

Bases de fonctions sur les variétés

Bruno Vallet

INRIA Nancy Grand Est / LORIA / ALICE

Plan

Introduction

I. Harmoniques Variétés

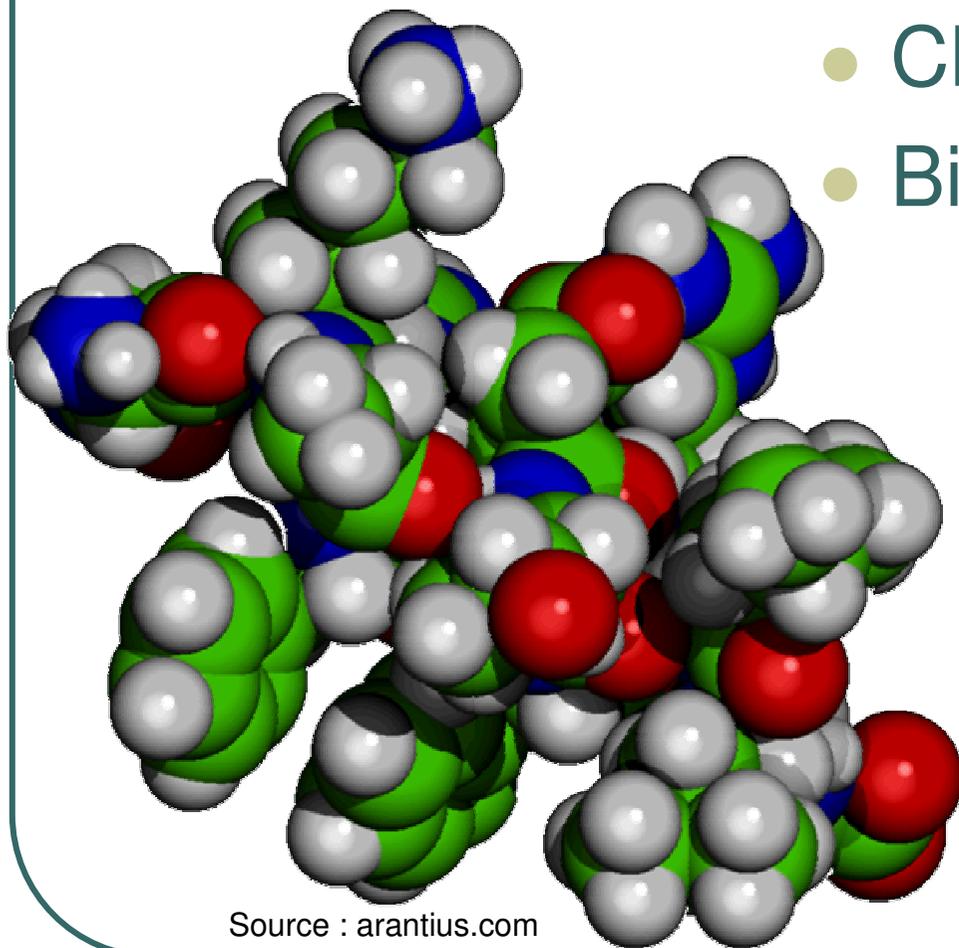
II. Champs de Directions

Géométrie numérique

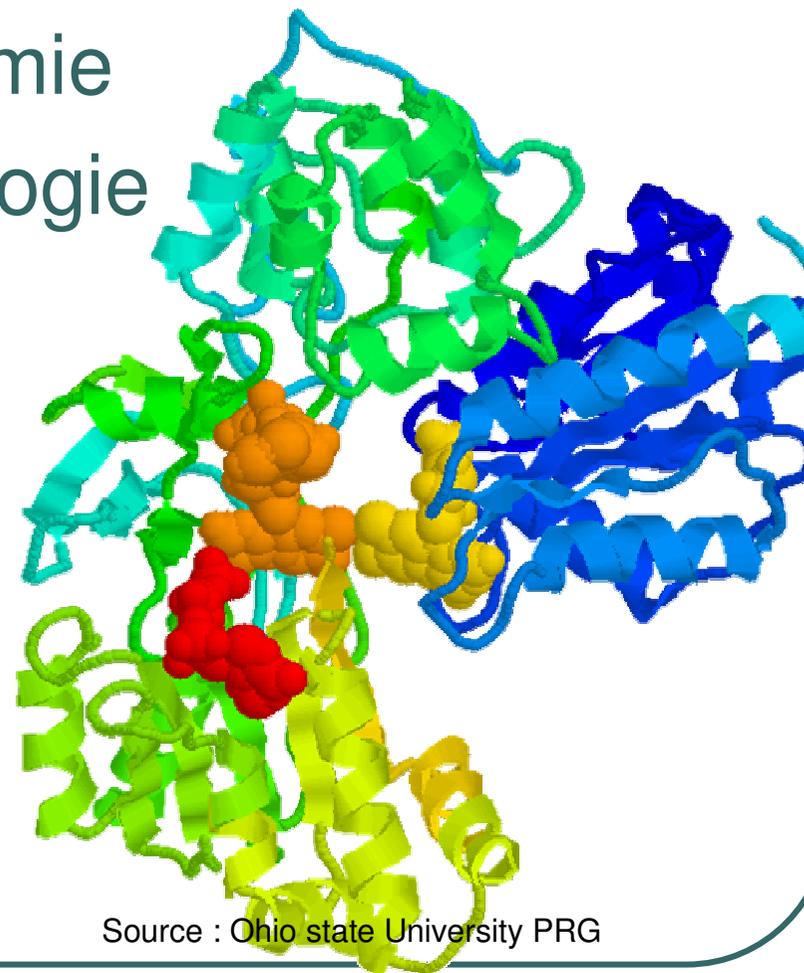
- Organisation de l'espace:
 - Représentation
 - Description
 - Manipulation

Géométrie numérique

- Chimie
- Biologie



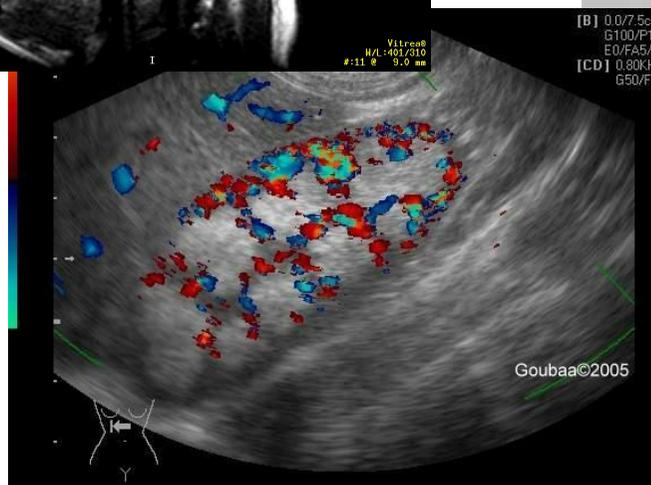
Source : arantius.com



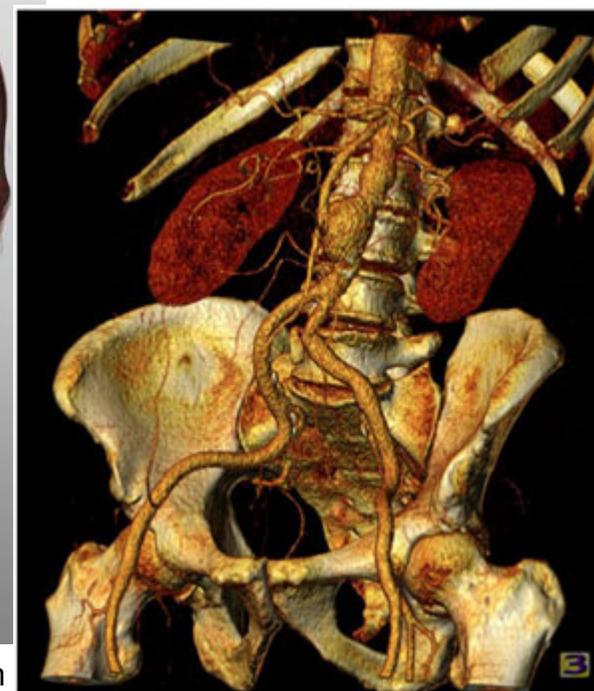
Source : Ohio state University PRG

Géométrie numérique

- Médecine



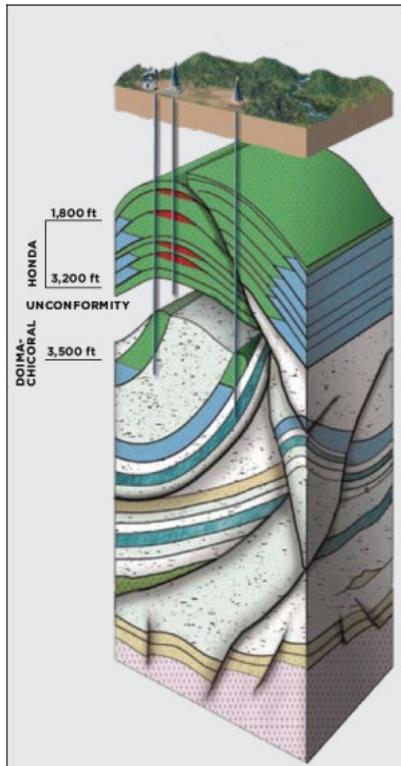
Source : digitalmedianet.com



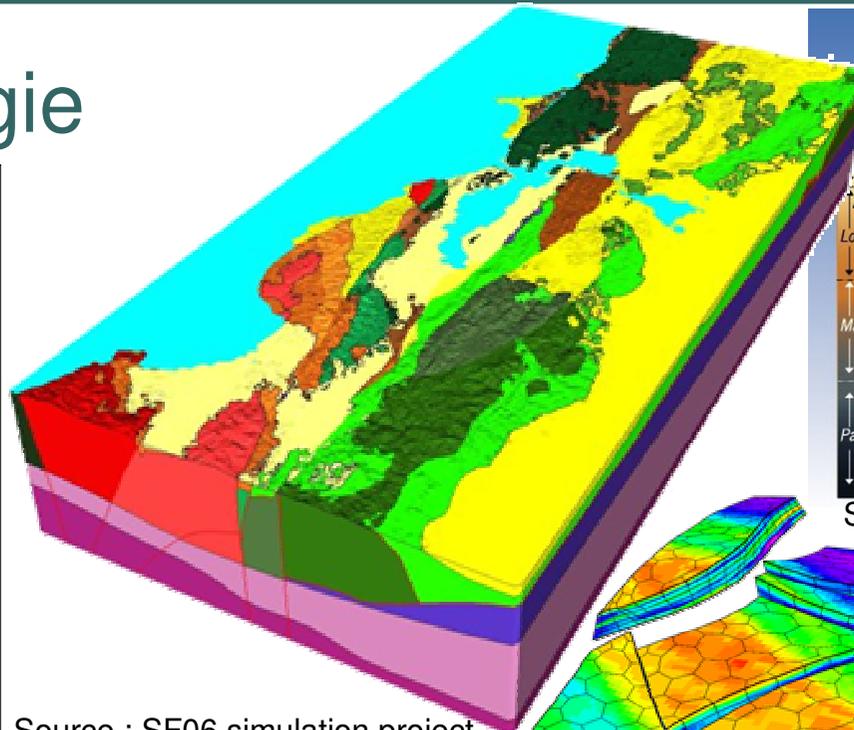
Source : medgadget.com

Géométrie numérique

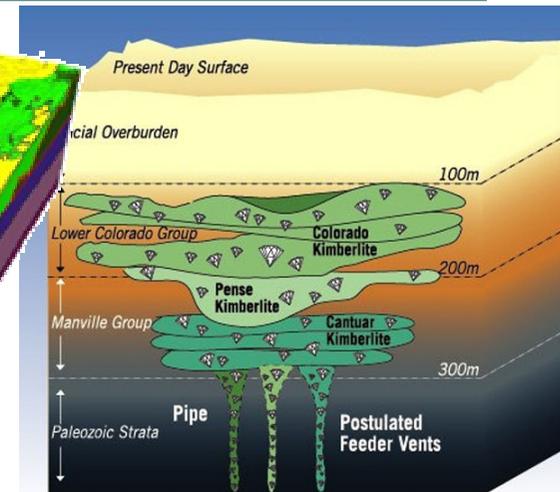
- Géologie



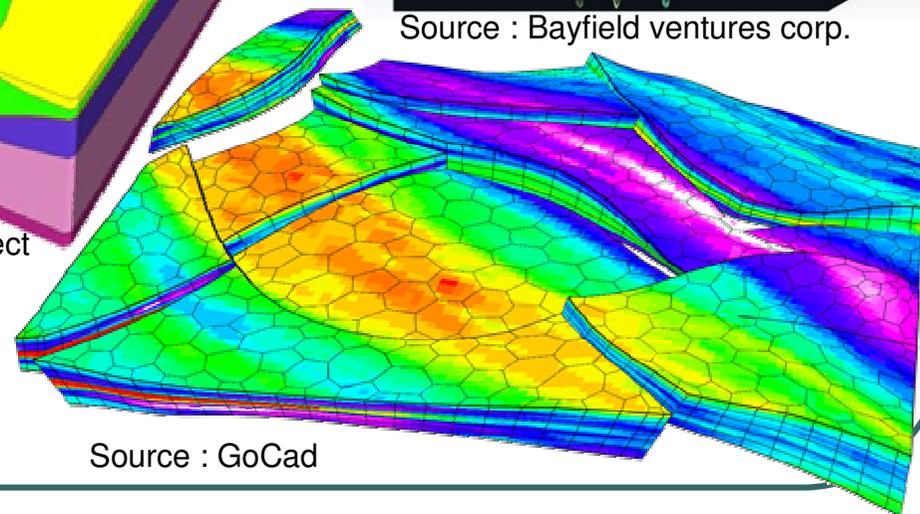
Source : petrominerales.com



Source : SF06 simulation project



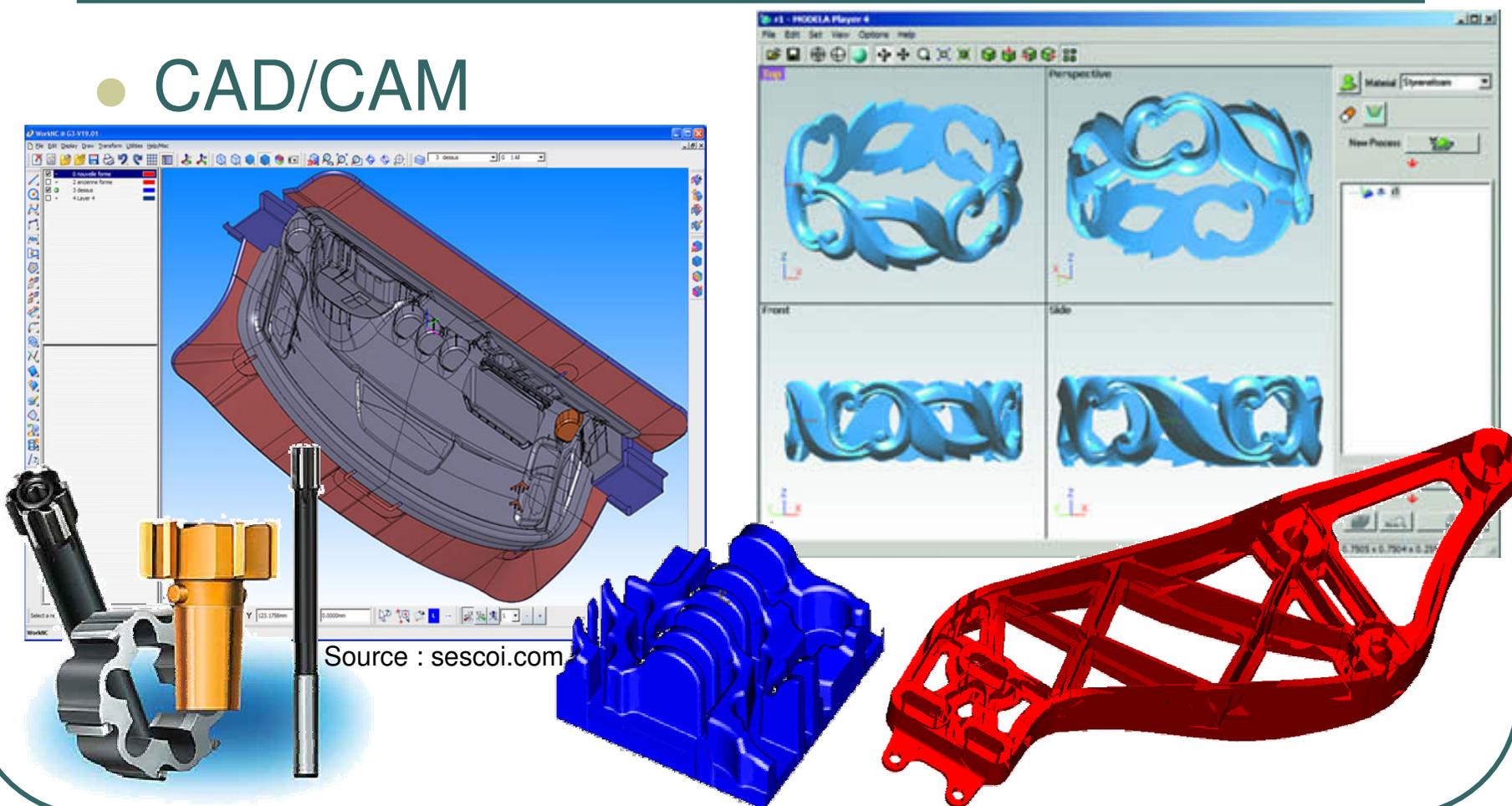
Source : Bayfield ventures corp.



Source : GoCad

Géométrie numérique

- CAD/CAM

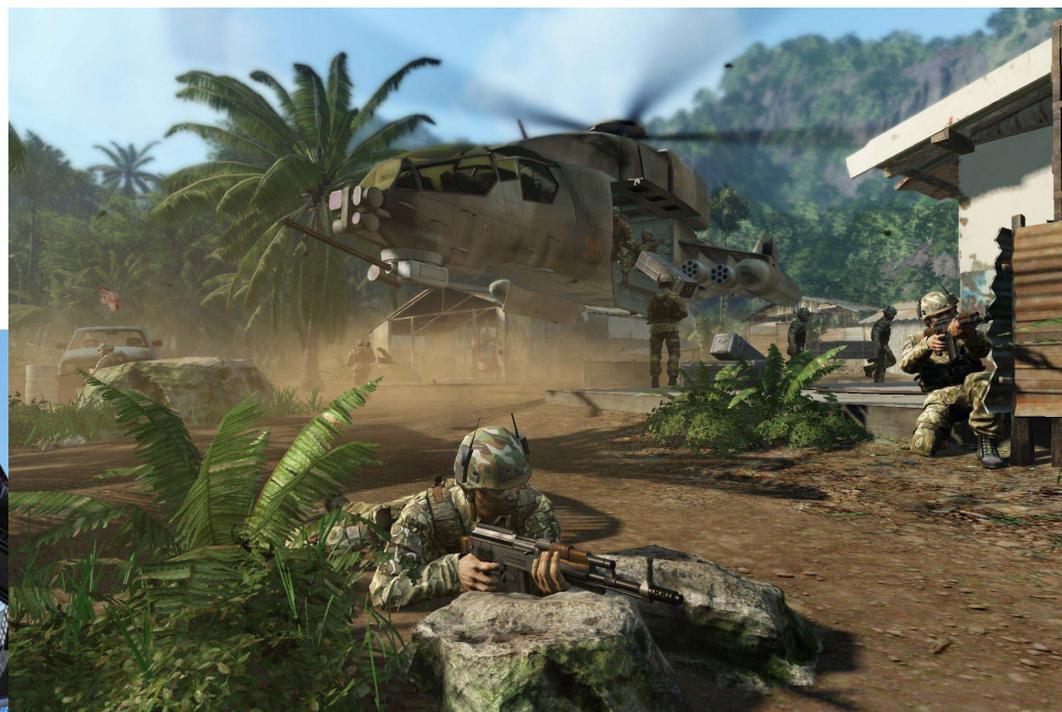


Géométrie numérique

- Jeux Vidéo



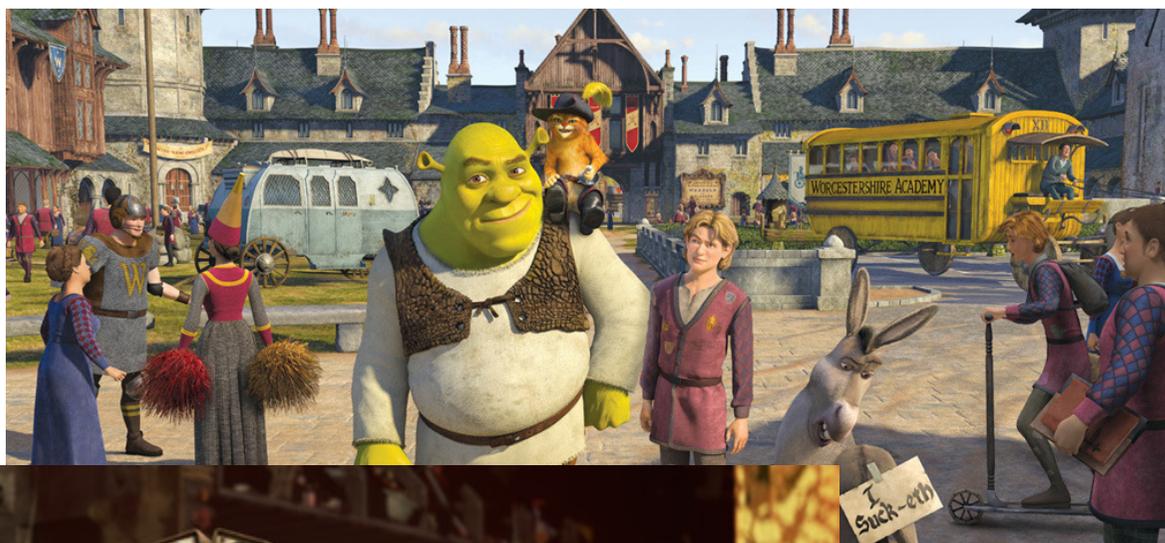
Trackmania



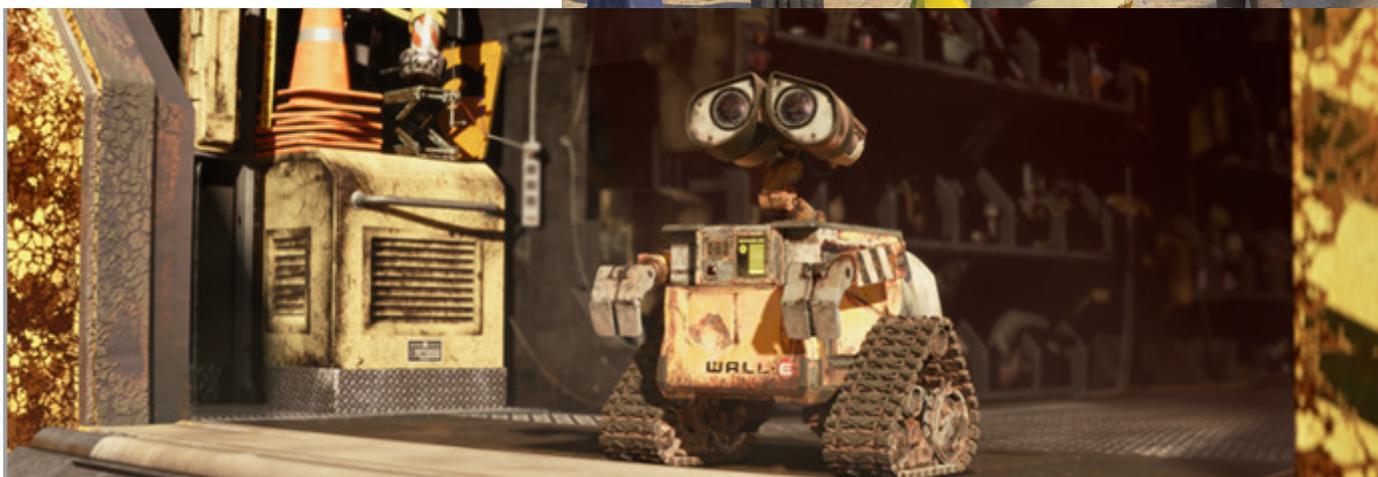
Far Cry

Géométrie numérique

- Animation



Shrek III



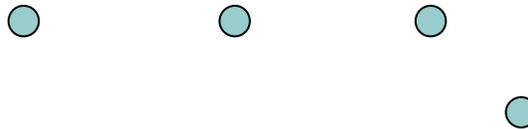
Wall-E

Géométrie et variétés

- Points
 - Courbes
 - Surfaces
 - Volumes
- } Variétés

Représentation de la Géométrie

● Points



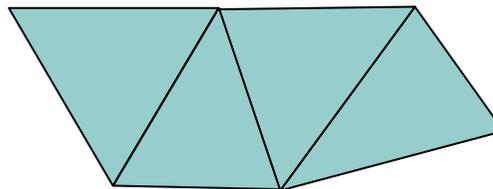
● Sommets

● Courbes



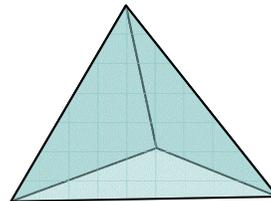
● Arêtes

● Surfaces



● Triangles

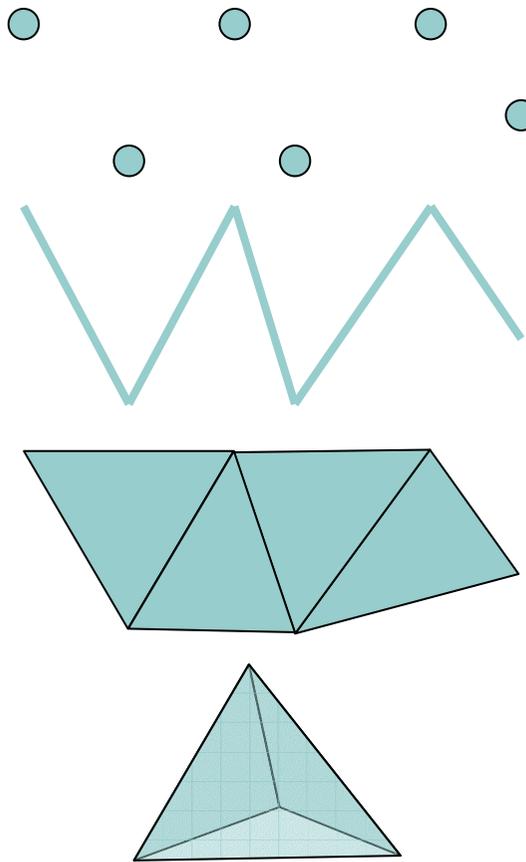
● Volumes



● Tétraèdres

Représentation de la Géométrie

Simplexes



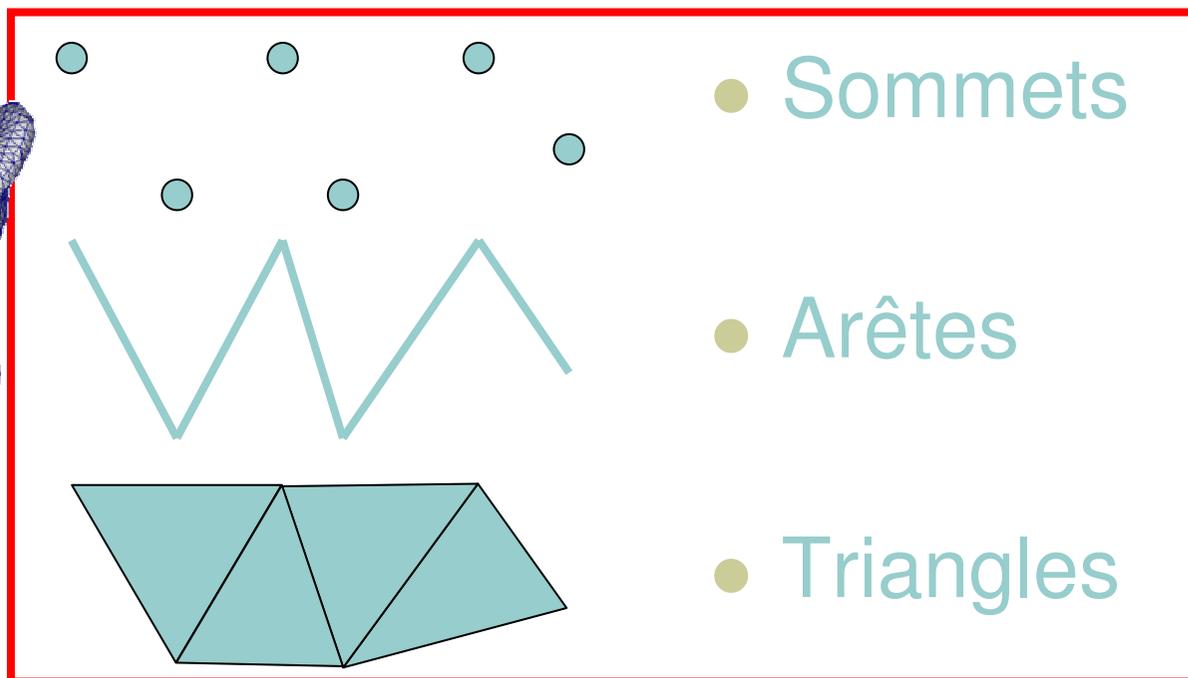
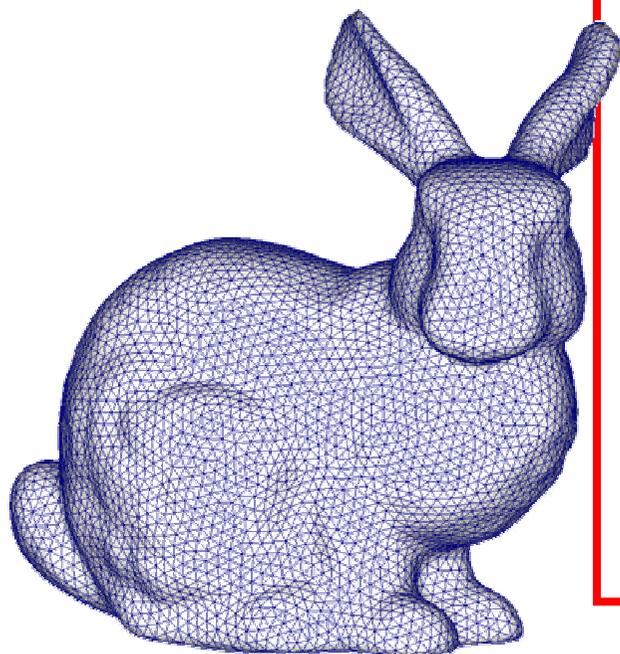
● Sommets

