



HAL
open science

Graphes de cordes : une caractérisation et ses applications

Walid Naji

► **To cite this version:**

Walid Naji. Graphes de cordes : une caractérisation et ses applications. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1985. tel-00315395

HAL Id: tel-00315395

<https://theses.hal.science/tel-00315395>

Submitted on 28 Aug 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l' Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de
DOCTEUR D'ETAT
«Mathématiques»
option Recherche Opérationnelle

par

Walid NAJI



GRAPHES DE CORDES :

UNE CARACTERISATION ET SES APPLICATIONS.



Thèse soutenue le 15 mai 1985 devant la commission d'examen

C. BENZAKEN	Président
A. BOUCHET	
J.C. FOURNIER	
F. JAEGER	Examineurs
F. ROBERT	
P. ROSENSTIEHL	
N.H. XUONG	

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

.../...

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2^{ème} CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

.../...

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie

DÉDICACE

Je dédie ce travail

À mon père et à ma mère, pour tous les sacrifices qu' ils ont faits pour moi.

À ma femme pour sa patience, et pour m' avoir "supporté" pendant la préparation de cette thèse (et croyez moi, ce n' était pas facile).

À Samir dont la sollicitude m'a été indispensable pour mener à bien ce travail.

À mes frères et soeurs et à mes enfants.



Lorsque j'ai commencé à écrire cette page, je me suis rendu compte de l'impossibilité de citer tous les gens qui ont contribué, d'une manière ou d'une autre, à l'achèvement de mon travail.

J'aimerais exprimer toute ma reconnaissance et ma gratitude à Monsieur Le Professeur François JAEGER, qui a dirigé mes premiers pas dans la recherche et a toujours été disponible pour me conseiller et m'éclaircir les idées. Je le remercie vivement pour l'amitié qu'il m'a témoignée et pour le temps qu'il m'a consacré tout au long de mon séjour Grenoblois.

Tous mes remerciements à Monsieur le Professeur Claude BENZAKEN pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à remercier également Messieurs les Professeurs:

Pierre ROSENSTIEHL, pour ses encouragements, et son aimable participation au jury.

André BOUCHET, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Jean Claude FOURNIER, pour l'inspiration que m'a donnée son travail et son concours au jury.

François ROBERT et Nguyen Huy XUONG pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens aussi à remercier tous les membres de l'équipe du Laboratoire de Structures Discrètes et Didactique de l'I.M.A.G. avec eux j'ai passé quatre années très agréables.

Mes remerciements aussi aux enseignants du D.E.A qui m'ont initié à la Recherche Opérationnelle.

Je tiens à féliciter tous les membres de l'équipe de Réprographie pour le soin qu'ils ont apporté à la reproduction de cette thèse.

Je remercie également l'Université Libanaise pour le soutien financier, et pour l'occasion qu'elle m'a offerte de continuer mes études supérieures.

Je profite enfin de cette occasion pour exprimer toute ma reconnaissance à mes professeurs de l'Université Libanaise qui m'ont toujours encouragé à poursuivre mes études.

TABLE DES MATIERES

Introduction.

CHAPITRE I. Graphes de cordes. Généralités.

I.1. Rappels et notations.	5
I.2. Graphes de cordes.	6
I.3. Classes particulières de graphes de cordes.	8
1. Graphes de permutations.	8
2. Graphes d'intervalles unitaires.	11
I.4. Graphes de cordes et complémentation locale.	15
1. Complémentation locale.	15
2. Graphes de cordes et suites à doubles occurrences.	16
3. Graphes connexes 4-réguliers et graphes de cordes.	20

CHAPITRE II. Diagrammes orientés. Orientations géométriques.

II.1. Rappels et notations.	29
II.2. Orientations de Fournier. Orientations géométriques.	30
II.3. Propriétés des orientations géométriques.	36
II.4. Orientations géométriques et orientations de Read-Rotem et Urrutia définies dans [13].	42

CHAPITRE III. Pseudo-tournois de cordes orientées.

III.1. Marquage du complémentaire d'un graphe de cordes.	49
III.2. Pseudo-tournois.	53
III.3. Propriétés d'un pseudo-tournoi de cordes orientées.	61
III.4. Classes \mathcal{B} de pseudo-tournois.	66
III.5. Orientations des arêtes du type $- +$ d'un pseudo-tournoi de cordes orientées.	79

III.6. Chaines d'orientation.	82
III.7. Pseudo-tournois de la classe \mathcal{G} et pseudo-tournois de cordes orientées.	104
 CHAPITRE IV. P.L-graphes.	
IV.1. Pseudo-tournois linéaires.	129
IV.2. P.L-graphes et systèmes associés.	146
IV.3. systèmes associés et solutions \mathcal{G}-admissibles.	149
IV.4. P.L-graphes et graphes décomposables.	156
IV.5. Résultat.	173
 CHAPITRE V. Graphes de cordes et matroïdes binaires.	
V.1. Définitions générales et notations.	177
1. Matroïdes vectoriels.	177
2. Représentation d'un matroïde binaire.	178
3. Relations entre les opérations sur les matroïdes binaires et les opérations sur les matrices fondamentales.	179
V.2. Matrices et graphes associés.	181
1. Matrices binaires et leurs signatures.	181
2. Graphes fondamentaux des matroïdes binaires.	183
3. Caractérisation des graphes fondamentaux des matroïdes réguliers et des matroïdes planaires.	189
V.3. Reconnaissance des matroïdes planaires.	198
 BIBLIOGRAPHIE.	 207

Introduction

Cette thèse porte essentiellement sur l'étude des graphes de cordes. Un graphe simple $G = (V, E)$ est dit **graphe de cordes** si l'ensemble des sommets V peut être mis en bijection avec un ensemble de cordes d'un cercle C de telle sorte que deux sommets sont adjacents dans G si et seulement si les cordes correspondantes se croisent dans C . Le système cercle-cordes sera noté $C(V)$ et sera appelé **diagramme associé**.

Les graphes de cordes ont fait l'objet de nombreuses études ([2], [3], [4], [5], [6], [8], etc.....).

Diverses applications de ces graphes ont été également données :

- Au début du chapitre 11 dans [7], ainsi que dans [18], on peut trouver un problème d'informatique dont la modélisation utilise les graphes de cordes.

- Dans [15], [16] et [17] on trouve une caractérisation des espaces planaires sans bicycles en termes de graphes de cordes.

- Dans [14] les graphes de cordes sont utilisés dans la résolution du problème, dû à Gauss, de la caractérisation des suites finies à doubles occurrences des points d'intersection d'une courbe plane fermée.

- Dans [8] et [10], et en utilisant [9], les graphes de cordes peuvent être liés à des grandes conjectures en combinatoire (le théorème des 4-couleurs, la conjecture de la double couverture des arêtes d'un graphe par des cycles, celle de Fulkerson sur les multicolorations d'arêtes de graphes cubiques, etc.....).

- Récemment, A. Bouchet a développé une théorie des "systèmes isotropes" ([19]) qui généralise et renouvelle entièrement la théorie algébrique des graphes de cordes.

Les problèmes de la clique et du stable de cardinalité maximum ont été efficacement résolus pour ces graphes ([6], [7] et [13]).

Deux théorèmes de caractérisation des graphes de cordes existent :

- celui de Fournier dans [4], en termes de relations d'ordre,
- celui de De Fraysseix dans [3], dans lequel il associe à tout graphe de cordes un autre graphe par une bijection entre les arêtes vérifiant certaines propriétés.

On n'a pas jusqu'à maintenant une caractérisation intrinsèque des graphes de cordes, c'est à dire une caractérisation qui ne fait pas appel à des objets extérieurs au graphe. Signalons qu'une conjecture dans ce sens est étudiée actuellement par A. Bouchet.

Cette thèse est formée de cinq chapitres :

Le premier est une sorte de tour d'horizon sur les graphes de cordes, avec quelques résultats nouveaux. Certains résultats connus ont été redémontrés pour des besoins techniques.

Le deuxième et le troisième chapitre constituent le travail essentiel de cette thèse. On peut résumer l'idée de la manière suivante :

Soit $G = (V, E)$ un graphe de cordes, et soit $C(V)$ un diagramme associé. On oriente les cordes du diagramme arbitrairement; et on définit pour toute corde x ainsi orientée le côté gauche (respectivement le côté droit) de x (relativement à son orientation) comme étant l'arc du cercle parcouru de l'extrémité initiale vers l'extrémité terminale de x (respectivement de l'extrémité terminale vers l'extrémité initiale de x) dans le sens des aiguilles d'une montre. Ceci nous permet de définir une relation binaire \mathfrak{K} sur V de la manière suivante :

$(x, y) \in \mathfrak{K} \Leftrightarrow$ l'extrémité initiale de la corde orientée y est située à gauche de la corde orientée x .

Il est clair que si x et y se croisent dans $C(V)$, alors $(x, y) \in \mathfrak{K}$ entraîne que $(y, x) \notin \mathfrak{K}$. Donc on peut définir, à partir de \mathfrak{K} , une orientation des arêtes de G , de la manière suivante : on oriente l'arête d'extrémités x et y de x vers y si et seulement si $(x, y) \in \mathfrak{K}$. Une telle orientation sera baptisée

orientation géométrique. La classe des orientations géométriques d'un graphe de cordes sera étudiée d'une manière approfondie dans le deuxième chapitre. Notons que l'idée d'orienter un graphe de cordes à partir d'un diagramme associé a été déjà abordée par Read, Rotem et Urrutia dans [13]; on démontrera dans le deuxième chapitre que toute orientation définie comme dans [13] est une orientation géométrique.

Dans le troisième chapitre on étudiera tout d'abord la relation \mathfrak{K} définie ci-dessus dans le complémentaire \bar{G} de G . Si x et y ne sont pas adjacents dans G alors $(x,y) \in \mathfrak{K}$ entraîne que les deux extrémités de la corde y sont à gauche de la corde x . Dans ce cas on peut avoir indifféremment $(y,x) \in \mathfrak{K}$ ou $(y,x) \notin \mathfrak{K}$. On peut classer les différents cas possibles de la manière suivante : on considère chaque arête d'extrémités x et y de \bar{G} comme formée de deux demi-arêtes : une demi-arête notée $[x,y]$, contenant x et non y ; et une demi-arête notée $[y,x]$, contenant y et non x . On met le signe $-$ sur la demi-arête $[x,y]$ d'une arête $\{x,y\}$ de \bar{G} si $(x,y) \in \mathfrak{K}$, et le signe $+$ dans l'autre cas. Ainsi chaque arête de \bar{G} sera dotée de deux signes appartenant à l'ensemble $\{+,-\}$. Un tel graphe sera dit **graphe marqué**. On combine ensuite l'orientation de G et le marquage de son complémentaire définis à partir d'une orientation des cordes de $C(V)$ en une nouvelle structure : le **pseudo-tournoi**. Un **pseudo-tournoi** de base G (où $G = (V,E)$ est un graphe simple quelconque) est le graphe complet ayant V comme ensemble de sommets et dans lequel les arêtes de G sont orientées et celles de \bar{G} sont marquées. Un pseudo-tournoi de base G est dit **pseudo-tournoi de cordes orientées** si G est de cordes et si l'orientation de G et le marquage de \bar{G} sont définis à partir d'une même orientation des cordes d'un diagramme associé à G .

On caractérise les pseudo-tournois de cordes orientées dont le graphe de base G est connexe, par l'exclusion d'un petit nombre fini de pseudo-tournois à trois ou quatre sommets.

Ainsi un graphe de cordes connexe sera caractérisé par l'existence d'une orientation de ses arêtes et un marquage des arêtes de son complémentaire tel que le pseudo-tournoi obtenu vérifie les conditions ci-dessus qui caractérisent les pseudo-tournois de cordes orientées.

Dans le quatrième chapitre on étudie les pseudo-tournois de base G (où G est un graphe simple quelconque ayant V comme ensemble de sommets) d'un point de vue algébrique de la manière suivante :

On désigne par B l'ensemble des couples xy de $V \times V$ tels que $x \neq y$. Il est clair que toute demi arête $[x,y]$ du graphe complet ayant V comme ensemble de sommets peut être identifiée au couple xy . On représente ensuite un pseudo-tournoi de base G par un vecteur α de l'espace vectoriel $[GF(2)]^{|B|}$ (c' est l'espace vectoriel sur $GF(2)$ de toutes les applications de B dans $GF(2)$) en posant :

- $\alpha(xy) = 0$ et $\alpha(yx) = 1$ pour toute arête $\{x,y\}$ de G orientée de x vers y
- $\alpha(xy) = 0$ si $[x,y]$ est une demi-arête de \bar{G} dont le signe est -
- et $\alpha(xy) = 1$ si $[x,y]$ est une demi-arête de \bar{G} dont le signe est +.

Donc tout pseudo-tournoi de base G est représentable par un vecteur du sous espace affine :

$$\mathfrak{A} = \{ \alpha \in [GF(2)]^{|B|} / \alpha(xy) + \alpha(yx) = 1, \text{ pour toute arête } \{x,y\} \text{ de } G \},$$

et réciproquement tout vecteur appartenant à \mathfrak{A} représente un pseudo-tournoi de base G .

On démontrera ensuite que, si G est un graphe de cordes connexe, alors il existe un sous espace affine \mathfrak{B} de \mathfrak{A} tel que $\alpha \in \mathfrak{B}$ si et seulement si α représente un pseudo-tournoi de base G vérifiant certaines propriétés parmi celles caractérisant un pseudo-tournoi de cordes orientées.

On définit ensuite un P.L.-graphe comme étant un graphe connexe pour lequel le sous espace affine \mathfrak{B} défini comme ci-dessus n'est pas vide. On démontrera que les P.L.-graphes ne sont autres que les graphes de cordes connexes. Ceci nous permettra d'établir un allègement des conditions

trouvées dans le troisième chapitre et caractérisant les graphes de cordes connexes, puis de démontrer que les graphes de cordes sont reconnaissables en temps polynomial.

Le cinquième chapitre comporte deux parties :

- Dans la première partie (sections 1 et 2) on étudie certaines relations entre les graphes bipartis et les matroïdes binaires .

En effet, soit \mathcal{M} un matroïde binaire et soit B une base de \mathcal{M} . Désignons par \bar{B} la cobase associée. Pour tout x dans B , on désigne par $N(x)$ la partie de B telle que $\{x\} \cup N(x)$ est l'unique circuit de \mathcal{M} contenu dans $\{x\} \cup B$. On associe au couple (\mathcal{M}, B) le graphe biparti $G = G(\mathcal{M}, B)$ ayant $B \cup \bar{B}$ comme ensemble de sommets, tel que pour tout x dans B , le voisinage de x dans G n'est autre que $N(x)$. Ce graphe sera dit **graphe fondamental de \mathcal{M} relativement à la base B** .

Réciproquement, tout graphe biparti est le graphe fondamental d'un certain matroïde binaire relativement à l'une de ses bases:

En effet, étant donné un graphe biparti G , notons (B, \bar{B}) une bipartition des sommets de G en deux stables, et désignons par $N(x)$ le voisinage de x dans G , et ceci pour tout $x \in B \cup \bar{B}$. Soit \mathcal{M} le matroïde binaire défini sur l'ensemble $B \cup \bar{B}$ par la famille $(N(x) \cup \{x\})_{x \in \bar{B}}$ prise comme système générateur de son espace des cycles. On vérifie facilement que B est une base de \mathcal{M} et que $G = G(\mathcal{M}, B)$.

On étudiera les opérations permettant :

- d'obtenir le graphe fondamental d'un matroïde binaire \mathcal{M} relativement à une base B_1 à partir du graphe fondamental de \mathcal{M} relativement à une autre base B_2 .
- d'obtenir un graphe fondamental d'un mineur de \mathcal{M} à partir du graphe fondamental de \mathcal{M} relativement à l'une de ses bases.

Ceci nous permettra de caractériser les graphes fondamentaux des

matroïdes réguliers et des matroïdes planaires.

- Dans la deuxième partie (section 3) on étudie la question de la reconnaissance des matroïdes planaires, et ceci en s'appuyant sur les résultats trouvés dans le quatrième chapitre ainsi que sur les deux premières sections du cinquième chapitre. Le résultat clé liant les matroïdes planaires aux graphes de cordes est un théorème donné par De Fraysseix dans [2], et dont l'énoncé peut être donné sous la forme suivante:

Les propriétés suivantes sont équivalentes pour tout matroïde binaire \mathcal{M} :

- \mathcal{M} est planaire
- le graphe fondamental de \mathcal{M} relativement à l'une au moins de ses bases est de cordes
- tout graphe fondamental de \mathcal{M} est de cordes.

Ainsi on examinera le cas où on dispose seulement de l'hypothèse que \mathcal{M} est binaire, puis le cas où on dispose de l'hypothèse que \mathcal{M} est régulier et qu'on a une matrice représentative de \mathcal{M} sur \mathbb{R} .

CHAPITRE I

Graphes de cordes. Généralités.

1.1. Rappels et notations;

1.2. Graphes de cordes;

1.3. Classes particulières de graphes de cordes;

1.4. Graphes de cordes et complémentation locale.



1.1. Rappels et notations.

Un **graphe** est un couple d'ensembles $G = (V, E)$ où :

- (1) V est un ensemble fini non vide. Ses éléments sont les **sommets** du graphe;
- (2) E est un ensemble fini, vide ou non. Ses éléments sont les **arêtes** du graphe;
- (3) A chaque arête e de G on associe deux sommets de G , distincts ou non, et qu'on appelle les **extrémités** de l'arête e .

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Deux sommets distincts de G sont dits **adjacents** s'ils sont les extrémités d'une même arête de G .
 - Pour tout v dans V , on définit le **voisinage de v** dans G comme étant l'ensemble des sommets de G adjacents à v dans G . Cet ensemble sera noté $N_G(v)$ (ou $N(v)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté).
 - Deux arêtes distinctes de G sont dites **adjacentes** si elles ont au moins une extrémité commune. Elles seront dites **parallèles** dans le cas où elles ont les mêmes extrémités.
 - Une **boucle** est une arête dont les extrémités coïncident.
 - Pour X dans V on appelle **sous-graphe** de G engendré par X , le graphe $G_X = (X, E_X)$ où $E_X = \{ e \in E / \text{les extrémités de } e \text{ sont dans } X \}$.
- Un graphe $G = (V, E)$ est dit **graphe simple** s'il est sans boucles et sans arêtes parallèles. Il est clair que dans ce cas toute arête de G peut être

identifiée à l'ensemble formé par ses deux extrémités; pour cette raison on va considérer l'ensemble des arêtes E d'un graphe simple $G = (V, E)$ comme étant un sous-ensemble de $\mathcal{P}_2(V) = \{(x, y) / x \in V, y \in V \text{ et } x \neq y\}$.

Un **graphe complet** est un graphe simple de la forme $(V, \mathcal{P}_2(V))$.

Le **complémentaire** d'un graphe simple $G = (V, E)$ est le graphe simple noté \bar{G} et ayant V comme ensemble de sommets et $\bar{E} = \mathcal{P}_2(V) - E$ comme ensemble d'arêtes. Il est clair que $\bar{\bar{G}} = G$.

Pour toute autre définition concernant les graphes nous renvoyons le lecteur à [1].

1.2. Graphes de cordes.

1.2.1. Définitions.

(1) On appelle **diagramme** tout système constitué par un cercle C et un ensemble fini non vide V de cordes de C . un tel diagramme sera noté $C(V)$.

(2) On appelle **graphe d'intersection (des cordes) d'un diagramme** $C(V)$, le graphe simple dont l'ensemble des sommets est V et tel que deux sommets sont adjacents si et seulement si les cordes correspondantes se croisent dans $C(V)$.

(3) Un graphe simple $G = (V, E)$ est dit **graphe de cordes** s'il est, à un isomorphisme de graphes près, le graphe d'intersection d'un certain diagramme $C(V)$, et dans ce cas $C(V)$ sera dit un **diagramme associé** à G .

1.2.2. Remarque. On peut toujours supposer que deux cordes d'un diagramme $C(V)$ associé à un graphe de cordes G ne s'intersectent jamais sur le cercle. En effet, il suffit d'agrandir convenablement le cercle C .

1.2.3. Exemple.

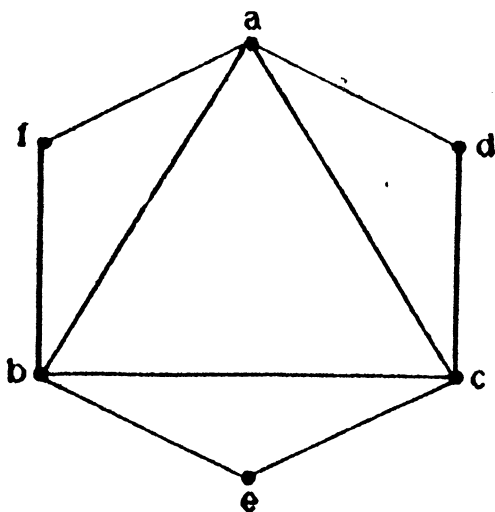


Figure 1.a.

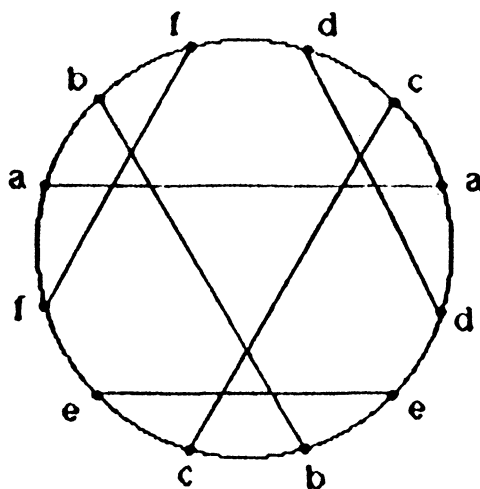


Figure 1.b.

Figure 1. Le graphe de la figure 1.a. représente un graphe de cordes.
Un diagramme associé est donné dans la figure 1.b.

1.2.4. Propriétés d'un graphe de cordes.

On peut énoncer quelques premières propriétés des graphes de cordes, simples à démontrer, telles que:

1. Un sous-graphe d'un graphe de cordes est un graphe de cordes.
2. soit G un graphe simple et soit x un sommet de G . Soit G' (respectivement G'') le graphe obtenu à partir de G par l'adjonction d'un nouveau sommet x' (respectivement x'') tel que $N_{G'}(x') = N_G(x) \cup \{x\}$ (respectivement $N_{G''}(x'') = N_G(x)$). Alors G est de cordes si et seulement si G' (respectivement G'') l'est.

Dans [11] Kotzig donne encore les propriétés suivantes (voir [5] aussi):

3. Un graphe G est de cordes si et seulement si toute composante connexe de G l'est.

4. Un graphe connexe G est de cordes si et seulement si tout bloc de G l'est.
5. Si G est un graphe qui n'est pas de cordes, alors tout graphe obtenu à partir de G en remplaçant une arête quelconque par une chaîne élémentaire n'est pas de cordes non plus.

D'autres propriétés seront données dans la suite.

1.3. Classes particulières de graphes de cordes.

Parmi les graphes de cordes on peut énoncer : les graphes complets, les graphes bipartis complets et les cycles. La démonstration que ces graphes sont de cordes ne représente aucune difficulté. On va étudier dans la suite deux classes particulières de graphes de cordes.

1.3.1. Graphes de permutations.

Soit σ une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. On appelle **diagramme de la permutation σ** un système constitué par :

- (i) deux droites parallèles L_1 et L_2 , avec n points distincts sur chacune d'elles numérotés, dans l'ordre, de 1 à n ;
- (ii) n segments x_1, x_2, \dots, x_n tels que x_i a pour extrémités : le point i de L_1 et le point $\sigma(i)$ de L_2 (figure 2.a.)

On appelle **graphe de la permutation σ** , le graphe simple ayant comme ensemble de sommets l'ensemble $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, deux sommets x_i et x_j ($i \neq j$) étant adjacents si et seulement si les segments x_i et x_j se croisent dans le diagramme de σ . On vérifie facilement que les segments x_i et x_j se croisent si et seulement si : $(i - j)(\sigma(i) - \sigma(j)) < 0$.

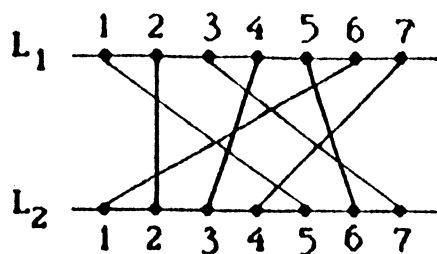


Figure 2.a.

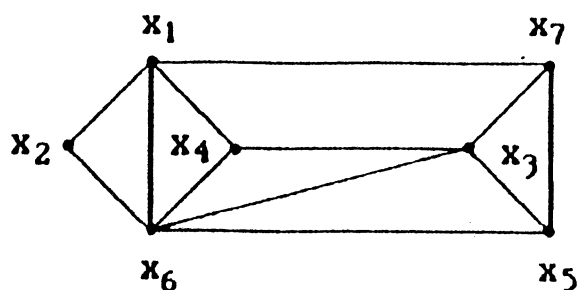


Figure 2.b.

Figure 2. La figure 2.a représente le diagramme de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. La figure 2.b représente le graphe de cette permutation.

Un graphe simple G est dit **graphe de permutation** s' il est isomorphe au graphe d'une permutation σ , et dans ce cas σ sera dite **permutation associée à G** .

Considérons maintenant un diagramme d'une permutation σ , il est clair que le fait que L_1 et L_2 sont des lignes droites n'intervient pas dans la définition du graphe G de σ ; on peut donc remplacer L_1 et L_2 par deux demi-cercles C_1 et C_2 d'un même cercle C , et obtenir ainsi un diagramme dont G est le graphe d'intersection de ses cordes (les cordes ne seront autre que les segments x_i ($i = 1, \dots, n$), voir figure 3.).

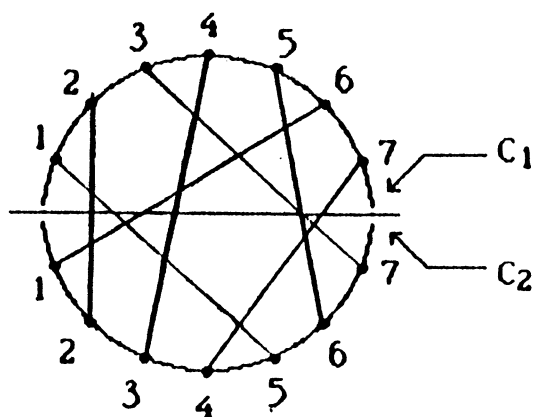


Figure 3. La figure ci-dessus représente un diagramme associé au graphe de la permutation donnée dans la figure 2.

1.3.1.1. Proposition. [4] et [13]. Tout graphe de permutation est un graphe de cordes ; réciproquement , un graphe de cordes est de permutation s' il possède un diagramme associé dans lequel le cercle peut être divisé en deux arcs de façon que toute corde possède une extrémité sur chacun d' eux .

Remarquons alors que si G est un graphe de cordes alors le sous-graphe de G engendré par le voisinage d' un sommet quelconque est dans le cas décrit dans la proposition précédente ce qui nous permet de constater :

1.3.1.2. Corollaire. [5]. Dans un graphe de cordes le sous-graphe engendré par le voisinage d' un sommet quelconque est un graphe de permutation. Il s' en suit qu' un graphe de cordes qui possède un sommet universel (c' est à dire un sommet adjacent à tous les autres) est un graphe de permutation. Par ailleurs, un graphe H est de permutation si et seulement si il existe un graphe de cordes G et un sommet universel x de G tels que $H = G - x$ (où $G - x$ désigne le graphe obtenu en supprimant le sommet x de G).

Il est connu qu' un graphe simple G est de permutation si et seulement si G et \bar{G} sont orientables transitivement ([7], chap. 7). Donc si G est de permutation \bar{G} l' est aussi, et donc, en particulier, G et \bar{G} sont de cordes. On peut poser la question : est-ce-que la réciproque est vraie? La réponse est négative et le cycle C_5 , de longueur 5, est un contre exemple (qui n' est pas le seul d' ailleurs puisque tout cycle impair possède cette propriété). Pourtant, on peut obtenir le résultat suivant :

1.3.1.3. Théorème. Soit G un graphe non connexe. Si G et \bar{G} sont de cordes alors G est de permutation.

Preuve :

Il suffit de démontrer que toute composante connexe de G est un graphe de permutation. Soit $G_1 = (V_1, E_1)$ une composante connexe de G et soit x un sommet de G n' appartenant pas à V_1 . Considérons le sous graphe H de \bar{G} engendré par $V_1 \cup \{x\}$. Comme \bar{G} est de cordes H l' est aussi. Comme H possède x comme sommet universel il est de permutation, d'après 1.3.1.2. Par suite $H - \{x\} = \bar{G}_1$ est de permutation, et donc G_1 l' est aussi.

1.3.2. Graphes d'intervalles unitaires.

Soit $I(V) = (I_x)_{x \in V}$ une famille finie d'intervalles fermés non vides de \mathbb{R} .

On appelle **graphe d'intersection de la famille $I(V)$** le graphe ayant V comme ensemble de sommets et tel que deux sommets distincts x et y sont adjacents si et seulement si $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ (figure 4).

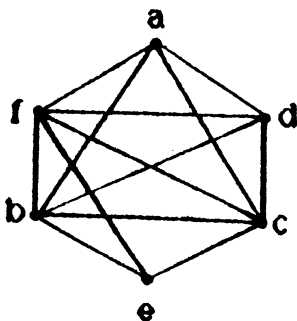


Figure 4.a.

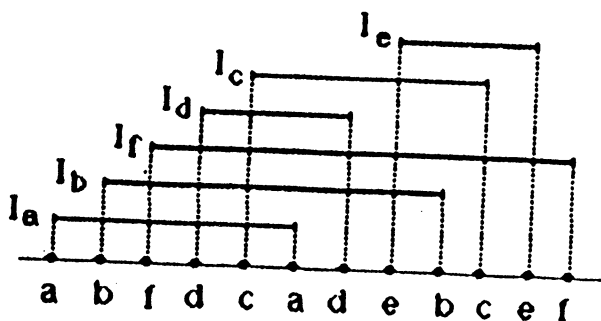


Figure 4.b.

Figure 4. Le graphe de la figure 4.a est le graphe d'intersection de la famille d'intervalles représentée par la figure 4.b.

Un graphe simple est dit **graphe d'intervalles** s' il est isomorphe au graphe d'intersection d' une famille d' intervalles.

Remarque.

Sans aucune perte de généralité on peut supposer que les extrémités des intervalles I_x d' une famille finie d' intervalles $(I_x)_{x \in V}$ sont distincts deux à deux ([7] chap.1). Pour cette raison on utilisera dans la suite un ensemble (au lieu d' une famille) d' intervalles.

Soit $\{I_v / v \in V\}$ un ensemble fini non vide d' intervalles fermés non vides. Deux intervalles distincts I_x et I_y peuvent être dans l' un des cas suivants :

- (1) disjoints : $I_x \cap I_y = \emptyset$
- (2) $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ avec $I_x \not\subseteq I_y$ et $I_y \not\subseteq I_x$. On dit alors que I_x et I_y sont **croisés**
- (3) $I_x \subseteq I_y$ ou bien $I_y \subseteq I_x$ (et donc $I_x \cap I_y \neq \emptyset$).

Dans le graphe d' intersection G de $I(V)$, x et y sont adjacents si et seulement si I_x et I_y sont dans l' un des deux cas (2) ou (3).

On définit le **graphe de croisement de l' ensemble $I(V)$** comme étant le graphe H ayant V comme ensemble de sommets et tel que deux sommets x et y sont adjacents si et seulement si les intervalles I_x et I_y sont croisés. Il est clair que H est un graphe partiel de G . Un graphe simple est dit **graphe de croisement d' intervalles** s' il est isomorphe au graphe de croisement d' un ensemble d' intervalles.

La proposition suivante présente un lien entre les graphes de cordes et les graphes d' intervalles :

1.3.2.1. Proposition. ([6] , chap. 11) . Un graphe est de cordes si et seulement si il est un graphe de croisement d' intervalles.

Preuve :

Pour démontrer la proposition il nous suffit d'établir une transformation bijective entre un diagramme $C(V)$ et un ensemble d'intervalles $I(V)$ de telle sorte que deux cordes de $C(V)$ se croisent si et seulement si les intervalles correspondants se croisent dans $I(V)$.

En effet, $C(V)$ étant donné ; en parcourant le cercle C dans le sens des aiguilles d'une montre, on numérote les différentes extrémités des cordes de 1 à $2n$ (où $n = |V|$) et ceci à partir d'un point de départ arbitraire. Ainsi on associe à chaque corde x les numéros $a(x)$ et $b(x)$ affectés aux extrémités de x , avec $a(x) < b(x)$. Remarquons alors que deux cordes x et y se croisent si et seulement si :

$$(1) \quad a(x) < a(y) < b(x) < b(y) \text{ ou } a(y) < a(x) < b(y) < b(x) .$$

On définit alors l'ensemble d'intervalles $I(V) = \{I_x / x \in V\}$ de la droite numérique de la manière suivante : pour tout $x \in V$ on pose $I_x = [a(x), b(x)]$.

D'après la relation (1) il est clair que les cordes x et y se croisent dans $C(V)$ si et seulement si les intervalles I_x et I_y de l'ensemble $I(V)$ se croisent (figure 5).

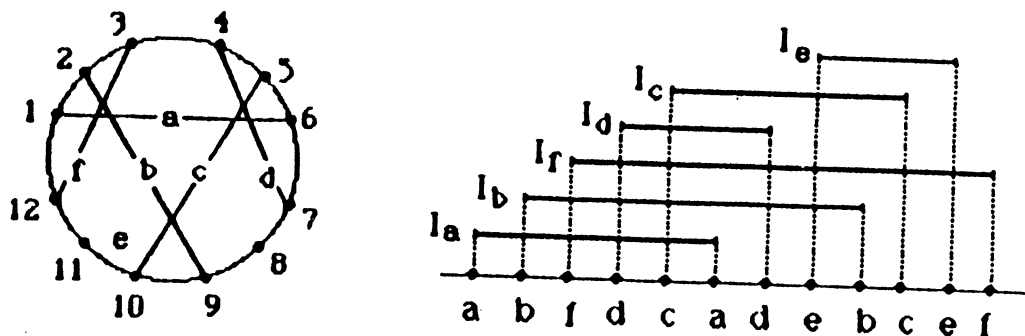


Figure 5 .

Réciproquement, si $I(V) = \{I_x / x \in V\}$ est un ensemble fini non vide d'intervalles fermés non vides, désignons par $x_1, x_2, \dots, x_{2|V|}$ les différentes extrémités des intervalles I_x ($x \in V$) et ceci dans l'ordre naturel de la droite numérique, c'est à dire $i < j \Rightarrow x_i < x_j$. Considérons maintenant $2n$ points distincts d'un cercle C numérotés de 1 à $2n$, dans l'ordre, en parcourant le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre avec un point de départ arbitraire. Pour tout x dans V , si $I_x = [x_i, x_j]$, on désignera également par x la corde de C joignant les points du cercle numérotés i et j .

On obtiendra ainsi un diagramme $C(V)$ dans lequel deux cordes se croisent si et seulement si les intervalles correspondantes se croisent.

C.Q.F.D.

Soit maintenant G un graphe simple. On dit que G est un **graphe d'intervalles unitaires** si et seulement si G est le graphe d'intersection d'un ensemble d'intervalles dans lequel deux intervalles quelconques sont soit disjoints soit croisés.

On démontre ([7] chapitre 8) qu'un graphe d'intervalles est un graphe d'intervalles unitaires si et seulement si il est le graphe d'intersection d'un ensemble d'intervalles dont chacun est de longueur 1. On démontre encore que les graphes d'intervalles unitaires sont les graphes d'intervalles ne contenant pas comme sous graphe, un graphe isomorphe au graphe biparti complet $K_{1,3}$ (voir [7] chap. 8).

Il résulte de 1.3.2.1. que :

1.3.2.2. Proposition ([7]). Tout graphe d'intervalles unitaires est un graphe de cordes.

1.4. Graphes de cordes et complémentation locale

1.4.1. Complémentation locale.

Soit G un graphe simple. Pour tout sommet x de G , on appelle complémentation locale en x , et on note CL_x l'opération qui transforme G en un graphe noté $CL_x(G)$, en remplaçant, dans G , les arêtes du sous graphe engendré par le voisinage de x par celles de son complémentaire (figure 6).

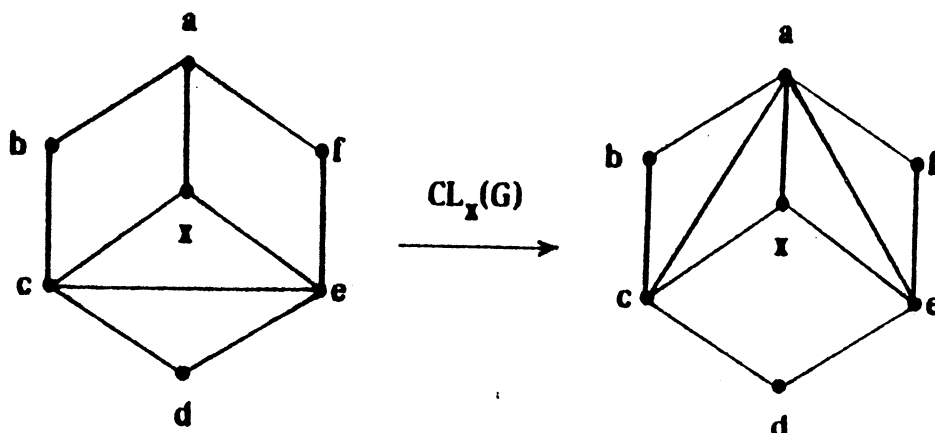


Figure 6.a.

Figure 6.b.

Figure 6. Le graphe de la figure 6.b est obtenu par une complémentation locale en x à partir du graphe de la figure 6.a.

Il est facile de vérifier les propriétés suivantes :

(1) $CL_x(G) = G' \Leftrightarrow CL_x(G') = G$; donc, en particulier $CL_x(CL_x(G)) = G$.

(2) Pour toute suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de sommets de G on a :

$$CL_{x_1} \cdot CL_{x_2} \cdot \dots \cdot CL_{x_n}(G) = G' \Leftrightarrow CL_{x_n} \cdot \dots \cdot CL_{x_2} \cdot CL_{x_1}(G') = G$$

(3) Si $G' = CL_{x_1} \cdot CL_{x_2} \cdot \dots \cdot CL_{x_p}(G)$ et $G'' = CL_{y_1} \cdot CL_{y_2} \cdot \dots \cdot CL_{y_q}(G')$

$$\text{alors } G'' = CL_{y_1} \cdot CL_{y_2} \cdot \dots \cdot CL_{y_q} \cdot CL_{x_1} \cdot CL_{x_2} \cdot \dots \cdot CL_{x_p}(G).$$

On définit alors , sur l' ensemble des tous les graphes ayant le même ensemble de sommets V , la relation binaire \mathcal{R}_C par :

$G \mathcal{R}_C G' \Leftrightarrow$ il existe une suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ de sommets de G telle que

$$G' = CL_{x_1} \cdot CL_{x_2} \cdot \dots \cdot CL_{x_k}(G).$$

les propriétés (1) , (2) et (3) montrent que \mathcal{R}_C est une équivalence.

Remarque. Soit G le graphe de la figure 6.a, on représente dans la figure 6.c (resp. 6.d) le graphe $CL_o \cdot CL_x(G)$ (resp. $CL_x \cdot CL_o(G)$). Il est clair que ces deux graphes sont distincts.

Il en résulte qu' en général $CL_x \cdot CL_y(G) \neq CL_y \cdot CL_x(G)$.

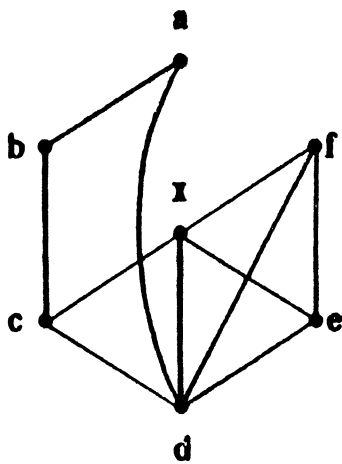


Figure 6.c.

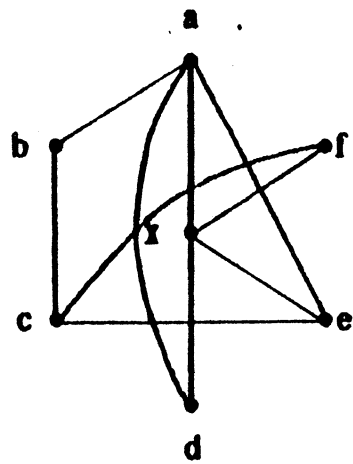


Figure 6.d.

1.4.2. Graphes de cordes et suites à doubles occurrences

Soit V un ensemble fini non vide. On appelle **suite à double occurrence en V** toute suite finie formée d'éléments de V telle que chaque élément de V apparaît deux fois exactement dans $S(V)$. On appelle **éléments de $S(V)$** les éléments de V .

Exemple 1. La suite $S(V) = a b f d c a d e b c e f$ est une suite à double occurrence en $V = \{a,b,c,d,e,f\}$.

Deux éléments distincts d'une suite à double occurrence sont dits **entrelacés**, si l'un d'eux apparaît une fois exactement entre les deux occurrences de l'autre (comme les éléments a et b de l'exemple 1).

On appelle **graphe d'entrelacement** d'une suite à double occurrence $S(V)$, le graphe simple ayant V comme ensemble de sommets et dans lequel deux sommets x et y sont adjacents si et seulement si x et y sont entrelacés dans $S(V)$.

Exemple 2. Le graphe d'entrelacement de la suite $S(V)$ de l'exemple 1 est représenté par la figure 7 ci-dessous.

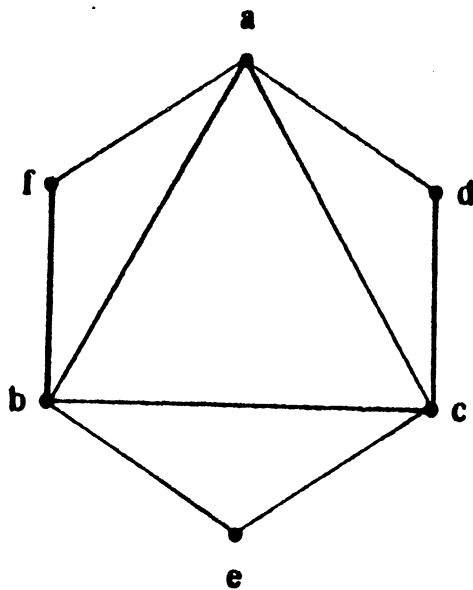


Figure 7.

Un graphe G est dit **graphe d'entrelacement** s'il est isomorphe au **graphe d'entrelacement** d'une suite à double occurrence ; une telle suite sera dite, dans ce cas, **suite associée à G** .

1.4.2.1. Proposition Un graphe simple G est de cordes si et seulement si il est d'entrelacement.

Preuve

Soit G un graphe de cordes ; G est donc un graphe de croisement d'intervalles (Proposition 1.3.2.1) ; soit alors $I(V) = \{I_x / x \in V\}$ un ensemble d'intervalles associée à G . En désignant par la même lettre x les deux extrémités de chaque intervalle I_x et en considérant l'ordre sur les différentes extrémités donné par un parcours de la droite numérique, on obtiendra une suite à double occurrence $S(V)$ dans laquelle deux éléments distincts x et y sont entrelacés si et seulement si les intervalles I_x et I_y se croisent. Donc G est un graphe d'entrelacement.

Réciproquement, si $S(V)$ est une suite à double occurrence, pour tout $x \in V$, on désigne par I_x l'intervalle $[i, j]$ de la droite numérique si la lettre x apparaît en position i et j dans $S(V)$ (avec $i < j$). Ce qui nous donnera un ensemble $I(V) = \{I_x / x \in V\}$ d'intervalles dans lequel deux intervalles I_x et I_y se croisent si et seulement si x et y sont entrelacés dans $S(V)$. Ce qui prouve qu'un graphe d'entrelacement est un graphe de croisement d'intervalles, et donc de cordes.

C.Q.F.D.

1.4.2.2. Remarque. Soit $S(V) = x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k x_{k+1} \dots x_{2n}$ une suite à double occurrence en V avec $n = |V|$. On appelle suite inverse de $S(V)$, la suite $S^{-1}(V) = x_{2n} \dots x_{k+1} x_k x_{k-1} \dots x_1$.

Pour tout $k = 1, 2, \dots, 2n$, on appelle k -translatée circulaire de $S(V)$ la suite $S^k(V) = x_k x_{k+1} \dots x_{2n} x_1 x_2 \dots x_{k-1}$. On peut vérifier facilement que $S(V)$, $S^{-1}(V)$ et $S^k(V)$ ont le même graphe d'entrelacement ;

pour cette raison, une suite à double occurrence $S'(V)$ obtenue à partir d'une autre suite $S(V)$ par translation circulaire ou inversion ne sera pas considérée comme suite différente de $S(V)$.

Considérons maintenant une suite à double occurrence $S(V)$ associée à un graphe de cordes $G = (V, E)$, et soit x un sommet quelconque de G . D'après la remarque précédente on peut toujours supposer que $S(V)$ s'écrit sous la forme : $S(V) = x \alpha x \beta$ (où α et β sont deux sous suites de $S(V)$).

D'après la même remarque on peut constater:

$$(1) \quad S(V) = x \alpha x \beta = x \beta x \alpha = x \beta^{-1} x \alpha^{-1} = x \alpha^{-1} x \beta^{-1}.$$

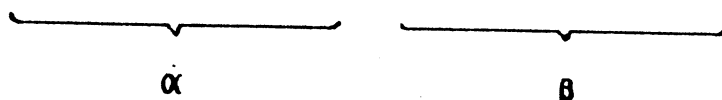
On appelle **inversion locale** en x de $S(V)$, et on note IL_x , l'opération qui consiste à inverser l'une des deux sous suites de $S(V)$ délimitées par x .

La définition de cette opération est bien cohérente, c'est à dire ne dépend pas du choix de la sous suite à inverser, puisque en remplaçant α par α^{-1} dans (1) et en tenant compte de l'égalité $\alpha = (\alpha^{-1})^{-1}$ on obtient:

$$(1)' \quad IL_x(S(V)) = x \alpha^{-1} x \beta = x \beta x \alpha^{-1} = x \beta^{-1} x \alpha = x \alpha x \beta^{-1}.$$

Désignons maintenant par G' le graphe de cordes défini à partir de la suite $S'(V) = IL_x(S(V)) = x \alpha^{-1} x \beta$. On va démontrer que G' n'est autre que $CL_x(G)$. En effet, soient a et b deux sommets de G adjacents à x (donc chacun des deux symboles a et b apparaît une fois exactement dans α et une fois exactement dans β). Les positions des six occurrences de a , b , et x dans $S(V)$ ne peuvent être que dans l'un des cas suivants :

- (1) $x \dots a \dots b \dots x \dots a \dots b \dots$
 (2) $x \dots a \dots b \dots x \dots b \dots a \dots$
 (3) $x \dots b \dots a \dots x \dots b \dots a \dots$
 (4) $x \dots b \dots a \dots x \dots a \dots b \dots$



Les positions en (1) et (3) correspondent au cas où a et b sont adjacents dans G et les positions en (2) et (4) correspondent au cas où a et b ne sont pas adjacents dans G . Il est facile de voir alors que les cas (1) et (4), ainsi que (2) et (3), s'échangent par inversion de la sous suite α , donc si a et b sont adjacents dans G il ne le seront pas dans G' et vice versa. D'autre part, si l'un des deux sommets a et b , au moins, n'est pas adjacent à x dans G (et en particulier si $a - x$ ou $b - x$), alors on peut vérifier de la même manière que la relation d'entrelacement entre a et b est la même dans $S(V)$ et $S'(V) - IL_x(S(V))$. Ceci nous permet d'affirmer qu'effectivement $G' = CL_x(G)$. Par conséquent, on obtient le résultat suivant dû à Kotzig ([11] et [14]):

1.4.2.3. Proposition. Si G est un graphe de cordes, alors pour tout sommet x de G , le graphe $CL_x(G)$ est aussi de cordes.

Il s'en suit immédiatement que :

1.4.2.4. Corollaire. Si G est un graphe de cordes, et si G' est un graphe équivalent à G modulo \mathcal{R}_c , alors G' est aussi de cordes.

1.4.3. Graphes connexes 4-réguliers et graphes de cordes

1.4.3.1. Rappels et notations.

- un graphe est dit **4-régulier** si le degré de chacun de ses sommets est égal à 4 (une boucle sera comptée deux fois).
- un graphe $G = (V, E)$ est dit **eulérien** s'il possède un cycle de longueur $|E|$ (c'est-à-dire un cycle passant une fois exactement par chaque arête de G). Un tel cycle sera dit **cycle eulérien**.
- on sait qu'un graphe est eulérien si et seulement si il est connexe et le degré de chacun de ses sommets est pair ([1], chapitre 11).

Soit $H = (V, F)$ un graphe connexe 4-régulier avec $|F| = m$. On appelle **parcours eulérien** de H , toute séquence $C = x_1 e_1 x_2 e_2 \dots x_m e_m$ (avec $x_i \in V$ et $\{e_1, \dots, e_m\} = F$) représentant le parcours d'un cycle eulérien de H . Le couple (H, C) sera appelé un **couple eulérien en V** .

Soit V un ensemble fini non vide quelconque; nous allons établir une bijection entre les suites à double occurrence et les couples eulériens en V :

Soit $S(V) = x_1 x_2 \dots x_m$ une suite à double occurrence en V ($m = 2|V|$); considérons un ensemble à m éléments $F = \{e_1, \dots, e_m\}$ tel que $F \cap V = \emptyset$.

On définit le graphe $H = (V, E)$ ayant :

- V comme ensemble de sommets
- F comme ensemble d'arêtes
- l'arête e_i a pour extrémités dans H les sommets x_i et x_{i+1} et ceci pour $i = 1, \dots, m$ (avec $x_{m+1} = x_1$).

Il sera facile de vérifier que le graphe H ainsi obtenu est connexe et 4-régulier. De plus, $C = x_1 e_1 x_2 e_2 \dots x_m e_m$ est un parcours eulérien de H ; et donc à $S(V)$ nous venons d'associer un couple eulérien (H, C) en V .

Réciproquement, considérons un couple eulérien (H, C) en V et supposons que $C = x_1 e_1 x_2 e_2 \dots x_m e_m$. Comme H est 4-régulier la sous suite de C constituée par les x_i est une suite à double occurrence en V .

Soit (H, C) un couple eulérien en V (où V est un ensemble fini non vide). On appelle **graphe d'entrelacement du couple (H, C)** le graphe d'entrelacement de la suite à double occurrence $S(V)$ correspondante à (H, C) . Un graphe simple G est dit **graphe d'entrelacement d'un couple eulérien**, s'il est isomorphe au graphe d'entrelacement d'un couple eulérien (H, C) . Vu la bijection entre les suites à double occurrence et les couples eulériens en un ensemble V , on peut dire que :

Les graphes d'entrelacement sont les graphes d'entrelacement des couples eulériens; et en tenant compte la proposition 1.4.2.1, on peut affirmer alors que :

Un graphe simple G est de cordes si et seulement si il est le graphe d'entrelacement d'un couple eulérien (H,C) ; et un tel couple sera dit **couple eulérien associé à G** .

1.4.3.2. Remarques. Considérons un couple eulérien (H,C) associé à un graphe de cordes $G = (V,B)$ et supposons que $C = x_1 e_1 x_2 \dots x_m e_m$.

(1) Comme on a fait pour les suites à double occurrence, on définit :

- l'inverse de C , comme étant la séquence $C^{-1} = x_m e_{m-1} \dots x_1 e_m$
- la k translaturée circulaire de C (pour $k \in \{1, 2, \dots, m\}$), comme étant la séquence $C^k = x_k e_k \dots x_m e_m x_1 e_1 \dots x_{k-1} e_{k-1}$.

Il est évident que C^{-1} et C^k sont aussi des parcours eulériens de H . De plus, comme c' est le cas pour les suites à double occurrence, les couples eulériens (H,C) , (H,C^{-1}) et (H,C^k) définissent le même graphe de cordes. Ainsi deux couples eulériens (H,C) et (H,C') seront considérés identiques si C' s'obtient à partir de C par inversion ou translation circulaire.

(2) Soit x un sommet de H , à une inversion et translation circulaire près, on peut toujours supposer que $x = x_1$ (x_1 est le premier symbole de la séquence C). Soit x_k la deuxième occurrence de x dans C . On définit l'inversion locale en x comme étant l'opération IL_x qui transforme la

$$\begin{aligned} \text{séquence } C &= x_1 e_1 x_2 \dots x_{k-1} e_{k-1} x_k e_k \dots e_{m-1} x_m e_m \\ \text{en } CL_x(C) &= x_1 e_{k-1} x_{k-1} \dots x_2 e_1 x_k e_k \dots e_{m-1} x_m e_m \\ &= x_1 e_1 x_2 \dots x_{k-1} e_{k-1} x_k e_m \dots e_{k+1} x_{k+1} e_k \end{aligned}$$

(l'égalité ci-dessus est justifiée par la remarque (1)).

D'après la démonstration de la proposition I.4.2.3 on peut constater que $(H, IL_x(C))$ est un couple eulérien associé au graphe $CL_x(G)$.

I.4.3.3. Théorème. Soit G un graphe de cordes et soit (H, C) un couple eulérien associé.

(a) Si G' est un graphe \mathfrak{R}_C -équivalent à G alors il existe un parcours eulérien C' de H tel que (H, C') soit associé à G' .

(b) Réciproquement, si C' est un parcours eulérien de H , alors le graphe de cordes défini à partir du couple eulérien (H, C') est \mathfrak{R}_C -équivalent au graphe G .

Preuve

(a) Si G' est \mathfrak{R}_C -équivalent à G alors il existe une suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq s}$ de sommets de G telle que $G' = CL_{x_1} \cdot CL_{x_2} \cdot \dots \cdot CL_{x_s}(G)$; alors, d'après la remarque 2, il est clair que si $C' = IL_{x_1} \cdot IL_{x_2} \cdot \dots \cdot IL_{x_s}(C)$, le couple eulérien (H, C') est bien un couple eulérien associé à G' .

(b) Soit C' un parcours eulérien de H . Pour conclure il suffit de démontrer que la séquence C' peut être obtenue à partir de C par une suite finie d'opération d'inversion locale. Or ceci est vrai d'après le théorème 7 donné par Kotzig dans [10] (où l'opération IL_x est nommée χ -opération).

C.Q.F.D.

Ainsi le théorème précédent justifie la définition suivante :

I.4.3.4. Définition. Soit $G = (V, E)$ un graphe de cordes et soit $\mathfrak{R}_C(G)$ la classe de G modulo \mathfrak{R}_C . On appelle **graphe associé à $\mathfrak{R}_C(G)$** tout graphe connexe 4-régulier dont les parcours eulériens définissent les graphes constituant $\mathfrak{R}_C(G)$.

Considérons maintenant un graphe de permutation $G = (V, E)$ et soit $C(V)$ un diagramme associé à G , dans lequel les cordes intersectent toutes une droite diamétrale D du cercle C (figure 8.a). Désignons alors les extrémités de chaque corde x également par la lettre x , puis, à partir de l'un des deux points d'intersection de la droite D avec le cercle C , effectuons un parcours complet du cercle dans le sens des aiguilles d'une montre ; ceci nous permet de définir une suite à double occurrence $S(V)$ associée à G et bien particulière, puisque chaque élément de V figure une fois exactement dans les $|V|$ premiers symboles de $S(V)$; soit (H, C) le couple eulérien qui correspond à $S(V)$, il est facile de voir que C possède une sous séquence qui est une chaîne hamiltonienne de H (figure 8.b).

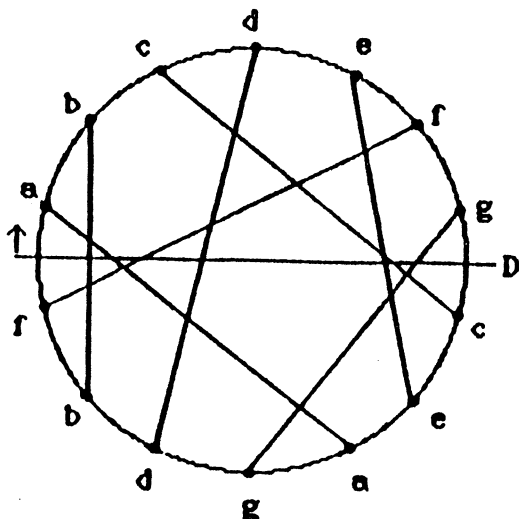


Figure 8.a.

