Identification optimale des paramètres d'un système dynamique régi par une équation différentielle stochastique linéaire commandée

Nadia Brahimi

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE 3ème CYCLE
«Mathématiques Appliquées»

par

BRAHIMI Nadia

IDENTIFICATION OPTIMALE DES PARAMETRES D'UN SYSTEME DYNAMIQUE REGI PAR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE LINEAIRE COMMANDEE.

Thèse soutenue le 14 novembre 1985 devant la commission d'examen.

B. VAN CUTSEM	Président
A. LE BRETON	
F. BRODEAU	Examinateurs
D.T. PHAM	

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

.../...

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

.../...

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie

à ma mère, à mon père...

à mes frères et sœurs, ma famille...

à ma jeune sœur NABILA, à FARIDA, à mon neuveu LAMINE

à AZIZ...

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur BRODEAU d'avoir diriger cette thèse. Il m'a apporté un grand soutien moral par sa grande disponibilité, ses encouragements et sa gentillesse. Pour tout cela je le prie d'accepter mes sincères remerciements.

Je remercie vivement :

- Monsieur B. VAN CUTSEM pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury.
- Monsieur A. LE BRETON pour m'avoir acceuillie au sein de l'équipe de statistique, et de participer au jury.
- Monsieur D. P. THUAN d'avoir aimablement accepter de participer au jury.

Je joins à ces remerciements HELENE pour m'avoir aidée à la frappe, et l'équipe de reprographie qui a réalisé le tirage de cette thèse. Je salue leur goût pour le travail bien fait.

Enfin j'exprime un souvenir chaleureux pour mes collègues et mes amis. Je les remercie pour leur soutien moral.

INTRODUCTION

Le travail que nous présentons dans le cadre de cette étude, concerne une classe particulière de modèles stochastiques de systèmes dynamiques évoluant en temps continu.

Cette classe est décrite par des équations différentielles linéaires unidimensionnelles excitées par des bruits brownien et poissonien, en présence de fonctions de commande (ou contrôles ou stratégies).

Soit :

(I) $$dX_t = \varphi_1 X_t dt + \varphi_2 Y_t dt + dW_t + \int_{\mathbb{R}} v q(dt \times dv)$$

où, X_t représente l'état du système à l'instant t, Y_t est un contrôle appliqué au système ,$(W_t, t \geq 0)$ un processus de WIENER stantard et q une mesure de POISSON aléatoire, de mesure associée μ positive, finie sur tout compact ne contenant pas l'origine. φ_1 et φ_2 sont les paramètres du système appelés paramètres de dérive.

Nous nous intéressons principalement au problème d'estimation du paramètre $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ au vu de l'observation d'une trajectoire de l'état du système pour un contrôle choisi dans une classe qu'on définira.

On se demande aussi comment un tel choix intervient dans la qualité de l'estimation de φ ? Cela nous amène à poser le problème de choix optimal au sens qu'il permet une identification optimale du paramètre φ. Nous avons deux problèmes à résoudre :

(P_1) : estimer le paramètre φ au vu de l'observation d'une trajectoire de l'état du système sur un intervalle de temps $[0,T]$, $T > 0$, la stratégie Y_t étant choisie.

(P_2) : déterminer le contrôle optimal (ou stratégie optimale) dans une classe de contrôles donnée, au sens d'un critère lié à la matrice d'information de FISHER, et ce afin de rendre meilleure la qualité de l'estimation.

Pour résoudre ces deux problèmes, on considère deux types de stratégies : des stratégies étagées définies en temps discret d'une part, des stratégies définies en temps continu d'autre part.
Ceci partagera notre travail en deux parties, correspondant chacune à un type de stratégies.
Dans le chapitre un, nous présentons le problème sous son aspect pratique. Puis nous introduirons soit par des rappels, soit par des résultats, les outils nécessaires pour mener à bien notre étude. Nous nous intéressons particulièrement aux caractéristiques du bruit. Ce qui nous permet de poser les hypothèses permettant la résolution des problèmes (P_1) et (P_2). Enfin on termine ce chapitre en citant les travaux de BRODEAU, et en expliquant le lien de notre travail avec les différentes études faites dans [4],...,[7].
Le chapitre deux est consacré à l'étude dans le cas d'une stratégie étagée définie en temps discret. Au paragraphe un, on introduit le problème d'identification. On donne la structure statistique dans laquelle sera résolu le problème (P_1). En vertu du théorème de GIRSANOV cette structure est dominée par une mesure qui ne dépend pas de φ. Aussi on se propose d'approcher le problème (P_1) par la méthode du maximum de vraisemblance. Le choix d'une stratégie étagée, conduit à une chaîne de MARKOV qui sera étudiée dans le paragraphe deux. Cette étude se scinde en deux parties. D'abord on suppose que l'état initial admet une loi de densité paire. Alors il existe une solution strictement stationnaire et transitive. Dans une deuxième partie, on supprime l'hypothèse faite sur l'état initial. On

montre alors que la chaîne de MARKOV converge vers un état stationnaire régi par une loi symétrique. A l'issu de ces deux parties, on décrit le comportement asymptotique des moments d'ordre un et deux de la chaîne. Ceci nous permet alors, dans le paragraphe trois, de donner les proprités de la famille d'estimateurs proposés au paragraphe un. On montre que l'estimateur de maximum de vraisemblance est consistant de loi asymptotiquement normale. Enfin dans le paragraphe quatre on démontre l'optimalité de la stratégie choisie.

On consacre le chapitre trois au cas d'une stratégie continue du type markovien définie en temps continu.

L'étude des équations différentielles stochastiques correspondant à un tel cas est compliquée. La méthode utilisée est celle des approximations du processus continu par des limites de suites de processus, solutions de l'équation (I) correspondant à des contrôles étagés par rapport à des partitions de l'intervalle [0,T].

On étudie cette suite : on montre dans le cas où l'état initial admet une loi symétrique, que la suite de processus correspondant à cet état initial converge vers un processus, solution de (I), strictement stationnaire et transitif noté X*. Dans le cas où la loi de l'état initial est quelconque, on peut montrer que la suite de processus correspondant à cet état initial, converge en loi vers un processus solution de (I) noté X. Notre souhait était, au départ, de comparer les moments d'ordre un et deux des deux processus limites x et X*, comme dans le chapitre deux. Cependant cette comparaison s'est révélée trés délicate dans le cadre de la méthode utilisée. Nous donnerons dans le paragraphe III les raisons expliquant pourquoi cette comparaison est difficile. De ce fait la méthode des approximations successives ne nous permet pas de résoudre (P_1) et

(P_2). Alors, nous inspirant des notes personnelles de F. BRODEAU, nous envisageons une approche du problème **(P_1)** dans laquelle on montre l'existence et l'unicité d'une solution forte de l'équation **(I)** pour le contrôle choisi Y(.)=Sgn[X(.)] , et on compare les solutions générale et stationnaire. Cette étude est présentée dans le paragraphe III. A l'issue de ce paragraphe, nous proposons un estimateur par la méthode du maximum de vraisemblance qui a les propriétés voulues (consistance et normalité asymptotique). Quant au problème **(P_2)**, pour les raisons évoquées, il reste non résolu dans le cas général.

□

SOMMAIRE.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION AU PROBLEME - RAPPELS - NOTATIONS .

NOTATIONS

$\mathcal{B}$	:	Tribu des boréliens de $\mathbb{R}$
$\mathcal{B}_0$	:	Tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ dont l'adhérence ne contient pas l'origine
$\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$	:	Tribu tensorielle sur l'espace produit $X \times Y$
Cadlag	:	Continu à droite limité a gauche
D	:	Espace des fonctions cadlag sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
D_T	:	Restriction de D à l'espace $[0,T]$
λ_T	:	Mesure de LEBESGUE sur l'espace $[0,T]$.

Lorsqu'on utilise une relation d'une partie d'un paragraphe d'un chapitre , on note le numéro du chapitre suivi du numéro du paragraphe suivi du numéro de la relation . Par exemple 2.II(3.4) représente la relation (3.4) du paragraphe II du chapitre 2. Si on est dans un même chapitre,on ne met pas le numéro du chapitre , et si on est dans le même paragraphe on omet le numéro du paragraphe.

1.Présentation du problème

On étudie un système physique (S) sur un intervalle de temps $[0,T]$, $T>0$, dont les états sont donnés à chaque instant t, par une variable $X(t)$. L'évolution de (S) peut être contrôlée par l'examinateur, en même temps contrôleur, qui prend à chaque instant t, une décision $Y(t)$. Nous ne précisons pas les espaces dans lesquels $X(.)$ et $Y(.)$ prennent leurs valeurs, notre souci étant dans ce paragraphe de présenter grossièrement le problème. Nous définirons dans les chapitres suivants les éléments nécessaires validant notre travail.

L'évolution du système peut être connue par l'intermédiaire d'une équation, dite " équation d'évolution", lorsqu'une règle de décision est choisie et l'état initial est donné. Dans ce cas on dit qu'on a un <u>problème déterministe</u>. Il peut se présenter des cas où le système est perturbé par un phénomène aléatoire qu'on représente par un processus $\xi(t)$. Par la présence du terme aléatoire $\xi(t)$, $X(t)$ est un processus aléatoire. Il est alors utile de choisir un contrôle $Y(t)$ qui tienne compte de cet effet aléatoire, contrôle dit <u>stochastique</u>. on est dans le cas d'un problème qualifié de <u>stochastique</u>. Nous nous plaçons içi dans le cadre d'un tel problème.

Les évolutions de certains systèmes dynamiques sont données par des équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$\frac{dX}{dt}(t) = f(X(t),Y(t), \xi(t)) ,$$

où f est une certaine fonction des éléments $X(t)$, $Y(t)$ et $\xi(t)$ définis précédemment. Dans le cadre de notre étude, on se limite à la classe des fonctions f linéaires. L'évolution de l'état du système à contrôler est alors modelisée par une équation différentielle linéaire donnée par:

$$dX(t) = \varphi_1 X(t)dt + \varphi_2 Y(t)dt + d\xi(t) ,$$

où φ_1 et φ_2 sont les paramètres inconnus du système appelés paramètres de dérive.

<u>Notre premier objectif est d'estimer le paramètre $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$</u>. Ceci devant se faire en temps réel, nous n'avons pas la possibilité de répéter l'experience fournissant l'observation sur laquelle est basée l'estimation. Nous nous sommes alors proposé d'étudier le problème d'estimation des paramètres du système, au vu de l'observation en temps continu, d'une trajectoire du processus engendré par le modèle linéaire.

L'estimation dépend du contrôle (ou stratégie) Y(t) choisi dans une classe de contrôles applicables au système.

<u>Notre deuxième objectif est alors de déterminer un contrôle optimal</u> quant à la qualité de l'estimation. Il est raisonnable de prendre la maximisation de la trace de la matrice de FISHER pour critère d'optimisation (voir [20]).

<u>Notre but est donc de dégager des procédures d'estimation d'en décrire les qualités à partir d'un choix optimal du contrôle</u>.

Avant d'entamer notre étude, nous allons rappeler certains résultats qui nous permettent d'une part de préciser les hypothèses de travail et d'autre part de résoudre les problèmes d'estimation et d'optimisation.

2-Rappels et notations

On se donne un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Les éléments de Ω sont notés ω. Soit une suite croissante de tribus $(\mathcal{F}_t, t\geq 0)$ incluses dans $\mathcal{A}$: $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$, $t\geq 0$, $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ pour $t_1 < t_2$. Tous les éléments aléatoires introduits dans la suite sont définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On rappelle:

- Un processus stochastique $(\mathfrak{X}(t),\ t \geq 0)$ est dit adapté à la famille $(\mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ si pour tout $t \geq 0$, $\mathfrak{X}(t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

- Un processus $(\mu_t,\ t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelé processus à accroissement indépendants par rapport à la famille $(\mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ si :

a- $(\mu_t,\ t \geq 0)$ est adapté à la famille $(\mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$.

b- pour toute suite $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$, les variables aléatoires $\mu_{t_1} - \mu_{t_0}, \ldots, \mu_{t_n} - \mu_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes.

- Si la distribution du vecteur $\mu(t+h) - \mu(t)$ ne dépend que de h, on dit que le processus est homogène.

Exemples de processus homogènes à accroissements indépendants:

2.1 Processus de WIENER.

Définition Un processus $(\beta_t,\ t\geq 0)$ à accroissements indépendants et homogène est dit processus de WIENER, ou mouvement Brownien, si :

- P-presque sûrement $\beta_0 = 0$

- l'accroissement $\beta_t - \beta_s$ a une distribution gaussienne de moyenne nulle et de variance égale à $\sigma^2|t-s|$, où σ est un paramètre.

- pour presque tout ω dans Ω, la fonction $t \mapsto \beta(t,\omega)$

est continue en t , $t \geq 0$.

Dans le cas où $\sigma^2=1$, on dit qu'on a un mouvement Brownien standard (ou processus de WIENER standard). Dans la suite, nous nous plaçons dans ce cas et nous ne précisons pas que le mouvement Brownien considéré est standard. On peut se référer à [13], [16], ..., [18], [22] pour les différentes propriétés d'un tel processus.

2.2 Processus de POISSON-Mesure de POISSON.

a-Mesure aléatoire.

Soit X un espace muni d'une tribu $\mathcal{B}_X$.

-Une mesure ν sur $\mathcal{B}_X$ est dite mesure aléatoire si pour tout A de $\mathcal{B}_X$, $\nu(A)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et vérifiant :

pour toute suite dénombrable $(A_k)_{k\geq 1}$ d'ensembles disjoints deux à deux de $\mathcal{B}_X$ tels que $\cup_k A_k=A$, la série $\Sigma_{k=1,\infty}\nu(A_k)$ converge en probabilité vers $\nu(A)$.

-Soit $A_1,\ldots,A_k$ des ensembles de $\mathcal{B}_X$ disjoints deux à deux. On dit que la mesure ν est à valeurs indépendantes si les variables aléatoires $\nu(A_1),\ldots,\nu(A_k)$ sont mutuellement indépendantes.

Une mesure aléatoire fréquemment utilisée est celle de POISSON qu'on définit:

b-Mesure de POISSON

Soit $T>0$, prenons $X=[0,T]\times\mathbb{R}$. Supposons définie sur $\mathcal{B}_{[0,T]}\times\mathcal{B}$ une mesure aléatoire π, à valeurs indépendantes. Soit μ, une mesure

positive définie sur $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ <u>prenant des valeurs finies sur $\mathcal{B}_0$</u>.
la mesure π est dite <u>mesure de POISSON</u> de <u>mesure associée μ</u> si elle vérifie :

∙pour tout A de $\mathcal{B}_0$ et tout intervalle $[s,t]$ de $[0,T]$,

$$\pi(\,[s,t]\times A\,) \text{ suit une loi de POISSON de paramètre } (t-s)\mu(A).$$

On définit la mesure de POISSON centrée, qu'on note q, par :

$$q(B) = \pi(B)-E[\pi(B)] \quad , \quad B = [s,t]\times A,\ 0\leq s\leq t\leq T,\ A \in \mathcal{B}_0.$$

Si on pose pour t dans $[0,T]$ et B dans $\mathcal{B}_0$,

$$\nu(t,B) = \pi(\,[0,t]\times B\,)\ ,$$

alors, le processus $(\nu(t,B),\ t \in [0,T])$ pour B fixé dans $\mathcal{B}_0$, est un processus de POISSON de paramètre $t\mu(B)$.

c-<u>Interprétation de la mesure π</u>.

La mesure de POISSON est, en général <u>associée à des processus de sauts</u>. Soit $X=(\,X_t,\ t \in [0,T]\,)$ un processus homogène, à accroissements indépendants et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que X ne présente pas de <u>discontinuités de seconde espèce</u> : c'est à dire que les limites à droite et à gauche de $X(t)$ en tout point t de $[0,T]$ existent et sont finies.

Soit , $[t,t']\times A$, $0\leq t\leq t'\leq T$, $A \in \mathcal{B}_0$.

Si $\pi([t,t']\times A)$ représente le nombre de discontinuités du procesus $X(t)$ telles que l'élément $(s,\ X(s-0)-X(s+0)\ )$ appartient à $[t,t']\times A$, alors $\pi([t,t']\times A)$ suit une loi de POISSON de paramètre $(t-t')\mu(A)$.

d-<u>Intégrale stochastique par rapport à la mesure de POISSON centrée</u>

Soit une fonction aléatoire $f(t,v)$, $t \in [0,T]$ et $v \in \mathbb{R}$, adaptée à la famille $(\mathcal{F}_t,\ t\in[0,T])$ pour tout v dans $\mathbb{R}$. $f(t,v)$ est dite fonction simple (ou étagée) si:

$$f(t,v) = f_{k,l} \quad t\in[t_k,t_{k+1}[\text{ et } v\in A_l \quad k=0,n\ ;\ l=1,\dots,s+1\ ,$$

où $A_l \in \mathcal{B}_0$, $\cup_l A_l = \mathbb{R}-\{0\}$, $A_k \cap A_r = \emptyset$ pour $k\neq r$, $0=t_0<t_1\dots<t_n=T$. $f_{k,l}$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{tk}$-mesurable pour tout l variant de 1 à s+1.

Notons $H_0{}^q$ la classe des fonctions étagées. Soit f(t,v), une fonction simple. On pose par définition :

$$(2.1) \qquad J(f)=\int_0^T\int_{\mathbb{R}} f(t,v)q(ds\times dv)=\Sigma_{k=0,n}\Sigma_{l=1,s+1} f_{k,l}\,q([t_k,t_{k+1}[\times A_l)\,.$$

On note H^q, la classe des fonctions f(t,v) pour lesquelles il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions appartenant à $H_0{}^q$ telle que:

$$(2.2) \qquad \mathrm{Lim}_{n\to\infty}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |f(t,v)-f_n(t,v)|^2\, dt\mu(dv) = 0.$$

Soit f(t,v) une fonction de H^q. On définit alors J(f) comme étant la limite au sens de la convergence en probabilité de $J(f_n)$. On définit,

$$J(f,t) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}} f(s,v)q(ds\times dv) \quad ,f\in H^q\ ,\ t\in[0,T]\ ,$$

par, $\qquad J(f,t) = J(\chi_t.f),$

où χ_t est la fonction indicatrice de l'intervalle [0,t].

Propriétés.

L'intégrale J(f,t) en tant que fonction de t est un processus stochastique vérifiant certaines propriétés. Nous allons rappeler certaines d'entre elles qui sont utilisées dans notre travail. Pour plus de détails on peut se référer à [14], [16], [17], [18], [22]. On a :

1- si f(t,v) vérifie la propriété suivante:

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}} E[|f(t,v)|^2]dt\mu(dv) <+\infty$$

alors $J(f,t)$ est une martingale de carré intégrable.

2- Pour toute fonction $f(t,v)$ dans H^q, $\{J(f,t)\ ,\ t\in[0,T]\}$ est un processus adapté à la famille $\{\mathcal{F}_t, t\in[0,T]\}$. Ses trajectoires sont presque sûrement dans D_T.

3- Si on a $\int_0^T\int_{\mathbb{R}} E[|f(t,v)|^2]dt\mu(dv) < +\infty$ alors $J(f,t)$ admet des moments jusqu'au second ordre finis et on a:

$$\text{(i)}\quad E\Big[\int_0^t\int_{\mathbb{R}} f(s,v)q(ds\times dv)\Big] = 0$$

$$\text{(ii)}\quad E\{|J(f,t)|^2\} = \int_0^t\int_{\mathbb{R}} E[|f(s,v)|^2]ds\mu(dv)\ ,$$

$$\text{(iii)}\quad E\{\operatorname{Sup}_{0\le t\le T} J^2(f,t)\} \le 4E[J^2(f,T)]$$

$$= 4\int_0^T\int_{\mathbb{R}} E|f(t,v)|^2 dt\mu(dv)$$

4- Si la relation suivante est vérifiée pour un entier $m \geq 1$,

$$E\Big\{\int_0^T\Big[\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(s,v)|^2\mu(dv)\Big)^m + \int_{\mathbb{R}}|f(s,v)|^{2m}\mu(dv)\Big]ds\Big\} < +\infty,$$

alors on a :

$$E[\,|J(f,t)|^{2m}\,] < +\infty\ .$$

On énonce un résultat qui sera utilisé dans le chapitre suivant:

<u>Lemme 2.1</u> Considérons une fonction réelle $f(s,v), s\in[0,T], v\in\mathbb{R}$, <u>non aléatoire</u>. Supposons que pour tout s dans $[0,T]$, $f(s,v)$ est une fonction <u>impaire</u> en v. Si la mesure μ associée à la mesure de POISSON est <u>symétrique</u> alors, pour t,t' dans $[0,T]$, la variable aléatoire :

$$\int_t^{t'}\int_{\mathbb{R}} f(s,v)q(ds\times dv)$$

admet une loi symétrique $(t<t')$.

Démonstration:

Soit une suite $s_0 = t < s_1 < \ldots < s_l = t'$ formant une partition de l'intervalle $[t,t']$ et $([v_j,v_{j+1}[)_{j=0,\pm1,\ldots}$ une partition de $\mathbb{R}$. Posons

$$X = \int_t^{t'}\int_{\mathbb{R}} f(s,v)q(ds \times dv) \quad t \text{ et } t' \text{ étant fixés dans } [0,T].$$

La variable aléatoire X peut être considérée, d'après 2.2.d. comme limite au sens de la convergence en probabilité de la somme:

$$X_{l,k} = \Sigma_{n=0,l-1}\Sigma_{m=-k,k-1} f(s_n,v_m)q([s_n,s_{n+1}[\times[v_m,v_{m+1}[)$$

Posons

$$Y_{n,m} = q([s_n,s_{n+1}[\times[v_m,v_{m+1}[),$$

$$\lambda_{n,m} = (s_{n+1}-s_n)\mu([v_m,v_{m+1}[),$$

$$\alpha_{n,m} = f(s_n,v_m).$$

On a:

$$X_{l,k} = \Sigma_{n=0,l-1}\Sigma_{m=-k,k-1}\alpha_{n,m}Y_{n,m},$$

où $Y_{n,m}$ est une variable aléatoire qui suit une loi de POISSON de paramètre $\lambda_{n,m}$. Compte tenu des propriétés de la mesure q (2.2.b) $(Y_{n,m})_{n,m}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et centrées. On note, pour toute variable aléatoire Z, $\varphi_Z(.)$ sa fonction caractéristique. On a alors :

$$\varphi_{X_{l,k}}(u) = \Pi_{n,m}\exp\{-i\alpha_{n,m}\lambda_{n,m}u\}\exp\{\lambda_{n,m}(e^{iu\alpha_{n,m}}-1)\}.$$

D'où,

$$\mathrm{Log}[\varphi_{X_{l,k}}(u)] = i\Sigma_{n,m}\lambda_{n,m}(\sin(\alpha_{n,m}u)-\alpha_{n,m}u)$$

$$+\Sigma_{n,m}\lambda_{n,m}(\cos(\alpha_{n,m}u)-1).$$

En tenant compte des expressions des différents termes apparaissant ci-dessus on obtient:

(2.3) $$\mathrm{Lim}_{l,k}\Sigma_{n,m}\lambda_{n,m}(\sin(\alpha_{n,m}u)-\alpha_{n,m}u)=\int_t^{t'}\int_{\mathbb{R}}[\sin(uf(s,v))-uf(s,v)]ds\mu(dv).$$

Comme la fonction f(s,v) est impaire en v, alors sin(uf(s,v))-uf(s,v) est une fonction impaire en v. Par ailleurs la mesure μ est symétrique. On en déduit que l'intégrale double de (2.3) s'annule. D'autre part,

$$\mathrm{Lim}_{l,k}\Sigma_{n,m}\lambda_{n,m}(\cos(\alpha_{n,m}u)-1)=\int_t^{t'}\int_{\mathbb{R}}[\cos(uf(s,v))-1]ds\mu(dv),$$

ce qui donne:

$$\varphi_X(u)=\exp(2\int_t^{t'}\int_0^{+\infty}[\cos(uf(s,v))-1]ds\mu(dv).$$

$\varphi_X(.)$ est une fonction réelle. On en déduit le résultat du lemme.

□

2.3 Propriétés des processus homogènes à accroissements indépendants.

Soit ($\xi(t)$, $t\in[0,T]$) un processus homogène à accroissements indépendants et à trajectoires presque sûrement dans D_T. Alors d'après [16], [17] un tel processus peut se mettre sous la forme suivante :

$$\xi(t)=at+bW(t)+\mu_1(t),$$

où a et b sont des constantes, W(t) un processus de WIENER et $\mu_1(t)$ est un processus homogène à accroissements indépendants, purement discontinu. W(t) et $\mu_1(t)$ sont indépendants. Si le processus $(\mu_1(t))$ possède des moments d'ordre deux finis, alors on a la décomposition suivante:

$$\mu_1(t)=ct+\int_{\mathbb{R}}vq([0,T]\times dv),$$

où c est une constante et q est une mesure de POISSON centrée. Si de plus $(\mathfrak{X}(t))$ est centré alors on peut écrire (voir [17]):

$$\mathfrak{X}(t) = bW(t) + \int_{\mathbb{R}} vq([0,t]\times dv) \quad t\geq 0.$$

Dans la suite, on prendra <u>b=1</u>.

2.4 Notion de contrôle stochastique.

Soit U un espace muni d'une tribu $\mathfrak{B}_U$.

Définition : Une équation différentielle stochastique <u>controlée</u> est une équation de la forme :

$$dX(t) = a_\varphi(X(t),Y(t))dt + d\mathfrak{X}(t), \tag{4.1}$$

$a_\varphi(x,y)$ est une application définie sur $\mathbb{R}\times U$, $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}_U$-mesurable, dépendant d'un paramètre φ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. $(Y(t))$ est un processus adapté à la famille $(\mathcal{F}_t, t\geq 0)$ et à valeurs dans $(U,\mathfrak{B}_U)$. $(Y(t))$ est appelé processus de contrôle ou seulement contrôle. $(\mathfrak{X}(t))$ est un processus adapté représentant un "bruit". L'ensemble de tous les contrôles pouvant être applicables au système est appelé classe des contrôles admissibles (ou stratégies admissibles). Dans <u>un problème de contrôle</u> on raisonne de la façon suivante : Sur la base de processus $(\Omega, \mathfrak{A}, (\mathcal{F}_t, t\in[0,T]), P)$, T fixé, on définit un processus $(\mathfrak{X}(t), t\in[0,T])$ homogène, à accroissements indépendants et une variable aléatoire X_0, $\mathcal{F}_0$-mesurable et indépendante de $\mathfrak{X}(t)$, $t\in[0,T]$. On désigne par C_0 la classe de tous les processus mesurables par rapport à cette base et adaptés à la famille $(\mathcal{F}_t, t\in[0,T])$, à valeurs dans $(U,\mathcal{B}_U)$. Pour tout contrôle Y de C_0, on associe un processus X^Y solution de (**4**.1). L'existence et l'unicité d'une telle solution sont assurées par les conditions suivantes:

1-$E[\,|X_0|^2] < +\infty$

2-Il existe deux constantes L et C strictement positives telles que pour tout x et x' dans $\mathbb{R}$, y et y' dans U et tout t dans [0,T]:

- $T|a_\varphi(x,y)-a_\varphi(x',y')|^2 \leq L^2(\,|x-x'|^2 + |y-y'|^2\,)$
- $|a_\varphi(x,y)|^2 \leq C(\,1+|x|^2)$.

Sous ces conditions l'équation (**4**.1) admet une solution unique X^Y telle que pour tout $t \in [0,T]$, on a:

- $X^Y(t)$ est $\mathcal{F}_t$- mesurable ,
- $E[\,|X^Y(t)|^2\,] < +\infty$.

3.Hypothèses de travail.

Afin de mener à bien notre étude, nous nous plaçons dans le cas où l'équation d'évolution du système (S) vérifie les hypothèses d'existence et d'unicité d'une solution.

On définit sur $(\Omega,\mathcal{A},\{\mathcal{F}_t,t\geq 0\},P)$:

- une variable aléatoire X_0 $\mathcal{F}_0$-mesurable ,
- un processus de WIENER $W(.) = \{W_t,t\geq 0\}$,
- une mesure de POISSON centrée q de mesure associée μ.

On suppose X_0,W et q mutuellement indépendants. On prend $U = [-1,1]$ et on considère un contrôle $Y(.) = \{Y_t,t\geq 0\}$ de C_0. On fait les hypothèses suivantes:

(H_1) X_0 est du second ordre

(H_2) $\int_{\mathbb{R}} v^2\mu(dv) < +\infty$.