● Arêtes

● Triangles

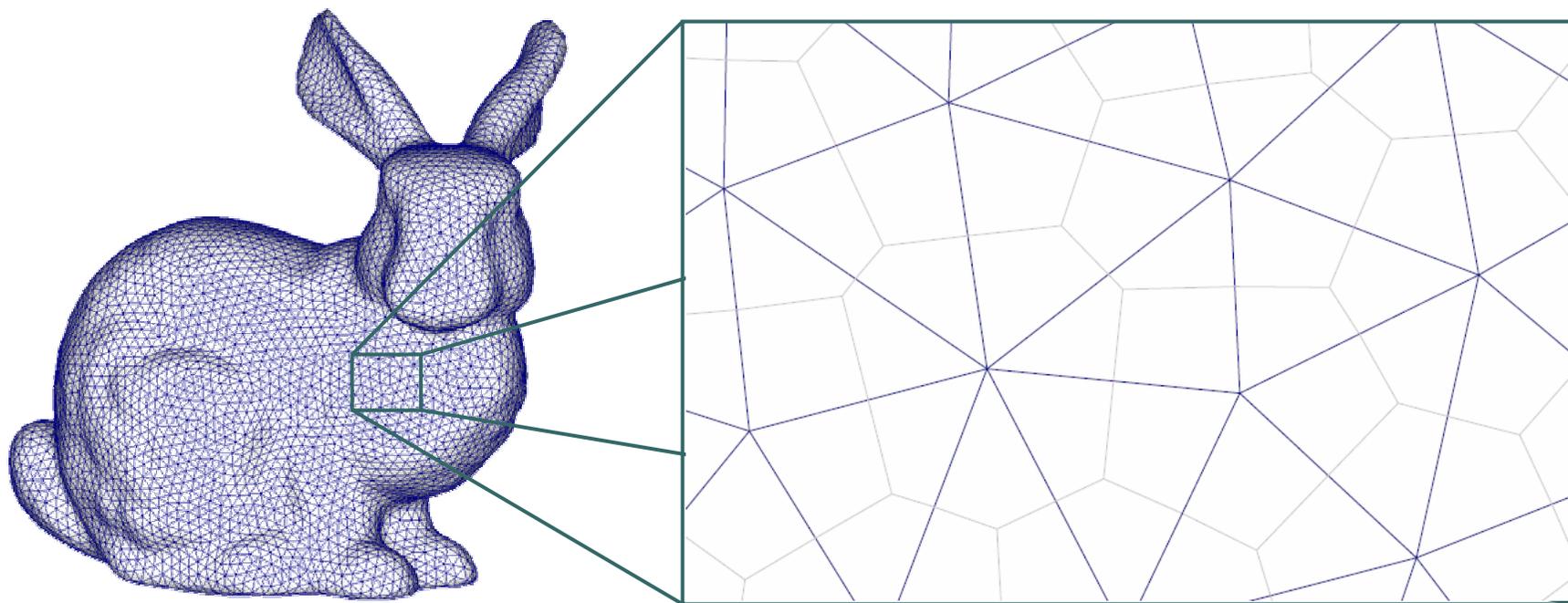
● Tétraèdres

Maillage



Maillage

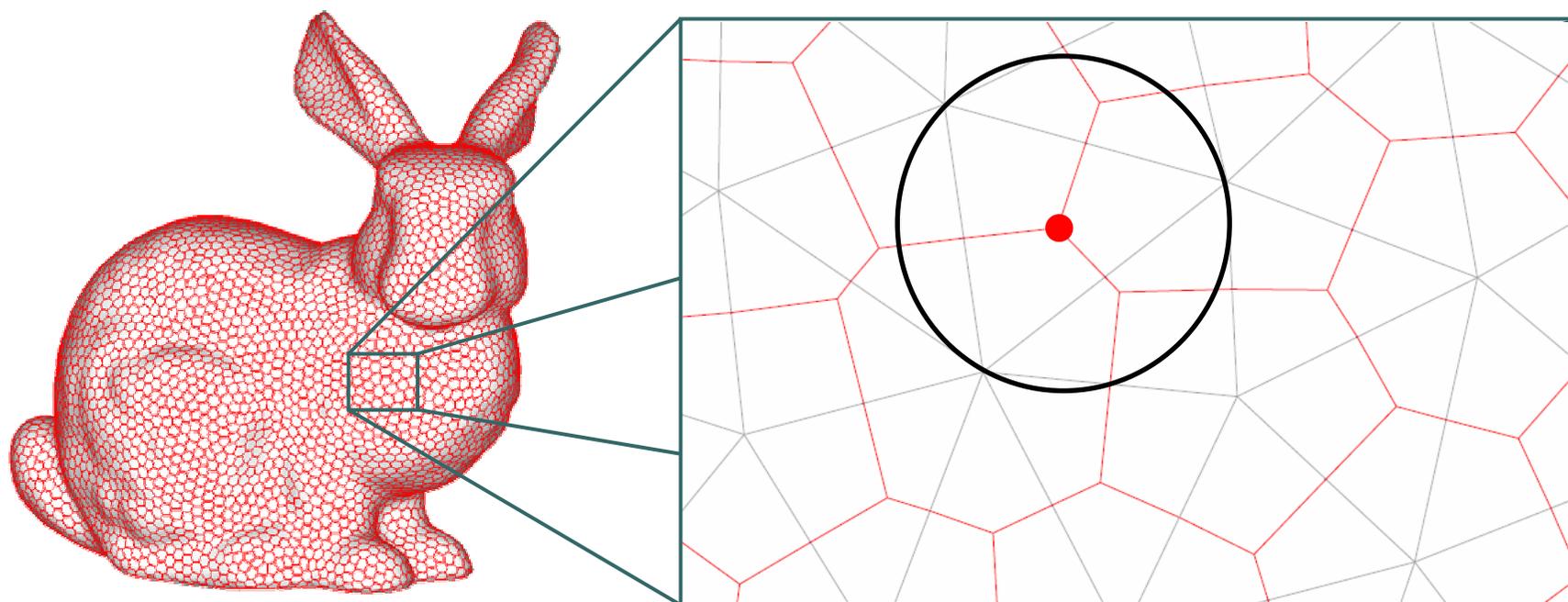
Maillage primal



Maillage primal

Maillage dual

Maillage dual



Maillage primal

Maillage dual

Calcul Extérieur Discret

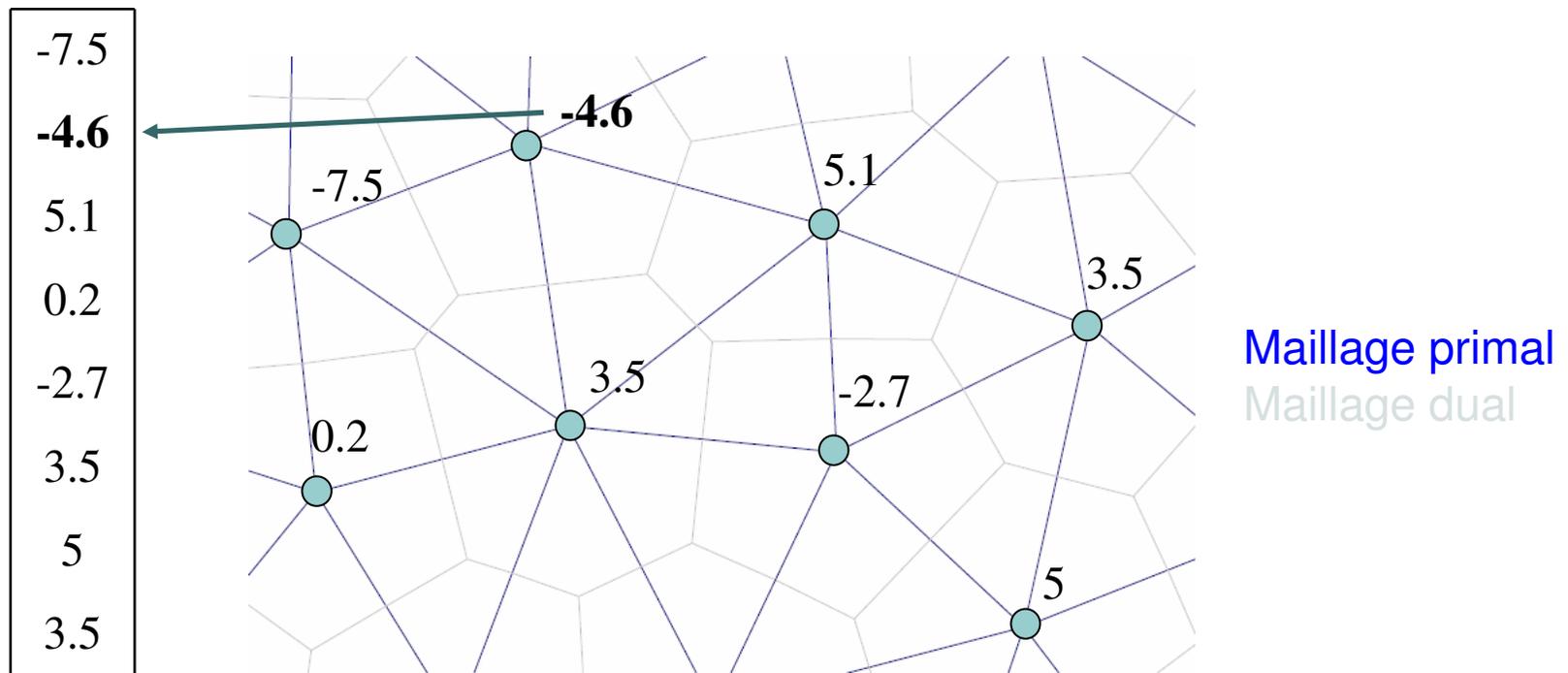
- Sur un maillage, on veut:
 - définir des **quantités**
 - définir des **opérateurs différentiels** (div, grad, rot)
 - discrétiser des **équations**.
- Le **Calcul Extérieur Discret** fait cela de façon:
 - simple
 - rigoureuse.
- [Arnold], [Mercat], [Hirani], [Desbrun]

Calcul Extérieur Discret

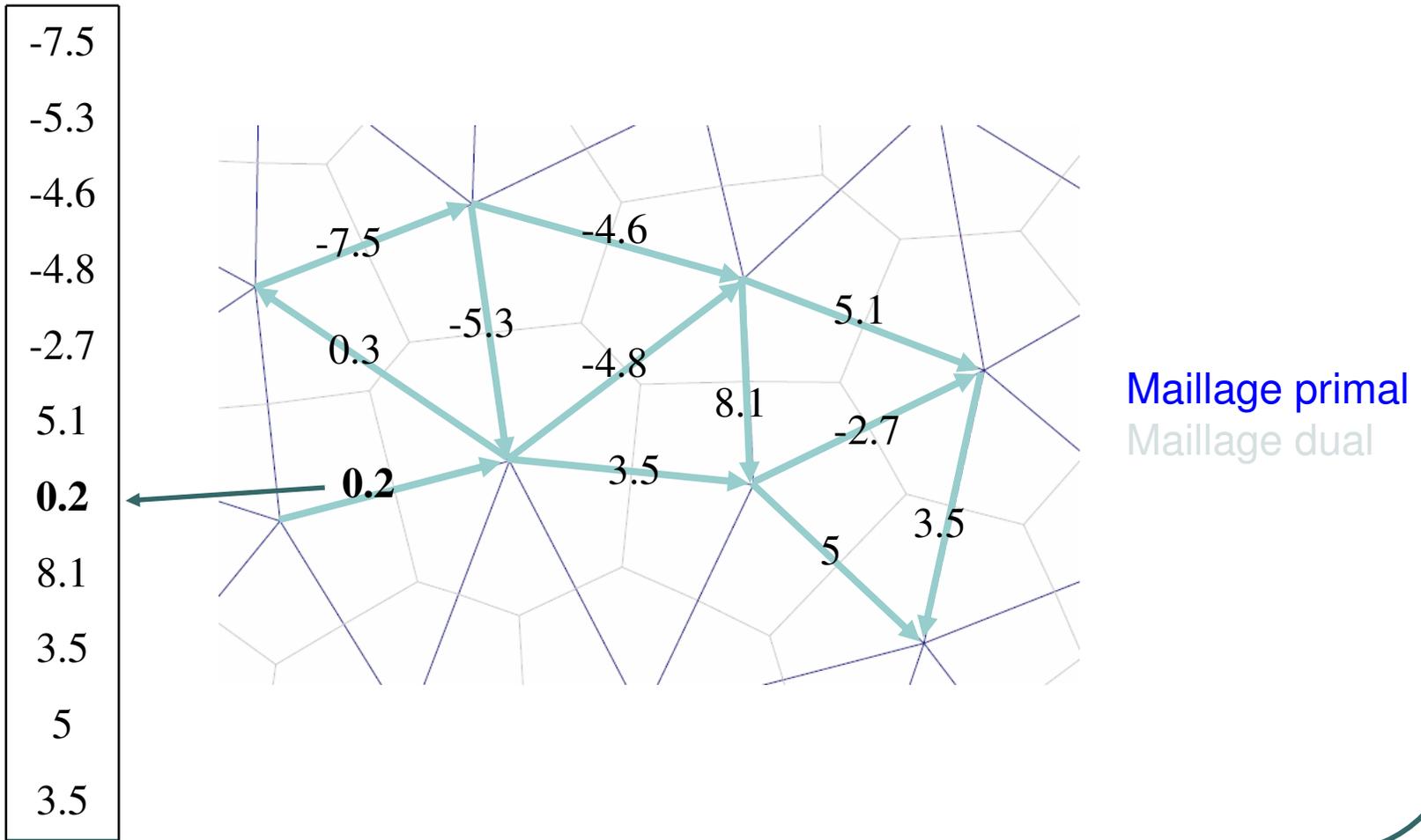
Le calcul extérieur discret se base sur des:

- **k-formes/k-formes duales**
 - quantités définies sur des **simplexes** orientés
 - généralisent les **fonctions**
 - vues comme des **vecteurs** de coefficients
- **Opérateurs** linéaires:
 - reliant les **k-formes**
 - discrétisent les **opérateurs différentiels**
 - vus comme des **matrices**.

0-formes



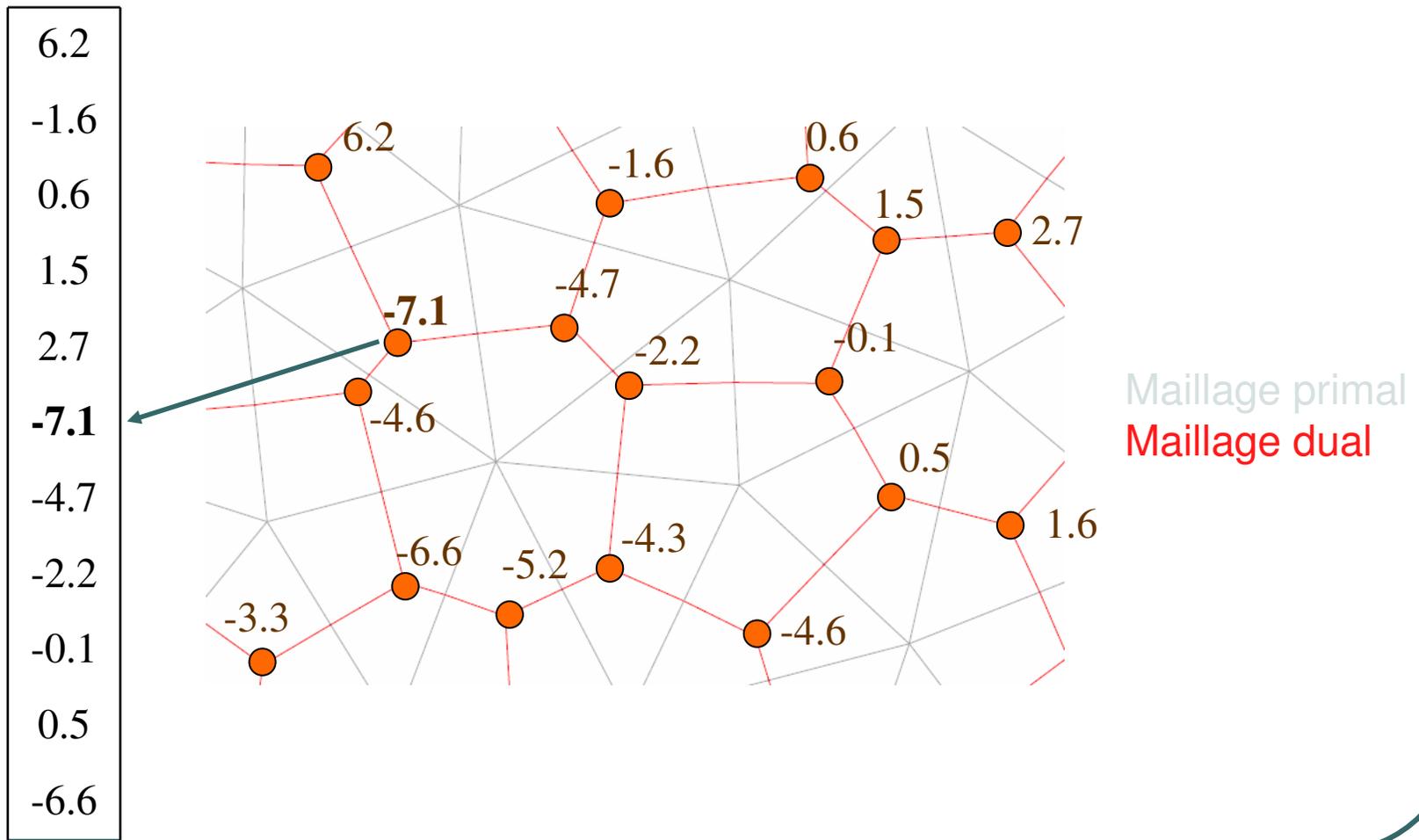
1-formes



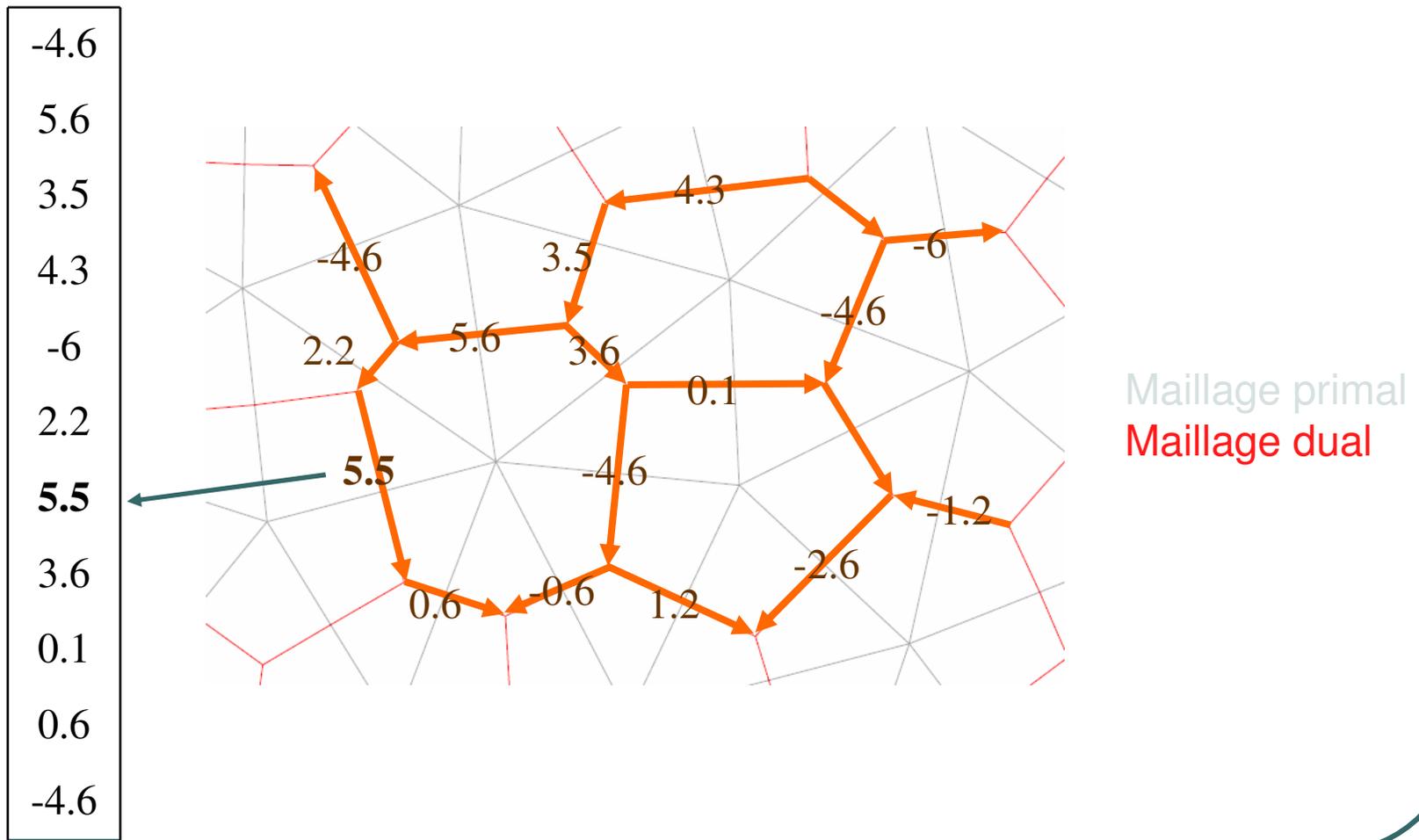
2-formes



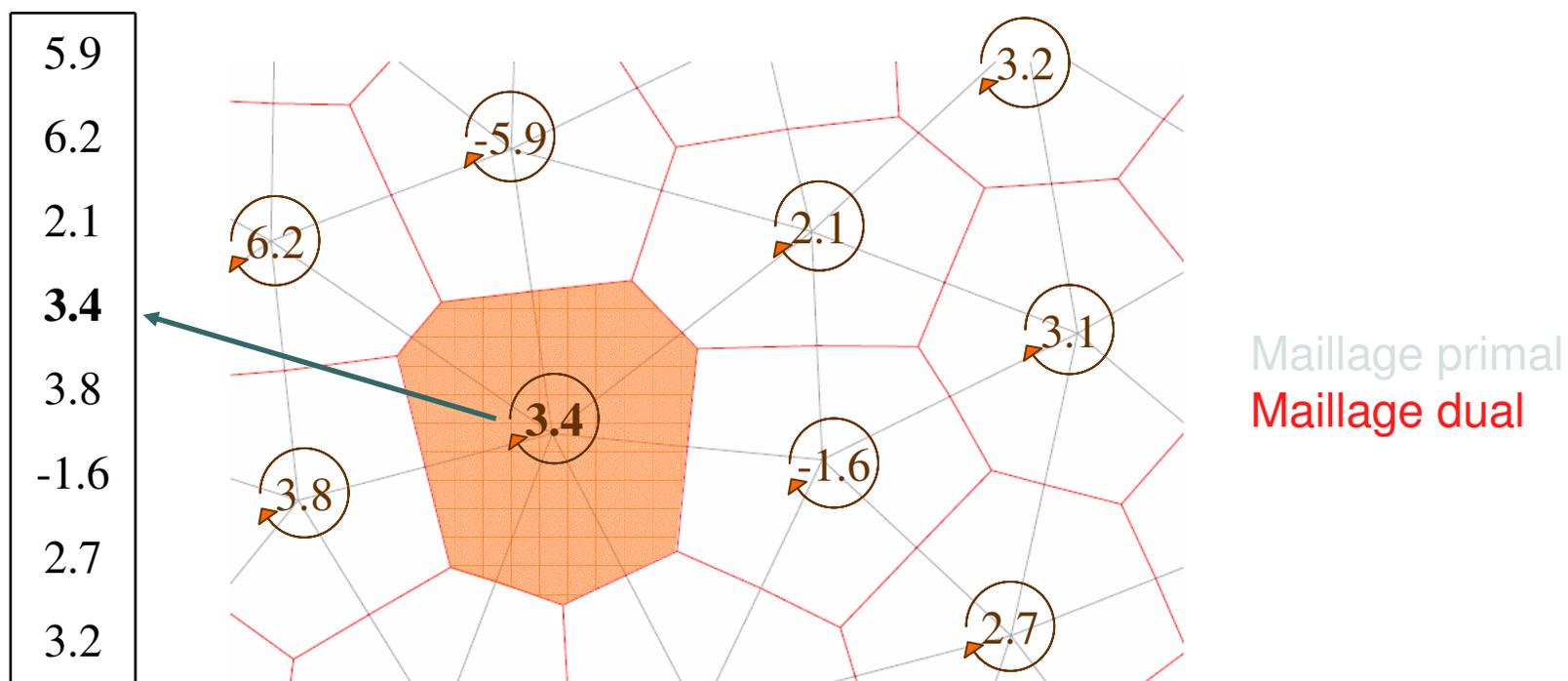
0-formes duales



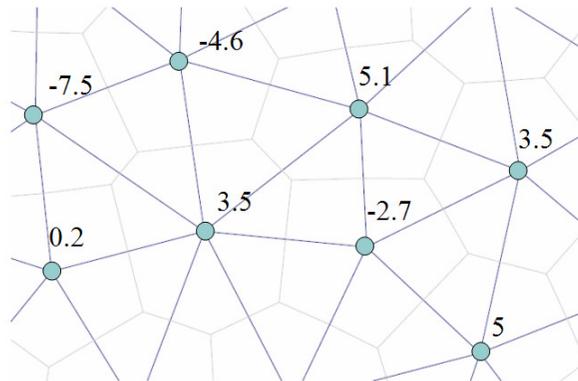
1-formes duales



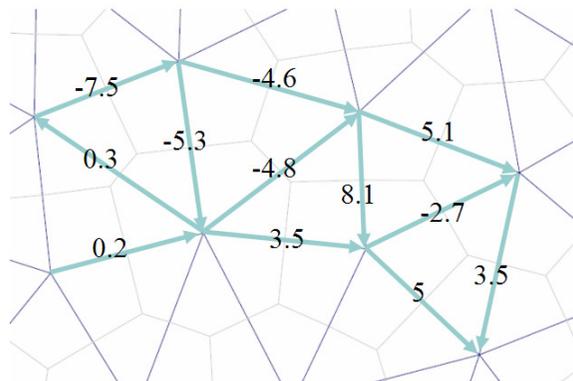
2-formes duales



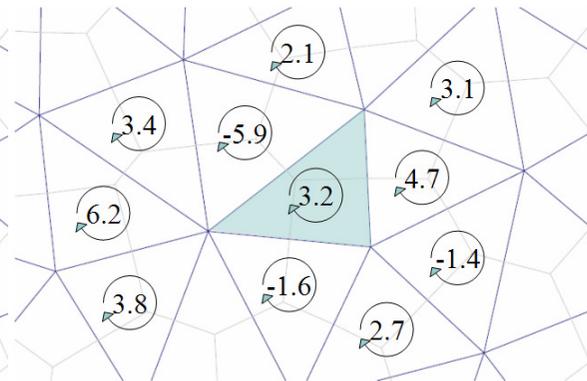
k-formes/*k-formes duales*



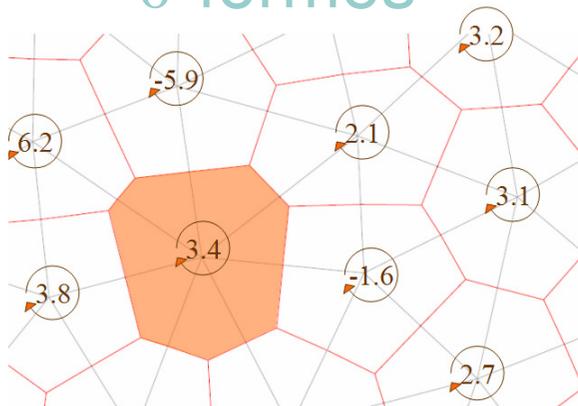
0-formes



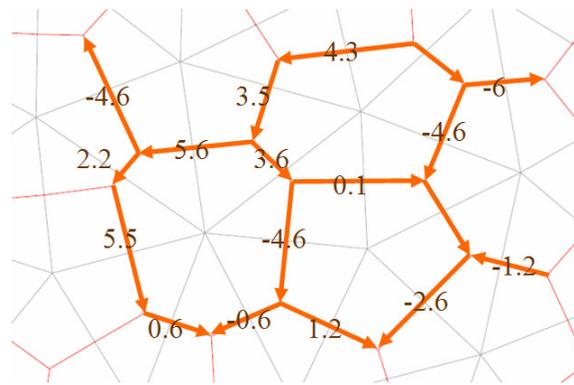
1-formes



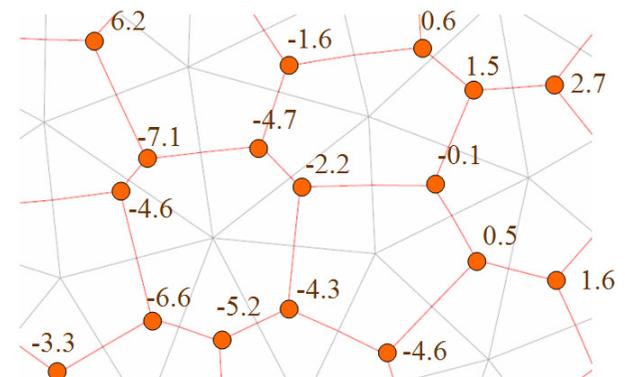
2-formes



2-formes duales



1-formes duales



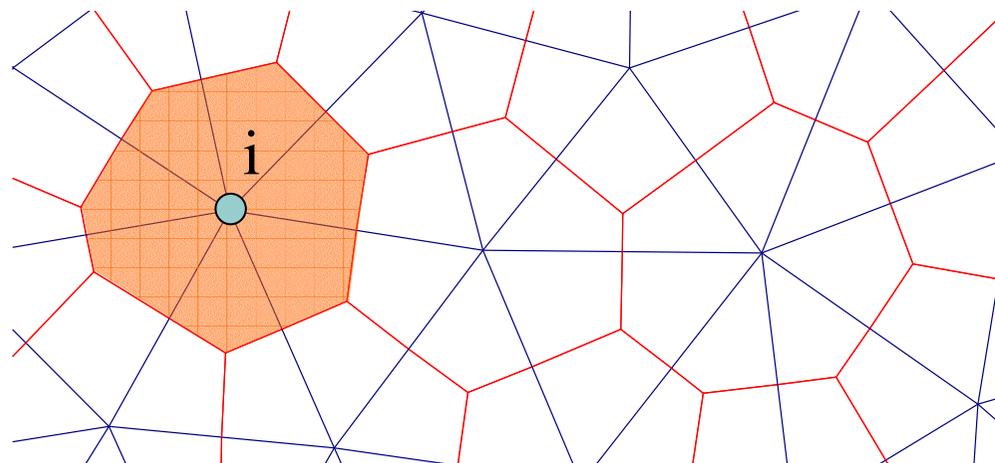
0-formes duales

b) Opérateurs

	de	vers	contient
$*_k$	k-formes	(2-k)-formes duales	géométrie
d_k	k-formes	(k+1)-formes	connectivité

Etoile de Hodge \star_0

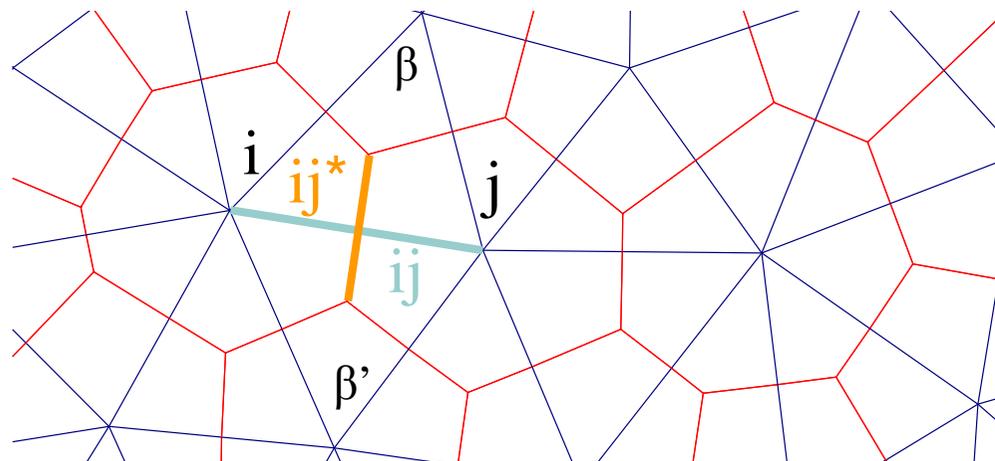
de	vers	terme
0-formes	2-formes duales	$ i^* $



Maillage primal
Maillage dual

Etoile de Hodge $*_1$

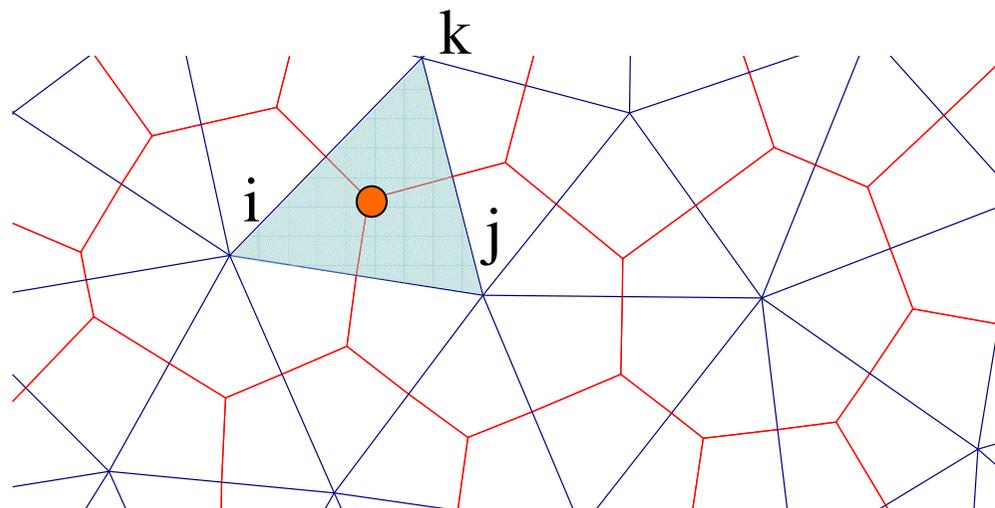
de	vers	terme
1-formes	1-formes duales	$ ij^* / ij = \cot(\beta) + \cot(\beta')$



Maillage primal
Maillage dual

Etoile de Hodge \star_2

de	vers	terme
2-formes	0-formes duales	$1/ijkl$

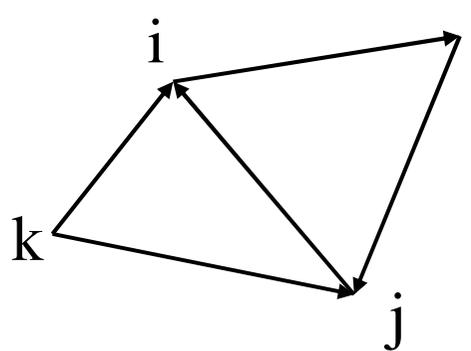


Maillage primal
Maillage dual

Dérivée extérieure d_1 (gradient)

de	vers	terme
0-formes	1-formes	$d_1 f (ji) = f_i - f_j$

Connectivité
sommet/arête orientée



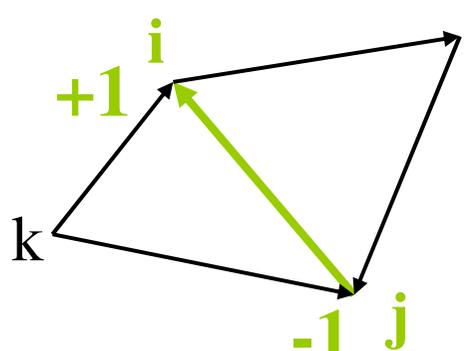
	d_1	i	j	k	1	f	$d_1 f$
ji	+1	-1	0	0	0	f_i	$f_i - f_j$
kj	0	+1	-1	0	0	f_j	$f_j - f_k$
ki	+1	0	-1	0	0	f_k	$f_i - f_k$
il	-1	0	0	0	+1	f_1	$f_1 - f_i$
lj	0	+1	0	0	-1		$f_j - f_1$

\times

Dérivée extérieure d_1 (gradient)

de	vers	terme
0-formes	1-formes	$d_1 f (ji) = f_i - f_j$

Connectivité
sommet/arête orientée



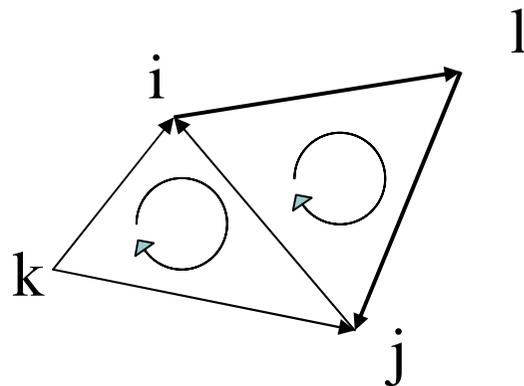
Connectivité	d_1	i	j	k	1	f	$d_1 f$
ji	+1	-1	0	0	0	f_i	$f_i - f_j$
kj	0	+1	-1	0	0	f_j	$f_j - f_k$
ki	+1	0	-1	0	0	f_k	$f_i - f_k$
il	-1	0	0	0	+1	f_l	$f_l - f_i$
lj	0	+1	0	0	-1		$f_j - f_l$

1

Dérivée extérieure d_2 (rotationnel)

de	vers	terme
1-formes	2-formes	$d_2 f$ (ijk) = $-f_{ji} - f_{kj} + f_{ki}$

Connectivité
arête/face orientée



d_2	ji	kj	ki	il	lj	f
ijk	-1	-1	+1	0	0	f_{ij}
ilj	+1	0	0	+1	+1	f_{jk}
						f_{ki}
						f_{il}
						f_{lj}

$d_2 f$

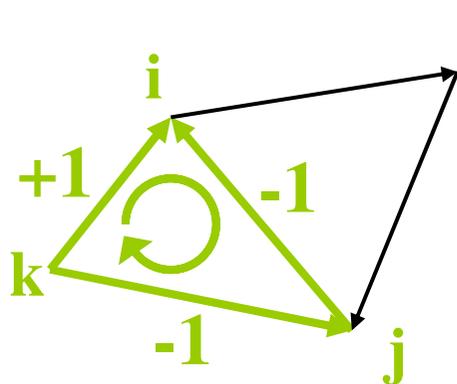
=

$f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}$
$f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}$

