



HAL
open science

Théories alternatives de la gravitation et applications.

Jean-Philippe Bruneton

► **To cite this version:**

Jean-Philippe Bruneton. Théories alternatives de la gravitation et applications.. Astrophysique [astro-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT: . tel-00315725

HAL Id: tel-00315725

<https://theses.hal.science/tel-00315725>

Submitted on 29 Aug 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale : Constituants élémentaires - systèmes complexes

Institut d'Astrophysique de Paris

**THÈSE de DOCTORAT de
l'Université Paris VI – Pierre et Marie Curie**

Présentée par

Jean-Philippe Bruneton

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'Université Paris VI – Pierre et Marie Curie

Spécialité : Physique Théorique

**Théories alternatives de la gravitation
et applications**

soutenue le 28 Septembre 2007 devant le jury composé de

Richard Kerner
Patrick Peter
Mordehai Milgrom
Jean-Michel Alimi
Gilles Esposito-Farèse

Président
Directeur de thèse
Rapporteur
Rapporteur
Examinateur

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Laurent Vigroux et tout le personnel de l'Institut d'Astrophysique de Paris en général pour m'avoir accueilli durant ces trois années. Plus particulièrement, je remercie Patrick Peter pour son accueil au sein du laboratoire qu'il dirige, le GRECO, et pour avoir accepté de diriger officiellement ma thèse. Nul n'ignore cependant que Gilles Esposito-Farèse fut mon directeur de thèse véritable, et je tiens à le remercier sincèrement pour ces trois années où j'ai découvert plus précisément le métier de chercheur. Je le remercie pour son soutien constant, sa sympathie, et pour m'avoir laissé une part d'autonomie et de liberté que j'estime essentielle dans cette profession.

Ma gratitude va en second lieu aux membres du jury Richard Kerner, Patrick Peter, Gilles Esposito-Farèse, ainsi qu'à mes deux rapporteurs, Mordehai Milgrom et Jean-Michel Alimi, avec qui j'ai eu le plaisir de discuter en détail de ce manuscrit.

Ce travail est le fruit d'un effort collectif. Au-delà de mon travail avec Gilles, j'ai aussi eu le bonheur de travailler avec des personnes extérieures au laboratoire. Que soient ici remerciés, en particulier, mon collègue et ami Benoît Famaey pour son enthousiasme constant et son efficacité, ainsi que HS. Zhao et G. Gentile. Je n'oublie pas non plus les échanges particulièrement fructueux avec un certain nombre des membres de ce laboratoire, et notamment L. Blanchet, C. Deffayet, G. Mamon, J.-P. Uzan, ainsi qu'avec J.-M. Alimi, E. Flanagan, A. Füzfa, J. Larena, M. Milgrom, et R. H. Sanders.

Je profite de cette zone d'expression libre pour saluer quelques doctorants de l'IAP : S. Caucci, K. Kotera, M. Lilley, C. Pitrou, J. Rocher et C. Schmid. Un grand merci également à mes amis d'être là, tout simplement : M. Aubin, J. Becq, M. Biero, A. Branco, S. Calmet, A.-R. Carvunis, T. Catelin-Jullien, D. Charbonneau, A. Crosthwaite, F. Didier, C. et I. Dupin, K. Er-Rhaimini, X. Fabre, O. Faivre, J. Fournier, E. Gomez, A. Lakhoua, J. Larena, F. Lechenault, R. Louvel, Y. Menanteau, A. Niboyet, F. Orioux, V. Poirot, P. et E. Pons, J. Ricordeau, P. Sabatier, T. Tregouett, E. Treillet, F. Viger, E. Wandersman, B. Yannic et M.-C. Zanotti.

Enfin je voudrais remercier ma famille, mes frères et mes parents, pour m'avoir soutenu et permis d'arriver jusqu'ici ; et bien entendu aussi, et surtout, celle qui a partagé ma vie durant ces trois années.

A Magali.

Résumé

Cette thèse présente quelques applications des théories alternatives de la gravitation relativiste. Nous étudions en particulier le mouvement à deux corps dans une théorie purement scalaire de la gravitation et la production d'ondes gravitationnelles par les systèmes binaires. Nous obtenons nombre de résultats analytiques et numériques relatifs à ce problème. Nous étudions également en détail la théorie MOND (pour *Modified Newtonian Dynamics*) qui cherche à expliquer, en particulier, les courbes de rotation des galaxies en terme d'une modification des lois de la gravitation, et non à l'aide d'un surplus de matière inconnue et invisible, la matière noire. Cela nécessite de recourir à une théorie qui diffère de la relativité générale au moins dans le régime non-relativiste et des champs faibles, ie. qui ne se réduise pas à la théorie de Newton dans cette limite. La construction d'une telle théorie est l'objet d'une partie de cette thèse. Nous présentons quelques modèles alternatifs à la relativité générale susceptibles de rendre compte de la phénoménologie souhaitée, en proposons de nouveaux, et les analysons en détail à la lumière des contraintes les plus importantes que doit satisfaire toute théorie raisonnable : accord avec l'expérience, stabilité, causalité, localité, en plus d'être naturelle. Nous montrons que des problèmes théoriques imposent de modifier significativement la phénoménologie usuelle de MOND, au moins dans les cadres formels les plus usités. Nous proposons également un modèle de l'anomalie Pioneer, et montrons enfin comment expliquer la vitesse d'échappement à la galaxie sans recours à un quelconque halo de matière noire.

Mots-clés : relativité générale et gravitation, ondes gravitationnelles, matière sombre et énergie noire, astrophysique, physique théorique.

Abstract

This thesis deals with some applications of alternative theories of relativistic gravity. We study in particular the two-body problem in a purely scalar theory of gravity and the associated emission of gravitational waves. We derive many analytical and numerical results regarding this non trivial dynamics. We also study in detail the Modified Newtonian Dynamics (MOND) paradigm that may account for the rotation curves of spiral galaxies by means of a rather simple modification of gravitational laws in ultra-weak fields, instead of invoking a large amount of (Cold) Dark Matter. This thesis notably deals with the issue of formulating such a relativistic theory, that must differ from General Relativity since it cannot reduce to Newton's law in the nonrelativistic and weak-field limit. We present some alternative models that may be relevant and put forward some new models of MOND. We analyse them carefully and pay attention to both experimental and theoretical constraints, including in particular the issues of stability, causality, locality, and naturalness. Such constraints impose to change significantly the MOND phenomenology if the MOND effects are produced by a k-essence scalar field. We also account for the Pioneer anomaly within a class of generalized scalar-tensor models, and finally show how to explain the local galactic escape speed without invoking Dark Matter.

Keywords : General Relativity, Gravitation, Gravitational Waves, Dark Matter and Dark Energy, Astrophysics, Theoretical Physics.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	vii
Abstract	ix
1 Introduction	1
I La théorie de la relativité générale et ses alternatives	5
2 La théorie de la relativité générale	7
2.1 L'observation fondamentale : l'universalité de la chute libre	7
2.2 L'action de la gravité sur la matière	8
2.3 Le principe d'équivalence, la covariance générale et les géométries privilégiées . .	11
2.4 Achèvement de la théorie	13
2.5 Résumé des principales hypothèses	14
3 Théories alternatives de la gravitation	17
3.1 Quelques alternatives standard	18
3.2 Les options moins standard	22
4 Contraintes expérimentales et théoriques	27
4.1 Contraintes expérimentales	27
4.2 Contraintes théoriques	30
5 Causalité et propagations supraluminiques (article)	37
5.1 Présentation du travail et résultats	37
5.2 Introduction	40
5.3 Causality and superluminal behavior	42
5.4 K-essence field theory	48
5.5 Bimetric theories of gravity	51
5.6 Quantum induced superluminal propagation	53
5.7 Applications	53
5.8 Conclusions	58
II Le mouvement à deux corps dans la théorie de Nordström	61
6 Le mouvement à deux corps dans la théorie de Nordström	63
6.1 Présentation du travail et résultats	63
6.2 Introduction	66
6.3 Nordstrom's scalar theory of gravity	68
6.4 Dynamics of N point-particles	71
6.5 The circular motion, its energy and the ICO	77

6.6	Construction and convergence of a perturbative solution	85
6.7	Analytical and numerical results	91
6.8	Conclusion and perspectives	94
III La matière noire comme manifestation d'une dynamique modifiée : le paradigme MOND		97
7	Introduction	99
7.1	La dynamique des galaxies et des amas de galaxies	99
7.2	L'hypothèse de la matière noire	100
7.3	L'hypothèse MOND	102
7.4	Le problème relativiste	105
7.5	Une étrange coïncidence	107
8	Vers une théorie de MOND	109
8.1	Modifier l'inertie?	109
8.2	Modifier la gravité	114
9	Les théories relativistes de MOND (Article)	119
9.1	Présentation du travail et résultats	119
9.2	Introduction	123
9.3	Looking for MOND-like field theories	126
9.4	The problem of light deflection	141
9.5	Difficulties with stratified theories	156
9.6	Nonminimal metric couplings	162
9.7	Conclusions	175
10	MOND : quelques aspects phénoménologiques	179
10.1	Présentation du travail et résultats	179
10.2	Introduction	181
10.3	Observed galactic escape speed	182
10.4	Galactic escape speed in MOND	182
10.5	Estimating the external field	184
10.6	Discussion	185
11	Conclusions et perspectives	187

« La gravité est le bonheur des imbéciles. »
Montesquieu

Introduction

Bien qu'aucune expérience n'ait à ce jour définitivement infirmée la théorie de la gravitation relativiste d'Einstein, la relativité générale, le nombre d'anomalies observées en particulier au niveau astrophysique ou cosmologique, et éventuellement imputables à une insuffisance de cette théorie à rendre compte de tous les phénomènes gravitationnels, va croissant. Au premier rang de ces anomalies figurent bien entendu la dynamique anormale des galaxies et des amas de galaxies ainsi que l'accélération récente de l'expansion de l'Univers. Ces deux problèmes, dits, respectivement, de la matière noire et de l'énergie noire, signalent l'insuffisance des formes de matière connues à ce jour pour expliquer la cinématique et la dynamique de certains objets astrophysiques d'une part, et de l'Univers dans son ensemble d'autre part, étant supposée la capacité de la théorie de la relativité générale à décrire correctement ces systèmes.

Ces deux problèmes majeurs de la physique contemporaine sont maintenant bien établis expérimentalement et sont en partie responsables de l'effervescence récente agitant le domaine de la physique gravitationnelle. En témoigne d'ailleurs les nombreux projets expérimentaux de grande envergure mis sur pied récemment et qui, si ce n'est pas déjà le cas pour certains, apporteront certainement leurs lots de découvertes nouvelles. Au même moment d'ailleurs, se profile également la première détection directe des ondes gravitationnelles, rare prédiction de la relativité générale qui n'a pas été (directement) vérifiée à ce jour. Il va sans dire que, de façon générale, l'analyse des données expérimentales demandent une connaissance a priori des phénomènes impliqués et du résultat attendu. Cette question est particulièrement importante en ce qui concerne la détection des ondes gravitationnelles.

Dans ce contexte ravivé et particulièrement porteur, l'étude générale de théories gravitationnelles alternatives, qui pourraient résoudre d'une façon nouvelle les problèmes de la matière noire ou de l'énergie noire (ie. sans nécessairement se limiter à l'introduction d'une composante de matière inconnue), devient plus que jamais intéressante. Nous montrerons par ailleurs qu'il est possible de mieux comprendre la dynamique de deux corps gravitant l'un autour de l'autre, mouvement responsable de la majeure partie des ondes gravitationnelles attendues dans les détecteurs, à l'aide d'une théorie « alternative » de la gravitation (certes dépassée), qui la mime tout en la simplifiant.

Bien entendu, l'étude ou la proposition de modèles alternatifs à la relativité générale n'est pas neuve. Nombre de théories alternatives ont vu le jour au cours du siècle passé, la plupart s'étant d'ailleurs révélées incorrectes au gré de l'accroissement de la précision expérimentale. Il n'en demeure pas moins vrai, cependant, que le regain d'intérêt récent pour lesdits modèles alternatifs (voire exotiques) est une conséquence directe de l'idée qu'il faille peut-être dépasser les cadres théoriques établis pour comprendre ces nouveaux problèmes.

Nous ne nous consacrerons guère dans cette thèse au problème de l'énergie noire, bien que nombre de modèles ici présentés soient des candidats sérieux à sa modélisation (par exemple, les théories tenseur-scalaire, ou de quintessence). Notre travail de thèse s'est en revanche nettement inscrit dans la recherche d'une solution au problème de la matière noire en terme d'une modification des lois gravitationnelles connues, ainsi que dans l'étude du mouvement à deux corps dans le cadre de la théorie gravitationnelle de Nordström.

L'hypothèse consistant à voir la dynamique anormale des galaxies comme une modification des lois gravitationnelles usuelles (en l'occurrence, la loi de Newton censée s'appliquer dans ce cas)

plutôt que comme signalant la présence d'une composante de matière additionnelle, invisible et exotique, a été mise en avant par Milgrom en 1983 [1]. La théorie qui en résulte a naturellement hérité du nom de *Modified Newtonian Dynamics*, ou MOND. S'il est facile d'en donner une formulation non relativiste qui consiste soit en une modification de l'inertie, c'est-à-dire de la seconde loi de Newton, soit en une modification de la loi de Poisson standard [2], il est en revanche bien plus difficile d'en trouver une formulation relativiste qui soit de plus compatible avec l'ensemble des phénomènes observés.

La recherche de telles théories alternatives à la relativité générale expliquant, en un sens, la matière noire sans matière noire, appelle nécessairement à quelques commentaires et soulève des questions nouvelles. Il nous faudra ainsi savoir dans quelle mesure on pourra se déclarer ou non satisfaits des modèles développés dans cette optique. Une telle théorie doit non seulement prédire les effets souhaités, mais également rendre compte des autres phénomènes gravitationnels connus et parfaitement expliqués par la relativité générale, notamment à l'échelle du système solaire. Mais qu'une théorie soit compatible avec l'observation ne suffit pas. Encore faut-il aussi qu'elle soit bien définie mathématiquement, causale, sans doute locale, stable, qu'elle respecte les symétries connues, et qu'elle soit de plus « naturelle ».

Le problème, ainsi, est triple, et la tâche immense : trouver des mécanismes ou des dynamiques reproduisant la phénoménologie MONDienne, et par ailleurs expliquant aussi bien ou mieux encore les observations que l'hypothèse concurrente de la matière noire ; s'assurer en même temps que la théorie qui en résulte passe les autres tests de la gravitation, et qu'elle définit, finalement, un modèle mathématique cohérent et satisfaisant. La contribution de cette thèse à ce vaste programme est la suivante (par ordre d'apparition dans le manuscrit) :

- Nous analysons la notion de causalité dans le cadre de théories étendues de la relativité générale et qu'on pourra dénommer de façon générique des théories multimétriques, en référence au fait que ces théories sont caractérisées par la présence de plusieurs métriques distinctes et non conformément reliées entre elles au même point, définissant ainsi plusieurs cônes évasés différemment dans l'espace tangent, et par la même plusieurs notions de temporalité et de causalité. Nous prouvons ainsi que les champs supraluminiques sont causaux sous quelques conditions générales que nous exposons, et explicitons par ailleurs dans certains cas particuliers. Le recours à ce type de théories pour reproduire la phénoménologie MONDienne (champs scalaires de k -essence, théories bimétriques ou *disformal*) est donc tout à fait autorisé, contrairement à ce qu'on peut parfois lire dans la littérature.
- De façon plus générale, nous analysons de façon approfondie les modèles existant de la théorie MOND. En plus d'expliciter quelques réglages fins (*fine-tuning*) et peu naturels sous-jacents à ces théories, nous discutons de contraintes expérimentales qui, bien que connues par ailleurs, n'avaient pas été jusqu'ici précisément discutées dans le cadre des théories relativistes de MOND. Il ressort de cet effort synthétique qu'aucune théorie actuelle ne réussit à être à la fois cohérente mathématiquement, stable, naturelle, et satisfaisante d'un point de vue phénoménologique.
- Nous réhabilitons toute une classe de modèles généralisant les théories tenseur-scalaires et qui avait été, à notre avis, trop vite abandonnée. Ces modèles nécessitent en effet de considérer des ondes gravitationnelles supraluminiques pour reproduire la phénoménologie MONDienne, et en particulier la déflexion de la lumière produite par les objets astrophysiques dominés par la matière noire. Puisque, finalement, cela ne ruine en rien le caractère causal de la théorie, il est a priori possible de formuler la théorie MOND dans le cadre de ces théories. Nous proposons un modèle de ce type ; nous devons cependant l'abandonner en raison de problèmes subtils de cohérence mathématique que nous analysons en détail. Nous montrons en revanche que plusieurs modèles de cette classe sont à même de rendre compte de l'anomalie Pioneer (vue comme issue d'une modification des lois gravitationnelles). Bien

que ces modèles soient uniquement construits dans l'optique de reproduire l'accélération anormale des sondes Pionner, et sont par conséquent peu naturels, ils n'en définissent pas moins des théories effectives en tout point satisfaisantes mathématiquement.

- Nous montrons également, du moins s'il faut décrire une partie des effets MONDiens en terme d'un champ scalaire de k -essence (ie. dont le terme cinétique est non standard, voir plus loin), qu'il est absolument nécessaire de modifier de façon conséquente la phénoménologie MONDienne dans le régime des champs extrêmement faibles. Ainsi la cohérence de l'équation scalaire impose que les lois gravitationnelles deviennent à nouveau newtoniennes très loin d'un corps massif, après être passé par un régime MONDien intermédiaire. Cela, en plus de modifier profondément la phénoménologie initiale, suggère à la fois de nouveaux tests expérimentaux et de nouvelles interprétations de MOND.
- Nous proposons enfin un nouveau test de la théorie MOND indépendant du modèle relativiste sous-jacent. Nous montrons en effet que les effets MONDiens sont à même d'expliquer la valeur élevée de la vitesse d'échappement à la Voie Lactée récemment mesurée, sans recours à un halo de matière noire englobant la galaxie. Cela nécessite de prendre en compte l'effet du champ gravitationnel extérieur créé par les grandes structures locales (amas de Virgo, grand attracteur) sur la physique gravitationnelle locale, la théorie MOND étant en effet nécessairement caractérisée, entre autres, par une brisure du principe d'équivalence fort. Nous estimons la valeur nécessaire du champ gravitationnel extérieur dans lequel doit être plongée notre galaxie pour expliquer la valeur de la vitesse d'échappement susdite, et trouvons, malgré les incertitudes importantes, un bon accord avec les données expérimentales (au moins en ordre de grandeurs).

Ce manuscrit est organisé en trois parties. La première partie est consacrée à la théorie de la relativité générale et à ses alternatives possibles. Nous exposons dans un premier temps, au chapitre 2, la théorie de la relativité générale proprement dite, sans pour autant imposer au lecteur le rappel de notions élémentaires. Nous avons en revanche préféré insister sur les principales hypothèses sous-jacentes à la théorie elle-même. De cet effort synthétique s'ensuit une classification naturelle des théories alternatives les plus connues à ce jour (et pour certaines encore fort spéculatives), que nous présentons au chapitre 3 suivant. Cette courte liste d'alternatives possibles ne se veut certes pas exhaustive. Nous passons alors en revue au chapitre 4 les principaux tests de la relativité générale, ainsi que les contraintes théoriques qu'il nous faut nécessairement requérir de toute théorie alternative qui se veuille satisfaisante. Nous rappelons la nature du problème posé par les instabilités, et à cette occasion présentons le théorème d'Ostrogradski démontrant l'instabilité générique de théories locales dépendant de dérivées d'ordre supérieur des variables formant l'espace de configuration. Nous rappelons également ce qu'il faut entendre par le caractère causal d'une théorie et son importance déterminante en sa capacité à donner un statut épistémologique clair à la théorie en question. Nous enchaînons alors naturellement, au chapitre 5, par l'étude critique de l'affirmation assez répandue dans la littérature consistant à récuser les champs supraluminiques sous le motif que ceux-ci ne sont pas causaux. Après une brève présentation de notre travail, nous reproduisons l'article que nous avons été amené à publier sur ce sujet controversé, et qui démontre que de tels champs peuvent tout à fait être (et sont généralement) causaux, sous quelques conditions que nous discutons en détail.

La seconde partie de ce manuscrit est consacrée au mouvement à deux corps dans la théorie de Nordström, théorie purement scalaire de la gravitation relativiste, antérieure même à la relativité générale, et que nous présentons en détail. Quoique exclue expérimentalement, cette théorie présente nombre de comportements similaires à la relativité générale, tandis que sa simplicité admirable en fait un candidat parfait pour s'atteler au difficile problème du mouvement à deux corps. Après une brève introduction de notre travail, nous reproduisons au chapitre 6 l'article que nous publierons prochainement à ce sujet. Nous déterminons les équations exactes du mouvement

dans le cas particulier où les deux corps ont la même masse, et tâchons de résoudre ce système différentiel, non local et non linéaire. Nous sommes à même de résoudre exactement le mouvement circulaire, solution des équations dans le cas où les ondes entrantes sont aussi bien prises en compte que les ondes sortantes. Nous calculons l'énergie de cette configuration circulaire et discutons de sa forme (particulièrement simple) en terme de la notion d'ICOs, que nous présentons à ce moment-là. Nous analysons le mouvement spiralant solution des seules équations retardées en terme d'un développement semi-perturbatif rapidement convergent (en puissance de v^5/c^5 , où v est la vitesse orbitale, et c la vitesse de la lumière dans le vide). Nous présentons enfin les résultats numériques associés à cette étude.

La troisième et dernière partie est consacrée à la théorie MOND en général. Nous introduisons en détail au chapitre 7 le problème de la matière noire, et tâchons de mettre en perspective les succès et insuccès des deux hypothèses concurrentes que sont l'hypothèse de la matière noire froide (ou CDM, pour *Cold Dark Matter*) et l'hypothèse MOND. Nous ne pouvons aborder tous les détails relatifs à cette question, mais insistons néanmoins sur l'observation principale qui justifie la théorie MOND tandis qu'elle met éventuellement en difficulté la théorie CDM : l'existence fort bien avérée, et à différents niveaux, d'une corrélation fine entre les profils baryoniques et les profils de matière noire, et qui s'explique naturellement dans le cadre d'une théorie de la gravitation modifiée (donc de type MOND), où seule la matière baryonique est conçue comme source du champ gravitationnel. Le chapitre suivant (chapitre 8) rappelle les premières formulations théoriques de MOND et leurs difficultés. Nous passons en revue la piste consistant à modifier l'inertie, en soulignons les motivations fort intéressantes, mais aussi les difficultés théoriques presque rédhibitoires. Nous soulignons d'ailleurs qu'une théorie de l'inertie modifiée doit certainement être non métrique pour reproduire la phénoménologie souhaitée. Nous spéculons ainsi sur des modèles possibles d'une telle modification de l'inertie basés sur une révision profonde de la structure métrique de l'espace-temps. Nous ne proposons guère de modèle à ce stade, mais insistons sur ce point pour la raison que cela constitue un de nos axes de recherches futures. Il est, en fait, bien plus aisé de modifier la gravité que l'inertie. Nous exposons rapidement le premier modèle (non relativiste) de la littérature [2], basé sur une équation de Poisson modifiée et dérivant d'une action de type k-essence, ainsi que sa généralisation relativiste la plus directe (modèles AQUAL et RAQUAL respectivement). Nous soulignons alors, et comme il est bien connu, la difficulté de ces modèles à reproduire la déflexion de la lumière observée aux échelles astrophysiques.

Cela nous amène alors à considérer en détail les théories modernes de MOND adressant ce problème. Nous reproduisons au chapitre 9 l'étude approfondie que nous avons récemment soumise à ce sujet, et dont le contenu a déjà été évoquée dans la liste de nos contributions ci-dessus. Nous terminons au chapitre 10 par une présentation de quelques aspects phénoménologiques, et notamment par la capacité de la théorie MOND à expliquer la vitesse d'échappement locale de la Voie Lactée. Après une courte présentation de ce travail, nous reproduisons la lettre que nous avons publiée à ce sujet en collaboration avec B. Famaey et H.S. Zhao. Le chapitre 11 conclue et présente quelques perspectives.

Première partie

La théorie de la relativité générale
et ses alternatives

La théorie de la relativité générale

La théorie de la relativité générale étant certainement bien connue du lecteur, nous ne nous attarderons guère sur son expression achevée (voir néanmoins Sec. 2.4). Nous nous permettrons également d'utiliser sans rappels le calcul différentiel en général, et les notions élémentaires de la géométrie riemannienne et des espaces fibrés. Il nous semble en revanche plus pertinent d'identifier les principales hypothèses qui sous-tendent la théorie de la relativité générale, puisque les théories alternatives actuelles se basent sur l'abandon ou la variation de celles-ci. Bien qu'il soit toujours difficile de reconstruire une théorie à partir de ses hypothèses fondatrices, d'abord parce qu'un tel processus déductif n'est certainement pas unique, et ensuite parce qu'il n'est pas aisé de s'abstraire de l'influence de la connaissance de la théorie finie, nous tenterons ici cette reconstruction et, ainsi, essaierons d'identifier au mieux ces hypothèses. Dans cette optique, nous insisterons dans un premier temps sur l'observation fondamentale que constitue l'universalité de la chute libre des corps, et, par l'entremise de l'extension naturelle de cette loi à tous les phénomènes physiques, ce en quoi consiste l'énoncé du principe d'équivalence, nous rappellerons comment déduire entièrement l'effet de la gravitation sur la matière. D'autres hypothèses seront alors nécessaires afin d'identifier le champ de gravitation proprement dit ainsi que sa dynamique.

2.1 L'observation fondamentale : l'universalité de la chute libre

L'aspect empirique le plus marquant du phénomène de pesanteur est certainement l'universalité de la chute libre : plongés dans un champ de gravitation, tous les corps matériels subissent la même accélération indépendamment de leurs constitutions et de leur mouvement propre. Ce résultat, également connu sous le nom de principe d'équivalence faible, est maintenant vérifié à un très haut degré de précision (voir Sec. 4.1). S'il est évident, en référence à la dynamique Newtonienne, que tout champ de force accélère *certaines* corps d'épreuves, l'existence avérée d'un champ de force ayant pour effet d'accélérer *tous* les corps d'épreuves *de la même façon* est non triviale. Cette caractéristique peut en fait servir à définir la notion de champ gravitationnel. [Notons cependant qu'il est possible de considérer des cadres théoriques dans lesquels des champs, que l'on désignera encore comme gravitationnels, n'agissent pas de la même façon sur tous les corps.]

L'universalité de la chute libre est souvent interprétée comme impliquant (ou étant issue de) l'égalité entre la masse inertielle et la masse pesante (ou masse gravitationnelle passive) des corps. En effet, si l'on écrit la force gravitationnelle subie par un corps d'épreuve A sous la forme : $\mathbf{F}_A = m_A^g \mathbf{g}$, où m_A^g désigne la masse gravitationnelle du corps A et \mathbf{g} le champ de pesanteur (local), alors l'utilisation conjuguée de la loi dynamique de Newton et de l'universalité de la chute libre implique que le rapport de la masse inertielle m_A^i à la masse pesante, m_A^i/m_A^g , est une quantité indépendante du corps A . Ce rapport constant, par ailleurs, peut être conventionnellement pris égal à 1.

Ce raisonnement est en fait une curiosité historique. En effet, rien n'impose que la force gravitationnelle s'exprime sous la forme précédente, si ce n'est le souhait de décrire la gravitation en terme d'un champ de pesanteur, ce qui n'a pas de raison d'être vrai a priori. Il est plus correct,

en revanche, de noter que l'universalité de la chute libre impose la constance du rapport \mathbf{F}_A/m_A^i , vis-à-vis, à la fois, du corps A et de la position dans l'espace (et ce, toujours, en référence à la dynamique de Newton). Noter \mathbf{g} ce rapport constant permet de *déduire* l'expression de la force gravitationnelle : $\mathbf{F}_A = m_A^i \mathbf{g}$. Nul besoin ainsi d'introduire une masse grave passive ni de démontrer a posteriori l'égalité numérique des masses inertielle et gravitationnelle. A ce sujet, le lecteur vérifiera d'ailleurs que les expériences supposées tester l'égalité de ces deux masses (typiquement, l'expérience d'Eötvös) ne quantifient *pas* la différence $m_A^g/m_A^i - m_B^g/m_B^i$, mais seulement la quantité :

$$\left| \frac{\mathbf{F}_A}{m_A^i} - \frac{\mathbf{F}_B}{m_B^i} \right|, \quad (2.1)$$

pour certains corps A et B de composition différentes. Autrement dit la norme du champ de pesanteur $|\mathbf{g}|$ n'est pas directement mesurable ; seule la quantité $|\mathbf{g}|m_A^g$, ou $|\mathbf{g}|m_A^g/m_A^i$ l'est. C'est cela, du reste, qui donne la liberté de fixer le rapport de ces deux masses à 1, et ainsi de définir opérationnellement \mathbf{g} . Notons enfin que l'égalité des masses inertielle et gravitationnelles ne suffit pas à garantir l'universalité de la chute libre en général. Cela dépend aussi de la forme de la loi dynamique, et notamment de sa (non-)linéarité. Une loi dynamique de la forme¹ $m^i \mathbf{a} \mu(m^i |\mathbf{a}|/k) = \Sigma \mathbf{F}$ où k est un nombre de dimension approprié et μ une fonction non constante, ne prédit pas l'universalité de la chute libre (en supposant que la force gravitationnelle s'écrive $\mathbf{F} = m^g \mathbf{g}$), même si l'on suppose l'égalité des masses inertielle et pesante (cf. Sec. 8.1).

2.2 L'action de la gravité sur la matière

Postuler l'universalité de la chute libre² est déjà caractériser complètement l'effet de la gravitation sur les corps matériels : le champ de gravitation apparaît comme étant localement indistinguable d'un champ d'accélération. Cependant, il est possible d'exploiter plus encore cette propriété fondamentale de la gravitation et d'identifier ainsi les quantités pertinentes la décrivant.

Le raisonnement qui suit repose sur l'hypothèse que la physique non gravitationnelle satisfait le principe d'inertie, c'est-à-dire qu'en l'absence de gravitation, il existe des référentiels d'inertie par rapport auxquels tout corps isolé est en mouvement de translation uniforme. Pour faire court, nous parlerons de la "physique inertielle". L'argument est alors le suivant [3, 4, 5]. Deux corps matériels isolés l'un de l'autre et suffisamment proches pour qu'on puisse considérer le champ de gravitation auxquels ils sont soumis comme homogène sont accélérés de la même façon, en vertu de l'universalité de la chute libre. Par conséquent, le second corps d'épreuve se meut à vitesse constante relativement au premier, ce dont il découle que le référentiel naturellement associé à tout corps en chute libre est un référentiel d'inertie³.

Il en résulte d'abord une caractérisation des référentiels d'inertie. Ce sont les référentiels dans lesquels, au moins localement, l'effet de la gravitation s'annule. Aussi apparaît-il possible de ne pas seulement se limiter aux référentiels d'inerties pour décrire les systèmes physiques, à condition d'inclure les effets gravitationnels se manifestant dans les référentiels globalement non inertiels. La question de savoir ce qui détermine les référentiels d'inertie ainsi que la raison pour

¹Cette loi, presque de type MOND, cf. Sec. 7.3, possède les mêmes problèmes que cette dernière. Elle ne peut s'accorder avec les principes usuels de conservation, et ne saurait par conséquent pas dériver d'une action. Voir aussi Sec. 8.1.

²Rappelons que, malgré la vérification précise de cette loi, il est toujours possible de considérer des modèles théoriques (fortement contraints) qui en dévient, cf. Sec. 3.2. Supposer cette loi exacte est donc la première hypothèse que nous faisons ici.

³On dit aussi que l'effet de la gravitation (sur la matière) peut toujours être annulé localement par un choix de système de coordonnées adéquat (ie, en chute libre, dit aussi localement inertielle, ou de Fermi) ; c'est le "principe d'effacement local".

laquelle ces référentiels apparaissent comme privilégiés en physique pré-gravitationnelle trouve une réponse élégante : les référentiels d'inertie sont les référentiels en chute libre dans un champ de gravitation donné. A toute configuration de champ gravitationnel correspond une distribution des référentiels d'inertie.

Il en résulte également que les quantités décrivant l'effet de la gravitation sur la matière doivent sortir naturellement du passage d'un système de coordonnées inertielles à un système de coordonnées non inertielles. Explicitement, dotons nous d'un système de coordonnées quelconque (x^μ) et d'un corps de référence A , en chute libre, et de coordonnées x_A^μ . Le principe d'effacement local implique l'existence de coordonnées localement inertielles (X^I) pour lesquelles l'équation du mouvement du corps A (de coordonnées $X_A^I(\tau)$), s'écrit

$$\frac{d^2 X_A^I}{d\tau^2} = 0, \quad (2.2)$$

pour toute paramétrisation affine τ de sa trajectoire. La relation entre les deux systèmes de coordonnées (x) et (X) peut s'écrire sous forme différentielle :

$$dX^I(x^\mu) = \tilde{e}_\mu^I(x^\mu) dx^\mu, \quad (2.3)$$

où les quantités \tilde{e}_μ^I , nommées tétrades sont définies par

$$\tilde{e}_\mu^I(x^\lambda) \equiv \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu}(x^\lambda), \quad (2.4)$$

et représentent donc, en x , la matrice Jacobienne du changement de système de coordonnées x^μ vers les coordonnées localement inertielles X^I en x . L'équation de la trajectoire de A (dite des géodésiques) dans le système de coordonnées quelconque (x^μ) s'écrit alors

$$\tilde{e}_\mu^I(x_A^\lambda) \frac{d^2 x_A^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 X^I}{\partial x^\mu \partial x^\nu}(x_A^\lambda) \frac{dx_A^\mu}{d\tau} \frac{dx_A^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.5)$$

et l'effet du champ gravitationnel sur la matière dans le système de coordonnées non inertielles (x), apparaît finalement être codé dans les dérivées de la tétrade au point considéré :

$$\frac{\partial^2 X^I}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial \tilde{e}_\mu^I}{\partial x^\nu} = \partial_{(\mu} \tilde{e}_{\nu)}^I, \quad (2.6)$$

où la dernière expression rend manifeste la symétrie des indices μ et ν . Il va sans dire que quelques hypothèses se sont glissées dans le raisonnement précédent, notamment la possibilité de disposer de coordonnées, de dériver par rapport à celles-ci, etc. Nous considérerons en effet, tout au long de ce manuscrit, l'espace-temps comme une variété différentiable quadri-dimensionnelle. Le résultat ci-dessus montre que l'effet d'un champ de gravitation sur la matière se déduit de la donnée d'un champ de tétrades $\tilde{e}_\mu^I(x^\lambda)$ dans un système de coordonnées (x^μ) quelconque. Notons que nous n'avons rien supposé de la physique inertielle (mis à part qu'elle satisfait au principe d'inertie). Si nous choissions de la décrire par la loi de Newton, nous serions amené, via la construction précédente, à des formulations covariantes de théories gravitationnelles non-relativistes, et en particulier de la théorie de la gravitation de Newton. Cela a notamment été détaillé par E. Cartan [6, 7]. Par la suite, cependant, nous supposerons qu'elle obéit aux lois de la relativité restreinte. Les indices I ci-dessus sont par conséquent Lorentziens (en particulier, on peut les "monter" ou les "descendre" avec l'aide de la métrique Minkowskienne $\eta_{I,J}$). Les tétrades se combinent alors pour former le tenseur métrique :

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x^\lambda) \equiv \eta_{IJ} \tilde{e}_\mu^I(x^\lambda) \tilde{e}_\nu^J(x^\lambda). \quad (2.7)$$

Notons que si, comme il est naturel de le supposer, ou plutôt de s'y restreindre, les deux systèmes de coordonnées (x et X) représentent bien une carte locale autour de x , alors le changement de système de coordonnées est régulier, c'est-à-dire que la matrice Jacobienne (la tétrade) est inversible en x . Les tétrades étant inversibles, le tenseur métrique est lui-même inversible et de même signature que η . Pour des raisons qui apparaîtront évidentes plus loin, nous appellerons ce tenseur $\tilde{g}_{\mu\nu}$ la métrique de la matière, ou encore la métrique « physique ». Par ailleurs, bien que la représentation du champ gravitationnel en terme de tétrades soit la plus naturelle, et, malgré le fait bien connu que l'influence du champ gravitationnel sur les champs de spin non entier demande la référence explicite au champ de tétrade et non seulement au champ métrique, nous nous contenterons dans toute la suite de décrire l'effet de la gravitation sur la matière en terme du tenseur métrique (sans perte de généralité du reste, puisque l'équation (2.7) est inversible pour \tilde{e} dès que la métrique $\tilde{g}_{\mu\nu}$ est de signature hyperbolique).

La contraction de l'équation (2.5) par l'inverse de la tétrade \tilde{e}_I^ρ définie par $\tilde{e}_I^\rho \tilde{e}_\mu^I = \delta_\mu^\rho$ conduit à l'équation dite des géodésiques :

$$\frac{d^2 x_A^\mu}{d\tau^2} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho \frac{dx_A^\mu}{d\tau} \frac{dx_A^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.8)$$

où la connexion $\tilde{\Gamma}$ définie par $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \tilde{e}_I^\rho \partial_{(\mu} \tilde{e}_{\nu)}^I$ est manifestement symétrique par rapport aux deux indices bas. On déduit de cette expression et de la définition du tenseur métrique $\tilde{g}_{\mu\nu}$ que la dérivée covariante associée à la connexion $\tilde{\Gamma}$ et notée $\tilde{\nabla}_\mu$, est compatible avec la métrique, c'est-à-dire que $\tilde{\nabla}_\lambda \tilde{g}_{\mu\nu} = 0$. Cette dernière propriété, associée à la symétrie des coefficients de connexion, montrent que la connexion $\tilde{\Gamma}$ est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique de la matière, c'est-à-dire, qu'elle s'écrit sous la forme

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\rho\eta} (\partial_\mu \tilde{g}_{\nu\eta} + \partial_\nu \tilde{g}_{\mu\eta} - \partial_\eta \tilde{g}_{\mu\nu}), \quad (2.9)$$

où $\tilde{g}^{\rho\eta}$ est l'inverse du tenseur métrique. L'ensemble de ces conclusions rend manifeste que l'effet de la gravitation sur les corps matériels est entièrement décrite en dotant la variété espace-temps d'une structure (pseudo-)riemannienne, c'est-à-dire d'une métrique \tilde{g} et d'une connexion affine ($\tilde{\Gamma}$) compatible avec la métrique et symétrique (on dit alors qu'elle est sans torsion, ou de Levi-Civita).

Il nous faut cependant relever une subtilité à ce point. L'identification de la structure mathématique pertinente n'est pas uniquement déterminée par le raisonnement précédent. Par exemple, une éventuelle composante de torsion dans la connexion affine ne changerait en rien l'équation des géodésiques ci-dessus, puisque (par définition) la torsion, s'identifiant avec la partie antisymétrique de la connexion, est annulée par la contraction avec la quantité manifestement symétrique $dx_A^\mu/d\tau dx_A^\nu/d\tau$. En revanche, demander également qu'un corps en rotation sur lui-même tombe de la même façon que tout autre corps matériel dans un champ de gravitation, impose d'annuler le tenseur de torsion. De façon similaire, il résulte d'une torsion non nulle une modification des lois de l'électromagnétisme relativiste, y compris dans un référentiel en chute libre.

Cela, au fond, est trivial. On ne saurait évidemment pas déduire l'effet de la gravitation sur tous les types de matières envisageables en se restreignant à appliquer une loi (l'universalité de la chute libre) seulement valable pour des corps neutres dépourvus de rotation et de structure interne. Il nous faut pour ce faire, au contraire, étendre l'universalité de la chute libre (ou principe d'effacement local), à l'ensemble de la physique de la matière. Puisque les corps matériels sont essentiellement composés de champs élémentaires, il est naturel de supposer que l'universalité de la chute libre indique, plus profondément, qu'il est toujours possible d'annuler localement l'effet de la gravitation sur *toute* la physique de la matière. Cette extension du principe d'effacement à toutes les lois physiques décrivant les phénomènes non gravitationnels constitue le principe

d'équivalence d'Einstein. Comme nous l'avons signalé plus haut, le principe d'équivalence impose, s'il faut décrire l'effet de la gravitation sur la matière à l'aide d'une structure métrique et affines sur la variété espace-temps, que la connexion affine est celle de Levi-Civita (c'est-à-dire, compatible avec la métrique et dépourvue de torsion).

On déduit alors aisément de ce principe l'influence de la gravité sur la matière. Un raisonnement standard, et que nous ne rappellerons pas ici, montre qu'on déduit le principe d'action de la matière dans un champ gravitationnel du principe d'action en l'absence de gravitation en y remplaçant (abstraction faite des champs spinoriels) la métrique Minkowskienne η_{IJ} par la métrique de la matière $\tilde{g}_{\mu\nu}$, les indices Lorentziens par des « indices μ », les dérivées ordinaires par des dérivées covariantes et l'élément de volume d^4X par $\sqrt{-\tilde{g}}d^4x$, où \tilde{g} est le déterminant du tenseur $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Ainsi l'action des champs de matière de la relativité restreinte, que nous écrirons de façon formelle sous la forme $S_{\text{mat.}}[\eta_{\mu\nu}; \psi]$ indiquant la dépendance fonctionnelle de l'action en la métrique Minkowskienne et les divers champs de matières collectivement nommés ψ , s'écrira de façon formelle comme $S_{\text{mat.}}[\tilde{g}_{\mu\nu}; \psi]$. La seule différence entre cette seconde action et l'action en espace plat mais en coordonnées quelconques (où par conséquent la métrique η possède des coefficients presque quelconques), est qu'il n'existe plus a priori de systèmes de coordonnées globaux tels que la métrique $\tilde{g}_{\mu\nu}$ y prenne sa forme canonique $\eta_{\mu\nu}$. Autrement dit l'action de la matière en espace courbe est exactement la même qu'en espace plat et en coordonnées quelconques, à la différence majeure que n'est plus imposé de façon *ad hoc* l'annulation du tenseur de Riemann en tout point.

Cette prescription, directement issue du principe d'équivalence, n'est cependant pas unique si, par exemple, l'action de la physique inertielle dépend des dérivées secondes (ou plus) de champ de spin non nuls, puisque dans ce cas, une ambiguïté, liée au fait que les dérivées covariantes ne commutent pas, apparaît (cela est aussi vrai même si le Lagrangien ne dépend que des dérivées premières de p-formes : une ambiguïté apparaît, non au niveau de l'action, mais au niveau des équations du mouvement). Nous nous en contenterons cependant et renvoyons à [8] (p. 388-391) pour une discussion de cette subtilité.

2.3 Le principe d'équivalence, la covariance générale et les géométries privilégiées

Nous n'avons guère insisté jusqu'ici sur la covariance générale des équations de la physique, qui est cependant souvent présentée comme un principe également fondateur de la relativité générale. La discussion à ce sujet n'est pas aisée. En effet, bien que ce principe, qui exprime finalement l'invariance de la forme des lois sous les changements de coordonnées quelconques, c'est-à-dire la forme tensorielle des équations dynamiques, ait, semble-t-il, joué un grand rôle dans la découverte de la relativité générale, il a rapidement été sujet à débat. Kretschmann, dès 1917, critique ce principe, non pas en lui-même, mais comme n'étant pas fondateur de la relativité générale, en soulignant que toute théorie peut s'écrire sous forme tensorielle [9]. Plus précisément, toute théorie dans laquelle les points eux-mêmes de l'espace(-temps) ne sont pas en soi observables, mais seulement à travers les coïncidences en un point.

C'est en fait, précisément ce qu'avait compris Einstein de la covariance générale des équations de sa théorie, à l'aide du fameux *hole argument* [10]. Le lien qu'entretiennent les difféomorphismes passifs (les changements de systèmes de coordonnées, qui laissent la forme d'équations généralement covariantes invariable) et les difféomorphismes actifs permet de conclure, qu'à des conditions initiales fixées, correspond une infinité de solutions des équations de la relativité générale, appartenant toutes à la même orbite du groupe des difféomorphismes (actifs) [5]. Cette brisure du déterminisme, typique des équations invariantes de jauge, est contournée en se restreignant aux

observables invariantes de jauge. La particularité de la relativité générale à cet égard est que les quantités non-invariantes de jauge, ce ne sont pas, comme dans les théories de jauge basées sur un groupe de symétrie interne, la valeur d'un champ, mais les coordonnées de l'espace-temps lui-même. Autrement dit ne sont ni observables les coordonnées sur l'espace-temps, ni la valeur de toute quantité en un point spécifié par ses coordonnées. Il faut, pour donner sens à la valeur d'une quantité en un point, pouvoir définir également ce point par une autre quantité physique. Ce qui est donc observable, c'est, par exemple, la valeur d'un champ en point défini comme l'intersection de deux lignes d'univers que suivent des particules ponctuelles. La covariance générale des équations oblige à reconnaître que seules ces « coïncidences spatio-temporelle » (pour reprendre les termes d'Einstein) sont observables. Cette notion d'événement est au fond très naturelle et traduit parfaitement le sens commun : toute expérience de physique ne fait que mesurer de telles coïncidences, et jamais ne mesure des quantités absolues telles que la valeur d'un champ en un point. Requérir cette symétrie fondamentale, c'est abandonner définitivement le caractère absolu de l'espace-temps. En ce sens la covariance générale des équations, si ce n'est peut-être pas le seul moyen d'implémenter cette idée (c'est en tout le cas le seul connu), est clairement un principe fondateur de la relativité générale. Au fond, Einstein et Kretschmann s'accordaient sur ce point. Einstein l'intégra même explicitement dans le principe de relativité en 1918 : « Principle of relativity : The laws of nature are only assertions of timespace coincidences ; therefore they find their unique, natural expression in generally covariant equation. » [11].

Revenons alors à l'objection de Kretschmann : il semble que la confusion sur ce point tiende à une lecture trop rapide de son point de vue, les commentateurs suivants n'ayant conservés de cette objection que la possibilité de mettre toute théorie sous une forme généralement covariante, et non seulement les théories ou seules les coïncidences sont observables [12]. Ainsi, requérir la covariance générale n'est pas dénué de tout sens physique. Là où l'objection de Kretschmann s'est avérée exacte, cependant, c'est que requérir la covariance générale des équations ne sélectionne pas uniquement la relativité générale. Comme le montra Cartan [6] (voir aussi [8], chp. 12), la théorie de la gravitation de Newton elle-même peut s'écrire sous une telle forme. Ainsi en va-t-il également de la relativité restreinte (il suffit de l'écrire en termes de coordonnées quelconques, d'une métrique a priori quelconque, etc., et d'imposer en plus l'annulation en tout point du tenseur de Riemann). Cela, du reste, n'a rien de surprenant. Toute théorie écrite en termes d'objets géométriques, et leurs relations, sur une variété (différentiable ou non) est généralement covariante. Il serait sans doute vain de vouloir démontrer également la réciproque ; néanmoins on peut se restreindre dans un premier temps à l'étude de ces théories géométriques. Ainsi, et bien que l'espace de théories ainsi défini demeure extrêmement vaste, se trouve canalisé l'effort de recherche. Le principe de covariance générale des équations possède un rôle heuristique indéniable, sur lequel Einstein a beaucoup insisté⁴.

L'exemple de la théorie de Newton de la gravitation nous amène à la notion de géométrie privilégiée (ou *prior geometry*, cf. par exemple [8]). Face à l'inaptitude du principe de covariance générale à sélectionner la théorie d'Einstein comme manifestation particulière, certains auteurs, constatant également qu'il faut parfois adjoindre des conditions supplémentaires lors de la mise sous forme généralement covariante des théories (par exemple, de Newton ou de la relativité restreinte), ont voulu renforcer ce principe, en demandant également que la théorie ne possède

⁴Weinberg, dans son exposé classique sur la relativité générale [4], conservant une lecture peut-être trop naïve de l'objection de Kretschmann (« It should be stressed that general covariance by itself is empty of physical content », [4] p. 92), met en forme ce rôle heuristique en associant la covariance générale des équations au principe d'équivalence : il suffit de connaître une loi valable dans un référentiel inertiel pour en déduire son expression dans un champ gravitationnel quelconque (à quelques ambiguïtés près dont nous avons parlé à la fin de la section précédente). Remarquons cependant que la covariance générale est ici issue de la covariance générale de la relativité restreinte : il n'y a pas à l'imposer de nouveau, au moins en ce qui concerne le secteur matériel de la théorie.

pas de tels a priori géométriques⁵.

Notons d'abord, que cette condition supplémentaire n'entretient pas de rapport particulier avec la covariance générale en elle-même. Remarquons ensuite que l'absence de géométries privilégiées est un concept extrêmement vague. La relativité générale, par exemple, si on la pense dans le cadre de la géométrie pseudo-riemannienne standard, est effectivement dépourvue de telles conditions particulières ou encore de champs adynamiques. Dans le cadre géométrique des espaces de type Einstein-Cartan (ie. connexion affine compatible avec la métrique mais de torsion non-nulle), en revanche, il est clair que la relativité générale est une théorie de type *prior geometry* où doit être imposée à la main l'annulation en tout point du tenseur de torsion. Une telle ambiguïté sémantique ne nous encourage donc pas à accorder le statut de principe à la demande ci-dessus formulée.

Concluons cette section en affirmant que si la covariance générale n'est pas l'apanage de la relativité générale, elle en est un des traits caractéristiques et essentiels. Au delà de son rôle heuristique, elle traduit le fait que seules les coïncidences spatio-temporelles sont observables, et non les coordonnées sur l'espace-temps, ni même, au fond, l'espace-temps lui-même. Abandonner la symétrie de jauge ainsi découverte par Einstein en vue de construire des modèles alternatifs à la relativité générale, tiendrait plus d'un retour en arrière que d'une avancée décisive. C'est la seule hypothèse que, par conséquent, nous ne chercherons pas à varier.

2.4 Achèvement de la théorie

Nous avons déduit de l'universalité de la chute et son extension le principe d'équivalence la forme du principe d'action de la matière plongée dans un champ de gravitation quelconque. Remarquons que la covariance générale de l'action de la matière est, dans cette construction héritée de la covariance générale de la relativité restreinte, la seule différence avec cette dernière résidant dans la relaxe de la contrainte a priori qu'est l'annulation du tenseur de Riemann en tout point. C'est pourquoi d'ailleurs, nous ne savons rien encore de la valeur de ce dernier et, plus généralement, de la forme et de la dynamique du tenseur métrique, hormis sa nécessaire signature hyperbolique (nécessaire parce que nous avons imposé que la physique inertielle soit covariante de Lorentz), et le fait qu'à la configuration particulière du champ $\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = cst\forall x$ correspond l'absence d'effets gravitationnels sur la matière (puisque $=0$ dans ce cas).

L'idée la plus simple est sans doute de supposer que le tenseur métrique s'écrit comme $\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}$ dans un certain système de coordonnées, où Ω est une fonction à valeur réelles sur la variété (ie. un champ scalaire). L'étape suivante consiste alors à trouver une dynamique pour ce champ scalaire. Cette approche est celle que suivit Nordström⁶ en 1913 [14, 15], dérivant ainsi la première théorie relativiste de la gravitation. Nous reviendrons longuement sur cette théorie (cf. Sec. 3.1 et Chp. 6), qui, malgré sa simplicité admirable, a malheureusement été infirmée par l'expérience.

De façon plus générale, le tenseur métrique pourrait être donné par une certaine combinaison de plusieurs champs scalaires ϕ^a , vectoriels (ou plutôt de 1-formes) V_μ^b ou encore $\partial_\mu\phi^a$, et plus généralement encore, de champs tensoriels de rangs quelconques et de leurs contractions par un produit scalaire (tel qu'en définit, par exemple, la métrique Minkowskienne) : $\tilde{g}_{\mu\nu} = F(\phi^a, \partial_\mu\phi^a, V_\mu^b, \eta_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}^c, W_{\mu\nu\rho}^d, \dots)$. La théorie de Nordström est basée sur une réalisation particulière de la relation précédente. L'échec de la théorie de Nordström, et en fait, comme nous le verrons plus loin, de toute théorie scalaire de la gravitation à reproduire la déflexion de

⁵Tels que l'existence de systèmes de coordonnées privilégiés où seule une composante de la connexion ne s'annule pas pour la théorie de Newton, ou encore l'annulation du tenseur de Riemann pour la relativité restreinte.

⁶En fait il s'agit plutôt d'une réécriture possible de la théorie du champ gravitationnel de Nordström, réécriture découverte par Einstein et Fokker [13] en 1914.

la lumière par un champ gravitationnel peut conduire à l'idée d'utiliser des champs vectoriels. Le tenseur le plus simple que l'on puisse construire est certainement $\tilde{g}_{\mu\nu} = V_\mu V_\nu$. Cependant il est immédiat de noter qu'un tel tenseur est de déterminant nul et qu'il ne peut donc pas avoir la même signature que la métrique Minkowskienne, quel que soit V_μ . Il existe en revanche des théories vectorielles cohérentes ; nous en reparlerons rapidement en Sec. 3.1.

La théorie de la relativité générale proprement dite suppose que la métrique de la matière est un tenseur de rang deux $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ qui n'est fonction que de la position x et non d'autres quantités (cf. géométrie de Finsler, section suivante) dont il faut maintenant trouver la dynamique⁷. Puisque le champ gravitationnel lui-même s'identifie dans ce cas à la métrique de la matière, nous pouvons faire fi de la notation « tildée », et chercher un principe d'action de la forme : $S[\mathbf{g}] + S_{\text{mat.}}[\mathbf{g}, \psi]$. De l'invariance de l'action de la matière sous les difféomorphismes, on tire une loi de conservation cruciale, dont ne rappellerons pas la démonstration (voir par exemple [4], p. 361-365). On montre aisément que le tenseur suivant

$$T^{\mu\nu} = \frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{mat.}}}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (2.10)$$

est conservé, c'est-à-dire que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Un théorème d'Élie Cartan montre alors que le seul lagrangien \mathcal{L}_g (tel que l'action $S[\mathbf{g}]$ s'écrive $S[\mathbf{g}] = \int \sqrt{-g} d^4x \mathcal{L}_g$), qui, dans sa variation par rapport à $g_{\mu\nu}$, est un tenseur conservé dépendant au plus des dérivées secondes du tenseur métrique est le scalaire $R - 2\Lambda$, où le facteur -2 est conventionnel, R est le scalaire de courbure défini par les contractions appropriées du tenseur de Riemann par la métrique $g_{\mu\nu}$, et Λ est un terme constant (la constante cosmologique). On montre par ailleurs que le tenseur $T^{\mu\nu}$ s'identifie, en espace plat, et dans la plupart des cas, au tenseur d'énergie-impulsion défini dans le cadre de la relativité restreinte comme le courant de Noether associé à l'invariance par translation. L'équation 2.10 apparaît ainsi comme une définition correcte du tenseur énergie-impulsion en espace courbe. L'action de la relativité générale (dite de Einstein-Hilbert) s'écrit alors

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int \frac{d^4x}{c} \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_{\text{mat.}}[g_{\mu\nu}; \psi], \quad (2.11)$$

dont il découle les équation d'Einstein bien connues. Les facteurs numériques sont choisis de sorte à reproduire la théorie de Newton de la gravitation dans la limite non-relativiste et de champs faibles.

2.5 Résumé des principales hypothèses

Notre tentative de reconstruction de la relativité générale nous a amené à mettre en lumière les principales hypothèses qui la sous-tende. Il n'est pas inutile de les rappeler explicitement ici. Cela aura l'avantage d'organiser de façon claire la recherche de théories alternatives. La classification que nous proposons est assez arbitraire :

I. Aspects géométriques :

1. L'espace-temps se décrit par une variété différentiable de dimension quatre \mathcal{M} .

[Variations possibles : structures fractales, géométries non-commutatives, théories à dimensions supplémentaires.]

⁷Remarquons, bien entendu, que toutes les métriques de la matière considérées plus haut, c'est-à-dire données par une certaine combinaison d'autres champs tensoriels, sont toutes de rang deux. La spécificité de la relativité générale tient donc plutôt à la dynamique proprement dite de ce tenseur métrique, cf. plus bas.

2. La variété \mathcal{M} est munie d'une métrique Lorentzienne $\tilde{g}_{\mu\nu}$ et d'une connexion affine compatible avec la métrique et dénuée torsion (cela est en partie issu du principe d'équivalence). [Variations : présence de torsion ou de non-métricité : Einstein-Cartan, théorie de Weyl, et plus généralement les « théories affines et métriques de la gravitation » (*Metric Affine Gravity* [16]).]
3. Le tenseur métrique est un champ de tenseur sur la variété \mathcal{M} , et non sur ses fibrations (par exemple sur le fibré tangent). [Variation : les espaces de Finsler, que l'on peut grossièrement voir comme des espaces où la métrique dépend à la fois du point sur la variété et d'un vecteur de l'espace tangent, cf. aussi Sec. 3.2.]

II. Principes physiques :

1. Les équations des champs sont covariantes sous des changements de coordonnées quelconques. [Variation : théories non covariantes, dont nous avons dit qu'elles sont en désaccord avec l'idée que l'espace-temps lui-même (en tant qu'ensemble de points), est inobservable. Ecrire des théories non généralement covariantes est aisé ; il suffit par exemple de considérer l'action du champ gravitationnel comme donné par $\sqrt{-g}F(-g)R$, où F est une fonction quelconque du déterminant de la métrique. Notons que l'absence de covariance impose qu'il faut préciser, au niveau même de l'action, le système de coordonnées utilisé. Pour les raisons évoquées plus haut, nous ne considérerons pas ces théories.]
2. L'universalité de la chute libre, ou principe d'équivalence faible, généralisé en le principe d'équivalence : il existe dans tout voisinage un système de coordonnées dans lequel les lois de la physique non gravitationnelle prennent leur forme standard (ici nous supposons qu'il s'agit des lois de la relativité restreinte, cf. point 2 suivant). [Variations : non universalité de la chute libre ou violation du principe d'équivalence : couplages dilatationiques, hypothèses de type AWE, torsion de l'espace, etc. cf. Sec. 3.2.]

III. Aspects dynamiques :

1. La physique non gravitationnelle satisfait au principe d'inertie. [Variation : aucune théorie moderne, du moins à notre connaissance. Il pourrait s'agir par exemple d'une théorie Aristotélicienne du mouvement, où la vitesse, et non l'accélération, est proportionnelle aux forces appliquées (de sorte que l'état « inertiel » soit l'état de repos (par rapport à un espace absolu), et non l'état de mouvement uniforme, conformément à cette vision antique du monde).]
2. La physique inertielle obéit aux lois de la relativité restreinte. [Variations possibles : toutes les approches dites de "modification de l'inertie". Exemple : modification de l'action d'une particule ponctuelle relativiste ou non (cf. MOND comme une modification de l'inertie, Sec. 8.1), ou plus généralement des champs de matière en espace plat, brisure de l'invariance de Lorentz à une certaine échelle (théories DSR cf. Sec. 3.2), modification de la structure sous-jacente (Minkowskienne), en quelque chose de nouveau. Voir par exemple le point 3 des « aspects géométriques » ci-dessus : la métrique plate pourrait dépendre de la vitesse de la particule (géométrie de Finsler, ce qui revient à modifier l'action de la particule relativiste en $\int -m\sqrt{\eta_{\mu\nu}(v)v^\mu v^\nu}d\tau$, cf. Sec. 3.2).]
3. Le champ gravitationnel, identifié à la métrique à laquelle se couple la matière, voit sa dynamique dictée par l'action d'Einstein-Hilbert, avec ou sans constante cosmologique. [Variation : nombreuses possibilités. On peut d'abord modifier le terme cinétique du champ métrique. Exemple : théories « $f(R)$ » où le Lagrangien s'écrit $\mathcal{L}_g = f(R)$ et qu'on reverra en détail en Sec. 3.1, ou encore adjoindre des fonctions de l'invariant topologique de Gauss-Bonnet. On peut également inclure des dérivées d'ordre supérieur (à deux) ou *higher order gravity* ; cf. Sec. 3.1 et Sec. 9.3. Ces théories souffrent généralement d'instabilités, cf. Sec. 4.2. Il est enfin possible (et parfois équivalent, d'écrire la métrique de la matière comme une composée d'objets tensoriels divers (cf. plus haut), et de postuler la dynamique de ces divers champs (exemple : Nordström, théories tenseur-scalaire, etc., et voir aussi la section 3.1.)]

Théories alternatives de la gravitation

Jusqu'à présent, aucune expérience ou observation n'est venue infirmer la théorie de la relativité générale. Sa robustesse vis-à-vis des tests expérimentaux est même impressionnante (voir Sec. 4.1). Comme nous l'avons signalé en introduction cependant, certaines observations récentes, notamment aux échelles astrophysiques, militent pour une éventuelle modification de la théorie. Si de nombreux mécanismes non directement issus d'une modification de la relativité générale ont été étudiés pour expliquer, en particulier, les problèmes de l'énergie noire, de la matière noire, ou, à une échelle plus modeste, de l'anomalie Pioneer (et autres comportements étranges dans le système solaire [17]), il n'est pas exclu que ces phénomènes puissent aussi s'expliquer dans le cadre d'une théorie modifiée de la gravitation, dont l'étude trouve ainsi une motivation importante.

Par ailleurs, considérer des extensions simples de la relativité générale et les contraindre expérimentalement permet de mieux cerner les limites de cette dernière. L'extension phénoménologique de la relativité générale que constitue le formalisme PPN et que nous présenterons rapidement en Sec. 4.1 est un exemple de cette démarche. Il est toujours plus instructif de tester une théorie en contraignant par l'expérience un espace de théories plus vaste que l'inclue [18].

Enfin, les motivations théoriques ne manquent pas. Einstein lui-même fut le premier à chercher une théorie unifiée du champ gravitationnel et du champ électromagnétique, ce qui conduisit Kaluza, et plus tard Klein et d'autres, à introduire des dimensions supplémentaires à l'espace-temps, tandis qu'Einstein et Schrödinger cherchèrent à décrire le champ unifié comme un tenseur de rang deux sans propriétés particulières de symétrie, un simple dénombrement motivant l'identification de sa partie symétrique avec le champ gravitationnel, et de sa partie antisymétrique avec le champ électromagnétique. D'une certaine façon, les théories des cordes et des branes actuelles ont héritées de ces premières idées.

Nous insisterons dans le chapitre suivant sur les diverses contraintes, à la fois expérimentales et théoriques, que doit satisfaire toute théorie alternative de la gravitation. Nous nous proposons ici, d'abord, d'établir une liste, certainement non exhaustive, des possibilités qui s'offrent à nous pour modifier la théorie de la relativité générale. Nous nous concentrerons d'abord sur les modifications que nous qualifierons de standard, dénomination sous laquelle nous incluons essentiellement les théories qui ne jouent que sur la variation de l'hypothèse III.3, c'est-à-dire sur l'identification du tenseur métrique physique et sur la dynamique des divers champs gravitationnels. Nous présenterons en particulier certains cadres théoriques qui se sont révélés particulièrement prometteurs en vue d'une formulation relativiste de la théorie MOND, cf. Sec. 3.1. Nous présenterons ensuite quelques pistes plus radicales issues de la variation des autres hypothèses listées dans le chapitre précédent, sans oublier que la plupart de ces théories alternatives sont fortement contraintes expérimentalement. La question de savoir si de tels cadres sont pertinents pour formuler une ou des théories relativistes de MOND est ouverte; ce n'est pas impossible, et ces modèles sont de toutes façon intéressants en soi. C'est pourquoi nous les présentons rapidement, tandis que la question de leur pertinence en vue d'une formulation de MOND fait partie de nos projets de recherches futurs (voir aussi Sec. 8.1).

3.1 Quelques alternatives standard

Nous nous donnons dans cette section la liberté d'identifier les champs gravitationnels et leurs dynamiques. Nous n'avons pas cherché à mieux séparer ces deux aspects, puisque, comme nous allons d'ailleurs le voir explicitement dans le cas des théories « f(R) » (cf. Sec. 3.1), l'identification des vrais degrés de liberté du (des) champ(s) gravitationnel(s) dépend fortement de la dynamique de ce(s) dernier(s). Comme nous l'avons déjà entre-aperçu en Sec. 2.4, aucun principe n'imposant ni la forme de la métrique de la matière ni celle de sa dynamique, il existe de nombreuses théories métriques de la gravitation. Nous en listons quelques unes ci-dessous.

Les théories de Nordström et les théories scalaires de la gravitation

Nous reprenons ici rapidement la théorie de Nordström et ses extensions, les théories scalaires de la gravitation. Nous supposons qu'il existe un système de coordonnées dans lequel la métrique de la matière s'écrit $\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)\eta_{\mu\nu}$ où A est une fonction ne s'annulant pas (prendre le carré de cette dernière assure que $\tilde{g}_{\mu\nu}$ est de même signature que $\eta_{\mu\nu}$). Le choix d'un terme cinétique standard pour le champ scalaire φ conduit à écrire l'action totale¹ comme :

$$S = -\frac{c^3}{8\pi G} \int d^4x (\partial\varphi)^2 + S_{\text{mat.}}[A^2(\varphi)\eta_{\mu\nu}; \psi], \quad (3.1)$$

où ψ représente les divers champs de matière de la théorie. Le signe $-$ devant le terme cinétique de φ garantit la positivité de l'énergie portée par le champ scalaire et donc sa stabilité (voir Sec. 4.2).

Nordström considéra deux réalisations particulières des théories scalaires de la gravitation : la première, caractérisée par l'action précédente et la fonction $A(\varphi) = e^\varphi$, céda rapidement la place à celle définie par le choix $A(\varphi) = \varphi$, dont l'équation de champ est linéaire. Dans toute la suite de ce manuscrit, cette seconde théorie sera simplement désignée comme « la » théorie de Nordström. Bien entendu, il est possible de considérer d'autres termes cinétiques, notamment un terme cinétique de k-essence $f((\partial\varphi)^2)$ où f est une fonction qui doit satisfaire quelques conditions sur lesquelles nous reviendrons plus loin. On peut également ajouter des termes d'auto-couplage, ie. un potentiel $V(\varphi)$, etc.

La théorie de Nordström est une théorie tout à fait particulière dans le sens où, malgré sa simplicité, elle est extrêmement proche de la relativité générale par bien des aspects. Il est en effet possible, comme l'ont montré Einstein & Fokker [13] de l'écrire sous forme purement géométrique (cf Sec. 6.3), ce dont il découle que la théorie respecte le principe d'équivalence fort dont nous parlerons en Sec. 4.1. La relativité générale et la théorie de Nordström sont les deux seules théories connues à le respecter. Il découle en revanche du couplage particulier du champ scalaire à la matière ($\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)\eta_{\mu\nu}$) le fait que l'électromagnétisme n'est pas couplé à la gravitation dans cette classe de modèle (en raison de l'invariance conforme du terme cinétique électromagnétique, cf. Sec. 9.4), de sorte qu'un corps massif ne défléchit pas la lumière, en contradiction avec les résultats expérimentaux. Nous renvoyons, pour plus de détails sur les théories scalaires de la gravitation, et en particulier sur la théorie de Nordström, à la seconde partie de ce manuscrit.

Les théories tenseur-scalaires

Il est en fait possible d'écrire des théories qui soient à la fois compatibles avec l'expérience et qui de plus ajoutent un degré de liberté scalaire au champ de gravitation usuel. Ce type de théorie

¹La constante G apparaissant dans l'action 3.1 ne correspond pas à la constante de Newton telle qu'elle est mesurée par une expérience de Cavendish, cf. Sec. 6.3

a trouvé sa première motivation dans l'argument des grands nombres de Dirac. Afin d'expliquer la petitesse de la force de gravitation comparée, par exemple, à la force électromagnétique, Dirac a en effet proposé que la constante de gravitation de Newton G ait pu varier (en l'occurrence diminuer) au cours du temps cosmique. En fait, puisque G intervient dans la définition de l'échelle de Planck, ce souci est exactement celui connu aujourd'hui sous le nom du problème de hiérarchie², à savoir comprendre la petitesse des masses des particules connues (par rapport à la masse de Planck).

L'introduction naïve d'une variation de G dans l'équation d'Einstein pose cependant problème. La divergence de $G(x, t)T^{\mu\nu}$ (le membre de droite de l'équation d'Einstein) n'est nulle, comme il se doit en raison de l'identité de Bianchi, que si G est constante. On peut ainsi considérer, en un sens, que la classe des théories tenseur-scalaires, qui ajoutent un degré de liberté scalaire au champ de gravitation, et par ailleurs prédisent une variation de G avec la position dans l'espace-temps, constitue une solution possible à ce problème. Notons également que l'apparition générique de champs scalaires dans la réduction d'une dynamique extra-dimensionnelle à une dynamique quadri-dimensionnelle (théories de Kaluza-Klein, des cordes, des branes), ou encore la modélisation dynamique de la composante dite d'énergie noire en terme de champs scalaires ont également motivé l'étude poussée de cette classe de théories. On suppose que la métrique de la matière s'écrit sous la forme $\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}^*$, où $g_{\mu\nu}^*$ est un tenseur symétrique de rang 2 que l'on appellera la métrique gravitationnelle ou d'Einstein. La dynamique des champs gravitationnels (ici $g_{\mu\nu}^*$ et φ) dérivent de l'action [19]

$$S = \frac{c^4}{4\pi G} \int \frac{d^4x}{c} \sqrt{-g^*} \left\{ \frac{R^*}{4} - \frac{1}{2} g^{*\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right\} + S_{\text{mat.}}[\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}^*; \psi], \quad (3.2)$$

où R^* est le scalaire de courbure associé à la métrique gravitationnelle $g_{\mu\nu}^*$, et g^* désigne le déterminant de cette dernière. Il est également possible de supposer un terme cinétique de k-essence pour le champ scalaire, ou encore de généraliser cette action en y incluant un nombre quelconque de champs scalaires φ^a , dont le terme cinétique s'écrit alors (par exemple)

$$S_\varphi = -\frac{c^3}{4\pi G^*} \int \sqrt{-g^*} d^4x \left(\frac{1}{2} g^{*\mu\nu} \gamma_{ab}(\varphi^c) \partial_\mu \varphi^a \partial_\nu \varphi^b + V(\varphi^a) \right). \quad (3.3)$$

où $\gamma_{ab}(\varphi^c)$ joue le rôle d'une métrique dans l'espace ayant les champs (φ^a) pour coordonnées. Il suffit alors que cette métrique soit définie positive pour assurer la positivité de l'énergie portée par les ondes scalaires.

Les champs vectoriels et les théories stratifiées

Comme nous l'avons déjà signalé, la théorie vectorielle la plus simple construite en supposant que la métrique de la matière s'écrit simplement comme le produit $V_\mu V_\nu$ d'un certain champ de 1-forme, doit être abandonnée du fait que cette métrique ne peut pas avoir une signature hyperbolique (non-dégénérée). On peut en revanche supposer que la métrique de la matière s'écrit typiquement sous la forme $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^* + V_\mu V_\nu$. Les deux métriques \tilde{g} et g^* ne pouvant manifestement plus se déduire l'une de l'autre par une transformation conforme, on peut, suivant Bekenstein [20], parler de métrique *disformal*. On parlera également de théorie « stratifié » en référence à la théorie de Ni [21], où le champ de 1-forme V_μ est donné par le gradient d'une fonction de temps globale, supposée exister a priori.

²Si, à l'époque, le problème des grands nombres de Dirac n'était guère plus qu'esthétique, il n'en n'est plus rien aujourd'hui. S'il faut croire au modèle de Higgs du modèle standard de la physique des particules, ainsi qu'à la théorie quantique des champs en général, la petitesse des masses du modèle standard par rapport à la masse de Planck nécessite un ajustement particulièrement fin de la masse nue du boson de Higgs.

Nous ne détaillerons pas ici les théories vectorielles en général, qui ont été abondamment étudiées dans les années 1970. La plupart furent exclues expérimentalement, et certaines d'entre elles furent d'ailleurs uniquement construites dans cette optique [22]. Les effets de directions privilégiées intrinsèquement liés à l'existence d'un champ vectoriel sont généralement beaucoup trop importants et incompatibles avec l'expérience. Nous renvoyons pour plus de détails à la revue [22] et aux références qu'on y trouvera.

Nous voulons en revanche insister sur le fait que ces théories stratifiées sont particulièrement intéressantes en vue d'une formulation relativiste de la théorie MOND. La partie *disformal* (dans l'exemple ci-dessus, le terme en $V_\mu V_\nu$) de la métrique de la matière se couple en effet directement à la lumière, et on peut espérer, moyennant un choix judicieux du terme *disformal*, reproduire la déflexion anormalement grande de la lumière produite par les galaxies ou les amas de galaxies (supposés être dénués d'un quelconque contenu en matière sombre, dans le cadre de MOND³), cf. Sec. 7.4. Dans la troisième partie de ce manuscrit, nous nous pencherons plus en détail sur deux classes de modèles particulièrement prometteurs. La première classe de modèles constitue en fait une généralisation des modèles scalaire-tenseur, où la métrique de la matière, de type *disformal*, s'écrit en toute généralité sous la forme

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi, s)g_{\mu\nu}^* + B(\varphi, s)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi, \quad (3.4)$$

où $s \equiv g_*^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$ et φ est un champ scalaire dont le terme cinétique peut-être standard ou non. La seconde classe de modèle intéressante sont les théories tenseur-vecteur-scalaires (également connues sous l'acronyme TeVeS, [23, 24]), dont on écrira la métrique de la matière sous la forme générique

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}^* + B(\varphi)U_\mu U_\nu, \quad (3.5)$$

où U est un champ de 1-forme. On pourrait bien sûr, dans ce cas, considérer des métriques plus compliquées en ajoutant un terme *disformal* de type $\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$, ou encore en permettant une dépendance des fonctions A et B ci-dessus en la variable s . Il faudra ajouter à cette relation la définition des Lagrangiens des divers champs gravitationnels ($g_{\mu\nu}^*$, U_μ et φ).

Nous pouvons d'ores et déjà noter que le caractère Lorentzien de ces deux métriques, nécessaire pour garantir l'hyperbolicité des équations de la matière, imposent (respectivement) $A^2(\varphi, s) > sB(\varphi, s)$ et $A^2(\varphi) > -(g_*^{\mu\nu}U_\mu U_\nu)B(\varphi)$. Par ailleurs, il faudra vérifier la cohérence des équations des champs gravitationnels. Cette question est très délicate dans le cadre du premier modèle, puisque l'équation du champ scalaire dans la matière dépend également des dérivées secondes des autres champs présents dans la théorie, du fait du couplage dérivatif du scalaire à la matière (en $\partial_\mu\varphi$). Nous y reviendrons longuement en Sec. 9.4 et Sec. 9.6.

À cet égard, la seconde classe de modèle semble un peu plus satisfaisante. Mais nous verrons également en Sec. 9.4, et comme il est bien connu d'ailleurs, que coupler un champ de vecteur à la matière n'est pas chose si aisée. En effet, l'équation vectorielle résultante possède toujours la solution nulle (triviale), et le champ vectoriel ne peut donc pas être engendré (au moins perturbativement). Par ailleurs, un terme cinétique standard pour le champ vectoriel n'est pas sans poser problèmes : les identités de type Bianchi (pour un spin 1, ie. le premier groupe des équations de Maxwell provenant seulement de l'antisymétrie de la courbure de jauge) impose une forme particulière au tenseur énergie impulsion de la matière. On résout ces deux problèmes simultanément, dans une théorie de type TeVeS, en forçant le champ vectoriel à avoir une norme constante, à l'aide, par exemple d'une contrainte exprimée à l'aide d'un paramètre de Lagrange dans l'action de la théorie. Cela conduit malheureusement à une théorie instable, comme nous le verrons en Sec. 9.6.

³Quoiqu'il nous faudra, *in fine*, considérer qu'une part de matière noire habite les amas, même dans le cadre de MOND.

Ces deux cadres théoriques, quoique intéressants en soi, ne sont donc pas exempts de difficultés. Si l'on veut en plus les utiliser comme modèle relativistes de la théorie MOND, des réglages fins (*fine-tuning*) sont absolument nécessaires, et (il faut le reconnaître) peu engageants. Une grande partie de l'article présenté dans la dernière partie de ce manuscrit, relative à la théorie MOND en général, se consacre à l'étude critique des modèles scalaire-tenseur ou scalaire-vecteur-tenseur, stratifiés ou non, comme réalisation de la théorie MOND.

Les deux modèles stratifiés présentés ci-dessus ont en commun le fait de prédire que la lumière (dans le vide) et les ondes gravitationnelles ne se propagent plus à la même vitesse (c , en relativité générale). Plus encore, le rapport de ces deux vitesses n'est pas constant et dépend, par l'entremise du champ scalaire et (ou) vectoriel, de la position dans l'espace et le temps. En ce sens ces modèles réalisent le scénario dit de *Varying Speed of Light*, ou VSL, introduit depuis quelques années dans la littérature comme solution possible aux problèmes standard de la cosmologie (problème de l'horizon, de la platitude, etc.), en concurrence, par conséquent, des modèles inflationnaires [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31].

Le fait que les ondes gravitationnelles puissent se propager plus vite que la lumière dans ces modèles stratifiés (cela dépend essentiellement du signe de B dans les métriques de la matière ci-dessus) a également soulevé la question du caractère causal de telles théories. Nous reviendrons longuement sur ce point dans les deux chapitres suivant, cf. Sec. 4.2 et Chp. 5. Nous ne voulons pas entrer maintenant dans ces considérations théoriques. Signalons cependant l'aspect expérimental de la question : nous montrerons en Sec. 9.5 que la détection de rayons cosmiques de hautes énergies sur Terre exclue que les ondes gravitationnelles se propagent *moins* vite que la lumière. Plus généralement, l'expérience exclue les champs subluminiques couplés à la matière ordinaire, mais pas les champs supraluminiques.

Modifier le terme cinétique

Une dernière approche standard consiste, au lieu d'ajouter de nouveaux champs et de jouer sur leur termes cinétiques et leurs couplages, à simplement modifier le terme cinétique (le scalaire de Ricci R^*) de la métrique gravitationnelle \mathbf{g}^* . Les seuls autres scalaires que l'on puisse considérer sont des fonctions du scalaire de Ricci $f(R^*)$, les contractions telles que $R_{\mu\nu}^* R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\lambda\sigma}^* R^{\mu\nu\lambda\sigma}$, etc. ou encore les tenseurs déduits de la dérivation covariante du tenseur de Riemann et de leurs contractions.

L'introduction de tels termes supplémentaires est notamment motivée par les résultats du programme de la quantification de la gravité. 't Hooft et Veltman [32] ont en effet montré que les divergences à une boucle sont annulées par (et donc génèrent) des (contre-)termes de type R^2 , $R_{\mu\nu}^2$ ou encore $R_{\mu\nu\lambda\sigma}^2$. Stelle a montré que l'adjonction d'une certaine combinaison de ces termes conduit même à une théorie renormalisable à tous les ordres, cf. [33] et la section 9.3 en troisième partie de ce manuscrit.

Ces nouveaux termes cependant, engendrent des instabilités. Plus généralement, de tous les termes cinétiques que nous avons évoqués ci-dessus, seul le premier, fonction du scalaire de Ricci $f(R^*)$, est acceptable. En effet, tous les autres Lagrangiens construits à partir des autres contractions du tenseur de Riemann ou de ses dérivées dépendent des dérivées supérieures (ie. au moins deux) de la métrique, et définissent donc des théories instables, en référence au théorème d'Ostrogradski que nous présenterons dans le prochain chapitre (Sec. 4.2). Notons, bien sûr, que le scalaire de Ricci lui-même dépend des dérivées secondes de la métrique. Cependant, on montre que ce Lagrangien (et plus généralement le Lagrangien $f(R^*)$) est dégénéré par rapport à ces dérivées secondes [34], et par conséquent évite le théorème d'Ostrogradski cf. Sec. 4.2.

Les théories $f(R^*)$, qui constituent, en quelque sorte, des k-essence gravitationnelles, ont suscité un grand intérêt récemment, notamment dans le cadre du problème de l'énergie noire.

La formulation particulièrement simple de la théorie, au moins au niveau de l'action, permet de modifier de façon assez directe la gravitation dans le régime des fortes ou faibles courbures. Par exemple, si on veut renforcer l'influence de la gravitation à faible courbure, il suffit d'ajouter à R^* des termes de type $\pm 1/R^*$, au prix, certes, d'introduire une échelle de longueur (ou de masse) dans la théorie. En ce qui concerne la théorie MOND, une telle approche semble prometteuse puisqu'on peut, au moins au niveau de l'action, renforcer la courbure lorsque celle-ci est trop faible, par exemple en écrivant une théorie de la forme $f(R^*) = R^*/[1 + a_0/(c^2\sqrt{R^*})]$ avec $f(R^*) \sim c^2 R_*^{3/2}/a_0$ si $R^* \ll a_0^2/c^4$.

Exploiter ce genre de théorie est en revanche plus complexe qu'il n'y peut paraître au premier abord, du fait de la complexité des équations qui en résultent. Par ailleurs, cette théorie ne peut sans doute pas se présenter comme une candidate sérieuse à la formulation d'une théorie relativiste de MOND, puisqu'elle ne prédit pas a priori une augmentation significative de la déflexion de la lumière (comparée à la relativité générale), comme l'expérience le requière pourtant. En effet, on montre sans difficulté (voir Sec. 9.3) que ces théories $f(R^*)$ sont équivalentes à une sous-classe de théories tenseur scalaires pour lesquelles le couplage métrique $A(\varphi)$ prend la forme particulière $A(\varphi) = \exp(\varphi/\sqrt{3})$. [Cela illustre d'ailleurs, comme nous l'avions annoncé au début de cette section, le fait que certains degrés de liberté (ici un scalaire) peuvent être cachés dans des termes cinétiques non standard.] Cette reformulation montre que le nouveau degré de liberté (scalaire) se couple de façon conforme à la matière et par conséquent n'influe pas sur les ondes électromagnétiques. En conséquence de quoi, et à moins que le tenseur énergie-impulsion du champ scalaire contribue significativement et de façon non triviale (comme une matière noire) à la source de la gravitation, il ne faut pas s'attendre à reproduire la déflexion de la lumière anormale observée dans les systèmes galactiques à l'aide d'une théorie de ce type.

3.2 Les options moins standard

Nous avons présentés ce qui sans doute constitue les variations les plus communes de la théorie de la relativité générale. Nous verrons en dernière partie de ce manuscrit que les classes de théories présentées ci-dessus, et notamment les théories stratifiées, s'avèrent des candidats sérieux à la formulation relativiste d'une théorie de MOND. Cependant, nous verrons également les difficultés encore posées par ces approches, au chapitre desquelles figurent des problèmes théoriques de stabilité, ou encore des problèmes de « réglages fins » (*fine-tuning*). Dans la vue d'une construction relativiste de MOND, nous n'excluons pas, ainsi, l'hypothèse qu'il faille dépasser le cadre standard d'une théorie des champs dans un espace pseudo-Riemannien. Cette piste, cependant, ne sera qu'esquissée, et ne se veut guère être plus, en l'état actuel des choses, qu'une ligne de recherches futures. Nous explicitons rapidement ces pistes qui s'offrent à nous, et qui pourraient peut-être s'accorder à l'idée de la théorie MOND.

Des modèles alternatifs à la relativité générale peuvent être développés à partir de l'abandon de la plupart des hypothèses listées à la fin du chapitre précédent. Nous en présentons quelques uns maintenant. Tout d'abord nous passerons sous silence les cadres théoriques abandonnant le caractère différentiel de l'espace-temps (exemple : modèles fractals), assez marginaux, et qui se heurtent, bien évidemment, à des problèmes tout à fait nouveaux (puisque nombre d'outils mathématiques, au premier rang desquels figurent le calcul différentiel, ne peuvent plus être utilisés). Nous n'évoquerons pas non plus les théories basées sur la géométrie non-commutative, quoique fort intéressantes. Conserver la structure de variété différentiable de l'espace-temps, mais varier son nombre de dimensions, en revanche, a fait (et continue d'être) l'objet d'études intenses. Puisque il n'est certainement pas question de diminuer ce nombre⁴, ces théories sont regroupées

⁴Hors physique des matériaux et des conducteurs en général, physique statistique ou des transitions de phase,

sous le nom générique de théories à dimensions supplémentaires, dont le premier exemple remonte à la théorie de Kaluza-(Klein), et dont le souci était d'unifier le champ électromagnétique au champ gravitationnel en un seul champ unitaire penta-dimensionnel. Cette idée s'est ensuite considérablement développée avec l'émergence de la théorie des cordes et des branes. Notons d'ailleurs que Milgrom a proposé un modèle penta-dimensionnel de la théorie de MOND [35].

Abandonner le principe d'équivalence

Le principe d'équivalence est extrêmement bien établi expérimentalement (cf Sec. 4.1). Cependant, il est facile de contourner ces tests expérimentaux en supposant une violation du principe d'équivalence dans un secteur matériel encore inconnu, ou mal connu (voir par exemple [36]). Signalons à ce sujet l'hypothèse récente dite AWE (pour *Abnormally Weighting Energy*) [37, 38], où est supposée que le fluide d'énergie noire remplissant l'Univers puisse réagir différemment au champ gravitationnel que la matière standard. Cette hypothèse intéressante au point de vue cosmologique peut en outre s'avérer pertinente en vue d'une théorie unifiée de la matière noire et de l'énergie sombre.

Il y a plusieurs façons, par ailleurs, d'abroger le principe d'équivalence (faible). Bien que l'on s'attende alors à décrire une théorie non-métrique de la gravitation, il est cependant possible de décrire ce genre d'effets en des termes très voisins de la relativité générale. Il suffit par exemple de supposer qu'un type de matière i (un champ de matière ψ_i), au lieu de se coupler à la métrique de la matière (universelle) \tilde{g} , se couple à une métrique particulière \tilde{g}_i , de sorte que les diverses métriques \tilde{g}_i , $i \in I$ soient différentes entre elles. Notons d'ailleurs que ce genre de comportement apparaît typiquement dans la limite de basse énergie des théories des cordes. Le terme électromagnétique hérite par exemple d'un couplage dit dilatonique, c'est-à-dire que ce champ se couple, en plus de la gravitation, à un (ou des) champ(s) scalaire(s). Cette approche se résume donc à remplacer le terme de matière $S_{\text{mat.}}[\tilde{g}_{\mu\nu}; \psi]$ dans l'action (2.11) de la relativité générale par un terme du type $S_{\text{mat.}}[(\tilde{g}_{\mu\nu}^i; \psi_i)$, $i \in I$]. Puisque la structure de la théorie n'est ainsi que peu altérée, cela ne constitue, en quelque sorte, qu'une approche minimale à la violation du principe d'équivalence faible.

D'autres approches radicales peuvent être également suivies. La plus intéressante d'entre elles est sans doute la théorie de Cartan et dite d'Einstein-Cartan, qui constitue une extension naturelle à la relativité générale, où l'espace-temps, au lieu d'être équipé d'une connexion de Christoffel, est doté d'une connexion affine compatible avec la métrique mais de torsion non-nulle. Comme nous l'avons déjà signalé au chapitre précédent, la présence de torsion brise le principe d'équivalence faible, puisque des particules tests ne tombent pas de la même façon dans un champ de gravitation selon leur état de moment cinétique. Cette approche, essentiellement géométrique, consiste donc à lever les a priori de la géométrie pseudo-Riemannienne, et de découvrir les principes de correspondance pertinents liants les quantités géométriques nouvelles aux propriétés physiques. On peut ainsi, en plus de ne pas requérir la nullité de la torsion, considérer des connexions affines qui ne soient pas compatibles avec la métrique (ie. telles que $\nabla_\mu g_{\nu\rho} \neq 0$), voir [39, 16] pour y trouver à la fois la construction de ces théories et leurs motivations intéressantes. Malgré l'intérêt évident de ces approches, nous les avons pas explorées plus avant durant cette thèse, puisque ces nouveaux objets dynamiques ne semblent pas être pertinents eu égard à une construction relativiste de la théorie MOND.

etc. trop éloignée de nos préoccupations présentes.