L'évolution du système est alors donnée par l'équation:

$$(I) \qquad \begin{cases} dX(t) = \varphi_1 X(t)dt + \varphi_2 Y(t)dt + dW(t) + \int_{\mathbb{R}} vq(dt\times dv) \\ X(0) = X_0 . \end{cases}$$

Pour assurer la stabilité du système on suppose $\underline{\varphi_1 < 0}$. La valeur de φ_2 est supposée <u>strictement positive</u>. Cette dernière hypothèse ne fait pas perdre de généralité. Nous considérons deux classes particulières de contrôles qu'on définit comme suit :

Classe des contrôles étagés.

Soit i un entier non nul dans $\mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathfrak{D}^i$, la suite $(t_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$t_n^i = n/2^i \quad n\in\mathbb{N}.$$

On suppose que T appartient à $\mathfrak{D}^i$, c'est à dire qu'il existe un entier N non nul tel que :

$$T = N/2^i .$$

On note "C_e^i" la classe des stratégies étagées par rapport à $\mathfrak{D}^i$ définie de la façon suivante :

Y_i est un élément de C_e^i s'il existe une suite $(\Psi_n, n\in\mathbb{N})$ d'applications mesurables de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ t_n^i \le t \le t_{n+1}^i \quad Y_i(t) = \Psi_n(X_i(t_n^i)).$$

Classe des contrôles "Markoviens"

On note "C_m" la classe des stratégies Y(.) qu'on appelle

Markoviennes telles que pour tout élément $Y(.)$ de C_m, il existe une application g, mesurable de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$ telle qu'on a :

$$\forall t \in [0,T] \quad Y(t) = g[X(t)] .$$

Les stratégies de $C_e{}^i$ sont dites du type I et celles de C_m sont dites du type II.

Dans ses différents travaux ,[4],...[7], BRODEAU a étudié les problèmes qu'on se propose de résoudre dans les mêmes termes, mais où l'intégrale stochastique par rapport à la mesure q n'apparait pas. L'équation différentielle stochastique est alors donnée par:

$$dX(t) = \varphi_1 X(t)dt + \varphi_2 Y(t)dt + dW(t) .$$

Notre étude est alors une extention de certains résultats obtenus dans le cadre de ce modèle. Nous sommes restés fidèles à la démarche suivie dans ce cadre, mais les méthodes employées sont parfois différentes à cause de la non-continuité des trajectoires du bruit $\gamma(t)$, induite par la présence de l'intégrale par rapport à la mesure q.

En effet, par le choix d'une stratégie du type I, l'intervalle $[0,T]$ est partitionné par une suite d'instants $(t_n{}^i)_n$, $i \in \mathbb{N}^*$. Ce procédé nous ramène à l'étude du processus $X(t)$ dans des intervalles de temps de la forme $[t_n{}^i, t_{n+1}{}^i[$, ce qui aboutit à des processus discrets qui sont alors, des chaînes de MARKOV.

La différence de notre travail avec celui de BRODEAU, se situe au niveau des innovations de la chaîne de MARKOV. Dans le cadre de notre modèle les innovations sont des variables aléatoires présentant éventuellement plusieurs modes, contrairement au cas traité dans [4]...[7],où elles sont de lois unimodales, puisque gaussiennes. Cette différence apparaîtra dans notre travail et constitue une difficulté supplémentaire pour notre étude parallèle à celle de BRODEAU.

Il ne nous a été possible de poursuivre cette étude qu'en imposant l'hypothèse :

(H_3) la mesure μ est symétrique ,

qui assure que les innovations sont de lois symétriques. L'étude du cas où la mesure μ n'est pas symétrique, reste un problème ouvert.

CHAPITRE 2

ETUDE DANS LE CAS DE STRATEGIE DU TYPE I.

I-Introduction au problème d'identification.

1-Formalisme - Structure statistique.

Dans cette partie, nous allons donner une formulation précise du problème que nous venons de présenter. Bien sûr nous nous plaçons dans le cadre des hypothèses citées dans le chapitre I. A tout contrôle Y de C_e^i, on associe une fonction aléatoire $X(.)=(X_t,t\geq 0)$ représentant la trajectoire d'un système dynamique dont l'état à l'instant t est donné par X_t. On suppose qu'il existe un couple $\varphi^*=(\varphi^*_1,\varphi^*_2)$ inconnu dans $]-\infty,0[\times]0,+\infty[$ dite " vraie valeur du paramètre φ " pour lequel $X(.)$ est la trajectoire d'un processus $(X_t,t>0)$ solution de l'équation :

$$(1.1)\qquad \begin{cases} dX_t = \varphi_1 X_t dt + \varphi_2 Y_t dt + dW_t + \int_{\mathbb{R}} vq(dt\times dv), \\ X_0 \text{ donné.} \end{cases}$$

Une telle solution, d'après le paragraphe I.3, existe et est unique.

On munit l'espace D de la topologie de SKOROKHOD sur tous les compacts. $\mathcal{D}_T$ désigne la tribu engendrée par les applications coordonnées $\pi_s, 0\leq s\leq T$. On note $\mathcal{D}$, la tribu engendrée sur D par la famille $(\mathcal{D}_T,T\geq 0)$. Soit $P_{\varphi,Y}$ [respectivement ν] la loi du processus $(X_t,\ t\geq 0)$ solution de l'équation (1.1) [respectivement $(X_0 + W_t + \int_{\mathbb{R}} vq([0,t]\times dv)\ ,\ t\geq 0)$]. On note $P^T_{\varphi,Y}$ [resp. ν^T] la restriction de $P_{\varphi,Y}$ [resp. ν] à $\mathcal{D}_T$.

Nous adoptons le formalisme de la statistique mathématique tel qu'il a été introduit par J.R. BARRA dans [9]. Nous posons le problème d'estimation du paramètre φ dans la structure statistique :

$$(1.2) \qquad \left\{ (D,\mathcal{D}_T,P^T_{\varphi,Y}) \ , \ \varphi = (\varphi_1,\varphi_2) \ \ \varphi_1<0 \ , \ \varphi_2>0 \right\}.$$

On cherche à construire des estimateurs de φ, c'est à dire des statistiques définies sur cette structure. La méthode employée est celle du maximum de vraisemblance, car la structure statistique (1.2) est dominée par la mesure ν^T. En effet, d'après le lemme (5.1) de [7], on peut décrire la famille de mesures $\{ P^T_{\varphi,Y}, \varphi_1<0 \ \varphi_2>0 \ ,$ $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2) \}$:

Lemme 1.1 Pour $T>0$, φ dans $\mathbb{R}^2$, les mesures $P^T_{\varphi,Y}$ et ν^T sont équivalentes. La densité de RADON-NIKODYM est donnée par:

$$(1.3) \qquad \frac{dP^T_{\varphi,Y}}{d\nu^T} = \exp\Big\{ \int_0^T [\varphi_1\pi_s+\varphi_2 Y(\pi)(s)]\, dM_s - 1/2 \int_0^T [\varphi_1\pi_s+\varphi_2 Y(\pi)(s)]^2 ds \Big\},$$

où $dM_t = d\pi_t - \int_{\mathbb{R}} v q(dt\times dv)$.

L'intégrale stochastique étant calculée par rapport à la mesure ν^T.

Les résultats de ce lemme découlent d'une extention du théorème de GIRSANOV, voir [7], [8], [20], qui assure d'ailleurs que le processus $(\pi_t, t\geq 0)$ est solution de l'équation (1.1) pour la mesure de POISSON q et pour le processus de WIENER $(\widetilde{W}_t)$ défini sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et donné par :

$$(1.4) \qquad \widetilde{W}_t = \pi_t-\pi_0-\int_0^t [\varphi_1\pi_s+\varphi_2 Y(\pi)(s)]ds - \int_{\mathbb{R}} v q([0,T]\times dv).$$

(1.3) nous fournit une fonction de log-vraisemblance notée $L_T(\varphi)$ telle qu'elle est définie dans [20]. On a alors :

$$(1.5)\qquad L_T(\varphi) = \int_0^T [\varphi_1 \pi_s + \varphi_2 Y(\pi)(s)]dM_s - 1/2 \int_0^T [\varphi_1 \pi_s + \varphi_2 Y(\pi)(s)]^2 ds$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance, $\hat{\varphi}_T$, est défini comme l'unique solution de l'équation $L_T^{(1)}(\varphi) = 0$, où $L_T^{(1)}(\varphi)$ est la dérivée première de $L_T(\varphi)$. On note $L_T^{(2)}$, la dérivée seconde de $L_T(\varphi)$. On a alors tous calculs faits:

$$(1.6)\qquad (\varphi^{\bullet} - \hat{\varphi}_T) = [\, L_T^{(2)}]^{-1}\, L_T^{(1)}(\varphi^{\bullet}),$$

dans le domaine où $L_T^{(2)}$ est inversible. On a relativement à $P^T_{\varphi,Y}$:

$$(1.7)\quad L_T^{(1)}(\varphi) = \begin{bmatrix} \int_0^T \pi_t d\tilde{W}_t \\ \int_0^T Y(\pi)(t) d\tilde{W}_t \end{bmatrix}, \; L_T^{(2)} = - \begin{bmatrix} \int_0^T \pi_t^2 dt & \int_0^T \pi_t Y(\pi)(t)dt \\ \int_0^T \pi_t Y(\pi)(t)dt & \int_0^T Y^2(\pi)(t)dt \end{bmatrix}$$

Nous envisageons à présent d'étudier le comportement asymptotique de la famille $(\hat{\varphi}_T, T>0)$. On rappelle la définition suivante :

<u>Définition1</u> La valeur réelle $\varphi^{\bullet}$ du paramètre φ est <u>asymptotiquement identifiable presque sûrement</u> (resp. <u>en moyenne quadratique</u>, resp. <u>en probabilité</u>)s'il existe une famille $(\hat{\varphi}_T, T>0)$ de statistiques définies sur la structure statistique $\{(D, \mathcal{D}_T, P^T_{\varphi,Y}), \varphi_1 < 0, \varphi_2 > 0\}$ T>0 telle que :

$$\mathrm{Lim}_{T \to \infty} \hat{\varphi}_T = \varphi^{\bullet}$$

au sens de la convergence <u>presque sûre</u> (resp. en <u>moyenne quadratique</u>, resp. en <u>probabilité</u>) et relativement à la mesure $P^T_{\varphi^{\bullet},Y}$.

$L_T^{(1)}(\varphi)$ et $L_T^{(2)}$ peuvent être écrits de la façon suivante :

$$(1.8) \quad L_T^{(1)}(\varphi) = \begin{bmatrix} \int_0^T X_t dW_t \\ \int_0^T Y(X)(t) dW_t \end{bmatrix}, \quad L_T^{(2)} = - \begin{bmatrix} \int_0^T X_t^2 dt & \int_0^T X_t Y(X)(t) dt \\ \int_0^T X_t Y(X)(t) dt & \int_0^T Y^2(X)(t) dt \end{bmatrix}$$

On voit à partir de (1.6) que le comportement asymptotique de la famille $(\hat{\varphi}_T, T>0)$ par rapport à la vraie valeur φ^* est donné par celui de $L_T^{(1)}(\varphi^*)$ et $L_T^{(2)}$. Compte tenu de (1.8), le comportement de $L_T^{(1)}(\varphi)$ et de $L_T^{(2)}$, quand T tend vers l'infini, est donné par celui des intégrales suivantes :

$$\int_0^T X_t^2 dt \quad , \quad \int_0^T X_t Y_t dt .$$

Tout d'abord définissons la stratégie du type I qu'on choisit pour mener cette étude.

2-La stratégie.

Soit i, un entier non nul, $i \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite $\mathfrak{D}_i$ d'éléments $(t_n^i, n \in \mathbb{N})$ de $\mathbb{R}$, définie dans le chapitre précédent. i étant fixé, on choisit dans la classe C_e^i, un contrôle Y_i tel que pour t, $t_n^i \le t < t_{n+1}^i$, $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$Y_i(t) = \mathrm{Sgn}[X_i(t_n^i)] ,$$

où $\mathrm{Sgn}(x) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) - \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x)$. La convention concernant la valeur de cette fonction à l'origine est arbitraire et sans conséquences pour la suite. X_i est la solution de l'équation (1.1) correspondant à l'état initial X_0 et au contrôle Y_i. Ceci a bien un sens puisqu'on peut écrire pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout t tel que $t_n{}^i \leq t < t_{n+1}{}^i$:

$$(2.1)\quad \begin{cases} X_i(t) = X_i(t_n{}^i) + \int_{t_n{}^i}^{t} [\varphi_1 X_i(s) + \varphi_2 \mathrm{Sgn}[X_i(t_n{}^i)]]ds + W_t - W_{t_n{}^i} \\ \qquad\qquad + \int_{\mathbb{R}} v q([t_n{}^i, t] \times dv) \\ X_i(0) = X_0. \end{cases}$$

On peut déduire de (2.1) et grâce à la formule de ITO :

pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t tel que $t_n{}^i \leq t < t_{n+1}{}^i$,

$$(2.2)\quad \begin{cases} X_i(t) = e^{\varphi_1 t}[\, X_i(t_n{}^i)e^{-\varphi_1 t_n^i} - (\varphi_2/\varphi_1)(e^{-\varphi_1 t} - e^{-\varphi_1 t_n^i})\mathrm{Sgn}(X_i(t_n{}^i)) \\ \qquad\qquad + \int_{t_n{}^i}^{t} e^{-\varphi_1 s} dW_s + \int_{t_n{}^i}^{t}\int_{\mathbb{R}} v e^{-\varphi_1 s} q(ds \times dv)\,] \\ X_i(0) = X_0 \end{cases}$$

Au temps $t = t_{n+1}{}^i$, on obtient :

$$X_i(t_{n+1}{}^i) = \exp(\varphi_1 2^{-i})X_i(t_n{}^i) - (\varphi_2/\varphi_1)[1 - \exp(\varphi_1 2^{-i})]\mathrm{Sgn}[X_i(t_n{}^i)]$$
$$+ \int_{t_n{}^i}^{t_{n+1}{}^i} e^{\varphi_1(t_{n+1}^i - s)} dW_s + \int_{t_n{}^i}^{t_{n+1}{}^i}\int_{\mathbb{R}} e^{\varphi_1(t_{n+1}^i - s)} q(ds \times dv)$$

Posons successivement:

$$k_i = \exp(\varphi_1 2^{-i})$$

$$k_i' = -(\varphi_2/\varphi_1)[\, 1 - \exp(\varphi_1 2^{-i})\,]$$

$$H_n{}^i = \int_{t_n{}^i}^{t_{n+1}{}^i} e^{\varphi_1(t_{n+1}^i - s)} dW_s + \int_{t_n{}^i}^{t_{n+1}{}^i}\int_{\mathbb{R}} v e^{\varphi_1(t_{n+1}^i - s)} q(ds \times dv).$$

Les hypothèses faites sur φ_1 et φ_2 entraînent que k_i appartient à $]0,1[$ et que k_i' est strictement positif. Pour i fixé, et compte tenu des propriétés du processus de WIENER et de la mesure de POISSON q,

$(H_n^i)_n$ est une suite de variables aléatoires centrées, indépendantes de même loi et du second ordre. La relation (2.3) s'écrit donc :

$$(2.4) \qquad X_i(t_{n+1}^i) = k_i X_i(t_n^i) + k_i' \mathrm{Sgn}[(X_i(t_n^i)] + H_n^i \qquad n \geq 0 .$$

Sous cette forme, il apparait que le processus discret $(X_i(t_n^i), n \in \mathbb{N})$, i étant fixé, est une chaîne de MARKOV. Nous envisageons d'étudier cette chaîne de MARKOV et de déduire le comportement de ses moments d'ordre un et deux, quand n tend vers l'infini. Ceci nous permettra de conclure quant aux limites des intégrales :

$$1/T \int_0^T X_i^2(t)dt \qquad \text{et} \qquad 1/T \int_0^T X_i(t)Y_i(t)dt ,$$

quand T tend vers l'infini. Ceci constitue l'objet des paragraphes suivants.

II-ETUDE D'UN PROCESSUS DE MARKOV DISCRET

1-Présentation du problème.

Le choix d'une stratégie étagée telle qu'on l'a définie dans le paragraphe I a donné lieu à une discrétisation de l'intervalle de temps $[0,T]$, en des points $t_n{}^i$, $n\geq 0$ $i \in \mathbb{N}^*$. On s'est ramené de ce fait, à une chaîne de MARKOV $(X_1(t_n{}^i), n \in \mathbb{N})$ vérifiant l'équation I-(2.4). i est fixé dans ce paragraphe. Aussi, on convient de ne pas le noter, et on pose $X_1(t_n{}^i) = X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

On se propose d'étudier une chaîne de MARKOV $(X_n, n \in \mathbb{N})$ solution de l'équation :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} X_{n+1} = kX_n + k'\mathrm{Sgn}(X_n) + H_n & n \in \mathbb{N},\ 0 < k < 1,\ k' > 0, \\ X_0 & \text{donné}, \end{cases}$$

où $(H_n)_n$, est une suite de variables aléatoires centrées, indépendantes, de même loi et de variance notée $\sigma_H{}^2$ donnée par :

$$\sigma_H{}^2 = E\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{\varphi_1(t_{n+1}-s)}dW_s + \int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\mathbb{R}} v e^{\varphi_1(t_{n+1}-s)}q(ds\times dv)\right]^2.$$

Notons :

$$Z_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{\varphi_1(t_{n+1}-s)}dW_s$$

et,

$$T_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\mathbb{R}} v e^{\varphi_1(t_{n+1}-s)}q(ds\times dv).$$

L'indépendance du processus de WIENER et de la mesure q, entraîne celle des variables aléatoires Z_n et T_n. D'où :

$$E[Z_n + T_n]^2 = E[Z_n{}^2] + E[T_n{}^2].$$

Compte tenu des propriétés du processus de WIENER et de la mesure q, on a :

$$E[Z_n^2] = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{2\varphi_1(t_{n+1}-s)}ds = (1/-2\varphi_1)(1-\exp(\varphi_1 2^{-i+1}))$$

$$E[T_n^2] = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\mathbb{R}} v^2 e^{2\varphi_1(t_{n+1}-s)}ds\mu(dv)$$

$$= (1/-2\varphi_1)(1-\exp(\varphi_1 2^{-i+1}))\int_{\mathbb{R}} v^2\mu(dv) .$$

On pose $E[Z_n^2] = \sigma^2$. Alors ,

(1.2) $$\sigma_H^2 = \sigma^2(1+\int_{\mathbb{R}} v^2\mu(dv) , \sigma^2 = (1/-2\varphi_1)(1-\exp(\varphi_1 2^{-i+1})).$$

<u>Remarque</u> :

1- Z_n est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance σ^2 . Si q_0 représente la loi de la variable aléatoire T , alors H_n admet une fonction de densité qu'on note h , donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} , \; h(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \int_{\mathbb{R}} \exp[-(x-v)^2/2\sigma^2] dq_0(v)$$

2- Compte tenu du lemme **2.1** du chapitre précédent, la mesure de probabilité q_0 est symétrique . Comme la variable aléatoire Z_n est de loi symétrique, alors H_n est aussi de loi symétrique.

En effet, la fonction caractéristique $\varphi_{H_n}(.)$ de H_n est égale, compte tenu de l'indépendance de Z_n et T_n, au produit des fonctions caractéristiques $\varphi_{Z_n}(.)$ et $\varphi_{T_n}(.)$ de Z_n et T_n . Ces dernières sont réelles puisque Z_n et T_n sont de lois symétriques . Leur produit est réel, ce qui nous permet de déduire que la loi de H_n est symétrique .

On peut donc écrire :

$$(1.3)\qquad h(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \int_0^{+\infty} \{\exp[-(x-v)^2/2\sigma^2]+\exp[-(x+v)^2/2\sigma^2]\} dq_0(v)$$

Nous envisageons d'étudier le processus discret $(X_n, n\in\mathbb{N})$, solution de l'équation (**1**.1) en deux étapes :

- Dans une première étape , on impose l'hypothèse suivante:

(H_0) la variable aléatoire X_0 admet une fonction de densité f_0 paire.

- Dans une deuxième étape on supprime cette hypothèse et on montre que les moments d'ordre un et deux de la suite $(X_n, n\in\mathbb{N})$ vérifient les mêmes propriétés de convergence que sous **(H_0)**.

2-Etude sous l'hypothèse H_0

La parité de la densité f_0 et la symétrie de la mesure μ, nous permettent de déduire le résultat suivant dont la démonstration est élémentaire :

Lemme 2-1 Pour tout entier n, la variable aléatoire X_n admet une densité f_n qui est paire. La suite $(f_n)_n$, vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{R}^+,\ f_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} f_n(u)K(u,x)du = \mathcal{J}(f_n)(x),$$

où, $K(u,x) = h(x-ku-k') + h(x+ku+k')$.

Désignons par $L_1(\mathbb{R}^+)$ l'espace des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}^+$, muni de sa norme notée $\|\ \|$. D'après la relation **(2-1)** l'application $\mathcal{J}$ ne définit pas un opérateur contractant. Ceci ne nous permet pas de conclure quant à la suite $(f_n)_n$. Aussi , on introduit une suite de fonctions $(F_n)_n$ qu'on définit comme suit

(2-2) $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}^+ , \quad F_n(y) = \int_0^y f_n(x)dx - 1/2 .$$

On a alors, le résultat suivant :

__Lemme 2.2__ Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout y dans $\mathbb{R}^+$, on a :

$$F_{n+1}(y) = g(y) + \int_0^{+\infty} F_n(u)J(u,y)du = J(F_n)(y) ,$$

où :

$$J(u,y) = k[\, h(y-ku-k') - h(y+ku+k')]$$

$$g(y) \quad = -1/2 + 1/2 \int_0^y [h(x-k') + h(x+k')\,]\, dx .$$

__Démonstration:__

La fonction en u , $dK/dx(u,x)$ est intégrable . En effet :

$\forall u \in \mathbb{R}^+$, $|F_n(u)|$ est bornée . La fonction en u $dK/du(u,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Alors $F_n(u)dK/du(u,x)$ est une fonction intégrable en u sur $\mathbb{R}^+$. On sait que :

(2-4) $$\mathrm{Lim}_{u \to \infty} F_n(u) = 0.$$

D'autre part, $K(u,x) = h(x-ku-k') + h(x+ku+k')$ et pour tout z dans $\mathbb{R}$ on a:

$$|h(z)| \leq 1/\sigma\sqrt{2\pi}.$$

Donc

(2-5) $$\forall u \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+, |\, K(u,x)| \leq 2/\sigma\sqrt{2\pi}.$$

(2-4) et (2-5) entraînent le résultat :

(2-6) $$\mathrm{Lim}_{u \to \infty} F_n(u)K(u,x) = 0.$$

Compte tenu de (2-1) et (2-6), on peut écrire :

$$f_{n+1}(x) = F_n(u)K(u,x)\Big]_{u=0}^{u\to\infty} - \int_0^{+\infty} F_n(u)dK/du(u,x)du$$

$$= -F_n(0)K(0,x) - \int_0^{+\infty} F_n(u)dK/dx(u,x)du$$

(2- 7) $$f_{n+1}(x) = -1/2\left[h(x-k')+h(x+k')\right] - \int_0^{+\infty} F_n(u)dK/dx(u,x)du.$$

Les relations (2-2) et(2-7) impliquent:

$$F_{n+1}(y) = -1/2 + 1/2\int_0^{y} h(x+k')+h(x-k')dx$$

$$- \int_0^{y}\left[\int_0^{+\infty} F_n(u)dK/du(u,x)du\right]dx.$$

La fonction $(u,x)\mapsto F_n(u)dK/du(u,x)$ est intégrable sur $[0,+\infty]\times[0,y]$. En effet:

$$dK/du\,(u,x) = -k\,h(x-ku-k') + k\,h(x+ku+k').$$

La fonction $|F_n|$ étant bornée, il éxiste donc une constante C strictement positive telle que :

$$\int_0^{y}\int_0^{+\infty} |F_n(u)dK/du\,(u,x)|\,dudx \leq C\int_0^{y}\int_0^{+\infty}\left[|h'(x-ku-k')|+|h'(x+ku+k')|\right]dudx.$$

Posons :

$$I_1 = \int_0^{y}\int_0^{+\infty} |h'(x-ku-k')|dudx.$$

On peut écrire :

$$I_1 = 1/k\int_{-\infty}^{-k'}\int_0^{y} |h'(z)|dzdx = 1/k\;\;y\int_{-\infty}^{-k'} |h'(z)|dz.$$

La fonction h' est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc l'intégrale du terme de droite de l'égalité précédente est finie. On en déduit alors que $I_1<+\infty$. En raisonnant de la même façon on trouve aussi :

$$\int_0^y\int_0^{+\infty} |h'(x+ku+k')|dudx \ <+\infty$$

On conclut alors que $\int_0^y\int_0^{+\infty} |F_n(u)dK/du(u,x)|dudx$ est finie . D'où l'intégrabilité de la fonction $F_n(u)dK/du(u,x)$ sur $[0,+\infty]\times[0,y]$. En vertu du théorème de Fubini, on a :

$$\int_0^y\Big(\int_0^{+\infty} F_n(u)dK/du\ (u,x)du\Big)dx = \int_0^{+\infty} F_n(u)\Big[\int_0^y dK/du\ (u,x)dx\Big]du$$

Etudions à présent à part, l'intégrale par rapport à x du terme de droite de cette égalité :

$$\int_0^y dK/du(u,x)dx = \int_0^y [dh/du(x-ku-k')+dh/dx(x+ku+k')]dx$$

$$=-k\int_0^y [dh/dx(x-ku-k')-dh/dx(x+ku+k')]dx$$

$$=-k\ [h(y-ku-k')\ -\ h(y+ku+k')]$$

$$+\ k\ [h(-ku-k')-h(ku+k')]$$

h étant paire, on a :

$$h(ku+k') = h(-ku-k'),$$

ce qui donne :

$$\int_0^y dK/du(u,x)dx = k\ [h(y+ku+k')\ -h(y-ku-k')].$$

On retrouve les expressions de g et de J(.) du lemme.

□

<u>Lemme 2.3</u> J est un opérateur contractant de $L^1(\mathbb{R}^+)$ dans $L^1(\mathbb{R}^+)$: pour tout F et F' de $L^1(\mathbb{R}^+)$ on a:

(2.8) $$\| J(F)-J(F') \| \leq k\ \|F-F'\|$$

<u>Démonstration</u>

Soit F un élément de $L^1(\mathbb{R}^+)$.

$$\forall y \in \mathbb{R}^+,\ J(F)(y) = g(y) + \int_0^{+\infty} F(u)J(u,y)du.$$

Montrons que la fonction g est un élément de $L^1(\mathbb{R}^+)$.

Si on remarque que $\int_0^{+\infty}[h(x-k') + h(x+k')]dx = 1$ puisque la fonction h est paire, on peut alors écrire :

$$g(y) = -1/2 \int_y^{+\infty}[h(x-k') + h(x+k')]dx$$

$$= -1/2 \int_0^{+\infty}[h(x+y-k') + h(x+y+k')]\,dx.$$

Donc :

$$\|g\| = \int_0^{+\infty}|g(y)|dy = 1/2 \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}[h(x+y-k') + h(x+y+k')]dxdy.$$

Etudions l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} h(x+y-k')dxdy$. Par un changement de variables, on a :

$$I = \int_{-k'}^{+\infty}\int_0^{x+k'} h(x)dxdy$$

Donc,

$$I = \int_{-k'}^{+\infty}(x+k')h(x)dx$$

En développant les calculs , on trouve :

$$I = \int_{-k'}^{0}(x+k')h(x)dx + k'/2 + \int_0^{+\infty} xh(x)dx.$$

On a la relation :

$$\int_0^{+\infty} xh(x)dx = 1/2\, E|H_n|.$$

Or la variable aléatoire H_n est du second ordre donc :

$$E|H_n| < +\infty$$

I est par conséquent fini.

Par un même raisonnement, on montre que $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} h(x+y+k')dxdy$ est finie. Ainsi :

$$\|g\| < +\infty,$$

ce qui montre bien que g est un élément de $L^1(\mathbb{R}^+)$.

D'autre part on a :

$$\|J(F)\| = \int_0^{+\infty} |J(F)(y)|dy$$

$$\|J(F)\| \leq \int_0^{+\infty} |g(y)|dy + \int_0^{+\infty} |\int_0^{+\infty} F(u)J(u,y)du\, |dy$$

$$\leq \|g\| + \int_0^{+\infty} |F(u)| \left[\int_0^{+\infty} |J(u,y)|dy\right] du.$$

Or, $$\int_0^{+\infty} |J(u,y)|dy \leq k\int_0^{+\infty} [h(y-ku-k')+h(y+ku+k')]dy.$$

Compte tenu de la parité de la fonction h, le terme de droite de l'inégalité précédente est égal à :

$$k \int_{\mathbb{R}} h(y-ku-k')dy$$

et vaut k.On a donc :

(2.9) $$\int_0^{+\infty} |J(u,y)|dy \leq k$$

On en déduit alors :

$$\|J(F)\| \leq \|g\| + k\|F\|.$$

F et g étant des éléments de $L^1(\mathbb{R}^+)$, il est clair que J(F) l'est aussi. Ceci implique que J est un opérateur de $L^1(\mathbb{R}^+)$ dans $L^1(\mathbb{R}^+)$. Il reste à montrer la relation (2.8).

