



**HAL**  
open science

# Interpolation polynomiale et rationnelle d'une fonction de plusieurs variables complexes

Claudine Chaffy-Camus

► **To cite this version:**

Claudine Chaffy-Camus. Interpolation polynomiale et rationnelle d'une fonction de plusieurs variables complexes. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1984. Français. NNT: . tel-00311635

**HAL Id: tel-00311635**

**<https://theses.hal.science/tel-00311635>**

Submitted on 19 Aug 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**l'Institut National Polytechnique de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*  
**DOCTEUR DE 3ème CYCLE**  
*«Mathématiques appliquées»*

*par*

**Claudine CHAFFY-CAMUS**



**INTERPOLATION POLYNOMIALE ET RATIONNELLE**  
**D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES.**



**Thèse soutenue le 29 juin 1984 devant la commission d'examen.**

<b>C. BREZINSKI</b>	<b>Président</b>
<b>J. DELLA-DORA</b>	} <b>Examineurs</b>
<b>M. DUC-JACQUET</b>	
<b>P.J. LAURENT</b>	



**UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE**

**Année universitaire 1982-1983**

**Président de l'Université : M. TANCHE**

**MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.**

**(RANG A)**

**SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE**

**PROFESSEURS DE 1ère CLASSE**

<b>ARNAUD Paul</b>	<b>Chimie organique</b>
<b>ARVIEU Robert</b>	<b>Physique nucléaire I.S.N.</b>
<b>AUBERT Guy</b>	<b>Physique C.N.R.S.</b>
<b>AYANT Yves</b>	<b>Physique approfondie</b>
<b>BARBIER Marie-Jeanne</b>	<b>Electrochimie</b>
<b>BARBIER Jean-Claude</b>	<b>Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)</b>
<b>BARJON Robert</b>	<b>Physique nucléaire I.S.N.</b>
<b>BARNOUD Fernand</b>	<b>Biosynthèse de la cellulose-Biologie</b>
<b>BARRA Jean-René</b>	<b>Statistiques - Mathématiques appliquées</b>
<b>BELORISKY Elie</b>	<b>Physique</b>
<b>BENZAKEN Claude (M.)</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>BERNARD Alain</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>BERTRANDIAS Françoise</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>BERTRANDIAS Jean-Paul</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>BILLET Jean</b>	<b>Géographie</b>
<b>BONNIER Jean-Marie</b>	<b>Chimie générale</b>
<b>BOUCHEZ Robert</b>	<b>Physique nucléaire I.S.N.</b>
<b>BRAVARD Yves</b>	<b>Géographie</b>
<b>CARLIER Georges</b>	<b>Biologie végétale</b>
<b>CAUQUIS Georges</b>	<b>Chimie organique</b>
<b>CHIBON Pierre</b>	<b>Biologie animale</b>
<b>COLIN DE VERDIERE Yves</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>CRABBE Pierre (détaché)</b>	<b>C.E.R.M.O.</b>
<b>CYROT Michel</b>	<b>Physique du solide</b>
<b>DAUMAS Max</b>	<b>Géographie</b>
<b>DEBELMAS Jacques</b>	<b>Géologie générale</b>
<b>DEGRANGE Charles</b>	<b>Zoologie</b>
<b>DELOBEL Claude (M.)</b>	<b>M.I.A.G. Mathématiques appliquées</b>
<b>DEPORTES Charles</b>	<b>Chimie minérale</b>
<b>DESRE Pierre</b>	<b>Electrochimie</b>
<b>DOLIQUE Jean-Michel</b>	<b>Physique des plasmas</b>
<b>DUCROS Pierre</b>	<b>Cristallographie</b>
<b>FONTAINE Jean-Marc</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>GAGNAIRE Didier</b>	<b>Chimie physique</b>



GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

#### PROFESSEURS DE 2<sup>ème</sup> CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

.../...

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie



Je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude à mon Directeur de recherche Jean DELLA DORA, pour son attention et les précieux conseils qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail, ainsi qu'à Monsieur Noël GASTINEL, qui m'a quelquefois secourue.

Je remercie vivement Monsieur Claude BREZINSKI d'avoir accepté de présider cette thèse, et Messieurs Marc DUC-JACQUET et Pierre-Jean LAURENT d'avoir participé au jury.

Enfin, je n'oublie pas les membres de l'équipe TIM 3, et en particulier Claire DI CRESCENZO et Evelyne TOURNIER pour l'aide qu'elles m'ont apportée en calcul formel.



INTERPOLATION POLYNOMIALE ET  
RATIONNELLE D'UNE FONCTION DE  
PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES

Table des matières	pages
0. <u>Introduction</u>	9
1. <u>Une construction "homogène" d'approximants de Padé à deux variables complexes</u>	
1 Introduction	19
2 Fonctions holomorphes de deux variables complexes	21
I Construction d'approximants de Padé d'une fonction holomorphe dans le polydisque $\Delta = D(0, R_1) \cdot D(0, R_2)$ de $\mathbb{C}^2$	22
1) Polynôme de Taylor $[L/0]_\lambda$ de $F_\lambda$	23
2) Fraction $[L/1]_\lambda$ de $F_\lambda$	24
3) Plus généralement, fraction $[L/M]_\lambda$ de $F_\lambda$	25
II Quelques propriétés algébriques des approximants "homogènes"	
1) Projection	28
2) Dualité	
3) Invariance homographique des approximants diagonaux	29
4) Invariance par certains changements de variables.	30
III Formules intégrales d'erreur et questions de convergence	
1) Interpolation polynomiale	31
2) Exemple d'interpolation rationnelle	36
Conclusion	41
Références	43

	pages
2. <u>E-algorithme et approximants de Padé à plusieurs variables</u>	
Introduction	45
I E-algorithme et approximants de Padé "homogènes"	
1) Moyen de calcul	51
2) Exemples	53
3) Première généralisation: changement de paramétrisation de $\mathbb{C}^2$	54
II Initialisation de l'E-algorithme avec des sommes partielles générales	57
1) Transformation de Thanks	58
2) Propriétés	60
III qd. algorithme et approximants de Padé	
1) Définition	64
2) Application aux approximants de Padé usuels	66
3) Utilisation dans le cadre des approximants "homogènes"	68
Références	70
Calcul d'approximants de Padé à plusieurs variables dans le langage de calcul formel REDUCE	
1) E-algorithme appliqué à des suites numériques	73
2) E-algorithme appliqué à des séries de Mac-Laurin	79
3) E-algorithme et approximants de Padé "homogènes"	82
4) E-algorithme et approximants de Padé "carrés"	93
5) qd. algorithme et approximants de Padé "homogènes"	94

3. Formule d'erreur dans l'interpolation rationnelle multipoints d'une fonction de la variable complexe

	pages
I Rappels sur l'interpolation d'Hermite d'une fonction holomorphe	
1) Notations	105
2) Polynôme de Newton et expression intégrale du reste	106
II Interpolation rationnelle	
1) Problème initial	108
2) Problème linéaire	109
3) Cas de l'approximation de Padé en 0	111
4) N-points Padé	113
III Forme intégrale du reste relatif au couple $(u \llbracket L/M \rrbracket, v \llbracket L/M \rrbracket)$ .	
1) Lemme	118
2) Remarques	121
IV Extension du théorème de Montessus à l'approximation rationnelle multipoints.	
1) Rappel: théorème de Montessus	122
2) Cas des multipoints	123
3) Remarques	124
4) Preuve détaillée	125
5) Pôles multiples	130
Conclusion	131
Références	132
Quelques références sur les algorithmes de calcul d'approximants de Padé. Newton	133

#### 4. Interpolation polynomiale d'une fonction de plusieurs variables complexes

Introduction	
A) Formules de Taylor et Newton "rectangle".	135
I Taylor	



	pages
1) Polynôme d'interpolation	139
2) Reste	140
3) Interprétation des termes du reste	142
4) Remarque	144
II Newton	
1) Construction	147
2) Reste	148
3) Différences divisées à deux variables, formules intégrales	148
4) Convergence	150
5) Forme de Lagrange des polynômes d'interpolation "rectangles"	151
B) Formules de Taylor et Newton "triangle"	
I Taylor	
1) Polynôme d'interpolation	152
2) Reste	153
II Newton	
1) Construction	154
2) Forme intégrale du reste	155
C) Généralisation	156
Conclusion	158
Références	160
<u>Quelques polynômes de Newton à deux variables calculés en REDUCE.</u>	161

## 5. Formules d'Hermite et différences divisées généralisées

I Introduction	169
1) Motivation: forme intégrale de l'erreur dans l'interpolation polynomiale.	
2) Polynômes d'Hermite	170

	pages
II Formalisme de Grothendieck	
1) Résidus dans $\mathbb{C}^n$	179
2) Propriétés	182
3) Théorème de Jacobi-Kronecker, application à la formule de Lagrange	192
4) Utilisation de ce formalisme dans un cas particulier	
III Exemple: points à l'intersection d'une courbe algébrique et d'un ensemble fini de droites.	197
1) Système triangulaire et "différences divisées"	198
2) Existence de formules d'Hermite	199
IV Etude d'un réseau: deux systèmes de droites $D_i$ ( $0 \leq i \leq m$ ) et $E_j$ ( $0 \leq j \leq n$ )	
1) Interpolation de Newton	212
2) Résolution du système triangulaire $TA = F$ quand les droites $D_i$ sont parallèles	217
3) Différences divisées (doubles) et résidus	223
V Interpolation polynômiale "circulaire" d'une fonction de deux variables complexes.	
1) Différences divisées.	225
Références	228

6. Approximants de Padé multipoints d'une fonction de deux variables complexes

Introduction	229
A) Approche théorique: équations	
I Écriture des équations	229
1) Formule de Leibniz établie par le procédé tensoriel	231
2) Considérations sur la nature de $P, Q$ et des conditions d'interpolation.	233

	pages
II Exemples	
1) Tentative de prolongement des approximants "homogènes".	233
2) Exemple de résolution des équations	239
B) Approche constructive: fractions continues d'interpolation à deux variables.	
I Parallèle entre l'interpolation polynômiale et l'interpolation rationnelle	245
1) Développements de Newton et de Eiche	
2) Cas limite où tous les $x_i$ valent 0	249
II Construction de fractions continues d'interpolation à deux variables.	
1) Principe	251
2) Généralisations	254
3) Interprétation utilisant des transformations homographiques (dans deux directions)	259
4) Conclusion	
Références	260
Fractions continues à deux variables: quelques exemples des espaces vectoriels auxquels appartiennent numérateur et dénominateur.	261

0.

## Introduction

Si de nombreux mathématiciens, parmi lesquels Frobenius, Euler, Abel, Tchebicheff et Heine s'étaient déjà intéressés aux fractions continues algébriques, Henri Padé (1863-1953) fut le premier à étudier systématiquement les fractions rationnelles, dont le développement suivant les puissances croissantes de la variable coïncidait avec une série entière à l'ordre le plus élevé possible.

Les approximations rationnelles, qui portent maintenant son nom, s'avèrent très efficaces dans des domaines variés : théorie des nombres (application à la transcendance de  $e$  par exemple), aussi bien qu'analyse : accélération de la convergence, sommation d'une série entière divergente (les approximants définissent une fonction à l'extérieur du disque de convergence de la série initiale), prolongement analytique, recherche des zéros et singularités d'une fonction grâce à des théorèmes de convergence (Montessus de Ballore, Wilson). Pour ce type de problèmes, un développement en fraction continue de la fonction apporte plus d'informations que ses développements en série entière ou produit infini. Les exemples les plus classiques rencontrés dans la littérature concernent  $e^x$ ,  $(1+x)^m$ ,  $\log(1+x)$ .

En particulier, les approximants de Padé fournissent un moyen pratique de calcul numérique de certaines fonctions (fonctions spéciales), et d'intégration. Ils s'appliquent aussi à la physique théorique ou à la

mécanique des fluides (travaux de Fisher en thermodynamique sur le comportement de systèmes ferromagnétiques, antiferromagnétiques, fluides au voisinage de points critiques ; ouvrage édité par H. Cabannes: "Padé Approximants Method and its applications to Mechanics") ; ils donnent en général de bons résultats pour les séries de Stieljes (théorème de Markov) qui apparaissent dans de nombreux problèmes physiques : ils fournissent des bornes précises sur certaines quantités (Baker, Gammel, Graves-Morris).

Cependant, le physicien, l'analyste numérique et l'informaticien sont le plus souvent confrontés à des problèmes multidimensionnels (filtrage bidimensionnel, traitement d'images et travaux de Bultheel) . C'est pourquoi notre travail porte sur certaines généralisations de ces approximants aux fonctions de plusieurs variables.

Plusieurs définitions sont en effet concevables : Brzuzinski, Chisholm, Cuyt, Levin, Karlsson-Wallin, Lutterodt . Pour notre part, nous leur demandons de conserver de "bonnes" propriétés, tant du point de vue théorique de la convergence de ces approximants que du point de vue pratique de leur calcul : existence d'algorithmes.

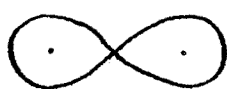
Nous choisissons de nous placer dans  $\mathbb{C}^n$  ( $n > 0$ ), car l'expérience montre que les résultats sont en général plus agréables dans  $\mathbb{C}$  que dans  $\mathbb{R}$  :

- existence de fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , indéfiniment dérivables à l'origine et dont le développement en série a un rayon de convergence nul, alors qu'une fonction holomorphe en un point de  $\mathbb{C}$  y est analytique.

- soit  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$  : les polynômes de Lagrange de  $f$ ,  $P_n$  de  $d^0 \leq n$ , qui l'interpolent en  $n+1$  points équidistants de l'intervalle, ne convergent pas forcément vers  $f$ . (Runge, Bernstein, Faber).

Ou encore, quand  $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ ,  $f(0) = 0$ , et  $x_n = \frac{1}{n+1}$  les polynômes qui interpolent  $f$  aux points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sont tous identiquement nuls; ils ne risquent pas de converger vers  $f$ , qui est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Par contre, il existe des théorèmes de convergence simple ou uniforme quand  $f$  est holomorphe dans un domaine convexe. [2] [4], établis essentiellement grâce à la formule de Cauchy, et où l'on se rend compte du rôle primordial des lemniscates:  $|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| = r^{n+1} (r > 0)$

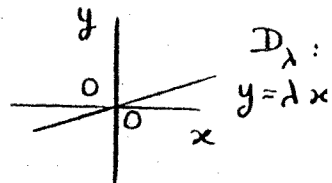


car  $f(x) - P_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(t) \frac{\prod_{i=0}^n (x-x_i)}{\prod_{i=0}^n (t-x_i)} dt$   
 $\Gamma$  contour fermé simple entourant les  $x_i$

Considérons tout d'abord le cas où les données sur la fonction  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  sont concentrées en un seul point: l'origine. Soit  $f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} x^i y^j$

le développement formel de  $f$ .

La restriction  $F_\lambda: x \rightarrow f(x, \lambda x)$  de  $f$  à chaque droite  $D_\lambda: y = \lambda x$  passant par l'origine est fonction de la seule variable  $x$ .



En exigeant de retrouver les approximants de Padé usuels de  $F_\lambda$  à partir de ceux de  $f$ , nous obtenons les approximants "homogènes" du chapitre 1, écrits comme quotients de déterminants dans le cas générique.

Remarquons que cette paramétrisation ne permet pas d'atteindre tous les points  $(x, y)$  de  $\mathbb{C}^2$  (il manque l'axe des  $y$ ), mais l'utilisation de  $G_\mu(y) = f(\mu y, y)$  donne les mêmes quotients.

Cette méthode présente deux énormes avantages:

- d'une part, les propriétés algébriques habituelles sont conservées: dualité (qui permet de construire toute la table de Padé des fractions  $[L/M]$ ,  $L$  "degré" du numérateur,  $M$  "degré" du dénominateur, à partir d'un algorithme en donnant seulement la moitié:  $L \geq M$ ), invariance par certaines transformations homographiques sur les variables ou sur les fonctions.

Dans des cas particuliers, cette démarche nous fournit des résultats de convergence simple de suites de telles fractions vers une fonction méromorphe.

Par exemple, de même que le développement de Mac-Laurin d'un polynôme est fini, les approximations "homogènes" d'ordre suffisamment élevé d'une fraction rationnelle sont exactement cette fraction; et les dénominateurs des fractions réduites  $[2l/1]$  associées à la fonction  $e^{xy}/(x+y-1)$  sont tous:  $x+y-1$ .

Par contre, nous perdons la convergence uniforme, la principale difficulté étant la localisation des singularités de la fonction, qui ne sont plus isolés.

- d'autre part, les algorithmes de calculs d'approximants de Padé à une variable s'adaptent facilement aux approximations "homogènes", puisqu'il s'agit en fait de calculer ceux de  $F_\lambda$ . Un système de calcul formel comme "Reduce", qui manipule polynômes et

fractions rationnelles de manière exacte, est tout à fait adapté à ce type de calculs.

En fait, dans les algorithmes habituels, (E-algorithme qd algorithme ...), il suffit de substituer au terme  $c_k x^k$  d'une série  $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$  la partie homogène

de degré k:  $P_k(x, y) = \sum_{i+j=k} a_{i,j} x^i y^j$  de la  
série double  $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} x^i y^j$ .

C'est l'objet du chapitre 2, où nous répertorions aussi d'autres types d'approximants dans  $\mathbb{C}(x, y)$ , obtenus :

- soit en changeant de paramétrisation de  $\mathbb{C}^2$ ,
- soit en modifiant l'initialisation des algorithmes précédents.

Dans un second temps, nous nous intéressons aux approximants multipoints : les données portent sur plusieurs points à la place d'un seul; ces approximants sont aux fractions rationnelles ce que l'interpolation de Newton est aux polynômes.

Afin d'utiliser des techniques performantes pour les fonctions de plusieurs variables, nous donnons dans le troisième chapitre un rapide aperçu des approximants de Padé-Newton dans le cas univariable (travaux de Claessens). Toutefois, la formule d'Hermite relative aux différences divisées d'une fonction holomorphe nous permet d'étendre à ce cadre le théorème de convergence uniforme de Montessus de Ballore.



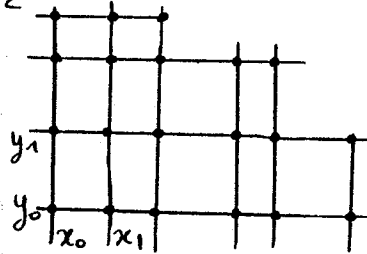
Pour clarifier la situation avant d'aborder les fractions rationnelles, le quatrième chapitre traite l'interpolation polynômiale d'une fonction de deux variables complexes.

Le procédé tensoriel utilisé privilégie les ensembles  $\mathcal{J}$  de points d'interpolation de type rectangulaire, à savoir :

$$\mathcal{J} = \{ (x_k, y_\ell) \mid (k, \ell) \in \mathcal{J} \} \subset \mathbb{C}^2$$

où  $\mathcal{J}$  vérifie :

$$\left. \begin{array}{l} i \leq k \\ j \leq \ell \\ (k, \ell) \in \mathcal{J} \end{array} \right\} \Rightarrow (i, j) \in \mathcal{J}$$



Le procédé n'est autre qu'une paramétrisation de  $\mathbb{C}^2$  par des droites  $y = \text{constante}$  (ou  $x = \text{constante}$ ).

Apparaissent alors naturellement des différences divisées à deux variables, notées  $[x_0, x_1, \dots, x_m; y_0, y_1, \dots, y_n; f(x, y)]$  (et qui se calculent récursivement), quand on utilise le système libre des polynômes  $\omega_k(x) \Omega_\ell(y)$ , où :

$$\omega_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) ; \quad \Omega_\ell(y) = \prod_{j=0}^{\ell-1} (y - y_j)$$

$$\omega_0 = \Omega_0 = 1.$$

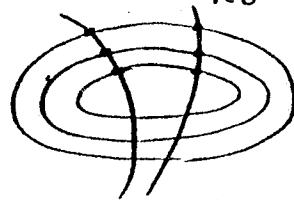
Les différences divisées ne dépendent que des valeurs de  $f$  aux points  $(x_i, y_j)$   $0 \leq i \leq m$ ,  $0 \leq j \leq n$ , et se représentent sous

forme d'intégrales doubles quand  $f$  est holomorphe dans un ouvert suffisamment grand, que les abscisses (respectivement les ordonnées) des points d'interpolation soient confondues ou non. Ces formules d'Hermite fournissent des conditions suffisantes de convergence; et nous interprétons l'erreur quand tous les points sont concentrés en  $(0, 0)$ .

Le rôle fondamental des différences divisées nous conduit à tenter de les construire pour des configurations de points d'interpolation dans  $\mathbb{C}^2$ , un peu moins restrictives, et de les relier à l'outil géométrique que sont les résidus de Grothendieck ; car c'est ce que laisse entendre Chudnovsky et qui est réalisé effectivement dans le cas précédent. La formule de Lagrange, par exemple, découle du théorème de Jacobi-Kronecker.

Dans le cinquième chapitre, on s'intéresse donc à des points d'interpolation à l'intersection de deux courbes algébriques :  $(g(x,y)=0) \cap (h(x,y)=0)$  (où  $\frac{g}{h} \in \mathbb{C}[x,y]$ ) sans composante commune.

Quand l'une des deux courbes est du type  $g = \prod_{i=0}^m (g_0 + a_i)$ ,  $a_i \in \mathbb{C}$ , des formules récurrentes, simples en raison de ce parallélisme, permettent de calculer les différences divisées, définies par ailleurs comme coefficients du polynôme d'interpolation dans une base particulière.



Par contre, les résultats géométriques ne se généralisent pas aussi facilement qu'on l'espérait.

Après ce détour par l'interpolation polynomiale, le sixième chapitre porte enfin sur l'interpolation dans  $\mathbb{C}(x,y)$ , pour des points non nécessairement confondus. Là aussi, nous utilisons le procédé tensoriel pour des conditions d'interpolation de type rectangulaire.

En effet, il existe a priori autant de définitions de tels approximants qu'il en existe quand les points sont confondus ; c'est pourquoi il nous semble malhabile de

se lancer brutalement dans l'étude des équations :

$$(Qf - P)(x_k, y_l) = 0 \quad \begin{array}{l} 0 \leq k \leq m \\ 0 \leq l \leq n \end{array} ,$$

où l'incertitude pèse à la fois sur le choix des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}[x, y]$ , auxquels appartiennent le numérateur  $P$  et le dénominateur  $Q$ .

Par contre, en appliquant successivement en  $x$ , puis en  $y$  (ou l'inverse), les développements en fractions continues multipoints, connus pour les fonctions d'une seule variable, nous construisons différentes fractions rationnelles qui prennent les valeurs imposées aux points  $(x_k, y_l)$  du rectangle: elles répondent donc à la question.

Leurs coefficients sont des différences inverses divisées, qui se calculent encore récursivement.

Cependant, le sujet n'est pas épuisé : en particulier, quelle est la nature de l'erreur commise, ainsi que celle des approximations obtenus quand tous les points sont confondus ?

## References

- [1] H. CABANNES (1976). Padé approximants method and its applications to mechanics. Lecture Notes in Physics. 47. Springer-Verlag.
- [2] P.J. DAVIS (1963) Interpolation and approximation. Blaisdell Publishing Company
- [3] E.B. SAFF, R.S. VARGA (1977) Padé and rational approximation: theory and applications. Academic Press
- [4] J.L. WALSH (1960). Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Amer. Math. Soc. vol 20.
- [5] L. WUYTACK (1979) Padé approximation and its applications. Lecture Notes in Mathematics. 765 Springer-Verlag.



1.

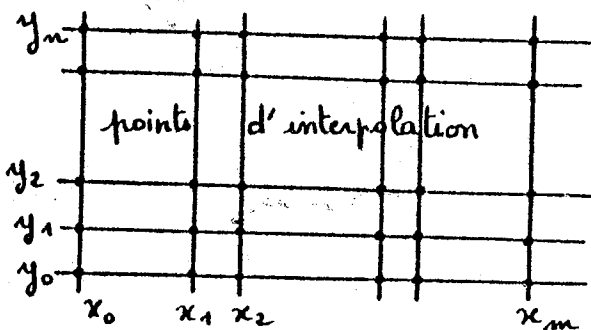
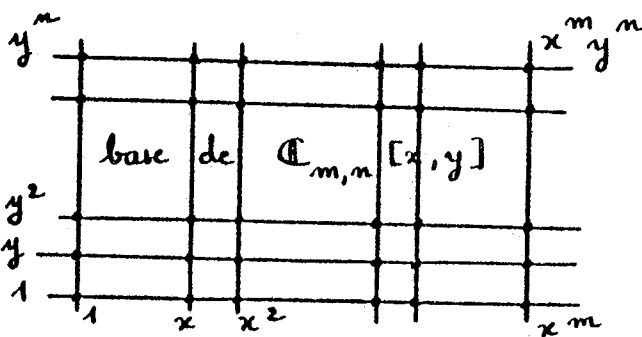
Une construction "homogène"  
d'approximants de Padé à deux  
variables complexes

## 1 Introduction

Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

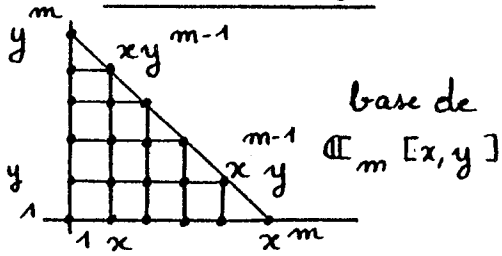
Dans le cadre de fonctions d'une seule variable complexe, on recherche habituellement les polynômes d'interpolation dans les sous-espaces vectoriels  $\mathbb{C}_n[x]$ : polynômes de degré  $\leq n$  de  $\mathbb{C}[x]$ . Par contre, pour les fonctions de deux ou plusieurs variables complexes, plusieurs types de sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}[x,y]$  se présentent; par exemple:

- les  $\mathbb{C}_{m,n}[x,y]$ : polynômes de degré  $\leq m$  en  $x$  et  $\leq n$  en  $y$ ,

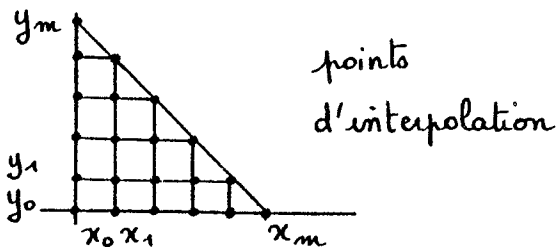


qui apparaissent naturellement si l'on utilise une démarche tensorielle, et donc particulièrement adaptés aux configurations "rectangulaires" de points d'interpolation, et aux fonctions  $f(x,y)$  du type  $g(x)h(y)$ .

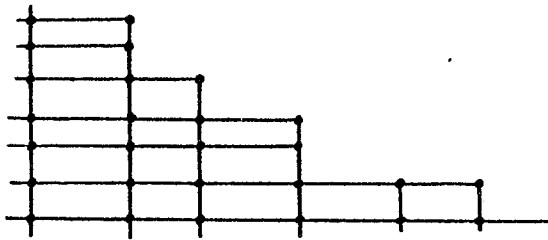
- les  $\mathbb{C}_m[x, y]$  : polynômes de degré total  $\leq m$ ,



qui apparaissent par exemple si l'on considère  $(x, y)$  comme une seule variable vectorielle, ou pour des configurations "triangulaires" de points d'interpolation.



- Plus généralement, les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}[x, y]$  engendrés par des  $(x^i y^j)_{(i,j) \in I}$  fini  $\subset \mathbb{N}^2$  vérifiant:



$$\left. \begin{array}{l} (i,j) \in I \\ k \leq i \\ l \leq j \end{array} \right\} \Rightarrow (k,l) \in I$$

On retrouve les mêmes possibilités pour les interpolations rationnelles : choix des sous-espaces vectoriels auxquels appartiennent numérateur, dénominateur, et écriture des conditions d'interpolation.

Dans ce chapitre, nous nous limitons à des points d'interpolation tous confondus à l'origine (conditions de Mac-Laurin). En utilisant uniquement l'approximation de Padé de fonctions d'une seule variable, nous engendrons un certain type d'approximants de Padé à deux variables, qui s'avèrent "triangulaires".

Notations

Étant donnée une fonction  $f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i$  holomorphe

en 0,  $u^{[L/M]}(x)$  et  $v^{[L/M]}(x)$  désignent les déterminants

$$u^{[L/M]}(x) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & \dots & c_L & \sum_{i=0}^{L-M} c_i x^{M+i} \\ c_{L-M+2} & \dots & c_{L+1} & \sum_{i=0}^{L-M+1} c_i x^{M+i-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{L+1} & \dots & c_{L+M} & \sum_{i=0}^L c_i x^i \end{vmatrix}; \quad v^{[L/M]}(x) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & \dots & c_L & x^M \\ c_{L-M+2} & \dots & c_{L+1} & x^M \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{L+1} & \dots & c_{L+M} & 1 \end{vmatrix}$$

qui vérifient :

$$v^{[L/M]}(x) f(x) - u^{[L/M]}(x) = O(x^{L+M+1})$$

On note  $[L/M]$  la fraction  $\frac{u^{[L/M]}}{v^{[L/M]}}$  quand elle est définie.  $(L, M) \in \mathbb{N}^2$

2 Fonctions holomorphes de deux variables complexes [3], [4]:

Définition:

$f: \Omega$  ouvert de  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  est analytique (ou holomorphe) dans  $\Omega$  si en tout point  $(x_0, y_0)$  de  $\Omega$ ,  $f$  admet un développement en série entière convergent dans un voisinage ouvert  $U$  de  $(x_0, y_0)$  contenu dans  $\Omega$ :

$$\forall (x, y) \in U \quad f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{ij} (x-x_0)^i (y-y_0)^j$$

$f$  est alors continue dans  $\Omega$  et holomorphe en chaque variable séparément. Le lemme d'Osgood établit la réciproque grâce à la formule intégrale de Cauchy pour les polydisques :



Pour  $f$  analytique dans  $\Delta = D(x_0, r_1) \times D(y_0, r_2)$ , continue sur  $\bar{\Delta}$ , deux applications de la formule de Cauchy à une variable donnent :

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|\zeta - x_0| = r_1} \frac{d\zeta}{\zeta - x_0} \int_{|\eta - y_0| = r_2} f(\zeta, \eta) \frac{d\eta}{\eta - y_0} \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\partial_0 \Delta} \frac{f(\zeta, \eta)}{(\zeta - x_0)(\eta - y_0)} d\zeta d\eta \end{aligned}$$

par continuité de l'intégrand sur  $\partial_0 \Delta = \partial D(x_0, r_1) \times \partial D(y_0, r_2)$   
 $\partial_0 \Delta \subset \partial \Delta$ ,

chaque circonférence est orientée positivement.

Si  $f$  est holomorphe dans un ouvert  $\Omega$ , son développement en série entière au voisinage d'un point  $a$  de  $\Omega$  est <sup>normalement</sup> convergent dans tout polydisque centré en  $a$ , contenu dans  $\Omega$ .

## I Construction d'approximants de Padé d'une fonction holomorphe dans le polydisque $\Delta = D(0, R_1) \times D(0, R_2)$ de $\mathbb{C}^2$

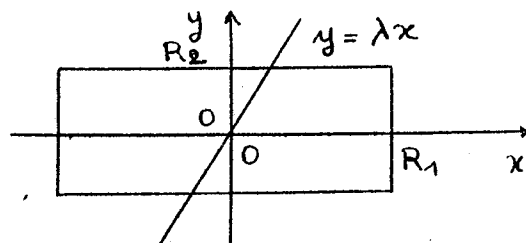
Dans  $\Delta$ ,  $f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} x^i y^j$ .

Considérons la restriction de  $f$  à chaque droite

$$L_\lambda : y = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

(Seuls ne sont pas atteints les points de  $\Delta$  d'abscisse nulle, auquel cas on considère les droites :  $x = \mu y$ .)

Trace dans  $\mathbb{R}^2$  de  $L_\lambda$   
pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ .



Soit  $F_\lambda$  définie par :

$$x \longrightarrow f(x, \lambda x) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x \in \mathcal{D}(0, R_1) \text{ si } \lambda = 0 \\ x \in \mathcal{D}(0, \inf(R_1, \frac{R_2}{|\lambda|})) \text{ si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Dans ce disque, la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \sum_{j=0}^k a_{k-j, j} \lambda^j \right) x^k$

est absolument convergente, donc convergente, et  $\underline{F_\lambda}$  est holomorphe.

### 1) Polynôme de Taylor $[L/0]_\lambda$ de $F_\lambda$ .

$$[L/0]_\lambda(x) = \sum_{k=0}^L \underbrace{\left( \sum_{j=0}^k a_{k-j, j} \lambda^j \right)}_{\text{noté } c_k} x^k$$

Soit  $(x, y) \in \Delta \cap L_\lambda$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$  :

$$[L/0]_{\frac{y}{x}}(x) = \sum_{k=0}^L \underbrace{\left( \sum_{j=0}^k a_{k-j, j} x^{k-j} y^j \right)}_{\text{noté } P_k(x, y)} \equiv U^{[L/0]}(x, y)$$

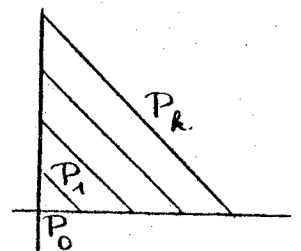
polynôme homogène de degré  $k$

De plus,  $[L/0]_\lambda(0) = a_{0,0} = U^{[L/0]}(0,0)$ .

Ainsi apparaît le polynôme de Taylor "triangulaire" de  $f$  dans  $\mathcal{A}_L[x, y]$ .

Remarquons que si l'on procède à partir des droites  $x = \mu y$ , le polynôme de Taylor d'ordre  $L$  de la fonction  $G_\mu(y) = f(\mu y, y)$  engendre le même polynôme.

$$U^{[L/0]}(x, y) = \sum_{k=0}^L P_k(x, y)$$



2) Fraction  $[L/1]_\lambda$  de  $F_\lambda$

$$v_\lambda^{[L/1]}(x) = \begin{vmatrix} c_L & x \\ c_{L+1} & 1 \end{vmatrix} ; u_\lambda^{[L/1]}(x) = \begin{vmatrix} c_L & \sum_{i=0}^{L-1} c_i x^{i+1} \\ c_{L+1} & \sum_{i=0}^L c_i x^i \end{vmatrix}$$

$$x^L v_\lambda^{[L/1]}(x) = \begin{vmatrix} x^L c_L & x \\ x^L c_{L+1} & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x^L c_L & 1 \\ x^L c_{L+1} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^L c_L & 1 \\ x^{L+1} c_{L+1} & 1 \end{vmatrix}$$

=  $\begin{vmatrix} P_L(x, \lambda x) & 1 \\ P_{L+1}(x, \lambda x) & 1 \end{vmatrix}$  car  $c_k x^k = P_k(x, \lambda x) = P_k(x, y)$  quand  $\lambda = \frac{y}{x}$ .

Les mêmes opérations donnent :

$$x^L u_\lambda^{[L/1]}(x) = \begin{vmatrix} P_L & \sum_{k=0}^{L-1} P_k \\ P_{L+1} & \sum_{k=0}^L P_k \end{vmatrix} \quad \left( \text{convention: } \sum_{k=i}^j ( )_k = 0 \text{ si } j < i \right)$$

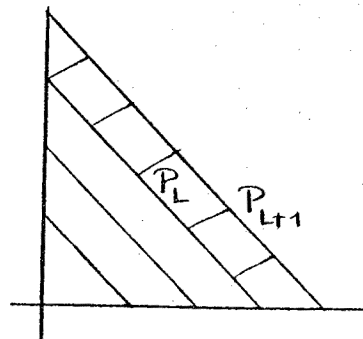
La fraction  $[L/1]_\lambda$  de  $F_\lambda$  engendre la fraction à deux variables :

$\begin{vmatrix} P_L(x, y) & \sum_{k=0}^{L-1} P_k(x, y) \\ P_{L+1}(x, y) & \sum_{k=0}^L P_k(x, y) \end{vmatrix}$	/	$\begin{vmatrix} P_L(x, y) & 1 \\ P_{L+1}(x, y) & 1 \end{vmatrix}$
--	---	--

Remarquons que le dénominateur n'est pas de degré 1.

Une construction analogue à partir des  $G_\mu$  donnerait la même fraction, qui s'écrit encore:

$$\sum_{k=0}^{L-1} P_k + \frac{P_L^2}{P_L - P_{L+1}}$$



### 3) Plus généralement, fraction $[L/M]_\lambda$ de $F_\lambda$

Propriété:

La fraction  $[L/M]_\lambda$  de  $F_\lambda$  engendre la fraction  $[L/M] = U^{[L/M]} / V^{[L/M]}$  où :

$V^{[L/M]} =$	$\begin{array}{cccc} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & 1 \\ P_{L-M+2} & P_{L-M+3} & \dots & P_{L+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1} & P_{L+2} & \dots & P_{L+M} & 1 \end{array}$	et $U^{[L/M]} =$	$\begin{array}{ccc} P_{L-M+1} & \dots & P_L & \sum_{i=0}^{L-M} P_i \\ P_{L-M+2} & \dots & P_{L+1} & \sum_{i=0}^{L-M+1} P_i \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1} & \dots & P_{L+M} & \sum_{i=0}^L P_i \end{array}$
---------------	--	------------------	---

Preuve:

$$U_\lambda^{[L/M]}(x) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \dots & c_L & x^M \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \dots & c_{L+1} & x^{M-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{L+1} & c_{L+2} & \dots & c_{L+M} & 1 \end{vmatrix}$$

$$x^{LM} U_\lambda^{[L/M]}(x) = \begin{array}{ccccccc} x^{L-M+1} & \cdot & x^{L-M+2} & \dots & x^L & \cdot & x^{M-1} & \cdot & x^{M-2} & \dots & 1 \cdot U_\lambda^{[L/M]}(x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{1}^{\text{ère}} \text{ colonne} & & \text{2}^{\text{ème}} \text{ colonne} & & \dots & & \text{M}^{\text{ième}} \text{ colonne} & & & & \end{array}$$

puissances qu'on répartit sur

comme  $c_i x^i = P_i(x, y)$  pour  $\frac{y}{x} = \lambda$ , on obtient:

$$x^{LM} v_{\lambda}^{[L/M]}(x) = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & x^M \\ \frac{P_{L-M+2}}{x} & \frac{P_{L-M+3}}{x} & \dots & \frac{P_{L+1}}{x} & x^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{P_{L+1}}{x^M} & \frac{P_{L+2}}{x^M} & \dots & \frac{P_{L+M}}{x^M} & 1 \end{vmatrix} \cdot x^{M-1} \cdot x^{M-2} \dots 1$$

$$= \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & 1 \\ \frac{P_{L-M+2}}{x} & \frac{P_{L-M+3}}{x} & \dots & \frac{P_{L+1}}{x} & \frac{1}{x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{P_{L+1}}{x^M} & \frac{P_{L+2}}{x^M} & \dots & \frac{P_{L+M}}{x^M} & \frac{1}{x^M} \end{vmatrix} \cdot x^M \cdot x^{M-1} \dots 1$$

en mettant  $x^M$  en facteur dans la dernière colonne. Il reste à répartir les puissances  $x^i$  sur la  $i+1$ <sup>ème</sup> ligne

$$x^{LM} v_{\lambda}^{[L/M]}(x) = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & 1 \\ P_{L-M+2} & P_{L-M+3} & \dots & P_{L+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{L+1} & P_{L+2} & \dots & P_{L+M} & 1 \end{vmatrix} (x, y) \equiv V^{[L/M]}(x, y)$$

Les mêmes opérations sur  $x^{LM} u_{\lambda}^{[L/M]}(x)$  donnent le résultat annoncé et on obtient aussi:

$$V^{[L/M]} f - U^{[L/M]} = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & \sum_{i=1}^{+\infty} P_{L+i} \\ P_{L-M+2} & P_{L-M+3} & \dots & P_{L+1} & \sum_{i=1}^{+\infty} P_{L+i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{L+1} & P_{L+2} & \dots & P_{L+M} & \sum_{i=1}^{+\infty} P_{L+i+M} \end{vmatrix}$$

Les approximants ainsi obtenus ne sont pas nouveaux : ce sont des " Abstract Padé approximants " étudiés par A. Cuyt [2].

Ainsi  $U^{[L/M]}$  et  $V^{[L/M]}$  s'écrivent - ils sous la forme :

$$U^{[L/M]} = \sum_{k=LM}^{L(M+1)} U_k \quad : \quad U_k \text{ polynômes homogènes de } d^{\circ} k$$

$$V^{[L/M]} = \sum_{k=LM}^{(L+1)M} V_k \quad : \quad V_k \text{ polynômes homogènes de } d^{\circ} k$$

et vérifient - ils :

$$V^{[L/M]} f - U^{[L/M]} = O(X^{(L+1)(M+1)}) \quad [2]$$

ce qui signifie :

$$= \sum_{k \geq (L+1)(M+1)} R_k \quad \text{polynômes homogènes de } d^{\circ} k$$

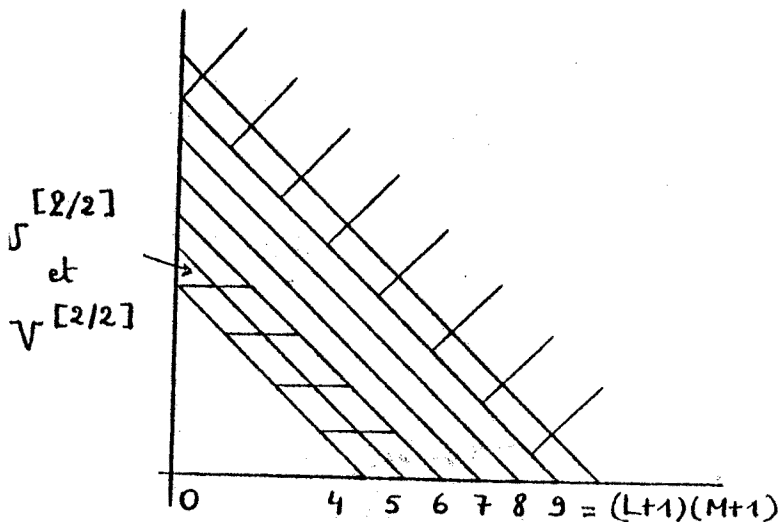
Exemple :

$$L = M = 2$$

$$V^{[2/2]} f - U^{[2/2]} = O(X^9)$$

Les équations correspondent à la nullité des parties homogènes de  $d^{\circ} 4$  à  $8$  de  $Vf - U$ .

$U^{[2/2]}$  et  $V^{[2/2]}$  sont des polynômes en  $X^4, X^5, X^6$  : dans un sev. strict de  $\mathbb{C}_6[x, y]$ .



Remarque:

L'homogénéisation faite à partir des approximants de Padé de  $G_\mu$  engendre les mêmes fractions à deux variables.

Calcul:

Pour obtenir ces approximants, nous n'avons donc pratiquement besoin que d'algorithmes de calculs d'approximants de Padé à une variable, à condition d'écrire leur forme exacte en fonction du paramètre  $\lambda$ , ce qui est le propre du calcul formel. C'est l'objet du chapitre suivant.

Certains calculs peuvent être facilités par des propriétés algébriques de ces approximants, qui découlent naturellement de celles des approximants de Padé à une variable.

## II Quelques propriétés algébriques des approximants "homogènes".

### 1) Projection

Par construction même, quand on les projette sur une droite complexe :  $\alpha x + \beta y = 0$  passant par l'origine, les approximants de Padé "homogènes"  $[L/M]$  sont les approximants de Padé à une variable (qui paramétrise la droite) de même ordre. Cette propriété est aussi vérifiée par les approximants de Karlsson-Wallin, mais non par ceux de Chisholm.

### 2) Dualité

Pour une fonction  $f$  analytique en  $(0,0)$  telle que  $f(0,0) \neq 0$ , la série réciproque  $g = 1/f$  est aussi analytique en  $(0,0)$ .

Soit alors  $F_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$  et  $G_\lambda(x) = g(x, \lambda x) : G_\lambda = 1/F_\lambda$   
 Sous réserve que les approximants suivants existent, on a :

$$[L/M]_{G_\lambda} = \frac{1}{[M/L]_{F_\lambda}}$$

et ainsi

$$\boxed{[L/M]_g = \frac{1}{[M/L]_f}}$$

car ces deux fractions coïncident pour suffisamment de couples  $(x, y)$  de  $\mathbb{C}^2$ .

Par exemple, les approximants de Padé :

$$[0/n]_{e^{-(x+y)}} = \frac{1}{[n/0]_{e^{x+y}}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{(x+y)^k}{k!}}$$

Cette propriété de dualité permet de construire toute la table de Padé  $([L/M], (L, M) \in \mathbb{N}^2)$  d'une série  $f$  inversible, à l'aide d'un procédé qui n'en fournit que la moitié inférieure  $(L \geq M)$  ou supérieure  $(L \leq M)$  : pour obtenir l'autre moitié, il suffit d'appliquer le même procédé à  $1/f$ .

De la même manière, elle lie les théorèmes sur les colonnes de la table de Padé ( $M$  constant) et les pôles d'une fonction méromorphe (Montessus de Ballore...) à ceux qui concernent les lignes ( $L$  constant) et les zéros; elle ramène aussi l'étude de la convergence des diagonales supérieures à celle des diagonales inférieures.

### 3) Invariance homographique des approximants diagonaux

Soit  $g(x, y) = \frac{a + b f(x, y)}{c + d f(x, y)}$  quand  $\begin{cases} ad - bc \neq 0 \\ c + d f(0, 0) \neq 0 \end{cases}$



Alors

$$\boxed{[L/L]_g = \frac{a+b [L/L]_f}{c+d [L/L]_f}}$$

Cette "invariance" est une des raisons de l'importance des approximants diagonaux.

#### 4) Invariance par certains changements de variables.

En tenant compte du procédé de construction, nous privilégions les transformations de  $\mathbb{C}^2$  qui conservent l'origine et les droites passant par l'origine.

Ainsi, les transformations linéaires:

$$\Psi: (x, y) \in \mathbb{C}^2 \longrightarrow (u, v) = (ax+by, cx+dy) \quad \text{où } ad-bc \neq 0$$

Soit  $f$  une fonction holomorphe en  $(0,0)$  et  $g = f \circ \Psi$ .

Alors,

$$\boxed{[L/M]_g = [L/M]_f \circ \Psi} \quad (*)$$

En effet, notons:

$$G_\lambda(x) = g(x, \lambda x) \quad \text{et} \quad F_\mu(x) = f(x, \mu x)$$

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad a+b\lambda \neq 0, \quad G_\lambda(x) &= f((a+b\lambda)x, (c+d\lambda)x) \\ &= \frac{F_{\frac{c+d\lambda}{a+b\lambda}}((a+b\lambda)x)}{a+b\lambda} \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, \quad ax+by \neq 0, \quad [L/M]_g(x, y) = [L/M]_f(\Psi(x, y)),$$

ce qui prouve l'égalité des deux fractions rationnelles (\*).

Remarquons que si  $P_k$  est un polynôme homogène de  $d^\circ k$ ,  $\Psi(P_k)$  l'est aussi; on peut donc aussi établir la propriété (\*) directement sur la relation:

$$(V^{[L/M]} \circ \varphi) \circ g - U^{[L/M]} \circ \varphi = O(x^{(L+1)(M+1)})$$

• Cette invariance a pour conséquence la propriété de symétrie suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } V(x, y) & \quad f(x, y) = f(y, x) \\ \text{alors } [L/M]_f(x, y) & = [L/M]_f(y, x) \end{aligned}$$

(utiliser  $\varphi(x, y) = (y, x)$ )

### III Formules intégrales d'erreur et questions de convergence.

Les formules que nous obtenons ne sont pas les mêmes suivant que l'on considère  $f(x, y)$  comme  $F_\lambda(x)$  ( $\lambda = y/x$ ) ou comme  $G_\mu(y)$  ( $\mu = x/y$ ). Elles concernent d'ailleurs des ensembles différents de points.

#### 1) Interpolation polynomiale.

Soit  $R_L(x, y) = f(x, y) - \sum_{k=0}^L P_k(x, y)$ , défini dans le

polydisque  $\Delta = \mathcal{D}(0, R_1) \times \mathcal{D}(0, R_2)$ .

$f$  étant holomorphe dans  $\Delta$ , est développable en série entière dans  $\Delta$ , et nous savons déjà qu'en particulier,

$R_L(x, y) \xrightarrow[L \rightarrow +\infty]{} 0$  dans  $\Delta$  (la convergence étant

uniforme sur les compacts de  $\Delta$ )

Cependant, par analogie avec la démonstration du théorème de Montessus de Ballore, nous avons besoin d'une expression intégrale du reste, pour conclure dans le cas de fractions qui interpolent une fonction méromorphe.

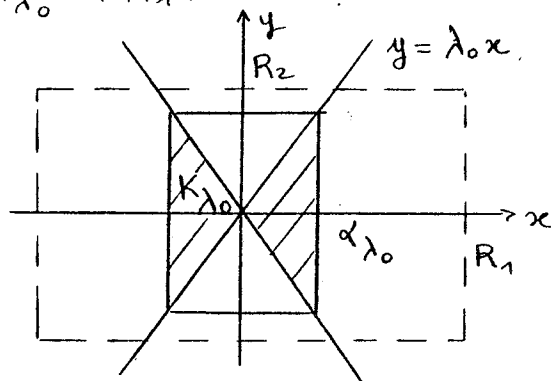
Les difficultés de la suite proviennent essentiellement de l'écriture des domaines de définition des fonctions.

a) Utilisation de  $F_\lambda(x)$ .

Les compacts où nous nous plaçons sont du type:  
 $K_{\lambda_0} = \{ (x, \lambda x) \mid |\lambda| \leq \lambda_0 \text{ réel positif, } |x| \leq \alpha_{\lambda_0} \}$ ,

où  $\alpha_{\lambda_0}$  est choisi en fonction de  $\lambda_0$  de sorte que:  
 $\lambda_0 \alpha_{\lambda_0} < R_2$  et  $\alpha_{\lambda_0} < R_1$ .

Trace dans  $\mathbb{R}^2$   
de  $K_{\lambda_0}$



• Un point  $(x, y)$  de  $\Delta$  qui n'est pas sur l'axe des  $y$  est toujours dans un tel compact.

La fonction  $F_\lambda$  est holomorphe dans  $D(0, \alpha_{\lambda_0})$  pour tout  $\lambda$  de module  $\leq \lambda_0$ .

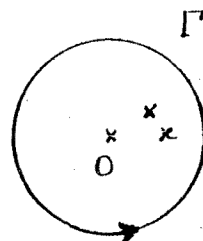
L'expression intégrale du reste dans la formule de Taylor à une variable est:

$$F_\lambda(z) - \sum_{k=0}^L P_k(x, \lambda x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{F_\lambda(\zeta)}{\zeta - x} \left(\frac{x}{\zeta}\right)^{L+1} d\zeta$$

$\Gamma$  contour fermé simple entourant 0 et  $x$ , orienté positivement

• Nous choisissons pour  $\Gamma$  le contour suivant:  
 (qui dépend de  $x$ )

$$\zeta = x \xi \quad \text{ou} \quad |\xi| = a_{\lambda_0}, \quad \text{si } x \neq 0.$$



$a_{\lambda_0}$  est fixé de sorte que:

\*  $\Gamma$  entoure  $x$  :  $a_{\lambda_0} > 1$

\*  $\forall \zeta \in \Gamma \quad \forall x \in \mathcal{D}(0, a_{\lambda_0}) \quad (\zeta, \lambda \zeta) \in \Delta$

Pour cela, il suffit que:

$$a_{\lambda_0} a_{\lambda_0} < R_1$$

$$\lambda_0 a_{\lambda_0} a_{\lambda_0} < R_2$$

Comme  $a_{\lambda_0} < R_1$  et  $\lambda_0 a_{\lambda_0} < R_2$ , le choix d'un tel  $a_{\lambda_0} > 1$  est possible.

Par un changement de variable, on obtient:

$$\forall x \in \mathcal{D}(0, a_{\lambda_0}) \quad \forall \lambda \in \mathcal{D}(0, \lambda_0)$$

$$f(x, \lambda x) = \sum_{k=0}^L P_k(x, \lambda x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\xi|=a_{\lambda_0}} \frac{f(x\xi, \lambda x\xi)}{(\xi-1)\xi^{L+1}} d\xi$$

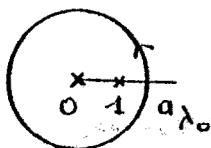
• Remarquons que pour  $x=0$ , cette égalité est encore vraie. En effet,  $P_0(0,0) = f(0,0)$  et

$$\forall L \in \mathbb{N}^* \quad P_L(0,0) = 0$$

D'autre part,

$$\int_{|\xi|=a_{\lambda_0} > 1} \frac{d\xi}{(\xi-1)\xi^{L+1}} = 0$$

somme des résidus en 0 et 1 (cas particulier du théorème de Jacobi-Kronecker)



Nous obtenons :

$$\forall (x, y) \in K_{\lambda_0} \quad R_L(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\substack{|\xi| = a_{\lambda_0} \\ +}} \frac{f(x\xi, y\xi)}{(\xi-1)\xi^{L+1}} d\xi$$

• Pour faire apparaître une intégrale double, appliquons maintenant la formule de Cauchy à :

$y \longrightarrow f(x\xi, y\xi)$  holomorphe dans  $D(0, \beta_{\lambda_0})$   
 (par composition et  $f$  étant holomorphe en chacune des variables), où  $\beta_{\lambda_0} > \lambda_0 a_{\lambda_0}$  et vérifie :

$$\beta_{\lambda_0} a_{\lambda_0} < R_2,$$

ce qui est possible, car  $\lambda_0 a_{\lambda_0} a_{\lambda_0} < R_2$

$$f(x\xi, y\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\substack{\text{contour fermé} \\ \text{simple orienté positivement} \\ \text{entourant } y}} \frac{f(x\xi, \eta\xi)}{\eta - y} d\eta$$

Pour  $y \neq 0$ , soit le contour :  $\eta = y\psi$ ,  $|\psi| = b_{\lambda_0}$  tel que :

\*  $b_{\lambda_0} > 1$

\*  $b_{\lambda_0} \beta_{\lambda_0} a_{\lambda_0} < R_2$  (qui existe).

$$f(x\xi, y\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\substack{|\psi| = b_{\lambda_0} \\ +}} \frac{f(x\xi, y\psi\xi)}{\psi - 1} d\psi$$

égalité qui reste vraie pour  $y = 0$ .

Avec les précautions prises dans le choix de  $a_{\lambda_0}$  et  $b_{\lambda_0}$ , la fonction à intégrer étant continue sur le domaine d'intégration, on obtient :

$$\forall (x, y) \in K_{\lambda_0} \quad R_L(x, y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int \int \frac{f(x\xi, y\psi\xi) d\xi}{\xi^{L+1} (\xi-1)(\psi-1)}$$

$|\xi| = a_{\lambda_0} \quad |\psi| = b_{\lambda_0}$

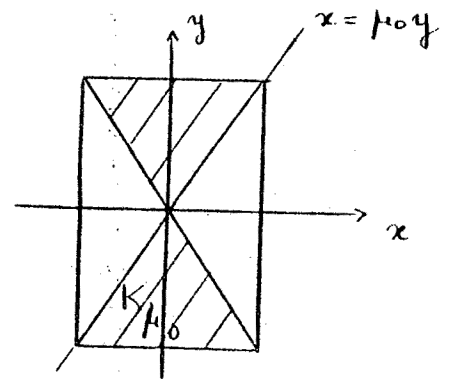
chaque cercle étant orienté positivement.

Remarque :

La fonction  $f(x\xi, y\psi\xi)$  étant bornée sur :  
 $\{(x, y) \in K_{\lambda_0}, |\xi| = a_{\lambda_0}, |\psi| = b_{\lambda_0}\}$  car  $(x\xi, y\psi\xi)$  décrit alors un compact de  $\Delta$ , on retrouve bien la convergence uniforme sur  $K_{\lambda_0}$  de  $R_L(x, y)$  vers 0, à cause du terme  $\xi^{L+1}$ .

b) Utilisation de  $G_{\mu_0}(y)$ .

De manière tout à fait analogue, en échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ , on obtient sur les compacts :



$$K_{\mu_0} = \{ (\mu y, y) \mid |\mu| \leq \mu_0; |y| \leq \beta_{\mu_0} \}$$

où  $\beta_{\mu_0} < R_2$ ,  $\mu_0 \beta_{\mu_0} < R_1$ ,

la convergence uniforme de  $R_L$  vers 0 :

$$R_L(x, y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int \int \frac{f(x\xi\eta, y\eta) d\xi d\eta}{(\xi-1)(\eta-1) \eta^{L+1}}$$

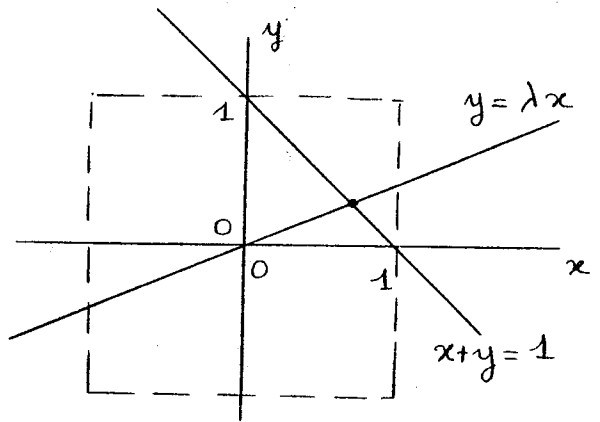
$|\xi| = a_{\mu_0} \quad |\eta| = b_{\mu_0}$

On atteint les points de l'axe des  $y$  qui n'étaient pas atteints précédemment.

2) Exemple d'interpolation rationnelle.

Soit  $f(x, y) = \frac{e^{xy}}{x+y-1}$  méromorphe dans  $\mathbb{C}^2$ , comme quotient

de deux fonctions holomorphes. Elle n'admet pour singularités que des singularités non essentielles et de première espèce : les points de la droite  $x+y=1$ , qui ne passe pas par l'origine.

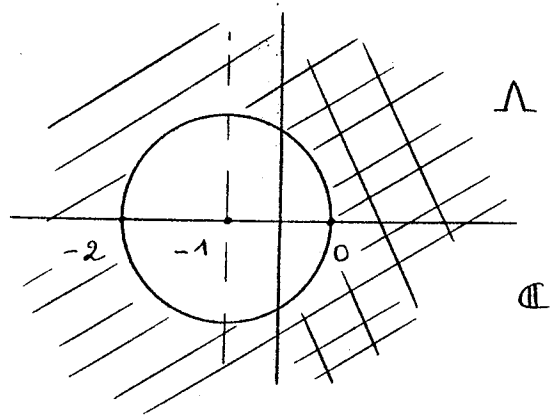


Pour  $(x, y)$  décrivant le polydisque  $\Delta = \mathbb{D}(0, 1) \times \mathbb{D}(0, 1)$ , la fonction méromorphe  $F_\lambda$  n'admet pas le même nombre de pôles dans  $\Delta$  suivant les valeurs de  $\lambda$ .

Lieu des  $\lambda$  pour lesquels  $F_\lambda$  admet un pôle (simple) dans  $\Delta$  :

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |1+\lambda| > 1 \text{ et } |1+\lambda| > |\lambda| \}$$

ce pôle étant  $\frac{1}{1+\lambda} \neq 0$ .



Contrairement aux fonctions méromorphes d'une seule variable, les singularités ne sont plus isolées.

• Que conclure du théorème de Montessus à une seule variable concernant les approximants de Padé  $[L/1]_\lambda$  de  $F_\lambda$ ?  
 Ce théorème affirme que les  $[L/1]_\lambda$  existent tous pour  $L$  assez grand (dépendant a priori de  $\lambda$ ) et convergent uniformément vers  $F_\lambda$  quand  $L \rightarrow +\infty$ , sur tout compact de  $\mathbb{D}(0,1) \setminus \left\{ \frac{1}{1+\lambda} \right\}$ .

Il en résulte au moins la convergence simple des  $\frac{U^{[L/1]}(x,y)}{V^{[L/1]}}(x,y)$  vers  $f(x,y)$  aux points  $(x,y)$  correspondants.

En fait, pour tout  $\lambda \neq -1$ , les  $[L/1]_\lambda$  convergent vers  $F_\lambda$ , uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{1+\lambda} \right\}$ .

Quant à  $F_{-1}$ , elle est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  et  $v^{[L/1]}$  est de degré 0;  $[L/1]_{-1} = [L/0]_{-1} \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} F_{-1}$ ,

uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$ .

En étudiant le cas du point  $(0,0)$  et en utilisant  $G_\mu$ , nous obtenons ainsi la convergence simple des fractions (définies pour  $L$  assez grand) vers  $f$  en

tout point de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{ \text{singularités : } x+y=1 \}$

• Ci-dessous, nous établissons la convergence uniforme sur des compacts de  $\Delta \setminus \{ x+y=1 \}$  de la sous-suite

$\left( \frac{U^{[2\ell/1]}}{V^{[2\ell/1]}} \right)_{\ell \in \mathbb{N}}$  vers  $f$ , en étudiant plus précisément

la dépendance en  $\lambda$ .

Évaluons  $u_\lambda^{[L/1]}$  et  $v_\lambda^{[L/1]}$



$$F_\lambda(x) = \frac{e^{\lambda x^2}}{(1+\lambda)x-1} = \frac{-e^{\lambda x^2}}{1-(1+\lambda)x} = -\left(\sum_{p \geq 0} \frac{\lambda^p x^{2p}}{p!}\right) \left(\sum_{q \geq 0} (1+\lambda)^q x^q\right)$$

pour  $|(1+\lambda)x| < 1$ .

Les coefficients du développement de Taylor de  $F_\lambda$ , holomorphe en 0, sont donc :

$$l \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{2l} = - \sum_{p=0}^l \frac{\lambda^p}{p!} (1+\lambda)^{2(l-p)} \\ c_{2l+1} = - \sum_{p=0}^l \frac{\lambda^p}{p!} (1+\lambda)^{2(l-p)+1} = (1+\lambda) c_{2l} \end{array} \right.$$

D'où :

$$v_\lambda^{[2l+1]}(x) = \begin{vmatrix} c_{2l} & x \\ (1+\lambda)c_{2l} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad u_\lambda^{[2l+1]}(x) = \begin{vmatrix} c_{2l} & x \\ (1+\lambda)c_{2l} & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} x \sum_{k=0}^{2l-1} c_k x^k \\ \sum_{k=0}^{2l} c_k x^k \end{array}$$

Par construction,

$$F_\lambda(x) v_\lambda^{[2l+1]}(x) - u_\lambda^{[2l+1]}(x) = O(x^{2l+2}) :$$

$u_\lambda^{[2l+1]}$  est le polynôme de Taylor de  $F_\lambda v_\lambda^{[2l+1]}$  d'ordre  $2l+1$ .