Dérivée extérieure d_2 (rotationnel)

de	vers	terme
1-formes	2-formes	$d_2 f (ijk) = -f_{ji} - f_{kj} + f_{ki}$

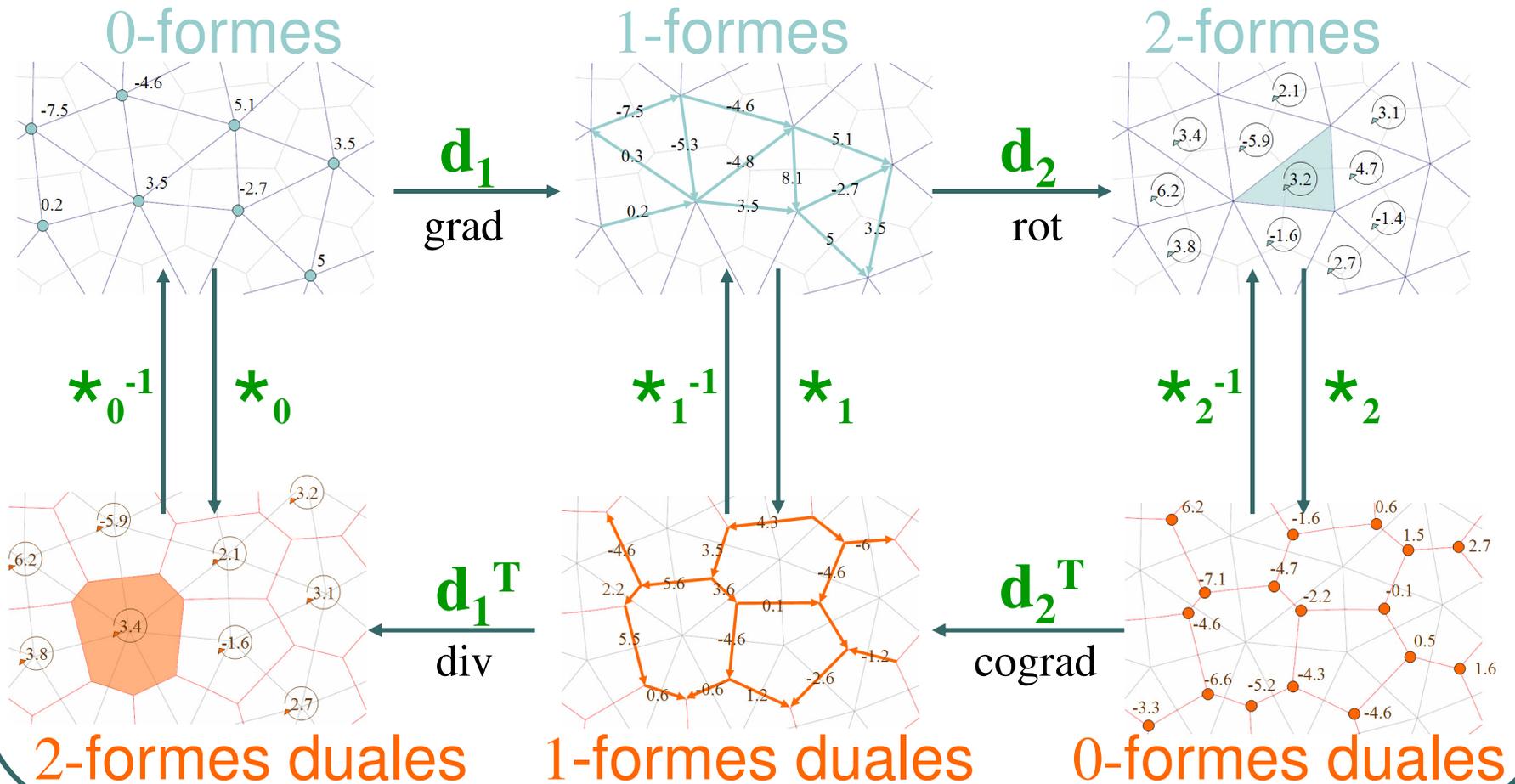
Connectivité
arête/face orientée



d_2	ji	kj	ki	il	lj	f
ijk	-1	-1	+1	0	0	f_{ij}
ilj	+1	0	0	+1	+1	f_{jk}

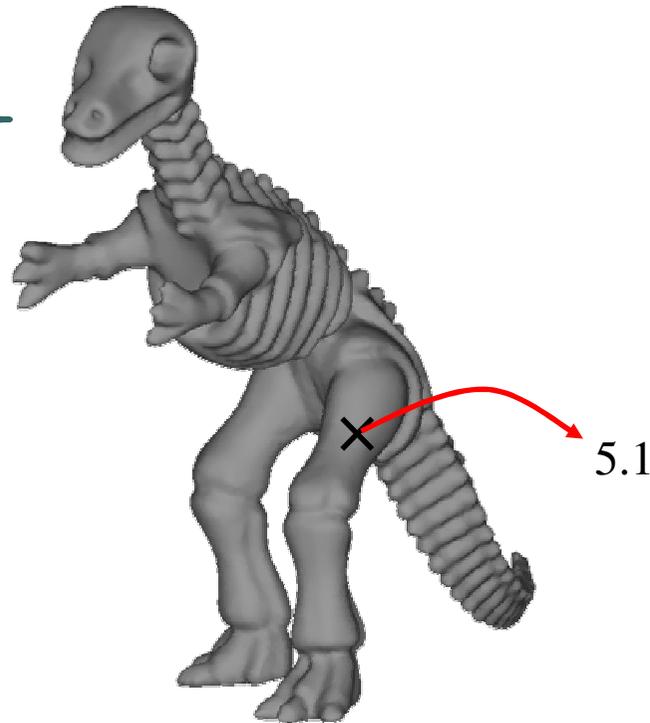
$$d_2 f = \begin{matrix} f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} \\ f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} \end{matrix} \begin{matrix} f_{il} \\ f_{lj} \end{matrix}$$

Complexe de De Rham discret



Formes et fonctions

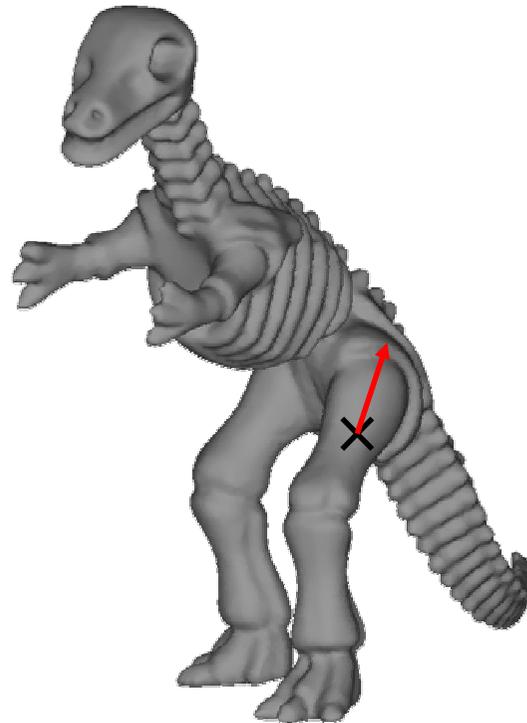
- 0-formes
- 2-formes



- Partie I: Harmoniques Variétés (filtrage)

Formes et fonctions

- 1-formes



- Partie II: Champs de Directions

Plan

Introduction

- **Harmoniques Variétés**

[Computer Graphics Forum, Eurographics 2008]

- **Champs de Directions**

Introduction

Introduction

1) Harmoniques

2) Filtrage

Conclusion

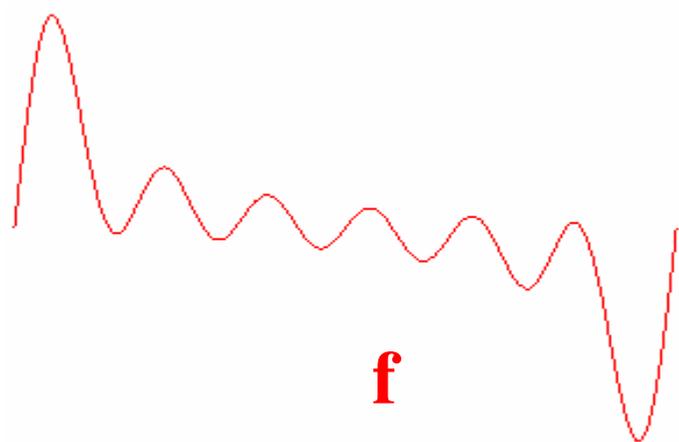
Introduction

Etendre:

- La transformée de **Fourier**
- Le filtrage **spectral**

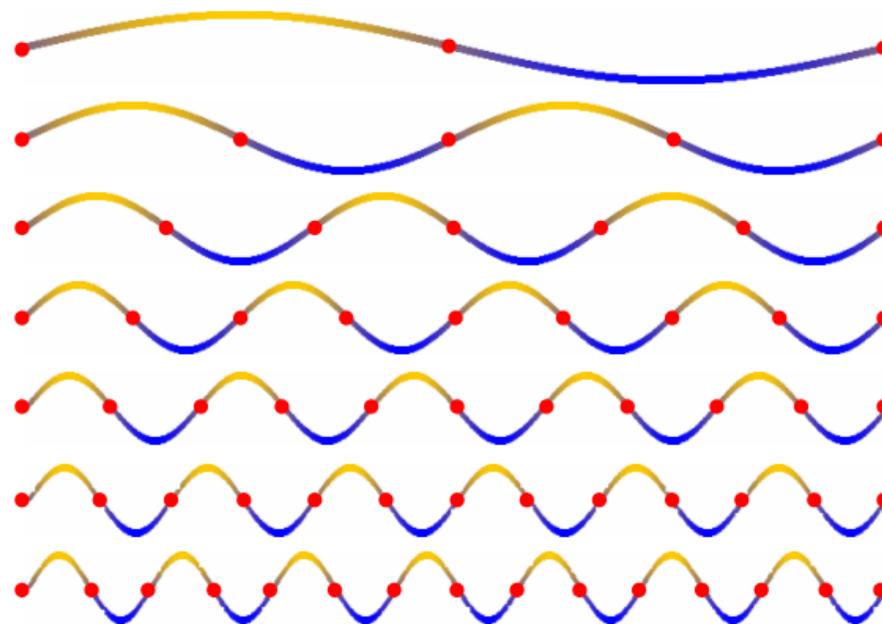
aux fonctions définies sur des maillages

Transformée de Fourier



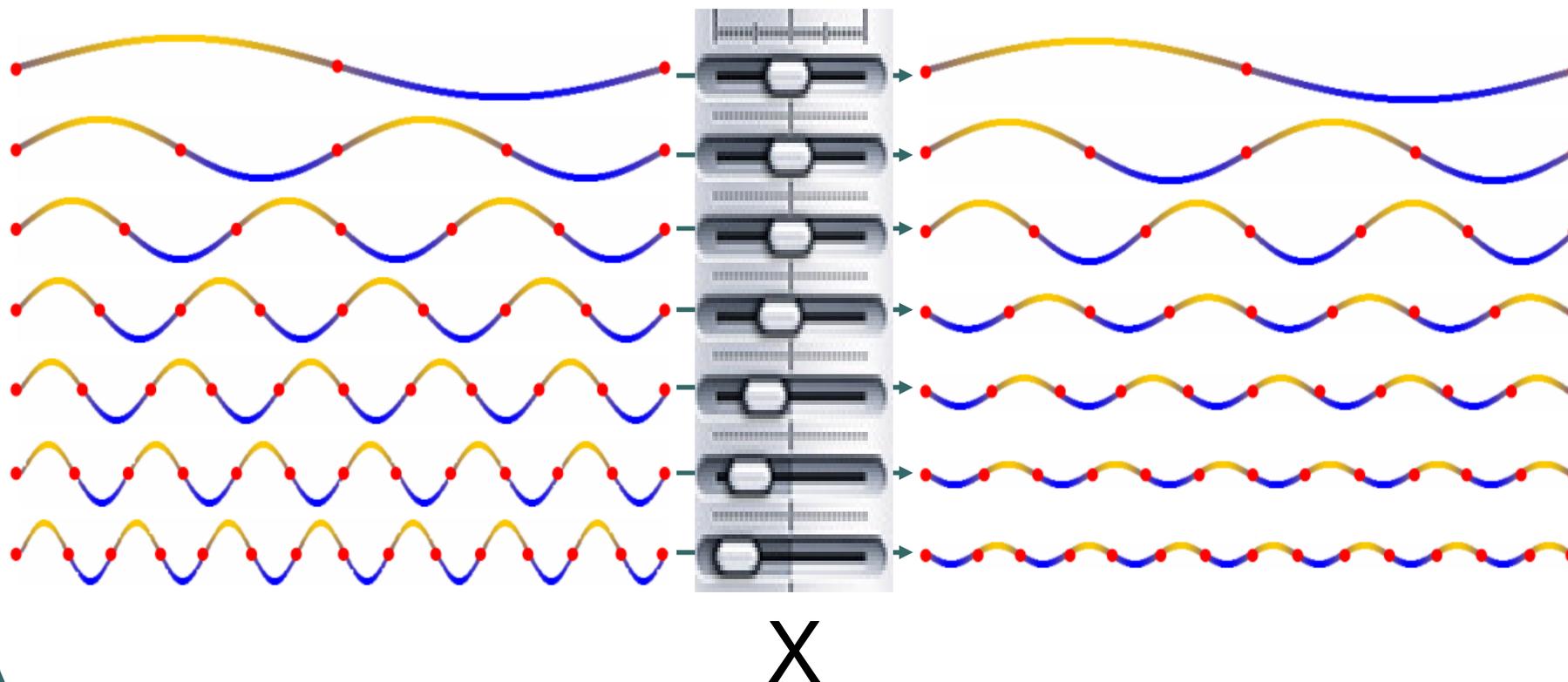
f

$= \sum$

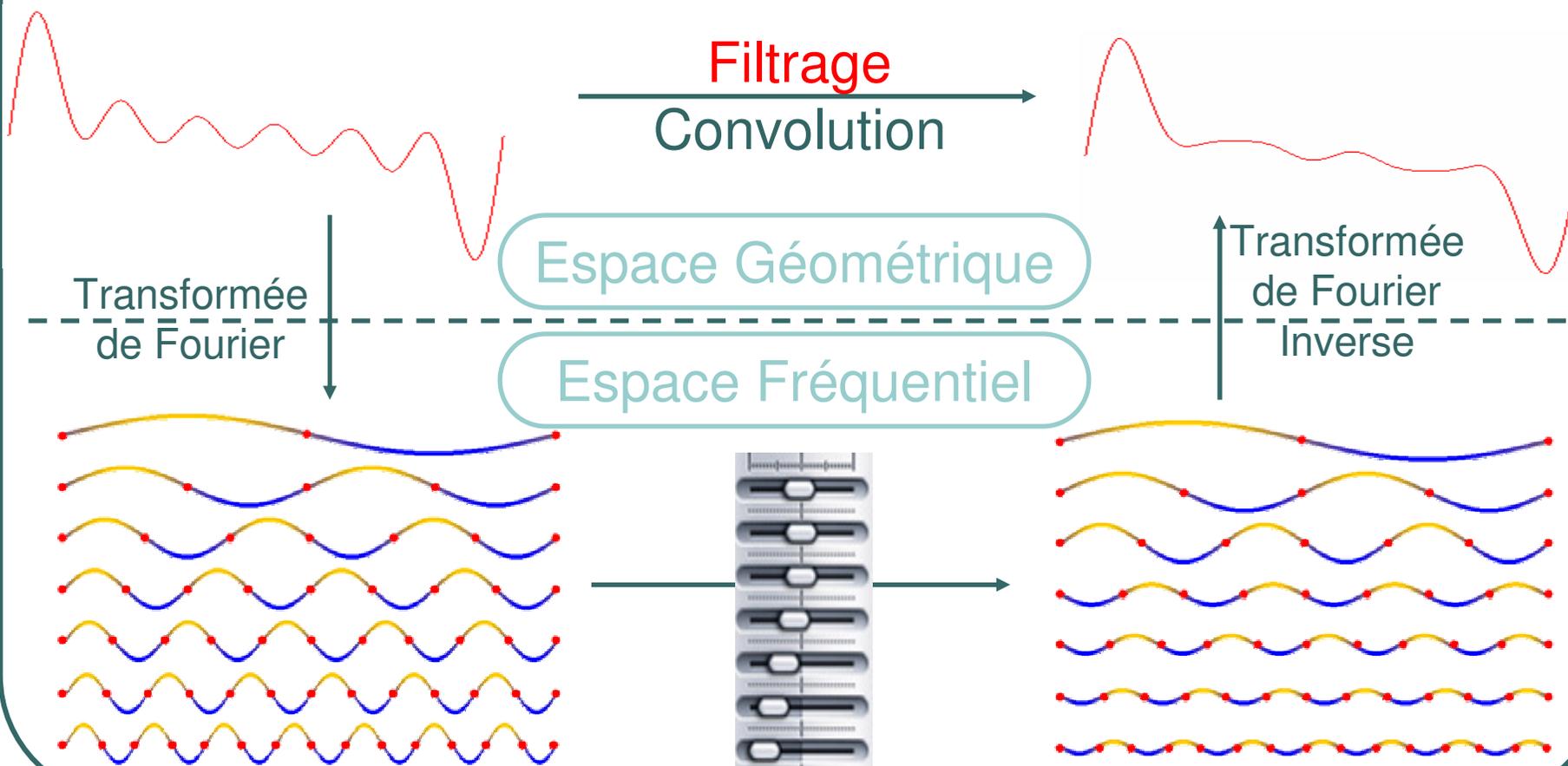


$\sin(kx)$

Filtrage



Filtrage



Filtrage sur un maillage



Filtrage

[Taubin 95]



Espace Géométrique

Espace Fréquentiel



Filtrage sur un maillage



Filtrage

[Taubin 95]



Espace Géométrique

Espace Fréquentiel



Filtrage sur un maillage



Filtrage

[Taubin 95]



Espace Géométrique

Espace Fréquentiel



[Karni00] compression de maillages
[Zhang06] appariement de formes
[Dong06] quadrangulation



I.1) Harmoniques

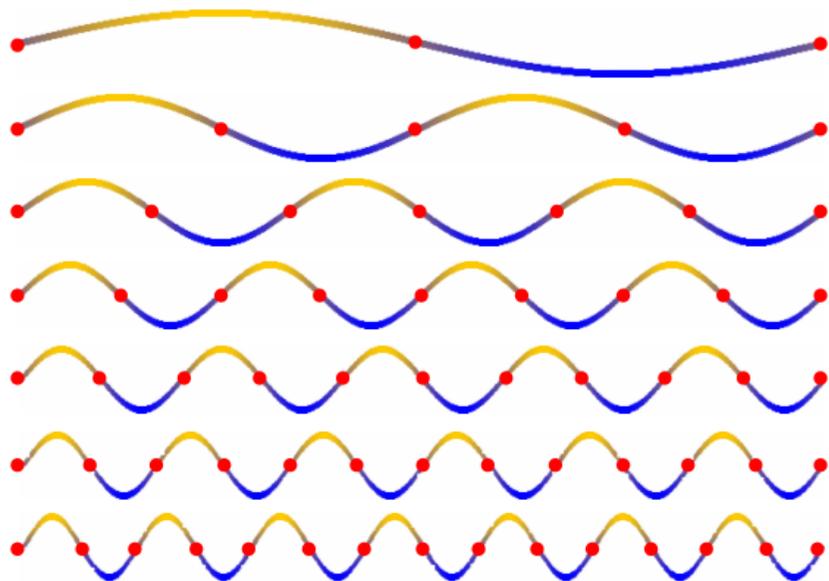
Introduction

1) Harmoniques

2) Filtrage

Conclusion

Question



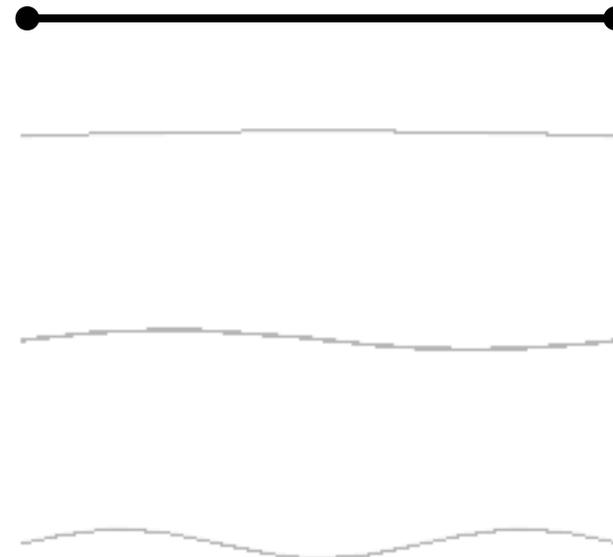
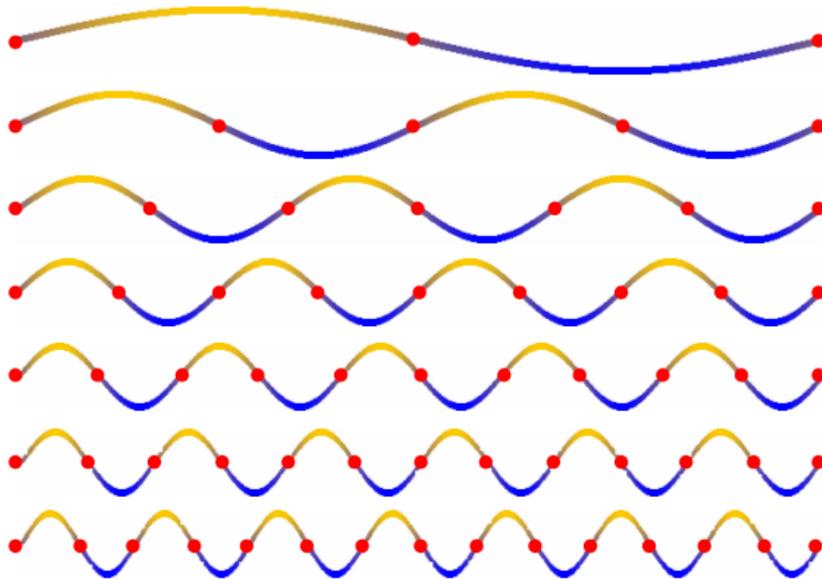
$$\sin(kx)$$

sur



?

Harmoniques et vibrations

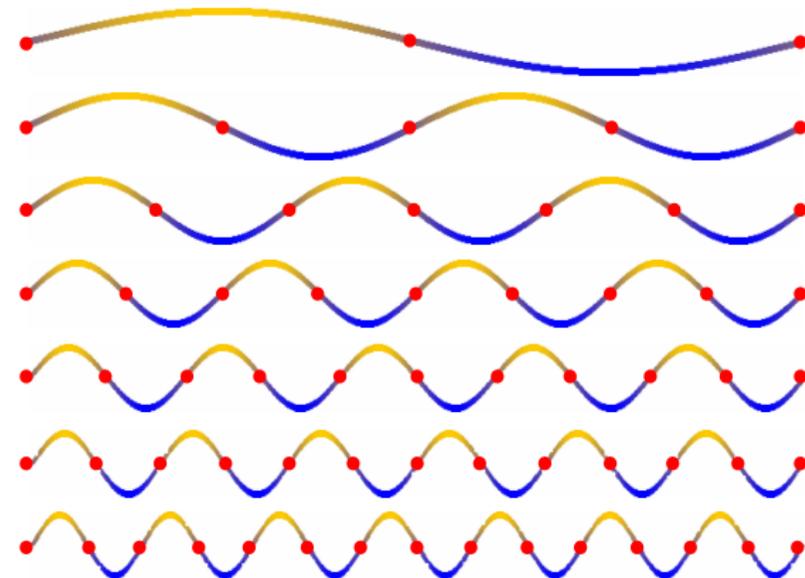


Les $\sin(kx)$ sont les modes de vibration = **harmoniques** d'une corde

Harmoniques Variétés



Harmoniques



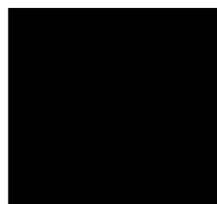
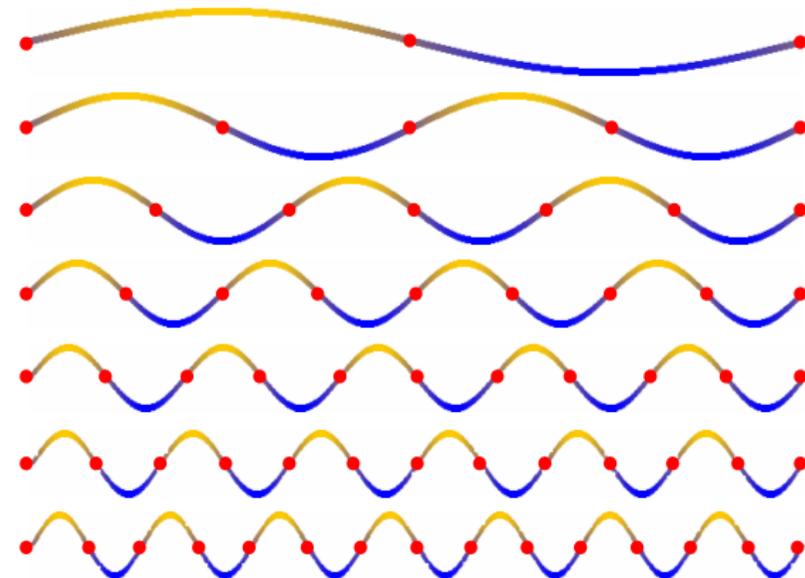
Harmoniques



