



HAL
open science

Tracé automatique de canaux d'interconnexion

Guy Dupenloup

► **To cite this version:**

Guy Dupenloup. Tracé automatique de canaux d'interconnexion. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1984. Français. NNT: . tel-00311722

HAL Id: tel-00311722

<https://theses.hal.science/tel-00311722>

Submitted on 20 Aug 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de
DOCTEUR de 3ème CYCLE
«Informatique»

par

DUPENLOUP Guy



TRACE AUTOMATIQUE DE CANAUX D'INTERCONNEXION.



Thèse soutenue le 6 juin 1984 devant la commission d'examen.

L. BOLLIET	Président
G. GEBHARDT	} Examineurs
G. MAZARÉ	
G. SAUCIER	
A. VERDILLON	
J.. BOURNAY	Invité

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Président: Daniel BLOCH

Année universitaire 1983-1984

Vice-Présidents: René CARRE
Hervé CHERADAME
Jean-Pierre LONGQUEUE

Professeur des Universités

ANCEAU	François	E.N.S.I.M.A.G	JOUBERT	Jean-Claude	E.N.S.I.E.G
BARIBAUD	Michel	E.N.S.E.R.G	JOURDAIN	Geneviève	E.N.S.I.E.G
BARRAUD	Alain	E.N.S.I.E.G	LACOUME	Jean-Louis	E.N.S.I.E.G
BAUDELET	Bernard	E.N.S.I.E.G	LATOMBE	Jean-Claude	E.N.S.I.M.A.G
BESSON	Jean	E.N.S.E.E.G	LESIEUR	Marcel	E.N.S.H.G
BLIMAN	Samuel	E.N.S.E.R.G	LESPINARD	Georges	E.N.S.H.G
BLOCH	Daniel	E.N.S.I.E.G	LONGQUEUE	Jean-Pierre	E.N.S.I.E.G
BOIS	Philippe	E.N.S.H.G	LOUCHET	François	E.N.S.E.E.G
BONNETAIN	Lucien	E.N.S.E.E.G	MASSELOT	Christian	E.N.S.I.E.G
BONNIER	Etienne	E.N.S.E.E.G	MAZARE	Guy	E.N.S.I.M.A.G
BOUVARD	Maurice	E.N.S.H.G	MOREAU	René	E.N.S.H.G
BRISSONNEAU	Pierre	E.N.S.I.E.G	MORET	Roger	E.N.S.I.E.G
BUYLE BODIN	Maurice	E.N.S.E.R.G	MOSSIERE	Jacques	E.N.S.I.M.A.G
CAVAIGNAC	Jean-François	E.N.S.I.E.G	PARIAUD	Jean-Charles	E.N.S.E.E.G
CHARTIER	Germain	E.N.S.I.E.G	PAUTHENET	René	E.N.S.I.E.G
CHENEVIER	Pierre	E.N.S.E.R.G	PERRET	René	E.N.S.I.E.G
CHERADAME	Hervé	U.E.R.M.C.P.P	PERRET	Robert	E.N.S.I.E.G
CHERUY	Arlette	E.N.S.I.E.G	PIAU	Jean-Michel	E.N.S.H.G
CHIAVERINA	Jean	U.E.R.M.C.P.P	POLOUJADOFF	Michel	E.N.S.I.E.G
COHEN	Joseph	E.N.S.E.R.G	POUPOT	Christian	E.N.S.E.R.G
COUMES	André	E.N.S.E.R.G	RAMEAU	Jean-Jacques	E.N.S.E.E.G
DURAND	Francis	E.N.S.E.E.G	RENAUD	Maurice	U.E.R.M.C.P.P
DURAND	Jean-louis	E.N.S.I.E.G	ROBERT	André	U.E.R.M.C.P.P
FELICI	Noël	E.N.S.I.E.G	ROBERT	François	E.N.S.I.M.A.G
FONLUPT	Jean	E.N.S.I.M.A.G	SABONNADIERE	Jean-Claude	E.N.S.I.E.G
FOULARD	Claude	E.N.S.I.E.G	SAUCIER	Gabrielle	E.N.S.I.M.A.G
GANDINI	Alessandro	U.E.R.M.C.P.P	SCHLENKER	Claire	E.N.S.I.E.G
GAUBERT	Claude	E.N.S.I.E.G	SCHLENKER	Michel	E.N.S.I.E.G
GENTIL	Pierre	E.N.S.E.R.G	SERMET	Pierre	E.N.S.E.R.G
GUERIN	Bernard	E.N.S.E.R.G	SILVY	Jacques	U.E.R.M.C.P.P
GUYOT	Pierre	E.N.S.E.E.G	SOHM	Jean-Claude	E.N.S.E.E.G
IVANES	Marcel	E.N.S.I.E.G	SOUQUET	Jean-Louis	E.N.S.E.E.G
JALINIER	Jean-Michel	E.N.S.I.E.G	VEILLON	Gérard	E.N.S.I.M.A.G
JAUSSAUD	Pierre	E.N.S.I.E.G	ZADWORYN	François	E.N.S.E.R.G

Professeurs Associés

BLACKWELDER	Ronald	E.N.S.H.G	PURDY	Gary	E.N.S.E.E.G
HAYASHI	Hirashi	E.N.S.I.E.G			

Professeurs Université des Sciences Sociales (Grenoble II)

BOLLIET	Louis		CHATELIN	Françoise	
---------	-------	--	----------	-----------	--

Chercheurs du C.N.R.S

FRUCHART	Robert	Directeur de recherche	GUELIN	Pierre	Maître de recherche
JORRAND	Philippe	Directeur de recherche	HOPFINGER	Emil	Maître de recherche
VACHAUD	Georges	Directeur de recherche	JOUD	Jean-Charles	Maître de recherche
ALLIBERT	Michel	Maître de recherche	KAMARINOS	Georges	Maître de recherche
ANSARA	Ibrahim	Maître de recherche	KLEITZ	Michel	Maître de recherche
ARMAND	Michel	Maître de recherche	LANDAU	Ioan-Dore	Maître de recherche
BINDER	Gilbert	Maître de recherche	LASJAUNIAS	Jean-Claude	Maître de recherche
BORNARD	Guy	Maître de recherche	MERMET	Jean	Maître de recherche
CARRE	René	Maître de recherche	MUNIER	Jacques	Maître de recherche
DAVID	René	Maître de recherche	PIAU	Monique	Maître de recherche
DÉPORTES	Jacques	Maître de recherche	PORTESEIL	Jean-Louis	Maître de recherche
DRIOLE	Jean	Maître de recherche	THOLENCE	Jean-Louis	Maître de recherche
GIGNOUX	Damien	Maître de recherche	VERDILLON	André	Maître de recherche
GIVORD	Dominique	Maître de recherche			

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche
(Décision du Conseil Scientifique)

E.N.S.E.E.G.

ALLIBERT BERNARD BONNET CAILLET CHATILLON CHATILLON COULON	Colette Claude Roland Marcel Catherine Christian Michel	DIARD EUSTATOPOULOS FOSTER GALERIE HAMMOU MALMEJAC MARTIN GARIN	Jean Paul Nicolas Panayotis Alain Abdelkader Yves (CENG) Régina	NGUYEN TRUONG RAVAINE SAINFORT SARRAZIN SIMON TOUZAIN URBAIN	Bernadette Denis (CENG) Pierre Jean Paul Philippe Georges (Laboratoire des ultra-réfractaires ODEILLO).
--	---	---	---	--	---

E.N.S.E.R.G.

BARIBAUD BOREL CHOVET	Michel Joseph Alain	CHEHIKIAN DOLMAZON	Alain Jean Marc	HERAULT MONLLOR	Jeanne Christian
-----------------------------	---------------------------	-----------------------	--------------------	--------------------	---------------------

E.N.S.I.E.G.

BORNARD DESCHIZEAUX GLANGEAUD	Guy Pierre François	KOFMAN LEJEUNE	Walter Gérard	MAZUER PERARD REINISCH	Jean Jacques Raymond
-------------------------------------	---------------------------	-------------------	------------------	------------------------------	----------------------------

E.N.S.H.G.

ALEMANY BOIS DARVE	Antoine Daniel Félix	MICHEL OBLED	Jean Marie Charles	ROWE VAUCLIN WACK	Alain Michel Bernard
--------------------------	----------------------------	-----------------	-----------------------	-------------------------	----------------------------

E.N.S.I.M.A.G.

BERT CALMET COURTIN	Didier Jacques Jacques	COURTOIS DELLA DORA	Bernard Jean	FONLUPT SIFAKIS	Jean Joseph
---------------------------	------------------------------	------------------------	-----------------	--------------------	----------------

U.E.R.M.C.P.P.

CHARUEL Robert

C.E.N.G.

CADET COEURE DELHAYE DUPUY	Jean Philippe (LETI) Jean Marc (STT) Michel (LETI)	JOUVE NICOLAU NIFENECKER	Hubert (LETI) Yvan (LETI) Hervé	PERROUD PEUZIN TAIEB VINCENDON	Paul Jean Claude (LETI) Maurice Marc
-------------------------------------	---	--------------------------------	---------------------------------------	---	---

Laboratoires extérieurs :

C.N.E.T.

DEMOULIN DEVINE	Eric R.A.B.	GERBER	Roland	MERCKEL PAULEAU	Gérard Yves
--------------------	----------------	--------	--------	--------------------	----------------

I.N.S.A. Lyon

GAUBERT C.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE SAINT-ETIENNE

Directeur : Monsieur M. MERMET
Directeur des Etudes et de la formation : Monsieur J. LEVASSEUR
Directeur des recherches : Monsieur J. LEVY
Secrétaire Général : Mademoiselle M. CLERGUE

Professeurs de 1ère Catégorie

COINDE	Alexandre	Gestion
GOUX	Claude	Métallurgie
LEVY	Jacques	Métallurgie
LOWYS	Jean-Pierre	Physique
MATHON	Albert	Gestion
RIEU	Jean	Mécanique - Résistance des matériaux
SOUSTELLE	Michel	Chimie
FORMERY	Philippe	Mathématiques Appliquées

Professeurs de 2ème catégorie

HABIB	Michel	Informatique
PERRIN	Michel	Géologie
VERCHERY	Georges	Matériaux
TOUCHARD	Bernard	Physique Industrielle

Directeur de recherche

LESBATS	Pierre	Métallurgie
---------	--------	-------------

Maîtres de recherche

BISCONDI	Michel	Métallurgie
DAVOINE	Philippe	Géologie
FOURDEUX	Angeline	Métallurgie
KOBYLANSKI	André	Métallurgie
LALAUZE	René	Chimie
LANCELOT	Francis	Chimie
LE COZE	Jean	Métallurgie
THEVENOT	François	Chimie
TRAN MINH	Canh	Chimie

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche

DRIVER	Julian	Métallurgie
GUILHOT	Bernard	Chimie
THOMAS	Gérard	Chimie

Professeur à l'UER de Sciences de Saint-Etienne

VERGNAUD	Jean-Maurice	Chimie des Matériaux & chimie industrielle
----------	--------------	--

A MES PARENTS

Je tiens à remercier :

- *Louis BOLLIET, professeur à l'IUT de Grenoble, de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.*
- *Guy MAZARE et Gabrielle SAUCIER, professeurs à l'ENSIMAG, de m'avoir accueilli dans leurs équipes et d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse.*
- *André VERDILLON, maître assistant à l'USMG, d'avoir assuré l'encadrement scientifique de ce travail.*

Je voudrais remercier tout particulièrement Gea GEBHARDT et Alain RAMBERT de la RTC (Caen), avec qui il me fut très agréable de travailler. Ensemble, nous avons pu développer un outil aujourd'hui opérationnel.

Je tiens également à remercier Jacques BOURNAY de Motorola (Paris), d'avoir bien voulu participer à la soutenance de cette thèse.

RESUME :

Cette thèse étudie le tracé automatique des canaux d'interconnexion de circuits intégrés.

Une première partie est consacrée au tracé de canaux rectangulaires dont les points à interconnecter sont tous répartis sur deux faces parallèles : *les canaux bifaces*. Une modélisation du problème est proposée. La faisabilité du problème est étudiée et un minorant de la largeur minimale du canal est calculé. Différentes circonstances dans lesquelles ce minorant ne peut être atteint sont identifiées. Une heuristique de tracé est décrite et formalisée.

Une deuxième partie est consacrée au problème de l'interconnexion d'un ensemble de blocs polygonaux répartis dans un plan et séparés par des canaux d'interconnexion : *le problème multi-canal*. Les différentes approches du problème sont analysées. Une stratégie originale pour la résolution du problème posé par les configurations en "matrice de blocs" est ensuite proposée. Une heuristique originale de tracé est décrite, ainsi qu'un programme implémentant cette heuristique. Des résultats expérimentaux sont présentés.

MOTS-CLES :

Circuit intégré - Implantation automatique - Tracé de canaux d'interconnexions - Canal biface - Tracé global.

AVANT-PROPOS

En 1981, la conception d'un circuit intégré de 10 000 transistors (microprocesseurs 16 - bits) nécessite 15 homme . année [Van 83], celle d'un circuit de 500 000 transistors (microprocesseur 32 - bits) 120 homme . année [San 81]. Avec les mêmes moyens, la conception d'un circuit de 10 millions de transistors nécessiterait 6 000 homme . année [Tri 81].

Ces quelques chiffres suffisent à illustrer le décalage important qu'il existe aujourd'hui entre possibilités d'intégration et moyens de conception. Alors que les possibilités d'intégration continuent de s'accroître régulièrement, l'exploitation du potentiel VLSI (Very Large Scale Integration) passe par de nouvelles méthodologies de conception, associées à des outils de CAO appropriés [Mea 80] [All 81] [Dir 81] [Tri 81].

Afin d'affronter la complexité inhérente à la conception d'un circuit VLSI, une approche hiérarchisée et structurée est généralement adoptée. D'une manière très schématique, la conception d'un circuit intégré comprend les étapes suivantes :

- Etablissement des spécifications
- Choix d'une architecture
- Etablissement du plan de masse
- Conception logique
- Conception électrique
- Implantation.

Une démarche descendante est généralement adoptée durant les premières étapes de la conception, où le circuit est décomposé en unités fonctionnelles et le travail réparti entre les membres d'une équipe. Une démarche ascendante est généralement adoptée durant les étapes de conception détaillée, où des éléments sont créés et assemblés en éléments de niveau supérieur.

Parmi les différentes tâches que comporte la conception, l'implantation apparaît incontestablement comme la plus lourde et la plus sujette à l'introduction d'erreurs. Des 15 homme . année nécessaires à la conception d'un circuit de 10 000 transistors, 10 sont absorbés par des cycles d'implantation/vérification/correction [Van 83]. C'est pourquoi les outils d'implantation et de vérification (respect des règles de dessin, conformité au schéma électrique) font aujourd'hui l'objet d'importants travaux.

Pour notre part, nous nous sommes intéressés à des outils de tracé d'interconnexions, connus sous l'appellation générique de *traceurs de canaux (channel routers)*. Comme leur nom l'indique, ces outils opèrent à l'intérieur de *canaux d'interconnexion*, c'est-à-dire de régions rectangulaires séparant des blocs les uns des autres et destinés exclusivement à recevoir des interconnexions entre ces blocs.

Nous commencerons par une brève introduction, afin de préciser davantage le contexte dans lequel s'inscrivent ces outils et de définir quelques termes.

Au cours de la première partie, nous nous intéresserons au *tracé des canaux bifaces*, c'est-à-dire de canaux rectangulaires dont les points à interconnecter sont tous répartis sur deux faces parallèles. Au chapitre I, nous proposerons une modélisation du problème du canal biface, calculerons un minorant de la capacité minimale d'un canal biface et tenterons de cerner les différentes circonstances dans lesquelles ce minorant ne peut être atteint. Au chapitre II, nous décrirons et formaliserons une heuristique pour le tracé des canaux bifaces.

Au cours de la seconde partie, nous nous intéresserons au *problème multi-canal*, c'est-à-dire au problème de l'interconnexion d'un ensemble de blocs répartis dans un plan et séparés les uns des autres par des canaux d'interconnexion. Au chapitre I, nous présenterons et critiquerons les principales stratégies de résolution du problème multi-canal. Au chapitre II, nous proposerons une stratégie originale pour la résolution du problème posé par les configurations de type "matrice de blocs". Nous décrirons une heuristique originale de tracé, ainsi qu'un programme implémentant cette heuristique. Enfin, nous donnerons et discuterons quelques résultats expérimentaux.

INTRODUCTION

I - PLACEMENT ET TRACE

Dans une approche automatisée, l'implantation est généralement décomposée en deux phases consécutives : *placement* et *tracé*.

Des composants (portes, cellules, blocs...) sont positionnés les uns par rapport aux autres dans un plan, puis interconnectés au cours du tracé. Les composants sont généralement indéformables, de forme et de taille fixées. Les interconnexions empruntent des espaces ménagés entre les blocs, espaces qui constituent la *surface d'interconnexion*.

Placement et tracé s'inscrivent dans la démarche ascendante de l'implantation. Des composants sont placés et interconnectés pour former des composants de niveau supérieur, qui sont à leur tour placés et interconnectés.

Cette décomposition de l'implantation en placement et tracé pourrait être qualifiée de traditionnelle. Remarquons toutefois qu'elle est aujourd'hui rejetée par certaines méthodologies. Les composants peuvent être conçus de façon à s'interconnecter par aboutement, les principaux outils d'implantation étant alors des outils d'assemblage pilotés par le plan de masse [Mea 80]. D'autres méthodologies tentent de simuler le comportement humain, menant de front placement et tracé [Sou 81].

II - PLACEMENT

Au cours du placement, un modèle simplifié est utilisé pour représenter les interconnexions (spanning trees, Steiner trees...), qui ne seront tracées qu'ultérieurement.

Le placement devra tenter de satisfaire deux objectifs primordiaux :

- Permettre un tracé entièrement automatisé des interconnexions
- Minimiser la surface du circuit.

Mal définis mathématiquement, ces objectifs sont modélisés par des objectifs plus simples. Pendant de nombreuses années, l'objectif du placement fut la *longueur totale des interconnexions*, c'est-à-dire la somme des longueurs des interconnexions. L'expérience a montré que cet objectif conduit souvent à l'encombrement de la surface d'interconnexion, en particulier dans la région centrale du circuit. Les heuristiques les plus récentes l'abandonnent au profit d'un objectif de minimisation des *densités d'interconnexion* (nombre d'interconnexions franchissant des lignes placées entre les composants) [Bre 77].

Le placement s'effectue généralement en deux phases : *placement initial* et *amélioration*.

Un placement initial visant la minimisation de la longueur totale des interconnexions peut être obtenu par croissance épitaxiale [Han 73] ou par relaxation [Han 72]. Un placement initial visant la minimisation des densités d'interconnexion peut être obtenu par bi-partitionnement [Bre 77] [Pre 78] ou par linéarisation [Kan 83].

Afin d'améliorer le placement initial, des modifications locales (telles que l'échange de deux composants) lui sont appliquées, le plus souvent de façon itérative [Got 79] [Lau 79].

Remarquons que le placement reste un domaine de recherche très actif. En particulier, les efforts portent aujourd'hui sur le placement de blocs déformables [Pre 79].

III - TRACE

L'implantation se concrétise au cours du tracé, révélant la qualité du placement.

On peut distinguer essentiellement deux types d'heuristiques de tracé :

- Traceurs de chemin (C.Y. Lee [Lee 61] et D. Hightower [Hig 69])
- Traceurs de canaux.

III - Traceurs de chemin

Les *traceurs de chemins (maze routers)* sont conçus pour la recherche d'un chemin joignant deux points à travers un labyrinthe d'obstacles. Les interconnexions sont implantées séquentiellement, chaque interconnexion implantée devenant un obstacle pour les suivantes.

L'heuristique de Lee (expansion par pas) interconnecte deux points en propageant une onde sur une grille, à partir du point origine et jusqu'à atteindre le point cible. A chaque étape, le front de l'onde est propagé vers les points de grille adjacents. Chaque point de grille atteint est marqué d'un code indiquant la distance à l'origine et permettant le retour arrière.

L'heuristique d'Hightower (expansion par lignes) trace des lignes horizontales et verticales à partir des deux points à interconnecter. Puis, pour chaque ligne, elle trouve la ligne de fuite perpendiculaire la plus longue. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que les lignes d'expansion forment une interconnexion.

L'heuristique de Lee, qui nécessite le stockage de plusieurs bits par pas de grille, demande un espace mémoire important [Ake 67] ; elle est lente pour des interconnexions longues et des surfaces d'interconnexion peu encombrées [Rub 74] [Sou 78]. L'heuristique d'Hightower, pour des labyrinthes complexes, est lente et nécessite un espace mémoire important.

Les interconnexions sont implantées séquentiellement, chaque interconnexion implantée devenant un obstacle pour les suivantes. L'ordre dans lequel sont traitées les interconnexions peut ainsi influencer fortement sur les tracés obtenus et entraîner des blocages [Abe 72].

III2 - Traceurs de canaux

Les *traceurs de canaux (channel routers)* sont des outils spécialisés, conçus pour implanter des interconnexions à l'intérieur d'une surface rectangulaire sans obstacles internes. Les points à interconnecter sont répartis sur le péri-

mètre de la surface, que l'on appelle *canal*. La technologie doit permettre deux niveaux d'interconnexion.

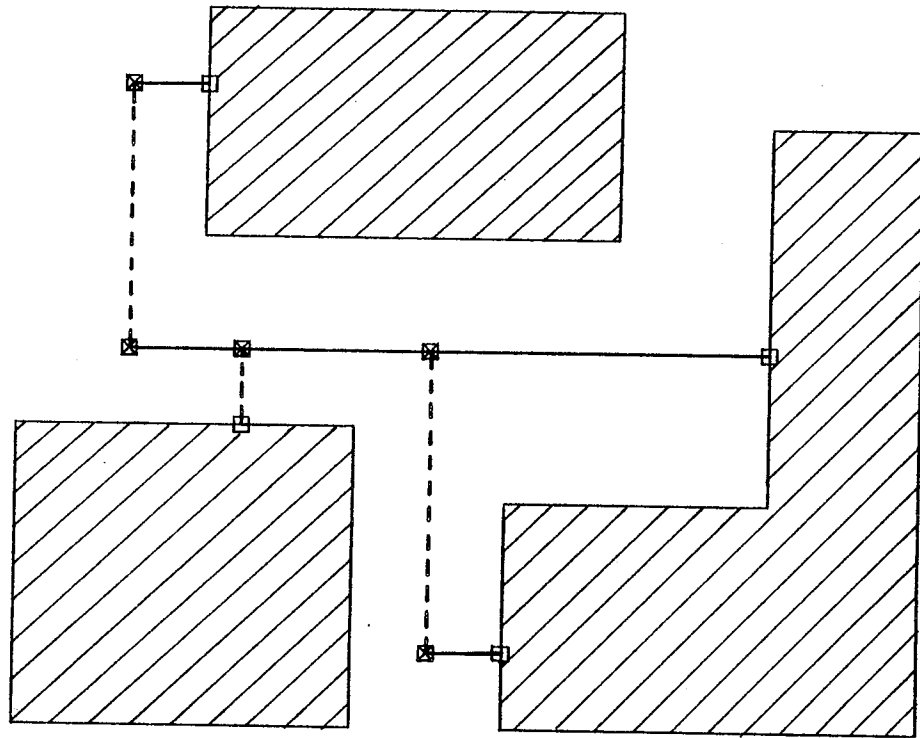
Nous consacrerons la première partie au tracé des *canaux bifaces*. Les points à interconnecter sont alors répartis sur deux faces parallèles, les deux autres faces n'en comportant aucun. Cette notion de canal biface fut introduite par Hashimoto et Stevens en 1971 [Has 71].

La première heuristique pour le tracé des canaux bifaces fut introduite par D. N. Deutsch en 1976 [Deu 76] (nous décrivons cette heuristique au chapitre II). Deux nouvelles heuristiques furent introduites en 1982 [Riv 82] [Yos 82], une troisième en 1983 [Bur 83]. Ces heuristiques sont toutes très performantes et aucune ne présente les inconvénients propres aux traceurs de chemins (complexité, ordre de tracé).

Des traceurs de canaux bifaces sont aujourd'hui disponibles commercialement et trouvent leur principale application avec les réseaux précaractérisés (*standard cells*) [Van 83].

Nous consacrerons la seconde partie au *tracé multi-canal*, c'est-à-dire au problème de l'interconnexion d'un ensemble de blocs répartis dans un plan et séparés par des canaux d'interconnexion. Dans le cas le plus général, les blocs sont de dimensions et de tailles quelconques et sont disposés de façon anarchique (*building blocks*). Les blocs peuvent également être rectangulaires, de dimensions fixées et disposées de façon à former une "matrice" (réseaux prédéfinis).

Nous analyserons et comparerons les principales stratégies de résolution du problème multi-canal. En particulier, nous mettrons en évidence les difficultés auxquelles se heurtent l'application du concept de canal biface. Nous proposerons ensuite un modèle original de canal pour la résolution du problème de type "matrice de blocs" et décrivons une heuristique originale de tracé. Enfin, nous décrivons un programme implémentant cette heuristique et présenterons quelques résultats expérimentaux.



----- segments 1er niveau

———— segments 2ème niveau

□ points terminaux

⊠ passages via

Figure 1

IV - TRACE SYMBOLIQUE

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que chaque interconnexion est représentée par un ensemble de symboles superposés aux lignes et aux points d'un quadrillage régulier du circuit : la *grille d'implantation*.

Nous supposerons également que la technologie est à deux *niveaux d'interconnexion*. C'est-à-dire que les interconnexions pourront être implantées dans deux couches conductrices, séparées par une couche isolante.

Chaque interconnexion sera représentée par :

- Un ensemble de points terminaux
- Un ensemble de segments horizontaux et verticaux
- Un ensemble de passages via (fig. 1).

Les *points terminaux*, situés sur le périmètre des composants sont les points à interconnecter. Les *segments horizontaux* et *verticaux* représentent "l'ossature" de pistes conductrices implantées dans l'une ou l'autre des deux couches conductrices. Les *passages via* sont des fenêtres dans la couche isolante ; ils permettent d'établir un contact électrique entre deux pistes conductrices n'appartenant pas au même niveau.

Les pas de la grille d'implantation étant calculés de façon à respecter les règles de dessin de la technologie, le dessin au micron des interconnexions pourra être généré automatiquement à partir de leur représentation symbolique. Le problème de tracé est ainsi plus facile à modéliser et la complexité des algorithmes mis en oeuvre est moindre. D'autre part, les algorithmes sont indépendants de la technologie.

V - ASSIGNATION SYSTEMATIQUE DES NIVEAUX

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que tous les segments horizontaux sont systématiquement affectés à un même niveau, tous les segments verticaux à l'autre niveau. Chaque changement de direction d'une interconnexion se traduira donc par un changement de niveau et un passage via.

Cette assignation systématique des niveaux repose sur l'expérience acquise avec le tracé des circuits imprimés bi-couches [Ake 72]. Tous les problèmes de croisement entre interconnexions sont ainsi éliminés. En effet, tous les segments d'un même niveau étant parallèles entre eux, un croisement ne peut apparaître qu'entre deux segments situés sur deux niveaux différents.

Dans toutes les figures qui suivent, nous n'utiliserons pas de pointillés pour distinguer les deux niveaux d'interconnexion. Deux segments intersectant sont reliés électriquement si et seulement s'il existe un passage via à l'intersection de ces deux segments.

PREMIERE PARTIE

Tracé des canaux bifaces



CHAPITRE I

Le problème du canal biface

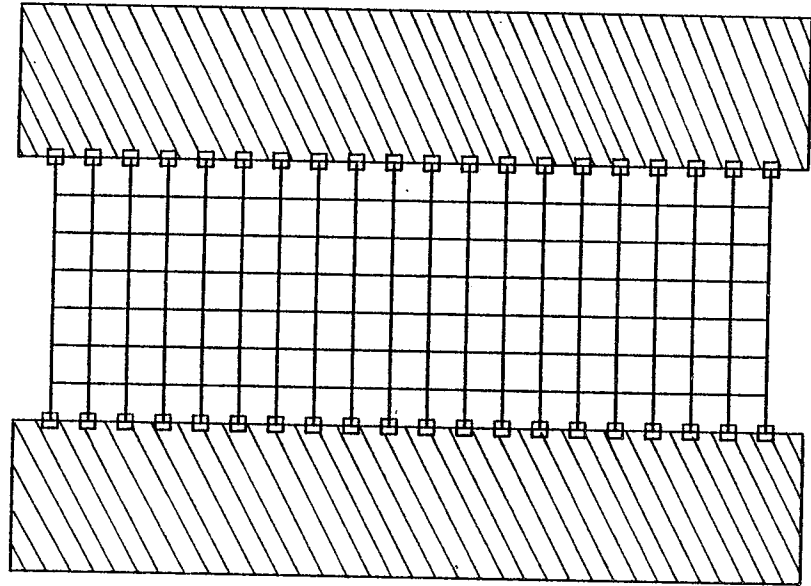


Figure 1

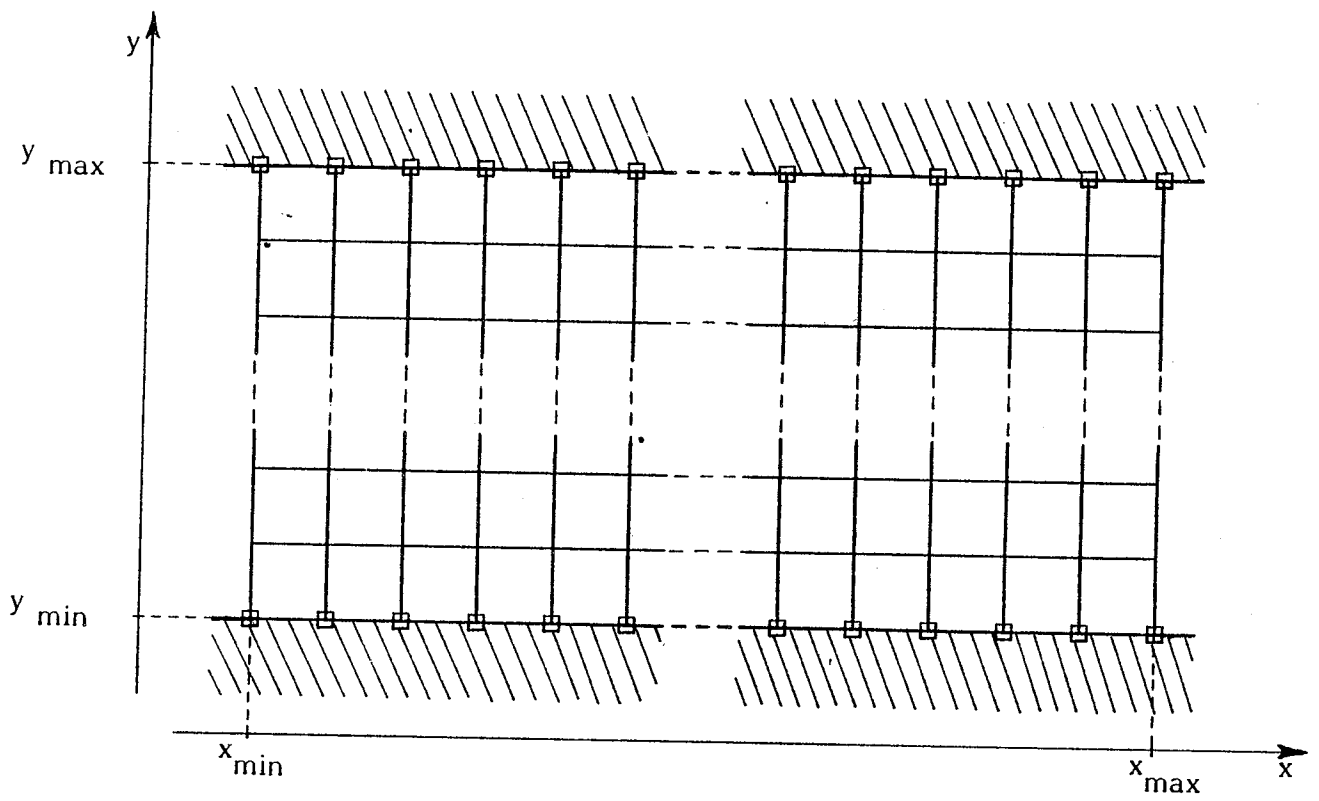


Figure 2

I - LE PROBLEME DU CANAL BIFACE

II - Topologie d'un canal biface - Pistes et capacité

D'une manière très générale, on appelle *canal d'interconnexion* une surface d'interconnexion rectangulaire, n'admettant aucun obstacle interne et dont les points terminaux sont tous répartis sur son périmètre.

On dira d'un canal qu'il est *biface* lorsque ses points terminaux sont tous répartis sur deux de ses faces parallèles, les deux autres faces n'en comportant aucun (fig. 1).

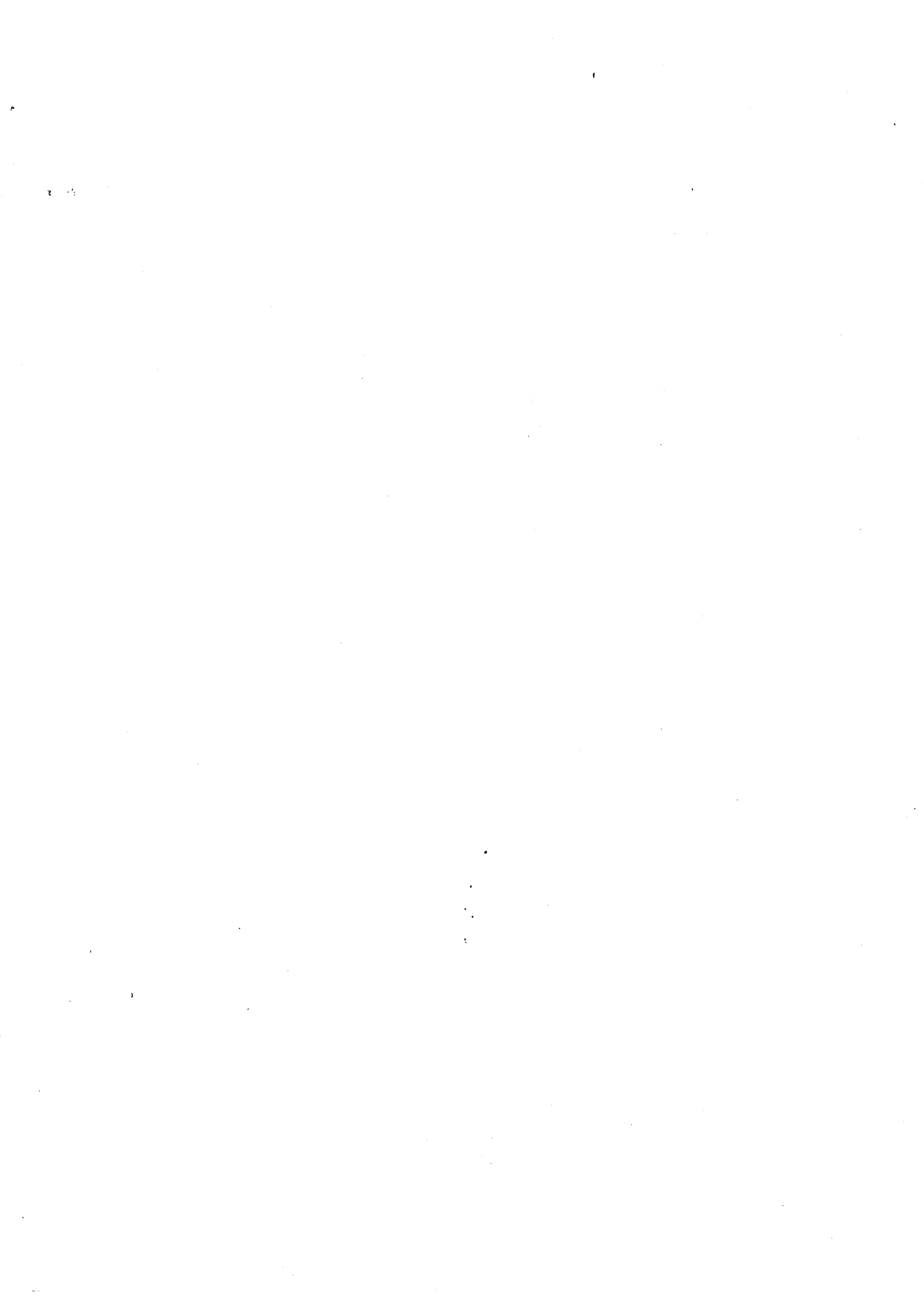
La *direction d'un canal biface* est donnée par la direction des faces sur lesquelles sont répartis les points terminaux. Un canal biface dont les points terminaux sont répartis sur les faces horizontales (resp. verticales) est un canal biface horizontal (resp. vertical).

La *longueur d'un canal biface* se mesure parallèlement aux faces sur lesquelles sont répartis ses points terminaux, sa *largeur* perpendiculairement à ces mêmes faces.

Tout canal biface peut être décrit par sa direction et par quatre coordonnées X_{\min} , X_{\max} , Y_{\min} et Y_{\max} . La direction du canal indique quelles sont les faces sur lesquelles sont répartis les points terminaux ; les abscisses X_{\min} et X_{\max} délimitent les faces *gauche* et *droite* du canal, les ordonnées Y_{\min} et Y_{\max} les faces *inférieure* et *supérieure*.

Par exemple, considérons un canal biface horizontal (fig. 2). Les points terminaux sont répartis sur les faces inférieure et supérieure, les faces gauche et droite n'en comportant aucun. La longueur L du canal est donnée par

$$L = X_{\max} - X_{\min}$$



Sa largeur l par :

$$l = Y_{\max} - Y_{\min}$$

On appellera *pistes d'un canal biface* les lignes de la grille d'implantation qui sont à l'intérieur de ce canal et qui sont parallèles aux faces sur lesquelles sont répartis les points terminaux. Par *capacité d'un canal biface*, on désignera le nombre de pistes que comporte ce canal. La largeur l d'un canal biface et sa capacité c sont évidemment liées par la relation :

$$l = c + 1$$

On dira qu'un canal biface est à *capacité fixée* lorsque sa capacité est imposée, à *capacité non-fixée* lorsqu'elle peut être choisie arbitrairement.

Dans tout ce qui suit, afin d'alléger l'exposé, nous nous placerons dans l'hypothèse d'un canal biface horizontal, à capacité non-fixée et tel que

$$Y_{\min} = 0$$

$n = 10$

$X_{\min} = 1$ et $X_{\max} = 13$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
I(x)	2	3	0	5	3	5	2	6	8	9	8	7	9
S(x)	0	0	1	4	5	1	6	7	0	4	9	10	10

Tableau I

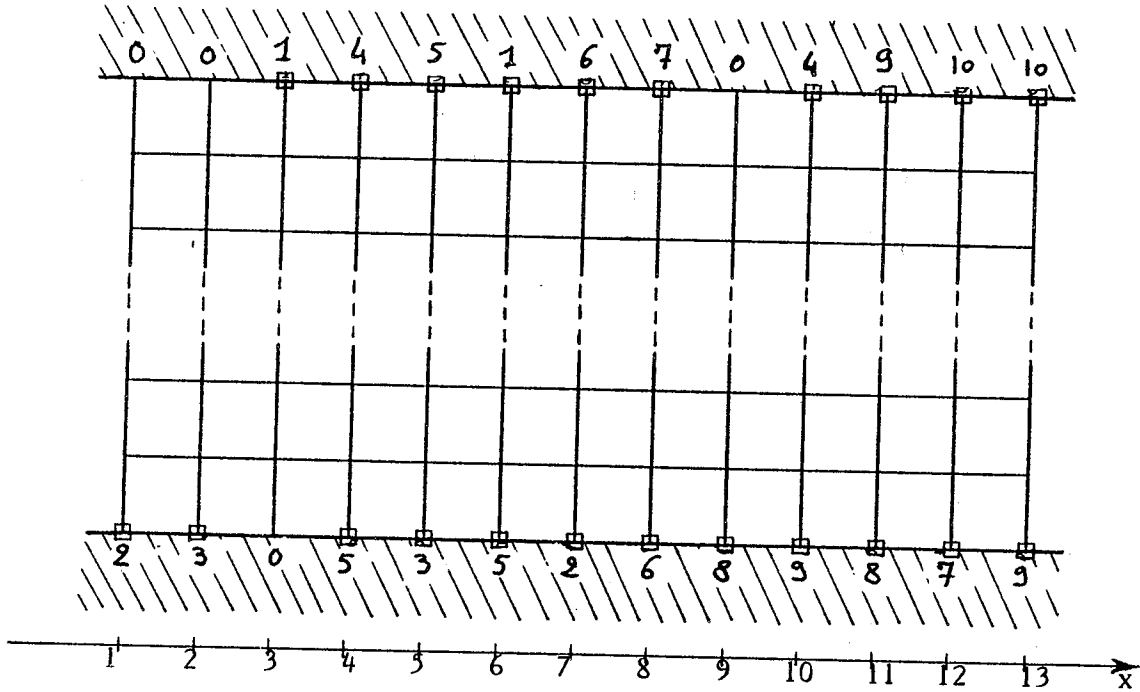


Figure 3

12 - Listes d'interconnexion

Les interconnexions qui doivent être implantées à l'intérieur d'un canal biface donné sont généralement spécifiées par deux listes, que nous appellerons *listes d'interconnexion* et que nous noterons :

$$I(x) \text{ et } S(x) \quad (X_{\min} \leq x \leq X_{\max})$$

Si n interconnexions sont à implanter à l'intérieur du canal, un nombre entier compris entre 0 et n sera affecté à chacun des éléments des listes $I(x)$ et $S(x)$. L'élément $I(x)$ (resp. $S(x)$) recevra le nombre i ($1 \leq i \leq n$) si et seulement si le point terminal d'abscisse x et situé sur la face inférieure (resp. supérieure) du canal doit être relié par l'interconnexion i . L'élément $I(x)$ (resp. $S(x)$) recevra le nombre 0 si et seulement si le point terminal d'abscisse x et situé sur la face inférieure (resp. supérieure) du canal ne doit être relié par aucune interconnexion (tableau I).

Sur les figures suivantes, nous écrirons au-dessous (resp. au-dessus) de l'emplacement de chaque point terminal situé sur la face inférieure (resp. supérieure) le nombre contenu dans l'élément $I(x)$ (resp. $S(x)$) correspondant. Nous ne représenterons pas les points terminaux qui ne doivent être reliés par aucune interconnexion ($I(x) = 0$ ou $S(x) = 0$) (fig. 3).

13 - Enoncé du problème

Soit un canal biface horizontal, soient X_{\min} et X_{\max} les abscisses des faces gauche et droite et supposons que ce canal soit à capacité non-fixée ($Y_{\min} = 0$ et Y_{\max} arbitraire). Le *problème du canal biface* consiste à implanter à l'intérieur de ce canal toutes les interconnexions spécifiées par deux listes d'interconnexion $I(x)$ et $S(x)$ ($X_{\min} \leq x \leq X_{\max}$) de sorte que :

- (i) chaque interconnexion soit entièrement contenue à l'intérieur du canal.
- (ii) la capacité du canal soit minimale.

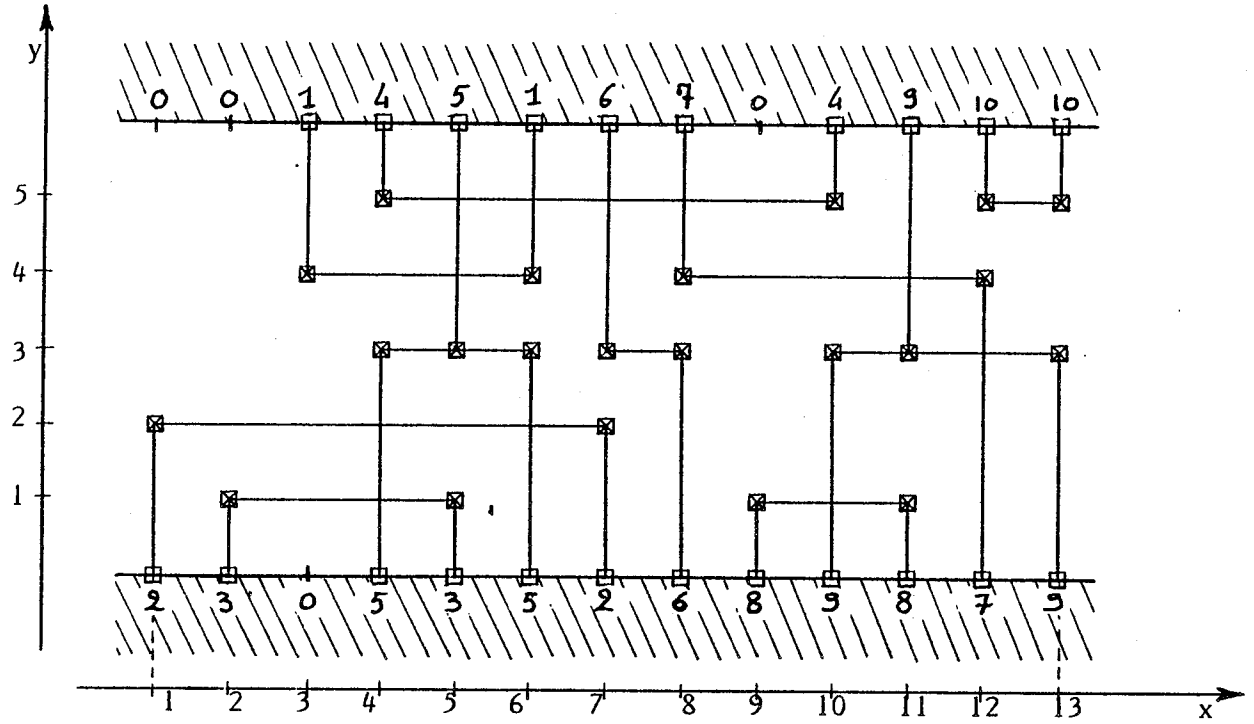
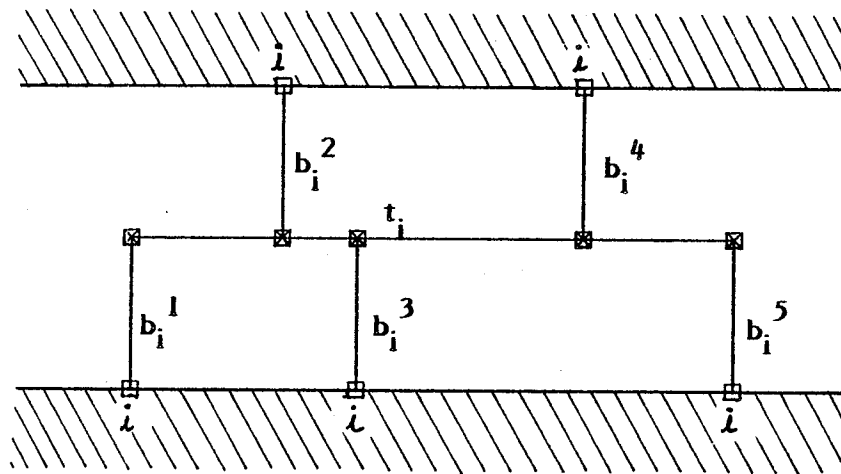


Figure 4



t_i : tronç de l'interconnexion i
 $\{ b_i^j \}$: branches de l'interconnexion i

Figure 5

Nous ne reviendrons pas sur les règles de dessin des interconnexions (voir introduction). Insistons seulement sur cet aspect du problème : chaque interconnexion doit être entièrement contenue à l'intérieur du canal.

A titre d'exemple, une solution au problème de canal biface spécifié par le tableau I est représentée à la figure 4.

II - LE PROBLEME D'ASSIGNATION DE PISTES

Au cours de ce paragraphe, nous présenterons une modélisation qui permet, moyennant certaines restrictions, de transformer le problème du canal biface en un problème combinatoire d'optimisation : *le problème d'assignation de pistes.*

III - Troncs et branches - Spécification des interconnexions par l'ensemble des troncs

Le modèle d'assignation de pistes impose que chaque interconnexion soit implantée sous la forme :

- (i) d'un unique segment horizontal, que nous appellerons *tronc*.
- (ii) d'un nombre supérieur ou égal à 2 de segments verticaux reliant le tronc aux différents points terminaux de l'interconnexion, que nous appellerons *branches*.

Tous les troncs d'un canal étant systématiquement affectés à l'un des niveaux d'interconnexion, toutes les branches à l'autre niveau, chaque branche devra être reliée électriquement à son tronc par un passage via (fig. 5).

t_i	$T_I(t_i)$	$T_S(t_i)$
1	\emptyset	{ 3,6 }
2	{ 1,7 }	\emptyset
3	{ 2,5 }	\emptyset
4	\emptyset	{ 4,10 }
5	{ 4,6 }	{ 5 }
6	{ 8 }	{ 7 }
7	{ 12 }	{ 8 }
8	{ 9,11 }	\emptyset
9	{ 10,13 }	{ 11 }
10	\emptyset	{ 12,13 }

Tableau II

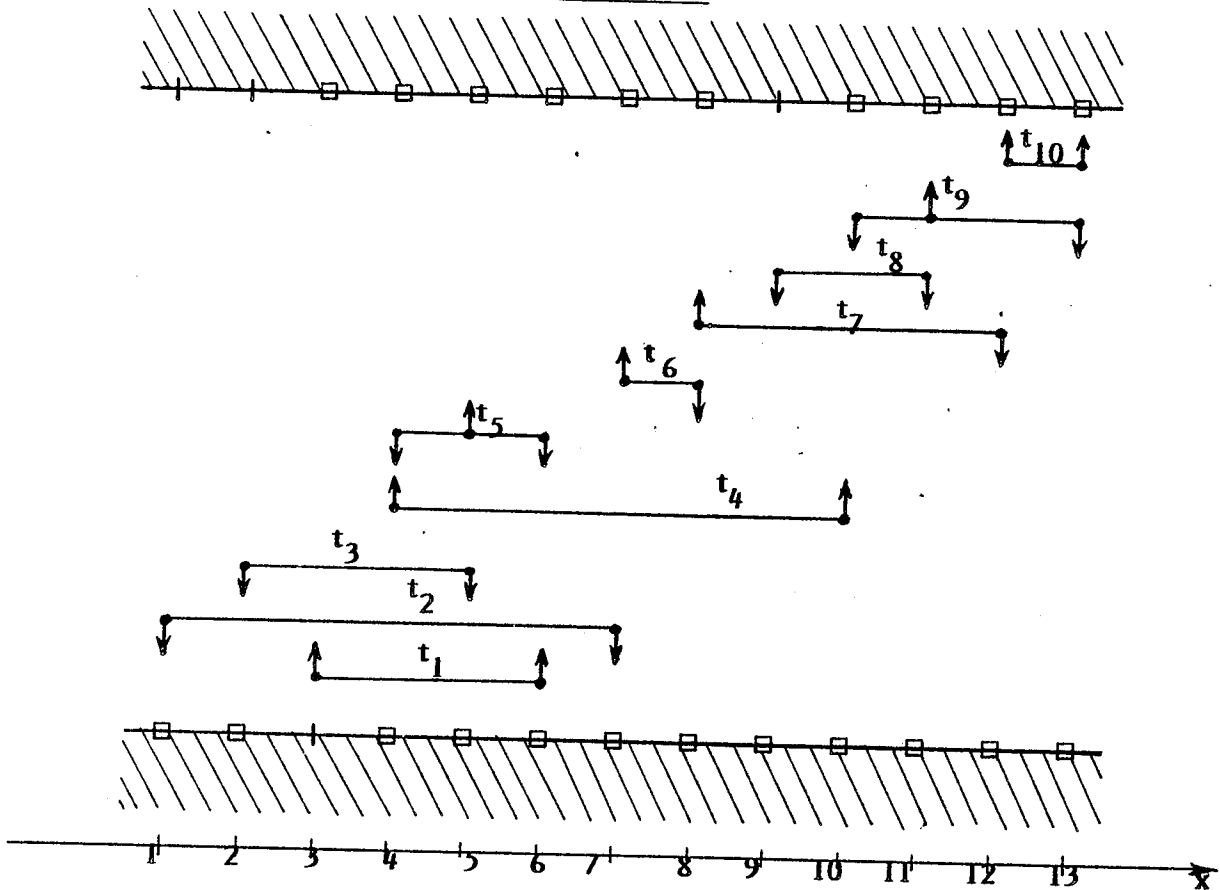


Figure 6

A partir des listes d'interconnexion $I(x)$ et $S(x)$, un problème de canal biface peut être spécifié en termes de troncs et de branches.

Le tronc t_i d'une interconnexion i ($1 \leq i \leq n$) peut être décrit par deux ensembles $T_I(t_i)$ et $T_S(t_i)$ définis comme suit :

$$T_I(t_i) = \{ x/I(x) = i \} \text{ et } T_S(t_i) = \{ x/S(x) = i \}$$

L'ensemble $T_I(t_i)$ (resp. $T_S(t_i)$) contient les abscisses de tous les points terminaux qui doivent être reliés par l'interconnexion i et qui sont situés sur la face inférieure (resp. supérieure) du canal. Pour chaque abscisse x de $T_I(t_i)$ (resp. $T_S(t_i)$), une branche d'abscisse x devra relier le tronc t_i à la face inférieure (resp. supérieure) du canal.

Supposons que n interconnexions soient à implanter à l'intérieur d'un canal biface donné. Si $T = \{ t_1, t_2, \dots, t_n \}$ est l'ensemble des troncs, chaque tronc t_i de T étant décrit par les ensembles $T_I(t_i)$ et $T_S(t_i)$, alors T spécifie les interconnexions à implanter à l'intérieur de ce canal.

Par exemple, le tableau II donne la description des troncs de l'ensemble T pour le problème de canal biface spécifié par le tableau I. La figure 6 montre la représentation que nous adopterons dans tout ce qui suit pour les éléments de l'ensemble T .

II2 - Contraintes de non-court-circuit entre interconnexions

Une fois spécifié par l'ensemble T des troncs, un problème de canal biface peut évidemment être résolu en assignant une piste du canal à chacun des éléments de T . Le positionnement relatif de ces différents éléments à l'intérieur du canal devra respecter certaines *contraintes de non - court-circuit* entre interconnexions. Ces contraintes sont de deux types, correspondant aux deux directions du canal.

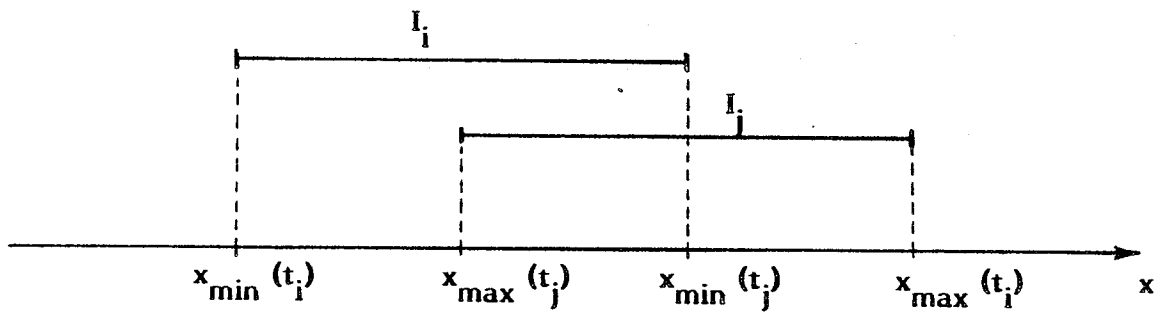


Figure 7

Nous noterons $y(t_i)$ l'ordonnée de la piste du canal à laquelle aura été assigné le tronç t_i de T .

II21 - Contraintes de non-recouvrement des troncs - Graphe G_t

A tout tronç t_i de T peut être associé un intervalle I_i de x , défini par les deux abscisses :

$$\begin{aligned} x_{\min}(I_i) &= \min \{ T_I(t_i) \cup T_S(t_i) \} \\ x_{\max}(I_i) &= \max \{ T_I(t_i) \cup T_S(t_i) \} \end{aligned}$$

Considérons deux troncs distincts t_i et t_j de T tels que les intervalles associés I_i et I_j intersectent (fig. 7). Alors les troncs t_i et t_j ne peuvent pas être assignés à la même piste. En effet, ces deux troncs étant implantés sur le même niveau, leur recouvrement provoquerait un court-circuit entre les interconnexions i et j . On dira qu'il y a *contrainte de non-recouvrement des troncs* entre t_i et t_j .

