



HAL
open science

Champs aléatoires de renouvellement

Jean Fricot

► **To cite this version:**

Jean Fricot. Champs aléatoires de renouvellement. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1985. Français. NNT: . tel-00315303

HAL Id: tel-00315303

<https://theses.hal.science/tel-00315303>

Submitted on 28 Aug 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de
DOCTEUR INGENIEUR
«Mathématiques appliquées»

par

Jean FRICOT



CHAMPS ALEATOIRES DE RENOUVELLEMENT



Thèse soutenue le 12 février 1985 devant la commission d'examen.

A. LE BRETON	}	Président
A. ANTONIADIS		Examineurs
J. DEMONGEOT		
G. GREGOIRE		
B. PRUM		

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

.../...

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2^{ème} CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à :

Monsieur le Professeur A. Le Breton pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury.

Monsieur J. Demongeot qui, grâce à ses nombreux conseils et encouragements, m'a permis de mener à bien ce travail.

Monsieur le Professeur B. Prum, Messieurs A. Antoniadis et G. Grégoire qui ont bien voulu accepter de prendre part au jury.
Je les remercie pour leur lecture attentive et critique.

Je remercie mes collègues thésards à la fois pour l'amitié qu'ils m'ont témoignée et pour l'aide matérielle qu'ils m'ont apportée.

J'associe à ces remerciements mes amis et ma famille pour leur soutien moral.

Enfin, je remercie le personnel du service de reprographie du laboratoire qui a réalisé le tirage de cette thèse.



TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : ETAT DE GIBBS ET RENOUVELLEMENT SPATIAL	2
I Présentation des champs aléatoires et des états de Gibbs sur une boîte finie ; notations ; définitions.....	2
II Champ aléatoire de renouvellement spatial.....	14
III Etat de Gibbs et C.A.R.S.C.	17
IV Etat de Gibbs et C.A.R.S.	18
V Caractérisation des E.R.S.	20
VI Relation entre les CARS, CARSI et CARSC.....	27
VII Problème de la limite thermodynamique.....	32
VIII Champs aléatoires mixtes.....	34
CHAPITRE II : SEMI-GROUPE DE NAISSANCE ET DE MORT SUIVANT UN MODELE DE RENOUVELLEMENT	36
I Semi-groupe $\{P_t\}$; générateur associé.....	36
II Processus renouvelant de naissance et de mort..	38
III Semi-groupe de m-particules.....	40
IV Processus mixte de naissance et de mort.....	43
CHAPITRE III : SIMULATION DE C.A.M.M.R.S. A L'AIDE D'UN AUTOMATE ALEATOIRE	45
I Automates aléatoires booléens.....	46
II Processus de Harris et automates aléatoires....	48
III Convergence du réseau d'automates aléatoires...	50
IV Présentation des simulations de CAMMRS.....	52
CHAPITRE IV : CHAMPS ALEATOIRES ET PROCESSUS PONCTUELS	73
I Généralités sur les lois des processus ponctuels...	75

II Mesures de Gibbs et processus ponctuels.....	73
III Lois mélangées et transformations associées....	80
A Loi mélangée par la loi uniforme.....	81
B Processus ponctuels bêta-binômiaux.....	83
C ERS issus de processus ponctuels tronqués...	86
Annexe I : Lois hypergéométriques.....	87
Annexe II : Lois bêta-binômiales.....	91

ANNEXE : MODELE AVEC IMMUNISATION

ANNEXE : PROGRAMMES (SIMULATION DES C.A.M.M.R.S.)	104
---	-----

REFERENCES	111
------------	-----

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est de proposer des modèles de champs aléatoires répondant de manière plus naturelle au problème que se pose l'épidémiologiste que les modèles dont il dispose.

Ce problème peut être modélisé comme suit (Frauenthal) :

1- La maladie est transmise entre un individu infecté et un individu sain (susceptible de devenir à son tour infecté).

2- Il n'y a ni phénomène d'incubation, ni porteur sain.

3- On suppose l'homogénéité de la susceptibilité et du potentiel infectieux entre individus, de même que leur invariance dans le temps.

4- La population totale (individus infectés + individus susceptibles) reste toujours la même.

Ce modèle peut être complété en introduisant le phénomène de l'immunisation :

5- Par guérison, un individu infecté devient immunisé : il est ni susceptible, ni infecté.

Les individus sont les éléments de l'ensemble Λ (partie finie de Z^V). L'information portée par chaque individu est

binarisée : l'état d'un individu est "0" s'il est susceptible, "1" sinon. Par là-même, on se désintéresse du phénomène de l'immunisation car, pour ce cas, il ne faudrait plus utiliser des variables binaires mais ternaires, disons à valeurs dans $\{0,1,2\}$. Un champ aléatoire binaire défini sur Λ est une famille $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, X_λ étant une variable aléatoire binaire. Par confusion de l'espace canonique du champ $\{0,1\}^\Lambda$ avec $P(\Lambda)$, on confond la notion de champ aléatoire binaire défini sur Λ et celle de mesure de probabilité sur $P(\Lambda)$.

Beaucoup de modèles de champs aléatoires, jusqu'à présent développés, sont de type markovien (Preston, Spitzer, ...). Ils traduisent le fait suivant : l'événement " l'individu x est infecté sachant que la sous-population d'infectés contient l'ensemble A ", a la même probabilité que celui sachant que la sous-population d'infectés contient l'intersection prise entre les plus proches voisins de x et la partie A . Ceci s'écrit mathématiquement :

$$P(x \in I_\Lambda / A \subset I_\Lambda) = P(x \in I_\Lambda / (\partial x \cap A) \subset I_\Lambda),$$

où ∂x désigne l'ensemble des voisins de l'individu x , et où I_Λ est la sous-population des infectés de Λ .

Nous construisons des modèles de champs de renouvellement qui correspondent de manière plus adéquate à la nature du problème que doit résoudre l'épidémiologiste. Ces champs modélisent l'hypothèse que la probabilité conditionnelle que x soit infecté, sachant que la sous-population d'infectés contient A , est

la même que celle sachant que la sous-population d'infectés contient la partie de A la plus proche de x. Ceci se traduit mathématiquement par :

$$P(x \in I_\Lambda / A \subset I_\Lambda) = P(x \in I_\Lambda / \partial_x(A) \subset I_\Lambda),$$

où $\partial_x(A) = \{y \in A / d(x,y) = d(x,A)\}$, où I_Λ a été défini précédemment et où d est la distance de Manhattan.

L'étude que nous avons entreprise pour les champs aléatoires de renouvellement suit celle qui est menée pour les champs markoviens, à savoir :

le chapitre I est consacré à l'étude mathématique de ces modèles. En premier lieu, nous définissons les champs de renouvellement du point de vue cylindrique : les C.A.R.S.C. et les C.A.R.S.I.. Afin d'assouplir ces définitions, nous considérons les configurations de l'espace canonique $\{0,1\}^\Lambda$ et étudions deux modèles de champs, les C.A.R.S. et les E.R.S., et démontrons qu'ils sont deux approches équivalentes du renouvellement spatial. Ces champs décrivent une mesure positive et peuvent être traités de par la connaissance du potentiel de leurs mesures de Gibbs. En effet, toute mesure de probabilité de Gibbs (i.e. positive) peut s'écrire : $\mu(A) = Z^{-1} \exp(V(A))$, pour tout $A \subset \Lambda$; Z est une constante de normalisation et V, le potentiel, une fonction de $P(\Lambda) \times \mathbb{R}$, qui doit vérifier $V(\emptyset) = 0$. Les C.A.R.S. sont caractérisés par un potentiel de renouvellement spatial : V est un P.R.S. si, pour tout $x \in A$, alors, $V(A \cup \{x\}) - V(A) = V(\partial_x(A) \cup \{x\}) - V(\partial_x(A))$

Un ensemble, A, est équilibré si, pour tout $x, y \in A$, alors, il

existe $z \in A$ tel que $d(x,z) > d(x,y)$; alors, si la distance minimale entre deux individus de Λ est d_0 et si on suppose que :

"si A est équilibré, alors : $x \neq y \in A \Rightarrow d(x,y) > d_0$ " fait partie d'une hypothèse (H), nous démontrons que les C.A.R.S. sont un cas particulier des C.A.R.S.C. et des C.A.R.S.I. ; de plus, si le potentiel d'interaction J_V , associé au potentiel V , est défini par : $J_V(A) = \sum_{B \subset A} V(B)$, alors un potentiel V est un PRS si et seulement si $J_V(A) = (-1)^{|A|} j$, $j \in \mathbb{R}$, dès que $\text{diam}(A) > d_0$. Cette caractérisation permet de redéfinir les C.A.R.S., cette fois-ci du point de vue ensembliste.

L'étude de la limite thermodynamique permet de cerner les problèmes liés aux effets de bord.

Enfin, pour clore ce chapitre, nous définissons les C.A.M.M.R.S. ; ces champs aléatoires sont un compromis entre les champs markoviens et les C.A.R.S., et sont moins contraints que ceux-ci.

Nous nous intéressons, au second chapitre, à l'existence de modèles de processus admettant pour mesures invariantes celles définies au chapitre I. Un processus de contact de Harris est déterminé par la connaissance de son générateur qui vérifie : $G(A,B) = 0$, si $|A \Delta B| > 1$; le taux de naissance (resp. de mort) est égal à $\beta(x,A) = G(A, A \cup \{x\})$ (resp. $\delta(x,A) = G(A \cup \{x\}, A)$). $\{P_t\}$ est un semi-groupe renouvelant de naissance et de mort si son générateur vérifie $\beta(x,A) = \beta(x, \partial_x(A))$ et $\delta(x,A) = \delta(x, \partial_x(A))$. Un tel processus, si il est réversible dans le temps, admet pour mesure invariante un CARS. Nous étudions d'autres processus, puis modifions leur définition afin qu'ils aient pour mesures

invariantes non plus des CARS mais des CAMMRS.

Au chapitre III, nous simulons des CAMMRS à l'aide d'un réseau d'automates aléatoires, sur une boîte Λ . Partant d'une configuration initiale (figure 1), ce réseau est chargé de la mise à jour, point par point, de tous les individus de Λ . Il est construit de telle manière que son unique mesure invariante soit un CAMMRS. Grâce aux propriétés ergodiques du processus (μ_n) (μ_n étant la mesure construite à la nième étape), nous sommes assurés de la convergence vers la mesure invariante, et donc asymptotiquement générons un CAMMRS.

Notre travail, au dernier chapitre, est une approche des champs aléatoires en termes de processus ponctuels : les mesures de Gibbs sont reconsidérées du point de vue mesures ponctuelles. Cette réécriture ne nous apporte pas de résultat nouveau, par rapport à ceux établis aux chapitres précédents, mais nous permet de définir d'autres champs de renouvellement sans avoir à définir leur potentiel. Nous étudions des lois de processus ponctuels issues de mélange d'autres lois, puis les utilisons afin de générer des champs de renouvellement.

Tous les résultats établis au chapitre 1 le sont sous l'hypothèse (H) et donc il reste un terrain d'investigation : déterminer si ils peuvent l'être sans cette hypothèse ; toutefois la plupart des maillages, notamment le maillage rectangulaire, remplissent la condition (H).

D'autre part la non-unicité de la limite thermodynamique n'est pas suffisamment exploitée pour déterminer les effets

de bord.

Enfin, nous espérons qu'une plus profonde investigation de ces champs aléatoires, en termes de processus ponctuels, pourra apporter de nouveaux résultats.

Les champs aléatoires de renouvellement, comme les champs markoviens, traitent le modèle de l'épidémiologiste, sans toutefois répondre au problème posé par l'immunisation. En annexe (modèle avec immunisation), bien que les fondements théoriques développés aux premiers chapitres ne soient plus applicables, nous présentons une manière d'utiliser les champs de renouvellement en ajoutant une contrainte d'immunisation temporaire.

CHAPITRE I
ETAT DE GIBBS
ET RENOUVELLEMENT SPATIAL

"Le point de perfection est atteint
lorsque la nouveauté de la forme
répond exactement à la nouveauté
intérieure." André Gide

I Présentation des champs aléatoires et des états de Gibbs sur une
"boîte" finie ; notations ; définitions.

Soit Λ une "boîte" finie, c'est à dire une partie finie de Z^V (ou encore une fenêtre de Z^V), et $P(\Lambda)$, l'ensemble des sous-ensembles de Λ . Dans la suite, nous regarderons diverses classes de mesures de probabilité sur $P(\Lambda)$ qui apparaissent dans des modèles élémentaires de physique ou de biologie : traitement d'image, physique du solide (verre de spin, ...), épidémiologie ...

Les éléments de Λ sont interprétés comme étant des sites, chacun d'entre eux pouvant être libre ou occupé (individu "sain" ou "malade" correspondant à l'état binaire "0" ou "1"). Le sous-ensemble A de Λ sera considéré comme décrivant la situation où les éléments de A sont les sites occupés (les éléments de $\Lambda \setminus A$ étant les sites libres). Aussi les éléments de $P(\Lambda)$ se-

ront appelés configurations. Cela revient à identifier $P(\Lambda)$ et $\{0,1\}^\Lambda$. La plupart des modèles en physique faisant intervenir les configurations sont par nature dynamiques. Les mesures de probabilité que nous proposons décrivent la distribution des configurations quand le modèle est dans un certain état d'équilibre dynamique.

L'ensemble Λ , représentant les sites du modèle, doit respecter certaines contraintes géométriques, en particulier tous les voisins d'un point x de Λ doivent être situés à la même distance de ce point. Dans les simulations que nous présentons au chapitre III, Λ sera une "boîte" finie de \mathbb{Z}^2 ("rectangle" ou partie finie connexe de \mathbb{Z}^2), munie de la distance de Manhattan($*$).

$B_d(x)$ (resp. $S_d(x)$) désigne la boule ouverte (resp. la sphère) de centre x et de rayon d ; la distance d'un point x à un ensemble A est : $d(x,A) = \min_{y \in A} d(x,y)$.

Définition 1-1 : Opérateur "projecteur" ∂_x

On définit, pour tout $x \in \Lambda$, l'opérateur ∂_x sur $P(\Lambda)$ par :

$$\partial_x(A) = \{y \in A / d(x,y) = d(x,A)\}, \forall A \subset \Lambda$$

Définition 1-2 : Opérateur couronne C_x

On définit pour tout $x \in \Lambda$, l'opérateur C_x sur $P(\Lambda)$ par :

$$C_x(A) = S_{d(x,A)}(x) \setminus \partial_x(A), \forall A \subset \Lambda$$

Lemme 1: L'opérateur ∂_x est idempotent

démonstration : ceci découle immédiatement du fait que $d(\partial_x(A), x) = d(x,A)$.

Les opérateurs ∂_x et C_x vérifient :

- $\partial_x(A \cup B) = \partial_x(\partial_x(A) \cup \partial_x(B))$, pour tout $A, B \subset \Lambda$

($*$) ou la distance $d((i,j), (k,l)) = \sup(|i-k|, |j-l|)$ ou la distance euclidienne à condition de définir $\partial_x(A) = \{y \in A / d(x,y) < d(x,A) + d_0\}$.

- $C_x(A \cup B) = C_x(\partial_x(A) \cup \partial_x(B))$, pour tout $A, B \subset \Lambda$
- $\partial_x(\partial_x(A)) = \partial_x(A)$, pour tout $A \subset \Lambda$
- $\partial_x(C_x(A)) = C_x(A)$, pour tout $A \subset \Lambda$
- $C_x(\partial_x(A)) = C_x(A)$, pour tout $A \subset \Lambda$
- $C_x(C_x(A)) = \partial_x(A)$, pour tout $A \subset \Lambda$
- $\partial_x(A) = \{x\}$, si $x \in A \subset \Lambda$
- $C_x(A) = \emptyset$, si $x \in A \subset \Lambda$

Posons $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et $G = \{G_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, un système de voisinages de Λ , c'est à dire une collection d'ensembles vérifiant :

- (i) $\lambda \notin G_\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$
- (ii) $\delta \in G_\lambda \iff \lambda \in G_\delta$ pour tout $\delta, \lambda \in \Lambda$

On peut associer naturellement à Λ et G un graphe $\{\Lambda, G\}$ de la manière suivante : si $\lambda_2 \in G_{\lambda_1}$, λ_1 et λ_2 sont connectés par un arc.

Définition 1-3 : Clique

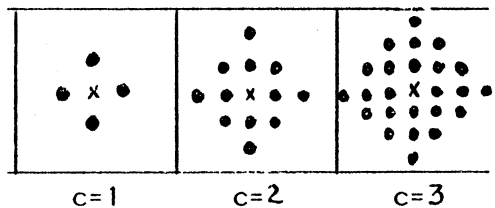
$A \subset \Lambda$ est une clique si pour tout $x, y \in A$ alors $x \in G_y$ ou $x=y$.

Nous nous intéressons dans la suite aux systèmes de voisinages de la forme suivante , dans le cas où Λ est une "boîte" finie de \mathbb{Z}^2 :

$$G^c = \{G_\lambda^c, \lambda = (i, j) \in \Lambda\}$$

$$\text{où } G_{(i, j)}^c = \{\delta = (k, l) \in \Lambda / 0 < |k-i| + |l-j| \leq c\} = B_{c+1}((i, j))$$

Nous représentons les voisins d'un point intérieur (c'est-à-dire tel que $\nexists \gamma \in \Lambda$ pour lequel $|G_\gamma^c| > |G_x^c|$) pour $c = 1, 2, 3$:



Définition 1-4 : Système des plus proches voisins

C'est le système de voisinages homogène pour lequel $c=1$.

Et on a : $G^1_{(i,j)} = \{(i-1,j), (i+1,j), (i,j-1), (i,j+1)\}$.

Ce système est communément adopté en physique et c'est celui que nous prendrons dans la suite, sauf mention contraire.

Pour tous ces systèmes de voisinages homogènes, les sites situés au bord de la "boîte" ont moins de voisins que les points situés à l'intérieur : Geman appelle ce phénomène "bord-libre". D'autres systèmes de voisinages sont proposés afin de "gommer" (de manière plus ou moins artificielle) les effets de bord. Dans ce sens, nous exposons deux systèmes de voisinages : système aux conditions toriques, et système de voisinages "fictif".

- Considérons le cas où la "boîte" Λ est définie de la manière suivante : $\Lambda_n = \{\lambda = (i,j) / i,j=0,1, \dots, n-1\}$. Pour des commodités analytiques et calculatoires, nous considérons la "boîte" Λ_n comme un tore, étendu périodiquement, et nous identifions $\lambda = (i,j)$ et $\lambda' = (i \text{ modulo}(n), j \text{ modulo}(n))$; cette extension artificielle permet d'utiliser des outils mathématiques définis sur Z^2 , telle la transformée de Fourier, mais la plupart du temps n'a aucune justification physique.

- Dans certains cas, il est nécessaire de considérer des systèmes de voisinages où le nombre de voisins reste le même pour tous les sites de la "boîte". Pour ce faire, si un site se trouve avoir moins de voisins que les autres, nous décidons de lui adjoindre des "voisins fictifs" de manière à égaler le nombre de voisins, "fictifs" ou non, pour chaque site. L'état binaire des sites "fictifs" est, soit imposé, soit tiré suivant une certaine loi de probabilité.

Posons $S(\Lambda)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $P(\Lambda)$. Un élément μ de $S(\Lambda)$ décrit la distribution des configurations quand le modèle est dans un certain état d'équilibre dynamique ; à cause de cela, nous appellerons $S(\Lambda)$ l'ensemble des états de Λ . Puisque $P(\Lambda)$ est fini, nous identifierons $\mu \in S(\Lambda)$ avec sa densité. Ainsi μ est une fonction de $P(\Lambda)$ dans $[0,1]$.

Nous imposons à μ les propriétés suivantes :

$$(i) \quad \mu(A) > 0, \text{ pour tout } A \subset \Lambda$$

$$(ii) \quad \sum_{A \subset \Lambda} \mu(A) = 1$$

L'unique classe des états que nous considérons est celle des états de Gibbs ; elle apparaît dans de nombreux modèles de physique statique.

Un potentiel V est une fonction : $V: P(\Lambda) \rightarrow \mathbb{R}$, qui vérifie $V(\emptyset) = 0$.

Définition 1-5 : Etat de Gibbs associé au potentiel V

π , l'état de Gibbs associé au potentiel V est donné par :

$$\pi(A) = Z^{-1} \exp V(A), \text{ pour tout } A \subset \Lambda$$

où Z est une constante de normalisation : $Z = \sum_{B \subset \Lambda} \exp V(B)$.

Si V est un potentiel sur Λ , alors on définit le potentiel d'interaction J_V , de $P(\Lambda)$ dans \mathbb{R} , par :

$$J_V(A) = \sum_{B \subset A} (-1)^{|A \setminus B|} V(B), \text{ pour tout } A \subset \Lambda.$$

Réciproquement on a :

$$V(A) = \sum_{B \subset A} J_V(B), \text{ pour tout } A \subset \Lambda.$$

Cela découle immédiatement du principe d'inversion-exclusion (cf. aussi Barra J.R) et est connu sous le nom de **formule d'inversion de Möbius** ; il est aisé de vérifier directement la validité de cette inversion.

Réciproquement, étant donné un potentiel ϕ , appelons

U_ϕ le potentiel donné par :

$$U_\phi(A) = \sum_{B \subset A} \phi(B), \text{ pour tout } A \subset \Lambda,$$

alors ϕ est le potentiel d'interaction associé à U_ϕ .

Définition 1-6 : Potentiel du plus proche voisin

V est un potentiel du plus proche voisin, si $J_V(A) = 0$, dès que A n'est pas une clique.

Soit μ un état sur Λ ayant une densité positive (i.e. $\mu(A) > 0$, pour tout $A \subset \Lambda$); alors μ est l'état de Gibbs associé au potentiel V , où V est le potentiel donné par :

$$V(A) = \text{Log}(\mu(A)/\mu(\emptyset)), \text{ pour tout } A \subset \Lambda.$$

Ainsi, la classe des états de Gibbs est l'ensemble de tous les états sur Λ ayant une densité positive, et donc l'introduction des potentiels doit simplement être considérée comme un outil mathématique aisé à manipuler, pour décrire les états à densité positive (Hammersley-Clifford).

Définition 1-7 : Champ aléatoire

Un champ aléatoire sur Λ est la donnée de $|\Lambda|$ variables aléatoires, i.e. la famille $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

remarque : Si le champ est binaire (i.e. les variables aléatoires X_λ sont à valeurs dans $\{0,1\}$), on confond la notion de champ aléatoire et celle de mesure de probabilité sur $P(\Lambda)$, par confusion de l'espace canonique du champ $\{0,1\}^\Lambda$ avec $P(\Lambda)$.

