



HAL
open science

Variational approach of fatigue

André Jaubert

► **To cite this version:**

André Jaubert. Variational approach of fatigue. Mécanique [physics.med-ph]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2006. Français. NNT: . tel-00315565

HAL Id: tel-00315565

<https://theses.hal.science/tel-00315565>

Submitted on 28 Aug 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de l'Université Paris XIII

Spécialité : **Mécanique**

présentée par

André JAUBERT

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris XIII

Approche variationnelle de la fatigue

Soutenue le 24 Mars 2006 devant le jury composé de

M. Quoc Son NGUYEN	Président
M. Gianpietro DEL PIERO	Rapporteur
M. François SIDOROFF	Rapporteur
M. Radhi ABDELMOULA	Examineur
M. Bertrand BURGARDT	Examineur
M. Gilles FRANCFORT	Examineur
M. Jean-Jacques MARIGO	Directeur de thèse

Thèse préparée au sein du
Laboratoire des Propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux
(UPR CNRS 9001), Université Paris XIII.

Avant-Propos

Ce mémoire est le résultat de trois années de thèse effectuées au sein du Laboratoire des Propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux. Je tiens à en remercier les directeurs successifs pour la grande liberté laissée aux doctorants mais également les différents membres pour leur sympathie.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Jean-Jacques MARIGO qui a dirigé cette thèse, et ce pour diverses raisons. Tout d'abord pour ses grandes qualités de pédagogie et de rigueur. Ensuite parce que sa curiosité et son recul sur le sujet et plus généralement sur la Mécanique de la Rupture ont permis l'avancement de cette thèse à de nombreux moments clés. Dire qu'il a été décisif dans les résultats présentés dans ce manuscrit est donc plus que justifié. Enfin parce qu'au-delà de ces qualités, j'ai apprécié sa disponibilité et son discours toujours rassurant. Je le remercie de plus de m'avoir proposé un sujet aussi original et enrichissant.

Monsieur Quoc Son NGUYEN a accepté de présider ce jury de thèse, j'en suis très honoré et le remercie de sa présence.

Messieurs Gianpietro DEL PIERO et François SIDOROFF ont consacré de leur précieux temps à la lecture et la critique de ce manuscrit, je tiens à leur exprimer mon immense reconnaissance.

Messieurs Radhi ABDELMOULA, Bertrand BURGARDT et Gilles FRANCFORT ont complété ce jury, je les remercie de l'intérêt qu'ils ont porté à cette thèse.

Je n'oublie bien évidemment pas Hanen AMOR, Jean-François BABADJIAN, Miguel CHARLOTTE, Michèle COUTRIS, Pierre-Emmanuel DUMOUCHEL, Hichème FERDJANI, Jérôme LAVERNE, Béatrice MONTDARGENT et Thibault WELLER qui ont tous contribué par leur ouverture d'esprit et leur bonne humeur à rendre ces années agréables. Je les en remercie.

Table des matières

Partie I	Approche variationnelle de la Fatigue	1
1	Les modèles phénoménologiques de rupture par fatigue	3
1.1	Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture	3
1.1.1	Approche énergétique	3
1.1.2	Approche par Facteurs d’Intensité des Contraintes (F.I.C.)	5
1.2	Rupture par fatigue	7
1.2.1	Introduction à la fatigue	7
1.2.2	Modélisation de la fatigue	10
1.2.3	Modèles de forces cohésives	12
2	Formulation Variationnelle de la Mécanique de la Rupture	17
2.1	Cadre de l’étude	18
2.1.1	Ensemble des champs de déplacement admissibles	20
2.1.2	Énergie potentielle	20
2.1.3	Les énergies de surface	20
2.2	Loi d’évolution de la fissuration	24
2.2.1	Sous chargement monotone	25
2.2.2	Sous chargement cyclique	27
Partie II	Le problème modèle : Décollement d’un film	31
3	Formulation du problème. Résolution dans le cas du modèle de Griffith	35
3.1	L’essai de pelage	35
3.2	Présentation du problème	36
3.2.1	Condition d’inextensibilité	37
3.2.2	Énergie potentielle	38
3.2.3	Énergie de surface	38
3.3	Problème incrémental adimensionnalisé	40
3.3.1	Discrétisation du chargement	40
3.3.2	Problème incrémental	41
3.3.3	Formulation adimensionnalisée	42
3.3.4	Existence d’une solution	43
3.4	Solution avec une énergie de surface de GRIFFITH	43
3.4.1	Premier pas de temps	44
3.4.2	Pas de temps quelconque	45
3.4.3	Résumé du cas GRIFFITH	46

4	Propriétés générales de la solution dans le cas d'un modèle de Barenblatt	49
4.1	Structure de la solution	50
4.2	Unicité et indépendance vis à vis de la discrétisation	56
4.2.1	Unicité de la solution	56
4.2.2	Indépendance vis à vis de la discrétisation	59
4.2.3	Récapitulatif	60
4.3	Réponse sous chargement cyclique simple	61
4.3.1	Position du problème	61
4.3.2	Propriétés de la réponse	62
4.3.3	Mise en évidence de la fatigue	64
4.3.4	Bilans d'énergie	66
5	Résolution dans le cas du modèle de Dugdale	69
5.1	Structure générale de la solution	69
5.2	Première montée en charge	70
5.3	Nombre de cycles d'amorçage N_a	72
5.3.1	À propos du phénomène d'endurance	72
5.3.2	Évaluation du nombre de cycles d'amorçage N_a	72
5.4	Décollement progressif	73
5.5	Influence des paramètres	77
5.6	Effet d'une surcharge unique	80
6	Loi de fatigue limite du décollement d'un film	85
6.1	Position du problème	85
6.2	Loi de GRIFFITH à court terme	86
6.3	Changement d'échelle de cycles et convergence numérique	87
6.4	Convergence vers une fissure macroscopique non cohésive	88
6.5	Convergence vers un régime stationnaire au voisinage du fond de fissure	90
6.5.1	Quelques résultats de convergence à l'échelle microscopique	90
6.5.2	Existence et unicité du régime stationnaire	91
6.5.3	La conjecture de convergence	92
6.5.4	Sa vérification numérique	92
6.6	La loi de fatigue limite	93
6.6.1	Propriétés de la loi limite	93
6.6.2	Loi de fatigue limite au voisinage de $G = 1$	94
6.6.3	Loi de fatigue limite au voisinage de $G = 0$	94
6.7	Problème limite d'évolution du décollement	95
6.7.1	Formulation du problème limite	95
6.7.2	Vérification et résolution	96
	Partie III Etude des lois de fatigue limites	99
7	Variantes à l'essai de pelage.	101
7.1	Hypothèses préliminaires	103
7.2	Décollement d'un film à force imposée	103
7.2.1	Présentation	103

7.2.2	Première montée en charge	105
7.2.3	Aux cycles suivants	106
7.2.4	Loi de fatigue limite	107
7.3	Rapport d'ouverture non nul ($R = V_m/V_M \neq 0$)	108
7.3.1	Solution au cycle i	109
7.3.2	Loi de fatigue limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$	112
7.4	Décollement d'un film avec une loi de comportement non linéaire	115
7.4.1	Évolution cyclique du décollement	115
7.4.2	Loi de fatigue limite	117
7.5	Arrachement antiplan d'un film de son socle	119
7.5.1	Solution au premier cycle	121
7.5.2	Aux cycles suivants	123
7.5.3	Loi de fatigue limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$	126
7.6	Flexion pure	129
7.6.1	Présentation du problème	130
7.6.2	Évolution du décollement	131
7.6.3	La loi de fatigue limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$	133
8	Formulation variationnelle des lois de fatigue limites	135
8.1	Formulation variationnelle discrète des lois de fatigue limites	136
8.1.1	Cas du problème de décollement d'un film	136
8.1.2	Généralisation	137
8.1.3	Quelques remarques générales	139
8.2	Application : énergie de surface en loi puissance	141
8.2.1	Amorçage d'une fissure de fatigue	142
8.2.2	Propagation de la fissure : évolution du type loi de PARIS	145
8.2.3	Comparaison avec les observations expérimentales	146
8.2.4	Un exemple : bi-matériau avec entaille	146
	Références	152

Introduction

L’Homme développant des structures de plus en plus complexes (dans les constructions navales, aéronautiques et spatiales notamment), la compréhension fine et la modélisation précise des phénomènes de Rupture sont devenues nécessaires afin d’évaluer le risque d’amorçage et de propagation d’un défaut.

Jusqu’ici, il n’existe pas de cadre général de la Mécanique de la Rupture basée sur une formulation unique et permettant de rendre compte des divers phénomènes observés. L’habitude des ingénieurs est d’adopter la loi de GRIFFITH [35] “à court terme” (sous chargement monotone par exemple) et les modèles phénoménologiques de PARIS [55] “à long terme” (sous chargement cyclique par exemple). Aucun lien n’a vraiment été établi entre ces lois excepté des résultats numériques basés sur des modèles de forces cohésives [52].

Cependant il est connu que la loi de GRIFFITH possède quelques lacunes dont celle non admissible d’être inapte à rendre compte de l’apparition de fissures. De même, les lois de fatigue utilisées sont essentiellement d’origine phénoménologique, leur forme et les paramètres à identifier peuvent changer d’un problème à l’autre sans que l’on soit capable de dire de façon claire ce qui est dû au matériau, à la géométrie et au chargement.

On se propose ici d’établir ce lien entre lois de GRIFFITH et lois de PARIS et même de construire des lois de fatigue basées sur des lois de rupture plus générales. Toute l’analyse repose sur les trois ingrédients suivants :

- (i) *un principe de moindre énergie ;*
- (ii) *une énergie de surface de type Dugdale-Barenblatt ;*
- (iii) *une condition d’irréversibilité.*

Chacun de ces ingrédients joue un rôle essentiel : sans condition d’irréversibilité ou avec une énergie de surface de GRIFFITH , il est impossible d’obtenir des effets de fatigue : la convergence de la loi de propagation résultant du modèle de DUGDALE vers la loi de GRIFFITH ou la loi de PARIS repose essentiellement sur des convergences en énergie. Cette approche, qui peut *a priori* être appliquée dans un cadre très général sera ici développée dans le contexte unidimensionnel de décollement d’un film mince.

L’objet de **la première partie** de cette étude est d’introduire l’approche variationnelle de la fatigue.

Dans le Chapitre 1, il s’agit tout d’abord de situer l’étude dans son contexte, *i.e.* celui de la Mécanique de la Rupture fragile et d’introduire les outils “classiques” que sont le taux de restitution d’énergie G et le facteur d’intensité des contraintes K . Il est ensuite présenté de façon non exhaustive le phénomène de fatigue, *i.e.* l’endommagement progressif d’une structure soumise à un chargement variable. L’accent est essentiellement mis sur la loi de PARIS (et ses très nombreuses

variantes) et sur des résultats numériques récents basés sur des modèles de forces cohésives. Le modèle proprement dit est présenté au Chapitre 2. Il a pour origine les travaux de FRANCFORT et MARIGO [32] en 1998 qui, dans le cadre d'évolutions quasi statiques et dans le but de parer aux lacunes de la Théorie de GRIFFITH, postulent que la configuration d'équilibre d'une structure fragile soumise à un chargement monotone est celle qui minimise, à chaque instant, son énergie totale, somme de son énergie potentielle et de l'énergie de surface de GRIFFITH (proportionnelle en $2D$ à la longueur de zone fissurée). Les travaux réalisés depuis ont montré que la solution recherchée devait être un minimum local et que l'énergie de surface à considérer devait être du type BARENBLATT, *i.e.* dépendante du saut de déplacement sur les lèvres de la fissure.

L'objectif de cette thèse est d'étendre cette nouvelle formulation à des chargements non monotones et donc en particulier aux chargements cycliques d'amplitudes constantes, cadre de la loi phénoménologique de PARIS.

On montre justement dans la seconde partie de ce chapitre que cette extension n'est possible que si l'on introduit une condition d'irréversibilité dans le modèle afin de tenir compte des "dommages" que subit le matériau à chaque cycle (et éviter ainsi la "recohésion" des lèvres de la fissure lors des phases de décharge). L'irréversibilité introduite, le problème de minimisation initiale devient un problème de minimisation incrémentale.

La seconde partie de cette thèse est consacrée à l'étude du décollement d'un film mince en fatigue. On souhaite déterminer l'évolution du décollement d'un film initialement parfaitement collé sur un socle rigide et soumis à une tension constante et une déflexion cyclique et qui peut être apparenté à un essai de pelage. Ce problème, très "académique", permet cependant de résoudre semi-analytiquement le problème d'évolution du décollement et de comprendre ainsi l'intérêt d'un modèle de fatigue basé sur une approche par minimisation de l'énergie. Le choix a été fait de décomposer cette partie en quatre chapitres.

Dans le Chapitre 3, après avoir introduit les différents ingrédients mis en jeu (énergie totale, condition d'irréversibilité représentée par la variable d'ouverture cumulée), on pose, comme dans le Chapitre 2, le problème de minimisation incrémental. Dans la seconde partie de ce chapitre, on étudie la réponse obtenue avec une énergie de surface de GRIFFITH (*i.e.* indépendante de l'ouverture entre le film et le socle). Dans ce cadre, on montre que le décollement n'évolue plus après le premier cycle, l'évolution n'étant possible que si l'on choisit des chargements de fatigue d'amplitude non constante.

Dans le Chapitre 4, on étudie la réponse dans le cadre d'une énergie de surface de type BARENBLATT (*i.e.* dépendante de l'ouverture). Plus précisément, on s'attache à déterminer la structure de la solution du problème de minimisation incrémental et on montre —dans ce cas particulier du décollement d'un film mince— l'unicité de la solution. Celle-ci est de plus indépendante de la discrétisation choisie : on peut donc résoudre chaque phase de chargement (phases de charge et de décharge) en un unique pas de temps. On y établit également le résultat fondamental que, sous chargement cyclique, le film finira par se détacher complètement et ce quelle que soit l'amplitude des cycles. Comparé au résultat d'adaptation en un cycle prévu par le modèle de GRIFFITH, il montre à la fois tout le bien fondé de l'approche variationnelle et la nécessité du choix d'une énergie de surface de type BARENBLATT.

Dans le Chapitre 5, le problème est résolu de façon semi-analytique en choisissant l'énergie de surface associée au modèle de DUGDALE et dépendant de la variable d'ouverture cumulée. Il apparaît alors que la minimisation de l'énergie totale à chaque pas de temps du chargement discrétisé

conduit au décollement progressif du film, la zone décollée étant précédée d'une zone cohésive de la fissure. L'évolution du décollement dépend des paramètres du problème.

Enfin dans le Chapitre 6, en supposant que le rapport ϵ entre la longueur interne intervenant dans l'énergie de surface de DUGDALE et la longueur du film est un petit paramètre, on s'intéresse au comportement asymptotique de la solution du problème d'évolution du décollement lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. On obtient ainsi une loi limite de fatigue permettant d'obtenir explicitement le taux de propagation du décollement en fonction du taux de restitution d'énergie,

$$\frac{dl}{dN} = f(G).$$

On retrouve ainsi une loi de type PARIS abondamment utilisée par les ingénieurs. Pour des faibles valeurs de G , la loi limite est une loi de PARIS "classique", *i.e.* une fonction puissance qui s'avère ici être égale à $3/2$.

En fait, on verra que les lois obtenues sont plus riches que les lois de PARIS utilisées habituellement, car elles contiennent comme cas particulier la loi de GRIFFITH et qu'elles peuvent être utilisées pour des chargements d'amplitude variable, voire pour des surcharges.

La troisième partie de la thèse concerne l'étude des lois de fatigue limites introduites dans la seconde partie.

Dans le Chapitre 7, on met en évidence l'influence de certains facteurs sur l'expression de la loi de fatigue limite. Ainsi en modifiant la condition d'irréversibilité, l'énergie potentielle, le type de chargement ou encore la forme des cycles de chargement, on construit d'autres lois de fatigue limites que celle obtenue au chapitre 6 même si elles sont toujours du type loi de PARIS. Il apparaît ainsi que la fonction f dépend du chargement, du matériau et de la structure.

Le Chapitre 8 se focalise sur les propriétés des lois de fatigue limite obtenues. Dans un premier temps, on montre qu'elles font apparaître une forme d'énergie de surface différente de celle utilisée dans le modèle de GRIFFITH. La loi de propagation des fissures par fatigue reste un problème de minimisation de l'énergie totale. Mais du fait de la forme différente de cette dernière, le problème de minimisation jouit de propriétés différentes qu'il s'agit d'étudier. L'extension de ces lois à des problèmes plus généraux est également abordée.

Dans un second temps, on donne des éléments de réponse quant à l'amorçage et à l'évolution d'une fissure par ce nouveau modèle variationnel.

Première partie

Approche variationnelle de la Fatigue

Chapitre 1

Les modèles phénoménologiques de rupture par fatigue

1.1 Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture

L'objectif est ici de rappeler les méthodes permettant d'étudier les milieux élastiques fissurés et d'introduire les grandeurs fondamentales dont on se servira par la suite (notamment le taux de restitution d'énergie G et le facteur d'intensité des contraintes K). Il ne sera donc pas montré de façon rigoureuse les différents aspects de la théorie mais on renvoie le lecteur aux ouvrages de référence sur le sujet, par exemple BUI [10] et/ou LEBLOND [42], pour plus de détails.

La mécanique de la rupture a pour objet l'étude de l'évolution des fissures dans un milieu continu en fonction du chargement auquel il est soumis.

La Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture, cadre de cette thèse, se penche plus particulièrement sur la fissuration des corps constitués, en dehors des points de discontinuité, d'un matériau élastique. Sous l'hypothèse des petites déformations, on suppose que les lois de comportement reliant déformations et contraintes sont linéaires.

On se place de plus ici dans le cadre de la fissuration bidimensionnelle (le cas tridimensionnel faisant appel à des outils numériques plus lourds comme les éléments finis ou les équations intégrales).

1.1.1 Approche énergétique

GRIFFITH [35] construit, dès 1920, un modèle de fissuration qui tient en deux hypothèses

- à chaque fissure est associée une énergie de surface qui est proportionnelle à l'aire créée.
- le critère de propagation des fissures est basé sur un bilan d'énergie : une fissure se propage si l'énergie que restituerait le milieu lors d'un accroissement virtuel infinitésimal de la fissure compense l'énergie de surface que nécessiterait sa création et que, au contraire, la fissure ne se propage pas si cette restitution n'est pas suffisante.

Dans le cadre bidimensionnel, la fissure étant caractérisée par sa longueur ℓ , on introduit le taux de restitution d'énergie G défini par

$$G = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \ell} = -\frac{\partial}{\partial \ell}(\mathcal{E}_{el} + \mathcal{E}_{ext}), \quad (1.1)$$

dont la valeur positive critique G_c , indépendante de la géométrie de la structure, est une caractéristique du matériau (conformément à l'hypothèse sur l'énergie de surface). Dans (1.1), \mathcal{P} désigne l'énergie potentielle, somme de l'énergie élastique et de l'énergie potentielle des forces extérieures, de la structure à l'équilibre.

Le critère de propagation énoncé par GRIFFITH et généralement cité comme le "Critère de GRIFFITH" s'écrit alors

$$G \leq G_c, \quad (1.2)$$

l'inégalité stricte signifiant qu'il n'y a pas propagation¹.

En considérant que l'énergie potentielle est une fonction dérivable de la longueur de fissure ℓ , le problème régissant l'évolution de cette longueur en fonction du temps t s'écrit, suivant GRIFFITH

Trouver $t \rightarrow \ell(t)$, tel que

$$\ell(\mathbf{0}) = \ell_0, \quad \frac{d\ell}{dt}(t) \geq \mathbf{0}, \quad -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \ell}(\ell(t), t) \leq G_c \text{ et } \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \ell}(\ell(t), t) + G_c \right) \frac{d\ell}{dt}(t) = \mathbf{0},$$

où la dépendance explicite de \mathcal{P} en t provient de la dépendance en temps du chargement et les différentes conditions correspondent respectivement à la condition initiale, à l'irréversibilité de la fissuration, au critère de GRIFFITH et à la condition de non propagation tant que la restitution d'énergie n'est pas suffisante.

Toutefois, comme le soulignent FRANCFORT et MARIGO dans [32], la théorie de GRIFFITH est déficiente sur de nombreux points dont les trois principaux suivants

1. Problème de l'amorçage de la fissure.

Il est connu que la théorie de GRIFFITH est incapable de rendre compte de l'apparition d'une fissure dans un milieu initialement sain. Pour s'en convaincre, considérons une fissure rectiligne ℓ contenue dans un milieu bidimensionnel élastique linéaire homogène et isotrope soumis à un chargement d'intensité U sollicitant la fissure en mode I. Pour une fissure de petite taille, le taux de restitution d'énergie est de l'ordre de $U^2 \ell$. Le critère de GRIFFITH prévoit alors qu'une fissure de longueur initiale ℓ se propagera pour un chargement de l'ordre de $\sqrt{G_c/\ell}$. Ainsi, lorsque l'on fait tendre ℓ vers 0, on voit immédiatement que l'amorçage d'une fissure ne peut se faire sous chargement fini.

Dans ce cadre, on est donc limité à la propagation d'une fissure préexistante.

2. Problème concernant le trajet temporel de la fissure.

Comme on l'a décrit précédemment, seules les évolutions stables de la fissuration sont autorisées par le critère. La théorie ne permet pas de modéliser les évolutions brutales (*i.e.* irrégulières avec le chargement) de propagation de fissures.

¹le cas $G > G_c$ correspond à une évolution brutale de la fissure. Il faudrait alors théoriquement ajouter dans le bilan énergétique l'énergie cinétique afin de prendre en compte les effets inertiels

3. Problème vis à vis du trajet spatial de la fissure.

En 2D, si on ne fait aucune hypothèse sur le trajet de la fissure, il faut deux équations (donnant théoriquement la longueur et la direction de la fissure) pour le déterminer. Mais le critère de GRIFFITH ne nous en donne qu'une seule. Avec un tel modèle, on est donc obligé de faire une hypothèse supplémentaire et choisir un critère de branchement.

On pourrait résumer ceci en disant que la théorie de GRIFFITH ne laisse pas assez de liberté quant au trajet spatio-temporel de la fissure.

C'est dans l'optique de remédier à ces difficultés que FRANCFORT et MARIGO, tout en conservant l'idée d'approche énergétique, proposent dans [32] un critère de propagation basé sur un principe de minimisation de l'énergie totale de la structure en envisageant *a priori* tous les champs de déplacements discontinus possibles. Des rappels sur cette formulation et les éléments nécessaires à son extension à la fatigue sont donnés au Chapitre 2.

1.1.2 Approche par Facteurs d'Intensité des Contraintes (F.I.C.)

WILLIAMS [64] est le premier à mettre en évidence le caractère singulier et le comportement asymptotique des contraintes inversement proportionnelles à la racine carrée de la distance au front de fissure. Dans le cas d'un milieu linéairement élastique et isotrope, la géométrie et le chargement n'interviennent quant à eux que par l'intermédiaire de trois constantes multiplicatives K_I , K_{II} et K_{III} (voir par exemple BUI [10]) appelées Facteurs d'Intensité des Contraintes (F.I.C.) des modes de sollicitation *I* (mode d'ouverture), *II* (mode de cisaillement dans le plan) et *III* (mode de cisaillement antiplan) respectivement (voir Figure 1.1).

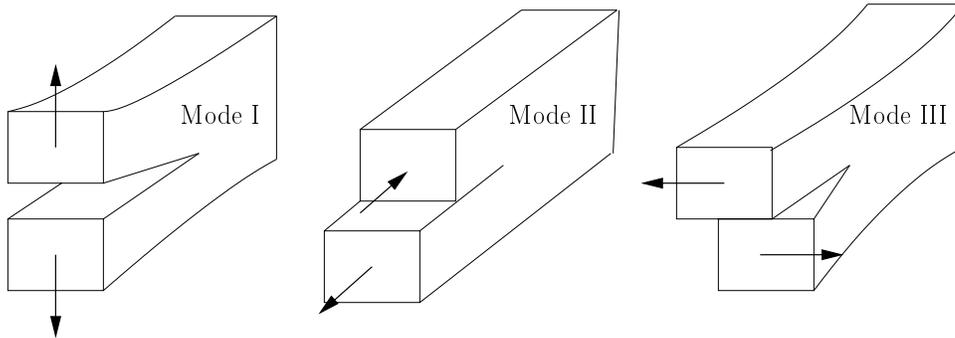


FIG. 1.1 – Les Modes de Rupture

Dans des problèmes d'élasticité planes, les contraintes s'écrivent donc

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{r}} f_{Iij}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{r}} f_{IIij}(\theta) + \text{termes réguliers} \quad (1.3)$$

où r et θ sont les coordonnées polaires d'un point P par rapport au front de fissure (Figure 1.2).

Ainsi la singularité du champ de contraintes est connue dès que l'on connaît l'expression des F.I.C.

IRWIN [37] postule pour une fissure sollicitée en mode I un critère de fissuration basé sur les F.I.C.

$$K_I < K_{Ic}, \quad (1.4)$$

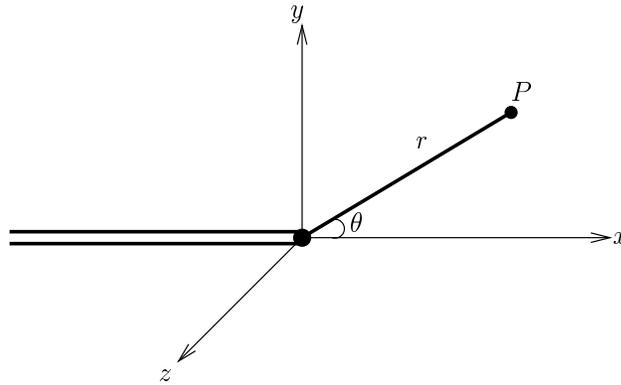


FIG. 1.2 – Représentation d'une fissure plane

où K_{Ic} est la “célèbre” ténacité du matériau.

L'inconvénient d'un tel critère est qu'il focalise l'attention sur le caractère singulier des champs qui n'est physiquement pas valable. De plus la notion de K_I doit être rediscutée dès que l'on sort du cadre de l'élasticité linéaire isotrope.

Toutefois, IRWIN montre l'équivalence de son approche avec celle de GRIFFITH dans le cadre des problèmes élastiques plans

$$G = \begin{cases} \frac{1-\nu^2}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) & \text{en déformations planes} \\ \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) & \text{en contraintes planes} \end{cases} \quad (1.5)$$

où E et ν désignent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau considéré.

Si la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture décrit de façon simple le comportement de certains matériaux, il en va autrement lorsque la fissuration de ces derniers s'accompagne d'une forte déformation plastique. Ainsi, en fatigue, certains phénomènes sont liés à la variation de taille de la zone plastique en tête de fissure qui ne peut donc plus être négligée. IRWIN définit, dans le cadre d'une fissure contenue dans une plaque soumise à une sollicitation monotone de traction perpendiculaire au plan de la fissure, le rayon r d'une zone plastifiée en tête de fissure (mode I, contraintes planes)

$$r = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_y^2} \quad (1.6)$$

où σ_y est la limite d'élasticité. De ce fait plus le chargement est important (et donc plus K_I est grand), plus la taille de la zone plastique précédant la fissure est grande.

Dans notre approche nous supposons qu'il n'y a pas de déformation plastique. Toutefois l'irréversibilité du processus et la notion de contraintes seuils seront introduites en utilisant les modèles de DUGDALE-BARENBLATT via le concept de forces cohésives.

1.2 Rupture par fatigue

La propagation de fissures de fatigue est la propagation de fissures sous-critiques (*i.e.* telles que $G < G_c$) par application d'un chargement cyclique.

Il n'est absolument pas possible de présenter une analyse exhaustive de la bibliographie sur la fatigue compte tenue du nombre considérable d'approches sur ce phénomène (se référer à l'ouvrage de SURESH [60] pour une analyse quasi complète de la fatigue).

Après une brève introduction au phénomène de fatigue, on introduira la loi de PARIS. Enfin, on mettra l'accent sur des modèles numériques assez proches de l'étude présente dans le sens où ils rendent compte de la fatigue à l'aide de modèles de forces cohésives.

1.2.1 Introduction à la fatigue

Lorsqu'un matériau est soumis à l'action d'une sollicitation qui fluctue au cours du temps et qui engendre son endommagement progressif, sa réponse est appelée fatigue. Cette réponse peut être décomposée en trois stades

1. amorçage d'une fissure.

Il y a formation d'une micro-fissure : c'est la germination ou l'amorçage de la fissure. Cette phase de formation peut représenter 80 à 90 % de la durée de vie de la pièce en termes de nombre de cycles.

2. propagation lente de cette fissure

3. propagation brutale due à l'instabilité et amenant la ruine totale de la structure.

Deux faits remarquables distinguent le phénomène de fatigue des autres phénomènes de rupture :

- la propagation sous-critique.

Sous chargement cyclique $F(t)$, l'amorçage d'une fissure à partir d'un défaut peut se produire pour des valeurs du chargement maximal F_M à chaque cycle bien inférieures à la force de rupture statique. Ceci est la conséquence de l'endommagement accumulé cycle après cycle dans les zones de concentration de contraintes.

- l'endurance.

Pour des valeurs du chargement maximal F_M à chaque cycle assez faibles (*i.e.* théoriquement en deçà d'une certaine amplitude de chargement limite ΔF_{th} appelée limite d'endurance), on observe aucune apparition de fissure même après un nombre infini de cycles. Un des essais les plus courants pour rendre compte de ce phénomène est celui permettant d'obtenir la *courbe de Wöhler* (ou courbe S-N, ou courbe d'endurance). Chaque éprouvette étant essayée sous une seule amplitude de chargement, on reporte les résultats des essais de fatigue sur un diagramme (à échelle doublement logarithmique) où les amplitudes de chargement ΔF sont en ordonnées et les nombres de cycles à rupture N_R en abscisses. Comme le montre la Figure 1.3, ces résultats se situent sur une courbe qui présente une allure asymptotique et sépare le plan du diagramme en 2 zones : une zone supérieure pour laquelle les conditions

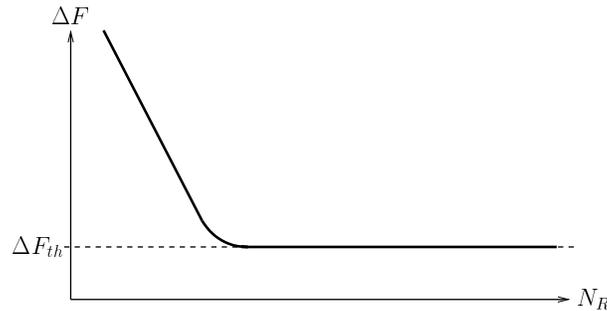


FIG. 1.3 – Courbe de Wöhler

d'essai correspondent à des ruptures, et une zone inférieure pour laquelle il n'y a pas de rupture. Dans le cas général, on peut distinguer sur la courbe de Wöhler 3 parties : l'asymptote horizontale correspondant à la limite d'endurance, une partie ascendante donnant la durée de vie en fonction de l'amplitude du chargement ou endurance limitée et la zone des fortes valeurs de ΔF où apparaît une déformation plastique (domaine de la fatigue oligocyclique). Il faut cependant préciser que, pour certains matériaux, on n'observe pas toujours de limite d'endurance. Les expérimentateurs préfèrent ainsi souvent parler de limite d'endurance conventionnelle qui correspond à la valeur maximale de l'amplitude du chargement n'entraînant pas la rupture avant un nombre de cycles donné.

Dans le présent travail, on ne s'intéressera qu'à la fatigue mécanique, c'est à dire à la détérioration du matériau soumis uniquement à des sollicitations cycliques mécaniques. On ne tiendra pas compte de l'aggravation du processus de fatigue par un milieu agressif (par exemple un milieu corrosif ou l'application de températures élevées). Il ne sera ainsi pas question ici des phénomènes de fluage ou de corrosion.

Mécanisme physique de la fissuration en fatigue

L'observation du faciès des surfaces de rupture par fatigue permet de mettre en évidence l'existence de 2 zones : une zone de fissuration par fatigue qui présente un caractère lisse et soyeux et une zone de rupture finale et brutale à relief marqué. L'importance de ces zones dépend de l'amplitude du chargement appliqué sur la structure.

Si on réalise un grossissement sur la première zone, on note la présence de stries parallèles. L'expérience montre qu'il y a correspondance entre une strie et un cycle. Ainsi, d'une façon générale, plus l'amplitude du chargement est grande, plus les stries sont écartées.

Comme précisé dans SURESH [60], les causes de la fissuration dans une structure soumise à un chargement de fatigue sont fortement liées au type de matériaux dont est constituée la structure. Pour un matériau ductile (*i.e.* dont la fissuration s'accompagne d'une forte déformation plastique en tête de fissure), c'est le glissement cyclique irréversible qui conduit à l'endommagement permanent et à la nucléation de fissures. Ce glissement correspond au mouvement de va et vient des dislocations dans le voisinage immédiat de la tête de fissure.

Par contre pour un matériau fragile (*i.e.* dont la déformation plastique en pointe de fissure est inexistante ou négligeable), la propagation de fissures sous chargement cyclique peut être liée au

frottement par glissement des faces des microfissures qui sont amorcées aux joints de grain ou le long des interfaces entre matrice et substrat (composite fragile) ou bien par rupture progressive des ligaments pontés (dans le sillage de la pointe de fissure) par contact répété.

Propagation de fissures par fatigue

Un moyen d'observer les conditions d'amorçage, de propagation et de rupture est de tracer l'évolution de la vitesse de fissuration en fonction de la variation du facteur d'intensité des contraintes. En effet, à partir des concepts de la M.E.L.R., PARIS, GOMEZ et ANDERSON [55] puis PARIS et ERDOGAN [54] font l'analyse suivante : les contraintes au voisinage d'une fissure, au cours d'un cycle de chargement, sont connues dès que l'on connaît les valeurs maximale K_M et minimale K_m du facteur d'intensité des contraintes K au cours de ce cycle.

Ils en déduisent que tout phénomène se déroulant dans cette région est contrôlé par la variation du facteur d'intensité des contraintes $\Delta K = K_M - K_m$ et en particulier le taux de propagation de la fissure. Ainsi, ils posent

$$\frac{d\ell}{dN} = f(\Delta K)$$

où ℓ est la longueur de fissure et N le nombre de cycles.

L'expérience montre que cette dépendance peut se résumer en trois régimes suivant la valeur de ΔK .

On distingue sur la Figure 1.4 représentant $d\ell/dN$ en fonction de ΔK dans un graphe log – log

- le régime A.

Pour de faibles valeurs de ΔK ($\Delta K \leq \Delta K_{th}$), la fissuration est impossible (notion de seuil). D'après l'expérience, ΔK_{th} dépend peu de la géométrie mais beaucoup du chargement et du type de matériau. Par contre dès que $\Delta K > \Delta K_{th}$, il y a une forte augmentation de la vitesse de fissuration.

- le régime B.

Dans ce domaine, l'évolution est linéaire faisant apparaître une relation en loi puissance entre $d\ell/dN$ et ΔK (voir paragraphe 1.2.2).

- le régime C.

Pour de fortes valeurs de ΔK ($\Delta K \rightarrow K_c$), il y a augmentation de la vitesse de fissuration puis rupture totale de la structure dès que $\Delta K \geq K_c$.

Les données expérimentales obtenues depuis montrent que, bien que la variation du F.I.C. est le facteur principal qui gouverne le taux de propagation d'une fissure en fatigue, le rapport de charge $R = F_m/F_M = K_m/K_M$ défini comme le rapport des sollicitations minimale et maximale au cours d'un cycle de chargement peut aussi influencer $d\ell/dN$. Il est donc plus judicieux de poser

$$\frac{d\ell}{dN} = f(\Delta K, R)$$

ou de façon équivalente $d\ell/dN = g(\Delta K, K_M)$ puisque $K_M = \Delta K/(1 - R)$.

On observe, de façon générale, qu'une augmentation de $R > 0$ provoque une augmentation du taux de propagation pour un ΔK donné, les courbes $d\ell/dN = f(\Delta K)$ se déplaçant parallèlement à elles-mêmes vers les vitesses croissantes.

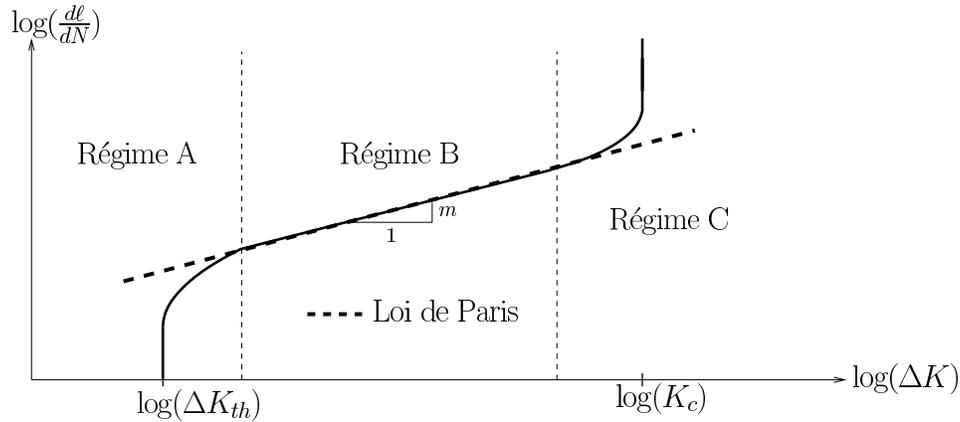


FIG. 1.4 – Représentation schématique de la vitesse de propagation d'une fissure $d\ell/dN$ en fonction de la variation du facteur d'intensité des contraintes ΔK

1.2.2 Modélisation de la fatigue

De façon globale, il existe deux approches pour rendre compte du phénomène de fatigue :

- La première repose sur l'utilisation des courbes de Wöhler qui donnent le nombre de cycles à rupture en fonction de l'amplitude constante du chargement appliqué à chaque cycle. Pour déterminer la durée de vie de structures soumises à des sollicitations variables, on ajoute une loi de dommage cumulatif, par exemple celle de Miner. Celle-ci repose sur l'hypothèse suivante : l'application de n_i cycles au niveau de chargement F_i , auquel le nombre moyen de cycles à rupture est N_i (donné par les courbes de Wöhler), entraîne un accroissement du dommage égal à n_i/N_i et la rupture survient lorsque $\sum n_i/N_i = 1$. L'inconvénient principal de cette méthode est qu'elle ne permet pas de faire la distinction entre phase d'amorçage et phase de propagation de la fissure.

- La seconde approche consiste à utiliser la mécanique de l'endommagement (voir LEMAITRE et CHABOCHE [44]) en phase d'initiation (afin de faire apparaître une fissure puisque la théorie de GRIFFITH en est incapable) et la mécanique de la rupture (Loi de PARIS et ses nombreuses variantes) pour la phase de propagation.

Cependant les lois obtenues sont souvent limitées à un mode et à un niveau de chargement particulier, à un matériau ou à une catégorie de matériaux spécifiques.

Loi de Paris

De nombreuses lois ont été proposées pour décrire l'évolution de la propagation de fissures de fatigue dans le régime B de la Figure 1.4.

À ce jour, la loi phénoménologique de PARIS [55] (1961) reste toujours la plus abondamment utilisée par les ingénieurs. Cette dernière relie le taux de fissuration à la variation du F.I.C. par une loi puissance

$$\frac{d\ell}{dN} = C'(\Delta K)^m.$$

C' et m sont deux constantes à déterminer par des expériences de base sur éprouvettes et qui dépendent entre autres du matériau, du rapport de charge $R = F_m/F_M$ et du mode de chargement, voir SURESH [60].

On trouve généralement dans la littérature (pour les matériaux métalliques courants) des valeurs de la puissance m comprises entre 2 et 6.

En utilisant la relation (1.5), on peut exprimer cette loi à l'aide des taux de restitution d'énergie maximal G_M et minimal G_m au cours d'un cycle de chargement

$$\frac{d\ell}{dN} = C'(\sqrt{G_M} - \sqrt{G_m})^m. \quad (1.7)$$

Cependant, cette loi est limitée entre autres aux

- *chargements d'amplitudes constantes et de rapport de charge nul.*

L'expérience montre qu'une surcharge peut "bloquer" momentanément une fissure ou au moins retarder de façon importante (selon l'amplitude de la surcharge) la durée de vie d'une structure. De même, et comme précisé plus haut, la loi de PARIS est inapte à rendre compte de l'influence du rapport de charge sur la vitesse de propagation de la fissure. Ces deux phénomènes sont expliqués par le processus de fermeture de fissure. Comme postulé par ELBER [27], une fissure ne peut se propager que lorsqu'elle est complètement ouverte. Ce dernier a mis en évidence que la zone plastifiée en pointe de fissure induit un champ de contraintes résiduelles de compression qui conduit à une fermeture partielle de la fissure pendant une partie du cycle de chargement. ELBER définit alors la variation du facteur d'intensité des contraintes efficace ΔK_{eff} correspondant à la partie du chargement durant laquelle la fissure est complètement ouverte (et donc par hypothèse la partie durant laquelle se produit réellement la propagation de la fissure). Ainsi, la loi de propagation doit s'écrire

$$\frac{d\ell}{dN} = C'(\Delta K_{eff})^m.$$

- *fissures longues.*

Il est montré expérimentalement que, à ΔK donné, les fissures courtes (la notion de taille de fissures varie selon les expérimentateurs) se propagent plus rapidement que les fissures longues (BATHIAS et BAÏLON [4]). De même, il est observé qu'elles se propagent à des valeurs de ΔK inférieures au seuil de propagation ΔK_{th} . Les causes de cet effet sont peu claires, mais il semble admis que dans cette configuration, la zone plastique précédant la fissure ne peut plus être négligée : on ne se trouve plus dans une situation de plasticité confinée.

La loi de PARIS est donc restreinte aux problèmes où la déformation plastique en tête de fissure est négligeable. Dans le cas contraire les outils de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture ne sont plus applicables. Ceci conduit à l'incapacité à rendre compte du phénomène de fermeture de fissure en cours de décharge qui est pourtant la cause des deux points cités ci-dessus.

Certains ont cherché à remédier à ces difficultés en introduisant des paramètres susceptibles de tenir compte de la plasticité à la pointe (en considérant des comportements indépendants du temps). Ainsi DOWLING et BEGLEY [25] définissent un modèle basé sur l'intégrale J (voir RICE [56]) qui dans le cadre d'un comportement élastique linéaire ou non linéaire du matériau fissuré est indépendante du contour d'intégration. RICE montre que J étend la notion de taux de restitution d'énergie G à des solides élastiques non linéaires ($J = G$ en élasticité linéaire). Dans le cadre de la mécanique

élasto-plastique de la rupture, DOWLING et BEGLEY postulent que la loi de PARIS doit s'écrire sous la forme

$$\frac{d\ell}{dN} = C'(\Delta J)^m.$$

Cette théorie donne une bonne estimation de la vitesse de propagation des fissures courtes. Par contre comme évoqué dans SURESH [60], elle ne semble valable que pour des chargements proportionnels et des décharges non élastiques.

D'autres ont proposé des modèles géométriques : LAIRD [39] relie la variation de l'écartement en fond de fissure $\Delta CTOD$ (Crack Tip Opening Displacement) avec le taux de propagation de la fissure

$$\frac{d\ell}{dN} \sim \Delta CTOD = f((\Delta K)^2).$$

Cependant la puissance m dans la loi de PARIS est ici limitée à 2 ce qui ne semble pas décrire toutes les situations.

Citons enfin les modèles basés sur l'accumulation du dommage dans la zone précédant la pointe de fissure (soumise à une déformation cyclique d'amplitude constante), par exemple MCCLINTOCK [47] qui utilise une loi d'endommagement de type Manson-Coffin. La fissure apparaît (ou se propage) lorsqu'un état d'endommagement critique est atteint. Ici une puissance $m = 4$ est obtenue.

De plus la loi de PARIS est insuffisante pour décrire la propagation de la fissure dans les régions A et C de la Figure 1.4. Là encore, des tentatives ont été apportées pour pallier à ces difficultés mais celles-ci ne sont généralement valables que pour un type de matériaux donné.

FORMAN et al [29] proposent par exemple d'étendre la loi de PARIS afin de rendre compte de l'accélération de la vitesse de propagation de la fissure lorsque ΔK est proche de K_c . Ils postulent la loi empirique suivante

$$\frac{d\ell}{dN} = \frac{C_* \Delta K^{m_*}}{(1-R)K_c - \Delta K}.$$

CHEREPANOV [14] présente une théorie de la propagation de fissures de fatigue pour une structure élasto-plastique sous chargement cyclique basée sur l'analyse dimensionnelle. Il obtient la loi suivante

$$\frac{d\ell}{dN} = -\beta \left(\frac{K_M^2 - K_m^2}{K_c^2} + \ln \frac{K_c^2 - K_M^2}{K_c^2 - K_m^2} \right)$$

où β est une constante matériau.

Finalement, il n'existe aucune théorie permettant à elle seule de prédire avec succès le taux de croissance d'une fissure de fatigue dans un large éventail de conditions de l'expérience. C'est d'ailleurs pourquoi la loi de PARIS continue à avoir du succès.

Cependant cette dernière fournit plus un schéma de corrélation de données plus qu'une capacité à prédire la fissuration : pour chaque nouveau problème (changement dans les conditions de l'expérience), il faut redéterminer les constantes C et m apparaissant dans (6.21).

Dans le paragraphe suivant, on s'attarde plus précisément sur une modélisation numérique récente de la propagation des fissures de fatigue basée sur la notion de forces cohésives.

1.2.3 Modèles de forces cohésives

La Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture constitue un outil efficace pour résoudre les problèmes de rupture et élaborer des lois de fissuration par fatigue (voir la loi de PARIS). Toutefois,

et comme rappelé précédemment, elle est applicable uniquement si la structure possède une fissure ou un défaut préexistant (sinon elle est incapable de rendre compte de l'initiation d'une fissure). De même, elle n'est plus valable lorsque la taille de la zone non-linéaire (zone plastique ou de microfissuration par exemple) en tête de fissure n'est plus négligeable par rapport aux autres dimensions de la structure fissurée.

Les modèles de forces cohésives sont utilisés avec succès pour surmonter ce type de difficulté. On introduit ci-après ce concept au cadre de chargements monotones puis son extension au cadre de chargements cycliques.

Sous chargement monotone

Les modèles de forces cohésives sont des modèles d'interface qui ont pour origine les travaux précurseurs de BARENBLATT [3] et DUGDALE [26]. Ils permettent entre autres de s'affranchir du problème de singularité en tête de fissure (Théorie de GRIFFITH, voir BUI [10]) mais sont également faciles à implanter dans la méthode des éléments finis.

De façon formelle et comme le présente schématiquement la Figure 1.5, un modèle de force cohésive revient à considérer la présence d'une zone d'élaboration de la fissure devant la tête de fissure dans laquelle des forces cohésives attractives T (normales et/ou tangentielles) résistent à la séparation des lèvres de la fissure caractérisée par le saut de déplacement $\llbracket u \rrbracket = u^+ - u^-$.

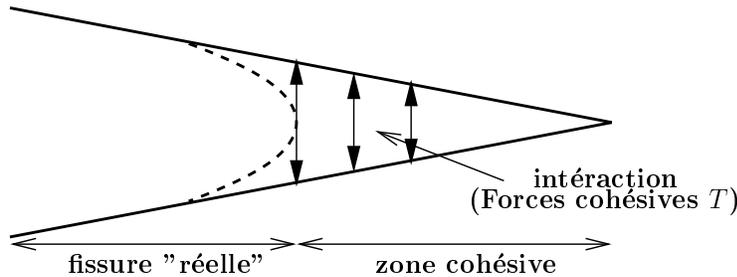


FIG. 1.5 – Représentation schématique de la zone cohésive située devant la fissure macroscopique “réelle” en mode d’ouverture.

De ce fait, pour décrire ce qui s’y passe, il suffit de se donner une loi d’interface qui met en relation T et $\llbracket u \rrbracket$, les forces de cohésion ayant pour particularité de dépendre du saut de déplacement. De nombreuses lois sont recensées dans la littérature. Ainsi dans le cadre d’un chargement monotone, citons le travail référence de NEEDLEMAN [50] dont la loi est représentée sur la Figure 1.6. La loi d’interface utilisée peut être décomposée en trois parties. Dans la première, une relation linéaire croissante relie forces cohésives et saut de déplacement jusqu’à atteindre une force cohésive maximale T_c obtenue pour une ouverture ℓ_0 . La seconde partie de la loi décrit le comportement adoucissant entre les ouvertures ℓ_0 et ℓ_c . Ceci met en évidence la création progressive de la fissure et conduit à la troisième partie qui rend compte de la séparation des deux surfaces de discontinuité qui marque l’initiation d’une fissure (ou l’extension d’une préexistante).

Afin de satisfaire à la mécanique linéaire élastique de la rupture, l’aire sous la courbe doit être égale au taux de restitution d’énergie critique G_c

$$G_c = \int_0^{\ell_c} T(\llbracket u \rrbracket) d\llbracket u \rrbracket.$$

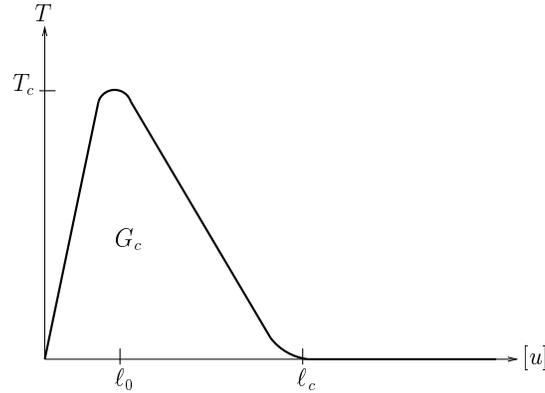


FIG. 1.6 – Modèle de forces cohésives en mode d'ouverture de fissure selon NEEDLEMAN.

Sous chargement cyclique

L'étude de la rupture de fatigue à l'aide de modèles de forces cohésives est plutôt récente. NEEDLEMAN [51] suggère des modèles de forces cohésives irréversibles mais des développements n'ont été réalisés qu'à partir de 1999.

Pour la description du phénomène de fatigue, l'utilisation d'une enveloppe monotone cohésive (comme celle représentée sur la Figure 1.6) n'est plus suffisante. En effet, sous chargement cyclique, si la force appliquée est plus faible que la résistance cohésive T_c (*i.e.* pour des ouvertures telles que $0 \leq \llbracket u \rrbracket < \ell_c$), la zone cohésive aura une durée de vie infinie. Or, l'expérience montre que, sous ce type de chargement, les matériaux se fissurent à des niveaux de contrainte plus bas que la contrainte de rupture statique. Ceci est essentiellement dû à l'usure du matériau (SURESH [60]). Pour rendre compte de cette usure, il est nécessaire de ne plus considérer des lois cohésives réversibles. C'est pourquoi, la plupart des auteurs ont recours à la mécanique de l'endommagement pour rendre compte de la détérioration irréversible de la zone cohésive.

Il s'avère que la loi cohésive en fatigue ne doit pas avoir une condition de décharge-recharge linéaire (charge et décharge suivant alors le même chemin). Comme il est montré dans FOULK et al [30], DE ANDRÈS et al [19] ou YANG et al [65], ceci conduit à une adaptation, c'est à dire qu'après un petit nombre de cycles, tous les points matériels (incluant ceux de la zone cohésive) subissent un cycle de déformation élastique et la fissure s'arrête (il y a stabilisation de la courbe T vs $\llbracket u \rrbracket$ et donc plus propagation dans la zone cohésive).

NGUYEN et al [52] présentent en 2001 un modèle de propagation de fissures de fatigue basé sur un modèle de forces cohésives présentant une hystérésis décharge-recharge (avec décharge vers l'origine) et sur l'accumulation d'endommagement lorsque la structure est sollicitée par un chargement cyclique d'amplitude plus petite que la force cohésive maximale du matériau. Le principe est de considérer des rigidités incrémentales qui diffèrent selon que l'on se situe en phase de charge ou de décharge :

$$\dot{T} = \begin{cases} K^- \llbracket \dot{u} \rrbracket & \text{si } \llbracket \dot{u} \rrbracket < 0 \\ K^+ \llbracket \dot{u} \rrbracket & \text{si } \llbracket \dot{u} \rrbracket > 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

où K^+ et K^- sont les rigidités en charge et en décharge respectivement.

Les simulations numériques réalisées montrent que le modèle est capable d'un traitement unifié des fissures longues sous chargement d'amplitude constante (on retrouve la loi de PARIS), des fissures courtes (croissance plus rapide des fissures courtes vis à vis des fissures longues), de l'effet de surcharges ou encore de la nucléation des fissures de fatigue (voir SEREBRINSKY et ORTIZ [58]).

En suivant le même principe, ROE et SIEGMUND [57] rendent compte de la propagation d'une fissure de fatigue le long d'une interface. Ici, le paramètre d'endommagement dépend de l'histoire ce qui introduit le processus d'irréversibilité. Dans ce modèle, le chemin de décharge ne retourne pas vers l'origine. Des valeurs de la pente m de la loi de PARIS allant jusqu'à 3.1 ont été obtenues.

Pour simuler la propagation en mode I de fissures de fatigue dans les polymères MAITI et GEUBELLE [45] ont recours à un modèle de forces cohésives. L'enveloppe cohésive est bilinéaire et présente une hystérésis décharge-recharge (voir Figure 1.7) reprenant ainsi les idées de NGUYEN et al [52]. Une étude numérique de type éléments finis est réalisée sur une poutre de type DCB soumise à un chargement de type déplacement sinusoïdal imposé. Des valeurs de la puissance de la loi de PARIS $m > 3$ sont obtenues ce qui permet de rendre compte de la fatigue dans les polymères dont la pente est généralement d'au moins $m = 6$.

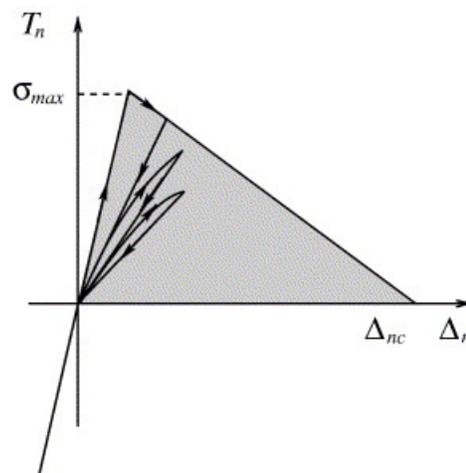


FIG. 1.7 – Loi cohésive bilinéaire sous chargement cyclique d'après MAITI et al mettant en évidence une hystérésis décharge-recharge

DESHPANDE et al [23] étudient la propagation de fissures proche du seuil de non fissuration le long d'une interface substrat rigide-métal. Dans ce travail le chemin de décharge est supposé être parallèle au chemin de charge précédent laissant ainsi une certaine quantité de séparation résiduelle dans la zone cohésive après chaque cycle.

Citons enfin les travaux d'ABDUL-BAQI et al [1] qui rendent compte de l'endommagement par fatigue des joints soudés et de BOUVARD et al [9] sur la propagation de fissure dans les aubes de turbine. Ces derniers utilisent une loi cohésive inspirée de [57] afin de modéliser la propagation de fissure dans un superalliage monocristallin à haute température (dont le comportement est élastoviscoplastique). L'objectif futur est de rendre compte du phénomène d'ouverture-fermeture de la fissure afin de décrire au mieux l'évolution des fissures courtes en fatigue.

Enfin, ce type de modèle a permis de rendre compte efficacement de la propagation de fissures de fatigue dans un large éventail de situations.

Chapitre 2

Formulation Variationnelle de la Mécanique de la Rupture

L’objectif de ce chapitre est, en se restreignant au cadre des matériaux fragiles, d’énoncer les principes généraux qui vont gouverner la propagation d’une(ou des) fissure(s) dans une structure soumise à des chargements quelconques. En l’appliquant ensuite à des chargements cycliques, on souhaite ainsi modéliser le phénomène de fatigue décrit au Chapitre 1.

L’approche que l’on se propose de suivre est celle amorcée par FRANCFORT et MARIGO [32] en 1998 et qui a fait l’objet de nombreuses extensions depuis.

Dans le cadre d’évolutions quasi statiques, les auteurs postulent que la configuration d’équilibre d’une structure soumise à un chargement monotone sera celle qui minimise, à chaque instant, son énergie totale, somme de son énergie potentielle et de l’énergie de surface de GRIFFITH (proportionnelle en $2D$ à la longueur de zone fissurée). Cette dernière constitue l’énergie dissipée pour créer ou propager une(ou plusieurs) surface(s) de discontinuité.

Les travaux réalisés depuis ont montré que la solution recherchée devait être un minimum local et que l’énergie de surface à considérer devait être du type BARENBLATT, *i.e.* dépendante du saut de déplacement sur les lèvres de la fissure.

Cependant, cette nouvelle formulation n’est pas directement applicable aux chargements non monotones et donc en particulier aux chargements cycliques d’amplitudes constantes, cadre de la loi phénoménologique de PARIS toujours très abondamment utilisée dans l’industrie (voir Chapitre 1). Ceci conduit à introduire une condition d’irréversibilité dans le modèle afin de tenir compte des “dommages” que subit le matériau à chaque cycle. Cette condition permet surtout d’envisager un cadre unique permettant la description de la fissuration à court terme (sous chargement monotone) mais aussi à long terme (sous chargement cyclique) et ce *a priori* quelque soit le spectre du chargement.

Après avoir défini le cadre de l’étude, on énumérera, dans un premier temps, les différents outils nécessaires à la mise en œuvre du modèle de rupture : l’énergie potentielle, les différents types d’énergie de surface et la loi de fissuration basée sur un principe de moindre énergie.