Modifier la physique inertielle

Nous continuons notre présentation de quelques approches alternatives à la relativité générale en remarquant, de façon presque provocante, que les hypothèses III.1 et III.2 nous apprennent qu'on doit s'attendre à modifier la théorie gravitationnelle en modifiant la physique inertielle, c'est-à-dire, précisément, en modifiant la physique non gravitationnelle. Que cela soit possible provient, évidemment, du principe d'équivalence. S'il semble délicat, et, honnêtement, assez peu raisonnable, d'attenter au principe d'inertie, il est en revanche possible (et courant dans la littérature) de modifier la relativité restreinte.

Cette idée a connue un regain d'intérêt récent, avec les modèles de « relativité restreinte double » (DSR, pour *Doubly Special Relativity*, ou *Deformed Special Relativity*, [40, 41, 42, 43]), dont l'idée principale est d'inclure à la relativité restreinte une échelle de masse, de longueur, ou d'énergie, sans doute de l'ordre de l'échelle de Planck, et qui soit invariante dans les changements de référentiels inertiels. Bien que ces idées soient largement motivées par la recherche de théories effectives de la gravité quantique, et par conséquent bien qu'elles ne soient pas en rapport immédiat avec la théorie de MOND, nous les jugeons intéressantes parce qu'elles prennent comme point de départ l'introduction d'une échelle de longueur fondamentale dans la physique inertielle, et donc dans la théorie gravitationnelle qui doit en résulter. La relativité restreinte (et donc générale) est en effet dépourvue d'une telle échelle de longueur (mis à part celles que fournissent le contenu matériel), alors que la phénoménologie MOND suggère l'introduction d'une nouvelle constante fondamentale (par exemple de longueur l_0) qui se présente sous la forme d'une accélération dans le régime non-relativiste $a_0 = c^2/l_0$.

La recherche d'une théorie de type DSR est loin d'être aboutie, et n'a pour l'instant pas encore donné naissance à une théorie alternative de la gravitation (voir cependant [44]). Il n'est pas clair, par exemple de savoir s'il faut considérer les relations de dispersions modifiées de la forme $F(E, \mathbf{p}, \lambda)E^2 - G(E, \mathbf{p}, \lambda)\mathbf{p}^2 = m^2$, typiques de ces modèles, et où λ désigne une échelle fondamentale, comme brisant explicitement la symétrie de Lorentz, ou comme l'invariant modifié issu d'une action non-linéaire du groupe de Lorentz sur l'espace des impulsions (ie. l'espace cotangent). La première option mène rapidement à une représentation de la théorie dans l'espace des positions⁵ (théorie qui cependant brise manifestement la symétrie de Lorentz), tandis que la seconde n'a pas de représentation encore admise dans l'espace des positions. Remarquons à ce sujet que la transformation des composantes p_μ de la 1-forme impulsion est nécessairement non-linéaire si l'équation ci-dessus doit être respectée : $p_{\mu'} = \mathcal{F}_{\mu'}(p_\lambda)$. L'invariance par ailleurs de la 1-forme elle-même $p = p_\mu dx^\mu$ impose une transformation des coordonnées qui dépende de l'impulsion de l'objet considéré et non seulement du paramètre de *boost*. C'est pour cette raison que les auteurs de [44] ont proposé d'incorporer ces idées à la relativité générale en autorisant la métrique de l'espace-temps à dépendre des paramètres cinématiques de la particule qui la sonde. Autrement dit, deux particules d'énergie différentes pourraient sentir différentes métriques au même point.

Des idées similaires sont naturellement issues des géométries dite de Finsler. Un espace de Finsler est une variété munie d'une norme F , fonction du point considéré et d'un vecteur tangent, $F(x, v)$, et qui doit satisfaire certaines propriétés (voir par exemple [45] et les références qu'on y trouvera). Cela revient en fait à définir une métrique (issue de F) qui dépende à la fois du point x et d'un vecteur dans l'espace tangent à ce point : $g_{\mu\nu}(x, v)$. A cet égard, la relativité restreinte apparaît comme le cas particulier dans lequel (il existe des systèmes de coordonnées pour lesquels) la métrique ne dépend ni de x ni de v et prend sa forme fondamentale $\eta_{\mu\nu}$, tandis que la relativité générale considère des métriques qui ne dépendent que x en général. Un principe d'action de la

⁵Par exemple il suffit de modifier les termes cinétiques des champs de matière de tel sorte que leur relations de dispersion ait la forme ci-dessus, à l'aide de la simple correspondance $E \rightarrow i\partial_0$ et $\mathbf{p} \rightarrow i\nabla$

particule relativiste de la forme $-m \int F(x, \dot{x}) d\tau = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x, \dot{x}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau$ généralise le principe d'action standard au cas d'une géométrie de Finsler. Si la norme est plate, ie. ne dépend pas de x , l'action précédente constitue une généralisation de la relativité restreinte. Les auteurs de la référence [45] ont montré comment retrouver des équations de dispersions modifiées du type évoqué plus haut à l'aide de tels principes d'actions.

Nous reviendrons sur ces modifications de la physique inertielle en dernière partie de ce manuscrit, cf. Sec. 8.1

Contraintes expérimentales et théoriques

Nous avons jusqu'ici donné un rapide aperçu de la relativité générale et de ses modifications les plus prometteuses, ainsi que leurs motivations. Il va sans dire cependant que si la théorie de la relativité générale s'est jusqu'à présent distinguée de ses concurrentes, c'est d'abord parce qu'elle n'a jamais été mise en défaut expérimentalement. Toute théorie se présentant comme une alternative sérieuse à la relativité générale se doit bien sûr d'en faire autant. Dans un premier temps, nous présenterons donc quelques uns des tests expérimentaux les plus importants, en insistant davantage sur les tests de la dynamique gravitationnelle proprement dite que sur les tests de nature cinématique (principe d'équivalence et relativité restreinte), puisque, dans la construction d'une théorie relativiste de MOND, nous serons plutôt amenés à modifier la dynamique gravitationnelle qu'à abandonner le principe d'équivalence ou à modifier la physique locale.

Qu'une théorie (alternative) soit corroborée expérimentalement n'est cependant pas suffisant pour s'en déclarer satisfait. Nous voulons également imposer aux théories alternatives d'être cohérentes, stables, causales, et si possible naturelles. Nous présenterons de façon plus détaillée ces critères théoriques dans la seconde section de chapitre, et nous insisterons particulièrement sur la question de la causalité, encore sujet à débats dans certains modèles alternatifs à la relativité générale. En effet, les théories de k -essence scalaires et/ou tenseur-vecteur-scalaires, qui se sont révélées être de très sérieux candidats à la modélisation (respectivement) de l'énergie noire et de la phénoménologie MOND, permettent génériquement à certaines ondes de champs de se déplacer plus vite que la lumière. Pour une raison essentiellement historique que nous jugerons finalement hors de propos (cf. Sec. 5.1), cela a mené certains auteurs à considérer que ces théories n'étaient pas causales. Nous nous pencherons plus en détail sur cette importante question, et, après quelques rappels élémentaires sur la notion même de causalité, présenterons dans le chapitre suivant l'article que nous avons publié à ce sujet.

4.1 Contraintes expérimentales

Les principaux tests expérimentaux de la théorie de la relativité générale peuvent se ranger –grossièrement– en deux catégories : d'une part, tester la manière dont la matière se couple à la gravitation (ie. tester le principe d'équivalence), et d'autre part tester comment la matière engendre la gravitation. La dynamique gravitationnelle proprement dite provient de la réunion de ces deux aspects, et peut aussi être directement testée, notamment grâce à l'observation de système d'étoiles doubles (des étoiles à neutrons). En fait, puisque le champ gravitationnel est en quelque sorte lui même porteur d'énergie, on peut aussi tester comment, entre guillemets, la gravitation agit sur la gravitation créée par la matière. Cette question rejoint la question du principe d'équivalence fort et nous ne l'aborderons qu'à la fin de cette discussion.

Nous n'insisterons pas sur la première classe de tests puisque, par la suite, nous nous concentrerons essentiellement sur des théories respectant le principe d'équivalence ; nous renvoyons ainsi aux articles et ouvrages détaillés [18, 22, 46]. Nous n'aborderons pas non plus les expériences permettant de déduire, du moins étant présumés certains cadres théoriques, que l'espace est bien de dimension trois aux moins aux grandes échelles. La relativité restreinte, supposée valide localement en relativité générale, est également testée très précisément de nos jours [22].

Dans la seconde classe de tests, le mouvement des corps (ou de la lumière) n'est plus utilisé pour tester le principe d'équivalence, mais plutôt afin de sonder la structure du champ gravitationnel, et la comparer à la prédiction théorique. Ces tests sont essentiellement fondés sur l'observation des corps composant le système solaire, et donc en régime de champ faible. La solution statique et sphérique (qui constitue une bonne approximation pour l'étude du système solaire) des équations d'Einstein est la solution de Schwarzschild, où l'intervalle élémentaire prend la forme

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(1 + 2\Phi)c^2 dt^2 + \frac{1}{1 + 2\Phi} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.1)$$

en coordonnées de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) , et où $\Phi = -GM/rc^2$, M étant la masse du corps central (ici, le Soleil). De cette métrique, nous pouvons déduire les géodésiques que suivent les masses tests et la lumière. Nous pouvons ainsi retrouver, à l'ordre Newtonien ($1/c^0$), la loi de Képler (issue de la loi dynamique $\mathbf{a} = -c^2\nabla\Phi$ à cet ordre), et à l'ordre post-Newtonien l'avance du périhélie des orbites (quasi-) elliptiques, expliquant ainsi le comportement autrement anormal de Mercure, la déflexion de la lumière d'étoiles lointaines par le champ gravitationnel du Soleil, l'effet Shapiro, etc.

Toutes ces prédictions de la relativité générale ont été vérifiées expérimentalement et l'accord avec la théorie est jusqu'ici impressionnant. Il va sans dire que toute autre forme de dynamique gravitationnelle conduit a priori à une métrique différente, et par conséquent à des prédictions différentes. Afin, d'une part, de collecter les divers tests de la relativité générale en un ensemble restreint de contraintes facilement utilisables, et, d'autre part, de contraindre de façon générique ses éventuelles modifications, il s'est avéré extrêmement utile d'introduire une métrique effective, toujours à symétrie sphérique et statique, valable jusqu'à l'ordre post-Newtonien, et paramétrée par des coefficients quelconques. On l'écrit, comme le fit Eddington [47], en coordonnées isotropes (t, ρ, θ, ϕ) , sous la forme suivante :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(1 + 2\Phi + 2\beta\Phi^2)c^2 dt^2 + (1 - 2\gamma\Phi)(d\rho^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad (4.2)$$

où γ et β , appelés les paramètres d'Eddington, valent 1 en relativité générale. Les quelques tests parmi les plus classiques évoqués plus haut, ainsi que de nombreuses autres mesures qu'ont permis l'astrométrie moderne et les diverses missions spatiales, ont contraint assez fortement la déviation par rapport à 1 de ces paramètres. Les bornes les plus récentes, à savoir $|\gamma - 1| < 2 \times 10^{-5}$ et $|\beta - 1| < 3 \times 10^{-3}$ [22, 48] subsument efficacement nombre de tests de la gravitation effectués jusqu'à présent dans le système solaire. Il est bien sûr possible de paramétrer également des termes d'ordres supérieurs en puissance de $1/c$ (en 2 PN et plus), mais la précision actuelle des mesures n'est pas suffisante pour contraindre efficacement ces termes trop petits.

L'approche précédente a ensuite été étendue au cas de métriques ne possédant pas de symétrie particulière. Nordtvedt [49] a ainsi été amené à définir le formalisme PPN (*Parametrized Post-Newtonian formalism*), dans lequel la métrique s'écrit, jusqu'à l'ordre post-Newtonien, en fonction des termes de sources et de huit paramètres libres en plus des paramètres β et γ que nous avons déjà introduits. Ces dix quantités suffisent à paramétrer les déviations à la relativité générale (jusqu'à l'ordre post-Newtonien) de toute théorie alternative de la gravitation qui soit à la fois métrique et qui ne dépende pas d'une échelle de longueur.

Comme nous l'avons signalé, la dynamique gravitationnelle proprement dite est directement testée à l'aide de l'observation des pulsars binaires. Ces systèmes sont intéressants à plus d'un titre. D'abord parce qu'ils ne sont pas situés dans le système solaire, ensuite parce qu'ils permettent de tester la gravitation dans un régime de champ fort, et enfin parce qu'ils mettent en

évidence (de façon indirecte) l'existence des ondes gravitationnelles. Selon la théorie de la relativité générale (et également selon la plupart de ses alternatives), un système binaire perd en effet de l'énergie par rayonnement gravitationnel. Il en résulte une diminution de la période orbitale au cours du temps. Il est possible d'écrire à l'ordre dominant cette variation de la période en fonction des paramètres PPN et des caractéristiques du système en question. La comparaison avec l'observation confirme encore une fois la relativité générale et permet de mettre des bornes sur les paramètres PPN (et notamment $|\gamma - 1| < 8 \times 10^{-4}$).

Terminons cette courte présentation des tests expérimentaux de la relativité générale en soulignant qu'une extension naturelle au principe d'équivalence, le principe d'équivalence fort, est également respecté par la relativité générale. Ce principe requiert que la dynamique gravitationnelle d'un système quelconque est insensible au champ de gravitation global dans lequel il est plongé, pour peu qu'on puisse négliger les inhomogénéités du champ externe. Il est clair, par exemple que les théories tenseurs scalaires abordées au chapitre précédent ne satisfont pas ce principe, puisqu'elle prédisent une variation de la constante de couplage de la gravitation à la matière (la constante de Newton effective) avec la position dans l'espace-temps. De façon plus générale, aucune théorie prédisant une variation de la constante de Newton effective ne peut satisfaire le principe d'équivalence fort¹. La relativité générale et la théorie de Nordström sont en fait les seules théories connues satisfaisant ce principe.

Les « effets de position privilégiés » (*preferred-location effects*), notamment mis en lumière par la valeur variable dans l'espace-temps de la constante de couplage de la matière à la gravitation, ne sont qu'une conséquence parmi d'autres de la brisure du principe d'équivalence fort. Les travaux pionnier de Nordtvedt [50] ont montré qu'il en résulte également une violation de l'universalité de la chute libre pour des corps autogravitants, l'énergie de liaison gravitationnelle contribuant différemment à la masse inertielle qu'à la masse gravitationnelle². Cela permet de tester le principe d'équivalence fort dans le système solaire. En effet, l'énergie de liaison gravitationnelle ne contribuant pas dans les mêmes proportions à la masse de la Lune ou de la Terre, une violation du principe d'équivalence fort impliquerait une chute différente de la Lune et de la Terre vers le Soleil, et engendrerait ainsi une polarisation de l'orbite Terre-Lune en direction du Soleil.

Cet effet peut être calculé en fonction d'un paramètre sans dimension η , initialement introduit par Nordtvedt, et donné par la différence des masses inertielle et gravitationnelle passive, normalisé par l'énergie de liaison gravitationnelle. Les données du LLR (*Lunar Laser Ranging*), mesurant depuis plusieurs dizaines d'années la distance Terre-Lune avec une précision de l'ordre du centimètre, n'ont jamais mis en évidence une telle polarisation. Il en résulte la borne suivante sur le paramètre η : $|\eta| < 1.3 \times 10^{-3}$ [22]. Notons qu'il est possible d'exprimer ce paramètre supplémentaire comme fonction des paramètres PPN, et ainsi d'apporter une contrainte supplémentaire sur l'espace de ces paramètres.

Signalons pour finir que divers phénomènes contraignent la variation de G avec le temps cosmique, laquelle, on l'a dit, est une prédiction générique des théories ne respectant pas le principe d'équivalence fort. On trouvera dans [51] une revue des diverses méthodes employées jusqu'à présent ainsi que le résultat $|\dot{G}/G| < 2 \times 10^{-12} \text{an}^{-1}$. En théorie tenseur-scalaire, ce rapport s'exprime en fonction du couplage de la matière au champ scalaire, de la dérivée temporelle de

¹De même, d'ailleurs, qu'aucune théorie prédisant une variation de la constante de structure fine, par exemple, ne saurait respecter le principe d'équivalence faible.

²Il nous faut donc remarquer qu'au sens strict, une violation du principe d'équivalence fort entraîne nécessairement une violation du principe d'équivalence faible, puisqu'aucun corps ne saurait posséder une auto-gravitation nulle, à moins d'être lui-même dépourvu d'énergie-impulsion. Par conséquent, il nous faut voir le principe d'équivalence faible comme une notion approximative conservant malgré tout une signification empirique tant que les violations de l'universalité de la chute libre impliquées par la brisure du principe d'équivalence fort sont négligeables comparées aux incertitudes des expériences supposées la vérifier.

la valeur de fond du champ scalaire, et du paramètre η ci-dessus introduit [52].

4.2 Contraintes théoriques

Nous avons rapidement listé, en début de ce chapitre, un certain nombre de contraintes théoriques que doivent satisfaire toute théorie raisonnable. Nous avons notamment demandé qu'une théorie soit cohérente. Il faut entendre par là le fait que le système d'équation définissant (en partie) la théorie est cohérent mathématiquement. Nous verrons par exemple dans la section 9.4 que coupler la matière à la gravitation par l'intermédiaire, entre autres, d'un champ vectoriel, n'est pas sans soulever des difficultés, du fait de l'existence d'identités de type Bianchi (nous entendons par là le fait que $d^2 = 0$ en calcul différentiel). De même, et comme nous l'avons signalé déjà au chapitre précédent, inclure « à la main » une variation de la constante de gravitation ou de la vitesse de la lumière dans les équations d'Einstein n'est pas compatible avec l'identité de Bianchi. Ainsi nombre de modèles phénoménologiques décrivant une variation de la vitesse de la lumière en fonction du temps cosmique (théories VSL) [25, 26, 27, 28] sont incohérents.

Bien que nous ne l'ayons pas signalé jusqu'à présent, il est également souhaitable que les équations de la théorie dérivent d'un principe de moindre action, ie. soient les équations définissant l'extrémale d'une intégrale. Bien qu'aucun argument définitif ne semble l'imposer comme absolument nécessaire, l'existence d'un formalisme Lagrangien est utile à plus d'un titre. Il en résulte d'abord l'existence d'un courant et d'une charge conservés associés à toute symétrie continue, et par là même, en quelque sorte, le principe d'action et de réaction³. Par ailleurs, il permet de définir canoniquement les impulsions généralisées, et ouvre ainsi la voie à la quantification de la théorie. Au contraire, le système d'équations suivant (par exemple)

$$\square\varphi = \lambda\chi^2\varphi \quad (4.3)$$

$$\square\chi = 0 \quad (4.4)$$

régissant la dynamique de deux champs scalaires χ et φ , bien que cohérent, ne peut manifestement pas dériver d'un principe d'action. Si le champ φ se couple au champ χ du fait de la première équation, l'inverse n'est pas vrai. Une visualisation diagrammatique à la Feynman n'est plus possible; déterminer les quantités conservées associées à ce système semble non trivial, et la manière de le quantifier est plus obscure encore.

Enfin, une théorie sera dite naturelle si elle est exempte de réglages fins de certains de ses paramètres ou des éventuelles fonctions numériques qu'elle met en scène. On ne pourra par exemple se déclarer satisfait d'une théorie nécessitant qu'un nombre sans dimension soit compris dans un intervalle trop restreint de valeurs autorisées, ou d'une théorie impliquant des fonctions numériques doivent avoir des formes très particulières sélectionnant en particulier quelques valeurs (telles que des fonctions de type Heaviside ou Dirac). Les exemples de réglages fins que nous rencontrerons seront peut-être plus parlant qu'une vague définition (nécessairement délicate) du caractère naturel d'une théorie. Il s'agit d'ailleurs d'une notion avec laquelle le lecteur est certainement familier, et pour ces deux raisons, nous n'en dirons pas plus ici.

³A notre connaissance, le principe d'action et de réaction n'est bien défini qu'en théorie Newtonienne. Si nous voulons lui trouver une expression formelle dans le cadre de la théorie relativiste des champs et de la gravitation, il nous faut abstraction de la notion de force, et conserver l'essence du principe d'action et de réaction de Newton, à savoir la conservation de l'impulsion. L'existence de lois de conservation, notamment de l'énergie-impulsion, semble la traduction la plus fidèle de ce principe dans le cadre plus général que nous considérons ici.

Stabilité

S'il est facile de se restreindre à l'étude de théories respectant les conditions que nous avons énoncées jusqu'à présent (cohérence, existence d'un formalisme Lagrangien), il l'est moins de garantir leur stabilité. Nous entendons par là, essentiellement, de s'assurer que le Hamiltonien total soit borné inférieurement⁴. Cette propriété est en effet cruciale, puisque, dans le cas contraire, aucun des états liés quotidiennement observés (tels que les nucléons, les atomes, ou la matière en général, ou encore les systèmes gravitationnellement liés tels que les étoiles ou les planètes), ne pourraient exister de façon pérenne, en violente contradiction avec l'expérience – du moins si le temps caractéristique de l'instabilité n'est pas trop grand (typiquement, s'il n'est pas supérieur à l'âge de l'Univers)⁵.

Notons que la relativité générale pose à cet égard un problème nouveau, puisque son Hamiltonien (calculé de façon canonique) s'annule, du fait de l'invariance sous les difféomorphismes de la théorie. Par ailleurs, aucune autre façon de calculer une énergie ne semble satisfaisante. Une voie possible semble de s'affranchir de l'invariance par reparamétrisation, c'est-à-dire par changement de coordonnées, afin de libérer la théorie de sa contrainte Hamiltonienne. Pour cela il faut déparamétriser la théorie, c'est-à-dire essentiellement exprimer l'évolution dynamique en terme de quantités invariantes de jauge, ce que ne sont pas les coordonnées sur l'espace-temps. A titre d'exemple citons le travail de Brown et York [53] où un temps invariant de jauge est construit comme le quadri-volume de l'espace-temps entre deux surface de genre espace.

Plutôt qu'entrer dans ces considérations délicates, nous nous contenterons ici d'un critère plus simple : puisque localement, il est toujours possible d'annuler au premier ordre les effets de la gravitation, nous imposerons simplement que le Hamiltonien, calculé en espace plat, soit borné inférieurement. Illustrons d'abord, à l'aide de l'action d'un champ scalaire φ en espace plat deux sources d'instabilités bien connues. Écrivons cette action sous la forme :

$$S_\varphi = \int d^4x \mathcal{L}_\varphi = - \int d^4x \left(\frac{\varepsilon}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) \right) \quad (4.5)$$

où le potentiel V est une fonction quelconque et où $\varepsilon = \pm 1$. Le moment canonique π associé à φ s'en déduit aisément :

$$\pi \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_\varphi}{\delta \partial_0 \varphi} = -\varepsilon \partial^0 \varphi, \quad (4.6)$$

et le Hamiltonien H s'écrit finalement

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (\pi \partial_0 \varphi - \mathcal{L}_\varphi) \\ &= \int d^3x \left(\varepsilon \frac{(\partial_0 \varphi)^2 + (\nabla \varphi)^2}{2} + V(\varphi) \right) \\ &= \int d^3x \left(\varepsilon \frac{\pi^2 + (\nabla \varphi)^2}{2} + V(\varphi) \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Il ressort de la formule précédente que le Hamiltonien est borné inférieurement si et seulement si $\varepsilon = +1$ et si le potentiel V est borné inférieurement. Nous voyons que dans le cas où $\varepsilon = -1$, les ondes scalaires portent une énergie négative. De tels champs, ayant, pour ainsi dire, le mauvais signe devant leur terme cinétiques sont (instables et) appelés des fantômes (ou *ghosts*).

⁴L'existence même d'un Hamiltonien est d'ailleurs relatif à l'existence d'un formalisme Lagrangien

⁵Aussi l'exigence de stabilité n'est pas réellement une contrainte théorique, même si la présence d'instabilités pose de graves problèmes, en général, dans la construction de la version quantifiée d'une théorie; la stabilité de la matière, au delà même d'un éventuel argument anthropique qui la rende de toute façon nécessaire, est fort bien établie expérimentalement.

Nous dirons par ailleurs, si le potentiel n'est pas borné inférieurement, que le champ souffre d'une instabilité de type tachyonique. Cela vient du fait que les tachyons, définis comme étant des particules de masses carrées négatives, sont décrits par un potentiel $V(\varphi) = -m^2\varphi^2/2$, évidemment non borné inférieurement.

Notons aussi que les termes de couplage entre différents champs (ou les termes d'auto-couplage, tel que le potentiel $V(\varphi)$ dans l'exemple précédent) peuvent aussi amener, selon leur forme, à une théorie instable. Il ne saute pas toujours aux yeux qu'une action définit conduit à une théorie instable; le seul moyen de s'en assurer est de calculer le Hamiltonien au cas par cas, ce qui, du reste, est relativement aisé.

Il semble moins connu que les théories dites à dérivées d'ordre supérieur sont également instables, à moins peut-être d'être non-locales. Ces théories sont telles que les équations dynamiques définissant la théorie dépendent des dérivées troisièmes ou plus des quantités formant l'espace de configuration du modèle (par exemple : les positions, les valeurs des champs, etc.). Une telle théorie, si elle est issue d'un principe d'action, ce que nous supposons ici, est décrite par un Lagrangien dépendant lui-même des dérivées secondes ou plus des variables canoniques.

A titre d'exemple considérons la dynamique d'un point matériel de position $x(t)$ régie par un Lagrangien dépendant des dérivées de la position jusqu'à l'ordre n . Nous noterons $x^{(i)}$ la dérivée i -ème de la variable x par rapport au temps. Le Lagrangien s'écrit alors sous la forme $\mathcal{L}(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)})$. L'équation du mouvement $\delta S/\delta x(t) = 0$, s'écrit

$$\sum_{i=0}^{i=n} \left(-\frac{d}{dt}\right)^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{(i)}} = 0. \quad (4.8)$$

Ostrogradski a proposé, dès 1850 [54, 55, 34], de construire le Hamiltonien d'un tel système dynamique de la façon suivante. L'espace des phases, de dimension $2n$ a pour coordonnées canoniques les « positions » $x^{(i-1)}$ ($1 \leq i \leq n$) auxquelles sont associées les moments canoniques conjugués p_i ($1 \leq i \leq n$) définis de la façon suivante :

$$p_i = \sum_{j=i}^{j=n} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{j-i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{(j)}}. \quad (4.9)$$

Le Hamiltonien H , défini par :

$$H = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x^{(i)} - \mathcal{L}, \quad (4.10)$$

ne peut être considéré comme fonction sur l'espace des phases $(x^{(i-1)}, p_i)$ qu'à la condition que $x^{(n)}$ puisse s'exprimer en fonction des coordonnées canoniques. Pour cela il suffit que la relation $p_n = \partial \mathcal{L}/\partial x^{(n)}$ soit inversible pour $x^{(n)}$. On dit dans ce cas que le Lagrangien est non dégénéré (par rapport à la n -ième dérivée). Cette hypothèse nous permet d'écrire $x^{(n)}$ sous la forme $x^{(n)} = \mathcal{F}(x, \dots, x^{(n-1)}, p_n)$ pour une certaine fonction \mathcal{F} . Le Hamiltonien, qui s'écrit alors :

$$H = \sum_{i=1}^{i=n-1} p_i x^{(i)} + p_n \mathcal{F} - \mathcal{L}(x, \dots, x^{(n-1)}, \mathcal{F}), \quad (4.11)$$

où il nous faut considérer les $2n$ coordonnées canoniques comme indépendantes⁶, apparaît très clairement être linéaire en les $n-1$ premiers moments canoniques p_i , et ne peut par conséquent pas être borné inférieurement dès que $n \geq 2$.

⁶Ce Hamiltonien correspond bien à la notion d'énergie, puisque, comme on peut le montrer facilement, il est à la fois conservé et engendre les translations dans le temps. Notons que l'indépendance a priori des coordonnées canoniques n'est pas en flagrant désaccord avec la façon dont on les a introduites, puisque le premier lot des équations de Hamilton (généralisées) $dx^{(i-1)}/dt = \partial H/\partial p_i$ assure que $dx^{(i-1)}/dt = x^{(i)}$, comme il se doit.

Le cas $n = 1$ qui est le cas standard où le Lagrangien ne dépend que de la dérivée première de la position apparaît donc comme extrêmement particulier vis-à-vis de la question de la stabilité (cela, d'ailleurs, est indépendant du nombre de dimension de l'espace-temps). Lorsque le Lagrangien ne dépend pas des dérivées de la position, il n'y a pas de dynamique, et s'il dépend des dérivées secondes ou plus, la dynamique est instable. Le résultat précédent semble donc extrêmement significatif, de par son habilité à contraindre fortement la forme des théories physiques.

Remarquons cependant qu'il est possible de définir des théories stables à l'aide d'un Lagrangien qui ne dépende pas seulement des dérivées d'ordre supérieures jusqu'à un ordre fini, mais de toutes les dérivées jusqu'à un ordre infini. Ces théories non locales⁷ dans le temps peuvent parfaitement être stables. Le lecteur en trouvera des exemples explicites dans la référence [56]. Le point intéressant est que, par conséquent, choisir de tronquer une théorie non-locale et stable, à l'aide par exemple d'un développement de Taylor, n'est pas sans poser problèmes, puisque la théorie résultante, qui se veut une bonne approximation de la théorie complète, en est en fait très éloignée, puisque instable. Tronquer une théorie non-locale et stable demande d'imposer à la main l'absence de modes instables et exponentiellement croissants [56]. Réciproquement, une théorie locale dépendante des dérivées d'ordre supérieur, quoique instable, peut également se concevoir comme une théorie effective tronquée d'une théorie non-locale sous-jacente et qui reste encore à déterminer.

Causalité

L'explication causale

Bien qu'il existe des cadres conceptuels dans lesquels l'explication d'un état de fait ne nécessite pas, ni ne suffit à montrer, l'existence d'un lien causal entre ce dernier et un certain ensemble de prémisses⁸, et malgré les difficultés à cerner même ce qu'est la causalité et ce que doit être une explication, nous ne nous fourvoieront guère à rappeler que le pouvoir explicatif des théories physiques se réduit, de fait, à la possibilité d'assigner, par l'entremise d'un certain nombre de lois, un lien causal entre les divers phénomènes qu'elles modélisent. Si l'explication n'est pas nécessairement causale, au moins la mise en évidence d'un lien causal possède un certain rôle explicatif. De ceci découle l'idée généralement admise que toute théorie physique raisonnable doit respecter le principe de causalité, c'est-à-dire qu'elle puisse lier tout phénomène qu'elle décrit (l'effet) à un autre phénomène qui l'engendre (la cause).

Notons cependant que la notion d'antériorité, sous-jacente à la notion de lien causal, rend le schéma de l'explication causale essentiellement asymétrique. Ainsi le caractère seulement *a posteriori* de l'explication causale ne permet pas de la soumettre à une corroboration expérimentale, et l'on ne saurait, telle quelle, lui attribuer une quelconque valeur scientifique. L'explication causale ne sera validée que si l'on peut la retourner « en un instrument prédictif⁹, allant de causes connues à un phénomène encore inconnu » ([58], §1.1), de sorte qu'au final, l'explication causale se conçoit comme « la conversion rétrodictive d'une loi dont l'usage pratique est d'abord prédictif » ([58], §1.1). Notons qu'à cette fin il n'est pas nécessaire qu'une seule cause soit responsable d'un effet donné, ni qu'à toute cause ne soit associé qu'un seul effet (même si, dans ce cas, il faut

⁷Bien qu'il semble au premier abord que la localité soit une conséquence naturelle de la relativité restreinte et de la causalité, on montre sans peine qu'il existe de fait des théories invariantes de Lorentz mais non locales : la théorie d'un champ scalaire φ et de Lagrangien $1/L^2 \exp(L^2 \square \varphi)$ où L est une échelle de longueur en est un exemple.

⁸On trouvera une introduction aux liens qu'entretiennent les notions d'explication et de causalité dans [57], Chp 5.

⁹Lui-même devant être corroboré par l'expérience.

considérer un outil prédictif intrinsèquement probabiliste ; la mécanique quantique en fournit un exemple).

Soulignons que la possibilité de ce retournement prédictif n'est pas seulement une condition nécessaire à l'élaboration d'un discours scientifique, elle en définit également l'objet. En effet, elle présuppose qu'en toute circonstance telle cause produira toujours tel effet, ce qui, remarquons le, n'a aucune raison d'être vrai a priori. Ainsi toute chaîne de phénomènes physiques non reproductible est automatiquement exclue du champ de l'investigation scientifique. Ce critère de validation de l'explication causale fournie par les théories physiques porte en lui le caractère universel de leurs lois.

Causalité et temporalité

Il ressort de la notion intuitive de la causalité une notion d'antériorité, et donc de temporalité, la cause se devant de précéder l'effet. Aussi semble-t-il nécessaire, pour formuler même ce qu'est la causalité, de disposer d'une notion de temps et d'une temporalité¹⁰ (un ordre total sur le temps). Remarquons cependant que les théories physiques ne considèrent pas les notions de temps et de temporalité comme étant données a priori mais cherchent à en construire des représentations. De ceci découle le fait que l'expression de la causalité n'est pas indépendante du cadre théorique considéré. Cette remarque somme toute banale s'avérera d'une grande importance lors de la discussion du comportement causal des signaux supraluminiques, cf. Sec. 5.1.

Bien que l'existence d'une temporalité semble nécessaire à l'expression de la causalité, elle ne garantit pas le caractère causal de la théorie. On parlera alors d'une condition de causalité (*causality condition*, cf. [59]). Reprenons alors la discussion précédente et supposons, dans toute la suite, que causes et effets sont liés de façon biunivoque. La causalité demande alors que cette assignation biunivoque entre événements ordonnés temporellement se déduise des lois (causales) constituant le corps de la théorie. Puisque, par ailleurs, nous décrirons aussi bien les causes que les effets en termes de valeurs de certaines variables, la causalité requiert finalement que le système d'équations (différentielle) régissant la dynamique propage de façon unique¹¹ dans le temps tout lot de conditions initiales autorisées.

Remarquons que la causalité ainsi définie ne se distingue plus guère du déterminisme. Cela, cependant, provient plus de notre hypothèse de biunivocité cause-effet, que de la notion de causalité elle-même. La quantification d'une théorie, par exemple, préserve en un certain sens le caractère causal de la théorie initiale (classique), mais en ruine le déterminisme. Puisque, par la suite, nous nous restreignons aux théories classiques des champs relativistes, il est naturel ici de supposer ce lien biunivoque.

Conditions de causalité

L'espace-temps Newtonien, du fait de sa topologie $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, est naturellement doté d'une fonction de temps globale, garantissant ainsi l'existence d'un ordre temporel (total) entre les événements. L'espace-temps de la relativité restreinte est également naturellement doté d'un ordre temporel (partiel), grâce aux notions de futur et de passé absolus qu'induit la métrique Minkowskienne (et du fait de sa topologie triviale \mathbb{R}^4). Qu'en est-il en relativité générale ? L'existence d'une

¹⁰Notons cependant que certains auteurs ont voulu, au contraire de l'approche ici présentée, réduire la temporalité à la causalité, c'est-à-dire définir les relations d'antériorité à l'aide des relations causales. Nous y reviendrons au chapitre suivant.

¹¹On perd l'unicité de la solution d'un système d'équations s'il s'il existe une symétrie de jauge transformant une solution en une autre. On la retrouve cependant si l'on restreint le discours aux classes de solutions équivalentes - c'est-à-dire identiques à ces transformations de jauge près. Maintenir le déterminisme causal présenté ci-dessus demande de considérer que seules les quantités invariantes de jauge sont à même de décrire les événements physiques (cause ou effets).

telle chronologie –même partielle– est plus incertaine. Bien que la métrique (gravitationnelle) $g_{\mu\nu}^*$ se réduise localement à sa forme Minkowskienne et induise de la sorte une chronologie (locale) dans l'espace tangent (ie. définisse des vecteurs de type temps, lumière ou espace), il n'est pas garanti en général qu'une chronologie globale existe sur l'espace-temps dans son ensemble. Par chronologie globale nous signifions l'existence d'un ordre (temporel) partiel sur l'espace-temps. En effet, sans même évoquer des topologies non triviales excluant manifestement l'existence d'un tel ordre partiel (tel que considérer des variétés non orientables, compactes, etc.), ce qui du reste est déjà implicitement supposé dans le cadre de la théorie Newtonienne ou de la relativité restreinte¹², le fait que la métrique, qui, de par sa signature hyperbolique, permet de privilégier une coordonnée temporelle par rapport aux coordonnées spatiales, soit elle-même dynamique, pose des problèmes nouveaux.

Il est en effet possible, a priori, que la solution des équations dynamiques soit telle que les courbes de type temps de la variété espace-temps soient fermées sur elles-mêmes. Ce souci, répétons-le, n'est pas seulement réductible à un choix arbitraire et a priori d'une topologie particulière de la variété, puisqu'il est tout à fait possible d'avoir une variété de topologie triviale (en tant qu'espace topologique) mais dont la structure métrique ne l'est pas.

Quelle structure métrique requiert la causalité? Bien évidemment, il faut d'abord que la métrique conserve son caractère hyperbolique en tout point. Par ailleurs, il faut pouvoir ordonner deux points reliés par une courbe de type temps (ou lumière), et cela impose, essentiellement, qu'aucune courbe de type temps (ou lumière), ne soit fermée (*closed timelike curves*), puisqu'on ne peut pas munir une courbe fermée d'une relation d'ordre. Les travaux des années 1960-1970, dont on trouvera les références dans les textes standards [60, 59] portant sur les propriétés causales de la relativité générale ont permis de formaliser précisément cette exigence. Plusieurs conditions de causalité, plus ou moins fortes, ont ainsi été ainsi dégagées. Nous ne retiendrons ici que la plus forte d'entre elles : l'hyperbolicité globale de l'espace-temps (ici et dans toute la suite, nous parlons de l'espace-temps comme du couple constitué de la variété \mathcal{M} et d'une métrique). Un espace-temps est dit globalement hyperbolique s'il possède une surface de Cauchy¹³. On montre facilement qu'un tel espace-temps ne peut pas posséder de courbes de type temps fermées. Mieux encore, on montre qu'il existe une fonction de temps globale f sur la variété telle que les hypersurfaces $f = cst$ sont des surfaces de Cauchy. On peut ainsi feuilleter un tel espace-temps en surfaces de Cauchy, ce qui montre qu'il possède la topologie (induite par la métrique) de $\mathbb{R} \times \Sigma$, où Σ est une surface de Cauchy, et ce dont il découle l'existence d'une chronologie globale.

Causalité en relativité générale et statut des théories alternatives

Puisque, comme nous l'avons vu, la grande nouveauté de la relativité générale par rapport à la question de la causalité tient au caractère dynamique de la métrique, c'est-à-dire, de l'objet qui lui même permet (sous les conditions que nous avons énoncées plus haut) d'assigner des relations temporelles entre des points, il n'est plus question de supposer d'abord que l'espace-temps est causal (qu'il possède une chronologie globale fixée d'avance), pour étudier ensuite le problème de Cauchy des équations dynamiques définissant la théorie. Ces deux étapes ne peuvent plus être séparées et doivent être menées de concert. Il faut donc prouver l'existence et l'unicité d'un espace-temps globalement hyperbolique et solution des équations de la dynamique étant données des conditions initiales sur une 3-surface (pour une présentation plus précise de ces « développements maximum de Cauchy », nous renvoyons aux références [59, 60]). Cela a été

¹²On peut manifestement ruiner le comportement causal de la théorie Newtonienne en supposant que la coordonnée temporelle prenne ses valeurs sur un ensemble ayant la topologie d'un cercle.

¹³Il, s'agit, grossièrement, d'une hypersurface de genre espace dont le domaine de dépendance, c'est-à-dire l'ensemble des points P de la variété tels que toutes les courbes de type temps passant par P intersecte la surface en question, est la variété \mathcal{M} tout entière. On trouvera une définition plus précise dans [59].

démontré pour le système d'équations de la relativité générale couplée à de la matière ordinaire. Cependant, il existe *aussi* des espace-temps solutions des équations d'Einstein qui ne sont pas globalement hyperboliques, et qui possèdent même des courbes de type temps fermées. Que de telles solutions soient obtenues à l'aide de prolongements (exemple : trou noir de Kerr), ou de propriétés inhabituelles de la matière (exemple : cordes cosmiques de Gott [61]), il nous faut nous résoudre au fait que la relativité générale possède des solutions noncausales. Se restreindre aux seules solutions causales est donc un choix de nature épistémologique plutôt que de nature dynamique [62].

Quel est le statut des théories alternatives de la gravitation par rapport à la question de la causalité? Nous ne pouvons répondre de façon générale, puisque, pour commencer, l'analyse dépend de la façon dont on dote l'espace-temps d'une structure chronologique. Si celle-ci est présente *ab initio*, comme dans la théorie de Newton mais aussi dans les théories scalaires de la gravitation (puisque, pourvu que la fonction $A(\varphi)$ ne s'annule pas, l'espace-temps $(\mathcal{M}, \tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)\eta_{\mu\nu})$ hérite du caractère globalement hyperbolique de l'espace de Minkowski, et ce quel que soit la distribution du champ φ dans l'espace-temps), il suffira alors d'étudier le problème de Cauchy des équations étant donnée cette structure, et vérifier qu'aucune propagation ne peut relier des points non ordonnés temporellement. À cet égard notons d'ailleurs que les théories scalaires de la gravitation ont un problème de Cauchy bien posé dès que le terme cinétique du champ scalaire est standard (en vertu, par exemple, du théorème 10.1.2 de [59]). Si au contraire, les relations chronologiques ne sont pas données a priori mais grâce à une métrique dynamique, il faut suivre la procédure ci-dessus évoquée et montrer, si possible, l'existence de développements de Cauchy. Cette propriété est loin d'être triviale et doit être analysée au cas par cas. Puisque cela dépend essentiellement de la forme du système d'équations différentielles, il est certainement préférable que celui-ci se présente sous la forme d'un système du second ordre, quasi linéaire (linéaire dans les dérivées secondes) et hyperbolique, systèmes pour lesquels nombre de théorèmes relatifs au problème de Cauchy sont connus. Cela ne signifie pas, remarquons-le, que des théories dépendant de dérivées d'ordre supérieur soient nécessairement non causales (c'est même faux, cf. [59]). Pour finir, bien sûr, si la théorie alternative en question est tellement éloignée de la relativité générale que les relations chronologiques ne sont même plus données par la métrique, il faudra se poser la question de la causalité dans un langage certainement tout à fait nouveau.

Les théories alternatives que nous avons nommées conventionnelles sont génériquement causales (bien que cela dépende évidemment de la forme des termes cinétiques des nouveaux champs). Ainsi on montre facilement que les théories scalaires et tenseurs-scalaires de la gravitation sont causales [19]. [Dans le cas où le terme cinétique scalaire est de type k-essence, il faut tout de même imposer quelques contraintes à la forme de la fonction libre, voir le chapitre suivant]. Le cas des théories vectorielles est assez similaires : selon la forme du terme cinétique du champ vectoriel, ou de la présence ou non de contraintes a priori sur la norme du champ vectoriel (cf. TeVeS), le problème de Cauchy est ou n'est pas bien posé. De façon assez générale, si les champs gravitationnels additionnels (notamment vectoriels) et leur dynamiques ne modifient pas le caractère quasi-linéaire du second ordre et hyperbolique du système d'équations complet (des champs de gravitation couplés aux champs de matières), alors la théorie demeure causale.

Comme nous l'avons rappelé en introduction cependant, et au contraire de la conclusion rapidement dressée ci-dessus, la thèse selon laquelle les théories considérant des propagations supraluminiques ne sont pas causales (telles que, par exemple, les théories de k-essence ou les théories bimétriques de la gravitation -lorsque $\tilde{g}_{\mu\nu}$ n'est pas conformément relié à $g_{\mu\nu}^*$), a été ardemment soutenue et a engendré nombre de positions contradictoires dans la littérature. Nous examinons plus en détail cette question dans le chapitre suivant.

Causalité et propagations supraluminiques (article)

5.1 Présentation du travail et résultats

Les propagations supraluminiques, analysées en terme de relativité restreinte, sont non causales, puisqu'elles relient un événement A , la cause, à un événement B , l'effet, qui ne sont pas ordonnés temporellement (les événements A et B sont reliés par un intervalle de type espace). En d'autres termes, selon l'observateur, l'événement A peut apparaître aussi bien comme précédent ou comme suivant l'événement B (l'avant et l'après font ici référence aux lignes de simultanéité telles que peuvent les définir les observateurs inertiels). On montre par ailleurs que disposer de signaux supraluminiques quelconques permet aisément de construire un signal se propageant le long d'une courbe fermée dans l'espace temps, cf. Sec. 5.3 ci dessous.

Afin de comprendre pourquoi les théories de champs supraluminiques ne sont pas nécessairement non causales, cependant, il nous faut insister sur le fait que les propagations de ce type *ne sont pas* quelconques. Bien au contraire, et bien que supraluminiques, les ondes de champs se propagent toujours le long (ou à l'intérieur) d'un cône dans l'espace-temps qui a pour unique spécificité d'être plus évasé que le cône de lumière. Il est crucial de distinguer les propagations supraluminiques quelconques des propagations supraluminiques le long d'une métrique (ie. d'un cône). Comme nous allons le voir, s'assurer que les caractéristiques des équations de champs définissent bien un (ou des) cône(s) dans l'espace-temps, c'est-à-dire également, s'assurer que les équations des champs sont bien hyperboliques, suffit quasiment à garantir le caractère causal de tels champs.

Dans l'article que nous reproduisons ci-dessous, nous avons étudié en particulier les théories de k-essence scalaires et les théories bimétriques de la gravitation. Contentons-nous, dans ce court résumé de notre travail, d'illustrer l'idée précédente dans le cadre des théories de k-essence scalaire (on suppose ici $g_{\mu\nu}^* = \tilde{g}_{\mu\nu}$, notée $g_{\mu\nu}$). Cette classe de théories met en scène un champ scalaire φ dont le terme cinétique est non standard. Ainsi l'action s'écrit :

$$S = - \int \sqrt{-g} d^4x F \left(\frac{g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi}{2} \right) + \text{gravité et matière}, \quad (5.1)$$

où nous avons omis les constantes dimensionnées ainsi qu'un éventuel terme de potentiel (voir Eq.(5.5) ci-dessous), et où F est une fonction a priori quelconque. On montre sans peine que les ondes scalaires se propagent plus vite que la lumière (supposée ici suivre les géodésiques de $g_{\mu\nu}$) dès que $F''(x) > 0$. Garantir l'hyperbolicité de l'équation de champ, qui s'écrit en terme d'une métrique effective

$$G^{\mu\nu} \equiv F'(X)g^{\mu\nu} + F''(X)\partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi, \quad (5.2)$$

sous la forme :

$$G^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi = \text{sources}, \quad (5.3)$$

où l'on a posé $X = g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi / 2$, revient en fait à imposer certaines conditions sur la fonction F . Explicitement il faut que

$$F'(x) > 0 \quad (5.4a)$$

$$F'(x) + 2xF''(x) > 0. \quad (5.4b)$$

[Plus de détails à ce sujet dans la Sec. 5.4 ci-dessous]. Ces conditions, remarquons-le, ne sont pas incompatibles avec $F''(x) > 0$, de sorte qu'un champ scalaire peut à la fois être supraluminique et satisfaire une équation hyperbolique (ou, en d'autres termes, se propager le long du cône défini par la métrique effective $G^{\mu\nu}$ ci-dessus). Il est alors immédiat de montrer, en référence aux théorèmes portant sur les systèmes d'équations quasi-linéaires et hyperboliques, qu'un champ scalaire de k-essence a un problème de Cauchy bien posé, pourvu que les conditions ci-dessus soient remplies, et ce quel que soit le signe de $F''(X)$.

Il semble donc que cette théorie soit causale, en dépit de la présence d'ondes supraluminiques. Reste cependant, ne l'oublions pas, l'objection selon laquelle la cause et l'effet (exemple : émission et réception d'une onde scalaire), ne sont pas ordonnés dans le temps. Au vu de la discussion du chapitre précédent, il nous faudrait alors conclure que les champs de k-essence scalaires supraluminiques ne sont pas causaux, bien qu'ils aient un problème de Cauchy bien posé.

Il est cependant crucial de remarquer que causes et effets ci-dessus mentionnés ne peuvent effectivement pas être ordonnés en référence, *seulement*, à la chronologie induite par la métrique électromagnétique, ie. celle selon laquelle se propagent les ondes électromagnétiques dans le vide. Mais, bien entendu, la situation ici est radicalement différente de la relativité restreinte ou de la relativité générale, puisque l'espace-temps n'est plus seulement muni d'une seule métrique \mathbf{g} , mais de *deux* métriques \mathbf{g} et \mathbf{G} . Elles induisent chacune une chronologie différente dans l'espace-temps, et, si deux événements reliés par une onde scalaire supraluminique ne peuvent manifestement pas être ordonnés à l'aide de la métrique \mathbf{g} , ils peuvent l'être à l'aide de la métrique \mathbf{G} .

Cet assujettissement de la temporalité à la causalité que nous prônons ici hérite de la seconde école de pensée concernant les liens qu'entretiennent causalité et ordre temporel. La première école de pensée, que nous avons suivie jusqu'ici, demande une notion préexistante de temporalité pour définir la causalité ; la seconde veut réduire la temporalité à la causalité, c'est-à-dire demande que deux événements soient ordonnés dans le temps *parce qu'un lien causal* (un signal, une interaction, etc.) existe entre les deux. Dans le cadre des théories des champs relativistes, où, comme on l'a vu, il est possible que l'espace-temps soit muni de plusieurs métriques distinctes, cette seconde approche nous semble la seule défendable. Suivre la première école de pensée dans ce cas, demande en effet de choisir une chronologie (ou une métrique) privilégiée par rapport aux autres dans l'espace-temps. Il n'y a cependant, nous semble-t-il, aucune raison de privilégier l'une d'entre elles ; ainsi, exclure les propagations supraluminiques *sur la base seule* que la métrique électromagnétique (ou de la matière, si toute la matière est couplée à la même métrique) doit être, pour une raison largement ignorée, privilégiée par rapport aux autres nous semble totalement *ad hoc* et intenable.

Nous avons beaucoup insisté sur le problème de Cauchy, l'hyperbolicité des équations, l'absence de courbe fermée dans l'espace-temps, etc, parce que là réside, selon nous, le vrai débat sur la causalité. Pour autant, il est important de signaler que nombre d'auteurs ont jugé les propagations supraluminiques comme acausales, non pas sur la base de tels arguments, mais essentiellement sur la base d'un choix a priori et discutable d'une chronologie privilégiée. Nous voulons ici souligner la vacuité d'un tel raisonnement ; vacuité qui se révèle d'ailleurs de façon on ne peut plus claire dans des prises de positions opposées. Ainsi, Hawking et Ellis [60] choisissent de privilégier la métrique gravitationnelle, parce que cela donne au champ gravitationnel un caractère géochronologique supplémentaire (ce qui, au vu de son statut déjà singulier quant à sa capacité à se coupler universellement à tous les autres champs, peut sembler raisonnable). Au contraire, Bekenstein, à plusieurs reprises [2, 20, 63, 24], considère que c'est la métrique de la matière qui doit servir à ériger une chronologie privilégiée, parce que les horloges et étalons de longueur qui nous servent à coordonner des événements dans l'espace-temps sont faits de matière. Cet argument, remarquons-le, n'est pas recevable. En effet tout champ se couplant à

une métrique donnée peut également servir à fabriquer des horloges et des étalons de longueurs qui coordonne les événements au sens de cette métrique. Si, par conséquent, nous poussions le raisonnement ci-dessus plus avant, nous obtiendrions qu'un signal physique puisse paraître causal à tel observateur utilisant tels ou tels étalons de distance et de temps, tandis qu'il apparaîtrait non causal à un observateur utilisant un autre système de mesure. Une telle conception est certainement inadmissible.

Remarquons que la réponse récente à l'article que nous reproduisons ci-dessous n'évite pas cet écueil. Ainsi les auteurs de la Ref. [64] affirment que « The spacetime metric is special, despite these claims : it determines time measurements and spatial distances (...) ». Bien au contraire, nous avons rappelé ci-dessus que les distances et intervalles de temps que définit toute métrique peuvent être mesurée en utilisant les divers champs auxquels elle se couple. Cela, en aucun cas, n'est spécifique à la métrique gravitationnelle (que ces auteurs appellent ici « the spacetime metric »).

L'article qui suit reprend plus en détail ce que nous venons de dire. Nous insistons en particulier sur la question du problème de Cauchy et sur les propriétés globales de l'espace-temps, et non seulement sur ses propriétés locales. C'est là, comme nous l'avons souligné, que réside le coeur de la question. En réfutant par ailleurs l'argumentaire présenté ci-dessus, et en se tournant vers une réduction (partielle) de la temporalité à la causalité, nous sommes finalement capables d'affirmer que les théories des champs supraluminiques sont génériquement causales, contrairement à ce qui fréquemment défendu. Il s'agit du principal résultat de notre analyse.

Nous noterons également, par conséquent, que les propagations supraluminiques du champ scalaire de k -essence, qui constitue un ingrédient essentiel des théories récentes de MOND, ne ruinent pas le caractère causal de ces théories. Dans le courant de l'article cependant (cf. Sec. 5.7), nous faisons remarquer que les modèles actuels de MOND sont tels que la fonction F satisfait à $F'(0) = 0$. L'équation du champ scalaire est par conséquent mal définie sur toutes les hypersurfaces $X = 0$, et la théorie est non causale. Ainsi le danger d'utiliser un tel champ scalaire de k -essence comme théorie de MOND ne réside pas dans le fait que celui-ci doive se propager de façon supraluminique, mais dans le comportement singulier de l'équation scalaire en $X = 0$. Nous démontrons que cette difficulté est évitée au prix d'une légère modification de la forme de la fonction F , ce qui a, en retour, pour conséquence d'altérer profondément la phénoménologie MOND. Ainsi, s'il faut décrire le régime MONDien à l'aide d'un champ scalaire de k -essence, il est *nécessaire* que la loi de la gravitation soit à nouveau la loi de Newton très loin d'un corps (et en régime non relativiste), avec une constante de gravitation renormalisée. Nous y reviendrons plus en détail dans la troisième partie de ce manuscrit (cf. Sec. 9.1).

Cet article a été publié dans la revue *Physical Review D*.

**On causality and superluminal behavior in classical field theories.
Applications to k-essence theories and MOND-like theories of gravity.**

Jean-Philippe Bruneton¹

GR ϵ CO,

*Institut d'Astrophysique de Paris, UMR 7095-CNRS, Université Pierre et Marie Curie - Paris
6, 98 bis boulevard Arago F-75014, Paris, France*

Field theories with Lorentz (or diffeomorphism invariant) action can exhibit superluminal behaviors through the breaking of local Lorentz invariance. Quantum induced superluminal velocities are well-known examples of this effect. The issue of the causal behavior of such propagation is somewhat controversial in the literature and we intend to clarify it. We provide a careful analysis of the meaning of causality in classical relativistic field theories and stress the role played by the Cauchy problem and the notion of chronology. We show that, in general, superluminal behavior threaten causality only if one assumes that a prior chronology on spacetime exists. In the case where superluminal propagation occurs, however, there are at least two non conformally related metrics on spacetime and thus two available notions of chronology. These two chronologies are on equal footing and it would thus be misleading to choose *ab initio* one of them to define causality. Rather, we provide a formulation of causality in which no prior chronology is assumed. We argue that this is the only way to deal with the issue of causality in the case where some degrees of freedom propagate faster than others. In that framework, then, it is shown that superluminal propagation is not necessarily noncausal, the final answer depending on the existence of an initial data formulation. This also depends on global properties of spacetime that we discuss in detail. As an illustration of these conceptual issues, we consider two field theories, namely k-essence scalar fields and bimetric theories of gravity, and we derive the conditions imposed by causality. We discuss various applications such as the dark energy problem, MOND-like theories of gravity and varying speed of light theories.

PACS numbers : 03.50.-z, 04.20.Gz, 95.30.Sf, 95.35.+d, 95.36.+x

5.2 Introduction

The question of the causal behavior of superluminal propagation has been often debated, in rather different contexts : tachyonic particles (e.g. [65, 66, 67, 68, 69]), field theories [70, 71, 72, 73, 74, 20, 63, 24] and quantum induced superluminal propagations [67, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81]. The issue is however still controversial and we intend to clarify it.

We will focus on classical field theories with Lorentz invariant action (or diffeomorphism invariant action whenever Einstein's gravity is taken into account). Superluminal behavior may then arise when local Lorentz invariance is spontaneously broken by non trivial backgrounds (or vacua), whereas some other sector of the theory is left unbroken [82]. In quantum electrodynamics, superluminal propagations induced by vacuum polarization provide well-known examples of this phenomenon [67, 75, 76, 77, 78, 79, 80].

We define superluminal behavior as going faster than gravitons [i.e., gravitational waves] and denote c the speed of gravitons in vacuum. This unconventional but convenient definition will not affect the argument that follows. In the standard theory of gravity, photons propagate along the gravitational metric so that in this case, the definition agrees with the usual one.

Our general analysis will enable us to investigate the causal behavior of fields coupled to standard gravity. We will illustrate our arguments in three important cases : k-essence scalar

¹bruneton@iap.fr

fields, bimetric theories of gravity and quantum induced superluminal propagations. We will make constant use of many important ideas and tools that were developed in order to investigate the causal behavior of General Relativity, and we notably refer to [60, 59].

In Sec. 5.3, we analyze in detail the meaning of causality in classical field theories. We insist on the important role played by the Cauchy problem and by the notion of (local and global) chronology. As an illustration, we recall how causality is usually formulated in the theory of General Relativity. We stress that superluminal propagation is automatically discarded if one assumes that causality should be defined with respect to the chronology induced by the gravitational metric. This *postulate* actually “sets the [gravitational] metric apart from the other fields on [the manifold] and gives it its distinctive geometrical character” [60]. This prior assumption cannot be supported by any mathematical reason but only by experiment. If superluminal propagation was found in the laboratory, it would thus *not* mean that causality, locality, or the entire framework of special relativity is lost, but simply that the gravitational field does not have any fundamental geochronological character. In that case, causality should simply not be expressed in terms of the chronology induced by the gravitational metric field in that case. More generally, it is necessary to drop such prior assumptions to address the issue of the causal behavior of superluminal fields. In Sec. 5.3 we thus look for a minimal expression of causality in which no prior chronology is assumed. In that framework, superluminal propagation is generically allowed.

Before moving to superluminal but causal theories, we display two well known examples of noncausal theories. This enables us to stress how noncausal behavior is related to constraints on initial data. We also comment on the causal “paradoxes” that arise in a non-causal theory. We finally briefly investigate what kind of field theory can lead to superluminal propagation.

We consider in Sec. 5.4 a k-essence scalar field φ which can propagate superluminally along an effective metric $G^{\mu\nu}[\varphi]$. We find that the scalar field is causal, provided that the spacetime embedded with the effective metric $G_0^{\mu\nu}$ is globally hyperbolic. Here, $G_0^{\mu\nu}$ is the effective metric evaluated on a solution φ_0 of the field equation (the background). This condition puts some generic constraints on the free function defining the theory, and is generally satisfied on reasonable backgrounds. We emphasize that the claim that such scalar fields are not causal even on globally hyperbolic backgrounds [70, 71, 24, 2] can only hold if a prior role is attributed to the gravitational (or flat) metric, an assumption that, we believe, was implicit in these works. The only threat for causality actually lies in global properties of backgrounds [71], and this can be related to the so-called chronology protection conjecture.

In Sec. 5.5, we investigate the question of causality in a bimetric theory of gravity, in which the matter sector is universally coupled to a metric $\tilde{\mathbf{g}}$ that can differ from the Einstein-Hilbert metric \mathbf{g} . These two metrics generally define two distinct “causal” cones. Photons can travel faster than gravitons and conversely. If causality is defined with respect to the chronology induced by the gravitational metric, then causality forces the matter metric $\tilde{\mathbf{g}}$ to define a cone which coincides or lies within the gravitational cone, and conversely. These two choices of chronology have already been considered in the literature, and lead to opposite requirements on the theory. This illustrates the fact that there are no clear reasons why a metric, or a chronology, should be preferred over the other. We argue that the theory is actually causal if no prior chronology is assumed. The solution to the Cauchy problem, however, depends on the precise dynamics of the matter sector.

In Sec. 5.6, we briefly show how our analysis applies to the case of quantum induced superluminal propagation. This enables us to conclude that superluminal velocity does not threaten causality, a point that is still controversial to date.

Let us emphasize that the question of causality in k-essence or bimetric theories is not just of academical interest, since these theories have drawn much attention recently. Quite generally, it is claimed that causality forces one of the cones to be wider than the other one (be it the gravitational or the matter one) [70, 71, 72, 73, 20, 24] and this places some constraints on the

theory. Our definition of causality, which is adapted to the multi-metric case, will however not support these claims.

Such k-essence scalar fields were notably used as a (dynamical) dark energy fluid responsible of the late time acceleration of the Universe [83], as well as a fluid that can drive inflation [84], see also [85, 86, 87]. It is also used as a new gravitational field in addition to the metric one in some relativistic theories of MODified Newtonian Dynamics (MOND), that are intended to account for the mass discrepancy at astrophysical scales without invoking Dark Matter [1, 2, 24]. Some of these models were notably discarded because of the presence of superluminal propagation. Bimetric theories are also an essential piece of some recent MOND-like theories [23, 24] (see also [88, 89]). Moreover, it represents the best motivated framework that reproduces a Varying Speed of Light scenario [29, 30, 31] that may address the problems of standard cosmology in a rather different way from inflation. Indeed some VSL theories, in which the speed of light c is replaced by a changing velocity $c(t)$ *inside* the equation of motions [25, 26, 27, 28], however interesting phenomenologically, are not satisfying theoretically [90, 31] (i.e., the resulting theory cannot be derived from an action).

In the last section, we consider some applications of our work to these field theories. We investigate the link between causality and stability in k-essence theories. We show that (k-essence) ghost stabilization might suffer from a serious problem. We also show that, if one reproduces the MOND phenomenology with the help of a k-essence scalar field, then a slight modification of Milgrom's law is necessary for the theory to be causally well-behaved. It leads to a non trivial modification of the phenomenology in the very low acceleration regime. We also comment on a simpler theory that reproduces the MOND phenomenology, using only one scalar field. The initial value formulation of this theory still has to be checked and we leave it for further work. We briefly show how this framework can account for the Pioneer anomaly, and we finally make some comments about VSL theories.

We use, throughout the paper, the sign conventions of [8] and notably the mostly + signature. The flat metric is denoted η or $\eta_{\mu\nu}$ in a coordinate system. We denote \mathbf{g} the gravitational metric field (which obeys the Einstein equations) and $\tilde{\mathbf{g}}$ the matter metric to which matter fields couple. Unless otherwise specified, indices are raised or lowered using the gravitational metric \mathbf{g} .

5.3 Causality and superluminal behavior

In the present paper, we are interested in the superluminal behavior of some matter fields in a General Relativity-like context. The metric field \mathbf{g} follows the dynamics induced by the Einstein-Hilbert action. By spacetime we will always mean a set $(\mathcal{M}, \mathbf{h})$, where \mathcal{M} is a four-dimensional differentiable manifold and \mathbf{h} some non degenerate Lorentzian metric on it. A superluminal signal, *by definition*, propagates along spacelike curves of the gravitational metric \mathbf{g} .

Causality, chronology and the flow of time

By causality we usually mean the ability to find a cause to an effect. Since cause and effect are both described in terms of some physical variables, the usual principle of causality states that physical variables should be unambiguously determined at a given time from their values at a time before. Conversely, we should also be able to predict a future situation from a present one. The principle of causality thus requires that determinism holds “in both directions of time”. Causality demands the existence and uniqueness of solutions to the equations of motion given some initial data. In mathematical words, equations of motion must have a well-posed Cauchy problem, or initial value formulation.

Note that this definition shows that time-ordering, or chronology, must exist between two spacetime points that are causally connected. Unlike Newton's theory where a global chronology preexists the dynamics because of the prior topology assigned to spacetime, namely $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, relativistic field theories (including Einstein's gravity) do *not* involve a preexistent notion of time and chronology. On the contrary, any relativistic field ψ defines its own chronology on \mathcal{M} by means of the Lorentzian metric \mathbf{h} along which it propagates. Any Lorentzian metric indeed induces a local chronology in the tangent space through the usual special relativistic notions of absolute (i.e., Lorentz invariant) future and past.

Let us consider one particular field ψ that propagates along a metric \mathbf{h} . It is important to note that this metric may not induce a global chronology on the whole spacetime². Indeed, since spacetime may be curved, and, moreover may have non trivial topology, the existence of a partial ordering in the tangent space (the local chronology of special relativity) does not imply that a partial ordering over the whole manifold exists. For instance, the local causal cones of \mathbf{h} can be distributed on the manifold in such a way that there exists a curve over \mathcal{M} which is everywhere future-directed and timelike but closed. In that case, the field ψ can propagate along a closed curve and an event could be *both* the cause and the effect of another event. Causality requires that this does not happen. The strongest way to prevent it is to require the global hyperbolicity³ of the spacetime $(\mathcal{M}, \mathbf{h})$.

Let us emphasize that causality also requires notion of time flow. It is indeed worth recalling that even if the above metric \mathbf{h} defines a global notion of future and past, we must also require that the field ψ can only propagate in the future. If it could, on the contrary, propagate both in the future and in the past, one could always form a closed timelike curve with it. On the other hand, global hyperbolicity is enough to guarantee that no closed *future-directed* timelike curve exists.

When the manifold is embedded with a finite number of metrics \mathbf{h}_i , the discussion of global properties is slightly more involved, see Sec. 5.3.

Causality in general relativity

Let us illustrate the previous discussion. In General Relativity, causality is generally expressed by the following properties [60, 59] :

- (a) The gravitational metric \mathbf{g} must define a global chronology on spacetime.
- (b) "The null cones of the matter equations coincide or lie within the null cone of the spacetime metric \mathbf{g} ". [60]
- (c) The whole set of equations of motion must admit a well-posed Cauchy problem.

Point (a) guarantees the existence of a global time ordering on \mathcal{M} and point (c) is the formal expression of determinism. Note that it is a non-trivial mathematical property of systems for differential systems. Satisfying (c) in General Relativity critically depends on the precise dynamics of the matter sector.

Point (b) excludes faster-than-graviton propagation. Equivalently, it means that any initial data set on spacelike hypersurfaces with respect to the gravitational metric \mathbf{g} are allowed⁴. Since the metric \mathbf{g} defines a global chronology on spacetime, so does any other metric \mathbf{h}_i associated to

²We may define local and global chronology in the following way : a local chronology exists if there exists a partial order in the neighborhood of any point P of \mathcal{M} , and a global chronology exists if there exists a partial order on the whole manifold \mathcal{M} .

³A globally hyperbolic spacetime is such that a Cauchy surface Σ exists [59]. It can then be proved that the spacetime has the topology of $\Sigma \times \mathbb{R}$, so that a global time function, i.e., a global chronology exists.

⁴Up to Hamiltonian constraints arising from various gauge invariances.

the propagation of some matter field ψ_i ⁵. Both conditions (a) and (b) therefore ensure that no closed future-directed and timelike curves exist for any metric.

Let us emphasize that, in the formulation (a)–(c) above, the gravitational metric field clearly plays a preferred role. Both conditions (a) and (b) are such that causality is actually defined with respect to the chronology induced by the metric \mathbf{g} . This can be understood as a “*postulate* which sets the metric \mathbf{g} apart from the other fields on \mathcal{M} and gives it its distinctive geometrical character” ([60] §3.2, emphasis added). The chronology defined by \mathbf{g} is thus assumed to be the preferred one on \mathcal{M} .

This postulate is however arguable because, as we pointed out, any relativistic field induces its own chronology on spacetime. In particular, it means that if a signal made up of waves of some field ψ_i propagates between two spacetime points, then these points can be time-ordered with the help of the metric \mathbf{h}_i , and causality may be preserved even if the field propagates superluminally. The gravitational metric field \mathbf{g} is just one particular field on \mathcal{M} and there are no clear reasons why it should be favored.

Causality and superluminal behavior

We have already stressed that superluminal behavior is automatically discarded by the above postulate. One may try to justify it by arguing that, since \mathbf{g} reduces locally to $\boldsymbol{\eta}$ and therefore gives to the tangent space its special relativistic (Minkowskian) structure, going faster than gravitons would “undermine the entire framework of relativity theory” [59]. Let us however stress that any other metric \mathbf{h}_i can also be reduced locally to its fundamental form in the appropriate “inertial” coordinates. These coordinates transform under the action of the Lorentz group $SO(3, 1)$ with an invariant speed c_i that can differ from c , if the cones of \mathbf{h}_i and \mathbf{g} do not coincide [due for instance to some spontaneous breaking of local Lorentz invariance, see Sec. 5.3]. These coordinates are actually relevant if one uses rods and clocks made up of the field ψ propagating along \mathbf{h} . The fact that \mathbf{g} reduces locally to the flat spacetime metric can therefore not be used to claim that \mathbf{g} should be a preferred field on \mathcal{M} . We will come back to this important point in Sec. 5.5.

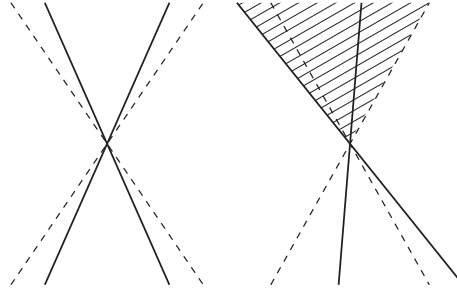
We may therefore drop the above postulate and look for a minimal expression of causality with which no prior chronology is assumed. Let us consider a collection of fields ψ_i that propagate along some metrics \mathbf{h}_i (gravity included). We are led to the picture of a finite set of “causal” cones at each points of spacetime. We do not want to prefer one metric with respect to the others, because there is no reason why, locally, some sets of coordinates, or some rods and clocks should be preferred : coordinates are meaningless in General Relativity.

The cones defined by the metrics \mathbf{h}_i may therefore be in any relative position with respect to one another. Moreover, these cones may even tip over each other depending on the location on spacetime. We also have to guarantee that no signal propagates along a closed curve. For this it is not sufficient to require the global hyperbolicity of each spacetime $(\mathcal{M}, \mathbf{h}_i)$. Indeed, fields may interact together, and we may form a physical signal which propagates on spacetime along different metrics.

We shall instead define a extended notion of future-directed and and timelike curves, by requiring that at each point of the curve, the tangent vector is future-directed and timelike with respect to *at least* one of the metrics \mathbf{h}_i . Such a construction has already been advocated in [91]. All the (extended) notions of future, past, domains of dependence, achronal sets, Cauchy surfaces, global hyperbolicity then follow. This corresponds to a “mixed” notion of chronology :

⁵One may indeed easily check that the following property holds : if $(\mathcal{M}, \mathbf{h})$ is globally hyperbolic and if \mathbf{h}' is a metric whose null cone coincides or lies within the null cone of the metric \mathbf{h} *everywhere* on \mathcal{M} , then $(\mathcal{M}, \mathbf{h}')$ is globally hyperbolic.

FIG. 5.1 – The hatched part shows the extended future defined by two metrics (solid and dashed lines) in the case where one metric defines a wider cone than the other one (left), and in the opposite case (right).



a point P is in the (extended) future of Q if it is in the future of Q for at least one of the metrics \mathbf{h}_i , see Fig. (5.1). A spacetime interval is thus spacelike in the extended sense if it is spacelike with respect to *all* metrics \mathbf{h}_i .

Causality then requires that a global (mixed) chronology on spacetime exists. In other words, spacetime must be globally hyperbolic in that extended sense. This straightforward generalization enables us to express the minimal formulation of causality by the following properties :

- (a') The mixed chronology defined by the set of metrics \mathbf{h}_i must be a global chronology on spacetime.
- (b') The whole set of equations of motion must admit a well-posed Cauchy problem.

The formulation of causality (a)–(c) is immediately obtained from these more general requirements whenever the matter light cones coincide or lie within the gravitational one. We thus see that fields can propagate superluminally without threatening causality provided that we do not refer to any preferred chronology on spacetime. That Cauchy problem of some field ψ be well posed depends on the precise equation of motion, and on whether initial data are set on surfaces that are spacelike with respect to the metric \mathbf{h} along which it propagates. Moreover, if we are interested in the whole theory (gravity included), the Cauchy problem will be well posed if initial data are set on surfaces that are spacelike in the extended sense, that is *spacelike with respect to all metrics \mathbf{h}_i* .

On global properties

It must be stressed that, in General Relativity, the fact that \mathbf{g} defines a global chronology cannot be proven, because local physics does not determine the topology of spacetime, which could however prevent the existence of a global chronology. This the case, for instance, of non time-orientable spacetimes. Moreover, there exists exact solutions to the Einstein equations that do not describe globally hyperbolic spacetimes, as explicitly shown by the Kerr solution, which possesses closed timelike curves, or Gödel's universe. Einstein's equations thus admit solutions that violate causality.

This difficulty is entirely subsumed into the so-called chronology protection conjecture [92] that asserts that the local laws of physics are such that they prevent the formation of closed future-directed and timelike curves in spacetime⁶. This has not been proven yet, so that we

⁶At least those that are not hidden behind an horizon.

usually assume from the beginning that spacetime $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ is globally hyperbolic. As long as the conjecture is not proven, such a restriction is not dynamical, but of epistemological nature[62].

Let us stress that in our extended framework, and notably in presence of superluminal matter fields, we will not be able to prove that the condition (a') holds. We will have to *assume* that spacetime is globally hyperbolic in the extended sense. Again, if we were able to prove the chronology protection conjecture, we would not have to make such a non trivial assumption. We will discuss this point further in Sec. 5.4.

In other words, the condition (a') will have to be imposed by hand, just as in General Relativity. As we already explained, we will not consider the issue of the existence of the flow of time, and thus, in the following, we will mostly be concerned with point (b'). We provide in the next section two examples of theories that do not admit a well-posed Cauchy problem. It enables us to show the deep relationship between non causal behaviors, closed curves in spacetime and constraints on initial data.

Noncausal theories : closed curves and constraints on initial data

A manifestly non-causal theory is an elliptic Klein-Gordon scalar field φ with an equation of motion $h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi = 0$, and where the metric \mathbf{h} has the signature ± 4 . This elliptical equation does not have a well posed Cauchy problem. It can be simply interpreted as the fact that this Euclidean metric does not select the time coordinate as special compared to the spatial one. There is no available notion of propagation and initial data on three-surfaces cannot be propagated in four dimensions. On the contrary, a Lorentzian signature for \mathbf{h} guarantees that the equation is hyperbolic and that, by virtue of well-known theorems [59], the Cauchy problem is well posed.

We now consider the more interesting case of tachyonic particles. By tachyons we mean particles or signals that can be sent at superluminal speeds relative to the emitter⁷. As correctly recognized in many papers in the literature, tachyons are not causal (see, e.g. [66, 67]). Indeed, they can always be used to construct closed curves in spacetime along which a (tachyonic) signal propagates. Consider for instance an observer A sending at time t_0 a signal to observer B (event E_0), who in turn sends a signal back to A , at time t_1 (event E_1). This last signal can be received by A at a time $t_2 < t_0$ (event E_2), if signals can be sent from B at a superluminal speed and if A and B are in some relative motion at a speed $v < c$, see Fig. (5.2). Information can therefore propagate along a closed curve in spacetime, in this case, curve (E_0, E_1, E_2, E_0) .

The theory is not causal because an event along this curve will influence itself. Such an event is thus not freely specifiable, and we see that information propagation along a closed curve in spacetime *always* leads to constraints on initial data. On the contrary, if the Cauchy problem were well posed for such a theory, it would mean that there exists surfaces on which initial data can be specified freely (up to possible constraints arising from gauge invariance, if any) and unambiguously evolved in time.

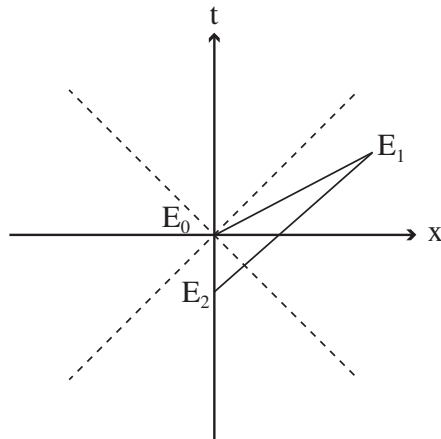
Closed curves and temporal paradoxes

Before going further, let us comment on the previous experimental device. Suppose (situation 1) that when B receives a signal from A , he sends a signal backward in time to A . Then A receives a signal at time t_2 and is thereby *forced* to send a signal to B an instant later. It explicitly shows the constraints that appear in the case of propagation along closed curves.

A temporal (or causal) paradox can arise if we consider the following experimental device (situation 2) : when B receives a signal from A , he sends a signal back to A , and in turn A sends

⁷Note that “field theory tachyons”, i.e. negative mass-squared particles, are *not* of this type and are causal (see for instance [70], Appendix B)

FIG. 5.2 – The closed curve followed by the tachyonic signal viewed in the rest frame of A . The tachyon is sent by A at time t_0 (event E_0) and received by B at time t_1 (event E_1). Since B moves with respect to A , the tachyonic signal he sends back to A is actually received before it was sent, at time $t_2 < t_0$ (event E_2). The thin line represents the Minkowski cone, and horizontal and vertical lines are the space and time axes in the frame of A .



a signal to B *only if* he did not receive anything from B . One may wonder what happens in that case. If A receives a signal from B , he will not send a signal to B who in turn would not send a signal back to A , and this contradicts the hypothesis. The other possibility, when A does not receive anything from B , is also inconsistent. This is in fact a version of the famous “grandfather paradox”.

Remarkably, there is no answer to the question “what happens?”. It is however immediate to see that this question implicitly assumes that the knowledge of the initial data at time t_2 for instance (A receives a signal from B or not) is enough to determine what will happen “later” along the curve. This question thus assumes that causality (or determinism) holds, whereas it cannot even be defined, since there is no available notion of time-ordering along a closed curve. On the contrary, we have seen that such a closed curve leads to constraints on initial data. The event at time t_2 is strongly correlated to itself so that the only relevant question reads “are any of the two initial conditions : A receives -or does not receive- a signal from B allowed?”. Clearly the answer to this last question is the negative one.

Let us emphasize that situation 2 (the grandfather’s paradox) is often taken as an example of bad causal behavior induced by tachyonic particles (or accordingly, induced by the use of time machines). This point is however not justifiable because the paradox only arises if we ask the wrong question. This experimental device simply *cannot* exist since there is no initial data consistent with it. This is not related to causality but only to logic : temporal paradoxes do not exist. On the other hand, the noncausal situation 1 can exist (constrained initial data exist that correspond to this experiment).

On superluminal behavior in field theories

Tachyonic particles propagate superluminally and violate causality. This does not mean however that any superluminal propagation does. Indeed, the closed curve in Fig. (5.2) can only

be constructed if the speed of the tachyonic signal depends on the speed of the emitter⁸. This is not the case in metric description of superluminal propagation that we will mostly be concerned with.

Here we wish to investigate briefly what a field theory that involves superluminal propagation may look like. In a theory with Lorentz invariant action, the only possibility to open up the causal cones is to modify the propagational part of the dispersion relation. It can be achieved by adding higher-order derivatives in the action. Notice however that such theories may be unstable [56, 34]. Superluminal behavior for instance arises from quantum corrections to electrodynamics in non trivial vacua, see Sec. 5.6.

On the other hand, we could still have second order, but nonlinear, equations of motions. We will consider two examples of such theories in the following sections. This nonlinearity, which is essential to obtain unusual dispersion relations, leads to a background-dependent Cauchy problem. Accordingly, Lorentz invariance of the action is spontaneously broken through non-trivial backgrounds and it allows superluminal propagation. Note also that the speed of small perturbations around the background only depends on the background and *not* on the motion of the emitter. Superluminal signals in field theories are therefore not tachyonic in the sense indicated in the previous section.

Note that we could also have considered non-Lorentz invariant Lagrangians like $L = -\dot{\phi}^2 + u^2(\nabla\phi)^2$, where $u \neq c$. We will not consider such Lagrangians in the present paper. In practice, the theories we will consider will lead to similar field equations, but only through a spontaneous breaking of local Lorentz invariance by non-trivial backgrounds.

5.4 K-essence field theory

Field equation and the Cauchy problem

The action for a k-essence scalar field theory reads :

$$S = -m^4 \int \sqrt{-g} d^4x \left[F\left(\frac{X}{m^2}\right) + V(\varphi) \right], \quad (5.5)$$

where

$$X \equiv \frac{g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi}{2}, \quad (5.6)$$

and F and V are some functions, m is a mass scale and $\hbar = 1$. Hereafter we also take $m = c = 1$. Note that the more general form $L = -F(X, \varphi)$ is often considered in the literature, but the following arguments would also apply to this case. The field equation reads

$$G^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi - V'(\varphi) = 0 \quad (5.7)$$

where the effective metric $G^{\mu\nu}$ is given by

$$G^{\mu\nu} \equiv F'(X) g^{\mu\nu} + F''(X) \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi, \quad (5.8)$$

and a prime denotes derivation with respect to X . Scalar waves propagate inside the “scalar cone” defined by this effective metric. This cone generally differs from the gravitational one unless $F''(X_0) = 0$, see Sec. 5.4.

This equation is a special case of quasilinear second order differential equations. If we first neglect the coupling to gravity which will be considered below, we may then invoke a theorem

⁸Explicitly, one assumes that the tachyon propagates at some speed $u > c$ in the rest frame of B , and then deduces, using a Lorentz boost, that it travels backward in time in the frame of A , see [67].

due to Leray that proves [59] that this equation has a well posed Cauchy problem if spacetime $(\mathcal{M}, G_0^{\mu\nu})$ is globally hyperbolic, where $G_0^{\mu\nu}$ is the effective metric evaluated on a solution φ_0 to the field equation Eq. (5.7). Hereafter, we will refer to φ_0 as the background. The initial data has to be specified on three-surfaces that are spacelike with respect to the background metric $G_0^{\mu\nu}$, in connection with the discussion of Sec. 5.3.

A necessary but insufficient condition for global hyperbolicity is the Lorentzian signature of the background metric $G_0^{\mu\nu}$, which ensures in particular that the field equation is hyperbolic. By diagonalization of the matrix $G_0^{\mu\nu}$, we find that its signature is +2 everywhere over \mathcal{M} if and only if

$$F'(X_0) > 0 \quad (5.9a)$$

$$F'(X_0) + 2X_0F''(X_0) > 0 \quad (5.9b)$$

where $X_0 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_0 \partial_\nu \varphi_0 / 2$. *In particular*, if the function F is such that the above inequalities are satisfied for all X , the metric $G_0^{\mu\nu}$ will have a signature +2 on any backgrounds. Note that the sign of the above inequalities in Eq. (5.9) can be reversed. This would however correspond to a metric $G_0^{\mu\nu}$ with signature -2 and the scalar waves would carry negative energy. The theory would therefore be unstable when coupled to other fields (notably gravity). We exclude here this possibility, although it should be stressed that it comes from a stability argument, and not from some causal requirement.

In presence of gravity the Cauchy problem has to be solved simultaneously for the gravitational variables and for the matter ones. It has been proved (see for instance [60]) that the Cauchy problem is well posed if matter fields satisfy “reasonable” equations of motion⁹ and if the stress-energy tensor of the matter fields only involve matter variables, the gravitational metric, and their first derivatives. This is the case for k-essence theories, as can easily be checked. Locally, the whole theory has a well-posed Cauchy problem.

Superluminal behavior

The analysis of the characteristic¹⁰ of the field equation Eq. (5.7) shows that the scalar field propagates superluminally if $F''(X_0) > 0$, where we use $F'(X_0) > 0$ by virtue of Eq. (5.9a).

As it will be useful later, let us remind the reader that any field which propagates along an effective metric of the form (up to some positive conformal factor) :

$$H^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + Bn^\mu n^\nu, \quad (5.10)$$

where B and n^μ are respectively some scalar and vector field, is superluminal if $B > 0$. Note that the opposite sign for B is found in [70, 71] because of the opposite choice of signature.

“Local causality” and the choice of initial data surfaces

The above theorem and our analysis of the meaning of causality in Sec. 5.3 enable us to conclude that k-essence theories are causal in flat spacetime whenever the background $(\mathcal{M}, G_0^{\mu\nu})$ is globally hyperbolic, even in the presence of superluminal scalar waves. Again, this conclusion holds only if we do not refer to any preferred chronology.

It was however claimed [70, 71, 2, 24] that k-essence theories are not causal even if the background is globally hyperbolic. Here we emphasize that these claims can only be supported if it is assumed that the gravitational metric induces a preferred chronology on \mathcal{M} , an assumption that, we believe, is implicitly made in these references. The main argument which rules out

⁹Notably when they form a quasilinear, diagonal and second order hyperbolic system of equations.

¹⁰See [93], Ch. 5, Appendix 1.

superluminal propagation is indeed that the Cauchy problem for the scalar field is not well posed for initial data that are set on surfaces which are spacelike *with respect to the flat metric* but timelike or null with respect to the background metric. In that case, initial data cannot be evolved because of caustics [71], and the Hamiltonian formalism is singular [70].

Let us however stress that it is not surprising in view of Leray's theorem, since it proves that initial data surfaces for the scalar field must be spacelike *with respect to the background metric*. If initial data are set on these surfaces, the theory is free of such a singular behavior.

This claim therefore only arises from an unadapted choice of initial data surfaces, i.e., from the postulate that the gravitational metric defines a preferred chronology. This postulate actually prevents *any* superluminal propagation, as we explained in Sec. 5.3. In such a case, superluminal behavior is ruled out from the beginning in a rather *ad hoc* way, but not by some intrinsic (mathematical) argument.

Global properties

The only threat for causality lies in fact in the global properties of the background. It has been correctly recognized in [71] that the spacetime $(\mathcal{M}, G_0^{\mu\nu})$ may not always be globally hyperbolic. In particular closed timelike curves (with respect to the effective metric) could exist.

Let us first stress that, in general, however, the spacetime $(\mathcal{M}, G_0^{\mu\nu})$ is globally hyperbolic. It is the case in trivial backgrounds $\varphi_0 = \text{const.}$, and in non-trivial but homogeneous (in a certain Lorentz frame) backgrounds $\partial\varphi_0 = \text{const.} \neq 0$, which may be relevant in a cosmological context. Note that these backgrounds have to be solutions to the equation of motion Eq. (5.7). In the first case, φ_0 has thus to be an extremum of the potential, whereas in the second one, φ_0 is not constant in spacetime and the potential must be flat over some range, or more simply vanish. In these two important cases, the spacetime $(\mathcal{M}, G_0^{\mu\nu})$ is globally hyperbolic and, by virtue of the previous theorem, the Cauchy problem is well posed and the theory is causal.