Nous terminons ce paragraphe par :

Définition 1-8 : Cylindre

Le cylindre $|A|$, pour tout $A \in P(\Lambda)$, est défini par :

$$|A| = \{B \subset \Lambda / B \supset A\}$$

Définition 1-9 : Cylindre mixte

Le cylindre mixte $|A,B|$, pour tout $A,B \subset \Lambda$, est défini par :

$$|A,B| = \{C \subset \Lambda / C \supset A \text{ et } B \cap C = \emptyset\}$$

II Champ aléatoire de renouvellement spatial

Afin de généraliser la notion de renouvellement définie sur la droite réelle, nous définissons les champs aléatoires de renouvellement spatial. La définition A exprime la notion de renouvellement du point de vue cylindrique, les définitions B et C du point de vue des configurations.

Nous nous intéressons aux champs aléatoires qui vérifient que si $x \notin A \subset \Lambda$, alors la probabilité conditionnelle que x appartienne à la configuration sachant que la configuration sur $\Lambda \setminus \{x\}$ contient A , est la même que la probabilité conditionnelle que x appartienne à la configuration sachant que la configuration contient $\partial_x(A)$ sur $\Lambda \setminus \{x\}$. D'où la définition :

Définition A : Champ aléatoire de renouvellement spatial cylindrique (CARSC)

$\mu \in S(\Lambda)$ est un CARSC si :

(i) μ a une densité positive

(ii) $\mu(|A \cup \{x\}|) / (\mu(|A \cup \{x\}|) + \mu(|A|)) =$
 $\mu(|\partial_x(A) \cup \{x\}|) / (\mu(|\partial_x(A) \cup \{x\}|) + \mu(|\partial_x(A)|)),$
 pour tout $x \notin A \subset \Lambda$

($\Leftrightarrow \mu(|\{x\}| \mid |A|) = \mu(|\{x\}| \mid |\partial_x(A)|)$)

Nous démontrons maintenant un lemme technique :

Lemme 2 : $ab = a'b' \Leftrightarrow a/(a + a') = b/(b + b')$ pour tout $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ vérifiant $a + a' \neq 0$ et $b + b' \neq 0$

démonstration : $ab = a'b' \Leftrightarrow a/a' = b'/b$

$\Leftrightarrow (a + a')/a' = (b + b')/b'$

$\Leftrightarrow a/(a + a') = b/(b + b')$

Soit maintenant un champ aléatoire vérifiant que pour $x \notin A \subset \Lambda$, alors la probabilité conditionnelle que x appartienne à la configuration sachant que la configuration sur $\Lambda \setminus \{x\}$ est

A_x est la même que la probabilité que x appartienne à la configuration sachant que la configuration sur $\bar{B}_d(x,A)(x)$ est $\partial_x(A)$; un tel champ est défini par :

Définition B : Champ aléatoire de renouvellement spatial (CARS)

$\mu \in S(\Lambda)$ est un CARS si pour tout $A \subset \Lambda$ et $x \notin A$:

(i) $\mu(A) > 0$

(ii) $\mu(A \cup \{x\}) / (\mu(A \cup \{x\}) + \mu(A)) =$

$$\frac{\sum_{B \subset \Lambda \setminus \bar{B}_d(x,A)(x)} \mu(B \cup \partial_x(A) \cup \{x\})}{\sum_{B \subset \Lambda \setminus \bar{B}_d(x,A)(x)} (\mu(B \cup \partial_x(A)) + \mu(B \cup \partial_x(A) \cup \{x\}))}$$

$$\Leftrightarrow \mu(|\{x\}| \mid |A, C_x(A) \cup B_d(x,A)(x) \setminus \{x\}|) = \mu(|\{x\}| \mid |\partial_x(A), C_x(A) \cup B_d(x,A)(x) \setminus \{x\}|)$$

Remarque : d'après le lemme 2, (ii) \Leftrightarrow

$$\begin{aligned} \mu(A) / \mu(A \cup \{x\}) &= \frac{\sum_{B \subset \Lambda \setminus \bar{B}_d(x,A)(x)} \mu(B \cup \partial_x(A))}{\sum_{B \subset \Lambda \setminus \bar{B}_d(x,A)(x)} \mu(B \cup \partial_x(A) \cup \{x\})} \\ &= \mu(|"1" \text{ sur } \partial_x(A) \text{ et } "0" \text{ sur } B_d(x,A)(x) \cup C_x(A)|) / \\ &\quad \mu(|"1" \text{ sur } \partial_x(A) \cup \{x\} \text{ et } "0" \text{ sur } (B_d(x,A)(x) \setminus \{x\}) \cup C_x(A)|) \\ &= (\mu(|\partial_x(A)|) - \sum_{\substack{B \cap (B_d(x,A)(x) \cup C_x(A)) \neq \emptyset \\ B \cap \partial_x(A) = \emptyset}} \mu(B \cup \partial_x(A))) / \\ &\quad (\mu(|\partial_x(A) \cup \{x\}|) - \sum_{\substack{B \cap ((B_d(x,A)(x) \setminus \{x\}) \cup C_x(A)) \neq \emptyset \\ B \cap \partial_x(A) = \emptyset}} \mu(B \cup \partial_x(A) \cup \{x\})) \end{aligned}$$

Définition C : Etat de renouvellement spatial (ERS)

$\mu \in S(\Lambda)$ est un ERS si :

(i) μ a une densité positive

(ii) $\mu(A \cup \{x\}) / \mu(A) = \mu(\partial_x(A) \cup \{x\}) / \mu(\partial_x(A))$, $\forall x \notin A \subset \Lambda$

Remarque : d'après le lemme 2, (ii) \Leftrightarrow

$\mu(A \cup \{x\}) / (\mu(A \cup \{x\}) + \mu(A)) = \mu(\partial_x(A) \cup \{x\}) / (\mu(\partial_x(A) \cup \{x\}) + \mu(\partial_x(A)))$, ce qui exprime le fait que la probabilité conditionnelle que x appartienne à la configuration sachant que la configuration est A sur $\Lambda \setminus \{x\}$ est la même que celle sachant que la configuration est $\partial_x(A)$ sur $\Lambda \setminus \{x\}$.

Nous démontrons l'équivalence des deux définitions :

Proposition 1-1 : $\mu \in S(\Lambda)$ est un CARS, si et seulement si c'est un ERS.

démonstration : * Montrons d'abord qu'un CARS est un ERS; puisque l'opérateur ∂_x est idempotent (lemme 1), le membre droit de (ii) dans B reste inchangé, que la configuration sur $\Lambda \setminus \{x\}$ soit A ou $\partial_x(A)$. Donc l'égalité (ii) de C est vérifiée.

* Montrons maintenant qu'un ERS est un CARS. Soit $B \subset \Lambda \setminus \bar{B}_{d(x,A)}(x)$; puisque μ est un ERS, on a :

$$\mu(B \cup \partial_x(A) \cup \{x\}) / \mu(B \cup \partial_x(A)) =$$

$$\mu(\partial_x(B \cup \partial_x(A)) \cup \{x\}) / \mu(\partial_x(B \cup \partial_x(A))),$$

par application de (ii) de C. Or $\partial_x(B \cup \partial_x(A)) = \partial_x(\partial_x(B) \cup \partial_x(A)) = \partial_x(A \cup B)$, d'après le lemme 1, d'où :

$$\mu(B \cup \partial_x(A) \cup \{x\}) / \mu(B \cup \partial_x(A)) = \mu(\partial_x(B \cup A) \cup \{x\}) / \mu(\partial_x(B \cup A)).$$

Comme B est tel que $d(x,A) < d(x,B)$, alors $\partial_x(A \cup B) = \partial_x(A)$, d'où, pour de tels B, on a :

$$\begin{aligned} \mu(B \cup \partial_x(A) \cup \{x\}) / \mu(B \cup \partial_x(A)) &= \mu(\partial_x(A) \cup \{x\}) / \mu(\partial_x(A)) \\ &= \mu(A \cup \{x\}) / \mu(A), \end{aligned}$$

en appliquant de nouveau la propriété (ii) de C. Il s'ensuit :

$$\mu(A) \mu(B \cup \partial_x(A) \cup \{x\}) = \mu(A \cup \{x\}) \mu(B \cup \partial_x(A)), \text{ d'où}$$

$$\mu(A) \sum_{B \subset \Lambda \setminus \bar{B}_{d(x,A)}(x)} \mu(B \cup \partial_x(A) \cup \{x\}) = \mu(A \cup \{x\}) \sum_{B \subset \Lambda \setminus \bar{B}_{d(x,A)}(x)} \mu(B \cup \partial_x(A))$$

Si on applique de nouveau le lemme 2, on retrouve bien la propriété (ii) de B.

Définition D : Champ aléatoire de renouvellement spatial intermédiaire (CARSI)

$\mu \in S(\Lambda)$ est un CARSI si :

(i) μ a une densité positive

(ii) $\mu(\{x\} / |A, C_x(A)|) = \mu(\{x\} / |\partial_x(A), C_x(A)|)$,
pour tout $x \notin A \subset \Lambda$.

Remarque : d'après le lemme 2 (ii) \Leftrightarrow

$$(ii') \mu(|A \cup \{x\}, C_x(A)|) / \mu(|A, C_x(A)|) =$$

$$\mu(|\partial_x(A) \cup \{x\}, C_x(A)|) / \mu(|\partial_x(A), C_x(A)|)$$

III Etat de Gibbs et champ aléatoire de renouvellement spatial cylindrique

Nous définissons les potentiels de renouvellement spatial cylindrique, puis nous montrons l'équivalence des états de Gibbs associés à ces potentiels avec les CARSC.

Définition 1-10: Potentiel de renouvellement spatial cylindrique (PRSC)

V est un PRSC si, pour tout $x \notin A \subset \Lambda$:

$$B \sum_{C \in \Lambda \setminus (A \cup \{x\})} \sum_{C \in \Lambda \setminus (\partial_x(A) \cup \{x\})} (\exp(V(B \cup A \cup \{x\}) + V(C \cup \partial_x(A))) - \exp(V(B \cup A) + V(C \cup \partial_x(A) \cup \{x\}))) = 0$$

Proposition 1-2 : μ est un état de Gibbs associé à un potentiel de renouvellement spatial cylindrique $\Leftrightarrow \mu$ est un champ aléatoire de renouvellement spatial cylindrique.

démonstration : Nous avons, pour tout $x \notin A \subset \Lambda$ les équivalences suivantes :

μ est un CARSC \Leftrightarrow

$$\mu(|A \cup \{x\}|) \mu(|\partial_x(A)|) = \mu(|A|) \mu(|\partial_x(A) \cup \{x\}|) \Leftrightarrow$$

$$\left(\sum_{B \in \Lambda \setminus (A \cup \{x\})} \exp(V(B \cup A \cup \{x\})) \right) \left(\sum_{C \in \Lambda \setminus (\partial_x(A) \cup \{x\})} \exp(V(C \cup \partial_x(A) \cup \{x\})) + \exp(V(C \cup \partial_x(A))) \right) =$$

$$\left(\sum_{B \in \Lambda \setminus (A \cup \{x\})} \exp(V(B \cup A \cup \{x\})) + \exp(V(B \cup A)) \right) \left(\sum_{C \in \Lambda \setminus (\partial_x(A) \cup \{x\})} \exp(V(C \cup \partial_x(A) \cup \{x\})) \right) \Leftrightarrow$$

V est un PRSC.

IV Etat de Gibbs et champ aléatoire de renouvellement spatial

Nous définissons les potentiels de renouveau, puis nous démontrons l'équivalence des états de Gibbs associés à ces potentiels et les CARS.

Définition 1-11 : Potentiel de renouveau spatial (PRS)

V est un PRS, si V est un potentiel et que son potentiel d'interaction associé, J_V , vérifie :

$$\sum_{B \subset A} J_V(B \cup \{x\}) = \sum_{B \subset \partial_X(A)} J_V(B \cup \{x\}), \text{ pour tout } x \notin A \subset \Lambda:$$

Remarque : Cette condition exprime le fait que pour tout $x \notin A \subset \Lambda$, alors $V(A \cup \{x\}) - V(A) = V(\partial_X(A) \cup \{x\}) - V(\partial_X(A))$.

Proposition 1-3 : Si μ est un état de Gibbs associé à un potentiel de renouveau spatial $\Rightarrow \mu$ est un champ aléatoire de renouvellement spatial.

démonstration : Soit μ l'état de Gibbs considéré ; par définition μ est de densité positive ; de plus, nous avons :
 $\mu(A \cup \{x\}) = Z^{-1} \exp V(A \cup \{x\})$ et $\mu(A) = Z^{-1} \exp V(A)$, et donc,
 $\mu(A \cup \{x\}) / \mu(A) = \exp(V(A \cup \{x\}) - V(A))$
 $= \exp(V(\partial_X(A) \cup \{x\}) - V(\partial_X(A)))$
 $= \mu(\partial_X(A) \cup \{x\}) / \mu(\partial_X(A))$, pour tout $x \notin A \subset \Lambda$.

Ainsi μ est un ERS, et d'après la proposition 1-1, μ est un CARS.

Proposition 1-4 : μ est un état de renouvellement spatial $\Rightarrow \mu$ est un état de Gibbs associé à un potentiel de renouveau spatial.

démonstration : Le potentiel associé à μ est défini par :
 $V(A) = \log (\mu(A) / \mu(\emptyset))$, pour tout $A \subset \Lambda$. Puisque μ est un ERS, alors :
 $\mu(A \cup \{x\}) / \mu(A) = \mu(\partial_X(A) \cup \{x\}) / \mu(\partial_X(A))$, et donc,
 $\exp(V(A \cup \{x\}) - V(A)) = \exp(V(\partial_X(A) \cup \{x\}) - V(\partial_X(A)))$, pour tout $x \notin A \subset \Lambda$. Ainsi, le potentiel est bien un PRS.

Nous regroupons les propositions 1-1, 1-3 et 1-4 dans le théorème suivant :

Théorème 1-1 : Soit μ un état de $S(\Lambda)$, alors les trois propositions sont équivalentes :

- (i) μ est un champ aléatoire de renouvellement spatial
- (ii) μ est un état de renouvellement spatial
- (iii) μ est un état de Gibbs associé à un potentiel de renouvellement spatial

Nous donnons une caractérisation des PRS qui sera utilisée au chapitre II afin d'établir certaines propriétés concernant l'évolution dynamique des CARS.

Proposition 1-5 : Soit V un potentiel, V est un potentiel de renouvellement spatial si et seulement si pour tout $x \notin A \subset \Lambda$, alors pour tout $y \in \Lambda$ tel que $d(x,y) > d(x,A)$, on a :

$$V(A \cup \{y\} \cup \{x\}) - V(A \cup \{y\}) - V(A \cup \{x\}) + V(A) = 0 \quad (1)$$

démonstration : * Soit y tel que $d(x,A) < d(x,y)$, alors $y \notin \partial_x(A \cup \{y\})$, donc $\partial_x(A \cup \{y\}) = \partial_x(A)$, d'où, puisque V est un potentiel de renouvellement spatial, on a :

$$\begin{aligned} V(A \cup \{y\} \cup \{x\}) - V(A \cup \{y\}) &= V(\partial_x(A \cup \{y\}) \cup \{x\}) - V(\partial_x(A \cup \{y\})) \\ &= V(\partial_x(A) \cup \{x\}) - V(\partial_x(A)). \end{aligned}$$

D'autre part, $V(\partial_x(A) \cup \{x\}) - V(\partial_x(A)) = V(A \cup \{x\}) - V(A)$, et donc :
 $V(A \cup \{y\} \cup \{x\}) - V(A \cup \{y\}) = V(A \cup \{x\}) - V(A)$. Ainsi, (1) est vérifiée.

* Réciproquement, supposons que (1) soit vérifiée ;
posons $A = \partial_x(A) \cup \{y_1, \dots, y_n\}$ et $A_i = \partial_x(A) \cup \{y_1, \dots, y_i\}$;
puisque $d(x, y_{i+1}) > d(x, A_i)$ (car $\partial_x(A_i) = \partial_x(A)$), alors :
 $V(A_{i+1} \cup \{x\}) - V(A_{i+1}) = V(A_i \cup \{x\}) - V(A_i)$, et, par récurrence,
nous pouvons montrer que $V(A_n \cup \{x\}) - V(A_n) = V(\partial_x(A) \cup \{x\}) - V(\partial_x(A))$,
donc V est un potentiel de renouvellement spatial, puisque $A_n = A$.

V Caractérisation des états de renouvellement spatial

Dans la suite, les champs seront supposés spatialement homogènes (i.e. les potentiels invariants par translation).

Définition 1-12 : Ensemble équilibré

A est équilibré si pour tout $x, y \in A$, alors la propriété suivante, (P), est vérifiée : $x \neq y$

(P) $\exists X \subset B = A \setminus \{x, y\}$ telque $d(x, y) \leq d(x, X)$

Remarque : si A est non équilibré, alors $\exists x, y \in A$, ($x \neq y$)

vérifiant la propriété ($\neg P$) : pour tout $X \subset B = A \setminus \{x, y\}$, $d(x, y) > d(x, X)$.

Proposition 1-6 : Soit μ un état de renouvellement spatial associé au potentiel V (au sens du théorème 1-1). Si A est non équilibré, alors $J_V(A) = (-1)^{|A|} J_V(\{x, y\})$ ((x, y) étant un couple vérifiant la propriété ($\neg P$) ci-dessus).

démonstration : * Puisque A est non équilibré, $\exists (x, y) \in A^2$ telque $d(x, y) > d(x, X)$, pour tout $X \subset B = A \setminus \{x, y\}$. Du fait que μ est un ERS on a pour tout $B \supset X \neq \emptyset$:

$\mu(X \cup \{y\} \cup \{x\}) / \mu(X \cup \{y\}) = \mu(X \cup \{x\}) / \mu(X)$, donc

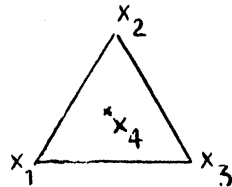
$V(X \cup \{y\} \cup \{x\}) - V(X \cup \{y\}) = V(X \cup \{x\}) - V(X)$; donc nous obtenons :

$$\begin{aligned} J_V(A) &= \sum_{E \subset A} (-1)^{|A \setminus E|} V(E) \\ &= \sum_{\substack{X \subset B \\ X \neq \emptyset}} ((-1)^{|A \setminus X|} V(X) + (-1)^{|A \setminus (X \cup \{y\})|} V(X \cup \{y\}) + (-1)^{|A \setminus (X \cup \{x\})|} V(X \cup \{x\})) \\ &\quad + (-1)^{|A \setminus (X \cup \{x, y\})|} V(X \cup \{y\} \cup \{x\})) \\ &\quad + (-1)^{|A \setminus \{x, y\}|} V(\{x, y\}) + (-1)^{|A \setminus \{x\}|} V(\{x\}) + (-1)^{|A \setminus \{y\}|} V(\{y\}) \\ &= \sum_{\substack{X \subset B \\ X \neq \emptyset}} ((-1)^{|A \setminus X|} (V(X \cup \{y\} \cup \{x\}) - V(X \cup \{x\}) - V(X \cup \{y\}) + V(X))) \\ &\quad + (-1)^{|A|} (V(\{x, y\}) - V(\{x\}) - V(\{y\})) \\ &= (-1)^{|A|} J_V(\{x, y\}), \end{aligned}$$

puisque $J_V(\{x,y\}) = V(\{x,y\}) - V(\{x\}) - V(\{y\})$ et, pour tout $X \subset B$,
 $V(X \cup \{x,y\}) - V(X \cup \{y\}) - V(X \cup \{x\}) + V(X) = 0$.

Avant d'énoncer un théorème sur la caractérisation des ERS notons $\text{diam}(A)$ le diamètre de A , égal à $\max_{(x,y) \in A^2} d(x,y)$, et notons d_0 la distance minimale qui sépare deux points distincts de la "boîte".

Faisons l'hypothèse (H_1) que si $A \subset \Lambda$ est équilibré et de diamètre $> d_0$ alors pour tout $x, y \in A$, $x \neq y$, on a $d(x,y) > d_0$. Cette hypothèse dépend du maillage et de la distance choisis pour Λ . En effet, si Λ est le maillage construit à partir de la maille $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$:



où $\{x_1, x_2, x_3\}$ est l'ensemble des sommets d'un triangle équilatéral de côté d et de centre $\{x_4\}$, on a $d = \sqrt{3}d_0$ et (H_1) n'est pas vérifiée. Soit de plus l'hypothèse (H_2) : pour toutes paires de points p_1, p_n de Λ , (*) il existe un nombre fini de paires p_2, \dots, p_{n-1} telles que p_i et p_{i+1} forment les plus grands côtés d'un triangle non isocèle ((H_2) est vérifiée pour toute boîte rectangulaire de \mathbb{Z}^2 , démonstration ci-après).
 Sous $(H) = (H_1) \cup (H_2)$, nous avons :

Théorème 1-2 : $\mu \in S(\Lambda)$ est un état de renouvellement spatial

(à potentiel V)

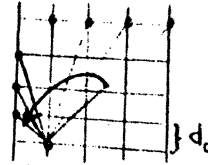
$$\Leftrightarrow (1) \begin{cases} - \text{si } \text{diam}(A) > d_0, \text{ alors } J_V(A) = (-1)^{|A|} |A|, j \in \mathbb{R}. \\ - \text{sinon } J_V \text{ est quelconque} \end{cases}$$

(où J_V est le potentiel d'interaction associé à V).

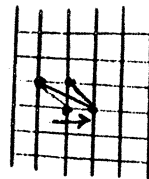
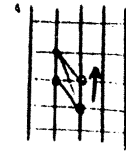
(*) Λ doit être muni d'une distance (cf. p. 9) permettant de définir en tout $x \in \Lambda$ une shère $S_d(x)$ telle que toute partie A à l'intérieur de la shère soit à une distance $> d_0$ d'une partie B à l'extérieur.

Montrons que (H_2) est vérifiée dans toute boîte rectangulaire de \mathbb{Z}^L :

1) Nous pouvons ramener toute paire de longueur $> d_0\sqrt{2}$ à une paire de longueur $\sqrt{2}d_0$:



2) toutes les paires de longueur $d_0\sqrt{2}$ ont des potentiels d'interaction égaux :



Toutes les égalités ci-dessus proviennent du fait que, dans un triangle T possédant deux paires p_i et p_j de longueur supérieure à celle de la 3^{ème} paire de points du triangle, alors :

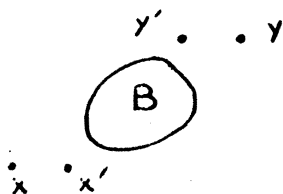
$$J_V(p_i) = -J_V(T) = J_V(p_j),$$

car un triangle de ce type est non équilibré.

