré. Le processus Y = AX est de même mq-ergodique au 2-ième degré, grâce, par exemple, à la proposition 1. Sous les hypothèses de la proposition 5, A est mq-ergodique au 2-ième degré, il vérifie en particulier $mq_A(i)$ et $mq_A(ii)$. Y est de même mq-ergodique au 2-ième degré en vertu de la proposition 1.1°). Ainsi, pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $C_Y{}^N(l)$ est un estimateur mq-consistant de $\tilde{\gamma}_Y(l)$ (resp. $\gamma_Y(l)$) sous les hypothèses de la proposition 4 (resp. 5), et $C'_X{}^N$ est, pour tout l tel que $v_A(l) \neq 0$, un estimateur mq-consistant de $\gamma_X(l)$.

4.2. <u>Efficacité comparée des estimateurs</u> $C'_X{}^N$ <u>et</u> $C_X{}^N$.

Lorsque $A \equiv 1$, la série modulée amplitude donnée correspond à une observation directe et complète du processus X, et dans ce cas, on a :

$$C'_X{}^N \equiv C_X{}^N$$

où $C_X{}^N$ est la fonction de covariance empirique, dont on rappelle que la proposition I-7 donne pour la variance asymptotique, la formule :

$$\lim_N N\,\sigma^2\{C_X{}^N\} = \sum_w \xi_X(u,w,u+w)$$

sous les mêmes hypothèses concernant X que dans les propositions 4 et 5. On s'intéresse ici à apprécier la qualité de l'estimation de γ_X par l'usage de $C'_X{}^N$ au lieu de $C_X{}^N$, qui correspond au cas idéal précédent où $A \equiv 1$.

Pour ce faire, on étudie sous les hypothèses des propositions 4 et 5, le signe de la quantité

$$\lim_N N\,\sigma^2\{C'_X{}^N(u)\} - \sum_w \xi_X(u,w,u+w).$$

Auparavant, on aura besoin des lemmes 2 et 2' suivants.

Lemme 2:

Les processus X et A étant comme dans la proposition 5, soient $f_Z^{(u,v)}$ et $f_U^{(u,v)}$, respectivement, les fonctions de densités spectrales croisées des processus bivariés $Z = {}'(X_u, X_v)$ et $U = {}'(A_u, A_v)$, où pour $j = u,v$:

$$X_j(t) = X(t)X(t+j)$$

et

$$A_j(t) = A(t)A(t+j).$$

Alors, la limite dans 2°) de la proposition 5 peut s'écrire

$$\sum_w \xi_X(u,w,v+w) + (2\pi/v_A(u)v_A(v))\Big[\int_\Pi f_U^{(u,v)}(\lambda)\, f_Z^{(u,v)}(\lambda)\,d\lambda + \gamma_X(u)\gamma_X(v)\, f_A^{(u,v)}(0)\Big].$$

Lemme 2':

Soient le processus X et la suite A comme dans la proposition 4. Alors, pour tout $u \in \mathbb{Z}$, la fonction Φ^u

$$\Phi^u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

$$w \mapsto \Phi^u(w) = v_A(u,w,w+u) - v_A^2(u)$$

est de type défini positif; si $\tilde{F}_A^{(u,u)}$ désigne la mesure associée à celle-ci en vertu du théorème de Bochner (cf. §I-3) et si $f_Z^{(u,v)}$ est comme dans le lemme 2, alors la limite dans 2°) de la proposition 4, dans le cas u=v, s'écrit

$$\sum_w \xi_X(u,w,u+w) + (2\pi/v_A^2(u))\int_\Pi f_Z^{(u,u)}(\lambda)\,\tilde{F}_A^{(u,u)}(d\lambda).$$

Preuve des lemmes 2 et 2' :

Posons :

$$\alpha(u,v) = \lim_N N\,\mathrm{Cov}\{C'_X{}^N(u), C'_X{}^N(v)\} - \sum_w \xi_X(u,w,v+w).$$

Considérons d'abord le cas où A est comme dans le lemme 2; en réécrivant :

$$v_A(u,w,v+w) = \mathrm{Cov}\{A(t)A(t+u),\ A(t+w)A(t+w+v)\} + v_A(u)v_A(v)\ ,$$

on obtient :

$$(1)\ \alpha(u,v) = (1/v_A(u)v_A(v))\sum_w \mathrm{Cov}\{A(t)A(t+u), A(t+w)A(t+w+v)\}\ \xi_X(u,w,w+v)$$

$$+\ (1/v_A(u)v_A(v))\sum_w \mathrm{Cov}\{A(t)A(t+u), A(t+w)A(t+w+v)\}\ \gamma_X(u)\gamma_X(v).$$

Si U et Z sont les processus bivariés du lemme 2, désignons par $\gamma_U^{(u,v)}$ (resp. $\gamma_Z^{(u,v)}$) la fonction de covariances croisées de U (resp. de Z). On peut alors écrire, pour tout $w \in \mathbb{Z}$:

$$\mathrm{Cov}\{A(t)A(t+u),\ A(t+w)A(t+w+v)\} = \mathrm{Cov}\{A_u(t),\ A_v(t+w)\}$$

$$= \gamma_U^{(u,v)}(w),$$

et de même :

$$\xi_X(u,w,w+v) = \mathrm{Cov}\{X(t)X(t+u),\ X(t+w)X(t+w+v)\} = \mathrm{Cov}\{\ X_u(t),\ X_v(t+w)\}$$

$$= \gamma_Z^{(u,v)}(w).$$

L'égalité (1) s'exprime alors :

$$(2) \qquad \alpha(u,v) = (1/v_A(u)v_A(v))\ \sum_w \gamma_U^{(u,v)}(w)\ \gamma_Z^{(u,v)}(w)$$

$$+\ (\gamma_X(u)\gamma_X(v)/v_A(u)v_A(v))\ \sum_w \gamma_U^{(u,v)}(w).$$

Appelons $\alpha_1(u,v)$ et $\alpha_2(u,v)$ les premier et deuxième termes, respectivement, du deuxième membre de (2). Si $f_U^{(u,v)}$ (resp. $f_Z^{(u,v)}$) désigne la fonction de densités spectrales croisées de U (resp. de Z), on a pour tout $w \in \mathbb{Z}$:

$$\gamma_L^{(u,v)}(w) \ = \int_\Pi e^{i\lambda w}\ f_L^{(u,v)}(\lambda)\, d\lambda, \quad L = U,Z.$$

La relation de Parseval donne alors :

$$\alpha_1(u,v) = (2\pi/\ v_A(u)v_A(v))\int_\Pi f_U^{(u,v)}(\lambda)\ f_Z^{(u,v)}(\lambda)\ d\lambda$$

et

$$\alpha_2(u,v) = \{\gamma_X(u)\gamma_X(v)/\ v_A(u)v_A(v)\}\ (2\pi f_U^{(u,v)}(0))$$

Le lemme 2 découle alors immédiatement de la définition de $\alpha(u,v)$. Considérons maintenant le cas où A est comme dans le lemme 2'; on a :

$$(1') \qquad \alpha(u,v) = (1/v_A(u)v_A(v))\sum_w (v_A(u,w,w+v) - v_A(u)v_A(v))\, \xi_X(u,w,w+v).$$

Pour montrer le résultat, il suffit d'établir que la fonction Φ^u définie dans ce lemme est de type défini positif pour tout $u\in\mathbb{Z}$; car alors, le théorème de Bochner lui associe, pour tout $u\in\mathbb{Z}$, une unique mesure positive $\tilde{F}_A^{(u,u)}$ telle que :

$$\Phi^u(w) = \int_\Pi e^{i\lambda w}\, \tilde{F}_A^{(u,u)}(d\lambda), \quad \forall\, w\in\mathbb{Z},$$

d'où, en considérant (1') :

$$\alpha(u,u) = (1/v_A^2(u)) \int_\Pi f_Z^{(u,u)}(\lambda)\, \tilde{F}_A^{(u,u)}(d\lambda).$$

Pour établir que Φ^u est de type défini positif, considérons pour tout $u\in\mathbb{Z}$, la suite $A_u = (A_u(t))_{t\in\mathbb{Z}}$ définie par :

$$A_u(t) = A(t)A(t+u), \quad \forall\, t\in\mathbb{Z}.$$

On a :

$$v_{A_u}(w) = \lim_N (1/N)\sum_{t=1,N} A_u(t)A_u(t+w)$$

$$= \lim_N (1/N)\sum_{t=1,N} A(t)A(t+u)A(t+w)A(t+w+v).$$

Cette dernière limite existe car A est AS au 4-ième ordre, et est égale à $v_A(u,w,w+u)$: donc A_u est AS au 2-ième ordre. Dès lors, d'après les résultats du paragraphe I-3.2, la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\to \mathbb{R} \\ w &\mapsto v_{A_u}(w) - \tilde{\mu}_{A_u}^2 \end{aligned}$$

est de type défini positif; et celle-ci est identique à Φ^u pour tout $u\in\mathbb{Z}$ puisque

$$\tilde{\mu}_{A_u} = v_A(u), \quad \forall\, u\in\mathbb{Z}.$$

□

Que A soit le processus du lemme 2 ou bien la suite du lemme 2', on peut donc écrire, pour tout $u\in\mathbb{Z}$:

$$\lim_N N\,\sigma^2\{C'^N_X(u)\} \geq \sum_w \xi_X(u,w,u+w).$$

Cette inégalité indique qu'asymptotiquement, la qualité de l'estimation de γ_X à partir d'une réalisation de X modulée en amplitude - via C'^N_X - est moindre que celle que l'on aurait pu obtenir à partir d'une observation directe de X - via C^N_X.

Si maintenant A est une représentation des données manquantes dans une série chronologique, l'inégalité précédente exhibe l'effet négatif induit par la présence de telles données sur la qualité de l'estimation de la fonction de covariance du processus d'étude, comparativement à celle obtenue dans le cas idéal d'une série chronologique complète : elle traduit, en quelque sorte, l'influence défavorable de la perte d'information dans une série stationnaire, quant à la qualité de l'estimation de la fonction de covariance du processus générateur de cette série.

5. Démonstrations des propositions de ce chapitre.

Il s'agit des propositions 1,2,4 et 5.

5.1. Démonstration des propositions 1 et 2 :

En vertu des hypothèses concernant A et X, le processus Y = AX est AS au 2-ième ordre. Pour montrer la proposition 1 (resp. 2), il suffit de vérifier les conditions (i) et (ii) de la proposition I-1 (resp. I-2). Le corollaire 1 donne les égalités E1 et E2 suivantes :

(E1) : $$\Gamma_Y l\,(s,t) = \mathbb{E}\{A(s)A(s+l)A(t)A(t+l)\}\,\xi_X(l,\ t-s,\ l) + \Gamma_A l\,(s,t)\,\gamma_X^2(l)$$

(si A est un processus)

(E2) : $$\Gamma_Y l\,(s,t) = A(s)A(s+l)A(t)A(t+l)\,\xi_X(l,\ t-s,\ l)$$

(si A est une suite numérique).

De même, le lemme 1 permet d'obtenir les égalités E1' et E2' suivantes :

(E1') : $$\Gamma_Y\,(s,t) = \mathbb{E}\{A(s)A(t)\}\,\gamma_X(t-s)$$

(si A est un processus)

(E2') : $$\Gamma_Y(s,t) = A(s)A(t)\,\gamma_X(t-s)$$

(si A est une suite numérique).

<u>On établit d'abord la proposition I</u> : <u>1°</u>) Dans le cas où A est une suite bornée, posant u = t-s, E2 entraîne l'inégalité $\mathfrak{I}1$:

(𝔍1) : $$|(1/t)\Sigma_{s=1,t}\,\Gamma_Y|(s,t)| \leqslant (M/t)\Sigma_{u=0,t-1}|\mathbf{Q_X}^4(1,u,u+1) + \gamma_X(2t-u)\gamma_X(u) + \gamma_X(1+u)\,\gamma_X(1-u)|$$

pour une constante M > 0.
Si mq_X(i) et <u>mq_X</u>(ii) sont réalisées, alors :

(1) $$|(1/t)\Sigma_{s=1,t}\,\Gamma_Y|(s,t)| \underset{t\infty}{\to} 0.$$

E2' entraîne l'inégalité $\mathfrak{I}2$:

(𝔍2) : $$|(1/t)\Sigma_{s=1,t}\,\Gamma_Y(s,t)| \leqslant (M'/t)\,\Sigma_{u=0,\,t-1}\,|\gamma_X(u)|$$

pour une constante M' > 0.
Puisque mq_X(i) a lieu, on a :

$$(1/t)\Sigma_{u=0,t-1}\,|\gamma_X(u)| \underset{t\infty}{\to} 0$$

et donc

(2) $$|(1/t)\Sigma_{s=1,t}\,\Gamma_Y(s,t)| \underset{t\infty}{\to} 0.$$

(1) et (2) réalisent les conditions (i) et (ii) de la proposition I-1 : ce qui montre 1-1°).

<u>2°</u>) Dans le cas où A est un processus ayant des moments d'ordre 4 bornés, posant u = t-s, E1 entraîne l'inégalité $\mathfrak{I}3$ suivante :

(𝔍3) : $$|(1/t)\Sigma_{s=1,t}\,\Gamma_Y|(s,t)| \leqslant (M_1/t)\,\Sigma_{u=0,\,t-1}\,|\mathbf{Q_X}(1,u,u+1) + \gamma_X(u)\gamma_X(2t-u) + \gamma_X(1+u)\gamma_X(1-u)| + |(1/t)\Sigma_{s=1,t}\,\Gamma_A|(s,t)|\,\gamma_X{}^2(1).$$

pour une constante $M_1 > 0$.

Quand t tend vers l'infini, le premier terme du membre de droite de $\mathfrak{J}3$ tend vers zéro si $mq_X(i)$ et $\underline{mq}_X(ii)$ ont lieu; il en est de même du deuxième terme parce que

$$(1/t)\Sigma_{s=1,t}\,|\Gamma_A|(s,t) \underset{t\infty}{\rightarrow} 0$$

par hypothèse. On obtient donc

(1')
$$(1/t)\Sigma_{s=1,t}\,|\Gamma_Y|(s,t) \underset{t\infty}{\rightarrow} 0.$$

Ensuite, grâce à E1', on obtient l'inégalité $\mathfrak{J}4$:

($\mathfrak{J}4$) :
$$|(1/t)\Sigma_{s=1,t}\,\Gamma_Y(s,t)| \leqslant (M_2/t)\Sigma_{u=0,\,t-1}\,|\gamma_X(u)|$$

pour une constante $M_2 > 0$. Elle entraîne, en vertu de $mq_X(i)$:

(2')
$$|(1/t)\Sigma_{s=1,t}\,\Gamma_Y(s,t)| \underset{t\infty}{\rightarrow} 0.$$

(1') et (2') réalisent les conditions (i) et (ii) de la proposition I-1 : ce qui montre 1-2°) et finit la démonstration de la proposition 1. □

<u>On établit maintenant la proposition 2</u> : <u>1°</u>) Dans le cas où A est une suite bornée, d'après $\mathfrak{J}1$, on obtient sous $ps_X(i)$ et $\underline{ps}_X(ii)$, la double inégalité :

(3)
$$|(1/t)\Sigma_{s=1,t}\Gamma_Y|(s,t)| \leqslant (K_1/t^{\delta}) + (K_2/t^{\gamma}) \leqslant (\max\{K_1, K_2\})/(t^{\min\{\delta,\gamma\}})$$

pour t suffisamment grand, K_1, K_2, δ,γ étant des constantes strictement positives.

De même, puisque $ps_X(i)$ a lieu, en considérant $\mathfrak{J}2$, on a nécessairement :

$$|(1/t)\Sigma_{u=0,\,t-1}\,|\gamma_X(u)| \leqslant (K'_1/t^{\delta}),$$

pour t suffisamment grand et $K'_1 > 0$, et donc :

(4) $$|(1/t)\Sigma_{s=1,t}\,\Gamma_Y(s,t)| \leqslant (K'_1/t^{\delta}),$$

pour t suffisamment grand.

(3) et (4) vérifient les conditions (i) et (ii) de la proposition 2 : ce qui montre 2-1°)

2°) Dans le cas où A est un processus admettant des moments d'ordre 4 bornés, $\mathfrak{I}3$ entraîne sous ps_X(i) et ps_X(ii) - l'inégalité

(3') $$|(1/t)\Sigma_{s=1,t}\,\Gamma_Y|(s,t)| \leqslant (\max\{K_1, K_2, K\})/(t^{\min\{\delta,\gamma,\beta\}})$$

pour t suffisamment grand.
Ensuite, par $\mathfrak{I}4$, on obtient pour t suffisamment grand

(4') $$|(1/t)\Sigma_{s=1,t}\,\Gamma_Y(s,t)| \leqslant (K''_1/t^{\delta})$$

pour une constante $K''_1 > 0$.
(3') et (4') entraînent que les conditions (i) et (ii) de la proposition I-2 sont vraies : ce qui montre 2.2°) et finit la démonstration de la proposition 2. □

5.2. Démonstration des propositions 4 et 5 :

Les points 2°) en découlant de façon triviale, on montre uniquement les points 1°). Pour les établir, on considère la quantité $(1/N)\,S^N(u,v)$ où :

$$S^N(u,v) = \Sigma_{s=1,N-|u|}\,\Sigma_{t=1,N-|v|}\,T(s,t,u,v)$$

et, comme dans le corollaire 1 :

$$T(s,t,u,v) = \mathrm{Cov}\{Y(s)Y(s+u),\, Y(t)Y(t+v)\}$$

si l'on a posé $Y = AX$.

La démonstration de la proposition 5 est basée sur le

Lemme 4

Soit Z un processus stationnaire au 4-ième ordre, d'espérance mathématique μ_Z. Supposons que γ_Z, $\mathbf{Q}_Z{}^4$ et $\mathbf{Q}_Z{}^3$ vérifient les conditions (i), (ii) et (iii), respectivement, de la proposition 5.
Alors, définissant pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{C}_Z{}^N(l)$ par

$$\mathcal{C}_Z^N(l) = \begin{cases} (1/N)\sum_{t=1,\, N-|l|} Z(t)Z(t+|l|), \text{ si } |l| < N \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

on a, pour tout $u,v \in \mathbb{Z}$:

$$N \operatorname{Cov}\{\mathcal{C}_Z^N(u), \mathcal{C}_Z^N(v)\} \underset{N\infty}{\rightarrow} \sum_{w\in\mathbb{Z}} \xi_Z(u,w,v+w),$$

où $\xi_Z(.,.,.)$ est comme dans le lemme I-3.