Since the global hyperbolicity of spacetime $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ must be assumed in General Relativity, as we explained in Sec. 5.3, we may also assume that spacetime is globally hyperbolic in the extended sense, see Sec. 5.3. This at least requires that inequalities in Eq. (5.9) hold, and automatically ensure that the whole theory of the k-essence scalar field and gravity is causal. The relevant Cauchy surfaces in that case are hypersurfaces that are spacelike with respect to all metrics (gravitational, scalar and others matter metrics).

Note that this is a non-trivial (and maybe arguable) assumption. Let us however stress that it must also be assumed in the context of General Relativity and standard matter alone so that the fact that non-trivial global properties may break causality does not appear to be rooted in superluminal propagation. This assumption may actually be linked to the chronology protection conjecture, as shown by the following example. Let us consider the highly non trivial and non globally hyperbolic background invoked in [71]. It consists of two "bubbles" of non trivial backgrounds $\partial\varphi_0 = \text{const.} \neq 0$ that move rapidly in opposite directions with a finite impact parameter. The space is otherwise empty (trivial background $\varphi_0 = \text{const.}$). Small scalar perturbations thus travel superluminally inside the two bubbles, and along null rays of the flat metric outside them. The fact that the two bubbles are in relative motion implies the existence of closed future-directed and timelike curves (timelike with respect to the background metric $G_0^{\mu\nu}$).

It should however be stressed that such a background is *not* relevant since it is not a solution to the equation of motion Eq. (5.7). Indeed, the derivative of the field φ_0 is not continuous at the boundary between the bubbles and empty space. Some Dirac-like source terms should be added to the equation of motion to accommodate such a background. On the contrary, a physical solution involving two such bubbles should exhibit a continuous transition from their interior to the empty space. Of course it may be the case that, even in this more realistic situation, the

background is still not globally hyperbolic, but the contrary could also happen, and it would be an illustration of the chronology protection conjecture. We will not try to perform this analysis.

A very similar case was discussed in [67] in the context of the Casimir experiment, see Sec. 5.6. Note that an analogous case has also been found in the context of General Relativity by Gott [61], who showed that two straight infinite cosmic strings moving in opposite directions with a finite impact parameter lead to the formation of closed future-directed and timelike curves in spacetime. Again, it shows that difficulties with causality at a global level already exist in the context of General Relativity and subluminal matter, and should not be related to some intrinsic problems of superluminal propagation.

5.5 Bimetric theories of gravity

Definition

By multi-metric theories of gravity we mean theories of gravity in which some degrees of freedom in the matter sector are coupled to some matter metrics $\tilde{\mathbf{g}}_i$ that are distinct from the gravitational one \mathbf{g} . The fact that different matter fields are coupled to different metrics breaks the weak equivalence principle (WEP), which has been tested with great accuracy. As a special case, a bimetric theory of gravity is a theory where all the matter fields are coupled to the same metric $\tilde{\mathbf{g}}$. This ensures that the WEP is satisfied. The theory of General Relativity just corresponds to the choice $\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}}$.

A typical example is scalar-tensor theories of gravity in which $\tilde{\mathbf{g}} = \Omega^2 \mathbf{g}$, at each point of \mathcal{M} , and where Ω is a smooth real-valued function over \mathcal{M} . Dynamics of the scalar field Ω arise from a standard kinetic term (but could also be of k-essence type). Because of the conformal relationship between \mathbf{g} and $\tilde{\mathbf{g}}$, the two cones defined by these two metrics coincide, and there is no superluminal propagation.

In general however, we could have a non conformal relation between these two metrics. Consider for instance, the so-called disformal relation [20]

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2 (g_{\mu\nu} + BU_\mu U_\nu), \quad (5.11)$$

where A and B are some functions of the scalar quantity $U_\mu U^\mu$, and U is a vector field. When this matter metric is of Lorentzian signature, the matter light-cone (defined by $\tilde{\mathbf{g}}$) can be wider than the gravitational cone (defined by \mathbf{g}), depending on the sign of B . This disformal relation is an essential piece of some recent relativistic field theories of the MOND paradigm [24, 23].

Superluminal behavior

Throughout this paper, we have defined superluminality as the propagation along spacelike curves of the gravitational metric. But we could also have defined it as going faster than light (photons). These definitions coincide in General Relativity but not in bimetric theories since $\mathbf{g} \neq \tilde{\mathbf{g}}$. In that framework, there are two opposite definitions of superluminal behaviors. Photons can travel faster than gravitational waves and conversely. It is thus not clear which of these two superluminal behavior we have to worry about.

This is closely related, again, to the choice of a preferred chronology. If one assumes that the gravitational metric field induces a preferred chronology with respect to which causality should be defined, then, as in Sec. 5.3, the matter light-cone must coincide or lie within the gravitational one everywhere on spacetime. On the contrary, it was claimed in [20, 24] that, since rods and clocks are made of matter, the matter metric $\tilde{\mathbf{g}}$ should be somewhat favored, in the sense that

in order to preserve causality, no signal should escape the matter light-cone. In particular, this cone should be wider than the gravitational one. Very interesting is the fact that this postulate is the exact opposite from the previous one. It is perhaps the best way to show that there is no clear reason why one metric should be preferred to the other.

This confusion can be easily understood. Let us go further in the discussion of Sec. 5.3. Whenever $\tilde{\mathbf{g}}$ is Lorentzian and disformally related to \mathbf{g} , we have at hand two metrics which reduce locally to constant metrics \mathbf{g}_0 and $\tilde{\mathbf{g}}_0$. As a consequence, there exist two classes of inertial coordinates for which one of these two metrics *but not both*, reduce to its fundamental form $\boldsymbol{\eta}$. Inertial coordinates of each class transform under the action of the Lorentz group $SO(3, 1)$ with a *different invariant speed*¹¹.

Let us emphasize that in General Relativity, superluminality is defined as the propagation on spacelike curves with respect to the gravitational metric mainly because the latter is thought to be “the” spacetime metric, since it reduces to $\boldsymbol{\eta}$ locally. We already stressed in Sec. 5.3 that any Lorentzian metric can actually take this form locally, so that it could also be viewed as the spacetime metric. The framework of bimetric theories considerably enlighten this point. In a sense, indeed, we have two “natural” metrics and there is simply no way to decide which of these two metrics should be “the” spacetime metric. Accordingly, there are two natural chronologies and two locally invariant speeds. These two classes of inertial coordinates correspond to rods and clocks made up of matter or gravitons.

Bimetric theories thus clearly show the irrelevance of postulating a preferred chronology. Let us also stress that without such a postulate, the notion of superluminal behavior becomes itself irrelevant. The only point, as far as bimetric theories are concerned, is actually that the ratio of the speed of gravitational waves to the speed of photons for instance, vary in space and time. This is the reason why such a framework should be considered as the best motivated one that reproduces Varying Speed of Light theories, see Sec. 5.7.

The Cauchy problem and global properties

Following the discussion of Sec. 5.3, let us define causality by (a')–(b'). It is clear that the matter metric has to be Lorentzian for the Cauchy problem to be well posed. This condition reads $1 + BU_\mu U^\mu > 0$ and A must be non zero. We wrote the conformal factor as A^2 in order to ensure that matter fields carry positive energy. The matter stress-energy tensor only depends on the matter fields, the vector field, the gravitational metric, and their first derivatives. Depending on the precise form of the action of the vector and matter fields, the whole set of equations of motion (including gravity) may be a diagonal, second order, and quasilinear hyperbolic system. Note that when U is given by the gradient of a scalar field $U_\mu = \nabla_\mu \varphi$, the initial value formulation of the scalar equation is a complicated question, see Sec. 5.7. On the other hand, when U is a “true” vector field, the Cauchy problem is in general well posed¹².

We also have to consider the global structure of spacetime. As in the case of General Relativity alone, we have to assume that spacetime is globally hyperbolic in the extended sense of Sec. 5.3. This assumption, together with the above conditions on equations of motion of the matter fields and the vector field ensure that the whole theory is causal.

¹¹In a sense, our analysis completes the interesting discussion about the different facets of c , see [90].

¹²If the kinetic term of the vector field differs from the usual (Einstein-Maxwell) one, the vector field equation involves second derivatives of the metric field \mathbf{g} and is thereby not diagonal. It does not mean however that the Cauchy problem is not well posed, but rather than a careful analysis is in order. Generic vector field actions have been considered in [94] (and references therein).

5.6 Quantum induced superluminal propagation

In quantum electrodynamics, it has been shown that taking into account finite temperature effects, or non-trivial electromagnetic or gravitational backgrounds, and also boundaries (e.g. the Casimir plates), may break local Lorentz invariance at the loop level through vacuum polarization, thus leading, in some cases, to faster-than- c light propagation [75, 76, 77, 78, 79, 67]; see also [80] and references therein.

Note that these results are derived within some range of approximation using the effective action formalism, up to the one or two loop level. Generically the results only hold at frequencies less than the electron mass m_e . One therefore only derives the phase velocity of soft photons, whereas the actually relevant speed is the wavefront velocity, which is the phase velocity at infinite frequency and which corresponds to the analysis of the characteristics [79].

The computation of wavefront velocities is an arduous non-perturbative task that we will not be concerned with. An argument based on the standard Kramers-Kronig relation [80] however gives some hint as to the value of the wavefront velocity. In the case of Casimir vacua, it has been shown that the wavefront velocity might be greater than c in the direction orthogonal to the plates (breaking of Lorentz invariance by the boundaries). The wavefront velocity has to be equal to c in the parallel direction because Lorentz invariance is left unbroken in that direction, at least if the Casimir plates are infinite (or if boundary effects in that direction are negligible).

Let us assume this result to be valid. Of course, “light does not travel faster than light”, but the point is that gravity does not see the plates in first approximation, so that Lorentz invariance is not broken in the gravitational sector and gravitons still propagate at velocity c . The ratio of the speed of photons to the one of gravitons may thus be greater than one.

Our discussion of Sec. 5.3 allow us to give an immediate answer to the question of causality in that case. It can be shown that photons propagate inside the plates along an effective metric of the form of Eq. (5.10), where B is some positive constant in that case, and n^μ is the unit spacelike vector orthogonal to the plates (see [67] and references therein). Outside the plates, photons propagate along the flat metric η (here we neglect curvature).

It was correctly recognized in [67] that such a metric is stably causal, so that photons *cannot* propagate along closed curves, contrary to the claim made in [68] (see also the criticism of [69]). Actually, this spacetime is even globally hyperbolic and therefore *perfectly causal*, even if photons propagate faster-than- c inside the plates.

Causality may however be lost if two Casimir vacua are moving rapidly towards each other [67]. In that case, spacetime may possess closed future-directed and timelike curves (with respect to the effective metric). This case is rather analogous to the case of two bubbles made of non trivial background in k-essence theory, see Sec. 5.4. The authors of [67] then invoked the chronology protection conjecture, and in particular noted that the two Casimir vacua should be confined within plates that cannot be infinite, so that non-trivial boundaries effects may prevent the formation of such closed curves. We essentially reached the same conclusion in Sec. 5.4. Similar arguments may be applied to others vacua. In particular, we note that vacuum polarization induces some effective metric along which photons propagate. This effective metric only differs from the flat one by terms of order α^2 where α is the fine structure constant. These corrections are therefore small (at least in “reasonable” vacua), so that the effective metric is still Lorentzian and the spacetime is still globally hyperbolic.

5.7 Applications

We briefly comment on some applications of our results to recent interesting developments on possible modification of gravity.

K-essence theories and dark energy

K-essence scalar field theories have been suggested as promising candidates of the dark energy fluid [83] (see also the review [95] and relevant references therein). Such an effective action can also be motivated by the low energy regime of some string theories [84]. The hyperbolicity conditions Eq. (5.9) on the function F have been correctly derived in the literature, but in a different way (except in [96]).

Authors usually require the stability of scalar perturbations around some backgrounds. This is the case if the “sound speed”

$$c_s^2 = \frac{F'(X)}{F'(X) + 2XF''(X)}, \quad (5.12)$$

is real. This condition is thus equivalent to the Lorentzian character of the effective metric $G^{\mu\nu}$. This (in)stability is therefor directly related to the hyperbolic (resp. elliptical) character of the scalar field equation. Note that the signature can still be $+2$ or -2 . Authors then demand that these small perturbations carry positive energy, which implies $F'(X) \geq 0$. Here we wish to stress that these results also arise from the analysis of causality, and are actually non-perturbative results. It can be shown, indeed, that the positivity of the whole Hamiltonian and not only the one of perturbations, is guaranteed whenever the two conditions Eq. (5.9) hold [97].

Unusual kinetic terms have also been considerably debated because phantom scalar fields can reproduce an equation of state $w < -1$ [98, 83, 95], which indeed reads

$$w = \frac{-F(X)}{F(X) - 2XF'(X)}. \quad (5.13)$$

Whenever the density $\rho = F(X) - 2XF'(X)$ is positive $w < -1$ is equivalent to $F'(X) < 0$. Thus only phantom (ghost) matter can lead to super-acceleration of the Universe. Since ghosts are usually associated with a fatal instability at the quantum level and notably in the UV regime, authors have suggested a stabilization mechanism of the ghost field at the UV scale. The function F could be such that $F \sim -X/m^2 + \mathcal{O}(X^2/m^4)$ (we reestablish the mass scale m). In that case the ghosts only appear at low energy $X \ll m^2$, but can be stabilized at higher energies by higher-order terms, and the timescale of the instability can be made arbitrarily high [99, 100]. Such a mechanism may however suffer from serious diseases. Indeed note that the sign of $F'(X)$ must change for some values of X_c and the sound speed squared may become negative. Accordingly, the effective metric may become Euclidean and the Cauchy problem will not be well posed anymore. The hyperbolicity may still be guaranteed if $F'(X) + 2XF''(X)$ also changes sign at the value X_c . Note that the function F must then be fine-tuned : X_c may be equal to 0 or X_c must be a turning point as well as an inflexion point of F . Moreover, in that already fine tuned case, the effective metric becomes totally degenerate (vanishes) at the point X_c . There is a caustic, and the theory is not well defined.

It has been shown in [101] that this point X_c is not reached through cosmic evolution (or at a time $t = \infty$), and the theory may thus be free of singular behavior. However the cosmological background is not the only relevant one. The theory must also apply at local (e.g. astrophysical) scales, and we expect the scalar field to have some inhomogeneities. Local physics then drives X to positive values, and the above singular point X_c will generically be crossed. Moreover, at a quantum level, it is not clear if we can still make sense of summing momentum from zero to some cutoff, whereas the propagator is not defined for some value of the momentum.

In conclusion, k-essence field theories are quite relevant causal theories that can account for the dynamics of the dark energy fluid with an equation of state $w > -1$. On the other hand, k-essence phantom theories, even if stabilized, suffer from serious diseases and it is very unlikely

that such a fluid could drive the super-acceleration of the Universe $w < -1$. Note that it was recently found that inhomogeneities of the matter distribution in the Universe may be described by an effective scalar field which could be a phantom in certain cases [102]. Because only effective, this field does not suffer from quantum instabilities.

K-essence theories and the MOND paradigm

K-essence theories are also used to account for the mass discrepancy in galaxies and clusters, without the need for dark matter. Milgrom [1] first pointed out that rotation curves of spiral galaxies exhibit a discrepancy at an universal acceleration scale $a_0 \sim 1.2 \times 10^{-10} \text{m.s}^{-2}$, and therefore that a modification of Newton dynamics (MOND) of the form

$$a\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = g, \quad (5.14)$$

where g is the Newtonian gravitational field and a the acceleration, could account for the observed discrepancy without dark matter. The μ function must behave asymptotically as $\mu(x) = 1$ if $x \gg 1$ and $\mu(x) = x$ if $x \ll 1$. The μ function is otherwise free. The choice $\mu(x) = x/\sqrt{1+x^2}$ is standard and fits well with the data. Such a behavior in the low acceleration regime automatically leads to flat rotation curves far from the source, and also reproduces the well-established Tully-Fisher law $v^4 \propto L$, where v is the plateau velocity and L is the luminosity of the galaxy.

This successful phenomenology [103] can be reproduced with the help of relativistic quadratic Lagrangians (RAQUAL) [2], i.e., a k-essence scalar field. Consider for instance a scalar field φ coupled to matter via a conformal metric $\tilde{\mathbf{g}} = \exp(-\alpha\varphi)\mathbf{g}$. The scalar field equation then reads

$$\nabla_\mu (F'(X)\nabla^\mu\varphi) = -4\pi G\alpha T, \quad (5.15)$$

where ∇ is the covariant derivative corresponding to the metric \mathbf{g} , G is Newton's constant appearing in the Einstein-Hilbert action, and T is the trace of the stress-energy tensor of the matter fields (defined by variation and contraction with respect to \mathbf{g}). If we consider a static distribution of matter ρ , this equation reduces to a static modified Poisson equation for the scalar gravitational potential φ :

$$\nabla(F'((\nabla\varphi)^2)\nabla\varphi) = 4\pi G\alpha\rho. \quad (5.16)$$

It is then clear that, after restoring the appropriate dimensionfull constants, that the function $F'(x^2)$ plays the role of Milgrom's function $\mu(x)$. Note that $X > 0$ in the static case. If we require that $F(X)$ behaves as X if $X \gg 1$, and as $2/3X^{3/2}$ if $X \ll 1$, we thus recover the MOND phenomenology.

Since the μ function is generally taken as a monotonic (increasing) function of its argument, the second derivative of F is positive and the scalar waves propagate superluminally. The theory was thus thought to be acausal [2, 24]. However, we argued in Sec. 5.3 and Sec. 5.4 that this conclusion is correct only if the gravitational metric defines a favored chronology, an assumption that may be dropped.

A critical point is however that the free function F (related to μ) must satisfy the conditions of Eq. (5.9). It is however immediate to note that the asymptotic conditions on μ implies that when X goes to 0, $F'(X)$ and $F'(X) + 2XF''(X)$ also go to zero and the effective metric is completely degenerate.

This means that, in such a theory, in an astrophysical context, there must exist around each galaxy or cluster a singular surface along which the scalar degree of freedom does not propagate. The reason is that, near the source, X must be positive, but negative far from it,

due to the cosmological background. This theory can therefore not lead to a consistent picture of local physics imbedded into a cosmological background. This major objection also applies to the recent relativistic model of MOND in [24].

A trivial modification of the asymptotic form of the function μ however cures the problem. Let us consider that $\mu(x) \sim x + \varepsilon$ if $x \ll 1$, or equivalently that $F'(X) \sim \sqrt{X} + \varepsilon$ if $X \ll 1$. It ensures that the theory is well behaved at the transition between local and cosmological physics. This slight modification induces a significant change in the phenomenology because there is a return to Newtonian behavior very far from the source, with a renormalized value of the gravitational constant. Such a theory thus predicts that rotation curves are only approximatively flat on a finite range of r , and current data requires ε to be at most of order 1/100. More details on this can be found in [104]. Interestingly, in that kind of theory, MOND only appears as an intermediate regime between two Newtonian ones only differing by the value of the gravitational constant, with the transition, driven by the scalar field, occurring at Milgrom's acceleration scale.

Bimetric theories and MOND

MOND-like theories of gravity must also predict enhanced light deflection in order to be consistent with the data. In the previous theory however, the conformal coupling of the scalar field to the matter metric implies that light is not coupled to the scalar field because of the conformal invariance of electromagnetism in four dimensions.

This has led various authors to consider more general bimetric theory of gravity in which matter is coupled to a disformal metric of the type Eq. (5.11) [20, 63]. In these models, the vector field U in Eq. (5.11) was assumed to be the gradient of the k-essence scalar field, and A and B some functions of φ and X . It was however proven that when the matter light-cone is wider than the gravitational one (see Sec. 5.5) then there is actually less light deflection than in General Relativity.

However, we have seen that causality does not require the matter light-cone to be wider than the gravitational one. On the contrary, it could be inside the gravitational one and the light deflection would be enhanced (compared to General Relativity). Such a framework is therefore relevant for relativistic theories of the MOND paradigm, as we stress in [97]. The Cauchy problem is very likely to be well posed, since the (Einstein) equation of the metric field is still diagonalized, hyperbolic and of the second order. The scalar field equation in vacuum has a well-posed Cauchy problem. The scalar field equation inside the matter is however complicated and is not diagonalized. The Cauchy problem inside the matter is thus a quite involved question, but we expect that some generic requirements on the free functions A and B and on energy conditions of the matter sector will guarantee its well-posedness. This is left for further investigation (see also [97]).

Bimetric theory of gravity and the Pioneer anomaly

Let us briefly consider another application of bimetric theories of gravity. Conventional physics has not succeeded, so far, in explaining the anomalous motion of the two Pioneer spacecrafts [105, 106] that experience a small anomalous acceleration (roughly directed towards the Sun).

Unconventional theories of gravity could however explain it. The two Pioneer spacecrafts are moving along geodesics of the matter metric \tilde{g} , and we shall look for a slight modification of the Schwarzschild solution to explain the Pioneer anomaly. It is worth noting that this anomaly was detected soon after Jupiter's flyby [105, 106] so that we have to check that the suggested modification is compatible with the motion of outer planets. Outer planets are moving along quasi-circular orbits, and are thereby mostly sensitive to the time-time component of the matter

metric \tilde{g}_{00} . Very sensitive tests of Kepler's third law [107] then place stringent bounds on the deviation from the leading order of the time-time component of the Schwarzschild metric. These bounds are actually too small to account for the Pioneer anomaly.

This fact leads to the wrong statement in [108] that the Pioneer anomaly cannot be of gravitational origin. This is indeed not justifiable since the two spacecrafts evolve on hyperbolic trajectories and are thereby also sensitive to the radial-radial component of the matter metric, which is not well constrained in the outer solar system. Let us stress that, if spherical symmetry is assumed, a slight modification of \tilde{g}_{rr} compared to the Schwarzschild solution is the only way to give the Pioneer anomaly a gravitational origin in a metric theory of gravity. This was realized in [109, 110].

Here we provide, with the help of bimetric theories of gravity, a framework that realizes this modification of the radial-radial component. The action of the theory is given by the Einstein-Hilbert action, a canonical action for the scalar field, and the matter fields are coupled to the matter metric

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi) (g_{\mu\nu} + B(X)\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi), \quad (5.17)$$

where X is still defined by Eq. (5.6). As we have already stressed, non trivial properties of A , B and energy conditions of the matter sector may be required to ensure the hyperbolicity of the scalar equation inside matter. In addition, the matter metric has to be Lorentzian and this reads $1 + 2XB(X) > 0$. In a static and spherically symmetric situation, we have $\tilde{g}_{00} = A^2g_{00}$ and $\tilde{g}_{rr} = A(g_{rr} + B(X)\nabla_r\varphi\nabla_r\varphi)$. The bare metric \mathbf{g} is given by the solution of Einstein's equations and it can be shown that it coincides with the Schwarzschild solution, to leading order. This theory is thus a realization of the above phenomenology. Such models predict "Pioneer-like" anomalies in the precession of perihelion that could for instance be found in precise measures of the orbit of Mars. More details on the Pioneer anomaly and disformal theories can be found in [97].

Varying Speed of Light theories

The first varying speed of light theories were constructed by replacing c by $c(t)$ in the equations of motion of General Relativity, where t could be the cosmic time [25, 26, 27, 28]. This however leads to equations of motion that do not conserve stress-energy anymore. In other words, this theory cannot be obtained from a variational principle [31, 90].

Some authors thus made use of the disformal matter metric Eq. (5.17) to reproduce VSL within a consistent framework [29, 30, 31, 111]. Note that in all of these models, the free functions were taken as constants $A = 1$ and $B = -1/m^2$. Let us stress that if one insists on the Weak Equivalence Principle there cannot be any coupling between φ and the standard model matter other than through the matter metric. Then, by varying the action with respect to φ , one finds that the scalar field is not created by the matter sources ($\nabla_\mu\varphi = 0$ is always a solution). The scalar field can only be generated by some (non constant) function $A(\varphi)$, like in scalar-tensor theories.

Note also that the choice of $B = -1/m^2$ in these works does not guarantee the Lorentzian character of the matter metric, which can actually be Euclidean in a cosmological background such that $(\partial_0\varphi)^2 > m^2$. One could however circumvent this problem by arguing that the theory is only an effective model valid for $(\partial\varphi)^2 \ll m^2$, with m of the order of the grand unification scale.

As we have already stressed, the initial value formulation of the scalar field equation in such models is an involved question. This has not been pointed out previously, although the existence of an initial value formulation is crucial in order to give any sense to such VSL models.

Let us finally remark that, since the fine structure constant α is proportional to the inverse of the speed of light, it has been argued that VSL theories could also account for the variation of α with cosmic time, if such a variation exists [112, 113]. However, in this bimetric framework of VSL theories, if one analyzes atomic rays at some redshift by usual techniques, one is observing electromagnetic phenomena using matter rods and clocks, so that no variations of α are actually observable. The fact that the ratio of the speed of light to the speed of gravitational waves varies in space and time does not lead to a variation of α (if it is measured in the usual way), but simply to a redefinition of the redshift z of distant objects.

5.8 Conclusions

We have provided a careful analysis of the meaning of causality in classical field theories. This has led us to the conclusion that superluminal behavior is found to be non causal *only if* one refers to a *prior* chronology on spacetime. This postulate actually states that, locally, some sets of inertial coordinates must be the preferred ones, and this appears to be in great conflict with the spirit of General Relativity, and more precisely with general covariance. On the contrary, we derived in Sec. 5.3, by means of the conditions (a')–(b'), a formulation of causality in which coordinates are still physically meaningless.

Note that while referring to a preferred chronology may seem natural in General Relativity since all fields (both gravity and matter) propagate along the gravitational metric \mathbf{g} , it becomes somewhat unnatural whenever spontaneous breaking of Lorentz invariance occur, be it driven by quantum polarization (and in general, the solution of field equations), nonlinearities of some new fields, etc. The resulting spacetime is generically endowed with a finite set of Lorentzian metrics \mathbf{h}_i which may not be conformally related to each others. In that case rods and clocks made up of different fields lead to different systems of coordinate that do not transform under the same Lorentz group. There is not only one, but at least two invariant speeds in that case. Note that it would be misleading to think that there is a preferred Lorentz invariance in the theory because of the symmetry of the action. Actually, in a General Relativity-like context, the action is not Lorentz invariant but diffeomorphism invariant. This notably means that all local system of coordinates are equivalent. On the contrary, the existence of a preferred chronology means that (as far as causality is concerned) there exists some preferred class of inertial coordinates, or equivalently some preferred rods and clocks. This seems to be physically unacceptable.

As a consequence, one *cannot* refer to causality in order to assert that nothing can travel faster than one of these speeds. Accordingly, causality does not require one of these metric to define a cone wider than the others everywhere on spacetime. Bimetric theories of gravity greatly enlighten this point, since both the gravitational and the matter metric could be used to define a “natural” chronology on spacetime. Depending on the choice made, one then finds that nothing can travel faster than gravity or light. These two opposite requirements can be found in the literature.

On the contrary, our definition of causality in which no prior chronology is assumed (by means of our “mixed” chronology, see Sec.5.3), enables a causal theory to include “superluminal” propagation. Actually the very notion of superluminal behavior is no more meaningful in that framework, and the only point is that some degrees of freedom can propagate faster than other ones. Moreover the causal cones may even tip over each other depending on the location on spacetime. As an application, in k-essence theories, causality does *not* require the sign of $F''(X)$ to be fixed (and notably negative), and, in bimetric theory causality does not require either the gravitational light-cone to be wider than the matter one (nor conversely).

What actually requires causality is first that the equations of motion have a well-posed

Cauchy problem. This strongly depends on the precise form of the dynamics, and throughout this paper we used classical results [59] on that subject. We also discussed in detail the fact that global properties of spacetimes may break causality. We pointed out that this already occurs in standard General Relativity *so that it cannot be related to some intrinsic disease of superluminal propagation*. We discuss three very similar cases : Gott's cosmic strings [61], the two bubbles of non trivial vacua in k-essence theories [71] and the two Casimir experiments of [67]. What became clear was that such non trivial global properties may be suppressed by subtle boundaries effects. This would be an illustration of the chronology protection conjecture.

Acknowledgments

The author is indebted to G. Esposito-Farèse for many useful discussions and comments and thanks C. Deffayet, R. Durrer, E. Flanagan, J. Larena, J. Moffat and J.-P. Uzan for useful discussions, and the anonymous referees for helpful remarks.

Deuxième partie

Le mouvement à deux corps dans la théorie de Nordström

Le mouvement à deux corps dans la théorie de Nordström

6.1 Présentation du travail et résultats

L'analyse du mouvement à deux corps se heurte à des difficultés considérables en relativité générale, contrairement au cas Newtonien où le mouvement peut-être exactement résolu. Les raisons sont multiples. D'abord, les équations elles-mêmes de la relativité générale sont bien plus complexes que l'équation de Newton. Par ailleurs, modéliser le terme de source (par exemple deux trous noirs, deux étoiles à neutrons, etc.) n'est pas exempt de difficultés, notamment quant à la question du choix du système de coordonnées. Enfin, bien sûr, le fait que la théorie soit relativiste apporte deux nouveautés majeures : d'une part, le système double et gravitationnellement lié émet des ondes gravitationnelles et par là perd de l'énergie, de telle sorte que les deux corps orbitant se rapprochent l'un de l'autre, et par conséquent accélèrent et atteignent des vitesses relativistes, jusqu'à la coalescence des deux corps (en général, dans un état de trou noir), phase qu'il nous faut aussi savoir décrire; d'autre part (c'est bien évidemment lié), les forces gravitationnelles se propageant à vitesse finie, il faut tenir compte des effets de retards relativistes.

Une connaissance approfondie du mouvement à deux corps (notamment dans la phase relativiste précédant la coalescence) est pourtant essentielle à l'interprétation des signaux expérimentaux bientôt enregistrés dans les détecteurs d'ondes gravitationnelles, puisque ces systèmes en seront la principale source. C'est donc la condition sous laquelle s'ouvrira d'une part tout un nouveau pan de l'astronomie et de l'astrophysique, et d'autre part la possibilité de nouveaux tests des théories de la gravitation en champ fort et dans le régime relativiste. Dans le travail que nous reportons ci-dessous, nous avons analysé en détail le problème du mouvement à deux corps dans une théorie relativiste simple de la gravitation, à savoir la théorie de Nordström. Nous avons cherché à dériver le plus de résultats analytiques possibles dans l'objectif, d'une part, de comparer ces résultats théoriques aux simulations du mouvement à deux corps, et ainsi produire un nouveau test des méthodes numériques, et d'autre part de discuter de certains effets non-perturbatifs, qui sont, pour l'instant, hors de portée d'une approche analytique en relativité générale.

Nous avons déjà évoqué les théories scalaires de la gravitation et en particulier la théorie de Nordström au cours des chapitres précédents. Nous avons insisté sur la proximité de la théorie de Nordström avec la relativité générale, proximité évidemment essentielle à l'approche présente. Le lecteur trouvera dans l'article qui suit une présentation détaillée de ces théories et de cette dernière assertion (voir notamment la section 6.3). En particulier, nous y rappelons que la théorie de Nordström est la seule théorie scalaire de la gravitation qui respecte le principe d'équivalence fort. A ce sujet, remarquons que si l'idée d'utiliser les théories scalaires de la gravitation comme un « laboratoire » pour tester les méthodes numériques employées dans la résolution du mouvement à deux corps en relativité générale n'est pas neuve [114, 115] (voir aussi [116]), certains auteurs ont préféré mener cette approche dans des théories autres que la théorie de Nordström [117], la non-linéarité de l'équation du champ scalaire gravitationnel étant alors vue comme représentant plus fidèlement la non linéarité de la relativité générale. D'un autre côté cependant, cette non

linéarité détruit le principe d'équivalence fort. Autrement dit, il n'est pas clair de savoir quelle théorie scalaire de la gravitation est la plus proche de la relativité générale; contrairement à cette dernière, il faut, dans les théories scalaires, choisir entre le principe d'équivalence fort et la non-linéarité de l'équation de champ. Nous avons privilégié la théorie de Nordström puisque sa linéarité permet d'écrire les équations du mouvement de façon exacte. De plus, le principe d'équivalence fort permet de modéliser sans ambiguïté des corps de masse constante. Dans le cas contraire en effet, il nous faudrait tenir compte d'une contribution différente de l'énergie de liaison gravitationnelle à la masse inertielle et à la masse pesante. La validité de ce principe nous permet donc d'oublier la structure interne des corps et justifie leur modélisation par des corps ponctuels. Enfin, l'étude du mouvement à deux corps, nous l'avons dit, est rendue difficile par l'émission d'ondes gravitationnelles. Nous rappellerons que la théorie de Nordström mime correctement la relativité générale¹ à l'ordre le plus bas, puisque la perte d'énergie d'un système à deux corps en théorie de Nordström commence, comme en relativité générale, en v^5/c^5 où v est la vitesse orbitale (d'un des deux corps par rapport au centre de masse).

La théorie de Nordström, nous l'avons dit, trouve sa simplicité dans la linéarité de l'équation du champ gravitationnel φ . Ainsi, il est immédiat d'écrire la solution exacte du champ scalaire étant donné N point matériels de masse et de lignes d'univers quelconques. Autrement dit, la métrique est exactement connue en fonction des sources (aux ondes libres près qu'on ne considèrera pas), ce qui constitue, dans l'optique de l'étude du mouvement à deux corps, un avantage considérable par rapport à la relativité générale. Puisque nous nous limitons à décrire les corps massifs comme des particules ponctuelles, cependant, il va sans dire que le champ scalaire gravitationnel, et donc la métrique physique, sont singuliers le long des lignes d'univers des particules. Par conséquent, la connaissance de la métrique physique presque partout ne nous suffit pas à déduire le mouvement des corps dans un champ gravitationnel quelconque. Il nous faut régulariser les équations du mouvement, dont les divergences proviennent du caractère ponctuel des corps envisagés, c'est-à-dire, plus physiquement, du fait que ces corps ont une énergie potentielle gravitationnelle infinie. On s'attend par conséquent, dans un processus de régularisation, à devoir finalement renormaliser la masse des corps considérés. Il va sans dire que régulariser les équations du mouvement, dont les divergences proviennent essentiellement de l'auto-champ (infini) du corps massif dont on cherche la dynamique, reviendra aussi à considérer l'effet du champ propre du corps sur son propre mouvement. On appelle ces termes l'auto-force (*self-force*), ou la réaction de radiation (*radiation reaction*), dont l'analogie en électricité, par exemple, est la force de Lenz.

Le travail ci-dessous emprunte la méthode de régularisation de Dirac dans le cadre d'un problème similaire en électromagnétisme [118, 119, 120], et qui consiste essentiellement en un bilan d'énergie-impulsion du corps massif et du champ gravitationnel dans un tube d'univers entourant sa ligne d'univers. Il suffit de considérer le rayon de ce tube égal à un petit paramètre ε pour trouver la renormalisation permettant à l'équation de conservation ci-dessus évoquée de rester finie dans la limite où ε tend vers zéro. Nous obtenons de la sorte l'équation exacte du mouvement d'un corps massif dans un champ gravitationnel extérieur, équation qui rend naturellement compte des termes d'auto-force. Nous spécialisons ensuite ces équations au cas d'un système à deux corps de masses identiques et obtenons les équations exactes décrivant l'évolution de ce système binaire. Ce système d'équations, particulièrement compliqué (non-linéaire, couplé, et transcendant) ne se laisse pas résoudre aisément. Nous cherchons donc dans un premier temps une solution stationnaire (circulaire), mouvement conçu comme la solution exacte de la partie des équations symétrique sous le renversement du temps. Nous dérivons ainsi la relation exacte entre la séparation des deux corps et leurs vitesses orbitales. Nous en profitons pour calculer

¹Bien qu'il s'agisse du rayonnement monopolaire dans la théorie de Nordström, et du rayonnement quadrupolaire dans la théorie de la relativité générale.

l'énergie de cette configuration circulaire et montrons que cette solution non-perturbative ne contient pas d'ICO (*Innermost stable Circular Orbit*) [121], c'est-à-dire que l'énergie en fonction de la séparation des deux corps ne voit jamais sa dérivée s'annuler. Cette notion d'ICO, quoique non physique puisque le mouvement du système à deux corps n'est jamais exactement circulaire mais toujours spirale, est cependant importante en relativité numérique. C'est pourquoi nous y avons consacré une étude détaillée dans le cadre de la théorie de Nordström. Nous montrons d'ailleurs que l'énergie possède de tels extrema si on la développe de façon post-Newtonienne. Le résultat est d'autant plus surprenant que ces ICOs post-Newtoniennes semblent converger (voir Fig. 6.5 ci-dessous), tandis qu'elles ne le peuvent évidemment pas, comme le montre la connaissance de l'énergie exacte (non-perturbative).

Nous revenons ensuite au mouvement physique solution des équations obtenues avec la seule fonction de Green retardée, et développons un schéma semi-perturbatif qui n'est pas le schéma post-Newtonien standard, mais fondé sur la perturbation des orbites. Nous injectons d'abord la trajectoire circulaire susdite dans l'équation du mouvement, en déduisons ainsi les termes correctifs nécessaires, et les intégrons pour trouver une trajectoire améliorée, etc. Nous prouvons que ce développement est un développement en puissance de v^5/c^5 , où v est la vitesse orbitale, c'est-à-dire que, dans un développement post-Newtonien, seuls les termes d'ordre inférieurs à v^{5n}/c^{5n} où n est le nombre d'itérations effectuées, sont exacts. C'est déjà cinq fois mieux que le développement post-Newtonien standard, tandis que, par ailleurs, chaque itération apporte des effets non perturbatifs, traduisant notamment le pôle de la relativité restreinte, ie. celui qui interdit à la vitesse orbitale de dépasser la vitesse de la lumière. Ces divers résultats analytiques et numériques sont détaillés dans l'article qui suit, et que nous soumettrons prochainement.

The two-body problem in Nordström theory of gravity.

Jean-Philippe Bruneton², Gilles Esposito-Farèse³
G_RεCCO,

*Institut d'Astrophysique de Paris, UMR 7095-CNRS, Université Pierre et Marie Curie - Paris
 6, 98 bis boulevard Arago F-75014, Paris, France*

Simple toy models can be useful to understand some properties of the two-body problem, which is known to be very difficult in General Relativity. We focus on the body-problem within Nordström's scalar theory of gravity which share many features of General Relativity, although it does not predict any light deflection by gravitational potentials. It is indeed a consistent ghost-free relativistic field theory which moreover satisfies the strong equivalence principle and in which the gravitational radiation starts at order $1/c^5$. The strong equivalence principle allow us to consider constant-mass point-particles, whereas this cannot be justified in the other scalar theories considered so far in the literature. The great advantage over General Relativity is that the gravitational scalar field can be exactly solved for any configuration of such point-particles. Their equations of motion can also be written exactly, taking fully into account the self-forces. We first solve exactly the circular motion (with the help of the time symmetric Green function) and we prove that there is no innermost last circular orbit in the exact non-perturbative theory whereas they are found sometimes to exist in post-Newtonian (PN) truncations. We then construct a solution of the two body motion in an iterative (non-PN) way, which can be viewed as a series in powers of $1/c^5$ (instead of $1/c$). Besides this faster convergence, each order also contains some non-perturbative informations when the orbital velocity goes to c . Starting from a circular Newtonian-like orbit, the first iteration already yields the 4.5 PN radiation-reaction $\propto 1/c^{14}$, and higher orders can be obtained in a constructive way. These results not only shed light on some non-perturbative effects of relativistic gravity, but may also be useful to test numerical codes.

6.2 Introduction

The detection and analysis of gravitational waves on Earth will open a new domain of high energy astrophysics. The analysis of signals coming from inspiraling binaries, like neutron-star or black holes binaries, will provide a powerful test of theories of gravity (and especially General Relativity) in the strong field regime. The form of the gravitational waves should also shed light on the field structure of gravity. For instance, this form differs in General Relativity (GR) and in scalar-tensor theories, where a scalar degree of freedom also mediate gravity

The interferometers LIGO and VIRGO may be soon operational, opening this new era. However, the expected signal to noise ratio will be so weak that we must have a precise idea of the form of the signal to perform a detection. Such waves templates (that obviously depend on the chosen theory) have thus to be calculated theoretically. Since GR remains to date the only fully satisfying theory of gravity, attempts of computation of waves templates are usually done in this context. They have already been constructed up to the 3.5 post-Newtonian (PN) order of GR [122]. This work provides a very good approximation of the long inspiral phase of the binary, where the motion remains (quasi) circular and the orbit of the binary shrinks down slowly as energy is carried away by gravitational radiation.

A short highly non-circular and relativistic phase succeeds to this long inspiral phase, when the two bodies plunge toward each others. This results in a unique astrophysical object which radiates its excited states (the ringdown phase). The templates corresponding to this last phase

²bruneton@iap.fr

³gef@iap.fr

are also well known, but the way how the binary radiates during the plunge phase remains largely unknown. Moreover the PN picture breaks down during this phase since the small parameter in which the expansion is made, namely the orbital velocity v over the speed of light c , is more about one than zero.

Numerical relativity may thus be the only way to understand and describe the plunge phase. Although much effort has been done in the last decades in this field, the problem is not yet completely solved. Many numerical and theoretical approximations are required, and this not obvious at all to estimate the errors made this way. This, in fact, motivates the study of toy-models of the two body problem [114]. An analytical solution to the two-body problem within a relativistic theory of gravity would provide interesting tests for numerical methods.

Such a toy-model should be simple enough to treat analytically (at least partially) the two-body problem, but should also be as close as possible from GR. Metric scalar theories of gravity are perfect candidates for such a toy-model. Of course, their predictions are not interesting by themselves, since scalar theories of gravity are ruled out by experiment (it does not predict any light deflection by gravitational potentials). We will see that these theories anyway share many features of GR. Moreover, they are also much simpler than GR since they involve only one degree of freedom. This justifies that these toy-models are relevant candidates to test numerical codes or approximations used in solving the two body problem in GR. Moreover, the analytical simplicity of such theories enables to disentangle the conceptual difficulties underlying the two-body problem from the analytical ones.

This idea is not a new one. It has already been used in order to test numerical codes [114, 115] or, more recently, the validity of the Quasi-Equilibrium scheme (QE) that we will discuss in some details [123]. However we focus here on a specific scalar theory of gravity that has not been fully considered in the literature. This particular theory however stands for the best motivated toy-model of GR. We also go further in the analytical resolution of the two-body problem, by using one of the great advantage of Nordström's theory : the linearity of the field equation.

The paper is organized as follows. In Sec. 6.3 we motivate this particular choice of scalar gravity by showing that among scalar theories of gravity, only Nordström's theory satisfies the strong equivalence principle (SEP). This is the only known theory which shares this property with GR. Furthermore, we show that it enables us to consider constant-mass point-particles. Were the SEP not satisfied, one would have to deal with the scalar-field dependence of point-particles masses. We derive the basic equations of the theory and insist on the linearity of the field equation, which is related to this particular theory and to the fact that dimension of spacetime is 4.

In Sec. 6.4, we solve exactly the metric generated by N massive point-particles. We then derive the *exact* equation of motion of such bodies using the local conservation of energy, and taking care of the infinite self-gravitating energy of the point-particles. A mass renormalization eliminates this pole and leads to a well-defined equation of motion which notably involves finite terms representing the self-force of the particle. We also write the exact equation of motion of two equal mass bodies.

In Sec. 6.5, we investigate a circular motion of the two bodies (with respect to the center of mass) by using the half retarded and advanced propagator. We derive the analytical relation between the radius and the orbital velocity and next, compute the energy of the binary in such a circular configuration. We show that it vanishes as the separation of the two bodies does. We also investigate the existence of an innermost circular orbit (ICO) by a turning point method. We show that such an ICO does not exist when the full theory is considered, whereas such ICOs are found if post-Newtonian truncations of the exact energy are considered.

In Sec. 6.6, we go back to the physical motion of two equal mass bodies. Although solving exactly the equations of motion is out of reach, we show how the motion can be found order

by order in power of a small parameter directly related to the leading multipolar emission of the system, namely the quadrupolar one. We thus obtain the motion as a series in powers of $(v/c)^5$, where v is the instantaneous velocity of the bodies. Furthermore, this expansion is not a post-Newtonian one since each order yields non-perturbative information on the motion.

In Sec. 6.7, we show analytical and numerical results up to the second order of this algorithm. We give the exact rate of change of the velocity up to 4.5 PN and of the radius up to 7PN. We also plot the corresponding inspiral motion.

6.3 Nordstrom's scalar theory of gravity

The action of a theory in which gravity is mediated by a single massless scalar field φ and satisfying the weak equivalence principle (universality of free-fall of laboratory-size objects) may be written as :

$$S = -\frac{c^4}{8\pi G} \int \sqrt{-\eta} \frac{d^4x}{c} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \mathcal{S}_{\text{matter}}[\text{matter}; \tilde{g}_{\mu\nu} \equiv A^2(\varphi)\eta_{\mu\nu}], \quad (6.1)$$

where $A(\varphi)$ is a given function of the scalar field, characterizing the theory. Throughout this paper, we will use the sign conventions of [8], and in particular the mostly-plus signature $-+++$. The flat metric is denoted $\eta_{\mu\nu}$ and reads $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ in cartesian coordinates (so that $\sqrt{-\eta}$ may be suppressed in the above action if one works in such coordinates). We use bold-faced symbols to denote the three vectors of the Minkowskian geometry.

The action of matter, $\mathcal{S}_{\text{matter}}$, is a functional of all matter fields (including gauge bosons), assumed to be minimally coupled to the conformally flat metric $\tilde{g}_{\mu\nu} \equiv A^2(\varphi)\eta_{\mu\nu}$. In a Fermi coordinate system such that $\tilde{g}_{\mu\nu}$ is diagonalized and its first derivatives vanish, along a worldline, all matter fields behave thus as in special relativity. This ensures that the weak equivalence principle is satisfied, because all objects behave as if there were no gravitational field in a freely falling elevator. Since laboratory rods and clocks are made of matter, they measure the distances and times corresponding to line element $d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. This is the reason why $\tilde{g}_{\mu\nu}$ is often called the “physical” metric. Action (6.1) is a particular case of scalar-tensor theories [52], in which the so-called “Einstein” metric is here assumed to be the flat one $\eta_{\mu\nu}$.

Before writing explicit field equations, it is already trivial to determine the behavior of light in such purely scalar theories of gravity. Indeed, the action for electromagnetism reads

$$\mathcal{S}_{\text{EM}} = \int \sqrt{-\tilde{g}} \frac{d^4x}{c} \frac{1}{4} \tilde{g}^{\mu\rho} \tilde{g}^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \int \sqrt{-\eta} \frac{d^4x}{c} \frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}, \quad (6.2)$$

where the factors $A^{-2}(\varphi)$ coming from the inverse physical metric $\tilde{g}^{\mu\rho} = A^{-2}(\varphi)\eta^{\mu\rho}$ are compensated by those coming from the determinant $\tilde{g} = A^8(\varphi)\eta$. Therefore, because of the conformal invariance of this action in four spacetime dimensions, photons are not coupled at all to the scalar field φ , and thereby propagate in the flat metric $\eta_{\mu\nu}$. In *any* theory of the type (6.1), there is thus strictly no light deflection, and all of them are ruled out by experiment. They anyway share many features with general scalar-tensor theories [52], and we will see below that one of them even satisfies the strong equivalence principle (SEP), like general relativity.

The field equations deriving from action (6.1) read

$$\square_{\text{flat}} \varphi = -\frac{4\pi G}{c^4} A^3(\varphi) A'(\varphi) \tilde{T}, \quad (6.3a)$$

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0, \quad (6.3b)$$

where

$$\tilde{T}^{\mu\nu} \equiv \frac{2c}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta \mathcal{S}_{\text{matter}}[\text{matter}, \tilde{g}_{\mu\nu}]}{\delta \tilde{g}_{\mu\nu}} \quad (6.3c)$$

defines the physical stress-energy tensor, $\tilde{T} \equiv \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{T}^{\mu\nu}$ its trace, $\tilde{\nabla}_\mu$ denotes the covariant derivative with respect to the physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$, and \square_{flat} is the flat d'Alembertian operator (reading simply $\square_{\text{flat}} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ in cartesian coordinates). Since the scalar curvature of $\tilde{g}_{\mu\nu}$ reads

$$\tilde{R} = -6A^{-3}(\varphi) \square_{\text{flat}} A(\varphi), \quad (6.4a)$$

Eq (6.4a) may also be written as :

$$\tilde{R} = \frac{24\pi G}{c^4} A'^2(\varphi) \tilde{T} - 6 \frac{A''(\varphi)}{A(\varphi)} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi. \quad (6.4b)$$

Therefore, if and only if $A(\varphi) = \varphi$ (up to a constant multiplicative factor which can be reabsorbed in the definition of the gravitational constant G), the theory admits a purely geometrical and generally covariant formulation [13]

$$\tilde{R} = \frac{24\pi G}{c^4} \tilde{T}, \quad (6.5a)$$

$$\tilde{C}^{\lambda}_{\mu\nu\rho} = 0, \quad (6.5b)$$

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0, \quad (6.5c)$$

in which the scalar degree of freedom no longer enters explicitly, and notably disappears from the asymptotic boundary conditions. Equation (6.5b) ensures that the metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$ is conformally flat, as required by the vanishing of its Weyl curvature tensor. Using the same reasoning as in [18], this geometrical formulation suffices to prove that the SEP is satisfied (in this theory $A(\varphi) = \varphi$). This means that the gravitational physics of a localized system is independent of the gravitational influence of the rest of the universe, when tidal forces can be neglected. This also means that the internal structure of massive bodies does not influence their motion (at least up to the 5th post-Newtonian order, $\mathcal{O}(1/c^{10})$, where tidal deformations induce a quadrupole-quadrupole coupling between compact bodies). In particular, the gravitational binding energy of a body contributes the same to its inertial and gravitational masses, so that strongly self-gravitating bodies fall in the same way as test masses in an external gravitational field. To our knowledge, there exists only two gravity theories satisfying this strong equivalence principle : general relativity and the above scalar theory with $A(\varphi) = \varphi$, which was formulated by Nordström in 1913 [14] (actually, Nordström first considered the case $A(\varphi) = e^\varphi$, see [15], but realized later the greater consistency of $A(\varphi) = \varphi$; for a historical introduction to Nordström's theory, see [124]). In the framework of general tensor-multi-scalar theories, this was proven in [52] at the first Post-Keplerian level (i.e., up to order $1/c^2$ included for orbital motions, but taking into account non-perturbatively the gravitational binding energies). This principle allows us to describe massive bodies as constant-mass point particles without worrying about their internal structure. In all other theories of type (6.1), with a non-linear matter-scalar coupling function $A(\varphi)$, violations of the universality of free-fall of self gravitating bodies would appear already at the first post-Newtonian level, $\mathcal{O}(1/c^2)$. In the following, we will thus focus on the particular model $A(\varphi) = \varphi$, sometimes called "second Nordström's theory", but here simply "Nordström's theory".

Although the covariant formulation (6.5) is useful to derive that the strong equivalence principle is satisfied, it is actually easier to study the field equations in their initial form (6.3), and even in terms of the "Einstein-frame" stress-energy tensor :

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{2c}{\sqrt{-\eta}} \frac{\delta \mathcal{S}_{\text{matter}}[\text{matter}, A^2(\varphi)\eta_{\mu\nu}]}{\delta \eta_{\mu\nu}} = A^6(\varphi) \tilde{T}^{\mu\nu}. \quad (6.6)$$

[We temporarily keep a general function $A(\varphi)$ in our equations, although the only particular case $A(\varphi) = \varphi$ will be studied in the following sections]. Defining similarly the Einstein-frame stress-energy tensor corresponding to the scalar kinetic term of action (6.1)

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{c^4}{4\pi G} \left(\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} \partial_\lambda \varphi \partial_\rho \varphi \right), \quad (6.7)$$

and noting that $T \equiv \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = A^4(\varphi) \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{T}^{\mu\nu} = A^4(\varphi) \tilde{T}$, one can rewrite Eqs. (6.3) as

$$\square_{\text{flat}} \varphi = -\frac{4\pi G}{c^4} \frac{A'(\varphi)}{A(\varphi)} T, \quad (6.8a)$$

$$\partial_\mu (T^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}) = 0, \quad (6.8b)$$

where the indices of $\tau^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} \tau_{\lambda\rho}$ have been raised with the *flat* (Einstein) metric. Equation (6.8a) is the standard equation for the scalar field in scalar-tensor theories of gravity : compare Eq. (2.9) of [52], where $A'(\varphi)/A(\varphi)$ was denoted $\alpha(\varphi)$. Equation (6.8b) expresses the conservation of the full stress-energy tensor, including matter *and* the scalar field. It is important to note that the scalar field dependence was hidden in the covariant derivative $\tilde{\nabla}_\mu$ (and a global factor $A^{-6}(\varphi)$ relating $\tilde{T}^{\mu\nu}$ to $T^{\mu\nu}$) when working in the physical (“Jordan”) frame corresponding to the metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$, Eq. (6.3a).

Let us now consider the particular case of point particles, whose action read

$$\mathcal{S}_{\text{matter}} = -\sum_A m_A c \int d\tilde{s} = -\sum_A m_A c \int A(\varphi) ds, \quad (6.9)$$

where $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ is the line element in flat spacetime. Its variation with respect to $\tilde{g}_{\mu\nu}$ or $\eta_{\mu\nu}$ gives

$$A^6(\varphi) \tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} = A(\varphi) \sum_A \gamma_A m_A v_A^\mu v_A^\nu \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A(t)), \quad (6.10a)$$

$$A^4(\varphi) \tilde{T} = T = -A(\varphi) \sum_A \frac{m_A c^2}{\gamma_A} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A(t)), \quad (6.10b)$$

where $v_A^\mu \equiv dz_A^\mu/dt = (c, \mathbf{v}_A)$ denotes the velocity of the i -th particle, and $\gamma_A \equiv (1 - \mathbf{v}_A^2/c^2)^{-1/2}$ is the usual special relativistic Lorentz factor. The field equation (6.8a) reads thus :

$$\square_{\text{flat}} \varphi = \frac{4\pi G}{c^2} A'(\varphi) \sum_A \frac{m_A}{\gamma_A} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A(t)). \quad (6.11)$$

Here we notice that Nordström’s theory, corresponding to $A(\varphi) = \varphi$, gives a *linear* equation, so that φ is simply the sum of a constant and of the separate contributions of each point particle. This property is unrelated to the fact that the strong equivalence principle is satisfied, but it will allow us to write an explicit solution for $\tilde{g}_{\mu\nu} = \varphi^2 \eta_{\mu\nu}$ for any distribution of point-particle, whereas a non-linear equation (like the one occurring for the metric in general relativity) needs iterative methods to derive a perturbative solution.

Let us underline that this field equation is no longer linear if the dimension of spacetime differs from 4. Indeed, if one wishes to satisfy the strong equivalence principle (so that the use of constant-mass point-particles can be justified), one should start from Eq. (6.5a), which gives in dimension n :

$$\square_{\text{flat}} \varphi = \frac{4\pi G}{c^2} \varphi^{\frac{4-n}{n-2}} \sum_A \frac{m_A}{\gamma_A} \delta^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A(t)). \quad (6.12)$$

In such a case, the field φ at a given spacetime point depends on its (retarded) value at the positions of the particles, and it becomes *a priori* impossible to obtain an exact solution. On the other hand, one may choose to study in dimension n the theory defined by action (6.1) with $A(\varphi) = \varphi$, so that the action of point particles (6.9) is proportional to φ , and the field equation remains of the form (6.11) with $A'(\varphi) = 1$. However, the scalar curvature corresponding to $\tilde{g}_{\mu\nu} = \varphi^2 \eta_{\mu\nu}$ in n dimensions reads

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= -2(n-1) \left(\varphi^{-3} \square \varphi + \frac{n-4}{2} \varphi^{-4} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right) \\ &= \frac{8(n-1)\pi G}{c^4} \tilde{T} - (n-1)(n-4) \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu (\ln \varphi) \partial_\nu (\ln \varphi),\end{aligned}\quad (6.13)$$

therefore Eq. (6.11) *cannot* be rewritten in a purely geometrical form as (6.5a). The scalar field φ explicitly enters the right hand side (r.h.s.) of (6.13), unless the dimension $n = 4$. Therefore, although such a theory could formally be defined, it cannot satisfy the strong equivalence principle when $n \neq 4$, and the mass of any self-gravitating body thereby depends on φ already at the first post-Newtonian level. In other words, the point-particle action (6.9) should be written in terms of unknown functions $m_A(\varphi)$ (*cf.* Section 6 of [52]), and the looked-for linearity of the field equation (6.11) is then lost. In conclusion, this is only in four spacetime dimensions, and for Nordström theory $A(\varphi) = \varphi$, that a linear equation can be obtained for the scalar field. Together with the fact that the strong equivalence principle is satisfied, this motivates our study of this particular theory.

6.4 Dynamics of N point-particles

We now work in the Einstein frame. All indices are raised or lowered with the flat metric.

The field in term of the sources

As announced in the previous section, the choice of the particular theory $A(\varphi) = \varphi$ enables us to compute exactly the gravitational scalar field generated by any distribution of point-particles. Let us consider N such point-particles whose motion is assumed to be known. We parameterize their positions $z_A^\mu(\tau_A)$ ($A = 1 \dots N$) with their proper time τ_A . Then Eq. (6.11) reads

$$\square_{\text{flat}} \varphi(x) = \frac{4\pi G}{c^2} \sum_A m_A \int \delta^{(4)}(x^\mu - z_A^\mu(\tau_A)) ds, \quad (6.14)$$

and is solved using the standard retarded Green function of the flat d'Alembertian operator. As the field equation of electromagnetism is very close to Eq. (6.14), we should find for the field φ an analogue of the well-known Lienardt-Wiechert potential. Indeed, the solution reads

$$\varphi(x) = \varphi_{\text{hom}}(x) - \sum_A \frac{Gm_A}{\rho_A^{\text{ret}}(x)c^2} \quad (6.15)$$

where φ_{hom} is a solution of the homogeneous equation and

$$\rho_A^{\text{ret}}(x) = -u_\nu^A(\tau'_A)(x^\nu - z_A^\nu(\tau'_A)), \quad (6.16)$$

is a scalar distance between x and $z_A(\tau'_A)$, where τ'_A is the *retarded* proper time given by the intersection of the i -th particle world line and the past light cone of x , see the left panel of Fig. 6.4.

Note that τ'_A is only a function of x for a given trajectory. In an instantaneously comoving Lorentz frame $\rho_A^{\text{ret}}(x)$ reduces to $c(t - \tau'_A)$ and is thereby simply the distance between the particle and the point x . Following [120], we shall call it the *retarded distance*.

Note that the physical metric reads $\tilde{g}_{\mu\nu} \sim \varphi_{\text{hom}}^2(x)\eta_{\mu\nu}$ far from the sources. If one does not consider free waves therefore, the solution of the homogeneous equation is simply a constant and the physical metric is Minkowskian at infinity. Up to a field redefinition, this constant can be chosen to be 1 so that the field finally reads :

$$\varphi(x) = 1 - \sum_A \frac{Gm_A}{\rho_i^{\text{ret}}(x)c^2}. \quad (6.17)$$

The gravitational scalar field is thus explicitly known (as already underlined in standard textbooks, eg. [8], chp. 7). Let us emphasize that this is not the case in general relativity because of the non-linearity of the field equations, and the fact the Green functions are not exactly known in curved spacetime. This would have not been the case either in any other scalar theories of type (6.1) because of non-linearities emerging in such a case, see Sec. 6.3.

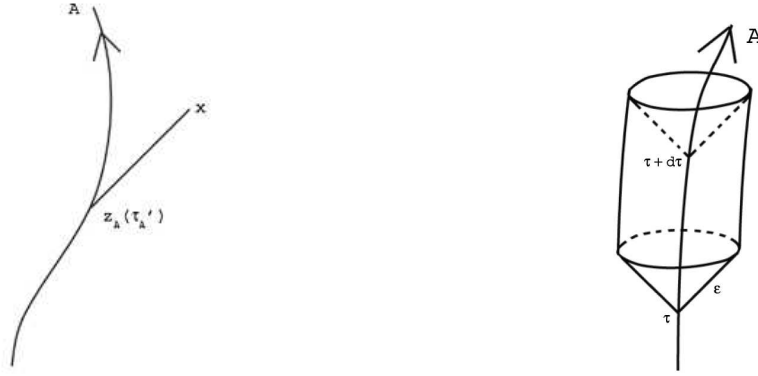


FIG. 6.1 – (left) In this spacetime diagram, we represent the worldline of body A . The past light cone of point x intersects this worldline at the retarded time of body A : τ'_A . (right) A schematic view of the infinitesimal retarded tube of constant radius ϵ . The tube is constructed between time τ and $\tau + d\tau$ using the past light cones and the value ϵ of the radius of the tube.

Equations of motion

Since the physical metric is known for arbitrarily given sources, we should be able to derive their equation of motion. Indeed, Eq. (6.5c) shows that test masses are following geodesics of this conformal metric. However, if one does not only consider test masses but the dynamics of two bodies of comparable mass, one cannot neglect the effect of the self-field on their own motion (the so-called self-force). Actually, Eq. (6.17) shows that the self-field diverges along the world lines of massive bodies, so that their exact equation of motion (including the self-force) is not yet defined.

Such a problem has already been addressed in classical electrodynamics, and an answer was found, leading to the Lorentz-Dirac equation. It is possible to describe massive bodies as point-particles if we regularize the divergences they generate. Such a regularization enables to renormalize the theory. There exists several ways to achieve this, all leading to the Lorentz-Dirac

equation when applied to electromagnetism. We will follow the original method proposed by Dirac [118], and we follow its presentation as in Ref. [119].

Let us consider a point particle A moving in a smooth external field. We use the local conservation of energy-momentum in a small 3-tube surrounding the world-line of body A to derive its equation of motion. For a given tube enclosing a segment of the world-line, the variation of the particle's energy-momentum between the two-surfaces closing the tube (the "caps") equals the opposite of the flux of field's stress-energy tensor $\tau_{\mu\nu}$ through the tube. Note that for two given caps of the tube, the flux of the field, and therefore the equation of motion, does not depend on the shape of the tube, as one can show using a four-dimensional Gauss theorem and the null divergence (in vacuum) of the stress-energy tensor of the scalar field, see Eq. (6.8b).

Taking the radius of the tube to be ϵ leads to a regularized equation, however still divergent when $\epsilon \rightarrow 0$. The equation of motion involves only one pole like Gm^2/ϵ coming from the infinite self-gravitational energy of the point-particle, and which will be eliminated below by a mass renormalization.

Let us derive explicitly the equation of motion of body A of mass m_A in a covariant way. We use a constant retarded tube defined by the fact that points x on the lateral surface of the tube are at a fixed retarded distance from the world line : $\rho_A^{\text{ret}}(x) = \epsilon$. Let us now consider an infinitesimal constant retarded tube Σ_A constructed on a small segment of the world line (between τ and $\tau + d\tau$), as shown in the right panel of Fig. 6.4. Denoting P_ν^A the four-momentum of particle A , the conservation of energy reads

$$\Phi_\nu^A = -\dot{P}_\nu^A, \quad (6.18)$$

where the dot denotes the derivative with respect to s and Φ_ν^A is the flux of $\tau_{\mu\nu}$, defined by Eq. (6.7), through the tube Σ_A per unit of proper length :

$$\Phi_\nu^A = \frac{d}{ds} \int_{\Sigma_A} \tau_{\nu\alpha} d\Sigma_A^\alpha. \quad (6.19)$$

Here $d\Sigma_A^\alpha$ is the outward-directed surface element on Σ_A . We will sometimes forget for convenience the indices "A" and "ret" and the dependence in the proper time τ . As $d\Sigma^\alpha = \eta^{\alpha\sigma} \partial_\sigma \rho \epsilon^2 ds d\Omega$, we have

$$\Phi_\nu = 4\pi\epsilon^2 \overline{\eta_{\nu\alpha} \tau^{\alpha\sigma} \partial_\sigma \rho} \quad (6.20)$$

where the overline stands for an angular integral at a fixed time τ : $4\pi\overline{X} \equiv \int X(x, \tau) d\Omega$ for any quantity $X(x, \tau)$. In order to compute the flux of the field, it is convenient to write :

$$\varphi \equiv \varphi_{\text{self}} + \varphi_{\text{ext}}, \quad (6.21a)$$

$$\varphi_{\text{self}}(x) = -\frac{Gm}{\rho(x)c^2}, \quad (6.21b)$$

where φ_{self} is the self-field generated by body A and φ_{ext} is the smooth external field (generated by the other point particles if one considers the N -body problem). In view of the decomposition of the field φ in two terms, and since the stress-energy tensor of the field is quadratic in φ , it is convenient to decompose it in three terms : $\tau_{\text{self}}^{\mu\nu}$, $\tau_{\text{cross}}^{\mu\nu}$ and $\tau_{\text{ext}}^{\mu\nu}$, and to compute the total flux as :

$$\Phi^\mu = \Phi_{\text{self}}^\nu + \Phi_{\text{cross}}^\nu + \Phi_{\text{ext}}^\nu. \quad (6.22)$$

In order to perform this calculation we simply need to know the expression of the derivative of the retarded distance, and to be able to compute some angular integrals. We have (see [120])

$$\partial_\sigma \rho(x) = -u_\sigma + (1 + \rho k^\lambda a_\lambda) k_\sigma, \quad (6.23)$$

where $k^\lambda \equiv [x^\lambda - z_A^\lambda(\tau)]/\rho(x)$ is a null vector pointing from z to x . Angular integrations are taken with the help of the following formulas :

$$\begin{aligned}\overline{k^\mu} &= u^\mu, \\ \overline{k^\mu k^\nu} &= \frac{1}{3}\eta^{\mu\nu} + \frac{4}{3}u^\mu u^\nu, \\ \overline{k^\mu k^\nu k^\lambda} &= \frac{1}{3}(u^\mu \eta^{\nu\lambda} + \text{circ. perm.}) + 2u^\mu u^\nu u^\lambda.\end{aligned}$$

One then finds, with $\dot{u}^2 = \dot{u}_\lambda \dot{u}^\lambda$:

$$\Phi_\nu^{\text{self}} = \frac{Gm^2}{2\epsilon} \dot{u}_\nu + \frac{Gm^2}{3} \dot{u}^2 u_\nu. \quad (6.24)$$

The first term diverges when ϵ goes to zero and has to be renormalized, whereas the second one remains when ϵ goes to ∞ , and therefore represents the loss of energy at infinity by radiation reaction of the particle. We now wish to focus on the limit $\epsilon \rightarrow 0$ in order to find the equation of motion. The contribution to the total flux coming from $\tau_{\mu\nu}^{\text{ext}}$, which involves twice the external field φ_{ext} , is of order $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ by virtue of Eq. (6.20), so that $\Phi_\nu^{\text{ext}} = 0$ when $\epsilon \rightarrow 0$. The cross flux reads

$$\Phi_\nu^{\text{cross}} = mc^2 \partial_\nu \varphi^{\text{ext}} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (6.25)$$

where the external field is evaluated at the point $z_A(\tau)$ because of the following Taylor expansion : $\varphi_{\text{ext}}(x) = \varphi_{\text{ext}}[z_A(\tau)] + \mathcal{O}(\epsilon)$. The looked-for equation of motion reads thus :

$$\frac{Gm^2}{2\epsilon} \dot{u}_\nu + \frac{Gm^2}{3} \dot{u}^2 u_\nu + mc^2 \partial_\nu \varphi^{\text{ext}} + \mathcal{O}(\epsilon) = -\dot{P}_\nu. \quad (6.26)$$

The four-momentum computed using the point-particle's stress-energy tensor depends on the value of the field along the world-line and is thus singular, see Eq. (6.10a). Instead, we shall extract its expression from the above equation. Multiplying by u^ν and using $\dot{u}^2 = -\dot{u}_\rho u^\rho$, we find :

$$\frac{d}{ds} \left(P_\nu + \frac{Gm^2}{3} \dot{u}_\nu - mc^2 \varphi^{\text{ext}} u_\nu \right) u^\nu = 0 + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (6.27)$$

Following Dirac, the simplest solution is to consider the expression inside the brackets to be proportional to the four velocity, say $\mu c^2 u_\nu$, where μ is a constant. We thus get

$$P_\nu = \mu c^2 u_\nu - \frac{Gm^2}{3} \dot{u}_\nu + mc^2 \varphi^{\text{ext}} u_\nu, \quad (6.28)$$

and, reporting into Eq. (6.26), one finds the equation of motion :

$$\frac{d}{ds} \left[\left(\frac{Gm^2}{2\epsilon} + \mu c^2 + mc^2 \varphi^{\text{ext}} \right) u_\nu \right] + \frac{Gm^2}{3} (\dot{u}^2 u_\nu - \ddot{u}_\nu) + mc^2 \partial_\nu \varphi^{\text{ext}} = 0 + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (6.29)$$

The above equation shows, in absence of external field, that the observable (renormalized) inertial mass of the particle is $M_{\text{inertial}} \equiv Gm^2/2\epsilon c^2 + \mu$. The mass μ , which takes into account the contribution of the self-field, is infinite. It is the ‘‘dressed’’ mass of the particle : $\mu = M_{\text{inertial}} - Gm^2/2c^2\epsilon$. We can work with the inertial mass and take the limit $\epsilon \rightarrow 0$. The equation of motion is then renormalized, but now involves two masses : the inertial one and the mass m initially put in the Lagrangian, as the source of gravitation. This mass is thus the active gravitational mass, and, owing to the strong equivalence principle, we can assert that $M_{\text{inertial}} = m$. Were the

SEP not satisfied that one could wonder about the meaning of such an equation of motion. The point would then be to analyze the dependence in the external field φ^{ext} of the observable mass in order to find a relation between the inertial one and the active gravitational one, see [52]. In our case, the equation of motion reads :

$$\frac{d}{ds} \left((1 + \varphi^{\text{ext}}) u_\nu \right) + \frac{Gm_A}{3c^2} (\dot{u}^2 u_\nu - \ddot{u}_\nu) + \partial_\nu \varphi^{\text{ext}} = 0. \quad (6.30)$$

The self-forces term in Eq. (6.30) are those which are proportional to m_A (because neglecting the self-force means neglecting the mass of the particle), and we see that they are third derivative of the position, as in the Lorentz-Dirac equation. As far as the N -body problem is concerned, one should have to reintroduce the index A and to use for the external field :

$$\varphi^{\text{ext}}[z^\lambda(\tau)] = 1 - \sum_{B \neq A} \frac{Gm_B}{\rho_B^{\text{ret}}[z^\lambda(\tau)] c^2}. \quad (6.31)$$

Equation of motion of two massive bodies

We now wish to focus on the two-body problem, of arbitrary masses for the moment. The equations of motion are those of the previous section. Remind that space time is flat, so that we can define global Lorentz observers, and that spatial geometry is Euclidian. In a given Lorentz frame, we denote the four-vector position of body A by $z_A^\mu(t) = (ct, \mathbf{z}_A(t))$, and we use analogous notation for B . Notice that the three vector is, for the moment, defined relatively to an arbitrary fixed point in this frame.

Let $\mathbf{v}_A(t) = d\mathbf{z}_A/dt$ be the three-velocity. We will also call its (relativistic) velocity the ratio $\beta_A(t) = \mathbf{v}_A(t)/c$. The Lorentz factor is denoted γ_A and reads $(1 - \beta_A^2)^{-1/2}$. For any position of body A at time t , there is a unique retarded position of body B given by the intersection of the past light cone of $z_A^\mu(t)$ and the world line of B . We shall write it as $z_B^\mu(t_{\text{ret}}) = (ct_{\text{ret}}, \mathbf{z}_B(t_{\text{ret}}))$, where t_{ret} is the retarded time. The retarded distance is then

$$\rho_B^{\text{ret}}[z_A(t)] = -u_\nu^B(t_{\text{ret}}) (z_A^\nu(t) - z_B^\nu(t_{\text{ret}})), \quad (6.32)$$

and is simply denoted ρ_B^{ret} . With the above notation, it is straightforward to show that the dynamics of body A at time t is given by :

$$c\dot{\beta}_A = \frac{1}{\gamma_A^2(1 - Gm_B/\rho_B^{\text{ret}}c^2)} \left[\frac{-Gm_B}{(\rho_B^{\text{ret}})^2} \left(\nabla_{\mathbf{z}_A} \rho_B^{\text{ret}} + \frac{\beta_A}{c} \dot{\rho}_B^{\text{ret}} \right) + Gm_A \left(\frac{\gamma_A^3 \ddot{\beta}_A}{3} + \gamma_A^4 (\beta_A \dot{\beta}_A) \dot{\beta}_A \right) \right], \quad (6.33)$$

where all quantities have to be taken at time t . Here the overdot means the derivative with respect to *time* d/dt . The gradient of ρ_B^{ret} is taken with respect to the position of body A and can be computed using Eq. (6.23). The above equation (6.33) is written in a very intuitive way, since its left hand side is just the acceleration of body A , and we recognize in the first term of the right hand side a Newtonian-like term, responsible for a force proportional to $m_A m_B$, whereas the second one is the self-force term, proportional to m_A^2 . The equation of motion of body B is the same with index A and B interchanged (we will not need it since we will work in a symmetric case $m_A = m_B$ below). The exact equation of motion for the two body problem is thus known.

When A is a test particle ($m_A \ll m_B$), that is, when we can neglect the self force of A , this equation reduces to :

$$c\dot{\beta}_A = -\frac{1}{\gamma_A^2(1 - Gm_B/\rho_B^{\text{ret}}c^2)} \frac{Gm_B}{(\rho_B^{\text{ret}})^2} \left(\nabla_{\mathbf{z}_A} \rho_B^{\text{ret}} + \frac{\beta_A}{c} \dot{\rho}_B^{\text{ret}} \right) \quad (6.34)$$

showing once again that the self force is encoded in the last two terms of Eq. (6.33), those involving higher time derivatives of the position. Actually, the above equation is now just the geodesics one for body A (when one neglects its self-field). In this limit, body B is the only source of gravitation, so that there exists a frame where B is always at rest. In this frame, the above equation thus exactly describes the motion of a test particle in a static spherical gravitational field. Since we have $\rho_B^{\text{ret}} = \|\mathbf{z}_A(t) - \mathbf{z}_B(t)\| = r_{AB}$, the leading order of the above equation is, as expected, the Newtonian law :

$$\vec{a}_A = -Gm_B/r_{AB}^2 \nabla_{\mathbf{z}_A} r_{AB} + \mathcal{O}(1/c^2).$$

Equation of motion of two equal-mass bodies

Let us now consider the two equal-mass problem ($m_A = m_B = m$). The equation of motion is :

$$c\dot{\beta}_A = \frac{Gm}{\gamma_A^2(1 - Gm/\rho_B^{\text{ret}}c^2)} \left[\frac{-1}{(\rho_B^{\text{ret}})^2} \left(\nabla_{\mathbf{z}_A} \rho_B^{\text{ret}} + \frac{\beta_A}{c} \dot{\rho}_B^{\text{ret}} \right) + \left(\frac{\gamma_A^3 \ddot{\beta}_A}{3} + \gamma_A^4 (\beta_A \dot{\beta}_A) \dot{\beta}_A \right) \right]. \quad (6.35)$$

The equality of the masses means that for any Lorentz frame and at any time, the central transformation with respect to the center of mass (that is, here, the middle point of the segment AB) is a symmetry of the problem. It ensures that the (virtual) force felt by the center of mass is vanishing, so that a Lorentz frame exists in which the center of mass is always at rest. Were the masses different that such a frame would not have existed.

In this frame we define the position three-vectors with respect to the center of mass. By virtue of the symmetry we have $\mathbf{z}_A(t) = -\mathbf{z}_B(t)$ for any time t . The motion has to be planar, since, at a given time t , Eq. (6.35) and Eq.(6.23) show that all quantities involved in the equation of motion live in the plane defined by the two vectors $\mathbf{z}_B(t_{\text{ret}})$ and $\mathbf{z}_A(t)$. The motion will thus be restricted to the plane defined by initial conditions arising from the history of the formation of the binary. As a consequence, the equation of motion has one trivial component and the motion can be characterized by only two variables whose choice is free. Instead of the usual polar variables ($r(t), \theta(t)$), we have chosen $r[\beta(t)]$ and $\beta(t)$, where $\beta(t)$ is the norm of the velocity of A (or B) and r is the norm of \mathbf{z}_A (or B). The reason of this choice is that the gravitational radiation (and therefore the non-trivial temporal evolution of the binary system) is encoded in the variations of $\beta(t)$. Note that the time derivative of r is then $\dot{\beta}r'$ where the prime denotes the derivative with respect to β : $\partial/\partial\beta$. The angular velocity can be deduced from these variables and reads :

$$\omega(t) = \frac{c\beta(t)}{r[\beta(t)]} \left[1 - \left(\frac{\dot{\beta}(t)r'[\beta(t)]}{c\beta(t)} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (6.36)$$

It must be stressed that our dynamical equation does not define a complete set of equations. Indeed, we also have to write the kinematical equations that determine the retarded position of B . These equations are :

$$k_\mu k^\mu = 0, \quad (6.37a)$$

$$\delta t^{\text{ret}} \equiv t - t_{\text{ret}} \geq 0. \quad (6.37b)$$

If we define ψ^{ret} as the oriented, positive, retarded angle between $\vec{z}_B(t_{\text{ret}})$ and $-\vec{z}_A(t)$, where the positive orientation is chosen to be that of the motion, see Fig. 6.2, this set of equation reads

$$c\delta t^{\text{ret}} = \sqrt{r^2[\beta(t)] + 2r[\beta(t)]r[\beta(t_{\text{ret}})] \cos \psi^{\text{ret}} + r^2[\beta(t_{\text{ret}})]}, \quad (6.38a)$$

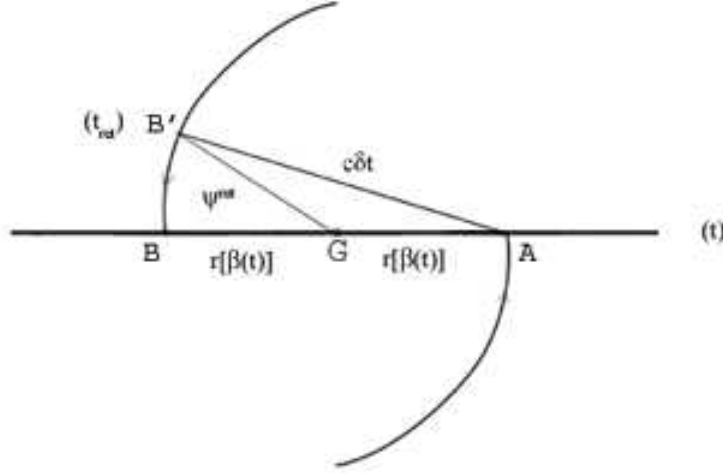


FIG. 6.2 – The plane motion and its parametrization. We represent the center of mass G , and the two bodies A and B at time t , and a part of their past trajectories. B' is the retarded position of body B at time t_{ret} . The retarded angle ψ_{ret} is the angle $\widehat{B'GB}$, and the distance as a function of velocity $r[\beta(t)]$ is equal to $|\mathbf{GA}| = |\mathbf{GB}|$. The delay-time δt is equal to $|\mathbf{B'A}|/c$.

$$\psi^{\text{ret}} = \int_{t-\delta t^{\text{ret}}}^t \omega(t') dt'. \quad (6.38b)$$

This set of four equations Eq. (6.35) and Eqs. (6.38), which we will refer to as the equations of motion (EOM), are now sufficient to determine the entire motion. Note that we will also sometimes call Eq. (6.35) the vectorial EOM. Although it seems rather impossible to extract from it an exact solution (because of the presence of retarded time and non linearities), we first, in the next section, construct a circular solution by adding ingoing waves, and starting from this circular motion, we construct in Sec. 6.6 a perturbative solution of the EOM which converges much faster than the post-Newtonian expansion.

6.5 The circular motion, its energy and the ICO

Equation of motion

We now restrict ourselves to equal-mass binaries. Since the system is going to lose energy by gravitational radiation, we cannot find any stationary solution to the equations of motion. In particular, the “circular configuration”, which, by definition, corresponds to a circular motion

of the bodies with respect to the center of mass, is not physical. Such a motion can however be a solution of a modified equation, which involves the half retarded and advanced gravitational potential. In other words, if we consider as much outgoing waves as ingoing ones, we can find a circular configuration which is a solution of the equation of motion.

This is achieved by solving the field equation Eq. (6.14) using the Green function which is symmetric under time reversal $G_{\text{sym}} = (G_{\text{ret}} + G_{\text{adv}})/2$. We shall define the advanced distance of body B with respect to body A as

$$\rho_B^{\text{adv}}(x) = u_\alpha(\tau'')(x^\alpha - z^\alpha(\tau'')), \quad (6.39)$$

where τ'' is the advanced proper time defined in the same way as the retarded one, but using the future light cone of x . Using the symmetric Green function to solve the field in terms of the sources, the equation of motion can be computed as in Sec. 6.4. It is however easier to note that this looked-for equation must be the half sum of Eq. (6.35) and its image under time reversal (T). Since the sign of velocities changes under T and since $T(\tau') = \tau''$, we have $T(\rho_B^{\text{ret}}) = \rho_B^{\text{adv}}$, and the “symmetric” equation reads :

$$\begin{aligned} 2c\dot{\beta}_A = & \frac{Gm}{\gamma_A^2(1 - Gm/\rho_B^{\text{ret}}c^2)} \left[\frac{-1}{(\rho_B^{\text{ret}})^2} \left(\nabla_{\mathbf{z}_A} \rho_B^{\text{ret}} + \frac{\beta_A}{c} \dot{\rho}_B^{\text{ret}} \right) + \left(\frac{\gamma_A^3 \ddot{\beta}_A}{3} + \gamma_A^4 (\beta_A \dot{\beta}_A) \dot{\beta}_A \right) \right] \\ & + \frac{Gm}{\gamma_A^2(1 - Gm/\rho_B^{\text{adv}}c^2)} \left[\frac{-1}{(\rho_B^{\text{adv}})^2} \left(\nabla_{\mathbf{z}_A} \rho_B^{\text{adv}} + \frac{\beta_A}{c} \dot{\rho}_B^{\text{adv}} \right) - \left(\frac{\gamma_A^3 \ddot{\beta}_A}{3} + \gamma_A^4 (\beta_A \dot{\beta}_A) \dot{\beta}_A \right) \right] \end{aligned} \quad (6.40)$$

Let us now find a circular solution of radius r_0 with a constant velocity $\beta = v/c$. Such a solution must be consistent with the above equation, which, furthermore, should provide the radius r_0 as a function of the velocity β , thereby characterizing the motion. One must first derive the values of the retarded and advanced angles and times ψ_0^{ret} , ψ_0^{adv} , δt_0^{ret} , δt_0^{adv} in this case. Here the index “0” refers to the circular case. Quite generally, these advanced quantities are defined in a similar way as the retarded ones :

$$c(t_{\text{adv}} - t) \equiv c\delta t^{\text{adv}} = \sqrt{r^2[\beta(t)] + 2r[\beta(t)]r[\beta(t_{\text{adv}})] \cos \psi^{\text{adv}} + r^2[\beta(t_{\text{adv}})]}, \quad (6.41a)$$

$$\psi^{\text{adv}} = \int_t^{t+\delta t^{\text{adv}}} \omega(t') dt'. \quad (6.41b)$$

Thus ψ^{adv} is the oriented, positive, advanced angle between $-\vec{z}_A(t)$ and $\vec{z}_B(t_{\text{adv}})$, see Fig. 6.3. These equations have a particularly simple form in the circular case. Indeed we have :

$$\delta t_0^{\text{adv}} = \delta t_0^{\text{ret}} \equiv \delta t_0, \quad (6.42a)$$

$$\psi_0^{\text{adv}} = \psi_0^{\text{ret}} \equiv \psi_0, \quad (6.42b)$$

where

$$\frac{\psi_0}{2} = \beta \cos \left(\frac{\psi_0}{2} \right), \quad (6.42c)$$

$$\delta t_0 = \frac{2r_0}{c} \cos \left(\frac{\psi_0}{2} \right). \quad (6.42d)$$

The geometry of the problem is illustrated in Fig. 6.3. The angle ψ_0 is given by a transcendental equation and thereby cannot be written in a simple way. However it can be easily expanded in powers of $\beta \leq 1$ (e.g. $\psi_0 \sim 2\beta - \beta^3 + \mathcal{O}(\beta^5)$). Let us write a few more useful relations :

$$\rho_{B0}^{\text{ret}} = \rho_{B0}^{\text{adv}} \equiv \rho_0, \quad (6.43a)$$

$$\rho_0 = 2\gamma r_0 \cos\left(\frac{\psi_0}{2}\right) \left(1 + \beta \sin\left(\frac{\psi_0}{2}\right)\right). \quad (6.43b)$$

In Eq. (6.40), the orthoradial part of the gradient of the retarded distance compensates exactly the one coming from the advanced term, leaving only centripetal terms, hence authorizing a circular motion. The symmetric equation of motion is then, after some algebra :

$$c\dot{\beta} = -\frac{Gm}{\gamma^2 \rho_0^2 (1 - Gm/\rho_0 c^2)} \left[\gamma \beta \sin \psi_0 + \frac{\cos\left(\frac{\psi_0}{2}\right)}{\gamma \left(1 + \beta \sin\left(\frac{\psi_0}{2}\right)\right)} \left(1 + \frac{2r_0 |\dot{\beta}| \gamma^2 \cos\left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2}{c}\right) \right] \mathbf{n}_{BA}, \quad (6.44)$$

where \mathbf{n}_{BA} is the unit vector from B to A . Since

$$\dot{\beta} = -\frac{c\beta^2}{r_0} \mathbf{n}_{BA}, \quad (6.45)$$

the radius reads :

$$r_0(\beta) = \frac{Gm}{c^2} \frac{1 + 2\beta^2 - \beta^4 \cos \psi_0 - 2(\beta + \beta^3) \sin\left(\frac{\psi_0}{2}\right)}{4\gamma\beta^2 \cos\left(\frac{\psi_0}{2}\right) \left(1 + \beta \sin\left(\frac{\psi_0}{2}\right)\right)} \quad (6.46)$$

To the leading order, therefore, we get the Newtonian contribution r_N :

$$r_0 \sim r_N = \frac{Gm}{4\beta^2 c^2}. \quad (6.47)$$

In order not to display this leading but standard factor of the function r_0 , we plot in Fig. 6.4 the ratio r_0/r_N as a function of β . We see that it goes to zero when the velocity goes to 1. Let us emphasize that the circular motion is thus known to all orders in β . We will use this motion as an initialization of an iterative method that will construct order by order the actual inspiral motion, see Sec. 6.6. But we first take profit of the simplicity of Nordström theory to derive more analytical results related to the circular motion.

Energy of the binary in the circular configuration and the ICO

Since Nordström's theory shares many features with General Relativity, it is interesting to look for an exact expression of the energy of the binary in a circular motion, in order to investigate in a non-perturbative way the existence or not of the Innermost Circular Orbit (ICO), which is an important notion in numerical relativity even if it does not correspond to any physical observable.

