



**HAL**  
open science

# Résolution de l'équation de convection-diffusion et d'un modèle de circulations océaniques générales par des méthodes d'éléments finis

Mauricio Talias Hasson

► **To cite this version:**

Mauricio Talias Hasson. Résolution de l'équation de convection-diffusion et d'un modèle de circulations océaniques générales par des méthodes d'éléments finis. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1983. Français. NNT : . tel-00308762

**HAL Id: tel-00308762**

**<https://theses.hal.science/tel-00308762>**

Submitted on 1 Aug 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**l' Université Scientifique et Médicale de Grenoble**  
*et à*  
**l' Institut National Polytechnique de Grenoble**

POUR OBTENIR LE DIPLOME DE  
DOCTEUR INGENIEUR  
« Mathématiques Appliquées »

*par*

**Mauricio TELIAS HASSON**

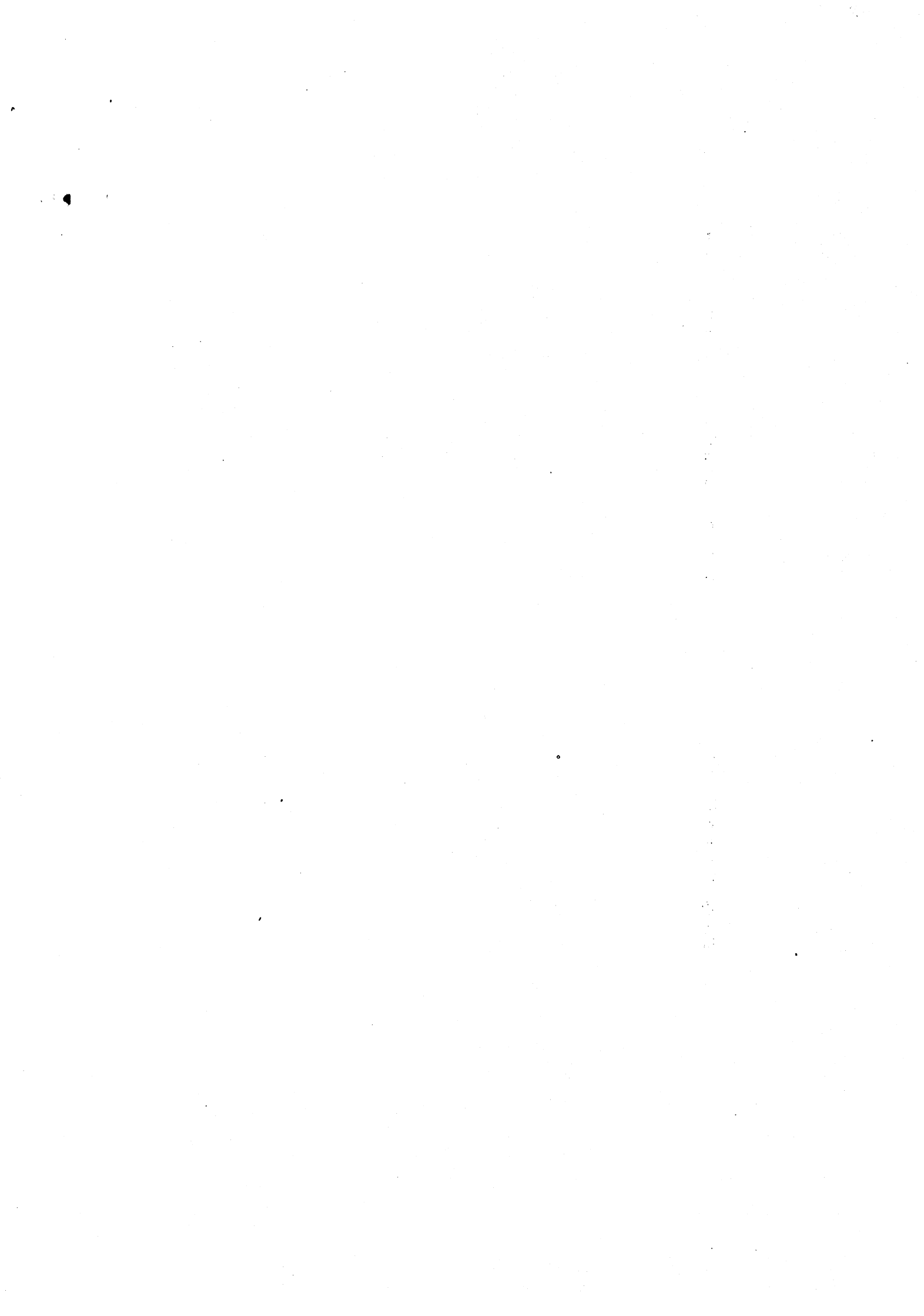


**RESOLUTION DE L'EQUATION DE CONVECTION-DIFFUSION  
ET D'UN MODELE DE CIRCULATIONS OCEANIQUES GENERALES  
PAR DES METHODES D'ELEMENTS FINIS.**



Thèse soutenue le 6 juin 1983 devant la Commission d'Examen :

<b>F. CHATELIN</b>	<b>:</b>	<b>Président</b>
<b>Ch. LEPROVOST</b>	}	<b>Examineurs</b>
<b>F. MIGNOT</b>		
<b>A. PONCET</b>		
<b>F. ROBERT</b>		



UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

année scolaire 1980-1981

Président de l'Université : M. J.J. PAYAN

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

Mlle	AGNIUS DELORD Claudine	Biophysique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Clinique dermatologie
	AMBROISE THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	Physique nucléaire
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique pédiatrie et puériculture
	BELORISKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
M.	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale & traumatologie
	BILLET Jean	Géographie
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET EYMARD Joseph	Clinique Hépto-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Jane-Marie	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie

.../...

MM. BUTEL Jean	Orthopédie
CABANEL Guy	Clinique rhumatologie et hydrologie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHARACHON Robert	Clinique O.R.L.
CHATEAU Robert	Clinique neurologique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COEUR André	Chimie analytique et bromotologique
COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
CRABBE Pierre	C.E.R.M.O.
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude	M.I.A.G.
DELORMAS Pierre	Pneumo-phtisiologique
DENIS Bernard	Clinique cardiologique
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DODU Jacques	Mécanique appliquée IUT 1
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GAVEND Jean-Michel	Pharmacologie
GEINDRE Michel	Electro-radiologie
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
JANIN Bernard	Géographie
JEANNIN Charles	Pharmacie galénique
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
KAHANE André	Physique
KAHANE Josette	Physique
KLEIN Joseph	Mathématiques pures
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Hermodynamique
LACHARME Jean	Biologie cellulaire
LAJZEROWICZ Joseph	Physique

Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie thoracique
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutiques
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LE NOC Pierre	Bactériologie virologie
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LOUP Jean	Géographie
	LUU DUC Cuong	Chimie générale et minérale
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
Mlle	MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie
MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	NEGRE Robert	Mécanique IUT 1
	MOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OMONT Alain	Astrophysique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Sémeiologie médicale (neurologie)
	PERRIER Guy	Géophysique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	RACHAIL Michel	Clinique médicale B
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
M.	REVOL Michel	Urologie
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
MM.	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
Mme	SEIGLE MURANDI Françoise	Botanique et cryptogamie
MM.	SENGEL Philippe	Biologie animale
	SIBILLE Robert	Construction mécanique IUT 1
	SOUTIF Michel	Physique
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MM. VAN CUTSEM Bernard  
 VAUQUOIS Bernard  
 VERRAIN Alice  
 VERRAIN André  
 VIGNAIS Pierre

Mathématiques appliquées  
 Mathématiques appliquées  
 Pharmacie galénique  
 Biophysique  
 Biochimie médicale

#### PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

MM. ARNAUD Yves  
 AURIAULT Jean-Louis  
 BEGUIN Claude  
 BOITET Christian  
 BOUTHINON Michel  
 BRUGEL Lucien  
 BUISSON Roger  
 CASTAING Bernard  
 CHARDON Michel  
 CHEHIKIAN Alain  
 COHEN Henri  
 COHENADDAD Jean-Pierre  
 COLIN DE VERDIERE Yves  
 CONTE René  
 CYROT Michel  
 DEPASSEL Roger  
 DOUCE Roland  
 DUFRESNOY Alain  
 GASPARD François  
 GAUTRON René  
 GIDON Maurice  
 GIGNOUX Claude  
 GLENAT René  
 GOSSE Jean-Pierre  
 GROS Yves  
 GUITTON Jacques  
 HACQUES Gérard  
 HERBIN Jacky  
 HICTER Pierre  
 IDELMAN Simon  
 JOSELEAU Jean-Paul  
 JULLIEN Pierre  
 KERCKOVE Claude

Chimie IUT 1  
 Mécanique IUT 1  
 Chimie organique  
 Mathématiques appliquées  
 E.E.A. IUT 1  
 Energétique IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Physique  
 Géographie  
 E.E.A. IUT 1  
 Mathématiques pures  
 Physique  
 Mathématiques pures  
 Physique IUT 1  
 Physique du solide  
 Mécanique des fluides  
 Physiologie végétale  
 Mathématiques pures  
 Physique  
 Chimie  
 Géologie  
 Sciences nucléaires  
 Chimie organique  
 E.E.A. IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Chimie  
 Mathématiques appliquées  
 Géographie  
 Chimie  
 Physiologie animale  
 Biochimie  
 Mathématiques appliquées  
 Géologie

MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique IUT 1
	KUPKA Yvon	Mathématiques pures
	LUNA Domingo	Mathématiques pures
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
Mme	MINIER Colette	Physique IUT 1
MM.	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
	OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
	PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie minéralogie
	PERRIN Claude	Sciences nucléaires
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
	ROBERT Gilles	Mathématiques pures
	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	ROSSI André	Physiologie végétale
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
	SARROT REYNAUD Jean	Géologie
	SAXOD Raymond	Biologie animale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique
MM.	STUTZ Pierre	Mécanique
	VIALON Pierre	Géologie
	VIDAL Michel	Chimie organique
	VIVIAN Robert	Géographie

#### CHARGES D'ENSEIGNEMENT PHARMACIE

MM.	ROCHAS Jacques	Hygiène et hydrologie
	DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie

#### PROFESSEURS SANS CHAIRE (médecine)

M.	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
----	--------------	-----------------



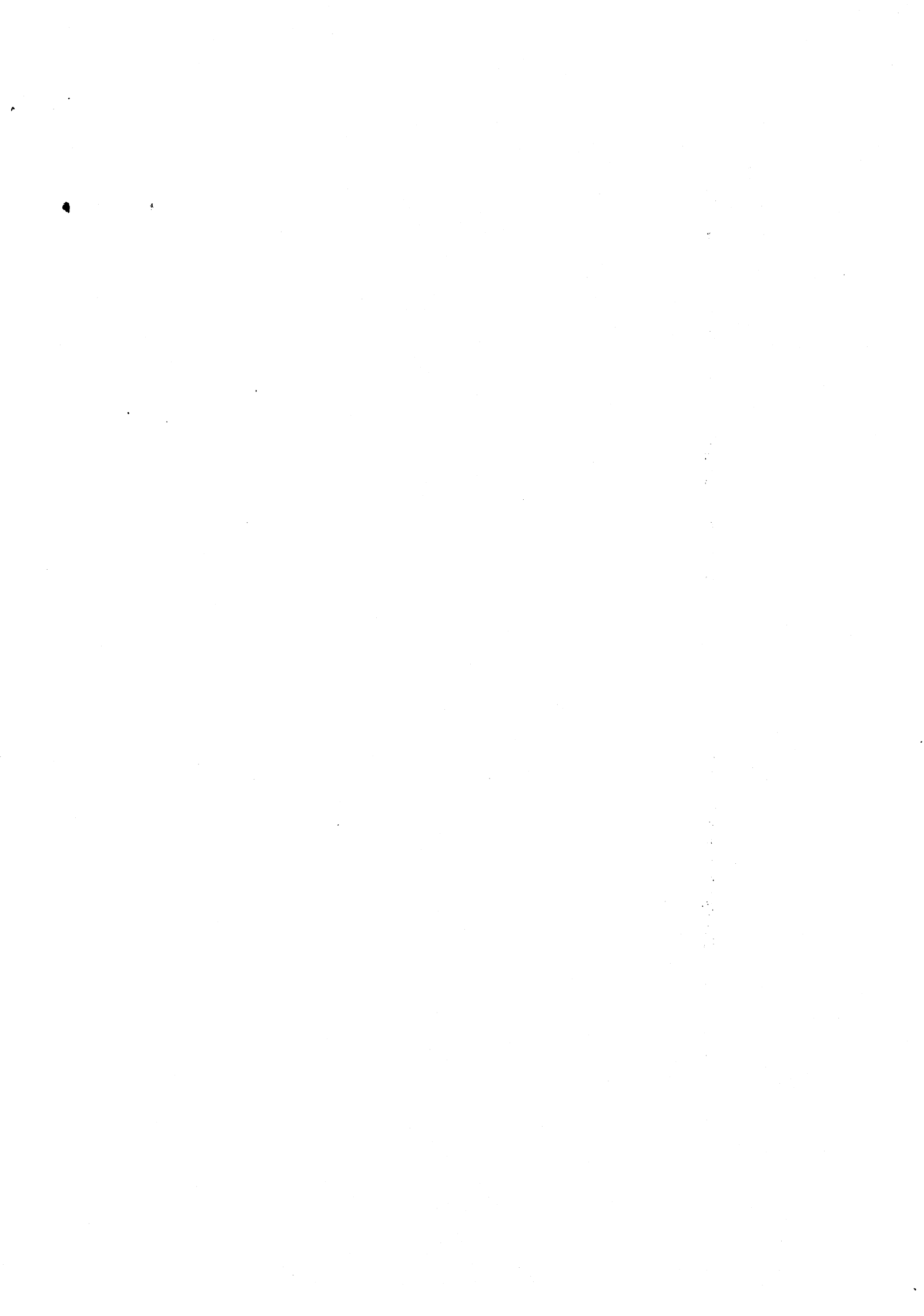
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie (hormonologie)
	CHAMPETIER Jean	Anatomie
	COLOMB Maurice	Biochimie
	COULOMB Max	Radiologie
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GROULADE Joseph	Biochimie A
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Gérontologie
	JALBERT Pierre	Histologie
	MAGNIN Robert	Hygiène
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VROUSOS Constantin	Radiothérapie

#### MAITRES DE CONFERENCES AGREGES (médecine)

MM.	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BENABID Alim Louis	Médecine et chirurgie
	BERNARD Pierre	Gynécologie obstétrique
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DEBRU Jean-Luc	Médecine interne
	DYON Jean-François	Chirurgie infantile
	FAURE Claude	Anatomie et organogénèse
	FAURE Gilbert	Urologie
	FLOYRAC Roger	Biophysique
	FOURNET Jacques	Hépatogastro-entérologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIRARDET Pierre	Anesthésiologie
	GUIDICELLI Henri	Chirurgie générale
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique (réanimation)
	JUNIEN-LAVILLAULOY Claude	Clinique O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie biologique
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MASSOT Christian	Médecine interne
	MOUILLON Michel	Ophthalmologie

MM. PARAMELLE Bernard  
RACINET Claude  
RAMBAUD Pierre  
RAPHAEL Bernard  
SCHAEFER René  
SEIGNEURIN Jean-Marie  
SOTTO Jean-Jacques  
STOEBNER Pierre

Pneumologie  
Gynécologie-Obstétrique  
Pédiatrie  
Stomatologie  
Cancérologie  
Bactériologie-virologie  
Hématologie  
Anatomie-pathologique



# INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Président : Daniel BLOCH

Vice-Présidents : René CARRE  
Hervé CHERADAME  
Marcel IVANES

Année universitaire 1982-1983

## Professeurs des Universités

ANCEAU	François	E.N.S.I.M.A.G.	LACOUME	Jean Louis	E.N.S.I.E.G.
BARRAUD	Alain	E.N.S.I.E.G.	LATOMBE	Jean Claude	E.N.S.I.M.A.G.
BAUDELET	Bernard	E.N.S.I.E.G.	LESIEUR	Marcel	E.N.S.H.G.
BESSON	Jean	E.N.S.E.E.G.	LESPINARD	Georges	E.N.S.H.G.
BLIMAN	Samuel	E.N.S.E.R.G.	LONGQUEUE	Jean Pierre	E.N.S.I.E.G.
BLOCH	Daniel	E.N.S.I.E.G.	MAZARE	Guy	E.N.S.I.M.A.G.
BOIS	Philippe	E.N.S.H.G.	MOREAU	René	E.N.S.H.G.
BONNETAIN	Lucien	E.N.S.E.E.G.	MORET	Roger	E.N.S.I.E.G.
BONNIER	Etienne	E.N.S.E.E.G.	MOSSIERE	Jacques	E.N.S.I.M.A.G.
BOUYARD	Maurice	E.N.S.I.E.G.	PARIAUD	Jean Charles	E.N.S.E.E.G.
BRISSONNEAU	Pierre	E.N.S.E.R.G.	PAUTHENET	Rene	E.N.S.I.E.G.
BUYLE BODIN	Maurice	E.N.S.E.R.G.	PERRET	René	E.N.S.I.E.G.
CAVAIGNAC	Jean François	E.N.S.I.E.G.	PERRET	Robert	E.N.S.I.E.G.
CHARTIER	Germain	E.N.S.I.E.G.	PIAU	Jean Michel	E.N.S.H.G.
CHENEVIER	Pierre	E.N.S.E.R.G.	POLOUJADOFF	Michel	E.N.S.I.E.G.
CHERADAME	Hervé	U.E.R.M.C.P.P.	POUPOT	Christian	E.N.S.E.R.G.
CHERUY	Arlette	E.N.S.I.E.G.	RAMEAU	Jean Jacques	E.N.S.E.E.G.
CHIAVERINA	Jean	U.E.R.M.C.P.P.	RENAUD	Maurice	U.E.R.M.C.P.P.
COHEN	Joseph	E.N.S.E.R.G.	ROBERT	André	U.E.R.M.C.P.P.
COUMES	André	E.N.S.E.R.G.	ROBERT	François	E.N.S.I.M.A.G.
DURAND	Francis	E.N.S.E.E.G.	SABONNADIERE	Jean Claude	E.N.S.I.E.G.
DURAND	Jean Louis	E.N.S.I.E.G.	SAUCIER	Gabrielle	E.N.S.I.M.A.G.
FELICI	Noël	E.N.S.I.E.G.	SCHLENKER	Claire	E.N.S.I.E.G.
FOULARD	Claude	E.N.S.I.E.G.	SCHLENKER	Michel	E.N.S.I.E.G.
GENTIL	Pierre	E.N.S.E.R.G.	SERMET	Pierre	E.N.S.E.R.G.
GUERIN	Bernard	E.N.S.E.R.G.	SILVY	Jacques	U.E.R.M.C.P.P.
GUYOT	Pierre	E.N.S.E.E.G.	SOHM	Jean Claude	E.N.S.E.E.G.
IVANES	Marcel	E.N.S.I.E.G.	SOUQUET	Jean Louis	E.N.S.E.E.G.
JAUSSAUD	Pierre	E.N.S.I.E.G.	VEILLON	Gérard	E.N.S.I.M.A.G.
JOUBERT	Jean Claude	E.N.S.I.E.G.	ZADWORNY	François	E.N.S.E.R.G.
JOURDAIN	Geneviève	E.N.S.I.E.G.			

## Professeurs associés

BASTIN	Georges	E.N.S.H.G.	GANDINI	Alessandro	U.E.R.M.C.P.P.
BERRIL	John	E.N.S.H.G.	HAYASHI	Hirashi	E.N.S.I.E.G.
CARREAU	Pierre	E.N.S.H.G.			

## Professeurs Université des Sciences Sociales (Grenoble II)

BOLLIET	Louis		CHATELIN	Françoise	
---------	-------	--	----------	-----------	--

## Professeurs E.N.S. Mines de Saint Etienne

RIEU	Jean		SOUSTELLE	Michel	
------	------	--	-----------	--------	--

## Chercheurs du C.N.R.S.

FRUCHART	Robert	Directeur de recherche	HOPFINGER	Emil	Maître de recherche
VACHAUD	Georges	Directeur de Recherche	JOUD	Jean Charles	Maître de recherche
ALLIBERT	Michel	Maître de recherche	KAMARINOS	Georges	Maître de recherche
ANSARA	Ibrahim	Maître de Recherche	KLEITZ	Michel	Maître de recherche
ARMAND	Michel	Maître de recherche	LANDAU	Ioan-Dore	Maître de recherche
BINDER	Gilbert		LASJAUNIAS	J.C.	
CARRE	René	Maître de recherche	MERMET	Jean	Maître de recherche
DAVID	René	Maître de recherche	MUNIER	Jacques	Maître de recherche
DEPORTES	Jacques		PIAU	Monique	
DRIOLE	Jean	Maître de recherche	PORTESEIL	Jean Louis	
GIGNOUX	Damien		THOLENCE	Jean Louis	
GIVORD	Dominique		VERDILLON	André	
GUELIN	Pierre				

## Chercheurs du Ministère de la Recherche et de la Technologie (Directeurs et Maîtres de recherche - E.N.S. Mines de Saint Etienne)

LESBATS	Pierre	Directeur de recherche	LALAUZE	René	Maître de recherche
BISCONDI	Michel	Maître de recherche	LANCELOT	François	Maître de recherche
KOBYLANSKI	André	Maître de recherche	THEVENOT	François	Maître de recherche
LE COZE	Jean	Maître de recherche	TRAN MINH	Canh	Maître de recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche  
(Décision du Conseil Scientifique)

E.N.S.E.E.G.

ALLIBERT BERNARD BONNET CAILLET CHATILLON CHATILLON COULON	Colette Claude Roland Marcel Catherine Christian Michel	DIARD EUSTATOPOULOS FOSTER GALERIE HAMMOU MALMEJAC MARTIN GARIN	Jean Paul Nicolas Panayotis Alain Abdelkader Yves (CENG) Régina	NGUYEN TRUONG RAVAINE SAINFORT SARRAZIN SIMON TOUZAIN URBAIN	Bernadette Denis (CENG) Pierre Jean Paul Philippe Georges (Laboratoire des ultraréfractaires ODEILLO).
--	---	---	---	--	--

E.N.S.Mines Saint Etienne

GUILHOT	Bernard	THOMAS	Gérard	DRIVER	Julien
---------	---------	--------	--------	--------	--------

E.N.S.E.R.G.

BARIBAUD BOREL CHOVET	Michel Joseph Alain	CHEHIKIAN DOLMAZON	Alain Jean Marc	HERAULT MONLLOR	Jeanny Christian
-----------------------------	---------------------------	-----------------------	--------------------	--------------------	---------------------

E.N.S.I.E.G.

BORNARD DESCHIZEAUX GLANGEAUD	Guy Pierre François	KOFMAN LEJEUNE	Walter Gérard	MAZUER PERARD REINISCH	Jean Jacques Raymond
-------------------------------------	---------------------------	-------------------	------------------	------------------------------	----------------------------

E.N.S.H.G.

ALEMANY BOIS DARVE	Antoine Daniel Félix	MICHEL OBLED	Jean Marie Charles	ROWE VAUCLIN WACK	Alain Michel Bernard
--------------------------	----------------------------	-----------------	-----------------------	-------------------------	----------------------------

E.N.S.I.M.A.G.

BERT CALMET COURTIN	Didier Jacques Jacques	COURTOIS DELLA DORA	Bernard Jean	FONLUPT SIFAKIS	Jean Joseph
---------------------------	------------------------------	------------------------	-----------------	--------------------	----------------

U.E.R.M.C.P.P.

CHARUEL	Robert
---------	--------

C.E.N.G.

CADET COEURE DELHAYE DUPUY	Jean Philippe (LETI) Jean Marc (STT) Michel (LETI)	JOUVE NICOLAU NIFENECKER	Hubert (LETI) Yvan (LETI) Hervé	PERROUD PEUZIN TAIEB VINCENDON	Paul/ Jean Claude (LETI) Maurice Marc
-------------------------------------	---	--------------------------------	---------------------------------------	---	--

Laboratoires extérieurs :

C.N.E.T.

DEMOULIN DEVINE	Eric R.A.B.	GERBER	Roland	MERCKEL PAULEAU	Gérard Yves
--------------------	----------------	--------	--------	--------------------	----------------

I.N.S.A. Lyon

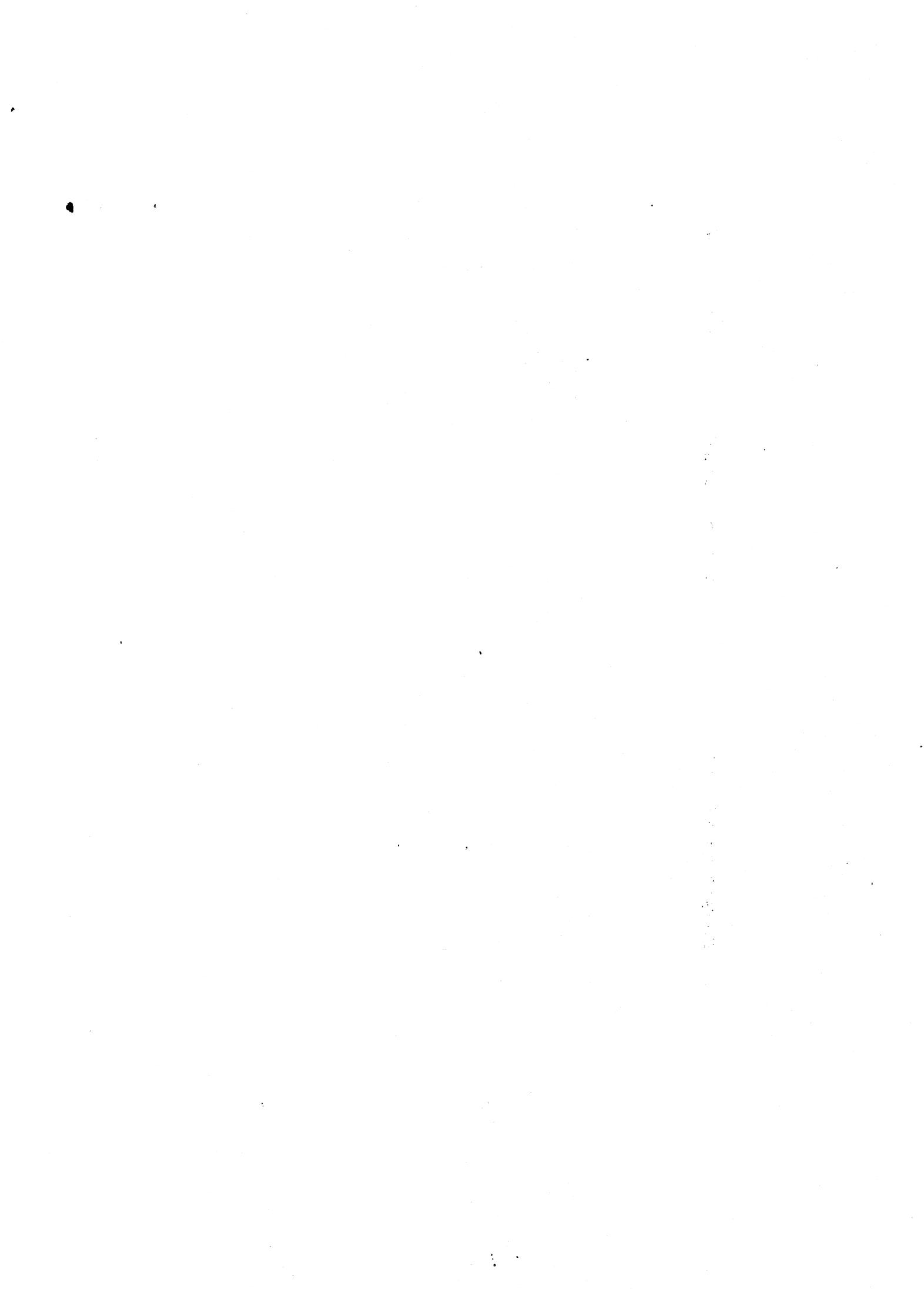
GAUBERT	C.
---------	----

\*\*\*\*\*

*à Dezanka*

*à mes parents*

*à toute notre famille*



*Je suis très sensible à l'honneur que me fait Madame Françoise CHATELIN en acceptant de présider mon Jury. Je tiens à lui exprimer ma sincère reconnaissance pour la sympathie qu'elle m'a toujours témoignée.*

*Je remercie vivement Monsieur Alain PONCET, qui a dirigé cette thèse, pour ses nombreux conseils et encouragements qui ont rendu possible ce travail.*

*Je tiens à remercier aussi Monsieur Christian LEPROVOST pour avoir accepté de siéger dans ce jury et pour son grand intérêt vis à vis de mon travail. La deuxième partie de cette thèse lui doit beaucoup.*

*Monsieur Fulbert MIGNOT a bien voulu faire le déplacement de Paris à Grenoble à cette occasion, je lui en suis très reconnaissant.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur François ROBERT pour sa participation au Jury.*

*Je remercie tout particulièrement mon ami Mario AHUES, sa collaboration et sa sympathie m'ont été précieuses. Une partie de ce travail a été faite ensemble.*

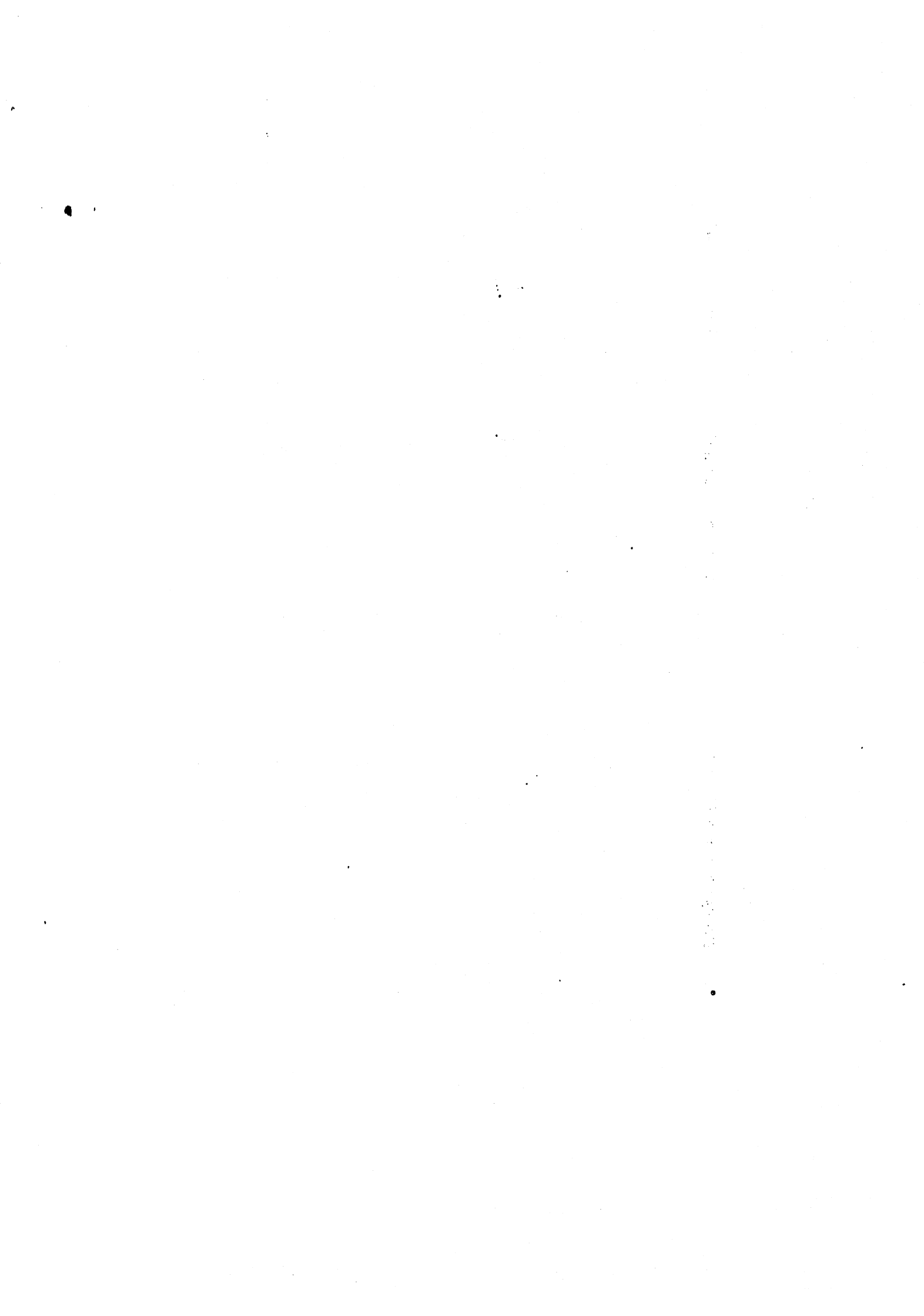
*Je remercie amicalement MM. Eric DUMAS, Hubert BRANGER, Patrick VINCENT et Jacques VERRON pour la façon très amicale dont j'ai été toujours reçu au sein de leur équipe et le soutien qu'ils m'ont apporté. Que Monsieur José MONSALVE trouve ici l'expression de ma sympathie.*

*L'Equipe d'Analyse Numérique m'a permis de vivre une expérience très riche pendant mon séjour auprès d'elle.*

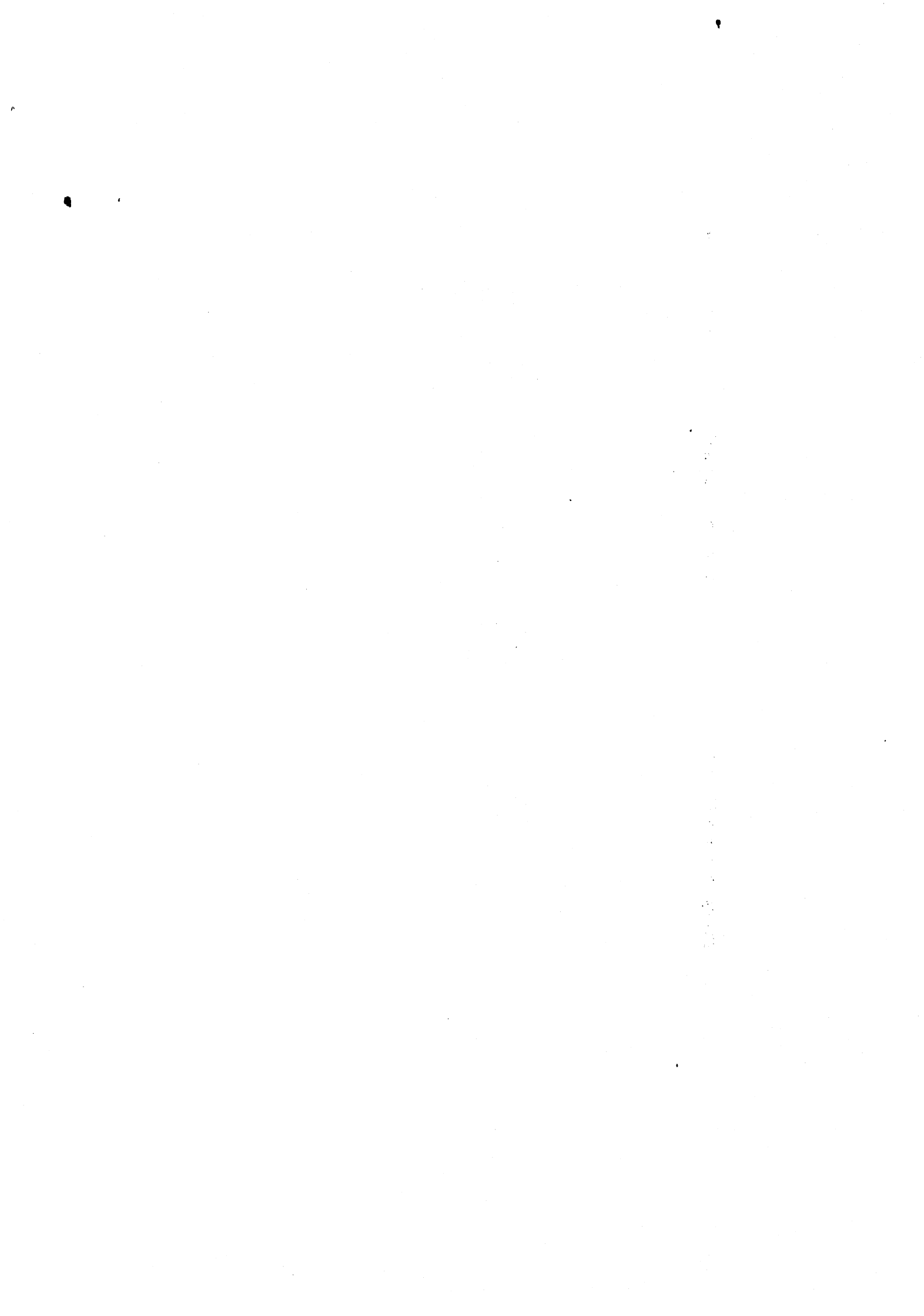
*Je voudrais faire remarquer l'excellent travail de dactylographie assuré par Mme G. BICAIS et l'efficacité du Service de reprographie qui a effectué le tirage de cette thèse.*

Mauricio TELIAS





Ce travail a été fait dans le cadre de  
l'accord de Coopération Scientifique et  
Technique entre le Gouvernement Français  
et le Département de Mathématiques de la  
Faculté des Sciences Physiques et Mathé-  
matiques de l'Université du Chili.

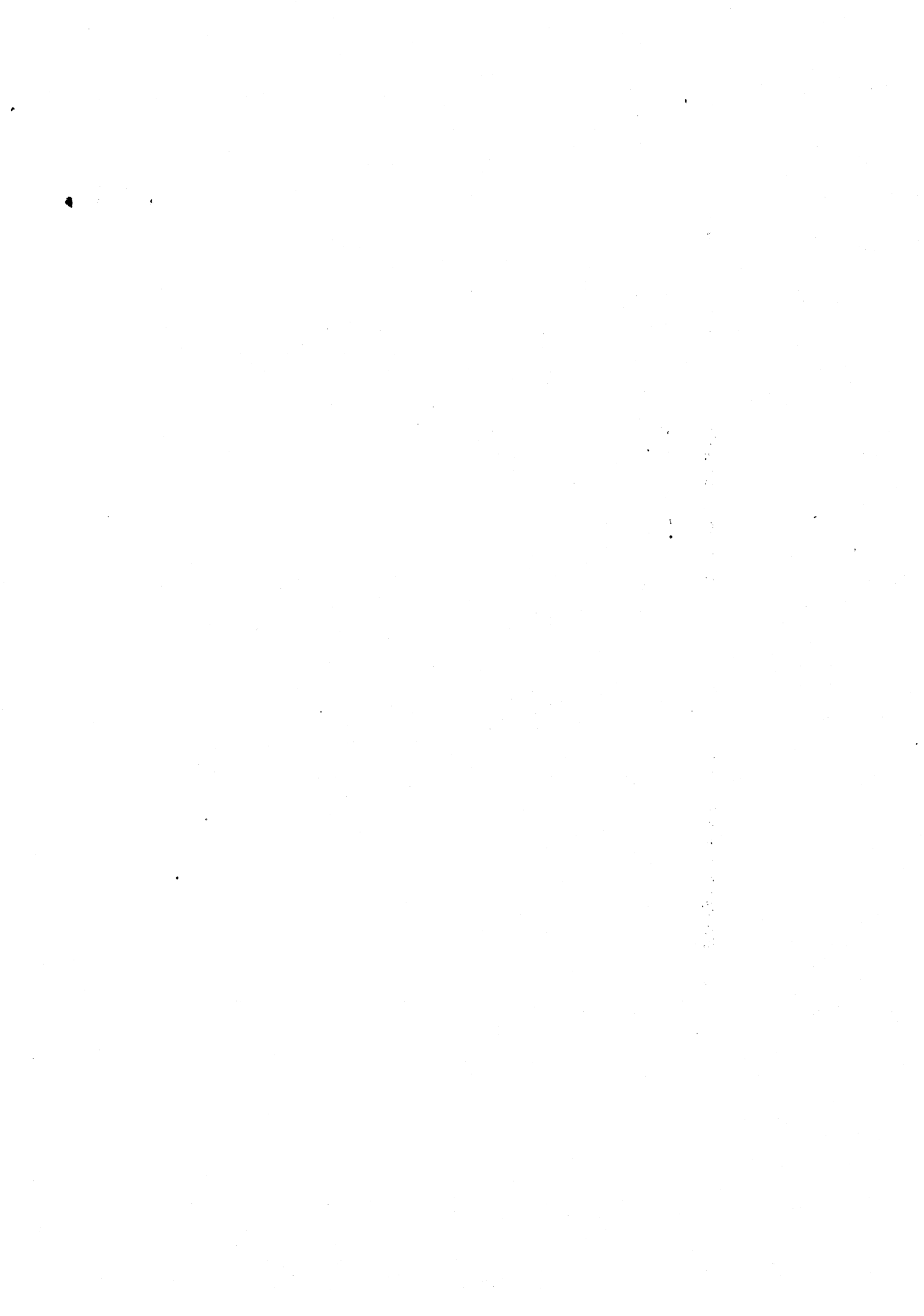


## RESUME

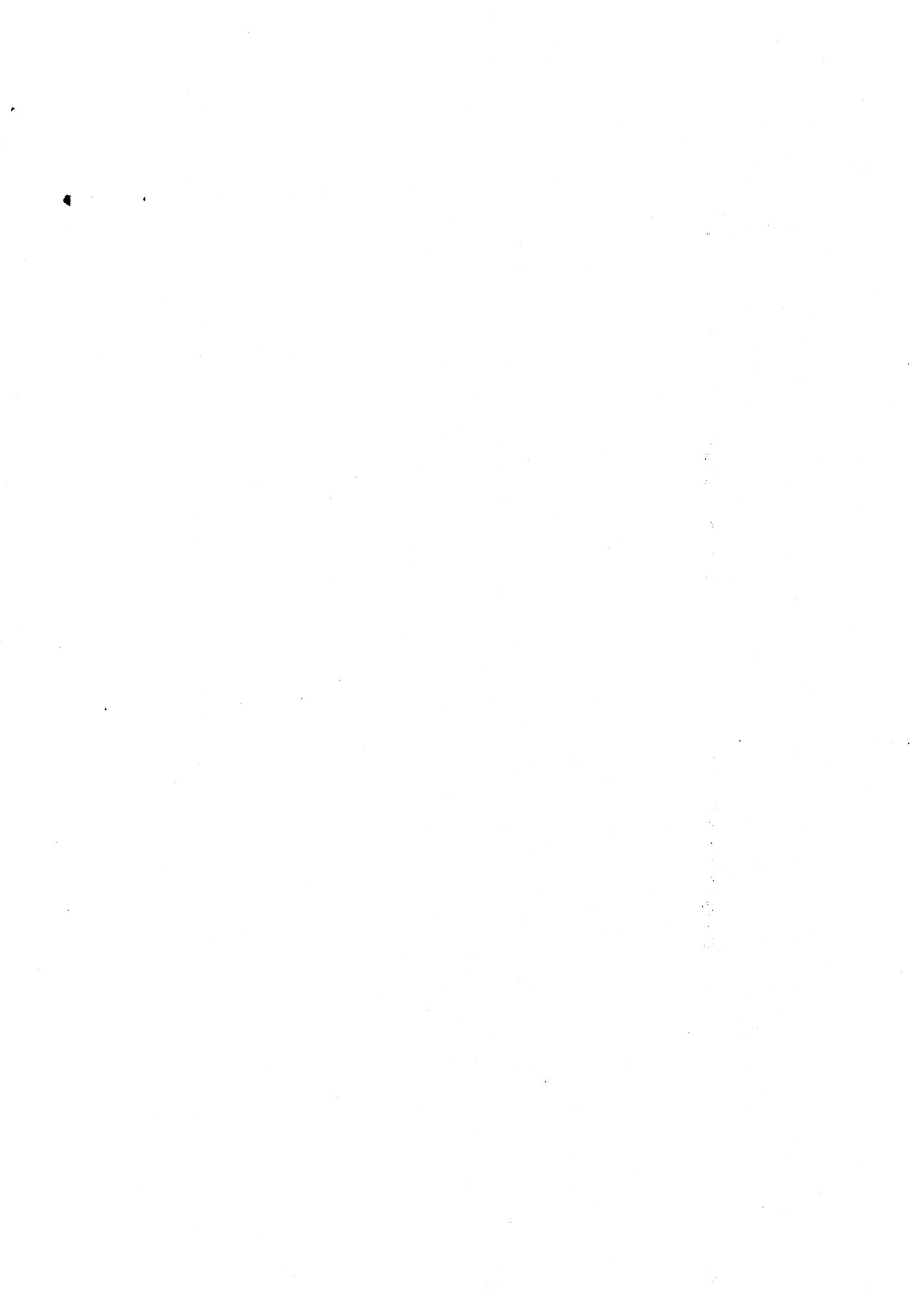
Dans la première partie de ce travail on présente des méthodes numériques pour résoudre l'équation de convection-diffusion et on propose une méthode qui ramène le problème à une formulation symétrique qui permet de traiter les cas de faible viscosité. Les problèmes unidimensionnel, bidimensionnel stationnaires et unidimensionnel non stationnaire sont abordés.