Démontrons ce lemme : en effet,

$$\operatorname{Cov}\{\mathcal{C}_Z^N(u),\mathcal{C}_Z^N(v)\}=N^{-2}\sum_{s=1,N-|u|}\sum_{t=1,N-|v|} \operatorname{Cov}\{Z(s)Z(s+u),\, Z(t)Z(t+v)\}.$$

Le lemme I-3 permet d'écrire :

(1) : $N \operatorname{Cov}\{\mathcal{C}_Z^N(u),\mathcal{C}_Z^N(v)\} =$

$$N^{-1}\sum_s\sum_t \,[\mathbf{Q}_Z{}^4(u,t-s,t-s+v) + \mu_Z(\mathbf{Q}_Z{}^3(u,t-s)+\mathbf{Q}_Z{}^3(u,t-s+v)+\mathbf{Q}_Z{}^3(t-s,t-s+v)$$

$$+\mathbf{Q}_Z{}^3(u-(t-s),v)) + \gamma_Z(t-s)\gamma_Z(u-v-(t-s)) + \gamma_Z(t-s+v)\gamma_Z(u-(t-s)) + \mu_Z{}^2\gamma_Z(t-s)].$$

Posons $w=t-s$ et désignons alors par $\Phi_N(u,v,w)$ le nombre de couples (s,t) vérifiant $(1 \leq s \leq N - |u|)$ et $(1 \leq t \leq N - |v|)$.

Ce nombre est majoré par N et $\lim_N N^{-1}\Phi_N(u,v,w) = 1$ (cf. **[18]**, Chap IV. démonstration du théorème 3). L'égalité (1) peut s'écrire :

(2) $N \operatorname{Cov}\{\mathcal{C}_Z^N(u),\mathcal{C}_Z^N(v)\} = \sum_{w\in\mathbb{Z}} (\Phi_N(u,v,w)/N)\ \xi_Z(u,w,v+w)$

où :

$$\xi_Z(u,w,v+w) = [\mathbf{Q}_Z{}^4(u,w,v+w)$$

$$+ \mu_Z\,(\mathbf{Q}_Z{}^3(u,w)+ \mathbf{Q}_Z{}^3(u,w+v) + \mathbf{Q}_Z{}^3(w,w+v) + \mathbf{Q}_Z{}^3(u-w,\, v))$$

$$+ \gamma_Z(w)\gamma_Z(w+v-u) + \gamma_Z(w+v)\gamma_Z(u-w) + \mu_Z{}^2\, \gamma_Z(w)].$$

Puisque :

$$(\Phi_N(u,v,w)/N) \leq 1,$$

on a :

$$|N\,\mathrm{Cov}\{\mathscr{C}_Z^N(u), \mathscr{C}_Z^N(v)\}| \leq \sum_w |\xi_Z(u,w, v+w)|,$$

et l'on sait que

$$\sum_{w\in\mathbb{Z}} |\xi_Z(u,w,v+w)| < +\infty$$

en vertu des hypothèses sur γ_Z, $\mathbf{Q}_Z{}^{\mathbf{3}}$ et $\mathbf{Q}_Z{}^{\mathbf{4}}$.
Comme

$$(\Phi_N(u,v,w)/N)\ \xi_Z(u,w,v+w) \underset{N\infty}{\rightarrow} \xi_Z(u,w,v+w),$$

le résultat découle ensuite du théorème de convergence dominée de Lebesgue. □

Retournons maintenant à la démonstration de la proposition 5 : le corollaire 1.1°) donne

$$S^N(u,v) = S_1{}^N(u,v)$$

avec :

$$S_1{}^N(u,v) = \sum_{s=1,N-|u|} \sum_{t=1,N-|v|} \mathbb{E}\{A(s)A(s+u)A(t)A(t+v)\}\ \xi_A(u,t-s,v+w)$$

$$+ \sum_{s=1,N-|u|} \sum_{t=1,N-|v|} \mathrm{Cov}\{A(s)A(s+u), A(t)A(t+v)\}\ \gamma_X(u)\gamma_X(v).$$

Appelons $S_1{}^N(u,v)$ et $S_1(u,v)$, les premier et deuxième termes, respectivement, du deuxième membre de l'égalité précédente.
On a, d'une part :

$$(1/N)\, S_1{}^N(u,v) = \sum_{w\in\mathbb{Z}} v_A(u,w,w+v)\ \xi_X(u,w,v+w)\ (\Phi_N(u,v,w)/N),$$

où $\Phi_N(u,v,w)$ est le nombre défini dans la preuve du lemme 4. Alors rappelant que les moments d'ordre 4 de A (et donc aussi $v_A(.,.,.)$) sont bornés, on montre que

$$(1/N)\, S_1{}^N(u,v) \underset{N\infty}{\rightarrow} \sum_{w\in\mathbb{Z}} v_A(u,w,w+v)\ \xi_X(u,w,v+w)$$

en usant des mêmes arguments que ceux ayant servi plus haut dans la preuve précédente
D'autre part, puisque

$$(1/N)\, S_1^N(u,v) = \gamma_X(u)\gamma_X(v)\, (N\, \mathrm{Cov}\{\mathscr{C}_A^N(u),\, \mathscr{C}_A^N(v)\}),$$

en appliquant le lemme 4 au processus A, il vient :

$$(1/N)\, S_1^N(u,v) \underset{N\infty}{\to} \gamma_X(u)\gamma_X(v) \sum_{w\in\mathbb{Z}} \xi_A(u,w,v+w).$$

Finalement, on obtient :

$$\lim_N ((1/N)(S_1^N(u,v) + (1/N)S_1^N(u,v)) = \sum_{w\in\mathbb{Z}} (v_A(u,w,v+w)\xi_X(u,w,v+w)$$

$$+ \gamma_X(u)\gamma_X(v)\xi_A(u,w,v+w)).$$

Ce qui est le résultat de la proposition 5. □

<u>On montre maintenant la proposition 4</u> : si A est comme dans celle-ci, le corollaire 1-2°) donne :

$$S^N(u,v) = S_2^N(u,v)$$

où :

$$S_2^N(u,v) = \sum_{s=1,N-|u|} \sum_{t=1,N-|v|} A(s)A(s+u)A(t)A(t+v)\, \xi_X(u,t-s,v+(t-s)).$$

Posons $w = t-s$; on obtient pour $(1/N)\, S_2^N(u,v)$:

$$\sum_{w=-N+|u|+1,N+|v|} N^{-1} \{\sum_{s=1,N-|u|} A(s)A(s+v)A(s+w)A(s+w+v)\xi_X(u,w,w+v)\}$$

Dans cette expression, (1/N) fois le terme entre accolades est majoré en valeur absolue par $K|\xi_X(u,w,w+v)|$, $K > 0$; par suite

$$\sum_{w\in\mathbb{Z}} K|\xi_X(u,w,w+v)| < +\infty$$

en vertu des hypothèses concernant X; enfin, on a

$$(1/N)\sum_{s=1,N-|u|} A(s)A(s+u)A(s+w)A(s+w+v) \underset{N\infty}{\to} v_A(u,w,w+v)$$

parce que A est une suite AS au 4-ième ordre, et cela entraîne que (1/N) fois le terme entre accolades tend vers $v_A(u,w,v+w)\, \xi_X(u,w,v+w)$ quand N tend vers l'infini. Le résultat découle alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue. □

Remarque 3 :

Le processus Z du lemme 4 est mq-ergodique au 2-ième degré, parce qu'il vérifie en particulier $mq_A(i)$ et $mq_A(ii)$ (cf. proposition I-5). S'il est centré et s'il donne lieu à la série temporelle complète

$$\{Z(1), \ldots, Z(N)\},$$

la proposition I-7 concernant $\lim_N N \operatorname{Cov}\{C_Z^N(u), C_Z^N(v)\}$ où C_Z^N est la fonction de covariance empirique de la série précédente, peut être obtenue à partir du lemme 4 si l'on a auparavant remarqué que

$$\sum_w \gamma_Z(w)\gamma_Z(w+v-u) = \sum_w \gamma_Z(w+u)\gamma_Z(w+v).$$

En effet, puisque $\mu_Z \equiv 0$, les termes de cumulants d'ordre 3 dans ce lemme ne sont pas mis à contribution; il en est de même du terme $\sum_w \mu_Z^2 \gamma_Z(w)$: ainsi, l'hypothèse

$$\sum_w \gamma_Z^2(w) < +\infty,$$

moins restrictive que l'hypothèse

$$\sum_w |\gamma_X(w)| < +\infty,$$

suffit à établir la convergence des séries $\sum_w \gamma_Z(w+v)\gamma_Z(w\pm u)$ et assurer le résultat de la proposition I-7.

et

$$\sum_u |u|^q |\gamma_X(u)| < +\infty.$$

Alors, pour l'estimateur précédent $\hat{f}_X$, si (M^q/N) et (M/N) tendent vers zéro et M tend vers l'infini, quand N tend vers l'infini, on a :

$$M^q \, \mathbb{E}\{\hat{f}_X(\lambda) - f_X(\lambda)\} \underset{N\infty}{\rightarrow} - k_q (2\pi)^{-1} \sum_u |u|^q \gamma_X(u) e^{-i\lambda u}.$$

Ce théorème indique en particulier que $\hat{f}_X(\lambda)$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $f_X(\lambda)$. Puisque la variance de $\hat{f}_X(\lambda)$ tend vers zéro quand N tend vers l'infini sous les hypothèses du théorème 4, $\hat{f}_X(\lambda)$ sera un estimateur mq-consistant de $f_X(\lambda)$ si, en plus de celles-ci, le noyau k(.) verifie les conditions du théorème précédent.

CHAPITRE III.

ESTIMATION NON PARAMETRIQUE SPECTRALE DANS LES SERIES TEMPORELLES MODULEES EN AMPLITUDE.

0. Péliminaires.

On se donne, un processus d'étude X, défini sur $\mathfrak{D}$ à valeurs dans $\mathcal{V}=(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$, stationnaire au 2-ième ordre, centré.

On designe par A

1°) soit un processus de modulation d'amplitude

$$\{A(t),\ t\in\mathbb{Z}\}$$

défini sur $\mathfrak{D}$ à valeurs dans $\mathcal{V}$, indépendant de X et AS au 2-ième ordre.

2°) soit une suite de modulation d'amplitude réelle $(A(t))_{t\in\mathbb{Z}}$ AS au 2-ième ordre.

Dorénavant, $v(l)$ (resp. μ) désignera à la place de $v_A(l)$ (resp. $\tilde{\mu}_A$) soit $\lim_N N^{-1}\sum_{t=1,N} \mathbb{E}\{A(t)A(t+l)\}$ (resp. $\lim_N N^{-1}\sum_{t=1,N} \mathbb{E}\{A(t)\}$) si A est un processus, soit $\lim_N N^{-1}\sum_{t=1,N} A(t)A(t+l)$ (resp. $\lim_N N^{-1}\sum_{t=1,N} A(t)$) si A est une suite.

Notre série de travail est la série

$$\{Y(1),\ \dots,\ Y(N)\},$$

réalisation de longueur N du processus modulé en amplitude $Y = AX$. La méthode d'estimation que l'on va présenter est basée sur l'estimateur C'^N_X défini au paragraphe II-B.2 pour tout u tel que $v(u) \neq 0$ par

$$C'^N_X(u) = C^N_Y(u)/v(u).$$

1. Méthodologie d'analyse spectrale non paramétrique dans les séries temporelles modulées en amplitude.

1.1. Description d'une méthodologie générale d'estimation de f_X : l'estimateur $\hat{\varphi}_X$.

Supposons que A verifie

$$(\forall u \in \mathbb{Z})\ (v(u) \neq 0).$$

On propose pour $f_X(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, l'estimateur, noté $\hat{\varphi}_X(\lambda)$ et défini par :

F*1 : $$\hat{\varphi}_X(\lambda) = \int_\Pi K_N(\lambda - s)\ I'_X(s)\,ds,\ \forall\ \lambda \in \Pi$$

où :

1°) $K_N(.)$ est une certaine fonction de pondération comme au paragraphe I-4.3.1

2°) $I'_X(.)$ est une modification du périodogramme $I_X^N(.)$ (cf. §I-4.1), obtenu à partir de la série modulée en amplitude donnée, par la relation

$$I'_X(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{u \in \mathbb{Z}} e^{-i\lambda u}\ C'_X{}^N(u),\ \forall\ \lambda \in \Pi$$

i.e. :

$$I'_X(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{u \in \mathbb{Z}} e^{-i\lambda u}\ C_Y{}^N(u)(v(u))^{-1},\ \forall\ \lambda \in \Pi.$$

Introduisant les fenêtres spectrales $k_N{}^M(u)$, $u \in \mathbb{Z}$ (cf. §I-4.3.1), l'estimateur $\hat{\varphi}_X(\lambda)$ s'écrit aussi sous la forme

F*2 : $$\hat{\varphi}_X(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_N{}^M(u)\ C_Y{}^N(u)(v(u))^{-1}\ e^{-i\lambda u},\ \forall\ \lambda \in \Pi.$$

1.2. Estimation de la fonction de densité spectrale asymptotique d'un processus AS au 2-ième ordre.

Le processus $Y = AX$ étant AS au 2-ième ordre, il en est de même de la série de travail. Appelons $I_Y{}^N$ le périodogramme de cette série, que l'on définit de manière analogue au périodogramme d'une série stationnaire (cf. §I-4.1), par la relation :

$$I_Y{}^N(\lambda) = (1/2\pi N) \left| \sum_{t=1,N} e^{-i\lambda t}\ Y(t) \right|^2,\ \forall\ \lambda \in \Pi.$$

On peut estimer $\tilde{f}_Y(\lambda)$ par l'estimateur noté $\hat{f}_Y(\lambda)$ et défini par

$\tilde{\mathbf{F}}$**1** : $$\hat{f}_Y(\lambda) = \int_\Pi K_N(\lambda - s)\ I_Y{}^N(s)\,ds,\ \forall\ \lambda \in \Pi$$

où $K_N(.)$ est le noyau précédent.

$\hat{f}_Y(\lambda)$ coincide avec l'estimateur obtenu par la formule **F I** (cf. §I-4.1) dans le cas classique où Y est stationnaire au 2-ième ordre; comme dans ce cas, I_Y^N et C_Y^N sont inverses l'un de l'autre par transformation de Fourier et $\hat{f}_Y(\lambda)$ s'écrira donc aussi sous la forme :

$$\tilde{F}2 \qquad \hat{f}_Y(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{u\in\mathbb{Z}} k_N^M(u)\, C_Y^N(u)\, e^{-i\lambda u}, \quad \forall\ \lambda\in\Pi.$$

1.3. <u>Estimation de f_X dans le cas où l'observation est modulée par un processus AS au 2-ième ordre</u>.

Soit A un processus AS au 2-ième ordre, de fonction de covariance asymptotique $\tilde{\gamma}_A$ absolument sommable. Si X est de fonction de covariance γ_X absolument sommable, alors la fonction de densité spectrale asymptotique $\tilde{f}_Y$ du processus Y = AX s'écrit

$$(\underline{1}) \qquad \tilde{f}_Y(\lambda) = (\tilde{f}_A * f_X)(\lambda) + \mu^2 f_X(\lambda), \quad \forall\ \lambda\in\Pi.$$

On donne la condition d'inversion de la formule ($\underline{1}$) dans le

<u>Lemme I</u>

Soit X un processus stationnaire au 2-ième ordre, centré, de fonction de covariance γ_X absolument sommable.

Soit A un processus AS au 2-ième ordre, tel que $\mu\neq0$ et vérifiant :

$$\sum_r |b_r| < +\infty$$

où

$$b_r = \mu^{-2}\, (\tilde{\gamma}_A(r)) \,/\, [(\tilde{\gamma}_A(r) + \mu^2)].$$

Alors, on a :

$$(\underline{2}) \qquad f_X(\lambda) = (1/\mu^2)\ \tilde{f}_Y(\lambda) - (b*\tilde{f}_Y)(\lambda), \ \forall\ \lambda\in\Pi$$

où

$$b(\theta) = (2\pi)^{-1} \sum_{r\in\mathbb{Z}} b_r\, e^{-i\theta r}$$

<u>**Preuve**</u>

On utilisera ici et dans la preuve du lemme I' seulement, des propriétés de

la théorie des distributions (au sens de Schwartz, cf. [24]). Si g désigne une fonction numérique, la distribution associée à g sera également notée g.

Soit δ la distribution de Dirac en zéro; on rappelle que celle-ci est l'unité du produit de convolution des distributions. D'après (1), $\tilde{f}_Y$ peut s'écrire :

$$\tilde{f}_Y = \psi_A * f_X$$

où

(1') $$\psi_A = \mu^2 \delta + \tilde{f}_A .$$

Il s'agit de trouver la distribution ψ_A^{-1}, inverse de ψ_A, si elle existe. Si tel est le cas, on a :

$$f_X = \psi_A^{-1} * \tilde{f}_Y.$$

Désignons par $\mathcal{F}(T)$ la transformée de Fourier de la distribution T. Puisque

$$\mathcal{F}(\delta) = 1 \text{ et } \mathcal{F}(\tilde{f}_A) = \tilde{\gamma}_A,$$

on a, d'après (1') :

$$\mathcal{F}(\psi_A) = \mu^2 + \tilde{\gamma}_A .$$

On sait que $\mathcal{F}$ transforme le produit de convolution en la multiplication ; ainsi, puisque

$$\psi_A^{-1} * \psi_A = \delta,$$

on a :

$$\mathcal{F}(\psi_A^{-1}) = (\mu^2 + \tilde{\gamma}_A)^{-1}.$$

Il suffit donc de montrer que la fonction $(\mu^2+\tilde{\gamma}_A)^{-1}$ admet une transformée de Fourier inverse (au sens des distributions).
Pour cela, écrivons

$$(\tilde{\gamma}_A + \mu^2)^{-1} = \mu^{-2} - \mu^{-2}(\tilde{\gamma}_A/\tilde{\gamma}_A+\mu^2).$$

On a :

$$\mathcal{F}^{-1}(1/\mu^2) = \delta/\mu^2.$$

Le terme $(1/\mu^2)\ (\tilde{\gamma}_A/\tilde{\gamma}_A+\mu^2)$ a pour transformée inverse de Fourier une fonction si

$$\Sigma_r\, |(\tilde{\gamma}_A(r)/(\tilde{\gamma}_A(r) + \mu^2))| < +\infty,$$

hypothèse requise par le lemme 1. Si b est comme dans ce lemme, on a

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mu^{-2}\,\tilde{\gamma}_A/(\tilde{\gamma}_A+\mu^2)\right)=b,$$

et finalement

$$\mathcal{F}^{-1}\left((\tilde{\gamma}_A+\mu^2)^{-1}\right)=\psi_A{}^{-1}$$

$$=\delta/\mu^2-b.$$

Donc,

$$f_X=\psi_A{}^{-1}*\tilde{f}_Y=(\delta/\mu^2-b)*\tilde{f}_Y,$$

i.e.

$$\forall\lambda\in\Pi,\ f_X(\lambda)=\mu^{-2}\tilde{f}_Y-(b*\tilde{f}_Y)(\lambda).$$

□

La formule (2) du lemme précédent permet d'estimer $f_X(\lambda)$ par $\hat{\underline{\varphi}}_X(\lambda)$ défini par :

F*3 : $$\hat{\underline{\varphi}}_X(\lambda)=(1/\mu^2)\,\hat{f}_Y(\lambda)-(b*\hat{f}_Y)(\lambda),\quad\forall\ \lambda\in\Pi$$

où $\hat{f}_Y(\lambda)$ est l'estimateur obtenu précédemment au paragraphe 1.2 par $\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{2}$. On donne la

Proposition 1 :

L'estimateur $\hat{\underline{\varphi}}_X(\lambda)$ défini ci-dessus en **F*3**, sous les hypothèses du lemme 1, et l'estimateur $\hat{\varphi}_X(\lambda)$ défini en **F*2** sont identiques.