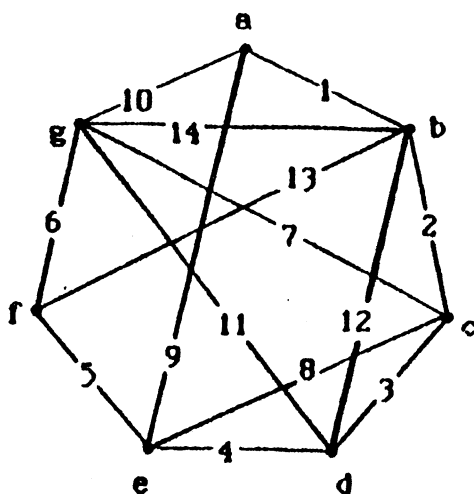


Figure 8.b.

Figure 8. La figure 8.a représente un diagramme associé à un graphe de permutation ; la suite à double occurrence définie à partir d'un parcours du cercle est : $S(V) - a b c d e f g c e a g d b f$. Le couple eulérien (H, C) associé à la suite $S(V)$ est représenté par la figure 8.b, les arêtes sont numérotées dans l'ordre d'apparition dans la séquence C . Il est clair que la sous séquence de C : $a 1 b 2 c 3 d 4 e 5 f 6 g$ est une chaîne hamiltonienne de H .

Soit H un graphe connexe 4-régulier. Un parcours eulérien C de H est dit parcours euler-hamiltonien s'il possède une sous séquence qui est une

chaîne hamiltonienne de H .

Ainsi, avec cette définition, on peut dire que : à tout graphe de permutation G on peut associer un couple eulérien (H,C) tel que C soit un parcours euler-hamiltonien ; et plus généralement, en s'appuyant sur le théorème 1.4.3.3 on peut vérifier facilement que :

1.4.3.5. Théorème. Un graphe de cordes G est \mathcal{R}_c -équivalent à un graphe de permutation si et seulement si on peut associer à la classe de G modulo \mathcal{R}_c un graphe connexe 4-régulier H possédant un parcours euler-hamiltonien.

1.4.3.6. Remarque. Soit G un graphe de cordes. Un graphe H associé à $\mathcal{R}_c(G)$ n'est pas unique en général, comme le montre A.Bouchet ([19]). Donc le fait qu'un tel graphe ne possède pas un parcours euler-hamiltonien ne suffit pas pour dire que $\mathcal{R}_c(G)$ ne contient pas un graphe de permutation.

Une question importante reste ouverte : la caractérisation des graphes de cordes qui sont \mathcal{R}_c -équivalents aux graphes de permutation.



CHAPITRE II

Diagrammes orientés. Orientations géométriques.

- II.1. Rappels et notations;**
- II.2. Orientations de Fournier. Orientations géométriques;**
- II.3. Propriétés des orientations géométriques;**
- II.4. Orientations géométriques et orientations de Read-Rotem-Urrutia définies dans [13].**

II.1. Rappels et notations

Dans toute la suite de cette thèse, et sauf mention du contraire, un graphe sera toujours considéré comme simple, et donc l'ensemble des arêtes E d'un graphe $G = (V,E)$ sera considéré comme un sous ensemble de $\mathcal{P}_2(V)$ des parties de V à deux éléments.

Soit $G = (V,E)$ un graphe. On appelle **orientation** de G toute partie M de $V \times V$ telle que :

- (i) Si $\{x,y\}$ n'est pas dans E alors (x,y) n'est pas dans M .
- (ii) Si $\{x,y\}$ est dans E alors un et un seul des deux couples (x,y) et (y,x) est dans M .

Il en résulte que M est une partie antisymétrique de $V \times V$. Si M est une orientation de G , alors le couple (G,M) sera dit un **graphe orienté** et tout élément de M sera dit **arc de (G,M)** .

A toute orientation M de G , on associe l'ensemble $\{(x,y) \in V \times V / (y,x) \in M\}$. Il est clair que cet ensemble est une orientation de G . Elle sera dite **orientation opposée de M** et elle sera notée M^{-1} . Il est facile de vérifier que $(M^{-1})^{-1} = M$.

On appelle **orientation linéaire**, toute orientation L d'un graphe complet $(V, \mathcal{P}_2(V))$ qui est une partie transitive de $V \times V$. Remarquons alors que L est une orientation linéaire d'un graphe complet $(V, \mathcal{P}_2(V))$ si et seulement si il existe une relation d'ordre total " ξ " sur l'ensemble V telle que : $\forall x \in V, \forall y \in V, x \neq y, (x,y) \in L \Leftrightarrow x \xi y$

Soit, enfin, (G,M) un graphe orienté avec $G = (V,E)$. On appelle **extension de M** , toute orientation M' de $(V, \mathcal{P}_2(V))$ contenant M ; et une extension M' de M est dite **linéaire**, si M' est une orientation linéaire de $(V, \mathcal{P}_2(V))$.

Les autres définitions concernant les graphes orientés, telles que circuit, chemin, cocircuit, etc... sont les mêmes que celles données dans [1].

11.2. Orientations de Fournier. Orientations géométriques

Soit $G = (V, E)$ un graphe de cordes, avec $|V| = n$, et soit $C(V)$ un diagramme associé. On numérote les extrémités des n cordes de $C(V)$ de 1 à $2n$ et ceci dans l'ordre où on les rencontre en parcourant le cercle C dans le sens des aiguilles d'une montre (avec un point de départ arbitraire) comme le montre la figure 1. Le diagramme $C(V)$ ainsi obtenu sera dit **diagramme numéroté**.

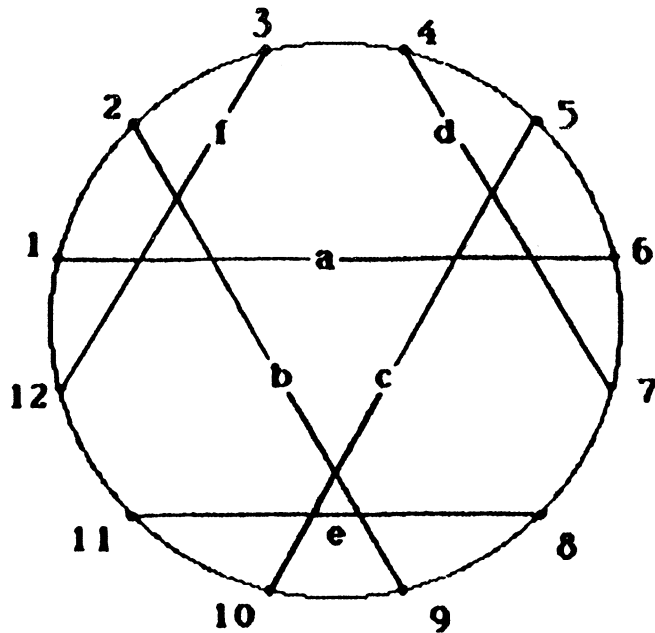


Figure 1. Un diagramme numéroté.

11.2.1. Théorème (Fournier [4]). Un graphe G est un graphe de cordes si et seulement si il possède une orientation M et deux extensions linéaires L_1 et L_2 de M telles que l'ensemble $F = (L_1 \cap L_2) - M$ réalise les conditions suivantes:

$$(F_1) \quad (x, y) \in F \text{ et } (y, z) \in L_1 \Rightarrow (x, z) \in F$$

$$(F_2) \quad (x, y) \in L_2 \text{ et } (y, z) \in F \Rightarrow (x, z) \in F.$$

Preuve

(i) Condition nécessaire. Considérons un diagramme numéroté $C(V)$ d'un graphe de cordes $G = (V, E)$. On associe à tout sommet x de G les numéros $a(x)$ et $b(x)$ des deux extrémités de la corde x dans $C(V)$ avec $a(x) < b(x)$. Puis on définit deux sous ensembles L_1 et L_2 de $V \times V$ par :

$$(x, y) \in L_1 \Leftrightarrow a(x) < a(y) \quad \text{et} \quad (x, y) \in L_2 \Leftrightarrow b(x) < b(y).$$

Il est clair que L_1 et L_2 ainsi définis sont deux orientations linéaires du graphe complet $(V, \mathcal{P}(V))$.

D'autre part, on peut vérifier facilement que pour $x \in V, y \in V$ et $x \neq y$, on a
(I) $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow a(x) < a(y) < b(x) < b(y)$ ou bien $a(y) < a(x) < b(y) < b(x)$

Posons $M = \{(x, y) \in V \times V / a(x) < a(y) < b(x) < b(y)\}$. On peut constater d'après l'équivalence (I) que l'ensemble M ainsi défini est bien une orientation du graphe G , et d'après la définition même de l'orientation M , L_1 et L_2 sont deux extensions linéaires de M .

Enfin, soit $F = (L_1 \cap L_2) - M$, il est facile de vérifier que :

$$(x, y) \in F \Leftrightarrow b(x) < a(y).$$

En utilisant cette dernière équivalence, on vérifie sans peine que F réalise bien les conditions (F_1) et F_2 .

Avant de passer à la condition suffisante, on va calculer $a(x)$ et $b(x)$ en fonction de L_1, L_2 et F :

Pour tout $R \subseteq V \times V$ et pour tout x dans V on pose $R^-(x) = \{y \in V / (y, x) \in R\}$ et $R^+(x) = \{y \in V / (x, y) \in R\}$.

Avec ces notations on vérifie facilement que :

$$a(x) = 1 + |L_1^-(x)| + |F^-(x)| \quad \text{et} \quad b(x) = 2n - |L_2^+(x)| - |F^+(x)|, \quad \forall x \in V.$$

(ii) Condition suffisante (principe de la démonstration)

Supposons qu'on a un graphe $G = (V, E)$ avec une orientation M de G et deux extensions linéaires L_1 et L_2 de M , et que $F = (L_1 \cap L_2) - M$ réalise les conditions (F_1) et (F_2) . On associe, à tout $x \in V$, les nombres :

$$a(x) = 1 + |L_1(x)| + |F^-(x)|$$

$$b(x) = 2n - |L_2^+(x)| - |F^+(x)|$$

En utilisant les conditions (F_1) et (F_2) , Fournier a démontré que ([4]) :

- $\forall x \in V, 1 \leq a(x) < b(x) \leq 2n$
- $\forall x \in V, \forall y \in V$ avec $x \neq y$ on a $a(x) \neq a(y)$ et $b(x) \neq b(y)$
- $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow a(x) < a(y) < b(x) < b(y)$ ou bien $a(y) < a(x) < b(y) < b(x)$

Si on considère maintenant un cercle ayant $2n$ points distincts numérotés de 1 à $2n$ dans le sens des aiguilles d'une montre, et si on joint les points numérotés $a(x)$ et $b(x)$ par un segment, pour tout $x \in V$, alors on obtiendra un diagramme $C(V)$ dans lequel deux cordes x et y se croisent si et seulement si $\{x, y\} \in E$. Donc G est de cordes.

C.Q.F.D.

II.2.2. Définition. Soit G un graphe de cordes. On appelle **orientation de Fournier de G** , toute orientation M qui admet deux extensions linéaires L_1 et L_2 telles que les conditions du théorème II.2.1. sont réalisées.

II.2.3. Remarques. Soit $G = (V, E)$ un graphe de cordes

(1) Si M est une orientation de Fournier de G , alors il existe un diagramme numéroté $C(V)$ associé à G et définissant M comme le montre la preuve (ii) du théorème II.2.1.

(2) Si M est une orientation de Fournier de G , alors M^{-1} , l'orientation opposée de M , l'est aussi.

(3) Tout diagramme $C(V)$ de G permet de définir, au plus, $4|V|$ orientations de Fournier distinctes, puisque à chaque choix de l'extrémité d'une corde qui va porter le numéro 1, correspond deux orientations de Fournier opposées, pour G .

(4) Notons enfin que deux orientations de Fournier de G ne proviennent pas toujours d'un même diagramme associé. (voir exemple 1).

Exemple 1

La figure 2.a représente un diagramme numéroté $C(V)$ associé à un graphe de cordes G . La figure 2.c représente un autre diagramme $C'(V)$ associé au même graphe G . La figure 2.b représente l'orientation de Fournier de G définie à partir du numérotage du diagramme $C(V)$. Les orientations de Fournier qui peuvent être définies à partir de $C'(V)$ sont celles représentées dans la figure 2.d, ainsi que leurs opposées. Une simple comparaison montre que 2.b ne figure pas parmi ces orientations.

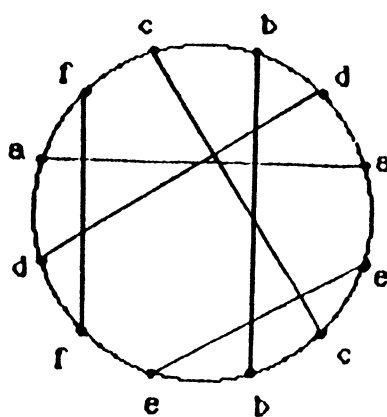
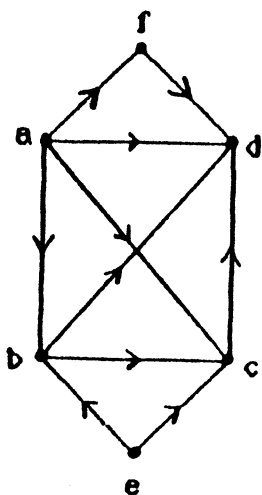
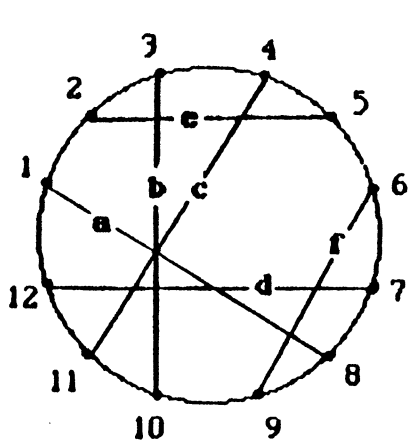


Figure 2.a.

Figure 2.b.

Figure 2.c.

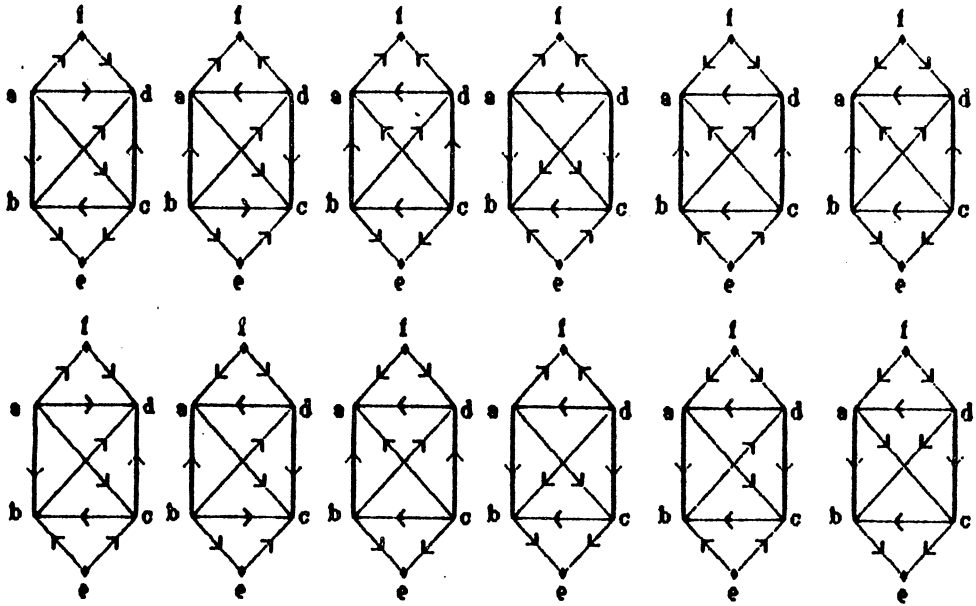


Figure 2.d.

Considérons maintenant un diagramme numéroté $C(V)$ d'un graphe de cordes $G = (V, E)$, avec $|V| = n$; et soit M l'orientation de Fournier du graphe G définie à partir de $C(V)$. Pour toute corde x , désignons par x_1 (resp. x_2) l'extrémité dotée du numéro $a(x)$ (resp. $b(x)$), (toujours avec $a(x) < b(x)$ pour x dans V). Orientons maintenant chaque corde x de x_1 vers x_2 . On obtiendra ainsi un diagramme de cordes orientées (figure 3).

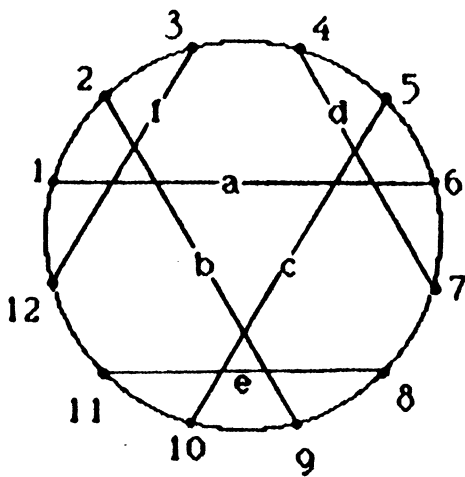


Figure 3.a.

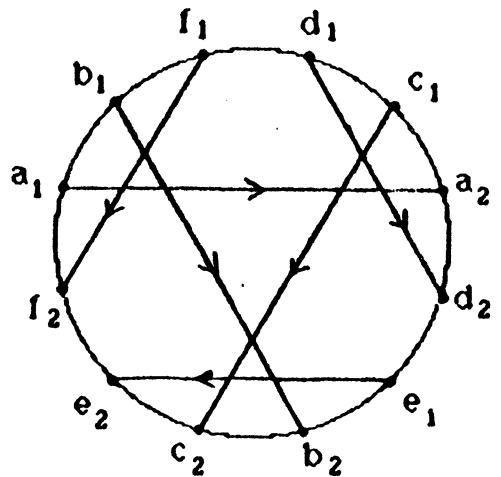
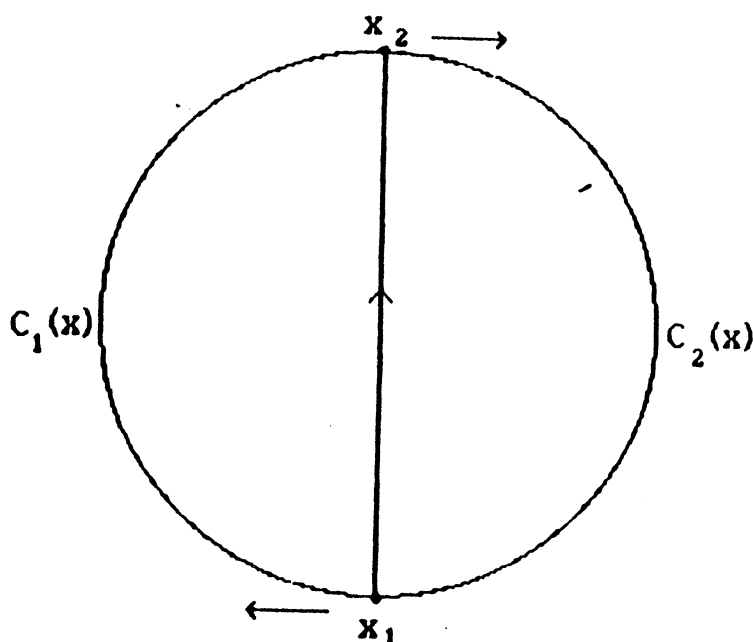


Figure 3.b.

Figure 3. Le diagramme de la figure 3.a est numéroté, celui de la figure 3.b montre les orientations des cordes définies à partir du numérotage.

Toute corde x ainsi orientée divise le cercle en deux arcs :

- l'arc $C_1(x)$, dit aussi l'arc à gauche de x , c'est la partie du cercle reliant x_1 à x_2 dans le sens des aiguilles d'une montre (figure 4).
- l'arc $C_2(x)$, ou l'arc à droite de x , c'est celui joignant x_2 à x_1 dans le sens des aiguilles d'une montre.



Remarquons alors qu'on a l'équivalence suivante :

$$(\forall x \in V) (\forall y \in V) (a(x) < a(y) < b(x) < b(y) \Leftrightarrow y_1 \in C_1(x) \text{ et } y_2 \in C_2(x)).$$

Cette équivalence nous permettra alors de redéfinir l'orientation de Fournier M , déduite du diagramme numéroté, à partir du diagramme orienté.

L'intérêt de remplacer le numérotage par l'orientation des cordes de $C(V)$ ne se limite pas au seul cas des orientations de Fournier. En effet, on définit tout d'abord un **diagramme orienté** $C(V)$ associé à un graphe de cordes $G = (V, E)$ comme étant un diagramme associé à G dans lequel les cordes sont orientées arbitrairement, et les extrémités de chaque corde x sont

baptisées x_1 et x_2 de façon que x soit orientée de x_1 vers x_2 . Enfin pour tout $x \in V$, on définit les arcs à gauche et à droite de x , $C_1(x)$ et $C_2(x)$, comme dans le cas particulier précédent. Maintenant, si x et y sont deux cordes qui se croisent dans $C(V)$, alors on vérifie facilement que :

$$(1) \quad y_1 \in C_1(x) \Leftrightarrow x_1 \notin C_1(y).$$

Cette équivalence nous assure que $M = \{(x,y) \in V \times V / (x,y) \in E \text{ et } y_1 \in C_1(x)\}$ est bien une orientation du graphe G ; en effet, si $\{x,y\} \in E$, alors x et y se croisent dans $C(V)$, et donc, d'après (1), on peut constater que un et un seul des deux couples (x,y) et (y,x) est dans M .

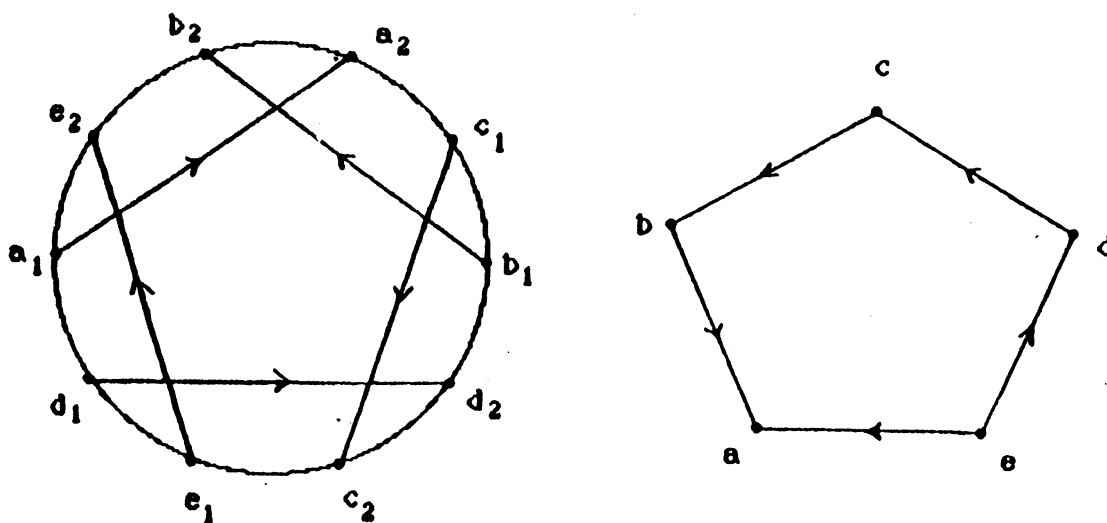
On appellera ainsi **orientation géométrique** du graphe de cordes G , toute orientation M pouvant être définie à partir d'un diagramme orienté associé à G . Il est clair que les orientations géométriques constituent une généralisation des orientations de Fournier, puisque toute orientation de Fournier est une orientation géométrique (ceci se déduit de la remarque II.2.3 (1) et du fait que tout diagramme numéroté peut être considéré comme un diagramme orienté particulier).

II.3. Propriétés des orientations géométriques

Soit $G = (V,E)$ un graphe de cordes et soit $C(V)$ un diagramme associé. On désigne par $D(C)$ l'ensemble des toutes les orientations géométriques définies sur G à partir de $C(V)$. Comme $D(C)$ contient des orientations de Fournier, et comme toute orientation de Fournier est sans circuits, alors on peut affirmer que :

II.3.1. Proposition. L'ensemble d'orientations $D(C)$ contient des orientations sans circuits.

11.3.2. Remarque. Il existe des orientations géométriques sans circuits d'un graphe de cordes qui ne sont pas de Fournier comme le montre l'exemple suivant :



En effet, soit M l'orientation du cycle C_5 donnée ci-dessus. Il est clair que M est géométrique (elle est définie à partir du diagramme orienté ci-dessus) et sans circuits. Supposons par l'absurde qu'elle est de Fournier ; alors il existe deux extensions linéaires L_1 et L_2 de M telle que $F-(L_1 \cap L_2) - M$ réalise les conditions (F_1) et F_2 du théorème 11.2.1. Alors (d,a) sera dans F ($(d,a) \in L_1$, puisque $d c b a$ est un chemin dans (G,M) , et $(d,a) \notin M$). D'autre part, $(e,d) \in M \subseteq L_2$ et $(d,a) \in F \Rightarrow (e,a) \in F$, ce qui n'est pas le cas puisque $(e,a) \in M$. Donc M n'est pas de Fournier.

Soient M_1 et M_2 deux orientations de G appartenant à $D(C)$, et désignons par $C_1(V)$ (resp. $C_2(V)$) le diagramme orienté (obtenu en orientant les cordes de $C(V)$) à partir duquel on a défini M_1 (resp. M_2).

Il est clair qu'on peut passer de $C_1(V)$ à $C_2(V)$ en retournant l'orientation d'un certain ensemble de cordes X . Il est naturel donc de chercher à déterminer, en fonction de X , l'ensemble des arêtes de G dont il faut retourner l'orientation pour passer de M_1 à M_2 .

Pour cela, on va appeler **retournement d'une arête** dans M_1 l'opération qui consiste à remplacer le couple de M_1 correspondant à cette arête par le couple opposé ; et plus généralement, on appellera **retournement d'un ensemble d'arêtes A** dans M_1 , le retournement de toute arête appartenant à A .

II.3.3. Proposition. On passe de l'orientation M_1 à l'orientation M_2 par retournement du cocycle $\omega(X)$ dans G .

Preuve

Soit $\{x,y\}$ une arête de G avec $(x,y) \in M_1$; donc dans $C_1(V)$, $y_1 \in C_1(x)$ et $y_2 \in C_2(x)$ (figure 5.a). Remarquons alors que si on retourne l'orientation de x seulement (figure 5.b) (resp. de y seulement (figure 5.c), resp. x et y (figure 5.d)), alors $y_1 \notin C_1(x)$ (resp. $y_1 \in C_1(x)$; resp. $y_1 \in C_1(x)$).

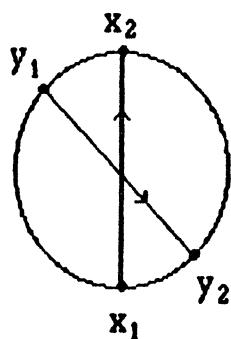


Figure 5.a.

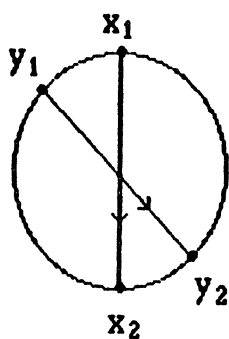


Figure 5.b.

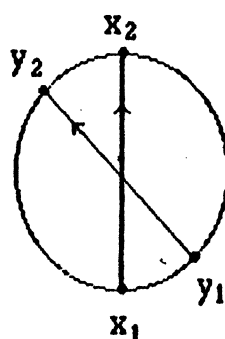


Figure 5.c.

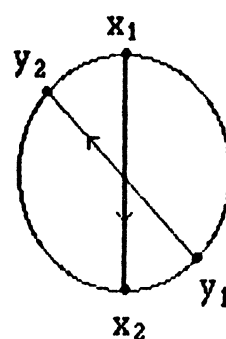


Figure 5.d.

Il en résulte que $\{x,y\}$ est à retourner dans M_1 si et seulement si on retourne exactement l'une des deux cordes x et y .

Considérons une arête $\{x,y\}$ de G dont on doit retourner l'orientation dans M_1 en passant à M_2 ; d'après ce qui précède on peut affirmer que l'une des deux extrémités x et y exactement est dans X , et donc $\{x,y\} \in \omega(X)$.

Réciproquement, si $\{x,y\} \in \omega(X)$, alors exactement l'une des deux cordes x ou y est dans X et est donc retournée, alors que l'autre ne l'est pas. Donc l'orientation de $\{x,y\}$ est retournée en passant de M_1 à M_2 .

C.Q.F.D.

II.3.4. Corollaire. (a) Si $M \in D(C)$, alors toute orientation M' obtenue à partir de M par retournement d'un cocycle est également une orientation géométrique appartenant à $D(C)$.

(b) Réciproquement, deux orientations M_1 et M_2 de G appartenant à $D(C)$ s'obtiennent l'une à partir de l'autre par retournement d'un cocycle.

(c) En particulier, si $M \in D(C)$ alors il existe un cocycle ω de G tel que l'orientation M' obtenue à partir de M par retournement de ω est une orientation de Fournier.

Ce corollaire résulte immédiatement de II.3.3. et du fait que $D(C)$ contient des orientations de Fournier.

II.3.5. Remarques. (1) Soit \mathcal{O} l'ensemble des toutes les orientations du graphe G , et soit \mathcal{R} la relation binaire définie sur \mathcal{O} par :

$M \mathcal{R} M' \Leftrightarrow$ il existe un cocycle ω de G tel que M' s'obtient à partir de M par retournement du cocycle ω .

On vérifie facilement que \mathcal{R} ainsi définie est une équivalence sur \mathcal{Y} (la transitivité de \mathcal{R} découle du fait que la différence symétrique de deux cocycles de G est un cocycle de G).

D'autre part, soit D le sous ensemble de \mathcal{Y} constitué par toutes les orientations géométriques de G , d'après 11.3.4 (a) et (b) on peut constater que D est une réunion disjointes de classes d'équivalence modulo \mathcal{R} , chacune étant de la forme $D(C)$ pour un diagramme $C(V)$ associé à G .

Exemple 2.

La figure 6.a représente un diagramme orienté $C(V)$ associé à un graphe de cordes G . La figure 6.b représente un autre diagramme orienté $C'(V)$ associé au même graphe G . La figure 6.c (respectivement la figure 6.d) représente l'orientation géométrique sur G définie à partir de $C(V)$ (respectivement à partir de $C'(V)$). Remarquons alors que ces deux orientations sont distinctes sur le cycle engendré par $\{b,c,e\}$, qui ne peut pas être un cocycle (puisque'il est impair). Donc $D(C) \cap D(C') = \emptyset$, et par suite l'ensemble des orientations géométriques D de ce graphe de cordes contient plusieurs classes.

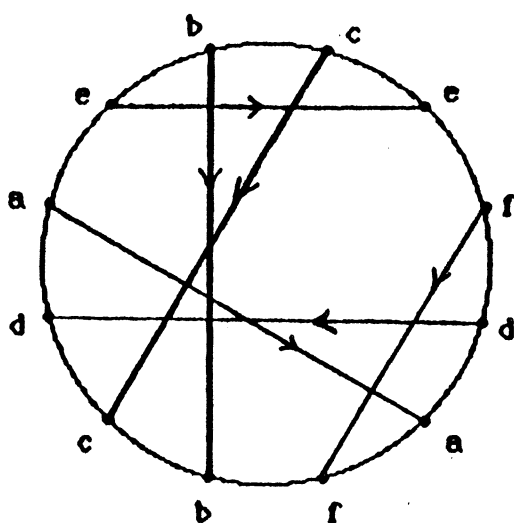


Figure 6.a.

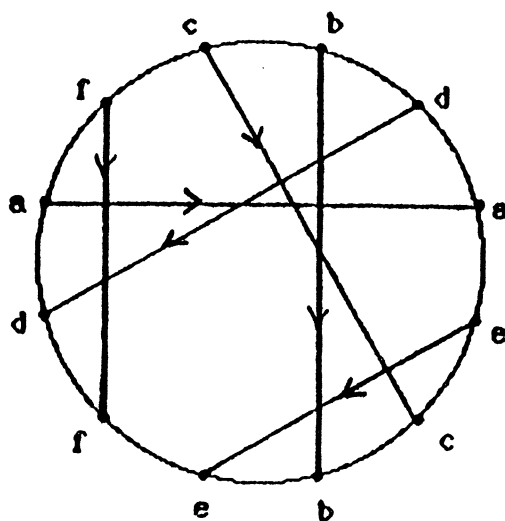


Figure 6.b.

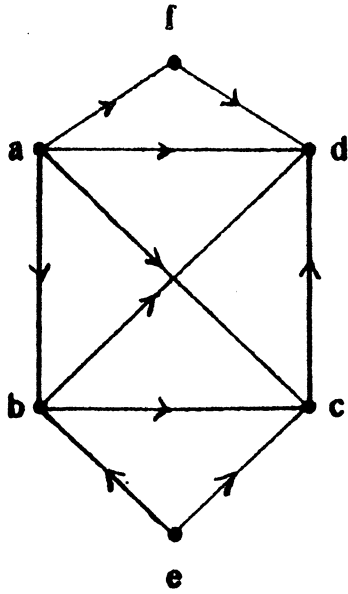


Figure 6.c.

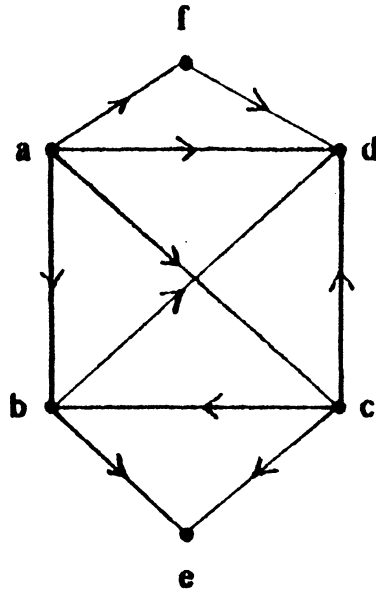


Figure 6.d.

Figure 6.

(2) Si M est une orientation géométrique de G , alors d'après II.3.1., la classe d'équivalence $\mathfrak{R}(M)$ de M modulo \mathfrak{R} contient une orientation sans circuits. Le graphe de la figure 7 est un graphe de cordes. Il est muni d'une orientation M telle que toute orientation $M' \in \mathfrak{R}(M)$ contient un circuit. On peut donc affirmer que l'orientation M n'est pas géométrique.

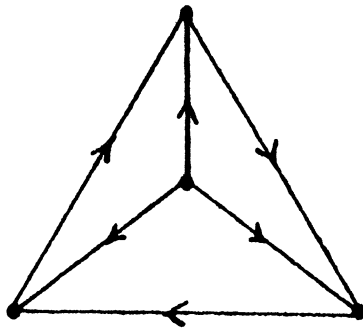


Figure 7.

11.4. Orientations géométriques et orientations de Read-Rotem et Urrutia définies dans [13].

Soient $G = (V, E)$ un graphe de cordes et $C(V)$ un diagramme associé. Les cordes divisent l'intérieur du cercle C en régions. Ainsi, le diagramme de la figure 8 contient 16 régions.

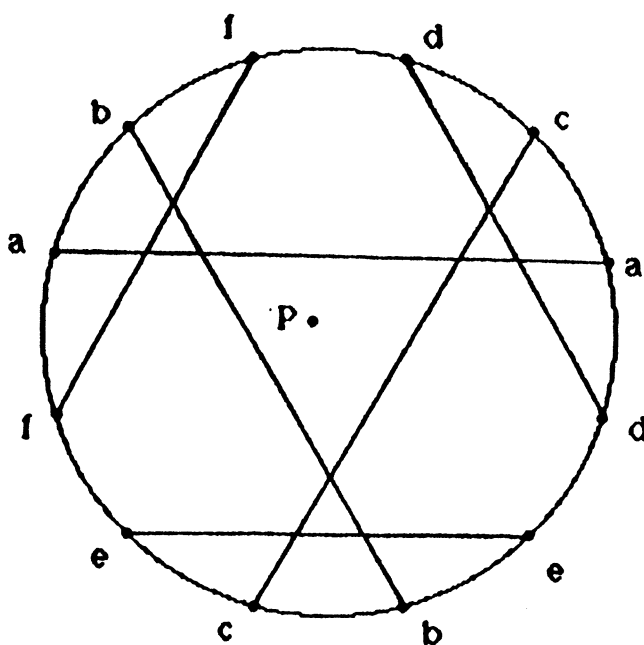


Figure 8.

Soit P un point quelconque choisi à l'intérieur d'une région de $C(V)$. Read, Rotem et Urrutia ont défini une orientation M_P du graphe G , à partir de ce point P , de la manière suivante :

Soient x et y deux cordes qui se croisent dans $C(V)$, alors ces deux cordes divisent l'intérieur du cercle C en 4 régions dont l'une contient le point P ; elle sera désignée par $R_P\{x, y\}$. On oriente l'arête $\{x, y\}$ de x vers y si, en parcourant le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre à partir d'un point de l'arc du cercle appartenant à la frontière de $R_P\{x, y\}$ et qui ne soit extrémité ni de x ni de y , on rencontre une extrémité de x avant de rencontrer une extrémité de y (figure 9) et on oriente de y vers x dans le cas contraire ([13]).

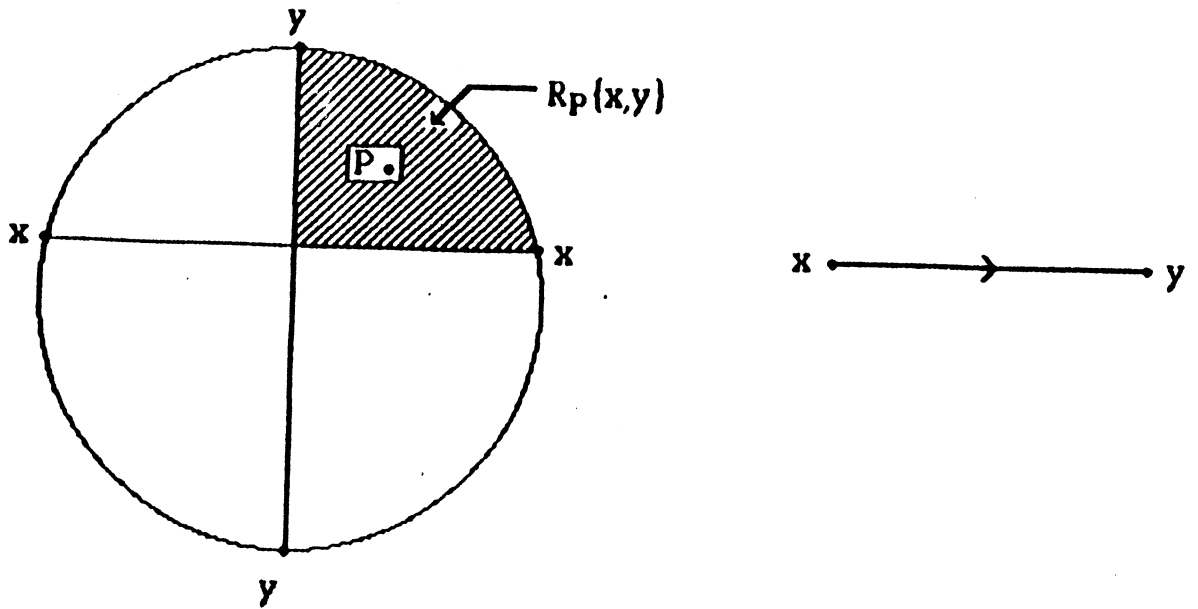
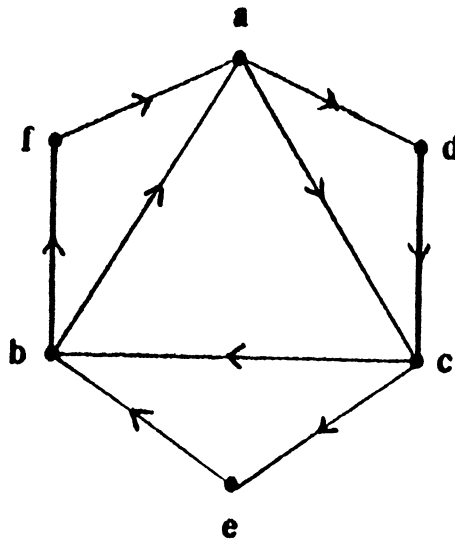


Figure 9.

Exemple.

L'orientation M_P définie à partir du point P de la figure 8 est représentée dans la figure 10.



On trouve encore dans [13] que :

- (1) Si P et P' sont deux points d'une même région alors $M_P = M_{P'}$.
- (2) Si P et P' sont deux points appartenant à deux régions distinctes alors

M_P s'obtient à partir de M_P par retournement du cocycle $\omega(X_{p,p'})$ où $X_{p,p'}$ est constitué par les cordes x croisées par un segment rectiligne joignant P et P' .

On a alors le théorème suivant :

II.4.1. Théorème. Pour tout point P choisi à l'intérieur d'une région d'un diagramme $C(V)$ associé à un graphe de cordes $G = (V,E)$, l'orientation M_P de G est une orientation géométrique.

Preuve :

Toute corde x divise l'intérieur du cercle en deux régions dont l'une contient le point P . On désigne par $C_1(x)$ l'arc du cercle appartenant à la frontière de la région contenant P , et on désigne par $C_2(x)$ l'autre arc du cercle.

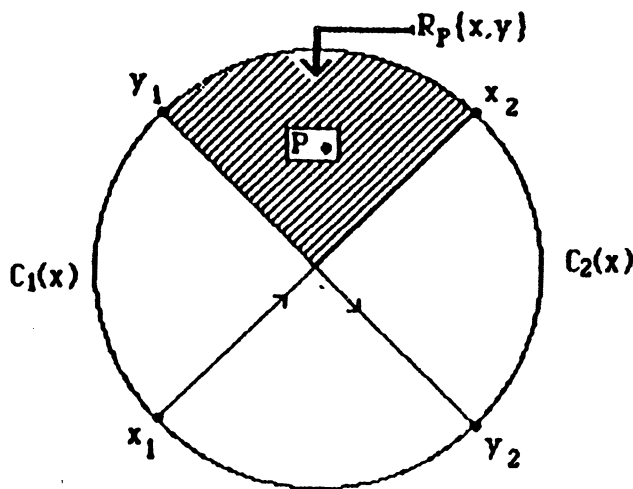


Figure 11.

On peut alors orienter x de sorte que $C_1(x)$ soit à gauche de x et $C_2(x)$ soit à sa droite (voir figure 11). Soient deux cordes x (orientée de x_1 vers x_2) et y (orientée de y_1 vers y_2); et on suppose que x et y se croisent (figure 11).

On peut vérifier que $(x,y) \in M_p$ si et seulement si, en parcourant C dans le sens des aiguilles d'une montre à partir d'un point de l'arc du cercle appartenant à la frontière de $R_p\{x,y\}$, on rencontre les extrémités de x et y dans l'ordre suivant $x_2 y_2 x_1 y_1$. Il est clair que ceci est équivalent à dire que $y_1 \in C_1(x)$, et par suite M_p n'est autre que l'orientation géométrique définie à partir du diagramme orienté obtenu ci-dessus.

C.Q.F.D.

Notons enfin qu'il existe des orientations géométriques qui ne peuvent pas être définies à partir d'un point de l'intérieur du diagramme comme le montre l'exemple suivant:

Exemple.

L'orientation du graphe de la figure 12.d (page suivante) est obtenue à partir de celle du graphe de la figure 12.b par retournement du cocycle $\omega(\{b,d\})$. Il est facile de vérifier que pour tout choix du point P' , $\{b,d\}$ n'est pas de la forme $X_{p,p}$. Donc l'orientation géométrique de la figure 12.d ne s'obtient pas à partir d'un point P' de l'intérieur du diagramme.

Par ailleurs, tous les diagrammes associés à C_5 (cycle de longueur 5) sont du type décrit dans la figure 12 (a et c), la propriété est donc indépendante du diagramme choisi.

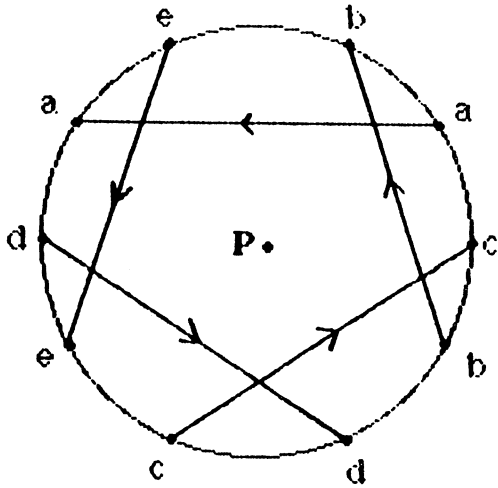


Figure 12.a.

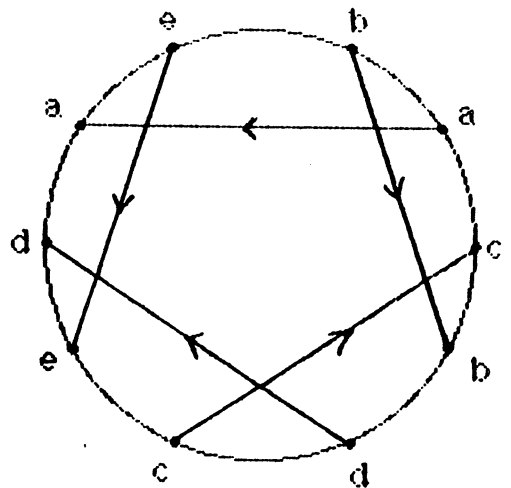


Figure 12.c.

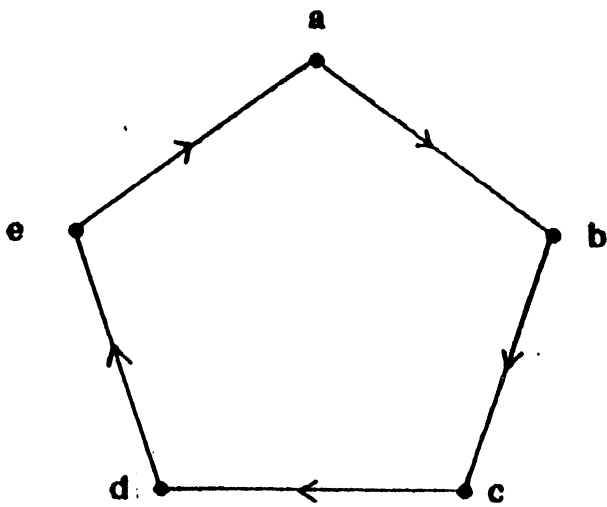


Figure 12.b.

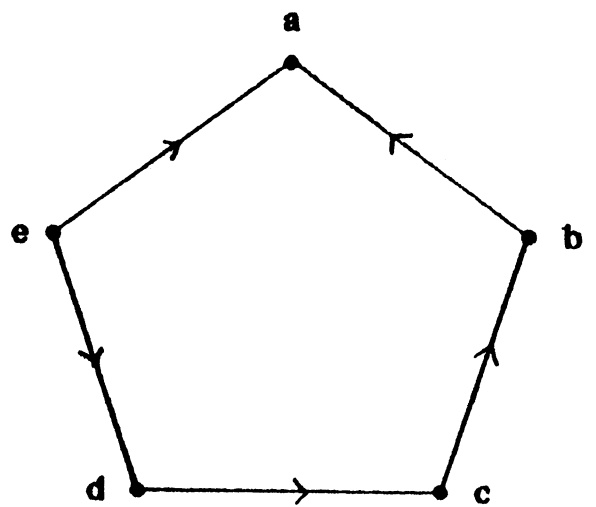


Figure 12.d.

Figure 12.

CHAPITRE III

Pseudo-tournois de cordes orientées

- III.1. Marquage du complémentaire d'un graphe de cordes;
- III.2. Pseudo-tournois ;
- III.3. Propriétés d'un pseudo-tournoi de cordes orientées;
- III.4. Classe \mathcal{E} de Pseudo-tournois ;
- III.5. Orientations des arêtes du type "- +" dans un pseudo-tournoi réduit ;
- III.6. Chaînes d'orientations ;
- III.7. Pseudo-tournois de la classe \mathcal{E} et pseudo-tournois de cordes orientées ;

III.1. Marquage du complémentaire d'un graphe de cordes

Soit $G = (V, E)$ un graphe de cordes et soit $C(V)$ un diagramme orienté associé à G . On désigne par M l'orientation géométrique définie à partir de $C(V)$. Rappelons que toute corde x est orientée d'une extrémité notée x_1 vers une extrémité notée x_2 , que les arcs à gauche et à droite de x (respectivement $C_1(x)$ et $C_2(x)$) sont les arcs joignant x_1 à x_2 (respectivement x_2 à x_1) dans le sens des aiguilles d'une montre, enfin que

$$(x, y) \in M \Leftrightarrow \{x, y\} \in E \text{ et } y_1 \in C_1(x) \Leftrightarrow \{x, y\} \in E \text{ et } x_2 \in C_1(y).$$

Fixons maintenant une corde x ; on a étudié jusqu'à maintenant la position d'une corde y coupant x dans le diagramme orienté $C(V)$. Considérons maintenant une corde y qui ne coupe pas x . Les deux extrémités de y peuvent être ou bien toutes les deux sur $C_1(x)$, et on dit alors que y est à gauche de x , ou bien toutes les deux sur $C_2(x)$, et on dit alors que y est à droite de x . Mais remarquons que, dans les deux cas, x peut être indifféremment à gauche ou à droite de y . Autrement dit, on a exactement quatre cas possibles :

1. x est à gauche de y et y est à gauche de x (fig. 1.a)
2. x est à gauche de y et y est à droite de x (fig. 1.b)
3. x est à droite de y et y est à gauche de x (fig. 1.c)
4. x est à droite de y et y est à droite de x (fig. 1.d)

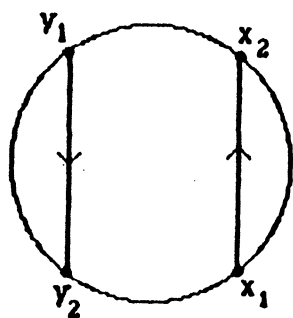


Figure 1.a.

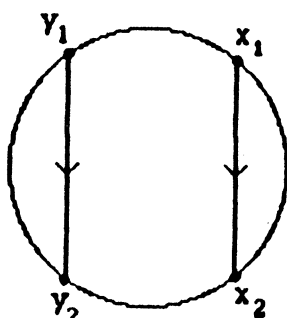


Figure 1.b.

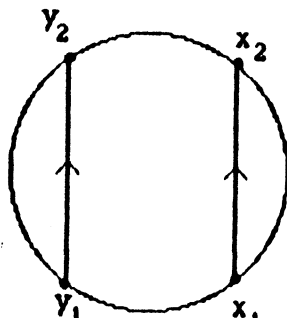


Figure 1.c.

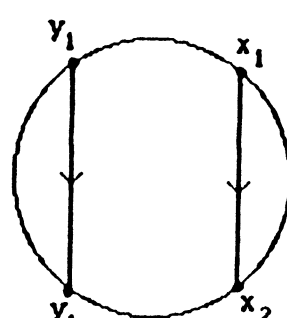


Figure 1.d.

On peut représenter cette classification des arêtes de \bar{G} de la manière suivante : on divise chaque arête $\{x,y\}$ de \bar{G} en deux "demi-arêtes", l'une notée $[x,y]$, contenant x et non y , l'autre, notée $[y,x]$ contenant y et non x . Puis, sur une demi-arête $[x,y]$ on met le signe $+$ ou $-$ selon que la corde y est à droite ou à gauche de la corde orientée x dans $C(V)$. La figure 2 illustre ce qui précède, en donnant les marquages correspondants aux cas (a), (b), (c) et (d) de la figure 1.

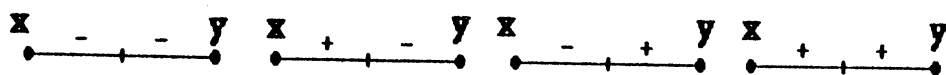


Figure 2.a.

Figure 2.b.

Figure 2.c.

Figure 2.d.

Figure 2.

Si l'on marque ainsi toutes les arêtes de \bar{G} , on obtient ce qu'on va appeler un **graphe marqué**.

Plus généralement, pour tout graphe (simple bien entendu) $G = (V,E)$, on désigne par B l'ensemble des demi-arêtes de G .

On appelle **marquage** de G , toute application S de B dans l'ensemble à deux éléments $\{+,-\}$; un **graphe marqué** est un couple de la forme (G,S) où G est un graphe et S est un marquage de G .

Avant de continuer l'étude des graphes de cordes, on va donner les définitions et notations nécessaires relatives aux graphes marqués.

Soit (G,S) un graphe marqué avec $G = (V,E)$. Pour toute arête $e = \{x,y\}$ de G , les éléments $S([x,y])$ et $S([y,x])$ seront dits les **signes** de e (le premier sera dit le signe de e en x et le second sera dit le signe de e en y).

Pour toute arête $e = \{x,y\}$ de G , on dit que le couple (x,y) est du type pq (avec $p,q \in \{+,-\}$) si $S([x,y]) = p$ et $S([y,x]) = q$. On dit que l'arête e est

du type pq , si l'un des deux couples (x,y) ou (y,x) est du type pq .

On définit enfin pour tout $x \in V$ et pour $p,q \in \{+,-\}$, les ensembles :
 $SP^q(x) = \{y \in V / y \text{ est adjacent à } x \text{ et } (x,y) \text{ est du type } pq\}$.

Revenons maintenant aux graphes de cordes. Soient $G = (V,E)$ un graphe de cordes, $C(V)$ un diagramme orienté associé. M l'orientation géométrique de G défini à partir de $C(V)$ et S le marquage de \bar{G} défini à partir de $C(V)$. Nous allons voir que ces données permettent d'obtenir les orientations de Fournier de G associées à $C(V)$.

Considérons une corde quelconque r ; on numérote les extrémités des cordes du diagramme orienté $C(V)$ de 1 à $2n$, (où $n = |V|$), comme on l'a fait à la section II.2. (définition des orientations de Fournier) et ceci en donnant à r_1 (l'extrémité initiale de la corde orientée r) le numéro 1.

Comme précédemment, on note $a(x)$ et $b(x)$ (avec $a(x) < b(x)$) les numéros des extrémités de la corde x . Soit M' l'orientation de Fournier de G associée à ce numérotage : $(x,y) \in M' \Leftrightarrow a(x) < a(y) < b(x) < b(y)$

Rappelons que pour toute corde x , l'extrémité initiale (respectivement finale) de x dans le diagramme orienté $C(V)$ est désignée par x_1 (respectivement x_2).

D'après II.3.3 (b), il existe un ensemble de sommets $X(r) \subseteq V$ tel que M' s'obtient à partir de M par retournement du cocycle $\omega(X(r))$ dans G , et il est facile de voir que $X(r)$ peut être défini par :

$$(1) \quad X(r) = \{x \in V / a(x) \text{ est affecté à } x_2\}.$$

Notons que $r \notin X(r)$.

L'orientation géométrique M n'est pas suffisante en général pour déterminer $X(r)$, mais nous allons voir que le marquage S de \bar{G} défini à partir de $C(V)$ nous permet, avec M , de déterminer $X(r)$.

En effet, soit $x \in V - (r)$:

1. Si x coupe r alors dire que $x \in X(r)$ c'est équivalent à dire que $x_2 \in C_1(r)$, puisque $a(x)$ est affecté à la première extrémité de x rencontrée en parcourant C à partir de r_1 . Il en résulte que $(x,r) \in M$, et donc $x \in M^-(r)$ (rappelons que $M^-(r) = \{v \in V / (v,r) \in M\}$). (fig. 3.a).

2. Si x est à gauche de r , les deux extrémités de x sont sur $C_1(r)$; et comme $a(x)$ est affecté à la première extrémité de x rencontrée en parcourant C , alors dire que $x \in X(r)$ est équivalent à dire que cette extrémité est x_2 , et donc r est à gauche de x (fig. 3.b). Autrement dit $x \in S^{--}(r)$.

3. Enfin, si x est à droite de r , alors en raisonnant de la même façon que dans le cas 2, on démontre que $x \in X(r) \Rightarrow x \in S^{+-}(r)$ (fig. 3.)