Or, dans ce cas précis,  $F_\lambda v_\lambda^{[2l+1]}$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ , ce qui permet d'écrire le reste sous la forme :

$$F_\lambda(x) v_\lambda^{[2l+1]}(x) - u_\lambda^{[2l+1]}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{(F_\lambda v_\lambda^{[2l+1]})(\zeta)}{\zeta-x} \left(\frac{x}{\zeta}\right)^{2l+2} d\zeta$$

pour  $|x| < 1$

c'est-à-dire :

$$c_{2l} \left( F_{\lambda}(x) \left| \begin{array}{cc} 1 & x \\ 1+\lambda & 1 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} 1 & x \sum_{k=0}^{2l-1} c_k x^k \\ 1+\lambda & 1 \sum_{k=0}^{2l} c_k x^k \end{array} \right| \right)$$

$$= \frac{c_{2l}}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{F_{\lambda}(\zeta) \left| \begin{array}{cc} 1 & \zeta \\ 1+\lambda & 1 \end{array} \right|}{\zeta-x} \left( \frac{x}{\zeta} \right)^{2l+2} d\zeta$$

Pour un entier  $l$  fixé,  $c_{2l}$  est un polynôme en  $\lambda$ , qui admet un nombre fini de racines. Pour toute valeur de  $\lambda$  différente de ces racines, on a :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} F_{\lambda}(x) \left| \begin{array}{cc} 1 & x \\ 1+\lambda & 1 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} 1 & x \sum_{k=0}^{2l-1} c_k x^k \\ 1+\lambda & 1 \sum_{k=0}^{2l} c_k x^k \end{array} \right| \\ \text{pour } |x| < 1 \end{array} \right. = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{F_{\lambda}(\zeta) \left| \begin{array}{cc} 1 & \zeta \\ 1+\lambda & 1 \end{array} \right|}{\zeta-x} \left( \frac{x}{\zeta} \right)^{2l+2} d\zeta$$

Or, à  $x$  fixé, chacun de ces deux membres est une fonction continue de  $\lambda$  parcourant  $\mathbb{C}$ , en effet :

$$F_{\lambda}(x) \left| \begin{array}{cc} 1 & x \\ 1+\lambda & 1 \end{array} \right| = -e^{-\lambda x^2}; \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & x \sum_{k=0}^{2l-1} c_k x^k \\ 1+\lambda & 1 \sum_{k=0}^{2l} c_k x^k \end{array} \right|$$

est un polynôme en  $\lambda$ ; l'intégrale du second membre vaut :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{-e^{-\lambda \theta^2}}{e^{i\theta} - x}} \left( \frac{x}{e^{i\theta}} \right)^{2l+2} e^{i\theta} d\theta$$

$\phi(\theta, \lambda)$  est une fonction continue sur  $[0, 2\pi] \times \mathbb{C}$ , d'où la continuité de l'intégrale dépendant du

L'identité (\*) est donc vraie pour toute valeur de  $\lambda, y$  compris les racines de  $C_{2\ell}$ .

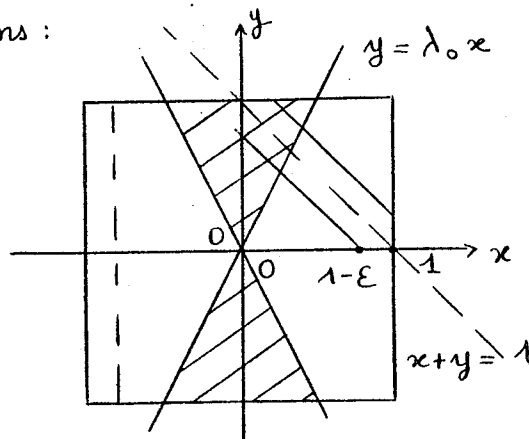
Considérons les compacts de :

$(\Delta \setminus (\{x=0 \text{ ou } x+y=1\} \cap \Delta)) \cup \{(0,0)\}$  du type:

$$K_{\lambda_0, \varepsilon} = \{(x, \lambda x) \mid |x| \leq 1-\varepsilon, |\lambda| \leq \lambda_0, |(1+\lambda)x-1| \geq \varepsilon > 0\} \cap \Delta$$

Pour  $(x, \lambda x) \in K_{\lambda_0, \varepsilon}$ , nous avons :

$$F_{\lambda}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & \sum_{k=0}^{2\ell-1} c_k x^k \\ 1+\lambda & \sum_{k=0}^{2\ell} c_k x^k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1+\lambda & 1 \end{vmatrix}}$$



$$= \frac{-1}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1+\lambda & 1 \end{vmatrix} (2i\pi)} \int \frac{e^{\lambda \zeta^2}}{\zeta-x} \left(\frac{x}{\zeta}\right)^{2\ell+2} d\zeta$$

$(\lambda, \zeta) \rightarrow e^{\lambda \zeta^2}$  est bornée par  $M$  sur le compact

$D(0, \lambda_0) \times C(0, 1)$  et ainsi :  $\forall (x, \lambda x) \in K_{\lambda_0, \varepsilon}$  :

$$\left| F_{\lambda}(x) - \frac{1}{1+\lambda} \right| \leq \frac{1}{2\pi \varepsilon} \times \frac{2\pi M}{\varepsilon} \times (1-\varepsilon)^{2\ell+2} \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi,  $\frac{V^{[2\ell+1]}}{V^{[2\ell+2]}} \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} f$  uniformément sur tout  $K_{\lambda_0, \varepsilon}$

Plus généralement, dans le cas de fonctions méromorphes du type  $f(x, y) = \frac{g(x, y)}{P(x, y)}$  où  $g$  est holomorphe

dans un ouvert de  $\mathbb{C}$  contenant l'origine, et  $P$  un polynôme ne s'annulant pas à l'origine, nous cherchons à répondre aux questions de convergence simple et uniforme sur certains compacts des fractions  $\frac{V^{[L/M]}}{V^{[L/M]}}$  vers  $f$ , où  $M = d^0 P$ .

### Conclusion

#### Généralisation.

Remarquons que le même procédé permet de passer de  $\mathbb{C}^2$  à  $\mathbb{C}^3$ , et plus généralement, de construire des approximations "homogènes" dans  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Supposons en effet que les approximations "homogènes" de  $f$  holomorphe à l'origine de  $\mathbb{C}^n$  soient données sous forme générique comme quotient des deux déterminants du I 3 :

$$V^{[L/M]} = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & \dots & P_L & 1 \\ P_{L-M+2} & \dots & P_{L+1} & 1 \\ \vdots & & & \\ P_{L+1} & \dots & P_{L+M} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad V^{[L/M]} = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & \dots & P_L & \sum_{i=0}^{L-M} P_i \\ P_{L-M+2} & \dots & P_{L+1} & \sum_{i=0}^{L-M+1} P_i \\ \vdots & & & \\ P_{L+1} & \dots & P_{L+M} & \sum_{i=0}^L P_i \end{vmatrix}$$

où les polynômes  $P_k$  sont les parties homogènes de  $d^0 k$  du développement de Mac-Laurin de  $f$ .

Soit alors  $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe à l'origine.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}} a_{i_1, \dots, i_{n+1}} x_1^{i_1} \dots x_{n+1}^{i_{n+1}}$$

au voisinage de l'origine.

Considérons cette fois la restriction de  $f$  à un hyperplan  $x_{n+1} = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  passant par l'origine (Pour recouvrir  $\mathbb{A}^{n+1}$ , il faut ainsi utiliser d'autres paramétrisations, car il nous manque les points qui vérifient:  $\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n = 0$ ).

$$F_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)$$

Les approximations "homogènes" de  $F_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  sont données par les déterminants précédents, où :

$P_{k, \lambda_1, \dots, \lambda_n}$  est la partie homogène de  $d^0 k$  de  $F_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ , développée à l'origine, c'est-à-dire :

$$P_{k, \lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} a_{i_1, \dots, i_n, k - (i_1 + \dots + i_n)}$$

$$x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)^{k - (i_1 + \dots + i_n)}$$

$$= \sum_{i_1 + \dots + i_n = 0}^k a_{i_1, \dots, i_n, k - (i_1 + \dots + i_n)} \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} C_k^{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n} x_1^{i_1 + k_1} \dots x_n^{i_n + k_n}$$

Mais, pour  $x_{n+1} = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$

$P_{k, \lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n)$  vaut encore :

$$\sum_{i_1 + \dots + i_n = 0}^k a_{i_1, \dots, i_n, k - (i_1 + \dots + i_n)} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} x_{n+1}^{k - (i_1 + \dots + i_n)}$$

$$= \sum_{i_1 + \dots + i_n + i_{n+1} = k} a_{i_1, \dots, i_n, i_{n+1}} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} x_{n+1}^{i_{n+1}}$$

qui n'est autre que  $P_k(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  : partie homogène de  $d^0 k$  du développement de  $f$ .

Les approximants "homogènes" de  $f$  sont donc définis par des formules analogues.

Ainsi, les mêmes algorithmes serviront à leur calcul, les propriétés algébriques seront conservées, de même que les théorèmes de convergence simple.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude plus précise de quelques méthodes de calcul de ces approximants.

### Références

- [1] BAKER - GRAVES-MORRIS (1981) Padé approximants. I Basic theory - Encyclopedia of mathematics and its applications. vol 13 (G.C. Rota ed.)
- [2] A. COYT (1982) Abstract Padé approximants for operators: theory and applications. thèse Universiteit Antwerpen.
- [3] M. FIELD (1982) Several complex variables and complex manifolds I. London Mathematical Society. Lecture Note Series 65.
- [4] B.P. FUKS (1965) Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables. Translations of Mathematical Monographs.



2.

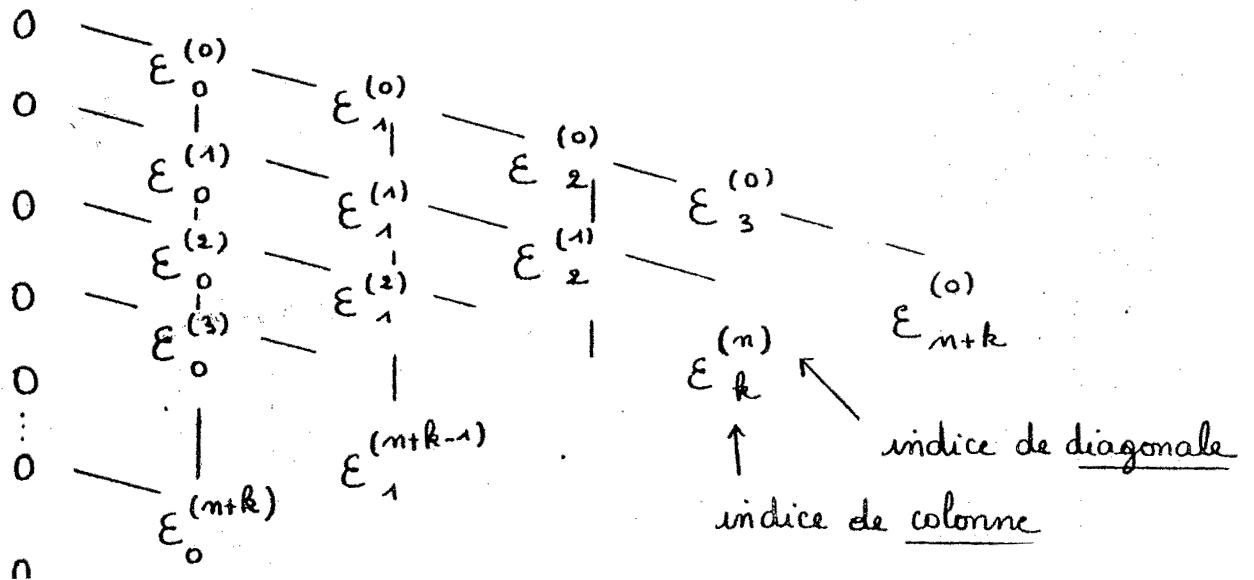
E - algorithme et  
approximants de Padé à plusieurs variables

Introduction

L' E-algorithme de Wynn est extrêmement utilisé et efficace en accélération de la convergence. C'est une généralisation du classique procédé  $\Delta^2$  d'Aitken, qui associe à une suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:

$$T_n = S_n - \frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \Delta S_n = S_{n+1} - S_n \\ \Delta^2 S_n = \Delta(\Delta S_n) \\ = S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n \end{cases}$$

Les résultats de l' E-algorithme sont présentés dans une table à double entrée:





Il s'applique à une suite  $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$  numérique ou fonctionnelle.

Initialisation :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_{-1}^{(m)} = 0, \quad \varepsilon_0^{(m)} = S_m.$$

Règle du losange :

$$\begin{array}{c} \varepsilon_k^{(m)} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varepsilon_{k-1}^{(m+1)} \quad \varepsilon_{k+1}^{(m)} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varepsilon_k^{(m+1)} \end{array} = \varepsilon_{k-1}^{(m+1)} + \frac{1}{\varepsilon_k^{(m+1)} - \varepsilon_k^{(m)}}$$

à condition que les dénominateurs ne s'annulent pas.

En pratique, seuls sont intéressants les termes  $\varepsilon_{2k}^{(m)}$  des colonnes paires, ceux des colonnes impaires servent de calculs intermédiaires. La 4<sup>ème</sup> colonne est formée de la suite obtenue par le  $\Delta^2$  d'Aitken à partir de  $(S_{m-1})_{m \in \mathbb{N}}$ .

Il existe des critères portant sur les suites initiales permettant d'affirmer si les colonnes  $(\varepsilon_{2k}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  ou les diagonales  $(\varepsilon_{2k}^{(d)})_{k \in \mathbb{N}}$  de la table

obtenue à partir d'une suite  $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$  convergent plus vite que cette suite vers sa limite  $S$ .

Par exemple, la convergence de la suite numérique :  $(4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1})_{m \in \mathbb{N}}$  vers  $\pi$  est très fortement

accélérée, ainsi que celle de  $(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1})_{m \in \mathbb{N}}$  vers  $\log 2$ . [2]

Notons qu'il est possible de n'utiliser que les termes des colonnes paires; pour cela, il faut initialiser par

l' $\infty$  et la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et respecter la règle de la croix :

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ W & C & E \\ & S & \end{array} : \frac{1}{N-C} + \frac{1}{S-C} = \frac{1}{W-C} + \frac{1}{E-C} ;$$

mais il est plus facile de construire toute la table.

Remarque: plus les résultats sont bons, c'est-à-dire plus les  $E_{2k}^{(n)}$  sont proches d'une limite  $S$ , plus les dénominateurs de la colonne intermédiaire suivante ont tendance à s'annuler : des erreurs numériques répétées et trop importantes peuvent ainsi stopper l'algorithme alors qu'il devient justement très efficace : d'où l'intérêt d'effectuer les calculs de manière exacte avec un code de calcul formel comme REDUCE (\*).

Ce procédé s'applique aux suites numériques, mais sert aussi à sommer des séries entières :  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$  ;

ici apparaît le lien avec les approximants de Padé unis, qu'utilisent analystes numériques, physiciens théoriciens, et mécaniciens des fluides.

Lorsqu'on ne connaît que les premiers coefficients de la série (problèmes physiques), l'interpolation par les fractions rationnelles que sont les approximants de Padé s'avère meilleure que le développement en série initial :

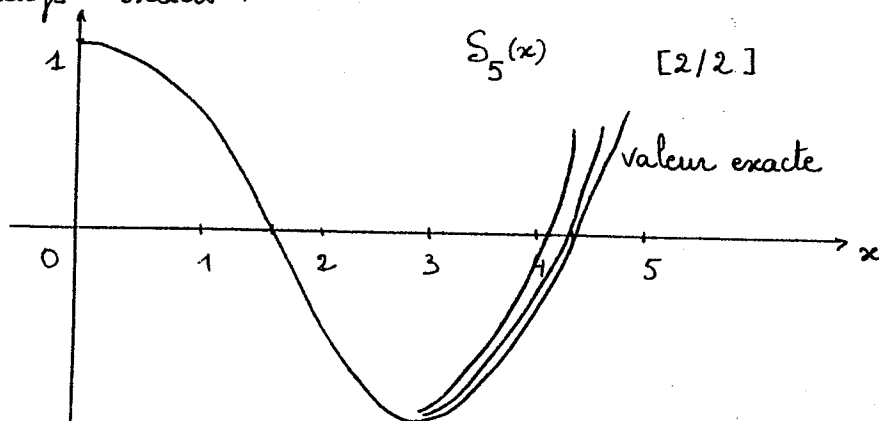
une fraction  $\frac{\sum_{i=0}^p a_i x^i}{\sum_{j=0}^q b_j x^j}$  dont le

développement suivant les puissances croissantes de  $x$  coïncide avec celui de  $f$  jusqu'à l'ordre  $p+q$ , est unique lorsqu'elle existe : on la note  $[p/q]_f$  et on a l'habitude de la ranger dans la table de Padé de  $f$  :

$[0/0]_f$	$[0/1]_f$	$[0/2]_f$	$\dots$
$[1/0]_f$	$[1/1]_f$	$[1/2]_f$	$\dots$
$[2/0]_f$	$[2/1]_f$	$[2/2]_f$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$[p/q]_f$

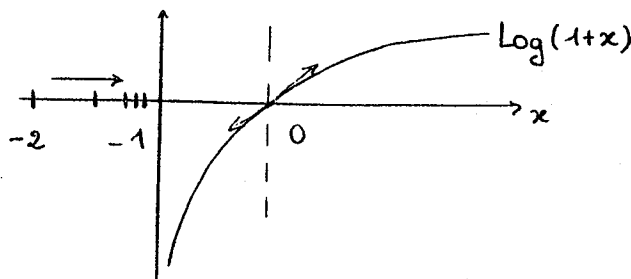
la première colonne étant formée des sommes partielles de  $f$ .

Par exemple,  $[3/3]_{\cos x}$  fournit une bonne approximation de  $\cos$  sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{3}]$  : dix chiffres significatifs exacts.



Quant à la singularité en -1 de  $\text{Log}(1+x)$ , elle est mise en évidence par les pôles des fractions  $[p/1]_{\log(1+x)}$  qui sont :

$$-2, -3/2, -4/3, -5/4, -6/5, \dots, -(p+2)/(p+1) \dots (*)$$



Or, si l' $\epsilon$ -algorithme est initialisé avec les sommes partielles :  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$  de la série  $f(x)$ ,

il donne la moitié de la table de Padé de  $f$ . En effet, Wynn a établi la relation : [11]

$$\boxed{\varepsilon_{2k}^{(n)} = [n+k/k]_f}$$

Pour cela, il a fait le lien entre l' $\varepsilon$ -algorithme et la transformation de Thanks, où interviennent des quotients de déterminants de Hankel, qu'il est hors de question de calculer directement sur ordinateur, mais qui apparaissent naturellement lors de la résolution de:

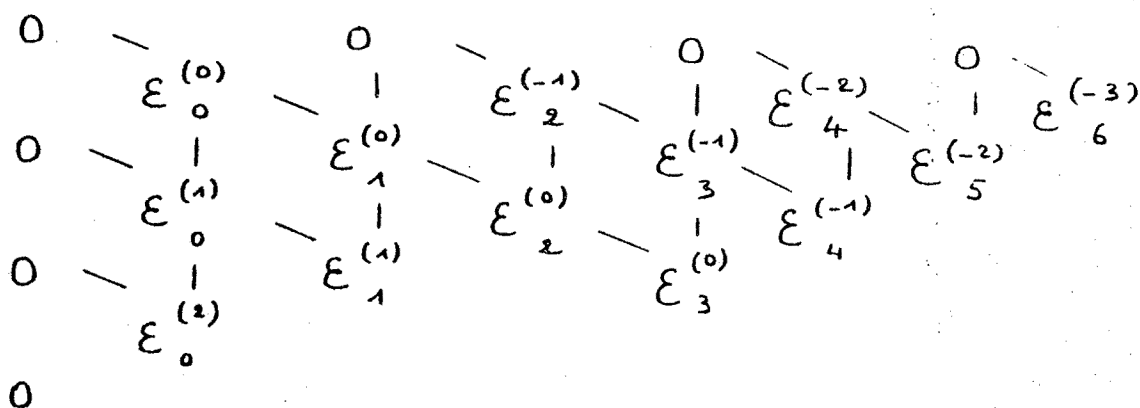
$$(Qf - P)(x) = O(x^{p+q+1}), \quad d^\circ P \leq p, \quad d^\circ Q \leq q.$$

Lorsque tous les approximants de Padé existent, pour obtenir la table entière, si c'est possible, on essaye:

- d'appliquer l' $\varepsilon$ -algorithme à la série réciproque  $1/f$  de  $f$  quand  $f(0) \neq 0$ , car dans ce cas:

$$\underline{1/[p/q]_f = [q/p]_{1/f}}$$

- ou de compléter l' $\varepsilon$ -algorithme de la manière suivante:



avec la même règle du losange et les conditions initiales supplémentaires:  $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_{2k}^{(-k-1)} = 0$

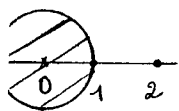
auquel cas:

$$\underline{\varepsilon_{2k}^{(n)} = [n+k/k]} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}, \quad n = -k, -k+1, \dots$$

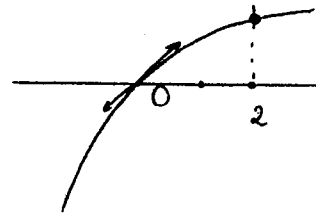
On dispose de théorèmes sur la convergence (uniforme) des diagonales de la table de Padé des séries de Stieltjes

(Markov) ou certaines colonnes de la table de fonctions méromorphes (Montessus de Ballore), la principale difficulté théorique étant la localisation des pôles de ces approximants.

L'É-algorithme peut même fournir le prolongement analytique de la série en dehors de son disque de convergence, quand il existe. Ainsi, pour  $\log(1+x)$ , alors que la suite des sommes partielles



$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} 2^{k+1}$  diverge, l'É-algorithme



converge rapidement vers  $\log 3$ .

En pratique, les approximants de Padé servent aussi aux calculs sur ordinateur de certaines fonctions spéciales.

Signalons encore que l'É-algorithme admet des applications, non seulement aux recherches de limites, mais aussi à la résolution des équations [2].

Une telle efficacité nous a conduits à essayer d'utiliser l'É-algorithme dans le cadre des fonctions de plusieurs variables, qui sont aussi des fonctions d'une seule variable dépendant de paramètres.

Pour des raisons de simplicité, nous nous limitons ici à des fonctions  $f(x,y)$  de deux variables complexes, holomorphes à l'origine  $(0,0)$ , et données par leur développement en série double:

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} x^i y^j$$

au voisinage de  $(0,0)$ .

$$a_{i,j} \in \mathbb{C}$$

Ce voisinage contient un polydisque  $D(0,r) \times D(0,s)$ ,  $r > 0$ ,  $s > 0$ , sur tout compact duquel le développement est normalement convergent.

# I E-algorithme et approximants de Padé "homogènes".

## 1) Moyen de calcul

Étant donnée une série double  $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} x^i y^j$ ,

en dehors de toute information supplémentaire, il semble "naturel" d'initialiser l'E-algorithme avec les sommes partielles:

$$S_n(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{i,j} x^i y^j, \text{ de manière analogue}$$

à ce qu'on utilise pour les séries d'une seule variable.

(Lien avec la démarche du chapitre 1)

Or, notre construction d'approximants de Padé "homogènes" nous a conduits à initialiser l'E-algorithme avec les sommes partielles  $S_n^\lambda(x)$  de la série  $F_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$ .

$$S_n^\lambda(x) = \sum_{k=0}^n c_k(\lambda) x^k \text{ où } c_k(\lambda) = \sum_{i=0}^k a_{k-i, i} \lambda^i$$

et la relation habituelle liant E-algorithme et approximants de Padé à une variable s'écrit:

$$\lambda E_{2k}^{(n)} = [m+k/k]_{F_\lambda}$$

mais, pour  $y = \lambda x$  et  $x \neq 0$ ,  $[m+k/k]_{F_\lambda}(x) = [m+k/k](x, y)$   
 et  $S_n^\lambda(x) = S_n(x, y)$ .

L'E-algorithme nous fournit donc un procédé récursif de calcul des approximants de Padé "homogènes", qui s'écrivent dans le cas générique comme quotient de deux déterminants:  
 $[L/M]_f = \frac{V[L/M]}{V[L/M]}$ , le numérateur étant de  $d^\circ \leq L(M+1)$  et le dénominateur de  $d^\circ \leq M(L+1)$ , qui

vérifient : 
$$\frac{V^{[L/M]} f - U^{[L/M]}}{V^{[L/M]}} = O(X^{(L+1)(M+1)})$$
 avec les notations concernant les "Abstract Padé approximant de Guyt [8]".

En particulier, le procédé  $\Delta^2$  d'Altken (initialisé avec les  $S_n(x, y)$ ) engendre la colonne  $[L/1]_f$  de la table des approximants "homogènes" de  $f$ .

Remarquer qu'à priori le dénominateur est un polynôme formé de termes de degré  $L$  et  $L+1$ , et non de degré 1.

### Exemples (\*)

-  $\forall L \in \mathbb{N}^*$  
$$[L/1] \frac{1}{1-(x+2y)} = \frac{1}{1-(x+2y)}$$

Dans le cas de cette fraction rationnelle dont le dénominateur est de degré 1, on obtient exactement la fraction, à condition de l'écrire sous forme réduite (option "on gcd", en REDUCE)

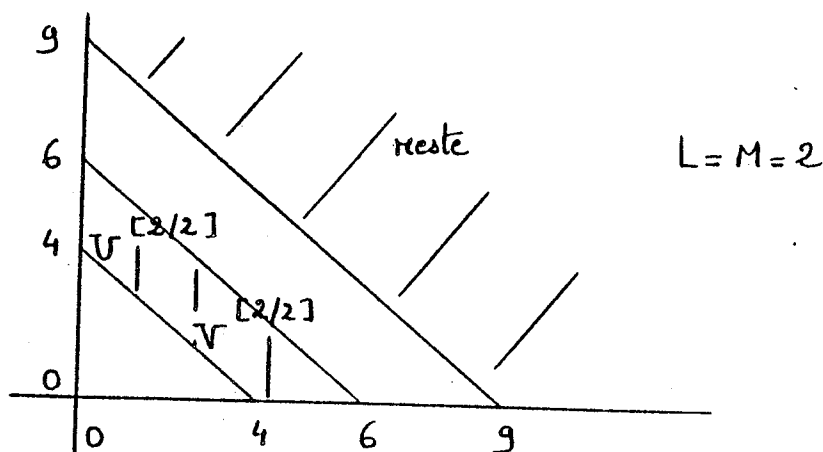
- Considérant cette fois les approximants  $[L/1] \frac{e^{xy}}{1-x-y}$ , pour les entiers  $L$  positifs pairs, la fraction réduite a comme dénominateur  $1-x-y$ ; mais ce n'est pas le cas pour  $L$  impair.

Pour obtenir toute la table, on procédera de la même manière qu'à une variable:

- soit en appliquant l' $\varepsilon$ -algorithme à  $1/f$  quand  $f(0,0) \neq 0$ , car la propriété  $1/[L/M]_f = [M/L]_{1/f}$  est encore vraie (par construction).
- soit en complétant la table de l' $\varepsilon$ -algorithme.

2) Exemples (\*)

Le numérateur  $U^{[L/M]}$  est une somme de polynômes homogènes de degré  $LM$  à  $L(M+1)$ , le dénominateur  $V^{[L/M]}$  est une somme de polynômes homogènes de degré  $LM$  à  $(L+1)M$ .



- fraction rationnelle  $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y}$

Les approxima<sup>n</sup>ts  $[L/2]$  calculés valent tous  $\frac{-x-y+2}{xy-x-y+1}$   
(après réduction)

- fonction d'une seule variable: on retrouve les approxima<sup>n</sup>ts classiques.

$f(x, y) = \log(1+x)$

-  $f(x, y) = \sum_{i+j > 0} \frac{x^i y^j}{i+j}$

-  $f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{x^i y^j}{(i+j)!}$

-  $f(x, y) = e^{x+y} = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{x^i y^j}{i! j!}$

-  $f(x, y) = \log(1+x-y)$

} pour ces deux dernières fonctions, voir la remarque du paragraphe suivant.



### 3) Première généralisation: changement de paramétrisation de $\mathbb{C}^2$ .

Au lieu de se placer sur les droites passant par l'origine de  $\mathbb{C}^2$ , pour ramener l'étude des approximants d'une fonction de deux variables à celle des approximants d'une fonction d'une seule variable, utilisons des courbes algébriques plus générales, qui passent toujours par l'origine.

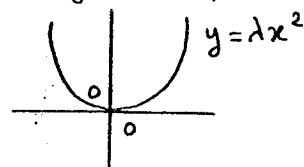
Par exemple,

$$y = \lambda x^2, \quad x \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C}$$

(et  $x = \mu y^2$  pour atteindre tous les points de  $\mathbb{C}^2$ .)

ce qui conduit à définir :

$$F_\lambda(x) = f(x, \lambda x^2) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} \lambda^j x^{i+2j}$$



$$F_\lambda(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k(\lambda) x^k \quad \text{où} \quad c_k(\lambda) = \sum_{i+2j=k} a_{i,j} \lambda^j$$

Dans l' $\mathcal{E}$ -algorithme, on utilisera donc les sommes partielles suivantes :

$$S_m(x, y) = \sum_{i+2j \leq m} a_{i,j} x^i y^j \quad \text{et les polynômes:}$$

$$P_n(x, y) = \sum_{i+2j=n} a_{i,j} x^i y^j$$

Plus généralement, en utilisant le paramétrage :

$$\begin{cases} x = t^p \\ y = \lambda t^q \end{cases} \quad t \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C}, (p, q) \in \mathbb{N}^2$$

les approximants de Padé correspondants feront intervenir les sommes partielles :

$$S_m(x, y) = \sum_{p_i + q_j \leq m} a_{i,j} x^i y^j \quad \text{et les polynômes:}$$

$$P_n(x, y) = \sum_{p_i + q_j = n} a_{i,j} x^i y^j$$

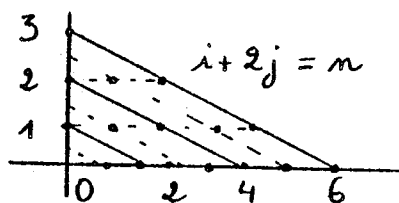
Remarque:

$$\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid pi + qj = n\} \neq \emptyset \Rightarrow p \wedge q \mid n$$

Lorsque  $p$  et  $q$  ne sont pas premiers entre eux, certains des polynômes  $P_n$  peuvent être nuls, et ainsi certaines sommes partielles  $S_n$  consécutives égales; on ne peut donc appliquer l' $\mathcal{E}$ -algorithme à toute la suite  $S_n$  (on rencontre le même problème à une variable avec le développement de  $Mae$ -Laurin de  $\cos x$ ).

Ces changements de paramétrage ont pour conséquence de "basculer" les sommes partielles, qui étaient triangulaires "isoèles" pour les approximants de Padé "homogènes", et qui ne sont plus que triangulaires.

$p=1, q=2$



attention:

$$\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + 2j = 1\} = \{(1, 0)\}$$

Remarque:

Pour une fonction du type  $g(x, y) = f(ax + by)$ ,  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , où  $f$  est une fonction holomorphe d'une seule variable à l'origine, les approximants de Padé "homogènes"  $[L/M]_g(x, y)$  sont aussi les  $[L/M]_f(ax + by)$ ; il y a égalité, car si :

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k z^k \quad \text{et} \quad s_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k, \quad \text{alors}$$

$$g(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k (ax + by)^k \quad \text{et admet comme somme}$$

partielle "homogène" d'ordre  $n$ :  $S_n(x, y) = \sum_{k=0}^n c_k (ax + by)^k$   
 qui est aussi  $s_n(ax + by)$   
 ( $ax + by$  étant un polynôme de  $d^0 1$ )

C'est le cas par exemple des fonctions  $e^{x+y}$  et  $\log(1+x-y)$ .

Plus généralement, pour une fonction  $g = f \circ \varphi$ , où  $f$  est une fonction holomorphe d'une seule variable à l'origine,  $(f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k z^k)$  et  $\varphi$  un polynôme en  $x, y$  tel que  $\varphi(0,0) = 0$ , considérons les fractions  $[L/M](x, y)$  obtenues en remplaçant  $z$  par  $\varphi(x, y)$  dans  $[L/M]_f(z)$ .  
Si  $(Qf - P)(z) = O(z^{L+M+1})$ , on a:

$$((Q \circ \varphi)g - (P \circ \varphi))(x, y) = O((\varphi(x, y))^{L+M+1}), \text{ donc au moins } O(x^{L+M+1}).$$

Par exemple, soit  $\varphi(x, y) = x^2 + y$ ; les sommes partielles de  $f \circ \varphi$  sont:

$$\sum_{k=0}^n c_k (x^2 + y)^k, \text{ c'est-à-dire les } \sum_{i+2j \leq 2n} a_{i,j} x^i y^j$$

$$(\text{où } g(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} x^i y^j).$$

Pour cette raison, et pour que les sommes partielles successives soient en général distinctes, on peut donc associer au paramétrage  $(x, \lambda x^2)$  la suite des  $(\sum_{i+2j \leq 2n} a_{i,j} x^i y^j)_{n \in \mathbb{N}}$  plutôt que celle des  $(\sum_{i+2j \leq n} a_{i,j} x^i y^j)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Mais pourquoi se limiter à des sommes partielles triangulaires? Il existe d'autres découpages de la série double, que nous allons étudier maintenant.

## II Initialisation de l' E. algorithme avec des sommes partielles générales

Soit  $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante de sous-ensembles de  $\mathbb{N}^2$ , telle que  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_m = \mathbb{N}^2$ .

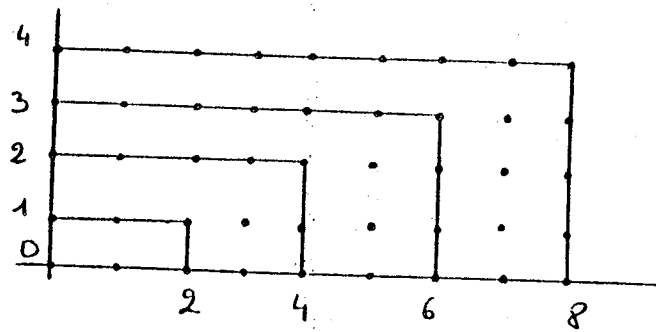
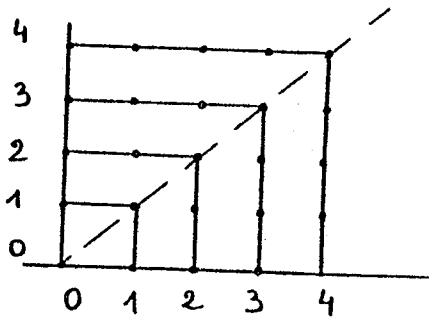
On note 
$$S_m(x, y) = \sum_{(i,j) \in I_m} a_{i,j} x^i y^j$$

et 
$$P_m(x, y) = \sum_{(i,j) \in I_m \setminus I_{m-1}} a_{i,j} x^i y^j$$

Dans ce cadre rentrent les sommes partielles "carrees" ou "rectangulaires":

$$I_m = \left\{ (i,j) \mid \begin{array}{l} 0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq m \end{array} \right\}$$

$$I_m = \left\{ (i,j) \mid \begin{array}{l} 0 \leq i \leq pm \\ 0 \leq j \leq qm \end{array} \right\}$$



$p=2, q=1$

L'absolue convergence de la série  $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} x^i y^j$

dans un voisinage de  $(0,0)$  nous assure que:  

$$S_m(x, y) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} f(x, y) \quad \text{dans ce voisinage.}$$

### 1) Transformation de Thakrs

Quand l'E-algorithme est initialisé avec la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , Wynn a établi la relation [11] :

$$E_{2k}^{(n)} = e_k(S_n)$$

où  $e_k(S_n)$  est le rapport de deux déterminants de Hankel :

$$H_{k+1}^{(n)}(S_n) / H_k^{(n)}(S_n), \text{ c'est-à-dire :}$$

$$E_{2k}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} S_n & \dots & S_{n+k} \\ S_{n+1} & \dots & S_{n+k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n+k} & \dots & S_{n+2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta^2 S_n & \dots & \Delta^2 S_{n+k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-2} \end{vmatrix}}$$

d'ordre  $k+1$   d'ordre  $k$

Notons  $P_0 = S_0$  et pour  $n \geq 1$ ,  $P_n = S_n - S_{n-1} = \Delta S_{n-1}$

Grâce à quelques opérations sur lignes et colonnes de ces déterminants de Hankel, écrivons les fractions obtenues sous une forme analogue à celle donnée pour les approximations de Padé "homogènes", qui utilise les termes  $P_n$  et  $S_n$ .

$$\begin{vmatrix} S_n & S_{n+1} & \dots & S_{n+k} \\ S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{n+k+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ S_{n+k} & S_{n+k+1} & \dots & S_{n+2k} \end{vmatrix} = (-1)^k \begin{vmatrix} S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{n+k} & S_n \\ S_{n+2} & S_{n+3} & \dots & S_{n+k+1} & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{n+k+1} & S_{n+k+2} & \dots & S_{n+2k} & S_{n+k} \end{vmatrix}$$

permutation circulaire  
sur les vecteurs colonnes

$$= (-1)^k \begin{vmatrix} S_{m+1} & S_{m+2} & \dots & P_{m+k} & S_m \\ S_{m+2} & S_{m+3} & \dots & P_{m+k+1} & S_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{m+k+1} & S_{m+k+2} & \dots & P_{m+2k} & S_{m+k} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{en retranchant} \\ \text{la } (k-1)^{\text{ème}} \\ \text{colonne à la} \\ k^{\text{ème}} \end{array}$$

$$= (-1)^k \begin{vmatrix} S_{m+1} & P_{m+2} & \dots & P_{m+k} & S_m \\ S_{m+2} & P_{m+3} & \dots & P_{m+k+1} & S_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{m+k+1} & P_{m+k+2} & \dots & P_{m+2k} & S_{m+k} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{en retranchant} \\ \text{la } i^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ \text{à la } (i+1)^{\text{ème}} : \\ i = 1, \dots, k-2 \end{array}$$

$$= (-1)^k \begin{vmatrix} P_{m+1} & P_{m+2} & \dots & P_{m+k} & S_m \\ P_{m+2} & P_{m+3} & \dots & P_{m+k+1} & S_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{m+k+1} & P_{m+k+2} & \dots & P_{m+2k} & S_{m+k} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{en retranchant} \\ \text{la dernière} \\ \text{colonne à la} \\ \text{première.} \end{array}$$

Quant au dénominateur, il s'écrit:

$$\begin{vmatrix} \Delta^2 S_m & \dots & \Delta^2 S_{m+k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^2 S_{m+k-1} & \dots & \Delta^2 S_{m+2k-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{m+2} - P_{m+1} & \dots & P_{m+k+1} - P_{m+k} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m+k+1} - P_{m+k} & \dots & P_{m+2k} - P_{m+2k-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k+2} \begin{vmatrix} P_{m+1} & \dots & P_{m+k} & 1 \\ P_{m+2} - P_{m+1} & \dots & P_{m+k+1} - P_{m+k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{m+k+1} - P_{m+k} & \dots & P_{m+2k} - P_{m+2k-1} & 0 \end{vmatrix}$$

en développant ce déterminant par rapport à la dernière colonne.

Puis, en ajoutant la 1<sup>ière</sup> ligne à la seconde, la seconde à la troisième, ..., la k<sup>ème</sup> à la dernière, successivement, on obtient:

$$(-1)^k \begin{vmatrix} P_{n+1} & P_{n+2} & \dots & P_{n+k} & 1 \\ P_{n+2} & P_{n+3} & \dots & P_{n+k+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{n+k+1} & P_{n+k+2} & \dots & P_{n+2k} & 1 \end{vmatrix}$$

$e_k(S_n)$  apparaît ainsi comme le quotient de deux déterminants d'ordre  $k+1$ , dont les  $k$  premières colonnes sont identiques.

$$e_k(S_n) = \begin{vmatrix} P_{n+1} & \dots & P_{n+k} & S_n \\ P_{n+2} & \dots & P_{n+k+1} & S_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{n+k+1} & \dots & P_{n+2k} & S_{n+k} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} P_{n+1} & \dots & P_{n+k} & 1 \\ P_{n+2} & \dots & P_{n+k+1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{n+k+1} & \dots & P_{n+2k} & 1 \end{vmatrix}$$

## 2) Propriétés

L'É-algorithme initialisé avec des sommes partielles du type précédent (associées à  $f$  ou  $1/f$  suivant que  $L \geq M$  ou  $M \geq L$ ) engendre donc les fractions  $U^{[L/M]} / V^{[L/M]}$  définies par :

$$U^{[L/M]} = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & S_{L-M} \\ P_{L-M+2} & P_{L-M+3} & \dots & P_{L+1} & S_{L-M+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1} & P_{L+2} & \dots & P_{L+M} & S_L \end{vmatrix}$$

$$\text{et } V^{[L/M]} = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & 1 \\ P_{L-M+2} & P_{L-M+3} & \dots & P_{L+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1} & P_{L+2} & \dots & P_{L+M} & 1 \end{vmatrix}$$

Convention:  $k < 0 \quad P_k = 0$  et  $S_k = 0$ .

Ces expressions généralisent tout à fait les approximants de Padé "homogènes"; de plus, le reste

$$V^{[L/M]} f - U^{[L/M]} = \left| \begin{array}{cccc|c} P_{L-M+1} & \dots & P_L & \frac{+\infty}{\lambda=1} & P_{L+i} \\ P_{L-M+2} & \dots & P_{L+1} & \frac{+\infty}{\lambda=1} & P_{L+i+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{L+1} & \dots & P_{L+M} & \frac{+\infty}{\lambda=1} & P_{L+i+M} \end{array} \right|$$

Il est donc de la forme  $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \setminus I} e_{i,j} x^i y^j$ ,  
 (L+1)(M+1)-1

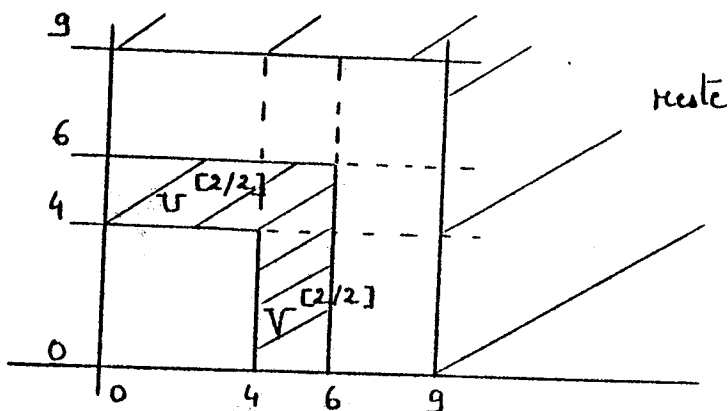
alors que le numérateur s'écrit:

$$U^{[L/M]} = \sum_{(i,j) \in I_{L(M+1)} \setminus I_{LM-1}} u_{i,j} x^i y^j$$

et le dénominateur:

$$V^{[L/M]} = \sum_{(i,j) \in I_{M(L+1)} \setminus I_{LM-1}} v_{i,j} x^i y^j$$

Exemple:  $L = M = 2$ , approximants "carrés".



Différents découpages de la série double  $f(x,y) = \sum a_{i,j} x^i y^j$  conduisent à de nouveaux types d'approximants  $(i,j) \in \mathbb{N}^2$  rationnels de  $f(x,y)$ , qui ont l'avantage de se calculer récurivement.



Remarque: pour un découpage carré de la série, ces approximants ne sont pas ceux que définit Chisholm, ni ceux de Luttesrodt (de même que pour un découpage triangulaire, les approximants "homogènes" ne sont pas les approximants de Karlsson-Wallen).

En effet, pour  $U$  et  $V$  de la forme:

$$U = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m u_{i,j} x^i y^j$$

$$V = \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{j=0}^{\nu} v_{i,j} x^i y^j,$$

Luttesrodt impose  $Vf - U = \sum e_{i,j} x^i y^j$  avec  $e_{i,j} = 0$  pour  $(i,j) \in S \subset \mathbb{N}^2$ , de cardinal:

$(m+1)^2 + (\nu+1)^2 - 1$ , contenant  $\{(i,j) / (i,j) \leq (m,m)\}$  et satisfaisant la règle du rectangle:

$(i,j) \in S$  et  $(k,l) < (i,j) \Rightarrow (k,l) \in S$ .  
(avec l'ordre partiel habituel dans  $\mathbb{N}^2$ )

Pour Chisholm,  $S$  est plus petit:

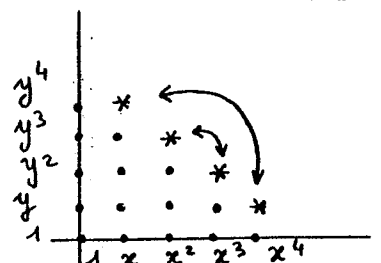
$$S = \{(i,j) / (i,j) \leq (m,m) \text{ ou } i+j \leq \nu+m\}$$

$m=\nu=2$

mais les  $e_{i,j}$  doivent de plus vérifier:

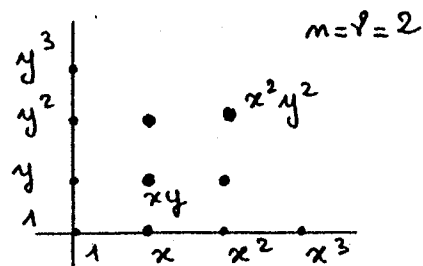
$$e_{\nu+m+1-p,p} + e_{p,\nu+m+1-p} = 0$$

pour  $p = 1, \dots, \nu+m$ .



Pour  $U = \sum_{i+j \leq m} u_{i,j} x^i y^j$

et  $V = \sum_{i+j \leq \nu} v_{i,j} x^i y^j,$



Karlsson-Wallen choisissent  $S$  contenant

$\{(i,j) / i+j \leq m\}$ , satisfaisant la règle du rectangle et de cardinal  $(m+1)(m+2)/2 + (\nu+1)(\nu+2)/2 - 1$ .

Exemple: approximants carrés de  $f(x,y) = e^{x+y}$ , qui est du type  $g(x)h(y)$  et symétrique en  $x, y$ .  
(calculs en REDUCE (\*)).

Il reste à étudier le choix d'un découpage approprié à la fonction.

Si  $f(x,y)$  est une fonction symétrique en  $x$  et en  $y$  ( $a_{i,j} = a_{j,i}$ ), on aura tout intérêt à choisir un découpage symétrique par rapport à la première diagonale (par exemple, triangulaire ou carré).

Si il s'agit d'une fonction du type  $g(x+y)$ , (relations entre les  $a_{i,j}$ ,  $i+j = \text{constante}$ ), on choisira les approximants de Padé "homogènes"; si elle est de la forme  $g(x)h(y)$  ( $a_{i,j} = a_{i,0} a_{0,j}$ ), on utilisera un découpage carré ou rectangulaire, (suivant l'importance relative de  $g$  et  $h$ ).

Remarque: Le procédé se généralise immédiatement au cas d'une fonction holomorphe d'un nombre fini de variables, à l'origine; on choisit cette fois des sommes partielles de la série multiple correspondante. Formellement, l'écriture des approximants est la même.

D'autre part, un des principaux attraits de la construction "homogène" d'approximants de Padé à plusieurs variables est qu'elle montre que tous les algorithmes de calcul d'approximants de Padé à une variable permettent aussi le calcul des approximants "homogènes". Il suffit en effet de modifier les conditions initiales de ces algorithmes de la manière suivante:

remplacer chaque somme partielle  $s_m(x) = \sum_{i \leq m} c_i x^i$

correspondant à  $f(x)$  par la somme partielle  $S_m(x, y)$   
 $= \sum_{i+j \leq m} a_{i,j} x^i y^j$  associée à  $f(x, y)$ .

(ce qui provient de l'étude de la fonction  $F_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$ ).

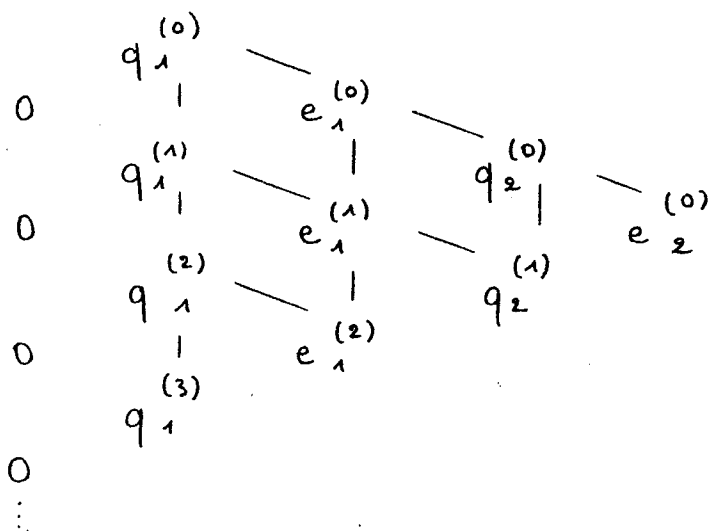
Par exemple :

### III qd. algorithme et approximants de Padé.

#### 1) Définition

Appliqué à une suite  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , il définit (quand ils existent) les termes :

$q_m^{(n)}$   $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$  indice de colonne,  
 et  $e_m^{(n)}$   $n$  indice de diagonale, disposés dans la table qd :



à partir des conditions initiales :  $m \in \mathbb{N}^* \quad e_0^{(m)} = 0$   
 $m \in \mathbb{N} \quad q_1^{(m)} = \frac{a_{m+1}}{a_m}$

et des règles du losange :

$$m \in \mathbb{N}^* \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{c}
 e_{m-1}^{(n+1)} \rightarrow q_m^{(n)} \\
 \searrow \\
 q_m^{(n+1)} \rightarrow e_m^{(n)}
 \end{array}
 = e_{m-1}^{(n+1)} + \underbrace{(q_m^{(n+1)} - q_m^{(n)})}_{\text{terme correcteur}}$$

par rapport à la colonne des  $e$  précédente.

$$\begin{array}{c}
 q_m^{(n+1)} \rightarrow e_m^{(n)} \\
 \searrow \\
 e_m^{(n+1)} \rightarrow q_{m+1}^{(n)}
 \end{array}
 = q_m^{(n+1)} \cdot \underbrace{\frac{e_m^{(n+1)}}{e_m^{(n)}}}_{\text{terme correcteur}}$$

par rapport à la colonne des  $q$  précédente.

Les colonnes de la table  $qd$  sont ainsi construites de la gauche vers la droite, mais l'algorithme est instable numériquement. Il en existe une forme plus stable: la forme progressive du  $qd$  algorithme qui calcule les termes à partir d'une diagonale, du haut vers le bas, grâce aux règles:

$$\begin{array}{c}
 q_m^{(n)} \rightarrow e_{m-1}^{(n+1)} \\
 \searrow \\
 e_m^{(n)} \rightarrow q_m^{(n+1)}
 \end{array}
 = q_m^{(n)} + (e_m^{(n)} - e_{m-1}^{(n+1)})$$

$$\begin{array}{c}
 e_m^{(n)} \rightarrow q_{m+1}^{(n)} \\
 \searrow \\
 q_m^{(n+1)} \rightarrow e_m^{(n+1)}
 \end{array}
 = e_m^{(n)} \cdot \frac{q_{m+1}^{(n)}}{q_m^{(n+1)}}$$

Mais de toute manière, nous effectuons les calculs de manière exacte en REDUCE.

2) Application aux approximants de Padé usuels.

a) Théorème.

Lorsque la table qd est définie à partir de la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des coefficients de la série de Mac-Laurin de  $f$ :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n, \quad \text{les valeurs obtenues dans le cas normal}$$

$$\left( \forall n, m \geq 0 \quad H_m^{(n)} = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+m-1} & c_{n+m} & \dots & c_{n+2m-2} \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

déterminants de Hankel associés à  $f$ .

sont liées à  $f$  par:

$$q_m^{(n)} = \frac{H_m^{(n+1)} H_{m-1}^{(n)}}{H_m^{(n)} H_{m-1}^{(n+1)}}, \quad e_m^{(n)} = \frac{H_{m+1}^{(n)} H_{m-1}^{(n+1)}}{H_m^{(n)} H_m^{(n+1)}}$$

$m \in \mathbb{N}^*$   
 $n \in \mathbb{N}$

b) Localisation des pôles et des zéros d'une fonction méromorphe.

Il résulte d'une étude pounée de ces déterminants l'importante propriété analytique suivante :

• Pour  $f$  méromorphe, analytique en 0, ayant des pôles simples de modules distincts dans  $D(0; R)$ , notés  $d_i$  tels que :  $0 < |d_1| < |d_2| < \dots$ , et si les termes considérés dans la table qd. existent, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} q_m^{(n)} = 1/d_m \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} e_m^{(n)} = 0 \end{array} \right.$$

Ce résultat admet des généralisations à des situations plus compliquées quant à la configuration des pôles.

D'autre part, grâce à la dualité entre :

$f$   $\longleftrightarrow$   $1/f$   
 les valeurs limites des  $e$ -lignes associées à  $f$   $\longleftrightarrow$  les valeurs limites des  $q$ -colonnes associées à  $1/f$

les zéros de  $f$   $\longleftrightarrow$  les pôles de  $1/f$ ,

on peut aussi localiser les zéros de  $f$ .

( d'où les applications du qd. algorithme à la recherche de zéros de polynômes ou de fonctions entières, par exemple, les polynômes de Laguerre et les fonctions de Bessel ).

### c) Lien précis avec les approximants de Padé de $f$ .

Théorème :  $n \in \mathbb{N}$  fixé.

Les convergents de la fraction continue :

$$c_0 + c_1 x + \dots + c_{m-1} x^{m-1} + \frac{c_m x^m}{1} - \frac{q_1^{(n)} x}{1} - \frac{e_1^{(n)} x}{1} - \frac{q_2^{(n)} x}{1} - \frac{e_2^{(n)} x}{1}$$

forment la suite en escalier :

$$[n/0] \quad [n/1]$$

$$[n+1/1] \quad [n+1/2]$$

$$[n+2/2] \quad [n+2/3]$$

$$[n+3/3] \dots$$

dans la table de Padé de  $f$ .

$$\left( \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots \text{ désigne } \frac{a_0}{b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}} \right)$$

Remarque: quand c'est possible, on calcule l'autre moitié de la table de Padé de  $f$  à l'aide de la table  $q_d$  de la série réciproque  $1/f$ .

### 3) Utilisation dans le cadre des approximants "homogènes"

Principe.

Modifions quelque peu le  $q_d$  algorithme précédent, pour en donner une formulation plus adaptée au cas de fonctions de plusieurs variables, en privilégiant les termes  $c_n x^n$ .

Remplaçons dans 2) les conditions initiales par:

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* & e^{(n)} = 0 \\ n \in \mathbb{N} & q_1^{(n)} = \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \end{cases}$$

en conservant les mêmes règles.

Alors on obtient :

$$\begin{cases} e_m^{(n)} = e_m^{(n)} x \\ \text{et } q_m^{(n)} = q_m^{(n)} x \end{cases}$$

Preuve par récurrence sur  $m$  et  $n$ .

\* C'est vrai pour les termes initiaux :

$$\begin{aligned} e_0^{(n)} &= e_0^{(n)} x = 0 \\ q_1^{(n)} &= q_1^{(n)} x \end{aligned}$$

\* puis, alternativement sur les  $q$ -colonnes et les  $e$ -colonnes :

$$e_m^{(n)} = e_{m-1}^{(n+1)} x + (q_m^{(n+1)} - q_m^{(n)}) x = e_m^{(n)} x$$

$$q_m^{(n)} = q_m^{(n+1)} x \cdot \frac{e_m^{(n+1)} x}{e_m^{(n)} x} = q_m^{(n)} x$$

Conséquence: Les fractions continues du 2) c) s'écrivent aussi:

$$c_0 + c_1 x + \dots + c_{m-1} x^{m-1} + \cfrac{c_n x^n}{1} - \cfrac{e_1^{(n)}}{1} - \cfrac{e_1^{(n)}}{1} - \cfrac{e_2^{(n)}}{1} - \cfrac{e_2^{(n)}}{1} - \dots$$

En appliquant cette dernière forme du qd. algorithme à  $F_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$ , on obtient la suite en escalier:

$$[n/0] [n/1]$$

$$[n+1/1] [n+1/2]$$

$$[n+2/2] [n+2/3]$$

⋮

des approximants "homogènes" de  $f(x, y)$ .

Résumons :

Soit  $P_k$  la partie homogène de degré  $k$  de  $f(x, y)$ .

$$P_k(x, y) = \sum_{i=0}^k a_{i, k-i} x^i y^{k-i}$$

On initialise le qd. algorithme avec :

$$\begin{cases} e_0^{(m)} = 0 \\ q_1^{(m)} = \frac{P_{m+1}(x, y)}{P_m(x, y)} \end{cases}$$

et on calcule ensuite les fractions continues:

$$P_0 + P_1 + \dots + P_{m-1} + \cfrac{P_m}{1} - \cfrac{q_1^{(m)}}{1} - \cfrac{e_1^{(m)}}{1} - \cfrac{q_2^{(m)}}{1} - \dots$$

Remarque : De la même manière que l' $\mathcal{E}$ -algorithme, le qd. algorithme fournit un autre moyen de calcul des approximants plus généraux du  $\Pi$ .

De façon générale, le choix de l'algorithme dépend du problème à traiter : évaluation ponctuelle de la fraction, ou calcul exact des coefficients de la fraction (ce qui est préférable si on doit l'évaluer en de nombreux points), calcul d'un seul approximant ou de toute une suite d'approximants ...



References

- [1] G.A. BAKER (1973) Recursive calculation of Padé approximants, in " Padé approximants and their applications " Academic Press. P.R. Graves-Morris ed. p 83-91
- [2] C. BREZINSKI (1978) Algorithmes d'accélération de la convergence. Etude numérique. Editions Gecchip. Paris
- [3] C. BREZINSKI (1976) Computation of Padé approximants and continued fractions. J. Comp. Applied Maths. vol 2 n°2 p. 113-123.
- [4] C. BREZINSKI (1977) Accélération de la convergence en analyse numérique. Lecture Notes in Mathematics. 584 Springer - Verlag.
- [5] A. BULTHEEL (1980) Division algorithms for continued fractions and the Padé table. J. Comp. Applied Maths. vol 6 n°4. p 259-266.
- [6] J.S.R. CHISHOLM (1976) Rational polynomial approximants in  $N$  variables, in " Padé approximants methods and its applications to mechanics ". H. Cabannes ed.
- [7] G. CLAESSENS (1975) A new look at the Padé table and the different methods for computing its elements. J. Comp. Applied Maths 1 p 141-152

- [8] A. CUYT (1982) Abstract Padé approximants for operators : theory and applications. These Universiteit Antwerpen.
- [9] J. KARLSSON, H. WALLIN (1977) Rational approximation by an interpolation procedure in several variables, in " Padé and rational approximation " Saff-Varga ed. p 83-100.
- [10] C.H. LUTTERODT (1976) Rational approximants to holomorphic functions in  $n$  dimensions. Lecture Notes in Physics. 47 Springer-Verlag p 33-54
- [11] P. WYNN (1956) On a device for computing the  $e_m(S_m)$  transformation. M.T.A.C. 10 p 91-96



Calcul d'approximants de Padé à plusieurs variables dans le langage de calcul formel REDUCE.

1)  $\epsilon$ -algorithme appliqué à des suites numériques

epsilonusuel

```
% construction à partir d'une suite s(m);  
% si c'est une suite numérique, mettre l'option float à on ;  
% si c'est une suite polynomiale, mettre l'option gcd à on pour que  
les fractions obtenues soient reduites ;
```

operator epsil;

```
for all s,m let epsil(s,m,-1)=0;  
for all s,m let epsil(s,m,0)=s(m);  
for all s,m,k such that k>=1 let epsil(s,m,k)=epsil(s,m+1,k-2)  
+1/(epsil(s,m+1,k-1)-epsil(s,m,k-1));
```

procedure diago(s,m,n);

```
% m est le numero de la diagonale, n en est la longueur;
```

```
begin  
write s;  
for k=0:n do  
begin  
write s(m+2*k), " ", epsil(s,m,2*k);  
end;  
end;
```

procedure colonne(s,k,n);

```
% 2*k est le numero de la colonne, n en est la longueur;
```

```
begin  
write s;  
for i=0:n do write s(2*k+i), " ", epsil(s,i,2*k);  
end;  
end;
```

Dans un tel programme, les commentaires sont entre % et ;  
l'opérateur epsil s'applique aussi bien à une suite s  
numérique que fonctionnelle :

$\text{epsil}(s, m, k) = \epsilon_k^{(m)}$  de l' $\epsilon$ -algorithme appliqué à la  
suite s; ici, elle est choisie parmi les suites numériques  
numériques.

suitesnum.donnees

```

operator riemann;
%serie des 1/n**2;
Let riemann(0)=0;
for all n such that n>0 Let riemann(n)=riemann(n-1) + 1/n**2;

operator geom;
%serie des 1/2**n;
Let geom(0)=1;
for all n such that n>0 Let geom(n)=geom(n-1) + 1/2**n;

operator geomdouble;
%serie des (1/2**n)-(1/3**n);
Let geomdouble(0)=0;
for all n such that n>0 Let geomdouble(n)=geomdouble(n-1)+1/2**n-1/3**n;

procedure g(n);
1+1/2**n;

operator pi;
Let pi(0)=4;
for all n such that n>0 Let pi(n)=pi(n-1)+4*((-1)**n)/(2*n+1);

operator l3;
Let l3(0)=0;
for all n such that n>0 Let l3(n)=l3(n-1)+((-1)**(n+1))*(2**n)/n;

end;

```

Exemple:  
riemann

diago(riemann, 0, 5);

0	0
5/4	4/3
205/144	135/89
5369/3600	778404020/506758140
1077749/705600	44900622571906223220142000/28037329265871159129149760
9841645/6350400	48497175915269721536633329814343263653742383690751399480254960
	30026046694631019953891269403493075075449328774897291868968000

les termes de la 1<sup>ère</sup> colonne sont les termes initiaux de la suite dont on a besoin pour calculer ceux de la diagonale :  $E_{2k}^{(0)}$

$0 \leq k \leq 5$

diago(riemann, 0, 5);

0	0
1.25	1.3333333/0.9999999
1.4236111/0.9999999	1.5168539
1.4913888/0.9999999	1.5755134
1.527422/0.9999999	<u>1.6014697/0.9999999</u>
1.5497676/0.9999999	1.6156644/0.9999999

cette fois, l'option "on float" évalue les nombres sous forme ; précision de  $10^{-8}$  au lieu de les laisser sous forme rationnelle

```
a:=epsil(riemann,0,8);
a := 44900622571906223220142000/28037329265871159129149760
a;
44900622571906223220142000/28037329265871159129149760
```

```
on float;
a;
```

1.6014586  $\neq$  1.6014697/0.99999999, car on évalue ici le nombre tout à la fin, au lieu de faire tous les calculs avec la précision  $10^{-8}$ .

La diagonale principale de l'E-algorithme converge plus vite vers la limite de  $\sum_{n>0} 1/n^2$  que la série initiale (colonne de gauche)

Exemple geom

```
colonne(geom,1,10);
geom
```

7/4	2
15/8	2
31/16	2
63/32	2
127/64	2
255/128	2
511/256	2
1023/512	2
2047/1024	2
4095/2048	2
8191/4096	2

forme algébrique

```
on float;
colonne(geom,1,10);
geom
```

1.75	2.0
1.875	2.0
1.9375	2.0
1.96875	2.0
1.984375	2.0
1.9921875	2.0
1.9960938	2.0
1.9980469	2.0
1.9990234	2.0
1.9995117	2.0
1.9997559	2.0

forme évaluée

on a: VREN  $\epsilon_2^{(R)} = 2 = \sum 1$

**Exemple geomdouble**

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

off float;  
colonne(geomdouble, 2, 10);  
geomdouble

575/1296	1/2
3661/7776	1/2
22631/46656	1/2
137845/279936	1/2
833375/1679616	1/2
5019421/10077696	1/2
30174551/60466176	1/2
181222405/362797056	1/2
1087861775/2176782336	1/2
6528756781/13060694016	1/2
39177307271/78364164096	1/2

on float; forme évaluée  
colonne(geomdouble, 2, 10);  
geomdouble

0.44367282	0.49999994
0.4708076/0.99999999	0.49999996/0.99999999
0.48506085	0.49999991
0.49241609/0.99999999	0.49999996/0.99999999
0.49616993	0.49999994
0.49807225/0.99999999	0.49999994/0.99999999
0.49903187	0.49999992
0.4995145/0.99999999	0.49999991/0.99999999
0.49975675	0.49999993
0.49987819/0.99999999	0.49999992/0.99999999
←→	

VRÉN  $E_4^{(k)} = \frac{1}{2}$

\*\*\*\* zero denominator  
l'algorithme s'arrête par manque de précision.