La deuxième partie est consacrée à la résolution d'un modèle test de circulation océanique aux latitudes moyennes dont le mouvement est dû au vent. On introduit une condition d'adhérence aux parois Est et Ouest qui représentent les côtes terrestres. On utilise une méthode d'éléments finis qui permet de résoudre le modèle comme une "cascade" des problèmes très simples. On compare avec des méthodes de différences finies du point de vue de la précision, du coût de calcul et de l'applicabilité.

**MOTS-CLES :** *Equations de convection-diffusion, circulation océanique, éléments finis mixtes.*



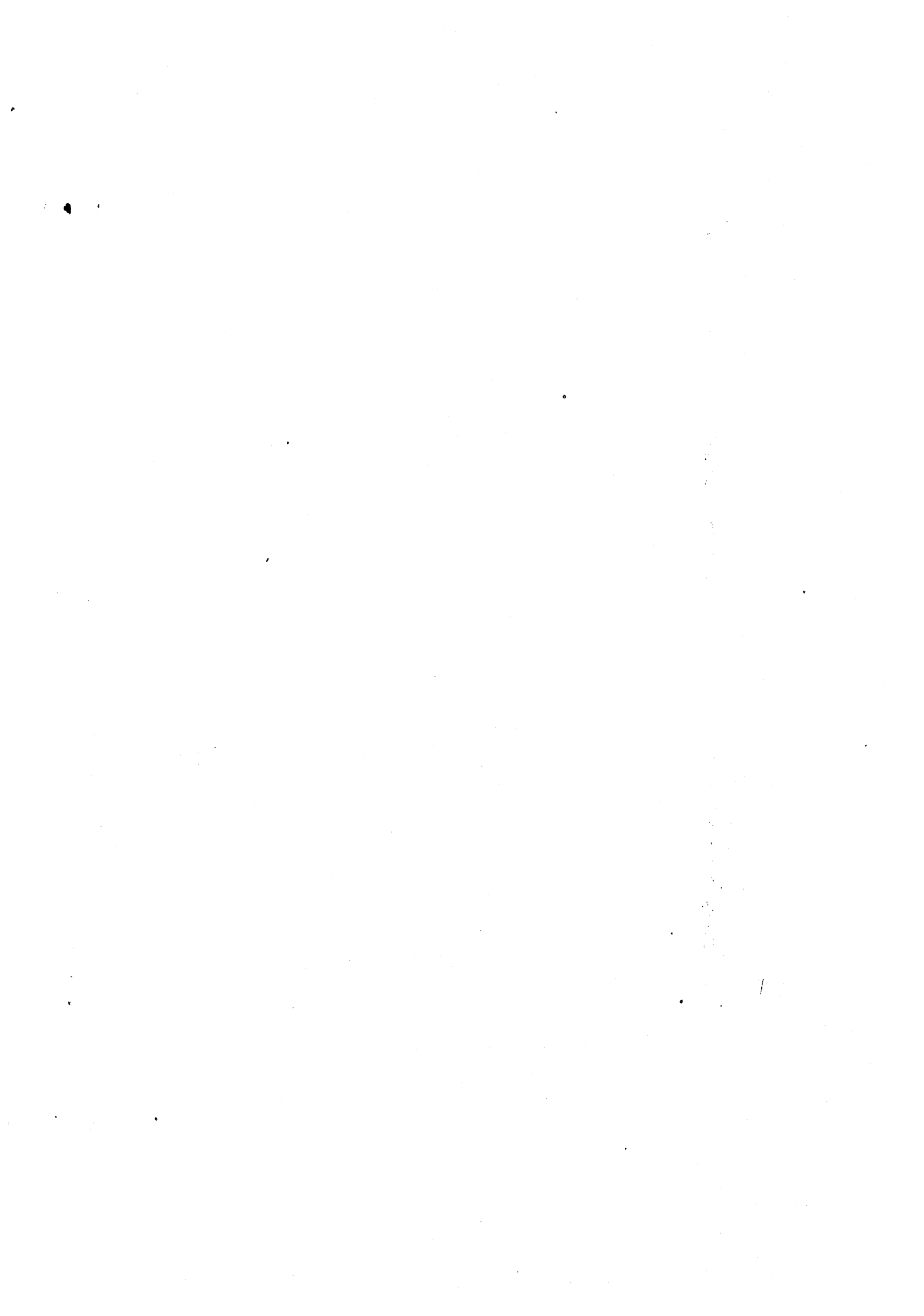




PREMIERE PARTIE







## INTRODUCTION

### I - PROBLEME UNIDIMENSIONNEL STATIONNAIRE

I.1 - Vitesse constante

I.2 - Vitesse non constante

### II - PROBLÈME BIDIMENSIONNEL STATIONNAIRE

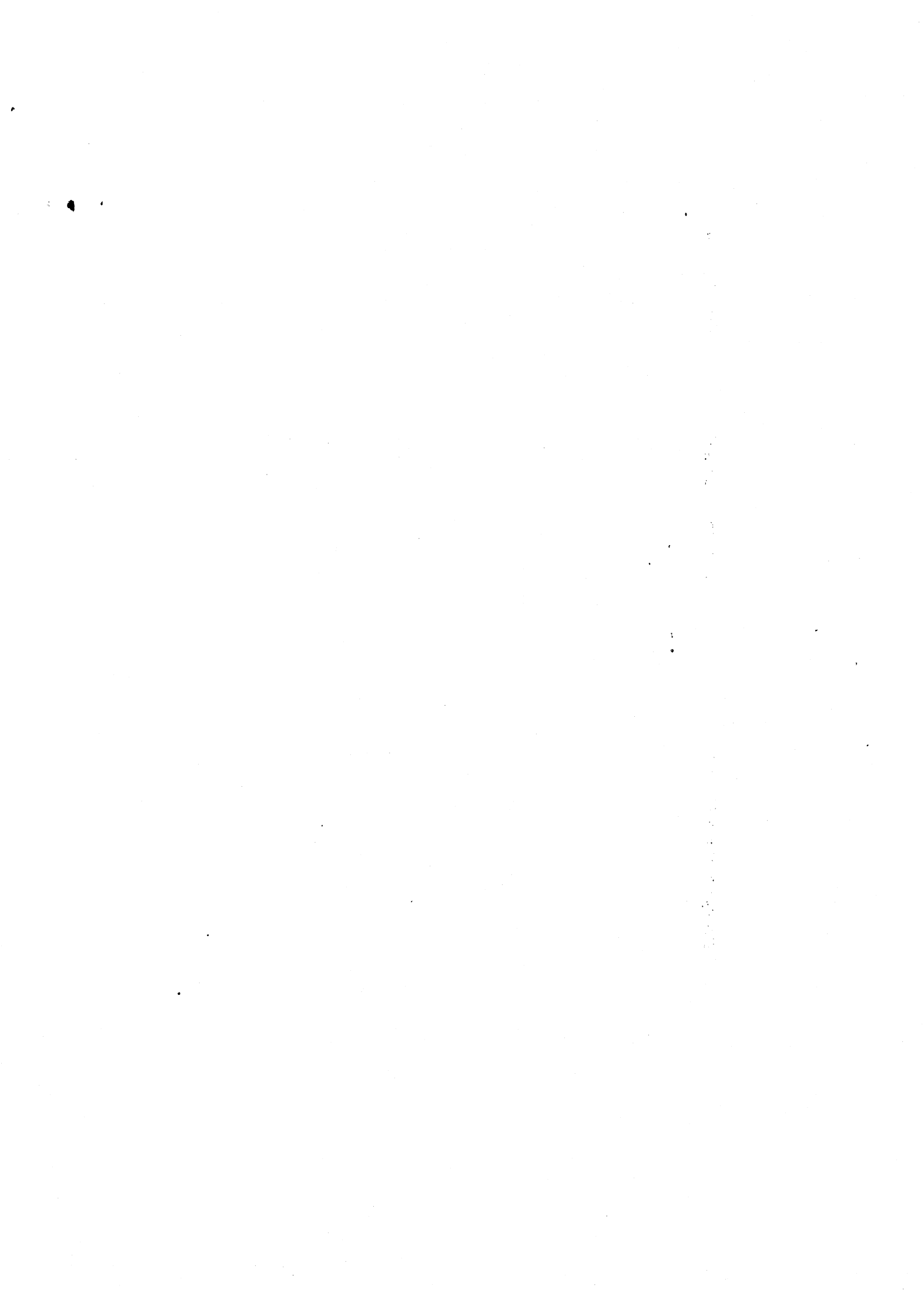
II.1- Champ de vitesse constant

II.2- Champ de vitesse non constant

### III - PROBLEME NON STATIONNAIRE UNIDIMENSIONNEL

## CONCLUSIONS

## REFERENCES



## INTRODUCTION

Un des principaux problèmes que l'on trouve dans la simulation numérique en Mécanique des Fluides, c'est le traitement du terme de convection lorsqu'il devient prépondérant face au terme de diffusion (fluides de faible viscosité).

Les méthodes de Galerkin et de différences finies centrées peuvent donner des solutions fortement oscillatoires assez éloignées de la solution exacte, à moins de faire des raffinements extrêmes sur la maille.

On peut illustrer la difficulté sur un exemple très simple :

$$(0.1) \left\{ \begin{array}{l} -k\phi''(x) + u\phi'(x) = 1 \quad 0 < x < 1 \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \\ u, k \text{ des constantes.} \end{array} \right.$$

Si l'on résout (0.1) avec la méthode de Galerkin en utilisant comme fonctions de base les fonctions linéaires par morceaux définies par :

$$(0.2) \left\{ \begin{array}{l} \omega_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} (x - x_{i-1}) & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{h} (x_{i+1} - x) & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \\ 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1 \quad x_i - x_{i-1} = h \\ i = 1, \dots, n+1 \end{array} \right.$$

ou avec une méthode de différences finies usuelle on aura à résoudre le système linéaire tridiagonal :

$$(0.3) \left\{ \begin{array}{l} -(1 + \frac{\gamma}{2})\phi_{i-1} + 2\phi_i + (-1 + \frac{\gamma}{2})\phi_{i+1} = \frac{h^2}{k} \\ \gamma := \frac{uh}{k} \quad \phi_i \approx \phi(x_i) \quad \phi_0 = \phi_{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

dont la solution est :

$$(0.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_i = A_i + B \left[ \frac{(1 + \frac{\gamma}{2})}{(1 - \frac{\gamma}{2})} \right]^i \\ B \text{ constante} \end{array} \right.$$

On verra au chapitre I que la solution de (0.1) n'a pas d'oscillations, tandis que  $\phi_i$  peut en avoir si  $\gamma > 2$ .

Remarquons que pour avoir toujours  $\gamma < 2$ , il faut diminuer le pas du maillage de façon à ce que  $h < \frac{2k}{u}$ , ce qui s'avère impossible lorsque la constante  $k$  devient petite.

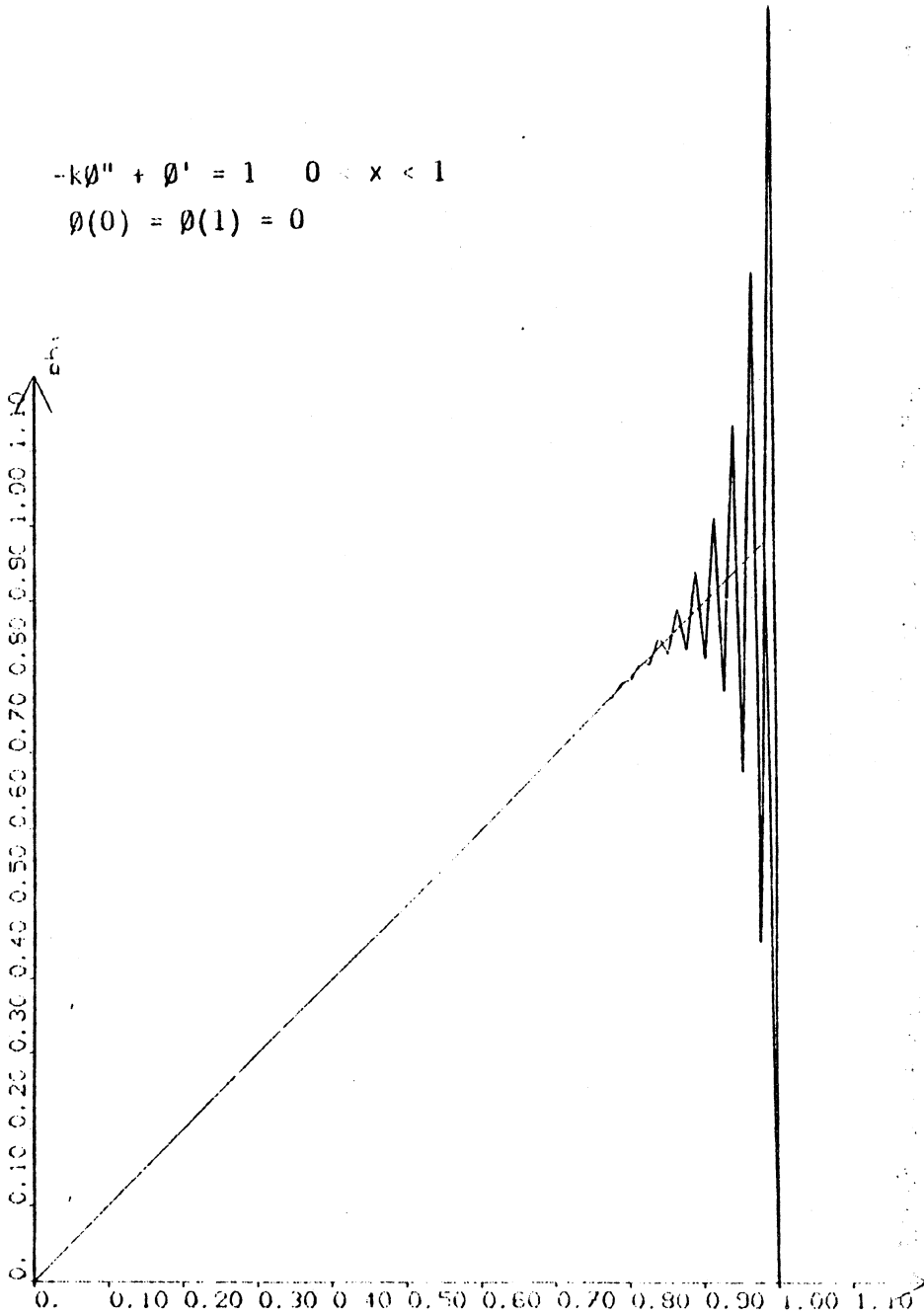
Sur la figure (0.1) on a tracé la solution du problème (0.3) pour  $k = 10^{-3}$   $h = 1/80$ ,  $u = 1$ .

On remarque les fortes oscillations de la solution numérique, malgré le pas d'espace petit.

Plusieurs méthodes ont été développées pour venir à bout de cette difficulté. La littérature étant très abondante sur ce sujet, on va présenter ci-dessous les méthodes principales qui ont été proposées.

Nous proposons une nouvelle méthode aux chapitres I, II et III pour le problème unidimensionnel et bidimensionnel stationnaire et non stationnaire.

$$\begin{aligned} -k\theta'' + \theta' &= 1 & 0 < x < 1 \\ \theta(0) = \theta(1) &= 0 \end{aligned}$$



$h = 1/80$        $k = 10^{-3}$

Figure 0.1

DECENTRAGE EN DIFFERENCES FINIES

Roache (1972)

Considérons le modèle unidimensionnel (0.1). Le schéma traditionnel de différences finies centrées associé s'écrit :

$$(0.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{k}{h^2} (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) + \frac{u(\phi_{i+1} - \phi_{i-1})}{2h} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\ \phi_0 = \phi_{n+1} = 0. \end{array} \right.$$

$h$  étant le pas du maillage régulier. Pour  $\frac{uh}{k} > 2$  ce schéma produit des oscillations numériques, dans ce cas il y a un des coefficients hors-diagonaux qui devient positif.

Une façon d'éviter ce problème, c'est de faire décroître  $h$  suffisamment tel que  $\frac{uh}{k} \leq 2$ . Pour des valeurs de  $k$  dont le raffinement devient impossible, Roache (1972) propose au lieu d'approximer la dérivée première par une différence centrée, comme c'est le cas dans (0.5), d'utiliser une différence en amont :

$$(0.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{k}{h^2} (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) + \begin{cases} \frac{u}{h} (\phi_i - \phi_{i-1}) = 1 & \text{si } u > 0 \\ \frac{u}{h} (\phi_{i+1} - \phi_i) = 1 & \text{si } u \leq 0 \end{cases} \\ \phi_0 = \phi_{n+1} = 0 \end{array} \right. \quad i = 1, \dots, n$$

La solution de (0.6) ne présentera pas d'oscillations numériques, mais elle n'approximera la solution qu'à l'ordre  $h$ . (ordre d'approximation de la dérivée première).

Un schéma d'ordre deux peut être construit en rajoutant aux équations (0.5) une viscosité numérique :

$$(0.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{(k+\tilde{k})}{h^2} (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) + \frac{u}{2h} (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) = 1 \quad i = 1, \dots, n \\ \phi_0 = \phi_n = 0 \end{array} \right.$$

où

$$(0.8) \quad \tilde{k} := \frac{uh}{2} \left( \frac{\gamma}{2} \coth \left( \frac{\gamma}{2} \right) - 1 \right)$$

La consistance du schéma est garantie, car  $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{k}(h) = 0$ . Le choix de  $\tilde{k}$  permet d'éliminer les oscillations numériques et de récupérer la solution exacte aux noeuds lorsque le second membre est constant.

Ce schéma, appelé schéma d'Il'in, sera retrouvé en éléments finis et généralisé à deux dimensions d'espace. La généralisation de (0.7) à deux dimensions est très facile, mais dans ce cas le choix de  $\tilde{k}$  reste injustifié.

#### METHODE DE DECENTRAGE EN ELEMENTS FINIS

Heinrich et al (1977), Hughes (1978), Hughes et al (1979), Christie et al (1976), Brooks et al (1980), Heinrich (1980), Huyarkon (1977), Pelletier et al (1980), Ikegawa (1979).

Considérons l'équation suivante :

$$(0.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\text{div}(k\nabla\phi) + \bar{u} \cdot \nabla\phi = f \text{ sur } \Omega \\ k \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$$

où

$\bar{u} = (u, v)$  est le champ de vitesses

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  second membre

$n$  : direction normale extérieure à  $\partial\Omega$  frontière de  $\Omega$

$k$  : constante de diffusion

$\text{div}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$  (divergence)

$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$  (gradient)

$\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  fonction inconnue



La formulation variationnelle de (0.9) s'écrit :

$$(0.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} W (-\operatorname{div} (k\nabla\Phi) - \bar{u}\nabla\Phi) = \int_{\Omega} f W \\ \forall W \in W_2 \\ \Phi \in W_1 \end{array} \right.$$

où  $W_{1,2}$  = espaces des fonctions où on résoudra le problème.

Par une formule de Green on obtient :

$$(0.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} k\nabla\Phi \cdot \nabla W + \int_{\Omega} W \bar{u} \cdot \nabla\Phi = \int_{\Omega} f W \\ \forall W \in W_2 \\ \Phi \in W_1 \end{array} \right.$$

soient  $\{W_i\}$  des fonctions qui génèrent un espace de dimension finie  $W_{1h}$  qui approxime  $W_1$  (espace des fonctions de base), et  $\{\bar{W}_i\}$  celles qui génèrent un espace de dimension finie  $W_{2h}$ , qui approxime  $W_2$  (espace des fonctions test).

Une résolution par la méthode de Petrov-Galerkin du problème (0.11) nous amènera à résoudre :

$$(0.12) \quad H\Phi = F$$

$$\text{où} \quad H = (H_{ij}) \quad H_{ij} = \int_{\Omega} k\nabla\bar{W}_i \cdot \nabla W_j + \int_{\Omega} \bar{W}_i \bar{u} \cdot \nabla W_j$$

$$F = (F_i) \quad F_i = \int_{\Omega} f \bar{W}_i$$

### CAS UNIDIMENSIONNEL

Considérons le problème unidimensionnel (0.1) et les fonctions linéaires par morceaux définies par (0.2).

On utilisera les fonctions test suivantes :

$$(0.13) \quad \bar{\omega}_i(x) = \begin{cases} \omega_i(x) + \alpha F(x) & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \omega_i(x) - \alpha F(x) & x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases}$$

où :  $F(x)$  est une fonction positive, nulle aux noeuds et qui vérifie  

$$\int_0^h F(x) = \frac{h}{2}.$$

$\alpha$  est un paramètre à déterminer, du même signe que la vitesse  $u$ .

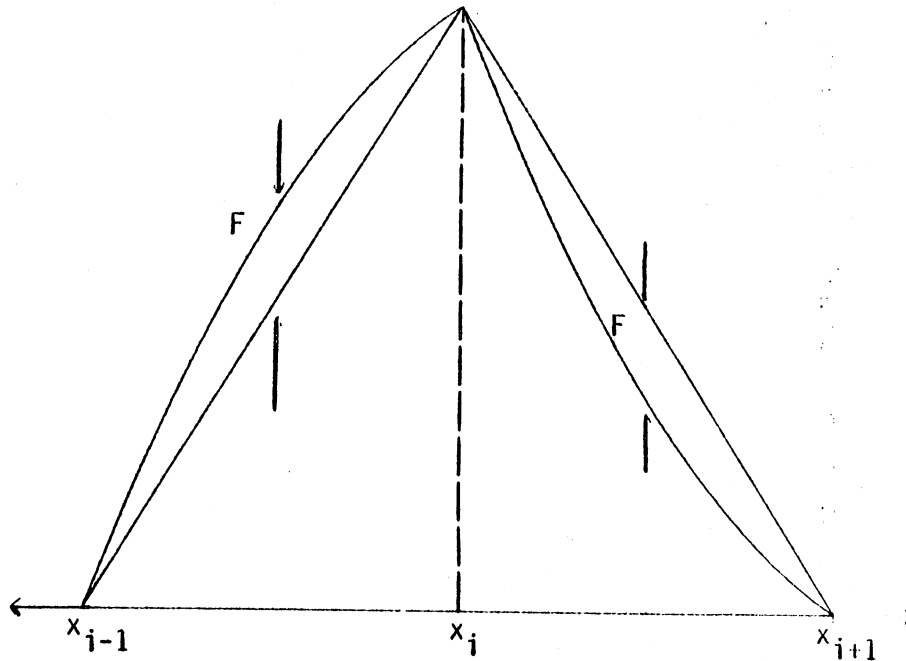


FIGURE 0.2

$F$  peut être choisie comme :

$$(0.14) \quad F(x) = \frac{-3}{h^2} (x-h)x$$

Dans ce cas (0.12) s'écrit :

$$(0.15) \quad -(1 + \frac{\gamma}{2} (\alpha+1))\phi_{i-1} + (2+\gamma\alpha)\phi_i + -(1 + \frac{\gamma}{2} (\alpha-1))\phi_{i+1} = \frac{h^2}{k} f_i$$

où

$$\gamma := \frac{uh}{k} \quad f_i := \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \bar{\omega}_i$$

dont la solution est de la forme :

$$(0.16) \quad \phi_i = A_i + B \left[ \frac{2+(\alpha+1)\gamma}{2+(\alpha-1)\gamma} \right]^i$$

qui ne sera pas oscillatoire si :

$$(0.17) \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \quad \text{pour } \gamma < 2 \\ \text{ou } \alpha \geq 1 - \frac{2}{\gamma} \quad \text{pour } \gamma \geq 2 \end{array} \right.$$

Remarquons que jusque là,  $\alpha$  a été introduit comme un paramètre à déterminer de façon à produire une solution non oscillatoire, mais il faut le choisir tel que la solution numérique obtenue ait une certaine précision.

Heinrich et al (1977) font remarquer que l'équation (0.15) donne la solution exacte aux noeuds du maillage, pour  $f$  constante, si on choisit pour valeur de  $\alpha$

$$(0.18) \quad \alpha = \coth\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \frac{2}{\gamma}$$

Pour des éléments rectangulaires à deux dimensions cette méthode peut être directement généralisée. Il suffit d'utiliser le fait que dans ce cas les fonctions de base et les fonctions test s'expriment comme le produit des fonctions de base ou test à une dimension.

Considérons un élément isoparamétrique de degré 1, dont les coordonnées locales normalisées  $\xi$  et  $\eta$  varient entre -1 et 1. Pour le noeud  $\xi = \eta = -1$  la fonction de base s'écrit :

$$(0.19) \quad \begin{aligned} N_j(\xi, \eta) &= (1-\xi)/2 \cdot (1-\eta)/2 \\ &= \omega_j(\xi) \quad \omega_j(\eta) \end{aligned}$$

aussi, la fonction test peut être écrite :

$$(0.20) \quad W_j(\xi, \eta) = \bar{\omega}_j(\xi) \bar{\omega}_j(\eta)$$

c'est-à-dire, le produit des fonctions test à une dimension.

On choisit la fonction :

$$(0.21) \quad F_{ij}(\xi) = \frac{-3}{4} (1-\xi)(1+\xi)$$

et l'on pose :

$$(0.22) \quad \bar{\omega}_i(\xi) = \omega_i(\xi) + \frac{3}{4} \alpha_{ij} (1-\xi)(1+\xi)$$

De même, dans l'autre sens :

$$(0.23) \quad F_{ik}(n) = \frac{-3}{4} (1-n)(1+n)$$

et

$$(0.24) \quad \bar{\omega}_i(n) = \omega_i(n) + \frac{3}{4} \beta_{ik} (1-n)(1+n).$$

On doit avoir nécessairement  $|\alpha_{ij}| = |\alpha_{ji}|$  et  $|\beta_{ij}| = |\beta_{ji}|$ .  
Pour le calcul de la vitesse on propose :

$$(0.25) \quad \bar{u}_{ij} = (\bar{u}_i + \bar{u}_j) \cdot \ell_{ij} / 2$$

où  $\ell_{ij}$  est la longueur du côté (i,j) de l'élément rectangulaire.

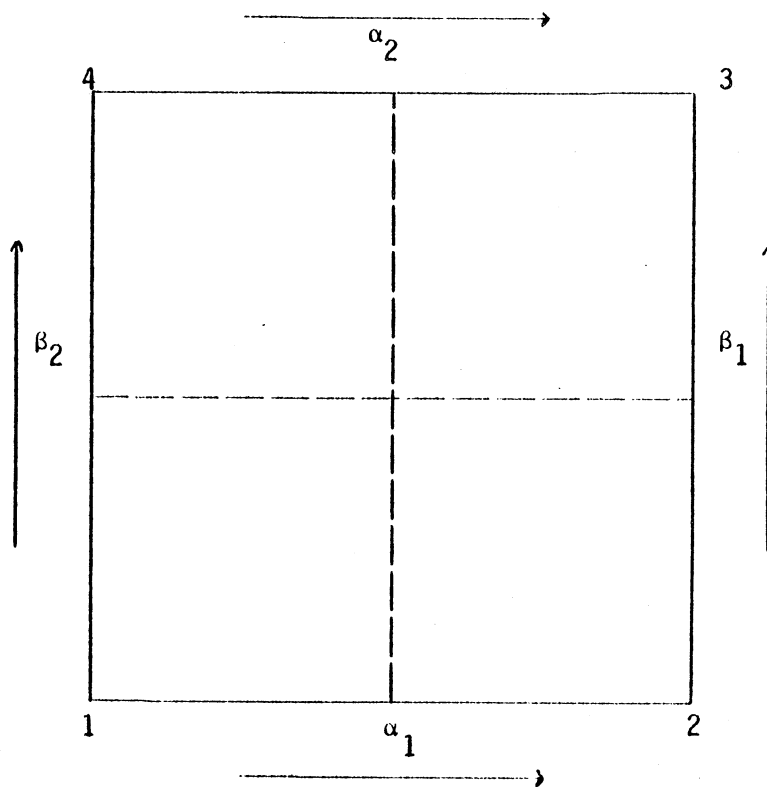


FIGURE 0.3

On choisit  $\alpha_{ij}$  et  $\beta_{ij}$  de la même façon que dans le cas unidimensionnel (cf. (0.18)) en fonction de la vitesse moyenne calculée dans (0.25) et de la longueur  $l_{ij}$ , du côté.

Les éléments décentrés ("upwind") peuvent être retrouvés d'une façon plus simple proposée par Hughes (1978). On garde les fonctions de base égales aux fonctions test, c'est-à-dire, on applique la méthode de Galerkin, mais on fait une intégration particulière du terme de convection (cette idée a été proposée par d'autres auteurs comme on le verra plus loin).

Considérons l'équation (0.11) résolue par la méthode de Galerkin  $W_1 = W_2$  générés par  $\{W_i\}$ , on devra résoudre :

$$(0.26) \quad K\Phi_h = F$$

où :

$$K = (K_{ij}) \quad K_{ij} := \int_{\Omega} \nabla W_i \nabla W_j + W_j \bar{u} \cdot \nabla W_i$$

$$F = (F_i) \quad F_i = \int_{\Omega} f W_i$$

Le terme de convection dans  $K_{ij}$  est intégré de façon particulière avec une formule à un seul point :

$$(0.27) \quad K_{ij} = \sum_e \{W_i(\bar{\xi}^e) \bar{u}(0^e) \cdot \nabla W_j(\bar{\xi}^e) J(0^e)^{\delta+k} \int_{\Omega} \nabla W_i \nabla W_j\}$$

où :  $\bar{\xi}^e$  : point de l'élément e

$0^e$  : origine des coordonnées isoparamétriques de l'élément e (barycentre)

J : jacobien de la transformation isoparamétrique

$\delta$  : poids de l'intégration numérique (formule à un point)

2 pour le problème unidimensionnel

4 pour le problème bidimensionnel

8 pour le problème tridimensionnel.

La situation du point  $\bar{\xi}^e$  déterminera le degré de décentrage choisi.

Si l'on regarde le problème unidimensionnel, (0.27) s'écrit dans ce cas :

$$(0.28) \quad K_{ij} = \sum_e \{ \omega_i(\bar{\xi}^e) u^e \omega_j'(\bar{\xi}^e) h^e + \int_e k \omega_i' \omega_j' \}$$

où  $h^e$  est la longueur de l'élément  $e$ . Si le maillage est régulier  $h^e = h \quad \forall e$ . Supposons que le noeud  $i$  soit un noeud intérieur et que l'on utilise une quadrature de Gauss d'un point.

Alors (0.26) devient pour  $u$  et  $k$  constantes :

$$(0.29) \quad \gamma(1+\gamma(1+\bar{\xi}))\phi_{i-1} + 2(1+\gamma\bar{\xi})\phi_i + \gamma(1-\gamma(1-\bar{\xi}))\phi_{i+1} = \frac{h^2 F_i}{k}$$

qui est la même équation que (0.15), donc  $\bar{\xi}$  est choisi de la même façon que  $\alpha$ .

Dans ce cas la généralisation est faite d'une façon différente :  
On définit :

$$(0.30) \quad \gamma_\xi = u_\xi h_\xi / 2k_\xi \quad \gamma_\eta = u_\eta h_\eta / 2k_\eta$$

$\gamma_\xi$  et  $\gamma_\eta$  représentent  $\gamma$  de (0.29) dans les deux directions des coordonnées isoparamétriques. Alors le point  $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  est calculé de la même façon que dans le cas unidimensionnel dans chacune des deux directions. Pour le détail précis du calcul voir Hughes (1978).

L'équation (0.15) peut être écrite aussi comme (0.7), ce qui suggère une nouvelle façon de généraliser à deux dimensions.

Hughes et al (1979) ont remarqué que les méthodes exposées ci-dessus dues à Hughes (1978) et Christie et al (1976) posaient des problèmes dans certains cas à deux dimensions. Ils se sont inspirés de l'écriture (0.7) pour proposer de rajouter une viscosité artificielle qui agit seulement dans le sens de la vitesse, c'est-à-dire de résoudre :

$$(0.31) \quad \int_{\Omega} (k \nabla \phi \cdot \nabla W + \bar{u} \cdot \nabla \phi \bar{W}) = \int_{\Omega} W f$$

$$\text{où } \bar{W} = W + \frac{\tilde{k}}{\|\bar{u}\|} \nabla \bar{u} \cdot \nabla W$$

W : fonction de base associée à l'élément rectangulaire de degré 1.  
et

$$\tilde{k} = (\bar{\xi} u_{\xi} h_{\xi} + \bar{\eta} u_{\eta} h_{\eta})/2.$$

Cette méthode a été reprise par Nävert (1981) et Johnson et al (1981) dans le cas non stationnaire et pour des champs de vitesses constantes, ils donnent des formules d'erreur.

Plus tard, Brooks et al (1980) ont proposé la généralisation de (0.31), on utilise  $\bar{W}$  comme fonction test pour tous les termes :

$$(0.32) \quad \int_{\Omega} \bar{W} \bar{u} \cdot \nabla \phi + k \nabla \bar{W} \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} \bar{W} f$$

mais ils n'ont pu l'utiliser que pour des problèmes purement convectifs, car le terme de diffusion n'est pas calculable à cause des discontinuités des fonctions test  $\bar{W}$ .

Une propriété intéressante de ces méthodes est qu'elles sont applicables aux éléments triangulaires, tandis que la méthode développée par Christie et al (1976) n'est utilisable qu'avec des éléments rectangulaires.

Dans Heinrich (1980) et Heinrich et al (1977) une méthode d'éléments quadratiques est proposée. On utilise deux paramètres et les fonctions test s'écrivent :

$$(0.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{W}_1(\xi) = W_1(\xi) - \alpha E(\xi) \\ \bar{W}_2(\xi) = W_2(\xi) + 4\beta E(\xi) \\ \bar{W}_3(\xi) = W_3(\xi) - \alpha E(\xi) \end{array} \right.$$

associées à l'élément à une dimension à trois points, où  $W_1(\xi)$ ,  $W_2(\xi)$  et  $W_3(\xi)$  sont les fonctions de base usuelles pour l'élément quadratique et

$$(0.34) \quad E(\xi) = \frac{5}{8} \xi(\xi+1)(\xi-1)$$

Pour le problème unidimensionnel la méthode de Petrov-Galerkin donne :

$$(0.35) \quad \left(1 - \frac{\gamma}{2}(1-\beta)\right)\phi_m - (2+\gamma\beta)\phi_{m-1/2} + \left[1 + \frac{\gamma}{2}(1+\beta)\right]\phi_{m-1} = \theta_m$$

pour les noeuds intérieurs et :

$$(0.36) \quad [1-\gamma(1-\alpha)]\phi_{m+1} - 2[4-\gamma(2-\alpha)]\phi_{m+1/2} + 2[7+\gamma\alpha]\phi_m \\ - 2[4+\gamma(2+\alpha)]\phi_{m-1/2} + [1+\gamma(1+\alpha)]\phi_{m-1} = \theta_{m+1}$$

pour les noeuds de bord,  $\theta_m$  et  $\theta_{m+1}$  représentent le second membre.

De façon analogue au cas linéaire on voit que la solution de (0.35) et (0.36) est stable si

$$(0.37) \quad \alpha \leq \alpha_c = 1 - \frac{1}{\gamma} \quad \beta \geq 1 - \frac{2}{\gamma}$$

et il faut les choisir tels que la solution de (0.35)-(0.36) approxime celle du problème continu.

On trouve que :

$$(0.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = (2 \tanh \gamma) \left(1 + \frac{6\beta_0}{\gamma} + \frac{48}{\gamma^2}\right) - \frac{24}{\gamma} - \beta_0 \\ \beta_0 = \coth \frac{\gamma}{2} - \frac{2}{\gamma} \end{array} \right.$$

donnent la solution exacte aux noeuds pour l'équation homogène à coefficients constants.

L'extension à  $\mathbb{R}^2$  est identique à celle des éléments linéaires, car on utilise le fait que les fonctions de base (resp. test) d'un élément rectangulaire sont obtenues comme le produit tensoriel des fonctions de base (resp. test) à une dimension. Cette méthode quadratique n'est pas utilisable sur des éléments triangulaires.

Des méthodes de décentrage ont été aussi développées pour des éléments triangulaires.

Huyarkon (1977) a proposé une méthode de mêmes caractéristiques que celles qui ont précédé, valable pour des éléments triangulaires linéaires :



On utilise la méthode de Petrov-Galerkin avec, comme fonctions de base, celles de Lagrange de degré 1 sur des triangles et comme fonctions test :

$$(0.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_1 = L_1 + 3(\alpha_2 L_3 L_1 - \alpha_3 L_2 L_1) \\ W_2 = L_2 + 3(\alpha_3 L_1 L_2 - \alpha_1 L_3 L_2) \\ W_3 = L_3 + 3(\alpha_1 L_2 L_3 - \alpha_2 L_1 L_3) \end{array} \right.$$

où  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  sont des fonctions de base de degré 1, écrites en coordonnées barycentriques.

Les coefficients  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  sont associés aux trois côtés du triangle, et donnés par :

$$(0.40) \quad \alpha_i = \coth\left(\frac{v_i h_i}{2k}\right) - \frac{2k}{v_i h_i}$$

$v_i$  étant une moyenne de la vitesse calculée sur le côté,  $h_i$  la longueur de ce côté.  $\alpha_i$  est choisi du même signe que la vitesse.

Pelletier et al (1979) ont repris l'idée de Hughes (1978) de choisir le point d'intégration numérique du terme convectif, pour l'appliquer sur des triangles.

Considérons la résolution du problème avec une méthode de Galerkin avec des éléments triangulaires linéaires.

Pour l'intégration numérique du terme convectif on propose de choisir le point de la façon suivante (voir Fig. 0.4) :

i) Détermination de B et de la longueur h de BO.  
(O étant le barycentre du triangle).

ii) Calcul du paramètre d'élément  $\gamma := \frac{\|\bar{u}\| h}{k}$

iii) Calcul de la position relative  $\tilde{T}$  pour une analyse unidimensionnelle le long de la ligne de courant :

$$\tilde{T} = \coth \gamma - \frac{1}{\gamma}$$

où

$$\tilde{T} = \frac{\gamma}{3} \quad \text{si } |\gamma| \in [-3, 3]$$

iv) Les coordonnées locales de  $T$  sont données par :

$$\xi_T = \xi_0 + \tilde{T}(\xi_B - \xi_0)$$

$$\eta_T = \eta_0 + \tilde{T}(\eta_B - \eta_0)$$

$(\xi, \eta)$  étant le repère associé au triangle.

Le point obtenu avec cet algorithme est utilisé pour l'évaluation de :

$$(0.41) \quad \int_{\Omega} (\bar{u} \cdot \nabla \omega_j) \omega_i$$

partie convective du problème. Pour la partie diffusive on continue à utiliser le barycentre.