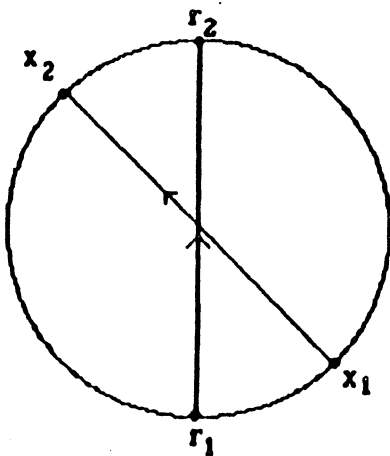


Figure 3.a

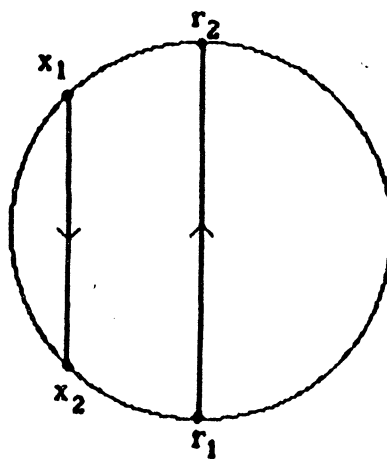


Figure 3.b

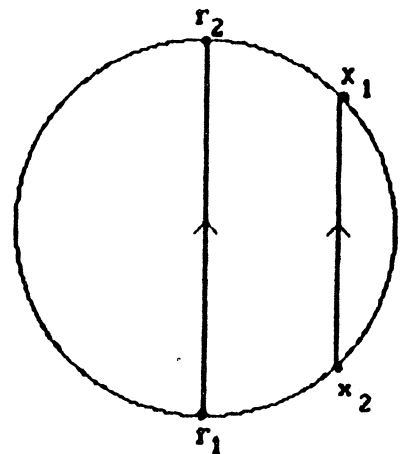


Figure 3.c

Figure 3.

Réciproquement, il est facile de vérifier que :

$$x \in M^-(r) \cup S^{--}(r) \cup S^{+-}(r) \Rightarrow x \in X(r).$$

D'où la proposition :

III.1.1. Proposition. Soient $G = (V,E)$ un graphe de cordes, $C(V)$ un diagramme orienté associé, M l'orientation géométrique de G , et S le marquage de \bar{G} (M et S sont définis à partir de $C(V)$). Pour tout sommet r de G , l'orientation géométrique obtenue à partir de M par retournement du cocycle $\omega_G(X(r))$, avec $X(r) = M^-(r)US^{--}(r)US^{+-}(r)$, est une orientation de Fournier.

Cette proposition nous montre l'utilité du marquage. Le but de ce qui reste est de trouver des relations entre une orientation M de G et un marquage de S de son complémentaire, constituant une condition nécessaire et suffisante pour que : G soit un graphe de cordes, M soit une orientation géométrique et S soit le marquage défini à partir du même diagramme orienté définissant M .

III.2. Pseudo-tournois.

Soit $G = (V,E)$ un graphe. On appelle **pseudo-tournoi de base G** tout triplet de la forme $K_V = (G,M,S)$ où M est une orientation de G et S est un marquage de son complémentaire \bar{G} .

Un pseudo-tournoi sera présenté par le graphe complet $(V, \mathcal{P}_2(V))$, dans lequel les arêtes de G sont orientées par M , les demi-arêtes de \bar{G} sont marquées par S .

Exemples

1. La figure 4 représente un pseudo-tournoi

à 4 sommets

2. Les tournois sont des pseudo-tournois particuliers.

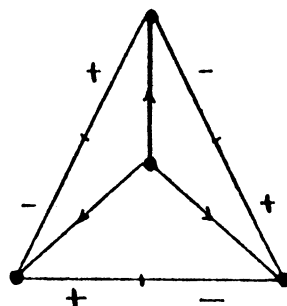


Figure 4.

Soit $K_V = (G, M, S)$ un pseudo-tournoi avec $G = (V, E)$. On a alors :

- V est l'ensemble des sommets de K_V ;
- E est l'ensemble des arêtes pleines de K_V ;
- $\bar{E} = \mathcal{P}_2(V) - E$ est l'ensemble des arêtes vides de K_V (\bar{E} est l'ensemble des arêtes de \bar{G}).
- Pour tout $x \in V$,

$$M^+(x) = \{y \in V / (x,y) \in E \text{ et } (x,y) \in M\}$$

$$M^-(x) = \{y \in V / (x,y) \in E \text{ et } (y,x) \in M\}$$

$$S^{pq}(x) = \{y \in V / (x,y) \in E \text{ et } (x,y) \text{ est du type } pq\}$$
 et ceci pour p, q quelconques dans $\{+, -\}$.
- Pour $X \subseteq V$, on définit le sous-pseudo-tournoi de K_V engendré par X comme étant le pseudo-tournoi $K_X = (G_X, M_X, S_X)$ où :
 - G_X est le sous graphe de G engendré par X ;
 - M_X est la restriction de M sur G_X , c'est à dire

$$M_X = \{(x,y) \in M / x \in X, y \in X\}$$
 ;
 - S_X est la restriction de S sur \bar{G}_X (le sous graphe de G engendré par X), c'est à dire S_X est la restriction de l'application S sur l'ensemble des demi-arêtes de \bar{G}_X . K_V est dit connexe si son graphe de base G est connexe.

On appelle triangle tout pseudo-tournoi ayant trois sommets. On distingue quatre types de triangles :

- triangle plein. C'est un triangle ayant ses trois arêtes pleines ;
- triangle quasi-plein. C'est un triangle ayant exactement deux arêtes pleines ;
- triangle quasi-vide. C'est un triangle ayant exactement deux arêtes vides ;
- triangle vide. C'est un triangle ayant ses trois arêtes vides.

Un pseudo-tournoi $K_V = (G, M, S)$ est dit de "cordes orientées" si G est un graphe de cordes, et il existe un diagramme orienté $C(V)$ associé à G , à partir duquel M et S sont définis. On dit que K_V est de Fournier si l'on est dans la situation précédente et si de plus, il existe un numérotage des extrémités des cordes de 1 à $2|V|$ dans l'ordre du parcours du cercle dans le sens trigonométrique, tel que chaque corde est orientée de l'extrémité dotée du numéro le plus petit vers l'autre extrémité. L'orientation des cordes est alors dite compatible avec le numérotage.

Remarque. Le fait que l'orientation M du graphe de base G du pseudo-tournoi de cordes orientées $K_V = (G, M, S)$ soit une orientation de Fournier ne suffit pas pour dire que K_V est de Fournier.

En effet, la figure 5.b représente un graphe de cordes G orienté par une orientation de Fournier M .

La figure 5.a représente un diagramme orienté $C(V)$ associé à G , définissant M tel que aucun numérotage des cordes de $C(V)$ n'est compatible avec cette orientation. La figure 5.c représente un autre diagramme orienté $C'(V)$ associé à G , définissant M et numéroté d'une manière compatible avec l'orientation de ses cordes. Enfin, les figures 5.d et 5.e représentent les marquages de \bar{G} définis à partir de $C(V)$ et $C'(V)$ respectivement.

Remarquons alors que le graphe marqué de la figure 5.d comporte des arêtes du type ++ et du type -- alors que celui de la figure 5.e, et qui correspond au diagramme numéroté, ne comporte pas des arêtes du type --; ce n'est pas un cas particulier pour cet exemple puisque c'est l'une des conditions caractérisant un pseudo-tournoi de Fournier comme nous allons voir dans le théorème suivant:

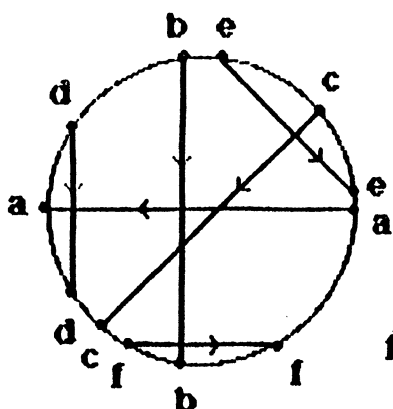


Figure 5.a.

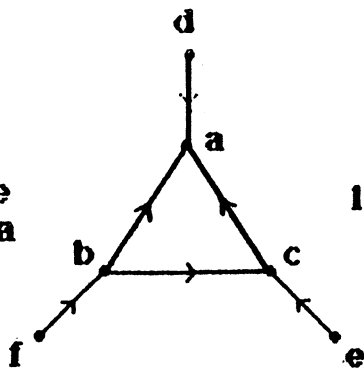


Figure 5.b.

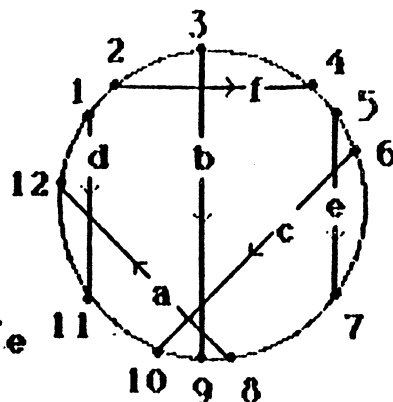


Figure 5.c.

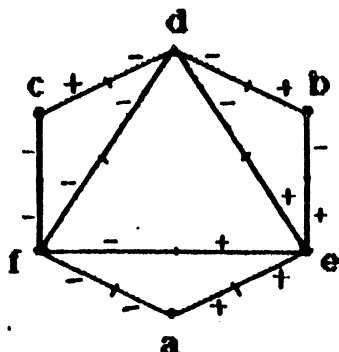


Figure 5.d.

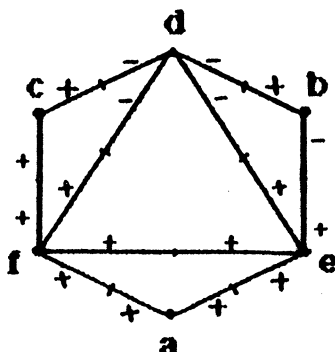


Figure 5.e.

III.2.1. Théorème. Un pseudo-tournoi $K_V = (G, M, S)$ de base $G = (V, B)$ est de Fournier si et seulement si :

- (1) K_V ne contient pas des arêtes vides du type -- ;
- (2) le graphe orienté (G, M) est sans circuits ;
- (3) si on pose $I_1 = \{(x, y) \in V \times V / S(|x, y|) = - \text{ et } S(|y, x|) = +\}$

$$\text{et } I_2 = \{(x, y) \in V \times V / (x, y) \in I_1\}$$

alors il existe une orientation F des arêtes vides de K_V du type ++ telle que les extensions $L_1 = M \cup F \cup I_1$ et $L_2 = M \cup F \cup I_2$ de M sont linéaires et $F = (L_1 \cap L_2) - M$ vérifie les conditions (F_1) et (F_2) du théorème II.2.1.

Preuve

(1) **Condition nécessaire** : Supposons que K_V est de Fournier, donc G est de cordes et il existe un diagramme orienté $C(V)$ associé à G et définissant M et S .

D'après la définition même d'un pseudo-tournoi de Fournier, il existe un numérotage des extrémités des cordes de $C(V)$ compatible avec l'orientation de ces cordes; et avec les mêmes notations utilisées précédemment nous savons que : $(x,y) \in M \Leftrightarrow a(x) < a(y) < b(x) < b(y)$ et que les extensions linéaires L_1 et L_2 de M vérifiant les conditions du théorème II.2.1. peuvent être définies par :

$$(x,y) \in L_1 \Leftrightarrow a(x) < a(y) \quad \text{et}$$

$$(x,y) \in L_2 \Leftrightarrow b(x) < b(y)$$

(1) K_V est sans arêtes vides du type -- :

En effet, soit $\{x,y\}$ une arête vide de K_V ; on suppose que $a(x) < a(y)$. Deux cas sont possibles :

- $b(x) < b(y)$, dans ce cas $(x,y) \in L_1 \cap L_2$. Comme $(x,y) \notin M$ il vient que

$$a(x) < b(x) < a(y) < b(y) \text{ ce qui montre que } \{x,y\} \text{ est du type } ++$$

(figure 6.a).

- $b(x) > b(y)$, dans ce cas $(x,y) \in L_1$ et $(y,x) \in L_2$, donc

$$a(x) < a(y) < b(y) < b(x), \text{ ce qui montre que le couple } (x,y) \text{ est du type } --$$

(figure 6.b). D'où la propriété.

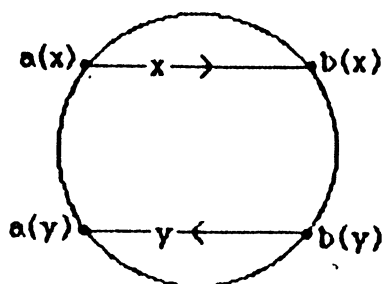


Figure 6.a

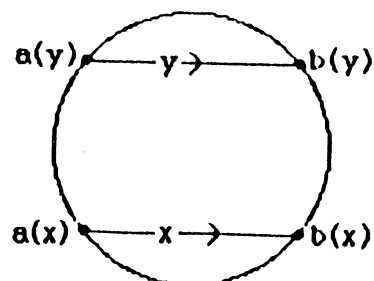


Figure 6.b

(2) Le graphe orienté (G, M) est sans circuits :

C'est évident puisque M est une orientation de Fournier.

(3) On vérifie facilement que

$$(x, y) \in I_1 \Leftrightarrow a(x) < a(y) < b(y) < b(x)$$

D'autre part, il est clair que $F = (L_1 \cap L_2) - M$ vérifie les conditions du théorème II.2.1. Or, $(x, y) \in F \Leftrightarrow b(x) < a(y)$ et ceci montre que $\{x, y\}$ est une arête vide de K_V du type $++$. D'où la nécessité.

(ii) **Condition suffisante:** D'après le théorème II.2.1, la condition (3) implique que G est un graphe de cordes et que M est une orientation de Fournier de G . D'autre part, dans la démonstration du théorème II.2.1, nous avons vu qu'on peut construire un diagramme numéroté $C(V)$ associé à G , définissant M , de la manière suivante : on considère $2|V|$ points distincts d'un cercle C , numéroté de 1 à $2|V|$, dans l'ordre, en parcourant C dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour tout x dans V , on définit la corde x de C comme étant la corde joignant les points du cercle dotés des numéros :
 $a(x) = 1 + |L_1^-(x)| + |F^-(x)|$ et $b(x) = 2|V| - |L_2^+(x)| - |F^+(x)|$

Nous avons en plus que:

$$(x, y) \in L_1 \Leftrightarrow a(x) < a(y)$$

$$(x, y) \in L_2 \Leftrightarrow b(x) < b(y)$$

$$(x, y) \in M \Leftrightarrow a(x) < a(y) < b(x) < b(y)$$

Il résulte que :

$$\alpha) (x, y) \in F \Leftrightarrow a(x) < b(x) < a(y) < b(y) \quad \text{et}$$

$$\beta) (x, y) \in I_1 \Leftrightarrow a(x) < a(y) < b(y) < b(x)$$

Orientons maintenant chaque corde x de l'extrémité dotée de $a(x)$ vers celle dotée de $b(x)$. Ainsi des équivalences (α) et (β) on peut déduire que :

$(x,y) \in F \Leftrightarrow$ la corde y est à droite de la corde x , et x est à droite de y .

$(x,y) \in I_1 \Leftrightarrow$ la corde y est à gauche de la corde x , et x est à droite de y .

Donc $C(V)$ définit M et S . D'où la suffisance.

C.Q.F.D.

Soit $K_V = (G,M,S)$ un pseudo-tournoi de cordes orientées défini à partir d'un diagramme orienté $C(V)$ associé à G , et soit $X \subseteq V$. Désignons par $C'(V)$ le diagramme orienté obtenu à partir de $C(V)$ par retournement de l'orientation des cordes $x \in X$. Alors $C'(V)$ définit un pseudo-tournoi de cordes orientées $K'_V = (G,M',S')$ de base G . On a vu que M' s'obtient à partir de M par retournement du cocycle $\omega(X)$ dans (G,M) (proposition II.3.2). Il sera utile de savoir comment peut on obtenir S' à partir de S , ce qui fait l'objet de la proposition suivante:

III.3.2. Proposition. S' s'obtient à partir de S en changeant les signes de toutes les demi-arêtes $[x,y]$ telles que $x \in X$ et $\{x,y\} \in \bar{E}$.

Preuve

Soit $x \in X$, et soit y un sommet adjacent à x dans G . Si $S([x,y]) = +$ (respectivement si $S([x,y]) = -$) alors les extrémités de y sont sur $C_2(x)$ (respectivement sur $C_1(x)$) dans $C(V)$; donc, dans $C'(V)$, les extrémités de y seront sur $C_1(x)$ (respectivement sur $C_2(x)$), et donc $S'([x,y]) = -$ (respectivement $S'([x,y]) = +$). Par contre, si $x \notin X$, alors x a le même arc à gauche dans $C'(V)$ que dans $C(V)$, autrement dit $S'([x,y]) = S([x,y])$.

C.Q.F.D.

L'opération qui consiste à changer les signes des toutes les demi-arêtes $[x,y]$, où y décrit l'ensemble des sommets adjacents à x dans G , sera dite

changement de signes en x . S' s'obtient à partir de S par changement des signes effectué simultanément pour tous les éléments de X .

Plus généralement, soit $K_V = (G, M, S)$ un pseudo-tournoi et soit $X \subseteq V$. On définit le pseudo-tournoi $R_X(K_V) = (G, M', S')$ comme étant le pseudo-tournoi de base G où :

- M' s'obtient à partir de M par retournement du cocycle $\omega(X)$ dans (G, M) ;
- S' s'obtient à partir de S par changement des signes en x dans (\bar{G}, S) pour tous les x de X .

Si $X = \{x\}$, $R_{\{x\}}$ sera désignée également par R_x . On peut alors vérifier facilement les propriétés suivantes :

- (1) $R_\emptyset(K_V) = K_V$
 - (2) $K'_V = R_X(K_V) \Rightarrow K_V = R_X(K'_V)$
 - (3) $R_X(R_Y(K_V)) = R_{X+Y}(K_V)$ où $X+Y = (X-Y) \cup (Y-X)$
- ((2) découle d'ailleurs de (1) et (3)).

III.2.3. Remarque. Les trois propriétés précédentes montrent que la relation \mathcal{Q} définie sur l'ensemble de tous les pseudo-tournois de base G par : $K_V \mathcal{Q} K'_V \Leftrightarrow (\exists X \subseteq V)(K'_V = R_X(K_V))$ est une relation d'équivalence, et d'après II.3.4, II.3.5 et III.2.1, on peut constater que si G est de cordes et si K_V est un pseudo-tournoi de cordes orientées défini à partir d'un diagramme orienté $C(V)$ associé à G , alors la classe d'équivalence de K_V modulo \mathcal{Q} coïncide avec l'ensemble des pseudo-tournois de cordes orientées que l'on peut obtenir à partir de diagrammes identiques à $C(V)$ au changement d'orientation de cordes près.

III.2.4. Théorème. Soit $K_V = (G, M, S)$ un pseudo-tournoi de base $G = (V, E)$, et soit r dans V . Posons $X(r) = M^-(r) \cup S^{--}(r) \cup S^{+-}(r)$. Alors K_V est de cordes orientées si et seulement si $R_{X(r)}(K_V)$ est de Fournier.

En effet ceci découle immédiatement de la remarque III.2.3, de la proposition III.1.1 et de la définition d'un pseudo-tournoi de Fournier.

III.3. Propriétés d'un pseudo-tournoi de cordes orientées

Soit $K_V = (G, M, S)$ un pseudo-tournoi de cordes orientées de base $G = (V, E)$. Il est facile de voir que, si $|V| \leq 2$, alors tous les pseudo-tournois K_V sont de cordes orientées. On va étudier alors le cas où $|V| = 3$; dans ce cas K_V est un triangle, quatre cas sont alors possibles :

(1) K_V est plein. Alors dans ce cas, K_V est un tournoi, et M est ou bien transitive, ou bien non transitive. Les deux cas sont réalisables par un diagramme comme le montrent la figure 7.a (qui correspond au cas où M est transitive) et la figure 7.b (qui correspond à l'autre cas).

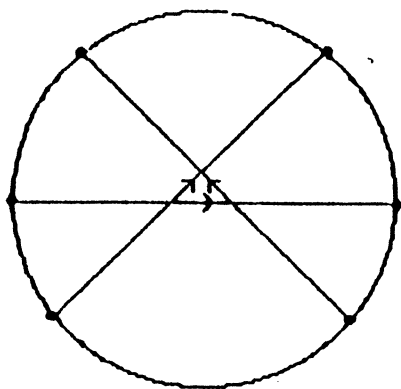


Figure 7.a

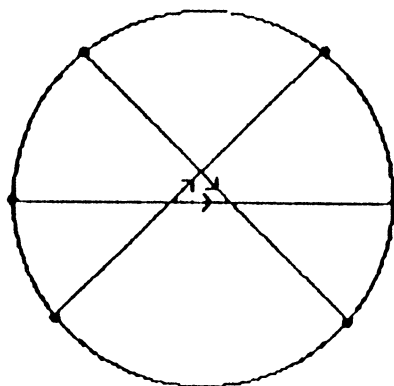


Figure 7.b

Donc tout triangle plein est un pseudo-tournoi de cordes orientées.

(2) K_V est quasi-plein. Alors dans ce cas, on aura une corde x qui coupe deux autres cordes disjointes (figure 8.a). Alors, quelle que soit la manière dont on oriente les trois cordes on est toujours dans l'un des deux cas suivants :

(i) les extrémités initiales des deux cordes disjointes sont toutes les deux du même côté de la troisième corde x ; dans ce cas, les signes de l'arête vide sont distincts, et les deux arêtes pleines sont orientées en un anti-chemin (un anti-chemin est une chaîne orientée de longueur 2 qui n'est pas un chemin) .

(ii) l'extrémité initiale de l'une des deux cordes disjointes est à gauche de x , et l'extrémité initiale de l'autre est à droite de x ; on vérifie alors facilement que les signes de l'arête vide sont identiques et la chaîne constituée par les deux arêtes pleines est orientée en un chemin.

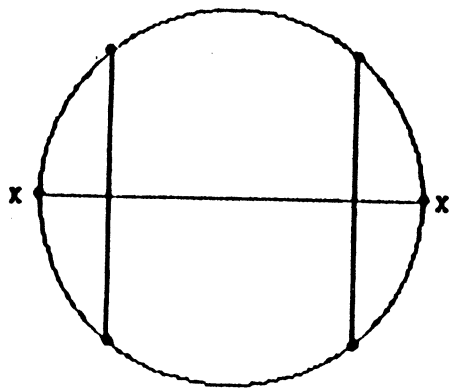


Figure 8.a

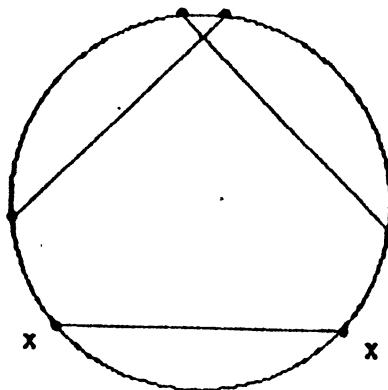


Figure 8.b

(3) K_V est quasi-vide. Dans ce cas, on a deux cordes qui se croisent et une corde isolée x (c'est à dire disjointe avec les deux autres). Or les deux cordes qui se coupent divisent le cercle en quatre arcs, et donc les extrémités de x ne peuvent être que sur un même arc parmi ces quatre (figure 8.b) . Remarquons alors que quelle que soit la manière d'orienter les

cordes, celles qui se croisent sont toutes les deux du même côté de x ; autrement dit, les signes en x sont toujours identiques.

(4) K_3 est vide. dans ce cas, les trois cordes sont disjointes deux à deux ; il est facile de vérifier qu'il y a exactement deux possibilités de mettre les cordes sur le cercle :

(i) en parallèle (figure 9.a) : c'est à dire que les trois cordes peuvent être coupées par une quatrième ; dans ce cas, quelle que soit la manière d'orienter les cordes, l'une des deux cordes extrêmes est à gauche de la corde centrale x et l'autre est à sa droite : donc les signes en x sont distincts, tandis que les signes en chacun des sommets correspondant à une corde extrême sont identiques.

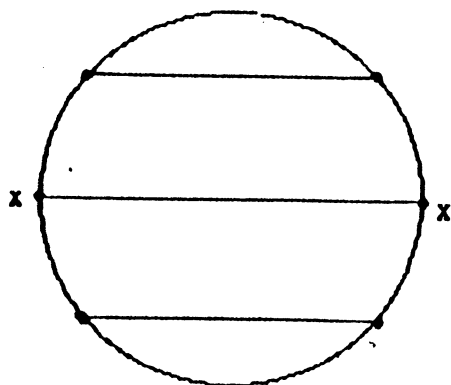


Figure 9.a

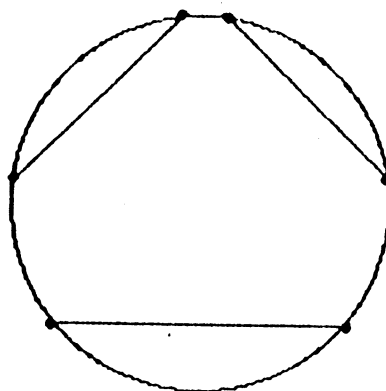


Figure 9.a

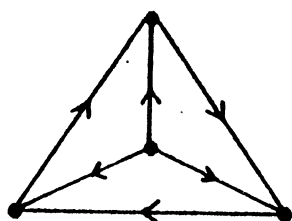
(ii) en série (figure 9.b) : c'est à dire qu'une quatrième corde peut couper au plus deux parmi les trois cordes ; dans ce cas, chaque couple de cordes est d'un même côté par rapport à la troisième. Autrement dit, en chaque sommet, les deux signes sont identiques.

III.3.1. Remarque. (1) Tout diagramme associé à un graphe ayant trois sommets (ils sont tous de cordes d'ailleurs) est de l'un des types décrits dans les figures 7.a, 7.b, 8.a, 8.b, 9.a et 9.b . Ce qui nous permet d'affirmer que nous venons de décrire tous les triangles de cordes orientées.

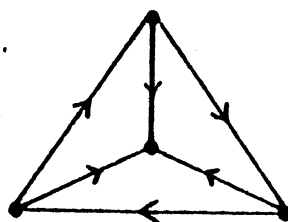
(2) La description des tous les diagrammes orientés à trois cordes et les résultats obtenus sont donnés indépendamment de la manière dont on oriente les cordes. Or, changer l'orientation d'une ou de plusieurs cordes c'est effectuer une opération de retournement. Donc pour tout triangle de cordes orientées K_V et pour tout $X \subseteq V$, $R_X(K_V)$ est aussi un triangle de cordes orientées (du même type que K_V évidemment).

On va donner maintenant deux tournois à quatre sommets qui ne sont pas de cordes orientées :

III.3.2. Proposition. Les tournois P_1 et P_2 représentés ci-dessous ne sont pas de cordes orientées.



(P_1)



(P_2)

Preuve

Désignons par F_1 et F_2 les orientations du graphe complet K_4 à quatre sommets et telles que $(K_4, F_1) = P_1$ et $(K_4, F_2) = P_2$.

On peut vérifier facilement que toute orientation F obtenue à partir de F_1 ou F_2 par retournement de cocycle est telle que (K_4, F) est isomorphe à P_1 ou à P_2 . Donc $\mathfrak{R}(F_1)$ et $\mathfrak{R}(F_2)$ (les classes de F_1 et de F_2 modulo \mathfrak{R} ; voir II.3.5.) ne contiennent pas d'orientations sans circuits ; par suite F_1 et F_2 ne sont pas des orientations géométriques (d'après II.3.1).

C.Q.F.D.

III.3.3. Remarques.

(1) On peut trouver ce même résultat sous une autre forme dans [13].

(2) Tout triangle de P_1 ou de P_2 , étant plein, est de cordes orientées. P_1 et P_2 sont donc minimaux (pour les sous pseudo-tournois) pour la propriété de ne pas être de cordes orientées.

Le théorème suivant résume les propriétés obtenues :

III.3.4. Théorème. Un pseudo-tournoi de cordes orientées $K_V - (G, M, S)$ vérifie les conditions suivantes :

(C_1) K_V ne contient pas comme sous pseudo-tournoi l'un des deux tournois P_1 et P_2 de la proposition III.3.2.

(C_2) Tout sous pseudo-tournoi de K_V ayant trois sommets est de l'un des types suivants :

T_1 - Triangle plein ;

T_2 - Triangle quasi-plein dans lequel soit les signes de l'unique arête vide sont distincts et les deux arêtes pleines sont orientées par M en un anti-chemin, soit les signes de l'arête vide sont identiques et les deux arêtes pleines sont orientées par M en un chemin ;

T_3 - Triangle quasi-vidé dans lequel les deux signes du sommet commun aux deux arêtes vides sont identiques ;

T_4 - Triangle vidé comportant un sommet au plus, pour lequel les deux signes sont distincts.

Preuve

En effet, ceci découle de la remarque III.3.1. (1), de la proposition III.3.2 et du fait qu'un sous-pseudo-tournoi d'un pseudo-tournoi de cordes orientées l'est aussi.

C.Q.F.D.

III.4. Classe \mathcal{E} de pseudo-tournois

Le théorème III.3.4. donne deux conditions nécessaires (C_1) et (C_2) pour qu'un pseudo-tournoi soit de cordes orientées.

L'essentiel de la suite de ce chapitre sera consacré à la démonstration de ce que les conditions (C_1) et (C_2) sont aussi suffisantes pour les pseudo-tournois connexes. Autrement dit, nous allons démontrer que tout pseudo-tournoi connexe vérifiant (C_1) et (C_2) est de cordes orientées.

Nous appellerons classe \mathcal{E} la classe des tous les pseudo-tournois connexes vérifiant (C_1) et (C_2) .

Vu la longueur des démonstrations, nous commençons par présenter les grandes lignes de la preuve :

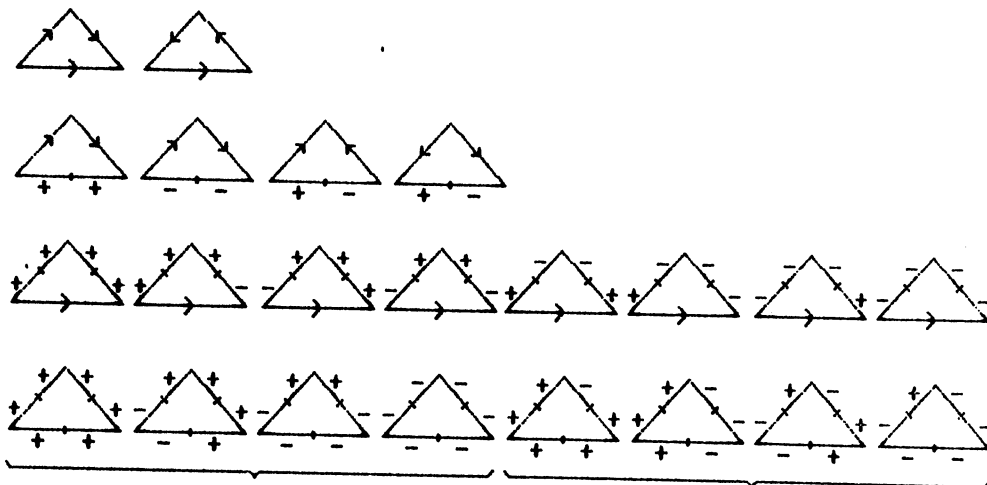
D'après le théorème III.2.4., il est équivalent de démontrer, en choisissant un élément r de V , que si $K'_V = (G, M', S')$ est un pseudo-tournoi de la classe \mathcal{E} , $R_{X(r)}(K'_V)$ est de Fournier.

On démontrera d'abord que si K'_V est de la classe \mathcal{E} , alors tout retournement de K'_V (et donc en particulier $R_{X(r)}(K'_V)$) est aussi de la classe \mathcal{E} . Puis, en étudiant $K_V = R_{X(r)}(K'_V) = (G, M, S)$, on démontrera que :

- (1) K_V est sans arêtes vides du type -- ;
- (2) le graphe orienté (G,M) est sans circuits ;
- (3) On définira une orientation F des arêtes vides de K_V du type ++ remplissant les conditions du théorème III.2.1.

III.4.1. Etude de la classe \mathcal{E} .

Avant de commencer, il est utile de donner la liste de toutes les formes possibles d'un triangle de cordes orientées :



triangles vides correspondants
à un diagramme dont les cordes
sont en série.

triangles vides correspondants
à un diagramme dont les cordes
sont en parallèle.

Figure 10. Tableau illustrant les différentes formes possibles d'un triangle de cordes orientées.

III.4.1.1. Lemme. Soit $K_V = (G,M,S)$ un pseudo-tournoi quelconque et soit $X \subseteq V$. On désigne par $K'_V = (G,M',S')$ le pseudo-tournoi $R_X(K_V)$. Pour tout $W \subseteq V$, le sous-pseudo-tournoi K'_W de K'_V engendré par W n'est autre que $R_{X \cap W}(K_W)$ où K_W désigne le sous-pseudo-tournoi de K_V engendré par W .

Preuve

En effet, posons $K_W = (G_W, M_W, S_W)$ et $K'_W = (G_W, M'_W, S'_W)$. Le problème revient à démontrer que :

(i) M'_W s'obtient à partir de M_W par retournement du cocycle de $X \cap W$ dans (G_W, M_W) .

(ii) S'_W s'obtient à partir de S_W par changement des signes en tout sommet x de $X \cap W$ dans (\bar{G}_W, S_W) .

Soit e une arête de G_W d'extrémités x et y . Alors e a les mêmes orientations dans M_W et M'_W si et seulement si elle a les mêmes orientations dans M et M' , c'est à dire si et seulement si e n'est pas dans le cocycle de X dans G , donc si et seulement si e n'est pas dans le cocycle de $X \cap W$ dans G_W d'où (i). D'autre part, soit e une arête de \bar{G}_W d'extrémités x et y . Il est clair que $S'_W([x,y]) = S_W([x,y])$ si et seulement si $S'([x,y]) = S([x,y])$, donc si et seulement si $x \in X$ (c'est à dire $x \in X \cap W$).

C.Q.F.D.

III.4.1.2. Théorème. Si K_V est un pseudo-tournoi de la classe \mathcal{C} alors pour tout $X \subseteq V$, le pseudo-tournoi $R_X(K_V)$ l'est aussi.

Preuve

En effet, remarquons d'abord que $R_X(K_V)$, ayant même graphe de base que K_V , est connexe.

D'autre part, supposons par l'absurde que $K'_V = R_X(K_V)$ admet un sous pseudo-tournoi K'_W isomorphe à (P_1) ou à (P_2) , alors d'après le lemme III.4.1.1 précédent, K'_W n'est autre que $R_{X \cap W}(K_W)$, ce qui donne que K_W est

isomorphe à (P_1) ou à (P_2) (voir la preuve de la proposition III.3.2). Il y a une contradiction avec la condition (C_1) du théorème II.3.4.

Enfin, soit K'_W un triangle de K'_V ; d'après le lemme précédent on a que $K'_W = R_{X \cap W}(K_W)$; or K_W est un triangle d'un pseudo-tournoi de la classe \mathcal{E} , donc il est de l'un des types T_1, T_2, T_3 ou T_4 car K_V vérifie (C_2) , et d'après la remarque III.3.1.(2), K'_W vérifie les mêmes propriétés que K_W . Par suite, $K'_V = R_X(K'_V)$ est de la classe \mathcal{E} .

C.Q.F.D.

III.4.1.3. Définitions. Soit $K_V = (G, M, S)$ un pseudo-tournoi quelconque et soit x un sommet de K_V .

(1) On appelle x -réduction de K_V , le pseudo-tournoi $R_{X(x)}(K_V)$ avec

$$X(x) = M^-(x)US^{--}(x)US^{+-}(x).$$

(2) Un pseudo-tournoi est dit x -réduit s'il est la x -réduction d'un autre pseudo-tournoi.

Notons que la x -réduction d'un pseudo-tournoi de la classe \mathcal{E} est aussi de la classe \mathcal{E} .

III.4.1.4. Théorème. Soit $K'_V = (G, M', S')$ un pseudo-tournoi quelconque et soit $x \in V$. Dans la x -réduction $K_V = (G, M, S) = R_{X(x)}(K'_V)$ de K'_V on a :

(i) $M^-(x)US^{--}(x)US^{+-}(x) = \emptyset$

(ii) et si, en plus, K'_V est de la classe \mathcal{E} , alors K_V est sans arêtes du type --.

Preuve

(i) Soit y un sommet de K_V adjacent à x dans G .

- Si $(y,x) \in M'$ alors $y \in M'^-(x) \subseteq X_x$; comme $x \notin X(x)$, $\{y,x\} \in \omega_G(X(x))$ et par suite les orientations de $\{x,y\}$ dans M et dans M' sont distinctes. Donc $(x,y) \in M$ et $y \in M^+(x)$.
- Si $(x,y) \in M'$ alors $y \in M'^+(x)$ et donc $y \notin X(x)$. Comme $x \notin X(x)$, $(x,y) \in \omega_G(X_x)$ et donc $(x,y) \in M$, ce qui implique que $y \in M^+(x)$.

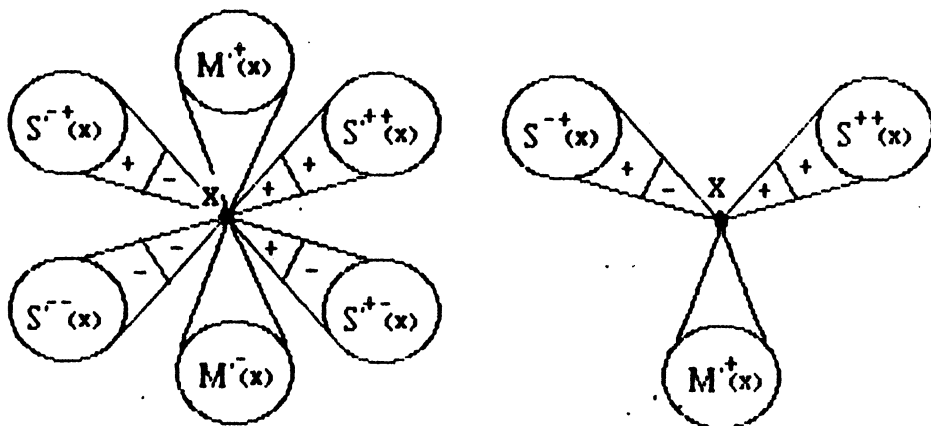
Il en résulte que $M^-(x) = \emptyset$.

Soit y un sommet de K_V adjacent à x dans \bar{G} (donc $\{x,y\}$ est une arête vide de K_V). Comme $x \notin X(x)$, $S(\{x,y\}) = S'(\{x,y\})$

- Si $S'(\{y,x\}) = -$ alors $y \in S'^{--}(x) \cup S'^{+-}(x) \subseteq X(x)$; par suite $S(\{y,x\}) = S'(\{y,x\})$, c'est à dire $S(\{y,x\}) = +$ et donc $y \in S^{-+}(x) \cup S^{++}(x)$.
- Si $S'(\{y,x\}) = +$ alors $y \in S'^{-+}(x) \cup S'^{++}(x)$, donc $y \notin X(x)$, ce qui implique que $S(\{y,x\}) = S'(\{y,x\})$. Donc $S(\{y,x\}) = +$ et $y \in S^{-+}(x) \cup S^{++}(x)$.

Il en résulte que $S'^{--}(x) \cup S'^{+-}(x) = \emptyset$. D'où (i).

(ii) Soit $\{y,z\}$ une arête vide de K_V . Si $y = x$ ou $z = x$, cette arête ne peut pas être du type $--$ puisque $S'^{--}(x) = \emptyset$.



Le pseudo-tournoi $K'_V = (G, M', S')$

Le pseudo-tournoi $K_V = (G, M, S)$

Figure 11. Représentations schématiques des pseudo-tournois K'_V et $K_V = R_{X(x)}(K'_V)$.

Supposons donc que $y \neq x$ et $z \neq x$, et désignons par T le triangle de K_V engendré par $\{x,y,z\}$. Pour ce triangle, trois cas seulement sont possibles :

(1) T est vide : dans ce cas y et z sont dans $S^{-+}(x) \cup S^{++}(x)$, donc $S(\{y,x\}) = S(\{z,x\}) = +$ (figure 12.a) ; si $\{y,z\}$ est du type--, les signes en y seront distincts, ainsi que les signes en z , ce qui contredit la condition $(C_2)(T_4)$. Donc $\{y,z\}$ ne peut pas être du type--.

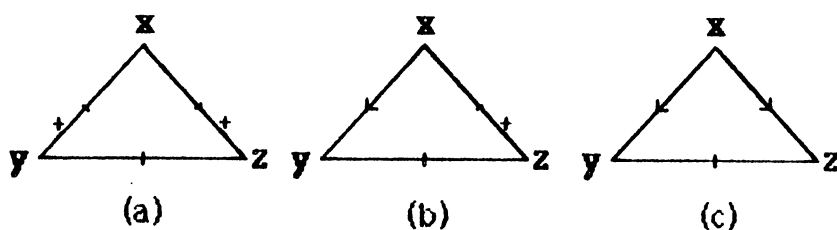


Figure 12.

(2) T est quasi-vide : dans ce cas, l'un des deux sommets, y par exemple, est adjacent à x dans G , et l'autre, z , est adjacent à x dans \bar{G} (figure 12.b).

Donc $S(\{z,x\}) = +$, et comme, d'après $(C_2)(T_3)$, $S(\{z,x\}) = S(\{z,y\})$, alors $S(\{z,y\}) = +$. Par suite $\{y,z\}$ n'est pas du type--.

(3) T est quasi-plein : dans ce cas y et z sont dans $M^+(x)$, donc la chaîne $y x z$ n'est pas un chemin dans (G,M) (figure 12.c). Par suite, d'après

$(C_2)(T_2)$, $\{y,z\}$ ne peut pas être du type--.

C.Q.F.D.

III.4.1.5. Proposition. Soit $K_V = (G,M,S)$ un pseudo-tournoi x -réduit de la classe \mathcal{C} . Dans (G,M) , les cocycles $\omega_G(x)$, $\omega_G(S^{-+}(x))$ et $\omega_G(S^{++}(x))$ sont des cocircuits.

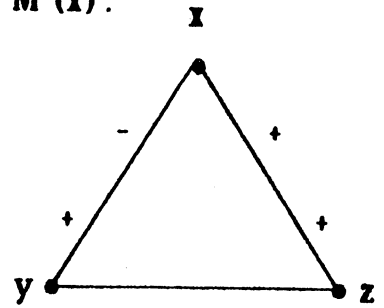
Preuve

D'après III.4.1.4, K_V est sans arêtes vides du type -- et $M^-(x) \cup S^{--}(x) \cup S^{+-}(x) = \emptyset$.

Il en résulte que $\omega_G(x) = \{(x,y) / y \in M^+(x)\}$. Donc $\omega_G(x)$ est bien un cocircuit dans (G,M) . D'autre part, soit $\{y,z\} \in \omega_G(S^-(x))$ avec $y \in S^-(x)$.

Donc $z \neq x$ et $z \notin S^-(x)$. Démontrons alors que $z \in M^+(x)$:

En effet, sinon z serait dans $S^{++}(x)$, ce qui implique que dans le triangle quasi-vide de K_V engendré par $\{x,y,z\}$ les signes en x sont distincts. Il y a une contradiction avec $(C_2)(T_3)$.



Maintenant, considérons le triangle quasi-plein de K_V engendré par $\{x,y,z\}$. Dans ce triangle les signes de l'arête vide $\{x,y\}$ sont distincts, donc d'après $(C_2)(T_2)$ la chaîne $x z y$ est un anti-chemin dans (G,M) . Comme $(x,z) \in M$, $(y,z) \in M$ et ceci pour tout $\{y,z\}$ dans $\omega_G(S^-(x))$ avec $y \in S^-(x)$. Par suite, dans (G,M) le cocycle $\omega_G(S^-(x))$ est un cocircuit.

Enfin, on démontre de la même manière que si $\{y,z\} \in \omega_G(S^{++}(x))$ avec $y \in S^{++}(x)$ alors $z \in M^+(x)$ et $(y,z) \in M$, ce qui implique que, dans (G,M) , le cocycle $\omega_G(S^{++}(x))$ est un cocircuit. C.Q.F.D.

Considérons maintenant un pseudo-tournoi $K_V = (G,M,S)$ de la classe \mathcal{C} avec $G = (V,E)$. Pour tout $x \in V$, on désigne par $\bar{N}(x)$ le voisinage de x dans \bar{G} , et par $G_{\bar{N}(x)}$ le sous graphe de G engendré par $\bar{N}(x)$. On a alors :

III.4.1.6. Proposition. Si y et z sont deux sommets appartenant à une même composante connexe de $G_{\bar{N}(x)}$, alors $S(\{x,y\}) = S(\{x,z\})$.

Preuve

En effet, sinon il existerait deux sommets y et z de $G_{\bar{N}(x)}$, adjacents, tels

que $S(\{x,y\}) \neq S(\{x,y\})$. Le triangle quasi-vide de K_V engendré par $\{x,y,z\}$ ne vérifierait alors pas $(C_2)(T_3)$: Contradiction.

Soit $K_V = (G,M,S)$ un pseudo-tournoi quelconque, et soit $C = x_0 x_1 \dots x_k$ une chaîne (respectivement un cycle) élémentaire de G . On appelle **corde de C** toute arête de K_V ayant ses deux extrémités dans C et qui n'est pas une arête de C . Une corde $\{x_i, x_j\}$ de C est dite **pleine** ou **vide** selon que l'arête $\{x_i, x_j\}$ est pleine ou vide dans K_V . Enfin, C est dite **minimale** dans G , si toute corde de C est une corde vide.

III.4.1.7. Corollaire*. Soit $K_V = (G,M,S)$ un pseudo-tournoi de la classe \mathcal{E} , sans arêtes du type --, et soit $C = x_0 x_1 \dots x_k$ une chaîne minimale dans G avec $k \geq 2$.

(a) Si C est un chemin dans (G,M) , alors toute corde de C est du type ++ dans K_V .

(b) Réciproquement, si les cordes $\{x_0, x_i\}$ ($i = 2, \dots, k$) et les cordes $\{x_k, x_i\}$ ($i = 0, \dots, k-2$) sont toutes du type ++, alors C est un chemin dans (G,M) , et par suite toute corde de C est du type ++.

Preuve

(a) Par récurrence sur k :

(i) Si $k = 2$, alors $C = x_0 x_1 x_2$. Considérons le triangle quasi-plein de K_V

* Ce corollaire ainsi que la proposition précédente seront utilisés fréquemment dans presque tout le reste de ce chapitre.

engendré par $\{x_0, x_1, x_2\}$, la chaîne de G constituée par ses deux arêtes pleines est un chemin dans (G, M) . D'après $(C_2)(T_2)$, les signes de l'arête vide $\{x_0, x_2\}$ sont identiques. Comme K_V est sans arêtes du type --, la seule corde de C est du type ++.

(ii) Supposons la propriété vraie pour $k \leq r-1$, et traitons le cas où $k = r$ ($r \geq 3$). Considérons alors les sous chaînes $C_1 = x_0 \dots x_{k-1}$ et $C_2 = x_1 x_2 \dots x_k$ de C . Comme C est un chemin dans (G, M) , C_1 et C_2 le sont aussi, et comme la longueur de chacune de ces deux chaînes est $k-1 = r-1$, alors d'après l'hypothèse de récurrence, toute corde de C_1 et de C_2 est du type ++. Il en résulte que toutes les cordes de C , à l'exception peut être de $\{x_0, x_k\}$, sont du type ++. D'autre part, d'après $(C_2)(T_3)$ $S(\{x_0, x_k\}) = S(\{x_0, x_{k-1}\})$ et $S(\{x_k, x_0\}) = S(\{x_k, x_1\})$; Or $\{x_0, x_{k-1}\}$ et $\{x_k, x_1\}$ sont du type ++, donc $S(\{x_0, x_k\}) = S(\{x_k, x_0\}) = +$. D'où (a).

(b) Par récurrence sur $k \geq 2$: (i) Si $k = 2$, alors $\{x_0, x_1, x_2\}$ engendre un triangle quasi-plein de K_V dans lequel les signes de l'arête vide sont identiques. D'après $(C_2)(T_2)$, la chaîne C est bien un chemin dans (G, M) .

(ii) Supposons la propriété vraie pour toute chaîne de longueur $\leq k-1$ ($k \geq 3$), et soit $C = x_0 \dots x_k$ une chaîne remplissant les conditions données dans (b). Considérons alors la sous chaîne $C_1 = x_1 x_2 \dots x_k$ de C ; elle est de longueur $k-1$ et toute corde $\{x_k, x_i\}$ ($i = 1, \dots, k-2$) est du type ++. Démontrons alors que toute corde $\{x_i, x_j\}$ ($i=3, \dots, k$) est aussi du type ++. Pour $i = k$, nous savons déjà que $\{x_1, x_k\}$ est du type ++. Si $i \neq k$, alors d'après III.4.1.6 $S(\{x_1, x_i\}) = S(\{x_1, x_k\}) = +$, et $S(\{x_i, x_1\}) = S(\{x_i, x_0\}) = +$. Ainsi

C_1 remplit les conditions de l'hypothèse de récurrence, par suite C_1 est un chemin dans (G,M) . Enfin, la chaîne $x_0 x_1 x_2$ remplit également les conditions de l'hypothèse de récurrence, donc $x_0 x_1 x_2$ est un chemin dans (G,M) , ce qui montre bien que C est un chemin de (G,M) .

C.Q.F.D.

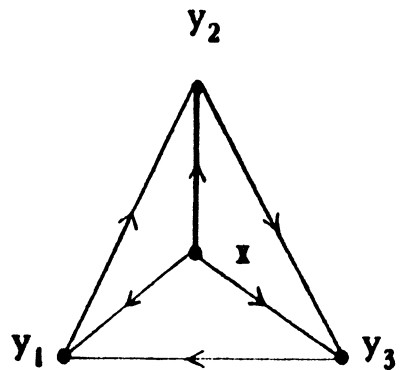
III.4.1.8. Proposition. Soit $K_V = (G,M,S)$ un pseudo-tournoi de la classe \mathcal{E} . Pour tout x dans V , le sous graphe orienté de (G,M) engendré par $M^+(x)$ (respectivement $M^-(x)$) est transitif.

Preuve

Soit $x \in V$ et soient y_1, y_2 et y_3 trois sommets distincts de $M^+(x)$ (respectivement de $M^-(x)$) avec $(y_1, y_2) \in M$ et $(y_2, y_3) \in M$.

(i) l'arête $\{y_1, y_3\}$ est une arête pleine de K_V

car sinon la condition $(C_2)(T_2)$ appliquée au triangle engendré par $\{y_1, y_2, y_3\}$ entraînerait que les signes de $\{y_1, y_3\}$ sont identiques, tandis que l'application de $(C_2)(T_2)$ au triangle engendré par $\{y_1, x, y_3\}$ donnerait que ces mêmes signes sont distincts, ce qui est impossible.



(ii) Si $(y_3, y_1) \in M$, alors le pseudo-tournoi engendré par $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ deviendra (P_1) ou (P_2) (selon que les y_i appartiennent à $M^+(x)$ ou $M^-(x)$ respectivement), ce qui est absurde. Donc $(y_1, y_3) \in M$.

C.Q.F.D.

III.4.1.9. Corollaire. Pour tout sommet x d'un pseudo-tournoi $K_V = (G, M, S)$ de la classe \mathcal{E} , le sous graphe orienté de (G, M) engendré par $M^+(x)$ (respectivement $M^-(x)$) est sans circuits.

Ceci découle immédiatement de III.4.1.8.

III.4.1.10. Théorème. Soit $K_V = (G, M, S)$ un pseudo-tournoi x -réduit. Si K_V est de la classe \mathcal{E} alors (G, M) est sans circuits. (On dira également que K_V est sans circuits).

Preuve

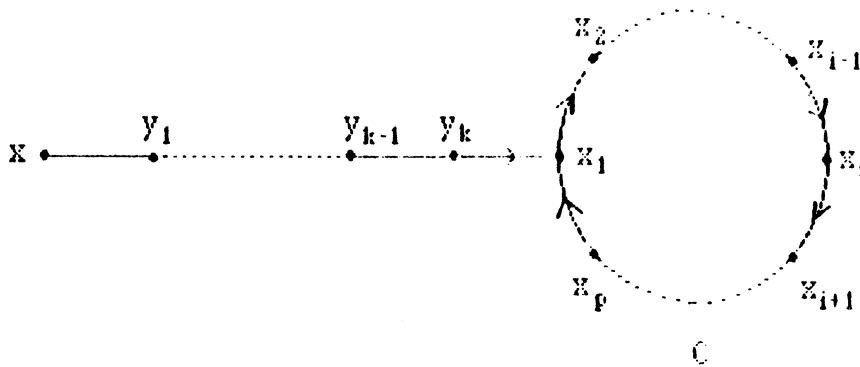
Supposons par l'absurde que (G, M) possède des circuits. D'après III.4.1.5 et le lemme des arcs colorés de Minty ([1], ch. 2), tout circuit C de (G, M) est entièrement contenu, soit dans $S^-(x)$, soit dans $S^{++}(x)$, soit dans $M^+(x)$. D'après III.4.1.9, C ne peut pas être contenu dans $M^+(x)$. Donc C est contenu soit dans $S^-(x)$, soit dans $S^{++}(x)$.

Pour tout circuit minimal (c.à.d. sans cordes pleines) $C = x_1 x_2 \dots x_k x_1$ de (G, M) , on définit le nombre $d(x, C) = \min \{d(x, x_i) / 1 \leq i \leq k\}$, où $d(a, b)$ désigne la longueur d'une plus courte chaîne joignant les deux sommets a et b dans G . Choisissons alors un circuit minimal C tel que $d(x, C)$ soit minimum. D'après les remarques initiales, C ne passe ni par x , ni par un sommet adjacent à x dans G ; autrement dit, $d(x, C) \geq 2$.

Soit $x y_1 y_2 \dots y_k x_1$ une chaîne de G de longueur $d(x, C)$ joignant x à un sommet x_1 de C . On désigne par x_1, x_2, \dots, x_p les sommets de C de manière qu'ils soient rencontrés dans cet ordre en parcourant C à partir de x_1 .

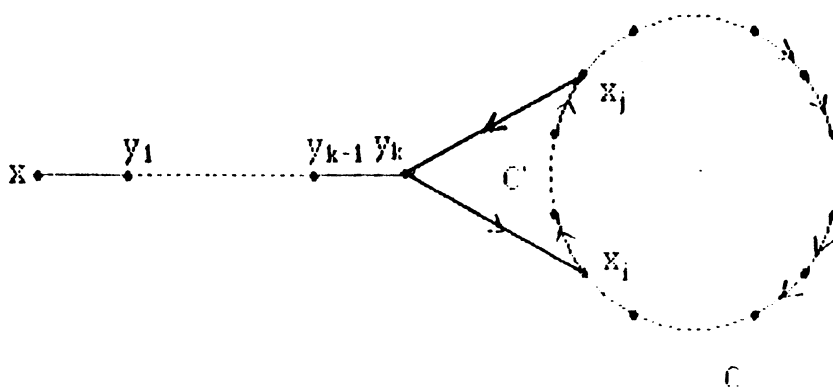
Le choix de C et de la chaîne $x y_1 \dots y_k x_1$ nous permet d'affirmer que :

$\forall i = 1, \dots, k-1, \forall j = 1, \dots, p$, les sommets y_i et x_j ne sont pas adjacents dans G . Enfin, on va supposer que $\{y_k, x_1\}$ est orientée par M de y_k vers x_1 (c'est à dire $(y_k, x_1) \in M$). Cette supposition ne doit pas être considérée comme une restriction, puisqu'on peut faire une démonstration analogue dans le cas où $(x_1, y_k) \in M$, comme on le verra facilement ci dessous.



(i) Nous allons démontrer d'abord que si y_k est adjacent dans G , à un sommet z de C autre que x_1 , alors $(y_k, z) \in M$. En effet, sinon, on peut trouver un sous chemin C' de C d'extrémité initiale x_1 et d'extrémité terminale x_j tels que :

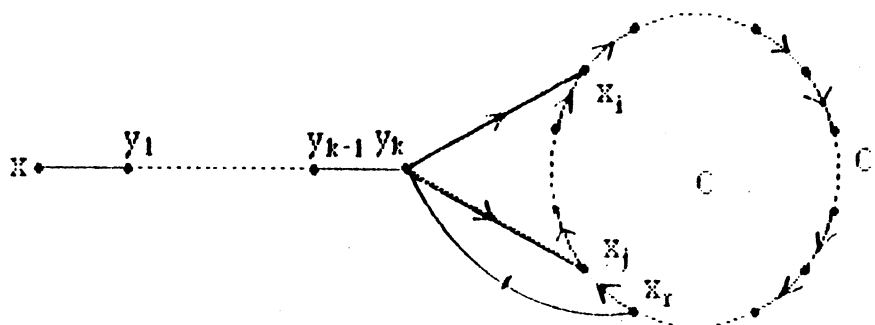
- $(y_k, x_1) \in M$ et $(x_j, y_k) \in M$
- y_k n'est adjacent dans G à aucun sommet de C' autre que x_1 et x_j (voir la figure ci-dessous).