On montrera ensuite l’incapacité de la formulation existante à s’étendre à la fatigue et la nécessité d’introduire une condition d’irréversibilité.

L’application de ce modèle à des exemples simples sera l’objet des chapitres suivants.

2.1 Cadre de l'étude

Ce travail constitue une première introduction à un modèle de propagation de fissures de fatigue basé sur un principe de minimisation de l'énergie totale de la structure. Il a été de ce fait prudemment choisi de simplifier au maximum les difficultés liées au matériau, à la structure ou au chargement. Ainsi, on restreindra cette étude à des matériaux élastiques linéaires, homogènes et isotropes.

On se place donc dans la catégorie des matériaux dits “fragiles”, *i.e.* ceux qui se comportent de façon élastique linéaire en dehors des points de discontinuité qui définissent la fissure. C'est le cadre de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture (MLER) dans lequel de nombreuses études ont été entreprises en mécanique de la rupture. Peuvent être rangés dans cette famille de matériaux, les céramiques, les verres, les aciers à haute résistance, voir les bétons et les bois, etc... Ceci est également la cadre des matériaux qui se déforment plastiquement devant la pointe de fissure mais dont on peut considérer que la taille de la zone plastique est petite devant les autres dimensions de la structure. L'hypothèse de plasticité confinée est généralement admise en fatigue lorsque l'on traite de la fatigue à très grand nombre de cycles –la fatigue polycyclique¹– pour laquelle le taux de propagation de la fissure reste faible, voir par exemple [60] ou [4]. De plus, on supposera uniquement des évolutions indépendantes de la vitesse de déformation, les effets de viscosité ne rentrant ainsi pas dans le cadre de cette étude.

Remarque 2.1.1 : Il faut noter que ces hypothèses n'ont pour objet que la simplification du modèle et ce dans le but de pouvoir résoudre analytiquement (ou au moins semi-analytiquement) les différents exemples. Cependant, rien dans la formulation qui va suivre n'empêche de considérer des lois de comportements plus complexes. Par exemple, au Chapitre 7, on considérera des lois de comportement non linéaires afin de rendre compte de l'influence de cette non linéarité sur la propagation de la fissure. De même la prise en compte de la plasticité ne présente pas non plus de problème de fond.

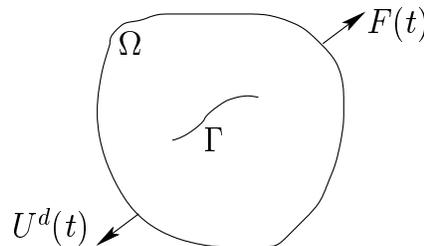


FIG. 2.1 – Présentation du problème général.

On considère une structure Ω à N -Dimensions (Figure 2.1), $1 \leq N \leq 3$, ayant les propriétés décrites ci-dessus et dont la frontière $\partial\Omega$ est supposée régulière.

¹à opposer à la fatigue oligocyclique (à faible nombre de cycles) qui fait intervenir des phénomènes physiques différents (présence de fortes déformations plastique en front de fissure qu'on ne peut plus négliger dans la modélisation)

On introduit l'ensemble Γ des points de discontinuité caractérisant l'état de la fissuration. À l'instant initial (*i.e.* avant toute mise en charge), celui-ci peut être vide (matériau initialement sain) ou non.

Afin d'exploiter au maximum les avantages apportés par l'approche variationnelle de la rupture (voir [32]), on considère des fissures en nombre et de formes arbitraires, pouvant se propager dans n'importe quelle direction.

Soit $\partial\Omega_F$ (resp. $\partial\Omega_{U^d}$), la partie de $\partial\Omega$ sur laquelle est imposée la force cyclique $F(t)$ (resp. le déplacement cyclique $U^d(t)$).

Un des problèmes posé par la loi de PARIS (et ses nombreuses variantes) est qu'elle est valable uniquement pour des chargements d'amplitude constante alors qu'un chargement en service ne vérifie que bien rarement cet état.

On souhaite envisager ici *a priori* n'importe quel type de chargement, la seule contrainte étant que les fonctions $t \rightarrow F(t)$ (resp. $t \rightarrow U^d(t)$) définissant un chargement de type force imposée (resp. de type déplacement imposé) soient des fonctions non monotones afin de mettre en évidence un phénomène de fatigue. Le spectre du chargement (voir Figure 2.2) est donc constitué d'une série de charges et de décharges.

L'idée est donc de considérer des fonctions telles que

- l'amplitude du chargement $\Delta F = F_{max} - F_{min}$ (respectivement $\Delta U^d = U_{max}^d - U_{min}^d$), où F_{max} et F_{min} (respectivement U_{max}^d et U_{min}^d) représentent les sollicitations maximale et minimale au cours d'un cycle de chargement, ne soit pas forcément constante à chaque cycle.
- le rapport de charge $R = F_{min}/F_{max}$ (ou $R = U_{min}^d/U_{max}^d$) ne soit pas forcément nul, ou forcément positif.

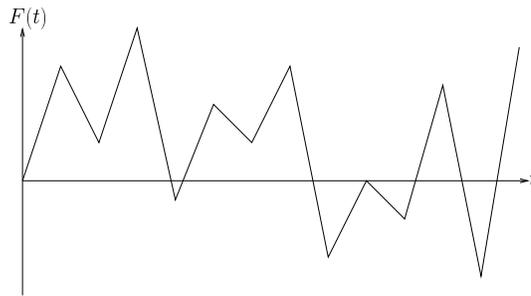


FIG. 2.2 – Exemple de chargement de fatigue.

Enfin, l'évolution du chargement sera telle qu'elle induira des *évolutions quasi statiques* de la structure et de la fissuration afin de s'affranchir de tout effet d'inertie (et donc d'éviter l'ajout d'un terme d'énergie cinétique dans l'expression de l'énergie totale).

On pourrait juger cette dernière hypothèse trop forte. Cependant, des travaux récents réalisés par CHARLOTTE et al [12] ont montré que les effets dynamiques pouvaient être décrits par l'approche variationnelle de la rupture. Il sera alors possible de coupler fatigue et dynamique et ce en utilisant

une unique et même formulation : l'approche variationnelle de la rupture.

Remarque 2.1.2 : On ne traitera pas ici des phénomènes de fluage. De même, comme on ne tiendra pas compte de l'effet de l'environnement (milieu corrosif par exemple) sur l'évolution de la fissuration, on négligera également dans la suite l'influence de la fréquence des cycles de chargement (voir SURESH [60] pour plus de détails sur les facteurs influençant la propagation d'une fissure de fatigue).

Dans les paragraphes qui suivent, on donne les différents ingrédients à la mise en place du modèle.

2.1.1 Ensemble des champs de déplacement admissibles

Afin de tenir compte de la fissuration dans le milieu Ω , il est nécessaire de considérer une famille de champs de déplacement plus large que celle habituellement utilisée en élasticité classique. En particulier, en un point x du milieu, le déplacement peut subir une discontinuité (saut du champ de déplacement sur les lèvres de la fissure) $[[\mathbf{u}]](x)$ en ce point. Comme la position de ce point n'est pas connue à l'avance, il faut donc envisager des champs de déplacement qui autorisent des discontinuités "partout" dans Ω (la fissuration pouvant tout aussi bien se produire sur le bord $\partial\Omega$ de Ω).

On note \mathcal{S}_u l'ensemble des points de Ω où \mathbf{u} est discontinu et \mathcal{V} l'ensemble constitué par des champs de déplacement réguliers par morceaux, continus et dérivables partout sur $\Omega \setminus \mathcal{S}_u$ et qui autorise le saut de \mathbf{u} en tout point de Ω .

Les champs appartenant à \mathcal{V} doivent également respecter les conditions aux limites cinématiques et leur saut respecter la condition de non interpénétration des lèvres des fissures.

2.1.2 Énergie potentielle

On se place dans le cadre des matériaux élastiques et *des petits déplacements*. En notant $\varepsilon(\mathbf{u})$ les déformations linéarisées associées au champ de déplacement \mathbf{u} avec

$$2\varepsilon(\mathbf{u}) = \mathbf{grad}(\mathbf{u}) + \mathbf{grad}(\mathbf{u})^t, \quad (2.1)$$

le comportement de tout point x du milieu continu est caractérisé par un potentiel élastique W que l'on suppose strictement convexe de ε .

L'énergie potentielle du milieu fissuré (ou non) à l'équilibre associée au champ de déplacement $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ à l'équilibre est alors définie comme la différence de l'énergie élastique et du travail des efforts extérieurs $f(\mathbf{u})$. On pose

$$\mathcal{P}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega/\mathcal{S}_u} W(x, \varepsilon(\mathbf{u})(x)) dx - f(\mathbf{u}). \quad (2.2)$$

2.1.3 Les énergies de surface

À tout processus de séparation est attribué une énergie de dissipation : l'énergie de surface. Il en existe deux grandes classes.

GRIFFITH [35], dès 1920, associe à toute fissure une énergie proportionnelle à sa longueur (en $2D$), le coefficient de proportionnalité n'étant rien d'autre que le taux de restitution d'énergie critique du matériau G_c .

Si cette hypothèse permet de décrire simplement la discontinuité matérielle, elle engendre toutefois certains défauts dont celui de la singularité des contraintes en front de fissure. Ceci est inacceptable car le matériau ne peut résister à des contraintes arbitrairement grandes.

C'est dans l'optique de pallier à cette difficulté que BARENBLATT [3] fait l'hypothèse, plus de quarante ans plus tard, d'une zone de "transition" —ou zone cohésive, ou zone d'élaboration (process zone en anglais)— devant la fissure. Il suppose en effet dans le cadre de matériaux fragiles élastiques que, dans cette zone, les lèvres de la fissure ne sont pas complètement séparées, des forces dites cohésives s'opposant justement à cette séparation.

D'un strict point de vue physique, ce modèle est justifié en considérant que ces forces rendent compte de l'interaction résiduelle des liaisons atomiques entre les lèvres de la fissure, voir CHARLOTTE [11]. Lorsque la séparation entre celles-ci est assez importante, c'est à dire lorsqu'elle dépasse une valeur critique δ_c caractéristique du matériau, les forces cohésives s'annulent et la discontinuité est parfaite.

La longueur de la zone d'élaboration est supposée s'adapter de façon à ce que le taux de restitution d'énergie soit nul devant la zone cohésive (s'il ne l'était pas, les contraintes y seraient infinies).

De nombreux auteurs se sont inspirés du concept de BARENBLATT pour postuler différentes formes de dépendance entre les forces cohésives et le saut de déplacement sur les lèvres de la fissure (modèles de forces cohésives, voir le paragraphe 1.2.3). Dans ce travail on ne s'intéressera qu'au modèle générique de BARENBLATT et au cas particulier du modèle de DUGDALE.

On donne dans le paragraphe ci-dessous une écriture générale de l'énergie de surface. On distinguera par la suite celle de GRIFFITH de celle de BARENBLATT.

Écriture générale

Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ un champ cinématiquement admissible. On définit l'énergie de surface \mathcal{S} associée à ce champ \mathbf{u} à partir de la donnée d'une fonction densité d'énergie de surface ϕ qui a priori dépend du saut de déplacement $[[\mathbf{u}]] = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$, du point matériel x si le milieu est inhomogène et de l'orientation de la surface de discontinuité par son vecteur normal unitaire \mathbf{n} :

$$\mathcal{S}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{S}_u} \phi(x, \mathbf{n}(x), [[\mathbf{u}]](x)) dH^{N-1}(x).$$

Pour un milieu isotrope, la dépendance en \mathbf{n} et $[[\mathbf{u}]]$ se réduit en une dépendance de ϕ en la composante normale $[[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]]$ du saut et en la norme de la composante tangentielle $[[\mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}]]$ du saut :

$$\phi(\mathbf{n}, [[\mathbf{u}]]) = \phi([[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]], \|[[\mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}]]\|).$$

La condition de non-interpénétration des lèvres des fissures exigent que le saut normal soit positif :

$$[[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]] \geq 0.$$

Dans la suite de ce chapitre, et dans le but d'alléger les notations, on supposera que les fissures s'ouvrent uniquement suivant un mode : soit en mode I, le saut tangentiel étant nul, soit en mode

II ou III, le saut normal étant nul. Ce faisant en notant δ l'ouverture non nulle, l'énergie de surface s'écrit simplement

$$\mathcal{S}(u) = \int_{\mathcal{S}_u} \phi(\delta(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x})) dH^{N-1}(x), \quad (2.3)$$

avec

$$\delta(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = \llbracket \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \rrbracket \quad \text{ou} \quad \delta(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = \|\llbracket \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} \rrbracket\|.$$

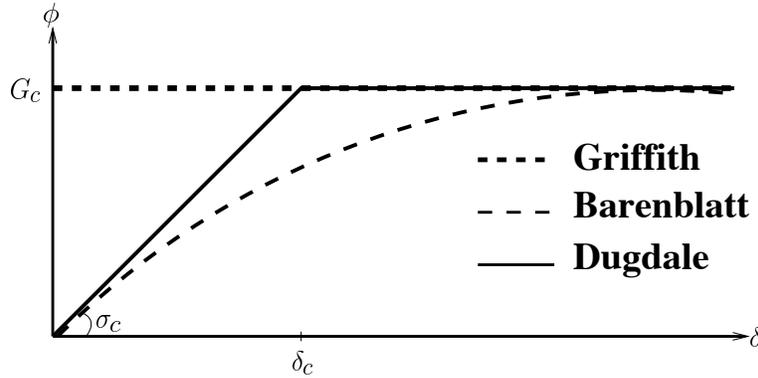


FIG. 2.3 – Densité d'énergie de surface.

Énergie de surface de GRIFFITH

En suivant l'hypothèse de GRIFFITH, la densité d'énergie de surface ϕ est parfaitement indépendante du saut de déplacement $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ sur les lèvres de la fissure (à part pour distinguer justement la présence d'une discontinuité). Elle est discontinue en zéro et égale au taux de restitution d'énergie critique du matériau G_c ailleurs

$$\phi(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta = 0 \\ G_c & \text{si } \delta > 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Énergie de surface de type BARENBLATT

La densité d'énergie de surface de type BARENBLATT est définie sur $[0, +\infty)$. Elle vérifie

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(\delta) \text{ croissant avec } \delta, \quad \phi(\delta) = G_c \text{ quand } \delta \rightarrow +\infty. \quad (2.5)$$

Comme le montre la Figure 2.3, l'énergie de surface de type BARENBLATT ne fait que tendre vers celle de GRIFFITH. On ne fait donc jamais apparaître de fissure macroscopique "réelle" avec ce modèle : il n'y a dans la structure que des zones saines et des zones partiellement fissurées.

Un des inconvénients de ce type d'énergie de dissipation est justement la multitude de choix que l'on peut donner à la densité d'énergie de surface : quel choix faire et avec quelle justification physique ?

On verra toutefois que plus que l'expression explicite donnée à ϕ , c'est son allure qui joue un rôle important dans le processus de fissuration.

Contrainte à rupture ϕ ayant la dimension d'une énergie par unité de surface (en $3D$), sa dérivée à la dimension d'une contrainte. On pose

$$\sigma_c = \phi'(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad \delta_c = \frac{G_c}{\sigma_c} \quad (2.6)$$

où δ_c est une longueur interne du modèle de BARENBLATT et que l'on supposera être une constante matériau dans la suite.

Comme il est introduit dans CHARLOTTE et al [13] ou dans LAVERNE et MARIGO [41], σ_c correspond à la contrainte à rupture statique.

Remarque 2.1.3 : L'énergie de GRIFFITH est de pente à l'origine $\phi'(0)$ infinie. On retombe ainsi sur l'incapacité de ce modèle à amorcer une fissure dans un milieu sain.

Remarque 2.1.4 : On prend généralement ϕ concave. En effet si la densité d'énergie de surface de BARENBLATT n'est pas concave, il peut apparaître des phénomènes "curieux" comme de la multifissuration, cf DEL PIERO et TRUSKINOVSKY [21].

Énergie de surface de DUGDALE DUGDALE [26] introduit en 1960 des forces cohésives sur une courte distance afin de rendre compte de la plasticité en front de fissure sous l'hypothèse des contraintes planes. Dans son modèle, il suppose que les forces s'opposant à l'ouverture de la fissure sont constantes dans toute la zone d'élaboration. La densité d'énergie de surface s'écrit

$$\phi(\delta) = \begin{cases} G_c \frac{\delta}{\delta_c} & \text{si } 0 \leq \delta \leq \delta_c \\ G_c & \text{si } \delta \geq \delta_c. \end{cases} \quad (2.7)$$

Ainsi, comme le montre la Figure 2.3, ϕ est une fonction bilinéaire : elle est linéaire croissante jusqu'à ce que le saut de déplacement δ atteigne le saut critique δ_c puis est constante et égale à G_c pour $\delta \geq \delta_c$.

De ce fait, l'énergie de surface de DUGDALE est un cas particulier d'énergie de surface de type BARENBLATT. C'est une énergie cohésive initialement rigide.

Le fait que l'on connaisse son expression explicite rend son utilisation facile. De plus, contrairement au modèle de BARENBLATT, on met ici effectivement en évidence une fissure. C'est pourquoi on privilégiera cette énergie dans la résolution complète de nos exemples.

Ici δ_c correspond au saut de déplacement critique sur les lèvres conduisant à la séparation totale des lèvres de la fissure. On note que la zone d'élaboration de la fissure apparaît dès que la contrainte dans le matériau atteint la contrainte critique donnée par (2.6). Cette contrainte critique est alors constante dans toute la zone cohésive.

Sur la Figure 2.4 on représente l'évolution des forces cohésives en fonction du saut de déplacement. Dans le cas de DUGDALE, les forces cohésives sont constantes dans toute la zone cohésive et nulles dès que le saut de déplacement critique δ_c est atteint. Par contre avec l'hypothèse de BARENBLATT, on voit que les forces cohésives diminuent progressivement et tendent seulement à s'annuler : il n'y a jamais de fissures "réelles".

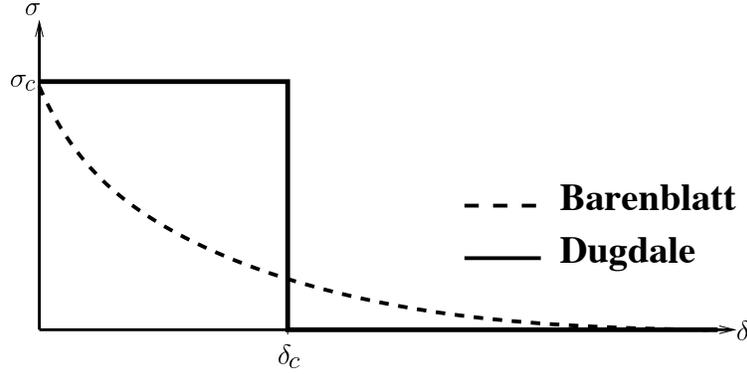


FIG. 2.4 – Forces cohésives de type Barenblatt et de Dugdale.

2.2 Loi d'évolution de la fissuration

L'énergie totale de la structure est, par définition, la somme de son énergie potentielle (2.2) et de son énergie de surface (2.3)

$$\mathcal{E}(u) = \mathcal{P}(u) + \mathcal{S}(u). \quad (2.8)$$

L'évolution de la fissuration consiste à rechercher, comme postulé par FRANCFORT et MARIGO [32], le champ u admissible qui minimise, à chaque instant et parmi tous les états de fissuration possibles, l'énergie totale de la structure qu'on force de ce fait à se trouver dans un état d'équilibre stable.

Dans la suite on va considérer deux types de stabilité : la stabilité globale et la stabilité locale.

Définition 2.2.1 *Un déplacement admissible u (défini au paragraphe 2.1.1) de la structure soumis à un chargement donné correspond à un état d'équilibre stable global si l'énergie totale de la structure dans cet état est moindre que l'énergie totale de la structure dans tout état admissible :*

$$\mathcal{E}(u) \leq \mathcal{E}(v), \quad \forall v \text{ admissible.}$$

Définition 2.2.2 *Un déplacement admissible u de la structure soumis à un chargement donné correspond à un état d'équilibre stable local s'il existe un voisinage (au sens de la norme choisie) de u tel que l'énergie totale de la structure dans cet état est moindre que l'énergie totale de la structure dans n'importe quel autre état admissible dans ce voisinage :*

$$\exists o > 0, \quad \forall v \text{ admissible,} \quad \|v - u\| \leq o,$$

$$\mathcal{E}(u) \leq \mathcal{E}(v).$$

2.2.1 Sous chargement monotone

La question se pose alors du choix du minimum que l'on souhaite rechercher (global ou local ?) ainsi que du type d'énergie de surface qu'il faut inclure dans (2.8) (énergie de GRIFFITH ou de type BARENBLATT ?).

Dans [32], FRANCFORT et MARIGO, dans l'optique de parer aux lacunes de la Théorie de GRIFFITH de la rupture fragile (problèmes de l'amorçage et de la description spatio-temporelle de la fissuration, voir Chapitre 1) adoptent l'hypothèse de GRIFFITH sur l'énergie de surface dans leur problème de minimisation.

Dans le cadre d'évolutions monotones du chargement imposé sur la structure, ils optent pour la recherche de minima absolus.

Cette démarche s'est avérée à la fois encourageante et non suffisante.

Encourageante car, sous ces hypothèses, les auteurs parviennent à remédier aux lacunes de la Théorie de GRIFFITH citées précédemment. De plus, on parvient alors à traiter efficacement de la décohésion et de la multifissuration dans les structures composites, BILTERYST [5], BILTERYST et MARIGO [6].

Les problèmes ne pouvant généralement pas se résoudre analytiquement (par exemple dès qu'on considère des chargements ou des géométries complexes), il a également été mis en place une méthode numérique efficace pour approcher les minima de (2.8), voir BOURDIN [7], BOURDIN et al [8]. Son principe consiste à régulariser (2.8) en s'inspirant d'une méthode utilisée en segmentation d'image, AMBROSIO et TORTORELLI [2].

Non suffisante car, dans le même temps, ils rendent compte de leur incapacité à travailler à forces imposées, certains cas avec force imposée pouvant conduire à des solutions non désirables de type "puits énergétique" et donc de non équilibre. Ils notent également des effets d'échelles indésirables : dans l'exemple de la barre de longueur L en traction (voir FRANCFORT et MARIGO [33]), la contrainte à rupture σ_c est trouvée être de l'ordre de $1/\sqrt{L}$ ce qui est contraire à l'expérience.

Pour pallier à ces difficultés, et comme le suggèrent FRANCFORT et MARIGO dans [32], il faut remplacer la notion de minimum global par celle de minimum local. Cependant, on risquerait alors de retomber sur l'incapacité de la Théorie de GRIFFITH à rendre compte de l'amorçage d'une fissure (la réponse élastique d'une structure saine étant toujours un minimum local en l'absence de singularité).

La seconde idée, apportée initialement par DEL PIERO [20] (puis par TRUSKINOVSKY [61]) et complémentaire de la précédente, consiste à remplacer l'hypothèse de GRIFFITH sur l'énergie de surface par celle issue des travaux de BARENBLATT : la densité d'énergie de surface dépend du saut de déplacement sur les lèvres de la fissure.

Ainsi, dans CHARLOTTE et al [13], sous couvert de ces nouvelles hypothèses, on rend compte des améliorations apportées par rapport à la formulation initiale (plus de "mauvais" effets d'échelle, possibilité de travailler à force imposée) et ce à travers des exemples unidimensionnels mettant notamment en évidence un critère d'amorçage en contrainte.

L'étude théorique et l'implantation numérique de tels modèles a été également étendu aux dimensions supérieures, voir LAVERNE et MARIGO [41] et LAVERNE [40]. Dans [41], les auteurs présentent entre autres un critère d'amorçage en contrainte, pour des fissures tridimensionnelles, qui dépend de la forme de l'énergie de surface de type BARENBLATT. Ce critère tend ainsi à rejeter les lois de

forces cohésives avec pente nulle à l'origine (et donc possédant un caractère convexe à l'origine) : de telles lois conduisent en effet théoriquement le matériau à s'ouvrir partout.

Restait à faire le lien entre la Théorie de GRIFFITH et l'approche avec énergie de type BARENBLATT : MARIGO et TRUSKINOVSKY [46] ont démontré de façon rigoureuse, à travers l'exemple de l'essai d'arrachement, que le modèle de BARENBLATT converge asymptotiquement vers celui de GRIFFITH lorsque la longueur interne apparaissant dans l'énergie de surface de BARENBLATT est petite devant la longueur géométrique de la structure.

C'est donc cette approche que l'on suivra par la suite.

En notant \mathcal{V} l'ensemble des champs cinématiquement admissibles et \mathcal{S}_v l'ensemble des points où v est discontinu, le problème de minimisation s'écrit

Trouver $u \in \mathcal{V}$ *tel que,*

$$\exists \epsilon > 0, \quad \|v - u\| \leq \epsilon, \quad \mathcal{E}(u) \leq \mathcal{E}(v) \quad (2.9)$$

avec

$$\mathcal{E}(v) = \int_{\mathcal{V}} W(x, \epsilon(v)(x)) dx - f(v) + \int_{\mathcal{S}_v} \phi(x, n(x), \llbracket v \rrbracket(x)) dH^{N-1}(x).$$

La structure à l'équilibre va donc se retrouver dans un état de moindre énergie et pour cela elle aura, si besoin est, créé(ou propagé) la(ou les) fissure(s) nécessaire(s) dans la(ou les) direction(s) optimale(s).

L'intérêt d'une telle approche est grande puisqu'on s'affranchit *a priori* de postuler le nombre de fissures et leur trajet respectif.

Par contre, avec ces outils (BARENBLATT + minimum local), on est confronté à 4 "nouvelles" difficultés :

1. Il faut introduire une norme pour définir la notion de localité.
Quelle norme choisir et à quelle base physique correspond t-elle ?
2. Quelle forme donner à la densité d'énergie de surface de BARENBLATT ?
En plusieurs dimensions, les possibilités sont très nombreuses et on devra faire appel à des modèles phénoménologiques. En une dimension, si $\phi'(0)$ et $\phi(+\infty)$ sont deux valeurs facilement accessibles expérimentalement, le reste de la courbe l'est beaucoup moins.
3. Quel outil numérique mettre en place ?
Peut-on étendre à la minimisation locale et l'utilisation d'une énergie de surface de BARENBLATT la méthode numérique développée par Bourdin [7] dans le cadre de la minimisation globale et l'utilisation d'une énergie de surface de GRIFFITH ?
4. Comment rendre compte de l'irréversibilité ?
En effet, lorsque l'on effectue une décharge, il faut interdire aux lèvres des fissures de se "recoller". Si cela est simple avec une énergie de surface de GRIFFITH (une fissure étant

définitivement créée dès lors qu'il y a discontinuité dans le champ de déplacement), cela semble plus ardu avec une énergie de surface de type BARENBLATT.

Comme on le verra dans la suite, cette difficulté sera parée en introduisant une variable mémorisant l'histoire du saut de déplacement $[[\mathbf{u}]]$ au cours du temps.

2.2.2 Sous chargement cyclique

Adaptation en 1 cycle

Il s'avère qu'il est impossible, sous chargement cyclique d'amplitude constante, de rendre compte du phénomène de fatigue par application directe de l'approche définie au paragraphe précédent (*i.e.* sans introduire une variable mémoratrice dans l'énergie de surface) et ce quelle que soit le type d'énergie de surface utilisé.

Pour s'en convaincre, considérons une structure soumise à un déplacement cyclique d'amplitude constante $U_{max} > 0$ et de rapport de charge nul ($R = U_{min}/U_{max} = 0$).

En supposant qu'à chaque pas de temps i correspond un chemin de chargement (charge, décharge, recharge, etc...), à la fin de la première montée en charge, le champ de déplacement solution u_1 sera celui qui vérifiera le problème incrémental (2.9), c'est à dire

Trouver $u_1 \in \mathcal{V}_1$ *tel que,*

$$\exists \sigma > 0, \quad \|v - u_1\| \leq \sigma, \quad \mathcal{E}_1(u_1) \leq \mathcal{E}_1(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_1 \quad (2.10)$$

où \mathcal{V}_1 correspond à l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles à la fin de la première montée en charge.

À la fin de la seconde montée en charge, on voit rapidement que le problème de minimisation que l'on traite est en tout point similaire à (2.10), l'énergie totale \mathcal{E}_3 ayant la même expression que \mathcal{E}_1 . De même on doit rechercher la solution u_3 dans l'ensemble \mathcal{V}_3 égal à \mathcal{V}_1 . Ainsi $u_3 = u_1$. La solution n'évolue donc pas après le premier cycle : il y a adaptation en un cycle.

Le cadre ainsi posé n'est donc pas suffisant pour rendre compte du processus de fatigue et ceci tient au fait qu'on ne rend pas compte dans la formulation de l'irréversibilité du processus de fissuration.

En effet, prenons l'exemple d'une énergie de surface de BARENBLATT. Par définition de cette énergie de cohésion et comme le montre la Figure 2.3, on ne fait que tendre vers une fissure de GRIFFITH. Ainsi, à la fin du premier cycle, la minimisation de l'énergie totale va conduire à la création d'une zone dans laquelle le matériau est endommagé. Bien qu'il y ait encore interaction entre les lèvres de la zone endommagée, le processus de décohésion a déjà commencé.

Il serait alors incohérent "d'oublier" au second cycle cette zone d'élaboration créée au premier. Comment pourrait on expliquer que, la fissuration étant un processus irréversible, cette zone disparaisse d'un cycle sur l'autre ? Pourtant c'est exactement ce que l'on suppose si on conserve les énergies en état.

Rappelons de plus que le phénomène de fatigue est fortement lié à l'histoire du chargement, à l'histoire du processus de fissuration et que rien dans le modèle ne s'y rapporte.

L'idée est donc, ici, de modifier l'expression de l'énergie de surface afin d'y introduire une condition d'irréversibilité de la fissuration. On va supposer qu'elle ne tient plus compte du saut de déplacement entre les lèvres mais de l'accumulation de saut de déplacement au cours du temps. Cette nouvelle variable aura ainsi un rôle de mémoire.

Définition de la variable irréversible

Compte tenu des observations précédentes, on introduit une nouvelle variable δ , appelée "ouverture cumulée" pour un problème d'ouverture de fissure (problème de type I) et "glissement cumulé" pour un problème de glissement des lèvres de la fissure (problème de type II pour un glissement dans le plan et de type III pour un glissement antiplan), afin de rendre compte de l'irréversibilité de la fissuration.

À l'instant t et au point x , $\delta(x, t)$ est défini en fonction de l'histoire du saut de déplacement $\llbracket u \rrbracket$ au point x jusqu'à l'instant t . Dans les deux cas, elle peut s'écrire

$$\delta(x, t) = \int_0^t \mathcal{F}(\llbracket \dot{u} \rrbracket(x, \tau), n(x)) d\tau. \quad (2.11)$$

La validité de cette variable irréversible et du modèle de fatigue qui en découle dépend alors du choix de la fonction \mathcal{F} . On souhaite, par exemple, que notre modèle soit capable de prendre en compte les effets de la décharge lorsque cela s'avère nécessaire. On choisit deux formes différentes pour \mathcal{F} suivant que l'on se trouve dans un problème d'ouverture de fissure (type I) ou bien de glissement des lèvres de la fissure (type II ou III) :

- **en mode d'ouverture de fissure**, on suppose que l'influence de la décharge est négligeable et que le processus de fissuration n'a lieu que lors des phases de charge. On postule l'expression suivante de la fonction \mathcal{F}

$$\mathcal{F}(z, n) = \langle z \cdot n \rangle \quad (2.12)$$

où les crochets indiquent la partie positive, c'est à dire

$$\langle a \rangle = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

- **en mode de glissement des lèvres de la fissure** (δ correspond alors à une discontinuité tangentielle), on ne peut plus négliger la décharge, le processus de fissuration ayant lieu aussi bien durant les phases de charge que les phases de décharge. On choisit alors

$$\mathcal{F}(z, n) = \|z - z \cdot n\| \quad (2.13)$$

Remarque 2.2.3 : On aurait bien entendu pu faire un autre choix pour \mathcal{F} , l'idée étant ici de simplifier au maximum les expressions. Toutefois, il est envisageable de postuler des conditions d'irréversibilité permettant une meilleure description du problème traité (en fonction du mode de chargement, du matériau, etc...).

Problème incrémental en fatigue

La prise en compte de l'irréversibilité nécessite la discrétisation du problème : la loi d'évolution de la fissuration revient alors, comme dans FRANCFORT et MARIGO [31] ou MIELKE [48] à une succession de problèmes de minimisation.

Ainsi, en introduisant le pas de temps $i \in \mathbb{N}^*$, on définit le champs de déplacement u_i et la variable cumulée δ_i par

$$\delta_i(x) = \delta_{i-1}(x) + \mathcal{F}(\llbracket u_i \rrbracket(x) - \llbracket u_{i-1} \rrbracket(x), n(x)).$$

Soit \mathcal{V}_i l'ensemble des champs cinématiquement admissibles au pas de temps i , le problème de minimisation incrémental en fatigue s'écrit alors à tout instant $i \in \mathbb{N}^*$ à partir du problème (2.9)

Sachant que $u_0 = \delta_0 = \mathbf{0}$, trouver $u_i \in \mathcal{V}_i$ et δ_i vérifiant

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \|v - u_i\| \leq \varepsilon, \quad \mathcal{E}_i(u_i) \leq \mathcal{E}_i(v) \quad (2.14)$$

$$\text{et} \quad \delta_i = \delta_{i-1} + \mathcal{F}(\llbracket u_i \rrbracket - \llbracket u_{i-1} \rrbracket, n) \quad \forall v \in \mathcal{V}_i$$

où l'énergie totale s'écrit sous sa forme discrétisée

$$\mathcal{E}_i(v) = \int_{\mathcal{V}_i} W(x, \epsilon(v)(x)) dx - f(v) + \int_{\mathcal{S}_v} \phi\left(x, \delta_{i-1}(x) + \mathcal{F}(\llbracket v \rrbracket(x) - \llbracket u_{i-1} \rrbracket(x), n(x))\right) dH^{N-1}(x).$$

La résolution d'un tel problème rentre dans le cadre mathématique du *Calcul des Variations* dont on peut trouver une introduction dans DACOROGNA [17] ou dans DEMENGEL et al [22].

Deuxième partie

Le problème modèle : Décollement d'un film

Glossaire

Dans les chapitres qui suivent (Chapitre 3 à 7), on traite du décollement (et de l'arrachement) d'un film mince. Afin d'en rendre plus aisée la lecture, on se propose de définir la terminologie employée.

– **film parfaitement collé au point x .**

On dira que le film est parfaitement collé à son substrat au point x lorsque $\delta(x) = 0$.

– **film parfaitement (ou complètement) décollé au point x .**

On dira que le film est parfaitement décollé à son substrat au point x lorsque $\delta(x) > \delta_c$ avec $\delta_c = 0$ dans le modèle de GRIFFITH et $\delta_c > 0$ dans le modèle de Dugdale. En ce point, il n'y a plus d'interaction entre le film et son substrat.

– **film partiellement décollé au point x .**

Avec le modèle de Dugdale, on dira que le film est partiellement décollé au point x lorsque $0 < \delta(x) < \delta_c$. La zone constituée de tels points est appelée **zone cohésive ou d'amorçage du décollement**.

– **forces cohésives.**

Les forces cohésives désignent des forces agissant dans la zone partiellement décollée et qui s'opposent au décollement du film. Elles peuvent être constantes le long de la zone (cas des forces de Dugdale) ou bien varier avec le saut de déplacement sur les lèvres de la fissure (cas des forces de type Barenblatt). Généralement, elles s'annulent dès que le saut de déplacement est supérieur à un saut critique caractéristique du matériau (dans le cas de Barenblatt ce saut critique est infini).

– **nombre de cycles d'amorçage.**

Le nombre de cycles d'amorçage correspond au nombre de cycles qu'il faut effectivement appliqué avant de voir apparaître une fissure au sens de GRIFFITH.

Chapitre 3

Formulation du problème. Résolution dans le cas du modèle de Griffith

On présente ici une première application du modèle introduit au chapitre précédent. L'objectif est de déterminer l'évolution du décollement d'un film initialement parfaitement collé sur un socle rigide et soumis à une tension constante et une déflexion cyclique et qui peut être apparenté à un essai de pelage. Si cet exemple peut paraître très simpliste, eu égard aux très complexes modèles aujourd'hui traités en mécanique de la rupture, il permet toutefois de résoudre complètement analytiquement le problème d'évolution du décollement et de comprendre ainsi l'intérêt d'un modèle de fatigue basé sur une approche par minimisation de l'énergie. Le choix a été fait de décomposer l'étude de ce problème en 4 chapitres. Dans ce chapitre, après avoir introduit les différents ingrédients mis en jeu (énergie totale, condition d'irréversibilité), on postule, comme dans le Chapitre 2, que l'évolution du décollement du film est déterminée en minimisant l'énergie totale de la structure. Compte tenu du caractère irréversible du problème traité, il s'agit de procéder à une discrétisation de celui-ci et de le résoudre à chaque pas de temps du chargement discrétisé. Dans la seconde partie de ce chapitre, on étudie la réponse obtenue avec une énergie de surface de GRIFFITH. On montre que la fissure n'évolue plus après le premier cycle, l'évolution n'étant possible que si l'on choisit des chargements de fatigue d'amplitude non constante.

Dans les Chapitres 4 à 6, on étudie la réponse dans le cadre d'une énergie de surface de type BARENBLATT (dont en particulier dans le cas du modèle de DUGDALE). Le Chapitre 4 s'attache à déterminer la structure et l'unicité de la solution dans le cas général d'une énergie de surface de type BARENBLATT. Dans le Chapitre 5, le problème est résolu de façon semi-analytique en choisissant l'énergie de surface associée au modèle de DUGDALE. Enfin dans le Chapitre 6, en supposant que le rapport entre la longueur interne intervenant dans l'énergie de surface de DUGDALE et la longueur du film est petit, on exhibe, par passage à la limite, une loi limite de fatigue du type loi de PARIS.

3.1 L'essai de pelage

L'exemple que l'on se propose de traiter est à rapprocher des "essais de pelage" ("peel tests" dans la littérature anglaise) dont on trouvera une introduction par exemple dans DARQUE-CERETTI et FELDER [18]. Les essais de pelage sont utilisés pour caractériser l'adhérence des couches minces, c'est à dire la difficulté à séparer la couche mince de son support. Ces essais ont un intérêt industriel important puisque de plus en plus de pièces de voiture et d'avion sont assemblées par collage, tout comme les éléments des cartes bancaires, des montres ou des disques durs d'ordinateur.... Toutefois,

même si c'est un phénomène apparemment simple qui concerne aussi bien l'étude de la colle que celle des adhésifs (scotch, pansements, post-it ...), il est encore mal modélisé.

On représente Figure 3.1, l'essai de pelage libre : une couche mince (ou adhésif) d'épaisseur e et de largeur grande devant l'épaisseur est collée sur un substrat rigide (ou adhérent) de surface plane. Le décollement de la couche du substrat est réalisé par application d'une force F orientée d'un angle θ par rapport à la surface du substrat. La valeur de cet angle, qui peut *a priori* varier

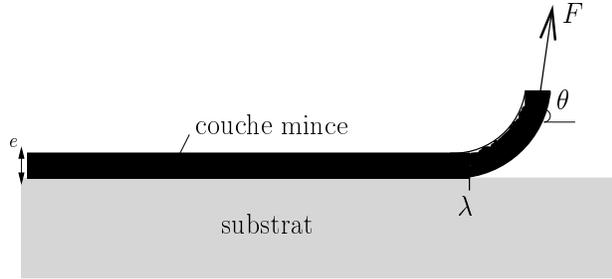


FIG. 3.1 – Essai de pelage libre.



FIG. 3.2 – Exemple d'essai de pelage.

entre 0 et 180 mais qui reste généralement constante durant l'essai, donne naissance à des cas particuliers d'essais de pelage : test de la bande adhésive pour $\theta = 90$, test de pelage libre en T ou par retournement pour $\theta = 180$, etc...(voir Figure 3.2). Il s'avère en tout cas que le mode de déformation du film est compliqué puisqu'il passe de façon continue d'une flexion (près de la pointe décollée λ) à une tension (loin de la pointe décollée λ). Loin de la pointe décollée, on considère en effet que le film est "aligné" sur la ligne d'action de la force F . De plus, cet exemple n'est pas sans rappeler l'expérience réalisée par OBRIMOFF dès 1930 et qui constitue une suite logique des travaux de GRIFFITH [35]. Dans [53], OBRIMOFF rend en effet compte du clivage du mica. Comme le montre la Figure 3.3, une cale d'épaisseur h est insérée dans un bloc de mica afin de peler une feuille de mica d'épaisseur e . Le chargement conduit ici à la flexion du film. OBRIMOFF montre entre autres que la résistance à la déchirure est une constante et que l'énergie de surface (définie au sens de GRIFFITH) ne dépend pas de la forme de la feuille mince arrachée. Cependant, le pelage



FIG. 3.3 – Expérience d'OBRIMOFF sur le mica (1930).

par fatigue n'est jamais évoqué.

3.2 Présentation du problème

On considère le problème plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ constitué d'un film mince inextensible et parfaitement flexible de longueur L et d'un socle plat rigide. Le film est

constitué d'un matériau élastique linéaire, homogène et isotrope et est supposé être parfaitement collé au socle avant tout chargement (Figure 3.4). Seule l'interface "film-socle" possède une ténacité finie : on souhaite ainsi étudier la rupture *adhésive* ou *interfaciale*.

Remarque 3.2.1 : L'épaisseur du film est supposée négligeable devant les autres dimensions de la structure et notamment devant la longueur L du film. De même, on suppose que le film est de largeur unité.

Soit s l'abscisse curviligne le long du film et comptée à partir de l'origine. Le film, qui est maintenu en son extrémité $s=0$, est soumis, en $s=L$, à une force horizontale constante $N\vec{e}_1$ ($N > 0$) qui provoque la tension du film et à une déflexion cyclique verticale $\bar{V}(t)\vec{e}_2$. Ainsi le chargement appliqué est légèrement différent de celui habituellement considéré dans un essai de pelage. En se

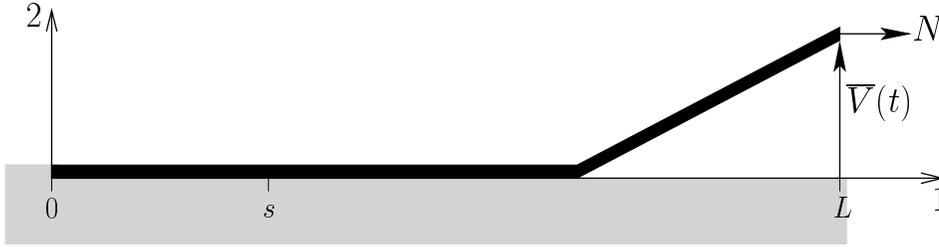


FIG. 3.4 – Géométrie et Chargement.

plaçant dans le cadre d'évolutions quasi statiques du décollement du film de son socle, la recherche des différents états d'équilibre se fait en minimisant à chaque valeur du paramètre de chargement, l'énergie totale de la structure. Il s'agit donc, avant toute écriture du problème d'évolution, de déterminer l'ensemble des champs cinématiquement admissibles ainsi que l'énergie qui leur est associée. On pose $\vec{\mathbf{X}}(s)$ la position d'équilibre du point s du film.

$$\vec{\mathbf{X}}(s) = s\vec{e}_1 + \vec{\mathbf{U}}(s) \quad (3.1)$$

où $\vec{\mathbf{U}}(s) = \bar{u}(s)\vec{e}_1 + \bar{v}(s)\vec{e}_2$ correspond au champ de déplacement du film à l'équilibre. $\vec{\mathbf{U}}$ vérifie les conditions cinématiques suivantes

$$\bar{u}(0) = \bar{v}(0) = 0, \quad \bar{v}(L) = \bar{V}(t). \quad (3.2)$$

On impose également une condition de non interpénétration du film dans le socle

$$\bar{v}(s) \geq 0 \quad \forall s \in [0, L]. \quad (3.3)$$

3.2.1 Condition d'inextensibilité

Comme le film est inextensible et par définition de l'abscisse curviligne, le champ $\vec{\mathbf{X}}(s)$ doit vérifier l'égalité

$$\left\| \frac{d\vec{\mathbf{X}}(s)}{ds} \right\| = 1.$$

En remplaçant $\vec{\mathbf{X}}(s)$ par son expression (3.1), on obtient la condition d'inextensibilité suivante

$$2\bar{u}'(s) + \bar{u}'(s)^2 + \bar{v}'(s)^2 = 0. \quad (3.4)$$

En se plaçant dans le cadre des *petites perturbations*, c'est à dire en faisant l'hypothèse que la déflexion \bar{V} imposée à l'extrémité du film est suffisamment faible pour que le champ de déplacement puisse être considéré comme infinitésimal, on peut négliger le terme en \bar{u}'^2 et la condition d'inextensibilité (3.4) se réduit à

$$\bar{u}'(s) = -\frac{1}{2}\bar{v}'(s)^2. \quad (3.5)$$

3.2.2 Énergie potentielle

Le film étant inextensible et parfaitement flexible, son énergie élastique est nulle, son énergie potentielle $\bar{\mathcal{P}}$ se réduisant alors au travail de la force de tension en $s = L$ dans le déplacement admissible $\vec{\mathbf{U}}(L)$

$$\bar{\mathcal{P}} = -N\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{U}}(L).$$

Or, d'après (3.2) et (3.5)

$$\vec{\mathbf{U}}(L) = \bar{u}(L)\vec{\mathbf{e}}_1 + \bar{v}(L)\vec{\mathbf{e}}_2 = -\int_0^L \frac{\bar{v}'(s)^2}{2} ds \vec{\mathbf{e}}_1 + \bar{V}(L) \vec{\mathbf{e}}_2.$$

L'énergie potentielle s'écrit donc uniquement en terme de déflexion (ou ouverture)

$$\bar{\mathcal{P}}(\bar{v}) = \frac{N}{2} \int_0^L \bar{v}'(s)^2 ds. \quad (3.6)$$

C'est ainsi la tension qui seule va créer de l'énergie potentielle susceptible d'être par la suite restituée pour décoller le film.

3.2.3 Énergie de surface

Comme annoncé au chapitre précédent, on ne peut plus utiliser dans l'énergie de surface la variable "classique" du saut de déplacement et donc ici du champ de déflexion \bar{v} (puisque $[[\bar{v}]](s) = \bar{v}^+(s) - \bar{v}^-(s) = \bar{v}^+(s) = \bar{v}(s)$, le socle rigide étant immobile). Pour que fatigue il y ait, et comme il sera montré dans la suite, il faut tenir compte de l'accumulation d'ouverture dans la zone cohésive. Dans notre exemple, cette variable, notée $\bar{\delta}$ et appelée "ouverture cumulée" dans la suite, correspond au cumul de l'écartement du film de son support au cours du temps. En reprenant les définitions du Chapitre 2, on a, en notant \bar{v}_t l'ouverture, $\dot{\bar{v}}_t$ le taux d'ouverture et $\bar{\delta}_t$ l'ouverture cumulée à l'instant t

$$\bar{\delta}_t(s) = \int_0^t \langle \dot{\bar{v}}_\tau(s) \rangle d\tau \quad (3.7)$$

avec $\langle x \rangle = \max\{x, 0\}$ puisque l'on traite d'un problème de type I. Afin de mieux cerner à quoi correspond cette variable $\bar{\delta}$, on représente sur la Figure 3.5 son évolution lorsque le point s est soumis à des cycles de chargements en \bar{v} . L'ouverture cumulée est donc une variable qui

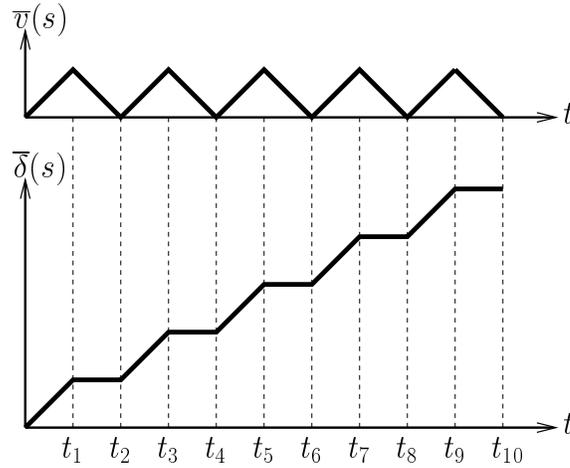


FIG. 3.5 – Exemple d'évolution de l'ouverture cumulée sous chargement cyclique.

n'évolue que lors des phases de montée en charge. Dans cet exemple, on voit bien l'accumulation d'ouverture au point s au cours du temps. L'énergie de surface dépend de l'ouverture cumulée et s'écrit

$$\bar{S}(\bar{\delta}) = \int_0^L \bar{\phi}(\bar{\delta}(s)) ds \quad (3.8)$$

où $\bar{\phi}$ est la densité d'énergie de surface dont l'expression est donnée au paragraphe 2.1.3 et l'allure sur la Figure 2.3.

En reprenant l'exemple précédent, *i.e.* en supposant que le point s est soumis à des cycles de chargements en \bar{v} , l'évolution de l'énergie de surface dissipée est représentée sur la Figure 3.6. On note qu'il y a dissipation uniquement lors des phases de montée en charge. La prise en compte de

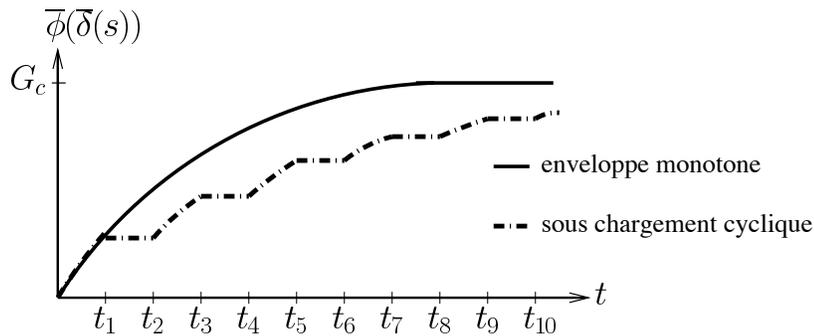


FIG. 3.6 – Exemple d'évolution de l'énergie de surface sous chargement cyclique.

cette variable d'ouverture cumulée modifie également l'allure de la valeur de la force cohésive σ au point s comme le montre la Figure 3.7. Pendant la première montée en charge, la force cohésive de BARENBLATT qui s'oppose à l'ouverture de la fissure diminue à partir de σ_{max} en suivant la courbe monotone. Lors de la décharge suivante, la fissure se referme (puisque $v(s) = 0$ à la fin d'une

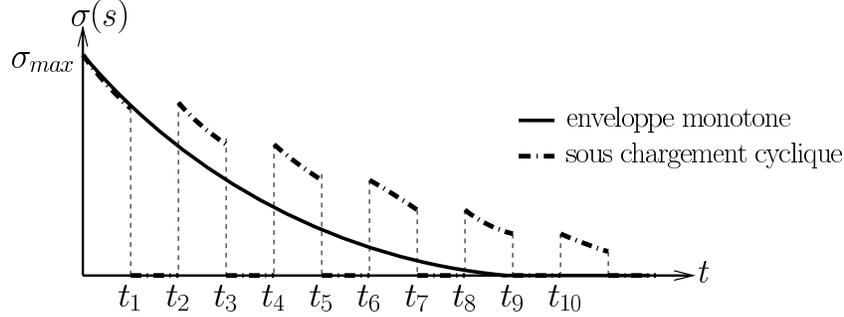


FIG. 3.7 – Exemple d'évolution des forces cohésives sous chargement cyclique.

décharge). La force cohésive n'a plus à s'opposer à son ouverture et s'annule donc. Cependant, à la fin de la première décharge, le ligament situé en s n'est pas rompu. Il est simplement relâché. Au début de la seconde montée en charge, la force cohésive en s reprend la valeur qu'elle avait à la fin de la première montée. La fin de la charge conduit à une diminution irréversible de σ . Le reste de l'évolution suit le même principe.

3.3 Problème incrémental adimensionnalisé

Comme annoncé, le processus de décollement du film de son socle va être dicté, à chaque pas de temps, par la minimisation de son énergie totale parmi tous les champs d'ouverture admissibles. Cette dernière est définie comme la somme de l'énergie potentielle (3.6) et de l'énergie de surface (3.8)

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{P}}(\bar{v}) + \bar{\mathcal{S}}(\bar{\delta}) = \frac{N}{2} \int_0^L \bar{v}'(s)^2 ds + \int_0^L \bar{\phi}(\bar{\delta}(s)) ds \quad (3.9)$$

On note que l'énergie $\bar{\mathcal{E}}$ est finie pourvue que l'ouverture \bar{v} appartienne à l'espace $W^{1,2}(0, L)$. On introduit alors l'ensemble $\bar{\mathcal{V}}$ des champs d'ouverture admissibles comme les fonctions de $W^{1,2}(0, L)$ satisfaisant les conditions aux limites du problème (3.2) et la condition de non interpénétration du film dans le socle (3.3)

$$\bar{\mathcal{V}}(t) = \{ \bar{v} \in W^{1,2}(0, L), \bar{v}(0) = 0, \bar{v} \geq 0, \bar{v}(L) = \bar{V}(t) \}. \quad (3.10)$$

Le chargement $\bar{V}(t)$ n'étant pas une fonction monotone de la variable temps et le décollement étant un processus fortement irréversible, il est nécessaire de discrétiser le problème.

3.3.1 Discrétisation du chargement

On considère le chargement $t \mapsto \bar{V}(t)$ avec la condition initiale $\bar{V}(0) = 0$. Afin de distinguer les phases de charge des phases de décharge tout en discrétisant chaque chemin de chargement (charge et décharge) en un nombre fini d'intervalles de temps, il est nécessaire d'utiliser un système

à double indice. Ainsi, on a $\forall i \in \mathbb{N}$

- $\bar{V}(t)$ croît de \bar{V}_{2i} à \bar{V}_{2i+1} quand t croît de $2i$ à $2i+1$ (chemin de charge).
- $\bar{V}(t)$ décroît de \bar{V}_{2i+1} à \bar{V}_{2i+2} quand t croît de $2i+1$ à $2i+2$ (chemin de décharge).

Et sur chaque chemin on a

$$i = i_0 < i_1 < \dots < i_\alpha < \dots < i_{n_{i-1}} < i_{n_i} = i + 1.$$

Cet ensemble de temps discrets à double indice est muni de la relation d'ordre total suivante (Figure 3.8)

$$j_\beta \leq i_\alpha \iff (j < i) \text{ ou } (j = i \text{ et } \beta \leq \alpha).$$

Remarque 3.3.1 : La condition de non interpénétration du film dans le socle limite le choix du chargement à des sollicitations de rapport d'ouverture positif $R = \bar{V}_{min}/\bar{V}_{max} \geq 0$.

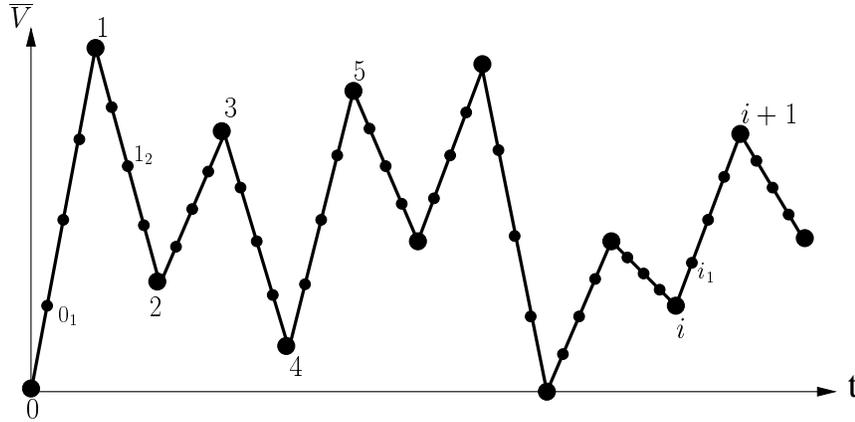


FIG. 3.8 – Chargement discrétisé

La discrétisation ainsi définie, l'ouverture cumulée (3.7) prend la forme

$$\bar{\delta}_{i_{\alpha+1}}(s) = \bar{\delta}_{i_\alpha}(s) + \langle \bar{v}_{i_{\alpha+1}}(s) - \bar{v}_{i_\alpha}(s) \rangle. \quad (3.11)$$

où $\bar{v}_{i_{\alpha+1}}$ correspond à l'ouverture à l'instant $i_{\alpha+1}$. Ainsi, l'ouverture cumulée à l'instant $i_{\alpha+1}$ est égale à la somme de l'ouverture accumulée jusqu'à l'instant i_α (i.e. $\bar{\delta}_{i_\alpha}$) et de l'ouverture supplémentaire créée entre les instants i_α et $i_{\alpha+1}$.