**Exemple g**

$$1 + \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

colonne(g, 1, 10);  
g

5/4	1
9/8	1
17/16	1
33/32	1
65/64	1
129/128	1
257/256	1
513/512	1
1025/1024	1
2049/2048	1
4097/4096	1

VRÉN  
 $E_2^{(k)} = 1$

on float;  
colonne(g, 1, 10);  
g

1.25	1.0
1.125	1.0
1.0625	1.0
1.03125	1.0
1.015625	1.0
1.0078125	1.0
1.0039063	1.0
1.0019531	1.0
1.0009766	1.0
1.0004883	1.0
1.0002441	1.0

forme évaluée

Exemple pi

diago(pi,0,6);  
pi

4 4

52/15 19/6

1052/315 1744/555

147916/45045 10116/3220

2490548/765765 9259456604160/2947375960200

47028692/14549535 1032984745170933844754132480/

328809254630259493781132300

5385020324/1673196525 36951735500163312644676986998934863336371466240/

11762102719203066914929164080717168533386866400

on float;  
diago(pi,0,6);  
pi

4 4

3.4666666/0.9999999 3.1666667

3.3396825 3.1423423

3.2837384 3.1416148/0.9999999

3.2523658 3.1415931

\*\*\*\*\* zero denominator

off float;  
a:=epsil(pi,0,8);  
a := 9259456604160/2947375960200

on float;  
a;  
3.1415933

off float;  
r:=epsil(pi,0,10);  
a := 1032984745170933844754132480/328809254630259493781132800

on float;  
a;  
3.1415927

$$4 \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \rightarrow \pi$$

diagonale principale

$$E_{2k}^{(0)} : 0 \leq k \leq 6$$

forme évaluée

←  $E_8^{(0)}$  n'est pas calculé, par manque de précision (alors qu'il est défini : voir tableau ci-dessus) ou encore :

$$a := E_8^{(0)}$$

l'évaluation de  $E_8^{(0)}$  est : 3.1415933

La diagonale principale converge plus



Exemple l3

```
diago(l3,0,7);
l3
```

```
0 0
0 1
(- 4)/3 12/11
(- 56)/10 5152/4692
(- 1352)/70 1283964380/1168759812
(- 4084)/63 197635301600/179895903000
(- 609776)/2772 89431395532031691317379651973682584000/
81403980647436559395235053437087070000
(- 1956520)/2574 47128881416158156585527455976/
42898557194056353378865560130
```

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n}$  diverge  
mais la diagonale principale  
de l' E - algorithme converge  
vers Log 3.

ici,  $E_{2k}^{(0)} : 0 \leq k \leq 7$

$\leftarrow E_{14}^{(0)}$

```
on float;
diago(l3,0,7);
l3
```

```
0 0
0 1
- 1.3333333 1.0909091
(- 5.6000001)/0.9999999 1.0980392
- 19.314286 1.0985702/0.9999999
- 64.825397 1.0986091/0.9999999
- 219.97691 1.0986117
```

```
off float;
a:=epsil(l3,0,10);
a := 197635301600/179895903000
```

```
on float;
a;
1.0986092
```

$\leftarrow E_{10}^{(0)}$

\*\*\*\*\* zero denominator

$\leftarrow E_{14}^{(0)}$  n'est pas calculé par  
manque de précision  
(alors qu'il est défini)

```
off float;
a:=epsil(l3,0,14);
a := 47128881416158156585527455976/42898557194056353378865560130
```

$a := E_{14}^{(0)}$

```
on float;
a;
1.0986123/0.9999999 : évaluation de  $E_{14}^{(0)}$ 
```

On peut aussi appliquer epsilonuxiel aux sommes partielles de séries entières

2) E-algorithme appliqué à des séries de Mac-Laurin

fonctions.donnees

```

operator fac;
Let fac(0)=1;
for all n such that n>0 Let fac(n)=n*fac(n-1);

operator ex;
%sommes partielles de e**x;
Let ex(0)=1;
for all n such that n>0 Let ex(n)=ex(n-1)+(x**n)/fac(n);

operator nex;
%sommes partielles de e**(-x);
Let nex(0)=1;
for all n such that n>0 Let nex(n)=nex(n-1)+((-x)**n)/fac(n);

operator tlog;
%sommes partielles de Log(1+x);
Let tlog(0)=0;
for all n such that n>0 Let tlog(n)=tlog(n-1)+((-1)**(n+1))*(x**n)/n;

operator frac1;
%sommes partielles de 1/(1-x);
Let frac1(0)=1;
for all n such that n>0 Let frac1(n)=frac1(n-1)+x**n;

operator frac2;
%sommes partielles de 1/(1-2*x)+1/(1-x);
Let frac2(0)=2;
for all n such that n>0 Let frac2(n)=frac2(n-1)+(1+2**n)*(x**n);

end;

```

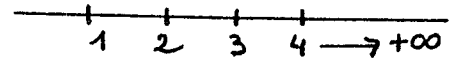
ex : fonction  $e^x$

- [0/0] = 1
- [1/1] =  $(-x-2) / (x-2)$
- [2/2] =  $(x^2+6x+12) / (x^2-6x+12)$
- [3/3] =  $(-x^3-12x^2-60x-120) / (x^3-12x^2+60x-120)$
- [4/4] =  $(x^4+20x^3+180x^2+840x+1680) / (x^4-20x^3+180x^2-840x+1680)$
- [1/0] =  $x+1$
- [2/1] =  $(-x^2-4x-6) / 2(x-3)$
- [3/2] =  $(x^3+9x^2+36x+60) / 3(x^2-8x+20)$

$$[3/1] = (-x^3 - 6x^2 - 18x - 24) / 6(x-4)$$

$$[4/3] = (-x^4 - 16x^3 - 120x^2 - 480x - 840) / 4(x^3 - 15x^2 + 90x - 210)$$

Les singularités des  $[L/1]_e x$  sont :  $L+1$



$$[3/3] = (-x^4 - 7x^3 + 180x^2 + 600x + 600) / (x^4 - 17x^3 + 120x^2 - 420x + 600)$$

$$[4/4] = \frac{(x^7 + x^6 - 74x^5 - 354x^4 + 2520x^3 + 21000x^2 - 35280x - 493920)}{(x^7 - 39x^6 + 686x^5 - 7074x^4 + 46200x^3 - 190680x^2 + 458640x - 493920)}$$

$$[3/2] = (2(x^4 + 5x^3 - 84x^2 - 240x - 240)) / (6(x^3 - 12x^2 + 52x - 80))$$

$$[4/3] = \frac{(6(-x^9 + 9x^8 + 26x^7 - 234x^6 - 1780x^5 + 5160x^4 + 62640x^3 - 109200x^2 - 1144800x + 3024000))}{(24(x^8 - 40x^7 + 719x^6 - 7580x^5 + 51180x^4 - 226140x^3 + 636900x^2 - 1042200x + 756000))}$$

**me<sub>x</sub> : fonction  $e^{-x}$**

c'est la fonction réciproque de  $e^x$  :

$$1/[L/M]_{e^{-x}} = [M/L]_{e^x}$$

$$[0/0] = 1$$

$$[1/1] = (-x+2) / (x+2)$$

$$[2/2] = (x^2 - 6x + 12) / (x^2 + 6x + 12)$$

$$[3/3] = (-x^3 + 12x^2 - 60x + 120) / (x^3 + 12x^2 + 60x + 120)$$

**tl<sub>og</sub> : fonction  $\text{Log}(1+x)$**

$$[0/0] = 0$$

$$[1/1] = 2x / (x+2)$$

$$[2/2] = 3x(x+2) / (x^2 + 6x + 6)$$

$$[3/3] = x(11x^2 + 60x + 60) / 3(x^3 + 12x^2 + 30x + 20)$$

$$[4/4] = 5x(5x^3 + 52x^2 + 126x + 84) / 6(x^4 + 20x^3 + 90x^2 + 140x + 70)$$

$$[2/1] = x(x+6) / 2(2x+3)$$

$$[3/1] = x(-x^2 + 6x + 24) / 6(3x+4)$$

$$[4/1] = x(x^3 - 4x^2 + 18x + 60) / 12(4x+5)$$

$$[5/1] = x(-3x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 120x + 360) / 60(5x+6)$$

$$[6/1] = x(2x^5 - 6x^4 + 15x^3 - 40x^2 + 150x + 420) / 60(6x+7)$$

$$[7/1] = x(-10x^6 + 28x^5 - 63x^4 + 140x^3 - 350x^2 + 1260x + 3360) / 420(7x+8)$$

$$[8/1] = x(15x^7 - 40x^6 + 84x^5 - 168x^4 + 350x^3 - 840x^2 + 2940x + 7560) / 840(8x+9)$$

Les singularités des  $[L/1] \text{Log}(1+x)$  sont :  $-\frac{(L+1)}{L} \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} -1$

$$[3/2] = x(x^2 + 21x + 30) / 3(3x^2 + 12x + 10)$$

$$[4/2] = x(-x^3 + 12x^2 + 150x + 180) / 12(6x^2 + 20x + 15)$$

$$[5/2] = x(2x^4 - 15x^3 + 120x^2 + 1170x + 1260) / 60(10x^2 + 30x + 15)$$

$$[6/2] = x(-x^5 + 6x^4 - 30x^3 + 200x^2 + 1680x + 1680) / 60(15x^2 + 42x + 28)$$

$$[7/2] = x(4x^6 - 21x^5 + 84x^4 - 350x^3 + 2100x^2 + 15960x + 15120) / 420(21x^2 + 56x + 36)$$

$$[3/2] = (2x^3 + 3x^2 + 67x + 120) / (6x^3 + 48x^2 + 78x + 40)$$

$$[4/2] =$$

$$(x^4 - 4x^3 + 43x^2 + 660x + 1470) / (12x^3 + 110x^2 + 160x + 75)$$

**frac 1 : fraction rationnelle  $1/(1-x)$**

$$\left. \begin{aligned} [1/1] &= -1/(x-1) \\ [2/1] &= -1/(x-1) \\ [3/1] &= -1/(x-1) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{la colonne des } E_2^{(n)} \\ \text{donne exactement} \\ \text{la fraction (dénomina-} \\ \text{teur de } d^0 = 1) \end{array}$$

**frac 2 : fraction rationnelle  $1/(1-x) + 1/(1-2x)$**

$$\left. \begin{aligned} [2/2] &= (-3x+2)/(2x^2-3x+1) \\ [3/2] &= (-3x+2)/(2x^2-3x+1) \\ [4/2] &= (-3x+2)/(2x^2-3x+1) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{la colonne des } E_4^{(n)} \\ \text{donne la fraction} \\ \text{(dénominateur de} \\ d^0 = 2) \end{array}$$

### 3) E-algorithme et approximants de Padé "homogènes"

a) On se donne une série double  $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{ij} x^i y^j$  par le tableau à double entrée des  $a(i,j)$ .

Par exemple,  $\frac{1}{1-(x+2y)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (x+2y)^k = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{2^j (i+j)!}{i! j!} x^i y^j$

```
operator tab5;
%developpement de 1/(1-x-2*y);
for all i,j Let tab5(i,j)=(2**j)*fac(i+j)/(fac(i)*fac(j));
```

b) **Cas particulier : le  $\Delta^2$  d'Aitken**

On l'applique à la suite des sommes partielles de la série :

$$\sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j = \underbrace{\text{tritronqué}}_{\text{aitken}}(a, n) = \sum_{0 \leq k \leq n} \underbrace{\text{homogène}}(a, k)$$

```
procedure homogene(a,k);
for i=0:k sum a(i,k-i)*(x**i)*(y**(k-i));

operator tritronque;
%sommes partielles triangulaires de la serie double associee a a;
for all a Let tritronque(a,-1)=0;
for all a,n such that n>-1 Let tritronque(a,n)
    =tritronque(a,n-1)+homogene(a,n);
```

```

procédure delta(a,n);
%suite obtenue par le delta? d'Aitken à partir de a;
%le dénominateur est de degré n+1;
%attention: les parties homogènes de degré n et n+1 ne doivent pas être nul
en même temps;
tritronque(a,n-1)+((homogene(a,n))**2)/(homogene(a,n)-homogene(a,n+1));

procédure listedelta(a,n);
%retourne les termes d'ordre 0 à n de la suite ainsi construite;
begin
write a;
write "le début du développement est:";
write tritronque(a,n+1),";";
for k=0:n do write "delta(",a,",",k,")=",delta(a,k);
end;
end;
end;

```

Appliquons le  $\Delta^2$  d'Aitken au développement de  $1/(1-x-2y)$ ;

tab5

le début du développement est:

$$\begin{aligned}
 & x^7 + 14x^6y + x^6 + 84x^5y^2 + 12x^5y + x^5 + 280x^4y^3 + 60x^4y^2 + 10x^4 + \\
 & y^4 + x^4 + 560x^3y^4 + 160x^3y^3 + 40x^3y^2 + 8x^3y + x^3 + 672x^2y^5 + 240x^2y^4 + \\
 & 30x^2y^3 + 24x^2y^2 + 6x^2y + x^2 + 448xxy^6 + 192xxy^5 + 60xxy^4 + \\
 & + 32xxy^3 + 12xxy^2 + 4xxy + x + 128y^7 + 64y^6 + 32y^5 + 16y^4 + 8y^3 + \\
 & 4y^2 + 2y + 1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{delta}(\text{tab5},0) &= (-1)/(x + 2y - 1) \\
 \text{delta}(\text{tab5},1) &= (-1)/(x + 2y - 1) \\
 \text{delta}(\text{tab5},2) &= (-1)/(x + 2y - 1) \\
 \text{delta}(\text{tab5},3) &= (-1)/(x + 2y - 1) \\
 \text{delta}(\text{tab5},4) &= (-1)/(x + 2y - 1) \\
 \text{delta}(\text{tab5},5) &= (-1)/(x + 2y - 1) \\
 \text{delta}(\text{tab5},6) &= (-1)/(x + 2y - 1)
 \end{aligned}$$

la procédure donne  
exactement la fraction

Cas de  $e^{xy}/(1-x-y)$ , dont les parties homogènes de degré  $n$  s'écrivent différemment suivant que  $n$  est pair ou impair.

```

operator c;
%coefficients du binome;
for all i,j such that i<=j Let c(i,j)=fac(j)/(fac(i)*fac(j-i));

operator tab6;
%developpement de e**xy/(1-x-y);
for all i,j such that i<=j and fixp((i+j)/2) Let tab6(i,j)=
    (for k=0:i sum c(i-k,2*((i+j)/2)-k)/fac(k));
for all i,j such that i<=j and fixp((i+j-1)/2) Let tab6(i,j)=
    (for k=0:i sum c(i-k,2*((i+j-1)/2)-k+1)/fac(k));
for all i,j such that i>j Let tab6(i,j)=tab6(j,i);
end;
    
```

commentaire:  $e^{xy}/(1-x-y) = \sum_{(i,j)} a_{i,j} x^i y^j$  :  $a_{i,j} = a_{j,i}$

• pour  $i \leq p$   $a_{2p-i,i} = \frac{C_{2p}^i}{0!} + \frac{C_{2(p-1)}^{i-1}}{1!} + \frac{C_{2(p-2)}^{i-2}}{2!} + \dots + \frac{C_{2(p-i)}^0}{i!}$

• pour  $i \leq p$   $a_{2p+1-i,i} = \frac{C_{2p+1}^i}{0!} + \frac{C_{2(p-1)+1}^{i-1}}{1!} + \frac{C_{2(p-2)+1}^{i-2}}{2!} + \dots + \frac{C_{2(p-i)+1}^0}{i!}$

tab6

Le debut du developpement est:

$$\begin{aligned}
 & (6^7 x^7 + 48^6 x^6 y + 6^6 x^6 + 150^5 x^5 y^2 + 42^5 x^5 y^3 + 6^5 x^5 + 280^4 x^4 y^3 + 117^4 x^4 y^4 \\
 & + 36^4 x^4 y + 6^4 x^4 + 280^3 x^3 y^4 + 163^3 x^3 y^3 + 81^3 x^3 y^2 + 30^3 x^3 y + 6^3 x^3 + \\
 & 150^2 x^2 y^5 + 117^2 x^2 y^4 + 31^2 x^2 y^3 + 51^2 x^2 y^2 + 24^2 x^2 y + 6^2 x^2 + 48^6 x^6 y + \\
 & 42^5 x^5 y + 36^4 x^4 y + 30^3 x^3 y + 24^2 x^2 y + 13 x y + 6 x + 6 y + 6 y + 6 y + 6 y \\
 & + 6 y + 6 y + 6 y + 6 y + 6 y) / 6;
 \end{aligned}$$

delta(tab6,0) = (-1) / (x + y - 1)

delta(tab6,1) = (x + y - x - y) / (x^2 + 3xy - x + y - y)

delta(tab6,2) = (- (x + y + 1)) / (x + y - 1)

On liste ici les premiers termes obtenus par le  $\Delta^2$  d'Aitken appliqué au développement de  $e^{xy}/(1-x-y) \rightarrow \text{tab 6}$ .

$$\text{delta}(\text{tab6},3) = (x^4 y^2 - 2x^4 xy + 3x^3 y^2 - 7x^3 xy^2 - 2x^2 y^3 + x^2 y^4 - 7x^2 xy^3 + x^2 y^4 - 3x^2 xy^2 - 2x^2 xy^2 - 3x^2 xy^2 - 2xy^5) / (2x^4 + 10x^3 y - 2x^2 y^2 + 17x^2 xy - 3x^2 xy + 10x^2 xy - 3x^2 xy^2 + 2xy^4 - 2xy^3)$$

$$\text{delta}(\text{tab6},4) = (-x^2 y^2 - 2x^2 xy - 2) / (2 + (x + y - 1))$$

$$\text{delta}(\text{tab6},5) = (2x^6 y^3 - 6x^6 xy^2 + 17x^5 y^4 - 34x^5 xy^3 - 12x^4 y^5 + 17x^4 xy^4 - 73x^4 xy^4 + 2x^5 xy^3 - 72x^5 xy^2 - 12x^5 y^4 + 10x^4 y^5 - 73x^4 xy^4 + 5x^4 xy^4 - 160x^4 xy^3 - 72x^4 xy^2 + 2x^3 y^5 - 34x^3 xy^4 + 2x^3 xy^4 - 151x^3 xy^4 + 2x^3 xy^3 - 162x^3 xy^2 - 6x^2 y^5 - 72x^2 xy^4 - 162x^2 xy^3 - 12x^2 xy^2 - 72x^2 xy^2 - 12xy^5) / (2 + (6x^5 + 42x^4 xy - 6x^4 y^2 + 117x^4 xy - 36x^4 xy + 163x^3 xy - 31x^3 xy^2 + 117x^3 xy - 31x^2 xy^3 + 42x^2 xy^2 - 56x^2 xy^2 + 6xy^5 - 6xy^5))$$

$$\text{delta}(\text{tab6},6) = (-x^3 y^3 - 3x^2 y^2 - 5x^2 y - 5) / (5 + (x + y - 1))$$

Les termes d'indices pairs obtenus par le  $\Delta^2$  d'Aitken reflètent exactement les singularités de tab6, puisque (après réduction de la fraction grâce à l'option "ongcd"), le dénominateur est  $x+y-1$

$$\text{delta}(\text{tab6},8);$$

$$(x^4 y^4 - 4x^3 y^3 - 12x^2 y^2 - 24x^2 xy - 24) / (24 + (x + y - 1))$$

$$\text{delta}(\text{tab6},10);$$

$$(x^5 y^5 - 5x^4 y^4 - 20x^3 y^3 - 60x^2 y^2 - 120x^2 xy - 120) / (120 + (x + y - 1))$$



```
h7:=den(delta(tab6,7));
```

$$h7 := 6 \cdot (24x^8 + 216x^7y - 24x^7 + 828x^6y^2 - 192x^6y + 1756x^5y^3 - 636x^5y^2 + 2241x^4y^4 - 1120x^4y^3 + 1756x^3y^5 - 1120x^3y^4 + 828x^2y^6 - 636x^2y^5 + 216xy^7 - 192xy^6 + 24y^8 - 24y^7)$$

```
h9:=den(delta(tab6,9));
```

$$h9 := 24 \cdot (120x^{10} + 1320x^9y - 120x^9 + 6420x^8y^2 - 1200x^8y + 18140x^7y^3 - 5220x^7y^2 + 32905x^6y^4 - 12920x^6y^3 + 39971x^5y^5 - 19985x^5y^4 + 32905x^4y^6 - 19985x^4y^5 + 18140x^3y^7 - 12920x^3y^6 + 6420x^2y^8 - 5220x^2y^7 + 1320xy^9 - 1200xy^8 + 120y^{10} - 120y^9)$$

*Les fractions d'indice impair ne se simplifient pas aussi bien; cependant, on peut étudier asymptotiquement les dénominateurs.*

c) E - algorithme

epsilon

```

procure homogene(a,k);
for i=0:k sum a(i,k-i)*(x**i)*(y**(k-i));

operator tritronque;
%sommes partielles triangulaires de la serie double associee a a;
for all a Let tritronque(a,-1)=0;
for all a,n such that n>-1 Let tritronque(a,n)
    =tritronque(a,n-1)+homogene(a,n);

operator eps;
%seules les colonnes paires servent;
%schema triangulaire,m est l'indice de diagonale,k l'indice de
colonne;
%si aucun denominateur ne s'est annule, eps(a,m,2*k)=[m+k/k] de a;

%initialisation;
for all a,n Let eps(a,m,-1)=0;
for all a,m Let eps(a,m,0)=tritronque(a,m);

%regle;
for all a,m,k such that k>0 Let eps(a,m,k)=eps(a,m+1,k-2)
-1/(eps(a,m+1,k-1)-eps(a,m,k-1));

procure diagonalepade(a,n);
%retourne les approximants de Pade [k/k] pour k variant de 0 a n;

begin
write a;
write "le debut du developpement est:";
write tritronque(a,2*n);
for k=0:n do write "["k,"/"k,"]=",eps(a,0,2*k);
end;

```

```

procédure colonnepade(a,k,n);
%retourne les approximants le Pade [i+k/k] pour i variant de 0 a n

begin
write a;
write "le debut du developpement est:";
write tritronque(a,2*k+n);
for i=0:n do write "[",i+k,"/",k,"]=",eps(1,i,2*k);
end;

end;

```

On peut lister au choix les premiers termes de la colonne d'indice  $2k$  (colonnepade) ou ceux de la diagonale principale (diagonalepade)

Exemple :  $1/(1-x) + 1/(1-y)$

```

operator tab0;
%developpement de 1/(1-x)+1/(1-y);
Let tab0(0,0)=2;
for all i such that i>0 Let tab0(i,0)=1;
for all j such that j>0 Let tab0(0,j)=1;
for all i,j such that i+j>0 Let tab0(i,j)=0;
le debut du developpement est:

```

$$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 2$$

$$[2/2] = (-x - y + 2) / (x^2 + y^2 - x - y + 1)$$

$$[3/2] = (-x - y + 2) / (x^2 + y^2 - x - y + 1)$$

$$[4/2] = (-x - y + 2) / (x^2 + y^2 - x - y + 1)$$

$$[5/2] = (-x - y + 2) / (x^2 + y^2 - x - y + 1)$$

la fraction rationnelle ayant un dénominateur de degré 2, on obtient la fraction dans la colonne d'indice 4 :  $E_4^{(n)}$

$$[1/1] = (x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y) / (x^2 - x + y^2 - y)$$

$$[2/1] = (x^3 + y^3 + x^2 + y^2 - 2xy - x^2 + y^2 - 2x + x^2 + y^3 - x^2 + y^3 + y^3 - 2y) / (x^3 + y^3 - xy)$$

$$[3/1] = (x^4 + y^4 + x^3 + y^3 + x^2 + y^2 - 2xy - x^3 + y^3 - x^3 + y^3 - 2x^3 + x^2 + y^4 - x^3 + y^4 - x^3 + y^4 - 2y) / (x^4 - x^3 + y^4 - y^3)$$

Le degré 1 au dénominateur ne suffit pas pour retrouver la fraction

Exemple : fonction d'une seule variable  $\text{Log}(1+x)$ .

On retrouve les approximants de Padé usuels de cette fonction, où la singularité  $-1$  apparaît avec les pôles des  $[L/1]$  :  $-(L+1)/L$

```
operator tablog;  
%Developpement de Log(1+x);  
Let tablog(0,0)=0;  
for all i such that i>0 Let tablog(i,0)=(-1)**(i+1)/i;  
for all i,j such that j>0 Let tablog(i,j)=0;
```

le debut du developpement est:

$$(x * (-105x^7 + 120x^6 - 140x^5 + 168x^4 - 210x^3 + 280x^2 - 420x + 840)) / 840$$

$$[1/1] = (2x) / (x + 2)$$

$$[2/1] = (x(x + 6)) / (2(2x + 3))$$

$$[3/1] = (x(x^2 + 6x + 24)) / (6(3x + 4))$$

$$[4/1] = (x(x^3 - 4x^2 + 18x + 60)) / (12(4x + 5))$$

$$[5/1] = (x(x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 30x + 120x + 360)) / (60(5x + 6))$$

$$[6/1] = (x(2x^5 - 6x^4 + 15x^3 - 40x^2 + 150x + 420)) / (60(6x + 7))$$

$$[7/1] = (x(-10x^6 + 28x^5 - 63x^4 + 140x^3 - 350x^2 + 1260x + 3360)) / (420 * (7x + 8))$$

Exemple : fonction  $e^{x+y}$  du type  $f(x+y)$

```
operator tab3;
%Developpement de e^{x+y};
for all i,j Let tab3(i,j)=1/(fac(i)*fac(j));
```

Le  $\Delta^2$  d'Aitken appliqué à  $e^{x+y} \leftrightarrow \text{tab 3}$  donne :

$$\text{delta}(\text{tab3},0) = (-1) / (x + y - 1)$$

$$\text{delta}(\text{tab3},1) = (-x - y - 2) / (x + y - 2)$$

$$\text{delta}(\text{tab3},2) = (-x^2 - 2xy - 4x - y - 4y - 6) / (2 * (x + y - 3))$$

$$\text{delta}(\text{tab3},3) = (-x^3 - 3x^2y - 6x^2 - 3xy^2 - 12xy - 15x - y^2 - 6y - 13y - 24) / (6 * (x + y - 4))$$

$$\text{delta}(\text{tab3},4) = (-x^4 - 4x^3y - 3x^3 - 5x^2y^2 - 24x^2y - 35x^2 - 4x^3y - 24xy^2 - 72xy - 76x - y^4 - 8y^3 - 36y^2 - 96y - 120) / (24 * (x + y - 5))$$

$$\text{delta}(\text{tab3},5) = (-x^5 - 5x^4y - 10x^4 - 11x^3y^2 - 49x^3y - 69x^3 - 10x^4y^2 - 69x^2y^2 - 180x^2y - 249x^2 - 5x^3y^3 - 49x^2y^3 - 180x^2y^2 - 480x^2y - 600x - y^5 - 10y^4 - 60y^3 - 240y^2 - 600y - 720) / (120 * (x + y - 6))$$

$$\text{delta}(\text{tab3},6) = (-x^6 - 6x^5y - 12x^5 - 15x^4y^2 - 69x^4y - 99x^4 - 26x^5y^2 - 120x^3y^2 - 369x^3y - 499x^3 - 15x^4y^3 - 129x^3y^3 - 540x^3y^2 - 1440x^3y - 1809x^3 - 6x^4y^4 - 60x^3y^4 - 369x^3y^3 - 1440x^3y^2 - 3600x^3y - 4320x^3 - y^6 - 12y^5 - 90y^4 - 489y^3 - 1309y^2 - 4320y - 5040) / (720 * (x + y - 7))$$

Les fractions obtenues sont exactement celles de  $f$  par Padé 1 variable où on remplace cette variable par  $x+y$ .

$$[2/2] = (x^2 + 2xy + 6x + y^2 + 6y + 12) / (x^2 + 2xy - 6x + y^2 - 6y + 12)$$

$$[3/2] = (x^3 + 3x^2y + 2x^2 + 3xy^2 + 13xy + 36x + y^3 + 2y^2 + 36y + 60) / (3(x^2 + 2xy - 3x + y^2 - 3y + 2))$$

$$[4/2] = (x^4 + 4x^3y + 12x^3 + 5x^2y^2 + 36x^2y + 72x^2 + 4x^3y + 36x^3y + 144xy^2 + 240x^4 + y^4 + 12y^3 + 72y^2 + 240y + 360) / (12(x^2 + 2xy - 10x + y^2 - 10y + 3))$$

$$[3/3] = (-x^3 - 3x^2y - 12x^2 - 3xy^2 - 24xy - 60x - y^3 - 12y^2 - 60y - 12) / (x^3 + 3x^2y - 12x^2 + 3xy^2 - 24xy + 60x + y^3 - 12y^2 + 60y - 12)$$

$$[4/4] = (x^4 + 4x^3y + 20x^3 + 6x^2y^2 + 60x^2y + 180x^2 + 4x^3y + 60x^3y + 360xy^2 + 340x^4 + y^4 + 20y^3 + 180y^2 + 340y + 1680) / (x^4 + 4x^3y - 20x^3 + 6x^2y^2 - 60x^2y + 180x^2 + 4x^3y - 60x^3y + 360xy^2 - 340x^4 + y^4 - 20y^3 + 180y^2 - 340y + 1680)$$

(comparaison avec les approximants de Padé de  $e^x$  (2).)  
La substitution est possible, car  $x+y$  est un polynôme homogène de  $d^0 1$ .

De la même manière pour :

Exemple  $\text{Log}(1+x-y)$  du type  $f(x-y)$

```

operator tab4;
%developpement de Log(1+x-y);
Let tab4(0,0)=0;
for all i,j such that i+j>0 Let tab4(i,j)
    =((-1)**(i+1))*fac(i+j-1)/(fac(i)*fac(j));
    
```

Dans les approximants de Padé de  $\text{Log}(1+x)$ , il suffit de substituer  $x \cdot y$  à  $x$ .

En effet :

Le  $\Delta^2$  d'Aitken appliqué à  $\text{Log}(1+x \cdot y) \longleftrightarrow \text{tab4}$  donne :

$$\text{delta}(\text{tab4},0)=0$$

$$\text{delta}(\text{tab4},1)=\frac{2 \cdot (x - y)}{(x - y + 2)}$$

$$\text{delta}(\text{tab4},2)=\frac{x^2 - 2 \cdot x \cdot y + 6 \cdot x + y^2 - 6 \cdot y}{(2 \cdot (2 \cdot x^2 - 2 \cdot y + 6))}$$

$$\text{delta}(\text{tab4},3)=\frac{-x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 6 \cdot x^2 - 3 \cdot x \cdot y^2 - 12 \cdot x \cdot y + 24 \cdot x + y^3 + 6 \cdot y^2 - 24 \cdot y}{(3 \cdot (3 \cdot x^2 - 2 \cdot y + 4))}$$

$$\text{delta}(\text{tab4},4)=\frac{x^4 - 4 \cdot x^3 \cdot y - 4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 \cdot y^2 + 12 \cdot x^2 \cdot y + 14 \cdot x^2 - 4 \cdot x \cdot y^3 - 4 \cdot x \cdot y^2 - 35 \cdot x \cdot y + 69 \cdot x + y^4 + 4 \cdot y^3 + 13 \cdot y^2 - 69 \cdot y}{(12 \cdot (4 \cdot x^2 - 4 \cdot y + 5))}$$

$$\text{delta}(\text{tab4},5)=\frac{-5 \cdot x^5 + 15 \cdot x^4 \cdot y + 19 \cdot x^4 - 20 \cdot x^3 \cdot y^2 - 49 \cdot x^3 \cdot y - 30 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y^3 + 60 \cdot x^2 \cdot y^2 + 90 \cdot x^2 \cdot y + 120 \cdot x^2 - 15 \cdot x \cdot y^4 + 41 \cdot x \cdot y^5 - 4 \cdot x \cdot y^2 - 240 \cdot x \cdot y + 369 \cdot x + 3 \cdot y^5 + 19 \cdot y^4 + 59 \cdot y^3 + 120 \cdot y^2 - 359 \cdot y}{(60 \cdot (5 \cdot x - 5 \cdot y + 6))}$$

$$\text{delta}(\text{tab4},6)=\frac{2 \cdot x^6 - 12 \cdot x^5 \cdot y - 6 \cdot x^5 + 30 \cdot x^4 \cdot y^2 + 39 \cdot x^4 \cdot y + 15 \cdot x^4 - 49 \cdot x^3 \cdot y^3 - 60 \cdot x^3 \cdot y^2 - 61 \cdot x^3 \cdot y - 49 \cdot x^3 + 30 \cdot x^2 \cdot y^4 + 69 \cdot x^2 \cdot y^5 + 90 \cdot x^2 \cdot y^2 + 121 \cdot x^2 \cdot y + 150 \cdot x^2 - 12 \cdot x \cdot y^6 - 39 \cdot x \cdot y^4 - 66 \cdot x \cdot y^5 - 120 \cdot x \cdot y^2 - 399 \cdot x \cdot y + 429 \cdot x + 2 \cdot y^6 + 6 \cdot y^5 + 15 \cdot y^4 + 49 \cdot y^3 + 120 \cdot y^2}$$

En utilisant le développement:

$$\begin{aligned}
 & (-105x^8 + 840x^7y + 120x^7 - 2940x^6y^2 - 340x^6y - 140x^6 + 5880x^5y^3 \\
 & + 2520x^5y^2 + 840x^5y + 158x^5 - 7350x^4y^4 - 4200x^4y^3 - 2100x^4y^2 \\
 & - 840x^4y - 210x^4 + 5830x^3y^5 + 4200x^3y^4 + 2800x^3y^3 + 1680x^3y^2 \\
 & + 840x^3y + 280x^3 - 2940x^2y^6 - 2520x^2y^5 - 2100x^2y^4 - 1680x^2y^3 \\
 & - 1260x^2y^2 - 840x^2y - 420x^2 + 840x^7y + 840x^6y^6 + 840x^5y^5 + 840x^4y^4 \\
 & + 340x^3y^3 + 840x^2y^2 + 340x^2y + 840x - 105y^8 - 120y^7 - 140y^6 - \\
 & 158y^5 - 210y^4 - 230y^3 - 420y^2 - 340y) / 840
 \end{aligned}$$

on calcule:

$$[2/2] = (3 + (x^2 - 2xy + 2x + y^2 - 2y)) / (x^2 - 2xy + 6x + y^2 - 6y + 6)$$

$$\begin{aligned}
 [3/2] = & (x^3 - 3x^2y + 21x^2 + 3xy^2 - 42xy + 30x - y^3 + 21y^2 - 30y) / ( \\
 & * (3x^2 - 6xy + 12x + 3y^2 - 12y + 10) )
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [4/2] = & (-x^4 + 4x^3y + 12x^3 - 6x^2y^2 - 36x^2y + 150x^2 + 4xy^3 + 36xy^2 \\
 & y^2 - 300xy + 180x - y^4 - 12y^3 + 150y^2 - 180y) / (12x^2 - 12x \\
 & * y + 20x + 6y^2 - 20y + 15)
 \end{aligned}$$

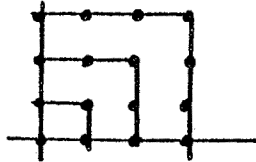
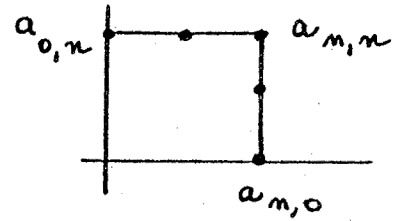
$$\begin{aligned}
 [3/3] = & (11x^3 - 33x^2y + 60x^2 + 33xy^2 - 120xy + 60x - 11y^3 + 60y^2 \\
 & - 60y) / (3x^3 - 3x^2y + 12x^2 + 3xy^2 - 24xy + 30x - y^3 + 12 \\
 & y^2 - 30y + 20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [4/4] = & (5 * (5x^4 - 20x^3y + 52x^3 + 30x^2y^2 - 156x^2y + 126x^2 - 20x^2y^3 \\
 & + 156xy^2 - 252xy + 84x + 5y^4 - 52y^3 + 126y^2 - 84y)) / (6 \\
 & (x^4 - 4x^3y + 20x^3 + 6x^2y^2 - 60x^2y + 90x^2 - 4xy^3 + 60xy^2 \\
 & - 20x^2 + 4x^2 - 3y^2)
 \end{aligned}$$

4) E-algorithme et approximants de Padé "carrés".

Dans le segment "epsilon", il suffit simplement de remplacer homogène (a,n) par parcar(a,n)

et tronqué (a,n) par cartronqué (a,n) :



epsilon car

```

operator abs;
for all a,n Let abs(a,n)=(for j=0:n sum a(n,j)*(x**n)*(y**j));

operator ord;
for all a,n such that n>0 Let ord(a,n)=(for i=0:n-1 sum a(i,n)*(x**i)*(y**n));

operator parcar;
for all a Let parcar(a,0)=abs(a,0);
for all a,n such that n>0 Let parcar(a,n)=abs(a,n)+ord(a,n);

operator cartronque;
for all a Let cartronque(a,0)=parcar(a,0);
for all a,n such that n>0 Let cartronque(a,n)=cartronque(a,n-1)+parcar(a,n);

operator epscar;
%seules les colonnes paires servent;
%schema triangulaire, m est l'indice de diagonale, k l'indice de
colonne;
%si aucun denominateur ne s'est annule, epscar(a,m,2*k)=[m+k/k] de a;

%initialisation;
for all a,m Let epscar(a,m,-1)=0;
for all a,m Let epscar(a,m,0)=cartronque(a,m);

%regle;
for all a,m,k such that k>0 Let epscar(a,m,k)=epscar(a,m+1,k-2)
-1/(epscar(a,m+1,k-1)-epscar(a,m,k-1));
    
```

avec ces changements, on rebaptise eps en epscar

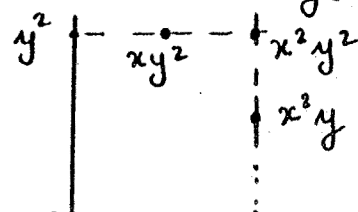
```
parcar(tab3,0);
```

```
parcar(tab3,1);
x+y + x + y
```

```
parcar(tab3,2);
```

$$(x^2 + y^2 + 2xy + 2x^2 + 2xy^2 + 2x^2y + 2xy^2 + 2xy^2) / 4$$

tab3  $\leftrightarrow$   $e^{x+y}$  du type  $f(x)g(y)$





Les premiers approximants "carrés" obtenus pour  $e^{x+y}$  :

Le début du développement est :

$$(x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 6x^2y + 6xy^2 + 3x^3 + 3y^3 + 9x^2y + 9xy^2 + 18x^2y + 18xy^2 + 6x^3y + 6xy^3 + 18x^2y + 18xy^2 + 36x^2y + 36xy^2 + 36x^3 + 36y^3 + 5xy^2 + 18xy^2 + 36xy^2 + 36) / 36$$

[0/0]=1

$$[1/1] = (-3x^2y - 6xy^2 - 2x^2 - 6x^2y - 12xy^2 - 4x^2 - 2y^2 - 4y) / (x^2y + 2xy^2 + 2x^2 + 2xy^2 - 4xy^2 - 4x^2 + 2y^2 - 4y)$$

$$[2/1] = (-5x^4y - 20x^4y - 36x^4y - 24x^4y - 12x^4 - 27x^3y - 80x^3y - 144x^3y - 96x^3y - 48x^3 - 36x^2y - 144x^2y - 252x^2y - 144x^2y - 72x^2 - 24x^4y - 96x^3y - 144x^2y - 12y^4 - 48y^3 - 72y^2) / (4(x^4y + 3x^3y + 6x^2y + 6x^3 + 3x^2y - 9x^2y - 18x^2y - 18xy^2 + 6x^3y - 18x^2y + 6y^3 - 18xy^2))$$

5) qd. algorithme et approximants de Padé "homogènes".

a) Algorithme descendant : il donne un moyen récursif d'évaluer successivement les convergents de la fraction continue  $K(\frac{c_n}{d_n})$ , grâce à la relation de récurrence à deux termes

entre numérateurs et dénominateurs des réduites de ces fractions :

$$\begin{pmatrix} num(c, d, i) \\ den(c, d, i) \end{pmatrix} = c(i) \begin{pmatrix} num(c, d, i-2) \\ den(c, d, i-2) \end{pmatrix} + d(i) \begin{pmatrix} num(c, d, i-1) \\ den(c, d, i-1) \end{pmatrix}$$

```

operator Num;
% retourne le Numerateur du ieme convergent de la fraction continue
K(c(n)/d(n)), ou c et d sont deux suites ;

% initialisation ;
for all c,d Let Num(c,d,0)=c(0);
for all c,d Let Num(c,d,1)=c(0)*d(1);
% regle ;
for all c,d,i such that i>1 Let Num(c,d,i)=
    c(i)*Num(c,d,i-2) + d(i)*Num(c,d,i-1);

```

```

operator Den;
% retourne le Denominateur du ieme convergent de la fraction continue
K(c(n)/d(n)) ;

% initialisation ;
for all c,d Let Den(c,d,0)=d(0);
for all c,d Let Den(c,d,1)=c(1)+d(0)*d(1);
% regle ;
for all c,d,i such that i>1 Let Den(c,d,i)=
    c(i)*Den(c,d,i-2) + d(i)*Den(c,d,i-1);

```

```

operator fraction;
% retourne le ieme convergent de la fraction continue K(c(n)/d(n)) ;
for all c,d,i such that i>=0 Let fraction(c,d,i)= Num(c,d,i)/Den(c,d,i)

```

```

procedure desres(c,d,n);
begin
for i=0:n do write fraction(c,d,i);
end;
end;

```

b) Tables qd de certaines séries entières

qd.algorithme

```

operator parite;
% fonction qui vaut 1 si m est pair, 0 sinon;
for all m such that fixp(m/2) Let parite(m)=1;
for all m such that fixp((m-1)/2) Let parite(m)=0;

```

```

operator imparite;
% fonction qui vaut 1 si m est impair, 0 sinon;
for all m such that fixp(m/2) Let imparite(m)=0;
for all m such that fixp((m-1)/2) Let imparite(m)=1;

```

```

operator qd;
% quantites obtenues par le qd-algorithme quand on l'applique a une
suite c(n), qui ne s'annule pas;
% m est l'indice de colonne, n est l'indice de diagonale;

```

```

% initialisation;
for all c,n such that n>0 Let qd(c,0,n)=0;
% la premiere colonne est formee de zeros;
for all c,n such that n>=0 Let qd(c,1,n)=c(n+1)/c(n);

```

```

% regles du losange;
for all c,m,n such that m>1 and n>=0 Let qd(c,m,n)
= (qd(c,m-2,n+1) + qd(c,m-1,n+1) - qd(c,m-1,n))*parite(m)
+ (qd(c,m-2,n+1) + qd(c,m-1,n+1) / qd(c,m-1,n))*imparite(m);

```

```

% presentation des resultats sous la forme habituelle;

```

```

operator q;

```

```

operator e;
% termes des colonnes d'indice pair;
for all c,p,n such that p>0 and n>=0 Let e(c,p,n)=qd(c,2*p,n);

procedure colqd(c,m,k);
% sortie du tableau colonne par colonne;
% m est l'indice de colonne, l'indice de diagonale varie
de 0 a k;

begin
for n=0:k do write qd(c,m,n);
end;

procedure diaqd(c,k,n);
% sortie de la diagonale numero n;
% l'indice de colonne varie de 1 a k;

begin
for m=1:k do write qd(c,m,n);
end;

```

fraction continue. serie → escalier dans la table de Padé de  $\sum_{m \in \mathbb{N}} c(m) x^m$

```

% pour utiliser ce fichier, il faut charger au préalable les
fichiers qdalgorithm et algorithmedes ;

% c est la liste des coefficients d'une serie entiere, les
exemples sont choisis dans le fichier coeff.series ;

% dans un premier temps, on donne les coefficients des fractions
continues baties sur la table qd de la serie ;
% n est l'indice de diagonale ;

operator alphaqdserie;
for all c,n such that n>=0 Let alphaqdserie(c,0,n)=c(n)*(x**n);
for all c,i,n such that i>0 and n>=0 Let alphaqdserie(c,i,n)
= -qd(c,i,n)*x;

operator betaqdserie;
for all c,i,n such that i>=0 and n>=0 Let betaqdserie(c,i,n)=1;

operator beta;
for all i such that i>=0 Let beta(i)=1;

procedure fractionserie(c,n,k);
% on utilise la diagonale numero n de la table qd de la
serie, ce qui permet de construire dans sa table de Padé l'escalier
[n/0],[n/1],[n+1/1],[n+1/2],[n+2/2]... ;

begin
if n=0 then s:=0 else
s:=(for i=0:n-1 sum c(i)*(x**i));

operator alpha;
for all i such that i>=0 Let alpha(i)=alphaqdserie(c,i,n);

r:=s+ fraction(alpha,beta,k);

if fixp(k/2) then
write "[",n+k/2,"/",k/2,"]=",r
else

```



**Exemple :  $e^x$**

La fonction est donnée par les coefficients de son développement de Mac-Laurin

operator coex;  
for all n such that  $n \geq 0$  Let coex(n) = 1/fac(n);

0	1	(-1)/2			
0	1/2	(-1)/6	1/6	(-1)/6	
0	1/3	(-1)/12	1/6	(-1)/10	1/10
0	1/4	(-1)/20	3/20	(-1)/15	1/10
0	1/5	(-1)/30	4/30		
0	1/6				

$$e^x = \frac{1}{1} - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} - \dots + \frac{x^n}{2} \frac{x}{2n+1}$$

ou encore  $1 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \dots$

diagd(coex, 8, 0);

1<sup>ère</sup> diagonale ci-dessus

- 1
- (-1)/2
- 1/6
- (-1)/6
- 1/10
- (-1)/10
- 1/14
- (-1)/14

On a:

$$\begin{cases} q_k^{(m)} = \frac{m+k-1}{(m+2k-2)(m+2k-1)} \\ e_k^{(n)} = \frac{k}{(m+2k-1)(m+2k)} \end{cases}$$

**Exemple :  $e^{-x}$**

operator conex;  
for all n such that  $n \geq 0$  Let conex(n) = ((-1)\*\*n)/fac(n);

1)	1/2					
- 1)/2	1/6	(-1)/6	1/6			
- 1)/3	1/12	(-1)/6	1/10	(-1)/10		
- 1)/4	1/20	(-3)/20	1/15	(-1)/10	1/10	
- 1)/5	1/30	(-4)/30	1/21	(-4)/42	1/14	(-1)/14
- 1)/6	1/42	(-5)/42	1/28	(-5)/56	9/168	1/18
- 1)/7	1/56	(-6)/56	1/36	(-1)/12	1/24	(-1)/18
- 1)/8	1/72	(-7)/72	1/45	(-7)/90	1/30	(-2)/30
- 1)/9	1/90	(-8)/90				
- 1)/10						

$$\begin{cases} q_k^{(m)} = \frac{m+k-1}{(m+2k-2)(m+2k-1)} \\ e_k^{(n)} = \frac{k}{(n+2k-1)(n+2k)} \end{cases}$$

Exemple  $1/(1-x) + 1/(1-2x)$  fraction rationnelle

operator cofrac2;  
for all n such that n >= 0 Let cofrac2(n) = 1 + 2\*\*n;

3/2			
5/3	1/6	4/3	0
9/5	2/15	6/5	0
17/9	4/45	10/9	0
33/17	8/153	18/17	0
65/33	16/561	34/33	0
129/65	32/2145	66/65	0
257/129	64/8385	130/129	0
513/257	128/33153	258/257	0
1025/513	256/131841	514/513	0
2049/1025	512/525825		

← colonne de "0" dans la table qd.

for i=0:5 do write fractionserie(cofrac2,0,i);

[0/0]=2 [0/1]=( - 4)/(3\*x - 2)

[1/1]=(x - 6)/(5\*x - 3) [1/2]=( - 3\*x + 2)/(2\*x<sup>2</sup> - 3\*x + 1)

[2/2]=( - 3\*x + 2)/(2\*x<sup>2</sup> - 3\*x + 1)

on retrouve exactement la fraction

\*\*\*\*\* zero denominator

for i=0:5 do write fractionserie(cofrac2,1,i);

[1/0]=3\*x + 2 [1/1]=(x - 6)/(5\*x - 3)

[2/1]=(3\*(2\*x<sup>2</sup> + 3\*x - 10))/(3\*(9\*x - 5))

[2/2]=(3\*( - 3\*x + 2))/(3\*(2\*x<sup>2</sup> - 3\*x + 1))

[3/2]=(3\*( - 3\*x + 2))/(3\*(2\*x<sup>2</sup> - 3\*x + 1))

fraction initiale →

\*\*\*\*\* zero denominator

Exemple :  $n \geq 0 \quad n! x^n$  série de Stieljes

operator costiel;

for all n such that  $n \geq 0$  Let costiel(n)=fac(n);

$$n! = \int_0^{\infty} \tau^n e^{-\tau} d\tau$$

$q_1^{(0)}$   
↓

Table qd :

1	1																			
2	1	2																		
3	1	3	2																	
4	1	4	2	3																
5	1	5	2	5	3	4														
6	1	6	2	6	3	4	5													
7	1	7	2	7	3	4	5	6												
8	1	8	2	8	3	4	5	6	7											
9	1	9	2	9	3	4	5	6	7	8										
10	1	10																		
11																				

Deux escaliers obtenus dans la table de Padé :

```
for i=0:5 do write fractionserie(costiel,0,i);
```

[0/0]=1    [0/1]=( - 1)/(x - 1)

[1/1]=(x - 1)/(2\*x - 1)    [1/2]=(- 3\*x + 1)/(2\*x<sup>2</sup> - 4\*x + 1)

[2/2]=(2\*x<sup>2</sup> - 5\*x + 1)/(6\*x<sup>2</sup> - 6\*x + 1)

[2/3]=(- 11\*x<sup>2</sup> + 8\*x - 1)/(6\*x<sup>3</sup> - 18\*x<sup>2</sup> + 9\*x - 1)

```
for i=0:5 do write fractionserie(costiel,1,i);
```

[1/0]=x + 1    [1/1]=(x - 1)/(2\*x - 1)

[2/1]=(x<sup>2</sup> + 2\*x - 1)/(3\*x - 1)

[2/2]=(2\*x<sup>2</sup> - 5\*x + 1)/(6\*x<sup>2</sup> - 6\*x + 1)

[3/2]=(2\*x<sup>3</sup> + 6\*x<sup>2</sup> - 7\*x + 1)/(12\*x<sup>2</sup> - 8\*x + 1)

[3/3]=(6\*x<sup>3</sup> - 26\*x<sup>2</sup> + 11\*x - 1)/(24\*x<sup>3</sup> - 36\*x<sup>2</sup> + 12\*x - 1)





Exemple  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} x^n$

développement de  $1 + \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} \quad (|x| < 1)$  ;

→ fraction continue:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{\frac{1}{3}x}{1} + \frac{\frac{2^2}{3 \times 5}x}{1} + \frac{\frac{3^2}{5 \times 7}x}{1} + \frac{\frac{4^2}{7 \times 9}x}{1} + \dots$$

operator coserie2;  
 Let coserie2(0)=1;  
 for all n such that n>0 Let coserie2(n)={(-1)\*\*(n+1))/(2\*n-1);

- 1 ( = 1)/3 ( = 1)/15 ( = 16)/35
- ( = 3)/5 ( = 9)/35 ( = 80)/315
- ( = 5)/7 ( = 25)/63
- ( = 7)/9 ( = 4)/63

[0/0]=1 [0/1]=( - 1)/(x - 1)

[1/1]=(4\*x + 3)/(x + 3) [1/2]=(3\*( - 7\*x - 5))/(x<sup>2</sup> - 6\*x - 15)

[2/2]=(64\*x<sup>2</sup> + 195\*x + 105)/(3\*(3\*x<sup>2</sup> + 30\*x + 35))

[2/3]=(5\*( - 17\*x<sup>3</sup> - 42\*x<sup>2</sup> - 21))/ (x<sup>3</sup> - 15\*x<sup>2</sup> - 105\*x - 105)

[1/0]=x + 1 [1/1]=(4\*x + 3)/(x + 3)

[2/1]=(4\*x<sup>2</sup> + 24\*x + 15)/(3\*(3\*x + 5)) [2/2]=(7\*(64\*x<sup>2</sup> + 195\*x + 105))/(21\*(3\*x<sup>2</sup> + 30\*x + 35))

[3/2]=(5\*(64\*x<sup>3</sup> + 960\*x<sup>2</sup> + 960\*x + 1995\*x + 945))/(75\*(15\*x<sup>2</sup> + 70\*x + 63))

[3/3]=(5040\*(256\*x<sup>3</sup> + 1715\*x<sup>2</sup> + 2730\*x + 1155))/(25200\*(5\*x<sup>3</sup> + 105\*x<sup>2</sup> + 315\*x + 231))

### c) Suites en escalier d'approximants "homogènes"

algorithmes.hon obtenu à partir de qdalgorithme en modifiant les conditions initiales :

```
procedure hon(c,n);
for i:=0:n sum c(i,n-i)*(i+i)*(i+(n-i));

operator qhon;
% quantites obtenues par le qhon-algorithme quant on l'applique
% a une serie double;
% m est l'indice de colonne, i est l'indice de diagonale ;

% initialisation ;
for all c,n such that n>0 Let qhon(c,0,n)=1;
% la premiere colonne est forcee le zeros ;
for all c,n such that n>=1 Let qhon(c,1,n)=hon(c,n+1)/hon(c,n);

% regles du losange ;
for all c,m,n such that m>1 and n>=1 Let qhon(c,m,n)
= (qhon(c,m-2,n+1) + qhon(c,m-1,n+1) - qhon(c,m-1,n))*parite(m)
+ (qdhom(c,m-2,n+1) * qdhom(c,m-1,n+1) / qdhom(c,m-1,n))*imparite(m);
```

∴ De la même manière pour fraction continue.hom au lieu de fractioncontinue.serie fractioncontinue.hon

```
% pour utiliser ce fichier, il faut charger au prealable les
fichiers qdalgorithme.hon et algorithmedes ;

% c est la liste des coefficients d'une serie double, les
exemples sont choisis dans le fichier tableaux.donnees ;

% dans un premier temps, on donne les coefficients des fractions
continues baties sur la table qd de la serie ;
% n est l'indice de diagonale ;
```

```
operator alphaqdhom;
for all c,n such that n>=0 Let alphaqdhom(c,0,n)=hon(c,n);
for all c,i,n such that i>0 and n>=0 Let alphaqdhom(c,i,n)
= -qdhom(c,i,n);
```

```
operator betaqdhom;
for all c,i,n such that i>=0 and n>=0 Let betaqdhom(c,i,n)=1;
```

```
operator beta;
for all i such that i>=0 Let beta(i)=1;
```

```
procedure fractionhom(c,n,k);
% on utilise la diagonale numero n de la table qd de la
serie, ce qui permet de construire dans sa table de Pade l'escalier
[n/0],[n/1],[n+1/1],[n+1/2],[n+2/2],... ;

begin
if n=0 then s:=0 else
s:=(for i=0:n-1 sum hon(c,i));
```

```

for all i such that i >= 0 Let alpha(i) = alphaqdom(c, i, n);
r := s + fraction(alpha, beta, k);

if fixp(k/2) then
  write "[", n+k/2, " / ", k/2, "]" = "r"
else
  write "[", n+(k-1)/2, " / ", (k+1)/2, "]" = "r";
end;

end;

```

Exemples d'escaliers

dans la table des Padé "homogènes"

tab5  $\longleftrightarrow 1/(1-x-2y)$

```

on gcd;
for i=0:5 do write fractionhom(tab5, 0, i);

[0/1] = (-1)/(x + 2*y - 1) [1/1] = (-1)/(x + 2*y - 1)
**** zero denominator

```

tab0  $\longleftrightarrow 1/(1-x) + 1/(1-y)$

```

for i=0:6 do write fractionhom(tab0, 1, i);

[1/0] = x + y + 2 [1/1] = (x2 - 2*x*y - 2*x + y2 - 2*y)/(x2 - x + y - y)
[2/1] = (x3 + x2 - 2*x*y - x*y2 - 2*x + x*y + y2 - 2*y)/(x3 - x + y - y)
[3/2] = (x2 + y2 - 2*x*y)

[2/2] = (-x - y + 2)/(x*y - x - y + 1)
[3/2] = (-x - y + 2)/(x*y - x - y + 1)
**** zero denominator

```

```

[0/1] = (-4)/(x + y - 2)
[1/1] = (x2 - 2*x*y - 2*x + y2 - 2*y)/(x2 - x + y - y)
[1/2] = (-x - y + 2)/(x*y - x - y + 1)
[2/2] = (-x - y + 2)/(x*y - x - y + 1)
**** zero denominator

```

3.

Formule d'erreur dans  
l'interpolation rationnelle multipoints  
d'une fonction de la variable complexe

I Rappels sur l'interpolation d'Hermite d'une fonction holomorphe.

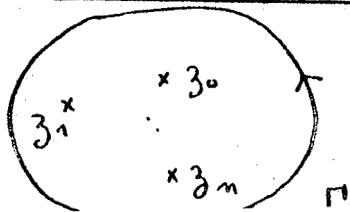
1) Notations

Les différences divisées de  $f$  relatives à des points d'interpolation  $z_i$  tous distincts sont définies par récurrence par:

$$\left\{ \begin{array}{l} f[z_0] = f(z_0) \\ f[z_0, z_1] = \frac{f[z_0] - f[z_1]}{z_0 - z_1} \\ \vdots \\ f[z_0, \dots, z_n, z_{n+1}] = \frac{f[z_0, \dots, z_{n-1}, z_n] - f[z_0, \dots, z_{n-1}, z_{n+1}]}{z_n - z_{n+1}} \end{array} \right.$$

Dans le cas d'une fonction  $f$  holomorphe de la variable complexe dans un domaine  $D$  contenant tous les points  $z_i$ , la formule d'Hermite donne l'expression intégrale suivante de ces différences divisées:

$$f[z_0, z_1, \dots, z_n] = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(v)}{\prod_{i=0}^n (v - z_i)} dv$$



$\Gamma$  contour fermé simple rectifiable  
entourant tous les points  $z_i$ ,  
 $\Gamma$  à distance finie, contenu dans  $D$ .

C'est bien sûr la formule de Cauchy qui permet d'établir ce résultat.

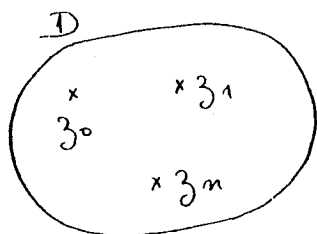
On constate que  $f[z_0, z_1, \dots, z_n]$  admet une limite quand les points  $z_i$  convergent tous vers un même point  $z$  dans  $D$ , qui est  $\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ ; ce qui

permet de définir  $f[z_0, \dots, z_n]$  même quand certains des points  $z_i$  sont confondus.

De plus,  $f[z_0, \dots, z_n]$  est une fonction symétrique des  $z_i$ .

## 2) Polynôme de Newton et expression intégrale du reste.

Étant donnée une fonction holomorphe dans un domaine  $D$  contenant tous les points  $z_i$ , il existe un unique polynôme  $P_n$  de degré  $\leq n$  tel que  $f$  coïncide avec  $P_n$  aux points  $z_0, z_1, \dots, z_n$ .



Si un point  $z$  apparaît  $m$  fois dans  $(z_0, z_1, \dots, z_n)$ , on impose que  $f$  coïncide avec  $P_n$  ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m-1$  au point  $z$ .

Ce polynôme écrit sous la forme:

$$P_n(z) = f[z_0] + f[z_0, z_1](z-z_0) + f[z_0, z_1, z_2](z-z_0)(z-z_1) + \dots + f[z_0, \dots, z_n] \prod_{i=0}^{n-1} (z-z_i)$$

s'appelle le polynôme de Newton de  $f$ .

Remarque: Dans le cas où tous les points d'interpolation sont distincts, c'est aussi le polynôme de Lagrange de  $f$ .

On développe  $P_n$  dans la base des polynômes :

$$\omega_{k+1}(z) = \prod_{i=0}^k (z - z_i) \quad , \quad k \geq -1$$

(avec la convention  $\omega_0(z) = \prod_{i=0}^{-1} (z - z_i) = 1$ ),  
car pour passer du polynôme de Newton de degré  $n$  à celui de degré  $n+1$ , lorsqu'on ajoute un nouveau point d'interpolation  $z_{n+1}$ , il suffit de calculer un seul nouveau coefficient, à savoir celui de  $\omega_{n+1}(z)$  :

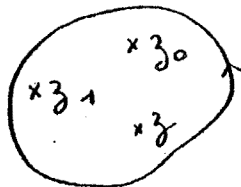
$$P_{n+1}(z) = P_n(z) + f[z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}] \prod_{i=0}^n (z - z_i)$$

Le reste  $R_n(z) = f(z) - P_n(z)$  s'écrit :

$$R_n(z) = f[z_0, z_1, \dots, z_n, z] \prod_{i=0}^n (z - z_i)$$

En appliquant la formule d'Hermite :

$$R_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\prod_{i=0}^n (z - z_i)}{\prod_{i=0}^n (v - z_i)} \frac{f(v)}{(v - z)} dv$$



$\Gamma$  contient les points  $z_0, z_1, \dots, z_n$  et  $z$  et vérifie toujours les hypothèses de régularité du début.

Remarques :

a) Toujours grâce à la formule de Cauchy :

$$P_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \left( 1 - \frac{\prod_{i=0}^n (z - z_i)}{\prod_{i=0}^n (v - z_i)} \right) \frac{f(v)}{(v - z)} dv$$

b) Dans le cas particulier où tous les points  $z_i$  sont confondus à l'origine, on retrouve la formule de Mac-Laurin:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + z^{n+1} \frac{1}{2i\pi} \int_{|v|=R} \frac{f(v)}{v^{n+1}(v-z)} dv$$

pour  $|z| < R$  et  $f$  holomorphe dans un disque centré en 0 de rayon plus grand que  $R$ .

Le terme  $\left(\frac{z}{v}\right)^{n+1}$  dans l'expression du reste permet de montrer qu'une fonction holomorphe dans un disque centré en 0 est développable en série entière au voisinage de 0 dans tout le disque.

C'est le même principe qui montrera la convergence dans le dernier paragraphe.

## II Interpolation rationnelle

### 1) Problème initial

On cherche cette fois une fraction rationnelle qui coïncide avec  $f$  en un certain nombre de points.