Démonstration :

D'abord, on remarque que, puisque la suite de terme général

$$b_r=\mu^{-2}\,\tilde{\gamma}_A(r)/[\,\tilde{\gamma}_A(r)+\mu^2]$$

est bornée par hypothèse, on a :

$$v(r)=\tilde{\gamma}_A(r)+\mu^2\neq 0,\quad\forall r\in\mathbb{Z}.$$

Ecrivant :

$$(1/v(r))=(1/\mu^2)-(\tilde{\gamma}_A(r)/\mu^2 v(r)),\ \forall r\in\mathbb{Z},$$

on a :

$$(1'') \qquad \hat{\varphi}_X(\lambda) = 1/(2\pi\mu^2) \sum_r k_N^M(r)\, c_Y^N(r)\, e^{-i\lambda r}$$

$$- (2\pi)^{-1} \sum_r k_N^M(r)\, c_Y^N(r)\, ((\gamma_A(r))/(\mu^2 v(r)))\, e^{-i\lambda r}.$$

Notons $T_1^N(\lambda)$ et $T_2^N(\lambda)$ les premier et deuxième termes, respectivement, des membres de droite de (1''). D'après $\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{2}$:

$$T_1^N(\lambda) = (1/\mu^2)\ \hat{f}_Y(\lambda).$$

Puisque

$$(\tilde{\gamma}_A(r)/\mu^2 v(r)) = b_r$$

sous les hypothèses du lemme 1, si b est comme dans ce lemme, on a :

$$T_2^N(\lambda) = (b_*\hat{f}_Y)(\lambda);$$

finalement, on obtient :

$$\hat{\varphi}_X(\lambda) = \mu^{-2}\hat{f}_Y(\lambda) - (b_*\hat{f}_Y)(\lambda), \quad \forall\ \lambda \in \Pi,$$

i.e :

$$\hat{\varphi}_X \equiv \hat{\underline{\varphi}}_X.$$

□

1.4. <u>Le cas où l'observation est modulée par une suite AS au 2-ième ordre</u>.

Si on fait l'hypothèse que la suite $(\tilde{\gamma}_A(k))_{k\in\mathbb{Z}}$, associée à la mesure positive $\tilde{F}_A$ par la formule **B1'** (cf. §I-3.2), est absolument sommable, alors $\tilde{F}_A$ admet une densité $\tilde{f}_A$ par rapport à la mesure de Lebesgue, de sorte que :

$$\tilde{f}_A(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{u\in\mathbb{Z}} \tilde{\gamma}_A(u)\ e^{-i\lambda u}, \quad \forall\ \lambda \in \Pi.$$

Ainsi la formule (<u>1</u>) précédente et la formule (<u>2</u>) (sous les conditions du lemme 1) demeurent vraies. Mais cette hypothèse entraîne que

$$\tilde{\gamma}_A(u) \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cette propriété ne concerne pas une grande variété de suites AS au 2-ième ordre, telles les suites périodiques par exemple.

On relaxe donc l'hypothèse précédente. On suppose que la suite A est bornée et $(\gamma_X(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ absolument sommable, on obtient pour $\tilde{f}_Y$:

(1') $$\tilde{f}_Y(\lambda) = \mu^2 f_X(\lambda) + (f_X * \tilde{F}_A)(\lambda), \ \forall \ \lambda\in\Pi.$$

On inverse cette formule dans le

Lemme 1':

Soit A une suite bornée, AS au 2-ième ordre. Supposons que la fonction de covariance γ_X de X est absolument sommable et que la suite $(\tilde{\gamma}_A(k))_k$ associée à A par la formule **B1'** du paragraphe I-3.2 vérifie

$$(\exists\alpha > 0)\,(\forall k \in\mathbb{Z})\,(|\tilde{\gamma}_A(k) + \mu^2|)^{-1} < |k|^{\alpha}).$$

Alors, il existe une distribution T^A telle que

(2') $$f_X = T^A * \tilde{f}_Y ,$$

i.e.

$$f_X(\lambda) = \langle T_x^A, \tilde{f}_Y(x-\lambda) \rangle, \forall \ \lambda\in\Pi.$$

Preuve :

Le problème est analogue à celui du lemme I, on veut résoudre l'équation de convolution

$$\psi_A * \psi_A^{-1} = \delta$$

avec :

$$\psi_A = m^2\delta + \tilde{F}_A$$

et ψ_A^{-1} inconnue, si elle existe; on a :

$$\mathcal{F}(\psi_A) = \mu^2 + \tilde{\gamma}_A.$$

Si ψ_A^{-1} existe, elle admet un développement en série de Fourier, dont les coefficients β_k vérifient les équations :

$$\beta_k = (\mu^2+\tilde{\gamma}_A(k))^{-1} , \forall k\in\mathbb{Z}.$$

Pour que les β_k soient les coefficients de Fourier d'une distribution il suffit (et la condition est aussi nécessaire) que la série $\Sigma_k |b_k|$ soit majorée par une série de puissances, i.e. il suffit que :

$$(\exists k > 0)(\exists \alpha > 0)(|\beta_k| < K|k|^{\alpha}),$$

hypothèse requise par le lemme 1' pour K = 1. Appelons T^A, la distribution :

$$T^A = (2\pi)^{-1}\Sigma_{k\in\mathbb{Z}} (1/|\gamma_A(k) + \mu^2|)\ e^{-ikx};$$

cette dernière est la solution $\psi_A{}^{-1}$ de l'équation initiale et l'on a :

$$f_X = T^A * \tilde{f}_Y,$$

c'est à dire que $f_X(\lambda)$ est donné par la forme

$$f_X(\lambda) = \langle T_X{}^A, \tilde{f}_Y(x-\lambda)\rangle.$$

□

La formule (2') permet de proposer pour $f_X(\lambda)$, l'estimateur $\hat{\underline{\varphi}}'_X(\lambda)$ tel que :

F*3' : $$\hat{\underline{\varphi}}'_X(\lambda) = (T^A * \hat{f}_Y)(\lambda)$$

où $\breve{\hat{f}}_Y(\lambda)$ est obtenu au paragraphe I.2.
On donne la

Proposition 1':

L'estimateur $\hat{\underline{\varphi}}'_X(\lambda)$ précédent, défini en **F*3'** sous les hypothèses du lemme 1', et l'estimateur $\hat{\varphi}_X(\lambda)$ défini en **F*2** sont identiques.

Démonstration :

On a

$$\hat{\underline{\varphi}}'_X(\lambda) = \langle T_X{}^A, \hat{f}_Y(x-\lambda)\rangle$$

$$= \int_\Pi (2\pi)^{-1}\Sigma_{k\in\mathbb{Z}} (1/v(k))\, e^{-ikx}\ \hat{f}_Y(x-\lambda)\, dx$$

$$= (2\pi)^{-1}\Sigma_{k\in\mathbb{Z}} (1/v(k))\left(\int_\Pi \hat{f}_Y(x-\lambda)\, e^{-ik(x-\lambda)}dx\right) e^{-ik\lambda},$$

i.e.

$$\hat{\varphi}_X(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1/v(k))\, C_Y{}^N(k)\, k_N{}^M(k)\, e^{-ik\lambda}.$$

Ce qui est exactement $\hat{\varphi}_X(\lambda)$, donné en **F*2**. □

Remarque 1:
L'expression d'un estimateur à l'aide d'une distribution - comme dans **F*3'** - est inusitée. Dans le cas d'une suite AS comme celle du lemme 1', la relation (<u>1'</u>) ne conduit donc pas à une expression pratique de l'estimateur $\hat{\varphi}_X$, contrairement à la relation (<u>1</u>) qui, dans le cas d'un processus A comme celui du lemme 1, fournit la forme utile **F*3** de $\hat{\varphi}_X$.

2. Biais asymptotique de $\hat{f}_Y$ et $\hat{\varphi}_X$.

On étudie ici sous des hypothèses très générales le biais asymptotique des estimateurs $\hat{f}_Y(\lambda)$ et $\hat{\varphi}_X(\lambda)$. On établit en particulier au théorème 1 que $\hat{\varphi}_X(\lambda)$ est équivalent, en ce qui concerne le biais asymptotique, à l'estimateur $\hat{f}_X(\lambda)$ obtenu par la méthode indirecte (cf. §I-4) à partir d'une série stationnaire non modulée en amplitude.

Proposition 2: (Biais de $\hat{f}_Y$)

Soit k(.) un noyau spectral comme au théorème I-4 pour lequel il existe une constante q > 0 telle que

$$\lim_{x\to 0} (1-k(x) / |x|^q) = k_q,\ k_q \neq 0.$$

Soit X un processus stationnaire au 2-ième ordre centré, de fonction de covariance γ_X vérifiant

$$\sum_{u\in\mathbb{Z}} |u|^q\, |\gamma_X(u)| < +\infty.$$

Soit A une suite AS au 2-ième ordre <u>bornée</u> ou bien un processus AS au 2-ième ordre possédant des moments d'ordre 2 <u>bornés</u>.
Supposons que A vérifie pour tout u, la condition

(i) $$v(u) \neq 0$$

et l'une des conditions (ii) ou (ii') suivantes

(ii) $\quad \check{C}_A^N(u) - v(u) = O(1/N)$, au voisinage de N infini

(ii') $\quad \mathbb{E}\{C_A^N(u) - v(u)\} = O(1/N)$, au voisinage de N infini

selon que A désigne une suite ou un processus.
Alors, si (M/N) et (M^q/N) tendent vers zéro et M tend vers l'infini quand N tend vers l'infini, le biais de l'estimateur f_Y vérifie

$$M^q\,\mathbb{E}\{f_Y(\lambda) - f_Y(\lambda)\} \underset{N\infty}{\to} -(k_q/2\pi)\sum_{u\in\mathbb{Z}} |u|^q\,\tilde{\gamma}_Y(u)\,e^{-i\lambda u},\ \lambda\in\Pi$$

où l'on rappelle que $\tilde{\gamma}_Y$ désigne la fonction de covariance asymptotique du processus AS au 2-ième ordre Y = AX.
Dans le cas où A est un processus, le résultat précédent demeure encore vrai sans la condition (i) si la suite $(b_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ du lemme I est absolument sommable et sans la condition (ii') si A stationnaire au 2-ième ordre.

Ce résultat est analogue à celui du théorème I-5 si Y est un processus stationnaire au 2-ième ordre, sa fonction de covariance γ_Y étant ici remplacée par la fonction de covariance asymptotique $\tilde{\gamma}_Y$. La proposition 2 est démontrée au paragraphe 5.1, ainsi que le

<u>Théorème 1</u> : (biais de $\hat{\varphi}_X$)

Soient X, k(.) et A comme dans la proposition précédente. Supposons que A vérifie, outre les conditions (i),(ii) ou (ii'), la condition

(iii) $\quad \forall\, u\in\mathbb{Z},\ |1/v(u)| < K,\ \ K > 0.$

Alors, si (M/N) et M^q/N tendent vers zéro et M tend vers l'infini quand N tend vers l'infini, le biais de l'estimateur $\hat{\varphi}_X(\lambda)$ vérifie :

$$M^q\,\mathbb{E}\{\hat{\varphi}_X(\lambda) - f_X(\lambda)\} \underset{N\infty}{\to} -(k_q/2\pi)\sum_{u\in\mathbb{Z}} |u|^q\,\gamma_X(u)\,e^{-i\lambda u},\ \lambda\in\Pi.$$

Dans le cas où A est un processus AS au 2-ième ordre, ce résultat est encore vrai sans les conditions (i) et (iii) si la suite $(b_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ du lemme I est absolument sommable et sans la condition (ii') si A est un processus stationnaire au 2-ième ordre.

Ce théorème indique que le biais asymptotique de $\hat{\varphi}_X$ ne dépend que du processus X et du noyau k(.); compte tenu du théorème I-5., ce biais est identique à celui de l'estimateur $\hat{f}_X$ obtenu par la méthode indirecte à partir d'une réalisation complète du processus étudié, qui correspond au cas où $A \equiv 1$: cela signifie que le processus (ou la suite) de modulation d'amplitude n'a aucune influence sur le biais asymptotique de l'estimation obtenue à partir d'une version modulée en amplitude du processus étudié.

En effet, introduisons pour tout u, $|u| < N$, la quantité $R_A(u)$ donnée par :

$$R_A{}^N(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{N-|u|} \sum_{t=1,\, N-|u|} \mathbb{E}\{A(t)A(t+u)\}, \text{ si A est un processus} \\ \\ \dfrac{1}{N-|u|} \sum_{t=1,\, N-|u|} A(t)A(t+u), \text{ si A est une suite numérique}. \end{cases}$$

Puisque :

$$\mathbb{E}\{C_Y{}^N(u) / v(u)\} = \begin{cases} [1 - (|u|/N)]\, (R_A{}^N(u)/ v(u))\, \gamma_X(u)\,, \text{ si } |u| < N \\ \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

on peut écrire :

$$\mathbb{E}\{\hat{\varphi}_X(\lambda)\} = (1/2\pi) \sum_{|u|<N} e^{-i\lambda u}\, k_N{}^M(u)\, \gamma_X(u)\ \ (R_A{}^N(u)/ v(u))$$

$$- (1/2\pi) \sum_{|u|<N} k_N{}^M(u)\, (|u|/N)\ \ \gamma_X(u)\ \ (R_A{}^N(u)/ v(u)).$$

Au voisinage de N infini, le deuxième terme du membre de droite de l'égalité précédente est négligeable, la contribution principale au biais de $\hat{\varphi}_X$ vient donc du premier terme.

Le phénomène remarqué plus haut peut s'expliquer par le fait que, puisque, sous (ii) ou (ii')

$$(R_A{}^N(u) / v(u)) \underset{N\infty}{\rightarrow} 1$$

plus vite que $1/M^q$, le biais de $\hat{\varphi}_X$ est asymptotiquement corrigé de l'influence de A.

3. Etude de la variance asymptotique de $\hat{\varphi}_X$ dans le cas d'un processus de modulation d'amplitude.

On suppose dans cette étude que A désigne un processus stationnaire au 4-ième ordre, d'espérance mathématique $\mu \neq 0$.

3.1. Les hypothèses de travail :

Elles sont indexées par un nombre $p \geq 0$ et concernent naturellement d'une part le processus étudié et notées dans ce cas $H_X^{(p)}$, et d'autre part le processus de modulation d'amplitude et notées $H_A^{(p)}$. On les énonce :

$H_X^{(p)}$: X est un processus défini sur $\mathfrak{D}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \beta_{\mathbb{R}})$, stationnaire au 4-ième ordre, centré, de fonction de cumulants d'ordre 4 $\mathbf{Q}_X^4$ vérifiant

$H_X^{(p)}(i)$: $$\sum_{q,r,s} |\mathbf{Q}_X^4(q,r,s)| < +\infty,$$

et de fonction de covariance γ_X vérifiant

$H_X^{(p)}(ii)$: Il existe un nombre positif ou nul p tel que

$$\sum_u |u|^p |\gamma_X(u)| < +\infty.$$

$H_A^{(p)}$: A est un processus défini sur $\mathfrak{D}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \beta_{\mathbb{R}})$, de moments d'ordre 4 <u>bornés</u> et de fonction de covariance γ_A vérifiant

$H_A^{(p)}(i)$: $$\sum_u |\gamma_A(u)| < +\infty,$$

$H_A^{(p)}(ii)$: il existe un nombre positif ou nul p et une constante K strictement positive tels que

$$(\forall q,u \in \mathbb{Z}) \left(\sum_r |\mathrm{Cov}\{A(t)A(t+q),\ A(t+r)A(t+r+u)\}| \leq (|q|^p + |u|^p + 1) K < +\infty\right).$$

Remarque 2 :

On peut envisager d'exprimer des hypothèses de travail concernant A en termes des covariances et cumulants d'ordre 3 de A. La proposition I-5 nous suggère les hypothèses $H'_A{}^{(p)}$ consistant en l'hypothèse $H_A{}^{(p)}(i)$ précédente et en l'hypothèse $H'_A{}^{(p)}(ii)$ suivante :

$$H'_A{}^{(p)}(ii) : (\forall q,u \in \mathbb{Z})(\sum_r |\mathbf{Q}_A{}^4(q,r,r+u)$$

$$+ \mu\{\mathbf{Q}_A{}^3(q,r)+\mathbf{Q}_A{}^3(q,r+u)+\mathbf{Q}_A{}^3(r,r+u)+\mathbf{Q}_A{}^3(r-q,u)\}|$$

$$\leq (|q|^p + |u|^p + 1)K < +\infty),$$

où $\mathbf{Q}_A{}^3$ désignent la fonction de cumulants d'ordre 3 du processus A.

Notons T(q,r,r+u) le terme entre |.| dans $H'_A{}^{(p)}(ii)$. Le lemme I-1 donne la relation :

$$(3): \mathrm{Cov}\{A(t)A(t+q),A(t+r)A(t+r+u)\} = T(q,r,r+u) + 2\gamma_A(r+u)\gamma_A(q-r) + \mu^2\gamma_A(r).$$

Si $H_A{}^{(p)}(i)$ est vrai, (3) permet d'établir aisément

$$H'_A{}^{(p)}(ii) \Leftrightarrow H_A{}^{(p)}(ii).$$

Donc :

$$H_A{}^{(p)} \equiv H'_A{}^{(p)}.$$

Remarque 3 :

Posant p=0, on obtient les conditions les plus faibles sur le processus X pour lequel on n'impose aucune régularité particulière à la fonction de densité spectrale f_X : cela entraîne une condition plus forte -par $H_A{}^{(0)}$- concernant les variables A(t) du processus de modulation d'amplitude quant à leur dépendance. Dans nos hypothèses de travail, p pénalise en restrictions la structure du processus A d'autant qu'il élargit celle du processus X et vice versa. Cette remarque rejoint le commentaire page II-14.

