

Approche variationnelle de la fatigue

présentée le 24 mars 2006 par

André Jaubert

directeur de thèse: **Jean-Jacques Marigo**

Thèse préparée au sein du
Laboratoire des Propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux
(UPR CNRS 9001), Université Paris XIII.

Objectif de la thèse

rendre compte de la propagation de fissures par fatigue

Ingrédients :

- ① un principe de moindre énergie
- ② une énergie de surface de type Dugdale-Barenblatt
- ③ une condition d'irréversibilité.

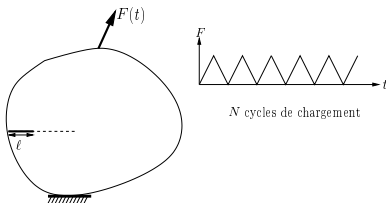
Résultats :

- ① on retombe sur des lois de type Paris
- ② on fait le lien entre les lois de Griffith et de Paris.

Plan de l'exposé

- 1 L'existant
- 2 Approche variationnelle de la fatigue
- 3 Le problème modèle : décollement d'un film mince
- 4 Étude paramétrique
- 5 Conclusions et Extensions

Modélisation de la fatigue



Loi de Paris :

$$\frac{d\ell}{dN} = C(\Delta K)^m$$

$\frac{d\ell}{dN}$ est le taux de propagation de la fissure

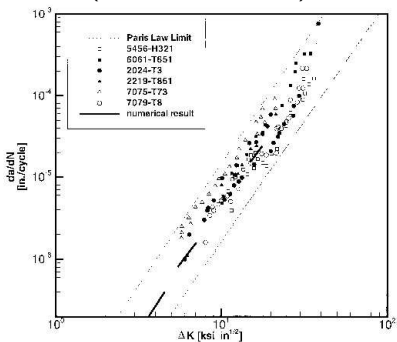
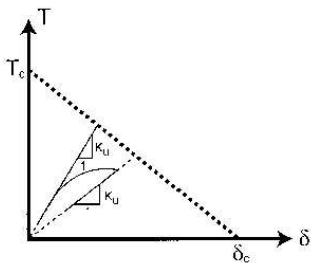
$\Delta K = K_M - K_m$ est la variation du F.I.C.

C et m sont des constantes.

Inconvénients :

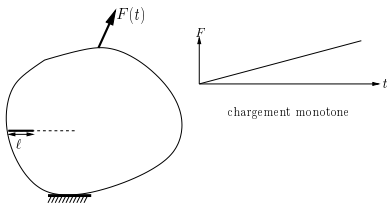
- loi purement phénoménologique,
- limitée à des chargements cycliques d'amplitude constante.

- Modèles de forces cohésives (Ortiz, Siegmund)



Inconvénient : simulations numériques n'expliquant pas comment sont construites les lois de Paris.

Approche variationnelle de la rupture (Francfort et Marigo, 1998)



Principe : minimiser l'énergie totale à chaque instant

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{P} + \phi$$

avec \mathcal{P} énergie potentielle
et ϕ énergie de surface (Griffith, Barenblatt)

Intérêt : aucune hypothèse sur le nombre de fissures et sur leur trajet respectif.

Ce que l'on va faire

- au niveau de la fatigue

Comment sont obtenues les lois de Paris ?

Quels sont les facteurs qui les influencent ?

Quel lien avec la théorie de Griffith ?

- au niveau de l'approche variationnelle

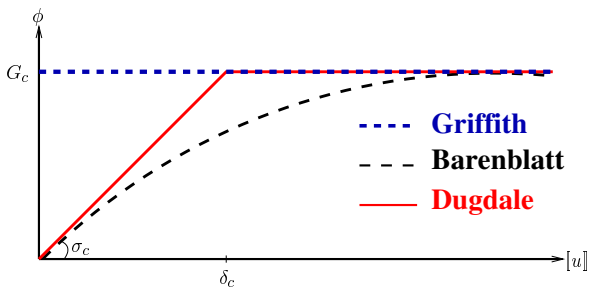
Comment rendre compte de l'irréversibilité de la fissuration avec des énergies de type Barenblatt ?