3.3.2 Problème incrémental

Il s'agit alors d'écrire le problème incrémental dictant l'évolution de la décohérence au cours du temps. Soit $\bar{\mathcal{V}}_{i_\alpha}$ l'ensemble des ouvertures admissibles au pas de temps i_α écrit à partir de (3.10)

$$\bar{\mathcal{V}}_{i_\alpha} = \{ \bar{v} \in W^{1,2}(0, L), \bar{v}(0) = 0, \bar{v} \geq 0, \bar{v}(L) = \bar{V}_{i_\alpha} \}. \quad (3.12)$$

Le problème incrémental ($\bar{\mathcal{P}}_{i_\alpha}$) se formule ainsi

Sachant que $\bar{v}_0 = \bar{\delta}_0 = 0$, trouver pour $i \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \{1, 2, \dots, n_i\}$, \bar{v}_{i_α} et $\bar{\delta}_{i_\alpha}$ tels que

$$\bar{\mathcal{E}}_{i_\alpha}(\bar{v}_{i_\alpha}) \leq \bar{\mathcal{E}}_{i_\alpha}(\bar{v}) \quad \text{et} \quad \bar{\delta}_{i_\alpha} = \bar{\delta}_{i_{\alpha-1}} + \langle \bar{v}_{i_\alpha} - \bar{v}_{i_{\alpha-1}} \rangle \quad \forall \bar{v} \in \bar{\mathcal{V}}_{i_\alpha}$$

où

$$\bar{\mathcal{E}}_{i_\alpha}(\bar{v}) = \frac{N}{2} \int_0^L \bar{v}'(s)^2 ds + \int_0^L \bar{\phi}(\bar{\delta}_{i_{\alpha-1}}(s) + \langle \bar{v}(s) - \bar{v}_{i_{\alpha-1}}(s) \rangle) ds \quad (3.13)$$

est l'énergie totale au pas de temps i_α .

Remarque 3.3.2 : Comme il a déjà été annoncé précédemment le minimum recherché est un minimum local et on choisit la norme naturelle de $W^{1,2}(0, L)$ pour définir la notion de voisinage :

$$\|v\|^2 = \frac{1}{L} \int_0^L v^2 dx + L \int_0^L v'^2 dx.$$

Remarque 3.3.3 : Si on se place dans le cadre des grands déplacements, le problème à résoudre est sensiblement plus compliqué. En effet dans ce cas, la condition d'inextensibilité s'écrit $\bar{u}'(s) = -1 + \sqrt{1 - \bar{v}'(s)^2}$ et l'énergie potentielle n'est plus une fonctionnelle quadratique. De plus l'énergie de surface dépend à la fois du déplacement axial et de l'ouverture, il y a couplage entre les modes I et II.

3.3.3 Formulation adimensionnée

Adimensionnalisation

Dans le but de simplifier les équations afin d'en dégager les paramètres pertinents, on adimensionnalise le problème. Ainsi on pose

$$x = \frac{s}{L}, \quad v(x) = \frac{\bar{v}(s)}{\mathcal{L}}, \quad \delta(x) = \frac{\bar{\delta}(s)}{\mathcal{L}}, \quad V = \frac{\bar{V}}{\mathcal{L}} \quad (3.14)$$

avec

$$\mathcal{L} = \sqrt{\frac{2G_c}{N}} L \quad (3.15)$$

qui peut être vu comme l'échelle de longueur interne du modèle de GRIFFITH. Le modèle de BARENBLATT contient une autre échelle de longueur interne $\delta_c = G_c/\phi'(0)$ qu'on utilise pour introduire le paramètre adimensionné suivant

$$\epsilon = \frac{\delta_c}{\mathcal{L}}. \quad (3.16)$$

La densité d'énergie de surface de BARENBLATT s'écrit donc

$$\phi_\epsilon(\delta) = \frac{\bar{\phi}(\bar{\delta})}{G_c} = \frac{\bar{\phi}(\delta_c \frac{\delta}{\epsilon})}{G_c} \quad (3.17)$$

avec

$$\phi_\epsilon(0) = 0, \quad \phi_\epsilon(\delta) \text{ croissant avec } \delta, \quad \lim_{\delta \rightarrow \infty} \phi_\epsilon(\delta) = 1$$

et en particulier dans le cas d'une énergie de surface de DUGDALE

$$\phi_\epsilon(\delta) = \begin{cases} \delta/\epsilon & \text{si } \delta \leq \epsilon \\ 1 & \text{si } \delta \geq \epsilon \end{cases}. \quad (3.18)$$

Pour une énergie de surface de GRIFFITH, $\epsilon = 0$ et on a

$$\phi_0(\delta) = \frac{\bar{\phi}(\bar{\delta})}{G_c} = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta = 0 \\ 1 & \text{si } \delta > 0 \end{cases}. \quad (3.19)$$

En introduisant ces grandeurs adimensionnalisées, l'énergie totale s'écrit

$$\bar{\mathcal{E}}(\bar{v}) = G_c L \mathcal{E}(v). \quad (3.20)$$

Problème incrémental adimensionnalisé

L'adimensionnalisation ainsi réalisée, on formule le problème d'évolution du décollement à partir de $(\bar{\mathcal{P}}_{i_\alpha})$ en posant le problème d'évolution (\mathcal{P}_{i_α}) suivant

Sachant que $v_0 = \delta_0 = 0$, trouver pour $i \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \{1, 2, \dots, n_i\}$, v_{i_α} et δ_{i_α} tels que

$$\mathcal{E}_{i_\alpha}(v_{i_\alpha}) \leq \mathcal{E}_{i_\alpha}(v) \quad \text{et} \quad \delta_{i_\alpha} = \delta_{i_{\alpha-1}} + \langle v_{i_\alpha} - v_{i_{\alpha-1}} \rangle \quad \forall v \in \mathcal{V}_{i_\alpha}$$

où $\mathcal{V}_{i_\alpha} = \{v \in W^{1,2}(0, 1), v(0) = 0, v \geq 0, v(1) = V_{i_\alpha}\}$ est l'ensemble des champs de déflexion admissibles adimensionnalisés et où l'énergie totale s'exprime par

$$\mathcal{E}_{i_\alpha}(v) = \int_0^1 v'(x)^2 dx + \int_0^1 \phi_\epsilon(\delta_{i_{\alpha-1}}(x) + \langle v(x) - v_{i_{\alpha-1}}(x) \rangle) dx. \quad (3.21)$$

3.3.4 Existence d'une solution

On montre à partir des outils de l'analyse fonctionnelle l'existence d'une solution au problème incrémental.

Théorème 3.3.4 *Pour un chargement et une discrétisation donnés, le problème incrémental possède au moins une solution.*

Preuve. La démonstration sera faite au chapitre suivant (voir Lemme 4.1.1) □

3.4 Solution avec une énergie de surface de GRIFFITH

On montre dans ce paragraphe qu'il est impossible de modéliser le phénomène de fatigue avec une énergie de surface de GRIFFITH sans modifier l'amplitude du chargement d'un cycle à l'autre.

3.4.1 Premier pas de temps

On considère le premier pas de temps sur le premier chemin de charge, le déplacement imposé en $x = 1$ étant strictement positif, $V_{0_1} > 0$ (Figure 3.8). Compte tenu de la discrétisation de notre variable d'ouverture cumulée δ_{i_α} (3.11) et de la condition initiale $v_0 = \delta_0 = 0$, on a directement $\delta_{0_1} = v_{0_1}$.

Proposition 3.4.1 *À la fin du premier pas de temps, le film est parfaitement collé sur $[0, \ell_{0_1}]$ et parfaitement décollé sur $(\ell_{0_1}, 1)$. L'ouverture s'écrit*

$$v_{0_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{0_1} \\ \frac{x - \ell_{0_1}}{1 - \ell_{0_1}} V_{0_1} & \text{si } \ell_{0_1} \leq x \leq 1 \end{cases}. \quad (3.22)$$

où la position du point ℓ_{0_1} est donnée par

$$\ell_{0_1} = \begin{cases} 1 - V_{0_1} & \text{si } V_{0_1} \leq 1 \\ 0 & \text{si } V_{0_1} \geq 1 \end{cases}. \quad (3.23)$$

Preuve. • Montrons tout d'abord que la zone décollée se situe nécessairement à l'extrémité $x = 1$. Posons $\ell_{0_1} = \max \{x \in [0, 1] : v_{0_1}(x) = 0\}$ en remarquant que $0 \leq \ell_{0_1} < 1$ et montrons que $v_{0_1} = 0$ sur $[0, \ell_{0_1}]$. Soit $h > 0$ et

$$v^h(x) = \begin{cases} (1 - h)v_{0_1}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{0_1} \\ v_{0_1}(x) & \text{si } \ell_{0_1} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Le champ v^h est un élément de \mathcal{V}_{0_1} car il vérifie les conditions aux limites ($v^h(0) = 0$ et $v^h(1) = V_{0_1}$) et qu'il est continu en $x = \ell_{0_1}$. Son énergie comparée à celle de v_{0_1} vaut

$$\mathcal{E}_{0_1}(v^h) - \mathcal{E}_{0_1}(v_{0_1}) = ((1 - h)^2 - 1) \int_0^{\ell_{0_1}} v'_{0_1}(x)^2 dx.$$

Mais comme $\lim_{h \rightarrow 0} v^h = v_{0_1}$ et que v_{0_1} est un minimum local, cette différence ne peut pas être négative et donc $v'_{0_1} = 0$ sur $[0, \ell_{0_1}]$. Comme $v_{0_1}(0) = 0$, le résultat suit.

• Déterminons alors v_{0_1} dans la zone décollée. Supposons connu ℓ_{0_1} et posons

$$\mathcal{V}_{0_1}(\ell_{0_1}) = \{v \in \mathcal{V}_{0_1} : v = 0 \text{ dans } [0, \ell_{0_1}], v > 0 \text{ dans } (\ell_{0_1}, 1), v(1) = V_{0_1}\}.$$

Cet ensemble est convexe et contient v_{0_1} . Sur cet ensemble, l'énergie s'écrit

$$\mathcal{E}_{0_1}(v) = \int_{\ell_{0_1}}^1 v'(x)^2 dx + 1 - \ell_{0_1}.$$

Comme elle est strictement convexe, v_{0_1} est son unique minimiseur global. Un calcul immédiat donne (3.22).

- Déterminons alors ℓ_{0_1} . À $\ell \in [0, 1)$ associons $v[\ell] \in \mathcal{V}_{0_1}$ défini par

$$v[\ell](x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell \\ \frac{x-\ell}{1-\ell} V_{0_1} & \text{si } \ell \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Cette application $\ell \rightarrow v[\ell]$ est continue et $v_{0_1} = v[\ell_{0_1}]$. L'énergie associée à $v[\ell]$ est la fonction strictement convexe de ℓ suivante

$$\mathcal{E}_{0_1}(v[\ell]) = \frac{V_{0_1}^2}{1-\ell} + 1 - \ell.$$

Par conséquent ℓ_{0_1} est nécessairement son unique minimiseur global. Un calcul direct donne (3.23). \square

3.4.2 Pas de temps quelconque

Proposition 3.4.2 *Le champ de déflexion v_{i_α} au pas de temps i_α est donné par*

$$v_{i_\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{i_\alpha} \\ \frac{x-\ell_{i_\alpha}}{1-\ell_{i_\alpha}} V_{i_\alpha} & \text{si } \ell_{i_\alpha} \leq x \leq 1 \end{cases}. \quad (3.24)$$

où la position du point ℓ_{i_α} est

$$\ell_{i_\alpha} = \max \{0, 1 - V_{i_\alpha}^{max}\} \quad \text{où } V_{i_\alpha}^{max} = \max_{j_\beta \leq i_\alpha} V_{j_\beta}. \quad (3.25)$$

Preuve. On procède par récurrence.

- D'après la Proposition 3.4.1, le résultat est vrai au premier pas de temps, supposons le vrai jusqu'au pas $i_{\alpha-1}$.
- Soit v_* un minimiseur relatif de \mathcal{E}_{i_α} sur \mathcal{V}_{i_α} . Posons $\ell_* = \max \{x \in [0, 1) : v_*(x) = 0\}$.
 - Montrons que $v_* = 0$ sur $[0, \ell_*]$ Soit $h > 0$ et

$$v^h = \begin{cases} (1-h)v_*(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_* \\ v_*(x) & \text{si } \ell_* \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

$v^h \in \mathcal{V}_{i_\alpha}$ et son énergie comparée à celle de v_* vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{i_\alpha}(v^h) - \mathcal{E}_{i_\alpha}(v_*) &= ((1-h)^2 - 1) \int_0^{\ell_*} v_*'(x)^2 dx \\ &+ \int_0^{\ell_*} \left(\phi_0(\delta_{i_{\alpha-1}} + \langle (1-h)v_* - v_{i_{\alpha-1}} \rangle) - \phi_0(\delta_{i_{\alpha-1}} + \langle v_* - v_{i_{\alpha-1}} \rangle) \right) dx. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} v^h = v_*$ et que v_* est un minimum local, cette différence ne peut pas être négative. Or les deux termes de droite sont non positifs, donc $v_* = 0$ sur ℓ_* .

- Déterminons v_* dans la zone décollée. Supposons connu ℓ_* et posons

$$\mathcal{V}_{i_\alpha}(\ell_*) = \{v \in \mathcal{V}_{i_\alpha} : v = 0 \text{ dans } [0, \ell_*], v > 0 \text{ dans } (\ell_*, 1)\},$$

ensemble qui est convexe et qui contient v_* . Sur cet ensemble, l'énergie s'écrit

$$\mathcal{E}_{i_\alpha}(v) = \int_{\ell_*}^1 v'(x)^2 dx + 1 - \min\{\ell_*, \ell_{i_{\alpha-1}}\}.$$

Comme elle est strictement convexe, v_* est son unique minimiseur global et on obtient immédiatement (3.24).

- Il reste alors à déterminer ℓ_* . On a

$$\mathcal{E}_{i_\alpha}(v[\ell]) = \frac{V_{i_\alpha}^2}{1-\ell} + 1 - \min\{\ell, \ell_{i_{\alpha-1}}\},$$

fonction strictement convexe de ℓ . Donc ℓ_* est son unique minimiseur global sur $[0, 1)$.

Si $\ell_{i_{\alpha-1}} = 0$ ou si $V_{i_\alpha} \geq 1$, i.e. si $V_{i_\alpha}^{max} \geq 1$, alors $\ell_* = 0$. Sinon, si $V_{i_\alpha} \leq 1 - \ell_{i_{\alpha-1}} = V_{i_\alpha}^{max}$, alors $\ell_* = 1 - V_{i_\alpha}$. D'où finalement $\ell_* = \max\{0, 1 - V_{i_\alpha}^{max}\}$.

- Comme la proposition est vraie au pas de temps i_α , elle est vraie à chaque pas de temps. \square

Remarque 3.4.3 : Le taux de restitution d'énergie est défini au signe près comme la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à la longueur décollée. Le film étant décollé au pas de temps i_α sur une longueur $1 - \ell_{i_\alpha}$, un calcul rapide donne

$$G(\ell_{i_\alpha}) = \frac{V_{i_\alpha}^2}{(1 - \ell_{i_\alpha})^2}. \quad (3.26)$$

Ainsi, plus le film est décollé, moins il restitue d'énergie aux cycles suivants : on voit directement que le taux de décollement du film va diminuer au cours du temps.

3.4.3 Résumé du cas GRIFFITH

On a donc montré qu'il existe une unique solution au problème incrémental pour $i \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \{1, \dots, n_i\}$. On voit que celle-ci, à la fin d'une phase de charge ou de décharge, est indépendante de la discrétisation choisie. En faisant tendre le pas de temps vers 0, on en déduit que l'évolution du décollement est la suivante :

$$\text{Pour } t \geq 0, v(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \ell(t)] \\ \frac{x-\ell(t)}{1-\ell(t)} V(t) & \text{si } x \in [\ell(t), 1] \end{cases} \quad \text{avec } \ell(t) = \max\{0, 1 - \max_{\tau \leq t} V(\tau)\} \quad (3.27)$$

Finalement le décollement n'évolue que dans les phases de surcharge, c'est à dire quand $V(t) = \max_{\tau \leq t} V(\tau)$. La Figure 3.9 donne la configuration générale du film, quelque soit le chargement de fatigue. On voit que le film sera parfaitement décollé partout qu'à la seule condition que le chargement atteigne au moins une fois la valeur critique $V_c = 1$.



(a) Film parfaitement décollé sur une partie :
 $\max_{j \leq i} V_j < 1$



(b) Film parfaitement décollé partout : $\max_{j \leq i} V_j \geq 1$

FIG. 3.9 – Solution générale dans le cas de GRIFFITH

En particulier, sous chargement cyclique d'amplitude constante, le décollement n'évoluera que lors de la première phase de charge. En effet, à la fin de celle-ci, le champ de déplacement est donné par

$$v_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_1 \\ \frac{x - \ell_1}{1 - \ell_1} V_1 & \text{si } \ell_1 \leq x \leq 1 \end{cases} . \quad (3.28)$$

où la position de la pointe ℓ_1 vérifie

$$\ell_1 = \begin{cases} 1 - V_1 & \text{si } V_1 \leq 1 \\ 0 & \text{si } V_1 \geq 1 \end{cases} . \quad (3.29)$$

Les énergies potentielle \mathcal{P}_1 et de surface \mathcal{S}_1 valent respectivement

$$\mathcal{P}_1 = \begin{cases} V_1 & \text{si } V_1 \leq 1 \\ V_1^2 & \text{si } V_1 \geq 1 \end{cases}, \quad \mathcal{S}_1 = \begin{cases} V_1 & \text{si } V_1 \leq 1 \\ 1 & \text{si } V_1 \geq 1 \end{cases} . \quad (3.30)$$

La Figure 3.10 présente la configuration du film à la fin du premier cycle suivant l'intensité de l'amplitude V_1 .

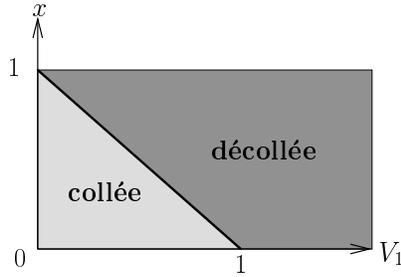


FIG. 3.10 – Configuration du film à la fin du premier cycle

Si $V_1 < 1$, à la fin du premier cycle, la pointe de la partie déchollée sera en $\ell_1 = 1 - V_1$ et ne bougera plus au cours des cycles suivants puisque $V_i = V_1$.

On ne peut donc pas modéliser la fatigue avec l'énergie de surface de GRIFFITH. Elle ne permet de rendre compte que des propagations de fissures dans des structures soumises à des chargements monotones : des effets “à courts termes.”

Remarque 3.4.4 : L'évolution du décollement lors de la première montée en charge suit la loi de GRIFFITH. En effet, à l'instant t , l'énergie potentielle vaut $\mathcal{P}(t) = \frac{V(t)^2}{1-\ell(t)}$ et le taux de restitution d'énergie vaut 1 tant que $\ell(t) < 1$, cette valeur 1 correspondant à G_c du fait de l'adimensionalisation. Ceci est dû au fait que l'énergie potentielle est une fonction strictement convexe de la longueur du décollement. Remarquons aussi que la décohesion démarre dès la mise en charge. Ceci est dû à la présence d'une “forte singularité” en $x = 1$ sous déplacement contrôlé. Ces deux propriétés vont jouer un rôle essentiel par la suite, y compris dans le processus de fatigue avec une loi de type BARENBLATT.

Chapitre 4

Propriétés générales de la solution dans le cas d'un modèle de Barenblatt

Dans le Chapitre précédent, on a montré l'incapacité du modèle de GRIFFITH à rendre compte de la propagation d'une fissure de fatigue. On se propose de montrer qu'il en va tout autrement si l'on adopte une énergie de surface de type BARENBLATT. Ce chapitre, le plus "mathématique" de la thèse, est consacré à la *construction* de la structure de la solution du problème de minimisation incrémentale, cf. le paragraphe 3.2. En se référant au double indexage relatif à la discrétisation du chargement introduit dans le chapitre 3, rappelons que, dans i_α , α représente le pas de discrétisation et i la phase de charge ou de décharge. Les phases de charge correspondent aux i impairs et les phases de décharge aux i pairs. Dans ce chapitre, l'indice i de phase sera systématiquement omis quand aucune confusion n'est à craindre. Les pas de discrétisation α correspondant à des pas de charge sont alors caractérisés par le fait que $V_\alpha > V_{\alpha-1}$, alors que les pas de discrétisation α correspondant à des pas de décharge sont caractérisés par le fait que $V_\alpha < V_{\alpha-1}$. On rappelle le problème de minimisation au pas α :

$$v_\alpha = \text{ArgMin}_{v \in \mathcal{V}_\alpha} \mathcal{E}_\alpha(v) \quad \delta_\alpha = \delta_{\alpha-1} + \langle v_\alpha - v_{\alpha-1} \rangle \quad (4.1)$$

où l'ensemble des déflexion admissibles \mathcal{V}_α est défini par

$$\mathcal{V}_\alpha = \{v \in H^1(0, 1), v(0) = 0, v \geq 0, v(1) = V_\alpha\} \quad (4.2)$$

et où l'énergie totale est donnée par

$$\mathcal{E}_\alpha(v) = \mathcal{P}(v) + \mathcal{S}(\delta_{\alpha-1} + \langle v - v_{\alpha-1} \rangle) \quad (4.3)$$

avec

$$\mathcal{P}(v) = \int_0^1 v'(x)^2 dx, \quad \mathcal{S}(\delta) = \int_0^1 \phi_\epsilon(\delta(x)) dx. \quad (4.4)$$

En conservant les notations précédentes, la densité d'énergie de surface ϕ_ϵ est telle que

$$\phi_\epsilon(0) = 0, \quad \delta \mapsto \phi_\epsilon(\delta) \text{ lipchitzienne, croissante et concave,} \quad \lim_{\delta \rightarrow \infty} \phi_\epsilon(\delta) = 1$$

où δ représente l'ouverture cumulée au cours du temps définie par (3.7) et ϵ est un paramètre sans dimension proportionnel au rapport entre la longueur interne δ_c apparaissant dans l'énergie de surface de BARENBLATT et la longueur L du film.

On montre dans la suite que le problème de minimisation incrémental admet une solution unique (en terme de minimisation absolue). De plus cette solution est indépendante de la discrétisation choisie : on peut donc résoudre chaque phase de chargement (phases de charge et de décharge) en un unique pas de temps. La résolution complète du problème de décollement sera traitée au Chapitre 5 dans le cadre d'une énergie de surface de DUGDALE.

4.1 Structure de la solution

Les lemmes et propositions qui suivent donnent la structure de la solution quand on considère le cadre général d'une énergie de surface de type BARENBLATT.

Lemme 4.1.1 (Existence et régularité de v_α)

Il existe au moins un minimiseur global v_α de \mathcal{E}_α sur \mathcal{V}_α .

Le champ $x \mapsto v_\alpha(x)$ est un élément de $W^{2,\infty}(0,1)$ et donc continûment différentiable.

Preuve. Existence. L'existence d'un minimiseur global est due au fait que \mathcal{V}_α est faiblement fermé dans $H^1(0,1)$ et que \mathcal{E}_α est positive (donc bornée inférieurement), coercive et semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $H^1(0,1)$. Montrons rapidement ces différentes propriétés.

1. \mathcal{V}_α est faiblement fermé dans $H^1(0,1)$. Soit v_n une suite de \mathcal{V}_α convergeant faiblement dans $H^1(0,1)$ vers v . Par continuité de la trace, on a $v(0) = 0$ et $v(1) = V_\alpha$. De plus $v_n(x)$ converge simplement vers $v(x)$ et donc $v(x) \geq 0$. Donc $v \in \mathcal{V}_\alpha$.
2. *Coercivité et suite minimisante.* Soit v_n une suite minimisante de \mathcal{E}_α sur \mathcal{V}_α . On a donc $\mathcal{E}_\alpha(v_n) \leq c$. Mais grâce à l'inégalité de Poincaré et la positivité de ϕ_ϵ on en déduit que v_n est bornée dans $H^1(0,1)$. On peut en extraire une sous-suite (notée toujours v_n) qui converge faiblement dans $H^1(0,1)$ vers v . De plus elle converge simplement vers v .
3. *Semi-continuité inférieure.* On a de façon classique $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 v_n'^2 dx \geq \int_0^1 v'^2 dx$. De plus, du fait de la convergence simple de v_n , de la continuité et de la bornitude de ϕ_ϵ , on peut utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue pour obtenir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \phi_\epsilon(\delta_{\alpha-1} + \langle v_n - v_{\alpha-1} \rangle) dx = \int_0^1 \phi_\epsilon(\delta_{\alpha-1} + \langle v - v_{\alpha-1} \rangle) dx$$

Le reste de la démonstration est classique.

Régularité. Soit $h > 0$ et $w \in C_0^\infty(0,\infty)$. Comme v_α est un minimiseur de \mathcal{E}_α on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathcal{E}_\alpha(v_\alpha + hw) - \mathcal{E}_\alpha(v_\alpha)) \\ &= 2 \int_0^1 v_\alpha' w' dx + \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^1 (\phi_\epsilon(\delta_{\alpha-1} + \langle v_\alpha - v_{\alpha-1} + hw \rangle) - \phi_\epsilon(\delta_\alpha)) dx. \end{aligned}$$

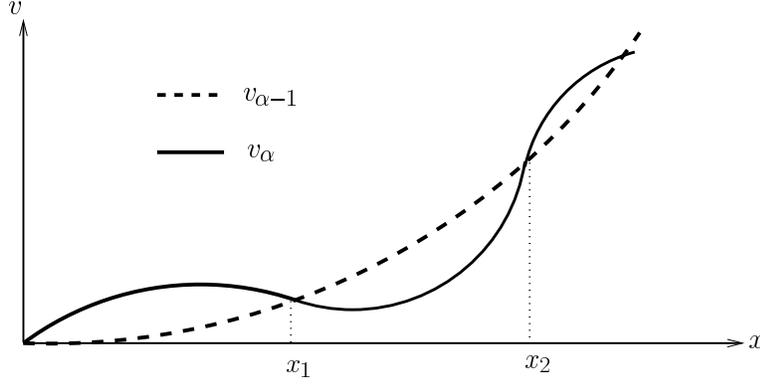
Grâce à la propriété de Lipschitz-continuité, de monotonie et de concavité de ϕ_ϵ il vient

$$2 \left| \int_0^1 v_\alpha' w' dx \right| \leq \phi_\epsilon'(0) \int_0^1 |w| dx$$

dont on déduit que $v_\alpha'' \in L^\infty$. □

Lemme 4.1.2 *Le minimiseur v_α ne peut pas "couper" deux fois la solution $v_{\alpha-1}$ du pas précédent (Figure 4.1). Ainsi on ne peut pas avoir*

$$\begin{cases} v_\alpha(x) < v_{\alpha-1}(x) & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ v_\alpha(x_1) = v_{\alpha-1}(x_1), v_\alpha(x_2) = v_{\alpha-1}(x_2) \end{cases}$$

FIG. 4.1 – Structure impossible du minimiseur v_{α} .

Preuve. Par l'absurde.

– soit w un élément de $\mathcal{V}_{\alpha-1}$ tel que

$$w(x) \begin{cases} = v_{\alpha-1}(x) & \text{si } x \notin [x_1, x_2] \\ \leq v_{\alpha-1}(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \end{cases} .$$

Comme $v_{\alpha-1}$ minimise $\mathcal{E}_{\alpha-1}$ sur $\mathcal{V}_{\alpha-1}$, on a forcément $\mathcal{E}_{\alpha-1}(w) \geq \mathcal{E}_{\alpha-1}(v_{\alpha-1})$, et donc

$$0 \leq \int_{x_1}^{x_2} (w'(x)^2 - v'_{\alpha-1}(x)^2) dx + \int_{x_1}^{x_2} \phi_{\epsilon}(\delta_{\alpha-2} + \langle w - v_{\alpha-2} \rangle) dx - \int_{x_1}^{x_2} \phi_{\epsilon}(\delta_{\alpha-2} + \langle v_{\alpha-1} - v_{\alpha-2} \rangle) dx. \quad (4.5)$$

Or, comme ϕ_{ϵ} est une fonction croissante, la somme des deux derniers termes du membre de droite est nécessairement négative ou nulle et il faut donc que

$$\int_{x_1}^{x_2} w'(x)^2 dx \geq \int_{x_1}^{x_2} v'_{\alpha-1}(x)^2 dx. \quad (4.6)$$

– soit $\tilde{w}(x)$ un élément de \mathcal{V}_{α} tel que

$$\tilde{w}(x) \begin{cases} = v_{\alpha}(x) & \text{si } x \notin [x_1, x_2] \\ \leq v_{\alpha-1}(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

Comme v_{α} minimise \mathcal{E}_{α} sur \mathcal{V}_{α} , on a forcément $\mathcal{E}_{\alpha}(\tilde{w}) \geq \mathcal{E}_{\alpha}(v_{\alpha})$, d'où

$$0 \leq \int_{x_1}^{x_2} (\tilde{w}'(x)^2 - v'_{\alpha}(x)^2) dx + \int_{x_1}^{x_2} \phi_{\epsilon}(\delta_{\alpha-1}) dx - \int_{x_1}^{x_2} \phi_{\epsilon}(\delta_{\alpha-1} + \langle v_{\alpha} - v_{\alpha-1} \rangle) dx$$

et la croissance de ϕ_{ϵ} conduit à

$$\int_{x_1}^{x_2} \tilde{w}'(x)^2 dx \geq \int_{x_1}^{x_2} v'_{\alpha}(x)^2 dx. \quad (4.7)$$

- on prend $w(x) = v_\alpha(x)$ dans (4.6) et $\tilde{w}(x) = v_{\alpha-1}(x)$ dans (4.7) et on déduit que

$$\int_{x_1}^{x_2} v'_\alpha(x)^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} v'_{\alpha-1}(x)^2 dx.$$

Donc v_α et $v_{\alpha-1}$ sont tous deux des minimiseurs de $\int_{x_1}^{x_2} w'(x)^2 dx$ sur l'ensemble des w tel que $0 \leq w \leq v_{\alpha-1}$ sur $[x_1, x_2]$ avec $w(x_1) = v_{\alpha-1}(x_1), w(x_2) = v_{\alpha-1}(x_2)$. Il s'agit d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle strictement convexe sur un ensemble convexe : le minimum est unique et donc $v_\alpha = v_{\alpha-1}$ sur $[x_1, x_2]$. □

Lemme 4.1.3 *Le minimiseur vérifie*

- lors d'un pas de charge : $v_\alpha(x) \geq v_{\alpha-1}(x) \quad \forall x \in [0, 1]$.
- lors d'un pas de décharge :

$$v_\alpha(x) \begin{cases} \geq v_{\alpha-1}(x) & \text{si } x \in [0, \ell_\alpha] \\ < v_{\alpha-1}(x) & \text{si } x \in (\ell_\alpha, 1] \end{cases} ,$$

où $\ell_\alpha = \max \{x \in [0, 1] : v_\alpha(x) = v_{\alpha-1}(x)\}$.

Preuve.

- lors d'un pas de charge, comme $v_\alpha(0) = v_{\alpha-1}(0) = 0$ et $v_\alpha(1) > v_{\alpha-1}(1)$, on ne peut pas avoir $v_\alpha(x) < v_{\alpha-1}(x)$ en un certain point x car sinon, par continuité des minimiseurs, v_α serait "obligé" de couper deux fois (au moins) la courbe $v_{\alpha-1}$. On a donc forcément une solution du type de celle donnée sur la Figure 4.2.

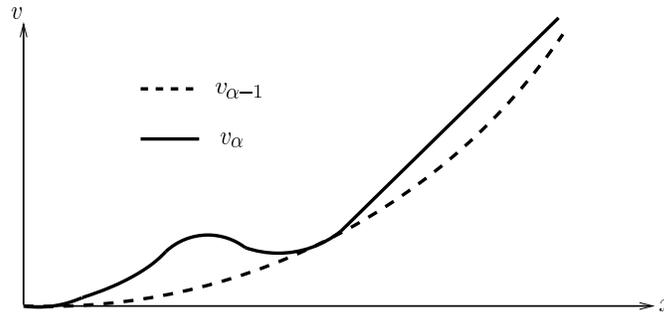
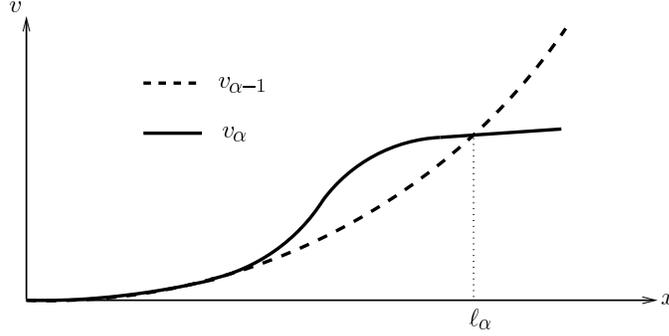


FIG. 4.2 – Structure du minimiseur v_α lors d'une phase de charge.

- lors d'un pas de décharge, on a toujours $v_\alpha(0) = v_{\alpha-1}(0) = 0$ et $v_\alpha(1) < v_{\alpha-1}(1)$. Par continuité, en partant de $x = 1$, il existe un point $\ell_\alpha \in [0, 1]$ tel que $v_\alpha(\ell_\alpha) = v_{\alpha-1}(\ell_\alpha)$ et $v_\alpha(x) < v_{\alpha-1}(x) \quad \forall x \in (\ell_\alpha, 1)$. Comme ensuite, v_α ne pourra plus repasser sous $v_{\alpha-1}$ (Figure 4.3), le résultat suit.

FIG. 4.3 – Structure du minimiseur v_α lors d'une phase de décharge.

□

Lemme 4.1.4 *Il existe un minimiseur v_α de la forme*

$$v_\alpha(x) \begin{cases} = v_{\alpha-1}(x) & \text{si } x \in [0, \ell_\alpha] \\ \neq v_{\alpha-1}(x) & \text{si } x \in (\ell_\alpha, 1] \end{cases} \quad (4.8)$$

et si $v_{\alpha-1}$ est unique, alors tout minimiseur prend nécessairement la forme (4.8).

Preuve.

- soit v_α un minimiseur de $\mathcal{E}_\alpha(v)$. Comme $v_\alpha(1) = V_\alpha \neq V_{\alpha-1} = v_{\alpha-1}(1)$, on a $v_\alpha \neq v_{\alpha-1}$ dans un voisinage de $x = 1$. D'après le Lemme 4.1.3, on a $v_\alpha \geq v_{\alpha-1}$ pour tout $x \in [0, \ell_\alpha]$. Posons

$$v_\alpha^*(x) = \begin{cases} v_{\alpha-1}(x) & \text{si } x \in [0, \ell_\alpha] \\ v_\alpha(x) & \text{si } x \in [\ell_\alpha, 1] \end{cases}$$

ce champ étant admissible à l'étape i car continue en ℓ_α , et

$$v_{\alpha-1}^*(x) = \begin{cases} v_\alpha(x) & \text{si } x \in [0, \ell_\alpha] \\ v_{\alpha-1}(x) & \text{si } x \in [\ell_\alpha, 1] \end{cases}$$

champ admissible à l'étape $\alpha - 1$.

- $v_{\alpha-1}$ est un minimiseur de la fonctionnelle $\mathcal{E}_{\alpha-1}(v)$ d'où $\mathcal{E}_{\alpha-1}(v_{\alpha-1}^*) > \mathcal{E}_{\alpha-1}(v_{\alpha-1})$ et donc

$$0 \leq \int_0^{\ell_\alpha} (v_\alpha'(x)^2 - v_{\alpha-1}'(x)^2) dx + \int_0^{\ell_\alpha} \phi_\epsilon (\delta_{\alpha-2} + \langle v_\alpha - v_{\alpha-2} \rangle) dx - \int_0^{\ell_\alpha} \phi_\epsilon (\delta_{\alpha-2} + \langle v_{\alpha-1} - v_{\alpha-2} \rangle) dx \quad (4.9)$$

- v_α est un minimiseur de la fonctionnelle $\mathcal{E}_\alpha(v)$ d'où $\mathcal{E}_\alpha(v_\alpha^*) > \mathcal{E}_\alpha(v_\alpha)$ et donc

$$0 \leq \int_0^{\ell_\alpha} (v_{\alpha-1}'(x)^2 - v_\alpha'(x)^2) dx + \int_0^{\ell_\alpha} \phi_\epsilon (\delta_{\alpha-1} + \langle v_{\alpha-1} - v_{\alpha-1} \rangle) dx - \int_0^{\ell_\alpha} \phi_\epsilon (\delta_{\alpha-1} + \langle v_\alpha - v_{\alpha-1} \rangle) dx \quad (4.10)$$

– en additionnant (4.9) et (4.10) il vient

$$0 \leq \int_0^{\ell_\alpha} \phi_\epsilon (\delta_{\alpha-2} + \langle v_\alpha - v_{\alpha-2} \rangle) dx - \int_0^{\ell_\alpha} \phi_\epsilon (\delta_{\alpha-1} + \langle v_\alpha - v_{\alpha-1} \rangle) dx \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \text{or} \quad \delta_{\alpha-1}(x) + \langle v_\alpha - v_{\alpha-1} \rangle &= \delta_{\alpha-2}(x) + \langle v_{\alpha-1} - v_{\alpha-2} \rangle + \langle v_\alpha - v_{\alpha-1} \rangle \\ &\geq \delta_{\alpha-2}(x) + \langle v_\alpha - v_{\alpha-2} \rangle \end{aligned} \quad (4.12)$$

d'après l'inégalité triangulaire : $\langle a + b \rangle \leq \langle a \rangle + \langle b \rangle$.

Ainsi (4.11) s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{\ell_\alpha} \phi_\epsilon (\delta_{\alpha-2} + \langle v_\alpha - v_{\alpha-2} \rangle) dx - \int_0^{\ell_\alpha} \phi_\epsilon (\delta_{\alpha-1} + \langle v_\alpha - v_{\alpha-1} \rangle) dx \\ &\leq \int_0^{\ell_\alpha} \phi_\epsilon (\delta_{\alpha-2} + \langle v_\alpha - v_{\alpha-2} \rangle) dx - \int_0^{\ell_\alpha} \phi_\epsilon (\delta_{\alpha-2} + \langle v_\alpha - v_{\alpha-2} \rangle) dx = 0 \end{aligned}$$

Comme ϕ_ϵ est une fonction croissante, il y a forcément égalité. Donc $\mathcal{E}_{\alpha-1}(v_{\alpha-1}^*) = \mathcal{E}_{\alpha-1}(v_{\alpha-1})$ et $\mathcal{E}_\alpha(v_\alpha^*) = \mathcal{E}_\alpha(v_\alpha)$. Ainsi $v_{\alpha-1}^*$ est un minimiseur de $\mathcal{E}_{\alpha-1}(v)$ et v_α^* un minimiseur de $\mathcal{E}_\alpha(v)$. Si $v_{\alpha-1}$ est unique alors $v_{\alpha-1}^* = v_{\alpha-1}$, d'où le résultat. \square

Lemme 4.1.5 *Si $v_{\alpha-1}$ est l'unique minimiseur de $\mathcal{E}_{\alpha-1}$ sur $\mathcal{V}_{\alpha-1}$, alors, pour tout minimiseur v_α de \mathcal{E}_α sur \mathcal{V}_α , il existe ℓ_α , $0 \leq \ell_\alpha < 1$ tel que*

– pour un pas de charge

$$v_\alpha(x) \begin{cases} = v_{\alpha-1}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_\alpha \\ > v_{\alpha-1}(x) & \text{si } \ell_\alpha < x \leq 1 \end{cases} \quad (4.13)$$

– pour un pas de décharge

$$v_\alpha(x) \begin{cases} = v_{\alpha-1}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_\alpha \\ < v_{\alpha-1}(x) & \text{si } \ell_\alpha < x \leq 1 \end{cases} \quad (4.14)$$

et donc $\ell_\alpha = \max \{x \in [0, 1] : v_\alpha(x) = v_{\alpha-1}(x)\}$.

Preuve. Elle découle des trois lemmes précédents. \square

Lemme 4.1.6 (Équation d'Euler-Lagrange) *En supposant que ϕ_ϵ est différentiable, si $v_{\alpha-1}$ est unique, alors v_α vérifie l'équation d'Euler-Lagrange dans l'intervalle $(\ell_\alpha, 1)$ où $v_\alpha \neq v_{\alpha-1}$:*

$$\begin{cases} -2v_\alpha'' + \phi_\epsilon'(\delta_\alpha) = 0 & \text{si } \alpha \text{ est un pas de charge} \\ -2v_\alpha'' = 0 & \text{si } \alpha \text{ est un pas de décharge} \end{cases} \quad (4.15)$$

Alors que dans l'intervalle $(0, \ell_\alpha)$ où $v_\alpha = v_{\alpha-1}$, on a

$$0 \leq 2v_\alpha'' \leq \phi_\epsilon'(\delta_\alpha) = \phi_\epsilon'(\delta_{\alpha-1}). \quad (4.16)$$

Preuve. On raisonne formellement. Soit $w \in \mathcal{C}_0^\infty(0, 1)$. Comme v_α minimise \mathcal{E}_α sur \mathcal{V}_α , on a

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (\mathcal{E}_\alpha(v_\alpha + hw) - \mathcal{E}_\alpha(v_\alpha)). \quad (4.17)$$

Dans le cas d'un pas de charge, comme $v_\alpha > v_{\alpha-1}$ sur $(\ell_\alpha, 1)$, il vient

$$0 \leq \int_0^{\ell_\alpha} (2v'_\alpha w' + \phi'_\epsilon(\delta_{\alpha-1}) \langle w \rangle) dx + \int_{\ell_\alpha}^1 (2v'_\alpha w' + \phi'_\epsilon(\delta_\alpha) w) dx. \quad (4.18)$$

Après intégration par parties et compte tenu de la régularité de v_α , on obtient

$$0 \leq \int_0^{\ell_\alpha} (-2v''_\alpha w + \phi'_\epsilon(\delta_{\alpha-1}) \langle w \rangle) dx + \int_{\ell_\alpha}^1 (-2v''_\alpha + \phi'_\epsilon(\delta_\alpha)) w dx. \quad (4.19)$$

L'équation d'Euler s'en déduit classiquement sur l'intervalle $(\ell_\alpha, 1)$, alors que dans l'intervalle $(0, \ell_\alpha)$, du fait de la présence de la partie positive de w , on obtient seulement les inégalités annoncées.

Dans le cas d'un pas de décharge, comme $v_\alpha < v_{\alpha-1}$ sur $(\ell_\alpha, 1)$, il vient

$$0 \leq \int_0^{\ell_\alpha} (2v'_\alpha w' + \phi'_\epsilon(\delta_{\alpha-1}) \langle w \rangle) dx + \int_{\ell_\alpha}^1 2v'_\alpha w' dx. \quad (4.20)$$

Après intégration par parties et compte tenu de la régularité de v_α , on obtient

$$0 \leq \int_0^{\ell_\alpha} (-2v''_\alpha w + \phi'_\epsilon(\delta_{\alpha-1}) \langle w \rangle) dx - \int_{\ell_\alpha}^1 2v''_\alpha w dx. \quad (4.21)$$

On conclut facilement en raisonnant comme dans le cas d'un pas de charge. \square

Lemme 4.1.7 (Monotonie, convexité de v_α) *Si $v_{\alpha-1}$ est unique, alors v_α est convexe et croissant.*

Preuve. En vertu du Lemme précédent, on sait que $v''_\alpha \geq 0$ et donc v_α est convexe. Comme $v_\alpha(0) = 0$ et que $v_\alpha \geq 0$, on a $v'_\alpha(0) \geq 0$. Mais comme v_α est convexe, v'_α est croissant, donc positif. \square

Dans le lemme suivant on utilise le double indiciage, les indices latins réfèrent aux phases de charge (indices impairs) ou de décharge (indices pairs) alors que les indices grecs réfèrent aux pas de discrétisation.

Lemme 4.1.8 (Propriétés de l'ouverture cumulée) *Soit $(2i+1)_\alpha$ un pas de charge et $j_\beta \leq (2i+1)_\alpha$ les pas de discrétisation précédents. Si v_{j_β} est unique pour tout $j_\beta < (2i+1)_\alpha$, alors*

1. *L'ouverture cumulée n'évolue pas pendant les phases de décharge : $\delta_{2j} = \delta_{2j-1}$, $\forall j \leq i$.*
2. *L'ouverture cumulée au pas $(2i+1)_\alpha$ s'écrit :*

$$\delta_{(2i+1)_\alpha} = v_{(2i+1)_\alpha} - v_{2i} + \sum_{j=1}^i (v_{2j-1} - v_{2j-2}) = v_{(2i+1)_\alpha} + \sum_{j=1}^i (v_{2j-1} - v_{2j}). \quad (4.22)$$

3. L'ouverture v_{2j} vérifie :

$$v''_{2j} = 0, \quad v_{2j} < v_{2j-1} \quad \text{dans} \quad (\ell_{2j}, 1), \quad \text{et} \quad v_{2j} = v_{2j-1} \quad \text{dans} \quad (0, \ell_{2j}). \quad (4.23)$$

4. Le champ $r_i = \sum_{j=1}^i (v_{2j-1} - v_{2j})$ est dans $W^{2,\infty}(0, 1)$, convexe et croissant.

5. À tous les pas $j_\beta \leq i_\alpha$, δ_{j_β} est dans $W^{2,\infty}(0, 1)$, convexe et croissant.

Preuve.

1. Du fait de l'unicité supposée, on peut utiliser le lemme 4.1.5 et on en déduit que durant les pas de décharge l'ouverture ne peut que décroître, $v_{2j_{\beta+1}} \leq v_{2j_\beta}$ et donc $\delta_{2j_{\beta+1}} = \delta_{2j_\beta}$. Par induction, on obtient $\delta_{2j} = \delta_{2j-1}$.
2. Toujours du fait de l'unicité supposée et du lemme 4.1.5, durant les pas de charge l'ouverture ne peut que croître, $v_{(2j+1)_{\beta+1}} \geq v_{(2j+1)_\beta}$ et donc $\delta_{(2j+1)_{\beta+1}} = \delta_{(2j+1)_\beta} + v_{(2j+1)_{\beta+1}} - v_{(2j+1)_\beta}$. Par induction et en tenant compte de 1, on obtient les expressions cherchées.
3. On omet l'indice j de phase de décharge et on n'utilise que l'indice α de pas de décharge. Considérons le premier pas de décharge. D'après le lemme 4.1.5, il existe ℓ_1 tel que $v_1 < v_0$ dans $(\ell_1, 1]$ et $v_1 = v_0$ ailleurs. D'où, d'après le lemme 4.1.6, $v''_1 = 0$ dans $(\ell_1, 1)$ et donc $v'_1 = v'_1(\ell_1)$ dans $(\ell_1, 1)$. Passons au second pas de décharge. On a $v_2 < v_1$ dans $(\ell_2, 1)$ et donc $v''_2 = 0$ dans $(\ell_2, 1)$. D'où $v'_2 = v'_2(\ell_2)$ dans $(\ell_2, 1)$. On a nécessairement $\ell_2 \leq \ell_1$ sinon on aurait $v'_2(\ell_2) < v'_1(\ell_1)$ mais aussi par régularité $v'_2(\ell_2) = v'_1(\ell_1)$. Par récurrence la suite des ℓ_α est décroissante d'où le résultat.
4. La régularité de r_i est due à la régularité des v_j . En vertu de 3, on a $v''_{2j-1} - v''_{2j} = 0$ dans $(0, \ell_{2j})$ et $v''_{2j-1} - v''_{2j} = v''_{2j-1} \geq 0$ dans $(\ell_{2j}, 1)$. D'où la convexité de r_i . Comme $r_i(0) = 0$ et que $r_i \geq 0$, on a $r'_i(0) \geq 0$ et donc $r'_i \geq 0$ partout.
5. La preuve est une conséquence directe de la précédente et des propriétés de régularité, de convexité et de monotonie de v_{j_β} .

□

4.2 Unicité et indépendance vis à vis de la discrétisation

4.2.1 Unicité de la solution

Proposition 4.2.1 (Unicité en décharge) *Soit $(2i)_\alpha$ un pas de décharge. Si v_{j_β} est unique pour tout $j_\beta < (2i)_\alpha$, alors $v_{(2i)_\alpha}$ est unique.*

Preuve. L'indice $2i$ de phase de décharge est omis pour simplifier les notations.

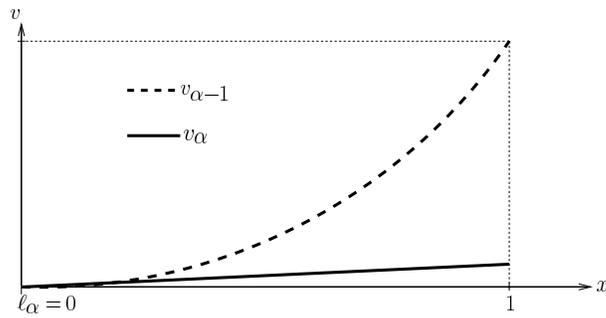
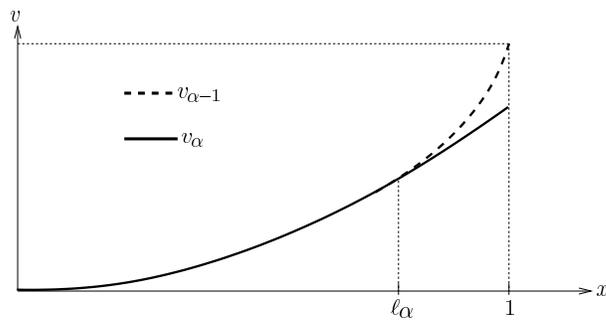
(a) cas $\ell_\alpha = 0$ (b) cas $\ell_\alpha \neq 0$

FIG. 4.4 – Solution en décharge

D'après le Lemme 4.1.5, il existe $\ell_\alpha \in [0, 1)$ tel que $v_\alpha = v_{\alpha-1}$ sur $[0, \ell_\alpha]$ et $v_\alpha < v_{\alpha-1}$ sur $(\ell_\alpha, 1]$. L'équation d'Euler (4.15) donne alors $v''_\alpha = 0$ dans $(\ell_\alpha, 1)$. Ainsi v'_α est constante partout sur $[\ell_\alpha, 1]$ et v_α est donc une droite. Cette droite est soit $v_\alpha(x) = V_\alpha x$ si $V_\alpha < v'_{\alpha-1}(0)$ (dans ce cas $\ell_\alpha = 0$), soit la droite tangente à $v_{\alpha-1}$ passant par $(1, V_\alpha)$ (il ne peut y en avoir qu'une par convexité de $v_{\alpha-1}$). \square

Proposition 4.2.2 (Unicité en charge) *Soit $(2i + 1)_\alpha$ un pas de charge. Si v_{j_β} est unique pour tout $j_\beta < (2i + 1)_\alpha$, alors $v_{(2i+1)_\alpha}$ est unique.*

Preuve. L'indice $2i + 1$ de phase de charge est omis pour simplifier les notations. Soient v_α et v_α^* deux minimiseurs de \mathcal{E}_α sur \mathcal{V}_α . Les ouvertures cumulées associées sont notées respectivement δ_α et δ_α^* . En vertu du lemme 4.1.8, on a

$$\delta_\alpha = v_\alpha + r, \quad \delta_\alpha^* = v_\alpha^* + r, \quad r = \sum_{j=1}^i (v_{2j-1} - v_{2j}). \quad (4.24)$$

Soit (a, b) une composante connexe de $\{x \in [0, 1] : v_\alpha(x) \neq v_\alpha^*(x)\}$. Comme $v_\alpha(0) = v_\alpha^*(0) = 0$ et $v_\alpha(1) = v_\alpha^*(1) = V_\alpha$ et que les minimiseurs sont croissants, on a $v_\alpha(a) = v_\alpha^*(a) \equiv v_a$ et

$v_\alpha(b) = v_\alpha^*(b) \equiv v_b$ avec $0 \leq v_a < v_b \leq V_\alpha$. On peut sans restreindre la généralité supposer que $v_\alpha > v_\alpha^*$ dans (a, b) . Soit $v \in (v_a, v_b)$. Il existe un unique point $x(v) \in (a, b)$ tel que $v_\alpha(x(v)) = v$ et de même il existe un unique point $x^*(v) \in (a, b)$ tel que $v_\alpha^*(x^*(v)) = v$. Montrons le pour v_α , le raisonnement est identique pour v_α^* . Un tel point $x(v)$ existe par continuité de v_α . Pour l'unicité il suffit de montrer que $v_\alpha'(x(v)) > 0$. Comme v_α est convexe croissante, si $v_\alpha'(x(v)) = 0$, alors $v_\alpha' = 0$ sur $(a, x(v))$ et donc $v_\alpha(x(v)) = v_a$ ce qui est une contradiction.

Donc $x(v)$ et $x^*(v)$ sont uniques. De plus, $x(v) < x^*(v)$ puisque $v_\alpha > v_\alpha^*$ sur (a, b) .

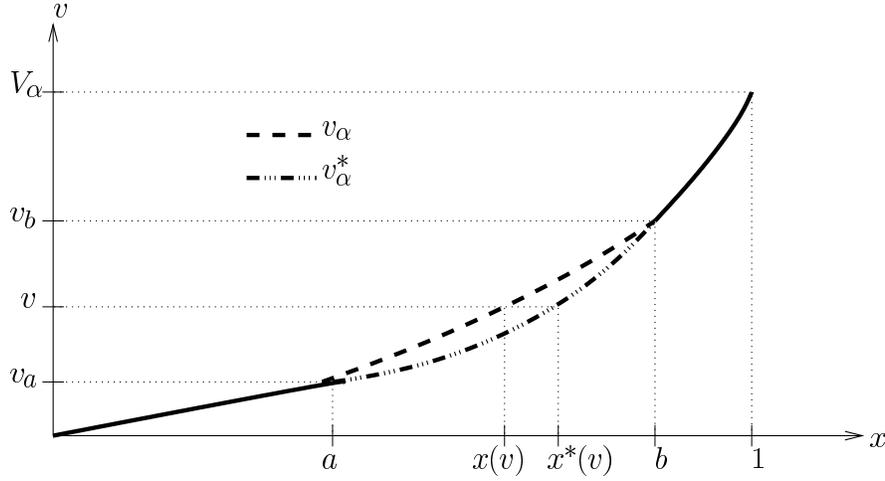


FIG. 4.5 – Unicité de la solution en charge.

En outre, comme $v_\alpha > v_\alpha^* \geq v_{\alpha-1}$, en vertu du lemme 4.1.6, on a

$$2v_\alpha''(x) = \phi_\epsilon'(\delta_\alpha(x)), \quad 2v_\alpha^{*''}(x) \leq \phi_\epsilon'(\delta_\alpha^*(x)), \quad \forall x \in (a, b). \quad (4.25)$$

Comme r est croissante, on a $r(x(v)) \leq r(x^*(v))$ et donc $\delta(x(v)) \leq \delta^*(x^*(v))$. Mais comme ϕ_ϵ est concave, on en déduit que

$$v_\alpha''(x(v)) = \frac{1}{2}\phi_\epsilon'(\delta_\alpha(x)) \geq \frac{1}{2}\phi_\epsilon'(\delta_\alpha^*(x^*(v))) \geq v_\alpha^{*''}(x^*(v)), \quad \forall v \in (v_a, v_b). \quad (4.26)$$

Comme

$$2 \int_{v_a}^v v_\alpha''(x(w))dw = 2 \int_a^{x(v)} v_\alpha''(x)v_\alpha'(x)dx = v_\alpha'^2(x(v)) - v_\alpha'^2(a)$$

et de même

$$2 \int_{v_a}^v v_\alpha^{*''}(x^*(w))dw = 2 \int_a^{x^*(v)} v_\alpha^{*''}(x)v_\alpha^{*'}(x)dx = v_\alpha^{*'}^2(x^*(v)) - v_\alpha^{*'}^2(a)$$

on en déduit l'inégalité

$$v_\alpha'^2(x(v)) - v_\alpha'^2(a) \geq v_\alpha^{*'}^2(x^*(v)) - v_\alpha^{*'}^2(a), \quad \forall v \in (v_a, v_b).$$

Mais comme $v_\alpha(a) = v_\alpha^*(a)$ et que $v_\alpha > v_\alpha^*$ sur (a, b) , on a $v_\alpha'(a) \geq v_\alpha^{*'}(a)$ et donc

$$v_\alpha'(x(v)) \geq v_\alpha^{*'}(x^*(v)), \quad \forall v \in (v_a, v_b)$$

ou de façon équivalente

$$\frac{dx}{dv}(v) \leq \frac{dx^*}{dv}(v), \quad \forall v \in (v_a, v_b). \quad (4.27)$$

Mais comme $x(v_a) = x^*(v_a) = a$ et $x(v_b) = x^*(v_b) = b$, on doit avoir

$$0 = \int_{v_a}^{v_b} \left(\frac{dx}{dv}(v) - \frac{dx^*}{dv}(v) \right) dv$$

ce qui, compte tenu de (4.27), oblige à ce que $v'_\alpha = v'^*_\alpha$ sur (a, b) et donc $v_\alpha = v^*_\alpha$. \square

À l'aide des Propositions 4.2.1 et 4.2.2, on obtient immédiatement, en raisonnant par induction, que la solution du problème incrémental est unique pour une discrétisation donnée. Il est bon de noter toutefois que l'unicité n'a été montrée que pour le minimiseur *absolu* à chaque pas de discrétisation. Il resterait à montrer que ce résultat d'unicité vaudrait toujours si on considérait des minima *relatifs*.

4.2.2 Indépendance vis à vis de la discrétisation

On va montrer dans cette sous-section que non seulement la solution du problème incrémental est unique mais qu'en plus elle ne dépend pas de la discrétisation. Pour cela il suffit de montrer que la solution obtenue pour une discrétisation quelconque du chargement est la même que celle que l'on obtient en effectuant chaque phase de charge ou de décharge en un seul pas. C'est l'objet de la Proposition suivante.

Proposition 4.2.3 *Soit respectivement $\{(v_i, \delta_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $\{(v_i^*, \delta_i^*)\}_{i \in \mathbb{N}}$ les solutions aux points d'inversion du sens de chargement du problème incrémental lors respectivement d'une discrétisation quelconque ($\alpha \in \{0, \dots, n_i\}$) et d'une discrétisation en un pas ($\alpha \in \{0, 1\}$) de chaque phase. On a nécessairement $(v_i, \delta_i) = (v_i^*, \delta_i^*)$, $\forall i \in \mathbb{N}$.*

Preuve. On raisonne par induction. On suppose que le résultat est vrai pour les $(i - 1)$ premières phases et on montre que c'est vrai pour la $i^{\text{ème}}$. On distingue les phases de charge et de décharge.