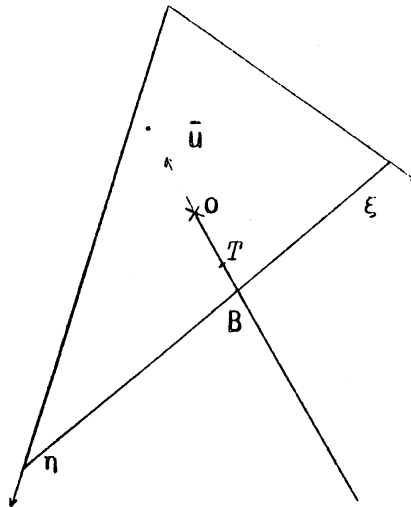


FIGURE 0.4

Une façon de résoudre le problème dans une formulation très différente a été proposée par Ikegawa (1979).

Reprenons l'équation (0.9) pour un fluide incompressible, c'est-à-dire  $\text{div}(\bar{u}) = 0$  :

$$(0.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\bar{u}\phi) - k\Delta\phi = 0 \quad \text{sur } \Omega \\ \phi = \bar{\phi} \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

On intègre (0.42) sur tout le domaine :

$$(0.43) \quad \int_{\Omega} (\text{div}(\bar{u}\phi) - k\Delta\phi) = 0$$

et par le théorème de la divergence de Gauss :

$$(0.44) \quad \int_{\partial\Omega} \bar{u} \cdot \bar{n} \phi \, ds - k \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}} \, ds = 0$$

$\bar{n}$  : direction normale extérieure à  $\partial\Omega$

L'équation (0.44) peut être interprétée comme une loi de conservation (cf. Ikegawa (1979)). Soit  $\Omega_h$  une triangulation de  $\Omega$ . On résout (0.44) sur chaque élément de  $\Omega_h$ .

Considérons la figure 0.5

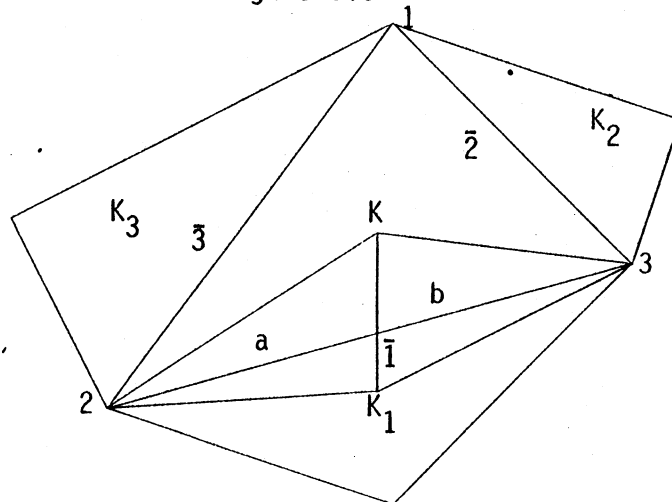


FIGURE 0.5

On s'intéresse à l'élément  $K$ . On approxime  $\phi$  par une valeur constante  $\phi_K$  sur chaque élément  $K$ , et on écrit le terme :

$$(0.45) \quad \int_{\partial K} (n_x u + n_y v) \phi ds = \int_{\partial K} v_n \phi ds$$

$$= \sum_{i=1}^3 v_{n_i} (\phi_K, \phi_{K_i}) d_i$$

où :

$$(\phi_K, \phi_{K_i}) = \phi_K \quad \text{si } v_{n_i} \geq 0 \quad (\text{si le flux sort du triangle } K).$$

$$(\phi_K, \phi_{K_i}) = \phi_{K_i} \quad \text{si } v_{n_i} \leq 0 \quad (\text{si le flux y rentre})$$

$v_{n_i}$  = vitesse normale au côté  $i$

$d_i$  = longueur du côté  $i$ .

Pour l'évaluation de l'autre terme de l'équation (0.44), on écrit une approximation linéaire de  $\phi$  sur les triangles  $a$  et  $b$  (voir figure 0.5) par rapport à  $K_1$  et ses analogues par rapport à  $K_2$  et  $K_3$ . Cette approximation dépend des valeurs de  $\phi$  au barycentres des triangles  $K$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$ .

On calcule  $-k \int_{\partial K} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$  pour cette approximation, ainsi (0.44) devient une équation dont les inconnues sont les valeurs  $\phi_K$  constante sur chaque triangle. (Pour les détails du calcul voir Ikegawa (1979)).

Plusieurs applications de ces méthodes de décentrage ont été développées pour des problèmes nonlinéaires et nonstationnaires. (cf. références).

#### CALCUL DES DERIVEES DIRECTIONNELLES AUX NOEUDS

Tabata (1978), (1977). Baba et al (1981), Bristeau et al (1979).

On considère le problème :

$$(0.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} -k\Delta\phi + \bar{u} \cdot \nabla\phi = f \quad \text{sur } \Omega \\ \phi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

On propose d'approximer, d'une façon particulière (formule en amont de la vitesse), l'évaluation de  $\bar{u} \cdot \nabla \phi$ .

Tabata (1977), (1978) utilise une formule d'ordre un, et Bristeau et al (1979) ont généralisé à des formules d'ordre deux.

Si l'on approxime (0.46) avec une méthode de Galerkin, on aura à résoudre :

(0.47) Trouver  $\phi_h(x) = \sum_j \phi_j \omega_j(x)$  telle que :

$$k \iint_{\Omega} \nabla \phi_h \nabla \omega_j + \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi_h}{\partial \bar{u}} \omega_j = \iint_{\Omega} f \omega_j \quad \forall j$$

où :  $\frac{\partial \phi_h}{\partial \bar{u}}$  est une approximation à la dérivée directionnelle  $\bar{u} \cdot \nabla \phi$

et  $\omega_j$  sont des fonctions de base.

Avec une approximation 'mass-lump', (0.47) devient :

(0.48)  $k \iint_{\Omega} \nabla \phi_h \nabla \omega_j + \frac{S_j}{3} \frac{\partial \phi_h}{\partial \bar{u}} = \iint_{\Omega} f \omega_j \quad \forall j$

où :  $S_j :=$  aire du support de  $\omega_j$

et  $\frac{\partial \phi_h}{\partial \bar{u}}$  = approximation de  $\bar{u} \cdot \nabla \phi$  pour un noeud intérieur j.

Considérons le noeud j (figure 0.6)

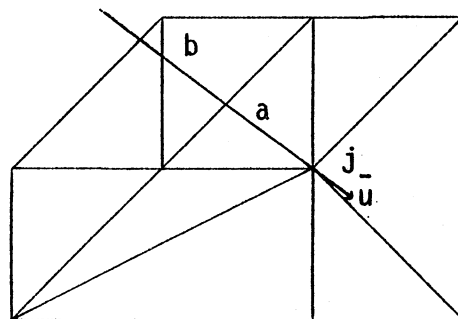


FIGURE 0.6

Tabata (1977); (1978) propose la formule :

$$(0.49) \quad \frac{\partial j}{\partial \bar{u}} \phi_h = [\phi_h(j) - \phi_h(a)] \|\bar{u}_j\|$$

c'est-à-dire, la restriction au triangle en amont  $T_j$  du terme  $\bar{u} \cdot \nabla \phi_h$ .

Bristeau et al (1979) proposent la formule :

$$(0.50) \quad \frac{\partial j}{\partial \bar{u}} \phi_h = \|\bar{u}_j\| \left( \frac{|ja| + |jb|}{|ja| |jb|} \phi_h(j) - \frac{|jb|}{|ja| |ab|} \phi_h(a) \right. \\ \left. + \frac{|ja|}{|ja| |ab|} \phi_h(b) \right)$$

qui est une approximation de trois points, d'ordre deux, pour  $\bar{u} \cdot \nabla \phi_h$  en utilisant les points a, b et le noeud j.

Pour le cas transitoire, Baba et al (1981) ont démontré la stabilité  $L^\infty$  de la solution.

ELEMENTS FINIS DISCONTINUS ET INTERPOLATION MIXTE

Lesaint (1975), Raviart (1979), Thomasset (1981).

On présente dans ce paragraphe très sommairement cette méthode.

L'idée de base de la méthode est que les fonctions continues polynômiales par morceaux ne sont pas capables de représenter des forts gradients, alors il faut prendre une approximation de la solution qui ne soit pas nécessairement continue sur les frontières des éléments.

Soit l'équation suivante :

$$(0.51) \left\{ \begin{array}{ll} u \frac{d\theta}{dx} + f(x,\theta) = 0 & 0 < x < 1 \\ \theta(0) = 0 & u(0) > 0 \\ & u(1) > 0 \end{array} \right.$$

et un maillage régulier de pas  $h$  et de  $n$  éléments.

On cherche une solution discrète  $\theta_h$  telle qu'elle soit un polynôme de degré  $k$  sur chaque élément et qu'elle puisse être discontinue sur les points de la maille. Les fonctions test, elles aussi, vérifient les mêmes conditions.

Alors la forme discrète de (0.51) s'écrit :

$$(0.52) \int_{x_{j-1}}^{x_j} [u \frac{d\theta}{dx} + f(x,\theta)]v = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

et, en intégrant par parties :

$$(0.53) \int_{x_{j-1}}^{x_j} (-\theta \frac{d}{dx} (uv) + f(x,\theta)v) dx \\ + u(x_j)\theta(x_j)v(x_j-0) - u(x_{j-1})\theta(x_{j-1})v(x_{j-1}+0) = 0$$

où on note :

$v(x_j-0)$  = valeur à gauche de  $v$  sur  $x_j$

$v(x_j+0)$  = valeur à droite de  $v$  sur  $x_j$

Dans (0.53) on écrit les valeurs en amont de  $\theta_h$ , respectivement sur  $x_j$  et  $x_{j-1}$ , à la place de  $\theta(x_j)$  et  $\theta(x_{j-1})$  :

$$(0.54) \quad \theta_j^u := \text{valeur en amont de } \theta_h \text{ sur } x_j \\ = \begin{cases} \theta_h(x_j-0) & \text{si } u(x_j) > 0 \\ \theta_h(x_j+0) & \text{si } u(x_j) < 0 \end{cases}$$

Alors le problème à résoudre s'écrit :

$$(0.55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \theta_h \text{ telle que :} \\ \int_{x_{j-1}}^{x_j} -(\theta_h \frac{d}{dx} (uv) + f(x,\theta)v) dx + u(x_j) \theta_j^u v(x_j-0) \\ \quad - u(x_{j-1}) \theta_{j-1}^u v(x_{j-1}+0) = 0. \\ \theta_0^u = 0 \quad (\text{condition aux limites}). \end{array} \right.$$

Dans le cas bidimensionnel, on considère le problème :

$$(0.56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u} \cdot \nabla \theta + \mu \theta = f \text{ sur } \Omega \\ \theta = 0 \text{ sur la partie de la frontière } \partial\Omega \text{ où } u \cdot \bar{n} < 0 \end{array} \right.$$

où :  $\mu$  est une constante

$u \cdot \bar{n}$  : composante normale de la vitesse.

On divise  $\Omega$  en triangles et l'on cherche une solution polynômiale par morceaux pas nécessairement continue le long des frontières des triangles.

Pour un élément  $K$  de la maille on note  $\partial K$  sa frontière et  $\bar{n}_k$  le vecteur normal extérieur à  $\partial K$ .

On écrit la formulation variationnelle de (0.56) :

$$(0.57) \quad \iint_K (-\text{div} (\bar{u} v) \theta + \mu \theta v - f v) \\ + \int_{\partial K} (\bar{u} \cdot \bar{n}_k) \theta v ds = 0 \quad \forall v$$





Cette méthode s'applique à l'équation de convection-diffusion en prenant le gradient de  $\theta$  comme une variable indépendante ("méthode mixte").

$$(0.63) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(k\nabla\theta) + \bar{u}\nabla\theta = f \quad \text{sur } \Omega \\ \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

On introduit  $\bar{p} = k\nabla\theta$  et on écrit :

$$(0.64) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div} \bar{p} + \bar{u} \cdot \nabla \theta = f \\ \bar{p} - k\nabla\theta = 0 \\ \theta = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{sur } \Omega \\ \\ \text{sur } \partial\Omega \end{array}$$

On cherche des solutions discrètes  $\theta_h \in M$  et  $p \in X$ , avec  $X$  et  $M$  déterminés de façon à ce que la condition de Brezzi soit respectée (cf. Thomasset (1981)).

En faisant les mêmes calculs qui nous ont amené à (0.61) on trouve :

$$(0.65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega} \frac{1}{k} \bar{p}_h \cdot \bar{q} + \theta_h \cdot \operatorname{div} \bar{q} \, dx = 0 \quad \forall q \in X \\ \iint_K (-\operatorname{div} \bar{p}_h + \bar{u} \cdot \nabla \theta_h - f) v \, dx + \int_{\partial K_-} \bar{u} \cdot \bar{n}_k (\theta_h|_K, -\theta_h|_K) v|_K \, ds = 0 \end{array} \right.$$

$\forall K, \quad \forall v \in M$

avec  $\theta_h|_{K'} = 0$  le long de la frontière  $\partial\Omega$ .

On a dans ce cas la borne d'erreur : (cf. ibid.)

$$(0.55) \quad \left( \iint_{\Omega} |\bar{p} - \bar{p}_h|^2 \right)^{1/2} + \left( \iint_{\Omega} |\theta - \theta_h|^2 \right)^{1/2} = O(h^k).$$

Remarques

- i) Pour que la méthode ait un sens il faut que  $\theta_h$  soit discontinue et que la composante normale de la vitesse le long des frontières des éléments soit continue.
- ii) Le nombre de variables est beaucoup plus fort qu'avec les éléments usuels. Par exemple, il est de l'ordre de 9 fois le nombre des triangles dans le cas d'éléments linéaires.
- iii) L'utilisation de la valeur en amont de la solution  $\theta_h$ , fait croître la largeur de bande, car on met en relation des inconnues des triangles non voisins. Par exemple, pour des fonctions constantes par morceaux on multiplie la largeur de bande par 5.

En plus des schémas présentés ci-dessus, il existe une approche du problème du point de vue de la théorie des perturbations. Une étude de ce type a été faite dans un cas unidimensionnel très général, par Hemker (1977). Kellogg et al (1978), Axelsson (1980) ont étudié la solution du problème unidimensionnel et traité les propriétés générales des schémas tridiagonaux.

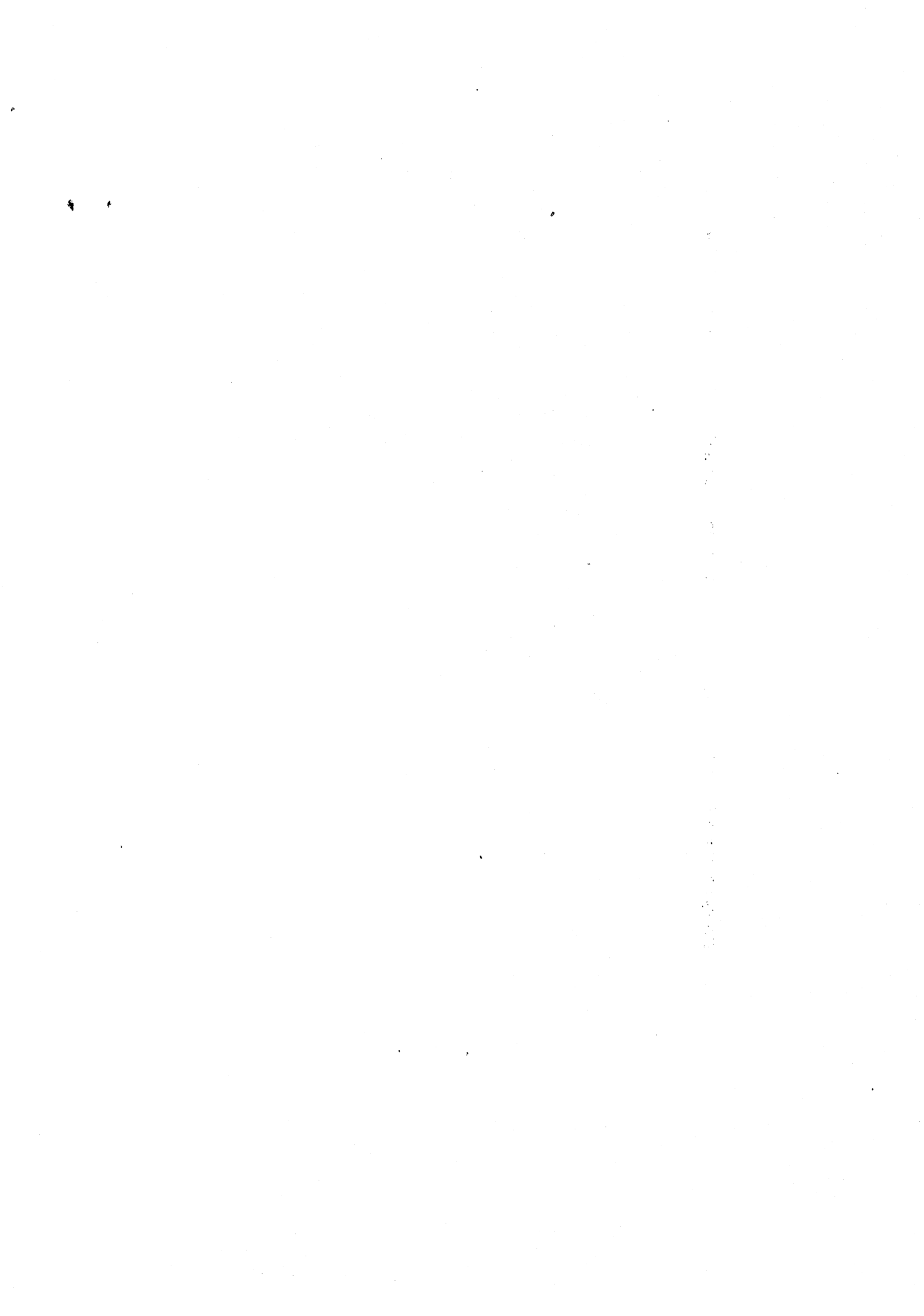
D'autres études du même genre dans le cas bidimensionnel ont été faites par Axelsson et al (1979), Baranger (1979).

Les schémas du type décentrage donnent de très bons résultats à une dimension, mais le passage à deux dimensions d'espace, surtout pour des éléments triangulaires, n'est pas très bien justifié car on utilise des paramètres valables dans une analyse unidimensionnelle. De ce fait, il y a des problèmes à deux dimensions (cf. Hughes et Brooks (1979)) pour lesquels la méthode donne de mauvais résultats. De plus, il faudrait vérifier les résultats sur des maillages irréguliers plus éloignés d'une analyse unidimensionnelle. La méthode qui consiste à calculer les dérivées directionnelles aux noeuds en utilisant les triangles en amont ne permet pas d'avoir la même précision que pour le terme de convection à moins d'élargir la largeur de bande (cf. Thomasset (1981)).

Ici, nous proposons une méthode qui permet de ramener le problème à une formulation symétrique et positive, laquelle est résolue par la méthode de Galerkin. On démontre des équivalences avec des méthodes de Petrov-Galerkin qui nous permettent de traiter un cas bidimensionnel très général.

Au chapitre I nous étudions le problème unidimensionnel stationnaire, au chapitre II le problème bidimensionnel stationnaire. Finalement, au chapitre III on obtient une méthode pour le cas nonstationnaire.

Dans tous les cas on énonce le principe du maximum vérifié par la solution continue et on démontre que le schéma proposé vérifie son équivalent discret.



## I - PROBLEME UNIDIMENSIONNEL STATIONNAIRE

### I.1- VITESSE CONSTANTE

- I.1.1. - Une formulation équivalente
- I.1.2. - Principes du maximum
- I.1.3. - Approximation de la solution par une méthode d'éléments finis
- I.1.4. - Deux formulations équivalentes obtenues avec la méthode de Petrov-Galerkin.
  - a) Un premier schéma (étude des fonctions test)
  - b) Un second schéma
- I.1.5. - Interprétation en termes de diffusion numérique
- I.1.6. - Bornes d'erreur
- I.1.7. - Cas limite. Exemple.

### I.2 - VITESSE NON CONSTANTE

- I.2.1. - Une formulation équivalente
- I.2.2. - Principe du maximum
- I.2.3. - Approximation de la solution par une méthode d'éléments finis
- I.2.4. - Une formulation équivalente avec la méthode de Petrov-Galerkin
- I.2.5. - Approximation de la vitesse - Exemple.

## I - PROBLEME UNIDIMENSIONNEL STATIONNAIRE

I.1 - Vitesse constanteI.1.1. - Une formulation équivalente

On considère le problème unidimensionnel suivant :

$$(1.1) \quad -k \phi''(x) + u\phi'(x) = f(x), \quad \begin{array}{l} x \in \Omega \\ k > 0 \end{array}$$

où  $f$  est une fonction de  $x$  donnée,  $u$  et  $k$  sont des constantes.  $\Omega$  étant un intervalle de longueur finie ;  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction inconnue. On note  $\phi'$  la dérivée de  $\phi$  par rapport à  $x$ .

Plusieurs conditions aux limites sont possibles pour cette équation. En particulier, étant données deux constantes  $g_0$  et  $g_1$  :

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(0) = g_0 \\ \phi(1) = g_1 \end{array} \right. \quad \Omega = ]0,1[$$

(1.2) est un exemple des conditions aux limites que l'on veut analyser.

On va supposer dans ce qui suit, sans perte de généralité, étant donnée la non homogénéité de (1.1), que  $g_0$  et  $g_1$  sont nulles. On va noter  $T$  et  $L$  les opérateurs définis par :

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} T : D(T) = L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \\ (T\phi, v) := \int_{\Omega} \phi(x) e^{-\frac{ux}{2k}} v(x) \quad v \in L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} L : D(L) \rightarrow L^2(\Omega) \\ (L\phi, v) := \int_{\Omega} (-\phi''(x) + (\frac{u}{2k})^2 \phi(x)) v(x) \quad v \in D(L) \end{array} \right.$$

Avec :

$$L^2(\Omega) = \{v \mid \int_{\Omega} |v|^2 < +\infty\}$$

et  $D(L) = \{v \in L^2(\Omega) \mid v \text{ absolument continue, } v' \in L^2(\Omega), v(0) = v(1) = 0\}$ .

On notera aussi  $(u, v) := \int_{\Omega} uv$  le produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ .

PROPOSITION 1.1

Les opérateurs  $T$  et  $L$  définis par (1.3) et (1.4) sont symétriques.

Démonstration

Il suffit d'écrire :

$$(T\phi, \varphi) = \int_0^1 e^{-\frac{ux}{2k}} \phi(x) \varphi(x)$$

et le résultat est évident.

Pour  $L$  on écrit :

$$\begin{aligned} (L\phi, \varphi) &= \int_0^1 (-\phi'' + (\frac{u}{2k})^2 \phi) \varphi \\ &= \int_0^1 -\phi \varphi'' + (\frac{u}{2k})^2 \phi \varphi = (\phi, L\varphi) \end{aligned}$$

en intégrant par parties car  $\varphi, \phi \in D(L)$ .

□

Remarque :

$D(L)$  est un espace de Hilbert de produit scalaire :

$$(u, v)_{D(L)} = \int_{\Omega} u'v' + uv.$$

Etant donné que  $e^{-\frac{ux}{2k}}$  est une fonction indéfiniment dérivable sur  $\Omega$ , si  $\phi \in D(L)$  on a  $T\phi \in D(L)$ . On va utiliser ce résultat pour poser le problème dans  $D(L)$ .

PROPOSITION 1.2

L'opérateur  $L$  défini par (1.4) est défini positif.



Démonstration

Il suffit de calculer pour  $\phi \in D(L)$  :

$$\begin{aligned} (L\phi, \phi) &= \int_0^1 \left( -\phi''\phi + \left(\frac{u}{2k}\right)^2 \phi^2 \right) \\ &= \int_0^1 \left( \phi' \right)^2 + \left(\frac{u}{2k}\right)^2 \phi^2 \geq 0 \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 1.3

L'équation (1.1), avec les conditions aux limites (1.2), est équivalente à :

$$(1.5) \quad (T^*LT\phi, v) = \frac{1}{k} (T^*Tf, v) \quad \begin{array}{l} \forall v \in D(L) \\ \phi \in D(L) \end{array}$$

(où  $T^*$  est l'adjoint de  $T$ ).

Démonstration

Soit  $\phi$  solution de (1.1) avec les conditions aux limites (1.2). On écrit  $\varphi = T\phi$ , alors :  $\forall v \in D(L)$

$$\begin{aligned} (T^*LT\phi, v) &= (L\varphi, Tv) \\ &= \left( \left[ -\varphi''(x) + \left(\frac{u}{2k}\right)^2 \varphi(x) \right], Tv \right) \\ &= \left( -e^{-\frac{u}{2k}x} \left( \phi'' - \frac{u}{k} \phi' + \left(\frac{u}{2k}\right)^2 \phi \right) + e^{-\frac{u}{2k}x} \left(\frac{u}{2k}\right)^2 \phi, Tv \right) \\ &= \left( T \frac{1}{k} (-k\phi'' + u\phi'), Tv \right) \end{aligned}$$

et, puisque  $\phi$  est solution de (1.1),

$$= \frac{1}{k} (Tf, Tv) = \left( \frac{1}{k} T^*Tf, v \right).$$

Soit  $\phi$  solution de (1.5). Elle vérifie les conditions aux limites puisque elle appartient à  $D(L)$ .

$\forall v \in D(L)$

$$\begin{aligned}
 (-k\phi'' + u\phi', v) &= (kT^{-1}(-(T\phi)'' + \frac{u}{k}(T\phi)'), v) \\
 &= (kT^{-1}(-(T\phi)'' + (\frac{u}{2k})^2 T\phi), v) \\
 &= (kT^{-1}(LT\phi), v) \\
 &= (k(T^*)^{-1}(T^*LT\phi), (T^{-1})^*v)
 \end{aligned}$$

et puisque  $\phi$  est solution de (1.5),

$$\begin{aligned}
 &= (k(T^*)^{-1} \frac{1}{k} T^*Tf, (T^{-1})^*v) \\
 &= (f, v).
 \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 1.4

Il existe un opérateur  $K$  tel que :

$$(1.6) \quad L = K^*K$$

Démonstration : (cf. Kato (1976)).

Le résultat est vrai puisque  $L$  est symétrique et défini positif.

□

PROPOSITION 1.5

L'équation (1.5) est équivalente à :

$$(1.7) \quad ((KT)^*(KT)\phi, v) = \frac{1}{k} (T^*Tf, v) \quad \begin{array}{l} \phi \in D(L) \\ \forall v \in D(L) \end{array}$$

Démonstration

Il suffit de voir que  $T^*LT = T^*(K^*K)T = (KT)^*(KT)$ .

□

THEOREME 1.1

Il existe une seule solution de l'équation (1.7)

Démonstration

On remarque que (1.7) est l'équation normale du problème variationnel suivant :

$$(1.8) \quad \min_{v \in D(KT)} \|KTv - \theta\|_{L^2[0,1]}^2$$

où  $\theta$  vérifie :

$$(1.9) \quad k K^* \theta = Tf.$$

L'existence de  $\theta$  vérifiant (1.9) et l'existence et l'unicité de la solution de (1.8) ont été démontrées par Locker et Prenter (1979).

□

I.1.2. - Principes du maximumPROPRIETE 1.1 (Principe du maximum)

Si  $f(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$ , alors  $\phi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  solution de (1.1) avec les conditions aux limites (2.2) n'a pas de minima locaux.

Démonstration

Soit  $\bar{x}$  un minimum local, alors  $\phi'(\bar{x}) = 0$  et  $\phi''(\bar{x}) \geq 0$ .  
(1.1) s'écrit sur ce point :

$$-k \phi''(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

Or,  $k > 0$ ,  $f(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \phi''(\bar{x}) < 0$ , ce qui est contradictoire.

□

PROPRIÉTÉ 1.2 (Principe du maximum discret)

Soit un système tridiagonal :

$$c_{i-1}\phi_{i-1} + a_i\phi_i + b_i\phi_{i+1} = f_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$(c_0 = 0, \quad b_n = 0)$$

tel que :

$$c_{i-1} + a_i + b_i = 0 \quad i = 2, \dots, n-1$$

$$a_1 + b_1 > 0 \quad a_i > 0 \quad b_i \leq 0 \quad c_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$c_{n-1} + a_n > 0, \quad \text{alors si } f_i > 0 \quad \forall i$$

la situation  $\left\{ \begin{array}{l} \phi_i < \phi_{i-1} \\ \phi_i < \phi_{i+1} \end{array} \right\}$  est impossible

(équivalent discret de la propriété 1.1).

Démonstration

Soit  $\phi_i$  tel que  $\phi_i < \phi_{i+1}$  et  $\phi_i < \phi_{i-1}$ . On écrit l'ième ligne du système :

$$c_{i-1}\phi_{i-1} + a_i\phi_i + b_i\phi_{i+1} = f_i$$

mais

$$\phi_i < \phi_{i+1} \Rightarrow \exists \epsilon_1 > 0 \quad \phi_{i+1} = \phi_i + \epsilon_1$$

$$\phi_i < \phi_{i-1} \Rightarrow \exists \epsilon_2 > 0 \quad \phi_{i-1} = \phi_i + \epsilon_2$$

donc

$$c_{i-1}\epsilon_2 + b_i\epsilon_1 = f_i$$

Or

$$c_{i-1}\epsilon_2 \leq 0, \quad b_i\epsilon_1 \leq 0, \quad f_i \geq 0 \Rightarrow \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.$$

□

On va appeler, par la suite ce type de système "de somme nulle".

Remarque : Les hypothèses de la propriété (1.2) sont plus fortes que la propriété de M-matrice (matrice d'inverse non négative (cf. Varga (1962)), mais une M-matrice ne garantit pas la propriété 1.2, comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & 2 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.05 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 3.8 \\ 1.5 \\ 3.95 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

La matrice est une M-matrice (plus encore, à diagonale dominante), le second membre étant positif, la solution :  $\phi_0 = 0.2$ ,  $\phi_1 = 2$ ,  $\phi_2 = 1$ ,  $\phi_3 = 2$ ,  $\phi_4 = 0.2$  vérifie  $\phi_1 > \phi_2$   
 $\phi_3 > \phi_2$ .

On va trouver, dans ce qui suit, des méthodes qui nous amèneront à résoudre des systèmes linéaires ayant cette propriété de "somme nulle", laquelle traduit exactement la propriété 1.1 de l'opérateur continu.

#### I.1.4 - Approximation de la solution par une méthode d'éléments finis

On considère sur  $\Omega = ]0,1[$  une maille régulière de pas  $h$  :

$$(1.10) \quad x_0 = 0, x_{n+1} = 1, x_{i+1} - x_i = h > 0 \quad i = 0, \dots, n.$$

Soit  $V_h$  l'espace de dimension finie des fonctions continues, linéaires sur chaque intervalle de la maille définie par (1.10) généré par :

$$(1.11) \quad w_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ (x_{i+1} - x)/h & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On applique la méthode de Galerkin sur  $V_h$  à l'équation (1.7) :

$$(1.12) \quad ((KT)^*(KT)\phi_h, v_h) = \frac{1}{k} (T^*Tf, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad \phi_h \in V_h$$

PROPOSITION 1.8

Le système linéaire (2.12) est tridiagonal symétrique et "de somme nulle".

Démonstration

Etant donné que  $\phi_h, v_h \in V_h$ , on peut écrire :

$$(1.13) \quad \phi_h = \sum_{i=0}^{n+1} \phi_i \omega_i$$

On prend  $\phi_0 = \phi_{n+1} = 0$ , ainsi  $V_h \subset D(L)$ . On réécrit (1.12) :

$$(1.14) \quad ((KT)^*(KT)\phi_h, \omega_j) = \frac{1}{k} (T^*Tf, \omega_j) \quad j = 1, \dots, n$$

et d'après (1.13) :

$$(1.15) \quad \sum_{i=1}^n \phi_i ((KT)^*(KT)\omega_i, \omega_j) = \frac{1}{k} (T^*Tf, \omega_j) \quad j = 1, \dots, n$$

Le support de  $\omega_i$  étant  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ , (1.15) se réduit à :

$$(1.16) \quad \sum_{i=j-1}^{j+1} \phi_i ((KT)^*(KT)\omega_i, \omega_j) = \frac{1}{k} (T^*Tf, \omega_j), \quad j = 1, \dots, n$$

donc le système est tridiagonal.

On a :

$$(1.17) \quad ((KT)^*(KT)\omega_i, \omega_j) = (T\omega_i^!, T\omega_j^!)$$

alors (1.16) peut s'écrire :

$$(1.18) \quad \sum_{i=j-1}^{j+1} \phi_i \int_{\text{support}(\omega_i, \omega_j)} T^2 \omega_i^! \omega_j^! = \frac{1}{k} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} T^2 f \omega_j$$

ce qui se traduit en termes matriciels :

$$(1.19) \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ & & & & b_{n-1} & \\ 0 & & & b_{n-1} & a_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

où

$$a_i = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e^{-\frac{ux}{k}}$$

$$b_i = -\frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\frac{ux}{k}}$$

$$d_i = \frac{1}{k} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) e^{-\frac{ux}{k}}$$

On peut voir que la matrice du système linéaire (1.19) est symétrique et que  $a_i + b_i + b_{i-1} = 0$ ,  $b_i < 0 \quad \forall i$  et  $a_1 + b_1 > 0$ .

□

Remarque : Si  $f$  est constante, la solution de l'équation (1.1), avec des conditions aux limites (1.2), est donnée par :

$$(1.20) \quad \phi(x) = \frac{f}{u} \left( \frac{1 - e^{-\frac{ux}{k}}}{e^{\frac{uh}{k}} - 1} + x \right)$$

Dans ce cas (1.19) devient après une simplification qui évite le calcul d'exponentielles d'exposant trop élevé, mais qui fait disparaître la symétrie :

$$(1.21) \quad c\phi_{i-1} + a\phi_i + b\phi_{i+1} = d \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{où :} \quad c = 1 - e^{-\frac{uh}{k}}$$

$$a = e^{-\frac{uh}{k}} - e^{-\frac{uh}{k}}$$

$$b = e^{-\frac{uh}{k}} - 1$$

$$d = f \frac{h}{u} \left( e^{-\frac{uh}{k}} - 2 + e^{-\frac{uh}{k}} \right)$$

avec  $\phi_0 = \phi_{n+1} = 0$ .

Il est facile de voir que la solution du système (1.21) est donnée par :

$$(1.22) \quad \phi_i = \frac{f}{u} \left( \frac{1 - e^{-\frac{u}{k} x_i}}{e^{-\frac{u}{k} x_i} - 1} + i h \right) \quad i = 1, \dots, n.$$

qui coïncide avec la solution exacte (1.20) aux noeuds.

#### I.1.4. - Deux formulations équivalentes obtenues avec la méthode de Petrov-Galerkin.

##### a) Un premier schéma

Soit  $\bar{V}_h$  l'espace de dimension finie généré par les fonctions suivantes :

$$(1.23) \quad \bar{\omega}_i(x) = \omega_i(x) \cdot \frac{1}{k} e^{-\frac{u}{k}(x-x_i)} \quad i = 1, \dots, n$$

où les  $\omega_i$  ont été définies par (1.11).

On utilise  $V_h$  comme l'espace des fonctions de base et  $\bar{V}_h$ , que l'on vient de définir, comme l'espace des fonctions test. On applique la méthode de Petrov-Galerkin à l'équation (1.1) avec des conditions aux limites homogènes.

#### PROPOSITION 1.9

*Le système linéaire qui résulte d'appliquer la méthode de Petrov-Galerkin avec  $V_h$  comme l'espace des fonctions de base et  $\bar{V}_h$  comme l'espace des fonctions test, produit le même système linéaire (1.19).*

#### Démonstration

Il faut trouver  $\phi_h \in V_h$  tel que :



$$(1.24 \text{ a}) \quad \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (-k\phi''_h + u\phi'_h) \bar{\omega}_j = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f \bar{\omega}_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (-k\phi''_h + u\phi'_h) \frac{1}{k} e^{-\frac{u}{k}(x-x_j)} \omega_j(x) = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \frac{1}{k} e^{-\frac{u}{k}(x-x_j)} \omega_j f.$$

Etant donné que  $\phi_h \in V_h$ , on peut écrire :

$$\phi_h(x) = \sum_{j=1}^n \phi_j \omega_j(x).$$

Donc (1.24 a) devient :

$$\sum_{i=j-1}^{j+1} \int_{\text{support}(\omega_i \omega_j)} (-\phi_i \omega_i'' + \frac{u}{k} \phi_i \omega_i') e^{-\frac{u}{k}(x-x_j)} \omega_j(x) = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \frac{1}{k} e^{-\frac{u}{k}(x-x_j)} \omega_j f.$$

en intégrant par parties :

$$(1.24 \text{ b}) \quad \sum_{i=j-1}^{j+1} \phi_i \int_{\text{support}(\omega_i \omega_j)} \omega_i' \omega_j' e^{-\frac{u}{k}(x-x_j)} = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \frac{1}{k} e^{-\frac{u}{k}(x-x_j)} \omega_j f.$$

et si l'on divise par  $e^{+\frac{u}{k}x_j}$  on obtient :

$$\sum_{i=j-1}^{j+1} \phi_i \int_{\text{support}(\omega_i \omega_j)} \omega_i' \omega_j' e^{-\frac{u}{k}x} = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \frac{1}{k} e^{-\frac{u}{k}x} \omega_j f.$$

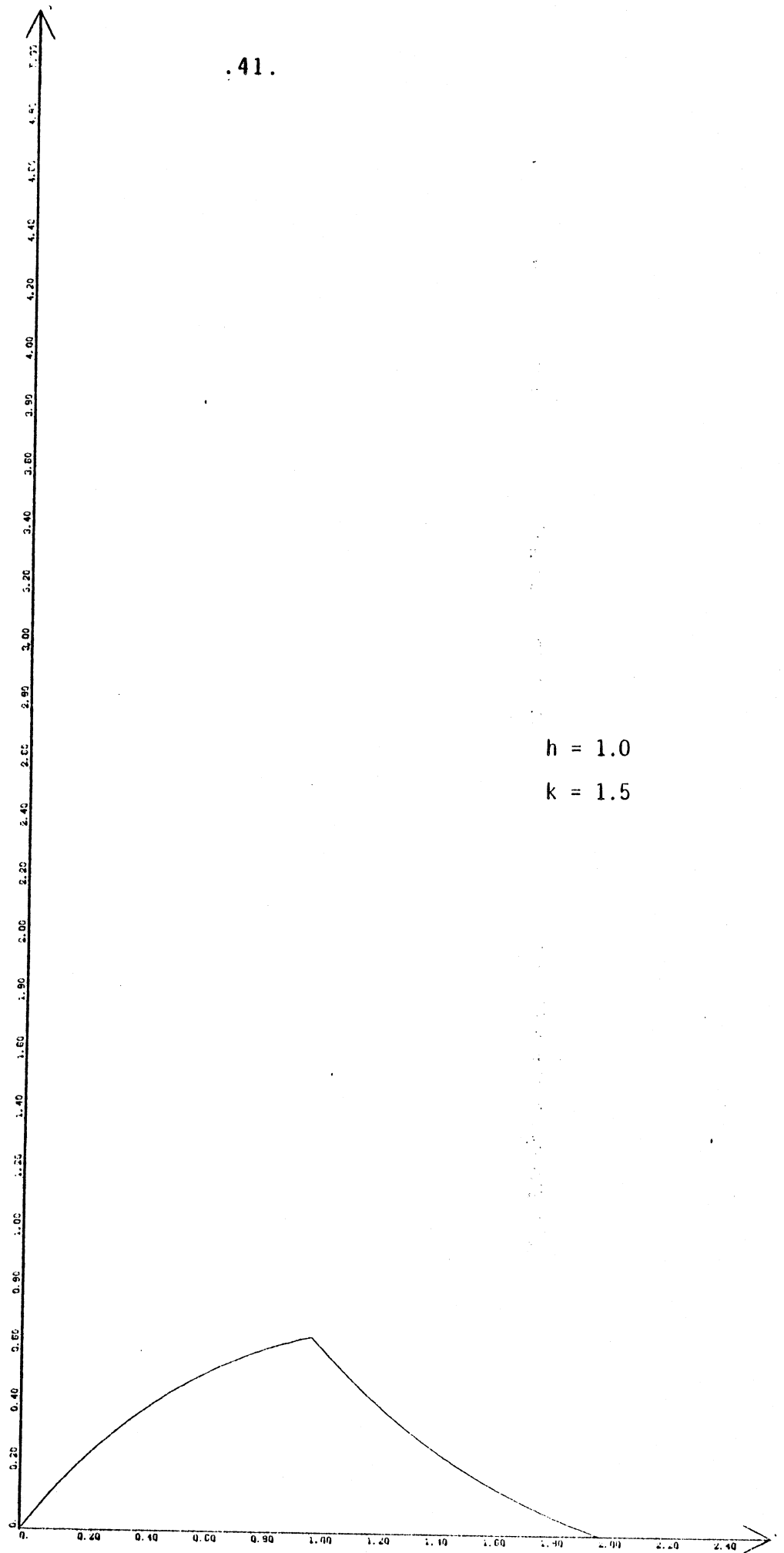
En observant que  $\omega_j'(x) = \begin{cases} h & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ -h & x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases}$

on arrive au système :

$$b_{i-1} \phi_{i-1} + a_i \phi_i + b_i \phi_{i+1} = d_i.$$

avec  $a_i$ ,  $b_i$  et  $d_i$  définis par (1.19).

□



$h = 1.0$

$k = 1.5$

FIGURE 1.1

.42.