une formulation unique capable de rendre compte de tous les phénomènes de rupture

- 1 L'existant
- 2 Approche variationnelle de la fatigue**
- 3 Le problème modèle : décollement d'un film mince
- 4 Étude paramétrique
- 5 Conclusions et Extensions

Énergie de surface de Dugdale-Barenblatt

sous chargement monotone :



$$\sigma_c = \frac{G_c}{\delta_c}$$

mais insuffisant pour modéliser la fatigue : **nécessité d'une variable mémoire δ**

Condition d'irréversibilité

$\delta =$ variable mémoratrice

Écriture générale

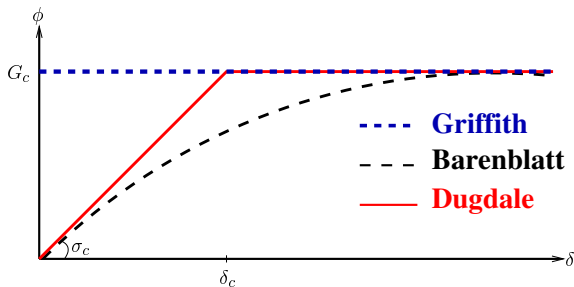
$$\dot{\delta} = \mathcal{F}(\llbracket u \rrbracket, \delta, \llbracket \dot{u} \rrbracket, n)$$

avec \mathcal{F} positivement homogène degré 1 en $\llbracket \dot{u} \rrbracket$

Exemple de mauvais choix : $\delta(t) = \max_{s \leq t} \llbracket u \rrbracket(s)$

$$\dot{\delta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \llbracket u \rrbracket(t) < \delta(t) \\ \llbracket \dot{u} \rrbracket & \text{si } \llbracket u \rrbracket(t) = \delta(t) \end{cases}$$

adaptation pour des chargements cycliques d'amplitude constante.



Exemple de mauvais choix : $\delta(t) = \max_{s \leq t} \llbracket u \rrbracket(s)$

$$\dot{\delta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \llbracket u \rrbracket(t) < \delta(t) \\ \llbracket \dot{u} \rrbracket & \text{si } \llbracket u \rrbracket(t) = \delta(t) \end{cases}$$

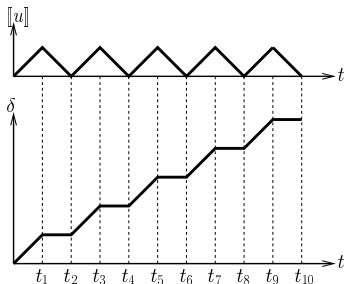
adaptation pour des chargements cycliques d'amplitude constante.

Choix dans la suite :

$$\delta(t) = \int_0^t \mathcal{F}(\llbracket \dot{u} \rrbracket(\tau), n) d\tau.$$

- en mode I

$$\mathcal{F}(\llbracket \dot{u} \rrbracket, n) = \langle \llbracket \dot{u} \rrbracket \cdot n \rangle$$

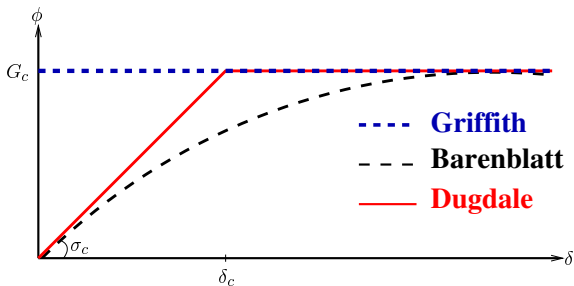


- en mode II ou III

$$\mathcal{F}(\llbracket \dot{u} \rrbracket, n) = ||\llbracket \dot{u} \rrbracket - \llbracket \dot{u} \rrbracket \cdot n \ n||$$