Harmoniques Carrées



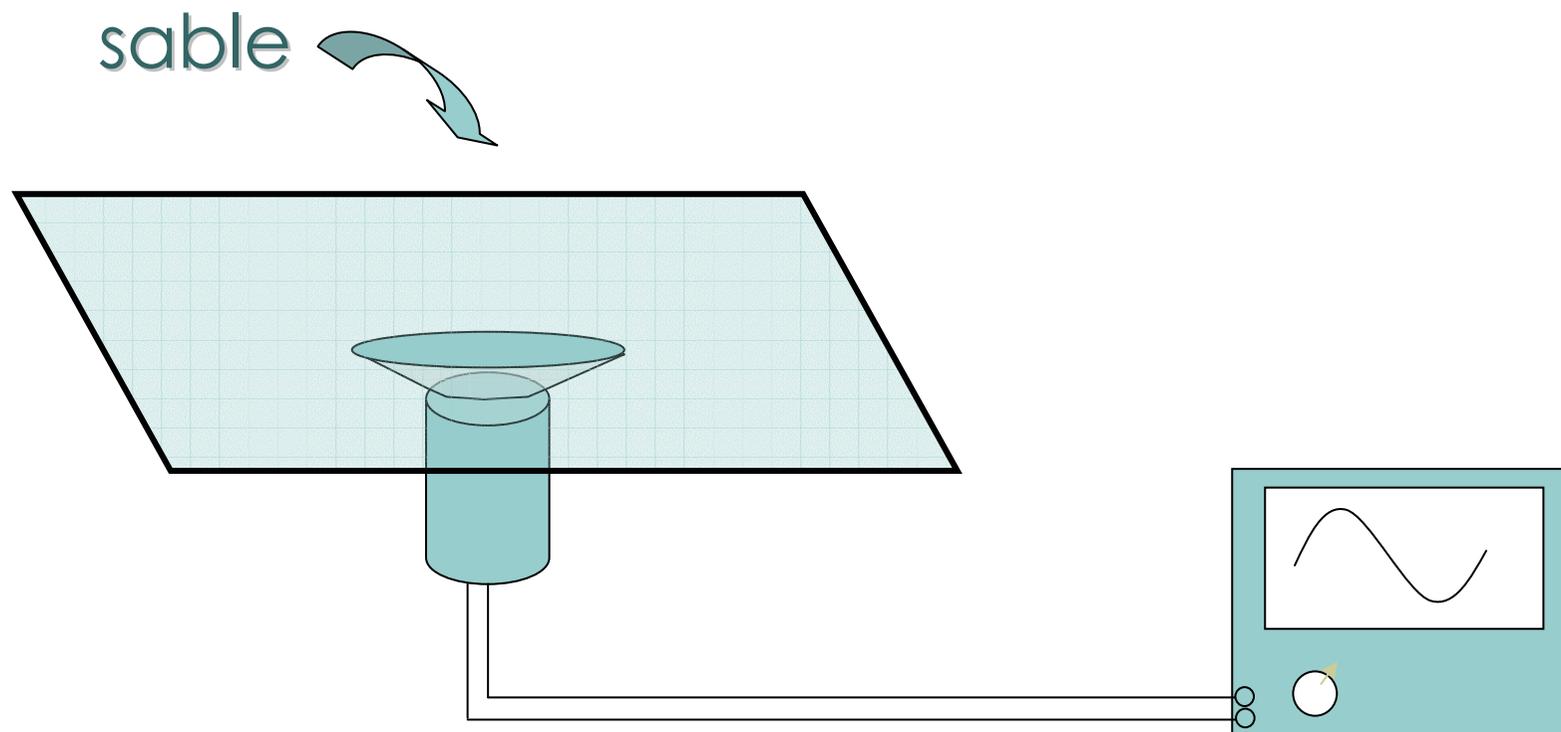
Harmoniques



Harmoniques



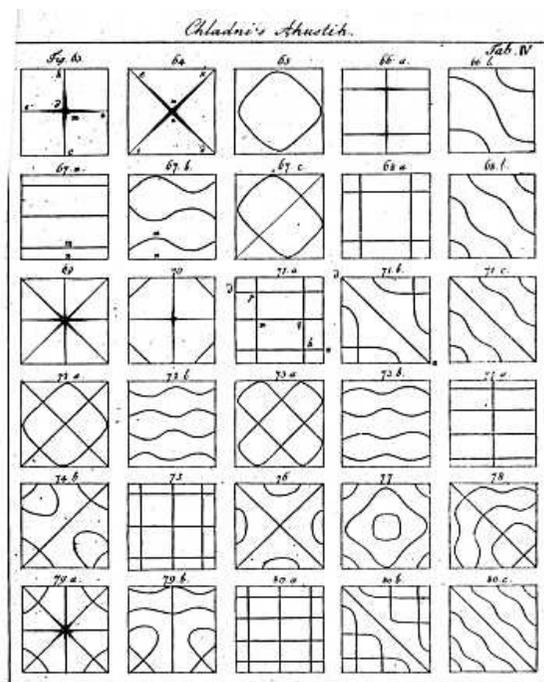
Plaques de Chladni



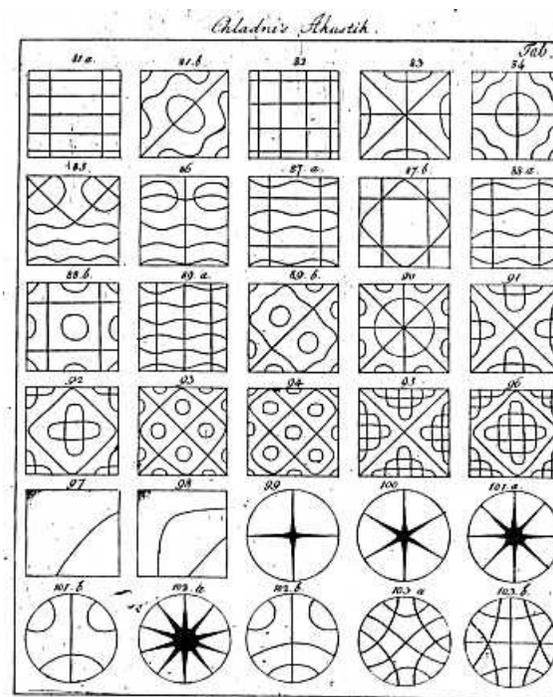
Plaques de Chladni



Plaques de Chladni

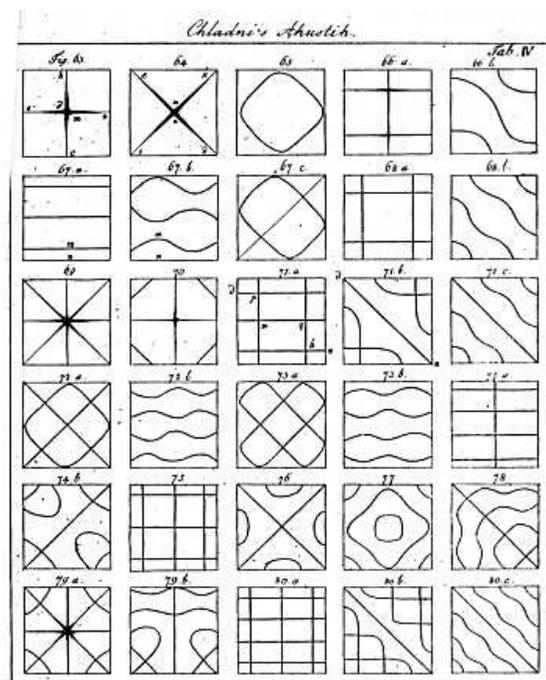


Source : Wikipedia

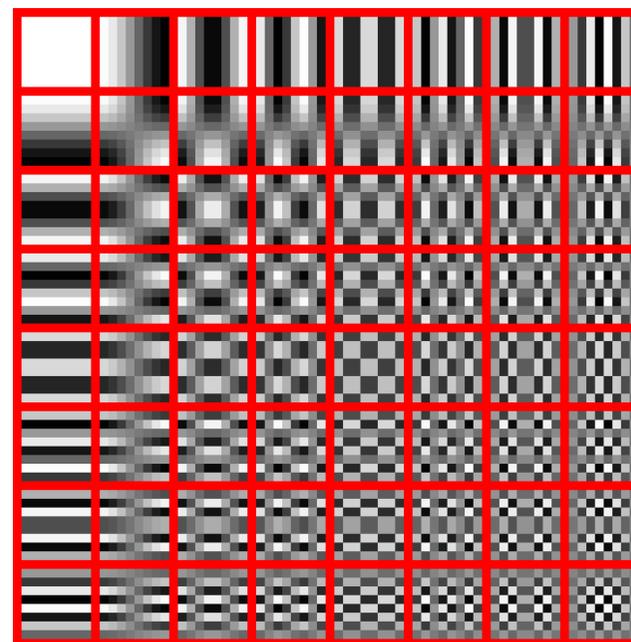


Découvertes concernant la théorie de la musique, Chladni, 1787

Plaques de Chladni et jpeg



Source : Wikipedia

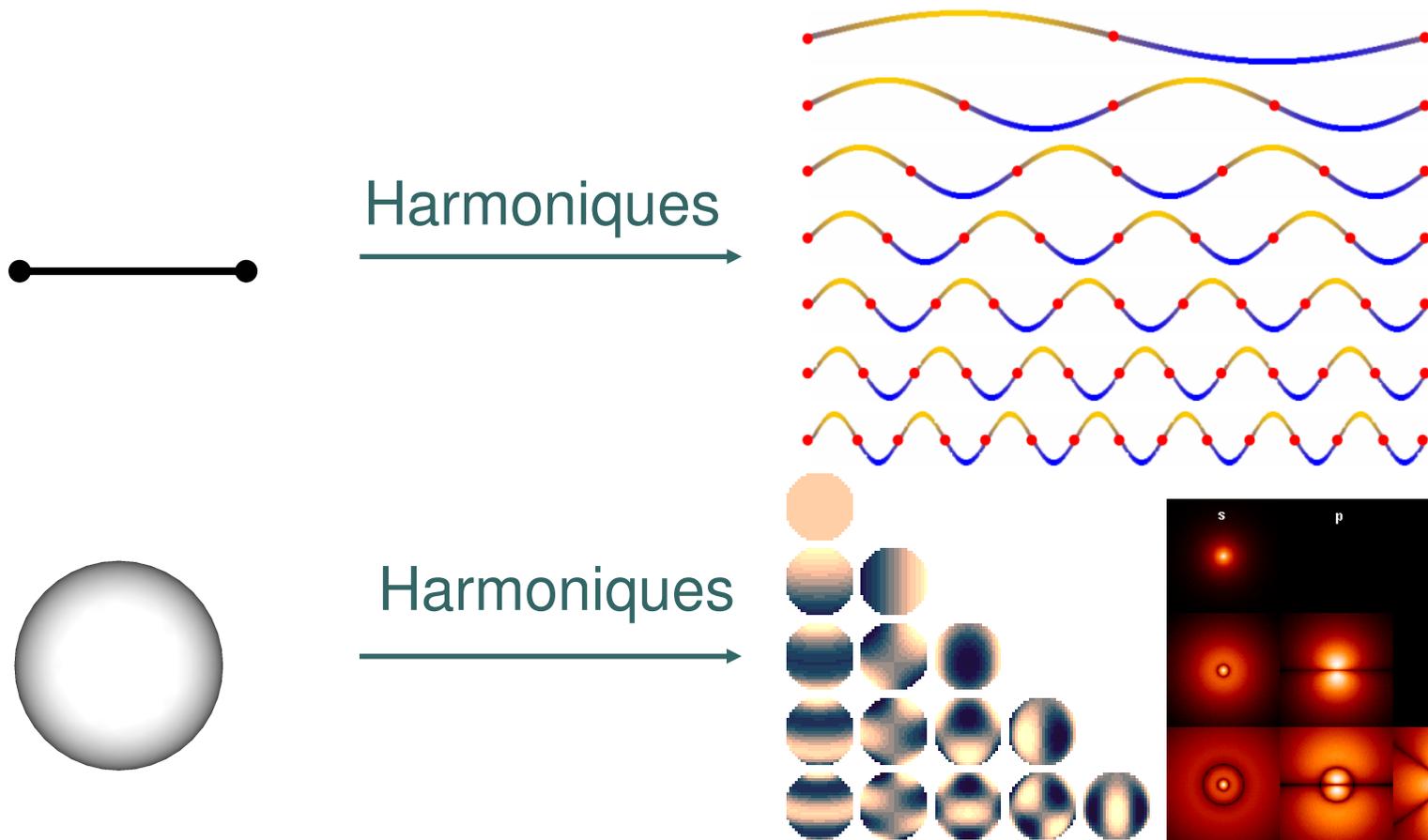


Source : Wikipedia

Plaques de Chladni, 1787

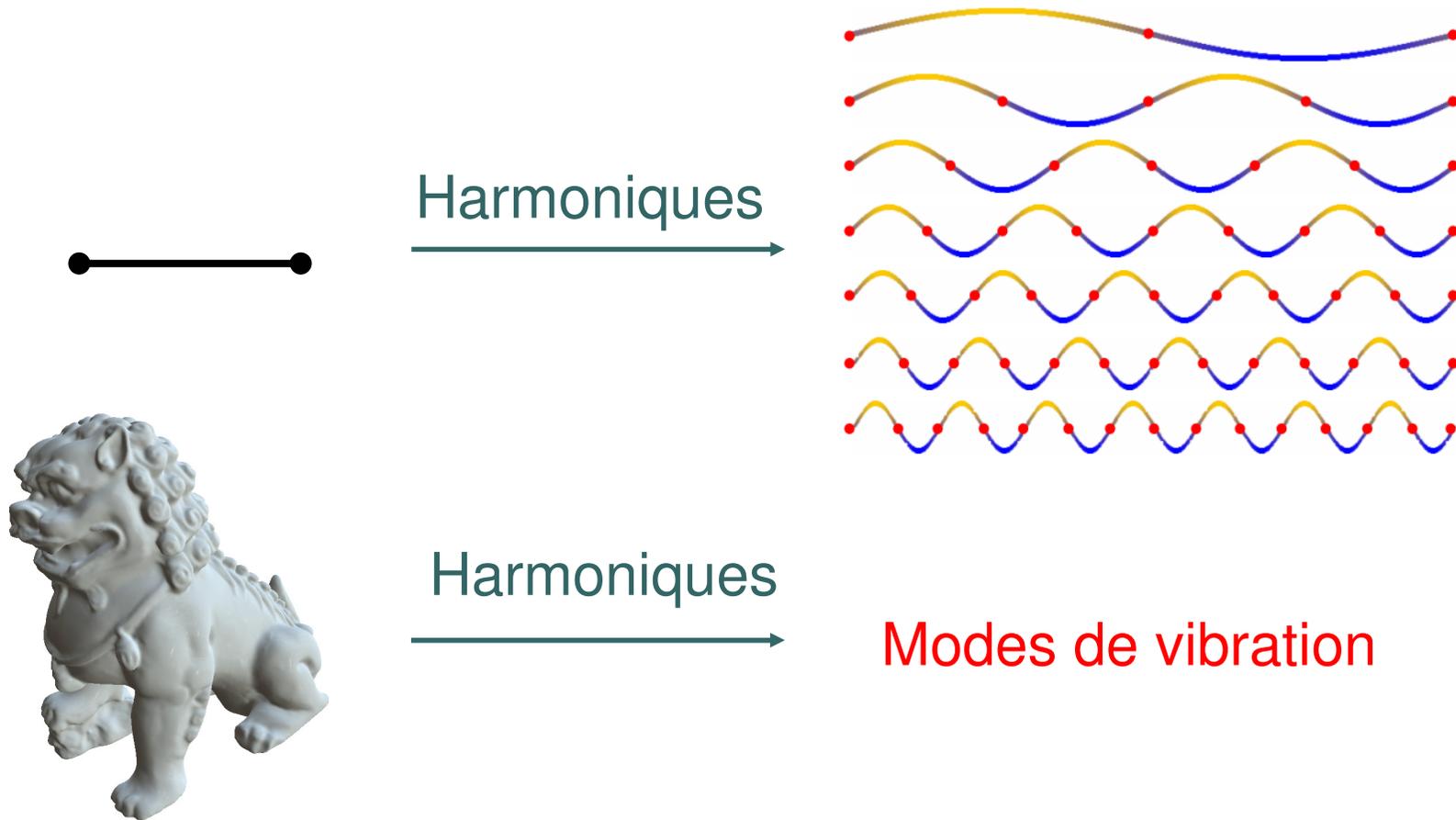
Transformée en cosinus discrète (jpeg), 1974

Harmoniques sphériques



Source : Wikipedia

Harmoniques Variétés



Harmoniques et vibrations

- Equation d'onde:

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

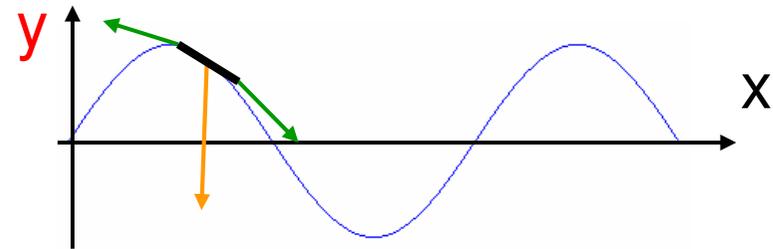
T: tension μ : masse

- Modes stationnaires:

$$y(x,t) = y(x) \sin(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \boxed{\mu \omega^2 / T} y$$

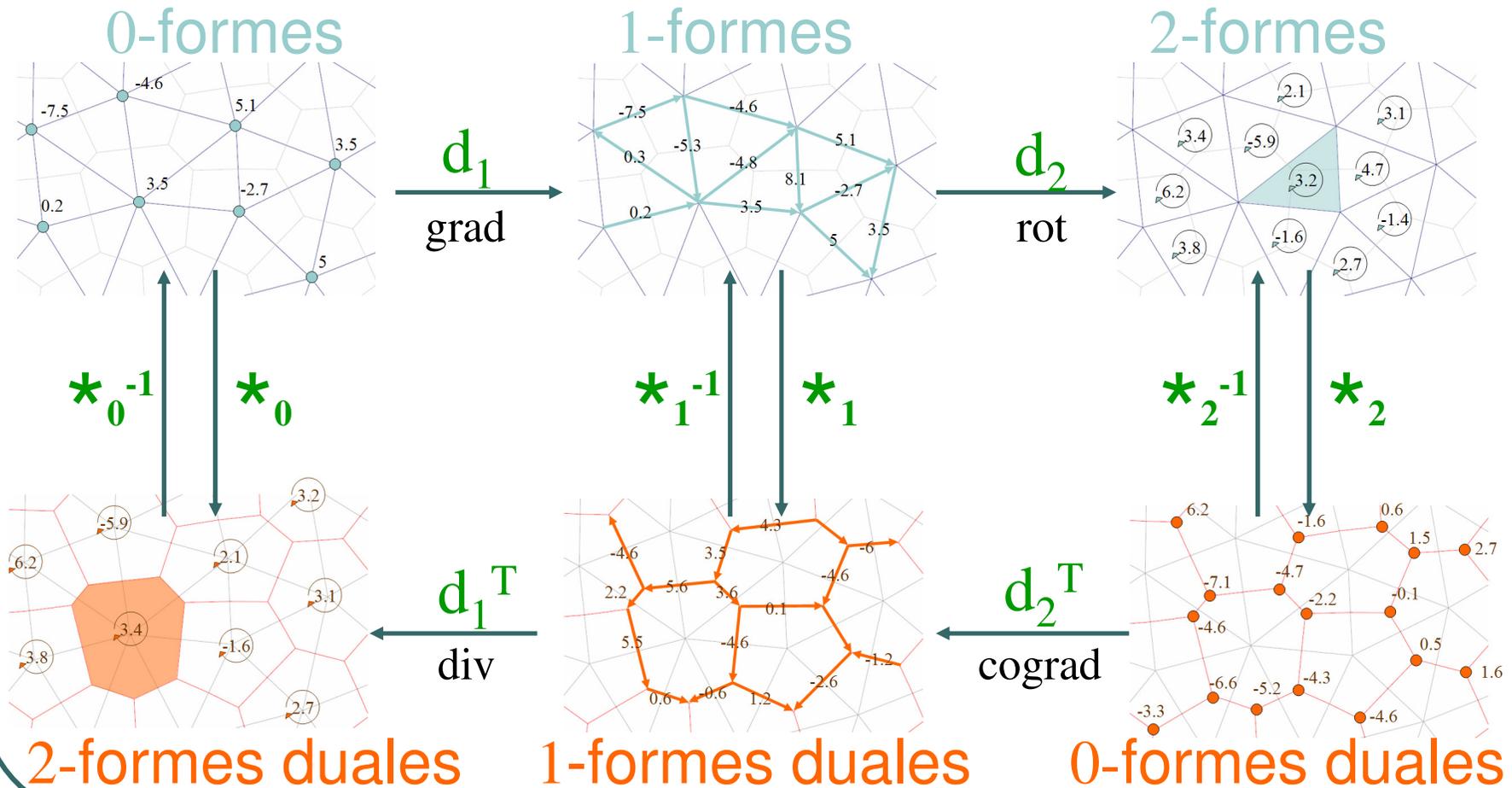
Fonctions propres de $\partial^2 / \partial x^2$



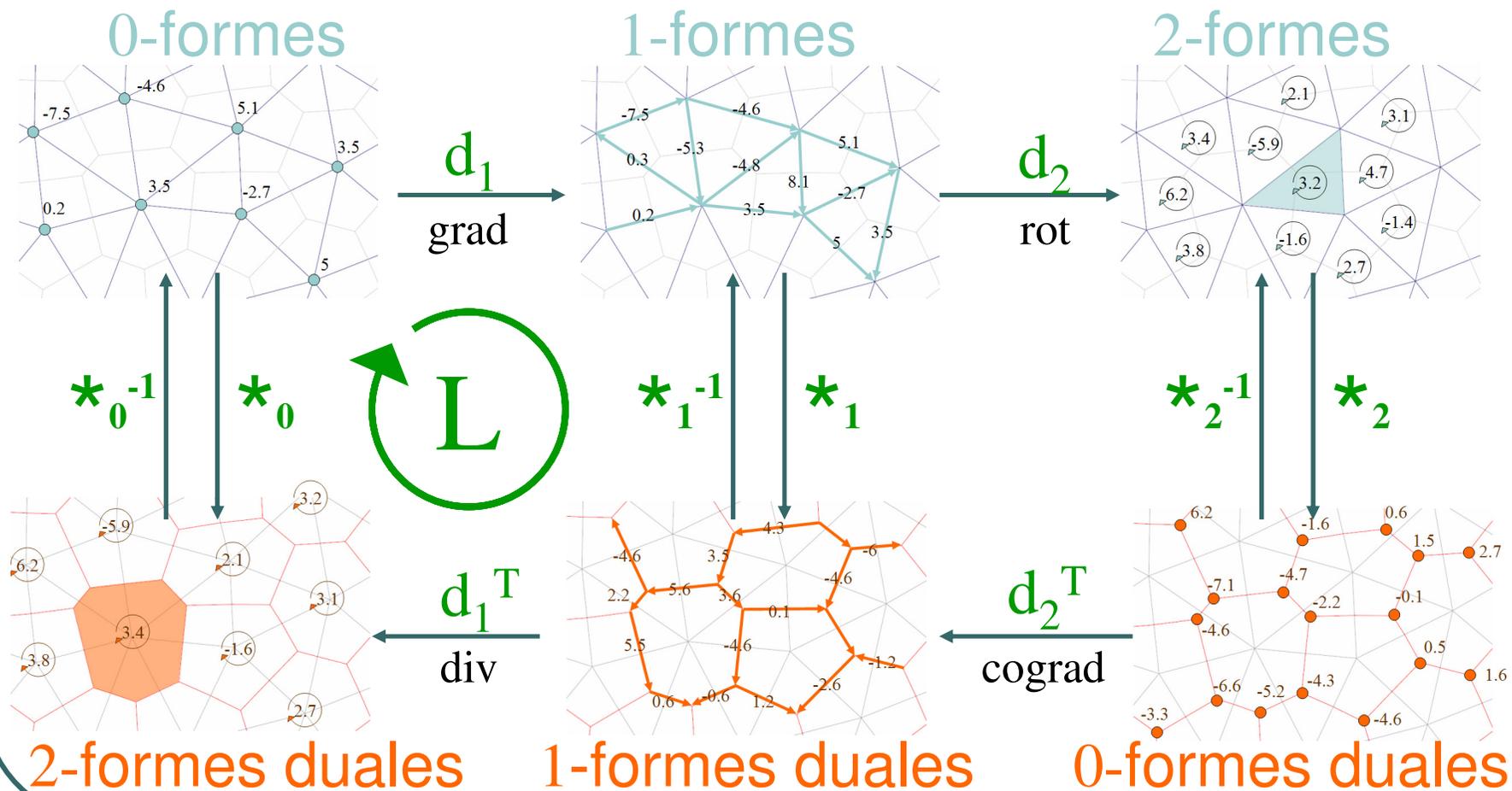
Harmoniques Variétés

- Sur un maillage, $\partial^2/\partial x^2$ est le Laplacien Δ
- Les Harmoniques Variétés sont les **fonctions propres** de Δ
- Utilisons le **Calcul Exterieur Discret**

Complexe de De Rham discret



Laplacien



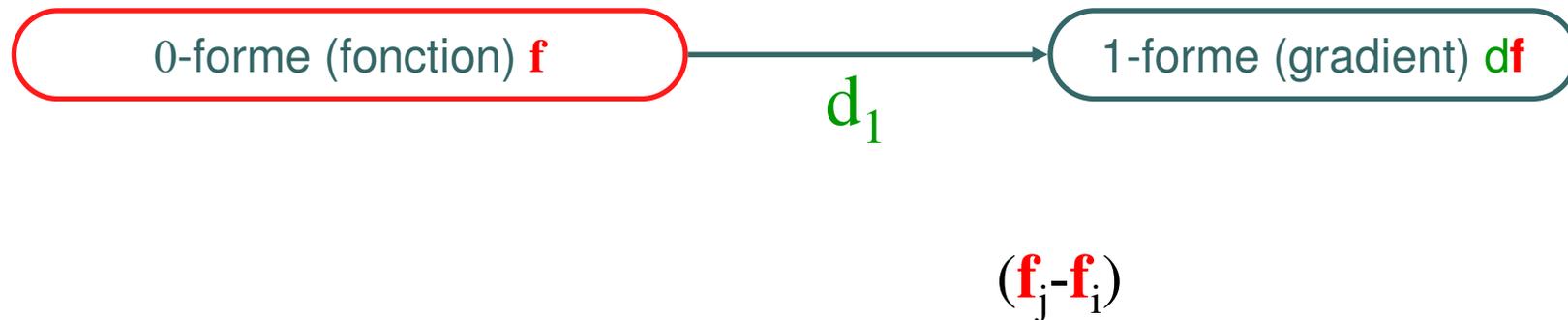
Laplacien en CED

En CED, le Laplacien est $*_0^{-1} d_1^T *_1 d_1$

0-forme (fonction) **f**

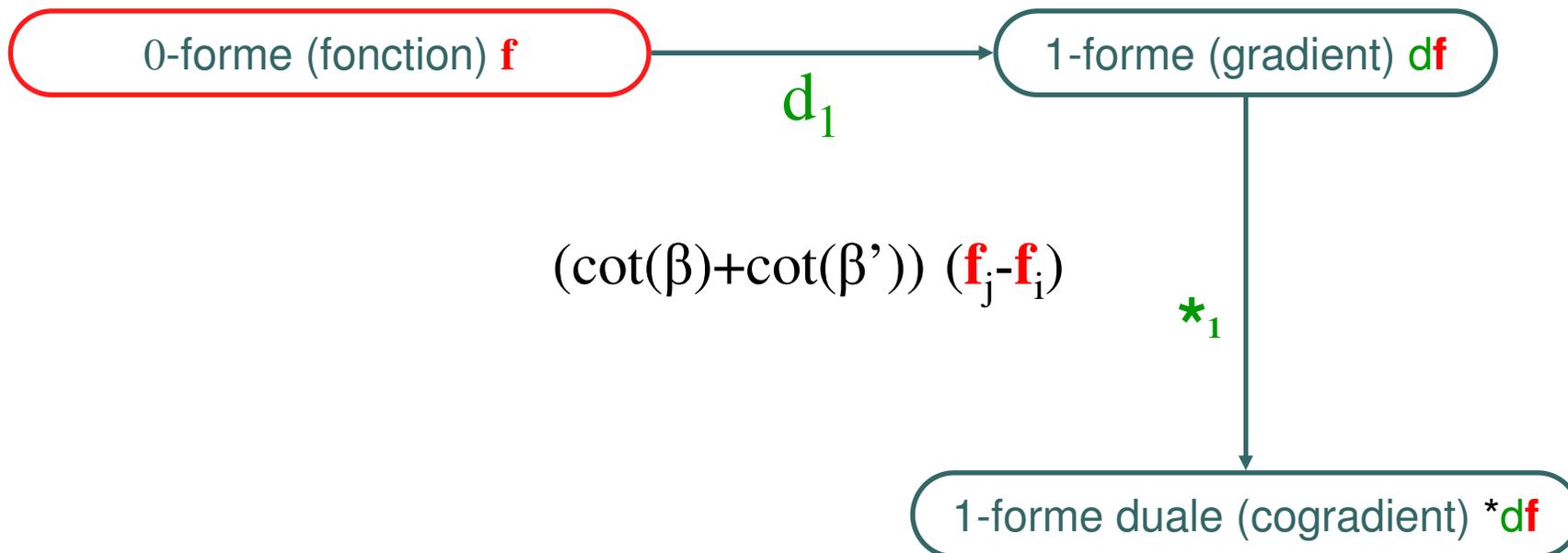
Laplacien en CED

En CED, le Laplacien est $*_0^{-1} d_1^T *_1 d_1$



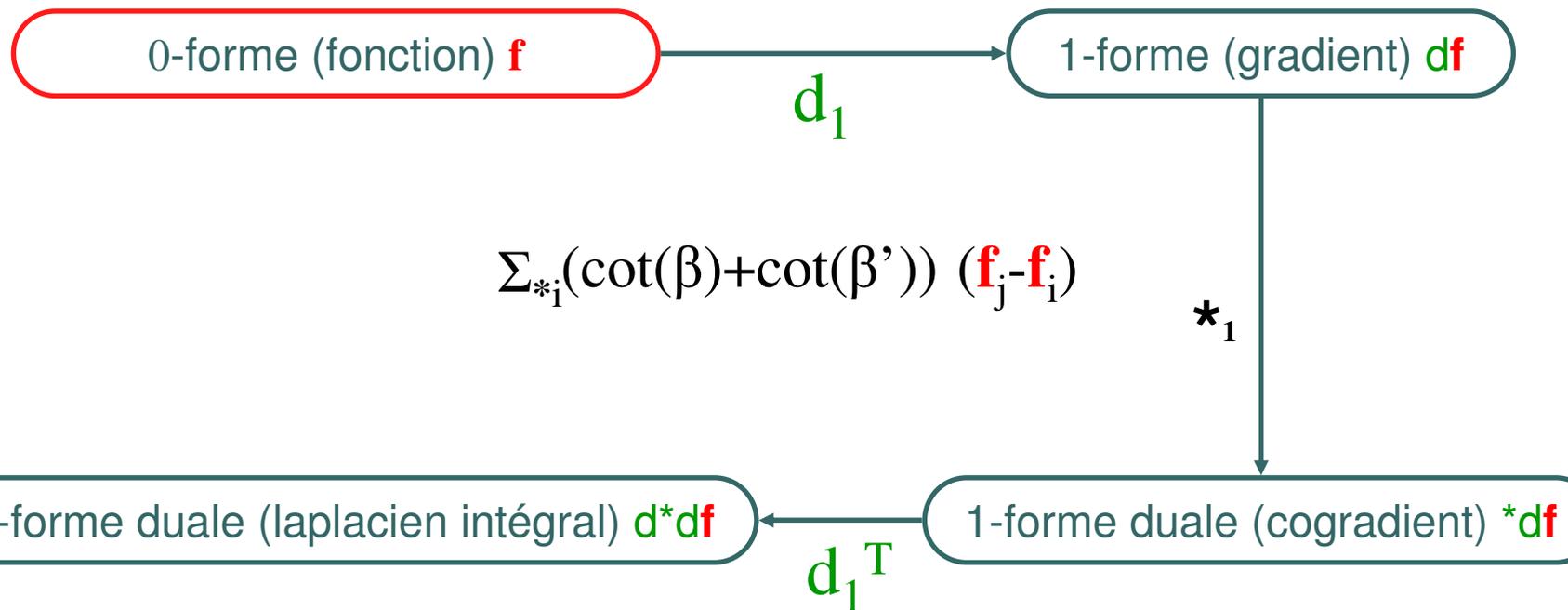
Laplacien en CED

En CED, le Laplacien est $*_0^{-1} d_1^T *_1 d_1$



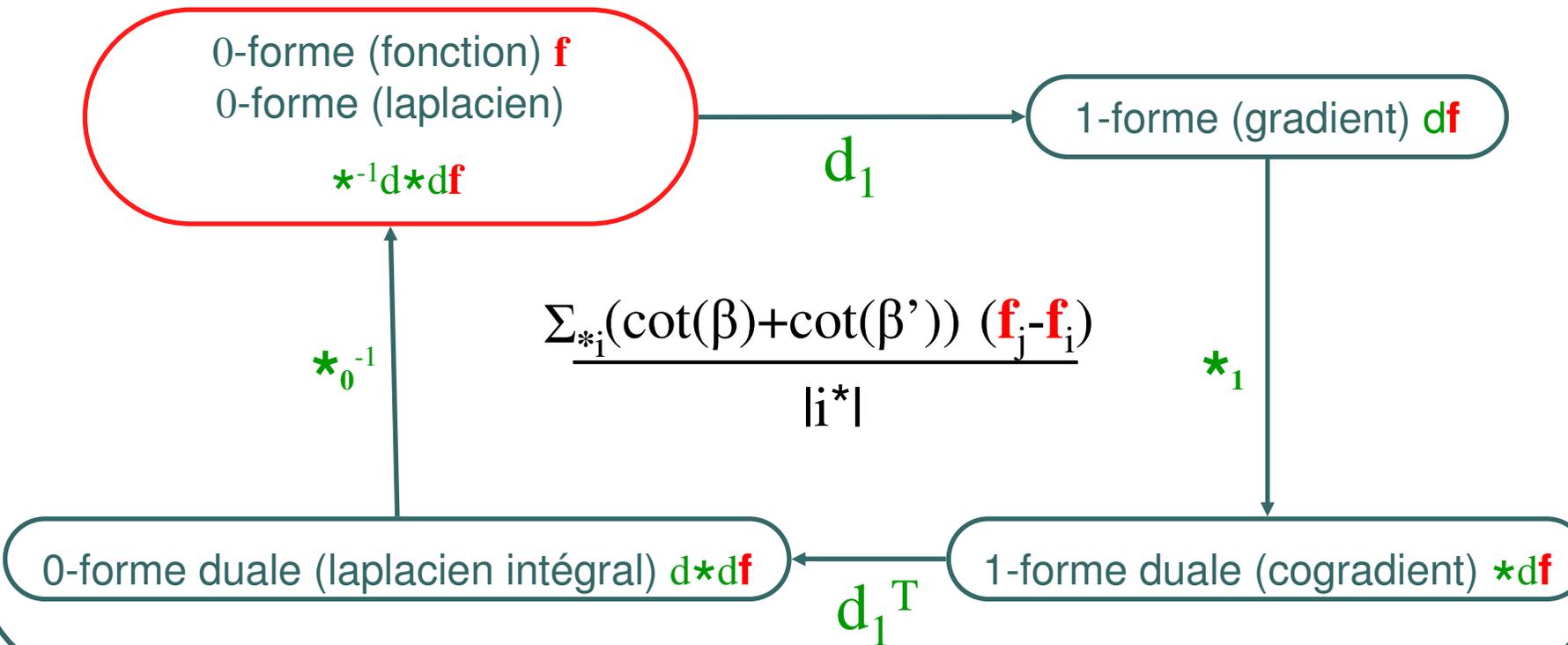
Laplacien en CED

En CED, le Laplacien est $*_0^{-1} d_1^T *_1 d_1$



Laplacien en CED

En CED, le Laplacien est $*_0^{-1} d_1^T *_1 d_1$



Base d'Harmoniques Variétés

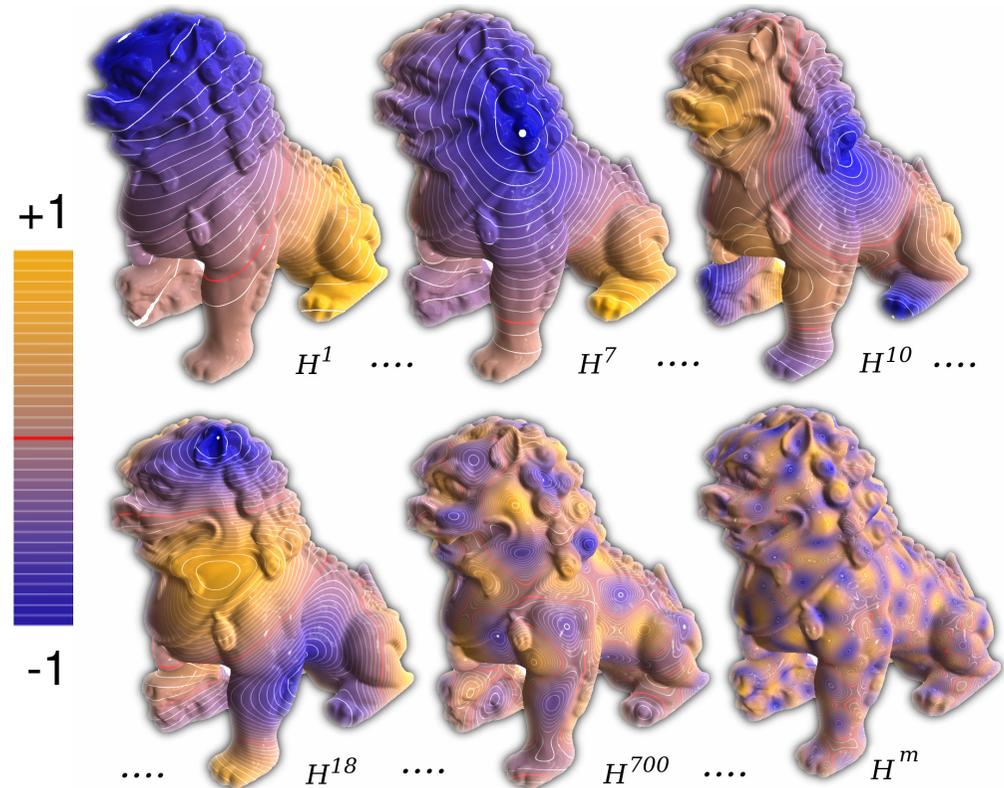
Fonctions propres
de l'opérateur Δ

CED

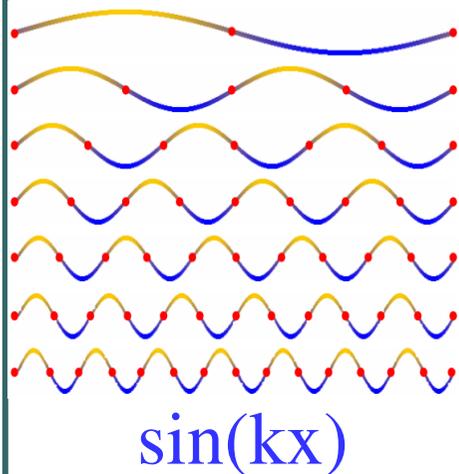


Vecteurs propres
de la matrice $L =$

$$*_{0}^{-1}d^T *_{1}d$$



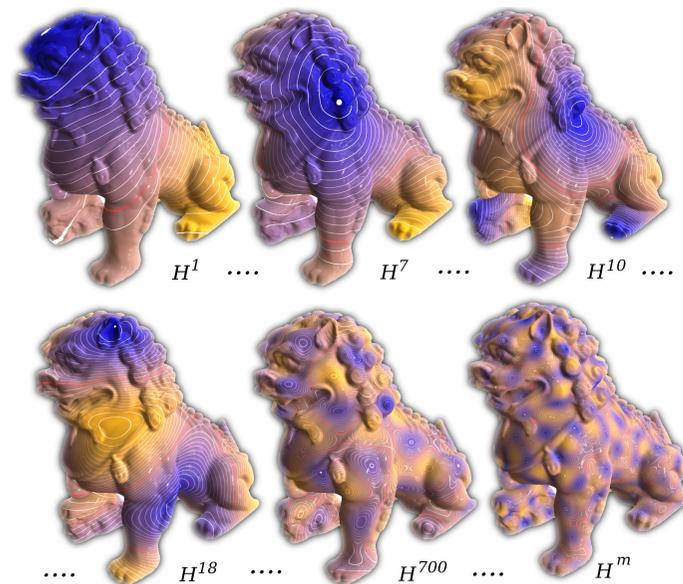
I.1) Conclusion



sur



=



Vecteurs propres de $L = *_{0}^{-1}d^T *_{1}d$

I.2) Filtrage

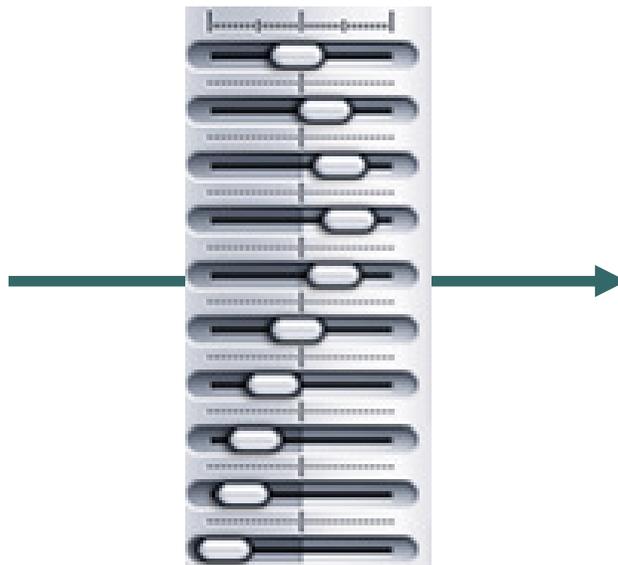
Introduction

1) Harmoniques

2) Filtrage

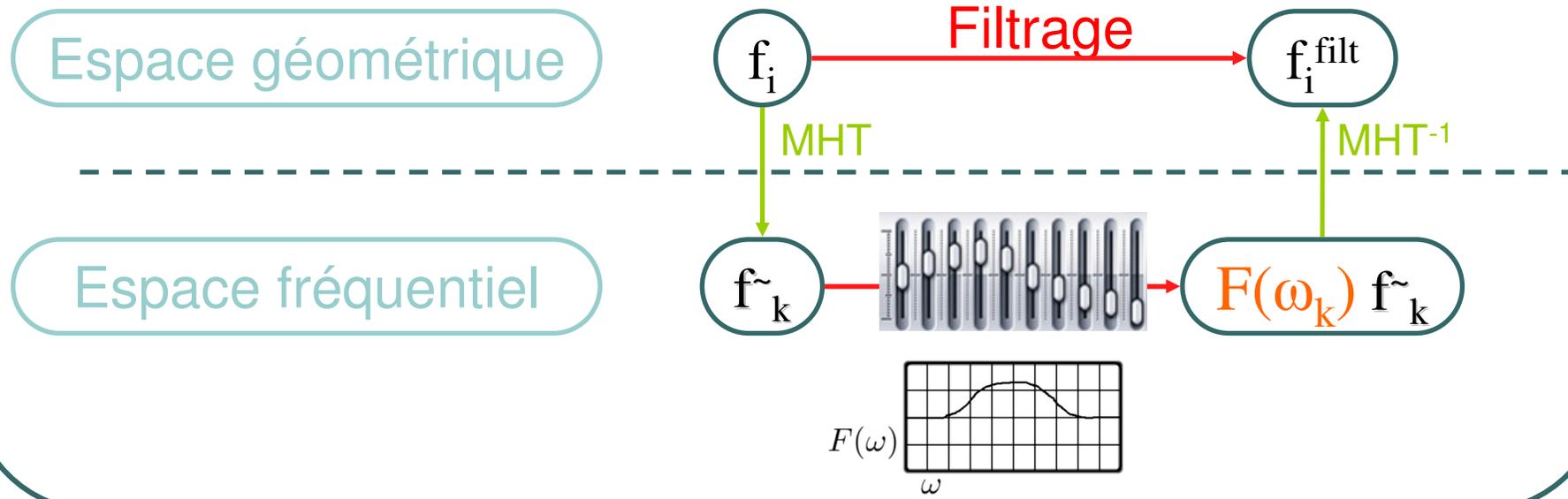
Conclusion

I.2) Filtrage



Filtrage spectral

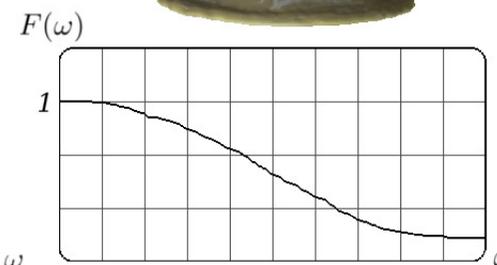
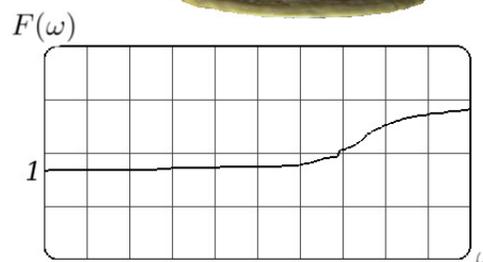
- Les H^k sont associées à une **valeur propre** λ_k
- Les $\lambda_k = \omega_k^2$ sont des carrés de **fréquences spatiales**
- Un filtre est une fonction de transfert $F(\omega)$