Il est clair que C' engendre, avec le sommet y_k , un circuit minimal C_1 de (G, M) tel que $d(x, C_1) \leq d(x, C) - 1$. Ce qui contredit le choix de C .

(ii) y_k ne peut pas être adjacent dans G à tous les sommets de C car sinon, C serait un circuit contenu dans le sous graphe orienté de (G, M) engendré par $M^+(y_k)$. Contradiction avec III.4.1.9.

(iii) Nous allons démontrer que y_k n'est adjacent dans G qu'au seul sommet x_1 de C . En effet, supposons le cas contraire; d'après (ii) on peut trouver un sous chemin C' de C de longueur $\lambda \geq 2$ dont les deux extrémités sont adjacentes à y_k dans G , et dont aucun sommet intérieur n'est adjacent à y_k dans G (voir figure ci-dessous).

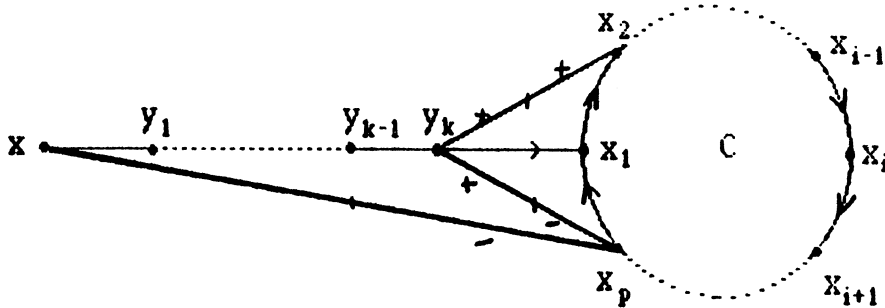


Soit x_i (respectivement x_j) l'extrémité initiale (respectivement terminale) d'un tel chemin et soit x_r le sommet prédécesseur de x_j dans C .

Considérons l'arête vide $\{y_k, x_r\}$ de K_V :

Cette arête est, d'une part, une corde du chemin minimal $y_k x_i \dots x_r$, donc d'après III.4.1.4 et III.4.1.7(a), elle est du type $++$. D'autre part, elle est l'arête vide du triangle quasi-plein engendré par $\{y_k, x_j, x_r\}$. Comme dans ce dernier, la chaîne $y_k x_j x_r$ est un anti-chemin dans (G, M) , alors $\{y_k, x_r\}$ est du type $-+ ((C_2)(T_2))$: contradiction.

(iv) D'après ce qui précède, y_k est adjacent dans G au seul sommet x_1 de C . Comme $y_k x_1 x_2$ est un chemin dans (G, M) , $\{y_k, x_2\}$ est du type++ (d'après $(C_2)(T_2)$ et l'hypothèse que K_V est sans arêtes du type--). Donc $S(y_k, x_2) = +$ par suite $S(y_k, x_p) = +$, puisque $S(y_k, x_p) = S(y_k, x_2)$ d'après III.4.1.6. D'autre part, $y_k x_1 x_p$ est un anti-chemin dans (G, M) , donc $S(x_p, y_k) = S(y_k, x_p)$ d'après $(C_2)(T_2)$.



Il en résulte que $S(x_p, y_k) = -$, et donc $S(x_p, x) = -$ puisque, d'après III.4.1.6, $S(x_p, x) = S(x_p, y_k)$. Il y a une contradiction puisque, comme K_V est x -réduit, $S^-(x) \cup S^+(x) = \emptyset$ d'après III.4.1.4. Donc (G, M) est sans circuits.

C.Q.F.D.

III.5. Orientation des arêtes du type - + dans un pseudo-tournoi.

Soit $K_V = (G, M, S)$ un pseudo-tournoi r -réduit (où $r \in V$), avec $G = (V, E)$. On désigne par I (respectivement par D) l'ensemble des arêtes vides de K_V du type-+ (respectivement du type++). K_V , étant r -réduit, est sans arêtes du type-- ; donc I et D constituent une partition de l'ensemble \bar{E} des arêtes

vides de K_V .

On définit sur le graphe simple (V, I) les deux orientations suivantes :

- L'orientation I_1 définie par : $(x, y) \in I_1 \Leftrightarrow \{x, y\} \in I$ et (x, y) est du type $-+$;
- L'orientation I_2 définie par : $(x, y) \in I_2 \Leftrightarrow \{x, y\} \in I$ et (x, y) est du type $+ -$.

I_1 et I_2 sont donc opposées.

Considérons maintenant le graphe $GI = (V, EUI)$. On définit sur GI les deux orientations :

$$(1) M_1 = MUI_1$$

$$(2) M_2 = MUI_2$$

Remarquons alors que $M_1 \cap M_2 = M$

On dit qu'un graphe simple H est **triangulé** si tout cycle élémentaire de H de longueur $\lambda \geq 4$ possède une corde (c'est à dire une arête de H qui n'est pas une arête du cycle mais dont les deux extrémités sont des sommets du cycle). Nous allons démontrer la proposition suivante :

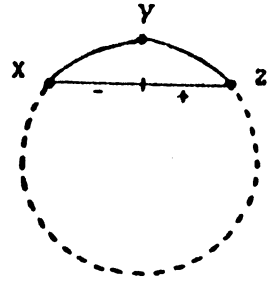
III.5.1. Proposition. Le graphe simple $GI = (V, EUI)$ est un graphe triangulé.

Preuve

Soit C un cycle élémentaire de GI de longueur $\lambda \geq 4$. Donc C est un cycle de K_V ayant ses arêtes dans EUI . Nous allons montrer que C possède une corde dans GI .

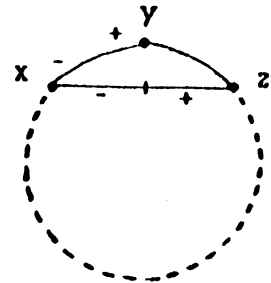
Si C possède une corde pleine, alors cette corde est une arête de GI et le résultat est vrai. Supposons donc que toutes les cordes de C sont vides.

(i) Si toutes les arêtes de C sont dans E , alors C sera un cycle de G . (G,M) étant sans circuits (III.4.1.10), C contiendra une sous chaîne $x y z$ qui est un anti-chemin de (G,M) . Donc d'après $(C_2)(T_2)$, l'arête vide (x,z) du triangle quasi-plein de K_V engendré par $\{x,y,z\}$ est du type $-+$. Par conséquent, C possède une corde appartenant à I .

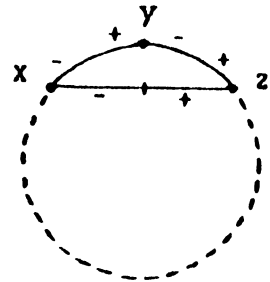


(ii) Si C possède au moins une arête appartenant à I , alors soit $\{x,y\}$ une telle arête avec $S(|x,y|) = -$ (et donc $S(|y,x|) = +$). Considérons l'arête $\{x,z\}$ de C adjacente à (x,y) en y ; trois cas sont possibles :

- $\{y,z\} \in E$: dans ce cas $S(|x,z|) = S(|x,y|) = -$ (d'après $(C_2)(T_3)$). Comme K_V est sans arêtes du type $--$, $S(|z,x|) = +$, donc $\{x,z\} \in I$ et C possède une corde appartenant à I .

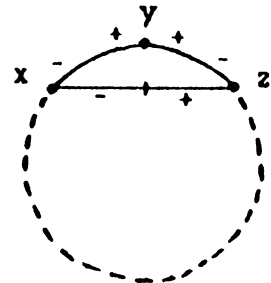


- $\{y,z\} \in I$ et (y,z) est du type $-+$: dans ce cas la condition $(C_2)(T_4)$ appliquée au triangle vide de K_V engendré par $\{x,y,z\}$ nous permet



d'affirmer que le couple (x,z) est du type $-+$. Donc $\{x,z\} \in I$ et C possède une corde appartenant à I .

- $\{y,z\} \in I$ et (y,z) est du type $+-$: dans ce cas, la condition $(C_2)(T_4)$ appliquée au triangle vide engendré par $\{x,y,z\}$ implique que $\{x,z\}$ ne peut être du type $++$.



Comme K_V est sans arêtes vides du type $--$, $\{x,z\}$ est du type $+-$, et C possède une corde appartenant à I .

C.Q.F.D.

III.5.2. Théorème. Les graphes orientés (G, M_1) et (G, M_2) sont sans circuits.

Preuve

Comme G est triangulé, il suffit de démontrer que tout cycle de longueur 3 de G est orienté transitivement par M_1 et M_2 . Or, un cycle de longueur 3 de K_V ayant ses arêtes dans EUI a l'une des formes suivantes (d'après le tableau de la figure 10) :



On remarque d'abord que, d'après le théorème III.4.1.10, la première forme est exclue (circuit de longueur 3). Pour aboutir au résultat final, il nous suffit de vérifier, en remplaçant les marquages par les orientations définies par I_1 et I_2 respectivement, que chaque forme donne un cycle à trois sommets, orienté transitivement par M_1 et par M_2 .

C.Q.F.D.

III.6. Chaînes d'orientation

Considérons un pseudo-tournoi r -réduit $K_V = (G, M, S)$ avec $G = (V, E)$. Les notations utilisées ici sont celles définies au début de la section III.5.

Soit $\{x, y\}$ une arête vide de K_V du type $++$ (c'est à dire $\{x, y\} \in D$). On appelle **chaîne d'orientation de $\{x, y\}$** , toute chaîne minimale de (G, M) joignant x et y . De même, une chaîne minimale de (G, M) de longueur ≥ 2 est dite **chaîne d'orientation** si la corde vide joignant ses extrémités dans K_V est une corde du type $++$.

III.6.1. Proposition. Soit $C = x_0 x_1 \dots x_k$ une chaîne d'orientation de l'arête vide du type $++ \{x_0, x_k\}$. Si C n'est pas un chemin de (G, M) alors :

(i) $k \geq 3$

(ii) il existe au moins un sommet x_i de C tel que :

$$S((x_i, x_0)) = - \text{ (avec } i \in \{2, \dots, k-1\}) \text{ ou } S((x_i, x_k)) = - \text{ (avec } i \in \{1, \dots, k-2\}).$$

Preuve

(i) Si $k = 2$, alors $\{x_0, x_1, x_2\}$ engendre un triangle quasi-plein dans lequel les signes de l'arête vide sont identiques, ce qui implique, d'après $(C_2)(T_2)$, que C est un chemin. Il y a une contradiction avec l'hypothèse. Donc $k \geq 3$.

(ii) Supposons que $\forall i = 2, \dots, k-1, \forall j = 1, \dots, k-2, S((x_i, x_0)) = S((x_j, x_k)) = +$. D'après III.4.1.6, $\forall i = 2, \dots, k-1, S((x_0, x_i)) = S((x_0, x_k))$ et $\forall j = 1, \dots, k-2, S((x_k, x_j)) = S((x_k, x_0))$. Comme $\{x_0, x_k\}$ est du type $++$, $\{x_0, x_i\}$ et $\{x_k, x_j\}$ le sont aussi, pour $i = 2, \dots, k-1$ et pour $j = 1, \dots, k-2$. Ceci implique, d'après III.4.1.7, que C est un chemin dans (G, M) : il y a une contradiction avec l'hypothèse.

C.Q.F.D.

Soit $\{a, b\}$ une arête vide du type $++$ de K_V , et soit $C = a x_1 x_2 \dots x_k b$ une chaîne d'orientation de $\{a, b\}$.

On définit le **sommet extrémal de C relativement à a** comme étant

- le sommet x_i de C le plus proche de b tel que $S((x_i, a)) = -$, dans le cas où un tel sommet existe.

- le sommet a lui-même dans le cas contraire.

Le **sommet extrémal de C relativement à b** est défini de la même manière.

Un **sommet extrémal de C relativement à l'une de ses extrémités** sera dit

sommet extrémal propre s'il est distinct de cette extrémité, et **trivial** dans le cas contraire.

III.6.2. Remarque. Soit $C = x_0 x_1 \dots x_k$ une chaîne d'orientation d'une arête vide $\{x_0, x_k\}$ du type ++ de K_V .

(1) Il est clair que, d'après III.4.1.6, $S(\{x_0, x_i\}) = S(\{x_k, x_j\}) = +$ et ceci pour $i = 2, \dots, k$ et pour $j = 0, \dots, k-2$.

(2) Les deux sommets extrémaux de C sont triviaux si et seulement si C est un chemin dans (G, M) .

En effet, si les sommets extrémaux de C sont triviaux, toute corde de C de la forme $\{x_0, x_i\}$ ou $\{x_k, x_j\}$ est du type ++, ce qui donne d'après III.4.1.7 (b) que C est un chemin. La réciproque résulte de III.4.1.7 (a) et de la définition d'un sommet extrémal.

(3) Si le sommet extrémal de C relativement à x_0 est propre, soit x_i ce sommet, alors $\{x_0, x_i\}$ est du type +-, et pour tout $j > i$, $\{x_0, x_j\}$ est du type ++.

(4) Si le sommet extrémal de C relativement à x_0 est trivial, alors toute corde de C de la forme $\{x_0, x_j\}$ est du type ++.

(5) Si x_i et x_j sont les sommets extrémaux de C relativement à x_0 et x_k respectivement, alors $i \leq k-1$ et $j \geq 1$

Exemple.

La figure 13.b représente une chaîne d'orientation C définie à partir du diagramme orienté de la figure 13.a. Les sommets extrémaux de C

relativement à x_0 et x_6 sont, respectivement, x_4 et x_6 .

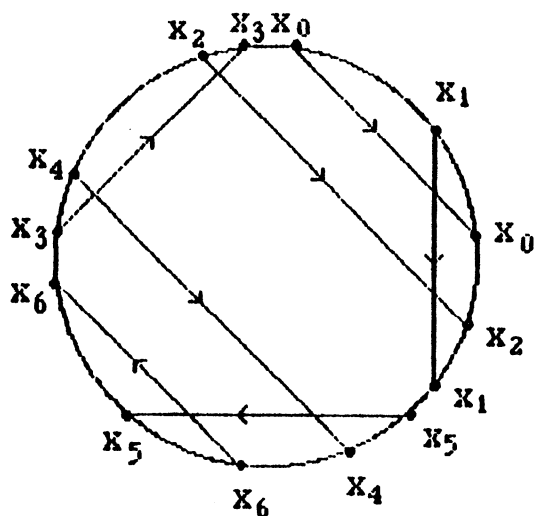


Figure 13.a.

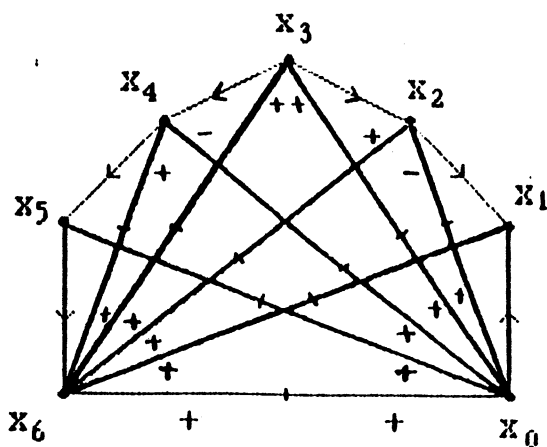


Figure 13.b.

III.6.3. Proposition. Soit $C = x_0 x_1 \dots x_k$ une chaîne d'orientation de l'arête vide $\{x_0, x_k\}$ du type ++, et soient x_i et x_j les sommets extrémaux de C relativement à x_0 et x_k respectivement.

(1) Si l'un des deux sommets extrémaux, au moins, est trivial, alors $i < j$ et la sous chaîne $C_{i,j} = x_i x_{i+1} \dots x_j$ de C est un chemin dans (G, M) .

(2) Si les deux sommets extrémaux x_i et x_j sont propres alors :

(α) $j > i - 1$

(β) les arêtes pleines $\{x_i, x_{i+1}\}$ et $\{x_j, x_{j-1}\}$ de C sont orientées dans (G, M)

de manière que :

soit $(x_i, x_{i+1}) \in M$ et $(x_{j-1}, x_j) \in M$;

soit $(x_{i+1}, x_i) \in M$ et $(x_j, x_{j-1}) \in M$.

Preuve

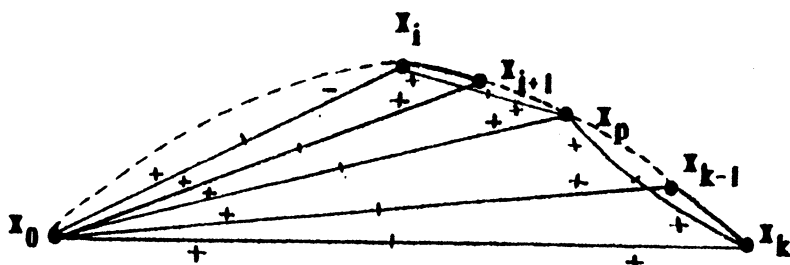
(1) Supposons par exemple que x_j est trivial, donc $j = k$, il faut démontrer

que la chaîne $x_i x_{i+1} \dots x_k$ est un chemin dans (G,M) .

- Si $i = k-1$, la sous-chaîne est de longueur 1 ; c'est donc un chemin.
- Si $i = 0$, les deux sommets extrémaux de C sont triviaux et C est un chemin dans (G,M) d'après la remarque (2) dans III.6.2.
- Supposons donc que $1 \leq i \leq k-2$, et considérons $C_{i,k} = x_i \dots x_k$.

Comme le sommet extrémal de C relativement à x_k est x_k , alors toute corde de C de la forme $\{x_k, x_p\}$ est du type ++ (III.6.2 (4)) donc, en particulier, ceci est vrai pour $p = i, \dots, k-2$.

D'autre part, soit $\{x_i, x_p\}$ une corde de $C_{i,k}$. $S(\{x_i, x_p\}) = S(\{x_i, x_k\})$ d'après III.4.1.6, comme $\{x_k, x_i\}$ est du type ++, $S(\{x_i, x_p\}) = +$.



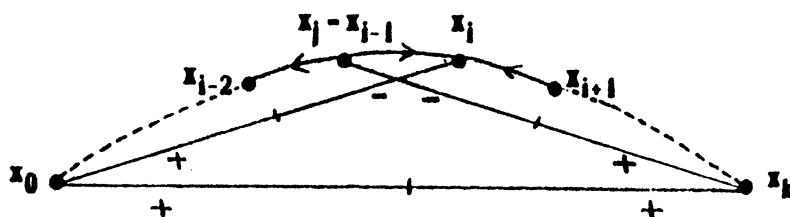
De même $S(\{x_p, x_i\}) = S(\{x_p, x_0\})$ d'après III.4.1.6. Comme $p > i$ alors d'après III.6.2 (3), $\{x_0, x_p\}$ est du type ++, et donc $S(\{x_p, x_i\}) = +$. Il en résulte que $\{x_i, x_p\}$ est du type ++. Ainsi, d'après III.4.1.7 (b), $C_{i,k}$ est bien un chemin de (G,M) .

(2) (α) Si $j < i-1$, $\{x_i, x_j\}$ sera une arête vide de K_V . On aura alors : $S(\{x_i, x_j\}) = S(\{x_i, x_0\})$ et $S(\{x_j, x_i\}) = S(\{x_j, x_k\})$ (proposition III.4.1.6). Comme x_i et x_j sont des sommets extrémaux propres de C relativement à x_0 et x_k respectivement, $S(\{x_i, x_0\}) = S(\{x_j, x_k\}) = -$. Il en résulte que $\{x_i, x_j\}$ est du

type-- : contradiction, puisque K_V est sans arêtes du type --. Donc $j \neq i - 1$.

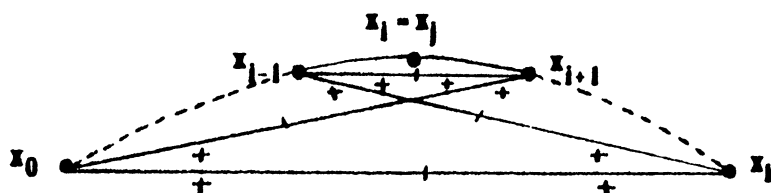
(β)

• Si $j = i - 1$. D'après III.4.1.6, $S(x_{i-1}, x_{i+1}|) = S(x_{i-1}, x_k|) = -$; de même, $S(x_i, x_{i-2}|) = S(x_i, x_0|) = -$.



Comme K_V est sans arêtes du type --, $S(x_{i+1}, x_{i-1}|) = +$, ainsi que $S(x_{i-2}, x_i|)$. Donc les arêtes vides $\{x_{i-2}, x_i\}$ et $\{x_{i-1}, x_{i+1}\}$ sont du type +; ce qui donne, d'après $(C_2)(T_2)$ appliquée aux triangles de K_V engendrés par $\{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}$ et $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ respectivement, que les chaînes $x_{i-2} x_{i-1} x_i$ et $x_{i-1} x_i x_{i+1}$ sont des anti-chemins dans (G, M) . La propriété (β) est donc vérifiée.

• Si $i = j$. $S(x_{i-1}, x_{i+1}|) = S(x_{i-1}, x_k|)$ et $S(x_{i+1}, x_i|) = S(x_{i+1}, x_0|)$, d'après III.4.1.6.

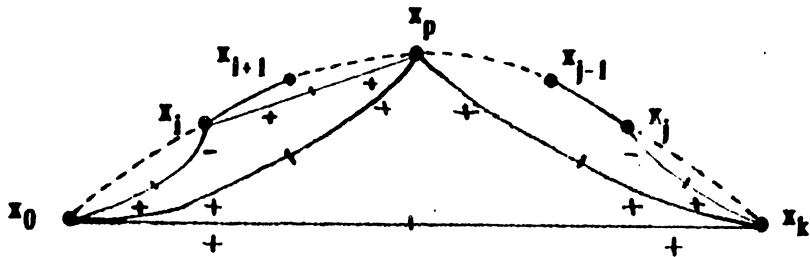


D'après III.6.2 (3), on a que $\{x_{i+1}, x_0\}$ et $\{x_{i+1}, x_k\}$ sont du type ++. Il en résulte que l'arête vide $\{x_{i-1}, x_{i+1}\}$ est du type ++, et donc, d'après $(C_2)(T_2)$,

la chaîne $x_{i-1} x_i x_{i+1}$ est un chemin dans (G,M) . La propriété (β) est donc vérifiée.

- Si $j = i + 1$. $\{x_i, x_{i+1}\} = \{x_{j-1}, x_j\}$ et (β) est donc vérifiée.

- Si $j > i + 1$. Considérons la sous chaîne $C_{i,j} = x_i x_{i+1} \dots x_{j-1} x_j$ de la chaîne C .



Pour conclure, nous allons démontrer que $C_{i,j}$ est un chemin dans (G,M) . Soit $\{x_i, x_p\}$ une corde de $C_{i,j}$. D'après III.4.1.6, $S(|x_p, x_i|) = S(|x_p, x_0|)$, et $S(|x_i, x_p|) = S(|x_i, x_k|)$. Comme $i > j$, d'après III.6.2 (3), $\{x_i, x_k\}$ et $\{x_j, x_0\}$ sont du type $++$. Donc $S(|x_p, x_i|) = S(|x_i, x_p|) = +$, et $\{x_i, x_p\}$ est du type $++$. On démontre de la même manière que toute corde de $C_{i,j}$ de la forme $\{x_i, x_p\}$ est du type $++$, donc $C_{i,j}$ est un chemin de (G,M) d'après III.4.1.7. Ce qui achève la démonstration de la propriété (β) .

III.6.4. Corollaire. Soit $C = x_0 \dots x_k$ une chaîne d'orientation de l'arête vide $\{x_0, x_k\}$ du type $++$, et soient x_i et x_j les deux sommets extrémaux de C relativement à x_0 et x_k respectivement.

Les arêtes pleines $\{x_i, x_{i+1}\}$ et $\{x_j, x_{j-1}\}$ de C sont orientées dans (G,M) de manière que :

soit $(x_i, x_{i+1}) \in M$ et $(x_{j-1}, x_j) \in M$, soit $(x_{i+1}, x_i) \in M$ et $(x_j, x_{j-1}) \in M$.

Preuve

En effet, la propriété est vraie si x_i et x_j sont propres. (proposition III.6.3 (2) (β)).

Si x_i ou x_j est trivial, alors d'après III.6.3 (α), $i < j$ et la sous chaîne $x_i x_{i+1} \dots x_{j-1} x_j$ est un chemin dans (G,M) .

Par suite $(x_i, x_{i+1}) \in M \Leftrightarrow (x_{j-1}, x_j) \in M$.

C.Q.F.D.

Avec les notations de III.6.4, nous venons de démontrer que : soit les couples (x_i, x_{i+1}) et (x_{j-1}, x_j) sont tous les deux dans M , soit leurs opposés (x_{i+1}, x_i) et (x_j, x_{j-1}) le sont ; dans le premier cas, les arêtes $\{x_i, x_{i+1}\}$ et $\{x_{j-1}, x_j\}$ sont orientées dans (G,M) dans le sens du parcours de C de x_0 vers x_k , et dans le deuxième cas, ces deux arêtes sont orientées dans (G,M) dans le sens de parcours de C de x_k vers x_0 . On dit alors que $\{x_0, x_k\}$ est **C-orientable** : de x_0 vers x_k dans le premier cas (c'est à dire si $(x_i, x_{i+1}) \in M$), et de x_k vers x_0 dans le second cas.

La question qui se pose maintenant est la suivante : si $\{x_0, x_k\}$ possède une autre chaîne d'orientation C' , et si $\{x_0, x_k\}$ est C-orientable de x_0 vers x_k , est-elle C'-orientable de x_0 vers x_k également ? Avant de répondre à cette question, nous allons donner le lemme suivant :

III.6.5. Lemme. Soit $K_V = (G,M,S)$ un pseudo-tournoi de la classe \mathcal{E} , sans circuits et sans arêtes du type --, et soit $x \in V$.

(a) Si $C = y_1 y_2 \dots y_n y_1$ est un cycle minimal de (G, M) dans lequel :

- $x \neq y_i$ et $\{x, y_i\}$ est une arête vide, $\forall i = 1, \dots, n$.
- (x, y_1) est du type +-.
- (x, y_i) est du type ++ $\forall i = 2, \dots, n$.

alors la chaîne $y_n y_1 y_2$ est un anti-chemin dans (G, M) .

(b) Si $C = y_1 y_2 \dots y_n y_1$ est un cycle minimal de (G, M) dans lequel :

- $x \neq y_i$ et $\{x, y_i\}$ est une arête vide, $\forall i = 1, \dots, n$.
- (x, y_1) et (x, y_n) sont du type +-.
- (x, y_i) est du type ++ $\forall i = 2, \dots, n-1$.

alors, soit $(y_1, y_2) \in M$ et $(y_n, y_{n-1}) \in M$, soit $(y_2, y_1) \in M$ et $(y_{n-1}, y_n) \in M$.

(c) Même énoncé que (b), en remplaçant le cycle $C = y_1 y_2 \dots y_n y_1$ par une chaîne minimale $C = y_1 y_2 \dots y_n$ de longueur ≥ 2 .

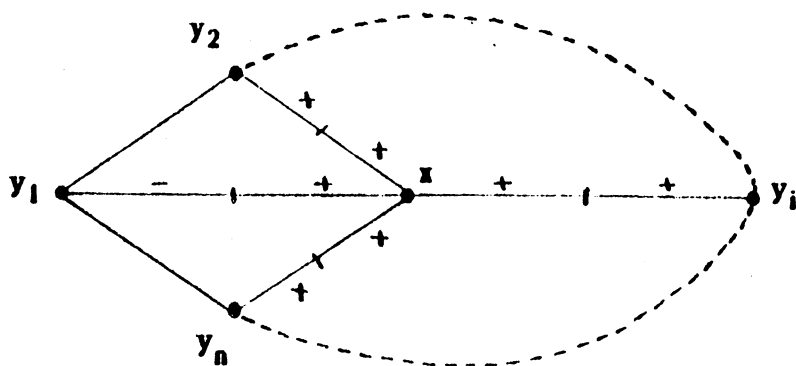
Preuve

(a) On va supposer par l'absurde que $y_n y_1 y_2$ est un chemin dans (G, M) .

Démontrons tout d'abord que, dans ce cas, la sous chaîne $y_2 y_3 \dots y_n$ est un chemin dans (G, M) .

- Si $n = 3$, le résultat est trivialement vrai.
- Supposons donc que $n \geq 4$, et soit y_i un sommet de C avec $2 < i < n$.

Si $S(\{y_i, y_n\}) = -$, les signes au sommet y_i dans le triangle vide de K_V engendré par $\{x, y_1, y_i\}$ sont distincts, ce qui implique, d'après $(C_2)(T_4)$, que les signes au sommet y_i dans ce même triangle sont identiques.

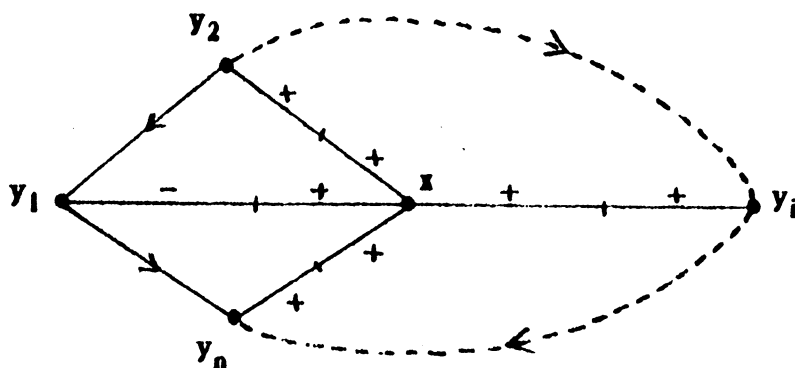


Or $S(\{y_1, x\}) = -$, donc $S(\{y_1, y_i\}) = -$ et $\{y_1, y_i\}$ est du type $--$: contradiction.

Donc $S(\{y_i, y_1\}) = +$, et ceci pour tout $i = 3, \dots, n-1$.

D'autre part, comme on a supposé que $y_n y_1 y_2$ est un chemin dans (G, M) , d'après $(C_2)(T_2)$ les signes de l'arête vide $\{y_n, y_2\}$ sont identiques, et comme K_V est sans arêtes du type $--$, $\{y_n, y_2\}$ est alors du type $++$.

Considérons maintenant une corde de la forme $\{y_2, y_i\}$ (respectivement $\{y_n, y_i\}$) de la chaîne $y_2 y_3 \dots y_n$. D'après III.4.1.6, $S(\{y_i, y_2\}) = S(\{y_i, y_1\}) = +$ (respectivement $S(\{y_n, y_i\}) = S(\{y_n, y_2\}) = +$). Il en résulte que $\{y_i, y_2\}$ (respectivement $\{y_i, y_n\}$) est du type $++$, et donc d'après III.4.1.7 (b), la chaîne $y_2 \dots y_n$ est bien un chemin dans (G, M) . On a donc deux chemins joignant y_2 et y_n : $y_2 y_1 y_n$ et $y_2 y_3 \dots y_{n-1}$. Comme K_V est sans circuits, ces deux chemins sont orientés soit tous les deux de y_2 vers y_n , soit tous les deux de y_n vers y_2 . Considérons alors la x -réduction $R_{X(x)}(K_V)$ de K_V .

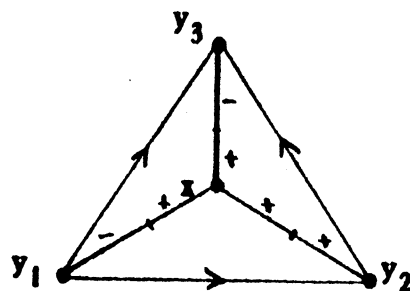


Comme $y_1 \in S^{+}(\mathbf{x}) \subset X(\mathbf{x})$, et comme, $\forall i = 2, \dots, n$, $y_i \notin X(\mathbf{x})$ (puisque $y_i \in S^{+}(\mathbf{x}) \not\subset X(\mathbf{x})$), l'orientation des arêtes $\{y_1, y_2\}$ et $\{y_1, y_n\}$ sera retournée dans $R_{X(\mathbf{x})}(K_V)$, tandis que celle de toute arête $\{y_i, y_{i+1}\}$ ($i = 2, \dots, n-1$) reste inchangée. Donc le cycle C sera orienté en circuit dans $R_{X(\mathbf{x})}(K_V)$, ce qui contredit le théorème III.4.1.10. Donc la chaîne $y_2 y_1 y_n$ est orientée en un anti-chemin dans (G, M) .

(b) Supposons par l'absurde que $(y_1, y_2) \in M$ et $(y_{n-1}, y_n) \in M$.

(le cas $(y_2, y_1) \in M$ et $(y_n, y_{n-1}) \in M$ est identique à la numérotation près des sommets).

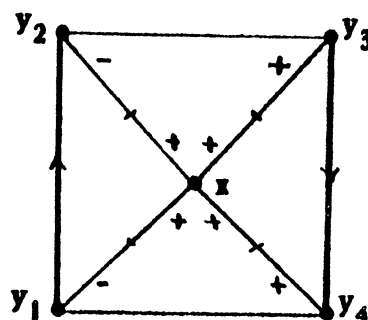
- Si $n = 3$, alors C est un triangle plein de K_V . Comme K_V est sans circuits, et comme $(y_1, y_2) \in M$ et $(y_2, y_3) \in M$, alors (y_1, y_3) appartient à M . Considérons alors



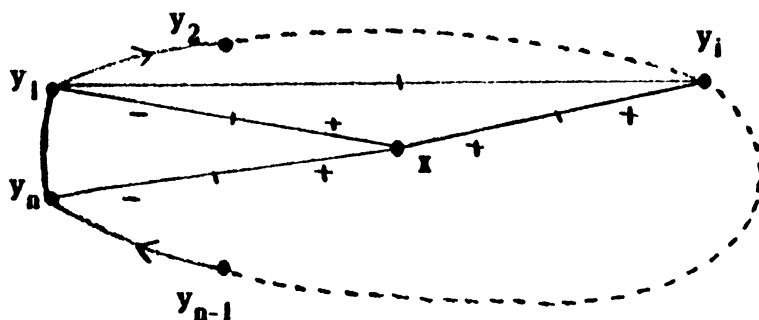
la \mathbf{x} -réduction $R_{X(\mathbf{x})}(K_V)$ de K_V . Comme $y_1 \in S^{+}(\mathbf{x})$, $y_3 \in S^{+}(\mathbf{x})$ et $y_2 \in S^{+}(\mathbf{x})$, alors $y_1, y_3 \in X(\mathbf{x})$ et $y_2 \notin X(\mathbf{x})$, ce qui montre que l'orientation des arêtes $\{y_1, y_2\}$ et $\{y_3, y_2\}$ sera retournée, tandis que celle de $\{y_1, y_3\}$ restera inchangée dans $R_{X(\mathbf{x})}(K_V)$. Donc C sera un circuit dans $R_{X(\mathbf{x})}(K_V)$, ce qui contredit III.4.1.10.

- Supposons donc $n \geq 4$, et démontrons que la chaîne $y_2 y_3 \dots y_{n-1}$ est un chemin dans (G, M) .

Si $n = 4$, alors cette chaîne est une arête, et donc c'est un chemin dans (G, M) .



Si $n \geq 5$, alors pour $i = 3, \dots, n-1$ (respectivement pour $i = 2, \dots, n-2$) le

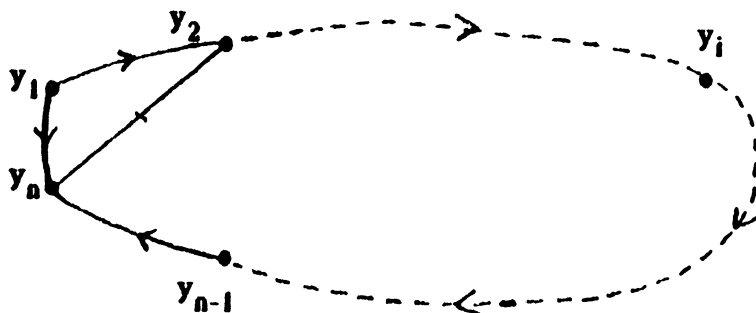


triangle de K_V engendré par $\{x, y_1, y_i\}$ (respectivement par $\{x, y_n, y_i\}$) est un triangle vide dans lequel les signes en y_i ne peuvent pas être distincts (sinon les signes en y_1 (respectivement en y_n) seraient identiques d'après $(C_2)(T_4)$ et on obtiendrait une arête vide du type --). Donc $S(\{y_i, y_1\}) = +$ (respectivement $S(\{y_i, y_n\}) = +$).

Considérons maintenant une corde de la chaîne $y_2 y_3 \dots y_{n-1}$ de la forme $\{y_2, y_i\}$ (respectivement $\{y_{n-1}, y_i\}$). D'après III.4.1.6, $S(\{y_i, y_2\}) = S(\{y_i, y_1\}) = +$ (respectivement $S(\{y_i, y_{n-1}\}) = S(\{y_i, y_n\}) = +$) et $S(\{y_2, y_i\}) = S(\{y_2, y_n\}) = +$ (respectivement $S(\{y_{n-1}, y_i\}) = S(\{y_{n-1}, y_1\}) = +$). Il en résulte que $\{y_2, y_i\}$ (respectivement $\{y_{n-1}, y_i\}$) est du type ++, et donc $y_2 y_3 \dots y_{n-1}$ est un chemin de (G, M) d'après III.4.1.7.

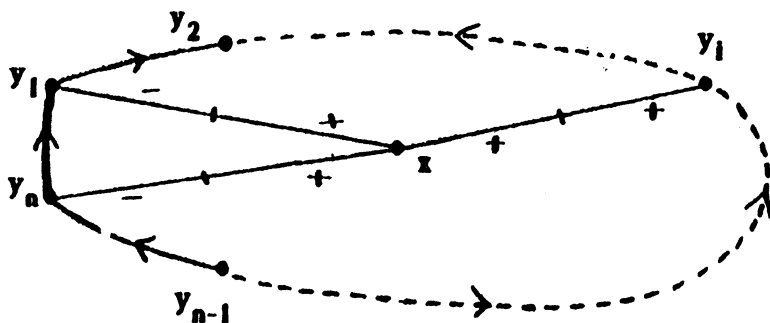
Maintenant, deux sont possibles :

(i) Le chemin $y_2 \dots y_{n-1}$ est orienté dans (G, M) de y_2 vers y_{n-1} .



Comme on a supposé que $(y_1, y_2) \in M$, et $(y_{n-1}, y_n) \in M$, la chaîne $y_1 y_2 \dots y_{n-1} y_n$ est un chemin dans (G, M) orienté de y_1 vers y_n . Comme K_V est sans circuits, $(y_1, y_n) \in M$. Mais dans ce cas, en appliquant $(C_2)(T_2)$ au triangle quasi-plein engendré par $\{y_n, y_1, y_2\}$, on obtient que les signes de l'arête vide $\{y_2, y_n\}$ sont distincts. Mais comme $\{y_2, y_n\}$ est une corde du chemin minimal $y_2 \dots y_n$, d'après III.4.1.7 (a), cette arête est du type $++$, ce qui est impossible.

(ii) Si $y_2 y_3 \dots y_{n-1}$ est orientée dans (G, M) de y_{n-1} vers y_2 , considérons $X(x) = M^-(x) \cup S^{--}(x) \cup S^{+-}(x)$:

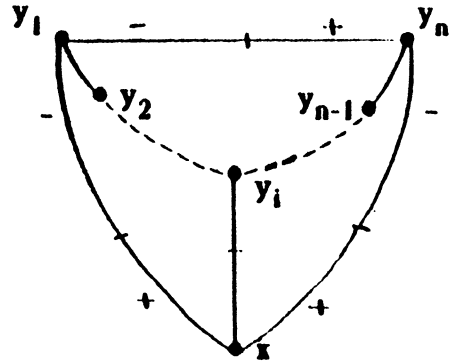


$y_i \in S^{++}(x)$ pour $i = 2, \dots, n-1$, et y_1 et $y_n \in S^{+-}(x) \subseteq X(x)$, ce qui montre que l'orientation de $\{y_1, y_2\}$ et de $\{y_n, y_{n-1}\}$ sera retournée en passant de K_V à sa x -réduction $R_{X(x)}(K_V)$, alors que l'orientation des autres arêtes de C ne sera pas retournée. Comme $R_{X(x)}(K_V)$ est sans circuits (d'après le théorème III.4.1.10) (y_n, y_1) doit être dans M , et en répétant le même raisonnement que dans (i), on démontre qu'il est impossible de marquer l'arête vide $\{y_n, y_2\}$ dans $R_{X(x)}(K_V)$. Ceci complète la démonstration de (b).

(c) Considérons, dans ce cas, le triangle vide engendré par $\{x, y_1, y_n\}$. Comme $S(y_1, x) = S(y_n, x) = -$, et comme K_V est sans arêtes du type $--$, les signes

de l'arête vide $\{y_1, y_n\}$ ne peuvent être que distincts (sinon $\{y_1, y_n\}$ serait du type ++ ce qui contredit $(C_2)(T_4)$). Supposons alors que $S(\{y_1, y_n\}) = -$ et $S(\{y_n, y_1\}) = +$ (le cas $S(\{y_1, y_n\}) = +$ et $S(\{y_n, y_1\}) = -$ est identique à la numérotation près des sommets).

Nous allons démontrer d'abord que la chaîne $y_2 \dots y_n$ est un chemin dans (G, M) .



- Si $n = 3$, la propriété est trivialement vraie.
- Supposons $n \geq 4$, et considérons une corde de la chaîne $y_2 \dots y_n$ de la forme $\{y_2, y_i\}$:

d'après III.4.1.6, $S(\{y_i, y_2\}) = S(\{y_i, y_1\})$. Or $S(\{y_i, y_1\}) = +$, car, d'après III.4.1.6, $S(\{y_1, y_i\}) = S(\{y_1, y_n\}) = -$ et K_V est sans arêtes du type --. Donc $S(\{y_i, y_2\}) = +$. D'autre part, d'après III.4.1.6, $S(\{y_2, y_1\}) = S(\{y_2, y_n\})$. Or, dans le triangle vide engendré par $\{y_n, y_2, x\}$, les signes en y_n sont distincts puisque $S(\{y_n, x\}) = -$ par hypothèse et $S(\{y_n, y_2\}) = S(\{y_n, y_2\}) = +$ (d'après $(C_2)(T_3)$ appliquée au triangle engendré par $\{y_n, y_1, y_2\}$); donc les signes en y_2 sont identiques dans ce triangle (d'après $(C_2)(T_4)$), ce qui donne que $S(\{y_2, y_n\}) = S(\{y_2, x\}) = +$. Il en résulte que $S(\{y_2, y_i\}) = +$, et la corde $\{y_2, y_i\}$ est du type ++.

Considérons maintenant une corde de $y_2 y_3 \dots y_n$ de la forme $\{y_i, y_n\}$: $S(\{y_n, y_i\}) = +$ (d'après III.4.1.6). D'autre part, comme les signes au sommet y_n dans le triangle vide engendré par $\{x, y_n, y_i\}$ sont distincts, alors les signes en y_i dans ce même triangle sont identiques (d'après $(C_2)(T_4)$), par suite $S(\{y_i, y_n\}) = S(\{y_i, x\}) = +$, et la corde $\{y_n, y_i\}$ est du type ++.

Nous venons donc de démontrer que $y_2 y_3 \dots y_n$ est un chemin dans

(G,M) (d'après III.4.1.7). Toujours d'après III.4.1.7, et puisque $\{y_1, y_n\}$ est du type $+-$, $y_1 y_2 \dots y_n$ n'est pas un chemin dans (G,M). Le résultat découle immédiatement de ces deux propriétés. C.Q.F.D.

Remarque. On ne peut établir (a) et (b) en utilisant seulement les conditions (C_1) et (C_2) (voir par exemple le cas (b), $n = 3$). On utilise en fait implicitement la propriété de connexité du graphe G par le biais du théorème III.4.1.10, pour lequel cette propriété est essentielle.

Soient maintenant $\{a,b\}$ une arête vide du type $++$ de K_V . $C = x_0 x_1 \dots x_n$ et $C' = y_0 y_1 \dots y_m$ deux chaînes d'orientation distinctes de $\{a,b\}$ avec $x_0 = y_0 = a$ et $x_n = y_m = b$. On désigne par x_i et x_j (respectivement y_p et y_q) les sommets extrémaux de C (respectivement de C') relativement à a et à b respectivement. Nous allons démontrer le théorème suivant :

III.6.6. Théorème. $\{a,b\}$ est C- orientable de a vers b si et seulement si elle est C'- orientable de a vers b.

Preuve

On vérifie d'abord aisément que l'on est dans l'un des trois cas suivants :

Cas (1) : Les sommets extrémaux de C et C' relativement à un même sommet, a par exemple, sont propres (donc $x_i \neq a$ et $y_p \neq a$).

Cas (2) : Chacune des deux chaînes possède au moins un sommet extrémal trivial, et l'on n'est pas dans le cas (1).

Cas (3) : Les deux sommets extrémaux de l'une au moins des deux chaînes, C' par exemple, sont propres (donc $y_p \neq a$ et $y_q \neq b$), et l'on n'est pas dans le cas (1).

Pour conclure, il nous suffit de traiter successivement les trois cas précédents.

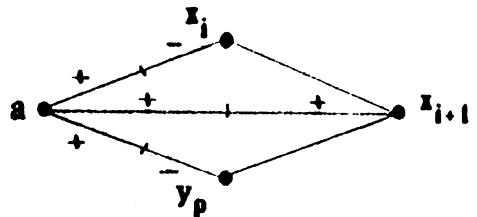
Rappelons que $\{a,b\}$ est C-orientable de a vers b si et seulement si $(x_i, x_{i+1}) \in M$, ou, de manière équivalente, si et seulement si $(x_{j-1}, x_j) \in M$. Nous voulons donc démontrer l'équivalence de l'une quelconque des assertions $(x_i, x_{i+1}) \in M$, $(x_{j-1}, x_j) \in M$ avec l'une quelconque des assertions $(y_p, y_{p+1}) \in M$, $(y_{q-1}, y_q) \in M$.

Il est clair que si $(x_i, x_{i+1}) = (y_p, y_{p+1})$, ou si $(x_{j-1}, x_j) = (y_{q-1}, y_q)$, le résultat est vérifié. On suppose donc que $(x_i, x_{i+1}) \neq (y_p, y_{p+1})$ et $(x_{j-1}, x_j) \neq (y_{q-1}, y_q)$.

Cas(1). Si $x_{i+1} = y_{p+1}$, alors $x_i \neq y_p$ (nous venons de supposer que $(x_i, x_{i+1}) \neq (y_p, y_{p+1})$). Remarquons que:

- (a, y_p) et (a, x_i) sont du type +-

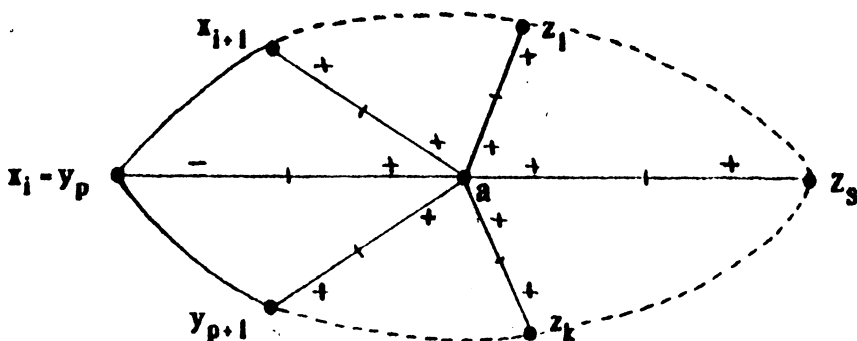
- $(a, x_{i+1}) = (a, y_{p+1})$ est du type ++.



Il en résulte, d'après III.6.5 ((b) si x_i et y_p sont adjacents dans G et (c) sinon), que $(x_i, x_{i+1}) \in M \Leftrightarrow (y_p, y_{p+1}) \in M$, et le résultat est vérifié.

Supposons donc que $x_{i+1} \neq y_{p+1}$, et considérons l'ensemble de sommets $A = \{x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n\} \cup \{y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_m\}$. Il est clair que A engendre un sous-graphe connexe de G. Il existe donc une chaîne minimale de la forme $C_1 = x_{i+1} z_1 z_2 \dots z_k y_{p+1}$ où $z_s \in A$ pour $s = 1, \dots, k$.

(i) Si $x_i = y_p$. La séquence $x_i x_{i+1} z_1 \dots z_k y_{p+1} y_p$ définit un cycle de G.



Comme C et C' sont deux chaînes minimales, $x_i = y_p$ n'est adjacent dans G à aucun sommet de $A - \{x_{i+1}, y_{p+1}\}$, et donc la séquence $x_i x_{i+1} z_1 \dots z_k y_{p+1} y_p$ définit un cycle minimal. D'autre part, on a par hypothèse :

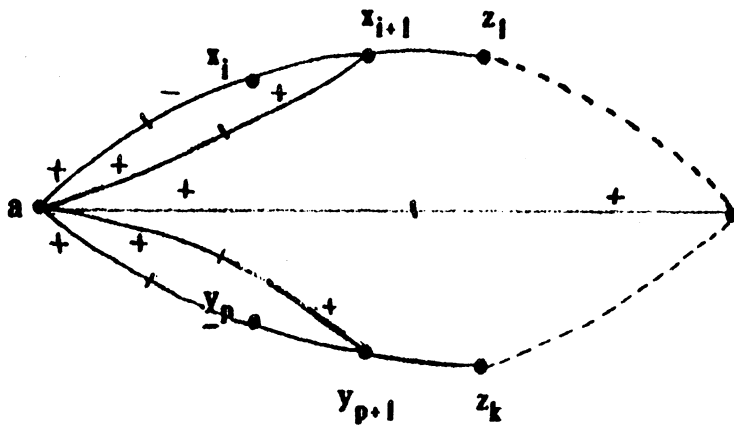
- $(a, x_i) - (a, y_p)$ est du type $+-$.
- $(a, x_{i+1}), (a, y_{p+1})$ et (a, z_s) (où $s = 1, \dots, k$) sont du type $++$.

Les conditions du lemme III.6.5 (a) sont toutes réunies, ce qui nous permet d'affirmer que $(x_i, x_{i+1}) \in M \Leftrightarrow (y_p, y_{p+1}) \in M$; et le résultat est donc vrai.

(ii) Supposons que $x_i \neq y_p$. Remarquons que, comme $S(\{x_i, a\}) - S(\{y_p, a\}) = -$ et $S(\{x_{i+1}, a\}) - S(\{y_{p+1}, a\}) = +$, nécessairement $x_i \neq y_{p+1}$ et $y_p \neq x_{i+1}$.

Donc les quatre sommets x_i, x_{i+1}, y_p et y_{p+1} sont distincts. On a alors deux possibilités :

- x_i n'est adjacent dans G à aucun élément z de $\{y_{p+1}, z_1, \dots, z_k\}$ et y_p n'est adjacent dans G à aucun élément z de $\{x_{i+1}, z_1, \dots, z_k\}$.



La séquence $x_i x_{i+1} z_1 \dots z_k y_{p+1} y_p$ définit donc un cycle minimal de G , si $\{x_i, y_p\}$ est une arête pleine, ou une chaîne minimale de G , si $\{x_i, y_p\}$ est une arête vide.

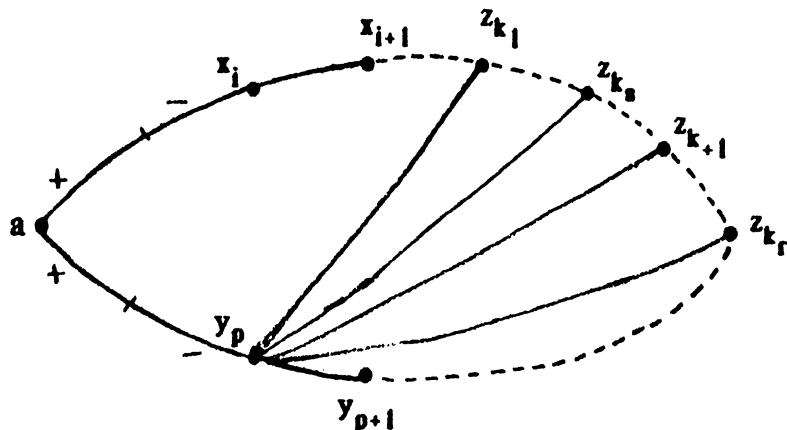
Dans les deux cas :

- (a, x_i) et (a, y_p) sont du type $+-$

• (a, x_{i+1}) , (a, y_{p+1}) et (a, z_s) pour $s = 1, \dots, k$ sont du type ++.

Ainsi les conditions du lemme III.6.5 ((b) si $\{x, y_p\}$ est pleine et (c) si $\{x_i, y_p\}$ est vide) sont réunies, donc $(x_i, x_{i+1}) \in M \Leftrightarrow (y_p, y_{p+1}) \in M$.

- L'un des deux sommets, y_p par exemple, est adjacent dans G à certains sommets de l'ensemble $\{x_{i+1}, z_1, \dots, z_k\} = B$. Pour simplifier les notations posons $z_0 = x_{i+1}$ et désignons par z_{k_1}, \dots, z_{k_r} les sommets de B qui sont adjacents à y_p dans G , avec $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq k$.



La séquence $x_i, x_{i+1}, \dots, z_k, y_p$ définit un cycle minial de G dans le cas où $\{x_i, y_p\}$ est pleine, et une chaîne minimale de G dans le cas où $\{x_i, y_p\}$ est vide. Remarquons alors :

- (a, x_i) et (a, y_p) sont du type +-.
- (a, x) est du type ++ pour tout $x \in \{x_{i+1}, \dots, z_k\}$

Donc les conditions du lemme III.6.5 ((b) dans le cas où $\{x_i, y_p\}$ est pleine et (c) dans le cas où $\{x_i, y_p\}$ est vide) sont réunies, et nous pouvons affirmer que :

$$(1) \quad (x_i, x_{i+1}) \in M \Leftrightarrow (y_p, z_{k_1}) \in M.$$

D'autre part, pour $s = 1, \dots, r-1$, la séquence $y_p z_{k_s} \dots z_{k_{s+1}} y_p$ définit un cycle minimal de G dans lequel :

- (a, y_p) est du type +-
- (a, x) est du type ++ pour $x \in \{z_{k_s}, \dots, z_{k_{s+1}}\}$.

Donc d'après III.6.5 (a), nous avons

$$(2) \quad (y_p, z_{k_s}) \in M \Leftrightarrow (y_p, z_{k_{s+1}}) \in M.$$

Enfin la séquence $y_p z_{k_r} \dots y_{p+1} y_p$ définit un cycle minimal de G remplissant avec le sommet a les conditions du lemme III.6.5 (a), donc

$$(3) \quad (y_p, z_{k_r}) \in M \Leftrightarrow (y_p, y_{p+1}) \in M.$$

Ainsi (1), (2) et (3) impliquent que $(x_i, x_{i+1}) \in M \Leftrightarrow (y_p, y_{p+1}) \in M$. Ce qui achève la démonstration du cas (1).

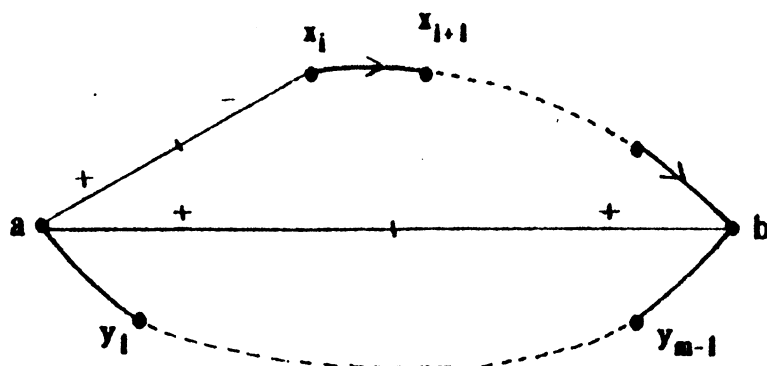
Cas (2).