Plus précisément, soient:

$$(L, M) \in \mathbb{N}^2$$

$z_0, z_1, \dots, z_{L+M}$  dans  $D$ ,

on a à résoudre:

(1)

trouver  $(u, v)$  deux polynômes:  $d^{\circ}u \leq L, d^{\circ}v \leq M$   
tels que:  $\forall i \in [0, L+M] \quad \frac{u}{v}(z_i) = f(z_i)$

Si  $(u, v)$  est solution de (1), pour  $\lambda \neq 0$ ,  $(\lambda u, \lambda v)$  l'est aussi, mais ces couples définissent la même fraction rationnelle.

Si l'ensemble des couples solutions de (1) définissent une seule fraction rationnelle  $\frac{P}{Q}$  avec  $d^\circ Q \leq M$ ,  $d^\circ P \leq L$  et  $P \wedge Q = 1$ , cette fraction sera dite multi-points Padé approximant de  $f$  d'ordre  $(L, M)$ .

Si certains des points  $z_i$  sont confondus, on impose les mêmes conditions que précédemment : coïncidence de  $f$  et  $\frac{u}{v}$  en  $z_i$ , ainsi que leurs dérivées successives en nombre suffisant. Remarquons que si  $v(z_i) \neq 0$ , toutes les dérivées successives de  $\frac{u}{v}$  en  $z_i$  seront bien définies.

Avec cette convention, ce problème contient celui de l'approximation de Padé en 0; dans ce cas, on peut mener les calculs de manière tout à fait formelle avec une série de Taylor formelle:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n ; \quad (f(0) \equiv c_0 \text{ existe toujours})$$

Ici, il faudrait considérer une série de Newton formelle pour une suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points d'interpolation :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n w_n(z) \quad \text{voir [2,5]}$$

$$(f(z_m) = \sum_{n=0}^m c_n w_n(z_m) \text{ a un sens})$$

## 2) Problème linéaire

Le problème (1) a le désavantage de ne pas être linéaire en les coefficients de  $u$  et  $v$ . Qu'on les écrive dans n'importe quelle base,  $u$  et  $v$  dépendront toujours de



$(L+1) + (M+1)$  coefficients, c'est pourquoi en imposant a priori  $L+M+1$  conditions à  $\frac{u}{v}$ , on espère trouver en général une unique solution pour la fraction  $\frac{u}{v}$ .

Intéressons-nous au problème suivant:

(2) trouver  $(u, v)$  deux polynômes :  $d^{\circ}u \leq L, d^{\circ}v \leq M$   
tels que  $\forall i \in [0, L+M] \quad (vf - u)(z_i) = 0$

qui, lui, est linéaire homogène en les coefficients de  $u$  et  $v$ :  
 $L+M+1$  équations pour  $L+M+2$  inconnues. L'espace vectoriel des solutions est toujours de dimension  $\geq 1$ .

De même que précédemment, si  $z_{i-1} \neq z_i = z_{i+1} = \dots = z_{i+k}$  les équations correspondantes sont remplacées par:

$$\left\{ \begin{array}{l} (vf - u)(z_i) = 0 \\ (vf - u)'(z_i) = 0 \\ \vdots \\ (vf - u)^{(k)}(z_i) = 0 \end{array} \right.$$

Toutes les solutions  $(u, v)$  non nulles de (2) vérifient  $v \neq 0$  et définissent une même fraction rationnelle réduite.

Si  $(u, v)$  est solution de (1), alors  $(u, v)$  est solution de (2); mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Cependant, si  $\forall i \quad v(z_i) \neq 0$ , alors  $(u, v)$  est aussi solution de (1).

Remarquons que si, pour (2),  $v(z_i) = 0$ , alors  $u(z_i) = 0$  et  $u$  et  $v$  sont tous deux divisibles par  $z - z_i$ , ce qui fait descendre l'ordre de la fraction réduite  $\frac{u}{v}$  si elle est définie.

Une CNS pour que (2) admette une unique solution, à un coefficient de proportionnalité près, est que son rang



$\left\{ \begin{array}{l} \text{Les inconnues sont } (v_0, v_1, \dots, v_M, u_0, u_1, \dots, u_L) \\ \text{Les } L+1 \text{ 1}^{\text{ères}} \text{ lignes viennent des coefficients de } z^k \\ \text{dans } v f - u \text{ pour } k = 0, 1, \dots, L. \\ \text{Les } M \text{ dernières lignes viennent des coefficients de } z^k \\ \text{dans } v f - u \text{ pour } k = L+1, L+2, \dots, L+M \end{array} \right.$

Le déterminant d'ordre  $M$  :

$$\begin{vmatrix} c_L & c_{L-1} & \dots & c_{L-M+1} \\ c_{L+1} & c_L & \dots & c_{L-M+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{L+M-1} & \dots & \dots & c_L \end{vmatrix}$$

(convention:  $c_i = 0$  si  $i < 0$ )

est, à permutation près, le déterminant de Hankel  $(L, M)$  de  $f$ .

Si ce déterminant est non nul, alors le déterminant d'ordre  $L+M+1$  obtenue en supprimant la première colonne de la matrice est aussi non nul : le système est exactement de rang  $L+M+1$  et de plus, on peut prendre  $v_0$  comme inconnue auxiliaire. Il existe un générateur  $(u, v)$  de l'espace vectoriel des solutions de (2) tel que  $\underline{v(0) \neq 0}$  ;  $\frac{u}{v}$  est solution de (1).

On considère ceci comme le cas normal de Padé en 0, et on donne un générateur des solutions sous forme de déterminants d'ordre  $M+1$ :

$$u \begin{matrix} [L/M] \\ (z) = \end{matrix} \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \dots & c_L & \sum_{i=0}^{L-M} c_i z^{M+i} \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \dots & c_{L+1} & \sum_{i=0}^{L-M+1} c_i z^{M+i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{L+1} & c_{L+2} & \dots & c_{L+M} & \sum_{i=0}^L c_i z^i \end{vmatrix}$$

$$v^{[L/M]}(z) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \dots & c_L & z^M \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \dots & c_{L+1} & z^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{L+1} & c_{L+2} & \dots & c_{L+M} & 1 \end{vmatrix}$$

Exemples:

$$f(z) = 1 + z + z^2$$

a)  $L = M = 1$ : unique solution pour (2) :  $\lambda(1, 1-z)$  et  $[1/1] = \frac{1}{1-z}$

b)  $L = 2, M = 1$ : " " pour (2) :  $\lambda(1+z+z^2, 1)$   
ce qui donne en fait  $[2/0]$ .

#### 4) N. points Padé

4.1. Si, par exemple, on développe  $u$  et  $v$  dans la base des  $z^k$ , pour un ensemble de points tous distincts, la matrice du système (2)

$$M_1^t(v_0, v_1, \dots, v_M, -u_0, -u_1, \dots, -u_L) = 0 \text{ s'écrit:}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} f(z_0) & f(z_0)z_0 & \dots & f(z_0)z_0^M & 1 & z_0 & \dots & z_0^L \\ f(z_1) & f(z_1)z_1 & \dots & f(z_1)z_1^M & 1 & z_1 & \dots & z_1^L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(z_{L+M}) & f(z_{L+M})z_{L+M} & \dots & f(z_{L+M})z_{L+M}^M & 1 & z_{L+M} & \dots & z_{L+M}^L \end{pmatrix}$$

La matrice ne se sépare pas en blocs, toutes les lignes sont analogues [7].

Il semble donc plus astucieux de chercher  $u$  et  $v$  dans la base des  $w_i$  :  $0 \leq i \leq L+M$ ; car il apparaît plus de zéros dans la matrice correspondante.

Notations:  $j \geq i$   $f_{i,j} = f[z_i, z_{i+1}, \dots, z_j]$

Conventions:  $j < i$   $f_{i,j} = 0$

$$\sum_{k=i}^j \binom{j}{k} = 0 ; \quad \prod_{k=i}^j \binom{j}{k} = 1$$

4.2. Théorème.

(2) admet comme solution le couple  $(u^{[L/M]}, v^{[L/M]})$   
 où  $u^{[L/M]}$  et  $v^{[L/M]}$  sont définis par les déterminants  
d'ordre  $M+1$  suivants :

Soit  $A$  la matrice d'ordre  $(M+1) \times M$  :

$$A = \begin{pmatrix} f_{M,L+1} & f_{M,L+2} & \dots & f_{M,L+M} \\ f_{M-1,L+1} & f_{M-1,L+2} & \dots & f_{M-1,L+M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{0,L+1} & f_{0,L+2} & \dots & f_{0,L+M} \end{pmatrix}$$

$$u^{[L/M]}(z) =$$

$A$

$$\begin{array}{l} \sum_{j=M}^L f_{M,j} \prod_{k=0}^{j-1} (z-z_k) \\ \sum_{j=M-1}^L f_{M-1,j} \prod_{k=0}^{j-1} (z-z_k) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^L f_{0,j} \prod_{k=0}^{j-1} (z-z_k) \end{array}$$

$$v^{[L/M]}(z) =$$

$A$

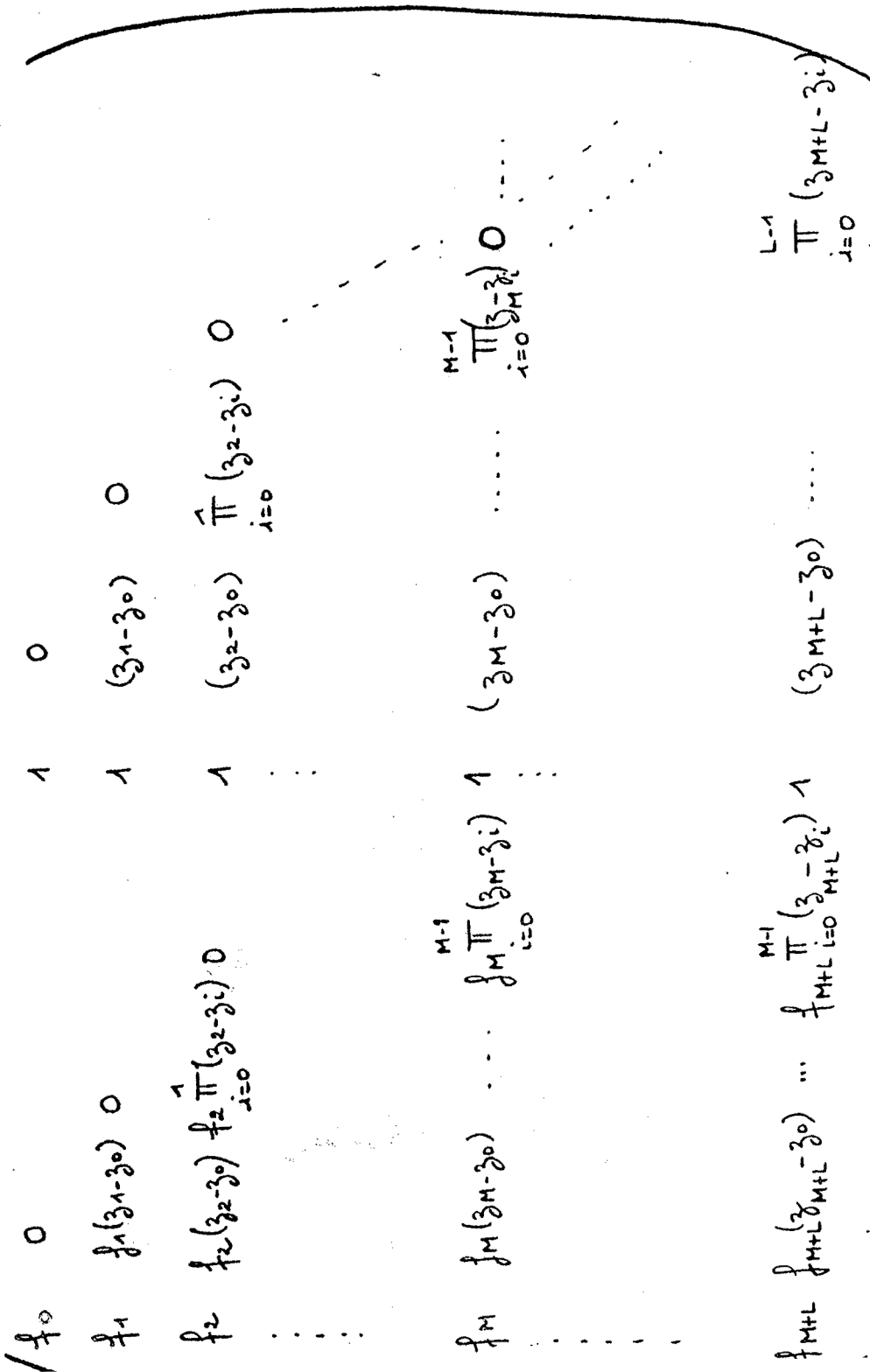
$$\begin{array}{l} \prod_{k=0}^{M-1} (z-z_k) \\ \prod_{k=0}^{M-2} (z-z_k) \\ \vdots \\ z-z_0 \\ 1 \end{array}$$

$$u = \sum_{i=0}^L u_i \omega_i ; \quad v = \sum_{j=0}^M v_j \omega_j$$

$$M_2^t(v_0, v_1, \dots, v_M, -u_0, \dots, -u_L) = 0$$

notons  $f_k = f(z_k)$  :

Pour  $L \geq M$ ,  $M_2$  s'écrit :



De plus, le reste s'écrit :

$$\left( v^{[L/M]} f - u^{[L/M]} \right) (z) = \prod_{k=0}^{L+M} (z - z_k)$$

$$A \begin{vmatrix} f[z_M, \dots, z_{L+M}, z] \\ f[z_{M-1}, \dots, z_{L+M}, z] \\ \vdots \\ f[z_0, \dots, z_{L+M}, z] \end{vmatrix}$$

Si, pour chacun des points distincts parmi  $z_0, z_1, \dots, z_{L+M}$ ,  $v^{[L/M]}$  ne s'annule pas,  $(u^{[L/M]}, v^{[L/M]})$  est solution de (1).

Pour une solution  $(u, v)$  de (2),  $v$  et  $u$  ont les mêmes différences divisées de l'ordre 0 à l'ordre  $L+M$  entre les points  $z_0, z_1, \dots, z_{L+M}$ . D'où la solution précédente de (2) quand  $\det A \neq 0$ . Mais en appliquant plusieurs fois la formule de Newton, on montre que  $(u^{[L/M]}, v^{[L/M]})$  est bien une solution de (2) dans tous les cas.

#### 4.3. Remarques :

a) Ces formules généralisent celles de l'approximation de Padé en 0 :

Dans ce cas,  $f_{i,j} = \frac{f^{(j-i)}(0)}{(j-i)!} = c_{j-i}$  si  $j \geq i$

Par un changement d'indexation, on obtient les formules du 3) pour  $u^{[L/M]}$  et  $v^{[L/M]}$ .

Pour retrouver l'expression classique du reste, il suffit de remarquer que :

$$\underbrace{f[0, 0, \dots, 0, z]}_{p \text{ fois}} = \sum_{k=p}^{+\infty} c_k z^{k-p}$$

ce qui donne :

$$\left( \nu^{[L/M]} f - u^{[L/M]} \right)(z) = z^{L+M+1} \left| \begin{array}{ccc} c_{L-M+1} & \dots & c_L \\ c_{L-M+2} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ c_{L+1} & \dots & c_{L+M} \end{array} \right. \begin{array}{l} \sum_{k=L+1}^{+\infty} c_k z^{k-L-1} \\ \sum_{k=L+2}^{+\infty} c_k z^{k-L-2} \\ \vdots \\ \sum_{k=L+M+1}^{+\infty} c_k z^{k-L-M-1} \end{array}$$

et finalement :

$$\left( \nu^{[L/M]} f - u^{[L/M]} \right)(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} z^{L+M+i} \left| \begin{array}{ccc} c_{L-M+1} & \dots & c_L \\ c_{L-M+2} & \dots & c_{L+1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{L+1} & \dots & c_{L+M} \end{array} \right. \begin{array}{l} c_{L+i} \\ c_{L+i+1} \\ \vdots \\ c_{L+i+M} \end{array}$$

b) Ces expressions ne sont d'aucune utilité pratique, mais elles peuvent servir à établir des relations de récurrence entre les  $(u^{[L/M]}, \nu^{[L/M]})$  et donc des algorithmes de calcul. Quant à l'expression du reste, nous allons la transformer de manière à montrer des résultats de convergence.

#### 4.4. Exemples.

$$L = M = 1$$

$$a) \quad \boxed{f(0) = 0, \quad f(-1) = -1, \quad f(+1) = +1}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{de rang } 3$$

Solutions de (2) =  $\mathbb{C}(z, 1)$ ; (1) admet  $z$  pour unique solution.



$$b) \quad \boxed{f(0) = 1 = f(1), \quad f(-1) = 0}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{de rang 3,}$$

$$u \stackrel{[1/1]}{v}(z) = \begin{vmatrix} 1/2 & z \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} = z/2; \quad v \stackrel{[1/1]}{u}(z) = \begin{vmatrix} 1/2 & z \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} = z/2$$

Solutions de (2) =  $\mathbb{C}(z/2, z/2)$ .

mais  $v \stackrel{[1/1]}{u}(0) = 0$  : cependant  $\exists \lim_{z \rightarrow 0} \frac{u \stackrel{[1/1]}{v}(z)}{v \stackrel{[1/1]}{u}(z)} = f(0) =$

pourtant  $\frac{u \stackrel{[1/1]}{v}}{v \stackrel{[1/1]}{u}} \equiv 1$  n'est pas solution de (1) : il n'y en a pas.

$$c) \quad \boxed{f(0) = 0 = f(1), \quad f(-1) = -1}$$

Solutions de (2) =  $\mathbb{C}(0, 1+z)$

$\exists \lim_{z \rightarrow -1} \frac{u \stackrel{[1/1]}{v}(z)}{v \stackrel{[1/1]}{u}(z)} = 0$ , mais  $\frac{u \stackrel{[1/1]}{v}}{v \stackrel{[1/1]}{u}} \equiv 0$  n'est

pas solution de (1).

### III Forme intégrale du reste relatif au couple $(u \stackrel{[L/M]}{v}, v \stackrel{[L/M]}{u})$

1) L'idée est d'utiliser le même principe que pour l'interpolation polynomiale, à savoir l'expression intégrale des différences divisées. Dans le déterminant qui donne le reste, seule la dernière colonne est fonction non constante de  $z$ .

Soit  $\Gamma$  une courbe fermée simple, rectifiable, orientée positivement, contenant  $z_0, z_1, \dots, z_{L+M}$  et  $z$  à son intérieur. La formule d'Hermite s'applique à chacune des différences divisées de la dernière colonne, avec ce même contour  $\Gamma$ .



$$\left( {}^{[L/M]} f - u \right) (z) = \prod_{k=0}^{L+M} (z - z_k)$$

$$A \begin{array}{l} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0) \prod_{k=M}^{L+M} (z-z_k)} dz \\ \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0) \prod_{k=M-1}^{L+M} (z-z_k)} dz \\ \vdots \\ \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0) \prod_{k=0}^{L+M} (z-z_k)} dz \end{array}$$

Notons :  $P_{i,j}(z) = \prod_{k=i}^j (z - z_k)$  si  $i \leq j$ , et  $P_{i,j}(z) = 1$  si  $i > j$

Lemme

$$A \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0) P_{M,L+M}(z)} dz \\ \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0) P_{M-1,L+M}(z)} dz \\ \vdots \\ \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0) P_{0,L+M}(z)} dz \end{array} \right] = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} A \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{P_{M,L+M}(z)} \\ \frac{1}{P_{M-1,L+M}(z)} \\ \vdots \\ \frac{1}{P_{0,L+M}(z)} \end{array} \right] \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

En effet, développons le premier déterminant par rapport à la dernière colonne.

Pour  $0 \leq j \leq M$ ,  
soit  $\Delta_j = (-1)^j \times$  mineur d'ordre  $M$  obtenu en supprimant la  $(M+1-j)^e$  ligne de  $A$ .

On obtient :

$$\sum_{j=0}^M \Delta_j \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z) P_{j,L+M}(z)} dz$$

qui vaut  $\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \sum_{j=0}^M \frac{\Delta_j}{P_{j,L+M}(z)} \frac{f(z)}{z-z} dz$

intégrale qui a bien un sens. Or  $\sum_{j=0}^M \frac{\Delta_j}{P_{j,L+M}(z)}$  est aussi

le développement par rapport à la dernière colonne du déterminant

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ P_{M,L+M}(z) \\ 1 \\ P_{M-1,L+M}(z) \\ \vdots \\ 1 \\ P_{0,L+M}(z) \end{vmatrix}$$

Conséquence du lemme :

$$\left( v^{[L/M]} f - u^{[L/M]} \right)(z) = \frac{P_{0,L+M}(z)}{2i\pi} \int_{\Gamma}$$

$$A \begin{vmatrix} P_{0,M-1}(z) \\ P_{0,M-2}(z) \\ \vdots \\ P_{0,0}(z) \\ P_{0,M+1}(z) \end{vmatrix} \frac{f(z)}{P_{0,L+M}(z)(z-z)} dz$$

par réduction au même dénominateur et mis en facteur.  
Comme :  $\forall i \in [0, M]$   $P_{0,i} = \omega_{i+1}$ , le dernier déterminant est en fait  $v^{[L/M]}(z)$ .

D'où :

$$(v^{[L/M]} f - u^{[L/M]})(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{(v^{[L/M]} f)(z)}{(z-z)} \frac{\prod_{j=0}^{L+M} (z-z_j)}{\prod_{j=0}^{L+M} (z-z_j)} dz$$

2) Dans le cas de Padé en 0, on retrouve bien :

$$(v^{[L/M]} f - u^{[L/M]})(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{(v^{[L/M]} f)(z)}{(z-z)} \left(\frac{z}{z}\right)^{L+M+1} dz$$

contour entourant  
0 et z

• Si  $(u^{[L/M]}, v^{[L/M]})$  est solution de (1), pour les points z à l'intérieur de  $\Gamma$  qui n'annulent pas  $v^{[L/M]}$ , on a :

$$\left(f - \frac{u^{[L/M]}}{v^{[L/M]}}\right)(z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{v^{[L/M]}(z)} \int_{\Gamma} \frac{\omega_{L+M+1}(z)}{\omega_{L+M+1}(z)} \frac{(v^{[L/M]} f)(z)}{z-z} dz$$

Pour  $M=0$ , on retrouve le reste de l'interpolation polynômiale de I. En ce qui concerne la convergence éventuelle d'une suite de fractions  $\frac{u^{[L/R/M_R]}}{v^{[L/R/M_R]}}$  vers f, les

pôles de ces fractions créent une difficulté qui n'existe pas dans le cadre de l'approximation polynômiale, mais qui peut aussi être intéressante.

Un cas sympathique se présente quand on sait minorer uniformément sur un compact et indépendamment des  $(L_k, M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tous les modules des dénominateurs.

Il suffit par exemple qu'on puisse enfermer les pôles de ces fractions dans un compact du domaine borné où  $f$  est définie. Plus ce compact est petit, plus il y a de points de convergence.

Remarque:

$u^{[L/M]}$  est en fait le polynôme de Newton de  $u^{[L/M]} f$  relatif aux points  $z_0, z_1, \dots, z_{L+M}$ .  
L'expression intégrale établie précédemment résulte donc aussi de l'expression intégrale du reste dans la formule de Newton.

Notons au passage que: 
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{u^{[L/M]}(z)}{(z-z_0)^{\frac{L+M}{\pi}} \prod_{k=1}^M (z-z_k)} dz = 0$$

(c'est aussi une conséquence du théorème des résidus)

#### IV Extension du théorème de Montessus à l'approximation rationnelle multipoints.

Montessus de Ballore a démontré la convergence uniforme de certaines colonnes de la table de Padé pour une fonction méromorphe (1904), en sachant localiser les pôles de ces fractions.

##### 1) Rappel: Théorème de Montessus

Soit  $f$  une fonction méromorphe dans le disque  $|z| \leq R$ , ayant  $m$  pôles en des points distincts  $a_1, a_2, \dots, a_m$  tels que:  $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_m| < R$ , le pôle  $a_k$

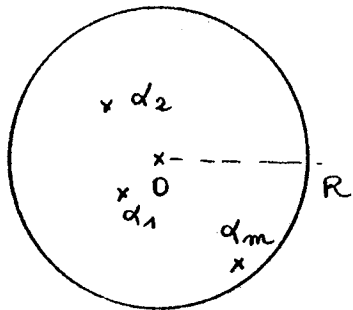
ayant la multiplicité  $\mu_k$ .

Soit  $M = \sum_{k=1}^m \mu_k$ .

Alors, sur tout compact de :

$\{z \mid |z| \leq R, z \neq d_k, k=1, \dots, m\}$ ,  $f$  est limite uniforme

des approximations de Padé en 0 :  $[L/M]$  quand  $L \rightarrow +\infty$ .



2) Cas des multipoints.

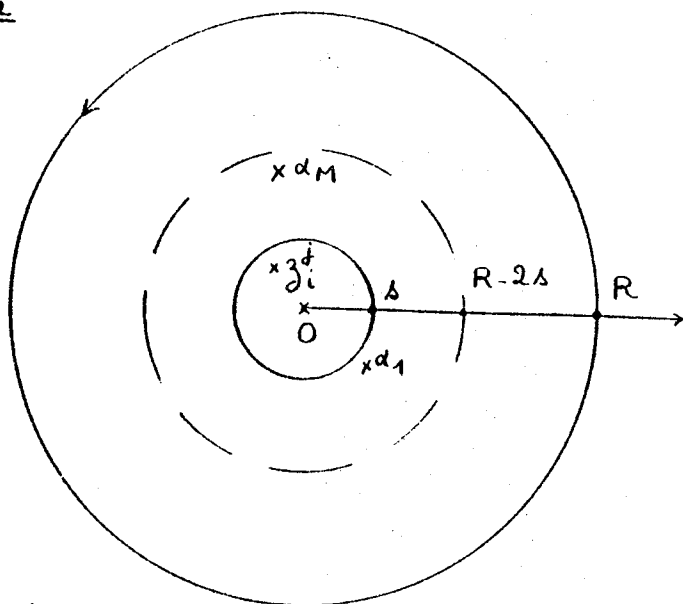
Une configuration peu différente de la précédente est celle où tous les points d'interpolation sont "proches" de 0 et "loin" des pôles de  $f$ .

Extension:

Soit  $f$  une fonction méromorphe dans le disque  $|z| \leq R$ , ayant  $M$  pôles simples (pour l'instant) en des points  $d_1, \dots, d_M$ .

Soit un système triangulaire de points d'interpolation, tous contenus dans le disque  $|z| < \delta$  :

$$\begin{array}{cccc}
 z_0^0 & & & \\
 z_0^1 & z_1^1 & & \\
 z_0^2 & z_1^2 & z_2^2 & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \\
 z_0^{L+M} & z_1^{L+M} & z_2^{L+M} & \dots & z_{L+M}^{L+M}
 \end{array}$$



Supposons:

$$\delta < \inf_{1 \leq k \leq M} |d_k| \leq \sup_{1 \leq k \leq M} |d_k| < R - 2\delta.$$

En particulier, les points d'interpolation ne s'accumulent sur aucun pôle de  $f$ .

Alors, sur tout compact de  $\{z \mid |z| < R - 2\delta, z \neq \alpha_1, \dots, \alpha_M\}$ ,  $f$  est limite uniforme des fractions  $[L/M]$  quand  $L \rightarrow +\infty$ , où  $[L/M]$  est l'unique fraction dont le dénominateur est de degré  $M$  et le numérateur de degré  $\leq L$ , qui coïncide avec  $f$  aux points  $z_0^{L+M}, z_1^{L+M}, \dots, z_{L+M}^{L+M}$  (elle existe pour  $L$  assez grand).

### 3) Remarques

3.1. Quand  $\forall i, j, z_i^j = 0$ ,  $s$  peut être choisi aussi proche de 0 que l'on veut, et l'on retrouve le théorème de Montessus de Ballone.

### 3.2. Configuration

$s < \inf \left( \inf |d_i|, \frac{R - \sup |d_i|}{2} \right)$ . Plus chacun de ces

deux nombres est petit, plus les points d'interpolation sont concentrés vers 0. Le problème est centré en 0 pour des commodités d'écriture. En pratique, on le centre "au milieu" des points d'interpolation, qui sont supposés former un "nuage" compact assez éloigné de tous les pôles :

$d(\{\text{pôles}\}, \{\text{points d'interpolation}\}) > 0$  suffit pour appliquer la même méthode. Il reste à choisir le contour d'intégration en fonction des points où l'on désire évaluer  $f$ .

### 3.3. Idées principales de la démonstration

- Je ramène à l'interpolation rationnelle d'une fonction holomorphe, au lieu de celle d'une fonction méromorphe :

ici  $f \in R_M$  où  $R_M(z) = \prod_{k=1}^M (z - \alpha_k)$ .

- Interpoler  $f \in R_M$  par une fraction du type  $\frac{\Pi_{L+M}}{T(L,M)}$  où

•  $\Pi_{L+M}$  est un polynôme de  $d^\circ \leq L+M$  et divisible par  $R_M$ .

•  $T(L,M)$  est un polynôme de  $d^\circ$  exactement  $M$  et :

$\frac{\Pi_{L+M}}{T(L,M)} \rightarrow R_M$  uniformément sur  $\{ |z| \leq R \}$

(c'est de là que vient la condition:  $\sup_{1 \leq k \leq M} |\alpha_k| < R - 2\delta$ )

Ceci permet de minorer uniformément en  $L$ , et en  $z$  décrivant un compact du disque privé des pôles, les dénominateurs  $|\frac{\Pi_{L+M}}{T(L,M)}(z)|$ , et assure la convergence uniforme des  $\frac{\Pi_{L+M}}{T(L,M)}$  vers  $f$  aux points  $z$  du compact qui

vérifient:  $|z| + \delta < R - \delta$ .

#### 4) Preuve détaillée.

$f \in R_M$  est holomorphe dans  $\{ |z| \leq R \}$ , bornée par  $J$  sur  $\{ |z| = R \}$ . Dans l'interpolation rationnelle d'ordre  $(L+M, M)$  de  $f \in R_M$  aux points  $z_0^{L+M}, z_1^{L+M}, \dots, z_{L+M}^{L+M}$  ( $L+M+1$  conditions +  $M$  conditions sur le numérateur: divisibilité par  $R_M$ ), cherchons à priori un dénominateur unitaire de degré exactement  $M$ :

$$\boxed{T(L,M) = \sum_{k=0}^M a_k R_k} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} R_k(z) = \prod_{i=1}^k (z - d_i) \\ R_0 \equiv 1 \end{cases}$$

Soit  $\frac{\Pi_{L+M}}{T(L,M)}$  le polynôme d'interpolation de Newton de  $f \in R_M$  aux points  $z_0^{L+M}, z_1^{L+M}, \dots, z_{L+M}^{L+M}$ :



$$\pi_{L+M}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} \left( 1 - \frac{(z-z_0)^{L+M} \dots (z-z_{L+M})^{L+M}}{(z-z_0)^{L+M} \dots (z-z_{L+M})^{L+M}} \right) \frac{(f R_M T^{(L,M)})(z)}{(z-z)} dz$$

Montrons que pour  $L$  assez grand, il existe un unique polynôme  $T^{(L,M)}$  unitaire de degré  $M$ , tel que  $\pi_{L+M}$  s'annule aux pôles  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$ , et qu'alors  $\frac{\pi_{L+M}}{T^{(L,M)}}$  interpole  $f R_M$  aux points  $z_0^{L+M}, \dots, z_{L+M}^{L+M}$ .

Notons  $w_{L+M+1}(z) = \prod_{i=0}^{L+M} (z-z_i)^{L+M}$

$\forall i \in [1, M]$

$$\pi_{L+M}(\alpha_i) = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} \left( 1 - \frac{w_{L+M+1}(\alpha_i)}{w_{L+M+1}(z)} \right) \frac{(f R_M^2)(z)}{z-\alpha_i} dz \\ = \sum_{k=0}^{M-1} a_k^{(L,M)} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} \left( 1 - \frac{w_{L+M+1}(\alpha_i)}{w_{L+M+1}(z)} \right) \frac{(f R_M R_k)(z)}{z-\alpha_i} dz \right) \end{cases}$$

Posons:

$$c_{k,i}^{(L,M)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} \left( 1 - \frac{w_{L+M+1}(\alpha_i)}{w_{L+M+1}(z)} \right) \frac{(f R_M R_k)(z)}{z-\alpha_i} dz \quad \begin{matrix} k \in [0, M-1] \\ i \in [1, M] \end{matrix}$$

et  $d_i^{(L,M)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} \left( 1 - \frac{w_{L+M+1}(\alpha_i)}{w_{L+M+1}(z)} \right) \frac{(f R_M^2)(z)}{z-\alpha_i} dz$

Soit  $G_L$  le système linéaire:

$$\sum_{k=0}^{M-1} a_k^{(L,M)} c_{k,i}^{(L,M)} = d_i^{(L,M)} \quad ; \quad 1 \leq i \leq M$$

de  $M$  équations à  $M$  inconnues.

Avec les conditions que vérifient les points d'interpolation par rapport aux pôles, le système  $\mathcal{E}_L$  "converge" vers le système  $\mathcal{E}$  linéaire homogène de  $M$  équations à  $M$  inconnues, de Cramer.

$$\mathcal{E}: \sum_{k=0}^{M-1} a_k c_{k,i} = 0, \quad 1 \leq i \leq M$$

$$\text{où } c_{k,i} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{(\prod_{M} R_k)(\zeta)}{\zeta - d_i} d\zeta,$$

au sens où le vecteur des  $M^2 + M$  coefficients de  $\mathcal{E}_L$  converge vers celui des  $M^2 + M$  coefficients de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathbb{C}^{M^2 + M}$ .

$$\text{En effet, } \forall i \in [1, M], \forall \zeta \text{ } |\zeta|=R, \left| \frac{\omega_{L+M+1}(d_i)}{\omega_{L+M+1}(\zeta)} \right| \leq \left( \frac{\sup_{1 \leq k \leq M} |d_k| + \Delta}{R - \Delta} \right)^{L+M}$$

$$\text{comme } \lambda = \frac{\sup_{1 \leq k \leq M} |d_k| + \Delta}{R - \Delta} < 1, \quad \lambda^{L+M+1} \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} 0$$

Toute autre répartition des points d'interpolation qui assure la convergence normale sur  $|\zeta|=R$  des  $\frac{\omega_{L+M+1}(d_i)}{\omega_{L+M+1}(\zeta)}$  vers 0 convient.

$$\text{Soit } \Lambda = \sup_{\substack{|\zeta|=R \\ 0 \leq k \leq M}} |R_k(\zeta)|; \quad \text{pour } 1 \leq i \leq M, \text{ on a:}$$

$$\left| d_i^{(L,M)} - \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{(\prod_{M} R_k^2)(\zeta)}{\zeta - d_i} d\zeta \right| \leq R \frac{\Delta \Lambda \lambda^{L+M+1}}{R - \sup_{1 \leq k \leq M} |d_k|}$$

Donc 
$$d_i \xrightarrow[L \rightarrow +\infty]{(L,M)} \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{(f R_M^2)(\zeta)}{\zeta - \alpha_i} d\zeta = f R_M^2(\alpha_i) = 0$$

De la même manière,

$$c_{k,i} \xrightarrow[L \rightarrow +\infty]{(L,M)} \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{(f R_M R_k)(\zeta)}{\zeta - \alpha_i} d\zeta = c_{k,i}$$

pour  $i \leq k \leq M-1$ ,  $c_{k,i} = 0$   
 $c_{i-1,i} = (f R_M R_{i-1})(\alpha_i) \neq 0$  car  $f R_M(\alpha_i) \neq 0$ ,  $\alpha_i$  étant pôle simple de  $f$ .  
 Les autres coefficients s'expriment en fonction des résidus de  $f$  aux pôles.

La matrice du système  $\mathcal{E}$  est triangulaire inversible:

$$M = \begin{pmatrix} c_{0,1} & 0 & & & \\ c_{0,2} & c_{1,2} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ c_{0,M} & c_{1,M} & \dots & c_{M-1,M} & \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}$  admet donc une unique solution  $\mathcal{I}$ , qui est la solution nulle (ie: le polynôme  $R_M$  est solution de  $\mathcal{E}$ ).

Si  $M_L$  est la matrice du système  $\mathcal{E}_L$ , on a montré:  
 $M_L \xrightarrow[L \rightarrow +\infty]{} M$  Par continuité de l'application

déterminant,  $\exists L_0 \in \mathbb{N} \forall L \geq L_0 \det M_L \neq 0$ .

$\mathcal{E}_L$  admet une unique solution  $\mathcal{I}_L$  qui s'exprime sous forme de Cramer,  $\mathcal{I}_L$  est une fonction continue des coefficients de  $\mathcal{E}_L$ , donc  $\mathcal{I}_L \xrightarrow[L \rightarrow +\infty]{} \mathcal{I}$ .

Résumons :

$\exists L_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall L \geq L_0$ ,  $\exists ! T^{(L,M)}$  unitaire de  $d^0 M$ ,  $R_M \mid \Pi_{L+M}$ .

De plus,  $T^{(L,M)} \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} R_M$  : les polynômes  $T^{(L,M)}$  étant

tous de degré  $\leq M$ , la convergence de leurs  $M+1$  coefficients dans la base  $R_0, R_1, \dots, R_M$  équivaut à leur convergence uniforme sur  $\{|z| \leq R\}$ .

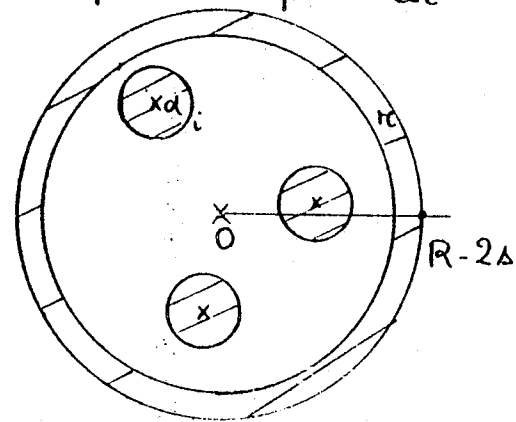
Utilisons :

$$\left( \int_{L+M} R_M T^{(L,M)} - \Pi_{L+M} \right)(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|s|=R} \frac{\omega_{L+M+1}(z)}{\omega_{L+M+1}(s)} \frac{\left( \int R_M T^{(L,M)} \right)(s)}{(s-z)} ds$$

pour  $z \in \mathcal{D}(0, R) \setminus \{\text{pôles}\}$ .

Tout compact du disque  $|z| < R - 2\delta$  privé des pôles est contenu dans un compact du type :

$$K_\kappa = \left\{ z \mid |z| \leq R - 2\delta - \kappa, |z - \alpha_k| \geq \kappa, \right. \\ \left. \text{où } \kappa > 0, k = 1, \dots, M \right\}$$



Soit  $K > \|R_M\| = \sup_{|z| \leq R} |R_M(z)|$

Comme  $T^{(L,M)} \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} R_M$ ,  $\exists L_1 \in \mathbb{N} \forall L \geq L_1 \|T^{(L,M)}\| \leq K$

Soit  $m_\kappa = \inf_{z \in K_\kappa} |R_M(z)| > 0$  car atteint.

$\exists L_2 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall L \geq L_2 \|T^{(L,M)} - R_M\| \leq \frac{m_\kappa}{2}$  d'où :

$$\forall z \in K_{\kappa} \quad |T^{(L,M)}(z)| \geq m_{\kappa} - \frac{m_{\kappa}}{2} = \frac{m_{\kappa}}{2}$$

$$\eta_{\text{otons}} \quad P^{(L,M)} = \frac{\pi_{L+M}}{R_M}$$

$$\forall L \geq \sup(L_0, L_1, L_2) \quad \forall z \in K_{\kappa}$$

$$\left( f - \frac{P^{(L,M)}}{T^{(L,M)}} \right)(z) = \frac{1}{2i\pi (R_M T^{(L,M)})(z)} \int_{\Gamma} \frac{\omega_{L+M+1}(z)}{\omega_{L+M+1}(z)} \frac{(f R_M T^{(L,M)})(z)}{(z-z)} dz$$

$$\left| \left( f - \frac{P^{(L,M)}}{T^{(L,M)}} \right)(z) \right| \leq \frac{R}{m_{\kappa} \times \frac{m_{\kappa}}{2}} \underbrace{\left( \frac{R-\Delta-\kappa}{R-\Delta} \right)^{L+M+1}}_{< 1} \frac{\delta K}{R-2\Delta-\kappa}$$

ce qui prouve:

$$\frac{P^{(L,M)}}{T^{(L,M)}} \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} f \quad \text{uniformément dans } K_{\kappa}.$$

$$\left( \frac{P^{(L,M)}}{T^{(L,M)}} = [L/M] \quad \text{unique fraction du problème (2).} \right)$$

### 5) Pôles multiples

Si  $f$  admet cette fois des pôles multiples en des points distincts  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , où  $\alpha_e$  est de multiplicité  $\mu_e$  avec  $\sum_{e=1}^m \mu_e = M$ , on impose que  $\pi_{L+M}$  soit divisible

par  $\prod_{e=1}^m (z - \alpha_e)^{\mu_e}$ , c'est-à-dire :

$$\text{pour } 1 \leq l \leq m, \quad 0 \leq j \leq \mu_l - 1 \quad \pi_{L+M}^{(j)}(\alpha_l) = 0$$

Par dérivation sous le signe  $\int$ , on obtient un système linéaire  $E_L$  qui converge de nouveau vers un système triangulaire homogène, à diagonale inversible, quand  $L \rightarrow +\infty$ , d'où la convergence des approximations rationnelles sur les mêmes compacts.

### Conclusion

Selon qu'on s'intéresse à une fonction de la variable réelle ou de la variable complexe, on exprime sous des formes intégrales appropriées les différences divisées qui interviennent dans les formules d'interpolation polynomiale ou rationnelle.

Dans le cas complexe, la formule de Cauchy est fondamentale, qui permet de scinder le rôle de  $f$  et celui des points d'interpolation. En effet, pour exprimer le reste, on peut choisir un même contour d'intégration (où le comportement de  $f$  est connu) pour tout un ensemble de points, d'où des conditions suffisantes de convergence uniforme.

Notre ambition est de généraliser ces résultats aux fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes.

## References

- [1] BAKER. GRAVES-MORRIS (1981) Padé approximants  
Part I: Basic theory  
Part II: Extensions and applications  
Encyclopedia of Mathematics and its applications. vol 13.
- [2] G. CLAESSENS (1978) On the Newton-Padé approximation problem. J. of Approx. Theory 22 p 150-160
- [3] G. CLAESSENS (1978) On the structure of the Newton-Padé table, J. of Approx. Theory 22 p. 304-319
- [4] P.J. DAVIS (1963) Interpolation and approximation  
Blaisdell Publishing Company.
- [5] M.A. GALLUCI and W.B. JONES (1976) Rational approximation corresponding to Newton series. J. of Approx. Theory 17 p 366-392
- [6] D.C. HANDSCOMB (1965) Methods of numerical approximation.  
Pergamon Press.
- [7] J. MEINGUET (1970) On the solubility of the Cauchy-Riemann problem, in "Approximation theory" Calbot p 137-163
- [8] E.B. SAFF (1972) An extension of de Montessus de Ballore's theorem on the convergence of interpolating rational functions, J. of Approx. Theory 6 p 63-67
- [9] J.L. WALSH (1960) Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. XX

Quelques références sur les algorithmes de calculs  
d'approximants de Padé - Newton.

- [1] G. CLAESSENS (1976) : A new algorithm for osculatory rational interpolation. Num. Math. 27 p 77-83
- [2] G. CLAESSENS (1978) : A useful identity for the rational Hermite interpolation table. Num. Math. 29 p 227-231
- [3] F.M. LARKIN (1967) : Some techniques for rational interpolation. Comp. J. 10 p 178-187
- [4] J. STOER (1961) : Über zwei Algorithmen zur Interpolation mit rationalen Funktionen. Num. Math. 3 p 285-304
- [5] L. WUYTACK (1973) : An algorithm for rational interpolation similar to the gd. algorithm. Num. Math. 20 p 418-424.
- [6] L. WUYTACK (1974) : On some aspects of the rational interpolation problem. SIAM J. Num. Anal. vol 11 n°1 mars
- [7] L. WUYTACK (1975) : On the rational osculatory problem. Math. Comp. 29 p 837-843





4.

# Interpolation polynômiale d'une fonction de plusieurs variables complexes

## Introduction

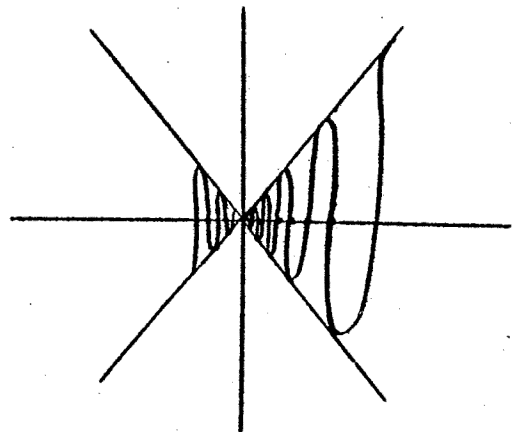
Si le passage d'une à deux variables nécessite des moyens nouveaux, par contre la méthode tensorielle présentée ici dans le cadre de deux variables pour des raisons de simplicité, convient aussi à un nombre fini quelconque de variables.

Habituellement, on interpole une fonction  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  par des polynômes des sous-espaces  $\mathbb{C}_n[x]$ : polynômes de degré  $\leq n$  en  $x$ , qui forment une suite croissante. Etant donné  $n+1$  points distincts  $x_0, x_1, \dots, x_n$  dans  $\mathbb{C}$ , il existe un unique polynôme  $P$  de  $\mathbb{C}_n[x]$  qui coïncide avec  $f$  en ces points: le système linéaire obtenu en développant  $P$  dans la base canonique  $1, x, \dots, x^n$  dépend d'un Vandermonde non nul. Mais cette suite de polynômes ne converge pas nécessairement vers la fonction [2,7]:

par exemple:

$$\begin{cases} f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}, & f(0) = 0 \\ x \neq 0 \\ x_m = \frac{1}{m+1} \end{cases}$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad P_m \equiv 0 \quad \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} f$$



La base  $1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \dots, (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$  présente l'avantage par rapport à la base de Lagrange:

$$\prod_{j \neq i} (x-x_j) / \prod_{j \neq i} (x_i-x_j) \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n,$$

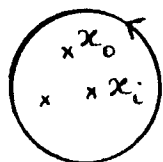
de conduire à un système triangulaire inversible, tel que l'ajout d'un nouveau point d'interpolation ne nécessite le calcul que d'un seul coefficient supplémentaire. Les coefficients de  $P$  dans cette base sont des différences divisées, qui se calculent récurivement.

Le polynôme de Newton de  $f$  s'écrit :

$$(*) \quad P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

D'autre part, la formule d'Hermite :

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{f(x)}{\prod_{i=0}^k (x-x_i)} dx$$



pour une fonction  $f$  holomorphe dans un ouvert contenant les  $x_i$ , permet de définir les différences divisées quand certains des points sont confondus, et si l'on remplace les conditions d'interpolation par des conditions sur les dérivées successives de la fonction (conditions d'Hermite), le polynôme solution est encore de la forme  $(*)$  (grâce à une convergence uniforme sous le signe  $\int$ ).

Pour des points d'interpolation tous confondus à l'origine, on retrouve le polynôme de Taylor de  $f$ . Ce cas limite permet parfois d'intuire des résultats concernant l'interpolation de Lagrange.

Dans  $\mathbb{C}[x, y]$  se présentent plusieurs types de sous-espaces vectoriels. Mais remarquons par exemple qu'il n'existe pas de polynôme  $P$  dans l'espace vectoriel engendré par  $1, x, y$  qui prenne les

valeurs  $\begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$  aux points  $\begin{cases} (0, 0) \\ (1, 0) \\ (-1, 0) \end{cases}$  respectivement.

Il est plus astucieux de chercher à priori  $P$  dans l'espace vectoriel engendré par  $1, x, x(x-1)$ .

En considérant  $f(x, y)$  comme fonction de  $x$ , puis de  $y$  (paramétrisation de  $\mathbb{C}^2$  par des droites parallèles à l'axe des  $x$  :  $\begin{array}{c} y \\ \hline \text{---} \\ \hline (0, 0) \end{array} \quad \begin{array}{c} y = \text{constante} \\ x \end{array}$ )

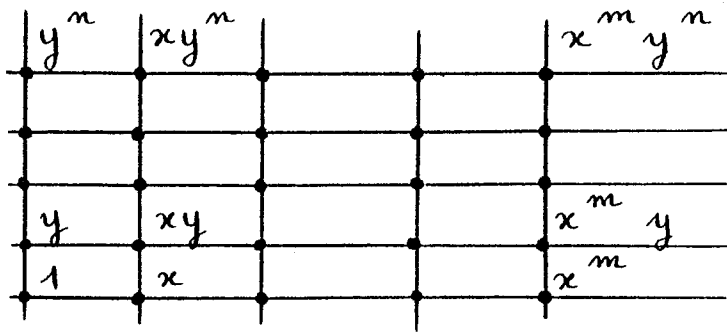
ou inversement,

et en appliquant les formules de Newton à une variable, nous résolvons le problème de l'interpolation pour des configurations "rectangulaires" de points.

Nous choisissons des bases de polynômes en fonction de cette "géométrie", et il apparaît alors naturellement des différences divisées à deux variables, qui admettent aussi une représentation intégrale.

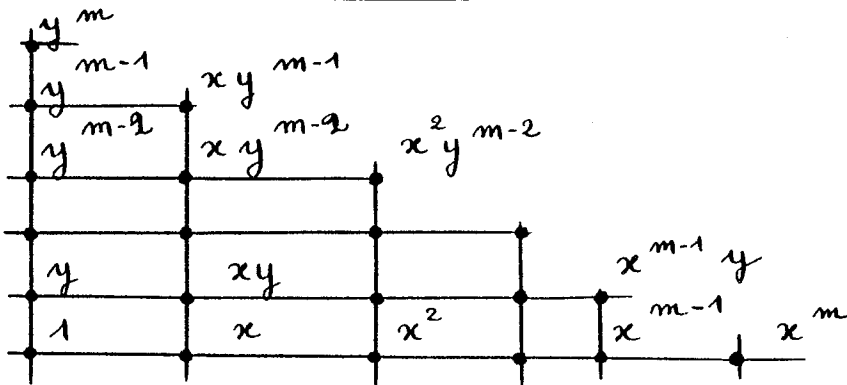
Nous utilisons en particulier les sous-espaces vectoriels :

(§ A)  $\mathbb{C}_{m,n}[x,y]$  : polynômes de degré  $\leq m$  en  $x$ ,  $\leq n$  en  $y$ .



spécialement adaptées aux fonctions du type  $g(x)h(y)$

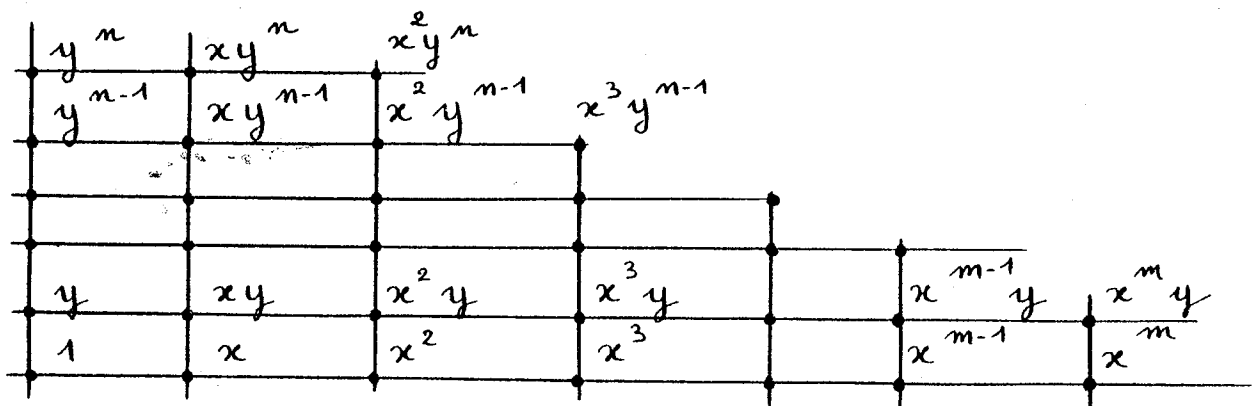
(§ B)  $\mathbb{C}_m[x,y]$  : polynômes de degré total  $\leq m$



(§ C) ou, plus généralement, les sous-espaces de  $\mathbb{C}[x,y]$  engendrés par des  $(x^k y^l)$   $(k,l) \in I$  fini  $\subset \mathbb{N}^2$ , où  $I$

vérifie la  règle du rectangle :

$$\left. \begin{array}{l} (k,l) \in I \\ i \leq k \\ j \leq l \end{array} \right\} \Rightarrow (i,j) \in I$$



Soit  $f$  une fonction holomorphe à l'origine de  $\mathbb{C}^2$ : elle est développable en série double dans un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $(0,0)$  :

$$f(x,y) = \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l} x^k y^l$$

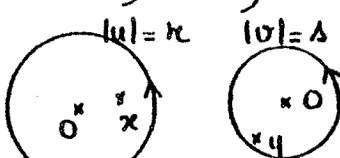
Ce développement est normalement convergent dans tout polydisque  $D(0,r) \times D(0,s)$ ,  $r > 0$ ,  $s > 0$ , contenu dans  $\Omega$ .

En fait,  $f$  est  $C^\infty$  dans  $\Omega$  et les  $a_{k,l}$  valent

$$\frac{1}{k! l!} \left( \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f \right) (0,0), \text{ ou encore:}$$

$$\frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|u|=r} \int_{|v|=s} \frac{f(u,v)}{u^{k+1} v^{l+1}} du dv,$$
 chaque contour d'intégration étant orienté positivement dans  $\mathbb{C}$ .

Pour  $(x,y) \in D(0,r) \times D(0,s)$ , la formule intégrale de Cauchy donne:

$$f(x,y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|u|=r} \int_{|v|=s} \frac{f(u,v)}{(u-x)(v-y)} du dv$$


### A) Formules de Taylor et Newton "rectangle".

#### I) Cauchy.

##### 1) Polynôme d'interpolation.

Un polynôme  $P$  de  $\mathbb{C}_{m,n}[x,y]$  vérifiant les conditions:

$$\forall (k,l) \in [0,m] \times [0,n] \quad \left( \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} P \right) (0,0) = \left( \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f \right) (0,0)$$

s'écrit nécessairement:

$$P(x,y) = \sum_{(k,l) \in [0,m] \times [0,n]} a_{k,l} x^k y^l$$

$y^n$	$xy^n$			$x^m y^n$
$y$	$xy$			$x^m y$
$1$	$x$	$x^2$		$x^m$

base de  $\mathbb{C}_{m,n}[x,y]$

2) Reste

Soit  $R(x,y) = f(x,y) - P(x,y)$

Pour  $|x| < r$ ,  $|y| < s$ :

$$R(x,y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{(u-x)(v-y)} du dv - \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \frac{x^k y^l}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{u^{k+1} v^{l+1}} du dv$$

$$R(x,y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \left( \frac{1}{(u-x)(v-y)} - \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \frac{x^k y^l}{u^{k+1} v^{l+1}} \right) f(u,v) du dv$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \left( \frac{1}{(u-x)(v-y)} - \underbrace{\left( \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{u^{k+1}} \right) \left( \sum_{l=0}^n \frac{y^l}{v^{l+1}} \right)} \right) f(u,v) du dv$$

à cause de la structure "rectangle"

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \left( \frac{1}{(u-x)(v-y)} - \frac{\left(1 - \left(\frac{x}{u}\right)^{m+1}\right) \left(1 - \left(\frac{y}{v}\right)^{n+1}\right)}{\left(1 - \frac{x}{u}\right) u \left(1 - \frac{y}{v}\right) v} \right) f(u,v) du dv$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=\kappa \\ |v|=\delta}} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{m+1} + \left(\frac{y}{v}\right)^{n+1} - \left(\frac{x}{u}\right)^{m+1} \left(\frac{y}{v}\right)^{n+1}}{(u-x)(v-y)} f(u,v) du dv$$

et ainsi, le reste se scinde en trois termes, dont les deux premiers sont "symétriques en  $x, y$ ":

$$R(x,y) = \frac{x^{m+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=\kappa \\ |v|=\delta}} \frac{f(u,v)}{u^{m+1} (u-x)(v-y)} du dv$$

$$+ \frac{y^{n+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=\kappa \\ |v|=\delta}} \frac{f(u,v)}{v^{n+1} (v-y)(u-x)} du dv$$

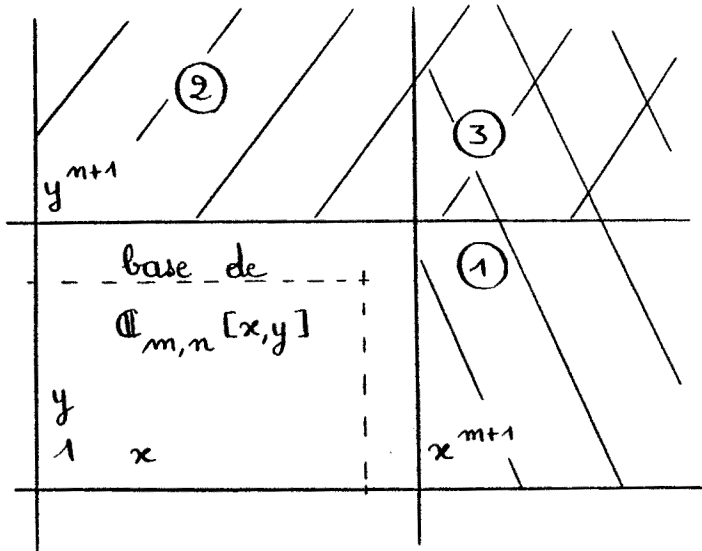
$$- \frac{x^{m+1} y^{n+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=\kappa \\ |v|=\delta}} \frac{f(u,v)}{u^{m+1} v^{n+1} (u-x)(v-y)} du dv$$

chacun des cercles  $|u|=\kappa$ ,  $|v|=\delta$  étant orienté positivement dans  $\mathbb{C}$ .

Remarquons que ce reste converge bien vers 0 lorsque  $m$  et  $n$  tendent vers  $+\infty$ , et qu'il y a convergence uniforme sur les polydisques contenus dans  $D(0,\kappa) \times D(0,\delta)$ .



3) Interprétation des termes du reste



Soit  $(x,y) \in D(0,r) \times D(0,s)$   
 A cause de l'absolue convergence du développement de  $f(x,y)$ , les trois séries:

$$I_1 = \sum_{\substack{k \geq m+1 \\ l \geq 0}} a_{k,l} x^k y^l$$

$$I_2 = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ l \geq n+1}} a_{k,l} x^k y^l$$

$$I_3 = \sum_{\substack{k \geq m+1 \\ l \geq n+1}} a_{k,l} x^k y^l$$

convergent.

Or

$$I_1 = \sum_{\substack{k \geq m+1 \\ l \geq 0}} \frac{x^k y^l}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{u^{k+1} v^{l+1}} du dv$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \sum_{\substack{k \geq m+1 \\ l \geq 0}} \left(\frac{x}{u}\right)^k \left(\frac{y}{v}\right)^l \frac{f(u,v)}{u v} du dv$$

en raison de la convergence normale de la série  $\sum_{\substack{k \geq m+1 \\ l \geq 0}} \left(\frac{x}{u}\right)^k \left(\frac{y}{v}\right)^l$

vers  $\left(\frac{x}{u}\right)^{m+1} \frac{1}{(1 - \frac{x}{u})(1 - \frac{y}{v})}$  sur  $|u|=r, |v|=s$

$$I_1 = \frac{x^{m+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=\kappa \\ |v|=\delta}} \frac{f(u,v)}{u^{m+1}(u-x)(v-y)} \quad \text{dudo : premier terme du reste}$$

De manière symétrique,

$$I_2 = \frac{y^{n+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=\kappa \\ |v|=\delta}} \frac{f(u,v)}{v^{n+1}(v-y)(u-x)} \quad \text{dudo : second terme du reste}$$

$$I_3 = \sum_{\substack{k \geq m+1 \\ l \geq n+1}} \frac{x^k y^l}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=\kappa \\ |v|=\delta}} \frac{f(u,v)}{u^{k+1} v^{l+1}} \quad \text{dudo}$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=\kappa \\ |v|=\delta}} \sum_{\substack{k \geq m+1 \\ l \geq n+1}} \left( \frac{x}{u} \right)^k \left( \frac{y}{v} \right)^l \frac{f(u,v)}{uv} \quad \text{dudo}$$

car converge normalement vers  

$$\frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{m+1} \left(\frac{y}{v}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{x}{u}\right) \left(1-\frac{y}{v}\right)} \quad \text{sur } |u|=\kappa, |v|=\delta$$

$$I_3 = \frac{x^{m+1} y^{n+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=\kappa \\ |v|=\delta}} \frac{f(u,v)}{u^{m+1} v^{n+1} (u-x)(v-y)} \quad \text{dudo : dernier terme du reste}$$

#### 4) Remarque

Ces polynômes "rectangles" sont particulièrement adaptés aux fonctions du type  $f(x, y) = g(x) h(y)$  où  $g$  et  $h$  sont holomorphes en 0 :

$$\text{Si } g(x) = \sum_{k \geq 0} g_k x^k \text{ au voisinage de } 0 \text{ et}$$

$$h(y) = \sum_{l \geq 0} h_l y^l \text{ au voisinage de } 0,$$

le polynôme de Taylor de  $f$  dans  $\mathbb{C}_{m,n}[x,y]$  est :

$$\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n g_k h_l x^k y^l = \left( \sum_{k=0}^m g_k x^k \right) \left( \sum_{l=0}^n h_l y^l \right).$$

Par exemple, pour  $\kappa > 0, \delta > 0, |x| < \kappa, |y| < \delta,$

$$e^{x+y} = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^l}{l!} + \frac{x^{m+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=\kappa \\ |v|=\delta}} \frac{e^{u+v}}{u^{m+1}(u-x)(v-y)} du dv$$

$$+ \frac{y^{n+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=\kappa \\ |v|=\delta}} \frac{e^{u+v}}{v^{n+1}(u-x)(v-y)} du dv - \frac{x^{m+1} y^{n+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=\kappa \\ |v|=\delta}} \frac{e^{u+v}}{u^{m+1} v^{n+1}(u-x)(v-y)} du dv$$

## II) Newton

### 1) Construction

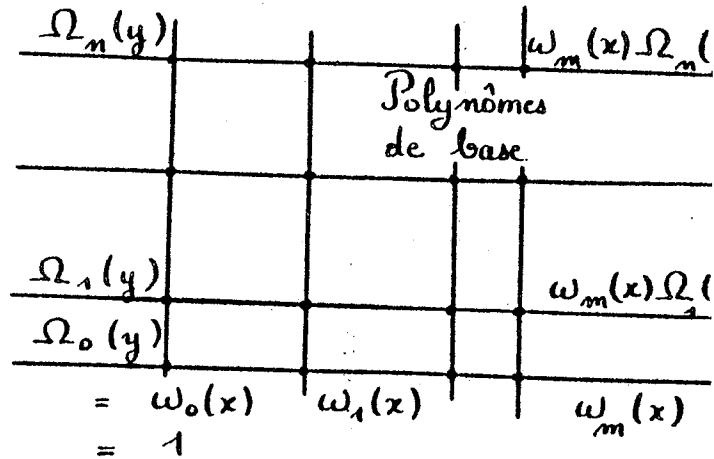
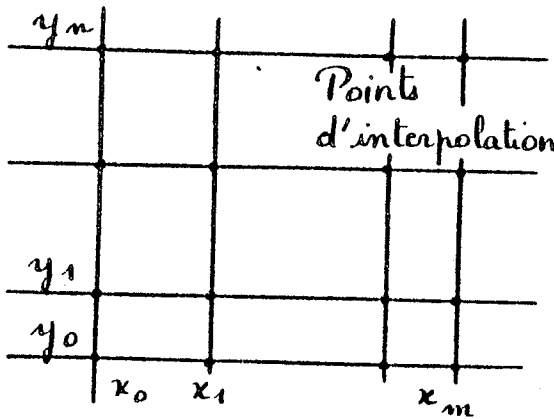
Étudions maintenant le cas de points tous distincts, obtenu à partir du précédent, en "éclatant" le point  $(0,0)$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{J} = \left\{ (x_k, y_\ell) \mid \begin{array}{l} 0 \leq k \leq m \\ 0 \leq \ell \leq n \end{array} \right\};$$

$f$  est supposée holomorphe dans  $O_1 \times O_2$ , où  $O_1$  (resp.  $O_2$ ) sont des ouverts de  $\mathbb{C}$  contenant les  $x_k$  (resp.  $y_\ell$ ).