Les contraintes de non-recouvrement des troncs pour l'ensemble T peuvent être décrites par une correspondance (application multivoque) Γ_t de T dans T définie comme suit :

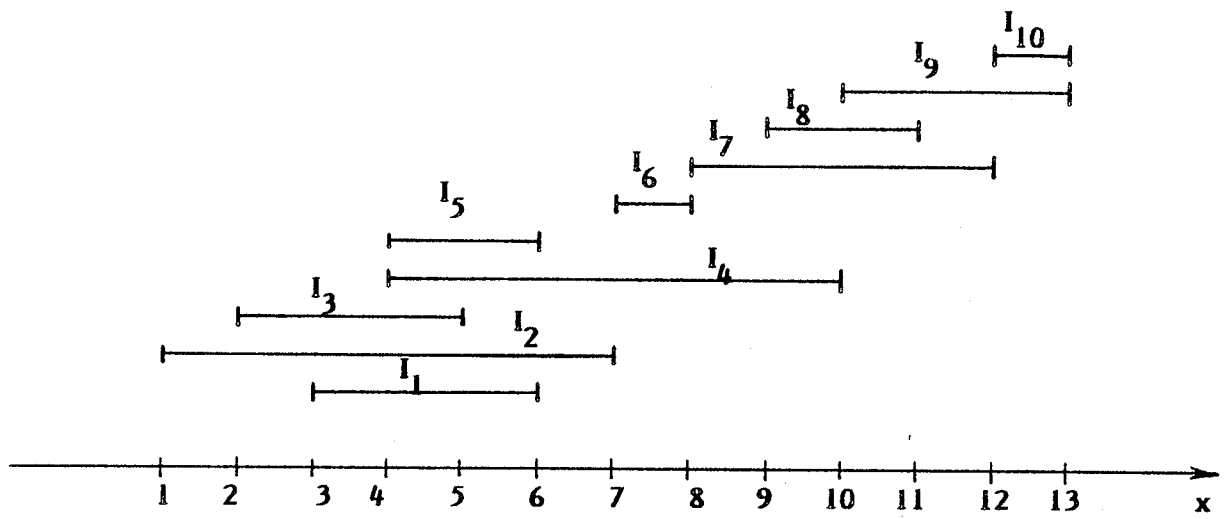
$$\Gamma_t(t_i) = \{ t_j / i \neq j \text{ et } I_i \text{ intersecte avec } I_j \}$$

Pour tout t_i appartenant à T et pour tout t_j appartenant à $\Gamma_t(t_i)$, on devra respecter la contrainte :

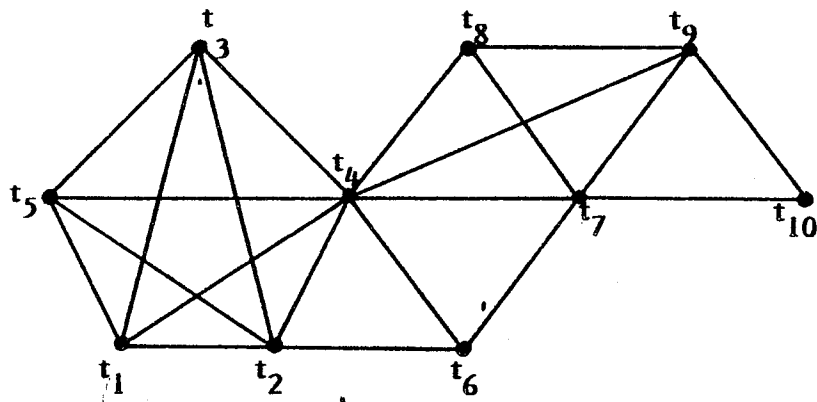
$$y(t_i) \neq y(t_j)$$

L'ensemble T et la correspondance Γ_t engendrent un 1-graphe non-orienté :

$$G_t = (T, \Gamma_t)$$



(a)



(b)

Figure 8

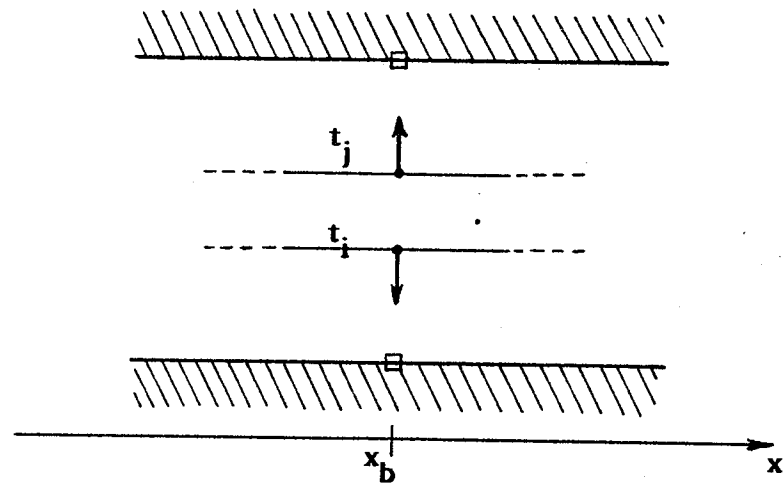


Figure 9

Les sommets de G_t représentent les troncs de T , deux sommets distincts t_i et t_j seront joints par une arête $\{t_i, t_j\}$ si et seulement si les deux intervalles associés I_i et I_j intersectent.

Remarquons que G_t est le graphe représentatif de la famille d'intervalles $J = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ associée à l'ensemble des troncs $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$. Par conséquent, G_t possède toutes les propriétés d'un graphe d'intervalles [Ber 73].

Au titre d'exemple, la figure 8 a représente la famille d'intervalles associée à l'ensemble T des troncs de la figure 6, la figure 8 b le graphe G_t représentatif de cette famille.

II22 - Contraintes de non-recouvrement des branches - Graphe G_b

Considérons deux troncs distincts t_i et t_j de T (fig. 9) tels que :

$$T_I(t_i) \cap T_S(t_j) = \{x_b\}$$

Les assignations respectives de t_i et t_j devront être telles que l'on ait :

$$y(t_i) < y(t_j)$$

afin qu'à l'abscisse x_b les branches de t_i et de t_j ne se recouvrent pas. En effet, ces deux branches étant implantées sur le même niveau, leur recouvrement provoquerait un court-circuit entre les interconnexions i et j . On dira qu'il y a *contrainte de non-recouvrement des branches* entre t_i et t_j .

Les contraintes de non-recouvrement des branches pour l'ensemble T peuvent être décrites par une correspondance Γ_b^+ de T dans T , définie comme suit :

$$\Gamma_b^+(t_i) = \{t_j / i \neq j \text{ et } T_I(t_i) \cap T_S(t_j) \neq \emptyset\}$$

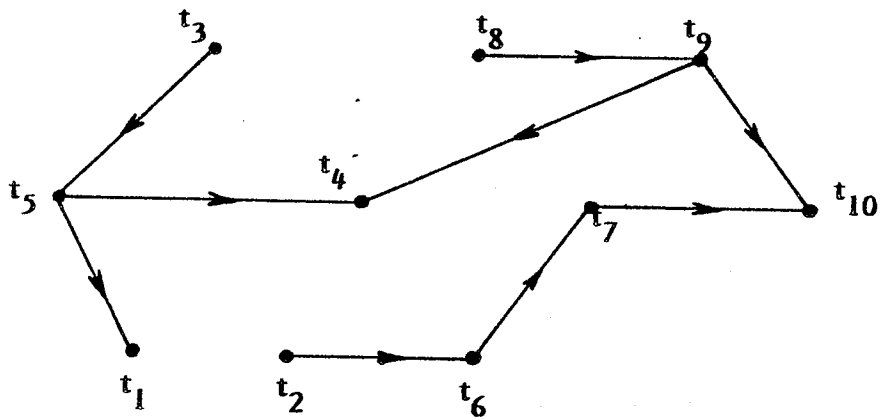


Figure 10

Pour tout t_i appartenant à T et pour tout t_j appartenant à $\Gamma_b^+(t_i)$, on devra respecter la contrainte :

$$y(t_i) < y(t_j)$$

L'ensemble T et la correspondance Γ_b^+ engendrent un 1-graphe orienté $G_b = (T, \Gamma_b^+)$.

Les sommets de G_b représentent les troncs de T ; deux sommets distincts t_i et t_j seront joints par un arc (t_i, t_j) si et seulement si $T_I(t_i) \cap T_S(t_j) \neq \emptyset$.

Remarquons que pour tout arc (t_i, t_j) du graphe G_b , il existe une arête $\{t_i, t_j\}$ dans le graphe G_t . En effet, pour que deux troncs distincts t_i et t_j soient tels que $T_I(t_i) \cap T_S(t_j) \neq \emptyset$, il faut que les intervalles I_i et I_j intersectent.

Remarquons également que le graphe G_b n'est généralement pas transitif, l'existence d'un arc (t_i, t_j) et d'un arc (t_j, t_k) n'impliquant pas nécessairement l'existence d'un arc (t_i, t_k) .

Au titre d'exemple, la figure 10 représente le graphe G_b correspondant à l'ensemble T de la figure 6.

III - Énoncé du problème

A tout problème de canal biface spécifié par deux listes d'interconnexion $I(x)$ et $S(x)$, on peut faire correspondre un problème d'assignation de pistes spécifié par l'ensemble T des troncs. Nous noterons $P = (T)$ ce problème d'assignation de pistes et nous dirons qu'il est associé au problème de canal biface spécifié par les listes $I(x)$ et $S(x)$.

Le problème $P = (T)$ peut être énoncé comme suit.

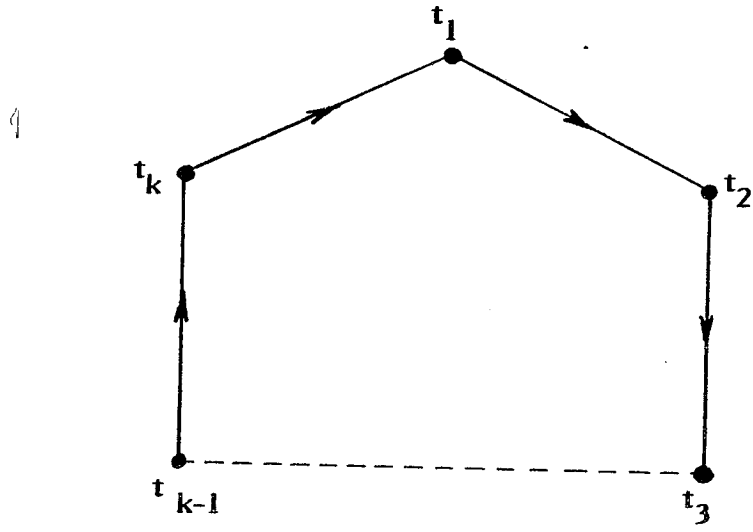


Figure 11

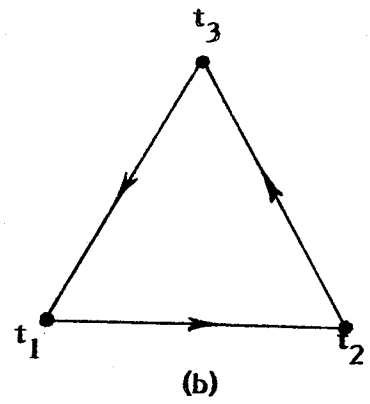
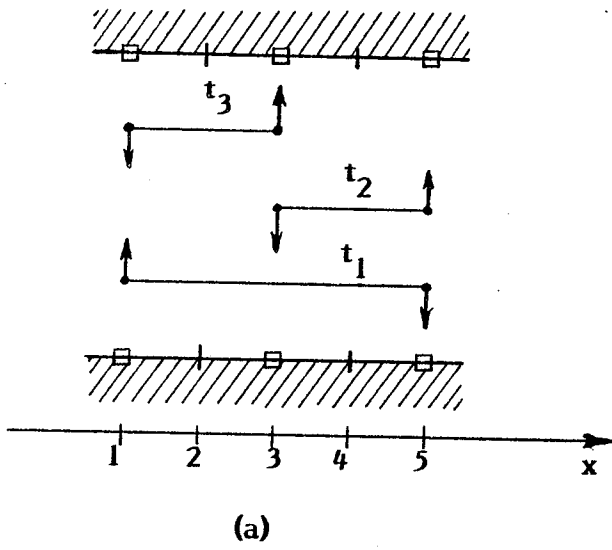


Figure 12

Soit $P = (T)$ un problème d'assignation de pistes et soient Γ_t et Γ_b^+ les correspondances de T dans T décrivant les contraintes de non-court-circuit entre interconnexions.

Un vecteur $S = (y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n))$ constitue une solution au problème $P = (T)$ si et seulement si ses composantes vérifient les propriétés suivantes :

- (i) $\forall t_i \in T, 1 \leq y(t_i) \leq c$ avec c minimal
- (ii) $\forall t_i \in T$ et $\forall t_j \in \Gamma_t(t_i), y(t_i) \neq y(t_j)$
- (iii) $\forall t_i \in T$ et $\forall t_j \in \Gamma_b^+(t_i), y(t_i) < y(t_j)$

Le problème $P = (T)$ est évidemment un problème combinatoire d'optimisation de la capacité c .

A titre d'exemple, la solution de la figure 4, solution au problème de canal biface spécifié par le tableau I, peut être obtenue en résolvant le problème d'assignation de pistes associé $P = (T)$ représenté à la figure 6. Le vecteur solution S est donné par :

$$S = (4, 2, 1, 5, 3, 3, 4, 1, 3, 5)$$

III - FAISABILITE D'UN PROBLEME D'ASSIGNATION DE PISTES

Théorème I :

Pour qu'un problème d'assignation de pistes $P = (T)$ admette au moins une solution, il faut et il suffit que le graphe G_b de ce problème n'admette aucun cycle.

Considérons un problème d'assignation de pistes $P = (T)$ et supposons que le graphe G_b de ce problème admette un cycle élémentaire rencontrant k sommets. Soit $C = \{ t_1, t_2, \dots, t_k \}$ ce cycle (fig. 11).

Parcourons les $k-1$ premiers arcs de C , à partir de l'arc (t_1, t_2) :

$$\begin{aligned} t_2 &\in \Gamma_b^+(t_1) \rightarrow y(t_1) < y(t_2) \\ t_3 &\in \Gamma_b^+(t_2) \rightarrow y(t_2) < y(t_3) \quad \dots \\ t_k &\in \Gamma_b^+(t_{k-1}) \rightarrow y(t_{k-1}) < y(t_k) \end{aligned}$$

Par transitivité de la relation $<$, il vient :

$$y(t_1) < y(t_k) \quad (1)$$

$$\text{Or } t_1 \in \Gamma_b^+(t_k) \rightarrow y(t_k) < y(t_1) \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) sont incompatibles et le problème P n'admet pas de solution.

Par exemple, considérons le problème d'assignation de pistes $P = (T)$ de la figure 12 a. Le graphe G_b , représenté à la figure 12 b, admet le cycle élémentaire $C = \{ t_1, t_2, t_3 \}$ et le problème P n'admet donc pas de solution.

IV - CAPACITE MINIMALE D'UN PROBLEME D'ASSIGNATION DE PISTES

Le problème d'assignation de pistes est un problème combinatoire d'optimisation de la capacité c du canal. Au cours de ce paragraphe, nous tenterons de caractériser la valeur optimale, c'est-à-dire minimale, de cette capacité.

IVI - Capacité minimale imposée par Γ_t

Lemme 1 :

Soit $P = (T)$ un problème d'assignation de pistes et soient Γ_t et Γ_b^+ les correspondances de T dans T décrivant les contraintes de non-court-circuit.

Si l'on ne considère que les seules contraintes décrites par Γ_t , alors la capacité minimale du problème P est égale à $\omega(G_t)$, cardinalité d'une clique maximale du graphe G_t .

Soit $P = (T)$ un problème d'assignation de pistes. Si l'on ne considère que les seules contraintes décrites par Γ_t , alors le problème P est équivalent au problème de coloration des sommets du graphe G_t avec un nombre minimal de couleurs. Deux quelconques sommets adjacents (deux quelconques troncs tels que les intervalles associés intersectent) ne devront pas être colorés avec la même couleur (assignés à la même piste).

Le graphe G_t étant le graphe représentatif d'une famille d'intervalles (voir § II21), il est γ -parfait. C'est-à-dire que son nombre chromatique $\gamma(G_t)$ est égal à $\omega(G_t)$, cardinalité d'une clique maximale [Ber 73].

Par exemple, considérons le problème d'assignation de pistes de la figure 6, problème dont le graphe G_t est représenté à la figure 8 b.

Le graphe G_t admettant la clique maximale $cl = \{ t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \}$, $\omega(G_t)$ est égal à 5. Si l'on ne considère que les seules contraintes décrites par Γ_t , la capacité minimale de ce problème est donc égale à 5.

IV2 - Capacité minimale imposée par Γ_b^+

Lemme 2 :

Soit $P = (T)$ un problème d'assignation de pistes et soient Γ_t et Γ_b^+ les correspondances de T dans T décrivant les contraintes de non-court-circuit, Γ_b^+ étant telle que le graphe G_b n'admet aucun cycle.

Si l'on ne considère que les seules contraintes décrites par Γ_b^+ , alors la capacité minimale du problème P est égale à $\lambda(G_b)$, nombre de sommets rencontrés par un plus long chemin du graphe G_b .

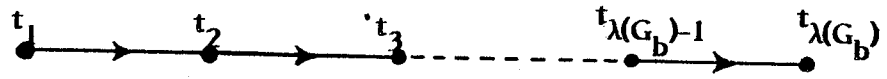


Figure 13

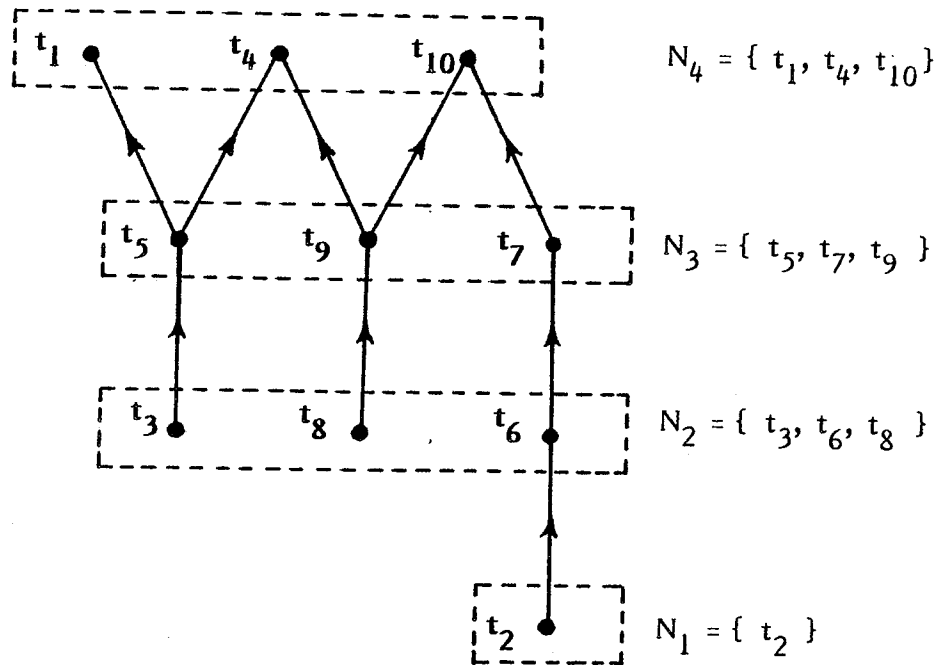


Figure 14

Soit $\mu = [t_1, t_2, \dots, t_{\lambda(G_b)}]$ un plus long chemin du graphe G_b (fig. 13).
 Pour tout arc (t_i, t_j) du chemin μ , on doit respecter la contrainte :

$$y(t_i) < y(t_j)$$

Par transitivité de la relation $<$, on peut écrire :

$$y(t_1) < y(t_2) < \dots < y(t_{\lambda(G_b) - 1}) < y(t_{\lambda(G_b)})$$

Il faut donc au moins $\lambda(G_b)$ pistes pour que les contraintes décrites par le chemin μ soient respectées.

Le graphe G_b n'admettant aucun cycle, il peut être ordonné en $\lambda(G_b)$ niveaux [Gon 79]. C'est-à-dire qu'il existe au moins une partition $N = (N_1, N_2, \dots, N_{\lambda(G_b)})$ de l'ensemble des sommets de G_b qui possède les propriétés suivantes :

(i) Pour tout N_i appartenant à N , il n'existe aucun arc reliant deux quelconques sommets de N_i .

(ii) Pour deux quelconques éléments N_i et N_j de N tels que $i < j$, tous les arcs qui relient les sommets de N_i à ceux de N_j sont orientés dans le sens (N_i, N_j) .

A titre d'exemple, la figure 14 représente l'un des ordonnancements en $\lambda(G_b)$ niveaux du graphe G_b de la figure 10.

Le graphe G_b étant ordonné en $\lambda(G_b)$ niveaux, toutes les contraintes spécifiées par Γ_b^+ peuvent être respectées en assignant une même piste d'ordonnée $y(N_i)$ à chacun des sommets d'un même niveau N_i de N , de sorte que l'on ait :

$$y(N_1) < y(N_2) < \dots < y(N_{\lambda(G_b) - 1}) < y(N_{\lambda(G_b)})$$

Il suffit donc de $\lambda(G_b)$ pistes pour que les contraintes décrites par Γ_b^+ soient respectées.

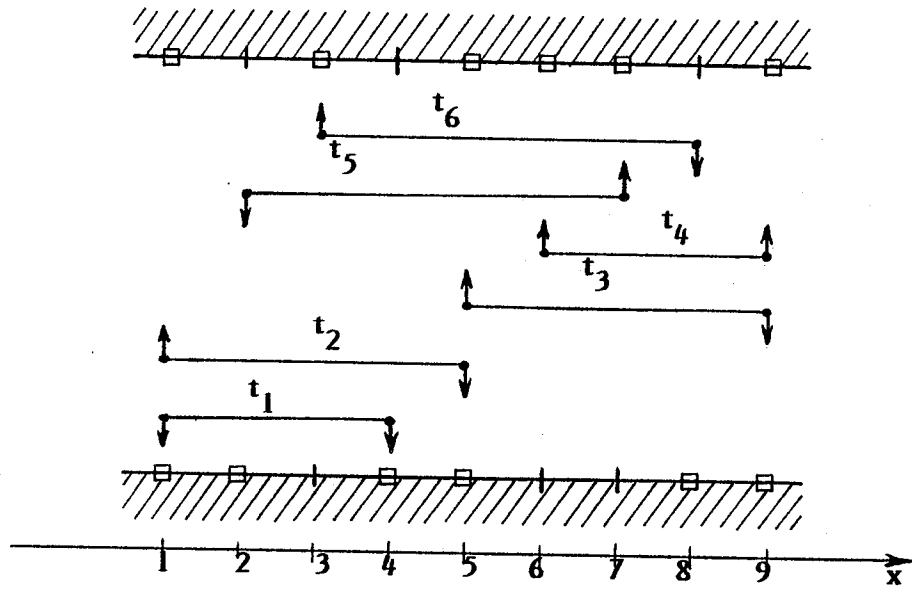


Figure 15

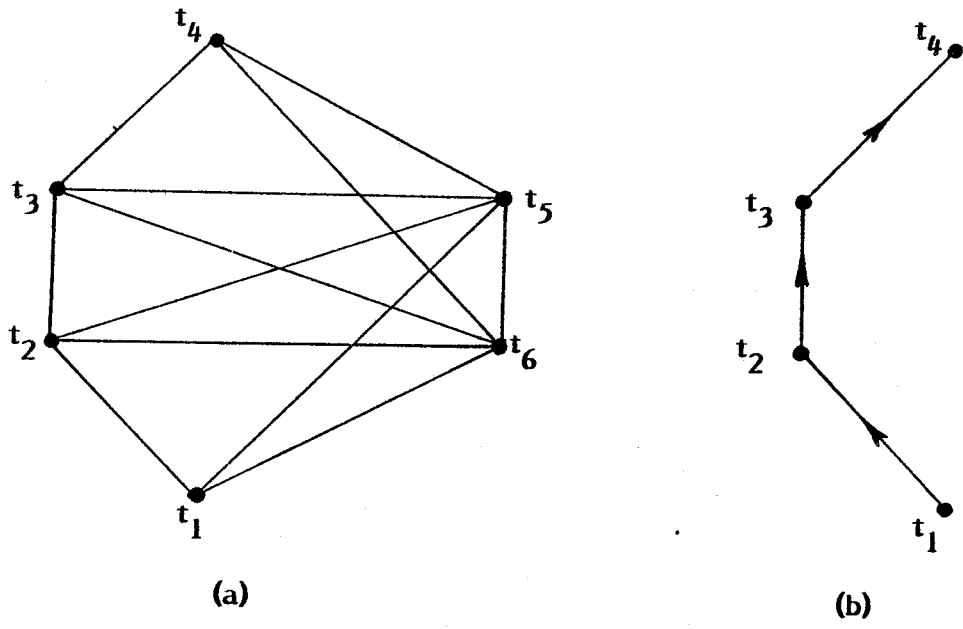


Figure 16

IV3 - Interactions entre les graphes G_t et G_b

La capacité minimale d'un problème d'assignation de pistes $P = (T)$ n'est pas égale au maximum de $\{ \omega(G_t), \lambda(G_b) \}$, comme pourraient le laisser supposer les lemmes 1 et 2. En effet, les graphes G_t et G_b peuvent inter-agir.

IV31 - Action de G_b sur G_t

Considérons le problème d'assignation de pistes $P = (T)$ de la figure 15.

Le graphe G_t de ce problème (fig. 16 a) admet les cliques maximales :

$$cl_1 = \{ t_1, t_2, t_5, t_6 \}$$

$$cl_2 = \{ t_2, t_3, t_5, t_6 \}$$

$$cl_3 = \{ t_3, t_4, t_5, t_6 \}$$

$\omega(G_t)$ est donc égal à 4.

Le graphe G_b (fig. 16 b) admet le plus long chemin :

$$\mu = [t_1, t_2, t_3, t_4]$$

$\lambda(G_b)$ est donc égal à 4.

Considérons les contraintes décrites par le chemin μ de G_b :

$$\text{arc } (t_1, t_2) + y(t_1) < y(t_2)$$

$$\text{arc } (t_2, t_3) + y(t_2) < y(t_3)$$

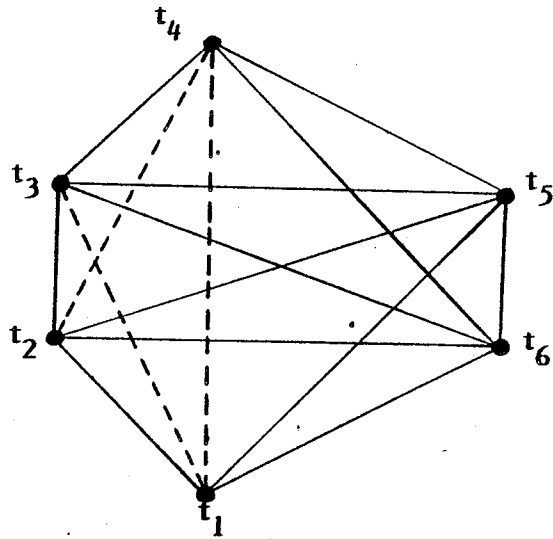
$$\text{arc } (t_3, t_4) + y(t_3) < y(t_4)$$

Par transitivité de la relation $<$, il vient également :

$$y(t_1) < y(t_3)$$

$$y(t_1) < y(t_4)$$

$$y(t_2) < y(t_4)$$



(Les arêtes modélisant les contraintes induites par la fermeture transitive du chemin $\mu = [t_1, t_2, t_3, t_4]$ de G_D sont représentées en pointillés).

Figure 17

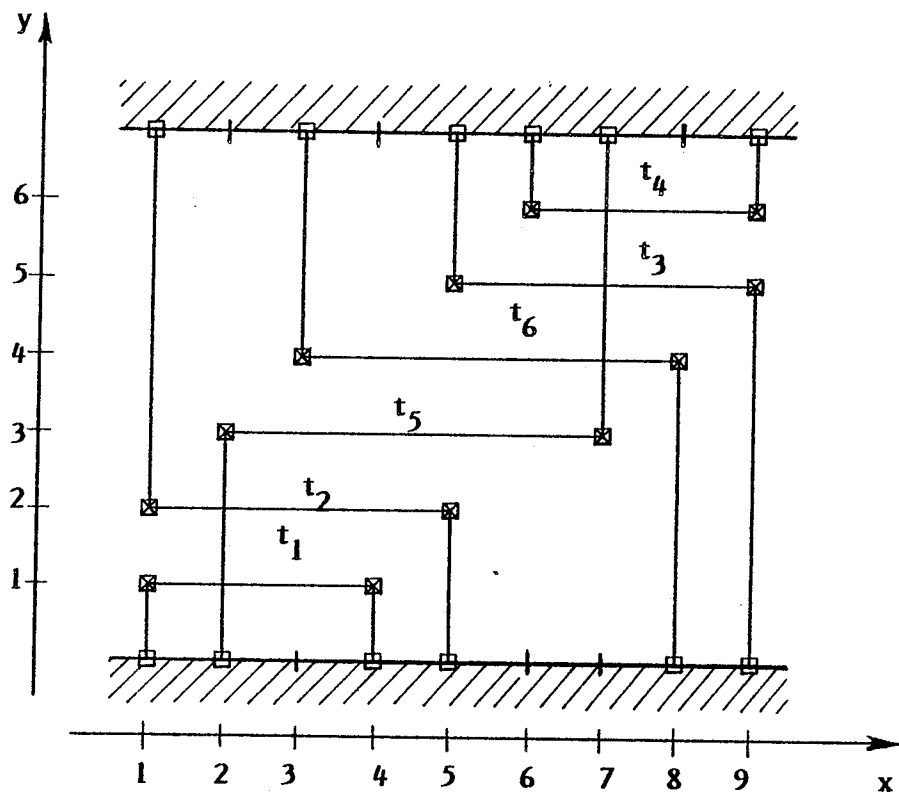


Figure 18

Les intervalles I_1 et I_3 , I_1 et I_4 , I_2 et I_4 n'intersectent pas. Pourtant, t_1 et t_3 , t_1 et t_4 , t_2 et t_4 ne pourront pas être assignés à la même piste. Dans le graphe G_t , on pourra traduire ces contraintes, induites par la fermeture transitive du chemin μ de G_b , par les arêtes :

$$\{ t_1, t_3 \}, \{ t_1, t_4 \} \text{ et } \{ t_2, t_4 \} .$$

Le graphe G_t ainsi modifié est représenté à la figure 17. Il admet maintenant la clique maximale $\{ t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 \}$ de cardinalité 6 et, en vertu du Lemme 1, il faut au moins 6 pistes pour résoudre le problème P. Cette capacité est également suffisante, comme en témoigne la figure 18.

La capacité minimale du problème d'assignation de pistes de la figure 15 est donc égale à 6, valeur strictement supérieure à $\max \{ \omega(G_t), \lambda(G_b) \}$.

IV32 - Action de G_t sur G_b

Considérons le problème d'assignation de pistes $P = (T)$ de la figure 19.

Le graphe G_t de ce problème (figure 20 a) admet la clique maximale :

$$cl = \{ t_3, t_4, t_7, t_8 \}$$

$\omega(G_t)$ est donc égal à 4.

Le graphe G_b (fig. 20 b) admet les plus longs chemins :

$$\mu_1 = [t_1, t_2, t_3, t_4]$$

$$\mu_2 = [t_5, t_6, t_7, t_8]$$

$\lambda(G_b)$ est donc égal à 4.

L'unique ordonnancement en $\lambda(G_b)$ niveaux (voir § IV2) du graphe G_b est représenté à la figure 21. La partition N des sommets de G_b comprend les quatre sous-ensembles :

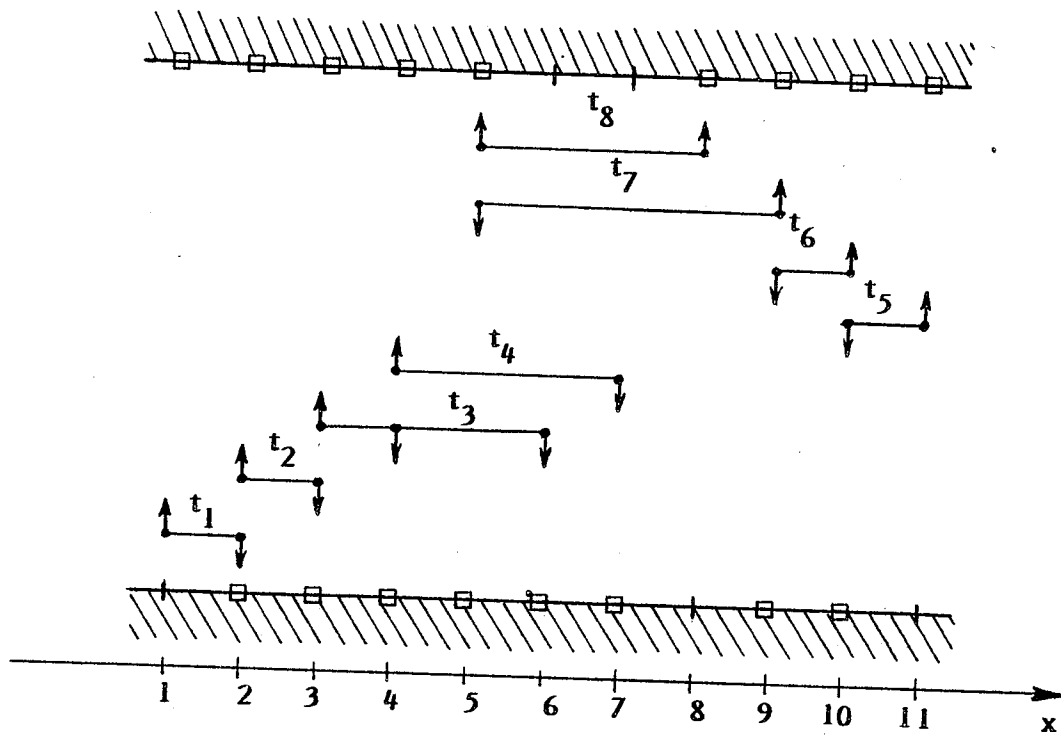


Figure 19

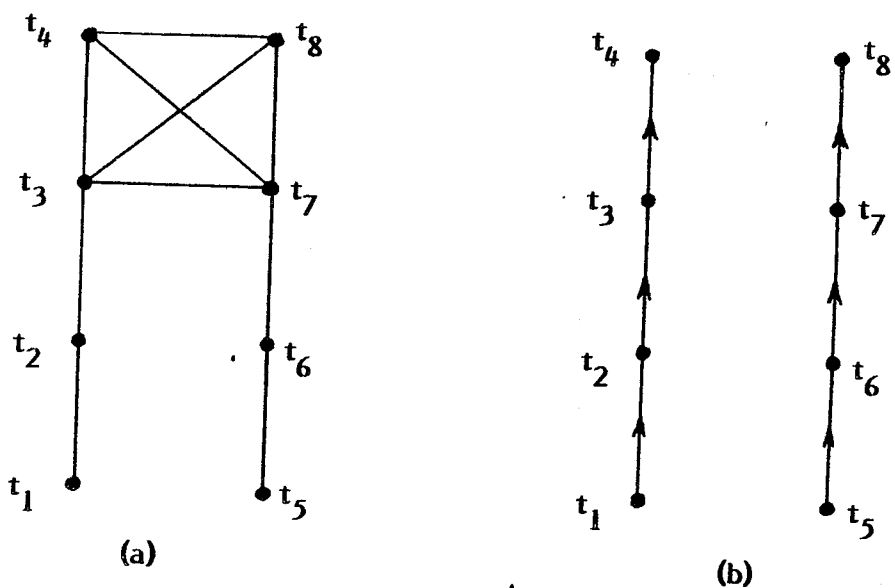


Figure 20

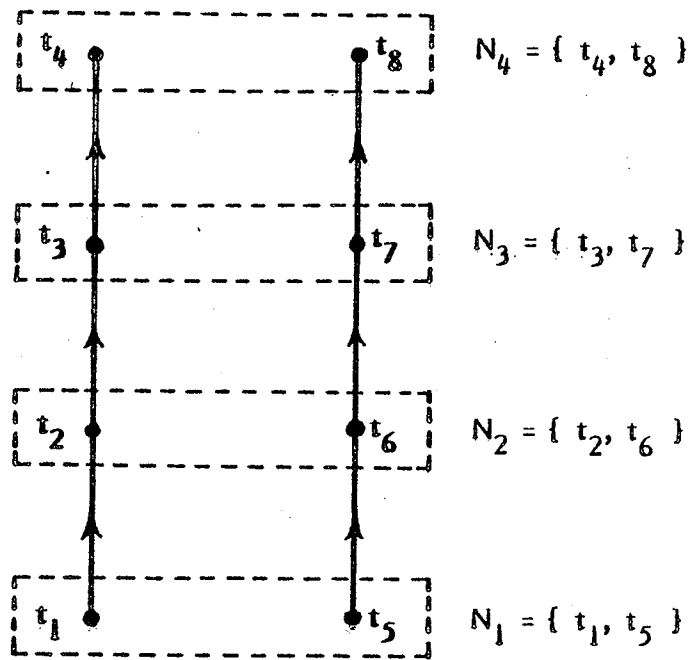


Figure 21

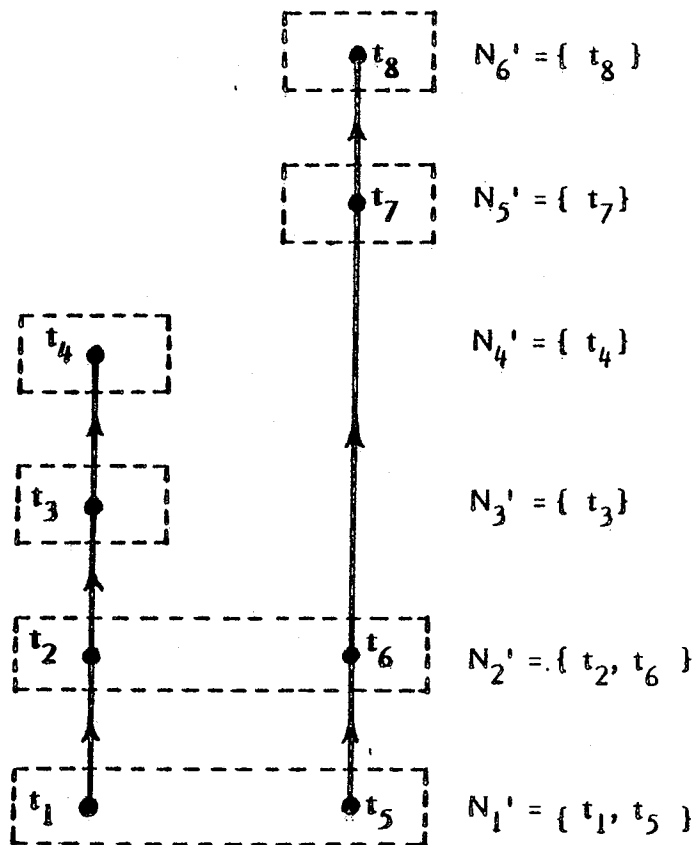


Figure 22

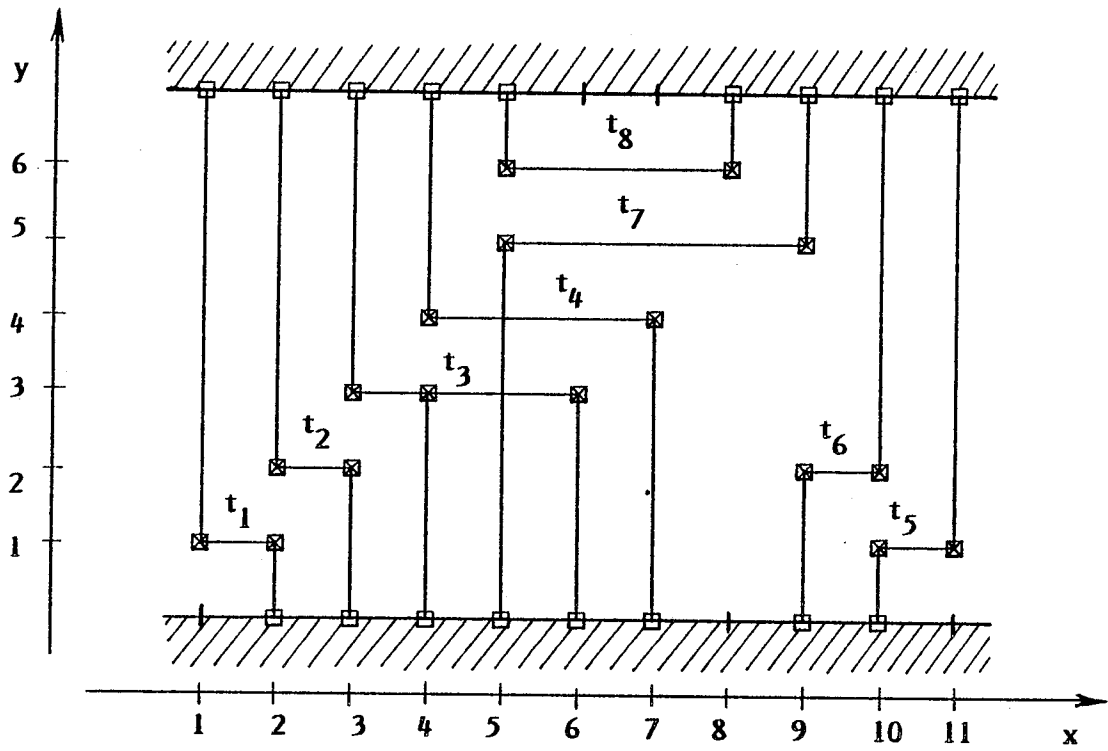


Figure 23

$$N_1 = \{ t_1, t_5 \}$$

$$N_2 = \{ t_2, t_6 \}$$

$$N_3 = \{ t_3, t_7 \}$$

$$N_4 = \{ t_4, t_8 \}$$

Pour respecter les contraintes décrites par Γ_b^+ en utilisant un nombre minimal de pistes, il faut et il suffit qu'une même piste d'ordonnée $y(N_i)$ soit assignée à chacun des sommets d'un même sous ensemble N_i , de la façon suivante :

$$y(N_1) = 1, y(N_2) = 2, y(N_3) = 3, y(N_4) = 4.$$

Mais, dans le graphe G_t , les troncs t_3, t_4, t_7 et t_8 forment une clique. Par conséquent, ni les sommets de N_3 , ni les sommets de N_4 , ne peuvent être assignés à une même piste.

On pourra vérifier, par une recherche combinatoire exhaustive, qu'il faut au moins 6 niveaux pour ordonnancer le graphe G_b de façon à ce que les contraintes décrites par Γ_t soient respectées. Un tel ordonnancement est représenté à la figure 22, la solution correspondante à la figure 23.

Pour le problème d'assignation de pistes de la figure 19, comme pour celui de la figure 15, la capacité minimale est donc strictement supérieure à $\max \{ \omega(G_t), \lambda(G_b) \}$.

IV4 - Encadrement de la capacité minimale

Compte tenu des lemmes 1 et 2, ainsi que des exemples présentés au paragraphe IV3, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème II :

Soit $P = (T)$ un problème d'assignation de pistes et soient Γ_t et Γ_b^+ les correspondances de T dans T décrivant les contraintes de non-court-circuit, Γ_b^+ étant telle que le graphe G_b n'admet aucun cycle.

La capacité minimale c_{\min} du problème P est telle que :

$$\max \{ \omega(G_t), \lambda(G_b) \} \leq c_{\min} \leq |T|$$

La capacité minimale c_{\min} est évidemment majorée par $|T|$: dans le pire des cas, on sera contraint d'assigner une piste différente à chacun des troncs de T .

V - LA DIVISION DES TRONCS

VI - Limites du modèle d'assignation de pistes

La modélisation du problème d'assignation de pistes présente l'intérêt de transformer le problème du canal biface en un problème combinatoire. Toutefois, cette modélisation impose que chaque interconnexion soit implantée sous la forme d'un tronc unique et de branches.

L'expérience montre qu'en autorisant des formes d'interconnexion plus complexes, il est presque toujours possible de résoudre un problème de canal biface tel que le graphe G_b du problème d'assignation de pistes associé $P = (T)$ admet un ou plusieurs cycles. L'expérience montre également qu'en autorisant des formes d'interconnexion plus complexes, il s'avère souvent possible de résoudre un problème de canal biface en utilisant un nombre de pistes inférieur à la capacité minimale du problème d'assignation de pistes associé $P = (T)$.

Rappelons ces deux objectifs primordiaux que devra tenter de satisfaire tout outil de tracé automatique d'interconnexions : implanter toutes les interconnexions et minimiser la surface occupée par les interconnexions. Le seul modèle d'assignation de pistes s'avère donc trop restrictif pour être réaliste. C'est pourquoi nous allons maintenant le compléter par un autre modèle :

le modèle de la *division des troncs*. On pourra ainsi, tout en conservant le modèle d'assignation de pistes, utiliser toutes les formes d'interconnexion permises pour la résolution du problème du canal biface.

V2 - Les différentes méthodes de division

Considérons l'ensemble T des troncs d'un problème d'assignation de pistes $P = (T)$. Nous appellerons *division d'un tronc* t_i de T , une opération qui consiste à transformer le tronc t_i en deux sous-troncs, que nous noterons t_i^1 et t_i^2 . Ces deux sous-troncs t_i^1 et t_i^2 peuvent être définis de différentes façons, correspondant à différentes *méthodes de division* (fig. 24).

Méthode I :

Le tronc t_i de T est divisé à une abscisse x_d , telle que :

$$x_{\min}(t_i) < x_d < x_{\max}(t_i) \text{ et } x_d \in \{ T_I(t_i) \cup T_S(t_i) \}$$

Les sous-troncs t_i^1 et t_i^2 sont définis par :

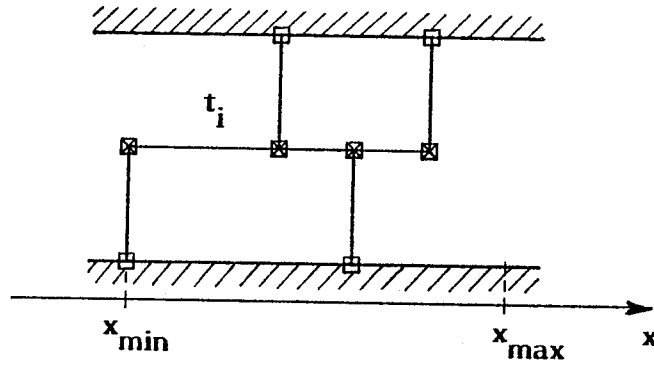
$$T_I(t_i^1) = \{ x/x \in T_I(t_i) \text{ et } x \leq x_d \}$$

$$T_S(t_i^1) = \{ x/x \in T_S(t_i) \text{ et } x \leq x_d \}$$

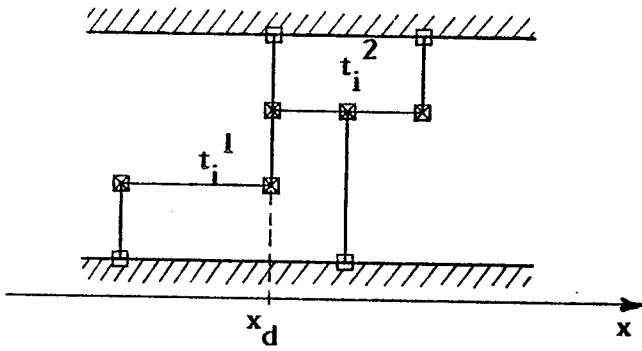
$$T_I(t_i^2) = \{ x/x \in T_I(t_i) \text{ et } x \geq x_d \}$$

$$T_S(t_i^2) = \{ x/x \in T_S(t_i) \text{ et } x \geq x_d \}$$

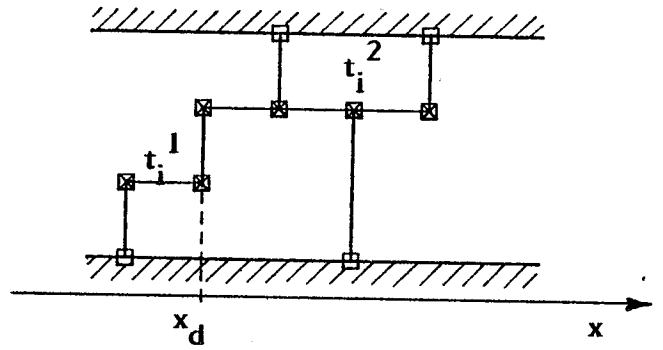
Les sous-troncs t_i^1 et t_i^2 s'interconnectent par recouvrement de leur branche d'abscisse x_d . Dans la littérature, cette méthode de division est connue sous l'appellation de "dogleg".



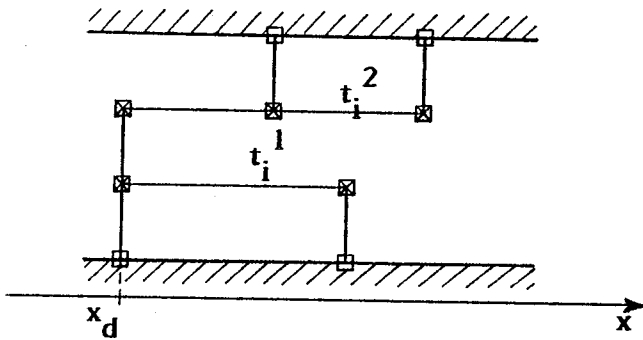
(a)



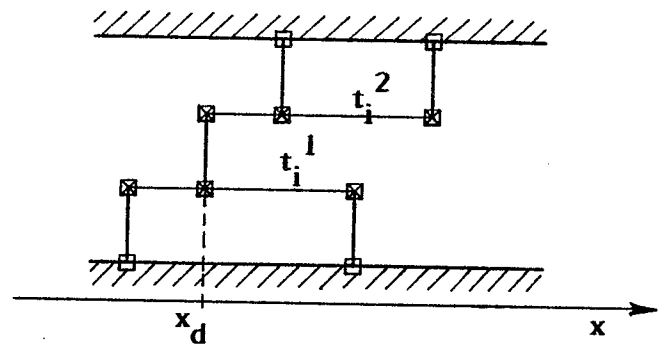
(b)



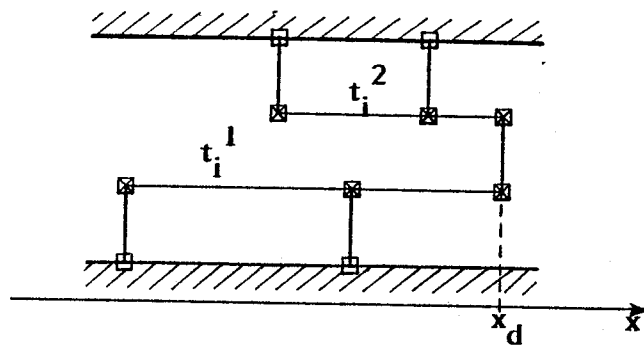
(c)



(d)



(e)



(f)

(a) tronc original t_i - (b) méthode I - (c) méthode I' -
(d) méthode II - (e) méthode II' - (f) méthode III

Figure 24

Méthode I' :

Comme pour la méthode I, l'abscisse x_d de division du tronç t_i est telle que :

$$x_{\min}(t_i) < x_d < x_{\max}(t_i)$$

Mais contrairement à la méthode I :

$$x_d \notin \{ T_I(t_i) \cup T_S(t_i) \}$$

Pour relier électriquement les sous-troncs t_i^1 et t_i^2 , on place à l'abscisse x_d un *segment de raccord* vertical. Contrairement à une branche, ce segment de raccord n'est relié à aucun point terminal ; nous incluerons cependant son abscisse x_d , en la notant $\overline{x_d}$, dans les ensembles qui contiennent les abscisses des branches des sous-troncs t_i^1 et t_i^2 . Dans ces conditions, pour la méthode I', les sous-troncs t_i^1 et t_i^2 sont définis par :

$$T_I(t_i^1) = \{ x/x \in T_I(t_i) \text{ et } x < x_d \} \cup \{ \overline{x_d} \}$$

$$T_S(t_i^1) = \{ x/x \in T_S(t_i) \text{ et } x < x_d \} \cup \{ \overline{x_d} \}$$

$$T_I(t_i^2) = \{ x/x \in T_I(t_i) \text{ et } x > x_d \} \cup \{ \overline{x_d} \}$$

$$T_S(t_i^2) = \{ x/x \in T_S(t_i) \text{ et } x > x_d \} \cup \{ \overline{x_d} \}$$

Si les méthodes de division I et I' ne produisent que des "coudages" des troncs, les méthodes qui suivent affectent beaucoup plus l'allure des interconnexions. A partir d'un tronç t_i , elles forment un premier sous-tronç avec l'ensemble $T_I(t_i)$ et un second sous-tronç avec l'ensemble $T_S(t_i)$.

Méthode II :

L'abscisse x_d de division du tronç t_i est telle que :

$$x_{\min}(t_i) \leq x_d \leq x_{\max}(t_i) \text{ et } x_d \in \{ T_I(t_i) \cup T_S(t_i) \}$$

Les sous-troncs t_i^1 et t_i^2 sont définis par :

$$\begin{array}{l|l} \text{Si } x_d \in T_I(t_i) & \begin{array}{l} T_I(t_i^1) = T_I(t_i) \text{ et } T_S(t_i^1) = \emptyset \\ T_I(t_i^2) = \{x_d\} \text{ et } T_S(t_i^2) = T_S(t_i) \end{array} \\ \text{Si } x_d \in T_S(t_i) & \begin{array}{l} T_I(t_i^1) = T_I(t_i) \text{ et } T_S(t_i^1) = \{x_d\} \\ T_I(t_i^2) = \emptyset \text{ et } T_S(t_i^2) = T_S(t_i) \end{array} \end{array}$$

Comme pour la méthode I, les sous-troncs t_i^1 et t_i^2 s'interconnectent par recouvrement de leur branche d'abscisse x_d .

Méthode II' :

$$x_{\min}(t_i) < x_d < x_{\max}(t_i) \text{ et } x_d \notin \{T_I(t_i) \cup T_S(t_i)\}$$

$$T_I(t_i^1) = T_I(t_i) \text{ et } T_S(t_i^1) = \{\overline{x_d}\}$$

$$T_I(t_i^2) = \{\overline{x_d}\} \text{ et } T_S(t_i^2) = T_S(t_i)$$

Comme pour la méthode I', les sous-troncs t_i^1 et t_i^2 sont interconnectés par un segment de raccord d'abscisse x_d .

Méthode III :

$$X_{\min} \leq x_d < x_{\min}(t_i)$$

ou

$$x_{\max}(t_i) < x_d \leq X_{\max}$$

La définition des sous-troncs t_i^1 et t_i^2 est la même que pour la méthode II'.

On pourra établir les différentes conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une méthode de division donnée soit applicable à un tronç donné. Par exemple, pour que la méthode I soit applicable à un tronç t_i , il faut et il suffit que ce tronç t_i soit tel que :

$$|\tau_1(t_i) \cup \tau_5(t_i)| > 2$$

On pourra également vérifier que tout tracé d'interconnexions conforme aux règles de résolution du problème du canal biface peut être décrit en termes de troncs et de divisions.

V3 - Transformation d'un problème d'assignation de pistes par division des troncs

Considérons un problème de canal biface et son problème d'assignation de pistes associé $P = (T)$. En appliquant à certains troncs de T les méthodes de division que nous venons de décrire, le problème $P = (T)$ peut être transformé en un autre problème d'assignation de pistes $P' = (T')$. L'ensemble T' spécifiant le problème P' sera formé par l'union de l'ensemble des troncs de T qui n'ont pas été divisés et de l'ensemble des sous-troncs générés par les divisions. Nous noterons Γ_t' et $\Gamma_b^{+'}$ les correspondances de T' dans T' décrivant les contraintes de non-court-circuit pour le problème P' , G_t' et G_b' les graphes (T', Γ_t') et $(T', \Gamma_b^{+'})$.

V31 - Définition de Γ_t^0 :

La correspondance Γ_t' de T' dans T' se définit de la même façon que la correspondance Γ_t de T de T (voir § II21) :

$$\Gamma_t' (t_i^k) = \{ t_j^p / i \neq j \text{ et } I_i^k \text{ intersecte avec } I_j^p \}$$

(L'indice k (resp. p) apparaîtra si et seulement si le tronc t_i (resp. t_j) de T a subi au moins une division).

Pour tout t_i^k appartenant à T' et pour tout t_j^p appartenant à $\Gamma_t'(t_i^k)$, on devra respecter la contrainte :

$$y(t_i^k) \neq y(t_j^p)$$

Remarquons que pour deux sous-troncs t_i^1 et t_i^2 de T' obtenus par division d'un même tronc t_i de T , et donc tels que les intervalles associés I_i^1 et I_i^2 intersectent, on aura :

$$t_i^2 \notin \Gamma_t'(t_i^1) \text{ et } t_i^1 \notin \Gamma_t'(t_i^2)$$

En effet, ces deux sous-troncs appartenant à la même interconnexion i , ils pourront être assignés à la même piste lors de la résolution du problème P' . Dans ce cas, la division du tronc t_i en sous-troncs t_i^1 et t_i^2 n'aura eu aucune incidence sur l'implantation.

V32 - Définition de $\Gamma_b^{+'}$:

La correspondance $\Gamma_b^{+'}$ de T' dans T' se définit de la même façon que la correspondance Γ_b^+ de T dans T (voir § II22) :

$$\Gamma_b^{+'}(t_i^k) = \{ t_j^p / T_I(t_i^k) \cap T_S(t_j^p) \neq \emptyset, i \neq j \}$$

L'indice k (resp. p) apparaîtra si et seulement si le tronc t_i (resp. t_j) de T a subi au moins une division).

Pour tout t_i^k appartenant à T' et pour tout t_j^p appartenant à $\Gamma_b^{+'}(t_i^k)$, on devra respecter la contrainte :

$$y(t_i^k) < y(t_j^p)$$

Remarquons que la correspondance Γ_b^{+} décrit, et les contraintes de non-recouvrement entre branches, et les contraintes de non-recouvrement entre branches et segments de raccord.

Par exemple, soient t_i^1 et t_i^2 deux sous-troncs de T' obtenus par division à l'abscisse x_d et suivant la méthode I' d'un même tronc t_i de T . A l'abscisse x_d , un segment de raccord interconnectera t_i^1 et t_i^2 . Supposons maintenant (fig. 25) qu'il existe dans T' un élément t_j ($i \neq j$) tel que :

$$x_d \in T_1(t_j)$$

On aura alors :

$$t_i^1 \in \Gamma_b^{+}(t_j) \text{ et } t_i^2 \in \Gamma_b^{+}(t_j)$$

Si deux troncs distincts t_i et t_j de T sont divisés à une même abscisse suivant les méthodes I', II' ou III, alors il apparaît une contrainte de non-recouvrement entre le segment de raccord de t_i^1 et de t_i^2 , et le segment de raccord de t_j^1 et de t_j^2 . On pourra vérifier qu'une telle contrainte n'est pas modélisable par une correspondance de type Γ_b^{+} . Nous supposons donc que deux troncs distincts de T ne peuvent pas être divisés à la même abscisse suivant les méthodes I', II' ou III. Cette restriction n'aura aucune incidence sur les résultats que nous allons établir.