(i) Supposons que C et C' possèdent un sommet extrémal trivial commun, b par exemple, donc $y_q = x_j = b$.

- Si x_i et y_p sont tous les deux propres, on est alors dans cas (1), ce qui est exclu par hypothèse.

- Si x_i et y_p sont tous les deux triviaux ($x_i = y_p = a$), alors C et C' sont deux chemins de (G, M) joignant a et b (remarque III.6.2 (2)). Comme K_V est sans circuits, ces deux chemins sont orientés tous les deux soit de a vers b , soit de b vers a et la propriété est donc vraie.

- Il nous reste le cas où l'un des deux sommets extrémaux, x_i par exemple, est propre, et l'autre, y_p , est trivial; donc $x_i \neq a$ et $y_p = a$. Comme les deux sommets extrémaux de C' sont triviaux, d'après III.6.2 (2), C' est un chemin dans (G, M) . Comme b est un sommet extrémal trivial de C , d'après III.6.3 (1), la chaîne $x_i x_{i+1} \dots x_{n-1} b$ est un chemin dans (G, M) .



Si $\{a,b\}$ est C- orientable de a vers b (respectivement de b vers a), le chemin $x_i x_{i+1} \dots x_{n-1} b$ est orienté dans (G,M) de x_i vers b (respectivement de b vers x_i); comme (a,x_i) est du type $+-$, la chaîne $a x_i x_{i+1} \dots x_{n-1} b$ de G_1 est un chemin dans (G_1, M_2) orienté de a vers b (respectivement la chaîne $a x_{i+1} \dots x_{n-1} b$ est un chemin dans (G_1, M_1) orienté de b vers a) (Voir section III.5). D'autre part, la chaîne C' est un chemin de (G,M) (donc de (G_1, M_1) et de (G_1, M_2)) joignant a et b. Comme (G_1, M_2) (resp. (G_1, M_1)) est sans circuits (théorème III.5.2), le chemin C' est orienté de a vers b (respectivement de b vers a). Donc $\{a,b\}$ est C'- orientable de a vers b (respectivement de b vers a), et le résultat est donc vrai.

(ii) Supposons maintenant que C et C' ne possèdent pas un sommet extrémal trivial commun. On vérifie aisément qu'on a seulement deux possibilités :

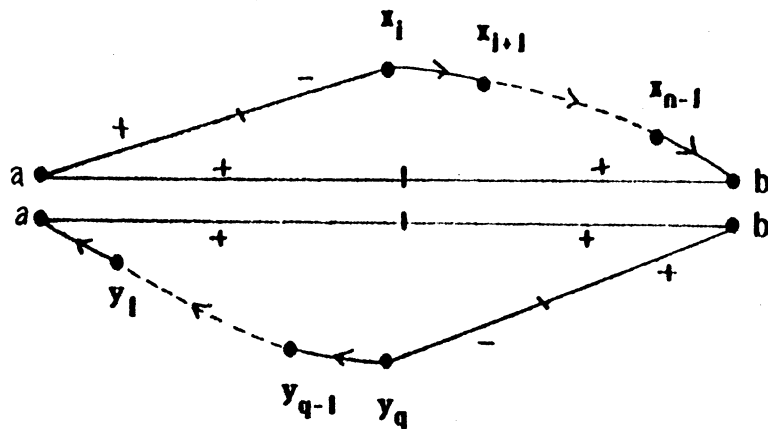
$$(x_i \neq a, x_j = b, y_q \neq b, y_p = a) \text{ ou } (x_i = a, x_j \neq b, y_q = b, y_p \neq a).$$

Nous allons traiter le cas où $x_i \neq a, x_j = b, y_q \neq b$ et $y_p = a$; l'autre cas est identique à la symétrie près entre C et C'.

Supposons par l'absurde que $\{a,b\}$ est C-orientable de a vers b et C'- orientable de b vers a.

L'hypothèse $x_j = b$ implique que $x_i x_{i+1} \dots x_{n-1} b$ est un chemin dans (G,M) (voir III.6.3 (1)), et l'hypothèse " $\{a,b\}$ est C- orientable de a vers b" implique que le chemin $x_i x_{i+1} \dots x_{n-1} b$ est orienté de x_i vers b dans

(G,M). Comme (a, x_i) est du type $+-$, $a x_i x_{i+1} \dots x_{n-1} b$ sera un chemin dans (G_1, M_2) , orienté de a vers b (voir figure)

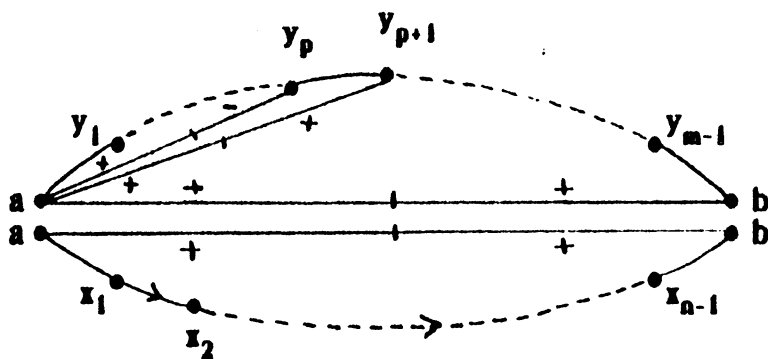


De même, l'hypothèse $y_p = a$ implique que $y_q y_{q-1} \dots y_1 a$ est un chemin dans (G, M) (voir III.6.3 (1)) et l'hypothèse " $\{a, b\}$ est C'-orientable de b vers a " implique que le chemin $y_q y_{q-1} \dots y_1 a$ est orienté de y_q vers a dans (G, M) . Comme (b, y_q) est du type $+-$, $b y_q y_{q-1} \dots y_1 a$ sera un chemin dans (G_1, M_2) , orienté de b vers a . Or d'après le théorème III.5.2, (G_1, M_2) est sans circuits : contradiction.

Enfin, on démontre de la même manière que l'hypothèse " $\{a, b\}$ est C-orientable de b vers a et C'-orientable de a vers b ", aboutit aussi à une contradiction avec la propriété que (G_1, M_1) est sans circuits. Ceci achève la démonstration du cas (2).

Cas (3)

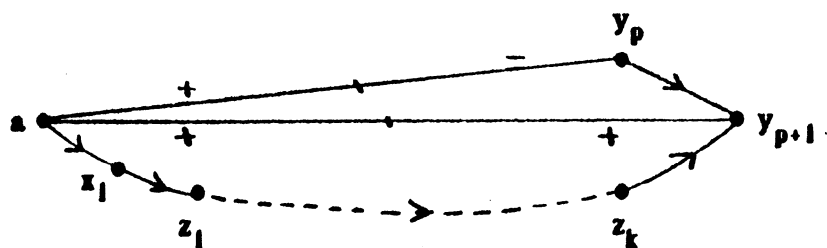
Les sommets extrémaux de C' sont propres, donc $y_p \neq a$ et $y_q \neq b$. Si C possède un sommet extrémal propre, on est dans le cas (1) ce qui est exclu par hypothèse. Supposons donc que les deux sommets extrémaux de C sont triviaux ; d'après III.6.2 (2), C est un chemin dans (G, M) . Supposons de plus que $\{a, b\}$ est C-orientable de a vers b ; ceci implique que C est orienté de a vers b (on ne perd pas de généralité puisque a et b jouent des rôles symétriques).



D'autre part, soit $A = \{y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_{m-1}, b\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$.

Il est clair que A engendre un sous graphe connexe de G . Il existe donc une chaîne minimale de la forme $x_1 z_1 z_2 \dots z_k y_{p+1}$ telle que $z_s \in A$ pour $s = 1, \dots, k$. Comme C et C' sont deux chaînes minimales, par définition d'une chaîne d'orientation, a n'est adjacent à aucun sommet x de l'ensemble $\{y_{p+1}, z_1, z_2, \dots, z_k\}$. Autrement dit, la chaîne $C_1 = a x_1 z_1 z_2 \dots z_k y_{p+1}$ est une chaîne minimale de G . Or, d'après III.6.2 (3), $\{a, y_{p+1}\}$ est du type $++$. Donc C_1 est une chaîne d'orientation de $\{a, y_{p+1}\}$. De plus, $\{a, z_s\}$ est du type $++$ pour $s = 1, \dots, k$ (III.6.2 (2) et (3)), donc a est un sommet extrémal trivial de C_1 . Comme $(a, x_1) \in M$, $\{a, y_{p+1}\}$ est C_1 -orientable de a vers y_{p+1} . De même, $C_2 = a y_1 y_2 \dots y_p y_{p+1}$ est aussi une chaîne d'orientation de $\{a, y_{p+1}\}$. Le sommet extrémal de C_2 relativement à a est y_p (puisque c'est le sommet de C_2 le plus proche de y_{p+1} tel que (a, y_p) est du type $+-$).

- Si le sommet extrémal de C_1 relativement à y_{p+1} est trivial, C_1 est un chemin dans (G, M) (III.6.2 (2)), et C_1 est orienté de a vers y_{p+1} .



Comme (y_p, a) est du type $-+$, la chaîne $y_p a x_1 z_1 \dots z_k y_{p+1}$ sera un chemin dans (G_1, M_1) , orienté de y_p vers y_{p+1} . Comme (G_1, M_1) est sans circuits (théorème III.5.2), $(y_p, y_{p+1}) \in M$. Donc $\{a, b\}$ est C' -orientable de a vers b .

- Si le sommet extrémal de C_1 relativement à y_{p+1} est propre C_1 et C_2 sont: dans le cas (1) si le sommet extrémal de C_2 relativement à y_{p+1} est propre, et dans le cas (2) sinon. Donc $\{a, y_{p+1}\}$ est C_2 -orientable de a vers y_{p+1} .

On en déduit que $(y_p, y_{p+1}) \in M$, ce qui signifie que $\{a, b\}$ est C' -orientable de a vers b . Ceci achève la démonstration du cas (3).

D'où le théorème.

Le théorème III.6.6 nous permet de définir une orientation F du graphe simple (V, D) (D est l'ensemble des arêtes de K_V du type $++$) de la manière suivante :

$(x, y) \in F \Leftrightarrow \{x, y\} \in D$ et $\{x, y\}$ est C -orientable de x vers y pour toute chaîne d'orientation C de $\{x, y\}$.

III.7. Pseudo-tournois de la classe \mathcal{E} et pseudo-tournois de cordes orientées.

Soit $K_V = (G, M, S)$ un pseudo-tournoi r -réduit avec $G = (V, E)$ et $r \in V$.

Rappelons que l'ensemble $\mathcal{P}_2(V)$ est partitionné en trois parties :

E = l'ensemble des arêtes pleines de K_V (arêtes de G) ;

D = l'ensemble des arêtes vides de K_V du type $++$;

I = l'ensemble des arêtes vides de K_V du type $-+$;

Nous avons déjà défini les orientations suivantes :

M : orientation des arêtes pleines

F : orientation des arêtes du type ++

I_1 et I_2 : deux orientations opposées des arêtes du type -+.

Ceci nous permet de définir les deux orientations suivantes du graphe complet $(V, \mathcal{P}_2(V))$: $L_1 = M \cup I_1$ et $L_2 = M \cup I_2$

Remarquons alors que :

- L_1 et L_2 sont deux extensions de M , puisque $M \subseteq L_1$ et $M \subseteq L_2$,

- $L_1 \cap L_2 = M \cup F$ (puisque $I_1 \cap I_2 = \emptyset$) et donc $(L_1 \cap L_2) - M = F$.

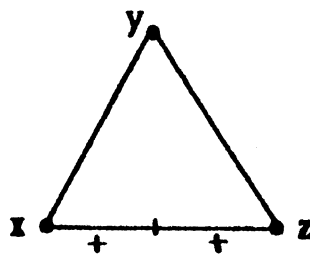
Notre but sera de démontrer que M , L_1 et L_2 réalisent les conditions du théorème de Fournier (théorème II.2.1). Pour aboutir à ce résultat, nous avons besoin du théorème suivant :

III.7.1. Théorème. Soit T un triangle de K_V engendré par $\{x, y, z\}$.

(1) Si T est quasi-plein de la forme ci-contre

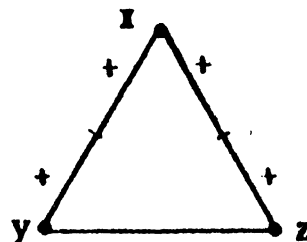
alors :

$(x, z) \in F \Leftrightarrow$ la chaîne xyz est un chemin dans (G, M) , orienté de x vers z .



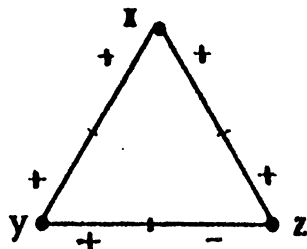
(2) Si T est quasi-vide de la forme ci-contre alors :

$(x, y) \in F \Leftrightarrow (x, z) \in F$.



(3) Si T est vide de la forme ci-contre alors :

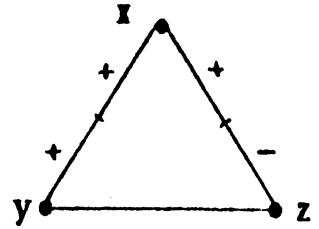
$(x, y) \in F \Leftrightarrow (x, z) \in F$.



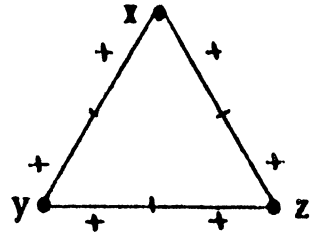
(4) Si T est quasi vide de la forme ci-contre,

alors :

$$(y,z) \in M \Leftrightarrow (y,x) \in F$$



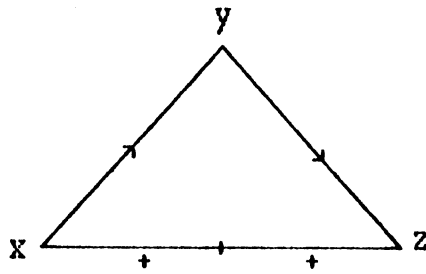
(5) Si T est vide de la forme ci-contre, alors ses arêtes sont orientées par F transitivement.



Preuve

Avant de commencer, on va présenter une notation qui nous sera utile dans la démonstration. Soit $C = x_0 x_1 \dots x_n$ une chaîne d'orientation de l'arête vide du type $++ \{x_0, x_n\}$, et soient x_i et x_j les sommets extrémaux de C relativement à x_0 et x_n respectivement. Rappelons que: soit les deux couples (x_i, x_{i+1}) et (x_{j-1}, x_j) sont dans M , et dans ce cas $(x_0, x_n) \in F$, soit les couples opposés (x_{i+1}, x_i) et (x_j, x_{j-1}) sont dans M , et dans ce cas $(x_n, x_0) \in F$. On a donc les équivalences : $(x_i, x_{i+1}) \in M \Leftrightarrow (x_{j-1}, x_j) \in M \Leftrightarrow (x_0, x_n) \in F$. On appellera alors **indicateur de l'appartenance du couple (x_0, x_n) à F** , (en abrégé : $IF(x_0, x_n)$) dans C , chacun des deux couples (x_i, x_{i+1}) et (x_{j-1}, x_j) . Notons que d'après cette définition (x_{i+1}, x_i) et (x_j, x_{j-1}) sont les $IF(x_n, x_0)$ dans C .

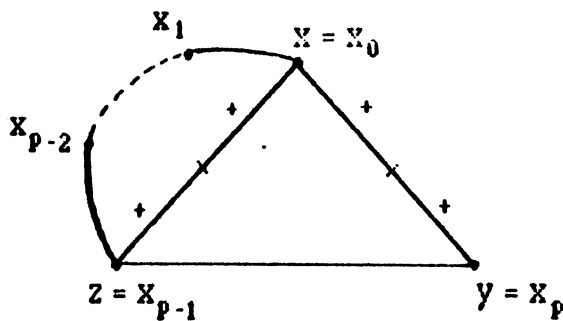
(1) Les sommets x , y et z engendrent un triangle quasi-plein dans lequel les signes de l'arête vide sont identiques. D'après $(C_2)(T_2)$ la chaîne $x y z$ est un chemin dans (G, M) . C'est donc une chaîne d'orientation de $\{x, z\}$ ayant ses deux sommets extrémaux triviaux.



Les IF(x,z) dans cette chaîne ne sont autres que (x,y) et (y,z). La propriété découle de la définition de l'orientation P.

(2) Soit $C = x_0 x_1 \dots x_p$ une chaîne d'orientation de $\{x,y\}$ avec $x_0 = x$ et $x_p = y$.

(i) Si $z = x_{p-1}$ alors considérons la chaîne $C' = x_0 x_1 \dots x_{p-1}$.



Il est clair que C' est une chaîne d'orientation de $\{x,z\}$. Soit x_i le sommet extrémal de C relativement à $x = x_0$. Comme $S(\{z,x\}) - S(\{z,x_{p-1}\}) = +$, $i \in \{1, \dots, p-2\}$.

Donc le sommet x_{i+1} est un sommet de C' . D'autre part, il est évident que x_i est le sommet extrémal de C' relativement à $x = x_0$. Il en résulte que

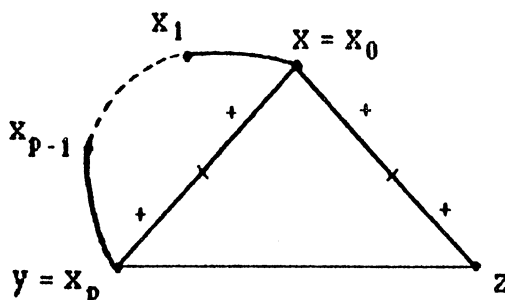
(x_i, x_{i+1}) est un IF(x,z) dans C' , et un IF(x,y) dans C , ce qui implique :

$$(x,y) \in P \Leftrightarrow (x_i, x_{i+1}) \in M \Leftrightarrow (x,z) \in P.$$

Notons que si $z \neq x_{p-1}$, $z \notin C$ puisque C est minimale, $y \in C$ et z est adjacent à y dans G .

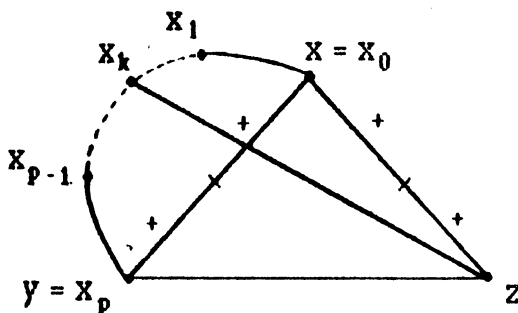
(ii) Si $z \neq x_{p-1}$ et z n'est adjacent qu'au seul sommet $y = x_p$ de C dans G , la

chaîne $C' = x_0 x_1 \dots x_p z$ sera une chaîne d'orientation de $\{x, z\}$. En échangeant z et y , on se ramène au cas (i).

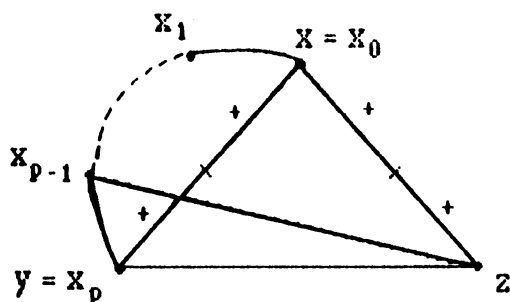


(iii) Si $z \neq x_{p-1}$ et z est adjacent dans G à un sommet de C autre que $y = x_p$, alors soit x_k le sommet de C le plus proche de $x = x_0$ qui soit adjacent à z dans G .

- Si $k < p-1$, alors la chaîne $C' = x_0 x_1 \dots x_k z y$ sera une chaîne d'orientation de $\{x, y\}$ remplissant les conditions du cas (i) (voir la figure ci-dessous), et donc la propriété est vraie.



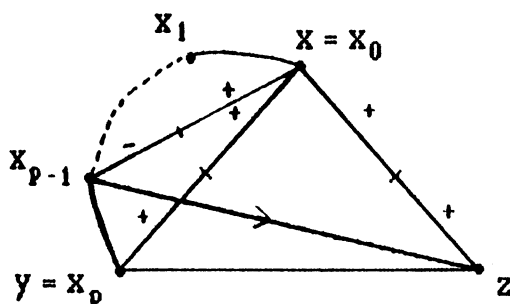
- Si $k = p-1$, alors désignons par x_i le sommet extrémal de C relativement à $x = x_0$.



Considérons la chaîne $C' = x_0 x_1 \dots x_{p-1} z$. Il est clair que C' est une chaîne d'orientation de $\{x, z\}$ contenant x_1 et que le sommet x_1 est le sommet extrémal de C' relativement à $x = x_0$. Si $i \leq p-2$, C' contiendra le sommet x_{i+1} , et donc (x_i, x_{i+1}) sera un $IF(x, z)$ dans C' , et un $IF(x, y)$ dans C et donc

$$(x, y) \in F \Leftrightarrow (x_i, x_{i+1}) \in M \Leftrightarrow (x, z) \in F.$$

Par contre, si $x_i = x_{p-1}$, (x_{p-1}, y) sera un $IF(x, y)$ dans C et (x_{p-1}, z) sera un



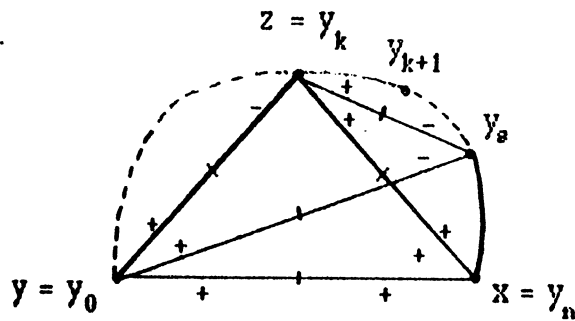
$IF(x, z)$ dans C' . Remarquons alors que (x, x_{p-1}) est du type $+ -$, tandis que (x, y) et (x, z) sont du type $++$. Donc les conditions de III.6.5 (a) sont réunies, ce qui nous permet de conclure :

$$(x, y) \in F \Leftrightarrow (x_{p-1}, y) \in M \Leftrightarrow (x_{p-1}, z) \in M \Leftrightarrow (x, z) \in F.$$

Ceci termine la démonstration de (2).

(3) Soit $C = y_0 y_1 \dots y_n$ une chaîne d'orientation de $\{x, y\}$ avec $y_0 = y$ et $y_n = x$, et soient y_i et y_j les sommets extrémaux de C relativement à y et à x respectivement.

(i) Si z est un sommet de C , il existe un indice k , $1 < k < n-1$, tel que $z = y_k$. Comme $S(|z,y|) = -$, le sommet extrémal y_i de C relativement à y est propre et est tel que $i \geq k$.



Considérons la chaîne $C' = z y_{k+1} \dots y_{n-1} x$. Il est clair que C' est une chaîne d'orientation de $\{x,z\}$. Soit y_s le sommet extrémal de C' relativement à z .

- Si y_s est un sommet extrémal propre, alors $s > k+1$ et (z,y_s) est du type $+ -$.

D'autre part, pour tout $\lambda > k+1$, le triangle de K_V engendré par $\{y,z,y_\lambda\}$ est vide et dans lequel les signes en z sont distincts (puisque $S(|z,y|) = -$ et d'après III.4.1.6 $S(|z,y_\lambda|) = S(|z,x|) = +$), donc, $S(|y,y_\lambda|) = S(|y,z|) = +$ et $S(|y_\lambda,y|) = S(|y_\lambda,z|)$, d'après $(C_2)(T_4)$. Il en résulte que pour $\lambda = s$ nous avons que $S(|y_s,y|) = -$, et donc (y,y_s) est du type $+ -$, et pour $\lambda > s$ nous avons $S(|y_\lambda,y|) = S(|y_\lambda,z|) = +$ (puisque, d'après la définition d'un sommet extrémal, pour tout $\lambda > s$, (y_λ,z) est du type $++$), et donc (y,y_λ) est du type $++$. Il en résulte que y_s n'est autre que le sommet extrémal y_i de C relativement à y ; et comme, de plus, y_{i+1} est un sommet de C' , (y_{i+1},y_i) sera un $IF(x,y)$ dans C et un $IF(x,z)$ dans C' .

Donc $(x,y) \in F \Leftrightarrow (y_{i+1},y_i) \in M \Leftrightarrow (x,z) \in F$.

- Si y_s est un sommet extrémal trivial (donc $y_s = y_k = z$), alors pour tout $\lambda > k+1$, (z,y_λ) est du type $++$, donc (y,y_λ) l'est aussi (d'après $(C_2)(T_4)$

appliquée au triangle vide engendré par $\{y, z, y_\lambda\}$). Ainsi, le sommet extrémal y_i de C relativement à y est tel que $k \leq i \leq k+1$.

Si $i = k$, $(y_{i+1}, y_i) = (y_{k+1}, z)$ sera un IF(x,y) dans C , et un IF(x,z) dans C' , donc:

$$(x,y) \in F \Leftrightarrow (y_{i+1}, y_i) = (y_{k+1}, z) \in M \Leftrightarrow (x,z) \in F.$$

Si $i = k+1$, (y_{k+2}, y_{k+1}) sera un IF(x,y) dans C et (y_{k+1}, z) sera un IF(x,z) dans C' . Or, $\{z, y_{k+2}\}$ est du type ++, donc, d'après $(C_2)(T_2)$, la chaîne $z y_{k+1} y_{k+2}$ est un chemin dans (G,M) , ce qui donne :

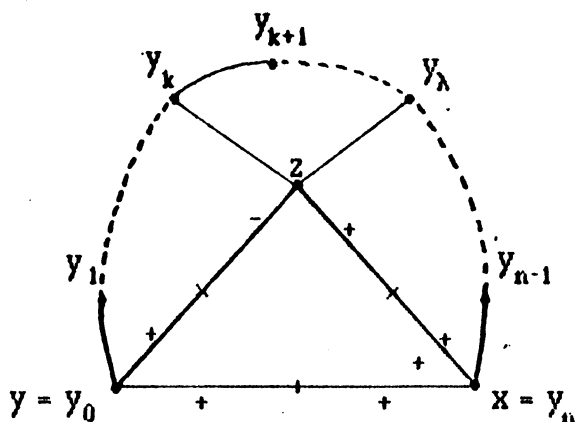
$$(x,y) \in F \Leftrightarrow (y_{k+2}, y_{k+1}) \in M \Leftrightarrow (y_{k+1}, z) \in M \Leftrightarrow (x,z) \in F.$$

La propriété est donc vraie si z est dans C .

(ii) Supposons que z n'est pas un sommet de C . Démontrons alors que z est adjacent dans G à, au moins, un sommet de C . En effet, sinon, pour tout $s = 0, \dots, n$, y_s serait dans $\bar{N}(z) = \{v \in V / (z,v) \in \bar{E}\}$, et on aurait donc deux sommets, x et y , dans une même composante connexe du sous graphe $G_{\bar{N}(z)}$ et tels que $S(\{z,x\}) \neq S(\{z,y\})$: il y a une contradiction avec III.4.1.6.

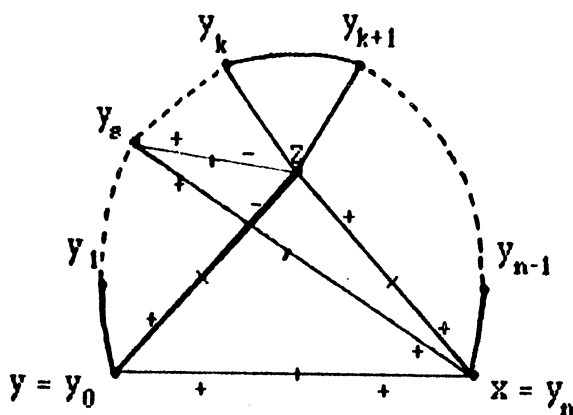
Désignons par y_k (respectivement y_λ) le sommet de C le plus proche de y (respectivement de x) sur C et qui sont adjacents à z dans G . Donc $0 < k \leq \lambda < n$ et $\forall s < k$ (respectivement $\forall s > \lambda$) z n'est pas adjacent à y_s dans G .

• Si $\lambda > k+2$: considérons alors la chaîne $C' = y_0 y_1 \dots y_k z y_\lambda \dots y_n$.



Il est clair que C' est une chaîne d'orientation de $\{x,y\}$ remplissant les conditions du cas (i), donc la propriété : $(x,y) \in F \Leftrightarrow (x,z) \in F$ est vraie dans ce cas.

• Si $\lambda = k+1$: considérons le sommet extrémal y_j de C relativement à $x = y_n$.



Démontrons que $j \geq k$. En effet, pour $s < k$ nous avons $S(z, y_s) = S(z, y) = -$ (d'après III.4.1.6). Comme K_y est sans arêtes du type $--$, $S(y_s, z) = +$. D'après $(C_2)(T_4)$ appliquée au triangle engendrée par $\{z, y_s, x\}$ nous avons $S(y_s, x) = S(y_s, z)$; donc $S(y_s, x) = +$, et ceci pour tout $s < k$. Il en résulte que $j \geq k$.

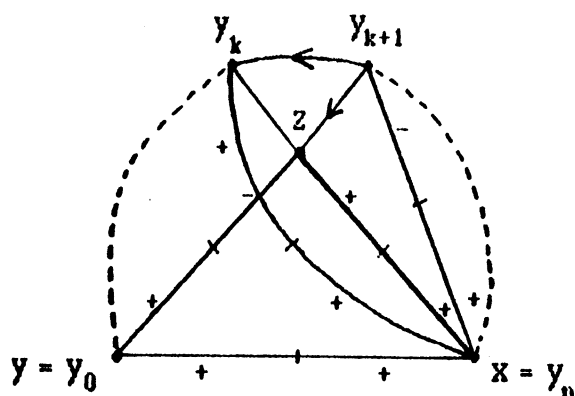
Considérons maintenant la chaîne $C' = z y_{k+1} \dots y_{n-1} x$. Il est clair que C' est une chaîne d'orientation de $\{x,z\}$.

- Si $j \geq k+2$, il est évident que y_j est le sommet extrémal de C' relativement à x . De plus, C' contient le sommet y_{j-1} ; donc (y_j, y_{j-1}) est un IF(x,y) dans C , et il est un IF(x,z) dans C' . D'où :

$$(x,y) \in F \Leftrightarrow (y_j, y_{j-1}) \in M \Leftrightarrow (x,z) \in F.$$

- Si $j = k+1$, y_{k+1} est le sommet extrémal de C , et de C' relativement à x .

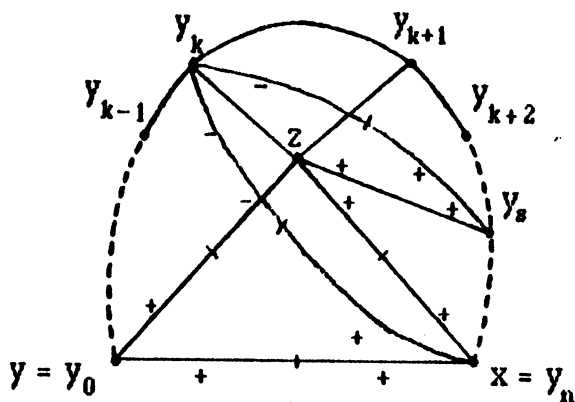
Mais (y_{k+1}, y) est un IF(x,y) dans C et (y_{k+1}, z) est un IF(x,z) dans C' .



Considérons alors le cycle $z y_k y_{k+1} z$ de G . On a : (x, y_{k+1}) est du type $+ -$, tandis que (x, z) et (x, y_k) sont du type $++$; ainsi les conditions de III.6.5 (a) sont réunies. Donc la chaîne $y_k y_{k+1} z$ est un anti-chemin dans (G, M) . Par conséquent :

$$(x, y) \in F \Leftrightarrow (y_{k+1}, y_k) \in M \Leftrightarrow (y_{k+1}, z) \in M \Leftrightarrow (x, z) \in F.$$

- Enfin, si $j = k$, alors (y_k, y_{k-1}) est un IF(x, y) dans C .

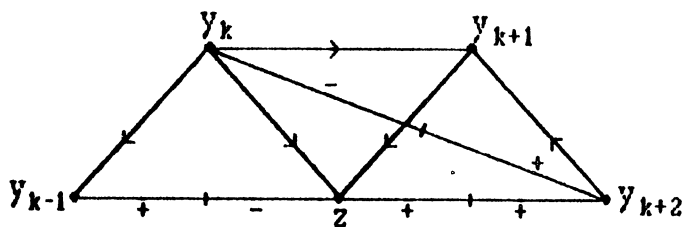


D'autre part, soit $s \geq k+2$. D'après III.4.1.6, $S(z, y_s) = S(z, x) = +$, $S(y_s, z) = S(y_s, y_k)$ et $S(y_k, y_s) = S(y_k, x) = -$. Comme K_V est sans arêtes du type $--$, $S(y_s, y_k) = +$. Donc $S(y_s, z) = +$, par suite (z, y_s) est du type $++$, et ceci pour tout $s \geq k+2$. Il en résulte que z est le sommet extrémal de C relativement à z , et (y_{k+1}, z) est un IF(x, z) dans C .

Maintenant, comme $(z, y_{k,2})$ est du type $++$, d'après $(C_2)(T_2)$ appliquée au triangle engendré par $\{z, y_{k,1}, y_{k,2}\}$, la chaîne $z y_{k,1} y_{k,2}$ est un chemin dans (G, M) . Donc :

$$(y_{k,1}, z) \in M \Leftrightarrow (y_{k,2}, y_{k,1}) \in M \quad (\alpha)$$

Par ailleurs, nous avons déjà vu que pour $s \geq k+2$, (y_k, y_s) est du type $-+$.



Donc $(y_k, y_{k,2})$ est du type $-+$. D'après $(C_2)(T_2)$ appliquée au triangle engendré par $\{y_k, y_{k,1}, y_{k,2}\}$, la chaîne $y_k y_{k,1} y_{k,2}$ est un anti-chemin dans (G, M) . Par suite :

$$(y_{k,2}, y_{k,1}) \in M \Leftrightarrow (y_k, y_{k,1}) \in M. \quad (\beta)$$

Ainsi (α) et (β) impliquent que $y_k y_{k,1} z$ est un chemin dans (G, M) . Comme K_V est sans circuits, le chemin $z y_{k,1} y_k$ et l'arête $\{z, y_k\}$ sont orientés dans (G, M) soit tous les deux de z vers y_k , soit de y_k vers z , donc :

$$(y_{k,1}, z) \in M \Leftrightarrow (y_k, z) \in M. \quad (\gamma)$$

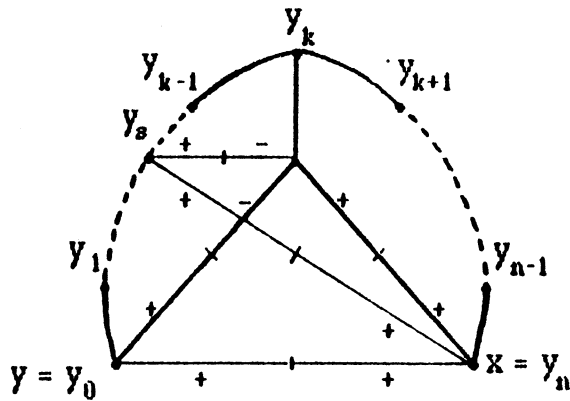
Enfin, $S(lz, y_{k-1}|) = S(lz, y|) = -$ (d'après III.4.1.6). Comme K_V est sans arêtes du type $--$, $S(|y_{k-1}, z|) = +$. Donc, d'après $(C_2)(T_2)$, $y_{k-1} y_k z$ est un anti-chemin dans (G, M) . Par suite $(y_k, z) \in M \Leftrightarrow (y_k, y_{k-1}) \in M$ (8)

(γ) et (8) nous permet de conclure :

$$(x, y) \in F \Leftrightarrow (y_k, y_{k-1}) \in M \Leftrightarrow (y_{k,1}, z) \in M \Leftrightarrow (x, z) \in F.$$

Ceci achève la démonstration du cas où $\lambda = k + 1$.

• Si $\lambda = k$ alors z est adjacent à un seul sommet y_k de C . Il est clair que la chaîne $C' = z y_k y_{k,1} \dots y_{n-1} x$ est une chaîne d'orientation de $\{x, z\}$.

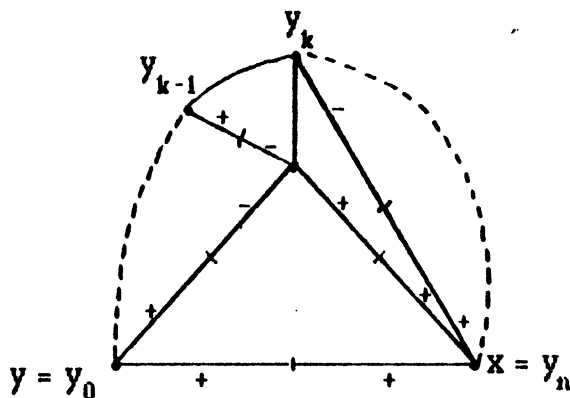


D'autre part , comme $S(|z,y|) = -$, $S(|z,y_s|) = S(|z,y|) = -$ pour tout $s \leq k-1$ (d'après III.4.1.6). Comme K_V est sans arêtes du type $--$, $S(|y_s,z|) = +$.
 Considérons le triangle engendré par $\{x,z,y_s\}$ ($s \leq k-1$). Comme $S(|z,x|) = +$ et $S(|z,y_s|) = -$, d'après $(C_2)(T_4)$, $S(|x,y_s|) = S(|x,z|) = +$ et $S(|y_s,x|) = S(|y_s,z|) = +$.
 Donc $\{y_s,x\}$ est du type $++$ pour tout $s \leq k-1$. Il en résulte que le sommet extrémal y_j de C relativement à x est tel que $j \geq k$. Par suite y_j est également le sommet extrémal de C' relativement à x .

Maintenant si $j \geq k+1$, y_{j-1} sera un sommet de C' . Donc (y_j,y_{j-1}) , qui est un $IF(x,y)$ dans C , sera également un $IF(x,z)$ dans C' . D'où :

$$(x,y) \in F \Leftrightarrow (y_j,y_{j-1}) \in M \Leftrightarrow (x,z) \in F.$$

Si $j = k$, (y_k, y_{k-1}) est un $IF(x, y)$ dans C , et (y_k, z) est un $IF(x, z)$ dans C' .



Or nous avons vu déjà que pour $s \leq k-1$, (z,y_s) est du type $-+$. Donc (z,y_{k-1}) est du type $-+$. D'après $(C_2)(T_2)$ appliquée au triangle engendré par

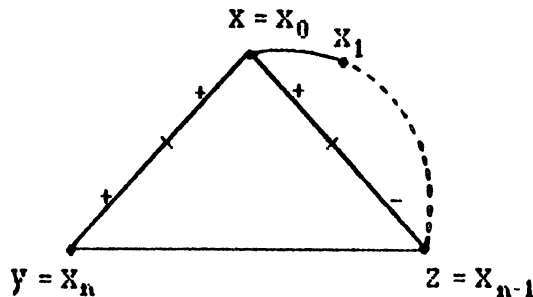
$\{z, y_k, y_{k-1}\}$ la chaîne $z y_k y_{k-1}$ est un anti-chemin de (G, M) . Ce qui nous permet d'affirmer que :

$$(x, y) \in F \Leftrightarrow (y_k, y_{k-1}) \in M \Leftrightarrow (y_k, z) \in M \Leftrightarrow (x, z) \in F.$$

Ceci termine la démonstration de (3).

(4) Soit $C = x_0 x_1 \dots x_n$ une chaîne d'orientation de $\{x, y\}$ avec $x = x_0$ et $y = x_n$

(i) Si $z = x_{n-1}$: comme $S(|z, x|) = -$, z est le sommet extrémal de C relativement à x .



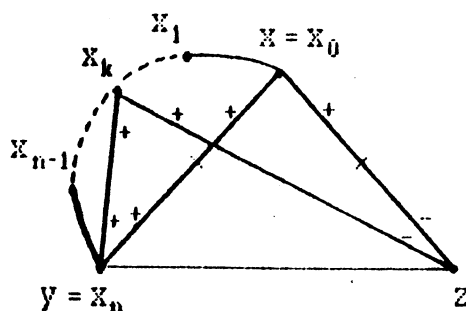
Donc (z, y) est un IF (x, y) dans C . D'où : $(x, y) \in F \Leftrightarrow (z, y) \in M$.

(Notons que si $z \neq x_{n-1}$ alors $z \notin C$).

(ii) Si $z \neq x_{n-1}$ et z n'est adjacent dans G à aucun sommet de C autre que

$$y = x_n :$$

Soit $\{y, x_k\}$ une corde de C . D'après III.4.1.6, $S(|y, x_k|) = S(|y, x|) = +$. De même, d'après III.4.1.6 également, $S(|z, x_k|) = S(|z, x|) = -$. Comme K_V est sans arêtes du type $--$, $S(|x_k, z|) = +$. Mais d'après $(C_2)(T_3)$ appliqué au triangle engendré par $\{x_k, y, z\}$, $S(|x_k, y|) = S(|x_k, z|)$. Il en résulte que (y, x_k) est du type $++$. Donc le sommet extrémal de C relativement à y est y , et par suite (x_{n-1}, y) est un IF (x, y) dans C .



D'autre part, d'après III.4.1.6, $S(\{z, x_{n-1}\}) = S(\{z, x\}) = -$, et comme K_V est sans arêtes vides du type $--$, $\{z, x_{n-1}\}$ est du type $-+$. L'application de $(C_2)(T_2)$ au triangle engendré par $\{z, y, x_{n-1}\}$ nous permet d'affirmer que :

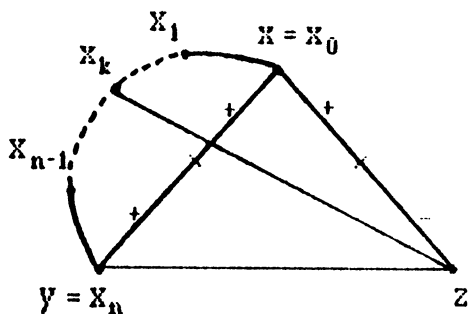
$$(x, y) \in F \Leftrightarrow (x_{n-1}, y) \in M \Leftrightarrow (z, y) \in M.$$

(iii) Si $z \neq x_{n-1}$ et z est adjacent dans G à, au moins, un sommet distinct de

$$y = x_n :$$

Soit x_k le sommet de C adjacent à z dans G le plus proche de x sur C .

- Si $k < n-1$, la chaîne $C' = x \ x_1 \ \dots \ x_k \ z \ y$ est une chaîne d'orientation de $\{x, y\}$ remplissant les conditions du cas (i).

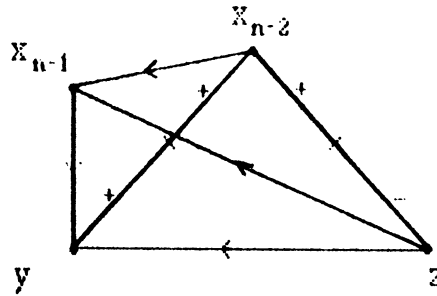


Donc on a bien : $(x, y) \in F \Leftrightarrow (z, y) \in M$.

- Si $k = n-1$: D'après III.4.1.6, pour tout $s < n-1$, $S(\{z, x_s\}) = S(\{z, x\}) = -$.

Comme K_V est sans arêtes du type $--$, $S(\{x_s, z\}) = +$. D'après $(C_2)(T_3)$ appliquée au triangle engendré par $\{x_s, z, y\}$, $S(\{x_s, y\}) = S(\{x_s, z\}) = +$. D'après III.4.1.6,

$S(\{y, x_s\}) = S(\{y, x\}) = +$. Il en résulte que $\{y, x_s\}$ est du type ++ pour tout $s = 0, \dots, n-2$. Donc, y est le sommet extrémal de C relativement à y , et (x_{n-1}, y) est un IF(x, y) dans C .



Maintenant, $\{y, x_{n-2}\}$ est du type ++, donc, d'après $(C_2)(T_2)$ appliquée au triangle engendré par $\{y, x_{n-1}, x_{n-2}\}$, la chaîne $x_{n-2} x_{n-1} y$ est un chemin dans (G, M) . Il en résulte que :

$$(x_{n-2}, x_{n-1}) \in M \Leftrightarrow (x_{n-1}, y) \in M \quad (\alpha)$$

De même, nous avons vu que (z, x_{n-2}) est du type -+. D'après $(C_2)(T_2)$ appliquée au triangle engendré par $\{z, x_{n-1}, x_{n-2}\}$, la chaîne $x_{n-2} x_{n-1} z$ est un anti-chemin dans (G, M) . Donc:

$$(x_{n-2}, x_{n-1}) \in M \Leftrightarrow (z, x_{n-1}) \in M, \quad (\beta)$$

de (α) et (β) on constate que $z x_{n-1} y$ est un chemin dans (G, M) .

Considérons maintenant le cycle $z x_{n-1} y z$. Comme K_V est sans circuits, les deux chemins $z x_{n-1} y$ et $z y$ sont orientés dans (G, M) soit tous les deux de z vers y , soit de y vers z . Il en résulte que :

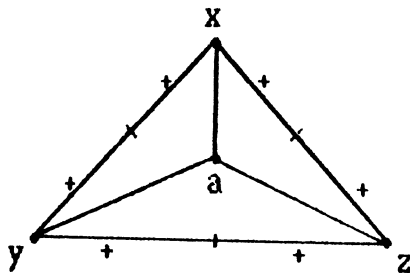
$$(x, y) \in F \Leftrightarrow (x_{n-1}, y) \in M \Leftrightarrow (z, y) \in M.$$

Ceci termine la démonstration de (4).

(5) Avant de présenter la démonstration, on va donner les deux lemmes suivants :

Lemme 1. Soit T un triangle vide de K_V engendré par $\{x,y,z\}$ et ayant toutes ses arêtes du type $++$. Alors les sommets x , y et z ne peuvent pas être adjacents dans G à un même sommet a .

En effet, sinon, en appliquant $(C_2)(T_2)$ aux triangles engendrés par $\{a,x,y\}$



$\{a,x,z\}$ et $\{a,y,z\}$ on constate que les chaînes x a y , y a z et z a x sont des chemins dans (G,M) . Cela est évidemment impossible. D'où le lemme.

Dans ce qui suit, un triangle vide sera dit **triangle du type $++$** si toutes ses arêtes sont du type $++$.

Lemme 2. Soient T_0 et T_n deux triangles vides du type $++$ de K_V engendrés par $\{x_0,y,z\}$ et $\{x_n,y,z\}$ respectivement. S'il existe une chaîne minimale de G de la forme $C = x_0 x_1 \dots x_i \dots x_n$ (où $x_i \neq y$ et $x_i \neq z$ et ceci pour $i = 0, \dots, n$) et telle que pour tout $i = 1, \dots, n-1$, le triangle T_i engendré par $\{x_i,y,z\}$ est du type $++$, alors :

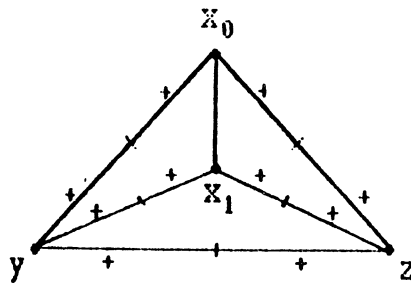
$$(x_n,y) \in F \Leftrightarrow (x_0,y) \in F \quad \text{et} \quad (x_n,z) \in F \Leftrightarrow (x_0,z) \in F.$$

En effet, raisonnons par induction sur la longueur n de C :

- Si $n = 1$, les deux triangles quasi-vides engendrés par $\{x_0,y,x_1\}$ et $\{x_0,z,x_1\}$ remplissent les conditions de (2) du théorème III.7.1.

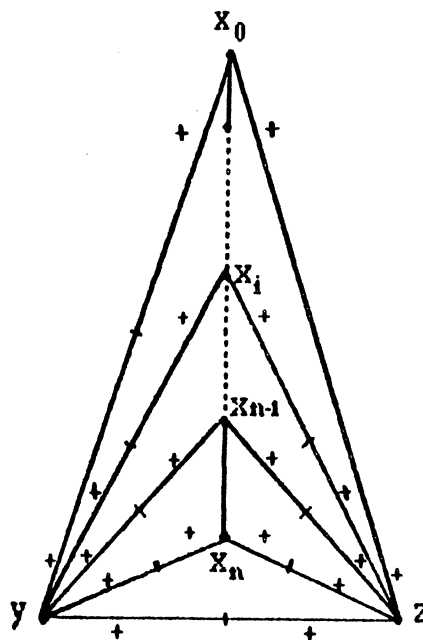
Nous venons de démontrer que dans ce cas :

$$(x_1,y) \in F \Leftrightarrow (x_0,y) \in F \quad \text{et} \quad (x_1,z) \in F \Leftrightarrow (x_0,z) \in F.$$



- Supposons la propriété vraie jusqu' à l' ordre $n - 1$ donc nous avons :

$$(x_0, y) \in F \Leftrightarrow (x_{n-1}, y) \in F \quad \text{et} \quad (x_0, z) \in F \Leftrightarrow (x_{n-1}, z) \in F.$$



De plus, la propriété étant vraie à l' ordre 1, nous avons:

$$(x_{n-1}, y) \in F \Leftrightarrow (x_n, y) \in F \quad \text{et} \quad (x_{n-1}, z) \in F \Leftrightarrow (x_n, z) \in F.$$

D'où le résultat.

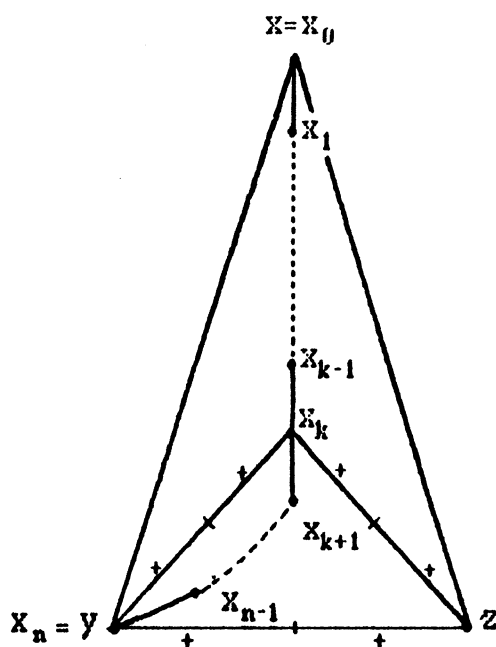
Revenons maintenant au théorème.

Soient T un triangle vide du type ++ engendré par $\{x, y, z\}$, et $C = x_0 x_1 \dots x_n$ une chaîne d'orientation de $\{x, y\}$ avec $x_0 = x$ et $x_n = y$. On peut supposer que $z \notin C$ (sinon on échange y et z).

Soit x_k le sommet de C réalisant les conditions suivantes :

(*) $\forall \lambda \leq k$, le triangle T_λ engendré par $\{x_\lambda, y, z\}$ est vide du type ++ ;

(**) le triangle T_{k+1} engendré par $\{x_{k+1}, y, z\}$ n'est pas dans le cas précédent.

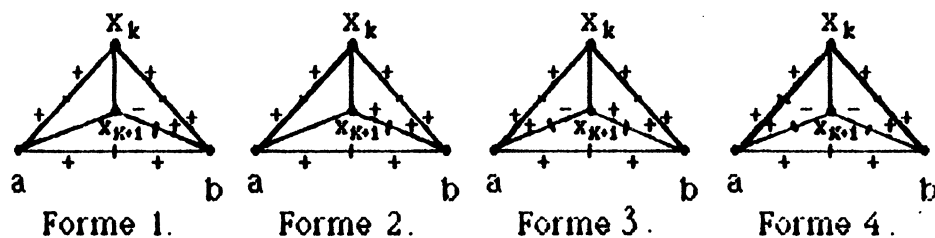


Il est clair qu'un tel sommet existe.

Si l'orientation des arêtes de T_k par F est transitive, alors d'après le lemme 2, celle de T_0 le sera également. Démontrons donc que l'orientation de T_k par F est transitive. Pour cela, considérons le sous-pseudo-tournoi de K_V engendré par $W = \{x_k, x_{k+1}, y, z\}$.

D'après le lemme 1, x_{k+1} ne peut pas être adjacent dans G , à la fois à y et à z . Donc, l'une au moins des deux arêtes $\{x_{k+1}, y\}$ et $\{x_{k+1}, z\}$ est vide. D'après (**), ces deux arêtes ne peuvent pas être toutes les deux vides du type ++.

Donc K_W a l'une des quatre formes suivantes :



Dans les schémas ci-dessus $\{a, b\} = \{y, z\}$ (ceci pour faire intervenir la

symétrie des rôles de y et z). Nous avons tenu compte du fait que d'après $(C_2)(T_3)$, si $\{a, x_{k+1}\}$ (resp. $\{b, x_{k+1}\}$) est vide, $S(\{a, x_{k+1}\}) = S(\{a, x_k\}) = +$ (resp. $S(\{b, x_{k+1}\}) = S(\{b, x_k\}) = +$).

Nous allons utiliser les parties (1), (2), (3) et (4) du théorème III.7.1, déjà démontrées plus haut, pour aboutir au résultat :

(A₁) Si $K_{\mathbb{W}}$ est de la forme 1 :

$$(x_k, a) \in F \Leftrightarrow (x_k, x_{k+1}) \in M \Leftrightarrow (x_{k+1}, a) \in M$$

(en appliquant (1) au triangle engendré par $\{x_{k+1}, x_k, a\}$), et

$$(x_k, x_{k+1}) \in M \Leftrightarrow (x_k, b) \in F$$

(en appliquant (4) au triangle engendré par $\{x_k, b, x_{k+1}\}$).

(A₂) Si $K_{\mathbb{W}}$ est de la forme 2 :

$$(x_k, b) \in F \Leftrightarrow (x_{k+1}, b) \in F \quad (\text{en appliquant (2) à } \{x_k, b, x_{k+1}\}), \text{ et}$$

$$(x_{k+1}, b) \in F \Leftrightarrow (a, b) \in F \quad (\text{en appliquant (2) à } \{x_{k+1}, a, b\}).$$

(A₃) Si $K_{\mathbb{W}}$ est de la forme 3 :

$$(x_k, b) \in F \Leftrightarrow (x_{k+1}, b) \in F \quad (\text{en appliquant (2) à } \{x_k, b, x_{k+1}\}), \text{ et}$$

$$(x_{k+1}, b) \in F \Leftrightarrow (a, b) \in F \quad (\text{en appliquant (3) à } \{x_{k+1}, a, b\}).$$

(A₄) Si $K_{\mathbb{W}}$ est de la forme 4 :

$$(x_k, a) \in F \Leftrightarrow (x_k, x_{k+1}) \in M \quad (\text{en appliquant (4) à } \{x_k, a, x_{k+1}\}), \text{ et}$$

$$(x_k, x_{k+1}) \in M \Leftrightarrow (x_k, b) \in F \quad (\text{en appliquant (4) à } \{x_k, b, x_{k+1}\}).$$

Remarquons alors que la chaîne $a x_k b$ du graphe (V, D) est orientée en un anti-chemin par F dans les cas (A₁) et (A₄), et que la chaîne $x_k b a$ de (V, D) est orientée en un anti-chemin par F dans les cas (A₂) et (A₃). Donc le triangle T_k est orienté transitivement par F .

III.7.2. Théorème. Un pseudo-tournoi connexe est de cordes orientées si et seulement si il est de la classe \mathcal{C} .

Preuve

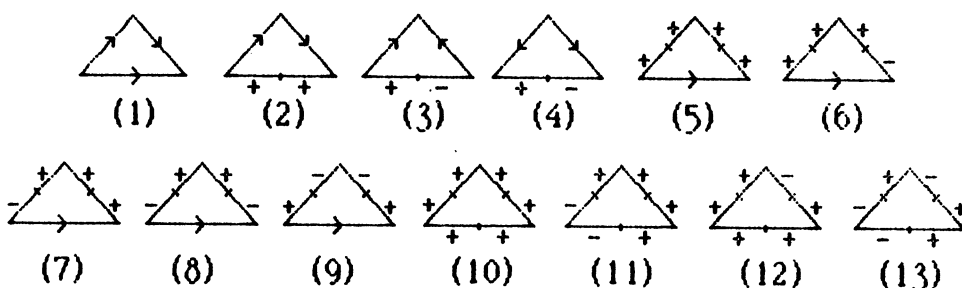
En effet, la condition nécessaire découle immédiatement du théorème III.3.4. Démontrons donc que la condition est suffisante.