Énergie de surface de Dugdale-Barenblatt

sous chargement cyclique :



$$\sigma_c = \frac{G_c}{\delta_c}$$

Problème de minimisation incrémental

Sachant que $u_0 = \delta_0 = 0$, trouver $u_i \in \mathcal{V}_i$ et δ_i vérifiant

$$\mathcal{E}_i(u_i) \leq \mathcal{E}_i(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_i$$

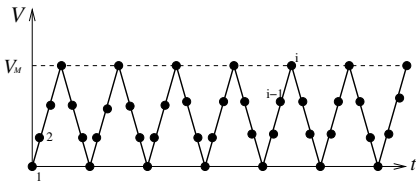
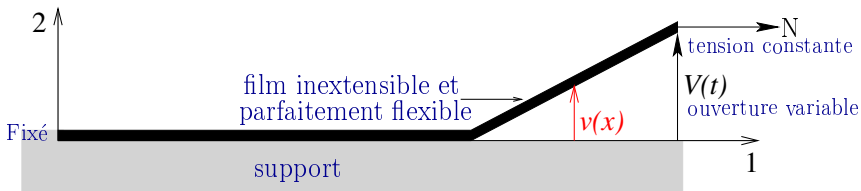
et
$$\delta_i = \delta_{i-1} + \mathcal{F}(\llbracket u_i \rrbracket - \llbracket u_{i-1} \rrbracket, n)$$

où l'énergie totale s'écrit sous sa forme discrétisée

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(v) &= \int_{\mathcal{V}_i} W(x, \epsilon(v)(x)) dx - f(v) \\ &+ \int_{S_v} \phi\left(x, \delta_{i-1}(x) + \mathcal{F}(\llbracket v \rrbracket(x) - \llbracket u_{i-1} \rrbracket(x), n(x))\right) dH^{N-1}(x). \end{aligned}$$

- 1 L'existant
- 2 Approche variationnelle de la fatigue
- 3 Le problème modèle : décollement d'un film mince**
- 4 Étude paramétrique
- 5 Conclusions et Extensions

Géométrie et Chargement



$v_i(x)$: ouverture au pas i

$\delta_i(x) = \delta_{i-1}(x) + \langle v_i(x) - v_{i-1}(x) \rangle$:
ouverture cumulée au pas i

Problème de minimisation incrémental

Pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{v}_0 = \delta_0 = \mathbf{0}$, Trouver \mathbf{v}_i et δ_i tels que

$$\min_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_i} \left\{ \underbrace{\frac{N}{2} \int_0^L \mathbf{v}'(x)^2 dx}_{\text{énergie potentielle}} + \underbrace{\int_0^L \phi \left(\delta_{i-1}(x) + \langle \mathbf{v}(x) - v_{i-1}(x) \rangle \right) dx}_{\text{énergie de surface}} \right\}$$

où $\mathcal{V}_i = \{ \mathbf{v} \in H^1(0, L) : \mathbf{v}(0) = 0, \mathbf{v} \geq 0, \mathbf{v}(L) = V_i \}$

Champs au pas i :

$\mathbf{v}_i =$ minimiseur de l'énergie

$$\delta_i = \delta_{i-1} + \langle \mathbf{v}_i - v_{i-1} \rangle$$

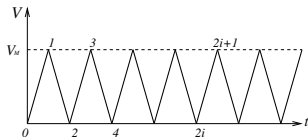
Adimensionnalisation :

$$\epsilon = \sqrt{\frac{N}{2G_c} \frac{\delta_c}{L}}$$

Premiers résultats

- ① **existence** et **unicité** de la solution pour Griffith et Barenblatt,
- ② solution **indépendante** de la **discrétisation** choisie

chaque chemin peut être résolu
en 1 pas de temps

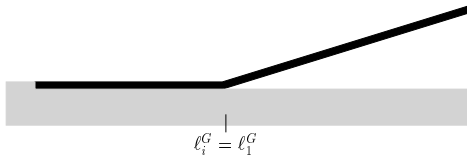


- ③ **non influence** des phases de **décharge** :