Démonstration du théorème 1-2 : * Soit μ un ERS associé au potentiel V .

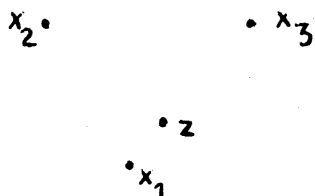
$$- \text{diam}(A) > d_0$$

- Si A est non équilibré, alors, en posant $A = B \cup \{x, y\}$, avec (x, y) vérifiant (1P), en appliquant la proposition 1-6, nous avons $J_V(A) = (-1)^{|A|} J_V(\{x, y\})$. D'autre part, considérons les points x' et y' tels que $d(x, x') < d(x', y), d(x', y') > d_0, d(x, y') > d(y, y')$:



Nous avons, $J_V(\{x, x', y\}) = -J_V(\{x, y\}) = -J_V(\{x', y\})$ et $J_V(\{x', y, y'\}) = -J_V(\{x', y\}) = -J_V(\{x', y'\})$. Ainsi $J_V(\{x, y\}) = J_V(\{x', y'\}) = j$

- Dans le cas où A est équilibré, nous développons le cas où $|A| = 3$ (A doublet se ramène au cas précédent, et si $|A| > 3$ alors le raisonnement développé ci-dessous peut être appliqué). Soit $\{x_1, x_2, x_3\} = A$ et $z \in \Lambda$ tel que $d(x_1, z) = d_0$:



D'après la proposition 1-4, le potentiel V est de nouveau spatial, d'où : $V(A \cup \{x\}) - V(A) = \sum_{B \subset A} J_V(B \cup \{x\}) = V(\partial_x(A) \cup \{x\}) - V(\partial_x(A)) = \sum_{B \subset \partial_x(A)} J_V(B \cup \{x\})$, pour tout $x \notin A \subset \Lambda$.

Donc, si on pose $C = \{x_2, x_3, z\}$, on obtient :

$\sum_{X \subset C} J_V(X \cup \{x_1\}) = J_V(\{x_1, z\})$
 d'où : $J_V(\{x_1, x_2, x_3, z\}) + J_V(\{x_1, x_2, x_3\}) + J_V(\{x_1, x_2, z\}) + J_V(\{x_1, x_3, z\}) + J_V(\{x_1, x_2\}) + J_V(\{x_1, x_3\}) = 0$; comme les ensembles ci-dessus, hormis les doublets et $\{x_1, x_2, x_3\}$, sont non équilibrés, nous avons :

$$J_V(\{x_1, x_2, x_3\}) = -j$$

* Réciproquement, supposons que (1) soit vérifiée, alors, pour tout $x \notin A \subset \Lambda$, on a :

$$\sum_{B \subset A} J_V(B \cup \{x\}) = \sum_{\substack{B \subset A \\ B \cap (A \setminus \partial_x(A)) \neq \emptyset}} (-1)^{|B \cup \{x\}|} J_V(B \cup \{x\}) + \sum_{B \subset \partial_x(A)} J_V(B \cup \{x\})$$

Avant de poursuivre la démonstration, donnons le lemme suivant :

Lemme 3 : Soit $C \subsetneq A$, $x \notin A$ et $|A| < \infty$, on a :

$$\sum_{\substack{B \subset A \\ B \cap (A \setminus C) \neq \emptyset}} (-1)^{|B \cup \{x\}|} J_V(B \cup \{x\}) = 0$$

démonstration: nous avons : $(1-1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k = 0$, donc

$$\sum_{B \subset A} (-1)^{|B \cup \{x\}|} J_V(B \cup \{x\}) = \frac{|A|}{\sum_{k=0}^{|A|} C_{|A|}^k} (-1)^{|A|+1} J_V = 0$$

Posons $C_n = \{x_1, \dots, x_n\}$, et procédons par récurrence sur le cardinal de C :

$$\begin{aligned} * \sum_{\substack{B \subset A \\ B \cap (A \setminus C_1) \neq \emptyset}} (-1)^{|B \cup \{x\}|} J_V(B \cup \{x\}) &= \frac{|A|}{\sum_{k=0}^{|A|} C_{|A|}^k} (-1)^{|A|+1} J_V - (-1)^{|C_1 \cup \{x\}|} J_V(C_1 \cup \{x\}) - (-1)^{|C_1 \cup \{x\}|} J_V(C_1 \cup \{x\}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

* faisons l'hypothèse que $\sum_{\substack{B \subset A \\ B \cap (A \setminus C) \neq \emptyset}} (-1)^{|B \cup \{x\}|} J_V(B \cup \{x\}) = 0$, alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{B \subset A \\ B \cap (A \setminus C_{n+1}) \neq \emptyset}} (-1)^{|B \cup \{x\}|} J_V(B \cup \{x\}) &= \sum_{\substack{B \subset A \\ B \cap (A \setminus C_n) \neq \emptyset}} (-1)^{|B \cup \{x\}|} J_V(B \cup \{x\}) - \sum_{\substack{B \subset A \\ B \cap (A \setminus C_n) = \{x_{n+1}\}}} (-1)^{|B \cup \{x\}|} J_V(B \cup \{x\}) \\ &= - \sum_{B \subset C_n} (-1)^{|B \cup \{x_{n+1}\} \cup \{x\}|} J_V(B \cup \{x_{n+1}\} \cup \{x\}) \\ &= - \frac{|C_n|}{\sum_{k=0}^{|C_n|} C_{|C_n|}^k} (-1)^{|C_n|+2} J_V \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

En appliquant le lemme 3 à (1), on obtient :

$$\sum_{B \subset A} J_V(B \cup \{x\}) = \sum_{B \subset \partial_x(A)} J_V(B \cup \{x\}),$$

donc J_V est le potentiel d'interaction associée à un PRS V ; d'après la proposition 1-4, ce potentiel détermine un ERS.

Définition 1-13 : Potentiel de renouveau spatial neutre (PRSN)

V est un PRSN si V est un PRS et si pour tout $x, y \in A$, avec $d(x, y) > d_0$, alors $J_V(\{x, y\}) = 0$.

Nous terminons ce paragraphe en donnant un exemple

de potentiel de renouveau spatial neutre et un exemple de potentiel de renouveau spatial supermodulaire.

1) Tout potentiel modulaire est un PRSN. En effet, par définition, un potentiel ^(super-modulaire) modulaire vérifie :

$$\text{pour tout } A, B \subset \Lambda, V(A \cup B) \stackrel{(\geq)}{=} V(A) + V(B) - V(A \cap B).$$

Notons qu'un tel potentiel est aussi complètement modulaire, c'est-à-dire qu'il vérifie la relation de Poincaré :

pour tout $A_1, \dots, A_n \subset \Lambda$, on a :

$$V\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n V(A_i) - \sum_{i < j} V(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} V(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots + (-1)^n V\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right).$$

Si nous prenons pour B l'ensemble $\partial_x(A) \cup \{x\}$, la relation de définition d'un potentiel modulaire implique la relation de définition d'un PRS. En effet :

$$V(A \cup \{x\}) = V(A \cup (\partial_x(A) \cup \{x\})) = V(A) + V(\partial_x(A) \cup \{x\}) - V(A \cap (\partial_x(A) \cup \{x\})), \text{ d'où } V(A \cup \{x\}) - V(A) = V(\partial_x(A) \cup \{x\}) - V(\partial_x(A)).$$

L'équivalence entre potentiel complètement supermodulaires et potentiels attractifs (cf J. Demongeot) implique qu'un potentiel modulaire vérifie :

Pour tout $A \subset \Lambda$, $|A| \geq 2$, alors $J_V(A) = 0$, ce qui entraîne que, pour un potentiel modulaire, la quantité j du théorème 1-2 est nulle. La mesure du champ n'est alors autre qu'une mesure produit de lois de Bernoulli.

2) Sous l'hypothèse (H), tout PRS vérifiant :
pour tout $A \subset \Lambda$, si $\text{diam}(A) \leq d_0$, $J_V(A) \leq 0$, est un potentiel supermodulaire.

En effet, nous avons : pour tout $B, C \subset \Lambda$,

$$\begin{aligned} V(B \cup C) + V(B \cap C) &= \sum_{A \subset B \cup C} J_V(A) + \sum_{A \subset B \cap C} J_V(A) \\ &= \sum_{\substack{A \subset B \cup C \\ \text{diam}(A) > d_0}} (-1)^{|A|} j + \sum_{\substack{A \subset B \cup C \\ \text{diam}(A) = d_0}} J_V(A) + \sum_{x \in B \cup C} V(\{x\}) \\ &+ \sum_{\substack{A \subset B \cap C \\ \text{diam}(A) > d_0}} (-1)^{|A|} j + \sum_{\substack{A \subset B \cap C \\ \text{diam}(A) = d_0}} J_V(A) + \sum_{x \in B \cap C} V(\{x\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{\substack{A' \subset B \\ \text{diam}(A) > d_0}} (-1)^{|A|} j + \sum_{\substack{A \subset C \\ \text{diam}(A) > d_0}} (-1)^{|A|} j + \sum_{\substack{A \subset B \\ \text{diam}(A) = d_0}} J_V(A) \\ &+ \sum_{\substack{A \subset C \\ \text{diam}(A) = d_0}} J_V(A) + \sum_{x \in B} V(\{x\}) + \sum_{x \in C} V(\{x\}) = V(B) + V(C) \\ \text{car : } &\sum_{\substack{A \subset B \cup C \\ \text{diam}(A) > d_0}} (-1)^{|A|} j = \sum_{\substack{A \subset B \\ \text{diam}(A) > d_0}} (-1)^{|A|} j + \sum_{\substack{A \subset C \\ \text{diam}(A) > d_0}} (-1)^{|A|} j \\ &- \sum_{\substack{A \subset B \cap C \\ \text{diam}(A) > d_0}} (-1)^{|A|} j + \sum_{\substack{A \subset B \cup C \\ A \cap (B \setminus C) \neq \emptyset \\ A \cap (C \setminus B) \neq \emptyset \\ \text{diam}(A) > d_0}} (-1)^{|A|} j \end{aligned}$$

et $\sum_{\substack{A \cap (B \setminus C) \neq \emptyset \\ A \cap (C \setminus B) \neq \emptyset \\ A \subset B \cup C \\ \text{diam}(A) > d_0}} (-1)^{|A|} j = 0$, car il existe autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Remarques :

1) Sous l'hypothèse (H), un CARS est très "contraint" car le théorème 1-2 implique :

$$\text{pour tout } A \subset \Lambda, d(x, A) > d_0, A \neq \emptyset,$$

$$\mu(\{x\} \mid |A, C_x(A) \cup B_{d(x, A)}(x) \setminus \{x\}|) = (\exp(-J_V(\{x\}) + j)$$

et cette probabilité ne dépend plus de A.

2) Une des conséquences de la remarque précédente est que, sous l'hypothèse (H), la condition (ii) dans la définition d'un CARS peut être remplacée par :

(ii') pour tout A, B $\subset \Lambda$ et $A \cap B = \emptyset$,

$$\mu(A \cup B) / \mu(A) = \mu(\partial_B(A) \cup B) / \mu(\partial_B(A)), \text{ où}$$

$$\partial_B(A) = \{y \in A / d(y, B) = d(A, B)\}$$

VI Relation entre les CARS, CARSI et CARSC

Nous allons montrer, dans ce paragraphe, que, sous l'hypothèse (H), la définition d'un CARS est plus forte que celle d'un CARSI et que celle d'un CARSC.

Théorème 1-3 : Sous l'hypothèse (H), tout CARS est un CARSI.

démonstration : Soit μ un CARS ; μ est un CARSI, si on prouve :

$$(1) \frac{\sum_{B', B''} \mu(B' \cup A \cup B'' \cup \{x\})}{\sum_{B', B''} \mu(B' \cup A \cup B'')} = \frac{\sum_{B', B'', D} \mu(B' \cup D \cup \partial_x(A) \cup B'' \cup \{x\})}{\sum_{B', B'', D} \mu(B' \cup D \cup \partial_x(A) \cup B'')}$$

où B' varie dans $\Lambda \setminus (A \cup \bar{B}_d(x, A)(x))$

B'' varie dans $B_d(x, A)(x) \setminus \{x\}$

D varie dans $A \setminus \partial_x(A)$

Désignons par $x_{B', B''}$ et $y_{B', B'', D}$ respectivement les deux quantités $\mu(B' \cup A \cup B'')$ et $\mu(B' \cup D \cup \partial_x(A) \cup B'')$.

Nous avons alors :

pour tout $B'' \subset B_d(x, A)(x) \setminus \{x\}$, pour tout $B'_1, B'_2 \subset \Lambda \setminus (A \cup \bar{B}_d(x, A)(x))$,

$$x_{B'_1, B''} = k_{B'_1, B'_2} x_{B'_2, B''}$$

Puisque $d(B'_1, B'')$ et $d(B'_2, B'')$ $> d_0$, en appliquant le théorème 1-2, on montre aisément que $k_{B'_1, B'_2}$ est indépendant de B'' .

D'autre part, puisque μ est un CARS, nous avons :

$\mu(B' \cup A \cup B'' \cup \{x\}) = \lambda_{B''} x_{B', B''}$, où $\lambda_{B''}$ est indépendant de B' .

Nous avons donc, pour tout B'_1, B'_2 :

$$\mu(B'_1 \cup A \cup B'' \cup \{x\}) / \mu(B'_1 \cup A \cup B'') = \lambda_{B''} = \mu(B'_2 \cup A \cup B'' \cup \{x\}) / \mu(B'_2 \cup A \cup B'')$$

$$d'où (2) \quad \frac{\sum_{B''} \lambda_{B''} x_{B'_1, B''}}{\sum_{B''} x_{B'_1, B''}} = \frac{\sum_{B''} \lambda_{B''} k_{B'_1, B'_2} x_{B'_1, B''}}{\sum_{B''} k_{B'_1, B'_2} x_{B'_1, B''}} = \frac{\sum_{B''} \lambda_{B''} x_{B'_2, B''}}{\sum_{B''} x_{B'_2, B''}}$$

Remarquons maintenant que : pour tout $D \subset A \setminus \partial_X(A)$,

$$\mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup B'') = \delta_{B',D} \mu(B' \cup A \cup B'')$$

où $\delta_{B',D}$ ne dépend pas de B'' , en vertu du théorème 1-2 (car $d(D, B'') > d_0$ et $d(B', B'') > d_0$).

Nous avons donc :

$$\sum_D \mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup B'') = x_{B', B''} \left(\sum_D \delta_{B', D} \right)$$

Comme, d'autre part, pour tout B' :

$$\mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup B'' \cup \{x\}) / \mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup B'') = \lambda_{B''},$$

on a :

$$\frac{\sum_{B''} \left(\sum_D \mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup B'' \cup \{x\}) \right)}{\sum_{B''} \left(\sum_D \mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup B'') \right)} = \frac{\sum_{B''} \left(\sum_D \delta_{B', D} \right) \lambda_{B''} x_{B', B''}}{\sum_{B''} \left(\sum_D \delta_{B', D} \right) x_{B', B''}}$$

Le membre gauche de (1) s'écrit donc :

$$\frac{\sum_{B', B''} \lambda_{B''} x_{B', B''}}{\sum_{B', B''} x_{B', B''}}$$

Le membre de droite de (1) s'écrit pour sa part :

$$\frac{\sum_{B', B''} \left(\sum_D \delta_{B', D} \right) \lambda_{B''} x_{B', B''}}{\sum_{B', B''} \left(\sum_D \delta_{B', D} \right) x_{B', B''}}$$

Comme, d'après (2), $\sum_{B''} \lambda_{B''} x_{B', B''} / \sum_{B''} x_{B', B''}$ est indépendant de B' , les membres de gauche et de droite de (1) sont égaux. CQFD.

Théorème 1-4 : Sous l'hypothèse (H), tout CARS est un CARSC.

démonstration : Soit μ un CARS ; μ sera un CARSC si on prouve :

$$(3) \quad \frac{\sum_{B', B'', C} \mu(B' \cup A \cup B'' \cup C \cup \{x\})}{\sum_{B', B'', C} \mu(B' \cup A \cup B'' \cup C)} = \frac{\sum_{B', B'', C, D} \mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup C \cup B'' \cup \{x\})}{\sum_{B', B'', C, D} \mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup C \cup B'')}$$

où B', B'', D varient comme dans la démonstration du théorème 1-3 et C varie comme dans $C_X(A)$.

Comme ci-dessus, désignons par $x_{B', B'', C}$ et $y_{B', B'', C, D}$ respectivement les deux quantités $\mu(B' \cup A \cup B'' \cup C)$ et $\mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup C \cup B'')$. Pour donner une cohérence plus grande à la démonstration, nous distinguons les deux cas suivants :

$$* d(x, A) > d_0$$

Nous avons pour tout B'_1, B'_2, B'', C :

$$x_{B'_1, B'', C} = k_{B'_1, B'_2, C} x_{B'_2, B'', C}$$

Puisque $d(B'_1, B'')$ et $d(B'_2, B'')$ $> d_0$, en appliquant le théorème 1-2, on montre aisément que $k_{B'_1, B'_2, C}$ est indépendant de B'' .

D'autre part, puisque μ est un CARS, nous avons :

$\mu(B' \cup A \cup C \cup B'' \cup \{x\}) = \lambda_{B''} x_{B', B'', C}$, où $\lambda_{B''}$ est un coefficient indépendant de C et B' , en vertu du théorème 1-2.

Nous avons donc, pour tout B'_1, B'_2, C_1, C_2 :

$$\frac{\sum_{B''} \lambda_{B''} x_{B'_1, B'', C_1}}{\sum_{B''} x_{B'_1, B'', C_1}} = \frac{\sum_{B''} \lambda_{B''} x_{B'_2, B'', C_2}}{\sum_{B''} x_{B'_2, B'', C_2}} \quad (4)$$

Remarquons maintenant que, pour tout $D \subset A \setminus \partial_X(A)$:

$$\mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup C \cup B'') = \delta_{B', D, C} \mu(B' \cup A \cup C \cup B''),$$

où $\delta_{B', D, C}$ ne dépend pas de B'' , et cela en vertu du théorème 1-2 (car $d(D, B'')$, ainsi que $d(B', B'') > d_0$).

Nous avons donc :

$$\sum_D \mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup C \cup B'') = x_{B', B'', C} \left(\sum_D \delta_{B', D, C} \right)$$

Comme d'autre part pour tout B' :

$$\frac{\mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup B'' \cup \{x\} \cup C)}{\mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup B'' \cup C)} = \lambda_{B''}, \text{ on a :}$$

$$\frac{\sum_{B''} \left(\sum_D \mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup C \cup B'' \cup \{x\}) \right)}{\sum_{B''} \left(\sum_D \mu(B' \cup D \cup \partial_X(A) \cup C \cup B'') \right)} = \frac{\sum_{B''} \left(\sum_D \delta_{B', D, C} \right) \lambda_{B''} x_{B', B'', C}}{\sum_{B''} \left(\sum_D \delta_{B', D, C} \right) x_{B', B'', C}}$$

Le membre gauche de (3) s'écrit donc :

$$\frac{\sum_{B', B'', C} \lambda_{B''} x_{B', B'', C}}{\sum_{B', B'', C} x_{B', B'', C}}$$

Le membre droit de (3) pour sa part s'écrit :

$$\frac{\sum_{B', B'', C} (\sum_D \delta_{B', D, C}) \lambda_{B''} x_{B'', B', C}}{\sum_{B', B'', C} (\sum_D \delta_{B', D, C}) x_{B', B'', C}}$$

Comme, d'après (4), $\sum_{B''} \lambda_{B''} x_{B', B'', C} / \sum_{B''} x_{B', B'', C}$ est indépendant de B' , nous avons :

$$\frac{\sum_{C, B'} (\sum_D \delta_{B', D, C}) \sum_{B''} \lambda_{B''} x_{B', B'', C}}{\sum_{C, B'} (\sum_D \delta_{B', D, C}) \sum_{B''} x_{B', B'', C}} = \frac{\sum_{C, B', B''} \lambda_{B''} x_{B', B'', C}}{\sum_{C, B', B''} x_{B', B'', C}}$$

Ce qui permet d'établir l'égalité (3).

$$* d(x, A) = d_0$$

Dans ce cas, $B'' = \emptyset$; nous avons $\mu(B' \cup A \cup C \cup \{x\}) = \lambda_C x_{B', C}$,

où λ_C est indépendant de B' et $x_{B', C} = \mu(B' \cup A \cup C)$, d'où :

$$\frac{\sum_C \lambda_C x_{B'_1, C}}{\sum_C x_{B'_1, C}} = \frac{\sum_C \lambda_C x_{B'_2, C}}{\sum_C x_{B'_2, C}} \quad (4')$$

D'autre part :

$$\frac{\mu(B' \cup D \cup \partial_x(A) \cup \{x\} \cup C)}{\mu(B' \cup D \cup \partial_x(A) \cup C)} = \lambda_C, \text{ d'où le membre gauche de (3) s'écrit :}$$

$$\frac{\sum_{B', C} \lambda_C x_{B', C}}{\sum_{B', C} x_{B', C}}$$

Le membre droit de (3) s'écrit pour sa part :

$$\frac{\sum_{B',C,D} (\sum_{B',D,C} \delta_{B',D,C})^\lambda C^{x_{B',C}}}{\sum_{B',C,D} (\sum_{B',D,C} \delta_{B',D,C})^{x_{B',C}}}$$

ainsi, il est aisé de vérifier que nous obtenons l'égalité (3).

Nous avons donc montré dans les deux cas que la mesure considérée était bien un CARSC.

Proposition 1-7 :

Pour tout CARS, il existe un potentiel de Markov V' tel que :

$$\forall A \subset \Lambda, \quad V(A) = -j + V'(A),$$

où V désigne le potentiel de renouvellement associé au CARS.

démonstration :

Pour tout A , nous avons, en utilisant le fait que $\sum_{k=0}^{|A|} C_{|A|}^k (-1)^k j=0$:

$$V(A) = -j + \sum_{x,y; d(x,y)=d_0} (J_V(\{x,y\}) - j) + \sum_{x \in A} (J_V(\{x\}) + j)$$

Il suffit donc de définir V' par son potentiel d'interaction $J_{V'}$, égal à :
 $J_{V'}(\{x\}) = J_V(\{x\}) + j$ et $J_{V'}(\{x,y\}) = J_V(\{x,y\}) - j$

Remarquons que cette dernière proposition permet de redémontrer plus simplement le théorème précédent : en effet, dans les fractions intervenant dans les probabilités conditionnelles, la simplification par e^{-j} permet de se ramener aux expressions des mêmes probabilités conditionnelles calculées pour la mesure markovienne de potentiel V' : comme ces probabilités ne dépendent que de l'intersection des ensembles avec G_x^1 , elles sont les mêmes pour A et pour $\partial_x(A)$, en termes cylindriques.