(i) *Phase de charge.* On omet l'indice i et tous les indices seront des indices α de pas de charge. On raisonne par récurrence sur les pas de charge. Considérons les deux premiers pas de charge. Appelons (v_0, δ_0) la condition initiale de la phase de charge considérée, (v_1, δ_1) et (v_2, δ_2) la solution à la fin des deux premiers pas. Appelons (v_2^*, δ_2^*) la solution correspondant à une montée en charge en un seul pas jusqu'à V_2 . Il suffit de montrer que $v_2^* = v_2$. On sait que $v_2 \geq v_1 \geq v_0$ et que $v_2^* \geq v_0$. D'où $\delta_2 = \delta_0 + v_2 - v_0$, $\delta_1 = \delta_0 + v_1 - v_0$ et $\delta_2^* = \delta_0 + v_2^* - v_0$. Posons

$$\mathcal{E}(v) = \int_0^1 \left(v'^2 + \phi_\epsilon(\delta_0 + v - v_0) \right) dx,$$

on a donc

$$v_2 = \text{Argmin}_{v \in \mathcal{V}_2: v \geq v_1} \mathcal{E}(v), \quad v_2^* = \text{Argmin}_{v \in \mathcal{V}_2: v \geq v_0} \mathcal{E}(v), \quad v_1 = \text{Argmin}_{v \in \mathcal{V}_1: v \geq v_0} \mathcal{E}(v).$$

Remarquons que si $v_2^* \geq v_1$ alors du fait de l'unicité, on a $v_2 = v_2^*$. Supposons maintenant que v_2^* n'est pas supérieur à v_1 . Comme $v_2^*(1) > v_1(1)$ et que $v_2^*(0) > v_1(0) = 0$, il existe un intervalle (a, b) tel que $v_2^*(a) = v_1(a)$, $v_2^*(b) = v_1(b)$ et $v_2^* < v_1$ sur (a, b) . Construisons les champs w_1 et w_2 suivants

$$w_1(x) = \begin{cases} v_2^*(x) & \text{si } a \leq x \leq b \\ v_1(x) & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad w_2(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{si } a \leq x \leq b \\ v_2^*(x) & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.28)$$

Comme $w_1 \in \mathcal{V}_1$ et $w_2 \in \mathcal{V}_2$, on a $\mathcal{E}(v_1) \leq \mathcal{E}(w_1)$ et $\mathcal{E}(v_2^*) \leq \mathcal{E}(w_2)$. D'où

$$\int_a^b \left(v_1'^2 + \phi_\epsilon(\delta_0 + v_1 - v_0) \right) dx \leq \int_a^b \left(v_2^{*2} + \phi_\epsilon(\delta_0 + v_2^* - v_0) \right) dx \leq \int_a^b \left(v_1'^2 + \phi_\epsilon(\delta_0 + v_1 - v_0) \right) dx$$

d'où l'égalité et donc $v_1 = v_2^*$ sur (a, b) ce qui est contradictoire.

(ii) *Phase de décharge.* On peut utiliser la propriété 3 du lemme 4.1.8 qui dit que $\delta_i^* = \delta_i = \delta_{i-1}$ et qu'il existe ℓ_i^* et ℓ_i tels que

$$v_i^{*''} = 0 \text{ sur } (\ell_i^*, 1), \quad v_i^* = v_{i-1} \text{ sur } (0, \ell_i^*), \quad v_i'' = 0 \text{ sur } (\ell_i, 1), \quad v_i = v_{i-1} \text{ sur } (0, \ell_i).$$

En raisonnant comme pour l'unicité (cf Proposition 4.2.1), on en déduit que $v_i^* = v_i$. \square

4.2.3 Récapitulatif

Compte tenu des résultats précédents —unicité en décharge (proposition 4.2.1), unicité en charge (proposition 4.2.2) et indépendance de la solution vis à vis de la discrétisation (proposition 4.2.3)— charges et décharges peuvent être résolues en un unique pas de temps (et donc seul un indice est utile dans la discrétisation). Comme le présente la Figure 4.6, les indices impairs (respectivement les indices pairs) correspondent aux demi-cycles de charge (respectivement aux demi-cycle de décharge).

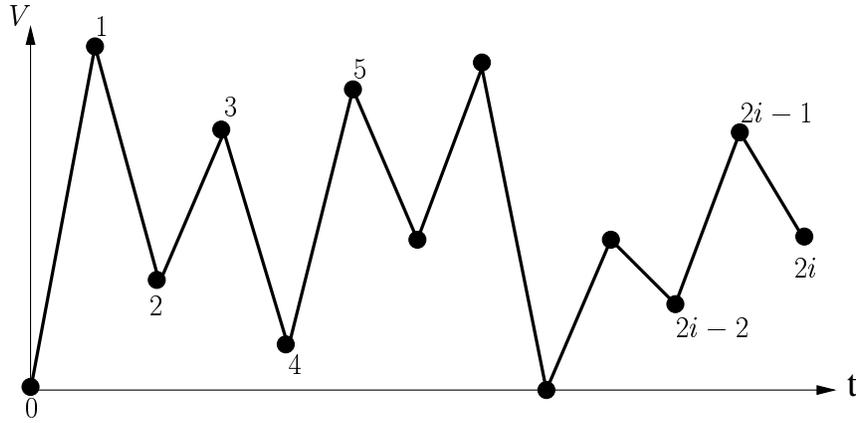


FIG. 4.6 – Discretisation du chargement

La résolution du problème revient alors à déterminer à chaque pas de temps les champs d'ouverture v et d'ouverture cumulée δ et la position de la pointe ℓ . Pour cela on écrit

– pour un pas de charge :

$$\begin{cases} v_{2i-1}(x) = v_{2i-2}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{2i-1} \\ 2v_{2i-1}''(x) = \phi_\epsilon'(\delta_{2i-1}(x)) & \text{si } \ell_{2i-1} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (4.29)$$

les conditions aux limites $v_{2i-1}(0) = 0$ et $v_{2i-1}(1) = V_{2i-1}$ et les conditions de continuité $\llbracket v_{2i-1} \rrbracket(\ell_{2i-1}) = \llbracket v_{2i-1}' \rrbracket(\ell_{2i-1}) = 0$.

– pour un pas de décharge :

$$\begin{cases} v_{2i}(x) = v_{2i-1}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{2i} \\ v_{2i}''(x) = 0 & \text{si } \ell_{2i} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (4.30)$$

les conditions aux limites $v_{2i}(0) = 0$ et $v_{2i}(1) = V_{2i}$ et les conditions de continuité $[[v_{2i}]](\ell_{2i}) = [[v_{2i}']](\ell_{2i}) = 0$.

4.3 Réponse sous chargement cyclique simple

4.3.1 Position du problème

Appliquons les résultats précédents dans le cas d'un chargement cyclique d'amplitude constante V_M avec "retour à zéro", *i.e.* $V_m = 0$ (aussi appelé *chargement répété* dans la littérature). On traitera dans le Chapitre 7 le cas d'un chargement cyclique de rapport d'ouverture $R = V_m/V_M$ non nul. L'unicité et l'indépendance de la solution à la discrétisation permettent de calculer chaque demi-cycle en un unique pas de temps. L'indice $i \in \mathbb{N}^*$ se réfère à un demi-cycle, les indices impairs étant relatifs aux demi-cycles de charge et les indices pairs aux demi-cycles de décharge, cf Figure 4.7.

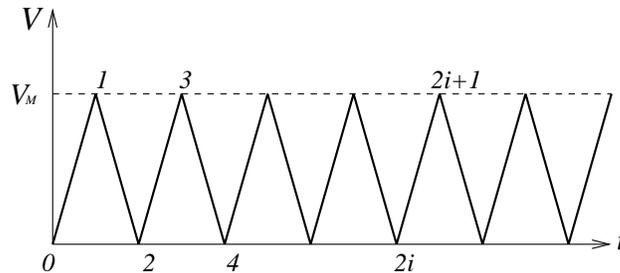


FIG. 4.7 – Ouverture cyclique d'amplitude V_M imposée à l'extrémité du film.

- $V(t)$ croît de $V_{2i} = 0$ à $V_{2i+1} = V_M$ quand t croît de $2i$ à $2i + 1$ (demi-cycle de charge).
- $V(t)$ décroît de $V_{2i+1} = V_M$ à $V_{2i+2} = 0$ quand t croît de $2i + 1$ à $2i + 2$ (demi-cycle de décharge).

Soit respectivement \mathcal{V}_0 et \mathcal{V}_1 l'ensemble des champs d'ouverture admissibles respectivement à la fin des demi-cycles de décharge et de charge :

$$\mathcal{V}_0 = \{v \in W^{1,2}(0, 1), v(0) = 0, v \geq 0, v(1) = 0\}, \mathcal{V}_1 = \{v \in W^{1,2}(0, 1), v(0) = 0, v \geq 0, v(1) = V_M\}$$

Le problème incrémental s'écrit :

Sachant que $v_0 = \delta_0 = 0$, trouver, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $v_i \in \mathcal{V}_i$ et δ_i tels que

$$\mathcal{E}_i(v_i) \leq \mathcal{E}_i(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_i \quad \text{et} \quad \delta_i = \delta_{i-1} + \langle v_i - v_{i-1} \rangle \quad (4.31)$$

où l'énergie est donnée par

$$\mathcal{E}_i(v) = \int_0^1 v'(x)^2 dx + \int_0^1 \phi_\epsilon \left(\delta_{i-1}(x) + \langle v(x) - v_{i-1}(x) \rangle \right) dx \quad (4.32)$$

et $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_0$ si i est pair, $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_1$ si i est impair.

4.3.2 Propriétés de la réponse

On peut utiliser les résultats des sections précédentes de ce chapitre concernant l'existence, la structure et l'unicité de la solution. De plus, à la fin des demi-cycles de décharge on obtient le résultat fondamental suivant

Proposition 4.3.1 *L'ouverture revient à zéro à la fin des demi-cycles de décharge et l'ouverture cumulée n'évolue pas lors des demi-cycles de décharge :*

$$v_{2i} = 0, \quad \delta_{2i} = \delta_{2i-1} = \sum_{j=1}^i v_{2j-1}. \quad (4.33)$$

Preuve. Comme $0 \in \mathcal{V}_0$, on peut écrire

$$\mathcal{E}_{2i}(0) = \int_0^1 \phi_\epsilon(\delta_{2i-1}) dx \leq \int_0^1 \left(v'^2 + \phi_\epsilon(\delta_{2i-1} + \langle v - v_{2i-1} \rangle) \right) dx = \mathcal{E}_{2i}(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}_0,$$

qui montre que 0 est un minimiseur de \mathcal{E}_{2i} sur \mathcal{V}_0 . Comme on sait qu'il est unique, on a $v_{2i} = 0$. Le reste de la proposition est évident. \square

En vertu de ce résultat, l'énergie lors des demi-cycles de charge peut s'écrire

$$\mathcal{E}_{2i+1}(v) = \mathcal{P}(v) + \mathcal{S}(\delta_{2i-1} + v). \quad (4.34)$$

On obtient la Proposition suivante

Proposition 4.3.2 *L'ouverture cumulé δ_{2i+1} et l'ouverture v_{2i+1} possèdent les propriétés suivantes :*

1. Les champs $x \mapsto v_{2i+1}(x)$ et $x \mapsto \delta_{2i+1}(x)$ sont des fonctions croissantes de x .
2. Le support du champ d'ouverture $x \mapsto v_{2i+1}(x)$ est un intervalle de la forme $[\ell_i, 1]$ avec $0 \leq \ell_i < 1$.
3. Le champ d'ouverture v_{2i+1} satisfait l'équation d'Euler

$$-2v_{2i+1}'' + \phi_\epsilon'(\delta_{2i+1}) = 0 \quad \text{dans } (\ell_i, 1) \quad (4.35)$$

et les conditions aux limites

$$v_{2i+1}(1) = V_M, \quad v_{2i+1}(\ell_i) = 0, \quad v_{2i+1}'(\ell_i) = 0 \quad \text{si } \ell_i > 0. \quad (4.36)$$

4. Le champ d'ouverture v_{2i+1} satisfait l'équation variationnelle suivante

$$2 \int_0^1 v_{2i+1}'(x) v'(x) dx + \int_{\ell_i}^1 \phi_\epsilon'(\delta_{2i+1}(x)) v(x) dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(0, 1). \quad (4.37)$$

5. Les champs v_{2i+1} et δ_{2i+1} sont des fonctions convexes de x .
6. La suite $\{\ell_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
7. Les champs v_{2i+1} et δ_{2i+1} sont strictement croissants sur leur support $(\ell_i, 1)$.
8. Les suites $\{v_{2i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $\{\delta_{2i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ sont croissantes.

Preuve

1. Supposons que v_{2i+1} soit non croissant, alors il existe x_1, x_2 et v_0 tels que $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, $v_{2i+1}(x_1) = v_{2i+1}(x_2) = v_0$ et $v_{2i+1} > v_0$ dans (x_1, x_2) . Considérons le champ w défini par $w = v_0$ dans (x_1, x_2) , et $w = v_{2i+1}$ ailleurs. Ce champ appartiendrait à \mathcal{V}_1 et son énergie satisferait $\mathcal{E}_i(w) < \mathcal{E}_i(v_{2i+1})$ parce que $w \leq v_{2i+1}$ et $w'^2 \leq v_{2i+1}'^2$, les inégalités étant strictes dans des ouverts non vides. Mais ceci est impossible puisque v_{2i+1} est un minimiseur. Donc v_{2i+1} est un fonction croissante de x et par induction δ_{2i+1} aussi. \square

2. C'est une conséquence directe de la monotonie de v_{2i+1} . \square

3. L'équation d'Euler s'obtient classiquement alors que les conditions en $x = \ell_i$ sont des conséquences de la régularité de v_{2i+1} (puisque v_{2i+1} est dans $W^{2,+\infty}(0, 1)$, il est aussi continûment différentiable). \square

4. Comme $2v_{2i+1}'' = \phi'_\epsilon(\delta_{2i+1})$ dans $(\ell_i, 1)$ et $2v_{2i+1}'' = 0$ dans $(0, \ell_i)$, en multipliant ces deux relations par $v \in C_0^\infty(0, 1)$ et en intégrant sur $(0, 1)$, il vient

$$-2 \int_0^{\ell_i} v_{2i+1}'' v \, dx - 2 \int_{\ell_i}^1 v_{2i+1}'' v \, dx + \int_{\ell_i}^1 \phi'_\epsilon(\delta_{2i+1}) v \, dx = 0.$$

En intégrant par parties les deux premiers termes et en tenant compte des conditions aux limites (4.36), on obtient (4.37). \square

5. La convexité de v_{2i+1} se déduit de l'équation d'Euler et de la monotonie de ϕ_ϵ . \square

6. Montrons que $\ell_i \leq \ell_{i-1}$. Supposons le contraire, $\ell_i > \ell_{i-1} \geq 0$. Alors les champs v_{2i+1} et v_{2i-1} satisferaient respectivement $2v_{2i+1}'' = \phi'_\epsilon(\delta_{2i+1})$ et $2v_{2i-1}'' = \phi'_\epsilon(\delta_{2i-1})$ dans $(\ell_i, 1)$. Comme $\delta_{2i+1} = \delta_{2i-1} + v_{2i+1} \geq \delta_{2i-1}$ et comme ϕ_ϵ est concave, on aurait $v_{2i+1}'' \leq v_{2i-1}''$ dans $(\ell_i, 1)$. Mais $v_{2i+1}(\ell_i) = v_{2i+1}'(\ell_i) = 0$ alors que, comme v_{2i-1} est croissante et convexe, $v_{2i-1}(\ell_i) > 0$ et $v_{2i-1}'(\ell_i) > 0$. Il s'ensuivrait que $v_{2i+1}' < v_{2i-1}'$ dans $(\ell_i, 1)$. En intégrant cette inégalité sur tout l'intervalle $(\ell_i, 1)$ et en tenant compte de la condition à la limite $v_{2i+1}(1) = v_{2i-1}(1) = V_M$ on aurait $v_{2i-1}(\ell_i) < 0$, ce qui est impossible. \square

7. En vertu de la propriété précédente, $[\ell_i, 1]$ est le support à la fois de v_{2i+1} et de δ_{2i+1} . Comme v_{2i+1} est convexe, v_{2i+1}' est croissante. Comme $v_{2i+1}'(\ell_i) \geq 0$, $v_{2i+1}' > 0$ dans $(\ell_i, 1)$. En effet, si $v_{2i+1}'(x_0) = 0$ pour un certain $x_0 \in (\ell_i, 1)$, alors $v_{2i+1}'(x) = 0, \forall x \leq x_0$, et alors $v_{2i+1}(x) = 0, \forall x \leq x_0$, ce qui est en contradiction avec le support de v_{2i+1} . Donc v_{2i+1} est strictement croissante sur son support et par conséquent δ_{2i+1} aussi. \square

8. Par construction on a $\delta_{2i+1} = \delta_{2i-1} + v_{2i+1} \geq \delta_{2i-1}$. Prouvons que $v_{2i+1} \geq v_{2i-1}$. Supposons que non, alors il existerait x_1 et x_2 tels que $\ell_{i-1} \leq x_1 < x_2 \leq 1$, $v_{2i+1}(x_1) = v_{2i-1}(x_1)$, $v_{2i+1}'(x_1) \leq v_{2i-1}'(x_1)$, $v_{2i+1} < v_{2i-1}$ dans (x_1, x_2) , $v_{2i+1}(x_2) = v_{2i-1}(x_2)$ et $v_{2i+1}'(x_2) \geq v_{2i-1}'(x_2)$. Mais, à cause de la concavité de ϕ_ϵ et de l'équation d'Euler que doivent vérifier v_{2i-1} et v_{2i+1} sur l'intervalle $(\ell_{i-1}, 1)$, on aurait aussi $v_{2i+1}'' \leq v_{2i-1}''$ sur (x_1, x_2) . En intégrant cette inégalité on obtiendrait

$$0 \geq \int_{x_1}^{x_2} (v_{2i+1}'' - v_{2i-1}'') \, dx = v_{2i+1}'(x_2) - v_{2i+1}'(x_1) + v_{2i-1}'(x_1) - v_{2i-1}'(x_2) \geq 0.$$

Ainsi, on devrait avoir $v'_{2i+1}(x_1) = v'_{2i-1}(x_1)$ et donc $0 \geq \int_{x_1}^x (v''_{2i+1} - v''_{2i-1}) dx = v'_{2i+1}(x) - v'_{2i-1}(x)$ dans (x_1, x_2) . En intégrant cette inégalité sur (x_1, x_2) , on aurait

$$0 = v_{2i+1}(x_2) - v_{2i+1}(x_1) + v_{2i-1}(x_1) - v_{2i-1}(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} (v'_{2i+1} - v'_{2i-1}) dx \leq 0.$$

Donc on devrait avoir $v'_{2i+1} = v'_{2i-1}$ dans (x_1, x_2) et donc $v_{2i+1} = v_{2i-1}$, ce qui est une contradiction. \square

4.3.3 Mise en évidence de la fatigue

Nous allons montrer dans cette sous-section que l'on peut effectivement rendre compte de la fatigue avec une énergie de surface de BARENBLATT alors que c'est impossible avec une énergie de surface de GRIFFITH. Pour cela nous allons calculer la réponse à la fin du premier cycle, puis montrer que cycle après cycle le film se décolle progressivement et que ce processus ne s'arrête jamais —contrairement à ce qui se passe avec l'énergie de surface de GRIFFITH qui conduit à une adaptation en un cycle.

Réponse à la fin du premier demi-cycle

À la fin de la première montée en charge, le film est partiellement décollé sur l'intervalle $(0, \ell_1)$, l'ouverture et l'ouverture cumulée étant égale à v_1 . En vertu des propositions précédentes, v_1 et ℓ_1 sont donnés par

$$2v_1'' = \phi'_\epsilon(v_1) \quad \text{dans} \quad (\ell_1, 1), \quad v_1(1) = V_M, \quad v_1(\ell_1) = 0, \quad v_1'(\ell_1) = 0 \text{ si } \ell_1 > 0. \quad (4.38)$$

Il est facile de voir que l'équation différentielle autonome régissant v_1 admet une intégrale première

$$v_1'(x)^2 = \phi_\epsilon(v_1(x)) + C, \quad \forall x \in (\ell_1, 1), \quad (4.39)$$

où C est une constante à déterminer. Sa détermination demande de distinguer les cas $\ell_1 > 0$ du cas $\ell_1 = 0$.

1. $\ell_1 > 0$. Alors les conditions aux limites en ℓ_1 donnent $C = 0$, ce qui signifie qu'en chaque point x de la zone cohésive l'énergie potentielle et l'énergie de surface sont équi-réparties. La pointe ℓ_1 de la zone cohésive, l'énergie potentielle $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}(v_1)$ et l'énergie de surface $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}(v_1)$ sont obtenues par quadrature :

$$1 - \ell_1 = \int_0^{V_M} \frac{dv}{\sqrt{\phi_\epsilon(v)}}, \quad \mathcal{P}_1 = \mathcal{S}_1 = \int_0^{V_M} \sqrt{\phi_\epsilon(v)} dv. \quad (4.40)$$

Pour que l'on soit dans ce cas, il faut que V_M soit assez petit :

$$\int_0^{V_M} \frac{dv}{\sqrt{\phi_\epsilon(v)}} < 1. \quad (4.41)$$

2. $\ell_1 = 0$. Dans ce cas C est obtenu à l'aide des conditions aux limites $v_1(0) = 0$ et $v_1(1) = V_M$, ce qui conduit à l'équation

$$1 = \int_0^{V_M} \frac{dv}{\sqrt{\phi_\epsilon(v) + C}} \quad (4.42)$$

qui admet une solution unique positive pourvu que

$$\int_0^{V_M} \frac{dv}{\sqrt{\phi_\epsilon(v)}} \geq 1. \quad (4.43)$$

L'énergie potentielle \mathcal{P}_1 et l'énergie de surface \mathcal{S}_1 sont toujours obtenues par quadrature :

$$\mathcal{P}_1 = \int_0^{V_M} \sqrt{\phi_\epsilon(v) + C} \, dv, \quad \mathcal{S}_1 = \int_0^{V_M} \frac{\phi_\epsilon(v)}{\sqrt{\phi_\epsilon(v) + C}} \, dv. \quad (4.44)$$

Remarque 4.3.3 On notera que ces formules restent valables si l'on prend pour énergie de surface l'énergie de GRIFFITH ϕ_0 . On retrouve alors les expressions (3.29) et (3.30) obtenues au Chapitre 3.

Réponse après un grand nombre de cycles

Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir le résultat fondamental suivant

Proposition 4.3.4 *Quelle que soit l'amplitude $V_M > 0$ du chargement, la pointe de la zone cohésive ℓ_i décroît vers 0, l'ouverture v_i converge (de façon monotone) vers $V_M x$, l'énergie potentielle $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}(v_{2i+1})$ décroît vers V_M^2 et l'énergie de surface $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}(\delta_{2i+1})$ croît vers 1 quand le nombre de cycles i tend vers l'infini.*

Preuve

1. Montrons que $\{\mathcal{P}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sont une suite, respectivement, décroissante et croissante. Nous savons déjà grâce à la Proposition 4.3.2 que $\{\ell_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Comme $\delta_{2i+1} \geq \delta_{2i-1}$ et comme ϕ_ϵ est monotone croissante, on a $\mathcal{S}_i \geq \mathcal{S}_{i-1}$. Comme v_{2i+1} est le minimiseur de \mathcal{E}_{2i+1} sur \mathcal{V}_1 , on a

$$\mathcal{E}_{2i+1}(v_{2i+1}) = \mathcal{P}_i + \mathcal{S}_i \leq \mathcal{E}_{2i+1}(v_{2i-1}) = \mathcal{P}_{i-1} + \mathcal{S}(\delta_{2i-1} + v_{2i-1}).$$

Mais comme $v_{2i+1} \geq v_{2i-1}$, on a aussi $\delta_{2i+1} \geq \delta_{2i-1} + v_{2i-1}$ et $\mathcal{S}_i \geq \mathcal{S}(\delta_{2i-1} + v_{2i-1})$. Donc $\mathcal{P}_i \leq \mathcal{P}_{i-1}$. \square

2. Montrons que v_{2i+1} converge faiblement, au sens de la norme $H^1(0, 1)$ vers $v_\infty \in \mathcal{V}_1$. Comme $i \mapsto \mathcal{P}_i$ est une suite décroissante, $i \mapsto v'_{2i+1}$ est une suite bornée dans \mathcal{V}_1 dont on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement vers $v_\infty \in \mathcal{V}_1$. Par conséquent la sous-suite $v_i(x)$ converge simplement presque partout vers $v_\infty(x)$. On sait d'autre part que $i \mapsto v_i$ est une suite croissante, donc la limite v_∞ est nécessairement unique et donc toute la suite $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge. \square

3. Montrons que $\lim_{i \rightarrow \infty} \ell_i = 0$. La suite $\{\ell_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ étant décroissante et positive, elle converge vers une limite $\ell_\infty \geq 0$. Supposons que $\ell_\infty > 0$. Quel que soit $x \in (\ell_\infty, 1)$ il existe un indice $I(x)$ à partir duquel $v_{2i+1}(x)$ devient strictement positif. Comme $i \mapsto v_{2i+1}$ est croissante, $\delta_{2i+1}(x)$ croît vers l'infini et donc $i \mapsto \phi'_\epsilon(\delta_{2i+1}(x))$ est une suite décroissante convergente vers 0. En vertu du théorème de Beppo Levi sur la convergence monotone, on en déduit que $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\ell_\infty}^1 \phi'_\epsilon(\delta_{2i+1}) v \, dx = 0$ pour tout $v \in C_0^\infty(0, 1)$. En passant à la limite dans l'équation variationnelle (4.37), nous obtenons $\int_0^1 v'_\infty v' \, dx = 0$ et donc $v''_\infty = 0$. Mais comme $v_\infty = 0$ dans $(0, \ell_\infty)$, on a nécessairement $v_\infty = 0$ partout, ce qui est impossible puisque $v_\infty(0) = V_M > 0$. \square

4. Montrons que $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{S}_i = 1$. Quel que soit $x \in (0, 1)$ il existe un indice $I(x)$ à partir duquel $v_{2i+1}(x)$ devient strictement positive. Comme $i \mapsto v_{2i+1}$ est croissante, $\delta_{2i+1}(x)$ croît vers l'infini

et donc $i \mapsto \phi_\epsilon(\delta_{2i+1}(x))$ est une suite croissante convergeant vers 1. Grâce au théorème de Beppo Levi de convergence monotone, on en déduit que $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 \phi_\epsilon(\delta_{2i+1}) dx = 1$. \square

5. *Montrons que $v_\infty(x) = V_M x$.* Comme $\delta_{2i+1}(x)$ croît vers l'infini pour tout $x \in (0, 1)$, on déduit toujours du théorème de Beppo Levi que $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 \phi'_\epsilon(\delta_{2i+1}) v dx = 0$ pour tout $v \in \mathcal{C}_0^\infty(0, 1)$. En passant à la limite dans l'équation variationnelle (4.37) on obtient $\int_0^1 v'_\infty v' dx = 0$ et donc $v''_\infty = 0$ dans $(0, 1)$. Mais comme $v_\infty(0) = 0$ et $v_\infty(1) = V_M$, on obtient $v_\infty(x) = V_M x$. \square

6. *Montrons que $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_i = V_M^2$.* La suite $i \mapsto v''_{2i+1}$ est bornée dans $L^\infty(0, 1)$ par $\phi'_\epsilon(0)/2$. Donc la suite $i \mapsto v_{2i+1}$ converge fortement dans $H^1(0, 1)$ vers v_∞ . D'où $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_i = \mathcal{P}(v_\infty) = V_M^2$. \square

4.3.4 Bilans d'énergie

Du fait de l'unicité de la solution et de son indépendance vis à vis de la discrétisation, il est possible de déterminer la solution pour n'importe quel temps intermédiaire. Considérons le $(i+1)^{\text{ème}}$ demi-cycle de charge et prenons la valeur V de l'ouverture imposée en $x = 1$ comme paramètre de temps. Le champ d'ouverture $v[V] : x \mapsto v[V](x)$ à cet instant là peut se déterminer en considérant un pas de temps depuis le début du $(i+1)^{\text{ème}}$ demi-cycle de charge, *i.e.* entre $V_{2i} = 0$ et V . Compte-tenu de la monotonie en temps, cela revient à minimiser $\mathcal{P}(v) + \mathcal{S}(\delta_{2i-1} + v)$ parmi les v vérifiant $v(1) = V$. On peut utiliser les résultats de la section 4.1 et on sait que $v[V] \in W^{2,\infty}(0, 1)$ et qu'il existe $\ell[V] \in [0, 1)$ tel que

$$v[V] = 0 \quad \text{dans} \quad [0, \ell[V]], \quad 2v[V]'' = \phi'_\epsilon(\delta_{2i-1} + v[V]) \quad \text{dans} \quad (\ell[V], 1).$$

De plus $V \mapsto \ell[V]$ est décroissante, alors que $V \mapsto v[V]$ est croissante. En notant $\dot{v}[V]$ la vitesse d'ouverture, *i.e.* la dérivée de $V \mapsto v[V]$, en multipliant l'équation d'Euler par $\dot{v}[V]$ et en intégrant, il vient

$$0 = -2 \int_0^1 v[V]'' \dot{v}[V] dx + \int_{\ell[V]}^1 \phi'_\epsilon(\delta_{2i-1} + v[V]) \dot{v}[V] dx.$$

En intégrant par parties, en tenant compte des conditions aux limites, en remarquant que $\dot{v}[V](1) = 1$ et en notant $T[V]$ l'effort tranchant adimensionnalisé en $x = 1$,

$$T[V] = 2v[V]'(1), \tag{4.45}$$

on obtient

$$T[V] = 2 \int_0^1 v[V]' \dot{v}[V]' dx + \int_{\ell[V]}^1 \phi'_\epsilon(\delta_{2i-1} + v[V]) \dot{v}[V] dx.$$

On reconnaît dans les deux termes de droite, la dérivée par rapport à V de, respectivement, l'énergie potentielle $\mathcal{P}[V]$ et de l'énergie de surface $\mathcal{S}[V]$ à l'instant V :

$$T[V] = \dot{\mathcal{P}}[V] + \dot{\mathcal{S}}[V], \tag{4.46}$$

équation qui n'est rien d'autre que le bilan des puissances à l'instant V , $T[V]$ représentant la puissance des efforts extérieurs. En l'intégrant sur le demi-cycle, on obtient le bilan d'énergie

$$\int_0^{V_M} T[V] dV = \mathcal{P}_i + \mathcal{S}_i - \mathcal{S}_{i-1}. \tag{4.47}$$

On a vu que, lors de la première montée en charge, il y a équi-répartition du travail des efforts extérieurs entre l'énergie potentielle et l'énergie de surface. Lors de la première décharge l'énergie

de surface n'évolue pas alors que l'énergie potentielle est intégralement restituée. Lors des montées en charge suivantes, le film acquiert une énergie potentielle moindre, alors que l'énergie de surface continue de croître. Par conséquent, d'un point de vue énergétique, le processus de fatigue consiste en une perte progressive de l'énergie potentielle et en un gain progressif de l'énergie de surface. Le processus ne s'arrête que lorsque le film est totalement décollé, ce qui n'a lieu qu'asymptotiquement en raison de la fixation en $x = 0$ qui fait qu'il subsiste toujours un peu de cohésion au voisinage de ce point.

Chapitre 5

Résolution dans le cas du modèle de Dugdale

5.1 Structure générale de la solution

Le Chapitre 3 a permis de rejeter l'hypothèse de GRIFFITH sur l'énergie de surface (indépendante de l'ouverture en mode I) pour rendre compte du phénomène de fatigue. Dans la formulation présentée au Chapitre 2, il convient donc de choisir des énergies de surface de type BARENBLATT, c'est à dire dépendantes de l'ouverture cumulée δ (pour un problème de type I) entre le film et le socle au cours du temps. Dans ce Chapitre on fait le choix d'une énergie de surface de DUGDALE, *i.e.* de la forme la plus simple possible pour une énergie de surface de type BARENBLATT, afin de résoudre le problème de façon quasi-analytique. En reprenant la définition du Chapitre 2 et les notations du Chapitre 3, la densité d'énergie de surface s'exprime sous la forme adimensionnalisée suivante

$$\phi_\epsilon(\delta) = \begin{cases} \delta/\epsilon & \text{si } \delta \leq \epsilon \\ 1 & \text{si } \delta \geq \epsilon \end{cases} \quad (5.1)$$

où ϵ est proportionnel au rapport entre l'ouverture cumulée critique δ_c et la longueur L du film. Ainsi lorsque, en un point x , l'ouverture cumulée $\delta(x)$ atteint la valeur critique ϵ , le décollement du film est complet au point x . Autrement dit, les forces cohésives s'opposant au décollement du film s'annulent dès que $\delta > \epsilon$.

On considère tout d'abord le cas d'un chargement cyclique simple d'amplitude V_M avec retour à zéro. Comme l'ouverture cumulée n'évolue pas lors des décharges et comme l'ouverture revient à 0 à la fin de chaque décharge, on ne s'intéressera qu'aux phases de charge et l'indice $i \in \mathbb{N}^*$ fera référence au $i^{\text{ème}}$ demi-cycle de charge. On peut appliquer les résultats du chapitre précédent et on sait que le champ d'ouverture $x \mapsto v_i$ et le champ d'ouverture cumulée δ_i sont des fonctions positives, croissantes, convexes et continûment différentiables. De plus les suites $i \mapsto v_i$ et $i \mapsto \delta_i$ sont croissantes. Comme l'ouverture cumulée à la fin du cycle i peut s'écrire :

$$\delta_i = \sum_{j=1}^i v_j, \quad (5.2)$$

δ_i a le même support que v_i . On peut donc *a priori* envisager que les champs v_i et δ_i sont divisés en 3 zones :

1. Une **zone parfaitement collée** : l'intervalle $[0, \ell_i]$ où $v_i = \delta_i = 0$. Cette zone se réduira au point $\{0\}$ au bout d'un nombre suffisant de cycles.

2. Une **zone partiellement décollée** ou **zone cohésive** : l'intervalle (ℓ_i, λ_i) où $0 < \delta_i < \epsilon$. Cette zone existe nécessairement à chaque cycle du fait des conditions aux limites, puisque $\delta_i(0) = 0$ et $\delta_i(1) = iV_M > 0$. Elle peut s'étendre jusqu'à l'extrémité 1, dans ce cas $\lambda_i = 1$, lors des premiers cycles si l'amplitude du chargement est trop faible (si $V_M \leq \epsilon$). Cela correspondra à la phase dite d'**amorçage**.
3. Une **zone parfaitement décollée** ou **zone non cohésive** : l'intervalle $(\lambda_i, 1)$ où $\delta_i > \epsilon$. Cette zone n'existera pas (l'intervalle sera vide) lors de la phase d'amorçage.

La résolution, *i.e.* la détermination de ℓ_i , λ_i , v_i et δ_i , se fait

1. en résolvant les équations d'Euler dans les zones cohésive et non cohésive :

$$v_i'' = \frac{1}{2\epsilon} \quad \text{dans } (\ell_i, \lambda_i), \quad v_i'' = 0 \quad \text{dans } (\lambda_i, 1). \quad (5.3)$$

2. en écrivant les conditions aux limites :

$$v_i(0) = 0, \quad v_i(1) = V_M. \quad (5.4)$$

3. en écrivant la continuité de v_i et de v_i' à la limite entre la zone cohésive et la zone non cohésive si cette dernière existe :

$$[[v_i]](\lambda_i) = [[v_i']](\lambda_i) = 0 \quad \text{si } \lambda_i < 1. \quad (5.5)$$

En ℓ_i les conditions à écrire sont différentes suivant que $\ell_i = 0$ ou $\ell_i > 0$. Dans le second cas, par continuité $v_i'(\ell_i) = 0$, alors que dans le premier on a seulement $v_i'(0) \geq 0$:

$$\left(v_i(\ell_i) = v_i'(\ell_i) = 0 \quad \text{et } \ell_i > 0 \right) \quad \text{ou} \quad \left(v_i'(0) \geq 0 \quad \text{et } \ell_i = 0 \right). \quad (5.6)$$

4. en écrivant que l'ouverture cumulée vaut ϵ en λ_i quand $\lambda_i < 1$:

$$\left(\delta_i(\lambda_i) = \epsilon \quad \text{et } \lambda_i < 1 \right) \quad \text{ou} \quad \left(\delta_i(1) \leq \epsilon \quad \text{et } \lambda_i = 1 \right). \quad (5.7)$$

Remarque 5.1.1 Les équations (5.3), (5.4) et (5.5) permettent de déterminer v_i en supposant connus ℓ_i et λ_i , alors que (5.6) et (5.7) permettent de déterminer ℓ_i et λ_i . Toutes ces conditions sont en fait des conditions d'optimalité de l'énergie et on sait que ce problème admet une solution unique.

5.2 Première montée en charge

La solution du problème de minimisation à la fin de la première montée en charge dépend de la valeur du paramètre ϵ . On distingue ainsi deux situations différentes selon que ϵ est faible (cas des films longs) ou que ϵ est grand (cas des films courts). Dans la suite, on n'étudiera que le cas des films longs, la solution pour les films courts étant proposée succinctement dans la *Remarque 5.2.2*

Proposition 5.2.1 *La configuration du décollement des films longs ($\epsilon < 1/2$) dépend de l'intensité V_M de l'amplitude de l'ouverture cyclique imposée. On distingue 3 cas :*

- si $0 < V_M \leq \epsilon$, alors le film est parfaitement collé sur $[0, \ell_1]$ et partiellement décollé sur $(\ell_1, 1)$. Il n'y a pas de zone parfaitement décollée : $\lambda_1 = 1$.

Le champ d'ouverture v_1 s'écrit

$$v_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_1 \\ (x - \ell_1)^2/4\epsilon & \text{si } \ell_1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

où ℓ_1 , la position de la tête de zone d'amorçage, est donnée par

$$\ell_1 = 1 - \sqrt{4\epsilon V_M} \quad (5.9)$$

- si $\epsilon < V_M < 1 - \epsilon$, alors le film est parfaitement collé sur $[0, \ell_1]$, partiellement décollé sur (ℓ_1, λ_1) et parfaitement décollé sur $(\lambda_1, 1)$.

Le champ d'ouverture prend alors la forme

$$v_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_1 \\ (x - \ell_1)^2/4\epsilon & \text{si } \ell_1 \leq x \leq \lambda_1 \\ \frac{(\lambda_1 - \ell_1)}{2\epsilon}(x - \lambda_1) + (\lambda_1 - \ell_1)^2/4\epsilon & \text{si } \lambda_1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (5.10)$$

où ℓ_1 et λ_1 sont respectivement la tête de zone partiellement décollée et la tête de zone décollée et vérifient

$$\ell_1 = 1 - V_M - \epsilon \quad \lambda_1 = 1 - V_M + \epsilon \quad (5.11)$$

- si $V_M \geq 1 - \epsilon$, alors le film est partiellement décollé sur $(0, \lambda_1)$ et complètement décollé sur $(\lambda_1, 1)$. La zone parfaitement collée se réduit au point 0, $\ell_1 = 0$.

L'ouverture s'écrit

$$v_1(x) = \begin{cases} x^2/4\epsilon + Ax & \text{si } 0 \leq x \leq \lambda_1 \\ \left(\frac{\lambda_1}{2\epsilon} + A\right)(x - \lambda_1) + \frac{\lambda_1^2}{4\epsilon} + A\lambda_1 & \text{si } \lambda_1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\text{avec } \lambda_1 = -2\epsilon A + 2\epsilon\sqrt{A^2 + 1} \quad (5.13)$$

et où A est la solution du polynôme suivant

$$4\epsilon A^3 + [1 - 2\epsilon(V_M + \epsilon)]A^2 + 4\epsilon A + [1 - (V_M + \epsilon)(V_M - \epsilon) - 4\epsilon^2] = 0 \quad (5.14)$$

Remarque 5.2.2 Si on considère un film court (i.e. si $\epsilon \geq 1/2$), alors la configuration du film est l'une des 3 suivantes :

- si $0 < V_M \leq 1/4\epsilon$, alors le film est parfaitement collé sur $[0, \ell_1]$ et partiellement décollé sur $(\ell_1, 1)$, le champ d'ouverture étant donné par (5.8) et ℓ_1 par (5.9).

- si $1/4\epsilon < V_M < \epsilon$, alors le film est partiellement décollé sur $[0, 1)$ et le champ d'ouverture prend la forme $v_1(x) = x^2/4\epsilon + (V_M - 1/4\epsilon)x \quad \forall x \in [0, 1)$.
- si $V_M \geq \epsilon$, alors le film est partiellement décollé sur $[0, \lambda_1)$ et complètement décollé sur $(\lambda_1, 1)$. L'ouverture est donnée par (5.12) et λ_1 par (5.13).

On supposera désormais que $\epsilon < 1/2$ car un des objectifs est de passer à la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ afin d'exhiber des lois continues de fissuration en fatigue.

5.3 Nombre de cycles d'amorçage N_a .

5.3.1 À propos du phénomène d'endurance

Comme on l'a vu précédemment lors de l'étude du premier cycle, pour des amplitudes de chargement V_M assez faibles, il n'existe aucun point x le long du film où le décollement est total. Cependant il apparaît dès la mise en charge (en raison de la "singularité" introduite par l'ouverture imposée en $x = 1$) une zone de décollement partiel de longueur $d = 1 - \ell_1$, longueur qui est d'autant plus petite que V_M est faible (voir Proposition 5.2.1). Cette zone, appelée "zone d'amorçage" du décollement dans la suite, peut ne pas se propager au cours des cycles pourvu que l'ouverture cumulée n'atteigne pas sa valeur critique en $x = 1$. Mais, dans cette zone, la variable d'ouverture cumulée évolue au cours des cycles et donc après un nombre N_a de cycles d'amorçage, le décollement est inévitable car δ aura atteint ϵ .

Il s'avère donc qu'on ne peut pas rendre compte du phénomène d'endurance dans ce problème.

Remarque 5.3.1 : Comme on l'avait déjà noté lors de l'étude du problème avec énergie de surface de GRIFFITH (Chapitre 3), la décohésion (ou au moins son amorçage) démarre dès la mise en charge du fait de la présence d'une singularité à déplacement contrôlé.

Toutefois le modèle n'est a priori pas un obstacle à la mise en évidence du phénomène d'endurance (Chapitre 1). Comme le montrent les études unidimensionnelle CHARLOTTE et al [13] et tridimensionnelle LAVERNE et MARIGO [40], une structure sur laquelle on impose une force reste saine —pour des énergies de surface de type BARENBLATT dont la dérivée en zéro n'est pas nulle— tant que la force ne dépasse pas une certaine force critique F_c .

Ainsi, sous chargement cyclique d'amplitude constante $F_M < F_c$, il n'y aurait jamais amorçage et propagation d'une fissure même après un nombre infini de cycles. On aurait de ce fait un critère d'endurance en contrainte comme annoncé initialement par Wöhler (voir Chapitre 1).

5.3.2 Évaluation du nombre de cycles d'amorçage N_a

On se propose de déterminer le nombre de cycles d'amorçage N_a nécessaire pour voir effectivement apparaître un décollement. On va montrer que celui-ci est fonction du niveau d'amplitude de chargement à ϵ fixé.

Proposition 5.3.2 *En considérant $\epsilon < 1/2$ et V_M fixés, le nombre de cycles d'amorçage N_a est donné par*

$$N_a = Ent \left[\frac{\epsilon}{V_M} \right] \quad (5.15)$$

où $\text{Ent}[\theta]$ désigne la partie entière de θ . Si $V_M \leq \epsilon$, la structure de la solution durant ces $N_a \geq 1$ cycles est la suivante : une zone parfaitement collée $[0, \ell_1]$ et une zone partiellement décollée $(\ell_1, 1)$. Le champ d'ouverture correspondant s'écrit pour tout $i \in \{1, \dots, N_a\}$

$$v_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_1 \\ (x - \ell_1)^2 / 4\epsilon & \text{si } \ell_1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (5.16)$$

où ℓ_1 représente la position de la pointe de zone partiellement décollée et est définie par

$$1 - \ell_1 = \sqrt{4\epsilon V_M}. \quad (5.17)$$

Preuve. Le nombre de cycles d'amorçage N_a s'obtient en remarquant que $\delta_i(1) = iV_M$ et par définition N_a est tel que

$$\delta_{N_a}(1) \leq \epsilon, \quad \delta_{N_a+1}(1) > \epsilon.$$

Pour déterminer l'ouverture, on peut remarquer que tous les v_i pour $1 \leq i \leq N_a$ vérifient le même système d'équations suivant :

$$2\epsilon v_i'' = 1 \quad \text{dans } (\ell_i, 1), \quad v_i(\ell_i) = v_i'(\ell_i) = 0, \quad v_i(1) = V_M$$

qui n'est rien d'autre que celui donnant v_1 et ℓ_1 dans le premier cas de la proposition 5.2.1. \square

La zone cohésive ne se propage pas au cours des N_a cycles d'amorçage et garde ainsi une longueur $1 - \ell_1$ constante. On représente sur la Figure 5.1, l'évolution du décollement lors des 50 premiers cycles pour le couple de paramètres $(\epsilon; V_M) = (0.4; 0.05)$. On remarque que lors des 8 premiers cycles une zone d'"amorçage" s'est installée sans décollement complet apparent. Cette zone d'amorçage du décollement garde une longueur constante lors de ces $N_a = 8$ premiers cycles. Celle-ci est directement obtenue par la relation (5.17), $1 - \ell_1 = \sqrt{4\epsilon V_M} \sim 0.28$.

5.4 Décollement progressif

La proposition suivante donne l'évolution discrète du décollement du film de son socle après que le système ait subi N_a cycles d'amorçage, N_a étant nul si $V_M > \epsilon$.

Proposition 5.4.1 *Pour $i > N_a$ et tant que $\ell_i > 0$, l'ouverture v_i est donnée par*

$$v_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_i \\ \frac{(x - \ell_i)^2}{4\epsilon} & \text{si } \ell_i \leq x \leq \lambda_i \\ \frac{(\lambda_i - \ell_i)}{2\epsilon}(x - \lambda_i) + \frac{(\lambda_i - \ell_i)^2}{4\epsilon} & \text{si } \lambda_i \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (5.18)$$

où ℓ_i et λ_i sont solutions du système (5.19) suivant

$$\begin{cases} 2(\lambda_i - \ell_i)(1 - \lambda_i) + (\lambda_i - \ell_i)^2 = 4\epsilon V_M \\ \sum_{j=1}^i \langle \lambda_i - \ell_j \rangle^2 = 4\epsilon^2 \end{cases} \quad (5.19)$$

où les crochets indiquent la partie positive, i.e. $\langle \theta \rangle = \theta$ si $\theta > 0$ et $\langle \theta \rangle = 0$ sinon.

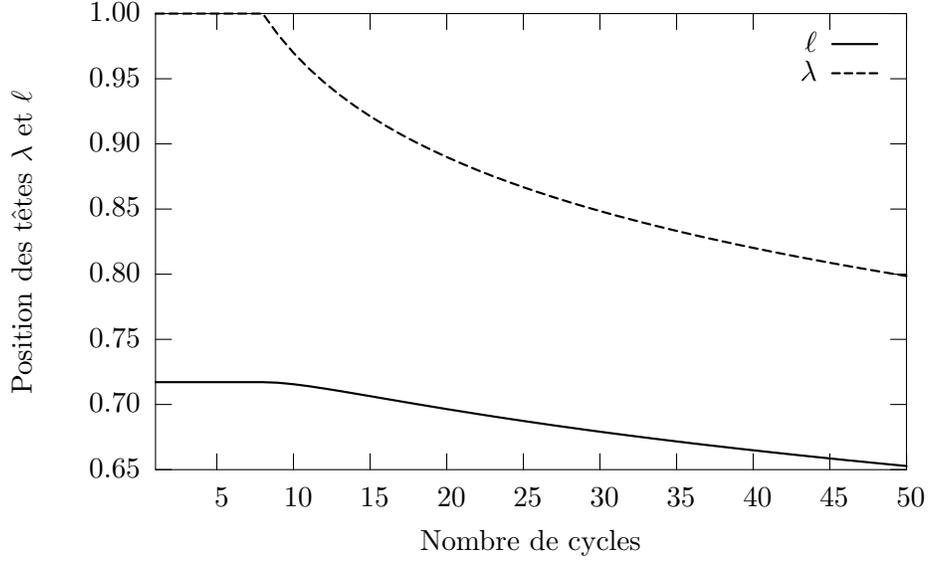


FIG. 5.1 – Mise en évidence du processus d’amorçage du décollement.

Preuve. La Proposition se démontre par récurrence. Pour déterminer l’ouverture v_i pour $i > N_a$, on résout le système d’équation suivant :

$$2\epsilon v_i'' = 1 \text{ dans } (\ell_i, \lambda_i), \quad v_i'' = 0 \text{ dans } (\lambda_i, 1) \quad v_i(\ell_i) = v_i'(\ell_i) = 0, \quad \llbracket v_i \rrbracket(\lambda_i) = \llbracket v_i' \rrbracket(\lambda_i) = 0$$

ce qui donne (5.18). Pour déterminer ℓ_i et λ_i , on écrit la condition à la limite $v_i(1) = V_M$ et la condition de décollement en λ_i qui s’écrit à partir de l’expression de l’ouverture cumulée (5.2)

$$\delta_i(\lambda_i) = \sum_{j=1}^i v_j(\lambda_i) = \sum_{j=1}^i \frac{\langle \lambda_i - \ell_j \rangle^2}{4\epsilon} = \epsilon, \quad (5.20)$$

ce qui conduit à (5.19). □

Est représentée schématiquement sur la Figure 5.2 la configuration du film sur un cycle charge-décharge-recharge du chargement.

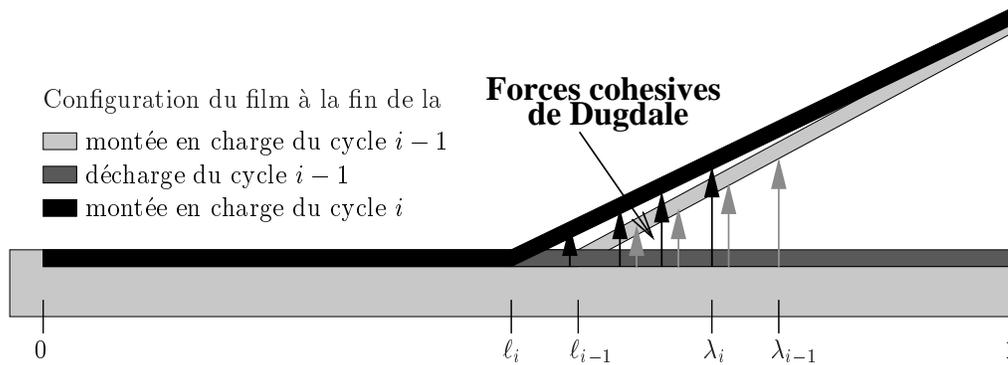


FIG. 5.2 – Configuration du film sur un cycle charge-décharge-recharge.

On représente sur la Figure 5.3 l'évolution des têtes de zones décollée et partiellement décollée pour le couple de paramètres $(\epsilon; V_M) = (0.2; 0.2)$. On note que les courbes évoluent sensiblement de la même façon. Par contre, on remarque que la longueur de la zone cohésive $\lambda - \ell$ diminue rapidement lors des premiers cycles puis très lentement par la suite. En fait on verra que $\lambda - \ell$ dépend du taux de restitution d'énergie G dont l'expression est donnée par (3.26). Dans ce problème, G décroît donc avec la longueur de zone décollée $1 - \lambda$. De ce fait, plus on décolle, plus $\lambda - \ell$ est petit. Il apparaît également que le taux de propagation du décollement diminue avec le nombre de cycles. En effet, plus le film est décollé, moins la structure emmagasine d'énergie potentielle et donc plus lentement se réalise le décollement de la partie saine. Cette propriété est liée au comportement global de la structure et n'est pas due au modèle utilisé.

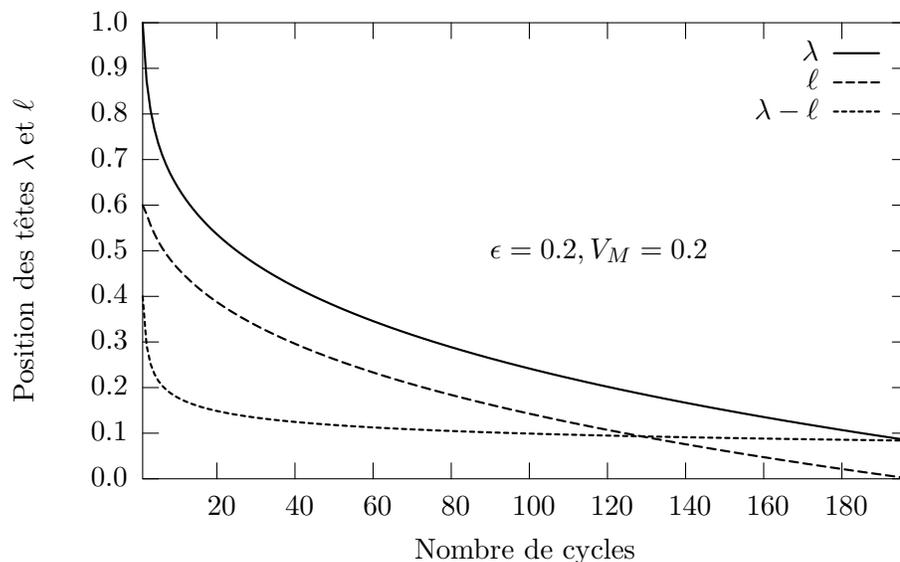


FIG. 5.3 – Évolution des têtes de zones décollée et partiellement décollée au cours du temps.

La Figure 5.4_a représente de façon schématique, l'énergie dissipée progressivement (cycle après cycle) en fonction de l'ouverture en un point x_0 du film que l'on suppose être situé dans la zone cohésive (ou zone partiellement décollée) dès la première montée en charge. On voit clairement qu'il y a dissipation uniquement lors des phases de charge, les phases de décharge étant réalisées sans dissipation supplémentaire. De plus, on vérifie bien que la dissipation se réalise toujours à pente constante, les forces cohésives de DUGDALE étant constantes et égales à $\sigma_c = 1/\epsilon$. Sur la Figure 5.4_b, l'évolution de l'énergie dissipée en fonction de l'ouverture cumulée δ suit l'enveloppe monotone de DUGDALE. Par contre, contrairement au cas monotone, lorsque l'on décharge, on conserve la valeur déjà dissipée : le film s'est "endommagé" au pas $i - 1$ et on en tient compte au pas i . C'est cette condition d'irréversibilité de la variable δ qui permet le processus de fatigue : il y a décollement progressif du point x_0 jusqu'à ce que l'ouverture cumulée atteigne l'ouverture critique $\delta_c = \epsilon$.

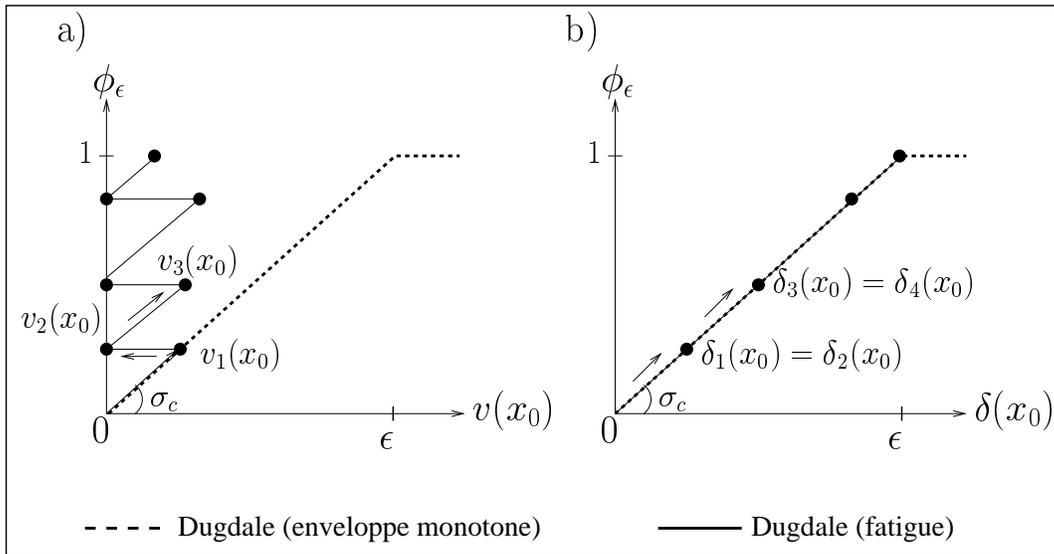


FIG. 5.4 – Évolution de l'énergie dissipée lors du processus de décollement en fonction de a) l'ouverture, b) l'ouverture cumulée.

Il s'agit dès lors de résoudre un système de deux équations (5.19) à deux inconnues (ℓ_i et λ_i) paramétré par ϵ et V_M . On peut d'ailleurs vérifier directement le résultat d'existence et d'unicité obtenu au chapitre précédent dans le cas général d'une énergie de surface de BARENBLATT.