This non-perturbative result may then be compared to those coming from a post-Newtonian picture, and this will lead to a surprising feature : whereas several orders of the post-Newtonian expansion lead to the existence of order-dependent ICOs, the exact analytical result proves that this ICO actually does not exist in Nordström's theory. Another question of interest is to compare those post-Newtonian ICOs with their general relativistic counterparts, that have been numerically tracked and analytically computed up to 3 PN (see e.g. [125]). Indeed, numerical relativity does not compute all the degrees of freedom of General Relativity, but only works with a prior geometry (namely, a conformally flat *spatial* metric), so that one can wonder if numerical relativity is not computing specific effects related to this *a priori*. Although the spacetime metric is conformally flat in Nordström's scalar theory of gravity, the proximity of the ICOs found in

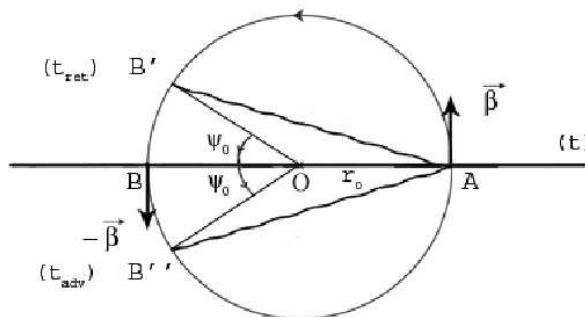


FIG. 6.3 – The geometry of the circular motion. We represent bodies A and B at time t and both the retarded and advanced position B' and B'' (respectively) of body B . The two bodies are separated by $2r_0$, function of β , and the retarded angle ψ_0 equals the advanced one. The weavy lines represent the retarded and advanced forces created by body B at time t_{ret} and t_{adv} , respectively, on body A at time t . Note the high level of symmetry that enables a circular motion, and notably the fact that the velocity β is orthoradial.

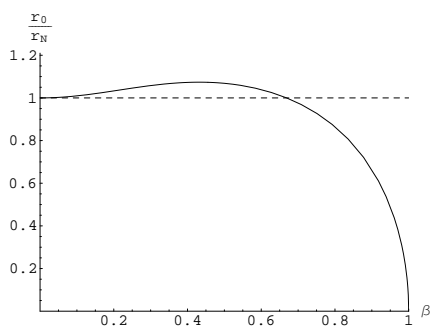


FIG. 6.4 – The exact value of the radius r_0 as a function of circular velocity β (solid line), normalized by its Keplerian value $r_N = Gm/4\beta^2c^2$ (dashed-line). The separation $2r_0$ vanishes when β goes to 1.

post-Newtonian Nordström's theory and in numerical relativity would be a test of this issue. Fortunately enough, those points are quite faraway from each others, as will be shown in the right panel of Fig. 6.5.

The ICO can be determined by a turning-point method applied to the energy of the binary being in a circular configuration [121]. The ICO is the separation of the bodies for which the energy is minimum, if such a point exists. Now, if the separation decreases and becomes smaller than the ICO, the motion cannot remain (quasi) circular unless the binary grows its energy, which is impossible because of gravitational radiation. To go through the ICO may therefore be the definition of the beginning of the plunge phase.

As noted in the previous section, such a circular motion is not physical since it cannot be solution of the (retarded) equation of motion. A related property is that, because of the emission of gravitational waves, the energy of the bodies (their kinetic energy plus their binding energy) cannot be conserved. In order to compute a relevant conserved energy of a given circular configuration of the binary, we have to use ingoing gravitational waves, together with, and counter-balancing, the outgoing ones, as in the previous section. Of course the calculation of the energy has to be done in the general case of unspecified motion before taking the circularity conditions, otherwise the calculation of the Hamiltonian would be ambiguous and would lead to erroneous results.

We could compute the energy as the spatial integration of the time-time component of the total stress-energy tensor, but we would by the way take into account the energy of all the outgoing and ingoing waves that are non relevant in order to extract the stability properties. So as to compute only the energy of the bodies, we will look for a calculation that does not explicitly involve the field any more, but rather its effect on the bodies (so that the binding energy will be fully integrated). This can be done by replacing in the basic action of the theory the field φ by its solution $\tilde{\varphi}$ in terms of (yet unspecified) matter variables. This procedure leads to the so-called "Fokker-action", which still describes, via the variational principle, the exact dynamics of the matter (see [126] for a proof of that point).

Nordström's action has been defined with Eq. (6.1) and Eq. (6.9). Now, by integrating by parts the kinetics part of the scalar field and using Eq. (6.11) with $A'(\varphi) = 1$, we have

$$S_{\text{Fokker}} = -\frac{c^3}{8\pi G} [(\tilde{\varphi} - 1)\partial\tilde{\varphi}]_{\infty} - \sum_{A,B} \frac{m_{Ac}}{2} \int ds [\tilde{\varphi}[z_A(s)] + 1], \quad (6.48)$$

as far as the two body problem is concerned. The surface term is vanishing since, by virtue of Eq. (6.17), $(\tilde{\varphi} - 1)\partial\tilde{\varphi} \sim 1/R^3$ where R is the distance from a point of the surface to the center of mass. Of course the self-field is divergent on the world lines, but this divergence has been absorbed in the mass renormalization, so that the field $\varphi[z_A(s)]$ is only the one created by body B , and reads (compare to Eq. (6.17)) :

$$\tilde{\varphi}^{\text{renorm.}}[z_A(s)] = 1 - \frac{Gm_B}{2\rho_B^{\text{ret}}[z_A(s)]c^2} - \frac{Gm_B}{2\rho_B^{\text{adv}}[z_A(s)]c^2}, \quad (6.49)$$

where the advanced term, defined with Eq. (6.39), comes from the use of the symmetric Green function. The Fokker action can thus be written as

$$S_{\text{Fokker}} = \int L_{\text{Fokker}} dt, \quad (6.50)$$

with :

$$L_{\text{Fokker}} = -\sum_{A,B} \frac{m_{Ac}^2}{\gamma_A(t)} \left(1 - \frac{Gm_B}{4\rho_B^{\text{ret}}(t)c^2} - \frac{Gm_B}{4\rho_B^{\text{adv}}(t)c^2} \right). \quad (6.51)$$

Since the motion has not been specified, one can compute the Hamiltonian of the theory using a standard Legendre transformation. One should afterwards compute this energy in the circular case. This Lagrangian is a functional of the dynamics at the time t , and of the dynamics at the times t_{ret} and t_{adv} . Using Taylor series we can assert that relevant variables are the position vector of the two bodies at time t : $\vec{z}_A(t)$ and $\vec{z}_B(t)$ and *all* their derivatives with respect to time. Actually it will be easier to use the following (equivalent) variables: the norm of the position vector $r_A(t)$, two angles $\theta_A(t)$, $\phi_A(t)$ and all their derivatives with respect to time, and the same for B. The Legendre transformation, when applied to such a functional involving all the time derivatives of the position reads (see, e.g. [55])

$$H_{\text{Fokker}} = \sum_{A,B} \sum_{X_A=(r_A,\theta_A,\phi_A)} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial L_{\text{Fokker}}}{\partial X_A^{(n+i)}} \right] X_A^{(i)} \right) - L_{\text{Fokker}}, \quad (6.52)$$

where we use the notation:

$$\forall X, \forall p, X^{(p)} \equiv \left(\frac{d}{dt} \right)^p X. \quad (6.53)$$

Now, we must be careful since evaluating the derivatives involved in H and specifying the circular motion are not *a priori* commutative operations. In the circular case, the norms r_A and r_B are constants, and the motion is plane. We choose the general angles θ to be the polar ones of this plane, and ϕ the azimuthal ones. In the circular case, the latter is constant, and the first derivative of θ is non vanishing (it is actually the angular velocity) but all other higher derivatives vanish.

Let us first compute the sum over i . For a given i , whatever the sum over n is, it must be multiplied by an $X^{(i)}$, which is vanishing in the circular case unless $i = 1$ and $X = \theta$. [One could argue that the sum over n could involve poles in $r^{(1)}$, $\phi^{(1)}$, or $X^{(i \geq 2)}$, that could cancel terms in the numerator, but, if it were the case, this would mean that the circular Lagrangian is singular. It is not the case (see Eq. (6.57)).] Now, the sum over n involves quite complicated partial derivatives of the Fokker Lagrangian, but we do not need to evaluate them precisely. The only crucial point is to note that the Fokker Lagrangian is not a function of the two angles θ_A and θ_B , but only of the difference $\theta_A - \theta_B$, and of all other variables already cited. This comes quite generally from the global invariance of physics under rotations, but can also be explicitly checked since the expression of L_{Fokker} is known, see Eq. (6.51). Thus, let any of those partial derivatives be a certain functional: $F[\theta_A - \theta_B, r_A, \phi_A, r_B, \phi_B, X_A^{(1)}, \dots, X_B^{(1)}, \dots]$. Its time derivative reads

$$\frac{dF}{dt} = (\theta_A - \theta_B)^{(1)} \frac{\partial F}{\partial(\theta_A - \theta_B)} + r_A^{(1)} \frac{\partial F}{\partial r_A} + \dots, \quad (6.54)$$

and since $(\theta_A - \theta_B)^{(1)} = 0$ in the circular case (and $r_A^{(1)} = 0$, etc.), the above derivative (and thus all other higher derivatives) vanish in this case, so that only the term in $n = 0$ contributes to the energy of the circular configuration. The Hamiltonian of such a motion reads thus:

$$H_{\text{circ}} = \sum_{A,B} \theta_A^{(1)} \frac{\partial L_{\text{Fokker}}}{\partial \theta_A^{(1)}} - L_{\text{Fokker}}. \quad (6.55)$$

As for any function of any variables (e.g. two), one has always

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{y=0} = \frac{\partial f(x, 0)}{\partial x}, \quad (6.56)$$

we can directly replace in Eq. (6.55) L_{Fokker} by its circular counterpart $L_{\text{Fokker}}^{\text{circ.}}$, which reads, using Eq. (6.51), Eq. (6.43a) and $m_A = m_B = m$:

$$L_{\text{Fokker}}^{\text{circ.}} = - \sum_{A,B} \frac{mc^2}{\gamma_A} \left(1 - \frac{Gm}{2\rho_B^0 c^2} \right). \quad (6.57)$$

As the angular velocity $\omega \equiv \theta_A^{(1)} = \theta_B^{(1)}$ is also given by $c\beta/r$ in the circular case, where β is the orbital one and r the radius of the circle, we have $\omega\partial/\partial\omega = \beta\partial/\partial\beta$. The energy of the circular configuration is then :

$$H_{\text{circ.}}(r, \beta) = 2\gamma mc^2 - Gm^2 \frac{1 + 2\beta^2 - \beta^4 \cos \psi_0 + 2\beta(1 + \beta^2) \sin(\psi_0/2)}{2r(1 + \beta \sin(\psi_0/2))^3 \cos(\psi_0/2)}. \quad (6.58)$$

Let us stress that this is the energy of *any* circular configuration of radius r and velocity β . Now we can compute the energy E of the circular *solution* found in the previous section : $r = r_0$ given by Eq. (6.46). The binding energy becomes equal to $-2\gamma mc^2 \beta^2$, and since the kinetic energy remains the same ($2\gamma mc^2$), the total energy reads :

$$E(\beta) \equiv H_{\text{circ.}}(r_0, \beta) = \frac{2mc^2}{\gamma} \quad (6.59)$$

The same result has been found independantly by Friedman and Uryū [127]. The energy of the binary thus goes to zero in the ultra relativistic limit, meaning thus all the initial energy of the binary has been carried away by radiation. Here is a very interesting feature : contrary to usual special relativity where a massive body cannot reach the speed of light because of the divergence of its energy, here the limit $v = c$ of body velocities seems to be reachable without encountering any divergence. However the limit $v = c$ is also the limit $r_0 = 0$ so that the orbital velocity is no longer meaningful, and we shall consider that the two bodies have coalesced (even though they are point particles). Furthermore, this remaining point particle has a vanishing energy, and thus does not actually exist. The two initial bodies have thus been entirely evaporated into gravitational radiation. It must however be stressed that this conclusion holds only if the physical motion were a succession of circular orbits of decreasing radius, that is obviously not the case. Actually the inspiral motion can be seen as such a succession only if the damping timescale is much greater than the orbital one, an assumption that breaks down in the relativistic regime, as we will show in Sec. 6.7

The ICO in Nordström's theory

The exact energy of the binary beeing in a circular configuration, given by Eq. (6.59), enables us to investigate the existence of an ICO. We have

$$\frac{dE}{dr} = \left(\frac{dr_0(\beta)}{d\beta} \right)^{-1} \frac{dE}{d\beta}, \quad (6.60)$$

which does not vanish, unless $\beta = 0$, that is $r = \infty$, showing that there is no ICO in Nordström's theory. However, if one now works in a post-Newtonian way, one has to inverse the series giving the radius in power of the velocity, and replace it in the energy E . One gets e.g., at the Newtonian order, the energy

$$E^{\text{Newton}}(r) = 2mc^2 \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{Gm}{rc^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{Gm}{rc^2} \right)^2 \right], \quad (6.61)$$

which shows that, to leading order, the energy decreases like $1/r$ and has no turning point, see left panel of Fig. 6.5. There is therefore no ICO at this order. If we however go to the second PN order, the energy reads

$$E^{2\text{PN}}(r) = 2mc^2 \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{Gm}{rc^2} \right) - \frac{5}{128} \left(\frac{Gm}{rc^2} \right)^2 + \frac{27}{1024} \left(\frac{Gm}{rc^2} \right)^3 + \mathcal{O} \left(\frac{Gm}{rc^2} \right)^4 \right]. \quad (6.62)$$

As one can see in the left panel of Fig. 6.5, this 2PN energy has a turning point for a separation $r_{\text{AB}} = 2r$ being roughly $1.08Gm/c^2$. It thus shows that order-dependents ICOs can be found although the non-perturbative ICO does not exist. This can be easily understood. Indeed, the truncated energy at n -PN must be of the form

$$E^{n\text{-PN}}(r) = 2mc^2 \left[1 + \sum_{i=1}^{i=n+1} a_i \left(\frac{Gm}{rc^2} \right)^i + \mathcal{O} \left(\frac{Gm}{rc^2} \right)^{n+2} \right]. \quad (6.63)$$

The behavior of the energy at low radius r is therefore highly divergent. Now, since the energy decreases near $r = \infty$ as $1/r$, we will find an ICO (a minimum in the energy) if the coefficient a_{n+1} is positive (this law is not general, since the existence of an ICO may also depends on the value of the others coefficients $a_i \leq n$). For instance we have $a_1 \leq 0$ and $a_2 \leq 0$ (no ICO), but $a_3 \geq 0$ (ICO). It must be emphasized that even if each truncated energy is divergent at low radius, the exact energy (the entire series) is absolutely smooth in this region, see left panel of Fig. 6.5 (E goes to zero when r does).

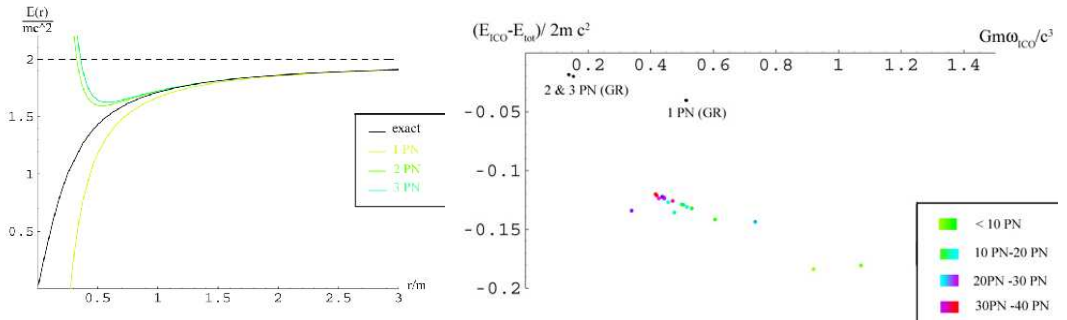


FIG. 6.5 – (left) In color, the 1, 2 and 3 PN energy as a function of radius r/m compared to the exact energy (black line). Both the 2 and 3 PN energies have a turning-point, so defining an ICO. (right) The PN ICO's up to 38 PN. ICO's do not necessarily exist at each PN order. The series seems to converge whereas this cannot be the case. ICO's found in GR are also shown (extracted from [125]).

We find such post-Newtonian ICOs at 2, 3, 5, 6, 8, 9, ... PN orders. In the right panel of Fig. 6.5 we have plotted up to very high PN orders (38PN) the position of the ICO and placed the points obtained in general relativity (extracted from [125]). In this figure, we plot the angular frequency of the binary at the ICO :

$$\frac{Gm\omega_{\text{ICO}}}{c^3} = \beta_{\text{ICO}} \frac{Gm}{r_{\text{ICO}}c^2} \quad (6.64)$$

as a function of the energy of the binary at the ICO, normalized to the total energy $2mc^2$:

$$\frac{E_{\text{ICO}} - 2mc^2}{2mc^2}. \quad (6.65)$$

As announced, the ICOs we find here are quite faraway from those found in general relativity (by numerical study or PN expansions). The most striking feature of this plot is that the PN ICOs seem to converge, whereas there is no ICOs in the exact theory.

6.6 Construction and convergence of a perturbative solution

Beyond the circular motion, which is not physical unless advanced plus retarded waves are considered, we shall now construct an inspiral motion, solution of the only retarded EOM. We will discuss two iterative schemes consisting in gradually modifying an assumed zero-th order trajectory, namely the circular motion found in the previous section.

Introduction

The difficulty with the EOM is that it involves two different times t and t_{ret} . The retarded time associated to time t is a function of t and of the (near) past dynamics of the other body. Of course, this past motion is given by the solution of the EOM with the dynamics at time t as final conditions. In other words, the vectorial EOM needs the exact motion to be explicitly written, whereas itself provides this solution. We are thus faced with a problem of *self-consistence of the motion*. Another viewpoint is to note that the EOM of body A involves retarded quantities of body B , but since we have $\mathbf{z}_A(t) = -\mathbf{z}_B(t)$ for all time t , we can assert that, in a way, the retarded quantities of body A affects its future motion.

This is the root of the analytical difficulties one encounters in solving the EOM. Note that the situation, although similar, is worse in general relativity since all the past motion of the binary from $-\infty$ to t_{ret} acts on the future dynamics (the so-called tail effects). Let us stress that this non-trivial structure comes from the finite speed of the interaction, which is an essential feature of our system. Indeed it causes the gravitational force felt by body A to be non-radial, making a circular energy-conserved motion impossible. The two bodies lose energy by gravitational radiation, accelerate and inspiral toward each other.

Let us turn to quantitative predictions. With our choice of variables, a solution of the EOM will be given by the distance of a body to the center of mass as a function of the orbital velocity $r(\beta)$ and by the orbital velocity as a function of time $\beta(t)$. Actually, we will instead look for the orbital acceleration $\dot{\beta}$ as a function of β

$$\dot{\beta}(t) = f[\beta(t)], \quad (6.66)$$

which completely characterizes the motion. Even if Eq. (6.66) is still differential, it is a much simpler equation than the entire equation of motion, and its numerical integration will be straightforward (see Sec. 6.7 for numerical results).

To our knowledge, there are two natural and iterative ways to look for approximate solutions of such a set of equations. We will especially focus on the second one, but we also present the basics of the first one since its first iteration, often called the quasi-equilibrium (QE) approximation, is of great interest in general relativity.

The Quasi Equilibrium scheme

This first method goes as follow. The difficulty with the EOM has been identified as the need of the exact solution to write explicitly the exact EOM. Thus, if we put into the EOM instead of the (unknown) exact retarded quantities, the ones corresponding to an assumed approximate trajectory, say (n) , then the EOM becomes explicit and local in time. Its solution provides a new trajectory $(n+1)$ that we expect to be a more accurate determination of the exact solution than the trajectory (n) . This process has to be initialized and we shall take the zero-th order motion to be the circular one we found in the previous section since we know that the physical motion of the binary is quasi circular in the non-relativistic limit.

A simple analogue of this iterative scheme is the way we approximate the solution of fixed point equations like $y(x) = x$. If one defines a series u by u_0 and $u_{n+1} = y(u_n)$ and if the series converges (it depends on the nature of the function y) then the limit of the series is the solution of the equation and $u_n = y^n(u_0)$ is a more and more accurate determination of it. In this analogy the fixed point equation represents the self-consistent EOM, u_0 the circular motion which initializes the process and u_n the n -th order motion. Here however, the convergence of such a method is more complicated to investigate since we go from the n -th order to the following by solving a differential equation.

We will call this first method the QE scheme since the *first* iteration of this method, which computes the trajectory induced by a circular motion, is actually the so-called QE approximation, that has extensively been used in GR to compute the long inspiral phase of binaries (being neutron stars or black holes).

In GR, this approximation goes as follow : assume the motion of the bodies to be circular and put the corresponding matter stress-energy tensor as the field source in the Einstein equation (with a conformally flat 3-geometry). One can then compute numerically the gravitational wave signal of the binary as a function of their separation, and together with the corresponding binary's binding energy, one can construct the complete time evolution of the interbody separation (see, e.g., [128, 129, 130]). Note that the solution of the Einstein equation is found in a numerical way and therefore one can only compute a discrete sample based on given fixed separations (the so called conformally flat quasi equilibrium, CFQE, sequence). An interpolation provides the temporal evolution of the binary.

In Nordström's theory however, the construction of such discrete points and their interpolation is no more necessary since the field equation has already been integrated, and we directly work on the EOM. There remains thus only one step from one order to the following : solve the EOM. Even if it seems quite difficult analytically, this must not be difficult numerically.

It is usually claimed that the motion found in this way is a good approximation of the exact motion if the gravitational damping does not much affect the motion during an orbital period. In other words, it holds if one can neglect the orbital timescale in comparison with the dynamical damping timescale. We can be more precise in Nordström's theory and assert that the approximation is correct if the retarded points corresponding to the circular motion and to the inspiral motion built on it are not too faraway. To leading order, it means that the dynamical timescale (essentially the inverse of $\dot{\beta}(t)$) is greater than the delay-time $\delta t = t - t_{\text{ret}}$. Such an approximation is a very good one in the nonrelativistic regime, which corresponds to the long inspiral phase of the binary. Indeed, we will see that, to leading order in β , we have $\dot{\beta}\delta t \sim (512/30)\beta^7$.

The approximation generally fails in the relativistic regime but not in the ultra-relativistic one, a result that may look paradoxical. We will explicitly show the approximate behavior of the ratio of these two timescale in Sec. 6.7 with the help of an approximate solution of the motion. However this behavior can be simply understood. Indeed, special relativity implies that

the orbital velocity of the bodies cannot exceed the speed of light, so that the orbital acceleration $\dot{\beta}$ must go to 0 as the velocity β goes to 1. The dynamical timescale thus become infinite in the ultra relativistic regime, and the QE approximation becomes an excellent one.

The QE approximation however breaks down in the intermediate region ($\beta \sim 0.6-0.7$) where the dynamical timescale becomes comparable to the delay-time, see Sec. 6.7. The motion in such a regime thus differs strongly from a circular one and this might be taken as the definition of the beginning of the plunge (since there is no ICO in Nordström's theory, we cannot define the plunge as going through the ICO).

A semi-perturbative approach

Let us now turn to the second method. The point is to expand the EOM in a parameter ε (to be identified) and to solve order by order the motion. Let us emphasize that contrary to the previous one, this method thus takes into account the effect of the motion of order (n) on *itself*. Therefore, each order of perturbation will lead to non-perturbative effects; that's why we call this second method a semi-perturbative (SP) approach. Note that each orders are given in terms of the previous ones; the resolution is therefore iterative.

Let us stress the difference between the QE scheme and the SP one. This first method considers all the entire EOM, but in which the retarded motion (the source) is assumed to be known, thus losing non-perturbative effects related to the effects of the source on itself. On the other hand the second one takes into account this self-consistency but works only with a truncated EOM. The validity of the QE scheme has been discussed in the previous section and the validity of the SP approach depends on the small parameter one can take; we will show that $\varepsilon = \beta^5$ is the best we can do, thus leading to a motion given by a series in power of β^5 where, moreover, each order brings non-perturbative informations (that is, analytical formulas in β).

The perturbative expansion of the EOM goes as follow. The basic idea is to define a formal expansion of the two looked for function f and r in power of a parameter ε , as :

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \dots + \varepsilon^n f_n + \dots \quad (6.67a)$$

$$r = r_0 + \varepsilon r_1 + \dots + \varepsilon^n r_n + \dots \quad (6.67b)$$

where the f_i and r_i are unknown function of β , and ε is an arbitrary parameter. Note that, formally, the value of ε does not matter. One can as well take, at the end, $\varepsilon = 1$ than other values. In the next section we will take $\varepsilon = \beta^5$ since it will be convenient to investigate the convergence of the series in power of β^5 . Here we can already choose $f_0 = 0$ in order to recover an expansion whose 0-th order corresponds to the circular motion. It is important to note that this choice is analytically unmotivated (except for simplicity), but rather corresponds to an *initial condition* assumption (we could have chosen an elliptical motion for example). As it will be convenient in the next section, let us in fact redefine our formal expansion with dimensionless functions :

$$\frac{Gm}{c^3} f = \varepsilon f_1 (1 + \varepsilon f_2 + \dots + \varepsilon^{n-1} f_n + \dots) \quad (6.68a)$$

$$\frac{c^2}{Gm} r = r_0 (1 + \varepsilon r_1 + \dots + \varepsilon^n r_n + \dots) \quad (6.68b)$$

The physical meaning of such an expansion can be understood by computing any retarded quantities, say $\beta(t_{\text{ret}})$. A Taylor expansion gives :

$$\beta(t_{\text{ret}}) = \beta(t) + \sum \frac{1}{n!} \frac{d^n \beta}{dt^n}(t) \delta t^n. \quad (6.69)$$

Since to the leading order we have $\dot{\beta} = f = \mathcal{O}(\varepsilon)$, the i -th derivative with respect to time of the velocity is $\mathcal{O}(\varepsilon^i)$. Therefore, to truncate the retarded velocity to the order ε^n is the same than to truncate it at the order δt^n . From an order to the following, we thus consider another piece of information on the retarded motion, by essentially taking into account the next derivative of the velocity. Note that we also truncate the instantaneous quantities, contrary to the QE-scheme. The advantage is that at a given order n , the dependence in the EOM of the looked-for functions f_n and r_n will be linearized, and their expressions will be straightforward to derive (the only numerical difficulty of this algorithm is that the expressions obtained in this way are quite heavy).

Let us precise a few more the algorithm. We define formal expansions of the retarded angle and time as

$$\frac{c^3}{Gm} \delta t = \delta t_0 (1 + \varepsilon \delta t_1 + \dots + \varepsilon^n), \quad (6.70a)$$

$$\psi = \psi_0 (1 + \varepsilon \psi_1 + \dots + \varepsilon^n \psi_n + \dots), \quad (6.70b)$$

where δt_i and ψ_i are unknown function of β . Defining the n -th order of any quantity X by

$$X_{(n)} = X + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}) \quad (6.71)$$

(for, e.g. X being $f, r, \delta t, \psi \dots$), we are now able to compute the n -th order of truncation of the four equations describing the motion, Eq. (6.35) and Eq. (6.38). Thus, by equating terms proportional to a certain power of ε , say j , this first set of equations give δt_j and ψ_j in terms of the functions $f_{i \leq j}$ and $r_{i \leq j}$ (and their derivatives with respect to β). Reporting these results into the truncated vectorial equation of motion, we can compute the functions f_j and r_j as functions of $f_{i < j}$, $r_{i < j}$ and β . The problem is thus solved order by order.

Note that, since we have taken a circular motion as initial condition ($f_0 = 0$), the quantities r_0 , ψ_0 and δt_0 put in Eq. (6.68b) and Eqs. (6.70) respectively, are found, after resolution of the zero-th order truncated EOM, to be exactly the same quantities computed in Eq. (6.46) and Eqs. (6.42c, 6.42d), respectively.

Let us emphasize that this expansion of the EOM is not a post-Newtonian one. For example the 0-th order provides us an *analytical* formula linking the radius of the circular motion to its orbital velocity, see Eq. (6.46). This method thus returns to *each* order, many *non-perturbative* informations. Of course, if one wishes to stop at a given order n one as to be conscious that he is missing all the other terms (the $r_{i \geq n}$ and $f_{i \geq n}$). How much exactly are those term smaller than the already computed ones is a question that we will answer in the next section.

Convergence of the semi-perturbative approach

To begin with, we find (see Sec. 6.7), running the first iteration of the algorithm, that the orbital acceleration is (to the leading order)

$$\dot{\beta} \sim \frac{512}{15} \frac{c^3}{Gm} \beta^9 \sim \frac{512}{15} \frac{v^3}{Gm} \beta^6. \quad (6.72)$$

It is a crucial feature of our system, because this acceleration corresponds to the first non vanishing multipolar radiation of the binary, which is the quadrupolar one :

$$\frac{\dot{E}}{E} \sim \frac{\dot{\beta}}{\beta} \sim \frac{v^3}{Gm} \frac{v^5}{c^5}, \quad (6.73)$$

where E is the energy of the binary. The gravitational radiation is therefore a quite tiny (in β^5) effect, at least in the non-relativistic regime. Since this radiation affects the motion, we are going

to find at the first order ($\mathcal{O}(\varepsilon^2)$) a motion which is a small perturbation of the previous motion, namely the circular one. This perturbation must be as small as the radiation effect is. The process iterates so that the motion should be found in power of β^5 . Were a dipolar radiation present that we should expect our SP scheme to converge in power of β^3 . Here however, thanks to the symmetry $m_A = m_B$, the dipolar radiation must vanish to all orders.

Let us now demonstrate this property of the SP-scheme. The translation of such convergence properties within our formalism (defined by Eq. (6.68) and Eq. (6.70)) is the following. If we write the parameter as $\varepsilon = \beta^\alpha$, then our expansion is a series in power of β^α if and only if *all* the functions r_i and f_i , that are functions of β , satisfy, to the leading order in β , the property $\mathcal{P}(i)$:

$$\begin{aligned} f_i &\sim \mathcal{O}(1), \\ r_i &\sim \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

We shall now demonstrate that this property is verified for $\alpha = 5$ (and less), but not for $\alpha \geq 6$, as announced. Let us first take $\alpha = 5$. We use the strong recurrence theorem and assume that for all order i from 1 to $n - 1$, the truncated EOM is solved and the property $\mathcal{P}(i)$ is true. Now, if we are able to show that the EOM, truncated to the order n , first have a solution, and moreover, that the solution f_n and r_n are functions of β satisfying the property $\mathcal{P}(n)$, we will have proven the convergence in power of $(v/c)^5$ of the SP scheme. Indeed, the initialization is true since one finds, running the algorithm : $f_1 \sim \beta^4$ and $r_1 \sim \beta^5$ with $\alpha = 5$, see Sec. 6.7.

This work can be done in the following way. First notice that the strong recurrence hypothesis tells us that the truncated EOM at $\mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})$ have only terms proportional to ε^n . Thus one has only to express all the contributions proportional to ε^n . Of course, this work is greatly simplified if one reminds to compute only the leading orders in β . Numerical factors do not matter and one shall use the \mathcal{O} notation.

The work only consists in computing functionals of formal series in ε and to pay attention to retarded quantities, which must be first written in a Taylor way and after that in formal series in ε . The leading order in β is quite generally given by some combinations δt_0 , ψ_0 , f_1 and r_0 , whose order of magnitude are respectively $\mathcal{O}(1/\beta^2)$, $\mathcal{O}(\beta)$, $\mathcal{O}(\beta^4)$, $\mathcal{O}(1/\beta^2)$. This comes from the analysis of the circular motion (see Sec. 6.5) and of the first iteration of the SP scheme, see Sec. 6.7.

We will not show all the calculation but simply illustrate the method on a part of the work, namely on Eq. (6.38a), which reads :

$$\delta t + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}) = \frac{r[\beta(t)]}{c} \sqrt{1 + 2 \frac{r[\beta(t_{\text{ret}})]}{r[\beta(t)]} + \left(\frac{r[\beta(t_{\text{ret}})]}{r[\beta(t)]} \right)^2} \cos \psi + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}). \quad (6.74)$$

On the left hand side, the term proportional to ε^n is obviously $c^3/Gm\delta t_0\delta t_n$ and this term in the right hand side can be computed by first expressing the following ratio as a Taylor series :

$$\frac{r[\beta(t_{\text{ret}})]}{r[\beta(t)]} = 1 + \frac{d \ln r}{d\beta} \dot{\beta} \delta t + \dots \quad (6.75)$$

The crucial point is once again to note that the i -th derivative of β is $\mathcal{O}(\varepsilon^i)$ since $d/dt = f(\beta)d/d\beta \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$. Thus the second term of the above expansion will not exhibit any dependence in $dr_n/d\beta$ or in δt_n as could have been expected. Indeed, we have :

$$\frac{d \ln r}{d\beta} \dot{\beta} \delta t = \frac{d \ln r_{(n-1)}}{d\beta} \varepsilon f_1 (1 + \dots + f_n \varepsilon^{n-1}) \delta t_{(n-1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}) \quad (6.76)$$

The terms proportional to ε^n in the above expression are thus, to the leading order in β

$$\frac{f_1 \delta t_0}{r_0} \frac{dr_0}{d\beta} (1 + f_n) \sim \mathcal{O}(\beta)(1 + f_n), \quad (6.77)$$

where we used the leading order of δt_0 , r_0 and f_1 . Note that many terms contribute to the term in ε^n , but we are able to evaluate all of them to the leading order by using the strong recurrence assumption ($f_{i \leq n-1} \sim \mathcal{O}(1)$ etc). One has then to compute the contribution of all the Taylor series. The i -th terms are all of the order of

$$\frac{d^i \beta}{dt^i} \frac{1}{r(\beta)} \frac{d^i r(\beta)}{d\beta^i} (\delta t)^i, \quad (6.78)$$

and their leading contributions in ε^n thus reads

$$\frac{(f_1 \delta t_0)^i}{\beta^i} \sim \mathcal{O}(\beta^i), \quad (6.79)$$

so that for all $i \geq 2$, those terms do not provide a leading contribution to $r[\beta(t_{\text{ret}})]/r[\beta(t)]$. Finally we have :

$$\frac{r[\beta(t_{\text{ret}})]}{r[\beta(t)]} = \text{known terms} + \mathcal{O}(\beta)(1 + f_n)\varepsilon^n + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}), \quad (6.80)$$

where the “known terms” refer to terms proportional to $\varepsilon^{i \leq n-1}$ that are actually known thanks to the strong recurrence assumption.

Obviously this represents only a small step of the calculation. One has next to replace this result into Eq. (6.74) and to do all the other products of formal series and identify the part in ε^n . Similar work must be done for the others equations. It is quite straightforward but tedious. We will now only give the entire result. Equation (6.38) reads, to this order

$$\delta t_n \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\beta) + r_n \mathcal{O}(1) + f_n \mathcal{O}(\beta), \quad (6.81a)$$

$$\psi_n \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1) + r_n \mathcal{O}(1) + f_n \mathcal{O}(\beta), \quad (6.81b)$$

and the vectorial EOM (Eq. (6.35)) yields

$$\mathcal{O}(1) + f_n \mathcal{O}(\beta) + r_n \mathcal{O}(1) + \psi_n \mathcal{O}(\beta) + \delta t_n \mathcal{O}(1) = 0 \quad (6.82a)$$

$$\mathcal{O}(1) + f_n \mathcal{O}(1) + r_n \mathcal{O}(1) + \psi_n \mathcal{O}(\beta) + \delta t_n \mathcal{O}(\beta) = 0 \quad (6.82b)$$

Let us finally determine f_n and r_n by replacing Eq. (6.81) into Eq. (6.82) :

$$\mathcal{O}(1) + f_n \mathcal{O}(\beta) + r_n \mathcal{O}(1) = 0 \quad (6.83a)$$

$$\mathcal{O}(1) + f_n \mathcal{O}(1) + r_n \mathcal{O}(1) = 0. \quad (6.83b)$$

This last system of equations proves that the property $\mathcal{P}(n)$ is actually satisfied, and this ends the proof.

Now, let us just explain, technically and physically why the convergence cannot be faster than β^5 . With $\alpha = 5$, the two equations (6.82) can be used to show that the property $\mathcal{P}(n)$ is satisfied if and only if we have ψ_n and δt_n are respectively $\mathcal{O}(1/\beta)$ and $\mathcal{O}(1)$. Let us take a look at the calculation of ψ for example, which is given by :

$$\psi = \omega \delta t + \dot{\omega} \delta t^2 + \dots \quad (6.84)$$

This first term reads

$$\delta t \sqrt{\frac{c^2 \beta^2}{r^2} - \left(\frac{\dot{\beta} r'}{r}\right)^2} \sim \beta(1 + \varepsilon^2 \beta^{2(5-\alpha)} + \dots + \varepsilon^{2n} \beta^{2n(5-\alpha)} + \dots), \quad (6.85)$$

where $\alpha = 5$ here. Then we understand that the choice of $\alpha \geq 6$ do not permit to satisfy the property $\mathcal{P}(n)$. Of course this argument is almost intuitive since the equation (6.82) is not the same if α differs from 5. *dc pas terrible, a reservoir*. Physically we note that the term in $(\dot{\beta} r'/r)^2$, which imposes α to be less than 5, is of the order of $\dot{\beta}/\beta$. The convergence of the series is thus strongly related to the leading variation of the orbital velocity, that is, to the leading multipolar radiation of the system, which is, in our case, the quadrupolar one.

6.7 Analytical and numerical results

The circular motion

The circular motion has already been treated in Sec. 6.5. The zero-th order of the SP scheme provides the same expression for this motion, but there is here a subtlety we must stress. The truncated EOM to the zero-th order coincides with the exact EOM in which the motion is taken to be circular. Hence this truncated equation cannot be exactly solved since the circular motion is not an exact solution of the EOM. Indeed, we find that the radial part of the EOM can be solved and yields to the expression of r_0 , also given by (6.46). The orthoradial part of the vectorial EOM however cannot be cancelled and reads to the leading order in β ,

$$\frac{512}{15} \frac{v^3}{Gm} \beta^6 + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0 \quad (6.86)$$

Whereas the first term is not, by construction, an ε -like term, its smallness authorized us to consider it as such a term, so that the truncated EOM are really solved to the 0-th order. Here we see again that this 0-th order of our expansion is built on a non-trivial initial condition : we will look to perturbations of an assumed circular motion of non-vanishing orbital velocity β , whereas such a motion is only authorized in the case $\beta = 0$.

First and second order of the semi-perturbative scheme - Numerical results

In this section we present analytical and numerical results coming from our semi-perturbative method. We have run our algorithm up to the second order. It means that we have derived the exact, analytical expression of f_1 , f_2 , r_0 , r_1 and r_2 as functions of β . The expression of r_0 , for instance, has been given in Eq. (6.46). We however do not write explicitly the others functions here, since these expressions are quite heavy. A simple numerical code enables to find them. These functions f and r fully characterize the motion, so that we will refer to these first and second order as the first and second order motion.

As announced, we find that r_0 is proportional to β^{-2} and that $\dot{\beta}$ is proportional to $512/15\beta^9$ (to the leading order in β). By virtue of the convergence of the SP-scheme in power of β^5 , we expect the first correction to the orbital acceleration $\dot{\beta}$, to be of order $\mathcal{O}(\beta^{14})$. In the same way, the corrections to the radius must be at least of order $\mathcal{O}(\beta^3)$ and $\mathcal{O}(\beta^8)$ for the first and second order motion respectively.

Actually, thanks to some numerical cancellations, the second order correction of the acceleration is found to be much smaller than expected : ($\mathcal{O}(\beta^{19})$ instead of β^{14}), and idem for the

first order correction of the radius (β^8 instead of β^3). This fact thus means that the first order of perturbation already gives the correct orbital acceleration up to β^{18} included, and the correct radius up to β^7 included. Using the post-Newtonian terminology, it means that the acceleration is exactly known up to 4.5 PN (that is, up to $1/c^9$ relatively to the quadrupolar term), and the radius up to 4.5 PN (relatively to the Newtonian radius).

The second order thus does not tell us anything for the acceleration if one stop to this order, but it obviously provides us another corrections to the radius. As said in the above paragraph, this second order gives a correct radius up to β^{12} , that is, up to 7 PN. Those results are the following :

$$\dot{\beta}_{4.5 \text{ PN}} = \frac{c^3}{Gm} \left(\frac{512}{15} \beta^9 - \frac{4864}{35} \beta^{11} + \frac{2316736}{2835} \beta^{13} - \frac{1216928}{297} \beta^{15} + \frac{5973800428}{289575} \beta^{17} + \mathcal{O}(\beta^{19}) \right) \quad (6.87a)$$

$$r_{7 \text{ PN}} = \frac{Gm}{c^2} \left(\frac{1}{4\beta^2} + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \beta^2 + \frac{131}{36} \beta^4 - \frac{617}{60} \beta^6 - \frac{883}{84} \beta^8 + \frac{111900409}{170100} \beta^{10} - \frac{119811886267}{13097700} \beta^{12} + \mathcal{O}(\beta^{13}) \right) \quad (6.87b)$$

Let us now focus on the entire non perturbative functions. In the left panel of Fig. 6.7, we plot the orbital acceleration as a function of β . We show the behaviour of this acceleration for the first and second order motion, and we also plot the 4.5 PN expansion of it given in Eq. 6.87a. We also plot in the right panel the radius as a function of β , normalized to the Newtonian radius $r_{\text{Newton}} = Gm/4\beta^2 c^2$. We show the circular radius, the first and second order one, and the 7PN radius given by Eq. (6.87b).

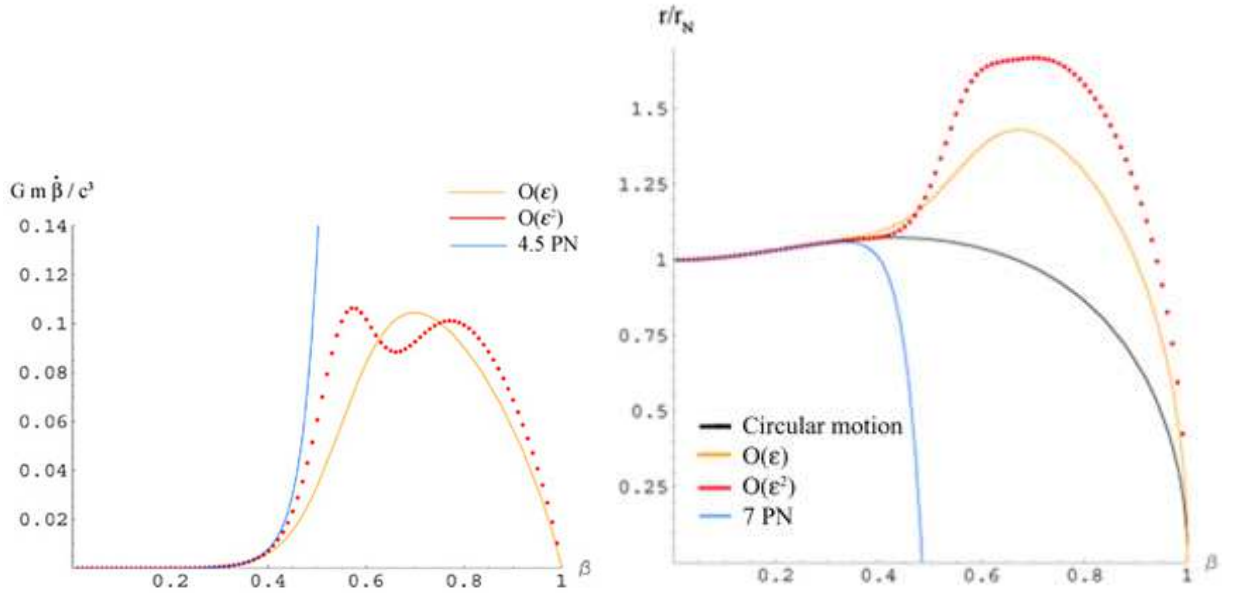


FIG. 6.6 – (left) The orbital acceleration as a function of β : the first order and second order solutions, compared to the 4.5 PN one. (right) The radius of the orbit as a function of β . We plot the circular solution, and its first and second order corrections. The 7 PN radius is also given.

Using the first order solution, we can determine the analytical expression of the dynamical timescale τ to this order : $\tau = Gm/c^3 \epsilon f_1$, and also the expression of the delay time δt_1 . We can then, according to Sec. 6.6 consider the ratio $\delta t_1/\tau$ as a measurement of the circularity of the

orbit. If this ratio is weak, the dynamical timescale is much greater than the delay-time, so that the gravitational radiation can be neglected during this period. In that case, the orbit is locally circular and the approximation used in the QE-scheme holds.

In the left panel of Fig. 6.7, we plot this ratio at the first order. We see, as announced, that the orbit is quasi circular both in the non-relativistic and in the ultra-relativistic regime. However in the intermediate region ($\beta \sim 0.6$), the two timescales become comparable, and the orbit is highly non-circular. It also means that the approximation underlying the QE-scheme is strongly broken.

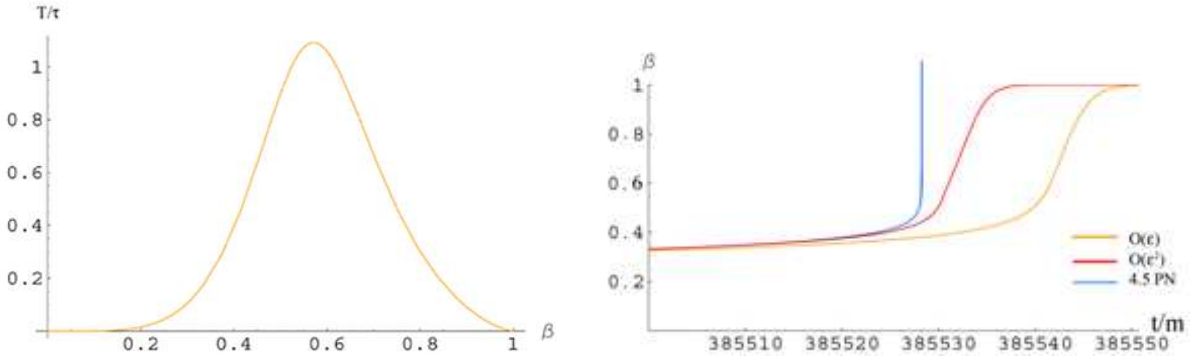


FIG. 6.7 – (left) The ratio of the delay-time over the dynamical damping timescale as a function of β at first order. These two timescales become comparable in the relativistic regime, and the quasi-equilibrium approximation breaks. (right) The behavior of the velocity with time, using the first order solution, the second order one and the PN solution.

Evolution with time

As explained in Sec. 6.6, the equation $\dot{\beta} = f[\beta(t)]$ can be easily integrated numerically, even if our expressions (notably at the second order) are quite heavy. This integration provides the evolution of the velocity β with time, and, with the help of the (known) function $r[\beta(t)]$, we are able to plot the motion of the bodies (to this order).

In the right panel of Fig. 6.7, we plot the behavior of the norm of the velocity β as a function of time, found by solving the above equation for f being the 4.5 PN result, the first order and second order result, starting at $\beta = 0.1$. We see that the evolution with time of β is very similar for this three approximation until $\beta \sim 0.4$. A major difference between the PN solution and the non-perturbative solutions is that it cannot take into account the pole of special relativity, so that the PN solution diverges : $\beta(t) \rightarrow \infty$ in a finite time. The non-perturbative solutions, on the contrary, includes effects of special relativity, notably the fact that β cannot be more than 1. It has the major effect to delay the moment of “coalescence” of the two body.

Finally we plot the motion of one of the body, and compare the results for the PN approximation, the first and second order approximation. This is shown in Fig. 6.7. Although the behaviour of the PN solution is quite bad near $\beta = 1$, we see that the three solutions agree very well until a separation of order $4m$ (a radius $2m$). This may be a good news for PN expansions.

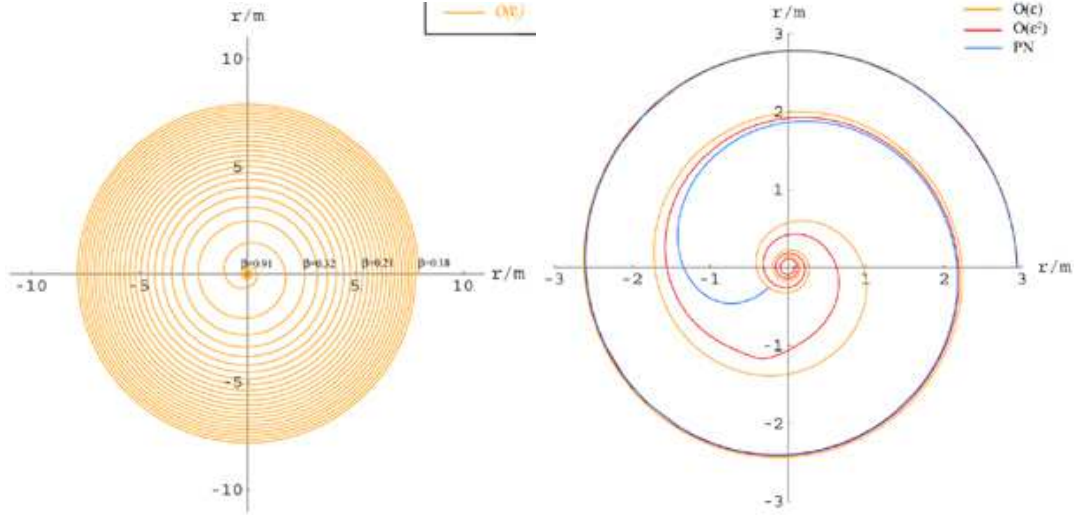


FIG. 6.8 – (left) The motion of one body, from $\beta = .18$ to $\beta = .91$, using the first order result f_1 . (right) The ultrarelativistic phase and the comparison of the first order solution (external line), the second order one (middle line) and the PN solution (interior line).

6.8 Conclusion and perspectives

The aim of this work was to extract as much as possible analytical results concerning the two body problem in Nordström's theory, which is without doubts the purely scalar theory of gravity the most closer to GR. Once again, these analytical results are not *a priori* of direct interest as far as the construction of relevant templates is concerned, but are interesting since they enable to estimate the validity of methods used in the two-body problem in GR. For instance, analytical results derived here should be useful to test the efficiency of numerical codes.

Those analytical results are the following. We have derived the exact equation of motion of arbitrary massive bodies. This equation can be specified to the two equal-mass body problem. We have analytically solved the (non physical) circular motion, which is a important piece of any iterative resolution scheme, since it provides a quite relevant initial condition (as the non-relativistic motion is very close to a circular motion). By exploring a little more such circular configurations, we found some surprising features, namely that the energy of the binary in this case vanishes in the ultra relativistic limit, and that the ICO does not actually exist, a result that cannot be found if one does not have at hand the full non-perturbative energy. The PN energy leads however to PN ICOs, that are moreover distributed in such a way that one may think they converge to the actual non-perturbative ICO, which in fact does not exist.

We have then constructed a powerful resolution scheme, that converges like $(v/c)^5$ and that can be easily implemented. Reminding that it is not a PN expansion (each orders provides non-perturbative information on the motion), we conclude that much analytical results about the

motion can be obtained in this theory, a point which can be illustrated by the explicit relations Eq. (6.46), Eq. (6.42d) and Eq. (6.42c).

Our aim have thus been reached. Of course, an exact solution of the equation of motion may be one day derived, and that will be of great interest. Another point of interest, that we shall (or the interested reader) investigate, would be to analyze carefully the convergence of the QE-scheme, or simply to analyze quantitatively the error made within its first iteration (the QE approximation). The advantage of Nordström's theory is that the QE-scheme is well defined and can be analytically studied (see the discussion in Sec. 6.6), a point that should be used in further work. Finally, it could also be interesting to examine the behavior of the PN expansion in the plunge phase, compared to a numerical solution of the full equation of motion. We could therefore check if the PN predictions are very bad ones in the ultra relativistic limit (as expected, since the small parameter goes to 1), or if, due to some non-trivial cancellations (note for example the alternation of the signs in Eq. (6.87), the PN picture reveals itself to be a good one. Such an alternation have been already observed in PN expansion of GR. Indeed, the number of orbits from a given time to the collapse time is a quantity whose sign alternates, see [131]. This behavior has not been explained yet, and we suggest that it might be understood in Nordström's theory.

Acknowledgments

We wish to thank L. Blanchet and E. Poisson for helpful remarks.

Troisième partie

La matière noire comme manifestation d'une dynamique modifiée : le paradigme MOND

Introduction

Cette troisième et dernière partie est consacrée au problème de la matière noire et au paradigme concurrent de celui de la matière noire froide (*Cold Dark Matter*, ci-après CDM), à savoir MOND (acronyme, rappelons-le, de *MODified Newtonian Dynamics*), dont l'idée principale est d'accorder aux anomalies gravitationnelles observées aux échelles astrophysiques une origine purement gravitationnelle plutôt qu'en trouver la source dans une composante de masse noire.

Nous présentons dans ce chapitre quelques unes des observations les plus importantes qui militent en faveur du paradigme MOND, et mettons en perspective les succès et insuccès de ces deux approches. Les chapitres suivants seront consacrés aux diverses tentatives de formulations de la théorie MOND. Nous proposerons également un modèle, qu'il nous faudra cependant abandonner pour des raisons non triviales que nous explorerons en détail (cf. Sec. 9.6). Nous résumerons également un travail que nous effectués en collaboration avec B. Famaey et H.S. Zhao et qui porte sur un nouveau test de la théorie MOND ayant pour cadre notre propre galaxie ; nous montrerons que l'effet en question s'explique dans le cadre de la théorie MOND.

7.1 La dynamique des galaxies et des amas de galaxies

Des anomalies gravitationnelles de même nature sont observées aussi bien au niveau galactique qu'au niveau des amas de galaxies. Ces objets sont essentiellement non relativistes, les étoiles et le gaz baryoniques qui les composent étant en effet animés de vitesses ne dépassant guère le centième de la vitesse de la lumière (par rapport au centre de masse). Par ailleurs, les effets de retards relativistes, qu'on pourrait suspecter être importants du fait de la taille considérable de ces objets (d'une dizaine à quelques milliers de kiloparsecs), sont en fait négligeables puisque le temps caractéristique de ces objets est bien plus long que le temps de retard (pour une galaxie spirale, ce temps caractéristique est « la » période orbitale, de l'ordre de la centaine de millions d'années, tandis que la durée de retard ne dépasse pas les quelques dizaines de milliers d'années).

Ces objets sont également caractérisés par un champ gravitationnel très faible, de l'ordre de $10^{-10} m.s^{-2}$. S'il faut croire que la relativité générale est correcte dans un régime de champ aussi faible, et prenant par ailleurs en compte la validité de l'approximation non-relativiste, il nous faut imaginer que de tels systèmes astrophysiques doivent être correctement décrit par la théorie de la gravitation de Newton. Cette dernière nous relie trivialement la masse (essentiellement baryonique, a priori) d'une galaxie ou d'un amas à la vitesse orbitale des étoiles et du gaz périphériques (ou à la dispersion de vitesse s'il s'agit d'une galaxie elliptique ou de tout système supporté par la pression). Ainsi dans le cas d'une galaxie spirale, les étoiles périphériques doivent orbiter à une vitesse *carrée* proportionnelle à la masse intérieure totale (notée M par la suite), et décroissante avec la distance r : $v^2 \propto M/r$ (nous considérerons par la suite que la masse baryonique intégrée à un rayon r se confond environ avec la masse totale au-delà des dernières étoiles périphériques ; en fait il reste une composante de gaz qui s'étend plus loin encore que les dernières étoiles, mais qui ne contribue plus significativement à la masse totale). La première déviation (spectaculaire) à cette loi fut découverte par Zwicky en 1933. L'étude d'un amas particulier lui révéla que l'amplitude observée de la dispersion des vitesses ne pouvait s'accorder avec la loi de

Newton qu'en présence d'une très large part de matière non lumineuse, en quantité environ cent fois supérieure à la masse visible.

Les confrontations de ce type, c'est-à-dire entre la cinématique de ces systèmes astrophysiques et leur contenu en masse, à travers la loi dynamique de Newton, se sont ensuite généralisées. Il est alors ressorti de cette étude systématique une des lois observationnelles des plus importantes en ce qui concerne la dynamique galactique, à savoir la loi de Tully-Fisher [132]. L'observation des courbes de rotations de galaxies spirales a révélée des résultats extrêmement surprenants et inattendus : les courbes de rotations de galaxies tendent à s'aplatir en périphérie, c'est-à-dire que la vitesse orbitale devient constante en bordure des galaxies spirales. Par ailleurs, l'amplitude de cette vitesse est corrélée, non à la racine de la masse comme en théorie Newtonienne, mais à la racine quatrième de la luminosité (et donc de la masse, plus de détails sur ce point ci-dessous). Autrement dit, au lieu d'avoir $v^2 \propto M/r$ comme attendu, on observe $v^4 \propto L$, où il est entendu que cette vitesse v est la vitesse « asymptotique » ou encore des étoiles périphériques (parfois notée aussi v_∞). Une loi analogue existe pour les systèmes supportés par la pression, c'est-à-dire les galaxies elliptiques. En revanche cette dernière ne s'applique pas exactement au cas des amas riches, point sur lequel nous reviendrons plus bas.

L'analyse de Tully-Fisher portait à l'époque, essentiellement, sur les galaxies spirales brillantes (les HSB, pour *High Surface Brightness [galaxies]*), qui sont bien sûr les plus faciles à observer, et dont la proportion relative en gaz est faible. Il est donc correct de supposer proportionnelles la luminosité et la masse baryonique (essentiellement localisée dans les étoiles), le coefficient de proportionnalité, plus ou moins bien connu, dépendant des modèles de populations stellaires. La loi de Tully-Fisher se réécrit alors comme une proportionnalité entre v^4 et la masse baryonique. Plus récemment, il est devenu possible d'observer des galaxies moins brillantes (les LSB *Low Surface Brightness [galaxies]*), dont la masse baryonique est nettement dominée par la composante de gaz, par ailleurs traquée par des observations dans le domaine radio. Il a été montré que ces objets montrent une déviation systématique par rapport à la loi initiale de Tully-Fisher $v^4 \propto L$ (du fait de la composante de gaz), tandis qu'ils sont en très bon accord avec la loi révisée $v^4 \propto M$, le coefficient de proportionnalité étant par ailleurs le même que celui obtenu avec des galaxies brillantes (voir [133] et les références qu'on y trouvera). La validité de cette loi empirique reliant la masse baryonique *totale* à la puissance quatrième de la vitesse asymptotique ne fait plus guère de doutes, et est maintenant établie sur au moins quatre ordres de grandeurs en masse (pour des systèmes allant d'une masse $M \approx 10^8 M_\odot$ à $M \approx 10^{12} M_\odot$, où M_\odot est la masse du Soleil).

7.2 L'hypothèse de la matière noire

Afin d'expliquer les propriétés inattendues des courbes de rotations des galaxies spirales, c'est-à-dire à la fois leurs formes (leurs aplatissements) et leurs amplitudes élevées, l'hypothèse selon laquelle il faut encore croire à la théorie de Newton, et plus généralement à la théorie d'Einstein de la gravitation, mais considérer qu'une forte proportion de masse non lumineuse habite les galaxies et les amas, s'est rapidement imposée. Cela constitue l'hypothèse de la matière noire froide¹, ou CDM. Il faut environ dix fois plus de matière sombre que de matière visible pour expliquer l'amplitude de ce phénomène.

Bien entendu, la dépendance radiale particulière (ou plutôt l'absence de dépendance radiale) du profil de vitesse des galaxies demande une répartition particulière du profil de densité d'un

¹Bien que cette matière interagisse gravitationnellement avec la matière ordinaire, elle ne doit pas, ou peu, interagir autrement avec cette dernière, sous peine de laisser des signatures expérimentales indétectées à ce jour (émission ou absorption de photons par exemple). L'absence de détection directe de particules de matière noire sur Terre nécessite également une faible section efficace. Enfin, cette matière noire doit être suffisamment froide pour se concentrer à l'échelle typiques des galaxies.

tel halo de matière noire. La comparaison des deux formules citées ci-dessus montrent immédiatement que la densité du halo de matière noire, en bordure du système où la masse baryonique intégrée se confond environ avec la masse baryonique totale M_b , doit donc décroître en $1/r^2$, et par ailleurs être proportionnelle à la racine de la masse baryonique. Cette dernière propriété, nécessaire afin de reproduire l'amplitude de la vitesse asymptotique, et montrant une stricte corrélation entre la quantité de matière noire et la quantité de masse baryonique, n'est pas sans poser problèmes. Quoique l'existence d'une corrélation entre masse baryonique et profil du halo de matière noire ne semble pas à première vue absurde, puisqu'elle eût pu s'établir lors de la formation du système lui-même, l'existence de *cette* corrélation particulière manque d'une quelconque explication dans le modèle actuel de la matière noire (ie. CDM).

Cet argument plaide lourdement en défaveur du paradigme CDM actuel, tant, du moins, qu'une solution à ce problème n'est pas trouvée. D'autres preuves directes de la corrélation fine entre la composante baryonique et une putative composante sombre existent dorénavant (quoique peut-être encore sujet à débat ; nous ne sommes pas experts dans le sujet). Il s'agit des *wiggles*, ou « sursauts » observés sur les courbes de rotation de galaxies. On observe en effet qu'aux sursauts parfois observés dans le profil baryonique (et suscités, par exemple, par des régions particulièrement denses ou pauvres en baryons) sont associés des sursauts similaires dans le profil de vitesse, tandis que la composante seulement baryonique est incapable, si l'on en croit la loi de Newton, d'expliquer la valeur élevée de la vitesse. Cela signifie qu'au sursaut baryonique doit être associé, localement, un sursaut dans le profil de matière noire. Cela s'explique de façon tout à fait naturelle dans le cadre de MOND, comme nous le verrons plus bas (cf. section suivante). Une explication possible dans le cadre CDM consiste à penser ces surdensités baryoniques locales (ou sous-densité) comme traçant une surdensité (resp. sous-densités) préexistante dans le halo de matière noire lui-même. Mais le fait que les surdensités ou sous-densités baryoniques s'expliquent à l'aide des ondes de densité, et par conséquent trouvent leurs origines dans les chocs gravitationnels, et non dans l'action d'un potentiel gravitationnel localement distinct du potentiel moyen, rend peu probable un tel scénario, sans compter la dispersion de vitesse radiale des particules de matière noire ayant, a priori, pour effet de lisser de telles inhomogénéités locales du halo de matière sombre.

Soulignons que la corrélation des sursauts dans le profil baryonique et dans le profil de vitesse ne pose pas de difficultés lorsqu'elle est observée dans des galaxies brillantes, puisque l'on sait que ces objets sont essentiellement dépourvus de matière noire au moins en leurs coeurs. L'observation de tels sursauts dans les galaxies peu brillantes [134] essentiellement dominées par la matière noire est en revanche plus problématique pour CDM. L'absence, cependant, d'observations encore concluantes au niveau de ces objets, et de simulations numériques de tels sursauts, afin de savoir si ce phénomène pose réellement des difficultés au paradigme CDM, nous force, à l'heure actuelle, à une conclusion en demi-teinte : la corrélation des sursauts dans un objet dominé par la matière s'interprétera tout naturellement dans le cadre MOND, tandis qu'elle peut s'avérer très problématique pour CDM.

Ces considérations nous amènent d'ailleurs à une autre difficulté soulevée par l'hypothèse CDM. Il s'agit du problème des *cusp*. On observe dans les simulations numériques, en effet, que le halo de matière noire froide est suffisamment dense au coeur des galaxies pour que la proportion de masse sombre par rapport à la masse visible dans la région intérieure des systèmes galactiques ne soit pas négligeable. Ainsi, la région centrale des galaxies brillantes devrait receler une part importante de matière sombre, en contradiction, comme nous l'avons dit, avec le profil des courbes de rotation. Signalons enfin, bien sûr, à la défaveur du modèle CDM, l'absence de détection directe de particules de matière noire² sur Terre.

²Particules dont les modèles théoriques ne manquent pas ; il pourrait par exemple s'agir du plus léger partenaire supersymétrique, le LSP.

Tout ceci, et malgré nombre de succès incontestables de l'hypothèse CDM, notamment dans le domaine relativiste et en particulier au sujet des lentilles gravitationnelles et de la cosmologie (cf. Sec. 7.4), conduit à une interprétation radicalement différente de la loi de Tully-Fisher, interprétation, qui, en plus d'éviter certains des problèmes évoqués ci-dessus, les résout et même les prédit (ou « post-dit », selon l'époque). Cette interprétation apparaît ainsi extrêmement naturelle ; par ailleurs, elle rend admirablement compte de ces phénomènes gravitationnels autrement anormaux. Il s'agit, bien sûr, de MOND.

7.3 L'hypothèse MOND

La dynamique des systèmes astrophysiques tels que les galaxies et les amas, nous l'avons vu, n'est problématique et ne requiert l'introduction d'une matière noire faiblement interagissante dont il est difficile d'expliquer les corrélations fines avec la matière ordinaire, que si l'on se réfère à la loi de Newton et ses dérivées (par exemple, les formules du viriel, etc.). Puisqu'il est par ailleurs impossible de trouver une raison qui fasse de ces objets des systèmes relativistes pour lesquels la loi de Newton ne s'appliquerait plus (ce qui, d'ailleurs, ne résoudrait pas le problème), il nous faut considérer, comme explication aux anomalies présentées ici, l'éventualité d'une modification de la limite de champ faible et non relativiste de la relativité générale. Autrement dit, on peut imaginer modifier la théorie de Newton pour expliquer ces anomalies gravitationnelles.

Fort heureusement, une telle hypothèse évite l'écueil immédiat d'être en flagrant désaccord avec la dynamique gravitationnelle du système solaire (essentiellement Newtonienne), parce que le champ de gravitation typique de ces systèmes astrophysiques est bien plus faible qu'aucun champ de gravitation dans le système solaire³. Il n'est donc pas a priori exclu (expérimentalement parlant) que la loi de gravitation s'altère profondément dans le régime des champs très faibles (de l'ordre, on l'a dit, de $10^{-10} m.s^{-2}$). Nous n'accorderons évidemment de crédit à cette hypothèse que si elle capable, au moins en partie, d'expliquer la dynamique anormale des galaxies et des amas, tout en apportant une réponse élégante aux difficultés rencontrées plus haut dans le cadre de l'hypothèse CDM. C'est effectivement le cas. La modification cherchée (dans le régime des champs faibles) découle immédiatement de la loi de Tully-Fisher, reliant la vitesse asymptotique à la masse baryonique totale. Si l'on écrit, cinématiquement (pour des orbites circulaires), la vitesse comme fonction de l'accélération centripète à l'aide de la célèbre formule $a = v^2/r$, la loi de Tully-Fisher s'écrit $a^2 \propto M/r^2$ (M désignant ici la masse baryonique). L'homogénéité requiert l'introduction d'une échelle d'accélération, initialement introduite par Milgrom en 1983 [1], et notée a_0 , de sorte que la loi précédente s'écrit

$$a.a/a_0 = GM/r^2, \quad (7.1)$$

où l'on reconnaît dans le second membre l'expression standard du champ gravitationnel Newtonien engendré par une masse M (on a supposé la symétrie sphérique). De cette observation fondamentale, Milgrom, fondateur de la théorie MOND, a déduit deux modifications possibles (et distinctes) de la dynamique. On peut d'abord penser à une modification de la seconde loi de Newton (ou la modification de l'inertie, dans les termes de Milgrom), loi qu'on écrira en terme d'une fonction μ à déterminer, sous la forme (pour une particule de masse inertielle m_i)

$$m_i \mathbf{a} \mu \left(\frac{|\mathbf{a}|}{a_0} \right) = \Sigma \mathbf{F}, \quad (7.2)$$

³A l'exception de quelques zones particulièrement restreintes où le champ de gravitation s'annule localement, ie. autour des points de Lagrange

où le second membre désigne, de façon standard, la somme des forces appliquées à la particule, et où la force gravitationnelle en particulier, prend la forme standard du gradient du potentiel gravitationnel ϕ , lui-même solution de l'équation de Poisson habituelle. La phénoménologie souhaitée découle du choix suivant du comportement asymptotique de la fonction μ : la condition $\mu(x) \sim 1$ si $x \gg 1$ garantit la validité de la théorie Newtonienne originelle dans le domaine des grandes accélérations comparées à a_0 , et la condition $\mu(x) \sim x$ si $x \ll 1$ implique la loi de Tully-Fisher pour les systèmes caractérisés par un champ de pesanteur faible (inférieur à a_0). On s'attend à ce que la constante a_0 soit de l'ordre de $10^{-10} m.s^{-2}$. La comparaison de la loi Eq. 7.2 avec l'observation montre en effet que a_0 vaut approximativement $1.2 \times 10^{-10} m.s^{-2}$, une détermination plus précise se heurtant aux difficultés expérimentales inhérentes aux observations astrophysiques en général, à la dégénérescence de a_0 avec la valeur du rapport masse sur luminosité, assez mal connu, et à la liberté de choisir diverses fonctions μ .

Une autre possibilité est de conserver intacte la seconde loi de Newton, mais de modifier la façon dont les masses engendrent le potentiel gravitationnel ϕ . Une particule test subit ainsi toujours la force gravitationnelle standard $\mathbf{a} = -\nabla\phi$, mais le champ de gravitation $g = \nabla\phi$ s'écrit lui, en symétrie sphérique, sous la forme

$$g = \nabla\phi = a_0\nu \left(\frac{GM}{r^2 a_0} \right), \quad (7.3)$$

où cette fois, les conditions asymptotiques pertinentes sont les suivantes $\nu(x) \sim x$ si $x \gg 1$ et $\nu(x) \sim \sqrt{x}$ si $x \ll 1$. Nous consacrerons le chapitre suivant à l'étude détaillée de ces deux approches, ainsi qu'aux formulations théoriques qu'on peut leur donner. Nous voulons d'abord, à ce stade, résumer les succès de cette idée ainsi que les problèmes qu'elle soulève.

Bien évidemment, pour commencer, la loi de Tully-Fisher est automatiquement (par construction) satisfaite, si tant est que le champ gravitationnel en périphérie des galaxies est de l'ordre ou en deçà de la constante de Milgrom a_0 , ce qui est généralement le cas. Dans le cas où le champ gravitationnel est d'ordre a_0 en bordure de la galaxie, le régime est intermédiaire entre le régime MONDien et Newtonien, et de la forme précise de la fonction μ ainsi que des paramètres galactiques dépendra la qualité du fit de la courbe de rotation de galaxie. Sans entrer dans ces détails, soulignons simplement qu'avec le choix standard $\mu(x) = x/\sqrt{1+x^2}$, ou encore avec celui $\mu(x) = x/(1+x)$, la théorie MOND s'est avérée extrêmement pertinente pour décrire la plupart des galaxies étudiée dans ce cadre jusqu'à présent. Il a été ainsi montré que MOND réussit à expliquer de façon exemplaire nombre de courbes de rotation de galaxies spirales (voir par exemple [134, 135, 103, 136]). La théorie MOND, notons-le, n'explique pas seulement la phase terminale des courbes de rotations de galaxies (ce pour quoi, d'ailleurs, elle a été construite), mais reproduit plus généralement le profil entier de la courbe de rotation, depuis le centre de masse jusqu'à la périphérie lumineuse (jusqu'aux dernières étoiles), et même au-delà, c'est-à-dire qu'elle explique aussi la courbe de rotation du gaz périphérique, s'étendant en général bien plus loin que les dernières étoiles.

Puisque l'on suppose que la seule matière présente dans les galaxies est la matière visible (donc baryonique), si l'on interprétait la dynamique modifiée en terme d'une matière noire effective dans un cadre Newtonien standard, son profil de densité serait automatiquement corrélé au contenu en matière ordinaire, comme l'impose effectivement les observations. S'en trouve ainsi expliqué d'une part, la loi de Tully-Fisher (qui ne saurait cependant constituer un test de la théorie puisqu'elle a servie de point de départ, à moins qu'une violation de cette loi soit un jour observée), et d'autre part les *wiggles* dont nous avons parlé plus haut. De plus, l'absence de matière noire dans la région centrale des spirales brillantes, si elle est problématique dans un cadre CDM, comme on l'a vu notamment avec le problème des *cusps*, est naturellement expliquée dans le cadre de MOND. Non pas, évidemment, parce qu'il n'y a tout simplement pas de matière noire

en MOND, mais parce que ces régions centrales sont essentiellement Newtonniennes (le champ de pesanteur excède largement a_0). L'absence d'une matière noire (fictive) dans ces régions est donc, là encore, extrêmement naturelle dans un cadre MONDien. Il en va tout autrement des galaxies peu brillantes et des galaxies naines. Ces objets, caractérisés par un champ gravitationnel très faible (en deçà de l'échelle a_0) sont, selon la théorie MOND, dans un régime purement MONDien, ce qui signifie qu'interprétés en terme de la loi de Newton, ils doivent être largement dominés par la matière noire. Cette prédiction de MOND [1] s'est avérée tout à fait exacte, et constitue un autre succès de l'hypothèse.

L'hypothèse MOND se heurte cependant à un sérieux problème. Les amas riches en galaxies, caractérisés par un champ de pesanteur (calculé de façon Newtonienne) de l'ordre de a_0 doivent être dans un régime proche du régime MONDien. C'est effectivement le cas, dans le sens où la description de ces objets en terme, simplement, de leur masse baryonique et de la loi de gravitation modifiée est bien meilleure qu'en terme de la loi de Newton standard. Cependant, il est apparu que MOND ne suffisait pas : la dynamique observée requiert encore une fraction de masse sombre, de l'ordre de la masse visible (galaxies, étoiles et gaz galactiques et intergalactique). Il a récemment été proposé que cette masse manquante puisse se trouver sous la forme de neutrinos, qui de fait constituent une matière sombre (non baryonique mais bien connue) et faiblement interagissante (la section efficace des neutrinos est très faible), et qui peuplent en grand nombre l'Univers, qu'ils aient été créés lors de la nucléosynthèse primordiale ou lors de processus électrofaibles tels que les désintégrations de particules instables, si communes même dans l'Univers récent.

Les neutrinos, du fait de leur faible masse, sont essentiellement relativistes et constituent pour cette raison une matière noire chaude, par opposition à la matière noire froide. Cela signifie que les neutrinos ne peuvent former un système gravitationnellement lié que sur une très grande échelle, bien plus grande que la taille des galaxies. Ainsi, la population de neutrinos dans les galaxies est très diffuse et, de fait, ne contribue que très peu à leurs masses. En revanche, ils pourraient fort bien se concentrer sur des échelles de l'ordre de la taille d'un amas de galaxies (ie. de l'ordre du mégaparsec), et de la sorte contribuer significativement à la masse totale de ces objets. La validité de ce scénario dépend beaucoup de la masse des neutrinos, encore inconnue à ce jour. Il a été montré récemment [137] que des neutrinos suffisamment lourds (de l'ordre de 2 eV , c'est-à-dire, proche des bornes supérieures connues) peuvent de fait s'effondrer sur une échelle de l'ordre du mégaparsec et contribuer dans la proportion souhaitée à la masse des amas de galaxies, expliquant ainsi la masse manquante à ces échelles dans le cadre de la théorie MOND. Cette question, bien évidemment, est cruciale pour l'avenir de la théorie MOND. S'il s'avère malgré tout, au gré des découvertes futures, que les neutrinos ne peuvent pas jouer ce rôle, il sera toujours possible, bien évidemment, de sauver la théorie au prix d'introduire, non une matière noire froide, mais une matière noire chaude inconnue (ie. qui ne soit pas des neutrinos), de même qu'on introduit de façon *ad hoc* une matière noire froide pour expliquer la dynamique des galaxies. Cela serait, bien sûr, moins élégant, mais ne doit pas être exclu.

Notons qu'il n'est pas possible de modifier la forme de la fonction μ pour résoudre le problème des amas. En effet, les galaxies brillantes sont également caractérisées par un champ gravitationnel de cet ordre, de sorte que changer la forme de μ pour expliquer le comportement des amas reporterait le problème sur les galaxies brillantes, qui seraient alors caractérisées par un *surplus* de masse. Puisqu'il est plus facile de rajouter une éventuelle composante de masse sombre que de comprendre pourquoi une certaine partie de la masse des galaxies brillantes ne contribuerait pas à la dynamique (soyons honnête : cela semble même intenable), il est préférable de laisser le problème à l'échelle des amas, et de chercher à modéliser une composante de matière noire chaude dont l'origine reste à déterminer.

Ce trop bref aperçu des succès et insuccès des deux paradigmes concurrents - CDM et MOND - a tout de même mis l'accent sur ce qui, d'un point de vue MONDien en tout cas, semble être

l'enseignement essentiel des diverses observations : il ne fait guère de doute qu'une corrélation fine existe entre matière noire et matière ordinaire (voir aussi [138]. Si cela semble poser des difficultés à la théorie CDM, cela au contraire apparaît naturel dans le cadre de MOND. Ceci est sans doute suffisant pour prendre au sérieux l'hypothèse, et ce malgré le problème des amas. Bien entendu, d'autres succès ou insuccès de CDM ou de MOND (au niveau non-relativiste) sont restés ici sous silence. Nous renvoyons à [103] pour une analyse détaillée des prédictions de MOND, et des succès que l'hypothèse a rencontrés en expliquant diverses autres lois relatives à la dynamique galactique. Ces questions de nature astrophysique ne sont bien sûr pas toutes réglées. Une des raisons en est que la modification de la gravité est le plus simplement traduite par une loi de Poisson modifiée et non-linéaire difficile à résoudre (cf. chapitre suivant). Les simulations numériques d'objets astrophysiques MONDiens tels que les galaxies est un sujet récent et encore embryonnaire [139]. Son développement devrait apporter nombre d'éclairages sur la capacité de MOND à décrire la dynamique galactique et extra-galactique ainsi que fournir des critères permettant de trancher définitivement entre les deux hypothèses.

Nous nous sommes contentés ici de physique non relativiste, ce qui, d'un point de vue dynamique, est tout à fait pertinent, comme nous l'avons rappelé. Un tout autre pan du débat s'ouvre cependant, en considérant le problème sous l'angle des observations indirectes de la matière noire par des effets relativistes, comme nous le montrons maintenant.

7.4 Le problème relativiste

L'observation principale qui corrobore l'hypothèse de la présence de matière noire dans les galaxies et les amas est la déflexion de la lumière (provenant d'une source lointaine) par une galaxie ou un amas plus proche et situé sur la même ligne de visée. On déduit aisément des observations et de la relativité générale -supposée correcte - que la matière ordinaire (étoiles plus gaz) est en quantité largement insuffisante pour expliquer la forte déflexion observée. On trouve que la quantité de masse noire nécessaire à expliquer ladite déflexion est grossièrement la même que celle nécessaire à rendre compte de la dynamique inhabituelle des galaxies, c'est-à-dire leurs courbes de rotation.

Remarquons, bien entendu, qu'une prédiction évidente du modèle CDM est l'accord exact entre la quantité de matière noire (et son profil de densité) inférée des courbes de rotations et celle inférée de la déflexion de la lumière. Les incertitudes expérimentales sont malheureusement si grandes qu'on ne peut actuellement tester avec précision la véracité d'une telle loi. Au cas où, au contraire, les observations futures montreraient une déviation systématique (qu'on ne puisse attribuer aux barres d'erreur) entre ces deux estimations d'une même quantité, il s'agirait d'un résultat de première importance, puisque, sans nécessairement exclure la présence de matière noire, il s'agirait de la preuve indubitable qu'il faille modifier la théorie de la relativité générale. Il n'est en effet pas impossible, comme nous le verrons plus loin, qu'une théorie de gravitation modifiée prédise, étant donné un certain profil de masse, une déflexion de la lumière et des courbes de rotation qui, interprété (fallacieusement) en terme de la relativité générale, conduise à définir des profils de matière noire effectifs incompatibles (exemple : la théorie RAQUAL, cf. chapitres suivants). Cela, en revanche, n'est pas nécessairement le cas : autrement dit, l'accord ou le désaccord entre ces deux estimations de la masse noire ne remettrait aucunement en cause le paradigme MOND, tandis le désaccord enterrerait définitivement le paradigme CDM (ou plus précisément, la relativité générale). Il s'agit, par conséquent, d'un test crucial, et nous ne pouvons qu'espérer qu'il devienne possible dans les années à venir.

Notons que l'étude de la déflexion de la lumière par les galaxies ou les amas ne permet pas seulement de déduire, à l'aide de la relativité générale, la quantité intégrée de matière noire,

mais, plus finement, d'en déduire son profil radial, qu'on a vu être particulier (la densité devant aller en $1/r^2$ en périphérie pour expliquer l'aplatissement des courbes de rotation de galaxies). Il est immédiat, en utilisant les formules standard de la relativité générale, d'en déduire que l'angle de déflexion de la lumière ne doit plus dépendre du paramètre d'impact. Cela est effectivement observé, et confirme donc le paradigme CDM. Nous avons souligné une éventuelle difficulté du modèle CDM au cas où l'on observerait une différence entre le profil de matière noire déduit des courbes de rotation de galaxies et celui déduit du profil de déflexion de la lumière. Cela n'est pas observé pour le moment. La constance de l'angle de déflexion par rapport au paramètre d'impact est en revanche bien vérifiée. Force est par conséquent de constater que le paradigme CDM explique naturellement ces observations.

Qu'en est-il de l'hypothèse d'une gravitation modifiée, c'est-à-dire MOND? Reporter l'intégralité de l'effet traduit par la loi de Tully-Fisher dans une modification de la gravité ne nous a permis pour le moment que de déduire une formule phénoménologique *non relativiste* Eq. 7.1. L'existence d'un test indépendant de l'existence de la matière noire dans le domaine relativiste rend absolument nécessaire de posséder une formulation relativiste de la théorie MOND. Cette construction elle-même n'est pas aisée, comme nous le verrons plus loin. S'ajoutera à cette difficulté la nécessité de reproduire le profil de déflexion de la lumière en l'absence de matière noire.

A ce sujet, un système particulièrement intéressant à été récemment observé [140]. Il s'agit du fameux « bullet cluster », un système de deux amas qui sont entrés en collision, et dont la distribution en matière, et notamment en gaz, a de ce fait acquis une forme tout à fait particulière. Lors de la collision en effet, le gaz, qui constitue la majorité de la masse baryonique, s'est agrégé au centre du système, tandis que les galaxies constituant les amas ont conservées leurs impulsions et se sont retrouvées localisées en deux concentrations relativement éloignées du gaz central. L'observation fondamentale est que la déflexion de la lumière est la plus importante autour des amas maintenant dépourvus de leur contenu en gaz, tandis qu'aucune déflexion notable n'est observée autour du gaz central, qui totalise pourtant la majorité de la masse baryonique. Cela trouve une explication naturelle dans le cadre CDM, puisque la matière noire, non collisionnelle et par conséquent aveugle au choc, est sensé avoir conservée son impulsion et entraînée avec elle les galaxies constituant les amas. Du point de vue de la théorie MOND, qui ne suppose pas l'existence d'une quelconque matière noire, ce système est effectivement problématique. Cependant, il faut insister sur deux points. D'abord, le champ gravitationnel, tracé par les courbes de déflexion de la lumière, ne se déduit pas a priori de la somme des champs gravitationnels créé par les masses élémentaires du système. Contrairement au régime Newtonien, le régime MONDien est nécessairement caractérisé par une non-linéarité, brisant en particulier le principe de superposition des champs gravitationnels (voir chapitre suivant). Par ailleurs, on a déjà vu qu'une composante de matière sombre chaude, constituée, par exemple de neutrinos, doit être présente à l'échelle des amas y compris dans le cadre de MOND. Le système en question étant constitué de deux amas, il faut absolument, avant de reconduire MOND, modéliser d'une part la distribution actuelle de cette matière noire chaude, et d'autre part, résoudre l'équation (non-linéaire) du potentiel gravitationnel (voir chapitre suivant), ce qui n'a rien d'aisé.

Des travaux récents [141] ont suivis cette approche dans le cadre de la théorie relativiste de MOND de Bekenstein, TeVeS [24], et ont le mérite de montrer que le problème est peut-être moins grave qu'il n'y paraît au premier abord. Remarquons à ce sujet, et c'est toute la beauté du problème de la matière noire, que ce système, initialement présenté comme excluant définitivement toute théorie de la gravitation modifiée, pose maintenant également problème à la théorie CDM. Les propriétés du gaz de part et d'autre de l'onde de choc ont en effet permis de calculer la vitesse relative des deux amas lors de la collision. La vitesse ainsi estimée (de l'ordre de $4000 km.s^{-1}$), est anormalement élevée dans un Univers (Λ)CDM. Le travail récent [142] a en

revanche montré qu'une vitesse relative aussi importante était plus naturelle dans le cadre de MOND. Le débat sur ce système particulièrement intéressant est par conséquent loin d'être clos.

La théorie CDM trouve un autre succès (éclatant) dans le domaine relativiste. Il s'agit, bien entendu, du domaine cosmologique. Puisque la relativité générale est supposée valide, la construction des modèles cosmologiques est relativement directe, la principale nouveauté par rapport à la théorie cosmologique standard consistant en l'introduction d'un nouveau terme de source se comportant comme un fluide de pression nulle, la matière noire. Comme il est bien connu du lecteur, l'introduction, à la fois d'une composante de matière noire représentant environ 30 pour cent du contenu de l'Univers, et d'une composante d'énergie noire, décrite de la façon la plus simple par une constante cosmologique Λ , conduit au modèle d'Univers dit Λ CDM, dont les innombrables succès, au chapitre desquels figurent notamment l'explication du spectre de puissance angulaire du fond diffus cosmologique (ci-après : CMB) ou l'existence d'un modèle cohérent de la formation des structures, ne seront pas énumérés plus avant ici. Il va sans dire qu'une théorie relativiste de MOND doit également pouvoir expliquer l'ensemble de ces observations de nature cosmologiques. Par ailleurs il faudra, tout au long de ce programme, s'intéresser de près aux diverses prédictions des deux modèles, MOND et Λ CDM, afin de trouver d'éventuels tests discriminant ces deux hypothèses. A cet égard, il est généralement pensé que toute théorie de gravitation modifiée doit prédire une faible amplitude du troisième pic acoustique du CMB, contrairement au modèle (Λ)CDM. Nous n'avons cependant pas connaissance d'une preuve rigoureuse de ce résultat. Il n'est pas impossible, par exemple, que les oscillations d'un nouveau champ dynamique, par exemple, puisse jouer le rôle de la matière noire à l'époque du CMB (cf. par exemple [143]). Il nous semble dangereux d'accorder trop de crédit à une proposition aussi forte, en l'absence, encore aujourd'hui, d'une théorie relativiste pleinement satisfaisante de MOND.

7.5 Une étrange coïncidence

Il est immédiatement apparu que la constante d'accélération de Milgrom a_0 , dont la valeur numérique est maintenant établie à environ $1.2 \times 10^{-10} m.s^{-2}$, est proche de la valeur de la constante de Hubble aujourd'hui H_0 , et par conséquent également proche d'une éventuelle constante cosmologique Λ : $a_0 \sim cH_0/6 \sim c^2 \sqrt{\Lambda/72}$. Les facteurs numériques n'ont ici que peu d'importances. En effet il faut comprendre que chacune de ces trois quantités sont extrêmement petites, de l'ordre de 10^{-60} , en unités naturelles (de Planck), et par conséquent égales jusqu'à la soixantième décimale dans ce système d'unité. L'égalité proche entre la constante cosmologique et le paramètre de Hubble aujourd'hui est bien connue et constitue le fameux problème de coïncidence.