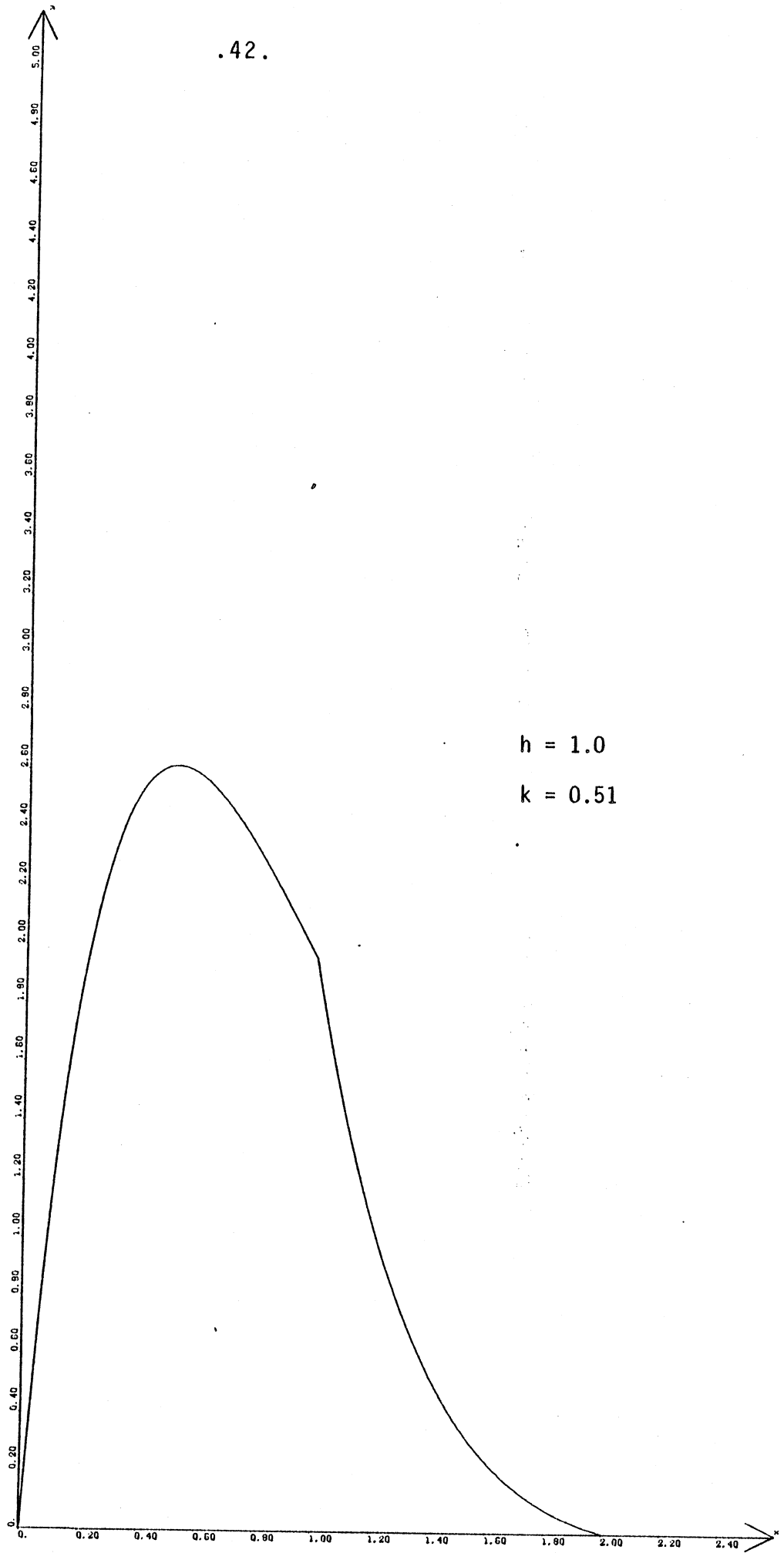
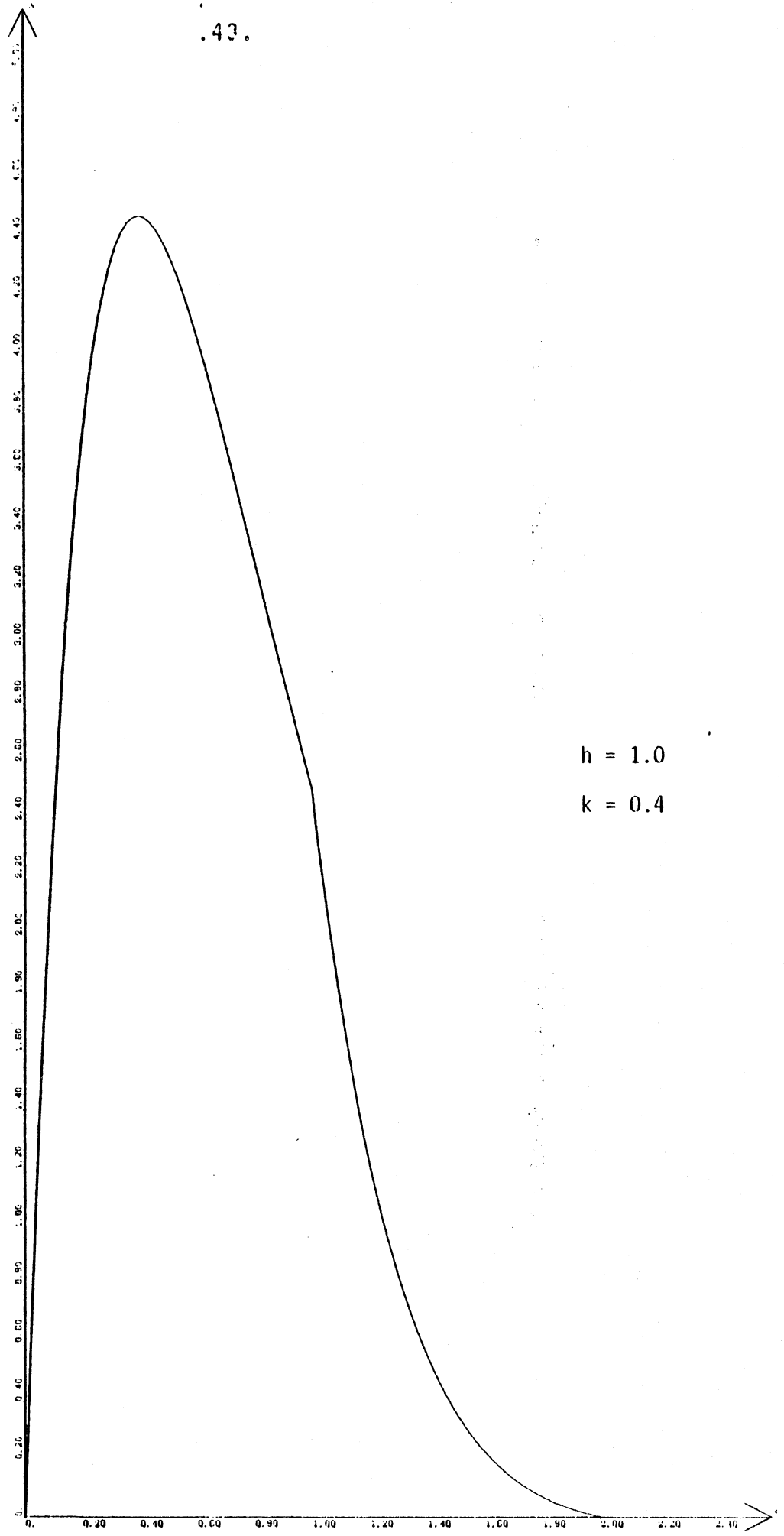


FIGURE 1.2

.43.



$h = 1.0$   
 $k = 0.4$

FIGURE 1 3

Etude des fonctions test

On considère la fonction modèle suivante :

$$(1.25) \quad \bar{\omega}(x) = \omega(x) \frac{1}{k} e^{-\frac{u}{k}(x-h)}$$

où

$$(1.26) \quad \omega(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} & \text{si } 0 \leq x \leq h \\ \frac{1}{h} (2h-x) & \text{si } h \leq x \leq 2h \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

On note que  $\bar{\omega}$  est monotone et croissante sur  $[0, \min\{h, \frac{k}{u}\}]$ , monotone et décroissante sur  $[\min\{h, \frac{k}{u}\}, 2h]$ . Elle est concave sur  $[0, \min\{\frac{2h}{u}, h\}]$  et convexe sur les intervalles  $[\min\{\frac{2h}{u}, h\}, h]$  et  $[h, 2h]$ .

On peut observer sur les figures I.1, I.2 et I.3 le tracé de cette fonction pour différentes valeurs du rapport  $\frac{uh}{k}$ . On remarque que l'on retrouve l'idée de "décentrage en amont" ("upwinding") de manière naturelle. (on a supposé  $u > 0$ ).

b) Un second schéma

Soit  $\hat{V}_h$  l'espace de dimension finie généré par :

$$(1.27) \quad \hat{\omega}_i(x) = \begin{cases} \omega_i(x) + \delta & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\delta$  est une constante positive à déterminer et  $\omega_i$  sont définis par (1.11).

On remarque que  $\hat{\omega}$  a des discontinuités de saut de longueur  $\delta$  aux points

$x_{i-1}, x_{i+1}$ .

On utilise toujours  $V_h$  comme l'espace des fonctions de base et l'espace  $\hat{V}_h$ , que l'on vient de définir, comme l'espace des fonctions test.

PROPOSITION 1.10

Le système linéaire qui résulte de l'application de la méthode de Petrov-Galerkin, avec  $V_h$  comme espace des fonctions de base et  $\hat{V}_h$  comme celui des fonctions test, est équivalent à (1.21), pour  $f$  constante, si l'on choisit

$$\delta := \frac{k'}{kh} \quad \text{avec} \quad k' := \frac{uh}{2} \left( \coth \left( \frac{uh}{2} \right) - \frac{2k}{uh} \right).$$

Démonstration

Il faut trouver  $\phi_h \in V_h$ , telle que :

$$(1.28) \quad \int_0^1 (-k\phi_h'' + u\phi_h') \hat{\omega} = \int_0^1 f \hat{\omega} \quad \forall \hat{\omega} \in \hat{V}_h$$

En intégrant par parties et en utilisant le fait que  $\phi_h \in V_h$ , on écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} k\phi_h' \omega_i' + k\delta[\phi_h'(x_{i-1}^+) - \phi_h'(x_{i+1}^-)] + u \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_h' \omega_i \\ & + u\delta \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_h' = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \omega_i + \delta \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \end{aligned}$$

et

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} (k\phi_j \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \omega_j' \omega_i' + k\delta[\omega_j'(x_{i-1}^+) - \omega_j'(x_{i+1}^-)] + u \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \omega_j' \omega_i)$$

$$+ u\delta \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \omega_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \omega_i + \delta \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f$$

qui devient, à son tour, l'équation aux différences :

$$(1.29) \quad \left( \frac{k}{h} + k\delta + \frac{u}{2} \right) \phi_{i-1} - 2 \left( \frac{k}{h} + k\delta \right) \phi_i + \left( \frac{k}{h} + k\delta - \frac{u}{2} \right) \phi_{i+1} = h \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \omega_i + h\delta \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}$$

si l'on définit :

$$\gamma := \frac{uh}{k} \quad \text{et} \quad k' = \frac{uh}{2} \left( \coth \left( \frac{\gamma}{2} \right) - \frac{2}{\gamma} \right)$$

et l'on prend  $\delta = \frac{k'}{kh}$  (1.29) peut être écrite pour  $f$  constante :

$$(1.30) \quad \frac{u}{2h} (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) - \frac{k+k'}{h^2} (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) = h^2 (f + \frac{k'}{kh})$$

Et, si l'on multiplie (1.30) par  $\beta := \frac{u}{4 \sinh^2(\frac{\gamma}{2})}$  on obtient le système (1.21)

□

### I.1.5 - Interprétation en termes de diffusion numérique

Si l'on prend l'équation (1.24 b) et l'on multiplie par le produit  $\frac{uh\beta}{k}$ , où  $\beta$  vient d'être défini ci-dessus, on obtient le schéma de Ill'in (cf. introduction équation (0.7)).

$$(1.31) \quad \frac{u}{2h} (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) - \frac{(k+\tilde{k})}{h} (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) = g(x_i)$$

avec

$$(1.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{k} = \frac{uh}{2} \left( \coth\left(\frac{uh}{2k}\right) - \frac{2k}{uh} \right) \\ g(x) = \frac{\beta uh}{k} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) \omega_x(\xi) e^{-\frac{u}{k}(\xi-x)} d\xi \\ \omega_x(\xi) = \begin{cases} (\xi-x+h)/h & \text{si } x-h \leq \xi \leq x \\ (x+h-\xi)/h & \text{si } x \leq \xi \leq x+h \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \end{array} \right.$$

Cette façon d'écrire le schéma permet d'interpréter  $\tilde{k}$  comme une diffusion numérique qui dépend du pas de maillage. Ce résultat coïncide avec ceux de Heinrich et al (1977) et Hughes (1978) qui ont été développés à partir des méthodes de "décentrage en amont" ("unwinding").

#### PROPOSITION 1.11

L'équation 1.31 approche, quand  $h \rightarrow 0^+$ , l'équation (1.1).

Démonstration

On voit que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{k}(h) = 0$ , donc le premier membre de (1.31) est une approximation du premier membre de (1.1).

Pour le second membre on peut voir que :

$$(1.33) \quad g(x) = f(x) + O(h^2)$$

En effet,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\beta u h}{k^2} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) \omega_x(\xi) e^{-\frac{u}{k}(\xi-x)} d\xi$$

Par l'Hôpital deux fois :

$$\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2M}{1 - e^{-\frac{u}{k}}} [(1 - e^{-\frac{u}{k}}) \frac{k}{u} - e^{-\frac{u}{k}} h] \xrightarrow[k \rightarrow 0^+]{h \rightarrow 0^+} 0$$

M étant une constante.

□

### II.1.6 - Bornes d'Erreur

#### PROPOSITION 1.12

La solution  $\phi_h$  obtenue à partir du système (1.19) vérifie :

$$(1.34) \quad \|\phi_h - \phi\|_{D(L)} \leq c(k) \|T_h - \phi\|_{D(L)} \quad \forall T_h \in V_h$$

avec

$$\|\cdot\|_{D(L)}^2 = \left\| \frac{d}{dx} \cdot \right\|_{L^2[0,1]}^2 + \|\cdot\|_{L^2[0,1]}^2$$

$\phi$  étant la solution exacte

Démonstration

On utilise la méthode de Galerkin pour résoudre l'équation (1.7), donc  $c(k)$  est le quotient entre la constante de continuité de la forme bilinéaire et celle de coercivité.

La forme bilinéaire étant définie par :



$a(u,v) = (Tu',Tv')$  la constante de continuité est  $\|T\|$ , car :

$$|a(u,v)| \leq \|T\| \|u\|_{D(L)} \|v\|_{D(L)}$$

et  $\|T\| \leq 1$ , mais la constante de coercivité est  $e^{-\frac{u}{k}}$ . Donc (1.34) est vérifiée avec  $c(k) = e^{u/k}$ .

Remarque : La borne n'est plus intéressante lorsque  $k$  est petit, car  $e^{u/k} \rightarrow \infty$  si  $k \rightarrow 0$  et  $u$  reste constante.

Mais on peut établir un bon résultat sur les noeuds du maillage :

PROPOSITION 1.13

On a, sur les noeuds du maillage :

$$(1.35) \quad |\phi_i - \phi(x_i)| \leq c h^2 \left[ \frac{1}{h+k} + \varepsilon(k) \right] \quad i = 1, \dots, n$$

où  $c$  ne dépend pas des valeurs de  $h$ ,  $k$  et  $u$ , et  $\varepsilon(k)$  vérifie :  
 $\varepsilon(k) > 0 \quad \forall k$  et  $\lim_{k \rightarrow 0^+} \varepsilon(k) = 0$ .

Démonstration

Il suffit de remarquer l'équivalence de ce schéma et de celui dû à Ill'in démontré au paragraphe 1.1.5., et utiliser le résultat démontré par Kellogg and Tsan (1978). Ce résultat est valable sous une hypothèse d'existence d'une borne uniforme, indépendante de  $k$  pour le second membre  $g$  de (1.31). Etant donnée la relation (1.33), il suffit que  $f$  soit bornée pour que  $g$  le soit, donc, le résultat est valable.

□

I.1.7. - Cas limite

On va considérer le cas où  $k$  tend vers zéro.

Lemme 1.1.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \omega_i(x) e^{-\frac{u}{k}(x-x_i)} = \frac{k^2}{u^2 h} 4 \sin^2 \left( \frac{uh}{2h} \right)$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1}) e^{-\frac{u}{k}(x-x_i)} dx + \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x) e^{-\frac{u}{k}(x-x_i)} \\
&= \frac{1}{h} \int_{-h}^0 (s-h) e^{-\frac{u}{k}s} + \frac{1}{h} \int_0^h (h-s) e^{-\frac{u}{k}s} \\
&= \frac{k^2}{u^2 h} [e^{\frac{uh}{k}} + e^{-\frac{uh}{k}} - 2].
\end{aligned}$$

□

Lemme 1.2

Soit  $R$  le second membre de l'équation (1.31) :

$$R = \frac{u^2 h}{4k^2 \sinh^2(\frac{uh}{2k})} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(\xi) \omega_i(\xi) e^{-\frac{u}{k}(\xi-x_i)} d\xi$$

alors :

$$|R-f(x_{i-1})| \leq \frac{2M_i}{1-e^{-\frac{uh}{k}}} \left( \frac{k}{u} (1-e^{-\frac{uh}{k}}) - h e^{-\frac{uh}{k}} \right)$$

où

$$|f'(x)| \leq M_i \quad x \in ]x_{i-1}, x_{i+1}[ \quad f' \text{ continue par morceaux.}$$

Démonstration

$$|R-f(x_{i-1})| = \left| \frac{u^2 h}{4k^2 \sinh^2(\frac{uh}{2k})} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(\xi) \omega_i(\xi) e^{-\frac{u}{k}(x-x_i)} - f(x_{i-1}) \right|$$

Par Taylor :

$$= \left| \frac{u^2 h}{4k^2 \sinh^2(\frac{uh}{2k})} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (f(x_{i-1}) + (x-x_{i-1})f'(\xi_i)) \omega_i(\xi) e^{-\frac{u}{k}(x-x_i)} - f(x_{i-1}) \right|$$

En utilisant le fait que :

$$\frac{1}{4 \sinh^2(\frac{uh}{2k})} = \frac{e^{-\frac{uh}{k}}}{(e^{-\frac{uh}{k}} - 1)} \quad \text{et le lemme 1.1, on peut écrire :}$$

$$|R-f(x_{i-1})| = \left| \frac{e^{-\frac{uh}{k}} u^2 h}{k^2 (e^{-\frac{uh}{k}} - 1)^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_{i-1}) f'(\xi_i) \omega_i(x) e^{-\frac{u}{k}(x-x_i)} \right|$$

Soit  $M_i$  une borne uniforme de la dérivée de  $f$  sur  $]x_{i-1}, x_{i+1}[$ .

$$\begin{aligned} &\leq \frac{M_i e^{-\frac{uh}{k}} u^2 h}{k^2 (e^{-\frac{uh}{k}} - 1)} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |x - x_{i-1}| \omega_i(x) e^{-\frac{u}{k}(x-x_i)} \\ &\leq \frac{M_i e^{-\frac{uh}{k}} u^2 h}{k^2 (e^{-\frac{uh}{k}} - 1)} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_{i-1}) \omega_i(x) e^{-\frac{u}{k}(x-x_i)} \quad \text{car } x \geq x_{i-1} \end{aligned}$$

En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} &\leq \frac{M_i e^{-\frac{uh}{k}} u^2 h}{k^2 (e^{-\frac{uh}{k}} - 1)^2} \frac{k}{u} \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-\frac{u}{k}(x-x_i)} 2(x-x_{i-1}) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\frac{u}{k}(x-x_i)} (x_{i-1} + x_{i+1} - 2x) \right) \\ &\leq \frac{2 e^{-\frac{uh}{k}} M_i}{k (e^{-\frac{uh}{k}} - 1)^2} (e^{\frac{uh}{k}} - 1) \int_0^h e^{-\frac{u}{k}s} s \, ds \\ &\leq \frac{2M_i}{1 - e^{-\frac{uh}{k}}} \left[ (1 - e^{-\frac{uh}{k}}) \frac{k}{u} - e^{-\frac{uh}{k}} h \right]. \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 1.14

L'équation (1.31) quand  $k \rightarrow 0^+$ , devient le schéma limite :

$$(1.36) \quad \frac{u}{h} (\phi_i - \phi_{i-1}) = f(x_{i-1})$$

Démonstration

A partir du lemme que l'on vient de démontrer, et puisque  $\lim_{k \rightarrow 0^+} \tilde{k}(k) = \frac{u}{h}$  ( $\tilde{k}(k)$  défini par 1.32) on déduit (1.36) de (1.31) quand  $k \rightarrow 0^+$ .

□

Remarque : L'équation (1.36) est une approximation du problème de convection pure :  $u\phi' = f$ ,  $\phi(0) = 0$ , d'ordre  $h$ , tandis que l'équation (1.31) est une approximation du problème (1.1) d'ordre  $h^2$ . On peut voir dans (1.35) que sur les noeuds du maillage, on perd un ordre lorsque  $k \rightarrow 0^+$ .

PROPOSITION 1.15

Supposons que l'on ait :

$$(1.37) \quad |\phi(x_i) - \phi_i| \leq c h^p \quad i = 1, \dots, n$$

où  $c$  est indépendante de  $h$  et de  $k$ , les  $\phi_i$  étant la solution d'un système linéaire dont la matrice est n'importe quelle matrice tri-diagonale de "somme nulle". Alors, obligatoirement  $p \leq 1$ .

Démonstration

(cf. Kellog and Tsan (1978)).

□

Remarque : Cette proposition nous permet d'assurer un ordre optimal sur les noeuds pour la méthode.

Exemple :

On peut illustrer l'ordre du schéma limite avec l'exemple suivant (Brooks and Hughes (1980), Leonard (1979)).

$$(1.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi' = f \quad 0 \leq x \leq 15 \\ \phi(0) = \phi'(15) = 0 \end{array} \right.$$

où  $f$  est donnée par :

$$(1.39) \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \frac{x}{4} & 0 \leq x \leq 6 \\ \frac{x}{4} - 2 & 6 \leq x \leq 8 \\ 0 & 8 \leq x \leq 15. \end{array} \right.$$

La solution de (1.38) est donnée par :

$$(1.40) \quad \phi(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{8} & 0 \leq x \leq 6 \\ \frac{x^2}{8} - 2x + 9 & 6 \leq x \leq 8 \\ 1 & 8 \leq x \leq 15 \end{cases}$$

L'équation (1.36), avec  $f$  définie par (1.39), a comme solution :

$$(1.41) \quad \phi_i = \begin{cases} \phi(ih) + \frac{h^2}{8} i & 0 \leq ih \leq 6 \\ \phi(ih) + \frac{h}{2} (3 - \frac{h}{4} i) & 6 \leq ih \leq 8 \\ \phi(ih) + \frac{h}{2} & 8 \leq ih \leq 15 \end{cases}$$

donc

$$(1.42) \quad |\phi_i - \phi(ih)| \leq \gamma h$$

où  $\gamma$  ne dépend pas du pas  $h$ . Cet exemple montre que l'on ne peut pas espérer approcher (2.38) avec une méthode du type (1.36) mieux qu'en ordre  $h$ , même si pour une certaine valeur du produit  $kh$ , la méthode est équivalente à une méthode d'ordre deux.

Sur la figure 1.4 on a tracé les solutions pour différentes valeurs du pas  $h$ .

On peut suivre Léonard (1979) et essayer de trouver un meilleur ordre pour l'équation de convection pure.

On remarque que le schéma (1.36) produit la solution exacte lorsque  $f$  est un polynôme de degré zéro, c'est-à-dire la solution est un polynôme de degré un.

Si l'on remplace dans (1.36)  $f(x_i)$  par  $f(x_{i-1/2})$ , le schéma produira la solution exacte même lorsque  $f$  est un polynôme de degré un.

Cet effet peut être obtenu en introduisant des fonctions test telles que :

$$(1.43) \quad \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \omega_i^*(x) f(x) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)$$

pour  $f$  un polynôme de degré 1 sur  $]x_{i-1}, x_{i+1}[$ . On obtient (1.43) en utilisant :

$$(1.44) \quad \omega_i^*(x) = \omega_i + h \frac{d\omega_i}{dx}$$

On remarque que les fonctions test ainsi définies sont discontinues, dont la dérivée est une masse de Dirac qui n'appartient pas à  $L^2[0,1]$  ce qui nous empêche de les utiliser pour le problème de convection-diffusion.

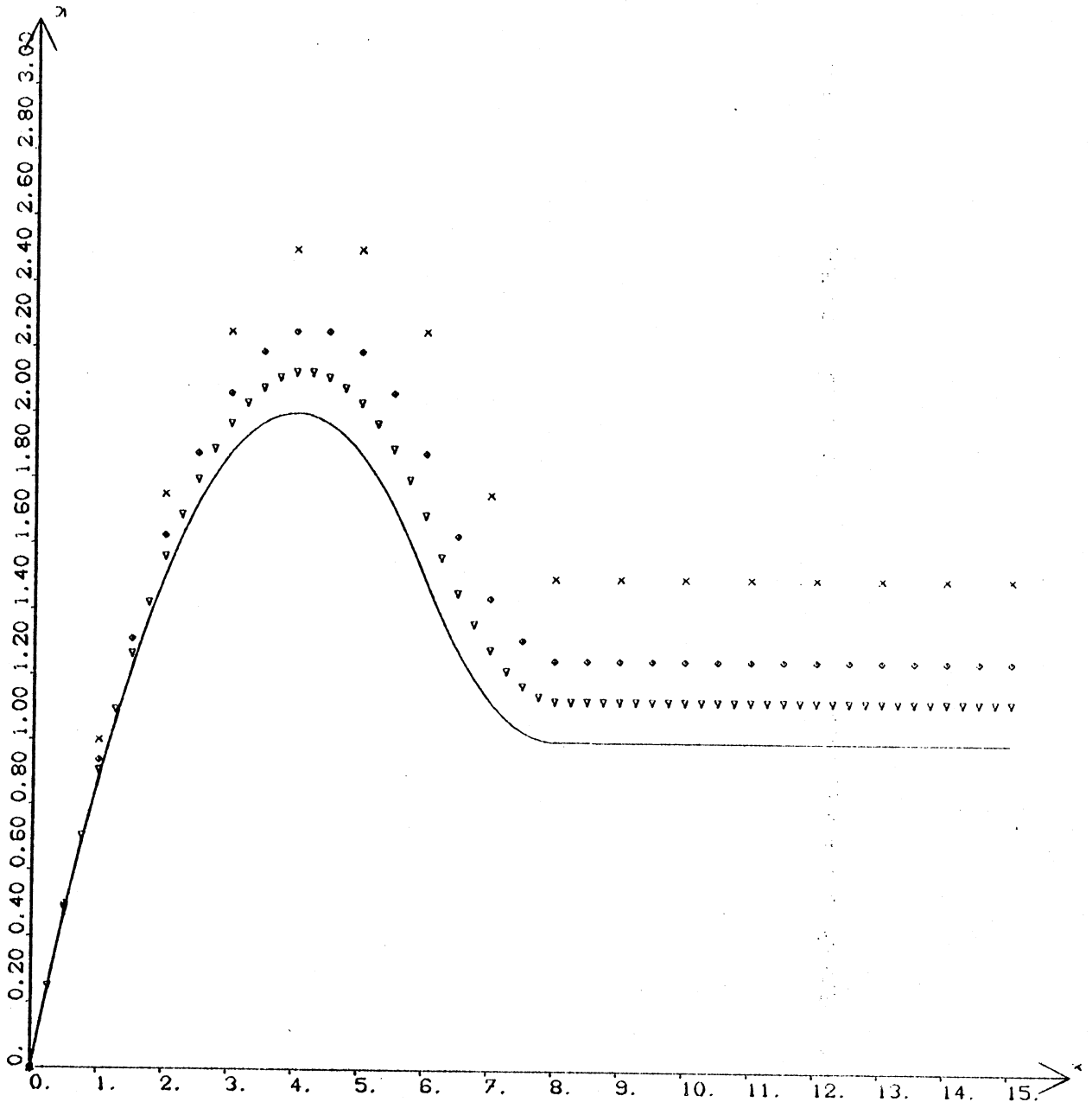


FIGURE 1.4

- x h = 1
- . h = 0.5
- v h = 0.25

I.2 - VITESSE NON CONSTANTEI.2.1. - Une formulation équivalente

On considère le problème :

$$(1.45) \quad -k\phi'' + u\phi' = f \quad \text{sur } ]0,1[$$

où  $f$  et  $u$  sont des fonctions données, suffisamment régulières,  $k$  une constante et  $\phi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction inconnue.

On analysera (1.45) soumis aux conditions aux limites :

$$(1.46) \quad \phi(0) = \phi(1) = 0.$$

On définit  $T$  et  $L$  les opérateurs suivants :

$$(1.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} T : D(T) = L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1] \\ (T\phi, v) = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2k} \int_0^x u(s) ds} \phi v \quad v \in L^2[0,1] \end{array} \right.$$

$$(1.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} L : D(L) \rightarrow L^2[0,1] \\ (L\phi, v) = \int_0^1 \left( -\phi'' + \left( \frac{u^2}{uk^2} - \frac{u'}{2k} \right) \phi \right) v \quad v \in D(L) \end{array} \right.$$

où

$$D(L) = \{v \in L^2[0,1] \mid v \text{ absolument continue, } v' \in L^2[0,1]\}$$

On remarque que si  $u$  est suffisamment régulière et que si  $\phi \in D(L)$  alors  $T\phi \in D(L)$ , ce qui nous permettra, de façon analogue au paragraphe précédent, de poser le problème dans  $D(L)$ .

On retrouvera les propriétés que l'on a démontrées pour  $T$  et  $L$  au paragraphe (1.1).

PROPOSITION 1.16

Les opérateurs  $T$  et  $L$  définis par (1.47) et (1.48) sont symétriques.

Démonstration

Il suffit d'écrire  $(T\phi, \varphi) = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2k} \int_0^x u(s) ds} \phi(x)\varphi(x)$  et le résultat est évident.

Pour  $L$  on écrit :

$$\begin{aligned} (L\phi, \varphi) &= \int_0^1 \left( -\phi'' + \left( \frac{u^2}{4k^2} - \frac{u'}{2k} \right) \phi \right) \varphi \\ &= \int_0^1 \left( -\phi \varphi'' + \left( \frac{u^2}{4k^2} - \frac{u'}{2k} \right) \phi \varphi \right) = (\phi, L\varphi) \end{aligned}$$

Puisque  $\phi, \varphi \in D(L)$ .

□

PROPOSITION 1.17

L'opérateur  $L$  est défini positif.

Démonstration

On calcule :

$$\begin{aligned} (L\phi, \phi) &= \int_0^1 \left( -\phi \phi'' + \left( \frac{u}{2k} \right)^2 \phi^2 - \frac{u'}{2k} \phi^2 \right) \\ &= \int_0^1 \left( \phi'^2 + \left( \frac{u}{2k} \right)^2 \phi^2 - \frac{u'}{2k} \phi^2 \right) \\ &= \int_0^1 \left( \phi'^2 + \left( \frac{u}{2k} \right)^2 \phi^2 - \frac{u}{k} \phi \phi' \right) = \int_0^1 \left( \phi' - \frac{u}{2k} \phi \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\forall \phi \in D(L)$ .

□



PROPOSITION 1.18

L'équation (1.45) avec les conditions aux limites (1.46) est équivalente à :

$$(1.49) \quad (T^*LT\phi, v) = \frac{1}{k} (T^*Tf, v) \quad \begin{array}{l} \phi \in D(L) \\ \forall v \in D(L) \end{array}$$

Démonstration

Soit  $\phi$  solution de (1.45) avec les conditions aux limites (1.46), donc :

$$(-k\phi'' + u\phi', v) = (f, v) \quad \forall v \in D(L).$$

Soit  $\varphi = T\phi$ , alors :

$$\begin{aligned} (T^*LT\phi, v) &= (L\varphi, Tv) \\ &= (-\varphi'' + [(\frac{u}{2k})^2 - \frac{u'}{2k}]\varphi, Tv) \\ &= \int_0^1 [-(\phi'' e^{-\frac{1}{2k} \int_0^x u(s) ds} - \frac{u}{k} \phi' e^{-\frac{1}{2k} \int_0^x u(s) ds} \\ &\quad + [(\frac{u}{2k})^2 - \frac{u'}{2k}] e^{-\frac{1}{2k} \int_0^x u(s) ds} \phi] Tv \\ &= \frac{1}{k} (-k\phi'' + u\phi', T^*Tv) \\ &= \frac{1}{k} (f, T^*Tv) = \frac{1}{k} (T^*Tf, v). \end{aligned}$$

Soit  $\phi$  solution de (1.49), elle vérifie les conditions aux limites (1.46) puisque  $\phi \in D(L)$ .

Alors on peut écrire,  $\forall v \in D(L)$  :

$$\begin{aligned} (-k\phi'' + u\phi', v) &= (k T^{-1}(-(T\phi'') + \frac{u}{k} T\phi), v) \\ &= (k T^{-1}(-(T\phi)'' + [(\frac{u}{2k})^2 - \frac{u'}{2k}]T\phi), v) \\ &= (k(T^{-1})(T^*)^{-1}(T^*LT\phi), v) \\ &= k(T^*LT\phi, (T^{-1})(T^{-1})^*v) \end{aligned}$$

$$= k \frac{1}{k} (T^* T f, (T^{-1})(T^{-1})^* v)$$

$$= (f, v)$$

□

On peut maintenant énoncer des propriétés analogues au cas de vitesse constante dont les démonstrations sont valables aussi dans ce cas :

Il existe  $K$  tel que  $L = K^* K$ , l'équation (1.49) est équivalente à  $(KT)^*(KT)\phi = \frac{1}{k} T^* T f$   $\phi \in D(L)$  qui a une seule solution.

### I.2.2. - Principes du maximum

Il faut noter que dans la démonstration de propriétés (1.1) et (1.2) le fait que  $u$  soit constante n'intervient pas, donc elles sont aussi valables dans ce paragraphe.

### I.2.3. - Approximation de la solution par une méthode d'éléments finis

On définit l'espace  $V_h$  généré par les fonctions définies par (1.11) vérifiant (1.46),  $V_h \subset D(L)$ , et l'on applique la méthode de Galerkin à l'équation (1.49) :

$$(1.50) \quad ((KT)^*(KT)\phi_h, v_h) = \frac{1}{k} (T^* T f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

$$\phi_h \in V_h \subset D(L).$$

#### PROPOSITION 1.19

*Le schéma obtenu de (1.50) est tridiagonal, symétrique et de "somme nulle"*

#### Démonstration

On reproduit exactement la démonstration de la proposition 1.6 en remarquant que l'équation (1.17) est toujours valable. En effet,



Toutes les propriétés peuvent être retrouvées dans le cas où la vitesse  $u$  est une fonction de  $x$ .

I.2.4. - Une formulation équivalente avec la méthode de Petrov-Galerkin

Une formulation équivalente est obtenue en appliquant la méthode de Petrov-Galerkin avec la généralisation suivante des fonctions définies par (1.23) :

$$(1.52) \quad \tilde{\omega}_i(x) = \omega_i(x) \frac{1}{k} e^{-\frac{1}{k} \int_{x_{i-1}}^x u(s) ds} \quad i = 1, \dots, n$$

où les fonctions  $\omega_i$  ont été définies par (1.11).

PROPOSITION 1.20

*Le système linéaire que l'on obtient lorsqu'on applique la méthode de Petrov-Galerkin, avec  $V_h$  (défini par 1.11) et les fonctions test (1.52), au problème (1.45) - (1.46) est (1.51).*

Démonstration

Elle est complètement analogue à celle de la proposition (1.9).

□

I.2.5. - Approximation de la vitesse

Un vue d'une généralisation au cas bidimensionnel, on va proposer une façon approchée de traiter la vitesse.

Soit  $\tilde{V}_h$  l'espace généré par les fonctions suivantes :

$$(1.53) \quad \tilde{\omega}_i(x) = \begin{cases} \omega_i(x) \frac{1}{k} e^{-\frac{u_i}{k}(x-x_i)} & x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2} \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$$

où :  $u_i := u(x_i)$   $x_{i-1/2} = x_i - \frac{h}{2}$   $x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$  et  $\omega_i(x)$  définie par (1.11).

PROPOSITION 1.21

Le schéma qui résulte de l'application de la méthode de Petrov-Galerkin avec  $V_h$  (défini par (1.11)) et  $\tilde{V}_h$  est de "somme nulle".

Démonstration

Le problème à résoudre est le suivant :

$$(1.54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_h = \sum_{i=1}^n \phi_i \omega_i \text{ telle que} \\ \sum_{i=1}^n \phi_i \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (-k\omega_i'' + u_j \omega_i') \tilde{\omega}_j = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f \tilde{\omega}_j \end{array} \right.$$

Mais, le premier membre de (1.54) est égal à :

$$\sum_{i=j-1}^{j+1} \phi_i \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (-\omega_i'' \omega_j + \frac{u_j}{k} \omega_i' \omega_j) e^{-\frac{u_j}{k}(x-x_j)} + \frac{u_j}{k} \omega_i' \omega_j e^{-\frac{u_j}{k}(x-x_j)}$$

et, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=j-1}^{j+1} \phi_i \left( -\omega_i' \omega_j e^{-\frac{u_j}{k}(x-x_j)} \Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \right) \\ &+ \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \omega_i' (\omega_j' e^{-\frac{u_j}{k}(x-x_j)} - \omega_j \frac{u_j}{k} e^{-\frac{u_j}{k}(x-x_j)}) \\ &+ \frac{u_j}{k} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \omega_i' \omega_j e^{-\frac{u_j}{k}(x-x_j)} \end{aligned}$$

Donc, (1.54) devient l'équation de différences :

$$(1.55) \quad c_i \phi_{i-1} + a_i \phi_i + b_i \phi_{i+1} = d_i \quad i = 1, \dots, n \quad \phi_{n+1} = \phi_0 = 0.$$

où :

$$c_i := -\frac{1}{h} \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma_i} \right) e^{\gamma_i/2} - \frac{1}{\gamma_i} \right]$$

$$b_i := -\frac{1}{h} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma_i} \right) e^{-\gamma_i/2} + \frac{1}{\gamma_i} \right]$$

$$a_i := \frac{1}{h} \left[ \cosh\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) + \frac{2}{\gamma_i} \sinh\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) \right]$$

$$d_i := \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f \tilde{\omega}_i$$

$$\gamma_i := \frac{u_i h}{k} \quad i = 1, \dots, n$$

Il est facile de voir que  $c_i \leq 0$ ,  $b_i \leq 0$  pour toute combinaison possible des paramètres  $u_i$ ,  $h$  et  $k$ . En plus  $a_i + b_i + c_i = 0 \quad \forall i$  et  $a_1 + b_1 > 0$ .

□

### Exemple Numérique

$$\left[ \begin{array}{l} \phi'' + \frac{60}{x} \phi' = x^2 \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \phi(1) = 1 \\ \phi(2) = 0 \end{array} \right]$$

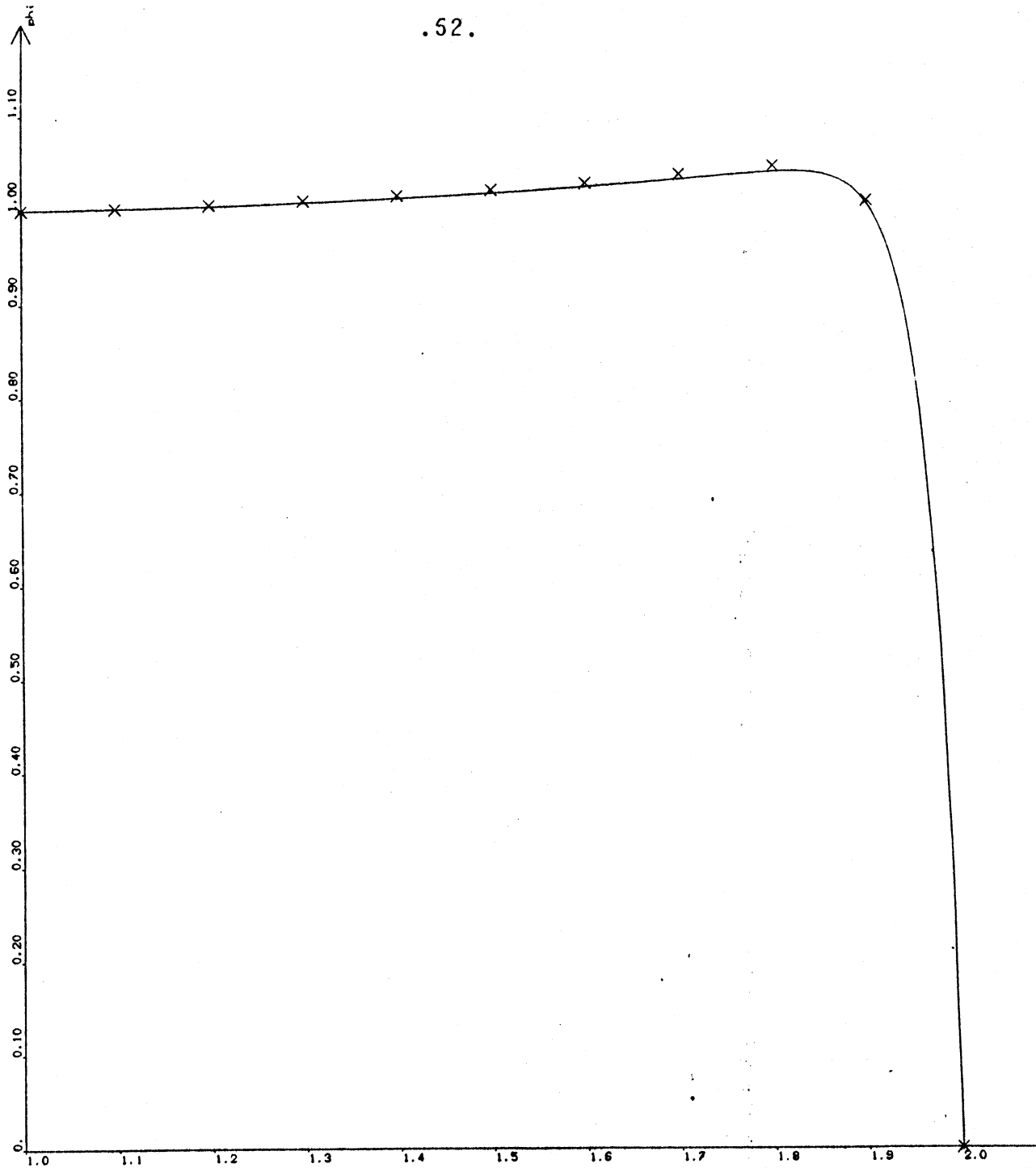


Figure I.5

Sur la Figure I.5 on a tracé la solution numérique et la solution exacte. On remarque la très bonne précision obtenue avec notre méthode, même sur la couche limite. La solution que l'on obtient pour  $h = 0.1$ , n'est pas oscillatoire et l'erreur est donnée par :

$$\max_{i:=1,\dots,n} |\phi(x_i) - \phi_i| \leq 6 \times 10^{-3}.$$

## II - PROBLEME BIDIMENSIONNEL STATIONNAIRE

### II.1 - CHAMP DE VITESSE CONSTANTE

- II.1.1. - Le problème
- II.1.2. - Une formulation symétrique
- II.1.3. - Principes du maximum
- II.1.4. - Approximation de la solution par une méthode d'éléments finis
- II.1.5. - Une formulation discrète équivalente
- II.1.6. - Exemples numériques
- II.1.7. - Cas limite

### II.2 - CHAMP DE VITESSE NON CONSTANTE

- II.2.1. - Le problème
- II.2.2. - Principes du maximum
- II.2.3. - Approximation de la solution par une méthode d'éléments finis.
- II.2.4. - Exemples numériques.