Prenons deux éléments quelconques de $L^1(\mathbb{R}^+)$, F et F'. Alors:

$$\|J(F)-J(F')\| \leq \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} |J(u,y)|.|F(u)-F'(u)|\,du dy$$

$$\leq \int_0^{+\infty} |F(u)-F'(u)| \left[\int_0^{+\infty} |J(u,y)|\,dy\right] du$$

D'après (2.6) on peut écrire :

$$\|J(F)-J(F')\| \leq k\int_0^{+\infty} |F(u)-F'(u)|du = k\,\|F-F'\|.$$

k étant strictement inférieur à 1, J est un opérateur contractant .

□

Pour tout y de $\mathbb{R}^+$, on a :

$$F_0(y) = \int_0^{+\infty} f_0(x)dx - 1/2.$$

Par hypothèse, la variable aléatoire X_0 est du second ordre . Donc le moment absolu d'ordre un existe, ce qui permet d 'écrire la relation suivante :

$$E|X_0| = -2\int_0^{+\infty} F_0(x)dx.$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} F_0(x)dx$ est finie . Donc F_0 est un élément de $L^1(\mathbb{R}^+)$.

La suite $(F_n)_n$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+1} = J(F_n)$
- J est un opérateur contractant de $L^1(\mathbb{R}^+)$ dans $L^1(\mathbb{R}^+)$
- F_0 est un élément de $L^1(\mathbb{R}^+)$.

Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, F_n est un élément de $L^1(\mathbb{R}^+)$. D'après un théorème du point fixe, la suite $(F_n)_n$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^+)$ vers un élément F appartenant à $L^1(\mathbb{R}^+)$. F vérifie la relation :

(2.10) $$F = J(F).$$

La fonction F vérifie des propriétés qu'on donne dans la proposition suivante :

Proposition 2.1 F est une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$. Sa dérivée f vérifie :

(2.11) $$f = \mathcal{J}(f)\ ,\ f \geq 0\ ,\ \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1/2$$

La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Démonstration

Remarquons d'abord que l'on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \forall u \in \mathbb{R}^+, \quad |g(y)| \leq 1/2 \text{ et } J(u,y) \leq 2k/\sigma\sqrt{2\pi}.$$

En effet ,

$$g(y) = -1/2 + \int_0^y [h(x-k') + h(x+k')]\, dx.$$

Comme h est une fonction de densité, alors $\int_0^y [h(x-k')+h(x+k')]dx$ est une fonction de y croissante. La fonction g(.) croît alors de $g(0)=-1/2$ à $g(+\infty)=0$. Donc g est une fonction négative, majorée en valeur absolue par 1/2. On a donc :

(2.12) $$\forall y \in \mathbb{R}^+, \quad |g(y)| \leq 1/2.$$

Par ailleurs :

$$|J(u,y)| \leq k[\, |h(y-ku-k')| + |h(y+ku+k')|\,] = kK(u,y),$$

(2.5) nous permet d'en déduire :

(2.13) $$\forall u \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, \quad |J(u,y)| \leq 2k/\sigma\sqrt{2\pi}.$$

La fonction F est un élément de $L^1(\mathbb{R}^+)$, donc $\|F\|<+\infty$. On a :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+,\ \ |F(y)| \le |g(y)| + \int_0^{+\infty} |F(u)|\ |J(u,y)| du,$$

et d'après (2.12) et (2.13) :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+,\ \ |F(y)| \le 1/2 + 2k/(\sigma\sqrt{2\pi})\|F\| < +\infty.$$

On en déduit que la fonction $|F|$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$. De plus on a :

Lemme 2.4 $F(+\infty) = 0$

En effet,

$$\mathrm{Lim}_{y\to +\infty} F(y) = g(+\infty) + \mathrm{Lim}_{y\to +\infty} \int_0^{y} F(u) J(u,y) du$$

On sait que $g(+\infty)$ vaut zéro, il reste alors à étudier la limite de l'intégrale du terme de droite de l'égalité précédente.

F étant un élément de $L^1(\mathbb{R}^+)$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$, tel que :

(2.14) $$\int_A^{+\infty} |F(u)|.|J(u,y)| du \le (2k/\sigma\sqrt{2\pi}) \int_A^{+\infty} |F(u)| du \le \varepsilon/2.$$

Soit la fonction $\Phi(y) = 1/k \int_0^{A} |F(u)|\ |J(u,y)|\ du$, y élément de $\mathbb{R}^+$. On a :

$$\Phi(y) \le \int_0^{A} |F(u)|\ h(y-ku-k')du + \int_0^{A} |F(u)|\ h(y+ku+k')du.$$

Nous allons étudier la limite de $\int_0^{A} |F(u)| h(y-ku-k')du$ quand y tend vers l'infini, par un raisonnement analogue on déduira celui de :

$$\int_0^{A} |F(u)| h(y+ku+k')du.$$

La fonction $|F|$ étant bornée, il existe une constante $K > 0$, telle que :

$$\forall u \in [0,A],\ \ |F(u)| \le K.$$

Ceci nous donne :

$$\int_0^A |F(u)| h(y-ku-k')du \leq K \int_0^A h(y-ku-k')du.$$

Posons $z = y-ku-k'$. On a alors :

$$K\int_0^A h(y-ku-k')du = -K/k \int_{y-kA-k'}^{y-k'} h(z)dz.$$

h est un élément de $L^1(\mathbb{R}^+)$, donc pour tout ε_0, il existe $B>0$, tel que :

$$\forall y > B, \int_{y-kA-k'}^{y-k'} h(z)dz \leq \varepsilon_0.$$

En prenant ε_0, tel que $|-K/k|\varepsilon_0 \leq \varepsilon/4$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \text{ tel que, } \forall y \geq B \int_0^A |F(u)| h(y-ku-k')du \leq \varepsilon/4.$$

Par un même raisonnement, on peut obtenir $\int_0^A |F(u)| h(y+ku+k')du \leq \varepsilon/4$.

On en déduit

(2.15) $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0, \text{ tel que } \forall y \geq B \int_0^A |F(u)|\, |J(u,y)| du \leq \varepsilon/2.$$

Cette relation et (2.14) entraînent le résultat du lemme.

□

D'après (2.10) F vérifie :

$$F(y) = g(y) + \int_0^{+\infty} F(u)\, J(u,y)du.$$

En dérivant terme à terme :

$$F'(y) = g'(y) + \int_0^{+\infty} F(u)\, dJ/du(u,y)du.$$

On a :

$$g'(y) = 1/2[\, h(y+k') + h(y-k')\,].$$

En développant les calculs qui sont assez simples, on trouve :

$$\int_0^{+\infty} F(u)\, dJ/du\,(u,y)du = -1/2\,[h(y-k')+h(y+k')] + \int_0^{+\infty} f(u)K(u,y)du.$$

D'où:

$$f(y) = \int_0^{+\infty} f(u)K(u,y)du.$$

De plus on a :

$$\int_0^{y} f(x)dx = F(y) + 1/2.$$

Alors compte tenu du lemme **2**.4,

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1/2.$$

<u>Montrons à présent que f ≥0</u>.

On remarque que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. En effet, si on prend deux éléments x et y de $\mathbb{R}^+$, alors, il existe un élément c vérifiant x<c<y et tel que :

$$|F_n(x)-F_n(y)| \leq |F'_n(c)|\,|x-y|.$$

D'après la relation (**2**.4),on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}^+, 0 \leq F'_n(y) = f_n(y) \leq 2/\sigma\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty} f_{n-1}(x)dx$$
$$\leq 1/\sigma\sqrt{2\pi}$$

Alors, pour tout ε>0, il existe δ>0, indépendant de n, tel que si $|x-y| \leq \delta$, $|F_n(x)-F_n(y)| \leq \varepsilon$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ceci démontre l'équicontinuité de la suite $(F_n)_n$. Par ailleurs, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}^+, -1/2 \leq F_n(y) \leq 0.$$

La suite vérifie donc les hypothèses du théorème d'Arzéla, voir[15]. Par conséquent, on peut extraire de cette suite, une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^+$ vers une fonction F_1 ayant les mêmes propriétés que la suite $(F_n)_n$.

Il est clair que la fonction F_1 et F coïncident sur tout compact. Donc la fonction F vérifie, elle aussi, les mêmes propriétés que la suite $(F_n)_n$. Entre autres, la fonction F est croissante de -1/2 à 0, ce qui entraîne que f est positive.

Pour montrer le dernier point de la proposition on utilise les résultats suivants :

<u>**Lemme2.5**</u> Pour tout n dans $\mathbb{N}$, les fonctions f_n et f sont continûment dérivables. Il existe une constante K strictement positive telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ |f'_n(x)| \leq K \text{ et } |f'(x)| \leq K.$$

<u>Démonstration</u>

La suite $(f_n)_n$ vérifie pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f_{n+1} = \mathcal{J}(f_n)$, ce qui implique que les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$, sont continûment dérivables. On a :

$$f'_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} f_n(u) dK/dx(u,x)du,$$

et ,

$$dK/dx\ (u,x) = dh/dx\ (x-ku-k') + dh/dx\ (x+ku+k').$$

On a,

$$dh/dx\ (x-ku-k') = -1/\sigma^3\sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(x-ku-k'-v)\exp[-(x-ku-k'-v)^2/2\sigma^2]dq_0(v)$$

La fonction ye^{-y^2} est bornée sur $\mathbb{R}$. Il existe donc une constante α strictement positive telle que $|ye^{-y^2}| \leq \alpha$ pour tout y dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$|dh/dx(x-ku-k')| \leq 1/\sigma^3\sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|x-ku-k'-v| \exp[-(x-ku-k'-v)^2/2\sigma^2]dq_0(v)$$

$$\leq \alpha/\sigma^3\sqrt{2\pi}.$$

De même :

$$|dh/dx\ (x+ku+k')| \leq \alpha/\sigma^3\sqrt{2\pi}.$$

On en déduit, alors :

$$|dK/dx\ (u,x)| \leq 2\alpha/\sigma^3\sqrt{2\pi}.$$

Comme f_n, $n \in \mathbb{N}$, est un élément de $L^1(\mathbb{R}^+)$, on a :

$$|f'_{n+1}(x)| \leq 2\alpha/\sigma^3\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty}|f_n(u)|du = \alpha/\sigma^3\sqrt{2\pi} \leq K,$$

où K est une constante strictement positive et indépendante de x. On a le même raisonnement pour f' compte tenu du fait que $f(x) = \mathfrak{J}(f)(x)$.

<u>Remarque</u> : la majoration par K de f' et f'_n est uniforme

<u>Lemme 2.6</u> La suite $(F_n)_n$ converge uniformément vers F.

<u>Démonstration</u>

La fonction F converge vers zéro quand x tend vers l'infini. On peut donc écrire :

(2.16) $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0\ /\ \forall x > A,\ \ |F(x)| \leq \varepsilon/4.$$

Comme la suite $(F_n)_n$ converge en tout point de $\mathbb{R}^+$, alors :

(2.17) $$\text{pour } \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N_0,\ \ |F_n(A)-F(A)| \leq \varepsilon/4.$$

D'autre part, pour tout n, la fonction F_n est <u>croissante</u> et <u>négative</u> sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit donc, de (2.16) et de (2.17) :

(2.18) $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}^*\ /\ \forall n \geq N_0,\ \forall x \geq A,\ \ |F_n(x)| \leq |F_n(A)| \leq \varepsilon/2.$$

On obtient des relations (2.16) et (2.18) le résultat suivant:

(2.19) $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}^*\ /\ \forall n \geq N_0 \text{ et } \forall x \geq A,$$

$$|F_n(x)-F(x)| \leq 3\varepsilon/4.$$

Par ailleurs, d'après un résultat sur les fonctions de répartition (voir[2] p.21), la convergence de la suite $(F_n)_n$ vers F et la continuité de F en tout point x de $\mathbb{R}$ entraînent pour A>0 :

(2.20) $$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq N_1,\ \operatorname{Sup}_{[0,A]}|F_n(x)-F(x)| \leq \varepsilon.$$

Les relations (2.19) et (2.20) entraînent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \max(N_0,N_1) / \forall n \geq N, \operatorname{Sup}_{[0,+\infty[}|F_n(x)-F(x)| \leq \varepsilon.$$

D'où le résultat .

□

On peut écrire pour h >0 et x>0 :

$$|F'(x)-F'_n(x)| \leq |F'(x)-[F(x+h)-F(x)]/h| + |F'_n(x)-[F_n(x+h)-F_n(x)]/h|$$

$$+ |[F_n(x+h)-F(x+h)]/h| + |[F(x)-F_n(x)]/h|.$$

La suite $(F_n)_n$ converge uniformément vers F. Donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{et } \forall h > 0 :$$

$$|F_n(x)-F(x)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |F_n(x+h)-F(x+h)| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, d'après la formule de TAYLOR on a :

$$|[F(x)-F(x+h)]/h - F'(x)| \leq h/2\, |F''(x+\theta h)| \qquad 0 < \theta < 1,$$

$$|[F_n(x)-F_n(x+h)]/h - F'_n(x)| \leq h/2\, |F''_n(x+\theta_n h)| \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Or, d'après le lemme 2.5 :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |F''(x+\theta h)| = |f'(x+\theta h)| \leq K,$$

et $$|F_n(x+\theta_n)| = |f'(x+\theta_n h)| \leq K.$$

Donc, si on choisit $\varepsilon = h^2$, alors on a :

$$\forall h > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq N\ \forall x \in \mathbb{R}^+, |f_n(x)-f(x)| \leq 2h+Kh.$$

La suite $(f_n)_n$ converge donc uniformément vers f.

□

Corollaire 2.1 Pour tout borélien C de $\mathbb{R}$,et uniformément par rapport à C, on a :

$$\mathrm{Lim}_n \int_C |f_n - f| = 0.$$

<u>Démonstration</u>

. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $A > 0$, tel qu'on puisse écrire :

$$\int_A^{+\infty} f \leq \varepsilon .$$

Sur $[0,A]$, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, et donc :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, n \geq N , \int_0^A |f_n - f| \leq \varepsilon,$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\int_0^A f_n \geq \int_0^A f - \varepsilon = \int_0^{+\infty} f - \int_A^{+\infty} f - \varepsilon \geq 1/2 - 2\varepsilon .$$

D'où,

$$\forall n \geq N, \int_A^{+\infty} f_n = 1/2 - \int_0^A f_n \leq 2\varepsilon .$$

Pour tout n, tel que $n \geq N$, on peut écrire :

$$\int_C |f_n - f| \leq \int_{C\cap[0,A]} |f_n - f| + \int_{C\cap[0,A]} f_n + \int_{C\cap[0,A]} f .$$

$$\leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon.$$

On en déduit alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N \int_C |f_n - f| \leq 4\varepsilon.$$

□

Les résultats que nous venons de démontrer, nous permettent de déduire le comportement asymptotique des moments d'ordre 1 et 2 de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

<u>Propriété 2.1</u> $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx < +\infty$

(2.21) $$\mathrm{Lim}_n E|X_n| = 2\int_0^{+\infty} xf(x)dx$$

(2.22) $$\mathrm{Lim}_n E|X_n|^2 = 2\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

Démonstration

L'existence des moments d'ordre 1 et 2 des variables aléatoire X_n, $n \geq 1$ est assurée par le fait que la variable aléatoire X_0 et les variables aléatoires H_n $n \geq 0$ sont du second ordre. Comme la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions paires on peut écrire :

$$E|X_n| = 2\int_0^{+\infty} xf_n(x)dx$$

$$= -2\int_0^{+\infty} F_n(x)dx.$$

Compte tenu du fait que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de $L^1(\mathbb{R}^+)$ vers F, on a :

(2.23) $$\mathrm{Lim}_n E|X_n| = -2\int_0^{+\infty} F(x)dx.$$

D'autre part on a :

(2.24) $$E|X_{n+1}|^2 = k^2 E|X_n|^2 + 2kk'E|X_n| + k'^2 + \sigma_H^2 .$$

F appartient à $L^1(\mathbb{R}^+)$. Alors, compte tenu de (2.23) et du fait que $0<k^2<1$, la suite $(E|X_n|^2,\ n \in \mathbb{N})$ est convergente . Il existe donc, une constante $H>0$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^{+\infty} x^2 f_n(x)dx = 1/2\ E|X_n|^2 \leq H.$$

On en déduit :

$$\forall A > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \int_0^{A} x^2 f_n(x)dx \leq H.$$

D'autre part ,

$$\int_0^A x^2 f(x)dx = \mathrm{Lim}_n \int_0^A x^2 f_n(x)dx .$$

Donc :

$$\forall A > 0 , \int_0^A x^2 f(x)dx \leq H .$$

Ainsi, grâce à cette inégalité, le moment d'ordre 2 pour f est fini. On peut , alors, écrire l'égalité suivante :

$$-\int_0^{+\infty} F(x)dx = \int_0^{+\infty} xf(x)dx .$$

(2.23) implique alors (2.21). En utilisant la relation $f = \mathfrak{J}(f)$, on montre par des calculs simples, que :

$$2\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx = (1/1-k^2)(4kk'\int_0^{+\infty} xf(x)dx + \sigma_H^2 + k'^2).$$

Le deuxième terme de cette égalité n'est autre que la limite de $E|X_n|^2$ déduite de la relation (2.24), ce qui nous permet de déduire (2.22).

□

Propriété2.2 Si X_0 admet pour densité la fonction f, alors le processus $(X_n)_n$ est strictement stationnaire et transitif.

En effet, supposons que la fonction de densité de la variable aléatoire X_0 est égale à f. Alors, puisque pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f_n = \mathfrak{J}(f_{n-1})$ et que $f = \mathfrak{J}(f)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} , f_n = f.$$

On remarque que la relation $f = \mathfrak{J}(f)$ entraîne que la fonction f est strictement positive.

Pour tout n et tout entier $p \geq 1$, il existe une application mesurable Φ_p de $\mathbb{R}^{p+1}$ dans $\mathbb{R}$, ne dépendant pas de p telle que :

$$X_{n+1} = \Phi_p(X_n; H_n, \ldots\ldots, H_{n+p-1}).$$

Soit r un entier tel que $r \geq 0$, et q entiers $n_1 < \ldots\ldots < n_q$. On a :

$$(X_{ni+r})_{i=1,q} = \begin{bmatrix} X_{n1+r} \\ \Phi_{n2-n1}(X_{n1+r}; H_{n1+r}, \ldots\ldots, H_{n2+r-1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{nq-n1}(X_{n1+r}; H_{n1+r}, \ldots\ldots, H_{nq+r-1}) \end{bmatrix}$$

Les variables aléatoires H_n, $n \geq 0$, ont même loi et sont indépendantes entre-elles. Donc le vecteur $(H_{n1+r}, \ldots\ldots, H_{nj+r-1})^t$ a même loi que le vecteur aléatoire $(H_{n1}, \ldots\ldots, H_{nj-1})^t$ $j=1,q$. Les variables aléatoires X_{n1+r} et X_{n1} ont même loi. Et compte tenu du fait que X_{n1} et X_{n1+r} sont indépendantes respectivement de $(H_{n1}, \ldots, H_{nq})$ et $(H_{n1+r}, \ldots, H_{nq+r-1})$, on déduit que le vecteur $(X_{ni+r})_{i=1,q}$ a même loi que le vecteur $(X_{ni})_{i=1,q}$.

Le processus $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est donc <u>strictement stationnaire</u>.

<u>Transitivité</u>.

Pour montrer la transitivité du processus $(X_n, n \in \mathbb{N})$, on utilise une propriété concernant les processus de MARKOV stationnaires, et démontrée dans [13]. Appliquée à notre cas, on obtient que les invariants sont de la forme $X_n^{-1}(C)$, où C est un borélien de $\mathbb{R}$ et $n \geq 0$. $X_0^{-1}(C)$ est donc un invariant si et seulement si $X_n^{-1}(C)$ et $X_0^{-1}(C)$ ne diffèrent que par un ensemble de probabilité nulle. Autrement dit :

(2.25) $$P[\,X_n^{-1}(C)\Delta X_0^{-1}(C)\,] = 0.$$

Posons $\Lambda = X_n^{-1}(C)\Delta X_0^{-1}$, on a:

$$P[\Lambda] = P\big([X_n^{-1}(C)\cap X_0^{-1}(C^c)]\cup[X_n^{-1}(C^c)\cap X_0^{-1}(C)]\,\big),$$

où C^c est le complémentaire de C dans $\mathbb{R}$. On peut écrire :

$$P[\Lambda] = P[\,X_n^{-1}(C)\cap X_0^{-1}(C^c)\,]+P[\,X_0^{-1}(C)\cap X_n^{-1}(C^c)\,].$$

La relation (2.25) entraîne:

(2.26) $$P[X_n^{-1}(C)\cap X_0^{-1}(C^c)] = 0,$$

et,

(2.27) $$P[X_n^{-1}(C^c)\cap X_0^{-1}(C)] = 0.$$

Si on pose $p(x,n,B) = P[X_n\in B/\ X_0=x]$, $x \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{B}$, alors pour tout couple de borélien (A,B), on peut écrire :

$$P[X_n^{-1}(A)\cap X_0^{-1}(B)\,] = \int_B p(x,n,A)f(x)dx.$$

Donc, on déduit de (2.26) et (2.27) :

(2.28) $$\int_{C^c} p(x,n,C)f(x)dx = 0 \text{ et} \int_C p(x,n,C^c)f(x)dx = 0.$$

Comme la fonction f est strictement positive, on a donc :

-d'une part : $p(x,n,C) = 0$ p.p ou bien $P[X_0\in C^c] = 0$

-d'autre part : $p(x,n,C^c) = 0$ p.p ou bien $P[X_0\in C] = 0$.

Par ailleurs, pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, l'égalité $p(x,n,A) = 0$ entraîne $P[X_0^{-1}(A)] = 0$, puisque $p(x,n,.)$ admet une densité strictement positive. Alors, on conclut que les seuls invariants sont ceux de propabilité égale à 0 où 1 . D'où la <u>transitivité</u> du processus $(X_n,\ n\in\mathbb{N})$.

3-Cas où l'hypothèse H_0 est supprimée

Nous envisageons dans cette partie d'étendre les résultats de la proposition 2.1 au cas où la loi de X_0 n'est pas symétrique : c'est à dire que l'on supprime l'hypothèse H_0.

Soit P_n, $n \in \mathbb{N}$, la loi de la variable aléatoire X_n et $\Gamma(.,.)$ le noyau de transition défini sur $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ par :

(3.1) $$\forall x, \forall B \in \mathcal{B},\ \Gamma(x,B) = \int_B [\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)h(y-kx-k) + \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x)h(y-kx+k')]dy .$$

$\Gamma(x,B)$ n'est autre que la probabilité de l'évènement $[X_{n+1} \in B]$ sachant $[X_n=x]$. On en déduit :

(3.2) $$\forall B \in \mathcal{B},\ P_n(B) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x,B)P_{n-1}(dx),\quad n \geq 1.$$

Soit Q la loi de probabilité de densité f, où f est la fonction paire définie sur $\mathbb{R}^+$ par la proposition 2.1. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = \int_0^{+\infty} f(u)\,[h(x-ku-k')+h(x+ku+k')]du .$$

Pour x dans $\mathbb{R}^-$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)\,[h(-x-ku-k') + h(-x+ku+k')]\,du \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)\,[h(x+ku+k') + h(x-ku-k')]\,du . \end{aligned}$$

Donc:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{+\infty} f(u)\,[h(x+ku+k') + h(x-ku-k')]\,du.$$

Si on remarque que $\int_0^{+\infty} f(u)h(x+ku+k')du$ est égale à $\int_{-\infty}^{0} f(u)h(x-ku+k')du$, on obtient :

(3.3) $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\left[\ \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(u)h(x-ku-k') + \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(u)h(x-ku+k')\ \right]du .$$

Soit un borélien B de $\mathcal{B}$,

$$Q(B) = \int_B f(x)dx .$$

Alors, d'après(3.3), on déduit la relation suivante :

(3.4) $$Q(B) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x,B)Q(dx) .$$

Une telle loi Q vérifiant (3.4) est dite stationnaire. La fonction de densité f est strictement positive. On en déduit que pour tout B dans $\mathcal{B}$, $Q(B) > 0$. Q est donc strictement positive, au sens défini dans [15]. Notre but dans ce paragraphe est de montrer la convergence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la loi de probabilité Q indépendamment de la loi de X_0. Pour cela, on se base sur des résultats de FELLER [15]. Nous donnons quelques rappels :

Définition 1 Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilité et P une loi de probabilité. On dit que $(P_n)_n$ converge (faiblement) vers P si et seulement si $P_n(I)$ converge vers $P(I)$ quand n tend vers l'infini pour tout intervalle I borné et P-continu.

On dit qu'un intervalle est P-continu si sa frontière est de probabilité nulle. Soit un noyau de transition $K(.,.)$ défini sur $(\mathbb{R},\mathcal{B})$. Considérons une suite de lois de probabilité (α_n, $n \in \mathbb{N}$) vérifiant :

$$\forall B \in \mathcal{B},\ \ \alpha_n(B) = \int_{\mathbb{R}} K(x,B)\alpha_{n-1}(dx) \qquad n \geq 1.$$

<u>Définition 2</u> Le noyau K(.,.) est ergodique s'il existe une loi de probabilité α strictement positive telle que la suite $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ converge vers α quand n tend vers l'infini, indépendamment de α_0.

Soit u(x), une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, continue et bornée. On pose $u_0 = u$ et on construit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide de la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,dy)\, u_{n-1}(y).$$

<u>Définition 3</u> Le noyau K(.,.) est dit <u>régulier</u> si la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue quand u_0 est uniformément continue.

Nous énonçons un théorème dont la démonstration est donnée en détails dans [15], et qui nous permettra de résoudre notre problème.

<u>Théorème 1</u> <u>Un noyau K(.,.) régulier et strictement positif est ergodique si et seulement s'il existe une loi de probabilité strictement positive et stationnaire.</u>

Le noyau Γ(.,.) défini par **(3.1)** admet une loi de probabilité Q strictement positive et stationnaire. Si l'hypothèse de " régularité " était vérifiée alors on pourrait conclure d'après le théorème 1 à l'ergodicité du noyau Γ(.,.).

Soit u(.) une fonction sur $\mathbb{R}$, continue et bornée. Soit alors, la suite $(u_n, n \in \mathbb{N})$ construite de la façon suivante :

On pose $u_0 = u$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ u_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x,dy)u_n(y) \qquad n \geq 0.$$

Si on suppose de plus que u_0 est uniformément continue, la suite $(u_n, n \geq 0)$ ainsi construite n'est pas équicontinue. En effet, on a :

$$u_n(x) = \int_{\mathbb{R}} h(y-kx-k'\mathrm{sgn}(x))u_{n-1}(y)dy .$$

$u_n(x)$ n'est en général pas continue en zéro. Donc $(u_n)_n$ n'est pas équicontinue. On se restreint par conséquent, à l'un des intervalles $]-\infty,0[$, $[0,+\infty[$. Considérons l'intervalle $[0,+\infty[$. Pour tout x, y dans $\mathbb{R}^+$, on a :

$$|u_n(x)-u_n(y)| = \left|\int_{\mathbb{R}} h(z-kx-k')u_{n-1}(z)dz - \int_{\mathbb{R}} h(z-ky-k')u_{n-1}(z)dz\right|$$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}} h(u)u_{n-1}(u+kx+k')du - \int_{\mathbb{R}} h(u)u_{n-1}(u+ky+k')du\right|$$

(3.5) $$|u_n(x)-u_n(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} h(u)\,|u_{n-1}(u+kx+k') - u_{n-1}(u+ky+k')|du$$

La fonction u_0 est uniformément continue. On a donc :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \partial(\varepsilon) > 0 \ /\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+ ,\ |x-y| \leq \partial(\varepsilon) \Rightarrow |u_0(x) - u_0(y)| \leq \varepsilon.$

et donc : $|u_0(u+kx+k') - u_0(u+ky+k')| \leq \varepsilon.$

On obtient donc dans la relation (3.5), pour n=1 :

$$|x-y| \leq \partial(\varepsilon) \Rightarrow |u_1(x) - u_1(y)| \leq \varepsilon\int_{\mathbb{R}} h(u)du .$$

La fonction h étant une densité, l'intégrale de l'inégalité précédente est égale à 1. D'où :

$$|x-y| \leq \partial(\varepsilon) \Rightarrow |u_1(x) - u_1(y)| \leq \varepsilon.$$

En raisonnant par récurrence, on montre que, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \partial(\varepsilon) > 0$ tel que

(3.6) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ |x-y| \leq \partial(\varepsilon) \Rightarrow |u_n(x) - u_n(y)| \leq \varepsilon,$ $\underline{\forall n \in \mathbb{N}.}$

D'où l'équicontinuité de la suite $(u_n, n \in \mathbb{N})$ sur $\mathbb{R}^+$.