Proposition 5.4.2 *Si $V_M < 1 - \epsilon$, alors il existe un unique couple (ℓ_i, λ_i) , $0 < \ell_i < \lambda_i < 1$, solution du système (5.19).*

Preuve. On pose $d_i = \lambda_i - \ell_i > 0$ la longueur de la zone cohésive au $i^{\text{ème}}$ cycle. La relation (5.19₁) peut alors être écrite sous la forme d'un polynôme du second degré en d_i

$$d_i^2 + 2(1 - \lambda_i)d_i - 4\epsilon V_M = 0$$

dont la solution est une fonction de λ_i

$$d_i(\lambda_i) = \frac{4\epsilon V_M}{(1 - \lambda_i) + \sqrt{(1 - \lambda_i)^2 + 4\epsilon V_M}}, \quad (5.21)$$

fonction croissante de $\sqrt{1 + 4\epsilon V_M} - 1$ à $\sqrt{4\epsilon V_M}$ lorsque λ_i croît de 0 à 1. L'égalité (5.19₂) donne

$$F(\lambda_i) \equiv d_i(\lambda_i)^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \langle \lambda_i - \ell_j \rangle^2 = 4\epsilon^2 \quad (5.22)$$

où F est une fonction croissante.

On a nécessairement $F(1) > 4\epsilon^2$ car

$$F(1) = 4\epsilon V_M + \sum_{j=1}^{i-1} \langle 1 - \ell_j \rangle^2 \geq 4\epsilon V_M + N_a(1 - \ell_1)^2 = 4\epsilon V_M(1 + N_a) > 4\epsilon^2.$$

On a de même $F(0) < 4\epsilon^2$ car

$$F(0) = d_i(0)^2 = \left(\sqrt{1 + 4\epsilon V_M} - 1 \right)^2 < \left(\sqrt{1 + 4\epsilon - 4\epsilon^2} - 1 \right)^2 < 4\epsilon^2.$$

Il existe donc un point unique λ_i vérifiant $F(\lambda_i) = 4\epsilon^2$. La position de la tête de zone partiellement décollée est directement donnée par (5.21)

$$\ell_i = \lambda_i - \frac{4\epsilon V_M}{(1 - \lambda_i) + \sqrt{(1 - \lambda_i)^2 + 4\epsilon V_M}}. \quad (5.23)$$

Toutefois cette solution n'est valable que tant que $\ell_i > 0$, car après la zone cohésive atteint l'extrémité $x = 0$. \square

5.5 Influence des paramètres

Pour résoudre (5.19), un traitement numérique est nécessaire. En effet, pour déterminer le couple solution $(\ell_i; \lambda_i)$ au cycle i , il s'agit d'évaluer la position de la tête de zone décollée λ_i par rapport aux positions successives de la tête de zone partiellement décollée $\ell_j, 1 \leq j \leq i-1$ aux cycles précédents comme l'indique la relation (5.19₂). De ce fait le processus de décollement dépend de ce qui s'est déroulé lors des cycles précédents : ce modèle est fortement lié à l'histoire du chargement.

La résolution du système (5.19) est réalisée en utilisant la méthode de Newton-Raphson qui permet de déterminer les zéros d'une fonction.

Dans le problème qui nous intéresse, il s'agit de déterminer λ_i solution de (5.22) où d_i est donnée par (5.21), la valeur de ℓ_i étant obtenue séparément en appliquant la relation (5.23).

Posons $g(x) = F(x) - 4\epsilon^2$ et soit x_0 la solution de $g(x) = 0$. La méthode de Newton-Raphson repose sur le développement de $g(x_0)$ en série de Taylor autour de x_1 proche de x_0

$$g(x_0) = g(x_1) + (x_0 - x_1)g'(x_1) + \frac{1}{2!}(x_0 - x_1)^2 g''(x_1) + \dots$$

et en utilisant le fait que $g(x_0) = 0$, il vient

$$x_0 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} - \frac{(x_0 - x_1)^2}{2!} \frac{g''(x_1)}{g'(x_1)} + \dots$$

Si x_1 est suffisamment proche de x_0 , les termes d'ordre 2 ou plus sont négligeables. On obtient alors une valeur approchée x_2 plus proche de x_0 que x_1

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)}.$$

Ainsi, en répétant la démarche, on peut écrire

$$x_i = x_{i-1} - \frac{g(x_{i-1})}{g'(x_{i-1})}.$$

Après n itérations, $g(x_n) \leq \alpha$ avec α suffisamment petit ce qui permet de poser $x_0 = x_n$ avec la précision voulue. La vitesse de convergence dépend notamment de la valeur initiale x_1 choisie. On conclut en imposant $\lambda_i = x_0$ et on recommence cette procédure à chaque cycle.

Une des difficultés est qu'il faut assurer la positivité des termes de la somme dans (5.22). Ceci conduit à ajouter un test sur la position des $\ell_{j,1 \leq j \leq i-1}$ vis à vis de λ_i . Ceci a permis de mettre

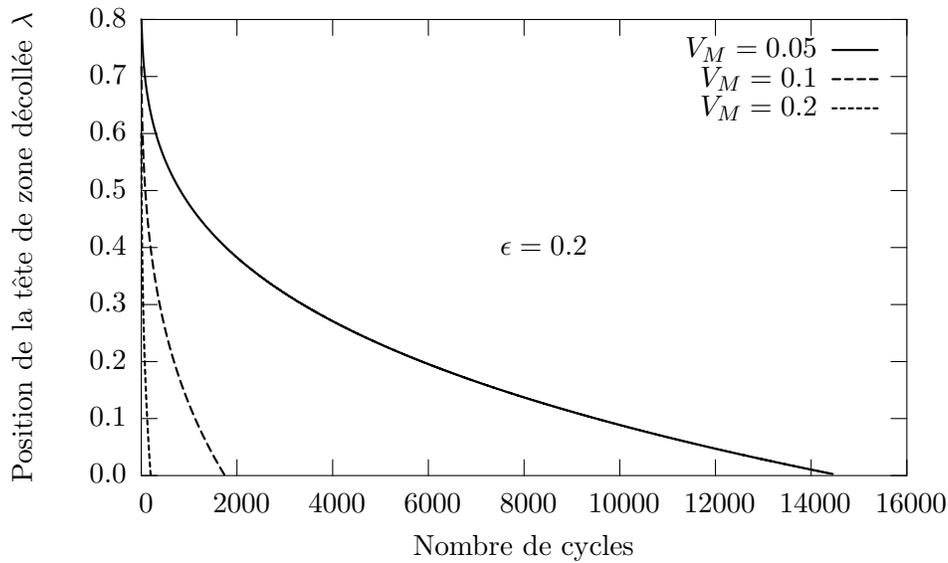


FIG. 5.5 – Influence du paramètre V_M sur le décollage du film.

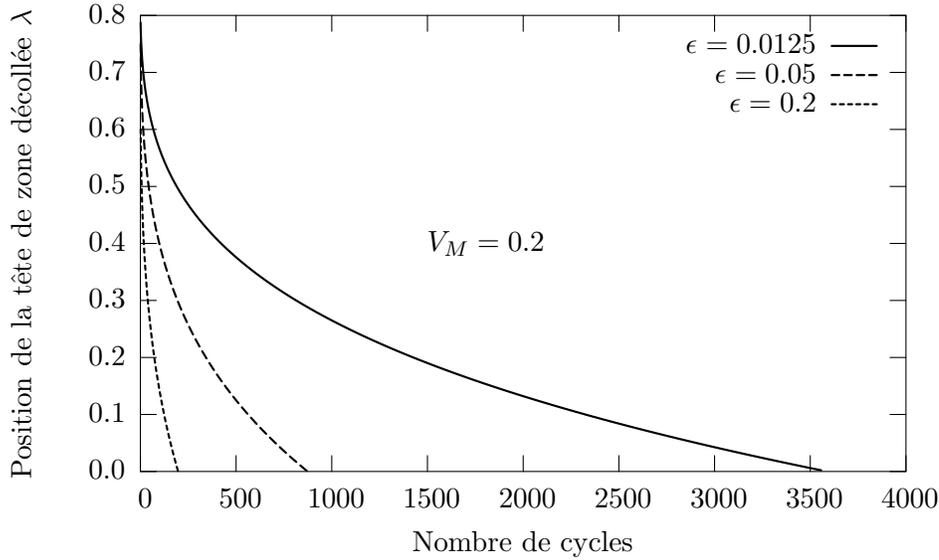
en évidence l'influence des deux paramètres du problème, ϵ et V_M .

Sur la Figure 5.5, on représente ainsi à ϵ fixé l'évolution de la tête de zone décollée pour différentes valeurs de V_M . Comme attendu, plus l'amplitude du chargement est grande, plus rapide est le décollage total du film.

On rappelle que le paramètre ϵ est proportionnel au rapport entre l'ouverture cumulée critique δ_c qui est un paramètre matériau et la longueur L du film

$$\epsilon \sim \frac{\delta_c}{L}.$$

Donc, pour un matériau donné, ϵ est d'autant plus petit que le film est long. On s'attend alors à ce que le nombre de cycles nécessaire pour décoller entièrement le film soit d'autant plus grand

FIG. 5.6 – Influence du paramètre ϵ sur le décollement du film.

que ϵ est petit. Ceci est vérifié sur la Figure 5.6 où on a représenté l'évolution de la pointe de zone décollée en fonction du nombre de cycles pour différentes valeurs de ϵ et à V_M fixé.

Il est fréquent, en fatigue, de présenter l'évolution du taux de fissuration en fonction de la variation du facteur d'intensité des contraintes ΔK . Ici, compte tenu de la relation (1.5) et du fait que le rapport de déflexion $R = V_m/V_M = 0$ (puisque l'on considère un chargement cyclique avec "retour à zéro"), on a $\Delta K \sim \sqrt{G}$ où G est le taux de restitution d'énergie associé à un film décollé sur une longueur $1 - \lambda$. Les courbes $dl/dN = f(\sqrt{G})$ sont tracées sur la Figure 5.7 pour différentes valeurs de ϵ . Il apparaît que

- à G fixé, le taux de décollement est d'autant plus faible que ϵ est petit.
- pour les faibles valeurs de G , la fonction f est une droite, alors qu'elle présente un caractère incurvé pour les fortes valeurs de G .

Il semble de plus que pour les faibles valeurs de ϵ les pentes de la portion linéaire de chaque courbe sont semblables. Par contre, elles semblent être différentes lorsque l'on considère des valeurs du paramètre ϵ plus importantes. On verra au Chapitre 6 traitant des films infiniment longs que ces résultats obtenus numériquement sont confirmés par l'analyse asymptotique de la solution lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

On représente sur la Figure 5.8, l'évolution des énergies potentielle, de surface et totale au cours du temps. Comme la structure restitue de l'énergie (pour décoller le film) uniquement pendant les phases de charge, ces courbes ont été obtenues en calculant la valeur des différentes énergies à la fin de chaque montée en charge. L'indice i indiquant le point maximal d'un cycle de chargement, on obtient facilement l'expression de l'énergie potentielle à partir de son expression générale (premier terme du membre de droite de la relation (4.32)) et de l'expression de l'ouverture le long du film (5.18)

$$\mathcal{P}_i = \frac{(\lambda_i - \ell_i)^3}{12\epsilon^2} + \frac{(\lambda_i - \ell_i)^2}{4\epsilon^2}(1 - \lambda_i).$$

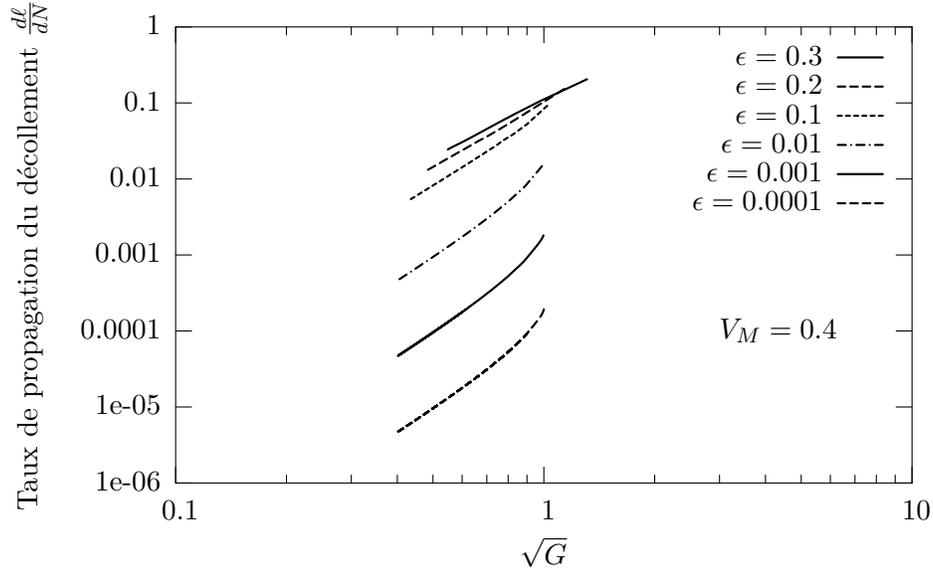


FIG. 5.7 – Courbes $d\ell/dN$ vs \sqrt{G} pour différentes valeurs de ϵ .

Sur la Figure 5.8, on constate bien la diminution d'énergie potentielle lors de la propagation du décollement et l'augmentation de l'énergie de surface correspondante qui s'exprime par

$$\mathcal{S}_i = \sum_{j=1}^i \frac{\langle \lambda_i - \ell_j \rangle^3}{12\epsilon^2} + 1 - \lambda_i.$$

5.6 Effet d'une surcharge unique

On se propose d'étudier l'effet d'une surcharge sur l'évolution du décollement du film.

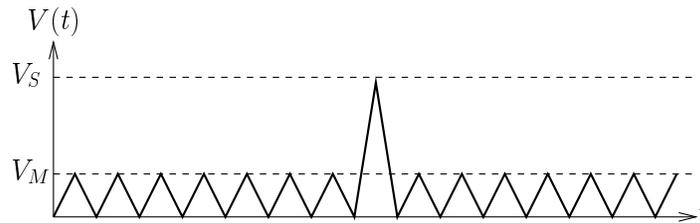


FIG. 5.9 – Évolution de l'ouverture cyclique imposée avec présence d'une surcharge unique.

L'expérience montre, et de nombreux articles en rendent compte, que l'application d'une surcharge unique ou d'un chargement par blocs H-L (High-Low)(resp. d'un chargement par blocs

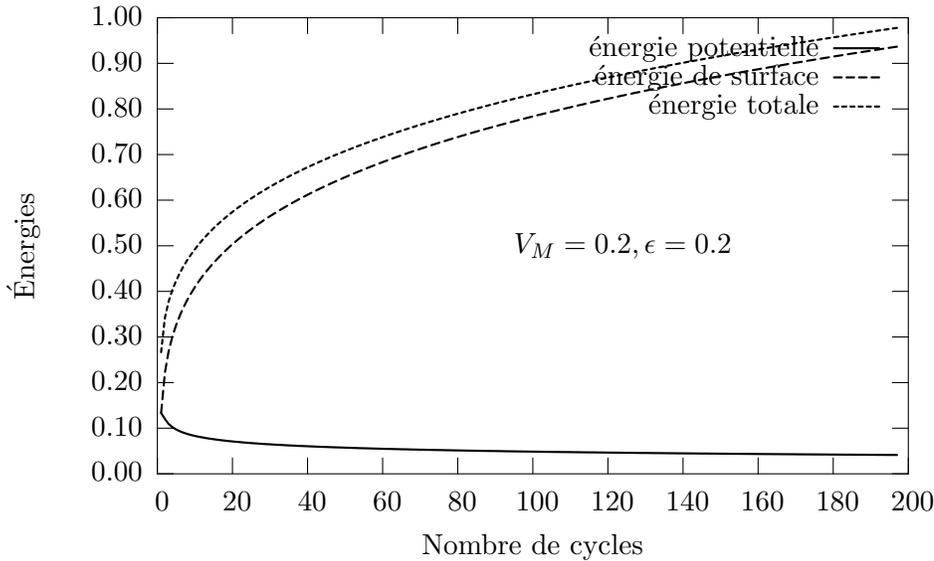


FIG. 5.8 – Évolution des énergies calculées à la fin de chaque montée en charge.

L-H) a pour effet de retarder (resp. d’accélérer) la ruine des matériaux. La compréhension de ces effets transitoires est importante avant d’envisager une prédiction fiable de la durée de vie d’une structure soumise à des sollicitations aléatoires. Les causes de cet effet ne sont pas complètement connues mais on l’associe généralement soit au phénomène de fermeture de fissure lié à l’accroissement de la zone plastique lors de la surcharge et qui retarde donc l’endommagement de la zone précédant la pointe de fissure, soit aux contraintes résiduelles devant la pointe de fissure, soit à une combinaison des deux. Il semble en général que la longueur de fissure affectée par ce retard est comparable à la taille de la zone plastique créée. Dans notre étude, l’absence de plasticité pourrait conduire à d’autres phénomènes.

Afin de voir si notre modèle est capable de “capter” cet effet de retard on applique le chargement décrit sur la Figure 5.9, les paramètres choisis étant $\epsilon = 0.05$, $V_M = 0.06$ l’amplitude du chargement et $V_S = 0.1$ la valeur de la surcharge.

Sur la Figure 5.10 on représente (en traits continus) l’évolution des têtes de zones cohésive et décollée au cours des cycles. Elle est à comparer à l’évolution de ces mêmes têtes obtenue avec un chargement sans surcharge (traits discontinus). Durant les premiers cycles (la structure est soumise à un chargement d’amplitude constante V_M), la propagation des pointes ℓ et λ se fait à la même vitesse, la longueur de la zone cohésive restant quant à elle sensiblement constante au cours du décollement. Ceci était prévisible puisque, comme il a déjà été dit, $\lambda - \ell$ est une fonction de G et que le taux de restitution d’énergie, fonction de la longueur décollée, diminue peu sur l’intervalle [2400 : 2499].

Une surcharge $V_S > V_M$ est appliquée au cycle 2500. Sur la Figure 5.10, il apparaît clairement que la tête de zone partiellement décollée ℓ se propage brutalement puis stoppe son évolution durant un nombre de cycles transitoire N_T . Par la suite, la propagation de ℓ se réalise avec la vitesse de propagation qu’elle possédait avant l’application de la surcharge.

Par contre la tête de zone décollée λ est très peu perturbée par l’application de la surcharge : il y a une légère accélération avant que la propagation ne retrouve sa vitesse initiale. Il n’y a donc

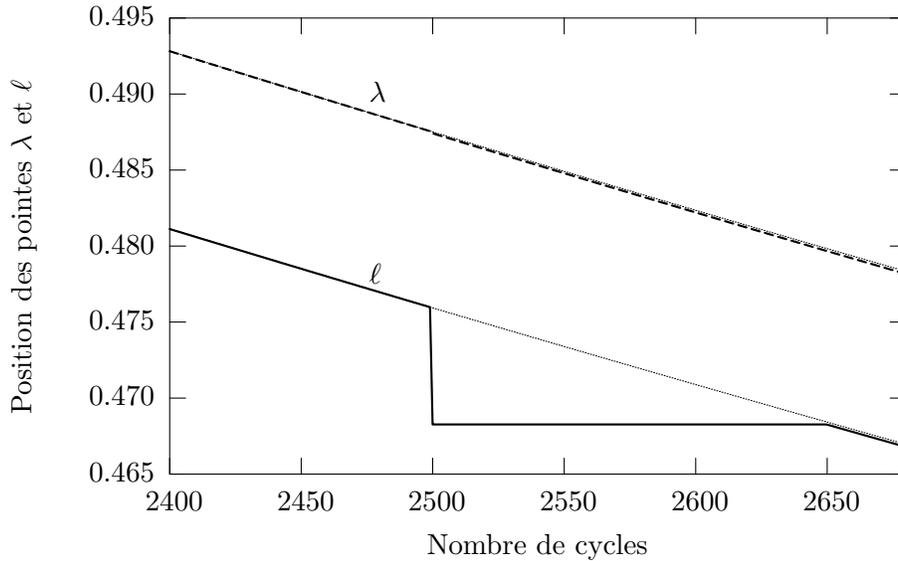


FIG. 5.10 – Effet d’une surcharge unique sur l’évolution du décollement.

pas pour cette pointe de “régime transitoire”.

On note ainsi que la surcharge a provoqué une forte augmentation de la longueur de la zone partiellement décollée $\lambda - \ell$ qui ne retrouvera sa longueur initiale qu’après la fin du régime transitoire. Ce comportement des deux pointes est également obtenu numériquement dans SIEGMUND [59].

Ainsi, contrairement à ce qui a été rapporté dans la littérature, l’application d’une surcharge unique n’a pas pour effet ici d’augmenter la durée de vie de la structure. Ceci tend à confirmer l’influence de la zone plastique comme étant responsable de la fermeture de fissure et donc du ralentissement transitoire. Ce résultat est d’ailleurs confirmé par WANG et SIEGMUND [62] : en l’absence de plasticité devant la pointe de fissure, les auteurs montrent numériquement en introduisant le concept de forces cohésives (voir Chapitre 1) l’accélération de la fissuration lors d’une surcharge.

Ceci est également montré expérimentalement dans CHOI [15] et CHOI et al [16] sur des céramiques fragiles. Les auteurs postulent que la fatigue transitoire est due à la présence d’une zone d’élaboration de microfissurations intenses devant la tête de fissure. Cette dernière jouerait un rôle semblable à la zone plastique dans les matériaux ductiles.

On note cependant que l’influence d’une surcharge unique reste faible. Dans l’exemple traité, l’augmentation de 67% de l’amplitude du chargement a fait diminuer le nombre de cycles pour décoller entièrement le film uniquement de 0.01%. Dans [34], GILBERT et RITCHIE font le même constat après application d’une surcharge sur des céramiques. En fait, si, comme le montre la Figure 5.10, une surcharge unique perturbe le décollement au niveau microscopique, *i.e.* à l’échelle de la zone cohésive, au niveau macroscopique, on ne voit pas de modification, surtout pour de faibles valeurs de ϵ . Pour qu’une surcharge unique ait une influence au niveau macroscopique il faut qu’elle soit telle que ce soit le critère de GRIFFITH qui gouverne la propagation de la fissure et non la loi de fatigue (autrement dit il faut que le taux de restitution d’énergie G égale le taux

de restitution d'énergie critique G_c). Dans ce cas, on peut envisager un saut dans la propagation de la décohésion et ce au niveau global.

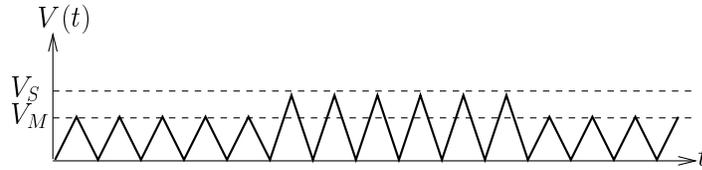


FIG. 5.11 – Chargement par bloc.

Dans le cas contraire, *i.e.* si le chargement ne provoque qu'une fissuration sous-critique, l'idée est de considérer, voir Figure 5.11, des chargements par blocs (une surcharge qui dure dans le temps). Comme le montre la Figure 5.12, et contrairement à l'application d'une surcharge unique, l'effet d'une surcharge répétée est visible au niveau macroscopique.

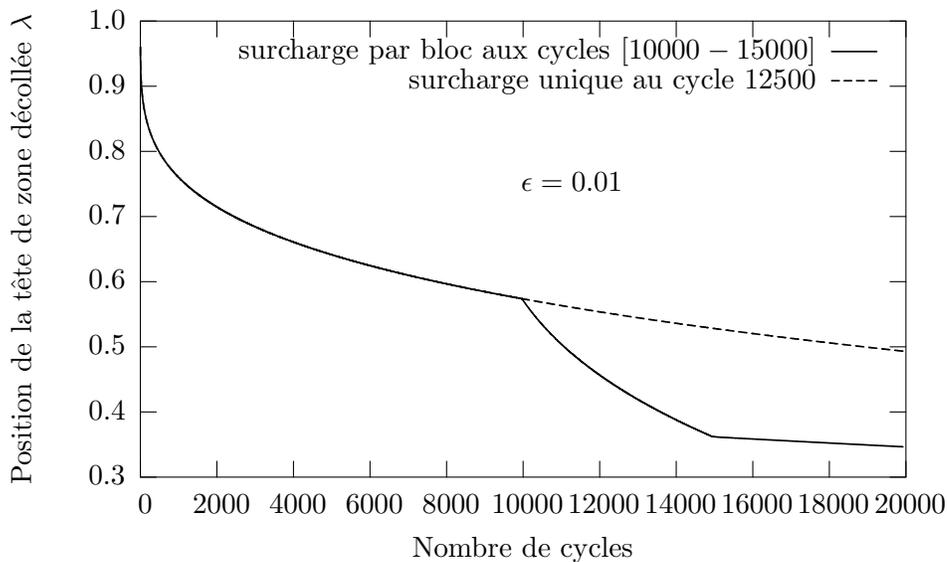


FIG. 5.12 – Effet d'une surcharge répétée sur l'évolution du décollement (paramètres : $V_M = 0.05$, $V_S = 0.1$).

Chapitre 6

Loi de fatigue limite du décollement d'un film

Le Chapitre 5 a permis de montrer, dans le cadre du décollement d'un film mince soumis à un chargement cyclique, la capacité de l'approche variationnelle à rendre compte des phénomènes de fatigue. Ainsi, en considérant une énergie de surface de DUGDALE dépendant d'une variable d'ouverture cumulée, la minimisation de l'énergie totale à chaque pas de temps du chargement discrétisé conduit au décollement progressif du film, la zone décollée étant précédée d'une zone cohésive de la fissure. Cependant la résolution est fastidieuse et demande un temps de calcul considérable si on considère de faibles valeurs de l'amplitude du chargement V_M et/ou du paramètre ϵ . Ceci tient entre autres au fait que, d'après (6.1), l'incrément de propagation du décollement à chaque cycle et la longueur de la zone cohésive sont de l'ordre de ϵ . En prenant ϵ comme petit paramètre, on s'intéresse ici au comportement asymptotique de la solution du problème d'évolution du décollement lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. On montrera que celui-ci met en évidence une **loi limite** de fatigue permettant d'obtenir implicitement le taux de propagation du décollement en fonction du taux de restitution d'énergie, $\dot{\ell} = f(G)$. On retrouve ainsi une loi de type PARIS abondamment utilisée par les ingénieurs. Mais ce qu'il faut noter est que la loi de PARIS obtenue, *i.e.* la fonction f , **se déduit** (et est donc **fonction**) de l'énergie de surface de BARENBLATT, de la condition d'irréversibilité et du principe de minimisation d'énergie. Ce dernier confère en particulier à la fonction f des propriétés de monotonie, de régularité et de croissance essentielles. Pour des faibles valeurs de G , la loi limite est une fonction puissance avec un exposant $3/2$. On verra dans le chapitre suivant que la valeur de cet exposant a des origines diverses. Enfin, dernier fait remarquable est que la loi limite **contient** aussi la loi de GRIFFITH.

6.1 Position du problème

Afin de faire apparaître explicitement la dépendance en ϵ de la solution, on note dorénavant les pointes des zones cohésive et parfaitement décollée λ_i^ϵ et ℓ_i^ϵ qui sont donc solution du système suivant (tant que la zone cohésive n'atteint pas l'extrémité fixée, *i.e.* tant que $\ell_i^\epsilon > 0$) :

$$2(\lambda_i^\epsilon - \ell_i^\epsilon)(1 - \lambda_i^\epsilon) + (\lambda_i^\epsilon - \ell_i^\epsilon)^2 = 4\epsilon V_M \quad (6.1)$$

$$\sum_{j=1}^i \langle \lambda_i^\epsilon - \ell_j^\epsilon \rangle^2 = 4\epsilon^2 \quad (6.2)$$

où V_M correspond à l'amplitude du chargement, ϵ est proportionnel au rapport entre l'ouverture cumulée critique δ_c et la longueur du film L . Comme ϵ est destiné à tendre vers 0 alors que l'amplitude du chargement est maintenue fixe, on supposera désormais que $V_M > \epsilon$ et donc que le nombre de cycles d'amorçage N_a est nul. Une zone parfaitement décollée apparaît dès le premier cycle, $\lambda_1^\epsilon < 1$. On supposera que $V_M < 1 - \epsilon$ afin que la pointe de la zone cohésive ne soit pas en 0 dès le premier cycle, $\ell_1^\epsilon > 0$.

Rappelons qu'à la fin de la première montée en charge on a

$$\ell_1^\epsilon = 1 - \epsilon - V_M, \quad \lambda_1^\epsilon = 1 + \epsilon - V_M. \quad (6.3)$$

Notons que, quel que soit ϵ , les suites $i \mapsto \ell_i^\epsilon$ et $i \mapsto \lambda_i^\epsilon$ sont décroissantes et "intercalées" :

$$\ell_i^\epsilon \leq \ell_{i-1}^\epsilon \leq \lambda_i^\epsilon \leq \lambda_{i-1}^\epsilon, \quad \forall i > 1. \quad (6.4)$$

La seule inégalité qui n'est pas triviale est $\ell_{i-1}^\epsilon \leq \lambda_i^\epsilon$. Supposons qu'elle n'ait pas lieu et que $\ell_{i-1}^\epsilon > \lambda_i^\epsilon$, alors on tirerait de (6.2) que $\lambda_i^\epsilon - \ell_i^\epsilon = 2\epsilon$ et en reportant dans (6.1) que $\lambda_i^\epsilon = \lambda_1^\epsilon$ et $\ell_i^\epsilon = \ell_1^\epsilon$ ce qui n'est pas possible puisque $\ell_{i-1}^\epsilon \leq \ell_1^\epsilon \leq \lambda_1^\epsilon$.

L'ouverture v_i^ϵ est donnée par

$$v_i^\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \ell_i^\epsilon] \\ \frac{(x - \ell_i^\epsilon)^2}{4\epsilon} & \text{si } x \in [\ell_i^\epsilon, \lambda_i^\epsilon] \\ \frac{(\lambda_i^\epsilon - \ell_i^\epsilon)}{2\epsilon}(x - \lambda_i^\epsilon) + \frac{(\lambda_i^\epsilon - \ell_i^\epsilon)^2}{4\epsilon} & \text{si } x \in [\lambda_i^\epsilon, 1] \end{cases} \quad (6.5)$$

6.2 Loi de GRIFFITH à court terme

On rappelle que la solution obtenue avec une énergie de surface de GRIFFITH (voir Chapitre 3) prévoit l'arrêt de la fissuration à la fin de la première montée en charge. Ainsi on a

$$\ell_i^0 = \ell_1^0 = 1 - V_M \quad \forall i \geq 1.$$

La proposition suivante montre qu'à court terme le modèle de BARENBLATT converge vers le modèle de GRIFFITH.

Proposition 6.2.1 (Loi de GRIFFITH à court terme) À nombre de cycles fixé $i \geq 1$, quand $\epsilon \rightarrow 0$, les têtes de zones cohésive ℓ_i^ϵ et décollée λ_i^ϵ tendent, quel que soit i , vers la longueur décollée ℓ_1^0 prévue par la théorie de GRIFFITH à la fin du premier cycle. De même le champ d'ouverture v_i^ϵ , l'énergie potentielle \mathcal{P}_i^ϵ et l'énergie de surface \mathcal{S}_i^ϵ tendent vers leur homologue v_1^0 , \mathcal{P}_1^0 et \mathcal{S}_1^0 prévu par le modèle de GRIFFITH au premier demi-cycle :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_i^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_i^\epsilon = \ell_1^0 = 1 - V_M,$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_i^\epsilon(x) = v_1^0(x) = \langle x - 1 + V_M \rangle, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_i^\epsilon = \mathcal{P}_1^0 = V_M, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}_i^\epsilon = \mathcal{S}_1^0 = V_M.$$

Preuve. Dans les lignes qui suivent, on utilise constamment le fait que lorsqu'une suite de réels est bornée on peut en extraire une sous-suite qui converge. Comme on montre que finalement la limite est unique, c'est toute la suite qui converge. On omettra donc de parler d'extraction de sous-suite.

- Au premier cycle, les positions des têtes de zone cohésive ℓ_1^ϵ et de zone décollée λ_1^ϵ sont données par (6.3). En passant à la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_1^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_1^\epsilon = \ell_1^0 = 1 - V_M$.
- Soit $i > 1$. Comme ℓ_i^ϵ et λ_i^ϵ sont comprises entre 0 et 1, elles (des sous-suites) convergent lorsque ϵ tend vers 0. De (6.2) on obtient l'estimation $\lambda_i^\epsilon - \ell_i^\epsilon \leq 2\epsilon$, dont on déduit que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_i^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_i^\epsilon = \ell_i$. On obtiendrait de même, $\forall j$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_j^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_j^\epsilon = \ell_j$. Comme $\lambda_i^\epsilon \leq \lambda_j^\epsilon$, on a $\ell_i \leq \ell_j \forall j \leq i$. Mais en vertu de (6.4), on a aussi $\ell_i \geq \ell_{i-1}$. Par conséquent $\ell_i = \ell_1$.

En divisant (6.1) par ϵ et en passant à la limite, on obtient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\lambda_i^\epsilon - \ell_i^\epsilon) = 2.$$

En passant à la limite ponctuellement dans (6.5) on obtient la convergence simple de v_i^ϵ vers v_1^0 . Pour l'énergie potentielle, un calcul direct donne

$$\mathcal{P}_i^\epsilon = \frac{(\lambda_i^\epsilon - \ell_i^\epsilon)^2}{4\epsilon^2} (1 - \lambda_i^\epsilon) + \frac{(\lambda_i^\epsilon - \ell_i^\epsilon)^3}{12\epsilon^2}$$

et en passant à la limite on obtient $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_i^\epsilon = V_M = \mathcal{P}_1^0$, ce qui prouve que v_i^ϵ converge fortement vers v_1^0 dans $H^1(0, 1)$. De même pour l'énergie de surface, un calcul direct donne

$$\mathcal{S}_i^\epsilon = 1 - \lambda_i^\epsilon + \sum_{j=1}^i \frac{\langle \lambda_i^\epsilon - \ell_j^\epsilon \rangle^3}{12\epsilon^2}$$

et en passant à la limite on obtient $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}_i^\epsilon = V_M = \mathcal{S}_1^0$, ce qui redonne la propriété d'équipartition de l'énergie à la limite. \square

Remarque 6.2.2 : Ce résultat n'est pas contradictoire avec la Proposition 4.3.4 disant que, lorsque le nombre de cycles tend vers l'infini, le film finit par se décoller entièrement sur toute la longueur. Dans la Proposition 4.3.4 le paramètre ϵ était fixé alors que le nombre de cycles tendait vers l'infini, alors qu'ici le nombre de cycles est fixé alors que ϵ tend vers 0. En fait, comme l'avancée des zones cohésive et non cohésive est de l'ordre de ϵ à chaque cycle, l'avancée totale au bout de i cycles est pratiquement la même que celle durant le premier cycle, lorsque ϵ est petit. De plus, comme la longueur de la zone cohésive est elle-même de l'ordre de ϵ , elle est pratiquement négligeable, ce qui explique que l'on retrouve la solution du modèle de GRIFFITH. On peut donc dire que **la fatigue est un phénomène du second ordre** dont la prise en compte nécessite que l'on raffine l'analyse en considérant en particulier un grand nombre de cycles de l'ordre de $1/\epsilon$.

6.3 Changement d'échelle de cycles et convergence numérique

Comme le montre la Figure 5.6, le nombre de cycles nécessaire pour décoller entièrement le film tend vers l'infini lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Comme l'avancée à chaque cycle est de l'ordre de ϵ , il est de

l'ordre de $1/\epsilon$. On réalise donc un changement d'échelle du nombre de cycles en introduisant le paramètre réel positif T

$$T \mapsto i_\epsilon(T) = \text{Ent} \left[\frac{T}{\epsilon} \right] \quad (6.6)$$

où i désigne le nombre (entier) de cycles et $\text{Ent}[\theta]$ la partie entière de θ . Lorsque l'on passe à la limite en ϵ , la variable T représentera donc le "nombre" de cycles macroscopiques. On sera également amené à s'intéresser aux cycles $i_\epsilon(T) + k$, $k \in \mathbb{Z}$ indépendant de ϵ . Un tel cycle sera qualifié de $k^{\text{ième}}$ cycle microscopique autour du cycle macroscopique T . La variable nombre de cycles est donc séparée à la limite en 2 échelles (T, k) .

Sur la Figure 6.1 on a représenté l'avancé de la tête de zone décollée $\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon$ en fonction de la variable macroscopique T pour différentes valeurs du paramètre ϵ . Il apparaît clairement de ce résultat numérique que la courbe $\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon$ converge vers une courbe limite $\ell(T)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. L'objectif est de caractériser cette courbe limite, *i.e.* la loi de fatigue limite permettant de trouver la relation $T \mapsto \ell(T)$.

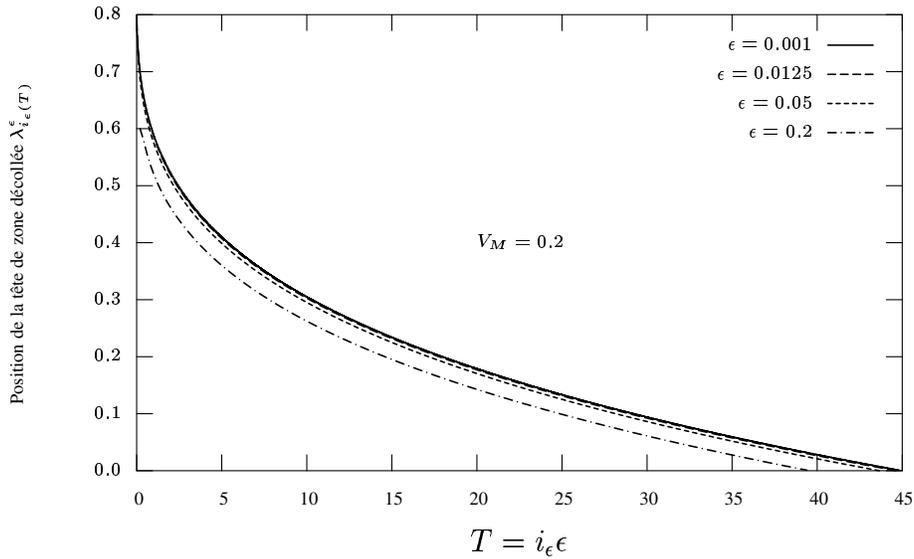


FIG. 6.1 – Convergence vers une solution limite $\ell(T)$.

6.4 Convergence vers une fissure macroscopique non cohésive

Pour identifier la loi de fatigue limite, il faut donc considérer un grand nombre de cycles. On va donc se donner $T > 0$ et étudier le comportement de la solution au cycle $i_\epsilon(T)$ quand ϵ tend vers 0. En notant respectivement $\ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon$, $\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon$ et $v_{i_\epsilon(T)}$ la position de la pointe de la zone cohésive,

la position de la pointe de la zone non cohésive et le champ d'ouverture au cycle $i_\epsilon(T)$, on a donc

$$2(\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon)(1 - \lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon) + (\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon)^2 = 4\epsilon V_M \quad (6.7)$$

$$\sum_{j=1}^{i_\epsilon(T)} \left\langle \lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon - \ell_j^\epsilon \right\rangle^2 = 4\epsilon^2 \quad (6.8)$$

$$v_{i_\epsilon(T)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon] \\ \frac{(x - \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon)^2}{4\epsilon} & \text{si } x \in [\ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon, \lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon] \\ \frac{(\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon)}{2\epsilon}(x - \lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon) + \frac{(\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon)^2}{4\epsilon} & \text{si } x \in [\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon, 1] \end{cases} \quad (6.9)$$

On établit maintenant un résultat de convergence “à long terme” qui dit qu’à grand nombre de cycles, à T fixé, l’état de décollement du film s’apparente (en première approximation) à une fissure non cohésive sur une longueur $\ell(T)$ restant à déterminer.

Proposition 6.4.1 *À T fixé, $T > 0$, quand $\epsilon \rightarrow 0$, les têtes de zones cohésive $\ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon$ et décollée $\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon$ tendent vers une même limite $\ell(T)$. Le champ d’ouverture $v_{i_\epsilon(T)}$, l’énergie potentielle $\mathcal{P}_{i_\epsilon(T)}$ et l’énergie de surface $\mathcal{S}_{i_\epsilon(T)}$ tendent vers leur homologue $v(T)$, $\mathcal{P}(T)$ et $\mathcal{S}(T)$ prévu par le modèle de GRIFFITH lorsque la longueur de décollement est $1 - \ell(T)$:*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon = \ell(T),$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_{i_\epsilon(T)}(x) = v[\ell(T)](x) \equiv \frac{\langle x - \ell(T) \rangle}{1 - \ell(T)} V_M, \quad (6.10)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_{i_\epsilon(T)} = \mathcal{P}(v[\ell(T)]) = \frac{V_M^2}{1 - \ell(T)}, \quad (6.11)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}_{i_\epsilon(T)} = \mathcal{S}(v[\ell(T)]) = 1 - \ell(T). \quad (6.12)$$

Preuve. La démonstration est très proche de celle de la Proposition 6.2.1, la seule différence notable est que la limite $\ell(T)$ n’est pas ℓ_1^0 et ne peut pas être déterminée à ce stade.

Soit $T > 0$. Comme $\ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon$ et $\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon$ sont comprises entre 0 et 1, elles (des sous-suites) convergent lorsque ϵ tend vers 0. De (6.2) on obtient l’estimation $\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon \leq 2\epsilon$, dont on déduit que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon = \ell(T)$. En divisant (6.7) par ϵ et en passant à la limite, on obtient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon \right) = \frac{2V_M}{1 - \ell(T)}. \quad (6.13)$$

En passant à la limite ponctuellement dans (6.9) on obtient la convergence simple de $v_{i_\epsilon(T)}$ vers $v[\ell(T)]$. Pour l’énergie potentielle, un calcul direct donne

$$\mathcal{P}_{i_\epsilon(T)} = \frac{(\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon)^2}{4\epsilon^2} (1 - \lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon) + \frac{(\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon)^3}{12\epsilon^2}$$

et en passant à la limite on obtient $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_{i_\epsilon(T)} = \mathcal{P}(v[\ell(T)])$, ce qui prouve que $v_{i_\epsilon(T)}$ converge fortement vers $v[\ell(T)]$ dans $H^1(0, 1)$. De même pour l’énergie de surface, un calcul direct donne

$$\mathcal{S}_{i_\epsilon(T)} = 1 - \lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon + \sum_{j=1}^i \frac{\left\langle \lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon - \ell_{j_\epsilon(T)}^\epsilon \right\rangle^3}{12\epsilon^2}$$

et en passant à la limite on obtient $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}_{i_\epsilon(T)} = 1 - \ell(T)$, ce qui correspond à l'énergie de surface associée au champ $v[\ell(T)]$ dans le modèle de GRIFFITH. \square

On voit donc que d'un point de vue énergétique on peut négliger la présence de la zone cohésive en raison de sa petite taille. En particulier l'énergie potentielle est en première approximation celle que donnerait le modèle de GRIFFITH en supposant connue la longueur $1 - \ell$ de la zone (parfaitement) décollée. Ceci permet de définir le **taux de restitution d'énergie potentielle macroscopique** $G(T)$:

$$G(T) = G[\ell(T)] \equiv \left. \frac{d\mathcal{P}(v[\ell])}{d\ell} \right|_{\ell=\ell(T)} = \frac{V_M^2}{(1 - \ell(T))^2}. \quad (6.14)$$

Remarque 6.4.2 Si l'on peut se servir du modèle de GRIFFITH pour calculer les énergies et donc le taux de restitution d'énergie une fois que la longueur de décollement est connue, on ne peut pas par contre utiliser le critère de GRIFFITH pour déterminer la longueur de décollement. En effet, le critère de GRIFFITH s'écrirait ici $G(T) = 1$ et donnerait donc $\ell(T) = 1 - V_M = \ell_1^0$, i.e. la position à la fin du premier cycle. Ce n'est évidemment pas le bon résultat, comme le montrent les tests numériques (Figure 6.1) ou les résultats théoriques (Proposition 4.3.4). La détermination de la loi gouvernant $T \mapsto \ell(T)$ nécessite d'affiner l'analyse, ce qui va nous obliger à prendre en compte les phénomènes locaux dans la (pourtant petite) zone cohésive.

6.5 Convergence vers un régime stationnaire au voisinage du fond de fissure

6.5.1 Quelques résultats de convergence à l'échelle microscopique

Dans toute cette sous-section, T est fixé et on omettra donc le plus souvent la dépendance des quantités par rapport à T . On suppose connue la position de la fissure macroscopique $\ell = \ell(T)$, $0 < \ell < 1$, et donc par voie de conséquence le taux de restitution d'énergie $G = G(T)$, $0 < G < 1$. Pour étudier le processus de décollement cyclique dans la zone cohésive, on réalise un "zoom" sur la pointe de zone cohésive au cycle $i_\epsilon(T)$ en posant $y = (x - \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon)/\epsilon$. Quand on passe à la limite en ϵ , on sépare les échelles microscopique et macroscopique, y devenant donc la variable microscopique d'espace variant de $-\infty$ à $+\infty$. On obtient tout d'abord quelques résultats de convergence :

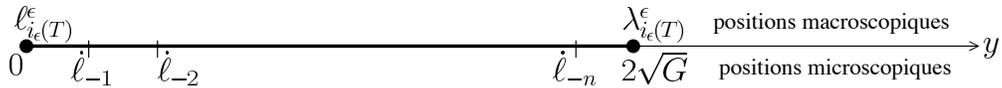


FIG. 6.2 – Zoom sur la zone cohésive au cycle macroscopique T , les $\dot{\ell}_j$ représentant les positions microscopiques de la pointe de la zone cohésive aux cycles précédents.

1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe $\dot{\ell}_k$ tel que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ell_{i_\epsilon(T)+k}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon)/\epsilon = \dot{\ell}_k$.
2. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\lambda_{i_\epsilon(T)+k}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(T)+k}^\epsilon)/\epsilon = 2\sqrt{G}$.

3. $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{R}, \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_{i_\epsilon(T)+k}^\epsilon (\ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon + \epsilon y) / \epsilon = \dot{v}(y - \dot{\ell}_k)$ avec \dot{v} défini par

$$\dot{v}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ y^2/4 & \text{si } 0 \leq y \leq 2\sqrt{G} \\ \sqrt{G} y - G & \text{si } y \geq 2\sqrt{G} \end{cases} . \quad (6.15)$$

Preuve. La propriété 1 tient simplement au fait que l'avancement des pointes à chaque cycle est de l'ordre de ϵ . Plus précisément, on a toujours les estimations $|\ell_{i_\epsilon(T)+1}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon| \leq 2\epsilon$ et donc $|\ell_{i_\epsilon(T)+k}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon| \leq 2|k|\epsilon$. Par conséquent $(\ell_{i_\epsilon(T)+k}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(T)}^\epsilon) / k\epsilon$ est uniformément bornée par rapport à k . Quand $\epsilon \rightarrow 0$ on peut donc extraire une sous-suite qui converge (pour tout k).

Les positions microscopiques $\dot{\ell}_k$ restent à déterminer. La propriété 2 s'obtient en faisant $i = i_\epsilon(T) + k$ dans (6.1), en divisant par ϵ , en passant à la limite et en remarquant que $G = V_M^2 / (1 - \ell)^2$. Cette propriété fondamentale dit que la longueur microscopique de la zone cohésive n'est fonction que du taux de restitution d'énergie potentielle macroscopique. La propriété 3 s'obtient de la même façon en faisant $i = i_\epsilon(T) + k$ dans (6.5), en divisant par ϵ , en passant à la limite et en tenant compte de la propriété précédente. Elle dit donc que le champ d'ouverture microscopique se reproduit identique à lui-même à chaque cycle microscopique k en se translatant simplement d'une longueur correspondante à la position microscopique $\dot{\ell}_k$ de la zone cohésive au cours des k cycles microscopiques autour du cycle macroscopique T . \square

Il reste à déterminer les positions $\{\dot{\ell}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de la zone cohésive et donc de la zone non cohésive —ces deux positions diffèrent de la constante $2\sqrt{G}$ puisque la longueur microscopique de la zone cohésive est constante— à chaque cycle microscopique. Pour cela on fait $i = i_\epsilon(T) + k$ dans (6.2), on divise par ϵ^2 et on passe à la limite. On obtient ainsi une famille indexée par $k \in \mathbb{Z}$ d'équations non linéaires régissant les positions microscopiques :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\langle 2\sqrt{G} + \dot{\ell}_k - \dot{\ell}_{k-j} \right\rangle^2 = 4, \quad (6.16)$$

la suite des $\dot{\ell}_k$ étant par construction strictement décroissante (puisque $i \mapsto \ell_i$ décroît) et nulle pour $k = 0$:

$$\dots > \dot{\ell}_{-j} > \dots > \dot{\ell}_{-1} > 0 = \dot{\ell}_0 > \dot{\ell}_1 > \dots > \dot{\ell}_j > \dots$$

6.5.2 Existence et unicité du régime stationnaire

Le système infini (6.16) possède une solution évidente correspondant à une avancée constante à chaque cycle microscopique. C'est la notion de régime stationnaire microscopique :

Définition 6.5.1 *L'évolution du décollement est en régime stationnaire à l'échelle microscopique s'il existe $\dot{\ell} < 0$ tel que $\dot{\ell}_k = k\dot{\ell}, \forall k \in \mathbb{Z}$.*

On a la propriété fondamentale suivante

Proposition 6.5.2 *À tout $G < 1$ est associé un unique régime stationnaire microscopique, la position $\dot{\ell}$ à chaque cycle étant donnée par l'équation implicite*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\langle 2\sqrt{G} + j\dot{\ell} \right\rangle^2 = 4. \quad (6.17)$$

Preuve. S'il existe un régime stationnaire, alors $\dot{\ell}$ est donnée par (6.17) et réciproquement à toute solution $\dot{\ell}$ de (6.17) on peut associer un régime stationnaire $\dot{\ell}_k = k\dot{\ell}, k \in \mathbb{Z}$, vérifiant (6.16). Il reste à montrer que (6.17) possède une unique solution. Pour cela, considérons la fonction $\dot{\ell} \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \langle 2\sqrt{G} + j\dot{\ell} \rangle^2 - 4$ définie pour $\dot{\ell} < 0$. Elle est égale à $-4 + 4G < 0$ tant que $\dot{\ell} \leq -2\sqrt{G}$, puis croît strictement jusqu'à $+\infty$ quand $\dot{\ell}$ croît de $-2\sqrt{G}$ à 0. Elle passe donc une et une seule fois par 0. \square

6.5.3 La conjecture de convergence

La question qui reste en suspens est de savoir si le système (6.16) possède des solutions autres que le régime stationnaire. À ce jour ceci reste une conjecture et nous ferons donc l'hypothèse suivante :

Conjecture 6.5.3 *On supposera que le régime stationnaire est l'unique solution des équations (6.16) régissant les évolutions microscopiques du décollement.*

6.5.4 Sa vérification numérique

Sur la Figure 6.3, on rapporte pour une valeur T donnée, l'avancée "microscopique" de la pointe de zone cohésive $(\ell_{i_\epsilon(T)+k}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(T)+k+1}^\epsilon)/\epsilon$ en fonction du nombre de cycles microscopiques k à partir de T pour différentes valeurs de ϵ . Les valeurs numériques ont été obtenues en résolvant le système non linéaire "réel" (6.1)-(6.2) par la méthode de Newton décrite au chapitre précédent. On voit que pour $\epsilon = 10^{-4}$ l'avancée est pratiquement constante, *i.e.* indépendante de k . On est donc pratiquement dans le cas du régime stationnaire.

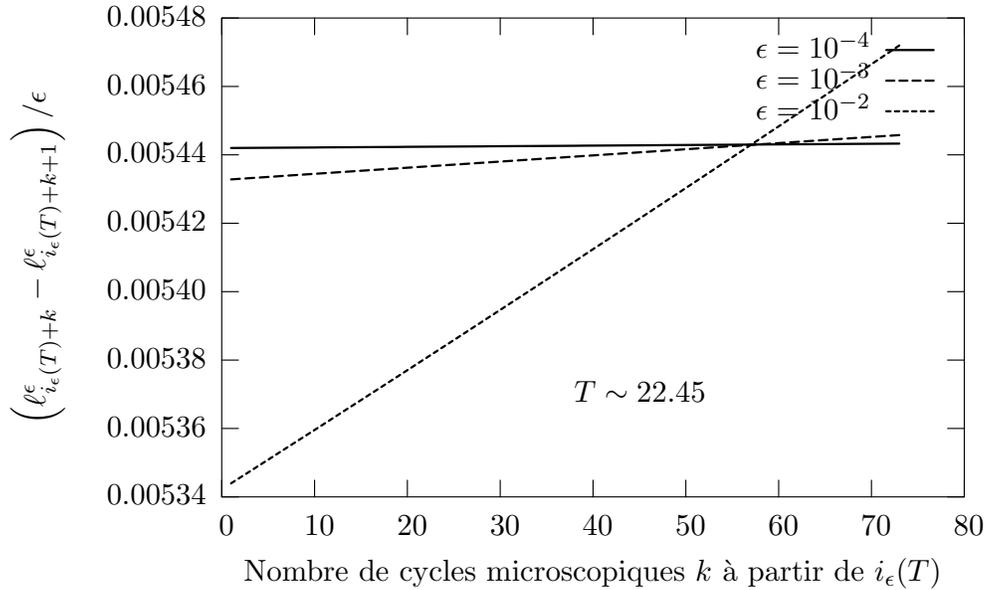


FIG. 6.3 – Mise en évidence du régime stationnaire à l'échelle microscopique.

6.6 La loi de fatigue limite

6.6.1 Propriétés de la loi limite

Étudions la loi de fatigue limite issue de l'équation (6.17).

Proposition 6.6.1 *La relation entre l'avancée microscopique cyclique du décollement et le taux de restitution d'énergie potentielle macroscopique possède les propriétés suivantes :*

1. G doit être inférieur ou égal à 1.
2. Toute avancée $\dot{\ell} \leq -2$ est possible quand $G = 1$.
3. Quand $0 < G < 1$, la fonction f qui à G associe $\dot{\ell} = -f(G)$ est continûment différentiable et croissante de 0 à 2 quand G croît de 0 à 1.
4. Soit $G_n = \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Sur chaque intervalle $[G_{n+1}, G_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $f(G)$ est la suivante

$$f(G) = \frac{6\sqrt{G}}{2n+1} - \frac{2}{2n+1} \sqrt{\frac{6(2n+1)}{n(n+1)} - \frac{3(n+2)G}{n}}. \quad (6.18)$$

Preuve. L'équation (6.17) peut aussi s'écrire

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle 2\sqrt{G} + j\dot{\ell} \rangle^2 = 4(1-G).$$

Elle ne possède donc pas de solution si $G > 1$, puisque le second membre est alors négatif tandis que le premier est nécessairement positif. Quand $G = 1$, le second membre est nul et le premier est nul si et seulement si $\dot{\ell} \leq -2$. Quand $G < 1$, on sait qu'elle possède une unique solution $\dot{\ell} = -f(G)$. Posons $F(G, \dot{\ell}) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \langle 2\sqrt{G} + j\dot{\ell} \rangle^2 - 4$. F est une fonction strictement croissante de G , à $\dot{\ell}$ fixé, et de $\dot{\ell}$ à G fixé. Soit G_1 et G_2 tels que $0 < G_1 < G_2 < 1$ et soit $\dot{\ell}_1$ et $\dot{\ell}_2$ les solutions associées. On a $0 = F(G_1, \dot{\ell}_1) = F(G_2, \dot{\ell}_2) > F(G_1, \dot{\ell}_2)$ et donc $\dot{\ell}_1 > \dot{\ell}_2$. D'où $f(G_2) > f(G_1)$, donc f est strictement croissante.

Soit $n = n(G)$ le nombre de cycles microscopiques effectif intervenant dans la valeur de $f(G)$, *i.e.* tel que

$$\sum_{j=0}^n \langle 2\sqrt{G} - j f(G) \rangle^2 = 4.$$

Les valeurs extrêmes de $f(G)$ faisant intervenir ce même nombre n sont

$$\frac{2\sqrt{G}}{n+1} \leq f(G) < \frac{2\sqrt{G}}{n}.$$

On en déduit les conditions suivantes sur G :

$$4\frac{G}{G_n} - 4 = F\left(G, -\frac{2\sqrt{G}}{n}\right) < 0 = F(G, -f(G)) \leq F\left(G, -\frac{2\sqrt{G}}{n+1}\right) = 4\frac{G}{G_{n+1}} - 4.$$

Autrement dit, pour trouver le nombre de cycles microscopiques effectif n , il faut et il suffit de trouver dans quel intervalle $[G_{n+1}, G_n)$ se trouve G . Une fois n déterminé, l'équation en $\dot{\ell}$ devient l'équation du deuxième degré suivante :

$$0 = \sum_{j=0}^n (2\sqrt{G} + j\dot{\ell})^2 - 4 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\dot{\ell}^2 + 2n(n+1)\sqrt{G}\dot{\ell} + 4(n+1)G - 4. \quad (6.19)$$

On ne retient que la racine qui donne $f(G_n) = 2\sqrt{G_n}/n$ d'où (6.18). Quand $G \rightarrow 1 = G_1$, on a $n = 1$ et $\dot{\ell} \rightarrow -2$. Quand $G \rightarrow 0$, on a $n \rightarrow \infty$ et $\dot{\ell} \rightarrow 0$. \square

Il est à noter, et ceci sera montré au Chapitre 7, que la fonction f dépend à la fois du *niveau de chargement*, de la *structure* et du *matériau*. Sur la Figure 6.4, on représente la loi de fatigue limite $f(G)$.