Filtrage spectral des couleurs

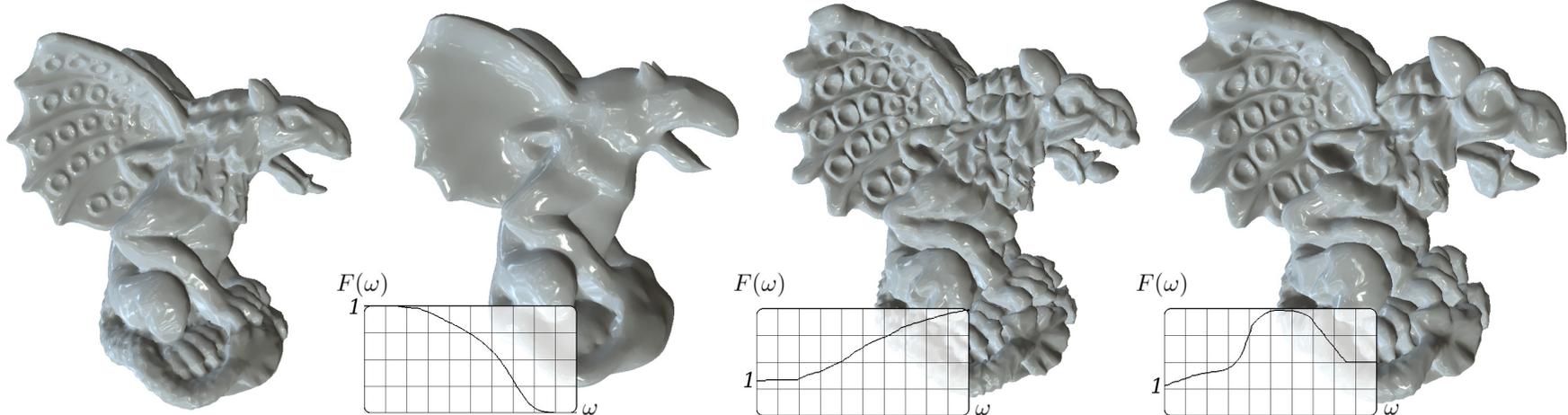


$$\mathbf{f} = (r, g, b)$$



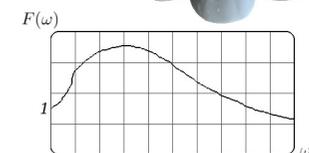
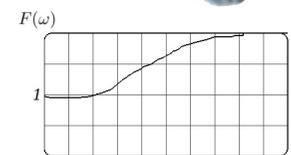
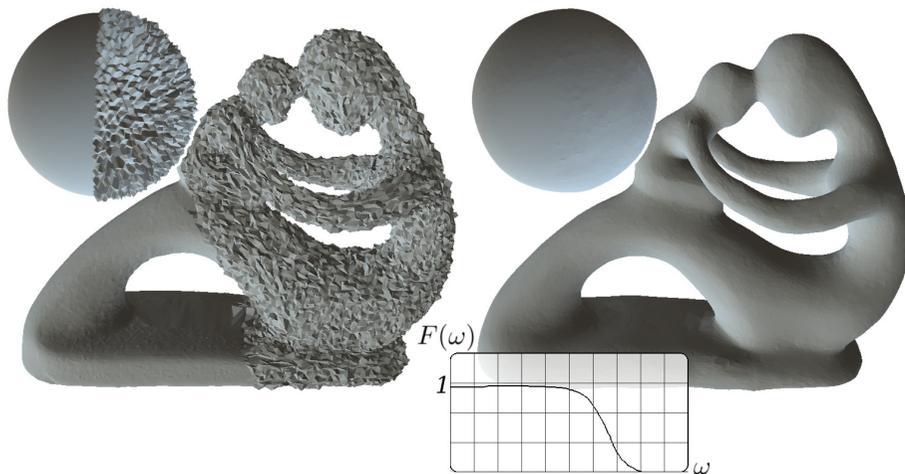
Filtrage spectral de la géométrie

$$\mathbf{f} = (x, y, z)$$



Filtrage spectral de la géométrie

$$\mathbf{f} = (x, y, z)$$



Conclusion

Introduction

1) Harmoniques

2) Filtrage

Conclusion

Conclusion

- On rend possible:
 - L'analyse de **Fourier**
 - Le **Filtrage** spectralsur les surfaces triangulées.
- Temps pour calculer les **Harmoniques Variétés** ~
Temps pour calculer un **filtre** par les approches classiques (5 minutes pour 300k sommets)
- Temps pour actualiser un filtre ~ **temps réel**

II Champs de directions

Plan

Introduction

I. Harmoniques Variétés

II. Champs de Directions

[IEEE Transactions on Visualization, Vis' 2006]

[ACM Transactions on Graphics 2008]

[ACM Transactions on Graphics (accepté sous réserve de modifications)]

Introduction

Introduction

- 1) Théorie continue
- 2) Théorie discrète
- 3) Application au:
 - a) contrôle topologique **fort**
 - b) contrôle topologique **faible**

Conclusion

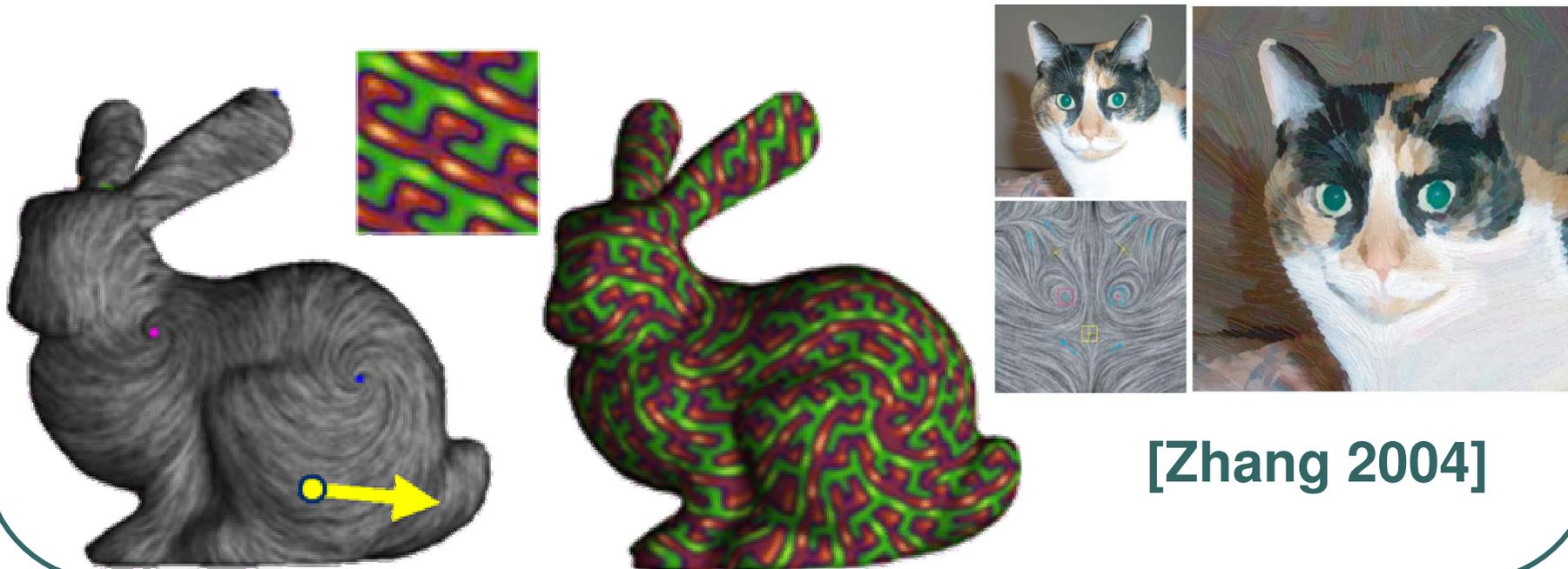
Les champs de directions

Intuition :

Un champ de directions est une **orientation** locale d'une surface

Exemple :

Un champ de vecteurs est utilisé pour orienter une texture



[Zhang 2004]

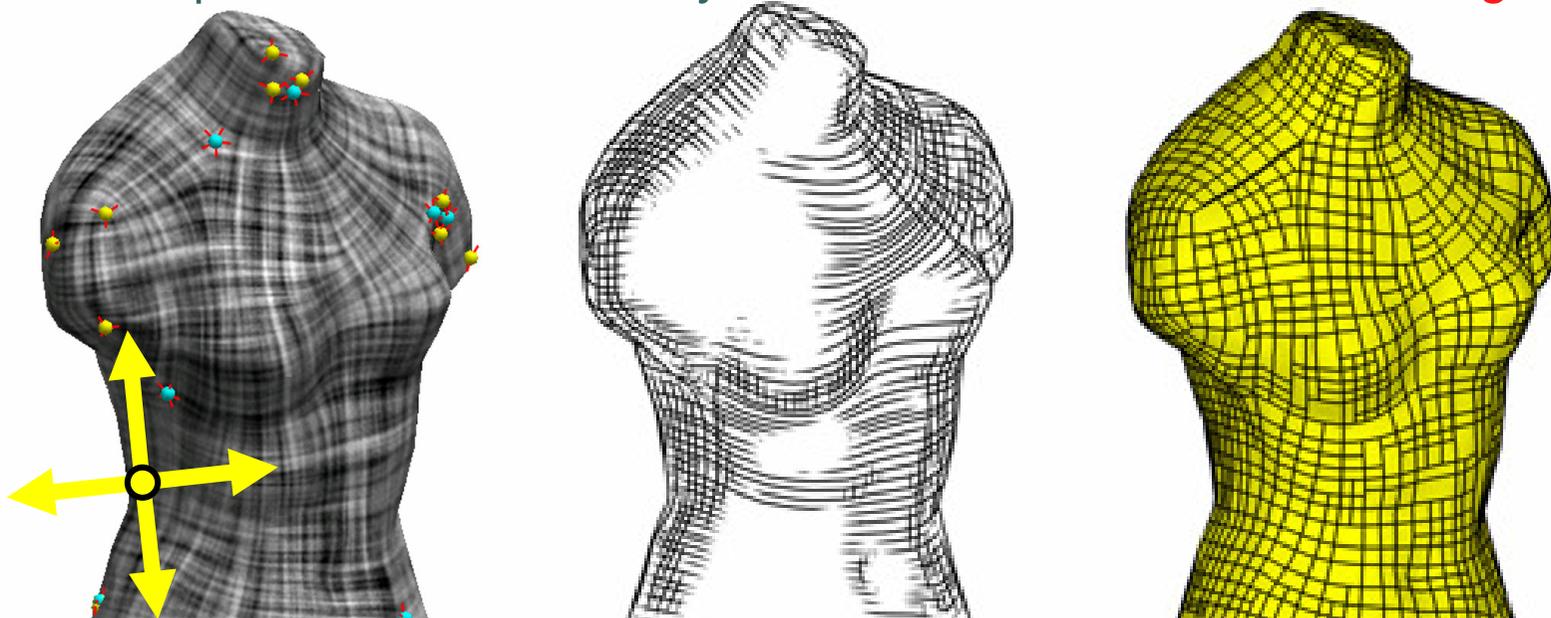
Les directions à symétries

Intuition :

Une direction à **N**-symétries est invariante par rotations de $2\pi/N$

Exemple :

Un champs de directions à **4**-symétries utilisée en **NPR/remailage**



[Zhang2007]

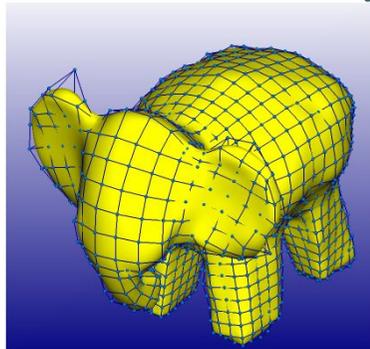
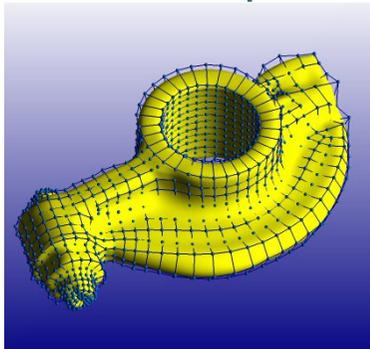
Les directions à symétries

Intuition :

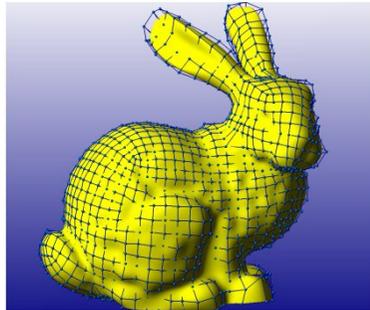
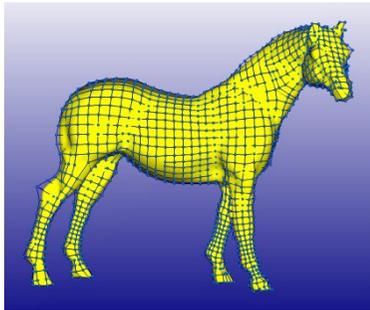
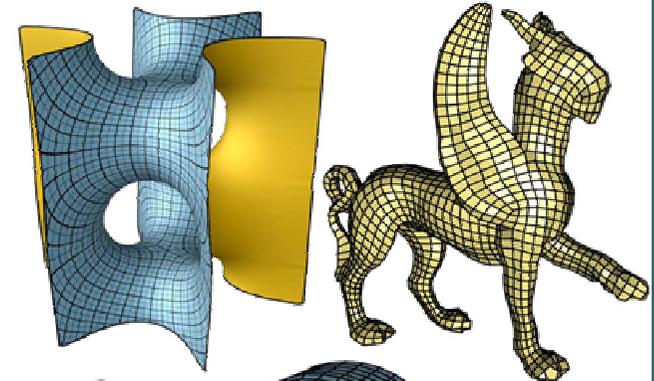
Une direction à **N**-symétries est invariante par rotations de $2\pi/N$

Exemple :

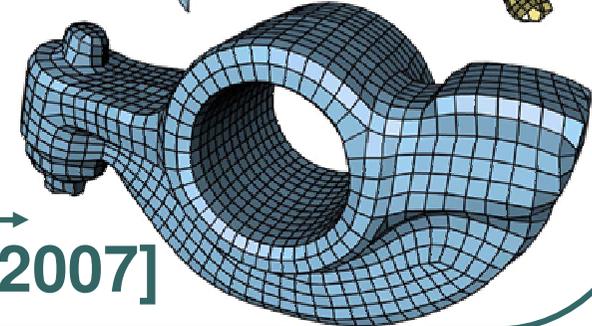
Un champs de directions à 4-symétries utilisée en **Paramétrisation quad**



[Li 2006]



[Kälberer2007]

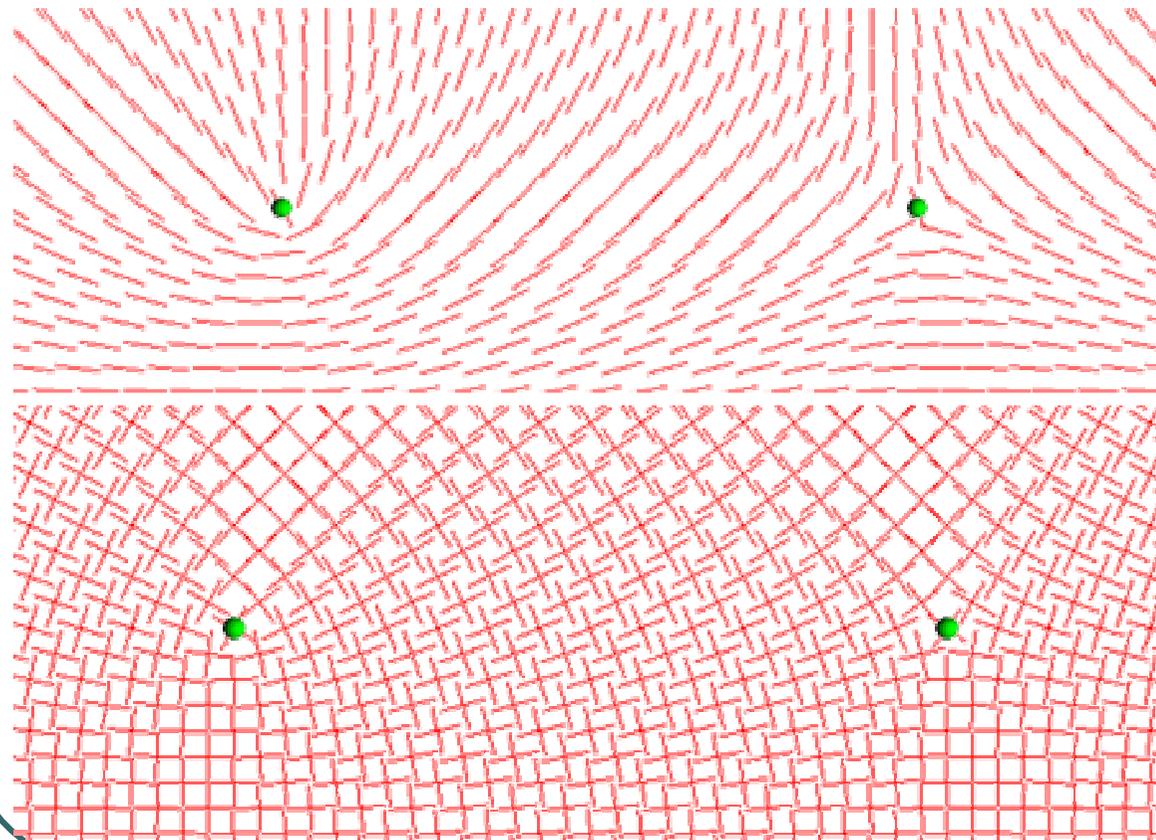


Objectif

Créer des champs de directions
avec des **bonnes** propriétés pour
ces applications

Propriétés désirées

- Champs de directions à symétries de rotation:



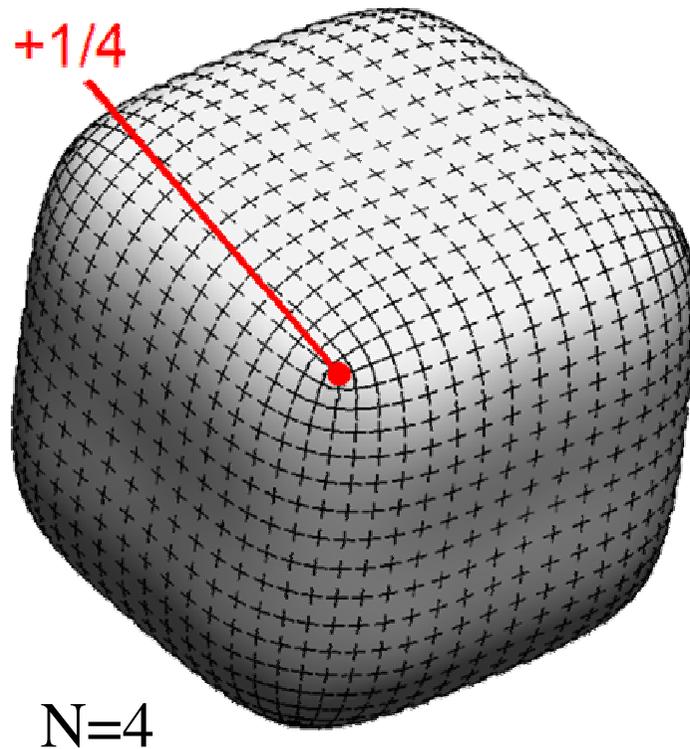
permet de nouveaux
types de singularités

$N=2$

$N=4$

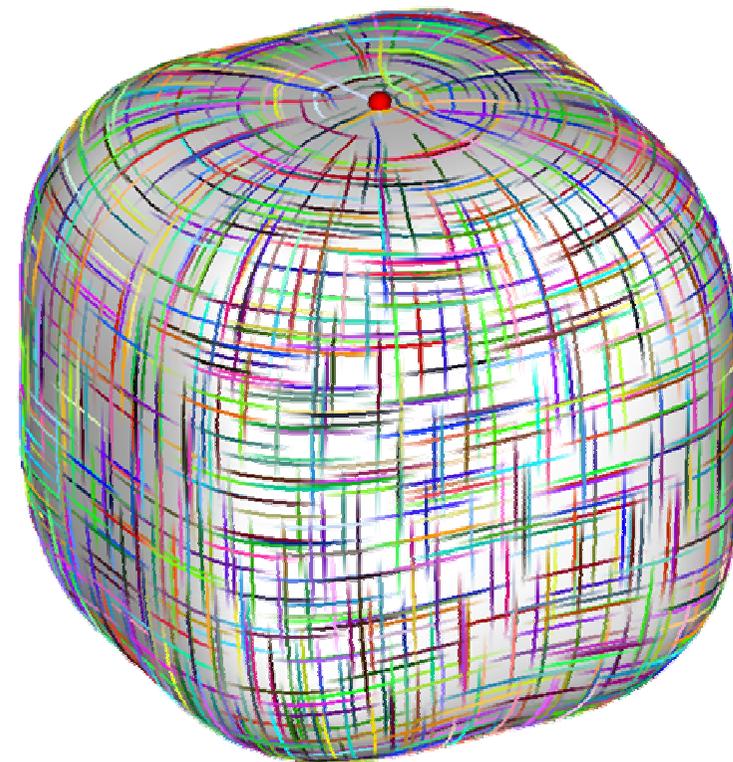
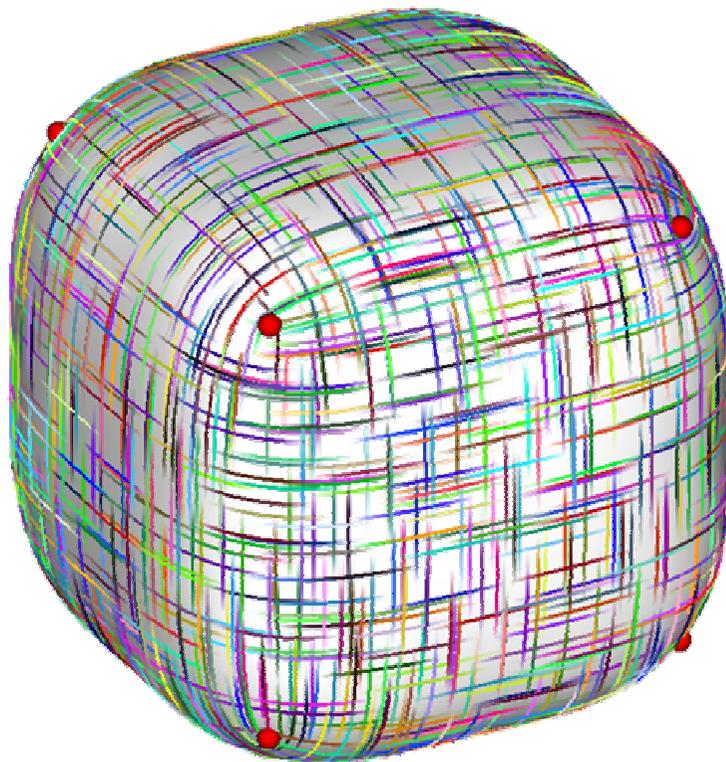
Propriétés désirées

- Champs de directions à N symétries de rotation:



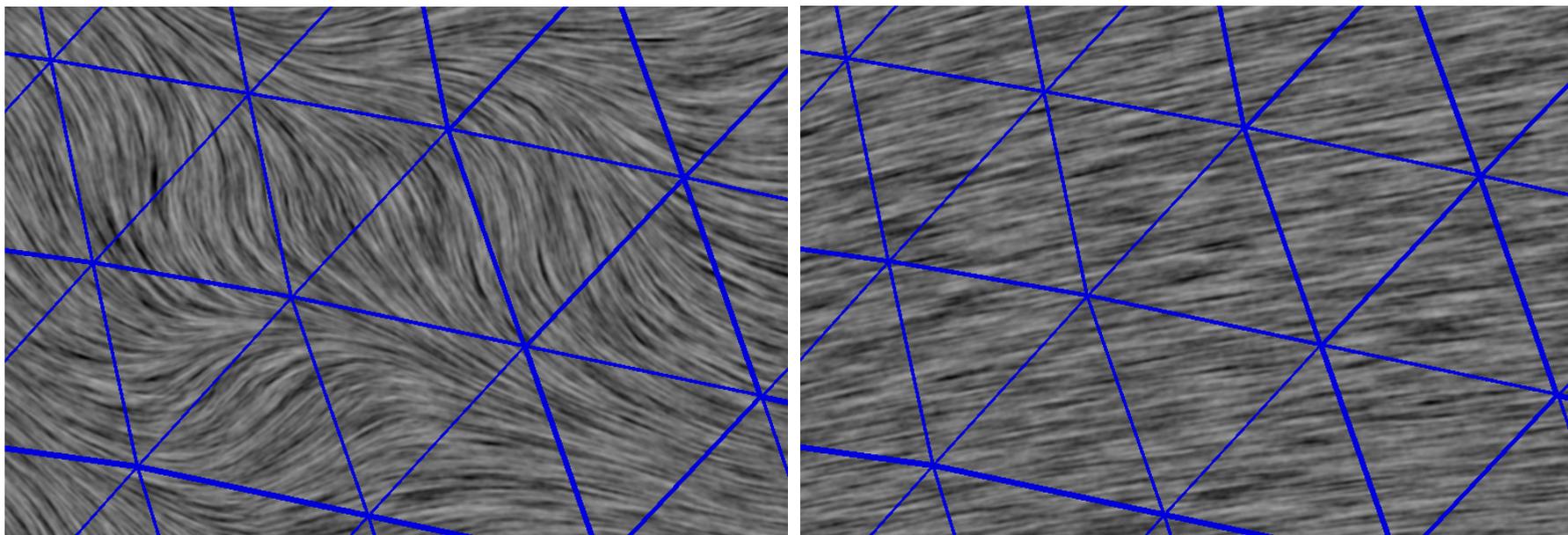
Propriétés désirées

- Champs de directions à N symétries de rotation:



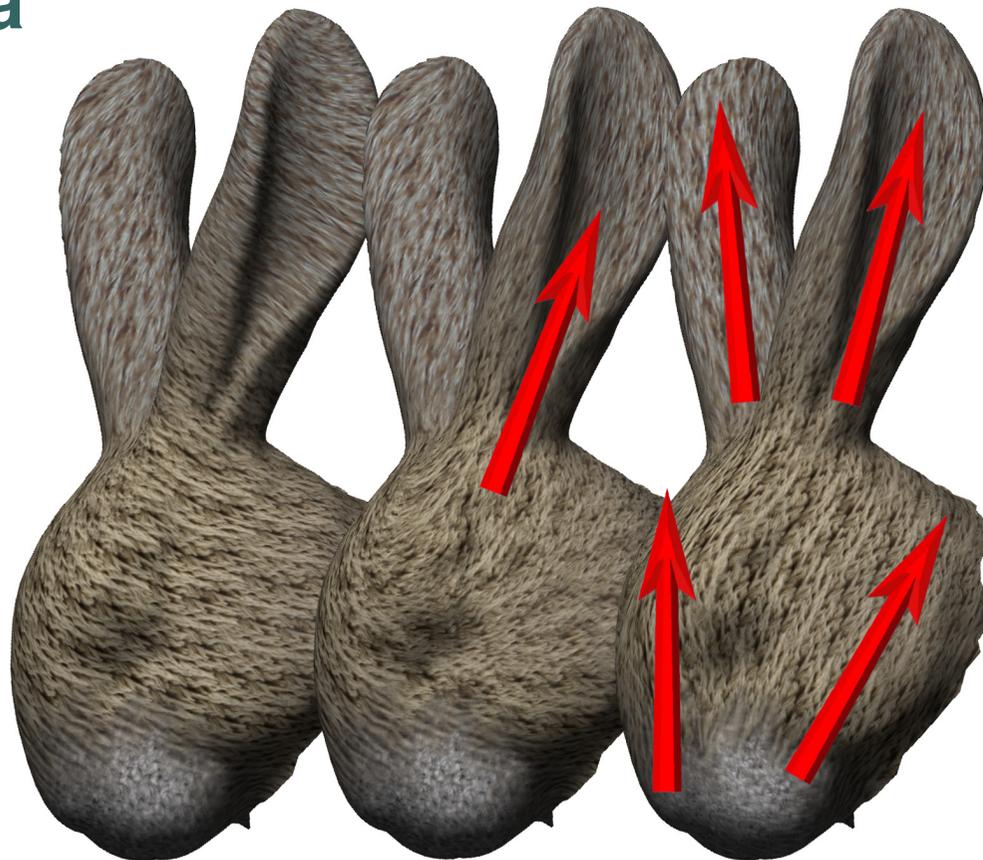
Propriétés désirées

- **Régularité de la direction: résultat lisse**



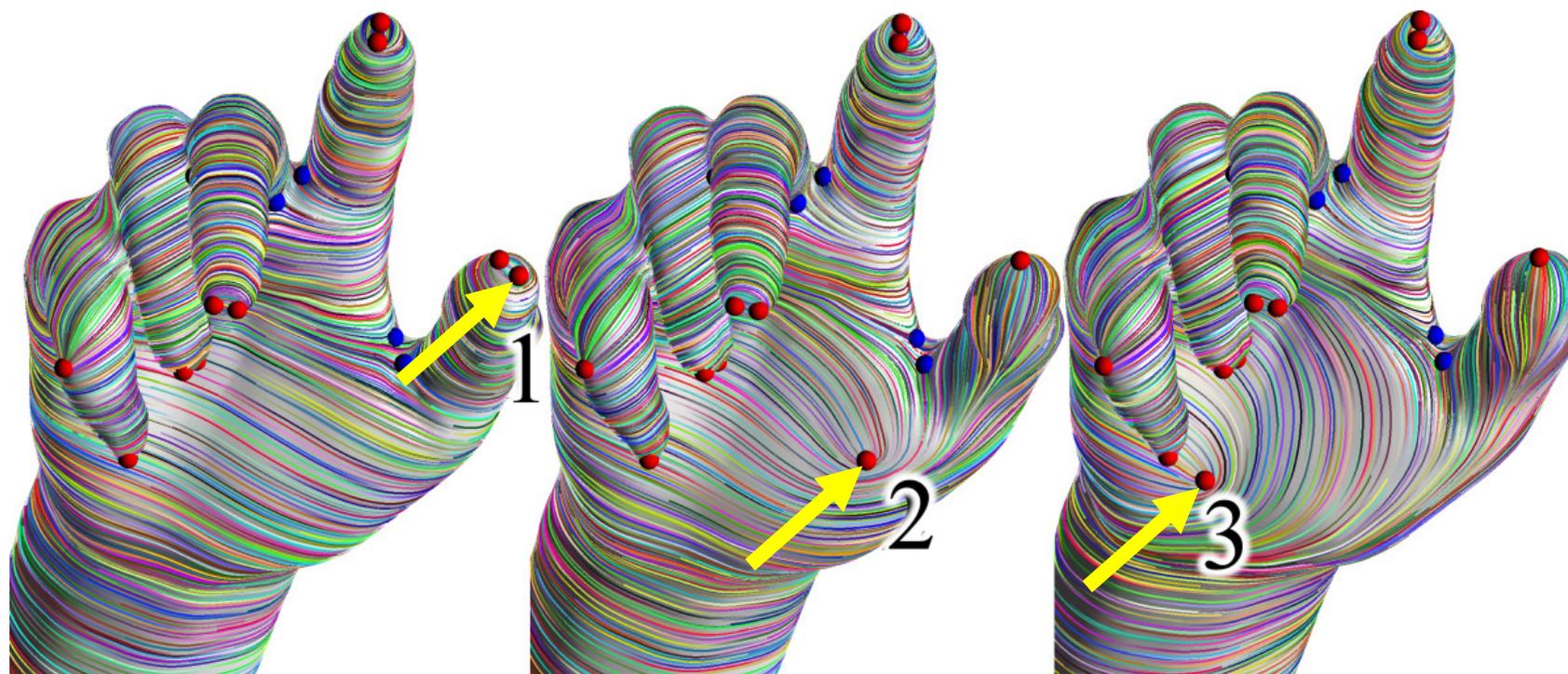
Propriétés désirées

- Contrôle de la géométrie



Propriétés désirées

- Contrôle des singularités/de la **topologie**



Etudier la **topologie** des champs de directions

II.1) *Théorie continue*

Introduction

1) **Théorie continue**

2) Théorie discrète

3) Application au:

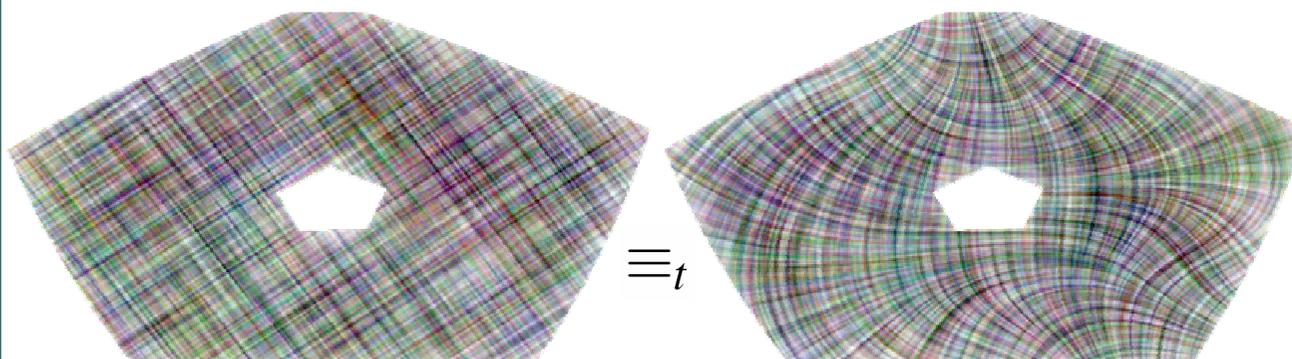
a) contrôle topologique **fort**

b) contrôle topologique **faible**

Conclusion

II.1) Introduction

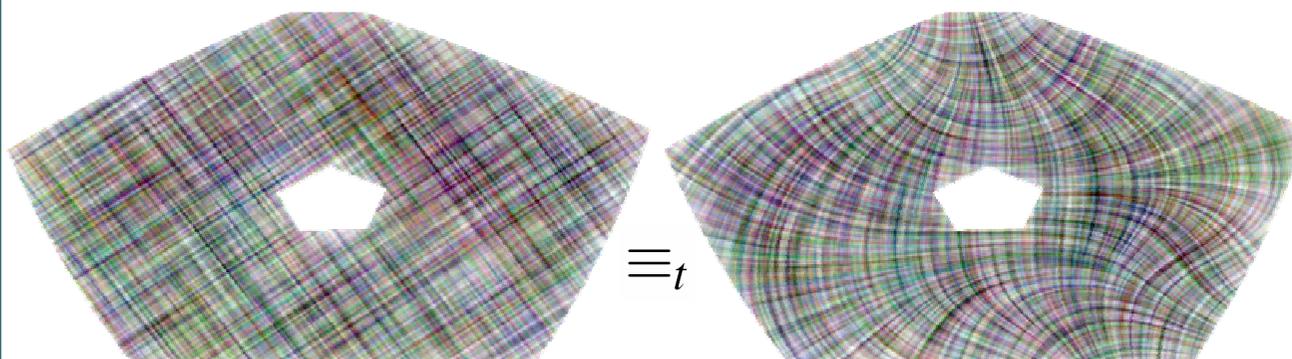
- Topologie des champs de directions



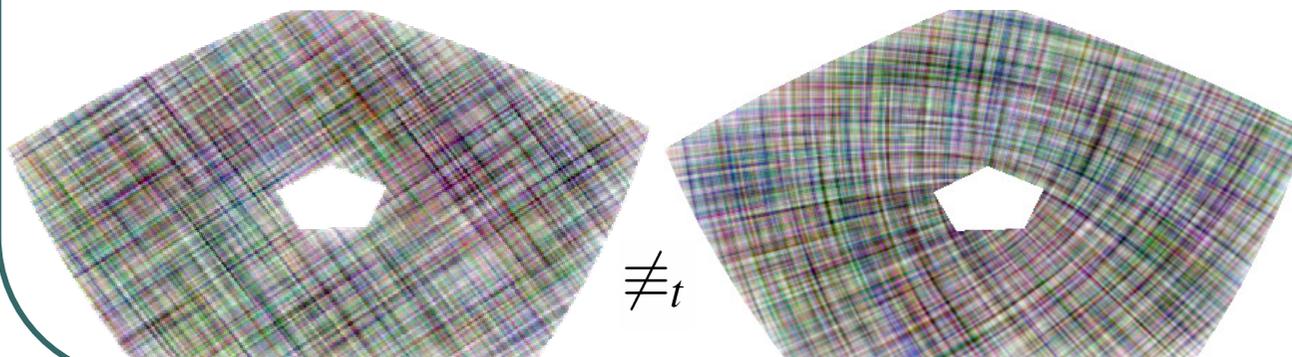
Homotopes

II.1) Introduction

- Topologie des champs de directions



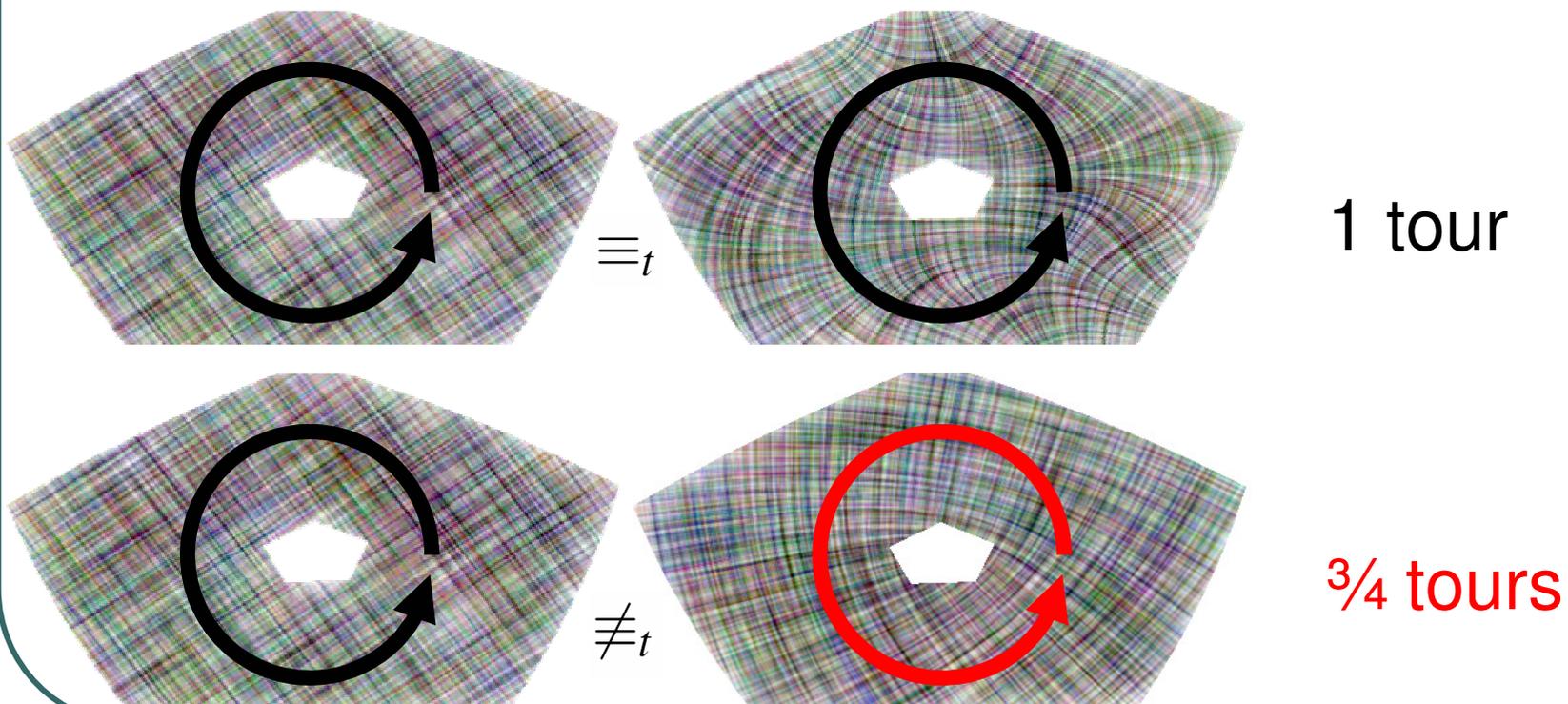
Homotopes



~~Homotopes~~

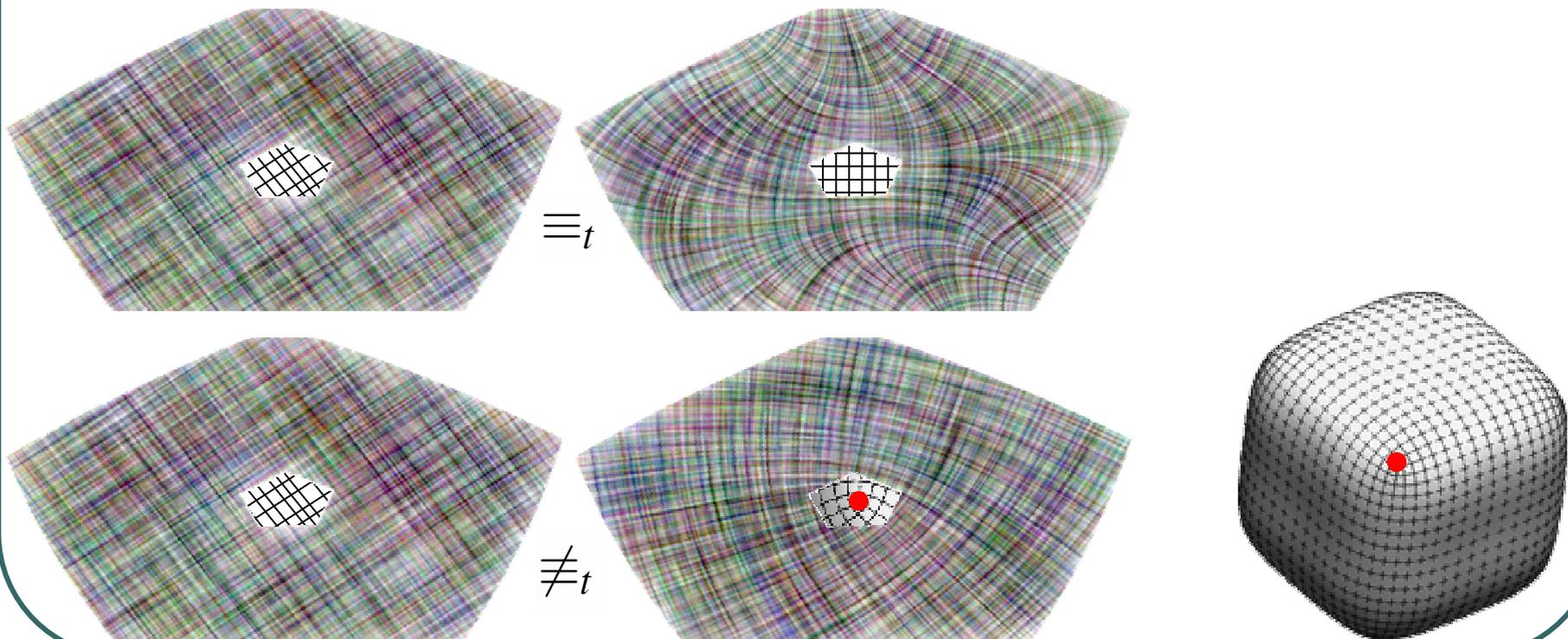
II.1) Introduction

- Topologie des champs de directions

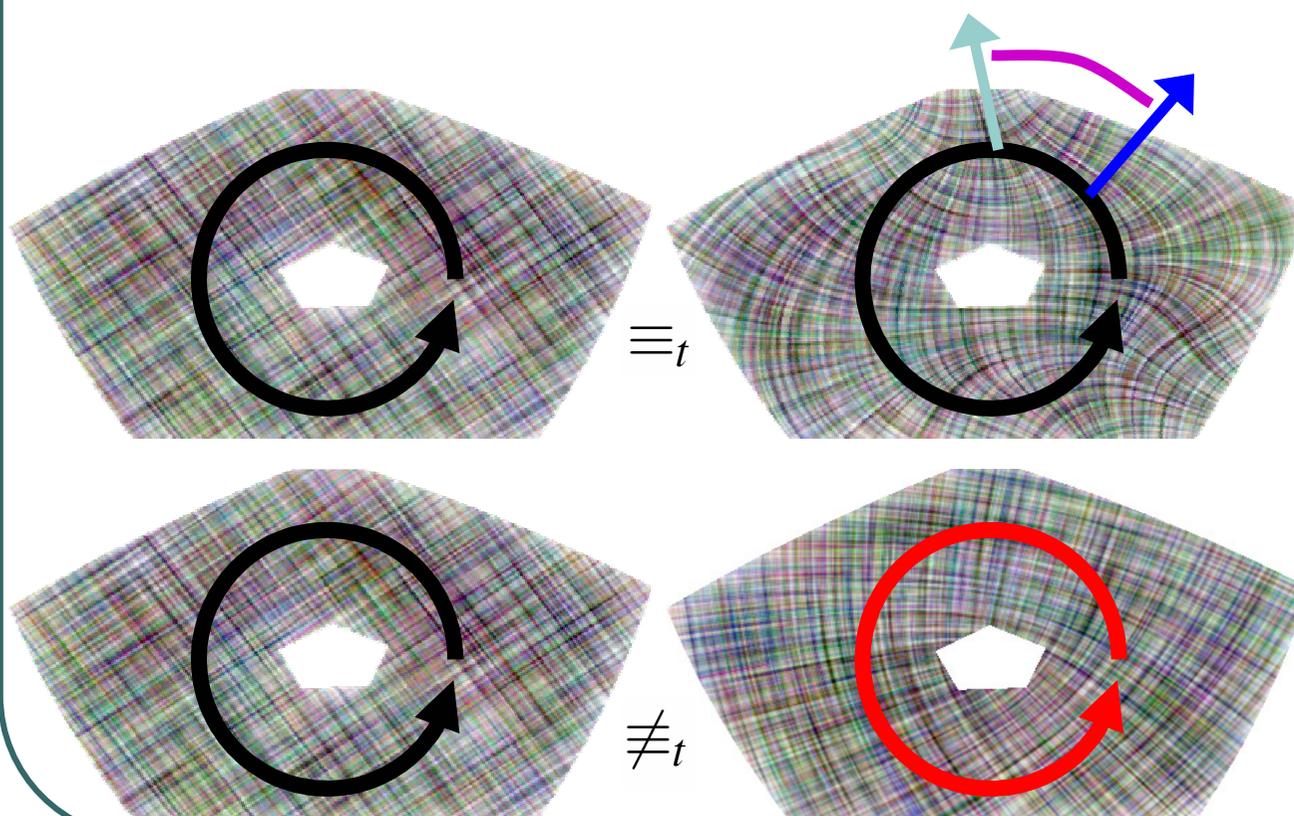


II.1) Introduction

- Topologie / singularités



II.1) Introduction



Courbure

Cycle

Nombre
de tours

II.1) Introduction

- Degrés de liberté topologiques



II Champs de directions

1) Théorie continue

III.1) Introduction

Topologie
de la
surface

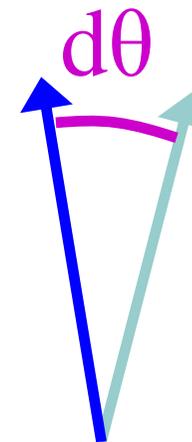
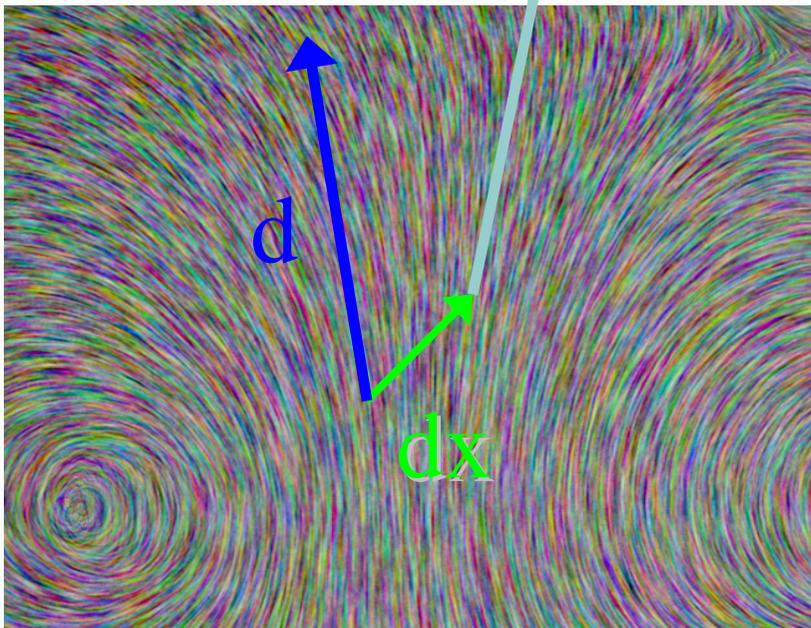


Topologie
du champ
de directions

Courbure d'un champ de directions

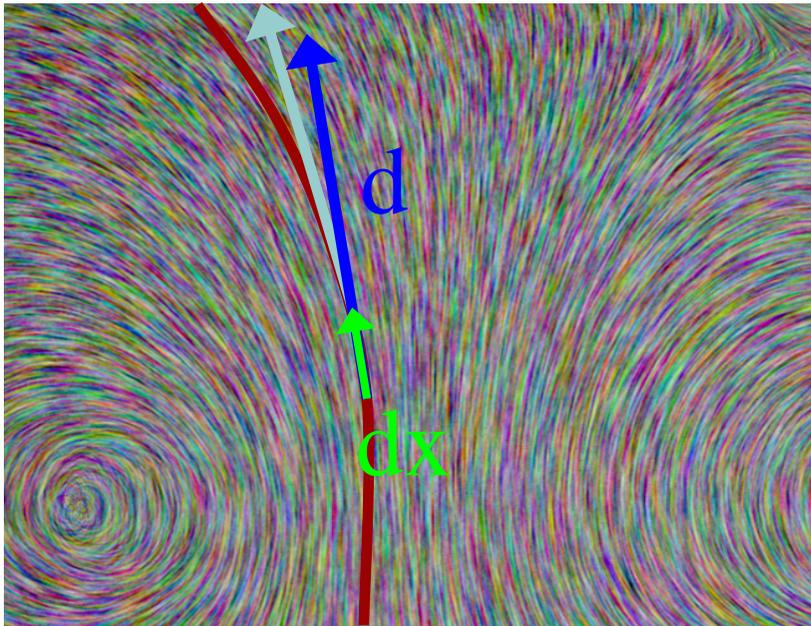
- La courbure du champ est:

$$\kappa_d = d\theta/dx$$



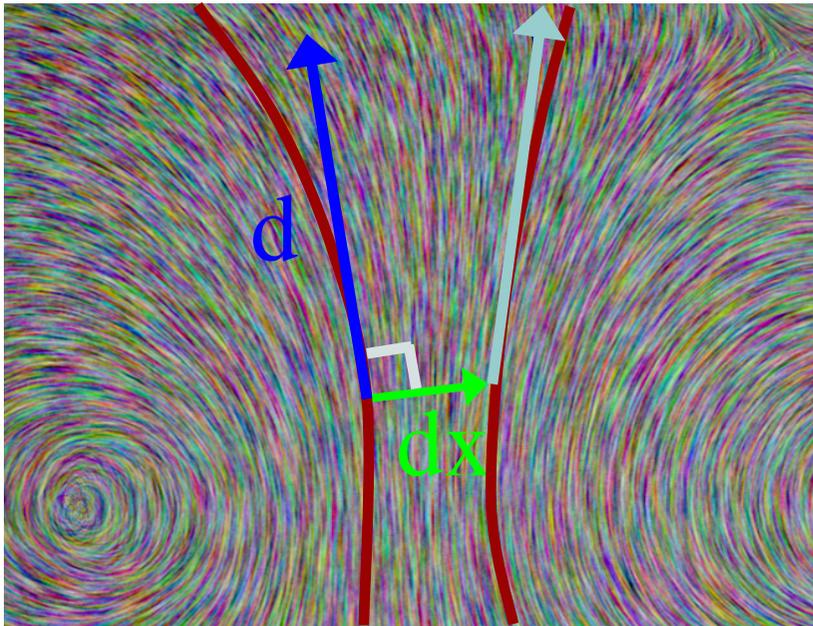
Courbure d'un champ de directions

- La courbure de d dans la direction d est la courbure des lignes de champ

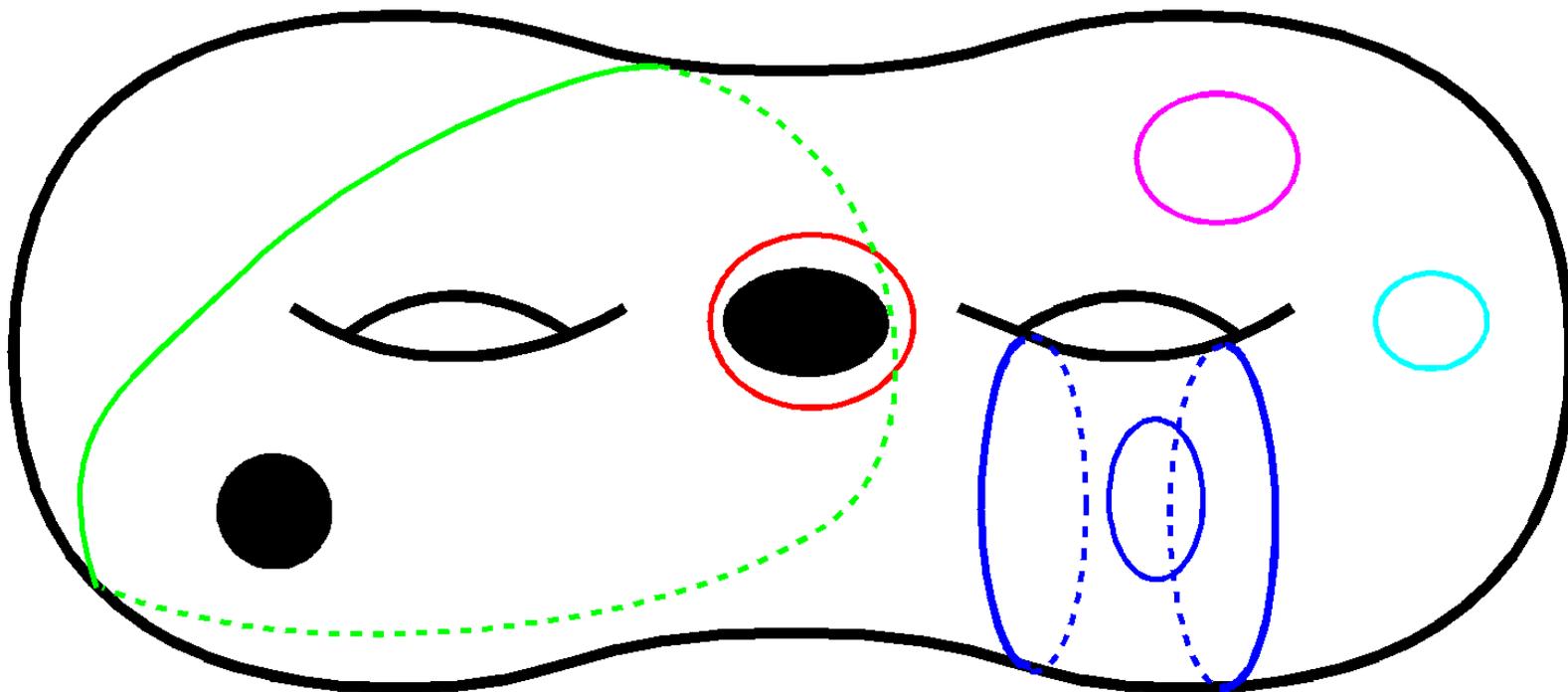


Courbure d'un champ de directions

- La **courbure** de d dans la direction d^T quantifie le parallélisme des **lignes de champ**



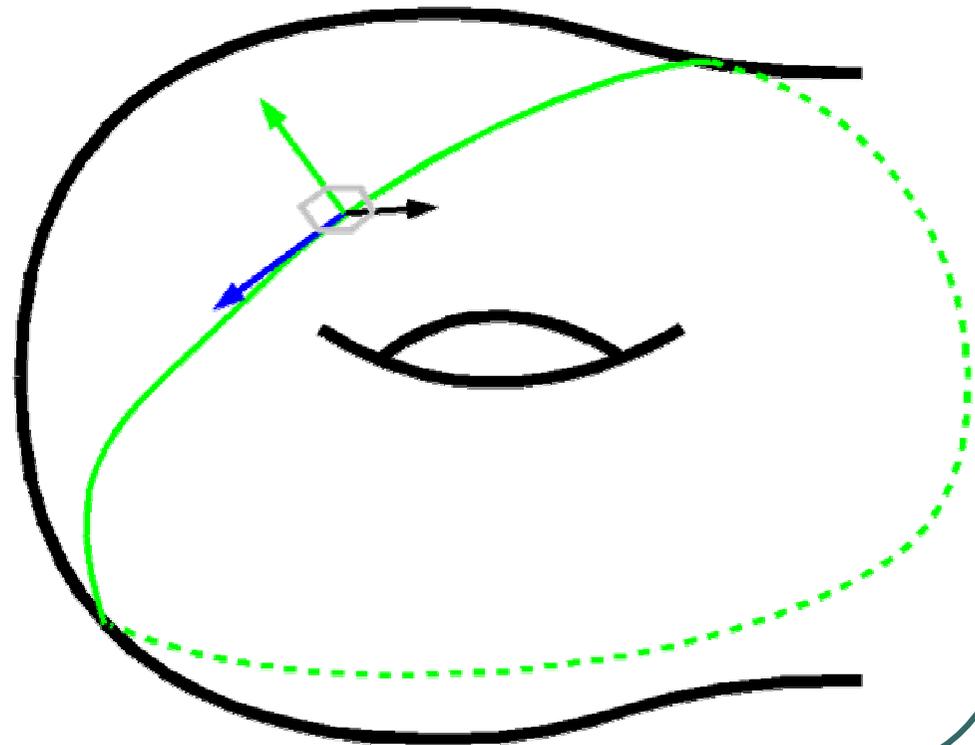
Cycles



Repère de Darboux

Base **Orthonormale** :

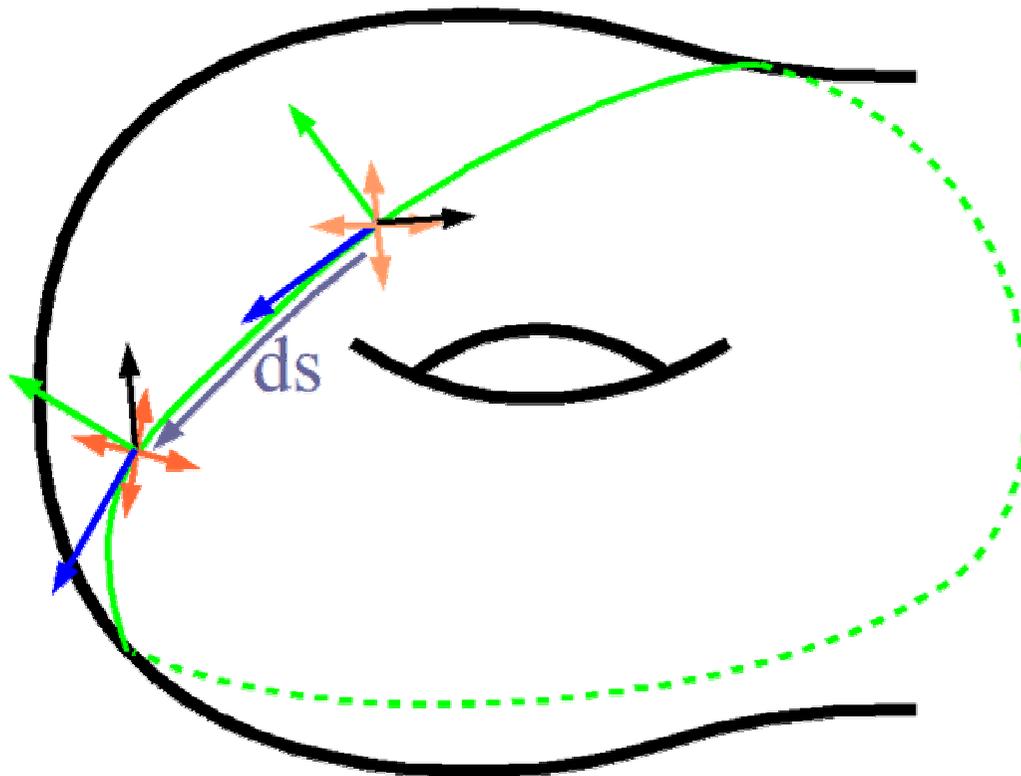
- Tangente
- Normale à la surface
- Normale au cycle



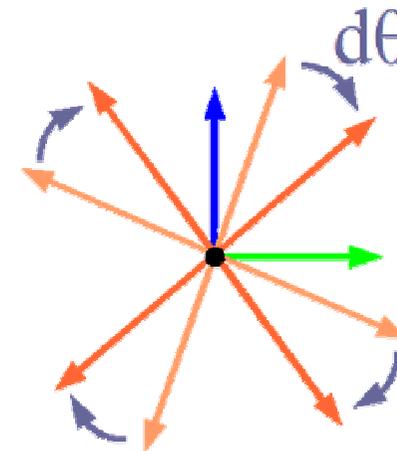
Nombre de tours

Nombre de tours:

Intégrale de la courbure dans le repère de Darboux

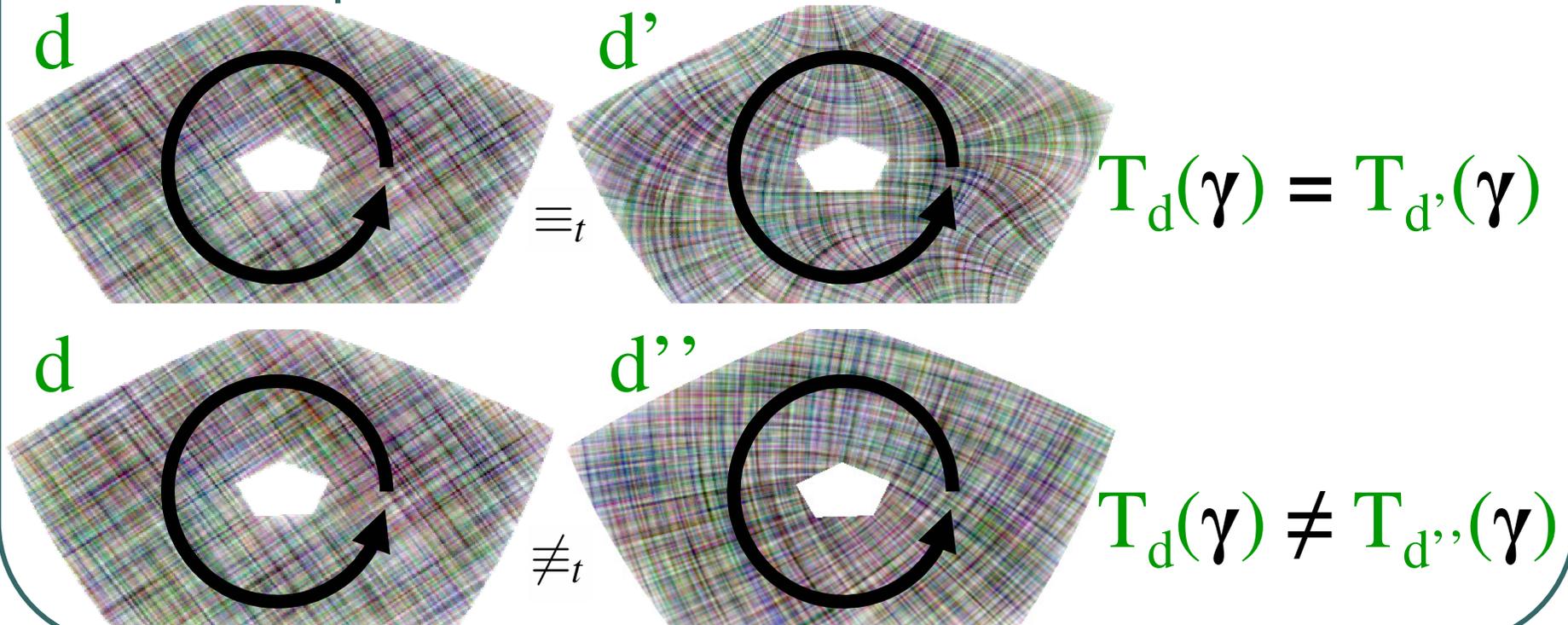


Multiple de $1/N$

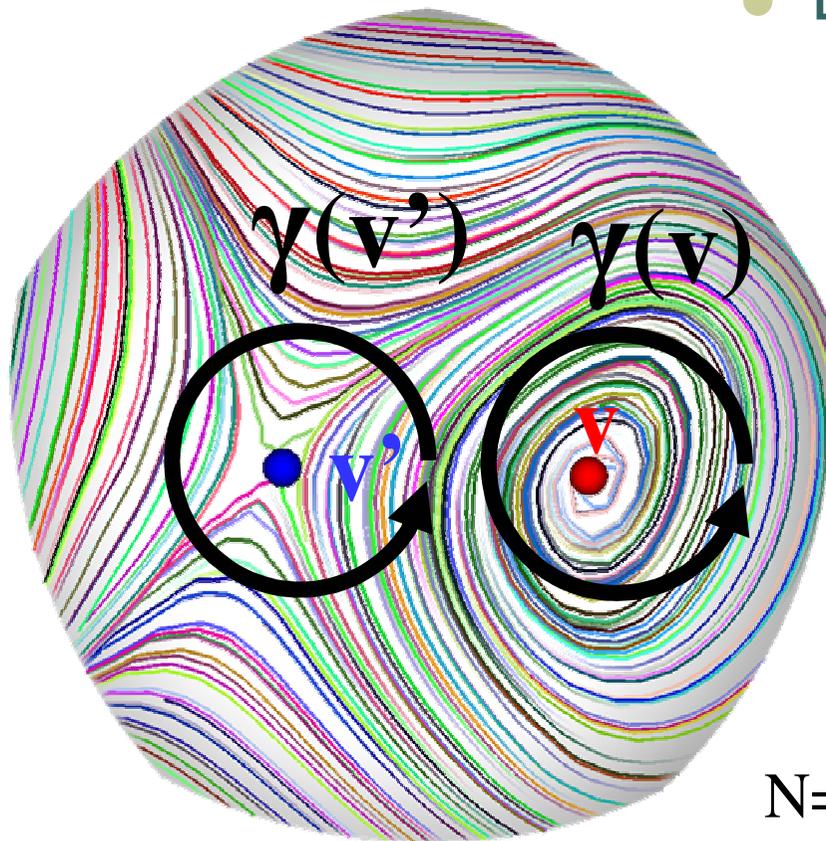


Topologie des champs de directions

- Les **nombre**s de tours contrôlent la **topologie** des champs de direction.