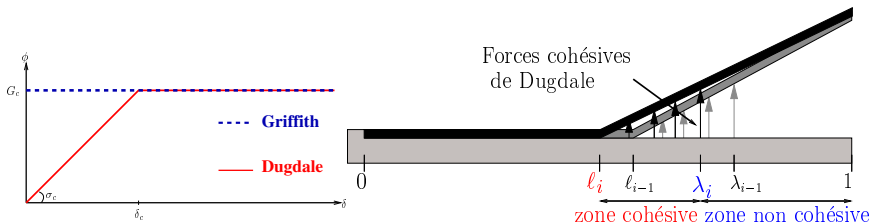
$$\delta_{2i} = \delta_{2i-1} \text{ et } \mathbf{v}_{2i} = \mathbf{0}$$

- ④ avec Griffith, **adaptation** en 1 cycle :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \ell_i^G = \ell_1^G = \mathbf{1} - \mathbf{V}_M$$



Solution avec Dugdale



λ_i, l_i : position des têtes de zone non cohésive et cohésive.

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) : 2(\lambda_i - l_i)(1 - \lambda_i) + (\lambda_i - l_i)^2 = 4\epsilon V_M. \\ (2) : \sum_{j=1}^i \langle \lambda_i - l_j \rangle^2 = 4\epsilon^2. \end{array} \right.$$

Proposition : le film tend à se détacher entièrement

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \lambda_i = \lim_{i \rightarrow +\infty} l_i = 0$$

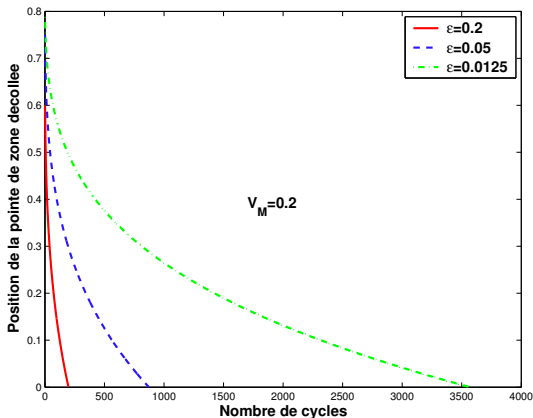


Fig.: Influence de ϵ

Loi de fatigue limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$

Proposition : Loi de Griffith "à court terme"

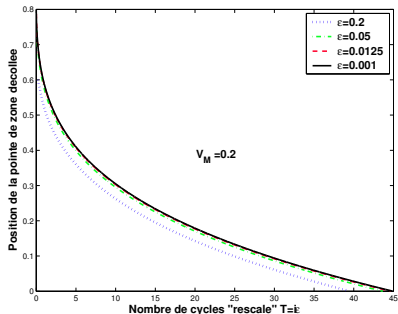
Pour i fixé, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_i = \ell_1^G$

- longueur de la zone cohésive $\lambda_i - \ell_i \sim \epsilon$
- propagation du décollement $\lambda_i - \lambda_{i-1} \sim \epsilon$

Fatigue = phénomène du second ordre

$$i_\epsilon(T) = \text{Ent} \left[\frac{T}{\epsilon} \right]$$

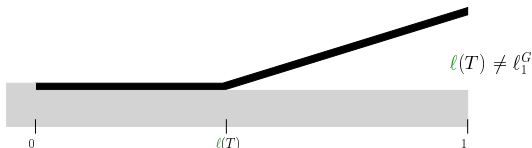
changement d'échelle du
nombre de cycles



Proposition : Convergence vers une fissure non cohésive “à long terme”

$$\text{À } T > 0 \text{ fixé, } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_{i_\epsilon}^\epsilon(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_{i_\epsilon}^\epsilon(T) = \ell(T)$$

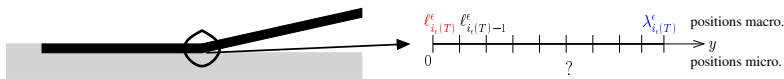
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_{i_\epsilon}(T) = \mathcal{P}^G = \frac{V_M^2}{(1 - \ell(T))}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}_{T/\epsilon} = \mathcal{S}^G = 1 - \ell(T)$$