3.2. Conséquences :

Elles concernent d'abord la sommabilité de la fonction de cumulants d'ordre 4 $\mathbf{Q}_Y{}^4$ du processus Y = AX par la

Proposition 3 :

Supposons que, pour un $p \geq 0$, X vérifie $H_X^{(p)}$ et A vérifie $H_A^{(p)}$(ii).
Alors :

$$\sum_{q,r,s} |Q_Y^4(q,r,s)| < +\infty.$$

En ce qui concerne la mq-ergodicité des processus A et Y, on a :

Proposition 4 :

Pour tout $p \geq 0$:
1°) Sous $H_A^{(p)}$, le processus A est mq-ergodique au 2-ième degré.

2°) Sous $H_A^{(p)}$ et $H_X^{(p)}$, le processus $Y = AX$ est mq-ergodique au 2-ième degré.

Ces propositions sont démontrées au paragraphe 5.2.
Si $H_A^{(p)}$(i) est vraie, la série $\sum_r |b_r|$ du lemme 1 est convergente pourvu que

$$\mu \neq 0$$

et

$$v(r) = \gamma_A(r) + \mu^2 \neq 0, \ \forall\, r \in \mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, l'estimateur $\hat{\varphi}_X(\lambda)$ est aussi défini par **F*3**. Nos hypothèses de travail assurent en particulier, grâce à la proposition 4.2°), que C'^N_X est un estimateur mq-consistant de γ_X. La proposition 3 permet alors d'envisager un théorème sur la variance asymptotique de $\hat{\varphi}_X$.

Remarque 4 : Concernant le biais asymptotique de $\hat{\varphi}_X(\lambda)$:

Dans le théorème 1, sous $H_X^{(p)}$, la série $\sum_u |u|^q |\gamma_X(u)|$ converge dès que $p \geq q$. Cela permet d'énoncer le

Théorème 1' :

Sous les mêmes hypothèses concernant $k(\,)$, M, (M^q/N) et (M/N) que dans le théorème 1, le biais asymptotique de $\hat{\varphi}_X(\lambda)$ est comme dans ce théorème si X vérifie $H_X^{(q)}$ et si A vérifie $H_A^{(0)}$.

3.3. Variance - covariances asymptotiques de $\hat{\varphi}_X$.

Théorème 2:

Soit X un processus vérifiant $H_X^{(p)}$
Soit A un processus vérifiant $H_A^{(p)}$, et supposons que $\gamma_A(r) \neq -\mu^2$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$.
Soit la série temporelle

$$\{Y(1), \dots, Y(N)\},$$

réalisation de longueur N du processus modulé en amplitude Y = AX.
Alors, sous les mêmes hypothèses concernant k(.) et M qu'au théorème I-4, on a :

$$\lim_N (N/M) \operatorname{Cov}\{\hat{\varphi}_X(\lambda), \hat{\varphi}_X(\lambda')\} =$$

$$(\delta(\lambda-\lambda') + \delta(\lambda+\lambda')) \;\; \mu^{-4} (\textstyle\int_{\mathbb{R}} k^2(t)\, dt)\, f_Y^2(\lambda),$$

où
$$\delta(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \ \ (\text{modulo } 2\pi), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La démonstration de ce théorème est déplacée au paragraphe 5.3.
Grâce à l'expression (1) (cf. § 1.3) donnant $f_Y(\lambda)$, on obtient le

Corollaire 1:

Sous les hypothèses du théorème précédent, et avec ses notations, on a :

$$(N/M) \operatorname{Cov}\{\hat{\varphi}_X(\lambda), \hat{\varphi}_X(\lambda')\} \underset{N\infty}{\rightarrow}$$

$$(\delta(\lambda+\lambda') + \delta(\lambda-\lambda'))\,[f_X(\lambda) + \mu^{-2} (f_A * f_X)(\lambda)]^2 \;\; (\textstyle\int_{\mathbb{R}} k^2(t)\, dt).$$

Remarque 5: **Efficacité comparée des estimateurs $\hat{\varphi}_X$ et $\hat{f}_X$.**

La formule du corollaire, parce que $\mu^{-2}(f_A * f_X)(\lambda) \geq 0$, entraîne

$$(\mathfrak{J}): \lim_N (N/M) \operatorname{Cov}\{\hat{\varphi}_X(\lambda), \hat{\varphi}_X(\lambda')\} \geq (\delta(\lambda+\lambda')+\delta(\lambda-\lambda'))\, (f_X(\lambda))^2\, (\textstyle\int_{\mathbb{R}} k^2(t)\, dt)$$

D'après le théorème I-4, le deuxième membre de $\mathfrak{J}$ représente $\lim_N (N/M)\, \mathrm{Cov}\{\hat{f}_X(\lambda), \hat{f}_X(\lambda')\}$, où $\hat{f}_X$ désigne l'estimateur de f_X obtenu à partir d'une série complète non modulée en amplitude, on peut donc écrire

$$\lim_N (N/M)\, \mathrm{Cov}\{\hat{\varphi}_X(\lambda), \hat{\varphi}_X(\lambda')\} \geqslant \lim_N (N/M)\, \mathrm{Cov}\{\hat{f}_X(\lambda), \hat{f}_X(\lambda')\}.$$

L'inégalité précédente permet une conclusion identique à celle du paragraphe II-4.2 : la qualité de l'estimation de $f_X(\lambda)$ obtenue à partir d'une observation modulée en amplitude de X - via $\hat{\varphi}_X(\lambda)$ - est moindre que celle que l'on aurait obtenue à partir d'une observation directe et complète du processus X - via $\hat{f}_X(\lambda)$.

4. Le cas particulier des séries temporelles stationnaires avec données manquantes.

On applique ici dans le cadre particulier d'un processus (ou d'une suite) de modulation d'amplitude à valeurs dans $\{0,1\}$, les méthodes et résultats précédents concernant l'estimation non paramétrique spectrale.
On obtient en particulier, pour la variance asymptotique de l'estimateur de densité spectrale, le résultat de Sheinok, objet de [25], au corollaire 3, et on démontre la formule de Bloomfield figurant dans [2] au corollaire 4.

On souligne que toute suite à valeurs dans $\{0,1\}$ est bornée, et que tout processus à valeurs dans $\{0,1\}$ possède des moments de tout ordre bornés. En outre, on note que les hypothèses $H_A^{(p)}$ sont conséquences de l'hypothèse $H_A^{(p)}$(ii), que l'on désignera dorénavant par $\underline{H}_A^{(p)}$:

$\underline{H}_A^{(p)}$: A est un processus 0-1 défini sur $\mathfrak{D}$, stationnaire au 4° ordre, pour lequel il existe un nombre $p \geq 0$ vérifiant :

$$(\forall q, u \in \mathbb{Z})\ (\sum_r |\mathrm{Cov}\{A(t)A(t+q), A(t+r)A(t+r+u)\}| \leqslant (|q|^p + |u|^p + 1)\, K < +\infty),$$

où K est une constante strictement positive.

En effet, pour u = q = 0, $\underline{H}_A^{(p)}$ entraîne :

$$\sum_r |Cov\{A^2(t), A^2(t+r)\}| < K < +\infty;$$

puisque $A(t) \equiv A^2(t)$, on a :

$$\sum_r |\gamma_A(r)| < +\infty.$$

Ce qui est $H_A^{(p)}(i)$.

On commence par présenter les travaux ayant déjà donné lieu à des résultats en analyse spectrale non paramétrique au paragraphe suivant.

4.1. Travaux antérieurs en rapport avec l'analyse non paramétrique spectrale avec données manquantes.

4.1.1. Les modèles de processus ou suites de représentation des données manquantes:

Après Jones dans **[12(1)]**, Parzen (1963) dans **[17(4)]** a considéré le contexte où, dans une série temporelle, les données sont régulièrement manquantes, et ce, de façon périodique avec α valeurs consécutives observées et β valeurs consécutives manquantes. Le mécanisme à l'origine de cette situation est de caractère déterministe : on peut le définir comme la fonction vérifiant l'hypothèse $\mathcal{H}_A^P$ (P pour Parzen) suivante :

$\mathcal{H}_A^P$: A est une suite numérique définie par

$$A(n) = \begin{cases} 1, \text{ si } n = 1, \dots, \alpha \pmod{\theta} \\ \\ 0, \text{ si } n = \alpha + 1, \dots, \beta \; (\text{mod } \theta = \alpha + \beta). \end{cases}$$

Un tel shéma est appelé "α-β sampling" (en anglais). Il est aussi utilisé dans **[10]**.
Dans **[5]**, Clinger et Van Ness, ont proposé un shéma plus général que le précédent que l'on peut traduire par l'hypothèse $\mathcal{H}_A^{CV}$:

$\mathcal{H}_A^{CV}$: A est une suite numérique telle que pour deux entiers positifs Q et P, avec Q < P, et une suite d'entiers $(t_j)_{j=1,2,\dots,Q}$ vérifiant

$$t_1 < t_2 < \dots < t_Q$$

on a :

$$A(n) = \begin{cases} 1, \text{ si } n = (k-1)P + t_j,\ j = 1, \dots, Q;\ k \in \mathbb{N}^* \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il permet une certaine imbriquation des données enregistrées et manquantes, qui ne forment plus nécessairement des blocs consécutifs. L'hypothèse $\mathcal{H}_A^P$ est un cas particulier de $\mathcal{H}_A^{CV}$ en prenant :

$$(t_i \equiv i,\ \forall i = 1,2, \dots, Q)$$

et

$$(Q = \alpha\ ,\ P = \alpha + \beta).$$

Sheinok (1965) dans **[25]** a le premier étudié la situation où les données sont manquantes selon un mode aléatoire; dans son cas, A est un processus vérifiant :

$\mathcal{H}_A^S$: A est formé de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, définies sur $\mathfrak{D}$ vérifiant :

$$P[A(n) = 1] = \mathfrak{p},\ \mathfrak{p} \in]0,1[,$$
$$P[A(n) = 0] = 1 - \mathfrak{p}.$$

Bloomfield (1970) dans **[2]** a considéré un shéma plus général que le précédent, dans lequel il a introduit une certaine dépendance entre les variables aléatoires A(i) par les hypothèses :

$\mathcal{H}_A^B$: A est un processus défini sur $\mathfrak{D}$ vérifiant

(i) : $P[A(n) = 1] = \mathfrak{p} \in]0,1[,\ P[A(n) = 0] = 1 - \mathfrak{p}$

(ii) : $\mathcal{M}_A^2(r) = \mathfrak{p}\, \mathfrak{u}(r),\ \mathfrak{u}(r) > 0\ \forall r \in \mathbb{Z}$

(iii) : $\mathcal{M}_A^4(q,r,s) = \mathfrak{p}^2\, \mathfrak{v}(q,r,s)\ ,\ \forall q,r,s \in \mathbb{Z},$

où $\mathfrak{v}(.,.,.)$ est telle que

$$\sum_q |\mathfrak{v}(r,q,q+s) - \mathfrak{u}(r)\, \mathfrak{u}(s)| \leq (|r| + |s| + 1)V < +\infty,\ V > 0.$$

(iii) est analogue à la condition 2.6.2(1) de Brillinger (cf. **[4]**)

4.1.2. Les estimateurs proposés de la fonction de densité spectrale :

Parzen sous $\mathcal{H}_A{}^P$ et considérant un processus X stationnaire gaussien centré, a proposé dans le cas où $\alpha > \beta$, l'estimateur $\hat{f}^P{}_X(\lambda)$ suivant de $f_X(\lambda)$:

$$\text{P1: } \hat{f}^P{}_X(\lambda)=\{\Sigma_{s,t=1,N}(A(s)A(t)\,X(s)\,X(t)/v(s-t))\cos\lambda(s-t)\,k_N{}^M(s-t)\}(2\pi N)^{-1}.$$

Avec les mêmes hypothèses sur X et sous $\mathcal{H}_A{}^S$, Sheïnok a proposé l'estimateur

$$\hat{f}^S{}_X(\lambda) = \int_\Pi K_N(\lambda-s)\,\mathfrak{I}_X{}^N(s)\,ds$$

où $\mathfrak{I}_X{}^N(.)$ est calculé à partir de la série modulée en amplitude par

$$\mathfrak{I}_X{}^N(\lambda) = (2\pi N)^{-1}\,\{\Sigma_{j=1,N}(A^2(j)/p)\,X^2(j) + \Sigma_{k=1,N}\Sigma_{j=1,N}(A(j)A(k)/p^2)\,X(j)\,X(k)\,e^{-i(j-k)\lambda}\}.$$

Bloomfield, sous $\mathcal{H}_A{}^B$ et $H_X{}^{(1)}$ a proposé l'estimateur

$$\hat{f}^B{}_X(\lambda) = (2\pi)^{-1}\,\Sigma_{r\in\mathbb{Z}}\,(C_Y{}^N(r)/\mu(r))\;k_N{}^M(r)\,e^{-i\lambda r}.$$

4.2. Généralisation de ces estimateurs.

Au paragraphe I, on a proposé l'estimateur $\hat{\varphi}_X$ de f_X sous des hypothèses plus générales que celles sous lesquelles sont proposés les estimateurs précédents; on montre que la méthodologie qui a permis d'obtenir $\hat{\varphi}_X(\lambda)$, fournit aussi ces estimateurs :

Proposition I :

Sous $\mathcal{H}_A{}^P$ (resp. $\mathcal{H}_A{}^S$, resp. $\mathcal{H}_A{}^B$), $\hat{f}^P{}_X$ (resp. $\hat{f}^S{}_X$, resp. $\hat{f}^B{}_X$) est identique à $\hat{\varphi}_X$.

Démonstration :

On montre d'abord l'existence de v(u) tel que :

$$v(u) \neq 0\,,\quad \forall u.$$

Sous $\mathcal{H}_A{}^P$, on a :

$$v(u) = \theta^{-1} \sum_{t=1,\theta} A(t)A(t+u) \equiv \theta \; (\theta = \alpha + \beta),$$

Parzen montre dans **[17 (4)]** que

$$\alpha > \beta \Rightarrow v(u) \neq 0.$$

Sous $\mathcal{H}_A{}^S$ et $\mathcal{H}_A{}^B$, A est stationnaire au 2-ième ordre, d'où

$$\mu = \mathbf{p}$$

et:

$$v(u) = \mathcal{M}_A{}^2(u) = (\gamma_A(u) + \mu^2),$$

et il est aisé de voir que

$$v(u) \neq 0, \forall u \in \mathbb{Z};$$

cela entraîne l'existence des estimateurs $\hat{f}^P{}_X(\lambda)$, $\hat{f}^S{}_X(\lambda)$, $\hat{f}^B{}_X(\lambda)$. Pour montrer la proposition, il suffit de les écrire sous la forme **F*2** ou **F*3**. $\hat{f}^B{}_X(\lambda)$ est déjà donné sous la forme **F*2**, parce que sous $\mathcal{H}_A{}^B$:

$$v(u) = \mathbf{p}\, \mathbf{u}(r) > 0.$$

Quant à $\hat{f}^S{}_X(\lambda)$, remarquant que

$$\mathcal{I}_X{}^N(\lambda) = (2\pi\mathbf{p})^{-1}\, C_Y{}^N(0) + (2\pi)^{-1} \sum_{u \in \mathbb{Z}^*} (C_Y{}^N(u) / \mathbf{p}^2)\, e^{-i\lambda u},$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \hat{f}^S{}_X(\lambda) &= (2\pi\mathbf{p}^2)^{-1} \sum_{u \in \mathbb{Z}} k_N{}^M(u)\, C_Y{}^N(u) e^{-i\lambda u} \\ &\quad + (2\pi\mathbf{p})^{-1} C_Y{}^N(0) - (2\pi\mathbf{p}^2)^{-1} C_Y{}^N(0) \\ &= \mathbf{p}^{-2} \hat{f}_Y(\lambda) - (2\pi\mathbf{p})^{-1}(1-\mathbf{p}^{-1})\, C_Y{}^N(0). \end{aligned}$$

Ce qui est exactement $\hat{\varphi}_X(\lambda)$ sous la forme **F*3**.
En ce qui concerne $\hat{f}^P{}_X(\lambda)$, posant $u = s-t$ dans (P1), on obtient :

$$\hat{f}^P{}_X(\lambda) = \pi^{-1} \sum_{u > 1} k_N{}^M(u) \cos(\lambda u)\, C'_X{}^N(u) + (2\pi)^{-1}\, C'_X{}^N(0),$$

ce qui est la forme **F*2** de $\hat{\varphi}_X(\lambda)$. □

On sait déjà que sous les hypothèses du théorème 1, les données manquantes dans une série temporelle stationnaire, représentées par A, n'ont aucune influence sur le biais asymptotique de $\hat{\varphi}_X$; on s'intéresse, dans le paragraphe suivant, à la variance asymptotique de ce dernier.

4.3. Variance asymptotique de $\hat{\varphi}_X$.

Le corollaire 1 donne le

Théorème 2':

Soient X un processus vérifiant $H_X^{(p)}$ et A un processus 0-1 vérifiant $\underline{H}_A^{(p)}$. Avec les mêmes hypothèses concernant k(.) et M que celles du théorème 1-4, et si $\delta(.)$ est comme dans ce théorème, on a :

$$(\mathscr{C})\quad \lim_N (N/M)\,\mathrm{Cov}\{\hat{\varphi}_X(\lambda), \hat{\varphi}_X(\lambda')\} \equiv$$

$$(\delta(\lambda+\lambda') + \delta(\lambda-\lambda'))\,[f_X(\lambda) + \mu^{-2}(f_A * f_X)(\lambda)]^2 \left(\int_{\mathbb{R}} k^2(t)dt\right).$$

On donne divers corollaires dans lesquels on suppose que k, M et $\delta(.)$ sont comme dans le théorème 1-4.

corollaire 2:

Soit X un processus stationnaire gaussien centré, de fonction de covariance absolument sommable. Si A vérifie $\underline{H}_A^{(0)}$, alors $\hat{\varphi}_X(\lambda)$ vérifie $(\mathscr{C})$.