VI - FAISABILITE D'UN PROBLEME DE CANAL BIFACE

Le modèle d'assignation de pistes étant complété du modèle de la division des troncs, la faisabilité d'un problème de canal biface peut maintenant être abordée.

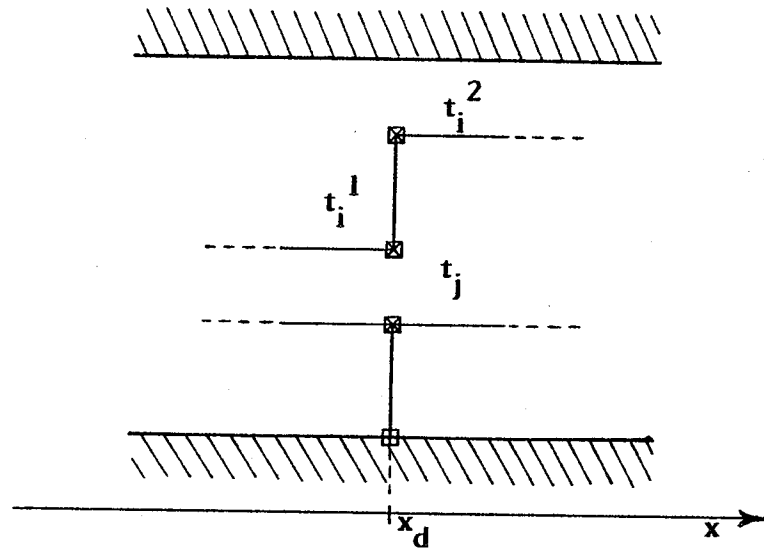


Figure 25

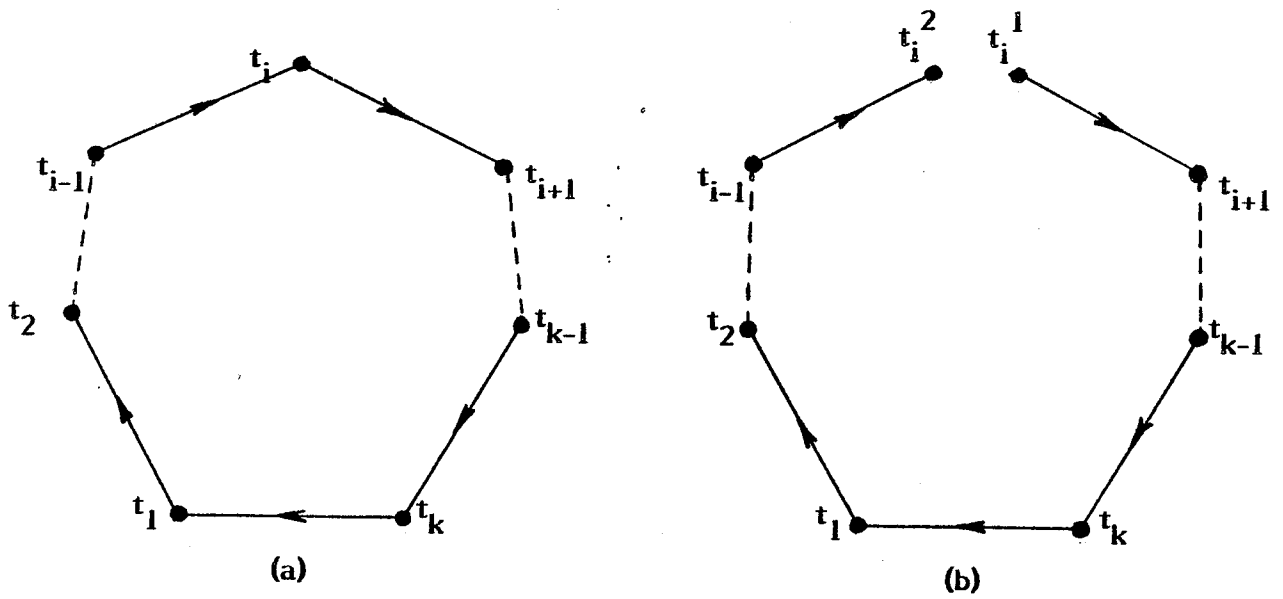


Figure 26

VII - Ouverture des cycles du graphe G_b :

VIII - Principe

Soit un problème de canal biface et soit $P = (T)$ le problème d'assignation de pistes associé. Supposons que le graphe G_b du problème P admette un cycle élémentaire rencontrant k sommets et soit $C = \{ t_1, t_2, \dots, t_k \}$ ce cycle (fig. 26 a).

Considérons un tronç t_i de T appartenant au cycle C et supposons qu'il existe une méthode de division applicable à t_i qui soit telle que :

$$(i) t_{i+1} \in \Gamma_b^{+1}(t_i^1) \text{ et } t_i^1 \notin \Gamma_b^{+1}(t_i^2)$$

$$(ii) t_i^2 \in \Gamma_b^{+1}(t_{i-1})$$

Cette division provoque un "éclatement" du sommet représentant le tronç t_i dans le graphe G_b en deux sommets représentant les sous-tronçs t_i^1 et t_i^2 dans le graphe G_b' . Le cycle $C = \{ t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_k \}$ de G_b rencontrant k sommets est transformé en un chemin $\mu' = [t_i^1, t_{i+1}, \dots, t_k, t_1, \dots, t_{i-1}, t_i^2]$ de G_b' rencontrant $k+1$ sommets (fig. 26 b). On dira que le cycle C de G_b a été ouvert par la division du tronç t_i .

VIII2 - Mise en application - Exemple

Si l'ouverture d'un cycle de G_b est simple dans son principe, sa mise en application soulève un certain nombre de difficultés que nous illustrerons à l'aide du problème de canal biface de la figure 27.

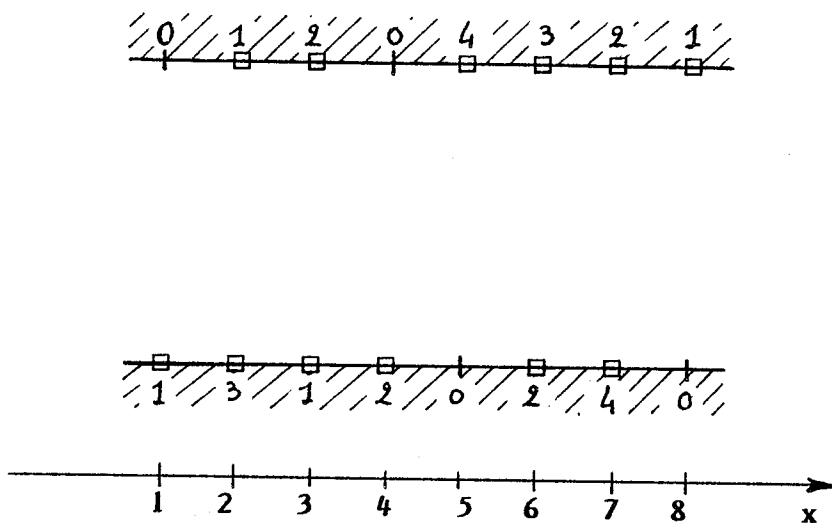


Figure 27

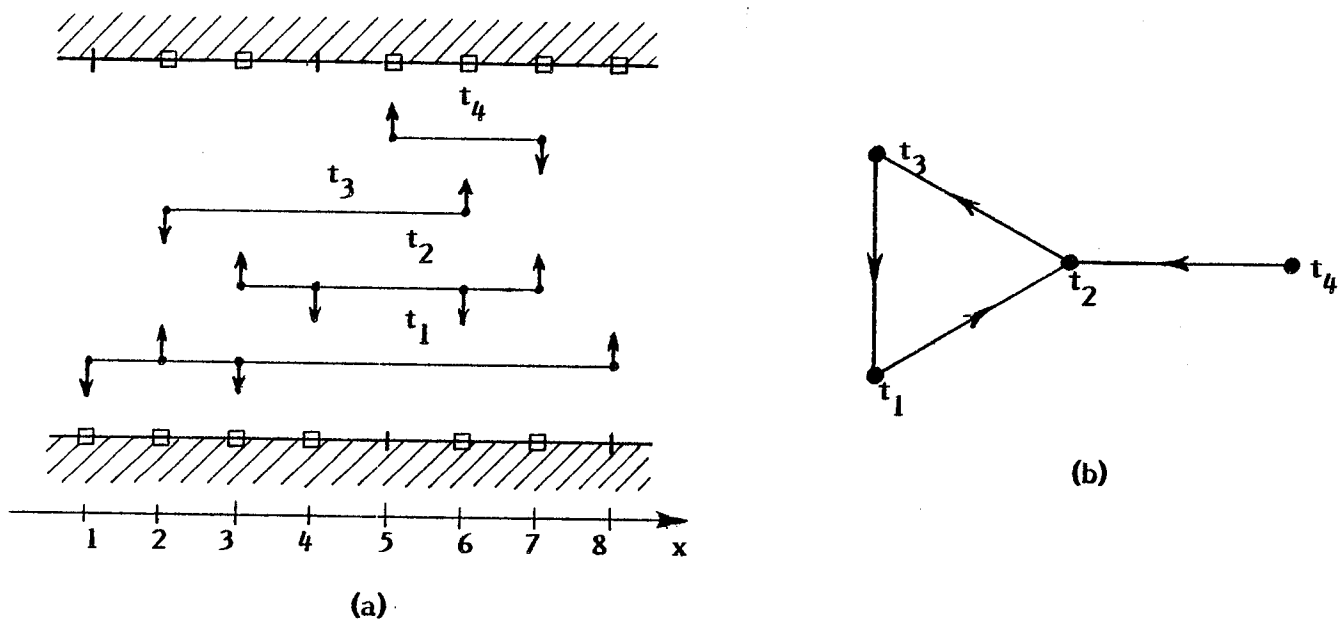
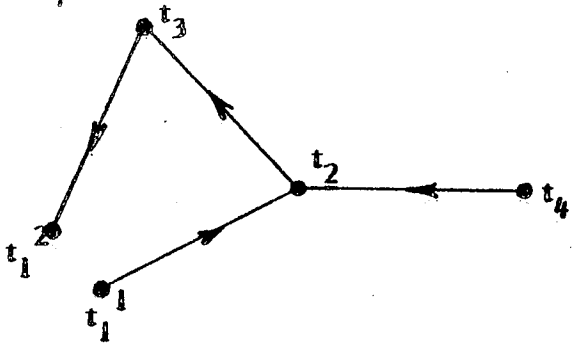
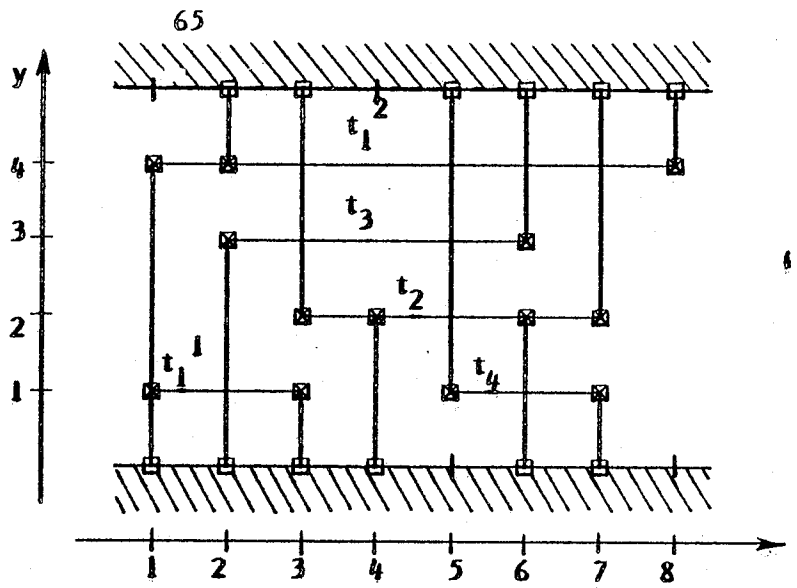


Figure 28

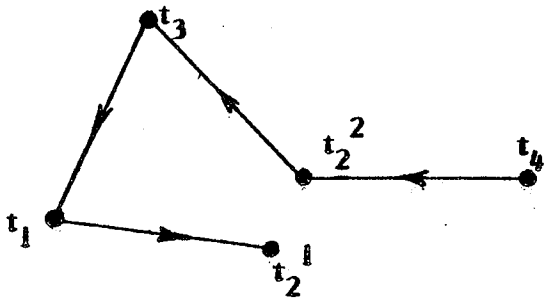


(a)

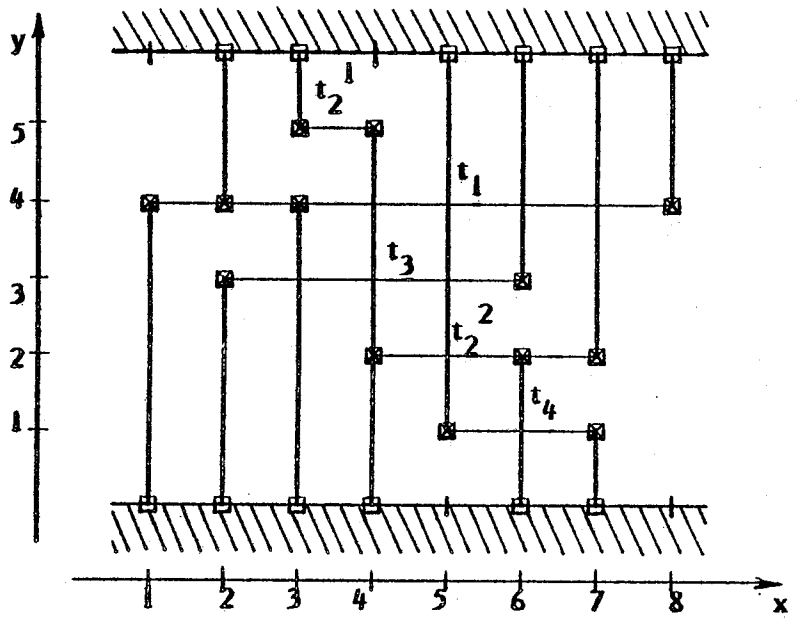


(b)

Figure 29



(a)



(b)

Figure 30

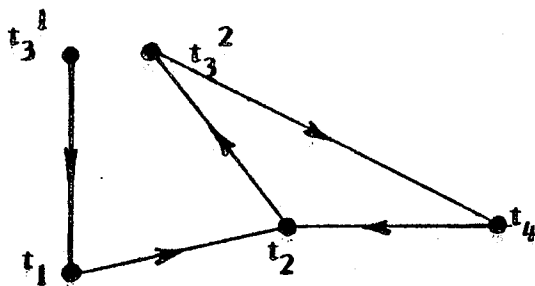


Figure 31

Le graphe G_b (fig. 28 b) du problème d'assignation de pistes $P = (T)$ associé à ce problème de canal biface (fig. 28 a) admet le cycle élémentaire $C = \{ t_1, t_2, t_3 \}$. Nous envisagerons successivement les effets de division appliquées à t_1, t_2 puis t_3 .

Considérons le tronç t_1 et appliquons lui la méthode II de division en $x = 1$. Le graphe G_b' du problème P' ainsi obtenu (fig. 29 a) n'admet aucun cycle et $\lambda(G_b')$ est égal à 4. En vertu du lemme 2, la solution au problème P' représentée à la figure 29 b est donc optimale.

Reprenons le problème P et appliquons au tronç t_2 la méthode I de division en $x = 4$. Le graphe G_b' du problème P' ainsi obtenu (fig. 30 a) n'admet aucun cycle et $\lambda(G_b')$ est égal à 5. En vertu du lemme 2, la solution au problème P' représentée à la figure 30 b est optimale.

Reprenons une dernière fois le problème P et appliquons au tronç t_3 la méthode I' de division en $x = 5$. Le graphe G_b' du problème P' ainsi obtenu est représenté à la figure 31. Le cycle $C = \{ t_1, t_2, t_3 \}$ de G_b a bien été ouvert par la division de t_3 , mais, à l'abscisse de division $x = 5$, la contrainte de non-recouvrement entre la branche de t_4 et le segment de raccord de t_3^1 et t_3^2 a provoqué dans G_b' l'apparition du cycle $C' = \{ t_2, t_3^2, t_4 \}$. Le problème P' n'admet donc pas de solution : cette division est un échec.

Comme on peut le constater, l'ouverture d'un cycle par une division est un problème complexe, les effets de cette division pouvant être très divers. D'une part, la capacité minimale du problème P' dépend généralement du tronç choisi pour l'ouverture du cycle et de la méthode de division qui lui est appliquée. D'autre part, les méthodes de division I', II' et III' sont susceptibles, par les nouvelles contraintes que peuvent engendrer les segments de raccord, de provoquer l'apparition dans G_b' de cycles qui n'existent pas dans G_b .

VI2 - Problèmes insolubles à l'intérieur du canal

Théorème III :

Soit un problème de canal biface et soit $P = (T)$ le problème d'assignation de pistes associé.

Ce problème de canal biface n'admet aucune solution si et seulement si toutes les conditions suivantes sont satisfaites :

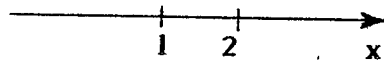
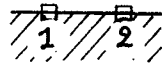
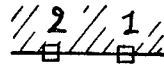
- (i) $\forall x \in [X_{\min}, X_{\max}], I(x) \neq 0 \text{ et } S(x) \neq 0.$
- (ii) $\forall t_i \in T, |T_L(t_i)| = 1 \text{ et } |T_S(t_i)| = 1.$
- (iii) $\exists t_i \in T/T_L(t_i) \neq T_S(t_i).$

Nous ne démontrerons pas ce théorème, établi par T. Asano et al. en 1977 [Asa 77].

A tout problème de canal biface satisfaisant les conditions du théorème III est associé un problème d'assignation de pistes $P = (T)$, dont le graphe G_b admet au moins un cycle qui ne peut être ouvert par aucune des méthodes de division envisagées jusqu'alors.

C'est par exemple le cas du problème de canal biface de la figure 32. Le graphe G_b du problème d'assignation de pistes associé (fig. 33) admet le cycle $C = \{ t_1, t_2 \}$ et ce cycle ne peut être ouvert par aucune des méthodes de division présentées au paragraphe V2.

Toutes les interconnexions spécifiées par les listes $I(x)$ et $S(x)$ d'un problème de canal biface satisfaisant les conditions du théorème III ne pourront donc pas être entièrement contenues à l'intérieur du canal.



$X_{\min} = 1$ et $X_{\max} = 2$

Figure 32

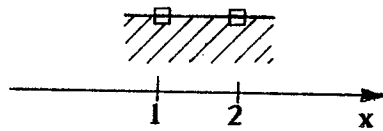
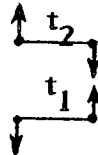
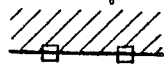


Figure 33

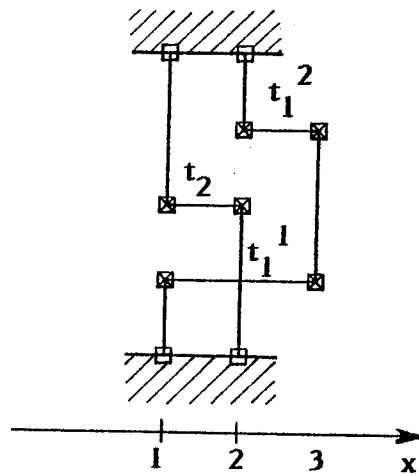


Figure 34

Pour implanter toutes les interconnexions d'un tel problème, on sera contraint, afin d'ouvrir les cycles du graphe G_b , d'utiliser une méthode de division faisant apparaître des interconnexions non-entièrement contenues à l'intérieur du canal. Cette méthode de division peut être définie comme suit.

Méthode IV

L'abscisse de division x_d est telle que :

$$x_d < X_{\min} \text{ ou } x_d > X_{\max}$$

Les sous-troncs t_i^1 et t_i^2 sont définis par :

$$T_I(t_i^1) = T_I(t_i) \text{ et } T_S(t_i^1) = \{ \bar{x}_d \}$$

$$T_I(t_i^2) = \{ \bar{x}_d \} \text{ et } T_S(t_i^2) = T_S(t_i)$$

Par exemple, le cycle $C = \{ t_1, t_2 \}$ qu'admet le graphe G_b du problème $P = (T)$ de la figure 33 peut être ouvert en divisant le tronç t_1 en $x = 3$ suivant la méthode IV. On obtient alors l'implantation de la figure 34.

VII - CAPACITE MINIMALE D'UN PROBLEME DE CANAL BIFACE

Nous avons vu (th. II) que la capacité minimale c_{\min} d'un problème d'assignation de pistes $P = (T)$ associé à un problème de canal biface donné est minorée par $\max \{ \omega(G_t), \lambda(G_b) \}$. Nous envisagerons donc successivement les questions suivantes :

- (i) Peut-on réduire $\omega(G_t)$? C'est-à-dire, peut-on transformer le problème P en un problème P' tel que $\omega(G_t')$ soit strictement inférieur à $\omega(G_t)$?
- (ii) Peut-on réduire $\lambda(G_b)$? C'est-à-dire, peut-on transformer le problème P en un problème P' tel que $\lambda(G_b')$ soit strictement inférieur à $\lambda(G_b)$?

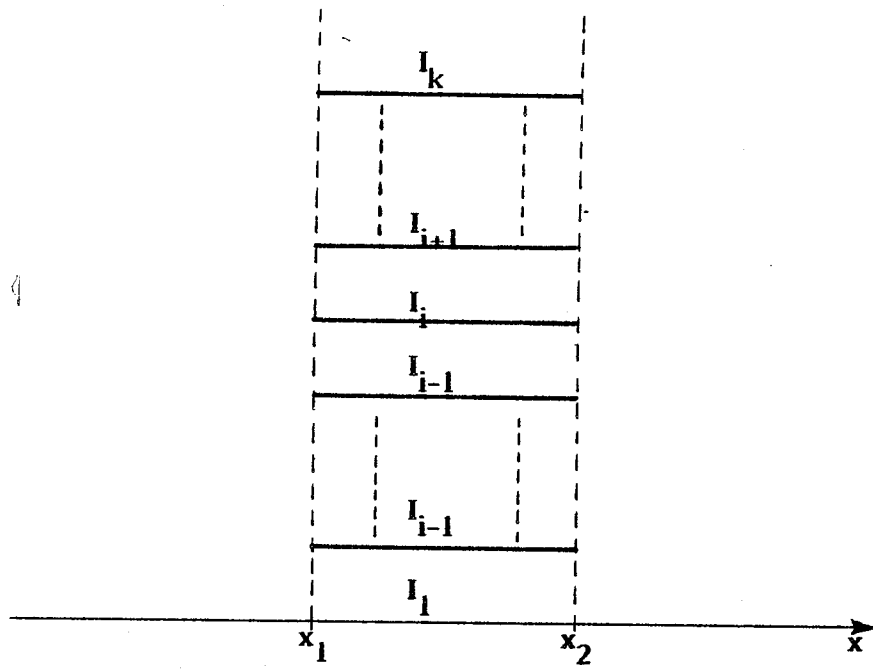


Figure 35

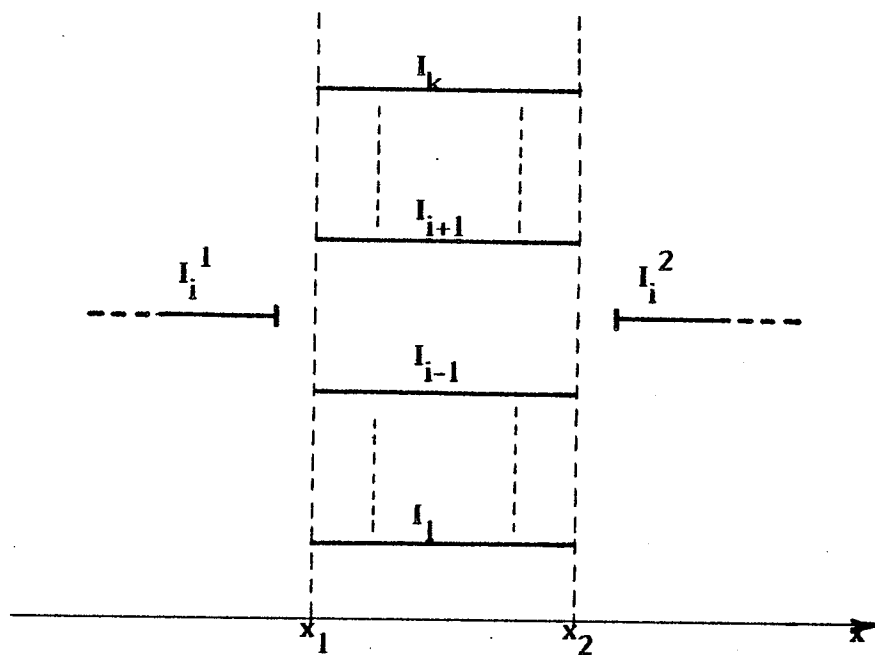


Figure 36

(iii) Peut-on, à l'aide de divisions, faire obstacle aux phénomènes d'interaction entre les graphes G_t et G_b ?

VIII - Réduction de $\omega(G_t)$

Lemme 3 :

Soit un problème de canal biface et soit $P = (T)$ le problème d'assignation de pistes associé.

Il est impossible de transformer le problème P en un autre problème d'assignation de pistes $P' = (T')$ tel que l'on ait :

$$\omega(G_t') < \omega(G_t)$$

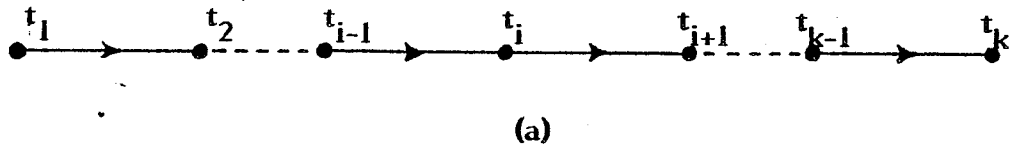
Considérons un problème de canal biface et son problème d'assignation de pistes associé $P = (T)$. Soit $T_1 = \{ t_1, t_2, \dots, t_k \}$ un sous-ensemble de T et soit $J_1 = \{ I_1, I_2, \dots, I_k \}$ la famille d'intervalles associée à T_1 . Enfin, supposons que le graphe représentatif de la famille J_1 soit une clique de cardinalité k .

Si le graphe représentatif de la famille J_1 est une clique de cardinalité k , alors il existe nécessairement un intervalle $[x_1, x_2]$ de x qui vérifie la propriété suivante : pour tout x appartenant à $[x_1, x_2]$, les k intervalles de J_1 intersectent avec une ligne verticale d'abscisse x (fig. 35).

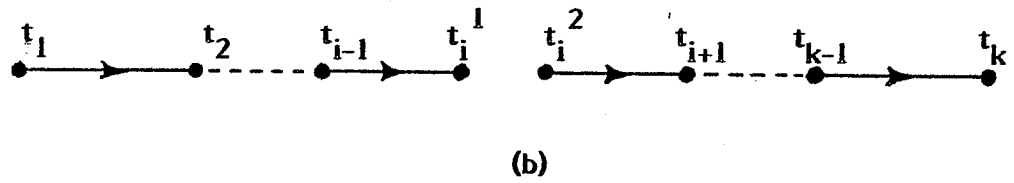
Divisons un quelconque tronc t_i de T_1 , suivant une méthode quelconque. Le sous-ensemble $T_1 = \{ t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_k \}$ de T est transformé en un sous-ensemble $T_1' = \{ t_1, \dots, t_{i-1}, t_i^1, t_i^2, t_{i+1}, \dots, t_k \}$ de T' , auquel est associée la famille d'intervalles :

$$J_1' = \{ I_1, \dots, I_{i-1}, I_i^1, I_i^2, I_{i+1}, \dots, I_k \}$$

Supposons, et nous allons montrer que cette hypothèse est absurde, que le graphe représentatif de la famille J_1' n'admette aucune clique de cardinalité supérieure à $k - 1$.



(a)



(b)

Figure 37

Si cette hypothèse est vraie, alors pour tout x appartenant à $[x_1, x_2]$, il n'existe pas plus de $k - 1$ intervalles de J_1' intersectant avec une ligne verticale d'abscisse x . Or, seul l'intervalle I_1 a été affecté par la division du tronç t_i .

La seule façon de satisfaire cette hypothèse est donc que ni l'intervalle I_1^1 , ni l'intervalle I_1^2 , n'intersecte avec l'intervalle $[x_1, x_2]$ (fig. 36).

Cette hypothèse est absurde, car la continuité électrique de l'interconnexion i est alors rompue. Le graphe représentatif de la famille J_1' admet donc au moins une clique de cardinalité supérieure ou égale à k .

Le lemme 3 a évidemment pour conséquence immédiate que $\omega(G_t)$ est un minorant de la capacité minimale d'un problème de canal biface.

VII2 - Réduction de $\lambda(G_b)$

S'il n'est jamais possible de réduire $\omega(G_t)$, il est par contre possible, dans certains cas, de réduire $\lambda(G_b)$.

VII21 - Rupture d'un chemin de G_b

La rupture d'un chemin du graphe G_b est analogue, dans son principe, à l'ouverture d'un cycle.

Considérons un problème de canal biface et supposons que le graphe G_b du problème d'assignation de pistes associé $P = (T)$ admette un chemin $\mu = [t_1, t_2, \dots, t_k]$ rencontrant k sommets ($k > 3$) (fig. 37 a).

Soit t_i ($1 < i < k$) un tronç de chemin μ et supposons qu'il existe une méthode de division applicable à t_i qui soit telle que :

$$(i) t_i^1 \in \Gamma_b^{+1}(t_{i-1})$$

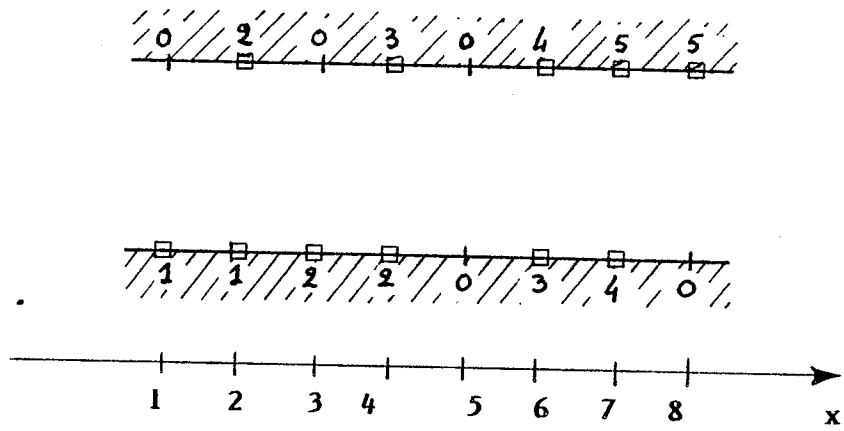


Figure 38

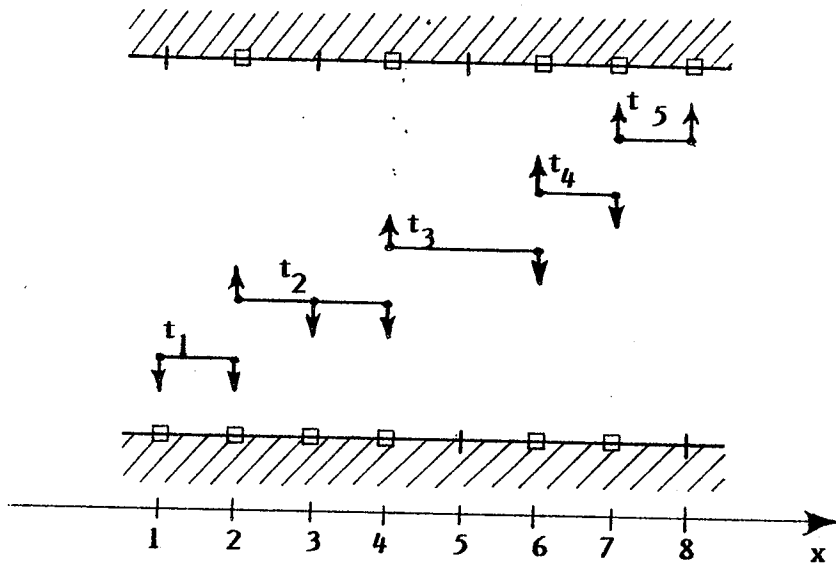


Figure 39

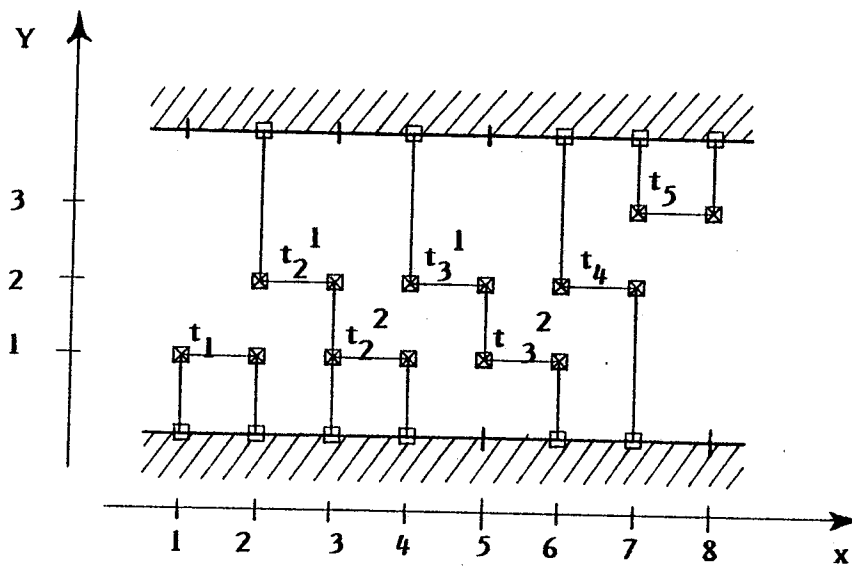


Figure 40

$$(ii) t_{i+1} \in \Gamma_b^{+1}(t_i^2) \text{ et } t_i^2 \notin \Gamma_b^{+1}(t_i^1)$$

Cette division transforme le chemin $\mu = [t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_k]$ de G_b en deux chemins de G_b' :

$$\mu_1' = [t_1, \dots, t_{i-1}, t_i^1] \text{ et } \mu_2' = [t_i^2, t_{i+1}, \dots, t_k]$$

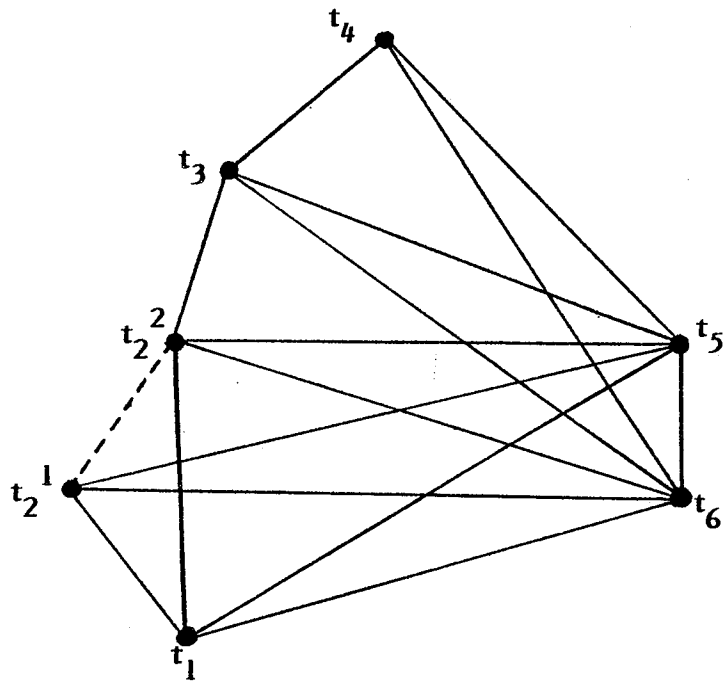
Le nombre de sommets rencontrés par le chemin μ_1' (i sommets, $1 < i < k$) et le nombre de sommets rencontrés par le chemin μ_2' ($k - i + 1$ sommets) sont tous deux inférieurs au nombre de sommets rencontrés par le chemin μ (k sommets) (fig. 37 b). On dira que le chemin μ du graphe G_b a été rompu par la division du tronc t_i .

La rupture d'un chemin du graphe G_b se heurte aux mêmes difficultés que l'ouverture d'un cycle. D'une part, la capacité minimale du problème P' dépend généralement du tronc choisi pour l'ouverture du chemin et de la méthode de division qui lui est appliquée. D'autre part, les méthodes de division I', II' et III' sont susceptibles, par les nouvelles contraintes que peuvent engendrer les segments de raccord, de provoquer l'apparition dans G_b' de cycles qui n'existent pas dans G_b .

VII22 - Exemple

Considérons le problème de canal biface de la figure 38 et son problème d'assignation de pistes associé $P = (T)$ représenté à la figure 39. La capacité minimale du problème P est manifestement égale à 5, cette valeur étant imposée par le chemin $\mu = [t_1, t_2, t_3, t_4, t_5]$ du graphe G_b .

Considérons le chemin $\mu = [t_1, t_2, t_3, t_4, t_5]$ de G_b . Ce chemin peut être rompu, et en divisant le tronc t_2 en $x = 3$ suivant la méthode I, et en divisant le tronc t_3 en $x = 5$ suivant la méthode I'. La capacité minimale du problème P' ainsi obtenu est égale à 3, comme en témoigne la figure 40.



(L'arête $\{t_2^1, t_2^2\}$ traduit la contrainte induite par la rupture du chemin $\mu = [t_1, t_2, t_3, t_4]$ de G_b).

Figure 41

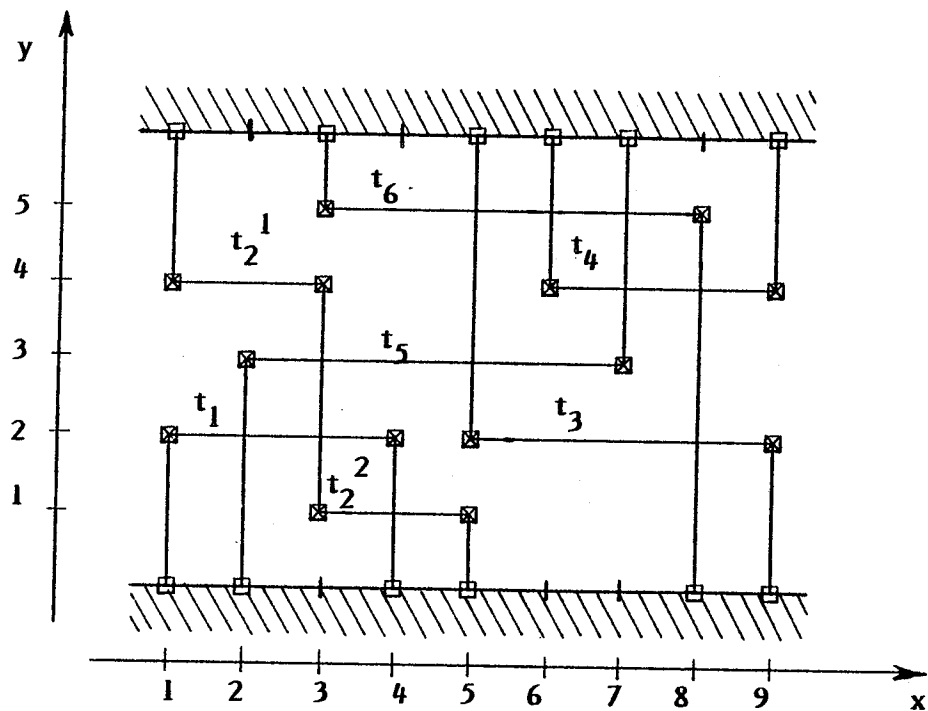


Figure 42

C'est le chemin $\mu' = [t_3, t_4, t_5]$ du graphe G_b' qui impose la capacité minimale du problème P' ($\omega(G_t') = 2$). Ce chemin μ' ne pouvant être rompu par aucune division, la capacité minimale du problème de canal biface de la figure 38 est donc égale à 3. Nous avons là un exemple de problème de canal biface dont la capacité minimale est strictement supérieure au mino- rant $\omega(G_t)$.

VII3 - Divisions et interactions entre les graphes G_t et G_b

Nous avons vu (§ IV3) que certains problèmes d'assignation de pistes, en raison d'interactions entre les graphes G_t et G_b , sont tels que :

$$c_{\min} > \max \{ \omega(G_t), \lambda(G_b) \}$$

Nous allons revenir sur ces interactions et montrer comment il est parfois possible de leur faire obstacle, en rompant certains chemins du graphe G_b .

VII31 - Action de G_b sur G_t

Reprenons le problème d'assignation de pistes $P = (T)$ présenté au paragraphe IV31 (fig. 15). Nous avons vu que, en raison des contraintes induites dans G_t par la fermeture transitive du chemin $\mu = [t_1, t_2, t_3, t_4]$ de G_b , la capacité minimale du problème P est égale à 6, alors que $\omega(G_t)$ et $\lambda(G_b)$ sont deux égaux à 4. Pour faire obstacle à cette interaction G_b/G_t , il suffit donc de rompre le chemin μ du graphe G_b , soit par division du tronc t_2 , soit par division du tronc t_3 .

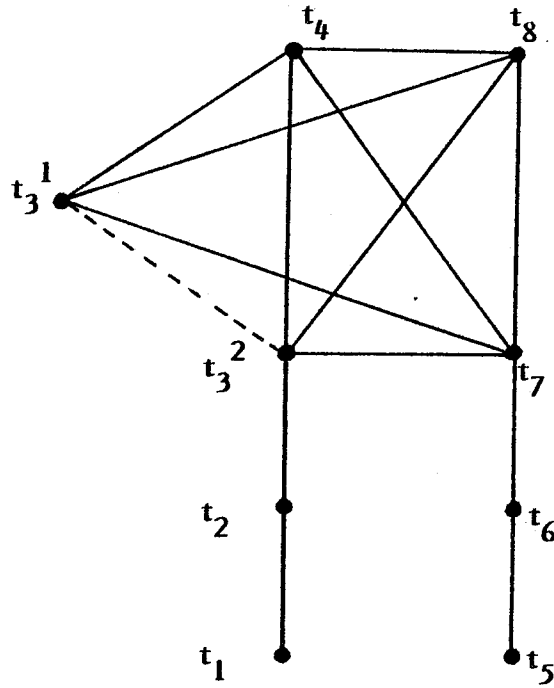
Par exemple, divisons t_2 en $x = 3$ suivant la méthode I'. Le graphe G_t' du problème P' ainsi obtenu (fig. 41) admet les cliques maximales :

$$cl_1' = \{ t_1, t_2^1, t_5, t_6 \}$$

$$cl_2' = \{ t_1, t_2^2, t_5, t_6 \}$$

$$cl_3' = \{ t_2^2, t_3, t_5, t_6 \}$$

$$cl_4' = \{ t_3, t_4, t_5, t_6 \}$$



(l'arête $\{t_3^1, t_3^2\}$ traduit la contrainte induite par la rupture du chemin $\mu_1 = [t_1, t_2, t_3, t_4]$ de G_b).

Figure 43

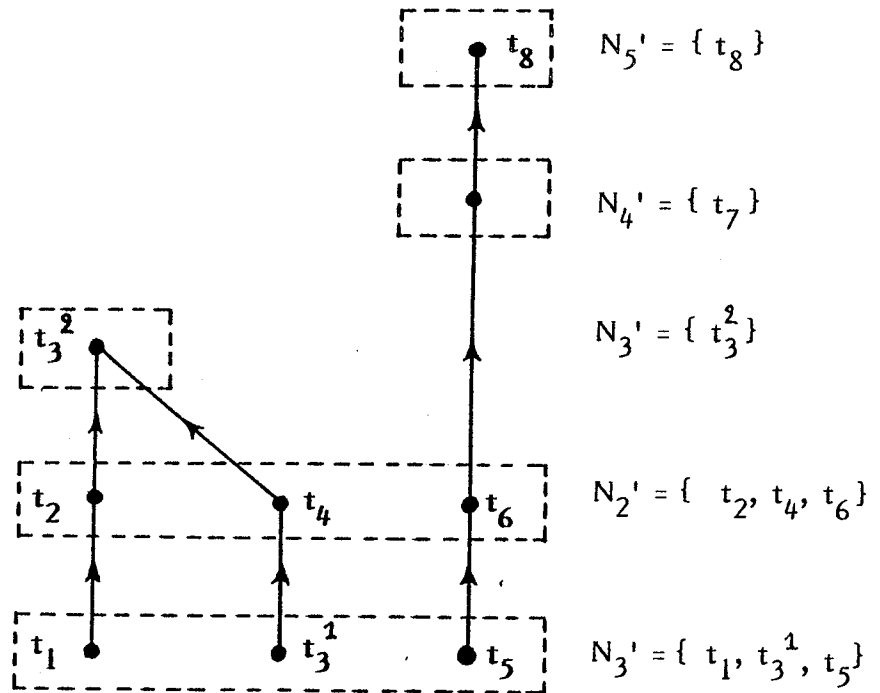


Figure 44

$\omega(G_t')$ est donc égal à 4. Mais les sous-troncs t_2^1 et t_2^2 ne pouvant être assignés à la même piste (sans quoi le chemin μ ne serait pas rompu), tout se passe comme s'il existait dans G_t' une clique maximale $cl = \{ t_1, t_2^1, t_2^2, t_5, t_6 \}$ de cardinalité 5.

La solution au problème P' représenté à la figure 42 est donc optimale et, en vertu du lemme 3, il est impossible de transformer le problème P' en un problème P'' tel que $\omega(G_t'') = 4$.

En énumérant les différentes possibilités de rupture du chemin $\mu = [t_1, t_2, t_3, t_4]$ de G_b , on pourra vérifier que la capacité minimale du problème de canal biface auquel est associé P est égale à 5. Nous avons donc là un second exemple de problème de canal biface dont la capacité minimale est strictement supérieure au minorant $\omega(G_t)$.

VII32 - Action de G_t sur G_b

Reprenons le problème d'assignation de pistes $P = (T)$ présenté au paragraphe IV32 (fig. 19). Nous avons vu que, les sommets t_3, t_4, t_7 et t_8 formant une clique dans le graphe G_t , deux quelconques troncs pris parmi l'ensemble $\{ t_3, t_4, t_7, t_8 \}$ ne peuvent apparaître dans un même sous-ensemble N_i de la partition N des sommets de G_b (tous les sommets d'un même sous-ensemble N_i étant assignés à une même piste). La capacité minimale du problème P est ainsi égale à 6, alors que $\omega(G_t)$ et $\lambda(G_b)$ sont tous deux égaux à 4.

Considérons le chemin $\mu_1 = [t_1, t_2, t_3, t_4]$ du graphe G_b et rompons le par division du tronc t_3 en $x = 6$ suivant la méthode II.

Le graphe G_t' du problème P' ainsi obtenu (fig. 43) admet les cliques maximales :

$$cl_1' = \{ t_3^1, t_4, t_7, t_8 \}$$

$$cl_2' = \{ t_3^2, t_4, t_7, t_8 \}$$

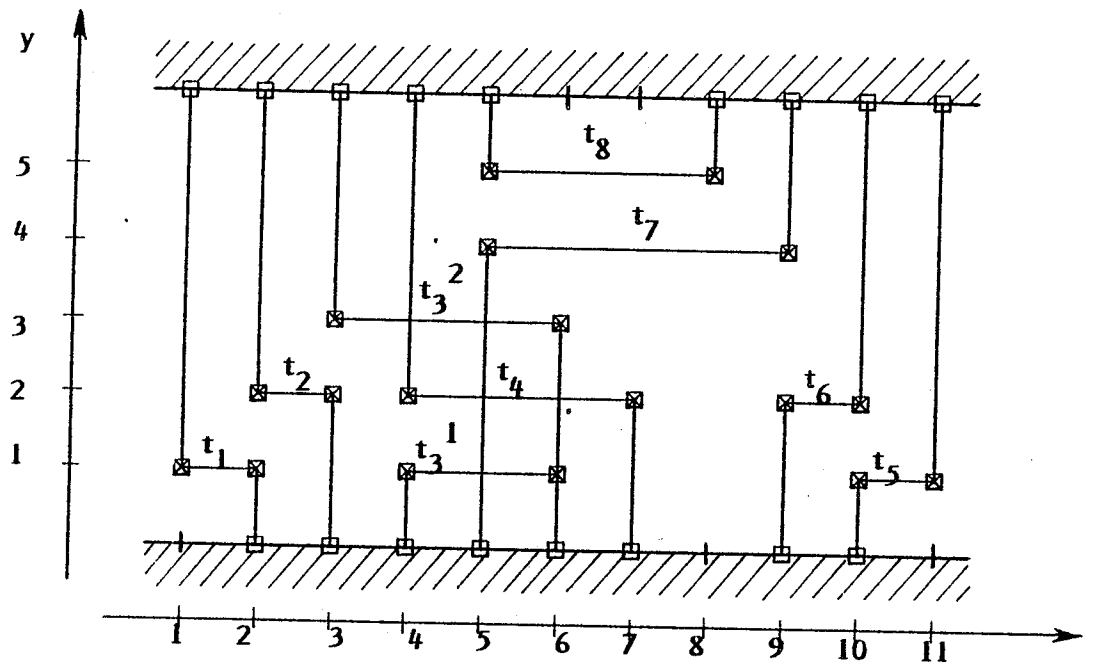


Figure 45

$\omega(G_t')$ est donc égal à 4. Mais les sous-troncs t_3^1 et t_3^2 ne pouvant être assignés à la même piste (sans quoi le chemin μ_1 ne serait pas rompu), tout se passe comme s'il existait dans G_t' une clique maximale $\{t_3^1, t_3^2, t_4, t_7, t_8\}$ de cardinalité 5.

Quant au graphe G_b' , il peut être ordonnancé en 5 niveaux sans que deux quelconques sommets pris parmi l'ensemble $\{t_3^1, t_3^2, t_4, t_7, t_8\}$ n'apparaissent dans un même sous-ensemble N_i' de la partition N' des sommets de G_b' (fig. 44).

la solution au problème P' représentée à la figure 45 est donc optimale et, en vertu du lemme 3, il est impossible de transformer le problème P' en un problème P'' tel que $\omega(G_t'') = 4$.

En énumérant les différentes possibilités de rupture des chemins $\mu_1 = [t_1, t_2, t_3, t_4]$ et $\mu_2 = [t_5, t_6, t_7, t_8]$ de G_b , on pourra vérifier que la capacité minimale du problème de canal biface auquel est associé P est égale à 5. Nous avons donc là un troisième exemple de problème de canal biface dont la capacité minimale est strictement supérieure au minorant $\omega(G_t)$.

VIII4 - Encadrement de la capacité minimale

Compte-tenu du lemme 3 et des exemples présentés aux paragraphes VII22 et VII3, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème IV :

Soit un problème de canal biface admettant au moins une solution et soit $P = (T)$ le problème d'assignation de pistes associé.

La capacité minimale c_{\min} de ce problème de canal biface est telle que :

$$\omega(G_t) \leq c_{\min} \leq |T|$$

Rappelons les différentes circonstances dans lesquelles la capacité minimale c_{\min} d'un problème de canal biface peut s'avérer strictement supérieure au minorant $\omega(G_t)$:

- (i) le graphe G_b admet un chemin de longueur $\lambda(G_b)$ strictement supérieur à $\omega(G_t)$
- (ii) les graphes G_t et G_b interagissent
- (iii) le graphe G_b admet un ou plusieurs cycles (voir problème de la figure 27).

VIII - CONCLUSION

Il semble universellement admis que $\omega(G_t)$ n'est qu'un minorant de la capacité minimale d'un problème de canal biface. Toutefois, la littérature reste extrêmement discrète quant aux circonstances dans lesquelles la capacité minimale est strictement supérieure à $\omega(G_t)$. Aussi avons-nous tenté d'identifier ces différentes circonstances.

Pour ce faire, nous avons été amené à développer un modèle dont de nombreux fragments ont été empruntés à la littérature : la notion d'assignation de pistes [Has 71] [Deu 76], la modélisation des contraintes de non-court-circuit [Yos 82] et la division des troncs [Aso 77]. Ce modèle nous a permis d'identifier les phénomènes d'interaction entre les graphes G_t et G_b , et de construire plusieurs exemples de problèmes de canal biface dont la capacité minimale est strictement supérieure à $\omega(G_t)$.

CHAPITRE II

Une heuristique pour le tracé des canaux bifaces

I - INTRODUCTION

Au cours de ce chapitre, nous décrivons une heuristique pour la résolution du problème du canal biface, introduite par D.N. Deutsch en 1976 et connue sous l'appellation de "*Dogleg Channel Router*" [Deu 76]. Nous l'appellerons quant à nous *heuristique d'assignation par pistes*.

Trois autres heuristiques pour la résolution du problème du canal biface furent introduites récemment [Yos 82] [Riv 82] [Bur 83]. Appliquées à différents problèmes de référence, celles-ci se sont toutes trois révélées sensiblement plus puissantes que l'heuristique d'assignation par pistes.

Il n'entre pas dans nos intentions d'entreprendre une étude comparative de ces différentes heuristiques. Indiquons seulement que l'heuristique d'assignation par pistes, qui fût la principale heuristique de résolution du problème du canal biface pendant de nombreuses années, demeure compétitive. En particulier, elle se distingue par une très grande souplesse d'utilisation.

II - COMPLEXITE DU PROBLEME DU CANAL BIFACE

On connaît des algorithmes polynomiaux permettant de résoudre tout problème d'assignation de pistes tel qu'il n'existe aucune contrainte de non-recouvrement des branches [Has 71] [Gav 72]. C'est-à-dire tout problème d'assignation de pistes $P = (T)$ vérifiant la propriété :

$$\forall t_i \in T, \Gamma_b^+(t_i) = \emptyset$$

Cette propriété est en particulier vérifiée lorsque tous les points terminaux sont répartis sur une même face du canal. On a alors :

$$\forall t_i \in T, T_1(t_i) = \emptyset \quad \text{ou} \quad \forall t_i \in T, T_S(t_i) = \emptyset$$

En présence de contraintes de non-recouvrement des branches, c'est le cas général, il a été démontré que le problème d'assignation de pistes est NP - complet [Lap 80].

Le modèle d'assignation de pistes impose que chaque interconnexion soit implantée sous la forme d'un tronc unique et de branches. Le problème du canal biface est donc au moins aussi difficile que le problème d'assignation de pistes.

Remarquons que le problème combinatoire d'assignation de pistes peut être résolu par des méthodes énumératives ou semi-énumératives (backtracking, branch and bound [Rei 77]). Le problème d'assignation de pistes étant NP - complet, le temps d'exécution des algorithmes est alors borné exponentiellement [Ker 73].

III - CRITERES D'OPTIMALITE DES SOLUTIONS

Nous avons formulé le problème du canal biface comme un problème d'optimisation de la capacité du canal. Ce critère est en effet primordial, mais reste généralement insuffisant pour juger de l'optimalité de solutions : le problème du canal biface est un *problème d'optimisation multi-critère* .

Nous nous bornerons à l'exposé de quelques critères universellement adoptés, quelle que soit la technologie.

III - Minimisation de la capacité du canal

Ce critère est utilisé pour le tracé de canaux bifaces à capacité non-fixée. Il correspond évidemment à l'objectif de minimisation de la surface occupée par les interconnexions.

III2 - Minimisation du nombre de points terminaux non-interconnectés

Lors du tracé de canaux à capacité fixée, ou lorsque le graphe G_b du problème $P = (T)$ admet un ou plusieurs cycles, un certain nombre de points terminaux tels que $I(x) \neq 0$ ou $S(x) \neq 0$ peuvent demeurer non-interconnectés par les heuristiques. Dans ce cas, on appliquera un critère de *minimisation* du nombre de points terminaux non-interconnectés, de façon à minimiser la tâche restant à accomplir pour terminer le tracé. Ce critère correspond évidemment à l'objectif d'implantation automatique de la totalité des interconnexions.

III3 - Minimisation de la longueur des interconnexions

Par longueur d'une interconnexion, nous entendons la somme des longueurs de tous ses segments horizontaux et de tous ses segments verticaux.

En minimisant la longueur d'une interconnexion, on minimisera sa résistance et sa capacité parasites, et ainsi les retards et les dégradations infligés aux signaux transmis par cette interconnexion.

Plutôt qu'un critère de minimisation de la longueur de chaque interconnexion, on utilisera généralement un critère de minimisation de la longueur totale des interconnexions, c'est-à-dire de la somme des longueurs de toutes les interconnexions [Han72].

III4 - Minimisation du nombre de passages via

Tout passage via présente une résistance et une capacité parasites, et constitue une source non-négligeable d'éventuels défauts de fabrication. On appliquera donc un critère de *minimisation du nombre de passages via*.

Tous les segments de même direction étant systématiquement affectés à un même niveau, toute interconnexion admettra un nombre minimal de passages via si et seulement si elle est implantée sous la forme d'un tronc unique et de branches. Le nombre de passages via nécessaire et suffisant pour résoudre un problème de canal biface donné est donc minoré par :

$$nv_{\min} = \sum_T | T_I(t_i) \cup T_S(t_i) |$$

Ainsi, pour un problème de canal biface donné, toute solution obtenue en résolvant le problème d'assignation de pistes associé $P = (T)$ est optimale quant au nombre de passages via.