## II - PROBLEME BIDIMENSIONNEL STATIONNAIRE

### II.1 - CHAMP DE VITESSE CONSTANTE

#### II.1.1. - Le problème

On considère le problème bidimensionnel suivant :

$$(2.1) \quad -k\Delta\phi + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi = f \quad \text{sur } \Omega.$$

où

$k$  est une constante (de diffusion)

$\Omega$  : ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega$  régulière

$\phi$  :  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  fonction inconnue

$f$  :  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  second membre ("forcing")

$\nabla$  : opérateur gradient  $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$

$\Delta$  : opérateur laplacien  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \nabla \cdot \nabla = \text{div}(\nabla)$ .

$\bar{\mathbf{u}} = (u, v)$  : champ de vitesses constant

On va résoudre (2.1) soumis aux conditions aux limites du type :

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \phi = g_1 \text{ sur } \Gamma_1 & \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \\ k \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} = g_2 \text{ sur } \Gamma_2 & \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega \end{array} \right.$$

où  $g_1, g_2$  sont des fonctions connus et  $\hat{n}$  est la direction normale extérieure à  $\partial\Omega$ .

#### II.1.2. - Une formulation équivalente symétrique

On va noter  $L$  et  $T$  les opérateurs définis comme suit :

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} T : D(T) = L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \\ (T\phi, v) = \iint_{\Omega} \phi e^{-\frac{\bar{u} \cdot \bar{x}}{2k}} v \end{array} \right.$$

où :  $\bar{u} \cdot \bar{x} := ux + vy$ .

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} L : D(L) \rightarrow L^2(\Omega) \\ L := (-\Delta + \frac{\|\bar{u}\|^2}{4k^2} I) \end{array} \right.$$

où :

$D(L) = \{v \in L^2(\Omega) / \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega), \text{ et } v \text{ satisfait à (2.2) avec } g_1 \equiv g_2 \equiv 0\}$ .

On remarque que si  $\phi \in D(L)$  alors  $T\phi \in D(L)$ , puisque  $e^{-\frac{\bar{u} \cdot \bar{x}}{k}}$  est une fonction indéfiniment dérivable, ce qui nous permettra de poser notre problème dans  $D(L)$ , qui est un espace de Hilbert.

Dans le cadre que l'on vient de définir on peut récupérer les résultats obtenus à une dimension. On notera  $(, )$  le produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ .

PROPOSITION 2.1

*Les opérateurs T et L sont symétriques.*

Démonstration

Il suffit d'écrire :

$$(T\phi, \varphi) = \iint_{\Omega} e^{-\frac{\bar{u} \cdot \bar{x}}{2k}} \phi \varphi, \quad \varphi, \phi \in L^2(\Omega)$$

et le résultat est évident pour T.

Pour L on écrit :  $\varphi, \phi \in D(L)$

$$(L\phi, \varphi) = \iint_{\Omega} (-\Delta\phi + (\frac{\bar{u} \cdot \bar{x}}{2k})^2 \phi) \varphi$$

Le fait que  $\phi, \varphi \in D(L)$  et la formule de Green nous permettent d'écrire :

$$(L\phi, \varphi) = \iint_{\Omega} (-\Delta\varphi + (\frac{\bar{u} \cdot \bar{x}}{2k})^2 \varphi) \phi = (\phi, L\varphi)$$

□

PROPOSITION 2.2

$L$  défini par (2.4) est défini positif.

Démonstration

Il suffit de calculer pour  $\phi \in D(L)$  :

$$\begin{aligned} (L\phi, \phi) &= \iint_{\Omega} -\Delta\phi + \left(\frac{\bar{u} \cdot \bar{x}}{2k}\right)^2 \phi^2 \\ &= \iint_{\Omega} |\nabla\phi|^2 + \left(\frac{\bar{u} \cdot \bar{x}}{2k}\right)^2 \phi^2 \geq 0 \quad \forall \phi \in D(L) \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 2.3

L'équation (2.1) avec les conditions (2.2) vérifiée dans  $D(L)$ , est équivalente au problème :

Trouver  $\phi \in L^2(\Omega)$ , telle que

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \in L^2(\Omega), \text{ vérifiant (2.2) et, :} \\ (T^*LT\phi, v) = \frac{1}{k} (T^*Tf, v) \end{array} \right. \quad \forall v \in D(L).$$

Démonstration

i) Soit  $\phi$  solution de (2.1) (2.2). On écrit pour  $\varphi = T\phi$

$$\begin{aligned} (T^*LT\phi, v) &= (L\varphi, Tv) \quad \forall v \in D(L) \\ &= (-\Delta(T\phi) + \frac{\|\bar{u}\|^2}{(2k)^2} T\phi, Tv) \\ &= \left(\frac{1}{k} T(-\Delta\phi + \bar{u}\nabla\phi), Tv\right) \\ &= \frac{1}{k} (-\Delta\phi + \bar{u}\nabla\phi, T^*Tv) \end{aligned}$$

et puisque  $\phi$  est solution de (2.1) (2.2) :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{k} (f, T^*Tv) \\ &= \frac{1}{k} (T^*Tf, v) \end{aligned}$$

ii) Soit  $\phi$  solution de (2.5), alors on a  $\forall v \in D(L)$ ,

$$\begin{aligned} (-k\Delta\phi + \bar{u} \cdot \nabla\phi, v) &= k(-T\Delta\phi + T(\bar{u} \cdot \nabla\phi), (T^{-1})^*v) \\ &= k(-\Delta(T\phi) + \frac{\|\bar{u}\|}{2k})^2 T\phi, (T^{-1})^*v) \\ &= k(T^*LT\phi, (T^{-1})(T^{-1})^*v). \end{aligned}$$

et puisque  $\phi$  est solution de (2.5) :

$$= k \cdot \frac{1}{k} (T^*Tf, T^{-1}T^{*-1}v) = (f, v)$$

□

On remarque que les propositions 1.4 et 1.5 sont démontrées dans un cadre général, donc valables dans ce cas bidimensionnel. Ce qui fait que le théorème 1.1 qui donne l'existence et l'unicité de la solution, nous permet d'assurer l'existence et l'unicité de la solution de (2.5).

### II.1.3. - Principes du maximum

#### PROPRIETE 2.1 (Principe du Maximum)

*Si  $f > 0$  est régulière sur  $\Omega$ , alors  $\phi$  solution de (2.1)-(2.2) n'a pas de minima locaux dans  $\Omega$*

#### Démonstration

Soit  $(\bar{x}, \bar{y})$  un minimum local, alors  $\nabla\phi(\bar{x}, \bar{y})$  est le vecteur nul, donc (2.1) s'écrit au point  $(\bar{x}, \bar{y})$  :

$$-k\Delta\phi(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Or  $k > 0$ ,  $f > 0$  donc  $\Delta\phi(\bar{x}, \bar{y}) < 0$ , ce qui entraîne que  $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} < 0$ , ou bien,  $\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} < 0$ , ce qui est contradictoire.

□

PROPRIETE 2.2 (Principe du maximum discret)

Soit  $\Omega_h$  un maillage sur  $\Omega$  et  $A\phi = b$  une discrétisation de l'équation (2.1)-(2.2) obtenue avec une méthode numérique sur ce maillage.

Si la matrice  $A$  vérifie :

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \exists k / \sum_j a_{kj} > 0 & \\ \sum_j a_{ij} = 0 & \forall i \neq k \\ a_{ij} \leq 0 & \forall i \neq j \end{array} \right. \quad a_{ii} > 0 \quad \forall i$$

Alors si  $b$  est tel que  $b_i > 0 \quad \forall i$ , la solution discrète n'a pas des minima locaux intérieurs.

Démonstration

On écrit l' $i$ -ème ligne du système ( $i \neq k$ ) :

$$\sum_{i \neq j} a_{ij} \phi_j + a_{ii} \phi_i = b_i$$

Supposons  $\phi_j = \phi_i + \epsilon_j \quad \epsilon_j > 0$  alors :

$$\text{donc} \quad \sum_{i \neq j} a_{ij} (\phi_i + \epsilon_j) + a_{ii} \phi_i = b_i$$

$$\sum_{i \neq j} a_{ij} \epsilon_j = b_i$$

mais  $\epsilon_j > 0$  et  $a_{ij} \leq 0 \Rightarrow \sum_{i \neq j} a_{ij} \epsilon_j \leq 0$  ce qui contredit le fait que  $b_i > 0 \quad \forall i$ .

□

On gardera le nom de "somme nulle" pour ces systèmes.

Dans ce qui suit on trouvera des méthodes qui vont nous amener à résoudre des systèmes de ce type. Ainsi, notre solution approchée respectera le principe du maximum de la solution continue.

II.1.4. - Approximation de la solution avec une méthode d'éléments finis

On considère sur  $\Omega$  un maillage triangulaire et les fonctions de base qui correspondent à l'élément de Lagrange de degré 1. (interpolation linéaire par morceaux). On notera  $\omega_i$  la fonction de base associée au noeud  $i$  de la triangulation.

On résout le problème (2.5) par la méthode de Galerkin :

Trouver  $\phi_h$ , linéaire sur chaque triangle, vérifiant (2.2) telle que :

$$(2.7) \quad (T^* L T \phi_h, \omega_i) = \frac{1}{k} (T^* T f, \omega_i)$$

$i = 1, \dots, N$  (nombre de noeuds de la triangulation) qui peut encore être écrit :

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_h, \text{ combinaison linéaire des } \omega_i, \text{ vérifiant (2.2) et telle que} \\ \iint_{K_i} T^* L T \phi_h \omega_i = \frac{1}{k} \iint_{K_i} T^* T f \omega_i \\ K_i := \text{support de } \omega_i \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Avec une formule de Green on trouve :

$$\iint_{K_i} T^* L T \phi_h \omega_i = \iint_{K_i} T^* T \nabla \phi_h \nabla \omega_i$$

donc, le système à résoudre s'écrit :

Trouver  $\phi_h = \sum_{j=1}^N \phi_{hj} \omega_j$  telle que :

$$(2.9) \quad \iint_{K_i} T^* T \nabla \phi_h \nabla \omega_i = \frac{1}{k} \iint_{K_i} T^* T f \omega_i$$

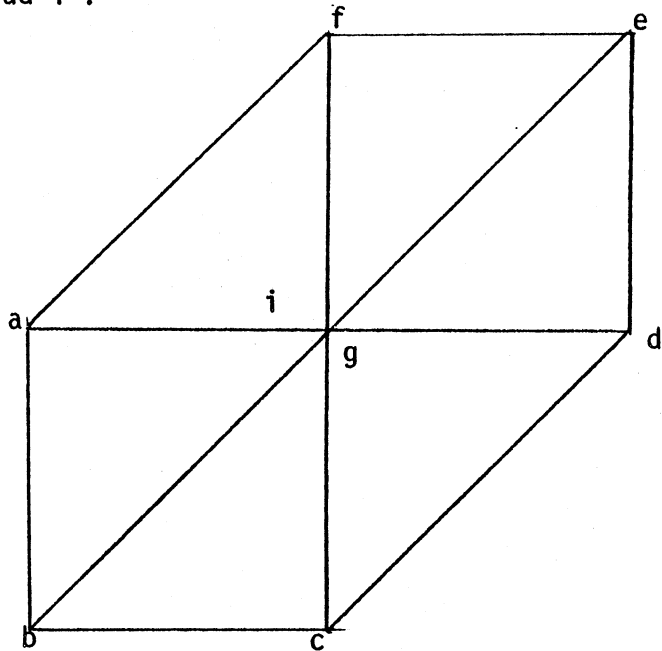
$i = 1, \dots, N.$

PROPRIETE 2.3

Sur un maillage régulier le système (2.9) est un système de "somme nulle".

Démonstration

Sur un maillage régulier on peut calculer exactement les coefficients. Supposons  $u \neq 0$ ,  $v \neq 0$  et  $u+v \neq 0$ . Le calcul produit pour la ligne correspondante au noeud  $i$  :



$$\gamma_1 = \frac{uh}{2k}$$

$$\gamma_2 = \frac{vh}{2k}$$

$$a := \frac{-u}{2h} e^{\gamma_1} \operatorname{sech} \gamma_1 \tanh \gamma_2$$

$$b := 0$$

$$c := \frac{-v}{2h} e^{\gamma_2} \operatorname{sech} \gamma_2 \tanh \gamma_1$$

$$d := \frac{-u}{2h} e^{-\gamma_1} \operatorname{sech} \gamma_1 \tanh \gamma_2$$

$$e := 0$$

$$f := \frac{-v}{2h} e^{-\gamma_2} \operatorname{sech} \gamma_2 \tanh \gamma_1$$

$$g := \frac{1}{h} (u \tanh \gamma_2 + v \tanh \gamma_1)$$

On voit facilement que  $a \leq 0$ ,  $c \leq 0$ ,  $d \leq 0$ ,  $f \leq 0$ ,  $g \geq 0$  et que  $a + b + c + d + e + f + g = 0$ . Donc les conditions (2.6) sont vérifiées et alors le principe du maximum qui nous intéresse est respecté par la solution de (2.9) sur un maillage régulier.

□

#### II.1.5. - Une formulation discrète équivalente

Considérons les fonctions suivantes :

$$(2.10) \quad \bar{\omega}_i(x,y) = \omega_i(x,y) \frac{1}{k} e^{-\frac{1}{k} \bar{u} \cdot (x-x_i)}$$

où  $\omega_i(x,y)$  est la fonction de base de degré 1 associée au noeud des coordonnées  $x_i = (x_i, y_i)$ .

#### PROPOSTION 2.4

*Le système à résoudre lorsqu'on applique la méthode de Petrov-Galerkin au problème (2.1)-(2.2) avec les fonctions test définies par (2.10) est équivalent au système (2.9).*

#### Démonstration

Il suffit de voir que :

$$\iint_{\Omega} (-k\Delta\phi_h + \bar{u} \cdot \nabla\phi_h) \bar{\omega}_i = \iint_{\Omega} T^* L T \phi_h \omega_i$$

en reprenant les calculs entrepris lors de la démonstration de la proposition 2.3.

□

Cette formulation discrète va être utilisée pour le cas de vitesse variable.

Remarque : De la même façon que dans le cas unidimensionnel, on peut disposer des bornes d'erreur, étant donné qu'elles sont classiques pour la méthode de Galerkin. Mais elles ont une constante d'erreur qui va croître de façon exponentielle avec  $k$ , et pour les valeurs de  $k$  dont on s'intéresse elles ne sont pas significatives.



### II.1.6. - Exemples numériques

Pour les exemples qui suivent, on a considéré un maillage triangulaire régulier de pas  $h = 0.02$ . La constante  $k$  a été prise égale à  $0.001$ .

#### Exemple 2.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = ]0,1[^2 \qquad \Gamma_0 = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \times [0,1/2] \\ -k\Delta\phi + \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \text{ sur } \Omega \\ \phi(x,y) = \log(x-y+5) \text{ sur } \partial\Omega \cup \Gamma_0 \end{array} \right.$$

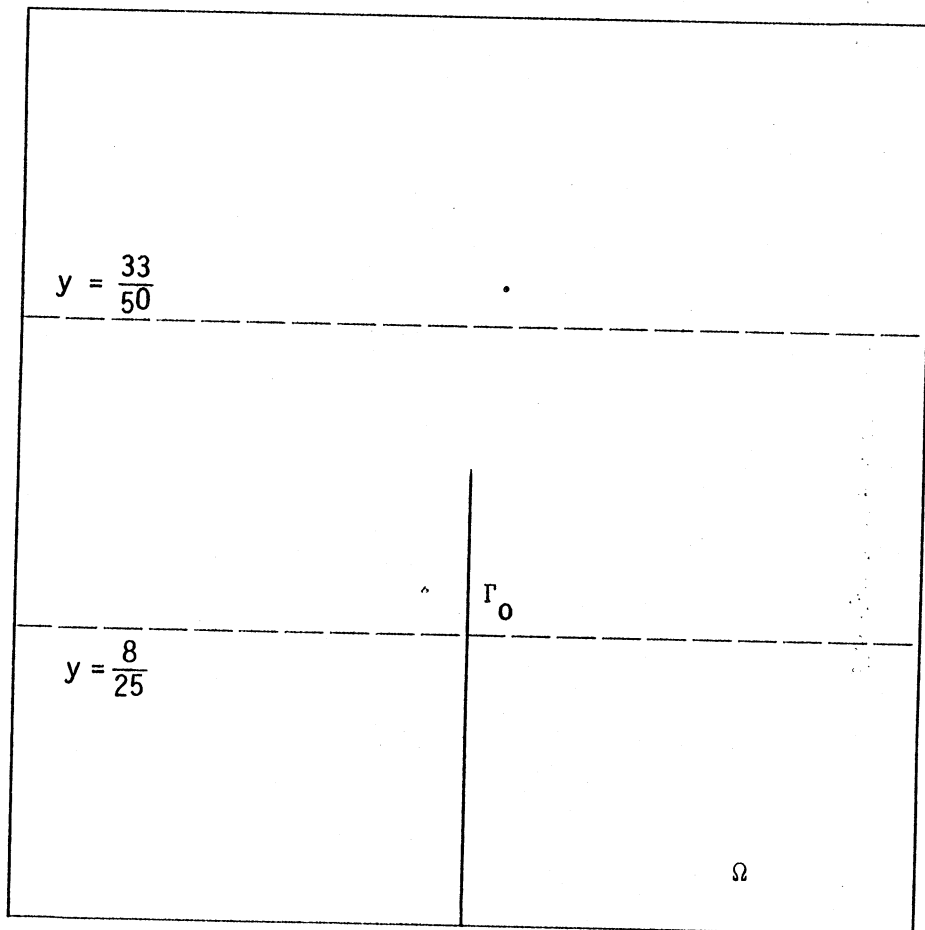


FIGURE 2.1

.73.

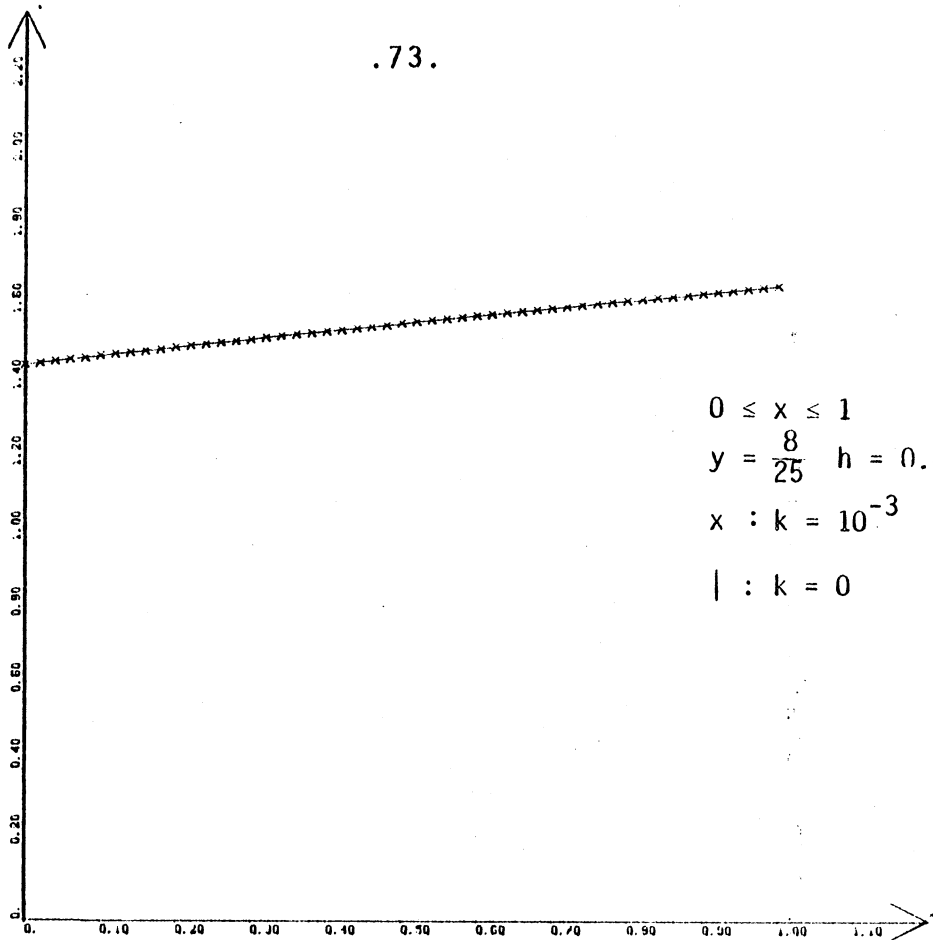


FIGURE 2.2

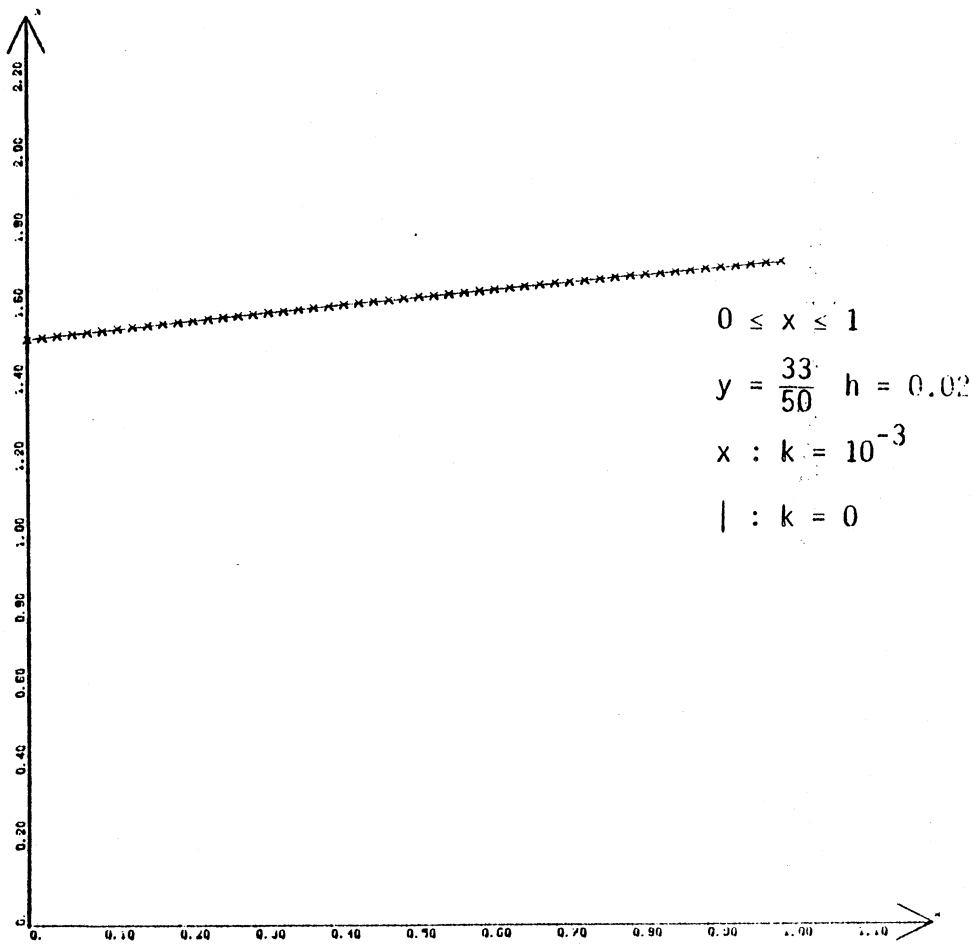


FIGURE 2.3

Sur les figures (2.2) et (2.3) on a tracé le profil de la solution pour  $\{y = 8/25 \ 0 \leq x \leq 1\}$  et  $\{y = 33/25 \ 0 \leq x \leq 1\}$ . On remarque que même avec une solution très proche de la solution purement convective ( $< 6 \times 10^{-4}$ ) on n'observe pas d'oscillations.

### Exemple 2.2

$$\Omega = ]0,1[{}^2$$

$$\Gamma_0 = \left\{\frac{1}{2}\right\} \times \left]0, \frac{1}{2}\right]$$

$$-k\Delta\phi + \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

$$\phi(x,y) = \log(x-y+1.1) \quad \text{sur } \partial\Omega \cup \Gamma_0.$$

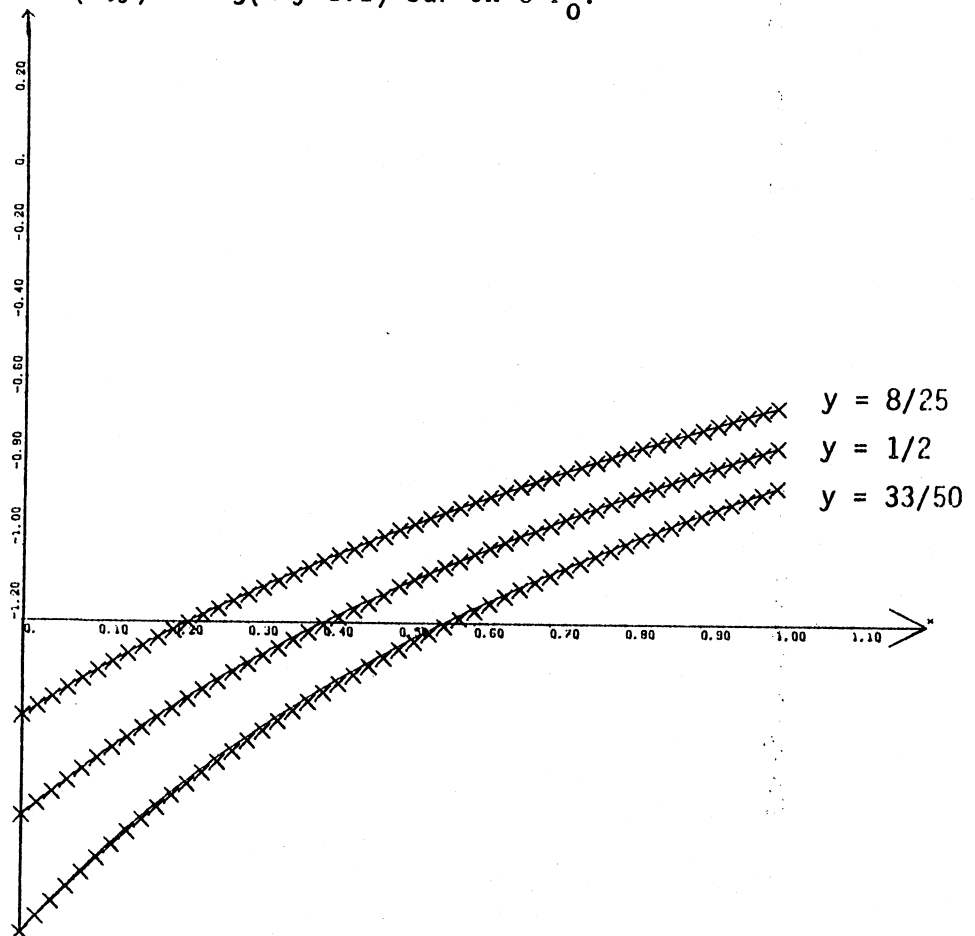


Fig. 2.4

Sur la figure (2.4) on a tracé le profil de la solution pour  $\{y = 8/25, \ 0 \leq x \leq 1\}$ ,  $\{y = \frac{1}{2}, \ 0 \leq x \leq 1\}$ ,  $\{y = 33/50, \ 0 \leq x \leq 1\}$ . On fait les mêmes remarques qu'auparavant, la distance étant maintenant plus petite que  $4 \times 10^{-2}$ .

Exemple 2.3

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = ]0,1[{}^2 - (] \frac{1}{2}, 1[ \times ]0, \frac{1}{2}[) \\ -k\Delta\phi + \frac{\partial\phi}{\partial y} = 1 \quad \text{sur } \Omega \\ \phi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Pour faciliter les calculs on met le problème sous sa forme homogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(x,y) = \phi(x,y) - y \\ -k\Delta\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } \Omega \\ \Psi(x,y) = -y \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Remarquons que pour  $k$  assez petit et suffisamment loin des frontières :

$$\Psi(x,y) \approx \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \text{ si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{array} \right.$$

La solution exacte a un fort gradient proche de  $y = 1$  et de  $x = 1/2$ .

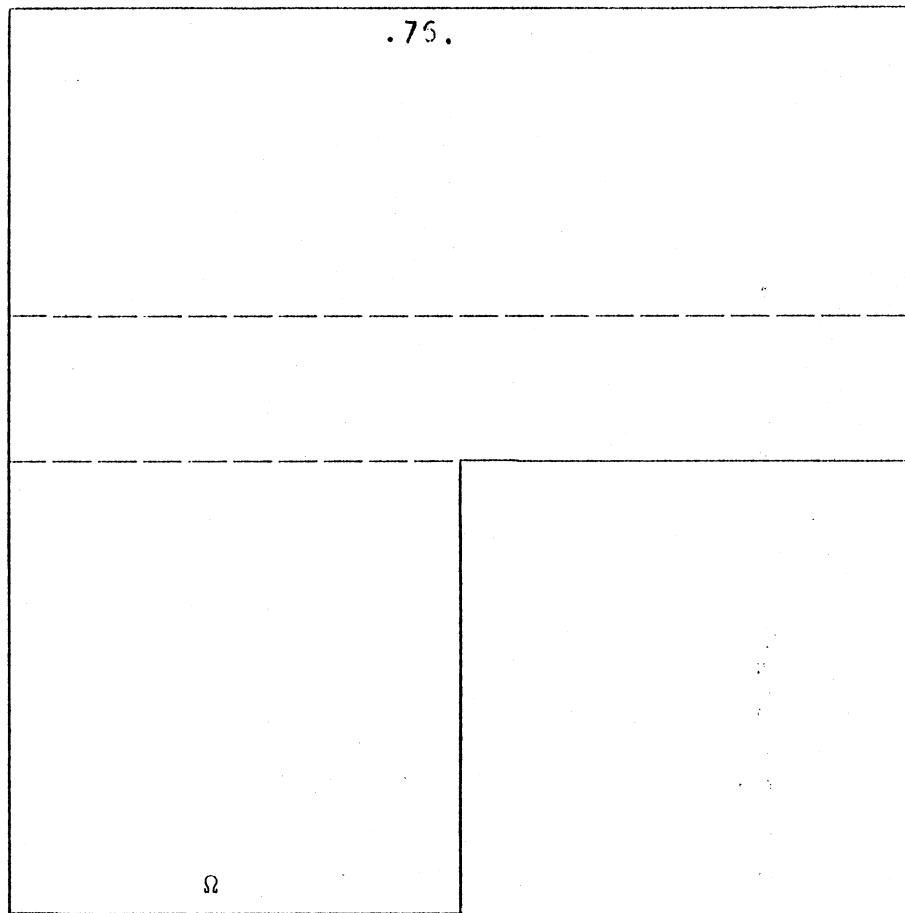
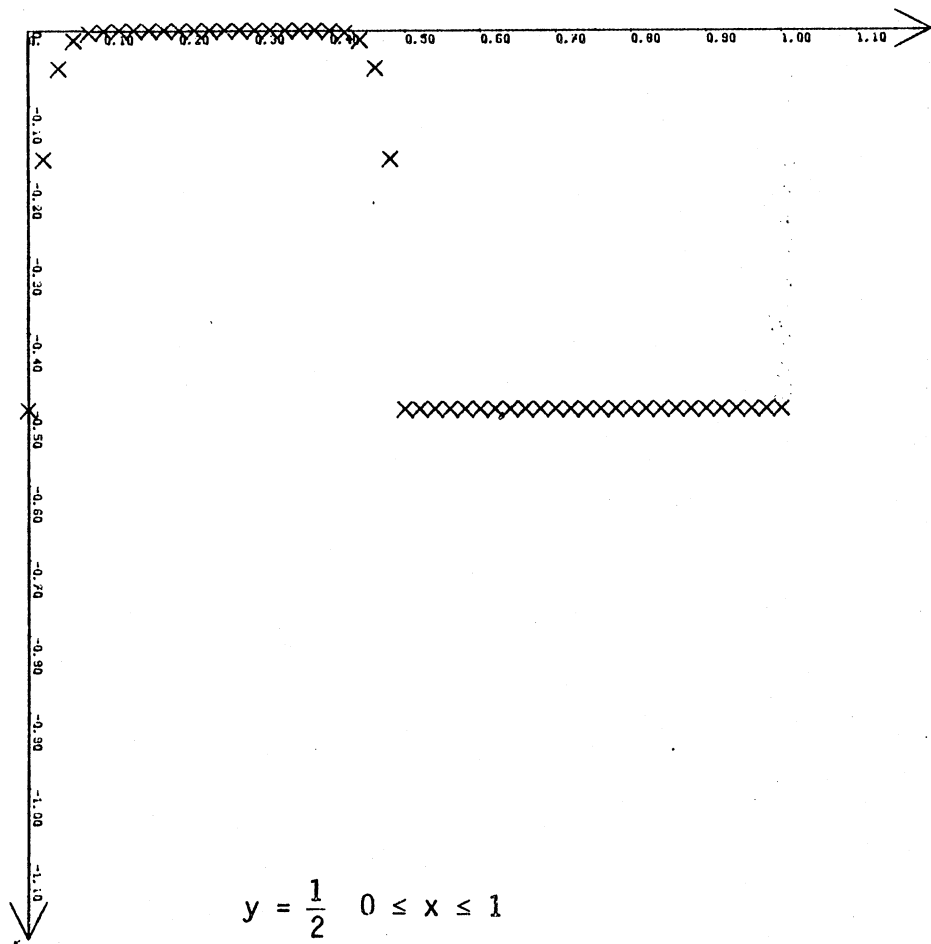


FIGURE 2.5



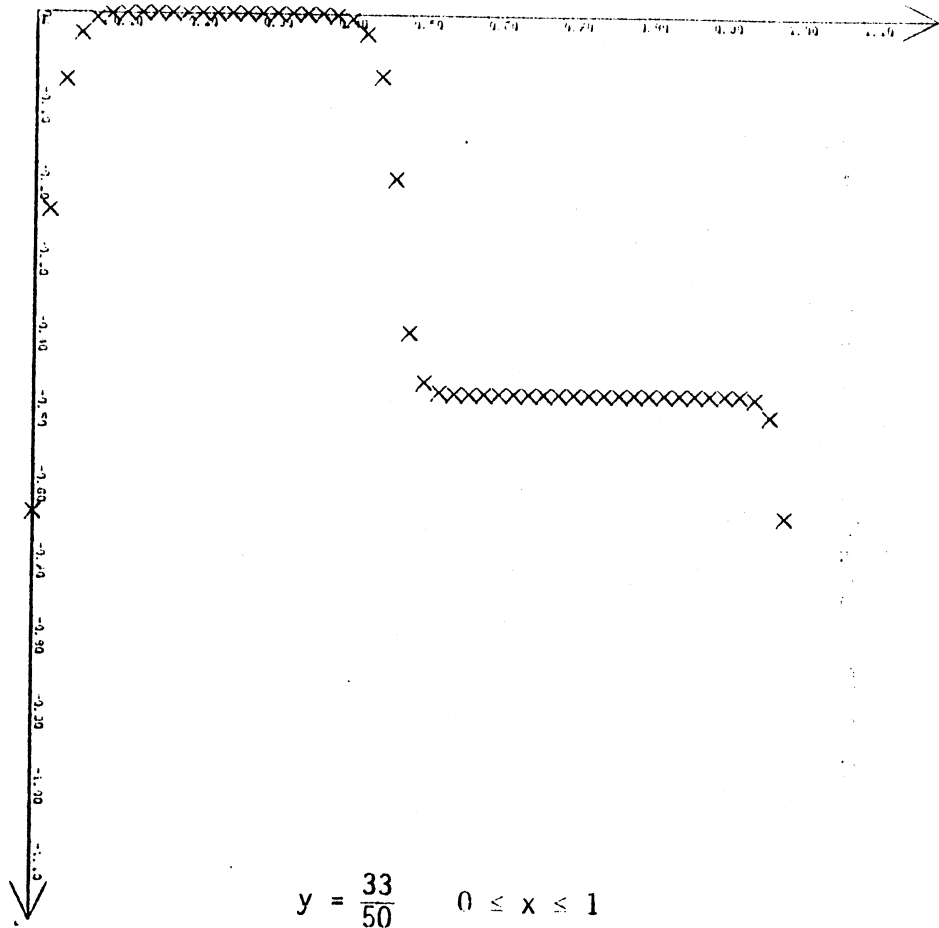


FIGURE 2.7

On remarque l'absence d'oscillations et l'excellente représentation des zones de fort gradient.

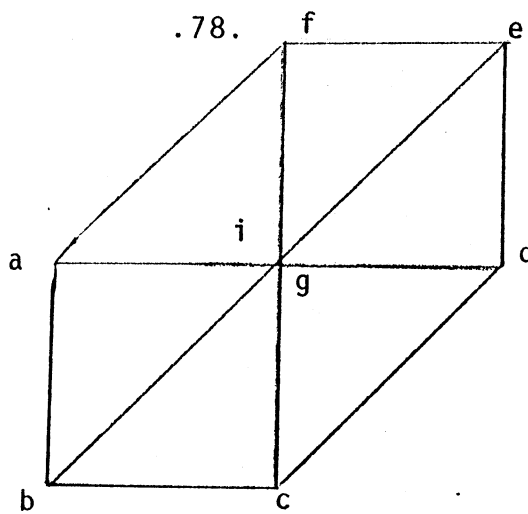
### II.1.7. - Cas limite quand $k \rightarrow 0^+$ .

#### PROPRIÉTÉ 2.4

Le schéma (2.9) quand  $k \rightarrow 0^+$  sur un maillage régulier est complètement décentré en amont ("upwinding"), c'est-à-dire, toute l'information est prise en amont du point de calcul de la solution.

#### Démonstration

Soit  $i$  un noeud intérieur, on écrit les coefficients de la même façon que pour la propriété 2.3 :



$$b = e = 0 \quad d := \begin{cases} \frac{u}{h} & u \leq 0 \\ 0 & u \geq 0 \end{cases}$$

$$a := \begin{cases} -\frac{u}{h} & u \geq 0 \\ 0 & u \leq 0 \end{cases}$$

$$f := \begin{cases} 0 & v \geq 0 \\ \frac{v}{h} & v \leq 0 \end{cases} \quad c := \begin{cases} \frac{v}{h} & v \geq 0 \\ 0 & v \leq 0 \end{cases}$$

$$g := \begin{cases} \frac{(u+v)}{h} & u \geq 0 \quad v \geq 0 \\ -\frac{(u+v)}{h} & u \leq 0 \quad v \leq 0 \\ -\frac{u+v}{h} & u \leq 0 \quad v \geq 0 \\ \frac{u-v}{h} & u \geq 0 \quad v \leq 0 \end{cases}$$

Les coefficients sont calculés comme la limite lorsque  $k \rightarrow 0^+$  des coefficients de la propriété 2.3.

□

## II - CHAMP DE VITESSE NON CONSTANTE

### II.2.1. - Le problème

On considère le problème bidimensionnel suivant :

$$(2.11) \quad -k \Delta \phi + \bar{u} \cdot \nabla \phi = f \text{ sur } \Omega$$

où  $k$ ,  $\phi$ ,  $f$  et  $\Omega$  sont définis de la même façon que pour (2.1), mais  $\bar{u} = (u(x), v(x))$  est une fonction du point d'espace.

On résoudra (2.11) soumis aux mêmes conditions aux limites (2.2).  
 Dans ce cas on ne peut trouver une formulation symétrique :

PROPOSITION 2.5

Soit  $T$  défini par

$$(2.12) \quad T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

$$(T\phi, v) = \left(\frac{\phi}{\rho}, v\right) \quad v \in L^2(\Omega)$$

avec  $\rho(x, y)$  une fonction donnée suffisamment régulière, qui ne s'annule pas sur  $\Omega$ . Alors pour que les problèmes :

$$(2.13) \quad (-k\Delta\phi + \bar{u} \cdot \nabla\phi, v) = (f, v) \quad \forall v \in D(L)$$

$$(2.14) \quad (T^*LT\phi, v) = \frac{1}{k} (T^*Tf, v) \quad \forall v \in D(L)$$

avec

$D(L)$  défini par (2.4) et  $L$  par :

$$(2.15) \quad L : D(L) \rightarrow L^2(\Omega)$$

$$(L\phi, v) = (-k\Delta\phi + (\bar{u} \cdot \nabla\rho - k\Delta\rho)\phi, v) \quad v \in D(L).$$

soient équivalentes il faut que le champ de vitesses soit irrotationnel c'est-à-dire  $\nabla \times \bar{u} = 0$ .