VII Problème du passage à la limite thermodynamique

Ce problème consiste à étudier les mesures obtenues en faisant tendre la boîte Λ_n vers l'infini : nous allons montrer que l'unicité de la mesure limite est liée à celle de la mesure associée au problème markovien correspondant au problème de renouvellement (cf. Proposition 1-7).

Théorème 1-5 :

Si V' désigne le potentiel de Markov associé par la Proposition 1-7 au processus V de renouvellement, alors il y a transition de phase pour V si et seulement si il y a transition de phase pour V' .

Notons, avant de démontrer ce théorème, qu'il permet d'appliquer les résultats classiques obtenus par Spitzer, Preston, Ruelle, Dobrushin, ... sur la convergence des mesures markoviennes définies sur des boîtes finies Λ_n : en particulier, dans le cas supermodulaire, on pourra se contenter d'étudier la convergence des mesures prises en le cylindre $\{x\}$; la condition classique de transition de phase de Ruelle s'écrit alors :

$$\sum_{x; d(0,x)=d_0} J_{V'}(\{0,x\}) + 2 \nu J_{V'}(\{x\}) = 0 \quad ,$$

d'où

$$\sum_{x; d(0,x)=d_0} J_V(\{0,x\}) + 2 \nu J_V(\{x\}) = 0,$$

ce qui n'est autre que la condition de Ruelle exprimée sur le potentiel d'interaction J_V .

démonstration du Théorème 1-5 :

si Y est une partie quelconque de la frontière $\partial\Lambda_n = (U_{x \in \Lambda_n} G_x^1) \setminus \Lambda_n$, et si A est une partie quelconque de Λ_n , pour étudier la convergence de la mesure conditionnée par l'occupation de $\partial\Lambda_n$ en Y , il convient de calculer la probabilité conditionnelle :

$$P(\{x\} | AU, (\Lambda_n \setminus A)U(\partial \Lambda_n \setminus Y) |)$$

Or son calcul est analogue, d'après la proposition 1-7, à celui effectué pour la mesure de Markov de potentiel V' . Les convergences sont donc les mêmes dans le cas renouvellement (avec le potentiel V) et dans le cas markovien (avec le potentiel V').

VIII Champs aléatoires mixtes

Les simulations que nous présentons au chapitre III décrivent une mesure mixte telle que :

Définition E : Champ aléatoire mixte markovien et de renouvellement spatial (CAMMRS)

μ est un CAMMRS si :

(i) $\mu(A) > 0$, pour tout A

(ii) $\mu(A \cup \{x\})/\mu(A) = \mu((G_x^C \cap A) \cup \{x\})/\mu(G_x^C \cap A)$

($\Leftrightarrow \mu(\{x\} \mid |A|) = \mu(\{x\} \mid |G_x^C \cap A|)$), pour tout $x \notin A$

(iii) Pour tout $A \subset \Lambda$, $x \notin A$, nous avons :

$A \cup \{x\}$ est une clique \Rightarrow

$\mu(A \cup \{x\})/\mu(A) = \mu(\partial_x(A) \cup \{x\})/\mu(\partial_x(A))$

($\Leftrightarrow \mu(\{x\} \mid |A, C_x(A) \cup B_{d(x,A)}(x) \setminus \{x\}|) =$

$\mu(\{x\} \mid |\partial_x(A), C_x(A) \cup B_{d(x,A)}(x) \setminus \{x\}|)$)

Remarque : (ii) correspond au caractère markovien du champ et (iii) au caractère renouvelant pour les cliques.

Proposition 1-8 : Sous l'hypothèse (H), μ est un CAMMRS

\Leftrightarrow (i) $J_V(A) = 0$, si A n'est pas une clique

(ii) $J_V(A) = (-1)^{|A|} j$, si A est une clique et $\text{diam}(A) > d_0$.

démonstration : (ii) implique que le champ est markovien,

donc que $J_V(A) = 0$, dès que A n'est pas une clique (cf Spitzer).

Dans le cas où A est une clique, pour tout x de A, (iii) s'applique à $A \setminus \{x\}$ et donc le même raisonnement que celui de la démonstration du théorème 1-2 peut être utilisé.

Pour clore le chapitre 1, nous proposons une généralisation des CARS. qui permet, comme pour les CAMMRS définis ci-dessus, d'augmenter le nombre de degrés de liberté dans la définition du potentiel :

Définition F :

μ est un CARS d'ordre r si l'on a :

(i) pour tout A dans Λ , $\mu(A) > 0$

(ii) pour tout A dans Λ et $x \notin A$,

$$\mu(A \cup \{x\}) / \mu(A) = \mu(\partial_x^r(A) \cup \{x\}) / \mu(\partial_x^r(A)),$$

$$\text{où } \partial_x^r(A) = \{y \in A ; d(x, y) \leq d(x, A) + r - 1\}$$

On peut alors démontrer, sur le même mode que le théorème de caractérisation des CARS :

Théorème 1-6 :

μ est un CARS d'ordre r , si et seulement si :

$$J_V(A) = (-1)^{|A|} j, \text{ si } \text{diam}(A) > rd_0$$

Notons pour terminer qu'en combinant une propriété de Markov d'ordre $r' > r$ et la propriété de renouvellement d'ordre r , nous obtenons des champs mixtes très souples, capables de "fitter" sur un grand nombre de situations, et beaucoup moins contraints que les CARS initiaux.

CHAPITRE II
SEMI-GROUPE
DE NAISSANCE ET DE MORT
SUIVANT UN MODELE DE RENOUVELLEMENT

"La mort est un long processus
mis en route dès la naissance."

Jean ROSTAND

I Semi-groupe $\{P_t\}$; générateur associé

Dans ce chapitre, nous étudierons des modèles dynamiques qui ont les mesures de probabilités définies au chapitre I comme états d'équilibre (dans la suite, on note, $\Gamma = P(\Lambda)$).

Définition 2-1 : Semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$

Pour tout $t \geq 0$, $P_t : \Gamma \times \Gamma \rightarrow [0, 1]$ a les propriétés suivantes :

- (i) $0 \leq P_t(A, B)$ pour tout $A, B \in \Gamma$
- (ii) $\sum_B P_t(A, B) = 1$, pour tout $A \in \Gamma$
- (iii) $\sum_{X \in \Gamma} P_t(A, X) P_s(X, B) = P_{t+s}(A, B)$, pour tout $A, B \in \Gamma$, $s, t \geq 0$
- (iv) $\lim_{t \rightarrow 0^+} P_t(A, B) = I(A, B)$, pour tout $A, B \in \Gamma$, où $I(A, B) = 1$ si $A = B$
 $= 0$ sinon

Le semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$ décrit un modèle qui a la propriété suivante : sachant que la configuration est A à l'instant t , la probabilité pour que la configuration soit B à l'instant $t+s$ est $P_s(A, B)$.

Définition 2-2 : Générateur associé à un semi-groupe $\{P_t\}$

Un générateur, G , satisfait à :

- (i) $G(A,B) \geq 0$, si $A \neq B$
- (ii) $\sum_{B \in \Gamma} G(A,B) = 0$, pour tout $A \in \Gamma$
- (iii) $\exp(tG)(A,B) = P_t(A,B)$, pour tout $A,B \in \Gamma$ et pour tout $t \geq 0$

Si on considère G comme une matrice de dimension $(|\Gamma|, |\Gamma|)$, on définit G par : $\exp(tG)(A,B) = \sum_{n=0}^{\infty} (t^n/n!) G^n(A,B)$
Réciproquement, on définit le semi-groupe $\{P_t\}$

à partir du générateur G par : $P_t = \exp(tG)$

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} (P_t(A,B)/t) = G(A,B)$, le générateur G a pour propriété que, si $A \neq B$ et si le modèle a pour configuration A à l'instant t , alors la probabilité conditionnelle pour que le modèle passe de la configuration A à B entre t et $t+dt$ est égale à $G(A,B)dt + O(dt^2)$. Nous allons construire divers modèles de générateurs que nous interpréterons à l'aide de cette propriété.

Définition 2-3 : Etat d'équilibre pour le semi-groupe $\{P_t\}$

$\pi \in S(\Lambda)$ est un état d'équilibre pour $\{P_t\}$, si on a :

$$\sum_{A \in \Gamma} \pi(A) P_t(A,B) = \pi(B), \text{ pour tout } A,B \in \Gamma \text{ et pour tout } t \geq 0$$

Proposition 2-1 : π est un état d'équilibre, si et seulement si :

$$\sum_{A \in \Gamma} \pi(A) G(A,B) = 0, \text{ pour tout } B \in \Gamma$$

démonstration : cf. Spitzer.

Définition 2-4 : Générateur irréductible

G est un générateur irréductible, si, pour tout $A \neq B \in \Gamma$, alors il existe un ensemble de configurations $\{X_1, \dots, X_n\}$ tel que $G(A, X_1)G(X_1, X_2) \dots G(X_n, B) > 0$

D'après le théorème des chaînes finies de Markov, si

G est irréductible, il existe un unique état d'équilibre π qui, pour tout $\mu \in S(\Lambda)$ vérifie : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{A \in \Gamma} \mu(A) P_t(A, B) = \pi(B)$, pour tout $B \in \Gamma$.

Définition 2-5 : Réversibilité dans le temps

Le semi-groupe $\{P_t\}$ de générateur G est réversible dans le temps, G étant irréductible, si pour tout $A, B \in \Gamma$:

$$\pi(A)G(A, B) = \pi(B)G(B, A)$$

Remarque : La condition exprime le fait que si un film était réalisé sur l'évolution du processus à l'état d'équilibre, il serait impossible de distinguer la version du film projeté dans l'ordre chronologique d'avec celle où les bobines seraient inversées !

II Processus renouvelant de Naissance et de Mort

Le modèle que nous décrivons dans ce paragraphe peut être appelé processus renouvelant de Naissance et de Mort. En effet, soit $A \in \Gamma$ la configuration des sites "malades" et $\Lambda \setminus A$ celle des sites dans l'état "sain" ; passer de l'état "sain" à l'état "malade" sera considéré comme étant une "mort" et le processus inverse "naissance". Pour être plus proche de cette terminologie, nous considérerons qu'un site dans l'état "sain" est occupé, sinon il est vide.

Nous donnons deux fonctions, $\beta : \Lambda \times (\Gamma \setminus \Lambda) \rightarrow]0, 1[$, $\delta : \Lambda \times (\Gamma \setminus \emptyset) \rightarrow]0, 1[$ la probabilité que, en x, naisse une particule entre l'instant t et t+dt sachant qu'au temps t la configuration est A est, si $x \notin A$, $\beta(x, A)dt + O(dt^2)$; de manière similaire, le taux de mort, δ , est défini par : à l'instant t la configuration étant $A \cup \{x\}$, la probabilité conditionnelle pour qu'elle devienne A à l'instant t+dt est $\delta(x, A)dt + O(dt^2)$. Enfin, nous imposons que la probabilité pour qu'il y ait plus d'une naissance ou

mort entre l'instant t et $t+dt$ est $O(dt^2)$. Nous appellerons β le taux de naissance et δ le taux de mort.

Définition 2-6 : Processus de contact de Harris

Il est défini par son générateur qui doit vérifier :

- * $G(A,B) = 0$, si $|A \Delta B| > 1$
- * $G(A, A \cup \{x\}) = \beta(x,A)$, pour tout $x \notin A$
- * $G(A \cup \{x\}, A) = \delta(x,A)$, pour tout $x \notin A$

Remarque : $G(A,A)$ est déterminé car, puisque G est un générateur, nous devons avoir $\sum_{B \in \Gamma} G(A,B) = 0$. Comme dans ce cas G est irréductible, le semigr^Boupe $\{P_+\}$ de Naissance et de Mort (i.e. associé au générateur donné ci-dessus) a un unique état d'équilibre π .

Définition 2-7 : Semi- groupe renouvelant de Naissance et de Mort

Le semi-groupe $\{P_+\}$, de générateur G , sera renouvelant de Naissance et de Mort, si G vérifie :

- * $G(A, A \cup \{x\}) = \beta(x,A) = \beta(x, \partial_x(A))$
- * $G(A \cup \{x\}, A) = \delta(x,A) = \delta(x, \partial_x(A))$

Proposition 2-2 : Soit $\{P_+\}$ un processus, réversible dans le temps, renouvelant de Naissance et de Mort ; soit π son état d'équilibre. Alors π est un état de renouvellement spatial.

démonstration :

* Puisque G est irréductible, nous avons : $\pi(A) > 0$, pour tout $A \in \Gamma$. La condition de réversibilité impose :

$$\pi(A)G(A, A \cup \{x\}) = \pi(A \cup \{x\})G(A \cup \{x\}, A),$$

donc $\pi(A \cup \{x\})/\pi(A) = G(A \cup \{x\}, A)/G(A, A \cup \{x\}) = \beta(x,A)/\delta(x,A)$.

Puisque G est un générateur renouvelant, $\beta(x,A)/\delta(x,A) =$

$\beta(x, \partial_x(A))/\delta(x, \partial_x(A))$; d'où $\pi(A \cup \{x\})/\pi(A) = \pi(\partial_x(A) \cup \{x\})/\pi(\partial_x(A))$,

et donc π est un ERS et, de part le théorème 1, un CARS.

* Réciproquement, soit π un ERS ; alors, définissons le semi-groupe $\{P_+\}$ associé au générateur G de naissance et de Mort de taux β et δ par : $\beta(x,A) = \pi(A \cup \{x\})/\pi(A)$ et $\delta(x,A) = 1$.

Alors $\{P_t\}$ est un processus renouvelant de Naissance et de Mort et π est son unique état d'équilibre.

Ce résultat dépend trop du fait que le semi-groupe $\{P_t\}$ est réversible, ce qui impose de trop fortes contraintes sur les taux de naissance et de mort ; ceci nous amène à proposer un autre modèle.

III Semi-groupe de m-particules

Nous considérons un modèle où m particules (avec $m < |\Lambda|$), identiques, se déplacent sur Λ (un site ne peut être occupé par plusieurs particules et donc nous interdisons toute "occupation multiple"). Posons $\Gamma_m = \{A \in \Gamma / |A| = m\}$; le semi-groupe $\{P_t\}$ est défini de $\Gamma_m \times \Gamma_m \rightarrow \mathbb{R}$ par la connaissance de G , son générateur. Nous nous donnons une fonction v de $\Lambda \times \Gamma_{m,1} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $v(x,A) > 0$; la probabilité conditionnelle pour qu'une particule quitte le point x entre t et $t+dt$ sachant qu'à l'instant t la configuration est $A \cup \{x\}$, est donnée par : $v(x,A)dt + O(dt^2)$. La fonction ainsi définie est appelée fonction vitesse.

De même, nous définissons une fonction de transition symétrique et irréductible Π de $\Lambda \times \Lambda \rightarrow [0,1]$, avec $\Pi(x,x) = 0$. La probabilité que la particule saute en y sachant qu'elle vient de quitter le site x est $\Pi(x,y)$: Π sera appelée la matrice de saut. Nous faisons l'hypothèse que la probabilité pour qu'il y ait plus d'un saut entre t et $t+dt$ est $O(dt^2)$.

Nous définissons le générateur G de $\Gamma_m \times \Gamma_m \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

- * $G(A \cup \{x\}, A \cup \{y\}) = v(x,A)\Pi(x,y)$; pour tout $x \neq y \notin A \in \Gamma_{m-1}$
- * $G(A,B) = 0$, pour tout $A, B \in \Gamma_m$ ou $|A \Delta B| > 2$
- * $G(A,A)$ est défini par le fait que $\sum_{A \in \Gamma_m} G(A,B) = 0$

Définition 2-8 : Semi-groupe de m-particules

Le semi-groupe $\{P_t\}$ associé au générateur défini ci-dessus est dit de m-particules. De plus, si d la fonction vitesse vérifie : $v(x,A) = v(x, \partial_x(A))$, alors $\{P_t\}$ sera un semi-groupe renouvelant de m-particules.

Proposition 2-3 : Soit $\{P_t\}$ un semi-groupe de m-particules avec

d sa fonction vitesse. Supposons que, pour tout $x \neq y \notin A$, on ait : $v(x, A \cup \{y\})v(y, A) = v(y, A \cup \{x\})v(x, A)$; alors :

- (i) il existe un unique potentiel $V : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $v(x, A) = \exp(V(A \cup \{x\}) - V(A))$, pour tout $x \notin A \in \Gamma$.
- (ii) Si π est l'état d'équilibre de $\{P_t\}$, alors $\pi(A) = Z^{-1} \exp V(A)$, pour tout $A \in \Gamma_m$, où $Z = \sum_{B \in \Gamma_m} \exp V(B)$
- (iii) $\{P_t\}$ est réversible dans le temps
- (iv) Si $\{P_t\}$ est un semi-groupe renouvelant de m-particules, alors V est un potentiel de renouveau spatial

Pour démontrer cette propriété nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 4 : Soit $\{P_t\}$ un semi-groupe de Naissance et de Mort

sur Λ , ayant β et δ comme taux de naissance et de mort. Les trois propositions sont équivalentes :

- (i) $\{P_t\}$ est réversible dans le temps
- (ii) Si $\gamma : \Lambda \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par : $\gamma(x, A) = \beta(x, A) / \delta(x, A)$, alors, si $x \neq y \notin A$, nous avons : $\gamma(x, A \cup \{y\})\gamma(y, A) = \gamma(y, A \cup \{x\})\gamma(x, A)$
- (iii) Il existe un unique potentiel $V : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tel que : $\gamma(x, A) = \exp(V(A \cup \{x\}) - V(A))$, pour tout $x \notin A \in \Gamma$

démonstration :

* montrons que (i) \Rightarrow (ii)

Soit G , le générateur du semi-groupe $\{P_t\}$, et π sa mesure d'équilibre.

Puisque le semi-groupe est réversible, on a :

$$\pi(A \cup \{y\})G(A \cup \{y\}, A \cup \{x\} \cup \{y\}) = \pi(A \cup \{x\} \cup \{y\})G(A \cup \{x\} \cup \{y\}, A \cup \{y\})$$

Il s'ensuit :

$$\gamma(x, A \cup \{y\}) = \beta(x, A \cup \{y\}) / \delta(x, A \cup \{y\}) = \pi(A \cup \{x\} \cup \{y\}) / \pi(A \cup \{y\})$$

de même : $\gamma(y, A \cup \{x\}) = \pi(A \cup \{x\} \cup \{y\}) / \pi(A \cup \{x\})$

$$\gamma(x, A) = \pi(A \cup \{x\}) / \pi(A)$$

$$\gamma(y, A) = \pi(A \cup \{y\}) / \pi(A), \text{ et donc :}$$

$$\gamma(x, A \cup \{y\}) \gamma(y, A) = \gamma(y, A \cup \{x\}) \gamma(x, A)$$

* montrons que (ii) \Rightarrow (iii)

Nous construisons le potentiel par récurrence sur $|A|$; puisque V est un potentiel, $V(\emptyset) = 0$ et pour tout $A \in \Gamma$, avec $|A| > 0$, nous choisissons $x \in A$ et posons : $V(A) = V(A \setminus \{x\}) + \log \gamma(x, A \setminus \{x\})$; la condition (ii) assure que le potentiel est déterminé de manière unique, et indépendante du choix de x . Et nous avons bien :

$$\gamma(x, A) = \exp(V(A \cup \{x\}) - V(A)), \text{ pour tout } x \notin A \in \Gamma.$$

* montrons que (iii) \Rightarrow (i)

Soit π l'état de Gibbs de potentiel V , alors on a :

* si $A \not\vdash B$ et qu'il n'existe pas $x \in \Lambda$ tel que $A \cup \{x\} = B$ alors,

$$G(A, B) = 0 \text{ et évidemment } \pi(A)G(A, B) = \pi(B)G(B, A)$$

* si $A = B$, alors bien sûr " = "

* si il existe $x \in \Lambda$ tel que $A \cup \{x\} = B$, $\pi(B) / \pi(A) = \exp(V(B) - V(A)) =$

$$\gamma(x, A) = G(A, \{x\} \cup A) / G(A \cup \{x\}, A) \text{ et donc :}$$

$$\pi(A)G(A, B) = \pi(B)G(B, A)$$

Ainsi $\{P_t\}$ est réversible dans le temps et son état d'équilibre est π .

démonstration de la proposition 2-3 :

* (i) : même construction que dans le lemme 4 pour démontrer (ii) \Rightarrow (iii).

* (ii) : l'état de Gibbs de potentiel V , déterminé au (i), vérifie : $\pi(A)G(A, B) = \pi(B)G(B, A)$, et donc π est l'unique

état d'équilibre de $\{P_+\}$.

* (iii) : application directe du lemme 4.

* (iv) : Il suffit d'appliquer la proposition 1-5.

en effet, si y vérifie : $d(x,y) > d(x,A)$, alors, $v(x, A \cup \{y\}) = v(x,A)$; donc, $V(A \cup \{x\} \cup \{y\}) - V(A \cup \{x\}) - V(A \cup \{y\}) + V(A) = 0$
Ainsi V est un potentiel de renouveau spatial.

IV Processus mixte markovien et renouvelant de Naissance et de Mort

Sous l'hypothèse (H), les états de renouvellement spatial sont trop contraints; aussi nous préférons simuler à l'aide des automates aléatoires des champs aléatoires mixtes (cf chapitre I, paragraphe VII).

C'est pourquoi dans ce paragraphe nous proposons des processus de Naissance et de Mort qui aient pour mesure invariante un champ aléatoire mixte. Puisque l'aspect du renouvellement vient d'être traité et que celui du cas markovien est étudié par Preston, nous nous contentons d'énoncer une suite de propositions et de définitions.