$\Gamma_1$  (resp.  $\Gamma_2$ ) sont des courbes fermées simples orientées positivement tracées dans  $O_1$  (resp.  $O_2$ ) contenant les  $x_k$  (resp.  $y_\ell$ ) à leur intérieur supposé simplement connexe.

Aucun ordre n'est choisi a priori sur les points  $x_k$  ou  $y_\ell$  qui sont des complexes, mais les polynômes de base de  $\mathbb{C}_{m,n}[x,y]$  choisis dépendent explicitement du numérotage des points du rectangle: ils sont calqués sur les points de la manière suivante:



où

$$\begin{cases} \omega_0(x) = \Omega_0(y) = 1 \\ \omega_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) & 1 \leq k \leq m+1 \\ \Omega_\ell(y) = \prod_{j=0}^{\ell-1} (y - y_j) & 1 \leq \ell \leq n+1 \end{cases}$$

Les  $(m+1)(n+1)$  polynômes  $\omega_k(x) \Omega_\ell(y)$   $\begin{array}{l} 0 \leq k \leq m \\ 0 \leq \ell \leq n \end{array}$

de  $\mathbb{C}_{m,n}[x,y]$  en forment une base car:

les  $(m+1)(n+1)$  équations  $(i,j)$  :  $0 \leq i \leq m$   
 $0 \leq j \leq n$

écrites dans le même ordre que les couples  $(k,l)$  dans :

$$\mathcal{L}_{i,j} : \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \lambda_{k,l} \omega_k(x_i) \Omega_l(y_j) = 0$$

forment un système linéaire homogène triangulaire inversible.

Pour la même raison, il existe un unique polynôme

$P$  dans  $\mathbb{Q}_{m,n}[x,y]$  vérifiant :

$$\forall (i,j) \in [0,m] \times [0,n] \quad P(x_i, y_j) = f(x_i, y_j).$$

(cf. exemple de l'introduction)

Utilisons une démarche tensorielle pour exprimer polynôme et reste dans ce cas.

Considéant  $f(x,y)$  comme fonction de la seule variable  $x$ , ( $y$  fixé), appliquons la formule de Newton relative aux points  $x_0, x_1, \dots, x_m$  :

$$f(x,y) = \underbrace{\sum_{k=0}^m [x_0, \dots, x_k; f(x,y)]_x \omega_k(x)}_{\text{polynôme de Newton}} + \underbrace{[x_0, \dots, x_m, x; f(x,y)]_x \omega_{m+1}(x)}_{\text{reste}}$$

où  $[x_0, \dots, x_k; f(x,y)]_x$  désignent les différences divisées habituelles de  $x \rightarrow f(x,y)$  prises entre les points  $x_0, \dots, x_k$ .

Considéant maintenant chaque terme  $[x_0, \dots, x_k; f(x,y)]_x$  comme fonction de  $y$ , appliquons-lui la formule de Newton relative aux points  $y_0, \dots, y_n$ ; ceci est possible, puisque tous les points  $(x_i, y_j)$   $0 \leq i \leq k$   $0 \leq j \leq n$  sont des points

d'interpolation.



Et ainsi,

$$R(x,y) = [x_0, \dots, x_m, x; f(x,y)]_x \omega_{m+1}(x) + [y_0, \dots, y_n, y; f(x,y)]_y \Omega_{n+1}(y) - [y_0, \dots, y_n, y; [x_0, \dots, x_m, x; f(x,y)]_x]_y \omega_{m+1}(x) \Omega_{n+1}(y)$$

Nous avons donc été amenés à définir des différences divisées pour une fonction de deux variables  $x$  et  $y$ , qui semblent a priori dépendre de l'ordre choisi entre  $x$  et  $y$ .

### 3) Différences divisées à deux variables, formules intégrales.

Si l'on raisonne en commençant par la variable  $y$  au lieu de la variable  $x$ , en identifiant les coefficients des  $\omega_k(x) \Omega_l(y)$  dans les deux polynômes obtenus (unicité du polynôme d'interpolation), on montre :

$$[y_0, \dots, y_l; [x_0, \dots, x_k; f(x,y)]_x]_y = [x_0, \dots, x_k; [y_0, \dots, y_l; f(x,y)]_y]_x$$

qu'on peut donc noter :

$$[x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_l; f(x,y)]$$

Toujours en raison de l'unicité du polynôme d'interpolation, ces différences divisées ont un caractère "associatif" : calcul alternatif de différences selon  $x$  ou selon  $y$  ; ceci permet de les calculer récursivement de plusieurs manières, qui correspondent par exemple à l'ordre de donnée des points. Cependant, à chaque étape, l'ensemble des points doit vérifier la règle du rectangle, car le calcul de  $[x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_l; f(x,y)]$  nécessite toutes les valeurs  $f(x_i, y_j)$   $0 \leq i \leq k$   $0 \leq j \leq l$ .

D'autre part, la formule d'Hermite appliquée successivement en  $x$  et en  $y$  donne :

$$[x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_l; f(x, y)] = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{f(u, v)}{\omega_{k+1}(u) \Omega_{l+1}(v)} du dv$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{contours} \\ \text{convenables} \\ \text{contenus} \\ \text{dans } O_1 \text{ (} O_2 \text{)} \end{array} \right.$

Conséquence: cette différence divisée est indépendante de l'ordre des intégrations (par Fubini) : c'est la propriété établie plus haut.

D'autre part, elle ne dépend pas non plus d'une permutation sur les  $x_i$ , (resp. les  $y_j$ ) : "commutativité".

Formule de Cauchy et formules d'Hermite appliquées aux différences divisées qui apparaissent dans le reste donnent :

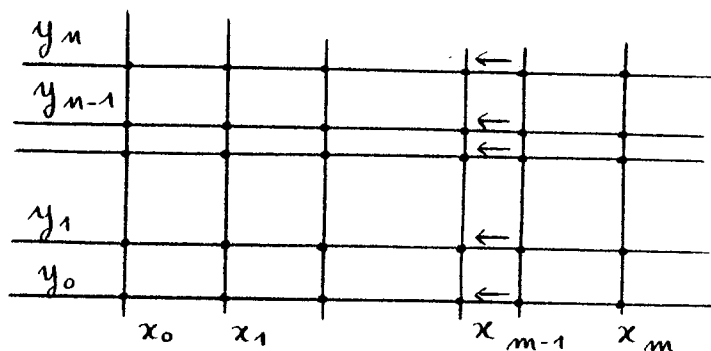
$$R(x, y) = \frac{\omega_{m+1}(x)}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{f(u, v)}{(u-x)(v-y) \omega_{m+1}(u)} du dv$$

$$+ \frac{\Omega_{n+1}(y)}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{f(u, v)}{(u-x)(v-y) \Omega_{n+1}(v)} du dv$$

$$- \frac{\omega_{m+1}(x) \Omega_{n+1}(y)}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{f(u, v)}{(u-x)(v-y) \omega_{m+1}(u) \Omega_{n+1}(v)} du dv$$



Remarquons que l'écriture intégrale des différences divisées a l'avantage d'avoir un sens quand certaines des abscisses  $x_i$  (ordonnées  $y_j$ ) sont confondues : la formule de Cauchy montre qu'elles s'expriment en fonction des dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$  de  $f$  en des points qui apparaissent plusieurs fois. Comme les conditions d'interpolation sont aussi remplacées par des conditions sur les dérivées partielles, les formules précédentes sont valables dans tous les cas. (noter qu'interviennent des dérivées dans les directions  $x$  et  $y$  parce que les points sont sur des axes parallèles aux axes de coordonnées).



En particulier, si  $\forall i \in [0, m] x_i = 0$  et  $\forall j \in [0, n] y_j = 0$ , on retrouve comme polynôme et reste les expressions du I ; (limite uniforme sous  $\int$  pour deux suites :

$$\text{d'abscisses distinctes } (x_0^\kappa, x_1^\kappa, \dots, x_m^\kappa) \xrightarrow{\kappa \rightarrow +\infty} (0, 0, \dots, 0)$$

$$\text{d'ordonnées distinctes } (y_0^\kappa, y_1^\kappa, \dots, y_n^\kappa) \xrightarrow{\kappa \rightarrow +\infty} (0, 0, \dots, 0)$$

#### 4) Convergence

$x$  (resp.  $y$ ) est à l'intérieur de  $\Gamma_1$  (resp.  $\Gamma_2$ ), donc  $d(x, \Gamma_1) > 0$  (resp.  $d(y, \Gamma_2) > 0$ ).

Comme  $f$  est une fonction holomorphe dans  $O_1 \times O_2$ , donc bornée sur  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$  [3], la forme du reste montre

que la convergence dépend essentiellement de la convergence uniforme des termes :

$$\frac{\omega_{m+1}(x)}{\omega_{m+1}(u)} \quad \text{et} \quad \frac{\Omega_{m+1}(y)}{\Omega_{m+1}(v)} \quad \text{vers } 0 \quad \text{quand } (u, v) \text{ décrit } \Gamma_1 \times \Gamma_2.$$

Une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi est que pour chaque  $(x, y)$  à l'intérieur de  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ ,

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall u \in \Gamma_1 \quad \left| \frac{x-x_i}{u-x_i} \right| \leq \alpha < 1$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \forall v \in \Gamma_2 \quad \left| \frac{y-y_j}{v-y_j} \right| \leq \beta < 1$$

Dans le cas simple où :  $O_i = D(O, R_i)$ ,  $R_i > 0$ ,  $i=1, 2$ , et où les abscisses  $x_i$  (resp. ordonnées  $y_j$ ) sont de module  $\leq \delta_1$  (resp.  $\delta_2$ ), les polynômes d'interpolation "rectangles" convergent vers la fonction en tout point de  $D(O, R_1 - 2\delta_1) \times D(O, R_2 - 2\delta_2)$ ; ce qui restreint évidemment le diamètre des points d'interpolation; mais on a utilisé ici une majoration grossière.

Cependant, si  $f$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}^2$ , la convergence est assurée partout car les rayons  $R_i$ ,  $i=1, 2$ , peuvent prendre des valeurs aussi grandes que possible [ch 3].

Cette étude rapide montre aussi l'intérêt de conditions d'Hermite en un nombre fini de points, ce qui simplifie les majorations et fait jouer un rôle privilégié aux lemniscates.

### 5) Forme de Lagrange des polynômes d'interpolation "rectangles"

$$\text{Soient } \begin{cases} l_{i,x}(x) = \prod_{k=0, \dots, m, k \neq i} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)} / \prod_{k=0, \dots, m, k \neq i} \frac{(x_i-x_k)}{(x_i-x_k)} \\ l_{j,y}(y) = \prod_{l=0, \dots, n, l \neq j} \frac{(y-y_l)}{(y_j-y_l)} / \prod_{l=0, \dots, n, l \neq j} \frac{(y_j-y_l)}{(y_j-y_l)} \end{cases}$$

quand les abscisses  $x_i$  sont distinctes,

Soit 
$$\underline{L_{i,j}(x,y) = l_{i,x}(x) l_{j,y}(y)}$$

$L_{i,j} \in \mathbb{Q}_{m,n}[x,y]$ , et comme:

$$L_{i,j}(x_k, y_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

le polynôme 
$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f(x_i, y_j) L_{i,j}$$
 interpole  $f$

aux points  $(x_i, y_j)$   $0 \leq i \leq m$ ,  $0 \leq j \leq n$ . A cause de l'unicité

de ce polynôme, c'est aussi le polynôme écrit sous forme d'Hermite:

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j; f(x,y)] \omega_i(x) \Omega_j(y)$$

## B) Formules de Taylor et Newton "triangle"

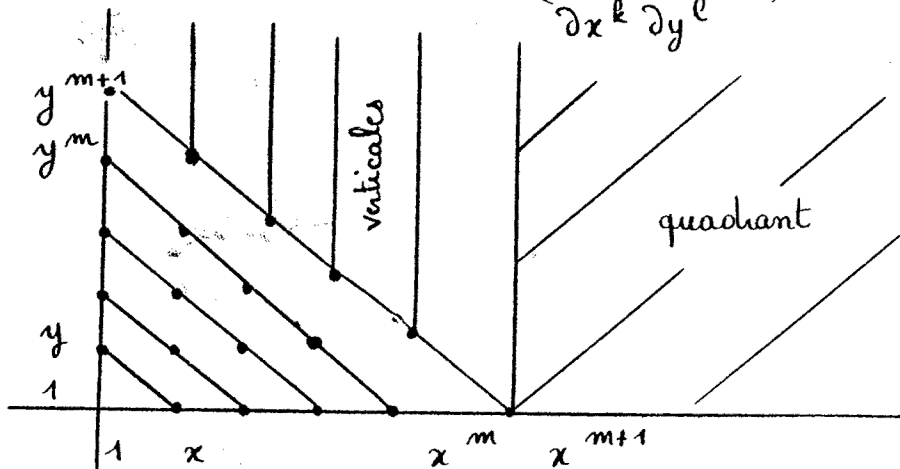
### I) Taylor

#### 1) Polynôme d'interpolation

Avec les mêmes hypothèses qu'au A), 
$$\sum_{k+l \leq m} a_{k,l} x^k y^l$$

est l'unique polynôme de  $\mathbb{Q}_m[x,y]$  qui vérifie les conditions de Taylor à l'origine:

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } k+l \leq m \quad \left( \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} P \right) (0,0) = \left( \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f \right) (0,0).$$



2) Reste

Ecrivons-le directement grâce à l'interprétation suivante :

$$R(x, y) = \sum_{k+l \geq m+1} a_{k,l} x^k y^l$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^m \sum_{l \geq m+1-k} a_{k,l} x^k y^l}_{\text{somme sur les verticales}} + \underbrace{\sum_{\substack{k \geq m+1 \\ l \geq 0}} a_{k,l} x^k y^l}_{\text{somme sur le quadrant restant}}$$

Chacune de ces séries converge pour  $|x| < r$ ,  $|y| < s$ , à cause de la convergence absolue de la série initiale.

$$\bullet \sum_{l \geq m+1-k} a_{k,l} x^k y^l = \sum_{l \geq m+1-k} \frac{x^k y^l}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{u^{k+1} v^{l+1}} du dv$$

pour  $0 \leq k \leq m$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \sum_{l \geq m+1-k} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^k \left(\frac{y}{v}\right)^l f(u,v)}{u v} du dv$$

convergence normale de la série sous  $\iint$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^k \left(\frac{y}{v}\right)^{m+1-k} f(u,v)}{u v \left(1 - \frac{y}{v}\right)} du dv$$

$$\sum_{l \geq m+1-k} a_{k,l} x^k y^l = \frac{x^k y^{m+1-k}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{(v-y) u^{k+1} v^{m+1-k}} du dv$$

• Un calcul analogue conduit à :

$$\sum_{\substack{l \geq 0 \\ k \geq m+1}} a_{k,l} x^k y^l = \frac{x^{m+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{(u-x)(v-y) u^{m+1}} du dv$$

Le reste se scinde donc en  $m+2$  termes:

$$R(x,y) = \sum_{k=0}^m \frac{x^k y^{m+1-k}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{(v-y) u^{k+1} v^{m+1-k}} du dv$$

$$+ \frac{x^{m+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{(v-y)(u-x) u^{m+1}} du dv$$

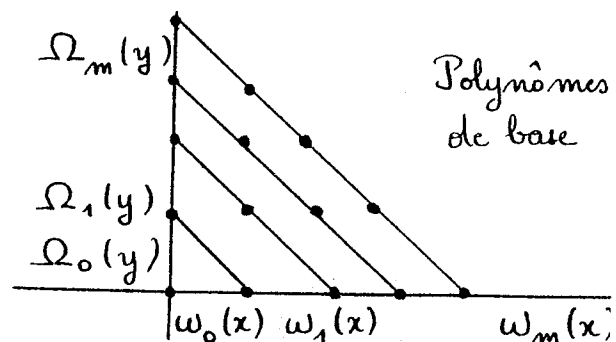
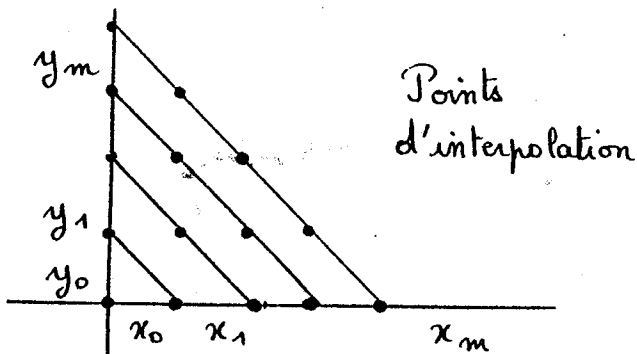
Un découpage utilisant des horizontales à la place des verticales échangerait les rôles de  $x$  et  $y$ .

Cette fois, le nombre de termes du reste augmente avec le nombre de données. Une autre démarche, comme on l'a vue au chapitre 1, remédie à ce défaut, mais elle s'adapte moins bien au cas de points distincts.

## II Newton.

### 1) Construction.

$\mathcal{J} = \{ (x_k, y_l) \mid k+l \leq m \}$ ; les polynômes de base de  $\mathbb{C}_m[x,y]$  choisis sont les  $(\omega_k(x) \Omega_l(y))_{k+l \leq m}$ .



Par le même principe que pour la configuration rectangulaire il existe un unique polynôme d'interpolation de  $f$  dans  $\mathbb{C}_m[x, y]$

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^m [x_0, \dots, x_k; f(x, y)]_x \omega_k(x) + [x_0, \dots, x_m, x; f(x, y)]_x \omega_{m+1}(x)$$

En exprimant  $[x_0, \dots, x_k; f(x, y)]_x$  à l'aide de la formule de Newton relative aux seuls points  $y_0, \dots, y_{m-k}$  :

$$[x_0, \dots, x_k; f(x, y)]_x = \sum_{\ell=0}^{m-k} [y_0, \dots, y_\ell; [x_0, \dots, x_k; f(x, y)]_x]_y \Omega_\ell(y) + [y_0, \dots, y_{m-k}, y; [x_0, \dots, x_k; f(x, y)]_x]_y \Omega_{m-k+1}(y)$$

on obtient :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^{m-k} [y_0, \dots, y_\ell; [x_0, \dots, x_k; f(x, y)]_x]_y \omega_k(x) \Omega_\ell(y) \left. \vphantom{\sum_{k=0}^m} \right\} \text{polynôme de } \mathbb{C}_m[x, y]$$

$$+ \sum_{k=0}^m [y_0, \dots, y_{m-k}, y; [x_0, \dots, x_k; f(x, y)]_x]_y \omega_k(x) \Omega_{m-k+1}(y) \left. \vphantom{\sum_{k=0}^m} \right\} \text{reste}$$

$$+ [x_0, \dots, x_m, x; f(x, y)]_x \omega_{m+1}(x)$$

2) Forme intégrale du reste

$$R(x, y) = \sum_{k=0}^m \frac{\omega_k(x) \Omega_{m-k+1}(y)}{(2i\pi)^2} \iint \frac{f(u, v)}{(v-y) \omega_{k+1}(u) \Omega_{m-k+1}(v)} du dv$$

$$+ \frac{\omega_{m+1}(x)}{(2i\pi)^2} \iint \frac{f(u, v)}{(v-y)(u-x) \omega_{m+1}(u)} du dv$$

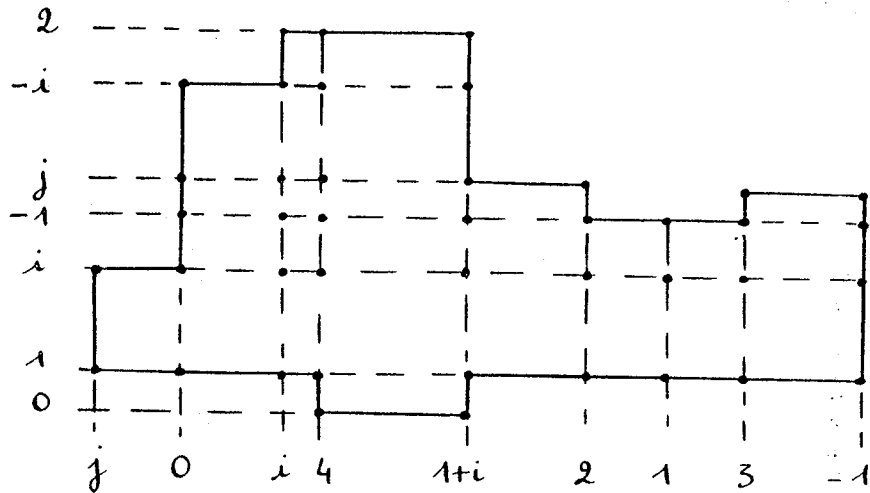
Par un passage à la limite comme au A), on retrouve la formule de Taylor du BI).

C) Généralisation

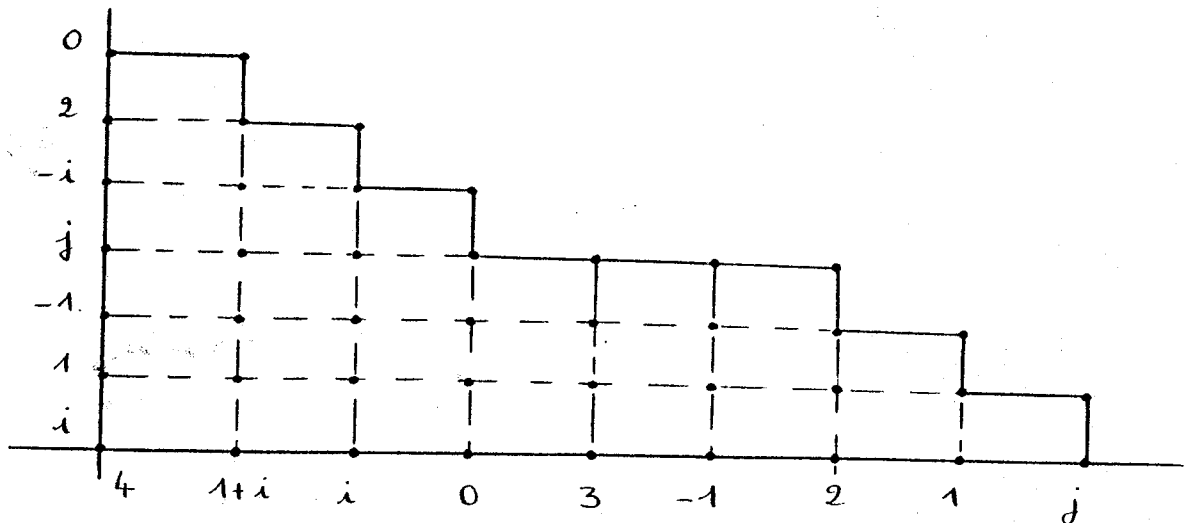
Comme on l'a constaté dans le cas d'une configuration triangulaire, la méthode tensorielle s'applique tant que l'ensemble  $\mathcal{J}$  des points d'interpolation vérifie la règle du rectangle :

$$\left. \begin{array}{l} (x_k, y_k) \in \mathcal{J} \\ i \leq k \\ j \leq l \end{array} \right\} \Rightarrow (x_i, y_j) \in \mathcal{J}$$

Un algorithme très simple permet de déterminer si un ensemble fini de points de  $\mathbb{Q}^2$  peut être numéroté de manière à vérifier ces conditions. Par exemple, l'ensemble :



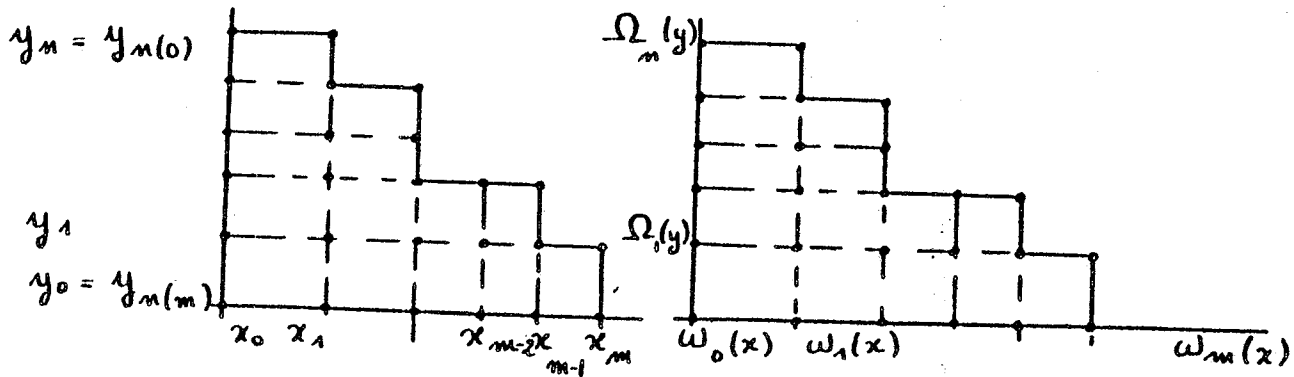
peut être réordonné en :



Si  $\mathcal{Y}$ , formé de points distincts, vérifie la règle du rectangle, on a :

$$\exists m \in \mathbb{N} \exists n : [0, m] \rightarrow \mathbb{N} \text{ décroissante tels que:}$$

$$\mathcal{Y} = \left\{ (x_i, y_j) \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n(i) \right\}$$



Alors, on choisit le polynôme d'interpolation dans l'espace vectoriel engendré par les  $(\omega_k(x) \Omega_l(y))$   $0 \leq k \leq m$   
 $0 \leq l \leq n(k)$

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^m [x_0, \dots, x_k; f(x, y)]_x \omega_k(x) + [x_0, \dots, x_m, x; f(x, y)]_x \omega_{m+1}(x)$$

$$f(x, y) = \left. \begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{n(k)} [y_0, \dots, y_l; [x_0, \dots, x_k; f(x, y)]_x]_y \omega_k(x) \Omega_l(y) \quad \left. \vphantom{\sum_{k=0}^m} \right\} \text{polynôme} \\ & + \sum_{k=0}^m [y_0, \dots, y_{n(k)}; [x_0, \dots, x_k; f(x, y)]_x]_y \omega_k(x) \Omega_{n(k)+1}(y) \quad \left. \vphantom{\sum_{k=0}^m} \right\} \text{reste} \\ & + [x_0, \dots, x_m, x; f(x, y)]_x \omega_{m+1}(x) \end{aligned} \right\}$$

D'où une forme intégrale du reste comme au BII).



## Conclusion

L'intérêt des polynômes  $w_k(x) \Omega_l(y)$  tient à la propriété:  
 $w_k(x_i) \Omega_l(y_j) = 0$  dès que  $k > i$  ou  $l > j$   
 et  $w_k(x_k) \Omega_l(y_l) \neq 0$  (polynômes dérivés pour des conditions d'Hermite), ce qui conduit à un système triangulaire.

Remarquons d'autre part que:  
 $\{w_k(x) = 0\} \cap \{\Omega_l(y) = 0\} = \{(x_i, y_j) / i < k, j < l\}$   
 et ainsi :

$$[x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_l; f(x, y)] \text{ qui vaut } \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint \frac{f(u, v)}{w_{k+1}(u) \Omega_{l+1}(v)} du dv$$

$\begin{matrix} \times x_0 \\ \times x_k \end{matrix}$

$\begin{matrix} \times y_0 \\ \times y_l \end{matrix}$

s'écrit encore :

$$P \in \overline{\{w_{k+1}(x) = 0\} \cap \{\Omega_{l+1}(y) = 0\}} \quad \text{Res}_{\{P\}} \left[ \begin{array}{l} f(u, v) du \wedge dv \\ w_{k+1}(u) \cdot \Omega_{l+1}(v) \end{array} \right]$$

(avec les notations de Grothendieck: chapitre suivant)

D'où l'importance du rôle joué par les courbes algébriques:

$$\{w_k(x) = 0\} \quad \text{et} \quad \{\Omega_l(y) = 0\}$$

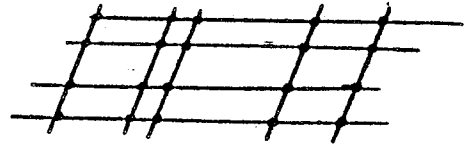
Nous avons traité ici (A) le cas particulier où  
 $\{w_k(x) = 0\}$  (resp.  $\{\Omega_l(y) = 0\}$ ) sont formées de droites  
 parallèles à l'axe des  $y$  (resp. des  $x$ ).

Existe-t-il des résultats analogues:

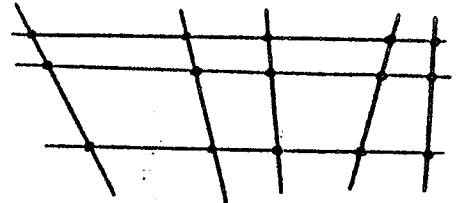
- polynômes d'Hermite,
- coefficients sous forme de différences divisées,
- relations de récurrence sur les différences divisées,

- forme intégrale (double) des coefficients et du reste, si les points d'interpolation sont les points d'intersection de deux ensembles de:

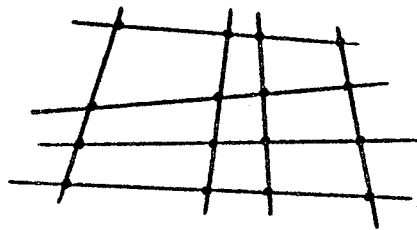
- droites parallèles,



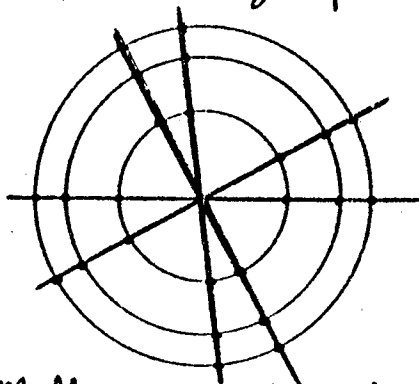
- droites, l'un des deux systèmes étant formé de droites parallèles,



- droites,



- courbes algébriques?



Dans ce cas par exemple (cercles de centre  $(0,0)$  et droites passant par l'origine), les valeurs de la fonction en deux points diamétralement opposés sont liées.

Malheureusement, plus les hypothèses sur les courbes sont larges, moins il subsiste de résultats.

Quant à l'interpolation rationnelle, elle consiste en la recherche d'une fraction  $P/Q$  qui coïncide avec  $f$  aux points d'interpolation, problème qui conduit à la recherche de deux polynômes  $P$  et  $Q$  dans des espaces vectoriels de dimensions convenables, tels que  $Qf - P$  s'annule aux points donnés; cette fois encore, il s'agit de développer  $Qf - P$  dans la base des  $w_k(x)\Omega_l(y)$ , la principale difficulté étant le développement de  $Qf$ .

## References

- [1] C. de BOOR (1981) Topics in multivariate approximation theory, in "Topics in numerical analysis" Lecture Notes in Mathematics (Springer-Verlag). 965
- [2] P.J. DAVIS (1963) Interpolation and approximation. Blaisdell Publishing Company.
- [3] B.A. FUKS (1965) Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables, Translations of Mathematical Monographs.
- [4] J.I. MAEZTU (1982) Divided differences associated with reversible systems in  $\mathbb{R}^2$ , J. SIAM. Num. Anal. vol 1 n°5 p 1032-1040.
- [5] G. MÜHLBACH (1979) A recurrence formula for generalized divided differences and some applications, Num. Math. 31 p 97-110
- [6] D.D. STANCU (1964) The remainder of certain linear approximation formulas in two variables, J. SIAM Num. Anal. ser B vol 1 p 137-163
- [7] J.L. WALSH (1960) Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, Amer. Math. Soc. vol 20.

Quelques polynômes de Newton à deux variables  
calculés en REDUCE

Fichier qui permet d'effectuer les calculs :

Newton

```

operator d;
%différence divisée a deux variables batie sur les points du rectangle
(a(i),...a(j)) * (b(k),...b(l)) ;

for all a,b,f,i,k Let d(a,b,f,i,i,k,k)=f(a(i),b(k));
for all a,b,f,i,j,k such that j>i Let d(a,b,f,i,j,k,k)=
(d(a,b,f,i+1,j,k,k)-d(a,b,f,i,j-1,k,k))/(a(j)-a(i));
for all a,b,f,i,j,k,l such that l>k
Let d(a,b,f,i,j,k,l)=
(d(a,b,f,i,j,k+1,l)-d(a,b,f,i,j,k,l-1))/(b(l)-b(k));

operator herm;
%polynome d'Hermite a une variable associe aux points d'interpolation
a(0),a(1),... ;

off exp;
for all z,a Let herm(z,a,0)=1;
for all z,a,i such that i>0 Let herm(z,a,i)=herm(z,a,i-1)*(z-a(i-1));

operator ligne;
for all x,a,b,f,m,n Let ligne(x,a,b,f,m,n)=(for i=0:m sum d(a,b,f,0,i,0,n)*
herm(x,a,i));

operator newt;
%polynome de Newton associe a la fonction f de deux variables
construit sur les points du rectangle (a(0),...a(m)) * (b(0),...b(n));

for all x,y,a,b,f Let newt(x,y,a,b,f,0,0)=f(a(0),b(0));
for all x,y,a,b,f,m such that m>0 Let newt(x,y,a,b,f,m,0)=newt(x,y,a,b,f,m-1,0)
+d(a,b,f,0,m,0,0)*herm(x,a,m);
for all x,y,a,b,f,m,n such that n>0 Let newt(x,y,a,b,f,m,n)=
newt(x,y,a,b,f,m,n-1)+ligne(x,a,b,f,m,n)*herm(y,b,n);

procedure tableauDiff(a,b,f,k);
% tableau des différences divisées a deux variables relatives
au polynome de Newton le f associe aux points du rectangle
(a(0),a(1),a(2))* (b(0),...b(k)) ;

begin
for j=0:k do write
l(a,b,f,0,0,0,j)," " ,d(a,b,f,0,1,0,j)," " ,d(a,b,f,0,2,0,j);
end;

procedure coldiff(a,b,f,i,n);
% retourne la colonne i des différences divisées pour les points
d'ordonnées b(0),...b(n) ;

begin
for j=0:n do write d(a,b,f,0,i,0,j);
end;

```

Abscisses et ordonnées sont choisies parmi les suites de :

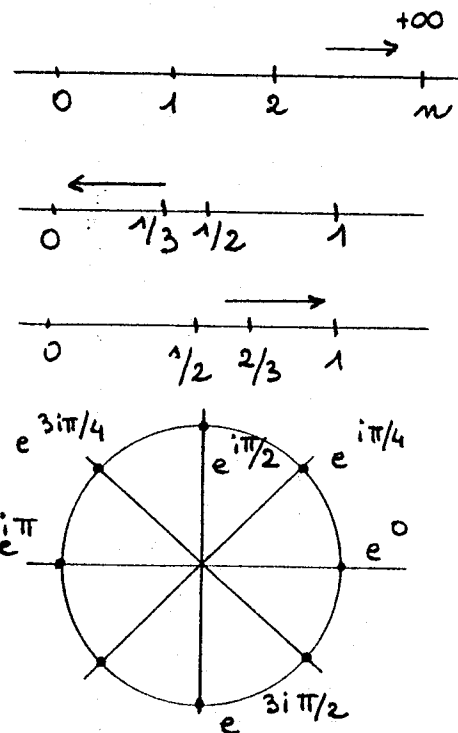
tableaux.registre

```
operator crois;
% suite de points tendant vers +infini ;
for all n such that n>=0 Let crois(n)=n;

operator conv;
% suite convergeant vers 0 ;
for all n such that n>=0 Let conv(n)=1/(n+1);

operator conv1;
% suite convergeant vers 1 ;
for all n such that n>=0 Let conv1(n)=1-1/(n+1);

operator cercle;
% points sur le cercle trigonometrique ;
Let cercle(0)=0;
Let cercle(1)=pi;
Let cercle(2)=pi/2;
Let cercle(3)=3*pi/2;
Let cercle(4)=pi/4;
Let cercle(5)=3*pi/4;
Let cercle(6)=5*pi/4;
Let cercle(7)=7*pi/4;
end;
```



regles

```
Let e**(i*pi/2)=i;
Let e**(3*i*pi/2)=-i;
Let e**(i*pi/4)=(1+i)/(2**(1/2));
end;
```

on doit charger ce segment, pour simplifier certaines expressions trigonométriques.

Exemple d'un polynôme à deux variables :  $1+(x(x-1)+y)(x-2)$

```
operator pol;
% fonction test ;
for all x,y. Let pol(x,y)=1+(x*(x-1)+y)*(x-2);
end;
```

Les différences divisées d'ordre suffisamment grand sont toutes nulles, comme on le constate sur le tableau suivant (écrit à l'aide de la procédure coldiff), de même que le polynôme de Newton utilisant un nombre suffisant de points d'interpolation donne exactement le polynôme.

Tableau des différences divisées :  $[x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j, \text{pol}(x,y)]$

x \ y	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	1	0	0	0
1	-2	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0

$[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; 0, 1, 2, 3, 4; \text{pol}(x,y)]$

Les polynômes d'Hermite sont les polynômes que privilégie la construction de Newton :  $\prod_{i=0}^{k-1} (x-x_i)$

herm(x,crois,1);  
x

herm(x,crois,2);  
(x-1)\*x

l'option "off exp" permet de ne pas développer cette expression.

neut(x,y,crois,crois,pol,2,2);  
(x-2)\*y+1

res:=neut(x,y,crois,crois,pol,3,1);  
res := (x-1)\*(x-2)\*x + (x-2)\*y + 1

on exp;  
res;  
3      2  
x - 3\*x + x\*y + 2\*x - 2\*y + 1

le polynôme de Newton utilisant les abscisses 0,1,2,3 et les ordonnées 0,1 est bien le polynôme initial;

neut(x,y,crois,crois,pol,3,2);  
(x-1)\*(x-2)\*x + (x-2)\*y + 1

de même, si l'on ajoute l'ordonnée 2.

herm(x,conv,1);  
x-1

res:=neut(x,y,conv,conv,pol,3,1);  
res := x - 3\*x + x\*y + 2\*x - 2\*y + 1

c'est aussi le polynôme de Newton qui utilise les abscisses 1, 1/2, 1/3, 1/4 et les ordonnées 1, 1/2.

l'option "on exp" écrit l'expression sous forme développée

Exemple de la fonction symétrique:  $\text{expo}(x,y) = e^{x+y}$

```
operator expo;
% fonction exponentielle ;
for all x,y Let expo(x,y)=e**(x+y);
% le procede tensoriel lui est bien adapte, car elle est du type
f(x)*g(y) ;
```

Tableau des différences divisées

y \ x	0	1	2	3	4
0	1	$e-1$	$\frac{(e-1)^2}{2}$	$\frac{(e-1)^3}{6}$	$\frac{(e-1)^4}{24}$
1	$e-1$	$\frac{(e-1)^2}{2}$	$\frac{(e-1)^3}{2}$	$\frac{(e-1)^4}{6}$	$\frac{(e-1)^5}{24}$
2	$\frac{(e-1)^2}{2}$	$\frac{(e-1)^3}{2}$	$\frac{(e-1)^4}{4}$	$\frac{(e-1)^5}{12}$	$\frac{(e-1)^6}{48}$
3	$\frac{(e-1)^3}{6}$	$\frac{(e-1)^4}{6}$	$\frac{(e-1)^5}{12}$	$\frac{(e-1)^6}{36}$	$\frac{(e-1)^7}{144}$
4	$\frac{(e-1)^4}{24}$	$\frac{(e-1)^5}{24}$	$\frac{(e-1)^6}{48}$	$\frac{(e-1)^7}{144}$	$\frac{(e-1)^8}{576}$

Abcisses et ordonnées étant prises parmi la même suite 0, 1, 2, ..., ce tableau est symétrique, ainsi que le polynôme d'interpolation de Newton pour le même nombre d'abcisses que d'ordonnées:

```
newt(x, // crois, crois, expo, 2, 2);
```

$$(((e^4 - 4e^3 + 6e^2 - 4e + 1)(x-1)x + 2(e^3 - 3e^2 + 3e - 1)x + 2(e^2 - 2e + 1))(y-1)y + 2((e^3 - 3e^2 + 3e - 1)(x-1)x + 2(e^2 - 2e + 1)x + 2(e-1))y + 2(e^2 - 2e + 1)(x-1)x + 4(e-1))x + 4)/4$$

( ce polynôme utilise les abcisses 0, 1, 2 )  
 C'est en fait le produit du polynôme de Newton de  $e^x$  par celui de  $e^y$ .

next(x,y,crois,crois,ex,op,2,2);

$$\begin{aligned}
 & (e^{x^2 y^2} - e^{x^2 y} - e^{x y^2} + e^{x y} - 4e^{x^2 y^2} + 6e^{x^2 y} + 6e^{x y^2} \\
 & - 3e^{x^2 y} + 6e^{x^2 y^2} - 12e^{x^2 y} + 2e^{x^2} - 12e^{x^2 y^2} + 22e^{x^2 y} \\
 & - 2e^{x^2} + 2e^{x^2 y} - 2e^{x^2 y^2} - 4e^{x^2 y} + 10e^{x^2 y^2} - 4e^{x^2} + 10e^{x^2 y} \\
 & - 24e^{x^2 y^2} + 3e^{x^2} - 4e^{x^2 y^2} + 3e^{x^2 y} + x^2 y^2 - 3x^2 y + 2x^2 - 3x^2 y^2 + 9x^2 y \\
 & - 6x^2 + 2x^2 y - 6x^2 y + 1)/4
 \end{aligned}$$

c'est le même polynôme que le précédent, mais écrit sous forme développée. (au nombre e n'est pas affectée de valeur)

Exemple de la fonction  $\text{expop}(x,y) = e^{xy}$

```

operator expop;
% fonction symetrique par rapport a x et y ;
for all x,y Let expop(x,y)=e**(x*y);
    
```

Tableau des différences divisées utilisant les  $\left\{ \begin{array}{l} \text{abscisses } 0, 1, 2, \dots \text{ de crois} \\ \text{ordonnées } 1, 1/2, 1/3 \dots \text{ de cour} \end{array} \right.$

y \ x	0	1	2
1	1	$e - 1$	$\frac{e^2 - 2e + 1}{2}$
1/2	0	$2(-\sqrt{e} + e)$	$2\sqrt{e} + e^2 - 3e$
1/3	0	$3(3e^{1/3} - 4\sqrt{e} + e)$	$\frac{3}{2}(3e^{2/3} - 6e^{1/3} + 8\sqrt{e} + e^2 - 6e)$

REDUCE calcule les expressions littéralement en fonction de e.



$$\begin{aligned} & \text{newt}(x, y, \text{crois}, \text{conv}, \text{expois}, 2, 2); \\ & (13 * e^{(2/3) * x * y} - 27 * e^{(2/3) * x * y} + 9 * e^{(2/3) * x} - 13 * e^{(2/3) * x * y} + 27 * e^{(2/3) * x * y} - 9 * e^{(2/3) * x} - 36 * e^{(1/3) * x * y} + 54 * e^{(1/3) * x * y} - 13 * e^{(1/3) * x} + 72 * e^{(1/3) * x * y} - 103 * e^{(1/3) * x * y} + 36 * e^{(1/3) * x} + 43 * \text{sqrt}(e) * x * y - 54 * \text{sqrt}(e) * x * y + 16 * \text{sqrt}(e) * x^2 - 9 * \text{sqrt}(e) * x * y + 123 * \text{sqrt}(e) * x * y - 32 * \text{sqrt}(e) * x^2 + 6 * e * x^2 * y - 5 * e * x^2 * y + e * x^2 - 6 * e * x * y + 5 * e * x * y - e * x^2 - 36 * e * x * y + 42 * e * x * y - 10 * e * x^2 + 43 * e * x * y - 52 * e * x * y + 12 * e * x + 2 * x^2 - 6 * x + 4) / 4 \end{aligned}$$

polynôme d'interpolation de Newton calculé à l'aide des différences divisées précédentes : il est écrit ici sous forme développée.

Exemple de la fonction  $\text{expois}(x, y) = e^{x+iy}$

```
operator expois;
% fonction a valeurs complexes;
for all x,y let expois(x,y)=e**(x+i*y);
```

Le tableau des différences divisées utilisant les abscisses 0, 1, 2 et les ordonnées 0,  $\pi$ ,  $\pi/2$  permet de calculer le polynôme de Newton correspondant, écrit sous forme développée ou non.

```
coldiff(crois, cercle, expois, 0, 4);
```

$$\begin{aligned} & 1 \\ & (-2)/\pi \\ & (-4 * e^{(i * \pi) / 2}) / \pi \\ & (4 * (e^{(3 * i * \pi) / 2} + 3 * e^{(i * \pi) / 2} + 2)) / (3 * \pi) \\ & (16 * (-16 * e^{(i * \pi) / 4} + e^{(3 * i * \pi) / 2} + 15 * e^{(i * \pi) / 2} + 10)) / (15 * \pi) \end{aligned}$$

retourne les différences divisées :  
 $[0; 0; e^{x+iy}]$ ,  $[0; 0, \pi; e^{x+iy}]$   
 $[0; 0, \pi, \frac{\pi}{2}; e^{x+iy}]$ ,  $[0; 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}; e^{x+iy}]$   
 et  $[0; 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}; e^{x+iy}]$

mais ces expressions se simplifient si on utilise "réelles":

In "regles":

$$\frac{\text{col diff}(\text{crois}, \text{cercle}, \text{expoin}, 2, 1);}{1}$$

$$(-2)/\pi$$

2

$$(-4*i)/\pi$$

3

$$(3*(i+1))/(3*\pi)$$

4

$$(32*(7*\text{sqrt}(2)*i + 5*\text{sqrt}(2) - 3*i - 3))/(15*\text{sqrt}(2)*\pi)$$

même liste que la précédente  
mais simplifiée.

x \ y	0	1	2
0	1	$e - 1$	$(e^2 - 2*e + 1)/2$
$\pi$	$(-2)/\pi$	$(-2*(e - 1))/\pi$	$(- (e^2 - 2*e + 1))/\pi$
$\pi/2$	$(-4*i)/\pi$	$(-4*(e - 1)*i)/\pi$	$(-2*(e^2 - 2*e + 1)*i)/\pi$

qui engendre le polynôme:

$$\frac{\text{newt}(x,y,\text{crois}, \text{cercle}, \text{expoin}, 2, 2);}{2}$$

$$((e^2 - 2*e + 1)*(x - 1)*x + 2*(e - 1)*x + 2)*(4*(\pi - y)*i + (\pi - 2*y) + (\pi - 2*y) + (\pi - 2*y))/ (2*\pi)$$

on expr:

$$\frac{\text{newt}(x,y,\text{crois}, \text{cercle}, \text{expoin}, 1, 1);}{\text{forme développée}}$$

$$(e*\pi*x^2 - 2*e*x*y - \pi*x + \pi + 2*x*y - 2*y)/\pi$$

$$\frac{\text{newt}(x,y,\text{crois}, \text{cercle}, \text{expoin}, 2, 2);}{\text{forme développée}}$$

$$(4*e^2*i*\pi*x^2*y - 4*e^2*i*\pi*x*y - 4*e^2*i*x^2*y + 4*e^2*i*x*y + e^2*\pi^2*x^2 - e^2*\pi^2*x - 2*e^2*\pi*x^2*y + 2*e^2*\pi*x*y - 8*e^2*i*\pi*x^2*y + 16*e^2*i*\pi*x*y + 8*e^2*i*x^2*y - 16*e^2*i*x*y - 2*e^2*\pi^2*x + 4*e^2*\pi^2*x + 4*e^2*\pi^2*y - 8*e^2*\pi*x^2*y + 4*i*\pi*x^2*y - 12*i*\pi*x*y + 3*i*\pi*y - 4*i*x^2*y + 12*i*x*y - 8*i*y^2 + \pi^2*x^2 - 3*\pi^2*x + 2*\pi^2 - 2*\pi^2*x^2 + 6*\pi^2*x*y - 4*\pi^2*y)/ (2*\pi)$$



5.

Formules d' Hermite et différences divisées généralisées

I Introduction

1) Motivation: forme intégrale de l'erreur dans l'interpolation polynômiale.

Dans le cadre de l'interpolation polynômiale, puis de l'interpolation rationnelle, l'étude théorique de la convergence repose souvent sur une forme intégrale du reste, établie à partir de celle des différences divisées de la fonction à interpoler; il est fondamental en analyse numérique de trouver une évaluation correcte du reste dans les formules d'approximation.

Classiquement, pour une fonction de la variable réelle  $f \in \mathcal{B}[a, b]$ , telle qu'il existe  $f^{(n+1)}$  sur  $(a, b)$ , et pour des points d'interpolation  $x_i: a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ , et  $x \in [a, b]$ , on utilise:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)$$

où  $\min(x_0, \dots, x_n, x) < t < \max(x_0, \dots, x_n, x)$   
(Davis - Stancu)

Plus en rapport avec les fonctions splines, se situe la formule d'Hermite - Genocchi:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \int_{S^n} f^{(n)}(t_0 x_0 + \dots + t_n x_n) dt_1 \dots dt_n$$

$x_i \in \mathbb{R}$

où  $f^{(n)}$  est localement intégrable sur  $\mathbb{R}$

et  $S^n = \{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{j=0}^n t_j = 1, t_j \geq 0, j=0, 1, \dots, n \}$   
simplexe

Une formule analogue permet de définir des différences divisées pour une fonction de plusieurs variables réelles

(Hakopian - Michelli), ainsi que des approximations de type Padé à plusieurs variables réelles (Sablonnière)

- Pour les fonctions holomorphes d'une seule variable complexe, la formule intégrale de Cauchy conduit immédiatement à la formule d'Hermite :

$$f[x_0, \dots, x_m] = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{f(t)}{\prod_{i=0}^m (t-x_i)} dt$$

$f$  holomorphe dans  $D$ .



$C$  contour fermé simple entourant les  $x_i$ , orienté positivement, contenu dans  $D$

qui, à l'ordre 0, n'est autre que :

$$f(x_0) = \text{Res}_{\{x_0\}} \left[ \frac{f(t)}{t-x_0} \right] \quad (\text{voir II})$$

Le procédé tensoriel nous a permis de généraliser cette formule à certaines configurations de points d'interpolation dans  $\mathbb{C}^k$ ,  $k \geq 2$  : les configurations "hyper-rectangulaires".

### e) Polynômes d'Hermite.

L'étude de ces cas particuliers semble montrer que certains polynômes jouent un rôle privilégié, en l'occurrence,

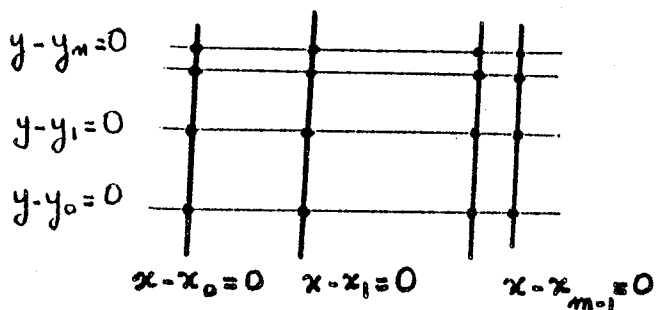
- dans le cas d'une variable, les  $\omega_m(x) = \prod_{i=0}^{m-1} (x-x_i)$ , qui admettent exactement pour zéros les points  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ .
- dans le cas de deux variables, les  $\omega_m(x) \wedge \Omega_m(y)$ , où  $\Omega_m(y) = \prod_{j=0}^{m-1} (y-y_j)$  qui vérifient :

$$\{ \omega_m(x) = 0 \} \cap \{ \Omega_m(y) = 0 \} \Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ (x_i, y_j) \mid \begin{array}{l} 0 \leq i \leq m-1 \\ 0 \leq j \leq m-1 \end{array} \right\}$$

dans  $\mathbb{C}^2$ , chacune de ces courbes est la réunion de droites parallèles à



ensemble des points d'interpolation.



- Plus généralement, Chudnovsky affirme que l'interpolation dans  $\mathbb{C}^n$  suivant un ensemble fini de points  $S$  privilégiera des polynômes  $P_1, P_2, \dots, P_m$  tels que :

$S$  soit l'intersection des  $m$  courbes algébriques :  $(P_i=0)_{i=1, \dots, m}$  ( $m$  pour des raisons de codimension).

$$S = (P_1=0) \cap (P_2=0) \cap \dots \cap (P_m=0)$$

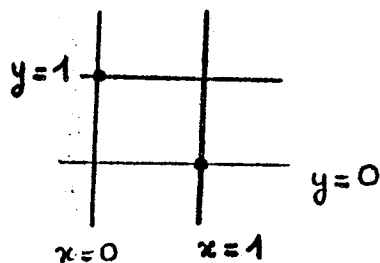
Mais, dès que  $m > 1$ , des difficultés nouvelles apparaissent par exemple,

pour  $m=2$  et deux courbes qui n'ont pas de composante commune :

$| (P_1=0) \cap (P_2=0) | \leq d^{\circ} P_1 \cdot d^{\circ} P_2$   
 (égalité dans  $\mathbb{P}^2$ , mais les points d'intersection ne sont pas forcément tous dans  $\mathbb{C}^2$  :

$$\begin{cases} P_1(x, y) = xy \\ P_2(x, y) = (x-1)(y-1) \end{cases}$$

il y a seulement deux points d'intersection dans  $\mathbb{C}^2$  :  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$



Même si  $|S| = m \times n$ , il n'existe pas toujours de courbes de degrés  $m$  et  $n$  respectivement, qui se coupent exactement, avec les bonnes multiplicités, aux points de  $S$ .

Cependant, par une démonstration existentielle, on établit que : ( J.P. Serre )

Étant donné un ensemble fini  $S$  de  $\mathbb{C}^n$ , il existe  $m$  hypersurfaces de degré  $\leq |S|$  :  $P_1=0, \dots, P_m=0, P_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  telle que  $S$  soit l'intersection (ensembliste) de ces hypersurfaces.

L'expression du reste dans l'interpolation d'Hermite, en un point  $x$  de  $\mathbb{C}^n$  fait intervenir des polynômes formés à partir des  $P_1^{i_1} \dots P_n^{i_n}$ , les  $P_i$  correspondant à  $S \cup \{x\}$ , où  $S$  est l'ensemble des points d'interpolation.

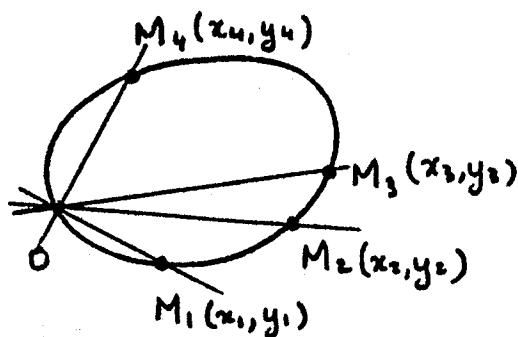
Nous tentons ci-dessous de donner un procédé constructif des  $P_i$ , tout d'abord dans le cas où  $n=2$ , puis par récurrence, de  $\mathbb{C}^n$  à  $\mathbb{C}^{n+1}$ . La méthode exclut certains cas particuliers.

Problème 1: Étant donné un ensemble  $S$  de  $N$  points distincts de  $\mathbb{C}^2$ , trouver deux courbes algébriques de degré  $\leq N$ , dont l'intersection soit  $S$ ; ie, deux polynômes  $P$  et  $Q$  de degré  $\leq N$  tels que:  
 $P^{-1}(0) \cap Q^{-1}(0) = S$ .

Remarque préliminaire:

Par un changement d'origine dans  $\mathbb{C}^2$ , on peut supposer que l'un des points d'interpolation est l'origine  $(0,0)$ .

Soit donc  $S = \{0, M_1, \dots, M_{N-1}\}$   $N \geq 2$   
( $S = \{0\}$ ,  $P=x$ ,  $Q=y$ )



Notons  $(P)$  (resp.  $(Q)$ ) la courbe d'équation  $P(x,y)=0$  (resp.  $Q(x,y)=0$ ).

Soit  $q = d^{\circ} Q \leq N$  à priori  $M_i$  de coordonnées  $(x_i, y_i)$ .

Choisissons pour  $P$  le produit des équations des droites  $OM_i$ ,  $i=1, \dots, N-1$ . (défini à un facteur multiplicatif près)

$d^{\circ} P = N-1 \leq N$  et l'origine est un point de  $(P)$  de multiplicité  $N-1$ .

Si  $(P)$  et  $(Q)$  ont une intersection de  $\dim 0$  (ce qui équivaut à :  $(Q)$  ne contient aucune des droites  $OM_i$ ), on a :

$$\Sigma = \text{somme des multiplicités de } (P) \cap (Q) \leq d^0 P \cdot d^0 Q = (N-1)q.$$

D'autre part, si  $M$  est un point de  $(P)$  de multiplicité  $m_1$  et un point de  $(Q)$  de multiplicité  $m_2$ , sa multiplicité sur  $(P) \cap (Q)$  est  $\geq m_1 m_2$  (égalité si les deux courbes se coupent transversalement en  $M$ ).

Choisissons donc  $Q$  sous la forme d'une somme de polynômes homogènes de degré  $q$  et  $q-1$ , de sorte que l'origine soit un point de  $(Q)$  de multiplicité  $\geq \underline{q-1} \geq 1$ ; alors sa multiplicité sur  $(P) \cap (Q)$  sera  $\geq (N-1)(q-1)$ .

Si on impose de plus que  $(Q)$  passe par tous les points  $M_i$ ,  $i=1, \dots, N-1$ , ces  $N-1$  points seront de multiplicité  $\geq 1$  sur  $(P) \cap (Q)$ .

$$\text{D'où } \Sigma \geq \underbrace{(N-1)(q-1)}_{\substack{\text{multiplicité} \\ \text{de } 0}} + \underbrace{1 + \dots + 1}_{\substack{N-1 \text{ fois} \\ \text{multiplicités} \\ \text{des } M_i}} = (N-1)q \geq \Sigma$$

et ainsi,  $(P) \cap (Q)$  ne comportera pas d'autres points que ceux de  $S$  (sous réserve que cette intersection soit finie).

Discussion: Soit  $V$  l'espace vectoriel des polynômes du type :  
 $\begin{matrix} Y_q + Y_{q-1} & / & Y_q \\ & & Y_{q-1} \end{matrix}$  homogènes de  $d^0$   $\begin{matrix} q \\ q-1 \end{matrix}$ .

$$\dim V = (q+1) + q = 2q+1.$$

On a à résoudre dans  $V$  le système linéaire homogène des  $N-1$  équations :  $Y_q(M_i) + Y_{q-1}(M_i) = 0$ ,  $i=1, \dots, N-1$ , qui admet des solutions non triviales dès que :  $\underline{2q+1} > N-1$

Par exemple,  $q = \lceil \frac{N}{2} \rceil$  <sup>entier</sup> quand  $N \geq 4$  (car  $q-1 \geq 1$ ) est le plus petit possible.

Étudions maintenant l'intersection de  $(Q)$  avec les droites  $OM_i$ , dont les points sont de la forme  $M(tx_i, ty_i)$ ,  $t \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} Y_q(M) + Y_{q-1}(M) = 0 & \Leftrightarrow t^{q-1} (t Y_q(M_i) + Y_{q-1}(M_i)) = 0 \\ & \Leftrightarrow \underline{t^{q-1} (t-1) Y_q(M_i) = 0} \end{aligned}$$



$t = 0$  est solution ( $\rightarrow$  origine)

$t = 1$  est solution ( $\rightarrow M_i$ )

Soit  $\Psi_q(M_i) \neq 0$ , et il n'y a pas d'autre point dans  $(Q) \cap (OM_i)$ . (en particulier, aucun  $M_j$  pour  $j \neq i$ )

Soit  $\Psi_q(M_i) = 0$ , et tous les points de la droite  $OM_i$  sont dans  $(Q)$ : ce qu'on exclut à priori. ( $R_q: \Psi_q(M_i) = 0 \Leftrightarrow \Psi_{q-1}(M_i) = 0$ )

On est donc amené à supposer que les droites  $OM_i$  sont distinctes; on cherche ensuite un polynôme  $\Psi_{[\frac{N}{2}] + [\frac{N}{2}] - 1}$  qui s'annule aux points  $M_i$ , sans que  $\Psi_{[\frac{N}{2}] - 1}$  s'y annule.

(on peut tenter de prendre pour  $\Psi_{[\frac{N}{2}] - 1}$  le produit d'équations de droites passant par l'origine, mais pas par les  $M_i$ ).

Si toutefois, ce problème n'admet pas de solution, on adopte la démarche suivante:

recherche de  $Q$  sous la forme  $\Psi_N + \Psi_{N-1}$

$$\begin{cases} \Psi_N(x, y) = a_0 x^N + a_1 x^{N-1} y + \dots + a_N y^N \\ \Psi_{N-1}(x, y) = b_0 x^{N-1} + b_1 x^{N-2} y + \dots + b_{N-1} y^{N-1} \end{cases}$$

Le système  $(\Psi_N + \Psi_{N-1})(M_i) = 0, i = 1, \dots, N-1$  s'écrit:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^N & x_1^{N-1} y_1 & \dots & y_1^N \\ x_2^N & x_2^{N-1} y_2 & \dots & y_2^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-1}^N & x_{N-1}^{N-1} y_{N-1} & \dots & y_{N-1}^N \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Psi_{N-1}(M_1) \\ -\Psi_{N-1}(M_2) \\ \vdots \\ -\Psi_{N-1}(M_{N-1}) \end{pmatrix}$$

donnée par les points  $M_i$ .

ajoutée à une application linéaire  $f: \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C}^{N-1}$  (bases canoniques) de rang  $\kappa: 1 \leq \kappa \leq N-1$

\* si  $\kappa = N-1$ , pour un second membre quelconque, le système admet une solution: on prend donc pour  $\Psi_{N-1}$  le produit de  $N-1$  droites ne passant pas par les  $M_i$ , mais par l'origine.

\* si  $\kappa < N-1$ , pour que le système admette une solution, il faut et il suffit que les  $N-1-\kappa$  bordants d'un déterminant caractéristique formés sur  $\begin{pmatrix} -\Psi_{N-1}(M_1) \\ \vdots \\ -\Psi_{N-1}(M_{N-1}) \end{pmatrix}$  soient nuls,

ce qui conduit à un système linéaire de  $N-1-\kappa$  équations homogènes en les  $N$  coefficients de  $\Psi_{N-1}$ : l'espace vectoriel des solutions est de dimension  $\geq N-(N-1-\kappa) \geq 1$ .