Définition du Taux de Restitution d'Énergie Potentielle

$$G(T) = \frac{V_M^2}{(1 - \ell(T))^2}$$

Étude de la zone cohésive : zoom sur la pointe $\ell_{i_\epsilon}^\epsilon(\mathbf{T})$ par le changement de variable $y = (x - \ell_{i_\epsilon}^\epsilon(\mathbf{T}))/\epsilon$



- $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ell_{i_\epsilon}^\epsilon(\mathbf{T}) + k - \ell_{i_\epsilon}^\epsilon(\mathbf{T}))/\epsilon = \dot{\ell}_k$

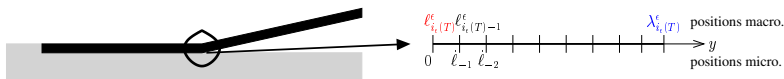
les positions microscopiques $\dot{\ell}_k$ restent à déterminer.

- (1) : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\lambda_{i_\epsilon}^\epsilon(\mathbf{T}) - \ell_{i_\epsilon}^\epsilon(\mathbf{T}))/\epsilon = 2\sqrt{\mathbf{G}(\mathbf{T})}$

la taille de la zone cohésive micro. dépend uniquement de $\mathbf{G}(\mathbf{T})$

- (2) : $\sum_{j=0}^{+\infty} \langle 2\sqrt{\mathbf{G}} + \dot{\ell}_k - \dot{\ell}_{k-j} \rangle^2 = 4$

Étude de la zone cohésive : zoom sur la pointe $\ell_{i_\epsilon}^\epsilon(\mathbf{T})$ par le changement de variable $y = (x - \ell_{i_\epsilon}^\epsilon(\mathbf{T}))/\epsilon$



- $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ell_{i_\epsilon(\mathbf{T})+k}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(\mathbf{T})}^\epsilon) / \epsilon = \dot{\ell}_k$

les positions microscopiques $\dot{\ell}_k$ restent à déterminer.

- (1) : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\lambda_{i_\epsilon(\mathbf{T})}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(\mathbf{T})}^\epsilon) / \epsilon = 2\sqrt{\mathbf{G}(\mathbf{T})}$

la taille de la zone cohésive micro. dépend uniquement de $\mathbf{G}(\mathbf{T})$

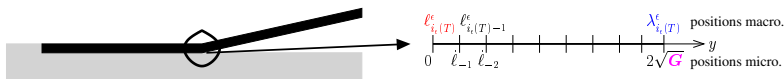
- (2) : $\sum_{j=0}^{+\infty} \langle 2\sqrt{\mathbf{G}} + \dot{\ell}_k - \dot{\ell}_{k-j} \rangle^2 = 4$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) : 2(\lambda_i - \ell_i)(1 - \lambda_i) + (\lambda_i - \ell_i)^2 = 4\epsilon V_M. \\ (2) : \sum_{j=1}^i \langle \lambda_i - \ell_j \rangle^2 = 4\epsilon^2. \end{array} \right.$$

$$(1) : \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\lambda_{i_\epsilon}^\epsilon(\mathbf{T}) - \ell_{i_\epsilon}^\epsilon(\mathbf{T}) \right) / \epsilon = 2\sqrt{\mathbf{G}(\mathbf{T})}$$

$$(2) : \sum_{j=0}^{+\infty} \left\langle 2\sqrt{\mathbf{G}} + \dot{\ell}_k - \dot{\ell}_{k-j} \right\rangle^2 = 4$$

Étude de la zone cohésive : zoom sur la pointe $\ell_{i_\epsilon}^\epsilon(\mathbf{T})$ par le changement de variable $y = (x - \ell_{i_\epsilon}^\epsilon(\mathbf{T}))/\epsilon$



- $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ell_{i_\epsilon(\mathbf{T})+k}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(\mathbf{T})}^\epsilon)/\epsilon = \dot{\ell}_k$

les positions microscopiques $\dot{\ell}_k$ restent à déterminer.