Ce qu'apporte ainsi, de façon sans doute assez inattendue, la théorie MOND, c'est également de montrer que les problèmes de l'énergie noire (Λ) et de la matière noire (interprétée en terme MONDiens) sont caractérisés par les mêmes ordres de grandeurs. Cela suggère fortement de considérer ces deux problèmes comme deux manifestations d'un unique phénomène. Des tentatives d'unification de la matière noire et de l'énergie sombre sont publiés régulièrement dans la littérature. A notre avis, la coïncidence entre a_0 et Λ suggère d'explorer cette unification dans une vision MONDienne du problème de la matière noire. C'est du reste un de mes projets de recherches futures, en collaboration avec B. Famaey et A. Füzfa.

La théorie MOND a également le mérite de soulever un nouveau problème de coïncidence, du fait de l'égalité $a_0 \approx H_0$. S'il faut croire que l'échelle a_0 est constante au fil du temps cosmique, alors nous sommes confrontés à l'égalité surprenante de cette échelle avec le paramètre de Hubble aujourd'hui. Ce problème potentiel est immédiatement contourné si, au contraire, nous

prenons au sérieux l'égalité $a_0 \approx H_0$ et l'interprétons comme une possible origine cosmologique des effets MONDiens. Une telle attitude est directement issue d'une analyse du problème des grands nombres à la manière de Dirac. Si nous nous refusons à penser la constante a_0 comme une constante fondamentale, il nous faut la voir comme une constante effective dont la petitesse doit être fabriquée dynamiquement. Or, aucune évolution dynamique ne crée facilement des nombres purs très petits à partir d'une dynamique qui en est initialement dépourvue. La seule exception connue est la dynamique de l'Univers lui-même, puisque le facteur d'échelle a connu, selon la théorie standard de la cosmologie, une formidable variation au cours des âges. Il est alors tentant d'expliquer les nombres purs anormalement petits comme ayant variés avec le temps cosmique. L'égalité ci-dessus suggère ainsi que l'échelle d'accélération de Milgrom est variable dans le temps et varie comme le paramètre de Hubble.

Avant même de chercher à modéliser un tel comportement⁴, remarquons qu'une loi de type $a_0(z) \propto cH(z)$, où z est le *redshift*, a des conséquences observables. En particulier, la loi de Tully-Fisher devrait dépendre du *redshift*. Il faut noter que la dynamique galactique est observée sur des systèmes relativement proches (pour z compris entre 0 et, au plus, 1), de sorte qu'on ne doit pas s'attendre à observer une variation de la constante de Milgrom dépassant la dizaine de pour cent. La question de la variation de la loi de Tully-Fisher avec le décalage vers le rouge est sujette à débat [144, 145, 146]. Il semble trop tôt pour conclure dans un sens ou dans l'autre, les incertitudes étant sans doute trop larges actuellement pour déceler un tel comportement. Bien entendu, ce test s'avérera crucial pour l'orientation future de la théorie de MOND. Remarquons d'ailleurs qu'une variation de la loi de Tully-Fisher avec z poserait peut-être un nouveau problème pour les modèles de matière noire, tandis qu'elle pourrait s'expliquer naturellement dans le cadre d'une théorie de MOND où a_0 serait variable.

⁴La théorie BSTV (pour *Bi-Scalar Tensor Vector*) de MOND relie naturellement la valeur de a_0 à la valeur de fond d'un champ scalaire [143]. Cette théorie n'est cependant pas exempte de problèmes théoriques (cf. Sec. 9.5).

Vers une théorie de MOND

Nous avons entraperçus, au cours du chapitre précédent, la loi fondamentale de la théorie MOND. Il s'agissait de l'Eq. (7.1), réécriture cinématique de la loi de Tully-Fisher dans le cadre d'un système supporté par la rotation (ie. les galaxies spirales). Nous en avons déduit, suivant l'approche originelle de Milgrom, deux formulations possibles (non-relativistes) de la théorie de MOND. La première s'attachait à modifier la seconde loi de Newton, Eq. (7.2), et constitue de ce fait une modification de l'inertie, la seconde modifiait la forme du champ gravitationnel créée par une masse centrale Eq.(7.3). Dans les deux cas fut introduit une échelle d'accélération fondamentale a_0 , en deçà de laquelle les déviations aux lois de Newton apparaissent, la transition entre les régimes Newtonien et MONDien étant assuré par une fonction μ , dont seuls les comportements asymptotiques sont fixés.

Nous discutons d'abord de la modification de l'inertie et de ses motivations mises en avant par Milgrom, et des problèmes posés par une telle approche. Quoique très intéressante, cette piste ne semble pas aisée à suivre, tandis que modifier la gravitation de façon à retrouver MOND semble plus facile, même s'il est délicat de justifier de telles modifications *ad hoc*.

8.1 Modifier l'inertie ?

Nous avons vu au chapitre précédent une forme possible de la modification de l'inertie compatible avec l'idée de MOND, l'équation (7.2). Pour de nombreuses raisons cependant, nous ne pourrions pas conserver cette loi sous cette forme. Nous présentons ici, d'abord, les motivations de l'approche consistant à modifier l'inertie, et nous soulignons ensuite les difficultés posées par l'équation (7.2).

Motivations

S'il semble bien plus difficile de modifier l'inertie que la gravité, nous devons reconnaître que l'intérêt essentiel de cette approche réside en l'espoir de découvrir une idée, un principe, et un mécanisme physique qui conduise à une théorie de type MOND. Au contraire, l'approche consistant à modifier la gravité, si elle est plus directe et a portée ses fruits plus rapidement (cf. sections et chapitres suivants), est difficile à justifier. Il faut essentiellement ajouter à la relativité générale, et de façon *ad hoc*, de nouveaux champs qui de plus doivent posséder des dynamiques non triviales (de type k-essence, par exemple), ou encore invoquer des couplages non minimaux de la gravité à la matière.

Les diverses motivations à une modification de l'inertie s'insèrent en particulier dans l'idée de la théorie MOND comme une théorie effective prenant en compte l'influence de l'Univers dans son ensemble sur la physique locale. En ce sens, nous empruntons ainsi la piste évoquée en Sec. 7.5, où nous voulons voir la valeur de la constante de Milgrom comme étant reliée soit au paramètre de Hubble soit à une éventuelle constante cosmologique. Milgrom [147] évoque une série d'arguments heuristiques militant dans ce sens. Un électron chargé et faiblement accéléré ($a \leq a_0$), par exemple, émet des ondes électromagnétiques dont la longueur d'onde dépasse le rayon de Hubble. De façon plus générale, à tout mouvement accéléré correspond un horizon des événements de taille $r \sim c^2/a$. On peut alors s'attendre à une modification de la dynamique

standard lorsque cette accélération est si faible que cet horizon dépasse le rayon de Hubble, ou l'horizon des événements de la cosmologie, etc.

Par ailleurs, Milgrom rappelle qu'il n'est pas rare qu'un objet, s'il est plongé dans certain environnement, acquière des propriétés inertielles effectives distinctes de celles qu'il possède dans un autre environnement [148, 149]. Ainsi en est-il, par exemple, des corps solides plongés dans un fluide, ou des électrons dans un solide. Il propose alors que le vide (quantique) puisse jouer le rôle d'un tel milieu, en particulier le vide d'un univers de type de Sitter, dans lequel un observateur perçoit (au repos) un bain thermique de Unruh de valeur $T_\Lambda = (\Lambda/3)^{1/2}/2\pi$ (en unités naturelles), tandis qu'un observateur accéléré (uniformément et indéfiniment) dans un tel univers perçoit un bain thermique caractérisé par $T(a) = (a^2 + \Lambda/3)^{1/2}/2\pi$. Cela suggère de voir l'inertie dans un tel Univers comme proportionnelle à la différence $T(a) - T_\Lambda$, c'est-à-dire comme s'écrivant sous une forme $a\mu(a/a_0)$ où μ respecte les conditions asymptotiques évoquées dans le chapitre précédent et où la constante a_0 est proportionnelle à la racine de la constante cosmologique. Nous renvoyons aux références déjà proposées plus haut pour plus de détails sur cette approche.

L'équation (7.2) et les difficultés qu'elles soulèvent

Il a été tout de suite réalisé que l'Eq. (7.2) pose de sérieux problèmes théoriques. En effet cette équation ne conserve pas l'impulsion standard de la physique pré-relativiste, ie. $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ [150]. Par conséquent, cette loi dynamique ne saurait dériver d'un formalisme Lagrangien, dont l'impulsion canonique associée à la position serait $m\mathbf{v}$. Bien entendu, si l'on considère par ailleurs que la nouvelle constante a_0 joue le rôle d'une constante fondamentale de la physique, c'est-à-dire, structurelle, il n'est pas absurde de considérer que la prise en compte des effets MONDiens doit modifier profondément la structure dynamique de la théorie, et en particulier l'expression de l'impulsion canonique d'un point matériel. On observe d'ailleurs un tel glissement en passant de la théorie Newtonienne à la théorie de la relativité restreinte. Il n'est pas difficile de définir une impulsion généralisée $P(t)$ qui soit conservée par l'équation (7.2). Il suffit d'écrire l'équation sous la forme $d\mathbf{P}(t)/dt = \Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}\mu(|\mathbf{a}|/a_0)$, et de déduire, par intégration, l'expression *non-locale* de l'impulsion : $\mathbf{P}(t) = \int^t m\mathbf{a}(t')\mu(|\mathbf{a}|(t')/a_0)dt'$.

Cette non-localité est, semble-t-il, typique de la modification de l'inertie à la Milgrom. Ce dernier a en effet prouvé (voir [147]), plus généralement, qu'une dynamique modifiée de type MOND, et par ailleurs invariante sous les transformations de Galilée, ne peut dériver d'un formalisme Lagrangien que si ce dernier est non-local (dans le temps). Mais trouver une structure dynamique profondément modifiée pour laquelle une notion étendue d'impulsion et d'énergie soit conservée dans le temps par une équation de type Eq. (7.2) resterait malgré tout très mystérieuse. Nous laisserons en effet le soin au lecteur de vérifier, à l'aide de l'équation (7.2), que deux corps massifs gravitationnellement liés, et par ailleurs situés dans un espace vide,¹ voient leur centre de masse (défini comme le barycentre des deux corps) subir une accélération, à moins que les deux corps aient une masse égale. Ce comportement absolument contre-intuitif, conséquence directe de la non-conservation de l'impulsion standard, apparaît physiquement inacceptable, quand bien même l'équation dynamique 7.2 conserve une quantité ayant la dimension d'une impulsion (en l'occurrence $\mathbf{P}(t)$). A cette difficulté s'ajoute le fait que, en supposant même que l'on dispose d'un Lagrangien (non-relativiste, non-local) dont dérive une inertie modifiée à la MOND, la façon dont il faudrait généraliser cette dynamique non triviale au cas de la particule ponctuelle relativiste reste obscur. Il est encore moins évident de savoir comment il faudrait modifier de façon équivalente la dynamique des champs de matières.

¹Dans la théorie de MOND telle qu'elle présentée ici, deux corps sont toujours gravitationnellement liés, quelque soit leur écartement

Mais la véritable difficulté de la loi donnée par l'équation (7.2) n'est pas là. Le véritable problème est *qu'elle ne permet pas*, contrairement aux apparences peut-être, de reproduire la phénoménologie souhaitée. Cette difficulté, déjà reconnue par Milgrom dès 1983 [1], provient de la non linéarité de l'Eq. (7.2). Considérons en effet une étoile plongée dans un champ de gravitation faible, tel que notre Soleil plongé dans le champ gravitationnel de la Voie Lactée. Nous voulons, afin d'expliquer la vitesse orbitale anormalement élevée du Soleil autour du centre galactique, que ce dernier tombe pour ainsi dire « de façon MONDienne » dans ce champ gravitationnel. Cela découle naturellement de la loi Eq. (7.2) si l'on considère le Soleil (ou même le système solaire) comme une particule massive dépourvue de structure interne. Cela n'est évidemment pas le cas, et il nous faut déduire le mouvement du Soleil (ou de son centre de masse) de l'étude du mouvement de ses composant élémentaires. Or ces derniers subissent en général des forces locales qui dominent largement la force exercée par le champ galactique, et sont par ailleurs responsables d'accélération bien plus grandes que a_0 . S'en suit alors la saturation automatique de la fonction μ , et on peut considérer avec une très bonne approximation que la dynamique des volumes élémentaires de fluide, etc., est gouvernée par l'équation (7.2) où la fonction μ acquière la valeur 1, c'est-à-dire, finalement, par la seconde loi de Newton usuelle. Pire, le mouvement d'un système composite, prédit par l'équation (7.2), dépend finalement de l'échelle à laquelle on analyse ses constituants. Cela est bien sûr inacceptable, et a conduit Milgrom à reconnaître que cette formulation de la théorie MOND ne pouvait être considérée comme satisfaisante [1]. Notons, bien sûr, en comparaison avec le cas Newtonien, que ces comportements aberrants sont liés à la non conservation de l'impulsion standard, de sorte que le centre de masse d'un système composite ne saurait se déduire seulement des forces extérieures exercées sur le système². Milgrom a plus tard soutenu que le problème pouvait disparaître dans une formulation non-locale de MOND, les hautes fréquences (ou grandes accélérations) se découplant a priori des basses fréquences (faibles accélérations) [147].

Deux remarques

Nous voulons ici d'abord remarquer ce qu'il faut entendre par modification de l'inertie. Il ne s'agit pas, en tout cas à la lumière de l'équation 7.2, d'une modification de « l'inertialité » (ie. du caractère inertiel d'un observateur), puisque les observateurs galiléens coïncident dans cette théorie avec ceux de la théorie Newtonienne. Il s'agit plutôt d'une modification de la façon dont réagit un corps lorsqu'il est soumis à des forces, c'est-à-dire, effectivement, ce qui est communément appelé l'inertie. Il nous semble alors important de souligner qu'une telle modification de l'inertie, quelque soit son origine, ne peut sans doute pas s'accommoder d'une représentation géométrique de la gravitation. Cette formulation de MOND n'apparaît en effet pertinente que si l'influence de la gravité est représentée par une force, comme c'est le cas dans l'équation (7.2). Si en revanche, et comme l'incite à penser le principe d'équivalence faible, il nous faut conserver l'idée sous-jacente à la relativité générale, c'est-à-dire comprendre le champ gravitationnel comme définissant les observateurs inertiels, et par conséquent, non plus comme une force mais comme une configuration géométrique de l'espace-temps, la modification de l'inertie ne semble pas pertinente comme réalisation de la théorie MOND³. Autrement dit, au moins dans une re-

²Remarquons également que la loi dynamique Eq. (7.2) ne respecte pas le principe d'équivalence faible, quand bien même masse inerte et masse grave s'égalisent. Cela apparaît clairement en inversant l'équation (7.2), et en exprimant ainsi l'accélération comme une fonction non-linéaire des forces gravitationnelles et des forces non-gravitationnelles. Une violation du principe d'équivalence faible apparaît dès que l'on considère des systèmes composites liés par des forces non gravitationnelles, et par ailleurs ne faisant pas saturer la fonction μ . Ce problème est donc lui aussi lié au problème de la non conservation de l'impulsion.

³Précisément, elle ne ferait que modifier légèrement la façon dont une force (non gravitationnelle) appliquée à un corps initialement inertiel l'éloigne de sa géodésique.

présentation métrique de la gravitation, la phénoménologie MOND est essentiellement liée à la modification de l'inertialité (c'est-à-dire, puisque le champ gravitationnel définit les observateurs inertiels, à une modification de la gravité) plutôt qu'à la modification de l'inertie elle-même. Par contreposée, nous voyons qu'il ne faut pas s'attendre à définir une théorie de l'inertie modifiée qui résulte en une théorie métrique de la gravitation.

La seconde remarque porte sur l'incompatibilité apparente de l'introduction d'une échelle d'accélération à la relativité générale. Puisqu'il faut voir la relativité générale (ou plutôt l'équivalence du point de vue de tous les observateurs) comme signifiant l'abandon du caractère absolu de l'espace-temps par rapport auquel sont définies de façon non ambiguë des accélérations (absolues), et par conséquent comme ne portant plus que sur les quantités relatives de position, de vitesse, d'accélération, etc., il semble difficile d'introduire une échelle d'accélération a_0 à cette théorie sans briser ce principe de relativité étendu. Considérons par exemple, dans un certain référentiel, une masse fixée à l'extrémité du ressort et oscillant autour de sa position d'équilibre avec une accélération toujours inférieure à a_0 (dans ce référentiel). Considérons maintenant ce même système vu d'un observateur accéléré par rapport au premier référentiel. Le principe de relativité générale autorise cet observateur à décrire ce système en terme cette fois, de son accélération relative à la masse fixée à l'extrémité du ressort, accélération qui peut fort bien excéder a_0 . On voit mal alors, comment peuvent s'accorder les descriptions données par ces deux observateurs s'il existe une transition dynamique à une certaine échelle a_0 . Autrement dit, imposer une échelle d'accélération représentant une transition de la dynamique des systèmes physiques semble requérir la connaissance d'une mesure *absolue* de l'accélération, et semble par conséquent s'opposer au souci de l'équivalence des points de vues.

Cet argument est en fait fallacieux. S'il était véridique en effet, il ne s'appliquerait pas seulement à une transition dynamique occurring à une échelle d'accélération, mais plus généralement à toutes les transitions dynamiques envisageables à toutes les échelles possibles de position, vitesse, accélération, etc. Il suffirait, dans chaque cas, de reprendre l'argument précédent appliqué à un second observateur adapté. Or la relativité restreinte nous apprend qu'on peut tout à fait définir une théorie dynamique dans laquelle apparaît une échelle de vitesse absolue c , tandis que son formalisme est covariant par rapport aux changements de référentiels à vitesse relative constante. La façon, bien connue, de contourner cette apparente contradiction fut de permettre des lois de changement de coordonnées non triviales, telle que, notamment, la mesure des durées dépendent de l'état de mouvement relatif de l'observateur au système (à l'horloge) considéré(e). En particulier le temps propre est lié au temps coordonné d'un référentiel galiléen quelconque par une fonction de la vitesse relative entre les deux référentiels. Préserver l'équivalence des points de vues tout en introduisant une échelle d'accélération suggère donc de considérer que le temps propre puisse dépendre également de l'accélération relative des deux référentiels. Cela nous conduit naturellement à un modèle récent de la littérature, et que nous exposons rapidement maintenant.

Les pistes géométriques

Au lieu de chercher des actions non relativistes et non locales de la théorie non-relativiste de MOND, il est possible aussi de chercher comment altérer la structure de la relativité restreinte afin d'y incorporer une transition de type MOND à une échelle d'accélération donnée. C'est ce qu'ont cherchés à faire, par exemple les auteurs de [151]. Cette piste, quoique embryonnaire, est intéressante. On peut chercher une équation de la dynamique ayant la forme standard $m d^2 x^\mu / d\tau^2 = F^\mu$ où τ est le temps propre, et que l'on peut écrire également en temps coordonné sous la forme

$$m \frac{1}{\tilde{\tau}^2} \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} - m \frac{\ddot{\tau}}{\tilde{\tau}^3} \frac{dx^\mu}{dt} = F^\mu, \quad (8.1)$$

où le point correspond à une dérivée par rapport à t . La relativité restreinte correspond au cas où $\dot{\tau} = \sqrt{1 - \dot{x}_i \dot{x}^i / c^2}$, tandis qu'une équation de type MOND découlerait du choix $\dot{\tau} = 1/\sqrt{\mu(a/a_0)}$, où $a = \sqrt{\ddot{x}_i \ddot{x}^i}$. Cette relation, par exemple ne serait valable que dans l'approximation non-relativiste, tandis que prendre en compte les effets relativistes demanderait également une dépendance en $\sqrt{\dot{x}_i \dot{x}^i}/c$ du temps propre. Cela suggère de munir le fibré tangent de coordonnées (x^μ, v^ν) d'une métrique de sorte que l'intervalle élémentaire y prenne la forme $-d\tau^2 = dt^2/\mu(a/a_0) = dt^2 - 1/a^2(1 - 1/\mu(a/a_0))dv_i dv^i$, au moins dans la limite non relativiste. Une généralisation relativiste possible s'écrirait par exemple sous la forme $-d\tau^2 = dt^2 - 1/a^2(1 - 1/\mu(a/a_0))dv_i dv^i - dx_i dx^i/c^2$, de sorte que l'intervalle élémentaire prenne sa forme standard dans la limite des grandes accélérations $a \gg a_0$ et $\mu \rightarrow 1$. Nous pouvons penser cette relation en terme métrique $-d\tau^2 = \eta_{AB} dX^A dX^B$ où $X^A = (t, x^i, v^0, v^i)$, et où, nécessairement η_{AB} doit dépendre de l'accélération, et donc de vecteurs (particuliers) de l'espace tangent du fibré tangent. Il faudrait donc la concevoir comme une métrique Finslerienne sur le fibré tangent. Remarquons que, dans ce cas, l'impulsion généralisée s'écrit toujours de façon locale, contrairement au cas du modèle représenté par l'équation (7.2). [La nécessaire non-localité des actions modifiant l'inertie d'une façon MONDienne, selon Milgrom, n'est donc peut-être que la conséquence du fait qu'on se restreint dans cette approche à des lois de transformations de coordonnées standard (Galiléennes), trop « rigides ».] L'impulsion prend ici la même forme qu'en relativité restreinte, mais la dépendance non linéaire en l'accélération de l'équation dynamique est reportée dans l'expression du temps propre et donc dans la structure métrique de la variété considérée. La linéarité de l'équation dynamique $dP^\mu/d\tau = F^\mu$ garantit par ailleurs que le mouvement du centre de masse d'un système composé ne dépend que des forces extérieures exercées sur le système. Enfin, une telle théorie de la physique locale se prête a priori facilement à une généralisation incluant les effets gravitationnels.

Quoique très spéculatifs, de tels essais avaient déjà vu le jour bien avant la théorie MOND. Des arguments divers peuvent être invoqués pour montrer qu'il faut s'attendre à ce que la réunion de la gravitation et de la mécanique quantique demande l'existence d'une échelle d'accélération (typiquement de Planck) indépassable, de même que l'est la vitesse de la lumière [152]. Bien que la phénoménologie souhaitée soit ici fort éloignée de celle de MOND, on comprend, au moins dans une optique de modification de l'inertie, qu'il faille sans doute évoquer les mêmes outils. S'en est suivi quelques articles essayant d'aborder le problème en des termes voisins de ceux évoqués ci-dessus, c'est-à-dire en terme de métriques sur le fibré tangent ou autres structures sur les fibrations de la variété. Nous renvoyons ici aux essais [153, 154] ainsi qu'à la recherche sans doute la plus approfondie dans ce domaine [155, 156]. Aucune de ces tentatives n'a abouti pour le moment, et selon nous, à une théorie claire. Toujours est-il, qu'au delà même de la volonté de produire une théorie de l'inertie modifiée à la MOND, ce type de modèles basés sur des généralisations de la physique locale (de relativité restreinte) sont très intéressants. Remarquons cependant, à la lueur du paragraphe précédent, qu'il nous faudra sans doute considérer des métriques (généralisées) dépendantes de l'accélération. On s'attend par conséquent à découvrir un principe d'action qui dépende au moins des dérivées secondes des variables canoniques et définisse par conséquent une théorie instable, du fait du théorème d'Ostrogradski.

Les géométries de Finsler sur la variété elle-même (et non ses fibrations) semblent pouvoir apporter une solution élégante à ce problème potentiel. En effet, au moins pour des orbites circulaires, l'accélération s'écrit aussi bien en terme de la position r et de ses dérivées premières v , à l'aide de la formule $a = v^2/r$. Aussi ne semble-t-il pas impossible de trouver une théorie de MOND dans une théorie de Finsler, où la métrique statique et sphérique dépendrait à la fois de r et de v , sous la combinaison (entre autres) de v^2/ra_0 . Une telle théorie a cependant peu de chance de redonner la bonne théorie de MOND, puisque, comme on l'a vu, les anomalies gravitationnelles observées dans les courbes de rotations de galaxies ont aussi leurs pendants dans

les profils de déflexion de la lumière. Or les photons, selon une théorie du type précédent, seraient certainement déviés (de façon MONDienne) lorsque leurs accélérations radiales c^2/r passeraient en deçà de la valeur critique a_0 . Cela correspond à une distance à l'objet défléchissant de l'ordre du rayon de Hubble, et par conséquent, une théorie de la sorte ne prédirait quasiment pas de déflexion de la lumière supplémentaire, comme en produirait cependant une simple composante de matière sombre.

8.2 Modifier la gravité

Un modèle non-relativiste : AQUAL

S'il semble délicat de modifier l'inertie d'une façon à la fois cohérente et satisfaisante phénoménologiquement, il est en revanche beaucoup plus aisé de modifier la gravitation. Une propriété particulière de l'équation Eq. (7.3) met immédiatement sur la voie. On voit en effet que, dans le régime MONDien, le champ gravitationnel doit être, à une constante dimensionnée près, la racine du champ gravitationnel Newtonien. Si nous notons ϕ le potentiel gravitationnel et si l'on considère dans un premier temps une distribution sphérique et statique de matière (de masse totale M), on voit qu'au lieu d'avoir l'équation standard $\nabla\phi = -GM\mathbf{r}/r^3$, qui provient de l'équation de Poisson standard après utilisation du théorème de Gauss, il nous faut une équation du type $|\nabla\phi|\nabla\phi = -GMa_0\mathbf{r}/r^3$. Une telle équation découle (dans le régime MONDien) de l'équation de Poisson modifiée

$$\nabla \cdot (\mu(|\nabla\phi|/a_0) \nabla\phi) = -4\pi G\rho, \quad (8.2)$$

où la fonction μ ici possède les comportements asymptotiques dont nous avons déjà parlé. Cette équation (découverte par Milgrom et Bekenstein en 1984 [2]), dérive trivialement de l'action suivante :

$$S = - \int \frac{a_0^2}{8\pi G} f\left(\frac{(\nabla\phi)^2}{a_0^2}\right) + \rho\phi, \quad (8.3)$$

où la fonction f est telle que $f'(x^2) = \mu(x)$. L'existence d'un formalisme Lagrangien invariant sous le groupe de Galilée, et impliquant par ailleurs des termes cinétiques standard pour les particules massives (non écrits ici) assure la validité des lois de conservations standard. Notons également que la généralisation relativiste est immédiate : il suffit de considérer une théorie de type scalaire-tenseur dont le champ scalaire possède un terme cinétique de type k-essence.

La première question d'importance, au vu de la section précédente, est de savoir si cette théorie rend effectivement compte de la phénoménologie souhaitée, ie. si elle prédit MOND. C'est effectivement ce qu'ont réussi à prouver les auteurs de l'article [2]. Plus précisément, un système composite s de masse totale m , quand bien même soit-il caractérisé par des accélérations internes ou des champs gravitationnels (internes) qui excèdent largement a_0 , orbite de façon MONDienne autour d'un autre corps de masse M , sous les deux conditions suivantes : il faut d'abord, bien entendu, que le champ gravitationnel extérieur soit faible et en deçà de a_0 , et ensuite que la masse du système composite m soit faible comparée à M (exemple : le système solaire orbitant autour du centre galactique). Dans ce cas, l'accélération du centre de masse du système s se lit $a = \sqrt{GMa_0}/r$ dans le régime MONDien⁴. Cette formule n'est valable qu'à des termes correctifs près qui peuvent s'écrire en puissance du petit paramètre m/M [2].

En revanche, il va sans dire peut-être que l'accélération subie par la masse centrale M en réponse au champ gravitationnel créé par le système s ne peut pas avoir cette forme. La conservation de l'impulsion standard impose en effet une accélération de la forme $a = \sqrt{m/M}\sqrt{Gm a_0}/r$

⁴C'est-à-dire si le champ Newtonien GM/r^2 est en deçà de a_0 , ou encore si la masse test orbite autour du corps central à un rayon supérieur à ce que nous appellerons par la suite le « rayon MONDien » $r_{\text{MOND}} = \sqrt{GM/a_0}$

à l'ordre dominant. Remarquons la dépendance surprenante en M de l'accélération du corps de masse M . Cela ne dépend d'ailleurs pas de la forme précise que prend la gravitation modifiée. Cela, au contraire, est une conséquence nécessaire de la conservation de l'impulsion d'une part, et de l'existence d'un régime MONDien pour lequel on demande que les masses tests subissent une accélération de la forme $a = \sqrt{GMa_0}/r$. Faut-il y voir une violation du principe d'équivalence faible ? Pas nécessairement. Dans la théorie ci-dessus par exemple, l'accélération d'un corps est donnée par le gradient du potentiel et le champ gravitationnel, par conséquent, se confond localement avec un champ d'accélération.

Ce que cela signifie, en revanche, c'est une violation du principe d'équivalence fort ; la manière dont le corps central de masse M engendre son champ gravitationnel dépend du champ extérieur dans lequel il est plongé (en l'occurrence celui créé par la petite masse m). On a vu lors de la présentation de la relativité générale et de ses tests expérimentaux que la notion de principe d'équivalence fort était relative à la façon dont se couplait la gravitation à l'énergie gravitationnelle elle-même. Ainsi seuls des corps fortement auto-gravitants (au sens d'un rapport élevé GM/Rc^2 , pour un système de masse M et de taille R), étaient sensibles à une éventuelle violation du principe d'équivalence fort. La modification de la gravité à la MOND montre la limitation d'une telle conception. En effet, ici nous n'avons rien supposé de la compacité du corps central de masse M . Il peut fort bien être faiblement auto-gravitant au sens de la valeur de son rapport GM/Rc^2 , tandis qu'il est de fait auto-gravitant si des corps tests orbitent autour de lui de façon MONDienne, dans le sens où son accélération dépend de sa propre masse (ie. l'auto-champ influe considérablement sur sa dynamique). Force est par conséquent de constater, d'une part, que toute théorie de gravité modifiée de type MOND brise nécessairement le principe d'équivalence fort, et d'autre part qu'il existe deux notions distinctes d'auto-gravitation dans ce type de théories. Dans le cadre de la théorie présentée ci-dessus, cette propriété curieuse et non-locale n'est au fond que la traduction de la non-linéarité de l'équation de Poisson modifiée 8.2 : la manière dont un corps engendre un champ de gravitation dépend du champ gravitationnel extérieur dans lequel il est plongé.

La théorie non relativiste résumée par l'expression de l'action 8.3, et dénommée AQUAL (pour *Aquadratic Lagrangian*) semble une réalisation tout à fait satisfaisante de la théorie MOND. Elle permet de donner une forme précise à cette dernière, et possède déjà quelques particularités qui permettent de la tester expérimentalement. La brisure du principe d'équivalence fort dans le régime MONDien (dont on a vu qu'il était en fait générique au-delà de cette réalisation particulière) a des conséquences observables non triviales au niveau galactique. La littérature parle à juste titre d'*External Field Effect* (EFE), puisque la brisure du principe d'équivalence fort implique que la dynamique gravitationnelle interne à un système composite dépend du champ gravitationnel dans lequel il est plongé. La compréhension fine de ces effets et leurs comparaisons avec l'observation est un test crucial de MOND, d'autant plus qu'on ne s'attend pas à de tels effets dans un cadre CDM. Les objets privilégiés pour tester cette dynamique modifiée sont certainement les galaxies naines satellites de galaxies plus importantes, telles que la Voie Lactée. L'effet du champ extérieur est certainement, d'une façon ou d'une autre, d'induire des effets de directions privilégiées (dans le sens du champ extérieur) et de positions privilégiées. On peut ainsi s'attendre, par exemple, et comme dans le cas de l'effet Nordtvedt, à des phénomènes de polarisation. Il semble cependant essentiel de disposer de méthodes numériques puissantes pour s'atteler au problème à N corps dans le cadre de l'équation 8.2. En dehors de quelques situations présentant un haut degré de symétrie, aucune solution exacte à l'équation 8.2 n'est connue [157]. Dans le travail que nous présenterons plus loin (Chp. 10), nous avons montré que la vitesse d'échappement locale (à la galaxie), anormalement élevée, pouvait s'expliquer non, comme en CDM, à l'aide de la présence d'un halo de matière sombre s'étendant au-delà de la périphérie de la Voie Lactée, mais par l'effet du champ extérieur dans lequel est plongée notre Galaxie.

Ajoutons, bien entendu, que malgré l'étape importante que constitue la découverte de la théorie AQUAL, en tout point cohérente, cette théorie demeure non relativiste et ne saurait donc pas adresser la question de la déflexion de la lumière. La généralisation relativiste à l'aide d'un champ scalaire de k-essence, qui est effectivement immédiate, ne sera cependant pas satisfaisante, puisqu'elle ne prédit pas une déflexion de la lumière accrue.

Deux modèles relativistes

Nous ne pouvons, sous peine de nous répéter trop lourdement, introduire de façon trop détaillée les théories alternatives et relativistes de la gravitation qui peuvent reproduire MOND. Cette étude a en effet fait l'objet d'un long travail de notre part que nous reproduisons dans le chapitre suivant. Nous nous contenterons donc dans cette courte section d'introduire la généralisation relativiste de la théorie AQUAL ci-dessus, la théorie RAQUAL, pour *Relativistic AQUAL*.

Celle-ci est immédiate, quoique non satisfaisante. Il suffit de considérer une théorie de type scalaire-tenseur caractérisée par un couplage $\alpha = d \ln A(\varphi)/d\varphi$ et telle que le champ scalaire additionnel φ est de type k-essence. On écrira ainsi l'action sous la forme :

$$S = \frac{c^4}{4\pi G} \int \frac{d^4x}{c} \sqrt{-g_*} \left[\frac{R^*}{4} - \frac{1}{2} f(s) \right] + S_{\text{mat.}}[\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}^*; \psi], \quad (8.4)$$

où s est le terme cinétique standard $s = g_*^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$. Il découle de cette action l'équation suivante pour le champ scalaire

$$\nabla_\mu^* (f'(s) \nabla_\mu^* \varphi) = -\frac{4\pi G}{c^4} \alpha T^*, \quad (8.5)$$

où $T^* \equiv g_{\mu\nu}^* T^{\mu\nu}$ est la trace du-tenseur énergie-impulsion défini par la métrique $g_{\mu\nu}^*$. Il apparaît assez clairement que cette équation se réduit à l'équation de Poisson modifiée Eq. (8.2) ci-dessus dans le régime non-relativiste. [Par conséquent la fonction μ de Milgrom se déduit toujours de f par la formule $\mu(x) = f'(x^2)$]. Le couplage conforme du champ scalaire à la matière est par ailleurs responsable de l'apparition d'un nouveau terme dans l'accélération subie par un corps matériel (dans l'approximation non-relativiste et de champ faible) : $\mathbf{a}/c^2 = 1/2 \nabla g_{00}^* - \alpha \nabla \varphi$. Les corps matériels ressentent donc une force totale somme d'une contribution du spin 2 ∇g_{00}^* et d'une contribution scalaire proportionnelle à $\nabla \varphi$, et éventuellement MONDienne si le corps test orbite dans une région suffisamment éloignée du corps central, de tel sorte que le champ scalaire, du fait de sa dynamique particulière Eq. (8.2), soit MONDien (ie. $\nabla \varphi \propto \sqrt{a_0 M}/r$, où M est la masse du corps central).

Une théorie concurrente au modèle RAQUAL, et dénommée PCG pour *Phase Coupling Gravitation* [158, 159], a été également développée par Bekenstein et Sanders. Cette théorie consiste à réaliser dynamiquement un terme cinétique de type k-essence. Le point de départ est d'écrire l'action d'un champ scalaire de k-essence sous une forme équivalente mais légèrement différente de celle que nous avons considérée jusqu'ici. L'action donnée par $S = - \int d^4x (\sigma (\partial\varphi)^2 + V(\sigma))$ où σ est à considérer ici comme un paramètre de Lagrange est équivalente à une théorie de k-essence du champ scalaire φ , comme on le voit en résolvant l'équation $\delta S/\delta \sigma = 0$. L'idée de la théorie PCG est alors de rendre ce « champ adynamique » σ dynamique en adjoignant à l'action précédente un terme cinétique pour le champ σ du type $-(\partial\sigma)^2$. Cette nouvelle action, cette fois, ne définit plus la même théorie que la théorie de k-essence dont nous étions parti, pour la bonne raison qu'on y a ajouté un degré de liberté. Dans la limite cependant où σ est environ constant (dans l'espace-temps), on retrouve la théorie initiale. Cela se produit effectivement dans certaines régions de l'espace entourant un objet massif, et l'on peut de la sorte retrouver une

équation de Poisson modifiée pour le champ φ (qui seul se couple à la matière), de sorte qu'on retrouve effectivement le régime MONDien.

Cette théorie est cependant différente de la théorie RAQUAL, et pose également de nouveaux problèmes. On montre sans peine, en effet, que retrouver un terme cinétique de type RAQUAL dans la limite où σ devient adynamique demande au potentiel $V(\sigma)$ d'être non borné inférieurement ($V(\sigma) \sim -\sigma^6$), ce qui ruine la stabilité du modèle. Par ailleurs, la phénoménologie de la théorie PCG diffère légèrement de celle de la théorie RAQUAL, dans le sens où les effets MONDiens ne se manifestent autour d'un corps massif que si celui-ci dépasse une certaine masse critique $M > M_c$ que l'on calcule facilement. L'observation de galaxies naines de masse baryonique de l'ordre de $10^8 M_\odot$ et par ailleurs dominées impose la borne supérieure suivante $M_c < 10^8 M_\odot$. Cette masse critique M_c dépend cependant d'une puissance négative de la constante de couplage α , de sorte que la borne supérieure sur la masse critique se transforme en borne inférieure sur la constante de couplage $\alpha > \alpha_c$. Des calculs détaillés montrent alors que cette valeur nécessaire de α est incompatible avec les tests de la gravitation dans le système solaire [24]. [Dans toute théorie de type scalaire-tenseur, ie., caractérisée par un couplage conforme à la matière $\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}$, le paramètre d'Eddington γ dont nous avons parlé au chapitre 4 vaut $\gamma - 1 = -2\alpha^2/(1 + \alpha^2) \sim -2\alpha^2$ (si α est petit devant 1), et les tests du système solaires imposent donc $\alpha^2 \leq 10^{-5}$.]

Une version raffinée de cette théorie a été proposée par Sanders [143]. Néanmoins nous montrons en Sec. 9.5 que ce modèle (qui intègre une relation disformal afin de reproduire la déflexion de la lumière) est également instable. Soulignons, au-delà de toutes ces difficultés, ce qui fait l'intérêt de cette approche. Insérer un nouveau degré de liberté n'est pas qu'arbitraire : cela permet en fait d'introduire dans la théorie une valeur de a_0 effective et changeante au cours du temps cosmique (à travers la valeur de fond du champ scalaire) [143]. En ce sens, ces théories implémentent l'idée d'un lien possible entre la valeur de a_0 observée aujourd'hui et la valeur présente du paramètre de Hubble.

Les deux théories que nous avons rapidement présentées ici ont pour point commun, en plus de ne pas être exemptes de problèmes théoriques (nous verrons en Sec. 9.3 que la fonction de k-essence de RAQUAL doit être extrêmement peu naturelle (*fine-tuned*) pour que la théorie respecte les tests standards de la gravitation), de ne pas prédire la bonne déflexion de la lumière. C'est ce problème, crucial, que veulent adresser leurs extensions stratifiées que nous analysons en détail au chapitre suivant.

Les théories relativistes de MOND

(Article)

9.1 Présentation du travail et résultats

Nous avons brièvement montré au chapitre précédent les principales pistes pouvant mener à une théorie de MOND. Bien que fort intéressante, l'idée de modifier l'inertie n'est pas exempte de difficultés, et nous ne l'avons pas étudiée plus avant durant cette thèse. Les pistes que nous avons qualifiées de géométriques, et que nous avons trop rapidement évoquées en section 8.1 ne constituent guère plus qu'un axe de recherches futures. La relative simplicité des modèles de gravité modifiée, comparée aux difficultés soulevées par la modification de l'inertie, a naturellement conduit la communauté scientifique à s'orienter vers la recherche de modèles relativistes de gravité modifiée en s'appuyant notamment sur le succès des formulations non relativiste (AQUAL) et relativiste (RAQUAL) de MOND, présentées à la fin du chapitre précédent. Ces deux modèles, nous l'avons dit, présentent la difficulté majeure de ne pas prédire (ou de ne pas rendre compte de) la déflexion accrue de la lumière par les galaxies ou les amas de galaxies. Cela provient bien sûr du couplage conforme du champ scalaire additionnel à la matière.

Des modèles plus élaborés et parfois basés sur un couplage *disformal* (cf Sec. 9.4 et Sec. 9.4) ont alors vu le jour afin de reproduire cet effet crucial (et naturel dans le cadre de CDM, mais non trivial dans le cadre d'une gravité modifiée). Le travail que nous reproduisons ci-dessous se veut une étude critique de ces modèles raffinés. Après une courte introduction et une brève présentation de modèles exotiques et manifestement incorrects (au moins dans l'optique de reproduire MOND), nous nous concentrons sur les modèles de k-essence, ie. de type RAQUAL, ainsi que sur leurs généralisations dans un cadre *disformal* ou stratifié : modèles RAQUAL *disformal* ou tenseur-vecteur-scalaire (TeVES, dont nous avons déjà brièvement parlé en Sec. 3.1).

Les diverses parties introductives de ce manuscrit prendront alors tout leur sens, puisqu'il est nécessaire, avant d'étudier ce types de modèles, d'abord, bien entendu, de connaître la relativité générale et ses alternatives les plus standard (possibilité d'avoir $\tilde{g}_{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}^*$, c'est-à-dire aussi l'occasion d'introduire de nouveaux champs dans la théorie), et ensuite de savoir comment mener cette étude. Nous discuterons ainsi, conformément aux premiers chapitres de ce manuscrit, de la compatibilité de ces modèles avec les principaux tests de la gravitation, du problème de la stabilité et de la causalité, de la présence ou non de réglages fins, voire de problèmes esthétiques.

Après avoir présenté en Sec. 9.3 les modèles gravitationnels impliquant des dérivées d'ordre supérieur et leurs instabilités génériques (comme nous l'avons fait en Sec. 4.2), ainsi que les modèles tenseur-scalaires et le fait qu'ils ne semblent pas pouvoir rendre compte de la phénoménologie MONDienne à moins de leur donner une dynamique de k-essence (cf. Sec. 9.3), nous revenons en détail sur les modèles de type RAQUAL. Nous soulignons d'abord, en reprenant rapidement la discussion de l'article présenté au chapitre 5, que le champ scalaire de k-essence responsable des effets MONDiens dans cette théorie est causal bien que nécessairement supraluminique (du moins si la fonction f définissant son terme cinétique dans l'action (8.4) satisfait aux conditions Eq. (5.9)). À ce sujet nous faisons remarquer, et comme nous l'avons déjà signalé à la fin de la section 5.1, que la véritable difficulté posée par cette théorie ne réside pas dans la propagation supraluminique du champ scalaire, mais dans l'impossibilité de reproduire une

théorie strictement MONDienne à l'aide d'un champ de k-essence. En effet, nous avons rappelé en section 8.2 que la fonction μ de Milgrom, qui interpole entre le régime MONDien et le régime Newtonien, est donnée en fonction de f par la formule $\mu(x) = f'(x^2)$, ce dont il découle que la condition asymptotique $\mu(x) \sim x$ pour $x \ll 1$ imposée par Milgrom ne peut se traduire que par $f'(x) \sim \sqrt{x}$. Prolonger ce comportement pour $x \ll 1$ jusqu'à l'origine (pour $x \sim 0$) impose par conséquent $f'(0) = 0$, en contradiction avec les conditions Eq. (5.9). Cela signifie essentiellement que le champ scalaire ne se propage plus sur les hypersurfaces définies par $x = 0$ (le problème de Cauchy y est mal défini), et que deux théories distinctes sont nécessaires à la description de la physique aux grandes échelles d'une part (la cosmologie pour laquelle $x < 0$) et la physique locale ($x > 0$) d'autre part. La solution la plus simple consiste à utiliser une fonction f telle que la fonction μ associée soit telle que $\mu(x) = \varepsilon + \mathcal{O}(x)$ et $\mu(x) \sim x$ si $\varepsilon \ll x \ll 1$, par exemple en substituant $\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$ à x dans l'argument de f . Nous montrerons au chapitre suivant que ε est contraint expérimentalement à ne pas dépasser l'ordre de 10^{-2} .

Ce nouveau comportement asymptotique est absolument nécessaire s'il faut rendre compte de la phénoménologie MONDienne par une dynamique de k-essence du champ scalaire additionnel. Cela a la conséquence majeure de faire apparaître un nouveau régime Newtonien aux très faibles champs gravitationnels, puisque l'équation de Poisson modifiée Eq. (8.2) se réduit, dans le cas où $f' \sim \varepsilon$ (très loin d'un corps), à une équation de Poisson standard impliquant une constante de Newton effective (renormalisée) $G' = G/\varepsilon > G$. La phénoménologie MONDienne s'en trouve modifiée de la façon suivante. Lorsqu'on s'éloigne progressivement d'un corps massif, on passe successivement d'un régime relativiste et de champ fort (pour un rayon r petit) à un régime Newtonien standard caractérisé par une constante de gravitation G jusqu'à un rayon $r < (GM/a_0)^{1/2}$, puis à un régime MONDien pour un rayon compris entre $(GM/a_0)^{1/2} < r < (1/\varepsilon)(GM/a_0)^{1/2}$, et enfin à un second régime Newtonien caractérisé par une constante de gravitation G/ε pour $r > (1/\varepsilon)(GM/a_0)^{1/2}$. Le régime MONDien apparaît dans ce cadre comme une simple interpolation entre deux régimes Newtoniens caractérisés par des constantes de couplages différentes à deux échelles différentes ($x > 1$ et $x < \varepsilon$). Nous ne pouvons pas nous empêcher ici de souligner qu'un tel comportement rappelle les flots de renormalisations en général, bien que cela soit peut-être sans rapport avec MOND. D'un point de vue plus pragmatique, cela signifie aussi que les courbes de rotation de galaxies ne peuvent pas être indéfiniment plates.

Nous montrons également en Sec. 9.3 que les modèles de type RAQUAL (non *disformal*) sont nécessairement *fine-tuned*. En effet pour toute fonction interpolatrice f naturelle (cf. Fig. 9.2), la transition entre le régime MONDien et Newtonien apparaît à un rayon de transition $r = \alpha^2(GM/a_0)^{1/2}$, où α est le couplage de la matière au champ scalaire. On montre alors facilement que l'absence d'effets MONDiens dans le système solaire est incompatible avec la contrainte expérimentale $\alpha^2 < 10^{-5}$. Il faut donc considérer des fonctions f extrêmement peu naturelles (en escalier, cf. Fig. 9.3) pour libérer la théorie de ces contraintes expérimentales. Il semble que ce problème ait été compris par quelques autres auteurs nous ayant précédés, mais, à notre connaissance, il n'a jamais été clairement explicité.

Nous passons alors en revue le problème de la déflexion de la lumière et les modèles *disformal* qui peuvent en circonvvenir. Nous rappelons d'abord qu'une métrique *disformal* scalaire de type

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi, s)g_{\mu\nu}^* + B(\varphi, s)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi \quad (9.1)$$

qui fut d'abord considérée par Bekenstein et Sanders [63], mais ensuite abandonnée, peut être intéressante. Qu'une telle métrique soit responsable d'une augmentation de la déflexion de la lumière nécessite que le terme B ci-dessus soit positif, ce dont il résulte que la lumière se propage moins vite que les ondes gravitationnelles. Ces auteurs ont alors abandonné ce modèle au profit d'un modèle vectoriel, puisqu'ils considéraient la propagation supraluminiques des ondes gravitationnelles comme non causale. Ce n'est bien sûr pas le cas, comme nous l'avons montré à

plusieurs reprises, et cela permet de réhabiliter ce modèle. De telles métriques de la matière ont par ailleurs été considérées par d'autres auteurs afin de réaliser le scénario dit de *Varying Speed of Light*, puisque le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide à la vitesse des ondes gravitationnelles devient variable dans l'espace-temps, et fonction du champ scalaire (ou plutôt de sa dérivée). La cohérence d'une telle théorie n'avait en revanche jamais été analysée (du moins à notre connaissance). Nous montrons que le couplage dérivatif du scalaire à la matière (par la présence de $\partial\varphi$ dans l'équation précédente) résulte en un couplage des dérivées secondes du champ scalaire à la matière (cf Eq. (9.47) ci-dessous). Garantir l'hyperbolicité de l'équation scalaire dans la matière devient alors une tâche très délicate. Nous nous sommes contentés d'écrire les conditions pertinentes (et non triviales) dans le cas d'un fluide parfait et sans pression (cf. conditions (a1) et (a2) ci-dessous, Sec. 9.4). Nous y reviendrons un peu plus bas.

Les modèles tenseur-vecteur-scalaire ou TeVeS (cf [23, 24]) échappent à ce problème de cohérence mathématique en ajoutant un champ vectoriel à la théorie et en considérant une métrique donnée par

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}^* + B(\varphi)U_\mu U_\nu. \quad (9.2)$$

Nous avons déjà présenté les problèmes engendrés par un tel couplage du champ vectoriel au tenseur énergie-impulsion (cf. Sec. 3.1). Nous avons également vu comment l'introduction d'un paramètre de Lagrange fixant la norme du champ vectoriel résout ces problèmes. Nous rappelons cependant en Sec. 9.5 que cela est responsable d'une instabilité, et qu'on ne saurait alors considérer cette théorie comme satisfaisante.

Nous discutons également de nouvelles contraintes expérimentales sur ces théories. Il n'est pas difficile, à l'aide d'une métrique *disformal*, de faire en sorte que la métrique physique voie son paramètre post-Newtonien γ être égal à 1 (à des corrections négligeables près en la constante de couplage du champ vectoriel, dans le cas de TeVeS [24]). Cela libère donc la contrainte expérimentale $\alpha^2 < 10^{-5}$ évoquée plus haut, et permet de considérer des fonctions f de k-essence naturelles. Cependant, nous montrons que les tests de la gravitation se référant à la dynamique des pulsars binaires rétablit une contrainte sur le couplage du scalaire à la matière : $\alpha^2 < 4 \times 10^{-4}$ (cf. Sec. 9.5), de sorte que le *fine-tuning* de la fonction f évoqué plus haut demeure nécessaire, sous peine d'effets MONDiens non négligeables dans le système solaire.

Conformément à leurs idées sur la causalité, les auteurs de [63, 24] ont par ailleurs voulu que les ondes gravitationnelles soient plus lentes que la lumière (cela fixe le signe de B dans l'équation ci-dessus). Nous avons déjà expliqué pourquoi, dans le cas contraire, la théorie serait malgré tout causale. Nous montrons de plus, en adaptant un calcul de la littérature au cas présent, que la seule contrainte expérimentale connue est en fait en faveur d'ondes gravitationnelles (ou de toutes autres ondes d'un champ couplé à la matière) de genre espace ou lumière. Dans le cas contraire en effet, des particules de matière hautement relativistes (telles que celles constituant les rayons cosmiques de très haute énergie) peuvent se déplacer plus vite que les ondes gravitationnelles, et de ce fait perdent de l'énergie par l'émission Cerenkov associée. La perte d'énergie se comportant en la puissance quatrième de l'impulsion, les rayons cosmiques de très haute énergie (et donc de très haute impulsion) observés sur Terre n'ont pu être produits que dans le voisinage terrestre, alors qu'on ne leur connaît pas d'origine au minimum galactique. Inverser ce raisonnement en supposant une origine au moins galactique des rayons cosmiques impose une borne extraordinairement serrée sur les propagations subluminiques : $c_{\text{onde grav}}/c_{\text{lumière}} - 1 > -10^{-16}$.

Nous développons finalement deux nouveaux modèles de MOND en Sec. 9.6, qui, même s'ils possèdent les mêmes difficultés que les autres et doivent donc être abandonnés, ont le mérite de montrer la présence semble-t-il générique d'instabilités ou de réglages fins, ainsi que de développer une nouvelle approche de la théorie MOND. Il s'agit essentiellement de conserver la théorie de la relativité générale telle quelle, ou presque, dans le vide, mais de reporter l'intégralité des effets MONDiens dans le couplage non minimal de la gravitation à la matière. Dans le premier

modèle, la théorie dans le vide est exactement la relativité générale, tandis que la métrique $\tilde{g}_{\mu\nu}$ est construite afin d'avoir la bonne forme (MONDienne) dans le régime pertinent. Il faut pour cela avoir un accès local à la masse du corps attracteur et à la distance de ce corps au point considéré. La seule façon d'y parvenir (au moins de façon covariante) est de recourir à l'utilisation combinée de dérivées d'ordre supérieur de la métrique (par exemple de l'invariant topologique de Gauss-Bonnet et ses dérivées). Que la métrique physique ait alors une forme absolument peu naturelle n'est pas le problème le plus grave. En effet, le recours aux dérivées d'ordre supérieur entraîne inévitablement des instabilités du fait du théorème d'Ostrogradski.

Nous construisons alors un modèle du même type mais plus prometteur à l'aide de la métrique *disformal* scalaire ci-dessus. Suivant la même idée que précédemment, on choisit la théorie tenseur scalaire la plus simple dans le vide, c'est-à-dire Brans-Dicke, tandis qu'on reporte tous les effets MONDiens dans l'expression de la métrique physique. Le problème d'Ostrogradski est évité, malgré la présence d'une dérivée du champ scalaire dans la métrique physique (et donc de dérivées secondes dans la connexion $\tilde{\Gamma}$), à condition que la matière envisagée soit standard (ie. de type du modèle standard de la physique des particules). On montre en effet que les dérivées secondes du champ scalaire apparaissant dans l'action sont dégénérées. En revanche, comme nous l'avons souligné plus haut, la question de la cohérence de l'équation du champ scalaire dans la matière, et notamment son caractère hyperbolique, doit être posée. Il se trouve que les effets MONDiens requièrent une dépendance particulière des coefficients A et B en la variable $s = g_*^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$ qui rend manifestement mal posée l'équation du champ scalaire au moins dans certains régimes. Quoique nous n'ayons pas pu prouver qu'aucun modèle de ce type ne puisse à la fois être cohérent et rendre compte des effets MONDiens, l'étude que nous proposons abonde en ce sens.

En revanche, et pour finir, nous montrons comment un tel modèle peut facilement rendre compte de l'anomalie Pioneer tout en étant manifestement bien défini. La raison de ce succès tient à l'absence d'observations d'anomalies de type Pioneer en dehors du système solaire, ce qui nous laisse libre le choix de la dépendance de l'accélération anormale de la sonde en la masse du Soleil. Nombre de modèles du type proposés dans l'article ci-dessus seraient par conséquent également valables. Cette liberté permet de sélectionner un modèle particulier pour lequel l'hyperbolicité du champ scalaire dans la matière est automatiquement garantie.

Cet article a été récemment soumis à *Physical Review D*.

Field-theoretical formulations of MOND-like gravity

Jean-Philippe Bruneton¹, Gilles Esposito-Farèse²

GRεCO, Institut d'Astrophysique de Paris, UMR 7095-CNRS, Université Pierre et Marie Curie-Paris6, 98bis boulevard Arago, F-75014 Paris, France

Modified Newtonian dynamics (MOND) is a possible way to explain the flat galaxy rotation curves without invoking the existence of dark matter. It is however quite difficult to predict such a phenomenology in a consistent field theory, free of instabilities and admitting a well-posed Cauchy problem. We examine critically various proposals of the literature, and underline their successes and failures both from the experimental and the field-theoretical viewpoints. We exhibit new difficulties in both cases, and point out the hidden fine tuning of some models. On the other hand, we show that several published no-go theorems are based on hypotheses which may be unnecessary, so that the space of possible models is *a priori* larger. We examine a new route to reproduce the MOND physics, in which the field equations are particularly simple outside matter. However, the analysis of the field equations *within* matter (a crucial point which is often forgotten in the literature) exhibits a deadly problem, namely that they do not remain always hyperbolic. Incidentally, we prove that the same theoretical framework provides a stable and well-posed model able to reproduce the Pioneer anomaly without spoiling any of the precision tests of general relativity. Our conclusion is that all MOND-like models proposed in the literature, including the new ones examined in this paper, present serious difficulties : Not only they are unnaturally fine tuned, but they also fail to reproduce some experimental facts or are unstable or inconsistent as field theories. However, some frameworks, notably the tensor-vector-scalar (TeVeS) one of Bekenstein and Sanders, seem more promising than others, and our discussion underlines in which directions one should try to improve them.

PACS numbers : 04.50.+h, 95.30.Sf, 95.35.+d

9.2 Introduction

Although general relativity (GR) passes all precision tests with flying colors [46, 22], there remain some puzzling experimental issues, notably the fact that the Universe seems to be filled with about 72% of dark energy and 24% of dark matter, only 4% of its energy content being made of ordinary baryonic matter [160, 161]. Dark energy, a fluid whose negative pressure is close to the opposite of its energy density, would be responsible for the present accelerated expansion of the Universe [162, 163, 164, 165]. Dark matter, a pressureless and noninteracting component of matter detected only by its gravitational influence, is suggested by several experimental data, notably the flat rotation curves of clusters and galaxies [166]. Another experimental issue is the anomalous extra acceleration $\delta a \approx 8.5 \times 10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$ towards the Sun that the two Pioneer spacecrafts exhibited between 30 and 70 AU [167] (see also [17]).

Actually, none of these issues contradicts GR nor Newtonian gravity directly. Indeed, dark energy may be understood as the existence of a tiny cosmological constant $\Lambda \approx 3 \times 10^{-122} c^3 / (\hbar G)$, or as a scalar field (called quintessence) slowly rolling down a potential [168, 169, 170]. Many candidates of dark matter particles have also been predicted by different theoretical models (notably the class of neutralinos, either light or more massive, occurring in supersymmetric theories; see e.g. [171]), and numerical simulations of structure formation have obtained great successes while incorporating such a dark matter (see, e.g., [172]). [It remains however to explain why Λ is so small but nonzero, and why the dark energy and dark matter densities happen to be

¹bruneton@iap.fr

²gef@iap.fr

today of the same order of magnitude.] The Pioneer anomaly seems more problematic, but the two spacecrafts are identical and were not built to test gravity, therefore one must keep cautious in interpreting their data. A dedicated mission would be necessary to confirm the existence of such an anomalous acceleration.

Nevertheless, these various issues, considered simultaneously, give us a hint that Newton's law might need to be modified at large distances, instead of invoking the existence of several dark fluids. To avoid the dark matter hypothesis, Milgrom [1] proposed in 1983 such a phenomenological modification, which superbly accounts for galaxy rotation curves [103] (although galaxy clusters anyway require some amount of dark matter), and automatically recovers the Tully-Fisher law [132] $v_\infty^4 \propto M$ (where M denotes the baryonic mass of a galaxy, and v_∞ the asymptotic circular velocity of visible matter in its outer region). The norm a of a particle's acceleration is assumed to be given by its Newtonian value a_N when it is greater than a universal constant $a_0 \approx 1.2 \times 10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$, but to read $a = \sqrt{a_N a_0}$ in the small-acceleration regime $a < a_0$. In particular, the gravitational acceleration should now read $a = \sqrt{GM a_0}/r$ at large distances, instead of the usual GM/r^2 law.

Various attempts have been made to derive such a modified Newtonian dynamics (MOND) from a consistent relativistic field theory. The main aim of the present paper is to examine them critically, by underlining their generic difficulties and how some models managed to solve them. Three classes of difficulties may actually be distinguished : (i) theoretical ones, namely whether the proposed model derives from an action principle, is stable and admits a well-posed Cauchy problem ; (ii) experimental ones, in particular whether solar-system and binary-pulsar tests are passed, and whether the predicted light deflection by galaxies or haloes is consistent with weak-lensing observations ; and (iii) "esthetical" ones, i.e., whether the proposed model is natural enough to be considered as predictive, or so fine-tuned that it almost becomes a fit of experimental data. These different classes of difficulties are anyway related, because fine-tuning is often necessary to avoid an experimental problem, and because some tunings sometimes hide serious theoretical inconsistencies.

We will not address below the problem of dark energy, although it may also be tackled with a modified-gravity viewpoint. For instance the DGP brane model [173, 174] predicts an accelerated expansion of the Universe without invoking a cosmological constant [175, 176], and the k-essence models [84, 83, 177] also reproduce many cosmological features in a somewhat more natural way than quintessence theories. Some of our theoretical discussions below, notably about stability and causality, are nevertheless directly relevant to such models. Indeed, k-essence theories are characterized by a non-linear function of a scalar field's kinetic term, precisely in the same way relativistic quadratic Lagrangians (RAQUAL) were devised to reproduce the MOND phenomenology in a consistent field theory [2]. Our aim is not to discuss the Pioneer anomaly in depth either. Although the numerical value of these spacecrafts' extra acceleration δa is of the same order of magnitude as the MOND parameter a_0 , there indeed exist important differences between their behavior and the MOND dynamics. However, we will come back to the Pioneer anomaly at the very end of the present paper. While analyzing a new class of models *a priori* devised to reproduce the MOND phenomenology, we will show that it can account for the Pioneer anomaly without spoiling any of the precision tests of general relativity, while being stable and admitting a well-posed Cauchy problem.

Our paper is organized as follows. In Sec. 9.3, we examine the various ways one may try to modify the laws of gravity in a consistent relativistic field theory, and give a critical review of several models proposed in the literature. We notably underline that an action should not depend on the mass of a galaxy, otherwise one is defining a different theory for each galaxy. We also recall why higher-order gravity is generically unstable, contrary to scalar-tensor theories. When the dynamics of the scalar field is defined by an quadratic kinetic term (RAQUAL or k-

essence theories), we discuss the different consistency conditions it must satisfy. We point out that such conditions suffice for local causality to be satisfied, although some modes may propagate faster than light or gravitational waves. We finally recall how Ref. [2] reproduced the MOND gravitational force thanks to a RAQUAL model, but we exhibit a serious fine-tuning problem which does not seem to have been discussed before — or at least was not pointed out so clearly.

In Sec. 9.4, we recall that many models fail to reproduce the observed light deflection by “dark matter” haloes. We exhibit a counter-example to an erroneous claim in the literature, although this counter-example does not reproduce the correct MOND phenomenology. We also recall how a “disformal” (i.e., non-conformal) coupling of the scalar field to matter allowed Refs. [20, 63] to predict the right light deflection, but that this class of models has been discarded too quickly, because of the existence of superluminal gravitons. Actually, the consistency and causality of such models is clear when analyzed in the Einstein frame. On the other hand, we show that the consistency of the field equations *within* matter implies new conditions which must be satisfied by the functions defining the theory. As far as we are aware, these crucial conditions were not derived previously in the literature. We finally discuss how the best present model, called TeVeS [24, 178, 23, 143], solved the problem of light deflection by considering a stratified theory, involving a unit vector field in addition to a metric tensor and one or several scalar fields.

In Sec. 9.5, we discuss the various difficulties which anyway remain in this TeVeS model, including some which have already been discussed in the literature and that we merely summarize. Reference [179] proved that the TeVeS Hamiltonian is not bounded by below, and therefore that the model is unstable. We also point out other instabilities in related models. Many papers underlined that stratified theories define a preferred frame, and that they are *a priori* inconsistent with solar-system tests of local Lorentz invariance of gravity. However, the vector field is assumed to be dynamical in TeVeS, and it has been argued in [24, 178] that such tests are now passed. Although we do not perform a full analysis ourselves, our discussion suggests that preferred-frame effects are actually expected in TeVeS, and that they may be avoided only at the expense of an unnatural fine-tuning. The reason why disformal models were discarded in favor of the stratified TeVeS theory was mainly to avoid superluminal gravitons. However, the opposite phenomenon occurs in TeVeS : photons (and high-energy matter particles) propagate faster than gravitons. References [180, 74] actually proved that the observation of high-energy cosmic rays imposes tight constraints on such a behavior, because these rays should have lost their energy by Cerenkov radiation of gravitational waves. After recalling this argument, we conclude that the sign of one of the TeVeS parameters should be flipped, implying that gravitons now propagate faster than light, like in the RAQUAL models. We finally discuss briefly binary-pulsar constraints, still without performing a full analysis, but underlining that a large amount of energy should be emitted as dipolar waves of the scalar field. The matter-scalar coupling constant should thus be small enough in TeVeS to pass binary-pulsar tests, and this implies an unnatural fine-tuning of its Lagrangian.

Section 9.6 is devoted to new models whose point of view differs significantly from those of the literature. They are extremely simple in vacuum, reducing respectively to general relativity and to Brans-Dicke theory. The MOND phenomenology is obtained via a non-minimal coupling of matter to the gravitational field(s). However, the first model exhibits a subtle instability, similar to the one occurring in higher-order gravity (although no tachyon nor ghost degree of freedom may be identified in vacuum). The second model avoids this instability due to higher derivatives, and reproduces the MOND phenomenology (including light deflection) quite simply, as compared to the literature. However, our analysis of the field equations shows that they do not remain hyperbolic within the dilute gas in outer regions of a galaxy. Therefore, although promising, this model is inconsistent. But the same framework provides a simple model to reproduce consistently the Pioneer anomaly, without spoiling the precision tests of general relativity.

Finally, we present our conclusions in Sec. 9.7. We notably mention other experimental constraints that any complete MOND-like theory of gravity should also satisfy, besides those which are discussed in the present paper.

9.3 Looking for MOND-like field theories

General relativity

Einstein's general relativity is based on two independent hypotheses, which are most conveniently described by decomposing its action as $S = S_{\text{gravity}} + S_{\text{matter}}$. First, it assumes that all matter fields, including gauge bosons, are minimally coupled to a single metric tensor, that we will denote $\tilde{g}_{\mu\nu}$ throughout the present paper. This metric defines the lengths and times measured by laboratory rods and clocks (made of matter), and is thereby called the “physical metric” (the name “Jordan metric” is also often used in the literature). The matter action may thus be written as $S_{\text{matter}}[\psi; \tilde{g}_{\mu\nu}]$, where ψ denotes globally all matter fields, and where the angular brackets indicate a functional dependence. This so-called “metric coupling” implies the weak equivalence principle, i.e., the fact that laboratory-size objects fall with the same acceleration in an external gravitational field, which is experimentally verified to a few parts in 10^{13} [181, 182]. For instance, the action of a point-particle reads $S_{\text{pp}} = - \int mc^2 \sqrt{-\tilde{g}_{\mu\nu}(x)v^\mu v^\nu} dt$, and depends both on the spacetime position x^μ of the particle and its velocity $v^\mu \equiv dx^\mu/dt$. The second building block of GR is the Einstein-Hilbert action

$$S_{\text{gravity}} = \frac{c^4}{16\pi G} \int \frac{d^4x}{c} \sqrt{-g_*} R^*, \quad (9.3)$$

which defines the dynamics of a spin-2 field $g_{\mu\nu}^*$, called the “Einstein metric”. We use the sign conventions of [8], notably the mostly-plus signature, and always indicate with a tilde or a star (either upper or lower) which metric is used to construct the corresponding quantity. For instance, $g_* \equiv \det(g_{\mu\nu}^*)$ is the determinant of the Einstein metric and R^* its scalar curvature. Similarly, we will denote as $\tilde{\nabla}_\mu$ and ∇_μ^* the covariant derivatives corresponding respectively to the Jordan and Einstein metrics, and as $\tilde{g}^{\mu\nu}$ and $g_*^{\mu\nu}$ the inverses of these two metrics. This rather heavy notation will allow us to be always sure of what we are talking about in the following. Einstein's second hypothesis is that both metrics coincide : $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^*$.

Milgrom analyzed in [147, 183] the consequences of modifying the matter action, that he called “modified inertia”. He focused on a point particle in an external gravitational field, and assumed that its action could depend also on the acceleration $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{v}/dt$ and its higher time-derivatives. However, he proved that to obtain both the Newtonian and the MOND limits and satisfy Galileo invariance, the action must depend on all time-derivatives $d^n \mathbf{v}/dt^n$ to any order, i.e., that the action is necessarily nonlocal. This does not necessarily violate causality (see the counter-example in [184]), and is actually a good feature for the stability of the theory (see Sec. 9.3 below), but the actual computation of the predictions is quite involved. We refer the reader to the detailed paper [147] for more information about this interesting viewpoint, but we focus below on metric field theories, i.e., such that matter is minimally coupled to $\tilde{g}_{\mu\nu}$ as in GR, with only first derivatives of the matter fields entering the action.

Another way to modify GR is to assume that this physical metric does not propagate as a pure spin-2 field, i.e., that its dynamics is no longer described by the Einstein-Hilbert action (9.3), and that $\tilde{g}_{\mu\nu}$ is actually a combination of various fields. Since the weak equivalence principle is very well tested experimentally, most MOND-like models in the literature focused on such a “modified gravity” viewpoint, and we will examine them in the present paper. The fact that they involve extra fields, besides the usual graviton (fluctuation of $g_{\mu\nu}^*$) and the various matter

fields entering the Standard Model of particle physics, makes the distinction with dark matter models rather subtle. The crucial difference is that, in the dark-matter paradigm, the amount of dark matter is imposed by initial conditions, and its clustering generates gravitational wells in which baryonic matter fall to form galaxies and large-scale structures. On the other hand, in the modified-gravity viewpoint, baryonic matter generates itself an effective dark-matter halo $M_{\text{dark}} \propto \sqrt{M_{\text{baryon}}}$. Such a halo may just be an artifact of the way we interpret the gravitational field of baryonic matter alone at large distances. But it may also be a real dark-matter halo, made of the extra gravitational fields, and generating itself a Newtonian potential. In such a case, the difference with standard dark-matter models would be that its mass M_{dark} is imposed as above by the baryonic one, and modified gravity could thus be considered as a constrained class of dark-matter models. Most of the theories that we will mention in the following predict that the energy density of the extra gravitational degrees of freedom is negligible with respect to baryonic matter : $|T_{\mu\nu}^{\text{extra fields}}| \ll |T_{\mu\nu}^{\text{matter}}|$. Therefore, the effective dark-matter haloes will be most of the time artifacts of our interpretation of observations. However, we will also consider in Sec. 9.4 a model of the ‘‘constrained dark matter’’ type ($|T_{\mu\nu}^{\text{extra fields}}| \gg |T_{\mu\nu}^{\text{matter}}|$), as a counter-example to some claims in the literature about light deflection.³

As suggested by Milgrom, one may also consider models modifying *both* inertia and gravity. Paradoxically, as we will see in Sec. 9.6 below, there also exists a non-trivial (non-GR) possibility in which *neither* of them is modified in the above sense. Matter will be universally coupled to a second-rank symmetric tensor $\tilde{g}_{\mu\nu}$, i.e., still described by an action $S_{\text{matter}}[\psi; \tilde{g}_{\mu\nu}]$, and the dynamics of gravity will be described by the pure Einstein-Hilbert action (9.3) in vacuum, but the two metrics $\tilde{g}_{\mu\nu}$ and $g_{\mu\nu}^*$ will nevertheless differ within matter.

Various ideas in the literature

Although interesting from a phenomenological point of view, some models proposed in the literature write field equations which do not derive from an action, and cannot be obtained within a consistent field theory. For instance, actually not to reproduce a MOND-like behavior but anyway as a model of dark matter, Ref. [187] proposes to couple differently dark matter and baryonic matter to gravity (an idea explored in the cosmological context by various authors, notably [36, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194]). The authors underline themselves that it cannot be considered as a fundamental theory (and they actually need some negative energy to obtain a repulsive force), but it is also instructive to stress that it cannot derive from an action. Indeed, the scalar field entering this model is assumed not to be generated by baryons, which implies that the scalar-baryon vertex vanishes. On the other hand, the assumed equation of motion for this baryonic matter does depend on the scalar field, thereby implying that the scalar-baryon vertex does not vanish. In conclusion, although the behavior of such a model might be mimicked as an effective theory of a more fundamental one, it cannot be described itself as a field theory, and notably does not satisfy conservation laws. In the present paper, our discussion will be restricted to consistent field theories.

Some models in the literature do write actions, but they depend on the (baryonic or luminous) mass M of the galaxy [195, 196]. For instance Ref. [196] proposes a gravitational action in which the kinetic term is some power of the Ricci scalar $R^{1-n/2}$. Since this implies, in general, an asymptotic velocity of the form $v^2 \propto nc^2 + \mathcal{O}(GM/r)$, Ref. [196] then proposes to replace n by $\sqrt{GMa_0/c^4}$ in order to recover the Tully-Fisher law. However, without an additional prescription (which must be non-local in nature) specifying which mass M enters the action, this theory is

³Let us also mention that the recent reinterpretation of MOND proposed in Refs. [185, 186] is also of the constrained dark matter type : The MOND force $\propto 1/r$ is caused by a background of gravitational dipoles contributing directly to the Newtonian potential.

ill defined. We will come back to such $f(R)$ theories of gravity in Sec. 9.3 and in Sec. 9.3. It should be also underlined that a gravitational force $\propto 1/r$ is not difficult to obtain by choosing an appropriate scalar field potential, for instance, as we will illustrate in Sec. 9.3 below. However, the second crucial feature of MOND, which arises from the Tully-Fisher law, is *also* the factor $\sqrt{GMa_0} \propto \sqrt{M}$ multiplying this $1/r$. Some consistent field theories actually obtain a flattening of rotation curves but do not predict the right amplitude of the asymptotic velocity [197, 198].

In [199, 200], Einstein and Straus studied an extension of general relativity in which the metric tensor is nonsymmetric, $g_{\mu\nu} \neq g_{\nu\mu}$. In modern language, this corresponds to considering an antisymmetric tensor field $B_{[\mu\nu]}$ as a partner to the usual graviton $g_{(\mu\nu)}$. Moffat analyzed the phenomenology of this class of models in many papers (starting with [201]), and it was shown to define a consistent and stable field theory provided $B_{[\mu\nu]}$ is massive [202]. More recently, Moffat showed that it may reproduce the flat rotation curves of clusters and galaxies [203, 204, 205, 206, 207], probably even better than the original MOND proposal. However, several assumptions are needed to obtain such a prediction, and it cannot yet be considered as a predictive field theory, in our opinion. Indeed, the author points out himself that a constant entering his action must take three different values at the solar system, galaxy, and cluster scales. It must therefore be considered as a running (renormalized) coupling constant instead of a pure number imposed in the action, and a complete theory should be able to predict the three needed values. A related difficulty is the fact that the force generated by the antisymmetric tensor field $B_{[\mu\nu]}$ is repulsive, whereas galaxy rotation curves need a gravitational attraction greater than the Newtonian one. Here again, the author invokes renormalization of the constants to obtain the right behavior, but does not provide a full derivation. But the most instructive difficulty of Ref. [204] is that the extra force is predicted to be $\propto kM^2/r$ instead of the needed $\propto \sqrt{M}/r$ behavior. The author first assumed in [204] that an unknown mechanism could tune the proportionality constant to be $k \propto M^{-3/2}$, so that the right MOND phenomenology would be recovered. More recently [206], he managed to derive this relation by assuming a particular form of a potential. However, this potential does depend explicitly on the mass M of the galaxy, and the predictivity of the model is thus lost. In conclusion, although the framework of nonsymmetric gravity seems promising, it is not yet formulated as a closed consistent field theory, and it should only be considered at present as a phenomenological fit of observational data.

In the following, we will focus on field theories whose actions do not depend on the mass or scale of the considered objects. They may involve fine-tuned numbers, but they will be fixed once for all. This is necessary to define a predictive model, but we will underline that it does not suffice to prove its consistency. In particular, the stability needs to be analyzed carefully.

Higher-order gravity

One-loop divergences of quantized GR [32] are well known to generate terms proportional to⁴ R^2 , $R_{\mu\nu}^2$ and $R_{\mu\nu\rho\sigma}^2$. It is thus natural to consider extensions of GR already involving such higher powers of the curvature tensor in the classical action. At quadratic order, it is always possible to write them as

$$S_{\text{gravity}} = \frac{c^4}{16\pi G} \int \frac{d^4x}{c} \sqrt{-g} [R + \alpha C_{\mu\nu\rho\sigma}^2 + \beta R^2 + \gamma \text{GB}], \quad (9.4)$$

where $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ denotes the Weyl (fully traceless) tensor, $\text{GB} \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2$ is the Gauss-Bonnet topological invariant, and α, β, γ are constants having the dimension of a length squared (i.e., $(\hbar/mc)^2$ if m denotes the corresponding mass scale). The topological invariant GB does

⁴To simplify, we do not write the tildes which should decorate all quantities in this subsection, indicating that $g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}$ will be later assumed to be minimally coupled to matter.

not contribute to the local field equations and may thus be discarded. In his famous thesis [33], Stelle proved that such an action gives a renormalizable quantum theory, to all orders, provided both α and β are nonzero. However, he also underlined that this cannot be the ultimate answer to quantum gravity because such a theory contains a ghost, i.e., a degree of freedom whose kinetic energy is negative. To understand this intuitively, it suffices to decompose the schematic propagator in irreducible fractions :

$$\frac{1}{p^2 + \alpha p^4} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1/\alpha}, \quad (9.5)$$

where the first term, $1/p^2$, corresponds to the propagator of the usual massless graviton, whereas the second term corresponds to a massive degree of freedom such that $m^2 = 1/\alpha$. The negative sign of this second term indicates that it carries negative energy. Note that one cannot change its sign by playing with that of α : If $\alpha < 0$, this extra degree of freedom is even a tachyon (negative mass squared), but it anyway remains a ghost (negative kinetic energy). The problem with such a ghost degree of freedom is that the theory is violently unstable. Indeed, the vacuum can disintegrate in an arbitrary amount of positive-energy usual gravitons whose energy is balanced by negative-energy ghosts. Even at the classical level, although such an instability is difficult to exhibit explicitly on a toy model, one expects anyway the perturbations of a given background to generically diverge, by creating growing gravitational waves containing both positive-energy (massless) modes and negative-energy (massive) ones.

The actual calculation, taking into account all contracted indices in the propagators, confirms the above schematic reasoning for the $\alpha C_{\mu\nu\rho\sigma}^2$ term in action (9.4), and shows that the extra massive mode has also a spin 2, like the usual massless graviton. On the other hand, the βR^2 term generates in fact a positive-energy massive scalar degree of freedom. We will recall a well-known and simple derivation in Sec. 9.3 below. The intuitive explanation is that the scalar mode corresponds in GR to the negative gravitational binding energy (which is not an actual degree of freedom because it is constrained by the field equations), so that the negative sign entering the right-hand side of Eq. (9.5) in fact multiplies an already negative term. The resulting extra degree of freedom thereby appears as a positive-energy scalar field [34].

More general actions $f(R, R_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\rho\sigma})$ have been considered several times in the literature, notably in [208] and [209]. The conclusion is that they generically contain the massive spin-2 ghost exhibited above, which ruins the stability of the theory. The only allowed models, within this class, are functions of the scalar curvature alone, $f(R)$, that we will study in Sec. 9.3 below.

The fact that such functions of the curvature *generically* involve a ghost tells us that some particular models may avoid it. For instance, Ref. [210] considers functions whose quadratic term reduces to the Gauss-Bonnet topological invariant $\text{GB} \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2$. Reference [211] even focuses on a Lagrangian of the form $R + f(\text{GB})$, whose quadratic term is again the Gauss-Bonnet invariant. Around a flat Minkowski background, the only quadratic kinetic term $\mathcal{O}(g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu})^2$ is thus the one coming from the standard Einstein-Hilbert term R , so that no propagator can be defined for any ghost degree of freedom. However, Ref. [208] underlined that flat spacetime is generically not a solution of such higher-order gravity theories. Around a curved background, the second-order expansion of higher-order terms like $(R_{\mu\nu\rho\sigma}^2)^n$ thereby generates a nonzero kinetic term for the spin-2 ghost (see Fig. 9.6 in Sec. 9.6 below for a diagrammatic illustration).

One may still try to devise higher-order gravity models such that their second-order expansion around *any* background never generates a negative-energy kinetic term. However, deadly instabilities still exist in such theories, even if no ghost degree of freedom can be identified in a perturbative way. Indeed, as recalled notably in [34], their Hamiltonian is generically non-bounded by below, because it is linear in at least one of the canonical momenta. As in [34], let us illustrate this on the simplest example of a Lagrangian depending on a variable q and its first

two time derivatives, say $\mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q})$. If \ddot{q} can be eliminated from \mathcal{L} by partial integration, we are in the standard case of a theory depending only on first derivatives, and we know that some models do give a Hamiltonian which is bounded by below. This is the case when \ddot{q} appears only linearly in \mathcal{L} , even multiplied by a function of q and \dot{q} since $\int dt q^n \dot{q}^m \ddot{q} = -n/(m+1) \int dt q^{n-1} \dot{q}^{m+2} +$ boundary terms. Let us thus consider only the case of a “non-degenerate” Lagrangian, i.e., such that the definition $p_2 \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\ddot{q}$ can be inverted to express \ddot{q} as a function of q, \dot{q} and p_2 :

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, p_2). \quad (9.6)$$

In such a case, Ostrogradski showed in 1850 [54] that the initial data must be specified by two pairs of conjugate momenta, that he defined as

$$q_1 \equiv q, \quad p_1 \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\ddot{q}} \right), \quad (9.7a)$$

$$q_2 \equiv \dot{q}, \quad p_2 \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\ddot{q}}, \quad (9.7b)$$

and he proved that the following definition of the Hamiltonian

$$\mathcal{H} \equiv p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - \mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (9.8)$$

does generate time translations. Indeed, $\dot{q}_i = \partial\mathcal{H}/\partial p_i$ and $\dot{p}_i = -\partial\mathcal{H}/\partial q_i$ reproduce the Euler-Lagrange equations of motion deriving from the original Lagrangian \mathcal{L} . However, this Hamiltonian must be expressed in terms of the momenta q_i and p_i defined in Eqs. (9.7) above. Recalling that Eq. (9.6) allows us to write $\ddot{q} = f(q_1, q_2, p_2)$, one gets

$$\mathcal{H} = p_1 q_2 + p_2 f(q_1, q_2, p_2) - \mathcal{L}(q_1, q_2, f(q_1, q_2, p_2)). \quad (9.9)$$

The crucial problem of this expression is that it is linear in p_1 , and therefore non-bounded by below [34]. In other words, the theory is necessarily unstable, even if one does not identify any explicit contribution $-p_i^2$ defining a ghost degree of freedom.

This result can be straightforwardly extended to (non-degenerate) models depending on even higher time-derivatives of q , say up to $d^n q/dt^n$. In that case, Ref. [54] shows that the Hamiltonian is linear in $n-1$ of the momenta p_i , and thereby non-bounded by below. On the other hand, Ostrogradski’s construction of the Hamiltonian cannot be used if \mathcal{L} depends on an *infinite* number of time derivatives, i.e., if it defines a *nonlocal* theory. In such a case, the theory may actually be stable although its expansion looks pathological [56]. This is notably the case in the effective low-energy models defined by string theory, which do involve quadratic curvature terms like Eq. (9.4) above, but also any higher derivative of the curvature tensor (whose phenomenological effects occur at the same order as the quadratic terms). Nonlocal models of MOND have been studied in the literature [184], and they can be proved to satisfy anyway causality, but they remain difficult to study from a phenomenological point of view. In the following, we will focus on local field theories.

Scalar-tensor theories

As mentioned in the previous section, gravity models whose Lagrangians are given by functions of the scalar curvature, $f(R)$, do not exhibit any ghost degree of freedom, and avoid the generic “Ostrogradskian” instability of higher-derivative theories [34]. Let us recall here the simplest way to prove it (see [212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 208, 209], and note that the following derivation assumes that the scalar curvature R is a function of the metric $g_{\mu\nu}$ and its derivatives

alone; the derivation and the result differ in the first-order Palatini formalism, where the scalar field does not acquire any kinetic term [219, 220]). We start from an action

$$S_{\text{gravity}} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} f(\tilde{R}), \quad (9.10)$$

where the global factor $c^3/16\pi G$ is temporarily set to 1, to simplify. We now introduce a Lagrange parameter ϕ to rewrite this action as

$$S_{\text{gravity}} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ f(\phi) + (\tilde{R} - \phi) f'(\phi) \right\}. \quad (9.11)$$

The field equation for ϕ reads $(\tilde{R} - \phi) f''(\phi) = 0$, and implies $\phi = \tilde{R}$ within each spacetime domain where $f''(\phi) \neq 0$. [If there exist hypersurfaces or more general domains where $f''(\phi) = 0$, then either f is constant and there is no gravitational degree of freedom in such domains, or $f(\tilde{R}) \propto \tilde{R} - 2\Lambda$ and the theory reduces to GR plus a possible cosmological constant. In both cases, the scalar degree of freedom that we will exhibit below cannot propagate within such domains. A consistent field theory, without any discontinuity of its degrees of freedom, can thus be defined only within the domains, possibly infinite, where $f''(\tilde{R}) \neq 0$.] The field equations for the metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$ may now be derived from action (9.11), and one finds that they reduce to those deriving from action (9.10) when ϕ is replaced by \tilde{R} . This can also be seen by the *a priori* illicit use of the field equation $\phi = \tilde{R}$ directly within action (9.11), which reduces trivially to (9.10). In other words, the theory defined by action (9.10) is equivalent to the scalar-tensor one

$$S_{\text{gravity}} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ f'(\phi) \tilde{R} - 0 (\partial_\mu \phi)^2 - [\phi f'(\phi) - f(\phi)] \right\}, \quad (9.12)$$

within each spacetime domain where $f''(\tilde{R})$ never vanishes. If one redefines the scalar field as $\Phi \equiv f'(\phi)$, this action takes the form of the famous (Jordan-Fierz)-Brans-Dicke theory [221, 222, 223] with no explicit kinetic term for Φ , i.e., with a vanishing ω_{BD} parameter, and with a potential defined by the last term within square brackets. It should be stressed that solar-system experiments [48] impose the bound $\omega_{\text{BD}} > 4000$ when the scalar-field potential vanishes. Therefore, if matter is assumed to be coupled to $\tilde{g}_{\mu\nu}$, the resulting scalar degree of freedom needs to be massive enough to have a negligible effect in the solar-system gravitational physics. The shape of the initial function $f(\tilde{R})$ is thus constrained by experiment.

Although action (9.12) does not involve any explicit kinetic term for ϕ (or the Brans-Dicke scalar Φ), this scalar field does propagate. Indeed, the first contribution $f'(\phi) \tilde{R}$ contains terms of the form $\phi \partial^2 \tilde{g}$, i.e., cross terms $-\partial \phi \partial \tilde{g}$ after partial integration. A redefinition of the fields then allows us to diagonalize their kinetic terms. This is achieved with the new variables

$$g_{\mu\nu}^* \equiv f'(\phi) \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (9.13a)$$

$$\varphi \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} \ln f'(\phi), \quad (9.13b)$$

$$V(\varphi) \equiv \frac{\phi f'(\phi) - f(\phi)}{4f'^2(\phi)}, \quad (9.13c)$$

and the full action, Eq. (9.12) plus the matter part $S_{\text{matter}}[\psi; \tilde{g}_{\mu\nu}]$, now reads

$$S = \frac{c^4}{4\pi G} \int \frac{d^4x}{c} \sqrt{-g_*} \left\{ \frac{R^*}{4} - \frac{1}{2} g_*^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right\} + S_{\text{matter}}[\psi; \tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi) g_{\mu\nu}^*], \quad (9.14)$$

where we have put back the global factor $c^3/16\pi G$ multiplying the gravitational action, and where $A(\varphi) = e^{\varphi/\sqrt{3}}$. This is a particular case of scalar-tensor theory [52], where the precise matter-scalar coupling function $A(\varphi) = e^{\varphi/\sqrt{3}}$ comes from our initial hypothesis of a $f(\tilde{R})$ theory. More general models may involve an arbitrary nonvanishing function $A(\varphi)$ relating the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$ (whose fluctuations define the spin-2 degree of freedom) to the physical one $\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}^*$. Action (9.14) clearly shows that the spin-0 degree of freedom φ does propagate and carries positive kinetic energy. Of course, this does not suffice to guarantee the stability of the theory : The potential $V(\varphi)$, Eq. (9.13c), also needs to be bounded by below, and this imposes constraints on the initial function $f(\tilde{R})$.