Définition 2-7' : Semi-groupe mixte markovien renouvelant de Naissance et de mort

Le semi-groupe $\{P_+\}$, de générateur G , sera mixte de Naissance et de Mort, si G vérifie, pour tout $x \notin A$, tel que $A \cup \{x\}$ soit une clique :

$$G(A, A \cup \{x\}) = \beta(x, A) = \beta(x, \partial_x(A))$$

$$G(A \cup \{x\}, A) = \delta(x, A) = \delta(x, \partial_x(A))$$

et pour tout $x \notin A \subset \Lambda$:

$$G(A \cup \{x\}) = \beta(x, A) = \beta(x, \partial_x \cap A)$$

$$G(A \cup \{x\}) = \delta(x, A) = \delta(x, \partial_x \cap A)$$

Proposition 2-2' : Soit $\{P_+\}$ un processus mixte markovien et renouvelant réversible dans le temps ; Π , son état d'équilibre, est un CAMMRS. Réciproquement un CAMMRS est l'état d'équilibre d'un tel processus.

Définition 2-8' : Semi-groupe mixte de m-particules

C'est un semi-groupe de m-particules, pour lequel la fonction vitesse, v , vérifie : $v(x, A) = v(x, \partial_x(A))$, pour tout $x \notin A$, tel que $A \cup \{x\}$ soit une clique.

Proposition 2-3' : Soit $\{P_+\}$ un semi-groupe de m-particules avec

v sa fonction vitesse. Supposons que pour tout $x, y \notin A$ on ait :

$v(x, A \cup \{y\})v(y, A) = v(y, A \cup \{x\})v(x, A)$; alors :

(i), (ii) et (iii) sont les mêmes que pour la proposition 2-3.

(iv) Si $\{P_+\}$ est un semi-groupe mixte de m-particules, alors

V est un potentiel mixte de renouveau spatial.

CHAPITRE III
SIMULATIONS DE CAMMRS
A L'AIDE D'UN AUTOMATE ALEATOIRE

"Il m'est plus facile de croire
à l'impossible qu'à l'improbable."

Oscar WILDE

Au premier paragraphe de ce chapitre, nous présentons les automates aléatoires utilisés pour la simulation des CAMMRS ; nous reprenons la présentation de J. Demongeot in Random automata and random fields, celle-ci ayant été faite dans un cadre plus général. Dans cet article, sont étudiés les liens entre les processus de contact de Harris et les automates aléatoires ; au deuxième paragraphe, nous calquons ces résultats pour le cas des processus spatiaux mixtes (définis au chapitre II, paragraphe IV). Ensuite, nous décrivons l'agencement des programmes que nous avons écrit afin de construire des automates aléatoires générant asymptotiquement des mesures de champs aléatoires mixtes.

Pour terminer ce chapitre, au dernier paragraphe, nous illustrons ces automates aléatoires en listant les étapes successives de quelques uns des processus de contagion que nous avons simulés.

I Automates aléatoires booléens

Définition 3-1 : Automate aléatoire booléen

A, un automate aléatoire booléen, est un triplet d'ensembles (Q, Y, Z) associé à une paire de fonctions (F, G) :

$$A = ((Q, Y, Z), (F, G)), \text{ où}$$

* $Q = Z = \{0, 1\}$, où Q est l'ensemble des états et Z celui des sorties

* Y est un ensemble fini d'entrées

* $F : Y \times Q^2 \rightarrow [0, 1]$, vérifie : pour tout $y \in Y$, et tout $q \in Q$,

$$\text{alors : } \sum_{q' \in Q} F(y, q, q') = 1$$

* $G : Q \times Z \rightarrow [0, 1]$, vérifie : pour tout $q \in Q$, alors $\sum_{z \in Z} G(q, z) = 1$

Définition 3-2 : Réseau d'automates aléatoires booléens

S, un réseau d'automates aléatoires, est un ensemble fini de sites Λ associé à une paire de fonctions (R, C) :

$$S = (\Lambda, (R, C)), \text{ où}$$

* $R : \Lambda \rightarrow \mathcal{V}$, \mathcal{V} est l'ensemble des automates aléatoires booléens

$$A = ((Q, Y, Z), (F, G)).$$

* $C : \Lambda \times Z^{\Lambda} \rightarrow Y$.

Remarque : $R(x)$ est l'automate associé au site x , $R(x) = ((Q, Y(x), Z), (F_x, G_x))$,

C est la fonction de cohérence du réseau S : pour tout $f \in Z^{\Lambda}$ et tout $x \in \Lambda$, alors, si y est l'entrée enregistrée en x , on a : $C(x, f) = y$.

Dans le cadre des simulations que nous présentons, nous prenons : Λ la boîte finie de \mathbb{Z}^2 , définie au chapitre I, et $Y(x) = \{0, 1\}^{\partial x}$, où $\partial x = \mathbb{G}_x^1$.

Puisque nous identifions l'ensemble des sorties, Z , et l'ensemble des états, Q , nous avons :

$$R(x) = ((Q, Y(x), Z), (F_x, G)), \text{ où pour tout } q, z \in \{0, 1\},$$

$$G(q, z) = 1, \text{ si } q = z$$

$$= 0, \text{ sinon}$$

La fonction C est définie par : pour tout $x \in \Lambda$, tout $f \in Z^\Lambda$, $C(x, f) = (f(x_{i_1}), \dots, f(x_{i_k}))$, où les x_{i_j} vérifient : $\{x_{i_j}\}_{j=1}^k = \partial x$, l'indice i_j correspondant à l'ordre qui a été choisi sur la boîte Λ .

L'ordre sur Λ permet une mise à jour séquentielle du réseau S :

* si, à l'étape i , l'état du réseau S est donné par $f_i \in Z^\Lambda$,

* alors, à l'étape $i+1$, l'état f_{i+1} est :

$$f_{i+1}(x_j) = f_i(x_j), \text{ si } j \not\equiv i+1 \pmod{|\Lambda|}$$

$f_{i+1}(x_j)$ est obtenu en appliquant la probabilité de transition $F_{x_j}(C(x_j, f_i), f_i(x_j), \dots)$, si $j \equiv i \pmod{|\Lambda|}$.

Ainsi, l'ordre choisi sur la boîte Λ détermine un parcours de x_1 à $x_{|\Lambda|}$, chaque étape de ce parcours correspondant au changement ou non de l'état du point x de Λ visité à cette étape.

II Processus de Harris et automates aléatoires

Le lien entre les processus de contact de Harris et les réseaux d'automates aléatoires est le suivant :

- en général, le processus de Harris admet une unique mesure invariante μ ; celle-ci correspond au comportement asymptotique du processus.

- le processus correspondant aux étapes successives du réseau S est un processus de Markov sur $P(\Lambda)$. Le sous-processus pris aux temps $0, |\Lambda|, \dots, k|\Lambda|, \dots$ est une chaîne homogène de Markov et a une unique mesure invariante ν ; celle-ci correspond au comportement asymptotique de S .

Nous dirons que S réalise le processus de contact de Harris si $\nu = \mu$. Dans ce cas, nous décrivons un processus continu de contagion à l'aide d'un réseau d'automates aléatoires.

Pour le réseau que nous simulons, soit F_x la fonction de transition associée au site $x \in \Lambda$; comme au chapitre I, si nous identifions l'espace des entrées $Y = \{0,1\}^{\partial x}$ à $P(\partial x)$, alors, à l'entrée $D \subset \partial x$, est associée la probabilité de passer de l'état q à l'état q' pour tout $x \in \Lambda$; cette probabilité est définie à partir du potentiel U sur $P(\Lambda)$ comme suit :

$$\text{pour tout } q \in \{0,1\}, F_x(D, q, q') = \frac{\exp U(\uparrow(D, x, q'))}{\exp U(\uparrow(D, x, q')) + \exp U(\uparrow(D, x, 1-q'))}$$

où $\uparrow(D, x, q') = D \cup \{x\}$, si $q' = 1$

$\uparrow(D, x, q') = D$, si $q' = 0$

Proposition 3-1 : L'unique mesure invariante ν de S est la mesure de Gibbs associé au potentiel U .

démonstration : La matrice de transition M de la chaîne de Markov sur $P(\Lambda)$ associée à S , pris aux temps $0, |\Lambda|, \dots, k|\Lambda|, \dots$

est telle que : $M = \prod_{i=1}^{|\Lambda|} M_{x_i}$,

où M_{x_i} est la matrice de transition de l'étape i à l'étape $i+1$.
 Les éléments de $P(\Lambda)$ sont rangés suivant l'ordre lexicographique obtenu à partir de l'arrangement $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_{|\Lambda|}\}$ choisi pour la boîte Λ .

$(M_{x_i})_{D,E}$ est le terme général de la matrice de transition M_{x_i} ; il correspond à la probabilité de passer de l'état D , à l'étape i , à l'état E , à l'étape $i+1$:

$$(M_{x_i})_{D,E} = 0, \text{ si } |D\Delta E| > 1 \text{ ou } x_i \notin D \cup E \\ = F_{x_i}(D \cap \partial x_i, l_D(x_i), l_E(x_i)), \text{ sinon.}$$

Par définition de la probabilité de transition F_x , nous avons :

$$(M_{x_i})_{D, D \cup \{x_i\}} = \mu(\{x_i\}) / |D \cap \partial x_i|$$

$$(M_{x_i})_{D, D \setminus \{x_i\}} = 1 - (M_{x_i})_{D, D \cup \{x_i\}}$$

μ est une mesure invariante pour M_{x_i} , et donc pour M . Puisque M est irréductible et primitive (ses coefficients étant strictement positifs (cf Gantmacher)), μ est unique ; cette mesure est la seule correspondant au comportement asymptotique de la chaîne de Markov considérée.

Le coefficient de $(M)_{D,E}$ est donné par :

$$(M)_{D,E} = \prod_{i=1}^{|\Lambda|} (M_{x_i})_{D_i, D_{i+1}}, \text{ où, si on note } A_i = \{x_1, \dots, x_i\}, \text{ alors}$$

$$* D_i = D \setminus ((D \setminus E) \cap A_{i-1}) \cup ((E \setminus D) \cap A_{i-1})$$

$$* D_{i+1} = D \text{ si } x_i \in D \cap E \text{ ou si } x_i \notin D \cup E$$

$$* D_{i+1} = D_i \setminus \{x_i\}, \text{ si } x_i \in D \setminus E$$

$$* D_{i+1} = D_i \cup \{x_i\}, \text{ si } x_i \in E \setminus D$$

III Convergence du réseau d'automates aléatoires

L'entropie H de Kolmogorov-Sinai de la chaîne de Markov de matrice de transition M est donnée par :

$$H = - \sum_{D \in \Lambda} \mu(D) \sum_{E \in \Lambda} (M)_{D,E} \log((M)_{D,E})$$

Elle peut être utilisée pour mesurer la qualité de la convergence des mesures marginales ν^k associées à une mesure initiale ν^0 après k itérations de la chaîne de Markov de matrice de transition M ; toutefois la difficulté rencontrée pour estimer cette entropie ne nous permet pas d'exploiter le résultat de la proposition 3-2 (énoncée ci-dessous) en vue d'élaborer un critère d'arrêt pour nos simulations.

Soit ν^0 une mesure de probabilité initiale sur $P(\Lambda)$ et ν^k la mesure sur $P(\Lambda)$ à l'étape $k|\Lambda|$: $\nu^k = \nu^0 M^k$, où ν^0 est un vecteur transposé $2^{|\Lambda|}$ -dimensionnel.

Proposition 3-2 : Si δ désigne la distance de Kullback sur $S(\Lambda)$, il existe $\lambda > 0$ et $K \in \mathbb{N}$, tels que :

$$\delta(\nu^k, \mu) < \exp(-kH), \text{ pour tout } k > K$$

démonstration : application directe des résultats de Goldstein et Tuljapurkar.

Les difficultés rencontrées dans le calcul de H , dont on connaît la formule explicite, mais qui exige la sommation de $2^{|\Lambda|}$ termes, peut être palliée de deux façons :

- 1) en estimant H par la méthode de Monte-Carlo, c'est-à-dire en affectant chaque configuration, observée sous la mesure asymptotique du processus, de sa probabilité d'apparition empirique et en faisant la sommation sur les configurations observées ; malheureusement cette méthode exige la connaissance du fait que le transitoire est achevé, or nous voudrions précisément estimer H pour déterminer la fin de ce transitoire.
- 2) comme il existe une unique mesure invariante μ pour la chaîne

de Markov de matrice de transition M , on peut appliquer le théorème ergodique et, pour obtenir l'espérance d'une variable aléatoire sous la loi μ , calculer la moyenne temporelle correspondante (cf Loève) ; plus précisément, on a, quelque soit la variable X définie sur $(P(\Lambda), \mathcal{G}_{P(\Lambda)}, \mu)$:

$$\mu(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X(\xi_i(\omega)), \text{ où } \xi_i(\omega) \text{ est la configuration}$$

obtenue à l'itération i de la chaîne de matrice M .

Nous proposons donc de décider de l'arrêt du transitoire, lorsque les moyennes temporelles de plusieurs variables aléatoires ne varient plus avec k : ce critère correspond à une condition nécessaire de convergence de la mesure marginale μ^k .

Nous choisissons pour variables X_j les nombres de 1 de la configuration situés dans certaines parties de Λ :

$$\begin{aligned} X_1(\xi_i) &= \sum_{t \in \Lambda} \Pi_t(\xi_i) \\ X_2(\xi_i) &= \sum_{t \in \Lambda_g} \Pi_t(\xi_i), \text{ où } \Lambda_g \text{ est la moitié gauche de } \Lambda \\ X_3(\xi_i) &= \sum_{t \in \Lambda_h} \Pi_t(\xi_i), \text{ où } \Lambda_h \text{ est la moitié haute de } \Lambda \\ (X_{4+i}(\omega) &= \sum_{t \in \Lambda_i(k-1)(\xi_{k-1}^{\omega})} (1-i+(-1)^{i+1} \Pi_t(\xi_k^{\omega})), \text{ où } \Lambda_i(k-1)(\xi_{k-1}^{\omega}) \text{ désigne l'ensemble des} \\ &\text{individus dans l'état } i \text{ à} \end{aligned}$$

l'étape $k-1$ ($i=0,1$), ces variables étant définies sur $(P(\Lambda))^{\mathbb{N}}$.

On suivra des moyennes du type :

$$m_{\lambda k} = \frac{1}{k} \sum_{i=\lambda k+1}^{(\lambda+1)k} X(\omega_i), \text{ en regardant si l'écart relatif}$$

entre $m_{\lambda k}$ et $m_{(\lambda+1)k}$ converge vers 0.

Si la suite $m_k, m_{2k}, \dots, m_{\lambda k}, \dots$ converge, alors la suite $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X(\omega_i))$ converge vers la même limite.

La longueur k donne une indication intéressante sur le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir, après le transitoire, des moyennes temporelles des X_j approchant leurs moyennes sous la loi μ : elle est égale à 7 dans les simulations qui suivent, donc correspond à $7 \times |\Lambda| = 7 \times 30 \times 30 = 6300$ mises à jour en les différents sites de Λ . On peut considérer que, vis-à-vis des

variables X_j définies ci-dessus, ce nombre de mises à jour fournit, après le transitoire, suffisamment de configurations chargées par μ , pour que l'on approche, par moyennisation temporelle, la moyennisation spatiale.

IV Présentation des simulations de CAMMRS

Nous avons choisi de présenter deux simulations de champs de renouvellement sur un boîte finie de Z^2 ; cette boîte est un pavé rectangulaire de dimension 30×30 (Pour des raisons d'impression de fichier multics, nous sommes contraints de présenter des boîtes relativement réduites).

les champs sont caractérisés par leurs potentiels d'interaction :

1) $J_V(\{x\}) = \log 0.01$

$$J_V(\{x,y\}) = \log 0.1 \text{ si } d(x,y) \geq 2d_0$$

$$J_V(\{x,y\}) = \log 0.23 \text{ si } d(x,y) = d_0$$

2) $J_V(\{x\}) = \log 0.01$

$$J_V(\{x,y\}) = \log 0.1 \text{ si } d_0 \leq d(x,y) \leq 4d_0$$

$$J_V(\{x,y\}) = \log 0.23 \text{ si } d(x,y) = d_0$$

(où d est la distance de Manhattan)

Afin de simuler ces processus, nous procédons comme suit :

1ère étape : choix d'une configuration initiale (configuration déterministe ou aléatoire ou bien données réelles).

2ème étape : itération pour les mises à jour de la boîte ; à la fin de chaque itération, visualisation de la boîte, et donnée de plusieurs statistiques, cela pour décider ou non de la poursuite des itérations.

mise à jour de la boîte : en premier lieu, sélection du mode de parcours des éléments de la boîte (un élément doit être visité une et une seule fois : parcours en lignes successives, ou en colonnes successives, ou en "escargot" (spirale droite s'enroulant autour du centre de la boîte), ou tirage aléatoire) ; une fois le mode de parcours choisi, tout point visité voit, au cours de l'itération, son état défini par tirage d'une loi binômiale $\mathcal{B}(p; 1-p)$, où $p = \mu(\{x\} / \xi_i^\omega)$; après chaque visite, on réactualise la configuration ξ_i^ω en ξ_{i+1}^ω .

Les statistiques suivantes sont calculées la fin de chaque itération : $N_{00}^k, N_{01}^k, N_{10}^k, N_{11}^k$, où N_{ij}^k est égal au nombre d'éléments

de la boîte qui étaient dans l'état i à l'itération $k-1$ et sont dans l'état j à l'itération k .

De plus, à partir de la 14ème itération, on donne les statistiques définies au paragraphe III.

On constate, que dans la simulation (1), on percole à seuil $\sqrt{2}d_0^*$ et à seuil $2d_0^*$ dans la simulation (2), entre le haut et le bas de la boîte.

* euclidien

tapez deux entiers : dimension de la boîte (ligne colonne)

30 30

tapez un entier : initialisation de nag

22

tapez un entier : rayon de la boule de voisinage

2

tapez un entier : n = nombre de mises à jour

63

tapez un entier : choix de l'initialisation

1 et 2, 3 déterministe

4 bruit blanc binaire mélangé

1

tapez un entier : choix du mode de parcours

1 colonne puis ligne

2 ligne puis colonne

3 escargot

3

nombre d'affectés à l'étape = 72

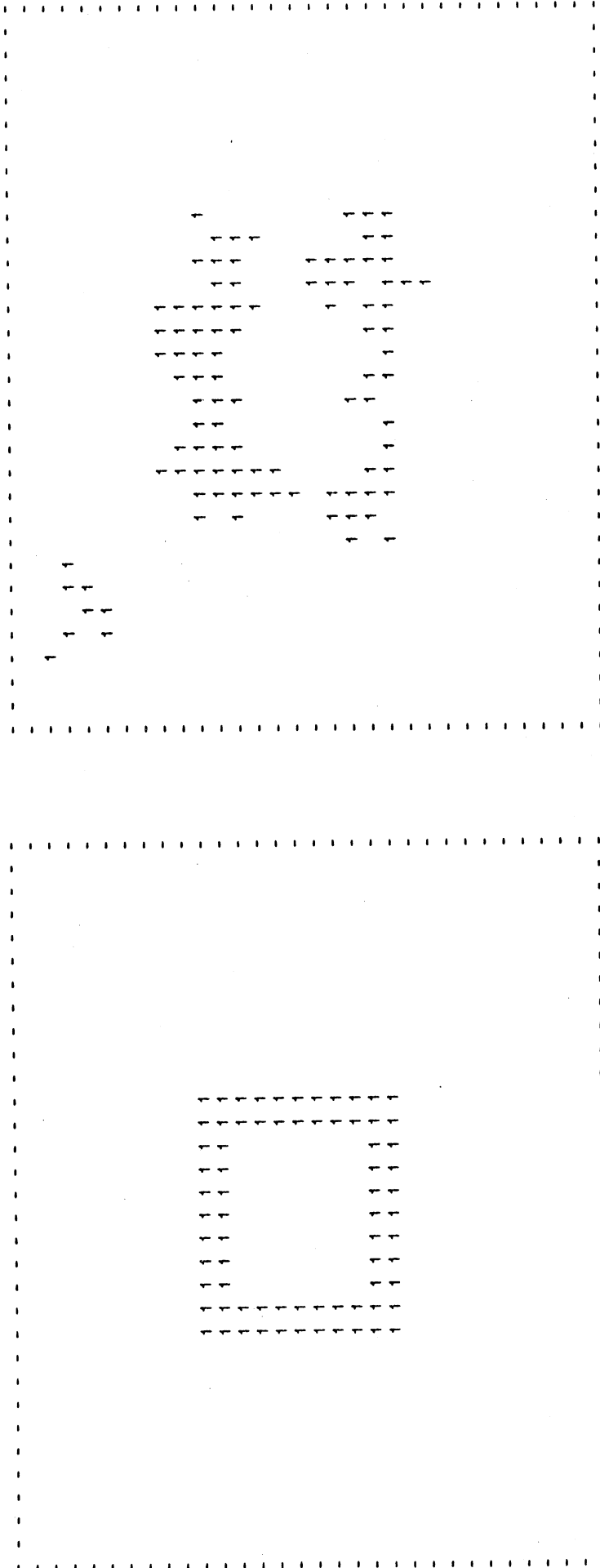
itération numéro 1
nombre d'affectés à l'étape = 98