Preuve :
Elle découle de l'application du théorème 2' du fait que X étant gaussien, ses cumulants d'ordre 4 sont nuls : X vérifie donc $H_X^{(0)}$. □

Même si $\underline{H}_A^{(0)}$ sont des hypothèses relativement fortes (cf. Remarque 3, §3.1), elles sont encore plus faibles que les hypothèses $\mathscr{H}_A^S$, qui considèrent des variables aléatoires A(t) bernoulliennes indépendantes :

Corollaire 3:

Sous les hypothèses du corrolaire 2 concernant X et si A vérifie $\mathscr{H}_A^S$ alors :

alors :

$$\lim_N (N/M)\, \mathrm{Cov}\{\hat{\varphi}_X(\lambda), \hat{\varphi}_X(\lambda')\} \equiv$$

$$(\delta(\lambda+\lambda') + \delta(\lambda-\lambda'))\,[f_X(\lambda) - (2\pi)^{-1}(1-\mathfrak{p}^{-1}) \int_\Pi f_X(s)\, ds]\,(\int_{\mathbb{R}} k^2(t)\, dt).$$

Preuve :
Elle découle du fait que $\mathcal{H}_A{}^S$ entraîne $\underline{H}_A{}^{(0)}$, ici $\mathfrak{p} = \mu$. □

Ce corollaire 2 a été établi, pour $\lambda=\lambda'$, par Sheïnok dans **[25]** moyennant un lourd calcul de $\Sigma_s\, \Sigma_t\, \mathrm{Cov}\{\mathfrak{I}_X{}^N(s), \mathfrak{I}_X{}^N(t)\}$; c'est le premier résultat obtenu dans le cas d'une représentation de données manquantes par un processus aléatoire.

Corollaire 4 :

Si X vérifie $H_X{}^{(1)}$ et si A vérifie $\mathcal{H}_A{}^B$, alors $\hat{\varphi}_X(\lambda)$ vérifie ($\mathcal{C}$) avec $\mu=\mathfrak{p}$.

Preuve :
Elle découle du théorème 2', il suffit de remarquer que $\mathcal{H}_A{}^B$ entraîne $\underline{H}_A{}^{(1)}$.
□

Ce corollaire démontre la formule de Bloomfield, que l'on trouvera dans **[2]**.

Remarque 6 :
La conclusion en remarque 5 demeure vraie si A est une représentation des données manquantes dans une série comme aux corollaires 3 et 4; de plus, on montre aisément que la quantité $\lim_N (N/M)\mathrm{Cov}\{\hat{\varphi}_X(\lambda), \hat{\varphi}_X(\lambda')\}$ est décroissante avec $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ traduisant la proportion des données observées (i.e. non manquantes) dans la série; cette limite tend vers son minimum (qui est égal à $\lim_N (N/M)\mathrm{Cov}\{\hat{f}_X(\lambda), \hat{f}_X(\lambda')\}$) ou vers l'infini, selon que $\mathfrak{p}$ tende vers un ou zéro, c'est-à-dire selon que l'on possède plus ou moins de données dans l'observation. On peut donc attribuer la baisse de la qualité de notre estimateur $\hat{\varphi}_X$ par rapport à celle de $\hat{f}_X$ à la perte d'information dans la série issue du processus d'étude.

5. Démonstrations de propositions et théorèmes de ce chapitre.

Toutes les notations jusque là utilisées sont ici conservées.

5.1. Démonstration de la proposition 2 et du théorème 1:

Rappelant que pour tout u tel que $|u| < N$, on a posé au paragraphe 2 :

$$R_A^N(u) = \begin{cases} (1/N-|u|)\,\Sigma_{t=1,\,N-|u|}\,\mathbb{E}\{A(t)A(t+u)\}, & \text{si A est un processus} \\ (1/N-|u|)\,\Sigma_{t=1,\,N-|u|}\,A(t)A(t+u), & \text{si A est une suite numérique,} \end{cases}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned}(2')\ \mathbb{E}\{\hat{f}_Y(\lambda)-\tilde{f}_Y(\lambda)\} &= (1/2\pi)\Sigma_{|u|<N}\, e^{-i\lambda u}\,\gamma_X(u)v(u)[(R_A^N(u)/v(u))k_N^M(u)-1] \\ &- (1/2\pi)\Sigma_{|u|<N}\, e^{-i\lambda u}\,(|u|/N)\,\gamma_X(u)\,R_A^N(u)\,k_N^M(u) \\ &- (1/2\pi)\Sigma_{|u|\geq N}\, e^{-i\lambda u}\,\gamma_X(u)v(u).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(2'')\ \mathbb{E}\{\hat{\varphi}_X(\lambda)-f_X(\lambda)\} &= (1/2\pi)\Sigma_{|u|<N}\, e^{-i\lambda u}\,\gamma_X(u)[(R_A^N(u)/v(u))k_N^M(u)-1] \\ &- (1/2\pi)\Sigma_{|u|<N}\, e^{-i\lambda u}\,(|u|/N)\,\gamma_X(u)\,(\,R_A^N(u)/v(u))k_N^M(u) \\ &- (1/2\pi)\Sigma_{|u|\geq N}\, e^{-i\lambda u}\,\gamma_X(u).\end{aligned}$$

On établit d'abord la formule de la proposition 2. Pour cela, notons $T_1^N(\lambda)$, $T_2^N(\lambda)$ et $T_3^N(\lambda)$, respectivement les premier, deuxième et troisième terme de l'égalité (2').
On démontre en premier lieu les relations

$$M^q\,T_2^N(\lambda) \underset{N\infty}{\to} 0$$

et

$$M^q\,T_3^N(\lambda) \underset{N\infty}{\to} 0.$$

On remarque d'abord que, puisque la suite $(v(u))_{u\in\mathbb{Z}}$ est bornée et la série $\sum_u |u|^q|\gamma_X(u)|$ convergente, alors les quantités $((1/2\pi)\sum_{|u|<N}|\gamma_X(u)|\,|u|^q)$ et $((1/2\pi)\sum_{|u|\geq N}|\gamma_X(u)|\,|v(u)|\,|u|^q)$ sont bornées par une constante $K > 0$.

Dans $T_3^N(\lambda)$, on a

$$(|u|/N) \geq 1,$$

donc $|T_3^N(1)|$ est majoré par $(1/N^q)(2\pi)^{-1}\sum_{|u|\geq N}|\gamma_X(u)v(u)|\,|u|^q$ et finalement

$$M^q\,|T_3^N(\lambda)| \leq K\,(M^q/N^q).$$

Dans $|T_2^N(\lambda)|$, les termes $|R_A^N(u)k_N^M(u)|$ sont bornés en vertu des hypothèses sur $k(.)$ et A; on peut écrire, pour une constante $K' > 0$:

$$M^q\,|T_2^N(\lambda)| < KK'\,(M^q/N)\ ,\ \text{si } q > 1$$

ou bien, puisque $(|u|/N) < 1$,

$$M^q\,|T_2^N(\lambda)| < KK'\,(M/N)^q\ ,\ \text{si } 0 < q \leq 1.$$

Si N tend vers l'infini, $(M/N)^q$ et (M^q/N) tendent vers zéro (par hypothèse); par suite, $M^q\,T_2^N(\lambda)$ et $M^q\,T_3^N(\lambda)$ tendent vers zéro.
Maintenant, dans $|T_3^N(\lambda)|$, posons :

$$\alpha^N(u) = (1/2\pi)\,|\gamma_X(u)|\,|R_A^N(u)\,k_N^M(u) - v(u)|;$$

grâce aux hypothèses concernant $k(.)$ et A, on peut trouver une constante $K''>0$ telle que :

$$\alpha^N(u) \leq (1/2\pi)|\gamma_X(u)|\,K''.$$

On a, de plus :

$$\sum_u (1/2\pi)\,|\gamma_X(u)|\,K'' < +\infty.$$

Le résultat découle ensuite du théorème de convergence dominée de Lebesgue, modulo la relation (P) :

(P) $$M^q\,[(R_A^N(u)/v(u))\,k_N^M(u) - 1] \underset{N\infty}{\rightarrow} -k_q\,|u|^q.$$

En effet, rappelant que

$$k_N^M(u) = k(u/M),$$

on a, pour $u \neq 0$:

$$M^q [k_N^M(u) - 1] = M^q [k(u/M) - 1] = [(k(u/M) - 1)/ (|u|/M)^q] \; |u|^q;$$

si N tend vers l'infini, alors :

$$M \to \infty \quad \text{et} \quad (u/M) \to 0,$$

donc

$$M^q [k(u/M) - 1] \underset{N\infty}{\to} - k_q |u|^q$$

en vertu de l' hypothèse sur $k(.)$.
Maintenant, si l'on pose :

$$\beta^N(u) = R_A^N(u) / v(u)$$

on a :

$$\beta^N(u) \underset{N\infty}{\to} 1.$$

Puisque

$$[\beta^N(u) k(u/M) - 1] = \beta^N(u) [k(u/M) - 1] + [\beta^N(u) - 1],$$

alors, au voisinage de l'infini, on a (rappelant que $k_q \neq 0$ par hypothèse):

$$\beta^N(u) [k(u/M)-1] \sim (- k_q(|u|/M)^q);$$

afin de montrer (P), il suffit de remarquer que :

$$M^q [\beta^N(u) - 1] \underset{N\infty}{\to} 0.$$

En effet,

$$M^q [\beta^N(u) - 1] = (M^q/N) N [\beta^N(u) - 1];$$

quand N tend vers l'infini, on a :

$$(M^q/N) \to 0$$

d'une part, (ii) ou (ii') donnent

$$N\,[\beta^N(u) - 1] = [N/(N-|u|)]\,[(N-|u|)\,R_A{}^N(u)/v(u) - N + |u|] = O(1)$$

d'autre part.

Ceci achève la preuve de (P) et établit la formule de la proposition 2. Pour établir celle du théorème 1, on procède de manière analogue : les termes $T_1{}^N(\lambda)$, $T_2{}^N(\lambda)$ et $T_3{}^N(\lambda)$ sont à remplacer par $*T_1{}^N(\lambda)$, $*T_2{}^N(\lambda)$ et $*T_3{}^N(\lambda)$, respectivement, qui désigent les premier, deuxième et troisième termes, respectivement, du deuxième membre de l'égalité (2"). La condition (iii) du théorème 1, qui ne figurait pas dans la proposition 2, intervient pour assurer que $M^q.*T_2{}^N(\lambda)$ et $M^q.*T_3{}^N(\lambda)$ tendent vers zéro quand N tend vers l'infini.

Pour finir la démonstation il reste à constater d'abord que si A est un processus stationnaire au 2-ième ordre alors :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}\{C_A{}^N(u)\} - v(u)| &= |v(u)|\;|(1-|u|/N) - 1| \\ &= (1/N)\,|v(u)\,u| \leq (K'_u/N) \end{aligned}$$

où K'_u est une constante positive; i.e. :

$$|\mathbb{E}\{C_A{}^N(u)\} - v(u)| = O(1/N).$$

Ce qui est (ii').

Ensuite, si A est un processus AS au 2-ième ordre et si $(b_r)_r$ est absolument sommable, on a déjà remarqué dans la démonstration de la proposition 1 que

$$v(r) = \gamma_A(r) + \mu^2 \neq 0, \quad \forall r \in \mathbb{Z},$$

ce qui vérifie (i) et finit la démonstration de la proposition 2. De plus :

$$\sum_r |b_r| < +\infty \;\Rightarrow\; \gamma_A(r) \underset{r\infty}{\to} 0,$$

la suite de terme général $|1/v_A(r)|$ est bornée. Ce qui vérifie (iii) et finit la démonstration du théorème 1. $\square$

5.2. **Démonstration des propositions 3 et 4** :

Pour montrer les propositions 3 et 4, on établit d'abord le

Lemme 2 :

Soient A et X deux processus stationnaires au 4-ième ordre, indépendants; si X est de plus centré, on a :

$$\sum_{q,r,s} |\mathbf{Q_Y}^4(q,r,s)| \leq \sum_{q,r,s} |\mathcal{M}_A{}^4(q,r,s)\, \mathbf{Q_X}^4(q,r,s)| + 3\sum_{q,r,s} |\gamma_X(q)\gamma_X(r-s)\, \{\mathcal{M}_A{}^4(q,r,s)-v(q)v(r-s)\}| .$$

Preuve :

Puisque A et X sont indépendants, on a :

$$\mathcal{M}_Y{}^4(q,r,s) = \mathcal{M}_A{}^4(q,r,s)\, \mathcal{M}_X{}^4(q,r,s)$$

Y étant centré, on peut écrire

$$\mathbf{Q_Y}^4(q,r,s) = \mathcal{M}_Y{}^4(q,r,s) - \mathbf{Q_Y}(q,r,s)$$

où $\mathbf{Q_Y}(.,.,.)$ est défini au paragraphe I-1.1.2, on obtient :

$$\mathbf{Q_Y}^4(q,r,s) = \mathcal{M}_A{}^4(q,r,s) - \mathbf{Q_X}^4(q,r,s) + [\mathcal{M}_A{}^4(q,r,s) - \mathbf{Q_X}(q,r,s) - \mathbf{Q_Y}(q,r,s)].$$

Désignons par T1(q,r,s) et T2(q,r,s) les premier et deuxième termes, respectivement, du membre de droite de l'égalité précédente; puisque :

$$\sum_{q,r,s} |\mathbf{Q_Y}^4(q,r,s)| \leq \sum_{q,r,s} |T1(q,r,s)| + \sum_{q,r,s} |T2(q,r,s)|,$$

il suffit, pour prouver le lemme, d'établir

$$\sum_{q,r,s} |T2(q,r,s)| = 3 \sum_{q,r,s} |\gamma_X(q)\gamma_X(r-s)\, \{\mathcal{M}_A(q,r,s)-v(q)v(r-s)\}| .$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbf{Q_Y}(q,r,s) = {} & \gamma_X(q)\gamma_X(r-s)\, v(q)v(r-s) \\ & + \gamma_X(r)\gamma_X(q-s)\, v(r)v(q-s) \\ & + \gamma_X(s)\gamma_X(r-q)\, v(s)v(r-q).\end{aligned}$$

Donc

$$(3') \qquad \sum_{q,r,s} |T2(q,r,s)| = 3\sum_{q,r,s} |\gamma_X(q)\gamma_X(r-s)|\, |\{\mathcal{M}_A{}^4(q,r,s)-v(q)v(r-s)\}|.$$

D'où le lemme. □

Démonstration de la proposition 3 :
Avec les notations utilisées dans la preuve du lemme précédent, et d'après ce dernier, il suffit de montrer

(4')
$$\Sigma_{q,r,s} |T1(q,r,s)| < +\infty$$
et

(4'')
$$\Sigma_{q,r,s} |T2(q,r,s)| < +\infty.$$

Puisque $\mathcal{M}_A{}^4(q,r,s)$ est borné pour tout $q,r,s \in \mathbb{Z}$ on a

$$\Sigma_{q,r,s} |\mathcal{M}_A{}^4(q,r,s)\, Q_X{}^4(q,r,s)| \leq K' \Sigma_{q,r,s} |Q_X{}^4(q,r,s)|,$$

où K' est une constante > 0 ; $H_X{}^{(p)}(i)$ entraîne ensuite

$$\Sigma_{q,r,s} |\mathcal{M}_A{}^4(q,r,s)\, Q_X{}^4(q,r,s)| < +\infty.$$

Ce qui prouve (4').
Ensuite, remarquant que

$$\{\mathcal{M}_A{}^4(q,r,s) - v(q)v(r-s)\} = \mathrm{Cov}\{A(t)A(t+q),\, A(t+r)A(t+s)\},$$

si on pose $u = s-r$, on obtient en utilisant (3') :

$$3^{-1}\Sigma_{q,r,s}|T2(q,r,s)| = \Sigma_q\Sigma_u|\gamma_X(q)\gamma_X(u)|\ \Sigma_r|\mathrm{Cov}\{A(t)A(t+q), A(t+r)A(t+r+u)\}|;$$

par suite, $H_A{}^{(p)}(ii)$ entraîne

$$(1/3)\ \Sigma_{q,r,s}|T2(q,r,s)| \leq \Sigma_q\Sigma_u|\gamma_X(q)\gamma_X(u)|\ (|q|^p + |u|^p + 1)\,K,$$
i.e.

$$(1/3)\ \Sigma_{q,r,s}|T2(q,r,s)| \leq K\,(\Sigma_q |q|^p\,|\gamma_X(q)|)\,(\Sigma_u |u|^p\,|\gamma_X(u)|)$$
$$+\ K\,(\Sigma_q |\gamma_X(q)|)\,(\Sigma_u |\gamma_X(u)|).$$

Toutes les séries du membre de droite de l'inégalité précédente convergent en vertu de $H_X^{(p)}(ii)$. Ce qui prouve (4''). □

Démonstration de la proposition 4 :
Pour montrer 1°), on se base sur la proposition I-5. On sait que $H_A^{(p)}(i)$ réalise $mq_A(i)$. Si l'on montre que

$$(5'):\qquad \sum_r |T(q,r,r+u)| < +\infty, \quad \forall q,u \in \mathbb{Z},$$

où $T(q,r,r+u)$ est défini au paragraphe 3.1, alors

$$T(q,r,r+u) \underset{r\infty}{\rightarrow} 0, \qquad \forall\, q,u \in \mathbb{Z},$$

et, en particulier

$$(5'')\qquad r^{-1}\sum_{s=0,r-1} T(q_0,s,s+q_0) \underset{r\infty}{\rightarrow} 0, \qquad \forall\, q_0 \in \mathbb{Z};$$

or (5'') ≡ $mq_A(ii)$. Il nous suffit donc de montrer (5').
La relation (3) du paragraphe 3.1 permet d'écrire, pour tout $q,u \in \mathbb{Z}$

$$\sum_r |T(q,r,r+u)| \leqslant \sum_r |Cov\{A(t)A(t+q),A(t+r)A(t+r+u)\}|$$

$$+ \sum_r |2\gamma_A(r+u)\gamma_A(q-r) + \mu^2\gamma_A(r)|.$$

Dans le deuxième membre de l'inégalité précédente, le premier terme est fini, pour tout $u,q \in \mathbb{Z}$ en vertu de l'hypothèse $H_A^{(p)}(ii)$, le deuxième terme l'est de même en vertu de $H_A^{(p)}(i)$; finalement

$$\sum_r |T(q,r,r+u)| < +\infty,$$

ce qui montre 1°).
On montre maintenant 2°). D'abord

$$\sum_q |\gamma_Y(q)| < +\infty$$

découle aisément de $H_X^{(p)}(ii)$ et $H_A^{(p)}(i)$. Donc

$$|\gamma_Y(u)| \underset{u\infty}{\rightarrow} 0.$$

Ce qui prouve, en particulier, que $mq_Y(i)$ est vraie.
Sous nos hypothèses, la proposition 3 entraîne

$$\sum_{q,r,s} |Q_Y^4(q,r,s)| < +\infty.$$

Soit $q_0 \in \mathbb{Z}$, si $s = q_0 + r$, alors en particulier :

$$Q_Y^4(q_0,r,r+q_0) \underset{r\infty}{\rightarrow} 0.$$

Donc

(6')
$$t^{-1}\sum_{r=1,t} Q_Y^4(q_0,r,r+q_0) \underset{t\infty}{\rightarrow} 0, \quad \forall q_0 \in \mathbb{Z}.$$

(6') réalise <u>mq_Y</u>(ii). Le résultat découle ensuite du corrolaire I-1. □

4.3. Démonstration du théorème 2 :

Elle est basée sur un théorème de Parzen (cf. **[17(1)]**, Theorem 7A), que l'on énonce ici sous la forme du

Théorème 3 :

Soit Z un processus stationnaire au 4-ième ordre, centré, de fonction de cumulants d'ordre 4, Q_Z^4 et de fonction de covariance γ_Z absolument sommables.
Soit B(.) une fonction réelle paire, absolument intégrable et de carré sommable sur Π.
Posons :

$$J_B^N(\lambda) = (B * \hat{f}_Z)(\lambda),$$

où $\hat{f}_Z$ est l'estimateur de la densité spectrale f_Z, obtenu par la méthode indirecte, avec les mêmes hypothèses concernant k(.) et M qu'au théorème I-4.
Alors, pour $\lambda, \lambda' \in \Pi$, on a :

$$\lim_N \mathrm{Cov}\{J_B^N(\lambda), J_B^N(\lambda')\} = \Big(4\pi\int_\Pi f_Z^2(s)\, B^*(\lambda-s)\, B^*(\lambda'-s)\, ds$$
$$+ 2\pi\iint_{\Pi^2} g_Z(\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_2)\, B^*(\lambda-\alpha_1)\, B^*(\lambda'-\alpha_2)\, d\alpha_1 d\alpha_2\Big),$$

où g_Z désigne la densité spectrale de la fonction de cumulant d'ordre 4 $\mathbf{Q}_Z{}^{\mathbf{4}}$ et

$$B^{\bullet}(\lambda - .) = 2^{-1}\,[B(\lambda - .) + B(\lambda + .)]$$

La fonction B de ce théorème est appelée "fonction de moyenne spectrale" [Trad. "Spectral averaging function"] par Parzen, dans **[17(1)]**. On note que la fonction b du lemme 1 est de ce type.