C'est évidemment l'introduction de divisions qui, appliquées aux troncs de T , provoquera un accroissement du nombre de passages via par rapport au minorant nv_{\min} . Toute division d'un tronc t_i suivant les méthodes I ou II provoquera l'apparition d'un passage via supplémentaire, toute division suivant les méthodes I', II', III ou IV deux passages via supplémentaires.

IV - ALGORITHME D'HASHIMOTO ET STEVENS

L'heuristique d'assignation par pistes repose sur un principe introduit par A. Hashimoto et J. Stevens en 1971 [Has 71]. Ceux-ci conçurent un algorithme qui permet de résoudre le problème d'assignation de pistes $P = (T)$ en l'absence de contraintes de non-recouvrement des branches.

Dans cet algorithme, chaque tronc t_i de T est considéré comme un intervalle I_i , défini par les deux abscisses :

$$x_{\min}(I_i) = \min \{ T_I(t_i) \cup T_S(t_i) \}$$

$$x_{\max}(I_i) = \max \{ T_I(t_i) \cup T_S(t_i) \}$$

Nous appellerons *extrémité gauche* du tronc t_i l'abscisse $x_{\min}(l_i)$, *extrémité droite* du tronc t_i l'abscisse $x_{\max}(l_i)$.

Nous noterons T_{na} un ensemble contenant, à tout instant, les éléments de T qui n'ont pas encore été assignés.

L'ensemble T_{na} des troncs non-encore assignés est initialisé à T et un élément d'extrémité gauche minimale est sélectionné dans T_{na} . Cet élément est assigné à la piste d'ordonnée 1 et retiré de T_{na} (fig. 1, algorithme 1).

Un sous-ensemble de T_{na} , que nous noterons $T_>$, est alors formé avec tous les éléments non-encore assignés dont l'extrémité gauche est strictement supérieure à l'extrémité droite du tronc précédemment assigné. Puis, un élément d'extrémité gauche minimale est sélectionné dans $T_>$, assigné à la piste courante et retiré de l'ensemble T_{na} . Le nouvel ensemble $T_>$ est ensuite formé, et ainsi de suite jusqu'à ce que $T_>$ soit vide.

L'ensemble $T_>$ est alors initialisé à T_{na} et le processus se répète pour la piste d'ordonnée 2. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que T_{na} soit vide.

Quel que soit le problème $P = (T)$ considéré, le nombre de pistes utilisées pour assigner tous les éléments de T est égal au minimum $\omega(G_t)$ [Has 71] et le temps d'exécution est polynomial [Per 81].

V - RESPECT DES CONTRAINTES DE NON-RECouvreMENT DES BRANCHES

Considérons un problème d'assignation de pistes $P = (T)$, tel que le graphe G_b n'admet aucun cycle. Supposons que l'on applique à ce problème l'algorithme 1 et qu'à un instant donné on suspende son exécution. A cet instant, soit y_c l'ordonnée de la piste courante ($y_c \neq 0$) et soit $T_>$ l'ensemble des troncs non-encore assignés dont l'extrémité gauche est strictement supérieure à l'extrémité droite du dernier tronc assigné ($T_> \neq \emptyset$).

$y_C := 0 ;$

$T_{na} := T ;$

tant que $T_{na} \neq 0$ faire

$y_C := y_C + 1 ;$

$T_{>} := T_{na} ;$

tant que $T_{>} \neq \emptyset$ faire

*rechercher dans $T_{>}$ un élément d'extrémité gauche minimale et le
mettre dans t ;*

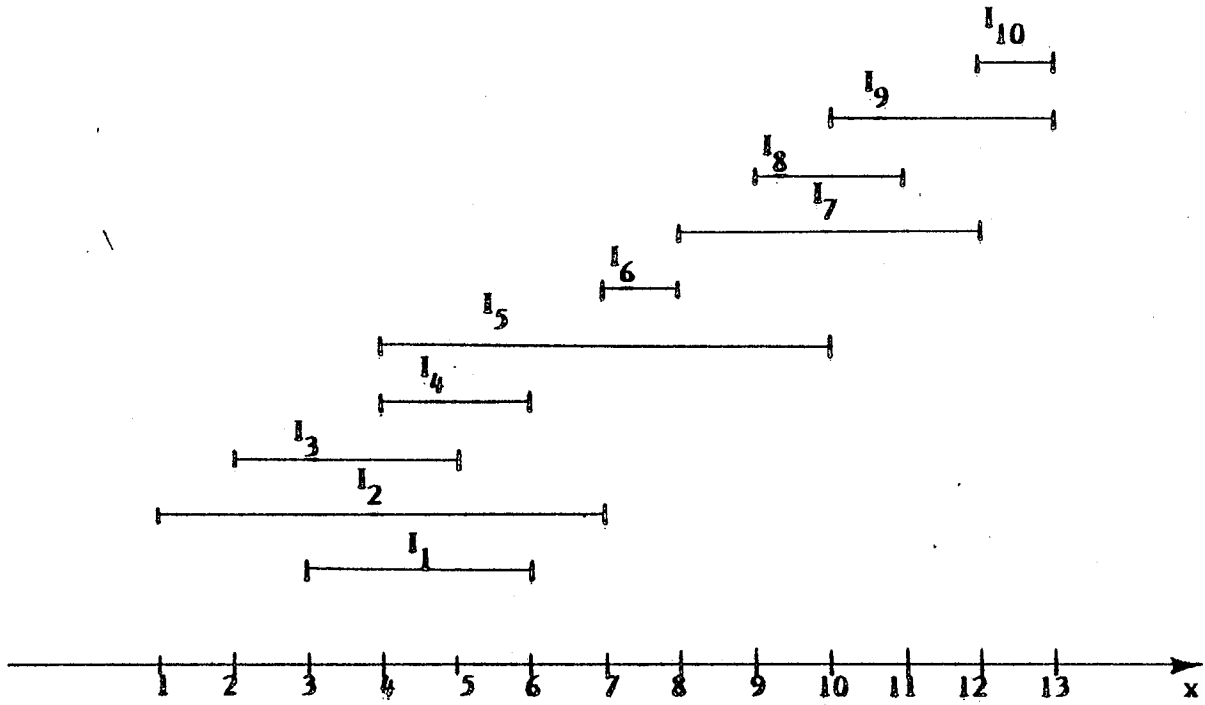
$y(t) := y_C ;$

$T_{na} := T_{na} - \{ t \} ;$

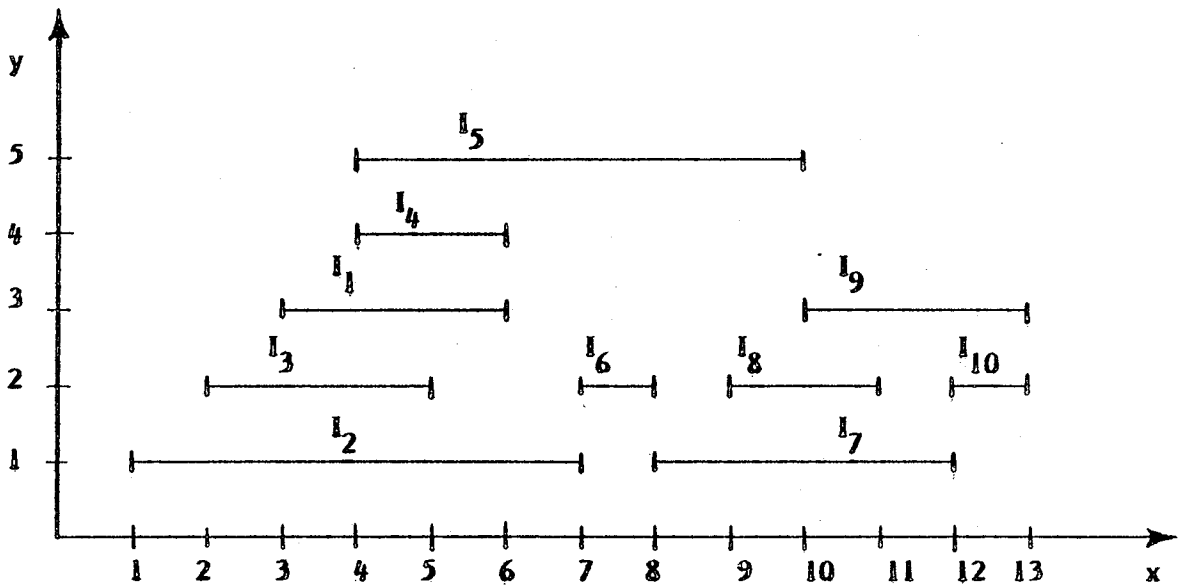
$T_{>} := \{ t_i/t_i \in T_{>} \text{ et } x_{\min}(t_i) > x_{\max}(t) \}$

* y_C : ordonnée de la piste courante. *

Algorithme 1



(a) famille d'intervalles J



(b) assignation fourale par l'algorithme 1

Figure 1

Enfin, supposons qu'à cet instant la solution partielle fournie par l'algorithme soit conforme aux contraintes de non-recouvrement des branches.

Soit t_i un élément de $T_>$ et supposons que cet élément t_i soit tel que :

$$\Gamma_b^-(t_i) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \Gamma_b^+(t_i) \neq \emptyset .$$

Le tronç t_i appartenant à l'ensemble $T_>$, son assignation à la piste courante n'entraîne pas la violation des contraintes décrites par $\Gamma_t(t_i)$. Par conséquent, pour que t_i puisse être assigné à la piste courante sans qu'il y ait violation des contraintes de non-court-circuit, il faut et il suffit que cette assignation n'entraîne, ni la violation des contraintes décrites par $\Gamma_b^-(t_i)$, ni la violation des contraintes décrites par $\Gamma_b^+(t_i)$.

Considérons d'abord les contraintes décrites par $\Gamma_b^-(t_i)$. Pour tout tronç t_j appartenant à $\Gamma_b^-(t_i)$, on doit respecter la contrainte :

$$y(t_j) < y(t_i)$$

Or, toutes les pistes d'ordonnée inférieure à l'ordonnée y_c de la piste courante ont déjà été traitées. Par conséquent, pour que le tronç t_i puisse être assigné à la piste d'ordonnée y_c , il faut et il suffit que tous les troncs t_j de $\Gamma_b^-(t_i)$ soient déjà assignés. Autrement dit, il faut et il suffit que tous les prédécesseurs de t_i dans le graphe G_b soient déjà assignés.

Considérons maintenant les contraintes décrites par $\Gamma_b^+(t_i)$. Pour tout tronç t_k appartenant à $\Gamma_b^+(t_i)$, on doit respecter la contrainte :

$$y(t_i) < y(t_k)$$

Si l'assignation partielle est conforme aux contraintes de non-recouvrement des branches, aucun des troncs t_k de $\Gamma_b^+(t_i)$ n'est encore assigné et le tronç t_i peut être assigné inconditionnellement à la piste d'ordonnée y_c .

Les troncs t_k de $\Gamma_b^+(t_i)$ seront assignés ultérieurement à des pistes d'ordonnée supérieure à y_c et les contraintes décrites par $\Gamma_b^+(t_i)$ seront respectées.

L'algorithme 1 sera donc modifié de la façon suivante. A chaque fois qu'un tronc t_i est sélectionné dans $T_>$, ce tronc t_i ne sera assigné à la piste courante qu'à condition qu'il n'existe à cet instant dans l'ensemble T_{na} des troncs non-encore assignés aucun élément appartenant à $\Gamma_b^-(t_i)$. Si cette condition n'est pas vérifiée, alors le tronc t_i est retiré de l'ensemble $T_>$ et l'on sélectionne à nouveau dans $T_>$ un élément d'extrémité gauche minimale (fig. 2, heuristique 1).

L'heuristique ainsi obtenue fournira une solution si et seulement si le graphe G_b du problème $P = (T)$ considéré n'admet aucun cycle. Si le graphe G_b admet un cycle, alors aucun des sommets de ce cycle ne sera assigné. En effet, à tout instant, chaque sommet du cycle admet au moins un prédécesseur non-encore assigné : son prédécesseur dans le cycle.

VI - INTRODUCTION DE DIVISIONS DE TYPE I

Nous allons maintenant montrer comment l'heuristique 1 peut être modifiée de façon à permettre l'introduction de divisions de type I. Appelées "doglegs" par Deutsch, ces divisions donneront à l'heuristique obtenue son appellation de "Dogleg Channel Router".

VII - Transformation de l'ensemble des troncs en un ensemble de sous-troncs à deux branches

Soit $P = (T)$ un problème d'assignation de pistes. Considérons un tronc t_i de T et supposons que le nombre de branches :

$$nb(t_i) = |T_I(t_i) \cup T_S(t_i)|$$

$$y_c := 0 ;$$

$$T_{na} := T ;$$

tant que $T_{na} \neq \emptyset$ et $y_c < |T|$ faire

$$y_c := y_c + 1 ;$$

$$T_> := T_{na} ;$$

tant que $T_> \neq \emptyset$ faire

rechercher dans $T_>$ un élément d'extrémité gauche minimale et le mettre dans t ;

si $\exists t_i/t_i \in T_{na}$ et $t'_i \in \Gamma_b^-(t)$ alors

$$T_> := T_> - \{t\}$$

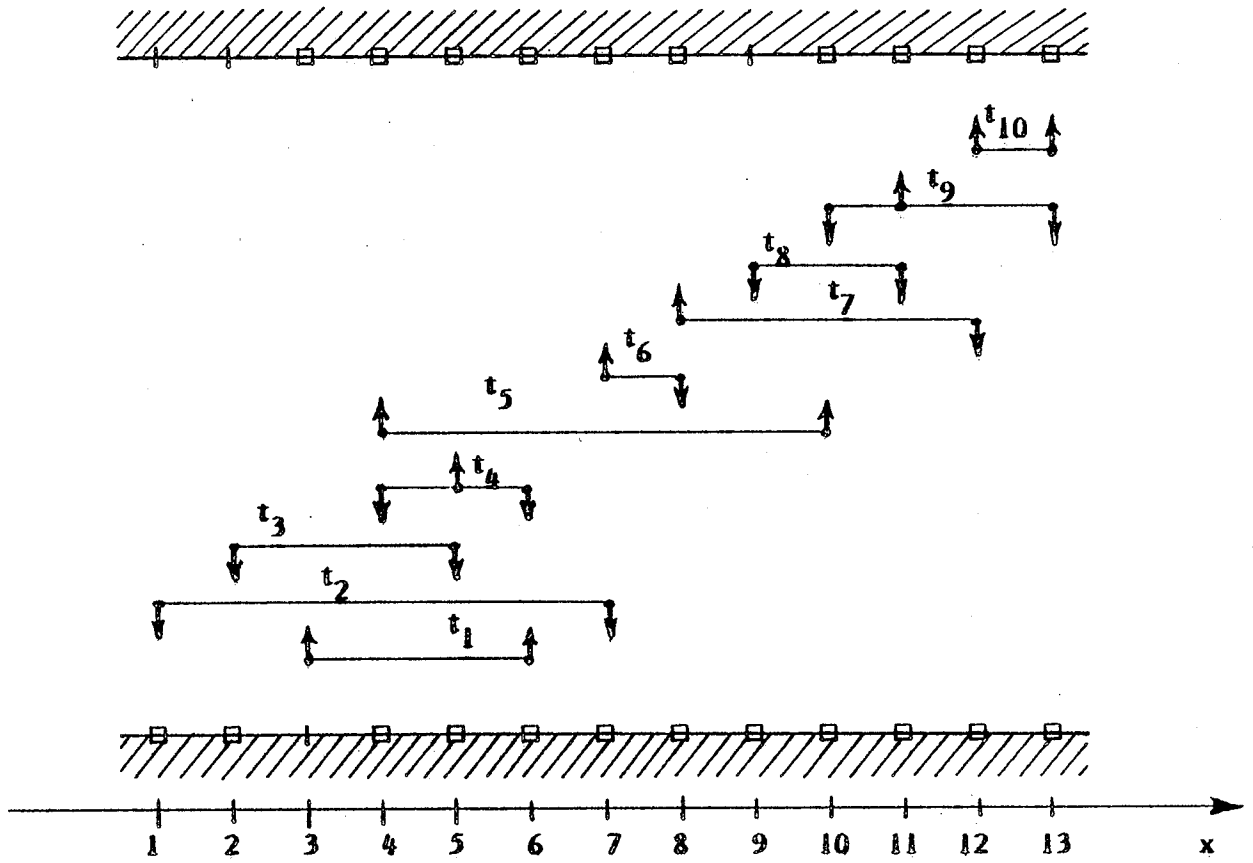
sinon

$$y(t) := y_c ;$$

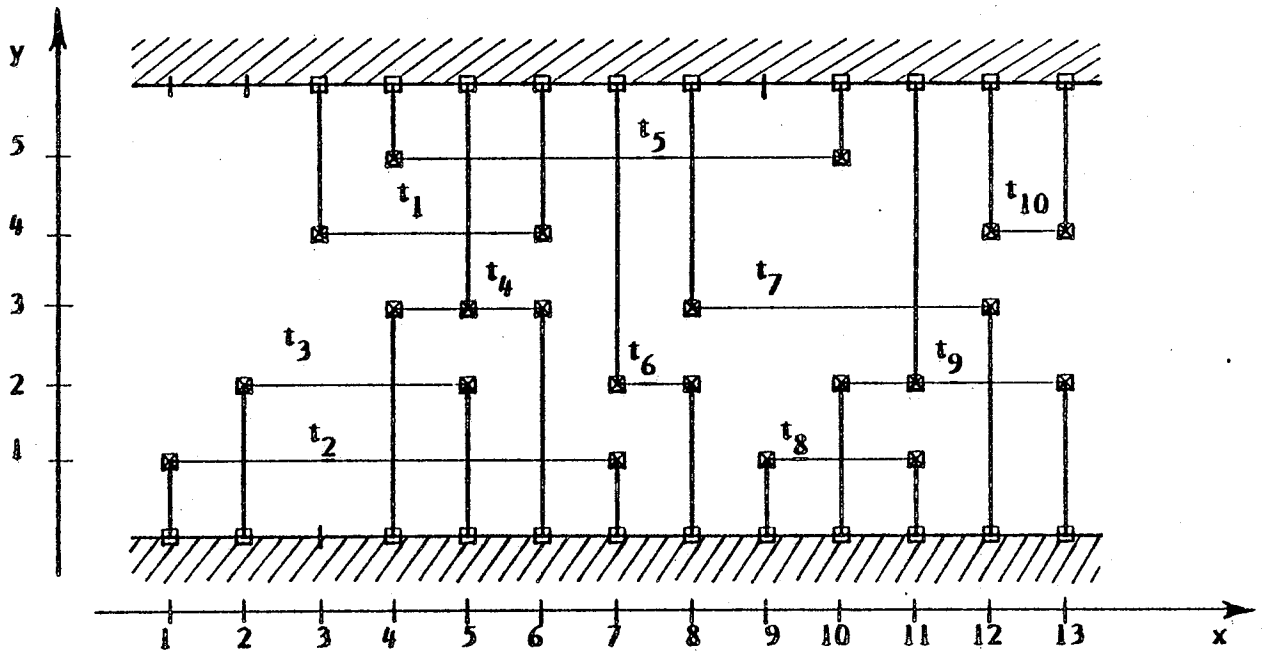
$$T_{na} := T_{na} - \{t\} ;$$

$$T_> := \{t_i/t_i \in T_> \text{ et } x_{\min}(t_i) > x_{\max}(t)\}$$

Heuristique 1

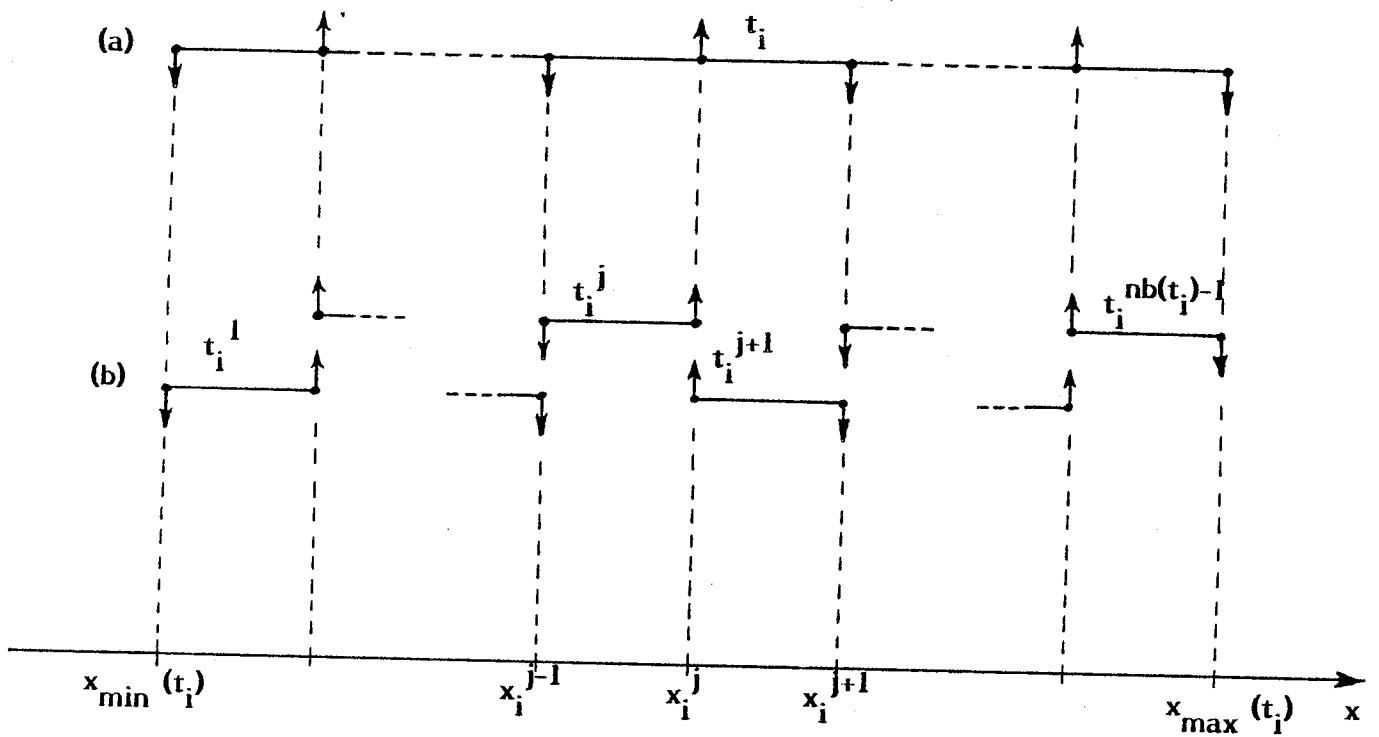


(a) problème d'assignation de pistes $P = (T)$



(b) solution fournie par l'heuristique 1

Figure 2



(a) tronc t_i de T

(b) ensemble $S(t_i)$ des sous-troncs à deux branches

Figure 3

qu'admet ce tronç soit strictement supérieur à 2 (fig. 3 a). Il existe alors $nb(t_i) - 2$ abscisses x_i^j vérifiant la propriété :

$$x_{\min}(t_i) < x_i^j < x_{\max}(t_i) \quad \text{et} \quad x_i^j \in \{ T_I(t_i) \cup T_S(t_i) \}$$

En chacune de ces $nb(t_i) - 2$ abscisses x_i^j , le tronç t_i est divisible suivant la méthode I.

Par application de la méthode I de division en chacune des $nb(t_i) - 2$ abscisses x_i^j , on transforme le tronç t_i en $nb(t_i) - 1$ sous-tronçs admettant deux branches, et seulement deux (fig. 3 b). Nous noterons :

$$S(t_i) = \{ t_i^1, \dots, t_i^{j-1}, t_i^j, t_i^{j+1}, \dots, t_i^{nb(t_i) - 1} \}$$

l'ensemble des $nb(t_i) - 1$ sous-tronçs ainsi obtenus. Nous dirons que les éléments de $S(t_i)$ proviennent du tronç t_i et nous supposons que ces éléments sont numérotés de sorte que :

$$x_{\min}(t_i^1) = x_{\min}(t_i) \quad \text{et} \quad \forall t_i^j \in S(t_i), \quad x_{\max}(t_i^j) = x_{\min}(t_i^{j+1})$$

Tout tronç t_i de T admettant seulement deux branches ($nb(t_i) = 2$) est indivisible suivant la méthode I. Nous admettrons que l'ensemble $S(t_i)$ d'un tel tronç ne contient qu'un seul élément t_i^1 , cet élément étant identique à t_i . Dans ces conditions, l'ensemble $S(t_i)$ est défini pour tout tronç t_i de T et nous noterons S l'ensemble de sous-tronçs à deux branches défini par

$$S = \{ S(t_i) / \forall t_i \in T \}$$

A tout problème d'assignation de pistes $P = (T)$, on peut ainsi faire correspondre un autre problème d'assignation de pistes $P' = (S)$. C'est pour la résolution de ce problème $P' = (S)$ qu'est conçue l'heuristique d'assignation par pistes.

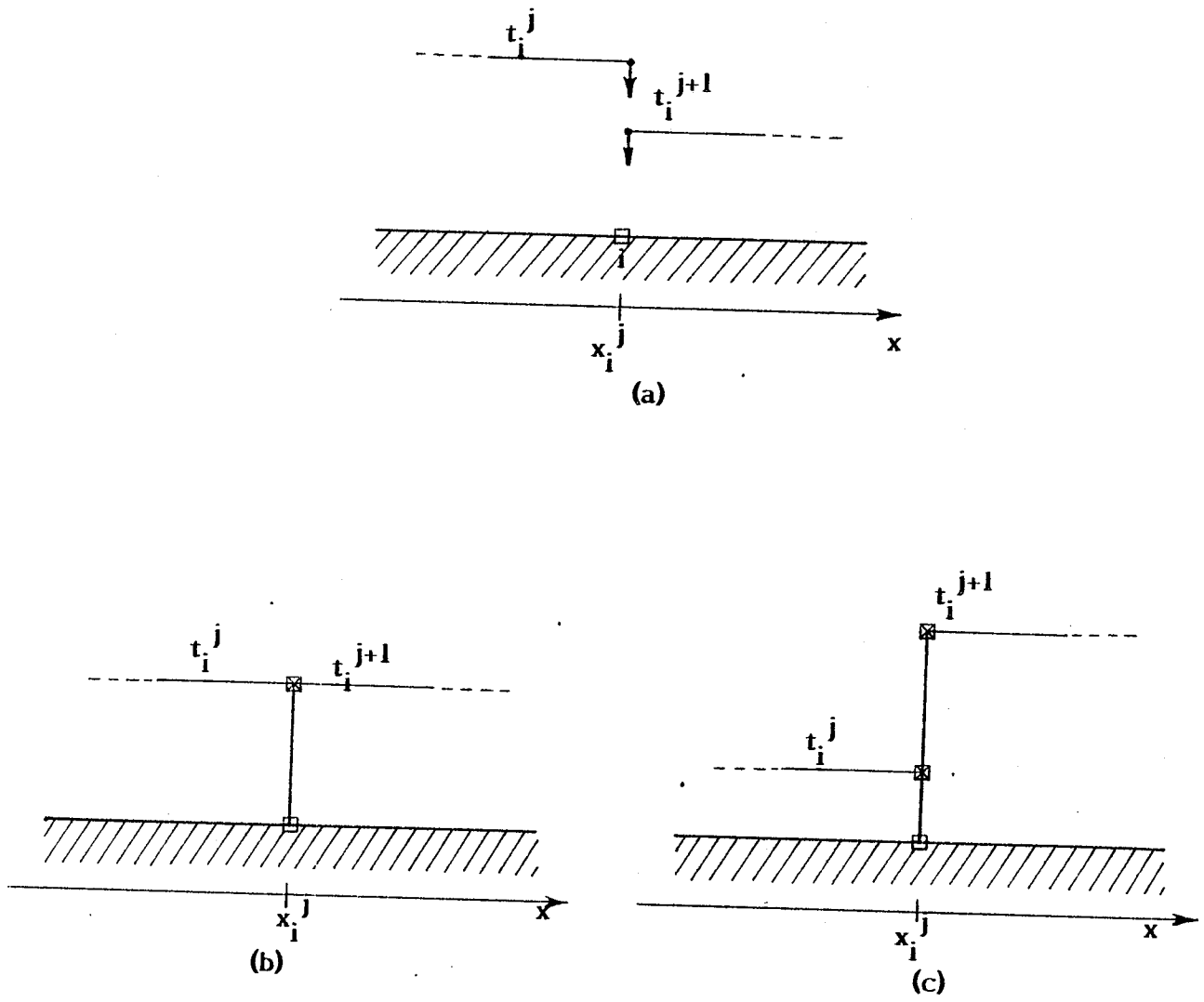


Figure 4

Soient t_i^j et t_i^{j+1} deux sous-troncs de S_i , appartenant à un même ensemble $S(t_i)$ et tels que l'extrémité droite de t_i^j soit égale à l'extrémité gauche de t_i^{j+1} (fig. 4 a). Lors de la résolution du problème $P' = (S)$, ces deux sous-troncs pourront :

- (i) soit être assignés à la même piste (fig. 4 b).

Dans ce cas, la division du tronc t_i de T à l'abscisse x_i^j n'aura eu aucune incidence sur l'implantation de i .

- (ii) soit être assignés à deux pistes distinctes (fig. 4 c).

Dans ce cas, la division du tronc t_i de T à l'abscisse x_i^j aura donné naissance à une "dogleg".

VI2 - Minimisation du nombre de divisions introduites

L'introduction de "doglegs" présente des avantages indéniables : ouverture de cycles et rupture de chemins du graphe G_b . Mais, la plupart du temps, un très grand nombre des divisions effectuées pour générer l'ensemble S ne sont d'aucun intérêt. Lors de la résolution du problème $P' = (S)$, il faudra éviter que de telles divisions donnent naissance à des "doglegs". D'une part, on risquerait d'accroître le nombre de pistes utilisées pour résoudre P' . D'autre part, une interconnexion admettant une ou plusieurs "doglegs" est toujours moins optimale qu'une interconnexion implantée sous la forme d'un tronc unique et de branches.

C'est pourquoi l'heuristique d'assignation par pistes, tout en restant basée sur le principe de l'heuristique 1, est conçue de façon à ce que le nombre de "doglegs" introduites tende à être minimisé.

A un instant donné, soit y_c l'ordonnée de la piste courante ($y_c \neq 0$) et soit $S_>$ l'ensemble des sous-troncs non-encore assignés dont l'extrémité

$y_C := 0 ; S_{na} := S ;$
tant que $S_{na} \neq \emptyset$ et $y_C < |S|$ faire
 $y_C := y_C + 1 ; S_{>} := S_{na} ;$
tant que $S_{>} \neq \emptyset$ faire
rechercher dans $S_{>}$ un élément d'extrémité gauche minimale et le mettre dans stdep ;
si assignable (stdep) = non alors
 $S_{>} := S_{>} - \{ \text{stdep} \}$
sinon
chaîne (l) := stdep ; l := l + 1 ;
blocage := non ;
tant que blocage = non faire
si $\exists t_i^j / \text{tronc}(t_i^j) = \text{tronc}(\text{stdep})$ et
 $x_{\min}(t_i^j) = x_{\max}(\text{chaîne}(l))$ et
 $t_i^j \in S_{>}$ et assignable (t_i^j) = oui alors
 $l := l + 1 ; \text{chaîne}(l) := t_i^j ;$
sinon
blocage := oui ;
stariv := chaîne (l) ;
pour k : 1 à l faire
 $y(\text{chaîne}(k)) := y_C ; S_{na} := S_{na} - \{ \text{chaîne}(k) \} ;$
 $S_{>} := \{ t_i^j / t_i^j \in S_{>} \text{ et } x_{\min}(t_i^j) > x_{\max}(\text{stariv}) \}$

* assignable (t_i^j) = oui si et seulement si t_i^j peut être assigné à la piste courante sans entraîner la violation des contraintes de non-recouvrement des branches *

gauche est strictement supérieure à l'extrémité droite du dernier sous-tronc assigné ($S_{>} \neq \emptyset$). Soit t_i^j ($1 \leq j \leq \text{nb}(t_i) - 1$) un élément de $S_{>}$ dont l'extrémité gauche est minimale et supposons que l'assignation de t_i^j à la piste courante n'entraîne pas la violation des contraintes de non-recouvrement des branches.

L'étape suivante de l'heuristique consistera alors à rechercher dans $S(t_i)$ un sous-tronc t_i^{j+1} dont l'extrémité gauche soit égale à l'extrémité droite de t_i^j . Si ce sous-tronc t_i^{j+1} existe, s'il n'est pas déjà assigné et si son assignation à la piste courante n'entraîne pas la violation des contraintes de non-recouvrement des branches, alors l'étape suivante consiste à rechercher dans $S(t_i)$ un sous-tronc t_i^{j+2} dont l'extrémité gauche soit égale à l'extrémité droite du sous-tronc t_i^{j+1} . Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'un blocage se produise.

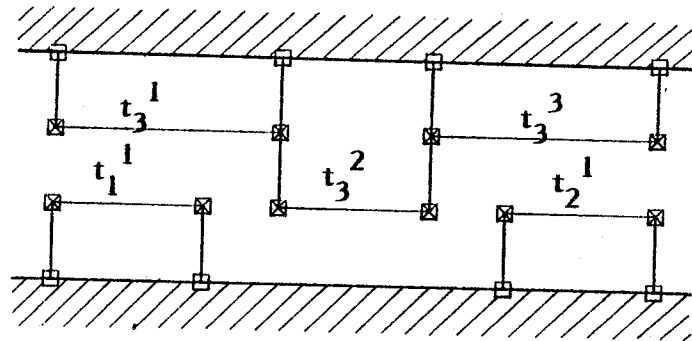
La séquence que nous venons de décrire forme à partir du sous-tronc t_i^j une chaîne de sous-troncs appartenant tous à $S(t_i)$:

$$\text{ch}_i(j, j+p) = (t_i^j, t_i^{j+1}, \dots, t_i^{j+p-1}, t_i^{j+p})$$

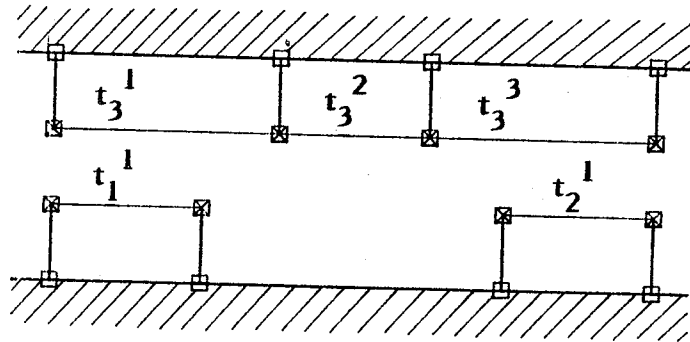
$$(1 \leq j \leq \text{nb}(t_i) - 1 \text{ et } 0 \leq p \leq \text{nb}(t_i) - 2)$$

Compte-tenu du déroulement de cette séquence, nous dirons que t_i^j est le sous-tronc de départ de la chaîne $\text{ch}_i(j, j+p)$, t_i^{j+p} le sous-tronc d'arrivée.

Une fois formée la chaîne $\text{ch}_i(j, j+p)$, chacun de ses $p+1$ éléments est assigné à la piste courante et retiré de l'ensemble S_{na} des sous-troncs non-encore assignés. Le nouvel ensemble $S_{>}$ est alors formé, avec les sous-troncs non-encore assignés dont l'extrémité gauche est strictement supérieure à l'extrémité droite du sous-tronc d'arrivée t_i^{j+p} . Et ainsi de suite (heuristique 2).



(a)



(b)

Figure 5

Pour chaque sous-tronc de départ t_i^j , la chaîne $ch_i(j, j+p)$ formée par l'heuristique 2 est *maximale*. C'est-à-dire qu'elle contient tous les éléments de $S(t_i^j)$ qui peuvent être assignés à la piste courante à partir du sous-tronc t_i^j . Une priorité minimale est ainsi accordée à l'apparition de "dog-legs" : leur nombre tendra à être minimisé.

L'heuristique 2 fournira une solution si et seulement si le graphe G_b' du problème $P' = (S)$ n'admet aucun cycle. Autrement dit, si et seulement si le graphe G_b du problème $P = (T)$ n'admet aucun cycle qui ne puisse être ouvert par la méthode I de division. Si le graphe G_b' admet un cycle, alors aucun des sommets de ce cycle ne sera assigné.

VI3 - Paramètre de chaîne minimale

La plupart du temps, l'heuristique 2 introduit plus de "doglegs" que nécessaire, et ceci bien qu'elle soit conçue de façon à ce que leur nombre tende à être minimisé (fig. 5 a). Afin de faire obstacle à cet effet indésirable, un paramètre entier et strictement positif, que nous appellerons *paramètre de chaîne minimale*, fût introduit par Deutsch. Ce paramètre représente le nombre minimal de sous-troncs que doit comporter une chaîne pour que ses éléments puissent être assignés à la piste courante.

A l'issue de la séquence de formation de la chaîne maximale à partir du sous-tronc de départ courant, le nombre d'éléments que comporte cette chaîne est comparé à la valeur du paramètre de chaîne minimale. Si la chaîne comporte un nombre d'éléments supérieur ou égal à la valeur de ce paramètre, tous ses éléments sont assignés à la piste courante. Dans le cas contraire, aucun de ses éléments n'est assigné à la piste courante et son sous-tronc de départ est retiré de l'ensemble S_j ; on sélectionne à nouveau dans S_j un élément dont l'extrémité gauche est minimale et cet élément devient le nouveau sous-tronc de départ courant.

Telle que nous venons de la décrire, l'heuristique ne peut fonctionner pour des valeurs du paramètre de chaîne minimale strictement supérieures à 1.

Soit $S(t_i)$ l'ensemble des sous-troncs de S provenant d'un tronc t_i de T . Soit $S_{na}(t_i)$ un sous-ensemble de $S(t_i)$ qui, à tout instant, contient les éléments non-encore assignés de $S(t_i)$ et posons :

$$nst_{na}(t_i) = |S_{na}(t_i)|$$

A tout instant, $nst_{na}(t_i)$ est égal au nombre de sous-troncs qui proviennent du tronc t_i et qui n'ont pas encore été assignés. Si à un instant quelconque $nst_{na}(t_i)$ est inférieur à la valeur du paramètre de chaîne minimale, aucun des sous-troncs que contient à cet instant $S_{na}(t_i)$ ne sera assigné.

Par exemple, une telle situation se produit pour tout sous-tronc t_i^1 qui provient d'un tronc t_i admettant seulement deux branches. A l'instant du lancement de l'heuristique, on a :

$$S_{na}(t_i) = S(t_i) = \{t_i^1\} \rightarrow nst_{na}(t_i) = 1$$

La valeur du paramètre de chaîne minimale étant strictement supérieure à 1 et $nst_{na}(t_i)$ étant égal à 1, le sous-tronc t_i^1 ne sera jamais assigné.

Nous ajouterons donc la règle suivante : les sous-troncs d'une chaîne $ch_i(j, j + p)$ comportant un nombre $p + 1$ d'éléments strictement inférieur à la valeur du paramètre de chaîne minimale seront également assignés à la piste courante si et seulement si :

$$p + 1 = nst_{na}(t_i)$$

Autrement dit, si et seulement si l'assignation des éléments de la chaîne $ch_i(j, j + p)$ à la piste courante *termine l'assignation* de l'interconnexion i .

L'heuristique 2 correspond donc à un paramètre de chaîne minimale égal à 1. Lorsque la valeur de ce paramètre croît, le nombre de "doglegs" tend à décroître (fig. 5 b).

Pour qu'aucune "dogleg" ne soit introduite, il suffit de donner au paramètre de chaîne minimale une valeur supérieure ou égale à :

$$|S(t_i)|_{\max} = \max \{ |S(t_i)|, \forall t_i \in T \}$$

Tout se passe alors comme si l'on résolvait le problème $P = (T)$.

VII - PARAMETRE SEQUENCE

VIII - Face initiale

Dans l'heuristique 2, l'ordonnée de la piste courante prend successivement les valeurs :

$$1, \dots, y_C - 1, y_C, \dots$$

On dira alors que la *face initiale* est la face inférieure du canal.

Supposons maintenant que la capacité du canal soit fixée à une valeur c . On peut alors concevoir que l'ordonnée de la piste courante prenne successivement les valeurs :

$$c, \dots, y_C + 1, y_C, \dots$$

On dira alors que la *face initiale* est la face supérieure du canal.

On peut également concevoir que l'ordonnée de la piste courante prenne successivement les valeurs :

$$1, c, 2, c - 1, 3, c - 2, \dots$$

ou les valeurs :

$c, 1, c - 1, 2, c - 2, 3, \dots$

La face initiale sera alors alternativement la face inférieure et la face supérieure.

Que la face initiale soit la face inférieure ou la face supérieure, le principe de l'heuristique 2 n'est nullement remis en cause, mais les étapes assurant le respect des contraintes de non-recouvrement des branches devront être adaptées en conséquence. Lorsque la face initiale est la face inférieure (resp. supérieure), un sous-tronc t_i^j de l'ensemble $S_{>}$ sera à un instant donné assignable à la piste courante, si et seulement s'il n'existe à cet instant dans l'ensemble S_{na} aucun élément appartenant à $\Gamma_b^{-1}(t_i^j)$ (resp. $\Gamma_b^{+1}(t_i^j)$).

VII2 - Sens de recherche

Dans l'heuristique 2, les sous-troncs à assigner à la piste courante sont recherchés par un balayage de l'ensemble S_{na} suivant les x croissants.

On peut concevoir que les sous-troncs à assigner à la piste courante soient recherchés par un balayage de l'ensemble S_{na} suivant les x décroissants. Ainsi, pour chacune des pistes du canal, le *sens de recherche* des sous-troncs pourra être choisi arbitrairement. L'ensemble $S_{>}$ sera remplacé par un ensemble $S_{<>}$ qui contiendra :

(i) si la recherche des sous-troncs s'effectue suivant les x croissants, tous les sous-troncs non-encore assignés dont l'extrémité gauche est strictement supérieure à l'extrémité droite du dernier sous-tronc assigné.

(ii) si la recherche des sous-troncs s'effectue suivant les x décroissants, tous les sous-troncs non-encore assignés dont l'extrémité droite est strictement inférieure à l'extrémité gauche du dernier sous-tronc assigné.

La formation d'une chaîne maximale à partir d'un sous-tronc de départ t_i s'effectuera en balayant l'ensemble $S(t_i)$ suivant le sens de recherche.

Nous noterons y^+ (resp. y^-) l'ordonnée d'une piste pour laquelle les sous-troncs sont recherchés suivant les x croissants (resp. décroissants).

VII3 - Séquences monotones et alternées

L'ordre dans lequel les différentes pistes du canal devront être traitées et le sens de recherche qui devra être adopté pour chacune des pistes seront spécifiés par un paramètre, que nous appellerons *séquence*.

Lorsque la face initiale demeure la même tout au long de l'assignation, on dira que la séquence est *monotone*. Par exemple, les séquences suivantes sont monotones :

$$\text{seq 1} = (1^+, 2^+, 3^+, 4^+, \dots)$$

$$\text{seq 2} = (c^-, c-1^+, c-2^-, c-3^+, \dots)$$

Lorsque la face initiale est alternativement la face inférieure et la face supérieure, on dira que la séquence est *alternée*. Par exemple, les séquences suivantes sont alternées :

$$\text{seq 3} = (1^-, c^-, 2^-, c-1^-, 3^-, c-2^-, \dots)$$

$$\text{seq 4} = (c^+, 1^+, c-1^-, 2^-, c-2^+, 3^+, \dots)$$

Remarquons que la séquence monotone seq 1 correspond évidemment à l'heuristique 2.

VIII - HEURISTIQUE D'ASSIGNATION PAR PISTES

L'heuristique d'assignation par pistes, dans sa version la plus complète, peut maintenant être décrite (heuristique 3).

```

pour tout  $t_i \in T$  faire
|  $|nst_{na}(t_i)| := |S(t_i)|$  ;
 $S_{na} := S$  ;  $npt := 0$  ;
tant que  $S_{na} \neq \emptyset$  et  $npt < c$  faire
|  $npt := npt + 1$  ; calculer  $y_c$ , sens et facinit ;
|  $S_{<>} := S_{na}$  ;
| tant que  $S_{<>} \neq \emptyset$  faire
| | si sens = croissant alors
| | | rechercher dans  $S_{<>}$  un élément d'extrémité gauche minimale
| | | et le mettre dans stdep
| | | sinon rechercher dans  $S_{<>}$  un élément d'extrémité droite maximale
| | | et le mettre dans stdep ;
| | si assignable (stdep, facinit) = non alors
| | |  $S_{<>} := S_{<>} - \{stdep\}$ 
| | | sinon formchaîne (stdep, sens,  $\ell$ , chaîne ( )) ;
| | | | si  $\ell < pcm$  et  $\ell < nst_{na}$  (tronc (stdep)) alors
| | | | |  $S_{<>} := S_{<>} - \{stdep\}$ 
| | | | | sinon
| | | | | pour  $k = 1$  à  $\ell$  faire
| | | | | |  $y(\text{chaîne}(k)) := y_c$  ;  $S_{na} := S_{na} - \{\text{chaîne}(k)\}$  ;
| | | | | |  $nst_{na}(\text{tronc}(stdep)) := nst_{na}(\text{tronc}(stdep)) - 1$  ;
| | | | | |  $stariv := \text{chaîne}(\ell)$  ;
| | | | | | si sens = croissant alors
| | | | | | |  $S_{<>} := \{t_i^j/t_i^j \in S_{<>} \text{ et } x_{\min}(t_i^j) > x_{\max}(stariv)\}$ 
| | | | | | | sinon
| | | | | | |  $S_{<>} := \{t_i^j/t_i^j \in S_{<>} \text{ et } x_{\max}(t_i^j) < x_{\min}(stariv)\}$ 

```

npt : nombre de pistes traitées

sens : sens de recherche des sous troncs

facinit : face initiale

pcm : paramètre de chaîne minimale

Heuristique 3

Cette heuristique échouera dans l'une ou l'autre des deux circonstances suivantes :

(i) le graphe G_b' du problème $P' = (S)$ considéré admet un ou plusieurs cycles. Autrement dit, le graphe G_b du problème $P = (T)$ admet un ou plusieurs cycles qui ne peuvent être ouverts par la méthode I de division. Dans ce cas, aucun des sous-troncs de S qui appartiennent à un cycle de G_b' ne sera assigné.

(ii) la valeur de la capacité c est insuffisante.

IX - ADAPTATION DES CRITERES D'OPTIMALITE

Lorsque l'on appliquera l'heuristique 3 à la résolution d'un problème de canal biface donné, certains critères d'optimalité des solutions pourront être redéfinis d'une façon adaptée à cette heuristique.

IXI - Longueur des interconnexions

L'heuristique 3 n'utilise que la méthode I de division. Ainsi, pour un problème de canal biface donné, quelle que soit la solution fournie par l'heuristique 3, la longueur totale l_{th} des segments horizontaux est invariante :

$$l_{th} = \sum_T (x_{\max}(t_i) - x_{\min}(t_i))$$

Par conséquent, si les longueurs totales des interconnexions de deux solutions distinctes fournies par l'heuristique 3 diffèrent d'une quantité Δl_t , alors les longueurs totales des segments verticaux (des branches) de ces deux solutions diffèrent d'une quantité Δl_t .

Le critère de minimisation de la longueur totale des interconnexions pourra donc être remplacé par un critère de *minimisation de la longueur totale des branches*.

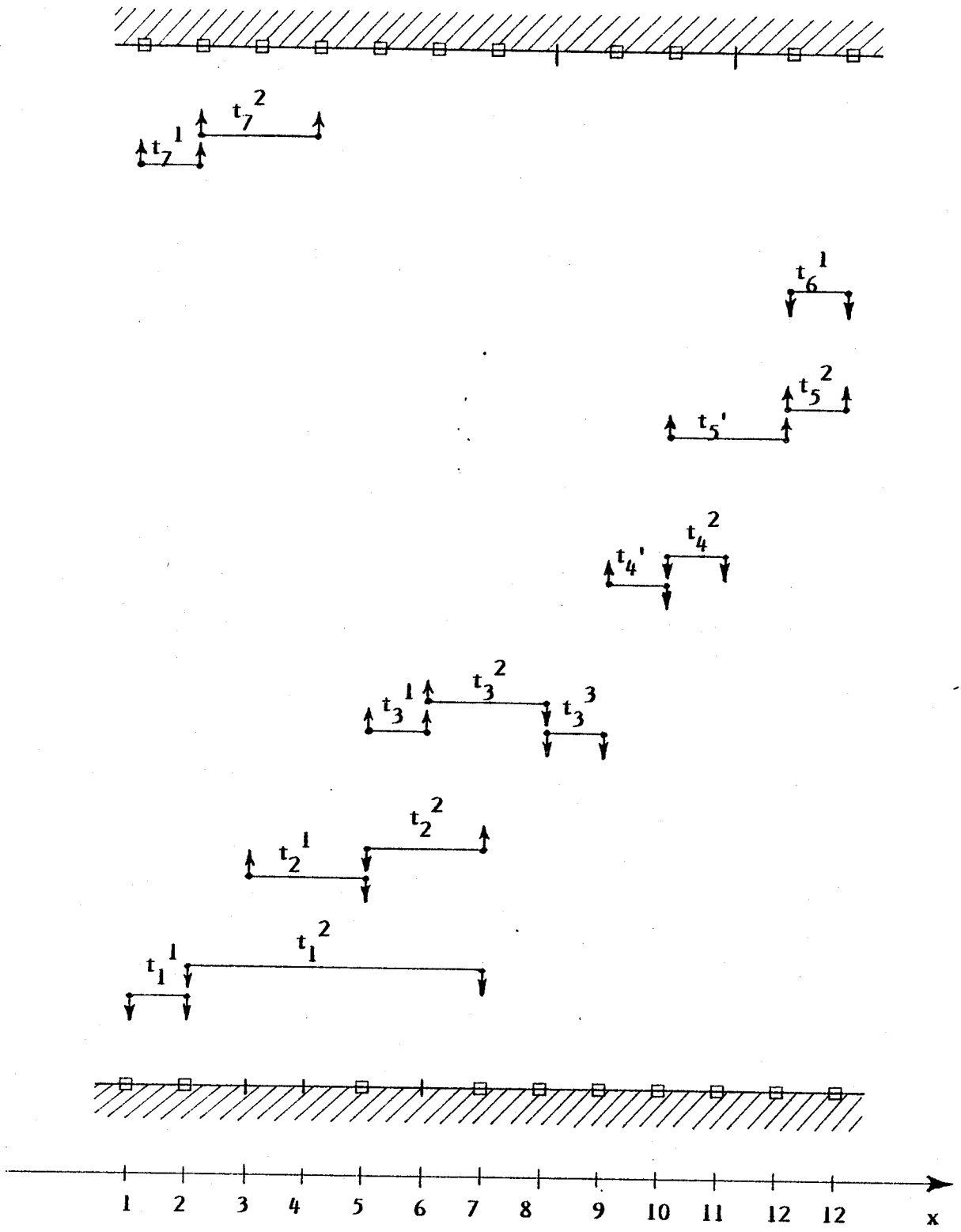


Figure 6

IX2 - Nombre de passages via

Nous avons vu (§ III4) que le nombre de passages via nécessaire et suffisant pour résoudre un problème de canal biface donné est minoré par :

$$nv_{\min} = \sum_T |T_I(t_i) \cup T_S(t_i)|$$

L'heuristique 3 est conçue pour la résolution du problème $P' = (S)$. Lors de la résolution de ce problème, à chaque fois qu'une "dogleg" sera introduite, le nombre de passages via sera augmenté de 1 par rapport à nv_{\min} . Ainsi, si les nombres des passages via de deux solutions distinctes fournies par l'heuristique 3 diffèrent d'une quantité Δnv , alors les nombres de "doglegs" introduites dans ces deux solutions diffèrent d'une quantité Δnv .

Le critère de minimisation du nombre de passages via pourra donc être remplacé par un critère de minimisation du nombre de "doglegs".

X - INFLUENCE DES PARAMETRES

La séquence et le paramètre de chaîne minimale ont généralement une très grande influence sur les solutions fournies par l'heuristique 3, influence que nous illustrerons par un exemple. Pour chacune des solutions présentées, nous supposerons que la capacité du canal a été ajustée de façon à ce que tous les éléments de S soient assignés et qu'aucune piste ne soit laissée inoccupée.

Considérons le problème du canal biface de la figure 6. On pourra aisément vérifier que la capacité minimale du problème $P = (T)$ est égale à 5

($\omega(G_t) = 3$ et $\lambda(G_b) = 5$), cette capacité minimale étant imposée par le chemin $\mu = [t_1, t_2, t_3, t_4, t_5]$ de G_b . Quant à la capacité minimale du problème $P' = (S)$, elle est égale à 3 ($\omega(G_t') = 3$ et $\lambda(G_b') = 3$).

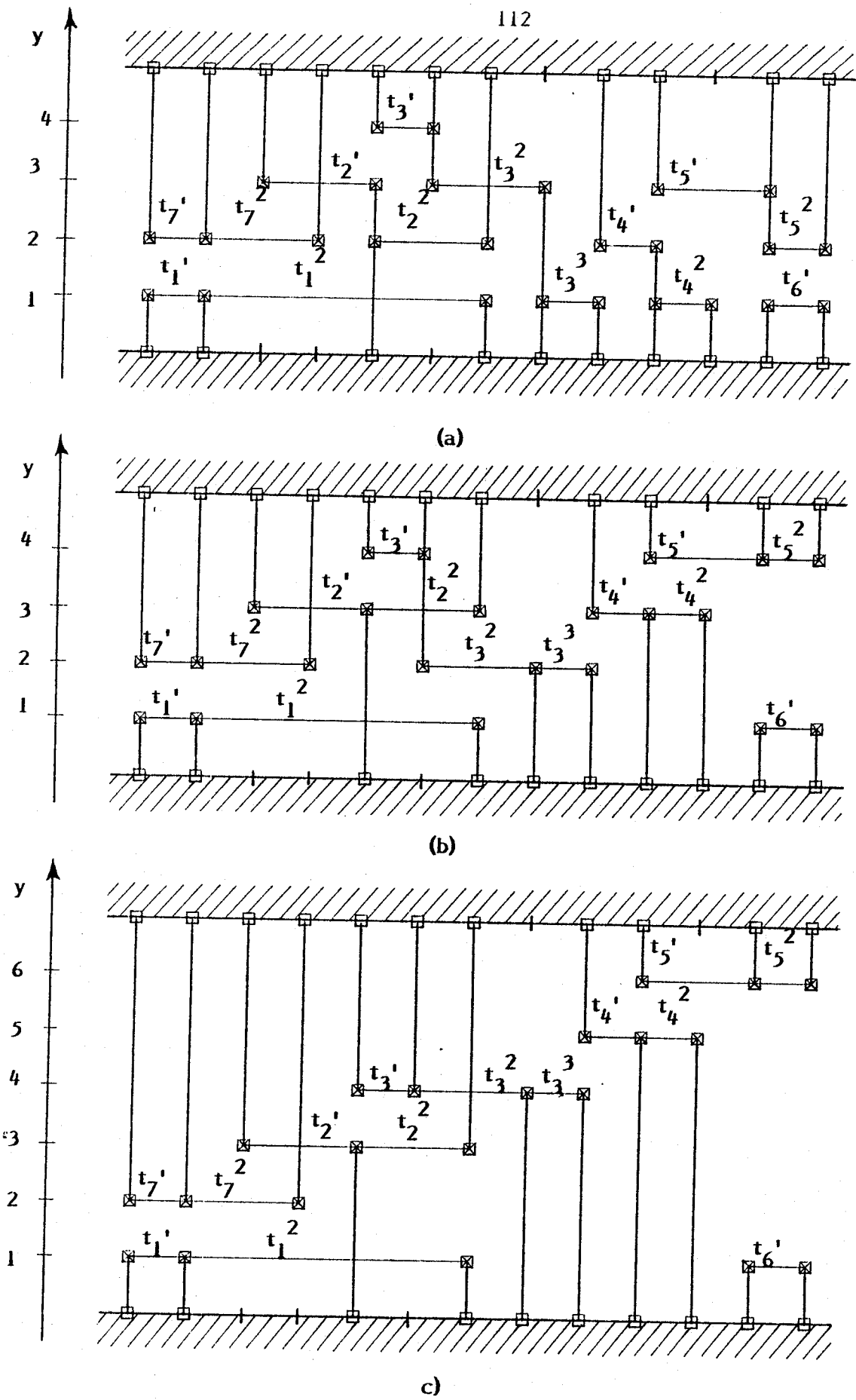


Figure 7

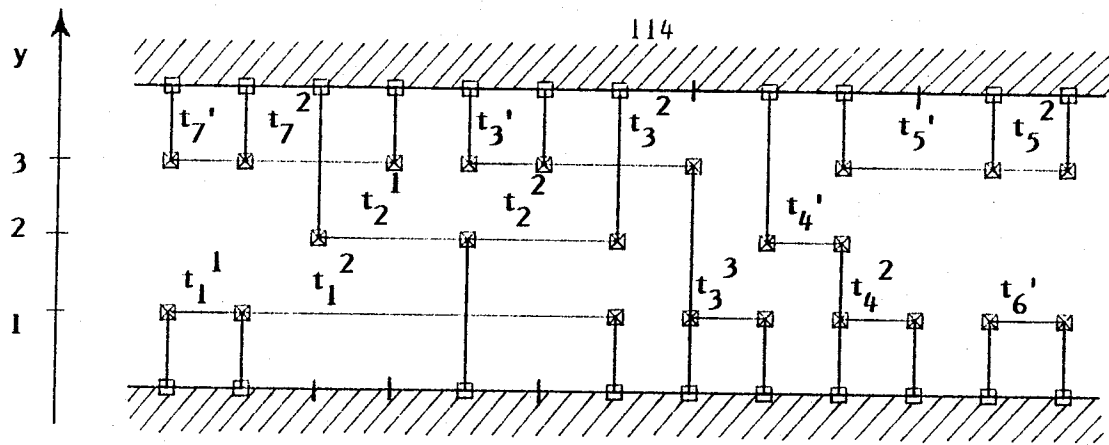
La figure 7 a représente la solution obtenue pour la séquence monotone $(1^+, 2^+, \dots, y - 1^+, y^+, y + 1^+, \dots)$ et pour un paramètre de chaîne minimale égal à 1. Cette solution utilise 4 pistes, alors que la capacité minimale de P' est égale à 3. Des 5 "doglegs" introduites, 4 sont inutiles. La longueur totale des branches est égale à 43, valeur qui n'est manifestement pas optimale. Cette solution n'est donc optimale à aucun point de vue.