Démonstration

On écrit (2.13) pour  $\phi = \rho T\phi$  :

$$\iint_{\Omega} -k(\rho\Delta(T\phi) + 2\nabla(T\phi) \cdot \nabla\rho + T\phi\Delta\rho) + \rho \bar{u} \cdot \nabla(T\phi) + T\phi(\bar{u} \cdot \nabla\rho) v = \iint_{\Omega} f v \quad \forall v \in D(L).$$

pour que l'équivalence ait lieu, il faut que

$$\iint_{\Omega} (-2k\rho - \nabla\rho \bar{u}) v = 0 \quad \forall v \in D(L)$$



d'où si  $\rho$  et  $\bar{u}$  sont suffisamment régulières :

$$-\frac{2k}{\rho} \nabla \rho = \bar{u}$$

donc :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2k} \left( \frac{uv}{2k} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \rho \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} &= \frac{1}{2k} \left( \frac{uv}{2k} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \rho \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

□

Cette condition est difficile à vérifier dans la pratique, sauf dans le cas à vitesse constante déjà traité. On utilisera une généralisation de la méthode de Petrov-Galerkin proposée par la proposition (2.5).

### II.2.2. - Principes du maximum

Remarquons que la propriété 2.1 est valable, indépendamment du fait que le champ de vitesse soit constant. Elle est aussi vérifiée par la solution du problème (2.11). Alors les schémas numériques devront vérifier la propriété 2.2.

### II.2.3. - Approximation de la solution par une méthode d'éléments finis

Dans ce paragraphe on généralise l'approximation de la vitesse proposée au paragraphe (I.2.5.), avec la formulation du type Petrov-Galerkin donnée par la proposition (2.4).

Considérons un maillage rectangulaire régulier. On définit le domaine quasi-barycentrique  $\delta_i$ , associé au noeud  $i$  du maillage, comme sur la figure 2.8.

On fera une approximation constante par morceaux (sur chacun des  $\delta_i$ ) du champ des vitesses  $\bar{u}$ .

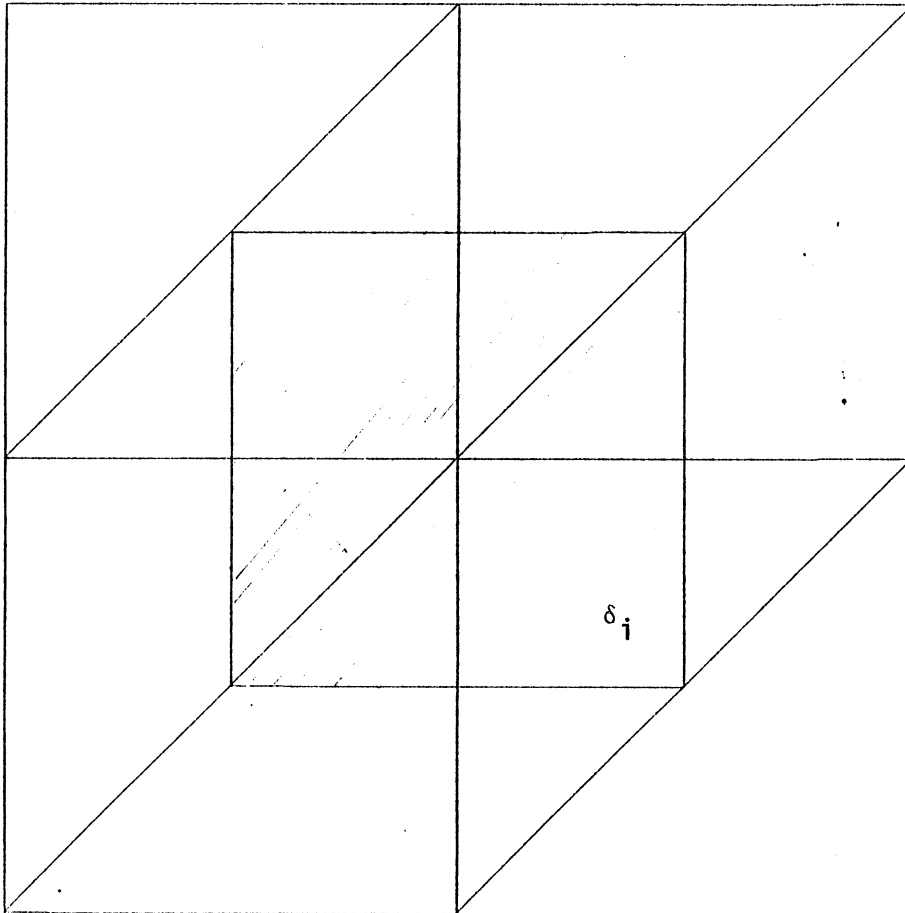


Fig. 2.8

Soient les fonctions suivantes :

$$(2.16) \quad \bar{\omega}_i(x,y) = \begin{cases} \omega_i(x,y) \frac{1}{k} e^{-\frac{1}{k}(u_i(x-x_i)+v_i(y-y_i))} & (x,y) \in \delta_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\omega_i(x,y)$  est la fonction de base de Lagrange de degré un associé au noeud  $i$  de coordonnées  $(x_i, y_i)$  et  $u_i, v_i$  étant les valeurs du champ de vitesse sur ce noeud.

On propose de résoudre le problème (2.13) avec la méthode de Petrov-Galerkin. On utilisera les fonctions définies par (2.16) comme des fonctions test.

PROPOSITION 2.6

Résoudre le problème (2.13) par la méthode de Petrov-Galerkin en utilisant l'espace généré par les  $\omega_i$  comme espace des fonctions de base et celui généré par les  $\bar{\omega}_i$  définies par (2.16) comme espace des fonctions test, revient à résoudre :

$$(2.17) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_h = \sum_j \phi_j \omega_j \\ \iint_{\delta_i} p_i \nabla \phi_h \nabla \omega_i - \int_{\partial \delta_i} p_i \frac{\partial \phi_h}{\partial \hat{n}} \omega_i = \frac{1}{k} \iint_{\delta_i} p_i f \omega_i \end{array} \right.$$

où :  $\hat{n}$  : direction normale extérieure à  $\partial \delta_i$  frontière de  $\delta_i$

et

$$p_i = e^{-\frac{1}{k} (u_i(x-x_i) + v_i(y-y_i))}$$

Démonstration

Le problème à résoudre s'écrit :

Trouver  $\phi_h = \sum_j \phi_j \omega_j$  telle que :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (-k \Delta \phi_h + \bar{u} \cdot \nabla \phi_h) \bar{\omega}_j &= \iint_{\Omega} f \bar{\omega}_j \quad \forall j \\ \iint_{\delta_j} -\Delta \phi_h p_j \omega_j + \frac{1}{k} \bar{u} \cdot \nabla \phi_h p_j \omega_j &= \frac{1}{k} \iint_{\delta_j} p_j f \omega_j \end{aligned}$$

Avec une formule de Green, on peut écrire :

$$\iint_{\delta_j} p_j \nabla \phi_h \nabla \omega_j - \int_{\partial \delta_j} p_j \frac{\partial \phi_h}{\partial n} \omega_j = \frac{1}{k} \iint_{\delta_j} p_j f \omega_j$$

$\delta_j$  étant à l'intérieur du support de  $\omega_j$ , un terme de bord apparaît.

□

L'équation générale du système linéaire (2.17) sur un maillage régulier pour un noeud intérieur, s'écrit :

$$(2.18) \quad a_{i,i-n} \phi_h(x_i, y_i - h) + a_{i,i-1} \phi_h(x_i - h, y_i) + a_{ii} \phi_h(x_i, y_i) \\ + a_{ii+1} \phi_h(x_i + h, y_i) + a_{ii+n} \phi_h(x_i, y_i + h) = d_i$$

n étant le nombre de points par côté du maillage dont h est le pas.

$$d_i := \frac{1}{k} \iint_{\Omega_i} p_i f \omega_i$$

et pour  $u_i \neq 0$ ,  $v_i \neq 0$ ,  $u_i + v_i \neq 0$ , on trouve :

$$- a_{i,i-n} = \frac{e^{-\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}}{2\theta_2} (e^{\frac{\theta_2}{2}} s(\theta_1) - s(\theta_1 + \theta_2)) + \frac{e^{-\frac{\theta_1}{2} + \theta_2}}{2\theta_2} s(\theta_1) \\ + e^{\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} s(\theta_1) s(\theta_2) + \frac{e^{\theta_2}}{4\theta_1} (1 - 2e^{-\frac{\theta_1}{2}} s(\theta_1))$$

$$- a_{i,i-1} = e^{\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} s(\theta_1) s(\theta_2) + \frac{e^{\theta_1}}{4\theta_1} (1 - 2e^{-\frac{\theta_2}{2}} s(\theta_2)) + \\ \frac{e^{\frac{\theta_1}{2}}}{2\theta_2} (e^{\frac{\theta_2}{2}} s(\theta_1 + \theta_2) - s(\theta_1)) + \frac{e^{\theta_1 + \frac{\theta_2}{2}}}{2} s(\theta_2)$$

$$- a_{i,i+1} = e^{\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} s(\theta_1) s(\theta_2) + \frac{e^{-\theta_1}}{4\theta_2} (2e^{\frac{\theta_2}{2}} s(\theta_2) - 1) \\ + \frac{e^{-\frac{\theta_1}{2}}}{2\theta_2} (s(\theta_1) - e^{-\frac{\theta_2}{2}} s(\theta_1 + \theta_2)) + \frac{e^{-(\theta_1 + \frac{\theta_2}{2})}}{2} s(\theta_2)$$

$$- a_{i,i+n} = \frac{e^{-\frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2}}}{2\theta_2} (s(\theta_1 + \theta_2) - e^{-\frac{\theta_2}{2}} s(\theta_1)) + \frac{e^{-\frac{\theta_1}{2} + \theta_2}}{2} s(\theta_1) \\ + e^{-\frac{(\theta_1 - \theta_2)}{2}} s(\theta_1) s(\theta_2) + \frac{e^{-\theta_2}}{4\theta_1} (2e^{\frac{\theta_1}{2}} s(\theta_1) - 1)$$

$$a_{i,i} = -(a_{i,i-n} + a_{i,i-1} + a_{i,i+1} + a_{i,i+n})$$

où :

$$\theta_1 = \frac{u_i h}{2k}, \quad \theta_2 = \frac{v_i h}{2k} \quad s(\theta) = \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)/\theta$$

Remarquons qu'il s'agit d'un système de "somme nulle" à condition que les éléments hors diagonaux soient négatifs. Par ailleurs, on peut calculer la limite lorsque  $k \rightarrow 0^+$  des coefficients, on tend vers la méthode décentrée de la propriété (2.4), ce qui montre, étant donné que les coefficients sont des fonctions continues du paramètre  $k$ , que pour  $k$  assez petit le système est bien de "somme nulle". Les systèmes résolus lors des exemples numériques ont tous cette propriété.

#### II.2.4. - Exemples numériques

Pour les exemples qui suivent on a considéré un maillage triangulaire régulier de pas  $h = 0.02$ . La constante de diffusion  $k$  a été prise égale à 0.001.

##### Exemple 2.4

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = ]0,1[{}^2 \\ -k\Delta\phi + \left(\frac{1}{2} - y\right) \frac{\partial\phi}{\partial x} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \text{ sur } \Omega \\ \phi(x,y) = 10\left(1 + \cos\left(4\pi\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right)\right) \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Sur les figures (2.9) et (2.10) on a tracé le profil de la solution pour  $\{y = \frac{1}{2} \mid 0 \leq x \leq 1\}$  et  $\{y = \frac{33}{50} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ .

On compare avec la solution du problème purement convectif. Etant donné la forte concavité de la solution, on doit s'attendre à ce que la solution pour  $k \approx 10^{-3}$  soit encore loin de la solution purement convective. (Le terme  $k\Delta\phi$  n'étant pas négligeable). On peut remarquer que la solution numérique n'est pas oscillatoire et encore éloignée de la solution convective

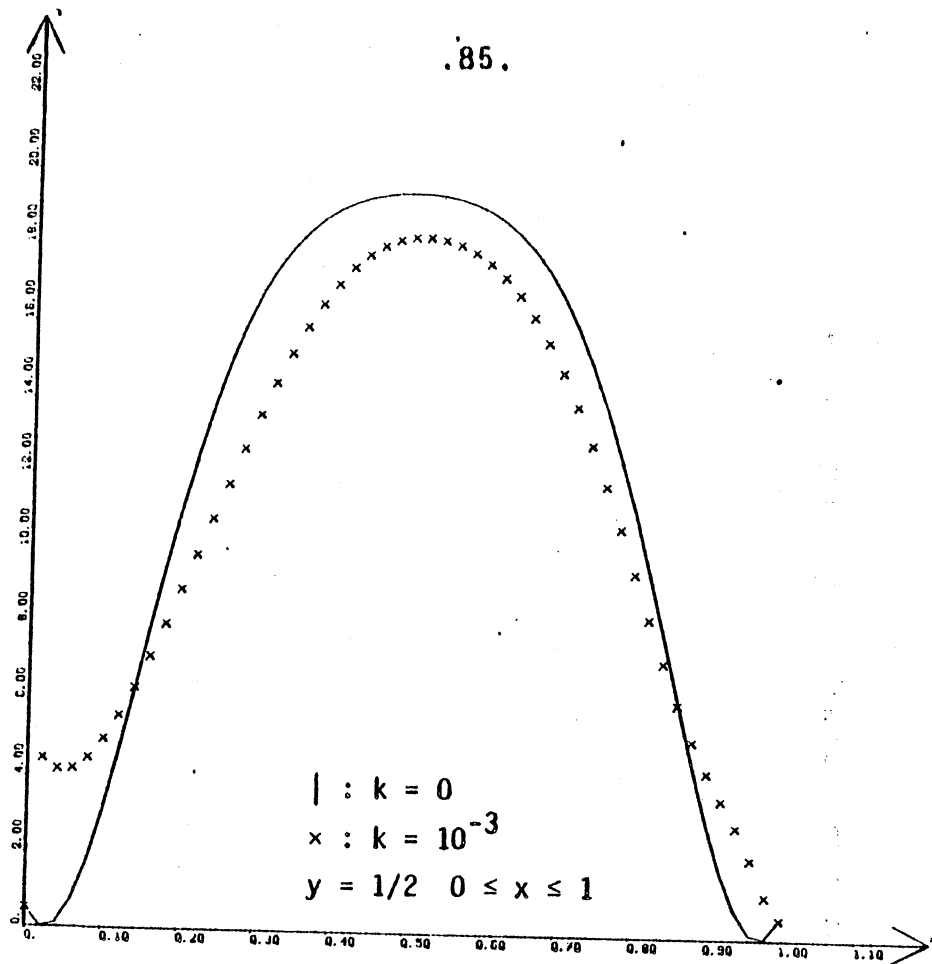


FIGURE 2.9

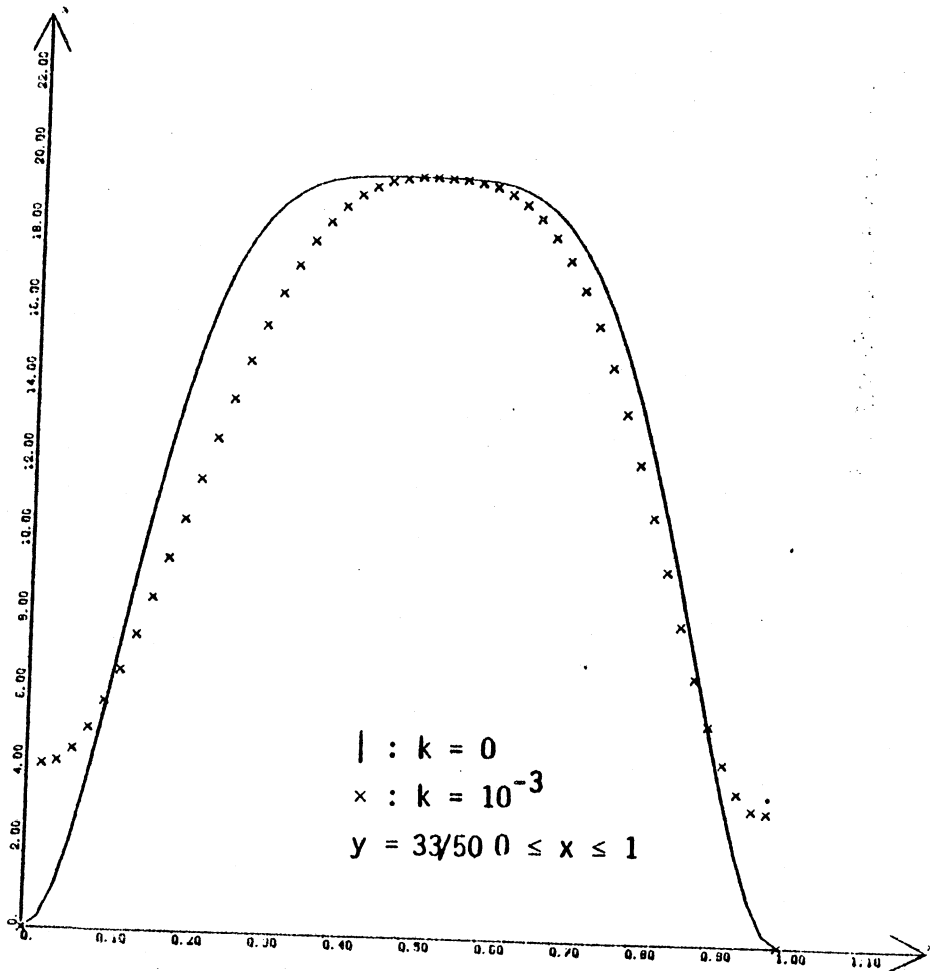


FIGURE 2.10

Exemple 2.5

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = ]0,1[^2 \\ -k\Delta\phi + \left(\frac{1}{2} - y\right) \frac{\partial\phi}{\partial x} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \text{ sur } \Omega \\ \phi(x,y) = 10\left(1 + \cos\left(0.4\pi \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right)\right) \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Sur les figures 2.11 et 2.12 on a tracé le profil de la solution pour  $\{y = \frac{1}{2} \quad 0 \leq x \leq 1\}$  et  $\{y = \frac{33}{50} \quad 0 \leq x \leq 1\}$ . On remarque que la solution numérique n'est pas oscillatoire, même en étant très proche de la solution purement convective (distance < 0.2).

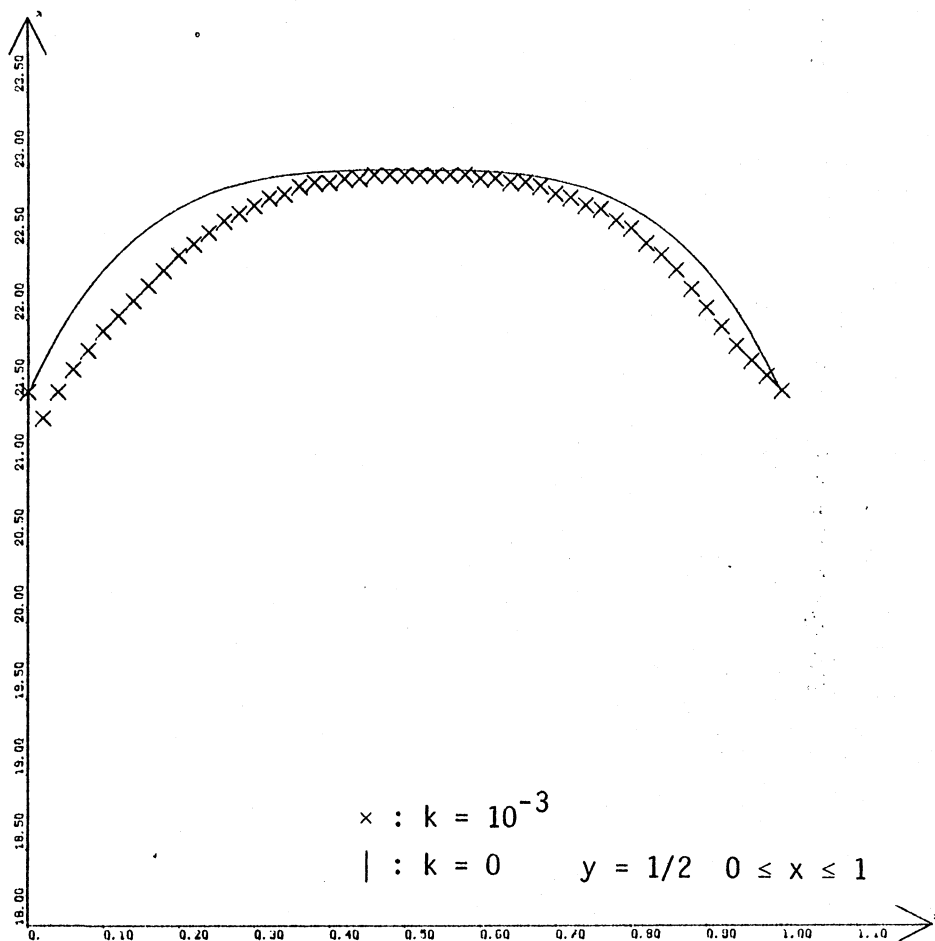


FIGURE 2.11

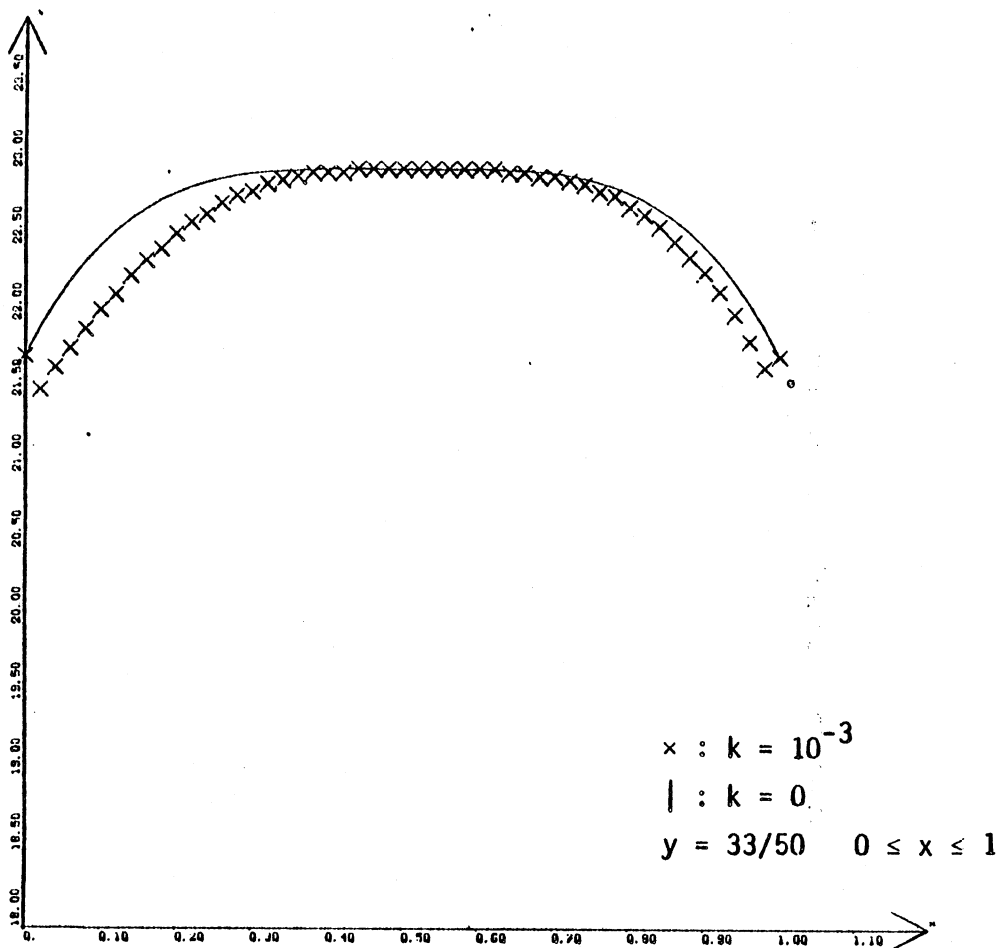


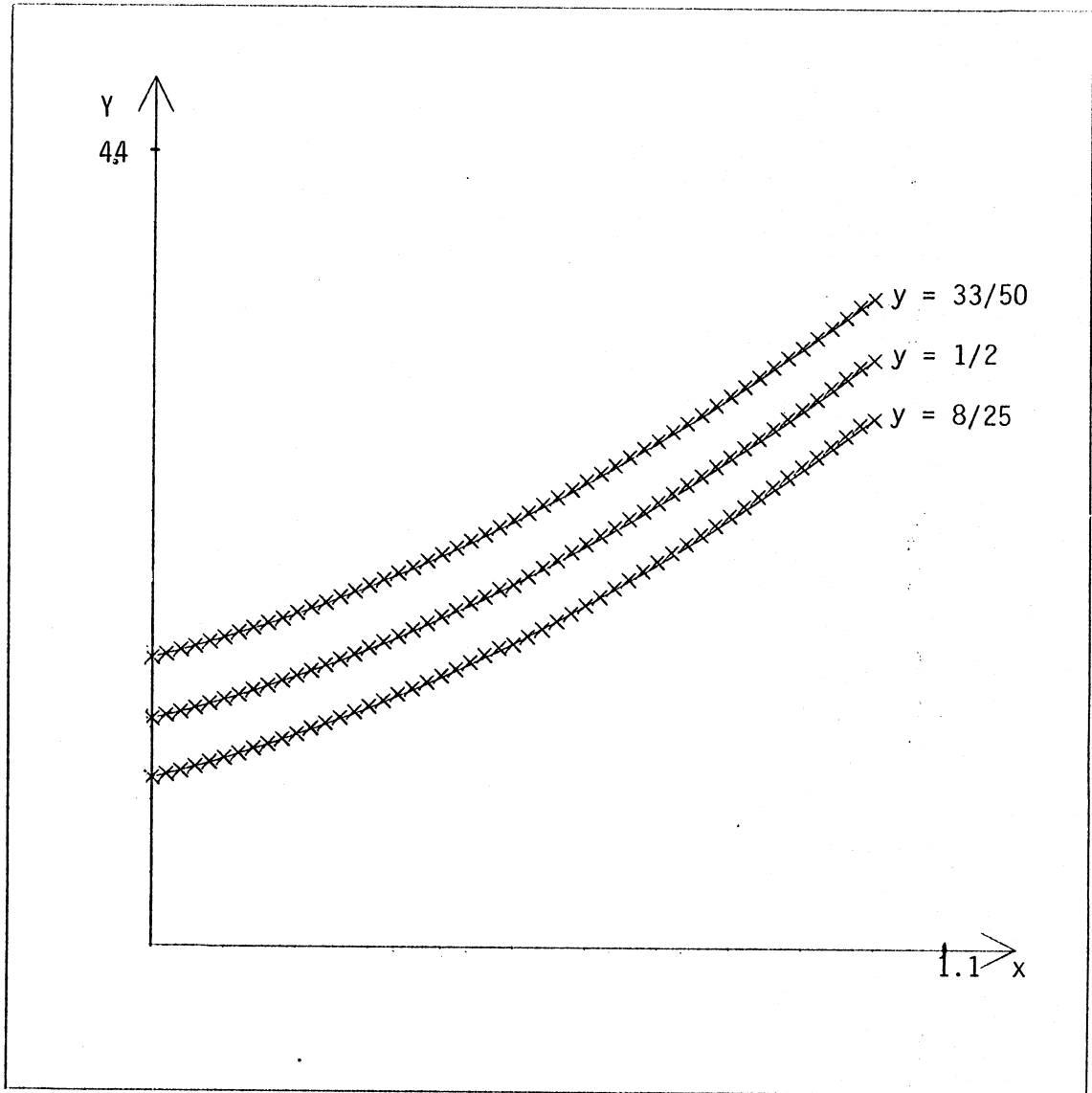
FIGURE 2.12

Exemple 2.6

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = ]0,1[{}^2 \\ \Gamma_0 = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \times \left] 0, \frac{1}{2} \right] \\ -k\Delta\phi + \frac{1}{x + \frac{1}{2}} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{-1}{y + \frac{1}{2}} \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \text{ sur } \Omega \\ \phi(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \text{ sur } \partial\Omega \cup \Gamma_0 \end{array} \right.$$

Sur la figure (2.13) on a tracé les profils de la solution pour  $y = \frac{33}{50}, \frac{1}{2}$  et  $\frac{8}{25}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . On remarque que la solution est presque celle du problème purement convectif (distance  $< 3 \times 10^{-2}$ ).





x :  $k = 10^{-3}$   
| :  $k = 0$

FIGURE 2.13

### III - PROBLEME NON STATIONNAIRE UNIDIMENSIONNEL

III.1 - Le problème

III.2 - Principes de maximum

III.3 - Une formulation équivalente

III.4 - Approximation de la solution par une méthode  
d'éléments finis

III.5 - Exemple numérique

## III - PROBLEME NON STATIONNAIRE

III.1 - LE PROBLEME

On s'intéresse au problème évolutif suivant :

$$(3.1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} = f \quad x \in ]0,1[ \\ \phi(x,0) = \phi_0(x) \quad t \in ]0,T[ \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{array} \right.$$

où  $f$  est une fonction de  $]0,1[ \times ]0,T[$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\phi$  est la fonction inconnue de  $]0,1[ \times ]0,T[$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $k$  est une constante et  $u$  de  $]0,1[$  dans  $\mathbb{R}$ , est une fonction donnée.  $\phi_0(x)$  est la condition initiale.

On va étudier la résolution de (3.1) discrétisée en temps. Pour cela, on fait une discrétisation classique (on pourrait utiliser une autre) :

$$(3.2) \left\{ \begin{array}{l} -k\phi_{n+1}'' + u\phi_{n+1}' + \frac{1}{\Delta t} \phi_{n+1} = f + \frac{1}{\Delta t} \phi_n \quad x \in ]0,1[ \quad n \geq 0 \\ \phi_0, \quad \phi_{n+1}(0) = \phi_{n+1}(1) = 0 \end{array} \right.$$

où :

$$\phi_{n+1}'' = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} (x, (n+1)\Delta t) \quad \phi_{n+1}' = \frac{\partial \phi}{\partial x} (x, (n+1)\Delta t)$$

$$\phi_{n+1} = \phi(x, (n+1)\Delta t) \quad \Delta t := \text{pas de discrétisation temporelle}$$

Alors, à chaque pas de temps il va falloir résoudre un problème du type :

$$(3.3) \left\{ \begin{array}{l} -k\phi''(x) + u(x) \phi'(x) + c \phi(x) = g(x) \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \\ c \geq 0 \end{array} \right. \quad x \in ]0,1[$$

On fera la même étude que dans les chapitres précédents

III.2 - PRINCIPE DU MAXIMUM

PROPRIETE 3.1

La solution  $\phi(x)$  du problème (3.3), pour le cas où  $g(x)$  est une fonction positive, n'a pas de minima négatifs, les points pour lesquels  $\phi'(x) = 0$  sont tels que  $\phi(x) > 0$ .

Démonstration

Soit  $\bar{x} \in ]0,1[$  un minimum local tel que  $\phi(\bar{x}) \leq 0$ , alors sur ce point :

$$-k\phi''(\bar{x}) + u(\bar{x})\phi'(\bar{x}) + c\phi(\bar{x}) = g(\bar{x})$$

$$\Rightarrow \phi''(\bar{x}) = (g(\bar{x}) + (-c)\phi(\bar{x})) / (-k)$$

$$\Rightarrow \phi''(\bar{x}) < 0 \text{ ce qui est contradictoire.}$$

□

PROPRIETE 3.2 (Principe du maximum discret)

Soit un système linéaire tridiagonal :

$$c_{i-1} \phi_{i-1} + a_i \phi_i + b_i \phi_{i+1} = d_i \quad i = 1, \dots, n$$

vérifiant :

$$a_i + b_i + c_{i-1} \geq 0 \quad (\} \text{ et t.q. l'inégalité est stricte)}$$

$$c_{i-1} \leq 0$$

$$b_i \leq 0$$

On l'appellera du "type positif". Alors la solution  $\phi_j$   $1 \leq j \leq n$ , vérifie la propriété suivante si  $d_i \geq 0 \quad \forall i$  :

$$\text{si } \min_{1 \leq j \leq n} \phi_j = \phi_k = m \leq 0 \Rightarrow \phi_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Démonstration

Si  $\phi_k$  est un minimum alors  $\phi_{k+1} = \phi_k + \varepsilon_1$  et  $\phi_{k-1} = \phi_k + \varepsilon_2$  avec  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ . On peut donc écrire :

$$\varepsilon_1 b_i + \varepsilon_2 c_{i-1} = d_i + (-m)(a_i + b_i + c_i)$$

On a que le membre de gauche est positif et celui de droite négatif, donc :

$$\varepsilon_1 b_i + \varepsilon_2 c_{i-1} = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,$$

d'où  $\phi_i = \phi_j \quad \forall i \quad \forall j$ .

En plus

$$d_i + (-m)(a_i + b_i + c_{i-1}) = 0$$

$\Rightarrow d_i = 0 \quad \forall i$  et  $m = 0$  puisque  $i_l$  existe et tel que  $a_{i_l} + b_{i_l} + c_{i_l-1} > 0$ . Donc  $\phi_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ .

□

Il est souhaitable que les schémas numériques vérifient la propriété 3.2 de façon à respecter le principe du maximum.

III.3 - UNE FORMULATION EQUIVALENTE

On définit deux opérateurs T et L comme suit :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} T : L^2[0,1] &\rightarrow L^2[0,1] \\ (T\phi, v) &= \int_0^1 e^{-\frac{1}{2k}x} \int_0^x u(s) ds \quad \phi v \quad v \in L^2[0,1] \end{aligned}$$

$$(3.5) \quad \begin{aligned} L : D(L) &\rightarrow L^2[0,1] \\ (L\phi, v) &= \int_0^1 \left( -\phi'' + \left(\frac{c}{k} + \left(\frac{u}{2k}\right)^2 - \frac{u'}{2k}\right)\phi \right) v \quad v \in D(L) \end{aligned}$$

où  $D(L) = \{v \in L^2[0,1] / v \text{ absolument continue, } v' \in L^2[0,1], v(0)=v(1)=0\}$ .

PROPOSITION 3.1

Les opérateurs T et L sont symétriques.

Démonstration

Elle est évidente pour T (cf. Proposition 1.16).

Pour L, on écrit :

$$\begin{aligned} (L\phi, \psi) &= \int_0^1 \left( -\phi'' + \left[ \frac{u^2}{4k^2} + \frac{c}{k} - \frac{u'}{2k} \right] \phi \right) \psi \\ &= \int_0^1 \left( -\psi'' \phi + \left[ \frac{c}{k} + \left( \frac{u}{2k} \right)^2 - \frac{u'}{2k} \right] \phi \psi \right) = (\phi, L\psi) \end{aligned}$$

en intégrant par parties.

□

Remarque : Si  $v \in D(L)$ , on a que  $Tv \in D(L)$ , ce qui nous permettra, comme dans les chapitres précédents, de poser le problème dans  $D(L)$ .

PROPOSITION 3.2

L'opérateur L est défini positif.

Démonstration

$$\begin{aligned} (L\lambda, \lambda) &= \int_0^1 \left( -\lambda'' + \left( \frac{c}{k} + \left( \frac{u}{2k} \right)^2 - \frac{u'}{2k} \right) \lambda \right) \lambda \quad \lambda \in D(L) \\ &= \int_0^1 \left( \lambda' \right)^2 + \left( \frac{c}{k} + \left( \frac{u}{2k} \right)^2 - \frac{u'}{2k} \right) \lambda^2 \\ &= \int_0^1 \left( \lambda' \right)^2 + \left( \left( \frac{u}{2k} \right)^2 - \frac{u'}{2k} \right) \lambda^2 + \frac{c}{k} \int_0^1 \lambda^2 \\ &= \int_0^1 \left( \lambda' - \frac{u}{2k} \lambda \right)^2 + \frac{c}{k} \int_0^1 \lambda^2 \geq 0 \quad \forall \lambda \in D(L). \end{aligned}$$

Puisque  $c \geq 0$ ,  $k \geq 0$ .

□

PROPOSITION 3.3

L'équation (3.3) est équivalente à :

$$(3.6) \quad (T^*LT\phi, v) = \frac{1}{k} (T^*Tg, v) \quad \begin{array}{l} \phi \in D(L) \\ \forall v \in D(L) \end{array}$$

Démonstration

i) Soit  $\phi$  solution de (3.3), et  $\xi = T\phi$

$$\begin{aligned} (T^*LT\phi, v) &= (L\xi, Tv) = (-\xi'' + (\frac{c}{k} + (\frac{u}{2k})^2 - \frac{u'}{2k})\xi, Tv) \\ &= \frac{1}{k} (-k\phi'' + u\phi' + c\phi, T^*Tv) \end{aligned}$$

et puisque  $\phi$  est solution de (3.3) :

$$= \frac{1}{k} (g, T^*Tv) = \frac{1}{k} (T^*Tg, v) \quad \forall v \in D(L)$$

ii) Soit  $\phi \in D(L)$  solution de (3.6) :

$$\begin{aligned} (-k\phi'' + u\phi' + c\phi, v) &= (k T^{-1}(T(-\phi'')) + T(\frac{u}{k} \phi') + \frac{1}{k} T(c\phi)) \\ &= k(-(\phi')'' + [(\frac{u}{2k})^2 - \frac{u'}{2k} + \frac{c}{k}] T\phi, (T^{-1})^*v) \\ &= k(T^*LT\phi, (T^{-1})(T^{-1})^*v) \quad \forall v \in D(L) \end{aligned}$$

étant donné que  $\phi$  est solution de (3.6) :

$$\begin{aligned} &= k \frac{1}{k} (T^*Tg, (T^{-1})(T^{-1})^*v) \\ &= (g, v) \end{aligned}$$

□

On retrouve alors les mêmes propriétés énoncées et démontrées dans le cas stationnaire :

Il existe  $K$  tel que  $L = K^*K$ , l'équation (3.6) est équivalente à :

$$(3.7) \quad ((KT)^*(KT)\phi, v) = \frac{1}{k} (T^*Tg, v) \quad \begin{array}{l} \phi \in D(L) \\ \forall v \in D(L) \end{array}$$

qui a une seule solution.

### III.4 - APPROXIMATION DE LA SOLUTION PAR UNE METHODE D'ELEMENTS FINIS

Dans ce paragraphe on trouvera un schéma de "type positif" de façon à respecter le principe du maximum vérifié par la solution du problème continu. On donnera une condition à vérifier par le pas de temps  $\Delta t$ , par rapport au pas d'espace  $h$ .

Considérons les fonctions suivantes :

$$(3.8) \quad \bar{\omega}_i(x) = \begin{cases} \frac{2}{h}(x-x_{i-1/2}) & x_{i-1/2} \leq x \leq x_i \\ \frac{2}{h}(x_{i+1/2}-x) & x_i \leq x \leq x_{i+1/2} \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

où :

$$x_{i\pm 1/2} = x_i \pm \frac{h}{2}$$

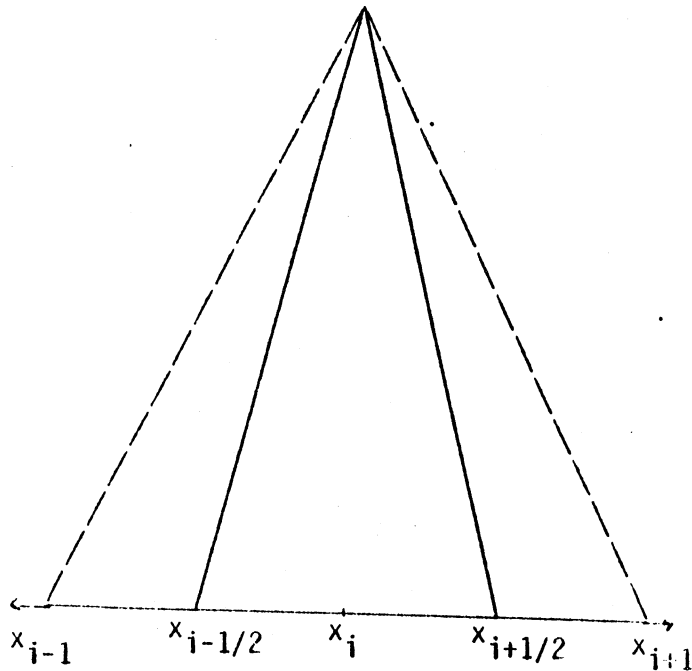


FIGURE 3.1



On propose de résoudre (3.6) avec une méthode de Petrov-Galerkin, en utilisant comme fonctions base les fonctions  $\omega_j$  (cf. chapitre I) et comme fonctions test les  $\bar{\omega}_i$  définies par (3.8), c'est-à-dire :

$$(3.9) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_h = \sum_j \phi_j \omega_j \text{ telle que :} \\ \sum_j \phi_j \int_0^1 T^* L T \omega_j \bar{\omega}_i = \frac{1}{k} \int_0^1 T^* T g \bar{\omega}_i \quad \forall i \end{array} \right.$$

On va utiliser dans le calcul le lemme suivant :

Lemme 3.1

$$\int_0^1 T^* L T \omega_j \bar{\omega}_i = \int_0^1 T \omega_j' T \bar{\omega}_i' + \frac{c}{k} \int_0^1 T \omega_j T \bar{\omega}_i$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \int_0^1 T^* L T \omega_j \bar{\omega}_i &= \int_0^1 (T \omega_j' - \frac{u}{2k} T \omega_j) (T \bar{\omega}_i' - \frac{u}{2k} T \bar{\omega}_i) \\ &\quad + \frac{c}{k} \int_0^1 T \omega_j T \bar{\omega}_i + \int_0^1 (\frac{u}{2k})^2 T \omega_j T \bar{\omega}_i - \int_0^1 \frac{u'}{2k} T \omega_j T \bar{\omega}_i \end{aligned}$$

en développant on trouve :

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (T \omega_j') (T \bar{\omega}_i') + \int_0^1 \frac{u'}{2k} (T \omega_j) (T \bar{\omega}_i) \\ &\quad - 2 \int_0^1 (\frac{u}{2k})^2 T \omega_j T \bar{\omega}_i + \int_0^1 \frac{u}{2k} T \omega_j T \bar{\omega}_i - \int_0^1 \frac{u}{2k} T \omega_j T \bar{\omega}_i \\ &\quad + 2 \int_0^1 (\frac{u}{2k})^2 T \omega_j T \bar{\omega}_i - \int_0^1 \frac{u}{2k} T \omega_j T \bar{\omega}_i + \frac{c}{k} \int_0^1 T \omega_j T \bar{\omega}_i \\ &= \int_0^1 T \omega_j' + T \bar{\omega}_i' + \frac{c}{k} \int_0^1 T \omega_j T \bar{\omega}_i. \end{aligned}$$

□

Donc, (3.9) peut s'écrire :

$$(3.10) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_h = \sum_j \phi_j \omega_j \text{ telle que :} \\ a_{i-1} \phi_{i-1} + a_i \phi_i + a_{i+1} \phi_{i+1} = g_i \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

où :

$$a_{i-1} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tau_{i-1} \bar{\tau}_i + \frac{c}{k} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tau_{i-1} \bar{\tau}_i$$

$$a_{ii} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tau_i \bar{\tau}_i + \frac{c}{k} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tau_i \bar{\tau}_i$$

$$a_{i+1} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tau_{i+1} \bar{\tau}_i + \frac{c}{k} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tau_{i+1} \bar{\tau}_i$$

$$g_i = \frac{1}{k} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tau^* \tau g \bar{\tau}_i$$

On fera dans ce qui suit l'approximation :

$$(3.11) \quad u(x) \approx u(x_i) =: u_i$$

Si l'on calcule les intégrales de (3.10) et l'on fait l'approximation (3.11) on peut écrire (3.9) :

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_h = \sum_j \phi_j \omega_j \text{ telle que :} \\ c_{i-1} \phi_{i-1} + a_i \phi_i + b_i \phi_{i+1} = g_i \end{array} \right.$$

où :

$$c_{i-1} = \left[ \left( \frac{ch}{2u_i} + \frac{2ck}{u_i^2} + 1 \right) e^{-\frac{u_i h}{2k}} + \frac{ch}{2u_i} - \frac{2ck}{u_i^2} - 1 \right]$$

$$b_i = \left[ e^{-\frac{u_i h}{2k}} c_{i-1} \right]$$

$$a_i = \left[ \left( \frac{ch}{2u_i} - \frac{2ck}{u_i^2} - 1 \right) e^{-\frac{u_i h}{k}} - \frac{3ch}{u_i} e^{-\frac{u_i h}{2k}} + \frac{2ck}{u_i^2} + \frac{ch}{2u_i} + 1 \right]$$

$$g_i = \frac{h}{k^2} \left[ \int_0^{h/2} e^{-\frac{u_i s}{k}} f(s+x_{i-1/2}) s \, ds + \int_{h/2}^h e^{-\frac{u_i s}{k}} f(s+x_{i-1/2})(h-s) \, ds \right]$$

PROPOSITION 3.4

$a_i + b_i + c_{i-1}$  a le même signe que  $u_i$  et  $c_{i-1}$  et  $b_i$  ont toujours le même signe.