On rappelle que sous nos hypothèses de travail, $\hat{\varphi}_X(\lambda)$ est donné par **F*3**.

Puisque les processus A et Y sont stationnaires, alors :

$$\gamma_A \equiv \tilde{\gamma}_A \quad \text{et} \quad f_Y \equiv \tilde{f}_Y .$$

La fonction b du lemme 1 est donc donnée ici par

$$b(\lambda) = (1/2\pi)\textstyle\sum_r \, b_r\, e^{-i\lambda r},$$

où

$$b_r = \ (1/\mu^2)\,(\gamma_A(r)/(\gamma_A(r) + \mu^2)).$$

On peut alors écrire :

$$\hat{\varphi}_X(\lambda) = \mu^{-2}\hat{f}_Y(\lambda) - (b * \hat{f}_Y)(\lambda), \quad \forall \lambda \in \Pi,$$

où $\hat{f}_Y(\lambda)$ est l'estimateur de $f_Y(\lambda)$ obtenu au paragraphe I-4.3 par **F2**.

Pour $\lambda, \lambda' \in \Pi$, il vient :

$$(7') \qquad \begin{aligned} \mathrm{Cov}\{\hat{\varphi}_X(\lambda), \hat{\varphi}_X(\lambda')\} = {} & \mu^{-4}\,\mathrm{Cov}\{\hat{f}_Y(\lambda), \hat{f}_Y(\lambda')\} \\ & - \mu^{-2}\,\mathrm{Cov}\{\hat{f}_Y(\lambda), (b * \hat{f}_Y)(\lambda')\} \\ & - \mu^{-2}\,\mathrm{Cov}\{(b * \hat{f}_Y)(\lambda'), (b * \hat{f}_Y)(\lambda)\} \\ & + \mathrm{Cov}\{(b * \hat{f}_Y)(\lambda), (b * \hat{f}_Y)(\lambda')\}. \end{aligned}$$

On note $T_N{}^1(\lambda,\lambda')$, $T_N{}^2(\lambda,\lambda')$, $T_N{}^3(\lambda,\lambda')$ et $T_N{}^4(\lambda,\lambda')$, les premier, deuxième, troisième et quatrième termes respectivement du deuxième membre de (7').

Si on montre que

$$(8') \qquad \lim_N (N/M)\,\mathrm{Cov}\{\hat{\varphi}_X(\lambda), \hat{\varphi}_X(\lambda')\} = \lim_N (N/M)\, T_N{}^1(\lambda,\lambda'),$$

le résultat découlera alors de l'application du théorème I-4, le processus Y

et l'estimateur $\hat{f}_Y(\lambda)$ en vérifiant les hypothèses.
Pour montrer (8'), il suffit de montrer

(9') $$\lim_N (N/M)\, T_N^4(\lambda,\lambda') = 0$$

et

(9") $$\lim_N (N/M)\, T_N^3(\lambda,\lambda') = \lim_N (N/M)\, T_N^2(\lambda,\lambda') = 0.$$

On établit d'abord (9').
Sous $H_A^{(p)}$, la fonction b vérifie les conditions du théorème 3 concernant la fonction B. De plus, Q_Y^4 (en vertu de la proposition 3) et γ_Y sont absolument sommables. On peut donc appliquer ce théorème à la quantité J_b (qui est $b * \hat{f}_Y$), on obtient :

(10') $$\lim_N T_N^1(\lambda,\lambda') = 4\pi \int_\Pi f_Y^2(s)\, b^\bullet(\lambda-s)\, b^\bullet(\lambda'-s)\, ds$$
$$+ 2\pi \iint_{\Pi^2} g_Y(\alpha_1,-\alpha_2,\alpha_2)\, b^\bullet(\lambda-\alpha_1)\, b^\bullet(\lambda'-\alpha_2)\, d\alpha_1 d\alpha_2,$$

où $b^\bullet(.)$ et $g_Y(.,.,.)$ sont définis comme dans ce théorème.
Le premier membre de (10') est donc borné. On peut alors écrire

$$T_N^4(\lambda,\lambda') = (1/N)\, O(1), \text{ au voisinage de N infini.}$$

D'où :

$$\lim_N (N/M)\, T_N^4(\lambda,\lambda') = \lim_N (1/M)\, O(1) = 0,$$

et cela prouve (9').
L'inégalité de Schwarz donne :

$$|T_N^2(\lambda,\lambda')| \leq \sqrt{\sigma^2\{\hat{f}_Y(\lambda)\}}\ \sqrt{\sigma^2\{(b*\hat{f}_Y)(\lambda')\}}\,,$$

et d'après le théorème I-4, on a :

$$(N/M)\, \sigma^2\{\hat{f}_Y(\lambda)\} = O(1), \quad \text{au voisinage de N infini.}$$

De plus, d'après (9'), on peut écrire :

$$(N/M)\, \sigma^2\{(b*\hat{f}_Y)(\lambda')\} = (1/M)\, O(1), \quad \text{au voisinage de N infini.}$$

Donc :

$$\lim_N (N/M)\,|T_N^2(\lambda,\lambda')| \leqslant K'(\lim_N 1/\sqrt{M}), \quad K' > 0,$$

i.e.

$$\lim_N (\,N/M\,)\, T_N^2(\lambda,\lambda') = 0.$$

On montre de la même façon que

$$\lim_N (N/M)\, T_N^3(\lambda,\lambda') = 0.$$

Et cela prouve (9"). □

CHAPITRE IV.

L'ESTIMATION PARAMETRIQUE DANS LES SERIES TEMPORELLES AVEC DONNEES MANQUANTES.

1. Introduction.

Les travaux consacrés à l'aspect paramétrique du problème d'estimation dans les séries à données manquantes semblent relativement nombreux (cf. **[8(2)] [9] [12(2 et 3)] [13] [22] [23] [26]** ...).

Ceux-ci présentent deux types de méthodes : d'une part les méthodes d'estimation apparentées à celles du maximum de vraisemblance (on écrira dorénavant MV) comme dans **[12(3)]** et **[26]**, d'autre part les méthodes d'estimation basées sur des modifications (de la forme) du périodogramme, comme dans **[9]** ou **[23]**. Dans **[12(2)]**, on s'est plutôt intéressé à une estimation paramétrique de la densité spectrale.

Les méthodes du premier type consistent à minimiser une certaine modification de la fonction de log-vraisemblance du modèle à estimer. Faute, pour ce faire - comme dans le cas d'une observation complète - de méthodes explicites, le recours à des méthodes numériques confère à ce type d'estimation un aspect calculatoire important : Jones **[12(3)]** utilise un filtre de Kalman dans l'espace de représentation d'état d'un modèle mixte gaussien et TAN **[26]** propose et discute pour un modèle autorégressif trois méthodes (méthodes des scores, de Newton-Raphson et EM-algorithme (cf.**[6]**)) qui fournissent autant d'estimateurs dont il étudie la consistance et la normalité asymptotique.

Dunsmuir et Robinson dans **[9(2)]** étudient trois estimateurs obtenus en minimisant des modifications de l'approximation dite de Hannan de la fonction de log-vraisemblance (cf. **[11] [18]**); leur approche relève moins de méthodes du MV que de méthodes issues de modifications du périodogramme I_X^N dans cette approximation. Dans ces dernières, nous incluons aussi les méthodes dérivées de celle de Yule-Walker qui consistent à remplacer, dans les équations du même nom, la fonction de covariance γ_X par les estimateurs $C'_X{}^N$ ou bien $C''_X{}^N$ (cf. § II-B.2) au lieu de la fonction de covariance empirique C_X^N : en effet, cela correspond à remplacer le périodogramme I_X^N par la modification $I'_X{}^N$ (cf. § III-4.1) ou bien par la modification $I''_X{}^N$ définie par la relation

$$I''_X{}^N(\lambda) = (1/2\pi) \sum_u e^{-i\lambda u} C''_X{}^N(\lambda), \quad \forall \ \lambda \in \Pi,$$

laquelle équivaut à la relation

$$C''_X{}^N(u) = \int_\Pi e^{-i\lambda u} I''_X{}^N(\lambda)\, d\lambda, \quad \forall \ u \in \mathbb{Z}.$$

Nous referrons à ce type de méthodes comme "méthodes basées sur le périodogramme"; nous les décrivons et en présentons les aspects théoriques principaux au paragraphe 3. Les estimateurs, tels ceux de Tan, issus de méthodes numériques de minimisation de modification de la fonction de log-vraisemblance - auxquelles nous nous referrons comme "méthodes du MV" - feront l'objet du paragraphe 4.

Pour présenter et décrire ces méthodes, on utilisera quelques notions essentielles en rapport avec l'estimation paramétrique dans les séries temporelles complètes (cf. par exemple, **[3]**, **[11]** ou **[18]**) : on les rappelle au paragraphe 2.

2. Rappels concernant l'estimation des modèles paramétriques de séries temporelles stationnaires au 2-ième ordre.

On rappelle que l'on considère des processus scalaires définis sur $\mathfrak{D}$ à valeurs dans $\mathcal{V}=(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$; X est le processus d'étude, stationnaire au 2-ième ordre, centré.
On désignera par D(0,1) le disque unité du plan complexe

$$D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1\}$$

et par $\delta(.)$ la fonction de Kronecker.
Pour un processus Z stationnaire au 2-ième ordre, Γ_Z^n désignera dorénavant la matrice des variances-covariances $(\gamma_Z(j-i))_{(i,j)\in(1,\dots,n)^2}$. On conserve ici toutes les autres notations utilisées dans les chapitres précédents.

1.1. Généralités : estimation paramétrique et identifiabilité de modèles linéaires.

L'estimation paramétrique, dans le cas classique d'une observation complète du processus X, est surtout concernée par les méthodes d'ajustement à X d'un modèle linéaire, i.e. de la forme (1) :

$$(1) : \qquad X(t) = \sum_{j=0,\infty} l(j,\theta)\, \varepsilon(t-j), \quad \sum_{j=0,\infty} l(j,\theta)^2 < +\infty$$

où θ appartient à un espace Θ de dimension finie et $\varepsilon = \{\varepsilon(t),\ t\in\mathbb{Z}\}$ est un processus vérifiant

$$\mathbb{E}_\theta \{\varepsilon(l)\,\varepsilon(k)\} = \delta(l-k)\,\sigma_\theta^2.$$

θ est le paramètre du modèle (1); Θ est l'espace des paramètres de ce modèle.

Le problème consiste à estimer le paramètre θ spécifiant la structure du 2-ième ordre du processus X. Pour ce faire, il est primordial de garantir (supposer) l'identifiabilité au 2-ième ordre du modèle à estimer : dans notre cas, celle-ci se traduit par la relation

$$(\forall\ \theta, \theta' \in \Theta)\ (\ \theta \neq \theta' \Leftrightarrow \gamma_X(.,\theta) \neq \gamma_X(.,\theta');$$

ainsi une structure de covariance, pour un θ donné, ne peut correspondre à deux processus distincts du modèle (1). Ce dernier est identifiable au 2-ième ordre si, en particulier, il est (strictement) inversible, i.e. si le processus ε admet la représentation

$$\varepsilon(t) = \sum_{j=0,\infty} \lambda(j,\theta)\ X(t-j),\ \forall\, t \in \mathbb{Z},\ \sum_{j=0,\infty} \lambda(j,\theta)^2 < +\infty$$

(c'est le cas si le polynôme $\sum_{j=0,\infty} l(j,\theta) z^j$ n'a pas de zéros dans D(0,1)) et si de plus

$$\theta \neq \theta' \Rightarrow \sum_{j=0,\infty} l(j,\theta)\, z^j \neq \sum_{j=0,\infty} l(j,\theta')\, z^j.$$

La classe de modèles précédente contient celle - d'utilisation fréquente - des modèles mixtes d'ordre (p,q) (on écrira ARMA(p,q)) stationnaires :

(2) : $$X(t) = \sum_{j=1,p} \alpha(j,\theta) X(t-j) + \sum_{j=1,q} \beta(j,\theta)\varepsilon(t-j) + \varepsilon(t).$$

où

1°) ε est comme dans (1) et $\varepsilon(s)$ est indépendant de $X(s)$ pour tout $s \leq t-1$,

2°) Les coefficients $\alpha(1,\theta), \ldots, \alpha(p,\theta)$, appelés "coefficients d'autorégression" du modèle, vérifient la condition

(S) : le polynôme $h(z) = (1-\sum_{j=1,p} \alpha_\theta(j) z^j)$ n'a pas de zéros dans D(0,1).

Si q = 0, le processus précédent est dit "autorégressif d'ordre p" (on écrira AR(p)); si p = 0, il est dit "moyenne mobile d'ordre q" (on écrira MA(q)).

La condition S assure la stationnarité des processus ARMA(p,q) (ou AR(p) si q = 0). Si dans (2), X vérifie de plus la condition I,

(I) : Le polynôme $g(z) = (1+\sum_{j=1,q} \beta_\theta(j)z^j)$ n'a pas de zéros dans $D(0,1)$.

alors, le processus ARMA(p,q) (ou MA(q), si p = 0) est inversible.

Un modèle AR(p) vérifiant S est identifiable au 2-ième ordre : sa fonction de covariance vérifie le système d'équations linéaires (de Yule-Walker)

$$
(E1) : \begin{cases} \sum_{j=1,p} \alpha(j,\theta)\, \gamma_X(j-l,\theta) = \gamma_X(-l,\theta), \quad l = 1,2,\ldots \\ \\ \sigma_\theta^2 = \gamma_X(0,\theta) - \sum_{j=1,p} \alpha(j,\theta)\, \gamma_X(j,\theta). \end{cases}
$$

Un modèle MA(q) vérifiant I est aussi identifiable au 2-ième ordre; il en est de même d'un modèle ARMA(p,q) s'il vérifie ' S et si de plus h(z) et g(z) n'ont pas de zéros communs.

2.2. <u>Quelques méthodes d'estimation paramétrique : méthode de Yule-Walker et méthodes du maximum de vraisemblance</u>.

On se donne ici la série temporelle

$$\{X(1), \ldots X(N)\},$$

observation de longueur N du processus X dont on suppose dorénavant qu'il suit le modèle (1) pour un $\theta_0 \in \Theta$.

Les modèles ARMA(p,q) considérés sont les modèles ARMA(p,q) sans contraintes (c'est-à-dire des processus du modèle (2) où θ est de la forme

$$\theta = {}^t(\alpha, \beta, \sigma^2)$$

où

$$\alpha = {}^t(\alpha(1), \ldots, \alpha(p)$$
$$\beta = {}^t(\beta(1), \ldots, \beta(p)$$

et $\sigma^2 > 0$.

Considérons un processus AR(p) stationnaire au 2-ième ordre et désignons par $\alpha_0(1), \ldots, \alpha_0(p)$ ses coefficients d'autoregression et par σ_0^2 la variance du processus ε. Le problème consiste à estimer $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^{p+1}$:

$$\theta_0 = (\alpha_0(1), \dots, \alpha_0(p), \sigma_0^2).$$

La méthode de Yule-Walker l'estime par la solution unique du système E2 d'équations linéaires en $\alpha(1), \dots, \alpha(p), \sigma^2$ obtenu en remplaçant dans le système E1, $\gamma_X(.,\theta)$ par la fonction de covariance empirique $C_X^N(.)$ de la série donnée

$$(E2) : \begin{cases} G_X^N \, {}'\alpha = {}'c_X^N \\ \sigma^2 = C_X^N(0) - \alpha c_X^N. \end{cases}$$

où G_X^N est la matrice p×p $(C_X^N(j-i))_{i,j\in\{1,\dots p\}^2}$

$$c_X^N = {}'(C_X^N(1), \dots, C_X^N(p))$$

$$\alpha = {}'(\alpha(1), \dots, \alpha(p)).$$

On note $(\hat\alpha,\hat\sigma^2) = \hat\theta_N$ cette solution : $\hat\theta_N$ est un estimateur ps-consistant de la vraie valeur $(\alpha_0,\sigma_0^2) = \theta_0$ du paramètre $\theta = (\alpha,\sigma^2)$, et de loi asymptotique normale (cf. par exemple **[1][3][11][18]**).

Considérons maintenant un processus X du modèle (1) identifiable et faisons l'hypothèse que les variables aléatoires du processus ε sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0,\sigma_\varepsilon^2)$; la série donnée est alors gaussienne et le vecteur $\mathbb{O}$.

$$\mathbb{O} = {}'(X(1), \dots X(N))$$

est un vecteur gaussien, de matrice de covariances

$$\mathbb{E}_\theta \{\mathbb{O} \, {}'\mathbb{O}\} = \sigma_\theta^2 \, \Gamma^N(\theta).$$

où $\Gamma^N(\theta)$ est une matrice symétrique positive (on dira matrice de Toeplitz).