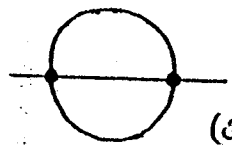
Soit, dans cet espace vectoriel, il existe une solution  $\Psi_{N-1}$  qui ne s'annule en aucun des  $M_i$ , et on cherche ensuite  $\Psi_N$  (qui existe).

Soit, chacune des solutions s'annule en au moins un des  $M_i$  - ce qui ne dépend que de la configuration des  $M_i$  - et dans ce cas particulier, la méthode ne donne pas de résultat.

$N=1$



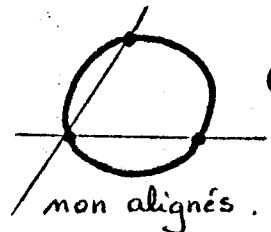
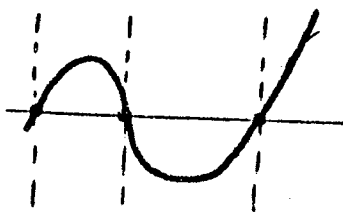
$N=2$



(Q) conique  $\Psi_2$

$N=3$

alignés



(Q) conique  $\Psi_2$

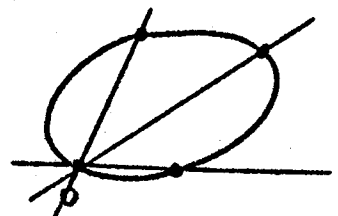
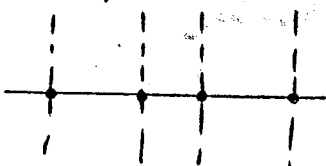
non alignés.

$N=4$

$[\frac{N}{2}] = 2$

(Q) conique  $\Psi_2 + \Psi_1$

sauf:



plus



## Problème 2

- 176 -

Idees pour le passage de  $\mathbb{C}^n$  à  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Hypothese de recurrence:

On suppose que pour un nombre fini quelconque  $N$  de points de  $\mathbb{C}^n$ , on connait  $n$  polynomes  $P_1, \dots, P_n$  de  $d^\circ \leq N$  dans  $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$  tels que  $\bigcap_{i=1}^n P_i^{-1}(0) = \{\text{ces } N \text{ points}\}$

(avec de plus,  $\Sigma$  multiplicites des points de l'intersection =  $d_1 \dots d_n$ )

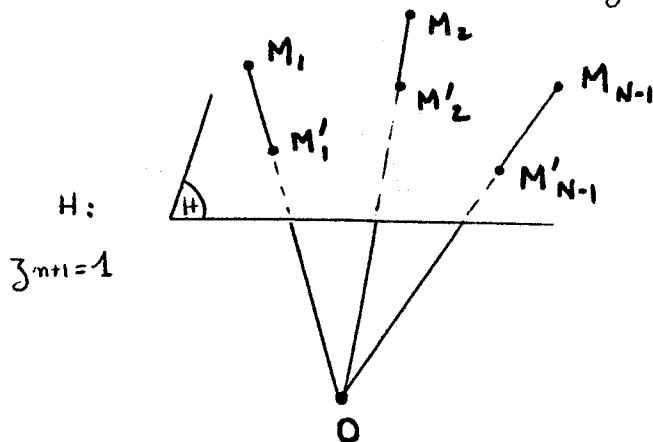
ou  $d_i = d^\circ P_i$

Soient  $N$  points de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , dont l'un d'eux est  $O$ :

$$S = \{O, M_1, \dots, M_{N-1}\}$$

En faisant eventuellement subir au repere une "rotation" de centre  $O$ , au cas ou certaines des droites  $OM_i$  seraient paralleles a l'hyperplan  $z_{n+1} = 0$ , on peut supposer que les  $n+1$ eme coordonnees de tous les points  $M_i$  sont non nulles.

$$M_i (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{in+1})$$



Soit  $H$  l'hyperplan  $z_{n+1} = 1$ .

Chaque droite  $OM_i$  coupe  $H$  en un seul point:

$$M'_i \left( \frac{z_{i1}}{z_{in+1}}, \frac{z_{i2}}{z_{in+1}}, \dots, \frac{z_{in}}{z_{in+1}} \right)$$

Un point de  $H$  est determine par ses coordonnees  $z_1, \dots, z_n$ .

$H$  etant de dimension  $n$ , il existe  $n$  polynomes  $\pi_1, \dots, \pi_n$  ( $d^\circ \pi_i = d_i \leq N-1$ ) tels que  $\bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}(0) = \{M'_1, \dots, M'_{N-1}\}$

$$\pi_i \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$$

Soit alors  $C_i$  le cone de  $\mathbb{C}^{n+1}$  de sommet  $O$ , de directrice  $\pi_i^{-1}(0)$  dans  $H$ .



$$M(z_1, \dots, z_{n+1}) \in C_i$$

$$\Leftrightarrow M=0 \text{ ou } \exists t \in \mathbb{C} \quad \pi_i(tz_1, \dots, tz_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow M=0 \text{ ou } (z_{n+1} \neq 0 \text{ et } \pi_i\left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}}\right) = 0)$$

Soit  $P_i$  le polynôme de  $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_{n+1}]$  défini par:  

$$P_i(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = z_{n+1}^{d_i} \prod_{j=1}^n \left( \frac{z_j}{z_{n+1}} \right)^{d_i}$$

il est homogène de  $d^\circ d_i \leq N-1$ .

$\bigcap_{i=1}^m P_i^{-1}(0)$  contient les droites  $OM_j$  ( $j=1, \dots, N-1$ ), mais peut éventuellement contenir d'autres droites dans le plan ( $z_{n+1}=0$ )

Cherchons à priori pour  $P_{m+1}$  un polynôme de  $d^\circ q \leq N$ , de la forme:  

$$\Psi_q + \Psi_{q-1}$$

$\uparrow \quad \uparrow$   
 homogènes de  
 $d^\circ q$  et  $q-1$

Comme le nombre de coefficients d'un polynôme homogène de  $d^\circ p$  en  $m$  indéterminées est  $C_{m+p-1}^p$ ,  $P_{m+1}$  dépend de  $C_{m+q}^q + C_{m+q-1}^{q-1}$  coefficients.

Il doit vérifier les  $N-1$  équations homogènes:  $P_{m+1}(M_i) = 0$   
 $i=1, \dots, N-1$

En choisissant  $C_{m+q}^q + C_{m+q-1}^{q-1} > N-1$ ,

(et pour cela, pour  $q \geq 2$ , il suffit que:  $(m+q) + (m+q-1) > N-1$  (est-à-dire:  $q > \frac{N-2m}{2}$ ; plus  $m$  est grand, plus  $q$  peut être choisi petit)

le système admet des solutions non triviales.

Sauf dans certains cas particuliers, il en existe parmi celles-ci, qui vérifient:  $P_{m+1}^{-1}(0) \cap \left( \bigcap_{i=1}^m P_i^{-1}(0) \right)$  finie pas de droite  $OM_j$  commune à tous les  $P_i^{-1}(0)$  et exclusion des éventuelles droites de ( $z_{n+1}=0$ ) apparues en plus dans  $\bigcap_{i=1}^m P_i^{-1}(0)$ .

Comme la multiplicité de 0 sur  $P_i^{-1}(0)$  est  $d_i$ , sa multiplicité sur  $P_{m+1}^{-1}(0)$  est  $\geq q-1$

celle de  $M_j$  sur  $\bigcap_{i=1}^m P_i^{-1}(0)$  est  $\geq$  celle de  $M'_j$  sur  $\bigcap_{i=1}^m \Pi_i^{-1}(0)$

sur  $P_{m+1}^{-1}(0)$  est  $\geq 1$ ,

$\sum_i$  multiplicités  $M_i$  sur  $\bigcap P_i^{-1}(0) \geq \sum$  multiplicités  $M'_j$  sur

dans l'intersection, on a déjà des points dont la somme des multiplicités est  $\geq \underbrace{d_1 \dots d_m (q-1)}_{\text{multiplicité de } O} + \underbrace{d_1 \dots d_m}_{\text{des } M_j}$

Si l'intersection  $\bigcap_{i=1}^{m+1} P_i^{-1}(O) = d_1 \dots d_m q$  est finie, il ne peut donc y avoir d'autres points que les points de  $S$  dans cette intersection.

(et produit des degrés des  $P_i =$  somme des multiplicités).

## II Formalisme de Grothendieck

Nous utilisons le même outil que pour les fonctions holomorphes d'une seule variable complexe, à savoir la formule intégrale de Cauchy à plusieurs variables :

$$f(z_1^0, \dots, z_n^0) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int \dots \int \frac{f(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 - z_1^0) \dots (z_n - z_n^0)} dz_1 \dots dz_n$$

$|z_1 - z_1^0| = r_1 \quad |z_2 - z_2^0| = r_2 \quad \dots \quad |z_n - z_n^0| = r_n$  orientés positivement  
 pour  $f$  holomorphe dans  $\prod_{i=1}^n D(z_i^0, r_i)$ .

Par analogie avec (\*), on écrit cette formule :

$$f(z_1^0, \dots, z_n^0) = \operatorname{Res}_{\{z_1^0, \dots, z_n^0\}} \left[ \frac{f(z_1, \dots, z_n) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{(z_1 - z_1^0) \cdot (z_2 - z_2^0) \cdot \dots \cdot (z_n - z_n^0)} \right]$$

avec la définition suivante (analytique) :

### 1) Résidus dans $\mathbb{C}^n$

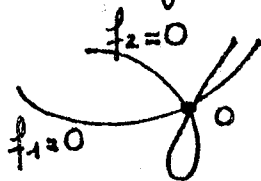
Il s'agit d'une notion locale : résidu à l'origine associé à une  $n$ -forme méromorphe  $\omega = \frac{f(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1(z) \dots f_n(z)}$

où  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  ;

$f, f_1, \dots, f_n$  sont des fonctions holomorphes de  $z$  dans un voisinage  $\bar{V}$  d'une boule  $V$  de  $\mathbb{C}^n$  centrée à l'origine ;

$\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(0)$  est réduite à  $\{0\}$  dans  $\bar{V}$   
 $0 = (0, \dots, 0)$  dans  $\mathbb{C}^n$ .

(l'origine est un zéro commun isolé des  $f_i$ )



dans  $\mathbb{C}^2$ .

(le cas d'une branche commune passant par l'origine)

Soit alors  $C = \{ z \in U \mid |f_i(z)| = \varepsilon_i, i=1, \dots, n \}$

avec  $\varepsilon_i > 0$

(on choisit  $U$  et les  $\varepsilon_i$  suffisamment petits pour que  $C$  soit bien défini)

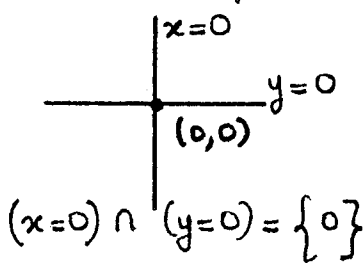
$C$  est orientée par :

$$d(\arg f_1) \wedge \dots \wedge d(\arg f_n) \geq 0 \quad ; \quad \text{on définit :}$$

$$\text{Res}_{\{0\}} \omega = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_C \omega$$

et on le note 
$$\text{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} f(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\ f_1(z) \cdot \dots \cdot f_n(z) \end{bmatrix}$$

Exemple (\*)



$f$  holomorphe au voisinage de  $(0,0) \in \mathbb{C}^2$

$$\text{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} f(x,y) dx \wedge dy \\ x \cdot y \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int \frac{f(x,y) dx \wedge dy}{xy}$$

$$|x| = \varepsilon_1$$

$$|y| = \varepsilon_2$$

$$d(\arg x) \wedge d(\arg y) \geq 0 \quad ;$$

on peut par exemple parcourir chacun des deux cercles  $|x| = \varepsilon_1, |y| = \varepsilon_2$  dans le sens positif et on obtient :

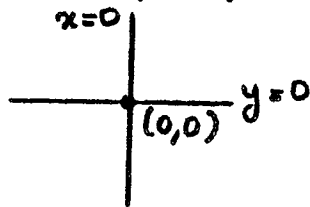
$$\frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|x|=\varepsilon_1} \int_{|y|=\varepsilon_2} \frac{f(x,y)}{xy} dx dy = f(0,0)$$

$\varepsilon_1$

$\varepsilon_2$

Rq: Par un changement de coordonnées, on se ramène toujours à des résidus à l'origine.

Exemple fondamental :



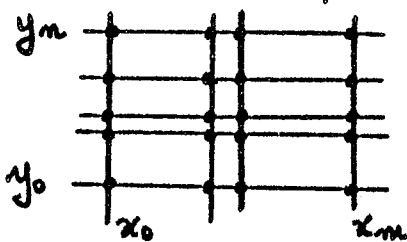
$$\text{Res}_{\{0\}} \left[ \begin{matrix} f(x,y) dx \wedge dy \\ x^{k+1} \cdot y^{l+1} \end{matrix} \right] = \frac{1}{k!l!} \left( \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l} \right) (0,0)$$

$(k,l) \in \mathbb{N}^2$

Le théorème des résidus admet une généralisation à ce cas (  $\sum_p \text{Res}_p \omega = \int_{\partial M} \gamma \omega$  p 656 Griffiths )

Ainsi, les deux polynômes  $\prod_{i=0}^m (x-x_i)$  et  $\prod_{j=0}^n (y-y_j)$

admettant pour seuls points d'intersection les  $(x_i, y_j)$  où  $0 \leq i \leq m$  et  $0 \leq j \leq n$



où ils se coupent transversalement, on a :

$$\sum_{(i,j) \in [0,m] \times [0,n]} \text{Res}_{\{(x_i, y_j)\}} \left[ \begin{matrix} f(x,y) dx \wedge dy \\ \prod_{i=0}^m (x-x_i) \cdot \prod_{j=0}^n (y-y_j) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int \int \frac{f(x,y)}{\prod_{i=0}^m (x-x_i) \cdot \prod_{j=0}^n (y-y_j)} dx dy$$

contours fermés simples orientés positivement contenant les  $x_i$  à leur intérieur (en restant là où  $f$  est holomorphe)  $y_j$

qui est aussi la différence divisée (chap 4)

$$[x_0, \dots, x_m; y_0, \dots, y_n; f(x,y)] \quad \text{formule d'Hermite}$$

De la même manière, pour des configurations plus générales de points, nous aimerions exprimer l'erreur dans



l'interpolation polynomiale à l'aide de différences divisées généralisées, auxquelles on appliquerait ensuite le théorème des résidus pour en obtenir une forme intégrale (sur une surface contenant tous les points à son intérieur)

## 2) Propriétés.

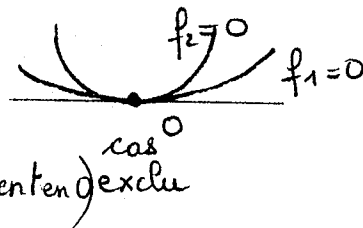
### 3.1 | Calcul de résidus.

#### \* Cas non dégénéré :

avec les hypothèses précédentes, on suppose que de plus :

$\text{Jac}_{\{0\}}(f_1, \dots, f_m) \neq 0$  où ce jacobien est le

déterminant de  $\begin{bmatrix} \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (z_1, \dots, z_m)} \end{bmatrix} (0)$ .



(On dit que les courbes se coupent transversalement en) exclu

Alors,  $\text{Res}_{\{0\}} \omega = \frac{f(0)}{\text{Jac}_{\{0\}}(f_1, \dots, f_m)}$

(c'est la généralisation de :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=\varepsilon} \frac{f(x)}{f_1(x)} dx = \frac{f(0)}{f_1'(0)} \quad \text{quand } \begin{matrix} f_1(0) = 0 \\ f_1'(0) \neq 0 \end{matrix}$$

La démonstration est fondée sur le théorème de l'inverse :  
 $F: z = (z_1, \dots, z_m) \rightarrow (f_1(z), \dots, f_m(z))$  est biholomorphe au  $v(0)$  dans  $\mathbb{C}^m$ .

\*  $\text{Res}_{\{0\}} \omega$  est linéaire en  $f$ , alterné en les  $f_i$ , à cause de la façon dont on oriente  $\mathbb{C}$ .

Quand  $f$  appartient à l'idéal engendré par les  $f_i$ , parmi les fonctions holomorphes au voisinage de l'origine,  $\text{Res}_{\{0\}} \omega = 0$ .

\* Pour calculer un résidu dans le cas général, on se ramène à l'exemple fondamental, et on utilise la règle de transformation suivante :

Étant données  $F = (f_1, \dots, f_m) : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}^m$  holomorphes tq  $\bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(0) = \{0\} = \bigcap_{i=1}^m g_i^{-1}(0)$   
 $G = (g_1, \dots, g_m)$

et tq l'idéal  $(g_1, \dots, g_m) = I(G)$  engendré par les  $g_i$  soit contenu dans l'idéal  $(f_1, \dots, f_m) = I(F)$  engendré par les  $f_i$  (dans l'anneau des fonctions holomorphes sur  $\bar{U}$ )

ce qui s'écrit encore :

$\exists (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$  fonctions holomorphes :  $\bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$  telles que :

$$\forall i \in [1, m] \quad g_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} f_j$$

alors, pour toute fonction  $h : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe

$$\operatorname{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} h(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m \\ f_1(z) \cdot \dots \cdot f_m(z) \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} h(z) \det A(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m \\ g_1(z) \cdot \dots \cdot g_m(z) \end{bmatrix}$$

(  $A(z)$  est la matrice des  $a_{ij}$  )

En pratique, on cherche à remplacer les  $f_i$  par des  $g_i$  de la forme  $z_i^{k_i}$  ( $k_i$  entier), pour lesquels on sait calculer les résidus.

On dispose en effet du théorème d'existence :

$\forall i \in [1, m] \quad \exists k_i > 0 \quad z_i^{k_i} \in (f_1, \dots, f_m)$  idéal engendré par les  $f_i$ .

Par exemple, lorsqu'une fonction  $f$  holomorphe d'une seule variable admet l'origine pour zéro isolé, il existe

un entier  $k > 0$  tel que:  $f(x) = x^k b(x)$  avec  $b$  holomorphe au voisinage de 0 et  $b(0) \neq 0$ .

Alors  $x^k = \frac{f(x)}{b(x)}$  et  $\frac{1}{b(x)}$  est holomorphe au  $\mathcal{V}(0)$ .

$$\text{Res}_{\{0\}} \left[ \begin{array}{c} h(x) dx \\ f(x) \end{array} \right] = \text{Res}_{\{0\}} \left[ \begin{array}{c} h(x) \times \frac{1}{b(x)} dx \\ x^k \end{array} \right]$$

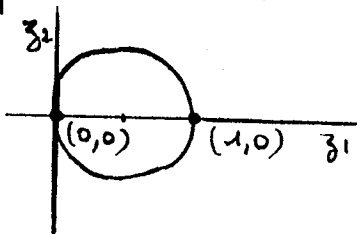
\* Lorsque  $f_1$  et  $f_2$  sont des polynômes en  $z_1, z_2$ , nous donnons un procédé constructif de  $k_1$  et  $k_2$  et de la matrice  $A$  holomorphe correspondante.

Commençons par un exemple:

Exemple 1:

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = z_1^2 - z_1 + z_2^2 \\ f_2(z_1, z_2) = z_2^3 \end{cases}$$

qui admettent comme seuls points d'intersection  $(0,0)$  et  $(1,0)$ .



l'origine est un zéro commun isolé de  $f_1$  et  $f_2$ .

Recherche de  $k_1$ .

Considérons  $f_1$  et  $f_2$  comme polynômes en  $z_2$  à coefficients dans  $\mathbb{C}[z_1]$ . On conserve le polynôme de degré le moins élevé en  $z_2$ , et on remplace l'autre par une combinaison à coefficients polynômiaux de  $f_1$  et  $f_2$  de degré plus petit:

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = z_2^2 + z_1^2 - z_1 \\ f_2(z_1, z_2) - z_2 f_1(z_1, z_2) = z_2(z_1 - z_1^2) \end{cases} \text{ de degré 1 en } z_2 \text{ au lieu de 3}$$

Puis, on applique le même procédé à ces deux nouveaux polynômes:

$$\begin{cases} f_2(z_1, z_2) - z_2 f_1(z_1, z_2) = z_2(z_1 - z_1^2) \\ (z_1^2 - z_1) f_1(z_1, z_2) + z_2 (f_2(z_1, z_2) - z_2 f_1(z_1, z_2)) = (z_1^2 - z_1)^2 \end{cases}$$

On s'arrête là, car le dernier polynôme est un polynôme

constant en  $z_2$  :

$$\text{et } (z_1^2 - z_1 - z_2^2) f_1(z_1, z_2) + z_2 f_2(z_1, z_2) = z_1^2 (1 - z_1)^2$$

holomorphe au  $v(0)$   
et non nulle

d'où :

$$z_1^2 = \left( \frac{z_1}{1-z_1} - \frac{z_2^2}{(1-z_1)^2} \right) f_1(z_1, z_2) + \frac{z_2}{(1-z_1)^2} f_2(z_1, z_2)$$

les coefficients de  $f_1$  et  $f_2$  étant des fonctions holomorphes au  $v(0)$ .

De manière analogue, on a immédiatement:  $z_2^3 = f_2(z_1, z_2)$   
car  $f_2$  est un polynôme de degré 0 en  $z_1$ .

Plus généralement,  $f_1$  et  $f_2$  étant deux polynômes de  $\mathbb{C}[z_1, z_2]$  sans composante commune, admettant  $(0,0)$  comme zéro commun isolé, pour trouver  $k_1, a_{11}$  et  $a_{12}$ , on les considère comme éléments de l'anneau factoriel  $(\mathbb{C}[z_1])[z_2]$ ; "leur pgcd" est un polynôme constant en  $z_2$ , soit  $d_{k_1} z_1^{k_1} + d_{k_1+1} z_1^{k_1+1} + \dots + d_{k_1+n_1} z_1^{k_1+n_1}$   
 $d_{k_1} \neq 0$  ( $k_1$  est la valuation du pgcd)

il s'écrit:  $A_{11}(z) f_1(z) + A_{12}(z) f_2(z)$   
où  $A_{11}, A_{12} \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$

Comme  $d_{k_1} + d_{k_1+1} z_1 + \dots + d_{k_1+n_1} z_1^{n_1}$  est holomorphe au  $v(0)$ , non nulle en 0, elle admet une fonction inverse  $\varphi$ , qui est holomorphe au  $v(0)$ .

$$z_1^{k_1} = \underbrace{A_{11} \varphi(z)}_{a_{11}(z)} f_1(z) + \underbrace{A_{12} \varphi(z)}_{a_{12}(z)} f_2(z)$$

toutes deux holomorphes au  $v(0)$ .

L'algorithme suivant  
détérmine  $k_1, A_{11}, A_{12}$ . La différence essentielle avec l'algorithme d'Euclide étendu, qui fournit une relation de Bezout pour les entiers ou les polynômes à coefficients dans un corps est qu'ici, l'anneau n'est pas euclidien, ce qui impose des multiplications intermédiaires.

$f_1$  et  $f_2$  dans  $(\mathbb{C}[z_1])[z_2]$

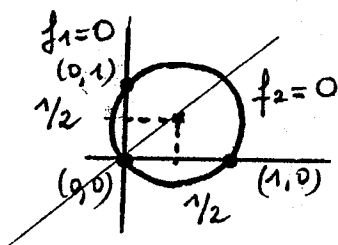
- 1) si  $d^\circ f_1 > d^\circ f_2$ , échanger  $f_1$  et  $f_2$
- 2) tant que  $d^\circ f_1 > 0$ , faire :
  - 3)  $f_2 := \alpha_n f_2 - \beta_m z_2^{m-n} f_1$   
où  $\alpha_n$  est le coefficient dominant de  $f_1$ ,  $n = d^\circ f_1$   
 $\beta_m$  est le coefficient dominant de  $f_2$ ,  $m = d^\circ f_2$

(commentaire : on garde le polynôme de degré le plus petit, et on fait descendre le degré de l'autre par combinaison polynomiale des deux)

- 4) si  $f_2 = 0$  retourner  $f_1$
- 5) si  $d^\circ f_2 = 0$  retourner  $f_2$
- 6) si  $d^\circ f_1 > d^\circ f_2$  échanger  $f_1$  et  $f_2$ .

Exemple 2

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = z_1 z_2 \\ f_2(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2 - z_1 - z_2 \end{cases}$$



$(f_1=0)$  : réunion des 2 axes de coordonnées

$(f_2=0)$  : "cercle" dans  $\mathbb{C}^2$  de centre  $(1/2, 1/2)$  de rayon  $1/\sqrt{2}$ , qui passe par  $(1,0)$  et  $(0,1)$

Ces deux courbes algébriques se coupent en 4 points :  $(1,0), (0,1)$  et  $(0,0)$  qui est de "multiplicité" 2.  
(voir plus loin)

$f_1$  et  $f_2$  étant symétriques en  $z_1$  et  $z_2$ ,  $k_1 = k_2$  quand on se place au  $v(0)$ .

Recherche de  $k_1$ :

$$d^0_{z_2} f_1 = 1, \quad d^0_{z_2} f_2 = 2 \quad : \text{on conserve } f_1$$

$$\begin{cases} f_1 = z_1 z_2 \\ z_1 f_2 - z_2 f_1 = z_1^3 - z_1^2 - z_1 z_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 = z_1 z_2 \\ (z_1 f_2 - z_2 f_1) + f_1 = z_1^3 - z_1^2 \quad \text{polynôme constant en } z_2. \end{cases}$$

d'où  $z_1^2 (z_1 - 1) = (1 - z_2) f_1 + z_1 f_2$

$$\boxed{z_1^2 = \frac{z_2 - 1}{1 - z_1} f_1 - \frac{z_1}{1 - z_1} f_2}$$

et par symétrie:

$$\boxed{z_2^2 = \frac{z_1 - 1}{1 - z_2} f_1 - \frac{z_2}{1 - z_2} f_2}$$

Exemple 3: 
$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = z_1^2 z_2^2 \\ f_2(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2 - z_1 - z_2 \end{cases}$$

Même configuration que précédemment, mais multiplicités différentes. Etude au  $v(0)$ .

$f_1$  et  $f_2$  ont le même degré en  $z_2$ : on conserve celui qui a le moins de termes.

$$\begin{cases} f_1 = z_1^2 z_2^2 \\ z_1 f_2 - f_1 = z_1^4 - z_1^3 - z_2 z_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1^2 f_2 - f_1 = z_1^4 - z_1^3 - z_2 \\ f_1 + z_2 (z_1^2 f_2 - f_1) = z_2 (z_1^4 - z_1^3) = (1 - z_2) f_1 + z_1^2 z_2 f_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1^2 f_2 - f_1 = z_1^3 (z_1 - 1) - z_1^2 z_2 \\ [f_1 + z_2 (z_1^2 f_2 - f_1)] + z_1 (z_1 - 1) [z_1^2 f_2 - f_1] = z_1^4 (z_1 - 1)^2 \end{cases}$$

finally,

$$z_1^4 = \frac{1 - z_2 - z_1(z_1 - 1)}{(1 - z_1)^2} f_1 + \frac{z_1^2 (z_2 + z_1(z_1 - 1))}{(1 - z_1)^2} f_2$$

and symmetrically for  $z_2^4$ .

## 2.2 | Résidus particuliers, interprétations.

$$f: U \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$z = (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (f_1(z), \dots, f_n(z))$  holomorphic tq  $f^{-1}(0) = \{0\}$   
 $I(f)$  est l'idéal engendré par les  $f_i$  dans l'anneau des fonctions holomorphes sur  $\bar{U}$ .

On diminue suffisamment  $U$  pour que  $\|f(z)\| \geq c > 0$  sur  $\partial U$

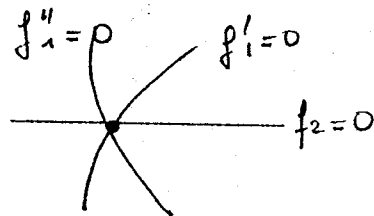
Soit  $\omega(f_1, \dots, f_n) = \frac{df_1}{f_1} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n}$

(cas particulier:  $\frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$  noyau de Cauchy)

On appelle nombre d'intersections de  $f$  à l'origine la quantité  
 $m_{\{0\}} = \text{Res}_{\{0\}} \omega(f_1, \dots, f_n)$ ,

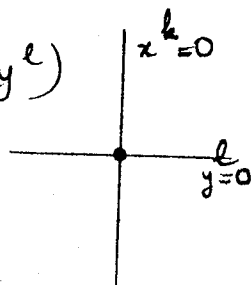
- qui est un entier
- et qui ne dépend que de l'idéal  $I(f)$  (et pas du choix des générateurs  $f_i$ )

Propriété: si  $f_1 = f'_1 f''_1$ ,  
 $\omega(f_1, \dots, f_n) = \omega(f'_1, \dots, f_n) + \omega(f''_1, \dots, f_n)$



d'où, par exemple:  $m_{\{0\}}$  de  $f: (x, y) \rightarrow (x^k, y^l)$

vaut  $k \cdot l$

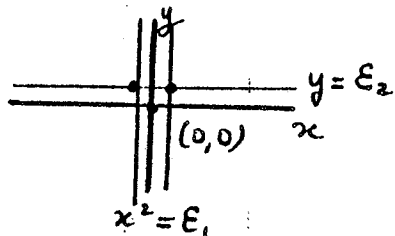


Propriété topologique:

On appelle degré topologique de  $f$  à l'origine la multiplicité de  $f$  à l'origine :

si  $f(z) = 0$  admet l'origine pour solution de multiplicité  $d$ , pour  $\|w\| < \epsilon$  assez petit, l'équation  $f(z) = w$  admet exactement  $d$  solutions (comptées avec leur multiplicité) au voisinage de l'origine :

exemple:  $f: (x, y) \rightarrow (x^2, y)$   
multiplicité 2.



Le nombre d'intersections de  $f$  à l'origine est égal au degré topologique de  $f$  à l'origine.

Propriété algébrique:

Soit  $\mathcal{O}$  l'anneau des fonctions holomorphes au  $\mathcal{V}(0)$  et  $I(f)$  l'idéal engendré par les  $f_i$ . L'espace vectoriel quotient  $\mathcal{O}/I$  est de dimension finie et  $\text{Res}_{\{0\}} \left( \frac{df_1}{f_1} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n} \right) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}/I$

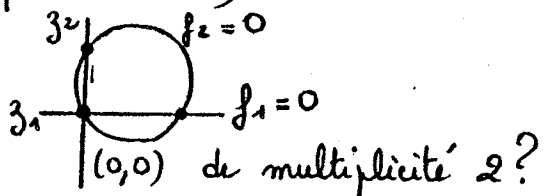
Application à la géométrie projective: Théorème de Bezout

Si les variétés  $(f_i = 0)$  sont des hypersurfaces de  $\mathbb{P}^n$  de degrés  $d_i$ , qui se rencontrent en des points isolés  $P_\nu$  :

$$d_1 \dots d_m = \sum_{\nu} m_{P_\nu} \quad (= \text{nombre d'intersections total})$$

Exemple: (lié à l'exemple 2 du 2.1)

$$\begin{cases} f_1 = z_1 z_2 \\ f_2 = z_1^2 + z_2^2 - z_1 - z_2 \end{cases}$$



Calculons  $m_{\{0\}} = \text{Res}_{\{0\}} \left( \frac{d(z_1 z_2)}{z_1 z_2} \wedge \frac{d(z_1^2 - z_1 + z_2^2 - z_2)}{z_1^2 - z_1 + z_2^2 - z_2} \right)$



$$\begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{z_2-1}{1-z_1} & \frac{-z_1}{1-z_1} \\ \frac{z_1-1}{1-z_2} & \frac{-z_2}{1-z_2} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}; \det A = \frac{z_1(z_1-1) - z_2(z_2-1)}{(1-z_1)(1-z_2)}$$

$$\begin{aligned} & d(z_1, z_2) \wedge d(z_1(z_1-1) + z_2(z_2-1)) \\ &= z_1 dz_2 \wedge d(z_1(z_1-1)) + z_2 dz_1 \wedge d(z_2(z_2-1)) \end{aligned}$$

Par linéarité,

$$\begin{aligned} m_{\{0\}} &= \text{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} -z_1^2 dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1 \cdot f_2 \end{bmatrix} + \text{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} -z_1(z_1-1) dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1 \cdot f_2 \end{bmatrix} \\ &+ \text{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} z_2^2 dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1 \cdot f_2 \end{bmatrix} + \text{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} z_2(z_2-1) dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1 \cdot f_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par la règle de transformation,

$$\text{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} z_2^2 dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1 \cdot f_2 \end{bmatrix} = \text{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} z_2^2 (z_1(z_1-1) - z_2(z_2-1)) dz_1 \wedge dz_2 \\ z_1^2 z_2^2 (1-z_1)(1-z_2) \end{bmatrix}$$

= coefficient de  $\frac{1}{z_1 z_2}$  dans le développement en série de Laurent

de la fonction, qui est nul (pas de  $z_2$  au dénominateur);  
on pourrait prévoir ce résultat car ce terme provient de  $dz_1 \wedge d(z_2-1)$   
qui est pratiquement constant au  $0(0)$ .

Par symétrie,  $\text{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} -z_1^2 dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1 \cdot f_2 \end{bmatrix} = 0$

$$\text{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} z_2(z_2-1) dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1 \cdot f_2 \end{bmatrix} = \text{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} z_2(z_2-1) (z_1(z_1-1) - z_2(z_2-1)) dz_1 \wedge dz_2 \\ z_1^2 z_2^2 (1-z_1)(1-z_2) \end{bmatrix}$$

= coefficient de  $\frac{1}{z_1 z_2} = +1$

=  $\text{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} -z_1(z_1-1) dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1 \cdot f_2 \end{bmatrix}$  par symétrie.

d'où :  $\boxed{m_{\{0\}} = 2.}$

Avec un changement de coordonnées préalable, on pourrait montrer que:

$$m_{\{(0,1)\}} = 1 = m_{\{(1,0)\}}$$

$$\text{et } d^0 \int_1 \times d^0 \int_2 = 2 \times 2 = 4 = m_{\{(0,0)\}} + m_{\{(0,1)\}} + m_{\{(1,0)\}}$$

3) Théorème de Jacobi-Kronecker, application à la formule de Lagrange.

Dans  $\mathbb{P}^n$ , soit  $w = \frac{g(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{f_1(x) \dots f_n(x)}$ , où

$g$  est un polynôme ainsi que les  $f_i$ , et  $d^0 g \leq \frac{(d^0 f_1 + \dots + d^0 f_n) - (n+1)}{d^0 f_i = d_i}$   
 (+ hypothèses habituelles sur les  $f_i$ )

Le théorème global des résidus entraîne:

$$\sum_{\gamma} \text{Res}_{P_{\gamma}} \left\{ \frac{g(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{f_1(x) \dots f_n(x)} \right\} = 0$$

Si les hypersurfaces  $(f_i=0)$  se coupent transversalement en  $d_1 \dots d_n$  points distincts, on obtient la relation de Jacobi:

$$\sum_{\gamma} \frac{g(P_{\gamma})}{\left( \frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} \right) (P_{\gamma})} = 0 \quad \text{pour } d^0 g \leq \sum d^0 f_i - (n+1) \quad (1834)$$

C'est une généralisation de la formule d'interpolation de Lagrange :  $n=1$

$$\sum_{\gamma} \frac{g(P_{\gamma})}{f'(P_{\gamma})} = 0 \quad \text{pour } d^0 g \leq d^0 f - 2$$

(Conséquence:  $n=2$ , théorème de Cayley-Bacharach).

si  $C$  et  $D$  sont deux courbes de  $\mathbb{P}^2$  de degrés  $m_1$  et  $m_2$ , qui se rencontrent en  $m_1 m_2$  points distincts, alors toute courbe  $E$  de  $d^0 m_1 + m_2 - 3$  qui passe par tous les points sauf un de  $C \cap D$  passe aussi par le dernier.

Remarque: dans  $\mathbb{P}$ , pour  $d^0 g \leq d^0 f - 2$ ,

donc que  $\sum_{\substack{P_{\gamma} \text{ zéros} \\ \text{de } f}} \text{Res}_{P_{\gamma}} \left\{ \frac{g(x) dx}{f(x)} \right\} = 0$ , c'est simplement

appliquer le théorème habituel des résidus

$$\begin{aligned} \sum \text{Res}_{P_{\gamma}} \left\{ \frac{g(x) dx}{f(x)} \right\} &= \frac{1}{2i\pi} \int \frac{g(x) dx}{f(x)} \\ &= - \text{Res}_{\left\{ \begin{matrix} \infty \\ \times P_{\gamma} \end{matrix} \right\}} \left\{ \frac{g(x) dx}{f(x)} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

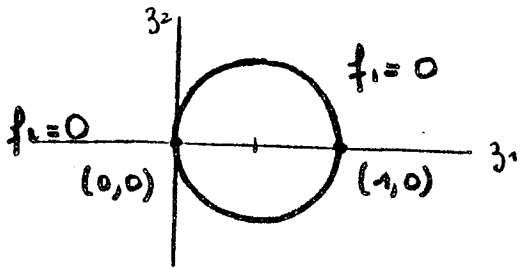
car, par le changement de coordonnées  $x = \frac{1}{x'}$ , ce résidu vaut:

$$\text{Res}_{\{0\}} \left\{ \frac{g\left(\frac{1}{x'}\right) \left(-\frac{1}{x'^2}\right) dx'}{f\left(\frac{1}{x'}\right)} \right\}$$

$$\begin{aligned} d^0 g &= p & \frac{g\left(\frac{1}{x'}\right)}{x'^2 f\left(\frac{1}{x'}\right)} & \sim x'^{q-p+2} \\ d^0 f &= q & & 0 \end{aligned}$$

et  $q-p-2 \geq 0$  par hypothèse, d'où la nullité du résidu.

4) Utilisation de ce formalisme dans un cas particulier.



$$\begin{cases} f_1 = z_1^2 + z_2^2 - z_1 \\ f_2 = z_2 \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (z_1, z_2)} \right| = 2z_1 - 1 ; \text{ les deux}$$

courbes se coupent transversalement en  $(0,0)$  et  $(1,0)$  et:

$$\text{Res}_{\{(0,0)\}} \left\{ \frac{g(z) dz_1 \wedge dz_2}{f_1 \cdot f_2} \right\} + \text{Res}_{\{(1,0)\}} \left\{ \frac{g(z) dz_1 \wedge dz_2}{f_1 \cdot f_2} \right\} = g(1,0) - g(0,0)$$

Par contre, le jacobien de  $f_1$  et  $f_2^2$  est nul en  $(0,0)$  et  $(1,0)$ .  
 Appliquons l'algorithme pour calculer les résidus correspondants, ce qui donne pour le point  $(0,0)$ :

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-1}{1-z_1} f_1 + \frac{1}{1-z_1} f_2 \\ z_2^2 = f_2 \end{cases}$$

$$\text{Res}_{\{(0,0)\}} \left[ \frac{g(z) dz_1 \wedge dz_2}{f_1 \cdot f_2^2} \right] = \text{Res}_{\{(0,0)\}} \left[ \frac{g(z) \times \frac{-1}{1-z_1} dz_1 \wedge dz_2}{z_1 \cdot z_2^2} \right]$$

= coefficient de  $\frac{1}{z_1 z_2^2}$  dans le développement en  $(0,0)$  de  $\frac{-g(z)}{(1-z_1) \cdot z_1 z_2^2}$

Pour le point  $(1,0)$ , faisons d'abord le changement de variables  
 $z_1 = 1 + u_1, \quad z_2 = u_2, \quad u = (u_1, u_2)$

$$\text{Res}_{\{(1,0)\}} \left[ \begin{array}{c} g(z) dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1(z) \cdot f_2^2(z) \end{array} \right] = \text{Res}_{\{(0,0)\}} \left[ \begin{array}{c} g(1+u_1, u_2) du_1 \wedge du_2 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_1 \cdot u_2^2 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{1+u_1} f_1(1+u_1, u_2) - \frac{1}{1+u_1} f_2(1+u_1, u_2) \\ u_2^2 = f_2(1+u_1, u_2) \end{cases}$$

Le résidu vaut donc:

$$\begin{aligned} & \text{Res}_{\{(0,0)\}} \left[ \begin{array}{c} g(1+u_1, u_2) \times \frac{1}{1+u_1} du_1 \wedge du_2 \\ u_1 \cdot u_2^2 \end{array} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{g(1+u_1, u_2)}{1+u_1} \right) (0,0) = \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} g(1+u_1, u_2) \times \frac{1}{1+u_1} \right] (0,0) \\ &= \frac{\partial g}{\partial z_2} (1,0) \quad \left( g \text{ est supposée holomorphe au voisinage de } (0,0) \text{ et } (1,0) \right) \end{aligned}$$

finalement :

$$\boxed{\text{Res}_{\{(0,0)\}} \left[ \begin{array}{c} g(z) dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1 \cdot f_2^2 \end{array} \right] + \text{Res}_{\{(1,0)\}} \left[ \begin{array}{c} g(z) dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1 \cdot f_2^2 \end{array} \right] = \frac{\partial g}{\partial z_2} (1,0) - \frac{\partial g}{\partial z_2} (0,0)}$$

De manière analogue pour les résidus relatifs à  $f_1^2$  et  $f_2$ .

En  $(0,0)$ :

$$\begin{cases} z_1^2 = \frac{1}{1-2z_1+z_1^2} f_1^2 - \frac{z_2(z_2^2+2z_1^2-2z_1)}{1-2z_1+z_1^2} f_2 \\ z_2 = f_2 \end{cases}$$

$$\text{Res}_{\{0,0\}} \begin{bmatrix} g(z) dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1^2 \cdot f_2 \end{bmatrix} = \text{Res}_{\{0,0\}} \begin{bmatrix} g(z) \times \frac{1}{(1-z_1)^2} dz_1 \wedge dz_2 \\ z_1^2 \cdot z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial z_1}(0,0) + 2g(0,0)$$

En (1,0), avec le même changement de variables préliminaire:

$$\begin{cases} u_1^2 = \frac{1}{(1+u_1)^2} f_1^2(1+u_1, u_2) - \frac{u_2(u_2 + 2u_1^2 + 2u_1)}{(1+u_1)^2} f_2(1+u_1, u_2) \\ u_2 = f_2(1+u_1, u_2) \end{cases}$$

$$\text{Res}_{\{1,0\}} \begin{bmatrix} g(z) dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1^2 \cdot f_2 \end{bmatrix} = \text{Res}_{\{0,0\}} \begin{bmatrix} g(1+u_1, u_2) \times \frac{1}{(1+u_1)^2} du_1 \wedge du_2 \\ u_1^2 \cdot u_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial z_1}(1,0) - 2g(1,0)$$

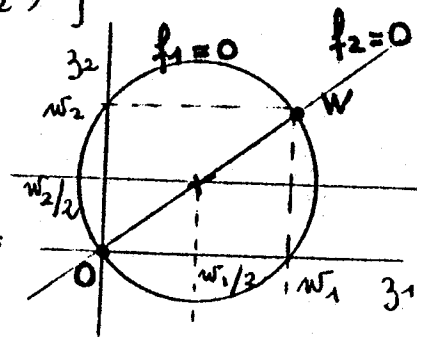
$$\text{Res}_{\{0,0\}} \begin{bmatrix} g(z) dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1^2 \cdot f_2 \end{bmatrix} + \text{Res}_{\{1,0\}} \begin{bmatrix} g(z) dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1^2 \cdot f_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial g}{\partial z_1}(1,0) + \frac{\partial g}{\partial z_1}(0,0) - 2(g(1,0) - g(0,0))$$

Remarque: Dans le cas des deux points 0 et  $W = (w_1, w_2)$  tel que  $w_1^2 + w_2^2 \neq 0$ , pour :

$$\begin{cases} f_1(z) = (z_1 - \frac{w_1}{2})^2 + (z_2 - \frac{w_2}{2})^2 - \left[ \left(\frac{w_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{w_2}{2}\right)^2 \right] \\ = (z_1^2 + z_2^2) - (z_1 w_1 + z_2 w_2) \end{cases}$$

et  $f_2(z) = z_2 w_1 - z_1 w_2$

• qui se coupent alors uniquement en 0 et W :



la transformation linéaire

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{w_1^2 + w_2^2} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

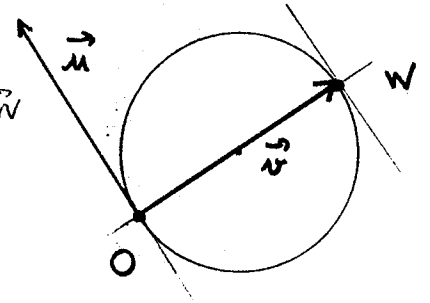
comme la figure au cas précédent, ce qui permet d'établir:

$$\sum_{P \in \{0, w\}} \operatorname{Res}_{\{P\}} \left[ \frac{g(z) dz_1 \wedge dz_2}{f_1 \cdot f_2} \right] = g(w) - g(0)$$

En notant

$$\vec{u} = (-w_2, w_1)$$

$$\text{et } \vec{v} = (w_1, w_2) = \vec{OW}$$



on obtient :

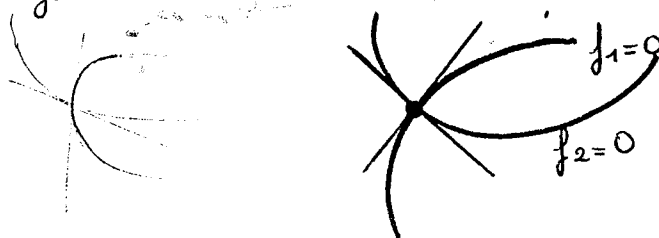
$$\sum_{P \in \{0, w\}} \operatorname{Res}_{\{P\}} \left[ \frac{g(z) dz_1 \wedge dz_2}{f_1 \cdot f_2^2} \right] = \frac{\partial g}{\partial \vec{u}}(w) - \frac{\partial g}{\partial \vec{u}}(0)$$

et

$$\sum_{P \in \{0, w\}} \operatorname{Res}_{\{P\}} \left[ \frac{g(z) dz_1 \wedge dz_2}{f_1^2 \cdot f_2} \right] = \left( \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(w) + \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0) \right) - 2(g(w) - g(0))$$

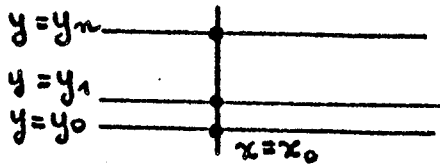
ici,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont perpendiculaires au sens où  $-w_2 w_1 + w_1 w_2 = 0$  et ils sont portés par les deux tangentes aux courbes  $(f_1=0)$  et  $(f_2=0)$  en 0 et W.

On peut donc imaginer que pour deux courbes se coupant transversalement, les résidus relatifs aux puissances de  $f_1$  et  $f_2$  sont liés aux dérivées dans les directions des deux tangentes.



### III Exemple: points à l'intersection d'une courbe algébrique et d'un ensemble fini de droites.

Essayons d'utiliser le formalisme précédent dans  $\mathbb{C}^2$ , dans le cas le plus simple qui généralise la situation du chapitre 4: points à l'intersection d'une droite et d'un ensemble fini de droites parallèles.

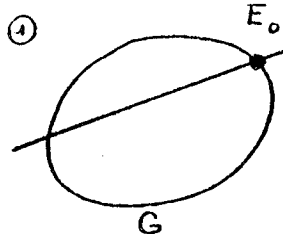


Soient

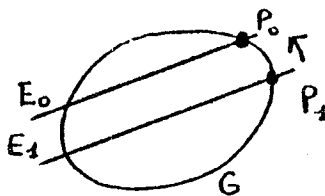
$g \in \mathbb{C}[x, y]$  et  $G$  la courbe algébrique  $G(x, y) = 0$   
 $e_i \in \mathbb{C}[x, y]$ ,  $d \cdot e_i \leq 1$  et  $E_i$  la droite d'équation  $e_i(x, y) = 0$   
 $0 \leq i \leq n$   $P_i \in G \cap E_i$ ,  $P_i$  à distance finie.

On suppose les droites  $E_i$  distinctes pour l'instant, et  $f$  holomorphe dans un ouvert suffisamment grand de  $\mathbb{C}^2$ , connue aux points  $P_i$ .

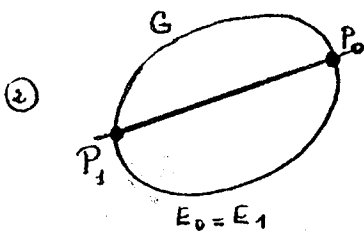
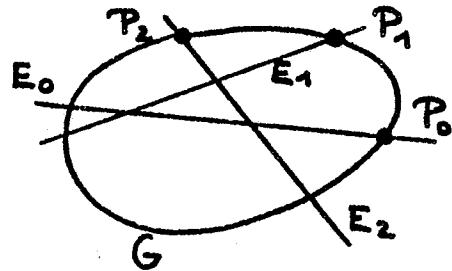
Cas exclus:



sera ensuite considéré comme cas limite de:

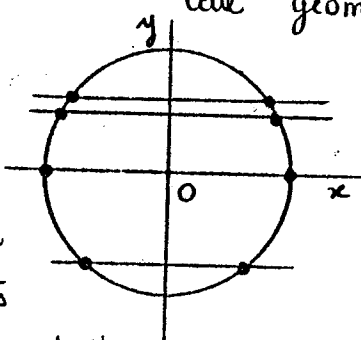


$P_1 \rightarrow P_0$   
sur  $G$

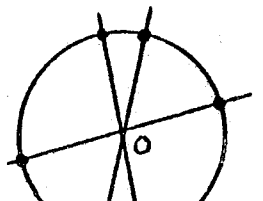


utiliser la courbe  $G$  quand elle est de degré  $> 1$  ne présente d'intérêt que si la fonction  $f$  à interpoler possède des propriétés relatives à cette géométrie. Par exemple,

$f$  symétrique par rapport à l'axe des  $y$ , (prend la même valeur en deux points



antisymétrique par rapport à l'origine (prend des valeurs opposées en deux





Par analogie avec le cas ordinaire, cherchons s'il existe un polynôme d'interpolation correspondant aux valeurs de  $f$  aux points  $P_0, P_1, \dots, P_n$  dans l'espace vectoriel engendré par les polynômes  $1, e_0, \dots, e_0 e_1 \dots e_{n-1}$  (convention:  $e_{-1} \equiv 0$ )

1) Système triangulaire et "différences divisées"

$$p = \sum_{i=0}^n a_i e_0 e_1 \dots e_{i-1}$$

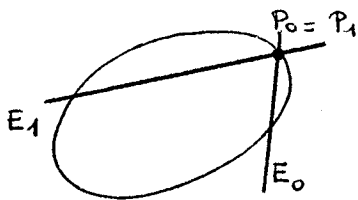
$$\forall i \in [0, n] \quad p(P_i) = f(P_i)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & e_0(P_1) & & & & & \\ 1 & e_0(P_2) & e_0 e_1(P_2) & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ 1 & e_0(P_n) & e_0 e_1(P_n) & \dots & e_0 e_1 \dots e_{n-1}(P_n) & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(P_0) \\ f(P_1) \\ f(P_2) \\ \vdots \\ f(P_n) \end{pmatrix}$$

système triangulaire, dont la matrice est inversible si:

$\forall i < j \quad e_i(P_j) \neq 0$ , ce qui équivaut à  $P_j \notin E_i$   
(en particulier, ces points sont distincts)

③ cas exclu



Notations

Définitions par récurrence

$[g; e_0, e_1, \dots, e_i; f]$  ou plus simplement  $[g; e_0, e_1, \dots, e_i]$  quand le contexte sous-entend qu'il s'agit de  $f$ , par:

$$\left\{ \begin{aligned} [g; e_0] &= f(P_0) \\ [g; e_0, e_1] &= \frac{[g; e_1] - [g; e_0]}{e_0(P_1)} \\ [g; e_0, e_1, e_2] &= \frac{[g; e_0, e_2] - [g; e_0, e_1]}{e_1(P_2)} \\ &\vdots \\ [g; e_0, e_1, \dots, e_n] &= \frac{[g; e_0, \dots, e_{n-2}, e_n] - [g; e_0, \dots, e_{n-2}, e_{n-1}]}{e_{n-1}(P_n)} \end{aligned} \right.$$

qu'on nomme différences divisées (en raison de leur construction d'ordre  $n$  pour  $[g; e_0, \dots, e_n]$ )

Dans le cas univarié, on a :

$$P = \sum_{i=0}^n [g; e_0, e_1, \dots, e_i] e_0 e_1 \dots e_{i-1}$$

Lorsqu'on ajoute des points sur la courbe  $G$ , les premiers coefficients du développement sont inchangés.

Pour un point  $P$  appartenant à  $G$ , on a la formule exacte :  
 $f(P) - p(P) = [g; e_0, e_1, \dots, e_n, e] e_0 e_1 \dots e_n$   
 où  $e$  est l'équation d'une droite passant par  $P$ , et par les  $P_i$ .

Pour étudier plus précisément l'erreur, on aimerait donc relier ces différences divisées à des intégrales (doubles ici).

## 2) Existence de "formules d'Hermite"

Nous entendons par là des formules qui généralisent celles du chapitre 4, dont le point de départ est :

$$f(x_0, y_0) = \text{Res}_{\{(x_0, y_0)\}} \left[ \begin{array}{l} f(x, y) \, dx \wedge dy \\ (x-x_0) \cdot (y-y_0) \end{array} \right]$$

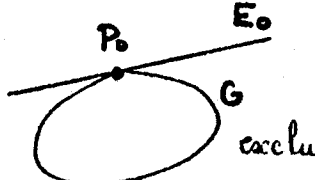
(ici,  $g(x, y) = x - x_0$  et  $e_0(x, y) = y - y_0$ )

Les différences divisées étant définies par récurrence, il faut établir un lien avec les résidus :

- pour celles d'ordre 0
- le transporter de l'ordre  $n$  à  $n+1$ , pour tout entier  $n$ .

### 2.1 | Recherche de CNS

#### ① Ordre 0

Dans le cas où  $\text{Jac}_{\{P_0\}}(g, e_0) \neq 0$ , (  )

$$\text{Res}_{\{P_0\}} \left[ \begin{array}{l} f(x, y) \, dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 \end{array} \right] = \frac{f(P_0)}{\text{Jac}_{\{P_0\}}(g, e_0)}$$

Il suffit donc d'utiliser l'équation  

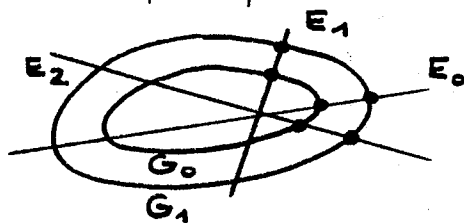
$$e'_0 = \frac{e_0}{\text{Jac}_{\{P_0\}}(g, e_0)}$$
 (proportionnelle à  $e_0$ )

pour obtenir exactement

$$\text{Res}_{\{P_0\}} \begin{bmatrix} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e'_0 \end{bmatrix} = f(P_0)$$

Cette normalisation de l'équation de  $E_i$  ne dépend pas de la fonction à interpoler, mais uniquement de la géométrie des points d'interpolation, et en particulier de  $g$ .

Attention : si l'on change de courbe  $G$ , en gardant les mêmes droites  $E_i$ , on n'aura plus forcément la même normalisation.

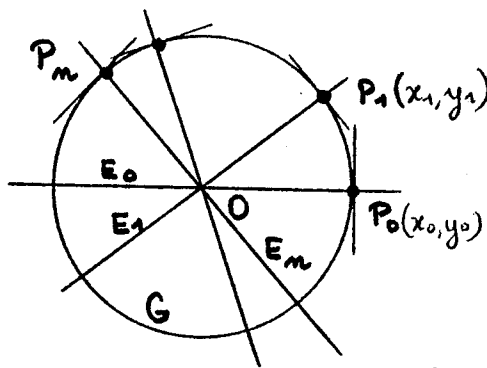


Exemple :

$\kappa \in \mathbb{C}^*$        $g(x,y) = x^2 + y^2 - \kappa^2$

$P_i \in G$ ,       $E_i =$  droite  $OP_i$       dont une équation est :

$P_i(x_i, y_i)$        $e_i(x,y) = x_i y - y_i x$



$$\text{Jac}_{\{P_i\}}(g, e_i) = \begin{vmatrix} 2x_i & 2y_i \\ -y_i & x_i \end{vmatrix}$$

$$= 2\kappa^2 \neq 0$$

L'équation normalisée est :

$$e'_i(x,y) = \frac{x_i y - y_i x}{2\kappa^2}$$

Alors  $\text{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e'_i \end{bmatrix} = f(P_i)$

(Remarquons que dans ce cas particulier, les différents jacobiens utilisés prennent la même valeur : le cercle et les droites sont "orthogonales" aux points  $P_i$ ).

② Ordre 1

Supposant chacune des équations  $e_i$  normalisées, quelles conditions supplémentaires impose :

$$[g; e_0, e_1] = \sum_{i=0,1} \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \left[ \begin{array}{c} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 e_1 \end{array} \right] ?$$

relation analogue à :

$$[x_0; y_0, y_1; f(x,y)] = \sum_{i=0,1} \operatorname{Res}_{\{(x_0, y_i)\}} \left[ \begin{array}{c} f(x,y) dx \wedge dy \\ (x-x_0) \cdot (y-y_0)(y-y_1) \end{array} \right]$$

(avec les notations du ch. 4).

Calculons :

$$[g; e_0, e_1] = \frac{[g; e_1] - [g; e_0]}{e_0(P_1)} \quad \text{par définition}$$

$$= \frac{1}{e_0(P_1)} \operatorname{Res}_{\{P_1\}} \left[ \begin{array}{c} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_1 \end{array} \right] - \frac{1}{e_0(P_1)} \operatorname{Res}_{\{P_0\}} \left[ \begin{array}{c} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 \end{array} \right]$$

car la propriété est vraie à l'ordre 0.

$(x,y) \rightarrow \frac{f(x,y)}{e_0(x,y)}$  étant holomorphe au voisinage de  $P_1$ ,

le calcul des résidus (à l'aide d'une intégrale double) donne :

$$\operatorname{Res}_{\{P_1\}} \left[ \begin{array}{c} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 e_1 \end{array} \right] = \frac{1}{e_0(P_1)} \operatorname{Res}_{\{P_1\}} \left[ \begin{array}{c} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_1 \end{array} \right]$$

de même,

$$\operatorname{Res}_{\{P_0\}} \left[ \begin{array}{c} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 e_1 \end{array} \right] = \frac{1}{e_1(P_0)} \operatorname{Res}_{\{P_0\}} \left[ \begin{array}{c} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 \end{array} \right]$$

Donc :

$$[g; e_0, e_1] = \operatorname{Res}_{\{P_1\}} \left[ \begin{array}{c} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 e_1 \end{array} \right] - \frac{e_1(P_0)}{e_0(P_1)} \operatorname{Res}_{\{P_0\}} \left[ \begin{array}{c} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 e_1 \end{array} \right]$$

Une CNS pour que la relation soit vraie à l'ordre 1 pour toute fonction  $f$  holomorphe au voisinage de  $P_0$  et  $P_1$  est que :

$$\left(1 + \frac{e_1(P_0)}{e_0(P_1)}\right) \operatorname{Res}_{\{P_0\}} \left[ \begin{array}{c} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 e_1 \end{array} \right] = 0$$

or pour  $f(x,y) = e_1(x,y)$  par exemple, ce résidu vaut 1. Une condition nécessaire est donc  $e_1(P_0) = -e_0(P_1)$ , et alors la relation est vraie pour toute  $f$ .

Conséquence :

Ayant normalisé les  $e_i$  de sorte que :

$$[g; e_i] = \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \left[ \begin{array}{c} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_i \end{array} \right]$$

la "formule d'Hermite" :

$$[g; e_0, e_1] = \sum_{i=0,1} \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \left[ \begin{array}{c} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 e_1 \end{array} \right]$$

est vérifiée pour toute  $f$  si :  $e_0(P_1) + e_1(P_0) = 0$

Remarque : il en résulte alors la "commutativité" de la définition des différences divisées à l'ordre 1, à savoir :

$$[g; e_0, e_1] = \frac{f(P_1) - f(P_0)}{e_0(P_1)} = \frac{f(P_0) - f(P_1)}{e_1(P_0)}$$

③ Plus généralement, traitons le transport des "formules d'Hermite" de l'ordre  $n$  à l'ordre  $n+1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

On suppose que toutes les différences divisées d'ordre  $k \leq n$  vérifient une formule d'Hermite correspondant à leur ordre. (quels que soient les  $k+1$  points considérés).

Calculons

$$[g; e_0, e_1, \dots, e_{n+1}] = \frac{[g; e_0, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}] - [g; e_0, \dots, e_{n-1}, e_n]}{e_n(P_{n+1})}$$

différences divisées d'ordre  $n$

$$= \frac{1}{e_n(P_{n+1})} \sum_{i \in \{0, \dots, n-1, n+1\}} \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 \dots e_{n-1} e_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$- \frac{1}{e_n(P_{n+1})} \sum_{i \in \{0, \dots, n-1, n\}} \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 \dots e_{n-1} e_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i \in \{0, \dots, n-1\}} \frac{e_n(P_i) - e_{n+1}(P_i)}{e_n(P_{n+1})} \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 \dots e_{n-1} e_n e_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$- \frac{e_{n+1}(P_n)}{e_n(P_{n+1})} \operatorname{Res}_{\{P_n\}} \begin{bmatrix} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 \dots e_n e_{n+1} \end{bmatrix} + \operatorname{Res}_{\{P_{n+1}\}} \begin{bmatrix} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 \dots e_n e_{n+1} \end{bmatrix}$$

par un argument analogue à celui de l'ordre 1.

La formule d'Hermite à l'ordre  $n+1$  entre les points  $P_0, \dots, P_{n+1}$

$$[g; e_0, e_1, \dots, e_{n+1}] = \sum_{i=0}^{n+1} \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} f(x,y) dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 \dots e_{n+1} \end{bmatrix}$$

équivalent donc à :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left( 1 - \frac{e_n(P_i) - e_{n+1}(P_i)}{e_n(P_{n+1})} \right) \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} f \\ g \cdot e_0 \dots e_{n+1} \end{bmatrix} + \left( 1 + \frac{e_{n+1}(P_n)}{e_n(P_{n+1})} \right) \operatorname{Res}_{\{P_n\}} \begin{bmatrix} f \\ g \cdot e_0 \dots e_{n+1} \end{bmatrix}$$

Pour  $f = \prod_{j \neq i} e_j$ ,  $\operatorname{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} f \\ g \cdot e_0 \dots e_{n+1} \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} 1 \\ g \cdot e_i \end{bmatrix} = 1 \neq 0$

et  $\operatorname{Res}_{\substack{\{P_j\} \\ j \neq i}} \begin{bmatrix} f \\ g \cdot e_0 \dots e_{n+1} \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\substack{\{P_j\} \\ j \neq i}} \begin{bmatrix} e_j / e_i \\ g \cdot e_j \end{bmatrix} = 0$

Une condition nécessaire est :

$\forall i \in [0, n-1] \quad e_n(P_i) - e_{n+1}(P_i) = e_n(P_{n+1})$   
 et  $e_{n+1}(P_n) + e_n(P_{n+1}) = 0$  qui suffit alors pour toute  $f$  holomorphe.  
 (pour  $n=0$ , la 1<sup>ère</sup> condition est vide)

Remarque 1: pour  $e_i(x, y) = y - y_i$ , ces relations sont vérifiées.