Although such tensor-mono-scalar models are perfectly well-defined field theories, they do not reproduce the MOND phenomenology, at least not in the most natural cases. Indeed, when the potential $V(\varphi)$ has a negligible influence, the scalar-field contribution to the gravitational interaction is proportional to the Newtonian one, at lowest order, i.e., of the form $\varphi \propto GM/rc^2$ where M is the baryonic mass of the body generating the field. Therefore, it does not give the MOND potential $\sqrt{GMa_0} \ln r$ we are looking for. It has been shown in [224, 225, 226] that Gaussian matter-scalar coupling functions $A^2(\varphi) = e^{\beta_0\varphi^2}$, with $\beta_0 < 0$, generate nonperturbative effects such that φ is no longer strictly proportional to M , but still almost so for two different mass ranges. Therefore, the factor \sqrt{M} we are looking for cannot be obtained that way either, besides the fact that the radial dependence of the scalar field is still $\propto 1/r$ instead of being logarithmic. When the potential $V(\varphi)$ has a minimum, its second derivative defines the mass m of the scalar degree of freedom, and its contribution to the gravitational interaction is of the Yukawa type, $\varphi \propto GM e^{-mr}/rc^2$, still not of the MONDian form, notably because its global factor is M instead of \sqrt{M} . [Note that the Yukawa force is proportional to $\partial_r\varphi \propto GM e^{-mr}(1/r^2 + m/r)$, and therefore includes a MOND-like $1/r$ contribution. However, it dominates the main $1/r^2$ term only for $mr \gg 1$, i.e., precisely when the exponential e^{-mr} makes the whole force quickly tend towards zero.] A “quintessence”-like potential, whose minimum occurs at $\varphi \rightarrow \infty$, seems better because it allows us to build a logarithmic gravitational potential. Indeed, if $V(\varphi) = -2a^2 e^{-b\varphi}$, where a and b are two constants, then $\varphi = (2/b) \ln(abr)$ is a solution of the vacuum field equation $\Delta\varphi = V'(\varphi)$. However, not only this potential is unbounded by below, thereby spoiling the stability of the model, but φ is also multiplied by a constant $2/b$ (independent of the matter source) instead of being proportional to \sqrt{M} .

A generalization of $f(R)$ theories has been considered in Refs. [227, 218], where the Lagrangian density is given by some function of the scalar curvature and its iterated d’Alembertian, $f(R, \square R, \dots, \square^n R)$. The theory can be shown to be generically equivalent to a tensor-multi-scalar theory [52] involving $n+1$ scalar fields. The signs of their respective kinetic terms depends on the numerical constants entering the function $f(R, \square R, \dots, \square^n R)$, and there is thus no guarantee that they all carry positive energy in the general case. However, well chosen functions f do define stable tensor-multi-scalar theories.

Although it seems difficult to reproduce MOND dynamics with tensor-mono-scalar models, general tensor-multi-scalar theories might actually succeed. Indeed a particular tensor-bi-scalar model, called “phase coupling gravity” (PCG), has been shown to reproduce the Tully-Fisher law in some appropriate regime (there exists a critical mass above which MOND phenomenology arises) [158, 159]. However this model is marginally ruled out experimentally [24], and moreover needs a potential which is unbounded by below, thereby spoiling the stability of the model. This kind of theory has then been promoted to a “tensor-vector-bi-scalar” model [143], that we shall examine in more detail in Sec. 9.5.

Among stable scalar-tensor theories, let us finally mention those involving a coupling of the scalar field to the Gauss-Bonnet topological invariant, i.e., involving a term of the form $f(\varphi) \times \text{GB}$ in the gravitational action. [Note that the function of φ is *a priori* free, but that

the Gauss-Bonnet term must appear linearly.] Contrary to the higher-order theories discussed in Sec. 9.3 above, such models do not contain ghost degrees of freedom. They have been studied in various contexts (see e.g. [228, 229, 230, 231, 232]), but not with the aim of reproducing the MOND phenomenology. Our own investigations showed that it is *a priori* promising, because the Riemann tensor $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ generated by a body of baryonic mass M does not vanish outside it, and therefore gives us a local access to M . However, a second information is also needed to separate M from the radial dependence, and we did not find any simple way to generate a potential $\sqrt{GMa_0} \ln r$. [It is actually possible if one defines a nonstandard kinetic term for the scalar field, as in Sec. 9.3 below, but the scalar-Gauss-Bonnet coupling is not necessary in such a case.] A related but much simpler idea is explored in Sec. 9.6 below.

K-essence or RAQUAL models

The above scalar-tensor models may involve three functions of the scalar field, namely the potential $V(\varphi)$, the matter-scalar coupling function $A(\varphi)$, and the possible scalar-Gauss-Bonnet coupling $f(\varphi) \times \text{GB}$. Their generalization to n scalar fields φ^a [52] may also involve a $n \times n$ symmetric matrix $\gamma_{ab}(\varphi^c)$ depending on them and defining their kinetic term $g_*^{\mu\nu} \gamma_{ab}(\varphi^c) \partial_\mu \varphi^a \partial_\nu \varphi^b$. Their phenomenology is however similar to the single scalar case, at least if all of them carry positive energy and their potential is bounded by below, to ensure the stability of the theory [52]. On the other hand, a significantly different physics arises if one considers more general kinetic terms of the form $f(s, \varphi)$, where $s \equiv g_*^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$ is the standard one. [Beware that the literature often uses the notation $X \equiv s/2$, which actually does not change the following discussion.] Such models, without any matter-scalar coupling, have been studied in the cosmological context under the name of “k-inflation” [84] or “k-essence” [83, 177], the letter k meaning that their dynamics is kinetic dominated, as opposed to quintessence models in which the potential $V(\varphi)$ plays a crucial role. When a matter-scalar coupling $A(\varphi)$ is also assumed, such models have been studied to reproduce the MOND dynamics under the name of “Relativistic AQUAdratic Lagrangians” (RAQUAL) [2]. Their action is thus of the form

$$S = \frac{c^4}{4\pi G} \int \frac{d^4x}{c} \sqrt{-g_*} \left\{ \frac{R^*}{4} - \frac{1}{2} f(s, \varphi) - V(\varphi) \right\} + S_{\text{matter}}[\psi; \tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi) g_{\mu\nu}^*], \quad (9.15)$$

with $s \equiv g_*^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$, and they can be considered as natural generalizations of the simplest $f(\tilde{R})$ model, Eq. (9.14). Note that the potential $V(\varphi)$ may be reabsorbed within the general function $f(s, \varphi)$, and that it is therefore unnecessary. However, since one often considers functions $f(s)$ of the kinetic term alone, it remains convenient to keep an explicit potential $V(\varphi)$. Reference [2] proved that an appropriate nonlinear function $f(s, \varphi)$ allows us to reproduce the MOND gravitational potential $\sqrt{GMa_0} \ln r$, but that some difficulties remain, as discussed below and in Secs. 9.3 and 9.4.

Several conditions must be imposed on this function $f(s, \varphi)$ to guarantee the consistency of the field theory. For any real value of $s \in [-\infty, +\infty]$, one must have

- (a) $f'(s, \varphi) > 0$,
- (b) $2s f''(s, \varphi) + f'(s, \varphi) > 0$,

where a prime denotes derivation with respect to s , i.e., $f' = \partial f(s, \varphi) / \partial s$. The condition $f'(s) \geq 0$, implied by (a), is *necessary* for the Hamiltonian to be bounded by below. Indeed, up to a global factor $c^4/8\pi G$ that we do not write to simplify the discussion, the contribution of the scalar field to this Hamiltonian reads $H = 2(\partial_0 \varphi)^2 f'(s) + f(s)$ in a locally inertial frame. If there existed a value s_- such that $f'(s_-) < 0$, then H could be made arbitrarily large and negative by choosing diverging values of $(\partial_0 \varphi)^2$ and $(\partial_i \varphi)^2$ such that $-(\partial_0 \varphi)^2 + (\partial_i \varphi)^2 = s_-$. On the

other hand, conditions (a) and (b) are necessary and sufficient for the field equation to be always hyperbolic, so that the Cauchy problem is well posed for the scalar field. Indeed, it reads

$$G^{\mu\nu}\nabla_\mu^*\nabla_\nu^*\varphi = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial\varphi} - s\frac{\partial f'}{\partial\varphi} + \frac{\partial V}{\partial\varphi} - \frac{4\pi G}{c^3\sqrt{-g_*}}\frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta\varphi}, \quad (9.16)$$

where $G^{\mu\nu} \equiv f'g_*^{\mu\nu} + 2f''\nabla_\mu^*\varphi\nabla_\nu^*\varphi$ plays the role of an effective metric in which φ propagates. The lowest eigenvalue of $G^{\mu\nu}$ is negative (i.e., defining a consistent time) only if condition (b) is satisfied, and it is easy to check⁵ that the three others are then positive (defining spatial dimensions) if (a) is also satisfied.⁶ As a quick check of condition (b), one may for instance consider the particular case of a homogeneous scalar field ($\partial_i\varphi = 0$) in a locally inertial frame ($g_{\mu\nu}^* = \eta_{\mu\nu}$): The fact that we need $G^{00} = -f' + 2f'' \times (-s) < 0$ then immediately yields inequality (b). Finally, conditions (a) and (b) together *suffice* for the Hamiltonian to be bounded by below, provided the function $f(s, \varphi)$ is analytic and $f(s = 0, \varphi)$ is itself bounded by below for any φ . Indeed, still in a locally inertial frame, we know that $s = -(\partial_0\varphi)^2 + (\partial_i\varphi)^2 \geq -(\partial_0\varphi)^2$. Together with condition (a), we can thus conclude that the Hamiltonian $H = 2(\partial_0\varphi)^2 f' + f$ is greater than $-2sf' + f$, which is known to be a decreasing function of s because of condition (b). Therefore, for any $s \leq 0$, the Hamiltonian is necessarily greater than $f(s = 0, \varphi)$. On the other hand, for $s \geq 0$, we also know that $H \geq f \geq f(s = 0, \varphi)$, first because $(\partial_0\varphi)^2 \geq 0$ and then because condition (a) implies that f is an increasing function of s . Although we used the hyperbolicity condition (b) to derive that the Hamiltonian is bounded by below, note that condition (b) is *not* implied by this boundedness, on the contrary. Nevertheless, it reappears when considering the propagation velocity of perturbations around a background [84], $c_s^2 = f'/(2sf'' + f')$. Such perturbations are unstable if $c_s^2 < 0$, and one may thus think that condition (b) should be implied by the boundedness by below of the Hamiltonian. However, the energy of the perturbations is only part of the total Hamiltonian, which also includes the energies of the background and its interactions with the perturbations. A total Hamiltonian bounded by below therefore does not suffice to guarantee the stability of perturbations; the hyperbolicity of the field equations, condition (b), is *also* crucial.

In Ref. [70] (see also [71]), a third condition was underlined for such k-essence models, besides (a) and (b) above :

$$(c) \quad f''(s) \leq 0.$$

This extra condition is necessary for the causal cone of the scalar field to remain inside the light cone defined by the spacetime metric $g_{\mu\nu}^*$, i.e., to avoid superluminal propagation. The simplest way to derive this inequality is to consider a null vector k^μ with respect to the metric $G_{\mu\nu} = (1/f')[g_{\mu\nu}^* - 2f''\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi/(2sf'' + f')]$, defined as the inverse of the effective metric $G^{\mu\nu}$ entering Eq. (9.16) above. [We assume here that f' never vanishes.] The equation $G_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$ then gives $g_{\mu\nu}^*k^\mu k^\nu = 2f''(k^\mu\partial_\mu\varphi)^2/(2sf'' + f')$, and obviously implies $g_{\mu\nu}^*k^\mu k^\nu \leq 0$ if conditions (b) and (c) are satisfied. The causal cone of the scalar field is thus timelike or null with respect to the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$. Such a condition (c) would be extremely constraining, since it would rule out notably any monomial $f(s) = s^n$, which would violate either (a) or (c) depending on the parity of n . However, let us underline that (c) is actually *not* required for the consistency of the

⁵The simplest calculation consist in diagonalizing the matrix $G^{\mu\rho}g_{\rho\nu}^*$, instead of the tensor $G^{\mu\nu}$, and impose that its four eigenvalues are positive. This also ensures that there exists a coordinate system in which the time directions defined by $G_{\mu\nu}$ and $g_{\mu\nu}^*$ coincide.

⁶One could also consider the degenerate case where $f'(s)$ vanishes on some hypersurfaces. On them, the effective metric can then be put in the form $\text{diag}(-1, 0, 0, 0)$ in some appropriate basis, and thus define a consistent time, if and only if $f''(s) < 0$. Strictly speaking, the scalar field equation is not hyperbolic in that case but it has nevertheless a well-posed Cauchy problem. Using condition (b), we can conclude that $f'(s)$ may vanish only at negative values of s .

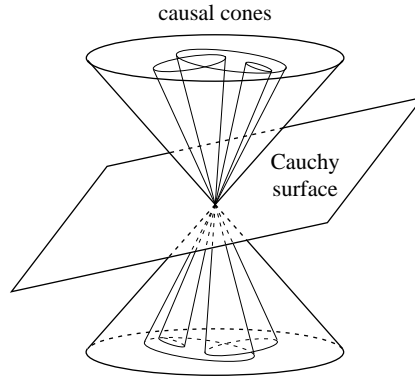


FIG. 9.1 – In a theory where different fields have different causal cones, it suffices that their union be embedded in a wider cone for local causality to be satisfied. Initial data for all the fields simultaneously may be specified on a surface exterior to the wider cone, i.e., spacelike with respect to each cone. If the topology of spacetime is such that there does not exist any CTC with respect to the wider cone, then causality is preserved, although some fields may propagate faster than light (i.e., faster than electromagnetic waves, a mere particular case of matter field).

model. Indeed, even if φ propagates superluminally, this does not ruin the causality of the model. Thanks to condition (b), the causal cone of φ never opens totally, i.e., always admit a class of Cauchy surfaces which can be defined in its exterior. In the general situation where different fields have different causal cones, it suffices that their union still admits a nonvanishing exterior where one may consistently define initial data for all of them simultaneously; see Fig. 9.1. This becomes quite clear by shifting our viewpoint. Let us assume that the union of all causal cones may be embedded in the interior of a wider cone which never totally opens, and let us define space and time with respect to this exterior cone. Since all fields propagate within this cone, there is no more causal problem than in special relativity where particle worldlines lie within the standard lightcone. Causal pathologies are still possible, like in GR itself which admits solutions containing closed timelike curves (CTC), like the Gödel universe or the interior of the Kerr solution. Since the global topology of the Universe is not imposed by our local field equations, it is necessary to *assume* that it does not involve any CTC to ensure causality. In our example of different fields having different causal cones, one thus just needs to assume that spacetime does not admit any CTC with respect to the wider cone surrounding all of them. Causal paradoxes due to superluminal propagation, like the nice one exhibited in Sec. III. 2 of [71], are thus more a matter of global assumptions than a problem with local field equations.⁷ We refer to Ref. [233] for a more detailed discussion of this subtle issue (see also Secs. 9.4 below). The very recent article [64] claims that microscopically Lorentz-invariant particles cannot give rise to superluminal signals, but this conclusion does not take into account their possible self-interactions via their kinetic term, like $f(s)$ in our present case of k-essence models (9.15). As shown above, superluminal signals do occur when $f''(s) > 0$, although the theory is microscopically Lorentz-invariant —

⁷In Ref. [71], a CTC is exhibited by considering a background involving two bubbles of a scalar field with a fast relative motion. If one assumes that all clocks can be globally synchronized by using only electromagnetic waves, then such a CTC does exist. However, although this hypothesis sounds extremely natural, there *also* exist spacetimes in which there are no CTCs for any field, and in such a case, light within a given bubble of scalar field does not define the same synchronization as within the other bubble. The CTC exhibited in [71] becomes then an artifact of gluing independent coordinate systems at the edges of the bubbles.

and causal when the hyperbolicity conditions (a) and (b) are satisfied. The causal cone of the scalar field φ is either interior or exterior to the light cone defined by $g_{\mu\nu}^*$ (depending on the local value of s), but it always remains a cone thanks to these conditions. At each spacetime point, any surface exterior to the wider of these two cones may be used as a Cauchy surface to impose initial data. Of course, a surface lying *between* the two cones behaves as a spacelike one for the thinner cone but as a timelike one for the thicker. Some causal paradoxes discussed in the literature (including in [70]) are actually based on the improper use of such intermediate surfaces. They are clearly not consistent Cauchy surfaces for the fastest field (i.e., the wider cone), so that data are necessarily constrained on them. The conclusion of such paradoxes, namely that initial data are constrained, is thus actually hidden in the use of these intermediate surfaces.

MOND as a RAQUAL model

As mentioned above, Ref. [2] proved that RAQUAL models (9.15) may reproduce the MOND gravitational potential. Indeed, if $f(s)$ is assumed not to depend explicitly on φ , if the potential $V(\varphi)$ vanishes, and if one chooses an exponential (Brans-Dicke-like) matter-scalar coupling function $A(\varphi) = \exp(\alpha\varphi)$, Eq. (9.16) reduces to

$$\nabla_{\mu}^* [f'(s)\nabla_{*}^{\mu}\varphi] = -\frac{4\pi G}{c^4} \alpha T^*, \quad (9.17)$$

where $T^* \equiv g_{\mu\nu}^* T_{*}^{\mu\nu}$ denotes the trace of the matter energy-momentum tensor $T_{*}^{\mu\nu} \equiv (2c/\sqrt{-g_*}) \delta S_{\text{matter}}/\delta g_{\mu\nu}^*$. In order to recover the right Newtonian limit for large accelerations $a > a_0$, one may follow Ref. [2] and impose⁸ $f'(s) \rightarrow 1$ for large positive values of s . In such a case, the scalar field reads $\varphi \approx -\alpha GM/rc^2$ near a body of mass M , and test particles feel an extra potential $\alpha\varphi c^2 \approx -\alpha^2 GM/r$ adding up to the standard gravitational potential $-GM/r$ mediated by the spin-2 interaction (i.e., by the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$). The total potential $-G(1+\alpha^2)M/r$ is thus of the Newtonian type, with a renormalized effective gravitational constant $G_{\text{eff}} = G(1+\alpha^2)$ (see for instance [52] and line (a) of Fig. 9.5 in Sec. 9.4 below). Precision tests in the solar system are however sensitive to post-Newtonian corrections, and they prove that the scalar contribution must be negligible. Indeed, the parametrized post-Newtonian (PPN) parameter γ^{PPN} assumes the value $\gamma^{\text{PPN}} = 1 - 2\alpha^2/(1+\alpha^2)$ in the present (conformally-coupled) scalar-tensor framework [see Refs. [46, 52] and Eq. (9.26) below], and the impressive experimental bound $|\gamma^{\text{PPN}} - 1| < 2 \times 10^{-5}$ obtained in [48] from the observation of the Cassini spacecraft implies therefore

$$\alpha^2 < 10^{-5}. \quad (9.18)$$

Instead of imposing $f'(s) \rightarrow 1$ for large values of s , one may thus also recover the right Newtonian limit by choosing a decreasing function $f'(s)$, such that the scalar contribution is even smaller. Condition (b) should however still be satisfied, thereby constraining the slope of $f'(s)$.

But the crucial feature of Eq. (9.17) is that it also allows us to reproduce the MOND potential for small accelerations $a < a_0$. Indeed, if $f'(s) \approx \ell_0\sqrt{s}$ for small and positive values of s , where ℓ_0 is a constant having the dimension of a length, one gets $(\partial_r\varphi)^2 \approx \alpha GM/\ell_0 c^2 r^2$ near a spherical body of mass M . Test particles therefore feel, in addition to the usual Newtonian potential $-GM/r$, an extra potential $\alpha\varphi c^2 \approx \sqrt{\alpha^3 GM c^2/\ell_0} \ln r$ which reduces to the MOND one $\sqrt{GM a_0} \ln r$ for $\ell_0 = \alpha^3 c^2/a_0$. A simple way to connect this MOND limit to the above Newtonian one is to choose for instance $f'(s) = \sqrt{\bar{s}}/\sqrt{1+\bar{s}}$, where $\bar{s} \equiv \alpha^6 c^4 s/a_0^2$ is dimensionless. The shape of this function is illustrated in Fig. 9.2. By integrating this expression, one can thus conclude

⁸Note that imposing $f'(s) \rightarrow \text{const.}$ is strictly equivalent, since the arbitrary constant can be absorbed in a redefinition of the matter-scalar coupling constant α . In the following, the experimental constraints on α that we quote correspond to the choice $f'(s) \rightarrow 1$ in the Newtonian regime.

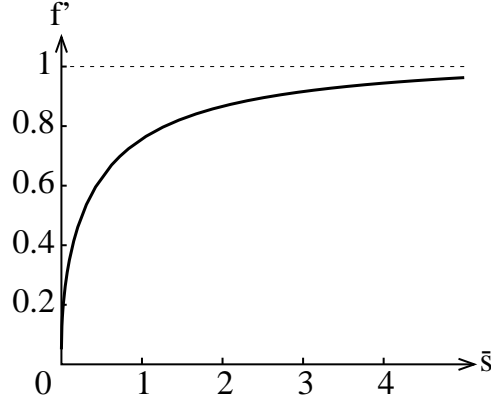


FIG. 9.2 – A simple function $f'(s)$ reproducing the MOND dynamics for small s (i.e., large distances) and the Newtonian one for large s (i.e., small distances).

that the precise function $f(s) = (a_0^2/\alpha^6 c^4) \left[\sqrt{\bar{s}(1+\bar{s})} - \sinh^{-1}(\sqrt{\bar{s}}) \right]$, or any other one having the same asymptotic behaviors for large and small positive values of s , allows us to reproduce the MOND dynamics.

However, the authors of Ref. [2] noticed that the scalar field propagates superluminally in the MOND (small positive s) regime, since $f''(s) \approx \frac{1}{2}\ell_0/\sqrt{s} > 0$ contradicts condition (c) above. This is the reason why they discarded this model, although we underlined above that such a superluminal propagation actually does not threaten causality, provided the hyperbolicity conditions (a) and (b) are satisfied. In fact, the only experimental constraints we have on the existence of several causal cones is in favor of superluminal fields! As we will discuss in Sec. 9.5, if light (and thus matter) travelled faster than some field to which it couples, then it would emit Cerenkov radiation of this field. High-energy cosmic rays would thus be significantly suppressed.

It thus seems that the above RAQUAL model reproducing the MOND dynamics is *a priori* consistent. However, it presents several other difficulties. The main one has been immediately recognized and addressed in the literature : Because of the specific form of the matter-scalar coupling assumed in action (9.15), this model does not reproduce the observed light deflection by “dark matter”. We will devote Sec. 9.4 below to this crucial problem. Let us here mention the other problems that we noticed, and which do not seem to have been discussed in the literature.

First of all, the above function $f(s)$ is clearly not defined for negative values of s . One may try to replace s by its absolute value $|s|$, and also multiply globally $f(s)$ by the sign of s in order to still satisfy conditions (a) and (b). However, this would not cure the serious problem occurring at $s = 0$. Indeed, since $f(s) \rightarrow (2\alpha^3 c^2/3a_0)s\sqrt{|s|}$ for small values of s , the strict inequality (b) is not satisfied at $s = 0$. In other words, the scalar field equation (9.16) or (9.17) is no longer hyperbolic on the hypersurfaces where s vanishes, and the scalar degree of freedom cannot cross them. Since $s \approx (\partial_i \varphi)^2 \geq 0$ when considering the local physics of clustered matter, but $s \approx -\dot{\varphi}^2 \leq 0$ when considering the cosmological evolution of the Universe, there always exist such singular surfaces around clusters. Therefore, this model cannot describe consistently both cosmology and galaxies, unless independent solutions are glued by hand on the singular hypersurfaces $s = 0$. However, a simple cure to this discontinuity would be to consider, for small values of s , a function

$$f'(s) = \varepsilon + \sqrt{|s|}, \quad (9.19)$$

where ε is a small dimensionless positive number. Then both conditions (a) and (b) would obviously be satisfied even at $s = 0$. In other words, the RAQUAL model (9.15) with $V(\varphi) = 0$, $A(\varphi) = \exp(\alpha\varphi)$ and

$$f(s) = \varepsilon s + \frac{a_0^2 \operatorname{sgn}(s)}{\alpha^6 c^4} \left[\sqrt{|\bar{s}|(1+|\bar{s}|)} - \sinh^{-1} \left(\sqrt{|\bar{s}|} \right) \right], \quad (9.20)$$

where $\bar{s} \equiv \alpha^6 c^4 s / a_0^2$, does reproduce the MOND dynamics and is free of mathematical inconsistencies. Of course, there is no reason why this specific function, for negative values of s , should reproduce the right cosmological behavior. One may obviously look for other functions of $s < 0$ connecting smoothly to (9.20) for small values of $|s|$, provided conditions (a) and (b) above remain always satisfied. Therefore, Eq. (9.20) should just be considered as an example of a mathematically consistent RAQUAL model.

A second difficulty is that the above model is rather fine tuned, since it needs the introduction of a small dimensionless constant ε besides Milgrom's MOND acceleration constant $a_0 \approx 1.2 \times 10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$. Indeed, the presence of ε in Eqs. (9.19), (9.20) notably implies that Newtonian gravity is recovered at very large distances, the MOND regime manifesting only at intermediate ranges [233]. When $s \rightarrow 0$, the derivative $f'(s)$ entering Eq. (9.17) tends to ε , so that the scalar field reads $\varphi \approx -(\alpha/\varepsilon)GM/rc^2$ faraway from a body of mass M . In this regime, the total gravitational potential felt by a test particle reads $-G(1 + \alpha^2/\varepsilon)M/r$, and is therefore of the Newtonian form with a renormalized gravitational constant $G_\infty = G(1 + \alpha^2/\varepsilon)$, where the subscript refers to the fact that the above form of the potential holds exactly when $r \rightarrow \infty$ (remind that, if $r \rightarrow 0$, the effective gravitational constant is given by $G_{\text{eff}} = G(1 + \alpha^2)$). Let us compute the range of distances r for which the MOND force dominates the Newtonian contributions. One needs of course $f'(s) \propto \sqrt{s}$ and thus $\varepsilon \ll \sqrt{s}$. On the other hand, the MOND force dominates the Newtonian one if $r \gg \sqrt{GM/a_0}$. Using $s \approx (\partial_r \varphi)^2 \approx GMa_0/\alpha^2 c^4 r^2$, we thus find that the MOND force dominates within the following range of distances $\sqrt{GM/a_0} \ll r \ll (\alpha^2/\varepsilon)\sqrt{GM/a_0}$. Since solar system tests impose $\alpha^2 < 10^{-5}$, Eq. (9.18), and since rotation curves of galaxies may be flat up to $r \sim 10\sqrt{GM/a_0}$ [234], one needs therefore $\varepsilon \ll 10^{-6}$. This illustrates the fine tuning required to define a consistent RAQUAL model even for $s \rightarrow 0$.

On the other hand, Eq. (9.19) has two great advantages, besides the fact that it cures the singularity at $s = 0$. First, the fact that the field assumes a Newtonian form at large distances, $r > (\alpha^2/\varepsilon)\sqrt{GM/a_0}$, ensures that a body of mass M does not create a static (scalar) field with infinite energy, contrary to the case where $f'(s) \sim \sqrt{s}$ for small s [2]. Secondly, the presence of ε naturally leads to a theory where the local constant of gravity $G_{\text{eff}} = G(1 + \alpha^2)$ may differ from G_∞ , i.e., the one in regions of spacetime where the scalar field gradient is small. This may have some interesting applications in cosmology. Indeed, provided that $\sqrt{|\bar{s}|} \lesssim \varepsilon$, i.e., when $\dot{\varphi}^2 \lesssim \varepsilon a_0^2 / \alpha^6 c^2$ in a cosmological context, a homogeneous Universe is described by Friedman equations⁹ but the baryonic matter contributes as $G_\infty \rho_{\text{baryons}}$. The effective density of matter reads therefore $\rho_{\text{baryons}} G_\infty / G_{\text{eff}} = \rho_{\text{baryons}} (1 + \alpha^2/\varepsilon) / (1 + \alpha^2) \approx \rho_{\text{baryons}} (1 + \alpha^2/\varepsilon)$. In other words, baryonic matter may contribute effectively as if there were true (exotic) dark matter in that regime, provided that we tune the free parameter ε so that $\alpha^2/\varepsilon \approx 10$, which is consistent with galactic dynamics. Since the cosmology of such models goes beyond the scope of the present paper, we will not investigate further this phenomenology. Let us however stress that there is here a potential threat for MOND-like theories. Indeed, bounds may be found on the ratio $G_\infty / G_{\text{eff}}$ from the analysis of primordial nucleosynthesis, since the speed of the expansion of the Universe, and therefore the relative proportion of hydrogen and helium in the present Universe, depends on this ratio. Within the framework of the so-called Einstein-aether theories [94, 235], it was shown

⁹Beware that the density and the pressure of the scalar field must also be taken into account.

in Ref.[236] that one must have $|G_\infty/G_{\text{eff}} - 1| \lesssim 1/8$ to be consistent with the data. Of course, in the above RAQUAL model of MOND, such a constraint only exists if the time derivative of the scalar field is small at the epoch of nucleosynthesis. In that case, the above bound would read $\alpha^2/\varepsilon < 1/8$, and the MOND regime would therefore not exist at all (there is no more room for the flattening of rotation curves, as shown in the above paragraph). A solution would of course to impose a very small value of ε such that $\dot{\varphi}^2 \gg \varepsilon a_0^2/\alpha^6 c^2$ at the nucleosynthesis epoch. However one should study the cosmology of such models to investigate in more detail this effect and make quantitative estimates; we leave this point for future work.¹⁰

Finally, the third (and the most serious) problem of such RAQUAL models of MOND, besides the one of light deflection discussed in Sec. 9.4 below, is that the MOND force $\propto \sqrt{GMa_0}/r$ starts manifesting at quite small distances. Indeed, the MOND potential $\propto \sqrt{GMa_0} \ln r$ appears at values of field gradient \bar{s} such that $f'(\bar{s}) \sim \sqrt{\bar{s}}$. This typically happens at $\bar{s} \lesssim 1$ for natural functions f' interpolating between the MOND and the Newtonian regimes, see Fig. 9.2. Using $\bar{s} \lesssim 1$ we find that the MOND potential appears at distance $r \gtrsim r_{\text{trans}}$ from a body of mass M , where

$$r_{\text{trans}} = \alpha^2 \sqrt{\frac{GM}{a_0}}. \quad (9.21)$$

Since, in the present (conformally-coupled) scalar-tensor framework, the matter-scalar coupling constant α is severely constrained by solar-system tests, Eq. (9.18), we conclude that the extra MOND potential starts manifesting at a radius $r_{\text{trans}} = \alpha^2 \sqrt{GM_\odot/a_0} < 0.1$ AU in the solar system, where M_\odot denotes the mass of the Sun. In other words, all planets (including Mercury, at 0.4 AU from the Sun) should feel a total gravitational potential $-GM_\odot/r + \sqrt{GM_\odot a_0} \ln r$, the first term coming from the spin-2 field $g_{\mu\nu}^*$, and the second one from the scalar field which is already in its MOND regime. This extra potential $\sqrt{GM_\odot a_0} \ln r$ (or force in $1/r$) leads to deviations from the Newtonian behavior and is tightly constrained by tests of Kepler's third law; see [107] and Sec. 9.6 below. Although this MONDian anomalous force remains numerically small with respect to the Newtonian one within the solar system, it is large with respect to post-Newtonian corrections $\propto 1/c^2$, and its existence is definitely ruled out experimentally. In conclusion, although the RAQUAL model of Ref. [2] or its refinement (9.20) do predict a Newtonian behavior at distances $r \rightarrow 0$ (i.e., $s \rightarrow \infty$), planets are far enough to be already in the MOND regime! Note that this surprising problem comes from the experimental bound (9.18), telling us that the scalar field must be very weakly coupled to matter to reproduce GR within the solar system. If one did not take it into account, by setting $\alpha = 1$ for instance, one would easily reproduce Newtonian gravity up to $\sqrt{GM_\odot/a_0} \approx 7000$ AU, and the MOND dynamics beyond. A reasonable value $\varepsilon \sim 1/10$ would also suffice for the refined model (9.20). However, this theory would be inconsistent by 5 orders of magnitude with post-Newtonian tests in the solar system, because the scalar field would be much too strongly coupled to matter.

A possible solution to the above problem would be to fine tune the function $f(s)$ even further. In order to get the MOND regime for $r \gtrsim \sqrt{GM/a_0}$, as required by galaxy rotation curves, one would need $f'(s) \approx \sqrt{s}$ for $\bar{s} \lesssim \alpha^4 < 10^{-10}$. On the other hand, in order to obtain the Newtonian regime within the solar system, say for $r \lesssim r_{\text{max}} \sim 20$ or 30 AU, one would need $f'(s) \approx 1$ for $\bar{s} \gtrsim (\alpha^4 GM_\odot/a_0 r_{\text{max}}^2)^2 \sim 10^{-10}$ (this second occurrence of 10^{-10} is a numerical coincidence). Therefore, there would exist a brutal transition between the MOND and Newtonian regimes around $\bar{s} \sim 10^{-10}$. Not only the introduction of such a small dimensionless number would be quite unnatural, but this model would also predict that the anomalous acceleration caused by

¹⁰Note that this phenomenon is very likely to occur also in extended models we consider below (TeV-like theories), since they notably involve a k-essence scalar field whose kinetic term also needs to be cured at $s = 0$; see Sec. 9.4.

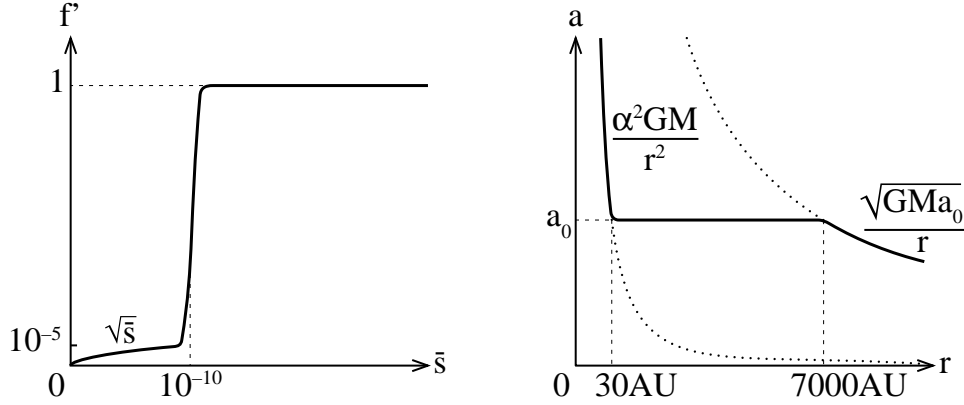


FIG. 9.3 – Fine-tuned function $f'(s)$ such that Newtonian and post-Newtonian predictions are not spoiled in the solar system, although the MOND dynamics is predicted at large distances. The right panel displays the quite unnatural contribution of the scalar field to the acceleration of a test mass, as a function of its distance with respect to the Sun.

the scalar field remains approximately equal to the constant¹¹ a_0 between 30 and 7000 UA. As illustrated in Fig. 9.3, this would be a way to reconcile the MOND acceleration $\sqrt{GMa_0}/r$ at large distances with the experimentally small Newtonian contribution $\alpha^2 GM/r^2$ of the scalar field at small distances. Although this is not yet excluded experimentally, it would however suffice to improve by one order of magnitude the post-Newtonian constraint on α^2 to rule out such a fine-tuned model (the planned astrometric experiment GAIA [237] should reach the 10^{-6} level for α^2 , and the proposed LATOR mission [238, 239] should even reach the 10^{-8} level). Therefore, one should not consider it seriously.

An *a priori* better solution to the above problem would be to recall that the Newtonian limit $f'(s) \approx 1$ is actually unnecessary. Since the metric $g_{\mu\nu}^*$ already generates a Newtonian potential $-GM/r$, it suffices that the scalar field contribution remain negligible (even at the post-Newtonian level) in the solar system. One may try a function $f'(s)$ whose shape looks like the one displayed in Fig. 9.4, for instance

$$f'(s) = \varepsilon + \frac{\sqrt{|\bar{s}|}}{(1 + |\bar{s}|)^{1+1/n}}, \quad (9.22)$$

where n is a positive constant and as before $\bar{s} \equiv \alpha^6 c^4 s/a_0^2$. Then the transition occurs again at $\bar{s} \sim 1$, i.e., around $r_{\text{trans}} = \alpha^2 \sqrt{GM/a_0}$, but the difference with the previous model is that α is no longer constrained by post-Newtonian tests. Indeed, in the large- s limit, Eq. (9.20) shows that the force mediated by the scalar field reads $\alpha \partial_r \varphi c^2 = (a_0/\alpha^2) (r/r_{\text{trans}})^n$. Therefore, even if one imposes a strong scalar-matter coupling constant $\alpha = 1$, so that the Newton-MOND transition occur at $r_{\text{trans}} = \sqrt{GM/a_0}$ as expected, the anomalous acceleration caused by the scalar field will be of order $10^{-4n} a_0$ in the solar system, at $r \sim 1$ AU. A value $n \gtrsim 2$ suffices thus for this anomalous force to be negligible even with respect to post-Newtonian relativistic effects. However, it is easy to check that the function (9.22) does *not* satisfy condition (b) for large

¹¹Note that the MOND constant a_0 is too small by a factor 7 to account for the anomalous acceleration of the two Pioneer spacecrafts. Actually, we will also see in Sec. 9.6 below that there exists a crucial difference between the MOND dynamics and the Pioneer anomaly.

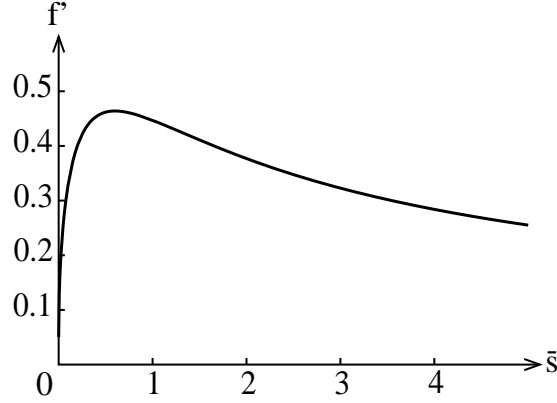


FIG. 9.4 – Typical shape of a function $f'(s)$ such that scalar-field deviations from GR are negligible at small distances.

values of s , and therefore that the scalar field equation is no longer hyperbolic for small enough distances. This suffices to rule out this class of models.

In conclusion, the above discussion illustrates that RAQUAL models are severely constrained, although they involve a free function $f(s)$ defining the kinetic term of the scalar field. Contrary to some fears in the literature, the possible superluminal propagations do not threaten causality, and the two conditions (a) and (b) are the only ones which must be imposed to guarantee the field theory's consistency. For instance, monomials $f(s) = s^n$ are allowed if n is positive and odd [except on the possible hypersurfaces where s vanishes, which would violate the strict inequality (b)]. However, when taking into account simultaneously these two consistency conditions *and* experimental constraints, it seems difficult to reproduce the MOND dynamics at large distances without spoiling the Newtonian and post-Newtonian limits in the solar system. It seems necessary to consider unnatural functions $f(s)$ involving small dimensionless numbers.

In the next section, we will address the problem of light deflection, and recall the solution which has been devised in the literature. This solution will at the same time release the experimental constraint on the matter-scalar coupling constant α obtained from accurate measurement of the post-Newtonian parameter γ^{PPN} within the solar system, and therefore cure the above fine-tuning problem. On the other hand, we will show in Sec. 9.5 that the analysis of binary-pulsar data also imposes a bound on α , so that the problem of the fine-tuning of the free function f will anyway remain.

9.4 The problem of light deflection

Conformally-coupled scalar field

Both scalar-tensor theories (9.14) and RAQUAL models (9.15) assume a conformal relation $\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}^*$ between the physical and Einstein metrics. The inverse metrics are thus related by $\tilde{g}^{\mu\nu} = A^{-2}(\varphi)g_{*}^{\mu\nu}$, and their determinants read $\tilde{g} = A^{2d}(\varphi)g_*$ in d spacetime dimensions. Since all matter fields, including gauge bosons, are assumed to be minimally coupled to $\tilde{g}_{\mu\nu}$, this leads to a simple prediction for the behavior of light in such models. Indeed, the action of

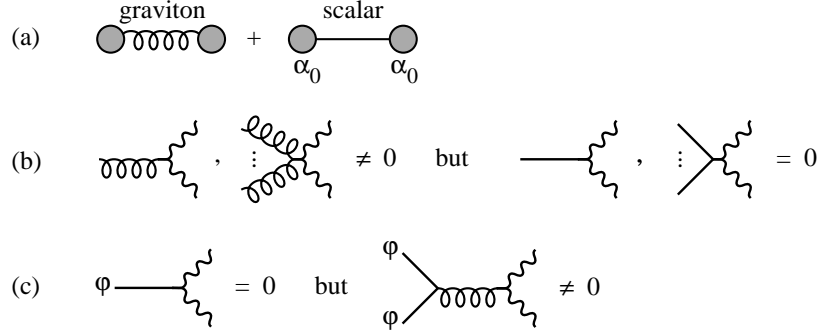


FIG. 9.5 – Feynman diagrams in scalar-tensor theories, where straight, curly and wavy lines represent respectively the scalar field, gravitons and photons. Matter sources are represented by blobs. (a) Diagrammatic interpretation of the effective gravitational constant $G_{\text{eff}} = G(1 + \alpha_0^2)$, where each vertex connecting matter to one scalar line involves a factor α_0 . (b) Photons are directly coupled to gravitons but not to the scalar field. (c) Photons feel nevertheless the scalar field indirectly, via its influence on gravitons : The energy-momentum tensor of the scalar field generates a curvature of the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$ in which electromagnetic waves propagate.

electromagnetism is conformal invariant in $d = 4$ dimensions :

$$\begin{aligned}
 S_{\text{EM}} &= \int \frac{d^4x}{c} \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{4} \tilde{g}^{\mu\rho} \tilde{g}^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\
 &= \int \frac{d^4x}{c} \frac{A^4(\varphi) \sqrt{-g_*}}{4} [A^{-2}(\varphi) g_*^{\mu\rho}] [A^{-2}(\varphi) g_*^{\nu\sigma}] F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\
 &= \int \frac{d^4x}{c} \frac{\sqrt{-g_*}}{4} g_*^{\mu\rho} g_*^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}.
 \end{aligned} \tag{9.23}$$

Therefore, light is only coupled to the spin-2 field $g_{\mu\nu}^*$, but does not feel at all the presence of the scalar field φ . In terms of Feynman diagrams, there exist nonvanishing vertices connecting one or several gravitons to two photon lines, but the similar vertices connecting photons to scalar lines all vanish ; this is illustrated in line (b) of Fig. 9.5. It is then obvious that light behaves strictly as in GR, in a geometry described by the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$. In particular, the light deflection angle caused by a spherical body of mass M must be given by the same expression as in GR (at lowest order)

$$\Delta\theta = \frac{4GM}{bc^2}, \tag{9.24}$$

where b denotes the impact parameter of the light ray. An even simpler way to prove that light propagates in the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$, without feeling the scalar field, is to note that its geodesic equation reads $\tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$ in the eikonal approximation. Dividing by the nonvanishing factor $A^2(\varphi)$, this equation implies $g_{\mu\nu}^* dx^\mu dx^\nu = 0$, giving thus the standard geodesic equation for null rays in the metric $g_{\mu\nu}^*$. [It is interesting to note that this second reasoning would remain valid even if the action of electromagnetism were not conformal invariant, for instance in dimension $d \neq 4$, or even if one multiplied it by an explicit scalar-photon coupling function $B^2(\varphi)$, thereby violating the weak equivalence principle. Then it is straightforward to prove that the nonvanishing scalar-photon vertices would only affect the amplitude of electromagnetic waves, in the eikonal

approximation, but not their polarization nor their trajectory. One of us (G.E.F.) discussed this result with B. Bertotti several years ago, but it has been recently rediscovered in [240].]

However, the crucial difference with GR is that massive matter does feel the scalar field, via the matter-scalar coupling function $A(\varphi)$. One may expand this function around the background value φ_0 of the scalar field as

$$\ln A(\varphi) = \text{const.} + \alpha_0(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}\beta_0(\varphi - \varphi_0)^2 + \dots, \quad (9.25)$$

where α_0, β_0, \dots , are dimensionless constants. In usual scalar-tensor theories (9.14), as well as in the Newtonian regime of RAQUAL models (9.15), the lowest-order contribution of the scalar field to the gravitational potential felt by a test mass reads then $-\alpha_0^2 GM/r$ [46, 52]. This generalizes the results recalled in Sec. 9.3 above in the particular case of an exponential coupling function $A(\varphi) = e^{\alpha\varphi}$. This spin-0 contribution adds up to the standard Newtonian potential $-GM/r$ caused by the spin-2 interaction (i.e., via the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$), so that the total gravitational potential remains of the Newtonian form but with an effective gravitational constant $G_{\text{eff}} = G(1 + \alpha_0^2)$; see line (a) of Fig. 9.5. In other words, when one determines the mass of the Sun by analyzing the orbits of the planets, one actually measures $G_{\text{eff}}M$ instead of the bare GM . Therefore, if one expresses the light deflection angle (9.24) in terms of the observable quantity $G_{\text{eff}}M$, one gets

$$\Delta\theta = \frac{4G_{\text{eff}}M}{(1 + \alpha_0^2)bc^2} \leq \frac{4G_{\text{eff}}M}{bc^2}. \quad (9.26)$$

For a given value of the observed constant $G_{\text{eff}}M$, general relativity would have predicted $4G_{\text{eff}}M/bc^2$. In conclusion, the light deflection angle is actually *smaller* in scalar-tensor theories than in GR, although photons are strictly decoupled from the scalar field! This paradoxical result is simply due to the fact that we need to compare the measured angle $\Delta\theta$ with another observable, $G_{\text{eff}}M$, which *is* influenced by the scalar field.

This reduction of light deflection in scalar-tensor theories has been immediately recognized as a serious problem for MOND-like field theories [20, 63]. Indeed, if one interprets data within GR, the presence of dark matter suggested by galaxy rotation curves is confirmed by weak lensing observations [241, 242, 243]. Therefore, in a modified-gravity theory avoiding the assumption of dark matter, one should predict simultaneously a larger gravitational potential and a larger light deflection. However, the interpretation of data is slightly more subtle than in the solar system, because there exist at least three different notions of mass which may be defined for a galaxy : (i) its baryonic mass M_b , assumed to be proportional to its luminous mass M_L ; (ii) its total mass (baryonic plus “dark”) evaluated from its rotation curve, that we will denote $M_{\text{tot}}^{\text{rot}}$; and (iii) its total mass evaluated from weak lensing, that we will denote $M_{\text{tot}}^{\text{lens}}$. The only conclusion driven from the above result (9.26) is that the deflecting mass is smaller than the gravitational one in scalar-tensor theories :

$$M_{\text{tot}}^{\text{lens}} \leq M_{\text{tot}}^{\text{rot}}. \quad (9.27)$$

Note that this conclusion is also valid in the class of RAQUAL models reproducing the MOND dynamics that we discussed in Sec. 9.3 above. Indeed, the MOND force was caused by the exchange of a scalar particle [cf. line (a) of Fig. 9.5], i.e., by the conformal factor $A^2(\varphi)$ relating the physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$ to the Einstein one $g_{\mu\nu}^*$. Since light only feels the latter, the total mass evaluated from weak lensing is obviously smaller than the one evaluated from rotation curves.

On the other hand, it should be underlined that Eq. (9.26) does *not* imply $M_{\text{tot}}^{\text{lens}} \leq M_b$, contrary to some erroneous or imprecise claims in the literature (see, e.g., [63]). Indeed, the stress-energy tensor of the scalar field does contribute to the curvature of the Einstein metric

$g_{\mu\nu}^*$, so that light deflection may be *larger* than if only baryonic matter was present. This is illustrated in terms of Feynman diagrams in line (c) of Fig. 9.5 : Although the scalar-photon vertex vanishes, light may nevertheless feel the scalar field indirectly via a graviton exchange. The reason why this does not appear in Eqs. (9.24) or (9.26) above is because we derived them at lowest order in powers of $1/c^2$, and in usual scalar-tensor theories or in the Newtonian regime of RAQUAL models. But when considering their MOND regime, one cannot any longer perform a naive post-Newtonian expansion. Indeed, the stress-energy of the scalar field may become non-negligible with respect to that of baryonic matter, and even dominate it, although this scalar field has been generated by its coupling to matter. This mere sentence gives us a hint that such a model may be unstable, but one should note that $M_{\text{tot}}^{\text{lens}} \gg M_{\text{b}}$ is indeed possible in RAQUAL models.

We will provide an explicit example in Sec. 9.4 below, although it does not reproduce the right MOND dynamics. Its aim is just to underline that the derivation of the inequality $M_{\text{tot}}^{\text{lens}} \leq M_{\text{b}}$ proposed in Ref. [63] is incorrect. It is instructive to locate where its reasoning fails. It writes the deflection angle in terms of the T_r^r component of the total stress-energy tensor, and decomposes it in two contributions, due to matter and to the scalar field. It happens that the latter is negative. However, what was identified as the matter contribution to T_r^r happens *not* to vanish outside matter. Therefore, the decomposition was flawed, and part of the *positive* contribution of the scalar field to light deflection was actually attributed to matter. The simplest way to understand that a scalar field may indeed increase light deflection is to consider it as a dark matter fluid, without any coupling to baryonic matter and assuming GR as the correct theory of gravity. If the scalar field is massive enough, it will obviously cluster and contribute to the total gravitational potential deflecting light.

Actually, a violation of inequality (9.27) is *a priori* also possible when the scalar's stress-energy contributes significantly to the curvature of the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$. Indeed, specific models could predict a negligible contribution to the time component g_{00}^* but a significant one to the spatial components g_{ij}^* . In such a case, test particles would feel the standard Newtonian potential $-\frac{1}{2}(1 + g_{00}^*)c^2 \approx -GM/r$ [and the extra scalar force caused by the conformal factor $A^2(\varphi)$, which may be tuned to be negligible], but light bending would be directed affected by the scalar-induced corrections entering g_{ij}^* . Therefore, $M_{\text{tot}}^{\text{lens}} > M_{\text{tot}}^{\text{rot}}$ seems possible. However, such models may be difficult to construct if one imposes the positivity of energy, as in Ref. [63]. We will not attempt to study them here, since there is anyway no experimental evidence for $M_{\text{tot}}^{\text{lens}} > M_{\text{tot}}^{\text{rot}}$. Weak-lensing observations only impose $M_{\text{tot}}^{\text{lens}} \sim M_{\text{tot}}^{\text{rot}}$ [241, 242, 243].

Let us end this section by recalling that the conclusion of Ref. [63] remains correct in a limiting case which is often implicitly assumed in MOND-like field theories [184] : If the stress-energy of the scalar field is negligible with respect to that of baryonic matter, then the curvature of the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$ is basically generated by M_{b} alone. Since light only feels $g_{\mu\nu}^*$, weak lensing provides a measure of $M_{\text{tot}}^{\text{lens}} \approx M_{\text{b}}$. In other words, light is only deflected by baryonic matter, whereas experiment tells us that the much greater amount of “dark matter” does deflect it too. We will review in Secs. 9.4 and 9.4 how the same authors as Ref. [63] devised a clever way to solve this crucial difficulty of RAQUAL models.

A RAQUAL example increasing light deflection

Let us illustrate that RAQUAL models may predict a much larger light deflection than if there were baryonic matter alone in GR, i.e., that $M_{\text{tot}}^{\text{lens}} \gg M_{\text{b}}$ is possible. We consider the action

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int \frac{d^4x}{c} \sqrt{-g_*} \left\{ R^* - \ell_0^{2(n-1)} s^n \right\} + S_{\text{matter}} [\psi; \tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}^*], \quad (9.28)$$

where as before $s \equiv g_*^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$, ℓ_0 is a length scale (e.g. $\ell_0 \propto c^2/a_0$ in MOND-like models), and n is a positive odd integer. As underlined at the end of Sec. 9.3, such a model satisfies the two consistency conditions (a) and (b), except on hypersurfaces where s vanishes. It suffices to add a small standard kinetic term $-\varepsilon s$ (with $\varepsilon > 0$) to the above action to cure the singularity on such hypersurfaces. However, we will not take into account this refinement because the above model will anyway not reproduce the correct MOND dynamics.

The field equations deriving from action (9.28) read

$$R_{\mu\nu}^* - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^* R^* = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu}^{\text{matter}*} + T_{\mu\nu}^{*\varphi}), \quad (9.29a)$$

$$n \ell_0^{2(n-1)} \nabla_\mu^* (s^{n-1} \partial_\mu^* \varphi) = -\frac{8\pi G}{c^4} \frac{d \ln A(\varphi)}{d\varphi} T_{\text{matter}}^*, \quad (9.29b)$$

where the stress-energy tensor of the scalar field is given by

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{*\varphi} = (\ell_0^2 s)^{n-1} \left(n \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} s g_{\mu\nu}^* \right). \quad (9.30)$$

Let us choose for instance an exponential (Brans-Dicke-like) matter-scalar coupling function $A(\varphi) = e^{\alpha\varphi}$, so that $d \ln A(\varphi)/d\varphi = \alpha$ is constant. The solution of Eq. (9.29b), around a spherical body of mass M , is then easy to write at lowest order (i.e., neglecting the curvature of spacetime) :

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{2n-1}{2n-3} \left(\frac{2\alpha GM \ell_0}{nr^2 c^2} \right)^{1/(2n-1)} \frac{r}{\ell_0}. \quad (9.31)$$

The stress-energy tensor of the scalar field reads thus

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{*\varphi} = \frac{\alpha GM}{\ell_0 r^2 c^2} \left(\frac{2\alpha GM \ell_0}{nr^2 c^2} \right)^{1/(2n-1)} \left(2\delta_\mu^r \delta_\nu^r - \frac{1}{n} g_{\mu\nu}^* \right), \quad (9.32)$$

and Einstein's equations (9.29a) can now be solved straightforwardly, still to lowest order around a flat Minkowski background. In particular, one may write $(8\pi G/c^4)(T_{00}^{*\varphi} - \frac{1}{2} g_{00}^* T_\varphi^*) = R_{00}^* \approx \frac{1}{2} \Delta \ln(-g_{00}^*)$, and this gives immediately

$$-g_{00}^* = 1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{(n-1)(2n-1)^2}{n(2n-3)} \frac{\alpha GM}{\ell_0 c^2} \left(\frac{2\alpha GM \ell_0}{nr^2 c^2} \right)^{1/(2n-1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (9.33)$$

The R_{rr}^* component of Einstein's equations can now be used to solve for g_{rr}^* , but one must specify the coordinate system to write the solution explicitly. In order to compute easily the light deflection angle below, it will be convenient to use the so-called ‘‘Schwarzschild coordinates’’ (which define an ‘‘area radius’’ r), such that the line element takes the form

$$ds_*^2 = -\mathcal{B}(r)c^2 dt^2 + \mathcal{A}(r) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (9.34)$$

One then finds straightforwardly

$$g_{rr}^* = \mathcal{A}(r) = 1 + \frac{2GM}{rc^2} + \frac{\alpha GM}{n\ell_0 c^2} \left(\frac{2\alpha GM \ell_0}{nr^2 c^2} \right)^{1/(2n-1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (9.35)$$

The physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\alpha\varphi} g_{\mu\nu}^*$ to which matter is coupled can now be deduced from Eqs. (9.31), (9.33) and (9.35). In particular, the gravitational potential felt by test masses reads $V = -\frac{1}{2}(1 + \tilde{g}_{00})c^2$, and its radial derivative $\partial_r V$ gives their acceleration

$$a = \frac{GM}{r^2} + \left(\frac{2\alpha GM \ell_0}{nr^2 c^2} \right)^{1/(2n-1)} \left[\frac{\alpha c^2}{\ell_0} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{2n-3}\right) \frac{\alpha GM}{\ell_0 r} \right]. \quad (9.36)$$

For large enough values of the integer n , this model predicts thus a MOND-like acceleration $\propto 1/r$, together with the standard Newtonian one GM/r^2 and a constant contribution $\alpha c^2/\ell_0$. This constant contribution comes from the conformal factor $A^2(\varphi)$ entering the physical metric, i.e., from a scalar exchange between the massive source M and the test mass, as in line (a) of Fig. 9.5 above. The standard Newtonian force comes from the curvature of the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$ caused by the matter stress-energy tensor. On the other hand, the $1/r$ force comes from the curvature of $\tilde{g}_{\mu\nu}^*$ caused by the stress-energy tensor of the scalar field, as illustrated in line (c) of Fig. 9.5. However, let us underline that this model does *not* reproduce the MOND dynamics, first because the constant contribution happens to dominate over the $1/r$ force, but above all because the coefficient of this $1/r$ force is proportional to the baryonic mass M instead of \sqrt{M} .

In order to compute the light deflection angle predicted by such a model, let us use its exact integral expression [4]

$$\Delta\theta = -\pi + 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left(\frac{\mathcal{A}(r)\mathcal{B}(r)}{\mathcal{B}(r_0)/r_0^2 - \mathcal{B}(r)/r^2} \right)^{1/2}, \quad (9.37)$$

valid for any metric expressed in Schwarzschild coordinates (9.34). In this integral (9.37), r_0 denotes the smallest distance between the light ray and the center of the deflecting body, which may also be replaced by the impact parameter $b = r_0 + \mathcal{O}(1/c^2)$ at lowest order. Actually, since the coordinates we chose to write Eq. (9.35) are such that the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$ takes the Schwarzschild form, this is no longer the case for the physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}^*$, because the radial dependence of the scalar field (9.31) spoils the exact expressions $g_{\theta\theta}^* = r^2$ and $g_{\phi\phi}^* = r^2 \sin^2 \theta$. However, we saw in Sec. 9.4 that light is totally insensitive to any global factor of the metric, so that one may actually compute its deflection directly from the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$. The anomalous terms in Eqs. (9.33) and (9.35) are of the form

$$\mathcal{A}(r) = 1 + \frac{k_{\mathcal{A}}}{r^p}, \quad \mathcal{B}(r) = 1 + \frac{k_{\mathcal{B}}}{r^p}, \quad (9.38)$$

where $p \equiv 2/(2n-1) = \mathcal{O}(1/n)$ is a small number, and where $k_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(1/n)$ whereas $k_{\mathcal{B}} = \mathcal{O}(n)$. For any value of these coefficients, integral (9.37) gives straightforwardly

$$\Delta\theta = \left(\frac{k_{\mathcal{A}}}{p} - k_{\mathcal{B}} \right) \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)}{\Gamma(p/2)} \frac{1}{b^p} + \mathcal{O}(k_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2), \quad (9.39)$$

and in our present case

$$\Delta\theta = \Delta\theta_{\text{GR}} + \frac{\pi}{2} \frac{k_{\mathcal{A}} - p k_{\mathcal{B}}}{b^p} + \mathcal{O}(k_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2) + \mathcal{O}(p^2) \quad (9.40a)$$

$$= \frac{4GM}{bc^2} + \frac{\pi\alpha GM}{\ell_0 c^2} \left(\frac{2\alpha GM \ell_0}{nb^2 c^2} \right)^{1/(2n-1)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (9.40b)$$

It is interesting to note that in Eq. (9.40a), $p k_{\mathcal{B}} = \mathcal{O}(n^0)$ dominates over $k_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(n^{-1})$, in spite of its small factor p . For large values of n , the anomalous contribution $\pi\alpha GM/\ell_0 c^2$ to the deflection angle (9.40b) is precisely *half* the result GR would have predicted in presence of pressureless dark matter reproducing the $1/r$ acceleration in (9.36) [namely, $T_{00}^{\text{dark}} = \alpha M c^2/4\pi\ell_0 r^2$ and $T_{\mu i}^{\text{dark}} = 0$]. This is due to the specific form of the scalar stress-energy tensor (9.32), whose spatial components $T_{ij}^{*\varphi}$ do not vanish. But besides this subtle factor 2 discrepancy with the standard dark matter prediction, let us also recall that light is insensitive to the conformal factor $A^2(\varphi)$, responsible for the dominant anomalous contribution in (9.36), namely the constant one $\alpha c^2/\ell_0$.

In conclusion, using the notation introduced in Sec. 9.4, the present model actually predicts $M_{\text{tot}}^{\text{lens}} \ll M_{\text{tot}}^{\text{rot}}$, which is even worse than the inequality (9.27) derived in standard scalar-tensor theories. On the other hand, for a large enough impact parameter b , the light deflection angle (9.40b), $\Delta\theta \approx \pi\alpha GM/\ell_0 c^2 = \text{const.}$, is much larger than the one predicted by GR in presence of M alone, namely $4GM/bc^2 \rightarrow 0$. Therefore, we have exhibited a RAQUAL model predicting $M_{\text{tot}}^{\text{lens}} \gg M_b$.

One might try to refine the model (9.28) by choosing another matter-scalar coupling function, for instance

$$A(\varphi) = \exp(\alpha\varphi^{-2n}), \quad (9.41)$$

with the same integer n as in the kinetic term of the scalar field. A first useful consequence of such a choice is that the extra constant acceleration we found in Eq. (9.36) above becomes now negligible. Indeed, it came from the conformal factor $A^2(\varphi)$ relating the physical and Einstein metrics, so that this extra acceleration derives now from $\alpha\varphi^{-2n}c^2 = \mathcal{O}(r^{-2n})$, and tends quickly towards 0 as r grows. On the other hand, the $1/r$ acceleration of Eq. (9.36) is still predicted, since it comes from the curvature of the Einstein metric caused by the scalar's stress-energy tensor $\propto 1/r^2$. For large enough impact parameters, such a model predicts thus

$$M_{\text{tot}}^{\text{lens}} \approx \frac{1}{2}M_{\text{tot}}^{\text{rot}} \gg M_b, \quad (9.42)$$

the factor $\frac{1}{2}$ coming from the same calculation as Eq. (9.40) above. The second consequence of the choice (9.41) is that Eq. (9.29b) now involves the non-constant coefficient $d\ln A(\varphi)/d\varphi = -2n\alpha/\varphi^{2n+1}$. If one naively counts the powers of $\partial_r\varphi$ and φ entering this Eq. (9.29b), one could then deduce that $\varphi^{4n} \propto T_{\text{matter}}^* \propto M$. Using now Eq. (9.30), this would imply $T_{\mu\nu}^{*\varphi} \propto (\partial_r\varphi)^{2n} \propto \sqrt{M}$, which looks like the dark matter MOND wishes to mimic. However, this would be the case only if $\varphi \rightarrow 0$ as $r \rightarrow 0$, within body M . Then one can prove that $\varphi \propto \sqrt{r}$ for small radii, and $\int d^3x T_{\mu\nu}^{*\varphi}$ would diverge within the body. Therefore, such a solution is unphysical. On the other hand, if $\varphi \rightarrow \varphi_0 \neq 0$ within the body, then one gets back an exterior solution of the form (9.31), where α is replaced here by $-2n\alpha/\varphi_0^{2n+1}$, so that the anomalous force is *a priori* again proportional to M instead of the looked-for \sqrt{M} . There could still remain a possibility to recover the MOND force with such a RAQUAL model, if one could prove that $\varphi \rightarrow \varphi_0 \propto M^{1/4n}$ within the body. This would be the case for instance if $\varphi \rightarrow 0$ at a given radius, say at the surface of the body. However, this would correspond to a diverging matter-scalar coupling strength at this radius (singular and obviously forbidden by solar-system tests), and we anyway do not see how to impose such a relation, nor the precise value of φ_0 . In standard scalar-tensor theories, the scalar field tends towards a constant φ_0 when $r \rightarrow \infty$, this constant being imposed by the cosmological evolution of the Universe, and being constrained by post-Newtonian tests of gravity in the solar system. Here, the scalar field $\varphi = \varphi_0 + \text{const.} r^{1-2/(2n-1)}$ diverges at infinity, as soon as a single particle exists in the Universe. This pathological behavior is linked with the fact that the solution of Eq. (9.29b) cannot be written unambiguously, the integration constant φ_0 remaining undetermined. In the model (9.31), where $A(\varphi) = e^{\alpha\varphi}$, this constant did not enter any physical observable, but it does when the matter-scalar coupling function is no longer a mere exponential, as in our present attempt (9.41). Therefore, although this matter-scalar coupling function looks promising to reproduce the MOND dynamics from a simple RAQUAL model, it fails to define a fully predictive theory. Its only solid prediction is that light bending would be *twice smaller* than the prediction of GR in presence of dark matter, cf. Eq. (9.42). As far as we know, this is still allowed by weak-lensing observations [241, 242, 243].

In conclusion, we have exhibited RAQUAL models predicting a much larger light deflection than GR in presence of baryonic matter alone, but this framework does not seem to reproduce the

MOND dynamics consistently. Note that the class of RAQUAL theories examined in the present subsection 9.4 are actually models of *dark matter*. Extra Newtonian force and light deflection are caused by the stress-energy tensor of the scalar field, which plays thus the role of dark matter. The only difference with standard dark matter models is that its distribution is strictly imposed by the one of baryonic matter, whereas they are usually only related via the dynamical evolution of large-scale structures.

Disformal coupling

A nice trick exists to increase light deflection within scalar-tensor theories or RAQUAL models. It is similar to Ni's "stratified theory of gravity" [21, 46], and was introduced by Bekenstein in [20]; see also [63]. Instead of assuming that matter is coupled to a physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}^*$, conformally related to the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$, one may consider a "disformal" relation of the form

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi, s)g_{\mu\nu}^* + B(\varphi, s)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi, \quad (9.43)$$

where as before $s \equiv g^{*\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$. The crucial difference is that the $\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$ contribution now privileges a particular direction, namely the radial one in spherically symmetrical systems. This extra contribution may remain negligible in the equations of motion of test particles, but now light can be directly sensitive to the presence of the scalar field, contrary to the case of conformal coupling that we discussed in Sec. 9.4.

Let us emphasize that because of the disformal coupling above, light (or matter) can travel faster or slower than gravitons depending on the sign of B . In a similar way as in Sec. 9.3, this does not imply a violation of causality, provided that the matter metric is still of Lorentzian signature. The matter metric Eq. (9.43) is causal if

$$A^2(\varphi, s) > 0 \quad \text{and} \quad A^2(\varphi, s) + sB(\varphi, s) > 0 \quad (9.44)$$

for all φ and s . Notice that if A does not depend on s , B must depend on s for the latter inequality to hold. Beware that these kind of models used in the literature as realizations of varying speed of light scenarios [30, 31] do not respect this last inequality. Indeed, whereas A was taken to be 1, B was chosen constant $B = -L^2$ with L being some fixed length scale. Therefore matter field equations are elliptic at local scales ($s > 1/L^2$), and do not have a well-posed Cauchy problem.

By analogy with the Schwarzschild metric, whose positive contribution in the radial component $g_{rr} = 1 + 2GM/rc^2 + \mathcal{O}(1/c^4)$ contributes positively to light deflection (together with the standard Newtonian potential involved in g_{00}), one understands intuitively that positive values of $B(s, \varphi)$ should increase light deflection. To prove it, let us first recall again that light is insensitive to any global factor of the metric, because of the conformal invariance of electromagnetism in 4 dimensions, Eq. (9.23). Therefore, instead of the metric (9.43), one may equivalently consider $\bar{g}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}^* + (B/A^2)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$. Let us then assume that the coordinates have been chosen so that the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$ takes the Schwarzschild form (9.34). Since, in a static and spherically symmetric situation, the disformal contribution $(B/A^2)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$ only contributes to the radial component \bar{g}_{rr} , the metric $\bar{g}_{\mu\nu}$ is also of the Schwarzschild form, and one may thus use integral (9.37) to compute the light deflection angle. The only difference with GR is that the radial metric component now reads $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{GR}} + (B/A^2)(\partial_r\varphi)^2$. [Beware not to confuse the metric components $\mathcal{A} \equiv \bar{g}_{rr}$ and $\mathcal{B} \equiv -\bar{g}_{00}$ defined in (9.34) with the scalar-field functionals $A(s, \varphi)$ and $B(s, \varphi)$ entering (9.43).] At first post-Newtonian order, all contributions coming from $g_{\mu\nu}^*$ reproduce the general relativistic result, and the only extra contribution is thus the one proportional to $(B/A^2)(\partial_r\varphi)^2$, assumed to be of order $\mathcal{O}(1/c^2)$ too :

$$\Delta\theta = \Delta\theta_{\text{GR}} + \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr/r}{\sqrt{r^2/r_0^2 - 1}} \frac{B(\partial_r\varphi)^2}{A^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (9.45)$$

Even without performing the explicit integration in particular models, it is thus clear that a positive value of $B(s, \varphi)$ always gives a positive contribution to light bending, since the extra term in (9.45) is the integral of a positive function.

For instance, if one tunes the model such that $(B/A^2)(\partial_r \varphi)^2 = 4\sqrt{GMa_0}/c^2$ is independent of r (as we will do in Sec. 9.6 below), then

$$\Delta\theta = \Delta\theta_{\text{GR}} + \frac{2\pi\sqrt{GMa_0}}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad (9.46)$$

and the second term reproduces exactly the deflection GR would have predicted in presence of dark matter (which is independent of the impact parameter,¹² as if there were a deficit angle in a flat conical space). Indeed, it is straightforward to prove that a dark matter density $T_{00}/c^2 = \sqrt{GMa_0}/4\pi Gr^2$ generates a logarithmic MOND-like potential in the time component of the metric, $-\tilde{g}_{00} = 1 - 2GM/rc^2 + 2\sqrt{GMa_0} \ln r/c^2 + \mathcal{O}(1/c^4)$, and that the corresponding radial metric reads $\tilde{g}_{rr} = 1 + 2GM/rc^2 + 2\sqrt{GMa_0}/c^2 + \mathcal{O}(1/c^4)$ in Schwarzschild coordinates. A similar calculation as above then yields the same light deflection angle (9.46) [see Eq. (9.54) below for an explicit derivation]. Note in passing that $\tilde{g}_{rr} \neq -1/\tilde{g}_{00}$ in such coordinates, contrary to the standard Schwarzschild solution in vacuum. On the other hand, if one rewrites this same metric in isotropic coordinates, $d\tilde{s}^2 = -\tilde{g}_{00}c^2 dt^2 + \tilde{g}_{\rho\rho}(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$, one indeed recovers the usual relation $\tilde{g}_{\rho\rho} = -1/\tilde{g}_{00} + \mathcal{O}(1/c^4) = 1 + 2GM/\rho c^2 - 2\sqrt{GMa_0} \ln \rho/c^2 + \mathcal{O}(1/c^4)$. This remark recalls us that a metric is coordinate-dependent, and that observable quantities cannot be read naively in its coefficients. Even the signs of the predicted effects are not obvious. For instance, if one had naively tried to impose $A^2(s, \varphi) = (1 + 2\sqrt{GMa_0} \ln r/c^2)$ but $\tilde{g}_{rr} = -1/\tilde{g}_{00}$ in Eq. (9.43), then one would have needed a negative $B(s, \varphi)$, and the predicted deflection angle would have been negative (and diverging), $\Delta\theta = \Delta\theta_{\text{GR}} - 2\pi\sqrt{GMa_0} \ln 2b/c^2$.

Equation (9.45) proves that a positive value of $B(s, \varphi)$ always increases light deflection. However, light rays satisfy then $\tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \Leftrightarrow g_{\mu\nu}^* dx^\mu dx^\nu = -B/A^2 (\partial_\mu \varphi dx^\mu)^2 \leq 0$, and photons are thus timelike with respect to the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$. This has been considered as a serious flaw by the authors of Refs. [20, 63]. Indeed, this means that gravitons (i.e., perturbations of the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$) are superluminal, and it was believed that this implied causality violations. References [63] even present the reasoning the other way : If one imposes from the beginning that no field (even gravity) can propagate faster than light, then a disformal coupling (9.43) needs $B \leq 0$, therefore light deflection is even *smaller* than the one predicted in standard scalar-tensor or RAQUAL models, see Sec. 9.4. This sufficed for the authors of these references to discard such models. Actually, as already discussed in Sec. 9.3, such a superluminal propagation does not threaten causality. This is even clearer in the present case, since one is used to write the field equations in terms of the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$ (i.e., in what is usually called the ‘‘Einstein frame’’), in order to diagonalize the kinetic terms and prove that the Cauchy problem is well posed. To guarantee causality, like in GR, one needs to assume that the topology of spacetime does not involve any closed timelike curve with respect to $g_{\mu\nu}^*$. Since the causal cone of matter, defined by the physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$, is always interior to the one defined by $g_{\mu\nu}^*$ if $B > 0$, there cannot exist any CTC for any field. In conclusion, the nice trick of disformal coupling, Eq. (9.43), is consistent from the point of view of causality.

It remains however to study its consistency within matter. Indeed, the physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$ is involved in many places of the matter action, to contract indices, to define covariant derivatives, and in the volume element $\sqrt{-\tilde{g}} d^4x$. One should thus take into account the matter contribution

¹²Note that although the deflection angle is constant, the *direction* of deflection is radial with respect to the deflecting body, so that distant objects are deformed and weak lensing observations can be performed. A constant deflection angle in a constant direction would have just shifted globally the image of the distant objects, without any deformation.

$\delta S_{\text{matter}}[\psi; \tilde{g}_{\mu\nu}]/\delta\varphi$ in the Euler-Lagrange equation (9.16) for φ , and study simultaneously the matter field equations $\delta S_{\text{matter}}[\psi; \tilde{g}_{\mu\nu}]/\delta\psi = 0$ (where as before ψ denotes any matter field). One should then identify any second derivative of φ which appears in them, and prove that the full set of field equations, for matter, the scalar field and the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$, has a well-posed Cauchy problem. This is usually done by diagonalizing the kinetic terms, i.e., by separating all second derivatives in the left-hand side of the field equations, and by proving that their differential operator is hyperbolic. In the general case of a theory involving any kind of matter, this is quite involved and we postpone this crucial study to a future work. Indeed, if one considers an action of the form (9.15) with a physical metric (9.43), the scalar field equation reads

$$\begin{aligned} & \sqrt{-g^*} \nabla_\mu^* \left[\frac{\partial f}{\partial s} \nabla_\mu^* \varphi \right] \\ & - \frac{4\pi G}{c^4} \partial_\mu \left\{ \sqrt{-\tilde{g}} \left[B \tilde{T}^{\mu\nu} + 2 \frac{\partial \ln A}{\partial s} \tilde{T} g_*^{\mu\nu} + \left(\frac{\partial B}{\partial s} - 2B \frac{\partial \ln A}{\partial s} \right) \tilde{T}^{\rho\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi g_*^{\mu\nu} \right] \partial_\nu \varphi \right\} \\ & = \sqrt{-g^*} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) - \frac{4\pi G}{c^4} \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\partial \ln A}{\partial \varphi} \tilde{T} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial \varphi} - B \frac{\partial \ln A}{\partial \varphi} \right) \tilde{T}^{\rho\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi \right], \end{aligned} \quad (9.47)$$

where $\tilde{T}^{\mu\nu} \equiv (2c/\sqrt{-\tilde{g}}) \delta S_{\text{matter}}/\delta \tilde{g}_{\mu\nu}$ is the physical stress-energy tensor, $\tilde{T} \equiv \tilde{T}^{\mu\nu} \tilde{g}_{\mu\nu}$, and $\tilde{g} = A^8(1 + sB/A^2)g_*$ from definition (9.43). Note that Eq. (9.47) reduces to Eq. (9.17) for $A = e^{\alpha\varphi}$ and $B = 0$. The right hand side of the above equation does not involve any second derivative and is merely a source term [if $\partial A/\partial\varphi$ were vanishing, $\partial_\mu\varphi = 0$ would always be a solution]. The left hand side however contains second derivatives of the scalar field *and* of matter fields, through terms like $\partial\tilde{T}$. The equation is not diagonal and, moreover, the effective metric multiplying the second derivative of φ has a rather complicated expression that notably involves terms like $\tilde{T}^{\mu\nu}$, $\tilde{T}^{\rho\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi$. The Lorentzian signature of the latter is therefore a quite involved question, even if we expect that it may depend on generic energy conditions in the matter sector. Note that the literature on such MOND-like field theories did *not* discuss the consistency of the field equations within matter. We will not examine either the fully general case in the present paper, but we wish to underline that this *should* be done. We will however analyze below the particular case where matter is described by a pressureless and isentropic perfect fluid. Although much simpler than the general case, it is relevant for most matter in the universe, and exhibits the subtle conditions which must be imposed on the coupling constants A and B for the scalar field equation to remain always consistent. As far as we are aware, this is the first time such a discussion is presented.

The action defining a pressureless and isentropic perfect fluid reads $S_{\text{matter}} = - \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\rho} c$, where $\tilde{\rho}$ is the conserved matter density as observed in the Jordan frame. If $\tilde{u}^\lambda \equiv dx^\lambda / \sqrt{-\tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ denotes the matter unit 4-velocity, one has thus $\tilde{\nabla}_\lambda(\tilde{\rho} \tilde{u}^\lambda) = 0$, which can be equivalently written in terms of a partial derivative as $\partial_\lambda(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\rho} \tilde{u}^\lambda) = 0$. This equation implies that the matter current density $\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\rho} \tilde{u}^\lambda$ is determined everywhere once initial conditions are given at a point of the flowlines, and it is therefore unchanged if the metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$ is varied : $\delta(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\rho} \tilde{u}^\lambda)/\delta \tilde{g}_{\mu\nu} = 0$. In particular, the coordinate-conserved density¹³ $\bar{\rho} \equiv \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\rho} \tilde{u}^0$ is independent of the Jordan metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$, and thereby independent of both the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$ and the scalar field φ (as well as its derivatives $\partial_\mu\varphi$). The pressureless perfect fluid action may thus be written as $S_{\text{matter}} = - \int d^4x \bar{\rho} c / \tilde{u}^0 = - \int d^3x \bar{\rho} c \sqrt{-\tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$, which does depend explicitly on the scalar field via the Jordan metric (9.43), and therefore contributes to the scalar-field dynamics within matter. Introducing the Einstein-frame unit 4-velocity $u_*^\lambda \equiv dx^\lambda / \sqrt{-g_{\mu\nu}^* dx^\mu dx^\nu}$

¹³The coordinate-conserved density $\bar{\rho}$ is often denoted as ρ^* in the general relativistic literature, but this star index would be confusing in our present context where Einstein-frame quantities already bear such an index.

(independent of φ and its derivatives), one may thus write the action of the scalar field as

$$S_\varphi = -\frac{c^4}{8\pi G} \int \frac{d^4x}{c} \sqrt{-g_*} [f(s, \varphi) + 2V(\varphi)] - \int \frac{d^4x}{c} \frac{\bar{\rho}c^2}{u_*^0} \sqrt{A^2(\varphi, s) - (u_*^\mu \partial_\mu \varphi)^2 B(\varphi, s)}, \quad (9.48)$$

where all the scalar-field dependences are now explicitly exhibited (neither $\sqrt{-g_*}$ nor $\bar{\rho}c^2/u_*^0$ depend on it). In conclusion, the dynamics of the scalar field within matter is described by an action generalizing the RAQUAL form (9.15), in which the function $f(\varphi, s)$ is replaced by

$$\tilde{f}(\varphi, s, u_*^\mu \partial_\mu \varphi) = f(\varphi, s) + \frac{8\pi G \bar{\rho}}{\sqrt{-g_*} u_*^0 c^2} A \sqrt{1 - (u_*^\mu \partial_\mu \varphi)^2 B/A^2}, \quad (9.49)$$

where $A(\varphi, s)$ and $B(\varphi, s)$ are themselves functions of the scalar field and $s \equiv g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$. Since the derivatives of the scalar field do not enter only via s but also via $u_*^\mu \partial_\mu \varphi$, the conditions that such a function \tilde{f} must satisfy to define a consistent scalar-field equation (hyperbolicity and Hamiltonian bounded by below) are significantly more complicated than (a) and (b) of Sec. 9.3 above [that f itself must still satisfy to define a consistent scalar-field equation in vacuum]. Using as before a prime to denote partial derivation with respect to s , i.e., $\tilde{f}' \equiv \partial \tilde{f}(\varphi, s, u_*^\mu \partial_\mu \varphi) / \partial s$, and introducing the shorthand notation $\hat{\rho} \equiv 2\pi G \bar{\rho} / \sqrt{-g_*} u_*^0 c^2$, $C \equiv B / \sqrt{A^2 - (u_*^\mu \partial_\mu \varphi)^2 B}$, and $D \equiv C + (u_*^\mu \partial_\mu \varphi)^2 C^3 / B$, the hyperbolicity conditions for the scalar field equation within matter may be written as

$$(a1) \quad \tilde{f}' > 0,$$

$$(b1) \quad s\tilde{f}'' + \tilde{f}' + \hat{\rho}D - 4\hat{\rho}(u_*^\mu \partial_\mu \varphi)^2 C'$$

$$\pm \left\{ (s\tilde{f}'' - \hat{\rho}D)^2 - 4\hat{\rho}(u_*^\mu \partial_\mu \varphi)^2 (\tilde{f}'' + 2\hat{\rho}C') (2sC' + D) \right\}^{1/2} > 0.$$

Note that in condition (b1), the inequality must be satisfied for both signs of the square root, and it suffices thus to check its lowest value, involving a minus sign. At the lowest post-Newtonian level, in the limit $(u_*^\mu \partial_\mu \varphi)^2 \ll |s|$, one may simplify these conditions as

$$(a2) \quad \tilde{f}' > 0,$$

$$(b2) \quad 2s\tilde{f}'' + \tilde{f}' > 0,$$

$$(c2) \quad \tilde{f}' + 2\hat{\rho}C > 0.$$

If B is chosen positive in Eq. (9.43), in order to increase light deflection in the MOND regime, then $\hat{\rho}C > 0$ and condition (c2) is implied by (a2). On the other hand, in the ultrarelativistic regime, or in the cosmological one where $|\partial_0 \varphi| \gg |\partial_i \varphi|$, conditions (a1) and (b1) reduce to

$$(a3) \quad \tilde{f}' > 0,$$

$$(b3) \quad 2s\tilde{f}'' + \tilde{f}' + 2\hat{\rho}(4sC' + D) > 0.$$

Note however that conditions (a1) and (b1) should in principle be satisfied in any situation (within matter), in order for the model to always remain a well-defined field theory.

In addition to (a1) and (b1), the contribution of the scalar field to the Hamiltonian should also be bounded by below. In the rest frame of the perfect fluid, such that $u_*^\mu = (1, 0, 0, 0)$, and simultaneously with coordinates which diagonalize locally the Einstein metric $g_{\mu\nu}^* = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, this contribution is proportional to $\tilde{f} + 2(\partial_0 \varphi)^2 (\tilde{f}' + 2\hat{\rho}C)$. The general conditions needed to ensure that it is bounded by below are more involved. It suffices to check that this is indeed the case for each particular model that one may consider.

Let us finally mention that no extra condition is necessary to ensure that the argument of the square root is positive in Eqs. (9.48)-(9.49). Indeed, since matter is assumed to be metrically

coupled to the Jordan metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$, we *know* that $\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{u}^\mu\tilde{u}^\nu = -1$, i.e., that the matter 4-velocity must be timelike with respect to $\tilde{g}_{\mu\nu}$. This implies $1 - (u_*^\mu\partial_\mu\varphi)^2 B/A^2 > 0$, which should be understood as a condition (automatically) satisfied by the Einstein-frame 4-velocity u_*^μ , but not as a constraint on the functions $A(\varphi, s)$ and $B(\varphi, s)$.

Besides this important question of the consistency of the scalar field equation within matter, it also remains to study the precise predictions of this class of models. Specific examples have been analyzed in Refs. [20, 63, 30, 31]. We will examine a very different one in Sec. 9.6 below, but still within this class of disformally coupled scalar-tensor theories. We will notably show that the predicted light deflection can be consistent both with weak-lensing determinations of dark matter and with post-Newtonian tests in the solar system.

Stratified theories

Because the above superluminal propagation of gravity was considered as deadly, Sanders proposed in [23, 143] another kind of disformal coupling, where the physical metric to which matter is universally coupled takes the form

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}^* + B(\varphi)U_\mu U_\nu. \quad (9.50)$$

This is thus strictly the same form as Eq. (9.43) above, but the gradient $\partial_\mu\varphi$ has been replaced by a vector field U_μ (not to be confused with the matter unitary velocities \tilde{u}^μ and u_*^μ introduced in Sec. 9.4 above). Bekenstein's theory TeVeS [24, 178] also assumes the above disformal relation. The dynamics of the vector field is defined by a specific kinetic term of the Proca form $(\partial_{[\mu}U_{\nu]})^2$, and its norm is imposed to be $g_*^{\mu\nu}U_\mu U_\nu = -1$ thanks to a Lagrange parameter. The reason why it is necessary to fix its norm is because the magnitude of scalar-field effects would otherwise depend on the background norm of the vector field. Since backgrounds where $U_\mu = 0$ would be possible, one would not predict any extra light deflection caused by the scalar field in such situations. Moreover the Lagrange multiplier ensures that the vector field equation is consistent with any type of matter one considers. Indeed, without the Lagrange multiplier, the equation of motion reads

$$\nabla_\mu^*(\nabla_*^{[\mu}U_*^{\nu]}) \propto \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{\sqrt{-g_*}}\tilde{T}^{\rho\nu}U_\rho, \quad (9.51)$$

where $U_*^\nu \equiv g_*^{\mu\nu}U_\mu$, and its divergence imposes that the stress-energy tensor of matter must satisfy the non-trivial property $\nabla_\nu^*(\sqrt{-\tilde{g}}/\sqrt{-g_*}\tilde{T}^{\rho\nu}U_\rho) = 0$, that may be satisfied only by very particular type of matter. On the other hand, a term like $\lambda(U_\mu U_*^\mu + 1)$ in the action, where λ is a Lagrange multiplier, gives rise to a term proportional to λU_*^ν in the left hand side of Eq. (9.51), whose divergence equals the *a priori* non vanishing divergence of the right hand side, thus giving its value to λ . Note finally that the consistency of the field equations requires that the above matter metric Eq. (9.50) has a Lorentzian signature. This condition reads $A^2 > 0$ and $A^2 > B$ for all φ , where we used $U_\mu U_*^\mu = -1$.

One could think that the vector field is chosen timelike (negative norm), contrary to the gradient $\partial_\mu\varphi$ in the vicinity of clustered matter, in order to preserve isotropy of space which is very well tested experimentally. However, this is not the case, since a timelike vector does define a preferred frame (i.e., an “ether”), namely the one where it takes the canonical form $U_\mu = (\pm 1, 0, 0, 0)$. We will briefly discuss the related experimental difficulties in Sec. 9.5 below.