En conservant la même séquence et en portant à 2 la valeur du paramètre de chaîne minimale, on obtient la solution de la figure 7 b. Le nombre de pistes utilisées reste égal à 4, le nombre de "doglegs" passe de 5 à 1 et la longueur totale des branches passe de 43 à 40. Cette solution est donc plus optimale que celle de la figure 7 a, mais n'en constitue pas pour autant une solution optimale au problème P' .

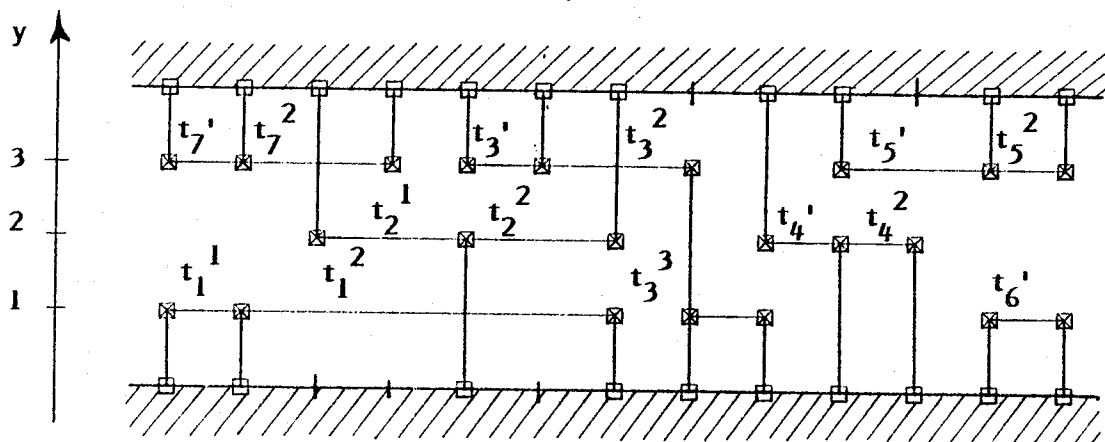
En conservant toujours la même séquence et en portant à 3 la valeur du paramètre de chaîne minimale, on obtient une solution au problème $P = (T)$ ($|S(t_i)|_{\max} = 3$). Cette solution, représentée à la figure 7 c, utilise 6 pistes alors que la capacité minimale du problème P est égale à 5. La longueur totale des branches, égale à 60, n'est manifestement pas optimale.

Considérons maintenant la solution de la figure 8 a, obtenue pour la séquence alternée $(c^-, 1^-, c - 1^-, 2^-, \dots)$ et pour une valeur du paramètre de chaîne minimale égale à 1. Cette solution est optimale du point de vue du nombre de pistes utilisées. Deux "doglegs" ont été introduites, dont une est inutile. La longueur totale des branches est égale à 28.

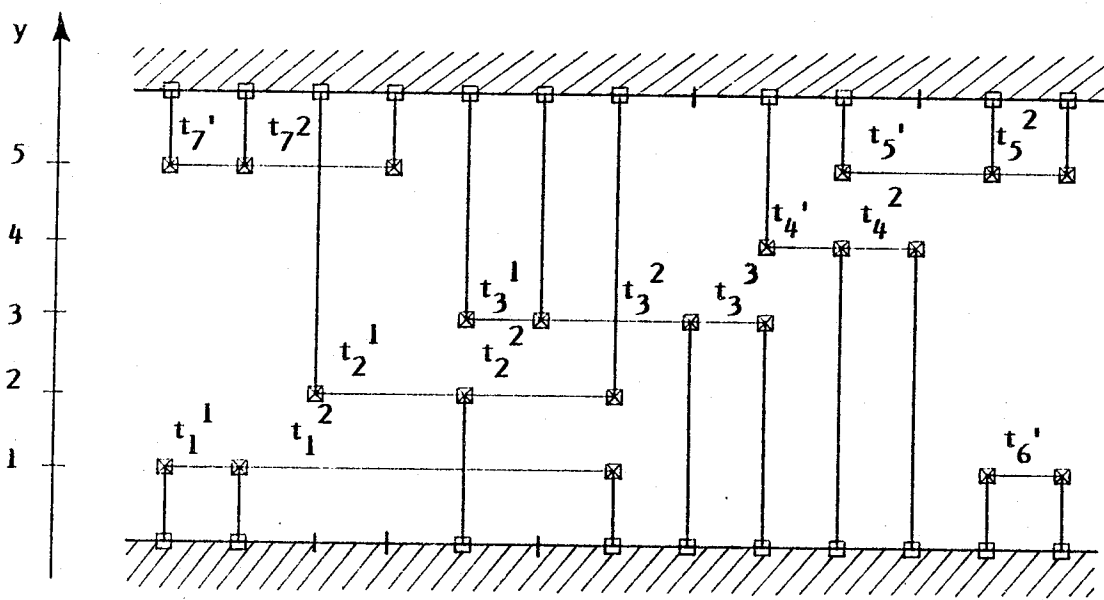
En conservant la même séquence et en portant à 2 la valeur du paramètre de chaîne minimale, on obtient la solution de la figure 8 b. Le nombre de pistes utilisées reste égal à la capacité minimale de P' et le nombre de "doglegs" est réduit à 1. Cette solution est la solution optimale du problème P' ; c'est également celle du problème de canal biface de la figure 6.



(a)



(b)



(c)

Figure 8

En conservant toujours la même séquence et en portant à 3 la valeur du paramètre de chaîne minimale, on obtient la solution représentée à la figure 8 c. Le nombre de pistes utilisées est égal à 5, la longueur totale des branches est égale à 43. Cette solution est la solution optimale du problème P.

L'expérience que nous avons de l'heuristique 3 nous permet d'affirmer que cet exemple doit être considéré comme très caractéristique. Pour un problème donné, il existe généralement de "bonnes" et de "mauvaises" séquences, et ceci quelle que soit la valeur du paramètre de chaîne minimale. Lorsque les points terminaux sont répartis sur les deux faces du canal, c'est le cas général, les meilleures séquences sont généralement des séquences alternées. Lorsque les points terminaux sont répartis sur une même face, les meilleures séquences sont généralement des séquences monotones.

Pour une même séquence, lorsque l'on accroît la valeur du paramètre de chaîne minimale à partir de la valeur 1 le nombre de "doglegs" décroît. Le nombre de pistes utilisées reste généralement constant jusqu'à une certaine valeur du paramètre de chaîne minimale, puis augmente.

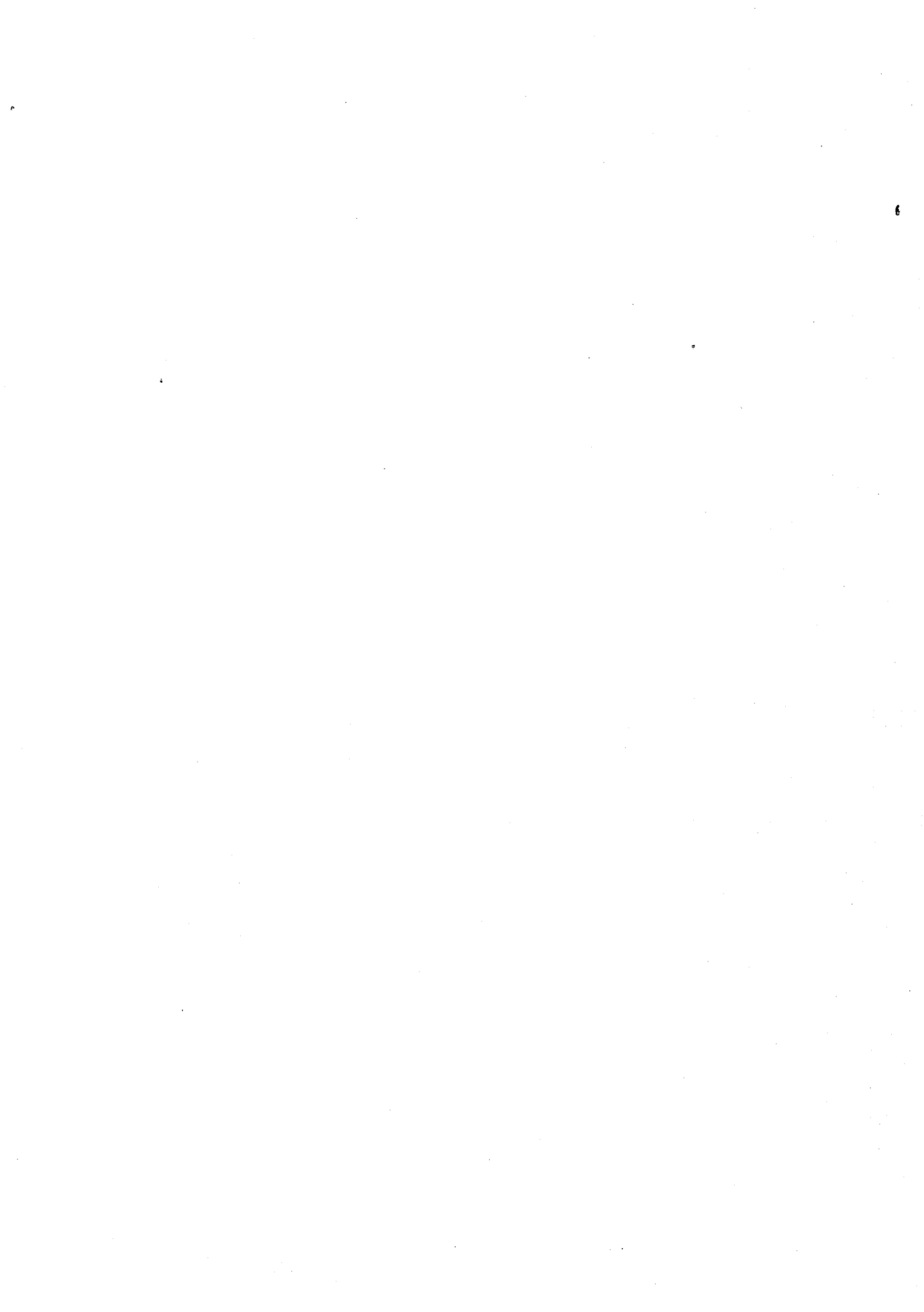
En conservant toujours la même séquence et en portant à 3 la valeur du paramètre de chaîne minimale, on obtient la solution représentée à la figure 8 c. Le nombre de pistes utilisées est égal à 5, la longueur totale des branches est égale à 43. Cette solution est la solution optimale du problème P.

L'expérience que nous avons de l'heuristique 3 nous permet d'affirmer que cet exemple doit être considéré comme très caractéristique. Pour un problème donné, il existe généralement de "bonnes" et de "mauvaises" séquences, et ceci quelle que soit la valeur du paramètre de chaîne minimale. Lorsque les points terminaux sont répartis sur les deux faces du canal, c'est le cas général, les meilleures séquences sont généralement des séquences alternées. Lorsque les points terminaux sont répartis sur une même face, les meilleures séquences sont généralement des séquences monotones.

Pour une même séquence, lorsque l'on accroît la valeur du paramètre de chaîne minimale à partir de la valeur 1 le nombre de "doglegs" décroît. Le nombre de pistes utilisées reste généralement constant jusqu'à une certaine valeur du paramètre de chaîne minimale, puis augmente.

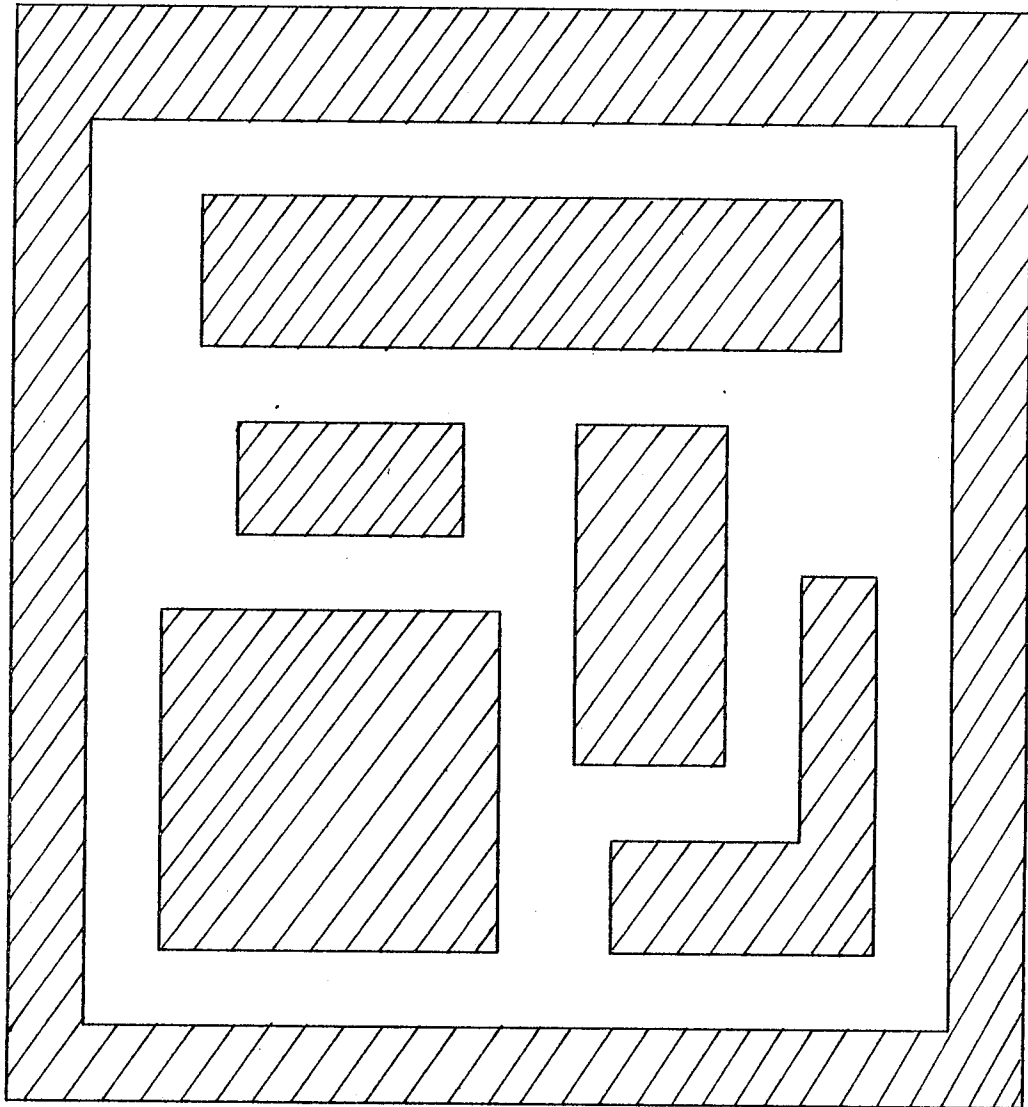
DEUXIEME PARTIE


Tracé multi-canal



CHAPITRE I

Les différentes stratégies



 Blocs


 Surface d'interconnexion

Figure 1

I - LE PROBLEME MULTI-CANAL

II - Le problème général

Soit un ensemble de blocs *polygonaux* délimités par des arêtes horizontales et verticales, répartis dans le plan d'un rectangle englobant de sorte que deux quelconques blocs n'intersectent pas. La *surface d'interconnexion*, contenue à l'intérieur du rectangle englobant, sépare les blocs les uns des autres (fig. 1).

Une *grille d'implantation* quadrille la surface d'interconnexion. Des *points terminaux* reposant sur des points de cette grille sont répartis sur le périmètre des blocs et à chaque point terminal, la *liste d'interconnexion* associe un numéro d'interconnexion.

Le *problème multi-canal* consiste à implanter des interconnexions cheminant à travers la surface d'interconnexion, de sorte que tous les points terminaux porteurs d'un même numéro d'interconnexion soient reliés électriquement. Les interconnexions peuvent emprunter deux niveaux et seront tracées symboliquement sur la grille d'implantation.

II - Sous-problèmes

Le problème que nous venons de présenter constitue le cas le plus général de problème multi-canal. Les blocs sont de forme polygonale, de dimensions quelconques et leur disposition à l'intérieur du rectangle englobant ne présente aucune régularité. Nous dirons qu'il s'agit là d'une *configuration de type "building blocks"*. On se trouvera en effet confronté à une telle configuration avec la méthodologie de conception dite des "building blocks" [Sou 81 a].

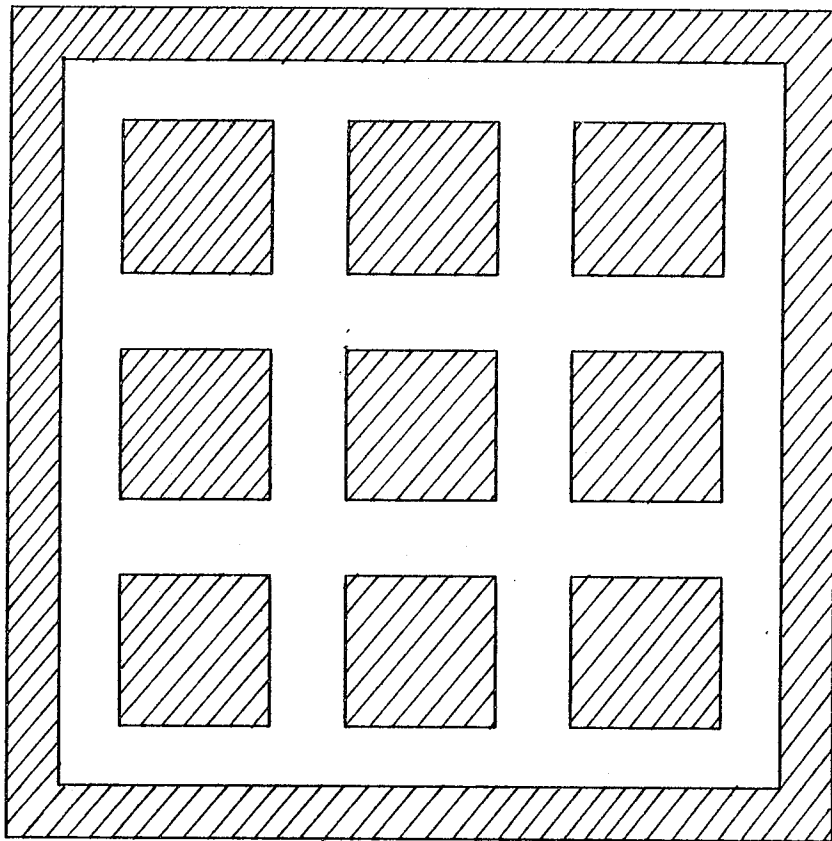


Figure 2

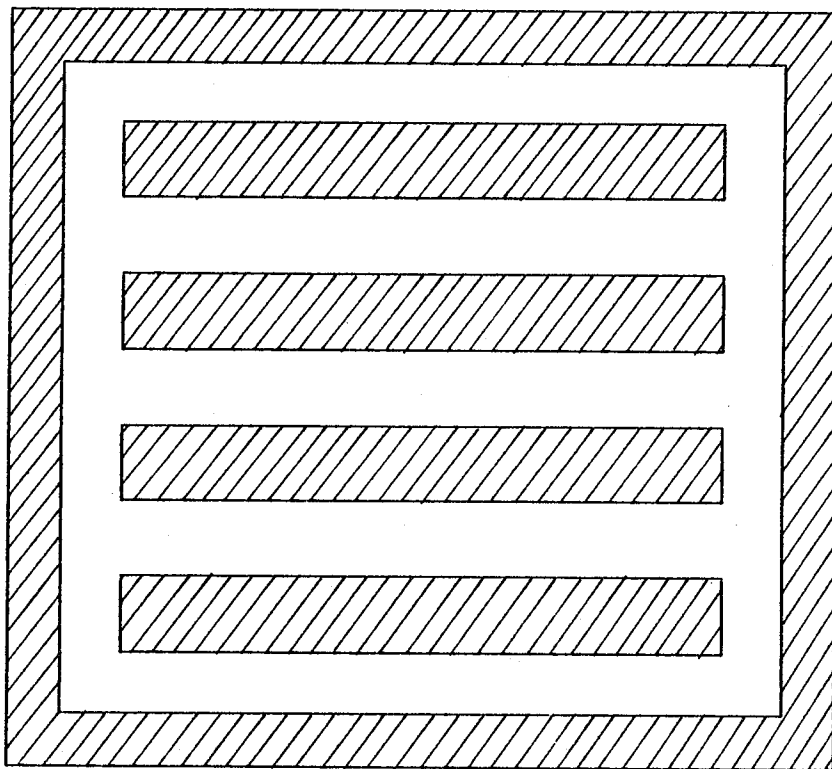


Figure 3

L'introduction de régularités dans la forme des blocs, dans leur dimensionnement et dans leur disposition à l'intérieur du rectangle englobant conduit à différentes classes de problèmes multi-canaux, moins généraux que le problème posé par la configuration de type "building blocks".

Les blocs peuvent être de forme rectangulaire, de dimensions fixées suivant les deux directions du plan et disposés à l'intérieur du rectangle englobant de façon à former une "matrice régulière" (fig. 2). Nous dirons qu'il s'agit là d'une *configuration de type réseaux prédifusés*. On se trouvera en effet confronté à une telle configuration avec la méthodologie de conception dite des "réseaux prédifusés" [Pos 80].

Les blocs peuvent être de forme rectangulaire, de dimension fixée dans la direction verticale et allongés dans la direction horizontale (fig. 3). Nous dirons qu'il s'agit là d'une *configuration de type réseaux précaractérisés*. On se trouvera en effet confronté à une telle configuration avec la méthodologie de conception dite des "réseaux précaractérisés" [Per 76].

II - DIVISER POUR REGNER

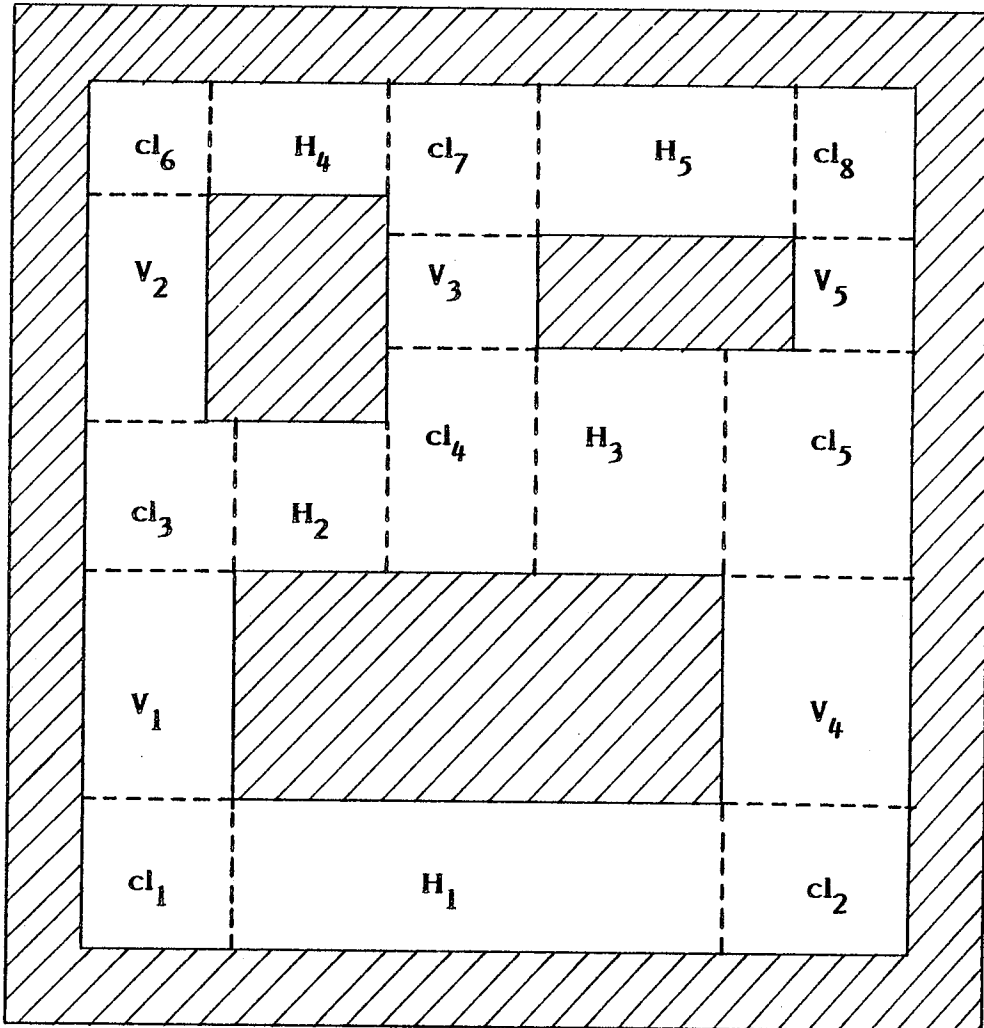
Afin d'affronter la complexité inhérente au problème multi-canal [Don 80] [Lap 80] [Sah 80], une stratégie de type "diviser pour régner" est généralement adoptée.

Une telle stratégie reposera généralement sur un *découpage de la surface d'interconnexion*, ainsi que sur une décomposition du processus de tracé en *tracé global et tracé final*.

III - Découpage de la surface d'interconnexion

III.1 Définition

On appellera *découpage de la surface d'interconnexion* une opération qui consiste à décomposer cette surface en un ensemble de surfaces plus petites, que nous appellerons *surfaces élémentaires*.



H_i : canaux bifaces horizontaux

V_i : canaux bifaces verticaux

cl : cellules de liaison

Figure 4

La surface d'interconnexion est alors définie comme l'union de toutes les surfaces élémentaires. Lorsque le découpage est tel que l'intersection de deux quelconques surfaces élémentaires est vide, nous dirons qu'il s'agit d'un découpage en *surfaces élémentaires disjointes*.

III2 Découpage en canaux bifaces et en cellules de liaison

La notion de découpage de la surface d'interconnexion est très générale. Toutefois, afin de décrire le processus de tracé et de mettre en évidence les difficultés liées à cette notion, nous allons présenter dès maintenant un découpage qui fait apparaître deux types de surfaces élémentaires disjointes : des *canaux bifaces* et des *cellules de liaison* (fig. 4). Ce découpage est toujours défini, quelle que soit la configuration considérée ; il n'est fonction que de la topologie de la surface d'interconnexion.

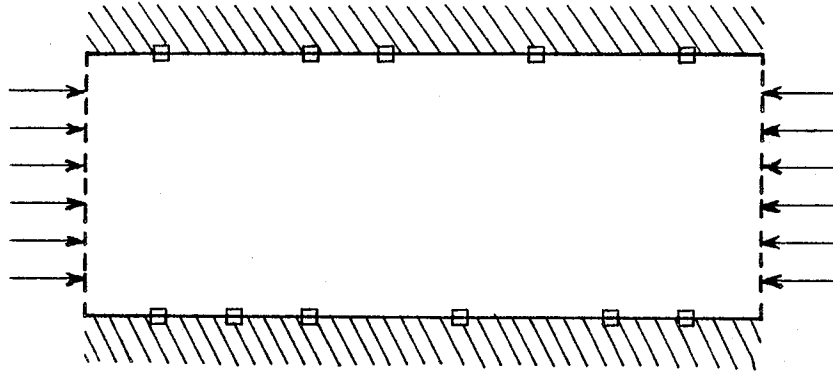
Nous avons vu au cours de la 1ère partie comment est défini un canal biface. Dans le contexte du problème multi-canal apparaît un élément nouveau : des interconnexions peuvent pénétrer à l'intérieur d'un canal biface à travers les deux faces qui ne portent aucun point terminal (fig. 5 a). Nous envisagerons au paragraphe II2 quelles sont les modifications qui doivent être apportées à l'énoncé du problème du canal biface, au modèle d'assignation de pistes et à l'heuristique d'assignation par pistes.

Une cellule de liaison est une surface élémentaire rectangulaire, adjacente à plusieurs canaux bifaces. Lorsqu'une interconnexion chemine à travers plusieurs canaux bifaces, elle traverse une ou plusieurs cellules de liaison.

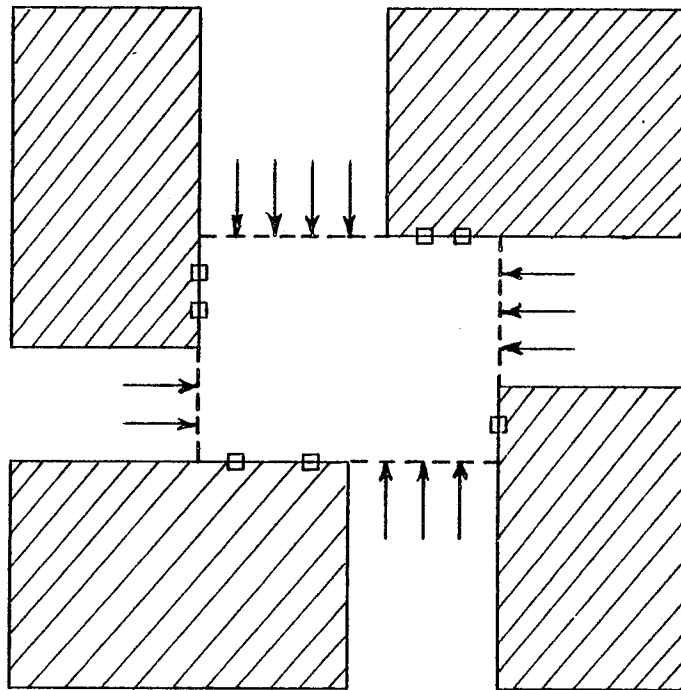
Des interconnexions peuvent pénétrer à l'intérieur d'une cellule de liaison à travers ses quatre faces ; des points terminaux peuvent être répartis sur ses quatre faces (fig. 5 b).

II2 - Décomposition du processus de tracé en tracé global et tracé final

Le processus de tracé débute par la phase de *tracé global*, dont le rôle est de décider quelles seront les surfaces élémentaires empruntées par chacune des interconnexions.



(a) canal biface



(b) cellule de liaison

Figure 5

Toutes les interconnexions sont traitées séquentiellement au cours de cette phase.

Insistons sur le fait que le rôle du tracé global n'est pas d'implanter les interconnexions sous leur forme définitive, mais seulement de décider quelles sont les surfaces élémentaires qu'elles emprunteront. Le résultat d'un tracé global consiste donc, pour chacune des interconnexions, en la liste des surfaces élémentaires empruntées.

Le processus de tracé s'achève par la phase de *tracé final*, dont le rôle est d'implanter les interconnexions sous leur forme définitive. Toutes les surfaces élémentaires sont traitées séquentiellement au cours de cette phase. A l'intérieur de chaque surface élémentaire sont implantées toutes les interconnexions et/ou tous les fragments d'interconnexions qui ont été assignés à cette surface par le tracé global. Evidemment, le tracé final de chaque surface élémentaire devra être effectué de façon à ce que les divers fragments des interconnexions qui cheminent à travers plusieurs surfaces élémentaires soient "raccordés", conformément à la liste d'interconnexion.

Dans tout ce qui suit, lorsque nous utiliserons le terme "tracé" sans préciser s'il s'agit du tracé global ou du tracé final, il s'agira toujours du tracé final.

III - LE TRACE GLOBAL

III - Objectifs

Rappelons le rôle du tracé global : préparer le tracé final, en choisissant les surfaces élémentaires empruntées par chacune des interconnexions. Le tracé global devra donc viser deux types d'objectifs : faisabilité et optimalité du tracé final.

III11 Faisabilité du tracé final

Le tracé final sera faisable si et seulement si chaque surface élémentaire est de taille suffisante pour contenir toutes les interconnexions et/ou tous les fragments d'interconnexions qui lui auront été assignés au cours du tracé global.

Deux types de situation peuvent se présenter, suivant que la taille des surfaces élémentaires est imposée ou non. Si la taille des surfaces élémentaires est imposée, aucune d'elles ne doit recevoir plus d'interconnexions et/ou de fragments d'interconnexions qu'elle ne peut en contenir. Si la taille des surfaces élémentaires n'est pas imposée, chacune d'elles devra être dimensionnée de façon à ce qu'elle puisse contenir toutes les interconnexions et/ou tous les fragments d'interconnexions qui devront l'emprunter.

Dans une approche de type "building blocks", c'est généralement le tracé global qui devra décider des dimensions à donner aux différentes surfaces élémentaires, le placement des blocs à l'intérieur du rectangle englobant étant ensuite modifié en conséquence [Pre 78] [Lau 79] [Sou 81 a]. On se trouvera donc confronté, lors du tracé global, à des surfaces élémentaires de taille non-imposée.

Outre la faisabilité du tracé final, le tracé global devra également viser la minimisation de la surface du rectangle englobant. Ce dernier objectif correspond bien évidemment à un objectif de minimisation de la surface du circuit.

Dans une approche de type réseaux prédifusés, la taille des blocs, la taille du rectangle englobant et la disposition des blocs à l'intérieur du rectangle englobant sont imposés par le choix d'un réseau. Lors du tracé global, on se trouvera donc confronté à des surfaces élémentaires de taille imposée.

Dans une approche de type réseaux précaractérisés, le tracé final est généralement effectué immédiatement après placement des blocs, sans phase préparatoire de tracé global. Nous y reviendrons plus largement (voir § III7).

III12 Optimalité du tracé final

Nous avons déjà rencontré ce type d'objectifs au cours de la 1ère partie (ch II § II). Très classiques en matière de tracé d'interconnexions, ils sont les reflets de divers souhaits ou exigences d'ordre électrique et technologique.

III121 Longueurs des interconnexions

Le tracé global devra viser la minimisation de la longueur de chaque interconnexion (résistance et capacité parasites, probabilité d'apparition d'un défaut de fabrication). Toutefois, la longueur de certaines interconnexions dites *critiques* devra être minimisée en priorité, la vitesse de transmission des signaux par ces interconnexions étant critique pour le bon fonctionnement du circuit. On pourra également se trouver confronté à l'interdiction d'implanter une quelconque interconnexion dont la longueur soit supérieure à une certaine borne fixée à l'avance, d'après des critères électriques et technologiques.

La longueur d'une interconnexion ne peut être calculée exactement au cours de la phase de tracé global, puisque le rôle de cette phase se borne à choisir les surfaces élémentaires empruntées. Une estimation réaliste de la longueur d'une interconnexion peut toutefois être obtenue en superposant une figure rectiligne aux axes de symétrie des surfaces élémentaires que devra emprunter cette interconnexion (fig. 6).

III122 Nombre de passages via

Tout passage via présente une résistance et une capacité parasites non négligeables, et constitue une source non-négligeable d'éventuels défauts de fabrication. Le tracé global devra donc viser la minimisation du nombre de passages via.

A l'intérieur d'un canal biface, le tracé global ne peut influencer sur le nombre de passages via utilisés pour implanter une interconnexion ou un fragment d'interconnexion.

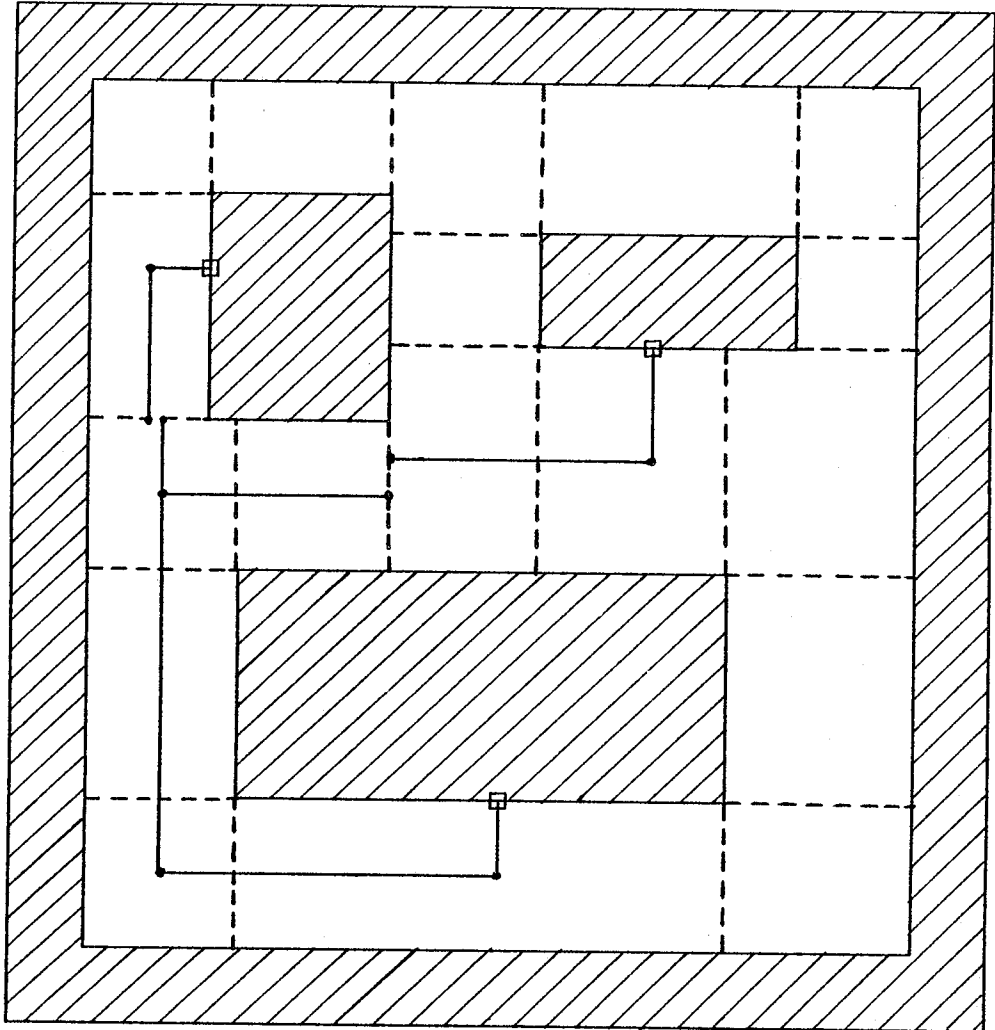


Figure 6

Par contre, lorsqu'une interconnexion traverse une cellule de liaison, le tracé global décide d'un éventuel changement de direction de cette interconnexion. Tous les segments horizontaux étant systématiquement assignés à un même niveau d'interconnexion et tous les segments verticaux à l'autre niveau, à chaque fois qu'une interconnexion change de direction en traversant une cellule de liaison, un passage via sera nécessaire pour exécuter le tracé final de cette interconnexion. Le tracé global devra donc viser la minimisation du *nombre de changements de direction* des interconnexions à la traversée des cellules de liaison.

III123 Niveau préférentiel

Dans certaines technologies, les deux niveaux d'interconnexion présentent des caractéristiques électriques très disproportionnées. C'est, par exemple, le cas lorsque l'un des niveaux est de l'aluminium, l'autre niveau du silicium polycristallin. La vitesse de transmission d'un signal par un segment d'aluminium est très supérieure à la vitesse de transmission du même signal par un segment de silicium polycristallin (dans un rapport de l'ordre de 1000 [Mea 80]). Tous les segments de même direction étant systématiquement assignés à un même niveau, il s'en suivra des vitesses de transmission des signaux très disproportionnées suivant la direction horizontale et suivant la direction verticale. On dit alors qu'il existe un *niveau préférentiel*, celui qui permet la plus grande vitesse de transmission des signaux, ou une *direction privilégiée*.

En présence d'un niveau préférentiel, la vitesse de transmission d'un signal par une interconnexion n'est plus seulement fonction de la longueur de cette interconnexion et de son nombre de passages via, mais également de son rapport longueur totale des segments assignés au niveau préférentiel/longueur totale des segments assignés au niveau non-préférentiel. Le tracé global devra donc tenter de maximiser ce rapport pour chaque interconnexion, la priorité étant accordée aux interconnexions critiques. Ce rapport pourra être estimé suivant le même principe que la longueur des interconnexions, en superposant des figures rectilignes aux axes de symétrie des surfaces élémentaires empruntées.

III2 - Mesures du trafic

III21 Définition

Soit une surface élémentaire et soit un ensemble d'interconnexions et/ou de fragments d'interconnexions devant emprunter cette surface. Nous appellerons *mesure du trafic* à travers cette surface élémentaire une mesure permettant :

(i) soit de dimensionner la surface de façon à ce que le tracé final de toutes les interconnexions soit faisable.

(ii) soit de déterminer si le tracé final de toutes les interconnexions et/ou tous les fragments d'interconnexions est faisable ou non pour un dimensionnement donné de la surface.

Une telle mesure du trafic à travers chaque surface élémentaire est évidemment nécessaire pour atteindre l'objectif de faisabilité du tracé final.

II22 Canaux bifaces

Nous avons vu dans la 1ère partie que la capacité minimale d'un problème de canal biface est minorée par $\omega(G_t)$, cardinalité d'une clique maximale du graphe $G_t(T, \Gamma_t)$. La valeur de $\omega(G_t)$ peut être calculée aisément à l'aide de la *fonction densité*, sans qu'il soit besoin de construire le graphe G_t .

III221 Fonction densité

Soit un problème de canal biface et supposons que le canal soit horizontal, les faces gauche et droite étant délimitées par les abscisses X_{\min} et X_{\max} . Soient $P = (T)$ le problème d'assignation de pistes associé, J la famille d'intervalles associée à l'ensemble T des troncs.

On appelle *fonction densité* une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , qui à toute abscisse x du canal ($X_{\min} \leq x \leq X_{\max}$) fait correspondre le nombre d'intervalles de J intersectant avec une ligne verticale d'abscisse x , appelée *ligne de coupe*. Nous noterons $d(x)$ cette fonction.

A titre d'exemple, le tableau I donne les valeurs prises par la fonction densité pour le problème de canal biface de la figure 7.

Remarquons que la notion de fonction densité, nombre d'interconnexions franchissant une ligne de coupe, est très générale. En particulier, la fonction densité sert de mesure de trafic à toute une catégorie d'heuristiques de placement [Bre 77] [Pre 78].

III222 Calcul de $\omega(G_t)$

Soit un problème de canal biface. Supposons que le canal soit horizontal et soit $d(x)$ la fonction densité associée à ce problème.

Supposons que pour une abscisse donnée x du canal ($X_{\min} \leq x \leq X_{\max}$), la fonction densité prenne la valeur k ($k > 0$). Il existe alors k intervalles de J qui intersectent avec une ligne de coupe verticale d'abscisse x . Soient I_1, I_2, \dots, I_k ces k intervalles et soient t_1, t_2, \dots, t_k les k troncs de T correspondants.

Puisque les intervalles I_1, I_2, \dots, I_k intersectent avec une ligne de coupe verticale d'abscisse x , deux quelconques intervalles pris dans l'ensemble $\{I_1, I_2, \dots, I_k\}$ intersectent. Par conséquent, dans le graphe G_t , les sommets représentant les troncs t_1, t_2, \dots, t_k forment une clique de cardinalité k .

De cette propriété, il découle immédiatement que la valeur maximale prise par la fonction densité à l'intérieur du canal est égale à $\omega(G_t)$, cardinalité d'une clique maximale du graphe G_t .

Par *densité d'un canal*, on désignera la valeur maximale prise par la fonction densité à l'intérieur de ce canal, valeur qui est donc égale au mino- rant $\omega(G_t)$ de la capacité minimale. Par *densité locale* en x , on désignera la valeur $d(x)$.

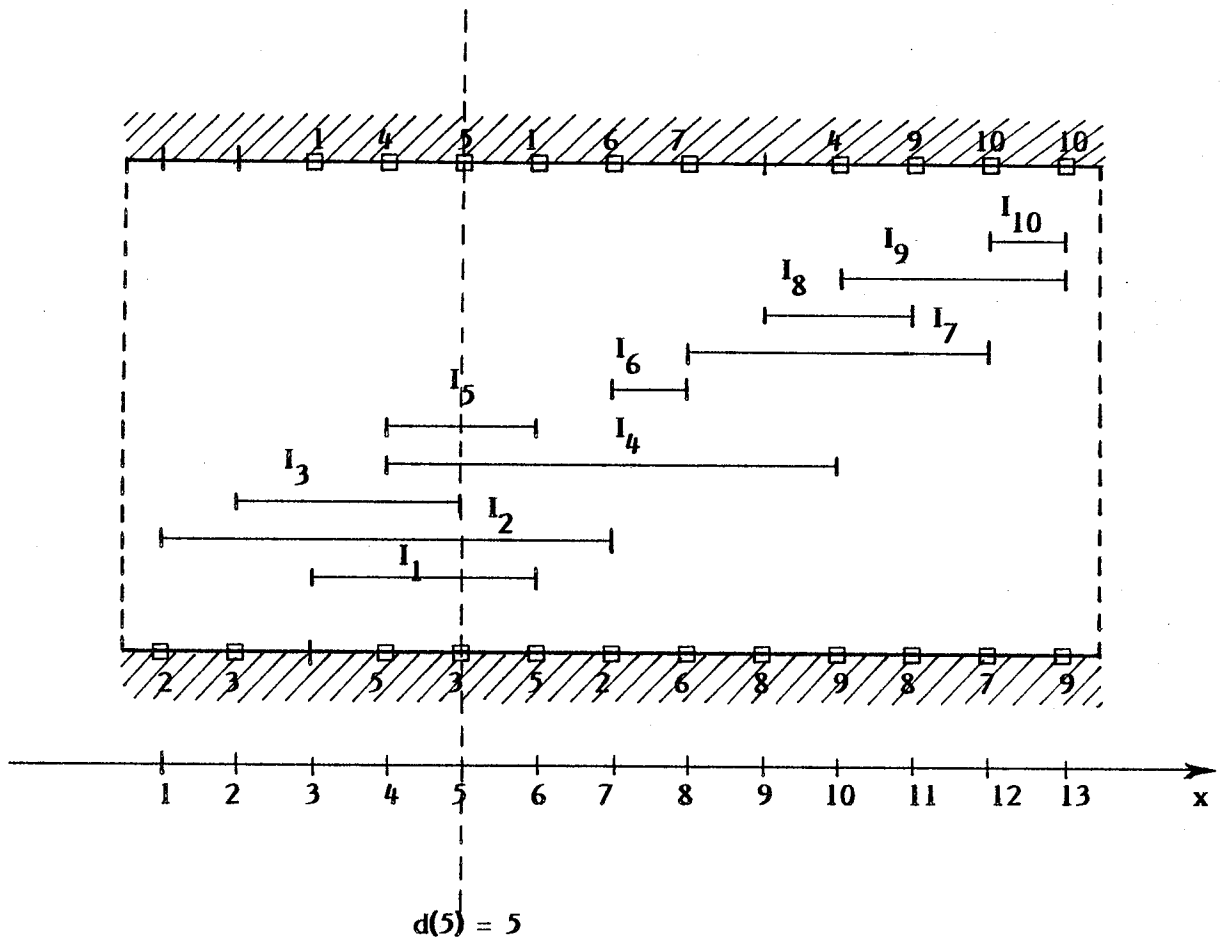


Figure 7

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
d(x)	1	2	3	5	5	4	3	3	3	4	3	3	2

Tableau I

III223 Mesure du trafic

La fonction densité fournit une excellente mesure du trafic à travers un canal biface. Toutefois afin de minimiser le risque d'un échec du tracé final, on s'attachera généralement à minimiser le nombre d'abscisses ou d'ordonnées pour lesquelles la fonction densité passe par son maximum global [Deu 76] [Per 76].

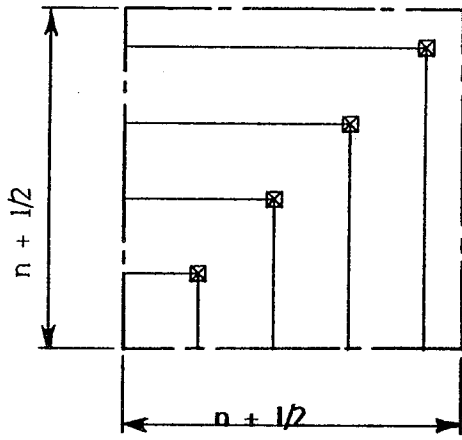
Du point de vue de la complexité des heuristiques de tracé global, la fonction densité est relativement peu coûteuse. Elle ne nécessite, pour chaque canal biface, que le stockage de $L + 1$ entiers, L étant la longueur du canal. Lorsqu'une nouvelle interconnexion ou un nouveau fragment d'interconnexion est assigné à un canal biface donné, supposons le horizontal, il suffit de calculer les deux abscisses $x_{\min}(I_i)$ et $x_{\max}(I_i)$ délimitant l'intervalle associé I_i , puis d'incrémenter de 1 la valeur de la fonction densité pour toute abscisse x comprise entre $x_{\min}(I_i)$ et $x_{\max}(I_i)$.

III23 Cellules de liaison

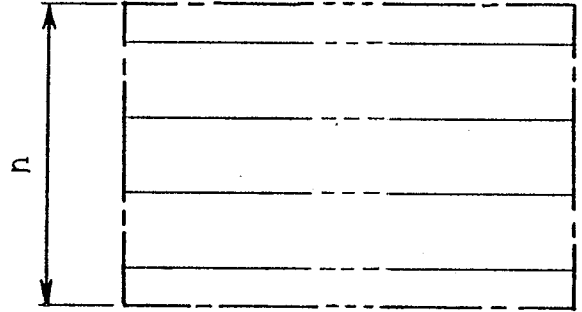
Nous n'avons connaissance d'aucune publication portant sur la mesure du trafic à travers une cellule de liaison. Nous indiquerons, sans l'avoir expérimenté, un principe de mesure du trafic à travers une cellule de liaison n'admettant aucun point terminal.

Soit une cellule de liaison n'admettant aucun point terminal et soient I , S , G et D quatre ensembles contenant les numéros des interconnexions qui doivent franchir les faces inférieure, supérieure, gauche et droite. Nous supposerons que chaque interconnexion doit franchir deux des faces de la cellule, et seulement deux.

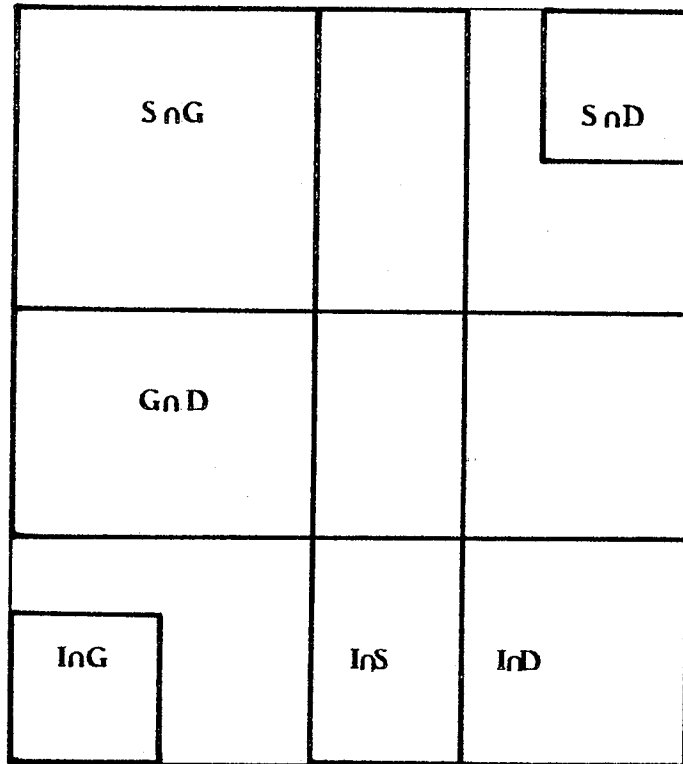
A l'intérieur de cette cellule de liaison, on peut distinguer six flux d'interconnexions : quatre flux franchissant deux faces perpendiculaires de la cellule ($I \cap G$, $I \cap D$, $S \cap G$, $S \cap D$), deux flux franchissant deux faces parallèles ($I \cap S$, $G \cap D$).



(a)



(b)



(c)

Figure 8

Le tracé final d'un flux franchissant deux faces perpendiculaires et composé de n interconnexions peut être effectué à l'intérieur d'un carré de côté $n + 1/2$ (fig. 8 a) ; le tracé final d'un flux franchissant deux faces parallèles et composé de n interconnexions peut être effectué à l'intérieur d'un rectangle dont l'un des côtés a pour longueur n (fig. 8 b). La surface occupée par le tracé final des six flux d'interconnexions est minimale lorsque ces flux sont organisés comme représentés à la figure 8 c. Les dimensions minimales d'une cellule de liaison capable de les contenir tous sont donc

$$X_{\min} = \max \{ |I \cap G|, |S \cap G| \} + |I \cap S| + \max \{ |I \cap D|, |S \cap D| \} + 1$$

$$Y_{\min} = \max \{ |I \cap G|, |I \cap D| \} + |G \cap D| + \max \{ |S \cap G|, |S \cap D| \} + 1$$

Un exemple d'application de cette mesure de trafic est donné à la figure 9.

Cette mesure de trafic ne fournira qu'une minoration des dimensions d'une cellule de liaison. Le tracé des cellules de liaison est en effet effectué dans le contexte multi-canal et la disposition des points de franchissement des frontières canaux bifaces/cellules de liaison par les interconnexions est alors imposée par le tracé final des canaux bifaces (voir § IV1).

Pour conclure ce paragraphe consacré aux mesures de trafic, signalons l'existence de mesures basées sur des considérations statistiques : longueur moyenne des interconnexions, nombre moyen de points terminaux par interconnexion ... [Hell 77] [Don 81].

L'imprécision relative de ces méthodes est compensée par une moindre complexité de mise en oeuvre. Elles sont destinées à l'établissement de plans de masse ("building blocks", réseaux précaractérisés) ou à des études de faisabilité (réseaux prédiffusés).

$$I = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$S = \{ 3, 4, 7, 8, 9, 10 \}$$

$$G = \{ 1, 2, 7, 8, 9, 11, 12, 13 \}$$

$$D = \{ 5, 6, 10, 11, 12, 13 \}$$

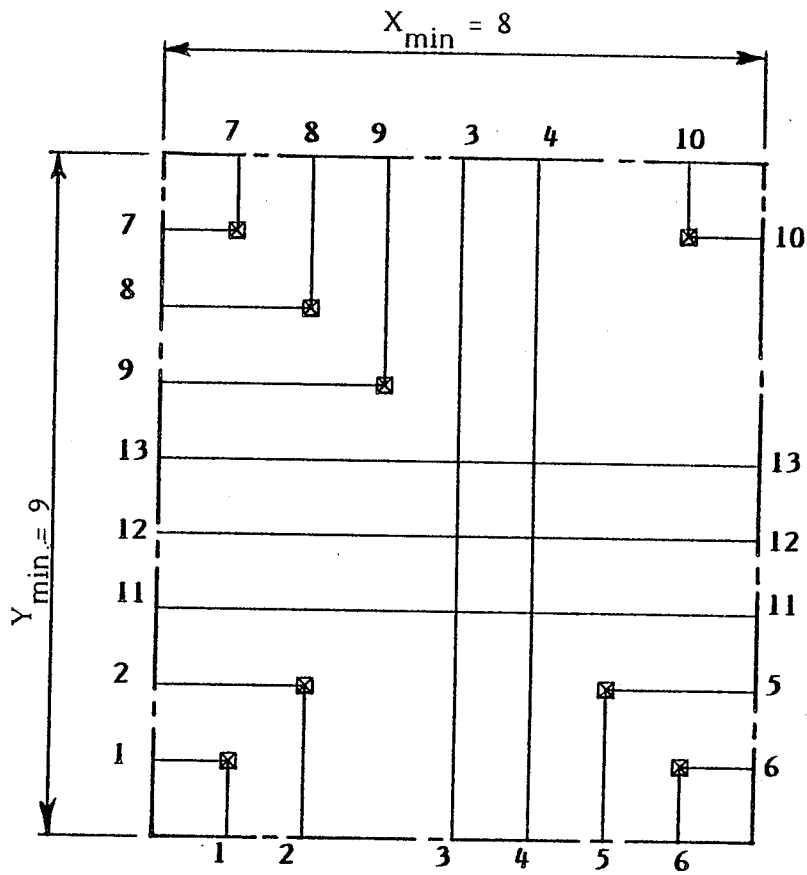


Figure 9

III3 - Pénalisation d'utilisation des surfaces - Coût d'un tracé global

Les différents objectifs du tracé global ne pourront généralement pas être atteints simultanément. Des priorités différentes devront donc être accordées à ces différents objectifs.

III31 Pénalisation d'utilisation des surfaces

L'objectif de faisabilité du tracé final est évidemment prioritaire sur tous les autres. Afin de minimiser le risque d'un échec du tracé final, on évitera généralement que certaines surfaces élémentaires reçoivent un trafic maximal, alors que d'autres demeurent quasi-inoccupées. On cherchera plutôt à distribuer les différents flux d'interconnexions de façon homogène entre les différentes surfaces élémentaires, de sorte qu'il n'existe aucune surface élémentaire dont le tracé final soit critique. Certaines interconnexions seront détournées vers des surfaces faiblement occupées, afin d'éviter des surfaces déjà encombrées.