Obtenir l'estimateur du MV de la vraie valeur θ_0 de θ, revient à minimiser l'opposée de la fonction de log-vraisemblance du modèle (1) définie, à une constante et un facteur multiplicatif près, par la formule

$$FV_1 : \quad \mathcal{L}_N(\theta) = \log\det \Gamma^N(\theta) + N \log \sigma_\theta^2 + ({}'\mathbb{O} \; (\Gamma^N(\theta))^{-1} \, \mathbb{O}).$$

Cette opération est difficile à mettre en oeuvre à cause de la complexité de $\mathcal{L}_N(.)$. Selon **[18]**, même si on dispose d'algorithmes pour son calcul en chaque point $\theta\in\Theta$, on n'en dispose pas, néanmoins, pour celui de ses deux premières dérivées - lesquelles sont nécessaires pour exhiber les minima.

Pour cette raison, on est conduit à s'intéresser à des approximations de $\mathcal{L}_N(.)$ qui se prêtent plus facilement au type de calcul que l'on veut opérer, telles celles de Box-Jenkins (cf. **[3] [18]**), de Whittle (cf. **[11] [18]**) ou de Hannan. Cette dernière utilise l'information à travers le périodogramme $I_X^N(.)$ de la série donnée; on l'écrit ici sous la forme

$$FV_2 : \qquad L_N(\theta) = N^{-1} \sum_{j=0,n-1} [(I_X^N(w_n) / f_X(w_j, \theta) + \log (2\pi f_X(w_j,\theta))]$$

où

$$w_j = (2\pi j)/ N, \quad 0 \leq j \leq N-1.$$

Si Θ est un espace compact, l'estimateur $\tilde{\theta}_N$ minimisant $L_N(\theta)$ ou $\mathcal{L}_N(\theta)$ est un estimateur ps-consistant de la vraie valeur θ_0 du paramètre θ, même si ε n'est pas un processus gaussien; cette dernière hypothèse n'est nécessaire que pour exhiber la fonction $\mathcal{L}_N(.)$. On trouvera des résultats concernant la normalité asymptotique de $\tilde{\theta}_N$ dans **[1] [18] [11]**.

3. <u>Méthodes basées sur le périodogramme</u>.

Dans ce qui suit, on se donne la série chronologique

$$\{Y(1), \ldots, Y(N)\}$$

réalisation du processus $Y = AX$, où A est un processus (ou une suite) AS au 2-ième ordre. On rappelle que les hypothèses $\mathcal{H}_A^P$, $\mathcal{H}_A^{CV}$, $\mathcal{H}_A^S$ et $\mathcal{H}_A^B$ sont définis au paragraphe III-4.1.1.

Ici X n'est pas complètement observé et le périodogramme I_X^N n'est donc pas disponible. Les méthodes basées sur le périodogramme consistent à assigner à $I'_X{}^N$ ou $I''_X{}^N$ le rôle assumé par I_X^N dans certaines méthodes précédentes, ou bien à introduire à sa place le périodogramme I_Y^N de la série donnée.

Rappellons que la densité spectrale asymptotique $\tilde{f}_Y$ du processus $Y=AX$ s'écrit :

$$\tilde{f}_Y(\lambda) = (f_X * \tilde{F}_A)(\lambda) + \mu^2 f_X(\lambda), \ \forall \ \lambda \in \Pi.$$

où $\tilde{F}_A$ est la mesure spectrale asymptotique associée au processus (ou bien à la suite A) comme au paragraphe I-3.

3.1. Méthodes basées périodogramme de Y.

Dans **[9(2)]**, Dunsmuir et Robinson remplacent I_X^N par I_Y^N dans la fonction L_N définie par la formule FV_2 en considérant la fonction $\underline{L}_N$ définie par :

$$FV_3 : \underline{L}_N(\theta) = N^{-1} \sum_{j=0,N-1} [(I_Y^N(\omega_j, \theta) / \tilde{f}_Y(\omega_j,\theta)) + \log(2\pi \tilde{f}_Y(\omega_j,\theta))].$$

Ils adoptent d'estimer θ_0 par la valeur $\tilde{\theta}_N$ minimisant $\underline{L}_N(\theta)$ sur Θ : cela revient à minimiser l'approximation L_N (de Hannan) avec Y à la place de X.
Ces auteurs proposent trois formes pour $\tilde{\theta}_N$, soient M1, M2 et M3, correspondant à trois versions distinctes de $\underline{L}_N$ obtenues en remplaçant dans la formule FV_3 précédente $\tilde{f}_Y(\omega_j,\theta)$ par $\tilde{\varphi}_Y^{(1)}(\omega_j,\theta)$, $\tilde{\varphi}_Y^{(2)}(\omega_j,\theta)$ et $\tilde{\varphi}_Y^{(3)}(\omega_j,\theta)$, respectivement, définies par

$$\tilde{\varphi}_Y^{(1)}(\omega_j,\theta) = 2\pi N^{-1} \sum_{k=0,N-1} f_X(\omega_j - \omega_k,\theta) I_A^N(\omega_k)$$

où $I_A^N(\omega_k)$ est le périodogramme défini comme I_Y^N avec A(1),... , A(N) à la place de Y(1), ... , Y(N).

$$\tilde{\varphi}_Y^{(2)}(\omega_j,\theta) = \int_\Pi f_X(\omega_j - \lambda,\theta) \tilde{f}_A(\lambda,\hat{\tau}_N) d\lambda + (\mu(\hat{\tau}_N))^2 f_X(\omega_j,\theta)$$

où $\tilde{f}_A(.,\tau)$ est la fonction de densité spectrale asymptotique du processus A dépendant, ainsi que μ, d'un paramètre τ; $\hat{\tau}_N$ est un estimateur ps-consistant de τ obtenu à partir de la série

$$\{A(1), \dots, A(N)\}.$$

$$\tilde{\varphi}_Y^{(3)}(\omega_j,\theta) \equiv \tilde{f}_Y(\omega_j,\theta).$$

M3 est surtout adapté à la situation où $\tilde{F}_A$ et μ sont connus, comme c'est le cas des suites périodiques vérifiant $\mathcal{H}_A^P$ ou $\mathcal{H}_A^{CV}$. M2 ne s'applique qu'aux situations où le processus A suit un modèle paramétrique, tel celui concerné par $\mathcal{H}_A^S$ ou $\mathcal{H}_A^B$. Par contre, M1 ne nécessite aucune connaissance préalable de $\tilde{F}_A$ ou μ, néanmoins son calcul exige, pour chaque j, celui du produit de convolution définissant $\tilde{\varphi}_Y^{(3)}(\omega_j,\theta)$: cet aspect fait l'objet essentiel de **[9(3)]**.

La consistance de ces trois estimateurs est établie dans **[9(2)]** dans le cas où X est un processus du modèle (1) de paramètre θ_0 vérifiant $l(0,\theta_0)= 1$. Avec les conditions C1 et C2 portant sur A et X suivantes :

(C1) : X est un processus strictement stationnaire, ps-ergodique au 1er degré, centré et de variance finie.
A est un processus strictement stationnaire, mélangeant, ps-ergodique au 2-ième degré.

(C2) : A est une suite AS au 2-ième ordre.
X est comme dans (1) et vérifie

$$\mathbf{E}\{\varepsilon(n) / \mathcal{F}_\varepsilon(n-1)\} = 0, \text{ p.s.}$$

$$\mathbf{E}\{\varepsilon(n)^2 / \mathcal{F}_\varepsilon(n-1)\} = \sigma^2, \sigma^2 > 0$$

$$\mathbf{E}\{\varepsilon(n)^2 \log^+ |\varepsilon(n)|\} < +\infty$$

où $\mathcal{F}_\varepsilon(t)$ désigne la σ-algèbre engendrée par $\{\varepsilon(s), s\leq t\}$

et les conditions B :

(B) : (i) Θ est un espace topologique d'adhérence $\overline{\Theta}$ compacte.

(ii) $$f_X(\omega,\theta) = (2\pi)^{-1} \sigma^2(\theta) |g(e^{iw}, \theta)|^2$$

où la fonction g(.,.) vérifiant

$$g(z,\theta) = \sum_{j=0,\infty} l(j,\theta)z^j,$$

est uniformément continue en $(\omega,\theta) \in \Pi\times\Theta$.

(iii) $\tilde{f}_Y(\omega,\theta)$ est minorée par une constante $d_Y>0$ pour tout $(\omega,\theta) \in \Pi\times\Theta$.

(iv) $$(\forall\ \theta, \theta' \in\Theta)\ ((\theta = \theta') \Leftrightarrow \tilde{f}_Y(\omega,\theta') = \tilde{f}_Y(\omega,\theta), \text{ p.p}).$$

on peut énoncer

Théorème I : (DUNSMUIR et ROBINSON cf. **[9(2)]** , theorem 3.1).

Soit X un processus du modèle (1) pour un $\theta_0 \in \Theta$. S'il vérifie les conditions B et l'une des conditions C1 ou C2 précédentes, alors les estimateurs M1 et M3 précendents convergent presque sûrement vers θ_0.
Si, de plus, dans $\tilde{\varphi}_Y^{(2)}(\omega_j, \theta)$

$$\mu(\hat{\tau}_n) \underset{N\infty}{\to} \mu, \text{ p.s.}$$

et

$$\gamma_A(l, \hat{\tau}_N) \underset{N\infty}{\to} \gamma_A(l, \tau), \text{ p.s. , pour tout } l \in \mathbb{Z},$$

où $\hat{\tau}_N$ est un estimateur consistant de τ obtenu à partir de la série

$$\{A(1), \dots , A(N)\},$$

alors, M2 est aussi un estimateur ps-consistant de θ_0.

La condition B(iv) concerne l'identifiabilité du modèle et est analogue à celle du paragraphe 2.1

Le théorème précédent demeure valable si X est un processus du modèle ARMA (p,q) sans contraintes si h(z) et g(z) n'ont pas de zéros communs et si, de plus, il vérifie les conditions I, S et B(iii); plus précisément on a :

$$\tilde{\theta}_N = {}'(\tilde{\alpha}_N, \tilde{\beta}_N, \tilde{\sigma}_N^2) \underset{N\infty}{\to} \theta_0 = {}'(\alpha_0, \beta_0, \sigma_0^2), \text{ p.s.}$$

Moyennant des conditions supplémentaires à celles du théorème I concernant les moments d'ordre 4 de ε, la régularité de $f_X(\omega, \theta)$ (notamment les dérivées partielles du premier et second ordre), la stationnarité au 4-ième ordre de la suite A (ou la ps-ergodicité au 4-ième degré du processus A)..., on établit dans **[9(2)]** la normalité asymptotique de M1, M2 et M3 avec matrice de covariances asymptotiques extrêmement compliquée.
Celle-ci est identique pour M1 et M3 (et de la forme $A^{-1}BA^{-1}$) tandis que

celle de M2 possède un terme additif (de la forme $A^{-1}CA^{-1}$) : cela permet de déduire l'équivalence de l'efficacité asymptotique de M1 et M3, du point de vue de la variance asymptotique; M2 quant à lui ne peut être plus efficace que les précédents.

Remarque 1:

Ce terme additif demeure non nul même si une méthode efficace d'estimation de τ a été utilisée, comme cela a été fait dans **[9 (2)]**; le fait qu'une telle méthode d'estimation puisse conduire à une baisse de l'efficacité de l'estimation de θ_0 y est signalé comme a priori surprenant. Il faut noter que M2 ne tient pas compte de l'observation de A (M2 est donc applicable même si A n'est pas observable).

3.2. Méthodes basées sur le périodogramme modifié de X.

On peut utiliser la méthode précédente de façon plus naturelle, en remplaçant dans L_N I_X^N par $I'_X{}^N$ et estimer θ_0 par la valeur $\tilde{\theta}'_N$ minimisant $L'_N(\theta)$:

$$FV_{3'} : L'_N(\theta) = N^{-1} \sum_{j=0,N-1} [(I'_X{}^N(\omega_j;\theta) / f_X(\omega_j;\theta)) + \log(2\pi f_X(\omega_j;\theta))].$$

En utilisant $I''_X{}^N$ au lieu de $I'_X{}^N$ dans la formule précédente, on obtient un estimateur analogue $\tilde{\theta}''_N$. $\tilde{\theta}''_N$ est cité dans **[8(2)]** pour ses avantages sur le plan calculatoire par rapport à l'estimateur M1 précédent : en effet, $I''_X{}^N$ - et il en est de même de $I'_X{}^N$ - n'y est calculé qu'une seule fois et plus rapidement via la transformée de Fourier rapide. Mais tout comme les estimateurs M1, M2 et M3, il n'est pas asymptotiquement efficace au sens qu'il ne possède pas la même loi asymptotique que l'estimateur du MV dans le cas gaussien.

Une toute autre méthode d'estimation, si X est le processus AR(p) du paragraphe 2.2 consiste à utiliser les équations classiques de Yule-Walker. Appelons E1' (resp. E1") le système d'équations linéaires en $\alpha(1),\ldots,\alpha(p), \sigma^2$ obtenu en remplaçant C_X^N là où il se trouve dans E1 par $C'_X{}^N$ (resp. $C''_X{}^N$). On sait que sous des hypothèses très larges comme par exemple celles de la proposition II-2 (resp. II-3), on a :

$$C'_X{}^N(u) \text{ (resp. } C''_X{}^N(u)) \underset{N\infty}{\rightarrow} \gamma_X(u), \text{ p.s.}$$

Ainsi, asymptotiquement, E1' (resp. E1") admet une solution unique

$\hat{\theta}'_N = (\hat{\alpha}', \hat{\sigma}'^2)$ (resp. $\hat{\theta}''_N = (\hat{\alpha}'', \hat{\sigma}''^2)$) qui converge presque sûrement vers $\theta_0 = (\alpha_0, \sigma_0^2)$.

$\hat{\theta}'_N$ a été introduit par Sakai, Soeda et Tokumaru dans **[23]** en considérant le cas où A est un processus vérifiant $\mathcal{H}_A^S$. En exploitant un ensemble de relations entre le périodogramme et la matrice de covariances des estmateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\sigma}^2$ (voir page IV-7) dans le cas d'une observation complète, ils exhibent les covariances asymptotiques de $\hat{\alpha}'$, $\hat{\sigma}'^2$, dont en particulier la formule

$$(R1): \left(\Gamma_X{}^p\ \mathbb{E}\{\Delta\alpha'\ {}^t\Delta\alpha'\}(\Gamma_X{}^p)^{-1}\right)_{(k,l)} =$$

$$\iint_{\Pi^2} B(s)\ B(t)\ \mathrm{Cov}\left\{\mathcal{J}_X{}^N(s), \mathcal{J}_X{}^N(t)\right\}\ e^{i(ks+lt)}\, ds\, dt$$

où

1°) $\mathcal{J}_X{}^N$ est le périodogramme du paragraphe III-4.1.2.

2°) $B(s) = (1 - \sum_{j=1,p} e^{-isj})\ \alpha_0(j)$

et

$\Delta\alpha' = \hat{\alpha}' - \alpha_0$.

Dans le cas où X est gaussien, ces auteurs donnent R1 sous sa forme explicite et celle-ci se revèle extrêmement complexe; pour le processus AR(1) de coefficient $\alpha_0(\,|\alpha_0| < 1)$, ils obtiennent :

$$(3) \qquad N\sigma^2\{\hat{\alpha}'_0\} \sim \mathbf{p}^{-2} + \alpha_0^2(2\,\mathbf{p}^{-2} - 3\,\mathbf{p}^{-1}).$$

Usant d'arguments de même nature, Sakai **[22]** établit dans le cas où A est une suite périodique l'analogue de R1 pour un processus X gaussien. Dunsmuir et Robinson montrent la normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{\theta}''_N$ à partir d'un théorème central limite concernant $C''_X{}^N$; ce dernier est établi dans le cas plus général d'un processus du modèle (1), que A soit une suite AS au 4° ordre bornée ou bien un processus AS au 4-ième ordre et ps-ergodique au 4-ième degré (cf. **[9(1)]** Corollaire 1 du théorème 2, p. 274) : Si X est AR(1), ils donnent :

$$(4) \qquad N\sigma^2\{\hat{\alpha}''_0\} \sim \mathbf{p}^{-2} + \alpha_0^2(\mathbf{p}^{-2} - 2\,\mathbf{p}^{-1}),$$

A étant le processus vérifiant $\mathcal{H}_A^S$.

On note que d'après (3) et (4), on a :

$$N\sigma^2\{\hat{\alpha}'_0\} - N\sigma^2\{\hat{\alpha}''_0\} \geq 0 \quad \forall\ \alpha_0,\ \forall\,\mathbf{p} \in [0,1];$$

$\hat{\theta}''_N$ est donc asymptotiquement plus efficace que $\hat{\theta}'_N$, bien que pour ce dernier, on ait supposé $\mathbf{p}$ parfaitement connu. Ceci rejoint le propos en remarque 1 : estimer θ_0 à l'aide d'un paramètre connu peut altérer défavorablement la qualité de l'estimation; en fait $\hat{\theta}'_N$ est moins efficace que $\hat{\theta}''_N$ parce que le premier ne tient pas compte de l'observation de A.

4. Les méthodes du maximum de vraisemblance.

On suppose ici que X est un processus observé aux instants $1 = n_1, n_2, \ldots, n_M = M$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_M$, et suivant, pour un $\theta_0 \in \Theta$, un modèle du type (1).

Si les variables $\varepsilon(t)$ du processus ε sont indépendants et de loi $\mathcal{N}(0,\sigma_0^2)$, alors le vecteur des valeurs observées $'\mathbb{O} = (X(n_1), \ldots, X(n_M))$ est un vecteur gaussien de matrice de covariances

$$\mathbb{E}\{\mathbb{O}\,'\mathbb{O}\} = \sigma_0^2\, \Gamma^M(\theta),$$

où $\Gamma^M(\theta)$ n'est plus nécessairement une matrice de Toeplitz, contrairement à celle obtenue dans le cas d'une observation complète (cf. page IV-7). Chercher l'estimateur $\underline{\theta}_N$ de θ_0 du maximum de vraisemblance revient à minimiser la fonction $\underline{\mathcal{L}}_N(\theta)$:

$$FV_4 : \underline{\mathcal{L}}_N(\theta) = \log\det \Gamma^M(\theta) + M \log \sigma_0^2 + \,'\mathbb{O}\,(\Gamma^M(\theta))^{-1}\,\mathbb{O}/\sigma_0^2.$$

Les méthodes que nous connaissons traitent seulement de la minimisation de $\underline{\mathcal{L}}_N(\theta)$ pour des processsus X ARMA(p,q) ou AR(p).