The bonus added by this vector field U_μ , with respect to the purely scalar case (9.43), is threefold : (i) it allows us to increase light deflection without necessitating superluminal propagation of gravity ; (ii) it can also be used to tune a specific kinetic term for the scalar field, in order to avoid its own superluminal propagation identified in Sec. 9.3 above ; (iii) the dynamics of the various fields is easier to analyze even within matter, and there does not seem

to exist any generic difficulty with the Cauchy problem. Of course, the third point is actually the only useful one, since we know that superluminal propagation does not threaten causality provided there always exists a nonvanishing exterior to the union of all causal cones, as discussed in Sec. 9.3 above and in Ref. [233]. However, the real reason why this vector was considered in Refs. [23, 24, 178, 143] is indeed to avoid any superluminal propagation. Point (ii) is easy to understand : If the kinetic term of the scalar field is defined as $(g_*^{\mu\nu} - U_*^\mu U_*^\nu)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$, instead of the standard $s = g_*^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$, then a violation of condition (c) of Sec. 9.3 only implies that the scalar causal cone is exterior to the one defined by the inverse of $g_*^{\mu\nu} - U_*^\mu U_*^\nu$, namely $g_{\mu\nu}^* + \frac{1}{2}U_\mu U_\nu = \text{diag}(-\frac{1}{2}, 1, 1, 1)$ in the preferred frame and in locally inertial coordinates. It becomes thus possible to reproduce the MOND dynamics while avoiding a propagation of φ outside the causal cone defined by $g_{\mu\nu}^* = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Since point (i) is subtler, we discuss it now in more detail.

It is actually quite simple to understand why a coupling of matter (including electromagnetism) to the disformal metric (9.50) suffices to increase light deflection. The basic idea is similar to the case of the previous disformal coupling (9.43) : Photons are now directly coupled to the scalar field, whereas they do not feel any global factor of the metric. More precisely, in the preferred frame where $U_\mu = (\pm 1, 0, 0, 0)$, and in locally inertial coordinates such that $g_{\mu\nu}^* = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ at a given spacetime point, one notices that $-U_\mu U_\nu = \text{diag}(-1, 0, 0, 0)$ behaves like the g_{00}^* component of the metric, and conversely that $g_{\mu\nu}^* + U_\mu U_\nu = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$ behaves like its spatial components g_{ij}^* . The vector field is thus a mere tool to separate by hand the space and time components of a tensor (implying obviously a violation of Lorentz invariance, namely the existence of an ether). Its interest is that one may now multiply g_{00}^* and g_{ij}^* by *different* functions of the scalar field. Inverse factors $e^{2\alpha\varphi}$ and $e^{-2\alpha\varphi}$ have been chosen in Refs. [24, 178, 23, 143], in order to mimic GR in isotropic coordinates. One could consider more generally inverse factors $A^2(\varphi)$ and $A^{-2}(\varphi)$, but an exponential (Brans-Dicke-like) coupling $A(\varphi) = e^{\alpha\varphi}$ suffices to predict the right phenomenology. The physical metric is thus chosen as

$$\tilde{g}_{00} = e^{2\alpha\varphi} g_{00}^* ; \quad \tilde{g}_{ij} = e^{-2\alpha\varphi} g_{ij}^*. \quad (9.52)$$

This can be rewritten covariantly thanks to the vector field U_μ defining the preferred frame :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu} &= -e^{2\alpha\varphi} U_\mu U_\nu + e^{-2\alpha\varphi} (g_{\mu\nu}^* + U_\mu U_\nu) \\ &= e^{-2\alpha\varphi} g_{\mu\nu}^* - 2U_\mu U_\nu \sinh(2\alpha\varphi). \end{aligned} \quad (9.53)$$

This matter metric has a Lorentzian signature, as can be easily checked. Beware that our notations differ slightly from those of Refs. [24, 178]. In these references, the matter-scalar coupling constant α reads $\sqrt{k/4\pi}$ where k is a dimensionless parameter.

In order to reproduce the MOND dynamics at large distances, the model must be tuned so that $e^{2\alpha\varphi} = 1 + 2\sqrt{GMa_0} \ln r/c^2$ in this regime. Moreover, if one insists on the fact that photons should propagate faster than gravitons (even if it is actually not necessary), one must have $\alpha\varphi \geq 0$ at every spacetime point. The logarithm entering this MOND potential should therefore be understood as $\ln(r/\ell)$, where ℓ is a length scale significantly smaller than the size of the considered galaxy (either imposed dynamically by the model, or simply a universal constant much smaller than the size of any galaxy). Indeed, $d\tilde{s}^2 = 0 \Leftrightarrow ds_*^2 = 2e^{2\alpha\varphi} \sinh(2\alpha\varphi)(U_\mu dx^\mu)^2 \geq 0$ because $\alpha\varphi \geq 0$, and the cone defined by $\tilde{g}_{\mu\nu}$ is thus wider than the one defined by $g_{\mu\nu}^*$.

Note that the character spacelike of $\partial_\mu\varphi$ or timelike of U_μ does not change the sign of the square $(\partial_\mu\varphi dx^\mu)^2$ or $(U_\mu dx^\mu)^2$. The crucial difference is that we now consider a *negative* factor for the term $U_\mu U_\nu$ entering the disformal metric (9.53), whereas we needed a *positive* value of $B(s, \varphi)$ to increase light bending with metric (9.43). In fact, it may seem paradoxical to increase light bending with the negative term entering Eq. (9.53), since photons now propagate faster than

in GR (i.e., faster than gravitons), if $\alpha\varphi > 0$. Intuitively, the trajectories of fast particles are almost straight lines, whereas slower ones are significantly curved by the Newtonian potential. This reasoning just happens to be erroneous,¹⁴ because light bending depends very differently on the temporal (\tilde{g}_{00}) and spatial (\tilde{g}_{ij}) components of the metric, as illustrated by Eq. (9.37) in Schwarzschild coordinates. At linear order, Ref. [63] actually proves that this integral involves the radial derivative $\partial_r \tilde{g}_{00}$ of the time component, thanks to a partial integration, whereas the radial component \tilde{g}_{rr} enters it without any derivation.¹⁵ In other words, one needs an additional positive term in \tilde{g}_{rr} to increase light bending, as proven in Eq. (9.45) above, but one needs a term whose radial derivative is negative if it enters \tilde{g}_{00} , as in Eq. (9.53) above. This is the reason why the Newtonian and MOND potentials enter so differently in the metric predicted by GR in presence of dark matter $\tilde{g}_{00} = -1 + 2GM/rc^2 - 2\sqrt{GMa_0} \ln r/c^2$ and $\tilde{g}_{rr} = 1 + 2GM/rc^2 + 2\sqrt{GMa_0}/c^2$ [see below Eq. (9.46)]. In spite of their relative signs, all the above terms contribute positively to light bending, because those entering \tilde{g}_{rr} are positive, and because the derivatives of those entering \tilde{g}_{00} are negative.

The above discussion illustrates once again that observable quantities, or even their signs, can be subtle to identify in the components of a metric tensor. The only way to be sure of an observable prediction is to compute it explicitly. We already mentioned, below Eq. (9.46), that the GR metric in presence of dark matter takes precisely the form (9.52) in isotropic coordinates. Let us however derive now the light deflection angle it predicts. First of all, since light is insensitive to any global factor, let us multiply it by $e^{2\alpha\varphi}$, i.e., consider instead the metric $\bar{g}_{00} \equiv e^{4\alpha\varphi} g_{00}^*$ and $\bar{g}_{ij} \equiv g_{ij}^*$. If the coordinates have been chosen so that the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$ takes the Schwarzschild form (9.34), this is also the case for $\bar{g}_{\mu\nu}$ and one may thus use the integral expression (9.37). At first post-Newtonian order, all contributions coming from $g_{\mu\nu}^*$ reproduce the general relativistic result,¹⁶ and the only extra contribution is proportional to the scalar field, namely $\alpha\varphi = \alpha\varphi_0 + \sqrt{GMa_0} \ln r/c^2 + \mathcal{O}(1/c^4)$ in the MOND regime. One thus gets straightforwardly

$$\begin{aligned}
\Delta\theta &= \Delta\theta_{\text{GR}} + 4\alpha \int_{r_0}^{\infty} \frac{\varphi(r) - \varphi(r_0)}{(1 - r_0^2/r^2)^{3/2}} \frac{r_0 dr}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right) \\
&= \Delta\theta_{\text{GR}} + \frac{4\sqrt{GMa_0}}{c^2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{\ln(r/r_0)}{(1 - r_0^2/r^2)^{3/2}} \frac{r_0 dr}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right) \\
&= \Delta\theta_{\text{GR}} + \frac{4\sqrt{GMa_0}}{c^2} \left[\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right) - \frac{(r_0/r) \ln(r_0/r)}{\sqrt{1 - r_0^2/r^2}} \right]_{r_0}^{\infty} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right) \\
&= \Delta\theta_{\text{GR}} + \frac{2\pi\sqrt{GMa_0}}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{9.54}
\end{aligned}$$

which confirms that the light deflection angle is positive although photons are faster than in GR (with respect to the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$). This angle is exactly the one predicted by GR, when a spherical halo of dark matter is assumed to generate a Newtonian potential $\sqrt{GMa_0} \ln r$.

¹⁴As an illustration of that point, let us recall that the scalar field surrounding a body of mass M is not only given by $\varphi_{\text{local}} = -\alpha GM/rc^2$ (or $\sqrt{GMa_0} \ln r/\alpha c^2$, depending on the regime), but more generally by $\varphi_0 + \varphi_{\text{local}}$ when one takes into account the asymptotic value of the scalar field φ_0 which evolves with cosmic time. Since the “speed” of photons (or, more precisely, their character timelike, null or spacelike with respect to the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$) depends on the sign of $\varphi_0 + \varphi_{\text{local}}$, one may expect that light bending would be affected by φ_0 . Actually this is not the case, as shown by the first line of Eq. (9.54).

¹⁵This also explains why the time component $k_{\mathcal{B}}$ enters multiplied by a factor $-p$ in Eq. (9.40a), contrary to the radial component $k_{\mathcal{A}}$.

¹⁶Actually, there is a subtle modification of the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$ itself in TeVeS, because of the contribution of the energy-momentum tensor of the unit vector U_μ ; see Eq. (58) of [24] and Eq. (6.2) of [178]. However, this correction is chosen to be negligible in TeVeS.

Moreover, the first line makes it clear that the background value of φ does not contribute to the integral. It must be stressed that the sign of φ is not crucial in itself; what is important is that its *derivative* is positive. It is therefore possible to have a cosmological background such that $\alpha\varphi < 0$ locally whereas the amount of light deflection remains the same. This remark will be of great importance in Sec. 9.5, since we will show that an empirical fact strongly supports that gravitons should propagate at a speed greater (or equal) than the speed of photons (i.e., that $\alpha\varphi$ should be negative).

Although the above construction seems natural (apart from the existence of a preferred frame), let us however underline that it is actually quite *ad hoc*. Indeed, the relation (9.52) has been imposed by hand precisely to mimic GR's metric, but any other relation between g_{00}^* and g_{ij}^* would have predicted another light deflection angle. Even without considering the general case (9.50), where $A(\varphi)$ and $B(\varphi)$ are fully independent functions of the scalar field, it is instructive to analyze a disformal coupling slightly generalizing Eq. (9.53), namely

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = -e^{2\alpha\varphi}U_\mu U_\nu + e^{-2\kappa\alpha\varphi}(g_{\mu\nu}^* + U_\mu U_\nu), \quad (9.55)$$

where κ and the matter-scalar coupling constant α are dimensionless numbers to be constrained by experiments. The tightest experimental constraints come from solar-system tests, i.e., in the Newtonian regime of such theories, where one must have $\varphi = \varphi_0 - \alpha GM/rc^2$. A nonvanishing background value φ_0 of the scalar field is necessary to respect the inequality $\alpha\varphi \geq 0$, imposed in Ref. [24] to avoid superluminal gravitons. Since $GM/Rc^2 \leq \frac{1}{2}$ for any body of mass M and radius R , it suffices to impose $\varphi_0/\alpha \geq \frac{1}{2}$. (Let us however recall that superluminal gravitons are actually *not* a problem, as discussed in Sec. 9.3 above and in Ref. [233].) In this Newtonian regime, metric (9.55) reads thus $\tilde{g}_{00} = \exp(2\alpha\varphi_0) [-1 + 2(1 + \alpha^2)GM/rc^2] + \mathcal{O}(1/c^4)$ and $\tilde{g}_{ij} = \exp(-2\kappa\alpha\varphi_0)\delta_{ij}[1 + 2(1 + \kappa\alpha^2)GM/rc^2] + \mathcal{O}(1/c^4)$, where the constant exponential factors may be eliminated by a redefinition of (physical) time and length units. The Eddington post-Newtonian parameter γ^{PPN} is thus given by

$$\gamma^{\text{PPN}} = \frac{1 + \kappa\alpha^2}{1 + \alpha^2} = 1 + \frac{(\kappa - 1)\alpha^2}{1 + \alpha^2}. \quad (9.56)$$

The Cassini constraint [48] on this parameter imposes therefore $|\kappa - 1|\alpha^2/(1 + \alpha^2) < 2 \times 10^{-5}$. In conclusion, experiment forces us to fine tune $\kappa \approx 1$, otherwise the matter-scalar coupling constant α needs to be small and we get back the serious problem pointed out in Sec. 9.3 above: The MOND logarithmic potential starts manifesting at too small distances, and one needs unnatural RAQUAL kinetic terms like the one of Fig. 9.3 to pass solar-system tests. [Note that $\kappa = 1 \pm 0.1$ suffices for the Newton-MOND transition to be much smoother than in this Figure, allowing a Newtonian regime up to distances ~ 100 AU instead of 30 AU, but this remains nevertheless a quite fine-tuned behavior.] On the other hand, if $\kappa = 1$ strictly, as chosen in Refs. [24, 178, 23, 143], there is no longer any post-Newtonian solar-system constraint on the matter-scalar coupling constant α , and one may thus *a priori* choose $\alpha = 1$ and a RAQUAL kinetic term of the natural form of Fig. 9.2. [The fact that $\kappa = 1$ implies $\gamma^{\text{PPN}} = 1$ has been noticed in Ref. [24]. However, its author did not choose $\alpha = 1$ (i.e., $k = 4\pi$ in the TeVeS notation) but a smaller value $\alpha \approx 5 \times 10^{-2}$ (i.e., $k \approx 0.03$). The reason was that he wished to neglect the energy-momentum tensor of the scalar field $\propto \alpha^2$, but it *is* actually negligible even when $\alpha = 1$ since it is of second post-Newtonian order $\mathcal{O}(1/c^4)$.]

This discussion illustrates that several experimental constraints have already been used to construct the model proposed in Refs. [24, 178, 23, 143]. Moreover, one cannot claim that it *predicts* the right light deflection, but rather that it has been *tuned* in order to do so. A vivid way to illustrate the fine tuning hidden in the choice (9.52)-(9.53) is to exhibit different metrics

of the form (9.50), reproducing GR's light deflection in the Newtonian regime of the solar system but a different one in the MOND regime. For instance, if one writes this physical metric as¹⁷

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = -f_0(\varphi)U_\mu U_\nu + f_r(\varphi)(g_{\mu\nu}^* + U_\mu U_\nu), \quad (9.57)$$

then the choice $f_0(\varphi) = e^{2\varphi}$ and $f_r(\varphi) = e^{-2\varphi/(1+\varepsilon\varphi)}$ reproduces the above model when $\varphi \ll 1/\varepsilon$, but predicts a smaller light deflection when $\varphi > 1/\varepsilon$, notably when $\varphi \propto \ln r \rightarrow \infty$ in the MOND regime. On the contrary, the choice $f_0(\varphi) = e^{2\varphi}$ and $f_r(\varphi) = e^{-2\varphi(1+\varepsilon\varphi)}$ would also mimic the above model for $\varphi \ll 1/\varepsilon$, but predict a much larger light deflection when $\varphi > 1/\varepsilon$, in the MOND regime. Therefore the specific choice (9.52)-(9.53), mimicking GR, may almost be considered as a fit of some experimental data. It is nevertheless rather natural, and the fact that it allows to reproduce GR's predictions in presence of dark matter is anyway a great achievement, since light deflection was a crucial difficulty of previous constructions.

Further analysis of such stratified theories however undermines this conclusion, and we will see that they cannot survive other phenomenological constraints, unless they are much more fine-tuned than they already are.

9.5 Difficulties with stratified theories

Stability issues

One of the great advantages of the stratified TeVeS metric (9.50), over the disformally coupled scalar field (9.43), is the simplicity of the field equations within matter. However, as we have seen, the vector field needs to have a constant norm unless consistency problems occur in its field equation, and this has two serious drawbacks. First, this leads to a mixing of the vector and the spin-2 degrees of freedom and thereby to a nondiagonal system of differential equations. This means that the actual degrees of freedom have to be computed carefully (as done in [235] in the specific case $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^*$). Second, the fact that the vector field must be of constant norm spoils its stability. Indeed, as was shown in Ref. [179], the Hamiltonian of the vector field is not bounded by below, and the theory is unstable. The dynamics of the vector field derives from the action

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = -\frac{Kc^3}{32\pi G} \int \sqrt{-g^*} d^4x [g_*^{\mu\rho} g_*^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} - 2\lambda(g_*^{\mu\nu} U_\mu U_\nu + 1)], \quad (9.58)$$

where the stress $F_{\mu\nu}$ is given by $\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu$, \mathcal{L} is the Lagrangian density, and K is a positive dimensionless number. The Hamiltonian can be computed in the standard way, noticing that both λ and U_0 must be treated as Lagrange multiplier since the action does not involve their time derivatives. The momenta read then

$$\pi^i = -\frac{Kc^3}{8\pi G} F^{0i}, \quad (9.59)$$

where latin indices run from 1 to 3, and indices are raised using the inverse Einstein metric $g_*^{\mu\nu}$. In the limit of decoupling gravity ($g_{\mu\nu}^* \rightarrow \eta_{\mu\nu}$), the Hamiltonian reads

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (\pi^i \partial_0 U_i - \mathcal{L}) \\ &= \frac{Kc^3}{8\pi G} \int d^3x \left(\frac{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{4} - F^{0i} \partial_0 U_i \right), \end{aligned} \quad (9.60)$$

¹⁷To simplify the discussion, we assume here that the asymptotic value φ_0 vanishes, or, stated differently, we merely denote here $\varphi - \varphi_0$ as φ .

where we used that $U_\mu U_*^\mu = -1$ which derives from the equation $\delta S/\delta\lambda = 0$. One then write $\partial_0 U_i$ as $F_{0i} + \partial_i U_0$ and integrates by parts the last term. The Hamiltonian, as a functional of the independent field configurations U_i and π^i , then reads

$$H = \int d^3x \left[\frac{4\pi G}{Kc^3} \boldsymbol{\pi}^2 + \frac{Kc^3}{4\pi G} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{U})^2 + \sqrt{1 + \mathbf{U}^2} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\pi} \right], \quad (9.61)$$

where bold-faced symbol denotes three-vectors. The first two terms are just proportional to $E^2 + B^2$ where E and B are the usual electric and magnetic fields associated to U_μ . Contrary to the Maxwell case where the $\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\pi} \propto \boldsymbol{\nabla} \mathbf{E} = 0$ in vacuum, the last term does not vanish here (even in vacuum), and can take arbitrarily large and negative values. This can be made more explicit, for instance, by considering the special case where the vector field derives from a static potential ϕ , i.e., $U_i = \partial_i \phi(x)$; see Ref. [179]. The Hamiltonian is thus not positive definite, and the theory is unstable.

We stressed in Sec. 9.3 that a competing model (phase coupling gravitation) also reproduces the MOND dynamics. The theory is however unstable because of the presence of a negative potential. Recently, an improved version of this theory (called BSTV) was given in Ref. [143]. It involves, besides the two scalar fields, a dynamical unit vector field in order to reproduce the right amount of light deflection using a disformal metric of type Eq. (9.53).

This improved theory is however still unstable. Three different terms of the full Hamiltonian can take it to arbitrary large and negative values. To begin with, there is the instability driven by the vector field that we described above, if its kinetic term is of the Proca form (like in TeVeS). The dynamics of two scalar fields q and φ derives from the action¹⁸

$$S = - \int \sqrt{-g^*} d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu q)^2 + [h(q)g^{*\mu\nu} + (f(q) - h(q))U_*^\mu U_*^\nu] \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(q) \right). \quad (9.62)$$

Because the author of Ref. [143] wrote a quadratic potential $V(q) = -Aq^2$ with $A > 0$, the field q is tachyonic and thus unstable. Note that this potential is not crucial to obtain MOND dynamics, but is merely added to produce oscillations of the scalar field that may mimic the cosmic microwave background (CMB) predicted in cold dark matter theories. Curing the instability by changing the sign of A may however spoil this interesting phenomenology. The computation of the full Hamiltonian reveals another instability. The momenta read $p_q = \partial_0 q$ and $p_\varphi = 2h\partial_0 \varphi - 2(U_\mu \partial^\mu \varphi)(h - f)U_0$. This last equality can be inverted to find $\partial_0 \varphi$ as a function of (notably) p_φ . Since the resulting Hamiltonian has a quite complicated expression, we only report its value on the particular field configuration such that $U_i = 0$. Up to the contribution of the vector field, we have :

$$H = \int d^3x \left(\frac{p_q^2 + (\partial_i q)^2}{2} - Aq^2 + \frac{p_\varphi^2}{4[2h(q) - f(q)]} + h(q)(\partial_i \varphi)^2 \right). \quad (9.63)$$

Changing the sign of A would not be sufficient to guarantee the stability of the theory. Indeed, the functions h and f must behave as $h(q) = q^2$ and $f(q) = q^6$ (at least in some regime) in order to obtain MOND dynamics. Therefore the term $p_\varphi^2/4(2h - f)$ can be made arbitrarily large and negative.

Preferred-frame effects

Ni's stratified theory [21] is a particular case of disformal coupling (9.53) where the Einstein metric is no longer dynamical, and assumed to be flat : $g_{\mu\nu}^* = \eta_{\mu\nu}$. Although it was *built* to

¹⁸Beware that Ref. [143] uses the opposite (mostly $-$) signature. We have translated its action in our mostly $+$ convention.

reproduce the Schwarzschild solution at linear order, by imposing $e^{2\alpha\varphi} = 1 - 2GM/rc^2$, it is nevertheless known to be inconsistent with preferred-frame tests. Indeed, it predicts a post-Newtonian parameter $\alpha_1 \approx -8$, whereas the present experimental constraint is $|\alpha_1| < 10^{-4}$ [46, 22]. One may thus wonder if the more general models of Sec. 9.4 present the same difficulty.

Their experimental constraints have been discussed in Ref. [23], as well in Ref. [244] in a more general context. In the case where the preferred frame defined by U_μ is assumed to be the CMB rest frame (as is usually done when analyzing the weak-field predictions of vector-tensor theories), Ref. [23] has proven that the post-Newtonian parameter $\alpha_1 \approx -16\alpha^2$ (where α without any index denotes as before the matter-scalar coupling constant, related to the parameter η of Ref. [23] by $\eta = 4\alpha^2$). The other PPN parameters characterizing preferred-frame effects vanish identically, like in general relativity ($\alpha_2 = \alpha_3 = 0$). The present experimental bound on α_1 would thus impose $\alpha^2 < 6 \times 10^{-6}$, even tighter than the light-deflection constraint $\alpha^2 < 10^{-5}$ on conformally-coupled scalar-tensor theories. The fine-tuning problem discussed in Sec. 9.3 above would thus be even more serious in the present disformal framework.

However, the vector field U_μ is dynamical, and Refs. [24, 178] claim that its field equation drives it to be parallel to the matter proper time, i.e., to read $U_\mu = (\pm 1, 0, 0, 0)$ in the *matter* rest frame. In such a case, there would be no preferred-frame effect due to the motion at 370 km.s^{-1} of the solar-system with respect to the CMB, but there could still exist observable effects due to the planets' velocities around the Sun. The Earth's velocity at about 30 km.s^{-1} would *a priori* induce effects constrained by the tracking of artificial satellites [245], and although the bound on α^2 might be increased by a factor 10, the fine-tuning described in Sec. 9.3 would still be necessary. It remains possible that the vector field is *also* driven to be parallel to the Earth's proper time in its vicinity, but there would always exist a transition region between the barycentric and geocentric frames in which test particle should undergo observable effects due to the variation of U_μ .

Anyway, the derivation proposed in [24, 178] actually only proves that $U_\mu = (\pm 1, 0, 0, 0)$ is *a* solution, but not *the* solution. In other words, it just tells us that a situation where matter is at rest with respect to the preferred frame is *possible*. This obviously does not prove that the model is consistent with high-precision tests of local Lorentz invariance of gravity. There remains to perform a careful analysis of the specific models proposed in [24, 178, 143] in order to draw definite conclusions about this problem of preferred-frame effects. We will not discuss it any longer in the present paper, because stratified theories anyway present several other serious difficulties.

Cerenkov radiation and high-energy cosmic rays

Throughout this paper, we insisted on the fact that superluminal fields do not necessarily threaten causality, provided they propagate along cones in spacetime, i.e., if their equations of motion remain hyperbolic. We even announced in Sec. 9.3 that experiment strongly suggests that no field should propagate slower than light. Indeed highly relativistic matter coupled to a subluminal field emits Cerenkov radiation and thereby loses energy. In particular, the various gravitational fields one may consider should not propagate slower than light, otherwise ultra high energy cosmic rays would emit “gravi-Cerenkov” radiation (following the term used in [180, 74]), and those that we detect should thus have been produced near the Earth. However, no source has been identified within a range of the order of the kiloparsec, and this yields a tight bound on how much photons (and hence relativistic matter particles) are allowed to travel faster than gravity.

Cerenkov radiation occurs in electrodynamics when charged particles propagate faster than light in a medium with refractive index $n > 1$. The emission of a real photon through the vertex

of QED is kinematically allowed in that case because photons do not follow the usual dispersion law $p_\mu p^\mu = 0$, but satisfy the law $p_0 = n|\mathbf{p}|$ in a refractive medium and carry thus more energy than momentum if $n > 1$; see [180, 74].

If light propagates faster than gravitational waves, as is the case in the above stratified theory with $\alpha\varphi > 0$, a similar phenomenon occurs: (ultra relativistic) matter particles propagating faster than gravity emit gravitational waves. The same reasoning as above shows that this tree process is kinematically allowed. We may however stress a subtlety here. Since spacetime is endowed with two different metrics of Lorentzian signature, one can define two different sets of locally inertial coordinates (for which one of the two metrics $g_{\mu\nu}^*$ or $\tilde{g}_{\mu\nu}$, but not both, is written in its canonical form). There exists therefore two (equivalent) formulations of conservation laws. Gravitational waves follow the null geodesic of the gravitational metric¹⁹ and satisfy thus the equation $\tilde{g}_{\mu\nu}^* p^\mu p^\nu = 0$, where p^μ denotes their four-momentum. Their dispersion relation in the matter (Jordan) frame reads thus $\tilde{g}_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = B(U_\mu p^\mu)^2$, and takes the form

$$p^0 = |\mathbf{p}|/\sqrt{1 - 2\sinh(2\alpha\varphi)} \quad (9.64)$$

in coordinates such that $\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ and simultaneously $U_\mu = (\pm 1, 0, 0, 0)$ locally (which can always be imposed by a local Lorentz transformation keeping $\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$). Using $\alpha\varphi \ll 1$, we get $p^0 = |\mathbf{p}|(1 + 2\alpha\varphi)$. In other words, everything behaves as if gravitons were travelling within a refractive medium of index $n \approx 1 + 2\alpha\varphi$. The emission of real gravitational waves by ultra relativistic matter particles is thus allowed once $\alpha\varphi > 0$. The authors of Ref. [180] calculated the rate of energy loss by this process and found:

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{Gp^4(n-1)^2}{\hbar^2 c_{\text{light}}} \quad (9.65)$$

for a particle of momentum p . Here we approximate pure numbers by 1, which is correct in view of the exact results derived in [180]. [This result is actually obtained for a scalar particle of matter; the case of a proton is more involved but leads to similar formulae; see Ref. [74]]. This equation is easily integrated for an ultra-relativistic particle $E \approx pc_{\text{light}}$. Assuming that the initial value of the momentum p_i is much larger than the final one p_f and that n is approximatively constant along the particle's path, one finds that it can travel only over a distance of order

$$L \sim \frac{\hbar^2 c_{\text{light}}^3}{Gp_f^3(n-1)^2}, \quad (9.66)$$

whose value reads

$$L_{\text{max}} \sim \frac{2 \times 10^{-11}}{(n-1)^2} \text{m} \quad (9.67)$$

for $p_f \sim 10^{20}$ eV. Therefore, cosmic rays detected on Earth with such a high momenta as 10^{20} eV cannot have been produced further than L_{max} . Assuming that these cosmic rays have at least a galactic origin, we find $L_{\text{max}} \gtrsim 10^{21}$ m and therefore $n - 1 \lesssim 10^{-16}$. Note of course that gravi-Cerenkov radiation can only be emitted by matter particles propagating at a speed greater than $c_{\text{gravitons}} = c_{\text{light}}/n$, where $n - 1 \lesssim 10^{-16}$. Therefore only ultra-relativistic particles with a Lorentz-Fitzgerald factor of order $\gamma \geq 1/\sqrt{2(n-1)} \sim 10^8$ can emit gravitational waves in this way. Assuming that the observed high-energy cosmic rays with momenta $p \sim 10^{20}$ eV are protons, we find that their γ reads 10^{11} , so that our analysis is self-consistent.

¹⁹Beware that the spectrum of gravitational waves may be affected by the presence of the vector field. However, when the kinetic term of the vector field is of the Proca type, there is no such modification; see Ref. [246].

Since the gravitational field produced by the Milky Way is approximatively MONDian in the vicinity of the Sun, we have $n - 1 \approx 2\alpha\varphi \approx 2\sqrt{GM_{\text{Milky Way}}a_0} \ln(r/\ell)/c^2$, where ℓ is a fixed length scale and where, numerically, $\sqrt{GM_{\text{Milky Way}}a_0}/c^2 \sim 10^{-7}$. If one insists on the fact that $\alpha\varphi$ should be positive (so that gravity propagates slower than photons), the only way inequality $n - 1 \lesssim 10^{-16}$ could be satisfied would be to fine tune the length scale ℓ to the galactocentric distance of the Sun up to nine decimals! In other words, such a theory predicts that high energy cosmic rays should not be seen unless they are produced very close to the Earth, or if the Sun were very specifically located within our galaxy. This is clearly unacceptable, and $\alpha\varphi$ would anyway become negative for slightly smaller galactocentric distances. In other words, gravity *must* propagate faster than light at least in some regions.

The only reasonable way to avoid the above fine tuning problem is simply to have $\alpha\varphi < 0$. In such a case, light propagates slower than gravitons and there is no gravi-Cerenkov radiation at all.²⁰ Let us emphasize that it is however in great disagreement with the whole spirit of the TeVeS theory. Indeed the vector field was precisely introduced to produce the right amount of light deflection while avoiding any superluminal field. Actually, the above discussion shows that subluminal fields coupled to the matter sector are generically ruled out by the existence of ultra high-energy cosmic rays. Therefore MOND-like stratified theories reproducing the right light deflection must either be based on the disformal relation (9.43) (where the vector field assumes the form $U_\mu = \partial_\mu\varphi$) with $B < 0$, or on the disformal metric Eq. (9.53) with $\alpha\varphi < 0$. In conclusion, light should in any case travel slower than gravitons. Let us recall that it does not imply a violation of causality, provided all field equations remain hyperbolic.

Binary-pulsar constraints

The fourth and probably most serious difficulty of stratified theories is their consistency with binary-pulsar observations. Indeed, even if the choice $\kappa = 1$, in Eq. (9.56), releases the constraint on α arising from precise measurement of the Eddington parameter γ^{PPN} in the solar system, binary-pulsar data *a priori* impose a tight constraint on it too. The literature on binary-pulsar tests has studied wide classes of alternative theories of gravity [46, 52, 225, 226, 247, 248, 249] but not the disformal coupling (9.50). A specific analysis should thus be performed, but it goes beyond the scope of the present article. Let us just mention here that a strong matter-scalar coupling constant $\alpha \approx 1$ means that the spin-2 ($g_{\mu\nu}^* - \eta_{\mu\nu}$) and spin-0 ($\varphi - \varphi_0$) fields are of the same order of magnitude in the vicinity of massive bodies, i.e., in the Newtonian regime of the model. Near a binary system, these fields cannot be static because they are driven by the orbital motion. This causes the emission of gravitational and scalar waves (and even waves of the vector field U_μ , in the present TeVeS model), which extract energy from the system and make the orbit shrink. Because of the specific form of the kinetic terms (i.e., of the helicities of the degrees of freedom), the energy loss via spin-2 waves start at the quadrupolar order $\mathcal{O}(1/c^5)$, but it is of the much larger order $\mathcal{O}(1/c^3)$ for the dipolar spin-0 waves [monopolar scalar waves also exist but cause an energy loss of order $\mathcal{O}(1/c^5)$ instead of $\mathcal{O}(1/c)$ if the two orbiting bodies are at equilibrium]. The orbit should thus shrink much more quickly in the present model than in GR, and this is known to be inconsistent with several binary-pulsar observations [250, 251, 52, 225, 226, 247, 248, 249]. Since this reasoning only depends on the *local* dynamics of the scalar field, its subtle MOND-like behavior at larger distances should not change the conclusion. The scalar waves will obviously behave in a non-standard way at distances $r \gtrsim \sqrt{GM/a_0}$, but they have anyway extracted too

²⁰Note that one may also consider Cerenkov radiation made of waves of the vector field. Indeed, depending on the sign of the parameters, such “Einstein-aether” waves [246] may propagate slower than light. In any case, however, it would be possible to require that $\alpha\varphi$ is negative enough so that light (and hence matter) propagates slowly enough, to ensure that matter particles do not emit such Cerenkov radiation at all.

much energy from the binary system in the near zone. Note also that the peculiar matter-scalar coupling (9.52)-(9.53) should not change either the above conclusion. It tells us that φ does not feel the matter current and pressure $T_{ij}^{*\text{matter}}$ as in standard scalar-tensor theories, but the dominant source remains $\alpha T_{00}^{*\text{matter}} \propto \alpha M c^2$ and generates a scalar field $\varphi - \varphi_0 = \mathcal{O}(\alpha GM/rc^2)$. Therefore, we expect present binary-pulsar data to impose $\alpha^2 < 4 \times 10^{-4}$, as in Brans-Dicke theory [247, 248, 249]. Although this is less constraining than the 10^{-5} bound imposed by solar system [48] on conformally-coupled scalar fields (9.14)-(9.15), this binary-pulsar constraint on the matter-scalar coupling constant is thus *a priori* also valid for the disformally coupled ones (9.43)-(9.50).²¹

Note that this constraint is one order of magnitude smaller than the value $\alpha^2 \approx 2 \times 10^{-3}$ chosen in TeVeS [178] (where $\alpha^2 = k/4\pi$ in Bekenstein's notation). This reference needed to choose $\alpha^2 > 1.4 \times 10^{-3}$ in order to predict negligible MONDian effects at distances smaller than Saturn's orbit, assuming a natural RAQUAL kinetic term like the one displayed in Fig. 9.2 above. Since this is inconsistent with binary-pulsar tests, we recover again the problem discussed in Sec. 9.3 : α needs to be small and we need an unnatural kinetic term $f(s)$. In particular, the acceleration cannot be purely Newtonian beyond $r \sim 150$ AU (if $\alpha^2 = 4 \times 10^{-4}$), and an approximately constant extra contribution a_0 must exist between this distance and $\sqrt{GM/a_0} \approx 7000$ AU, where it becomes of the $1/r$ MOND form (see Fig. 9.3). Although this is still allowed experimentally, this behavior seems anyway too fine-tuned.

Discussion

As Secs. 9.4 and 9.5 above underline, the TeVeS model [24, 178, 143] is certainly the best field theory reproducing the MOND dynamics in the literature, but it has still some drawbacks. One of them is probably unavoidable : It is fine tuned to obtain the wanted phenomenology. A second one seems generic but hopefully curable in some specific models : It presents some instabilities. Other theoretical problems should be solved, and have already received some answers : It involves discontinuities, too many different fields, and the various arbitrary functions it contains look quite complicated. But the most serious difficulties seem to be *experimental*, as discussed in the present section. In particular, it very probably does not pass binary-pulsar tests in its present form (or needs to be even more fine-tuned in a quite unnatural way). We will also mention in Sec. 9.7 other generic problems that any MOND-like field theory should address. Therefore, in spite of the great achievements of Refs. [24, 178, 143], it remains interesting to look for other theoretical frameworks able to reproduce the MOND dynamics in a consistent way. We will examine a rather new one in the following section, although it is still in the class of RAQUAL and disformal models. Its original feature is that the theory will be particularly simple in vacuum (outside matter sources), namely pure general relativity in a first model, and pure Brans-Dicke theory in a second one. However, we will see that the consistency of the field equations *within* matter exhibits subtle but crucial difficulties.

²¹This discussion is reminiscent of a particular tensor-bi-scalar theory constructed in [52] as a contrasting alternative to GR. It depends on two free parameters characterizing how the two scalar fields are coupled to matter. Even for strong couplings, the model was fine tuned to pass anyway solar-system tests. The combination of various binary-pulsar tests however severely constrains both of the parameters [52, 249].

9.6 Nonminimal metric couplings

Changing the matter–spin 2 coupling

In the present section, we adopt a mixing of the modified-inertia and modified-gravity viewpoints discussed in Sec. 9.3 above. Like in the modified-inertia framework, the dynamics of gravity in vacuum will be defined by the Einstein–Hilbert action (9.3). On the other hand, like in modified gravity, the matter action will be assumed to depend only on the matter fields and their first derivatives, or, in the case of test particles, on their positions and velocities only. Moreover, in order to preserve the weak equivalence principle, we will assume that all matter fields are coupled to a single second rank symmetric tensor $\tilde{g}_{\mu\nu}$. In other words, the action of the theory reads

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int \frac{d^4x}{c} \sqrt{-g_*} R^* + S_{\text{matter}}[\psi; \tilde{g}_{\mu\nu}], \quad (9.68)$$

where as before ψ denotes globally any matter field. Therefore, we do not seem to have changed anything with respect to GR, and this looks like a model in which *neither* inertia *nor* gravity are modified! However, the crucial difference with GR is that we will assume the physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$ to depend not only on the Einstein (spin-2) metric $g_{\mu\nu}^*$, but also on the curvature tensors one may construct from it and their covariant derivatives. Several definitions of $\tilde{g}_{\mu\nu}$ yield the right MOND phenomenology at leading order, and differ only at the post-Newtonian level, i.e., for relativistic corrections of order $\mathcal{O}(1/c^2)$ with respect to the Newtonian and MOND accelerations. Let us choose a particular example :

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}^* + \frac{\sqrt{a_0/3}}{4c} \frac{(\partial_\lambda \text{GB})^2 h(X) g_{\mu\nu}^* + 2 \partial_\mu \text{GB} \partial_\nu \text{GB}}{(\square^* \text{GB}/10)^{7/4}}, \quad (9.69)$$

where $\text{GB} \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma}^{*2} - 4R_{\mu\nu}^{*2} + R_*^2$ is the Gauss–Bonnet topological invariant (which may be replaced by $R_{\mu\nu\rho\sigma}^{*2}$ or the square of the Weyl tensor $C_{\mu\nu\rho\sigma}^{*2}$ without changing the results at first order in $\sqrt{a_0}$), where \square^* denotes the d’Alembertian operator (covariant with respect to the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$), and where

$$X \equiv \frac{1}{\ell_0} \sqrt{\frac{30 \text{GB}}{\square^* \text{GB}}}. \quad (9.70)$$

The fixed length scale ℓ_0 is introduced to make this quantity dimensionless. The numerical factors entering Eqs. (9.69)–(9.70) have been chosen to simplify the expression of the function $h(X)$, which will be specified below. Note that $\tilde{g}_{\mu\nu}$ is indeed a second-rank symmetric *tensor*, since it is constructed only from tensors, their covariant derivatives and their contractions. The matter action $S_{\text{matter}}[\psi; \tilde{g}_{\mu\nu}]$ thereby satisfies exactly Lorentz invariance. Moreover, this is still a local action since the physical metric (9.69) involves a finite number of derivatives of $g_{\mu\nu}^*$. It should be noted that Eq. (9.69) does not make sense in flat spacetime, because it would involve ratios of vanishing expressions, but our Universe is never strictly flat since massive bodies do exist.

Since in Eq. (9.68), the physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$ only enters the matter action, the curvature tensors it involves do not contribute to the dynamics of gravity in vacuum. This implies notably that the Birkhoff theorem is satisfied, like in GR. The metric generated by a spherically symmetric distribution of matter is thus of the Schwarzschild type, i.e., reads in Schwarzschild coordinates

$$g_{\mu\nu}^* dx^\mu dx^\nu = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (9.71)$$

where M is a constant, very close to the one that GR would have defined (but slightly modified because of the nonminimal coupling of matter to curvature). It is then straightforward to compute the gravitational potential $V = -\frac{1}{2}(1 + \tilde{g}_{00})c^2$ felt by a test particle slowly moving in such a spacetime. The Schwarzschild solution (9.71) implies

$$\text{GB} = R_{\mu\nu\rho\sigma}^{*2} = C_{\mu\nu\rho\sigma}^{*2} = 48 \left(\frac{GM}{r^3 c^2} \right)^2, \quad (9.72)$$

$$\square^* \text{GB} = 1440 \left(\frac{GM}{r^4 c^2} \right)^2 \left(1 - \frac{12}{5} \frac{GM}{r c^2} \right), \quad (9.73)$$

so that the time-time component of the physical metric reads

$$\tilde{g}_{00} = -1 + \frac{2GM}{rc^2} - 2 \frac{\sqrt{GMa_0}}{c^2} h\left(\frac{r}{\ell_0}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (9.74)$$

One thus recovers the MOND potential if one chooses $h(X) = \ln X$, and the length scale ℓ_0 is then arbitrary since it does not enter any observable prediction. However, we know that the MOND potential should not be felt at small distances, because it would be inconsistent with solar-system tests of Kepler's third law [107]. One should thus choose a more fine-tuned function $h(X)$, such that its derivative gives a $1/r$ force at large distances $r \gg \ell_0$ but a vanishing one when $r \ll \ell_0$. One may choose for instance $h'(X) = X/(1+X)^2$, i.e., after integration,

$$h(X) = (1+X)^{-1} + \ln(1+X). \quad (9.75)$$

Now the constant ℓ_0 does enter the physical predictions, and in order to obtain the correct phenomenology, it should be chosen much larger than the solar-system size but small with respect to the radius of any galaxy. This underlines that the present model is also quite fine tuned, in a similar way as the RAQUAL models discussed in Secs. 9.3 and 9.4 above. They needed specific quadratic kinetic terms for the scalar field, and the transition between the Newtonian and MOND regimes then occurred at a radius $\sim \alpha^2 \sqrt{GM/a_0}$, generically much too small to be consistent with solar-system tests. Here the transition scale ℓ_0 is fixed by hand in Eq. (9.70), which may be considered as a bonus or a drawback. Note anyway that it would be easy to impose $\ell_0 = \sqrt{GM/a_0}$, for instance, merely by using again Eqs. (9.72) and (9.73) to define this quantity and replace it in (9.70). However, the corresponding definition of $X \approx (\square^* \text{GB})^{5/4} \sqrt{a_0 \text{GB}} / (\partial_\lambda \text{GB})^2 c$ would be even more unnatural!

The light deflection can also be derived straightforwardly from the physical metric (9.69) expanded at first order in $1/c^2$. Since photons do not feel any global factor of the metric, we may actually discard the term proportional to $\sqrt{a_0} g_{\mu\nu}^*$ in Eq. (9.69), modulo higher corrections $\mathcal{O}(a_0/c^4)$. Let us denote as $\bar{g}_{\mu\nu}$ the resulting metric, which suffices to derive the light path. The only remaining modification with respect to general relativity is the final term of Eq. (9.69), proportional to $\partial_\mu \text{GB} \partial_\nu \text{GB}$. In the case of the Schwarzschild solution (9.71), this term only contributes to the radial-radial component of the metric

$$\bar{g}_{rr} = 1 + \frac{2GM}{rc^2} + \frac{4\sqrt{GMa_0}}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (9.76)$$

We thus recover the disformal metric constructed in Sec. 9.4 above, and the corresponding light deflection, Eq. (9.46), reproduces exactly (by construction) the result predicted by GR in presence of dark matter. Note that the extra (constant) deflection angle $2\pi\sqrt{GMa_0}/c^2$ is *also* predicted in the solar system. It would be possible to suppress it by introducing another fine-tuned function

$b(X)$ multiplying the $\partial_\mu \text{GB} \partial_\nu \text{GB}$ term in Eq. (9.69). However, this is not necessary, since this extra deflection angle is $\approx 2 \times 10^{-6}$ arcsec for $M = M_\odot$, i.e., negligible with respect to present and foreseen experimental accuracy.

Therefore, the above model reproduces both the MOND dynamics and the correct light deflection in a particularly simple way. It does not introduce any superfluous degree of freedom in the vacuum, outside matter sources : It has the same spectrum as GR, namely a massless spin-2 field carrying positive energy, and does not contain any ghost nor tachyon. Moreover, it satisfies general covariance, Lorentz invariance (no preferred frame), locality, and the weak equivalence principle. Binary-pulsar tests are also obviously passed, since the metric $g_{\mu\nu}^*$ generated by a binary system takes exactly the same form as in GR. The only difference is that the masses slightly differ from those GR would have predicted for a given amount of matter. However, since these masses are not directly measured, but determined from the combination of various orbital observables, the analysis of binary-pulsar data is actually *strictly* the same as in GR.

It should also be underlined that nonminimal couplings to curvature, such as those introduced in (9.69), do appear in scalar-tensor theories and in GR itself when describing the motion of extended bodies [252, 226, 253]. Indeed, when tidal effects can be neglected (i.e., up to order $1/c^9$ included, in GR), compact bodies are characterized only by their mass besides their position and velocity, and their action can thus be written $S_{\text{pp}} = - \int mc \sqrt{-g_{\mu\nu}^* dx^\mu dx^\nu}$. As soon as tidal deformations start influencing their motion (from order $1/c^{10}$ in GR), they must be described by more “form factors” characterizing how they are coupled to derivatives of the metric. Phenomenological couplings to $R_{\mu\nu\rho\sigma}^{*2}$ and higher derivatives are thus expected to occur even within GR. Therefore, those entering Eq. (9.69) are rather natural, and define a consistent dynamics for massive point particles.

However, the above model also presents several difficulties. First of all, it has been fine-tuned to yield the right phenomenology, but other functions of the curvature tensors would obviously give a fully different physics. For instance, it suffices to change the numerical coefficient of the disformal contribution $\partial_\mu \text{GB} \partial_\nu \text{GB}$ in Eq. (9.69) to change the prediction for light bending by any amount. Therefore, this model is *unpredictive*, and just manages to fit some experimental data. Actually, this is probably one of its main interests : It illustrates, in a very simple framework, all the hypotheses which are *also* needed in other models of the literature. As discussed at the end of Sec. 9.4 above, the best present MOND-like field theory [24, 178, 143] could also predict a fully different light bending than GR if one had chosen different functions of the scalar field in Eq. (9.52).

A related problem is that there exist many different realizations of the physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$ yielding the same phenomenology at lowest order. Indeed, Eq. (9.69) is actually a mere rewriting of the needed metric (9.74)-(9.76) in a covariant way. Any other combination of the Riemann curvature tensor and its covariant derivatives, reducing to the same metric at order $\mathcal{O}(1/c^2)$, is thus equally valid. For instance, the crucial factor $(2\sqrt{GMa_0}/c^2)g_{\mu\nu}^*$ may equivalently be written in terms of $(\square^* \text{GB})^{-3/4} R_{\mu\rho\sigma\tau}^* R_{\nu}^{*\rho\sigma\tau}$. Any other nonvanishing contraction, like $(\nabla_\mu^* R_{\nu\rho\sigma\tau}^*)^2$ or $R_{*\rho\sigma}^{\mu\nu} R_{*\kappa\lambda}^{\rho\sigma} R_{*\mu\nu}^{\kappa\lambda}$, may also be used to build the appropriate MOND potential. [On the other hand, neither the Ricci tensor $R_{\mu\nu}^*$, the scalar curvature R^* , nor any of their covariant derivatives, can be used to construct the physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$, since they vanish in vacuum and thereby cannot be felt by a test particle far from the gravitational source.] The physical metric (9.69) that we chose above is convenient to write because it involves very few explicit indices, but it has no special property which distinguishes it from other possible choices. This freedom actually teaches us another important lesson : There is no reason, for a model reproducing the right phenomenology at lowest order, to remain valid at higher orders. In the present case, there is an infinity of ways to complete it at higher post-Newtonian orders, by adding arbitrary combinations of the curvature tensor and its covariant derivatives. In the case of the TeVeS model [24, 178, 143],

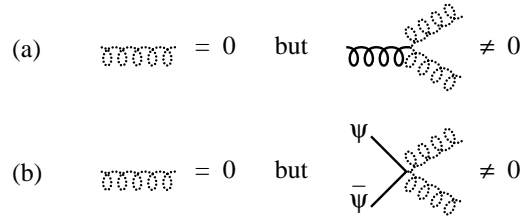


FIG. 9.6 – Diagrammatic illustration of the negative-energy modes spoiling the stability of (a) the model proposed in [210], and (b) the present nonminimal metric coupling (9.68)-(9.69). As before, curly lines represent spin-2 degrees of freedom, namely the usual massless and positive-energy graviton in plain line, and the massive ghost in dotted lines. Contrary to Fig.9.5, straight lines represent here matter fields ψ instead of the scalar field φ . In both cases (a) and (b), no ghost degree of freedom can be identified around a flat or empty background. However, a ghost mode does exist in curved backgrounds in case (a), and within matter in case (b). They use the background gravitons or matter fields as “catalyzers” in order to propagate and develop instabilities.

there is no reason either to trust its higher post-Newtonian predictions.

Another related problem is that the variable X defined in Eq. (9.70) may become imaginary in particular backgrounds where $\square^*GB < 0$. One may of course take its absolute value in order to always define X consistently, but it would anyway diverge on the hypersurfaces where $\square^*GB = 0$. The full metric (9.69) is actually ill-defined on such hypersurfaces, since our “correcting terms” $\mathcal{O}(\sqrt{a_0})$ may blow up. This illustrates once again that the specific choice (9.69) is not justified by any symmetry principle nor any fundamental theory. This is just a possible phenomenological realization of the MOND dynamics at lowest order, but not a complete theory remaining consistent in all physical situations. It is always possible to refine the model to avoid such pathological situations, as we did in Sec. 9.3 to avoid the singularity of RAQUAL models on the hypersurfaces where $s \equiv g_*^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$ vanishes. However, such refinements do not make the models more fundamental, and there is still no reason to believe their predictions in situations very different from clustered matter (i.e., solar system and galaxies).

But the most serious difficulty of the nonminimally-coupled model (9.68)-(9.69) is its consistency *within* matter. First of all, the physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$ should always remain hyperbolic, in order to define a well-posed Cauchy problem for matter fields. This is clearly the case if the correcting terms $\mathcal{O}(\sqrt{a_0})$ entering (9.69) remain small with respect to the flat background metric $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. In more general situations where they become of order 1, higher-order corrections are anyway expected to grow too, and the above phenomenological model just stops being predictive. Once again, the lowest-order MOND dynamics does not suffice to fully specify the physics in all regimes. The deadly problem arises in the field equations for *gravity* within matter. Indeed, since higher derivatives of $g_{\mu\nu}^*$ enter the matter action, the full Hamiltonian is not bounded by below, because of Ostrogradski’s theorem discussed in Sec. 9.3 above. Therefore, this model is unstable, in the same way as the one proposed in Ref. [210], that we mentioned in Sec. 9.3. Although one cannot identify any ghost degree of freedom around a flat empty background, the model [210] did contain negative-energy modes around curved backgrounds, and the present one (9.68)-(9.69) involves negative-energy modes within matter. This is illustrated in terms of Feynman diagrams in Fig. 9.6.

As a simple toy model of such unstable theories, one may consider for instance the Lagrangian $\mathcal{L} = -(\partial_\mu \psi)^2 [1 + \lambda(\partial_\nu \varphi)^2]$ in flat spacetime, where λ is a nonzero constant. The scalar ψ

is an analogue of the matter fields in our present model (9.68)-(9.69), and of the usual massless graviton in the model [210]. One cannot identify any kinetic term for the second scalar φ around a background $\psi = \text{const.}$, but it is obvious that it defines a ghost degree of freedom in backgrounds where $\lambda(\partial_\mu\psi)^2 < 0$. More generally, one can easily compute the Hamiltonian $\mathcal{H} = [\dot{\psi}^2 + (\partial_i\psi)^2][1 + \lambda(\partial_j\varphi)^2] + \lambda\dot{\varphi}^2[(\partial_i\psi)^2 - 3\dot{\psi}^2]$, and prove that there always exist initial conditions such that $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$. If $\lambda > 0$, it suffices for instance to choose $\partial_i\psi = \partial_i\varphi = 0$, $\dot{\varphi}^2 = 1/\lambda$, $\dot{\psi}^2 \rightarrow \infty$, and if $\lambda < 0$, to choose $\partial_i\varphi = 0$, $\dot{\psi} = 0$, $(\partial_i\psi)^2\dot{\varphi}^2 \rightarrow \infty$. Both cases can be expressed the same way in terms of the conjugate momenta $\pi_\psi \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi}$ and $\pi_\varphi \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}$: Whatever the sign of $\lambda \neq 0$, one gets $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ for $\partial_i\varphi = 0$, $\pi_\psi = 0$, $\partial_i\psi \rightarrow 0$ and $\pi_\varphi^2 \rightarrow \infty$.

In the present model (9.68)-(9.69), the simplest way to understand the existence of negative-energy modes, confined within matter, is to consider a homogeneous density (either filling the Universe, as in standard cosmological models, or in the interior of a massive body). Then the matter action $S_{\text{matter}}[\psi; \tilde{g}_{\mu\nu}]$ actually defines a gravity theory of the form $f(R_{\mu\nu\rho\sigma}^*, R_{\mu\nu}^*, \nabla_\lambda^* R_{\mu\nu\rho\sigma}^*, \dots)$, which is known to contain a massive spin-2 ghost degree of freedom [33, 208, 209], as recalled in Sec. 9.3. Of course, one may invoke again higher-order corrections to the phenomenological model (9.69), which may be able to stabilize it. However, it remains that it *is* unstable without considering such higher-order corrections, and therefore that its lowest-order truncation (9.69) cannot describe consistently massive bodies. At the classical level, one should analyze carefully this instability to determine its characteristic timescale. Naively, one could expect it to be related to the MOND acceleration scale a_0 , i.e., of order $c/a_0 \approx 6/H_0 \approx 8 \times 10^{10}$ yr. Since this is several times larger than the age of the Universe, this would obviously not be a problem for massive stars. However, other dimensionful constants do exist in the model. The length scale ℓ_0 entering (9.70) does not change any physical prediction at small enough distances, but within matter, all masses or coupling constants entering the matter action S_{matter} may contribute to the instability timescale. Therefore, the analysis of this instability is highly nontrivial. It may actually happen that it does *not* develop at the classical level. Indeed, it is quite difficult to exhibit toy models in which the presence of ghost degrees of freedom (negative kinetic energy) imply classical instabilities, whereas they are obvious in presence of tachyons (maximum of a potential). On the other hand, ghost degrees of freedom are known to be deadly at the quantum level, because the vacuum then disintegrates instantaneously [34].

In conclusion, the nonminimally-coupled model (9.68)-(9.69) has many interesting features, notably the fact that it is rather simple and that its predictions can be easily computed from the general relativistic metric. But it is unstable and therefore one cannot trust its predictions. It may still be useful as a phenomenological framework at lowest order in powers of $\sqrt{a_0}$, since it goes beyond the original MOND formulation [1]. For instance, when a test particle is located between two massive bodies, it may happen that its total acceleration is smaller than a_0 although each individual force happens to be in the standard Newtonian regime ($f > ma_0$). In such a case, the historical MOND theory does not clearly predict what should happen, whereas the present nonminimally-coupled model unambiguously defines the dynamics from the local curvature tensor and its covariant derivatives. This model also allows us to compute consistent MOND effects for non-spherically symmetric sources. But its main interest is to show that the MOND dynamics is consistent with most of GR's symmetries. It also illustrates in a clear way many generic problems of other MOND-like field theories of the literature, notably their unpredictiveness (because they are just tuned to reproduce the needed physics) and their almost systematic instability.

A nonminimal scalar-tensor model

The most serious problem of the above nonminimally-coupled model is its instability because of the presence of higher derivatives of the metric in the matter action. By introducing back a

single scalar field, we will now show that this instability may be avoided (but that a more subtle consistency problem anyway remains, as discussed at the end of the present section). It will not even be necessary to give it an aquadratic kinetic term as in Sec. 9.3. A standard scalar-tensor theory of the form (9.14) will suffice for our purpose, but with a more complex physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

The idea is very similar to the previous section 9.6. We showed in Eqs. (9.72)-(9.73) that a combination of curvature tensors and their covariant derivatives gave us a *local* access to the baryonic mass M and to the distance r , independently from each other. It was thus possible to construct from them the needed MOND potential $\sqrt{GMa_0} \ln r$. In standard scalar-tensor theories, with an exponential matter-scalar coupling function $A(\varphi) = e^{\alpha\varphi}$, we know that the scalar field takes the form $\varphi = -\alpha GM/rc^2 + \mathcal{O}(1/c^4)$ in the vicinity of a spherical body of mass M , if the background value φ_0 vanishes. Then it is obvious that combinations of φ and its derivative $\partial_r\varphi = \alpha GM/r^2c^2 + \mathcal{O}(1/c^4)$ also give us access to M and r independently. One may thus imitate the previous model (9.68)-(9.69) by defining

$$S = \frac{c^4}{4\pi G} \int \frac{d^4x}{c} \sqrt{-g_*} \left\{ \frac{R^*}{4} - \frac{s}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \varphi^2 \right\} + S_{\text{matter}}[\psi; \tilde{g}_{\mu\nu}], \quad (9.77)$$

where $s \equiv g_*^{\mu\nu} \partial_\mu\varphi \partial_\nu\varphi$ denotes as before the standard kinetic term of the scalar field, and where $\tilde{g}_{\mu\nu} \equiv A^2 g_{\mu\nu}^* + B \partial_\mu\varphi \partial_\nu\varphi$ takes the disformal form (9.43) with

$$A(\varphi, s) \equiv e^{\alpha\varphi} - \frac{\varphi X}{\alpha} h(X), \quad (9.78a)$$

$$B(\varphi, s) \equiv -4 \frac{\varphi X}{\alpha} \frac{1}{s}, \quad (9.78b)$$

$$X \equiv \frac{\sqrt{\alpha a_0}}{c} s^{-1/4}. \quad (9.78c)$$

The function $h(X) = (1+X)^{-1} + \ln(1+X)$ was chosen in Eq. (9.75) to reproduce the MOND $1/r$ force at large distances but a negligible one at small distances. The potential $V(\varphi) = \frac{1}{2}(mc/\hbar)^2 \varphi^2$ introduced in Eq. (9.77) has a negligible influence on local physics (solar system, binary pulsars, galaxies and clusters) if the mass it involves is small enough, say $mc^2/\hbar \lesssim H$ where H denotes the Hubble constant. However, it plays a role in the cosmological evolution of the scalar field, driving it to the minimum $\varphi_0 = 0$. This term ensures thus that the background value of the scalar field vanishes. Note however that the above model must be refined to remain consistent in the cosmological regime ($s < 0$), on the hypersurfaces $s = 0$ surrounding any galaxy or cluster (see Sec. 9.3 above), and near the center of any massive body where $s \rightarrow 0$. It suffices, for instance, to replace s by $\sqrt{s^2 + \varepsilon^2}$ in Eqs. (9.78), where $\varepsilon \sim (mc/\hbar)^2 \lesssim H^2/c^2$ is small enough to have negligible influence both on Newtonian and MONDian physics. As already underlined below Eq. (9.20) and in Sec. 9.6, such a refinement just *illustrates* how to define a consistent field theory, but there is no reason to trust its predictions in the cosmological regime $s \leq 0$. Indeed, many other functions of s could connect smoothly to those entering (9.78) for small values of s , and they are *not* imposed by the MOND phenomenology.

Since the above model defines a standard scalar-tensor theory outside matter (in vacuum), we know that the scalar field takes the form $\varphi \propto -GM/rc^2 + \mathcal{O}(1/c^4)$ in the vicinity of a spherical body of mass M . The multiplicative factor is just α in scalar-tensor theories, but it may now be modified by the MOND-like corrections we added in the physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$. One expects it to remain close to α if the matter sources are compact enough to be in the Newtonian regime of the model. This is not only the case for solar-system bodies and binary pulsars, but also for almost all the baryonic mass of galaxies and clusters. We will thus merely assume that $\varphi \approx -\alpha GM/rc^2$

in the present discussion. We will come back below to the (crucial) problem of the scalar field equation within matter, and thereby to the actual coupling constant α entering this expression. The value $\varphi \approx -\alpha GM/rc^2$ implies that $X = r/\sqrt{GM/a_0}$, which not only gives us a direct access to the radial distance r , but also involves the MOND characteristic radius $\ell_0 = \sqrt{GM/a_0}$. This is thus already a bonus with respect to the purely metric model (9.68)-(9.69), since one needed to impose by hand that the arbitrary scale ℓ_0 was much larger than the solar-system size but smaller than the radius of any galaxy. Here, this is obtained automatically from a rather simple definition of X , Eq. (9.78c). One also finds that $\varphi X/\alpha = -\sqrt{GMa_0}/c^2$, i.e., precisely (by construction) the needed factor of the MOND logarithmic potential.²² Therefore, the physical metric admits the following post-Newtonian expansion :

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \left[1 - \frac{2\alpha^2 GM}{rc^2} + \frac{2\sqrt{GMa_0}}{c^2} h\left(\frac{r}{\sqrt{GM/a_0}}\right) \right] g_{\mu\nu}^* + \frac{4\sqrt{GMa_0}}{c^2} \delta_\mu^r \delta_\nu^r + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (9.79)$$

For distances $r \gg \sqrt{GM/a_0}$, the function $h(X)$ has been chosen to reproduce the MOND logarithmic potential, and the disformal contribution $\propto \delta_\mu^r \delta_\nu^r$ in (9.79) is precisely the one needed to reproduce the same light deflection as GR in presence of dark matter, Eq. (9.46), as already noticed below Eq. (9.76) for the previous nonminimal metric model. On the other hand, for $r \ll \sqrt{GM/a_0}$, the function $h(X)$ tends to 1 and does not contribute to any physical observable, whereas the disformal contribution $\propto \delta_\mu^r \delta_\nu^r$ still gives the constant anomalous light deflection (9.46), but too small to be of observational significance in the solar system. Therefore, this model does reproduce the right phenomenology. Solar-system tests just impose the tight bound $\alpha^2 < 10^{-5}$, as in standard scalar-tensor theories, because the $-2\alpha^2 GM/rc^2$ term contributes to our *interpretation* of light deflection, as explained in Eq. (9.26) above.

Since this model has been devised to reproduce the standard Brans-Dicke predictions for distances $r \ll \sqrt{GM/a_0}$, we can also conclude that it passes binary-pulsar tests, which impose the constraint $\alpha^2 < 4 \times 10^{-4}$ [247, 248, 249], weaker than the above solar-system one. Contrary to our discussion of the TeVeS model in Sec. 9.5, the (spin-2 and spin-0) gravitational waves are now strictly the same as in Brans-Dicke theory, even at large distances where MOND effects can be observed on material test bodies. Indeed, this model is a *pure* scalar-tensor theory in vacuum, so that gravitational waves themselves do not feel any MONDian effect. This is an interesting feature of this model, and also its main difference with the previous ones proposed in the literature. In previous models, the helicity-0 (scalar) waves undergo MONDian effects at large distances from massive sources, whereas they follow the same geodesics (of the Einstein metric $g_{\mu\nu}^*$) as the helicity-2 waves in the present model. Unfortunately, this different prediction cannot be used to experimentally discriminate between these models, because the solar-system constraint $\alpha^2 < 10^{-5}$ on the matter-scalar coupling constant implies that gravitational-wave detectors (made of matter) are almost insensitive to scalar waves. On the other hand, let us underline that they could in principle discriminate between such MOND-like field theories and the standard dark matter hypothesis. Indeed, all RAQUAL and disformal models, including TeVeS and the present one, predict that the helicity-2 waves are not directly coupled to the scalar field, and thereby are not deflected by what we usually interpret as dark matter haloes, contrary to light (coupled to the physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$ describing MONDian effects). Therefore, when the LISA interferometer will detect gravitational waves emitted from optically known sources, their direction should be slightly different from the optical direction if there exists at least one intermediate gravitational deflector. Unfortunately again, the LISA angular resolution will be about the angular size of the Moon (30 arcmin), much too large to measure such a

²²This negative value ensures that the matter field equations are well posed, since inequalities (9.44) are satisfied : $A^2 + sB = A^2 + 4\sqrt{GMa_0}/c^2 > A^2 > 0$.

deflection angle between electromagnetic and gravitational waves. But the *time-delay* between gravitational waves and optical or neutrino pulses from supernovae would allow us to discriminate between MOND and the dark matter hypothesis, as recently shown in [254].

The deadly problem of the previous model (9.68)-(9.69) was its Ostrogradskian instability. One may thus wonder if the present scalar-tensor variant avoids it. Indeed, since the matter action *a priori* involves covariant derivatives of the matter fields, it depends on the first derivatives of the physical metric $\tilde{g}_{\mu\nu}$, and thereby of the *second* derivatives of φ , see Eqs. (9.78). The same instability as before, caused by second and higher derivatives, seems thus to spoil the present model too. However, let us recall that the standard model of particle physics only involves gauge bosons described by 1-forms, and fermions described by Dirac spinors. It is well known that all covariant derivatives may be replaced by ordinary ones in forms, because their antisymmetry cancels all the Christoffel symbols $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$. Therefore, there is actually no derivative of $\tilde{g}_{\mu\nu}$ involved in the action describing the dynamics of gauge bosons, and only φ and its *first* gradient $\partial_\mu\varphi$ enter it. On the other hand, the action of a spinor in curved spacetime does depend of the first derivative of the metric (via the derivative of a tetrad, cf. Sec. 12.5 of [4]), but only *linearly*. Schematically, it reads $\bar{\psi}\tilde{g}^m\partial\psi + \bar{\psi}\tilde{g}^n(\partial\tilde{g})\psi$. Therefore, $\nabla_\mu^*\partial_\nu\varphi$ enters this action, but if one tries to define a conjugate momentum $p_2 \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}$, then its expression does not depend on any second derivative of φ . Therefore, one cannot express $\dot{\varphi}$ as a function of φ , $\dot{\varphi}$ and p_2 as in Eq. (9.6), and we are thus precisely in the case of a degenerate Lagrangian for which the Ostrogradskian instability does not occur. More explicitly, all second time derivatives of the scalar field, $\ddot{\varphi}$, may be eliminated by partial integration. In conclusion, the action of the standard model of particle physics actually does *not* depend on $\ddot{\varphi}$, and the above model is thus free of Ostrogradskian instability.

However, this absence of generic instability does not suffice to prove that the model is indeed stable. One must also check that the scalar field equation remains consistent *within* matter. In the most general case of arbitrary matter fields and arbitrary initial conditions, this problem is quite involved because the matter action depends on the derivative of the scalar field. As discussed in Sec. 9.4, one should write all the field equations, including for matter, and prove that the second derivatives of the scalar field define a hyperbolic operator. The simpler case of a pressureless perfect fluid will however suffice to exhibit the subtle difficulties appearing in this class of models. The generalized RAQUAL kinetic term

$$\tilde{f}(\varphi, s, \partial_0\varphi) = s + \frac{8\pi G\bar{\rho}}{c^2} A \sqrt{1 - (\partial_0\varphi)^2 B/A^2}, \quad (9.80)$$

written here in the rest frame of the perfect fluid and in coordinates locally diagonalizing the Einstein metric $g_{\mu\nu}^* = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, should satisfy inequalities (a1) and (b1) quoted below Eq. (9.49). The contribution of the scalar field to the Hamiltonian should also be bounded by below. Since the model has been constructed to reproduce the MOND dynamics at the lowest (Newtonian) order, without imposing its behavior at higher post-Newtonian orders nor in the cosmological regime, let us focus on the conditions (a2), (b2) and (c2) that \tilde{f} should at least satisfy at the Newtonian level. As mentioned in Sec. 9.4, condition (c2) is actually implied by (a2), because we imposed a positive value of the coupling function B in order to increase light deflection in the MOND regime. Moreover, one can check easily that the terms proportional to $(\partial_0\varphi)^2$ may be neglected in (a2) and (b2). On the other hand, note that A'/c^2 and sA''/c^2 are actually of Newtonian order $\mathcal{O}(1/c^0)$, in spite of the explicit factor $1/c^2$. At this Newtonian order, it suffices thus to check conditions

$$\begin{aligned} \text{(a2)} \quad & \tilde{f}' > 0, \\ \text{(b2)} \quad & 2s\tilde{f}'' + \tilde{f}' > 0, \end{aligned}$$

where \tilde{f} may be approximated as $\tilde{f} \approx s + (8\pi G\bar{\rho}/c^2)A$, as if we were considering a RAQUAL model in vacuum; see conditions (a) and (b) of Sec. 9.3. In such a case, these hyperbolicity conditions suffice to ensure that the scalar-field contribution to the Hamiltonian is bounded by below. [The coupling function B plays an even more negligible role in the Hamiltonian than in the hyperbolicity conditions, namely of order $\mathcal{O}(1/c^4)$ smaller than the lowest term involving the matter density $\bar{\rho}$.]

In the Newtonian regime, i.e., when the MONDian correction involving $\varphi X/\alpha$ in Eqs. (9.78) are negligible, it is obvious that the hyperbolicity conditions (a2) and (b2) are satisfied. The model reduces indeed to the standard Brans-Dicke theory, whose consistency is well known. If all matter in the Universe was clustered as compact enough bodies, like stars and planets, then this Newtonian regime of the model would always be reached when considering the scalar field equation *within* matter, and its Cauchy problem would always be well posed. As mentioned below Eqs. (9.78), there would still remain a difficulty near the center of any body, where the spatial gradient of the scalar field tends to 0, and therefore where MOND corrections may become large (before they are saturated by our *ad hoc* replacement of s by $\sqrt{s^2 + \varepsilon^2}$). However, it is not even necessary to study such centers of compact bodies to point out an extremely serious difficulty of this model. Indeed, there does exist dilute gas in the outer regions of galaxies where the MOND phenomenology applies. One should therefore check whether conditions (a2) and (b2) hold when the $\varphi X/\alpha$ corrections start dominating even over the Newtonian force. Actually, for the coupling functions (9.78), one finds that condition (b2) is easily satisfied, but it happens that (a2) is *not*. Indeed, $\tilde{f}' \approx 1 + (8\pi G\bar{\rho}/c^2)A'$, where $A' = (h + X dh/dX) \varphi X/4\alpha s$. The coefficient $(h + X dh/dX)$ varies from 1 to 3.3 in the range of distances relevant to the MOND regime, namely $X = r/\sqrt{GM/a_0} < 10$. On the other hand, $\varphi X/\alpha s = -(\sqrt{GMa_0}/c^2)(\alpha GM/r^2 c^2)^{-2}$ is a huge negative number, because the kinetic term s of the scalar field appears in its denominator. Even multiplied by the small gas density $G\bar{\rho}/c^2$ existing in the outer regions of galaxies, this negative contribution to \tilde{f}' dominates by several orders of magnitude over the 1 coming from the standard kinetic term in vacuum. In other words, $\tilde{f}' < 0$ within such a gas, and the scalar perturbations are thus ill defined. In spite of its nice features and its relative simplicity, the model (9.78) is thus inconsistent, because the scalar field equation is not always hyperbolic *within* matter. Such a difficulty was not discussed in previous works on MOND-like field theories, although it seems generic for disformally-coupled scalar-tensor models (9.43).

Of course, one may try to tune the coupling function A , Eq. (9.78a), to cure this inconsistency. For instance, since $\varphi X/\alpha$ takes the constant value $-\sqrt{GMa_0}/c^2$ outside matter, one may add to A any function of $\varphi X/\alpha$ without changing its spatial gradient, i.e., the force felt by a test mass. However, it is straightforward to show that there is not much freedom for such a function. In order to ensure condition (a2) without spoiling (b2), it must be close to $k(\varphi X/\alpha)^{-2}$, where k is a constant. This precise expression has the peculiarity not to contribute to condition (b2), whereas it adds a positive contribution to \tilde{f}' . The crucial difficulty is that the proportionality constant k must take a fixed value, imposed in the action of the model, and should not be chosen independently for each galaxy or cluster (cf. our discussion in Sec. 9.3 above). To guarantee condition (a2) in any situation, k should thus be chosen large enough, and one finds that $k > 2(GM_{\text{cluster}} a_0/c^4)^{3/2}$ would suffice, where M_{cluster} is the largest cluster mass existing in the Universe. Obviously, this appearance of another dimensionful constant in the model underlines that it would be even more fine tuned than before. [One might be tempted to simply set $k = 1$ to make the model more natural, but the coupling constant A would then take large values instead of admitting a post-Newtonian expansion $A = 1 + \mathcal{O}(1/c^2)$, and the predicted MONDian effects would then be reduced by the inverse of this large value.] But it happens that such a tuning of the coupling function A actually does *not* work. Indeed, although a term $k(\varphi X/\alpha)^{-2}$ would not contribute to the force felt by a test mass, it does contribute to the scalar field equation

$2\nabla_\mu^*(\tilde{f}'\nabla_\mu^*\varphi) = \partial\tilde{f}/\partial\varphi$. In the MOND regime, it even dominates over the other contributions in both sides of this field equation, in spite of its coefficient ($8\pi G\bar{\rho}/c^2$) involving the small gas density $\bar{\rho}$. In a region where $\bar{\rho}$ is almost constant, one may thus divide each side by it, and one gets a scalar field equation fully different from the one satisfied in vacuum,²³ although it does not depend any longer on the precise value of $\bar{\rho}$. Its exact solution is difficult to find, but the signs involved anyway show that φ would quickly tend to 0 within matter (in the MOND regime), instead of keeping the form $\varphi \approx -\alpha GM/rc^2$ that we assumed from the beginning of this section to construct the present model. Even without invoking the signs on the different terms in this field equation, it is anyway obvious to check that $\varphi \approx -\alpha GM/rc^2$ cannot be valid within the gas in outer regions of a galaxy. In other words, the extra force predicted by such a model, if any, would *not* take the MOND form that we wished. In conclusion, a tuning of the coupling function A to ensure the hyperbolicity of the scalar field equation within matter suffices to ruin the predictions of the model.

The above hyperbolicity problem underlines again how difficult it is to construct a MOND-like field theory, even fine tuned. In spite of the presence of several free functions in the model, which could *a priori* fit any phenomenology one wishes, the consistency of the field equations within matter is a strong enough condition to rule it out. One should however underline that this conclusion cannot be considered as a no-go theorem. The same framework as Eqs. (9.77)-(9.78) might be able to reproduce consistently the MOND dynamics with different coupling functions A and B . If the scalar field does not take the form $-\alpha GM/rc^2$ in the MOND regime, then specific combinations of φ and its kinetic term s might be able to give us access independently to the crucial factor $\sqrt{GMa_0}/c^2$ and to the radius $r/\sqrt{GM/a_0}$. The MOND metric (9.79) might thus be obtained again, and our discussion above shows that the Ostrogradskian instability would still be avoided. We expect the hyperbolicity conditions (a2) and (b2) to still cause serious problems within matter in the MOND regime, but we do not have any proof. Our investigations indicate anyway that the coupling functions A and B would very probably involve unnaturally complicated expressions (like large powers of s or transcendental functions).

The Pioneer anomaly

As mentioned in Sec. 9.2, the two Pioneer spacecrafts exhibited an anomalous extra acceleration $\delta a \approx 8.5 \times 10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$ towards the Sun, between 30 and 70 AU [167, 105, 106]. From a theoretical point of view, this anomaly is *a priori* much easier to explain than dark matter by a fine-tuned model modifying Newtonian gravity. Indeed, it has been observed in our single solar system, mainly characterized by the solar mass M_\odot , whereas galaxy and cluster rotation curves have confirmed the relation $M_{\text{dark}} \propto \sqrt{M_{\text{baryon}}}$ for many different values of the masses. A possible explanation (or, rather, description) of the Pioneer acceleration would be to couple matter to a scalar field, whose potential is merely fitted to reproduce observed data. However, in order not to spoil the precision tests of Kepler's third law in the solar system, such a potential should not manifest at distances smaller than Saturn's orbit (≈ 10 AU), and cause an almost constant extra force beyond 30 AU. Besides the fact that this would be quite unnatural, one may also wonder if this would correspond to a stable theory. Indeed, the simplest stable potential for a scalar field is a mass term $\propto \varphi^2$, and it causes a force which *decreases* (exponentially) as the distance grows. Even within the *a priori* simpler case of the Pioneer anomaly, the construction of a stable model does not seem obvious, thus.

²³This problem actually already arises with the initial coupling function A , Eq. (9.78a), whose MONDian terms dominate within the gas in outer regions of galaxies. However, one can check that the scalar field and its derivative keep the same orders of magnitude as the vacuum (Brans-Dicke) behavior $\varphi \approx -\alpha GM/rc^2$ we assumed, so that the phenomenological predictions remain correct up to factors of order unity. On the other hand, the scalar field behavior is fully changed within this outer gas when the correcting term $k(\varphi X/\alpha)^{-2}$ is included.

A first, important, step has been understood in the series of papers [255, 110, 256] by Reynaud and Jaekel. From a phenomenological viewpoint, it is much more natural to describe the Pioneer anomaly by a modification of the spatial metric g_{ij} rather than the Newtonian potential involved in g_{00} . Indeed, if the metric is written in the Schwarzschild form (9.34), then the geodesics equation for a test mass m_0 reads

$$\mathcal{E}^2/c^2 - (m_0^2 c^2 + \mathcal{J}^2 u^2) \mathcal{B} = \mathcal{J}^2 \mathcal{A} \mathcal{B} u'^2, \quad (9.81)$$

where \mathcal{E} is the particle conserved energy (including rest mass $m_0 c^2$), \mathcal{J} its angular momentum, $u \equiv 1/r$, and a prime denotes here derivation with respect to the angle in polar coordinates. For a circular orbit, $u' = 0$ so that the spatial metric component $g_{rr} = \mathcal{A}$ does not enter this equation.²⁴ More generally, its right-hand side is proportional to the square of the orbit's eccentricity, e^2 . In conclusion, planets on nearly circular orbits are almost insensitive to a small modification of \mathcal{A} , whereas they would feel any extra potential entering the time component \mathcal{B} . On the other hand, hyperbolic trajectories,²⁵ like those of light rays and the Pioneer spacecrafts, are directly sensitive to a modification of \mathcal{A} . This is actually the crucial difference between galaxy rotation curves (which exhibit a discrepancy with Newton's law for the *circular* orbits of outer stars) with the Pioneer anomaly (occurring for hyperbolic trajectories). While it was necessary to modify the time-time metric g_{00} to reproduce the MOND phenomenology (together with the spatial one g_{ij} to predict the correct light deflection), it is possible to account for the Pioneer anomaly by a modification of g_{rr} alone.

However, post-Newtonian tests in the solar system, notably those of light deflection and Shapiro time delay, severely constrain the magnitude of the deviations from general relativity in the spatial component \mathcal{A} . In particular, it is impossible to account for the Pioneer anomaly within the parametrized post-Newtonian formalism [47, 257, 258, 49, 259, 260, 46], which describes all metrically-coupled theories of gravity at order $\mathcal{O}(1/c^2)$ with respect to the Newtonian force, under the hypothesis that the gravitational field does not involve any characteristic length scale. This hypothesis implies that all post-Newtonian parameters, including the famous Eddington parameters β and γ , must be independent of the radial distance r . Within this wide class of theories, the Pioneer anomaly is merely inconsistent with other precision tests in the solar system.

The lesson of Refs. [255, 110, 256] is that a spatial dependence of the Eddington parameter γ , going thus beyond the PPN formalism, suffices to account for the Pioneer anomaly without spoiling the classic tests. This parameter should of course remain very close to the general relativistic value $\gamma = 1$ at small radii, so that light-deflection and time-delay predictions are consistent with observation, but it may change at distances $\gtrsim 30$ AU to fit Pioneer data. In their first analysis, Refs. [255, 110] showed that an expression $\gamma = 1 + \kappa r^2$ would *a priori* suffice, for an appropriate constant κ tuned to reproduce the Pioneer extra acceleration. In other words, the radial component of the metric should take the form $g_{rr} = 1 + 2\gamma GM_\odot/rc^2 + \mathcal{O}(1/c^4) = 1 + (2GM_\odot/c^2)(1/r + \kappa r) + \mathcal{O}(1/c^4)$, in which a small term linear in r corrects the general relativistic $1/r$ potential. The refined discussion of Ref. [256] actually leads to a more complex radial dependence of the parameter γ , cubic in r , but the qualitative conclusion remains the same.

²⁴Beware that in the Schwarzschild coordinates we are using, the post-Newtonian term in the time component g_{00} of the metric is proportional to the combination $\beta - \gamma$ of the Eddington parameters, whereas it is proportional to γ in the radial component. It would thus be misleading to claim that circular orbits are merely independent of γ . The correct statement should underline that this is only true for a fixed value of $\beta - \gamma$.

²⁵Recall that the virial theorem implies $v^2/c^2 = \mathcal{O}(GM/rc^2)$ for bound orbits, whereas hyperbolic ones reach a nonzero asymptotic velocity $v^2/c^2 \gg GM/rc^2$ for large distances r . As compared to the time-time contribution $g_{00}c^2 dt^2$ to the line element ds^2 , the spatial one $g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} v^i v^j dt^2$ is thus of post-Newtonian order for bound orbits, but much larger for hyperbolic ones (and actually of the same order as the time-time contribution for light rays, yielding the famous $(1 + \gamma)$ factor of the light deflection formula).

Let us just summarize here the simpler result of [255, 110]. The extra acceleration $\delta\mathbf{a}$ caused by a term $k_n r^n$ added to $g_{rr} = \mathcal{A}$ is a straightforward consequence of the geodesics equation (9.81). One finds

$$\delta\mathbf{a} = -\frac{1}{2} k_n n r^{n-1} v^2 \mathbf{n}, \quad (9.82)$$

where v denotes the particle's velocity and $\mathbf{n} \equiv \mathbf{x}/r$ the radial unit vector (pointing away from the Sun). Since the velocities of the Pioneer spacecrafts were almost constant on the range of distances where their anomalous acceleration was observed, one thus needs $n = 1$ and a positive value of k_1 to obtain a constant $\delta\mathbf{a}$ directed towards the Sun. Actually, one does not directly observe the acceleration of the spacecrafts, but deduce it from Doppler tracking. One should thus also take into account the fact that electromagnetic waves travel in the same metric, and feel the anomalous potential too. Reference [255, 110] shows that this leads to a factor 2 difference in the prediction of the recorded anomalous acceleration, i.e., $\delta a = k_1 v^2$. Numerically, for the Pioneer spacecrafts, $v \approx 1.2 \times 10^4 \text{ m.s}^{-1}$ and $\delta a \approx 8.5 \times 10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$, therefore

$$k_1 \approx \frac{0.5 \text{ m.s}^{-2}}{c^2} \approx (10^6 \text{ AU})^{-1}. \quad (9.83)$$

If interpreted as a varying Eddington parameter $\gamma = 1 + \kappa r^2$, with $2\kappa GM_\odot/c^2 = k_1$, this gives $\kappa \approx 45 \text{ AU}^{-2}$. The refined analysis of Ref. [256] yields a quadratic extra potential $k_2 r^2$ with $k_2 \approx 8 \times 10^{-8} \text{ AU}^{-2}$, i.e., a varying Eddington parameter $\gamma \approx 1 + 4(r/\text{AU})^3$. It further tunes this extra potential in the form $k_2(r - r_\oplus)^2 + k'_2(r - r_\oplus)$, where r_\oplus is the radius of the Earth's orbit and k'_2 another constant characterizing the anomalous acceleration at $r = r_\oplus$. We shall not take into account such refinements in the following, but just mention that they would not change our conclusion.

The last difficulty is to exhibit a consistent field theory reproducing such a radial dependence of γ , both stable and admitting a well-posed Cauchy problem. Because of the generic difficulties with modified gravity models recalled in Sec. 9.3, and notably the stability issues of higher-order gravity discussed in Sec. 9.3, it is *a priori* not obvious that such a theory exists, and Refs. [255, 110] actually write nonlocal field equations without discussing these crucial mathematical requirements. But it happens that the scalar-tensor framework of Sec. 9.6 above suffices to reproduce consistently a varying Eddington parameter γ . Indeed, the disformal contribution $B\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$ to the physical metric (9.43) is precisely what is needed to change only the radial component g_{rr} , i.e., what is denoted as \mathcal{A} in the geodesics equation (9.81). As in Sec. 9.6, one may thus consider a scalar field weakly coupled to matter via a Brans-Dicke conformal factor $A^2(\varphi) = \exp(2\alpha\varphi)$, and build the appropriate correction²⁶ to the radial metric by using $\varphi \approx -\alpha GM_\odot/rc^2$ and $\sqrt{s} = \partial_r\varphi \approx \alpha GM_\odot/r^2c^2$. Since we do not have any experimental evidence that the Pioneer anomalous acceleration is related to the solar mass (nor its square root nor any function of it), several expressions can actually be used to build an extra gravitational potential linear in r , for instance $1/\varphi$ or $s^{-1/4}$, or any function like $\varphi^{-1}f(\varphi^4/s)$. The simplest choice would be to impose $B = -\lambda_5/\varphi^5$, where λ_5 is a positive constant, i.e., a physical metric of the form

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\alpha\varphi} g_{\mu\nu}^* - \frac{\lambda_5}{\varphi^5} \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi, \quad (9.84)$$

so that $\tilde{g}_{rr} = e^{2\alpha\varphi} g_{rr}^* - (\lambda_5/\varphi)(s/\varphi^4)$ involves a positive correction proportional to r . [The more complex, quadratic, potential derived in Ref. [256] can be obtained in the same way, by choosing

²⁶A correction to the time-time metric \tilde{g}_{00} would also be easy to define by using φ and $\partial_r\varphi$. This might be necessary to avoid too large modifications of the planets' perihelion shifts, which depend on both of the PPN parameters β and γ .

for instance $B = \mu_6/\varphi^6 + \mu_5/\varphi^5 + \mu_4/\varphi^4$, where $\mu_{4,5,6}$ are three constants such that $B > 0$, in order to predict an extra acceleration directed towards the Sun.] Of course, expression (9.84) is valid only in the vicinity of the Sun, where $s > 0$ and $\varphi < 0$. It should be refined to remain valid in other regimes, but the Pioneer data do *not* tell us how. Since the condition $A^2 + sB > 0$ must be satisfied to ensure the hyperbolicity of the matter field equations, see Eq. (9.44), it might be better to consider coupling functions $B = \lambda_9 s/|\varphi|^9$ or $B = \lambda_1/(|\varphi|s)$. However, it would also suffice to multiply the above $B = -\lambda_5/\varphi^5$ by a function $h(s)$, such that $h(s) = 0$ for $s < 0$ and $h(s) = 1$ for $s > (\alpha GM_\odot/r_{\max}^2 c^2)^2$, where $r_{\max} \approx 70$ AU is the largest distance for recorded Pioneer data. The above metric (9.84) should also be refined to avoid divergences when φ passes through zero with a nonvanishing derivative. A possible solution would be to replace $-\varphi$ by $\sqrt{\varphi^2 + \varepsilon^2}$, where $\varepsilon \ll \alpha GM_\odot/r_{\max} c^2$ is a tiny dimensionless number, negligible for the Pioneer phenomenology but eliminating our anomalous potential at larger distances. Numerically, one would need $\varepsilon \ll 10^{-10} \alpha < 3 \times 10^{-13}$, if one takes into account the solar-system constraints on the matter-scalar coupling constant $\alpha < 3 \times 10^{-3}$. On the other hand, to reproduce the observed Pioneer anomaly, the constant λ_5 entering Eq. (9.84) should take the numerical value

$$\lambda_5 \approx \alpha^3 (10^{-4} \text{m})^2 < (2 \times 10^{-8} \text{m})^2, \quad (9.85)$$

the upper limit corresponding to the largest allowed value for α . [The other possible expressions for B quoted above would need factors $\mu_6 \approx \alpha^4 (4 \times 10^{-9} \text{m})^2 < (4 \times 10^{-14} \text{m})^2$, $\lambda_9 \approx \alpha^5 (0.4 \text{m})^4 < (3 \times 10^{-4} \text{m})^4$ and $\lambda_1 \approx 10^{-14} \alpha < 3 \times 10^{-17}$ respectively.]