Index des singularités



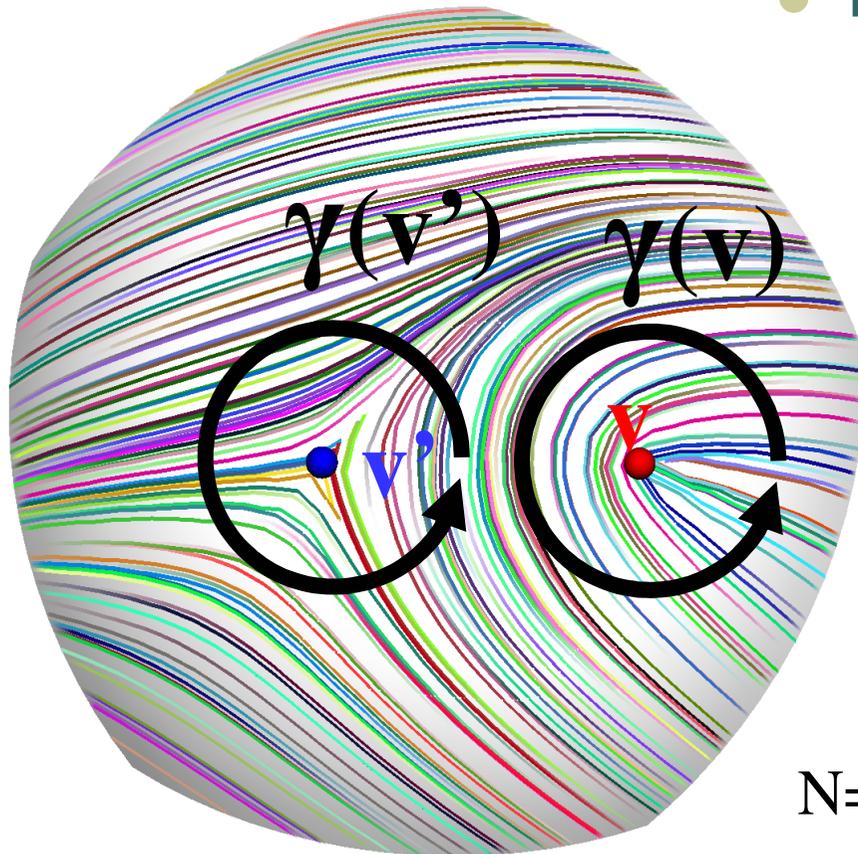
- Les singularités sont:
 - des **trous** dans le domaine de définition
 - classées suivant leur **index**:

$$I(\mathbf{v}) = 1 - T(\gamma(\mathbf{v}))$$

$$I(\mathbf{v}) = 1$$

$$I(\mathbf{v}') = -1$$

Index des singularités



- Les singularités sont:
 - des **trous** dans le domaine de définition
 - classées suivant leur **index**:

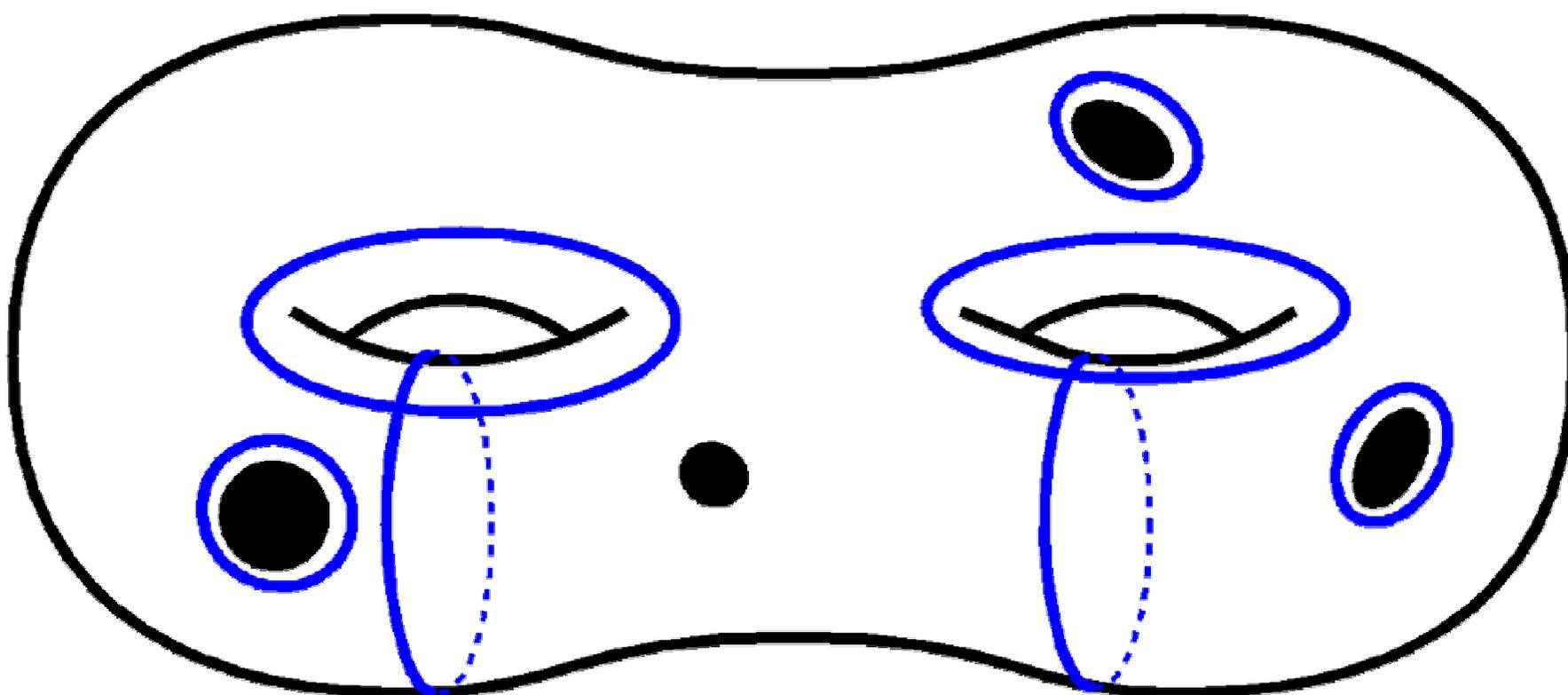
$$I(\mathbf{v}) = 1 - T(\gamma(\mathbf{v}))$$

$$I(\mathbf{v}) = 1/2$$

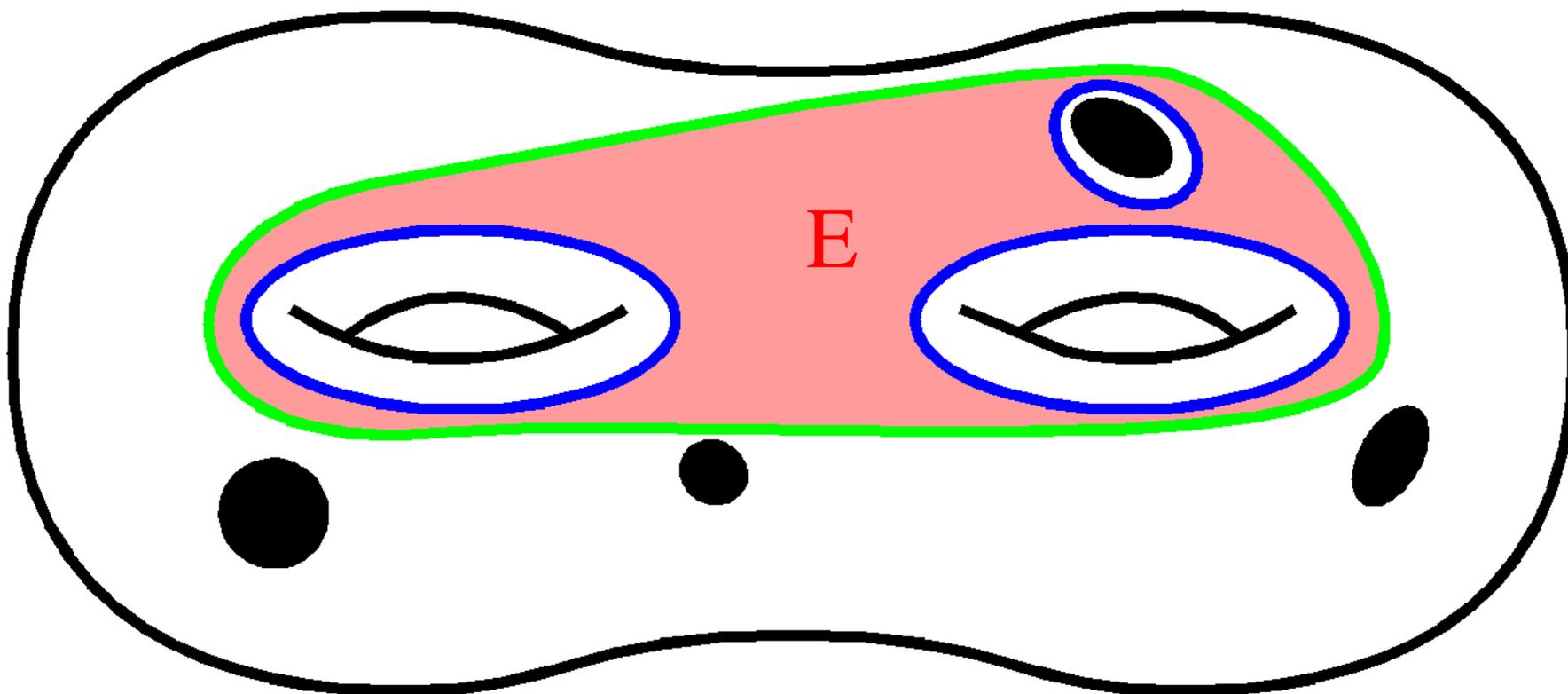
$$I(\mathbf{v}') = -1/2$$

N=2

Base d'homologie



Base d'homologie



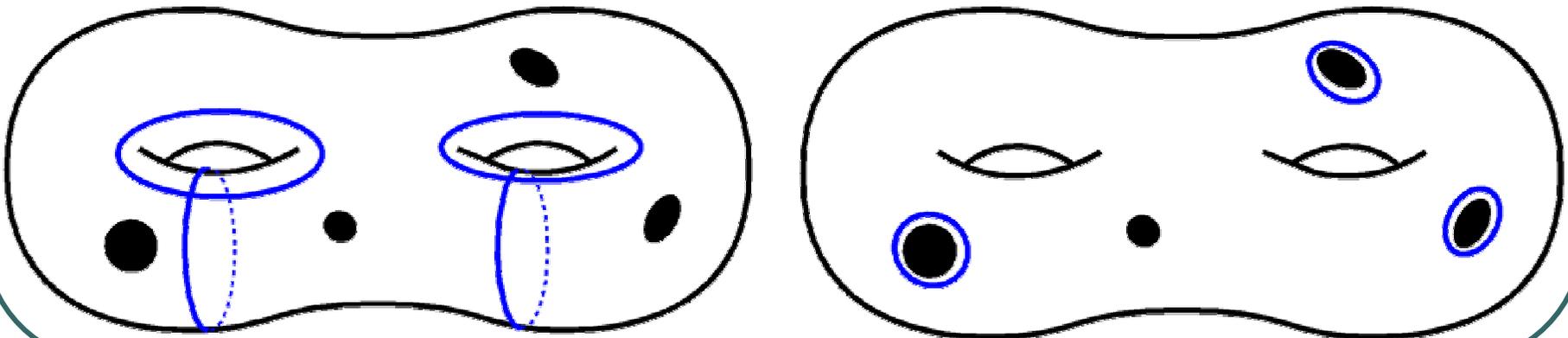
• $\gamma \equiv_g \sum n_i \gamma_i$

$\gamma - \sum n_i \gamma_i = \partial E$

Degrés de liberté topologiques

$$T(\gamma) = \sum n_i T(\gamma_i) - \xi(\mathbf{E})$$

$$2g + (b-1) T(\gamma_i)$$



II.1) Conclusion

- On a trouvé la relation entre:
 - la **topologie** des champs de directions
 - la **topologie** de la surface.
- On a trouvé les **degrés de liberté topologiques**

II.2) *Théorie discrète*

Introduction

1) Théorie continue

2) **Théorie discrète**

3) Application au:

a) contrôle topologique **fort**

b) contrôle topologique **faible**

Conclusion

II Champs de directions

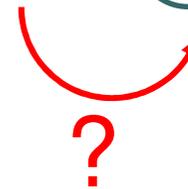
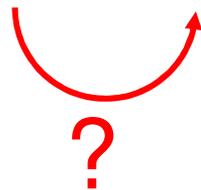
2) Théorie discrète

II.2) Introduction

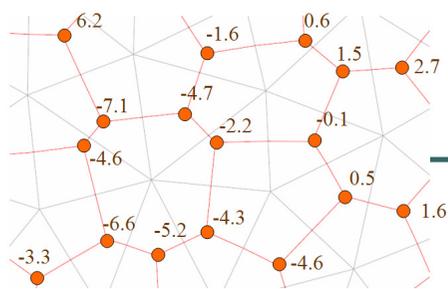
Angles θ

Courbures κ , κ^r
Sauts de périodes k

Défaut angulaire K
Index de
singularités l

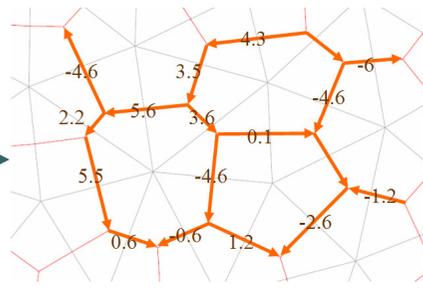


II.2) Introduction



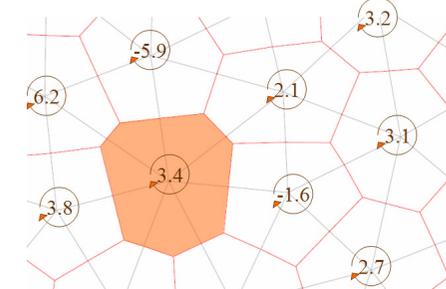
0-formes duales

d



1-formes duales

d



2-formes duales

Angles θ

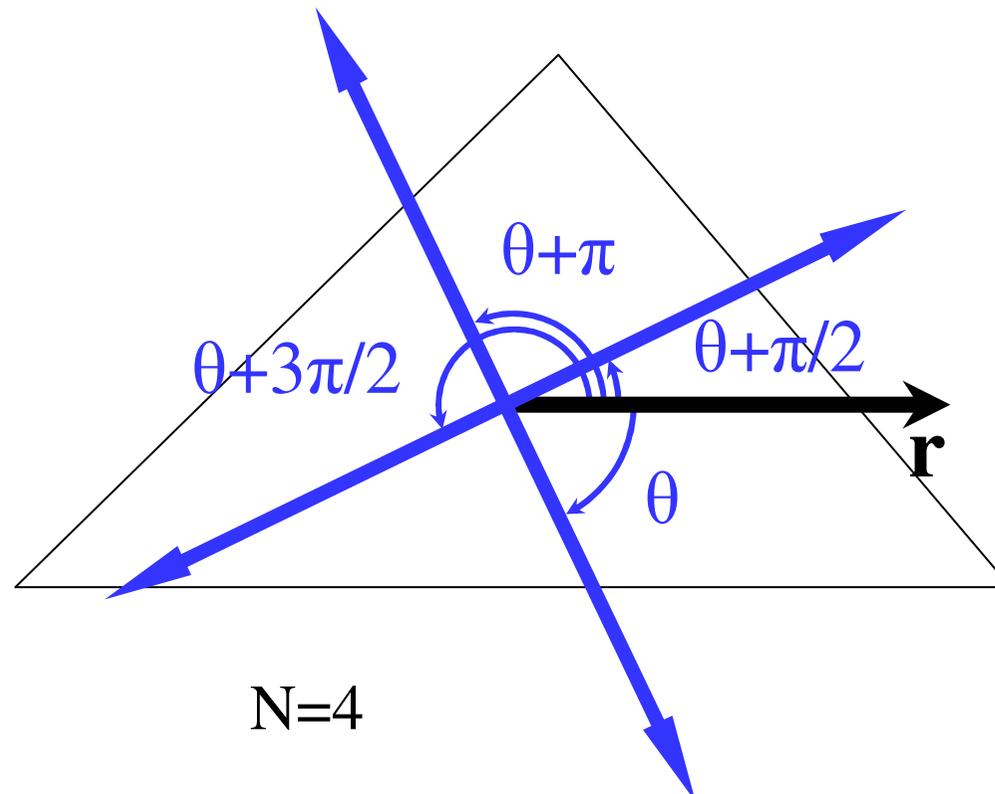
Courbures κ, κ^r
Sauts de périodes k

Défaut angulaire K
Index de singularités I

?

?

Représentation des champs de directions



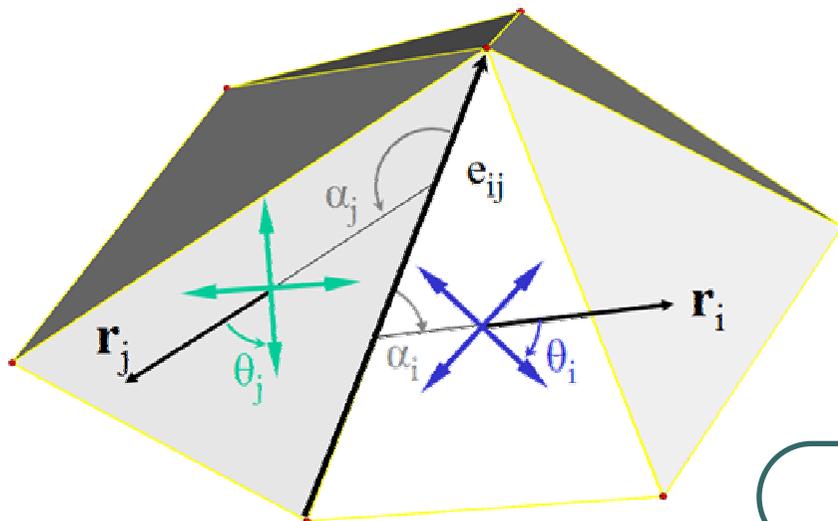
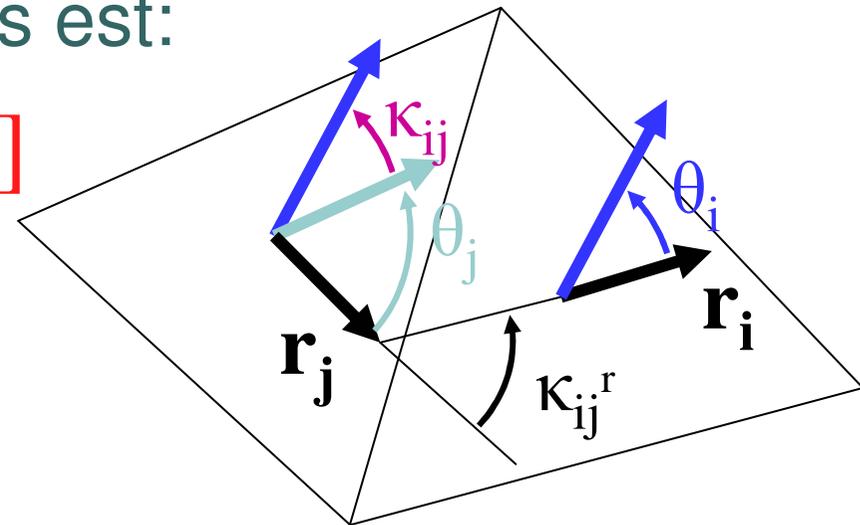
θ est une **0-forme** (duale)

Courbure des champs de directions

- La courbure du champs est:

$$\kappa_{ij} = \theta_j - \theta_i + \kappa_{ij}^r [2\pi/N]$$

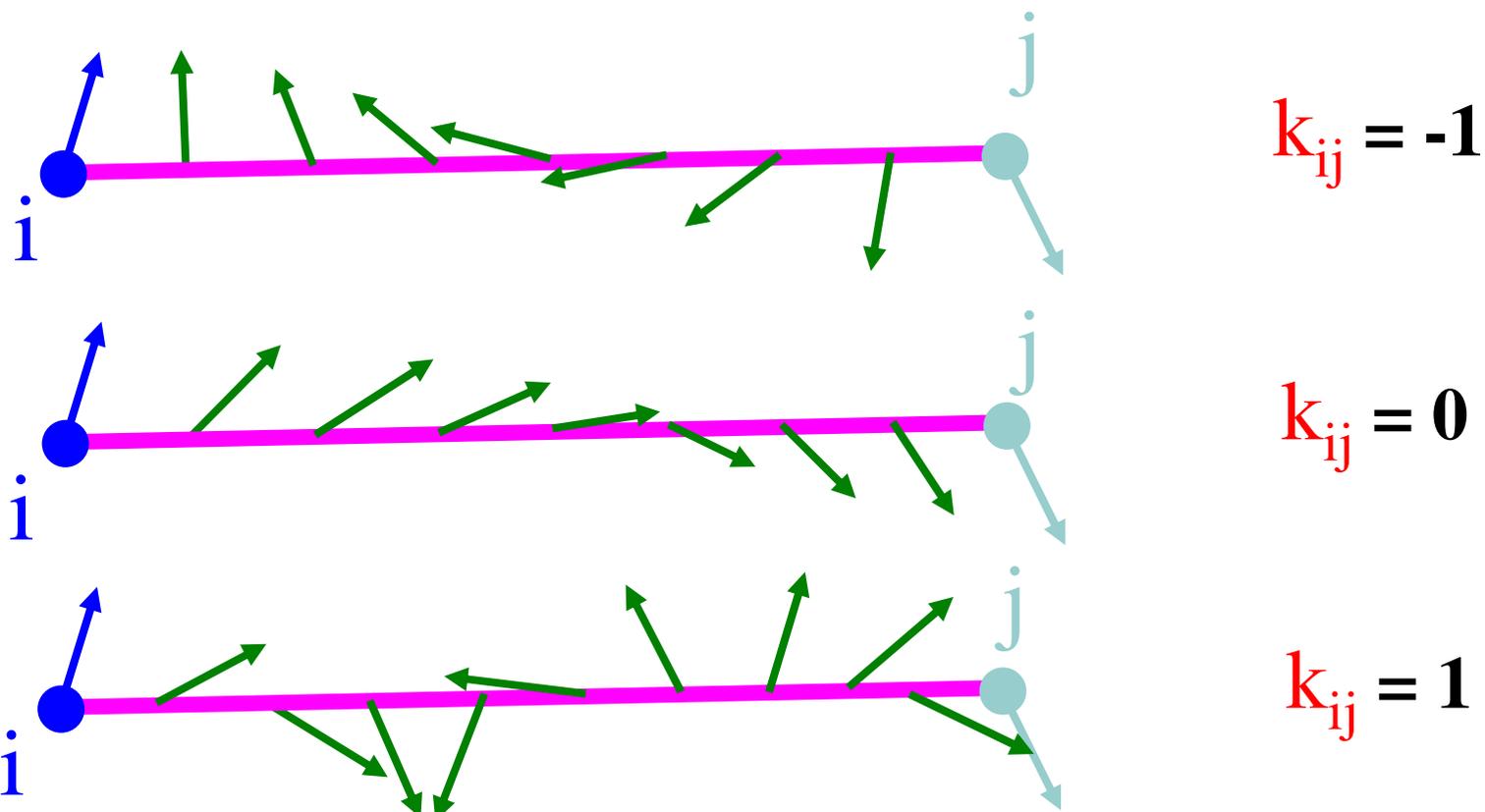
$$\kappa = d\theta + \kappa^r [2\pi/N]$$



- κ^r prend la géométrie en compte: $\kappa_{ij}^r = \alpha_i - \alpha_j$

κ et κ^r sont des 1-formes

Sauts de périodes



k est une 1-forme entière

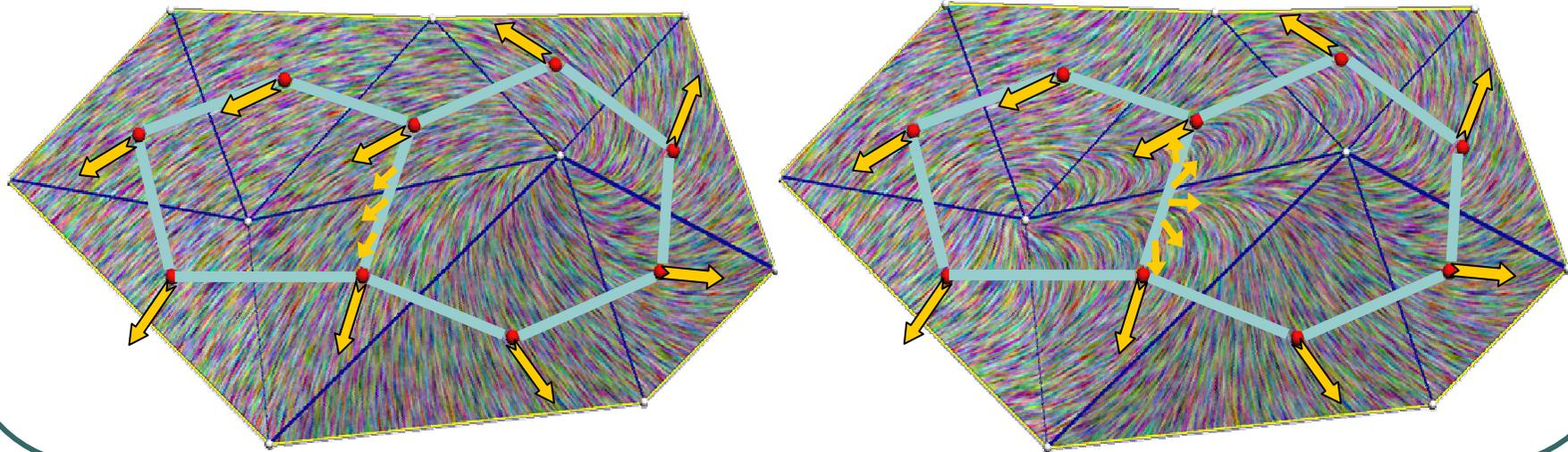
Sauts de périodes

Remplacer le modulo $2\pi/N$ par des **sauts de périodes**:

$$\kappa = d\theta + \kappa^r [2\pi/N]$$

$$\kappa = d\theta + \kappa^r + (2\pi/N)k$$

k définit la **rotation** du champs entre les triangles.



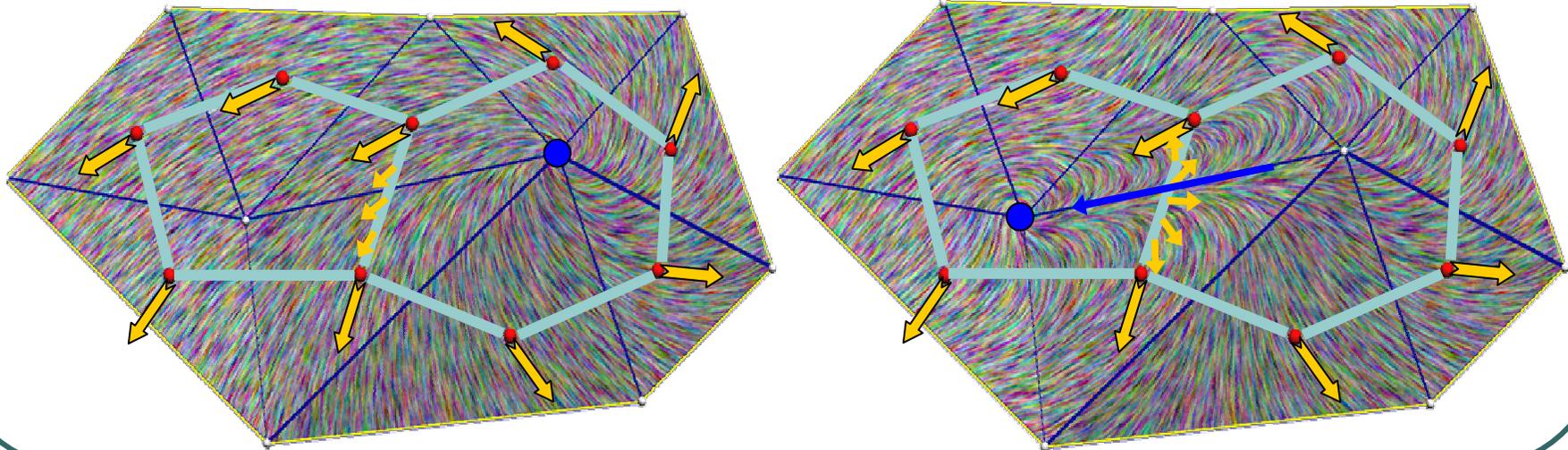
Défaut angulaire/courbure/singularités

Dérivée extérieure de la courbure:

$$d\kappa = \cancel{d\theta} + d\kappa^r + 2\pi \left(\frac{dk}{N} \right)$$

$$d\kappa = -K + 2\pi I$$

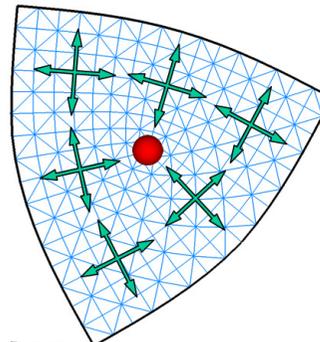
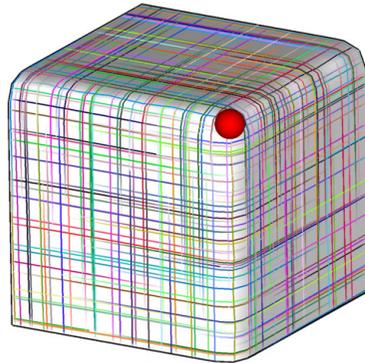
k définit les indices des singularités/nombres de tours.