Remarque 2: quant à l'exemple:  $g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$   
 $e_i(x, y) = \frac{x_i y - y_i x}{2r^2}$

les relations sont vérifiées à l'ordre 1:

$$e_1(P_0) + e_0(P_1) = \frac{1}{2r^2} (x_1 y_0 - y_1 x_0 + x_0 y_1 - y_0 x_1) = 0$$

mais pas forcément à un ordre supérieur: il faudrait pour  $i < n$ :

$$e_n(P_i) - e_{n+1}(P_i) - e_n(P_{n+1}) = 0,$$

c'est-à-dire:

$$(x_n - x_{n+1}) y_i - (y_n - y_{n+1}) x_i = x_n y_{n+1} - y_n x_{n+1}.$$

Conclusion:

Ayant normalisé les équations  $e_i$ , une CNS pour que les formules d'Hermite soient vérifiées pour toute fonction  $f$  holomorphe à tous ordres est que:

pour tout entier  $k$  et toute combinaison de  $k+2$  points, notés  $P_{i_0}, P_{i_1}, \dots, P_{i_k}, P_{i_{k+1}}$ , on ait:

$$\forall i \in \{i_0, \dots, i_{k-1}\} \quad e_{i_k}(P_i) - e_{i_{k+1}}(P_i) = e_{i_k}(P_{i_{k+1}})$$

et  $e_{i_{k+1}}(P_{i_k}) + e_{i_k}(P_{i_{k+1}}) = 0$

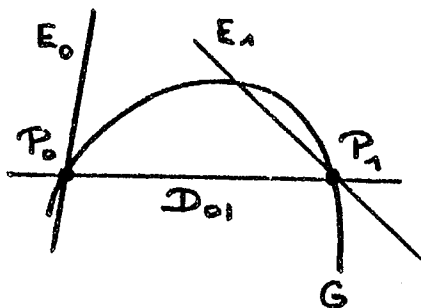
La formule d'Hermite correspondante s'écrit:

$$[g; e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_{k+1}}] = \sum_{i \in \{i_0, \dots, i_{k+1}\}} \text{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} f \\ g \cdot e_{i_0} \dots e_{i_{k+1}} \end{bmatrix}$$

Remarque: parmi ces conditions, certaines sont surabondantes: sont-elles souvent réalisées? C'est ce qu'on étudie dans le paragraphe suivant.

2.2) Interprétation des CNS

⊙ Exemple: conditions sur les différences divisées d'ordre 1, 2  
 $e_0(P_1) + e_1(P_0) = 0 \quad (*)$



Soient  $P_0(x_0, y_0)$  et  $P_1(x_1, y_1)$ .

$\exists (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C}^4$

$e_0(x, y) = \alpha_0(x - x_0) + \beta_0(y - y_0)$

$e_1(x, y) = \alpha_1(x - x_1) + \beta_1(y - y_1)$

$(*) \Leftrightarrow (\alpha_0 - \alpha_1)(x_1 - x_0) + (\beta_0 - \beta_1)(y_1 - y_0) = 0$

En résolvant cette dernière équation en fonction de  $e_0$ , c'est-à-dire de  $(\alpha_0, \beta_0)$ , on obtient comme solutions:

$(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_0, \beta_0) + \lambda (y_1 - y_0, -(x_1 - x_0))$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Si on définit  $d_{0,1}(x, y) = (y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0)$  équation de la droite  $P_0P_1$ ,

$(*) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, e_1 = e_0 - e_0(P_1) + \lambda d_{0,1}$

Cette condition restreint-elle le choix de  $E_1$ , une fois  $E_0$  fixée? Non :

Toute droite passant par  $P_1$  et distincte de la droite  $P_0P_1$  admet une équation  $e_1$  de ce type.

En effet, soit  $\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1)$  l'équation d'une droite passant par  $P_1$  :  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ .

quand existe-t-il une équation proportionnelle à celle-ci qui vérifie (\*) ?

$\exists c \in \mathbb{C}^* \exists \lambda \in \mathbb{C} \quad (c\alpha, c\beta) = (\alpha_0, \beta_0) + \lambda (y_1 - y_0, x_0 - x_1)$   
 $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{C}^* \exists \lambda \in \mathbb{C} \quad \begin{cases} \lambda (y_0 - y_1) + c\alpha = \alpha_0 \\ \lambda (x_1 - x_0) + c\beta = \beta_0 \end{cases}$

1er cas,  $\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & \alpha \\ x_1 - x_0 & \beta \end{vmatrix} \neq 0$  c'est-à-dire : droite distincte



alors le système admet une unique solution  $(c, \lambda)$

2<sup>ème</sup> cas:  $\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & d \\ x_1 - x_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$  c'est-à-dire: droite parallèle à  $P_0P_1$ , et passant par  $P_1$  donc droite  $P_0P_1$ :

le système n'admet de solution que si  $(d_0, \beta_0)$  est colinéaire à  $(y_0 - y_1, x_1 - x_0)$ : dans ce cas,  $E_0 =$  droite  $P_0P_1$ , mais alors  $e_0(P_1) = 0$ , hypothèse exclue dès le départ.

Conséquence: la condition (\*) sur les différences d'ordre 1 conduit à une normalisation de l'équation de la droite  $E_1$  en fonction de celle de  $E_0$ , sauf dans le cas particulier où  $E_1$  est la droite  $P_0P_1$ .

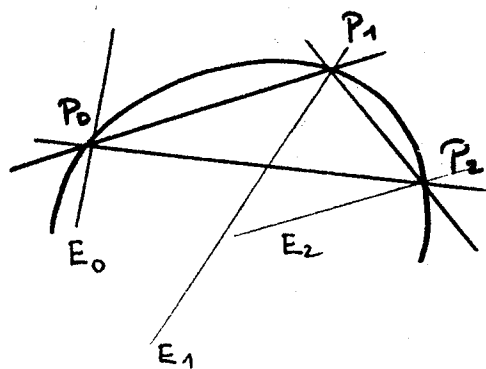
Remarque: il s'agit ici d'une nouvelle normalisation de  $e_1$  qui n'est pas forcément compatible avec celle imposée au 2.1) ①:  $\text{Jac}_{\{P_1\}}(g, e_1) = 1$

② conditions sur les différences divisées d'ordre 1 et 2, 3 points

Nous nous intéressons aux différences divisées d'ordre petit, car les hypothèses sur la géométrie de la figure deviennent très vite restrictives.

Pour 3 points  $P_0, P_1, P_2$ , les conditions sont:

$$\text{ordre 1} \begin{cases} e_0(P_1) + e_1(P_0) = 0 \\ e_0(P_2) + e_2(P_0) = 0 \\ e_1(P_2) + e_2(P_1) = 0 \end{cases}$$



du type précédent.

On suppose donc  $E_1 \neq P_0 P_1$ ,  $E_2 \neq \frac{P_0 P_2}{P_1 P_2}$

Le système équivaut alors à :

$$\exists (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3 \quad \begin{cases} e_1 = e_0 - e_0(P_1) + \lambda d_{01} \\ e_2 = e_0 - e_0(P_2) + \mu d_{02} \\ e_2 = e_1 - e_1(P_2) + \nu d_{12} \end{cases} \quad (*)$$

où les équations  $d_{02}$  et  $d_{12}$  sont définies de manière analogue à  $d_{01}$ .

Les deux dernières équations impliquent :

$$e_1 - e_0 + e_0(P_2) - e_1(P_2) + \nu d_{12} - \mu d_{02} = 0$$

donc la première,

$$e_0(P_2) - e_1(P_2) - e_0(P_1) + \lambda d_{01} - \mu d_{02} + \nu d_{12} = 0$$

Comme  $d_{12} = d_{0,2} - d_{0,1} + d_{12}(P_0)$ , on obtient :

$$\text{et } e_1(P_2) = e_0(P_2) - e_0(P_1) + \lambda d_{01}(P_2)$$

$$\exists (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$$

$$(\lambda - \nu) d_{0,1} + (\nu - \mu) d_{0,2} + \nu d_{12}(P_0) - \lambda d_{01}(P_2) = 0$$

Cette expression est un polynôme de degré  $\leq 1$  dans  $\mathbb{C}[x, y]$  ; en l'exprimant dans la base  $1, x - x_0, y - y_0$  sa nullité équivaut à :

$$\begin{cases} (\lambda - \nu)(y_1 - y_0) + (\nu - \mu)(y_2 - y_0) = 0 & \text{coefficient de } x - x_0 \\ (\lambda - \nu)(x_1 - x_0) + (\nu - \mu)(x_2 - x_0) = 0 & \text{de } y - y_0 \\ (\nu - \lambda) d_{01}(P_2) = 0 & \text{de } 1 \end{cases}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{d_{12}(P_0)}$

(plus généralement, par permutation circulaire,  
 $d_{ij}(P_k) = d_{ki}(P_j)$ )

Discussion :

Nécessairement,  $\lambda, \mu$  et  $\nu$  doivent vérifier les trois conditions précédentes.

- Or, si les vecteurs  $\vec{P_0P_1}$  et  $\vec{P_0P_2}$  forment un système libre, les deux premières équations n'admettent que la solution triviale :  $\lambda = \mu = \nu$ , qui est aussi solution de la dernière équation.

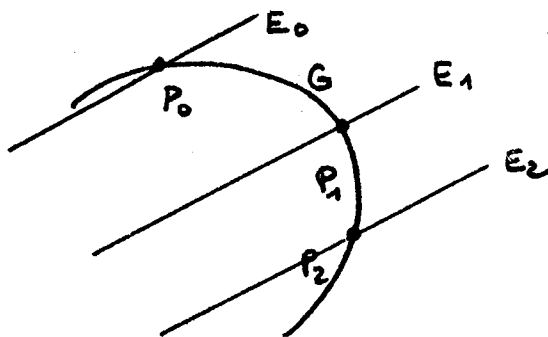
Autrement dit, lorsque  $P_0, P_1$  et  $P_2$  ne sont pas alignés, si l'équation de  $E_1$  est  $e_0 - e_0(P_1) + \lambda d_{01}$ , celle de  $E_2$  est nécessairement :  $e_0 - e_0(P_2) + \lambda d_{02}$  (et aussi  $e_1 - e_1(P_2) + \lambda d_{12}$ )

mais alors, pour les différences divisées d'ordre 2, on doit avoir :  
 $e_1(P_0) - e_2(P_0) = e_1(P_2)$   
 c'est-à-dire :

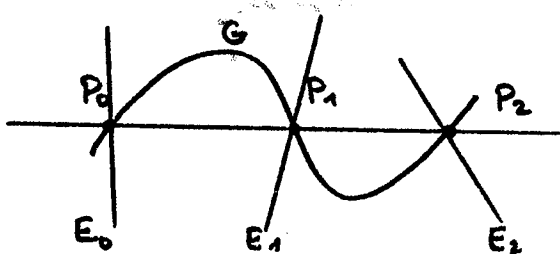
$$(e_0(P_2) + \lambda d_{01}(P_2) - e_0(P_1)) - (-e_0(P_1)) + (-e_0(P_2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda d_{01}(P_2) = 0}$$

Comme  $d_{01}(P_2) \neq 0$ , nécessairement  $\lambda = 0$   
 et les droites  $E_1$  et  $E_2$  sont en fait les droites parallèles à  $E_0$  qui passent par  $P_1$  et  $P_2$  respectivement.



- Si les vecteurs  $\vec{P_0P_1}$  et  $\vec{P_0P_2}$  forment un système lié, le système (\*) équivaut aux deux premières équations :  $\nu$  est déterminé en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$  indépendants.



Pour trois points alignés  $P_0, P_1, P_2$ , pas d'autre condition imposée sur les  $E_i$  par les différences d'ordre 1 et 2, que d'être distinctes de  $P_i P_j$ .

③ Conclusion.

Les conditions imposées sur les droites  $E_i$  diffèrent donc suivant que les points  $P_i$  sont alignés ou non.

Supposons ces points d'interpolation numérotés dans un ordre  $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, P_k, \dots, P_m$  tel que :

$\underbrace{P_0, P_1, \dots, P_{k-1}}_{\text{alignés}} \quad \text{pour } l \geq k \quad P_l \notin \text{droite } P_0 P_1.$

En considérant les différences d'ordre 1 et 2 relatives à  $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$ , pas de condition sur les  $E_i$  ( $0 \leq i \leq k-1$ ) que :  $E_i \neq P_0 P_1$ , dont on écrit l'équation sous la forme :

$$e_i = e_0 - e_0(P_i) + \lambda_i d_{0i} \quad (\lambda_i \in \mathbb{C}), \quad i \geq 1$$

Par contre, pour  $i \geq k$ ,  $P_0, P_1, P_i$  n'étant pas alignés, les différences d'ordre 1 sur ces 3 points imposent  $e_i = e_0 - e_0(P_i) + \lambda_i d_{0i}$  avec  $\lambda_i = \lambda_1 = 0$ , c'est-à-dire  $E_i$  parallèle à  $E_0$  ainsi que  $E_1$ .

Conséquence :

Si le système  $P_0, P_1, \dots, P_m$  des points d'interpolation comporte au moins 3 points non alignés, nécessairement toutes les droites  $E_i$  doivent être parallèles à la première  $E_0$ , leurs équations étant mises sous la forme :  $e_i = e_0 - e_0(P_i)$ .

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}
 i \leq n-1 \quad & e_n(P_i) - e_{n+1}(P_i) - e_n(P_{n+1}) \\
 & = e_0(P_i) - e_0(P_m) - e_0(P_i) + e_0(P_{n+1}) - e_0(P_{n+1}) \\
 & \quad + e_0(P_m) = 0
 \end{aligned}$$

et  $e_{n+1}(P_m) + e_n(P_{n+1}) = 0$

Les conditions sur les toutes les différences d'ordre  $\geq 1$  sont vérifiées. Mais l'écriture des  $e_i$  doit être compatible avec la normalisation imposée par celles d'ordre 0, à savoir :

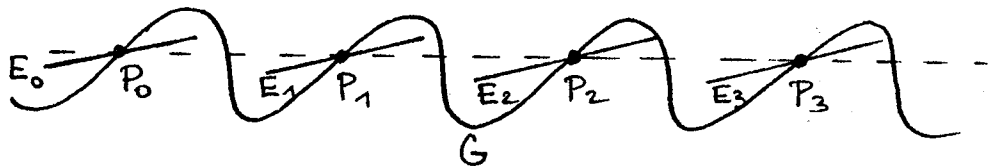
$$\text{Jac}_{\{P_i\}}(g, e_i) = 1$$

et  $e_i(x, y) = \alpha_0(x - x_i) + \beta_0(y - y_i)$   
 Les points  $P_i$  doivent vérifier:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(P_i) & \frac{\partial g}{\partial y}(P_i) \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{vmatrix} = 1$$

Même en imposant aux droites  $E_i$  d'être toutes parallèles, les points d'interpolation ne peuvent être choisis arbitrairement sur la courbe  $G$ .

Exemple:



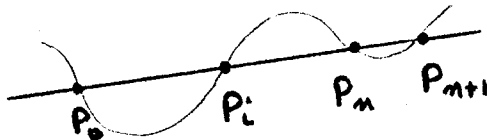
Reste le cas où tous les points d'interpolation  $P_0, P_1, \dots, P_m$  sont alignés.

Alors, toutes les conditions sur les différences d'ordre  $n \geq 1$  sont vérifiées, car :

avec  $e_i = e_0 - e_0(P_i) + \lambda_i d_{0i}$ ,

$$e_n(P_i) - e_{n+1}(P_i) - e_n(P_{n+1}) = \lambda_n d_{0n}(P_i) - \lambda_{n+1} d_{0,n+1}(P_i) - \lambda_n d_{0n}(P_{n+1}) = 0$$

(comme les  $P_i$  sont alignés,  $\forall j \neq 0 \quad d_{0j}(P_i) = 0$ )



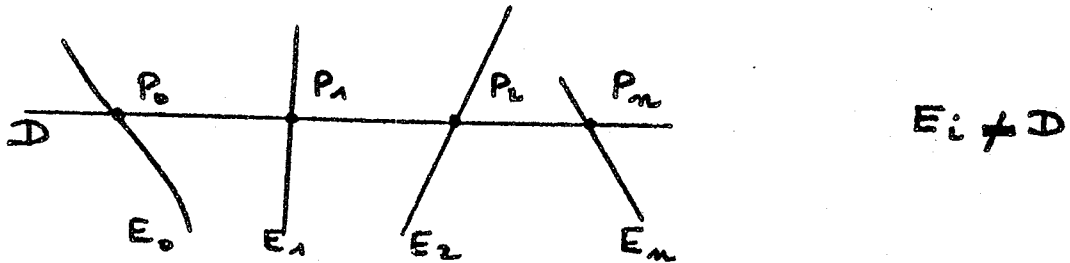
$$\text{et } e_{n+1}(P_n) + e_n(P_{n+1}) = \lambda_n d_{0n}(P_{n+1}) + \lambda_{n+1} d_{0,n+1}(P_n) = 0$$

Par contre, on n'a pas forcément:

$$\text{Jac}_{\{P_i\}}(g, e_i) = 1.$$

De nouveau, les points d'interpolation ne sont pas des points alignés arbitraires sur la courbe  $G$ .

Pour cette raison, il n'est pas utile de se servir de  $g$  ;  
il vaut mieux remplacer cette équation par une  
équation de la droite  $D$  portant les  $P_i$  : soit  $d=0$



Montrons que dans ce cas, les différentes normalisations  
des  $e_i$  en fonction de  $d$  sont compatibles.

$$\forall i \quad \text{Jac}_{\{P_i\}}(d, e_i) = \text{Jac}(d, e_i) = \begin{vmatrix} \frac{\partial d}{\partial x} & \frac{\partial d}{\partial y} \\ \frac{\partial e_i}{\partial x} & \frac{\partial e_i}{\partial y} \end{vmatrix}$$

notation

ces quatre termes étant constants  
( $d$  et  $e_i$  sont des polynômes de  $d^0 \leq 1$ ).

Supposons  $d$  fixée.

$\text{Jac}_{\{P_0\}}(d, e_0) = 1$  impose une normalisation de  $e_0$   
en fonction de  $d$ .

Les relations sur les différences d'ordre  $\geq 1$  imposent d'écrire  
les équations  $e_i$  sous la forme :  $e_i = e_0 - e_0(P_i) + \lambda_i d_{oi}$   
 $\lambda_i \in \mathbb{C}$

Mais alors,  $\text{Jac}(d, e_i) = \text{Jac}(d, e_0) + \lambda_i \text{Jac}(d, d_{oi})$   
(propriétés des déterminants)

comme  $d$  et  $d_{oi}$   
sont deux équations  
de la même droite  $D$ ,  
ce jacobien est nul

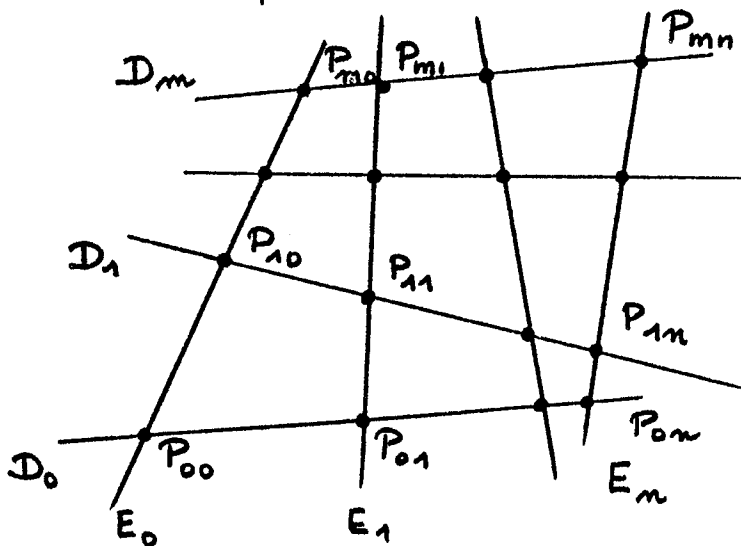
et la condition  $\text{Jac}_{\{P_i\}}(d, e_i) = 1$  est automatiquement  
vérifiée.

En écrivant les équations des droites  $E_i$  sous cette forme,  
les "formules d'Hermite" sont vraies à tous ordres.

#### IV Étude d'un réseau : deux systèmes de droites

$D_i$  et  $E_j$        $0 \leq i \leq m$   
                                   $0 \leq j \leq n$

D'après le paragraphe précédent, pour des points d'interpolation à l'intersection d'une droite  $D$  et de droites  $E_j$  distinctes de  $D$ , les "formules d'Hermite" sont valables. Essayons donc de généraliser cette situation en ajoutant des points d'interpolation à l'intersection des mêmes droites  $E_j$  avec d'autres droites  $D_i$ , de sorte que tous les points soient distincts.



$$\begin{cases} D_i \text{ d'équation } d_i \\ E_j \text{ d'équation } e_j \end{cases}$$

$P_{ij} = D_i \cap E_j$   
 supposé à distance finie,  
 et les  $f(P_{ij})$  connues pour  
 $0 \leq i \leq m$   
 $0 \leq j \leq n$

#### 1) Interpolation de Newton

Cherchons a priori le polynôme  $p$  d'interpolation dans l'espace vectoriel engendré par:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, e_0, e_0 e_1, \dots, e_0 e_1 \dots e_{m-1} \\ d_0, d_0 e_0, d_0 e_0 e_1, \dots, d_0 e_0 e_1 \dots e_{m-1} \\ d_0 d_1, d_0 d_1 e_0, d_0 d_1 e_0 e_1, \dots, d_0 d_1 e_0 \dots e_{m-1} \\ \vdots \\ d_0 d_1 \dots d_{m-1}, d_0 d_1 \dots d_{m-1} e_0, d_0 d_1 \dots d_{m-1} e_0 e_1, \dots, d_0 \dots d_{m-1} e_0 \dots e_m \end{array} \right.$$

ou de manière plus concise, l'espace vectoriel engendré par les  $(\omega_i \Omega_j)_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}}$ , avec  $\omega_i = \prod_{k=0}^i d_{k-1}$ ,  $\Omega_j = \prod_{l=0}^j e_{l-1}$

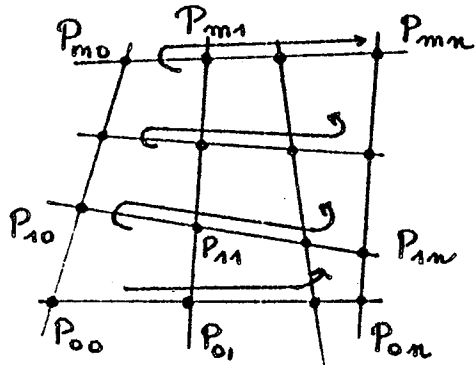
Soit 
$$p = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} w_i \Omega_j$$

On choisit un ordre de parcours des points  $P_{ij}$  vérifiant la règle du rectangle: utilisation de l'équation:  

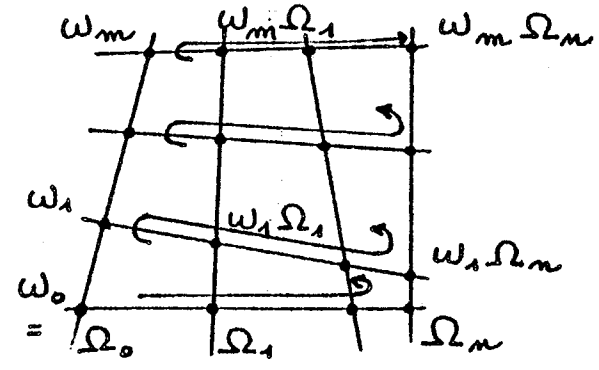
$$p(P_{ij}) = f(P_{ij})$$
 après toutes les équations  

$$p(P_{kl}) = f(P_{kl}) \quad \text{et } 0 \leq k \leq i, \quad 0 \leq l \leq j, \quad \text{par exemple:}$$

ordre lexicographique sur les couples  $(i,j)$ :  
 $P_{00}, P_{01}, \dots, P_{0n}; P_{10}, P_{11}, \dots, P_{1n}; \dots, P_{m0}, P_{m1}, \dots, P_{mn}$



points d'interpolation



polynômes de "base"

Soit  $A$  la matrice unicolonne des  $a_{ij}$ , écrite dans le même ordre que les  $P_{ij}$ , par exemple:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ \vdots \\ a_{0n} \\ a_{10} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m0} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \quad \text{avec } A_i = \begin{pmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$$

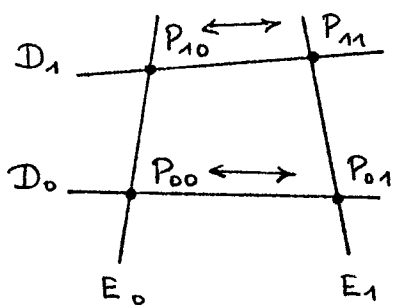
Soit  $F$  la matrice unicolonne des  $f(P_{ij})$ , toujours écrite dans le même ordre:







Calculons par exemple le coefficient  $a_{11}$  :

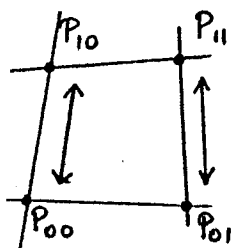


Ce terme peut s'exprimer sous les deux formes symétriques en  $d$  et  $e$  :

$$a_{11} = \frac{\frac{f(P_{11}) - f(P_{10})}{e_0(P_{11})} - \frac{f(P_{01}) - f(P_{00})}{e_0(P_{01})}}{d_0(P_{11})} + \frac{f(P_{10}) - f(P_{00})}{e_0(P_{11})} \left( \frac{1}{d_0(P_{11})} - \frac{1}{d_0(P_{10})} \right)$$

baptisée "différence divisée" à cause de sa forme (en  $e$ , puis  $d$ )

terme complémentaire



ou bien :

$$a_{11} = \frac{\frac{f(P_{11}) - f(P_{01})}{d_0(P_{11})} - \frac{f(P_{11}) - f(P_{00})}{d_0(P_{10})}}{e_0(P_{11})} + \frac{f(P_{01}) - f(P_{00})}{d_0(P_{11})} \left( \frac{1}{e_0(P_{11})} - \frac{1}{e_0(P_{01})} \right)$$

"différence divisée" en  $d$ , puis  $e$

terme complémentaire

Dans la première écriture le terme complémentaire est nul (pour toute  $f$ ) si et seulement si :  $d_0(P_{11}) = d_0(P_{10})$  c'est-à-dire : la droite  $P_{10}P_{11}$  est parallèle à  $D_0$ . Alors, le dénominateur dans la différence divisée est  $d_0(P_{11})$  aussi bien que  $d_0(P_{10})$ .

Dans la seconde écriture, cette fois le terme complémentaire est nul si et seulement si  $E_1$  est parallèle à  $E_0$ .

Cette remarque nous conduit à supposer que l'un des





et  $F_i \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} f(P_{i0}) \\ \frac{f(P_{i1}) - f(P_{i0})}{e_0(P_{i1})} \\ \frac{f(P_{i2}) - f(P_{i0})}{e_0(P_{i2})} \\ \vdots \\ \frac{f(P_{im}) - f(P_{i0})}{e_0(P_{im})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [d_i; e_0] \\ [d_i; e_0, e_1] \\ [d_i; e_0, e_2] \\ \vdots \\ [d_i; e_0, e_m] \end{pmatrix}$$

\* La seconde opération est analogue à la précédente, mais elle ne touche plus à la première ligne du bloc  $T_i$

En retranchant la ligne 1 à toutes les suivantes:

$T_{ik} \rightarrow w_k(P_{i0})$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & e_1(P_{i2}) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & e_1(P_{im}) & \dots & e_1 \dots e_{m-1}(P_{im}) \end{pmatrix}$$

$F_i \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} [d_i; e_0] \\ [d_i; e_0, e_1] \\ [d_i; e_0, e_2] - [d_i; e_0, e_1] \\ \vdots \\ [d_i; e_0, e_m] - [d_i; e_0, e_1] \end{pmatrix}$$

En divisant chaque ligne  $l$  ( $l \geq 2$ ) par  $e_1(P_{il}) \neq 0$

$T_{ik} \rightarrow w_k(P_{i0})$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 & e_2(P_{im}) & \dots e_2 \dots e_{m-1}(P_{im}) \end{pmatrix}$$

et  $F_i \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} [d_i; e_0] \\ [d_i; e_0, e_1] \\ \frac{[d_i; e_0, e_2] - [d_i; e_0, e_1]}{e_1(P_{i2})} \\ \vdots \\ \frac{[d_i; e_0, e_m] - [d_i; e_0, e_1]}{e_1(P_{im})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [d_i; e_0] \\ [d_i; e_0, e_1] \\ [d_i; e_0, e_1, e_2] \\ \vdots \\ [d_i; e_0, e_1, e_m] \end{pmatrix}$$

\* En itérant le procédé (analogue à la méthode de Gauss), on obtient :

$$T_{ik} \rightarrow \omega_k(P_{i0}) \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

← matrice identité d'ordre  $m+1$ :  $\mathbf{I}$

$$\text{et } F_i \rightarrow \begin{pmatrix} [d_i; e_0] \\ [d_i; e_0, e_1] \\ [d_i; e_0, e_1, e_2] \\ \vdots \\ [d_i; e_0, e_1, \dots, e_m] \end{pmatrix}$$

À la fin de ces transformations, le système initial équivaut donc à :

bloc 0 ( $\mathcal{D}_0$ )	$\mathbf{I}$				$A_0$	$\begin{bmatrix} [d_0; e_0] \\ [d_0; e_0, e_1] \\ \vdots \\ [d_0; e_0, e_1, \dots, e_m] \end{bmatrix}$
bloc 1 ( $\mathcal{D}_1$ )	$\mathbf{I}$	$\omega_1(P_{10})\mathbf{I}$			$A_1$	$\begin{bmatrix} [d_1; e_0] \\ [d_1; e_0, e_1] \\ \vdots \\ [d_1; e_0, e_1, \dots, e_m] \end{bmatrix}$
bloc 2 ( $\mathcal{D}_2$ )	$\mathbf{I}$	$\omega_1(P_{20})\mathbf{I}$	$\omega_2(P_{20})\mathbf{I}$		$A_2$	$\begin{bmatrix} [d_2; e_0] \\ [d_2; e_0, e_1] \\ \vdots \\ [d_2; e_0, e_1, \dots, e_m] \end{bmatrix}$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
bloc m ( $\mathcal{D}_m$ )	$\mathbf{I}$	$\omega_1(P_{m0})\mathbf{I}$	$\omega_2(P_{m0})\mathbf{I}$	⋯ $\omega_m(P_{m0})\mathbf{I}$	$A_m$	$\begin{bmatrix} [d_m; e_0] \\ [d_m; e_0, e_1] \\ \vdots \\ [d_m; e_0, e_1, \dots, e_m] \end{bmatrix}$

Cette matrice est en fait du même type que les matrices  $T_{ik}$  précédentes, si on considère que ses éléments sont des matrices d'ordre  $n+1$ .

② Opérations entre les blocs

Par exemple, la première étape consiste à retrancher chaque ligne  $l \geq 1$  du bloc 0 à chaque ligne  $l$  des blocs suivants :

$$T \rightarrow \begin{pmatrix} I & & & & \\ 0 & \omega_1(P_{10})I & & & \\ 0 & \omega_1(P_{20})I & \omega_2(P_{20})I & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \omega_1(P_{m0})I & \omega_2(P_{m0})I & \dots & \omega_m(P_{m0})I \end{pmatrix}$$

$$F \rightarrow \begin{pmatrix} [d_0; e_0] \\ [d_0; e_0, \dots, e_n] \\ \hline [d_1; e_0] - [d_0; e_0] \\ \vdots \\ [d_1; e_0, \dots, e_n] - [d_0; e_0, \dots, e_n] \\ \hline \vdots \\ [d_m; e_0] - [d_0; e_0] \\ \vdots \\ [d_m; e_0, \dots, e_n] - [d_0; e_0, \dots, e_n] \end{pmatrix}$$

En divisant ensuite chaque bloc  $l \geq 1$  par  $d_0(P_{l0}) \neq 0$  :

$$T \rightarrow \begin{pmatrix} I & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & I & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & I & d_1(P_{20})I & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & I & d_1(P_{m0})I & \dots & d_1 \dots d_{m-1}(P_{m0})I \end{pmatrix}$$

$$F \rightarrow \begin{pmatrix} [d_0; e_0] \\ [d_0; e_0, \dots, e_n] \\ \hline \frac{[d_1; e_0] - [d_0; e_0]}{d_0(P_{10})} \\ \vdots \\ \frac{[d_1; e_0, \dots, e_n] - [d_0; e_0, \dots, e_n]}{d_0(P_{10})} \\ \hline \vdots \\ \frac{[d_m; e_0] - [d_0; e_0]}{d_0(P_{m0})} \\ \vdots \end{pmatrix}$$



Les étapes suivantes sont tout à fait analogues à celle-ci, les opérations se faisant bloc à bloc (c'est-à-dire entre les lignes de même indice à l'intérieur de chacun des blocs).

Le résultat de ces transformations appliquées à F nous amène à définir les différences divisées de la manière suivante :

Définition du § III  $\left\{ \begin{array}{l} \forall i, j \quad [d_i; e_j] = f(P_{ij}) \\ \forall i, n \quad [d_i; e_0, \dots, e_{n+1}] = \frac{[d_i; e_0, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}] - [d_i; e_0, \dots, e_{n-1}, e_n]}{e_n(P_{i, n+1})} \\ \forall m, n \quad [d_0, \dots, d_{m+1}; e_0, \dots, e_n] = \frac{[d_0, \dots, d_{m-1}, d_{m+1}; e_0, \dots, e_n] - [d_0, \dots, d_{m-1}, d_m; e_0, \dots, e_n]}{d_m(P_{m+1, 0})} \end{array} \right.$

Remarque : Du fait que les droites  $D_i$  sont parallèles, le dénominateur :  $d_m(P_{m+1, 0}) = d_m(P_{m+1, k}) \quad \forall k$ . (dans la définition, il n'y a pas de raison de privilégier un de ces points par rapport aux autres).

Attention : cette définition n'est pas commutative a priori, au moins quand les droites  $E_j$  ne sont pas parallèles.

Théorème : Le système final est :

$$\left( \begin{array}{c} A_0 \\ \hline A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} [d_0; e_0] \\ \hline [d_0; e_0, \dots, e_n] \\ \hline [d_0, d_1; e_0] \\ \hline [d_0, d_1; e_0, \dots, e_n] \\ \hline \vdots \\ \hline [d_0, d_1, \dots, d_m; e_0] \\ \hline [d_0, d_1, \dots, d_m; e_0, \dots, e_n] \end{array} \right)$$

c'est-à-dire :  
pour  $0 \leq i \leq m$   
 $0 \leq j \leq n$

$$a_{ij} = [d_0, \dots, d_i; e_0, \dots, e_j]$$

et le polynôme d'interpolation de  $f$  (qui existe et est unique) dans l'espace considéré est :

$$p = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n [d_0, \dots, d_i; e_0, \dots, e_j] d_0 \dots d_{i-1} e_0 \dots e_{j-1}$$

Remarque: Il est défini d'une manière identique à celle du chapitre 4.

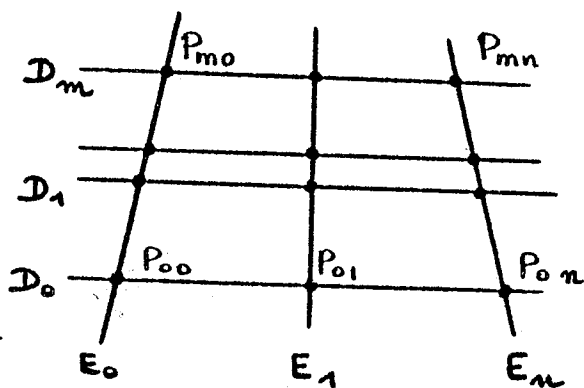
Si l'on s'affranchit de l'hypothèse de parallélisme sur les  $D_i$ , Maczka [ ] montre que les coefficients peuvent aussi se calculer par récurrence, mais les relations sont beaucoup plus compliquées.

Cependant, nous étions intéressés par une forme intégrale de ces coefficients.

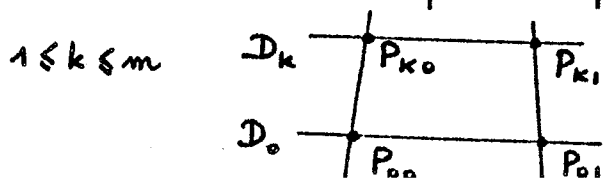
### 3) Différences divisées (doubles) et résidus.

Les "formules d'Hermite" établies au § III se généralisent elles à ce cadre :

$$(H) [d_0, \dots, d_i; e_0, \dots, e_j] = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \text{Res}_{\{P_{ij}\}} \left[ \begin{array}{l} f(x,y) dx \wedge dy \\ d_0 \dots d_i \cdot e_0 \dots e_j \end{array} \right]$$



Cherchons une condition nécessaire, et pour cela, considérons les quatre points :



Le choix de  $d_0$  équation de  $D_0$  impose celui de  $e_0$  équation de  $E_0$  (normalisation issue de  $[d_0; e_0]$ ), puis celui de  $e_1$  équation de  $E_1$  (normalisation issue de  $[d_0; e_0, e_1]$ ):  $e_1 = e_0 - e_0(P_{01}) + \lambda_0 d_{P_{00}P_{01}}$

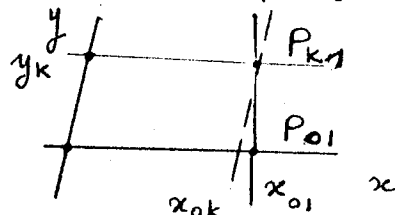
L'équation  $d_k$  de  $D_k$  est aussi fixée par  $[d_0, d_k; e_0]$  :  $d_k = d_0 - d_0(P_{k0})$  parallèles.

Mais si l'on considère les différences divisées sur la droite  $D_k$ , en particulier  $[d_k; e_0, e_1]$ ,  $e_1$  doit vérifier  $e_1 = e_0 - e_0(P_{k1}) + \lambda_k d_{P_{k0}P_{k1}}$

Pour simplifier les calculs, supposons que  $D_0$  soit l'axe des  $x$ ,  $E_0$  l'axe des  $y$  (cas auquel on peut toujours se ramener par un changement de repère)

$$\begin{cases} d_0(x, y) = -y \\ e_0(x, y) = x \\ \text{Jac}(d_0, e_0) = 1 \end{cases}$$

$$P_{00} = 0$$



dans ce cadre,

$$e_0(P_{k1}) - e_0(P_{01}) + \lambda_0 d_{P_{00}P_{01}} - \lambda_k d_{P_{k0}P_{k1}} \equiv 0$$

s'écrit :  $x_{k1} - x_{01} + \lambda_0(-x_{01}y) - \lambda_k(-x_{0k}y) \equiv 0$

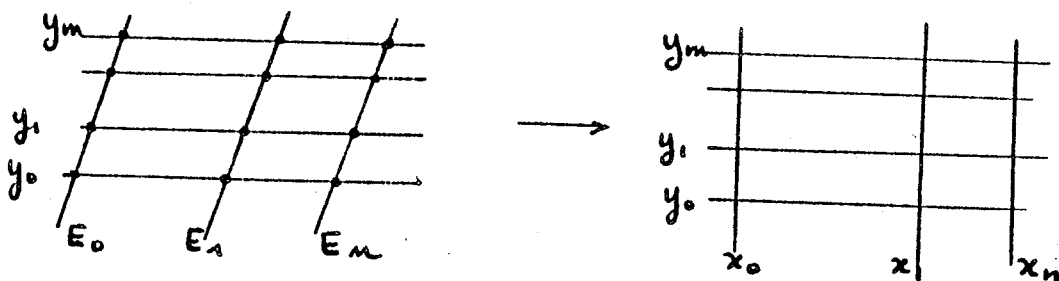
d'où :  $(x_{k1} - x_{01}) + y(\lambda_k x_{0k} - \lambda_0 x_{01}) \equiv 0$

$x_{k1} - x_{01} = 0$  c'est-à-dire  $E_1 \parallel E_0$

Conséquence: Pour que les formules d'Hermité (H) soient vérifiées, il est nécessaire que les droites  $E_j$  soient parallèles.

Mais alors, moyennant un changement de repère affine dans  $\mathbb{C}^2$ , c'est une configuration déjà étudiée au chapitre 4, pour laquelle ces formules sont vraies. On pourrait aussi les vérifier directement.

par récurrence.



Pour deux systèmes de droites, le lien avec les résidus de la manière dont nous l'avons cherché, n'est possible que si chacun de ces systèmes est formé de droites parallèles; ce qui ne généralise guère la situation du chapitre précédent.

Cependant, nous avons remarqué que le parallélisme des courbes qui forment l'un des deux systèmes suffit à définir des différences divisées: nous traitons ci-dessous un cas où ces courbes algébriques sont de degré 2.

## V Interpolation polynômiale "circulaire" d'une fonction de deux variables complexes.

### 1) Différences divisées

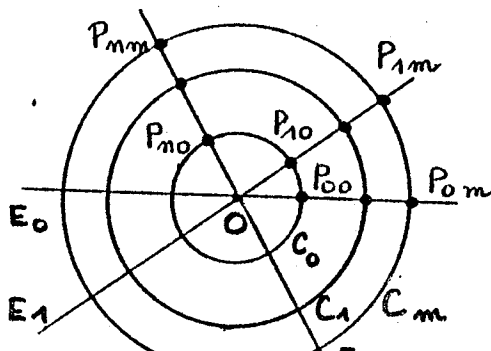
Soit  $C_i$  le "cercle" d'équation:

$$0 \leq i \leq m \quad c_i(x, y) = x^2 + y^2 - \kappa_i^2, \quad \kappa_i \in \mathbb{R}^{++}$$

qui passe par les points  $(\kappa_i \alpha_j, \kappa_i \beta_j)$   
 $\alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$

Soit  $E_j$  la droite d'équation:

$$0 \leq j \leq n \quad e_j(x, y) = \alpha_j y - \beta_j x$$



Supposant connues les valeurs de  $f$  aux points  $P_{ij}$   $0 \leq i \leq m$ ,  $0 \leq j \leq n$ ,  
le système

$$p(P_{ij}) = f(P_{ij}) \quad \text{pour } \begin{matrix} 0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n \end{matrix}, \text{ où } p \text{ est un}$$

polynôme de l'espace vectoriel engendré par:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 1 & , & e_0 & , & e_0 e_1 & , & \dots & e_0 e_1 \dots e_{m-1} \\ c_0 & , & c_0 e_0 & , & c_0 e_0 e_1 & , & & c_0 e_0 e_1 \dots e_{m-1} \\ c_0 c_1 & , & c_0 c_1 e_0 & , & c_0 c_1 e_0 e_1 & , & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ c_0 c_1 \dots c_{m-1} & , & c_0 \dots c_{m-1} e_0 & , & \dots & & & c_0 \dots c_{m-1} e_0 \dots e_{m-1} \end{array} \right.$$

est triangulaire inversible,

car  $c_0 c_1 \dots c_k e_0 \dots e_l (P_{ij}) = 0$  dès que  $k \geq i$  ou  $l \geq j$   
et  $c_0 c_1 \dots c_{i-1} e_0 \dots e_{j-1} (P_{ij}) \neq 0$

(convention:  $c_{-1} = e_{-1} = 0$ )

En appliquant la même méthode que pour deux systèmes de droites, le coefficient de  $c_0 c_1 \dots c_{i-1} e_0 \dots e_{j-1}$  du développement de  $p$  dans le système libre ci-dessus est:

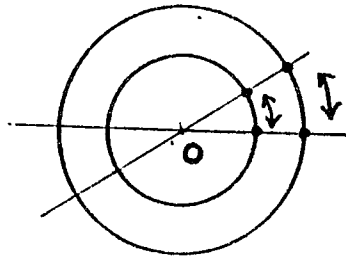
$[c_0, \dots, c_i; e_0, \dots, e_j]$  différence divisée de  $f$  définie par récurrence (double) par:

$$v_i \left\{ \begin{array}{l} [c_i; e_0] = f(P_{i0}) \\ [c_i; e_0, e_1] = \frac{[c_i; e_1] - [c_i; e_0]}{e_0(P_{i1})} \\ \vdots \\ [c_i; e_0, e_1, \dots, e_{e+1}] = \frac{[c_i; e_0, \dots, e_{e-1}, e_{e+1}] - [c_i; e_0, \dots, e_{e-1}, e_e]}{e_e(P_{i, e+1})} \end{array} \right.$$

$$v_e \left\{ \begin{array}{l} \text{puis} \\ [c_0, c_1; e_0, \dots, e_e] = \frac{[c_1; e_0, \dots, e_e] - [c_0; e_0, \dots, e_e]}{c_0(P_{10})} \\ \vdots \\ [c_0, c_1, \dots, c_{k+1}; e_0, \dots, e_e] = \frac{[c_0, \dots, c_{k-1}, c_{k+1}; e_0, \dots, e_e] - [c_0, \dots, c_{k-1}, c_k; e_0, \dots, e_e]}{c_k(P_{k+1,0})} \end{array} \right.$$

Le fait que les cercles  $C_i$  soient parallèles ( $c_j = c_i + \text{constant}$ ) intervient de manière fondamentale à ce dernier niveau, car ainsi  $c_k$  est constant sur  $C_{k+1}$  et le dénominateur  $c_k(P_{k+1,0})$  vaut aussi  $c_k(P_{k+1,j}) \quad \forall j$ .

C'est aussi ce qui justifie l'ordre de définition : différences prises d'abord par rapport aux droites, puis par rapport aux cercles, car les droites ne sont pas parallèles.



References

- [1] G.V. CHUDNOVSKY (1979) Padé approximation and the Riemann problem. Lectures Cargèse school on mathematical physics.
- [2] P. GRIFFITHS - J. HARRIS (1978) Principles of algebraic geometry. Wiley - Interscience - John Wiley and Sons.
- [3] H.A. HAKOPIAN (1982) Multivariate divided differences and multivariate interpolation of Lagrange and Hermite type. J. of Approx. Theory 34 p 286-305
- [4] J.I. MAEZTU (1982) Divided differences associated with reversible systems in  $\mathbb{R}^2$ . J. SIAM. Numer. Anal. vol 1 n° 5 p 1032-1040.
- [5] C.A. MICCHELLI (1979) On a numerically efficient method for computing multivariate B-splines, in "Multivariate approximation theory", ISNM 51. Schempp - Zeller ed. p 211-248.
- [6] P. SABLONNIERE (1982) A new family of Padé-type approximants in  $\mathbb{R}^k$ . publication AND 85. nov. 82. université de Lille 1.

6.

Approximants de Padé multipoints d'une fonction de deux variables complexes

Introduction

Après l'interpolation rationnelle d'une fonction de deux variables complexes, quand toutes les données sont concentrées à l'origine, se pose naturellement le problème analogue quand les données concernent plusieurs points, et non plus un seul.

D'après l'étude qui précède (chapitres 4-5), l'interpolation polynômiale dans  $\mathbb{C}^2$  possède des propriétés agréables, tant du point de vue algorithmique (polynôme de Newton) que théorique (erreur), quand l'ensemble des points d'interpolation est de type rectangulaire  $\{ (x_k, y_\ell) \mid 0 \leq k \leq m, 0 \leq \ell \leq n \}$ ,

ou vérifie au moins la règle du rectangle.

C'est pourquoi nous nous limitons ici à ce type de points.

Nous avons le choix entre deux démarches :

- une approche théorique qui consiste à choisir habilement la nature du numérateur  $P$ , du dénominateur  $Q$  et les conditions de coïncidence de  $Qf$  avec  $P$  pour que les équations correspondantes admettent des solutions. C'est ainsi qu'apparaissent les déterminants de Hankel dans le cas d'une variable.
- une approche constructive, qui fournit directement des "fractions continues à deux variables" prenant les mêmes valeurs que  $f$  aux points d'un rectangle et dont les coefficients se calculent récursivement. C'est l'analogie



des fractions continues de Hecke concernant les fonctions d'une seule variable.

Notre préférence va bien sûr à la seconde méthode.

### A) Approche théorique : équations

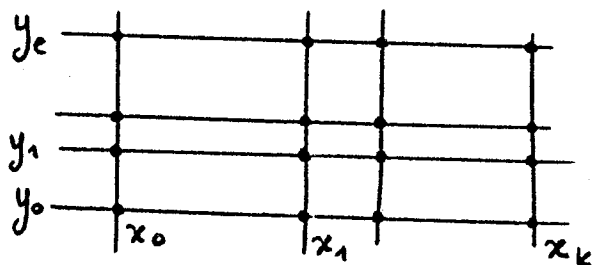
Pour un ensemble de points d'interpolation  $\{(x_k, y_e) \mid (k, l) \in \mathbb{N}^2\}$  dans  $\mathbb{C}^2$ , l'analogie

du développement de Mac-Laurin de  $f$  holomorphe en  $(0,0)$  :

$$f(x, y) = \sum_{(k, l) \in \mathbb{N}^2} a_{k, l} x^k y^l$$

est le développement de Newton de  $f$  :

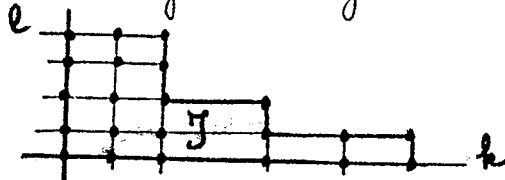
$$f(x, y) = \sum_{(k, l) \in \mathbb{N}^2} [x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_e; f] \omega_k(x) \Omega_l(y)$$



(avec les notations du ch. 4)

### I Écriture des équations.

Dire que  $Qf$  coïncide avec  $P$  en les points  $(x_k, y_e)$  où  $\mathcal{J}$  vérifie la règle du rectangle :



c'est dire que les termes correspondants du développement de Newton de  $Qf - P$  sont nuls :

$$\forall (k, l) \in \mathcal{J} \quad [x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_e; Qf - P] = 0$$

$P, Q, f$  sont développés sous forme de Newton et comme  
 $[x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_e; Qf - P] = [x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_e; Qf] - [x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_e; P]$ ,  
 il est nécessaire de connaître le développement de Newton d'un produit en fonction de celui de chacun des facteurs.

1) Formule de Leibniz établie par le procédé tensoriel.

Calculons  $[x_0, \dots, x_m; y_0, \dots, y_e; gh]$ .

La formule de Leibniz pour une fonction  $gh$  d'une seule variable est:

$$[x_0, \dots, x_m; gh] = \sum_{k=0}^m [x_0, \dots, x_k; g][x_k, \dots, x_m; h]$$

(qui n'est autre que:

$$(gh)^{(m)}(x_0) = \sum_{k=0}^m C_m^k g^{(k)}(x_0) h^{(m-k)}(x_0)$$

quand  $\forall i, x_i = x_0$ )

Revenons à notre définition tensorielle des différences divisées doubles:

$$[x_0, \dots, x_m; y_0, \dots, y_n; (gh)(x, y)] = [x_0, \dots, x_m; \underbrace{[y_0, \dots, y_n; (gh)(x, y)]_y}_x]$$

différences divisées en  $y$  de la fonction d'une seule variable  $y \rightarrow (gh)(x, y)$  à  $x$  fixé

Or,  $[y_0, \dots, y_n; (gh)(x, y)]_y$

$$= \sum_{l=0}^n [y_0, \dots, y_l; g(x, y)]_y [y_l, \dots, y_n; h(x, y)]_y$$

Utilisons maintenant la linéarité des différences divisées en  $x$  par rapport à la fonction pour écrire:

$$\begin{aligned}
 & [x_0, \dots, x_m; \sum_{l=0}^m [y_0, \dots, y_l; g(x, y)]_y [y_l, \dots, y_n; h(x, y)]_y ]_x \\
 &= \sum_{l=0}^m [x_0, \dots, x_m; \underbrace{[y_0, \dots, y_l; g(x, y)]_y [y_l, \dots, y_n; h(x, y)]_y}_{\text{produit de deux fonctions de } x} ]_x
 \end{aligned}$$

Appliquons cette fois la formule de Leibniz en  $x$  à chaque terme de cette somme :

$$\begin{aligned}
 & [x_0, \dots, x_m; [y_0, \dots, y_l; g(x, y)]_y [y_l, \dots, y_n; h(x, y)]_y ]_x \\
 &= \sum_{k=0}^m [x_0, \dots, x_k; [y_0, \dots, y_l; g(x, y)]_y ]_x [x_k, \dots, x_m; [y_l, \dots, y_n; h(x, y)]_y ]_x \\
 &= \sum_{k=0}^m [x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_l; g] [x_k, \dots, x_m; y_l, \dots, y_n; h]
 \end{aligned}$$

par définition des différences divisées doubles.

Et ainsi, on a montré :

$$[x_0, \dots, x_m; y_0, \dots, y_n; gh] = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n [x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_l; g] [x_k, \dots, x_m; y_l, \dots, y_n; h]$$

Remarque 1 : On a tout aussi bien :

$$[x_0, \dots, x_m; y_0, \dots, y_n; gh] = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n [x_0, \dots, x_k; y_l, \dots, y_n; g] [x_k, \dots, x_m; y_0, \dots, y_l; h]$$

Remarque 2 : lorsque  $\begin{cases} \forall k & x_k = x_0 \\ \forall l & y_l = y_0 \end{cases}$ , on obtient pour

$g$  et  $h$  holomorphes :

$$\frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} (gh) (x_0, y_0) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} g(x_0, y_0) \frac{1}{(m-k)!(n-l)!} \frac{\partial^{m-k+n-l}}{\partial x^{m-k} \partial y^{n-l}} h(x_0, y_0)$$

2) Considérations sur la nature de P, Q, et des conditions d'interpolation.

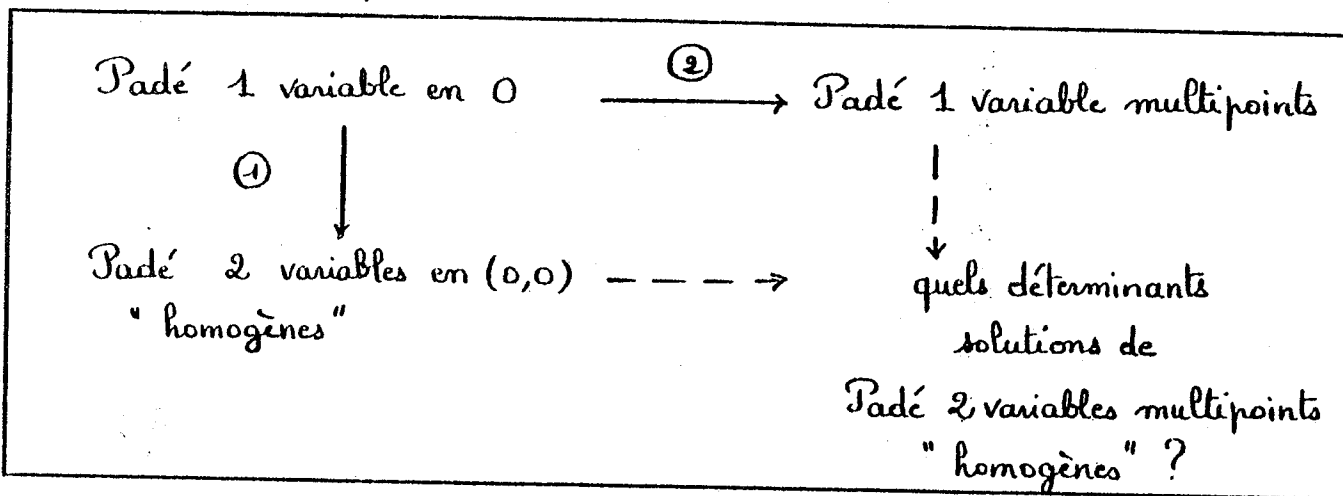
Une définition correcte d'approximants de Padé multipoints doit permettre de retrouver les approximants de Padé en un seul point par le passage à la limite :  $\forall k \ x_k \rightarrow 0$   
 $\forall l \ y_l \rightarrow 0$

Or, même dans ce cas, il n'y a pas unicité de la définition (Brezinski, Chisholm, Cuyt, Karlsson-Wallin, Levin, Lutterodt). On pourra donc chercher à définir au moins autant de types d'approximants multipoints qu'il existe déjà d'approximants à l'origine.

II Exemples

1) Tentative de prolongement des approximants "homogènes"

Essayons de généraliser les approximants "homogènes" au cadre multipoints, en transformant les formules qui donnent les solutions sous forme de déterminants :



Passage  $\textcircled{1}$  :

En faisant apparaître explicitement les termes  $f_k x^k$  du développement de  $f(x)$  à l'origine dans le déterminant, d'ordre  $M+1$  :

$$Q^{[L/M]}(x) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \dots & c_L & x^M \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \dots & c_{L+1} & x^{M-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{L+1} & c_{L+2} & \dots & c_{L+M} & 1 \end{vmatrix}$$

et en leur substituant les polynômes homogènes  $P_k(x, y)$   
 $= \sum_{i=0}^k c_{i, k-i} x^i y^{k-i}$  du développement de  $f(x, y)$  en  $(0, 0)$

on obtient le dénominateur des approximants "homogènes"  
 (à un facteur multiplicatif près qui est le même pour le numérateur) :

$$Q^{[L/M]}(x, y) = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & 1 \\ P_{L-M+2} & P_{L-M+3} & \dots & P_{L+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1} & P_{L+2} & \dots & P_{L+M} & 1 \end{vmatrix}$$

Passage (2) :

• Cette fois, le déterminant  $Q^{[L/M]}(x)$  est remplacé par :

$$\begin{vmatrix} f_{M, L+1} & f_{M, L+2} & \dots & f_{M, L+M} & \omega_M(x) \\ f_{M-1, L+1} & f_{M-1, L+2} & \dots & f_{M-1, L+M} & \omega_{M-1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{0, L+1} & f_{0, L+2} & \dots & f_{0, L+M} & \omega_0(x) \end{vmatrix}$$

où  $f_{i,j}$  désigne la différence divisée d'ordre  $j-i$  de  $f$   
 prise entre les points  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_j$ , encore  
 notée  $[x_i, \dots, x_j; f]$ , et où  $\omega_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x-x_i)$ .

Introduisons les notations suivantes :

$$\omega_{k, \ell}(x) = \prod_{i=k}^{\ell-1} (x-x_i) \quad (\text{si } k > \ell \quad \omega_{k, \ell} = 1)$$

de sorte que, pour  $k \leq \ell \leq m$  :  $\omega_{k, \ell} \times \omega_{\ell, m} = \omega_{k, m}$

$f_{k, k+l} \omega_{k, k+l} = P_l^k$  polynôme de degré  $\leq l$ , qui intervient dans le développement de Newton de  $f$  utilisant les points  $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$  :

$$f(x) = \sum_{l \geq 0} P_l^k(x) \quad (\text{formellement})$$

En mettant  $\omega_M$  en facteur dans la dernière colonne, le dénominateur devient :

$$Q^{[L/M]} = \left| \begin{array}{cccc|c} f_{M, L+1} & f_{M, L+2} & \dots & f_{M, L+M} & 1 \\ f_{M-1, L+1} & f_{M-1, L+2} & \dots & f_{M-1, L+M} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \omega_{M-1, M} \\ f_{0, L+1} & f_{0, L+2} & \dots & f_{0, L+M} & 1 \\ & & & & \omega_{0, M} \end{array} \right| \omega_M$$

et en multipliant la

1<sup>ère</sup> colonne par  $\omega_{M, L+1}$   
 2<sup>ème</sup> colonne par  $\omega_{M, L+2}$   
 $\vdots$   
 M<sup>ème</sup> colonne par  $\omega_{M, L+M}$ , on obtient :

$$Q^{[L/M]} \times \omega_{M, L+1} \times \omega_{M, L+2} \times \omega_{M, L+3} \times \dots \times \omega_{M, L+M}$$

$$= \left| \begin{array}{cccc|c} P_{L-M+1}^M & P_{L-M+2}^M & \dots & P_L^M & 1 \\ P_{L-M+2}^{M-1} & P_{L-M+3}^{M-1} & \dots & P_{L+1}^{M-1} & 1 \\ \omega_{M-1, M} & \omega_{M-1, M} & & \omega_{M-1, M} & \omega_{M-1, M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1}^0 & P_{L+2}^0 & \dots & P_{L+M}^0 & 1 \\ \omega_{0, M} & \omega_{0, M} & & \omega_{0, M} & \omega_{0, M} \end{array} \right| \omega_M$$

qui se simplifie en :

$$\left| \begin{array}{cccc|c} P_{L-M+1}^M & P_{L-M+2}^M & \dots & P_L^M & 1 \\ P_{L-M+2}^{M-1} & P_{L-M+3}^{M-1} & \dots & P_{L+1}^{M-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1}^0 & P_{L+2}^0 & \dots & P_{L+M}^0 & 1 \end{array} \right| \frac{\omega_M}{\omega_{M-1,M} \dots \omega_{0,M}}$$

• De la même manière, le numérateur :

$$\left| \begin{array}{cccc|c} f_{M,L+1} & f_{M,L+2} & \dots & f_{M,L+M} & \sum_{j=M}^L f_{M,j} \omega_j \\ f_{M-1,L+1} & f_{M-1,L+2} & \dots & f_{M-1,L+M} & \sum_{j=M-1}^L f_{M-1,j} \omega_j \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{0,L+1} & f_{0,L+2} & \dots & f_{0,L+M} & \sum_{j=0}^L f_{0,j} \omega_j \end{array} \right|$$

s'écrit :

$$\left| \begin{array}{cccc|c} f_{M,L+1} & f_{M,L+2} & \dots & f_{M,L+M} & \sum_{j=M}^L f_{M,j} \omega_{M,j} \\ f_{M-1,L+1} & f_{M-1,L+2} & \dots & f_{M-1,L+M} & \sum_{j=M-1}^L f_{M-1,j} \frac{\omega_{M-1,j}}{\omega_{M-1,M}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{0,L+1} & f_{0,L+2} & \dots & f_{0,L+M} & \sum_{j=0}^L f_{0,j} \frac{\omega_{0,j}}{\omega_{0,M}} \end{array} \right| \omega_M$$

car  $\omega_j = \omega_M \omega_{M,j}$

En multipliant chacune des M premières colonnes par les mêmes polynômes que précédemment, et en factorisant les M dernières lignes, on obtient :

$$\left| \begin{array}{cccc|c} P_{L-M+1}^M & P_{L-M+2}^M & \dots & P_L^M & \sum_{j=M}^L P_{j-M}^M \\ P_{L-M+2}^{M-1} & P_{L-M+3}^{M-1} & \dots & P_{L+1}^{M-1} & \sum_{j=M-1}^L P_{j-M+1}^{M-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1}^0 & P_{L+2}^0 & \dots & P_{L+M}^0 & \sum_{j=0}^L P_j^0 \end{array} \right| \frac{\omega_M}{\omega_{M-1,M} \dots \omega_{0,M}}$$

Comme  $\omega_{M,L+1} = \omega_{M,L+2} \times \dots \times \omega_{M,L+M}$   
 $\times \omega_{0,M} \times \omega_{1,M} \times \dots \times \omega_{M-1,M}$   
 $= \omega_{0,L+1} \times \omega_{1,L+2} \times \dots \times \omega_{M-1,L+M}$  produit de  $M$  polynômes  
 de degré  $L+1$ ,

$$\frac{P^{[L/M]}}{Q^{[L/M]}} = \frac{P^{[L/M]} \times \frac{\omega_{0,L+1} \omega_{1,L+2} \dots \omega_{M-1,L+M}}{\omega_M}}{Q^{[L/M]} \times \frac{\omega_{0,L+1} \omega_{1,L+2} \dots \omega_{M-1,L+M}}{\omega_M}}$$

$$= \begin{vmatrix} P_{L-M+1}^M & \dots & P_L^M & \sum_{i=0}^{L-M} P_i^M \\ P_{L-M+2}^{M-1} & \dots & P_{L+1}^{M-1} & \sum_{i=0}^{L-M+1} P_i^{M-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1}^0 & \dots & P_{L+M}^0 & \sum_{i=0}^L P_i^0 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} P_{L-M+1}^M & P_{L-M+2}^M & \dots & P_L^M & 1 \\ P_{L-M+2}^{M-1} & P_{L-M+3}^{M-1} & \dots & P_{L+1}^{M-1} & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1}^0 & P_{L+2}^0 & \dots & P_{L+M}^0 & 1 \end{vmatrix}$$

quotient de deux déterminants qui ont une forme tout à fait analogue à celle des approximants "homogènes".