Démonstration

On écrit la somme :

$$\begin{aligned} a_i + b_i + c_{i-1} &= \frac{ch}{u_i} \left( 1 + e^{-\frac{u_i h}{2k}} + e^{-\frac{u_i h}{k}} \right) - \frac{3ch}{u_i} e^{-\frac{u_i h}{2k}} \\ &= \frac{ch}{u_i} \left( 1 - e^{-\frac{u_i h}{2k}} \right)^2 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Etant donné que  $e^{-\frac{u_i h}{2k}}$  est toujours positif,  $b_i$  et  $c_{i-1}$  ont toujours le même signe.

□

PROPOSITION 3.5

Une condition suffisante pour que (3.12) soit un système du "type positif" est que :

$$(3.13) \quad c < \frac{u_i^2}{2k} \frac{\tanh \left| \frac{\delta_i}{4} \right|}{\left| \frac{\delta_i}{4} \right| - \tanh \left| \frac{\delta_i}{4} \right|} \quad i = 1, \dots, n$$

avec

$$\delta_i := \frac{u_i h}{k}.$$

Démonstration

Si  $u_i > 0$  on précisera  $c_{i-1} < 0$ , c'est-à-dire :

$$\left( \frac{ch}{2u_i} + \frac{2ck}{u_i^2} + 1 \right) e^{-\frac{u_i h}{2k}} + \frac{ch}{2u_i} - \frac{2ck}{u_i^2} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{ch}{2u_i} (e^{-\delta_i/2} + 1) < \left( 1 + \frac{2ck}{u_i^2} \right) (1 - e^{-\delta_i/2})$$

$$\frac{ch}{2u_i} (e^{-\delta_i/4} + e^{\delta_i/4}) < \left( 1 + \frac{2kc}{u_i^2} \right) (e^{\delta_i/4} - e^{-\delta_i/4})$$

$$\frac{\frac{ch}{2u_i}}{1 + \frac{2kc}{u_i^2}} < \tanh\left(\frac{\delta_i}{4}\right)$$

donc

$$c\left[\frac{\delta_i}{4} - \tanh\left(\frac{\delta_i}{4}\right)\right] < \frac{u_i^2}{2k} \tanh\left(\frac{\delta_i}{4}\right)$$

Mais,  $\frac{\delta_i}{4} > \tanh\left(\frac{\delta_i}{4}\right)$  si  $\delta_i > 0$ . Alors on arrive à la condition suivante :

$$c < \frac{u_i^2}{2k} \frac{\tanh\left(\frac{\delta_i}{4}\right)}{\frac{\delta_i}{4} - \tanh\left(\frac{\delta_i}{4}\right)} \quad \forall i / u_i > 0.$$

Si  $u_i < 0$  alors on doit avoir  $c_{i-1} \geq 0$ . Les mêmes calculs qu'auparavant nous amènent à :

$$c\left(\frac{\delta_i}{4} - \tanh\left(\frac{\delta_i}{4}\right)\right) > \frac{u_i^2}{2k} \tanh\left(\frac{\delta_i}{4}\right)$$

Mais  $\delta_i < 0$  donc  $\frac{\delta_i}{4} - \tanh\left(\frac{\delta_i}{4}\right) < 0$  d'où :

$$c < \frac{u_i^2}{2k} \frac{\tanh\left(\frac{\delta_i}{4}\right)}{\frac{\delta_i}{4} - \tanh\left(\frac{\delta_i}{4}\right)} \quad \forall i / u_i < 0$$

Donc, en général :

$$c < \frac{u_i^2}{2k} \frac{\tanh\left(\left|\frac{\delta_i}{4}\right|\right)}{\left|\frac{\delta_i}{4}\right| - \tanh\left(\left|\frac{\delta_i}{4}\right|\right)} \quad \forall i$$

□

La condition (3.13) n'étant pas facile à calculer, pour déterminer  $c$ , on va la traduire d'une façon plus simple.

Si l'on considère, comme c'est le cas, que l'on s'intéresse aux valeurs petites de  $k$ , on peut écrire :

$$\exists \epsilon_0 < \frac{u_i h}{2} \text{ tel que } \forall \epsilon > \epsilon_0 \quad \tanh\left(\frac{|u_i h|}{4k}\right) > \frac{1}{2}$$

donc

$$\frac{|u_i h|}{4k} - \tanh\left(\frac{|u_i h|}{4k}\right) < \frac{-1}{2} + \frac{u_i h}{4k}$$

et alors

$$\frac{1}{\frac{u_i h}{4k} - \tanh\left(\frac{u_i h}{4k}\right)} > \frac{1}{\frac{u_i h}{4k} - \frac{1}{2}}$$

donc la condition (3.13) sera respectée si l'on choisit :

$$c < \frac{u_i^2}{|u_i| h - 2k}$$

et si  $k$  est suffisamment petit :

$$c < \frac{u_i^2}{|u_i| h}$$

Rappelons que  $c$  joue le rôle de l'inverse du pas de discrétisation temporelle  $\Delta t$ .

Enfin, d'une façon très simple, pour le problème d'évolution (3.2) si l'on choisit le pas de temps tel que :

$$\frac{h}{\Delta t} < \text{Max } |u_i| \quad i = 1, \dots, n$$

on aura à chaque pas de temps à résoudre un schéma du "type positif".

### III - EXEMPLE NUMERIQUE

Considérons le problème suivant :

$$(3.14) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \phi(0, t) = \phi(1, t) = 0 \\ \phi(x, 0) = \sin \pi x. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in ]0, 1[ \\ t > 0 \end{array}$$

On discrétise la variable temporelle et l'on obtient :

$$(3.15) \left\{ \begin{array}{l} -k\phi_{n+1}''(x) + \phi_{n+1}'(x) + \frac{1}{\Delta t} \phi_{n+1}(x) = \frac{1}{\Delta t} \phi_n(x) \quad 0 < x < 1 \\ \phi_{n+1}(0) = \phi_{n+1}(1) = 0 \\ \phi_0(x) = \sin \pi x. \end{array} \right. \quad n \geq 0$$

Avec la même notation que pour (3.2).

La solution du problème (3.14) est donnée par :

$$(3.16) \quad \phi(x,t) = e^{\frac{x}{2k}} \sum_{j \geq 1} a_j e^{\lambda_j t} \sin j\pi x$$

$$\lambda_j = - \frac{1+4\pi^2 j^2 k^2}{4}$$

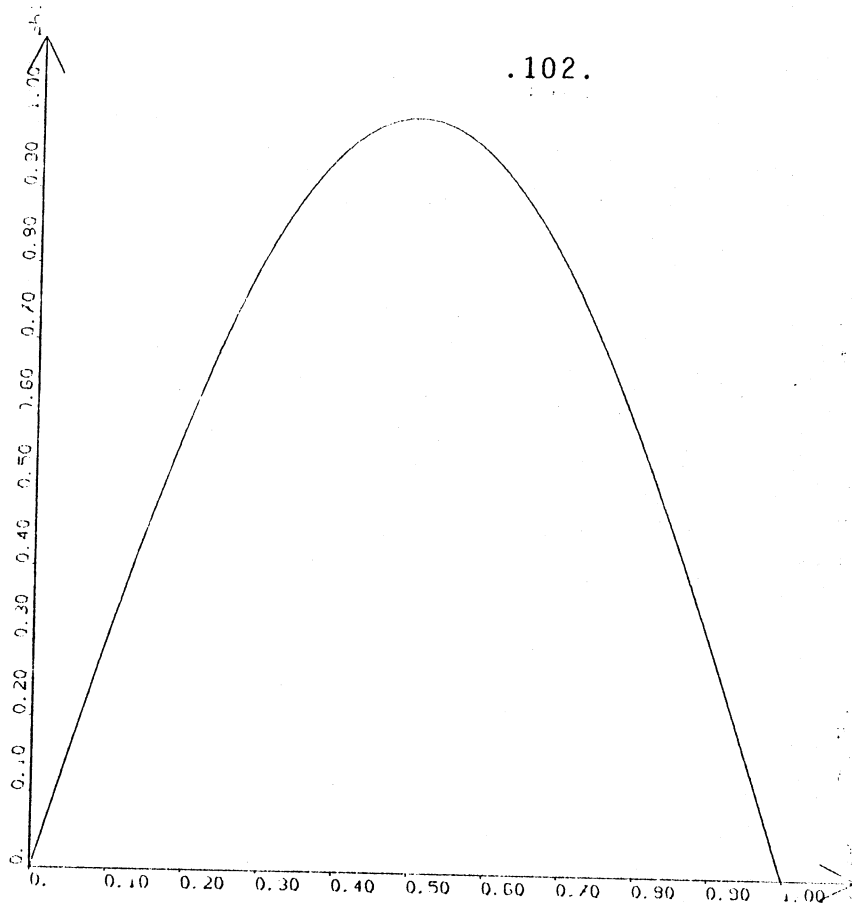
$$a_j = \frac{32\pi^2 k^3 j (1+(-1)^j e^{-\frac{1}{2k}})}{1+8\pi^2 k^2 (j^2+1)+16\pi^4 k^4 (j^4-2j^2+1)}$$

On a considéré les données suivantes :

$$(3.17) \left\{ \begin{array}{l} h = 0.1 \\ \Delta t = 0.5 \\ k = 6 \times 10^{-3} \end{array} \right.$$

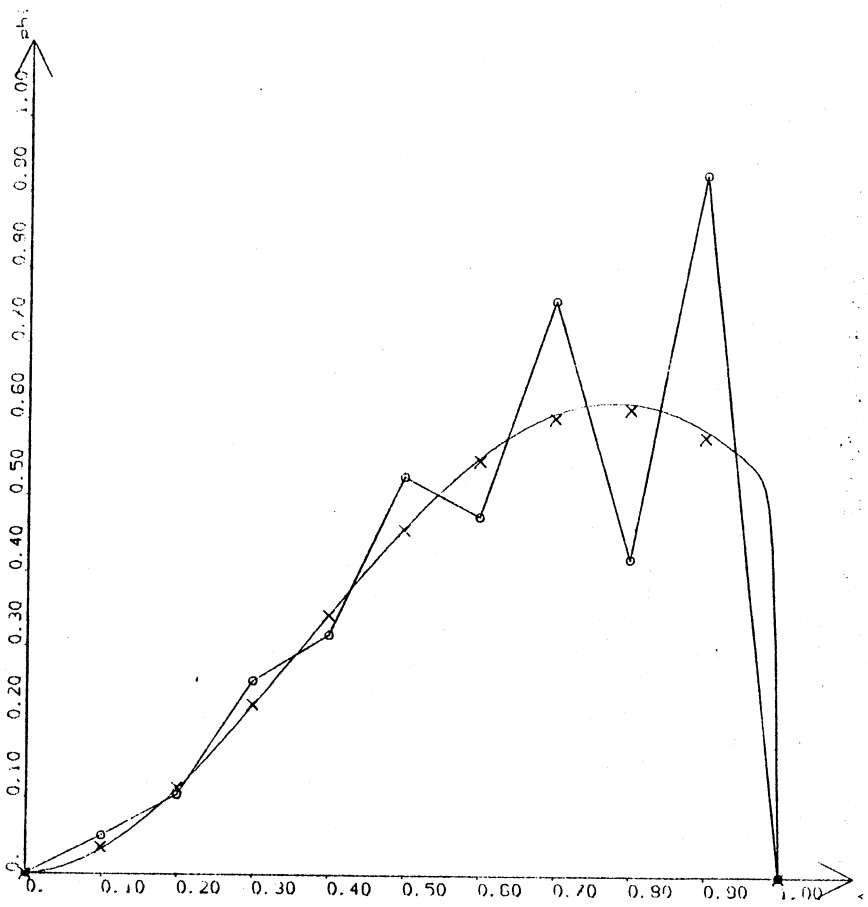
Sur les figures (3.3), (3.4) et (3.5), on a tracé la solution numérique obtenue avec la méthode présentée ici (croix), la solution obtenue avec une méthode centrée (cercles) et la solution exacte (ligne continue). Cette dernière approchée avec une méthode centrée de pas  $h = 0.5 \times 10^{-2}$  (vingt fois plus petit). Sur la figure (3.2) on a tracé la solution initiale.

On remarque l'excellente précision de notre méthode et les fortes oscillations de la méthode centrée.



SOLUTION INITIALE

FIGURE 3.2



- o : schéma centré
- x : schéma proposé
- | : Solution exacte
- 1Δt

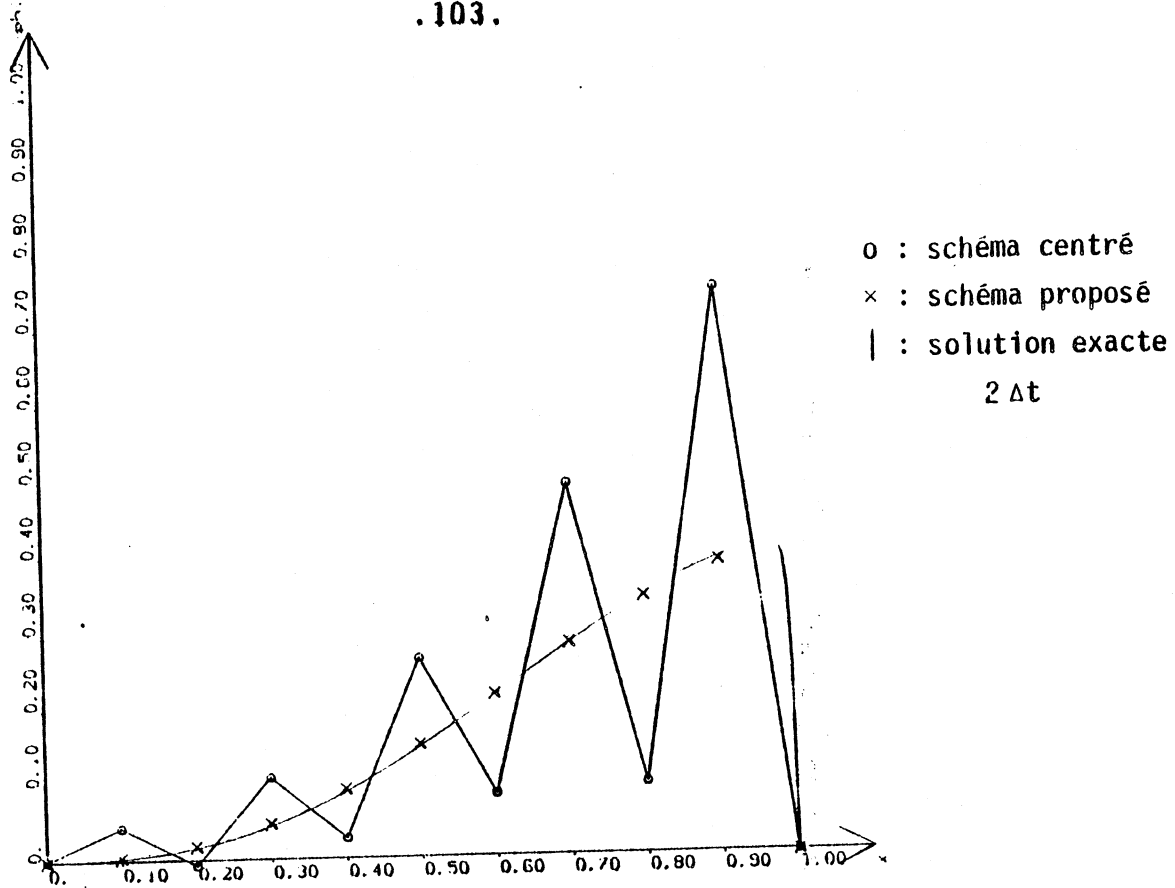
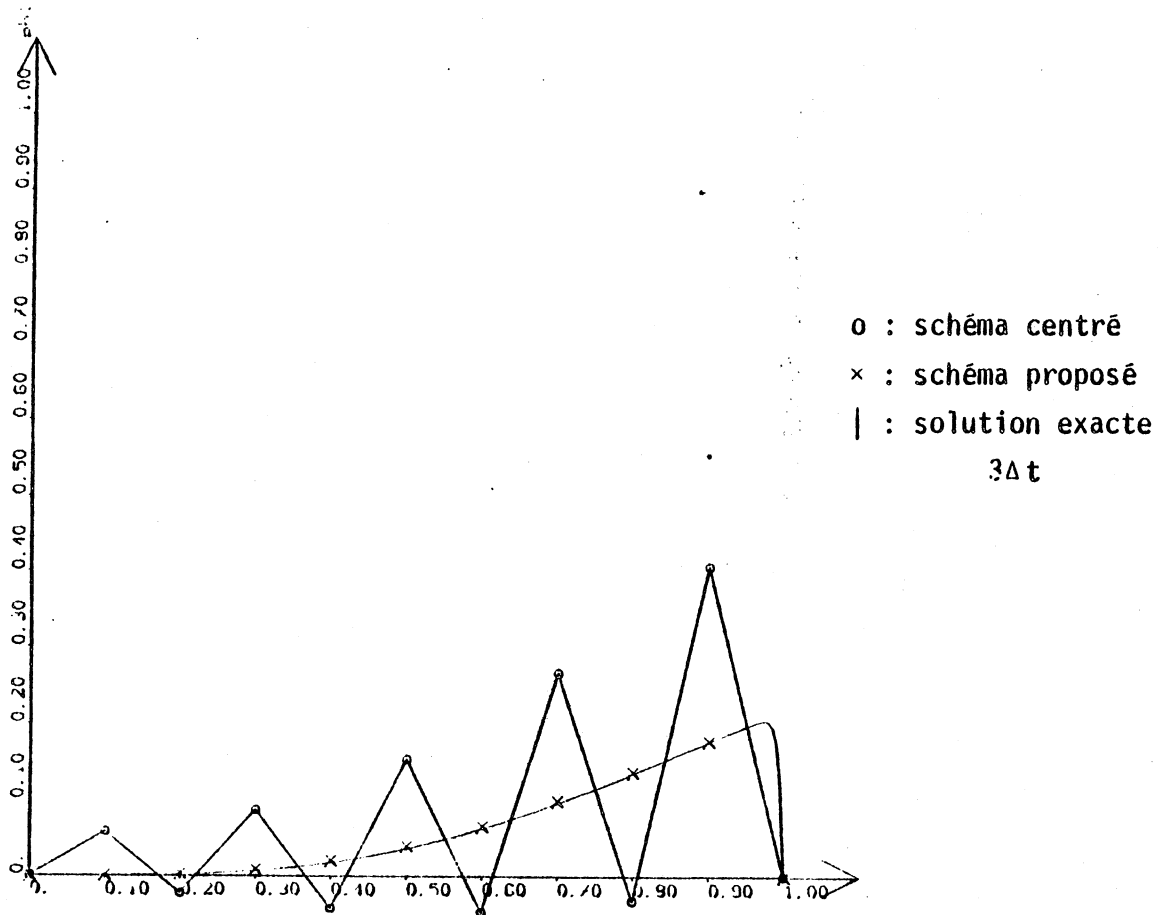


FIGURE 3.4







## CONCLUSIONS

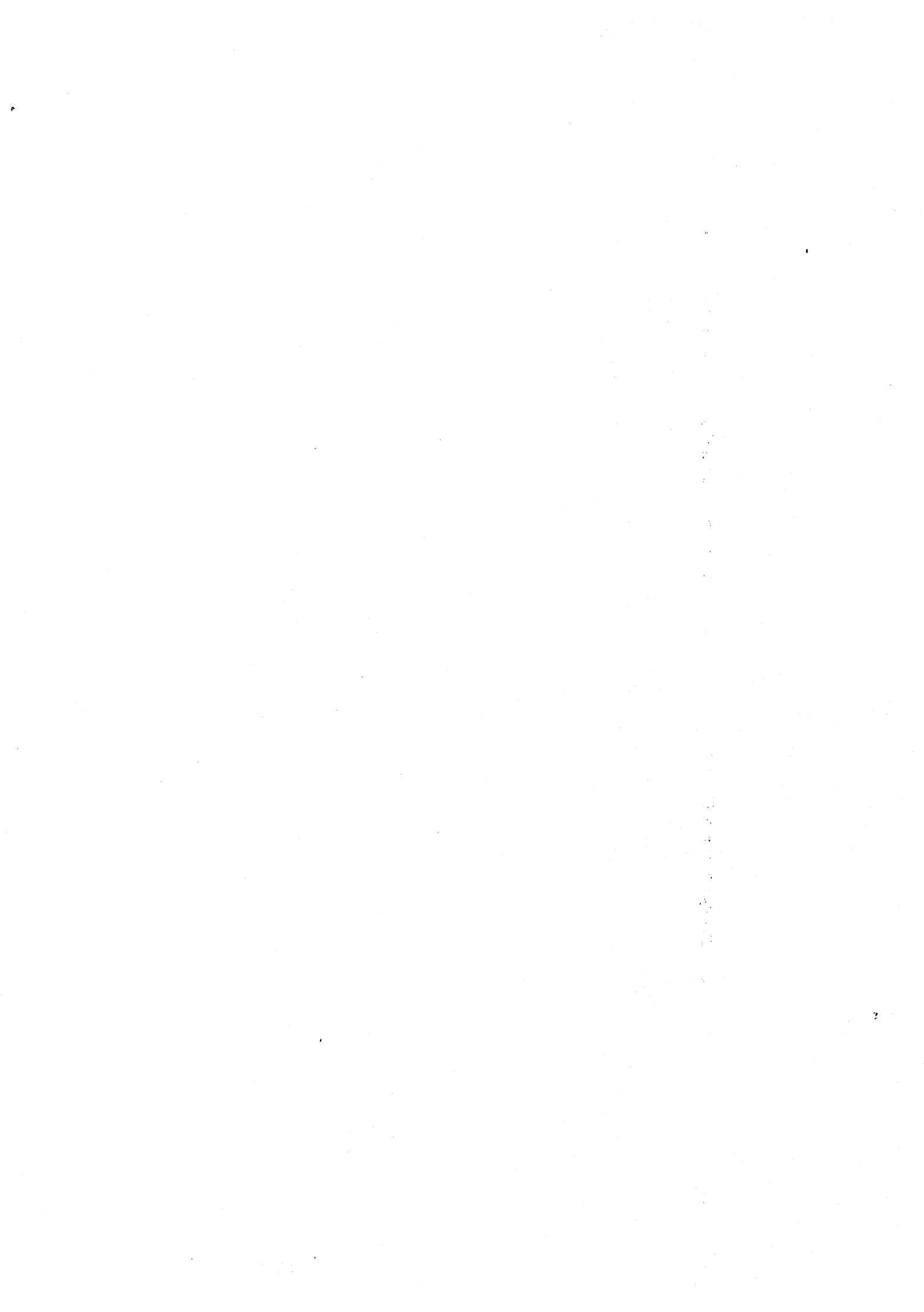
Nous proposons une méthode qui permet de ramener le problème à une formulation symétrique et positive. Elle généralise la méthode de décentrage (cf. chapitre d'introduction) à une dimension. On retrouve les mêmes schémas proposés dans ce contexte, mais le décentrage apparaît de façon naturelle. Cela nous permet de traiter le cas bidimensionnel avec une méthode qui est une généralisation directe de la méthode à une dimension. On retrouve des schémas limites adaptés au problème de convection pure lorsque  $k$  tend vers zéro.

La solution numérique est toujours non oscillatoire et prend en compte la nature exponentielle de la solution. Remarquons que les forts gradients présentés par la solution près du bord, sont dus à la croissance exponentielle de la solution dans cette zone.

Les résultats sont bons, même dans le cas non stationnaire pour des pas de temps assez grands.

Pour les résultats numériques présentés dans les chapitres précédents on a calculé analytiquement les intégrales du système linéaire afin d'éviter le calcul d'exponentielles d'exposant négatif trop important. Ce calcul ne peut pas, en général, être évité pour des maillages irréguliers. Les problèmes qui se posent dans ce cas, sont de pouvoir intégrer numériquement des produits des fonctions par des exponentielles qui décroissent très vite et d'évaluer ces exponentielles.

Remarquons que l'on a un système linéaire dont, en gros, les deux membres sont multipliés par un nombre très petit ce qui empêche sa représentation directe sur ordinateur. Une solution serait d'utiliser une arithmétique qui permette la représentation des nombres très petits, si l'on dispose d'une formule spéciale d'intégration numérique (par exemple, des formules avec des poids exponentiels).



REFERENCES CITEES DANS LE TEXTE

1. O. AXELSSON (1980)  
"On the numerical solution of convection-diffusion equation"  
Lectures notes EPFL, Lausanne
2. O. AXELSSON and I. GUSTAFSSON (1979)  
"Iterative solution of singular perturbation 2nd. order boundary value problems"  
in Numerical Analysis of singular perturbations problems.  
P.W. Hemker and J.J.H. Miller (eds). Ac. Press London pp. 387-394
3. K. BABA and M. TABATA (1981)  
"On a conservative upwind finite element scheme for convective diffusion equation"  
R.A.I.R.O. Analyse Numérique/Numerical Analysis Vol. 15, n° 1  
pp. 3-25.
4. J. BARANGER (1979)  
" On the tickness of the boundary layer in elliptic singular perturbation problems"  
in Numerical Analysis of singular perturbations problems.  
P.W. Hemker and J.J.H. Miller (eds) Ac Press London, pp. 395-408.
5. M.O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI, J. PERIAUX, R. PERRIER et O. PIRONNEAU (1979)  
"On the numerical solution of non linear problems in fluid dynamics by least squares and finite element method"  
in Proceedings of FENOMECH'78 Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 17/18 part 3. pp. 619-657.
6. A. BROOKS and T.J.R. HUGHES (1980)  
"Streamline upwind/Petrov-Galerkin methods for advection dominated flows"  
in 3rd Int. Conf. on F.E.M. in flow problems, Banff, Alberta Canada, pp. 283-292.
7. I. CHRISTIE, D.F. GRIFFITHS, A.R. MITCHELL and O.C. ZIENKIEWICZ (1976)  
"Finite element method for second order differential equations with significant first derivatives"  
Int. J. for Num. Meth. in Eng. 10, pp. 1389-1396

8. J.C. HEINRICH (1980)  
"On quadratic elements in finite element solution of steady state convection-diffusion equation"  
Int.J. For Num. Meth. in Eng. 15, pp. 1041-1052.
9. J.C. HEINRICH and O.C. ZIENKIEWICZ (1977)  
"Quadratic finite element schemes for two-dimensional convective transport problems"  
Int J. for Num. Meth. in Eng. 11, pp. 1831-1844
10. J.C. HEINRICH and P.S. HUYARKON, O.C. ZIENKIEWICZ, and A.R. MITCHELL (1977)  
"Un "upwind" finite element scheme for two dimensional convective transport-equation"  
Int. J. for Num. Meth. in Eng. 11, pp. 131-143.
11. P.W. HEMKER (1977)  
"A numerical study of stiff two-point boundary problems"  
Thesis. Mathematisch Centrum Amsterdam. The Netherlands.
12. T.J.R. HUGHES (1978)  
"A simple scheme for developing "upwind" finite element"  
Int. f. for Num. Meth. in Eng. 12, pp. 1359-1365
13. T.J.R. HUGHES and A. BROOKS (1979)  
"A multi-dimensional upwind scheme with no-crosswind diffusion"  
in Finite element methods for convection dominated fluids.  
T.J. Hughes (ed.) ASME pp. 19-36
14. P.S. HUYARKON (1977)  
"Solution of steady-state, convective transport equation using an upwind finite element schema"  
Appl. Math. Modelling 1, March pp. 187-195.
15. M. IKEGAWA (1979)  
"A new finite element technique for the analysis of steady viscous flow problems"  
Int. J. for Num. Meth. in Eng. 14, pp. 103-113.
16. C. JOHNSON and UNO NÄVERT (1981)  
"An analysis of some finite element methods for advection-diffusion equation"  
in Analytical and Num. App. to Asym. problems in analysis. S. Axelsson, L.S. Frank, A van der Sluis (eds). North-Holland Publishing Company, pp. 99-116.

17. T. KATO (1976)  
"Perturbation theory for linear operators"  
Second Edition. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg New-York.
18. B. KELLOG and A. TSAN (1978) .  
"Analysis of some difference approximations for a singular perturbation  
problem without turning points"  
Math. of Comp. 32, n° 144, pp. 1025-1039.
19. B.P. LEONARD (1979)  
"A survey of finite differences opinion on numerical muddling of the  
incomprehensible defective confusion-equation"  
in Finite element method for convection dominated flows T.J.R. Hughes  
(ed) ASME pp. 1-18.
20. P. LESAINT (1975)  
"Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des  
méthodes d'éléments finis"  
Thèse d'Etat, Université de Paris VI.
21. J. LOCKER and P.M. PRENTER (1979)  
"On least squares methods for linear two-point boundary value  
problems"  
Func. An. Meth. in Num. Anal. Lectures notes Math. 701 Springer-Verlag  
pp. 149-168.
22. UNO NÄVERT (1981)  
"The streamline diffusion method for time dependant convection-  
diffusion problems with small diffusion"  
Research Report. Dep. of Computer Science. Chalmers Institut of Techno-  
logy and the University of Göteborg. Sweden.
23. D. PELLETIER, R. CAMARERO (1980)  
"Fluid dynamics, finite element and upstream differencing"  
Dep. of Mechanical Eng. Ecole Polytechnique, Montreal, Canada.
24. P.A. RAVIART (1979)  
"Approximation numérique des phénomènes de diffusion-convection"  
Méthodes d'éléments finis en Mécanique des fluides.  
Cours Ecole d'été (EDF/CGA IRIA)
25. P.J. ROACHE (1972)  
"Computational fluid dynamics"  
Hermosa Publishers, Alburquerque, New-Mexico USA.

26. M. TABATA (1977)  
"A finite element approximation corresponding to the upwind finite differencing"  
Univ. of Kyoto and Tokyo. 4, pp. 47-63
27. M. TABATA (1978)  
"Uniform convergence of the upwind finite element approximation for semilinear parabolic problems"  
J. Math. Kyoto Univ. 18-2 pp. 327-351.
28. F. THOMASSET (1981)  
"Finite element methods for Navier-Stokes equations"  
dans Simulation numérique en mécanique des fluides par la méthode des éléments finis. INRIA Nice 19-23 janvier Vol. 1 pp. 1-126.
29. R. VARGA (1962)  
"Matrix iterative analysis"  
Prentice-Hall Series in Automatic Computation.

REFERENCES NON CITEES DANS LE TEXTE

1. M. AHUES and M. TELIAS (1981)  
"A selfadjoint positive formulation of the steady-state advection diffusion equation"  
R.R. n° 255 IMAG Grenoble - juin 1981
2. M. AHUES and M. TELIAS (1981)  
"A finite element method for the steady-state convection-diffusion equation"  
R.R. n° 278 IMAG Grenoble. Novembre 1981
3. M. AHUES and M. TELIAS (1981)  
"Méthodes d'éléments finis pour l'équation de diffusion-convection"  
S.A.N.G. n° 370 Grenoble Novembre 1981
4. M. AHUES and M. TELIAS (1982)  
"Petrov-Galerkin schemes for the steady-state convection-diffusion equation".  
in Finite element methods in water resources. Proceedings of the 4th conference. Hannover Germany. K.P. Holz, U. Meissner, W. Zielki, C.A. Brebbia, G. Pinder, W. Gray (eds) : pp. 2-3, 2-12.
5. L.R. ABRAHAMSSON, H.B. KELLER and H.O. KREISS (1974)  
"Difference approximations for singular perturbations of systems of ordinary differential equations".  
Num. Math. 22, pp. 367-391. Springer-Verlag.
6. J.W. BARRET and K.W. MORTON (1980)  
"Optimal finite element solution to diffusion-convection problems in one dimension".  
Int. J. for Num. Meth. in Eng. 15, pp. 1457-1474
7. I. CHRISTIE and A.R. MITCHELL (1978)  
"Upwinding of high order Galerkin method in conduction-convection problems".  
Int. J. for Num. Meth. in Eng., 13, pp. 1764-1771.
8. J. DOUGLAS, jr. and T. F. RUSSELL (1982)  
"Numerical solution for convection-dominated diffusion problem based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures".  
S.I.A.M. J. Nume. Anal. 19 n°5 pp. 871-885.

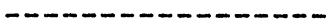


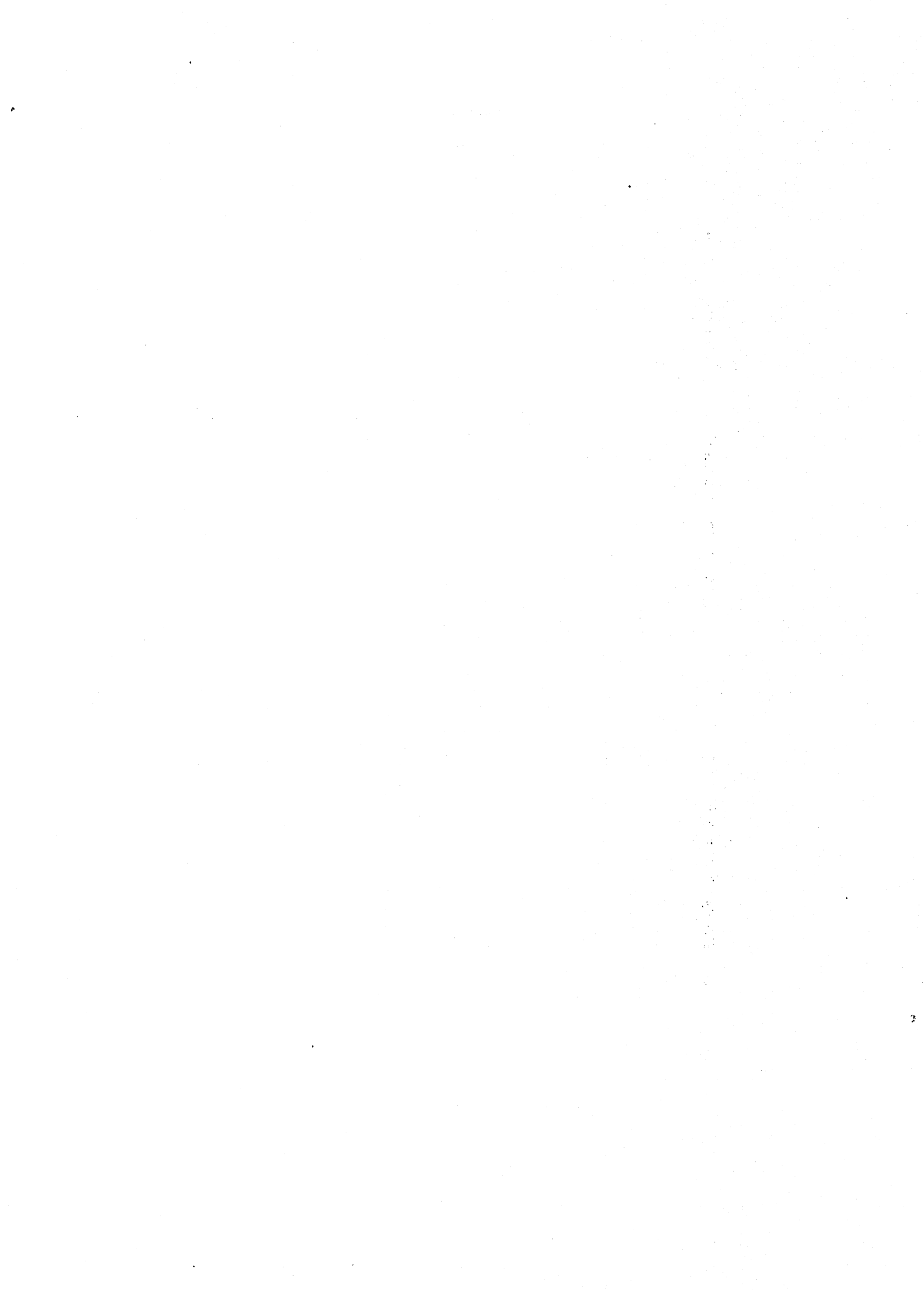
9. T. DUPONT (1973)  
"Galerkin methods for first order hyperbolics : an example".  
SIAM J. Num. Anal. 10 n°5, pp. 890-899.
10. M. FORTIN and F. THOMASSET (1979)  
"Mixed finite-element methods for incompressible flow problems"  
J. of Comp. Physics 31, pp. 113-145.
11. D.F. GRIFFITHS (1979)  
"Towards time-stepping algorithms for convective-diffusion"  
in Numerical analysis of singular perturbation problems. P.W. Hemker and  
J.H. Miller (eds) Ac. Press London, pp. 199-216.
12. D.F. GRIFFITHS and A.R. MITCHELL (1979 )  
"On generating upwind finite element method"  
in Finite element methods for convection dominated flows.  
T.J.R. Hughes (ed) ASME pp. 91-104.
13. D.F. GRIFFITHS, I. CHRISTIE and A.R. MITCHELL (1980)  
"Analysis of error growth for explicit difference schemes in conduction  
convection problems"  
Int. J. for Num. Methods in Eng. 15, pp. 1075-1081.
14. P.M.N. de GROEN and P.W. HEMKER (1979)  
"Error bounds for exponentially fitted Galerkin methods applied to stiff  
two-points boundary value problems"  
in Numerical analysis of singular perturbation problems. P.W. Hemker and  
J.H. Miller (eds) Ac. Press London pp. 217-249.
15. J.C. HEINRICH and O.C. ZIENKIEWICZ (1979)  
"Solution of nonlinear second order differential equations with significant  
first derivatives by a Petrov-Galerkin finite element method".  
in Numerical analysis of singular perturbation problems. P.W. Hemker and  
J.H. Miller (eds) Ac. Press London pp. 251-273.
16. J.C. HEINRICH and O.C. ZIENKIEWICZ (1979)  
"The finite element method and "upwinding" techniques in the numerical  
solution of convection dominated flow problems".  
in Finite element methods for convection dominated flows. T.J.R. Hughes  
(ed). ASME pp. 105-136.
17. P.W. HEMKER (1981)  
"An accurate method without directional bias for the numerical solution  
of 2-D elliptic singular perturbation problems"  
Afdeling numerieke wiskunde n.w. 117/8/Dec. Mathematisch Centrum Amsterdam.