Soit $K'_V = (G, M_1, S_1)$ un pseudo-tournoi de la classe \mathcal{C} . Considérons un sommet r de K'_V et soit $K_V = (G, M, S)$ la r -réduction de K'_V . D'après le théorème III.4.1.2, K_V est aussi de la classe \mathcal{C} . Nous allons démontrer que K_V est de Fournier :

- (1) K_V est sans arêtes vides du type -- (théorème III.4.1.4 (ii)).
- (2) Le graphe orienté (G, M) est sans circuits (théorème III.4.1.10).
- (3) Considérons les extensions L_1 et L_2 de $(V, \mathcal{P}_2(V))$ telles qu'elles sont définies au début de la section III.7, nous allons démontrer que M, L_1 et L_2 remplissent les conditions du théorème II.2.1 de Fournier.

(i) L_1 et L_2 sont transitives :

Soit T un triangle quelconque de K_V . Comme K_V est sans circuits, sans arêtes du type -- et vérifie les conditions (C_2) , T a l'une des formes suivantes:



La transitivité de l'orientation par L_1 et L_2 des triangles des formes (1), (3) et (4) est évidente.

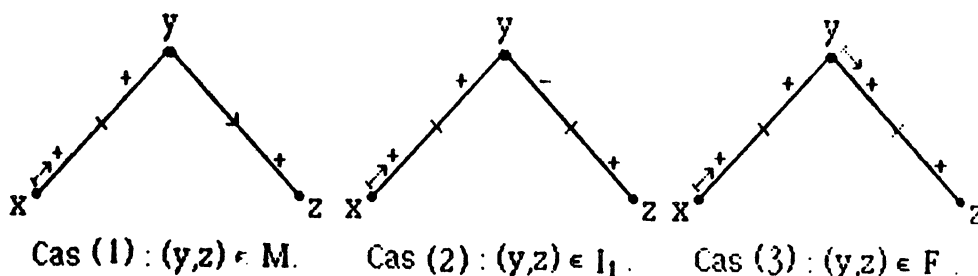
Celle des triangles des formes (8), (9), (11) et (13) découle de la définition de I_1 et I_2 .

Enfin celle des autres triangles découle des différents cas du théorème III.7.1 précédent.

Il en résulte que L_1 et L_2 sont deux extensions linéaires de M .

(ii) Considérons $F = (L_1 \cap L_2) - M$.

Soient $(x,y) \in F$ et $(y,z) \in L_1 - M \cup I_1$. Comme $F \subseteq L_1$ et L_1 est transitive, $(x,z) \in L_1$. Trois cas pour (y,z) sont possibles :



Cas(1) : - Si $(x,z) \in M$ il y a une contradiction avec $(C_2)(T_2)$;

- Si $(x,z) \in I_1$ il y a une contradiction avec III.7.1 (4).

Donc $(x,z) \in F$.

Cas(2) : - Si $(x,z) \in M$ il y a une contradiction avec $(C_2)(T_2)$;

- Si $(x,z) \in I_1$ il ya une contradiction avec $(C_2)(T_4)$.

Donc $(x,z) \in F$.

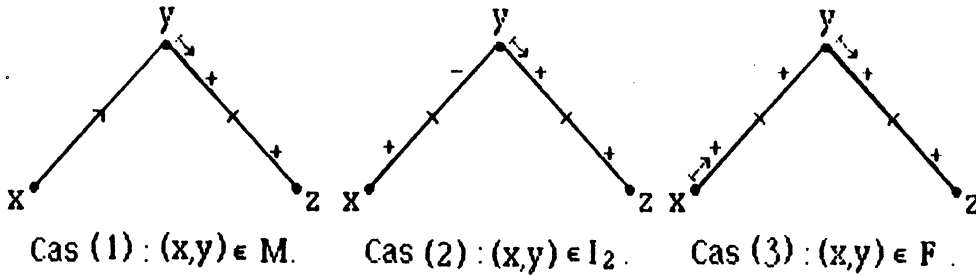
Cas(3) : - Si $(x,z) \in M$ il ya une contradiction avec III.7.1 (2);

- Si $(x,z) \in I_1$ il ya une contradiction avec III.7.1 (3).

Donc $(x,z) \in F$.

Il en résulte que F vérifie la condition (F_1) du théorème II.2.1.

Soient maintenant (x,z) dans $L_2 = \text{MUFUI}_2$ et (y,z) dans F . Comme $F \subseteq L_2$ et L_2 est transitive, $(x,z) \in L_2$. Trois cas sont possibles :



Cas(1) : - Si $(x,z) \in M$ il y a une contradiction avec $(C_2)(T_2)$;

- Si $(x,z) \in I_2$ il y a une contradiction avec $(C_2)(T_3)$.

Donc $(x,z) \in F$.

Cas(2) : - Si $(x,z) \in M$ il y a une contradiction avec $(C_2)(T_3)$;

- Si $(x,z) \in I_2$ il ya une contradiction avec $(C_2)(T_4)$.

Donc $(x,z) \in F$.

Cas(3) : - Si $(x,z) \in M$ il ya une contradiction avec III.7.1 (2);

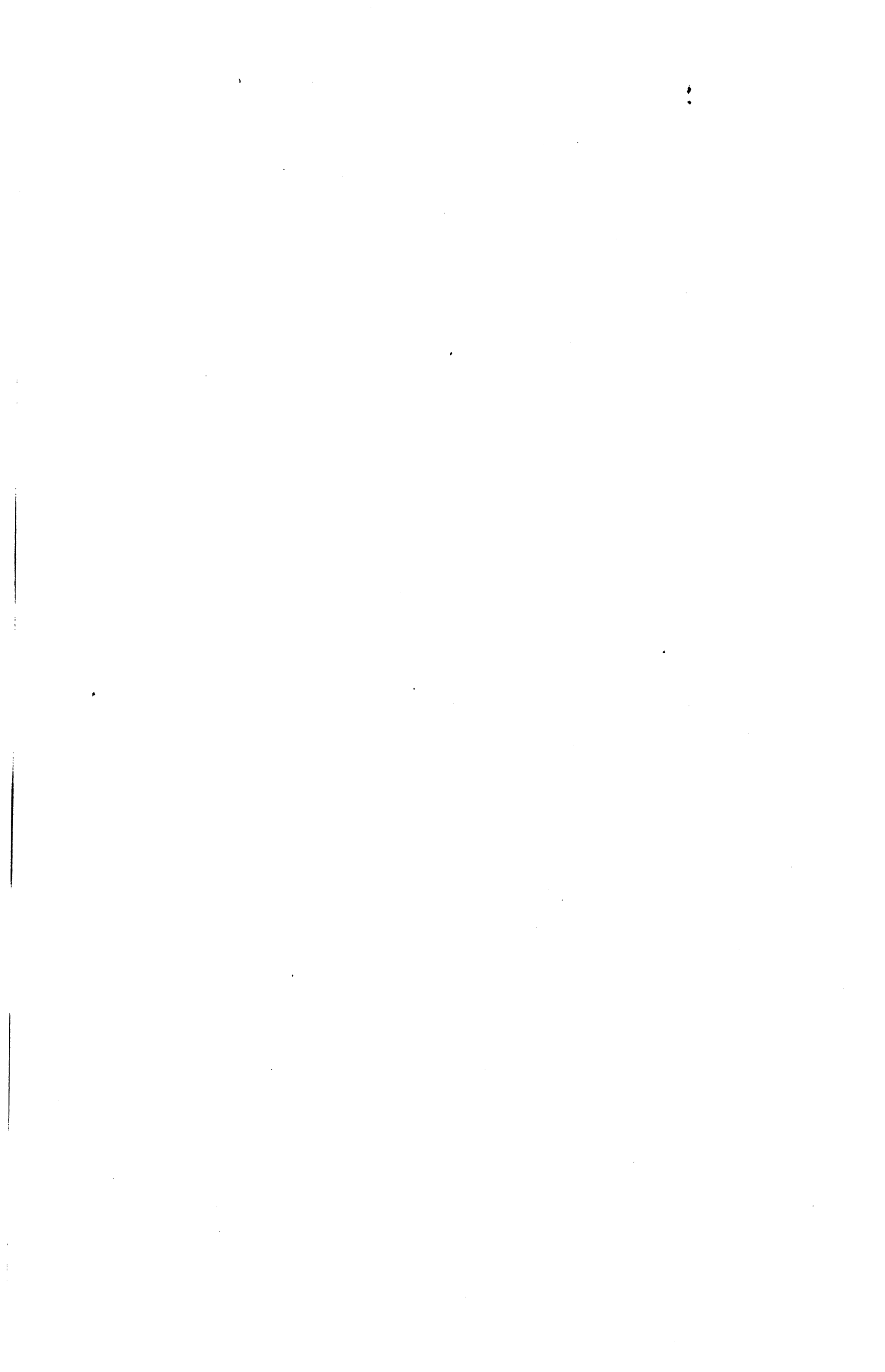
- Si $(x,z) \in I_2$ il ya une contradiction avec III.7.1 (3).

Donc $(x,z) \in F$.

Il en résulte que F vérifie la condition (F_2) du théorème II.2.1.

On déduit de ce qui précède et du théorème III.2.1 que K_V est de Fournier et donc K'_V est de cordes orientées (théorème III.2.4).

C.Q.F.D.



CHAPITRE IV

P-L-Graphes et graphes de cordes.

IV.1. Pseudo-tournois linéaires;

IV.2. P-L-graphes et systèmes linéaires associés;

IV.3. Systèmes associés et solutions \mathcal{E} -admissibles;

IV.4. P-L-graphes et graphes décomposables.



Dans le chapitre précédent nous avons démontré qu'un graphe simple connexe G est un graphe de cordes si et seulement si il existe une orientation M de G et un marquage S de son complémentaire \bar{G} ayant la propriété que le pseudo-tournoi (G, M, S) soit de la classe \mathcal{G} ; c'est à dire vérifiant les conditions (C_1) et (C_2) du théorème III.3.4.

Dans le présent chapitre nous allons démontrer que les conditions $(C_2)(T_2)$ et $(C_2)(T_3)$ du théorème III.3.4 sont suffisantes pour caractériser les graphes de cordes. Nous montrerons également que cette caractérisation permet de reconnaître les graphes de cordes en temps polynomial.

IV. Pseudo-tournois linéaires.

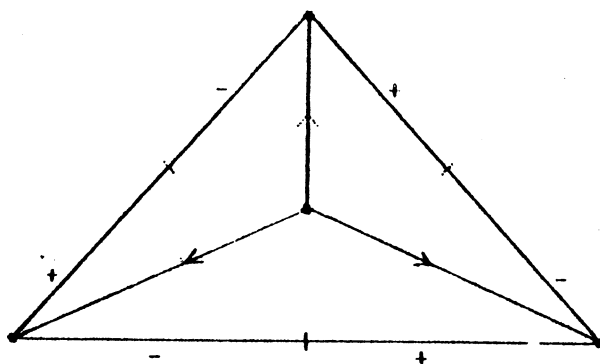
Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. un pseudo-tournoi $K_V = (G, M, S)$ de base G est dit **Pseudo-tournoi linéaire** si G est connexe et si K_V vérifie les conditions du théorème III.3.4 relatives aux triangles quasi-pleins et quasi-vides, c'est à dire les conditions suivantes:

$(C_2)(T_2)$: Si T est un triangle quasi-plein de K_V alors soit les deux arêtes pleines sont orientées en chemin et les signes de l'arête vide sont identiques, soit les deux arêtes pleines sont orientées en anti-chemin et les signes de l'arêtes vides sont distincts.

$(C_2)(T_3)$: Si T est un triangle quasi-vide de K_V alors les signes au sommet commun aux deux arêtes vides sont identiques.

Remarques.

- (1) Tout pseudo-tournoi de la classe \mathcal{G} est un pseudo-tournoi linéaire.
- (2) La réciproque n'est pas vraie en général; le pseudo-tournoi ci-dessous en est un exemple.



Soit $K_V = (G, M, S)$ un pseudo-tournoi linéaire. Nous allons donner quelques propriétés qui nous seront utiles dans la suite:

Propriété 1. Pour toute partie X de l'ensemble de sommets V le pseudo-tournoi $R_X(K_V)$, obtenu à partir de K_V par retournement en X (voir la définition dans la section III.2) est aussi un pseudo-tournoi linéaire.

En effet, ceci résulte du lemme III.4.1.1 et de la remarque III.3.1 (2).

Propriété 2. Soit x un sommet de G . Considérons la x -réduction $K'_V = (G, M', S')$ de K_V .

(rappelons que $K'_V = R_{X(x)}(K_V)$ où l'ensemble $X(x) = M^-(x) \cup S^{--}(x) \cup S^{+-}(x)$).

D'après la partie (i) du théorème III.4.1.4, nous avons que dans K'_V on a:

$M^-(x) \cup S^{--}(x) \cup S^{+-}(x) = \emptyset$. Il en résulte que V est partitionné en quatre parties: (x) , $M^+(x)$, $S^{++}(x)$ et $S'^{++}(x)$.

D'autre part, les conditions $(C_2)(T_2)$ et $(C_2)(T_3)$ nous permettent de conclure que:

(i) Si $a \in S'^{++}(x)$ et $b \in S^{++}(x)$ alors $\{a, b\}$ est une arête vide de K'_V , puisque les signes au sommet x dans le triangle engendré par $\{x, a, b\}$ sont distincts (voir la figure 1 ci-dessous).

(ii) Si $\{a, b\}$ est une arête pleine de K'_V avec $a \in S'^{++}(x)$ (respectivement $a \in S^{++}(x)$) et $b \in M^+(x)$ alors $(a, b) \in M'$ (respectivement $(b, a) \in M'$):

En effet, dans le triangle quasi plein de K'_V engendré par $\{x,a,b\}$ les signes de l'arête vide $\{x,a\}$ sont distincts (respectivement identiques) et $(x,b) \in M'$ (voir la figure 1).

(iii) Si $\{a,b\}$ est une arête vide de K'_V avec $a \in S^{-+}(x) \cup S^{++}(x)$ et $b \in M^{++}(x)$ alors d'après $(C_2)(T_3)$ appliquée au triangle quasi-vide engendré par $\{a,x,b\}$ on peut affirmer que $S(\{a,b\}) = +$ (figure 1).

(iv) Les signes de toute arête vide $\{a,b\}$ de K'_V ayant ses deux extrémités dans $M^{++}(x)$ sont distincts. Ceci résulte de $(C_2)(T_2)$ appliquée au triangle quasi-vide engendré par $\{a,x,b\}$ (figure 1).

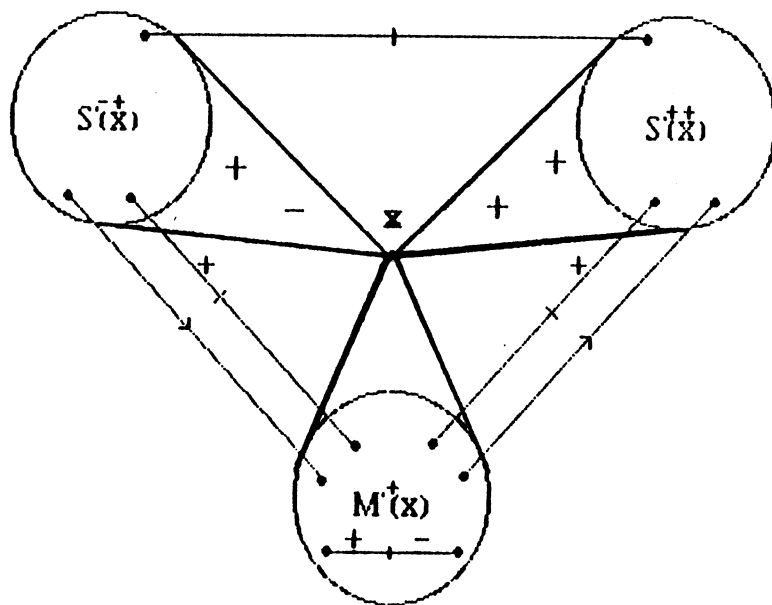


Figure 1. Représentation schématique de $K'_V - R_X(x)(K_V)$.

Propriété 3. Soit x un sommet de G . On désigne par $\bar{N}(x)$ le voisinage de x dans le complémentaire \bar{G} de G , et par $G_{\bar{N}(x)}$ le sous-graphe de G engendré par $\bar{N}(x)$. Si y et z sont dans une même composante connexe de $G_{\bar{N}(x)}$ alors $S(\{x,y\}) = S(\{x,z\})$.

Pour vérifier il suffit de voir la proposition III.4.1.6 dont la preuve

n'utilise que la condition $(C_2)(T_3)$.

Soit, maintenant, $K'_v = (G, M', S')$ un pseudo-tournoi linéaire, et soit x un sommet de K'_v . Nous allons définir le pseudo-tournoi $CL_x(K'_v)$: le complémentaire local en x de K'_v . Considérons alors la x -réduction $R_{X(x)}(K'_v) = K_v = (G, M, S)$, $(X(x) = M^-(x) \cup S^-(x) \cup S^+(x))$. Nous définirons d'abord $CL_x(K_v) = K''_v = (G'', M'', S'')$ puis nous poserons :

$$CL_x(K'_v) = R_{X(x)} \circ CL_x \circ R_{X(x)}(K'_v) = R_{X(x)} \circ CL_x(K_v) = R_{X(x)}(K''_v) :$$

Définition de $K''_v = (G'', M'', S'')$

(i) G'' est le graphe $CL_x(G)$ obtenu à partir de G par complémentation locale en x (voir section 1.4.1)

(ii) Définition de M'' :

Soit $\{a, b\}$ une arête de G'' .

- Si a et b sont dans $M^+(x)$ alors, d'après la définition de $G'' = CL_x(G)$, $\{a, b\}$ est une arête vide de K_v . Les signes de $\{a, b\}$ sont distincts d'après la propriété 2(iv).

On pose alors $(a, b) \in M''$ si $S(\{a, b\}) = +$ (et donc si $S(\{b, a\}) = -$) ;

- Si l'une des deux extrémités de $\{a, b\}$, au moins, n'est pas dans $M^+(x)$, alors $\{a, b\}$ est aussi une arête de G .

On envisage deux cas :

- dans le cas où a et b sont dans $S^+(x)$, on retourne l'orientation de $\{a, b\}$ par M ; c'est à dire on pose $(a, b) \in M''$ si $(b, a) \in M$.

- dans le cas contraire, on pose $(a, b) \in M''$ si $(a, b) \in M$.

(iii) Définition de S'' :

Soit $\{a, b\}$ une arête de \bar{G}'' , complémentaire de G'' .

- Si a et b sont dans $M^+(x)$, alors $\{a,b\}$ est une arête pleine de K_V . On pose alors : $S''([a,b]) = +$ et $S''([b,a]) = -$ si $(a,b) \in M$.

- Si a ou b n'est pas dans $M^+(x)$, alors $\{a,b\}$ est une arête vide de K_V . On pose alors : $S''([a,b]) \neq S([a,b])$ dans le seul cas où $a \in M^+(x)$ et $b \in S^{-+}(x)$, et on pose $S''([a,b]) = S([a,b])$ dans tout autre cas.

La figure 2 illustre la transformation de K_V en K''_V .

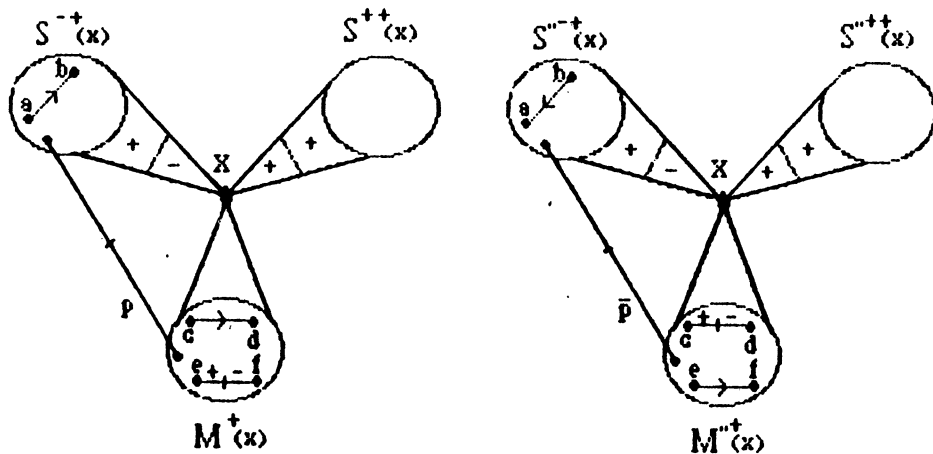


Figure 2.

IV.1.1. Remarques.

(1) Comme K_V est x -réduction de K'_V , K_V vérifie la propriété 2. Il est alors facile de voir que K''_V vérifie la même propriété.

(2) La définition précédente a été, bien entendu, inspirée par l'étude du cas particulier des pseudo-tournois de cordes orientées.

Dans la suite, on appelle **P.L.-graphe** tout graphe simple qui est la base d'un pseudo-tournoi linéaire. D'après la définition des pseudo-tournois linéaires, un tel graphe est nécessairement connexe.

IV.1.2. Théorème. (1) Le complémentaire local d'un pseudo-tournoi linéaire en l'un quelconque de ses sommets est également un pseudo-tournoi linéaire.

(2) Le complémentaire local d'un P.L-graphe en l'un quelconque de ses sommets est également un P.L-graphe.

Preuve

Il est clair que (2) est une conséquence immédiate de (1). Soient donc $K'_v = (G, M', S')$ un pseudo-tournoi linéaire et x un sommet de K'_v . On désigne par $K_v = (G, M, S)$ la x -réduction de K'_v et par $K''_v = (G'', M'', S'')$ le pseudo-tournoi $CL_x(K_v)$ défini comme ci-dessus.

Nous avons défini $CL_x(K_v)$ comme étant le pseudo-tournoi obtenu, par retournement en $X(x) = M''(x)US''(x)US''(x)$, à partir de K''_v . D'après la propriété 1, il nous suffit donc de montrer que K''_v est un pseudo-tournoi linéaire, et nous savons que K_v est linéaire. Rappelons que K''_v vérifie la propriété (2) ; et notons qu'il est facile de vérifier que $G'' = CL_x(G)$ est connexe, puisque G l'est.

Nous allons démontrer maintenant que K''_v vérifie $(C_2)(T_2)$ et $(C_2)(T_3)$

$(C_2)(T_2)$:

Soit a, b et c trois sommets distincts engendrant un triangle quasi-plein T_1 de K''_v . On désigne par T le triangle de K_v engendré par ces mêmes sommets. On suppose que $\{b, c\}$ est l'arête vide de T_1 . Si $x = a$ alors b et c sont dans $M''(x)$ et dans ce cas $b a c = b x c$ est un anti-chemin et les signes de $\{b, c\}$ sont distincts (propriété 2(iv)). Donc T_1 vérifie $(C_2)(T_2)$.

Si $x = b$ alors $a \in M''(x)$ et $c \in S''(x) \cup S''(x)$. D'après la propriété 2 (ii) on

peut affirmer que T_1 vérifie toujours $(C_2)(T_2)$. De même si $x = c$.

Supposons donc que $x \in \{a,b,c\}$. Trois cas sont possibles pour le sommet a :

1er Cas : $a \in S^{++}(x)$

Comme $\{a,b\}$ et $\{a,c\}$ sont pleines, $b \in S^{--}(x)$ et $c \in S^{--}(x)$ d'après la propriété 2 (i). Si l'un des deux sommets b et c appartient à $S^{++}(x)$, T_1 est identique à T et vérifie donc $(C_2)(T_2)$. Sinon, b et c appartiennent à $M^{++}(x)$ (figure 3).

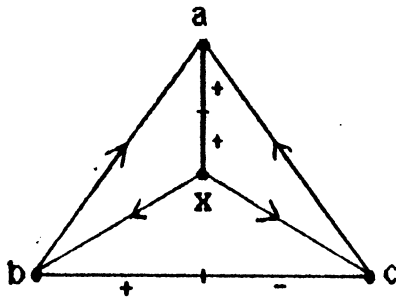


Figure 3.

Dans ce cas $(b,a) \in M^{--}$, $(c,a) \in M^{--}$ (propriété 2 (ii)) et les signes de $\{b,c\}$ sont distincts (propriété 2 (iv)). Donc T_1 vérifie $(C_2)(T_2)$.

2ème Cas : $a \in S^{--}(x)$

Toujours d'après la propriété 2 (i), $b \in S^{++}(x)$ et $c \in S^{++}(x)$. Donc b et c peuvent être :

(i) tous les deux dans $S^{--}(x)$ (figure 4).

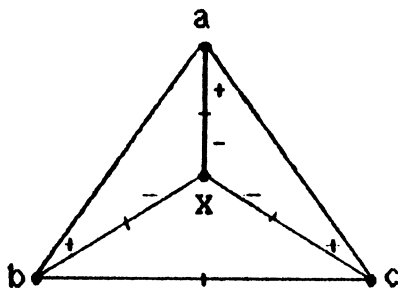


Figure 4.

Dans ce cas T est aussi un triangle quasi-plein. D'après la définition de K''_v

T_1 s'obtient à partir de T par retournement de l'orientation de la chaîne b à c . Or, une telle opération laisse inchangée la condition $(C_2)(T_2)$.

Donc T_1 vérifie $(C_2)(T_2)$.

(ii) Tous les deux dans $M^{++}(x)$ (figure 5).

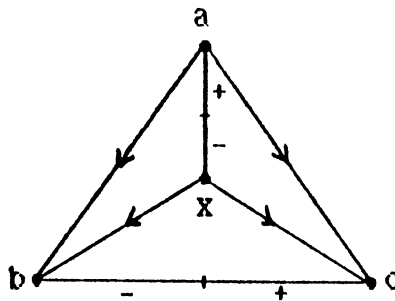


Figure 5.

Dans ce cas $(a,b) \in M''$, $(a,c) \in M''$ (propriété 2 (ii)) et les signes de $\{b,c\}$ sont distincts (propriété 2 (iv)). Donc T_1 vérifie $(C_2)(T_2)$.

(iii) l'un des deux, b par exemple, appartient à $S^{--}(x)$ et l'autre appartient à $M^{++}(x)$ (figure 6).

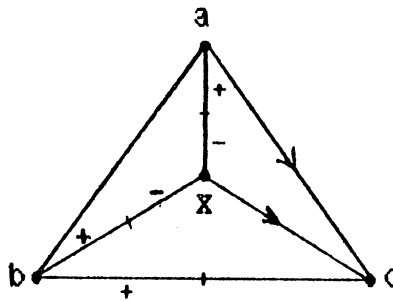


Figure 6.

Dans ce cas T est aussi un triangle quasi-plein d'arête vide $\{b,c\}$. D'après la définition de K''_v :

- $(a,c) \in M'' \cap M$ (propriété 2 (ii));
- $S''(\{b,c\}) = S(\{b,c\}) = +$ (propriété 2 (iii));
- $S''(\{c,b\}) \neq S(\{c,b\})$;
- $(a,b) \in M'' \Leftrightarrow (b,a) \in M$.

Donc, si les signes de $\{b,c\}$ sont identiques dans K''_{ν} , $S''([c,b]) = +$, et donc $S([c,b]) = -$. Comme T vérifie $(C_2)(T_2)$ et $(a,c) \in M$, alors $(a,b) \in M$ et donc $(b,a) \in M''$. Il en résulte que $b a c$ est un chemin dans K''_{ν} . On démontre de la même manière que si les signes de $\{b,c\}$ sont distincts dans K''_{ν} , alors la chaîne $b a c$ est un anti-chemin dans K''_{ν} . Par suite T_1 vérifie $(C_2)(T_2)$.

3ème cas : $a \in M''^+(x)$

Si b et c sont dans $S''^{++}(x) \cup S''^{--}(x)$, d'après la définition de K''_{ν} , T et T_1 sont identiques, et donc T_1 vérifie $(C_2)(T_2)$. Supposons que b et c ne sont pas tous les deux dans $S''^{++}(x) \cup S''^{--}(x)$; ils peuvent être :

(i) Tous les deux dans $M''^+(x)$ (figure 7).

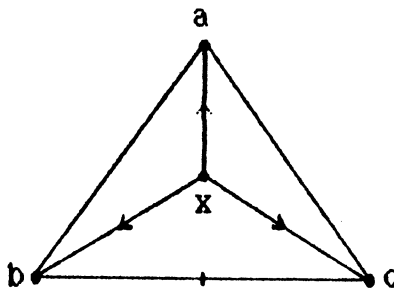


Figure 7.

Dans ce cas T est quasi vide et $\{b,c\}$ est son arête pleine. Comme T vérifie $(C_2)(T_3)$, les signes en a sont identiques dans K_{ν} . Si $S([a,b]) = S([a,c]) = +$, alors $(a,b) \in M''$ et $(a,c) \in M''$; et si $S([a,b]) = S([a,c]) = -$, alors $(b,a) \in M''$ et $(c,a) \in M''$. Donc la chaîne $b a c$ est un anti-chemin dans K''_{ν} . Or d'après la propriété 2 (iv), les signes de $\{b,c\}$ sont distincts dans K''_{ν} , par suite le triangle T_1 vérifie $(C_2)(T_2)$.

(ii) l'un d'eux, b par exemple, dans $M^{++}(x)$ et l'autre dans $S^{++}(x)$ (voir figure 8).

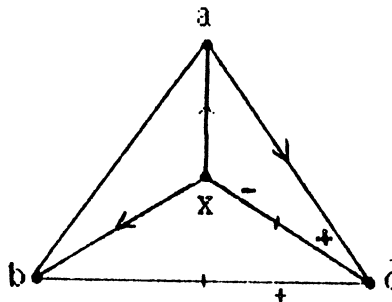


Figure 8.

Dans ce cas T est un triangle quasi-vide; son arête pleine est $\{a,c\}$. Comme T vérifie $(C_2)(T_3)$, $S([b,c]) = S([b,a])$. D'autre part, d'après la définition de K''_v , nous avons :

- $(a,c) \in M'' \cap M$ (propriété 2 (ii)) ;
- $S''([c,b]) = S([c,b]) = +$ (propriété 2 (iii)) ;
- $S''([b,c]) = S([b,c])$.

Maintenant, si les signes de $\{b,c\}$ sont identiques dans K''_v alors $S''([b,c]) = +$, et donc $S([b,c]) = +$. Comme $S([b,a]) = S([b,c])$, alors $S([b,a]) = +$ et par suite $(b,a) \in M''$, la chaîne $b \ a \ c$ est un chemin dans K''_v . On démontre de la même manière que si les signes de $\{b,c\}$ dans K''_v sont distincts, alors la chaîne $b \ a \ c$ est un anti-chemin dans K''_v . Ce qui prouve que T_1 vérifie $(C_2)(T_2)$.

(iii) l'un d'eux, b par exemple, dans $M^{++}(x)$ et l'autre dans $S^{++}(x)$ (figure 9). Dans ce cas, comme dans le cas (ii) précédent, T est quasi-vide, son arête pleine est $\{a,c\}$, et donc $S([b,c]) = S([b,a])$. De plus nous avons :

- $(c,a) \in M'' \cap M$ (propriété 2 (ii)) ;
- $S''([c,b]) = S([c,b]) = +$ (propriété 2 (iii)) ;
- $S''([b,c]) \neq S([b,c])$ (définition de S'').

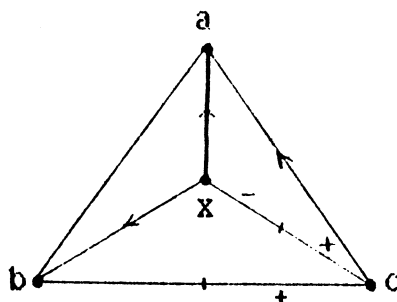


Figure 9.

Maintenant, si les signes de $\{b,c\}$ sont identiques dans K''_V alors $S''(\{b,c\}) = +$, donc $S(\{b,c\}) = -$ et $S(\{b,a\}) = -$, ce qui nous permet de conclure que $(a,b) \in M''$; or $(c,a) \in M''$ et donc la chaîne $c a b$ est un chemin dans K''_V . On démontre d'une manière analogue que si les signes de $\{b,c\}$ sont distincts dans K''_V alors la chaîne $c a b$ est un anti-chemin dans K''_V . Ceci prouve que T_1 vérifie $(C_2)(T_2)$.

Ainsi tout triangle quasi-plein de K''_V vérifie $(C_2)(T_2)$.

$(C_2)(T_3)$:

Considérons maintenant un triangle quasi-vide T_1 de K''_V engendré par $\{a,b,c\}$. On suppose que $\{b,c\}$ est l'arête pleine de T_1 . On désigne par T le triangle de K_V engendré par $\{a,b,c\}$. Si $x = a$, alors b et c sont $S''^{--}(x) \cup S''^{++}(x)$. Si $S''(\{x,b\}) \neq S''(\{x,c\})$, l'arête pleine $\{b,c\}$ a une extrémité dans $S''^{--}(x)$ et l'autre dans $S''^{++}(x)$: il y a contradiction avec la propriété 2 (i). Donc T_1 vérifie $(C_2)(T_3)$ dans ce cas.

De même, si $x = b$ (par exemple) alors a est dans $S''^{--}(x) \cup S''^{++}(x)$, par suite $S''(\{a,c\})$ et T_1 vérifie $(C_2)(T_3)$. Supposons donc que $x \notin \{a,b,c\}$. Trois cas sont possibles pour le sommet a :

1er cas : $a \in S^{++}(x)$

D'après la propriété 2 (i), l'arête pleine $\{b,c\}$ ne peut avoir une extrémité dans $S^{++}(x)$ et l'autre dans $S^{--}(x)$. Donc cinq cas sont possibles pour les sommets b et c :

(i) b et c sont dans $S^{++}(x)$;

(ii) b et c sont dans $S^{--}(x)$;

(iii) l'un deux est dans $S^{--}(x)$ et l'autre est dans $M^{+}(x)$;

(iv) l'un deux est dans $S^{++}(x)$ et l'autre est dans $M^{+}(x)$;

(v) les deux sont dans $M^{+}(x)$.

Dans les quatre premiers cas, T est quasi-vide, son arête pleine est $\{b,c\}$ et de plus $S(\{a,b\}) = S^{\prime}(\{a,b\})$ et $S(\{a,c\}) = S^{\prime}(\{a,c\})$. Donc T_1 , comme T , vérifie $(C_2)(T_3)$.

Dans le cas (v), $S^{\prime}(\{a,b\}) = S^{\prime}(\{a,c\}) = +$ (propriété 2 (iii)), et donc T_1 vérifie $(C_2)(T_3)$.

2ème Cas : $a \in S^{--}(x)$

On démontre, exactement comme dans le premier cas, qu'il y a cinq cas possibles pour les positions de b et c et que, dans chacun de ces cas, nous avons $S^{\prime}(\{a,b\}) = S^{\prime}(\{a,c\})$. Donc T_1 vérifie $(C_2)(T_3)$.

3ème cas : $a \in M^{+}(x)$

Comme précédemment, il y a cinq cas possibles pour b et c :

(i) b et c sont dans $S^{++}(x)$ (figure 10)

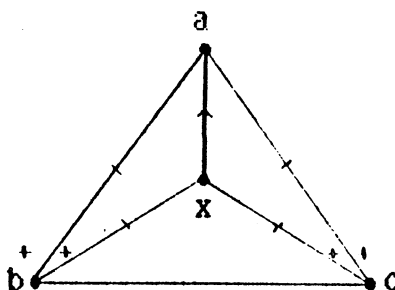


Figure 10.

Dans ce cas T_1 est identique à T et vérifie donc $(C_2)(T_3)$.

(ii) b et c sont dans $S^{--}(x)$ (figure 11).

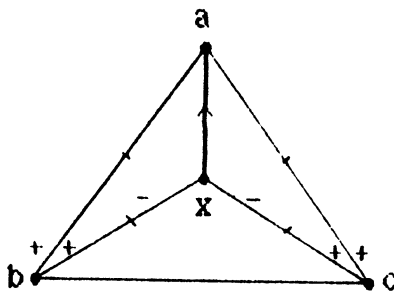


Figure 11.

Dans ce cas, T est aussi quasi-vide d'arête pleine $\{b,c\}$. De plus, nous avons $S''([a,b]) \neq S([a,b])$ et $S''([a,c]) \neq S([a,c])$. Or T vérifie $(C_2)(T_3)$, donc $S([a,b]) = S([a,c])$. Il en résulte que $S''([a,b]) = S''([a,c])$ et T_1 vérifie $(C_2)(T_3)$.

(iii) l'un des deux, b par exemple, est dans $M^{++}(x)$ et l'autre est dans $S^{++}(x)$ (figure 12).

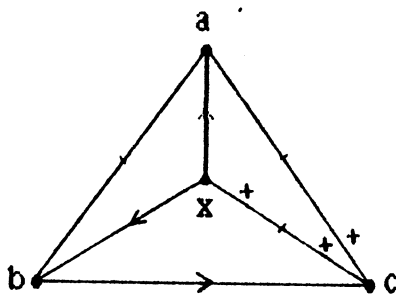


Figure 12.

Dans ce cas T est quasi plein, son arête vide étant $\{a,c\}$. D'autre part, d'après la définition de K''_v :

- $(b,c) \in M'' \cap M$ (propriété 2 (ii)) ;
- $S''([c,a]) = S([c,a]) = +$ (propriété 2 (iii))
- $S''([a,c]) = S([a,c])$

Si $S''([a,c]) = +$, il en est de même pour $S([a,c])$; comme $S([c,a]) = +$, les signes de $\{a,c\}$ sont identiques dans K_v et donc la chaîne $a b c$ est un chemin dans (G,M) . Comme $(b,c) \in M$, $(a,b) \in M$ et donc $S''([a,b]) = +$ d'après la définition de S'' . On démontre de la même manière que si $S''([a,c]) = -$ alors $S''([a,b]) = -$. Donc $S''([a,b]) = S''([a,c])$ et T_1 vérifie $(C_2)(T_3)$.

(iv) l'un des deux, b par exemple, est dans $M^{++}(x)$ et l'autre est dans $S^{--}(x)$ (figure 13).

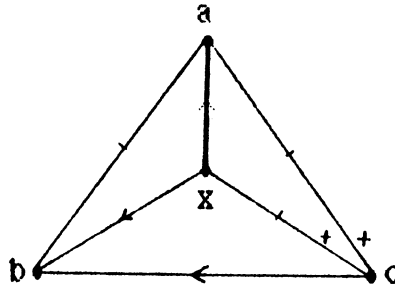


Figure 13.

Dans ce cas T est quasi-plein et son arête vide est $\{a,c\}$. De plus nous avons :

- $(c,b) \in M'' \cap M$ (propriété 2 (iii));
- $S''([c,a]) = S([c,a]) = +$ (propriété 2 (iii)) ;
- $S''([a,c]) \neq S([a,c])$.

Si $S''([a,c]) = +$, $S([a,c]) = -$. Comme $S([c,a]) = +$, les signes de $\{a,c\}$ sont distincts dans K_v , et donc la chaîne $a b c$ est un anti-chemin dans (G,M) . Or $(c,b) \in M$, donc $(a,b) \in M$ et par suite $S''([a,b]) = +$. On démontre de la même façon que si $S''([a,c]) = -$, $S''([a,b]) = -$ également. Donc T_1 vérifie $(C_2)(T_3)$.

(v) b et c sont dans $M^{++}(x)$ (figure 14).

Dans ce cas, T est quasi-plein et son arête vide est $\{b,c\}$. Les signes de $\{b,c\}$ dans K_v sont distincts d'après la propriété (2) (iv).

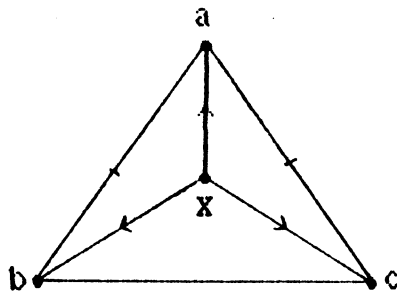


Figure 14.

Comme T vérifie $(C_2)(T_2)$, $b a c$ est un anti-chemin dans (G,M) .

Si $S''([a,b]) = +$, $(a,b) \in M$ et donc $(a,c) \in M$ et $S''([a,c]) = +$. De même, si $S''([a,b]) = -$, $(b,a) \in M$, et donc $(c,a) \in M$ et $S''([a,c]) = -$. Par suite T_1 vérifie $(C_2)(T_3)$.

C.Q.F.D.

On appelle $K_{1,3}$ tout graphe biparti complet dans lequel l'un de ces deux stables est de cardinalité 1 et l'autre est de cardinalité 3.

Considérons un pseudo-tournoi $K_V = (G,M,S)$. Un triangle vide T de K_V engendré par $\{a,b\}$ est dit **triangle vide essentiel** s'il existe un sommet x de K_V tel que $\{x,a,b,c\}$ engendre un sous graphe de G isomorphe à $K_{1,3}$.

Rappelons l'énoncé de la condition du théorème III.3.4 concernant les triangles vides :

$(C_2)(T_4)$: Dans un triangle vide, les signes en , au plus, un sommet, sont distincts.

IV.1.3. Lemme. Soit $K_V = (G,M,S)$ un pseudo-tournoi linéaire. Si tout triangle vide essentiel de K_V vérifie $(C_2)(T_4)$, alors tout triangle vide de K_V vérifie $(C_2)(T_4)$.

Preuve

En effet, soit T un triangle vide de K_V engendré par $\{a, b, c\}$. Supposons que T n'est pas essentiel. Si les signes en chacun des sommets de T sont identiques, T vérifie $(C_2)(T_4)$.

Supposons donc que les signes en a , par exemple, sont distincts, et démontrons que les signes en b (respectivement en c) sont identiques.

Comme G est connexe, il existe une chaîne minimale $C = x_0 x_1 \dots x_n$ joignant $x_0 = b$ et $x_n = c$. Comme $S(\{a, b\})$ et $S(\{a, c\})$ sont distincts, alors soit a est un sommet de C , soit a est adjacent à, au moins, un sommet de C , et ceci d'après la propriété 3.

1er Cas : Supposons que a est un sommet x_i de C (figure 15) :

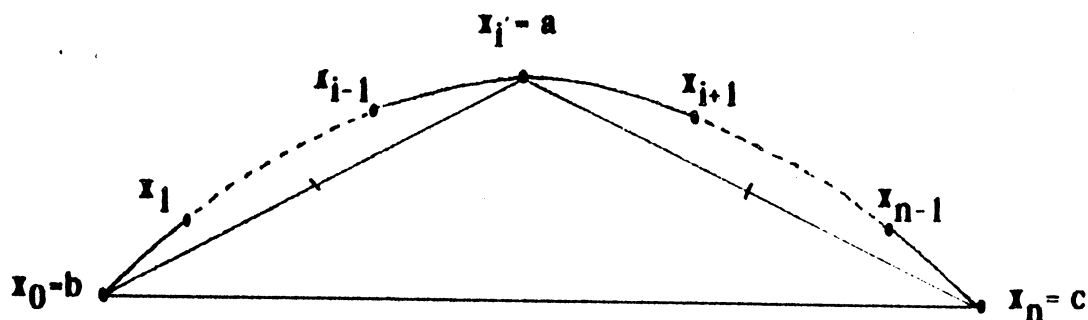


Figure 15.

Dans ce cas $a = x_i$ et $c = x_n$ sont dans une même composante connexe de $G_{\bar{N}(b)}$. De même, $a = x_i$ et $b = x_0$ sont dans une même composante connexe de $G_{\bar{N}(c)}$. D'après la propriété (3), nous avons : $S(\{b, c\}) = S(\{b, a\})$ et $S(\{c, a\}) = S(\{c, b\})$. Donc T vérifie $(C_2)(T_4)$.

2ème Cas : a n'est pas un sommet de C , et donc il est adjacent dans G à, au moins, un sommet de C . On désigne par x_i (resp. x_j) le sommet de C le plus proche de $x_0 = b$ (resp. de $x_n = c$) et qui est adjacent à a dans G .

Si $j \geq i+2$, alors la chaîne $C' = x_0 x_1 \dots x_i a x_j \dots x_n$ sera une chaîne minimale de G joignant b et c et passant par a . T vérifie donc $(C_2)(T_4)$ d'après le premier cas.

- Si $j = i+1$ ou si $i = j$ avec $2 \leq i - j \leq n-2$ (figure 16), alors la chaîne $a x_j x_{j+1} \dots x_{n-1} c$ est une chaîne de $G_{\overline{N}(b)}$ joignant a et c . Donc, d'après la propriété 3, $S([b,a]) = S([b,c])$.

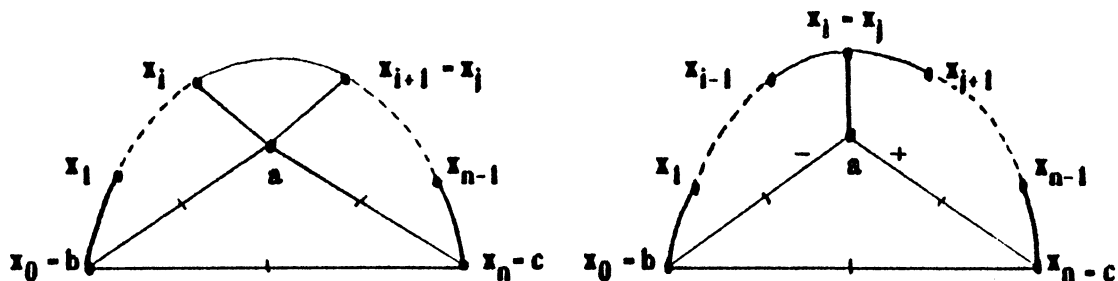


Figure 16.

De même, la chaîne $b x_1 \dots x_i a$ est une chaîne de $G_{\overline{N}(c)}$ joignant a et b .
Donc $S([c,a]) = S([c,b])$.

- Supposons que $i = j-1$ (figure 17) (le cas $i = j = n-1$ se traite de la même manière).

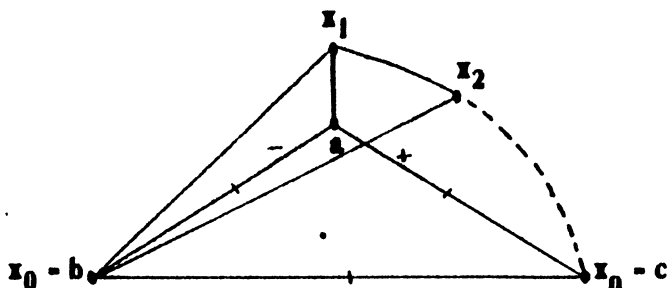


Figure 17.

Comme on a supposé que T n'est pas essentiel, $n \geq 3$. Donc a, x_1, b est une chaîne de $G_{\bar{N}(c)}$ joignant a et b et par suite $S([c,a]) = S([c,b])$ d'après la propriété (3). De même $x_2 \dots x_n$ est une chaîne de $G_{\bar{N}(b)}$ joignant x_2 et c , donc $S([b,x_2]) = S([b,c])$. D'autre part, considérons le triangle T' engendré par $\{a,b,x_2\}$. T' est un triangle vide essentiel. $x_2 \dots x_n$ est une chaîne de $G_{\bar{N}(a)}$ joignant x_2 et $x_n = c$ donc $S([a,x_2]) = S([a,c])$. Or, nous avons supposé que $S([a,c]) \neq S([a,b])$, donc $S([a,x_2]) \neq S([a,b])$. Comme T' est essentiel, il vérifie $(C_2)(T_4)$ par hypothèse, et donc $S([b,a]) = S([b,x_2])$. Il s'en suit que $S([b,a]) = S([b,c])$. Ainsi T vérifie $(C_2)(T_4)$ dans tous les cas.

C.Q.F.D.

IV.2. P.L.-graphes et systèmes associés

Soit $G = (V,E)$ un graphe simple connexe. On désigne par B l'ensemble des couples (x,y) de $V \times V$ tels que $x \neq y$. On peut identifier B à l'ensemble des demi-arêtes du graphe complet $(V, \mathcal{P}_2(V))$ en considérant (x,y) comme étant la demi-arête $[x,y]$ de $\{x,y\}$ contenant x . Pour simplifier les notations, nous allons désigner par xy l'élément (x,y) de B .

Soit $[GF(2)]^B$ l'ensemble de toutes les applications de B dans $GF(2)$. On munit $[GF(2)]^B$ d'une addition et d'une loi externe à opérateurs dans $GF(2)$, en posant :

- Pour α et β dans $[GF(2)]^B$:

$(\alpha + \beta)(xy) = \alpha(xy) + \beta(xy)$ et ceci pour tout xy dans B ;

- Pour α dans $[GF(2)]^B$:

1. $0 \cdot \alpha = \alpha$ et $0 \cdot \alpha = 0$ où 0 désigne l'application identiquement nulle.

Il est facile de vérifier que $[GF(2)]^B$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $GF(2)$.

Supposons maintenant que G est un P.L-graphe, et soit $K_V = (G, M, S)$ un pseudo-tournoi linéaire de base G . Nous allons associer à K_V un vecteur α de $[GF(2)]^B$ défini de la manière suivante :

Pour toute arête pleine $\{x, y\}$ de K_V on pose :

$$\alpha(xy) = 0 \text{ et } \alpha(yx) = 1 \text{ si et seulement si } (x, y) \in M ;$$

et pour toute arête vide $\{x, y\}$ de K_V , on pose :

$$\alpha(xy) = 0 \text{ si } S(|x, y|) = - \text{ et } \alpha(yx) = 1 \text{ si } S(|x, y|) = +.$$

Le vecteur α ainsi défini sera dit **vecteur représentatif de K_V** .

Remarquons d'abord que α vérifie les équations :

$$(E_1) \quad \alpha(xy) + \alpha(yx) = 1 \text{ pour tout } \{x, y\} \text{ dans } E.$$

D'autre part, soit T un triangle quasi-plein de K_V engendré par $\{x, y, z\}$ et supposons que $\{y, z\}$ est son arête vide. Si $y \ x \ z$ est un chemin dans (G, M) alors $\alpha(xy) + \alpha(xz) = 1$, et dans ce cas les signes de $\{y, z\}$ sont identiques, donc $\alpha(yz) + \alpha(zx) = 0$. Par contre, si $y \ x \ z$ est un anti-chemin dans (G, M) alors $\alpha(xy) + \alpha(xz) = 0$, et dans ce cas les signes de $\{y, z\}$ sont distincts, c'est à dire $\alpha(yz) + \alpha(zx) = 1$. Il en résulte que α vérifie les équations suivantes :

$$(E_2) \quad \alpha(xy) + \alpha(xz) + \alpha(yz) + \alpha(zx) = 1 \quad \text{pour tout triangle quasi-plein} \\ \text{engendré par } \{x, y, z\} \text{ et tel que} \\ \{y, z\} \text{ est son arête vide.}$$

Enfin, si T est un triangle quasi-vide de K_V engendré par $\{x, y, z\}$ et si $\{y, z\}$ est son arête pleine, alors les signes en x dans T sont identiques, c'est à dire que α vérifie :

$$(E_3) \quad \alpha(xy) + \alpha(xz) = 0 \quad \text{Pour } \{x, y\} \in \bar{E}, \{x, z\} \in \bar{E} \text{ et } \{y, z\} \in E \text{ (}\bar{E} \text{ désigne} \\ \text{l'ensemble des arêtes du complémentaire } \bar{G} \text{ de } G).$$

On constate que α est une solution du système linéaire $P(G)$ suivant :

$$P(G) \begin{cases} (E_1) \alpha(xy) + \alpha(yx) = 1 & \text{Pour } \{x,y\} \text{ dans } E \\ (E_2) \alpha(xy) + \alpha(xz) + \alpha(yz) + \alpha(yz) + \alpha(zx) = 1 & \text{Pour } \{x,y\} \text{ et } \{x,z\} \text{ dans } \\ & E \text{ et } \{y,z\} \text{ dans } \bar{E} \\ (E_3) \alpha(xy) + \alpha(xz) = 0 & \text{Pour } \{x,y\} \text{ et } \{x,z\} \text{ dans } \\ & \bar{E} \text{ et } \{y,z\} \text{ dans } E \end{cases}$$

Plus généralement, à tout graphe simple $G = (V,E)$, on associe le système $P(G)$ défini comme ci-dessus. $P(G)$ sera dit **système associé à G** . On dit alors que $P(G)$ est **compatible** s'il existe un vecteur α de $[GF(2)]^B$ vérifiant les équations de $P(G)$. Nous avons donc vu que si G est un P.L-graphe alors $P(G)$ est compatible et à tout pseudo-tournoi linéaire de base G correspond une solution de $P(G)$ qui est son vecteur représentatif. Nous allons établir maintenant la réciproque. Supposons que $P(G)$ est compatible et démontrons que G est un P.L-graphe.

En effet, soit α une solution de $P(G)$, nous allons définir à partir de α une orientation M de G et un marquage S de G de la manière suivante :

Pour $\{x,y\}$ dans E , nous savons d'après (E_1) que $\alpha(xy) + \alpha(yx) = 1$. On pose alors $(x,y) \in M$ si $\alpha(xy) = 0$ (et donc $\alpha(yx) = 1$). Pour $\{x,y\}$ dans \bar{E} on pose $S(|x,y|) = -$ si $\alpha(xy) = 0$ et $S(|x,y|) = +$ si $\alpha(xy) = 1$. Il est facile de vérifier que les équations (E_2) impliquent que les triangles quasi-pleins de K_V - (G,M,S) ainsi défini vérifient $(C_2)(T_2)$ et que les équations (E_3) impliquent que les triangles quasi-vides de K_V vérifient $(C_2)(T_3)$.

Ainsi nous venons d'achever la démonstration du théorème suivant :

IV.2.1. Théorème. Un graphe simple connexe G est un P.L-graphe si et seulement si le système associé $P(G)$ est compatible. Dans ce cas, les solutions de $P(G)$ sont en bijection avec les pseudo-tournois linéaires de base G .

IV.2.2. Remarque. Soit $K_V = (G, M, S)$ un pseudo-tournoi linéaire de base G et soit α le vecteur représentatif de K_V . Nous avons vu que pour tout X inclus dans V , le pseudo-tournoi $R_X(K_V)$ obtenu à partir de K_V par retournement en X est aussi linéaire. Soit β_X le vecteur représentatif de $R_X(K_V)$. Il est facile de vérifier que $\beta_X = \alpha + \zeta_X$, où :

- $\zeta_X(xy) - \zeta_X(yx) = 1$ si $\{x, y\}$ est une arête du cocycle $\omega_G(X)$
- $\zeta_X(xy) = 1$ si $\{x, y\}$ est une arête vide de K_V avec $x \in X$
- $\zeta_X(xy) = 0$ pour tout autre élément xy de B .

Ainsi, pour tout $X \subseteq V$, on définit le vecteur ζ_X comme ci-dessus. ζ_X sera dit le vecteur de retournement en X . Nous avons alors le résultat suivant :

Si α est une solution de $P(G)$ alors pour tout sous ensemble X de V , $\alpha + \zeta_X$ est aussi une solution de $P(G)$.

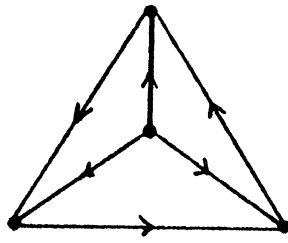
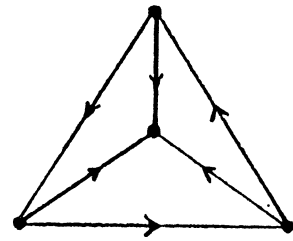
Autrement dit, si $P(G)$ est mis sous la forme matricielle $A\alpha = b$ alors, pour $X \subseteq V$, les ζ_X sont orthogonaux aux vecteurs lignes de la matrice A .

IV.3. Systèmes associés et solutions \mathcal{E} -admissibles.

Soient $G = (V, E)$ un P.L-graphe et $P(G)$ le système associé. Pour toute solution α de $P(G)$, α_V désigne le pseudo-tournoi linéaire qui correspond à α . Pour tout $A \subseteq V$, α_A désigne le sous pseudo-tournoi de α_V engendré par A . Une solution α de $P(G)$ est dite \mathcal{E} -admissible si le pseudo-tournoi α_V est de la classe \mathcal{E} .

IV.3.1. Proposition. Une solution α est \mathcal{G} -admissible si et seulement si :

(1) α_V vérifie la condition (C_1) du théorème III.3.4, c'est à dire que α_V ne contient pas un sous pseudo-tournoi isomorphe à l'un des tournois P_1 et P_2 suivants :

 (P_1)  (P_2)

(2) Tout triangle vide essentiel de α_V vérifie la condition $(C_2)(T_4)$ du théorème III.3.4.