On commence par présenter la méthode de Jones décrite dans **[12(3)]** qui utilise, pour un processus ARMA(p,q) vérifiant les conditions I et S, le filtre de Kalman (cf. **[11]** p. 180) dans l'espace de représentation markovienne de ce processus. Il en donne pour $m = \max\{p,q+1\}$, le modèle filtré suivant :

$$Z(t+1) = F\,Z(t) + G\,\varepsilon(t+1)$$
$$y(t) = H\,Z(t) + v(t)$$

1°) ${}'Z(t) = (FX(t|t), X(t+1|t), \ldots, X(t+m-1|t)$

X(t+j|t) désignant la projection de X(t) sur l'espace hilbertien

$$E(t) = \overline{(\{X(s),\ s \leq t\})},$$

i.e. : $X(t+j|t) = \mathbb{E}\{X(t+j) \mid E(t)\}$

2°) F est la matrice m × m

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & & 0 \\ & \cdot & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & \cdot & & & & \\ \alpha(m) & & \ldots & & \alpha(2) & \alpha(1) \end{bmatrix}$$

3°) ${}'G = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$,

les g_i étant calculés récursivement par

$$g_1 = 1$$

et

$$g_i = \beta_{j-1} + \sum_{k=1,j-1} \alpha(k)\, g_{j-k},$$

4°) H = (1, 0, ... , 0).

5°) Enfin, $v = \{v(t),\ t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus de variables aléatoires non corrélés, non corrélé avec le processus ε, centré et de variance notée R.

Le filtre de Kalman opère récursivement sur Z(t+j|t) et sa matrice de covariance (on la note ici P(t+j|t)), à partir de l'état initial Z(0|0) et de P(0|0); les formules de récursion sont :

$$(5) \quad \begin{cases} Z(t+1|t) = F\, Z(t|t) \quad (= F\, Z(t)) \\ P(t+1|t) = (F\, P(t|t)\, {}'F\, \sigma_\theta^2\, G\, {}'G). \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} Z(t+1|\, t+1) = Z(t+1|t) + \Delta(t+1)\, \tilde{y}(t+1) \\ P(t+1|t+1) = P(t+1)t) - \Delta(t+1)\, H\, P(t+1|t) \end{cases}$$

où

$$\Delta(t+1) = P(t+1|t)\ {}'H\, [HP(t+1|t)\ {}'H + R]^{-1}$$

et $\tilde{y}(t+1)$ désigne l'innovation $y(t+1) - y(t+1|t)$; les équations donnent

$$V(t+1) = \sigma^2\{\tilde{y}(t+1)\} = (P(t+1|t))_{(1,1)} + R \ .$$

La fonction de vraisemblance du modèle considéré (dans le cas gaussien) est donnée dans **[12(3)]** par :

$$FV_5 : \quad \mathcal{L}'_N(\theta) = \sum_{j=1,N} \log V_\theta(j) + N \log \sigma_\theta{}^2 + \sum_{j=1,N} [\tilde{y}(j) / \sigma_\theta{}^2 V_\theta(j)]$$

Dans notre cas, $'\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2)$. Posant $'\xi = (\alpha, \beta)$, le problème revient à minimiser la fonction :

$$\mathcal{L}_N(\theta) = \sum_{j=1,N} V_\xi(j) + N \log \sigma^2 + \sum_{j=1,N} [\tilde{y}(j) / \sigma^2 V_\xi(j)]$$

celle-ci est minimum pour $\sigma^2 = N^{-1} \sum_{j=1,N} (\tilde{y}(j)^2 / V_\xi(j))$, et reportant cette valeur dans FV'_5, le problème revient à minimiser la fonction

$$\sum_{j=1,N} \log V_\xi(j) + N \log [\sum_{j=1,N} \tilde{y}(j) / V_\xi(j)]$$

par rapport à ξ et procéder ensuite à l'estimation de $\sigma_0{}^2$ à partir de l'obtention de l'estimateur de $\xi_0 = {}'(\alpha_0, \beta_0)$.

Maintenant, dans le cas de données manquantes, par exemple si $\tilde{y}(t+1)$ ne peut être obtenu, Jones propose de remplacer les équations (5) et (6) par les équations :

$$(5') \qquad Z(t+1|t+1) = Z(t+1|t)$$

$$(6') \qquad P(t+1|t+1) = P(t+1|t)$$

respectivement; ce qui revient (puisque $y(t+1|t) = X(t+1|t)$) à remplacer $X(t+1)$ par sa prédiction de pas 1.

Cette méthode est valable quel que soit le nombre de données manquantes dans l'observation, mais si un grand nombre de données consécutives est manquant, l'information contenu dans $Z(t+j)$ s'appauvrit d'autant car

$$Z(t+j|t) \underset{j\infty}{\rightarrow} {}'(0,\ldots,0)$$

et

$$P(t+j|t) \underset{j\infty}{\rightarrow} P(0|0).$$

Cette méthode nécessite un estimateur initial $Z(0|0)$, lequel peut être zéro (puisque X est centré) et un estimateur initial $P(0|0)$; une méthode d'obtention de $P(0|0)$ est décrite dans **[12(3)]**.
Notons que dans **[8(2)]**, on cite la méthode précédente avec M, comme dans FV_4, au lieu de N, pour minimiser

$$FV'_4: \underline{\mathfrak{L}}''_N(\theta) = \sum_{j=1,M} \log V_\theta(t_j) + M \log \sigma_\theta^2 + \sum_{j=1,M} [e_\theta(t_j)^2 / V_\theta(t_j)\sigma_\theta^2]$$

où

$$e_\theta(t) = X(t_j) - \mathbb{E}_\theta \{X(t_j) \mid X(t_k),\ 1 \leq k \leq j-1\}.$$

On présente maintenant les trois méthodes proposées par Tan **[26]**. Ce sont des méthodes du MV. Elles ne diffèrent que par la façon de rechercher le maximum : soit par l'itération de Newton-Raphson, soit par la méthode des "scores", soit par l'algorithme EM.

La méthode de Newton-Raphson et des scores sont toutes deux basées sur le développement de Taylor (au voisinage de $\theta = \theta_0$) suivant :

$$(7) \qquad \begin{aligned}(\partial/\partial\theta)\, \underline{\mathfrak{L}}_N(\theta) &= (\ (\partial/\partial\theta)\, \underline{\mathfrak{L}}_N(\theta)\ )|_{\theta_0} \\ &+ (\ (\partial^2/\partial\theta^2) \underline{\mathfrak{L}}_N(\theta)\ )|_{\theta_0} (\theta - \theta_0) \\ &+ r(\theta, \theta_0).\end{aligned}$$

L'estimateur $\underline{\theta}'_N$ de θ_0 obtenu par la première méthode est la valeur de θ obtenue qui annule le deuxième membre de (7) pour $r(\theta,\theta_0) = 0$.
$\underline{\theta}'_N$ y calculé récursivement ; l'itération

$$\underline{\theta}'_j \rightarrow \underline{\theta}'_{j+1}$$

nécessite pour l'étape $j = 1$, un estimateur initial $\underline{\theta}'_0$ de θ_0.

L'algorithme de Newton-Raphson consiste à résoudre des équations du type

$$(8) \qquad -((\partial^2/\partial\theta^2)\underline{\mathfrak{L}}_N(\theta))|_{\theta_0} (\underline{\theta}' - \theta_0) = (\ (\partial/\partial\theta)\, \underline{\mathfrak{L}}_N(\theta)\ )|_{\theta_0}$$

Pour obtenir l'estimateur $\underline{\theta}''_N$ de θ_0 par la méthode des scores, on procède de même sauf que $(\partial/\partial\theta)\, \underline{\mathfrak{L}}_N(\theta)$ est remplacé par son espérance.
L'algorithme nécessite aussi un estimateur initial $\underline{\theta}''_N$ de θ_0. Chaque pas de l'itération consiste à resoudre des équations du type

(9) $$-\left(\mathbb{E}\{(\partial^2/\partial\theta^2)\,\mathcal{L}_N(\theta)\}\right)|_{\theta_0}(\underline{\theta}'' - \theta_0) = ((\partial/\partial\theta)\,\mathcal{L}_N(\theta))\,|_{\theta_0}$$

On donne :

Théorème 2: (TAN, cf. **[26]**, theorem 2, p. 32)

Soit X un processus du modèle AR(p). Supposons que ε est le processus formé de variables aléatoires indépendantes vérifiant

$$\mathbb{E}\{\varepsilon(t)\}^4 = \mu < +\infty$$

et que de plus, il existe une variable aléatoire Z, définie sur $\mathfrak{D}$ et à valeurs dans $\mathcal{V}$ vérifiant

$$P[|\varepsilon_t| > u] \leq c\,P[|Z| > u],\ c > 0,$$

pour tout u > 0, tout t.

Soit A une suite vérifiant $\mathcal{H}_A^P$ pour $\alpha > \beta$.

Alors, l'estimateur $\underline{\theta}'_N$ obtenu par la méthode de Newton-Raphson en (8) est $\sqrt{N-M}$-consistant, de loi asymptotique normale et asymptotiquement efficace en une itération si l'estimation initial $\underline{\theta}'_0$ est un estimateur $\sqrt{N-M}$-consistant.

Il en est de même pour l'estimateur $\underline{\theta}''_N$ obtenu en (9) par la méthode des scores si l'estimateur initial $\underline{\theta}''_0$ est un estimateur $\sqrt{N-M}$-consistant.

Remarque 2:

La matrice de covariance de la loi asymptotique de $\underline{\theta}'_N$ et $\underline{\theta}''_N$ est la matrice d'information moyenne

$$I(\theta) = \lim_{N-M} \mathcal{J}^*_{N-M}(\theta)\,/(N-M)$$

où $\mathcal{J}^*_{N-M}(\theta)$ est la matrice d'information de Fisher basée sur les (N-M) observations non manquantes.

Considérons la matrice d'information - notée $\mathcal{J}_N(\theta)$ - du problème d'estimation de θ à partir d'une observation complète. On montre que $\mathcal{J}^*_{N-M}(\theta)$ est positive et que $\mathcal{J}_N(\theta) \geq \mathcal{J}^*_{N-M}(\theta)$ (cf. **[16]**). la matice $\mathcal{J}_M(\theta)$ définie par la relation

$$\mathcal{J}_M(\theta) = \mathcal{J}_N(\theta) - \mathcal{J}^*_{N-M}(\theta)$$

est appelée "matrice de perte d'information" ("lost information matrix", en anglais; voir Orchard et Woodbury **[16]**).

$\mathcal{J}_M(\theta)$ est calculée dans **[26]**, pp. 43-48, si A et X sont comme dans le théorème précédent et se révéle complexe si l'ordre du modèle est supérieur à 1.

L'algorithme EM (voir **[6]**) minimise $\underline{\mathcal{L}}_N(\theta)$ à l'aide de la fonction de log-vraisemblance $-\mathcal{L}_N(\theta)$ basée sur une observation complète.

Posons :

$$Q(\theta'/\theta) = \mathbb{E}\{\mathcal{L}_N(\theta') \mid \Theta, \theta\}.$$

L'itération

$$\underline{\theta}_j \to \underline{\theta}_{j+1}$$

a lieu en deux étapes :

1°) étape E (E pour "expectation", en anglais) : calcul de $Q(\theta|\underline{\theta}_j)$;

2°) étape M (M pour "minimization") : rechercher la valeur $\underline{\theta}_{j+1}$ de θ (dans Θ) qui minimise $Q(\theta|\underline{\theta}_j)$.

Il est prouvé dans **[26]** que l'algorithme EM converge moins vite que $\underline{\theta}'_N$ et $\underline{\theta}''_N$ au voisinage des solutions des équations du MV; cet algorithme a néanmoins l'avantage d'être plus facile à mettre en œuvre.

Remarque 3 :

On sait que dans le cas d'une observation complète de X, les estimateurs de σ_0^2 et α_0 obtenus par la méthode de Newton-Raphson et celle des scores sont asymptotiquement non corrélés. Ceci provient de la forme de la matrice d'information de Fisher; car

$$\mathbb{E}\{(\partial^2/\partial\sigma^2\,\partial\alpha(j))\,\mathcal{L}_N(\theta)\} \underset{N\infty}{\to} 0.$$

Il n'en est plus de même dans le cas d'une observation avec données manquantes : Tan **[26]** a montré

$$\mathbb{E}\{-(\partial^2/\partial\sigma^2\,\partial\alpha(j))\,\mathcal{L}_N(\theta)\} \approx$$

$$-(1/2\sigma^2)\,(\partial/\partial\alpha(j))\log\det K$$

où K est la matrice de covariance conditionnelle du vecteur représentant les données manquantes sachant celui des données observées.

La méthode du MV n'a été considérée dans la littérature que dans le cadre des modèles ARMA(p,q) ou AR(p). De plus, il n'existe pas de résultats généraux concernant la consistance et la normalité asymptotique des estimateurs (tel celui de Jones) - sauf un résultat de Dunsmuir (cf. **[8(2)]**, theorem 5.1, pp. 323-324) établi sous l'hypothèse que A est une suite périodique.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] **ANDERSON, T.W.**
Statistical Analysis of Time Series.
1970. Wiley.

[2] **BLOOMFIELD, P.**
1970
Spectral analysis with randomly missed observations.
JRSS, Ser B, 32, pp 369-380.

[3] **BOX, G.E.P-JENKINS, G.M.**
Time Series Analysis. Forecasting and Control.
1976. Holden-day.

[4] **BRILLINGER, D.R.**
Time Series, data Analysis and Theory.
1970. Holt, Rinehart and Winston.

[5] **CLINGER, W.-VAN NESS, J.W.**
1976
On unequally spaced points in time series.
Annals of Statistics, Vol 4, 4, pp 736-745.

[6] **DEMPSTER, A.D. - LAIRD, N.M. - RUBIN, D.B.**
1976
Maximum likelihood from incomplete data via the EM - Algorithm (with Discussion).
JRSS, Série B. 39, pp 1-38.

[7] **DOOB, J.L.**
Stochastic Processes
1953. Wiley.

[8] **DUNSMUIR, W.**
(1) 1983
A Central Limit Theorem in gaussian statistical time series observed at unequally spaced times.
Stochastic Processes and their Applications, 14, pp 279-295.

(2) 1981
Estimation for stationary time series when data are irregularly spaced or missing.
Applied Time Series Analysis II, pp 609-649

[9] **DUNSMUIR, W.-ROBINSON, P.M.**

(1) 1981
Asymptotic theory for Time Series containing missing and amplitude modulated observations.
Sankhya, Ser A, 43, pp 260-281.

(2) 1981
Parametric estimators for stationary time Series with missing observations.
Advances in Applied Probability, 13, pp 129-146.

(3) 1981
Estimation for Time Series Models in the presence of missing data.
JASA, Vol 76, 375, pp 560-568.

[10] **HAGGAN, V.**

1975
Periodogram Analysis and Cycles Detection with regularly missed observations.
Technical Report N° 69. University of Manchester Institute of Technology - Manchester, ENGLAND.

[11] **HANNAN, E.J.**

Multiple Time Series.
1970. Wiley.

[12] **JONES, R.H.**

(1) 1962
Spectral Analysis with regularly missed obsevations.
Annals of statistics. Vol 33, pp 455-461.

(2) 1971
Spectrum estimation with missing observations.
Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 23, pp 387-398.

(3) 1980
Maximum likelihood fitting of ARMA models to Time Series with missing observations.
Technometrics. Vol 22, 3, pp 389-395.

[13] **LJUNG, G.M.**

1982
The likelihood function for a stationary gaussian

observations.
Biometrika. 69, 1, pp 265-268.

[14] LOEVE, M.
Probability Theory. Tome II.
1970. Springer Verlag.

[15] MASRY, E.
1983
Non parametric covariance estimation from irregularly spaced data.
Advances in Applied Proba. 15, pp 113-132.

[16] ORCHARD, T. - WOOBURY, M.A.
1972
A missing information principle : theory and Applications.
Proceeding of 6th Berkeley Symposium on mathematical statistics and probability. 1, pp. 697-715.

[17] PARZEN, E.
(1) 1957
On consistent estimates of the Spectum of a stationary Time Series.
Ann. of Math. Stat. Vol 28, pp 329-348.

(2) 1961
Mathematical considerations in the estimation of Spectra.
Technometrics. Vol 3, 2. pp 167-190.

(3) 1961
Spectral Analysis of asymptotically stationary Time Series.
Bull. I.S.I, 33rd Session, PARIS, pp 87-103.

(4) 1963
On spectral analysis with missing observations and amplitude modulation.
Sankhya. Ser A, 25, pp 383-392.

[18] PHAM DINH, Tuan
Introduction à l'analyse statistique des séries chronologiques.
Cours de D.E.A .USMG (1981/ 82).

[19] **PRIESTLEY, M.**
Spectral Analysis of Time Series, Tome I.
1981. Wiley.

[20] **ROBINSON, P.M.**
1977
Estimation of a Time Series model from unequally spaced data.
Stochastic Processes and their Applicatuons. 6,pp 9-24.

[21] **RUBIN, D.B.**
1976
Inference and missing data.
Biometrika. 63, 3, pp 467-474.

[22] **SAKAI, H.**
1980
Fitting autoregressions with missing observations.
Annals of the Institute of Mathematical Statistics. 32, Part A, pp 393-400.

[23] **SAKAI, H. - SOEDA, T.- TOKUMARU, H.**
1979
On the relation between fitting autoregressions and periodogram with applications.
Annals of statistics. Vol 7, 1, pp 96-107.

[24] **SCHWARTZ, L.**
Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques.
1965. Hermann. PARIS.

[25] **SHEINOK, P.A.**
1965
Spectral Analysis with randomly missed observations : the binomial case.
Annals of Mathematical Statistics. 36, pp 971-977.

[26] **TAN, S.B.**
1979
Maximum likelihood Estimation in Autoregressive Processes with missing observations.
Ph.D thesis, University of Pittsburgh.

DERNIERE PAGE D'UNE THESE

3È CYCLE, DOCTEUR INGÉNIEUR OU UNIVERSITÉ

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M. Pham Dinh Tuan

M. A. Le Breton

M. LAPJOUZE Salim est autorisé à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR 3e cycle en Mathématiques Appliquées

Grenoble, le 13 OCT. [illegible]

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

M. TANCHE

Tanche

Résumé de thèse :

Le problème des données manquantes a été abordé en introduisant les processus modulés en amplitude. Les propriétés de type ergodique (ergodicité au k-ième degré) sont étudiées dans le cadre des processus asymptotiquement stationnaires.
Dans le domaine non paramétrique on étudie la consistance de deux estimateurs de la fonction de covariance et la variance asymptotique de l'un d'eux. On propose ensuite une méthode générale d'estimation de la fonction de densité spectrale du processus étudié. L'estimateur obtenu est étudié du point de vue biais et variance asymptotiques.
Des méthodes d'estimation paramétrique, basées sur le périodogramme et du maximum de vraisemblance, sont aussi présentées.

Mots clés :

Données manquantes. Séries modulées en amplitude. Processus (suite) asymptotiquement stationnaire. Processus modulé en amplitude. Fonction de covariance (de densité spectrale) asymptotique. Estimation non paramétrique. Analyse spectrale. Périodogramme. Estimation paramétrique. Maximum de vraisemblance.