N00 = 785

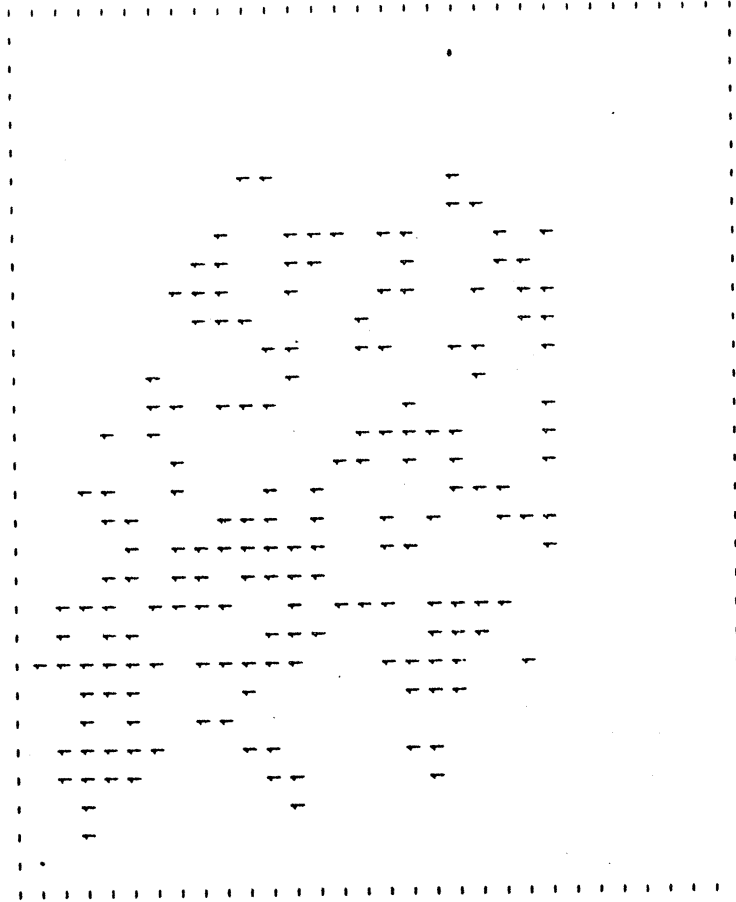
N01 = 43

N10 = 17

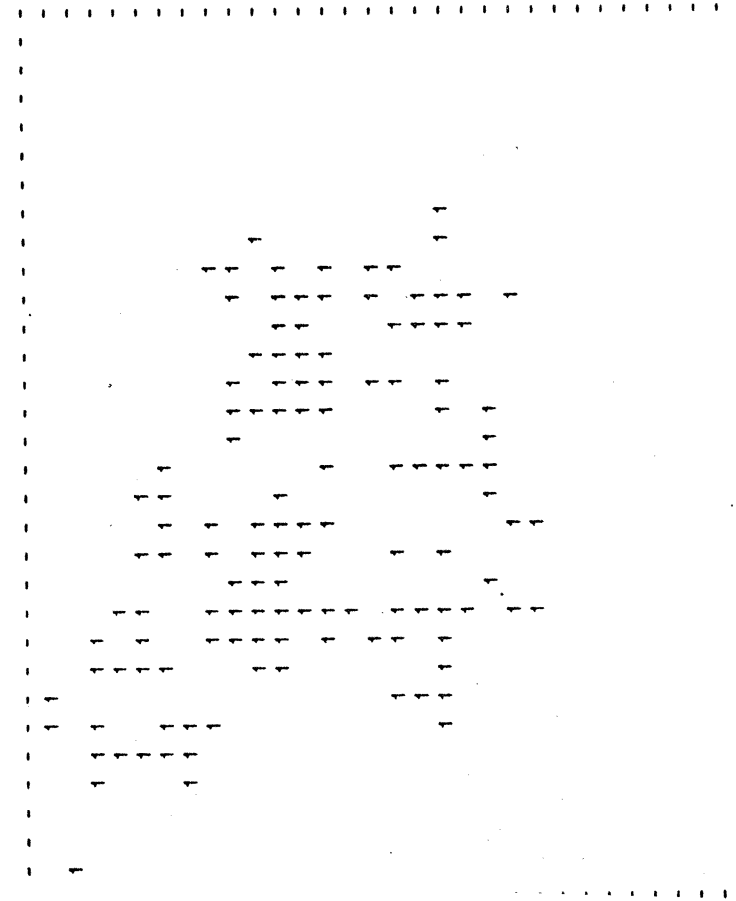
N11 = 55



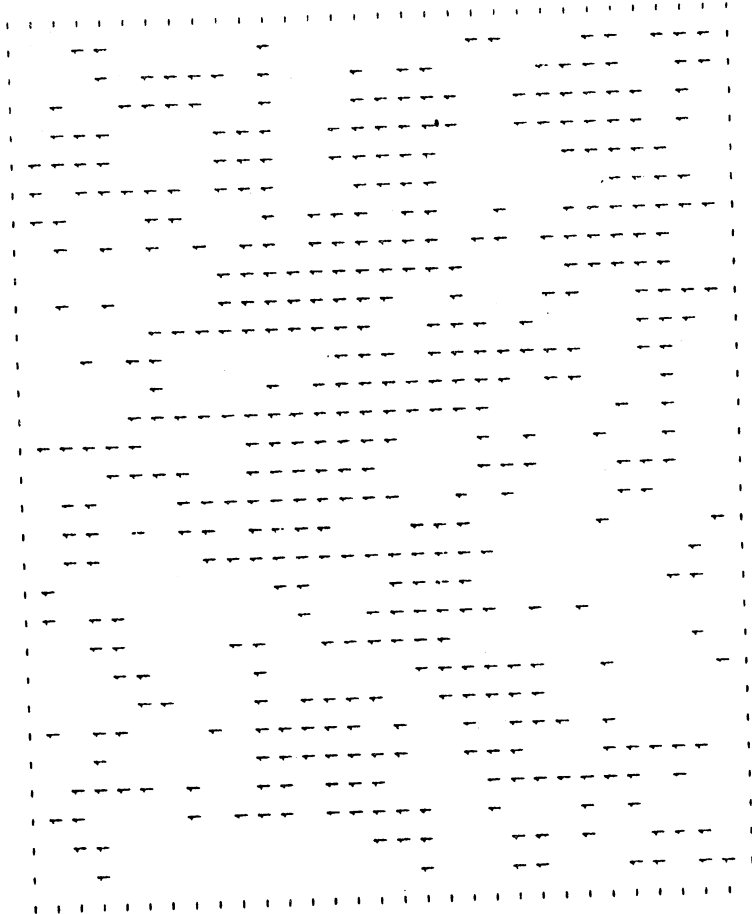
itération numéro 3
nombre d'affectés à l'étape = 174
N00 = 659
N01 = 116
N10 = 67
N11 = 58



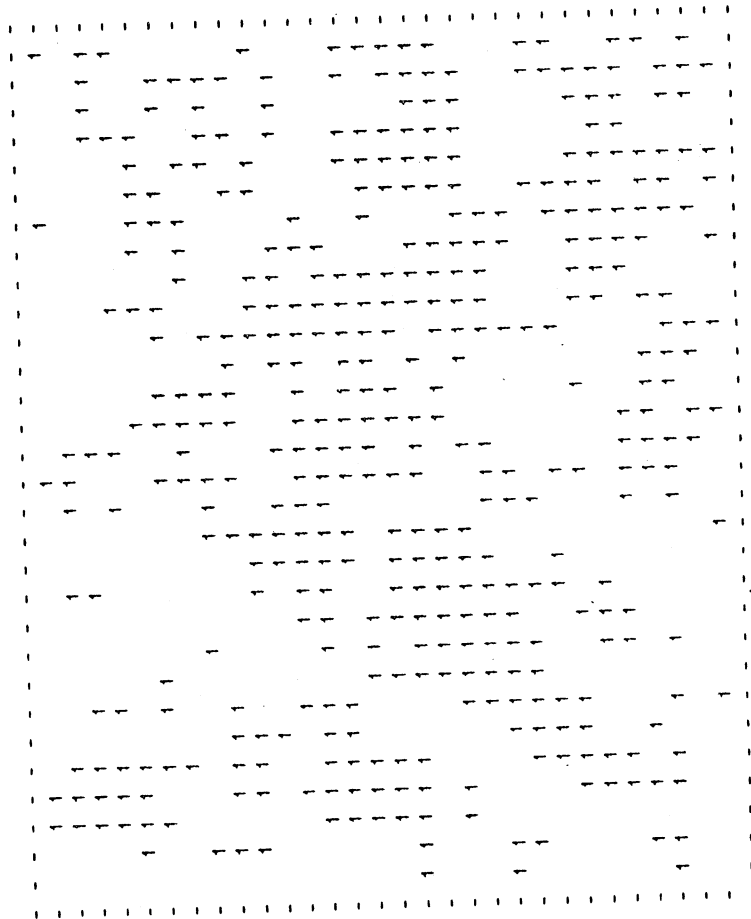
itération numéro 2
nombre d'affectés à l'étape = 125
N00 = 727
N01 = 75
N10 = 48
N11 = 50



itération numéro 13
nombre d'affectés à l'étape = 446
N00 = 304
N01 = 181
N10 = 150
N11 = 265



itération numéro 12
nombre d'affectés à l'étape = 415
N00 = 320
N01 = 175
N10 = 165
N11 = 240



CHAPITRE IV
CHAMPS ALEATOIRES
ET PROCESSUS PONCTUELS

On appelle processus ponctuel une mesure sur un système dans lequel les points sont distribués aléatoirement dans le temps et/ou l'espace. Dans les applications, les points peuvent représenter, par exemple, des emplacements de plants (problème agronomique, cf. Besag), de villes ou plus généralement de localisations géographiques (de nombreux modèles en démographie), de véhicules, de galaxies sur un ensemble Λ . Un autre exemple, que nous développerons ultérieurement, correspond au cas où les points représentent les individus contaminés, atteints par une maladie contagieuse dont on étudie l'évolution dans le temps (problème épidémiologique, par ex. dépérissement des chênes dans le département des Pyrénées orientales, cf Demongeot).

Nous nous intéressons au cas où Λ est une boîte finie de \mathbb{Z}^2 (bien que les résultats de ce chapitre se généralisent immédiatement au cas où Λ est une boîte, finie ou non de $\mathbb{Z}^v, v \geq 2$). Nous nous proposons d'étudier des lois de processus ponctuels associés à des champs aléatoires binaires définis sur la boîte (familles de variables $\{X_t, t \in \Lambda\}$ à valeurs dans $\{0,1\}$).

Tout d'abord, nous exposons les outils mathématiques nécessaires pour manipuler les processus ponctuels ; ensuite nous écrirons, du point de vue processus ponctuels, les mesures de Gibbs dans le cas statique ; enfin nous présentons les principales fonctions thermodynamiques (par ex. pression ou entropie

dont il a été fait mention au chapitre III, lors de l'étude sur la convergence des mesures de Gibbs), dans le cadre des processus ponctuels.

I Généralités sur les lois des processus ponctuels

Soit une famille $(X_t ; t \in \Lambda)$ de variables aléatoires binaires indexée par Λ , définie sur un certain espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , de loi P_X sur $(\{0,1\}^\Lambda, \mathcal{B}_{\{0,1\}^\Lambda})$, où $\mathcal{B}_{\{0,1\}^\Lambda}$ désigne la tribu sur $\{0,1\}^\Lambda$ engendrée par les applications coordonnées $(\pi_t ; t \in \Lambda)$ de $\{0,1\}^\Lambda$.

Soit M un processus ponctuel sur Λ (i.e. une mesure aléatoire ponctuelle simple sur Λ), c'est-à-dire un élément aléatoire défini sur un certain espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans $(M_p(\Lambda), \mathcal{B}_{M_p(\Lambda)})$, où $\mathcal{B}_{M_p(\Lambda)}$ est la tribu engendrée par les applications $(\xi_t ; t \in \Lambda)^P$, avec $\xi_t(\mu) = \mu(\{t\})$, $\mu \in M_p(\Lambda)$ et $M_p(\Lambda)$ est l'ensemble des mesures ponctuelles définies sur Λ .

Remarque: $M_p(\Lambda)$ peut être identifié à l'ensemble $P(\Lambda)$ des sous-ensembles de Λ , par l'application qui à μ associe $S_\mu = \{t \in \Lambda / \mu(\{t\}) = 1\}$ (à une mesure ponctuelle, μ , de $M_p(\Lambda)$, on associe son support, $S_\mu \subset \Lambda$); l'application inverse est celle qui, à tout $S \subset \Lambda$, associe la mesure $\mu_S = \sum_{t \in S} \delta_t$ (δ_t est la mesure de Dirac au point t de Λ).

On notera par P_M la loi du processus ponctuel M . Désignons par g l'application (bijective et bimesurable) de $(\{0,1\}^\Lambda, \mathcal{B}_{\{0,1\}^\Lambda})$ dans $(M_p(\Lambda), \mathcal{B}_{M_p(\Lambda)})$:

$$g(x) = \sum_{t \in \Lambda} x_t \delta_t, \quad x = (x_t); t \in \Lambda$$

Remarque: l'application inverse est donnée par :

$$g^{-1}(\mu) = x^\mu, \quad \mu \in M_p(\Lambda), \quad \text{cù} \quad x_t^\mu = 1 \Leftrightarrow t \in S_\mu$$

Alors, on a le résultat suivant immédiat :

Proposition 4-1 : L'application qui, à P_X , associe $P_{X \circ g^{-1}}$ est une bijection de l'ensemble des lois P_X sur $(\{0,1\}^\Lambda, \mathcal{B}_{\{0,1\}^\Lambda})$ dans l'ensemble des lois P_M sur $(M_p(\Lambda), \mathcal{B}_{M_p(\Lambda)})$; son inverse est l'

application qui, à P_M , associe $P_{M \circ g}$.

Il est parfois plus aisé de traiter de la loi P_M d'un processus ponctuel en terme de la loi $P_{M \circ g}$ qui lui est associée et, inversement, de définir une loi P_M comme image par g d'une loi P_X associée à une famille de variables aléatoires indexée dans Λ . Dans la suite de ce paragraphe, nous illustrerons les notions rencontrées en les appliquant au cas d'un bruit blanc binaire $(X_t ; t \in \Lambda)$ sur Λ (i.e. famille de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de même paramètre p , $\mathcal{B}(1 ; p, 1-p)$, $0 \leq p \leq 1$) pour lequel :

$$P_X = \prod_{t \in \Lambda} \mathcal{B}(1 ; p, 1-p) = P_p$$

La description de la loi d'un processus ponctuel met en jeu un certain nombre de caractéristiques :

Définition 4-1 : Loi cylindrique r-dimensionnelle

Pour $r > 1$, et r parties A_i de Λ , $i = 1, 2, \dots, r$, on appelle loi cylindrique r-dimensionnelle de la loi P_M correspondant aux bases A_1, A_2, \dots, A_r , la loi $P_M^{A_1, A_2, \dots, A_r}$ image de P_M par l'application $\mu \mapsto (\mu(A_1), \mu(A_2), \dots, \mu(A_r))$ de $M_p(\Lambda)$ dans \mathbb{N}^r .

Remarque : $P_M^{A_1, A_2, \dots, A_r}$ peut être également définie comme étant la loi image de $P_{M \circ g}$ par l'application $(\sum_{t \in A_1} \Pi_t, \sum_{t \in A_2} \Pi_t, \dots, \sum_{t \in A_r} \Pi_t)$.

Définition 4-2 : Fonctionnelle de Laplace (cf. J. Neveu)

On appelle fonctionnelle de Laplace de la loi P_M l'application ψ^P_M qui, à une fonction f de Λ dans \mathbb{R}_+ , associe :

$$\psi^P_M(f) = \int_{M_p(\Lambda)} \exp(- \sum_{t \in \Lambda} f(t) \mu(\{t\})) P_M(d\mu)$$

Remarque : la fonction

$$\psi^P_{A_1, A_2, \dots, A_r}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) = \psi^P_M(\sum_{j=1}^r \lambda_j 1_{A_j}) ; (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$$

n'est autre que la transformée de Laplace de la loi cylindrique $P_M^{A_1, A_2, \dots, A_r}$.

Définition 4-3 : Mesure d'intensité et mesure de covariance

On appelle mesure d'intensité de la loi P_M la mesure sur $P(\Lambda)$ définie par :

$$I^{P_M}(A) = \int_{M_P(\Lambda)} \mu(A) P_M(d\mu), \quad A \subset \Lambda$$

et on dit que P_M est du premier ordre si $I^{P_M}(A)$ est fini pour tout A .

On appelle mesure de covariance de la loi P_M la fonction qui, à tout couple (A, B) de parties de Λ , associe :

$$C^{P_M}(A, B) = \int_{M_P(\Lambda)} (\mu(A) - I^{P_M}(A))(\mu(B) - I^{P_M}(B)) P_M(d\mu)$$

Remarque : I^{P_M} n'est autre que l'espérance par rapport à P_M de la variable aléatoire $\xi_A : \mu \mapsto \mu(A)$, et l'espérance par rapport à $P_{M \circ \mathcal{G}}$ de la variable aléatoire $\sum_{t \in A} \Pi_t$; C^{P_M} est la covariance par rapport à P_M entre les variables aléatoires ξ_A et ξ_B , et la covariance par rapport à $P_{M \circ \mathcal{G}}$ entre les variables aléatoires $\sum_{t \in A} \Pi_t$ et $\sum_{t \in B} \Pi_t$.

Dans le cas particulier du bruit blanc binaire, P_p , il est clair que, désignant par Q_p la loi P_M associée, pour A_1, A_2, \dots, A_r parties disjointes de Λ , la loi cylindrique $Q_p^{A_1, A_2, \dots, A_r}$ correspondante est la loi produit :

$$\prod_{i=1}^r \mathcal{B}(|A_i|; p, 1-p)$$

de même que : $\psi_{A_1, A_2, \dots, A_r}^{Q_p}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) = \prod_{i=1}^r (pe^{-\lambda_i + q})^{|A_i|}$

$$I^{Q_p}(A) = p|A|$$

$$C^{Q_p}(A, A) = p(1-p)|A|$$

$$C^{Q_p}(A, B) = 0, \text{ si } A \cap B = \emptyset$$

$$= p(1-p)|A \cap B|, \text{ sinon}$$

II Mesures de Gibbs et Processus ponctuels

Soit Λ une partie finie de \mathbb{Z}^2 ; pour tout $A \subset \Lambda$, nous pouvons définir la mesure ponctuelle ν_A par :
pour tout $B \in P(\Lambda)$, $\nu_A(\{B\}) = 1$, si $B \subset A$
 $= 0$, sinon.

La mesure de Gibbs μ associée au potentiel d'interaction J_V vérifie :

$$\text{pour tout } A \subset \Lambda, \mu(A) = \exp\left(\sum_{B \subset \Lambda} J_V(B) \nu_A(\{B\})\right) \cdot Z^{-1}$$

Sa fonction pression $P_\Lambda(V)$ est définie par :

$$P_\Lambda(V) = \frac{1}{|\Lambda|} \text{Log}\left(\sum_{A \subset \Lambda} \exp(V(A))\right)$$

De même, son entropie spécifique $S_\Lambda(V)$ est définie par :

$$S_\Lambda(V) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{A \subset \Lambda} \mu(A) \text{Log} \mu(A)$$

Soit g l'isomorphisme qui, associant à toute partie A de Λ la mesure ponctuelle ν_A , permet d'identifier $P(\Lambda)$ et l'ensemble des mesures ponctuelles $M = \{\nu_A\}_{A \subset \Lambda}$. Alors, la loi image de μ par g est un processus ponctuel au sens défini plus haut.

Soit $\tilde{\mu}$ cette loi image ; nous avons :

$$\tilde{P}_\Lambda(V) = \text{Log}\left(\sum_{\nu_A \in M} \exp\left(\sum_{B \subset \Lambda} J_V(B) \nu_A(\{B\})\right) \Delta(\nu_A)\right),$$

$$\text{où } \Delta = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{A \subset \Lambda} \delta_{\nu_A}.$$

$$\text{et } \tilde{S}_\Lambda(V) = Z^{-1} \sum_{\nu_A \in M} \exp\left(\sum_{B \subset \Lambda} J_V(B) \nu_A(\{B\})\right) (\Delta'(\nu_A) - \text{Log}(Z))$$

$$\text{où } \Delta' = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{A \subset \Lambda} V(A) \delta_{\nu_A} \text{ et où } Z \text{ est la constante de normalisation de la mesure } \mu \text{ (cf Chapitre I paragraphe I). Nous avons}$$

donc :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\Lambda(V) &= \text{Log} \psi^\Delta(-J_V) \\ \text{et } \tilde{S}_\Lambda(V) &= Z^{-1} \psi^{\Delta'}(-J_V) - \text{Log}(Z), \end{aligned}$$

où ψ^Δ et $\psi^{\Delta'}$ sont les fonctionnelles de Laplace de Δ et Δ' . Nous interprétons donc les fonctions pressions et entropie à l'aide de fonctionnelles de Laplace.

Par passage à la limite thermodynamique, nous pouvons étudier le comportement de $P_{\Lambda_n}(V)$ et de $S_{\Lambda_n}(V)$, lorsque la boîte Λ_n tend vers \mathbb{Z}^2 : les théorèmes classiques de convergence des fonctionnelles de Laplace de processus ponctuels (cf. par exemple J. Neveu) s'appliquent, mais ils conduisent à des résultats du même type que ceux obtenus classiquement par analyticité des limites de $P_{\Lambda_n}(V)$ et de $S_{\Lambda_n}(V)$, par rapports aux coefficients $J_V(B)$ (cf. par exemple F. Spitzer). De même, l'étude de la convexité de ces fonctionnelles n'apporte rien pour l'instant de neuf par rapport à celle entreprise classiquement (cf. R. Israël et B. Lacolle).

Néanmoins, l'analogie entre les mesures de Gibbs sur Λ et les processus ponctuels sur Λ va nous permettre de définir de nombreux exemples de mesures de Gibbs sans utiliser le potentiel d'interaction J_V ; le résultat d'Hammersley-Clifford (cf. Besag) nous permet d'affirmer que tout processus ponctuel sur Λ est isomorphe à une mesure sur $P(\Lambda)$, donc à une mesure de Gibbs sur Λ .

Or, un tel processus ponctuel peut être obtenu par mélange, comme nous le verrons aux paragraphes suivants. Nous disposons donc d'un moyen simple et efficace pour générer des mesures de Gibbs. La reconstruction du potentiel est possible (cf. Chapitre I) ; dans les exemples donnés ci-après, les mesures de Gibbs ne sont pas de renouvellement. Mais il est aisé de vérifier qu'un mélange d'ERS est un ERS et d'utiliser la technique développée ci-après pour les états de renouvellement spatial.

III Lois mélangées et transformations associées

Dans cette partie, nous nous intéressons à des lois de processus ponctuels obtenues par mélange d'une famille de lois (au sens de la définition 5-1). Par la suite, nous étudions une transformation directement issue de ces mélanges.

Définition 4.4 : Loi mélangée

Soit une famille $(Q_\theta ; \theta \in \Theta)$ de lois de processus ponctuels indexée par un ensemble Θ muni de la tribu de ses boréliens, \mathcal{B} , telle que l'application : $(\theta, \mu) \mapsto Q_\theta(\mu)$ avec $\mu \in M_p(\Lambda)$ et $\theta \in \Theta$ définisse une probabilité de transition. Soit σ une loi de probabilité sur (Θ, \mathcal{B}) . La loi mélangée des lois $(Q_\theta ; \theta \in \Theta)$ par σ est la loi Q_σ du processus ponctuel défini par :

$$Q_\sigma(\mu) = \int_{\Theta} Q_\theta(\mu) \sigma(d\theta), \mu \in M_p(\Lambda)$$

Remarque : Si ρ est une variable aléatoire de loi σ , et si, pour tout $\theta \in \Theta$, Q_θ est la loi conditionnelle du processus ponctuel sachant que $\rho = \theta$, alors le processus est de loi Q_σ .