Preuve

En effet, la condition nécessaire est évidente d'après la définition d'une solution \mathcal{G} -admissible. Quant à la suffisance, elle découle immédiatement du lemme IV.1.3.

C.Q.F.D.

Il en résulte que l'existence d'une solution qui n'est pas \mathcal{G} -admissible est due à l'existence de sous graphes de G isomorphes à un $K_{1,3}$ ou à un K_4 et ne remplissant pas les conditions $(C_2)(T_4)$ ou (C_1) qui les concernent. Nous allons étudier en détail ces cas particuliers. Pour simplifier, nous appellerons $K_{1,3}$ (respectivement K_4) de G tout sous-graphe de G isomorphe à $K_{1,3}$ (respectivement à K_4).

(1) Etude de $K_{1,3}$

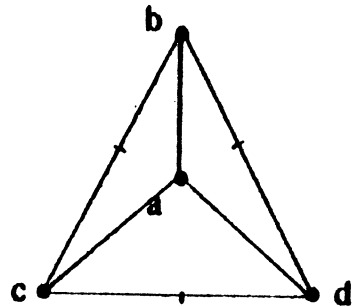
Supposons que G est un P.L-graphe et considérons un $K_{1,3}$ de G engendré par $A = \{a, b, c, d\}$, où a est le sommet adjacent aux trois autres. Soit α une solution quelconque de $P(G)$. $\{b, c, d\}$ engendrent un triangle vide essentiel T dans α_V .

On pose :

$$\alpha_A(b) = \alpha(bc) + \alpha(bd)$$

$$\alpha_A(c) = \alpha(cb) + \alpha(cd)$$

$$\alpha_A(d) = \alpha(db) + \alpha(dc)$$



Un sommet x de $\{b, c, d\}$ est dit **du type 0** (respectivement **du type 1**) pour α si $\alpha_A(x) = 0$ (respectivement $\alpha_A(x) = 1$).

IV.3.2. Lemme. Pour toute solution α de $P(G)$: soit les trois sommets b, c et d sont du type 1, soit un seul est du type 1 et les deux autres sont du type 0.

Preuve

En effet, considérons les triangles quasi pleins engendrés par $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ et $\{a, c, d\}$, et soit α une solution quelconque de $P(G)$. α vérifie les équations du type (E_2) associées à ces trois triangles, c'est à dire :

$$\alpha(ab) + \alpha(ac) + \alpha(bc) + \alpha(cb) = 1$$

$$\alpha(ab) + \alpha(ad) + \alpha(bd) + \alpha(db) = 1$$

$$\alpha(ac) + \alpha(ad) + \alpha(cd) + \alpha(dc) = 1$$

La somme de ces trois équations donne: $\alpha_A(b) + \alpha_A(c) + \alpha_A(d) = 1$.

Le lemme est une conséquence directe de cette équation.

C.Q.F.D.

IV.3.3. Définition. Un $K_{1,3}$ de G engendré par $\{a,b,c,d\}$ est dit **\mathcal{G} -admissible** (respectivement **\mathcal{G} -inadmissible**) pour une solution α de $P(G)$ si un seul sommet du triangle vide de ce sous-graphe est du type 1 pour α et les deux autres sont du type 0 (respectivement si les trois sommets du triangle vide de ce sous-graphe sont du type 1 pour α).

IV.3.4. Remarques.

(1) Il en résulte qu'un $K_{1,3}$ est \mathcal{G} -inadmissible si les signes en chaque sommet de son triangle vide sont distincts. Il est \mathcal{G} -admissible si les signes en un seul sommet sont distincts. Donc, nous avons le résultat suivant :

si α est une solution \mathcal{G} -admissible, tout $K_{1,3}$ de G est \mathcal{G} -admissible pour α .

(2) D'après le lemme IV.3.2, pour démontrer qu'un $K_{1,3}$ de G est \mathcal{G} -admissible pour α , il suffit de démontrer qu'un sommet de son triangle vide est du type 0 pour α .

(3) Il est facile de vérifier que si α est une solution de $P(G)$ et si A engendre un $K_{1,3}$ de G \mathcal{G} -inadmissible (respectivement \mathcal{G} -admissible) pour α , alors pour tout $X \subseteq V$, ce $K_{1,3}$ de G est aussi \mathcal{G} -inadmissible (respectivement \mathcal{G} -admissible) pour $\alpha + \zeta_X$. En effet, $(\alpha + \zeta_X)_V$ n'est autre que $R_X(\alpha_V)$.

(2) Etude de K_4

Supposons que G est un P.L-graphe, et considérons un K_4 de G engendré par $A = \{a,b,c,d\}$. G_A comporte exactement trois cycles de longueur 4 :

$$C_1 = a b c d a, \quad C_2 = a b d c a \quad \text{et} \quad C_3 = a c b d a \quad (\text{figure 18})$$

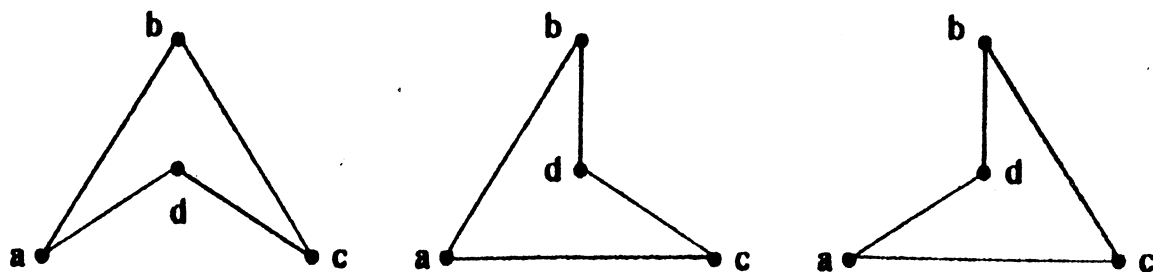


Figure 18.

Soit α une solution de $P(G)$. On pose :

$$\alpha(C_1) = \alpha(ab) + \alpha(bc) + \alpha(cd) + \alpha(da)$$

$$\alpha(C_2) = \alpha(ab) + \alpha(bd) + \alpha(dc) + \alpha(ca)$$

$$\alpha(C_3) = \alpha(ac) + \alpha(cb) + \alpha(bd) + \alpha(da)$$

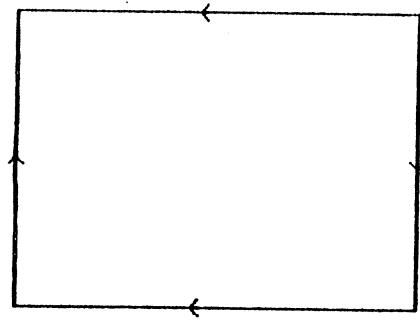
Comme α vérifie les équations du type (E_i) concernant les arêtes de G_A , on peut vérifier facilement que :

$$\alpha(C_1) = \alpha(ad) + \alpha(dc) + \alpha(cb) + \alpha(ba)$$

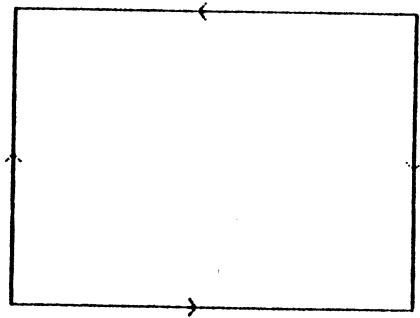
$$\alpha(C_2) = \alpha(ac) + \alpha(cd) + \alpha(db) + \alpha(ba)$$

$$\alpha(C_3) = \alpha(ad) + \alpha(db) + \alpha(bc) + \alpha(ca)$$

Le cycle C_i ($i = 1, 2, 3$) est dit du type 0 (respectivement du type 1) pour α si $\alpha(C_i) = 0$ (respectivement $\alpha(C_i) = 1$). Il est facile de vérifier que $\alpha(C_i) = 0$ si et seulement si C_i est, à un retournement de cocycle près, un circuit (figure 19 (a)) et $\alpha(C_i) = 1$ si et seulement si C_i est, à un retournement de cocycle près, un quasi-circuit, c'est à dire un circuit dont on a retourné une arête (figure 9 (b)).



(a) - circuit



(b) - quasi-circuit

Figure 19.

IV.3.5. Lemme. Pour toute solution α de $P(G)$: soit les trois cycles de longueur 4 sont du type 1, soit un seul cycle parmi les trois est du type 1 et les deux autres sont du type 0.

Preuve

Il suffit de vérifier que $\alpha(C_1) + \alpha(C_2) + \alpha(C_3) = 1$. Ceci résulte des équations $(E_1) : \alpha(xy) + \alpha(yx) = 1$ pour toute arête $\{x,y\}$ de G .

C.Q.F.D.

IV.3.6. Définition. Soit $A \subseteq V$ tel que G_A est une clique K_4 , et soit α une solution de $P(G)$. G_A est dit \mathcal{C} -admissible (respectivement \mathcal{C} -inadmissible) pour α si un seul cycle de longueur 4 parmi les trois cycles de G_A est du type 1 pour α (respectivement les trois cycles sont du type 1 pour α).

IV.3.7. Remarques.

(1) Il est facile de vérifier que si un K_4 de G est \mathcal{C} -inadmissible pour α alors il correspond dans α_V à un sous pseudo-tournoi isomorphe à l'un des

deux tournois P_1 et P_2 de la proposition IV.3.1.

Inversement, si un K_4 de G est \mathcal{G} -admissible pour α , alors il n'est pas isomorphe à P_1 ou à P_2 dans α_V .

(2) On vérifie facilement que si α est une solution de $P(G)$ et si A engendre un K_4 de G \mathcal{G} -admissible (resp. \mathcal{G} -inadmissible) pour α , alors pour tout $X \subseteq V$, G_A est aussi \mathcal{G} -admissible (resp. \mathcal{G} -inadmissible) pour $\alpha + \zeta_X$.

Soit, maintenant, α une solution de $P(G)$ et soit x un sommet de G . On appelle **complémentaire local de α en x** , le vecteur $CL_x(\alpha)$ qui correspond au pseudo-tournoi $CL_x(\alpha_V)$. D'après le théorème IV.1.2, $CL_x(\alpha)$ est une solution de $P(CL_x(G))$.

IV.3.8. Lemme. Si $A = \{a,b,c,d\}$ engendre un $K_{1,3}$ de G dans lequel a est le sommet adjacent aux trois autres et si G_A est \mathcal{G} -inadmissible pour une solution α de $P(G)$ alors A engendre, dans $CL_a(G)$, une clique K_4 \mathcal{G} -inadmissible pour $CL_a(\alpha)$.

Preuve

En effet, d'après IV.3.4 (2) et IV.3.7 (2), on peut toujours supposer que α_V est une a -réduction d'un autre pseudo-tournoi β_V (où β est une solution de $P(G)$).

C.Q.F.D.

Dans α_V , A engendre un $K_{1,3}$ isomorphe à celui de la figure 20.

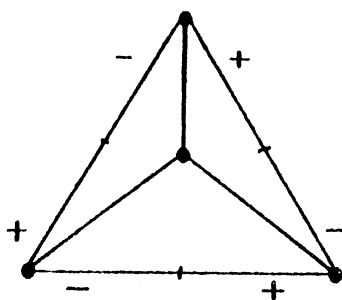


Figure 20.

Or, en appliquant les règles concernant la définition de $CL_a(\alpha_V)$, on peut voir que dans $[CL_a(\alpha)]_V$, A engendre un tournoi isomorphe à P_1 .

C.Q.F.D.

IV.3.9. Proposition. Une solution α de $P(G)$ est \mathcal{G} -admissible si et seulement si tout $K_{1,3}$ et tout K_4 de G est \mathcal{G} -admissible pour α .

C'est une conséquence directe de IV.3.1, IV.3.4 (1), IV.3.7 (1).

IV.3.10. Remarques.

(1) Si G est un graphe de cordes connexe alors G est un P.L-graphe et $P(G)$ possède des solutions \mathcal{G} -admissibles.

(2) Si α est une solution \mathcal{G} -admissible (respectivement \mathcal{G} -inadmissible) alors pour tout $X \subseteq V$, la solution $\alpha + \zeta_X$ l'est aussi.

IV.4. P.L.-graphes et graphes décomposables

Nous allons introduire une définition due à A. Bouchet. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe. On appelle **décomposition de G** tout quadruplet $(X, X'; Y, Y')$ où :

- (i) $\{X, Y\}$ est une bipartition de V telle que $|X| \geq 2$ et $|Y| \geq 2$;
- (ii) $X' \subseteq X$ et $Y' \subseteq Y$;
- (iii) Si $x \in X'$ et $y \in Y'$ alors $\{x, y\}$ est une arête de G ;
- (iv) Si $x \in X - X'$ (respectivement $x \in X$) et $y \in Y$ (respectivement $y \in Y - Y'$) alors $\{x, y\}$ n'est pas une arête de G .

Notons que, puisque G est connexe, nécessairement $X' \neq \emptyset$ et $Y' \neq \emptyset$.

On dit que G est **décomposable** s'il est connexe et possède une décomposition.

Exemples

- (1) Le graphe de la figure 21 montre une décomposition d'un graphe décomposable.

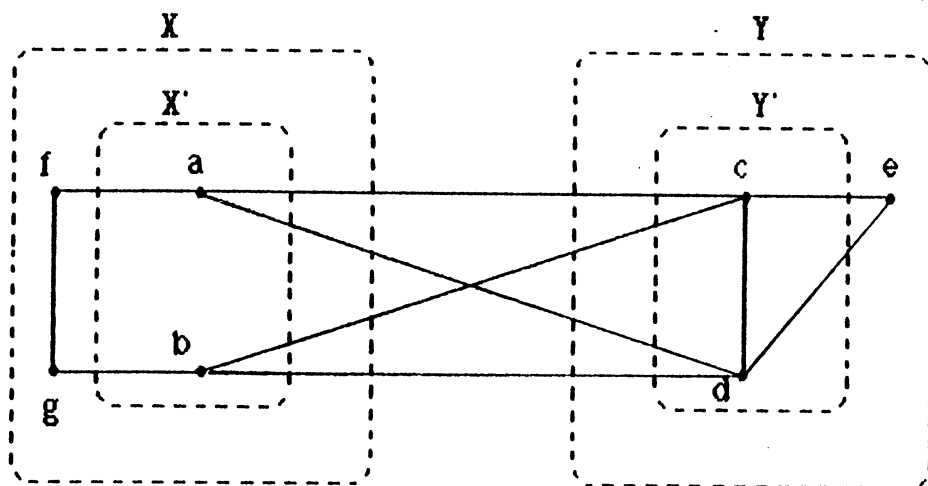


Figure 21.

- (2) Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe avec $|V| \geq 4$. Si G possède un point d'articulation alors G est décomposable : en effet, soit x un point d'articulation de G et soit $G_1 = (X_1, E_1)$ une composante connexe de $G_{V-\{x\}}$ d'ordre minimum. On pose : $X = X_1 \cup \{x\}$, $X' = \{x\}$, $Y = V - X$ et $Y' = N_G(x) \cap Y$.

Il est facile de vérifier que $(X, X'; Y, Y')$ est une décomposition de G .

IV.4.1. Lemme. Soit $G = (V, E)$ un graphe décomposable et soit $(X, X'; Y, Y')$ une décomposition de G . Considérons un sommet quelconque x de X' et un sommet quelconque y de Y' . On désigne par G_1 (respectivement G_2) le sous graphe de G engendré par $X \cup \{y\}$ (respectivement $Y \cup \{x\}$). Alors :

(i) G_1 et G_2 sont deux graphes connexes ;

(ii) Si G_1 et G_2 sont deux graphes de cordes alors G est un graphe de cordes.

Preuve

(i) Supposons par l'absurde que G_1 admette une composante connexe engendré par Z ne contenant pas y . Alors $Z \cap N_G(y) = \emptyset$ et donc $Z \subseteq X - X'$. Il s'ensuit que dans G aucun sommet de Z n'est adjacent à un sommet de Y . Il y a contradiction avec la connexité de G .

La connexité de G_2 se démontre d'une manière analogue.

(ii) Supposons que G_1 et G_2 sont des graphes de cordes. G_1 et G_2 sont donc des graphes d'entrelacement (proposition 1.4.2.1). Soient S_1 et S_2 deux suites à doubles occurrences associées à G_1 et à G_2 respectivement. Comme x et y sont adjacents dans G_1 et dans G_2 , on peut mettre S_1 et S_2 sous les formes :

$$S_1 = (\alpha_1 x \beta_1) y (\alpha_2 x \beta_2) y = \lambda_1 y \lambda_2 y$$

$$S_2 = x (\gamma_1 y \theta_1) x (\gamma_2 y \theta_2) = x \lambda_3 y \lambda_4$$

$$\text{où } \lambda_1 = \alpha_1 x \beta_1, \lambda_2 = \alpha_2 x \beta_2, \lambda_3 = \gamma_1 y \theta_1 \text{ et } \lambda_4 = \gamma_2 y \theta_2$$

Notons que si $z \in X'$ (respectivement $z \in Y'$) alors z et y (respectivement z et x) s'entrelacent dans S_1 (respectivement dans S_2). Donc λ_1 contient z et λ_2 contient z (respectivement λ_3 contient z et λ_4 contient z). Par contre, si

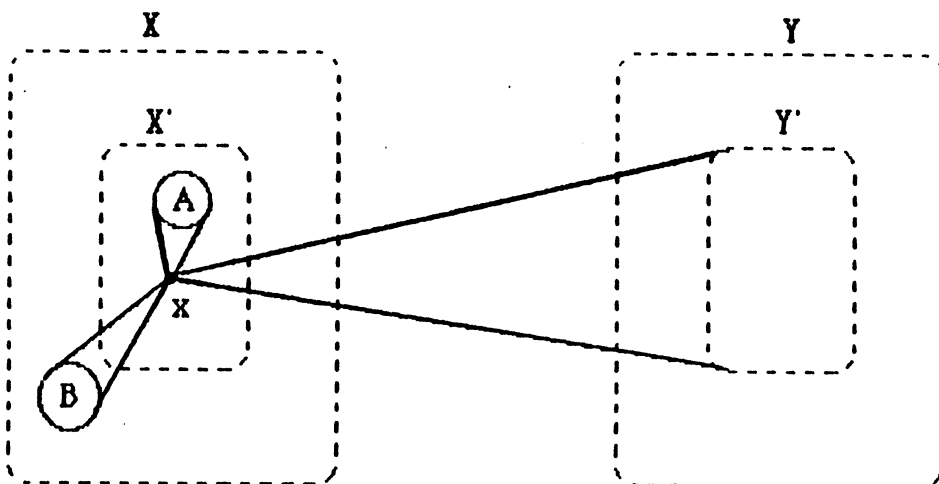
$z \in X-X'$ (respectivement $z \in Y-Y'$), alors z et y (respectivement z et x) ne sont pas entrelacés dans S_1 (respectivement dans S_2) ; donc les deux occurrences de z sont soit toutes les deux dans λ_1 , soit toutes les deux dans λ_2 (respectivement soit toutes les deux dans λ_3 , soit toutes les deux dans λ_4). Ces remarques nous permettent de vérifier facilement que le graphe d'entrelacement de la suite : $S = \lambda_1 \lambda_3 \lambda_2 \lambda_4$ n'est autre que G .
C.Q.F.D.

IV.4.2. Lemme. Soient $G = (V,E)$ un graphe décomposable et (X,X',Y,Y') une décomposition de G . Pour tout sommet x appartenant à $X' \cup Y'$, le graphe $CL_x(G)$ (complémentaire local de G en x) est aussi décomposable.

Preuve

En effet, soit x un sommet de G appartenant à X' . Notons d'abord que, comme G est connexe, $CL_x(G)$ est également connexe.

On pose $A = N_G(x) \cap X'$ et $B = N_G(x) \cap (X-X')$. Il est clair que $N_G(x) = A \cup B \cup \{x\}$.



Si a est dans A et b est dans Y' alors a et b sont deux sommets de $N_G(x)$ adjacents dans G . Il en résulte que a et b ne sont pas adjacents dans $GL_x(G)$. De même, si a est dans B et b est dans Y' alors a et b sont deux sommets de $N_G(x)$ non adjacents dans G . Il en résulte que a et b sont adjacents dans $CL_x(G)$. Enfin, si a est dans $X - (A \cup B)$ et b dans Y , alors l'arête $\{a,b\}$ a le même statut dans G et dans $CL_x(G)$. Posons $X'' = (X' - A) \cup B$. Il est maintenant facile de vérifier que $(X, X''; Y, Y')$ est une décomposition de $CL_x(G)$. Le cas où x appartient à Y' se traite de la même manière.

C.Q.F.D.

Considérons un P.L-graphe $G = (V, E)$ et soit $A = \{a, b, c, d\}$ un sous ensemble de V engendrant une clique d'ordre 4 de G .

On définit l'ensemble $T_A = \{x \in V / |N_G(x) \cap A| \geq 3\}$. Notons que $A \subseteq T_A$.

Soient x et y deux sommets distincts de G appartenant à T_A . On dit que $\{x, y\}$ est une arête T_A -creuse de G si x et y ne sont pas adjacents dans G ou bien si $\{x, y\}$ est une arête de G mais x et y sont joints dans G par une chaîne minimale de $G - \{x, y\}$ ayant tous ses sommets intermédiaires dans $V - T_A$: une telle chaîne sera dite chaîne T_A -extérieure. On définit le graphe $\mathcal{T}_A(G)$ comme étant le graphe obtenu à partir de G en remplaçant les arêtes de G ayant leurs extrémités dans T_A par arêtes T_A -creuses de G .

On dit que deux sommets de G sont \mathcal{T}_A -équivalents s'ils sont dans une même composante connexe de $\mathcal{T}_A(G)$. Il est clair qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur V .

Exemple. Soit G le graphe de la figure 22 (a). $A = \{a, b, c, d\}$ engendre une

clique dans G . $T_A = \{a, b, c, d, x\}$. Les arêtes T_A -creuses de G sont $\{a, b\}$ et $\{a, x\}$. la figure 22 (b) représente le graphe $\mathcal{C}_A(G)$.

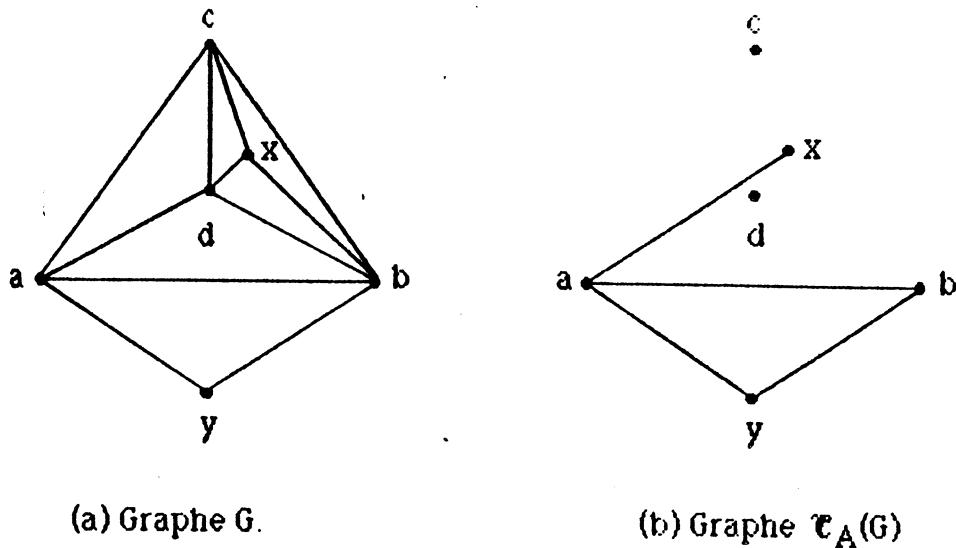


Figure 22.

IV.4.3. Remarques.

(1) Soient x et y deux sommets \mathcal{C}_A -équivalents de G , appartenant à T_A . Il existe donc une chaîne minimale de $\mathcal{C}_A(G)$ joignant x et y , soit $C = x_0 x_1 \dots x_{p-1}$ avec $x_0 = x$ et $x_p = y$. Les x_i ($i=1, \dots, p$) sont tous dans T_A . En effet, sinon, il existerait i et j tels que $i < j-1$, $x_i \in T_A$ et la sous chaîne $x_i x_{i+1} \dots x_j$ est une chaîne T_A -extérieure. Donc $\{x_i, x_j\}$ serait une arête T_A -creuse, c'est à dire une corde de C dans $\mathcal{C}_A(G)$, ce qui contredit la minimalité de C .

Ainsi toute arête de C est une arête T_A -creuse de G . Une telle chaîne sera dite chaîne T_A -creuse de G .

(2) Soient x et y deux sommets de G (et donc de $\mathcal{C}_A(G)$) non adjacents dans $\mathcal{C}_A(G)$.

(i) si x et y sont dans T_A , alors x et y sont adjacents dans G .

(ii) si l'un, au moins, des deux sommets x et y n'est pas dans T_A , alors x et y ne sont pas adjacents dans G .

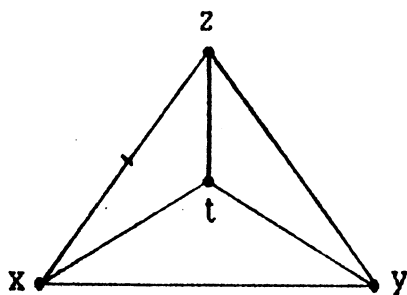
IV.4.4. Lemme. Soit $C = x y z t x$ un cycle de G de longueur 4. Supposons que $\{y,t\}$ est une arête de G .

(i) Si $\{x,z\}$ n'est pas une arête de G , alors le cycle C est du type 0 pour toute solution α de $P(G)$.

(ii) Si $\{x,z\}$ est une arête de G et s'il existe une chaîne minimale C_1 de $G - \{x,z\}$ joignant x et z et dont tous les sommets intermédiaires sont distincts de y et de t et ne sont adjacents ni à y ni à t dans G , alors le cycle C est du type 0 pour toute solution α de $P(G)$.

Preuve

(i) Soit α une solution de $P(G)$. $\{y,z\}$ étant vide, les triangles engendrés par $\{x,t,z\}$ et $\{x,y,z\}$ sont quasi-pleins.



α vérifie les équations de $P(G)$ du type (E_2) concernant ces deux triangles, ainsi que les équations du type (E_1) concernant les arêtes $\{x,y\}$ et $\{z,t\}$ de G :

$$\alpha(tx) + \alpha(tz) + \alpha(xz) + \alpha(zx) = 1$$

$$\alpha(yx) + \alpha(yz) + \alpha(xz) + \alpha(zx) = 1$$

$$\alpha(yx) + \alpha(xy) = 1$$

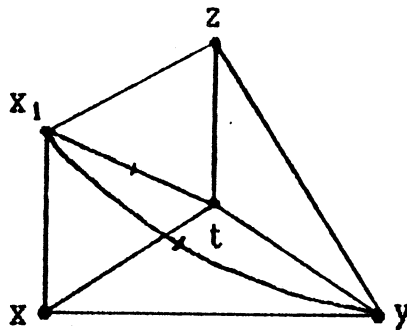
$$\alpha(tz) + \alpha(zt) = 1$$

La somme de ces équations donne :

$\alpha(xy) + \alpha(yz) + \alpha(zt) + \alpha(tx) = 0$. Donc C est du type 0 pour α .

(ii) Posons $C_i = x_0 x_1 \dots x_p$, où $x_0 = x$, $x_p = z$ et $x_i \in \{x, y, z, t\}$ et ceci pour $i = 1, \dots, p-1$. Soit α une solution de $P(G)$.

- Si $p = 2$ alors $C_i = x x_1 z$. D'après l'hypothèse $\{x_1, t\}$ et $\{x, z\}$ sont des arêtes vides.



α étant une solution de $P(G)$, elle vérifie les équations du type (E_2) concernant les triangles quasi-pleins engendrés par $\{y, x, x_1\}$, $\{y, z, x_1\}$, $\{t, z, x_1\}$ et $\{t, x, x_1\}$, ainsi que les équations du type (E_1) concernant les arêtes $\{y, z\}$ et $\{x, t\}$:

$$\alpha(xy) + \alpha(xx_1) + \alpha(x_1y) + \alpha(yx_1) = 1$$

$$\alpha(zy) + \alpha(zx_1) + \alpha(x_1y) + \alpha(yx_1) = 1$$

$$\alpha(zt) + \alpha(zx_1) + \alpha(x_1t) + \alpha(tx_1) = 1$$

$$\alpha(xt) + \alpha(xx_1) + \alpha(x_1t) + \alpha(tx_1) = 1$$

$$\alpha(zy) + \alpha(yz) = 1$$

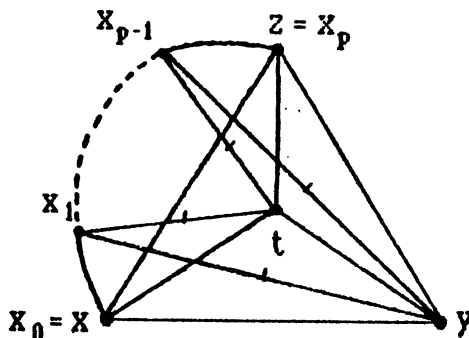
$$\alpha(xt) + \alpha(tx) = 1$$

La somme de ces équations donne :

$$\alpha(xy) + \alpha(yz) + \alpha(zt) + \alpha(tx) = 0.$$

Donc C est du type 0 pour α .

- Supposons que $p \geq 3$. Comme pour $i = 1, \dots, p-1$, $x_i \in \bar{N}(y) \cap \bar{N}(t)$ (où $\bar{N}(a)$ désigne le voisinage du sommet a dans le complémentaire \bar{G} de G), alors x_1 et x_{p-1} sont dans une même composante connexe de $G_{\bar{N}(y)}$ et de $G_{\bar{N}(t)}$. D'après la propriété (3) des pseudo-tournois linéaires on peut affirmer que $\alpha(yx_1) + \alpha(yx_{p-1}) - \alpha(tx_1) + \alpha(tx_{p-1}) = 0$.



D'autre part, α vérifie les équations de $P(G)$ qui correspondent :

- aux triangles quasi-pleins engendrés par $\{y, x, x_1\}$, $\{y, z, x_{p-1}\}$, $\{t, z, x_{p-1}\}$ et $\{t, x, x_1\}$;
- aux triangles quasi-vides engendrés par $\{x_1, t, y\}$ et $\{x_{p-1}, t, y\}$;
- aux arêtes $\{y, z\}$ et $\{x, t\}$.

D'où les équations :

$$\alpha(xy) + \alpha(xx_1) + \alpha(yx_1) + \alpha(x_1y) = 1$$

$$\alpha(zy) + \alpha(zx_{p-1}) + \alpha(yx_{p-1}) + \alpha(x_{p-1}y) = 1$$

$$\alpha(zt) + \alpha(zx_{p-1}) + \alpha(tx_{p-1}) + \alpha(x_{p-1}t) = 1$$

$$\alpha(xt) + \alpha(xx_1) + \alpha(tx_1) + \alpha(x_1t) = 1$$

$$\begin{aligned}
\alpha(x_1, t) + \alpha(x_1, y) &= 0 \\
\alpha(x_{p-1}, t) + \alpha(x_{p-1}, y) &= 0 \\
\alpha(yz) + \alpha(zy) &= 1 \\
\alpha(xt) + \alpha(tx) &= 1 \\
\alpha(yx_1) + \alpha(yx_{p-1}) &= 0 \\
\alpha(tx_1) + \alpha(tx_{p-1}) &= 0
\end{aligned}$$

La somme de ces équations donne $\alpha(xy) + \alpha(yz) + \alpha(zt) + \alpha(tx) = 0$. Donc C est du type 0 pour α .

C.Q.F.D.

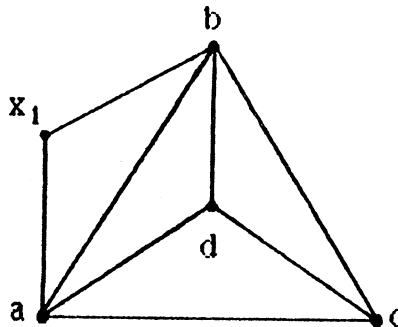
IV.4.5. Lemme. Si l'une des arêtes de G_A , au moins, est une arête T_A -creuse de G alors G_A est un K_4 \mathcal{B} -admissible pour toute solution α de $P(G)$.

Preuve

Supposons, en effet, que G_A possède au moins une arête T_A -creuse. Comme G_A est un graphe complet, les extrémités de toute arête T_A -creuse de G_A sont jointes par une chaîne T_A -extérieure. Parmi toutes les chaînes T_A -extérieures ayant les extrémités dans A choisissons en une qui soit de longueur minimum. Soit $C = x_0 x_1 \dots x_p$ ($p \geq 2$) une telle chaîne; on suppose que $x_0 = a$ et $x_p = b$. D'après la définition d'une chaîne T_A -extérieure, les sommets x_1, x_2, \dots, x_{p-1} sont tous dans $V - T_A$; donc, $\forall i = 1, \dots, p-1, x_i$ est adjacent à, au plus, deux sommets de A .

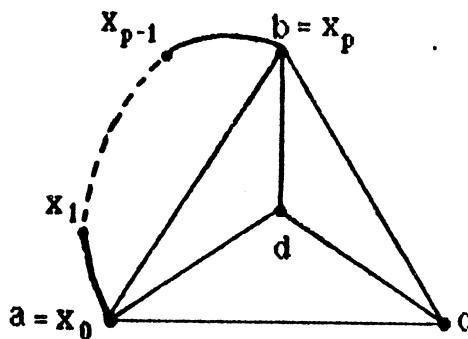
- Si $p = 2$, alors $C = a x_1 b$; Comme x_1 est adjacent dans G aux sommets a et

b, x_1 n'est adjacent ni à c ni à d . Ainsi les conditions du lemme IV.4.4 (ii)



sont toutes réunies pour le cycle $a c b d a$; ce qui nous permet d'affirmer que ce cycle est du type 0 pour toute solution α de $P(G)$.

- Supposons que $p \geq 3$. Dans ce cas, pour tout $i = 1, 2, \dots, p-1$ x_i n'est adjacent dans G ni à c ni à d : en effet, sinon il existerait une chaîne T_A -extérieure joignant deux sommets de A et de longueur strictement inférieure à celle de C . C ne serait plus de longueur minimum: contradiction.



Donc les conditions du lemme IV.4.4 (ii) sont toutes réunies pour le cycle $a b c d a$. Ce cycle est donc du type 0 pour toute solution α de $P(G)$.

Ainsi, dans les deux cas, G_A possède un cycle du type 0 pour toute solution α de $P(G)$. G_A est donc \mathcal{G} -admissible pour toute solution de $P(G)$.

C.Q.F.D.

IV.4.6. Théorème. Si $A = \{a,b,c,d\}$ possède des sommets distincts \mathcal{C}_A -équivalents alors G_A est \mathcal{C}_A -admissible pour toute solution de $P(G)$.

Preuve

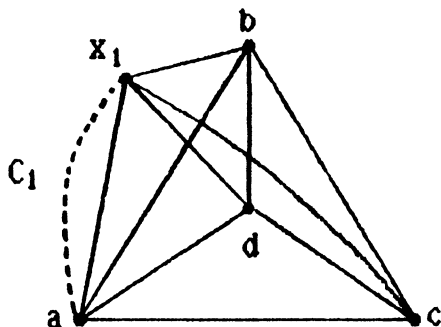
Supposons, en effet, que A possède des sommets distincts \mathcal{C}_A -équivalents. Il existe donc des chaînes T_A -creuses ayant les extrémités dans A (remarque IV.4.3 (1)). Parmi toutes ces chaînes choisissons une de longueur minimum.

Soit $C = x_0 x_1 \dots x_p$ une telle chaîne. On suppose de plus que $x_0 = a$ et $x_p = b$.

- Si $p = 1$, alors $\{a,b\}$ est une arête T_A -creuse de G . La propriété est donc vraie d'après IV.4.5.

Supposons donc que $p \geq 2$, ce qui est équivalent à dire que G_A est sans arêtes T_A -creuses.

- Si $p = 2$, alors $C = a x_1 b$. $x_1 \in T_A$ d'après la définition d'une arête T_A -creuse. Donc x_1 est adjacent à trois sommets au moins de G_A ; en particulier à l'un, au moins, des deux sommets a ou b . Supposons que x_1 est adjacent au sommet a .



• Si x_1 est adjacent aux sommets c et d dans G : comme $\{x_1, a\}$ est une arête T_A -creuse, il existe une chaîne T_A -extérieure C_1 joignant a et x_1 . Si un des sommets intermédiaires de C_1 est adjacent au sommet c (respectivement

au sommet d) dans G , soit z le sommet de ce type le plus proche de a sur C_1 ; La sous-chaîne de C_1 joignant a à z , réunie à l'arête $\{z,c\}$ (respectivement $\{z,d\}$) forme une chaîne T_A - extérieure joignant a et c (respectivement a et d). $\{a,c\}$ ou $\{a,d\}$ serait donc une arête T_A - creuse : contradiction. Ainsi aucun sommet intermédiaire de C_1 n'est adjacent dans G ni au sommet c ni au sommet d , et donc le cycle $a c x_1 d a$ remplit, avec la chaîne C_1 , les conditions du lemme IV.4.4 (ii). Il en résulte que ce cycle est du type 0 pour toute solution de $P(G)$.

On démontre de la même manière que si x_1 est adjacent au sommet b , le cycle $x_1 c b d x_1$ est du type 0 pour toute solution de $P(G)$. Et si x_1 n'est pas adjacent au sommet b dans G , alors, en utilisant IV.4.4 (i), on démontre également que le cycle $x_1 c b d x_1$ est du type 0 pour toute solution de $P(G)$.

Ainsi, une solution α de $P(G)$ vérifie :

$$\alpha(ac) + \alpha(cx_1) + \alpha(x_1d) + \alpha(da) = 0$$

$$\alpha(x_1c) + \alpha(cb) + \alpha(bd) + \alpha(dx_1) = 0$$

$$\alpha(cx_1) + \alpha(x_1c) = 1 \quad (\text{équation relative à l'arête } \{c,x_1\})$$

$$\alpha(dx_1) + \alpha(x_1d) = 1 \quad (\text{équation relative à l'arête } \{d,x_1\})$$

La somme de ces équations donne : $\alpha(ac) + \alpha(cb) + \alpha(bd) + \alpha(da) = 0$. Donc le cycle $a c b d a$ est du type 0 pour toute solution α de $P(G)$.

• Si x_1 n'est pas adjacent à la fois aux deux sommets c et d dans G , alors x_1 est adjacent aux sommets a, b et à l'un des deux autres sommets, disons c . Dans ce cas $\{x_1,d\}$ est une arête T_A - creuse et donc $a x_1 d$ sera une autre

chaîne T_A - creuse joignant deux sommets de G_A et de même longueur que C. Comme x_i est adjacent à b et à c, en échangeant les rôles de b et de d dans le cas précédent, on démontre que le cycle a c d b a est du type 0 pour toute solution α de $P(G)$.

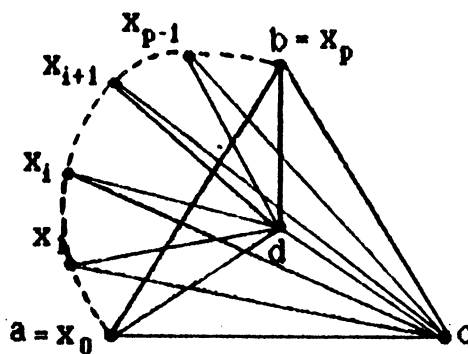
- Supposons donc que $p \geq 3$, et soit x_i un sommet de C. Remarquons que $\{x_i, c\}$ et $\{x_i, d\}$ ne peuvent pas être des arêtes T_A - creuses car si $\{x_i, c\}$, par exemple, est T_A - creuse alors soit j (respectivement k) le plus petit indice (respectivement le plus grand indice) λ tel que $\{x_\lambda, c\}$ est T_A - creuse, la plus courte parmi les deux chaînes $a x_1 \dots x_j c$ et $c x_k \dots x_{p-1} b$ serait une chaîne T_A - creuse de longueur strictement inférieure à celle de C et ayant ses deux extrémités dans A : il y a une contradiction avec le choix de C. De cette remarque on peut tirer deux conclusions :

- La première est que x_i est adjacent dans G aux sommets c et d; ceci découle immédiatement de la définition d' une arête T_A - creuse.

- La seconde, qui est moins évidente, est la suivante :

Si $\{x_i, x_{i+1}\}$ est une arête de G alors comme $\{x_i, x_{i+1}\}$ est une arête T_A - creuse de G, il existe une chaîne T_A - extérieure C_i joignant x_i et x_{i+1} . Un sommet intermédiaire de C_i ne peut être adjacent ni au sommet c ni au sommet d : en effet, soit z le sommet intermédiaire de C_i adjacent à c (respectivement à d) le plus proche de x_i dans C_i . Alors la sous-chaîne de C_i joignant x_i et z, réunie avec $\{z, c\}$ (respectivement $\{z, d\}$) forme une chaîne T_A - extérieure joignant x_i et c (respectivement x_i et d). Donc $\{x_i, c\}$ (respectivement $\{x_i, d\}$) serait une arête T_A - creuse : il y a une contradiction avec la remarque que nous venons de donner.

Ainsi, pour $i = 0, \dots, p-1$, si $\{x_i, x_{i+1}\}$ n'est pas une arête de G le cycle $x_i c x_{i+1} d x_i$ remplit les conditions du lemme IV.4.4 (i), et si $\{x_i, x_{i+1}\}$ est une arête de G , le cycle $x_i c x_{i+1} d x_i$ remplit, avec la chaîne T_A -extérieure C_i , les conditions du lemme IV.4.4 (ii). Le cycle $x_i c x_{i+1} d x_i$ est donc du type 0 pour toute solution α de $P(G)$.



Nous allons démontrer maintenant, par récurrence, que pour tout $i = 1, \dots, p$ le cycle $x_0 c x_i d x_0$ est du type 0 pour toute solution α de $P(G)$.

Soit α une telle solution :

- Si $i = 1$, nous avons déjà démontré le résultat.

- Supposons que $x_0 c x_i d x_0$ est du type 0 pour α . Comme $x_i c x_{i+1} d x_i$ est du type 0 pour α , α vérifie :

$$\alpha(x_0 c) + \alpha(c x_i) + \alpha(x_i d) + \alpha(d x_0) = 0$$

$$\alpha(x_i c) + \alpha(c x_{i+1}) + \alpha(x_{i+1} d) + \alpha(d x_i) = 0$$

$$\alpha(x_i c) + \alpha(c x_i) = 1$$

$$\alpha(x_i d) + \alpha(d x_i) = 1$$

(Les deux dernières équations correspondent aux arêtes $\{x_i, c\}$ et $\{x_i, d\}$ de G).

La somme de ces équations donne :

$\alpha(x_0c) + \alpha(cx_{i+1}) + \alpha(x_{i+1}d) + \alpha(dx_0) = 0$, et donc le cycle $x_0 c x_{i+1} d x_0$ est du type 0 pour α , ce qu'il fallait démontrer.

En particulier, le cycle $x_0 c x_p d x_0 = a c b d a$ est du type 0 pour toute solution de $P(G)$.

Il en résulte que, dans tous les cas, G_A possède un cycle qui est du type 0 pour toute solution de $P(G)$. G_A est donc \mathcal{E} -admissible pour toute solution de $P(G)$.

C.Q.F.D.

IV.4.7. Théorème. Soit $G = (V,E)$ un P.L-graphe. Si $P(G)$ possède une solution \mathcal{E} -inadmissible, alors G est décomposable.

Preuve

En effet, supposons que α est une solution \mathcal{E} -inadmissible de $P(G)$. D'après la proposition IV.3.9 il existe un sous ensemble $A = \{a,b,c,d\}$ de V tel que le sous graphe G_A engendré par A est : soit un K_4 , soit un $K_{1,3}$ \mathcal{E} -inadmissible pour α .

(i) Si G_A est un K_4 alors d'après IV.4.6 deux sommets distincts de G_A ne peuvent pas être \mathcal{E}_A -équivalents. Désignons par $\mathcal{E}_A(x)$ la classe d'équivalence d'un sommet x de G modulo \mathcal{E}_A .

On pose $X = \mathcal{E}_A(a) \cup \mathcal{E}_A(b)$, $X' = X \cap A$, $Y = V - X$ et $Y' = Y \cap A$. Il est clair que $\{X, Y\}$ est une partition de V et que $|X| \geq 2$ et $|Y| \geq 2$.

D'autre part, si x est dans X' et y est dans Y' , $\{x,y\} \in B$ car sinon $\{x,y\}$ serait une arête T_A -creuse de G et donc x et y seraient dans une même classe d'équivalence modulo \mathcal{E}_A : contradiction.

Si $x \in X - X'$ et $y \in Y$, x et y ne sont pas \mathcal{E}_A -équivalents, donc x et y ne sont

pas adjacents dans $\mathcal{G}_A(G)$. Comme $x \in T_A$, $\{x,y\} \in E$, d'après la remarque IV.4.3 (2).

On démontre de la même façon que si $x \in X$ et $y \in Y-Y'$ alors $\{x,y\} \in E$.

Il en résulte que $(X,X';Y,Y')$ est une décomposition de G .

(ii) Supposons que G_A est un $K_{1,3}$ de G dans lequel le sommet a est adjacent aux trois autres sommets, et considérons le graphe $CL_a(G)$:

Comme G est un P.L-graphe, $CL_a(G)$ l'est aussi (théorème IV.1.2).

Comme A engendre un $K_{1,3}$ \mathcal{G} -inadmissible pour α , il engendre, dans $CL_a(G)$, un K_4 \mathcal{G} -inadmissible pour $CL_a(\alpha)$ (lemme IV.3.8).

D'après (i), $CL_a(G)$ est décomposable et il existe une décomposition $(X,X';Y,Y')$ de $CL_a(G)$ telle que $a \in X' \cup Y'$. Donc $CL_a(CL_a(G))$ est aussi décomposable d'après le lemme IV.4.2.

La propriété découle du fait que $G = CL_a(CL_a(G))$.

C.Q.F.D.

IV.4.8. Théorème. Un graphe connexe $G = (V,E)$ est un graphe de cordes si et seulement si c' est un P.L-graphe.

Preuve

La condition nécessaire a déjà été prouvée. Supposons que $G = (V,E)$ est un P.L-graphe. Nous allons faire une démonstration par récurrence sur $|V|$.

- Si $|V| \leq 4$, la propriété est trivialement vraie.

- Supposons que $|V| > 4$, et soit α une solution de $P(G)$. Si α est \mathcal{G} -admissible, G est de cordes d'après la remarque IV.3.10 (2). Si α est \mathcal{G} -inadmissible, alors G est décomposable d'après le théorème IV.4.7. Soit $(X,X';Y,Y')$ une décomposition de G . Considérons un sommet x de X' et un sommet y de Y' et désignons par G_1 et G_2 les sous-graphes de G engendrés,

respectivement, par $XU\{y\}$ et $YU\{x\}$. G_1 et G_2 sont connexes d'après le lemme IV.4.1 (i). Donc G_1 et G_2 sont deux P.L-graphes (puisque un sous-graphe connexe d'un P.L-graphe est un P.L-graphe). Comme $|X| \geq 2$ et $|Y| \geq 2$, $|XU\{y\}| \leq |V| - 1$ et $|YU\{x\}| \leq |V| - 1$. Donc G_1 et G_2 sont deux graphes de cordes, d'après l'hypothèse de récurrence. Par suite G est un graphe de cordes d'après le lemme IV.4.1 (ii).

C.Q.F.D.

IV.5. Résultat.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe. Il résulte de ce qui précède que pour savoir si G est un graphe de cordes ou non il suffit d'étudier la compatibilité du système associé $P(G)$.

D'autre part, $P(G)$ comporte : $(|V|)(|V|-1)$ variables, $|E|$ équations du type (E_1) et le nombre des équations du type (E_2) et (E_3) est inférieure à $C_{|V|}^3$ (voir remarque ci-dessous) et donc inférieur à $|V|^3$. Autrement dit la taille de $P(G)$ est bornée par un polynôme en $|V|$.

Comme le problème de la compatibilité d'un système linéaire est un problème polynomial par rapport à la taille du système, alors les graphes de cordes sont reconnaissables en temps polynomial.

Remarque. On peut donner une bonne majoration du nombre p des équations de $P(G)$. En effet, posons d'abord $n = |V|$ et $m = |E|$.

Pour tout sommet x de G , appelons **paire bicolore de G en x** toute paire de demi-arêtes de la forme $\{x, y\}, \{x, z\}$ où $\{x, y\}$ est une arête de G et $\{x, z\}$ est une arête de son complémentaire G .

Il est facile de voir que toute paire bicolore est dans exactement un triangle quasi-vide ou bien quasi-plein, et que tout triangle quasi-vide

(respectivement quasi-plein) contient exactement deux paires bicolores de G . Il en résulte que le nombre des paires bicolores de G est égal à deux fois le nombre de triangles quasi-vides et quasi-pleins. Or pour tout x de G , on peut compter $d_x(n-1-d_x)$ paires bicolores en x (d_x désigne le degré du sommet x dans G). Donc nous avons que :

$$2(p-m) = \sum_{x \in V} d_x(n-1-d_x) = (n-1) \sum_{x \in V} d_x - \sum_{x \in V} (d_x)^2$$

D'autre part, on peut démontrer facilement, par récurrence sur n , que :

$$n \sum_{x \in V} (d_x)^2 \geq (\sum_{x \in V} d_x)^2$$

et en tenant compte de l'égalité :

$$\sum_{x \in V} d_x = 2m$$

on peut constater que :

$$p = m + (n-1)m - (\sum_{x \in V} (d_x)^2)/2 \leq nm - (2/n)m^2$$

Il suffit maintenant de remarquer que la fonction

$$f(x) = nx - (2/n)x^2$$

atteint un maximum absolu au point

$$x_0 = n^2/4$$

et donc :

$$p \leq n^3/8.$$

Notons que si $n = 2n'$ alors cette borne est atteinte dans le cas où G est le graphe biparti complet $K_{n',n'}$. En effet, dans ce cas, G possède exactement $n^2/4$ arêtes et on peut trouver facilement que $p = n^3/8$.

CHAPITRE V

Graphes de cordes et matroïdes binaires.

V.1. Définitions générales et notations;

V.2. Matrices et graphes associés;

V.3. Reconnaissance des matroïdes planaires.



V.1. Définitions générales et notations.

Pour les définitions préliminaires concernant les matroïdes nous renvoyons le lecteur à [21].

Dans tout ce qui suit \mathcal{M} désigne un matroïde de rang r sur un ensemble V de cardinalité n .

V.1.1. Matroïdes vectoriels.

Un matroïde \mathcal{M} sur $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est dit **matroïde vectoriel sur le corps \mathbb{K}** s'il existe une $(m \times n)$ -matrice M à éléments dans \mathbb{K} et telle que pour tout $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $\{x_i / i \in I\}$ est un indépendant dans \mathcal{M} si et seulement si l'ensemble $\{M^i / i \in I\}$ est constitué de vecteurs linéairement indépendants dans \mathbb{K}^m . Dans ce cas la matrice M sera appelée **matrice représentative de \mathcal{M} sur \mathbb{K}** .

Si \mathcal{M} est vectoriel sur \mathbb{K} et si B est une base de \mathcal{M} , on démontre ([21], chapitre 9) qu'il existe une matrice représentative de \mathcal{M} sur \mathbb{K} de la forme $[U_r, A]$ où:

- U_r est la $r \times r$ -matrice unité. Ses colonnes correspondent aux éléments de la base B .
- A est une $r \times (n-r)$ -matrice à éléments dans \mathbb{K} . Ses colonnes correspondent aux éléments de la cobase $\bar{B} = V - B$.

Une telle matrice sera dite **B-représentation standard (ou B-R.S.) de \mathcal{M} sur \mathbb{K}** .

Une matrice représentative M de \mathcal{M} est dite **représentation standard de \mathcal{M}** si elle est une B-R.S. de \mathcal{M} sur \mathbb{K} pour une base B .

Un matroïde est dit **binnaire** s'il est vectoriel sur $\text{GF}(2)$; et il est dit **régulier** s'il est vectoriel sur tout corps.

Notons que si \mathcal{M} est un matroïde binaire alors une représentation standard de \mathcal{M} sur $GF(2)$ est unique (à une permutation de colonnes près) une fois qu'une base est fixée ([21], chap.10).

V.1.2. Représentation d'un matroïde binaire.

Soit \mathcal{M} un matroïde binaire sur V et soit $B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ une base de \mathcal{M} . Désignons par $\bar{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ la cobase associée (donc $\bar{B} = V - B$ et $s = n - r$). Considérons la représentation standard $M = [U_r, A]$ de \mathcal{M} sur $GF(2)$ relativement à la base B tout en supposant que la $i^{\text{ème}}$ colonne de U_r correspond à l'élément b_i de B et que la $j^{\text{ème}}$ colonne de A correspond à l'élément e_j de \bar{B} . Il est bien connu que (voir [21], chap.10):

- Pour tout $i = 1, 2, \dots, r$, l'ensemble $\{b_i\} \cup \{e_j / A_{ij} = 1\}$ n'est autre que l'unique cocircuit ω_i de \mathcal{M} contenu dans $\bar{B} \cup \{b_i\}$.
- Pour tout $j = 1, 2, \dots, s$, l'ensemble $\{e_j\} \cup \{b_i / A_{ij} = 1\}$ n'est autre que l'unique circuit θ_j de \mathcal{M} contenu dans $B \cup \{e_j\}$.

Autrement dit A est définie par : $A_{ij} = 1 \Leftrightarrow b_i \in \theta_j \Leftrightarrow e_j \in \omega_i$.

Il en résulte qu'il suffit de définir A comme ci-dessus pour avoir la B-R.S. de \mathcal{M} sur $GF(2)$.

Réciproquement, si A est une $r \times s$ -matrice binaire alors la matrice $M = [U_r, A]$ définit bien un matroïde binaire \mathcal{M} pour lequel M est une représentation standard.

Ainsi ce qui nous intéressera dans la suite c'est la sous matrice A d'une représentation standard $M = [U_r, A]$ de \mathcal{M} et que nous allons appeler **matrice fondamentale de \mathcal{M}** (relativement à la base B).

V.1.3. Relations entre les opérations sur les matroïdes binaires et les opérations sur les matrices fondamentales.

Soient \mathcal{M} un matroïde binaire sur V , $M = [U_r, A]$ la représentation standard de \mathcal{M} sur $GF(2)$ relativement à une base $B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ et $\bar{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ la cobase associée. Le but de ce qui suit est de définir les opérations permettant d'obtenir, à partir de A , une matrice fondamentale d'un mineur \mathcal{N} de \mathcal{M} . Pour cela nous allons rappeler la correspondance entre les opérations sur \mathcal{M} et les opérations sur la matrice M :

(1) Passer de la base B à la base $B' = BU\{e_j\} - \{b_j\}$ (en supposant A_{ij} non nul) revient à faire un pivotage sur A_{ij} dans la matrice M , puis à permuter la $i^{\text{ème}}$ colonne de U_r et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A . Si $M' = [U_r, A']$ est la matrice obtenue alors A' s'obtient directement à partir de A de la manière suivante:

Posons d'abord $P = \{p = i / A_{pj} = 1\}$ et $Q = \{q = j / A_{iq} = 1\}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} A'_{pq} &= A_{pq} + 1 && \text{si } p \in P \text{ et } q \in Q \\ A'_{pq} &= A_{pq} && \text{sinon.} \end{aligned}$$

On dit alors que A' est obtenue par sous-pivotage dans A sur A_{ij} .

(2) Contracter un élément b_i de B dans \mathcal{M} revient à supprimer la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $i^{\text{ème}}$ colonne de $M = [U_r, A]$. Donc la matrice fondamentale du matroïde $\mathcal{M}/\{b_i\}$, obtenu à partir de \mathcal{M} par contraction de l'élément b_i , relativement à la base $B - \{b_i\}$ s'obtient à partir de A par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne.

Pour obtenir une représentation standard du matroïde $\mathcal{M}/\{e_j\}$ à partir de M on considère un élément $A_{ij} \neq 0$ et l'on construit la B' -représentation standard de \mathcal{M} avec $B' = BU\{e_j\} - \{b_j\}$ (comme en (1)). On se ramène ainsi au cas précédent, puisque $e_j \in B'$.

Si ce procédé n'est pas possible, c'est à dire si $A_{ij} = 0$ pour tout i (ce qui veut dire que $\{e_j\}$ est une boucle de \mathcal{M}) il suffit d'éliminer la colonne A^j de la matrice M pour obtenir une représentation standard de $\mathcal{M}/\{e_j\}$.