Par ailleurs, la suite $(|u_n|)_n$ est uniformément bornée puisque u_0 est bornée. En vertu du théorème d'ARZELA, on peut extraire une sous-suite $\{u_{\varphi(n)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge vers une fonction $v_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, où φ est une application strictement croissante définie sur $\mathbb{N}$ à valeur dans $\mathbb{N}$.

Considérons l'intervalle $]-\infty,0]$. Soit la suite $\{u'_n, n \in \mathbb{N}\}$ définie par :

$$u'_n(x) = u_n(x) \quad \text{si } x < 0,$$

$$u'_n(0) = \int_{\mathbb{R}} h(y+k')u'_{n-1}(y)dy.$$

Considérons la suite $\{u'_{\varphi(n)}\}_n$, sous suite de $\{u'_n\}_n$, définie par :

$$u'_{\varphi(n)}(x) = u_{\varphi(n)}(x) \quad \text{si } x \in]-\infty,0[$$

$$u'_{\varphi(n)}(0) = \int_{\mathbb{R}} h(y+k')u'_{\varphi(n-1)}(y)dy.$$

On montre de la même façon que sur $\mathbb{R}^+$ que la suite $\{u'_{\varphi(n)}\}$, vérifie la relation (3.6) pour tout x et y dans $]-\infty,0]$. D'autre part, la suite $\{u'_n\}_n$ est uniformément bornée . Il en est de même pour sa sous-suite $\{u'_{\varphi(n)}\}_n$. En vertu du théorème d'ARZELA , on peut extraire une sous-suite $\{u'_{\pi\circ\varphi(n)}(x)\}_n$ de $\{u'_{\varphi(n)}(x)\}_n$ qui converge vers une fonction $v_1(x)$, $x \in]-\infty,0]$, où π est une application strictement croissante definie sur $\mathbb{N}$ à valeur dans $\mathbb{N}$.

Si on note $\{u_{\pi\circ\varphi(n)}(x)\}_n$ la restriction de $\{u'_{\pi\circ\varphi(n)}(x)\}$ à l'ensemble $]-\infty,0[$, alors $\{u_{\pi\circ\varphi(n)}(x)\}_n$ converge vers $v_1(x)$, $x\in]-\infty,0[$.

Par ailleurs $\{u_{\Pi o \varphi(n)}(x)\}_n$ en tant que sous-suite de $\{u_{\varphi(n)}(x)\}_n$, converge sur $\mathbb{R}^+$ vers $v_0(x)$. Donc en fait, on peut <u>extraire une sous-suite</u> $\{u_{\Pi o \varphi(n)}\}$ de $\{u_n\}$ <u>qui converge</u> sur $\mathbb{R}$.

A ce niveau , on peut reprendre le raisonnement développé dans [15] pour démontrer le théorème **I** . Cette démonstration repose principalement sur le fait qu'on peut extraire de la suite $\{u_n\}_n$ une sous-suite qui converge . Ce qui est bien le cas pour nous. On montre donc , que le noyau Γ est ergodique.

<u>La suite $(P_n, n \in \mathbb{N})$ converge donc vers la loi vers Q</u>, au sens de la définition1.

Définissons, pour tout n, la fonction G_n par :

$$G_n(t) = \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(t)P[\,X_n \leq t\,] + \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\{P[\,X_n \leq t\,]-1\}.$$

On montre, grâce à la relation (3.2), que la suite $(G_n)_n$ vérifie la relation de récurrence :

$$\text{(3.6)} \qquad G_n(t) = \Psi(t) + \varphi(t)G_{n-1}(0^-) + \int_{\mathbb{R}} G_{n-1}(u)H(t,u)du\,,$$

où,

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} [h(y+k')-h(y-k')]dy$$

$$\Psi(t) = \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(t)\int_{-\infty}^{t} h(y-k')dy + \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\Big(\int_{-\infty}^{t} h(y-k')dy - 1\Big)$$

$$H(t,u) = k\mathbf{1}_{]-\infty,0[}(u)h(t-ku+k') + k\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(u)h(t-ku-k').$$

Soit L^1, l'espace des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}$. On note $\|.\|$, la norme correspondante à cet espace. De la même manière que pour g(.) (lemme **2.3**) les fonctions $\varphi(t)$ et $\Psi(t)$ sont des éléments de L^1. Ceci assure, compte tenu du fait que X_0 est du second ordre, que G_n est un élément de L^1. Désignons par F, la fonction coïncidant sur $\mathbb{R}^+$ avec F et telle que pour tout t dans $]-\infty,0[$, on a :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)du .$$

F se met sous la forme suivante :

$$F(t) = \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(t)\int_{-\infty}^{t} f(u)du + \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\left(\int_0^t f(u)du - 1/2\right)$$

Or,

$$\int_0^t f(t)dt = Q([0,t])$$

$$= Q(]-\infty,t]) - Q(]-\infty,0[),$$

et $Q(]-\infty,0[)$ vaut $1/2$. Donc, on a :

$$F(t) = \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(t)Q(]-\infty,t]) + \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\{ Q(]-\infty,t]) - 1 \}.$$

On en déduit comme dans (3.6) :

$$F(t) = \psi(t) + \varphi(t)F(0^-) + \int_{\mathbb{R}} F(u)H(t,u)du .$$

$F(0^-)$ est égal à 1/2, ce qui donne,

$$F(t) = \psi(t) + 1/2\varphi(t) + \int_{\mathbb{R}} F(u)H(t,u)du . \tag{3.7}$$

(3.6) et (3.7) nous permettent d'écrire :

$$\|F-G_n\| \leq \|\varphi\| \left[|1/2-G_{n-1}(0^-)| \right] + \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |H(t,u)|dt \right] |F(u)-G_{n-1}(u)|du.$$

Compte tenu des propriétés de h,

$$\int_{\mathbb{R}} |H(t,u)|dt \leq k .$$

On a alors,

$$\| F-G_n \| \leq \| \varphi \| . |1/2-G_{n-1}(0^-)| + k \| F-G_{n-1} \|.$$

Par ailleurs, $G_{n-1}(0^-) = P_{n-1}(]-\infty,0[)$ converge , du fait que Γ est ergodique, vers $Q(]-\infty,0[) = 1/2$. Ce qui implique :

$$\mathrm{Lim}_n \| F-G_n \| = 0 .$$

Ainsi, la suite $(G_n, n \in \mathbb{N})$ converge au sens de L^1 vers F. Pour tout t dans $\mathbb{R}$, $F'(t) = f(t)$. Alors, la variable aléatoire X_n, $n \geq 1$, admet une fonction de densité f_n telle que pour presque tout t dans $\mathbb{R}$,

(3.8) $$f_n(t) = G'_n(t) \quad n \geq 1 .$$

On montre, de la même manière que pour la proposition **2.1**, que la suite $(f_n, n \in \mathbb{N})$ converge uniformément vers f. Cette suite vérifie en outre, la relation suivante qu'on déduit facilement de (3.6) et de (3.8):

$$f_n(t) = 1/k \int_{\mathbb{R}} f_{n-1}(u) H(t,u) du .$$

On retrouve les mêmes résultats que ceux obtenus dans le corollaire **2.1** et la proposition **2.1**. Il suffit de remplacer les intégrales sur $\mathbb{R}^+$ par des intégrales sur $\mathbb{R}$.

III- PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DE LA FAMILLE D'ESTIMATEURS $(\hat{\varphi}_T, T>0)$.

1-Introduction

Nous envisageons dans ce paragraphe de démontrer certaines propriétés de convergence de la famille d'estimateurs $(\hat{\varphi}_T, T > 0)$ du paramètre φ, donnée par la méthode du maximum de vraisemblance (§I). Comme nous l'avions déja expliqué dans les paragraphes précédents, ces propriétés sont données par le comportement asymptotique des intégrales suivantes :

$$\int_0^T X^2(t)dt \quad \text{et} \quad \int_0^T X(t)Y(t)dt .$$

Le contrôle $Y_i(.)$ étant choisi, nous étudions les intégrales :

$$\int_0^T X_i^2(t)dt \quad \text{et} \quad \int_0^T X_i(t)Y_i(t)dt .$$

2-Etude de $L_T^{(1)}(\varphi)$ et $L_T^{(2)}$ pour le contrôle $Y_i(.)$.

L'étude du paragraphe **II** a révélé l'existence d'un processus discret $\{X_i^*(t_n^i)\}_{n\in\mathbb{N}}$ strictement stationnaire transitif et du second ordre, solution de l'équation :

$$X_i(t_{n+1}^i) = k_i X_i(t_n^i) + k_i' \mathrm{Sgn}[X_i(t_n^i)] + H_n^i \quad n\geq 0 . \tag{2.1}$$

$(H_n^i, n \in \mathbb{N})$, étant la suite des variables aléatoires définies au paragraphe **I-2** indépendantes entre elles, de même loi et indépendantes de $X_i(t_n^i)$. Notons X_i^* le processus solution de l'équation **I**.(2.2) correspondant à un état initial $X_i^*(0)$ et un contrôle Y_i^* donné pour i fixé par :

$$\forall t,\ t_n^{\,i} \leq t \leq t_{n+1}^{\,i} \quad Y_i^*(t) = \mathrm{Sgn}[X_i^*(t_n^{\,i})].$$

On peut énoncer les résultats suivants dont la démonstration s'appuie sur les propositions du paragraphe **II**.

<u>Lemme2.1</u> $\mathrm{Lim}_T\ 1/T\int_0^T [X_i^*(t)]^2dt$ et $\mathrm{Lim}_T\ 1/T\int_0^T X_i^*(t)Y_i^*(t)dt$ existent au sens de la convergence en moyenne quadratique et presque sûre, quand T tend vers l'infini.

Posons $S_n^* = \int_{t_n^i}^{t_{n+1}^i} [X_i(t)]^2dt$.

$\{X_i^*(t)\}$ étant solution de **I**.(2.2), on peut écrire :

$$S_n^* = a|X_i^*(t_n^{\,i})| + b + c\,|X_i^*(t_n^{\,i})| + U_n^1 X_i^*(t_n^{\,i}) + U_n^2\mathrm{Sgn}[X_i^*(t_n^{\,i})] + U_n^3, \tag{2.2}$$

où a,b,c sont des constantes. $\{U_n^j\}_{n\in\mathbb{N}}$, $j = 1,..,3$ sont trois suites de variables aléatoires, indépendantes entres elles, du <u>second</u> <u>ordre</u> et de <u>même</u> <u>loi</u>. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n^j est indépendante de $X_i^*(t_n^{\,i})$, j variant de 1à 3.

D'après [13], [23], de telles suites $\{U_n^j\}_{n\in\mathbb{N}}$, j variant de 1à 3, forment des processus ergodiques presque sûrement et en moyenne quadratique. D'autre part, le processus $\{X_i^*(t_n^{\,i})\}_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement stationnaire, transitif et du second ordre. Il est donc ergodique presque sûrement et en moyenne quadratique. Alors d'après [13], et [23], le processus $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi ergodique presque sûrement et en moyenne quadratique. Donc la limite quand N tend vers l'infini de

$1/N\Sigma_{n=0,N} S_n{}^*$ existe en moyenne quadratique et presque sûrement. D'autre part, on a :

$$\mathrm{Lim}_{T\to\infty} 1/T\int_0^T [X_i{}^*(t)]^2 dt = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} 2^i/N\, \Sigma_{n=0,N-1} S_n{}^*.$$

On en déduit le résultat du lemme pour $1/T\int_0^T [X_i{}^*(t)]^2 dt$. Quant à la deuxième limite du lemme, on procède de la même manière : on pose

$V_n{}^* = \int_{t_n{}^i}^{t_{n+1}{}^i} X_i{}^*(t) Y_i{}^*(t) dt$. Pour les mêmes raisons, la suite $(V_n{}^*)_{n\in\mathbb{N}}$ est ergodique presque sûrement et en moyenne quadratique. On peut écrire aussi :

$$\mathrm{Lim}_{T\to\infty} 1/T\int_0^T X_i{}^*(t) Y_i{}^*(t) dt = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} 2^i/N\Sigma_{n=0,N-1} V_n{}^*.$$

Ce qui nous permet de conclure.

□

Posons:

$$\lambda_i = \mathrm{Lim}_{T\to\infty} 1/T\int_0^T [X_i{}^*(t)]^2 dt\ ,$$

$$\lambda_i{}' = \mathrm{Lim}_{T\to\infty} 1/T\int_0^T X_i{}^*(t) Y_i{}^*(t) dt\ .$$

On a , alors , le résultat suivant :

Lemme 2.2 $\quad \text{P-}\mathrm{Lim}_{T\to\infty} 1/T\int_0^T [X_i(t)]^2 dt = \lambda_i$

$$\text{P-}\mathrm{Lim}_{T\to\infty} 1/T\int_0^T X_i(t) Y_i(t) dt = \lambda_i{}'.$$

Démonstration

On pose :

$$S_n = \int_{t_n{}^i}^{t_{n+1}{}^i} [X_i(t)]^2 dt,$$

(2.3) $$M_{n,n+p}{}^* = 1/(n+p)\ \Sigma_{j=0,p} S_{n+j}{}^*$$

et $\qquad M_{n,n+p} = 1/(n+p)\, \Sigma_{j=0,p} S_{n+p}$.

On peut écrire, comme dans le lemme **2.1**,

$$\mathrm{Lim}_{T\to\infty} 1/T \int_0^T [X_i(t)]^2 dt = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} 2^i/N\, \Sigma_{n=0,N-1} S_n$$

$$= \mathrm{Lim}_{k\to\infty} 2^i M_{0,k} .$$

Nous allons donc étudier la limite de la suite $(M_{0,k})_k$, quand k tend vers l'infini. Si on considère les relations (**2.1**) et (**2.2**) réécrites éventuellement pour X_i, on voit alors qu'il existe une application $\Phi_{p,n}$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{4p+3}$ telle que :

$$M_{n,n+p} = \Phi_{p,n}(\, X_i(t_n^{\,i}) \,,\, Q_{p,n}\,),$$

et $\qquad M_{n,n+p}^{*} = \Phi_{p,n}(\, X_i^{*}(t_n^{\,i}) \,,\, Q_{p,n}\,)$

où $Q_{p,n}$ est le vecteur aléatoire (H_{n+k}, k=o,..,p-1; $U_{n+j}^{\,l}$, j=o,..,p, l=1,3). On sait que les variables aléatoires H_n et $U_n^{\,l}$ sont indépendantes de $X_i(t_n^{\,i})$ [resp. $X_i^{*}(t_n^{\,i})$] pour tout n dans $\mathbb{N}$, et tout l variant de 1 à 3. Aussi le vecteur $Q_{p,n}$ est indépendant de $X_i(t_n^{\,i})$ [resp. $X_i^{*}(t_n^{\,i})$] . Si pour toute variable aléatoire X, on note P_X sa loi de probabilité, alors on peut écrire :

$$(2.4) \quad \forall x \in \mathbb{R},\; P[\, M_{n,n+p} \le x\,] = \int_{\mathbb{R}^{4p+3}} P_{X_i^{*}(t_n^{\,i})}[\, y/\Phi_{p,n}(y,q) \le x\,] P_{Q_{p,n}}(dq)$$

D'après le corollaire **II.2.1**, pour tout ε>0, il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout borélien C de $\mathcal{B}$ on a :

$$\forall n \ge N, \quad |\, P_{X_i^{*}(t_n^{\,i})}(C) - P_{X_i(t_n^{\,i})}(C) \,| \le \varepsilon.$$

D'après (2 4), on en déduit compe tenu du fait que $X_i^{*}(t_n^{\,i})$ a même loi que $X_i^{*}(0)$, (2.5) $\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall \in \mathbb{R}, \ | P[M_{n,n+p} \leq x] - P[M_{n,n+p}^* \leq x] | \leq \varepsilon.$

Soi $x \in \mathbb{R}$ tel que $\underline{x < \lambda_i 2^{-i}}$. D'après le lemme 2.1, il est évident de déduire : $\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall p \geq N' \quad P[M_{n,n+p}^* \leq x] \leq \varepsilon$.

En effet, quand p tend vers l'infini, $M_{n,n+p}^*$ converge vers $\lambda_i 2^{-i}$. Donc d'après (2.5) :

$$\forall n \geq N, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall p \geq N' \quad P[M_{n,n+p} \leq x] \leq 2\varepsilon.$$

Par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ \exists N' \in \mathbb{N}, \ \forall p \geq N' :$$

(2.6) $$P[M_{0,n+p} \leq x] \leq P[M_{n,n+p} \leq x] \leq 2\varepsilon.$$

A présent considérons x dans $\mathbb{R}$ tel que $\underline{x > \lambda_i 2^{-i}}$. Pour tout n tel que $n \geq N$ on a :

$$M_{0,n+p} = [S_0 + \ldots + S_{n-1}] / n+p \ + M_{n,n+p}.$$

Soit un réel η tel que $x-\eta > \lambda_i 2^{-i}$. Alors :

$$P[M_{0,n+p} > x] \leq P[M_{n,n+p} > x-\eta] + P[S_0 + \ldots + S_{n-1}/n+p > \eta],$$

et donc :

(2.7) $$P[M_{0,n+p} \leq x] \geq 1 - P[M_{n,n+p} > x-\eta] - P[S_0 + \ldots + S_{n-1}/n+p > \eta].$$

D'après le lemme 2.1, on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N'' \in \mathbb{N}, \forall p \geq N'', \ P[M_{n,n+p}^* > x-\eta] \leq \varepsilon.$$

Ceci nous permet d' avoir, d'après (2.5),

(2.8) $$P[M_{n,n+1} > x-\eta] \leq 2\varepsilon.$$

D'autre part, d'après le paragraphe II, on a :

$$\mathrm{Lim}_{n \to \infty} E|X_i(t_n^i)| = E|X_i^*(0)|$$

et $$\mathrm{Lim}_{n \to \infty} E|X_i(t_n^i)|^2 = E|X_i^*(0)|^2.$$

De la relation (2.2) écrite pour S_n, et du fait que les variables U_n^j, $j=1,3$ sont centrées pour tout n dans $\mathbb{N}$, on déduit que la suite $\{E(S_n), n \in \mathbb{N}\}$ est bornée. Alors d'après l'inégalité de MARKOV :

(2.9) $$\exists N''' \in \mathbb{N},\ \forall p \geq N'''\quad P[(S_0 + \ldots + S_{n-1})/n+p > \eta] \leq \varepsilon .$$

Les relations (2.7) , (2.8) et (2.9) entraînent :

(2.10) $$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \geq N,\ \forall p \geq \mathrm{Max}(N'',N'''),\ P[M_{0,n+p} \leq x] \geq 1-3\varepsilon.$$

En comparant les deux cas qu'on vient de traiter, on voit que la suite $(M_{0,k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $\lambda_i 2^{-i}$, ce qui entraîne la convergence en probabilité. On a donc :

$$P\text{-}\mathrm{Lim}_{T\to\infty} 1/T\int_0^T [X_i(t)]^2 dt = 2^i\ P\text{-}\mathrm{Lim}_{k\to\infty} M_{0,k} = \lambda_i$$

Pour la limite de $1/T\int_0^T X_i(t)Y_i(t)dt$, on applique un raisonnement analogue .

Lemme 2.3 $$P_{\varphi,y_i}\text{-}\mathrm{Lim}_{T\to\infty}[1/T\ L_T^{(2)}] = -\begin{bmatrix} \lambda_i & \lambda_i' \\ \lambda_i' & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\begin{bmatrix} \lambda_i & \lambda_i' \\ \lambda_i & 1 \end{bmatrix}$, notée $J_i(\varphi)$, est inversible .

Démonstration

Le premier résultat de ce lemme, est une conséquence immédiate du lemme 2.2. En effet $1/T\ L_T^{(2)}$ s'écrit :

$$1/T\ L_T^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/T\int_0^T [X_i(t)]^2 dt & 1/T\int_0^T X_i(t)Y_i(t)dt \\ 1/T\int_0^T X_i(t)Y_i(t)dt & 1/T\int_0^T [Y_i(t)]^2 dt \end{bmatrix}$$

Comme $|Y_i(t)|^2 = 1$ pour tout t dans $[t_n^i, t_{n+1}^i[$, n dans $\mathbb{N}$, alors on a :

$$1/T\int_0^T [Y_i(t)]^2 dt \ = \ 1$$

On applique alors, le lemme **2.2** aux différents termes apparaissant dans l'expression de $L_T^{(2)}$. On trouve le premier résultat .

Montrons à présent que la matrice $J_i(\varphi)$ est inversible .

On a vu dans la démonstration du lemme **2.1**, que λ_i, λ_i' valaient :

$$\lambda_i = P_{\varphi,Y_i}\text{-}\mathrm{Lim}_{T\to\infty}\ 1/T\int_0^T [X_i^*(t)]^2 dt = P_{\varphi,Y_i}\text{-}\mathrm{Lim}_N 2^i/N\ \Sigma_n S_n^*$$

$$\lambda_i' = P_{\varphi,Y_i}\text{-}\mathrm{Lim}_{T\to\infty} 1/T\int_0^T X_i^*(t)Y_i^*(t)dt = P_{\varphi,Y_i}\text{-}\mathrm{Lim}_N 2^i/N\ \Sigma V_n^*$$

$(S_n^*,\ n\in\mathbb{N})$,et $(V_n^*,\ n\in\mathbb{N})$ sont deux processus ergodiques. Donc :

$$\lambda_i = 2^i E[S_0^*] = 2^i E\int_0^{t_1^i} [X_i^*(t)]^2 dt,$$

$$\lambda_i' = 2^i E[V_0^*] = 2^i E\int_0^{t_1^i} X_i^*(t)Y_i^*(t)dt\ .$$

Supposons que la matrice $J_i(\varphi)$ n'est pas inversible, alors $\lambda_i-\lambda_i'^2 = 0$.

Donc :

$$1/2^i E\int_0^{t_1^i} [X_i^*(t)]^2 dt - E(\int_0^{t_1^i} X_i^*(t)Y_i^*(t)dt)^2 = 0\ .$$

On remarque que $\int_0^{t_1^i} [Y_i^*(t)]^2 dt = t_1{}^i = 1/2^i$. On peut donc écrire :

$$E(\int_0^{t_1^i}[Y_i^*(t)]^2 dt\int_0^{t_1^i}[X_i^*(t)]^2 dt)-E(\int_0^{t_1^i}X_i^*(t)Y_i^*(t)dt)^2 = 0.$$

D'après l'inégalité de SCHWARZ, il existe alors une constante $\alpha > 0$, telle que pour tout t dans $[0,t_1{}^i[$, on a :

$$X_i^*(t) = \alpha Y_i^*(t) = \alpha \mathrm{Sgn}[X_i^*(0)]\ .$$

Ce qui implique que X_i^* ne prend que les valeurs $-\alpha$ ou $+\alpha$ sur l'intervalle $[0,t_1{}^i[$. Or d'après le paragraphe **II**, $X_i^*(t)$ admet une densité, on conclut donc que $J_i(\varphi)$ est inversible.

□

<u>Lemme 2.4</u> Relativement à P_{φ,Y_i}, $1/T\ L_T^{(1)}$ converge en moyenne quadratique vers 0.

<u>Démonstration.</u>

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t$, $t \in [t_n{}^i, t_{n+1}{}^i[$, il existe deux constantes α, β strictement positives telles que :

$$E|X_i(t)|^2 \leq \alpha\, E|X_i(t_n{}^i)|^2 + \beta\,.$$

Comme on a $\mathrm{Lim}_{n\to\infty}\ E|X_i(t_n{}^i)|^2 = E|X_i^*(0)|^2$, alors il existe une constante e strictement positive, telle que pour tout $t \geq 0$,

$$E|X_i(t)|^2 \leq e\,. \tag{2.11}$$

Par ailleurs on a :

$$L_T^{(1)}(\varphi) = \begin{bmatrix} \int_0^T X_i(t)dW_t \\ \int_0^T Y_i(t)dW_t \end{bmatrix}.$$

Si on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne, on a :

$$\| L_T^{(1)}(\varphi)\|^2 = [\int_0^T X_i(t)dW_t]^2 + [\int_0^T Y_i(t)dW_t]^2$$

et,

$$E_{P_{\varphi,Y_i}}[\, \| L_T^{(1)}\|^2] = E_{P_{\varphi,Y_i}}[\int_0^T X_i(t)dW_t]^2 + E_{P_{\varphi,Y_i}}[\int_0^T Y_i(t)dW_t]^2$$

D'après les propriétés du processus de Wiener on peut écrire :

$$E_{P_{\varphi,Y_i}}[\,\|L_T^{(1)}(\varphi)\|^2] = \int_0^T E|X_i(t)|^2 dt + T$$

Donc :

$$E_{P_{\varphi,Y_i}}[\,\|1/T\, L_T^{(1)}(\varphi)\|^2] = 1/T^2 \int_0^T E|X_i(t)|^2 dt + 1/T\,.$$

En utilisant (**2.11**), on trouve :

$$\mathrm{Lim}_{T\to\infty} E_{P_{\varphi,Y_i}} \|1/T\, L_T^{(1)}(\varphi)\|^2 = 0\,,$$

d'où le résultat .

□

Lemme 2.5 Pour la convergence en loi relativement à P_{φ,Y_i} on a :

$$\mathrm{Lim}_{T\to\infty} 1/\sqrt{T}\, L_T^{(1)}(\varphi) = V(\varphi)\,,$$

où $V(\varphi)$ est un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, J_i(\varphi))$.

Démonstration

Pour montrer ce lemme, on applique un résultat de TARASKIN [24]. Les conditions permettant l'emploi d'un tel résultat sont vérifiées. En effet, d'après des propriétés du processus de Wiener W , le processus $\{L_T^{(1)}(\varphi)\}_T$ est une martingale de carré intégrable et de processus croissant $\{-L_T^{(2)}\}_T$. $\{-L_T^{(2)}\}_T$ vérifie :

(2.12) $$P_{\varphi,Y_i}\text{-}\mathrm{Lim}_{T\to\infty} 1/T\, L_T^{(2)} = -J_i(\varphi)\,.$$

Par ailleurs on a :

$$E[1/T\, L_T^{(2)}] = \begin{bmatrix} E[1/T \int_0^T X_i^2(t)dt] & E[1/T \int_0^T X_i(t)Y_i(t)dt] \\ E[1/T \int_0^T X_i(t)Y_i(t)dt] & E[1/T \int_0^T Y_i^2(t)dt] \end{bmatrix}$$

• $E[1/T \int_0^T X_i^2(t)dt\,] = 2^i/N\, \Sigma_{n=0,N} E(S_n^i)$, où, d'après le paragraphe **II**

$$S_n^i = a|X_i(t_n^i)|^2 + b + c|X_i(t_n^i)| + U_n^1 X_i(t_n^i) + U_n^2 \mathrm{Sgn} X_i(t_n^i) + U_n^3$$

Les résultats du paragraphe **II-3** entraînent :

$$\mathrm{Lim}_{n\to\infty} E(S_n^i) = aE|X_i^*(0)|^2 + b + cE|X_i^*(0)| + E(U_0^1)E(X_i^*(0))$$

$$+E(U_0^2)(\mathrm{Lim}_{n\to\infty} E[\mathrm{Sgn} X_i(t_n^i)]) + E(U_0^3).$$

On a :

$$E[\mathrm{Sgn} X_i(t_n^i)] = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Sgn}(x) f_n^i(x)dx = 1 - 2\int_{-\infty}^{0} f_n^i(x)dx,$$

où f_n^i est la fonction de densité de la variable aléatoire $X_i(t_n^i)$. Par ailleurs on a :

$$\int_{-\infty}^{0} f_n^i(x)dx = G_n^i(0) \quad \text{et} \quad \mathrm{Lim}_{n\to\infty} G_n^i(0) = 1/2.$$

Donc, $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} E[\mathrm{Sgn} X_i(t_n^i)] = 0 = E[\mathrm{Sgn}\, X_i^*(0)]$.

D'où, $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} E[S_n^i] = E[S_0^{i*}]$.