L'homogénéité de distribution des interconnexions peut être obtenue en infligeant aux interconnexions des *pénalisations d'utilisation des surfaces élémentaires*. Plus une interconnexion donnée i compromet les chances de succès du tracé final d'une surface élémentaire donnée S , plus la pénalisation infligée à l'interconnexion i pour l'utilisation de la surface élémentaire S sera lourde. Lorsqu'une interconnexion donnée i *sature* une surface élémentaire donnée S , c'est-à-dire lorsqu'elle rend infaisable son tracé final, la pénalisation infligée à l'interconnexion i pour l'utilisation de la surface élémentaire S sera infinie : l'interconnexion i ne peut pas emprunter la surface élémentaire S .

Ce sont bien sûr les mesures de trafic qui servent de variables au calcul de ces pénalisations. Par exemple, considérons un canal biface horizontal S , de capacité imposée c et de longueur L . A tout instant, soit d la densité de S ($0 \leq d \leq c$) et soit nd le nombre d'abscisses pour lesquelles la densité locale est égale à d ($0 \leq nd \leq L + 1$).

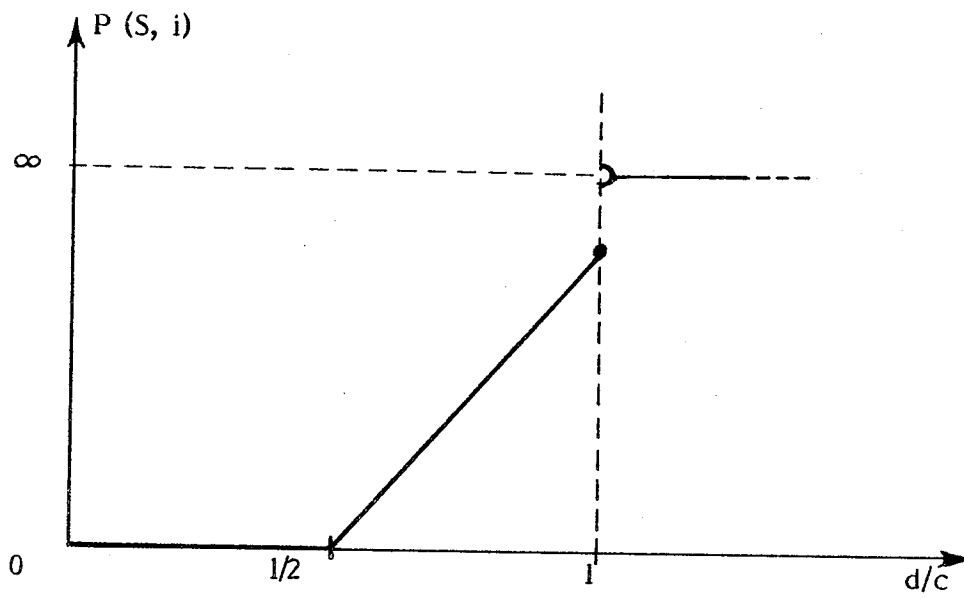


Figure 10

Nous appellerons *taux d'occupation* du canal S la variable $\frac{d}{c}$ ($0 \leq \frac{d}{c} \leq 1$).

A un instant donné, soit i l'interconnexion courante et soient $\Delta d(i)$ l'accroissement de la valeur de d que provoque son assignation au canal S ($0 \leq \Delta d(i) \leq 1$), $\Delta nd(i)$ l'accroissement de la valeur de nd ($0 \leq \Delta nd(i) \leq L+1$). La pénalisation $p(S, i)$ d'utilisation du canal S par l'interconnexion i sera calculée comme une fonction de $\frac{d}{c}$, $\Delta d(i)$ et $\Delta nd(i)$:

$$p(S, i) = f\left(\frac{d}{c}, \Delta d(i), \Delta nd(i)\right)$$

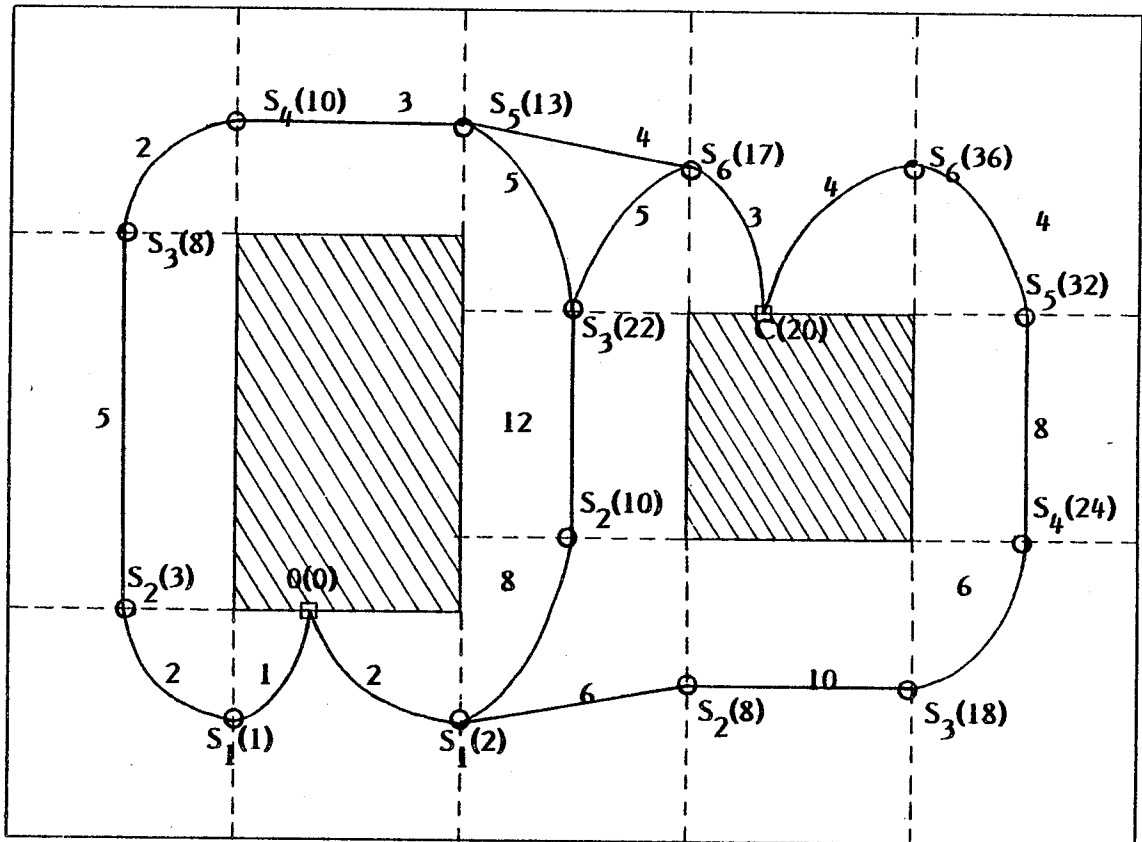
Si le taux d'occupation $\frac{d}{c}$ est égal à 1 et si $\Delta d(i)$ est égal à 1, $p(S, i)$ sera infinie. L'interconnexion i sature le canal S, elle ne peut l'emprunter.

La figure 10 donne l'allure typique d'une fonction $p(S, i)$ en fonction du taux d'occupation $\frac{d}{c}$ (d'après [Sou 81 a]).

III32 Coût d'un tracé global

A l'utilisation d'une surface élémentaire donnée S par une interconnexion donnée i , on peut associer un vecteur coût $\vec{c}(S, i)$ dont les différentes composantes sont, d'une part la pénalisation $p(S, i)$ contrôlant la faisabilité du tracé final de S, d'autre part diverses estimations de l'optimalité du tracé final de i à l'intérieur de S (longueur totale des segments, nombre de passages via, rapport de la longueur totale des segments assignés au niveau préférentiel et de la longueur totale des segments assignés au niveau non-préférentiel...).

Les différentes composantes du vecteur $\vec{c}(S, i)$ constituent les variables d'une fonction d'interprétation dont la valeur est égale à $c(S, i)$, coût d'assignation positif ou nul de l'interconnexion i à la surface élémentaire S. La fonction d'interprétation sera évidemment définie de façon à établir les priorités voulues entre les différents objectifs du tracé global.



$0(0)$ = point origine, de coût nul

$C(c)$: point cible, atteint avec le coût c

$S_p(c_p)$: point source généré à l'issue de la $p^{\text{ème}}$ phase de propagation de l'onde, avec le coût c_p

Les chiffres portés au-dessus des lignes de propagation de l'onde sont les coûts $c(S, i)$.

Figure 11

Le *coût du tracé global* d'une interconnexion i sera défini comme la somme des coûts d'assignation de i à chacune des surfaces élémentaires empruntées par i , le *coût du tracé global* d'un circuit comme la somme des coûts de chacune des interconnexions.

III4 - Heuristiques pour le tracé global

La plupart des heuristiques pour le tracé global opèrent suivant un principe qui est une généralisation de l'heuristique de Lee [Lee 61]. Cette généralisation est connue sous l'appellation d'*heuristique de Lee à coûts arbitraires*. [Ake 72] [Nan 78] [Sou 81 a].

Soit i l'interconnexion courante. La recherche des surfaces élémentaires qu'empruntera l'interconnexion i s'effectue en propageant une onde à partir de l'un de ses points terminaux, que nous appellerons *point origine*. Nous appellerons *points cibles* tous les autres points terminaux de l'interconnexion i .

A partir de la surface élémentaire dans laquelle se trouve le point origine, l'onde est propagée vers toutes les surfaces élémentaires adjacentes, générant ainsi un certain nombre de points que nous appellerons *points sources* (fig. 11). L'onde est ensuite propagée à partir de chaque point source vers toutes les surfaces élémentaires adjacentes, générant ainsi des points sources pour la prochaine phase d'expansion de l'onde, etc. Nous dirons qu'un point source est *actif* lorsqu'il est situé sur le front de l'onde.

Au point origine de i est associé un coût nul. A chaque point source S_p généré à l'issue de la $p^{\text{ème}}$ phase de propagation de l'onde est associé un coût positif ou nul c_p . Lorsque l'onde est propagée à travers une surface élémentaire S d'un point source S_p vers un nouveau point source S_{p+1} , on associe à ce nouveau point source le coût :

$$c_{p+1} = c_p + c(S, i).$$

$c(S, i)$ étant le coût d'assignation de l'interconnexion i à la surface élémentaire S .

Un même point source peut être atteint plusieurs fois, à l'issue de différentes phases de propagation de l'onde. Soit un point source S_p atteint à l'issue de la $p^{\text{ème}}$ phase de propagation de l'onde avec un coût c_p et supposons que ce même point source soit atteint une nouvelle fois à l'issue de la $(p+n)^{\text{ème}}$ phase de propagation avec un coût c_{p+n} . Si c_{p+n} est strictement inférieur à c_p , alors le point source inactif S_p de coût c_p est remplacé par le point source actif S_{p+n} de coût c_{p+n} . Sinon, S_p demeure inactif et son coût reste inchangé.

Le processus de propagation de l'onde s'arrête lorsqu'un point cible a été atteint et lorsque tous les points sources actifs ont reçu un coût strictement supérieur au coût avec lequel a été atteint ce point cible.

Un retour arrière est ensuite effectué du point cible atteint vers le point origine, afin d'identifier le chemin de moindre coût.

Si l'interconnexion admet un nombre de points terminaux supérieur à 2, une fois interconnectée la première paire de points terminaux, un coût nul est associé à ces deux points ainsi qu'à tous les points sources situés le long du chemin. Tous ces points deviennent autant de points origines, à partir desquels l'onde est simultanément propagée vers les points cibles. On favorise ainsi l'implantation des interconnexions sous la forme d'arbres de Steiner (apparition de points de branchement autres que les points terminaux).

III5 - Tracé global itératif

Une stratégie efficace consiste à effectuer le tracé global en deux phases.

Au cours de la première phase, le tracé global est effectué sans pénalisation d'utilisation des surfaces élémentaires.

N'entreront dans le calcul des coûts de tracé global que des critères d'optimalité du tracé final. Le but de cette première phase est de mettre en évidence les surfaces élémentaires critiques (goulots d'étranglement), ainsi qu'un ordre de traitement des interconnexions.

Au cours de la seconde phase, des pénalisations d'utilisation des surfaces élémentaires seront introduites, de façon à éviter toute saturation et à distribuer les interconnexions de façon homogène. Des pénalisations plus lourdes seront infligées aux interconnexions empruntant des surfaces élémentaires révélées comme critiques au cours de la phase précédente. Cette deuxième phase pourra comporter plusieurs itérations avec adaptation progressive des pénalisations infligées pour l'utilisation des différentes surfaces élémentaires, jusqu'à obtenir un compromis satisfaisant entre l'homogénéité de distribution des interconnexions et l'optimalité du tracé final.

III6 - Difficultés de conception

Les heuristiques de tracé global sont simples dans leur principe et d'une implémentation relativement aisée. Comme on peut s'en douter, les principales difficultés résident dans la définition des fonctions de pénalisation et dans leur gestion dynamique au cours des différentes itérations du tracé global, ainsi que dans la définition d'une fonction d'interprétation du vecteur coût appropriée à un contexte donné. L'efficacité des outils de tracé global dépend dans une large mesure de ces différents éléments ; leur conception fait évidemment largement appel à l'expérimentation.

III7 - Un cas particulier, le problème des réseaux précaractérisés

Dans une approche de type réseaux précaractérisés, le tracé final est généralement effectué immédiatement après le placement, sans phase préparatoire de tracé global. Le concept de tracé global fait place au concept de cellule de traversée [Mat 72].

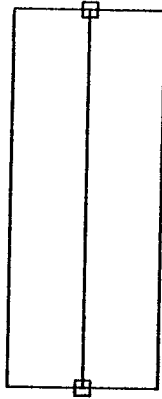


Figure 12

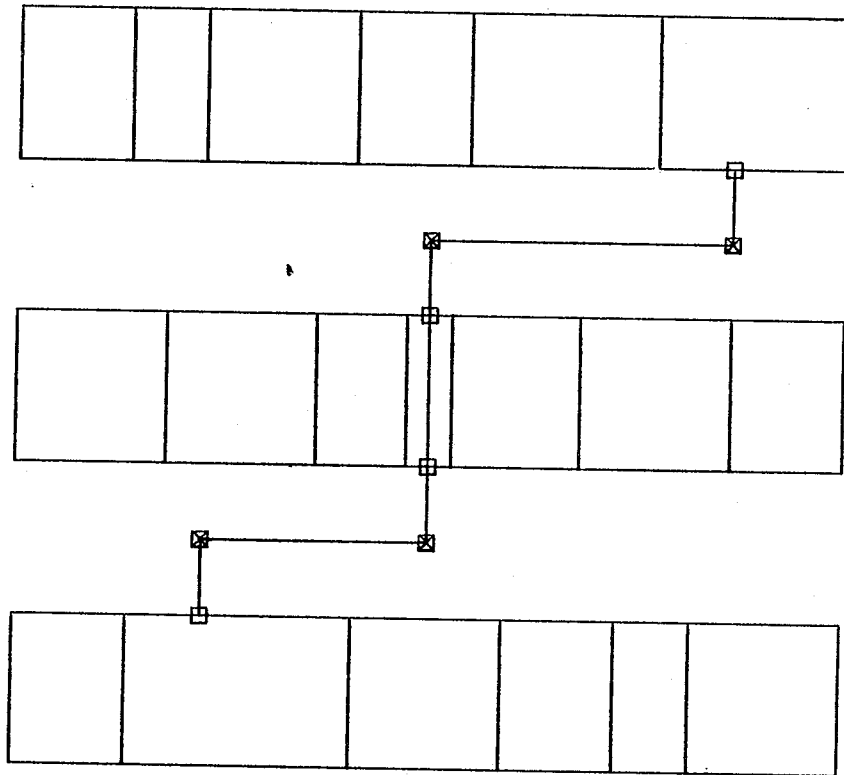


Figure 13

On appellera *cellule de traversée* une primitive contenant un segment assigné au niveau correspondant à sa direction et muni d'un point terminal à chaque extrémité (fig. 12). La cellule de traversée est compatible, par sa structure et ses dimensions, avec la bibliothèque de primitives ; elle sera décrite et manipulée comme n'importe quel élément de cette bibliothèque. Assemblée dans un bloc avec d'autres instances d'éléments de la bibliothèque, chaque instance de la cellule de traversée permet à une interconnexion de traverser ce bloc (fig. 13).

Le nombre et l'emplacement des instances de la cellule de traversée seront déterminés au cours du placement [Sch 76].

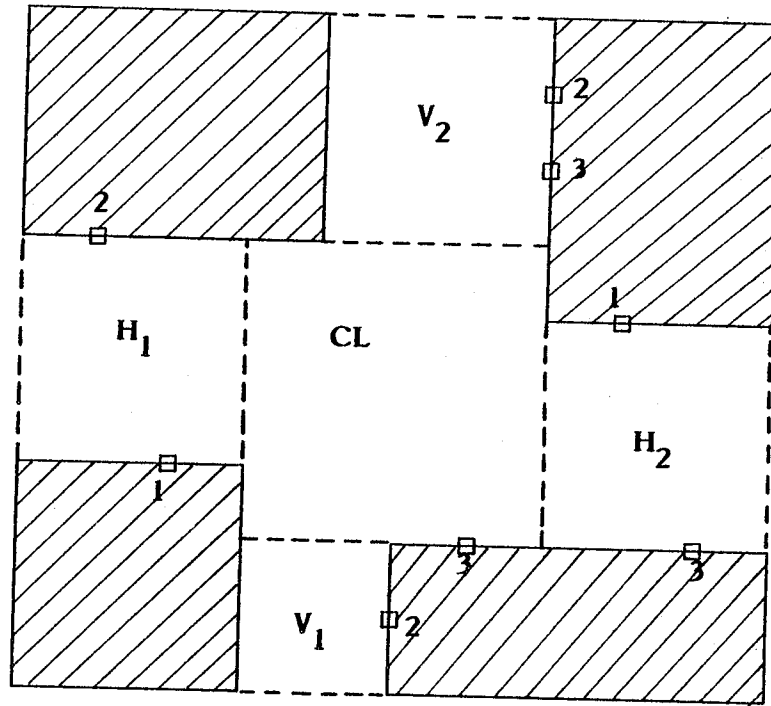
L'un des principaux objectifs sera de minimiser la capacité des canaux bifaces horizontaux séparant les blocs les uns des autres, afin de minimiser la surface du rectangle englobant. La fonction densité fournira une excellente mesure du trafic à travers ces canaux bifaces.

IV - LE TRACE FINAL

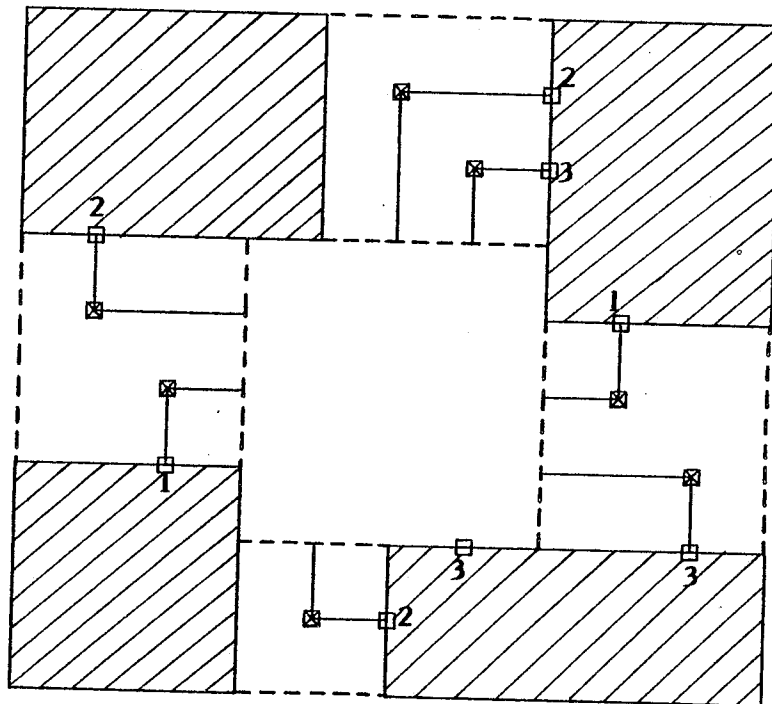
IVI - Principe

Au cours du tracé final, toutes les surfaces élémentaires d'interconnexion sont traitées séquentiellement. A l'intérieur de chaque surface élémentaire sont implantés sous leur forme définitive toutes les interconnexions et/ou tous les fragments d'interconnexions qui lui ont été assignés au cours du tracé global.

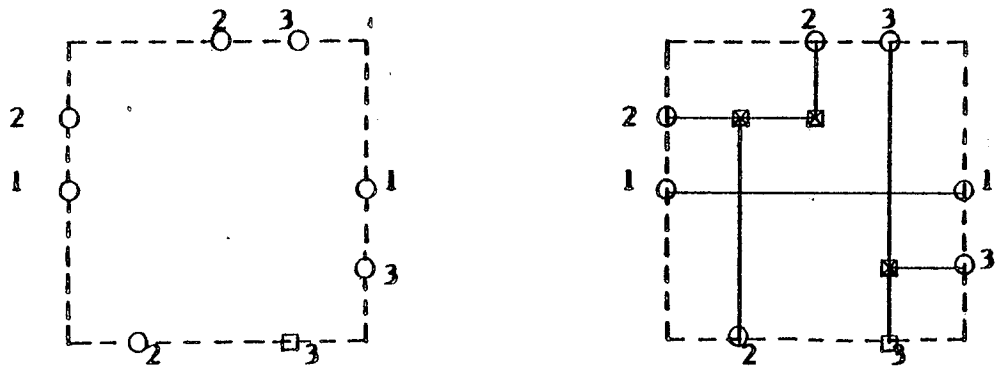
Le processus de tracé final peut être décomposé en quatre phases consécutives : spécification du tracé final des canaux bifaces, tracé final des canaux bifaces, spécification du tracé final des cellules de liaison, tracé final des cellules de liaison. Nous illustrerons ces quatre phases par le problème de la figure 14 a.



(a)



(b)

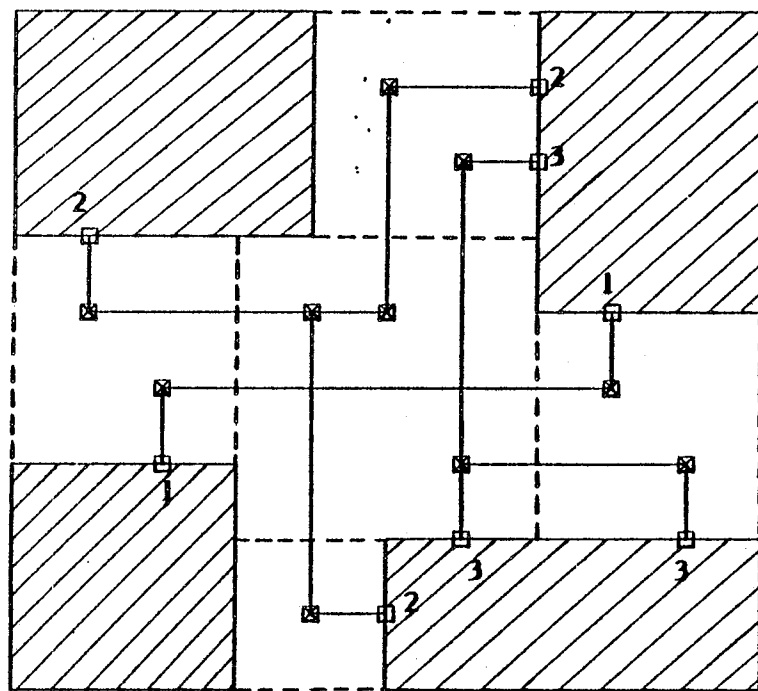


□ Points terminaux d'accès aux blocs

○ Points terminaux de raccord

(c)

(d)



(e)

Figure 14

Au cours de la phase de *spécification du tracé final des canaux bifaces* est spécifié le tracé final de chaque canal biface.

Remarquons que cette phase ne peut être menée à bien qu'une fois achevé le tracé global. Considérons par exemple un canal biface horizontal. Les listes d'interconnexion $I(x)$ et $S(x)$ des faces inférieure et supérieure peuvent être établies dès le placement achevé, mais les numéros des interconnexions franchissant les faces gauche et droite ne seront connus qu'une fois achevé le tracé global.

Au cours de la phase de *tracé final des canaux bifaces* est effectué le tracé final de chaque canal biface (fig. 14 b).

Au cours de la phase de *spécification du tracé final des cellules de liaison* est spécifié le tracé final de chaque cellule de liaison.

A l'issue de la phase précédente, des segments implantés à l'intérieur des canaux bifaces se terminent sur les frontières canaux bifaces/cellules de liaison, définissant ainsi des points répartis sur le périmètre des cellules de liaison. Chacun de ces points devient alors un point terminal d'une cellule de liaison, point terminal auquel on associera le numéro d'interconnexion du segment qui le définit (fig. 14 c).

Les points terminaux ainsi définis diffèrent toutefois par leur fonction des points terminaux que nous avons rencontrés jusqu'à maintenant : ils permettent de raccorder les différents fragments des interconnexions empruntant plusieurs surfaces élémentaires, et non plus d'accéder aux éléments actifs contenus dans les blocs. Nous dirons que ce sont des *points terminaux de raccord*, afin de les distinguer des *points terminaux d'accès aux blocs*. Tout point terminal de raccord repose sur une frontière séparant deux surfaces élémentaires, alors que tout point terminal d'accès aux blocs repose sur une frontière bloc/surface élémentaire. Nous retrouverons ces notions de point terminal de raccord et de point terminal d'accès aux blocs au cours du chapitre suivant.

Le tracé final de chaque cellule de liaison pourra être spécifié par quatre listes d'interconnexion $I(x)$, $S(x)$, $G(y)$ et $D(y)$, une liste d'interconnexion étant associée à chacune des faces de la cellule.

Au cours de la phase de *tracé final des cellules de liaison* est effectué le tracé final de chaque cellule de liaison (fig. 14 d). Cette phase achève le tracé final de la surface d'interconnexion (fig. 14 e).

IV2 - Tracé final des canaux bifaces

Dans le contexte du problème multi-canal, des interconnexions peuvent pénétrer à l'intérieur d'un canal biface à travers les deux faces qui ne portent aucun point terminal. Nous envisagerons successivement les modifications qui doivent être apportées à la spécification d'un problème de canal biface, au modèle d'assignation de pistes et à l'heuristique d'assignation par pistes. Afin d'alléger l'exposé, nous nous placerons dans l'hypothèse d'un canal horizontal.

Aux listes d'interconnexion $I(x)$ et $S(x)$ des faces inférieure et supérieure du canal, on pourra adjoindre deux ensembles G et D contenant les numéros des interconnexions qui franchissent les faces gauche et droite.

Aux ensembles $T_I(t_i)$ et $T_S(t_i)$ décrivant chaque tronç t_i de T , il suffira d'adjoindre deux abscisses $x_{\min}(t_i)$ et $x_{\max}(t_i)$ délimitant l'intervalle I_i associé.

A titre d'exemple, la figure 15 représente l'ensemble T des troncs associé au problème de canal biface spécifié par le tableau II.

Considérons l'heuristique d'assignation par pistes et supposons que la recherche des sous-troncs à assigner à la piste courante s'effectue suivant les x croissants.

$$X_{\min} = 0 - X_{\max} = 10$$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I(x)	1	6	0	0	7	4	5	0	1
S(x)	0	0	2	4	1	6	8	0	8

$$G = \{ 2, 3, 6, 7 \}$$

$$D = \{ 3, 5, 6 \}$$

Tableau II

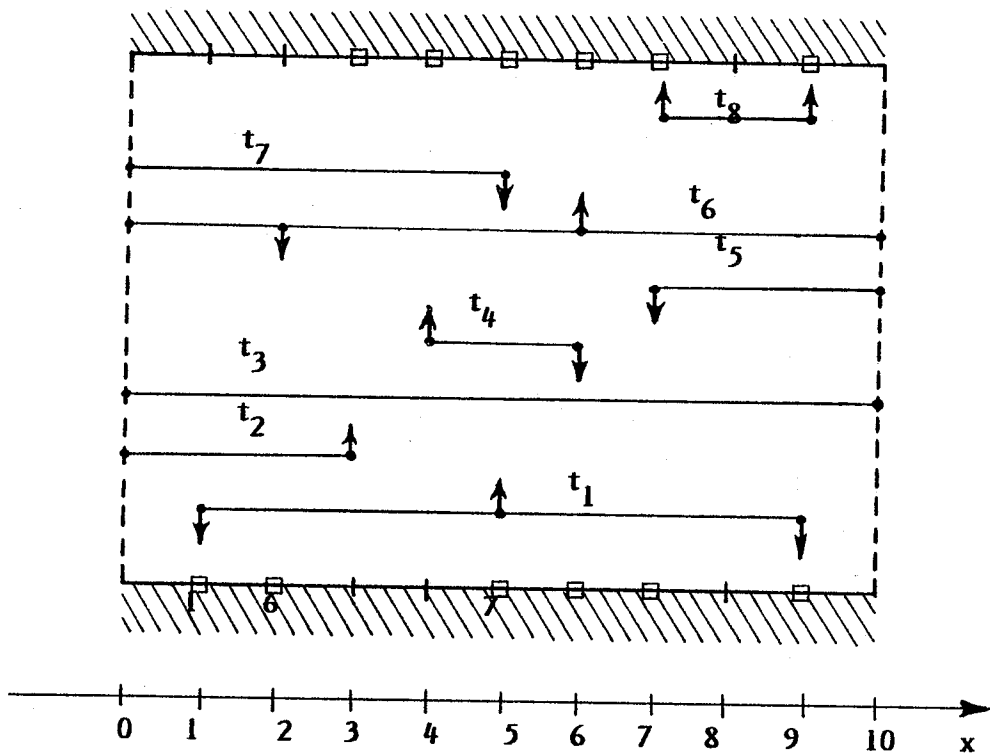


Figure 15

Lorsque débute le traitement de la piste courante, le sous-tronc de départ courant est obtenu en recherchant dans l'ensemble S_{na} des sous-troncs non-encore assignés un élément dont l'extrémité gauche soit minimale et dont l'assignation à la piste courante n'entraîne pas la violation des contraintes de non-recouvrement des branches. Lorsque l'ensemble G est vide — c'est l'hypothèse faite au cours de la 1ère partie — cet élément est toujours unique. Lorsque G est non vide, le nombre d'éléments satisfaisant ces conditions est inférieur ou égal à $|G|$, et peut donc s'avérer supérieur à 1. Dans ce cas, un choix devra être effectué parmi les différents sous-troncs de départ potentiels.

IV3 - Tracé final des cellules de liaison

Nous appellerons *problème de la cellule de liaison* le problème du tracé final d'une cellule de liaison. La formulation de ce problème est en tout point semblable à la formulation que nous avons donné du problème du canal biface au cours de la 1ère partie, à ceci près que des points terminaux sont cette fois répartis sur les quatre faces du rectangle délimitant la surface d'interconnexion. Le problème de la cellule de liaison pourrait donc être qualifié de *problème du canal quadri-face*.

Le problème de la cellule de liaison est plus difficile que le problème du canal biface, des points terminaux pouvant être répartis sur les quatre faces. Il est toutefois moins difficile que le problème général du tracé d'interconnexions : la surface d'interconnexion est rectangulaire et ne présente aucun obstacle interne, les points terminaux sont tous répartis sur son périmètre.

Au premier abord, l'heuristique de Lee peut sembler bien adaptée à la résolution de ce problème : la surface d'interconnexion est faible, le nombre de points à interconnecter est faible. En réalité, il n'en est rien.

L'heuristique de Lee implante séquentiellement les différentes interconnexions, sans considération de faisabilité du tracé des interconnexions non-encore implantées. L'accès aux points terminaux de l'interconnexion courante s'avère ainsi fréquemment bloqué par les interconnexions déjà implantées.

Le problème de la cellule de liaison n'a été mis en évidence que récemment [Sou 81]. Toutefois, des heuristiques appropriées ont d'ores et déjà été proposées [Hsu 82] [Riv 82] [Sup 82] [Bur 83a].

V - DISCUSSION

La stratégie que nous venons de présenter permet de décomposer le problème multi-canal en un ensemble de sous-problèmes, qui sont moins complexes et qui peuvent être résolus indépendamment : c'est là tout son intérêt. Toutefois, le problème multi-canal est un seul et unique problème. Sa décomposition en sous-problèmes résolus indépendamment à partir d'informations partielles pose de sérieuses difficultés de "raccord", d'"interfaçage" entre sous-problèmes.

Si la décomposition du processus de tracé en tracé global et tracé final se révèle très efficace, il n'en va pas de même pour le découpage de la surface d'interconnexion.

VI - Décomposition du processus de tracé en tracé global et tracé final

Avec les densités d'intégration actuelles, l'exécution du tracé final immédiatement après le placement et à l'aide d'heuristiques "gloutonnes" conduirait immanquablement à l'échec. La phase de tracé global permet d'appréhender et de contrôler la topologie des interconnexions ; les différents flux d'interconnexions peuvent être distribués entre les différentes surfaces élémentaires, de façon à éviter la formation de goulots d'étranglement.

C'est pourquoi la majorité des stratégies de résolution du problème multi-canal adoptent la décomposition du processus de tracé en tracé global et tracé final.

V2 - Découpage de la surface d'interconnexion

Le tracé final se heurte à de sérieuses difficultés, qui trouvent leur source dans le découpage de la surface d'interconnexion.

Au cours de la phase de tracé final, tous les canaux bifaces sont d'abord traités, puis toutes les cellules de liaison. Lorsqu'est effectué le tracé final d'un canal biface, on ne dispose pour effectuer ce tracé que d'informations ayant une portée strictement limitée à ce canal. Certaines interconnexions empruntant le canal franchissent les deux faces qui ne portent aucun point terminal et l'on ne dispose alors d'aucune information sur leur cheminement à l'extérieur du canal. Le tracé d'un canal biface ne peut donc être effectué qu'en fonction de critères d'*optimalité locale*, c'est-à-dire d'optimalité du tracé à l'intérieur du canal et seulement à l'intérieur du canal. Typiquement, la stratégie de tracé final que nous venons de décrire conduit à l'optimalité locale du tracé des canaux bifaces, mais pas à l'*optimalité globale*, c'est-à-dire à l'optimalité multi-canal.

La manifestation la plus flagrante de la non-optimalité globale du tracé est sans doute le phénomène de *hachage des interconnexions* qui doivent traverser une cellule de liaison de part en part.

Considérons par exemple la figure 16. L'exécution du tracé final des canaux bifaces horizontaux en fonction de critères d'optimalité locale (minimisation de la longueur totale des segments) conduit au "hachage" de l'interconnexion *i* dans la cellule de liaison. Le tracé de l'interconnexion *i* n'est optimal ni du point de vue de la longueur totale des segments, ni du point de vue du nombre de passages via.

L'une des conséquences de ce phénomène de hachage des interconnexions pourra être l'apparition de cycles entre points terminaux de raccord.

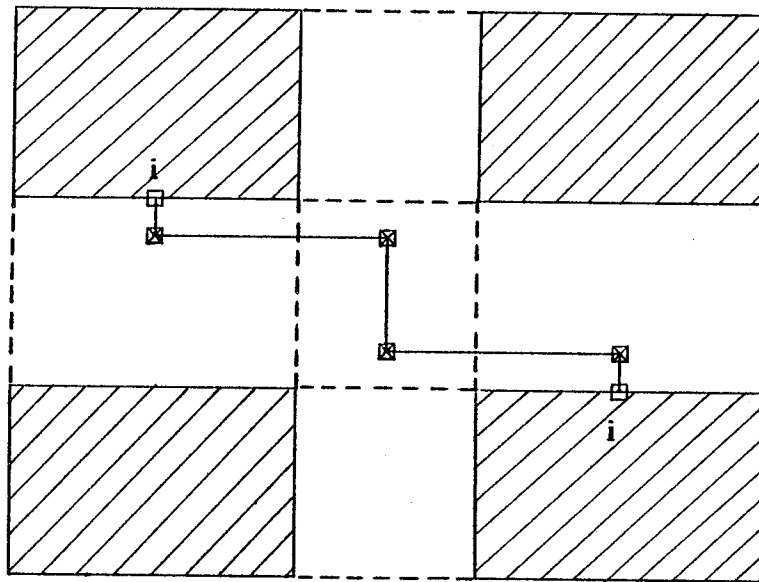


Figure 16

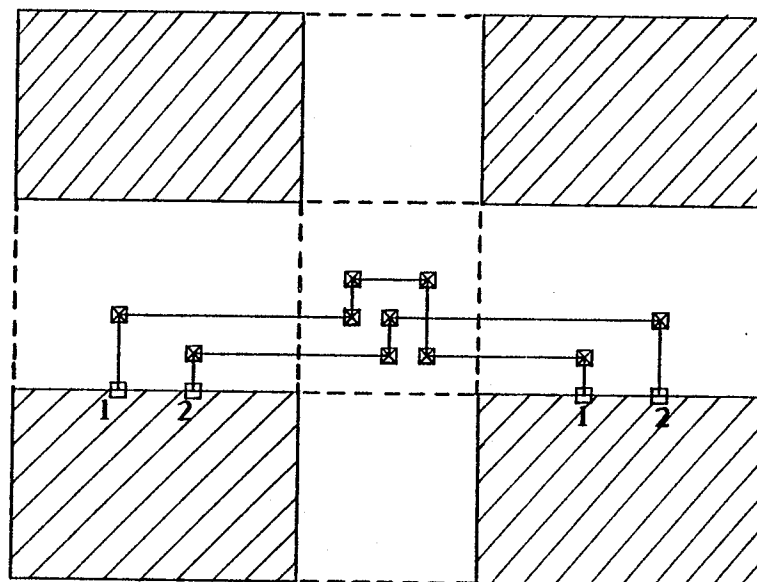


Figure 17

Considérons par exemple la figure 17. L'exécution du tracé final des canaux bifaces horizontaux en fonction de critères d'optimalité locale (minimisation du nombre de croisements) provoque l'apparition d'un cycle entre les points terminaux de raccord des interconnexions 1 et 2. Lors du tracé final de la cellule de liaison, une division de type III est nécessaire pour ouvrir ce cycle.

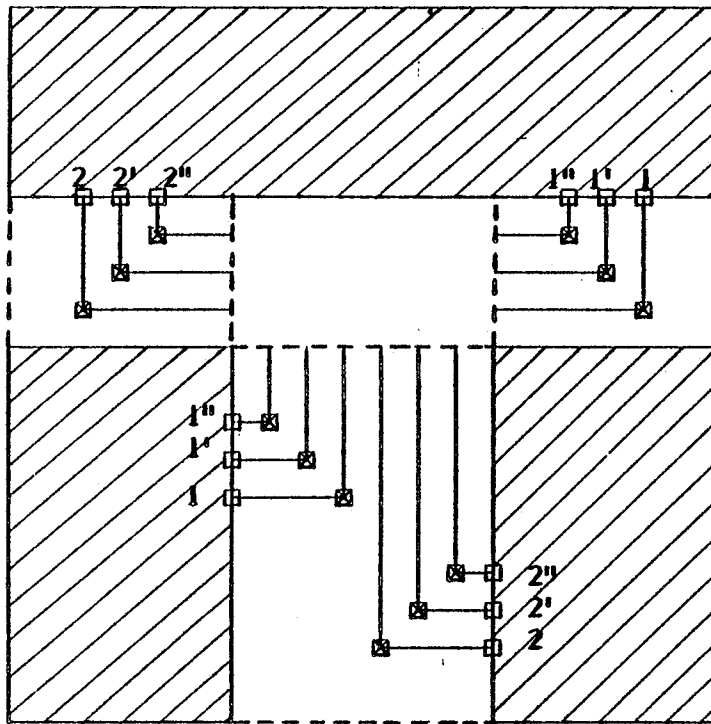
L'exécution du tracé final des canaux bifaces en fonction de critères d'optimalité locale peut parfois conduire à l'infaisabilité du tracé final de certaines cellules de liaison.

Considérons par exemple la figure 18. Ce problème est tel que les flux d'interconnexions $\{ 1, 1', 1'' \}$ et $\{ 2, 2', 2'' \}$ doivent nécessairement se croiser. Le tracé final des canaux bifaces étant exécuté en premier et en fonction de critères d'optimalité locale, le croisement de ces deux flux aura lieu dans la cellule de liaison. Le tracé final de la cellule de liaison s'avère alors infaisable (fig. 18 a), alors que le croisement des deux flux dans le canal biface vertical conduirait à un tracé faisable et globalement optimal (fig. 18 b).

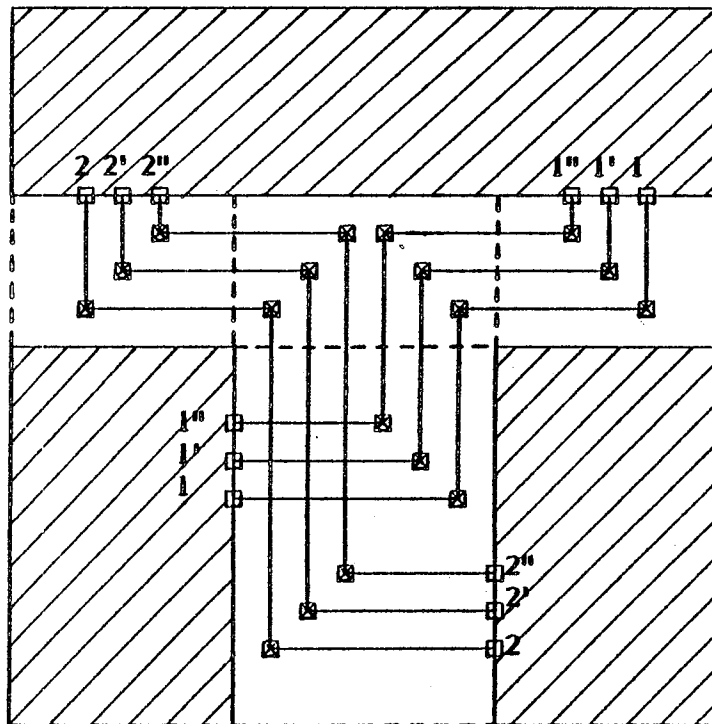
La stratégie de tracé final que nous venons de présenter, stratégie dictée par le découpage de la surface d'interconnexion en canaux bifaces et en cellules de liaison, ne fournit donc aucun moyen de contrôle de l'optimalité globale du tracé : c'est là son principal point faible. Typiquement, elle conduit à l'optimalité locale du tracé des canaux bifaces, mais pas à l'optimalité globale. En outre, on conçoit que des phénomènes tels que ceux de la figure 17 ou de la figure 18 a puissent rendre irréalistes les mesures de trafic effectuées au cours du tracé global.

Le découpage de la surface d'interconnexion en canaux bifaces et en cellules de liaison présente toutefois certains avantages : il est toujours défini, ne dépend que de la topologie de la surface d'interconnexion, permet le tracé global et le tracé final.



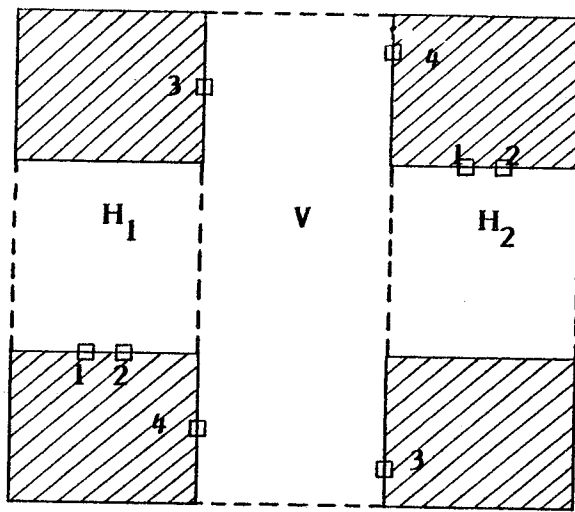


(a)

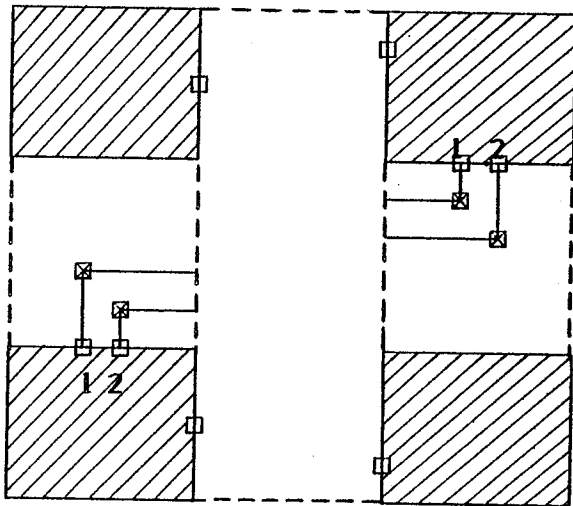


(b)

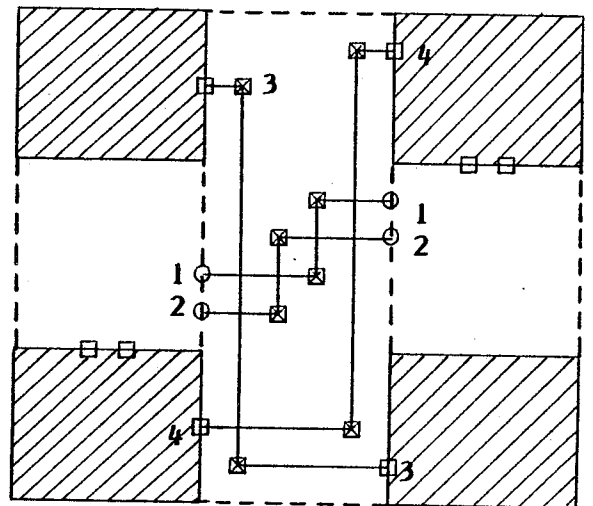
Figure 18



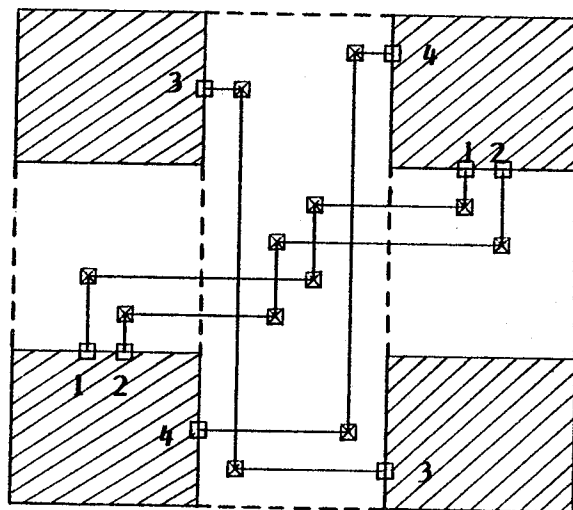
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 19

VI - UNE AUTRE STRATEGIE DE TRACE FINAL

Une autre stratégie de tracé final très répandue consiste à découper la surface d'interconnexion en surfaces élémentaires disjointes de telle façon que, traitées dans un ordre approprié, chacune de ces surfaces soit un canal biface à l'instant de son traitement. Cette stratégie de tracé final est motivée par les deux idées suivantes : éviter le problème difficile du tracé final des cellules de liaison, exploiter au maximum les performances des heuristiques de tracé de canaux bifaces.

VII - Principe - Ordre de tracé

Au cours du tracé final, toutes les surfaces élémentaires d'interconnexion sont traitées séquentiellement. Pour que les heuristiques de tracé de canaux bifaces soient applicables au tracé final de toutes les surfaces élémentaires, il faut, c'est évident, qu'à l'instant de son traitement chacune de ces surfaces soit un canal biface. Un tel résultat s'obtient d'une part par un découpage approprié de la surface d'interconnexion, d'autre part par un *ordre de tracé* approprié des différentes surfaces élémentaires.

Considérons par exemple la figure 19 a. La surface d'interconnexion est découpée en trois rectangles disjoints H_1 , H_2 et V . A l'issue du tracé global, H_1 et H_2 sont des canaux bifaces horizontaux, mais V n'est pas un canal biface vertical. En effet, des interconnexions franchissent les frontières $H_1 - V$ et $H_2 - V$ à des emplacements indéterminés.

Les canaux bifaces H_1 et H_2 seront tracés en premier, définissant ainsi les points de franchissement des frontières $H_1 - V$ et $H_2 - V$ par les interconnexions (fig. 19 b). Deux types de points terminaux sont alors répartis sur les faces verticales de V : des points terminaux d'accès aux blocs sur les frontières blocs - V , des points terminaux de raccord sur les frontières $H_1 - V$ et $H_2 - V$. A cet instant, la surface V répond à la définition d'un canal biface vertical ; son tracé final peut être spécifié et effectué (fig. 19 c), achevant ainsi le tracé final de la surface d'interconnexion (fig. 19 d).

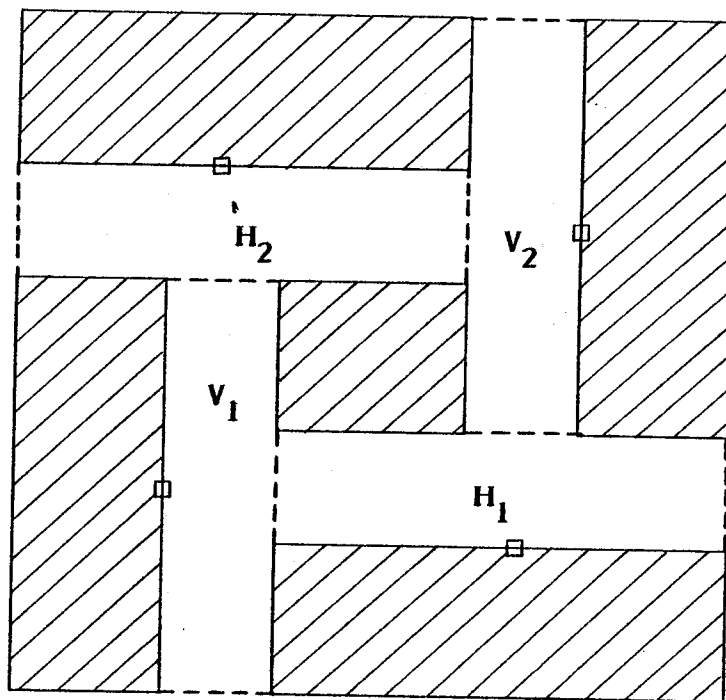


Figure 20

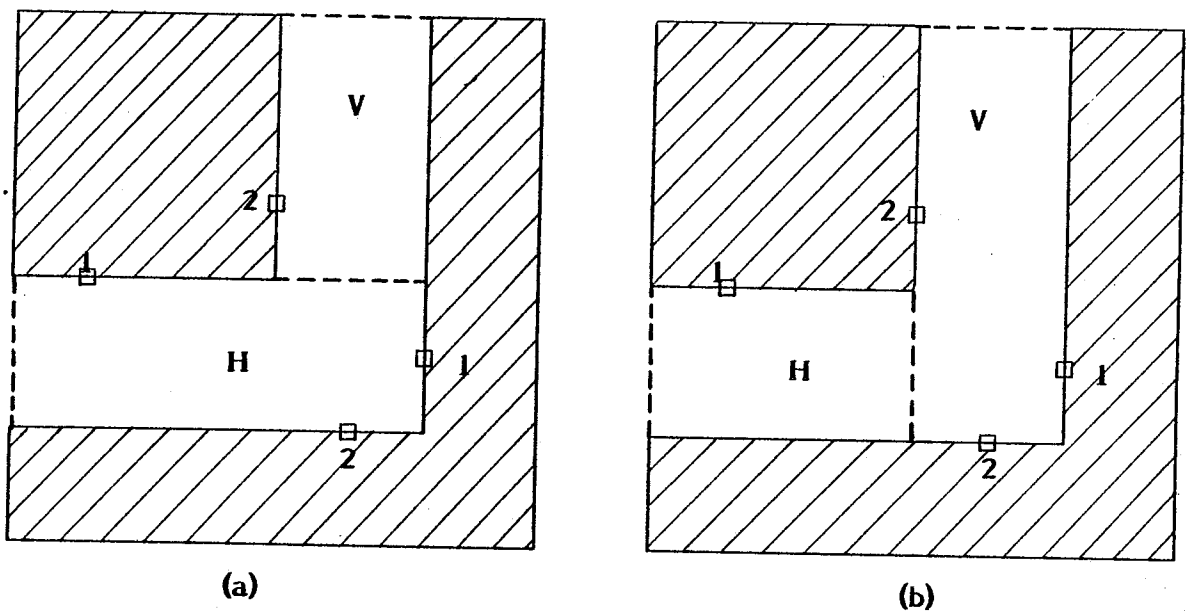


Figure 21

Avec le découpage adopté, le processus de tracé final sera donc le suivant : spécification du tracé final des canaux bifaces H_1 et H_2 , tracé final de H_1 et H_2 , spécification du tracé final du canal biface V , tracé final de V .

Remarquons que la notion de cellule de liaison est complètement absente de cette stratégie de tracé final. Chaque cellule de liaison est en effet traitée comme une partie intégrante d'un canal biface.

VI2 - Existence d'un découpage et d'un ordre de tracé

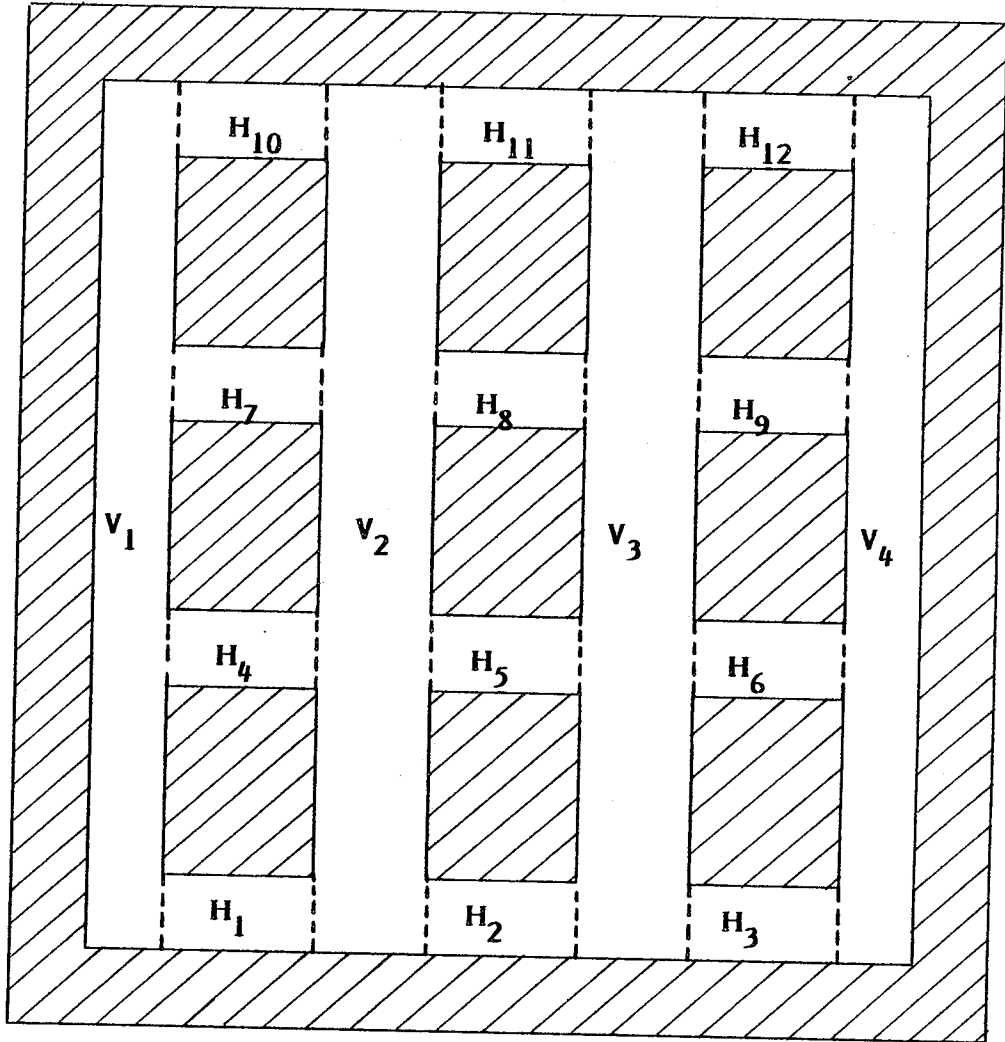
Pour certains problèmes, il n'existe pas de découpage et d'ordre de tracé tels que chacune des surfaces élémentaires soit un canal biface à l'instant de son traitement. Cette stratégie de tracé final est donc inapplicable à de tels problèmes. Nous allons en donner deux exemples.

Considérons le problème de la figure 20. Le découpage représenté est imposé par la disposition des points terminaux ; la surface V_1 doit être tracée avant la surface H_2 , H_2 avant V_2 , V_2 avant H_1 et H_1 avant V_1 . L'ordre de tracé $(V_1, H_2, V_2, H_1, V_1)$ présente une *contrainte cyclique* ; autrement dit il n'existe pas d'ordre de tracé.

Considérons maintenant le problème de la figure 21, problème pour lequel la surface d'interconnexion est en forme de "L".

Si l'on adopte le découpage représenté à la figure 21 a, l'ordre de tracé sera (V, H) . La surface V est bien un canal biface, mais à l'instant de son traitement la surface H est un canal triface. L'interconnexion 1 admet en effet un point terminal situé sur la face droite de H .