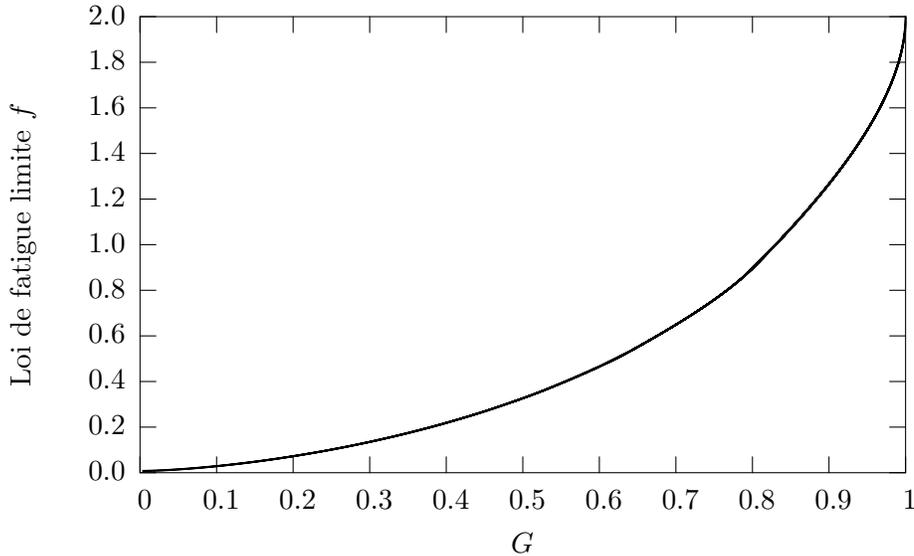


FIG. 6.4 – Loi de fatigue limite : graphe de la fonction $f(G)$.

6.6.2 Loi de fatigue limite au voisinage de $G = 1$

Au voisinage de $G = 1$, on a $n(G) = 1$ et

$$f(G) = 2\sqrt{G} - 2\sqrt{1-G}. \quad (6.20)$$

On peut remarquer que la pente de f est infinie en $G = 1$, $f'(1) = +\infty$, la courbe devenant tangente à la demi-droite $[2, \infty)$ des solutions quand $G = 1$.

6.6.3 Loi de fatigue limite au voisinage de $G = 0$

Proposition 6.6.2 *Quand G est petit, la loi de fatigue limite est une loi de type PARIS avec une puissance $3/2$:*

$$f(G) \approx \frac{2}{3} G^{\frac{3}{2}}, \quad (6.21)$$

la longueur microscopique de la zone cohésive $d(G)$ étant petite, $d(G) = 2\sqrt{G}$, le nombre de cycles microscopiques effectif $n(G)$ étant grand, $n(G) \approx 3/G$.

Preuve. Si G est faible alors de $G_n = 6n/(n+1)(2n+1)$ on tire $n(G) \approx 3/G$ et en reportant dans (6.18) on obtient (6.21). \square

Remarque 6.6.3 Il est intéressant de noter que bien que la zone cohésive soit de plus en plus petite quand G tend vers 0, le nombre de cycles effectif et donc le nombre de "marques" $\dot{\ell}_k$ présentes devient de plus en plus grand. C'est cette microstructuration de la pourtant déjà microscopique zone cohésive qui fait apparaître une loi puissance. Ceci n'est pas sans rappeler le phénomène de stries observé expérimentalement (BATHIAS et BAILON [4]).

Remarque 6.6.4 En résolvant ce problème avec les grandeurs non adimensionnalisées, on obtient la loi de fatigue limite suivante

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\langle \sqrt{\frac{G}{G_c}} + k \frac{\dot{\ell}}{L} \sqrt{\frac{G_c}{2N}} \right\rangle^2 = 1$$

où $G = \frac{N}{2} \left(\frac{V_M}{L-\ell} \right)^2$. Dans le cadre des faibles valeurs du taux de restitution d'énergie, on obtient

$$\dot{\ell} = -\frac{L}{3} \sqrt{\frac{2N}{G_c}} \left(\frac{G}{G_c} \right)^{3/2}.$$

6.7 Problème limite d'évolution du décollement

6.7.1 Formulation du problème limite

Il reste à établir un lien entre l'avancée microscopique cyclique $\dot{\ell}(T)$ du décollement associée au taux de restitution d'énergie macroscopique $G(T)$ et la fonction position $T \mapsto \ell(T)$ de la pointe de décollement macroscopique. Compte tenu du caractère stationnaire de l'évolution microscopique, on a de façon intuitive

$$\dot{\ell}(T) = \frac{d\ell}{dT}(T). \quad (6.22)$$

Rappelons enfin que la valeur initiale $\ell(0+)$ de la position de la fissure macroscopique, *i.e.* celle qui est obtenue après un cycle (ou un nombre fini de cycles), est donnée par la loi de GRIFFITH, cf Proposition 6.2.1

$$\ell(0+) = \ell_1^0 = 1 - V_M.$$

On peut résumer les résultats précédents par la Proposition suivante

Proposition 6.7.1 *La position de la tête macroscopique de la zone décollée $\ell(T)$ est régie par l'équation différentielle suivante*

$$\frac{d\ell}{dT}(T) = -f(G(T)) \quad \text{avec} \quad G(T) = \frac{V_M^2}{(1-\ell(T))^2} \quad \text{et} \quad \ell(0+) = 1 - V_M. \quad (6.23)$$

Remarque 6.7.2 Il est intéressant de remarquer que les trois “composantes” du problème limite ont trois origines différentes :

1. *La condition initiale est fournie par la théorie de GRIFFITH et le résultat de convergence à court terme vers celle-ci obtenu dans la Proposition 6.2.1.*
2. *La “loi d’état” reliant le taux de restitution macroscopique à la longueur de la fissure macroscopique, qui est d’origine structurelle, issue du résultat de convergence au premier ordre 6.4.1. En langage de milieux standards généralisés, le taux de restitution d’énergie macroscopique est la force thermodynamique associée à la variable interne “longueur de fissure macroscopique”.*
3. *La loi d’évolution reliant la vitesse d’évolution de la variable interne “longueur de fissure macroscopique” à la force thermodynamique associée “taux de restitution d’énergie”. Elle est d’origine microscopique, due de façon essentielle à la présence d’une zone cohésive et à l’établissement d’un régime stationnaire à l’échelle microscopique.*

On voit donc que l’on a obtenu à la limite une loi standard généralisée. Le fait qu’elle se construise à partir d’un principe de minimisation d’énergie est essentiel. Cette remarque sera utilisée dans le dernier chapitre lorsqu’on abordera la question de la généralisation et de l’utilisation de ces résultats.

6.7.2 Vérification et résolution

Comme la fonction $G \mapsto \ell^\epsilon$ est connue explicitement, l’équation différentielle peut également se résoudre analytiquement. Il faut cependant raisonner sur chaque intervalle $[G_{n+1}, G_n)$ séparément, ce qui conduit à des expressions de $T \mapsto \ell(T)$ compliquées qui ne seront pas reproduites ici. On se contentera d’en donner le résultat graphiquement sur la Figure 6.5. L’amplitude du chargement cyclique vaut $V_M = 0.2$. On peut vérifier que la courbe obtenue est bien la limite des courbes obtenues lorsqu’on fait tendre ϵ vers 0. La courbe limite est pratiquement confondue avec celle correspondant à $\epsilon = 0.001$. On notera que la fissure macroscopique arrive en $\ell = 0$ lorsque le nombre de cycles macroscopiques vaut environ 45. Ceci veut dire qu’il faut environ 45000 cycles pour décoller complètement le film lorsque $\epsilon = 0.001$. L’obtention de la courbe $T \mapsto \ell_{i_\epsilon}^\epsilon(T)$ lorsque $\epsilon = 0.001$ nécessite donc de résoudre 45000 fois le système d’équations non linéaires (6.1)-(6.2) par la méthode de Newton, alors que l’obtention de la courbe limite $T \mapsto \ell(T)$ ne nécessiterait (si on utilisait une méthode numérique à défaut d’une solution analytique) que la résolution de l’équation différentielle (6.23) par une méthode de type Runge-Kutta avec un pas de temps “macroscopique” qui n’a pas besoin de correspondre à un cycle et qui peut donc être choisi indépendamment de ϵ . On économise ainsi d’autant plus de temps de calculs que ϵ est petit.

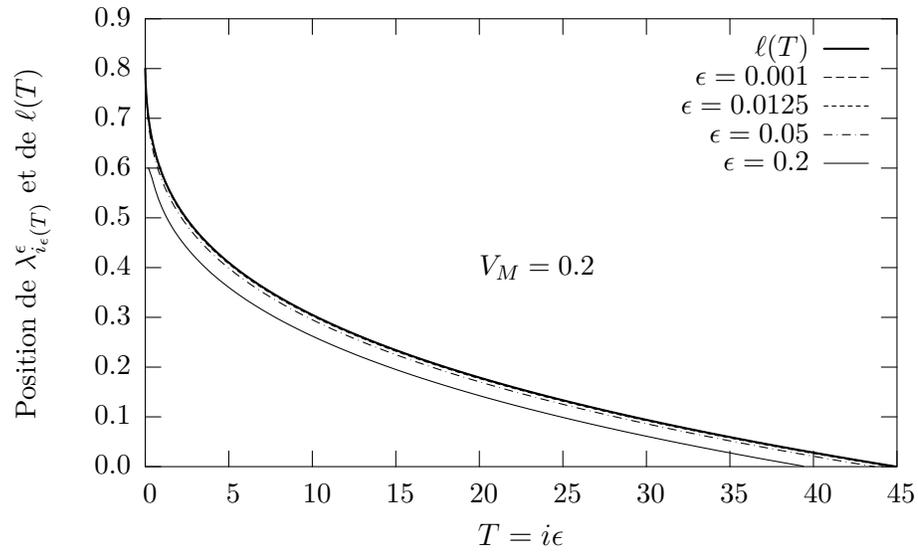


FIG. 6.5 – Vérification graphique du résultat de convergence vers la loi d'évolution limite dans le cas où $V_M = 0.2$.

On peut suivre la même démarche et construire ainsi d'autres lois de fatigue limites mais en changeant d'énergie de surface, de condition d'irréversibilité (Paragraphe 7.5), d'énergie potentielle (Paragraphe 7.4), de géométrie ou de cycle de chargement (Paragraphe 7.3).

Troisième partie

Etude des lois de fatigue limites

Chapitre 7

Variantes à l'essai de pelage.

On se propose de mettre en évidence dans ce chapitre les différences obtenues dans le processus de fissuration sous chargement cyclique lorsque l'on modifie le problème initial, décollement d'un film mince inextensible et parfaitement flexible (voir Chapitres 3 à 6), au niveau de son chargement, de sa loi de comportement ou de sa structure. L'objectif est de déterminer, dans ces différents cas, la solution du problème d'évolution de la fissuration et à la limite, lorsque le film est long vis à vis de la longueur interne, la loi de fatigue limite.

Il est connu que la loi de PARIS dépend de nombreux paramètres liés tant aux conditions de l'expérience qu'au problème traité, la littérature en faisant d'ailleurs abondamment état, voir par exemple [60] ou [4]. Il est cependant difficile de distinguer quels facteurs agissent sur cette loi et notamment sur la puissance m , en reprenant la terminologie classique (voir Chapitre 1). Afin de montrer la capacité de l'approche variationnelle de la fatigue (Chapitre 2) à rendre compte de différents facteurs (la condition d'irréversibilité, l'énergie de surface, l'énergie potentielle, le type de chargement, la forme des cycles de chargement,...), on va considérer dans ce chapitre des "variantes" à l'essai de pelage (traité aux Chapitres 3 à 6). Plus précisément on va étudier l'influence

1. de l'application d'un chargement de type force imposée (et plus de type déplacement imposé). Dans ce cadre, il apparaît que la forme de la loi de fatigue limite n'est pas modifiée.
2. du rapport d'ouverture R .
En considérant des rapports d'ouverture $R = V_m/V_M$ non nuls, *i.e.* en ne considérant plus des chargements cycliques avec retour à zéro à la fin de chaque décharge, on montrera que le taux de décollement du film à la limite $\dot{\ell}$ dépend à chaque instant T des valeurs maximale G_M et minimale G_m du taux de restitution d'énergie durant un cycle de chargement.
3. du caractère linéaire ou non de la loi de comportement.
On verra qu'en choisissant une loi de comportement non linéaire (non linéarité caractérisée par le paramètre p), les lois obtenues sont fortement dépendantes de cette non linéarité.
4. de l'application d'un chargement de mode III (et plus de mode I).
En étudiant l'arrachement d'un film de son socle (et non plus le décollement), il apparaîtra que la loi de fatigue limite s'exprime par deux relations et non plus une seule. Ceci est la conséquence de l'influence des décharges pendant lesquelles l'arrachement s'effectue contrairement au modèle d'ouverture.
5. de la "structure".
En considérant que le film travaille non plus en tension mais en flexion pure, on montrera que la loi de fatigue limite s'en trouve modifiée, la valeur de la puissance m lorsqu'on considère de faibles valeurs du taux de restitution d'énergie G étant de $5/4$ et non plus $3/2$.

Dans chaque cas, on essayera de comparer les résultats obtenus avec ceux trouvés dans la littérature. L'ensemble des résultats (détaillés dans la suite de ce chapitre) est présenté dans le Tableau 7.1. Dans la première colonne se situent les différents problèmes traités. Dans la seconde, l'expression de l'échelle de cycles T , *i.e.* l'ordre de grandeur du pas de temps T lorsque δ_c est petit devant la longueur du film L . Enfin on donne dans la 3^{ème} colonne la loi de fatigue limite pour des faibles valeurs du taux de restitution d'énergie G .

MODÈLE	ÉCHELLE DE CYCLE T	LOI DE FATIGUE LIMITE (G PETIT)
Décollement en Tension ($R = 0$)	L/δ_c	$\dot{\ell} = -\frac{L}{3} \sqrt{\frac{2N}{G_c}} \left(\frac{G}{G_c}\right)^{3/2}$
Décollement en Tension avec BARENBLATT	L/δ_c	$\dot{\ell} = -CL \sqrt{\frac{2N}{G_c}} \left(\frac{G}{G_c}\right)^{3/2}$ où C dépend de ϕ
Décollement en Tension (force imposée)	L/δ_c	$\dot{\ell} = -\frac{L}{3} \sqrt{\frac{2N}{G_c}} \left(\frac{G}{G_c}\right)^{3/2}$
Décollement en Tension ($R \neq 0$)	L/δ_c	$\dot{\ell} = -\frac{L}{3} \sqrt{\frac{2N}{G_c}} \left(\sqrt{\frac{G_M}{G_c}} - \sqrt{\frac{G_m}{G_c}}\right)^3$
Décollement en Tension non linéaire	L/δ_c	$\dot{\ell} = -\left(\frac{p-1}{2p-1}\right) L \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\frac{N}{G_c}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{G}{G_c}\right)^{\frac{2p-1}{p}}$
Arrachement	L/δ_c	$\dot{\ell} = -\frac{L}{6} \sqrt{\frac{2\mu}{G_c}} \left(\frac{G}{G_c}\right)^{3/2}$
Décollement en Flexion pure	$\sqrt{L/\delta_c}$	$\dot{\ell} = -\frac{4}{15} \sqrt{L} \left(\frac{8EI}{G_c}\right)^{1/4} \left(\frac{G}{G_c}\right)^{5/4}$

TAB. 7.1 – Différents problèmes traités et lois de fatigue limites obtenues.

7.1 Hypothèses préliminaires

Par souci de clarté de la présentation, et comme le but n'est pas ici la résolution complète des différents problèmes traités, on réalise les hypothèses suivantes

Hypothèse 1 : La solution du problème de minimisation est supposée unique et indépendante de la discrétisation choisie. Ainsi la résolution du problème sera réalisée en un seul pas de temps sur chaque demi-cycle de chargement (charge-décharge-recharge-etc...). On pourrait être tenté d'établir ce résultat de façon rigoureuse dans tous les exemples qui suivent (comme dans le Chapitre 4), mais les problèmes étant très proches dans leur formulation, on peut supposer que l'hypothèse est vérifiée.

Hypothèse 2 : On suppose que le niveau de chargement est assez faible (pour éviter que le film ne se décolle entièrement en un seul cycle de chargement).

Hypothèse 3 : On suppose que le nombre de cycles d'amorçage N_a , comme défini au Chapitre 5, est nul (sauf pour le problème de décollement à force imposée).

On se placera donc toujours dans la configuration suivante : le film est parfaitement collé sur une zone, partiellement décollé sur une autre et parfaitement décollé sur une troisième.

7.2 Décollement d'un film à force imposée

On souhaite résoudre le problème voisin du précédent en examinant le décollement d'un film mince soumis non plus à une ouverture cyclique et une tension constante mais à une tension cyclique.

7.2.1 Présentation

Comme présenté sur la Figure 7.1, on considère un film inextensible et parfaitement flexible initialement parfaitement collé sur son socle rigide. Le film est fixé à une de ses extrémités et soumis à l'autre à une tension cyclique définie par

$$\vec{N}(t) = N_0 \vec{\tau}(t), \quad \|\vec{\tau}\| = 1$$

où N_0 est une constante fixée et $\vec{\tau}$ la direction de la tension au cours du temps. Celle-ci est caractérisée par l'angle cyclique $\bar{w}(t)$ entre la tangente au film au point d'application de la tension et l'horizontale (ainsi lorsque $w = 0$, le film est soumis à une tension horizontale $N_0 \vec{e}_1$). On se place dans le cadre des petites perturbations ce qui revient à supposer de faibles valeurs et variations de l'angle \bar{w} . Ainsi on peut écrire

$$\vec{\tau} = (\cos \bar{w}) \vec{e}_1 + (\sin \bar{w}) \vec{e}_2 \sim \vec{e}_1 + \bar{w} \vec{e}_2. \quad (7.1)$$

L'énergie totale s'obtient comme la somme du travail de la force de tension et de l'énergie de surface (l'énergie élastique étant nulle du fait de l'inextensibilité et de la flexibilité du film)

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{N_0}{2} \int_0^L \bar{v}'^2(s) ds - N_0 \bar{w}(t) \bar{v}(L) + \int_0^L \bar{\phi}(\bar{\delta}(s)) ds \quad (7.2)$$

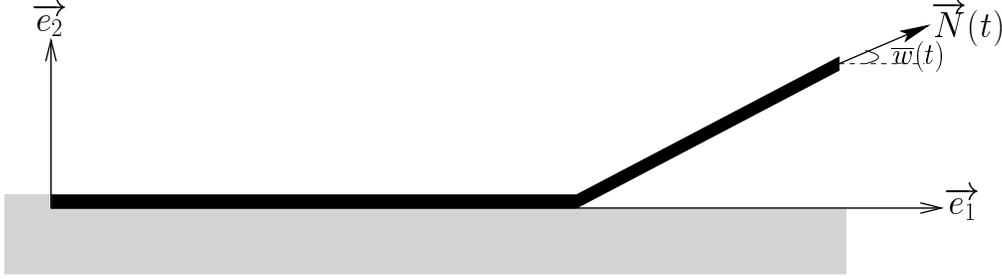


FIG. 7.1 – Géométrie et chargement.

où $\bar{\phi}$ représente la densité d'énergie de surface de DUGDALE dépendant de l'ouverture cumulée $\bar{\delta}$ (et dont l'expression est donnée par (2.7)) et s l'abscisse curviligne le long du film. Dans (7.2), on a utilisé la condition d'inextensibilité du film afin d'exprimer $\bar{\mathcal{E}}$ uniquement en terme d'ouverture \bar{v} du film. On ajoute que cette ouverture doit vérifier la condition cinématique d'encastrement $\bar{v}(0) = 0$ et la condition de non interpénétration du film dans le socle $\bar{v}(s) \geq 0 \quad \forall s \in [0, L]$. Dans la suite on considérera un chargement d'amplitude constante défini respectivement par les chargements maximal $\bar{w}_M = \bar{w}$ et minimal $\bar{w}_m = 0$ à chaque cycle. Afin d'alléger les expressions et de mettre en évidence les paramètres importants, on adimensionnalise le problème. L'énergie totale donnée par (7.2) s'écrit alors plus simplement

$$\mathcal{E} = \int_0^1 v'^2(x) dx - w(t)v(1) + \int_0^1 \phi_\epsilon(\delta(x)) dx \quad (7.3)$$

où on a posé

$$x = \frac{s}{L}, \quad v(x) = \frac{\bar{v}(s)}{\mathcal{L}}, \quad \delta(x) = \frac{\bar{\delta}(s)}{\mathcal{L}}, \quad w = \frac{\bar{w}}{\mathcal{A}}$$

avec

$$\mathcal{L} = \sqrt{\frac{2G_c}{N_0}} L, \quad \mathcal{A} = \sqrt{\frac{G_c}{2N_0}}, \quad \epsilon = \frac{\delta_c}{\mathcal{L}}.$$

Dans (7.3), ϕ_ϵ représente la densité d'énergie de surface de DUGDALE adimensionnalisée dont l'expression est donnée par (3.18). On note que l'ouverture v doit appartenir à l'ensemble des ouvertures admissibles \mathcal{V} suivant

$$\mathcal{V} = \{v \in W^{1,2}(0, 1), v(0) = 0, v \geq 0\}.$$

Remarque 7.2.1 Comme pour le Chapitre 5, on va supposer que le film ne peut être partiellement décollé sur toute sa longueur. Ceci est vérifié si l'on choisit $\epsilon < 2$.

Compte tenu de l'irréversibilité du problème, il s'agit de procéder à sa discrétisation ce qui conduit à une succession de problèmes de minimisation. Comme annoncé précédemment, on supposera que chaque demi-cycle (charge-décharge-recharge..) peut être résolu en un unique pas de temps. Le problème incrémental adimensionnalisé s'écrit :

Sachant que $v_0 = \delta_0 = 0$, trouver, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $v_i \in \mathcal{V}$ et δ_i tels que

$$\mathcal{E}_i(v_i) \leq \mathcal{E}_i(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad \text{et} \quad \delta_i = \delta_{i-1} + \langle v_i - v_{i-1} \rangle \quad (7.4)$$

où l'énergie est donnée par

$$\mathcal{E}_i(v) = \int_0^1 v'(x)^2 dx - w_i v(1) + \int_0^1 \phi_\epsilon \left(\delta_{i-1}(x) + \langle v(x) - v_{i-1}(x) \rangle \right) dx \quad (7.5)$$

avec $w_{2i} = 0$ et $w_{2i+1} = w$. À la fin de chaque décharge, l'angle imposé w étant nul, on montre, comme dans la Proposition 4.3.1, que l'ouverture v_{2i} le long du film est nulle et que l'ouverture cumulée δ_{2i} conserve la valeur qu'elle possédait à la fin de la montée en charge précédente :

$$v_{2i} = 0, \quad \delta_{2i} = \delta_{2i-1}.$$

Concernant les phases de charge, et en reprenant ce qui a été dit au Chapitre 5, on peut postuler que les champs v_{2i-1} et δ_{2i-1} sont divisés en 3 zones : une zone parfaitement collée $[0, \ell_{2i-1}]$ où $v_{2i-1} = \delta_{2i-1} = 0$ (qui se réduira au point $\{0\}$ au bout d'un nombre suffisant de cycles), une zone partiellement décollée $(\ell_{2i-1}, \lambda_{2i-1})$ où $0 < \delta_{2i-1} < \epsilon$ (qui peut s'étendre jusqu'à l'extrémité 1, dans ce cas $\lambda_{2i-1} = 1$, lors des premiers cycles si l'amplitude du chargement est trop faible) et une zone parfaitement décollée $(\lambda_{2i-1}, 1)$ où $\delta_{2i-1} > \epsilon$. Pour déterminer ℓ_{2i-1} , λ_{2i-1} , v_{2i-1} et δ_{2i-1} , on utilise toujours (5.3), (5.5), (5.6) et (5.7). En fait seules les conditions aux limites (5.4) sont à modifier et à remplacer par

$$v_{2i-1}(0) = 0, \quad v'_{2i-1}(1) = \frac{w}{2},$$

la seconde condition étant la condition naturelle.

7.2.2 Première montée en charge

Proposition 7.2.2 *La configuration du film à la fin de la première montée en charge est la suivante*

1. Si $w < 2$ alors le film est parfaitement collé sur $[0, \ell_1]$ et partiellement décollé sur $(\ell_1, 1)$. Le champ de déplacement s'écrit

$$v_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_1 \\ \frac{(x-\ell_1)^2}{4\epsilon} & \text{si } \ell_1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.6)$$

où la pointe de la zone partiellement décollée dépend de l'amplitude du chargement cyclique

$$1 - \ell_1 = \epsilon w. \quad (7.7)$$

2. Si $w = 2$ alors le film est parfaitement collé sur $[0, \ell_1]$, partiellement décollé sur (ℓ_1, λ_1) et parfaitement décollé sur $(\lambda_1, 1)$. L'ouverture s'exprime par

$$v_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_1 \\ \frac{(x-\ell_1)^2}{4\epsilon} & \text{si } \ell_1 \leq x \leq \lambda_1 \\ \frac{(\lambda_1-\ell_1)}{2\epsilon}(x-\lambda_1) + \frac{(\lambda_1-\ell_1)^2}{4\epsilon} & \text{si } \lambda_1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.8)$$

On a alors une infinité de solutions, car on ne peut déterminer que la longueur de la zone cohésive

$$\lambda_1 - \ell_1 = 2\epsilon, \quad (7.9)$$

mais la position de la pointe reste indéterminée.

3. Si $w > 2$ alors le film est partiellement décollé sur $[0, \lambda_1)$ et parfaitement décollé sur $(\lambda_1, 1)$, avec

$$\lambda_1 = \epsilon w - \epsilon \sqrt{w^2 - 4}. \quad (7.10)$$

Pour les autres phases de chargement, on suppose que le chargement cyclique est d'amplitude constante $w < 2$ puisqu'on a vu qu'il y avait non unicité de la solution lorsque $w = 2$ (le cas $w > 2$ ne présentant pas d'intérêt en fatigue). On se demande alors, si dans cet exemple de décollement à force imposée, on est également capable de rendre compte du phénomène de fatigue. Ceci est l'objet du paragraphe suivant.

7.2.3 Aux cycles suivants

Proposition 7.2.3 *En considérant un angle maximal à chaque cycle $w < 2$, l'évolution du décollement du film pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ est la suivante :*

- si $i \leq N_a$ alors le film est parfaitement collé sur $[0, \ell_1]$ et partiellement décollé sur $(\ell_1, 1)$. L'ouverture s'écrit

$$v_{2i-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_1 \\ \frac{(x-\ell_1)^2}{4\epsilon} & \text{si } \ell_1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.11)$$

où la pointe de la zone partiellement décollée ℓ_1 est donnée par (7.7) et le nombre de cycles d'amorçage N_a par

$$N_a = \text{Ent} \left[\frac{4}{w^2} \right]. \quad (7.12)$$

- si $i > N_a$ alors le film est parfaitement collé sur $[0, \ell_{2i-1}]$, partiellement décollé sur $(\ell_{2i-1}, \lambda_{2i-1})$ et parfaitement décollé sur $(\lambda_{2i-1}, 1)$. L'ouverture s'exprime par

$$v_{2i-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{2i-1} \\ \frac{(x-\ell_{2i-1})^2}{4\epsilon} & \text{si } \ell_{2i-1} \leq x \leq \lambda_{2i-1} \\ \frac{(\lambda_{2i-1}-\ell_{2i-1})}{2\epsilon}(x-\lambda_{2i-1}) + \frac{(\lambda_{2i-1}-\ell_{2i-1})^2}{4\epsilon} & \text{si } \lambda_{2i-1} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.13)$$

et la position des pointes de la zone cohésive ℓ_{2i-1} et de la zone parfaitement décollée λ_{2i-1} est solution du système suivant

$$\begin{cases} \lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1} = \epsilon w \\ \sum_{j=1}^i \langle \lambda_{2i-1} - \ell_{2j-1} \rangle^2 = 4\epsilon^2. \end{cases} \quad (7.14)$$

Dans (7.14), la première relation fixe la longueur de la zone cohésive $\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1} = \epsilon w = d$, longueur constante durant tout le processus de décollement. Par contre, et contrairement au cas $w = 2$, il existe une unique pointe de zone cohésive ℓ_{2i-1} et une unique pointe de zone parfaitement décollée λ_{2i-1} . En effet, dans la relation (7.14₂), en posant $\lambda_{2i-1} - \ell_{2j-1} = \lambda_{2i-1} - \ell_{2j-1} + \lambda_{2j-1} - \ell_{2j-1} = \lambda_{2i-1} - \ell_{2j-1} + d$ et en postulant que seuls les termes $j \geq i-1$ ne sont pas nuls, on obtient $\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-3} = \epsilon(\sqrt{4-w^2} - w)$. Ainsi la zone cohésive se translate à chaque cycle d'une même quantité. Il s'avère donc qu'à force imposée, on peut traiter du phénomène de décollement

progressif qu'est la fatigue du film (en choisissant des amplitudes $w < 2$). Pendant les N_a premiers cycles, il y a endommagement progressif de la zone d'amorçage $1 - \ell_1$ du décollement. Par la suite, et contrairement au cas à déplacement contrôlé, la longueur de la zone cohésive est constante durant tout le processus de décollement et égale à $\lambda - \ell = \epsilon w$.

Remarque 7.2.4 Si on avait résolu ce problème avec une énergie de surface de GRIFFITH, on aurait, à la fin de la première montée en charge, décollé le film sur une longueur $1 - \ell$. Par contre, aux cycles suivants, la pointe de la zone décollée n'aurait pas évolué : $\ell_{2i-1} = \ell \forall i \in \mathbb{N}^*$. Le taux de restitution d'énergie associé à la longueur du film décollée s'écrit

$$G = \frac{w^2}{4} \quad (7.15)$$

7.2.4 Loi de fatigue limite

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on est capable de construire un modèle limite d'évolution du décollement. Pour cela on fait l'hypothèse (comme au Chapitre 6) qu'au niveau microscopique l'évolution du décollement est en régime stationnaire, et on pose

$$\begin{aligned} d(T) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon \right) \\ \dot{\ell}(T) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)+2k+1}^\epsilon - \lambda_{2i_\epsilon(T)+2k-1}^\epsilon \right) \end{aligned}$$

où d et $\dot{\ell}$ sont des fonctions du nombre de cycles mis à l'échelle T défini par (6.6).

On a également convergence des pointes $\ell_{2i_\epsilon(T)}$ et $\lambda_{2i_\epsilon(T)}$ vers une pointe macroscopique $\ell(T)$ à T fixé

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon = \ell(T).$$

Pour déterminer d , on fait $i = i_\epsilon(T)$ dans (7.14₁), on divise par ϵ et on passe à la limite. On obtient ainsi que la longueur de la zone cohésive microscopique ne dépend que du taux de restitution d'énergie macroscopique :

$$d = 2\sqrt{G}.$$

Proposition 7.2.5 *En supposant que le régime microscopique est stationnaire, la loi de fatigue limite s'exprime par*

$$\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} \langle 2\sqrt{G} + j\dot{\ell} \rangle^2 = 4} \quad (7.16)$$

Preuve. Comme on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2j_\epsilon(T)-1}^\epsilon \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[(\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \lambda_{2j_\epsilon(T)-1}^\epsilon) + (\lambda_{2j_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2j_\epsilon(T)-1}^\epsilon) \right] = k\dot{\ell} + d,$$

le résultat est immédiat à partir de la relation (7.14₂). \square

Ainsi on retrouve une loi de fatigue similaire à celle obtenue dans le cadre du décollement d'un

film à déplacement imposé. Pour des valeurs faibles du taux de restitution d'énergie G , on obtient donc directement

$$\dot{\ell} = -\frac{2}{3}G^{\frac{3}{2}}.$$

Le type de chargement imposé à la structure modifie donc l'évolution du décollement —l'avancé à chaque cycle de la pointe de la zone décollée est constante du fait de la constance du taux de restitution d'énergie G au cours du temps contrairement au problème à déplacement imposé dans lequel G est une fonction décroissante de la longueur décollée— mais pas la forme de la loi de fatigue limite.

Remarque 7.2.6 En résolvant ce problème avec les grandeurs non adimensionnalisées, on obtient la loi de fatigue limite suivante

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \sqrt{\frac{G}{G_c}} + k \frac{\dot{\ell}}{L} \sqrt{\frac{G_c}{2N_0}} \right\rangle^2 = 1$$

où $G = \frac{N_0}{2}w^2$. Dans le cadre des faibles valeurs du taux de restitution d'énergie, on obtient

$$\dot{\ell} = -\frac{L}{3} \sqrt{\frac{2N_0}{G_c}} \left(\sqrt{\frac{G}{G_c}} \right)^{3/2}.$$

7.3 Rapport d'ouverture non nul ($R = V_m/V_M \neq 0$)

L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'influence du rapport d'ouverture sur l'évolution du décollement du film. Ainsi, le problème du décollement d'un film mince inextensible et parfaitement flexible énoncé au Chapitre 3 et résolu aux Chapitres 4 à 6 dans le cadre d'une énergie de surface de DUGDALE ne diffère ici que par le choix de l'ouverture imposée à l'extrémité du film : comme le montre la Figure 7.2, le chargement cyclique $V(t)$ est tel que le rapport d'ouverture $R = V_m/V_M$ est non nul (ce qui conduit, en reprenant la terminologie classique en fatigue, à un *chargement ondulé*), où V_M (resp. V_m) est l'ouverture maximale (resp. minimale) imposée à chaque cycle.

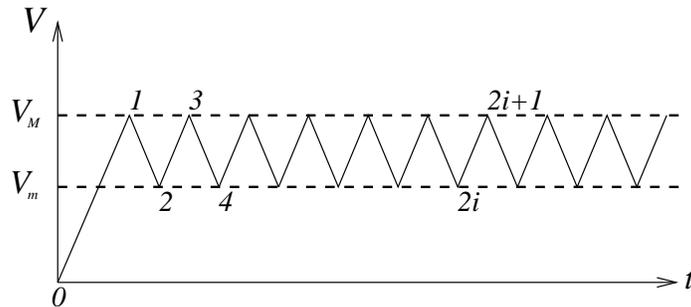


FIG. 7.2 – Ouverture cyclique d'amplitude $V_M - V_m$ imposée à l'extrémité du film.

Soit respectivement \mathcal{V}_0 et \mathcal{V}_1 l'ensemble des champs d'ouverture admissibles respectivement à la fin des demi-cycles de décharge et de charge : $\mathcal{V}_0 = \{v \in W^{1,2}(0,1), v(0) = 0, v \geq 0, v(1) = V_m\}$ et $\mathcal{V}_1 = \{v \in W^{1,2}(0,1), v(0) = 0, v \geq 0, v(1) = V_M\}$.

Le problème incrémental s'écrit :

Sachant que $v_0 = \delta_0 = 0$, trouver, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $v_i \in \mathcal{V}_i$ et δ_i tels que

$$\mathcal{E}_i(v_i) \leq \mathcal{E}_i(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_i \quad \text{et} \quad \delta_i = \delta_{i-1} + \langle v_i - v_{i-1} \rangle \quad (7.17)$$

où l'énergie est donnée par

$$\mathcal{E}_i(v) = \int_0^1 v'(x)^2 dx + \int_0^1 \phi_\epsilon \left(\delta_{i-1}(x) + \langle v(x) - v_{i-1}(x) \rangle \right) dx \quad (7.18)$$

et $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_0$ si i est pair, $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_1$ si i est impair.

Remarque 7.3.1 : Compte tenu du problème traité et de la condition de non interpénétration du film dans le socle (3.3), on ne peut choisir que des rapports d'ouverture $R \geq 0$.

7.3.1 Solution au cycle i

Pour résoudre le problème incrémental précédent, on se sert des relations établies au Chapitre 4. Cependant, contrairement au Chapitre 4, le champ d'ouverture n'est pas nul à la fin d'une décharge (puisque $v_{2i}(1) = V_m$). Il s'agit donc de distinguer les phases de charge des phases de décharge. À la fin de chaque phase de charge, le film est, par hypothèse, parfaitement collé sur l'intervalle $[0, \ell_{2i-1}]$, partiellement décollé sur l'intervalle $(\ell_{2i-1}, \lambda_{2i-1})$ et parfaitement décollé sur l'intervalle $(\lambda_{2i-1}, 1)$. Pour déterminer v_{2i-1} , δ_{2i-1} , ℓ_{2i-1} , et λ_{2i-1} , on utilise (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) et (5.7). Par contre à la fin de chaque fin de décharge, l'ouverture doit vérifier la Proposition 4.1.5, *i.e.*

$$v_{2i}(x) \begin{cases} = v_{2i-1}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{2i} \\ < v_{2i-1}(x) & \text{si } \ell_{2i} < x \leq 1 \end{cases}$$

ainsi que la Proposition 4.2.1. De ce fait on a forcément $\ell_{2i-1} < \ell_{2i} < \lambda_{2i-1}$. On remarque de plus que comme $\delta_{2i} = \delta_{2i-1}$ (par définition de l'ouverture cumulée), on a nécessairement $\lambda_{2i} = \lambda_{2i-1}$. Pour déterminer v_{2i} dans l'intervalle $(\ell_{2i}, 1)$ et ℓ_{2i} , on doit

1. résoudre les équations d'Euler :

$$v_{2i}'' = \frac{1}{2\epsilon} \quad \text{dans } (\ell_{2i-1}, \ell_{2i}), \quad v_{2i}'' = 0 \quad \text{dans } (\ell_{2i}, 1).$$

2. écrire la condition à la limite :

$$v_{2i}(1) = V_m.$$

3. écrire la continuité de v_{2i} et de v_{2i}' en ℓ_{2i} :

$$[[v_{2i}]](\lambda_{2i}) = [[v_{2i}']](\lambda_{2i}) = 0.$$

On donne dans la proposition suivante, la solution du problème de décollement d'un film mince soumis à une ouverture cyclique de rapport d'ouverture non nul. On note que l'ouverture cumulée à la fin de la $i^{\text{ième}}$ montée en charge s'exprime par

$$\begin{aligned}
\delta_{2i-1}(x) &= \delta_{2i-2}(x) + v_{2i-1}(x) - v_{2i-2}(x) \\
&= \delta_{2i-3}(x) + v_{2i-1}(x) - v_{2i-2}(x) \\
&= \dots \\
&= \sum_{p=1}^{2i-1} (-1)^{p+1} v_p(x)
\end{aligned} \tag{7.17}$$

On rappelle (voir la Proposition 4.3.1) que pour une décharge complète (*i.e.* de V_M à 0), la résolution du problème de minimisation conduit à la nullité de l'ouverture v en fin de décharge et à la non évolution des pointes ($\lambda_{2i} = \lambda_{2i-1}$ et $\ell_{2i} = \ell_{2i-1}$). On va voir qu'une décharge incomplète (de V_M à $V_m \neq 0$) conduit à un processus sensiblement différent.

Proposition 7.3.2 *Le champ de déplacement s'écrit, quel que soit $i \in \mathbb{N}^*$*

• pour un chemin de charge

$$v_{2i-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{2i-1} \\ \frac{(x-\ell_{2i-1})^2}{4\epsilon} & \text{si } \ell_{2i-1} \leq x \leq \lambda_{2i-1} \\ \frac{(\lambda_{2i-1}-\ell_{2i-1})}{2\epsilon}(x-\lambda_{2i-1}) + \frac{(\lambda_{2i-1}-\ell_{2i-1})^2}{4\epsilon} & \text{si } \lambda_{2i-1} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{7.18}$$

où ℓ_{2i-1} et λ_{2i-1} sont donnés par le système suivant

$$\begin{cases} 2(\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1})(1 - \lambda_{2i-1}) + (\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1})^2 = 4\epsilon V_M \\ (\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1})^2 + \sum_{j=1}^{i-1} (\lambda_{2i-1} - \ell_{2j})^2 = 4\epsilon^2 \end{cases} \tag{7.19}$$

• pour un chemin de décharge

$$v_{2i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{2i-1} \\ \frac{(x-\ell_{2i-1})^2}{4\epsilon} & \text{si } \ell_{2i-1} \leq x \leq \ell_{2i} \\ \frac{(\ell_{2i}-\ell_{2i-1})}{2\epsilon}(x-\ell_{2i}) + \frac{(\ell_{2i}-\ell_{2i-1})^2}{4\epsilon} & \text{si } \ell_{2i} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{7.20}$$

avec ℓ_{2i} vérifiant

$$2(\ell_{2i} - \ell_{2i-1})(1 - \ell_{2i}) + (\ell_{2i} - \ell_{2i-1})^2 = 4\epsilon V_m \tag{7.21}$$

Remarque 7.3.3 La pointe λ_{2i-1} peut-elle rejoindre la tête ℓ_{2i-2} avant la fin de la montée en charge ? En supposant qu'elle le puisse pour un niveau de chargement V' tel que $V_m < V' < V_M$, alors la condition de décollement (7.19₂) donne $\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1} = 2\epsilon$ et la condition à la limite (7.19₁) entraîne $1 - \lambda_{2i-1} + \epsilon = V'$. Or, $V_M = 1 - \epsilon - \ell_1$ d'après (5.11), donc

$$V' - V_M = (\ell_1 - \lambda_{2i-1}) + 2\epsilon = \ell_1 - \ell_{2i-1} > 0$$

ce qui est impossible compte tenu de l'hypothèse faite sur V' . Ainsi la tête de zone décollée ne peut rejoindre ℓ_{2i-2} avant la fin de la charge et la structure de la solution est obligatoirement celle donnée par (7.18)

Ainsi pour un film qui est seulement partiellement déchargé, il existe à l'intérieur de la zone partiellement décollée $\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1}$ une région $\lambda_{2i-1} - \ell_{2i}$ où les forces cohésives sont nulles. Cependant, cette région ne correspond pas à une zone décollée : il y a toujours interaction entre le film et le socle, mais cette interaction est simplement "relâchée".

On représente schématiquement sur la Figure 7.3 la configuration du film sur un cycle charge-décharge-recharge du chargement. Cette configuration est à comparer à celle obtenue Figure 5.2 pour un rapport d'ouverture nul $R = 0$.

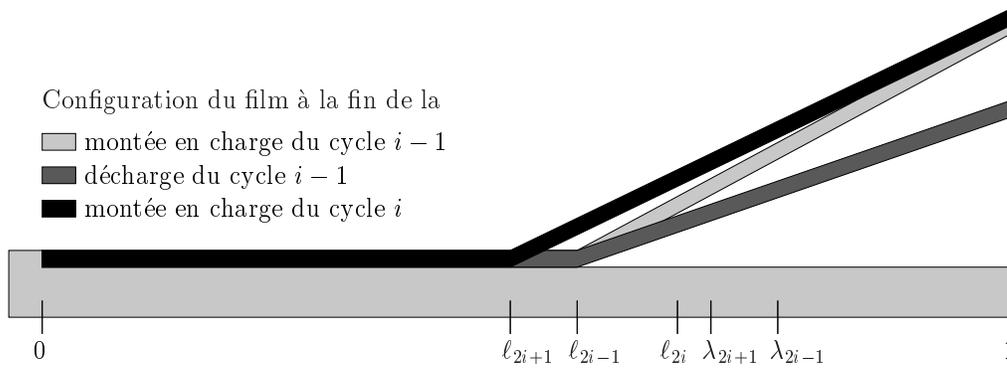


FIG. 7.3 – Configuration du film sur un cycle charge-décharge-recharge.

On présente sur la Figure 7.4 l'influence du rapport d'ouverture $R > 0$ sur la durée de vie de la

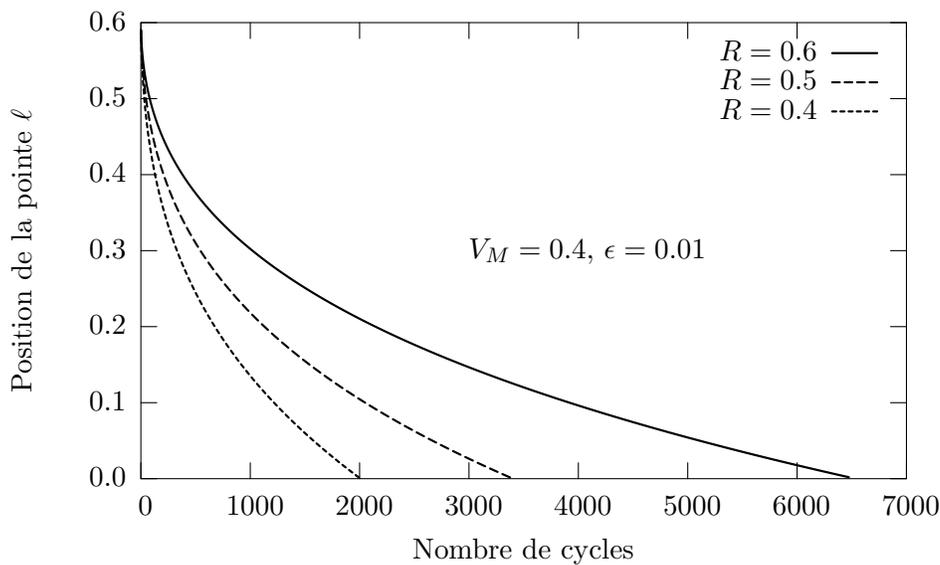


FIG. 7.4 – Influence du rapport d'ouverture R .

structure pour une ouverture maximale V_M fixée. Il apparaît que plus R est élevé, plus le nombre de cycles nécessaire pour décoller entièrement le film est élevé.

Sur la Figure 7.5, on a tracé l'évolution du taux de décollement du film en fonction de $\sqrt{G_M} - \sqrt{G_m}$ (qui est proportionnel à la variation du facteur d'intensité des contraintes $\Delta K = K_M - K_m$) pour différentes valeurs de R . On observe qu'une augmentation de R provoque une augmentation de $d\ell/dN$ pour un $\sqrt{G_M} - \sqrt{G_m}$ fixé. Ceci constitue un résultat généralement obtenu en fatigue des matériaux comme le montre par exemple le travail expérimental de KUMAR et SINGH [38]. Ainsi, et contrairement à la loi de PARIS, l'approche variationnelle est capable de capter l'effet du rapport d'ouverture sur la vitesse de fissuration sans ajout de critères supplémentaires (le facteur d'intensité des contraintes effectif ΔK_{eff} introduit par ELBER [27] par exemple). Par contre les causes de cet effet sont peu claires. En effet si dans la littérature, il est expliqué par le phénomène de fermeture de fissure déjà évoqué au paragraphe 1.2.2, ici, en l'absence de plasticité, on le justifie mal.

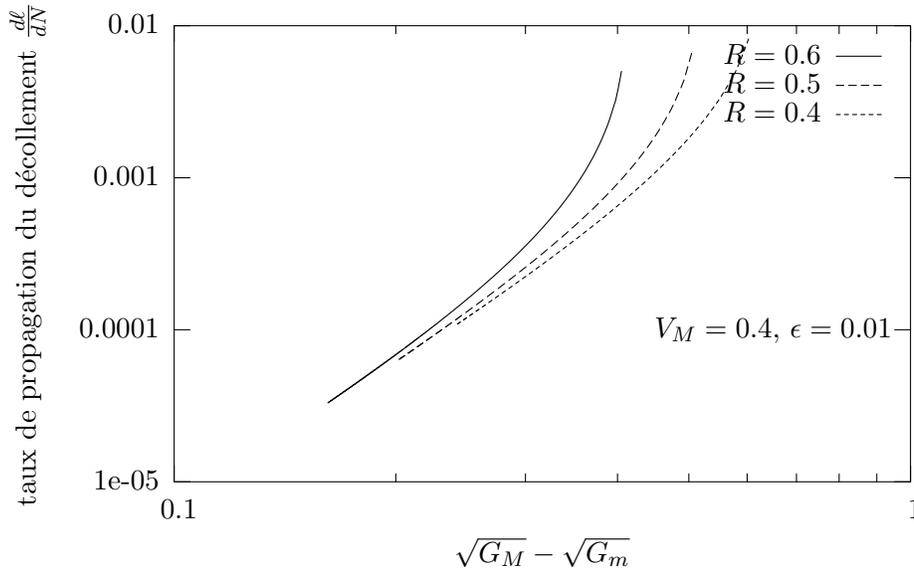


FIG. 7.5 – Représentation du taux de décollement du film en fonction du taux de restitution d'énergie.

7.3.2 Loi de fatigue limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$

L'évolution du décollement étant connue, il s'agit dès lors de déterminer le comportement du film lorsque celui-ci est long vis à vis de l'ouverture cumulée critique δ_c , autrement dit lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

En reprenant les idées introduites aux chapitres précédents, on postule l'existence d'un régime

stationnaire au niveau microscopique et on introduit les quantités suivantes

$$\begin{aligned} d_1(T) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon \right) \\ d_2(T) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\ell_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon - \ell_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon \right) \\ \dot{\ell}(T) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)+2k+1}^\epsilon - \lambda_{2i_\epsilon(T)+2k-1}^\epsilon \right) \end{aligned}$$

où d_1 , d_2 et $\dot{\ell}$ sont des fonctions du nombre de cycles mis à l'échelle T défini par (6.6).

De même, on montrerait le résultat de convergence suivant : les pointes de zones décollée et partiellement décollée tendent vers une limite commune ℓ

$$\text{À } T \text{ fixé,} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon = \ell(T).$$

Avant de construire la loi de fatigue limite, on cherche à évaluer d_1 et d_2 . Pour cela on passe à la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ dans (7.19₁) ce qui entraîne $2d_1(1 - \ell) = 4V_M$ et donc, en introduisant le taux de restitution d'énergie $G_M(T) = V_M^2/(1 - \ell(T))^2$ obtenu pour un film décollé sur une longueur $1 - \ell$ et soumis à une ouverture V_M ,

$$d_1 = 2\sqrt{G_M} \quad (7.22)$$

De même, la condition (7.21) donne directement en première approximation $2d_2(1 - \ell_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon) = 4V_m$ qui conduit à

$$d_2 = 2\sqrt{G_m} \quad (7.23)$$

où $G_m(T) = V_m^2/(1 - \ell(T))^2$ est le taux de restitution d'énergie en fin de décharge.

Comme la longueur de la zone cohésive n'évolue pas lors d'une décharge, on définit la distance $\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon$ par

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon \right) = d_1 - d_2 = 2(\sqrt{G_M} - \sqrt{G_m}). \quad (7.24)$$

La Figure 7.6 représente schématiquement la configuration du film à la fin de la montée en charge et à la fin de la décharge du cycle i .

On énonce ci-dessous la loi de fatigue limite obtenue pour des chargements cycliques de rapport d'ouverture non nul.

Proposition 7.3.4 *En supposant que le régime microscopique est stationnaire, la relation entre $\dot{\ell}$ et G est donnée par l'équation implicite suivante*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \left\langle 2(\sqrt{G_M} - \sqrt{G_m}) + k\dot{\ell} \right\rangle^2 = 4(1 - G_M)} \quad (7.25)$$

où les crochets indiquent la partie positive.

Preuve. Comme on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2j_\epsilon(T)}^\epsilon \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[(\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \lambda_{2j_\epsilon(T)-1}^\epsilon) + (\lambda_{2j_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2j_\epsilon(T)}^\epsilon) \right] = d_1 - d_2 + k\dot{\ell},$$

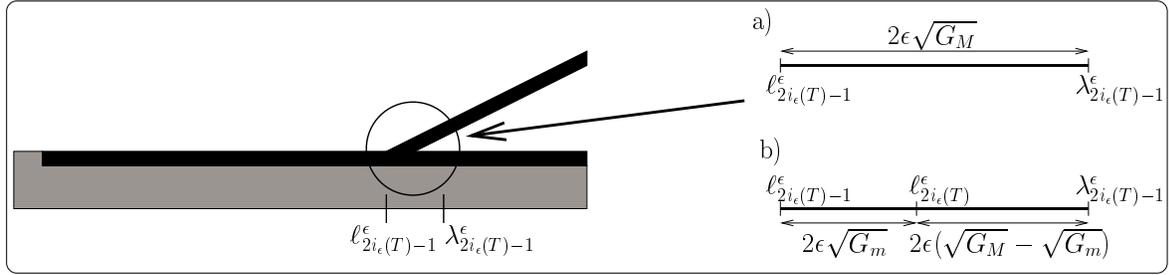


FIG. 7.6 – Structure de la solution au cycle i a) à la fin de la montée en charge, b) à la fin de décharge.

le résultat est immédiat à partir de la relation (7.19₂). \square

On obtient donc une loi de fatigue limite sensiblement similaire à celle obtenue dans le cadre d'un chargement de rapport d'ouverture nul et donnée en (6.17).

Lorsque G_M (et donc G_m) est faible, on retrouve une loi de PARIS classique comme pour le cas avec rapport d'ouverture nul $R = 0$:

$$\dot{\ell} = -\frac{2}{3} \left(\sqrt{G_M} - \sqrt{G_m} \right)^3. \quad (7.26)$$

Remarque 7.3.5 En résolvant ce problème avec les grandeurs non adimensionnalisées, on obtient la loi de fatigue limite suivante

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \sqrt{\frac{G_M}{G_c}} - \sqrt{\frac{G_m}{G_c}} + k \frac{\dot{\ell}}{L} \sqrt{\frac{G_c}{2N}} \right\rangle^2 = 1 - \frac{G_M}{G_c}$$

où $G_M = \frac{N}{2} \frac{V_M^2}{(L-\ell)^2}$ et $G_m = \frac{N}{2} \frac{V_m^2}{(L-\ell)^2}$. Dans le cadre des faibles valeurs du taux de restitution d'énergie, on obtient

$$\dot{\ell} = -\frac{L}{3} \sqrt{\frac{2N}{G_c}} \left(\sqrt{\frac{G_M}{G_c}} - \sqrt{\frac{G_m}{G_c}} \right)^3.$$

7.4 Décollement d'un film avec une loi de comportement non linéaire

Ce paragraphe aurait pu être partie intégrante du Chapitre 5 dans la mesure où l'on traite toujours du décollement d'un film. Cependant, et c'est afin de mettre en évidence cette propriété qu'on lui accorde un paragraphe, on va montrer que le choix d'une **énergie potentielle non forcément quadratique** modifie notablement l'évolution du décollement du film. L'objectif avoué est de rendre compte de l'influence de cette non linéarité sur l'expression de la loi de fatigue limite.

On fait apparaître la non linéarité explicitement à l'aide du réel $p > 1$ dans l'énergie potentielle, premier terme de l'énergie totale suivante

$$\mathcal{E} = \frac{N}{2} \int_0^L \bar{v}'(s)^p ds + \int_0^L \bar{\phi}(\bar{\delta}(s)) ds \quad (7.27)$$

où \bar{v} indique l'ouverture le long du film, $\bar{\phi}$ la densité d'énergie de surface (celle de DUGDALE dans la suite) et $\bar{\delta}$ la variable d'ouverture cumulée définie par (2.11).

En fait, il n'y a pas de modèle physique raisonnable qui corresponde à l'énergie (7.27). Il faut donc prendre ce problème comme un problème modèle non linéaire.

Remarque 7.4.1 : Les valeurs de p sont limitées à se situer dans $]1, +\infty]$ afin d'assurer l'existence d'une solution au problème de minimisation. On remarque de plus que l'on retrouve le problème initial en choisissant $p = 2$.

Après adimensionnalisation du problème, l'évolution de la fissuration est obtenue en résolvant un problème de minimisation incrémental. L'énergie totale adimensionnée et discrétisée est donnée par :

$$\mathcal{E}_i(v) = \int_0^1 v'(x)^p dx + \int_0^1 \phi_\epsilon(\delta_i(x)) dx \quad (7.28)$$

7.4.1 Évolution cyclique du décollement

D'après les hypothèses initiales (voir paragraphe 7.1) le film se décolle de son socle dès la mise en charge, une zone cohésive précédant la zone parfaitement décollée. Il va donc s'agir, pour obtenir l'évolution du décollement, de déterminer la position des têtes de zone cohésive ℓ_i et de zone parfaitement décollée λ_i à la fin de chaque demi-cycle (charge, décharge, recharge, etc...). Ainsi, à la fin de la première montée en charge, on obtiendrait facilement

$$\lambda_1 = 1 - (V_M - \epsilon)(p-1)^{1/p}, \quad \lambda_1 - \ell_1 = \frac{p\epsilon}{(p-1)^{(p-1)/p}} \quad (7.29)$$

où V_M est l'amplitude du chargement cyclique représenté sur la Figure 4.7.

Il s'avère de ce fait que la taille de la zone cohésive $\lambda_1 - \ell_1$ est de l'ordre de ϵ , la non linéarité n'influençant donc pas cette propriété. Par contre la valeur de p modifie grandement la position des pointes.

On montre (comme au Chapitre 5) que les phases de décharge n'agissent pas sur l'évolution des pointes. Ceci est dû au fait que les décharges sont complètes (de V_M à 0) contrairement au paragraphe 7.3.