Nous étudierons le cas où la loi σ est définie sur $\Theta = [0, 1]$ et où, pour tout $\rho \in \Theta$, Q_ρ est la loi $P_{\rho \circ g}^{-1}$ avec P_ρ le bruit blanc binaire et g l'application de la proposition 4-1. Tout d'abord, nous examinerons le cas où σ est $U(0, 1)$ (i.e. la loi uniforme sur $[0, 1]$) et ensuite le cas où σ est $\beta(a, b)$ (i.e. la loi bêta de deuxième espèce de paramètres a et b).

A loi mélangée par la loi uniforme

Pour $A \subset \Lambda$ avec $|A| = n$, calculons la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} \psi_A^{Q_\sigma}(\lambda) &= \int_0^1 \psi_A^{Q_p}(\lambda) dp \\ &= \int_0^1 (pe^{-\lambda} + q)^n dp, \quad q = 1-p \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda k} \right) dp \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k e^{-\lambda k} \left(\int_0^1 p^k (1-p)^{n-k} dp \right) \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k e^{-\lambda k} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} e^{-\lambda k} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n e^{-\lambda k} \end{aligned}$$

Ainsi, la loi cylindrique Q_σ^A est la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$ et l'on a :

$$E^{Q_\sigma}(\xi_A) = I^{Q_\sigma}(A) = n/2$$

$$\text{var}^{Q_\sigma}(\xi_A) = n^2/12$$

De même pour $A_i \subset \Lambda$ avec $|A_i| = n_i, i = 1, 2, A_1 \cap A_2 = \emptyset,$

$(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 :$

$$\begin{aligned} \psi_{A_1, A_2}^{Q_\sigma}(\lambda_1, \lambda_2) &= \int_0^1 (pe^{-\lambda_1} + q)^{n_1} (pe^{-\lambda_2} + q)^{n_2} dp \\ &= \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} C_{n_1}^k C_{n_2}^l \frac{(k+l)!(n_1+n_2-k-l)!}{e^{-(\lambda_1 k + \lambda_2 l)} / (n_1+n_2+1)!} \\ &= \frac{1}{n_1+n_2+1} \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} e^{-(\lambda_1 k + \lambda_2 l)} \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^l}{C_{n_1+n_2}^{k+l}} \end{aligned}$$

Ainsi, la loi cylindrique de (ξ_{A_1}, ξ_{A_2}) , à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n_1\} \times \{0, 1, \dots, n_2\}$, vérifie :

$$Q_{\sigma}(\xi_{A_1}=k, \xi_{A_2}=l) = C_{n_1}^k C_{n_2}^l / C_{n_1+n_2}^{k+l} \text{ avec } 0 \leq k \leq n_1 \text{ et } 0 \leq l \leq n_2$$

$$\text{cov}^{Q_{\sigma}}(\xi_{A_1}, \xi_{A_2}) = n_1 n_2 / 12$$

On déduit de ce qui précède que si $B \subset A$ avec $|A| = N$ et $|B| = K$, alors la loi conditionnelle de la variable aléatoire ξ_B sachant que $\xi_A = n$ ($0 \leq n \leq N$) s'écrit :

$$Q_{\sigma}(\xi_B=k / \xi_A=n) = C_K^k C_{N-K}^{n-k} / C_N^n$$

Ce n'est autre que la loi hypergéométrique $H_1(N, n, K)$ (cf Annexe I) et nous savons que :

$$E^{Q_{\sigma}}(\xi_B / \xi_A) = K \xi_A / N$$

$$\text{var}^{Q_{\sigma}}(\xi_B / \xi_A) = \xi_A (N - \xi_A) \frac{K}{N} (1 - K/N) / (N-1)$$

Remarque : si $|B| = n$, nous trouvons que $Q_{\sigma}(\xi_B=n / \xi_A=n) = 1 / C_N^n$, donc, conditionnellement au fait que le processus compte n points dans A , il charge uniformément avec la probabilité $1 / C_N^n$ les parties de A dont le cardinal est n .

Plus généralement, on peut voir que pour $A \subset \Lambda$, $|A| = N$, $B_i \subset A$, $i = 1, 2, \dots, r$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$, la loi conditionnelle du vecteur aléatoire $(\xi_{B_1}, \xi_{B_2}, \dots, \xi_{B_r})$ sachant que $\xi_A = n$ ($0 \leq n \leq N$) est la loi hypergéométrique de dimension r $H_r(N, n, |B_1|, |B_2|, \dots, |B_r|)$ (cf Annexe I).

En fait, le mélange par la loi uniforme n'est qu'un cas particulier des mélanges par une loi bêta de deuxième espèce de paramètres a, b (cf paragraphe suivant) et correspond au cas particulier où $a=1$ et $b=1$.

B PROCESSUS PONCTUELS BETA-BINOMIAUX

Nous nous intéressons maintenant aux lois de processus ponctuels obtenus par mélange de la famille $(Q_p ; p \in [0,1])$ des lois associées à des bruits blancs binaires par une loi bêta de deuxième espèce $\beta_{[0,1]}(a,b)$, $a > 0$, $b > 0$, admettant pour densité

$$f_{a,b}(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad x \in [0,1]$$

où $\beta(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$. Le mélange étudié au paragraphe précédent correspond à la situation particulière où $a = b = 1$.

Définition 4-5 : Loi bêta-binômiale $\beta b(a,b)$

La loi bêta-binômiale $\beta b(a,b)$ de paramètres (a,b) est la loi du processus ponctuel définie par :

$$\beta b(a,b)(H) = \int_0^1 Q_p(H) f_{a,b}(p) dp \quad H \in \mathcal{B}_{M_p}(\Lambda)$$

Cette terminologie se justifie par la proposition suivante :

Proposition 4-2 : Pour tout $r \geq 1$ et toute famille A_j , $j = 1, 2, \dots, r$,

$A_j \subset \Lambda$, $|A_j| = n_j$, $A_j \cap A_i = \emptyset$ pour $i \neq j$, la loi cylindrique r -dimensionnelle de la loi $\beta b(a,b)$ correspondant aux bases A_1, A_2, \dots, A_r , est la loi bêta-binômiale de dimension r , $\beta b_r(a,b ; n_1, n_2, \dots, n_r)$

démonstration : en effet, $\beta b(a,b)$ peut-être considérée comme

la loi d'un processus ponctuel M telque, pour une certaine va-

riable aléatoire ρ de loi $\beta_{[0,1]}(a,b)$, pour tout $p \in [0,1]$,
 $Q_p = \left(\prod_{t \in \Lambda} \beta(1; p, 1-p) \right) \cdot g^{-1}$ soit la loi conditionnelle de M
 sachant $\rho = p$. Alors pour tout A_1, A_2, \dots, A_r vérifiant les
 hypothèses de la proposition, le vecteur aléatoire $(M(A_1),$
 $M(A_2), \dots, M(A_r), \rho)$ est tel que ρ suit la loi $\beta(a,b)$ et (cf. I
 du chapitre IV), pour tout $p \in [0,1]$, conditionnellement à
 $\rho = p$, $M(A_1), M(A_2), \dots, M(A_r)$ sont indépendantes et de lois
 respectives $\mathcal{B}(n_1; p, 1-p), \mathcal{B}(n_2; p, 1-p), \dots, \mathcal{B}(n_r; p, 1-p)$.
 Par suite (cf Annexe 2), le résultat annoncé est obtenu.

En ce qui concerne les moments de la loi $\beta(a,b)$, nous
 énonçons la propriété suivante (cf Annexe 2) :

Proposition 4-3 : La mesure d'intensité de la loi $\beta(a,b)$ s'écrit :

$$I^{\beta(a,b)}(A) = \frac{a}{a+b} |A|$$

et la mesure de covariance s'écrit :

$$C^{\beta(a,b)}(A,B) = \frac{ab(a+b+|A|)|A|}{(a+b)^2(a+b+1)} \quad \text{si } A = B$$

$$= \frac{ab|A||B|}{(a+b)^2(a+b+1)} \quad \text{si } A \cap B = \emptyset$$

Comme pour le mélange par la loi uniforme, nous avons :

Proposition 4-4 : Pour $A \subset \Lambda$, $|A| = N$, $B_i \subset A$, $i = 1, 2, \dots, r$,

$B_i \cap B_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, relativement à $\beta(a,b)$, la loi conditionnelle

du vecteur aléatoire $(\xi_{B_1}, \xi_{B_2}, \dots, \xi_{B_r})$ sachant que $\xi_A = n$

$0 \leq n \leq N$, est la loi hypergéométrique de dimension r , $H_r(N, n, |B_1|, |B_2|, \dots, |B_r|)$

démonstration : en vertu de la proposition 4-2, il suffit de vérifier que, si U est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \dots, N\}$ et si $V = (V_1, V_2, \dots, V_r)$ est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \dots, K_1\} \times \{0, 1, \dots, K_2\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, K_r\}$, où $0 \leq K_1 + K_2 + \dots + K_r \leq N$, tel que le vecteur aléatoire $(U - \sum_{i=1}^r V_i, V_1, V_2, \dots, V_r)$ suit la loi $\beta_{r+1}^b(a, b; N - \sum_{i=1}^r K_i, K_1, K_2, \dots, K_r)$, alors, pour tout $1 \leq n \leq N$, la loi conditionnelle de V sachant $\{U = n\}$ est la loi hypergéométrique de dimension r , $H_r(N, n, K_1, K_2, \dots, K_r)$.

C ERS issus de processus ponctuels tronqués

Le point de vue processus ponctuels développé ci-dessus et l'opération de mélange permettent de générer de manière naturelle des mesures de Gibbs, sans passer par leur potentiel.

Nous proposons d'appeler ERS issus de processus ponctuels tronqués, la mesure de Gibbs, qui lorsque la propriété (H) est vérifiée, a même potentiel d'interaction $J_V(A)$, pour les parties A équilibrées de diamètre $\leq d_0$ et vérifie :

$$J_V(A) = (-1)^{|A|} j, \text{ pour les parties A de diamètre supérieur à } d_0.$$

Un tel ERS est localement construit comme le processus ponctuel dont il est issu et il possède la propriété de renouvellement.

Nous pourrions ainsi parler d'ERS hypergéométrique tronqué et bêta-binomial tronqué. La définition des potentiels correspondants étant beaucoup plus simple que celle des potentiels hypergéométrique ou bêta-binomiaux, la simulation en est plus aisée.

Par le même procédé (en tronquant $J_V(A)$ pour $\text{diam}(A) > k$), on pourrait définir des mesures de Gibbs k-markoviennes et donc des CAMMRS issus de processus ponctuels tronqués.

Il nous semble que nous avons là un moyen simple d'enrichir la phénoménologie des ERS et des CAMMRS.

ANNEXE 1

LOIS HYPERGEOMETRIQUES

1 - Loi hypergéométrique de dimension 1 $H_1(N, n, K)$

Soit une population de N individus dont K ($0 \leq K \leq N$) possède une certaine propriété et $N-K$ ne possèdent pas la dite propriété. On prélève un échantillon de n individus ($0 \leq n \leq N$) dans cette population, par tirages sans remise. Soit X la variable aléatoire dénombrant le nombre d'individus observés possédant la propriété. Alors X suit la loi hypergéométrique $H_1(N, n, K)$ et on a :

$$P(X = k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n},$$

pour $\max(0, n-N+K) \leq k \leq \min(n, K)$. On a aussi $E(X) = n \frac{K}{N}$ et

$$\text{var}(X) = n \frac{(N-n)}{(N-1)} \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right)$$

2 - Loi hypergéométrique de dimension 2 $H_2(N, n, K_1, K_2)$

Soit une population de N individus dont K_1 possèdent la propriété 1 ($0 \leq K_1 \leq N$) et K_2 la propriété 2 ($0 \leq K_2 \leq N$). On suppose que ces deux propriétés sont exclusives et qu'un individu peut ne posséder aucune de ces 2 propriétés, alors $K_1 + K_2 \leq N$. On prélève dans cette population un échantillon ayant n individus, par tirages sans remise. Soit $X = (X_1, X_2)$ le vecteur aléatoire de dimension 2, où X_i est le nombre d'individus observés possédant la propriété i . Alors X suit la loi hypergéométrique de dimension 2 $H_2(N, n, K_1, K_2)$ et on a :

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2) = \frac{C_{K_1}^{k_1} C_{K_2}^{k_2} C_{N-K_1-K_2}^{n-k_1-k_2}}{C_N^n}$$

On définit maintenant la loi tran2(p_1, p_2) comme suit ;
 le vecteur aléatoire bidimensionnel Z suit une loi tran2(p_1, p_2) si :
 $P(Z = (1,0)) = p_1, P(Z = (0,1)) = p_2, P(Z = (0,0)) = 1 - p_1 - p_2$
 ($p_1 + p_2 \leq 1$). On peut considérer Z comme la somme des n vecteurs
 aléatoires Z_1, Z_2, \dots, Z_n non indépendants décrivant les n
 tirages successifs d'un individu où $Z_i = (1,0), (0,1)$ ou $(0,0)$
 selon que l'individu i possède la propriété 1, la propriété 2
 ou aucune de ces deux propriétés. Nous allons montrer que ces
 vecteurs sont tous de loi tran2($K_1/N, K_2/N$) :

- On a bien sûr $E(Z_1) = (K_1/N, K_2/N)$

- Calculons $E(Z_2) = (P(Z_2 = (1,0)), P(Z_2 = (0,1)))$

$$\begin{aligned} P(Z_2 = (0,0)) &= P(Z_2 = (0,0) | Z_1 = (0,0))P(Z_1 = (0,0)) + P(Z_2 = (0,0) | \\ Z_1 = (1,0))P(Z_1 = (1,0)) &+ P(Z_2 = (0,0) | Z_1 = (0,1))P(Z_1 = (0,1)) \\ &= (1 - K_1/N - K_2/N) \left(\frac{N(1 - K_1/N - K_2/N) - 1}{N - 1} \right) + \\ K_2/N \left(\frac{N(1 - K_1/N - K_2/N)}{N - 1} \right) &+ K_1/N \left(\frac{N(1 - K_1/N - K_2/N)}{N - 1} \right) \\ &= 1 - K_1/N - K_2/N \end{aligned}$$

De la même manière, nous pouvons montrer que $P(Z_2 = (1,0)) = K_1/N$
 et $P(Z_2 = (0,1)) = K_2/N$. Ainsi $E(Z_2) = (K_1/N, K_2/N)$ et Z_2 suit une
 loi tran2($K_1/N, K_2/N$).

- De même $E(Z_3) = E(Z_4) = \dots = E(Z_n) = (K_1/N, K_2/N)$ et en
 définitive Z_1, Z_2, \dots, Z_n sont bien tous de lois tran2($K_1/N, K_2/N$)

* Espérance de la loi hypergéométrique $H_2(N, n, K_1, K_2)$

$$E(X) = E(\sum Z_i) = nE(Z_i) = (nK_1/N, nK_2/N)$$

* Matrice de variance-covariance de $H_2(N, n, K_1, K_2)$

$$\begin{aligned} V(X) &= V(\sum Z_i) = \sum V(Z_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(Z_i, Z_j) \\ V(Z_i) &= \begin{vmatrix} (K_1/N)(1 - K_1/N) & -K_1K_2/N^2 \\ -K_1K_2/N^2 & (K_2/N)(1 - K_2/N) \end{vmatrix} \\ \text{Cov}(Z_i, Z_j) &= E(Z_i^T Z_j) - E(Z_i)^T E(Z_j) \end{aligned}$$

$$E(Z_i^T Z_j) = EE(Z_i^T Z_j / Z_j) = \sum_{k=1}^3 E(Z_i^T Z_j / Z_j = V_k) P(Z_j = V_k) \text{ où } V_1 = (1,0), \\ V_2 = (0,1) \text{ et } V_3 = (0,0).$$

$$= \begin{vmatrix} (K_1/N)(K_1 - 1)/(N-1) & K_1 K_2 / N(N-1) \\ K_1 K_2 / N(N-1) & (K_2/N)(K_2 - 1)/(N-1) \end{vmatrix}$$

et donc

$$V(X) = \frac{n}{N-1} \begin{vmatrix} (N-n)(K_1/N)(1-K_1/N) & -(N-n-2)K_1 K_2 / N^2 \\ -(N-n-2)K_1 K_2 / N^2 & (N-n)(K_2/N)(1-K_2/N) \end{vmatrix}$$

3 - Loi hypergéométrique de dimension r $H_r(N, n, K_1, K_2, \dots, K_r)$

C'est la généralisation des lois hypergéométriques de dimension 1 ou 2. Soit une population de N individus dont K_1 (resp. K_2, \dots, K_r) possèdent la propriété 1 (resp. la propriété 2, ..., r) et $N - \sum_{k=1}^r K_k$ ne possèdent aucune de ces propriétés ; on suppose que ces propriétés sont deux à deux exclusives et donc $K_1 + K_2 + \dots + K_r \leq N$. On prélève un échantillon de n individus ($0 \leq n \leq N$) dans cette population par des tirages sans remise. Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_r)$ le vecteur aléatoire de dimension r dont la composante X_i compte le nombre d'individus observés possédant la propriété i. Alors, X suit la loi hypergéométrique $H_r(N, n, K_1,$

$K_2, \dots, K_r)$ et on a :

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_r = k_r) = \frac{C_{K_1}^{k_1} C_{K_2}^{k_2} \dots C_{K_r}^{k_r} C_{N-K_1-K_2-\dots-K_r}^{n-k_1-k_2-\dots-k_r}}{C_N^n}$$

pour $0 \leq k_i \leq \min(n, K_i), i = 1, 2, \dots, r$

et $\max(0, n-N+K_1+K_2+\dots+K_r) \leq k_1+k_2+\dots+k_r \leq \min(n, K_1+K_2+\dots+K_r)$

$$E(X_i) = n K_i / N \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\text{var}(X_i) = \frac{n(N-n)}{N-1} (K_i/N)(1-K_i/N) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\text{cov}(X_i, X_j) = -\frac{n(N-n-2)}{N-1} K_i K_j / N^2 \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad i \neq j$$

Remarque : si X suit la loi hypergéométrique $H_r(N, n, K_1, K_2, \dots, K_r)$,
alors, pour tout $1 \leq s \leq r$ et toute partie $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ de
 $\{1, 2, \dots, r\}$ à s éléments, le vecteur aléatoire $(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_s})$
suit la loi $H_s(N, n, K_{i_1}, K_{i_2}, \dots, K_{i_s})$

ANNEXE 2

LOIS BETA-BINOMIALES

1 - Loi Bêta-binômiale de dimension 1 $\beta b_1(a,b;n)$

Soit (X,Y) un couple aléatoire à valeurs dans $\{0,1, \dots, n\} \times [0,1]$ tel que Y suit la loi bêta de deuxième espèce $\beta(a,b)$, $a > 0$, $b > 0$, admettant la densité :

$$f_{a,b}(y) = \frac{1}{\beta(a,b)} y^{a-1} (1-y)^{b-1}, \quad y \in [0,1] \quad \left(\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \right)$$

et, pour tout $y \in [0,1]$, conditionnellement à $Y = y$, X suit la loi binômiale $\mathcal{B}(n;y,1-y)$. Alors on dit que X suit la loi bêta-binômiale $\beta b_1(a,b;n)$ et on a :

$$P(X = k) = C_n^k \frac{\beta(a+k, b+n-k)}{\beta(a,b)} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n$$

$$E(X) = n \frac{a}{a+b}$$

$$\text{var}(X) = n \frac{ab(a+b+n)}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

2 - Loi Bêta-binômiale de dimension r $\beta b_r(a,b;n_1, n_2, \dots, n_r)$

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_r, Y)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\{0,1, \dots, n_1\} \times \{0,1, \dots, n_2\} \times \dots \times \{0,1, \dots, n_r\} \times [0,1]$ tel que Y suit la loi bêta $\beta_{[0,1]}(a,b)$, $a > 0$, $b > 0$ et, conditionnellement à $Y = y$, X_1, X_2, \dots, X_r sont des variables indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n_1;y,1-y)$, $\mathcal{B}(n_2;y,1-y)$, \dots , $\mathcal{B}(n_r;y,1-y)$. Alors, on dit que (X_1, X_2, \dots, X_r) suit la loi bêta-binômiale $\beta b_r(a,b;n_1, n_2, \dots, n_r)$ et on a :

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_r = k_r) = C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} \dots C_{n_r}^{k_r} \times \frac{\beta(a+k_1+k_2+\dots+k_r, b+n_1+n_2+\dots+n_r-k_1-k_2-\dots-k_r)}{\beta(a,b)}$$

pour $0 \leq k_i \leq n_i$, $i = 1, 2, \dots, r$

$$E(X_i) = n_i \frac{a}{a+b} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\text{var}(X_i) = n_i \frac{ab(a+b+n_i)}{(a+b)^2(a+b+1)} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\text{cov}(X_i, X_j) = n_i n_j \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \quad i, j = 1, 2, \dots, r, i \neq j$$

ANNEXE 3
MODELE
AVEC IMMUNISATION

Les champs de renouvellement que nous présentons ne répondent pas entièrement au problème de l'épidémiologiste : le problème de l'immunisation n'est pas traité.

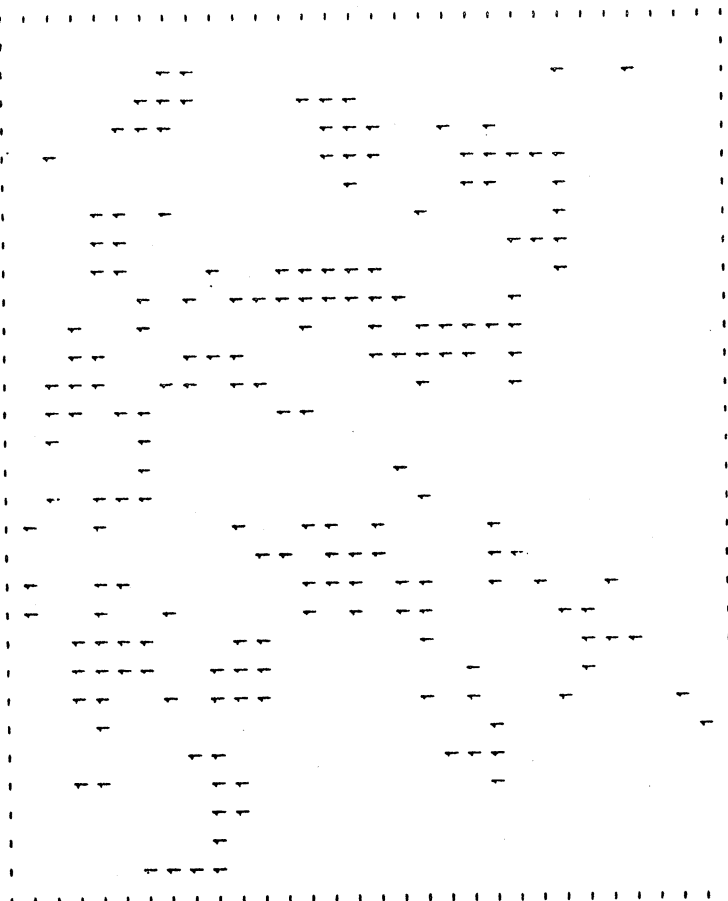
Les mesures de Gibbs sont à densité positive, aussi, pour obtenir un modèle qui respecte la condition de l'immunité, nous sommes amenés à considérer soit que l'état d'un individu est une variable ternaire {sain, malade, guéri-immunisé}, soit, et l'avantage est de reprendre en partie ce qui est établi pour les champs markovien ou de renouvellement, de distinguer deux problèmes parallèles : un champ qui modélise l'état sain ou malade des individus et un autre modélisant le caractère immunisé ou non de l'individu.