Si l'on adopte le découpage représenté à la figure 21 b, l'ordre de tracé sera (H, V) . La surface H est bien un canal biface, mais c'est cette fois la surface V qui est un canal triface à l'instant de son traitement. L'interconnexion 2 admet en effet un point terminal situé sur la face inférieure de V .



H_i : canaux horizontaux

V_i : canaux verticaux.

Figure 22

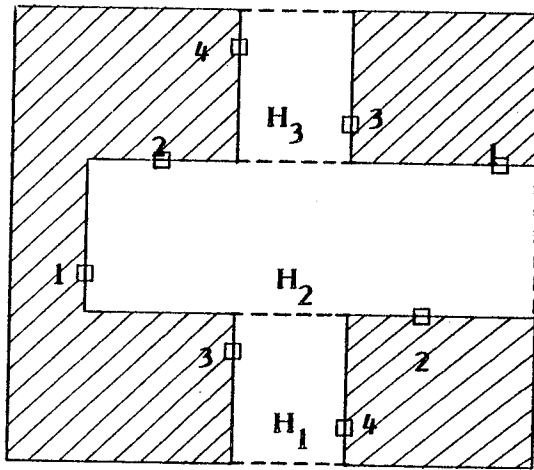
VI3 - Discussion

Cette stratégie de tracé final présente donc, par rapport à celle exposée précédemment, un inconvénient majeur : elle n'est pas applicable à tout problème multi-canal.

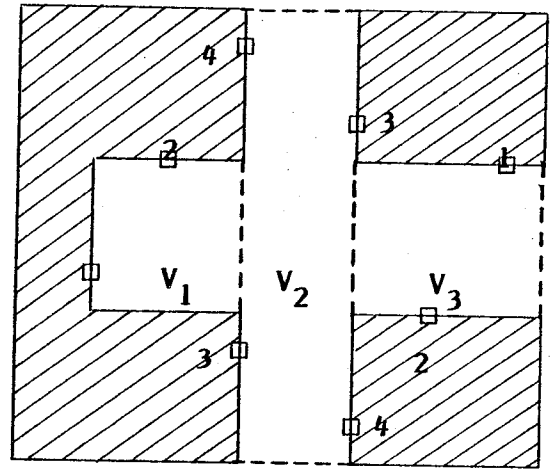
De plus, dans le cas général, découpage et ordre de tracé dépendent non seulement de la topologie de la surface d'interconnexion, mais également de la liste d'interconnexion. La mise en oeuvre de cette stratégie nécessite donc des algorithmes permettant de déterminer, pour un problème donné, un découpage et un ordre de tracé appropriés [Pre 79].

Pour des configurations de type réseaux prédifusés ou de type réseaux précaractérisés, le découpage de la surface d'interconnexion n'est effectué qu'en fonction de la topologie de la surface d'interconnexion et l'ordre de tracé figé [Hig 80]. Par exemple, pour une configuration de type réseaux prédifusés, on pourra adopter le découpage représenté à la figure 22. Tous les canaux horizontaux devront alors être tracés en premier, puis tous les canaux verticaux. Toutefois, un tel découpage impose la contrainte suivante, contrainte qui devra être prise en compte lors du placement : il ne doit exister aucun point terminal sur les faces horizontales des canaux verticaux. De plus, ce découpage ne pourra être utilisé pour effectuer le tracé global, les cellules de liaison étant incluses dans les canaux verticaux.

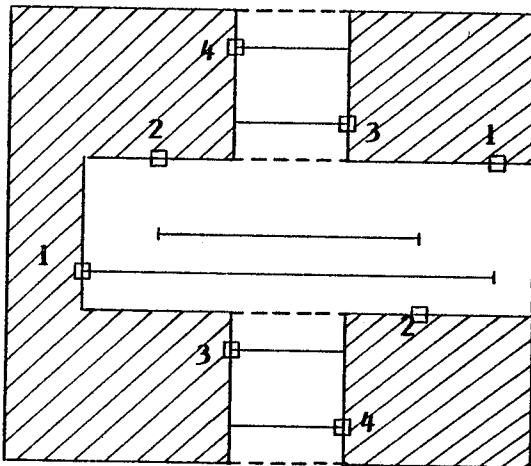
Comme celle exposée précédemment, cette stratégie de tracé final a pour principal point faible de ne fournir aucun moyen de contrôle de l'optimalité globale du tracé. Elle présente toutefois sur celle exposée précédemment un avantage certain : le phénomène de hachage des interconnexions disparaît suivant l'une des deux directions du plan.



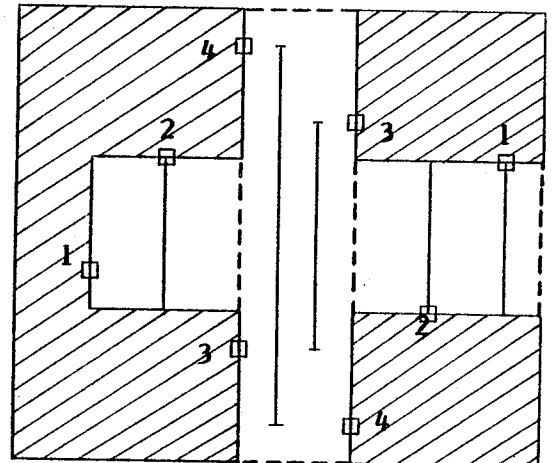
(a) canaux horizontaux - niveau 1



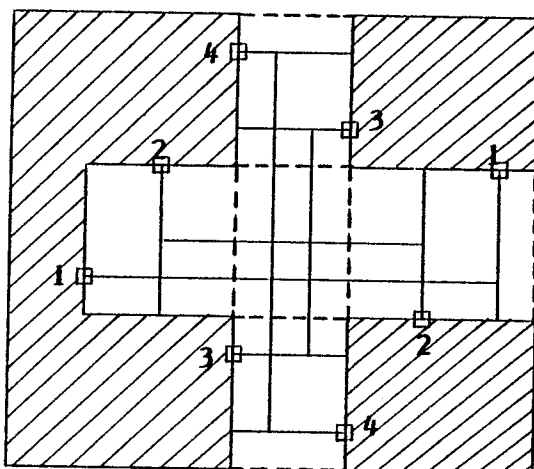
(b) canaux verticaux - niveau 2



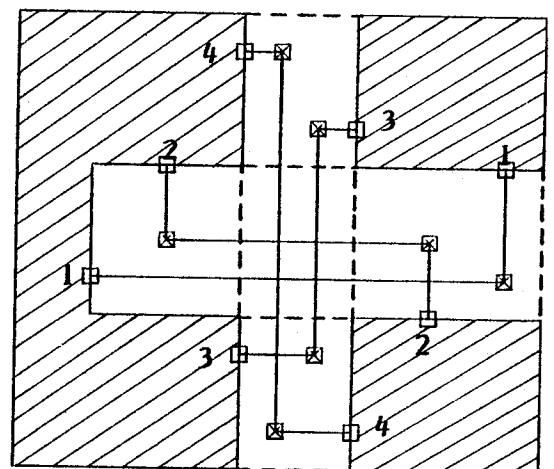
(c) tracé canaux horizontaux



(d) tracé canaux verticaux



(e) superposition H + V



(f) élimination du tracé redondant

VII - AUTRES APPROCHES

Des approches radicalement différentes ont été proposées pour résoudre le problème multi-canal. Nous nous bornerons à en exposer le principe ; pour une description et une discussion détaillées de ces différentes approches, on se reportera aux publications citées en référence.

Une stratégie de tracé final proposée par M. Wiesel et D.A. Mlynski consiste à découper la surface d'interconnexion en canaux rectangulaires horizontaux et verticaux, de telle sorte que chaque canal horizontal ne puisse recevoir que des segments assignés à l'un des niveaux d'interconnexion (fig. 23 a) chaque canal vertical des segments assignés à l'autre niveau (fig. 23b)[Wie 81] [Wie 82] [Rot 83]. Les surfaces élémentaires sont donc mono-niveaux, et non plus bi-niveaux. Tous les canaux horizontaux sont tracés en premier (fig. 23 c), puis tous les canaux verticaux (fig. 23 d). Les canaux horizontaux et verticaux sont ensuite superposés (fig. 23 e) et le tracé final est obtenu après élimination des parties redondantes de certains segments (fig. 23 f).

Lors du tracé final, chaque segment est considéré comme un intervalle indivisible. A l'ensemble des segments d'un canal, on peut ainsi associer une famille d'intervalles et son graphe représentatif. Le problème du tracé final d'un canal se ramène alors au problème de coloration des sommets du graphe d'intervalles associé (voir 1ère partie), sous la contrainte suivante : la couleur de certains sommets est imposée. Cette contrainte permet d'interconnecter des points terminaux situés sur les faces de direction opposée à celle du canal (voir fig. 23 c, segment 1).

Cette stratégie présente l'intérêt d'éliminer complètement le phénomène de hachage des interconnexions. Toutefois, comme les stratégies exposées précédemment, elle ne fournit aucun moyen de contrôle de l'optimalité globale du tracé. De plus, ses contraintes de mise en oeuvre sont très lourdes : il ne doit exister aucune contrainte de non-recouvrement des branches, aucune contrainte de non-recouvrement entre segments interconnectant des points terminaux situés sur les faces de direction opposées à celle du canal.

Une autre stratégie de tracé final proposée par R. Pinter consiste à découper la surface d'interconnexion en surfaces élémentaires non pas rectangulaires, mais en forme de "X", de "L" et de "T" [Pin 81].

Cette stratégie a le mérite d'aborder le problème du tracé d'une cellule de liaison et de ses canaux bifaces adjacents comme un seul et unique problème. Le phénomène de hachage des interconnexions est ainsi évité et l'optimalité globale du tracé peut être contrôlée. L'intérêt de cette stratégie reste toutefois d'ordre théorique : les problèmes posés par le "raccord" des différentes surfaces élémentaires n'ont pas été envisagés, seules des interconnexions admettant deux points terminaux ont été envisagées.

Une approche très prometteuse, et très différente de celles que nous venons d'exposer, consiste à simuler le comportement humain face au problème du tracé d'interconnexions [Bol 79].

Le principe de cette approche est d'effectuer le tracé, généralement à l'aide d'une heuristique telle que celle de Lee, jusqu'à ce qu'un blocage se produise. Les interconnexions responsables du blocage sont alors identifiées et temporairement ignorées. Leur tracé est effacé et ne sera repris qu'après avoir implanté d'autres interconnexions.

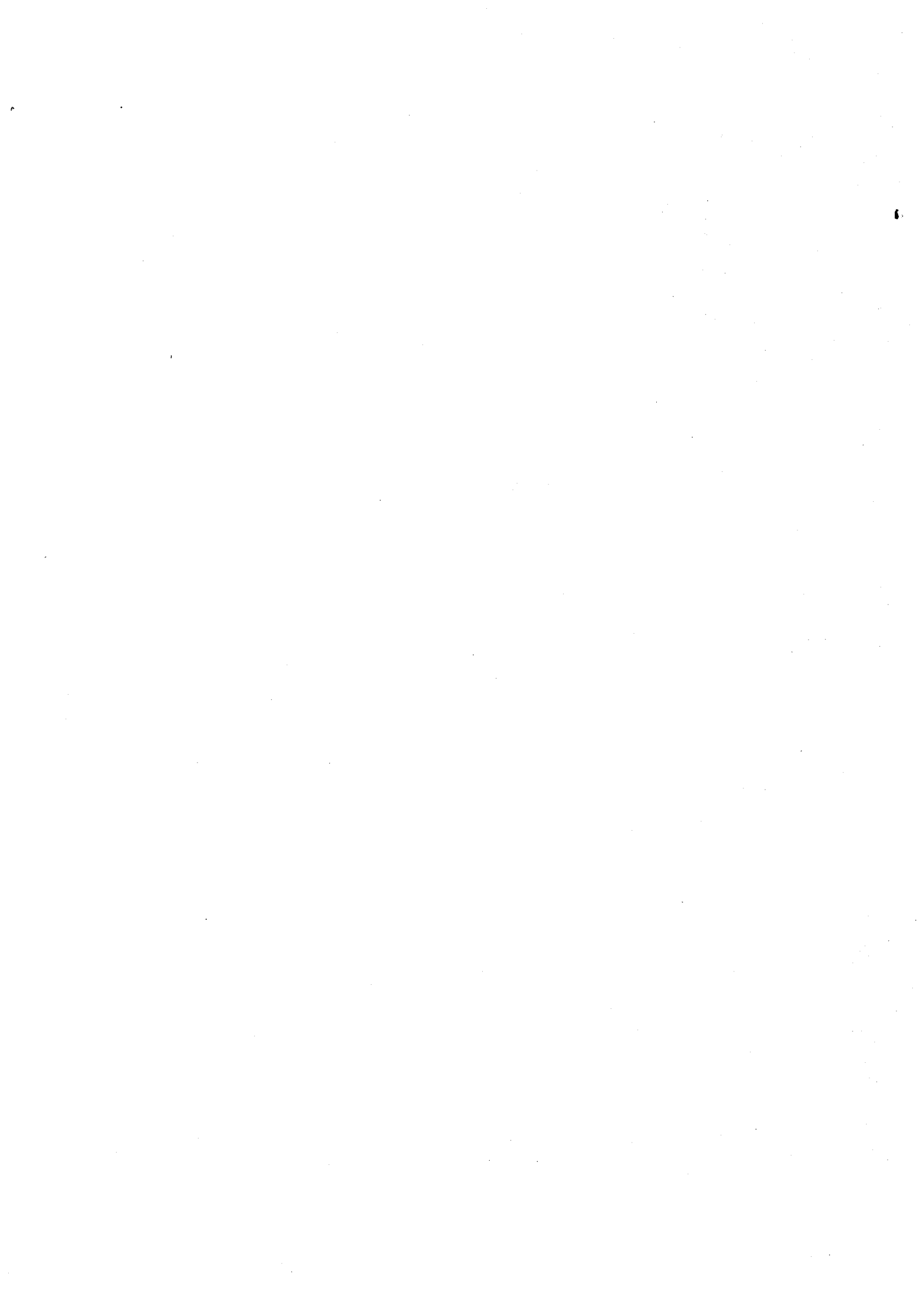
Le tracé final est donc effectué sans phase préparatoire de tracé global, mais les heuristiques employées ne sont plus "gloutonnes" : le tracé final est remis en cause au fur et à mesure de sa progression.

Enfin, signalons une tentative pour combiner tracé global et tracé final en une seule phase [Sou 79].

VIII - CONCLUSION

Dans une configuration de type réseaux précaractérisés, la surface d'interconnexion est essentiellement composée de canaux bifaces non-adjacents et les difficultés liées à la présence de cellules de liaison sont alors insignifiantes. Le concept de canal biface, allié au concept de cellule de traversée, a ainsi apporté une excellente réponse au problème posé par les configurations de type réseaux précaractérisés [Fel 76] [Per 76] [Bek 79].

Par contre, le concept de canal biface ne s'applique que difficilement aux problèmes plus généraux, de type réseaux prédiffusés ou de type "building blocks". Outre le problème difficile du tracé final des cellules de liaison, l'application de ce concept se heurte à l'impossibilité de contrôler l'optimalité globale du tracé.



CHAPITRE II

Une stratégie originale

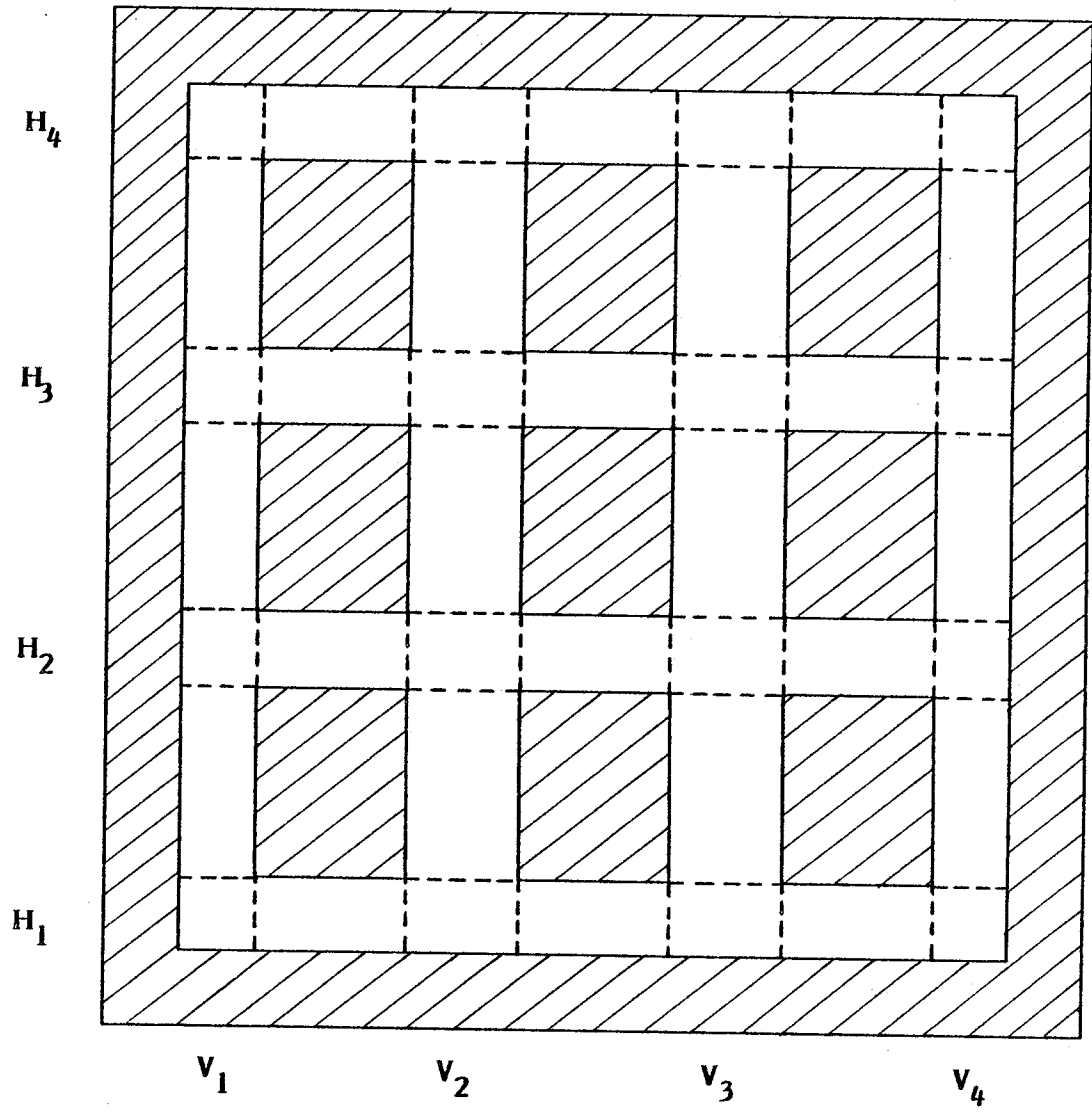


Figure 1

I - INTRODUCTION

Au cours de ce chapitre, nous présenterons une stratégie originale de résolution du problème multi-canal posé par les configurations de type réseaux prédiffusés.

Un modèle original de canal, ainsi qu'un concept original de point terminal dynamique seront introduits.

Une nouvelle heuristique, qui est une généralisation de l'heuristique d'assignation par pistes décrite au cours de la première partie, sera présentée. Nous décrirons également une implémentation de cette heuristique : le programme TRACAS.

Enfin, nous présenterons quelques résultats expérimentaux et discuterons de l'efficacité de cette stratégie.

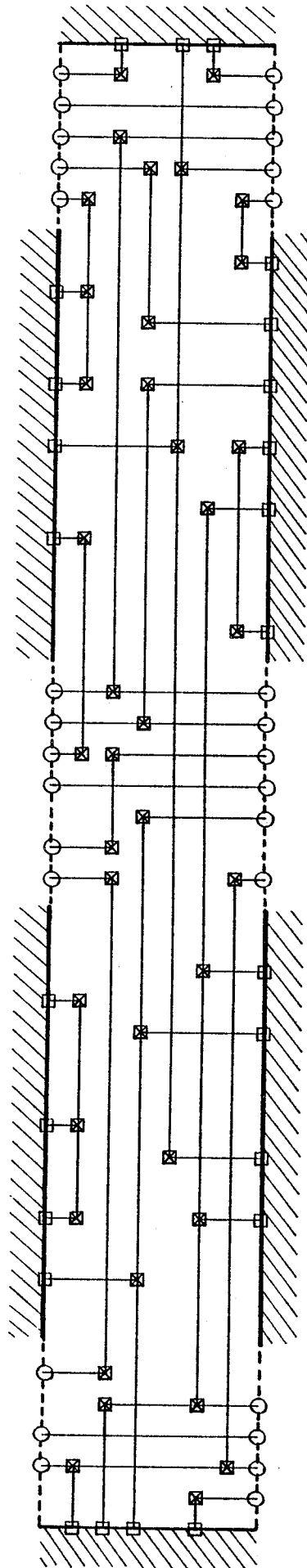
Un condensé de ce chapitre est disponible dans [Dup 84].

II - MODELE DE CANAL

III - Découpage de la surface d'interconnexion

La surface d'interconnexion est découpée en surfaces élémentaires rectangulaires, de telle sorte que chaque surface élémentaire joigne deux des faces parallèles du rectangle délimitant la surface d'interconnexion (fig. 1). Nous appellerons *canal horizontal* une surface élémentaire joignant les deux faces verticales du rectangle délimitant la surface d'interconnexion, *canal vertical* une surface élémentaire joignant ses deux faces horizontales.

Chaque canal horizontal intersecte avec tous les canaux verticaux, chaque canal vertical avec tous les canaux horizontaux. Toute zone d'intersection $H_i \cdot V_j$ d'un canal horizontal H_i et d'un canal vertical V_j appartient, et au canal horizontal H_i , et au canal vertical V_j .



□ Points terminaux d'accès aux blocs

○ Points terminaux de raccord

Figure 2

Il ne s'agit donc plus là d'un découpage en surfaces élémentaires disjointes, l'intersection de deux canaux de directions opposées étant non-vide.

Remarquons que les canaux horizontaux sont très allongés dans la direction horizontale, les canaux verticaux dans la direction verticale.

II2 - Topologie d'un canal

Considérons un canal horizontal H_i et soit v le nombre de canaux verticaux.

Le canal H_i comprend $(v - 1)$ zones rectangulaires qui n'appartiennent à aucun autre canal, v zones rectangulaires d'intersection avec les canaux verticaux. Nous appellerons *zones bifaces* du canal H_i les $(v - 1)$ zones rectangulaires qui n'appartiennent à aucun autre canal, *zones de liaison* du canal H_i les v zones d'intersection avec les canaux verticaux.

Une zone biface répond évidemment à la définition d'un canal biface, une zone de liaison à la définition d'une cellule de liaison.

II3 - Points terminaux - Répartition

Considérons un canal horizontal H_i comportant $(v - 1)$ zones bifaces et v zones de liaison, et supposons que le tracé final de ce canal ait été effectué (fig. 2).

A l'intérieur des $(v - 1)$ zones bifaces du canal H_i , des *points terminaux d'accès aux blocs* peuvent être répartis sur les deux faces horizontales du canal H_i . Ces points terminaux permettent d'accéder à des éléments actifs contenus dans les blocs adjacents aux zones bifaces du canal H_i .

A l'intérieur des v zones de liaison du canal H_i , des *points terminaux de raccord* peuvent être répartis sur les deux faces horizontales du canal H_i .

Nous verrons au paragraphe III quel est le rôle joué par ces points terminaux dans le processus de tracé.

A l'intérieur des deux zones de liaison extrêmes du canal H_i , des points terminaux d'accès aux blocs peuvent être répartis sur les deux faces verticales du canal H_i . Ces points terminaux permettent d'accéder à des éléments actifs contenus dans le bloc périphérique (cellules d'entrée/sortie).

Le modèle de canal que nous proposons est donc *quadriface*, des points terminaux pouvant être répartis sur les quatre faces d'un canal.

Remarquons que les points terminaux d'accès aux blocs seront définis au cours de la phase déplacement, les points terminaux de raccord au cours de la phase de tracé.

Remarquons également qu'un point terminal situé sur le périmètre d'une zone de liaison $H_i \cdot V_j$ définie par l'intersection d'un canal horizontal H_i et d'un canal vertical V_j peut appartenir, soit à l'un de ces deux canaux, soit aux deux.

III - PROCESSUS DE TRACE

La stratégie de tracé que nous proposons conserve la décomposition du processus de tracé en tracé global et tracé final.

Nous illustrerons les différentes étapes du tracé par le problème de la figure 3 a.

III - Tracé global

Le processus de tracé débute par la phase de tracé global, dont le rôle est de décider quelles sont les zones bifaces et les zones de liaison qu'empruntera chacune des interconnexions.

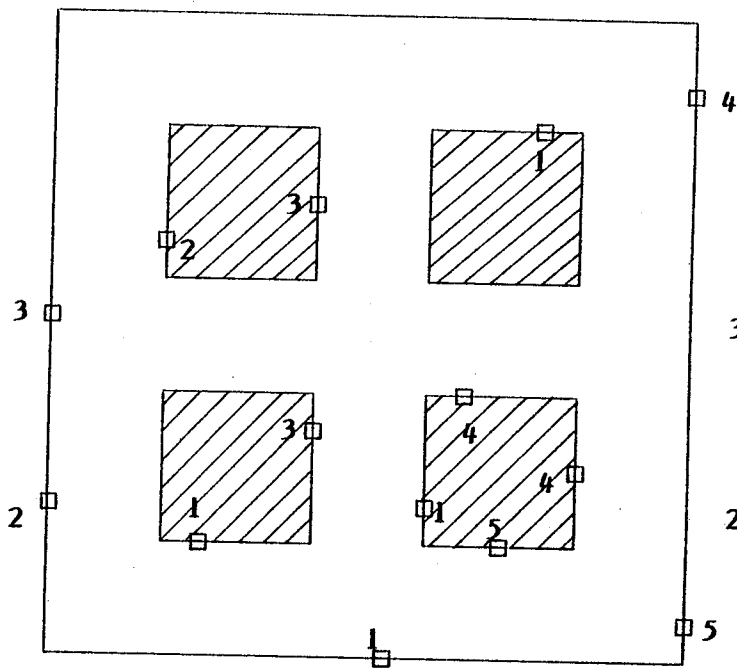
Considérons une zone de liaison $H_i \cdot V_j$, définie par l'intersection d'un canal horizontal H_i et d'un canal vertical V_j . A l'issue du tracé global peuvent être formés quatre ensembles I, S, G et D contenant les numéros des interconnexions qui devront franchir les faces inférieure, supérieure, gauche et droite de la zone de liaison $H_i \cdot V_j$.

Considérons par exemple l'ensemble I, contenant les numéros des interconnexions qui devront franchir la face inférieure de $H_i \cdot V_j$. A tout élément i de I correspond un point terminal de raccord de l'interconnexion i , appartenant au canal horizontal H_i et situé sur la face inférieure de ce canal.

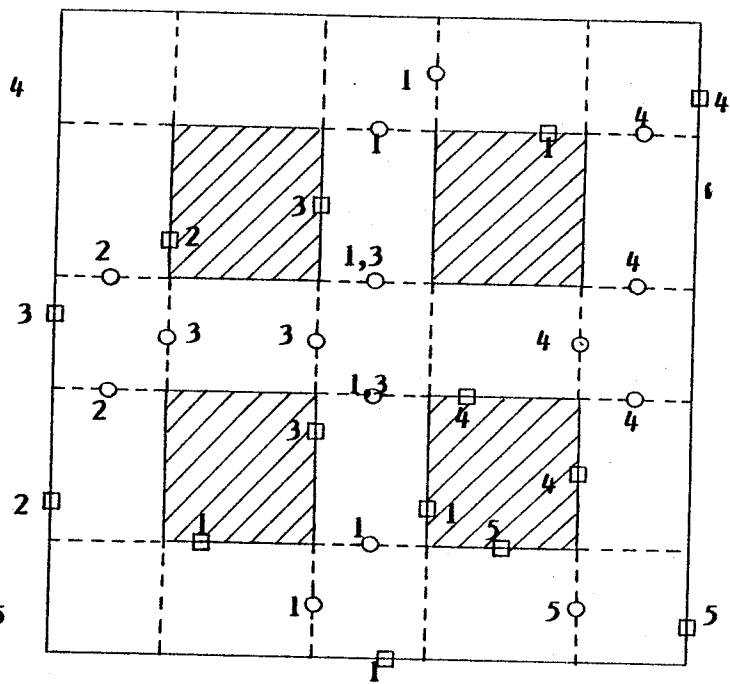
A l'issue du tracé global, tous les points terminaux de raccord peuvent donc être générés et un numéro d'interconnexion associé à chacun de ces points terminaux. Toutefois, le rôle du tracé global se bornant à choisir les zones bifaces et les zones de liaison qu'empruntera chacune des interconnexions, les emplacements définitifs de ces points terminaux restent inconnus. Pour chaque point terminal généré, les informations fournies par le tracé global se limitent à la connaissance du canal dans lequel il se trouve, de la zone de liaison dans laquelle il se trouve, de la face sur laquelle il est situé. C'est pourquoi à l'issue du tracé global, tous les points terminaux de raccord générés sur une face donnée d'une zone de liaison donnée seront arbitrairement placés au point-milieu de cette face (fig. 3 b).

Les points terminaux de raccord générés par le tracé global quitteront leurs emplacements arbitraires pour leurs emplacements définitifs au cours du tracé final : nous dirons d'un point terminal de raccord généré par le tracé global qu'il est *dynamique*. Par opposition, nous dirons d'un point terminal de raccord positionné à son emplacement définitif par le tracé final qu'il est *statique*.

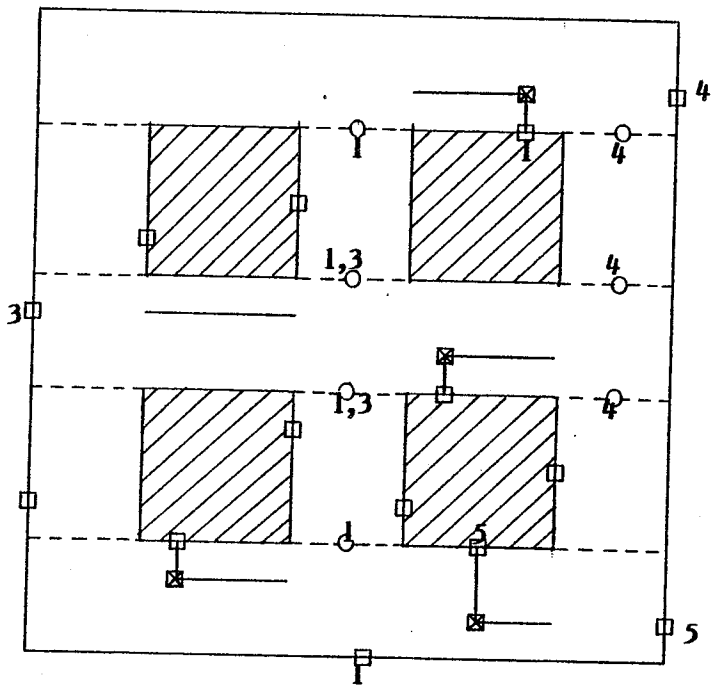
Tous les points terminaux d'accès aux blocs sont générés et positionnés à leurs emplacements définitifs par la phase de placement. Ces points terminaux demeurent donc statiques tout au long du processus de tracé.



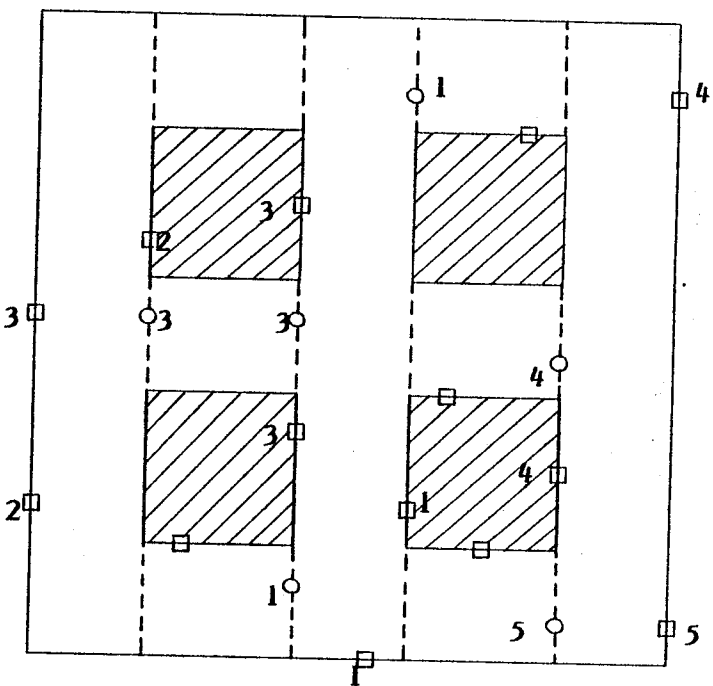
(a)



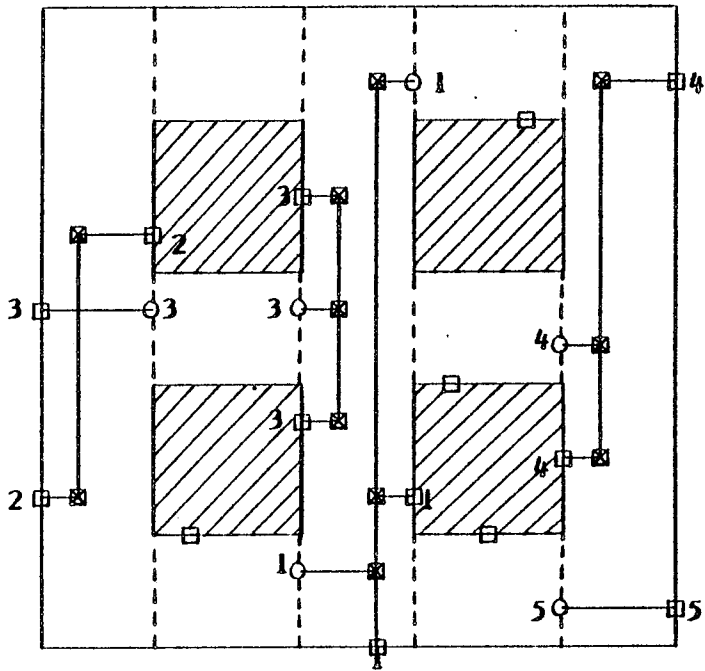
(b)



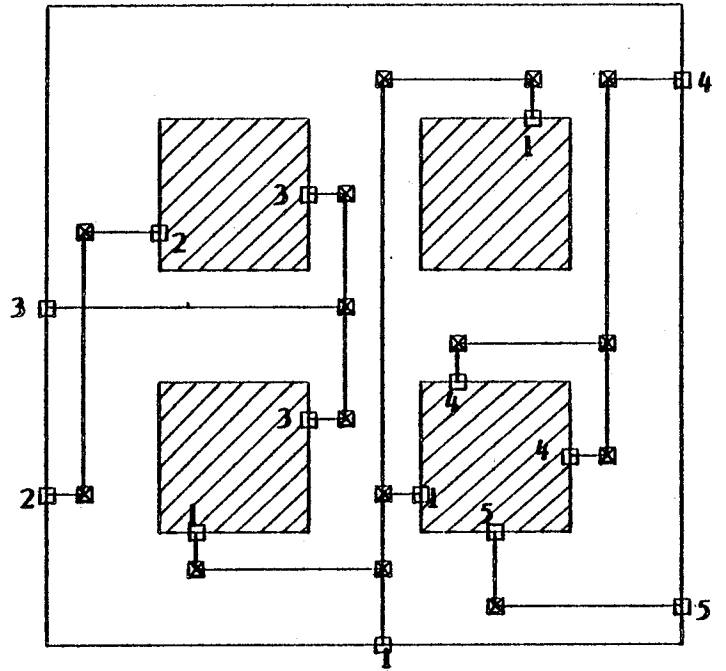
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 3

Remarquons que la définition de la fonction densité n'est nullement affectée par le positionnement arbitraire des points de raccord dynamiques. Toutefois, la définition de la densité d'un canal devra être adaptée en conséquence.

Considérons par exemple un canal horizontal H_i et soient X_{\min} et X_{\max} les abscisses délimitant ses faces gauche et droite. Supposons que le canal H_i comporte v zones de liaison et soient x_1, x_2, \dots, x_v les axes de symétrie verticaux de ces v zones de liaison. La densité du canal H_i sera définie comme le maximum global de la fonction densité dans l'intervalle :

$$[X_{\min}, X_{\max}] - \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$$

la valeur prise la fonction densité à l'abscisse d'un axe de symétrie d'une zone de liaison n'ayant évidemment aucun sens quant au trafic à l'intérieur du canal H_i .

III2 - Tracé final

Le tracé final est décomposé en trois phases consécutives : tracé des canaux horizontaux, déplacement des points terminaux dynamiques des canaux verticaux, tracé des canaux verticaux.

Au cours de la phase de *tracé des canaux horizontaux*, tous les canaux horizontaux sont traités séquentiellement, dans un ordre quelconque. A l'intérieur de chaque canal horizontal est effectué le tracé final de toutes les zones bifaces, mais le tracé final des zones de liaison est seulement préparé (nous verrons comment au paragraphe IV) et aucun tracé ne subsiste dans ces zones à l'issue de cette phase (fig. 3 c).

Au cours de la phase de *déplacement des points terminaux dynamiques des canaux verticaux*, les points terminaux de raccord de chaque canal vertical sont déplacés de leurs emplacements arbitraires vers leurs emplacements finaux, emplacements finaux qui sont évidemment définis par le tracé effectué dans les zones bifaces des canaux horizontaux au cours de la phase précédente.

De dynamique, les points terminaux de raccord des canaux verticaux deviennent statiques (fig. 3 d).

Au cours de la phase de tracé des canaux verticaux, tous les canaux verticaux sont traités séquentiellement, dans un ordre quelconque. A l'intérieur de chaque canal vertical est effectué le tracé final de toutes les zones bifaces et de toutes les zones de liaison (fig. 3 e). Cette phase achève le tracé final de la surface d'interconnexion (fig. 3 f). Remarquons que le problème du tracé d'un canal vertical se ramène alors au problème de la cellule de liaison, ou problème du canal quadriface.

Nous avons supposé, et nous continuerons de le faire dans tout ce qui suit, que les canaux horizontaux sont tracés avant les canaux verticaux. Il s'agit là d'un choix arbitraire, destiné uniquement à alléger l'exposé. Les canaux verticaux pourraient être tracés avant les canaux horizontaux et le processus de tracé serait alors le suivant : tracé des canaux verticaux, déplacement des points terminaux dynamiques des canaux horizontaux, tracé des canaux horizontaux.

IV - EXTENSION DU CONCEPT D'ASSIGNATION DE PISTES

Ce modèle de canal introduit, par rapport au modèle du canal biface, deux éléments nouveaux : des points terminaux dynamiques peuvent être répartis sur les deux faces de même direction que le canal, des points terminaux statiques peuvent être répartis sur les deux faces de direction opposée à celle du canal.

Au cours de ce paragraphe, nous verrons comment le concept d'assignation de pistes peut être étendu à ce modèle. Nous nous placerons dans l'hypothèse d'un canal horizontal H_i et nous supposerons que ce canal admet des points terminaux statiques répartis sur ses quatre faces, ainsi que des points terminaux dynamiques répartis sur ses deux faces horizontales.

IV1 - Troncs et branches

Chaque interconnexion ou fragment d'interconnexion i empruntant le canal H_i sera implanté sous la forme d'un unique tronc horizontal t_i et d'un nombre positif ou nul de branches verticales. L'ensemble T est formé par tous les troncs t_i du canal H_i .

Chaque tronc t_i de T peut être décrit par six ensembles :

$T_{Is}(t_i)$ et $T_{Ss}(t_i)$, contenant les abscisses de tous les points terminaux statiques qui doivent être reliés par l'interconnexion i et qui sont situés sur les faces inférieure et supérieure du canal.

$T_{Id}(t_i)$ et $T_{Sd}(t_i)$, contenant les abscisses de tous les points terminaux dynamiques qui doivent être reliés par l'interconnexion i et qui sont situés sur les faces inférieure et supérieure du canal.

$T_G(t_i)$ et $T_D(t_i)$, contenant les ordonnées de tous les points terminaux statiques qui doivent être reliés par l'interconnexion i et qui sont situés sur les faces gauche et droite du canal.

IV2 - Contraintes de non-court-circuit

Les emplacements définitifs des points terminaux dynamiques du canal H_i resteront indéterminés aussi longtemps que le tracé final des canaux verticaux n'aura pas été effectué. Aussi ces points terminaux ont-ils été placés à des emplacements arbitraires par le tracé global : tous les points terminaux dynamiques appartenant à une même face horizontale d'une zone de liaison ont été arbitrairement placés au point-milieu de cette face. Aucune contrainte de non-court-circuit ne sera donc considérée dans les zones de liaison. Bien entendu, les contraintes de non-court-circuit devront être respectées dans les zones bifaces, les points terminaux situés dans ces zones étant statiques.

D'un point de vue plus formel, la correspondance Γ_t de T dans T décrivant les contraintes de non-recouvrement des troncs sera définie par :

$$\Gamma_t(t_i) = \{ t_j / i \neq j, I_i \text{ et } I_j \text{ intersectent dans une zone où les points terminaux sont statiques } \}$$

Quant à la correspondance Γ_b^+ de T dans T décrivant les contraintes de non-recouvrement des branches, elle sera définie par :

$$\Gamma_b^+(t_i) = \{ t_j / i \neq j, T_{Is}(t_i) \cap T_{Ss}(t_j) \neq \emptyset \}$$

IV3 - Points terminaux situés sur les faces de direction opposée à celle du canal

Considérons un tronc t_i de T tel que $T_G(t_i) = \{ y \}$.

Pour que le point terminal appartenant à l'interconnexion i et situé à l'ordonnée y sur la face gauche du canal soit relié par l'interconnexion i , il faut que le tronc t_i de T soit assigné à la piste d'ordonnée y .

Pour tout tronc t_i de T tel que $T_G(t_i) \cup T_D(t_i) = \{ y \}$, on devra donc respecter la contrainte :

$$y(t_i) = y$$

Pour tout tronc t_i tel que $|T_G(t_i) \cup T_D(t_i)| > 1$, il n'existe évidemment pas d'assignation.

Les points terminaux situés sur les faces de direction opposées à celle du canal introduisent donc des *contraintes absolues* d'assignation, alors que la contrainte de non-court circuit entre les différentes interconnexions ne se traduit que par des *contraintes relatives* d'assignation.



IV4 - Problème d'assignation de pistes

Au problème du tracé du canal H_i , on peut ainsi associer un problème d'assignation de pistes $P = (T)$, spécifié par l'ensemble T des troncs de ce canal.

Résoudre le problème $P = (T)$ consiste évidemment à assigner une piste du canal H_i à chacun des éléments de T , de telle sorte que soient respectées toutes les contraintes relatives de non-court circuit et toutes les contraintes absolues d'interconnexion des points terminaux situés sur les faces de direction opposée à celle du canal.

Remarquons que ce concept d'assignation de pistes généralisé est également applicable au problème du tracé d'un canal vertical. Tous les points terminaux d'un canal vertical étant statiques à l'instant de son traitement, les contraintes de non-court-circuit devront être respectées, et dans les zones bifaces, et dans les zones de liaison.

Remarquons également qu'un problème $P = (T)$ associé au problème du tracé final d'un canal horizontal ou vertical peut être transformé, par division des troncs de T , en un autre problème d'assignation de pistes $P' = (T')$. En particulier il peut être transformé en un problème $P' = (S)$, tel que chacun des éléments de S admette deux points terminaux, et seulement deux. Nous présenterons au paragraphe VI une heuristique conçue pour la résolution de ce problème $P' = (S)$.

IV5 - Elimination du tracé des zones de liaison

Supposons que le tracé du canal horizontal H_i ait été obtenu par résolution du problème d'assignation de pistes associé $P = (T)$, ou d'un problème d'assignation de pistes $P' = (T')$ obtenu par division des troncs de T .

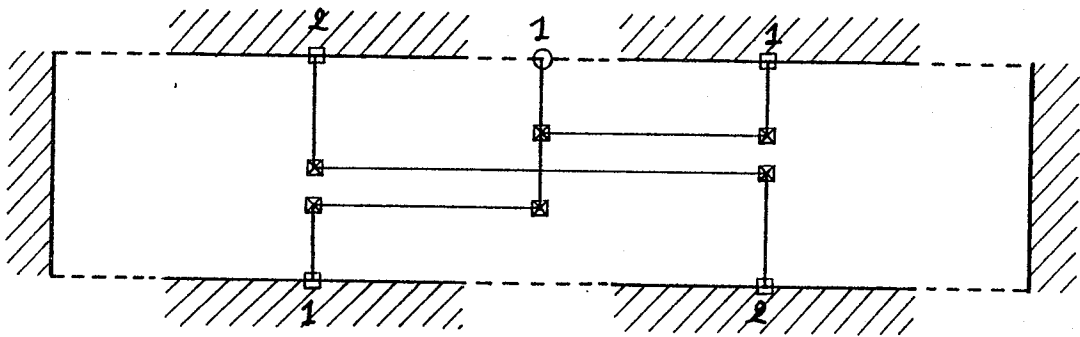


Figure 4

Il existe alors un grand nombre de court-circuits entre les différentes interconnexions, court-circuits qui sont provoqués par le tracé effectué dans les zones de liaison. Le tracé effectué dans les zones de liaison du canal H_i sera donc complètement effacé, à l'issue de la phase de tracé des canaux horizontaux, avant que ne débute la phase de déplacement des points terminaux dynamiques des canaux verticaux. Seul sera conservé le tracé effectué dans ses zones bifaces ; les contraintes de non-court-circuit ayant été respectées dans ces zones, leur tracé est conforme aux règles de dessin.

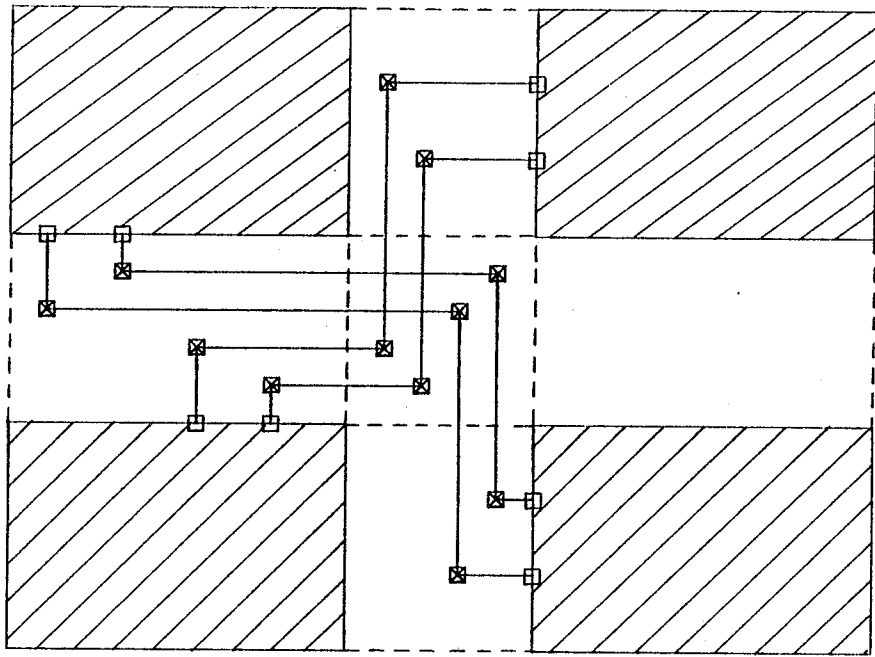
V - OPTIMALITE GLOBALE DU TRACE

Le modèle de canal proposé, allié au concept de point terminal dynamique, permet d'éliminer complètement le phénomène de hachage à la traversée des cellules de liaison et les critères d'optimalité locale fournissent un moyen d'action sur l'optimalité globale.

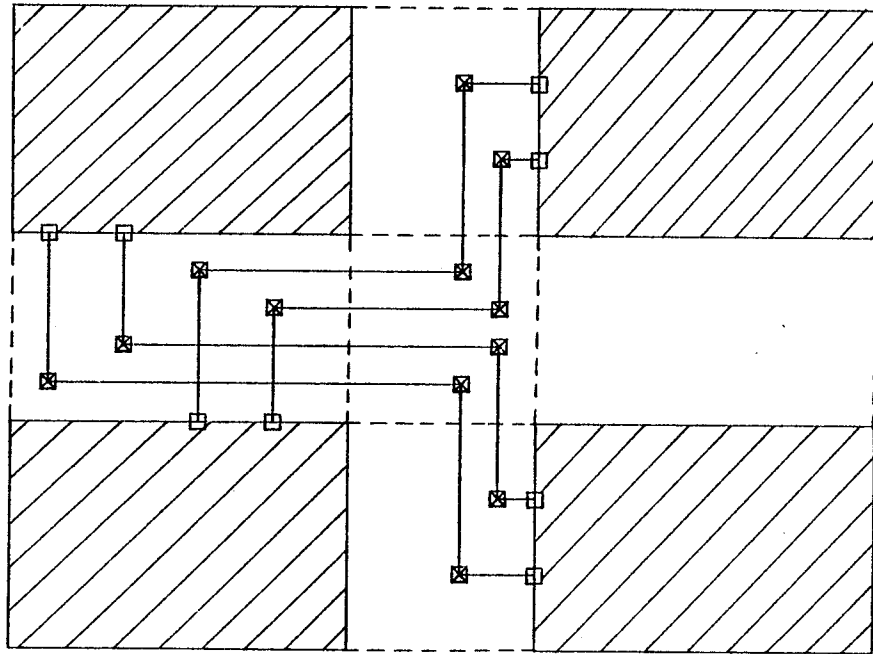
VI - Elimination du phénomène de hachage

Toutes les zones de liaison d'un canal, qu'il soit horizontal ou vertical, sont traitées comme des parties intégrantes de ce canal. A chaque fois que cela est possible, une interconnexion devant traverser une zone de liaison de part en part sera donc implantée sans division de son tronc à l'intérieur de cette zone de liaison : le phénomène de hachage des interconnexions à la traversée des cellules de liaison est complètement éliminé.

Les seules divisions effectuées dans les zones de liaison seront destinées à rompre des contraintes induites par des points terminaux statiques (cycles, chemins). Considérons par exemple le canal horizontal de la figure 4. Le cycle induit par les points terminaux statiques des interconnexions 1 et 2 a été ouvert par introduction d'une "dogleg" à l'abscisse du point terminal dynamique de l'interconnexion 1.



(a)



(b)

Figure 5

V2 - Critères d'optimalité locale

Les critères d'optimalité locale, utilisés pour estimer l'optimalité du tracé des canaux horizontaux, fournissent un moyen d'action sur l'optimalité globale du tracé.

Considérons un canal horizontal et supposons qu'un certain nombre de solutions au problème du tracé de ce canal aient été obtenues. Si les solutions optimisant localement le tracé des zones bifaces sont jugées plus optimales que les solutions optimisant localement le tracé des zones de liaison, alors on favorisera le tracé des zones bifaces au détriment du tracé des zones de liaison, et *vice-versa*.

Considérons par exemple le problème multi-canal de la figure 5. La figure 5a montre le tracé obtenu lorsque le tracé du canal horizontal est effectué en privilégiant les zones bifaces, la figure 5b le tracé obtenu lorsque le tracé du canal horizontal est effectué en privilégiant les zones de liaison.

VI - HEURISTIQUE MULTI-CANAL D'ASSIGNATION PAR PISTES

Nous allons maintenant décrire une heuristique originale, permettant d'effectuer le tracé d'un canal horizontal ou vertical. Cette heuristique est basée sur le même principe que l'heuristique d'assignation par pistes, aussi l'appellerons-nous *heuristique multi-canal d'assignation par pistes*. Elle comporte les mêmes paramètres : séquence et paramètre de chaîne minimale.

Nous nous placerons dans l'hypothèse d'un canal horizontal H_1 , à capacité fixée c ; nous supposerons que ce canal admet des points terminaux statiques répartis sur ses quatre faces, ainsi que des points terminaux dynamiques répartis sur ses deux faces horizontales. Afin d'alléger l'exposé, nous nous placerons dans l'hypothèse de la séquence monotone :

$$Seq = (1^+, 2^+, \dots c^+).$$

VII - Ensemble des sous-troncs à deux points terminaux

L'heuristique multi-canal d'assignation par pistes est conçue pour la résolution du problème d'assignation de pistes $P' = (S)$. Chaque interconnexion ou fragment d'interconnexion du canal H_i est donc considéré comme un ensemble de sous-troncs consécutifs admettant deux points terminaux, et seulement deux.

Avec le modèle du canal biface, chacun des deux points terminaux d'un sous-tronc de S est un point terminal statique, reposant sur l'une des faces de même direction que le canal. Avec le modèle de canal proposé, chacun des deux points terminaux d'un sous-tronc de S pourra être :

- un point terminal statique reposant sur l'une des faces de même direction que le canal,
- un point terminal dynamique reposant sur l'une des faces de même direction que le canal,
- un point terminal statique reposant sur l'une des faces de direction opposée à celle du canal.

VI2 - Contraintes d'assignation

Non-recouvrement des troncs :

Dans l'heuristique d'assignation par pistes, le respect des contraintes de non-recouvrement des troncs est intrinséquement assuré, de par le mécanisme de sélection du sous-tronc de départ courant.

Plaçons-nous à l'issue de la phase d'assignation à la piste courante d'une chaîne maximale de sous-troncs et soit x_{ar} l'extrémité droite du sous-tronc d'arrivée de cette chaîne. Le sous-tronc de départ de la chaîne suivante est alors sélectionné dans l'ensemble des sous-troncs non-encore assignés dont l'extrémité gauche est strictement supérieur à x_{ar} .

Considérons maintenant l'heuristique multi-canal d'assignation par pistes. Si le point terminal d'abscisse x_{ar} délimitant l'extrémité droite du sous-tronc d'arrivée de la chaîne est statique, alors les contraintes de non-recouvrement des troncs doivent être respectées : le sous-tronc de départ de la chaîne suivante sera choisi dans l'ensemble des sous-troncs non-encore assignés dont l'extrémité gauche est strictement supérieure à x_{ar} . S'il s'agit d'un point terminal dynamique, alors les contraintes de non-recouvrement des troncs n'ont pas à être considérées : le sous-tronc de départ de la chaîne suivante sera choisi dans l'ensemble des sous-troncs non-encore assignés dont l'extrémité gauche est supérieure ou égale à x_{ar} .

Non-recouvrement des branches

Les contraintes de non-recouvrement des branches seront normalement respectées entre points terminaux statiques, ignorées entre points terminaux dynamiques.

Points terminaux situés sur les faces de direction opposée à celle du canal

Un sous-tronc admettant un point terminal situé sur la face gauche ou droite du canal est à un instant donné assignable à la piste courante, si et seulement si l'ordonnée de ce point terminal est égale à l'ordonnée de la piste courante.

VI3 - Ensemble des sous-troncs de départ potentiels

A tout instant, l'*ensemble des sous-troncs de départ potentiels* contient tous les sous-troncs qui peuvent être choisis comme sous-tronc de départ courant. Nous noterons S_{dep} cet ensemble.

Plaçons-nous à l'issue de la phase d'assignation à la piste courante d'une chaîne maximale de sous-troncs. Une procédure évidente pour former l'ensemble S_{dep} consiste à rechercher tous les sous-troncs non-encore assignés

qui peuvent être assignés à la piste courante sans entraîner la violation des contraintes de non-recouvrement des troncs, puis à sélectionner tous les éléments dont l'extrémité gauche est minimale, puis à éliminer tous les éléments qui ne satisfont pas les contraintes de non-recouvrement des branches et les contraintes d'interconnexion des points terminaux situés sur les faces de direction opposée à celle du canal.

Lorsque le canal admet des points terminaux dynamiques, l'ensemble S_{dep} contient un nombre d'éléments inférieur ou égal à la densité du canal. Lorsque tous les points terminaux du canal sont statiques, l'ensemble S_{dep} ne contient jamais plus d'un élément.

VI4 - Principe de l'heuristique

Plaçons-nous à l'issue de la phase d'assignation à la piste courante d'une chaîne maximale de sous-troncs et soit S_{dep} l'ensemble des sous-troncs de départ potentiels de la chaîne suivante.

Si l'ensemble S_{dep} est vide, la piste courante est terminée.

Si l'ensemble S_{dep} ne contient qu'un seul élément, celui-ci est choisi comme sous-tronc de départ courant.

Si l'ensemble S_{dep} contient plus d'un élément, ses différents éléments sont ordonnés dans un ordre tel que le premier élément de l'ensemble soit celui estimé comme le plus favorable, le dernier élément celui estimé comme le moins favorable (nous discuterons au paragraphe suivant des critères utilisables pour effectuer cet ordonnancement). Le premier élément de l'ensemble S_{dep} est alors choisi comme sous-tronc de départ courant et une chaîne maximale est formée à partir de ce sous-tronc. Si le nombre d'éléments que comporte la chaîne satisfait le paramètre de chaîne minimale, tous ses éléments sont assignés à la piste courante. Dans le cas contraire, aucun de ses éléments n'est assigné à la piste courante et le deuxième élément de l'ensemble S_{dep} est

choisi comme sous-tronc de départ courant. Et ainsi de suite.

Si aucune des chaînes formées à partir des éléments de S_{dep} ne satisfait le paramètre de chaîne minimale, un nouvel ensemble S_{dep} est formé en ignorant les éléments déjà essayés.