L'évolution du décollement, *i.e.* les positions successives prises par les pointes de zone partiellement décollée ℓ_{2i-1} et parfaitement décollée λ_{2i-1} quel que soit $i \in \mathbb{N}^*$, est donnée par la

Proposition 7.4.2 *À la fin de chaque montée en charge la configuration du film est la suivante : le film est parfaitement collé dans $[0, \ell_{2i-1}]$, soumis à des forces cohésives s'opposant à son ouverture dans $(\ell_{2i-1}, \lambda_{2i-1})$ et parfaitement décollé dans $(\lambda_{2i-1}, 1)$. L'ouverture vérifie*

$$v_{2i-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{2i-1} \\ \frac{p-1}{(p\epsilon)^{1/(p-1)}} (x - \ell_{2i-1})^{\frac{p}{p-1}} & \text{si } \ell_{2i-1} \leq x \leq \lambda_{2i-1} \\ \left(\frac{\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1}}{p\epsilon} \right)^{\frac{1}{p-1}} (x - \lambda_{2i-1}) + \frac{p-1}{(p\epsilon)^{1/(p-1)}} (\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1})^{\frac{p}{p-1}} & \text{si } \lambda_{2i-1} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.30)$$

La position des têtes de zones cohésive ℓ_{2i-1} et parfaitement décollée λ_{2i-1} est obtenue en résolvant le système suivant

$$\begin{cases} (\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1})^{\frac{1}{p-1}} (1 - \lambda_{2i-1}) + \frac{p-1}{p} (\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1})^{\frac{p}{p-1}} = (p\epsilon)^{\frac{1}{p-1}} V_M \\ \sum_{j=1}^i \langle \lambda_{2i-1} - \ell_{2j-1} \rangle^{\frac{p}{p-1}} = \frac{(p\epsilon)^{\frac{p}{p-1}}}{p-1} \end{cases} \quad (7.31)$$

Preuve. Par hypothèse, le film est collé sur l'intervalle $[0, \ell_{2i-1}]$, partiellement décollé sur l'intervalle $(\ell_{2i-1}, \lambda_{2i-1})$ et parfaitement décollé sur l'intervalle $(\lambda_{2i-1}, 1)$ où ℓ_{2i-1} et λ_{2i-1} sont à déterminer. Pour obtenir l'expression de v_{2i-1} , δ_{2i-1} , ℓ_{2i-1} et λ_{2i-1} , on écrit l'équation d'Euler-Lagrange dans $(\ell_{2i-1}, 1)$

$$\frac{d}{dx} [p(v'_{2i-1})^{p-1}(x)] = \begin{cases} 1/\epsilon & \text{si } \ell_{2i-1} \leq x \leq \lambda_{2i-1} \\ 0 & \text{si } \lambda_{2i-1} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.32)$$

et on utilise les conditions (5.4) à (5.7). On obtient ainsi l'expression de l'ouverture v_{2i-1} donnée en (7.30) et le système (7.31) de deux équations à deux inconnues ℓ_{2i-1} et λ_{2i-1} . \square

On montre sur la Figure 7.7 l'influence de la non linéarité sur la propagation de la fissuration. La courbe présente une forte non monotonie. Il apparaît que pour des valeurs de p tendant vers 1, il faut un nombre infini de cycles pour décoller le film. Ceci est en accord avec l'approche par minimisation d'énergie utilisée. En effet, sous cette hypothèse ($p = 1$), le premier terme dans l'énergie totale (7.27) est une constante et la structure à "intérêt" à minimiser son énergie de surface. Comme ϕ_ϵ est une fonction croissante de δ , les faibles valeurs de δ vont être privilégiées (δ ne pouvant toutefois pas être nul puisque $\delta(1) = v(1) = V_M$), ce qui conduit à un infini de cycles pour décoller le film.

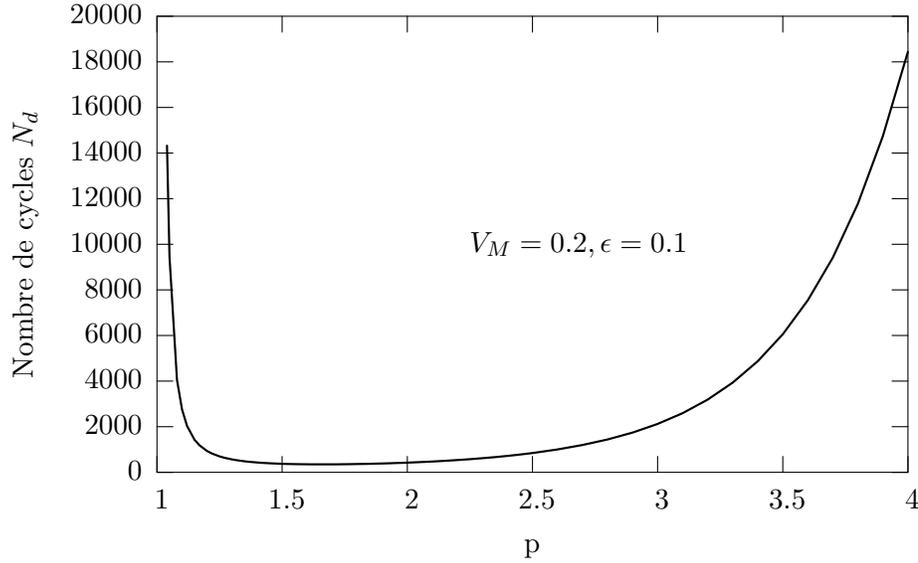


FIG. 7.7 – Effet de la non-linéarité p sur le nombre de cycles N_d nécessaire pour décoller entièrement le film.

Remarque 7.4.3 Si on avait voulu résoudre ce problème avec une énergie de surface de GRIFFITH, on aurait eu adaptation en un cycle : le film aurait été parfaitement décollé sur une longueur $1 - \ell$ à la fin de la première montée en charge et le décollément n'aurait plus évolué par la suite, i.e. $1 - \ell_i = 1 - \ell \forall i \in \mathbb{N}^*$. Le taux de restitution d'énergie associé à cette longueur décollée $1 - \ell$ s'écrit

$$G = (p - 1) \frac{V_M^p}{(1 - \ell)^p}.$$

7.4.2 Loi de fatigue limite

Sans détailler l'approche qui nous y conduit (se référer au chapitre précédent), on suppose que, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ et après un grand nombre de cycles, un régime stationnaire s'installe. Cette hypothèse implique

$$\begin{aligned} d(T) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon \right) \\ \dot{\ell}(T) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)+2k+1}^\epsilon - \lambda_{2i_\epsilon(T)+2k-1}^\epsilon \right) \end{aligned}$$

où $T = i\epsilon$ désigne le nombre de cycles mis à l'échelle. On montre également la convergence des points $\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon$ et $\ell_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon$ vers une pointe limite $\ell(T)$. Ainsi, à T fixé,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon = \ell(T).$$

Pour déterminer la longueur d de la zone partiellement décollée après changement d'échelle, on passe à la limite dans (7.31₁). On obtient que d dépend uniquement du taux de restitution

d'énergie G . Ainsi, on a

$$d = p \left(\frac{G}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}}. \quad (7.33)$$

La proposition suivante établit la loi de fatigue limite obtenue pour des films infiniment longs :

Proposition 7.4.4 *En supposant l'établissement d'un régime microscopique stationnaire, la loi de fatigue limite met en relation, $\forall p > 1$, le taux de restitution d'énergie G et le taux de décollement $\dot{\ell}$*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\langle p \left(\frac{G}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} + k\dot{\ell} \right\rangle^{\frac{p}{p-1}} = \frac{p \frac{G}{p-1}}{p-1} \quad (7.34)$$

Preuve. Comme

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2j_\epsilon(T)-1}^\epsilon \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\left(\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \lambda_{2j_\epsilon(T)-1}^\epsilon \right) + \left(\lambda_{2j_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2j_\epsilon(T)-1}^\epsilon \right) \right] = k\dot{\ell} + d,$$

en remplaçant dans (7.31₂), le résultat est immédiat. \square

Ce résultat montre la capacité de l'approche variationnelle de la fatigue à rendre compte de l'influence de la non linéarité du problème sur l'évolution d'une fissure de fatigue.

Dans le cadre des faibles valeurs du taux de restitution d'énergie on obtient une loi explicite entre $\dot{\ell}$ et G du type loi de PARIS

$$\dot{\ell} = -\frac{p(p-1)^{\frac{1}{p}}}{2p-1} G^{\frac{2p-1}{p}} \quad (7.35)$$

Preuve. La somme dans l'équation (7.4.4) ne peut contenir que $n = Ent \left[-\frac{d}{\dot{\ell}} \right]$ termes. Or, lorsque $G \rightarrow 0$, $d \rightarrow 0$ et comme $d \gg -\dot{\ell}$, on a forcément $n \sim -d/\dot{\ell}$. On approxime alors cette somme par une intégrale ce qui donne

$$\sum_{k=0}^n [d + k\dot{\ell}]^{\frac{p}{p-1}} = -\frac{d}{\dot{\ell}} \int_0^1 [(1-\theta)d]^{\frac{p}{p-1}} d\theta = -\frac{d^{\frac{2p-1}{p-1}}}{\dot{\ell}} \left(\frac{p-1}{2p-1} \right)$$

En remplaçant d par son expression, on obtient le résultat. \square

Au delà du fait que pour $p = 2$ on retombe bien sur la relation obtenue au chapitre précédent, il s'avère qu'en considérant un problème non linéaire, on obtient une loi de PARIS différente de celle obtenue en (6.17). Ainsi les coefficients C et m de la loi de PARIS dépendent fortement de la non linéarité du problème considéré.

Ici, pour une valeur du paramètre p située dans l'intervalle $]1, +\infty[$, on obtient des puissances m de la loi de PARIS telles que

$$2 < m < 4.$$

Remarque 7.4.5 En résolvant ce problème avec les grandeurs non adimensionnalisées, on obtient la loi de fatigue limite suivante

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \left(\frac{G}{G_c} \right)^{\frac{p-1}{p}} + k \frac{\dot{\ell}}{L} \left(\frac{p-1}{p} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\frac{G_c}{N} \right)^{1/p} \right\rangle^{\frac{p}{p-1}} = 1$$

où $G = (p-1)N \frac{V_M^p}{(L-\ell)^p}$. Pour de faibles valeurs de G , on a

$$\dot{\ell} = -L \left(\frac{p-1}{2p-1} \right) \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\frac{N}{G_c} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{G}{G_c} \right)^{\frac{2p-1}{p}}.$$

7.5 Arrachement antiplan d'un film de son socle

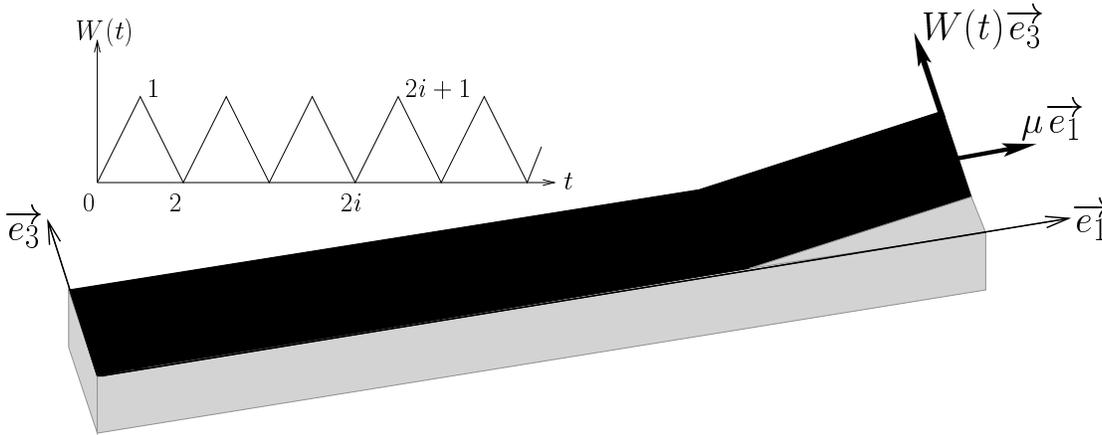


FIG. 7.8 – Géométrie et Chargement.

On souhaite rendre compte du processus de rupture par fatigue d'une structure sollicitée en mode de glissement antiplan des lèvres de la fissure (classiquement appelé mode *III* de la rupture). Plus précisément et comme présenté sur la Figure 7.8, on va étudier l'arrachement d'un film mince inextensible et parfaitement flexible de son socle sous l'action d'un déplacement cyclique antiplan d'amplitude constante $W(t)\vec{e}_3$ et d'une tension constante $\mu\vec{e}_1$ ($\mu > 0$).

Si le problème traité ne semble guère éloigné des études préalablement réalisées en ce qui concerne sa formulation, il s'en distingue par contre par le choix fait de la variable irréversible. Ainsi ce n'est plus l'accumulation d'ouverture mais l'accumulation de glissement dont on doit tenir compte et ceci revêt une importance capitale dans les résultats obtenus.

On verra ainsi que contrairement au cas du décollement d'un film (Chapitre 5), la propagation de la fissure se fait également lors des phases de décharge.

La description du problème ne se distingue de celle du Chapitre 3 qu'au niveau du choix des sollicitations appliquées sur la structure. On ne reviendra donc pas en détail sur la construction du problème de minimisation. Mais, en écrivant la condition d'inextensibilité, on montre rapidement que l'énergie potentielle peut s'exprimer uniquement en fonction du déplacement antiplan w . De plus, comme annoncé plus haut, afin de tenir compte de la dissipation lors des phases de décharge, on fait dépendre l'énergie de surface de DUGDALE définie par sa densité (3.18) de la variable de glissement cumulée suivante

$$\delta_t(x) = \int_0^t |\dot{w}_\tau(x)| d\tau \quad (7.36)$$

où δ_t et \dot{w}_t sont respectivement le glissement cumulé et le taux de déplacement à l'instant t . De ce fait, toute variation du déplacement antiplan w fait augmenter la variable de glissement cumulé δ mettant ainsi en évidence une influence des phases de décharge lors du processus d'arrachement.

L'évolution de l'arrachement sera réalisée en minimisant, à chaque instant, l'énergie totale de la structure. Après discrétisation du chargement cyclique, application de l'Hypothèse 1 et introduction de l'ensemble des déplacements antiplans admissibles

$$\mathcal{W}_i = \{w \in W^{1,2}(0,1), w(0) = 0, w(1) = W_i\},$$

on est conduit à résoudre le problème incrémental suivant

Sachant que $w_0 = \delta_0 = 0$, trouver, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $w_i \in \mathcal{W}_i$ et δ_i tels que

$$\mathcal{E}_i(w_i) \leq \mathcal{E}_i(w) \quad \forall w \in \mathcal{W}_i \quad \text{et} \quad \delta_i = \delta_{i-1} + |v_i - v_{i-1}| \quad (7.37)$$

où l'énergie est donnée par

$$\mathcal{E}_i(w) = \int_0^1 w'(x)^2 dx + \int_0^1 \phi_\epsilon(\delta_{i-1}(x) + |w(x) - w_{i-1}(x)|) dx. \quad (7.38)$$

Pour obtenir cette écriture on a adimensionnalisé le problème initial ce qui a conduit à introduire le paramètre

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\mu}{2G_c} \frac{\delta_c}{L}}$$

où δ_c est le glissement cumulé critique conduisant à l'arrachement complet du film.

La structure de la solution en fin de phase de charge et de décharge vérifie la proposition suivante

Proposition 7.5.1 *Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$*

– à la fin d'une montée en charge

$$w_{2i-1}(x) \begin{cases} = w_{2i-2}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{2i-1} \\ > w_{2i-2}(x) & \text{si } \ell_{2i-1} < x \leq 1 \end{cases}$$

– à la fin de la décharge suivante

$$w_{2i}(x) \begin{cases} = w_{2i-1}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{2i} \\ < w_{2i-1}(x) & \text{si } \ell_{2i} < x \leq 1 \end{cases}$$

où $\ell_{2i-1} = \max \{x \in [0, 1) : w_{2i-2}(x) = w_{2i-1}(x)\}$ et $\ell_{2i} = \max \{x \in [0, 1) : w_{2i-1}(x) = w_{2i}(x)\}$

Preuve. Il suffit de reprendre la preuve de la Proposition 4.1.5 en remplaçant l'énergie totale par sa nouvelle expression (7.38). Le résultat suit. \square

7.5.1 Solution au premier cycle

Première montée en charge

Proposition 7.5.2 *Sous les Hypothèses énoncées (qui conduisent à $\epsilon < W_M < 1 - \epsilon$ et $\epsilon < 1/2$), le champ antiplan à la fin de la première montée en charge est tel que le film est parfaitement collé sur $[0, \ell_1]$, partiellement arraché sur (ℓ_1, λ_1) et parfaitement arraché sur $(\lambda_1, 1)$. Dans la zone cohésive (ℓ_1, λ_1) agissent des forces positives constantes $\tau = \tau_c = 1/\epsilon$. Le champ de déplacement s'écrit alors*

$$w_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_1 \\ \frac{(x-\ell_1)^2}{4\epsilon} & \text{si } \ell_1 \leq x \leq \lambda_1 \\ \frac{(\lambda_1-\ell_1)}{2\epsilon}(x-\lambda_1) + \frac{(\lambda_1-\ell_1)^2}{4\epsilon} & \text{si } \lambda_1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.39)$$

où ℓ_1 et λ_1 vérifient

$$\ell_1 = 1 - W_M - \epsilon \quad \lambda_1 = 1 - W_M + \epsilon \quad (7.40)$$

Preuve. Lors de la première montée en charge, l'énergie totale à minimiser s'écrit

$$\mathcal{E}_1(w) = \int_0^1 w'(x)^2 dx + \int_0^1 \phi_\epsilon(w(x)) dx.$$

Ainsi le problème est strictement semblable à celui posé au paragraphe 5.2. On se rapportera donc à cette démonstration. \square

Première décharge

Proposition 7.5.3 *À la fin de la première décharge le film est parfaitement collé sur $[0, \ell_1]$, partiellement arraché sur (ℓ_1, ℓ_2) , des forces cohésives positives et constantes $\tau = \tau_c$ s'opposant à l'arrachement du film, partiellement arraché sur (ℓ_2, λ_2) , des forces cohésives négatives $\tau = -\tau_c$ s'opposant à la "fermeture de la fissure" et enfin parfaitement arraché sur $(\lambda_2, 1)$.*

Le déplacement s'écrit

$$w_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_1 \\ \frac{(x-\ell_1)^2}{4\epsilon} & \text{si } \ell_1 \leq x \leq \ell_2 \\ -\frac{(x-\ell_2)^2}{2\epsilon} + \frac{(x-\ell_1)^2}{4\epsilon} & \text{si } \ell_2 \leq x \leq \lambda_2 \\ -\frac{(\lambda_2-2\ell_2+\ell_1)}{2\epsilon}(x-\lambda_2) - \frac{(\lambda_2-\ell_2)^2}{2\epsilon} + \frac{(\lambda_2-\ell_1)^2}{4\epsilon} & \text{si } \lambda_2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.41)$$

où ℓ_2 et λ_2 sont solutions du système suivant

$$\begin{cases} 2(\lambda_2 - 2\ell_2 + \ell_1)(1 - \lambda_2) + 2(\lambda_2 - \ell_2)^2 - (\lambda_2 - \ell_1)^2 = 0 \\ 2(\lambda_2 - \ell_2)^2 + (\lambda_2 - \ell_1)^2 = 4\epsilon^2 \end{cases} \quad (7.42)$$

Preuve. Compte tenu de la Proposition 7.5.1, on réalise les hypothèses suivantes sur la structure de la solution :

– le champ w_2 vérifie

$$w_2(x) \begin{cases} = 0 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ = w_1(x) & \text{si } a \leq x \leq \ell_2 \\ < w_1(x) & \text{si } \ell_2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

– le glissement cumulé vérifie

$$\delta_2(x) \begin{cases} = \delta_1(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_2 \\ \in (\delta_1(x), \epsilon) & \text{si } \ell_2 \leq x \leq \lambda_2 \\ \geq \epsilon & \text{si } \lambda_2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Pour déterminer les champs w_2 et δ_2 dans l'intervalle $(\ell_2, 1)$ ainsi que les pointes a , ℓ_2 et λ_2 , on doit

1. résoudre les équations d'Euler :

$$w_2'' = -\frac{1}{2\epsilon} \quad \text{dans } (\ell_2, \lambda_2), \quad w_2'' = 0 \quad \text{dans } (\lambda_2, 1).$$

2. écrire les conditions qui découlent de la Proposition 7.5.1 :

$$w_2(\ell_2) = w_1(\ell_2), \quad w_2'(\ell_2) = w_1'(\ell_2).$$

3. écrire la conditions à la limite :

$$w_2(1) = 0.$$

4. écrire la continuité de w_2 et de w'_2 en ℓ_2 et en λ_2 :

$$\llbracket w_2 \rrbracket(\ell_2) = \llbracket w'_2 \rrbracket(\ell_2) = \llbracket w_2 \rrbracket(\lambda_2) = \llbracket w'_2 \rrbracket(\lambda_2) = 0.$$

5. écrire que le glissement cumulé vaut ϵ en λ_2 :

$$\delta_2(\lambda_2) = \epsilon.$$

On obtient le champ w_2 (7.41) et ℓ_2 et λ_2 sont obtenues en résolvant le système (7.42).

Remarque 7.5.4 : On a supposé que la structure de la solution était telle que $\ell_2 > a = \ell_1$. Supposons que ℓ_2 rejoigne ℓ_1 en cours de décharge pour un W' tel que $0 < W' < W_M$. La condition d'arrachement en $x = \lambda_2$ donne la taille de la zone cohésive $(\lambda_2 - \ell_1) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\epsilon$ ce qui permet de simplifier la condition à la limite en $x = 1$

$$\begin{aligned} -4\epsilon W' &= 2(\lambda_2 - \ell_1)(1 - \lambda_2) + (\lambda_2 - \ell_1)^2 \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3}\epsilon(1 - \ell_1) - \frac{4\epsilon^2}{3} \end{aligned}$$

or, d'après (7.40), $W_M = 1 - \ell_1 - \epsilon$ ce qui conduit à

$$W' = -\frac{\sqrt{3}}{3}W_M + \frac{\epsilon}{3}(1 - \sqrt{3}) < 0$$

ce qui est absurde compte tenu de l'hypothèse faite sur W' . Donc ℓ_2 ne peut pas "rattraper" ℓ_1 et l'hypothèse initiale est justifiée. □

7.5.2 Aux cycles suivants

Comme le glissement cumulé s'exprime par

– à la fin d'une montée en charge

$$\begin{aligned} \delta_{2i-1}(x) &= \delta_{2i-2}(x) + w_{2i-1}(x) - w_{2i-2}(x) \\ &= \delta_{2i-3}(x) + w_{2i-3}(x) - 2w_{2i-2}(x) + w_{2i-1}(x) \\ &= \dots \\ &= w_{2i-1}(x) + 2 \sum_{p=1}^{2i-2} (-1)^{p+1} w_p(x) \end{aligned}$$

– à la fin d'une décharge

$$\begin{aligned} \delta_{2i}(x) &= \delta_{2i-1}(x) - w_{2i}(x) + w_{2i-1}(x) \\ &= w_{2i-1}(x) + 2 \sum_{p=1}^{2i} (-1)^{p+1} w_p(x) - w_{2i}(x) + w_{2i-1}(x) \\ &= -w_{2i}(x) + 2 \sum_{p=1}^{2i-1} (-1)^{p+1} w_p(x), \end{aligned}$$

l'évolution de l'arrachement du film de son socle est donnée par la

Proposition 7.5.5 *Le champ de déplacement w_i s'écrit pour tout $i \in \mathbb{N}^*$*

- pour un chemin de charge :

$$w_{2i-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{2i-1} \\ \frac{(x-\ell_{2i-1})^2}{4\epsilon} & \text{si } \ell_{2i-1} \leq x \leq \lambda_{2i-1} \\ \frac{(\lambda_{2i-1}-\ell_{2i-1})}{2\epsilon}(x-\lambda_{2i-1}) + \frac{(\lambda_{2i-1}-\ell_{2i-1})^2}{4\epsilon} & \text{si } \lambda_{2i-1} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.43)$$

où ℓ_{2i-1} et λ_{2i-1} correspondent respectivement à la position de la tête de zone cohésive et à la position de la tête de zone arrachée à la fin de la $i^{\text{ième}}$ montée en charge.

$$\begin{cases} (\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1})^2 + 2(\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1})(1 - \lambda_{2i-1}) = 4\epsilon W_M \\ (\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1})^2 + 4 \sum_{p=1}^{i-1} \langle \lambda_{2i-1} - \ell_{2p} \rangle^2 = 4\epsilon^2 \end{cases} \quad (7.44)$$

Le film se trouve ainsi, à la fin chaque recharge, dans un état où coexistent trois zones distinctes : une zone saine $[0, \ell_{2i-1}]$, une zone partiellement déchirée dans laquelle la contrainte de cisaillement τ_c est positive $(\ell_{2i-1}, \lambda_{2i-1})$ et une zone déchirée $(\lambda_{2i-1}, 1)$.

- pour un chemin de décharge :

$$w_{2i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{2i-1} \\ \frac{(x-\ell_{2i-1})^2}{4\epsilon} & \text{si } \ell_{2i-1} \leq x \leq \ell_{2i} \\ -\frac{(x-\ell_{2i})^2}{2\epsilon} + \frac{(x-\ell_{2i-1})^2}{4\epsilon} & \text{si } \ell_{2i} \leq x \leq \lambda_{2i} \\ -\frac{(\lambda_{2i}-2\ell_{2i}+\ell_{2i-1})}{2\epsilon}(x-\lambda_{2i}) - \frac{(\lambda_{2i}-\ell_{2i})^2}{2\epsilon} + \frac{(\lambda_{2i}-\ell_{2i-1})^2}{4\epsilon} & \text{si } \lambda_{2i} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.45)$$

où ℓ_{2i-1} et λ_{2i-1} correspondent respectivement à la position de la tête de zone cohésive et à la position de la tête de zone déchirée à la fin de la $i^{\text{ième}}$ décharge.

On distingue ainsi quatre zones : une zone saine $[0, \ell_{2i-1}]$, une zone cohésive (ℓ_{2i-1}, ℓ_{2i}) où la contrainte de cisaillement cohésive $\tau = \tau_c$ est positive, une zone cohésive $(\ell_{2i}, \lambda_{2i})$ où la contrainte de cisaillement cohésive $\tau = -\tau_c$ est négative et une zone déchirée $(\lambda_{2i}, 1)$.

La détermination de ℓ_{2i} et λ_{2i} passe par la résolution du système suivant

$$\begin{cases} 2(\lambda_{2i} - 2\ell_{2i} + \ell_{2i-1})(1 - \lambda_{2i}) + 2(\lambda_{2i} - \ell_{2i})^2 - (\lambda_{2i} - \ell_{2i-1})^2 = 0 \\ 2(\lambda_{2i} - \ell_{2i})^2 + (\lambda_{2i} - \ell_{2i-1})^2 + 4 \sum_{p=1}^{i-1} \langle \lambda_{2i} - \ell_{2p} \rangle^2 = 4\epsilon^2 \end{cases} \quad (7.46)$$

Preuve. Compte tenu de la Proposition 7.5.1, on réalise les hypothèses suivantes sur la structure de la solution à la fin d'une montée en charge :

– le champ w_{2i-1} vérifie

$$w_{2i-1}(x) \begin{cases} = 0 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ = w_{2i-2}(x) & \text{si } a \leq x \leq \ell_{2i-1} \\ > w_{2i-2}(x) & \text{si } \ell_{2i-1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

– le glissement cumulé vérifie

$$\delta_{2i-1}(x) \begin{cases} = \delta_{2i-2}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{2i-1} \\ \in (\delta_{2i-2}(x), \epsilon) & \text{si } \ell_{2i-1} \leq x \leq \lambda_{2i-1} \\ \geq \epsilon & \text{si } \lambda_{2i-1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La détermination des champs w_{2i-1} et δ_{2i-1} dans l'intervalle $(\ell_{2i-1}, 1)$ et des pointes a , ℓ_{2i-1} et λ_{2i-1} se fait en

1. résolvant les équations d'Euler :

$$w_{2i-1}'' = \frac{1}{2\epsilon} \quad \text{dans } (\ell_{2i-1}, \lambda_{2i-1}), \quad w_{2i-1}'' = 0 \quad \text{dans } (\lambda_{2i-1}, 1).$$

2. écrivant les conditions qui découlent de la Proposition 7.5.1 :

$$w_{2i-1}(\ell_{2i-1}) = w_{2i-2}(\ell_{2i-1}), \quad w_{2i-1}'(\ell_{2i-1}) = w_{2i-2}'(\ell_{2i-1}).$$

3. écrivant la condition à la limite :

$$w_{2i-1}(1) = W_M.$$

4. écrivant la continuité de w_{2i-1} et de w_{2i-1}' en ℓ_{2i-1} et en λ_{2i-1} :

$$\llbracket w_{2i-1} \rrbracket(\ell_{2i-1}) = \llbracket w_{2i-1}' \rrbracket(\ell_{2i-1}) = \llbracket w_{2i-1} \rrbracket(\lambda_{2i-1}) = \llbracket w_{2i-1}' \rrbracket(\lambda_{2i-1}) = 0.$$

5. écrivant que le glissement cumulé vaut ϵ en λ_{2i-1} :

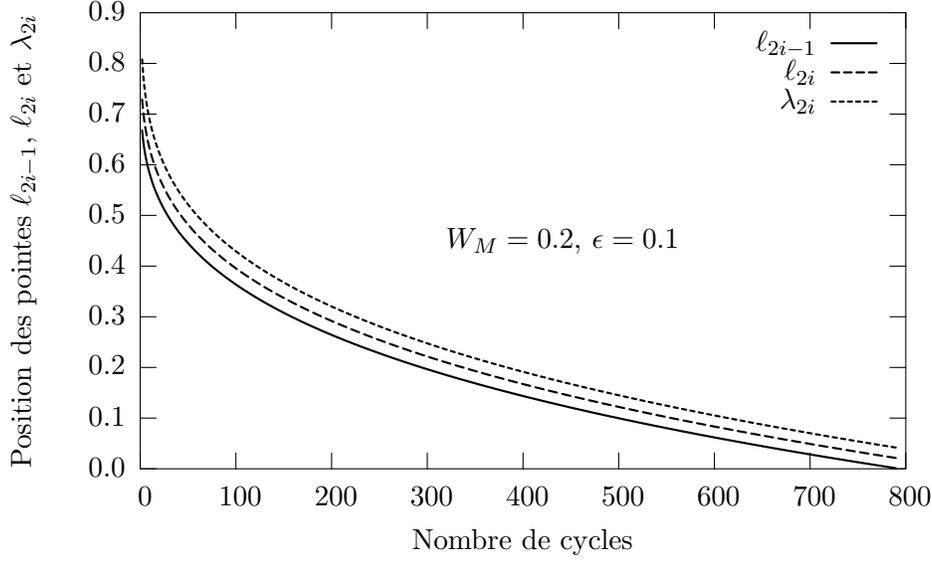
$$\delta_{2i-1}(\lambda_{2i-1}) = \epsilon.$$

On obtient le champ w_{2i-1} (7.43) et ℓ_{2i-1} et λ_{2i-1} sont obtenues en résolvant le système (7.44). Pour les phases de décharge il suffit de reprendre ce qui a été écrit à la première décharge. \square

L'évolution de la fissuration à la fin de chaque cycle de chargement est obtenue en déterminant les positions successives des points ℓ_{2i-1} , ℓ_{2i} et λ_{2i} , *i.e.* en résolvant les systèmes (7.44) et (7.46) paramétrés par ϵ et W_M . Pour cela un traitement numérique est nécessaire. On donne sur la Figure 7.9 l'évolution de ces trois pointes au cours du temps.

Remarque 7.5.6 Si on avait voulu résoudre ce problème avec une énergie de surface de GRIFFITH, on aurait eu adaptation en un cycle : le film aurait été parfaitement arraché sur une longueur $1 - \ell$ à la fin de la première montée en charge et l'arrachement n'aurait plus évolué par la suite, *i.e.* $1 - \ell_i = 1 - \ell \forall i \in \mathbb{N}^*$. Le taux de restitution d'énergie associé à cette longueur arrachée $1 - \ell$ s'écrit

$$G = \frac{W_M^2}{(1 - \ell(T))^2}.$$

FIG. 7.9 – Évolution des pointes ℓ_{2i-1} , ℓ_{2i} et λ_{2i} .

7.5.3 Loi de fatigue limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on a vu, dans les exemples précédents, qu'un régime stationnaire se mettait en place au niveau microscopique, *i.e.* à l'échelle de la zone cohésive qui se trouve être d'ordre ϵ . Ainsi, en introduisant le nombre de cycles mis à l'échelle T défini par (6.6), on peut écrire

$$\begin{aligned} d_1(T) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon \right) \\ d_2(T) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon - \ell_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon \right) \\ \dot{\ell}(T) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)+2k+1}^\epsilon - \lambda_{2i_\epsilon(T)+2k-1}^\epsilon \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)+2k}^\epsilon - \lambda_{2i_\epsilon(T)+2k-2}^\epsilon \right) \end{aligned}$$

où d_1, d_2 et $\dot{\ell}$ sont des nombres ne dépendant que de T . La convergence vers cet état stationnaire est justifiée numériquement sur la Figure 7.10 : à T fixé, les différentes pointes tendent vers une valeur limite ℓ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Autrement dit, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon = \ell(T).$$

Structure de la solution

Afin de déterminer la structure de la solution lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on passe à la limite dans les relations (7.44₁) et (7.46₁).

En première approximation, on obtient dans la première que la taille, à l'échelle microscopique, de la zone cohésive à la fin d'une montée en charge dépend uniquement du taux de restitution

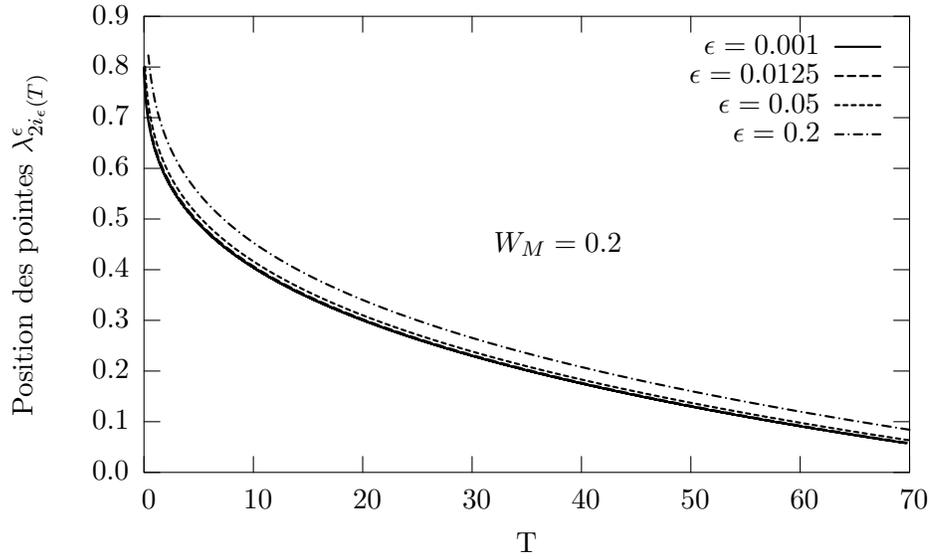


FIG. 7.10 – Mise en évidence de la convergence vers une solution limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

d'énergie G ,

$$d_1 = 2\sqrt{G}. \tag{7.43}$$

De même, dans la seconde, en première approximation, on obtient que les régions $(\ell_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon, \ell_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon)$ et $(\ell_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon, \lambda_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon)$ sont, en fin de décharge, de même taille lorsque $\epsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon - \ell_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\ell_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon - \ell_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon \right) = d_2. \tag{7.44}$$

La structure limite de la solution est schématisée sur la Figure 7.11 où on a représenté le champ de déplacement le long du film à la fin d'une décharge.

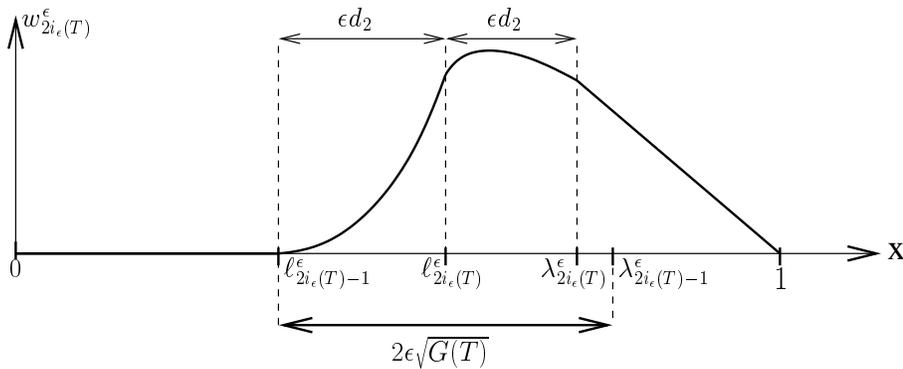


FIG. 7.11 – Structure de la solution limite à la fin du $i^{\text{ième}}$ cycle

Loi de fatigue limite

L'évolution de l'arrachement des films longs est directement obtenue par la

Proposition 7.5.7 *En supposant l'établissement d'un régime stationnaire au niveau microscopique, le taux de propagation de l'arrachement $\dot{\ell}$ et le taux de restitution d'énergie potentielle G sont reliés implicitement par le système suivant*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} \langle 2\sqrt{G} - d_2 + k\dot{\ell} \rangle^2 = 1 - G \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \langle d_2 + k\dot{\ell} \rangle^2 = 1 - \frac{d_2^2}{2} \end{cases} \quad (7.45)$$

Preuve. On passe à la limite dans les relations (7.44₂) et (7.46₂) après division par ϵ . Ainsi dans la première, comme

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)+2k-1}^\epsilon - \ell_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon \right) = 2\sqrt{G} - d_2 + k\dot{\ell},$$

on obtient (7.45₁).

Dans la seconde, comme

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)+2k}^\epsilon - \ell_{2i_\epsilon(T)}^\epsilon \right) = d_2 + k\dot{\ell},$$

on obtient de la même façon (7.45₂). □

Contrairement au cas du décollement, on a donc une loi de fatigue limite gouvernée par deux équations implicites. Ceci est dû au fait qu'une inconnue supplémentaire apparaît lors des phases de décharge.

De plus, comme pour le cas du décollement on peut exhiber, pour des valeurs extrêmes de G , une loi limite explicite de fatigue. En effet en remarquant que la somme dans la relation (7.45₁) ne peut contenir que n termes et que celle dans la relation (7.45₂) ne peut en contenir que p où

$$p = \text{Ent} \left[-\frac{d_2}{\dot{\ell}} \right], \quad n = \text{Ent} \left[-\left(\frac{2\sqrt{G} - d_2}{\dot{\ell}} \right) \right] \quad \text{et} \quad n - 1 \leq p \leq n, \quad (7.46)$$

Pour G proche de 1 (i.e. proche de G_c avec les dimensions), la propagation est rapide et $p = \text{Ent} \left[-\frac{d_2}{\dot{\ell}} \right] \sim 0$ ce qui conduit dans (7.45₂) à $d_2 = \sqrt{2/3}$. Comme (7.46) donne $n = 1$, la relation (7.45₁) permet d'obtenir la loi de fatigue

$$\dot{\ell} = -2\sqrt{G} + \sqrt{1-G} + \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Pour G proche de 0, la propagation est lente et on a $-\dot{\ell} \ll d_2 \ll 1$. Ainsi $p \sim -d_2/\dot{\ell}$, $n \sim$

$-(2\sqrt{G} - d_2)/\dot{\ell}$ et $n \sim p$ d'après (7.46). L'égalité (7.45₂) donne une relation entre la longueur de la zone partiellement arrachée en fin de décharge et le taux de propagation d'arrachement du film

$$d_2 = (-3\dot{\ell})^{1/3}. \quad (7.47)$$

De plus, comme $n\dot{\ell} \sim -(2\sqrt{G} - d_2)$ et $n \sim p \sim -d_2/\dot{\ell}$, on montre que $d_2 = \sqrt{G}$. Ainsi, en couplant cette expression avec la relation (7.47), on retombe, pour des faibles valeurs du taux de restitution d'énergie, sur une loi de PARIS "classique"

$$\dot{\ell} = -\frac{1}{3}G^{3/2}. \quad (7.48)$$

En comparant avec l'expression obtenue pour le décollement du film, on note que si la puissance 3/2 reste inchangée, la constante est quant à elle modifiée prenant dans les deux problèmes successivement les valeurs 2/3 et 1/3. Pour de faibles valeurs de G , le mode de chargement ne modifie donc pas la pente des courbes $\log(\dot{\ell}) = \log(C(\Delta G)^m)$ mais ne provoque que leur translation. On ajoute que, comme vérifié en général dans la littérature, la résistance à la fatigue d'une structure en mode III est meilleure que celle d'une structure en mode I.

Remarque 7.5.8 En résolvant ce problème avec les grandeurs non adimensionnalisées, on obtient la loi de fatigue limite suivante

$$\begin{cases} 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{G}{G_c}} - d_2 \sqrt{\frac{G_c}{2\mu}} + k \frac{\dot{\ell}}{L} \sqrt{\frac{G_c}{2\mu}} \right)^2 = 1 - \frac{G}{G_c} \\ 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(d_2 \sqrt{\frac{G_c}{2\mu}} + k \frac{\dot{\ell}}{L} \sqrt{\frac{G_c}{2\mu}} \right)^2 = 1 - 2 \left(d_2 \sqrt{\frac{G_c}{2\mu}} \right)^2 \end{cases}$$

Pour de faibles valeurs de $G = \frac{\mu}{2} \frac{W_M^2}{(L-\ell)^2}$, on a

$$\dot{\ell} = -\frac{L}{6} \sqrt{\frac{2\mu}{G_c}} \left(\frac{G}{G_c} \right)^{3/2}.$$

7.6 Flexion pure

Comme précisé au paragraphe 3.1, la modélisation de l'essai de pelage réalisée aux Chapitres 3 à 6 peut être critiquée dans la mesure où ne tient pas compte de la flexion du film. Or si la flexion du film peut être négligée loin de la pointe décollée, il en va autrement au niveau du front de fissure. L'objectif de ce paragraphe est donc d'étudier le problème du décollement d'un film mince inextensible soumis à un chargement de fatigue conduisant à sa flexion.

On étudiera particulièrement ce que les modifications dans la structure du problème induisent comme modification dans la loi de fatigue limite obtenue asymptotiquement lorsque l'on considère le film long vis à vis de la longueur interne du matériau.

7.6.1 Présentation du problème

Les ingrédients

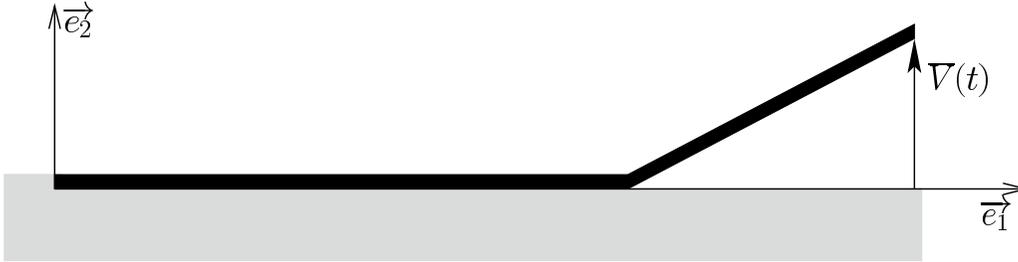


FIG. 7.12 – Géométrie et chargement.

Nous considérons le problème plan constitué d'un film mince de longueur L parfaitement collé sur un socle rigide à l'instant initial. Une extrémité du film est soumise à une ouverture cyclique $\bar{V}(t)\mathbf{e}_2$ alors que l'autre est fixée comme le présente la Figure 7.12. On note $\bar{v}(s)\mathbf{e}_2$ l'ouverture d'un point du film d'abscisse curviligne s à l'instant t et vérifiant les conditions cinématiques $\bar{v}(0) = 0$ et $\bar{v}(L) = \bar{V}(t)$. L'ouverture imposée $\bar{V}(t)$ est périodique en temps variant de 0 à sa valeur maximale \bar{V}_M (voir Figure 4.7) et engendre la flexion du film. En posant E et I respectivement le module d'Young et le moment d'inertie du film, l'énergie élastique s'écrit classiquement

$$\bar{P}(\bar{v}) = \frac{EI}{2} \int_0^L \bar{v}''(s)^2 ds \quad (7.49)$$

Pour tenir compte de l'irréversibilité du décollement, on introduit la variable de mémoire d'ouverture cumulée $\bar{\delta}$ qui rend compte de l'accumulation avec le temps de l'ouverture entre le film et le socle et définie par (3.7). Dans la suite, on choisira une densité d'énergie de surface $\bar{\phi}$ de DUGDALE fonction de δ . L'énergie de surface à l'interface s'écrit

$$\bar{S}(\bar{\delta}) = \int_0^L \bar{\phi}(\bar{\delta}(s)) ds. \quad (7.50)$$

Le problème incrémental

En suivant l'approche introduite au Chapitre 2, on rappelle que l'évolution du décollement est obtenue en minimisant l'énergie totale de la structure, somme de son énergie élastique (7.49) et de son énergie de surface (7.50).

Afin d'en dégager les paramètres pertinents, on commence par procéder à une adimensionnalisation du problème. Ainsi l'énergie totale adimensionnalisée s'écrit

$$\mathcal{E}(\delta) = \int_0^1 v''^2(x) dx + \int_0^1 \phi_\epsilon(\delta(x)) dx \quad (7.51)$$

où on a posé

$$x = \frac{s}{L}, \quad v(x) = \frac{\bar{v}(s)}{\mathcal{L}}, \quad \delta(x) = \frac{\bar{\delta}(s)}{\mathcal{L}}, \quad V(t) = \frac{\bar{V}(t)}{\mathcal{L}}$$

avec

$$\mathcal{L} = \sqrt{\frac{2G_c}{EI}} L^2, \quad \epsilon = \frac{\delta_c}{\mathcal{L}}.$$

Dans (7.51), ϕ_ϵ représente la densité d'énergie de surface de DUGDALE adimensionnalisée dont l'expression est donnée par (3.18). Du fait du caractère irréversible du problème, il faut ensuite discrétiser le chemin de chargement afin d'accomplir la minimisation à chaque pas discret du chargement. Ceci conduit à une séquence de problèmes de minimisation, la solution au pas i dépendant des solutions aux pas précédents. Spécifiquement, en notant \mathcal{V}_i l'ensemble des ouvertures admissibles au pas i ,

$$\mathcal{V}_i = \{v \in H^2(0,1) : v(0) = v'(0) = 0, v \geq 0, v(1) = V(t_i)\}, \quad (7.52)$$

et $\mathcal{E}_i(v)$ l'énergie totale du film à ce pas pour une ouverture v ,

$$\mathcal{E}_i(v) = P(v) + S(\delta_{i-1} + \langle v - v_{i-1} \rangle), \quad (7.53)$$

le problème incrémental s'écrit

Pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $v_0 = \delta_0 = 0$, Trouver v_i et δ_i tels que

$$\mathcal{E}_i(v_i) = \min_{v \in \mathcal{V}_i} \mathcal{E}_i(v)$$

Remarque 1 : On montre comme dans la Proposition 4.3.1 que le décollement ne peut pas évoluer durant les phases de décharge. De ce fait, le film retourne à sa configuration de déplacement initiale à la fin de chaque décharge : $v_{2i} = 0$ et $\delta_{2i} = \delta_{2i-1}$. Dans le paragraphe suivant, on se propose de donner la solution du problème de minimisation à la fin de chaque montée en charge.

7.6.2 Évolution du décollement

Évolution des têtes de fissure

Compte tenu des hypothèses énoncées au début de ce chapitre, le film, à la fin de chaque montée en charge, se trouve dans la configuration suivante : il est parfaitement collée sur $[0, \ell_{2i-1}]$, partiellement décollé sur $(\ell_{2i-1}, \lambda_{2i-1})$ et parfaitement décollé sur $(\lambda_{2i-1}, 1)$. La détermination du champ d'ouverture v_{2i-1} et des pointes ℓ_{2i-1} et λ_{2i-1} à la fin d'une montée en charge est l'objet de la

Proposition 7.6.1 *À la fin d'une montée en charge, l'ouverture s'écrit*

$$v_{2i-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_{2i-1} \\ -\frac{(x-\ell_{2i-1})^4}{48\epsilon} + \frac{(\lambda_{2i-1}-\ell_{2i-1})}{24\epsilon} \frac{[(1-\lambda_{2i-1})+(1-\ell_{2i-1})]}{(1-\ell_{2i-1})} (x-\ell_{2i-1})^3 & \text{si } \ell_{2i-1} \leq x \leq \lambda_{2i-1} \\ \frac{(\lambda_{2i-1}-\ell_{2i-1})^2}{(1-\ell_{2i-1})} \left[-\frac{(x-\lambda_{2i-1})^3}{24\epsilon} + (1-\lambda_{2i-1}) \frac{(x-\lambda_{2i-1})^2}{8\epsilon} + \right. \\ \left. (\lambda_{2i-1}-\ell_{2i-1}) [3(1-\lambda_{2i-1}) + (1-\ell_{2i-1})] \frac{(x-\lambda_{2i-1})}{24\epsilon} + \right. \\ \left. [2(1-\lambda_{2i-1}) + (1-\ell_{2i-1})] \frac{(\lambda_{2i-1}-\ell_{2i-1})^2}{48\epsilon} \right] & \text{si } \lambda_{2i-1} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (7.54)$$

où ℓ_{2i-1} et λ_{2i-1} sont solutions du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{(\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1})^2}{(1 - \ell_{2i-1})} \left[4(1 - \lambda_{2i-1})^3 + 2(\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1})(1 - \lambda_{2i-1}) [3(1 - \lambda_{2i-1}) + (1 - \ell_{2i-1})] \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + (\lambda_{2i-1} - \ell_{2i-1})^2 [2(1 - \lambda_{2i-1}) + (1 - \ell_{2i-1})] \right] = 48\epsilon V_M \\ \bullet \sum_{j=1}^i \left[- \langle \lambda_{2i-1} - \ell_{2j-1} \rangle^4 \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + 2(\lambda_{2j-1} - \ell_{2j-1}) \frac{[(1 - \lambda_{2j-1}) + (1 - \ell_{2j-1})]}{(1 - \ell_{2j-1})} \langle \lambda_{2i-1} - \ell_{2j-1} \rangle^3 \right] = 48\epsilon^2 \end{array} \right. \quad (7.55)$$

Preuve. Pour déterminer les champs v_{2i-1} et δ_{2i-1} dans l'intervalle $(\ell_{2i-1}, 1)$ et les points ℓ_{2i-1} et λ_{2i-1} , on doit

1. résoudre les équations d'Euler :

$$v_{2i-1}^{(4)} = -\frac{1}{2\epsilon} \quad \text{dans} \quad (\ell_{2i-1}, \lambda_{2i-1}), \quad v_{2i-1}^{(4)} = 0 \quad \text{dans} \quad (\lambda_{2i-1}, 1).$$

2. écrire la condition à la limite et la condition naturelle :

$$v_{2i-1}(1) = V_M, \quad v_{2i-1}''(1) = 0.$$

3. écrire la continuité de v_{2i-1} et de ses dérivées en ℓ_{2i-1} et en λ_{2i-1} :

$$\llbracket v_{2i-1} \rrbracket(\ell_{2i-1}) = \llbracket v_{2i-1}' \rrbracket(\ell_{2i-1}) = \llbracket v_{2i-1}'' \rrbracket(\ell_{2i-1}) = 0.$$

$$\llbracket v_{2i-1} \rrbracket(\lambda_{2i-1}) = \llbracket v_{2i-1}' \rrbracket(\lambda_{2i-1}) = \llbracket v_{2i-1}'' \rrbracket(\lambda_{2i-1}) = \llbracket v_{2i-1}^{(3)} \rrbracket(\lambda_{2i-1}) = 0.$$

4. écrire que l'ouverture cumulée vaut ϵ en λ_{2i-1} :

$$\delta_{2i-1}(\lambda_{2i-1}) = \epsilon.$$

La résolution de ce système d'équations donne (7.54) et (7.55). □

Remarque 7.6.2 Si on avait résolu ce problème avec une énergie de surface de GRIFFITH, on aurait, à la fin de la première montée en charge, décollé le film sur une longueur $1 - \ell$. Par contre, aux cycles suivants, la pointe de la zone décollée n'aurait pas évolué : $\ell_{2i-1} = \ell \forall i \in \mathbb{N}^*$. Le taux de restitution d'énergie associé à la longueur du film décollée s'écrit

$$G = 9 \frac{V_M^2}{(1 - \lambda)^4} \quad (7.52)$$

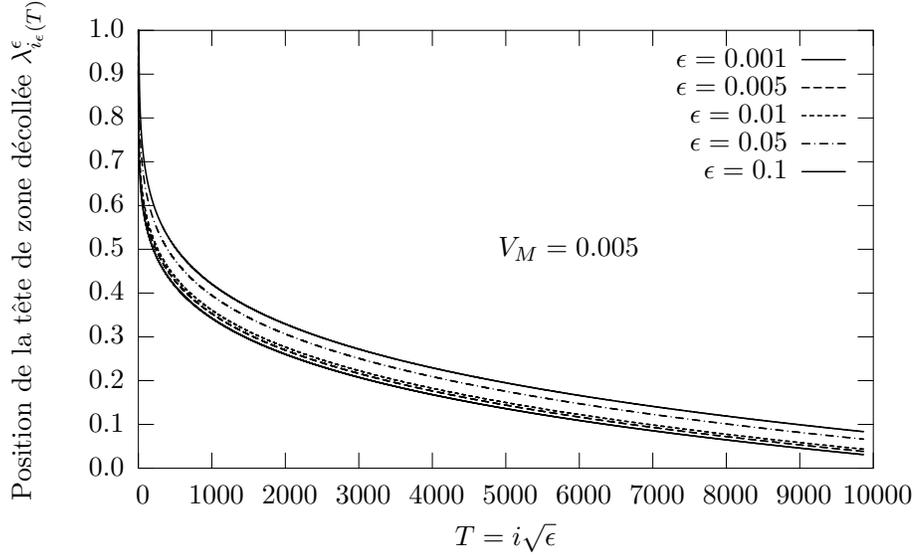


FIG. 7.13 – Convergence vers une loi de fatigue limite.

7.6.3 La loi de fatigue limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$

La résolution du système (7.55) demande un temps de calcul considérable si on considère de faibles valeurs de ϵ ou de V_M . En particulier, l'incrément de propagation de la zone cohésive par cycle, $\lambda_{2i-1} - \lambda_{2i-2}$, est de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$. Lorsque la longueur du film L est grande devant la longueur caractéristique δ_c apparaissant dans l'énergie de surface, *i.e.* lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, le nombre de cycles jusqu'à décollement complet du film tend vers l'infini comme $1/\sqrt{\epsilon}$. Ainsi, en réalisant un changement d'échelle du nombre de cycles en introduisant la variable de "temps" continue T

$$i = i_\epsilon(T) = \frac{T}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (7.53)$$

alors on peut voir sur la Figure 7.13 que la courbe $\lambda_{i_\epsilon(T)}^\epsilon$ représentant l'évolution de la tête de zone décollée converge vers une courbe limite $\ell(T)$, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Comme au Chapitre 6, on postule l'établissement d'un régime microscopique stationnaire, *i.e.* que le rapport $(\lambda_{2i_\epsilon(T)+2k+1}^\epsilon - \lambda_{2i_\epsilon(T)+2k-1}^\epsilon)/\sqrt{\epsilon}$ tend vers une limite $\dot{\ell}(T)$ qui est solution de la loi de fatigue limite énoncée dans la

Proposition 7.6.3 *En supposant que le régime microscopique est stationnaire, la loi de fatigue limite, relation implicite entre $\dot{\ell}$ et G , s'exprime par*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\langle 2G^{1/4} + k\dot{\ell} \right\rangle^3 \left[-\left\langle 2G^{1/4} + k\dot{\ell} \right\rangle + 8G^{1/4} \right] = 48 \quad (7.54)$$

De plus, pour les faibles valeurs de G , cette loi de fatigue est similaire à la loi usuelle de PARIS avec l'exposant 5/4

$$\dot{\ell} = -\frac{8}{15}G^{5/4} \quad (7.55)$$

Preuve. Soit

$$d(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon \right),$$

alors, en posant $i = i_\epsilon(T)$ dans (7.55₁), en divisant par ϵ et en passant à la limite, on obtient que la longueur de la zone cohésive microscopique ne dépend que du taux de restitution d'énergie

$$d = 2G^{1/4}.$$

On procède de la même façon dans (7.55₂) et comme

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left(\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2j_\epsilon(T)-1}^\epsilon \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left[(\lambda_{2i_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \lambda_{2j_\epsilon(T)-1}^\epsilon) + (\lambda_{2j_\epsilon(T)-1}^\epsilon - \ell_{2j_\epsilon(T)-1}^\epsilon) \right] = k\dot{\ell} + d,$$

le résultat est immédiat.

Pour les faibles valeurs de G , comme $\sum_{k=0}^{-d/\dot{\ell}} (d + k\dot{\ell})^3 = -\frac{d}{\dot{\ell}} \int_0^1 [(1 - \theta)d]^3 d\theta = -\frac{1}{4} \frac{d^4}{\dot{\ell}}$ et que $\sum_{k=0}^{-d/\dot{\ell}} \langle d + k\dot{\ell} \rangle^4 = -\frac{d}{\dot{\ell}} \int_0^1 [(1 - \theta)d]^4 d\theta = -\frac{1}{5} \frac{d^5}{\dot{\ell}}$, en remplaçant d par son expression on obtient le résultat souhaité. \square

Remarque 7.6.4 En résolvant ce problème avec les grandeurs non adimensionnalisées, on obtient la loi de fatigue limite suivante

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \left(\frac{G}{G_c} \right)^{1/4} + k \frac{\dot{\ell}}{\beta \sqrt{L}} \right\rangle^3 \left[- \left\langle \left(\frac{G}{G_c} \right)^{1/4} + k \frac{\dot{\ell}}{\beta \sqrt{L}} \right\rangle + 4 \left(\frac{G}{G_c} \right)^{1/4} \right] = 3$$

où on a posé $\beta = \left(\frac{8EI}{G_c} \right)^{1/4}$ et où $G = \frac{9EI}{2} \frac{V_M^2}{(L-\ell)^4}$. Dans le cadre des faibles valeurs du taux de restitution d'énergie, on obtient

$$\dot{\ell} = -\frac{4}{15} \beta \sqrt{L} \left(\frac{G}{G_c} \right)^{5/4}.$$

Chapitre 8

Formulation variationnelle des lois de fatigue limites

Les Chapitres 6 et 7 ont permis —à travers des exemples “académiques”— de mettre en évidence des lois de fatigue limites qui englobent à la fois la loi de GRIFFITH et la loi de PARIS et ce en considérant le comportement asymptotique du problème d'évolution de la fissuration lorsque la dimension de la structure est très grande devant la longueur interne du matériau (*i.e.* , en reprenant les notations des chapitres précédents, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$). Ainsi dans l'exemple du décollement d'un film mince, le taux de décollement $\dot{\ell}$ et le taux de restitution d'énergie G sont reliés par la relation implicite suivante

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\langle 2\sqrt{G(N)} - k\dot{\ell}(N) \right\rangle^2 = 4 \quad (8.1)$$

où N (T dans les Chapitres précédents) est le nombre de cycles mis à l'échelle défini par (6.6) et qui peut être considéré dans la suite comme une pseudo variable de temps. Dans (8.1) et dans la suite, ℓ ne désigne plus la position de la pointe macroscopique mais la longueur de la zone décollée (qui, contrairement aux Chapitres 3 à 7 ne s'écrit donc plus $1 - \ell$), ce changement de variable ayant pour but de maintenir une cohérence dans tout ce chapitre et n'introduisant que quelques modifications de signe.