Le programme que nous présentons ci-après reprend le même potentiel que celui de l'exemple (1) du chapitre III ; nous ajoutons la contrainte suivante : si un individu se trouvait à l'itération $k-1$ dans l'état malade et qu'à l'itération k il est dans l'état sain, il restera dans l'état sain les 3 itérations suivantes, et à partir de la quatrième sera à nouveau susceptible d'être infecté (nous préférons présenter un cas d'immunisation temporaire plutôt que celui de l'immunisation totale qui conduit inexorablement à l'extinction de la maladie).

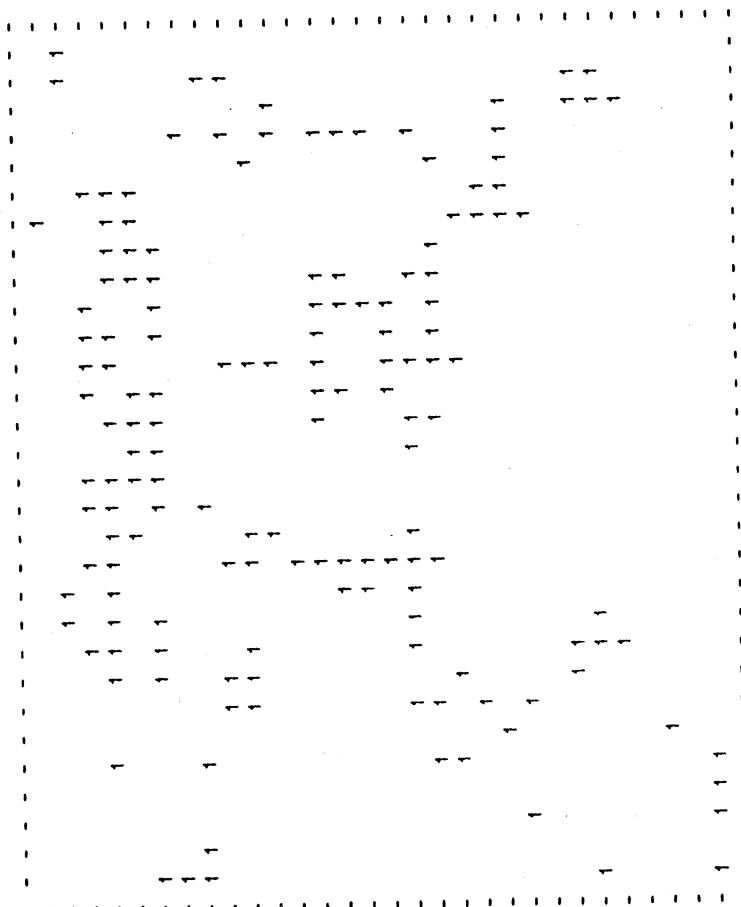
Comme cette simulation n'est basée sur aucun fondement théorique, nous ne pouvons plus justifier le choix de tel ou tel critère d'arrêt. Nous constatons que la percolation a lieu à seuil $d_0 \sqrt{5}^*$ du haut vers le bas et de la droite vers la gauche.

* euclidien

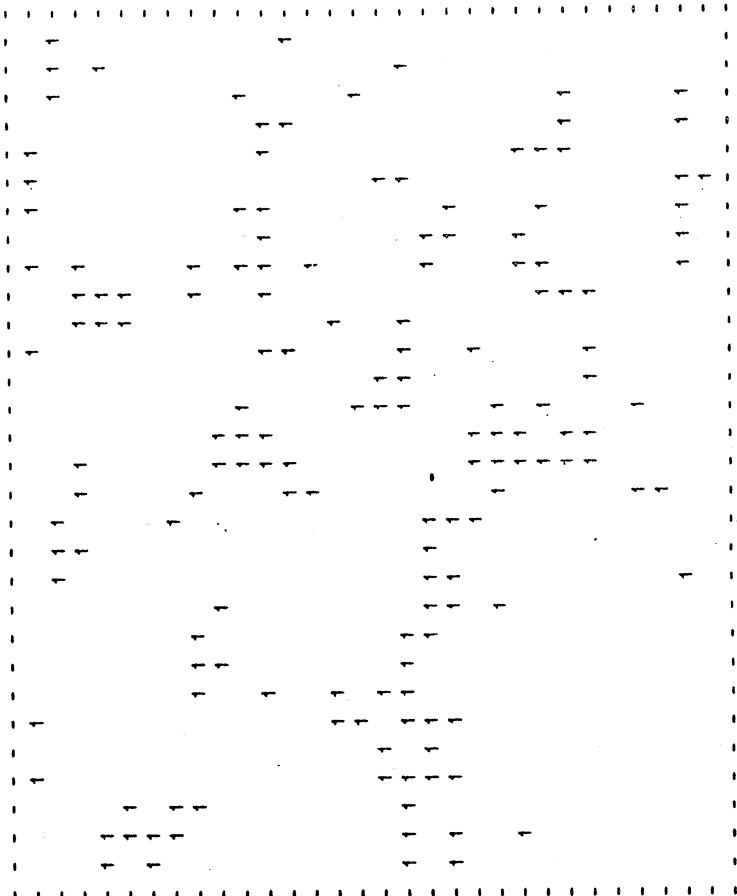
itération numéro 5
nombre d'affectés à l'étape = 188
N00 = 500
N01 = 112
N10 = 212
N11 = 76



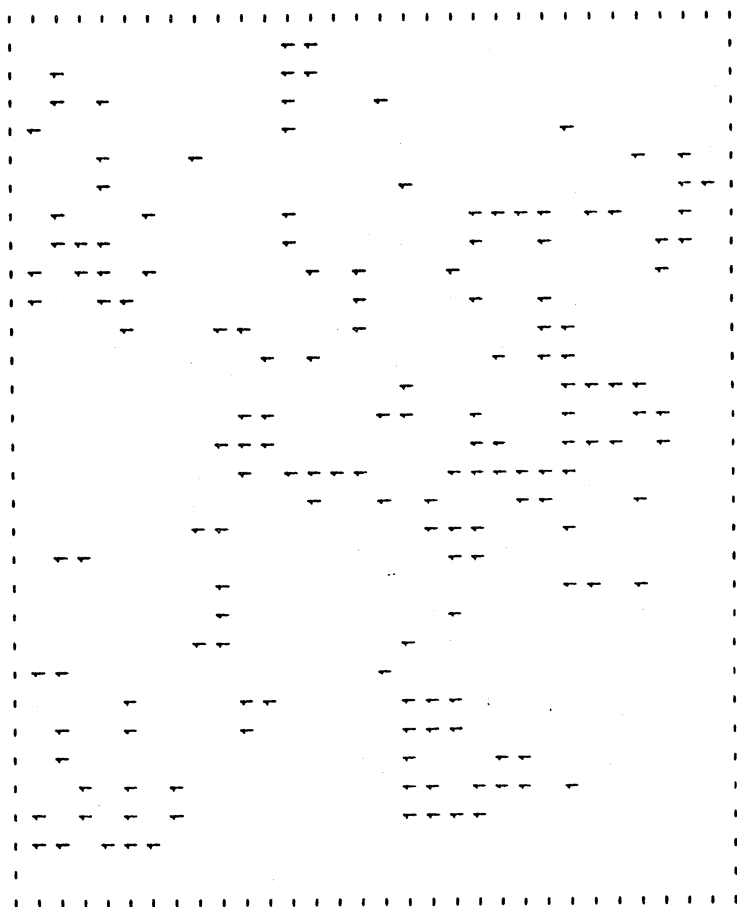
itération numéro 4
nombre d'affectés à l'étape = 153
N00 = 561
N01 = 108
N10 = 186
N11 = 45



itération numéro 9
nombre d'affectés à l'étape = 155
N00 = 448
N01 = 92
N10 = 297
N11 = 63



itération numéro 8
nombre d'affectés à l'étape = 162
N00 = 428
N01 = 93
N10 = 310
N11 = 69



ANNEXE 4
PROGRAMMES
(SIMULATION DES CAMMRS)

Nous listons les programmes utilisés pour les simulations du Chapitre III ; ceci n'est pas fait dans l'optique de présenter des sous-routines simples à analyser (l'absence de tout commentaire les rendant difficiles à interpréter) mais plutôt de donner un aperçu du degré de complexité lié à chaque sous-routine. De plus, chaque sous-routine est orientée vers une tâche particulière et, pour toute modification des simulations, il est plus aisé de réécrire la(les) sous-routine(s) plutôt que d'adapter celle(s) concernée(s) par cette modification. Les programmes sont écrits en langage fortran-16.

Nous détaillons les programmes et sous-routines, en indiquant le rôle qu'ils jouent à l'intérieur de la simulation :

- programme renouvellement

Initialise la simulation ; fixe les dimensions de la boîte, sélectionne les fichiers d'entrée et de sortie ; appelle la sous-routine pro.

- sous-routine pro(it,il,ic,ie,is)

it représente la boîte et il (resp. ic) est le nombre de ses lignes (resp. colonnes) ;

ie (resp. is) est le numéro du fichier d'entrée (resp. de sortie).

Cette sous-routine gère les autres sous-routines ; demande, en dialogue interactif, les données complémentaires ; de plus, à chaque point visité, elle associe le plus proche contaminé :

elle appelle les sousroutines ini, parcous, pois et imp3.

- sousroutine ini(it,k,n,il,ic)

it est la boîte de dimension (il,ic) ((lignes colonnes)).

Suivant la valeur de l'entier k, elle propose diverses initialisations ; n est le nombre de contaminés.

- pois(lon,no,x)

Les premiers contaminés (au nombre de no) sont à une distance lon du site x. Cette sousroutine calcule le potentiel associé au site x et tire aléatoirement l'état de ce site.

- sousroutine parcous(inii, inij, i, j ,mode, il, ic)

La boîte est de dimension (il, ic) ; suivant le mode de parcours choisi, au site de coordonnées (inii, inij), elle associe le site suivant (au sens du mode de parcours sélectionné) de coordonnées (i, j).

- sousroutine imp3(it,il,ic)

Assure l'impression de la boîte de dimension (il, ic) ; un individu "sain" n'est pas représenté ; si il est "contaminé", il est représenté par un "1".

```
subroutine pois(lon,no,x)
double precision a,b,g05daf
a=0.
b=1.
x=0
z=g05daf(a,b)
if(no.eq.0) then
  if(z.lt..001)x=1
else
  if(lon.ge.2) then
    if(z.lt..2)x=1
  else
    y=no*.24
    if(z.lt.y)x=1
  endif
endif
return
end
```

```
dimension it(50,50)
write(6,1002)
read(5,1001)ie
write(6,1003)
read(5,1001)is
write(is,1000)
read(ie,1001)il,ic
if (is.ne.6)write(is,999)il,ic
999 format(2x,i2,2x,i2)
call pro(il,il,ic,ie,is)
1000 format(2x,i2,2x,i2)
1002 format(2x,'entree')
1003 format(2x,'sortie')
1001 format(v)
stop
end
```

dimension de la boite(ligne colonne)

```

ibroutine pro(it,11,ic,ie,is)
double precision a,b,g05daf
dimension t2(6),t1(6)
write(is,108)
read(ie,101)idep
write(is,100)
read(ie,101)itype
f(is,ne,6) write(is,109)itype
write(is,102)
read(ie,101)itera
f(is,ne,6) write(is,109)itera
write(is,103)
read(ie,101)inita
f(is,ne,6) write(is,109)inita
write(is,104)
read(ie,101)mode
f(is,ne,6) write(is,109)mode
O0 format(2x,'tapez un entier : rayon de la boule de voisinage' )
O1 format (v)
O2 format (2x,'tapez un entier : n = nombre de mise a jour')
O3 format(2x,'tapez un entier : choix de l'initialisation',/.19x,'1 et 2. 3 deterministe',/.19x,'4 bruit blanc binaire melange')
O4 format(2x,'tapez un entier : choix du mode de parcours',/.19x,'1 colonne puis ligne',/.19x,'2 ligne puis colonne',/.19x,'3 escargot'
)
O5 format (2x,'nombre d'affectes a l'etape = ',.14)
O6 format(2x,'N00 = ',.14,/.2x,'N01 = ',.14,/.2x,'N10 = ',.14,/.2x,'N11 = ',.14)
O7 format(2x,/,/.2x,'iteration numero ',.14)
O8 format(2x,'tapez un entier : initialisation de nag')
O9 format(2x,.14)
O10 format(2x )
call g05cbf(idep)
n=0
call ini(it,inita,n,11,ic)
a=0
b=1
write(is,105)n
call imp3(it,is,11,ic)
do 111 i=1,68
write(is,110)
111 continue
do 4 iter=1,itera
if (iter.lt.14)then
do 322 ihu =1,11
write(is,110)
322 continue
endif
nh=0
ng=0
n=0
n00=0
n01=0
ini1=1
inj=0
do 2 ipar=1,(11*ic)
call parcours(ini,inj,i,j,mode,11,ic)
no=0
inf=it(1,j)
do 3 lon=1,itype
if(no.ge.1)then
```

```

n=lon-1
pto 10000
ndif
  > 3 k=(-lon),lon
  j=i+k
  = (i1.ge.1.and.i1.le.il)then
  > 8 kk=1,2
  j=j+((lon-abs(k))*((-1)**kk))
  = (j1.ge.1.and.j1.le.ic)then
  = (t(i,j).eq.1)then
  = (abs(k).lt.lon)then
  > no+1
  lse
  = (kk.eq.1)no=no+1
  ndif
  ndif
  ndif
  ndif
  >000 call pois(lon,no,x)
  = (inf.eq.0.and.x.eq.1)n01=n01+1
  = (inf.eq.0.and.x.eq.0)n00=n00+1
  nj=j
  ni=i
  t(i,j)=x
  = (x.eq.1) then
  =n+1
  = (i.lt.(ic/2))ng=ng+1
  = (j.lt.(il/2)) nh=nh+1
  ndif
  continue
  l1=n-n01
  l0=(l1+ic)-n-n00
  z(1)=t2(1)+n
  z(2)=t2(2)+ng
  z(3)=t2(3)+nh
  z(4)=t2(4)+n00
  z(5)=t2(5)+n01
  z(6)=t2(6)+n10
  =iter/7
  v=iter/7
  = (iter.le.14.or.vw.eq.w)then
  =ite(is,107)iter
  =ite(is,105)n
  =ite(is,106)n00,n01,n10,n11
  call imp3(ft.is,il,ic)
  = (iter.le.13.and.vw.ne.w) then
  > 112 j1=1,8
  =ite(is,110)
  12 continue
  lse
  = (t(1).eq.0) then
  > 488 jmi=1,6
  =ite(is,110)
  38 continue
  >to 118
  ndif
  > 19 iml =1.6
  t1(iml)=(t1(iml)-t2(iml))/t1(iml)
  19 continue
  567 format("stop : seuil du test atteint")
  do 113 iml=1,6
  write(is,115)abs(t1(iml))
  113 continue
  if(abs(t1(1)).lt..027)then
  write(is,567)
  goto934
  endif
  115 format(3x,f13.6)
  114 continue
  118 do 487 iml=1,6
  t1(iml)=t2(iml)
  t2(iml)=0
  487 continue
  if(1iter.eq.7)then
  do 233 ihu=1,2
  write(is,110)
  233 continue
  else
  do 116 iml =1,13
  write(is,110)
  116 continue
  endif
  933 continue
  do 6098 lop=1,60
  write(is,110)
  6098 continue
  endif
  4 continue
  934 continue
  return
end

```

```

line ini(it,k,n,il,ic)
on it(il,ic)
precision a,b,g05daf

      1) goto 10
      2) goto 5
      3) goto 37
f(a,b)
  1,il
  1,ic
  if(a,b)
  :y)then
  :1

inve
  i=(i1/3).(i1/2)
  =1,ic
  )=1

inve
  do 1 i=(i1/3).(2*i1/3)
  )=1
  inve
  i=(i1/5).(3*i1/5)
  =(2*i1c/5).(3*i1c/5)
  )=0
  tinue
  i
  38 i=1,5
  j=1,ic
  le.5.or.j.ge.(ic-4))t(i,j)=1
  ntinue
  i=(i1-4),i1
  j=1,ic
  le.5.or.j.ge.(ic-4))t(i,j)=1
  continue
  tinue
  n

```

```

subroutine imp3(itab,kji,il,ic)
dimension itab(il,ic)
character*1 b,u,s
b=" "
u="1"
s="-"
format(2x)
write(kji,1003)
do 1 i=1,icc
  write(kji,1000)s
  1 continue
  write(kji,1003)
  do 2 i=1,il
    write(kji,1000)s
    do 3 j=1,ic
      if (itab(i,j).eq.0) then
        write(kji,1000)b
      else
        write(kji,1000)u
      endif
    3 continue
    write(kji,1000)s
    write(kji,1002)
    continue
    do 5 i=1,icc
      write(kji,1000)s
      5 continue
      write(kji,1003)
      format(1x,a1,$)
      format(3x,"iteration numero",i3)
      format(1x)
      return
    end

```



```
subroutine parcours(inii, inij, i, j, mode, il, ic)
  if (mode.eq.2) goto 1
  if(mode.eq.3)goto 2
  if((inij.le.(il-1)) then
    i=inii
    j=inij+1
  else
    i=inii+1
    j=inij
  endif
  goto 10
1 if ((inii.le.(ic-1))then
  i=inii+1
  j=inij
else
  i=inii
  j=inij+1
endif
2 if ((inij.le.(il-inii).and.inii.le.(il/2).and.(inii-1).le.inij) then
  i=inii
  j=inij+1
else
  i=inii
  j=inij-1
endif
3 if ((inij.ge.(ic-inii+2).and.inii.ge.(ic/2)) then
  i=inii
  j=inij-1
else
  i=inii-1
  j=inij
endif
4 if ((inij.ge.(ic-inii+2).and.inii.ge.(ic/2)) then
  i=inii
  j=inij-1
else
  i=inii-1
  j=inij
endif
5 continue
return
end
```

REFERENCES

- J. BESAG (1974) Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems. *J. Royal Statist. Soc.* 836, p. 192-254.
- J. DEMONGEOT (1981a) Asymptotic inference for Markov random fields on \mathbb{Z}^d . *Springer Series in Synergetics* 9, p. 254-267.
- J. DEMONGEOT (1981b) Etude asymptotique d'un processus de contagion. In Biométrie et épidémiologie (Eds J.M. Legay et al.), p. 143-152, INRA, Paris.
- J. DEMONGEOT (1983) Coupling of Markov processes and Holley's inequalities for Gibbs measures. In Proceeding of the IXth Prague Conference, p. 173-189, Academia, Prague.
- J. DEMONGEOT (1984) Random automata and random fields. In Dynamical Systems and Cellular Automata, p.125-138, Academia Press, Londres.
- R. I. DOBRUSHIN (1978) Locally interaction systems and their application in biology. Springer Verlag, New York.
- D. GEMAN et S. GEMAN (1983a) Parameter estimation for some Markov random fields. Tech. Report, Div. Appl. Math., Brown University, R. I.
- S. GEMAN et D. GEMAN (1983b) Stochastic relaxation, Gibbs distribution and the restoration of image. Tech. Report, Div. Appl. Math., Brown University, Providence, R. I.
- S. GOLDSTEIN (1981) Entropy increase in dynamical systems. *Isr. J. of Maths* 38, p. 241-256.

- G. GREGOIRE (1982) Processus de renouvellement et généralisation en vue de ses applications. Non publié.
- U. GREANDER (1983) Tutorial in pattern theory. Brown University, Div. Appl. Math., Providence, R. I.
- E. GUYON et C.D. MITESCU (1974) Percolation et contagion. In Réseaux (laboratoire du CNRS de dynamique des réseaux), p. 141-170.
- V. ISHMAN (1981) An introduction to spatial point process and Markov random fields. International Statist. Rev., vol 49, p. 21-43.
- K. KRICKEBERG (1981) Processus ponctuels. in Ecole d'été de Saint-Flour X, Lect. Note in Maths 929, p. 205-313.
- J. C. PRESTON (1974) Gibbs states on countable sets. Cambridge university Press, Cambridge.
- F. SPITZER (1974) Introduction aux processus de Markov à paramètres dans Z^d . Lect. Notes in Maths 598, p. 188-248.
- S. D. TULJAPURKAR (1982) Why use entropy ? It determines the rate of convergence. J. Math. Biol. 13, p. 325-345.
- R. B. ISRAEL (1979) Convexity in the theory of the lattice gases. Princeton Un. Press, New Jersey.
- B. LACOLLE (1984) Sur certaines méthodes de calcul de la physique statistique. Thèse d'état, Grenoble.
- J. NEVEU (1977) Processus ponctuel in Ecole d'été de St Flour VI, Lect. Note in Maths 598, p. 300-447.

B. GIDAS (1984) Non-stationary Markov chains and convergence of the annealing algorithm. Dep. of math., Rutgers University, New Brunswick, N. J.

E. GLOTZL (1984) Gibbsian description of point processes. In Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 24, North-Holland, Amsterdam.

M. LOEVE (1962) Probability Theory II. Graduate Texts in mathematics, Springer-Verlag, New-York.

J. R. BARRA (1981) Mathematical basis of statistics. Academic Press.

J. C. FRAUENTHAL (1980) Mathematical modeling in epidemiology. Springer Verlag, New York.

D. RUELLE (1972) On the use of small external fields. Ann. of Physics, 69.

DERNIERE PAGE D'UNE THESE

3È CYCLE, DOCTEUR INGÉNIEUR OU UNIVERSITÉ

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M.M....DEMOINGEOT.../...LE BRETON

M.

M. Jean F. RICAT..... est autorisé
à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR Ingénieur....
.....

Grenoble, le **11 JAN. 1985**

Le Président de l'Université Scientifique
et Médicale

M. TANCHE

J. Tanche