- (1) : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\lambda_{i_\epsilon(\mathbf{T})}^\epsilon - \ell_{i_\epsilon(\mathbf{T})}^\epsilon)/\epsilon = 2\sqrt{G(\mathbf{T})}$

la taille de la zone cohésive micro. dépend uniquement de $G(\mathbf{T})$

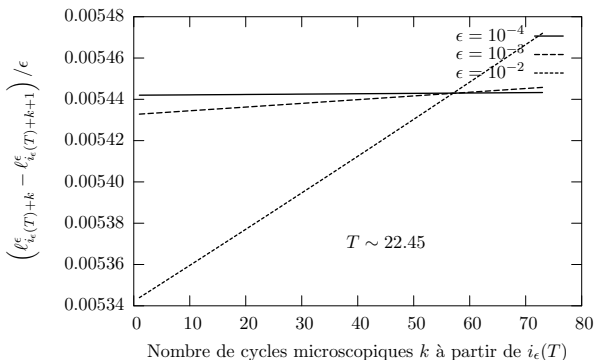
- (2) : $\sum_{j=0}^{+\infty} \langle 2\sqrt{G} + \dot{\ell}_k - \dot{\ell}_{k-j} \rangle^2 = 4$

Hypothèse de régime stationnaire

(pas forcément l'unique solution)

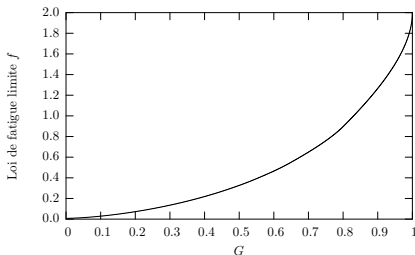
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \dot{\ell}_k = k\dot{\ell}$$

Vérification numérique



$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left\langle 2\sqrt{\mathbf{G}(\mathbf{T})} + j\dot{\ell}(\mathbf{T}) \right\rangle^2 = 4$$

- Si $\mathbf{G} = 1$, alors $-\dot{\ell} \geq 2$
- Si $0 < \mathbf{G} < 1$, alors $-\dot{\ell} = \mathbf{f}(\mathbf{G})$, \mathbf{f} monotone et \mathbf{C}^1
- Si $\mathbf{G} \ll 1$, loi de Paris "classique" : $-\dot{\ell} = \frac{2}{3}\mathbf{G}^{3/2}$.



Évolution du décollement

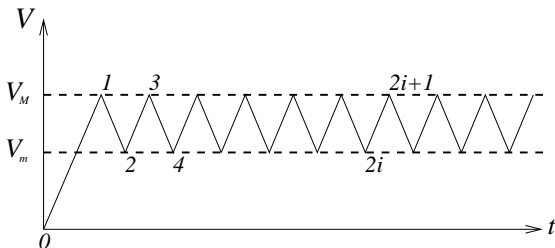
$\ell(\mathbf{T})$ est solution de l'équation différentielle suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\ell}{d\mathbf{T}}(\mathbf{T}) = -\mathbf{f}(\mathbf{G}(\mathbf{T})) & \text{Loi de Paris} \\ \mathbf{G}(\mathbf{T}) = \frac{v_M^2}{(1-\ell(\mathbf{T}))^2} & \text{Fissure non cohésive} \\ \ell(\mathbf{0}+) = \ell_1^G & \text{Critère de Griffith} \end{array} \right.$$

- 1 L'existant
- 2 Approche variationnelle de la fatigue
- 3 Le problème modèle : décollement d'un film mince
- 4 Étude paramétrique**
- 5 Conclusions et Extensions

Les variantes

Décollement avec rapport d'ouverture $R = V_m/V_M$ non nul



$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\langle 2 \left(\sqrt{G_M} - \sqrt{G_m} \right) + k\dot{l} \right\rangle^2 = 4(1 - G_M)$$