On obtient alors :

$$\mathrm{Lim}_{T\to\infty} E[1/T \int_0^T X_i^2(t)dt] = 2^i\, E[S_0^{i*}] = \lambda_i.$$

En raisonnant de la même façon, on obtient :

$$\mathrm{Lim}_{T\to\infty} E[1/T \int_0^T X_i(t)Y_i(t)dt] = \lambda_i'.$$

D'autre part :

$$E[1/T \int_0^T Y_i^2(t)dt] = 1.$$

Donc :

(2.13) $$\mathrm{Lim}_{T\to\infty} E[1/T\, L_T^{(2)}] = -J_i(\varphi).$$

En vertu du théorème 1 de [24], (2.12) et (2.13) entraînent que le processus $\{1/\sqrt{T}\, L_T^{(2)}(\varphi)\}_T$ converge en loi vers un vecteur gaussien $V(\varphi)$ centré, de matrice de variance-covariance Λ donnée par :

$$\Lambda = P_{\varphi,Y_i}\text{-}\mathrm{Lim}_{T\to\infty}[-1/T\, L_T^{(2)}]$$
$$= J_1(\varphi)\ .$$

□

3-Propriétés de la famille $(\hat{\varphi}_T, T>0)$.

Nous présentons les différentes propriétés de la famille $(\hat{\varphi}_T, T>0)$:

Proposition 3.1 La famille $(\hat{\varphi}_T, T>0)$ vérifie, relativement à la loi P_{φ^*,Y_i} :

1- $P_{\varphi^*,Y_i}\text{-}\mathrm{Lim}_{T\to\infty}\hat{\varphi}_T = \varphi^*$

2- $\sqrt{T}(\hat{\varphi}_T-\varphi^*)$ converge en loi vers un vecteur de loi normale, centré de matrice de variance-covariance $[J_1(\varphi)]^{-1}$.

Démonstration:

Soit la relation :

$$\hat{\varphi}_T-\varphi^* = -[L_T^{(2)}]^{-1}[L_T^{(1)}(\varphi^*)]. \tag{3.1}$$

On a

$$\hat{\varphi}_T-\varphi^* = -[1/T\, L_T^{(2)}]^{-1}[1/T\, L_T^{(1)}(\varphi^*)].$$

On voit à partir de cette relation que le point 1 de la proposition est une conséquence immédiate des lemmes **2.3** et **2.4**. D'autre part on a :

$$\sqrt{T}(\hat{\varphi}_T-\varphi^*) = -[1/T\, L_T^{(2)}]^{-1}[1/\sqrt{T}\, L_T^{(1)}(\varphi^*)]$$

Le point 2 se démontre en appliquant à cette relation les lemmes **2.3** et **2.5**.

□

Conclusion

La proposition **3.1**, permet de conclure que la vraie valeur φ^* du paramètre du système, est asymptotiquement identifiable. La normalité asymptotique de $\sqrt{T}(\hat{\varphi}_T - \varphi^*)$ étant vérifiée, il reste à étudier la variance asymptotique par rapport à φ^*, ce qui fera l'objet du paragraphe suivant.

IV-OPTIMALITE DE LA STRATEGIE $(Y_i)=(\mathrm{Sgn}X_i)$.

1-Introduction au problème d'optimisation.

. Pour la résolution du probléme d'estimation du paramètre φ, nous avions choisi une stratégie du type I qu'on note $(Y^*_i) = (\mathrm{Sgn}[X_i(t_n^i)])_n$. Il est alors naturel de se demander comment un tel contrôle intervient dans un tel problème, et qu'elle peut être son influence sur la qualité de l'estimation de φ? On se propose en termes statistiques de répondre à de telles questions :

-On choisit un critère d'optimalité lié à l'estimation. Donc on prend comme critère "la maximisation de la trace de la matrice de FISHER". Puis au sens de ce critère, on détermine un contrôle optimal. On montre alors que (Y^*_i) est optimal pour ce critère.

2-Le problème

Soit C_e^i, la classe des stratégies incluses dans C_0, et définies dans le chapitre I. Y^*_i appartient de façon évidente à C_e^i. A tout élément de C_e^i, on associe un processus X_i solution de l'équation I(1.1). La matrice d'information de Fisher est donnée par :

$$J_i^T(\varphi) = E_{P^T_{\varphi,Y_i}} \begin{bmatrix} \int_0^T [X_i(t)]^2 dt & \int_0^T X_i(t)Y_i(t)dt \\ \int_0^T X_i(t)Y_i(t)dt & \int_0^T [Y_i(t)]^2 dt \end{bmatrix},$$

où P^T_{φ,Y_i} représente la loi du processus $(X_i(t))$ associée au contrôle $(Y_i(t))$, $t\in[0,T]$. Soit $V_{Y_i}^T(\varphi) = E_{P^T_{\varphi,Y_i}}[tr(J_i^T(\varphi)]$, l'espérance mathématique de la trace de la matrice $J_i^T(\varphi)$ par rapport à la mesure P^T_{φ,Y_i}.

On a :

$$V_{Y_i}{}^T(\varphi) = E[\int_0^T \{[X_i(t)]^2 + [Y_i(t)]^2\}dt].$$

L'intervalle [0,T] étant partitionné par la suite $\mathfrak{D}^i$, i fixé, il existe d'après II quatres constantes A, B, C,D strictement positives et telles que :

$$V_i{}^T(\varphi) = V_i{}^N(\varphi) = E \sum_{n=0,N}\{ A[X_i(t_n{}^i)]^2 + BX_i(t_n{}^i)Y_n{}^i + C[Y_n{}^i]^2 + D \},$$

où l'on note $Y_n{}^i = \Psi_n[X_i(t_n{}^i)]$ et $T = N/2^i$. Pour simplifier l'écriture, on convient de ne pas noter l'indice i, et on pose :

- $X_i(t_n{}^i) = X_n$,
- $Y_n{}^i \quad = Y_n$,
- C_e représente $C_e{}^i$.

On a,

(2.1) $$V_Y{}^N(\varphi) = A\, E[\Sigma_{n=0,N} X_n{}^2] + B\, E[\Sigma_{n=0,N} X_n Y_n] + C\, E[\Sigma_{n=0,N} Y_n{}^2] + D.$$

Nous envisageons de montrer que le processus (Y*) vérifie:

(2.2) $$V_{Y^*}{}^N(\varphi) = \sup_{Y \in C_e} V_Y{}^N(\varphi)$$

Remarquons que, puisque $|Y_n| \leq 1$ pour tout n dans N, on a :

$$E[\Sigma_{n=0,N} X_n Y_n] \leq E[\Sigma_{n=0,N} |X_n Y_n|]$$
$$\leq E[\Sigma_{n=0,N} |X_n|].$$

Si Y* maximise $E[\Sigma_{n=0,N} |X_n|]$, alors on a :

(2.3) $$\mathrm{Max}_Y E[\Sigma_{n=0,N} |X_n|] = E[\Sigma_{n=0,N} |X^*{}_n|] = E[\Sigma_{n=0,N} X^*{}_n Y^*{}_n],$$

où $(X^*{}_n)_n$ est la suite de variables aléatoires associées à la stratégie $(Y^*{}_n)_n = (\mathrm{Sgn}X^*{}_n)_n$ et vérifiant l'équation II(1.1). Alors, pour tout contrôle Y de C_e,

$$E[\Sigma_{n=0,N} X_n Y_n] \leq E[\Sigma_{n=0,N} X^*_n Y^*_n].$$

Y^* étant un élément de C_e, on en déduit

$$\text{(2.4)} \qquad \text{Max}_{Y \in Ce}\, E[\Sigma_{n=0,N} X_n Y_n] = E[\Sigma_{n=0,N} X^*_n Y^*_n].$$

Ainsi il suffit de montrer que $\{Y^*\}$ maximise $E[\Sigma_{n=0,N} |X_n|]$ et $E[\Sigma_{n=0,N} X_n^2]$ pour déduire (2.2). Notons que $\{Y^*\}$ maximise de façon évidente $E[\Sigma_{n=0,N} Y_n^2]$. Soit un réel x . On se propose, par conséquence de ce qui a précédé, de résoudre les deux problémes d'optimisation :

$$Q_1: \text{maximiser sur } C_e,\ E[\ \Sigma_{n=0,N} X_n^2 \,/\, X_0 = x\ ] = F_1^Y,$$

$$Q_2: \text{maximiser sur } C_e,\ E[\ \Sigma_{n=0,N} |X_n| \,/\, X_0 = x\ ] = F_2^Y.$$

Remarque 2.1

Les fonctions F_1^Y et F_2^Y se mettent sous la forme :

$$E[\ \Sigma_{i=0,N} f(X_i) \,/\, X_0 = x\ ],$$

où f est une fonction réelle, convexe, paire, continue et positive.Il est plus astucieux de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$Q: \text{maximiser sur } C_e\ ,\ E[\Sigma_{n=0,N} f(X_n) \,/\, X_0 = x] = F^Y,$$

où f est une fonction présentant les caractéristiques citées plus haut. Q_1 et Q_2 sont alors des cas particuliers de Q

3-Résolution du problème Q.

Le problème d'optimisation Q s'énonce de la façon suivante :

A tout contrôle $Y = \{Y_n,\ n = 0,N-1\}$ on associe une suite $X = \{X_n,\ n = 0,N\}$ vérifiant :

$$(3.1) \qquad \begin{cases} X_{n+1} = kX_n + k'Y_n + H_n & n = 0,\dots N-1\ , \\ X_o = x\ . \end{cases}$$

x réel quelconque donné. Il s'agit de trouver un contrôle $Y = \{Y_n\}$ de C_e, qui maximise :

$$E[\Phi^Y(X_0,\dots,X_N) \,/\, X_o = x\,],$$

où $\Phi^Y(X_0,\dots,X_N) = \Sigma_{n=0,N}\, f(X_n)$, $\{X_n,\ n = 0,\ N\}$ vérifiant (3.1).On applique à cette fin la méthode de la programmation dynamique exposée avec rigueur dans [17]. Les hypothèses assurant la validité de cette méthode sont :

_ la semi-continuité de la fonction $\Phi^Y(X_0,\dots,X_N)$

_ pour toute fonction g, continue et bornée sur $\mathbb{R}$:

$\int_{\mathbb{R}} g(z)P_{X_{n+1}}(dz/X_n = x,\ Y_n = y)$ est une fonction continue en (x,y) sur $\mathbb{R}^2$.

Dans le cadre de notre étude, la fonction $\Phi^Y(X_0,\dots,X_N)$ est continue sur $\mathbb{R}^{N+1}$. D'autre part, pour $X_n = x$ et $Y_n = y$, la variable X_{n+1} suit la loi de probabilité, de densité $p(x,z;y) = h(z-kx-k'y)$. Pour toute fonction g continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} |g(z+kx+k'y)h(z)|dz$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. En effet :

$$\int_{\mathbb{R}} |g(z)\, h(z-kx-k'y)|dz = \int_{\mathbb{R}} |g(z+kx+k'y)h(z)|dz.$$

La fonction g étant bornée , il existe une constante M strictement positive telle que $|g(u)| \leq M \quad \forall u \in \mathbb{R}$. La fonction h étant une densité, on en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}} |g(z)\, h(z-kx-k'y)|dz \leq M\,.$$

D'où l'intégrabilité de la fonction en z, $g(z)h(z-kx-k'y)$ pour tout couple

(x,y) de $\mathbb{R}^2$.

-D'autre part, pour tout z dans $\mathbb{R}$, la fonction h est continue pour tout (x,y) élément de $\mathbb{R}^2$. Alors en vertu du théorème de LEBESGUE on en déduit que $\int_{\mathbb{R}} g(z)h(z-kx-k'y)dz$ est continue en (x,y). Sous ces hypothèses on a le résultat suivant :

Proposition 3.1 La stratégie Y^* définie par,

$$\{Y_n^*, n = 0, N-1\} = \{\mathrm{Sgn}X_n, n = 0, N-1\}$$

est solution optimale du problème Q.

Démonstration

Posons : $\qquad F_m(X_m,\dots,X_N) = \Sigma_{i=m,N} f(X_i)$

et, $\qquad \varrho_m(x) = \mathrm{Sup}\, E_Y[F_m(X_m,\dots,X_N) / X_m = x]$,

où E_Y représente l'espérance mathématique par rapport à la loi de probabilité de X associée au contrôle Y de C_e. La suite de fonctions $(F_m, m = 0, N)$ vérifie la relation suivante :

$$F_{m-1}(X_{m-1},\dots,X_N) = f(X_{m-1}) + F_m(X_m,\dots,X_N),$$

où, $\qquad X_m = kX_{m-1} + k'Y_{m-1} + H_{m-1}$.

$$E_Y[F_{m-1}(X_{m-1},\dots,X_N)/X_{m-1}=x]=$$

$$E\{ E_{Y_{m-1} \vdots Y_{N-1}} [f(X_{m-1}) + E_{Y_m \vdots Y_{N-1}} \{F_m(X_m,\dots,X_N)/X_m\}] / X_{m-1}=x \}$$

Prenons le Sup des deux quantités de cette égalité sur l'ensemble des vecteurs ligne $(Y_{m-1},\dots,Y_{N-1})$. On a :

$$\varrho_{m-1}(x) = \mathrm{Sup}_{Y_{m-1} \vdots Y_{N-1}} \; E \; \{ f(x) + E_{Y_m \vdots Y_{N-1}} [F_m(X_m,\dots,X_N)/X_m] \}$$

$$= \operatorname{Sup}_{Y_{m-1}} E\{f(x) + \operatorname{Sup}_{\substack{Y_m\\ \vdots \\ Y_{N-1}}} E_{\substack{Y_m\\ \vdots \\ Y_{N-1}}} [F_m(X_m,\dots,X_N)/X_m]\}$$

$$= \operatorname{Sup}_{Y_{m-1}} E\{ f(x) + \rho_m(kx+k'Y_{m-1}+H_{m-1})\}.$$

On pose $Y_{m-1} = y$. D'après la relation (3.1), on a :

$$\rho_{m-1}(x) = \operatorname{Sup}_{|y|\leq 1} \int_{\mathbb{R}} [f(x) + \rho_m(kx+k'y+z)]dP(z) , \tag{3.2}$$

où , $dP(z) = h(z)dz$. C'est cette relation qui nous permettra de résoudre notre problème. On a alors :

$$\rho_N(x) = f(x) .$$

La fonction $\rho_N(.)$ vérifie les propriétés suivantes :

p_1 : $\rho_N(.)$ est paire, continue ,

p_2 : $\rho_N(.)$ est convexe .

On a :

$$\rho_{N-1}(x) = f(x) + \operatorname{Sup}_{y\in[-1,1]} \int_{\mathbb{R}} \rho_N(kx+k'y+z)dP(z).$$

Considérons la fonction $\Psi_x(y)=\int_{\mathbb{R}} \rho_N(kx+k'y+z)dP(z)$. $\Psi_x(y)$ est une fonction convexe en y. En effet pour λ dans $]0,1[$, et pour tout y_1 et y_2 dans $[-1,1]$ on a :

$$\Psi_x(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2) = \int_{\mathbb{R}} \rho_N(kx+\lambda k'y_1+(1-\lambda)k'y_2+z)dP(z)$$

$$=\int_{\mathbb{R}} \rho_N(\lambda[kx+k'y_1+z]+(1-\lambda)[kx+k'y_2+z])dP(z).$$

La propriété p_1 entraîne :

$$\Psi_x(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2) \leq \int_{\mathbb{R}}[\lambda\rho_N(kx+k'y_1+z)+(1-\lambda)\rho_N(kx+k'y+z)]dP(z)$$

D'où la convexité de la fonction $\Psi_x(.)$. D'autre part, on a :

$$\Psi_x(y-(2k/k')x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_N(kx+k'[y-(2k/k')x]+z)dP(z)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \rho_N(-kx+k'y+z)dP(z).$$

En utilisant la parité de la fonction ρ_N et la symétrie de la loi P, on trouve :

$$\Psi_x(y-(2k/k')x) = \Psi_x(-y).$$

cette relation entraîne :

$$(3.3) \qquad \Psi_x(y-(k/k')x) = \Psi_x(-y-(k/k')x).$$

On en déduit que la fonction $\Psi_x(.)$ présente une symétrie par rapport à la droite d'équation : $y = -(k/k')x$. Les deux propriétés de $\Psi_x(.)$ entraînent que le Sup de Ψ_x est atteint sur le compact $[-1,1]$ en $y = -1$ ou $y = 1$ suivant que x est négatif ou positif. De façon évidente on a :

$$\text{Sup } \Psi_x(y) = \begin{cases} \Psi_x(1) & \text{si } x>0 \\ \Psi_x(-1) & \text{si } x<0 \end{cases}.$$

Dans le cas où x vaut zéro, la fonction $\Psi_0(.)$ est paire. Elle atteint donc son maximum en ± 1.

En <u>conclusion</u> , $y = \mathrm{Sgn}(x)$ réalise le Sup sur $[-1,1]$ de la fonction $\Psi_x(y)$. On a donc :

$$(3.4) \qquad \rho_{N-1}(x) = f(x)+\int_{\mathbb{R}} \rho_N(kx+k'\mathrm{Sgn}x+z)dP(z).$$

<u>Propriété3.1</u> La fonction $\rho_{N-1}(x)$ vérifie les propriétés p_1 et p_2.

<u>Montrons la propriété p_1</u>:

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\rho_{N-1}(-x) = f(x) + \int_{\mathbb{R}} \rho_N(-kx+k'\mathrm{Sgn}(-x)+z)dP(z)$

On a $Sgn(-x) = -Sgn(x)$, et du fait que les fonctions $\rho_N(.)$ et $f(.)$ sont paires, alors :

$$\rho_{N-1}(-x) = f(x) + \int_{\mathbb{R}} \rho_N(kx+k'Sgn(x)-z)dP(z).$$

Sachant que la loi P est symétrique, alors:

$$\rho_{N-1}(-x) = \rho_{N-1}(x).$$

On remarque que la fonction $\rho_{N-1}(x)$ est continue en tout point $x \neq 0$. Le problème se pose à l'origine. Montrons donc que la fonction $\rho_{N-1}(.)$ est continue en zéro.

Posons :

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_N(kx+k'Sgn(x)+z)dP(z).$$

On a :

$$\varphi(0^-) = \int_{\mathbb{R}} \rho_N(-k'+z)dP(z).$$

En utilisant la parité de la fonction ρ_N et la symétrie de la loi P, on trouve :

$$\begin{aligned}\varphi(0^-) &= \int_{\mathbb{R}} \rho_N(k'+z)dP(z) \\ &= \varphi(0^+),\end{aligned}$$

ce qui achève de montrer p_1.

<u>Propriété p_2</u>.

Sachant que la somme de deux fonctions convexes est encore convexe, il suffit de montrer que la fonction $\varphi(.)$ est convexe sur $\mathbb{R}$. $\varphi(x)$ étant paire, si on suppose que $\varphi(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$, alors par raison de symétrie, la fonction $\varphi(.)$ est convexe sur $\mathbb{R}^-$. Comme on a montré que $\varphi(.)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors, on peut en déduire que $\varphi(.)$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Aussi nous allons montrer que $\varphi(.)$ est convexe sur

$\mathbb{R}^+$. Soient x et y de $\mathbb{R}^+$, et α appartenant à $]0,1[$. Alors :

$$\varphi(\alpha x+(1-\alpha)y) = \int_{\mathbb{R}} \rho_N(k(\alpha x+(1-\alpha)y+k'+z)dP(z)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \rho_N[\alpha(kx+k'+z)+(1-\alpha)(ky+k'+z)]dP(z).$$

Comme ρ_N vérifie p_2, on en déduit donc :

$$\varphi(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\varphi(y),$$

d'où la convexité sur $\mathbb{R}^+$et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

□

Par un raisonnement par récurrence, on étend le résultat (3.4) à tout $n \leq N-2$. On montre à chaque étape que les fonctions $\rho_n(x)$ vérifient les propriétés $p_1$et p_2, $n \leq N-1$. Pour n variant de 0 à N-1 y^*_n=Sgn(x_n) réalise le maximum sur $[-1,1]$ de $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(kx+k'y+z)dP(z)$. On peut donc affirmer d'après [17] que le contrôle $Y^*=(y^*_0,\dots,y^*_{N-1})$ est solution optimale du problème Q. Ce qui démontre la proposition **3.1**

□

On a la relation suivante :

$$F^{Y^*} = \rho_0(x) = E[\Sigma_{n=0,N} f(X^*_n) \,/\, X_0=x] \geq F^Y,$$

où F^Yest la fonction définie dans la remarque 2.1. Si X_0 admet une loi de probabilité P_0, alors, la valeur maximale de $E[\Sigma_{n=0,N} f(X_n)]$ est donnée par :

$$S_0 = \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x)dP_0(x).$$

D'après la remarque 2.1, Q_1 et Q_2 sont des cas particuliers de Q, où f(x) est égale à x^2 dans Q_1 et $|x|$ dans Q_2. Y^* est alors solution optimale de ces deux problèmes. On a donc la relation **(2.4)**

Y^*, maximisant sur C_e les trois quantités $E[\Sigma X_n^2]$, $E[\Sigma X_n Y_n]$ et $E[\Sigma Y_n^2]$, est solution de (2.2).

□

4-Extention du problème Q à une classe de contrôles plus vaste.

Considérons la classe C_a^i des stratégies qui sont définies de la façon suivante : Y^i est élément de C_a^i, s'il existe une suite $\{\Psi_n^i, n=0,N-1\}$ de fonctions mesurables de $\mathbb{R}^n$, n variant de 0 à N-1, à valeurs dans [-1,1], telle que pour tout t dans $[t_n^i, t_{n+1}^i[$,

$$Y^i(t) = \Psi_n^i(X_i(0),\dots,X_i(t_n^i)).$$

On note $\Psi_n^i(X_i(0),\dots X_i(t_n^i)) = Y_n^i$ et on convient de ne pas noter l'indice i. A tout contrôle $Y=(Y_0,\dots,Y_{N-1})$ de C_a, on associe une suite de variables aléatoires $(X_0,\dots,X_N)$ vérifiant la relation :

$$(4.1)\qquad \begin{cases} X_{n+1} = kX_n + k'Y_n + H_n & n \geq 0 \\ X_0 \text{ donné}. \end{cases}$$

La classe C_e est incluse dans C_a. Le problème d'optimisation s'énonce alors, comme suit :

$$Q' : \text{maximiser sur } C_a,\ E[\Sigma_{n=0,N} f(X_n)],$$

où $(X_n, n = 0,N)$ est le processus vérifiant (4.1) pour un contrôle Y de C_a. Le problème Q' se pose dans les mêmes termes que le problème Q. La seule différence est que Y_n dépend de $X_0,\dots,X_n$ dans Q', et uniquement de X_n dans Q. Mais cette différence n'intervient pas dans la résolution de Q'. Seules interviennent , la propriété $|Y_n| \leq 1$ $\forall n$, n = 0, N-1 et la relation de récurrence (3.2) qui est démontrée de la même façon dans le cas de Q'. Ainsi, on montre que le contrôle (Y^*_i) est optimal dans la classe C_a^i.

Conclusion

On conclut ce paragraphe en disant que la stratégie (Y^*_i), i fixé, est optimale pour le critère choisi dans la classe des stratégies étagées ne dépendant que du passé de l'état du système en des instants t_n^1 et sous la seule contrainte d'avoir $\|Y^*_i\| \leq 1$. $\|.\|$ représente la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

Commentaire

Nous remarquons que la quantité $\int_0^T (X_t^2+Y_t^2)dt$ représente d'un point de vue physique , l'énergie nécessaire pour réguler le système. Afin de mieux identifier les paramètres du système, nous avons donc rendu cette dépense d'énergie maximale. Ce qui est peu réaliste, car dans la pratique l'examinateur cherche en premier lieu à minimiser la perte d'énergie et donc le coût des opérations effectuées sur le système.

Identifier au mieux les paramètres du système, minimiser la perte d'énergie, ce sont là deux effets antagonistes ne pouvant être rendus possibles simultanément.

On conclut en notant que le contrôle $\{Y^*_i\}$ permet une identification optimale. Mais sur le plan pratique ce contrôle, pour les raisons citées, présente peu d'interêt.

CHAPITRE 3

ETUDE DANS LE CAS DE STRATEGIE DU TYPE II

<u>L'objet de ce chapitre est l'extention des résultats du chapitre 2, notamment la proposition III.(3.1), au cas d'une stratégie du type II (stratégie continue, du type markovienne).</u>

I. ETUDE DE LA SUITE DE PROCESSUS

$\{X_i^*,\ i \in \mathbb{N}^*\}$

1. Introduction

Soit la suite de processus $\{X_i^*,\ i \in \mathbb{N}^*\}$, telle que pour i fixé, $\{X_i^*(t)\}$ est le processus défini au paragraphe 2-III et solution de l'équation suivante :

pour $n \in \mathbb{N}$ et t tel que $t_n^i \leq t < t_{n+1}^i$ on a :

$$(1.1)\qquad \begin{cases} X_i^*(t) = e^{\varphi_1(t-t_n)} X_i^*(t_n^i) - \varphi_2/\varphi_1(1-e^{\varphi_1(t-t_n)}) \operatorname{Sgn} X_i^*(t_n^i) \\ \qquad\qquad + \int_{t_n^i}^{t} e^{\varphi_1(t-s)}\, dw_s + \int_{t_n^i}^{t} e^{\varphi_1(t-s)}\, dU_s. \end{cases}$$

où $\{U_t\}$ est un processus de Poisson défini à partir de la mesure q par :

$$(1.2)\qquad U_t = \int_{\mathbb{R}} v q([0,t] \times dv) \quad t \geq 0.$$

Nous envisageons dans ce paragraphe, de montrer que la suite de processus $\{X_i^*,\ i \in \mathbb{N}^*\}$ converge, au sens de la convergence presque sûre vers un processus X*, solution de l'équation (I) (chapitre 1), stationnaire au sens strict et transitive.

Pour cela, on utilise un critère d'étroitesse dans l'espace D, muni de la topologie de SKOROKHOD, voir [2], [19]. Ensuite, grâce à des techniques de [16], on montre l'existence d'un tel processus X*.

On achève ce paragraphe en démontrant la stationnarité et la transitivité du processus X*. L'étude de ce chapitre se révèle délicate et nécessite une hypothèse supplémentaire. On suppose vérifiée l'hypothèse suivante :

(H) $$\int_{\mathbb{R}} v^4 \mu(dv) < +\infty.$$

posons: $$T_n{}^i = \int_{t_n{}^i}^{t_{n+1}{}^i} \int_{\mathbb{R}} v e^{\varphi_1(t^i_{n+1} - s)} q(ds \times dv) \qquad n \in \mathbb{N},\ i \in \mathbb{N}^*.$$

L'hypothèse (H) entraîne la relation suivante :

(1.3) $$\int_{t_n{}^i}^{t_{n+1}{}^i} \Big[\Big|\int_{\mathbb{R}} v^2 e^{2\varphi_1(t^i_{n+1} - s)} \mu(dv)\Big|^2 + \int_{\mathbb{R}} v^4 e^{4\varphi_1(t^i_{n+1} - s)} \mu(dv) \Big] ds < +\infty$$

D'après la propriété du chapitre 1 §2, on déduit de (1.3) :

(1.4) $$E\Big|\int_{t_n{}^i}^{t_{n+1}{}^i} \int_{\mathbb{R}} v\, e^{\varphi_1(t^i_{n+1} - s)} q(ds \times dv)\Big|^4 = E|T_n{}^i|^4 < +\infty$$

Par ailleurs, les propriétés du processus de WIENER W, voir [17] par exemple, nous donnent :

(1.5) $$E\Big|\int_{t_n{}^i}^{t_{n+1}{}^i} e^{\varphi_1(t^i_{n+1} - s)} dW_s\Big|^4 \le 18\int_{t_n{}^i}^{t_{n+1}{}^i} e^{4\varphi_1(t^i_{n+1} - s)} ds$$
$$= [1/-4\varphi_1](1-e^{4\varphi_1 2^{-i}})$$

Comme on a :

$$H_n{}^i = T_n{}^i + \int_{t_n{}^i}^{t_{n+1}{}^i} e^{\varphi_1(t^i_{n+1} - s)} dW_s,$$

alors :

$$E|H_n{}^i|^4 \le 8\Big(E|T_n{}^i|^4 + E\Big|\int_{t_n{}^i}^{t_{n+1}{}^i} e^{\varphi_1(t^i_{n+1} - s)} dW_s\Big|^4 \Big).$$

On en déduit grâce à (1.4) et (1.5), l'existence d'une constante $C > 0$, et indépendante de n telle que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

(1.6) $$E|H_n{}^i|^4 = E|H_0{}^i|^4 \le C.$$

2. Etroitesse de la suite $(X_i^*)_i$

On montre le résultat suivant nécessaire pour la suite :

Lemme 2.1 : Pour tout entier p, $p \leq 4$, il existe une constante K_p strictement positive telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad E\,|X_i^*(0)|^p \leq K_p.$$

Démonstration :

D'aprés le chapitre 2 on a, pour i fixé et tout n de $\mathbb{N}$

$$X_i^*(t_{n+1}{}^i) = k_i\, X_i^*(t_n{}^i) + k'_i\, \mathrm{Sgn}[X_i^*(t_n{}^i)] + H_n{}^i \qquad n \geq 1.$$

Les variables aléatoires $H_n{}^i$, $n \in \mathbb{N}$, ont même loi indépendante de n. Compte tenu de l'indépendance de $X_i^*(t_n{}^i)$ et $H_n{}^i$, et de la stationnarité au sens strict de la suite $\{X_i^*(t_n{}^i), n \in \mathbb{N}\}$, on a :

$$\forall n \geq 1, \quad E|X_i^*(0)|^{2n} \leq k_i^{2n}\, E|X_i^*(0)|^{2n} + A_n k'_i\Big[\sum_{j=1}^{2n-2} E|X_i^*(0)|^j + E|X_i^*(0)|^{2n-1} + 1\Big] + B_n \sum_{k=0}^{n} E\,|H_0|^{2k},$$

où A_n et B_n, $n \geq 1$ sont des nombres réels ne dépendant que de n.