Défaut angulaire/courbure/singularités

$$d\kappa = -K + 2\pi I$$

courbure nulle
une singularité

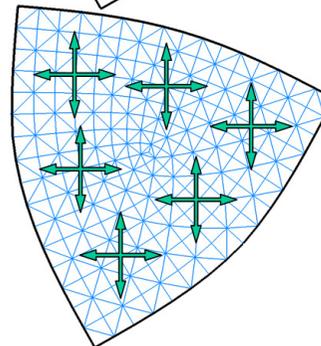
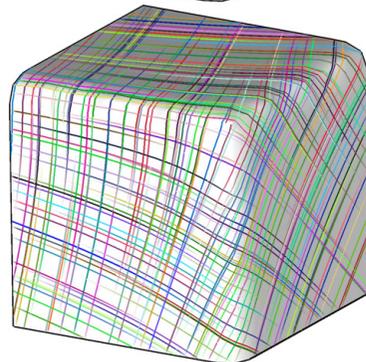


$$d\kappa = 0$$

$$K = \pi/2$$

$$I = 1/4$$

courbure non nulle
pas de singularités

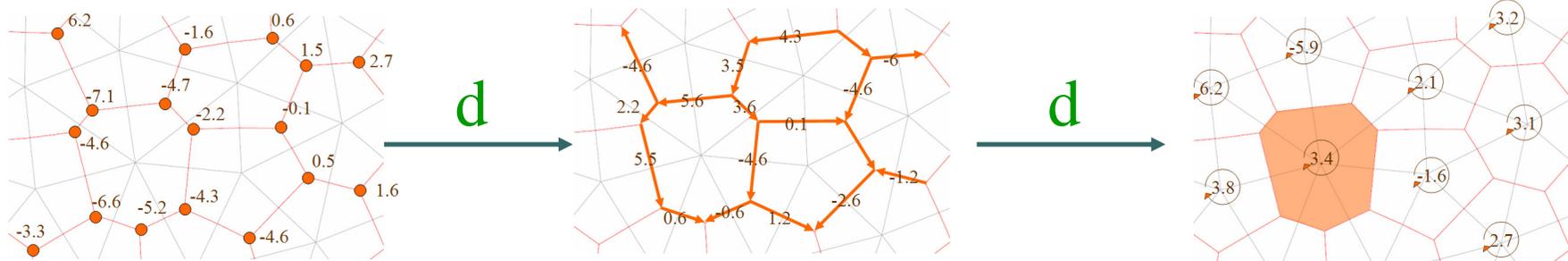


$$d\kappa = -\pi/2$$

$$K = \pi/2$$

$$I = 0$$

III.2) Conclusion



Angles θ

Courbures κ, κ^r
Sauts de périodes k

Défaut angulaire K
Index de singularités I

$$\kappa = d\theta + \kappa^r + (2\pi/N)k$$

$$d\kappa = -K + 2\pi I$$

II Champs de directions

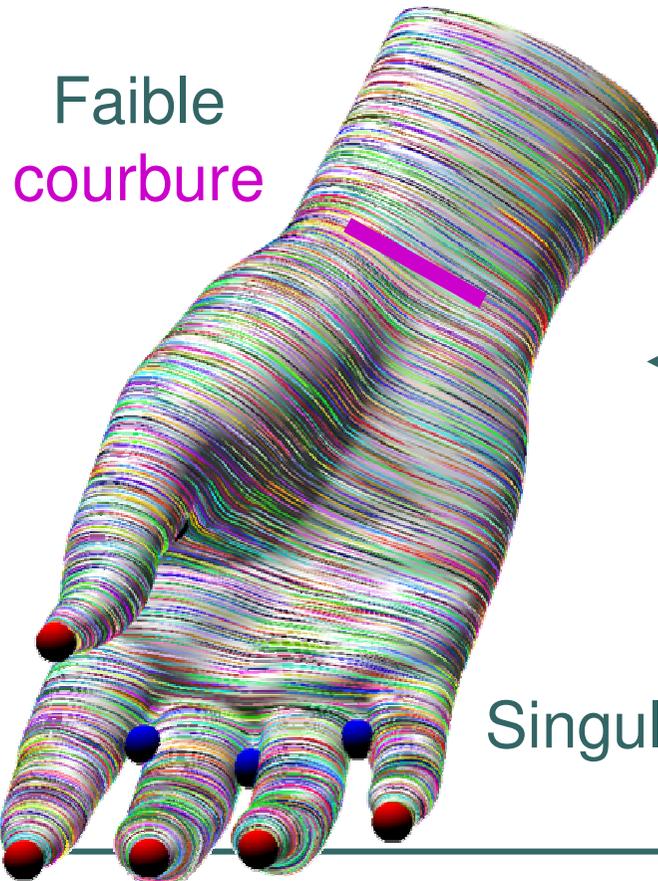
2) Théorie discrète

II.2) Conclusion

Régularité géométrique

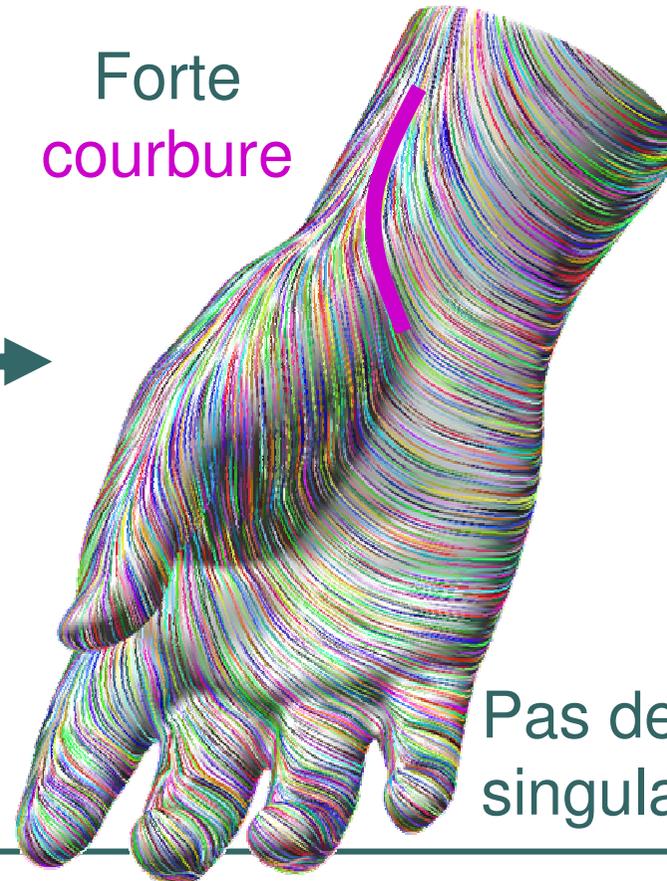


Topologie simple



Faible
courbure

Singularités



Forte
courbure

Pas de
singularités

10/07/2008

Soutenance de thèse

II.3a) Application au contrôle fort

Introduction

1) Théorie continue

2) Théorie discrète

3) **Application au:**

a) **contrôle topologique fort**

b) **contrôle topologique faible**

Conclusion

II.3a) Application au contrôle fort

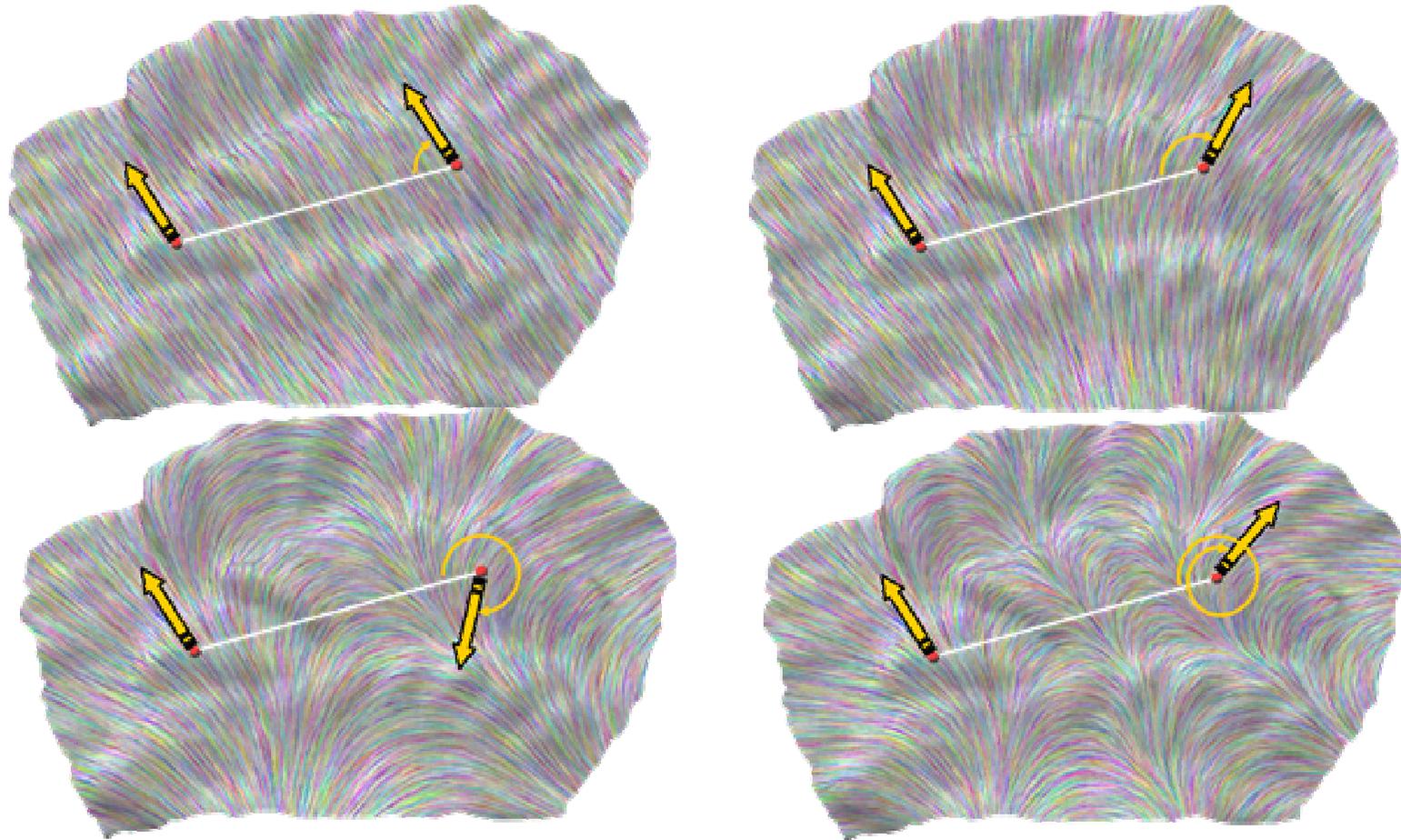
$$\kappa = d\theta + \kappa^r + \underbrace{2k\pi / N}_{\text{Topologie}}$$

- Minimiser $\|\kappa\|^2$: **Système linéaire** en θ

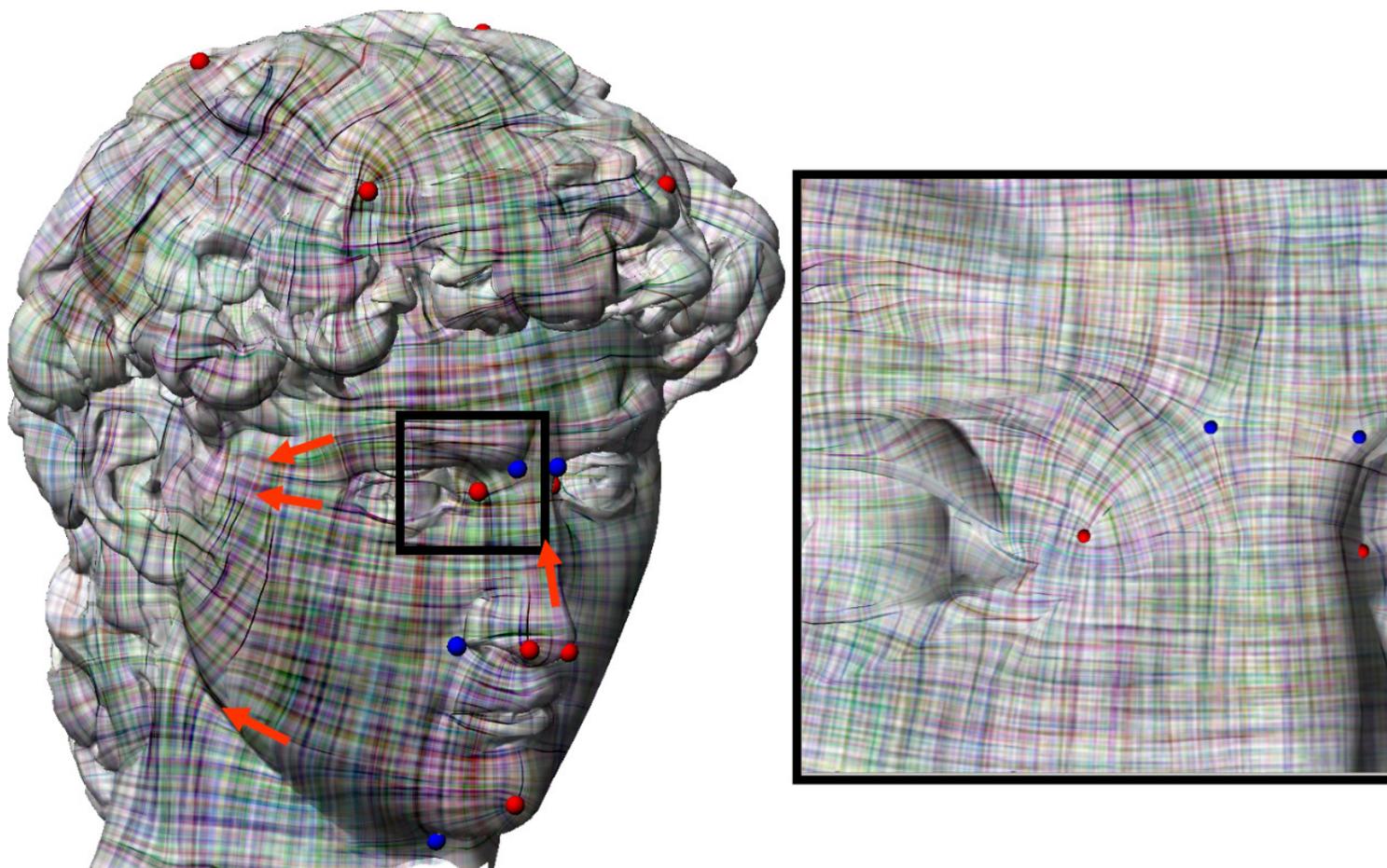
Résultats



Contraintes directionnelles



Résultats



II.3a) Conclusion

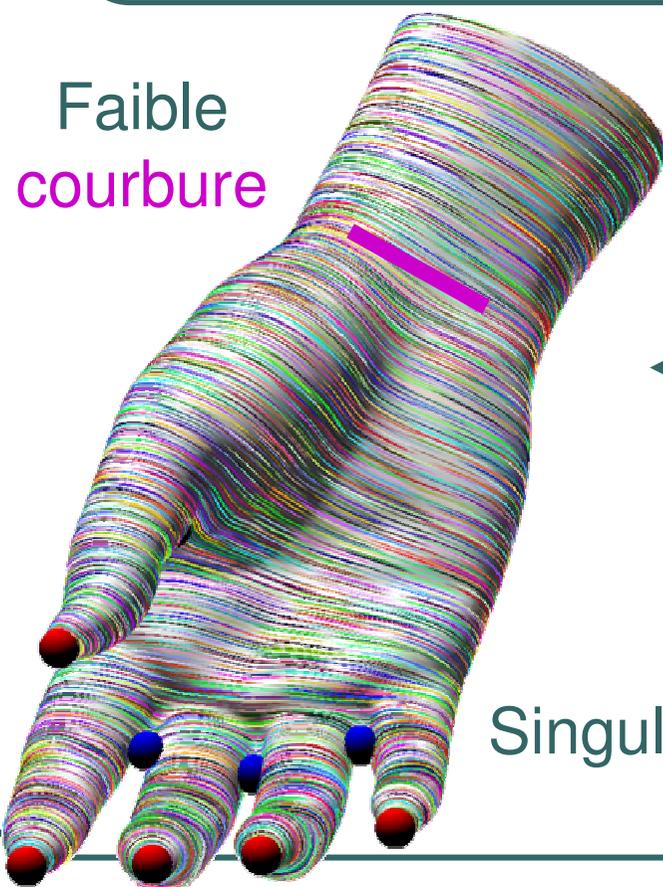
- La **topologie** du champs :
 - entiers k_{ij}
 - contraintes **topologiques** définies par l'utilisateur.
- La **géométrie** du champs:
 - réels θ_i
 - système **linéaire** minimisant la **courbure**.
- Problèmes:
 - topologie fixée à la main
 - difficile d'obtenir peu de courbure

II.3a) Conclusion

Régularité géométrique

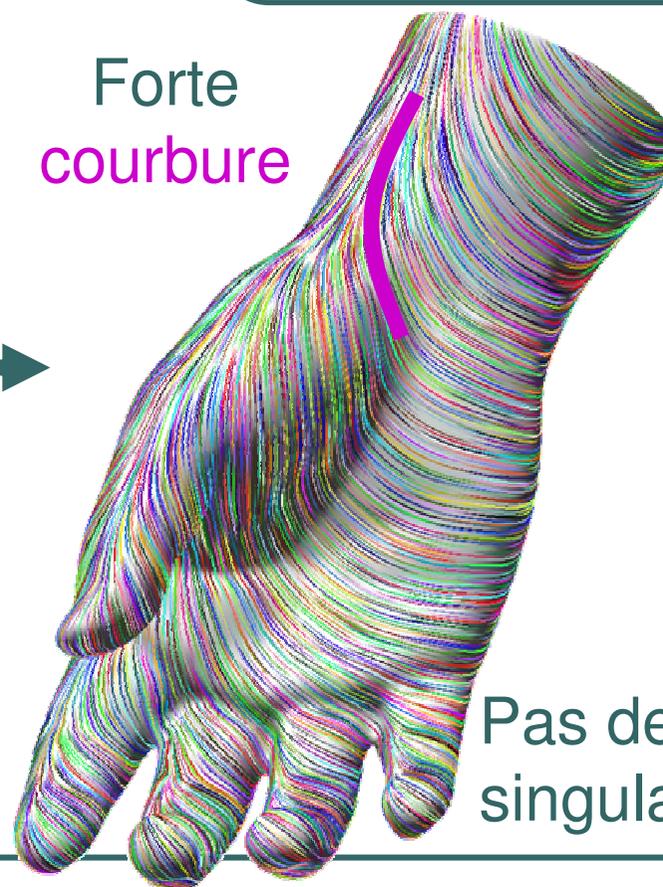


Topologie simple



Faible
courbure

Singularités



Forte
courbure

Pas de
singularités

II.3b) Application au contrôle **faible**

Introduction

1) Théorie continue

2) Théorie discrète

3) Application au:

a) contrôle topologique fort

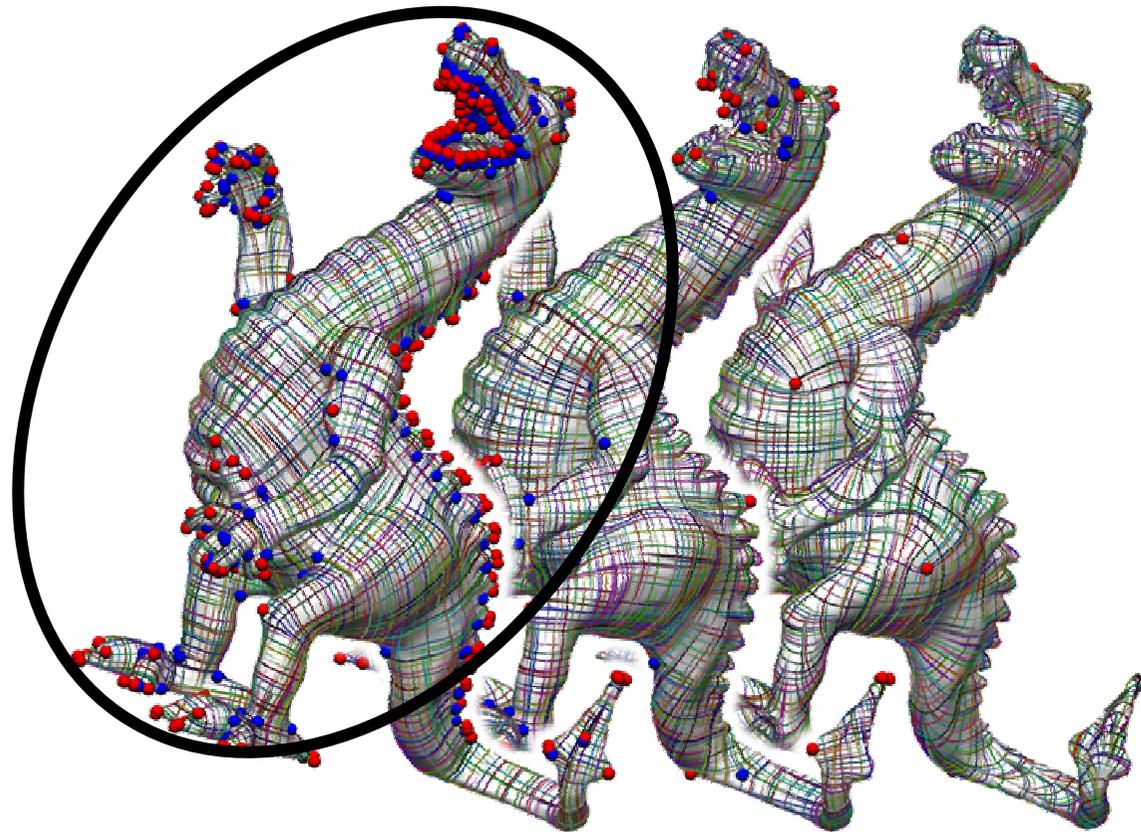
b) contrôle topologique **faible**

Conclusion

Approche géométrique

- Minimise la courbure $\kappa = d\theta + \kappa^r [2\pi/N]$

- Courbure faible
- Beaucoup de singularities



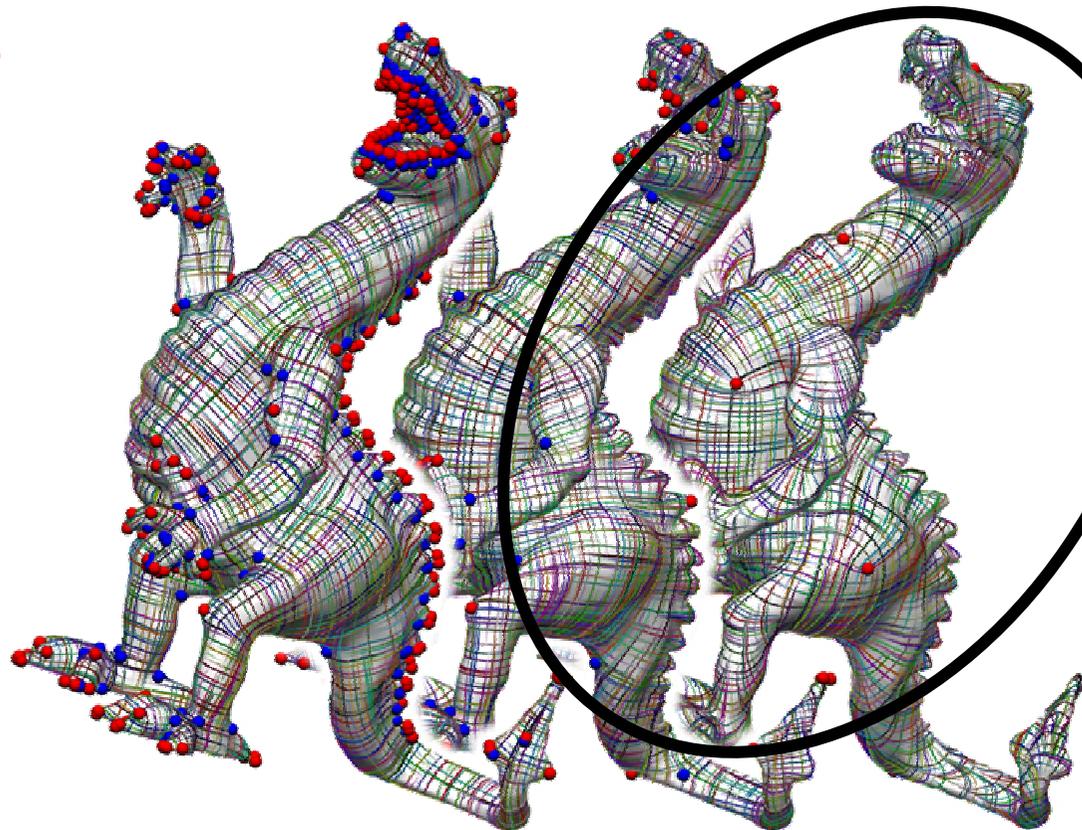
Approche *topologique*

- Minimise la courbure $\kappa = d\theta + \kappa^r [2\pi/N]$

sous contrainte

$$d\kappa = -K$$

- Courbure forte
- Minimum de singularities



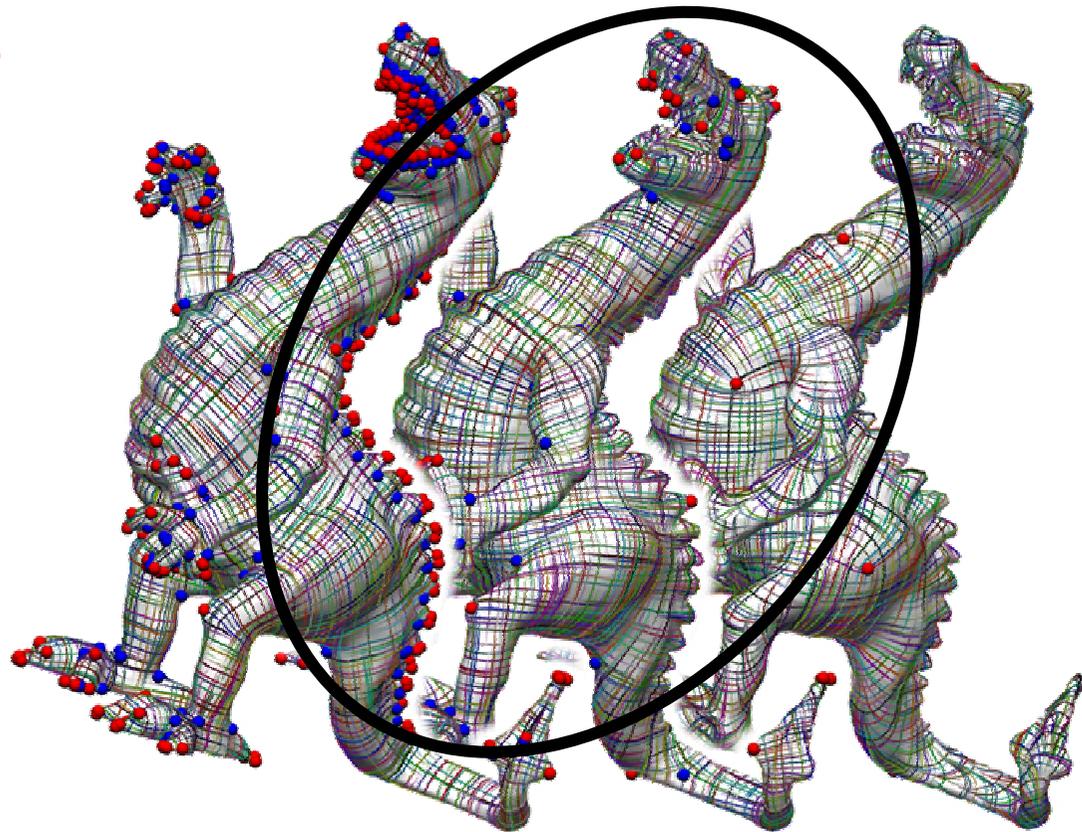
Approche *intermédiaire*

- Minimise la courbure $\kappa = d\theta + \kappa^r [2\pi/N]$

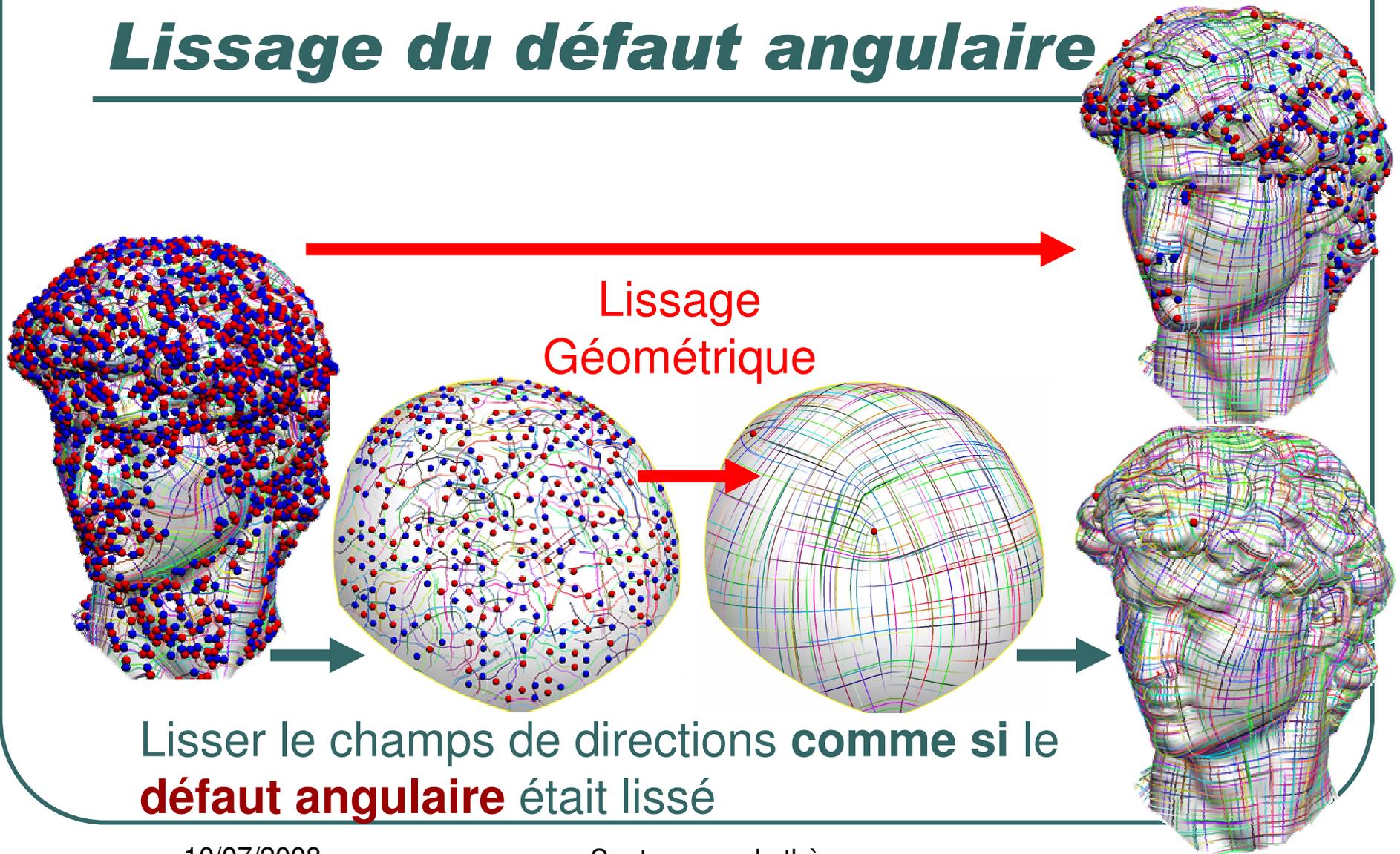
sous contrainte

$$d\kappa = K^{\text{lisse}} - K$$

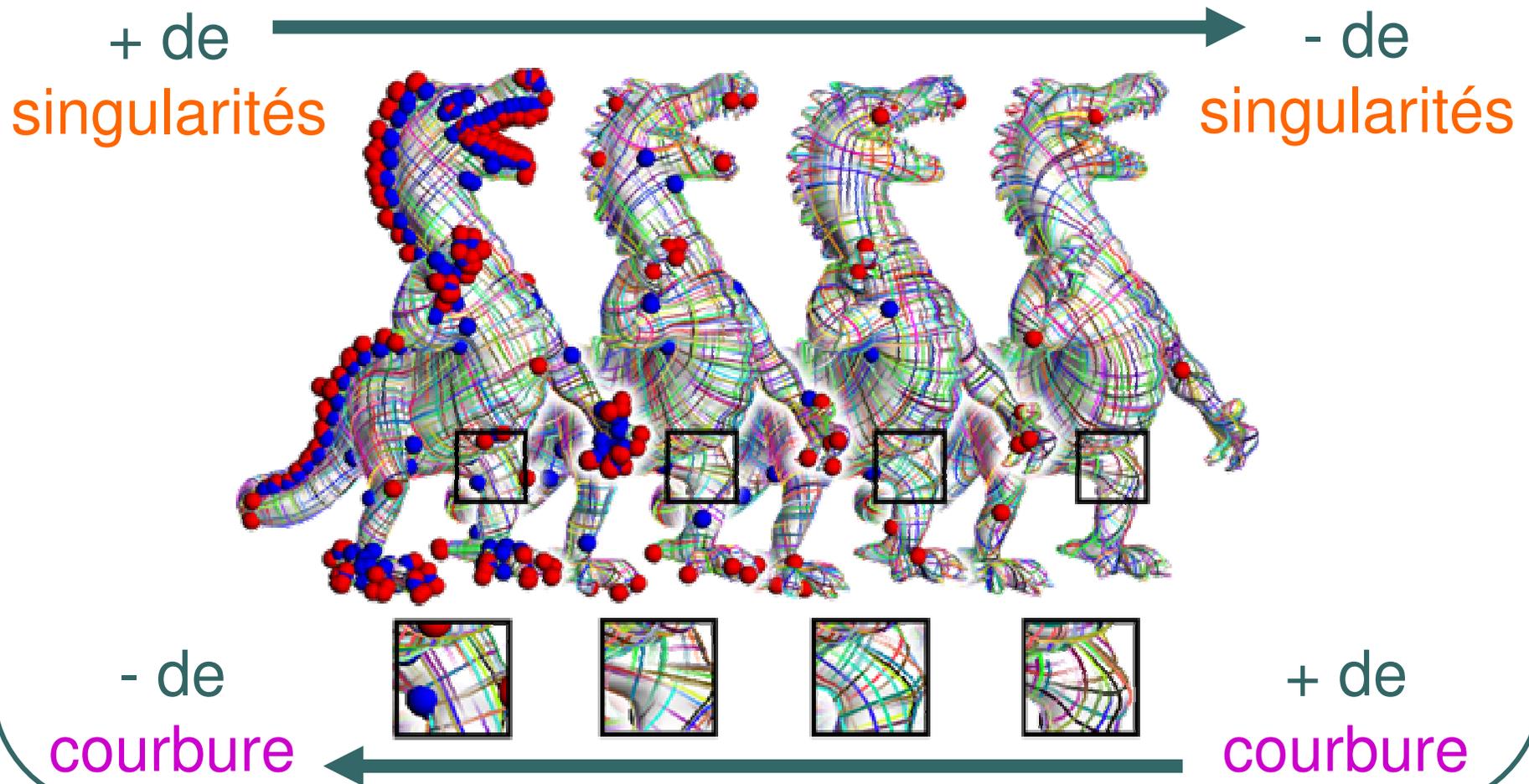
- Courbure moyenne
- Nombre moyen de singularités



Lissage du défaut angulaire



Filtrage du défaut angulaire



Conclusion

Introduction

1) Théorie continue

2) Théorie discrète

3) Application au:

a) contrôle topologique fort

b) contrôle topologique faible

Conclusion

Conclusion

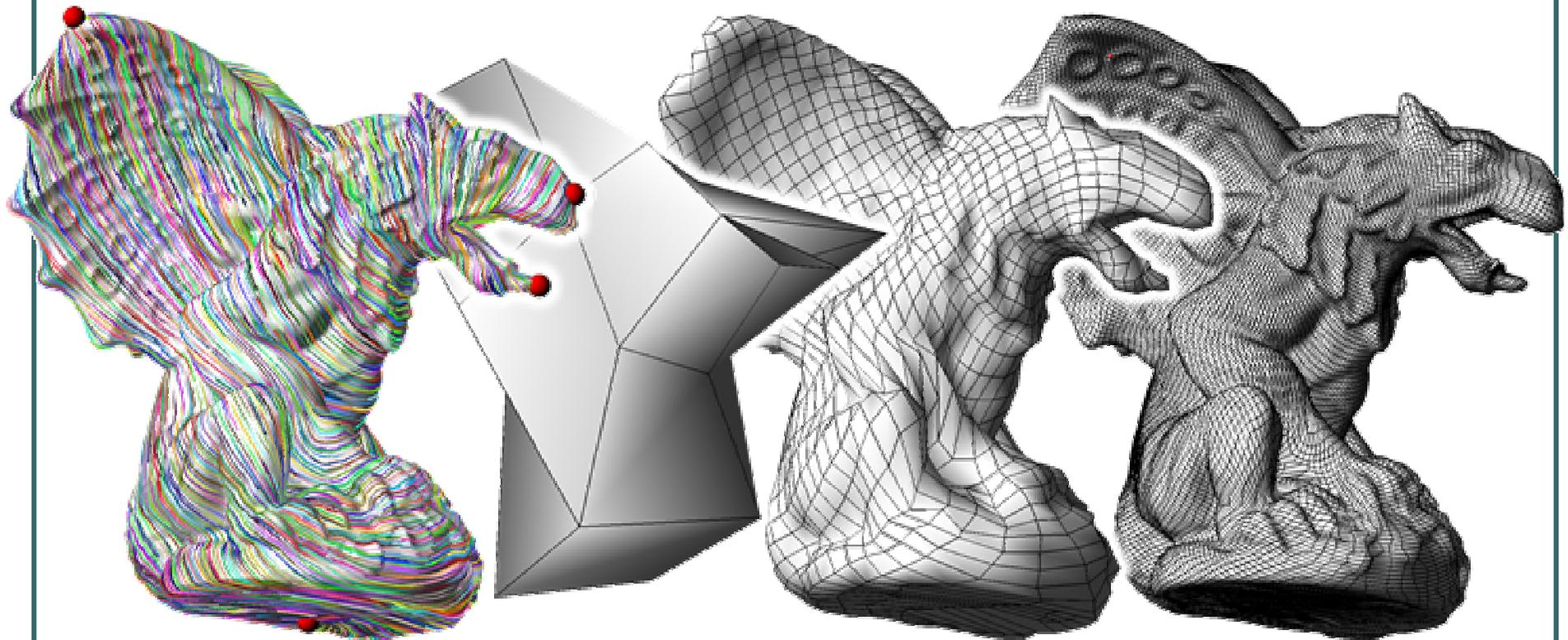
Nous pouvons construire des **champs de directions**

- à N-symétries
- lisses
- avec des contraintes **géométriques**
- avec des contraintes **topologiques**:
 - Fortes
 - Faibles

II Champs de directions

Conclusion

Conclusion : paramétrisation quad



Partie II + [Kälberer2007]

Bases de fonctions sur les variétés

Questions ?