Les variantes

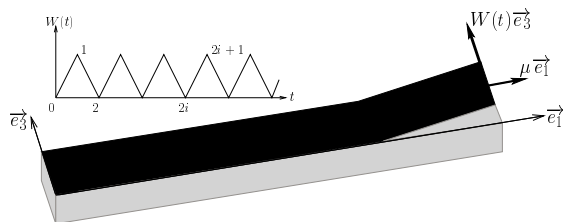
Décollement avec une loi de comportement non linéaire

$$\mathcal{E}_i = \int_0^L v'(x)^p dx + \int_0^L \phi(\delta_{i-1}(x) + \langle v(x) - v_{i-1}(x) \rangle) dx$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\langle p \left(\frac{G}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} + k \dot{l} \right\rangle^{\frac{p}{p-1}} = \frac{p^{\frac{p}{p-1}}}{p-1}$$

Les variantes

Déchirure du film

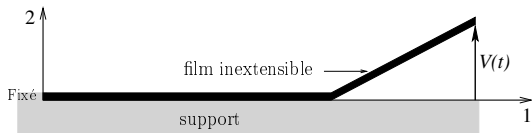


$$\mathcal{E}_i = \frac{\mu}{2} \int_0^L w'(x)^2 dx + \int_0^L \phi(\delta_{i-1}(x) + |w(x) - w_{i-1}(x)|) dx.$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} \langle 2\sqrt{G} - d_2 + k\ell \rangle^2 = 1 - G \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \langle d_2 + k\ell \rangle^2 = 1 - \frac{d_2^2}{2} \end{cases}$$

Les variantes

Décollement du film en flexion



$$\mathcal{E}_i = \int_0^L \frac{EI}{2} v''^2(x) dx + \int_0^L \phi(\delta_{i-1}(x) + \langle v(x) - v_{i-1}(x) \rangle) dx$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle 2G^{1/4} + k\dot{l} \rangle^3 \left[-\langle 2G^{1/4} + k\dot{l} \rangle + 8G^{1/4} \right] = 48$$

MODÈLE	LOI DE FATIGUE LIMITE (G PETIT)
Décollement en Tension ($R = 0$)	$\dot{\ell} = -\frac{2}{3} G^{3/2}$
Décollement en Tension avec BARENBLATT	$\dot{\ell} = -C G^{3/2}$ où C dépend de ϕ
Décollement en Tension ($R \neq 0$)	$\dot{\ell} = -\frac{2}{3} (\sqrt{G_M} - \sqrt{G_m})^3$
Décollement en Tension (non linéaire)	$\dot{\ell} = -\frac{p(p-1)^{\frac{1}{p}}}{2p-1} G^{\frac{2p-1}{p}}$
Déchirure	$\dot{\ell} = -\frac{1}{3} G^{3/2}$
Décollement en Flexion pure	$\dot{\ell} = -\frac{8}{15} G^{5/4}$

La loi de fatigue dépend du **matériau**, du **chargement** et de la **structure**.

- 1 L'existant
- 2 Approche variationnelle de la fatigue
- 3 Le problème modèle : décollement d'un film mince
- 4 Étude paramétrique
- 5 Conclusions et Extensions**

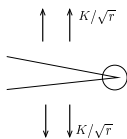
Conclusions

- Tous les résultats sont inclus dans un **problème de minimisation incrémental**
- L'approche variationnelle est la bonne méthode pour justifier et construire des lois de fatigue car :
 - ① c'est à la fois une approche **globale** et **locale**,
 - ② elle établit le **lien** manquant entre les lois de **Paris** et **Griffith**,
 - ③ elle peut être utilisée *a priori* avec **n'importe quel spectre de chargement**,
 - ④ **possibilité d'extension** à d'autres problèmes de rupture (autres géométries, autres comportements, dynamique....)

Extensions en cours....

- **D'autres lois de fatigue limite....**

en plusieurs dimensions (Weller et al) : toujours une loi de type Paris



couplage Modes I/II : la loi limite dépend-elle alors de G ou de K_I et K_{II} ?

- **Méthodes numériques** pour résoudre le problème incrémental limite (Thèse en cours d'Amor).
Principe : étendre l'outil numérique de Bourdin sous chargement monotone à la fatigue.