D'aprés l'inégalité de SCHWARZ :

$$E|X_i^*(0)|^{2n-1} \leq [\,E|X_i^*(0)|^{2n}\,]^{1/2}\,[\,E|X_i^*(0)|^{2n-2}\,]^{1/2}.$$

ce qui donne :

$$E|X_i^*(0)|^{2n} \leq k_i^{2n}\, E|X_i^*(0)|^{2n} + A_n k'_i\,\Big[\sum_{j=1}^{2n-2} E|X_i^*(0)|^j + \big(E|X_i^*(0)|^{2n}\big)^{1/2} E\big(|X_i^*(0)|^{2n-1}\big)^{1/2} + 1\,\Big] + B_n \sum_{k=0}^{k=n} E\,|H_0|^{2k}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

Pour n = 1, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad E|X_i^*(0)|^2 \leq k_i^2\, E|X_i^*(0)|^2 + k'^2_i$$
$$+ 2\, k_i\, k'_i\, [E|X_i^*(0)|^2]^{1/2} + \sigma^2_{H_0^i},$$

où $\sigma^2_{H_0^i}$ est la variance de la variable aléatoire $H_0^{\,i}$.

L'étude du trinôme $(1-k_i^2)x^2 - 2k_ik'_ix - (k'^2_i + \sigma^2_{H_0^i}) \leq 0$ nous donne

$$[E|X_i^*(0)|^2]^{1/2} \leq k_ik'_i\ /(1-k_i^2) + [\,k_i^2\,k'^2_i$$
$$+ (1-k_i^2)\,(k'^2_i + \sigma^2_{H_0^i}\,)\,]^{1/2}/(1-k_i^2)$$

On a :

$$k_i \quad = \exp(\varphi_1 2^{-i}\,) \leq 1,$$
$$k'_i \quad = (-\,\varphi_2/\varphi_1)[1-\exp(\varphi_1 2^{-i})]$$
$$\sigma^2 H_0^{\,i} = (1/2\varphi_1)\,[\,\exp(\varphi_1 2^{-i}) \ -1\,]\,[\,1 + \int_{\mathbb{R}} v^2\,\mu(dv)\,],$$

$$\frac{k_ik'_i}{1-k_i^2} \leq \frac{k'_i}{1-k_i} = -\,\varphi_2/\varphi_1$$

$$\frac{\sigma^2 H_0^{\,i}}{1-k_i^2} = \frac{1}{2\varphi_1} \cdot \frac{\exp(\varphi_1 2^{-i+1}) - 1}{1-\exp(\varphi_1 2^{-i+1})} \cdot (1 + \int_{\mathbb{R}} v^2 \mu(dv))$$

$$= (1/-2\varphi_1)\,.\,(1+\int_{\mathbb{R}} v^2 \mu(dv))$$

$$\frac{k'_i}{1-k_i^2} \leq \frac{k'_i}{1-k_i} = -\,\varphi_2/\varphi_1\,.$$

Ceci nous donne :

$$[E|X_i^*(0)|^2]^{1/2} \leq -\varphi_2/\varphi_1 + [\,2(\varphi_2/\varphi_1)^2$$
$$+ (1/-2\varphi_1)(1+\int_{\mathbb{R}} v^2 \mu(dv)\,)\,]^{1/2}.$$

En conséquence, il existe une constante K_2 strictement positive et indépendante de i telle que :

$$(2.1) \qquad \forall i \in \mathbb{N}^*, \ E|X_i^*(0)|^2 \leq K_2\,.$$

Pour n = 2, on a :

$$E|X_i^*(0)|^4 \leq k_i^4 E|X_i^*(0)|^4 + A_2 k'_i \,[\, E|X_i^*(0)| + E|X_i^*(0)|^2$$
$$+ (E|X_i^*(0)|^2)^{1/2} (E|X_i^*(0)|^4)^{1/2} \,]$$
$$+ B_2 [\, E|H_0^i|^2 + E|H_0^i|^4 \,].$$

D'aprés (1.6) et (2.1) on a :

$$E|X_i^*(0)|^4 (1-k_i^4) \leq A_2 k'_i \sqrt{K_2} [\, E|X_i^*(0)|^4 \,]^{1/2}$$
$$+ A_2 k'_i [\sqrt{K_2} + K_2] + B_2 [\sigma^2_{H_0^i} + C].$$

On raisonne de la même manière que pour n= 1, et on déduit l'existence d'une constante K_4 strictement positive telle que :

(2.2) $$\forall i \in \mathbb{N}^*, \; E|X_i^*(0)|^4 \leq K_4.$$

□

Proposition 2.1 : La suite de processus $\{X_i^*(t)\}_i$, $t \in [0,T]$ est étroite dans l'espace D_T des applications cadlag sur $[0,T]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On munit l'espace D_T de la topologie de SKOROKHOD telle qu'elle est définie par BILLINGSLEY dans [2]. Cette topologie est induite par la métrique notée d_0 dans [2], qui rend cet espace complet. La métrique d_0 est définie de la façon suivante :

Soit Λ, l'espace des applications continues et strictement croissantes de $[0,T]$ dans $[0,T]$.

Pour tout $\lambda(.)$ de Λ, on définit :

$$\|\lambda\| = \sup_{\substack{0 \leq s,t \leq T \\ s \neq t}} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t-s} \right| ,$$

Pour des éléments x(.) et y(.) de D_T, on définit $d_0(x,y)$ par :

$$d_0(x(.), y(.)) = \inf \{\varepsilon : \|\lambda\| \leq \varepsilon, \sup |x(t) - y(\lambda(t))| \leq \varepsilon; \lambda \in \Lambda\}.$$

Pour montrer la proposition 2.1 dans une telle topologie, on utilise un critère dû à BILLINGSLEY tel qu'il est exposé dans [19] théorème (2.4.1) page 31.

Trois conditions sont à vérifier :

Condition 1 Pour tout $\eta > 0$, il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que :

(2.4) $$\forall i \in \mathbb{N}^*, \ P[\sup_{t \in [0,T]} |X_i^*(t)| > N] \leq \eta.$$

Démonstration :

Pour tout t dans [0,T] on a :

$$X_i^*(t) = X_i^*(0) + \int_0^t [\varphi_1 X_i^*(s) + \varphi_2 Y_i^*(s)]\, ds + W_t^i + \int_{\mathbb{R}} v q([0,t] \times dv).$$

Il existe une constante K strictement positive, telle que :

$$|\varphi_1 x + \varphi_2 y| \leq K(1 + |x|),$$

pour tout x dans $\mathbb{R}$ et tout y dans [-1,1]. Ceci entraîne :

(2.5) $$|X_i^*(t)| \leq |X_i^*(0)| + Kt + K\int_0^t |X_i^*(s)|\, ds + |W_t| + |u_t|.$$

On déduit de (2.5) d'aprés le lemme de GRONWALL :

$$|X_i^*(t)| \leq [\,|X_i^*(0)| + kt + |W_t| + |U_t|\,]\, e^{kt}$$

$$\leq [\,|X_i^*(0)| + kT + \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| + \sup_{0 \leq t \leq T} |U_t|\,]\, e^{kT}.$$

Ceci donne :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_i^*(t)| \leq [|X_i^*(0)| + kt\,]\, e^{kT} + \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t|\, e^{kT} + \sup_{0 \leq t \leq T} |U_t|\, e^{kT}.$$

Donc :

$$P[\,\mathrm{Sup}_{0\le t\le T}\ |X_i{*}(t)| > N\,] \le P[\,(\,|X_i{*}(0)| + kt\,)e^{kT} > N/3\,] +$$

$$+\ P[\,\mathrm{Sup}_{0\le t\le T}\ |W_t|\,e^{kT} > N/3\,] + P[\,\mathrm{Sup}_{0\le t\le T}\ |U_t|\ e^{kT} > N/3\,].$$

En vertu des propriètés du processus de WIENER et de la mesure de POISSON q, voir par exemple [18] pages 20 et 255, on a :

$$+\ P[\,\mathrm{Sup}_t\ |W_t| > N/3e^{kT}] \le (\,3e^{kT}/N\,)T$$

$$+\ P[\,\mathrm{Sup}_t\ |U_t|\ > N/3e^{kT}\,]\ \le (\,9e^{2kT}/N^2)\,T\int_{\mathbb{R}} v^2\,\mu(dv).$$

D'autre part, l'inégalité de MARKOV entraîne :

$$+\ P[\,|X_i{*}(0)| + kT > N/3e^{kT}] \le (\,3e^{kT}/N\,)\,[\,E\,|X_i{*}(0)| + kT]$$

Compte tenu du lemme 2.1, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ E\,|X_i{*}(0)| \le K_1.$$

On obtient donc,

$\forall i \in \mathbb{N}^*$,

$$P[\mathrm{Sup}_t\ |X_i{*}(t)| > N] \le (3e^{kT}/N)\,[K_1 + T(\,1+K+(3e^{kT}/N)\int_{\mathbb{R}} v^2\mu(dv))].$$

D'où le résultat du lemme.

$\square$

<u>Condition 2</u> Il existe une constante K' strictement positive, telle que :

$$\text{(2.6)}\qquad \forall i \in \mathbb{N}^*,\ E[\,|X_i{*}(t) - X_i{*}(t_1)|^2|\,X_i{*}(t_2) - X_i{*}(t)|^2] \le K'(t_2 - t_1)^2,$$

$$0 \le t_1 \le t \le t_2 \le T.$$

La démonstration de la condition 2 repose sur certains résultats :

<u>Lemme 2.2</u> il existe une constante B>0, telle que :

$$\text{(2.7)}\qquad \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,T]\ \ E\,|X_i{*}(t)|^4 \le B.$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, et tout t tel que $t_n{}^i \leq t < t_{n+1}{}^i$, $n \in \mathbb{N}$:

$$|X_i{}^*(t)| \leq |X_i{}^*(t_n{}^i)| + \left|\int_{t_n{}^i}^{t} e^{\varphi_1(t-s)} dW_s\right| + \left|\int_{t_n{}^i}^{t} e^{\varphi_1(t-s)} dU_s\right| + C_0,$$

où C_0 est une constante strictement positive. D'autre part,

$$|X_i{}^*(t)|^4 \leq \alpha\Big[\, |X_i{}^*(t_n{}^i)|^4 + \left|\int_{t_n{}^i}^{t} e^{\varphi_1(t-s)} dW_s\right|^4$$

$$+ \left|\int_{t_n{}^i}^{t} e^{\varphi_1(t-s)} dU_s\right|^4 + C_0{}^4 \,\Big],$$

où α est une constante strictement positive indépendante de i.

On a donc :

$$E|X_i{}^*(t)|^4 \leq \alpha\Big[\, E|X_i{}^*(t_n{}^i)|^4 + E\left|\int_{t_n{}^i}^{t} e^{\varphi_1(t-s)} dW_s\right|^4$$

$$+ E\left|\int_{t_n{}^i}^{t} e^{\varphi_1(t-s)} dU_s\right|^4 + C_0{}^4 \,\Big].$$

D'après [17], on a :

$$E\left|\int_{t_n{}^i}^{t} e^{\varphi_1(t-s)} dW_s\right|^4 \leq 18\int_{t_n{}^i}^{t} e^{4\varphi_1(t-s)} ds \leq 9/(-2\varphi_1).$$

Par ailleurs,

$$E\left|\int_{t_n{}^i}^{t} e^{\varphi_1(t-s)} dU_s\right|^4 \leq E\left|\int_{t_n{}^i}^{t}\int_{\mathbb{R}} v e^{\varphi_1(t-s)} q(ds \times dv)\right|^4 .$$

L'hypothèse (H) entraîne, comme pour la relation (1.4), l'existence d'une constante A indépendante de i, positive, telle que :

$$E\left|\int_{t_n{}^i}^{t} e^{\varphi_1(t-s)} ds\right|^4 \leq A .$$

Enfin, $E|X_i{}^*(t_n{}^i)|^4 = E|X_i{}^*(0)|^4$. Donc d'après le lemme 2.1, $E|X_i{}^*(t_n{}^i)|^4 \leq K_4$. On en déduit l'existence d'une constante B strictement positive telle qu'on ait (2.7).

$\square$

Pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, le processus $X_i{}^*$ vérifie les hypothèses du lemme 3.6 de [17]. En effet, pour tout x dans $\mathbb{R}$ et tout y dans [-1,1] il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$|\varphi_1 x + \varphi_2 y|^2 \leq C_1 (1 + |x|^2).$$

Compte tenu de la relation (2.1), on déduit, en vertu du lemme 3.6 de [17], les relations suivantes :

(2.8) $$E\Big[\sup_{T' \leq t \leq T} |X_i^*(t) - X_i^*(T')|^2 / \mathcal{F}_{T'}\Big] \leq C_2 (1 + |X_i^*(T')|^2).(T-T'),$$

(2.9) $$E\Big[\sup_{s_1 \leq t \leq s_2} |X_i^*(t) - X_i^*(s_1)|^2 / \mathcal{F}_0\Big] \leq C_3 (1 + |X_i^*(0)|^2).(s_2 - s_1),$$

où C_2 et C_3 sont deux constantes strictement positives, indépendantes de i et $\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par la famille $(X_i^*(s), s \leq t)$.

Soient t_1, t_2 et t tels que $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$. On a :

$$E\big[|X_i^*(t) - X_i^*(t_1)|^2 |X_i^*(t_2) - X_i^*(t)|^2 \big] =$$

$$E\Big\{ |X_i^*(t) - X_i^*(t_1)|^2 E\big[|X_i^*(t_2) - X_i^*(t)|^2 / \mathcal{F}_t\big] \Big\}.$$

D'après (2.8),

$$E\big[|X_i^*(t_2) - X_i^*(t)|^2 / \mathcal{F}_t\big] \leq C_2 (1 + |X_i^*(t)|^2) (t_2 - t).$$

Ce qui donne :

$$E\big[|X_i^*(t) - X_i^*(t_1)|^2 |X_i^*(t_2) - X_i^*(t)|^2 \big]$$

$$\leq C_2 (t_2 - t) \Big\{ E\big[|X_i^*(t) - X_i^*(t_1)|^2\big]$$

$$+ E\big[|X_i^*(t) - X_i^*(t_1)|^2 |X_i^*(t)|^2 \big] \Big\}.$$

On a :

$$E\big[|X_i^*(t) - X_i^*(t_1)|^2\big] \leq E\Big\{ E\Big[\sup_{t_1 \leq s \leq t} |X_i^*(s) - X_i^*(t_1)|^2 / \mathcal{F}_0 \Big]\Big\}$$

$$\leq C_3\,(t-t_1)\,(1+E|X_i^*(0)|^2)$$

$$\leq C_3\,(t-t_1)\,(1+K_2).$$

L'inégalité de Hölder entraîne d'autre part :

$$E[\,|X_i^*(t)-X_i^*(t_1)|^2|X_i^*(t)|^2] \leq [\,E|X_i^*(t)-X_i^*(t_1)|^4\,E|X_i^*(t)|^4]^{1/2}.$$

On utilise l'équation suivante :

$$X_i^*(t) = e^{\varphi_1 t}\,X_i^*(0) + e^{\varphi_1 t}\int_0^t e^{-\varphi_1 s}\,Y_i^*(s)\,ds$$

$$+\, e^{\varphi_1 t}\int_0^t e^{-\varphi_1 s}\,dW_s + \int_0^t e^{-\varphi_1 s}\,dU_s,$$

Ce qui donne :

$$X_i^*(t) - X_i^*(t_1) = X_i^*(0)\,(\,e^{\varphi_1 t} - e^{\varphi_1 t_1})$$

$$+\,(\,e^{\varphi_1 t} - e^{\varphi_1 t_1})\,[\int_0^{t_1} e^{-\varphi_1 s}\,Y_i^*(s)ds + \int_0^{t_1} e^{-\varphi_1 s}\,dW_s$$

$$+ \int_0^{t_1} e^{-\varphi_1 s}\,dU_s\,] + e^{\varphi_1 t}\,[\int_{t_1}^{t} e^{-\varphi_1 s}\,Y_i^*(s)ds$$

$$+ \int_{t_1}^{t} e^{-\varphi_1 s}\,dW_s + \int_{t_1}^{t} e^{-\varphi_1 s}\,dU_s\,].$$

Les inégalités $e^{\varphi_1 t} - e^{\varphi_1 t_1} \leq (t-t_1)\,|\,\varphi_1|$ et $|Y_i^*(s)| \leq 1$ permettent d'obtenir la majoration suivante :

$$|X_i^*(t) - X_i^*(t_1)|^4 \leq \beta\,[(t-t_1)^4\,|X_i^*(0)|^4 + (t-t_1)^4$$

$$+\,(t-t_1)^4\,|\int_0^{t_1} e^{-\varphi_1 s}dW_s|^4 + (t-t_1)^4\,|\int_0^{t_1} e^{-\varphi_1 s}dU_s|^4$$

$$+\,|\int_{t_1}^{t} e^{-\varphi_1 s}dW_s\,|^4 + |\int_{t_1}^{t} e^{-\varphi_1 s}dU_s|^4],$$

où β est une constante positive. Compte tenu des propriétés de W et de q et du lemme 2.1 on a :

$$E\,|X_i^*(t) - X_i^*(t_1)|^4 \leq \alpha_1\,(t-t_1)^4,$$

où, α_1 est une constante strictement positive.

D'autre part on a ,

$$E\,|X_i^*(t)\,|^4 \leq B,$$

ce qui donne :

$$E\,[|X_i^*(t) - X_i^*(t_1)|^2\,|X_i^*(t)|^2] \leq [B.\alpha_1]^{1/2}\,(t-t_1)^2.$$

En définitive, on obtient :

$$E\,|X_i^*(t) - X_i^*(t_1)|^2\,|X_i^*(t_2) - X_i^*(t)\,|^2$$

$$\leq C_2(t_2-t_1)[\,C_3(t_1-t)(1-K_2) + (\alpha_1.\,B)^{1/2}\,(t-t_1)^2].$$

Le résultat découle alors, de façon évidente de $t_2-t \leq t_2-t_1$ et $t_1-t \leq t_2-t_1$.

<u>Remarque :</u> La condition 2 est une condition suffisante seulement.

<u>Condition 3</u> $\forall \eta > 0,\ \varepsilon > 0$, il existe $\delta \in]0,1[$ et $i_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall i \geq i_0$:

(2.10) $$P\,[\sup_{0\leq s\leq t\leq \delta} |X_i^*(t) - X_i^*(s)| \geq \varepsilon\,] \leq \eta$$

(2.11) $$P\,[\sup_{T-\delta\leq s\leq t\leq T} |X_i^*(t) - X_i^*(s)| \geq \varepsilon\,] \leq \eta$$

<u>Démonstration :</u>

Nous allons montrer la relation (2.10). (2.11) se déduit alors par un raisonnement analogue.

Pour t et s dans [0,T] $s \leq t$, on a :

$$X_i^*(t) - X_i^*(s) = \varphi_1 \int_s^t X_i^*(u)du + \varphi_2 \int_s^t Y_i^*(u)\,du + W_t - W_s + U_t - U_s.$$

On prend le sup sur $[0,\delta]$ du terme de droite puis de gauche de l'inégalité précédente. On a alors :

$$E[\sup_{0\le s\le t\le \delta} |X_i^*(t) - X_i^*(s)|] \le |\varphi_1| \int_0^\delta E|X_i^*(u)|\,du + \varphi_2\delta$$

$$+ E[\sup_{0\le s\le t\le \delta} |W_t - W_s|] + E[\sup_{0\le s\le t\le \delta} |u_t - u_s|].$$

D'après l'inégalité de DOOB,

$$E[\sup_{0\le s\le t\le \delta} |W_t - W_s|] \le C_0\, \delta^{1/2}$$

où C_0 est une constante strictement positive. De même, il existe une constante C'_0 strictement positive telle que :

$$E[\sup_{0\le s\le t\le \delta} |U_t - U_s|] \le C'_0\, \delta^{1/2}.$$

D'autre part, d'aprés (2.7), il existe une constante B_0 strictement positive telle que :

$$E\,|X_i^*(u)| \le B_0.$$

On a donc :

$$E[\sup_{0\le s\le t\le \delta} |X_i^*(t) - X_i^*(s)|] \le \delta\, |\varphi_1|\, B_0 + \varphi_2\delta + \delta^{1/2}\,(C_0 + C'_0).$$

L'inégalité de MARKOV permet alors de déduire (2.10).

□.

En vertu du théorème 2.4.1 de [19], la suite de processus $(X_i^*)_i$ est étroite dans D_T.

Ce qui serait logique à présent est d'étudier la suite $\{Y_i^*\}_i$. Donc de montrer comme pour la suite $\{X_i^*\}_i$, que $\{Y_i^*\}_i$ est étroite dans D_T.

Cette étude s'est présentée difficile et compliquée. Nous avons alors, contourné cette difficulté en se ramenant à l'étude de la suite de processus $\{B_i^*\}_i$ définie à partir de la suite $\{Y_i^*\}_i$:

$$\forall t \geq 0, \quad B_i^*(t) = \int_0^t Y_i^*(s)\, ds. \tag{2.12}$$

La suite $\{B_i^*,\ i \in \mathbb{N}^*\}$ vérifie les critères d'étroitesse de façon évidente. Pour tout i dans $\mathbb{N}^*$ et tout t dans $[0,T]$, on pose :

$$W_i(t) = W(t)$$

$$U_i(t) = U(t) \qquad [\, q_i = q \,].$$

Compte tenu de la proposition 2.1, la suite de processus $\{(X_i^*(t), B_i^*(t), W_i^*(t), U_i(t))\}_i = \{Z_i^*(t)\}_i$, $t \in [0,T]$, est étroite dans D_T^4.

D'après un résultat important de SKOROKHOD [16] exposé par KUSCHNER dans [19], il existe un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ tel que pour une sous-suite (i') de (i), on peut construire sur cet espace une suite de processus $(Z'_{i'}{}^*)_{i'}$ et un processus Z'^* vérifiant :

1- Pour tout i' dans $\mathbb{N}^*$, $Z'_{i'}{}^*$ et $Z_{i'}^*$ ont mêmes lois de probabilité.

2- La suite $(Z'_{i'}{}^*)_{i'}$ converge P'_presque sûrement vers Z'^* au sens de la convergence uniforme pour la topologie de SKOROKHOD sur D_T^4.

On convient alors de <u>confondre</u> :

$(\Omega', \mathcal{A}', P')$ avec $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, la suite (i') avec $\mathbb{N}^*$, les processus $Z'_{i'}{}^*$,

$i \in \mathbb{N}^*$, et Z'^* avec respectivement Z_i^*, $i \in \mathbb{N}^*$ et Z^*, où Z^* est un processus mesurable et adapté, défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et ayant la même loi de probabilité que Z'^*.

Ainsi, la suite $\{(X_i^*(t), B_i^*(t), W_i(t), U_i(t))\}_{i \in \mathbb{N}^*}$, $t \in [0,T]$ converge presque sûrement vers $(X^*(t), B^*(t), W(t), U(t))$, $t \in [0,T]$ au sens de la convergence uniforme pour la topologie de D_T.

Remarque :

D'après [16], [19], l'espace Ω' n'est autre que l'espace [0,1] muni de la tribu des boréliens sur [0,1] et de la mesure de LEBESGUE sur [0,1].

II-ETUDE DU PROCESSUS X*

Dans ce paragraphe, nous montrons que le processus X* est solution stationnaire et transitive de l'équation (I) . Pour cela nous procédons par plusieurs étapes :

- D'abord, on montre que le processus X* est solution de l'équation suivante :

$$(\mathrm{II}) \qquad P\_p.s\ \forall t \in [0,T] \begin{cases} X^*(t) = X^*(0) + \varphi_1 \int_0^t X^*(s)ds + \varphi_2 B^*(t) + W(t) + U(t) \\ X^*(0) = X_0^* \text{ connu}. \end{cases}$$

- On étudie ensuite, la suite de processus $(Y_i^*)_i$. On montre, ensuite que X^* est solution de l'équation (I) pour le contrôle $Y^*(.) = \mathrm{Sgn}[X^*(.)]$.
- Enfin, on achève cette partie en montrant la transitivité et la stationnarité de X* .

I- X*, solution de(II).

On énonce le résultat suivant :

Lemme 1.1 P_p.s en tout point t de [0,T], on a :

$$(1.1) \qquad X^*(t) = X^*(0) + \varphi_1 \int_0^t X^*(s)ds + \varphi_2 B^*(t) + W(t) + U(t).$$

Démonstration :

Considérons l'ensemble A de probabilité un, formé des évènements ω de Ω pour lesquels la suite $\{(X_i^*, B_i^*, W_i, U_i)\}_i$ converge au sens de la topologie de D_T^4 vers (X*, B*, W, U) .

Soit ω fixé dans A, et soit un élément t de [0,T] pour lequel $X^*(.,\omega)$ est continu. Alors d'après [2] on a :

(1.2) $$\mathrm{Lim}_{i\to\infty} X_i^*(t,\omega) = X^*(t,\omega).$$

L'ensemble des discontinuités de la fonction $X^*(.,\omega)$ est au plus dénombrable. Donc, par rapport à la mesure de LEBESGUE sur $[0,T]$, cet ensemble est négligeable. Ce qui entraîne que (1.2) a lieu pour presque tout t de $[0,T]$. D'autre part, la suite $(X_i^*)_i$ converge vers X^* au sens de la topologie de D_T. Donc, ω étant fixé, pour $\varepsilon>0$, il existe une suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans Λ telle que :

$$\exists I > 0, \forall i \geq I \quad , \mathrm{Sup}_{t\in[0,T]} | X_i^*(t,\omega) - X^*(\lambda_i(t),\omega) | \leq \varepsilon$$

Donc :

$$\forall i \geq I, \forall t \in [0,T], | X_i^*(t,\omega) | \leq | X^*(\lambda_i(t),\omega) | + \varepsilon$$

$$\leq \mathrm{Sup}_t | X^*(t,\omega) | + \varepsilon.$$

On peut alors appliquer le théorème de la convergence dominée de LEBESGUE à la suite $(X_i^*(t,\omega))_i$. On a :

(1.3) $$\forall \omega \in A, \forall t \in [0,T], \quad \mathrm{Lim}_{i\to\infty} \int_0^t X_i^*(s)ds = \int_0^t X^*(s)ds$$

On sait par ailleurs, que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a :

(1.4) $$\forall t \in [0,T], \quad X_i^*(t) = X_i^*(0)+\varphi_1 \int_0^t X_i^*(s)ds + \varphi_2 B_i^*(t) + W(t) + U(t)$$

Soit, pour ω dans A, un élément t de $[0,T]$, en lequel $X^*(t,\omega)$ et $B^*(t,\omega)$ sont continus. Alors :

(1.5) $$\mathrm{Lim}_{i\to\infty} X_i^*(t,\omega) = X^*(t,\omega) \quad \underline{\text{et}} \quad \mathrm{Lim}_{i\to\infty} B_i^*(t,\omega) = B^*(t,\omega).$$

La relation (1.4) et (1.5) entraînent donc que la suite $\{X_i^*(0,\omega)\}_i$ converge presque sûrement vers $X_0^*(\omega)$, où X_0^* est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ceci nous donne, presque sûrement pour presque tout t dans $[0,T]$:

$$(1.6) \qquad X^*(t,\omega) = X_0{}^*(\omega) + \varphi_1 \int_0^t X^*(s,\omega)ds + \varphi_2 B^*(t,\omega) + W_t(\omega) + U_t(\omega).$$

on peut étendre cette relation à tout élément de [0,T] grâce à la continuité à droite des processus $X^*(\ .\ )$, $B^*(\ .\ )$ et $U(\ .\ )$. Le processus de WIENER W étant continu.