Such numerical constants underline that we are merely fine-tuning a model to account for experimental data. However, the crucial point that we wish to stress is that the model (9.77) with a physical metric (9.84) is stable and admits a well-posed Cauchy problem. The hyperbolicity conditions (a1) and (b1) of Sec. 9.4 are indeed trivially satisfied, because both coupling functions $A = \exp(\alpha\varphi)$ and $B = -\lambda_5/\varphi^5$ are independent of the kinetic term s , and because $B > 0$ in the regime where this model is defined. Actually, for such a simple case, one may even check the hyperbolicity of the fully general scalar field equation (9.47) within any kind of matter. The fact that the Hamiltonian is bounded by below is also an obvious consequence of the positivity of B . [Note that all these consistency conditions are also obvious for the more complex expression $B = \mu_6/\varphi^6 + \mu_5/\varphi^5 + \mu_4/\varphi^4$ mentioned above to reproduce the quadratic potential derived in Ref. [256]. On the other hand, they are less trivial for the other possible expressions for B quoted above, such as $B = \lambda_9 s/|\varphi|^9$ or $B = \lambda_1/(|\varphi|s)$. However, they may still be easily checked at the lowest post-Newtonian level, where the hyperbolicity conditions reduce to (a2), (b2) and (c2) of Sec. 9.4, and where all terms proportional to $u_*^\mu \partial_\mu \varphi$ may be neglected.]

The final consistency check is to show that the scalar field takes indeed the form $\varphi \approx -\alpha GM_\odot/rc^2$ in the solar system, since we assumed this expression to build our anomalous potential. One just writes the scalar field equation within matter, $2\nabla_\mu^* (\tilde{f}' \nabla_\mu^* \varphi) = \partial \tilde{f} / \partial \varphi$, where \tilde{f} is defined in Eq. (9.49). If the Sun were an isolated body, the scalar field would be generated by it only, and one would have $u_*^\mu \partial_\mu \varphi = 0$ strictly (up to a negligible time variation of the scalar field possibly imposed by the cosmological evolution). In such a case, the model reduces to Brans-Dicke theory, and one gets thus obviously $\varphi \approx -\alpha GM_\odot/rc^2$. When considering other bodies in the solar system, the largest effects due to the disformal coupling function B occur at large distances from the Sun. One finds that the coupling constant α is then renormalized into $\alpha + \mathcal{O}(rv^2/GM_\odot) k_1 r / \alpha$, where $k_1 \approx (10^6 \text{AU})^{-1}$ is the coefficient (9.83) of the linear anomalous potential we added to the radial metric. The coefficient $\mathcal{O}(rv^2/GM_\odot)$ is of order unity for planets because of the virial theorem, and solar-system tests impose $\alpha^2 < 10^{-5}$. For the largest allowed value of α , we can thus conclude that our anomalous potential does not contribute significantly to the scalar field equation up to $r \sim 10$ AU (i.e., Saturn's orbit). For outer planets, α may be increased by a factor $\lesssim 4$, but since their masses are negligible with respect to that of

the Sun, the approximate value of the scalar field near the Pioneer spacecrafts remains anyway $\varphi \approx -\alpha GM_\odot/rc^2$. The largest modification of the matter-scalar coupling constant occurs for the Pioneer spacecrafts themselves (or any object on a hyperbolic orbit at similar distances from the Sun), since $rv^2/GM_\odot \approx 10$ for $r = 70$ AU and the spacecrafts' velocity $v \approx 1.2 \times 10^4$ m.s⁻¹. This means that this coupling constant is increased by a factor ~ 80 at such distances, explaining incidentally why these spacecrafts are sensitive to the scalar field. But the local perturbation of φ they induce does not act on their own trajectory, and it remains negligibly small for other bodies (as if we were considering 80 spacecrafts instead of one, but weakly coupled to the scalar field as in Brans-Dicke theory).

In conclusion, although the above model (9.77)-(9.84) is not justified by any underlying symmetry principle, and should be considered more as a fit of Pioneer data than as a predictive theory, it proves that it is possible to account for this anomalous acceleration in a consistent field theory, while satisfying all other solar-system data (and binary-pulsar tests too, since the model reduces to Brans-Dicke theory in vacuum). Let us recall that there is no reason to trust Eq. (9.84) in a different regime than the one relevant to the Pioneer spacecrafts, and notably in cosmology. Note also that there exist many different ways to reproduce the same phenomenology, as exhibited by various expressions of the disformal coupling function B above. Our only addition with respect to Refs. [255, 110, 256] is that a varying post-Newtonian parameter γ is indeed possible within a stable model admitting a well-posed Cauchy problem.

9.7 Conclusions

One of the aims of this article was to clarify the mathematical consistency of various field theories proposed in the literature to reproduce the MOND phenomenology. We underlined that besides experimental constraints which need to be satisfied, including new ones that we discussed (notably binary-pulsar tests), there are also several basic requirements that a field theory needs to meet : stability (i.e., boundedness by below of its Hamiltonian) and well-posedness of its Cauchy problem (i.e., notably the fact that all field equations must be hyperbolic). In our opinion, the TeVeS model [24, 178] is presently the most promising, but it also presents several serious difficulties discussed in Sec. 9.5, and cannot be considered yet as a fully consistent theory. We examined another possible route to reproduce the MOND phenomenology, within the class of the already studied RAQUAL models [2], but with a different spirit. Its originality is that the theory is particularly simple in vacuum (pure general relativity or Brans-Dicke theory). However, the analysis of the field equations *within* matter exhibited a deadly inconsistency. Although this framework did not provide any serious alternative to TeVeS yet, we anyway believe further work along its line might do so. Its interest also lies in its relative simplicity. The model proposed in Sec. 9.6, assuming a nonminimal coupling of matter to the spacetime curvature, is for instance an excellent toy model of other MOND-like field theories, as it exhibits their generic difficulties : non-predictiveness, fine-tuning, and above all instability.

It should be underlined that other experimental problems also need to be addressed by any field theory of MOND, although we did not discuss them in the present article. First of all, weak lensing observations have already exhibited several evidences of dark matter not located around clusters of baryonic matter, notably the famous bullet cluster [140] and the very recent dark matter ring [261]. The basic idea of the MOND dynamics seems therefore to be contradicted. However, several studies [141, 137, 262, 142] have argued that such observations do not rule out MOND-like field theories, whose predictions can differ significantly from the original MOND proposal in non-spherical and dynamical situations. Another generic problem of models avoiding the dark matter hypothesis is to predict the right relative heights of the second and third acoustic

peaks of the CMB spectrum. Indeed, in absence of collisionless dark matter, their heights should decrease monotonically by Silk damping, whereas WMAP data [160, 161] confirm that the second and third peaks have similar heights (consistent with the dark matter paradigm). Reference [263] analyzed the CMB spectrum within the TeVeS model, and found that it can fit experimental data provided there is a present density $\Omega_\nu \approx 0.17$ of massive neutrinos. This number is not far from the needed dark matter density $\Omega_{\text{DM}} \approx 0.24$ in the standard Λ CDM (cosmological constant plus cold dark matter) cosmological model, and illustrates that the existence of dark matter (as massive neutrinos) would anyway be needed in the TeVeS model, although the MOND dynamics was initially devised to avoid the dark matter hypothesis. However, it is already known that some amount of dark matter is anyway needed to account for the cluster rotation curves, within the MOND model, and massive neutrinos would be perfect candidates since they can cluster on such scales although they are too light to cluster on galaxy scales. Therefore, a MOND-like field theory remains a possibility, provided there is a large enough density of massive neutrinos — or any other dark matter candidate with similar properties. In the model [143], closely related to TeVeS, one of the two scalar degrees of freedom is assumed to play the role of this dark matter. A third difficulty of MOND-like field theories is also to explain the numerical coincidence $a_0 \approx cH_0/6$ between the MOND acceleration constant and the Hubble constant (i.e., the present expansion rate of the Universe) [1]. Some very promising ideas have been developed notably in [143], but it cannot be considered as a prediction. For instance, it may happen that a_0 is actually related to the cosmological constant instead of the Hubble expansion rate, *via* a relation like $a_0 \approx \sqrt{\Lambda c^2/72}$. In such a case, it would not vary with time, and one would “only” have to explain why it happens to take this precise value. On the other hand, a constant value of a_0 would probably be ruled out by the observed CMB spectrum, although this obviously depends on the precise features of the model. A fourth difficulty is more theoretical than experimental. The action-reaction principle implies that if a mass m_1 feels a force $(\sqrt{Gm_2a_0})m_1/r$ caused by a second mass m_2 , in the MOND regime, then the latter must feel the opposite force and thereby undergo an acceleration $(\sqrt{Ga_0/m_2})m_1/r$. Since this expression diverges as $m_2 \rightarrow 0$, any light enough particle should thus be infinitely accelerated by distant objects feeling its MOND potential. Actually, the self-energy of such particles must be properly renormalized, and it has been proven in [2] that the RAQUAL model does not suffer from any inconsistency due to the action-reaction principle. Indeed, the force felt by mass m_1 takes the MOND form $(\sqrt{Gm_2a_0})m_1/r$ only when $m_2 \gg m_1$. The exact expression of the forces has been derived in [264], $m_1a_1 = m_2a_2 = (2\sqrt{Ga_0}/3r)[(m_1 + m_2)^{3/2} - m_1^{3/2} - m_2^{3/2}]$, so that the acceleration $a_2 = \sqrt{Gm_1a_0}/r + \mathcal{O}(\sqrt{m_2})$ remains finite even when $m_2 \rightarrow 0$. Although we expect that similar arguments would apply for any field theory deriving from an action principle, it remains to explicitly prove so for new models that one may consider, for instance for the class of nonminimally coupled fields studied in Sec. 9.6 above.

All these difficulties, in addition to those discussed in the present paper, underline that the construction of a consistent field theory reproducing the MOND dynamics and the right light deflection is far from being obvious. Although the considered actions depend on several free functions allowing us to *fit* different kinds of data, there are so many theoretical and experimental constraints that no model passes all of them at present. The conclusion of our analysis seems thus to be in favor of the dark matter paradigm. On the other hand, the Tully-Fisher law, i.e., the existence of a universal acceleration scale a_0 , has not yet been derived in dark matter models. More generally, dark matter profiles seem to be tightly correlated to baryonic ones [138] (up to apparent counterexamples such as the bullet cluster [140, 261]), and this lacks any explanation in CDM whereas this is an obvious prediction of MOND. Therefore, the dark and baryonic matter clustering still needs to be understood in more detail, and the analysis of modified gravity theories remains an interesting alternative to the standard Λ CDM paradigm.

Identifying theoretical difficulties and finding ways to solve them often provides new possible interpretations of experimental data. For instance, we saw in Sec. 9.3 that the RAQUAL kinetic term needed to be slightly modified for vanishingly small accelerations, in order for the field theory to remain consistent. The resulting model predicts that gravity becomes Newtonian again at very large distances (after a transition by the MOND regime), but with a much larger gravitational constant. Both the cosmological predictions and our interpretation of cosmological data would be fully changed within such a model. This may lead to a new understanding of both the “local” mass discrepancies (within galaxies and clusters) and of the cosmological dark matter. Another bonus of our study was also to provide an example of a consistent field theory reproducing the Pioneer anomaly without spoiling other predictions of general relativity. But although it passes theoretical and experimental constraints, it does not pass “esthetical” ones (as defined in the Introduction), i.e., it is actually *tuned* to account for Pioneer data. It would remain to find an underlying symmetry principle which could *predict* this phenomenology.

Acknowledgments

We wish to thank many colleagues for discussions about dark matter and MOND, notably L. Blanchet, T. Damour, C. Deffayet, É. Flanagan, B. Fort, A. Lue, G. Mamon, J. Moffat, Y. Mellier, M. Milgrom, R. Sanders, J.-P. Uzan and R. Woodard.

MOND : quelques aspects phénoménologiques

10.1 Présentation du travail et résultats

Nous achevons la dernière partie de ce manuscrit en reportant un court travail phénoménologique réalisé avec B. Famaey et H.S. Zhao. Nous avons souligné au chapitre 8 que la brisure du principe d'équivalence fort générique à toute théorie de MOND doit avoir des contreparties observationnelles intéressantes. Nous nous sommes intéressés à la valeur de la vitesse d'échappement locale, c'est-à-dire la vitesse nécessaire pour qu'un corps massif se libère de l'attraction gravitationnelle de la Voie Lactée, dont nous allons voir qu'elle est liée, dans la théorie MOND, à la valeur du champ extérieur dans lequel est plongée la galaxie. Il n'existe évidemment pas de mesure directe de cette vitesse d'échappement. Néanmoins, il suffit de cataloguer les étoiles les plus véloces dans l'environnement du système solaire pour en avoir une bonne estimation¹.

Les auteurs de [265] ont ainsi utilisé les données de la collaboration RAVE pour déduire la valeur approchée de cette vitesse d'échappement $v_{\text{esc}} : 498\text{km.s}^{-1} < v_{\text{esc}} < 608\text{km.s}^{-1}$. Il va sans dire, peut-être, que cette vitesse est anormalement élevée si l'on ne tient pas compte de la présence d'un halo de matière noire ou de lois modifiées de la gravitation. Comme il est bien connu en effet, si l'on peut considérer que la fraction de masse contribuant à la masse totale de la galaxie est faible et voire négligeable au-delà de l'orbite du Soleil, et si la loi de Newton s'applique jusqu'à l'infini, alors la vitesse d'échappement locale doit être environ la vitesse orbitale du Soleil autour de la galaxie multipliée par $\sqrt{2}$. Le Soleil orbitant environ à 200km.s^{-1} autour du centre galactique, la vitesse d'échappement attendue est de l'ordre de 280km.s^{-1} , bien en-deçà de la valeur observée.

Afin d'expliquer une telle valeur il faut donc considérer que la loi de Newton est valable mais qu'une quantité considérable de masse se trouve réunie au-delà de l'orbite du Soleil, ou bien que la loi de Newton n'est plus valable à l'infini de sorte que l'énergie potentielle à l'infini ne prenne plus sa forme standard $-GM/r$. Nous arrivons ainsi de nouveau aux alternatives CDM et MOND. En effet, il n'est pas question d'imaginer que seule la masse baryonique en périphérie de la galaxie (et au-delà du Soleil) puisse à elle seule expliquer une valeur si élevée de la vitesse d'échappement. Rappelons que cette dernière est proportionnelle à la racine carrée de la masse totale, de sorte qu'il faudrait considérer que la quasi totalité (80 pour cent) de la masse constituant la Voie Lactée soit située au-delà du Soleil pour expliquer la valeur de cette vitesse. Une telle quantité de masse baryonique serait évidemment visible et connue depuis longtemps, si elle existait. La seule option possible est de supposer que cette masse existe sous une forme non lumineuse, ie. sous la forme d'un halo de matière noire. L'autre approche, bien entendue, consiste à modifier de façon adéquate la loi de la gravitation de Newton. Il se trouve que la modification de la gravité à la MOND permet d'expliquer la valeur de cette vitesse d'échappement, ce qui n'avait rien d'évident a priori.

¹En utilisant l'argument consistant à dire qu'on n'observe pas d'étoiles animées de mouvement plus rapides (par rapport au centre galactique) parce que celles-ci, ayant perdu leur lien gravitationnel à la galaxie, se sont échappées. Les plus grandes vitesses observées sont donc une bonne estimation de cette vitesse d'échappement.

Si la Voie Lactée était isolée, on ne pourrait pas définir le potentiel gravitationnel à l'infini, ni, par conséquent, la vitesse d'échappement locale, puisque le potentiel gravitationnel MONDien croît avec le logarithme de la distance. C'est précisément l'effet non trivial du champ extérieur dans lequel est plongée la Voie Lactée qui permet malgré tout de définir une telle quantité. En effet ce champ extérieur, que l'on va supposer homogène sur une échelle de l'ordre de plusieurs fois la taille de notre galaxie, a pour effet de saturer la fonction interpolatrice μ de Milgrom, de sorte que l'équation de Poisson effective (effective dans le sens où l'on ne cherche pas à décrire la façon dont est engendré le champ extérieur) se réduit à une équation de Poisson standard avec une constante de gravitation renormalisée $G/\mu(g_e/a_0)$ loin de la Voie Lactée, c'est-à-dire quand le champ gravitationnel créé par la galaxie devient négligeable devant g_e , où g_e est le champ extérieur. Le régime MONDien près de la Voie Lactée simule un halo de matière noire dont l'extension est par conséquent donnée par la distance au centre galactique à laquelle le champ extérieur domine le champ créé par la galaxie. La vitesse d'échappement ainsi augmentée dépend donc fortement de la valeur dudit champ extérieur. Nous avons calculé qu'il faut que celui-ci soit de l'ordre de $.01a_0$ afin d'expliquer la valeur de la vitesse d'échappement. Cela correspond bien, en effet, au champ extérieur créé par l'amas de Virgo ou par le Grand Attracteur.

Nous faisons enfin remarquer que l'introduction du paramètre ε qui a pour effet de rendre la théorie à nouveau Newtonienne à l'infini (cf Sec. 9.1), aurait ici exactement le même effet que celui du champ extérieur. Par conséquent ce paramètre ne doit guère dépasser² 10^{-2} .

Cet article a été publié dans la revue *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.

²Une valeur de ε de l'ordre de $1/10$, suffisante à expliquer l'aplatissement des courbes de rotations de galaxies sur environ dix fois le rayon MONDien $(GM/a_0)^{1/2}$, serait responsable d'une saturation trop rapide de la fonction μ , de sorte que la vitesse d'échappement ainsi prédite serait beaucoup trop faible comparée aux $\sim 550\text{km.s}^{-1}$ nécessaires.

Escaping from Modified Newtonian Dynamics

Benoit Famaey^{1,3}, Jean-Philippe Bruneton² and HongSheng Zhao³

¹Institut d'Astronomie et d'Astrophysique, Université Libre de Bruxelles, CP 226, Bvd du Triomphe, B-1050, Bruxelles, Belgium

²Institut d'Astrophysique de Paris, UMR 7095-CNRS, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, 98 bis Bvd Arago F-75014, Paris, France

³SUPA, School of Physics and Astronomy, University of St. Andrews, Fife KY16 9SS, UK

We present a new test of modified Newtonian dynamics (MOND) on galactic scales, based on the escape speed in the Solar Neighbourhood. This test is independent from other empirical successes of MOND at reproducing the phenomenology of galactic rotation curves. The galactic escape speed in MOND is entirely determined by the baryonic content of the Galaxy and the external field in which it is embedded. We estimate that the external field in which the Milky Way must be embedded to produce the observed local escape speed of $\sim 550 \text{ km s}^{-1}$ is of the order of $a_0/100$, where a_0 is the dividing acceleration scale below which gravity is boosted in MOND. This is compatible with the external gravitational field actually acting on the Milky Way.

10.2 Introduction

The speed needed by a star in the Solar Neighbourhood to escape the local gravitational field of the Milky Way – known as the local galactic escape speed – has long been known to be an essential indicator of the amount of mass beyond the galactocentric radius of the Sun (e.g. [266]). Given the poor constraints on the shape of the galactic rotation curve beyond that radius (e.g. [267, 268]), it has become one of the most convincing arguments in favour of a halo of dark matter in our Galaxy [265]. However, the observed tight correlation between the mass profiles of baryonic matter and dark matter at all radii in spiral galaxies (e.g. [269, 270]) rather lends support to modified Newtonian dynamics (MOND). This theory postulates that for accelerations below $a_0 = 1.2 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}$ the effective gravitational attraction approaches $(g_N a_0)^{1/2}$ where g_N is the usual Newtonian gravitational field. Without resorting to galactic dark matter, this simple prescription is amazingly successful at reproducing many aspects of the dynamics of galaxies that were unknown when Milgrom in 1983 [1] introduced the theory (e.g. [103, 139]). It is however worth noting that the theory might still welcome (and might even need) hot dark matter, which could condense in galaxy clusters and boost the (modified) gravitational potential on Mpc scale [271, 137].

In MOND, the gravitational potential Φ of an isolated point mass M at a distance $r \gg (GM/a_0)^{1/2}$ is of the form :

$$\Phi(r) \sim (GMa_0)^{1/2} \ln(r). \quad (10.1)$$

This implies that the associated rotation curve is asymptotically flat, but in turn it implies that there is no escape from such an isolated point mass. In practice however, no objects are truly isolated in the Universe and this has wider and more subtle implications in MOND than in Newton-Einstein gravity, for the very reason that MOND breaks the Strong Equivalence Principle (SEP). In particular, this letter illustrates how the external field regularizes the above divergent potential, so that it *is* possible to escape from non-isolated point masses in MOND.

More generally, this breakdown of the SEP remarkably allows to derive properties of the gravitational field in which a system is embedded from its internal dynamics (and not only

³FNRS Research Associate; email : bfamaey@ulb.ac.be

from tides). For this reason, we are able to compute hereafter the external gravitational field in which the Milky Way should be embedded in MOND in order to account for the measured local galactic escape speed. The result is in good agreement with the gravitational field that Large Scale Structures are expected to exert on the Galaxy (of the order of $a_0/100$). The MOND paradigm thus successfully explains the value of the local escape speed without referring to any halo of dark matter.

10.3 Observed galactic escape speed

The local galactic escape speed in the Solar Neighbourhood can be estimated by using local samples of high velocity stars [272], but this task was until recently hampered by the very small number of such observed stars and by the fact that they were selected from proper-motion surveys. Now, radial velocity data from the Radial Velocity Experiment (RAVE), a magnitude-limited survey avoiding kinematical biases [273], have been used to constrain the local escape speed [265]. A total of 33 stars (16 from the RAVE survey and 17 from [274]) with velocities higher than 300 km s^{-1} have been selected, and, following the technique of Ref. [275], the local escape speed has been estimated to lie in the following 90% confidence interval :

$$498 \text{ km s}^{-1} < v_{\text{esc}} < 608 \text{ km s}^{-1}, \quad (10.2)$$

with a median likelihood of 544 km s^{-1} . Any unbound star in the sample could have biased the result but authors of Ref. [276] have shown that hypervelocity stars ejected from the galactic center are actually very rare (i.e. 1 every 10^5 years) and thus not likely to belong to such a survey.

10.4 Galactic escape speed in MOND

The external field effect

The local galactic escape speed essentially depends on the profile of the gravitational potential in the outskirts of the Milky Way. The latter may of course depend on the precise realization of the MOND phenomenology. Here we assume that the gravitational potential Φ of the Milky Way satisfies the modified Poisson equation [2] :

$$\nabla \cdot [\mu(|-\nabla\Phi + \mathbf{g}_e|/a_0)\nabla\Phi] \simeq 4\pi G\rho, \quad (10.3)$$

where Φ is the non-external part of the potential, ρ is the density of the (baryonic) matter, \mathbf{g}_e is the approximatively constant external field in which the Milky Way is embedded, and $\mu(x)$ is a function which runs from $\mu(x) = 1$ at $x \gg 1$ to $\mu(x) = x$ at $x \ll 1$, and which can thus never be smaller than $|\mathbf{g}_e|/a_0$. Note however that Eq. (10.3) is only an approximate and effective way to take into account the effect of the external field on local physics, in order to avoid solving the modified Poisson equation of [2] with an external source term ρ_{ext} on the right-hand side. This type of problem can be solved analytically only in some special configurations. For example, if $|\nabla\Phi| \ll |\mathbf{g}_e|$ everywhere in the system, a full perturbative analytical solution can be found [157, 277], but this is physically relevant only for the internal potential of low-density dwarf spheroidal galaxies orbiting more massive galaxies such as the Milky Way.

In the Milky Way, if $|\mathbf{g}_e| \ll a_0 \ll |\nabla\Phi|$ (e.g. near the Galactic center), $\mu \approx 1$, and the whole dynamics is purely Newtonian. If $|\mathbf{g}_e| \ll |\nabla\Phi| \ll a_0$ (e.g. at 50 kpc from the Galactic center), then the dynamics is in the MOND regime, but the external field can be neglected, leading to a potential given by Eq. (10.1) up to a constant. Finally, when $|\nabla\Phi| \ll |\mathbf{g}_e| \ll a_0$ in the outskirts of

the system, μ tends to its asymptotic value $\mu(|\mathbf{g}_e|/a_0) \simeq |\mathbf{g}_e|/a_0$, and the gravitational potential is thus Newtonian with a renormalized gravitational constant. Then, contrary to the potential of Eq. (10.1), it is possible to escape from such a potential. This saturation of the μ -function is the essential piece needed to get a *finite* but nevertheless *boosted* escape speed (compared to its Newtonian value).

This can be understood intuitively as follows. At the phenomenological level, the MOND force deriving from Eq. (10.1) can equivalently be interpreted in Newtonian gravity as providing an universal profile of dark halos. Explicitly, the effective dark mass M_{eff} at radius $r \gg (GM/a_0)^{1/2}$ reads $M_{\text{eff}}(r) \sim M \times [(a_0)^{1/2}r/(GM)^{1/2} - 1]$ and thus diverges with r . Interpreted in Newtonian gravity, MOND therefore predicts that any *isolated* baryonic mass M creates an effective dark halo of infinite mass with density profile of the form $\rho_{\text{eff}} \propto M_{\text{eff}}(r)/r^3$. The external field effect however saturates the μ -function at large distance, thereby leading to a potential which is logarithmic only on a finite range $(GM/a_0)^{1/2} \ll r \lesssim r_e$, where r_e is the transition radius at which the external field equals the local one : $|\mathbf{g}_e| = |\nabla\Phi|$. The external field thus truncates the effective dark halo at $r \approx r_e$, yielding a finite effective dark mass surrounding the Galaxy, which may explain the observed value of the local escape speed (Eq. 10.2), depending on the actual value of \mathbf{g}_e .

The escape speed

To simplify the problem, we consider hereafter the spherically symmetric case. The escape speed v_{esc} at radius r is defined in a spherical potential as

$$\frac{1}{2}v_{\text{esc}}^2(r) = \Phi(\infty) - \Phi(r). \quad (10.4)$$

We assume that the spatial variation of the external field is so small compared to the size of the Milky Way that it is approximately constant over all space, so that $\Phi(\infty)$ is well-defined. We use the assumptions and values from the best analytic MOND model of the Milky Way (Model III of [268]). This means that we assume that all the baryonic mass is confined to $r < R_0$, where $R_0 = 8$ kpc is the galactocentric radius of the Sun, and that the asymptotic circular velocity is $v_\infty = 165 \text{ km s}^{-1}$. The total baryonic mass M of the Milky Way is related to the latter by means of the Tully-Fisher relation $GMa_0 = v_\infty^4$. Finally the interpolating μ -function is chosen to be given by $\mu(x) = x/(1+x)$. In addition to providing the best analytic fit to the terminal velocity curve of the Milky Way FB05, this function has been shown to yield excellent fits of rotation curves in external galaxies [270].

We then consider as a toy-model a centripetal external field acting as a constant force directed towards the Galactic Center, in order to estimate the order of magnitude of the external field needed to produce the observed escape speed. We thus solve Eq. (10.3) for $g = |\nabla\Phi|$ (we also note $g_e = |\mathbf{g}_e|$). Using spherical symmetry and hence Gauss theorem, this means solving :

$$\frac{a_0 g (g + g_e)}{a_0 + g + g_e} = \frac{v_\infty^4}{r^2}. \quad (10.5)$$

Then we compute the local escape speed

$$v_{\text{esc}}(R_0) = \left(2 \int_{R_0}^{\infty} g(r) dr \right)^{1/2}, \quad (10.6)$$

and find that in order to have a local escape speed in the range allowed by Eq. (10.2), with a median of 544 km s^{-1} , the external field must be

$$g_e = 0.010_{-0.008}^{+0.015} \times a_0. \quad (10.7)$$

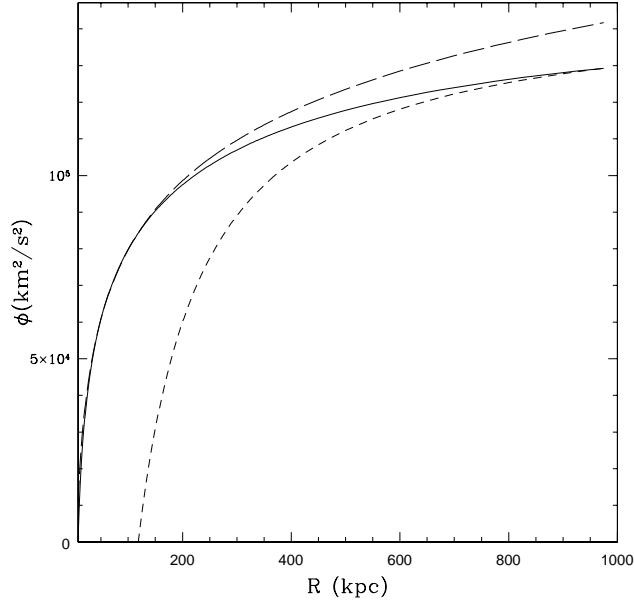


FIG. 10.1 – Full line : the MOND potential of the Milky Way for the parameters of [268] $R_0 = 8$ kpc and $v_\infty = 165$ km s $^{-1}$, and an external field directed towards the Galactic center $g_e = 0.01 \times a_0$. The potential is such that $\Phi(R_0) = 0$, and it asymptotes to $\Phi(\infty) = 1/2v_{\text{esc}}^2(R_0)$ with $v_{\text{esc}}(R_0) = 544$ km s $^{-1}$. Long-dashed line : the corresponding MOND potential without the external field. Short-dashed line : the Keplerian potential with a renormalized gravitational constant to which the MOND potential asymptotes.

Note that, in addition to the intrinsic non-sphericity of the inner Milky Way itself, the real external field points in a definite direction, meaning that the escape speed contours are in reality non-spherical, depending on the angle between the internal and external force vectors. As a first order test of robustness, note that replacing $|\mathbf{g} + \mathbf{g}_e| = (g + g_e)$ by, e.g., $(g^2 + g_e^2)^{1/2}$ in Eq. (10.5) only leads to a 20 km s $^{-1}$ difference in the computed local escape speed for an external field g_e of order $a_0/100$.

The Milky Way potential (whose zero is fixed at R_0) obtained from Eq. (10.5) is plotted on Figure 1. Overplotted are the corresponding MOND potential without external field (asymptoting to Eq. 10.1), and the Keplerian potential with renormalized gravitational constant Ga_0/g_e . The actual potential interpolates smoothly between these two behaviours, the transition occurring when the internal and external acceleration are of the same order of magnitude.

10.5 Estimating the external field

In this section we focus on the various known sources that may produce the needed external field (Eq. 10.7) in a MOND Universe. One must however keep in mind that when there is more than one attractor the MOND gravity is not simply the sum of the contributions.

There are two obvious possible contributions : the Andromeda galaxy M31, and the Large Scale Structure (LSS). Andromeda (e.g. [278]) is located at a distance $d_A \approx 800$ kpc and has a

baryonic mass $M_A \approx 10^{11} M_\odot$. This means that the gravitational force per unit mass exerted by M31 on the Milky Way is of the order of

$$\frac{(GM_A a_0)^{1/2}}{d_A} \simeq a_0/100, \quad (10.8)$$

with some variations depending on the actual location considered in the Milky Way. However, since both galaxies have a roughly similar baryonic mass, the MOND gravitational field created by M31 is always smaller than the one created by the Milky Way in the direction opposite to M31, meaning that M31 cannot be the only source of the approximately constant external field we are looking for.

On the other hand, estimating the total contribution from all the relevant distant sources in the LSS combined with the one of M31 is an extremely arduous task (the MOND gravity not being the sum of the individual contributions), and would require a detailed knowledge of the precise geometry and mass content of the MOND Universe at large. However, one can estimate that a gravitational field of order $a_0/100$ is roughly the MOND acceleration 30 Mpc away from a galaxy cluster with an asymptotic, isotropic, line-of-sight velocity dispersion of 500 km s^{-1} (or 130 Mpc away from a cluster with a 1000 km s^{-1} dispersion). This means that the Virgo and Coma clusters could both individually contribute external fields of this magnitude [279].

Moreover, it has been known for twenty years [280] that the Local Group belongs to a 600 km s^{-1} outflow w.r.t. the reference frame of the Cosmic Microwave Background. This is presumably due to the local gravitational attraction of LSS, and mainly from the so-called Great Attractor region at ($l \approx 325^\circ, b \approx -7^\circ$), see [281]. Once again, precisely calculating the value of this gravitational attraction at the location of the Milky Way in a MOND Universe is virtually impossible, but one can estimate its order of magnitude from the acceleration endured by the Local Group during a Hubble time in order to attain a peculiar velocity of 600 km s^{-1} :

$$H_0 \times 600 \text{ km s}^{-1} \simeq a_0/100, \quad (10.9)$$

for $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. This estimation is independent from the assumption that we are living (or not) in a MOND Universe. In conclusion, M31, the Virgo and Coma clusters, as well as the LSS at large, *all* provide comparable gravitational fields that precisely lie in the allowed range (Eq. 10.7) in order to produce the right local galactic escape speed.

10.6 Discussion

Using the best analytic MOND fit for the terminal velocity curve of the Milky Way (Model III of [268]), and considering a toy external field acting as a constant force directed towards the Galactic Center, we have estimated the external field in which the Milky Way must be embedded in a MOND Universe in order to produce the observed local escape speed (Sect. 2, Eq. 10.2). We found that the needed external field is of the order of $a_0/100$ (Sect. 3, Eq. 10.7).

One might question how this result depends on the specific choice for the interpolating function μ . As we explained at the end of Sect. 3.1, the escape speed is mostly determined by the value of the transition radius r_e where the internal and external accelerations are of the same order of magnitude. The fact that the needed external field is well below a_0 means that the internal field at r_e is in the deep-MOND regime $\mu(x) = x$ for any realistic μ -function. However the μ -function plays a non-trivial role in determining the stellar mass-to-light ratio needed to fit the terminal velocity curve of the Milky Way. For instance, using the "standard" function $\mu(x) = x/(1+x^2)^{1/2}$ requires a higher mass-to-light ratio, leading to an asymptotic velocity $v_\infty = 175 \text{ km s}^{-1}$ (Model I of [268]). We calculate that it typically leads to a 30 km s^{-1} increase in the local escape speed

for an external field of order $a_0/100$. Such a variation is thus small compared to the error bars quoted in Eq. (10.2), and this signals the robustness of our estimate w.r.t. the choice of μ . On the other hand, our Eq. (10.5) is only an approximation for a couple of reasons : it neglects the presence of the distant external source(s) (and hence the direction of the external field), as well as a term proportional to the gradient of μ in Eq. (10.3). However, both effects are proportional to g_e , meaning that our result does hold qualitatively as a first order estimate.

We argue that $a_0/100$ is a value roughly compatible with the gravitational attraction that Large Scale Structures are expected to exert on the Milky Way (Sect. 4). We thus conclude that the local galactic escape speed can be explained within a modified gravity framework à la MOND without the need of huge quantities of dark mass on galactic scales. However, it is very plausible that taking into account the matter density from M31, the Virgo and Coma clusters as well as all the structures within the Great Attractor in a MOND potential solver [282] could perhaps lead to a local gravitational field slightly above the range allowed by Eq. (10.7) (note that an important issue regarding this calculation might be the possibility of a scale-dependence of a_0 ; see e.g. the values used in [283] and in [263]. Such an increase of the external field would slightly decrease the corresponding galactic escape speed, and might signal the need for small quantities of dark mass (in baryonic or non-baryonic form) at large radii from the Galactic center (e.g. in the form of 2 eV neutrinos; see [271, 137]).

As a final note, we stress that there are good theoretical reasons to impose the μ -function to lie within the range $\varepsilon < \mu(x) < 1$ for all x , where ε is a small dimensionless parameter. Indeed, if the μ -function asymptotes in the standard way at $x \rightarrow 0$ (as $\mu(x) \approx x$) then the energy of the gravitational field surrounding a massive body is infinite, as was already pointed out in [2]. Moreover, the most successful relativistic theory of the MOND paradigm to date [24], may exhibit dynamical singularities if the free function is chosen in such a way that the MOND phenomenology is recovered with an effective μ -function asymptoting to zero at $x \rightarrow 0$ [233]. These two singularities are manifestly avoided if one instead uses a slight deviation from Milgrom's first proposal, namely $\mu(x) \sim \varepsilon + x$ [284, 270]. This ε -term acts precisely as the toy external field that we have used in Sect. 3. Comparison with observed rotation curves, and especially from the last observed radius of NGC 3741 [234] were used in [270] to constrain ε to be lower than 1/10. The present analysis of the local escape speed actually enables to put a stronger bound on this parameter. If ε were of the order of 1/10, it would saturate the μ -function too early and the predicted escape speed would be significantly lower than the one observed. As a conclusion, the value of the local galactic escape speed constrains ε to be $\varepsilon \lesssim 1/100$.

Acknowledgments

We are grateful to Garry Angus, Alain Jorissen, Gianfranco Gentile, Pavel Kroupa, Holger Baumgardt, Bob Sanders and Adi Nusser for insightful comments on the manuscript.

Conclusions et perspectives

Nous nous sommes efforcés, tout au long de ce manuscrit, en plus bien entendu de présenter nos travaux de recherches, d'introduire de façon assez complète la théorie de MOND ; ses motivations issues de l'observation, ses succès, ses motivations théoriques encore trop floues et en direction desquelles il faut sans doute orienter plus avant la réflexion, ses premiers modèles et leurs raffinements les ayant succédés. Nous avons notamment mis en relief quelques succès et insuccès des deux approches possibles, l'hypothèse de la matière noire froide, et celle de la dynamique Newtonienne modifiée. Les fines corrélations observées entre les profils baryoniques et les profils de matière noire inférés de l'utilisation combinée des données cinématiques et de la théorie Newtonienne militent fortement en faveur du paradigme MOND, ou au moins demandent à être expliquées dans le cadre de CDM. Il y a cependant (à notre avis du moins) peu d'espoir de comprendre une telle universalité du profil de matière noire (la loi de Tully-Fisher) par une compréhension affinée de la formation des structures, en raison de la diversité des objets dominés par la matière noire, de leurs complexités, et de leurs interactions avec leurs environnements. A l'inverse, la théorie MOND esquive élégamment cette question cruciale.

Nous avons, en quelque sorte, à la fois ouvert et restreint l'espace des théories possibles, en réhabilitant d'une part, grâce à une analyse plus fine de la causalité que ne l'est généralement trouvée dans la littérature, la classe étendue des théories tenseur-scalaires dont le couplage à la matière est de type *disformal*, et en libérant d'autre part la contrainte a priori sur la position respective des cônes électromagnétiques et gravitationnels dans l'espace tangent, typique, au-delà des couplages *disformal* scalaires, des théories bimétriques ou stratifiées en général. Nous l'avons restreint, par ailleurs, en analysant plus avant les contraintes que l'expérience impose aux modèles stratifiés du type considéré au chapitre 9, et en rendant ainsi manifeste les réglages fins cachés qui rendent ces théories peu naturelles. Nous l'avons restreint également en imposant la cohérence physique des systèmes d'équations ainsi définis, c'est-à-dire en requérant, sous le motif du comportement causal des théories envisagées, l'hyperbolicité des systèmes différentiels, ou, dit autrement, l'existence d'une dimension temporelle et de trois dimensions spatiales, ou plus généralement encore, en requérant que le problème de Cauchy soit bien posé. Cela nous a d'ailleurs permis de montrer la modification nécessaire de la phénoménologie MONDienne en champ très faibles (en-deçà de a_0), et le retour obligatoire à un régime Newtonien à très grande distance, s'il faut, du moins, concevoir les effets MONDiens comme provenant d'une dynamique non standard de k-essence d'un champ scalaire additionnel. Cela, à son tour, a suggéré des pistes de recherches futures, où la modification infrarouge de la gravitation proviendrait d'effets de renormalisations (à ce sujet citons les travaux de M. Reuter sur le flot de renormalisation en relativité générale, et la possibilité d'effets non triviaux aux grandes échelles : [285] et les références qu'on y trouvera). Nous l'avons restreint encore, en exigeant la stabilité de ces modèles.

Nous avons rappelé comment se construit la théorie de la relativité générale à partir de ses hypothèses fondamentales. Nul doute, étant alors déduit le cadre mathématique pertinent et semble-t-il suffisant pour décrire la gravitation relativiste, à savoir la géométrie pseudo-Riemannienne, que la relativité générale est la théorie la plus simple que l'on puisse concevoir, à l'exception peut-être de la théorie de Nordström, cependant exclue expérimentalement. Dans ce contexte, il semble quelque peu difficile d'écrire une théorie alternative aussi naturelle que la relativité générale, et qui par ailleurs rencontrerait les mêmes succès empiriques. Il faut certainement, au moins dans

un premier temps, considérer les théories alternatives reproduisant tel ou tel effet comme des théories seulement effectives, quitte à les comprendre plus tard comme des théories naturelles dans un cadre étendu. Ainsi en est-il, par exemple, de la relativité restreinte, qui, formulée de façon non covariante, apparaît être compliquée, *ad hoc*, possède des lois de transformation des coordonnées et des vitesses non linéaires, et semble finalement extrêmement étrange, tandis qu'il s'agit d'une théorie on ne peut plus simple lorsque formulée de façon covariante et en terme de la métrique de Minkowski.

Les difficultés rencontrées à formuler une théorie relativiste de MOND, sur lesquelles nous avons lourdement insisté tout au long de ce manuscrit, suggèrent, à la lueur du paragraphe précédent, de chercher une théorie de MOND dans un cadre géométrique étendu ou complètement autre. Cela, nécessairement, signifie s'orienter vers une modification de l'inertie et non de la gravité. C'est bien entendu, en effet, dans le choix d'une autre structure locale (que l'espace de Minkowski) qu'émergera une nouvelle structure globale dans laquelle définir une nouvelle théorie des champs. Nous n'avons fait qu'esquisser de telles pistes, pour la bonne raison que nous ne nous y sommes pas pleinement consacrés durant cette thèse. Cela fait en revanche partie de nos projets de recherches futures, et c'est pourquoi nous revenons ici, dans cette conclusion, sur ce point. Avant même cependant de construire de la sorte une théorie de MOND, il faut comprendre ces nouvelles structures métriques (de type métrique de Finsler, etc.), ce qui signifie surtout, au-delà de l'aspect purement formel, comprendre les divers principes de correspondance reliant les quantités mathématiques ainsi introduites aux quantités physiques. Il nous faudra également, bien entendu, dans le cas où dérive de telles constructions une physique inertielle modifiée qui dépende par exemple de façon non triviale de l'accélération ou de ses dérivées, s'assurer de la stabilité de cette théorie (cf. théorème d'Ostrogradski).

Nous ne reviendrons plus en détail ici sur les apports de cette thèse. Nous les avons déjà partiellement listés en introduction, et développés dans les parties introductives des articles que nous avons inclus dans ce manuscrit. En ce qui concerne les théories de MOND en général, la conclusion principale de notre travail de revue critique du chapitre 9, où nous avons également proposé de nouveaux modèles – également instables, est l'absence, encore aujourd'hui, d'une théorie pleinement satisfaisante de MOND. Nul doute cependant que de grands progrès ont été réalisés dans cette voie. La confrontation de la théorie MOND aux observations est également en plein essor, avec d'ailleurs l'observation de systèmes tels que le *bullet cluster* mettant en difficulté à la fois l'hypothèse MOND et l'hypothèse (Λ)CDM. Faut-il y voir le signe d'une solution mixte au problème de la matière noire? Sans doute. En attendant nous voulons dès à présent nous pencher sur les structures locales additionnelles, en terme, par exemple, de métriques (de type Finsler ou plus général encore) sur le fibré tangent ou sur des fibrations plus complexes, que ce soit dans l'optique d'étudier les théories de type DSR à notre avis encore embryonnaires, ou de comprendre les théories décrivant une saturation ou, plus généralement, tout changement de comportement dynamique, à une échelle d'accélération donnée, avec pour objectif global d'avoir à disposition diverses manières d'introduire une échelle de longueur dans la théorie inertielle et par conséquent dans la théorie gravitationnelle qui en résulterait, et, éventuellement, décrire un jour les effets MONDiens en termes « géométriques ». Notre étude du mouvement à deux corps a également été fructueuse, et nous envisageons d'en poursuivre l'étude de façon plus approfondie, notamment de façon numérique.

Bibliographie

- [1] M. Milgrom. A modification of the newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophys. J.*, 270 :365–370, 1983.
- [2] J. Bekenstein and Mordehai Milgrom. Does the missing mass problem signal the breakdown of newtonian gravity? *Astrophys. J.*, 286 :7–14, 1984.
- [3] Lev Landau and Evguéni Lifchitz. *Théorie des champs*. Éditions MIR, Moscou, 1982.
- [4] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology*. John Wiley and Sons, New-York, 1972.
- [5] Carlo Rovelli. Quantum gravity. Cambridge, UK : Univ. Pr. (2004) 455 p.
- [6] Élie Cartan. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 40 :325, 1923.
- [7] A. Trautman. A classification of space-time structures. *Rept. Math. Phys.*, 10 :297–310, 1976.
- [8] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Freeman, San Francisco, 1973.
- [9] Erich Kretschmann. *Ann. Phys.*, 53 :575–614, 1917.
- [10] A. Einstein. *Preuss. Akad. Wiss.*, pages 1030–1085, 1914.
- [11] A. Einstein. *Ann. Phys.*, 55 :240, 1918.
- [12] J. D. Norton. *Rep. Prog. Phys.*, 56 :791–858, 1993.
- [13] Albert Einstein and Adriaan D. Fokker. Nordstrom’s theory of gravitation from the point of view of the absolute differential calculus. *Annalen Phys.*, 44 :321–328, 1914.
- [14] G. Nordström. *Ann. d. Phys.*, 42 :533, 1913.
- [15] G. Nordström. *Phys. Zeit.*, 13 :1126, 1912.
- [16] Friedrich W. Hehl, J. Dermott McCrea, Eckehard W. Mielke, and Yuval Neeman. Metric affine gauge theory of gravity : Field equations, noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance. *Phys. Rept.*, 258 :1–171, 1995.
- [17] C. Lämmerzahl, O. Preuss, and H. Dittus. Is the physics within the solar system really understood? 2006.
- [18] Thibault Damour. Gravitation and experiment. To appear in ‘Gravitation and Quantizations’ Proceedings of the 57th Les Houches Summer School, Les Houches, France, Jul 6 - Aug 1, 1992.
- [19] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farese. Tensor multiscalar theories of gravitation. *Class. Quant. Grav.*, 9 :2093–2176, 1992.
- [20] Jacob D. Bekenstein. The relation between physical and gravitational geometry. *Phys. Rev.*, D48 :3641–3647, 1993.
- [21] Wei-Tou Ni. *Phys. Rev.*, D7 :2880, 1973.
- [22] Clifford M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Rel.*, 9 :3, 2006.
- [23] R. H. Sanders. A stratified framework for scalar-tensor theories of modified dynamics. *Astrophys. J.*, 480 :492–502, 1997.
- [24] Jacob D. Bekenstein. Relativistic gravitation theory for the mond paradigm. *Phys. Rev.*, D70 :083509, 2004.

- [25] John D. Barrow and Joao Magueijo. Varying- α theories and solutions to the cosmological problems. *Phys. Lett.*, B443 :104–110, 1998.
- [26] Andreas Albrecht and Joao Magueijo. A time varying speed of light as a solution to cosmological puzzles. *Phys. Rev.*, D59 :043516, 1999.
- [27] John D. Barrow and Joao Magueijo. Solving the flatness and quasi-flatness problems in brans- dicke cosmologies with a varying light speed. *Class. Quant. Grav.*, 16 :1435–1454, 1999.
- [28] John D. Barrow. Cosmologies with varying light speed. *Phys. Rev.*, D59 :043515, 1999.
- [29] M. A. Clayton and J. W. Moffat. Dynamical mechanism for varying light velocity as a solution to cosmological problems. *Phys. Lett.*, B460 :263–270, 1999.
- [30] M. A. Clayton and J. W. Moffat. Scalar-tensor gravity theory for dynamical light velocity. *Phys. Lett.*, B477 :269–275, 2000.
- [31] Bruce A. Bassett, Stefano Liberati, Carmen Molina-Paris, and Matt Visser. Geometrodynamics of variable speed of light cosmologies. *Phys. Rev.*, D62 :103518, 2000.
- [32] Gerard 't Hooft and M. J. G. Veltman. One loop divergencies in the theory of gravitation. *Annales Inst. H. Poincaré, Phys. Théor.*, A20 :69–94, 1974.
- [33] K. S. Stelle. Renormalization of higher derivative quantum gravity. *Phys. Rev.*, D16 :953–969, 1977.
- [34] Richard P. Woodard. Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity. 2006.
- [35] Mordehai Milgrom. Mond–theoretical aspects. *New Astron. Rev.*, 46 :741–753, 2002.
- [36] T. Damour, G. W. Gibbons, and C. Gundlach. Dark matter, time varying g , and a dilaton field. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :123–126, 1990.
- [37] Andre Fuzfa and J. M. Alimi. Dark energy as a born-infeld gauge interaction violating the equivalence principle. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :061301, 2006.
- [38] Andre Fuzfa and J. M. Alimi. Toward a unified description of dark energy and dark matter from the abnormally weighting energy hypothesis. 2007.
- [39] F. W. Hehl, P. Von Der Heyde, G. D. Kerlick, and J. M. Nester. General relativity with spin and torsion : Foundations and prospects. *Rev. Mod. Phys.*, 48 :393–416, 1976.
- [40] N. R. Bruno, G. Amelino-Camelia, and J. Kowalski-Glikman. Deformed boost transformations that saturate at the planck scale. *Phys. Lett.*, B522 :133–138, 2001.
- [41] Giovanni Amelino-Camelia. Relativity in space-times with short-distance structure governed by an observer-independent (planckian) length scale. *Int. J. Mod. Phys.*, D11 :35–60, 2002.
- [42] Joao Magueijo and Lee Smolin. Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :190403, 2002.
- [43] Simon Judes and Matt Visser. Conservation laws in doubly special relativity. *Phys. Rev.*, D68 :045001, 2003.
- [44] Joao Magueijo and Lee Smolin. Gravity’s rainbow. *Class. Quant. Grav.*, 21 :1725–1736, 2004.
- [45] Florian Girelli, Stefano Liberati, and Lorenzo Sindoni. Phenomenology of quantum gravity and finsler geometry. *Phys. Rev.*, D75 :064015, 2007.
- [46] C. M. Will. *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

- [47] A. Eddington. *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge University Press, London, 1923.
- [48] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the cassini spacecraft. *Nature*, 425 :374, 2003.
- [49] Kenneth Nordtvedt. Equivalence principle for massive bodies. 2. theory. *Phys. Rev.*, 169 :1017–1025, 1968.
- [50] Kenneth Nordtvedt. Equivalence principle for massive bodies. 1. phenomenology. *Phys. Rev.*, 169 :1014–1016, 1968.
- [51] Jean-Philippe Uzan. The fundamental constants and their variation : Observational status and theoretical motivations. *Rev. Mod. Phys.*, 75 :403, 2003.
- [52] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farèse. Tensor multiscalar theories of gravitation. *Class. Quant. Grav.*, 9 :2093–2176, 1992.
- [53] J. David Brown and Jr. York, James W. Jacobi's action and the recovery of time in general relativity. *Phys. Rev.*, D40 :3312–3318, 1989.
- [54] M. Ostrogradski. *Mem. Ac. St. Petersburg Rev.*, VI 4 :385, 1850.
- [55] M. S. Rashid and S. S. Khalil. Hamiltonian description of higher order lagrangians. *Int. J. Mod. Phys.*, A11 :4551–4560, 1996.
- [56] Jonathan Z. Simon. Higher derivative lagrangians, nonlocality, problems and solutions. *Phys. Rev.*, D41 :3720, 1990.
- [57] Kistler M. Barberousse, A. and P. Ludwig. *La philosophie des sciences au vingtième siècle*. Flammarion - Champs Université, Paris, 2000.
- [58] M. Bitbol. *Mécanique quantique : une introduction philosophique*. Flammarion, Paris, 1996.
- [59] R. M. Wald. General relativity. Chicago, Usa : Univ. Pr. (1984) 491p.
- [60] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. The large scale structure of space-time. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [61] III Gott, J. Richard. Closed timelike curves produced by pairs of moving cosmic strings : Exact solutions. *Phys. Rev. Lett.*, 66 :1126–1129, 1991.
- [62] Eric Bois and Eric Trelut. The impact of the chrono-geometrical structure of spacetime on causality. 2003.
- [63] Jacob D. Bekenstein and Robert H. Sanders. Gravitational lenses and unconventional gravity theories. *Astrophys. J.*, 429 :480, 1994.
- [64] George Ellis, Roy Maartens, and Malcolm A. H. MacCallum. Causality and the speed of sound. 2007.
- [65] Richard C.. Tolman. *The Theory of the Relativity of Motion*. University of California Press, Berkeley, 1917.
- [66] G. A. Benford, D. L. Book, and W. A. Newcomb. The tachyonic antitelephone. *Phys. Rev.*, D2 :263–265, 1970.
- [67] Stefano Liberati, Sebastiano Sonego, and Matt Visser. Faster-than-c signals, special relativity, and causality. *Annals Phys.*, 298 :167–185, 2002.
- [68] A. D. Dolgov and I. D. Novikov. Superluminal propagation of light in gravitational field and non-causal signals. *Phys. Lett.*, B442 :82–89, 1998.
- [69] M. Yu. Konstantinov. Superluminal propagation of light in gravitational field and non-causal signals : Some comments. 1998.

- [70] Y. Aharonov, A. Komar, and Leonard Susskind. Superluminal behavior, causality, and instability. *Phys. Rev.*, 182 :1400–1403, 1969.
- [71] Allan Adams, Nima Arkani-Hamed, Sergei Dubovsky, Alberto Nicolis, and Riccardo Rattazzi. Causality, analyticity and an ir obstruction to uv completion. *JHEP*, 10 :014, 2006.
- [72] Eugene A. Lim. Can we see lorentz-violating vector fields in the cmb? *Phys. Rev.*, D71 :063504, 2005.
- [73] Camille Bonvin, Chiara Caprini, and Ruth Durrer. A no-go theorem for k-essence dark energy. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :081303, 2006.
- [74] Joshua W. Elliott, Guy D. Moore, and Horace Stoica. Constraining the new aether : Gravitational cherenkov radiation. *JHEP*, 08 :066, 2005.
- [75] I. T. Drummond and S. J. Hathrell. Qed vacuum polarization in a background gravitational field and its effect on the velocity of photons. *Phys. Rev.*, D22 :343, 1980.
- [76] K. Scharnhorst. On propagation of light in the vacuum between plates. *Phys. Lett.*, B236 :354–359, 1990.
- [77] Jose I. Latorre, Pedro Pascual, and Rolf Tarrach. Speed of light in nontrivial vacua. *Nucl. Phys.*, B437 :60–82, 1995.
- [78] Walter Dittrich and Holger Gies. Light propagation in non-trivial qed vacua. *Phys. Rev.*, D58 :025004, 1998.
- [79] G. M. Shore. Causality and superluminal light. 2003.
- [80] K. Scharnhorst. The velocities of light in modified qed vacua. *Annalen Phys.*, 7 :700–709, 1998.
- [81] G. M. Shore. Superluminality and uv completion. 2007.
- [82] J. W. Moffat. Quantum gravity, the origin of time and time’s arrow. *Found. Phys.*, 23 :411–437, 1993.
- [83] Takeshi Chiba, Takahiro Okabe, and Masahide Yamaguchi. Kinetically driven quintessence. *Phys. Rev.*, D62 :023511, 2000.
- [84] C. Armendáriz-Picón, T. Damour, and Viatcheslav F. Mukhanov. k-inflation. *Phys. Lett.*, B458 :209–218, 1999.
- [85] Alan D. Rendall. Dynamics of k-essence. *Class. Quant. Grav.*, 23 :1557–1570, 2006.
- [86] Alexander Vikman. Can dark energy evolve to the phantom? *Phys. Rev.*, D71 :023515, 2005.
- [87] E. Babichev, Viatcheslav F. Mukhanov, and A. Vikman. Escaping from the black hole? *JHEP*, 09 :061, 2006.
- [88] I. T. Drummond. Variable light-cone theory of gravity. 1999.
- [89] I. T. Drummond. Bimetric gravity and [dark matter]. *Phys. Rev.*, D63 :043503, 2001.
- [90] George F. R. Ellis and Jean-Philippe Uzan. ‘c’ is the speed of light, isn’t it? *Am. J. Phys.*, 73 :240–247, 2005.
- [91] M. A. Clayton and J. W. Moffat. Vector field mediated models of dynamical light velocity. *Int. J. Mod. Phys.*, D11 :187–206, 2002.
- [92] S. W. Hawking. The chronology protection conjecture. *Phys. Rev.*, D46 :603–611, 1992.
- [93] D. Courant, R. et Hilbert. *Methods of Mathematical Physics, Vol II*. Interscience, New York, 1962.

- [94] Ted Jacobson and David Mattingly. Gravity with a dynamical preferred frame. *Phys. Rev.*, D64 :024028, 2001.
- [95] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15 :1753–1936, 2006.
- [96] C. Armendariz-Picon and Eugene A. Lim. Haloes of k-essence. *JCAP*, 0508 :007, 2005.
- [97] Jean-Philippe Bruneton and Gilles Esposito-Farese. Field-theoretical formulations of mond-like gravity. 2007.
- [98] R. R. Caldwell. A phantom menace? *Phys. Lett.*, B545 :23–29, 2002.
- [99] Sean M. Carroll, Mark Hoffman, and Mark Trodden. Can the dark energy equation-of-state parameter w be less than -1 ? *Phys. Rev.*, D68 :023509, 2003.
- [100] James M. Cline, Sangyong Jeon, and Guy D. Moore. The phantom menaced : Constraints on low-energy effective ghosts. *Phys. Rev.*, D70 :043543, 2004.
- [101] Nima Arkani-Hamed, Hsin-Chia Cheng, Markus A. Luty, and Shinji Mukohyama. Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity. *JHEP*, 05 :074, 2004.
- [102] Thomas Buchert, Julien Larena, and Jean-Michel Alimi. Correspondence between kinematical backreaction and scalar field cosmologies : The 'morphon field'. *Class. Quant. Grav.*, 23 :6379–6408, 2006.
- [103] Robert H. Sanders and Stacy S. McGaugh. Modified newtonian dynamics as an alternative to dark matter. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 40 :263–317, 2002.
- [104] Benoit Famaey, Jean-Philippe Bruneton, and HongSheng Zhao. Escaping from mond. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 377 :L79, 2007.
- [105] Michael Martin Nieto and Slava G. Turyshev. Finding the origin of the pioneer anomaly. *Class. Quant. Grav.*, 21 :4005–4024, 2004.
- [106] Slava G. Turyshev, Viktor T. Toth, Larry R. Kellogg, Eunice. L. Lau, and Kyong J. Lee. The study of the pioneer anomaly : New data and objectives for new investigation. *Int. J. Mod. Phys.*, D15 :1–56, 2006.
- [107] C. Talmadge, J. P. Berthias, R. W. Hellings, and E. M. Standish. Model independent constraints on possible modifications of newtonian gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 61 :1159–1162, 1988.
- [108] Kjell Tangen. Could the pioneer anomaly have a gravitational origin? 2006.
- [109] Marc-Thierry Jaekel and Serge Reynaud. Gravity tests in the solar system and the pioneer anomaly. *Mod. Phys. Lett.*, A20 :1047, 2005.
- [110] Marc-Thierry Jaekel and Serge Reynaud. Post-einsteinian tests of gravitation. *Class. Quant. Grav.*, 23 :777–798, 2006.
- [111] Nemanja Kaloper. Disformal inflation. *Phys. Lett.*, B583 :1–13, 2004.
- [112] John K. Webb, Victor V. Flambaum, Christopher W. Churchill, Michael J. Drinkwater, and John D. Barrow. Evidence for time variation of the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :884–887, 1999.
- [113] A. V. Ivanchik, E. Rodriguez, P. Petitjean, and D. A. Varshalovich. Do the fundamental constants vary in the course of the cosmological evolution? *Astron. Lett.*, 28 :423, 2002.
- [114] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. Scalar gravitation : A laboratory for numerical relativity. *Phys. Rev.*, D47 :1529–1540, 1993.
- [115] Keith Watt and Charles W. Misner. Relativistic scalar gravity : A laboratory for numerical relativity. 1999.

- [116] Robert Beig, J. Mark Heinzle, and Bernd G. Schmidt. Helically symmetric n-particle solutions in scalar gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :121102, 2007.
- [117] Shin'ichirou Yoshida, Benjamin C. Bromley, Jocelyn S. Read, Koji Uryu, and John L. Friedman. Models of helically symmetric binary systems. *Class. Quant. Grav.*, 23 :S599–S614, 2006.
- [118] Paul A. M. Dirac. Classical theory of radiating electrons. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A167 :148–169, 1938.
- [119] Thibault Damour. Théorie classique de la renormalisation.
- [120] Eric Poisson. An introduction to the lorentz-dirac equation. 1999.
- [121] Thomas W. Baumgarte. The innermost stable circular orbit in compact binaries. 2001.
- [122] Samaya Nissanke and Luc Blanchet. Gravitational radiation reaction in the equations of motion of compact binaries to 3.5 post-newtonian order. *Class. Quant. Grav.*, 22 :1007–1032, 2005.
- [123] Hwei-Jang Yo, Thomas W. Baumgarte, and Stuart L. Shapiro. Gravitational wavetrains in the quasi-equilibrium approximation : A model problem in scalar gravitation. *Phys. Rev.*, D63 :064035, 2001.
- [124] Finn Ravndal. Scalar gravitation and extra dimensions. 2004.
- [125] Luc Blanchet. Innermost circular orbit of binary black holes at the third post-newtonian approximation. *Phys. Rev.*, D65 :124009, 2002.
- [126] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farese. Testing gravity to second postnewtonian order : A field theory approach. *Phys. Rev.*, D53 :5541–5578, 1996.
- [127] John L. Friedman and Koji Uryu. Post-minkowski action for point-particles and a helically symmetric binary solution. *Phys. Rev.*, D73 :104039, 2006.
- [128] T. W. Baumgarte, G. B. Cook, M. A. Scheel, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky. General relativistic models of binary neutron stars in quasiequilibrium. *Phys. Rev.*, D57 :7299–7311, 1998.
- [129] Silvano Bonazzola, Eric Gourgoulhon, and Jean-Alain Marck. Numerical models of irrotational binary neutron stars in general relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :892–895, 1999.
- [130] Eric Gourgoulhon, Philippe Grandclement, Keisuke Taniguchi, Jean-Alain Marck, and Silvano Bonazzola. Quasiequilibrium sequences of synchronized and irrotational binary neutron stars in general relativity. i. method and tests. *Phys. Rev.*, D63 :064029, 2001.
- [131] Luc Blanchet, Guillaume Faye, Bala R. Iyer, and Benoit Joguet. Gravitational-wave inspiral of compact binary systems to 7/2 post-newtonian order. *Phys. Rev.*, D65 :061501, 2002.
- [132] R. B. Tully and J. R. Fisher. A new method of determining distances to galaxies. *Astron. Astrophys.*, 54 :661–673, 1977.
- [133] Stacy S. McGaugh, Jim M. Schombert, Greg D. Bothun, and W. J. G. de Blok. The baryonic tully-fisher relation. *Astrophys. J.*, 533 :L99–L102, 2000.
- [134] K. G. Begeman, A. H. Broeils, and R. H. Sanders. Extended rotation curves of spiral galaxies : Dark haloes and modified dynamics. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 249 :523, 1991.
- [135] Mordehai Milgrom. Mond and the seven dwarfs. *Astrophys. J.*, 455 :439, 1995.
- [136] Mordehai Milgrom and Robert H. Sanders. Mond rotation curves of very low mass spiral galaxies. 2006.

- [137] Garry W. Angus, HuanYuan Shan, HongSheng Zhao, and Benoit Famaey. On the law of gravity, the mass of neutrinos and the proof of dark matter. *Astrophys. J.*, 654 :L13–L16, 2007.
- [138] Stacy McGaugh. The balance of dark and luminous mass in rotating galaxies. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :171302, 2005.
- [139] Olivier Tiret and F. Combes. Evolution of spiral galaxies in modified gravity. 2007.
- [140] Douglas Clowe, Anthony Gonzalez, and Maxim Markevitch. Weak lensing mass reconstruction of the interacting cluster 1e0657-558 : Direct evidence for the existence of dark matter. *Astrophys. J.*, 604 :596–603, 2004.
- [141] Garry W. Angus, Benoit Famaey, and HongSheng Zhao. Can mond take a bullet ? analytical comparisons of three versions of mond beyond spherical symmetry. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 371 :138, 2006.
- [142] Garry W. Angus and Stacy S. McGaugh. The collision velocity of the bullet cluster in conventional and modified dynamics. 2007.
- [143] R. H. Sanders. A tensor-vector-scalar framework for modified dynamics and cosmic dark matter. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 363 :459, 2005.
- [144] Nicole P. Vogt et al. Optical rotation curves of distant field galaxies : Sub- l^* systems. *Astrophys. J.*, 479 :L121, 1997.
- [145] B. L. Ziegler et al. The evolution of the tully-fisher relation of spiral galaxies. 2001.
- [146] Christopher J. Conselice et al. Evolution of the near-infrared tully-fisher relation : Constraints on the relationship between the stellar and total masses of disk galaxies since $z=1$. *Astrophys. J.*, 628 :160–168, 2005.
- [147] Mordehai Milgrom. Dynamics with a nonstandard inertia acceleration relation : An alternative to dark matter in galactic systems. *Ann. Phys.*, 229 :384–415, 1994.
- [148] Mordehai Milgrom. Mond—a pedagogical review. *Acta Phys. Polon.*, B32 :3613, 2001.
- [149] Mordehai Milgrom. Mond as modified inertia. 2005.
- [150] J. E. Felten. Milgrom’s revision of newton’s laws - dynamical and cosmological consequences.
- [151] Juan M. Romero and Adolfo Zamora. Alternative proposal to modified newton dynamics (mond). *Phys. Rev.*, D73 :027301, 2006.
- [152] E. R. Caianiello. Is there a maximal acceleration? *Nuovo Cim. Lett.*, 32 :65, 1981.
- [153] A. Feoli, G. Lambiase, G. Papini, and G. Scarpetta. Classical electrodynamics of a particle with maximal acceleration corrections. *Nuovo Cim.*, B112 :913–922, 1997.
- [154] G. Papini. Revisiting caianiello’s maximal acceleration. *Nuovo Cim.*, 117B :1325–1331, 2003.
- [155] Frederic P. Schuller. Born-infeld kinematics. *Annals Phys.*, 299 :174–207, 2002.
- [156] Frederic P. Schuller. Born-infeld kinematics and correction to the thomas precession. *Phys. Lett.*, B540 :119–124, 2002.
- [157] Mordehai Milgrom. Solutions for the modified newtonian dynamics field equation. *Astrophys. J.*, 302 :617–625, 1986.
- [158] J. D. Bekenstein. Phase coupling gravitation : Symmetries and gauge fields. *Phys. Lett.*, B202 :497–500, 1988.
- [159] Robert H. Sanders. Phase coupling gravity and astronomical mass discrepancies. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 235 :105–121, 1988.

- [160] D. N. Spergel et al. First year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations : Determination of cosmological parameters. *Astrophys. J. Suppl.*, 148 :175, 2003.
- [161] D. N. Spergel et al. Wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) three year results : Implications for cosmology. 2006.
- [162] John L. Tonry et al. Cosmological results from high-z supernovae. *Astrophys. J.*, 594 :1–24, 2003.
- [163] Robert A. Knop et al. New constraints on ω_m , ω_Λ , and w from an independent set of eleven high-redshift supernovae observed with hst. *Astrophys. J.*, 598 :102, 2003.
- [164] Adam G. Riess et al. Type ia supernova discoveries at $z > 1$ from the hubble space telescope : Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. *Astrophys. J.*, 607 :665–687, 2004.
- [165] Pierre Astier et al. The supernova legacy survey : Measurement of ω_m , ω_Λ and w from the first year data set. *Astron. Astrophys.*, 447 :31–48, 2006.
- [166] V. C. Rubin, N. Thonnard, and Jr. Ford, W. K. *Astrophys. J.*, 225 :L107, 1978.
- [167] John D. Anderson et al. Study of the anomalous acceleration of pioneer 10 and 11. *Phys. Rev.*, D65 :082004, 2002.
- [168] Bharat Ratra and P. J. E. Peebles. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *Phys. Rev.*, D37 :3406, 1988.
- [169] R. R. Caldwell, Rahul Dave, and Paul J. Steinhardt. Cosmological imprint of an energy component with general equation-of-state. *Phys. Rev. Lett.*, 80 :1582–1585, 1998.
- [170] Ivaylo Zlatev, Li-Min Wang, and Paul J. Steinhardt. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :896–899, 1999.
- [171] C. Boehm, P. Fayet, and J. Silk. Light and heavy dark matter particles. *Phys. Rev.*, D69 :101302, 2004.
- [172] E. Hayashi et al. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 355 :794, 2004.
- [173] G. R. Dvali, Gregory Gabadadze, and Massimo Porrati. 4d gravity on a brane in 5d minkowski space. *Phys. Lett.*, B485 :208–214, 2000.
- [174] G. R. Dvali and Gregory Gabadadze. Gravity on a brane in infinite-volume extra space. *Phys. Rev.*, D63 :065007, 2001.
- [175] Cedric Deffayet. Cosmology on a brane in minkowski bulk. *Phys. Lett.*, B502 :199–208, 2001.
- [176] Cedric Deffayet, G. R. Dvali, and Gregory Gabadadze. Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions. *Phys. Rev.*, D65 :044023, 2002.
- [177] C. Armendáriz-Picón, Viatcheslav F. Mukhanov, and Paul J. Steinhardt. Essentials of k-essence. *Phys. Rev.*, D63 :103510, 2001.
- [178] Jacob D. Bekenstein. Modified gravity vs dark matter : Relativistic theory for mond. *PoS, JHW2004* :012, 2005.
- [179] M. A. Clayton. Causality, shocks and instabilities in vector field models of lorentz symmetry breaking. 2001.
- [180] Guy D. Moore and Ann E. Nelson. Lower bound on the propagation speed of gravity from gravitational cherenkov radiation. *JHEP*, 109 :023, 2001.
- [181] S. Baessler et al. Improved test of the equivalence principle for gravitational self-energy. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :003585, 1999.

- [182] James G. Williams, Slava G. Turyshev, and Dale H. Boggs. Progress in lunar laser ranging tests of relativistic gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :261101, 2004.
- [183] Mordehai Milgrom. The modified dynamics as a vacuum effect. *Phys. Lett.*, A253 :273–279, 1999.
- [184] M. E. Soussa and Richard P. Woodard. A nonlocal metric formulation of mond. *Class. Quant. Grav.*, 20 :2737–2752, 2003.
- [185] Luc Blanchet. Gravitational polarization and the mond phenomenology. 2006.
- [186] Luc Blanchet. Dipolar particles in general relativity. 2006.
- [187] Federico Piazza and Christian Marinoni. Model for gravitational interaction between dark matter and baryons. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :141301, 2003.
- [188] Thibault Damour and Carsten Gundlach. Nucleosynthesis constraints on an extended jordan-brans- dicke theory. *Phys. Rev.*, D43 :3873–3877, 1991.
- [189] J. A. Casas, J. Garcia-Bellido, and M. Quiros. Scalar - tensor theories of gravity with phi dependent masses. *Class. Quant. Grav.*, 9 :1371–1384, 1992.
- [190] Greg W. Anderson and Sean M. Carroll. Dark matter with time-dependent mass. 1997.
- [191] Luca Amendola. Coupled quintessence. *Phys. Rev.*, D62 :043511, 2000.
- [192] D. Comelli, M. Pietroni, and A. Riotto. Dark energy and dark matter. *Phys. Lett.*, B571 :115–120, 2003.
- [193] Glennys R. Farrar and P. James E. Peebles. Interacting dark matter and dark energy. *Astrophys. J.*, 604 :1–11, 2004.
- [194] Luca Amendola, Gabriela Camargo Campos, and Rogerio Rosenfeld. Consequences of dark matter - dark energy interaction on cosmological parameters derived from snia data. *Phys. Rev.*, D75 :083506, 2007.
- [195] Mariano Cadoni. An einstein-like theory of gravity with a non-newtonian weak-field limit. *Gen. Rel. Grav.*, 36 :2681–2688, 2004.
- [196] Yousef Sobouti. An $f(r)$ gravitation instead of dark matter. 2006.
- [197] S. Capozziello, V. F. Cardone, and A. Troisi. Low surface brightness galaxies rotation curves in the low energy limit of r^{*n} gravity : No need for dark matter? *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 375 :1423–1440, 2007.
- [198] W. F. Kao. Modified newtonian dynamics and induced gravity. 2005.
- [199] A. Einstein. *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.*, page 414, 1925.
- [200] A. Einstein and E. G. Straus. *Ann. Math.*, 47 :731, 1946.
- [201] J. W. Moffat. New theory of gravitation. *Phys. Rev.*, D19 :3554, 1979.
- [202] T. Damour, S. Deser, and James G. McCarthy. Nonsymmetric gravity theories : Inconsistencies and a cure. *Phys. Rev.*, D47 :1541–1556, 1993.
- [203] John W. Moffat. Modified gravitational theory as an alternative to dark energy and dark matter. 2004.
- [204] J. W. Moffat. Modified gravitational theory and galaxy rotation curves. 2004.
- [205] J. W. Moffat. Gravitational theory, galaxy rotation curves and cosmology without dark matter. *JCAP*, 0505 :003, 2005.
- [206] J. W. Moffat. Scalar-tensor-vector gravity theory. *JCAP*, 0603 :004, 2006.
- [207] J. R. Brownstein and J. W. Moffat. Galaxy rotation curves without non-baryonic dark matter. *Astrophys. J.*, 636 :721, 2006.

- [208] Ahmed Hindawi, Burt A. Ovrut, and Daniel Waldram. Non-trivial vacua in higher-derivative gravitation. *Phys. Rev.*, D53 :5597–5608, 1996.
- [209] E. T. Tomboulis. Exact relation between einstein and quadratic quantum gravity. *Phys. Lett.*, B389 :225–230, 1996.
- [210] Ignacio Navarro and Karel Van Acoleyen. Consistent long distance modification of gravity from inverse powers of the curvature. *JCAP*, 0603 :008, 2006.
- [211] Guido Cognola, Emilio Elizalde, Shin’ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, and Sergio Zerbini. Dark energy in modified gauss-bonnet gravity : Late-time acceleration and the hierarchy problem. *Phys. Rev.*, D73 :084007, 2006.
- [212] P. W. Higgs. *Nuovo Cimento*, 11 :816, 1959.
- [213] G. Bicknell. *J. Phys. A*, 7 :1061, 1974.
- [214] P. Teyssandier and P. Tourrenc. *J. Math. Phys.*, 24 :2793, 1983.
- [215] Brian Whitt. Fourth order gravity as general relativity plus matter. *Phys. Lett.*, B145 :176, 1984.
- [216] L. Bel and H. Sirousse Zia. *Phys. Rev. D*, 32 :3128, 1985.
- [217] Hans-Jurgen Schmidt. Comparing selfinteracting scalar fields and $r + r^{*3}$ cosmological models. *Astron. Nachr.*, 308 :183, 1987.
- [218] David Wands. Extended gravity theories and the einstein-hilbert action. *Class. Quant. Grav.*, 11 :269–280, 1994.
- [219] Éanna É. Flanagan. Palatini form of $1/r$ gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :071101, 2004.
- [220] Éanna É. Flanagan. Higher order gravity theories and scalar tensor theories. *Class. Quant. Grav.*, 21 :417–426, 2003.
- [221] C. Brans and R. H. Dicke. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124 :925–935, 1961.
- [222] P. Jordan. The present state of dirac’s cosmological hypothesis. *Z. Phys.*, 157 :112–121, 1959.
- [223] M. Fierz. *Helv. Phys. Acta*, 29 :128, 1956.
- [224] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farèse. Nonperturbative strong field effects in tensor - scalar theories of gravitation. *Phys. Rev. Lett.*, 70 :2220–2223, 1993.
- [225] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farèse. Tensor-scalar gravity and binary-pulsar experiments. *Phys. Rev.*, D54 :1474–1491, 1996.
- [226] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farèse. Gravitational-wave versus binary-pulsar tests of strong-field gravity. *Phys. Rev.*, D58 :042001, 1998.
- [227] S. Gottlöber, H. J. Schmidt, and Alexei A. Starobinsky. Sixth order gravity and conformal transformations. *Class. Quant. Grav.*, 7 :893, 1990.
- [228] David G. Boulware and S. Deser. Effective gravity theories with dilatons. *Phys. Lett.*, B175 :409–412, 1986.
- [229] Gilles Esposito-Farèse. Scalar-tensor theories and cosmology and tests of a quintessence-gauss-bonnet coupling. 2003. in Proceedings of the XXXVIIIth *Rencontres de Moriond*, March 2003, Thé¹ Giói Publishers (Vietnam), p. 427, gr-qc/0306018 ; E. Semboloni, laurea thesis (2002), unpublished.
- [230] Gilles Esposito-Farèse. Tests of scalar-tensor gravity. *AIP Conf. Proc.*, 736 :35–52, 2004.
- [231] Luca Amendola, Christos Charmousis, and Stephen C. Davis. Constraints on gauss-bonnet gravity in dark energy cosmologies. *JCAP*, 0612 :020, 2006.

- [232] Luca Amendola, Christos Charmousis, and Stephen C. Davis. Solar system constraints on gauss-bonnet mediated dark energy. 2007.
- [233] Jean-Philippe Bruneton. On causality and superluminal behavior in classical field theories. applications to k-essence theories and mond-like theories of gravity. *Phys. Rev.*, D75 :085013, 2007.
- [234] Gianfranco Gentile, Paolo Salucci, Uli Klein, and Gian Luigi Granato. Ngc 3741 : dark halo profile from the most extended rotation curve. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 375 :199–212, 2007.
- [235] Christopher Eling, Ted Jacobson, and David Mattingly. Einstein-aether theory. 2004.
- [236] Sean M. Carroll and Eugene A. Lim. Lorentz-violating vector fields slow the universe down. *Phys. Rev.*, D70 :123525, 2004.
- [237] L. Lindegren and M. A. C. Perryman. Gaia : Global astrometric interferometer for astrophysics. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 116 :579–595, 1996. see also www.rssd.esa.int/gaia/.
- [238] Slava G. Turyshev, Michael Shao, and Jr. Nordtvedt, Kenneth. The laser astrometric test of relativity (lator) mission. *Class. Quant. Grav.*, 21 :2773–2799, 2004.
- [239] Slava G. Turyshev, Michael Shao, and Jr. Nordtvedt, Kenneth L. Experimental design for the lator mission. *Int. J. Mod. Phys.*, D13 :2035–2064, 2004.
- [240] Yasunori Fujii and Misao Sasaki. Gravitational scalar field coupled directly to the maxwell field and its effect to solar-system experiments. *Phys. Rev.*, D75 :064028, 2007.
- [241] B. Fort and Y. Mellier. Arc(let)s in clusters of galaxies. *Astron. Astrophys. Rev.*, 5 :239, 1994.
- [242] Yannick Mellier. Probing the universe with weak lensing. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 37 :127, 1999.
- [243] Matthias Bartelmann and Peter Schneider. Weak gravitational lensing. *Phys. Rept.*, 340 :291–472, 2001.
- [244] Brendan Z. Foster and Ted Jacobson. Post-newtonian parameters and constraints on einstein- aether theory. *Phys. Rev.*, D73 :064015, 2006.
- [245] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farèse. Testing for preferred frame effects in gravity with artificial earth satellites. *Phys. Rev.*, D49 :1693–1706, 1994.
- [246] T. Jacobson and D. Mattingly. Einstein-aether waves. *Phys. Rev.*, D70 :024003, 2004.
- [247] Gilles Esposito-Farèse. Binary-pulsar tests of strong-field gravity and gravitational radiation damping. 2005. in Proceedings of the tenth Marcel Grossmann Meeting, July 2003, World Scientific, p. 647.
- [248] Thibault Damour. Binary systems as test-beds of gravity theories. 2007.
- [249] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farèse. Binary-pulsar versus solar-system tests of tensor-scalar gravity. 2007. in preparation.
- [250] D.M. Eardley. *Astrophys. J.*, 196 :L59, 1975.
- [251] C.M. Will and D.M. Eardley. *Astrophys. J.*, 212 :L91, 1977.
- [252] Kenneth Nordtvedt. Gravitational equation of motion of spherical extended bodies. *Phys. Rev.*, D49 :5165, 1994.
- [253] Walter D. Goldberger and Ira Z. Rothstein. An effective field theory of gravity for extended objects. *Phys. Rev.*, D73 :104029, 2006.
- [254] E. O. Kahya and R. P. Woodard. A generic test of modified gravity models which emulate dark matter. 2007.

- [255] Marc-Thierry Jaekel and Serge Reynaud. Post-einsteinian tests of linearized gravitation. *Class. Quant. Grav.*, 22 :2135–2158, 2005.
- [256] Marc-Thierry Jaekel and Serge Reynaud. Radar ranging and doppler tracking in post-einsteinian metric theories of gravity. *Class. Quant. Grav.*, 23 :7561, 2006.
- [257] L. I. Schiff. *Am. J. Phys.*, 28 :340, 1960.
- [258] R. Baierlein. *Phys. Rev.*, 162 :1275, 1967.
- [259] C. M. Will. *Astrophys. J.*, 163 :611, 1971.
- [260] C. M. Will and K. Nordtvedt. *Astrophys. J.*, 177 :757, 1972.
- [261] Myungkook James Jee et al. Discovery of a ringlike dark matter structure in the core of the galaxy cluster cl 0024+17. 2007.
- [262] J. R. Brownstein and J. W. Moffat. The bullet cluster 1e0657-558 evidence shows modified gravity in the absence of dark matter. 2007.
- [263] Constantinos Skordis, D. F. Mota, P. G. Ferreira, and C. Boehm. Large scale structure in bekenstein’s theory of relativistic mond. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :011301, 2006.
- [264] Mordehai Milgrom. Non-linear conformally invariant generalization of the poisson equation to $d > 2$ dimensions. *Phys. Rev.*, E56 :1148–1159, 1997.
- [265] Martin C. Smith et al. The rave survey : Constraining the local galactic escape speed. 2006.
- [266] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987.
- [267] Dehnen W. Binney, J. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 287 :L5, 1997.
- [268] Benoit Famaey and James Binney. Modified newtonian dynamics in the milky way. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 363 :603–608, 2005.
- [269] Stacy S. McGaugh, W. J. G. de Blok, J. M. Schombert, R. Kuzio de Naray, and J. H. Kim. The rotation velocity attributable to dark matter at intermediate radii in disk galaxies. *Astrophys. J.*, 659 :149, 2007.
- [270] Benoit Famaey, Gianfranco Gentile, Jean-Philippe Bruneton, and Hong-Sheng Zhao. An insight into the baryon-gravity relation in galaxies. *Phys. Rev.*, D75 :063002, 2007.
- [271] R. H. Sanders. Clusters of galaxies with modified newtonian dynamics (mond). *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 342 :901, 2003.
- [272] M. Fich and S. Tremaine. The mass of the galaxy. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 29 :409–445, 1991.
- [273] M. et al. Steinmetz. The radial velocity experiment (rave) : first data release. *Astron. J.*, 132 :1645, 2006.
- [274] M. Chiba and T. C. Beers. Kinematics of metal-poor stars in the galaxy. iii. formation of the stellar halo and thick disk as revealed from a large sample of non-kinematically selected stars. *Astrophys. J.*, 119 :2843–2865, 2000.
- [275] P. J. T. Leonard and S. Tremaine. *Astrophys. J.*, 353 :486, 1990.
- [276] Qingjuan Yu and Scott Tremaine. Ejection of hypervelocity stars by the (binary) black hole(s) in the galactic center. *Astrophys. J.*, 599 :1129–1138, 2003.
- [277] H. S. Zhao and L. L. Tian. Roche lobe shapes in mond-like modified gravity. *Astron. Astrophys.*, 450 :1005, 2006.
- [278] N. W. Evans, M. I. Wilkinson, P. Guhathakurta, E. K. Grebel, and S. S. Vogt. Dynamical mass estimates for the halo of m31 from keck spectroscopy. *Astrophys. J.*, 540 :L9, 2000.

- [279] Mordehai Milgrom. Mond mass-to-light ratios for galaxy groups. *Astrophys. J.*, 577 :L75, 2002.
- [280] Donald Lynden-Bell et al. Spectroscopy and photometry of elliptical galaxies. v - galaxy streaming toward the new supergalactic center. *Astrophys. J.*, 326 :19, 1988.
- [281] David J. Radburn-Smith, J. R. Lucey, P. A. Woudt, R. C. Kraan-Korteweg, and F. G. Watson. Structures in the great attractor region. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 369 :1131–1142, 2006.
- [282] L. Ciotti, P. Londrillo, and Carlo Nipoti. Axisymmetric and triaxial mond density-potential pairs. *Astrophys. J.*, 640 :741–750, 2006.
- [283] Adi Nusser. Modified newtonian dynamics of large scale structure. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 331 :909, 2002.
- [284] R. H. Sanders. Alternatives to dark matter. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 223 :539–555, 1986.
- [285] Martin Reuter and Holger Weyer. On the possibility of quantum gravity effects at astrophysical scales. *Int. J. Mod. Phys.*, D15 :2011–2028, 2006.