Essayons de définir les  $P_l^k(x,y)$  associés à une fonction  $f(x,y)$  de deux variables connue aux points d'un rectangle.

- Quand tous les points sont confondus,  $P_l^k = P_l$  polynôme homogène de degré  $l$ , c'est-à-dire combinaison des  $l+1$  polynômes  $x^i y^{l-i}$   $0 \leq i \leq l$

- Quand  $y = y_R$ , on est ramené à une fonction de la seule variable  $x$  et  $P_l^k$  doit vérifier :

$$P_l^k(x, y_R) = [x_k, \dots, x_{k+l}; y_R, f] (x-x_k) \dots (x-x_{k+l-1})$$

- De même,

$$P_l^k(x_R, y) = [x_R; y_k, \dots, y_{k+l}; f] (y-y_k) \dots (y-y_{k+l-1})$$

Notons  $\Omega_{k,k+l}(y) = \prod_{j=k}^{k+l-1} (y-y_j)$ , des raisons de symétrie nous conduisent à définir :

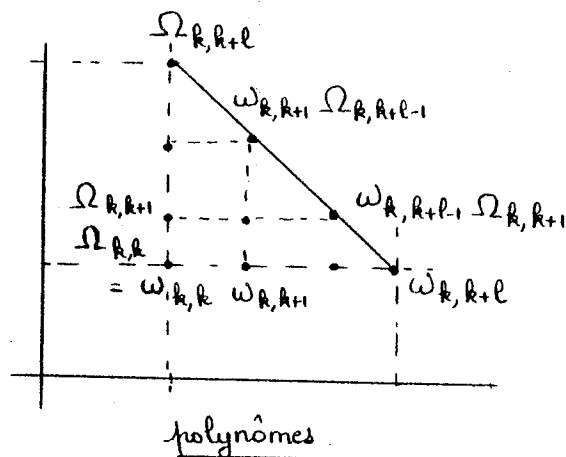
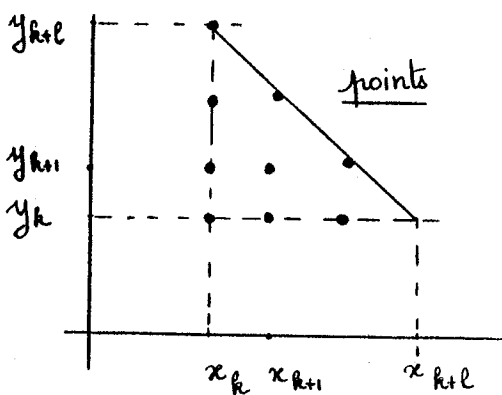


$$P_l^k(x, y) = [x_k, \dots, x_{k+l}; y_k] \omega_{k, k+l}(x) \Omega_{k, k}(y) \\ + [x_k, \dots, x_{k+l-1}; y_k, y_{k+1}] \omega_{k, k+l-1}(x) \Omega_{k, k+1}(y) \\ + \dots \\ + [x_k, x_{k+1}; y_k, \dots, y_{k+l-1}] \omega_{k, k+1}(x) \Omega_{k, k+l-1}(y) \\ + [x_k; y_k, \dots, y_{k+l}] \omega_{k, k}(x) \Omega_{k, k+l}(y)$$

ou de manière plus synthétique:

$$P_l^k = \sum_{i=0}^l [x_k, \dots, x_{k+i}; y_k, \dots, y_{k+l-i}; f] \omega_{k, k+i} \Omega_{k, k+l-i}$$

représenté schématiquement par:



Expertise:

En définissant  $V^{[L/M]}$  et  $V^{[L/M]}$  comme dans (\*) pour une fonction  $f(x, y)$ , le reste:

$$V^{[L/M]} f - U^{[L/M]} \text{ vaut:}$$

$P_{L-M+1}^M \dots P_L^M$	$\sum_{i \geq L-M+1} P_i^M$
$P_{L-M+2}^{M-1} \dots P_{L+1}^{M-1}$	$\sum_{i \geq L-M+2} P_i^{M-1}$
$\vdots$	$\vdots$
$P_{L+1}^0 \dots P_{L+M}^0$	$\sum_{i \geq L+1} P_i^0$

Il devrait s'annuler pour tous les points  $(x_k, y_k)$  du triangle:  $k+l < (L+1)(M+1)$

Pour  $M=0$ , on retrouve bien le polynôme de Newton "triangulaire" de  $L$ .

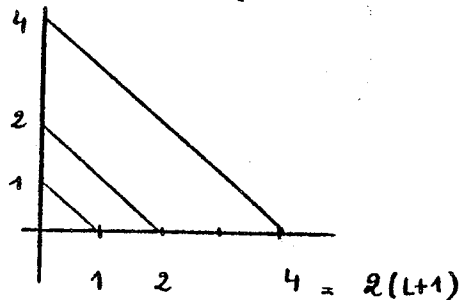
En particulier, pour  $M=1$ :

$$V^{[L+1]} = \begin{vmatrix} P_L^1 & \sum_{i=0}^{L-1} P_i^1 \\ P_{L+1}^0 & \sum_{i=0}^L P_i^0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad V^{[L+1]} = \begin{vmatrix} P_L^1 & 1 \\ P_{L+1}^0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{et le reste } V^{[L+1]} - V^{[L+1]} = \begin{vmatrix} P_L^1 & \sum_{i \geq L} P_i^1 \\ P_{L+1}^0 & \sum_{i \geq L+1} P_i^0 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i \geq 0} (P_L^1 P_{L+2+i}^0 - P_{L+1}^0 P_{L+1+i}^1) \quad \text{ne s'annule pas forcément}$$

pour tous les  $(x_k, y_e)$  :  $k+l < 2(L+1)$   
(essai avec  $L=1$ )

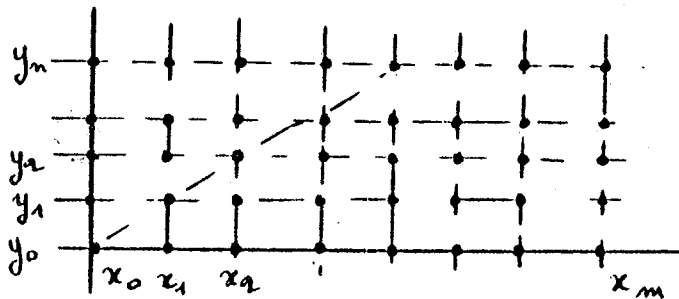


## 2) Exemple de résolution des équations.

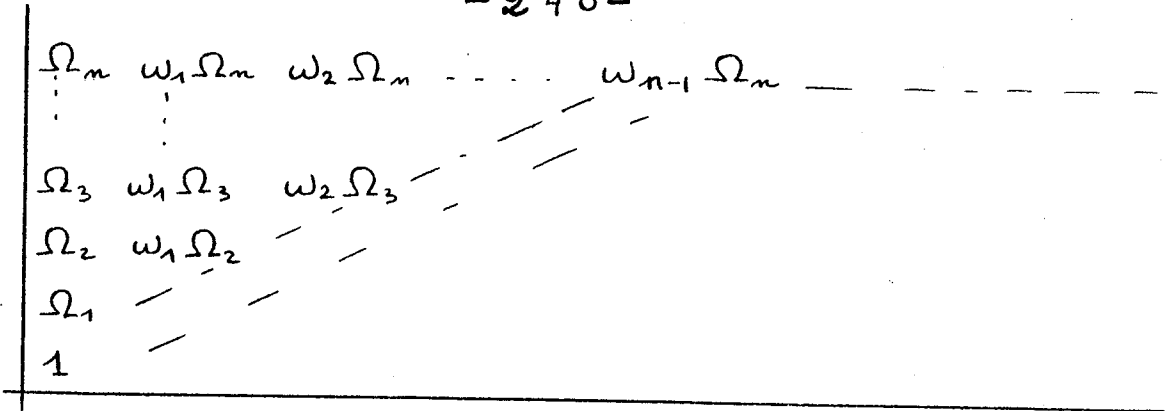
Considérons le cas particulier suivant:

Ensemble de points d'interpolation  $\mathcal{Y} = \left\{ (x_k, y_e) \mid \begin{matrix} 0 \leq k \leq m \\ 0 \leq e \leq n \end{matrix} \right\}$

où  $n \leq m$ .



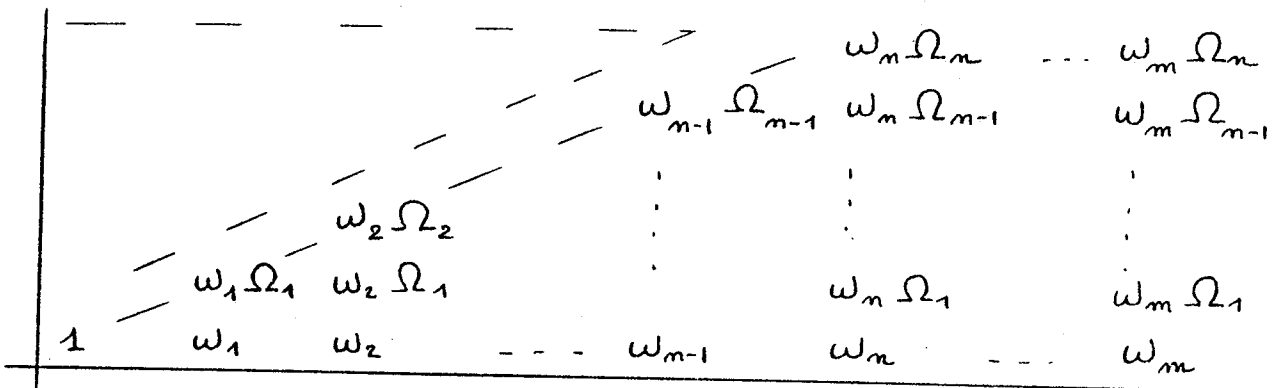
Recherche du dénominateur dans l'espace vectoriel engendré par:



sous la forme

$$Q(x,y) = \sum_{\substack{l=0 \\ k < l}}^m q_{k,l} \omega_k(x) \Omega_l(y),$$

tandis que le numérateur appartient à l'espace vectoriel engendré par :



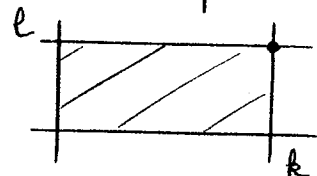
$$P(x,y) = \sum_{\substack{k=0 \\ l \leq \inf(k,n)}}^m p_{k,l} \omega_k(x) \Omega_l(y)$$

Le système linéaire  $(Qf - P)(x_k, y_l)$   $0 \leq k \leq m$   
 est formé de  $(m+1)(n+1)$  équations  $0 \leq l \leq n$

à  $(m+1)(n+1) + 1$  inconnues.

A cause de la nature des polynômes  $\omega_k(x) \Omega_l(y)$ , seuls les coefficients de  $P$  et  $Q$  d'indices  $(i,j)$  avec  $0 \leq i \leq k$  et  $0 \leq j \leq l$  interviennent dans l'équation

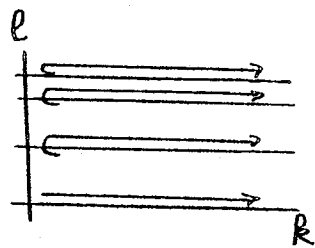
$$E_{k,l} : (Qf - P)(x_k, y_l) = 0$$



Écrivons les équations  $E_{k,l}$  dans l'ordre:

$$\begin{cases} l \text{ croissant de } 0 \text{ à } n, \\ \text{pour un même } l, k \text{ croissant de } 0 \text{ à } m \end{cases}$$

compatible avec la règle du rectangle.



Alors, quand on passe d'une équation à la suivante, un seul coefficient supplémentaire apparaît, car les deux espaces vectoriels précédents ont une intersection réduite aux constantes; pour  $E_{k,l}$ , c'est:

$p_{k,l}$  si  $k \geq l$ ,  $q_{k,l}$  si  $k < l$ .  
Le système est triangulaire.

Des manipulations analogues à celles du chapitre 5 IV 1) (interpolation de Newton) entre les blocs de la matrice correspondante (un bloc étant associé aux équations d'une même ligne de points:  $E_{k,l} : 0 \leq k \leq m$ ) et aussi à l'intérieur de chaque bloc, le ramènent aux  $(m+1)(n+1)$  équations:

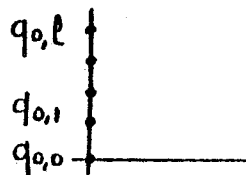
$$\begin{aligned} & 0 \leq k \leq m \\ & 0 \leq l \leq n : \\ & \sum_{j=0}^l [x_0, \dots, x_k; y_j, \dots, y_l] q_{0,j} + \sum_{i=1}^{\inf(k, l-1)} \left( \sum_{j=i+1}^l [x_i, \dots, x_k; y_j, \dots, y_l] q_{i,j} \right) = 1 \quad p_{k,l} \end{aligned}$$

$k \geq l$

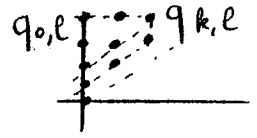
De manière plus explicite,

le coefficient  $q_{0,l}$  ( $0 < l \leq n$ ) du dénominateur est déterminé en fonction des  $q_{0,j}$  ( $j < l$ ) par:

$$\sum_{j=0}^l [x_0; y_j, \dots, y_l] q_{0,j} = 0$$



- Plus généralement, pour  $k < l$ , le terme  $q_{k,l}$  est déterminé en fonction des  $q_{i,j}$  ( $i \leq j, i \leq k, j \leq l$ ) par:

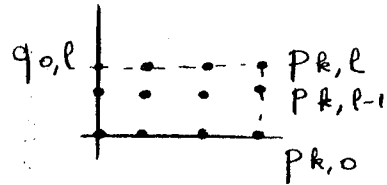


$$\sum_{j=0}^l [x_0, \dots, x_k; y_j, \dots, y_l] q_{0,j} + \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=i+1}^l [x_i, \dots, x_k; y_j, \dots, y_l] q_{i,j} \right) = 0$$

où n'interviennent que les valeurs de  $f$  aux points:  $(x_i, y_j)$   $\begin{matrix} i \leq k \\ j \leq l \end{matrix}$

- De même pour les coefficients  $p_{k,l}$  ( $k \geq l$ ) du numérateur, qui sont liés aux  $q_{i,j}$  ( $i \leq k, j \leq l$ ) par:

$$\sum_{j=0}^l [x_0, \dots, x_k; y_j, \dots, y_l] q_{0,j} + \sum_{i=1}^{l-1} \left( \sum_{j=i+1}^l [x_i, \dots, x_k; y_j, \dots, y_l] q_{i,j} \right) = p_{k,l}$$

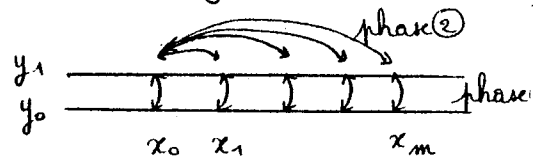


En particulier,

\*  $p_{k,0} = [x_0, \dots, x_k; y_0] q_{0,0}$   
 et  $\sum_{k=0}^m p_{k,0} \omega_k(x) \Omega_0(y)$  est le polynôme de

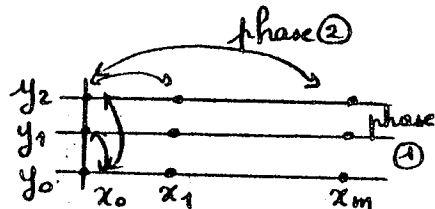
Newton de  $q_{0,0}$  relatif aux points  $(x_k, y_0)$  de la 1<sup>ère</sup> ligne.

- \* Les équations transformées de la seconde ligne donnent:



$$\left\{ \begin{array}{l} [x_0; y_0, y_1] q_{0,0} + [x_0; y_1] \boxed{q_{0,1}} = 0 \\ [x_0, x_1; y_0, y_1] q_{0,0} + [x_0, x_1; y_1] q_{0,1} = \boxed{p_{1,1}} \\ [x_0, x_1, x_2; y_0, y_1] q_{0,0} + [x_0, x_1, x_2; y_1] q_{0,1} = \boxed{p_{2,1}} \\ \vdots \\ [x_0, x_1, \dots, x_m; y_0, y_1] q_{0,0} + [x_0, x_1, \dots, x_m; y_1] q_{0,1} = \boxed{p_{m,1}} \end{array} \right.$$

x Pour la troisième ligne, on obtient :



$$\left\{ \begin{array}{l} [x_0; y_0, y_1, y_2] q_{0,0} + [x_0; y_1, y_2] q_{0,1} + [x_0; y_2] \boxed{q_{0,2}} = 0 \\ [x_0, x_1; y_0, y_1, y_2] q_{0,0} + [x_0, x_1; y_1, y_2] q_{0,1} + [x_0, x_1; y_2] q_{0,2} + [x_1; y_2] \boxed{q_{1,2}} = C \\ [x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2] q_{0,0} + [x_0, x_1, x_2; y_1, y_2] q_{0,1} + [x_0, x_1, x_2; y_2] q_{0,2} + [x_1, x_2; y_2] q_{1,2} = \boxed{p_{1,2}} \\ \vdots \\ [x_0, \dots, x_m; y_0, y_1, y_2] q_{0,0} + [x_0, \dots, x_m; y_1, y_2] q_{0,1} + [x_0, \dots, x_m; y_2] q_{0,2} + [x_1, \dots, x_m; y_2] q_{1,2} = \boxed{p_{1,2}} \end{array} \right.$$

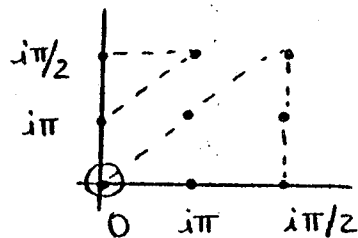
et ainsi de suite.

Remarque: suivant les valeurs que prend  $f$ , le système peut ne pas être inversible.

Exemple:

$$\boxed{f(x, y) = e^{x+y}}$$

$$\begin{array}{l} x_0 = 0, \quad x_1 = i\pi, \quad x_2 = i\pi/2 \\ \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \\ y_0 \quad \quad y_1 \quad \quad y_2 \end{array}$$



Pour  $kl \neq 0$   $p_{kl} = 0$  et  $q_{kl} = 0$

Finalement, on obtient comme fraction d'interpolation pour ce carré :

$$1 + \frac{2i}{\pi} x + \frac{4i}{\pi^2} x(x - i\pi)$$

qui n'est autre que le

$$1 + \frac{2i}{\pi} y - \frac{4i}{\pi^2} y(y - i\pi)$$

quotient:  $\frac{\text{polynôme de Newton de } e^x \text{ relatif à } 0, i\pi, i\pi/2}{\text{polynôme de Newton de } e^{-y} \text{ relatif à } 0, i\pi, i\pi/2}$

Plus généralement, pour une fonction

$$f(x, y) \text{ du type } \frac{\psi(x)}{\psi(y)} \quad \text{où } \psi \text{ ne s'annule}$$

pas aux points  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , soient  $P(x)$  le polynôme de Newton de  $\psi$  relatif aux points  $x_0, x_1, \dots, x_m$  et  $Q(y)$  le polynôme de Newton relatif aux points  $y_0, y_1, \dots, y_n$ .

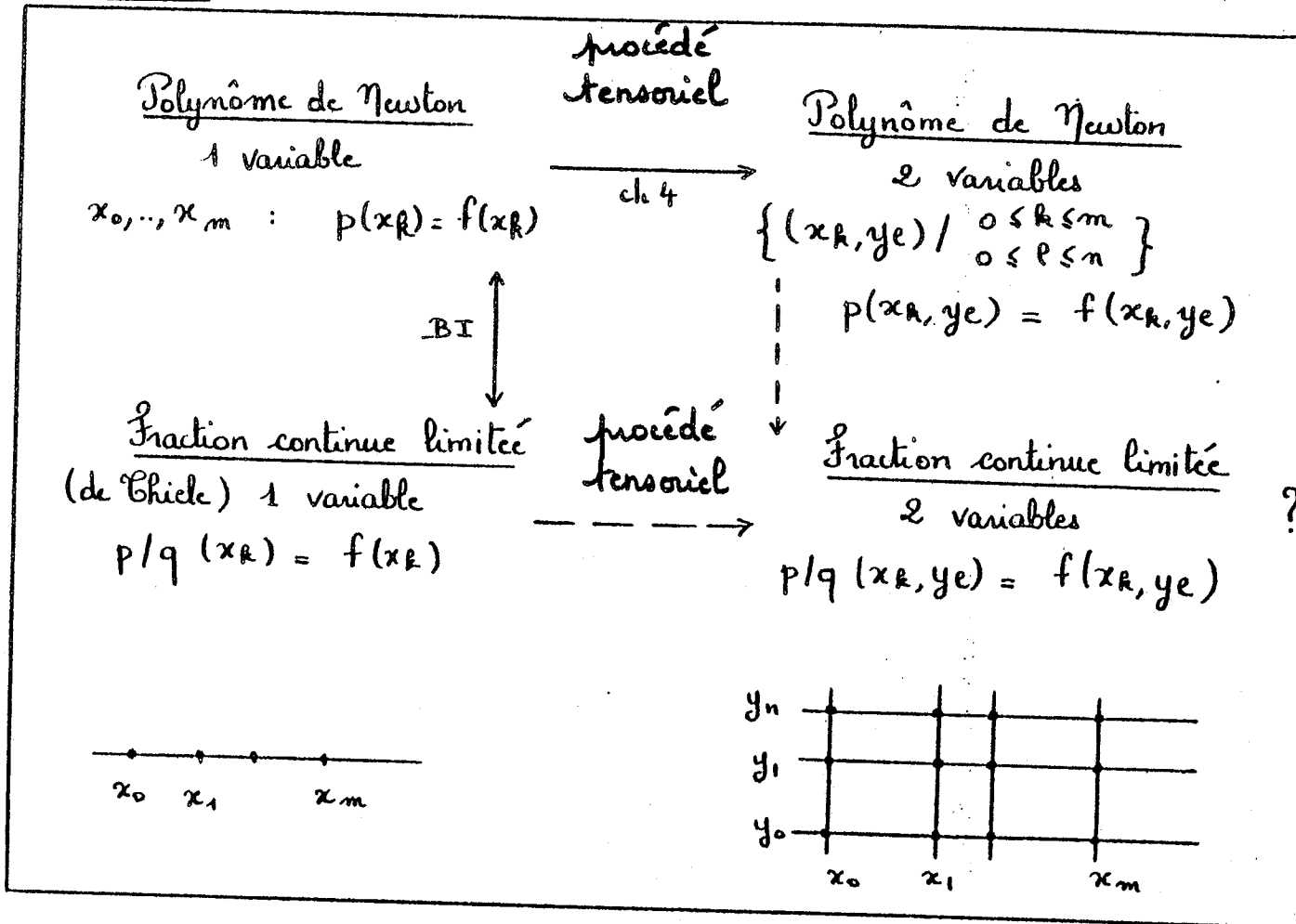
Ces polynômes appartiennent aux espaces vectoriels de l'exemple et comme  $\forall j \quad Q(y_j) \neq 0$ ,

$$\frac{P}{Q}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) \quad \text{pour } \begin{matrix} 0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n \end{matrix}$$

Cette fraction est donc solution du problème.

B) Approche constructive: fractions continues d'interpolation à deux variables.

Le procédé tensoriel nous ayant permis de passer de l'interpolation de Newton à une variable à un certain type d'interpolation polynômiale à deux (ou plusieurs) variables, examinons de plus près la similitude entre interpolation polynômiale et interpolation rationnelle afin de compléter le diagramme suivant :



I Parallèle entre l'interpolation polynômiale et l'interpolation rationnelle.

1) Développements de Newton et de Chele.

Notations:

$$\frac{a_0}{b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_m}{a_m}}}} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_m}{b_m} = K \prod_{i=0}^m \left( \frac{a_i}{b_i} \right)$$

ou bien

$$= \frac{a_0}{b_0} \frac{a_1}{b_1} \dots \frac{a_m}{a_m}$$



## Polynôme (de Newton)

$$p(x_k) = f(x_k)$$

$$0 \leq k \leq m$$

### Expression

$$[x_0, f] + [x_0, x_1, f] \omega_1 + [x_0, x_1, x_2, f] \omega_2 + \dots + [x_0, x_1, \dots, x_m, f] \omega_m$$

$$\omega_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

## Différences divisées de $f$

$[x_0, \dots, x_k, f]$  encore noté  $f[x_0, \dots, x_k]$

comme coefficient de  $\omega_k$

### Coefficients

définis récursivement par :

$$\begin{cases} [x_0, f] = f(x_0) \\ [x_0, x_1, f] = \frac{[x_1, f] - [x_0, f]}{x_1 - x_0} \\ \vdots \\ [x_0, x_1, \dots, x_{k+1}, f] = \frac{[x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, f] - [x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, f]}{x_{k+1} - x_k} \end{cases}$$

(définies dès que  $x_k \neq x_{k+1}$ )

### Calcul des coefficients

La définition des différences divisées les rend

commutatifs :  $[x_0, \dots, x_k, f] = [x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(k)}, f]$   
pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{0, \dots, k\}$   
tq  $x_{\sigma(i)} \neq x_{\sigma(i+1)}$ .

## Fraction (de Stiele)

$$\kappa(x_k) = f(x_k)$$

$$\kappa = \frac{f(x_0)}{\Delta[x_0, x_1]} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta[x_0, x_1] \Delta[x_0, x_1, x_2]} + \dots + \frac{f(x_{m-1}) - f(x_{m-2})}{\Delta[x_0, x_1, \dots, x_m]}$$

## Différences inverses divisées de $f$

$\Delta[x_0, \dots, x_k]$

comme dénominateur de  $x - x_k$

$$\begin{cases} \Delta[x_0] = f(x_0) \\ \Delta[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta[x_1] - \Delta[x_0]} \\ \vdots \\ \Delta[x_0, \dots, x_{k+1}] = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{\Delta[x_0, \dots, x_{k+1}] - \Delta[x_0, \dots, x_k]} \end{cases}$$

( pas toujours définies )

Par contre, ce n'est plus vraie pour les différences inverses divisées.

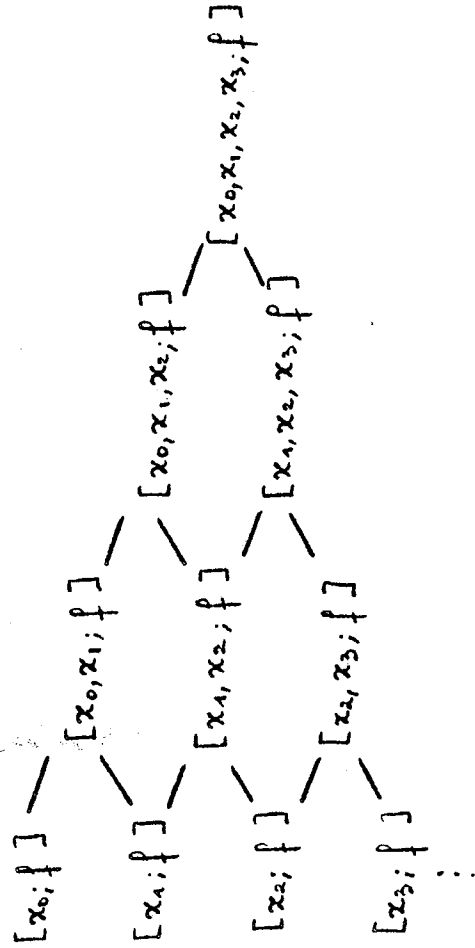
On peut les calculer en utilisant les différences réciproques, qui sont commutatives :

En particulier,

$$[x_0, \dots, x_{k+1}, f] = \frac{[x_0, \dots, x_k, f] - [x_1, \dots, x_{k+1}, f]}{x_0 - x_{k+1}}$$

ce qui permet de les calculer en formant le

tableau:



### Formule exacte

$$f(x) = \underbrace{[x_0, f] + [x_0, x_1, f] \omega_1(x) + \dots + [x_0, \dots, x_m, f] \omega_m(x)}_{\text{polynôme } P_m(x)} + \underbrace{[x_0, \dots, x_m, x_j, f] \omega_{m+1}(x)}_{\text{erreur}}$$

(forme intégrale par la formule d'Hermite → convergence éventuelle)

$$\begin{cases} e[x_0] = f(x_0) \\ e[x_0, x_1] = \frac{x_0 - x_1}{e[x_0] - e[x_1]} \\ \vdots \\ e[x_0, \dots, x_{k+1}] = \frac{x_0 - x_{k+1}}{e[x_0, \dots, x_k] - e[x_1, \dots, x_{k+1}]} + e[x_1, \dots, x_k] \end{cases}$$

On peut donc les calculer en les rangeant dans un tableau analogue au tableau ci-contre.

Puis, on utilise le lien:

$$\begin{cases} \Delta[x_0] = e[x_0] \\ \Delta[x_0, x_1] = e[x_0, x_1] \\ \Delta[x_0, x_1, x_2] = e[x_0, x_1, x_2] - e[x_0] \\ \vdots \\ \Delta[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}] = e[x_0, \dots, x_{k+1}] - e[x_0, \dots, x_{k-1}] \end{cases}$$

-247-

$$f(x) = \underbrace{\Delta[x_0] + \frac{x - x_0}{\Delta[x_0, x_1]} + \dots + \frac{x - x_{m-1}}{\Delta[x_0, \dots, x_m]}}_{\text{fraction } \pi_m(x)} + \frac{x - x_m}{\Delta[x_0, \dots, x_m, x]}$$

Rej: on dispose aussi d'une forme intégrale des différences  $\Delta[x_0, \dots, x_m, x]$  (Nörlund) → convergence

# Calcul récurrent

## des polynômes $P_m$

Simplement,

$$P_{m+1} = P_m + [x_0, \dots, x_{m+1}] \omega_{m+1}$$

$$\text{où } \omega_{m+1}(x) = \prod_{i=0}^m (x - x_i)$$

$$\text{d'o } P_m \leq m$$

## des fractions $r_m$

Pour calculer les convergents successifs d'une fraction continue  $K \left( \frac{a_k}{b_k} \right)$ , on utilise par exemple

l'algorithme descendant : en notant  $P_m/q_m = K \left( \frac{a_k}{b_k} \right)$  on a :

$$\text{pour } m \geq 2 \quad \left( \frac{P_m}{q_m} \right) = a_m \left( \frac{P_{m-2}}{q_{m-2}} \right) + b_m \left( \frac{P_{m-1}}{q_{m-1}} \right)$$

il suffit ici de l'appliquer à  $\sum_{k=0}^{\infty} K \left( \frac{x - x_k}{\Delta [x_0, \dots, x_{k+1}]} \right)$

- 2408 -

Les convergents  $r_m$  de la fraction continue de Thiele forment l'escalier :

$$[0/0]$$

$$[1/0]$$

$$[2/1]$$

$$[3/2]$$

$$[3/3]$$

où, dans  $[k/l]$

$k$  désigne le degré du numérateur, et  $l$  le degré du dénominateur de la fraction.

Plus généralement, en

cherchant les fractions continues limitées de Thiele des

$$\text{fonctions } [x_0, \dots, x_k, x; f] = \frac{f(x) - P_k(x)}{w_{k+1}(x)}, \text{ on}$$

forme les escaliers :

$$[k+1/0]$$

$$[k+2/0]$$

$$[k+3/1]$$

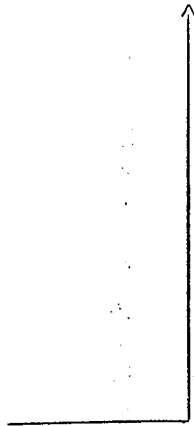
$$[k+3/2]$$

$w_{k+1}(x)$

(en utilisant les points

$$x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots)$$

## Utilisation des $P_k$



Quand  $f$  est un polynôme, le développement est fini.

2) Cas limite où tous les  $x_i$  valent 0



développement en

série de Mac-Laurin de  $f$

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \underbrace{\frac{f^{(k)}(0)}{k!}}_{a_k} x^k$$

$$= \lim_{x_0, x_1, \dots, x_k \rightarrow 0} [x_0, \dots, x_k; f]$$

les  $a_k$  sont obtenus les dérivées de  $f$  en 0

Remarque: ces fractions  $[k/l]$  ( $k \geq l$ ) sont les approximations de Padé-Newton de  $f$ . Pour les obtenir tous, quand c'est possible, on applique la même méthode à  $1/f$  car:

$$[k/l]_{1/f} = 1 / [l/k]_f$$

Quand  $f$  est une fraction rationnelle, le développement est fini.

fraction continue de  $f$

$$f(x) = f(0) + K \left( \frac{x}{c_k} \right) \quad k \geq 0$$

$$c_k = \lim_{x_0, x_1, \dots, x_k \rightarrow 0} \Delta [x_0, \dots, x_k]$$

Plus précisément, si on note  $\kappa_k f(x) = \lim_{x_0, \dots, x_k \rightarrow x}$

$$\text{on a: } \begin{cases} \kappa_0 f(x) = f(x) \\ \kappa_1 f(x) = \frac{1}{f'(x)} = \kappa f(x) \\ \vdots \\ \kappa_m f(x) = \kappa \kappa_{m-1} f(x) + \kappa_{m-2} f(x) \end{cases}$$

appelées dérivées réciproques de  $f$  en  $x$ .

ainsi  $c_k = (k+1) \kappa \kappa f(0)$ ; les premiers termes sont:

$$c_0 = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{a_0}$$

$$c_1 = \frac{-2(f'(0))^2}{f''(0)} = -\frac{a_1^2}{a_2}$$

$$c_2 = \frac{3(f''(0))^2}{f'(0)(2f'(0)f'''(0) - 3(f''(0))^2)} = \frac{a_2^2}{a_1(a_1a_3 - a_2^2)}$$

• Par exemple, pour la fonction  $e^x$ :

$$K_{2m} e^x = (-1)^m e^x; \quad K_{2m+1} e^x = (-1)^m (m+1) e^{-x},$$

ce qui donne le développement:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x}{-2} + \frac{x}{-3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{5} + \frac{x}{-2} + \dots$$

qui s'écrit encore:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x}{5} - \frac{x}{2} + \frac{x}{7} - \dots - \frac{x}{2} + \frac{x}{2n+1} - \dots$$

$$\bullet (1+x)^2 = 1 + \frac{2x}{1} + \frac{(1-1)x}{2} + \frac{(1+1)x}{3} + \frac{(2-1)x}{2} + \dots + \frac{(n-1)x}{2} + \frac{(n+1)x}{2n+1} + \dots$$

$$\bullet \operatorname{tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{7} + \dots - \frac{x^2}{2n+1} + \dots$$

$$\bullet \operatorname{Log}(1+x) = \frac{x}{1} + \frac{1^2 x}{2} + \frac{1^2 x}{3} + \frac{2^2 x}{5} + \dots + \frac{n^2 x}{2n} + \frac{n^2 x}{2n+1} + \dots$$

D'autres exemples classiques portent sur la fonction  $\Gamma$  et les fonctions hypergéométriques.

Remarque: Les coefficients de ces fractions continues peuvent aussi être calculés par le qd. algorithme; que Wuytack transforme en "qd-algorithme généralisé" pour les fractions continues multi-points. Signalons aussi le tg-algorithme de Claessens pour le calcul des approximants de Padé-Newton, directement lié à leur développement en fraction continue.

Exemple: la fraction continue limitée:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x-1}{1} + \frac{x-2}{1} + \frac{x-3}{1}$$

est la fraction d'interpolation de  $f$  qui prend les valeurs:

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 2$$

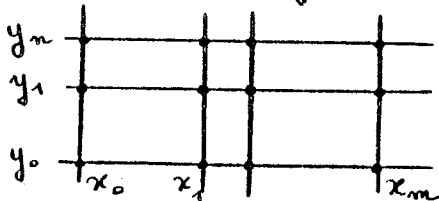
$$f(3) = 5/2$$

$$f(4) = 13/5$$

## II Construction de fractions continues d'interpolation à deux variables.

### 1) Principe

② Supposant  $f$  connue aux points  $(x_k, y_k)_{0 \leq k \leq m}$ ,  
 $0 \leq l \leq n$



considérons la fonction  $F_y$  d'une seule variable: (à  $y$  fixé)

$$F_y : x \rightarrow f(x, y)$$

et sa fraction continue limitée d'interpolation bâtie sur les points  $x_0, x_1, \dots, x_m$ :

on note  $\Delta_x [x_0, \dots, x_i; y]$  les différences inverses divisées de la fonction  $F_y$ , prises entre les points  $x_0, x_1, \dots, x_i$ .

l'expression:

$$\Delta_x [x_0; y] + \frac{x-x_0}{\Delta_x [x_0, x_1; y]} + \frac{x-x_1}{\Delta_x [x_0, x_1, x_2; y]} + \dots + \frac{x-x_{m-1}}{\Delta_x [x_0, x_1, \dots, x_m; y]}$$

prend les mêmes valeurs que  $F_y$  aux points  $x_0, x_1, \dots, x_m$ ; mais ce n'est pas encore une fraction en  $x, y$ , car chacun des termes  $\Delta_x [x_0, x_1, \dots, x_i; y]$  est une fonction de  $y$ .

Par exemple,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_x [x_0; y] = f(x_0, y) \\ \Delta_x [x_0, x_1; y] = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1, y) - f(x_0, y)} \\ \Delta_x [x_0, x_1, x_2; y] = \frac{x_2 - x_0}{\frac{x_2 - x_1}{f(x_2, y) - f(x_1, y)} - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1, y) - f(x_0, y)}} \end{array} \right.$$

(b) Interpolons chacune de ces fonctions de  $y$ :

$g_i: y \rightarrow \Delta_x [x_0, \dots, x_i; y]$  pour  $i \in [0, m]$   
par la fraction continue limitée de Ghiele en  $y$ , bâtie sur les points  $y_0, y_1, \dots, y_n$ .

En définissant  $\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j]$  les différences inverses divisées de la fonction  $g_i$ , prises entre les points  $y_0, \dots, y_j$ , chaque fraction rationnelle en  $y$ :

$$\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0] + \frac{y - y_0}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0, y_1]} + \frac{y - y_1}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0, y_1, y_2]} + \dots + \frac{y - y_{n-1}}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_n]}$$

prend les mêmes valeurs que  $g_i$  aux points  $y_0, \dots, y_n$ .  
Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \Delta_{y,x} [x_0; y_0] + \frac{x - x_0}{\Delta_{y,x} [x_0, x_i; y_0] + K \left( \frac{y - y_j}{\Delta_{y,x} [x_0, x_i; y_0, \dots, y_{j+1}]} \right)} \\ & + \frac{x - x_1}{\Delta_{y,x} [x_0, x_1, x_2; y_0] + K \left( \frac{y - y_j}{\Delta_{y,x} [x_0, x_1, x_2; y_0, \dots, y_{j+1}]} \right)} + \dots + \frac{x - x_{m-1}}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_m; y_0] + K \left( \frac{y - y_j}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_m; y_0, \dots, y_{j+1}]} \right)} \end{aligned}$$

qui, cette fois, est une fraction rationnelle en  $x, y$  et qu'on peut écrire de manière plus condensée:

$$\Delta_{y,x} [x_0; y_0] + \sum_{j=0}^{m-1} K \left( \frac{y - y_j}{\Delta_{y,x} [x_0; y_0, \dots, y_{j+1}]} \right) + \sum_{i=0}^{m-1} K \left( \frac{x - x_i}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_{i+1}; y_0] + \sum_{j=0}^{m-1} K \left( \frac{y - y_j}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_{i+1}; y_0, \dots, y_{j+1}]} \right)} \right)$$

prend les mêmes valeurs que  $f$  en tous les points  $(x_k, y_\ell)$   $0 \leq k \leq m$   
 $0 \leq \ell \leq n$

En fait, en appliquant les formules exactes en  $x$ , puis en  $y$  pour chacune des  $g_i$  et  $\Delta_x [x_0, \dots, x_m; y]$ , on obtient l'égalité:

$$\begin{aligned} &= \Delta_{y,x} [x_0; y_0] + \frac{y - y_0}{\Delta_{y,x} [x_0; y_0, y_1]} + \dots + \frac{y - y_{n-1}}{\Delta_{y,x} [x_0; y_0, \dots, y_n]} + \frac{y - y_n}{\Delta_{y,x} [x_0; y_0, \dots, y_n, y]} \\ &+ \frac{x - x_0}{\Delta_{y,x} [x_0, x_1; y_0] + \frac{y - y_0}{\Delta_{y,x} [x_0, x_1; y_0, y_1]} + \dots + \frac{y - y_{n-1}}{\Delta_{y,x} [x_0, x_1; y_0, \dots, y_n]} + \frac{y - y_n}{\Delta_{y,x} [x_0, x_1; y_0, \dots, y_n, y]} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{x - x_{m-1}}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_m; y_0] + \frac{y - y_0}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_m; y_0, y_1]} + \dots + \frac{y - y_{n-1}}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_m; y_0, \dots, y_n]} + \frac{y - y_n}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_m; y_0, \dots, y_n, y]} \end{aligned}$$



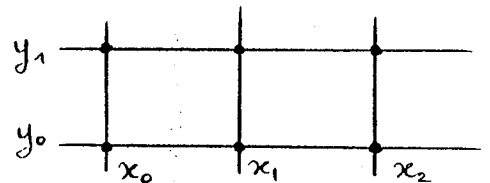
$$+ \frac{x - x_m}{\Delta_{y,x}[x_0, \dots, x_m, x; y_0]} + \dots + \frac{y - y_{n-1}}{\Delta_{y,x}[x_0, \dots, x_m, x; y_0, \dots, y_{n-1}]} + \frac{y - y_n}{\Delta_{y,x}[x_0, \dots, x_m, x; y_0, \dots, y_n]}$$

Cependant, il ne paraît pas simple d'exprimer l'erreur, car il apparaît des termes supplémentaires par rapport à ceux de la fraction continue d'interpolation dans toutes les fractions continues qui la composent : c'est ce qui résulte de la non-linéarité de cette interpolation.

## 2) Généralisations

- Au lieu de commencer par de l'interpolation suivant  $x$ , puis poursuivre suivant  $y$ , on peut échanger leurs rôles. Contrairement au cas de l'interpolation polynômiale, cette méthode ne fournit pas les mêmes fractions.

Par exemple, pour les 6 points :



en commençant par  $x$ , on obtient la fraction  $r_{y,x}$  :

$$f(x_0, y_0) + \frac{y - y_0}{\Delta_{y,x}[x_0; y_0, y_1]} + \frac{x - x_0}{\Delta_{y,x}[x_0, x_1; y_0]} + \frac{x - x_1}{\Delta_{y,x}[x_0, x_1, x_2; y_0]} + \frac{y - y_0}{\Delta_{y,x}[x_0, x_1, x_2; y_0, y_1]}$$

alors qu'en commençant par  $y$ , on obtient la fraction  $r_{x,y}$  :

$$f(x_0, y_0) + \frac{x-x_0}{\Delta_{x,y} [x_0, x_1; y_0]} + \frac{y-y_0}{\Delta_{x,y} [x_0, y_0, y_1]} + \frac{x-x_1}{\Delta_{x,y} [x_0, x_1, x_2; y_0]} + \frac{x-x_1}{\Delta_{x,y} [x_0, x_1, x_2; y_0, y_1]} + \frac{x-x_1}{\Delta_{x,y} [x_0, x_1, x_2; y_0, y_1]}$$

	numérateur	dénominateur
$r_{y,x}$	$y^3$ $y^2$ $y \quad xy$ $1 \quad x$	$y^2$ $y$ $1 \quad x$
$r_{x,y}$	$y \quad xy \quad x^2 y$ $1 \quad x \quad x^2$	$1 \quad x \quad x^2$

Numérateurs et dénominateurs de ces deux fractions appartiennent à des espaces vectoriels différents.

C'est pourquoi il est important de préciser l'ordre de définition des différences inverses divisées doubles :

$\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j]$  ou  $\Delta_{x,y} [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j]$   
 qui sont en général distinctes, mais ne dépendent que des valeurs de  $f$  aux points  $(x_k, y_\ell)$   $0 \leq k \leq i$   
 $0 \leq \ell \leq j$

Par exemple :

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{y,x} [x_0, x_1; y_0, y_1] &= \frac{y_1 - y_0}{\frac{x_1 - x_0}{f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1)} - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)}} \\ \neq \Delta_{x,y} [x_0, x_1; y_0, y_1] &= \frac{x_1 - x_0}{\frac{y_1 - y_0}{f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0)} - \frac{y_1 - y_0}{f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)}} \end{aligned} \right\}$$

Remarquons qu'il ne suffit pas de se donner le type du numérateur et du dénominateur, c'est-à-dire les espaces vectoriels où ils se trouvent, pour déterminer la fraction d'interpolation; car dans l'exemple, nous avons à priori  $9 = 10 - 1$  coefficients à choisir pour seulement 6 équations.

↑  
facteur de  
proportionnalité pour  $\frac{P}{Q}$

Il y a donc des équations supplémentaires cachées, ce qui semble définir un nouveau type d'approximants de Padé à deux variables, dans le cas limite où tous les  $x_i$  et  $y_j$  valent 0. (Chisholm introduit des équations supplémentaires pour ses approximants, obtenues par "symétrisation").

• De la même manière que pour atteindre d'autres escaliers dans la table de Padé-Newton d'une fonction d'une seule variable, on peut ici mixer polynômes de Newton et fractions continues pour obtenir d'autres sortes de fractions.

\* Par exemple, interpoler chacune des fonctions  $g_i$  non plus par une fraction continue limitée, mais par le polynôme de Newton associé aux points  $y_0, y_1, \dots, y_m$ :

on note :

$\delta_y \Delta_x [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j]$	la différence divisée en $y$ :
$[y_0, \dots, y_j; \underbrace{\Delta_x [x_0, \dots, x_i; y]}_{g_i(y)}]$	
de la fonction $g_i(y)$	

Cette fois, chaque  $g_i(y)$  qui apparaît dans la fraction continue :

$$g_0(y) + \prod_{i=0}^{m-1} \left( \frac{x - x_i}{g_i(y)} \right)$$

est interpolée par :

$$\sum_{j=0}^m \delta_y \Delta_x [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j] \underbrace{\Omega_j(y)}_{\prod_{l=0}^{j-1} (y - y_l)}$$

ce qui donne la fraction rationnelle :

$$\sum_{j=0}^m \delta_y \Delta_x [x_0; y_0, \dots, y_j] + \sum_{i=0}^{m-1} K \left( \frac{x - x_i}{\sum_{j=0}^m \delta_y \Delta_x [x_0, \dots, x_{i+1}; y_0, \dots, y_j] \Omega_j(y)} \right)$$

De façon plus générale, entre ces deux cas extrêmes pour l'interpolation des  $g_i$  en  $y$ , (polynôme ou fraction de Hecke), on dispose de toutes les fractions intermédiaires obtenues en calculant le développement de Hecke de  $g_i = \frac{\sum_{k=0}^l [\delta_y \dots \delta_y g_i] \Omega_k}{\Omega_{l+1}}$

entre les points  $y_{l+1}, y_{l+2}, \dots, y_n$

(cf. BI-1)  
calcul récurent.

\* Nous pouvons aussi changer de fraction continue non seulement au niveau des fonctions  $g_i(y)$ , mais dès le départ, au niveau de la fonction  $F_y(x) = f(x, y)$ .

Par exemple, son polynôme de Newton relatif aux points  $x_0, x_1, \dots, x_m$  est :

$$\sum_{i=0}^m \underbrace{[x_0, x_1, \dots, x_i; F_y]}_{\substack{\text{différence divisée} \\ \text{en } x}} \underbrace{\omega_i(x)}_{\prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)}$$

Pour homogénéiser les notations, on définit :

$$\delta_x [x_0, \dots, x_i; y] = [x_0, \dots, x_i; F_y] \text{ qui est une fonction de } y,$$

notée  $h_i(y)$ .

Il reste maintenant à interpoler chacune des fonctions  $h_i(y)$  qui apparaît dans  $\sum_{i=0}^m h_i(y) w_i(x)$  suivant les

points  $y_0, y_1, \dots, y_n$ .

Si on utilise leurs polynômes de Newton, on retrouve l'interpolation de Newton du chapitre 4, le coefficient de  $w_i(x) \Omega_j(y)$  étant  $\Delta_y \delta_x [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j]$  alors noté  $[x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j; f(x, y)]$

Si on utilise leurs fractions continues de Bhiele, on obtient alors la fraction rationnelle:

$$\sum_{i=0}^m \left( \Delta_y \delta_x [x_0, \dots, x_i; y_0] + \prod_{j=0}^{i-1} \left( \frac{x - x_j}{\Delta_y \delta_x [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_{j+1}]} \right) \right) w_i(x)$$

où  $\Delta_y \delta_x [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j]$  est la différence inverse divisée en  $y$  de la fonction  $h_i(y) = \delta_x [x_0, \dots, x_i; y]$

Les différentes fonctions intermédiaires qui apparaissent peuvent très bien être interpolées par des fractions de types différents, ce qui augmente encore la généralité.

Remarquons que les différents coefficients qui interviennent dans ces développements se calculent en appliquant successivement les algorithmes des différences divisées et des différences inverses divisées (ou inversement).

Cependant, les propriétés des fractions continues sont intimement liées à celles des transformations homographiques (de même que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  est associée aux transformations  $u \rightarrow a_n + u$

et que le produit infini  $\prod_{n \geq 0} p_n$  est lié aux transformations  $u \rightarrow p_n u$ .)

3) Interprétation utilisant des transformations homographiques (dans deux directions)

Soit  $\kappa(x, y)$  la première fraction continue obtenue au 1).

Ecriture du terme:  $\Delta_{y, x} [x_0, \dots, x_i; y_0] + K \prod_{j=0}^{n-1} \left( \frac{y - y_j}{\Delta_{y, x} [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_{j+1}]} \right)$

Soit  $t_{i,0}$  la transformation homographique dans le plan complété  $\hat{\mathbb{C}}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{i,0}: v \rightarrow \Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0] + \frac{y - y_0}{v} \\ \text{puis} \\ t_{i,1}: v \rightarrow \Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0, y_1] + \frac{y - y_1}{v} \\ \vdots \\ \text{et} \\ t_{i,j}: v \rightarrow \Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j] + \frac{y - y_j}{v} \end{array} \right.$$

On a:  $\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0] + K \prod_{j=0}^{n-1} \left( \frac{y - y_j}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_{j+1}]} \right)$

=  $t_{i,0} \circ t_{i,1} \circ \dots \circ t_{i,n-1} (\infty)$

Ecriture de  $\kappa(x, y)$ :

Soit maintenant les transformations  $s_i$  dans le plan des  $u$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0: u \rightarrow t_{0,0} \circ t_{0,1} \circ \dots \circ t_{0,n-1} (\infty) + \frac{x - x_0}{u} \\ s_1: u \rightarrow t_{1,0} \circ t_{1,1} \circ \dots \circ t_{1,n-1} (\infty) + \frac{x - x_1}{u} \\ \vdots \\ s_i: u \rightarrow t_{i,0} \circ t_{i,1} \circ \dots \circ t_{i,n-1} (\infty) + \frac{x - x_i}{u} \end{array} \right.$$

de sorte que :

$$r(x, y) = s_0 \circ s_1 \circ \dots \circ s_{m-1}(\infty).$$

#### 4) Conclusion

Les fractions continues ainsi construites répondent au problème de l'interpolation rationnelle, et ceci de nombreuses manières différentes.

Il reste cependant à étudier la nature des réduites obtenues, ce qui semble conduire à de nouveaux types d'approximants de Padé à deux variables, dans le cas limite où tous les points sont confondus.

Un autre problème important est la recherche d'une forme agréable de l'erreur, pour la convergence éventuelle d'une suite de telles fractions vers la fonction qu'on interpole; ce qui ne découle pas immédiatement de la formule exacte.

#### Références

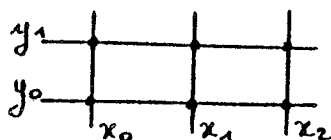
- [1] P. HENRICI (1974) Applied and computational complex analysis. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience  
vol 1. Power series. Integration - Conformal mapping - Location of zeros  
vol 2. Special functions. Integral transforms. Asymptotics - Continued fractions.

- [2] W. B. JONES W. J. THRON (1980) Continued fractions. Analytic theory and applications. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. G.C. Rota ed.

Fractions continues à deux variables :  
quelques exemples des espaces vectoriels auxquels  
appartiennent numérateur et dénominateur.

Numérateur

Dénominateur



$\Delta_{y,x}$

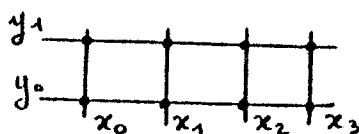
$y^3$   
 $y^2$   
 $y \quad xy$   
 $1 \quad x$

$y^2$   
 $y$   
 $1 \quad x$

$\Delta_{x,y}$

$y \quad xy \quad x^2y$   
 $1 \quad x \quad x^2$

$1 \quad x \quad x^2$



$\Delta_{y,x}$

$y^4$   
 $y^3$   
 $y^2 \quad xy^2$   
 $y \quad xy$   
 $1 \quad x \quad x^2$

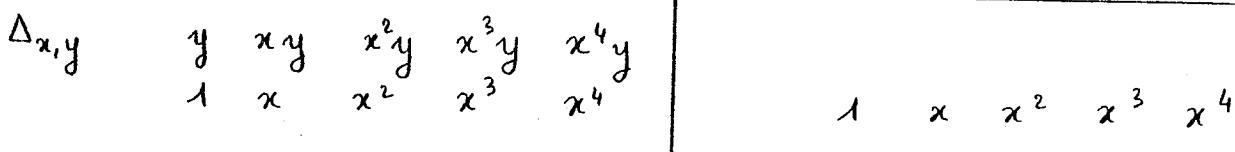
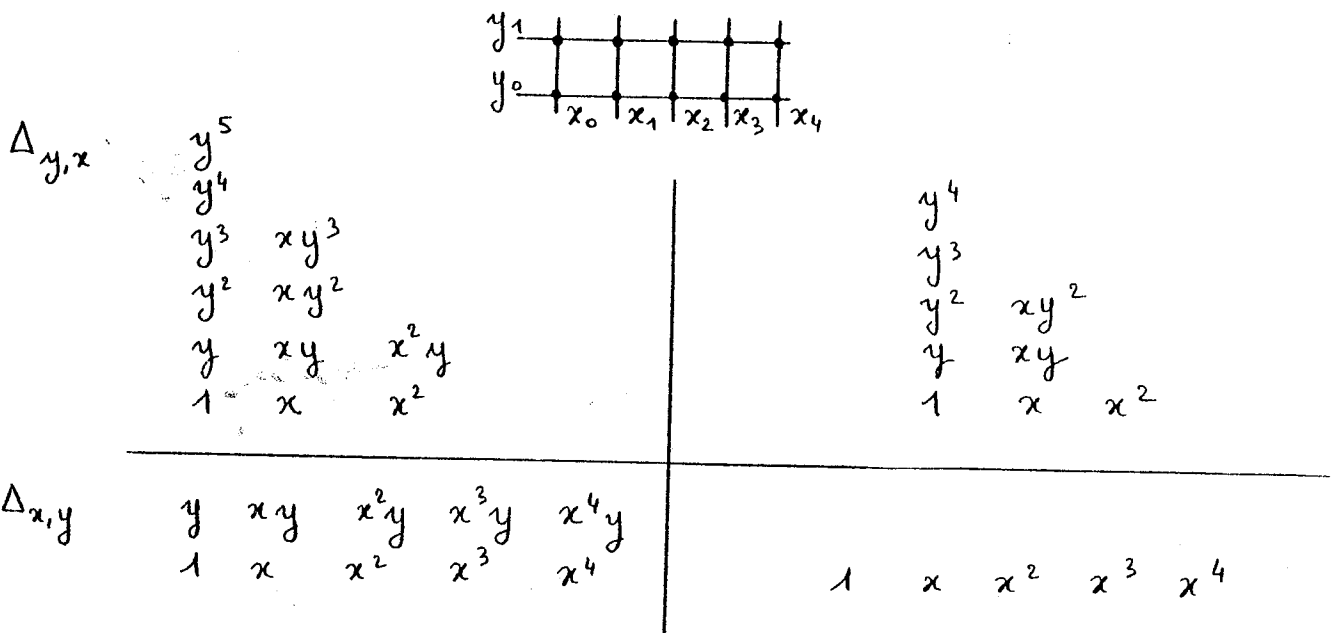
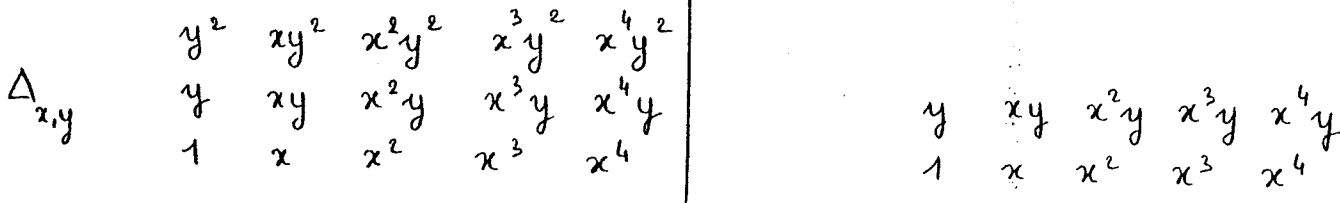
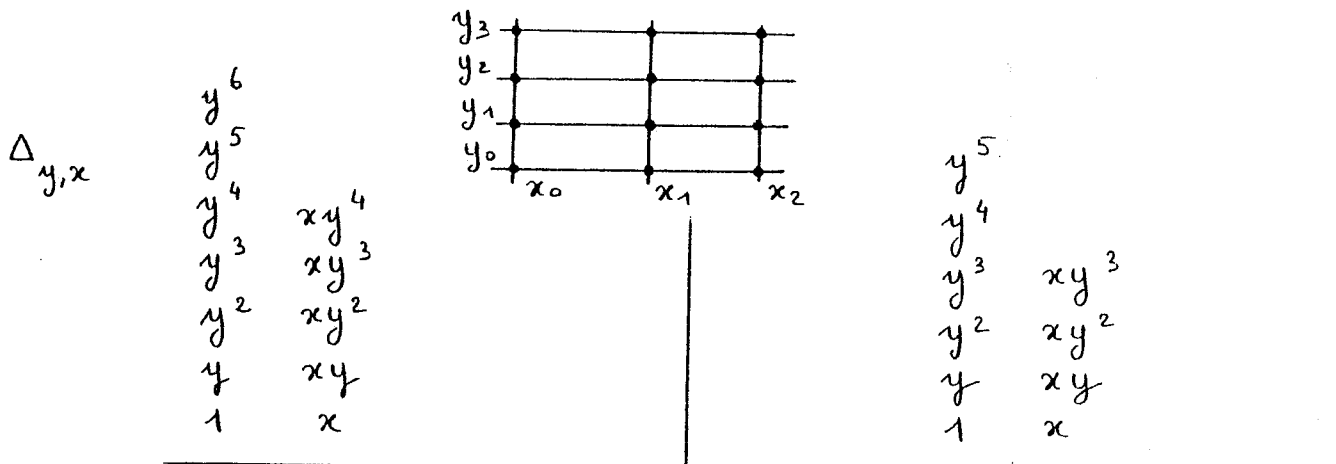
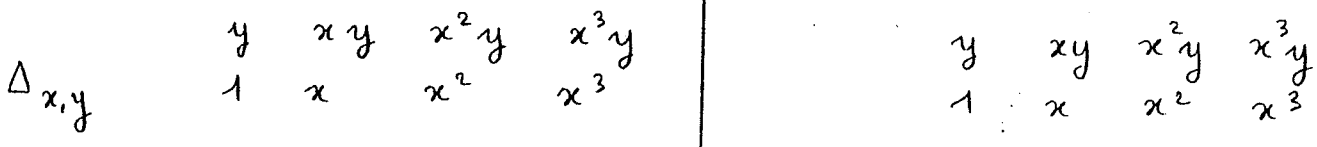
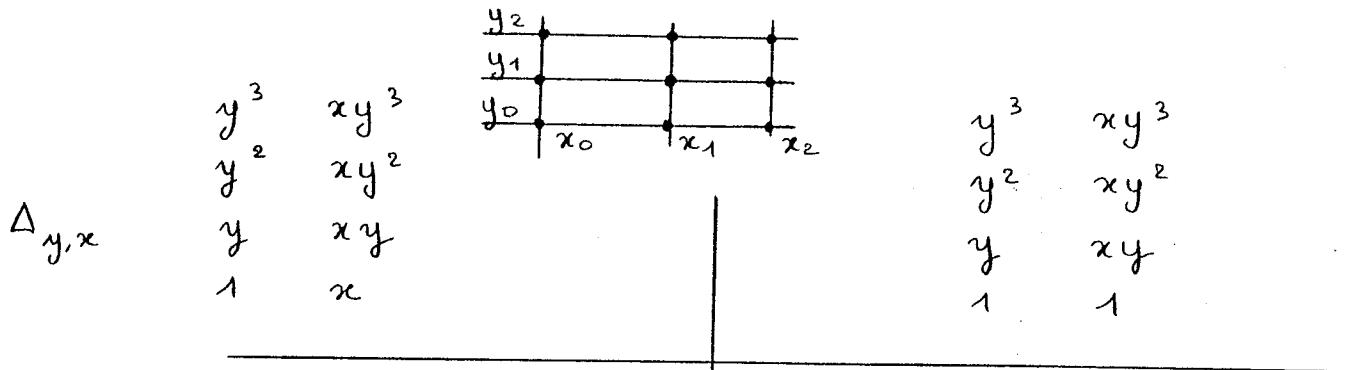
$y^3$   
 $y^2$   
 $y \quad xy$   
 $1 \quad x$

$\Delta_{x,y}$

$y \quad xy \quad x^2y$   
 $1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4$

$1 \quad x \quad x^2 \quad x^3$





DERNIERE PAGE D'UNE THESE

3È CYCLE, DOCTEUR INGÉNIEUR OU UNIVERSITÉ

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M. ... *Della Dora* .....

M. ....

M.me... *CHAFFY... Claudine... nee... CAMUS* .....

est autorisé à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR .de 3<sup>ème</sup> cycle..

.....

Grenoble, le 19 JUIN 1984

Le Président de l'Université Scientifique  
et Médicale



M. TANCHE

*Tanche*