Par ailleurs, on remarque que le processus $B_i{}^*(\ .\ )$ est à trajectoires presque sûrement continues. Donc, la suite $(B_i{}^*,\ i \in \mathbb{N}^*)$ est, en fait, étroite dans l'espace C_T des applications continues de [0,T] dans $\mathbb{R}$. Ceci entraîne la continuité de $B^*(t,\omega)$ en tout point t de [0,T], voir [2]. Comme $B_i{}^*(0) = 0$, alors on a :

$$B^*(0,\omega) = \mathrm{Lim}_{i\to\infty} B_i{}^*(0,\omega) = 0$$

On en déduit, compte tenu de (1.6) :

$$(1.7) \qquad \forall\omega \in A,\ X^*(0,\omega) = X_0{}^*(\omega)$$

Notons enfin que le passage à la limite sur i, conserve la propriété d'indépendance de $X_0{}^*$, $(W_t,\ t \in [0,T])$ et $(U_t,\ t \in [0,T])$.

Ceci achève de démontrer le lemme.

□

Nous allons, à présent, étudier la suite $(B_i{}^*(t),\ i \in \mathbb{N}^*)$, $t \in [0,T]$. Etant étroite dans l'espace C_T, on peut extraire une sous-suite (i') de (i) telle que P-presque sûrement $\{B_{i'}{}^*(t,\omega)\}_{i'}$ converge uniformément en t sur [0,T], vers $B^*(t,\omega)$, voir [2], [19].

On suppose la suite (i') confondu avec $\mathbb{N}^*$. Pour tout i dans $\mathbb{N}^*$ et tout t et t' dans [0,T] on a :

$$|B_i{}^*(t) - B_i{}^*(t')| \leq |t-t'|.$$

Grâce à la convergence uniforme on a :

(1.8) P_p.s en tous points t et t' de $[0,T]$, $|B^*(t)-B^*(t')| \leq |t-t'|$

La relation (1.8) entraîne que le processus $\{B^*(t),\ t \in [0,T]\}$ est P-presque sûrement absolument continu. Il existe donc une application f de $[0,T]\times\Omega$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour ω dans Ω, l'application $f(.,\omega)$ est mesurable et on a :

(1.9) $$\text{P-p.s} \quad B^*(t,\omega) = \int_0^t f(s,\omega)ds$$

Montrons que le processus $\{ f(t),\ t \in [0,T] \}$ est adapté à la suite de tribus $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0,T]\}$.

Soit $(h_n,\ n \in \mathbb{N})$ une suite numérique décroissant vers zéro, et $\{Z_n(.),\ n \in \mathbb{N}\}$ la suite de processus définie par :

(1.10) $$Z_n(t) = \frac{B^*(t-h_n)-B^*(t)}{-h_n} \quad n \in \mathbb{N} \quad , \ t \in [0,T].$$

Considérons la suite d'intervalles $\{ [1/k\ ,\ T],\ k \in \mathbb{N} \}$. P-presque sûrement pour presque tout t de $[1/k\ ,T]$, $k \in \mathbb{N}$, la suite $(Z_n(t))_n$ converge vers f(t). Donc en dehors d'un ensemble mesurable de $[1/k,T]\times\Omega$, de mesure nulle pour la mesure $\lambda_{k,T}\times P$, où $\lambda_{k,T}$ est la mesure de LEBESGUE sur $[1/k,T]$, la suite de processus $\{Z_n(t), t\in[1/k,T]\}$ converge vers le processus $\{ f(t)\ ,\ t\in[1/k\ ,T] \}$. Le processus $\{ B^*(t),\ t \in [0,T] \}$ est mesurable et adapté à la famille $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0,T] \}$ en tant que limite d'une suite de processus mesurables et adaptés. Il en est de même pour le processus $\{ Z_n(t),\ t \in [0,T] \}$. On peut donc choisir pour $\{f(t),\ t \in [1/k\ ,T] \}$ une modification mesurable et adaptée à la famille $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [1/k\ ,T]\}$. Par passage à la limite sur k, le résultat s'étend à $[0,T]$.

On suppose donc dans la suite, $\{f(t),\ t \in [0,T]\}$ mesurable et adaptée à la famille $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0,T]\}$.

On remarque enfin que $|Z_n(t)| \leq 1$ et que pour tout t dans $[0,T]$ on a :

$$|f(t)| \leq 1 .$$

On a ainsi :

P-p.s en tout point t de $[0,T]$,

$$X^*(t) = X^*(0) + \varphi_1 \int_0^t X^*(s)ds + \varphi_2 \int_0^t f(s)ds + W_t + U_t . \tag{1.11}$$

2-Etude de la suite $\{Y_i^*,\ i \in \mathbb{N}^*\}$

Commençons par démontrer certains résultats nécéssaires à cette fin.

Lemme 2.1 La loi de probabilité P_{X^*} du processus $\{X^*(t),\ t \in [0,T]\}$ est équivalente à la loi P° du processus $\{X_0^* + W_t + U_t,\ t \in [0,T]\}$

Démonstration

D'après le lemme 1.2.1, il existe une constante positive K_4 telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^* , \qquad E|X_i^*(0)|^4 \leq K_4 . \tag{2.1}$$

Par ailleurs (1.7) entraîne :

$$\text{P-p.s } \operatorname{Lim}_{i \to \infty} [X_i^*(0)]^2 = [X^*(0)]^2 . \tag{2.2}$$

Alors d'après le théorème 6 de [25] on déduit de (2.1) et de (2.2) :

$$\operatorname{Lim}_{i \to \infty} E|X_i^*(0)|^2 = E|X^*(0)|^2 .$$

D'où :

(2.3) $$E|X_0^*|^2 < +\infty .$$

Posons $A_t = \varphi_1 X_t^* + \varphi_2 f_t$, $t \in [0,T]$. On sait qu'il existe une constante K strictement positive telle que :

(2.4) $$|A_t| \leq K(1+|X_t^*|) .$$

D'après le lemme 5.1 de [7], on déduit à partir de (2.3) et de (2.4) :

(2.5) $$E\{ \exp[\int_0^T A_t dW_t - 1/2\int_0^T A_t^2 dt] \} = 1$$

Soit le processus (W'_t) défini sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ par $W'_t = X_t^*-X_0^*-U_t$. Alors d'après le théorème de GIRSANOV voir [1], le processus $\{W'_t,\ t \in [0,T]\}$ est un mouvement brownien pour la mesure P' définie sur $(\Omega,\mathcal{A})$ par :

(2.6) $$\frac{dP'}{dP} = \exp[\int_0^T A_t dW_t - 1/2\int_0^T A_t^2 dt] .$$

De plus, pour la loi P', $\{X_t^*,\ t \in [0,T]\}$ est solution de l'équation :

$$X_t^* = X_0^* + U_t + W'_t .$$

Donc P^* est la loi image de P' par le processus $\{X_t^*\}$. On en déduit compte tenu de (2.6) que P^* est absolument continue par rapport à la loi P_{X^*} . Par ailleurs, $|f(t)| \leq 1$ pour tout t dans [0,T], donc $\int_0^T |f(t)|^2 dt \leq T$.

On a donc :

$$|X^*(t)| \leq |X^*(0)| + Kt + K\int_0^t |X^*(s)| ds + |W_t| + |U_t| .$$

En utilisant le lemme de GRONWALL, on a :

$$|X^*(t)| \leq [\ |X^*(0)| + Kt + |W_t| + |U_t|\ ]\ e^{Kt} .$$

Il existe une constante h > 0, telle que :

$$E|X^*(t)|^2 \leq h(\, E|X^*(0)|^2 + K^2T^2 + E|W_t|^2 + E|U_t|^2 \,) .$$

Tous les éléments apparaissant dans le terme de droite de cette inégalité sont finis. Il existe une constante $C_4 > 0$, telle que :

$$E|X^*(t)|^2 \leq C_4$$

On obtient donc :

$$E\int_0^T |X^*(t)|^2 dt \leq T.C_4 \tag{2.7}$$

La relation (2.7) entraîne que P-presque sûrement $\int_0^T |X^*(t)|^2 dt$ est fini

Ceci nous permet de déduire que $\int_0^T A_t^2 dt$ est P-presque sûrement fini. Donc :

$$P[\, \int_0^T A_t^2 dt < +\infty] = 1 . \tag{2.8}$$

Posons $Z_t = \exp\{\int_0^t A_s dW_s - 1/2\int_0^t A_s^2 ds\}$. On a :

$$\frac{dP'}{dP}(\omega) = Z_T(\omega) . \tag{2.9}$$

D'après les propriétés du processus de WIENER, la relation (2.8) entraîne que ,

$$P[\, \int_0^T |A_t dW_t| < +\infty \,] = 1 .$$

On déduit donc :

$$P[\, Z_T(\omega) = 0 \,] = 0 . \tag{2.10}$$

D'après le lemme (6.8) de [22], (2.9) et (2.10) entraînent que la mesure de probabilité P est absolument continue par rapport à la mesure de probabilité P'. De plus, on a :

$$\frac{dP}{dP'}(\omega) = Z_T^{-1}(\omega).$$

P* étant l'image de P' par le processus X_t^*, on en déduit alors que P_{X^*} est absolument continu par rapport à P*. Ceci achève de démontrer le lemme.

□

L'indépendance de X_0^*, W_t et U_t, $t \in [0,T]$ entraîne que la variable aléatoire $X_0^* + W_t + U_t$, $t \in [0,T]$, admet une densité de probabilité. Alors l'absolue continuité de la loi P_{X^*} par rapport à P* nous donne le résultat suivant :

Lemme 2.2 Pour tout t dans [0,T], la variable X_t^* admet une densité de probabilité.

Lemme 2.3 $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

(2.9) $$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad P[\,|X_i^*(0)| \leq \eta\,] \leq \varepsilon.$$

Démonstration

D'après le lemme 2.2, X_0^* admet une densité de probabilité. Il existe $\eta' > 0$ tel que :

$$P[\,|X_0^*| \leq \eta'\,] \leq \varepsilon/2.$$

La suite $(X_i^*(0))_i$ converge presque sûrement vers X_0^*. Alors la suite $P[\,|X_i^*(0)| \leq \eta'\,]$ converge vers $P[\,|X_0^*| \leq \eta'\,]$. Il existe donc I_0 dans $\mathbb{N}^*$, tel que :

(2.10) $$\forall i \geq I_0,\ P[\,|X_i{*}(0)| \leq \eta'\,] \leq \varepsilon .$$

Par ailleurs, pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, $X_i{*}(0)$ admet une densité. Il existe donc $\eta_i > 0$, tel que :

$$P[\,|X_i{*}(0)| \leq \eta_i\,] \leq \varepsilon$$

Posons $\eta'' = \min\limits_{i \leq I_0 - 1} (\eta_i)$. Alors :

(2.11) $$\forall i \leq I_0-1,\ P[\,|X_i{*}(0)| \leq \eta''\,] \leq \varepsilon .$$

On pose $\eta = \min(\eta',\eta'')$, et on déduit de (2.10) et (2.11) le résultat.

□

<u>Lemme 2.4</u> La suite de processus $\{Y_i{*}\}_i$ vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{h\to 0}\ \overline{\lim_{i\to\infty}}\ \sup_{|t-s|\leq h} P[\,|Y_i{*}(t)-Y_i{*}(s)| > \varepsilon\,] = 0$$

<u>Démonstration</u>

D'après la relation I(2.7), il existe une constante B_0 strictement positive telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,T],\ E|X_i{*}(t)| \leq B_0 .$$

Soient t et t' deux éléments de $[0,T]$, $t' < t$. On a :

$$X_i{*}(t)-X_i{*}(t') = \varphi_1 \int_{t'}^{t} X_i{*}(s)ds + \varphi_2 \int_{t'}^{t} Y_i{*}(s)ds + W_t - W_{t'} + U_t - U_{t'}$$

Ceci entraîne :

$$E|X_i{*}(t)-X_i{*}(t')| \leq |\varphi_1| B_0 (t-t') + \varphi_2 (t-t') + (t-t')^{1/2}[1 + \int_{\mathbb{R}} v^2 \mu(dv)]$$

Il existe donc une constante $H > 0$ telle que :

$$E|X_i*(t)-X_i*(t')| \leq H\,[(t-t')^{1/2}+(t-t')].$$

D'après l'inégalité de TCHEBYCHEV on a :

(2.12) $$\forall \varepsilon > 0,\ P[\,|X_i*(t)-X_i*(t')| > \varepsilon\,] \leq H/\varepsilon\,[\,(t-t')^{1/2} + (t-t')\,]$$

Soit $h > 0$ tel que $t' < t < t'+h$. Pour i fixé, soit t_j^i (t_k^i) le plus grand élément de $\mathfrak{D}^i$ tel que $t_j^i < t$ ($t_k^i < t'$). On a $t_j^i - t_k^i < h+2^{-i}$. Pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < 2$ et $\varepsilon' > 0$, pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$P[\,|Y_i*(t)-Y_i*(t')| \leq \varepsilon] = P[\,Y_i*(t)=Y_i*(t')\,]$$

$$= P[\,\mathrm{Sgn}[X_i*(t_j^i)]=\mathrm{Sgn}[X_i*(t_k^i)]\,]$$

$$\geq P[\,X_i*(t_j^i)X_i*(t_k^i)>0\,]$$

$$\geq 1- P[\,|X_i*(t_j^i)| \leq \varepsilon'] - P[\,|X_i*(t_j^i)-X_i*(t_k^i)| > \varepsilon'/2\,].$$

Soit $\eta > 0$, on peut choisir d'après le lemme **2.3**, ε', tel que :

$$P[\,|X_i*(t_j^i)| \leq \varepsilon'\,] \leq \eta/2.$$

D'après (2.12) on peut écrire :

$$P[\,|X_i*(t_j^i)-X_i*(t_k^i)| > \varepsilon'/2\,] \leq 2H/\varepsilon'\,[\,(h+2^{-i})^{1/2}+(h+2^{-i})\,].$$

Soit i_0 tel que $2^{-i_0} \leq h$. Alors $\forall i \geq i_0$, $2^{-i} \leq 2^{-i_0} \leq h$. On choisit h tel que $2H/\varepsilon'\,[\,(2h)^{1/2}+2h\,] \leq \eta/2$. Ce qui donne en définitive :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists\, i_0 \text{ et } h,\quad P[\,|Y_i*(t)-Y_i*(t')| > \varepsilon\,] \leq \eta.$$

D'où le résultat. □

Pour tout i dans $\mathbb{N}^*$ et tout t dans $[0,T]$ on a :

$$|Y_i*(t)| \leq 1.$$

La suite $\{Y_i*\}_i$ vérifie les hypothèses du corollaire 1 de [16] page 13.

Par conséquent pour une sous-suite (i') de (i) on peut construire sur l'espace $(\Omega',\mathcal{A}',P')$ une suite de processus $\{Y_{i'}'^*\}_{i'}$ et un processus Y'^* tels que pour tout i' , $Y_{i'}'^*(t)$ et $Y_{i'}^*(t)$ ont les mêmes distributions finies. De plus on a :

$$\text{(2.13)} \qquad \forall t \in [0,T],\ P'\text{-}\lim_{i'\to\infty} Y_{i'}'^*(t) = Y'^*(t).$$

Comme pour la suite $\{X_i^*\}$, on confond : $\{i'\}$ avec $\mathbb{N}^*$ $(\Omega',\mathcal{A}',P')$ avec $(\Omega,\mathcal{A},P)$, les processus $Y_i'^*$, $i \in \mathbb{N}^*$ avec Y_i^*, $i \in \mathbb{N}^*$. On considère un procesus Y^* défini sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ confondu avec Y'^* et vérifiant (2.13). D'après [16], Y^* est continu en probabilité.

__Lemme 2.5__ Au sens de la convergence dans L_1 on a :

$$\mathrm{Lim}_{i\to\infty} \int_0^t Y_i^*(s)ds = \int_0^t Y^*(s)ds.$$

En effet, on a :

$$\forall s \in [0,T],\ P\text{-}\mathrm{Lim}_{i\to\infty} Y_i^*(s) = Y^*(s).$$

Par ailleurs,

$$E|Y_i^*(s)|^2 \leq 1 \quad i = 1,2,\ldots$$

Alors, en vertu du théorème 6 p.72 de [25], on a le résultat :

$$\text{(2.14)} \qquad \mathrm{Lim}_{i\to\infty} \int_\Omega Y_i^*(s,\omega)P(d\omega) = \int_\Omega Y^*(s,\omega)P(d\omega).$$

Pour tout s dans [0,T], on a :

$$\forall \varepsilon>0,\ P\Big[\int_0^t |Y_i^*(s)-Y^*(s)|ds > \varepsilon\Big] \leq (1/\varepsilon)\, E\Big[\int_0^t |Y_i^*(s)-Y^*(s)|ds\Big]$$
$$\leq (1/\varepsilon) \int_0^t E|Y_i^*(s)-Y^*(s)|ds$$

Compte tenu de (2.14), on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall t \in [0,T],\ \mathrm{Lim}_{i\to\infty} P\Big[\int_0^t |Y_i^*(s)-Y^*(s)|ds > \varepsilon\Big] = 0,$$

Autrement dit, la suite $\{\int_0^t Y_i^*(s)ds,\ i \in \mathbb{N}^*\}$, $t \in [0,T]$, converge en probabilité vers $\int_0^t Y^*(s)ds$, $t \in [0,T]$. Or, d'après le paragraphe 1, cette suite converge presque sûrement. Donc elle converge presque sûrement vers

$$\int_0^t Y^*(s)ds,\ t \in [0,T].$$

Par ailleurs,

$$\left|\int_0^t Y_i^*(s)ds\right| \leq t$$

On en déduit en appliquant le théorème de LEBESGUE le résultat du lemme. □

On a ainsi, P-p.s, $\forall t \in [0,T]$

(2.14) $$X^*(t) = X^*(0) + \varphi_1 \int_0^t X^*(s)ds + \varphi_2 \int_0^t Y^*(s)ds + W_t + U_t.$$

Il reste à montrer que $Y^*(t) = Sgn[X^*(t)]$.

Lemme 2.6 $\forall t \geq 0$, P-p.s $\lim_{i\to\infty} Sgn[X_i^*(t)] = Sgn[X^*(t)]$.

Le résultat du lemme est évident du fait que la suite $(X_i^*(t))_i$ converge presque sûrement vers $X^*(t)$, et du fait que $P[\ X^*(t)=0\ ] = 0$ en vertu du lemme **2.2**.

□

Lemme 2.7 $\forall t \geq 0$, P-p.s $Y^*(t) = Sgn[X^*(t)]$.

Démonstration

Soit $\mathfrak{D} = \cup_i \mathfrak{D}^i$. L'ensemble $\mathfrak{D}$ est dense dans $[0,T]$. Si t appartient à $\mathfrak{D}$

Alors, pour i suffisamment grand on a :

$$Y_i^*(t) = \mathrm{Sgn}[X_i^*(t)].$$

Par passage à la limite on a :

$$P\text{-p.s} \quad Y^*(t) = \mathrm{Sgn}[X^*(t)].$$

Si t n'appartient pas à $\mathfrak{D}$, il existe alors une suite $(t_k)_k$ dans $\mathfrak{D}$, décroissant vers t. t_k étant un élément de $\mathfrak{D}$ on a :

(2.15) $$Y^*(t_k) = \mathrm{Sgn}[X^*(t_k)].$$

Par passage à la limite sur k on a :

(2.16) $$P\text{-}\mathrm{Lim}_k \, Y^*(t_k) = Y^*(t).$$

Par ailleurs les trajectoires du processus X^* sont presque sûrement cadlag. Donc :

(2.17) $$P\text{-p.s} \quad \mathrm{Lim}_k \, \mathrm{Sgn}[X^*(t_k)] = \mathrm{Sgn}[X^*(t)].$$

On en déduit de (2.15), (2.16) et (2.17) :

$$P\text{-p.s} \quad Y^*(t) = \mathrm{Sgn}[X^*(t)].$$

Ceci donne le résultat du lemme.

□

Le processus $\{X^*(t),\ t \in [0,T]\}$ vérifie P-p.s en tout point t de [0,T] :

(2.18) $$X^*(t) = X^*(0) + \varphi_1 \int_0^t X^*(s)ds + \varphi_2 \int_0^t \mathrm{Sgn}[X^*(s)]ds + W_t + U_t.$$

3-Stationnarité et transitivité du processus (X^*)

Si t et t' sont des éléments de $\mathfrak{D}$, $X_i^*(t)$ et $X_i^*(t')$ ont même loi, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, (voir chapitre 2). Comme on a presque sûrement :

$$\mathrm{Lim}_{i\to\infty} X_i^*(t) = X^*(t) \quad \text{et} \quad \mathrm{Lim}_{i\to\infty} X_i^*(t') = X^*(t'),$$

alors, $X^*(t)$ et $X^*(t')$ ont même loi.

Si t et t' n'appartiennent pas à $\mathfrak{D}$, il existe deux suites dans $\mathfrak{D}$, (t_k) et

$\{t_j\}$ décroissantes vers t et t'. $X^*(t_k)$ et $X^*(t_j)$ ont même loi. La continuité à droite des trajectoires du processus X^* entraînent, par passage à la limite sur k et j :

$$X^*(t) \text{ et } X^*(t') \text{ ont même loi}.$$

$\{ X^*(t),\ t \in [0,T] \}$ est un processus de MARKOV, homogène par rapport au temps. On peut donc déduire (propriété des processus de MARKOV homogènes) que le processus X^* est strictement stationnaire.

Transitivité

Pour montrer la transitivité ,on procède comme dans le chapitre 2. On utilise une propriété concernant les processus de MARKOV . Cette propriété entraîne que les invariants sont de la forme $X_0^{*-1}(C)$, C borélien de $\mathbb{R}$. $X_0^{*-1}(C)$ est un invariant si et seulement si, il diffère de l'ensemble $X_t^{*-1}(C)$ par un ensemble de probabilité nulle. Ceci entraîne :

$$P[\, X_0^{*-1}(C) \Delta X_t^{*-1}(C) \,] = 0 ,$$

où Δ est la différence symétrique des ensembles. Soit $\{\pi_t\}$ le processus canonique associé à $\{X_t^*\}$. Alors :

(3.1) $$P_{X^*}[\, \pi_0^{-1}(C) \,\Delta\, \pi_t^{-1}(C) \,] = 0 .$$

Compte tenu du lemme **2.1**, la relation (3.1) entraîne :

(3.2) $$P^\bullet[\, \pi_0^{-1}(C) \,\Delta\, \pi_t^{-1}(C) \,] = 0 .$$

(3.2) entraîne que $\pi_0^{-1}(C)$ est un invariant pour le processus $\{X_0^*+W_t+U_t\}$. D'autre part, $P[\, X_0^*+W_t+U_t \in B \,/\, X_0^*= x \,] = p(x,t,B)$ admet une densité de probabilité strictement positive, puisque X_0^*, W_t et U_t sont indépendants et que pour tout t, W_t admet une densité. Alors, par un même raisonnement que dans le cas discret (paragraphe 2.11), on montre que les seuls ensembles qui conviennent sont ceux qui vérifient :

(3.3) $$P^{\bullet}[\, \pi_0^{-1}(C)\,] = 0 \text{ ou } 1 \,.$$

En vertu du lemme **2.1**, (3.3) entraîne :

$$P_{X^*}[\, \pi_0^{-1}(C)\,] = 0 \text{ ou } 1 \,.$$

Donc les seuls invariants sont ceux qui vérifient $P[\, X_0^{*-1}(C)\,] = 0$ ou 1

On en déduit la transitivité du processus (X^*) . □

<u>Conséquence</u>:

Il découle de la proposition **3.1**, l'ergodicité du processus X^*, au sens défini dans [23]. Ce qui nous donne le résultat suivant :

<u>Corollaire 3.1</u> Au sens de la convergence presque sûre et en moyenne quadratique on a:

$$\mathrm{Lim}_{T\to\infty}\, 1/T \int_0^T [X_t^*]^2 dt = E(X_0^*)^2$$

$$\mathrm{Lim}_{T\to\infty}\, 1/T \int_0^T |X_t^*| dt = E|X_0^*| \,.$$

III-IDENTIFICATION DES PARAMETRES . OPTIMALITE.

1-Introduction

Dans les paragraphes précédents de ce chapitre, nous avons montré l'existence sur un certain espace probabilisé noté $(\Omega,\mathcal{A},P)$, d'un processus X^* strictement stationnaire et transitif, solution de l'équation :

$$(1.1)\quad \text{P-p.s}\quad \begin{cases} X^*(t) = X_0^* + \varphi_1 \int_0^t X^*(s)ds + \varphi_2 \int_0^t \mathrm{Sgn}[X^*(s)]ds + W_t + U_t, \\ X^*(0) = X_0^*. \end{cases}$$

Dans le même esprit que le chapitre 2, nous avions voulu étudier par les mêmes méthodes, la suite $(X_i)_i$. Cependant, si on peut montrer que la suite $(X_i)_i$ converge vers un processus X au sens de la topologie de SKOROKHOD, on ne peut comparer cette solution X à X^* comme cela a été fait dans le cas gaussien [6]. La méthode utilisée dans [6] ne s'applique pas. En effet, posons pour toute variable aléatoire X et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H_X(x) = P[\, X \leq -x \,] + P[\, X > x \,].$$

Nous nous plaçons dans le cas de [6], cas de bruit gaussien uniquement, pour mettre en évidence les éléments rendant cette comparaison possible, et que l'on ne retrouve pas dans notre cas.

Soit t appartenant à $\cup_i \mathcal{D}^i$. Pour t fixé, la suite $\{ H_{Xi(t)} \}_i$ est croissante. Cette propriété découle de la décroissance sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction de densité h^i de la variable $H_n{}^i$, $n \in \mathbb{N}$. En effet, soit $t > 0$. On pose :

$$\begin{cases} \rho_n{}^i(x) = \inf_{Ce^i} P[\, |X_i(t_N{}^i)| \leq t \,/\, X_i(t_n{}^i) = x \,] \\ \rho_N{}^i(x) = \mathbf{1}_{[-t,\,t]}(x). \end{cases}$$

On a :

$$\rho_n{}^i(x) = 1/(\sigma_i\sqrt{2\pi}) \int_{\mathbb{R}} \rho_{n+1}{}^i(y) \exp[-(y-k_i x-k_i' \mathrm{sgn}(x))^2/2\sigma_i{}^2]\, dy$$

Compte tenu des expressions de k_i, k_i' et $\sigma_i{}^2$, on montre par récurrence que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \mathbb{R}^+,\ \rho_n{}^i(x) > \rho_n{}^{i+1}(x).$$

En particulier , $\rho_0{}^i(x) > \rho_0{}^{i+1}(x)$. On a alors :

(1.2) $$\forall i \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathcal{D}^i, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ H_{Xi(t)}(x) < H_{Xi+1(t)}(x)$$

La suite $\{H_{Xi(t)}\}_{i\in\mathbb{N}^*}$, $t \in \bigcup_i \mathcal{D}^i$, est donc croissante. Par ailleurs les fonctions $H_{Xi(t)}$, $t \in \bigcup_i \mathcal{D}^i$, $i \in \mathbb{N}^*$, sont majorées par 1. On déduit donc que cette suite est convergente.

Les différents résultats utilisés dans [6], pour étudier la suite $\{X_i,\ i \in \mathbb{N}^*\}$, reposent en grande partie sur la convergence de la suite $\{H_{Xi(t)}\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ et sur le fait que la densité h^i de la variable $H_n{}^i$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}^*$, suit une <u>loi gaussienne,</u> centrée.

Dans le cadre de notre étude, la présence du terme poissonien U_t, entraîne que la densité h^i n'est pas gaussienne et présente en général plusieurs modes. De ce fait, on ne peut pas établir la relation (1.2), et la suite $\{H_{Xi(t)}\}_{i\in\mathbb{N}^*}$, $t \in \bigcup_i \mathcal{D}^i$, n'est pas monotone. Ce qui ne nous permet pas de conclure quant à la convergence de cette suite. En particulier, la proposition (3.4) de [6] ne peut se démontrer. Alors la comparaison des deux solutions X et X* construites par la méthode des approximations de processus par des suites de processus ne peut pas se faire. Pour la résolution du problème (P_1), nous présentons une méthode suggérée par BRODEAU. Cette méthode se base essentiellement sur l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (1.1) pour un état initial donné du second ordre. Quant au problème (P_2), la méthode de la programmation dynamique telle qu'elle est présentée dans [17] ne s'applique pas. Cette méthode suggère une approximation d'un contrôle continu optimal par une suite de contrôles étagés qui sont optimaux. Or, on ne dispose pas d'une telle suite. On pourrait proposer une résolution dans le cas particulier d'évolution stationnaire : c'est à dire le cas où l'état initial suit la loi de probabilité de X_0^*. Cependant cette loi est inconnue. Aussi une telle approche n'a plus de sens. Par conséquent le problème (P_2) ne sera pas résolu.

2- Existence et unicité de solution forte.