(3) Supprimer un élément e_j dans \mathcal{M} revient à supprimer la colonne A^j dans la matrice $M = [U_r, A]$. Donc la matrice fondamentale du matroïde $\mathcal{M} \setminus \{e_j\}$, obtenu à partir de \mathcal{M} par suppression de l'élément e_j , relativement à la base B s'obtient à partir de A par suppression de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Pour obtenir une représentation standard du matroïde $\mathcal{M} \setminus \{b_i\}$ à partir de $M = [U_r, A]$ on choisit un élément $A_{ij} \neq 0$ et l'on construit la B' -R.S. de \mathcal{M} avec $B' = BU\{e_j\} - \{b_i\}$ (comme en (1)). On se ramène ainsi au cas précédent, puisque $b_i \in V - B'$.

Si ce n'est pas possible, c'est à dire si $A_{ij} = 0$ pour tout j (ce qui veut dire que $\{b_i\}$ est une coboucle de \mathcal{M}) il suffit d'éliminer la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice M pour obtenir une représentation standard de $\mathcal{M} \setminus \{b_i\}$. Donc la matrice fondamentale de $\mathcal{M} \setminus \{b_i\}$ relativement à $B - \{b_i\}$ s'obtient à partir de A par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne.

Il résulte de ce qui précède que:

V.1.3.1. Proposition. Toute matrice fondamentale d' un mineur N de \mathcal{M} s'obtient à partir d' une matrice fondamentale A de \mathcal{M} par une succession de suppression de lignes et de colonnes de A et de sous-pivotages dans A .

V.1.3.2. Remarque. Notons que si A est une matrice fondamentale d' un matroïde binaire \mathcal{M} alors la transposée tA de A est une matrice fondamentale du matroïde dual \mathcal{M}^* de \mathcal{M} : en effet, si A est une matrice fondamentale de \mathcal{M} , $[U_r, A]$ est une représentation standard de \mathcal{M} et donc $[U_{n-r}, {}^tA]$ est une représentation standard de \mathcal{M}^* ([21], chap. 9). Par suite tA est une matrice fondamentale de \mathcal{M}^* .

V.2. Matrices et graphes associés.

V.2.1. Matrices binaires et leurs signatures.

On appellera **matrice binaire** toute matrice à éléments dans $GF(2)$.

Soit D une matrice réelle à éléments dans $\{0, \pm 1\}$. On appelle **image de D** la matrice binaire \underline{D} telle que : $\underline{D}_{ij} = D_{ij} \pmod{2}$.

Inversement soit A une matrice binaire, on appelle **signature de A** toute matrice réelle D à éléments dans $\{0, \pm 1\}$ telle que $\underline{D} = A$.

Il est clair que si une matrice binaire A possède m éléments non nuls elle possède 2^m signatures distinctes. Désignons par $\mu(A)$ l' ensemble de toutes les signatures de A .

Deux signatures D et D' de A sont dites **équivalentes** si l' une d' elles s'obtient en multipliant successivement par -1 certaines lignes et certaines colonnes de l' autre. Il est clair qu' il s' agit bien d' une équivalence sur $\mu(A)$.

Une matrice réelle, à éléments dans $\{0, \pm 1\}$, est dite **totale**

unimodulaire si le déterminant de chacune de ses sous matrices carrées vaut 0, +1 ou -1. Une matrice binaire A est dite **orientable** si elle possède une signature totalement unimodulaire, et dans ce cas une telle signature sera dite **orientation de A** .

Compte tenu des propriétés élémentaires des déterminants on peut démontrer facilement que si A est une matrice binaire orientable alors toute signature de A équivalente à une orientation de A est aussi une orientation de A . Réciproquement, en s'appuyant sur la proposition 6.2. de [22] on en déduit :

V.2.1.1. Théorème. Si D et D' sont deux orientations d'une même matrice orientable A alors D et D' sont équivalentes.

Autrement dit, si A est orientable $\mu(A)$ possède une seule classe d'équivalence de signatures totalement unimodulaires de A .

En tenant compte des propriétés des déterminants on vérifie facilement qu'une signature D d'une $r \times s$ -matrice binaire A est totalement unimodulaire si et seulement si la signature $[U_r, D]$ de la matrice $[U_r, A]$ est totalement unimodulaire. Ce qui nous permet de donner le théorème de caractérisation des matroïdes réguliers, dû à Tutte (dans [23]), sous la forme suivante :

V.2.1.2. Théorème. Les propriétés suivantes sont équivalentes pour tout matroïde binaire \mathcal{M} :

- (i) \mathcal{M} est régulier
- (ii) \mathcal{M} admet une matrice fondamentale orientable
- (iii) toute matrice fondamentale de \mathcal{M} est orientable.

V.2.2. Graphes fondamentaux des matroïdes binaires.

Soit A une $r \times s$ -matrice binaire. On associe à A un graphe biparti $G(A) = (R \cup C, E)$ défini de la manière suivante:

- A chaque ligne A_i de A correspond un sommet b_i . Soit $R = \{b_i / i=1, \dots, r\}$.
- A chaque colonne A^j de A correspond un sommet c_j . Soit $C = \{c_j / j=1, \dots, s\}$
- $\{b_i, c_j\} \in E \Leftrightarrow A_{ij} = 1$.

Il en résulte que les arêtes de $G(A)$ correspondent aux éléments non nuls de A . Le graphe $G(A)$ ainsi défini sera dit **graphe associé à A** .

Soient $I \subseteq \{1, \dots, r\}$ et $J \subseteq \{1, \dots, s\}$. Désignons par A_{IJ} la sous matrice de A obtenue par la suppression des lignes A_i pour $i \notin I$ et des colonnes A^j pour $j \notin J$; il est clair que $G(A_{IJ})$ n'est autre que le sous graphe de $G(A)$ engendré par $R_I \cup C_J$, où $R_I = \{b_i / i \in I\}$ et $C_J = \{c_j / j \in J\}$.

Si A est une matrice fondamentale d'un matroïde binaire \mathcal{M} on dit alors que $G(A)$ est un **graphe fondamental de \mathcal{M}** .

V.2.2.1. Remarque. Il est clair que $G(A)$ est isomorphe à $G(A^t)$. Donc d'après la remarque V.1.3.2 si G est un graphe fondamental d'un matroïde \mathcal{M} il est aussi un graphe fondamental du matroïde dual \mathcal{M}^* .

Considérons maintenant une signature D de A . Il est clair que b_i et c_j sont adjacents dans $G(A)$ si et seulement si $A_{ij} = 1$ et donc si et seulement si $D_{ij} \in \{-1, +1\}$. Nous allons classier les arêtes de $G(A)$ correspondant aux D_{ij} qui sont égaux à $+1$ et celles correspondant aux D_{ij} qui sont égaux à -1 , et ceci en termes d'orientations, de la manière suivante :

On oriente une arête $\{b_i, c_j\}$ de b_i vers c_j si $D_{ij} = +1$ et de c_j vers b_i si $D_{ij} = -1$.

On obtient ainsi une orientation Θ_D de $G(A)$ dite **orientation induite** de $G(A)$ par la signature D . Réciproquement, il est facile de voir que toute orientation Θ de $G(A)$ définit une signature D telle que $\Theta_D = \Theta$. Ce qui nous permet de dire :

V.2.2.2. Proposition. L'ensemble des signatures $\mu(A)$ de A est en bijection avec l'ensemble des orientations du graphe $G(A)$.

La proposition précédente nous amène à étudier les orientations de $G(A)$ induites par les signatures totalement unimodulaires; pour cela nous allons d'abord étudier la relation entre deux orientations induites par deux signatures équivalentes.

Soient D et D' deux signatures quelconques de A , et soient Θ_D et $\Theta_{D'}$ les orientations de $G(A)$ induites par D et D' respectivement.

V.2.2.3. Proposition. D et D' sont équivalentes si et seulement si Θ_D et $\Theta_{D'}$ sont \mathfrak{R} -équivalentes.

Rappelons que deux orientations d'un graphe sont dites \mathfrak{R} -équivalentes s'il existe un cocycle ω du graphe tel que l'une des deux orientations s'obtient à partir de l'autre par retournement de ω (remarque 11.3.5.(1)).

Preuve:

En effet, remarquons d'abord que :

- (i) Retourner l'orientation d'une arête $\{b_i, c_j\}$ de $(G(A), \Theta_D)$ est équivalent à multiplier l'élément D_{ij} de D par -1 .
- (ii) Pour chaque sommet b_i (respectivement c_j) le cocycle $\omega(b_i)$ (respectivement $\omega(c_j)$) dans $G(A)$ correspond aux éléments non nuls de la ligne D_i (respectivement de la colonne D^j) de D .

Ainsi multiplier une ligne D_i (respectivement une colonne D^j) de D par -1 est équivalent à retourner l'orientation du cocycle $\omega(b_i)$ (respectivement $\omega(c_j)$) dans le graphe orienté $(G(A), \Theta_D)$. De plus, il est clair que retourner, successivement, l'orientation de deux cocycles revient à retourner l'orientation de leur différence symétrique. Comme les cocycles de sommets engendrent l'espace des cocycles par différence symétrique, la proposition est démontrée.

Avant de donner une caractérisation des orientations induites par des signatures totalement unimodulaires, nous allons donner quelques définitions:

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Pour simplifier on dira que G est **eulérien** si chacune de ses composantes connexes l'est, ce qui est équivalent à dire que chaque sommet de G est de degré pair.

Une orientation Θ d'un graphe eulérien $G = (V, E)$ est dite **orientation eulérienne** si elle vérifie : $\forall x \in V, |\Theta^+(x)| = |\Theta^-(x)|$.

(Rappelons que $\Theta^+(x) = \{y \in V / (x, y) \in \Theta\}$ et $\Theta^-(x) = \{y \in V / (y, x) \in \Theta\}$).

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une orientation Θ de G est dite **quasi-eulérienne** si tout sous-graphe eulérien de G admet une orientation eulérienne contenue dans une orientation Θ' de G \mathfrak{R} -équivalente à Θ .

V.2.2.4. Théorème. Soit D une signature d'une matrice binaire A . D est totalement unimodulaire si et seulement si l'orientation Θ_D de $G(A)$ induite par D est une orientation quasi-eulérienne.

Preuve:

(1) Condition nécessaire. Supposons D totalement unimodulaire et soit $G(A_{IJ})$ un sous graphe eulérien de $G(A)$. Il s'agit de démontrer qu'il existe une orientation eulérienne de $G(A_{IJ})$ contenue dans une orientation de $G(A)$ \mathfrak{R} -équivalente à \mathcal{O}_D .

Posons $T = D_{IJ}$. Il est clair que l'image \mathbb{T} de T est A_{IJ} . Comme $G(\mathbb{T})$ est eulérien chaque ligne ainsi que chaque colonne de \mathbb{T} comporte un nombre pair d'éléments non nuls ce qui est équivalent à dire:

(1) $\mathbb{T} \underline{u} = 0$ Où \underline{u} est le vecteur colonne de $[\text{GF}(2)]^{|J|}$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

(2) $\underline{v} \mathbb{T} = 0$ Où \underline{v} est le vecteur ligne de $[\text{GF}(2)]^{|I|}$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

(Le calcul dans (1) et (2) est effectué dans $\text{GF}(2)$).

D étant totalement unimodulaire, T l'est aussi. Les relations (1) et (2) impliquent (d'après le théorème VI, chap. II, dans [24]) qu'il existe un vecteur colonne u de $\mathbb{R}^{|J|}$ et un vecteur ligne v de $\mathbb{R}^{|I|}$ dont les composantes sont dans $\{-1, +1\}$ et tels que:

(3) $T u = 0$

(4) $v T = 0$

(Le calcul dans (3) et (4) est effectué dans \mathbb{R}).

Posons : $I_1 = \{i \in I / v_i = +1\}$, $J_1 = \{j \in J / u_j = +1\}$, $I_2 = I - I_1$ et $J_2 = J - J_1$. Désignons par T' la matrice réelle obtenue à partir de T en multipliant par -1 les lignes T_i pour i dans I_2 et les colonnes T^j pour j dans J_2 . On vérifie facilement, en utilisant (3) et (4), que chaque ligne ainsi que chaque colonne de T' comporte autant de $+1$ que de -1 . Ce qui est équivalent à dire que l'orientation $\mathcal{O}'_{T'}$ de $G(\mathbb{T})$ induite par T' est une orientation eulérienne.

Soit D' la matrice obtenue à partir de D en multipliant par -1 les lignes D_i pour i dans I_2 ainsi que les colonnes D^j pour j dans J_2 et soit $\Theta_{D'}$ l'orientation de $G(A)$ induite par D' . Comme T' est la sous matrice D'_{IJ} de D' , $\Theta_{T'}$ est contenue dans $\Theta_{D'}$. Comme D' est équivalente à D , $\Theta_{D'}$ est \mathfrak{R} -équivalente à Θ_D . La condition est donc nécessaire.

(2) Condition suffisante. Supposons que Θ_D est quasi-eulérienne et démontrons que D est totalement unimodulaire. Pour démontrer cela il suffit, d'après le théorème 2 ([25] section II), de démontrer que : Pour tout (I, J) tel que $G(A_{IJ})$ est eulérien, $\sum_{i \in I, j \in J} D_{ij} \equiv 0 \pmod{4}$.

Considérons alors (I, J) tel que $G(A_{IJ})$ soit eulérien. Comme Θ_D est quasi-eulérienne il existe une orientation Θ_1 de $G(A)$ \mathfrak{R} -équivalente à Θ_D et contenant une orientation eulérienne de $G(A_{IJ})$. Ce qui est équivalent à dire qu'il existe une matrice D' équivalente à D et telle que dans la sous matrice D'_{IJ} chaque ligne et chaque colonne comporte autant de $+1$ que de -1 . Comme D' est équivalente à D , elle s'obtient à partir de D en multipliant successivement les lignes D_i pour $i \in I_2$ (où $I_2 \subseteq I$) et les colonnes D^j pour $j \in J_2$ (où $J_2 \subseteq J$) par -1 . Posons $I_1 = I - I_2$ et $J_1 = J - J_2$. Nous avons alors:

$$(5) \sum_{j \in J_1} D'_{ij} + \sum_{j \in J_2} D'_{ij} = 0 \quad \text{pour tout } i \text{ dans } I$$

$$(6) \sum_{i \in I_1} D'_{ij} + \sum_{i \in I_2} D'_{ij} = 0 \quad \text{pour tout } j \text{ dans } J$$

Ce qui implique :

$$(7) \sum_{j \in J_1} D'_{ij} = \sum_{j \in J_2} D'_{ij} \quad \text{pour tout } i \text{ dans } I$$

$$(8) \sum_{i \in I_1} D'_{ij} = \sum_{i \in I_2} D'_{ij} \quad \text{pour tout } j \text{ dans } J$$

	J_1	J_2
I_1	$D_{I_1 J_1}$	$D_{I_1 J_2}$
I_2	$D_{I_2 J_1}$	$D_{I_2 J_2}$

D' où une partition de la matrice D_{IJ} en quatre sous matrices dont la somme des éléments de chacune d' elles est égale à une même quantité q ; en effet, de (7) on déduit que :

$$(9) \sum_{i \in I_1, j \in J_1} D_{ij} - \sum_{i \in I_1, j \in J_2} D_{ij} \text{ et } \sum_{i \in I_2, j \in J_1} D_{ij} - \sum_{i \in I_2, j \in J_2} D_{ij}$$

De même des égalités (8) on déduit que :

$$(10) \sum_{j \in J_1, i \in I_1} D_{ij} - \sum_{j \in J_1, i \in I_2} D_{ij} \text{ et } \sum_{j \in J_2, i \in I_1} D_{ij} - \sum_{j \in J_2, i \in I_2} D_{ij}$$

Ainsi les égalités de (9) et (10) montrent que

$$\sum_{i \in I_1, j \in J_1} D_{ij} - \sum_{i \in I_1, j \in J_2} D_{ij} - \sum_{i \in I_2, j \in J_1} D_{ij} + \sum_{i \in I_2, j \in J_2} D_{ij} = q.$$

Par suite la somme des éléments de D_{IJ} est égale à $4q$.

C.Q.F.D.

V.2.2.5. Corollaire. Une matrice binaire A est orientable si et seulement si le graphe associé possède une orientation quasi-eulérienne.

Ceci découle immédiatement du théorème précédent.

V.2.2.6. Corollaire. Soit \mathcal{M} un matroïde binaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) \mathcal{M} est régulier
- (2) le graphe associé à une matrice fondamentale de \mathcal{M} possède une orientation quasi-eulérienne.
- (3) le graphe associé à chaque matrice fondamentale de \mathcal{M} possède une orientation quasi-eulérienne.

Ceci résulte des théorèmes V.2.2.4. et V.2.1.2.

V.2.3. Caractérisation des graphes fondamentaux des matroides réguliers et des matroides planaires.

Considérons un graphe biparti $G = (V, E)$ et une bipartition $\{X, Y\}$ de ses sommets en deux stables. Pour tout sommet x de G désignons par $N(x)$ l'ensemble de ses voisins dans G . Soit \mathcal{M} le matroïde binaire défini par la famille $(\{x\} \cup N(x))_{x \in Y}$ prise comme système générateur de son espace des cycles. On vérifie facilement que X est une base de \mathcal{M} et que G est le graphe fondamental de \mathcal{M} relativement à cette base.

Notons que le matroïde \mathcal{M}' défini par la famille $(\{x\} \cup N(x))_{x \in X}$ prise comme système générateur de son espace des cycles est isomorphe au matroïde dual de \mathcal{M} . Il résulte de ce qui précède que :

V.2.3.1. Proposition. Toute bipartition des sommets d'un graphe biparti G en deux stables définit un couple de matroides binaires duaux pour lesquels G est un graphe fondamental commun.

Nous allons étudier maintenant les opérations sur les graphes bipartis correspondant aux opérations étudiées dans la section V.1.3. Il en résultera une caractérisation des graphes fondamentaux des matroides réguliers et des matroides planaires.

Rappelons que le **complémentaire local** d'un graphe G en un sommet x est le graphe $G' = CL_x(G)$ obtenu à partir de G en remplaçant les arêtes du sous-graphe de G engendré par le voisinage de x par les arêtes de son complémentaire.

V.2.3.2. Remarque. Algébriquement on peut définir le voisinage $N'(z)$ d'un sommet z , dans G' , en fonction de son voisinage $N(z)$ dans G de la manière suivante :

$$N'(z) = N(z) + N(x) + z \quad \text{si } z \in N(x)$$

$$N'(z) = N(z) \quad \text{si non}$$

(le symbole "+" utilisé ci-dessus est celui de la différence symétrique des ensembles).

Soit $G = (XUY, E)$ un graphe biparti ($\{X, Y\}$ étant une bipartition des sommets de G en deux stables). Nous allons démontrer le lemme suivant :

V.2.3.3. Lemme. Pour toute arête $\{x, y\}$ du graphe G les graphes :

$$CL_x \cdot CL_y \cdot CL_x(G) \quad \text{et} \quad CL_y \cdot CL_x \cdot CL_y(G)$$

sont deux graphes bipartis isomorphes.

Preuve

Supposons que $x \in X$ et $y \in Y$. Pour tout sommet z de G désignons par $N(z)$ le voisinage de ce sommet dans G . Posons $G_1 = CL_x(G)$, $G_2 = CL_y(G_1)$ et $G_3 = CL_x(G_2)$ et désignons par $N_i(z)$ le voisinage de tout sommet z dans le graphe G_i (et ceci pour $i = 1, 2, 3$). Soit z un sommet quelconque de G . En utilisant les formules de la remarque V.2.3.1. nous obtenons :

Si $z \notin N(x) \cup N(y)$ alors $N_i(z) = N(z)$ pour $i = 1, 2, 3$. Supposons donc que $z \in N(x) \cup N(y)$ et posons $P = N(x) - \{y\}$ et $Q = N(y) - \{x\}$.

Les formules de la remarque V.2.3.1 nous donnent :

(1) Dans G_1 :

$$\text{si } z = x \quad N_1(x) = N(x) - P + y$$

$$\text{si } z = y \quad N_1(y) = N(y) + N(x) + y - P + Q + x$$

$$\text{si } z \in P \quad N_1(z) = N(z) + N(x) + z - N(z) + P + y + z$$

(2) Dans G_2 :

$$\text{si } z = x \quad N_2(x) = N_1(x) + N_1(y) + x = Q + y$$

$$\text{si } z = y \quad N_2(y) = N_1(y) - P + Q + x$$

$$\text{si } z \in P \quad N_2(z) = N_1(z) + N_1(y) + z - N(z) + Q + x + y$$

$$\text{si } z \in Q \quad N_2(z) = N_1(z) + N_1(y) + z - N(z) + P + Q + x + z$$

(3) Dans G_3 :

$$\text{si } z = x \quad N_3(x) = N_2(x) - Q + y$$

$$\text{si } z = y \quad N_3(y) = N_2(y) + N_2(x) + y - P + x$$

$$\text{si } z \in P \quad N_3(z) = N_2(z) - N(z) + Q + x + y$$

$$\text{si } z \in Q \quad N_3(z) = N_2(z) + N_2(x) + z - N(z) + P + x + y$$

Remarquons alors que si on échange dans le calcul précédent x et y , et P et Q on obtiendra la description du graphe $CL_y \cdot CL_x \cdot CL_y(G)$. Donc du fait de la symétrie entre x et y ainsi que entre P et Q dans les égalités de (3) on peut affirmer que $G_3 = CL_x \cdot CL_y \cdot CL_x(G) = CL_y \cdot CL_x \cdot CL_y(G)$. D'autre part, comme $N_3(x) = Q + y$ et $N_3(y) = P + x$ les ensembles $X' = XU\{y\} - \{x\}$ et $Y' = YU\{x\} - \{y\}$ constituent bien une bipartition de l'ensemble des sommets de G_3 en deux stables. C.Q.F.D.

V.2.3.4. Définition. On appelle **bicomplémentaire local d'un graphe biparti G en une arête $\{x,y\}$** et on note $CL_{(x,y)}(G)$ le graphe G_3 défini comme dans le théorème précédent, c'est à dire :

$$CL_{(x,y)}(G) = CL_x \cdot CL_y \cdot CL_x(G) = CL_y \cdot CL_x \cdot CL_y(G)$$

V.2.3.5. Remarques.

(1) Posons $CL_{(x,y)}(G) = (X'UY',E')$ et soient z un élément de X' et z' un

élément de Y' . Il est facile de vérifier, en s'appuyant sur les égalités données dans V.2.3.3 (3), que :

(i) Si $z \in Q$ et $z' \in P$ alors $\{z, z'\} \in E' \Leftrightarrow \{z, z'\} \notin E$.

(ii) Si $z \notin Q$ ou $z' \notin P$ alors $\{z, z'\} \in E' \Leftrightarrow \{z, z'\} \in E$ dans le cas où $z \neq y$ et $z' \neq x$,

$\{y, z'\} \in E' \Leftrightarrow z' \in P \Leftrightarrow \{x, z'\} \in E$ dans le cas où $z' \neq x$,

et $\{z, x\} \in E' \Leftrightarrow z \in Q \neq (z, y) \in E$ dans le cas où $z \neq y$,

enfin $\{x, y\} \in E \cap E'$.

(2) Il est facile de vérifier que si G est connexe alors tout graphe obtenu à partir de G par bicomplémentation locale en une arête l'est aussi.

Soient A une $r \times s$ -matrice binaire et $G = (RUC, E)$ le graphe associé avec $R = \{b_i / i=1, \dots, r\}$ et $C = \{c_j / j=1, \dots, s\}$. Le théorème suivant est une conséquence directe de V.1.3 (1), et de la remarque V.2.3.5.

V.2.3.6. Théorème. Pour tout $A_{ij} \neq 0$ le graphe associé à la matrice A' , obtenue par sous-pivotage dans A sur A_{ij} , est le graphe G' , bicomplémentaire local en $\{b_i, c_j\}$ du graphe G .

Soit A une matrice binaire. Nous appellerons **mineur** de A toute matrice A' pouvant être obtenue à partir de A par une succession de suppression de lignes et de colonnes, de sous-pivotages et à une permutation de colonnes près.

Soit G un graphe biparti. Nous appellerons **C-mineur** de G tout graphe H pouvant être obtenu à partir de G par une succession de suppressions de sommets et de bicomplémentations locales en des arêtes.

Soit \mathcal{M} un matroïde sur un ensemble V . Rappelons que \mathcal{M} est dit **connexe** si pour tout x dans V et pour tout y dans V , il existe un circuit C de \mathcal{M} contenant x et y ([21], chap. 5). Il est facile de démontrer que :

V.2.3.7. Proposition. Pour tout matroïde binaire \mathcal{M} les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{M} est connexe
- (ii) \mathcal{M} admet un graphe fondamental connexe
- (iii) tout graphe fondamental de \mathcal{M} est connexe.

On vérifie facilement que si \mathcal{M} n'est pas connexe et si G est un graphe fondamental de \mathcal{M} alors les composantes connexes de G sont des graphes fondamentaux des composantes connexes de \mathcal{M} .

En tenant compte des propositions V.2.3.1 et V.2.3.7 on peut affirmer que:

V.2.3.8. Proposition. Soit \mathcal{M} un matroïde binaire connexe et soit G un graphe fondamental de \mathcal{M} . Si \mathcal{M}' est un matroïde binaire ayant G comme graphe fondamental alors \mathcal{M}' est isomorphe à \mathcal{M} ou à son dual.

Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux matroïdes binaires et nous supposons que \mathcal{N} est connexe. Considérons deux graphes fondamentaux $G(\mathcal{M})$ et $G(\mathcal{N})$ de \mathcal{M} et de \mathcal{N} respectivement.

V.2.3.9. Théorème. $G(\mathcal{M})$ contient un C-mineur isomorphe à $G(\mathcal{N})$ si et seulement si \mathcal{M} contient comme mineur le matroïde \mathcal{N} ou son dual \mathcal{N}^* .

Ce théorème résulte immédiatement des propriétés (1), (2) et (3) de la section V.1.3, de la remarque V.1.3.2, du théorème V.2.3.6 et de la proposition V.2.3.8.

• On appelle matroïde de Fano le matroïde $\mathcal{M}(F)$ représenté par la matrice binaire $[U_3, F]$ où :

$$F = \begin{array}{|cccc} \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Il est facile de vérifier que toute matrice obtenue à partir de F par sous-pivotage est identique à F à une permutation de colonnes près.

• On appelle graphe de Fano le graphe $G(F)$ représenté par la figure 1.

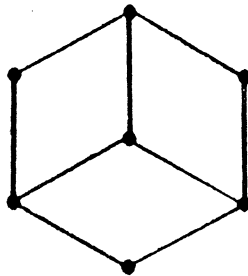


Figure 1.

Dans [26] et [27] Tutte a caractérisé les matroïdes réguliers de la manière suivante :

V.2.3.10. Théorème. Un matroïde binaire est régulier si et seulement si il ne contient pas comme mineur le matroïde de Fano ou son dual.

D' une manière équivalente, et en s' appuyant sur le théorème V.2.3.9 on peut dire que :

V.2.3.11. Corollaire. Soit \mathcal{M} un matroïde binaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) \mathcal{M} est régulier
- (2) \mathcal{M} admet un graphe fondamental ne contenant pas un C-mineur isomorphe au graphe de Fano $G(F)$.
- (3) aucun graphe fondamental de \mathcal{M} ne contient un C-mineur isomorphe au graphe de Fano $G(F)$.

Et en tenant compte du corollaire V.2.2.6 on peut affirmer :

V.2.3.12. Corollaire. Un graphe biparti G possède une orientation quasi-eulérienne si et seulement si G ne contient pas un C -mineur isomorphe au graphe de Fano.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Désignons par \mathcal{I} (respectivement par \mathcal{J}) l'ensemble des parties F de E ne contenant pas de cycles (respectivement cocycles). Il est bien connu que l'ensemble \mathcal{I} (respectivement \mathcal{J}) ainsi défini constitue l'ensemble des indépendants d'un matroïde dit **matroïde des cycles de G** et noté $\mathcal{M}(G)$ (respectivement **matroïde des cocycles de G** et noté $\mathcal{M}^*(G)$).

On démontre que $\mathcal{M}^*(G) = [\mathcal{M}(G)]^*$ (le dual de $\mathcal{M}(G)$) (voir [21], chap. 2).

Un matroïde \mathcal{M} est dit **matroïde graphique** (respectivement **cographique**) s'il existe un graphe G tel que \mathcal{M} est isomorphe à $\mathcal{M}(G)$ (respectivement à $\mathcal{M}^*(G)$).

Un matroïde est dit **planaire** s'il est à la fois graphique et cographique.

Dans [26] Tutte a caractérisé les matroïdes planaires de la manière suivantes :

V.2.3.13. Théorème. Un matroïde binaire \mathcal{M} est planaire si et seulement si \mathcal{M} ne contient pas comme mineur l'un des matroïdes :

$\mathcal{M}(F)$ (matroïde de Fano),

$\mathcal{M}(K_{3,3})$ (matroïde des cycles du graphe biparti complet $K_{3,3}$)

$\mathcal{M}(K_5)$ (matroïde des cycles du graphe complet K_5),

ou leurs duaux.

Dans [2] De Fraysseix a caractérisé les matroïdes planaires de la manière suivante :

V.2.3.14. Théorème. Soit \mathcal{M} un matroïde binaire. les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{M} est planaire
- (ii) \mathcal{M} possède un graphe fondamental qui est un graphe de cordes
- (iii) tout graphe fondamental de \mathcal{M} est un graphe de cordes.

Ainsi, en utilisant ces deux théorèmes, et en s'appuyant sur le théorème V.2.3.9 on peut déduire :

V.2.3.15. Corollaire. Un graphe biparti G est de cordes si et seulement si G ne contient pas un C -mineur isomorphe à l'un des graphes suivants : $G(F)$ (graphe de Fano), $G(K_{3,3})$ (figure 2.e) et $G(K_5)$ (figure 2.f).

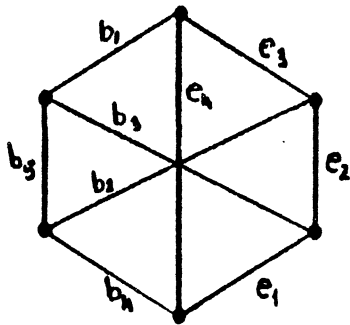


Figure 2.a. Le graphe $K_{3,3}$

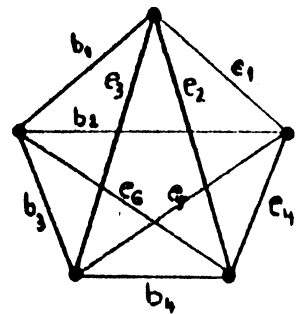


Figure 2.b. Le graphe K_5

	e_1	e_2	e_3	e_4
b_1	0	0	1	1
b_2	0	1	1	0
b_3	1	1	0	0
b_4	1	0	0	1
b_5	1	1	1	1

Figure 2.c. Matrice fondamentale de $K_{3,3}$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
b_1	1	1	1	0	0	0
b_2	1	0	0	1	1	0
b_3	0	1	0	1	0	1
b_4	0	1	1	1	1	1

Figure 2.d. Matrice fondamentale de K_5

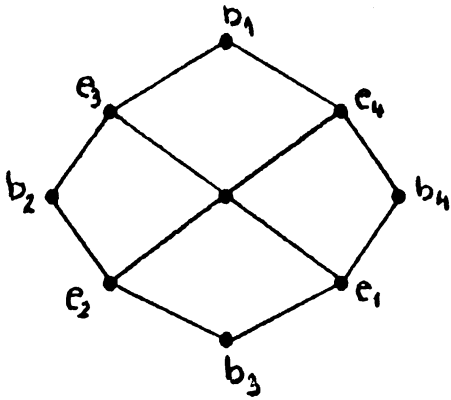


figure 2.e.

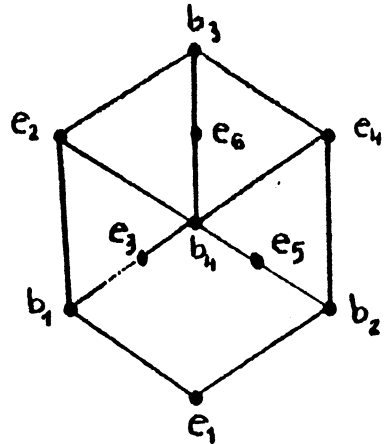


Figure 2.f.

Figure 2.

V.2.3.16. Remarques.

(1) Il est clair que dans la caractérisation précédente $G(K_{3,3})$ et $G(K_5)$ peuvent être remplacés par d'autres graphes fondamentaux de $\mathcal{M}(K_{3,3})$ et $\mathcal{M}(K_5)$ respectivement.

(2) Soit \mathfrak{L} une classe de matroïdes binaires. Si \mathfrak{L} vérifie les propriétés :

- (i) si \mathcal{M} est dans \mathfrak{L} alors tout mineur de \mathcal{M} est dans \mathfrak{L}
- (ii) si \mathcal{M} est dans \mathfrak{L} alors le dual \mathcal{M}^* de \mathcal{M} est dans \mathfrak{L}
- (iii) si toutes les composantes connexes d'un matroïde \mathcal{M} sont dans \mathfrak{L} alors \mathcal{M} est dans \mathfrak{L} .

On pourra caractériser les graphes fondamentaux des matroïdes de \mathfrak{L} par C-mineurs exclus.

(3) On appelle C'-mineur d'un graphe simple G tout graphe G' pouvant être obtenu à partir de G par succession de suppressions de sommets et de complémentations locales en des sommets. Il en résulte qu'un C'-mineur d'un graphe biparti est un C'-mineur particulier de ce graphe.

On vérifie alors facilement que le graphe $G(F)$ de Fano n'est pas de cordes mais que tout C' -mineur strict de $G(F)$ est de cordes. Par ailleurs les graphes donnés dans les figures 2.e et 2.f ne sont pas de cordes et chacun d'eux contient le graphe R_5 de la figure 3 comme C' -mineur; le graphe R_5 vérifie la même propriété que $G(F)$.

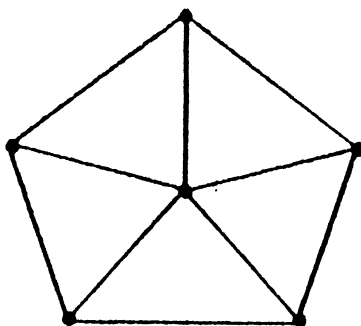


Figure 3.

Il résulte de la remarque V.2.3.15 que :

V.2.3.16. Théorème. Un graphe biparti est de cordes si et seulement si il ne contient pas un C' -mineur isomorphe à $G(F)$ ou à R_5 .

En fait cette caractérisation des graphes bipartis de cordes par C' -mineurs exclus n'est qu'un cas particulier d'une conjecture de A. Bouchet concernant les graphes de cordes en général.

V.3. Reconnaissance des matroïdes planaires.

Soit \mathcal{M} un matroïde binaire connexe. On considère une matrice fondamentale A de \mathcal{M} et soit $G = G(A)$ le graphe associé. Le résultat principal qui nous permettra de répondre à la question de savoir si \mathcal{M} est planaire ou non est le théorème V.2.3.14. En effet, d'après ce théorème

ainsi que les théorèmes IV.2.1 et IV.4.8 on peut affirmer que \mathcal{M} est planaire si et seulement si le système linéaire suivant est compatible :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (E_1) \alpha(xy) + \alpha(yx) = 1 & \text{pour toute arête } \{x,y\} \text{ de } G \\ (E_2) \alpha(xy) + \alpha(xz) = 0 & \text{pour tout } \{x,y,z\} \text{ tel que } \{y,z\} \text{ est} \\ & \text{une arête de } G, \{x,y\} \text{ et } \{x,z\} \text{ ne le} \\ & \text{sont pas} \\ (E_3) \alpha(xy) + \alpha(xz) + \alpha(yz) + \alpha(zy) = 1 & \text{pour tout } \{x,y,z\} \text{ tel que } \{x,y\} \text{ et} \\ & \{x,z\} \text{ sont des arêtes de } G, \{y,z\} \text{ ne} \\ & \text{l'est pas.} \end{array} \right.$$

Considérons maintenant une signature D quelconque de A et soit Θ_D l'orientation de G induite par D .

V.3.1. Théorème. Si \mathcal{M} est planaire alors D est totalement unimodulaire si et seulement si Θ_D est une orientation géométrique du graphe de cordes G .

La définition d' une orientation géométrique d' un graphe de cordes est donnée dans la section II.2.

Nous allons utiliser le théorème suivant, dont la démonstration sera donnée plus loin :

V.3.2. Théorème. Toute orientation géométrique d' un graphe de cordes est quasi-eulérienne.

Preuve du théorème V.3.1

Si \mathcal{M} est planaire alors G est de cordes d' après le théorème V.2.3.11.

Condition nécessaire: Supposons donc que D est totalement unimodulaire. Soit \mathcal{O} une orientation géométrique de G et soit D' la signature de A telle que $\mathcal{O}_{D'} = 0$. $\mathcal{O}_{D'}$ est géométrique donc elle est quasi-eulérienne d'après le théorème V.3.2, et donc D' est totalement unimodulaire d'après le théorème V.2.2.4. Comme D est aussi totalement unimodulaire, D et D' sont équivalentes d'après le théorème V.2.1.1, et par suite \mathcal{O}_D et $\mathcal{O}_{D'}$ sont \mathcal{R} -équivalentes d'après la proposition V.2.2.3. Ce qui prouve que \mathcal{O}_D est géométrique, puisque toute orientation \mathcal{R} -équivalente à une orientation géométrique est aussi géométrique (corollaire II.3.4. (a)).

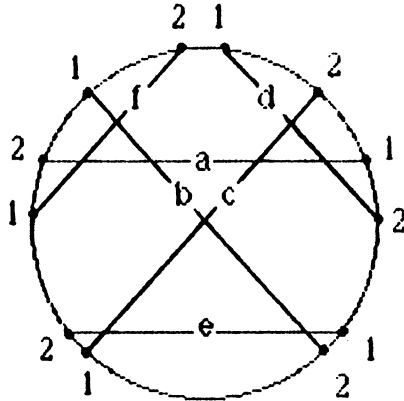
Condition suffisante. Si \mathcal{O}_D est géométrique alors elle est quasi-eulérienne (Théorème V.3.2) et donc D est totalement unimodulaire d'après le théorème V.2.2.4. C.Q.F.D.

Preuve du théorème V.3.2

Soit $G = (V, E)$ un graphe de cordes et soit \mathcal{O} une orientation géométrique de G définie à partir d'une orientation des cordes d'un diagramme $C(V)$ associé à G . D'après le corollaire II.3.4, les orientations \mathcal{R} -équivalentes à \mathcal{O} sont exactement les orientations géométriques pouvant être définies à partir du diagramme $C(V)$. Démontrons alors que si G_X est un sous-graphe eulérien de G alors il existe une orientation \mathcal{O}' \mathcal{R} -équivalente à \mathcal{O} et dont la restriction \mathcal{O}'_X est une orientation eulérienne de G_X (notons que \mathcal{O}'_X n'est autre que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathcal{O}' / x \in X \text{ et } y \in X\}$). Nous allons donner d'abord les deux lemmes suivants :

Lemme 1. Si $G = (V, E)$ est un graphe de cordes eulérien, alors pour tout diagramme $C(V)$ associé à G l'ensemble des orientations géométriques pouvant être définies à partir de $C(V)$ contient une orientation eulérienne de G .

En effet, considérons un diagramme $C(V)$ associé à un graphe de cordes eulérien $G = (V, E)$. Colorions les extrémités des différentes cordes de $C(V)$ en deux couleurs, disons 1 et 2, de sorte que deux extrémités voisines sur C soient de couleur différente (voir figure ci-dessous).



Pour toute corde x de $C(V)$, les deux extrémités de x sont de couleur différente. En effet, comme G est eulérien, le degré du sommet x est pair, et donc il y a un nombre pair de cordes croisant x dans $C(V)$. On constate alors qu'en parcourant le cercle C d'une extrémité de x jusqu'à l'autre extrémité dans le sens des aiguilles d'une montre, on rencontrera un nombre pair d'extrémités de cordes, d'où la propriété.

Orientons maintenant chaque corde x de l'extrémité de couleur 1 vers celle de couleur 2. On obtiendra ainsi un diagramme orienté. Pour toute corde x désignons par x_1 et x_2 les extrémités de x de couleur 1 et 2 respectivement, et définissons les arcs $C_1(x)$ (ou arc à gauche de x) et $C_2(x)$ (ou arc à droite de x) comme dans la section II.2. Soit Θ l'orientation géométrique de G définie à partir du diagramme orienté ainsi obtenu. Pour tout $x \in V$ on a :

(1) $(x, y) \in \Theta \Leftrightarrow y$ croise x et $y_1 \in C_1(x) \Leftrightarrow y$ croise x et l'extrémité de y de couleur 1 est sur $C_1(x)$.

(2) $(y, x) \in \Theta \Leftrightarrow y$ croise x et $y_2 \in C_1(x) \Leftrightarrow y$ croise x et l'extrémité de y de couleur 2 est sur $C_1(x)$.

On a alors :

$|\Theta^+(\mathbf{x})|$ est égal le nombre des cordes y croisant \mathbf{x} avec $y_1 \in C_1(\mathbf{x})$, et

$|\Theta^-(\mathbf{x})|$ est égal le nombre des cordes y croisant \mathbf{x} avec $y_2 \in C_1(\mathbf{x})$.

Désignons par $p_i(\mathbf{x})$ le nombre de toutes les extrémités de couleur i (pour $i = 1, 2$) et qui appartiennent à $C_1(\mathbf{x})$ et soit $q(\mathbf{x})$ le nombre des cordes y ne croisant pas \mathbf{x} et ayant les deux extrémités dans $C_1(\mathbf{x})$; il est clair que $p_1(\mathbf{x}) = |\Theta^+(\mathbf{x})| + q(\mathbf{x})$ et $p_2(\mathbf{x}) = |\Theta^-(\mathbf{x})| + q(\mathbf{x})$. Comme les extrémités de cordes appartenant à $C_1(\mathbf{x})$ sont en nombre pair et coloriées alternativement 1 et 2, nous avons :

$p_1(\mathbf{x}) = p_2(\mathbf{x})$, ce qui donne $|\Theta^+(\mathbf{x})| = |\Theta^-(\mathbf{x})|$ et ceci pour tout \mathbf{x} dans V . Donc Θ est eulérienne.

Lemme 2. Soient $G = (V, E)$ un graphe de cordes, Θ une orientation géométrique de G et G_X un sous-graphe de G . Toute orientation de G_X \mathcal{R} -équivalente à Θ_X est prolongeable en une orientation de G \mathcal{R} -équivalente à Θ .

La démonstration de ce lemme est évidente.

Revenons maintenant à notre théorème et soit G_X un sous-graphe eulérien de G . Soit $C(X)$ le diagramme obtenu à partir de $C(V)$ en omettant les cordes $\mathbf{x} \in V - X$. Il est clair que $C(X)$ est un diagramme associé au graphe G_X . D'après le lemme 1 il existe une orientation des cordes de $C(X)$ qui induit une orientation géométrique eulérienne Θ_1 de G_X . Comme Θ_1 est définie à partir du même diagramme définissant Θ_X , elle est \mathcal{R} -équivalente à Θ_X . Donc Θ_1 est prolongeable en une orientation de G \mathcal{R} -équivalente à Θ (lemme 2). Il en résulte que Θ est quasi-eulérienne. C.Q.F.D.

Comme conséquence immédiate du théorème V.3.1 nous obtenons :

V.3.3. Corollaire. Soit $G(A)$ le graphe associé à une matrice binaire A . Si $G(A)$ est de cordes alors les orientations géométriques de $G(A)$ sont exactement les orientations induites par les signatures totalement unimodulaires de A .

Ce résultat nous permet de donner deux propriétés des orientations géométriques des graphes de cordes bipartis :

V.3.4. Corollaire. Les orientations géométriques d'un graphe de cordes biparti sont toutes \mathcal{R} -équivalentes.

Cette propriété n'est pas vraie en général comme le montre la figure 4 où nous avons deux orientations géométriques non \mathcal{R} -équivalentes du graphe complet à quatre sommets.

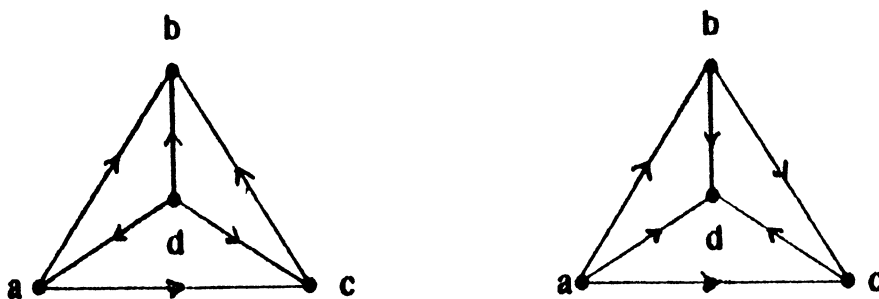


Figure 4.

L'autre propriété est la suivante :

V.3.5. Corollaire. Les orientations géométriques d'un graphe de cordes biparti sont ses orientations quasi-eulériennes.

Là encore cette propriété n'est pas vraie en général comme le montre la figure 5, qui présente une orientation quasi-eulérienne du graphe complet à quatre sommets qui n'est pas géométrique.

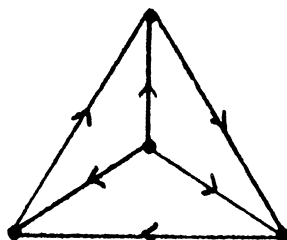


Figure 5.

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et soit Θ une orientation quelconque de G . On désigne par α_Θ l'application de l'ensemble des demi-arêtes de G dans $GF(2)$ définie par : $\alpha_\Theta(xy) = 0$ et $\alpha_\Theta(yx) = 1$ pour tout $(x, y) \in \Theta$.

V.3.6. Lemme. Si G est un graphe de cordes et si Θ est une orientation géométrique de G alors il existe une solution α du système associé $P(G)$ prolongeant α_Θ .

Preuve

En effet, si G est de cordes alors c'est un P.L-graphe et donc $P(G)$ est compatible. Si Θ est une orientation géométrique de G alors il existe un diagramme orienté $C(V)$ associé à G et définissant Θ . Considérons le pseudo-tournoi $K_V = (G, \Theta, S)$ défini à partir de $C(V)$. On définit l'application α de l'ensemble des demi-arêtes du graphe complet $(V, \mathcal{P}_2(V))$ dans $GF(2)$ comme on l'a fait dans la section IV.2, c'est à dire de la manière suivante :

(1) pour toute arête $\{x, y\}$ de G on pose $\alpha(xy) = 0$ et $\alpha(yx) = 1$ pour tout (x, y) dans Θ ;

(2) pour toute demi-arête du complémentaire G de G on pose

$\alpha(xy) = 0$ si $S(\{x,y\}) = -$ et $\alpha(xy) = 1$ si $S(\{x,y\}) = +$.

D'après le théorème IV.2.1 l'application α ainsi définie vérifie les équations de $P(G)$, et il est clair que α prolonge α_0 .

C.Q.F.D.

Le corollaire V.3.3 et le lemme V.3.6 vont nous permettre de simplifier la reconnaissance de la planarité d'un matroïde binaire \mathcal{M} dans le cas où il est régulier et où on connaît une signature totalement unimodulaire d'une de ses matrices fondamentales. En effet, supposons que \mathcal{M} est régulier et considérons une signature totalement unimodulaire D de A et soit $\Theta = \Theta_D$ l'orientation de G induite par D .

Pour toute arête $\{x,y\}$ de G remplaçons, dans $P(G)$, $\alpha(xy)$ et $\alpha(yx)$ par $\alpha_\Theta(xy)$ et $\alpha_\Theta(yx)$ respectivement.

On obtient le système simplifié suivant :

$$P(G, \Theta) \left\{ \begin{array}{l} (E'_2) \alpha(xy) + \alpha(yx) = 0 \quad \text{Pour tout } \{x,y,z\} \text{ tel que } \{y,z\} \text{ est une arête} \\ \text{de } G, \{x,y\} \text{ et } \{x,z\} \text{ ne le sont pas} \\ \\ (E'_3) \alpha(xy) + \alpha(yx) = 0 \quad \text{Pour tout } x \text{ et } y \text{ non adjacents dans } G \text{ et} \\ \text{tels qu'il existe un chemin de longueur 2} \\ \text{joignant } x \text{ et } y \text{ dans } (G, \Theta_D) \\ \\ (E''_3) \alpha(xy) + \alpha(yx) = 1 \quad \text{Pour tout } x \text{ et } y \text{ non adjacents dans } G \\ \text{et tels qu'il existe un anti-chemin de} \\ \text{longueur 2 joignant } x \text{ et } y \text{ dans } (G, \Theta_D). \end{array} \right.$$

Notons que la totale unimodularité de D nous permet d'affirmer qu'il ne peut exister deux équations du type (E'_3) et (E''_3) pour une

même non arête $\{x,y\}$ de G . Sinon D contiendrait, au signe près, une sous-matrice de la forme $\begin{vmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{vmatrix}$ dont le déterminant est égal à 2. Contradiction.

Ainsi le théorème V.3.1 et le lemme V.3.6 nous permettent d'affirmer que $P(G)$ est compatible si et seulement si $P(G, \emptyset)$ l'est.

Mais remarquons que chaque équation du système $P(G, \emptyset)$ comporte exactement deux variables, ce qui suggère la définition du graphe suivant :

On associe à $P(G, \emptyset)$ le graphe H_D dont les sommets représentent les variables (donc les demi-arêtes du complémentaire de G). Deux sommets sont adjacents dans H_D si et seulement si les variables correspondantes figurent dans une même équation; autrement dit les arêtes de H_D représentent les équations de $P(G, \emptyset)$.

On vérifie facilement que $P(G, \emptyset)$ est compatible si et seulement si l'ensemble E''_3 des arêtes de H_D correspondant aux équations du type (E''_3) constitue un cocycle de H_D . Par suite :

V.3.7. Théorème. \mathcal{M} est planaire si et seulement si E''_3 est un cocycle dans H_D .

V.3.8. Remarque. L'hypothèse que \mathcal{M} est connexe ne constitue pas une véritable restriction. En effet, dans le cas contraire il suffit d'étudier la planarité des composantes connexes de \mathcal{M} , puisque \mathcal{M} est planaire si et seulement si chacune de ses composantes connexes l'est.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Berge C.** Graphes et hypergraphes. Dunod PARIS, 1974.
- [2] De Fraysseix H.** Local complementation and interlacement graphs.
Discrete Math. Vol. 33 n° 1. 1975. (365-383).
- [3] De Fraysseix H.** A characterization of circle graphs.
Europ. J. of Comb. Theory. (à paraître).
- [4] Fournier J.C.** Une caractérisation des graphes de cordes.
C. R. Acad. Sc. PARIS 1978. (811-813).
- [5] Fournier J.C.** Graphes de cordes, hypergraphes de chaînes d' un
arbre et matroïdes graphiques.
Actes du Colloque Algèbre Appliquée et
Combinatoire. GRENOBLE. 1978.
- [6] Gavril F.** Algorithms for a maximum clique and a maximum
independent set of a circle graph.
Networks 3. 1973. (261-273).
- [7] Golumbic M.C.** Algorithmic graph theory and perfect graphs.
Academic Press. N.Y. 1980.
- [8] Jaeger F.** Graphes de cordes et espaces graphiques.
Europ. J. of Comb. Theory 4. 1983. (319-327).

- [9] Jaeger F.** On graphic minimal spaces.
Colloque Franco-Canadien de Combinatoire.
Annal of Discrete Math. 8. 1980. (123.126).
- [10] Jaeger F.** On some algebraic properties of graphs. (à paraître)
- [11] Kotzig A.** Quelques remarques sur les transformations χ .
Seminaire P. Rosenstiehl, PARIS 25 Nov. 1977.
- [12] Kotzig A.** Eulerian lines in finite 4-valent graphs and their transformations, in "theory of graphs" . (Erdős et Katona editeurs), Tihany, Hongrie. (219.230).
- [13] Read R.C. , Rotem D. , Urrutia J.**
Orientations of circle graphs. J. of Graph Theory.
Vol. 6. 1982.
- [14] Read R.C. , Rosenstiehl P.**
On the Gauss Crossing Problem.
Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai 1976. (843.876).
- [15] Read R.C. , Rosenstiehl P.**
On the principal edge tripartition of a graph.
Annals of Disc. Math. 3. 1978. (195-226).
- [16] Rosenstiehl P.** Bicycles et diagonales des graphes planaires.
Cahiers du C.E.R.O. Vol.17 n° 2-3-4.1975. (365-383)
- [17] Rosenstiehl P.** Mot et vecteur d' un graphe mêlé.
Journées de Comb. et Inf. Bermond et Cori éditeurs.
Juin 1975. (317-328).

- [18] Shimon, Even and A. Itai**
Queues, stacks and graphs, in "theory of Matching and Computations". Academic Press. N.Y. 1971.
- [19] Bouchet A.** Isotropic systems. (à paraître).
- [20] Naji W.** Graphes de cordes. Caractérisation et reconnaissance. Discrete. Math. (à paraître)
- [21] Welsh D.J.A.** Matroid theory. Academic Press. N.Y. 1976.
- [22] Las Vergnas M. and Bland G.R.**
Orientability of matroids. J. Comb. Th.. Séries B.
Vol.24 n° 1 (94.123). 1978.
- [23] Tutte W. T.** Lectures on matroids. J. Res. Nat. Bur. Stand. 69B.
1965. (1-48).
- [24] Camion P.** Matrices totalement unimodulaires et problèmes combinatoires. Université de Bruxelles. Thèse 1963
Rapport Euratom EUR 1632.
- [25] Camion P.** Modules unimodulaires. J. Comb. Th. 4. 1968.
(301-362).
- [26] Tutte W.T.** A homotopy theorem for matroids I and II.
Trans. Amer. Math. Soc. 88. 1958. (346-352).
- [27] Tutte W.T.** Matroids and graphs.
Trans. Amer. Math. Soc. 90. 1959. (527-552).



AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT D'ETAT

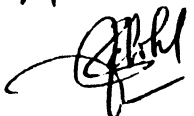
Vu les dispositions de l'article 5 de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de Mr... JAEGER... Franconi.....

Mr... FOURNIER... Jean... Claude....

Mr... BOUCAFF... .. André.....


M. M. NAFI... Wafid..... est autorisé à
présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES.

Avis très favorable
C. Delobel
Président Comité des
Thèses 24^e Section
le 24 avril 85


Fait à Grenoble, le 25 AVR. 1985

Le Président de l'U.S.M.G.




Le Président
M. TANCHE



Résumé.

Comme le montre le titre, cette thèse porte sur l'étude des graphes de cordes.

Un graphe simple $G = (V, E)$ est dit graphe de cordes s'il est possible d'associer à G un diagramme $C(V)$ constitué d'un cercle C et d'un ensemble fini non vide V de cordes de C de sorte que deux sommets adjacents de G correspondent à deux cordes qui se croisent.

Le premier chapitre est une présentation générale du sujet. Nous y avons étudié quelques propriétés des graphes de cordes. Deux classes particulières de ces graphes ont été examinées (les graphes de permutation et les graphes d'intervalles unitaires).

Dans le deuxième chapitre nous avons introduit la définition d'un diagramme orienté; c'est un diagramme dans lequel les cordes sont orientées arbitrairement. Toute orientation d'une corde x d'un diagramme $C(V)$ associé à un graphe de cordes G permet de définir les côtés gauche et droit de x . La relation "l'extrémité initiale de la corde y est à gauche de la corde x " vis à vis d'une orientation quelconque des cordes de $C(V)$ nous permet de définir :

- une orientation des arêtes de G (dite orientation géométrique)
- un double marquage des arêtes du complémentaire de G .

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des propriétés des orientations géométriques, et dans le troisième chapitre nous étudions les doubles marquages du complémentaire d'un graphe de cordes définis comme ci-dessus, et nous caractérisons un graphe de cordes par l'existence d'une orientation de ses arêtes et un double marquage de celles de son complémentaire vérifiant certaines propriétés très simples.

Dans le quatrième chapitre, une étude algébrique des relations trouvées précédemment, nous permet d'alléger les conditions données au troisième chapitre et de démontrer que la reconnaissance des graphes de cordes est polynomial.

Le cinquième chapitre est une application directe des résultats trouvés précédemment sur les matroïdes binaires, réguliers et planaires.

Mots clés : Graphes de cordes, diagramme, orientation, marquage, matrice totalement unimodulaire, matroïde binaire, matroïde régulier, matroïde planaire.