(8.1) est donc une loi de GRIFFITH lorsque que $G = 1$ (*i.e.* $G = G_c$ avec les dimensions) et une loi de PARIS du type $\dot{\ell} = f(G)$ lorsque $G < 1$.

On note qu'elle ne vaut que pour un type de cycle d'amplitude donnée : amplitude constante avec retour à zéro à la fin de chaque phase de décharge. Un autre type de chargement cyclique (voir par exemple le paragraphe 7.3 pour des chargements de rapport de charge non nul et la loi de fatigue obtenue (7.25)) donnerait une loi différente de (8.1), même si elle serait toujours du type $\dot{\ell} = f(G)$.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier de telles lois et notamment de les étendre à des problèmes plus généraux. On verra dans un premier temps qu'elles font apparaître une forme d'énergie de surface différente de celle utilisée dans le modèle de GRIFFITH. La loi de propagation des fissures par fatigue reste un problème de minimisation de l'énergie totale, somme de l'énergie potentielle et de l'énergie de surface. Mais du fait de la forme différente de cette dernière, le problème de minimisation jouira de propriétés différentes qu'il s'agit d'étudier. Enfin, on donnera des éléments de réponse quant à l'amorçage et à l'évolution d'une fissure par ce nouveau modèle variationnel.

8.1 Formulation variationnelle discrète des lois de fatigue limites

8.1.1 Cas du problème de décollement d'un film

Autre écriture de la loi limite

La loi donnée par (8.1) peut s'écrire comme une loi standard généralisée (voir HALPHEN et NGUYEN [36]), *i.e.* en termes d'un potentiel de dissipation :

$$\dot{\ell} \in \partial \mathcal{F}(G) \quad \text{ou} \quad G \in \partial \mathcal{D}(\dot{\ell}), \quad (8.2)$$

où \mathcal{F} et \mathcal{D} sont deux fonctions convexes conjuguées, ∂ désignant le sous-différentiel.

Plus précisément, le potentiel de dissipation \mathcal{D} se déduit de la fonction de fatigue f donnée par (8.1) :

$$\mathcal{D}(\dot{\ell}) = \begin{cases} \int_0^{\dot{\ell}} f^{-1}(\lambda) d\lambda & \text{si } \dot{\ell} \leq 2 \\ \int_0^2 f^{-1}(\lambda) d\lambda + (\dot{\ell} - 2) & \text{si } \dot{\ell} \geq 2 \end{cases}. \quad (8.3)$$

Il est linéaire, de pente 1 (G_c avec les dimensions) pour des valeurs assez grandes de la vitesse de propagation, conformément à la loi de GRIFFITH, et, il suit approximativement une loi puissance, avec une puissance 5/3, pour des faibles valeurs de la vitesse de propagation, conformément à une loi de PARIS.

Est tracée sur la Figure 8.1 le graphe du potentiel de dissipation \mathcal{D} en tant que fonction du taux de croissance de la fissure $\dot{\ell}$.

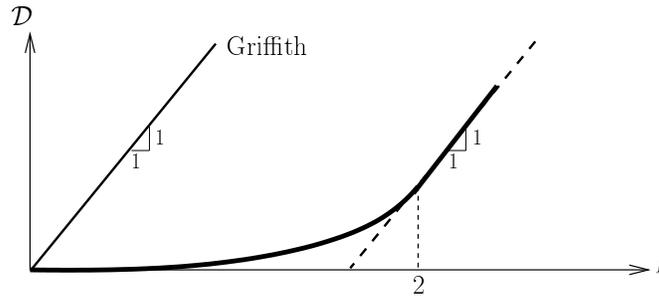


FIG. 8.1 – Potentiel de dissipation associé avec la loi limite.

Autre écriture du problème d'évolution

Par définition du sous-différentiel d'une fonction convexe, la loi d'évolution de ℓ peut aussi s'écrire :

$$\dot{\ell} = \text{Argmin}_{\lambda \geq 0} \{ \mathcal{D}(\lambda) - G\lambda \}. \quad (8.4)$$

Discretisons le paramètre N en introduisant un pas de cycles ΔN . Appelons $\Delta \ell$ l'incrément de décohesion durant les cycles compris entre N et $N + \Delta N$, la longueur de décohesion passant de ℓ à $\ell + \Delta \ell$. Comme $G = -\mathcal{P}'(\ell)$ et comme l'énergie potentielle $\mathcal{P}(\ell) = \frac{V_M^2}{\ell}$ est une fonction convexe de

ℓ , le problème continu précédent peut-être approché par le problème incrémental de minimisation suivant

$$\frac{\Delta \ell}{\Delta N} = \underset{\lambda \geq 0}{\operatorname{Argmin}} \left\{ \frac{1}{\Delta N} \left(\mathcal{P}(\ell + \lambda \Delta N) - \mathcal{P}(\ell) \right) + \mathcal{D}(\lambda) \right\}. \quad (8.5)$$

En notant ℓ_I la longueur de la zone décollée au pas I , le problème incrémental peut aussi s'écrire :

<p>Pour $I \geq 1$, trouver ℓ_{I+1} minimiseur sur $\{\ell : \ell \geq \ell_I\}$ de $\mathcal{P}(\ell) + \Delta N \mathcal{D} \left(\frac{\ell - \ell_I}{\Delta N} \right)$ avec $\ell_0 = 0$ donné.</p>	(8.6)
---	-------

L'intérêt de ce problème par rapport au problème incrémental initial (4.31) est multiple :

1. Le pas de cycle ΔN peut être choisi beaucoup plus grand et de façon indépendante du pas de temps Δt . En fait le pas ΔN est de l'ordre de $1/\epsilon$ alors que Δt est de l'ordre de 1.
2. Tout ce qui se passe au cours d'un cycle a été intégré une fois pour toutes dans le potentiel de dissipation \mathcal{D} .
3. Le problème "spatial" de détermination du champ d'ouverture —et par voie de conséquence de l'énergie potentielle— en fonction de la longueur de décohesion est un problème linéaire, puisqu'il revient à adopter l'hypothèse de GRIFFITH quant à l'interaction entre les lèvres des fissures.
4. La différence par rapport au modèle de GRIFFITH tient au potentiel de dissipation \mathcal{D} qui n'est plus ici une fonction linéaire de la longueur de décohesion créée.
5. L'amplitude du cycle apparaît ici explicitement dans l'énergie potentielle : si cette intensité est multipliée par k , alors l'énergie potentielle pour une même longueur de décohesion est multipliée par k^2 en raison du caractère linéaire du problème spatial. Le potentiel de dissipation est *indépendant* de l'amplitude du cycle.

8.1.2 Généralisation

La démarche précédente peut se généraliser à des structures quelconques dans la mesure où l'on connaît —ou où l'on s'est donné— le potentiel de dissipation associé à la loi de fatigue limite. On se limitera ici à présenter sa généralisation dans le cas de fissure(s) s'amorçant ou se propageant en fatigue dans une structure élastique bidimensionnelle homogène soumise à un chargement cyclique simple, *i.e.* un chargement dont l'intensité croît depuis 0 jusqu'à une valeur maximale avant de décroître jusqu'à 0.

Cas d'une pointe de fissure se propageant suivant un trajet spatial prédéfini.

Supposons comme le présente la Figure 8.2 que l'on s'intéresse à la création et à la propagation d'une fissure dans une structure bidimensionnelle homogène, au comportement élastique, soumise à un chargement cyclique "simple" d'amplitude constante avec retour à 0. Supposons pour simplifier que cette fissure soit débouchante d'un côté, que son trajet spatial soit connu a priori et que donc le seul paramètre géométrique restant à déterminer soit la position de sa pointe ou de façon équivalente sa longueur ℓ .

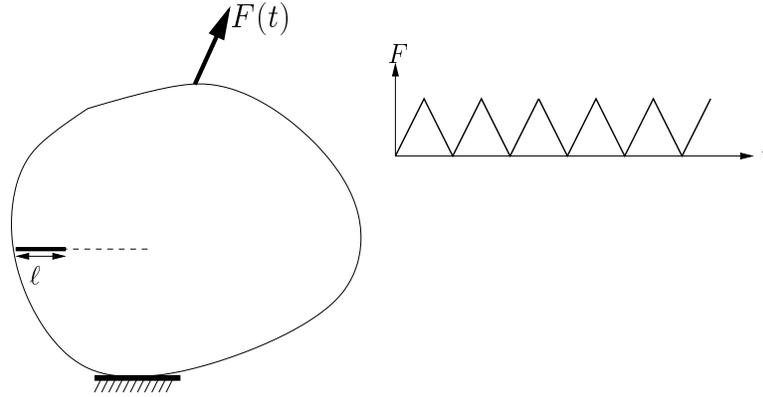


FIG. 8.2 – Structure bidimensionnelle homogène et élastique avec fissure débouchante d’un côté.

Comme la structure est homogène et comme le potentiel est une grandeur “locale” attachée au fond de fissure, le potentiel de dissipation ne dépend pas de la position du fond de fissure mais uniquement du taux de croissance de la fissure. Il est évidemment dépendant du comportement du matériau, *i.e.* du potentiel élastique et de la densité d’énergie de surface, et de la forme du cycle de chargement. Pour un chargement et un matériau donnés, le potentiel de dissipation est donc simplement une fonction $\mathcal{D}(\dot{\ell})$. Sur la vue du potentiel *construit* dans le problème de décollement de film mince, on peut s’attendre à ce que ce potentiel soit une fonction de $\dot{\ell}$ *convexe*, nulle en 0 et à *croissance linéaire à l’infini*, cette dernière propriété permettant de retrouver la loi de GRIFFITH pour des chargements suffisamment élevés. Cependant nous n’adopterons pas tout de suite ces propriétés, mais discuterons par la suite de leur éventuelle nécessité. L’énergie potentielle $\mathcal{P}(\ell)$ s’obtient en résolvant le problème d’élastostatique correspondant à la structure fissurée sur une longueur ℓ , soit Ω_ℓ , et soumise au chargement d’amplitude *maximale* caractérisé par l’ensemble des champs admissibles $\mathcal{C}(\ell)$ et le travail des efforts extérieurs donnés $F(v)$:

$$\mathcal{P}(\ell) = \min_{v \in \mathcal{C}(\ell)} \left\{ \int_{\Omega_\ell} W(\varepsilon(v)(x)) dx - F(v) \right\}. \quad (8.7)$$

En présence de forces exercées non nulles, cette énergie potentielle de la structure à l’équilibre peut ne pas être définie — en fait, l’infimum dans (8.7) est $-\infty$ — pour des longueurs de fissure trop importantes, séparant la structure en plusieurs morceaux qui ne peuvent plus être en équilibre sous le chargement exercé. Une fois une telle longueur atteinte, la structure est rompue et le problème de la propagation ne se pose plus. En retour, cette possibilité d’énergie potentielle valant $-\infty$ interdit que l’on pose le problème de la propagation en termes de recherche du minimum *absolu* de l’énergie. Cette exigence doit être affaiblie en la recherche de minimum *relatif*. On est donc conduit au problème incrémental suivant :

<p>Pour $I \geq 0$, trouver ℓ_{I+1} minimiseur <i>relatif</i> sur $\{\ell : \ell \geq \ell_I\}$ de</p> $\mathcal{P}(\ell) + \Delta N \mathcal{D}\left(\frac{\ell - \ell_I}{\Delta N}\right)$ <p>avec ℓ_0 donné.</p>	(8.8)
---	-------

Cas général.

Quelques questions de fond se posent quand on essaie de généraliser la formulation variationnelle précédente au cas où le trajet spatial de la (ou des) fissure(s) n'est pas prédéfini. Les principales difficultés et les solutions proposées sont les suivantes :

1. Il faut remplacer le paramètre ℓ par l'ensemble Γ des points de discontinuité caractérisant l'état de fissuration. Le supplément de fissuration à chaque pas est donc la différence $\Gamma \setminus \Gamma_I$.
2. Les ensembles Γ et Γ_I sont a priori quelconques, mis à part le fait que Γ doit contenir Γ_I pour des raisons d'irréversibilité, $\Gamma \supset \Gamma_I$.
3. L'énergie potentielle associée à l'état de fissuration Γ , soit $\mathcal{P}(\Gamma)$, s'obtient toujours par résolution du problème d'élasticité posé sur la structure fissurée de Γ et soumise au chargement d'amplitude maximale.
4. Chaque composante connexe de supplément de fissuration doit être comptée séparément dans le calcul du potentiel de dissipation, sans quoi on tomberait sur des paradoxes physiquement non acceptables. En conséquence le potentiel de dissipation de la structure dans l'état de fissuration Γ s'écrit maintenant

$$\Delta N \sum_{k \in \mathcal{K}(\Gamma \setminus \Gamma_I)} \mathcal{D} \left(\frac{\mathcal{H}^1((\Gamma \setminus \Gamma_I)^k)}{\Delta N} \right), \quad (8.9)$$

$\mathcal{H}^1(\gamma)$ désignant la longueur de γ , $\mathcal{K}(\gamma)$ l'ensemble des composantes connexes de γ et γ^k la k -ième composante connexe de γ .

Compte tenu de ces modifications, le problème incrémental "généralisé" s'écrit donc

<p>Pour $I \geq 0$, trouver Γ_{I+1} minimiseur <i>relatif</i> sur $\{\Gamma : \Gamma \supset \Gamma_I\}$ de</p> $\mathcal{P}(\Gamma) + \Delta N \sum_{k \in \mathcal{K}(\Gamma \setminus \Gamma_I)} \mathcal{D} \left(\frac{\mathcal{H}^1((\Gamma \setminus \Gamma_I)^k)}{\Delta N} \right)$ <p>avec Γ_0 donné.</p>	(8.10)
--	--------

L'intérêt de cette formulation par rapport aux lois de fatigue habituelles est multiple :

1. On ne suppose rien a priori sur le nombre et la forme des fissures ;
2. On peut donc aussi bien étudier l'amorçage que la propagation. On remarque qu'il faut en général 2 modèles —la mécanique de l'endommagement pour l'amorçage et la mécanique de la rupture pour la propagation— pour rendre compte de la fissuration de fatigue. Ici, on utilise un modèle unifié pour décrire l'amorçage et la propagation ;
3. On peut adapter les méthodes numériques développées par BOURDIN et al [8] dans le cadre de la rupture fragile.

8.1.3 Quelques remarques générales

Nécessité de la non sous-additivité du potentiel de dissipation

On va maintenant énoncé une propriété importante que doit vérifier l'énergie de surface pour que le phénomène de fatigue soit possible, *i.e.* pour qu'à chaque pas de temps, le principe de minimisation conduise à l'avancé progressive de la fissure.

Définition 8.1.1 Une fonction $\mathcal{D} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite *sur-additive* (resp. *additive*, *sous-additive*) si on a, quels que soient x et $y \in \mathbb{R}^+$

$$\mathcal{D}(x + y) \geq (\text{resp. } =, \leq) \mathcal{D}(x) + \mathcal{D}(y).$$

Proposition 8.1.2 Pour que le potentiel de dissipation \mathcal{D} introduit dans le problème incrémental (8.10) permette la modélisation du phénomène de fatigue, i.e. pour que Γ_I puisse être différent de Γ_1 pour $I > 1$, il faut que \mathcal{D} ne soit pas une fonction additive ou sous-additive de la longueur de fissure créée.

Preuve. Supposons que \mathcal{D} soit une fonction additive ou sous-additive. Notons Γ_1 l'état de fissuration au premier pas de temps. En vertu de (8.10), il existe un voisinage $\mathcal{B}(\Gamma_1)^1$ tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Gamma_1) + \Delta N \sum_{k \in \mathcal{K}(\Gamma_1 \setminus \Gamma_0)} \mathcal{D} \left(\frac{\mathcal{H}^1((\Gamma_1 \setminus \Gamma_0)^k)}{\Delta N} \right) \\ \leq \mathcal{P}(\Gamma) + \Delta N \sum_{k \in \mathcal{K}(\Gamma \setminus \Gamma_0)} \mathcal{D} \left(\frac{\mathcal{H}^1((\Gamma \setminus \Gamma_0)^k)}{\Delta N} \right), \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(\Gamma_1). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Montrons que Γ_1 reste solution à tous les pas de temps. Pour $I \geq 1$, l'énergie associée à Γ_1 se réduit à $\mathcal{P}(\Gamma_1)$ puisqu'il n'y a pas de nouvelles longueurs fissurées. De plus, pour tout $\Gamma \supset \Gamma_1$, on a $\Gamma \setminus \Gamma_0 = (\Gamma \setminus \Gamma_1) \cup (\Gamma_1 \setminus \Gamma_0)$ et toute composante connexe de $\Gamma \setminus \Gamma_1$ ou de $\Gamma_1 \setminus \Gamma_0$ est incluse dans une composante connexe de $\Gamma \setminus \Gamma_0$. Du fait de l'hypothèse de sous-additivité, on a

$$\sum_{k \in \mathcal{K}(\Gamma \setminus \Gamma_0)} \mathcal{D} \left(\frac{\mathcal{H}^1((\Gamma \setminus \Gamma_0)^k)}{\Delta N} \right) \leq \sum_{k \in \mathcal{K}(\Gamma \setminus \Gamma_1)} \mathcal{D} \left(\frac{\mathcal{H}^1((\Gamma \setminus \Gamma_1)^k)}{\Delta N} \right) + \sum_{k \in \mathcal{K}(\Gamma_1 \setminus \Gamma_0)} \mathcal{D} \left(\frac{\mathcal{H}^1((\Gamma_1 \setminus \Gamma_0)^k)}{\Delta N} \right). \quad (8.12)$$

En reportant cette inégalité dans (8.11), il vient

$$\mathcal{P}(\Gamma_1) \leq \mathcal{P}(\Gamma) + \Delta N \sum_{k \in \mathcal{K}(\Gamma \setminus \Gamma_1)} \mathcal{D} \left(\frac{\mathcal{H}^1((\Gamma \setminus \Gamma_1)^k)}{\Delta N} \right), \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(\Gamma_1), \quad (8.13)$$

ce qui assure que Γ_1 est solution à tous les pas de temps. \square

Conséquence 8.1.3 En pratique, on supposera donc que le potentiel de dissipation est une fonction nulle en 0, croissante, sur-additive et à croissance linéaire à l'infini.

Nécessité de la décomposition des nouvelles surfaces fissurées en composantes connexes

Considérons n structures identiques, non connectées entre elles, soumises au même chargement cyclique. On attend évidemment que la réponse soit identique dans chaque structure et indépendante du nombre de structures considérées. Si l'on prenait pour potentiel de dissipation le

¹Il est inutile de préciser ici la topologie

potentiel de la réunion des surfaces nouvellement fissurées, le problème posé sur l'ensemble des n structures se présenterait comme suit (en admettant que la fissuration est identique dans chaque structure) :

$$\text{Minimiser } n\mathcal{P}(\Gamma) + \Delta N \mathcal{D} \left(\frac{n\mathcal{H}^1(\Gamma \setminus \Gamma_I)}{\Delta N} \right) \quad \text{sur } \{\Gamma : \Gamma \supset \Gamma_I\}. \quad (8.14)$$

La solution dépend évidemment de n sauf si \mathcal{D} est linéaire, ce qui n'est le cas que dans la théorie de GRIFFITH. Par contre en découpant les nouvelles surfaces fissurées en composantes connexes, alors la solution redevient indépendante de n .

On peut aussi avancer des arguments physiques en faveur de ce découpage. Dans le problème de décollement de film mince, on voit clairement dans la construction du potentiel de dissipation que celui-ci est attaché au fond de fissure. On le construit en résolvant un problème *local* qui consiste à trouver une évolution “stationnaire” de la zone d'amorçage cycle après cycle, en imposant un chargement cyclique portant sur le taux de restitution d'énergie macroscopique. En extrapolant, on peut considérer que chaque pointe de fissure dissipe sa propre énergie en avançant, sans se préoccuper des autres pointes —sauf quand les pointes coalescent.

Des difficultés mathématiques

La nécessité de raisonner en termes de composantes connexes de nouvelles surfaces fissurées et d'additionner leur contribution dans le potentiel de dissipation par ailleurs sur-additif pose des problèmes d'ordre mathématique.

1. Peut-on facilement donner un sens à la notion de composantes connexes des objets géométriques que sont les surfaces de discontinuité de champs de déplacements à variation bornée ?
2. Grâce à (à cause de) la sur-additivité de \mathcal{D} , n'a-t-on pas intérêt à “découper” les fissures en petits morceaux ? En effet, envisageons une nouvelle surface fissurée de longueur ℓ et découpons-la en n composantes connexes (en recollant n petits ligaments). Comparons les 2 potentiels de dissipation obtenus, en prenant $\Delta N = 1$ pour simplifier. Dans le cas d'un seul morceau il vaut $\mathcal{D}(\ell)$ alors que dans le cas de n morceaux, il vaut $n\mathcal{D}(\ell/n)$. En vertu de la sur-additivité, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathcal{D}(\ell/n) = 0$ et donc plus on découpe, moins on dissipe. Heureusement, plus on découpe, plus on augmente l'énergie potentielle. Reste à espérer que l'optimum n'est pas toujours trivialement de découper.

8.2 Application : énergie de surface en loi puissance

Comme annoncé précédemment dans le cadre du décollement d'un film, au voisinage de 0, le potentiel de dissipation \mathcal{D} suit une loi puissance.

Afin d'étudier, dans un cadre assez général, notamment le problème de l'initiation d'une fissure, on postule dans la suite que \mathcal{D} admet un développement au voisinage de 0 de la forme

$$\mathcal{D}(\dot{\ell}) = D \dot{\ell}^p + \dots$$

où p est un réel positif.

Le problème incrémental défini par (8.8), s'écrit alors simplement

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Pour } I \geq 0, \quad \text{trouver } \ell_{I+1} \text{ minimiseur relatif sur } \{\ell : \ell \geq \ell_I\} \text{ de} \\ \mathcal{P}(\ell) + \Delta ND \left(\frac{\ell - \ell_I}{\Delta N} \right)^p \\ \text{avec } \ell_0 \text{ donné.} \end{array}} \quad (8.15)$$

où ℓ_I est la longueur de la fissure au pas de temps I .

Conséquence 8.2.1 *Comme, d'après la Proposition 8.1.2, l'énergie de surface ne doit pas être une fonction additive ou sous-additive pour pouvoir rendre compte de la propagation d'une fissure de fatigue, on obtient alors le critère sur p suivant*

$$\boxed{\text{pas de fissuration de fatigue si } p \leq 1} \quad (8.16)$$

On note enfin que l'énergie de surface ainsi exprimée possède les "bonnes propriétés" : elle est nulle lorsque $\dot{\ell} = 0$, positive et strictement croissante avec ℓ pour tout $\ell \geq \ell_I$, $I \geq 0$.

Remarque 8.2.2 : Le principal problème lié au choix d'une telle expression de l'énergie de surface est de pouvoir l'expliquer "physiquement". Il n'est en effet pas intuitif que celle-ci croît comme une loi puissance.

Une première réponse pourrait être donnée à partir d'études réalisées essentiellement sur le bois, voir MOREL et al [49].

La prise en compte d'une loi d'échelle pour décrire la rugosité de la morphologie des surfaces de fissures aboutirait à une telle approche. Un travail complémentaire permettant de rapprocher ces deux travaux reste à réaliser.

8.2.1 Amorçage d'une fissure de fatigue

Le rôle joué par les singularités

Les singularités jouent un rôle essentiel dans le processus de fissuration d'une fissure dans un matériau fragile. Dans la théorie de GRIFFITH (en $2D$), c'est parce que le champ des déplacements est en \sqrt{r} ($\alpha = 1/2$) à la pointe de la fissure que le taux de restitution d'énergie G est fini et non nul. Désirant montrer l'importance des singularités dans leur modèle, FRANCFORT et MARIGO [32] ont rapproché la valeur de la singularité au caractère progressif ou brutal de l'évolution de la fissure dans le cas d'une structure fragile soumise à un chargement monotone

- si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, la singularité est dite forte et il y a fissuration progressive dès la mise en charge.
- si $\frac{1}{2} < \alpha$, la singularité est dite faible et il y a fissuration brutale pour une valeur finie non nulle de la charge.

On va voir que pour la fissuration de fatigue les singularités jouent également un rôle essentiel notamment dans l'initiation d'une fissure. Ainsi pour rendre compte du phénomène d'endurance (*i.e.* pour que la structure ne se fissure pas même après un nombre de cycles infini), il faut comparer l'énergie d'une structure saine sans singularité avec celle d'une structure fissurée.

Pour ce faire, on énonce un résultat important obtenu par LEGUILLON [43]. Celui-ci propose, à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés, une estimation de la restitution d'énergie élastique provoquée par un défaut de petite taille.

Proposition 8.2.3 (*D. LEGUILLON, 1989*). *Soit une fissure de longueur ℓ , supposée petite, placée au voisinage d'un point singulier x_0 où la singularité est en r^α . Alors l'énergie élastique associée à la longueur fissurée ($\ell_0 + \ell$) est donnée par :*

$$\mathcal{P}(\ell_0 + \ell) = \mathcal{P}(\ell_0) - K\ell^{2\alpha} + o(\ell^{2\alpha}) \quad K > 0. \quad (8.17)$$

Le coefficient K dépend à la fois de la forme du défaut et de la singularité du champ en x_0 en l'absence de défaut, mais pas de la taille du défaut. Par exemple, pour un milieu infini possédant une fissure de longueur ℓ et soumis à un chargement σ à l'infini, $K = \frac{\pi\sigma^2}{4E}$ (sous l'hypothèse des contraintes planes).

Dans ce cadre, l'énergie totale d'une structure contenant une petite fissure d'amorçage de longueur ℓ s'exprime par

$$\mathcal{E}(\ell) = -K\ell^{2\alpha} + \Delta ND \left(\frac{\ell}{\Delta N} \right)^p. \quad (8.18)$$

Le principe de minimisation entraîne

$$\ell^{p-2\alpha} = \frac{2\alpha K}{pD} (\Delta N)^{p-1}. \quad (8.19)$$

Absence de singularité : restriction sur la puissance p .

Lorsque $\alpha = 1$, (8.19) se réduit à

$$\ell^{p-2} = \frac{2K}{pD} (\Delta N)^{p-1}.$$

On en conclue que si $p \geq 2$ alors, en tout point de la structure, on peut faire émerger une fissure en un nombre fini de cycles (si $p < 2$, il faudrait un nombre infini de cycles, $\Delta N \rightarrow +\infty$, pour faire apparaître une fissure de longueur $\ell \rightarrow 0$).

Cette situation est inacceptable car elle ne respecte pas les observations expérimentales : en l'absence de singularité, l'amorçage d'une fissure doit dépendre de l'intensité du chargement auquel la structure est soumise ce qui n'est pas le cas ici. On voit rapidement qu'on ne peut pas rendre compte du phénomène d'endurance.

Ceci conduit à une nouvelle restriction du paramètre p

$$\boxed{1 < p < 2} \quad (8.20)$$

Nombre de cycles d'amorçage.

En reprenant les observations précédentes, on voit vite, qu'en l'absence de singularité dans la structure (*i.e.* $\alpha = 1$), il y a endurance illimitée et ce quelque soit l'amplitude du chargement. Plus encore, en analysant la relation (8.19), il s'avère que, pour un p donné tel que $1 < p < 2$, l'endurance est illimitée si la singularité est assez faible, *i.e.* si $\alpha > p/2$. Ceci constitue une faille non négligeable du modèle limite : le critère d'endurance en contrainte du modèle discret initial (voir Remarque 5.3.1) n'est plus présent dans le modèle limite.

Afin de remédier au problème de l'amorçage d'une fissure, on décide de ne plus considérer un matériau initialement sain mais qui possède un(ou plusieurs) défaut(s) ce qui est très généralement le cas. On supposera que ce défaut peut être assimilé à une microfissure. La zone d'endurance correspond alors au nombre de cycles dont a besoin cette microfissure pour devenir une fissure à l'échelle macroscopique. Cette façon de décrire l'endurance semble de plus mieux correspondre à l'approche des physiciens qui n'observent pas toujours de vraie limite d'endurance. Ils préfèrent parler de limite d'endurance conventionnelle qui correspond à la valeur maximale de la contrainte qui n'entraîne pas la rupture avant un nombre de cycles donné. On appliquera l'hypothèse de LEGUILLON (8.2.3) en supposant que la microfissure est de longueur très petite et que son accroissement à chaque cycle l'est aussi. On impose également au milieu de ne pas posséder de point singulier.

L'énergie totale étant donnée par (8.19) en imposant $\alpha = 1$, le principe de minimisation de l'énergie conduit à une relation entre le taux de fissuration $d\ell/dN$ et la longueur fissurée ℓ

$$\frac{d\ell}{dN} \sim \frac{\Delta\ell}{\Delta N} = \left(\frac{2K}{pD}\right)^{1/(p-1)} \ell^{1/(p-1)} = C_1 \ell^{1/(p-1)}$$

où C_1 est une constante réelle positive.

Après intégration, on obtient alors, après avoir introduit le paramètre positif

$$\beta = (2-p)/(p-1) \quad 0 < \beta < +\infty,$$

$$\ell_0^{-\beta} - \ell^{-\beta} = C_2 N \tag{8.21}$$

avec $C_2 = \beta C_1$ positif.

Dans (8.21), ℓ_0 correspond à la longueur initiale de la microfissure, *i.e.* avant tout chargement.

On peut ainsi définir la longueur fissurée en fonction du pas de temps N

$$\ell(N) = \frac{1}{\left[\ell_0^{-\beta} - C_2 N\right]^{1/\beta}}. \tag{8.22}$$

Ainsi pour une valeur de la longueur de la fissure ℓ assez grande, on obtient un temps N_a à partir duquel l'hypothèse de petite fissure n'est plus réaliste

$$N_a = \frac{1}{C_2 \ell_0^\beta}. \tag{8.23}$$

On définit N_a comme étant, en quelque sorte, le temps critique nécessaire pour faire évoluer la fissure d'état de microfissure à celui de macrofissure.

Ceci signifie donc qu'il existe deux échelles dans ce modèle.

En dessous d'une certaine longueur de fissure ℓ_a , celle-ci est considérée comme une microfissure de dimension petite par rapport à la taille du système et sa longueur est donnée par (8.22) après application de l'hypothèse de petite fissuration.

Lorsque la fissure atteint une longueur ℓ_e (*i.e.* après un temps N_a), la propagation ne peut plus être donnée par (8.22) puisque l'on ne peut plus remplir l'hypothèse de petite longueur de fissure. Finalement, en terme de fatigue, N_a peut être assimilé à un temps d'amorçage de la fissure, temps qu'il faut atteindre pour voir émerger une fissure.

En remplaçant K (voir Proposition 8.2.3) par son expression, N_a s'exprime par

$$N_a = \left(\frac{2EpD}{\pi\sigma^2} \right)^{1/(p-1)} \frac{1}{\beta\ell_0^\beta}. \quad (8.24)$$

Ainsi

- plus le chargement maximal à chaque pas de temps est important, moins N_a est grand
- plus la longueur initiale de la microfissure est importante, plus N_a est faible
- plus p est grand (et donc β petit), plus N_a est grand.

8.2.2 Propagation de la fissure : évolution du type loi de PARIS

Une fissure étant amorcée, il s'agit de déterminer son évolution. On va voir que celle-ci suit la loi de PARIS.

En effet la minimisation de l'énergie totale donnée par (8.15) conduit à

$$\frac{d\ell}{dN} = \frac{1}{(pD)^{1/(p-1)}} G(\ell(N))^{1/(p-1)} \quad (8.25)$$

où $G(\ell) = -\mathcal{P}'(\ell)$.

De ce fait, l'évolution de la fissuration est dictée par l'évolution du taux de restitution d'énergie suivant une loi de PARIS de puissance $\frac{1}{p-1}$. Il s'ensuit que

- si G est une fonction décroissante de la longueur de fissure (*i.e.* si l'énergie élastique est convexe), alors le taux de fissuration diminue au cours du temps. C'est notamment ce que l'on observe dans l'essai de décollement d'un film mince (voir Chapitre 3 à 6).
- si G est une constante (*i.e.* si l'énergie élastique est linéaire), alors la fissure augmente du même pas de longueur à chaque pas de temps et $\frac{d\ell}{dN}$ est une droite.
- si G est une fonction croissante de ℓ (*i.e.* si l'énergie élastique est concave), alors à chaque pas de temps, il y a accélération de la fissuration ce qui conduit à une évolution instable de la fissure.

8.2.3 Comparaison avec les observations expérimentales

Rappel 8.2.4 En supposant un matériau élastique linéaire soumis à un chargement cyclique d'amplitude constante avec retour à zéro (rapport de charge $R = 0$), la loi de PARIS exprime le taux de fissuration en fonction du taux de restitution d'énergie

$$\frac{d\ell}{dN} = CG^{m/2} \quad (8.26)$$

où C et m sont des constantes obtenues expérimentalement. On note que pour la plupart des matériaux, $2 \leq m \leq 6$.

Par identification de (8.26) et (8.25), relations donnant l'évolution de la fissuration par fatigue respectivement par la loi de PARIS et par le modèle variationnel, on obtient un nouvel encadrement de la puissance p

$$\boxed{4/3 \leq p < 2.} \quad (8.27)$$

Conséquence 8.2.5 Si on impose à p les valeurs données par (8.20), on obtient alors pour la puissance m intervenant dans la loi de PARIS

$$2 < m < +\infty.$$

On retrouve alors la borne inférieure 2 qui nous est donnée dans la littérature.

8.2.4 Un exemple : bi-matériau avec entaille

Afin d'illustrer le modèle et de rendre compte de l'influence de la singularité, on souhaite rendre compte de la propagation d'une fissure de fatigue dans un bi-matériau entaillé. On considère la structure de longueur L présentée sur la Figure 8.3. Celle-ci est constituée de deux matériaux élastiques linéaires, homogènes et isotropes de module d'Young respectif E_1 et E_2 . On considérera dans la suite le cas $E_2 > E_1$ autrement dit que le second matériau est plus rigide que le premier. Dans LEGUILLON [43] ou DESTUYNDER et al [24], il est montré que dans ce cadre le taux de restitution d'énergie à l'interface est nul et que donc, théoriquement, il ne peut y avoir propagation de la fissure du matériau 1 au matériau 2.

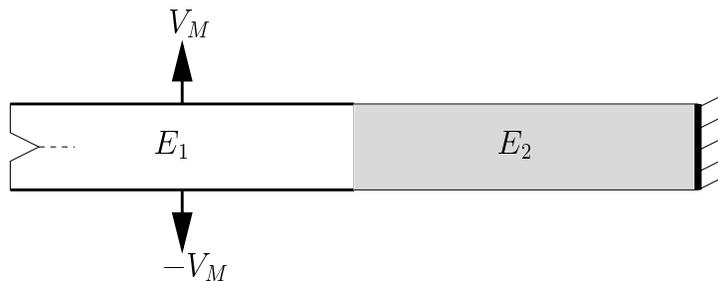


FIG. 8.3 – Bi-matériau avec entaille.

La structure est entaillée en son extrémité et encadrée à l'autre. Les deux bords latéraux du matériau 1 sont soumis à un chargement cyclique (d'amplitude constante V_M) de type déplacement

imposé de sorte que l'on puisse considérer que la structure n'est sollicitée qu'en mode d'ouverture de fissure. Sous l'action de ce chargement, une fissure de fatigue apparaît en front d'entaille et se propage de façon rectiligne le long de la structure.

On souhaite évaluer théoriquement puis numériquement l'évolution de la fissure lors de la discontinuité du matériau.

Considérations théoriques

De façon intuitive, il y a ralentissement de la fissuration au changement de matériau, la fissure pénétrant dans un matériau plus rigide.

Évaluons le temps $N_{\frac{L}{2}} - N_{\frac{L}{2}-\gamma}$ nécessaire pour rompre la structure d'une longueur $\frac{L}{2} - \gamma$. À partir de l'équation (8.25), on exprime $N_{\frac{L}{2}} - N_{\frac{L}{2}-\gamma}$ en fonction du taux de restitution d'énergie

$$N_{\frac{L}{2}} - N_{\frac{L}{2}-\gamma} = \int_{\frac{L}{2}-\gamma}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{pD}{G(\ell)} \right]^{\frac{1}{p-1}} d\ell. \quad (8.28)$$

où $\gamma \geq \ell$.

En supposant que l'évolution de la fissure est progressive et que la longueur fissurée à chaque pas de temps ΔN est infime (ce qui est réaliste dans le cadre de la fatigue polycyclique), on peut alors appliquer la formule de LEGUILLON (8.17) et exprimer ainsi l'énergie élastique pour une longueur $\ell < L/2$ (mais $\ell \sim L/2$) de fissure

$$\mathcal{P}(\ell) = \mathcal{P}(L/2) + K \left(\frac{L}{2} - \ell \right)^{2\alpha} \quad K > 0.$$

Ainsi (8.28) s'écrit sous la forme

$$N_{\frac{L}{2}} - N_{\frac{L}{2}-\gamma} = \int_{\frac{L}{2}-\gamma}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{pD}{(2\alpha K (L/2 - \ell))^{2\alpha-1}} \right]^{\frac{1}{p-1}} d\ell.$$

Deux cas se présentent alors

- si l'intégrale est convergente, *i.e.* si $\frac{2\alpha-1}{p-1} < 1$, la rupture du “tronçon” $\frac{L}{2} - \gamma$ est obtenue en un temps $N_{\frac{L}{2}} - N_{\frac{L}{2}-\gamma}$ fini.
- si l'intégrale est divergente, *i.e.* si $\frac{2\alpha-1}{p-1} > 1$, alors “théoriquement” la rupture de ce tronçon n'intervient pas avant un temps infini autrement dit il y a arrêt de la propagation de la fissure à l'interface.

Ceci veut donc dire que pour des valeurs de la singularité telles que $2\alpha > p$, *i.e.* $\alpha > p/2$ et donc une singularité faible à l'interface (car $1 < p < 2$), la fissuration peut s'arrêter.

Dans notre problème de bi-matériau soumis à un chargement cyclique, la présence du matériau 2 très rigide derrière le matériau 1 entraîne une singularité faible à l'interface et peut donc conduire à l'arrêt de la fissuration. C'est ce qu'on va tenter de montrer numériquement.

Résolution numérique

L'étude numérique de ce problème a été réalisée à l'aide du code de calcul Mentat/Marc. On considère une entaille de profondeur 0.1, la structure ayant une longueur de 2 et le matériau 2 une longueur de 0.9.

Il s'agit dans un premier temps de réaliser un maillage de la structure : on privilégie un maillage très fin sur toute la ligne de fissuration et au niveau de l'interface matériau 1/matériau 2 et ce afin d'optimiser les résultats.

Pour déterminer l'allure de l'énergie élastique au cours de la propagation de la fissure, on place sur la ligne de fissure des nœuds dédoublés, puis on relève la valeur de l'énergie élastique de chaque état de la structure en les collant au fur et à mesure. Ainsi on procède "à l'envers" : on a une structure fissurée qu'on recolte petit à petit. On obtient la courbe représentée Figure 8.4. Comme

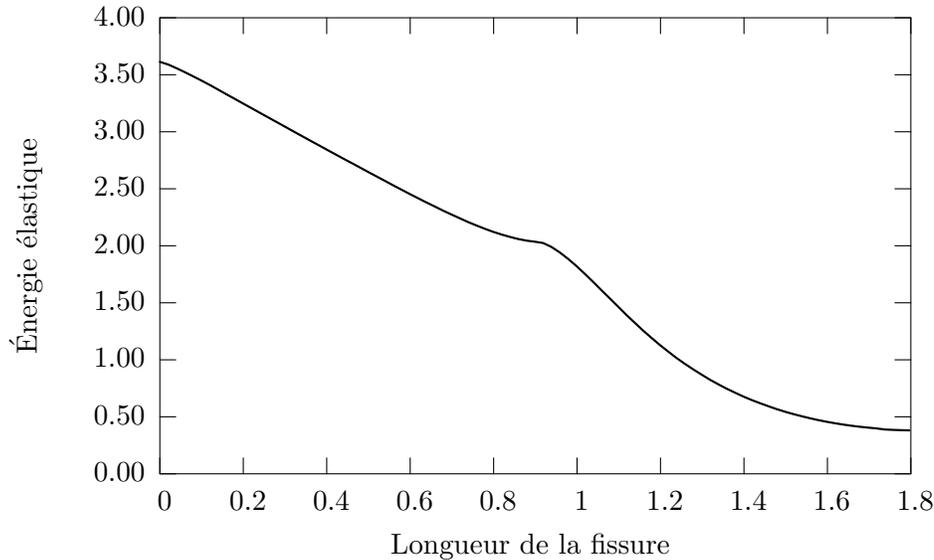


FIG. 8.4 – Évolution de l'énergie élastique au cours du temps.

attendu, l'énergie élastique est une fonction décroissante de la longueur de fissure. On remarque qu'elle possède une dérivée nulle à l'interface des deux matériaux et qu'elle est convexe ailleurs.

À partir du problème incrémental (8.15) et de l'énergie élastique déterminée par le calcul numérique, on obtient l'évolution de la longueur de fissure au cours du temps. Sur la Figure 8.5, on note qu'il faut, comme attendu, plus de temps pour fissurer le matériau 2 ($N \sim 200$) que pour fissurer le matériau 1 ($N \sim 50$). De plus il apparaît clairement un palier en $x = 0.9$, *i.e.* à l'interface : il y a quasiment arrêt de la fissuration comme prévu par la théorie.

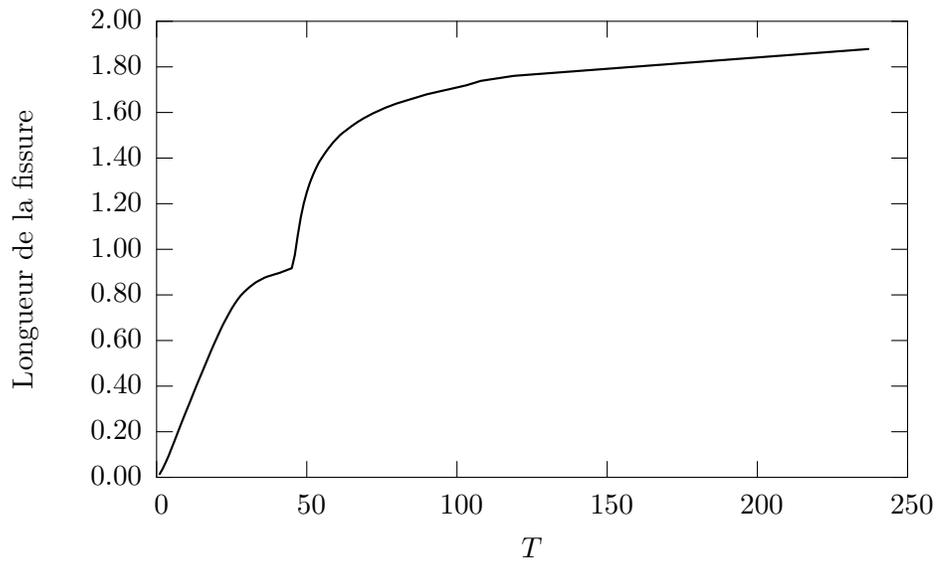


FIG. 8.5 – Évolution de la fissuration de fatigue au cours du temps.

Conclusion

L’objectif de cette étude était d’étendre aux chargements non monotones la formulation variationnelle de la Rupture amorcée initialement par FRANCFORT et MARIGO dans [32].

À partir d’un exemple “académique” —le décollement d’un film mince inextensible et parfaitement flexible— et en considérant les trois “ingrédients” suivants

- un principe de minimisation de l’énergie totale
- une énergie de surface de type DUGDALE-BARENBLATT
- une variable irréversible rendant compte de l’accumulation du saut de déplacement sur les lèvres de la fissure,

on a construit un problème de minimisation incrémentale qui, résolu, rend compte de la fissuration sous fatigue, l’évolution de la fissuration dépendant des paramètres du problème.

De plus, dans les situations où la longueur interne apparaissant dans le modèle de DUGDALE-BARENBLATT est petite devant la dimension de la structure, on obtient des lois de fatigue limites de type PARIS (en fait plus riches que les lois de PARIS puisqu’elles contiennent également la loi de GRIFFITH), *i.e.* mettant en relation de façon implicite le taux de croissance de la fissure avec le taux de restitution d’énergie

$$\frac{d\ell}{dN} = f(G).$$

Plus encore, lorsque l’on considère de faibles valeurs du taux de restitution d’énergie, on retombe sur des lois de PARIS classiques $\frac{d\ell}{dN} = CG^m$.

On a ensuite mis en évidence l’influence du chargement, du matériau et de la structure sur l’expression de la loi de fatigue limite.

Il apparaît donc que l’approche variationnelle est la bonne méthode pour justifier et construire des lois de fatigue car :

1. c’est à la fois une approche globale et locale. Une approche globale puisqu’on minimise l’énergie totale de toute la structure. Une approche locale car la loi de fatigue limite s’obtient après une analyse fine de la zone cohésive.
2. elle établit le lien manquant entre les lois de PARIS et GRIFFITH,
3. elle peut être utilisée a priori avec n’importe quel spectre de chargement.

De possibles extensions à d’autres problèmes de rupture sont également envisageables.

Dans [63], WELLER et al se placent dans le cadre tridimensionnel antiplan. Ils retrouvent des lois

de fatigue limites de type PARIS et des lois puissances lorsque le taux de restitution d'énergie est faible. De même, les travaux de CHARLOTTE et al [12] sur l'extension à la dynamique de l'approche variationnelle de la Rupture peuvent permettre d'envisager de coupler les phénomènes de dynamique et de fatigue. Dans l'exemple du décollement d'un film, on pourrait ainsi étudier les vibrations du film soumis à un chargement cyclique.

Une autre étude intéressante serait de considérer des lois de comportement élasto-plastiques. On a en effet vu au Chapitre 1 l'influence importante que pouvait avoir la zone plastique entourant la pointe de la fissure notamment lors des surcharges. On sait également que la présence de cette zone plastique modifie le taux de croissance des fissures "courtes". Il faudrait donc déterminer si l'approche variationnelle de la fatigue est capable de capter ces effets.

Bibliographie

- [1] A. Abdul-Baqi, P. J. G. Schreurs, and M. G. D. Geers. Fatigue damage modeling in solder interconnects using a cohesive zone approach. *Int. J. of Sol. and Struct.*, 42 :927–942, 2005.
- [2] L. Ambrosio and V. M. Tortorelli. Approximations of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ -convergence. *Comm. Pure Appl. Math.*, XLIII :999–1036, 1990.
- [3] G. I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, pages 55–129, 1962.
- [4] C. Bathias and J.-P. Baille. Fatigue des matériaux et des structures. *Editions Hermes*, 1997.
- [5] F. Bilteyst. Une approche énergétique de la décohésion et de la multifissuration dans les composites. *Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)*, 2000.
- [6] F. Bilteyst and J.-J. Marigo. Amorcage de la décohésion dans l'essai d'arrachement. *Acad.Sci.Paris*, t.327(Série II(b)) :977–983, 1999.
- [7] B. Bourdin. Une méthode variationnelle en mécanique de la rupture. théorie et applications numériques. *Thèse de doctorat de l'Université Paris-Nord (Paris XIII)*, 1998.
- [8] B. Bourdin, G. A. Francfort, and J.-J. Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *J. Mech.Phys.Solids*, 48 :797–826, 2000.
- [9] J.-L. Bouvard, J.-L. Chaboche, F. Feyel, and F. Gallerneau. Simulation numérique de la propagation de fissure dans les aubes de turbine. *Actes du 17^{ième} Congrès Français de Mécanique, Université de Technologie de Troyes.*, 2005.
- [10] H. D. Bui. Mécanique de la rupture fragile. *Editions Masson*, 1978.
- [11] M. Charlotte. Modèles discrets de rupture. *Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)*, 2001.
- [12] M. Charlotte, G. Debruyne, P.-E. Dumouchel, and J.-J. Marigo. Analyse du décollement d'un film élastique en régime dynamique : exploration analytique et numérique. *Actes du 7^{ième} Colloque National en Calcul des Structures, Giens (France) 17/05/05 – 20/05/05, Eds. Hermes Lavoisier*, 2005.
- [13] M. Charlotte, G. A. Francfort, J.-J. Marigo, and L. Truskinovsky. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem : comparison of griffith and barenblatt surface energy models. *dans : A.B. Cachan (Eds.), Proceedings of the Symposium on "Continuous Damage and Fracture", dans : The Data Science Library, Elsevier, Paris*, pages 7–12, 2000.
- [14] G. P. Cherepanov. Mechanics of brittle fracture. *McGraw-Hill International Book Company*, pages 344–397, 1979.
- [15] G. Choi. Cyclic fatigue crack growth in silicon nitride : influence of stress ratio and crack closure. *Acta Metallurgica et Materialia*, 43 :1489–1494, 1995.

- [16] G. Choi, S. Horibe, and Y. Kawabe. Cyclic fatigue in silicon nitride ceramic. *Acta Metallurgica et Materialia*, 42 :1407–1412, 1994.
- [17] B. Dacorogna. Introduction au calcul des variations. *Editions Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (Cahiers Mathématiques de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne)*, 1992.
- [18] E. Darque-Ceretti and E. Felder. Adhésion et adhérence. *Sciences Physiques pour l'ingénieur, Editions du CNRS*, 2003.
- [19] A. De Andrès, J. L. Pérez, and M. Ortiz. Elastoplastic finite element analysis of 3-d fatigue crack growth in aluminium shafts subjected to axial loading. *Int. J. of Sol. and Struct.*, 36 :2231–2258, 1999.
- [20] G. Del Piero. One-dimensional ductile-brittle transition, yielding and structured deformations. *in : P. Argoul, M. Frémond (Eds.), Proceedings of IUTAM Symposium "Variations de domaines et frontières libres en mécanique", Paris, 1997, Kluwer Academic*, 1999.
- [21] G. Del Piero and L. Truskinovsky. Macro- and micro-cracking in one-dimensional elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 38(6) :1135–1138, 2001.
- [22] F. Demengel and G. Demengel. Convexité dans les espaces fonctionnels. *Editions Ellipses*, 2004.
- [23] V. S. Deshpande, A. Needleman, and E. Van der Gussen. Discrete dislocation modeling of fatigue crack propagation. *Acta Materialia*, 50(4) :831–846, 2002.
- [24] P. Destuynder, M. Djaoua, and S. Lescure. Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *J. de Méca. Théorique et Appliquée*, 2(1) :113–135, 1983.
- [25] N. E. Dowling and J. A. Begley. Fatigue crack growth during gross plasticity and J-integral. *ASTM STP.*, 590 :82–103, 1976.
- [26] D. S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8 :100–108, 1960.
- [27] W. Elber. Fatigue crack closure under cyclic tension. *Engineering Fracture Mechanics*, 2 :37–45, 1970.
- [28] W. Elber. The significance of fatigue crack closure. *American Society for Testing and Materials (Philadelphia)*, STP 486 :230–242, 1971.
- [29] R. G. Forman, V. E. Kearney, and R. M. Engle. Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. *Journal of Basic Engineering.*, 89 :459–464, 1967.
- [30] J. W. Foulk III, D. H. Allen, and K. L. E. Helms. A model for predicting the damage and environmental degradation dependant life of SCS-6/Timetal 21S[0]₄ metal matrix composite. *Mech. of Mater.*, 29 :53–68, 1998.
- [31] G. A. Francfort and J.-J. Marigo. Stable damage evolution in a brittle continuous medium. *Eur. J. Mech. A/Solids*, A/Solids :149–189, 1993.
- [32] G. A. Francfort and J.-J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids*, 46(8) :1319–1342, 1998.
- [33] G. A. Francfort and J.-J. Marigo. Vers une théorie énergétique de la rupture fragile. *Comptes Rendus Mécanique*, 330 :225–233, 2002.
- [34] C. J. Gilbert and R. O. Ritchie. Transient fatigue-crack growth behavior following variable amplitude loading in a monolithic silicon nitride ceramic. *Eng. Fract. Mech.*, 60 :303–313, 1998.

- [35] A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, CCXXI(A) :163–198, 1920.
- [36] B. Halphen and Q. S. Nguyen. Sur les matériaux standards généralisés. *J. Mec.*, 14(1) :39–63, 1975.
- [37] G. R. Irwin. Fracture. In *Handbuchdes Physik, Springer Verlag*, 6 :551–590, 1958.
- [38] R. Kumar and K. Singh. Influence of stress ratio on fatigue crack growth in mild steel. *Engineering Fracture Mechanics*, 50(3) :377–384, 1995.
- [39] C. Laird. The influence of metallurgical structure on the mechanics of fatigue crack propagation. *ASTM STP*, 415 :131–168, 1967.
- [40] J. Laverne. Formulation énergétique de la rupture par des modèles de forces cohésives : considérations théoriques et implantations numériques. *Thèse de doctorat de l'Université Paris-Nord (Paris XIII)*, 2004.
- [41] J. Laverne and J.-J. Marigo. Approche globale, minima relatifs et critère d'amorçage en mécanique de la rupture. *Comptes Rendus Mécanique*, 332(4) :313–318, 2004.
- [42] J.-B. Leblond. Mécanique de la rupture fragile et ductile (coll. études en mécanique des matériaux et des structures). *Editions Lavoisier*, 2000.
- [43] D. Leguillon. Calcul du taux de restitution de l'énergie au voisinage d'une singularité. *C.R. Acad. Sci. Paris. Série II*, 309 :945–950, 1989.
- [44] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche. Mécanique des matériaux solides. *Bordas Ed.*, 1985.
- [45] S. Maiti and P. Geubelle. A cohesive model for fatigue failure of polymers. *Eng. Fract. Mech.*, 72(5) :691–708, 2005.
- [46] J.-J. Marigo and L. Truskinovsky. Initiation and propagation of fracture in the models of Griffith and Barenblatt. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 16(4) :391–409, 2004.
- [47] F. A. McClintock. On the plasticity of the growth of fatigue cracks. in : *D.C. Drucker, J.J. Gilman (Eds.), Fracture of Solids, New York : Wiley*, 20 :65–102, 1963.
- [48] A. Mielke. Energetic formulation of multiplicative elasto-plasticity using dissipation distances. *Contin. Mech. Thermodyn.*, 15(4) :351–382, 2003.
- [49] S. Morel, J. Schmittbuhl, E. Bouchaud, and G. Valentin. Scaling of crack surfaces and implications on fracture mechanics. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :1678–1681, 2000.
- [50] A. Needleman. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. Appl. Mech.*, 54 :525–531, 1987.
- [51] A. Needleman. Micromechanical modelling of interface decohesion. *Ultramicroscopy*, 40 :203–214, 1992.
- [52] O. Nguyen, E. A. Repetto, M. Ortiz, and R. A. Radovitzki. A cohesive model of fatigue crack growth. *Int. J. of Fract.*, 110 :351–369, 2001.
- [53] J. W. Obreimoff. The splitting strength of mica. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 127(805) :290–297, 1930.
- [54] P. C. Paris and F. Erdogan. A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering*, 85 :528–534, 1963.
- [55] P. C. Paris, M. P. Gomez, and W. E. Anderson. A rational analytic theory of fatigue. *The Trend in Engineering*, 13(8) :9–14, 1961.

- [56] J. R. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :379–386, 1968.
- [57] K. L. Roe and T. Siegmund. An irreversible cohesive zone model for interface fatigue crack growth simulation. *Eng. Fract. Mech.*, 70 :209–232, 2002.
- [58] S. Serebrinsky and M. Ortiz. A hysteretic cohesive-law model of fatigue-crack nucleation. *Scripta Materialia*, 53 :1193–1196, 2005.
- [59] T. Siegmund. A numerical study of transient fatigue crack growth by use of an irreversible cohesive zone model. *Int. J. of Fatigue*, 26(9) :929–939, 2004.
- [60] S. Suresh. Fatigue of materials. *Editions Cambridge*, 1998.
- [61] L. Truskinovsky. Fracture as a phase transition. in : *R.C. Batra, M.F. Beatty (Eds.), Contemporary Research in the Mechanics and Mathematics of Materials, CIMNE, Barcelona*, pages 322–332, 1996.
- [62] B. Wang and T. Siegmund. Numerical simulations of constraint and size effects in fatigue crack growth. *Actes du 11^{ième} Congrès International de la Rupture (ICF11), Turin (Italie) 20-25/03/05*, A. Carpinteri Ed., 2005.
- [63] T. Weller, R. Abdelmoula and J.-J. Marigo. A variational approach to fatigue : the antiplane case. À paraître, 2006.
- [64] M. L. Williams. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.*, 79 :109–114, 1957.
- [65] B. Yang, S. Mall, and K. Ravi-Chandar. A cohesive zone model for fatigue crack growth in quasibrittle materials. *Int. J. of Sol. and Struct.*, 38 :3927–3944, 1999.