Remarquons d'abord que la solution définie, X^*, est une solution faible. Le problème d'identification ne prend un sens que si la solution est unique, voir [20], [22].

Proposition 2.1 Avec les hypothèses du chapitre 1, et pour un état initial X_0 donné du second ordre, l'équation:

$$X_t = X_0 + \varphi_1 \int_0^t X_s ds + \varphi_2 \int_0^t \mathrm{Sgn}(X_s) ds + W_t + U_t , \tag{2.1}$$

admet une solution forte unique.

Le résultat de cette proposition a été démontré par BRODEAU dans le cas où le terme poissonien est nul : c'est à dire quand les trajectoires sont presque sûrement continues (proposition 2.1 p.5 [5]). Les techniques de démonstration utilisées reposent sur le lemme 4 p.120 de [18]. Nous allons montrer que ce lemme peut s'étendre au cas de processus de diffusion avec sauts, en vertu de quoi, la proposition se démontre facilement en reprenant le même raisonnement que dans [5].

Lemme 2.1 (généralisation du lemme 4 de [18])

Soient X_1 et X_2 deux processus, solutions des équations

$$dX_i(t) = a_i[X_i(t)]\,dt + dW_t + dU_t \quad i = 1,2 \quad ,$$

ayant le même état initial $X_i(0) = X_0$. $a_i(x)$, $i = 1,2$, sont deux fonctions mesurables vérifiant les conditions d'existence et d'unicité d'une solution (voir chapitre 1). Si pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a $a_1(x) > a_2(x)$, alors :

$$\text{P-p.s } \forall t > 0, \quad X_1(t) > X_2(t).$$

<u>Démonstration</u>

Posons pour tout t dans $[0,T]$, $S(t) = X_1(t) - X_2(t)$.

Les processus X_1 et X_2 étant à trajectoires dans D_T, la fonction $S(t)$ présente donc des points de discontinuité de première espèce. Les discontinuités des trajectoires de X_1 et X_2 sont engendrées par les sauts du processus de POISSON (U_t). Donc ces sauts apparaissent pour X_1 et X_2 aux mêmes instants et avec la même amplitude. Aussi, si t_1 est un point de discontinuité tel que $X_1(t) > X_2(t)$ pour tout $t < t_1$, alors on a :

$$X_1(t_1) > X_2(t_1). \tag{2.2}$$

Pour montrer le résultat du lemme, il faut montrer qu'en tout $t \in]0,T]$, $S(t) > 0$. Soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$ la suite des éléments de $]0,T]$ qui sont les points de discontinuité de $S(.)$ strictement positifs. Considérons l'intervalle $[0,t_1[$. Sur cet ensemble, $S(t)$ est dérivable de dérivée $S'(t) = a_1(X_1(t)) - a_2(X_2(t))$. En tout t où $S(t) = 0$, on a $S'(t) > 0$. En particulier $S(0) = 0$ et $S'(0) > 0$. Il existe donc ∂, $0 < \partial < t_1$, tel que pour tout t dans $]0,\partial[$, $S(t) > 0$. Supposons que l'ensemble A défini par :

$$A = \{ t : t \in]0,t_1[, S(t) = 0 \},$$

ne soit pas vide et posons $t_0 = \inf_t A$. On a donc :

$$S(t_0) = 0\ , \text{ et } S'(t_0) > 0\ .$$

Ceci entraîne, compte tenu de la continuité de $S(.)$ dans $[0,t_1[$, qu'il existe $\partial_0 > 0$ tel que $S(t) < 0$ dans l'intervalle $[t_0-\partial_0,t_0[$. Comme on a $S(t) > 0$ pour t dans $[0,\partial]$ on déduit donc l'existence d'un élément t' dans $]\partial,t_0-\partial_0[$ pour lequel $S(t') = 0$. Ceci est en contradiction avec la construction de t_0. Donc A est vide. Et on a :

$$\forall t \in [0,t_1[\ , \quad X_1(t) > X_2(t).$$

Compte tenu de (**2**.2), ce résultat s'étend à tout l'intervalle $[0,T]$.

□

A cette étape, on reprend le même raisonnement que celui utilisé dans [5]. De la même façon, on montre la proposition **2**.1. □

En vertu de la remarque 1.112 de [20], l'équation (**2**.1) admet une solution faible unique. Donc la solution notée $(\boldsymbol{\Omega},\mathcal{A},P,X^*,W_t,U_t)$ est unique (au sens que la loi image de P par X^* est unique sur l'espace canonique).

Grâce à la proposition **2**.1, on peut résoudre le problème (P_1) dans sa généralité.

3-Résolution de (P_1)

Notons $P_\varphi{}^T$ la restriction de la loi P_φ du processus X solution de l'équation (**2**.1) correspondant à un état initial X_0 du second ordre, donné. On montre alors que $P_\varphi{}^T$ est équivalente à la loi ν^T, où ν^T est la restriction de la loi ν du processus $\{X_0 + W_t + U_t\}$ à l'espace D_T (voir 2§1). La densité de RADON-NYKODYM est donnée par :

$$(3.1)\qquad \frac{dP_{\varphi}^{T}}{d\nu^{T}} = \exp\left\{\int_0^T [\varphi_1\pi_s+\varphi_2 \mathrm{Sgn}(\pi_s)]dM_s - 1/2\int_0^T [\varphi_1\pi_s+\varphi_2 \mathrm{Sgn}(\pi_s)]^2 ds\right\}$$

où, $dM_t = d\pi_t - dU_t$.

On pose le problème d'identification de $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ dans la structure statistique :

$$(3.2)\qquad \left\{ (D,\mathcal{D}_T,P_{\varphi}^{T}),\ \varphi = (\varphi_1,\varphi_2),\ \varphi_1 < 0,\ \varphi_2 > 0 \right\}$$

Une fonction de Log-vraisemblance $L_T(\varphi)$ est donnée grâce à (3.1). On a alors, un estimateur de maximum de vraisemblance noté φ_T solution de l'équation de vraisemblance :

$$L_T^{(1)}(\varphi) = 0 ,$$

où $L_T^{(1)}(\varphi)$ (resp. $L_T^{(2)}$) désigne la dérivée première (resp. seconde) de $L_T(\varphi)$. Pour la vraie valeur φ^* du paramètre φ, on a :

$$\varphi^* - \varphi_T = [\, L_T^{(2)}\,]^{-1} L_T^{(1)}(\varphi^*)$$

Dans le domaine où $L_T^{(2)}$ est inversible. Posons

$$J = \begin{bmatrix} E|X_0^*|^2 & E|X_0^*| \\ E|X_0^*| & 1 \end{bmatrix}$$

On peut écrire :

$$L_T^{(1)}(\varphi) = \begin{bmatrix} \int_0^T X_t dW_t \\ \int_0^T \mathrm{Sgn} X_t dW_t \end{bmatrix} \qquad L_T^{(2)} = -\begin{bmatrix} \int_0^T X_t^2 dt & \int_0^T |X_t| dt \\ \int_0^T |X_t| dt & 1 \end{bmatrix}.$$

Comme dans le chapitre 2, nous nous intéressons au comportement asymptotique des intégrales :

$$1/T \int_0^T X_t^2 dt \qquad \text{et} \quad 1/T \int_0^T |X_t| dt,$$

quand T tend vers l'infini. Nous allons montrer que ces intégrales convergent en moyenne quadratique vers $E|X_0^*|^2$ et $E|X_0^*|$. On a :

(3.3) $$X_t^* = X_0^* + \varphi_1 \int_0^T X_s^* ds + \varphi_2 \int_0^T \mathrm{Sgn} X_s^* ds + W_t + U_t .$$

(3.3)' $$X_t = X_0 + \varphi_1 \int_0^T X_s ds + \varphi_2 \int_0^T \mathrm{Sgn} X_s ds + W_t + U_t .$$

D'après le corollaire **II.(3.1)**, on a presque sûrement et en moyenne quadratique :

$$\mathrm{Lim}_{T\to\infty} |1/T \int_0^T (X_t^*)^2 dt - l| = 0, \quad \text{où } l = E|X_0^*|^2.$$

Donc :

(3.4) $$\mathrm{Lim}_{T\to\infty} E\{E[|1/T \int_0^T (X_t^*)^2 dt - l|^2 / X_0^* = x]\} = 0$$

Nous nous intéressons à la convergence dans $L^2(\Omega)$. Posons :

$$\Phi_T(x) = E[|1/T \int_0^T X_t^2 dt - l|^2 / X_0 = x],$$

où X_t est la solution de (2.1) correspondant à l'état initial $X_0 = x$, x réel. (3.4) entraîne alors, compte tenu de la proposition 2.1,

$$\mathrm{Lim}_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \Phi_T(x) f_{X_0^*}(x) dx = 0,$$

où f_X représente la densité d'une variable aléatoire X. D'autre part, si X_0 admet une densité, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi_T(x) f_{X_0}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \Phi_T(x) [f_{X_0}(x)/f_{X_0^*}(x)]\, f_{X_0^*}(x)\, dx.$$

On voit à partir de cette égalité que l'intégrale de gauche converge vers zéro quand T tend vers l'infini, si on a :

(3.5) $$\mathrm{Sup}_{x\in\mathbb{R}}\, f_{X_0^*}(x)/f_{X_0}(x) \leq K,$$

où K est une constante strictement positive. Par ailleurs, $f_{X_0^*}(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Aussi, dans le cas particulier où $f_{X_0}(x)$ s'annule en dehors d'un compact $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, la relation (3.5) est vérifiée. D'où le résultat suivant :

Lemme 3.1 Si l'état initial X_0 admet une densité à support compact alors $1/T \int_0^T X_t^2 dt$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $E(X_0^*)^2$. De même $1/T \int_0^T |X_t| dt$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $E|X_0^*|$.

□

Soit x un réel donné. Pour un état initial égal à x, l'équation (2.1) admet une solution unique notée X_t. Nous allons montrer que les résultats du lemme 3.1 s'étendent au cas où $X_0 = x$, x réel donné. Nous énonçons d'abord le résultat suivant :

Lemme 3.2 Soit X' et X'', deux solutions de l'équation (2.1) correspondant à deux états initiaux du second ordre X_0' et X_0''. Supposons qu'on ait $X_0' < X_0''$. Alors :

(3.6) $$\text{P-p.s } \forall t \in [0,T], \quad X_t' < X_t''.$$

Démonstration

Posons :

$$S(t) = X_t'' - X_t' = X_0'' - X_0' + \varphi_1 \int_0^t (X_s'' - X_s')ds + \varphi_2 \int_0^t [\operatorname{Sgn} X_s'' - \operatorname{Sgn} X_s']ds$$

Cette relation est valable P-presque sûrement. On peut donc l'utiliser pour comparer deux trajectoires correspondant à un même ω.

X' et X'' présentent des sauts aux mêmes instants et de mêmes amplitudes. Soit t_1, le premier instant de saut strictement positif des deux processus. t_1 est le premier point de discontinuité de $S(.)$ strictement positif. Comme pour le lemme **2.1**, nous allons montrer que $S(t) > 0$ sur $[0,t_1[$. Le résultat s'étend alors à tout intervalle $[0,T]$, puisqu'on a $S(t_1) > 0$.

Dans chaque intervalle où les deux trajectoires X_t' et X_t'' ne changent pas de signe on montre que $S(t) > 0$. En effet, soit θ_1 le premier instant de changement de signe de l'une ou l'autre des deux trajectoires. Donc $\forall t \in [0, \theta_1[$, on a :

$$\mathrm{Sgn}X_t' = \mathrm{Sgn}X_0' \qquad \text{et} \quad \mathrm{Sgn}X_t'' = \mathrm{Sgn}X_0''.$$

On a alors les situations suivantes :

• $\mathrm{Sgn}X_0' = \mathrm{Sgn}X_0''$. Alors sur $[0, \theta_1[$, $\mathrm{Sgn}X_t' = \mathrm{Sgn}X_t''$. On a donc $S'(t) = \varphi_1 S(t)$, où $S'(.)$ est la dérivée de la fonction $S(.)$. Ce qui donne :

$$\forall t \in [0, \theta_1[,\ S(t) = S(0)\exp(\varphi_1 t) > 0.$$

• $\mathrm{Sgn}X_0' = -1 = -\mathrm{Sgn}X_0''$. Alors $\mathrm{Sgn}X_t' = -1$ et $\mathrm{Sgn}X_t'' = 1$ pour tout $t \in [0,\theta_1[$. Donc, $S'(t) = \varphi_1 S(t) + 2\,\varphi_2$. Ce qui donne :

$$\forall t \in [0, \theta_1[,\ S(t) = S(0)\exp(\varphi_1 t) + 2\,\varphi_2/\varphi_1\,[1 - \exp(\varphi_1 t)\,] > 0.$$

Ce sont les seuls cas possibles car par hypothèse $X_0' < X_0''$. Donc :

$$\forall t \in [0, \theta_1[\quad X_t'' > X_t'. \tag{3.7}$$

Soit θ_2 le deuxième instant de changement de signe de l'une ou l'autre des deux trajectoires. Donc, $\forall t \in [\theta_1,\theta_2[$, X_t' et X_t'' ne changent pas de signe. Compte tenu de la relation (**3.7**) et de la continuité de $S(.)$ sur $[0,t_1[$, les seules situations qui peuvent se présenter concernant θ_1

sont les suivantes :

+ $\mathrm{Sgn}X'(\theta_1) = \mathrm{Sgn}X''(\theta_1)$. On a alors $\forall t \in [\theta_1,\theta_2[$ $S'(t) = \varphi_1 S(t)$, ce qui donne :

$$\forall t \in [\theta_1,\theta_2[,\quad S(t) = S(\theta_1)\exp(\varphi_1(t-\theta_1)).$$

Comme $S(\theta_1) > 0$, alors $S(t) > 0$ $\forall t \in [\theta_1,\theta_2[$.

+ $\mathrm{Sgn}X'(\theta_1) = -1 = -\mathrm{Sgn}X''(\theta_1)$.

On a $S'(t) = \varphi_1 S(t) + 2\varphi_2$. D'où,

$$S(t) = S(\theta_1)\exp(\varphi_1(t-\theta_1)) + 2\varphi_2/-\varphi_1[1-\exp(\varphi_1(t-\theta_1))] > 0$$

Donc on a :

$$\forall t \in [\theta_1,\theta_2[,\quad X_t' < X_t''.$$

Ce procédé s'itère et entraîne que sur $[0,t_1[$, $X_t' < X_t''$. On étend ce résultat à tout l'intervalle $[0,T]$, comme pour le lemme 2.1, puisque les trajectoires (X_t') et (X_t'') ont les mêmes sauts.

□

Considérons deux variables aléatoires X_0' et X_0'', de fonctions de densité $f_{X_0'}$ et $f_{X_0''}$ à supports compacts A' et A'', et tels que, pour tout x' dans A' et tout x'' dans A'' on ait : $x' < x < x''$. Alors le lemme 3.2, entraîne :

(3.8) $$\forall t \in [0,T] \quad X_t' < X_t < X_t''.$$

On en déduit donc :

(3.9) $$\text{P-p.s}\quad 1/T \int_0^T (X_t')^2 dt < 1/T \int_0^T X_t^2 dt < 1/T \int_0^T (X_t'')^2 dt.$$

Les fonctions de densité $f_{X_0'}$ et $f_{X_0''}$ étant à supports compacts, on en déduit, compte tenu du lemme 3.1, qu'au sens de la convergence en moyenne quadratique,

$$\mathrm{Lim}_{T\to\infty}\ 1/T\int_0^T (X_t')^2dt = \mathrm{Lim}_{T\to\infty}\ 1/T\int_0^T (X_t'')^2dt = E|X_0^*|.^2$$

On peut écrire compte tenu de (3.9) :

$$E|1/T\int_0^T X_t^2dt - 1|^2 \le 2E|1/T\int_0^T X_t^2dt - 1/T\int_0^T (X_t')^2dt|$$

$$+2E|1/T\int_0^T (X_t')^2dt - 1|^2$$

$$\le 2E|1/T\int_0^T (X_t'')^2dt - 1/T\int_0^T (X_t')^2dt|^2$$

$$+2E|1/T\int_0^T (X_t')^2dt - 1|^2.$$

Par passage à la limite, on trouve :

$$\mathrm{Lim}_{T\to\infty}\ E|1/T\int_0^T X_t^2dt - 1|^2 = 0.$$

Donc $1/T\int_0^T X_t^2dt$ converge en moyenne quadratique vers $E(X_0^*)^2$. Par un même raisonnement, on montre que $1/T\int_0^T |X_t|dt$ converge en moyenne quadratique vers $E|X_0^*|$. Il suffit de prendre la fonction $\Phi_T(x)$ égale à :

$$E[\,|1/T\int_0^T |X_t|dt - E|X_0^*|\,|^2 \,/\, X_0 = x\,].$$

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Lemme 3.3 $\quad P\text{-}\mathrm{Lim}_{T\to\infty}\ 1/T\int_0^T X_t^2dt = E(X_0^{*2}).$

$$P\text{-}\mathrm{Lim}_{T\to\infty}\ 1/T\int_0^T X_t^2dt = E|X_0^*|.$$

□

A ce niveau, on reprend le raisonnement du paragraphe **2.III**. Pour les mêmes raisons, la matrice J est inversible. On montre que $1/TL_T^{(2)}$ converge en probabilité vers la matrice -J. Relativement à la mesure de probabilité P_φ, $1/TL_T^{(1)}(\varphi)$ converge en moyenne quadratique vers 0 Enfin grâce au théorème de TARASKIN, on montre que $1/\sqrt{T}L_T^{(1)}(\varphi)$ converge vers un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0,J)$.

Ainsi, dans le cas où $X_0 = x$, x réel donné, la famille d'estimateurs $\{\hat{\varphi}_T, T > 0\}$ vérifie les propriétés suivantes :

__**Proposition 3.1**__ La famille $\{\hat{\varphi}_T, T>0\}$ vérifie relativement à P_φ :

1. $P_\varphi\text{-}\mathrm{Lim}_{T\to\infty}\, \hat{\varphi}_T = \varphi^*$
2. $\sqrt{T}\,(\hat{\varphi}_T - \varphi^*)$ converge en loi vers un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, J^{-1})$

__Conclusion__

Lorsque le contrôle Y(t) est choisi égale à SgnX(t), $t \geq 0$, et pour un état initial égal à une valeur x donnée, le paramètre du système φ peut être approché par un estimateur $\hat{\varphi}_T$, pour T>0, fixé. La famille $\{\hat{\varphi}_T, T > 0\}$ vérifie les propriétés de consistance et de normalité asymptotique.

CONCLUSION

L'étude que nous venons de présenter, a permis une généralisation de certains résultats démontrés dans le cas de processus de diffusion à trajectoires continues, au cas de processus avec sauts.

Ainsi dans le cas de contrôle étagé, les paramètres du système sont identifiés par une famille d'estimateurs qui présente de bonnes propriétés (consistance et normalité asymptotique). Cette identification est optimale pour le contrôle étagé Y_i^{*} tel qu'il a été défini (chapitre 2).

Dans le cas continu, le problème (P_1) est résolu pour le contrôle Y^{*} choisi et pour un état initial x donné : il existe une famille d'estimateurs ayant les propriétés de consistance et de normalité asymptotique qui permet l'identification des paramètres du système.

Ainsi, par rapport aux objectifs fixés au début de notre travail, les <u>résultats obtenus sont satisfaisants.</u>

Sur le plan théorique, l'étude dans le cas continu est trés riche pour les résultats qui sont utilisés. Les démarches qui sont employées présentent une méthode intéressante pour la résolution des équations différentielles stochastiques en temps continu.

REFERENCES

[1] I.V. GIRSANOV, On transforming a certain class of processus by absolutly continus subtitution. Theory of prob. vol. V N°3 1960. p.285-301

[2] P. BILLINGSLEY, Convergence of probability measures. J. Willey 1968

[3] F. BRODEAU, thèse d'état : Contribution à l'étude du contrôle optimal stochastique. 1968 faculté des sciences de l'université de GRENOBLE.

[4] F. BRODEAU, R.R N°241. Etude d'une chaîne de MARKOV associé à un problème de contrôle optimal stochastique. p. 1-23 U.S.M.G 1981

[5] F. BRODEAU, R.R N° 269. Etude des solution d'une équation différentielle stochastique linéaire en vue d'identifications optimales des paramètres de dérive. U.S.M.G. 1981

[6] F. BRODEAU, Identifications optimales de paramètres pour un système excité par un bruit gaussien. Ann. Inst. Poicaré vol.XIX, n°2, 1983 p. 123-152.

[7] F. BRODEAU, R.R N°437 Techniques d'estimations de paramètres pour des équations différentielles stochastiques linéaires commandées. U.S.M.G 1984

[8] F. BRODEAU et A. LE BRETON, Ann. Inst.Poincaré vol. XV n°1 section B 1979

[9] J.R. BARRA, Notions fondamentales de statistiques mathématiques Dunod 1971.

[10] S. KARLIN - H.M. TAYLOR, First course of stochastic processes. Académic pres. 1975.

[11] CHRISTOPEIT, Existence of optimal stochastic controls under partial observation. Z. W. V. G. 51, 1980. p. 201-213.

[12] M.H.A. DAVIS, Linear estimation and stochastic control. Chapman and Hall. 1977

[13] J.L. DOOB, Stochastic processes. J. Willey fourth edition 1962.

[14] F. DELEBECQUE - J. QUADRAT, Sur l'estimation des caractéristiques locales d'un processus de diffusion avec sauts I.R.I.A. R.R n°311 1978

[15] W. FELLER, An introduction to probability theory an its applications. tome II J. Willey 1966.

[16] A.V. SKOROKHOD, Studies in the theory of random processes. Addison-Wesley 1965.

[17] I.I. GIHMAN - A. V. SKOROHOD, Controlled stochastic processes, Springer-Verlag 1979

[18] I.I. GIHMAN - A. V. SKOROHOD, Stochastic différential équation, Springer-Verlag 1972

[19] H. KUSHNER, Probability methods for approximation in stochastic control and elliptic equation, Academic press.1977

[20] A. LE BRETON, Thèse d'état : Sur l'estimation de paramètres dans les modèles différentiels stochastiques multidimensionnels. U.S.M.G. 1976

[21] A. LE BRETON, Parameter estimation and input design in a linear dynamical system. U.S.M.G. R.R N° 86, 1977

[22] R.S. LIPTZER - A. N. SHYRAEV, Statistics of random processes I, general theory, Springer-Verlag 1977.

[23] P.D. THUAN, Introduction à l'analyse statistique des séries temporelles. Cours de D.E.A. U.S.M.G. 1981-1982.

[24] A. F. TARASKIN, Some limit theorems for stochastic integrals

[25] I.I. GIHMAN - A.V. SKOROHOD, Introduction to the theory of random processes. Saunders 1969.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT 3ème CYCLE, DOCTORAT-INGENIEUR, DOCTORAT USMG

u les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

u les dispositions de l'arrêté du 5 juillet 1984,

u les rapports de M. F. BRODEAU

M. ....

Mlle BRAHIMI Nadia .... est autorisé

présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de docteur 3e cycle en Mathématiques Appliquées

Grenoble, le 23/10/1985

Le Président de l'Université Scientifique
et Médicale

UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

Tanche

M. TANCHE

RESUME DE THESE

Notre étude consiste à estimer des paramètres pour un système dynamique régi par une équation différentielle stochastique, linéaire, unidimensionnelle, excitée par des bruits brownien et poissonnien, en présence de contrôles adaptés à l'état du système. On suppose que les paramètres des bruits sont connus, et on montre que l'on peut estimer les paramètres de dérive par une famille, convergente et asymptotiquement normale, d'estimateurs de maximum de vraissemblance quand deux stratégies sont choisies :

- l'une étagée par rapport à une partition de l'intervalle de temps [0,T],
- l'autre markovienne, définie en temps continu.

Pour cela on prouve l'existence de solutions stationnaires de l'équation d'évolution. On s'intéresse, enfin, au caractère d'optimalité du contrôle choisi, pour un critère lié à la matrice d'information de FISHER.

MOTS CLES :

contrôle stochastique - mesure aléatoire de POISSON - optimisation - topologie de SKOROKHOD - solution faible, et forte - étroitesse dans la topologie de SKOROKHOD - normalité asymptotique

<u>ERRATUM</u>

Dans le §3.III page 120, la relation (**3**.9) ne se déduit pas de la relation (**3**.8) car les processus X, X' et X" ne sont pas de signe constant.

On peut toutefois montrer que $\mathrm{Lim}_T 1/T\int_0^T X_t^2 dt$ et $\mathrm{Lim}_T 1/T\int_0^T |X_t| dt$ existent presque sûrement moyennant des hypothèses simples sur X_0.

Soit $\Omega_1 = \mathbb{R}\times D_0$ et $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}\times\mathcal{D}_0$, où D_0 désigne le sous-ensemble des éléments de D nuls en zéro et $\mathcal{D}_0$ la restriction de $\mathcal{D}$ à D_0. On munit l'espace $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ de la probabilité $P^X = P_{X0}\times\mu$ où P_{X0} est la loi de probabilité de X_0 et μ la mesure induite sur D_0 par le processus W+U.

L'existence d'une solution forte de l'équation (**2**.1) sous les hypothèses de la proposition **2.1**, entraîne l'existence d'une application F mesurable de $\mathbb{R}\times D_0$ dans D telle que, X désignant la solution de (**2**.1) correspondant à X_0, P^X p.s. $X = F(X_0, W+U)$. On en déduit, pour tout T>0, l'existence d'une application Φ_T de $\mathbb{R}\times D_0$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$P^X\text{-p.s. } 1/T\int_0^T X_t^2 dt = \Phi_T(X_0, W+U),$$

l'ensemble de probabilité nulle en dehors duquel la propriété n'est pas vraie ne dépend pas de T.

Si $P^{X*} = P_{X0*}\times\mu$ on sait que :

$$P^{X*}\text{-p.s. } \mathrm{Lim}_T 1/T\int_0^T (X_t{*})^2 dt = E|X_0{*}|^2 = 1.$$

Donc :

1) $$P^{X*}\text{-p.s. } \mathrm{Lim}_T\ \Phi_T(X_0{*}, W+U) = 1.$$

Soit l'ensemble A de $\mathcal{A}_1$ tel que cette dernière relation soit vraie sur A^c.

On a :

$$P^{X*}(A) = P_{X0}(\mu(A_x)) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A_x) f_{X0^*}(x)dx = 0\ ,$$

où A_x désigne la section en x de A, $x \in \mathbb{R}$. Puisque pour tout x réel $f_{X0^*}(x) > 0$ on en déduit que pour presque tout x dans $\mathbb{R}$ $\mu(A_x) = 0$.

D'où si X_0 admet une densité f_{X0} :

2) $$P^X(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A_x) f_{X0}(x)dx = 0.$$

On déduit immédiatement de **1)** et **2)** que

$$P^X\text{-p.s. } \mathrm{Lim}_T\ \Phi_T(X_0, W+U) = 1.$$

Donc :

3) $$P^X\text{-p.s. } \mathrm{Lim}_T\ 1/T \int_0^T X_t^2 dt = 1 = E|X_0^*|^2.$$

Un raisonnement identique conduit à :

4) $$P^X\text{-p.s. } \mathrm{Lim}_T\ 1/T \int_0^T |X_t| dt = 1 = E|X_0^*|.$$

Si X_0 est du second ordre on a la même conclusion, car pour t>0 on sait que X_t admet une densité. On peut donc se ramener au cas précédent par décalage de l'origine des temps.

Donc pour toute solution forte sur $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, P^X)$ **3)** et **4)** sont vraies si X_0 est du second ordre. Il est alors facile d'étendre ce résultat à une solution forte sur un espace $(\ \Omega, \mathfrak{A}, P\ )$ quelconque. Il suffit de considérer l'application de Ω dans $\mathbb{R} \times D_0$: $\omega \to (\ X_0(\omega), W(\omega)+U(\omega)\ )$.

□

<u>Remarque</u> : On peut montrer comme dans [*] à l'aide d'un changement de temps et de la loi du logarithme itéré pour le mouvement brownien que :

$$P\text{-p.s. } \mathrm{Lim}_T \int_0^T X_t dW_t = 0,\ \mathrm{Lim}_T \int_0^T \mathrm{Sgn}(X_t) dW_t = 0.$$

Ainsi

$$\text{P-p.s. } \mathrm{Lim}_T \, L_T^{(1)}(\varphi) = 0.$$

Compte tenu de **3)**, **4)** et de cette remarque on en déduit que dans la proposition **3.1**, si X_0 est du second ordre,

$$\text{P-p.s. } \mathrm{Lim}_T \, \hat{\varphi}_T = \varphi^\circ$$

[*] K. K. Aase   Stochastic continous-time model reference adaptative system with decreasing gain.
Adv. Appl. Prob. 14 p : 763- 788 (1982)