Lorsque l'ensemble S_{dep} contient un élément dont l'un des deux points terminaux est situé sur la face gauche ou droite du canal, cet élément sera toujours estimé comme le sous-tronc de départ le plus favorable et sera donc placé en première position dans l'ensemble S_{dep} . Lorsqu'une chaîne de sous-troncs comporte un élément dont l'un des deux points terminaux est situé sur la face gauche ou droite du canal, les éléments de cette chaîne seront assignés inconditionnellement à la piste courante, quelle que soit la valeur du paramètre de chaîne minimale. Une priorité maximale est ainsi accordée à l'interconnexion des points terminaux situés sur les faces de direction opposée à celle du canal.

V15 - Ordonnement de l'ensemble des sous-troncs de départ potentiels

Plaçons-nous à l'issue de la phase d'assignation à la piste courante d'une chaîne maximale de sous-troncs. Soit S_{dep} l'ensemble des sous-troncs de départ potentiels de la chaîne suivante et supposons que cet ensemble contienne plus d'un élément. Enfin, supposons que la piste courante soit située dans la moitié inférieure du canal.

L'ordonnement de l'ensemble S_{dep} , de l'élément le plus favorable à l'élément le plus défavorable, sera effectué d'après différents critères d'optimalité du tracé. Nous allons en indiquer le principe, à travers quelques exemples.

La longueur de chaque interconnexion devant être minimisée, un élément de S_{dep} admettant ses deux points terminaux sur la face inférieure du canal sera estimé plus favorable qu'un élément admettant ses deux points terminaux sur la face supérieure, ou qu'un élément admettant un point terminal sur la face inférieure et un point terminal sur la face supérieure.

Considérons deux éléments de S_{dep} , tels que chacun de ces deux éléments admette ses deux points terminaux sur la face inférieure du canal. Le nombre de croisements entre interconnexions devant être minimisé, le plus court de ces deux éléments sera estimé comme le plus favorable.

Soit un élément de S_{dep} admettant un point terminal statique sur la face inférieure du canal et un point terminal dynamique sur la face supérieure, et soit un autre élément de S_{dep} admettant un point terminal dynamique sur la face inférieure et un point terminal statique sur la face supérieure. Si l'on désire privilégier le tracé des zones bifaces au détriment du tracé des zones de liaison, l'élément admettant un point terminal statique sur la face inférieure sera estimé comme le plus favorable. Si l'on désire privilégier le tracé des zones de liaison au détriment du tracé des zones bifaces, l'élément admettant un point terminal dynamique sur la face inférieure sera estimé comme le plus favorable.

Nous décrivons au paragraphe VII 5 une procédure d'ordonnement de l'ensemble S_{dep} .

VII - LE PROGRAMME TRACAS

VIII - Introduction

Le programme TRACAS (de l'anglais *track assignment*), écrit en langage PASCAL, implémente l'heuristique multi-canal d'assignation par pistes. Ce programme effectue le tracé d'un canal à capacité fixée, horizontal ou vertical, admettant éventuellement des points terminaux dynamiques. Dans sa version actuelle, il comporte environ 1 300 lignes de code.

TRACAS a été complété par les programmes MOVE et EDIT, tous deux écrits en langage PASCAL. En fonction du tracé effectué par TRACAS dans les canaux d'une direction donnée, le programme MOVE déplace les points terminaux dynamiques des canaux de direction opposée, de leurs emplacements arbitraires vers leurs emplacements finaux.

Le programme EDIT génère une description LUCIE des tracés effectués par TRACAS, description qui peut être éditée sur BENSON. Les programmes MOVE et EDIT représentent environ 1 200 lignes de code.

TRACAS, MOVE et EDIT ont été tous trois développés sur l'HB 68/Multics du Centre Interuniversitaire de Calcul de Grenoble.

Dans tout ce qui suit, afin d'alléger l'exposé, nous nous placerons dans l'hypothèse d'un canal horizontal, admettant des points terminaux statiques répartis sur ses quatre faces, ainsi que des points terminaux dynamiques répartis sur ses deux faces horizontales.

VII2 - Structures de données.

Les données d'entrée de TRACAS consistent d'une part en une description topologique du canal à traiter (direction, coordonnées délimitant les faces, coordonnées délimitant les zones bifaces et les zones de liaison, coordonnées délimitant les pistes), d'autre part en une description de chacun des points terminaux appartenant à ce canal (coordonnées, numéro d'interconnexion, statique ou dynamique).

A partir de ces données d'entrée est élaboré un tableau dpt (ad), décrivant les points terminaux du canal. Chaque élément de ce tableau est un enregistrement, dont les différents champs sont :

- le numéro d'interconnexion,
- un indicateur de face (inférieure, supérieure, gauche ou droite),
- une coordonnée précisant l'emplacement du point terminal sur la face (abscisse ou ordonnée, suivant que la face est horizontale ou verticale),
- un drapeau indiquant si le point terminal est statique ou dynamique.

Les points terminaux d'une même interconnexion sont triés par abscisses croissantes et décrites dans dpt (ad) par des éléments d'adresses ad telles que :

$$ad_1 \leq ad \leq ad_2$$

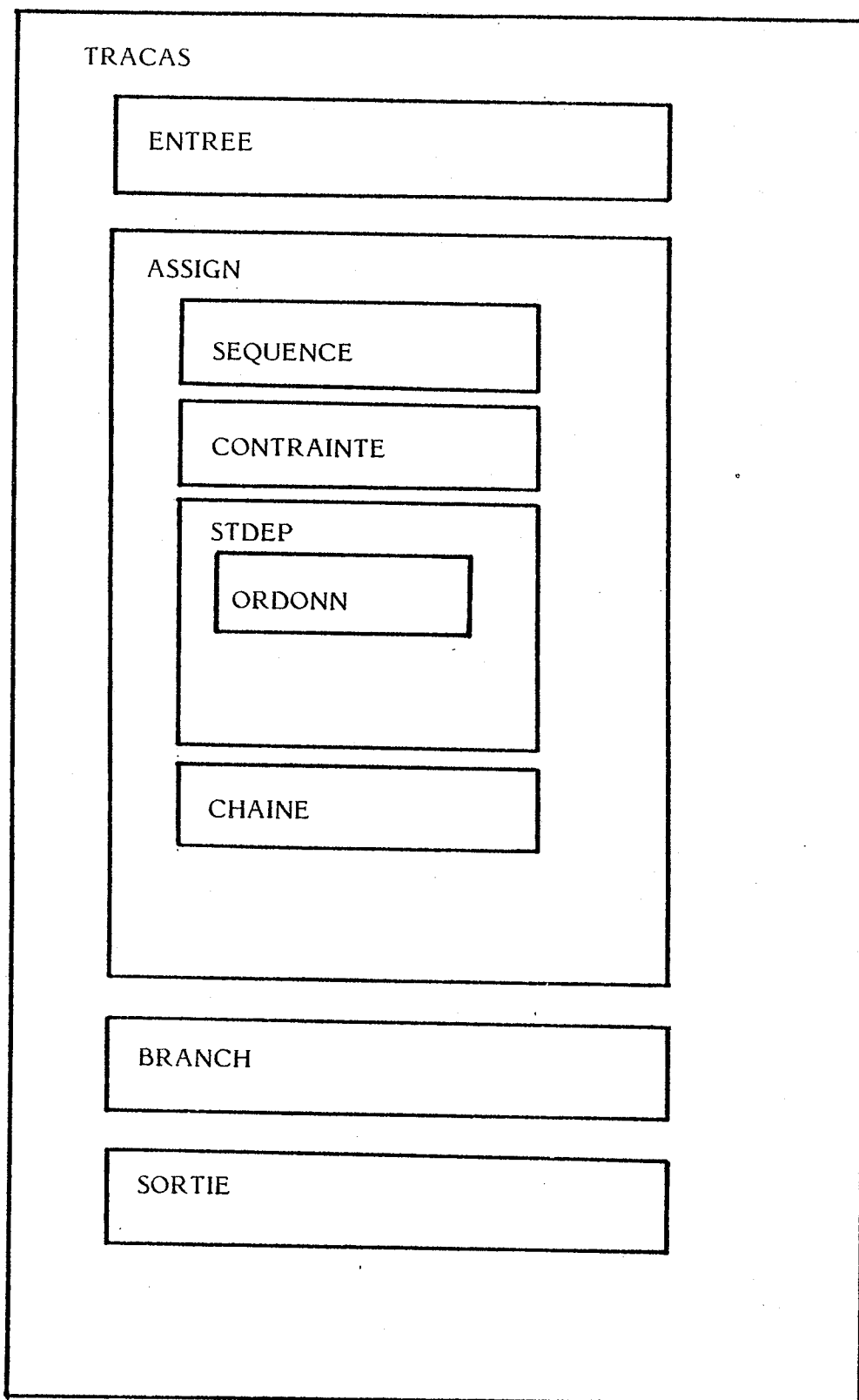


Figure 6 : architecture du programme TRACAS

Le point terminal d'abscisse la plus faible étant décrit par l'élément d'adresse ad_1 .

La description de chaque sous-tronc st est obtenue à l'aide d'un tableau d'adressage de $dpt(ad)$:

$adst(1, st)$ fournit l'adresse du point terminal de st situé à l'abscisse la plus faible, $adst(2, st)$ celle du point terminal de st situé à l'abscisse la plus grande. Deux sous-troncs partageant un même point terminal adresseront un même élément de $dpt(ad)$.

Un second tableau d'adressage de $dpt(ad)$ permet d'accéder à la description des troncs.

Une structure de données $st(x)$, dont nous ne donnerons pas la description logique, fournit les numéros de tous les sous-troncs admettant un point terminal à l'abscisse x ($X_{min} \leq x \leq X_{max}$).

Le résultat de l'assignation est décrit par un tableau $piste(st)$, contenant l'ordonnée de la piste à laquelle a été assigné le sous-tronc st . Pour tout sous-tronc non-assigné, $piste(st)$ est nul.

VIII - Architecture du programme

L'architecture du programme TRACAS est schématisée à la figure 6.

La procédure ENTREE acquiert les données d'entrée et initialise les structures de données décrites précédemment.

La procédure SEQUENCE calcule, en fonction du paramètre séquence, les caractéristiques de la piste courante : ordonnée, face initiale, sens de recherche.

Telle qu'elle a été implémentée, cette procédure permet 8 séquences monotones et 8 séquences alternées.

La procédure CONTRAINTE décide si un sous-tronc donné est à un instant donné assignable ou non à la piste courante. Elle vérifie que l'assignation de ce sous-tronc à la piste courante n'entraîne pas la violation des contraintes de non-recouvrement des branches ; si ce sous-tronc admet un point terminal sur la face gauche ou droite du canal, elle vérifie que l'ordonnée de ce point terminal est égale à l'ordonnée de la piste courante.

La procédure STDEP forme l'ensemble S_{dep} des sous-troncs de départ potentiels. Lorsque cet ensemble comprend plus d'un élément, il est ordonné par la procédure ORDONN. Nous décrivons ces deux procédures dans les deux paragraphes suivants.

La procédure CHAINE forme une chaîne maximale de sous-troncs, à partir du sous-tronc de départ courant et en allant dans le sens de recherche.

Le déroulement de l'assignation, pour un jeu de paramètres donné, est contrôlé par la procédure ASSIGN. Celle-ci reçoit du programme principal les valeurs des paramètres, appelle les procédures SEQUENCE, STDEP et CHAINE détecte la fin de l'assignation et retourne au programme principal les résultats de l'assignation.

La procédure BRANCH calcule, pour une assignation donnée, la longueur totale des branches situées à l'intérieur des zones bifaces et la longueur totale des branches situées à l'intérieur des zones de liaison.

La procédure SORTIE écrit sur disque toutes les informations nécessaires à l'exécution des programmes MOVE et EDIT.

Le programme principal appelle les procédures ENTREE, ASSIGN, BRANCH et SORTIE. Il gère les valeurs des paramètres de la procédure ASSIGN, estime l'optimalité des assignations obtenues et fournit à la procédure SORTIE la meilleure assignation qui puisse être obtenue.

VII4 - Formation de l'ensemble des sous-troncs de départ potentiels

Plaçons-nous à l'issue de la phase d'assignation à la piste courante d'une chaîne maximale de sous-troncs et soit x_{ar} l'abscisse du point terminal délimitant l'extrémité droite du sous-tronc d'arrivée de cette chaîne. Une abscisse de recherche x_r , égale à x_{ar} ou à $x_{ar} + 1$, est alors transmise à la procédure STDEP par la procédure ASSIGN.

La procédure STDEP lit $\underline{st}(x_r)$, ensemble des sous-troncs admettant un point terminal d'abscisse x_r , et range ses différents éléments dans un tableau $\underline{stdep}(ad)$ ($1 \leq ad \leq |\underline{st}(x_r)|$). Puis elle élimine tous les éléments déjà assignés, ainsi que tous les éléments admettant un point terminal d'abscisse strictement inférieure à x_r . Le tableau $\underline{stdep}(ad)$ contient alors les numéros de tous les sous-troncs non-encore assignés dont l'extrémité gauche est égale à x_r . La procédure CONTRAINTE est ensuite appelée, afin d'éliminer tous les éléments qui ne peuvent être assignés à la piste courante.

Si $\underline{stdep}(ad)$ est non-vide, alors il contient les numéros de tous les sous-troncs de S_{dep} . S'il contient plus d'un élément, il est ordonné par la procédure ORDONN.

Si $\underline{stdep}(ad)$ est vide, soit parce que $\underline{st}(x_r)$ est vide, soit parce que tous ses éléments ont été éliminés, l'abscisse de recherche x_r est incrémentée jusqu'à obtenir un tableau $\underline{stdep}(ad)$ non-vide, ou jusqu'à atteindre la face droite du canal.

VII5 - Ordonnement de l'ensemble des sous-troncs de départ potentiels

Nous avons vu au paragraphe VI5 quels sont les critères qui peuvent être utilisés pour effectuer l'ordonnement de l'ensemble S_{dep} .

A chaque élément de stdep (ad), la procédure ORDONN associe un nombre entier ap , positif ou négatif, représentant "l'aptitude" de cet élément à devenir le sous-tronc de départ courant. Les éléments de stdep (ad) sont ensuite ordonnés par valeurs de ap croissantes.

La procédure ORDONN peut, dans son principe, être décrite comme suit.

$ap := 0$;

pour chaque point terminal faire

si sur la face inférieure alors

si statique alors $ap := ap + w_1$;

si dynamique alors $ap := ap + w_2$;

si sur la face supérieure alors

si statique alors $ap := ap - w_1$;

si dynamique alors $ap := ap - w_2$;

en cas de

$ap > 0$: $ap := k \cdot ap - \ell$;

$ap < 0$: $ap := k \cdot ap + \ell$;

si la piste courante est dans la moitié supérieure du canal alors

$ap := -ap$;

w_1 est un entier positif représentant le poids d'un point terminal statique, w_2 un entier positif représentant le poids d'un terminal dynamique, ℓ un entier positif représentant la longueur du sous-tronc. k est une constante entière positive, dont la valeur doit être très grande devant celles de w_1 , w_2 et ℓ . Un drapeau, que nous appellerons *plage*, permet d'appliquer le calcul des nombres ap , soit aux sous-troncs de S_{dep} , soit aux troncs de T auxquels appartiennent ces sous-troncs.

Lorsque le poids w_1 d'un point terminal statique est supérieur au poids w_2 d'un point terminal dynamique, le tracé des zones bifaces tend à être privilégié au détriment du tracé des zones de liaison, et vice versa.

Pour des canaux très encombrés, dont le tracé nécessite l'introduction d'un grand nombre de "doglegs", il sera généralement préférable d'appliquer le calcul des nombres ap aux sous-troncs de S_{dep} ; pour des canaux faiblement encombrés, aux troncs de T auxquels appartiennent les sous-troncs de S_{dep} .

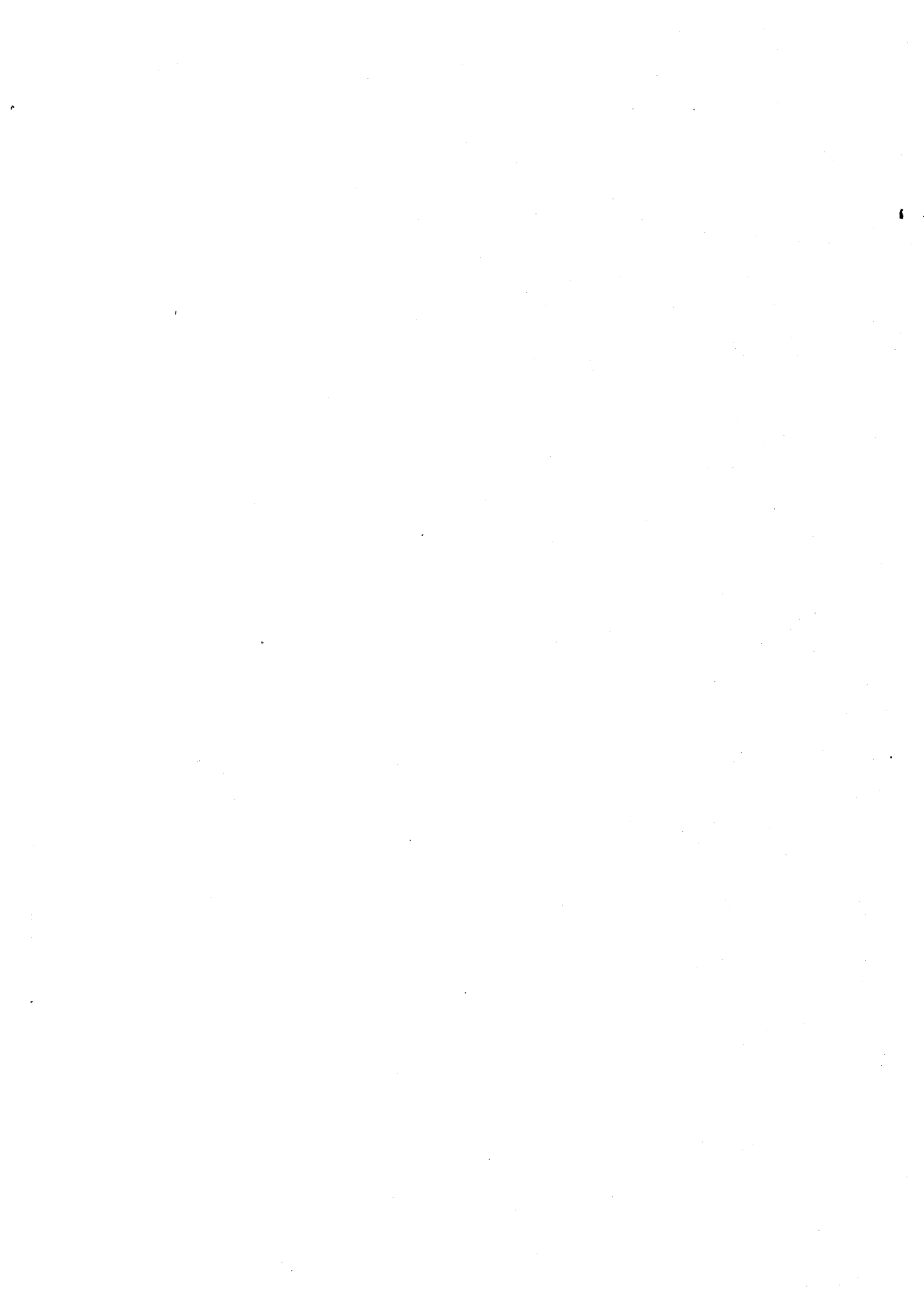
Les poids w_1 et w_2 , ainsi que le drapeau de plage (...), sont des paramètres de la procédure ASSIGN, englobant la procédure ORDONN. Avec le paramètre séquence et le paramètre de chaîne minimale, la procédure ASSIGN est ainsi munie de 5 paramètres.

VII6 - Exemples d'application

Les figures 7 et 8 représentent les tracés obtenus à l'aide des programmes TRACAS, MOVE et EDIT, pour deux problèmes qui nous ont été aimablement fournis par la R.T.C. Ces deux tracés ont été obtenus à 100 % automatiquement.

Pour le réseau de la figure 7 comme pour celui de la figure 8, le tracé des canaux horizontaux a été effectué avant celui des canaux verticaux. Le poids w_1 d'un point terminal statique était égal à 2, le poids w_2 d'un point terminal dynamique égal à 1. Le calcul des nombres ap (procédure ORDONN) a été appliqué aux troncs de T , excepté pour le canal H_1 du réseau de la figure 7 où il a été appliqué aux sous-troncs de S_{dep} .

Les tableaux I et II présentent quelques résultats expérimentaux, pour chacun de ces problèmes.



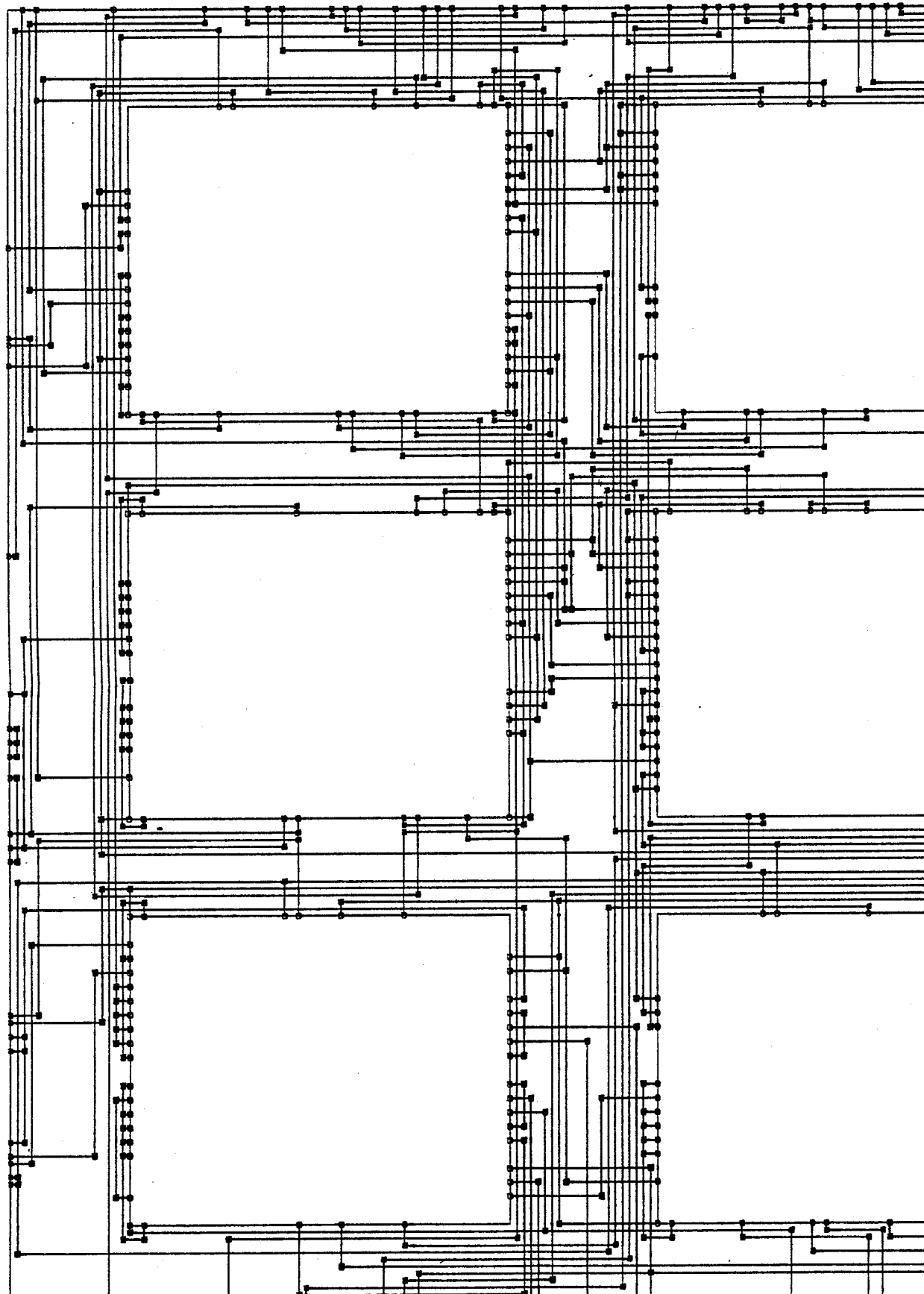
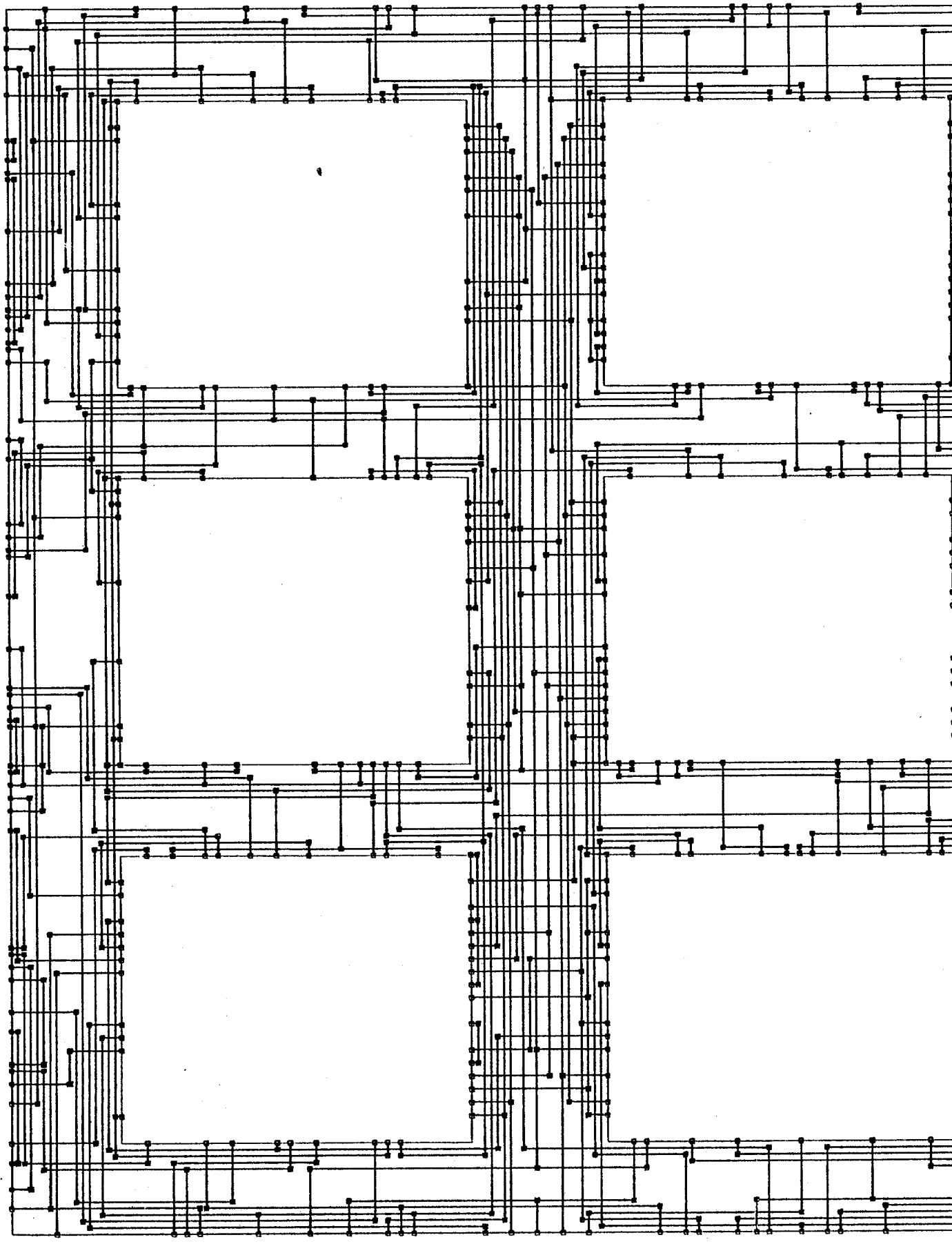


Figure 8

with DTC P₁ (from ACE (00))

Figure 7



Canal	Densité	Points terminaux	Pistes occupées	Long. totale segments *	Long. totale branches *	Passages via *	Doglegs *	t(s) ‡
H ₁	14	150	14	2712	930	148	4	0,715
H ₂	19	131	19	3688	846	126	0	0,722
H ₃	19	135	19	3624	975	130	0	0,693
H ₄	15	115	15	2367	661	113	0	0,619
V ₁	11	102	11	2318	593	94	0	0,612
V ₂	10	101	10	1930	467	97	0	0,553
V ₃	12	118	12	1943	493	109	0	0,747
V ₄	12	107	12	2054	575	100	0	0,685

* Pour les canaux horizontaux, avant effacement du tracé des zones de liaison.

‡ Temps moyen d'exécution de la procédure ASSIGN pour un jeu de paramètres, sur HB 68/Multics.

TABLEAU I

Canal	Densité	Points terminaux	Pistes occupées	Long. totale* segments	Long. totale* branches	Passages* via	Doglegs*	\bar{t} (s)
H ₁	11	94	11	1834	440	90	0	0,603
H ₂	18	148	18	3350	1033	144	0	0,731
H ₃	14	74	14	2257	459	70	0	0,473
V ₁	12	67	12	1519	360	67	0	0,429
V ₂	12	62	12	1575	235	57	1	0,438
V ₃	12	61	12	1208	254	61	0	0,375
V ₄	10	71	10	1521	425	71	0	0,421

TABLEAU II

VII7 - Complexité

Nous avons appliqué TRACAS à 30 canaux, admettant un nombre de points terminaux compris entre 50 et 500. Ces canaux provenaient, d'une part des problèmes qui nous ont été fournis par la RTC, d'autre part de problèmes empruntés à la littérature. Pour chacun de ces canaux, nous avons chronométré la procédure ASSIGN pour 32 jeux de paramètres, puis calculé le temps moyen \bar{t} d'exécution de cette procédure.

Pour chaque canal traité, le temps \bar{t} suit la loi :

$$\bar{t} = k \cdot n_{pt} + c$$

à plus ou moins 15 %, n_{pt} étant le nombre de points terminaux du canal, k et c des constantes. Sur HB 68/Multics :

$$k = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ s} \qquad c = 0,1 \text{ s.}$$

Evidemment, \bar{t} ne constitue qu'une mesure de *complexité de cas moyen* [Tar 78].

VII8 - Limitations

L'extension du concept d'assignation de pistes au problème du canal quadriface introduit différentes limitations dans le tracé des interconnexions des points terminaux sur les faces de direction opposées à celle du canal.

Considérons un canal horizontal et soit i une interconnexion de ce canal.

Supposons que l'interconnexion i admette un point terminal sur la face gauche du canal à l'ordonnée y_1 , un point terminal sur la face droite à l'ordonnée y_2 .

Si $y_1 \neq y_2$ et si l'interconnexion i n'admet aucun point terminal sur les faces horizontales, alors cette interconnexion ne peut être tracée.

De même, une interconnexion i admettant plus d'un point terminal sur les faces gauche ou droite du canal ne peut être tracée.

Lors de l'implémentation de TRACAS et de MOVE, nous avons pu lever ces différentes restrictions par différents artifices que nous ne décrivons pas ici.

VIII - DISCUSSION

La stratégie que nous venons de présenter constitue une tentative pour minimiser les effets indésirables d'un découpage de la surface d'interconnexion. Le phénomène de hachage des interconnexions à la traversée des cellules de liaison est complètement évité et les critères d'optimalité locale fournissent un moyen d'action sur l'optimalité globale.

Le principal atout de l'heuristique multi-canal d'assignation par pistes est une très grande souplesse d'utilisation, que lui confèrent les paramètres de la procédure ORDONN. Pour un problème multi-canal donné, différentes valeurs de ces paramètres conduisent généralement à des tracés qui sont globalement très différents.

La principale faiblesse de l'heuristique est de n'utiliser que la seule méthode 1 de division. Cette faiblesse se manifeste généralement dans des canaux où le nombre moyen de points terminaux par interconnexion est faible : le nombre moyen de sites potentiels d'apparition d'une "dogleg" par interconnexion est alors faible.

Le comportement de l'heuristique vis-à-vis des points terminaux situés sur les faces de direction opposée à celle du canal est très satisfaisant. Il convient toutefois de souligner que cette caractéristique est due à la topologie des canaux : chaque canal est très allongé dans une direction et le nombre de points terminaux situés sur les faces les plus longues est généralement

grand devant le nombre de points terminaux situés sur les faces les plus courtes (typiquement, dans un rapport de l'ordre 20). Aussi, chaque canal "se rapproche-t-il bien d'avantage d'un canal biface que d'un véritable canal quadriface". De toute évidence, appliquée au tracé de cellules de liaison, cette heuristique ne fournirait que des résultats très médiocres.

En même temps qu'était développé TRACAS, un programme FORTRAN implémentant l'heuristique multi-canal d'assignation par pistes a été développé à la RTC et intégré au système DELILA [Min 82]. Ce programme FORTRAN est en usage quotidien à la RTC depuis juillet 82. En 1983, il a été également implémenté chez Philips (Eindhoven) et chez Signetics (Sunnyvale).

CONCLUSION

Au cours de la première partie, nous avons présenté une modélisation du problème du canal biface.

Le modèle proposé unifie différents éléments : la notion d'assignation de pistes, la modélisation des contraintes de non-court-circuit par deux graphes, la division des troncs. Ce modèle nous a permis d'établir différents résultats concernant la faisabilité du problème et la capacité minimale. En particulier, nous avons montré que la capacité minimale est minorée par $\omega(G_t)$, cardinalité d'une clique maximale du graphe G_t de non-recouvrement des troncs. Ce minorant peut être calculé aisément, à l'aide de la fonction densité.

Ce modèle nous a également permis de construire plusieurs exemples de problèmes dont la capacité minimale est strictement supérieure à $\omega(G_t)$. A travers ces exemples, nous avons pu identifier différentes circonstances dans lesquelles le minorant $\omega(G_t)$ ne peut être atteint.

A l'aide de ce même modèle, nous avons décrit et formalisé une heuristique pour la résolution du problème du canal biface : l'heuristique d'assignation par pistes (Dogleg Channel Router [Deu 76]). Des heuristiques plus puissantes sont aujourd'hui disponibles. Toutefois, un grand nombre des outils de tracé de canaux bifaces en usage actuellement sont basés sur son principe.

Les principales stratégies de résolution du problème multi-canal font appel à un découpage de la surface d'interconnexion en canaux disjoints. Nous avons montré que, outre le problème difficile du tracé des cellules de liaison, de tels découpages se heurtent à l'impossibilité de contrôler l'optimalité globale du tracé. Nous proposons de découper la surface d'interconnexion en canaux se recouvrant. Une cellule de liaison est alors définie comme une zone d'intersection entre deux canaux de directions opposées.

Dans une configuration de type "matrice de blocs", il est aisé de définir un découpage en canaux se recouvrant. Les canaux sont rectangulaires et courent d'un bord à l'autre de la surface d'interconnexion ; chaque canal

intersecte avec tous les canaux de direction opposée. Le tracé des cellules de liaison est effectué en deux phases, correspondant aux deux directions du plan. Le concept de point terminal dynamique permet la modélisation du processus de tracé.

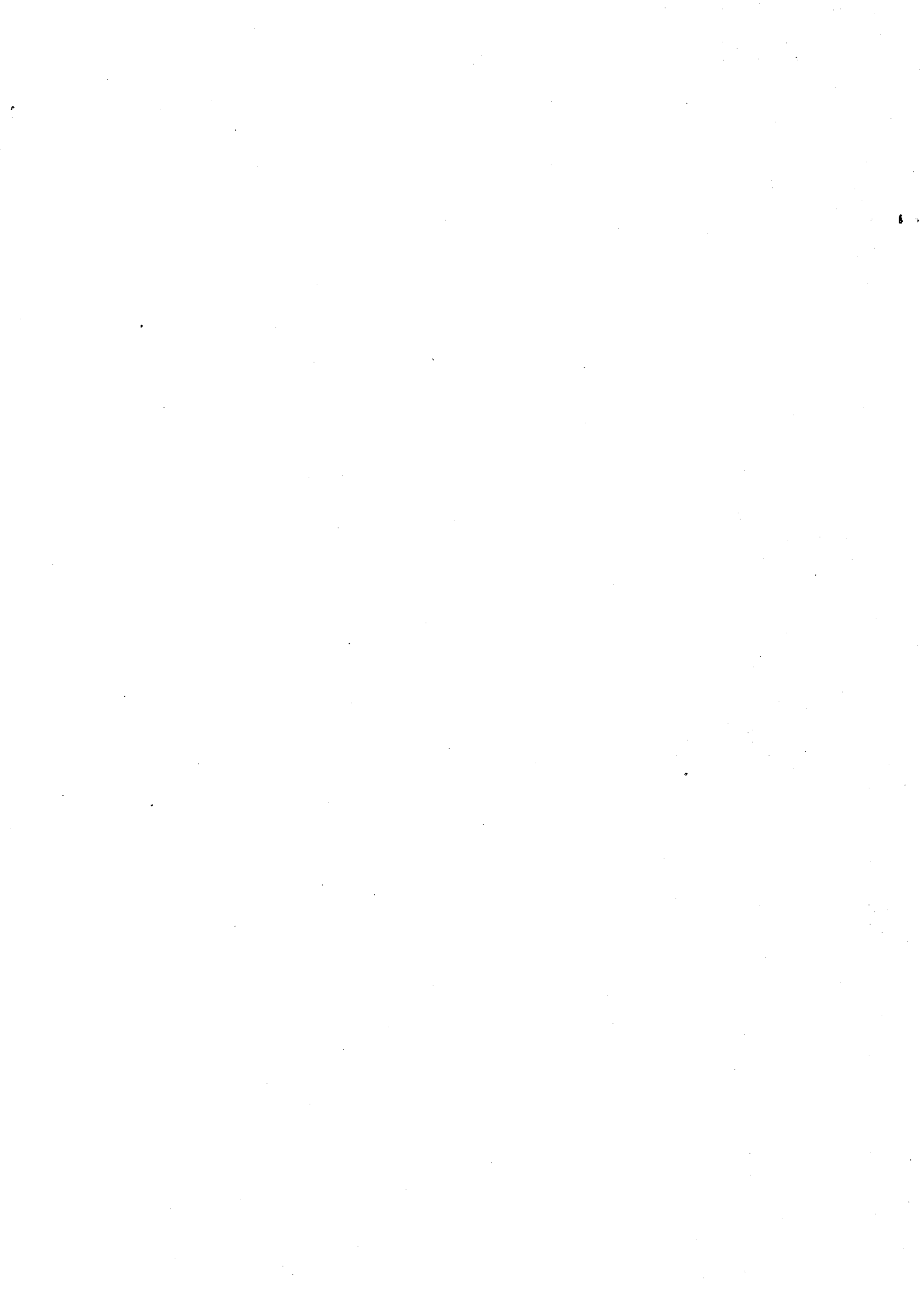
Moyennant quelques modifications mineures, le modèle présenté au cours de la première partie peut être étendu au tracé de canaux rectangulaires se recouvrant. Ce modèle nous a permis de concevoir une heuristique basée sur le principe de l'heuristique d'assignation par pistes. Deux programmes implémentant cette heuristique ont été simultanément développés. L'un est écrit en PASCAL, le programme TRACAS, et a été développé sur l'HB 68/Multics du CIGC. L'autre, écrit en FORTRAN, a été développé par la RTC (Caen). Intégré au système DELILA en juillet 1982, ce dernier est utilisé pour la personnalisation des réseaux prédéfinis de la série ACE. En 1983, il a été également implémenté chez Philips (Eindhoven) et chez Signetics (Sunnyvale).

Ces deux programmes ont démontré les qualités de l'heuristique multi-canal d'assignation par pistes : simplicité, efficacité, souplesse d'utilisation. Ses principales limitations proviennent de ce qu'elle n'utilise que la seule méthode I de division ("doglegs"). Des heuristiques plus puissantes que celle d'assignation par pistes pourraient aujourd'hui servir de base au développement d'heuristiques pour le tracé de canaux rectangulaires se recouvrant. L'une d'entre elles, introduite par R. Rivest et C. Fiduccia en 1982 (Greedy Channel Router [Riv 82]), semble s'y prêter particulièrement bien et devrait permettre le développement d'une heuristique multi-canal nettement plus puissante que celle d'assignation par pistes.

Cette stratégie est, dans son principe, applicable au problème multi-canal le plus général (building blocks). La définition d'un découpage de la surface d'interconnexion en canaux se recouvrant ne semble pas poser de problèmes particuliers. Toutefois, les canaux ne seraient plus rectangulaires, mais rectilignes.

Nous avons montré comment une heuristique pour le tracé de canaux bifaces peut servir de base au développement d'une heuristique pour le tracé de canaux rectangulaires se recouvrant. Des heuristiques pour le tracé de canaux rectilignes devraient être disponibles dans un avenir proche. On pourrait alors envisager l'extension de ces heuristiques au tracé de canaux rectilignes se recouvrant, de façon à bénéficier des principaux points forts de la stratégie : décomposition du problème multi-canal en un ensemble de problèmes moins complexes et pouvant être résolus indépendamment, conservation de la phase de tracé global et des avantages qu'elle offre, absence de hachage des interconnexions à la traversée des cellules de liaison, conservation d'un moyen d'action sur l'optimalité globale du tracé.

BIBLIOGRAPHIE



- [Abe 72] L. C. Abel
"On the Ordering of Connections for Automatic Wire Routing",
IEEE Transactions on Computers, Vol. C-21, n° 11, pp. 1227-1233,
November 1972.
- [Ake 67] S. B. Akers
"A Modification of Lee's Path Connection Algorithm",
IEEE transactions on Electronic Computers, Vol. EC-16, n° 1, pp. 97-
98, February 1967.
- [Ake 72] S. B. Akers
"Routing",
Design Automation of Digital Systems, edited by M.A. Breuer,
Prentice-Hall, Vol. 1, pp. 283-333, 1972.
- [All 81] J. Allen, P. Penfield
"VLSI Design Automation Activities at MIT",
IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-28, n° 7,
pp. 645-653, July 1981.
- [Asa 77] T. Asano, T. Kitahashi, K. Tanaka, H. Horino, N. Amano
"A Wire-Routing Scheme based on Trunk-Division Methods",
IEEE Transactions on Computers, Vol. C-26, n° 8, August 1977.
- [Bek 79] H. Beke, W. Sansen
"CALMOS- A Portable Software System for the Automatic and
Interactive Layout of MOS/LSI", in *Proc. 16 th Design Automation
Conf.* (San Diego), pp. 102-108, June 1979.
- [Ber 73] C. Berge
"Graphes et Hypergraphes", Dunod, 1973.

- [Bol 79] H. Bollinger
"A Mature DA System for PC Layout",
in *Proc. 1st Int. Printed Circuit Conf.* (New-York), pp. 85-99, 1979.
- [Bre 77] M. Breuer
"Min-cut placement", *Journal of Design Automation and Fault Tolerant Computing*, Vol. 1, n° 4, pp. 343-362, October 1977.
- [Bur 83] M. Burstein, R. Pelavin
"Hierarchical Channel Router",
in *Proc. 20 th Design Automation Conf.* (Miami), pp. 591-597,
June 1983.
- [Bur 83 a] M. Burstein, R. Pelavin
"Hierarchical Wire Routing," *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of ICAS*, Vol. CAD-2, n° 4, pp. 223-224, October 1983.
- [Dir 81] S. Director, A. Parker, D. Siewiorek, D. Thomas
"A Design Methodology and Computer Aids for Digital VLSI Systems"
IEEE Transactions on Computers and Systems, Vol. CAS-28, n° 7,
pp. 634-644, July 1981.
- [Don 80] W. Donath
"Complexity Theory and Design Automation",
in *Proc. 17 th Design Automation Conf.* (Minneapolis), pp. 412-419,
June 1980.
- [Don 81] W. Donath, W. Mikhail
"Wiring Space Estimation for Rectangular Gate Arrays", *VLSI 81*,
J. Gray, Academic Press, pp. 301-310, 1981.
- [Deu 76] D. N. Deutsch
"A Dogleg Channel Router", in *Proc. 13 th Design Automation Conf.*
(San Francisco), pp. 425-433, June 1976.

- [Dup 84] G. Dupenloup
 "A Wire-Routing Scheme for Double-Layer Cell Arrays", in
Proc. 21 st Design Automation Conf. (Albuquerque), June 1984.
- [Fel 76] A. Feller
 "Automatic Layout of Low-Cost Quick-Turnaround Random-Logic
 Custom LSI Devices", in *Proc. 13 th Design Automation Conf.*
 (San Francisco); pp. 79-85, June 1976.
- [Gav 72] F. Gavril
 "Algorithms for Minimum Coloring, Maximum Clique, Minimum
 Covering by Cliques, and Maximum Independent Set of a Chordal
 Graph", *SIAM Journal of Computing*, Vol. 1, n° 2, pp. 180-187,
 June 1972.
- [Gon 79] M. Gondran, M. Minoux
 "Graphes et Algorithmes", Eyrolles, pp. 50-64, 1979.
- [Got 79] S. Goto
 "A Two-Dimensional Placement Algorithm for the Master-Slice
 Layout Problem", in *Proc. 16 th Design Automation Conf. (San Die-
 go)*, pp. 11-17, June 1979.
- [Han 72] M. Hanan, J. M. Kurtzberg
 "Placements Techniques," *Design Automation of Digital Systems*,
 edited by M. A. Breuer, Prentice-Hall, Vol. 1, pp. 213-282, 1972.
- [Han 73] M. Hanan, P. K. Wolff, B. J. Anguli
 "Some Experimental Results on Placement Techniques", in *Proc. 13th
 Design Automation Workshop (Portland)*, pp. 214-224, June 1973.
- [Has 71] A. Hashimoto, J. Stevens
 "Wire Routing by Optimizing Channel Assignment within Large
 Apertures", in *Proc. 8 th Design Automation Workshop (Atlantic City)*
 pp. 155-169, June 1971.

- [Hell 77] W. R. Heller, W. F. Mikhail, W. E. Donath
"Prediction of Wiring Space Requirements for LSI", in *Proc. 14 th Design Automation Conf.* (New Orleans), pp. 32-42, June 1977.
- [Hig 69] D. Hightower
"A Solution to the Line Routing Problem on the Continuous Plane", in *Proc. Design Automation Workshop* (Miami), pp. 1-24, June 1969.
- [Hig 80] D. Hightower, R. Boyd
"A Generalized Channel Router", in *Proc. 17 th Design Automation Conf.* (Minneapolis), pp. 12-21, June 1980.
- [Hsu 82] C. P. Hsu
"A New Two-Dimensional Routing Algorithm", in *Proc. 19 th Design Automation Conf.* (Las Vegas), pp. 46-50, June 1982.
- [Kan 83] S. Kang
"Linear Ordering and Applications to Placement", in *Proc. 20 th Design Automation Conf.* (Miami), pp. 457-464, June 1983.
- [Ker 73] B. Kerningham, D. Schweikert, G. Persky
"An Optimum Channel Routing Algorithm for Polycell Layouts of Integrated Circuits", in *Proc. 10 th Design Automation Workshop* (Portland), pp. 26-46, 1973.
- [Lap 80] A. Lapaugh
"Algorithms for Integrated Circuit Layout : An Analytic Approach", Ph. Doctorate, Massachusetts Institute of Technology, November 1980
- [Lau 79] U. Lauther
"A Min-Cut Placement Algorithm for General Cell Assemblies based on Graph Representation", in *Proc. 16 th Design Automation Conf.* (San Diego), pp. 1-10, June 1979.

- [Lee 61] C. Y. Lee
 "An Algorithm for Path Connections and its Application", *IRE transactions on Electronic Computers*, Vol. EC-10, n° 3, pp. 346-365, September 1961.
- [Mat 72] R. Mattison
 "A High Quality, Low Cost Router for MOS/LSI Circuits", in *Proc. 9 th Design Automation Workshop (Dallas)*, pp. 94-103, June 1972.
- [Mea 80] C. Mead, L. Conway
 "Introduction to VLSI", Addison-Wesley, 1980.
- [Min 82] "Les circuits prédifusés : les réseaux ACE, compatibles ECL, de RTC", *Minis et Micros*, n° 166, pp. 27-30, 7 Juin 1982.
- [Nan 78] N. Nan, M. Feuer
 "A Method for Automatic Wiring of LSI Chips", in *Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems (New York)*, pp. 11-15, July 1978.
- [Per 76] G. Persky, D. N. Deutsch, D. G. Schweikert
 "LTX - A System for the Directed Automatic Design of LSI Circuits" in *Proc. 13 th Design Automation Conf. (San Francisco)*, pp. 399-407, June 1976.
- [Per 81] G. Persky, B. Tien, B. Ting, F. Rubin, U. Lauther
 "Comments on an Optimal Solution for the Channel Assignment Problem", *IEEE Transactions on Computers*, Vol. C-30, n° 6, pp. 454-455, June 1981.
- [Pin 81] R. Pinter
 "Optimal Routing in Rectilinear Channels", *VLSI Systems and Computation*, H. T. Kung, Springer-Verlag, pp. 160-177, 1981.

- [Pos 80] J. Posa
"Gate Arrays", *Electronics*, pp. 145-158, September 25, 1980.
- [Pre 78] B. T. Preas, C. W. Gwyn
"Methods for Hierarchical Automatic Layout of Custom LSI Circuit Masks", in *Proc. 15 th Design Automation Conf.* (Las Vegas), pp. 206-212, June 1978.
- [Pre 79] B. T. Preas, W. M. Van Cleemput
"Placement Algorithms for Arbitrarily Shaped Blocks", in *Proc. 16 th Design Automation Conf.* (San Diego), pp. 474-480, June 1979.
- [Rei 77] E. M. Reingold, J. Nievergelt, N. Deo
"Combinatorial Algorithms", Prentice-Hall, 1977.
- [Riv 82] R. L. Rivest, C. M. Fiduccia
"A Greedy Channel Router", in *Proc. 19 th Design Automation Conf.* (Las Vegas), pp. 418-424, June 1982.
- [Rot 83] H. J. Rothermel, D. A. Mlynski
"Automatic Variable-Width Routing for VLSI", *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of ICAS*, Vol. CAD-2, n° 4, pp. 271-284, October 1983.
- [Rub 74] F. Rubin
"The Lee connection algorithm", *IEEE Transactions on Computers*, Vol. C-23, n° 9, pp. 907-914, September 1974.
- [Sah 80] S. Sahni, A. Bhatt
"The Complexity of Design Automation Problems", in *Proc. 17 th Design Automation Conf.* (Minneapolis), pp. 402-411, June 1980.
- [San 81] A. Sangiovanni-Vincentelli
"Guest Editorial", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-28, n° 7, July 1981.

- [Sat 79] K. Sato, T. Nagai, H. Shimoyama, T. Yahara
"Mirage - A Simple-Model Routing Program for the Hierarchical Layout Design of IC Masks", in *Proc. 16 th Design Automation Conf.* (San Diego), pp. 297-304, June 1979.
- [Sch 76] D. Schweikert
"PLAC - A 2-Dimensional Placement Algorithm for the Layout of Electrical Circuits", in *Proc. 13 th Design Automation Conf.* (San Francisco), pp. 408-416, June 1976.
- [Sou 78] J. Soukup
"Fast Maze Router", in *Proc. 15 th Design Automation Conf.* (Las Vegas), pp. 100-102, June 1978.
- [Sou 79] J. Soukup
"Global Router", in *Proc. 16 th Design Automation Conf.* (San Diego), pp. 481-484, June 1979.
- [Sou 81] J. Soukup
"Circuit Layout", *Proc. IEEE*, Vol. 69, pp. 1281-1304, October 1981.
- [Sou 81 a] J. Soukup, J. C. Royle
"On Hierarchical Routing", *Journal of Digital Systems*, Vol. 5, n° 3, pp. 265-288, September 1981.
- [Sup 82] K. J. Supowit
"A Minimum-Impact Routing Algorithm", in *Proc. 19 th Design Automation Conf.* (Las Vegas), pp. 104-112, June 1982.
- [Tar 78] R. Tarjan
"Complexity of Combinatorial Algorithms", *SIAM Review*, Vol. 20, n° 3, pp. 457-490, July 1978.
- [Tri 81] S. Trimberger, J. Rowson, C. Lang, J. Gray
"A Structured Design Methodology and Associated Software Tools", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-28, n° 7, July 1981.

- [Wie 81] M. Wiesel, D. A. Mlynski
"An Efficient Channel Model for Building Blocks LSI", in *Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems* (Chicago), pp. 118-121, July 1981.
- [Wie 82] M. Wiesel, D. A. Mlynski
"Two-Dimensional Channel Routing and Channel Intersection Problems", in *Proc. 19 th Design Automation Conf.* (Las Vegas), pp. 733-739, June 1982.
- [Yos 82] T. Yoshimura, E. S. Kuh
"Efficient Algorithms for Channel Routing", *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of ICAS*, Vol. CAD-1, n° 1, pp. 25-35, Janvier 1982.
- [Van 83] W. M. Van Cleemput
"Bringing Semicustom IC Design in-House", *Computer Design*, pp. 185-192, February 1983.

TABLE DES MATIERES



AVANT-PROPOS	11
INTRODUCTION	13

PREMIERE PARTIE : TRACE DES CANAUX BIFACES

CHAPITRE I : LE PROBLEME DU CANAL BIFACE

I. Le problème du canal biface	
I1 - Topologie. Pistes et capacité	25
I2 - Listes d'interconnexion	29
I3 - Enoncé du problème	29
II. Le problème d'assignation de pistes	
II1 - Troncs et branches	31
II2 - Contraintes de non-court-circuit graphes G_t et G_b	33
II3 - Enoncé du problème	39
III. Faisabilité d'un problème d'assignation de pistes	41
IV. Capacité minimale d'un problème d'assignation de pistes	
IV1 - Capacité minimale imposée par G_t	42
IV2 - Capacité minimale imposée par G_b	43
IV3 - Interactions entre les graphes G_t et G_b	47
IV4 - Encadrement de la capacité minimale	53
V. La division des troncs	
V1 - Limites du modèle d'assignation de pistes	54
V2 - Les différentes méthodes de division	55
V3 - Transformation d'un problème d'assignation de pistes par division des troncs	59

VI. Faisabilité d'un problème de canal biface	
VII - Ouverture des cycles du graphe G_b	63
VII2 - Problèmes insolubles à l'intérieur du canal	67
VII. Capacité minimale d'un problème de canal biface	
VIII1 - Réduction de $\omega(G_t)$	71
VIII2 - Réduction de $\lambda(G_b)$	73
VIII3 - Divisions et interactions entre les graphes G_t et G_b	77
VIII4 - Encadrement de la capacité minimale	81
VIII. Conclusion	82

CHAPITRE II : UNE HEURISTIQUE POUR LE TRACE DES CANAUX BIFACES

I. Introduction	85
II. Complexité du problème du canal biface	85
III. Critères d'optimalité des solutions	86
IV. Algorithme d'Hashimoto et Stevens	88
V. Respect des contraintes de non-recouvrement des branches	89
VI. Introduction de divisions de type I	
VII - Transformation de l'ensemble des troncs en un ensemble de sous-troncs à 2 branches	93
VII2 - Minimisation du nombre de divisions introduites	99
VII3 - Paramètre de chaîne minimale	103
VII. Paramètre séquence	105
VIII. Heuristique d'assignation par pistes	107
IX. Adaptation des critères d'optimalité	109
X. Influence des paramètres	111

DEUXIEME PARTIE : TRACE MULTI-CANAL

CHAPITRE I : LES DIFFERENTES STRATEGIES

I.	Le problème multi-canal	121
II.	Diviser pour régner	
	III - Découpage de la surface d'interconnexion	123
	II2 - Décomposition du processus de tracé en tracé global et tracé final	125
III.	Le tracé global	
	III1 - Objectifs	127
	III2 - Mesures de trafic	132
	III3 - Pénalisation d'utilisation des surfaces.	
	Coût d'un tracé global	139
	III4 - Heuristiques pour le tracé global	143
	III3 - Tracé global itératif	144
	III6 - Difficultés de conception	145
	III7 - Un cas particulier, le problème des réseaux précaractérisés	145
IV.	Le tracé final	
	IV1 - Principe	147
	IV2 - Tracé final des canaux bifaces	151
	IV3 - Tracé final des cellules de liaison	153
V.	Discussion	154
VI.	Une autre stratégie de tracé final	161
VII.	Autres approches	167
VIII.	Conclusion	169

CHAPITRE II : UNE STRATEGIE ORIGINALE

I.	Introduction	173
II.	Modèle de canal	173
III.	Processus de tracé	176
IV.	Extension du concept d'assignation de pistes	181
V.	Optimalité globale du tracé	187
VI.	Heuristique multi-canal d'assignation par pistes	189
VII.	Le programme TRACAS	
	VII1 - Introduction	194
	VII2 - Structures de données	195
	VII3 - Architecture du programme	197
	VII4 - Formation de l'ensemble des sous-troncs de départ potentiels	199
	VII5 - Ordonnement de l'ensemble des sous- troncs de départ potentiels	199
	VII6 - Exemples d'application	201
	VII7 - Complexité	206
	VII8 - Limitations	206
VIII.	Discussion	207
	CONCLUSION	210
	BIBLIOGRAPHIE	215

AUTORISATION de SOUTENANCE

VU les dispositions de l'article 3 de l'arrêté du 16 avril 1974,

VU le rapport de présentation de Monsieur A. VERDILLON, Maître de recherche

Monsieur Guy DUPENLOUP

est autorisé à présenter une thèse en soutenance pour l'obtention du titre de
DOCTEUR de TROISIEME CYCLE, spécialité "Informatique".

Fait à Grenoble, le 24 mai 1984

Le Président de l'I.N.P.-G

D. BLOCH
Président
de l'Institut National Polytechnique
de Grenoble

P.O. le Vice-Président.