18. T.J.R. HUGHES, WIND KAM LIM and A. BROOKS (1979)  
"Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation"  
J. of Comp. Physics 30, 1-60
19. A. ISERBES (1981)  
"Rational interpolation to  $\exp(-x)$  with applications to certain stiff systems"  
SIAM J. Numer. Anal. 18 n° 1 pp. 1-12.
20. D.W. KELLY, S. NAKAZAWA, O.C. ZIENKIEWICZ and J.C. HEINRICH (1980)  
"A note on upwinding and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problems"  
Int. J. for Num. Meth. in Eng. 15, pp. 1705-1711.
21. B. KREISS and H.O. KREISS (1981)  
"Numerical methods for singular perturbation problems"  
SIAM J. Numer. Anal. 18 n° 2 pp. 262-276
22. J. LOCKER and P.M. PRENTER (1978)  
"Optimal  $L^2$  and  $L^\infty$  error estimates for continuous and discrete least squares methods for boundary value problems"  
SIAM J. Num. Anal. 15, n° 6 pp. 1151-1160.
23. A.R. MITCHELL and F. LAWLOR (1978)  
"The parabolic-hyperbolic interface in conduction-convection problems"  
in Proceedings of the fourth symposium on basic problems of numerical mathematics. Plzen, September 4-8 Liblice pp. 141-151.
24. A. R. MITCHELL and I. CHRISTIE (1979)  
"Finite difference/finite element methods at the parabolic-hyperbolic interface"  
in Numerical analysis of singular perturbation problems.  
P.W. Hemker and J.H. Miller (eds) Ac. Press London pp. 339-360.
25. A. MOULT, D. BURLEY and H. RAWSON (1979)  
"The numerical solution of two-dimensional, steady flow problems by the finite element method"  
Int. f. for Num. Meth. in Eng. 14 pp. 11-35.
26. M.G. MURLI and R.P. MANOHAR (1980)  
"On the use of central difference scheme for Navier-Stokes equations"  
Int. J. for Num. Meth. in Eng. 15 pp. 557-573.

27. M.H. PROTTER and H.F. WEINBERGER (1967)  
"Maximum principles in differential equations"  
Prentice-Hall. Partial Differential Equation Series.
  
28. F. THOMASSET (1977)  
"Numerical solution of the Navier-Stokes equation by finite element  
method"  
Von Karman Institute for Fluid Dynamics. Lectures Series 86.

DEUXIEME PARTIE





## INTRODUCTION

## I - LE MODELE PHYSIQUE

- I.1 - Présentation du modèle. Hypothèses
- I.2 - Propriétés de conservation

## II - RESOLUTION NUMERIQUE DU MODELE

- II.1- Introduction
- II.2- Discrétisation temporelle
- II.3- Elements finis. Propriétés de conservation
- II.4- Algorithme de résolution du modèle discrétisé en temps.

## III - MISE EN OEUVRE NUMERIQUE

- III.1- Forme discrète de l'algorithme de résolution
- III.2- Vérification de la précision du modèle
  - 3.2.1. - Solution analytique de référence
  - 3.2.2. - Résolution du problème linéaire sur un domaine carré
  - 3.2.3. - Résolution du problème linéaire sur un domaine rectangulaire
- III.3- Temps de calcul
- III.4- Application à la résolution du problème non linéaire (bassin carré) pour un vent de type  $\sin\pi x \sin\pi y$ .
  - 3.3.1. - Problème linéaire correspondant
  - 3.3.2. - Problème non linéaire
- III.5- Application à la résolution d'un problème de circulation sur un bassin rectangulaire avec une structure de vent à plusieurs cellules.
- III.6- Comparaison avec d'autres méthodes.
  - 3.6.1. - Traitement de la condition aux limites pour les méthodes de différences finies.
  - 3.6.2. - Quelques méthodes de résolution du problème découplé avec des techniques aux différences finies.
  - 3.6.3. - Comparaison des temps de calcul avec notre méthode d'éléments finis.

## CONCLUSIONS

## REFERENCES



## INTRODUCTION

On résout un modèle test de circulation océanique aux latitudes moyennes pour des bassins à fond plat, dont le mouvement est dû au vent.

On introduit une condition aux limites de non glissement le long des frontières Est et Ouest qui représentent les côtes terrestres.

La difficulté posée par cette condition, par rapport à une condition de glissement, est surmontée à l'aide d'une méthode d'éléments finis qui permet de résoudre le problème non linéaire d'évolution comme une "cascade" d'équations d'Helmotz.

Le chapitre I est consacré à la présentation du modèle physique et des hypothèses qui sont faites et à établir quelques propriétés de conservation.

Le chapitre II décrit les discrétisations faites pour la résolution du modèle : discrétisation temporelle, discrétisation de l'espace de fonctions solution par la méthode d'éléments finis. On démontre que les propriétés de conservation du modèle continu sont valables pour la discrétisation des éléments finis. On propose une méthode de résolution du modèle discrétisé en temps.

Dans le chapitre III, on fait une étude détaillée de l'algorithme dans le discret, on présente des résultats numériques sur des problèmes test obtenus avec la méthode proposée au chapitre II, on discute les résultats et on compare avec d'autres méthodes.





## I - LE MODELE PHYSIQUE

### I.1 - PRESENTATION DU MODELE - HYPOTHESES

On s'intéresse aux équations modélisant les circulations océaniques aux latitudes moyennes pour des bassins à fond plat.

Dans ce qui suit, on fera une description assez sommaire de la Physique du problème et des hypothèses qui sont faites.

Une description plus détaillée de la modélisation peut être trouvée dans Dumas (1982), Branger (1983).

On considère un océan carré (de l'ordre de 2000 km pour 2000 km), situé aux latitudes moyennes et soumis à un champ de vent. Le fluide est initialement au repos.

On fait les hypothèses suivantes :

- i) Quasi-géostrophie : La rotation de la terre influe de façon prépondérante sur le mouvement.
- ii)  $\beta$ -plan : Variation linéaire du paramètre de Coriolis avec la latitude (équivalent à supposer l'horizon plan).
- iii) Barotropie : Densité indépendante de la profondeur (modèle à une couche).
- iv) couche mince : Le modèle peut être réduit à deux dimensions d'espace.
- v) Le forcing est dû au vent et la dissipation d'énergie se fait par viscosité latérale ou par frottement de fond.
- vi) On impose des conditions de glissement le long des frontières Nord et Sud et d'adhérence à la paroi (non-glissement) le long des frontières Est et Ouest. On suppose que les frontières sont une ligne de courant.

Avec ces hypothèses, les équations qui gouvernent le mouvement du fluide, dont la déduction est assez classique (cf Branger (1983), Dumas (1982), Veronis (1966)), peuvent être écrites dans une formulation en fonction de courant :

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{D} T_0 \operatorname{curl} T + A_m \nabla^4 \psi - \epsilon \nabla^2 \psi$$

Les conditions aux limites sont celles établies dans l'hypothèse vi),  $\psi$  est la fonction de courant, donc le champ de vitesses s'écrit :

$$(1.2) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix}$$

On utilise les opérateurs suivants, qui vont être appliqués aux fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  suffisamment régulières.

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \nabla^2 := \Delta := \nabla \cdot \nabla \quad \nabla^4 := \Delta^2$$

$$\operatorname{curl} := -\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \quad J(v, w) := \overrightarrow{\operatorname{curl}} v \cdot \nabla w$$

$$\overrightarrow{\operatorname{curl}} := \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

et les coefficients :

$\beta_0$  : coefficient de variation du paramètre de Coriolis  $\beta$  en fonction de la latitude,  $F = f_0 + \beta_0 y$  ( $f_0$  est une constante). (cf. hypothèse ii)).

$D$  : Profondeur de l'océan

$A_m$  : Coefficient de diffusion latérale

$T$  : tension du vent à la surface

$\epsilon$  : coefficient de frottement de fond

Pour pouvoir résoudre les équations (1.1) sans avoir des échelles très différentes, on ramène tous les paramètres dans des plages de variation acceptable avec une adimensionalisation adéquate :

$$(1.3) \left\{ \begin{array}{l} (x,y) = L(x',y') \\ t = (\beta_0 L)^{-1} t' \end{array} \right.$$

et l'on pose :  $U := \frac{\pi T_0}{D \beta_0 L}$  (relation de Sverdrup).

où  $L$  est la largeur du bassin, de l'ordre de 2000 km, et  $\beta_0$  est de l'ordre de  $2 \times 10^{-11}$  (seconde. mètre) $^{-1}$ , l'unité de temps choisie est donc de l'ordre de 6,9 heures. La relation de Sverdrup, valable au milieu du bassin donne une vitesse caractéristique notée  $U$ .

On pose :

$$(1.4) \left\{ \begin{array}{l} R_0 := \frac{U}{\beta_0 L^2} \\ R_e := \frac{UL}{\bar{A}\eta} \\ r := \frac{\epsilon}{\beta_0 L} \end{array} \right.$$

où :  $R_0$  mesure l'effet non linéaire par rapport à l'effet de variation du paramètre de Coriolis (plus  $R_0$  est grand, plus l'effet de la non linéarité est important).

$R_e$  (nombre de Reynolds) mesure les effet inertiels par rapport à l'effet de viscosité (plus  $R_e$  est grand, moins l'effet de viscosité est important).

$r$  mesure l'effet du frottement de fond par rapport à l'effet du vent et de l variation du paramètre de Coriolis (plus  $r$  est grand, plus le frottement de fond est important).

En introduisant l'adimensionalisation (1.3) et les paramètres définis par (1.4), l'équation du modèle s'écrit (les conditions aux limites restent les mêmes) :

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + R_0 J(\psi, \Delta \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\text{curl } T}{\pi} + \frac{R_0}{R_e} \Delta^2 \psi - r \Delta \psi$$

Une veine de recirculation intense à l'Ouest du bassin (appelée aussi parfois couche limite) apparaît lors de la résolution du modèle. Elle dépend des termes d'inertie et des termes de dissipation et frottement de fond.

On définit des grandeurs caractéristiques de l'influence de ces termes sur la largeur de cette veine de recirculation (grandeurs dimensionnelles. cf. Branger (1983)) :

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \delta_I = \sqrt{R_0} L & (\text{inertiel}) \\ \delta_V = 2 \left( \frac{R_0}{R_e} \right)^{1/3} L & (\text{viscosité horizontale}) \\ \delta_F = \varepsilon L & (\text{frottement de fond}). \end{array} \right.$$

Les relations (1.6) nous obligent à avoir une discrétisation du modèle permettant d'approcher la solution à l'intérieur de ces couches limites, lesquelles sont, en général, assez étroites. On verra que l'utilisation d'une méthode d'éléments finis nous permettra de raffiner notre discrétisation sélectivement de façon à avoir une bonne représentation de la veine de recirculation à l'Ouest du bassin.

## I.2 - PROPRIETES DE CONSERVATION

Le modèle (1.5) a quelques propriétés de conservation pour certaines valeurs des constantes,  $R_e$ ,  $r$  et du forçage.

Soit :

$$(1.7) \quad \tilde{\omega} := \Delta \psi + \frac{1}{R_0} y$$

( $y$  étant la coordonnée sur l'axe Nord-Sud), et l'on considère les quantités suivantes :

$$(1.8) \quad \|\tilde{\omega}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} \tilde{\omega}^2 = \iint_{\Omega} \left(\Delta\psi + \frac{1}{R_0} y\right)^2$$

(Enstrophie potentielle)

$$(1.9) \quad K := \frac{1}{2} \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \nabla\psi \cdot \nabla\psi \quad (\text{Energie cinétique})$$

où :

$\Omega :=$  domaine d'intégration (océan carré)

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} L^2(\Omega) := \{v / \iint_{\Omega} v^2 < +\infty\} \\ H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) / \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega)\} \\ H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\partial\Omega} = 0\} \end{array} \right.$$

#### PROPRIETE 1.2.1

Dans le cas où dans (1.5)  $1/R_e$  et  $r$  sont nulles, il n'y a pas de forcing et on ne garde que la condition aux limites de vitesse normale nulle le long de toute la frontière  $\partial\Omega$ , les quantités définies par (1.7), (1.8) et (1.9) sont conservées le long du temps.

#### Démonstration

Il s'agit d'un résultat classique que l'on peut démontrer comme suit :

Rappel - Formules de Green :

i)  $\forall v \in H^1(\Omega), \bar{u} \in [H^1(\Omega)]^2$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \bar{u} \cdot v + \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \bar{u} = \int_{\partial\Omega} (\bar{u} \cdot n) v$$

$n$  : direction normale extérieure à  $\partial\Omega$

ii)  $\forall u, v \in H^1(\Omega) :$

$$\iint_{\Omega} \Delta u \cdot v + \iint_{\Omega} \nabla v \nabla u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v$$

L'équation (1.5) s'écrit dans ce cas :

$$(1.11) \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = - R_0 J(\psi, \tilde{\omega})$$

donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \tilde{\omega} = \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = - R_0 \iint_{\Omega} J(\psi, \tilde{\omega})$$

Avec une formule de Green on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \tilde{\omega} = - R_0 \int_{\partial \Omega} \psi \tilde{\omega} = 0$$

car  $\psi|_{\partial \Omega} = 0$ . Donc la vorticité est conservée.

### iii) Conservation de l'ensrophie potentielle

On reprend (1.11), on multiplie par  $\tilde{\omega}$  et l'on intègre sur  $\Omega$ ; on trouve alors :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\omega}\|_{L^2(\Omega)}^2 = - R_0 \iint_{\Omega} J(\psi, \frac{\tilde{\omega}^2}{2})$$

En raisonnant de la même façon que plus haut avec une formule de Green, on peut écrire :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\omega}\|_{L^2(\Omega)}^2 = - R_0 \int_{\partial \Omega} \psi \frac{\tilde{\omega}^2}{2} = 0.$$

### iv) Conservation de l'énergie cinétique

On remarque que par la définition (1.9) plus une formule de Green :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \iint \frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta \psi + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \psi \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t}$$

En multipliant (1.11) par  $\psi$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on peut écrire :

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} \psi = - R_0 \iint_{\Omega} J(\frac{\psi^2}{2}, \tilde{\omega})$$

le même raisonnement que plus haut, nous permet d'écrire :

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} \psi = 0$$

Or,

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta \psi = \iint_{\Omega} \nabla \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \nabla \psi = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \nabla \psi \nabla \psi$$

donc, on en déduit que

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dK}{dt}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dK}{dt} = 0.$$

□

On verra par la suite que le modèle discrétisé par la méthode d'éléments finis vérifie exactement les propriétés énoncées dans ce paragraphe.



## II - RESOLUTION NUMERIQUE DU MODELE

### II.1 - INTRODUCTION

Les équations présentées dans le chapitre précédent ont fait l'objet de nombreuses résolutions numériques par des méthodes aux différences finies (cf. Bryan (1966), Veronis (1966), Branger (1983)). Par contre, on connaît peu de schémas aux éléments finis pour la résolution de ces modèles.

La complexité de la mise en oeuvre de la méthode d'éléments finis explique en partie ce phénomène. Le grand développement des éléments finis de ces dernières années a poussé des chercheurs à examiner leur utilisation dans le domaine de la circulation océanique. (cf. Fix (1975), Hirsch (1975), Haidvogel et al (1980), Dumas (1982), Dumas et al (1982)).

Hirsch a résolu les équations en variables primitives (formulation vitesse-pression) en utilisant comme éléments des splines cubiques.

Fix a fait une étude théorique sur la stabilité et la conservation de la vorticité, de l'énergie cinétique et de l'énstrophie potentielle d'un modèle très simple, plus simple que celui pour lequel on a établi la propriété 1.2.1.

Haidvogel et al (1980) ont testé trois schémas numériques (éléments et différences finis, méthodes pseudospectrales) pour ce même modèle simple.

Plus récemment, Dumas (1982), Dumas et al (1982), ont résolu le modèle (1.5) avec des conditions de glissement le long de toute la frontière. Ils ont comparé leur méthode avec des méthodes aux différences finies. Leurs résultats sont encourageants pour l'utilisation des éléments finis, car on peut résoudre le modèle sur des domaines de géométrie complexe et avec raffinement sélectif du maillage, sans pour autant avoir des temps de calcul plus grands.

Cette utilisation des techniques d'éléments **finis** s'avère même plus performante que la méthode de sur-relaxation, l'une des méthodes de différences finies assez générale, pour modéliser des domaines de géométrie complexe.

Dans ce mémoire, nous allons traiter le modèle (1.5) avec une condition de non glissement ("no slip condition") le long des frontières Est et Ouest du bassin.

L'introduction de cette condition aux limites rend la résolution du modèle assez complexe. On mettra en oeuvre une méthode d'éléments finis qui permet de prendre en compte correctement cette condition.

La méthode a été proposée par Glowinski et al (1976), (1977) pour la résolution du problème biharmonique.

On comparera nos résultats à ceux obtenus avec une méthode de différences finies rapide (cf. Branger (1983)). Notons que cette seconde méthode est très limitée dans son application, car elle utilise des maillages réguliers et n'est applicable que pour des domaines de géométrie simples. De plus, la façon dont on traite la condition de non glissement est très approximative (cf. paragraphe 3.3).

Des résultats de convergence ont été démontrés pour la méthode proposée (cf. Glowinski et al (1976), (1977) et (1979), et les références données par Vidrascu (1978)).

## II.2 - DISCRETISATION TEMPORELLE

Pour traiter l'équation (1.5) numériquement, il faut d'abord discrétiser la dérivée temporelle.

On va utiliser un schéma à trois niveaux de type "saute-mouton" ("leap-frog"). Dans ce schéma, il faut connaître la solution aux deux pas de temps précédents.

On utilisera la notation :

$$(2.1) \quad \omega \equiv \Delta\psi$$

Avec la notation (2.1) le modèle (1.5) s'écrit :

$$(2.2) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + R_0 J(\psi, \omega) + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{-1}{\pi} \operatorname{curl} T + \frac{R_0}{R_e} \Delta \omega - r\omega$$

Les conditions aux limites sont celles établies dans l'hypothèse vi) :

- Glissement le long des frontières Nord et Sud :

$$(2.3a) \quad \omega|_N = \omega|_S = 0$$

- Pas de flux traversant  $\partial\Omega$  (où de façon équivalente : composante normale de la vitesse nulle,  $\partial\Omega$  est une ligne de courant où l'on choisit nulle la valeur de  $\psi$ )

$$(2.3b) \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0.$$

- Non glissement le long des frontières Est et Ouest (où de façon équivalente : composante tangentielle de la vitesse nulle ou adhérence à la paroi)

$$(2.3c) \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}|_E = \frac{\partial\psi}{\partial n}|_W = 0$$

Le schéma à utiliser s'écrit :

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega^{n+1} - \omega^{n-1}}{2\Delta t} + R_0 J(\psi^n, \omega^n) + \frac{\partial\psi^n}{\partial x} = \frac{-1}{\pi} \text{curl } T + \frac{R_0}{2R_e} \Delta(\omega^{n+1} + \omega^{n-1}) - \frac{r}{2}(\omega^{n+1} + \omega^{n-1}) \\ \Delta\psi^{n+1} = \omega^{n+1} \\ \omega^{n+1}|_N = \omega^{n+1}|_S = \psi|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\psi}{\partial n}|_E = \frac{\partial\psi}{\partial n}|_W = 0 \end{array} \right.$$

avec la notation :

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega^n := \omega(x, y, n\Delta t) \\ \psi^n := \psi(x, y, n\Delta t) \end{array} \right.$$

où  $\Delta t :=$  pas de la discrétisation temporelle.

On remarque que les termes de dissipation ont été traités de façon semi-implicite, cela pour pouvoir lier les deux suites engendrées par ce schéma.

Cette méthode est d'ordre deux. La nonlinéarité est traitée de façon explicite, ce qui fait jouer un double rôle au pas de temps, qui est à la fois un paramètre de relaxation pour la résolution de la partie nonlinéaire et représente le caractère évolutif du problème.

L'expérience montre que, même pour des modèles fortement nonlinéaires, on peut toujours choisir le pas de temps de façon à avoir la convergence (cf. Dumas (1982), Branger (1983) et les expériences numériques qui suivent.)

#### NOTA

La nonlinéarité peut être traitée aussi de façon implicite avec une méthode du type caractéristique (cf. Pironneau (1981)).

On écrit les équations du modèle (1.5) de la façon suivante :

$$(2.6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{D\omega}{Dt} - \frac{R_0}{R_e} \Delta\omega + \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{\pi} \text{curl } T - r\omega \\ \Delta\psi = \omega \end{array} \right.$$

où  $D :=$  dérivée totale (ou Lagrangienne), qui peut être discrétisée comme suit :

$$(2.7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega^{n+1}(x,y) - \omega^n(X^n(x,y))}{\Delta t} - \frac{R_0}{R_e} \Delta\omega^n + \frac{\partial\psi^n}{\partial x} = -\frac{1}{\pi} \text{curl } T - r\omega \\ \Delta\psi^{n+1} = \omega^{n+1} \end{array} \right.$$

où :  $X(x,y; t_1; t_2) = (\mathbb{R}^2 \times ]0,T[) \times ]0,T[ \rightarrow \mathbb{R}^2$

est la solution de :

$$(2.8) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dT} = u(x,y,T) ; \quad X(x,y; t; t) = (x,y) ; \\ X^n(x,y) = X(x,y; (n+1)\Delta t; n\Delta t). \end{array} \right.$$

Cependant, l'application pratique de cette méthode montre que les temps de calcul deviennent très importants, car il faut évaluer  $X^n(x,y)$  pour tous les points du maillage à chaque pas de temps.

Pour les problèmes que l'on a traités, le schéma (2.4), bien moins cher, est convergent moyennant le bon choix du pas de temps.

II.3 - ELEMENTS FINIS - PROPRIETES DE CONSERVATION

Les propriétés de conservation que l'on a démontrées plus haut, sont conservées par la solution obtenue avec la méthode d'éléments finis, car, l'approximation étant interne, la solution et son approximation appartiennent au même espace de fonctions.

On considère le modèle (1.5) dans le cas où  $1/R_e$  et  $r$  sont nulles, il n'y a pas de forcing et l'on ne garde que la condition aux limites (2.3b), situation analogue à celle où la propriété 1.2.1. a été énoncée.

Les équations de (1.5) peuvent être écrites dans ce cas dans leur formulation faible (ou intégrale) :

$$(2.9) \left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} v_0 = -R_0 \iint_{\Omega} J(\psi, \tilde{\omega}) v_0 \quad \forall v_0 \in L^2(\Omega) \\ \iint_{\Omega} \nabla \psi \nabla v_1 = \iint_{\Omega} (\tilde{\omega} - \frac{1}{R_0} y) v_1 \quad \forall v_1 \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

La méthode de Galerkin consiste à résoudre (2.9) sur un sous-espace de dimension finie  $V_h$ , vérifiant  $V_h \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ .

$$(2.10) \left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\omega}_h}{\partial t} v_h = -R_0 \iint_{\Omega} J(\psi_h, \tilde{\omega}_h) v_h \quad \forall v_h \in V_h \\ \iint_{\Omega} \nabla \psi_h \nabla v_h = \iint_{\Omega} (\tilde{\omega}_h - \frac{1}{R_0} y) v_h \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

Soit  $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$  une base de l'espace  $V_h$ . Les équations (2.10) deviennent :

$$(2.11) \left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\omega}_h}{\partial t} \varphi_j = -R_0 \iint_{\Omega} J(\psi_h, \tilde{\omega}_h) \varphi_j \quad j = 1, \dots, N \\ \iint_{\Omega} \nabla \psi_h \nabla \varphi_j = \iint_{\Omega} (\tilde{\omega}_h - \frac{1}{R_0} y) \varphi_j \quad j = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

PROPRIETE 2.3.1.

Les fonctions  $\tilde{\omega}_h, \psi_h$  discrétisations par la méthode des éléments finis de  $\tilde{\omega}, \psi$  solutions de (1.5) dans les conditions énoncées au début du paragraphe, sont telles que les quantités :

$$\iint_{\Omega} \tilde{\omega}_h, \|\tilde{\omega}_h\|_{L^2(\Omega)}^2, K_h = \frac{1}{2} \|\psi_h\|_{H^1(\Omega)}^2$$

sont conservées le long du temps.

Démonstration

Etant donné que  $V_h \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ , la démonstration est analogue à celle de la propriété 1.2.1.

- (i) Etant donné que  $\sum_{j=1}^N \phi_j = 1$ , car l'espace  $V_h$  est un espace d'interpolation :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \iint_{\Omega} \frac{\partial \omega_h}{\partial t} \phi_j &= \iint_{\Omega} \frac{\partial \omega_h}{\partial t} = -R_0 \iint_{\Omega} J(\psi_h, \tilde{\omega}_h) \\ &= -R_0 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial \bar{t}} \omega_h = 0. \end{aligned}$$

par la formule de Green, parce que la condition d'incompressibilité est exactement vérifiée et  $\frac{\partial \psi_h}{\partial \bar{t}}$  est nulle le long de la frontière.

- (ii) Pour  $\omega_h \in V_h$ , on écrit (2.10) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\omega}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\omega}_h}{\partial t} \tilde{\omega}_h = -R_0 \iint_{\Omega} \tilde{\omega}_h J(\psi_h, \tilde{\omega}_h) \\ &= -\frac{R_0}{2} \iint_{\Omega} J(\psi_h, \tilde{\omega}_h^2) \\ &= -\frac{R_0}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial \bar{t}} \tilde{\omega}_h^2 = 0 \end{aligned}$$

on a utilisé le même raisonnement que dans (i).

$$(iii) \quad K_h = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \nabla \psi_h \nabla \psi_h = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \psi_h \left( \tilde{\omega}_h - \frac{1}{R_0} y \right)$$

$$\frac{dK_h}{dt} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\omega}_h}{\partial t} \psi_h + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \nabla \psi_h \nabla \left( \frac{\partial \psi_h}{\partial t} \right)$$

Or,

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\omega}_h}{\partial t} \psi_h = -R_0 \iint_{\Omega} J\left(\frac{\psi_h^2}{2}, \tilde{\omega}_h\right) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \tilde{\omega}_h}{\partial t} \cdot \frac{(\psi_h)^2}{2} = 0$$

puisque  $\psi_h = 0$  le long de  $\partial\Omega$  et

$$\iint_{\Omega} \nabla \psi_h \nabla \left( \frac{\partial \psi_h}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} \nabla \psi_h \nabla \psi_h = \frac{dK_h}{dt}$$

donc

$$\frac{dK_h}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dK_h}{dt} \quad \text{d'où} \quad \frac{dK_h}{dt} = 0.$$

□

#### II.4 - ALGORITHME DE RESOLUTION NUMERIQUE DU MODELE DISCRETISE EN TEMPS

Pour simplifier la notation dans ce qui suit, on notera  $f$  le forcing dû au vent dont on précisera la formulation lors des expériences numériques. Les équations à résoudre sont :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{2\Delta t} + \frac{r}{2} \right) \omega^{n+1} - \frac{R_0}{2R_e} \Delta \omega^{n+1} + R_0 J(\psi^n, \omega^n) + \frac{\partial \psi^n}{\partial x} = f + \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \frac{R_0}{2R_e} \Delta \omega^{n-1} + \left( \frac{1}{2\Delta t} - \frac{r}{2} \right) \omega^{n-1} \\ \Delta \psi^{n+1} = \omega^{n+1} \\ \omega^{n+1}|_N = \omega^{n+1}|_S = \psi^{n+1}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial n}|_E = \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial n}|_W = 0 \end{array} \right.$$

On remarque que la résolution de (2.12) pose deux difficultés :

- Il est non linéaire, mais comme on l'a indiqué plus haut, on traitera le terme  $R_0 J(\psi, \omega)$  de façon explicite.
- Il est de quatrième ordre sur  $\psi$  et le découplage naturel, d'après la définition de la fonction de vorticité, en deux problèmes de deuxième ordre, l'un sur  $\psi$  et l'autre sur  $\omega$ , ne peut se faire à cause des conditions aux limites le long des frontières Est et Ouest.

Il est possible de résoudre directement le problème de quatrième ordre (cf. conclusions ci-après) avec un élément d'ordre élevé, en utilisant des codes de calcul assez sophistiqués, mais leur mise en oeuvre devient complexe.

On propose ici une autre façon de surmonter cette difficulté. On utilise une méthode développée par Glowinski et al (1977) pour le problème biharmonique qui permet, d'une part, le découplage du problème et d'autre part, de le résoudre en traitant une "cascade" de problèmes très simples (équation d'Helmotz) pour lesquels on dispose d'outils très puissants. De plus, cette méthode, dite "de type mixte", permet d'obtenir des solutions continues, autant pour la fonction de courant  $\psi^{n+1}$  que pour la fonction de vorticité  $\omega^{n+1}$ , ce qui n'est pas le cas de la résolution du problème de quatrième ordre, qui n'est normalement résolu qu'avec des éléments qui n'ont que la première dérivée continue. Remarquons qu'un élément de seconde dérivée continue doit être d'un degré très élevé.

Le problème à résoudre à chaque pas de temps s'écrit :

$$(2.13) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \omega^{n+1} - \nu \Delta \omega^{n+1} = g^{n+1} \\ \Delta \psi^{n+1} = \omega^{n+1} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Omega$$

$$\omega^{n+1}|_N = \omega^{n+1}|_S = \psi^{n+1}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial n} \Big|_E = \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial n} \Big|_W = 0$$



où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha := \left( \frac{1}{2\Delta t} + \frac{r}{2} \right) \\ \nu := \frac{R_0}{2R_e} \\ g^{n+1} := f + \frac{R_0}{2R_e} \Delta \omega^{n-1} + \left( \frac{1}{2\Delta t} - \frac{r}{2} \right) \omega^{n-1} - R_0 J(\psi^n, \omega^n) - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \end{array} \right.$$

On remarque que le découplage de (2.13) nécessite une condition aux limites sur  $\omega^{n+1}$  le long des frontières Est et Ouest. Elle va être construite à partir des conditions sur la dérivée normale de la fonction de courant imposées le long de ces frontières, avec un isomorphisme adapté.

Soient  $H^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$  définis par (1.10). On appelle opérateur de trace, l'opérateur qui à chaque fonction associe sa valeur sur la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .

On définit  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  comme l'espace des fonctions de  $L^2(\partial\Omega)$  qui sont l'image, par un opérateur de trace, d'une fonction de  $H^1(\Omega)$ . On note  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  son dual et  $(\dots)_{\partial\Omega}$  le produit de dualité.

Soit  $A : H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$  défini par :

$$(2.14) \quad (A\lambda, \mu)_{\partial\Omega} = \left( \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial n}, \mu \right)_{\partial\Omega} \quad \forall \mu \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

où  $\psi_\lambda$  est la solution de :

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \omega_\lambda - \nu \omega_\lambda = 0 \text{ sur } \Omega \\ \Delta \psi_\lambda = \omega_\lambda \text{ sur } \Omega \\ \omega_\lambda|_{\partial\Omega} = \lambda \\ \psi_\lambda|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right.$$

On démontre (cf. Glowinski et al (1979)) que l'opérateur  $A$  ainsi défini est défini positif et symétrique. Ces propriétés sont numériquement très importantes, puisque gardées par la discrétisation, vont permettre

d'utiliser la méthode de Cholesky pour inverser l'opérateur A.

Soient  $\omega_0, \psi_0$  solutions de :

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha\omega_0 - \nu\Delta\omega_0 = g^{n+1} \quad \text{sur } \Omega \\ \omega_0|_{\partial\Omega} = 0 \\ \Delta\psi_0 = \omega_0 \quad \text{sur } \Omega \\ \psi_0|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right.$$

Soient  $\lambda_0^* \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  solution de :

$$(2.17) \quad (A\lambda_0^*, \mu)_{\partial\Omega} = \left(-\frac{\partial\psi_0}{\partial n}, \mu\right)_{\partial\Omega} \quad \forall \mu \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

et

$$\lambda^* = \begin{cases} \lambda_0^* & \text{sur les frontières Est et Ouest} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

L'équation (2.17) est la formulation faible de la condition aux limites à calculer.

PROPOSITION 2.1

Les solutions  $\psi_{\lambda^*}, \omega_{\lambda^*}, \psi_0$  et  $\omega_0$  sont telles que :

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega^{n+1} = \omega_0 + \omega_{\lambda^*} \\ \psi^{n+1} = \psi_0 + \psi_{\lambda^*} \end{array} \right.$$

sont solutions de (2.13).

Démonstration

On voit facilement que :

$$\alpha(\omega_0 + \omega_{\lambda^*}) - \nu(\Delta\omega_0 + \Delta\omega_{\lambda^*}) = g^{n+1}$$

et

$$\Delta(\psi_0 + \psi_{\lambda^*}) = \omega_0 + \omega_{\lambda^*}$$

et que :

$$\left(\frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial n}, \mu\right) = \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial n}, \mu\right) + \left(\frac{\partial \psi_{\lambda^*}}{\partial n}, \mu\right) = \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial n}, \mu\right) + (A\lambda^*, \mu) = 0$$

$\forall \mu \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  d'après (2.17).

$$\omega^{n+1}|_{N,S} = \omega_0|_{N,S} + \omega_{\lambda^*}|_{N,S} = 0.$$

$$\psi^{n+1}|_{\partial\Omega} = (\psi_0 + \psi_{\lambda^*})|_{\partial\Omega} = 0$$

Donc  $\omega^{n+1}, \psi^{n+1}$  sont des solutions de (2.14).

□

III - MISE EN OEUVRE NUMERIQUE DE L'ALGORITHME

III.1 - FORME DISCRETE DE L'ALGORITHME DE RESOLUTION

On discrétise les problèmes (2.14), (2.15) et (2.16) dans sa formulation faible :

$$(3.1) \left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega} (\alpha \omega_{oh} - \nu \Delta \omega_{oh}) v_h = \iint_{\Omega} g^{n+1} v_h \quad \forall v_h \in V_h \\ \iint_{\Omega} \Delta \psi_{oh} v_h = \iint_{\Omega} \omega_{oh} v_h \quad \forall v_h \in V_h \\ v_h|_{\partial\Omega} = \omega_{oh}|_{\partial\Omega} = \psi_{oh}|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right.$$

$V_h$  étant un espace de dimension finie généralement l'espace de polynômes par morceaux.

$$(3.2) \left\{ \begin{array}{l} (A \lambda_o^*, \mu_h)_{\partial\Omega} = \left( -\frac{\partial \psi_{oh}}{\partial n}, \mu_h \right)_{\partial\Omega} \\ \forall \mu_h \in X_h \subset H^{1/2}(\partial\Omega) \cap H^{-1/2}(\partial\Omega) \end{array} \right.$$

$X_h$  étant le sous espace constitué par les traces sur la frontière  $\partial\Omega$  des fonctions de  $V_h$ .

$$(3.3) \left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega} (\alpha \omega_{\lambda_h^*} - \nu \Delta \omega_{\lambda_h^*}) v_h = 0 \quad \forall v_h \in V_h \\ \iint_{\Omega} \Delta \psi_{\lambda_h^*} v_h = \iint_{\Omega} \omega_{\lambda_h^*} v_h \quad \forall v_h \in V_h \\ \omega_{\lambda_h^*}|_{\partial\Omega} = \lambda_h^* \quad \psi_{\lambda_h^*}|_{\partial\Omega} = v_h|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right.$$

où :

$$\lambda_h^* = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_o^* \text{ sur les frontières Est et Ouest} \\ 0 \text{ ailleurs} \end{array} \right.$$

Les calculs des solutions des problèmes (3.1) et (3.3) étant classiques, précisons simplement le calcul de la solution de (3.2).

Soit  $\{\mu_j\}_{j=1}^M$  une base de  $X_h$ , donc (3.2) peut être écrite :

$$(3.4) \quad \sum_{i=1}^M \lambda_i (A_{\mu_i, \mu_j})_{\partial\Omega} = \left(-\frac{\partial\psi_{oh}}{\partial n}, \mu_j\right)_{\partial\Omega} \quad j = 1, \dots, M$$

où  $M$  est le nombre de points de discrétisation de la frontière et  $\lambda_0^* = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mu_i$  car  $\lambda_0^* \in X_h$ .

En utilisant une formule de Green on peut écrire :

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{aligned} (A_{\mu_i, \mu_j})_{\partial\Omega} &= \left(\frac{\partial\psi_{\mu_i}}{\partial n}, \mu_j\right)_{\partial\Omega} \\ &= \iint_{\Omega} \nabla\psi_{\mu_i} \nabla\bar{\mu}_j + \iint_{\Omega} \nabla\psi_{\mu_i} \bar{\mu}_j \end{aligned} \right.$$

où  $\bar{\mu}_j$  est la fonction de  $H^1(\Omega)$  dont la trace est  $\mu_j$

En remarquant la relation entre  $\psi_{\mu_i}$  et  $\omega_{\mu_i}$  on peut écrire :

$$(3.6) \quad (A_{\mu_i, \mu_j})_{\partial\Omega} = \iint_{\Omega} \nabla\psi_{\mu_i} \nabla\bar{\mu}_j + \iint_{\Omega} \omega_{\mu_i} \bar{\mu}_j$$

De façon tout à fait analogue on a pour le second membre :

$$(3.7) \quad \left(-\frac{\partial\psi_{oh}}{\partial n}, \mu_j\right)_{\partial\Omega} = -\left[\iint_{\Omega} \nabla\psi_{oh} \nabla\bar{\mu}_j + \iint_{\Omega} \omega_{oh} \bar{\mu}_j\right]$$

Si l'on note par  $\{\delta_i\}_{i=1}^I$  une base de  $V_h$ , l'algorithme de résolution de (3.1), (3.2) et (3.3) s'écrit :

[0.] Résoudre :

$$i) \quad \begin{bmatrix} B \\ A_0 \end{bmatrix} W_{oh} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

où :

$$B := (b_{ij}), \quad b_{ij} := \alpha \iint_{\Omega} \delta_i \delta_j - \nu \iint_{\Omega} \nabla\delta_i \nabla\delta_j$$

$$F := (f_j), \quad f_j := \iint_{\Omega} g^{n+1} \delta_j$$

$A_0$  représente les conditions aux limites du type Dirichlet à vérifier.

$$\text{ii) } \begin{bmatrix} C \\ A_0 \end{bmatrix} p_{oh} = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } C := (c_{ij}) \quad , \quad c_{ij} := \iint_{\Omega} \nabla \delta_i \cdot \nabla \delta_j$$

$$G := (g_j) \quad g_j := \sum_{k=1}^I (W_{oh})_k \iint_{\Omega} \delta_k \delta_j$$

avec la notation  $(W_{oh})_k$  : k-ième composante du vecteur  $W_{oh} \in \mathbb{R}^I$ .

[1] Pour  $i = 1, \dots, M$  résoudre :

$$\text{i) } \begin{bmatrix} B \\ A_0 \end{bmatrix} w_{ih} = \begin{bmatrix} 0 \\ t_i \end{bmatrix}$$

où :  $t_i$  est égal à zéro sauf pour la composante qui correspond au noeud  $i$  de la frontière, où il prend la valeur 1.

$$\text{ii) } \begin{bmatrix} C \\ A_0 \end{bmatrix} p_{ih} = \begin{bmatrix} G^i \\ 0 \end{bmatrix}$$

où :

$$G^i := (\bar{g}_j) \quad \bar{g}_j := \sum_{k=1}^I (w_{ih})_k \iint_{\Omega} \delta_j \delta_k$$

[2] Résoudre le système  $M \times M$  :

$$A \lambda_0^* = T$$

$$A := (a_{ij}) \quad a_{ij} := \sum_{k=1}^I (p_{ih})_k \iint_{\Omega} \nabla \delta_i \cdot \nabla \delta_j + \sum_{k=1}^I (w_{ih})_k \iint_{\Omega} \delta_i \delta_j$$

$$T := (\bar{t}_j) \quad \bar{t}_j := - \sum_{k=1}^I [(p_{io})_k \iint_{\Omega} \nabla \delta_i \cdot \nabla \delta_j + (w_{oh})_k \iint_{\Omega} \delta_i \delta_j]$$

[3] Résoudre

$$\text{i) } \begin{bmatrix} B \\ A_0 \end{bmatrix} w_{\lambda h} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

où  $t_{\lambda}$  est égal à  $\lambda_0^*$  sauf aux frontières Nors et Sud où il est nul.

$$\text{ii) } \begin{bmatrix} C \\ A_0 \end{bmatrix} p_{\lambda_h} = \begin{bmatrix} G_\lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

où

$$G_\lambda := (\bar{g}_j) \quad \bar{g}_j := \frac{I}{\Sigma} (W_{\lambda h})_k \iint_{\Omega} \delta_j \delta_k$$

La solution est donnée par :

$$\begin{aligned} \omega_h^{n+1} &= \frac{I}{\Sigma} (W_{oh} + W_{\lambda h})_k \delta_k \\ \psi_h^{n+1} &= \frac{I}{\Sigma} (p_{oh} + p_{\lambda h})_k \delta_k \end{aligned}$$

□

### Remarques

Cet algorithme est très efficace. Remarquons que la matrice C est calculée en même temps que la matrice B, les matrices élémentaires ne sont donc construites qu'une seule fois. Le déroulement de l'algorithme ne se fait que par résolution de systèmes linéaires triangulaires, car les matrices sont calculées et triangularisées au début de l'algorithme.

Notons que le seul paramètre qui intervient et qui dépend de n (étape de résolution par rapport au pas de temps) est F. On utilise donc les matrices déjà triangularisées et la matrice A déjà construite et factorisée pour les étapes suivantes .

Le coût par itération temporelle est calculé de la façon suivante :

Etant donné  $(\omega_h^{n-1}, \psi_h^{n-1})$ ,  $(\omega_h^n, \psi_h^n)$  le calcul de  $(\omega_h^{n+1}, \psi_h^{n+1})$  coûte :

i) Etape [0]

- Remontée de deux systèmes de  $I \times I$

ii) Etape [2]

- Remontée de deux systèmes de  $N \times N$  où N est le nombre des points de discrétisation des frontières Est et Ouest, sur les (M-N) points qui restent  $\lambda_h^*$  est nul.

## iii) Etape [3]

- Remontée de deux systèmes de  $I \times I$ .

Ainsi, un pas de temps coûte la remontée de 4 systèmes triangulaires de  $I \times I$  et de 2 systèmes de taille inférieure strictement à  $M$ . (normalement  $M \ll I$ ).

Il faut en plus considérer l'investissement initial de la construction et triangulation des matrices  $B$  et  $C$ , puis de la matrice  $A$  (deux fois le nombre de points sur les frontières Est et Ouest de remontées d'un système de  $I \times I$ ).

On remarque que par rapport à un modèle avec glissement (cf. Dumas (1982)), on remonte deux systèmes de  $I \times I$  et la matrice  $A$  en plus. Si l'on considère que usuellement la dimension de la matrice  $A$  est de l'ordre de 5 à 10 % de  $I$ , on double à peu près le temps de calcul par itération, par rapport au modèle analogue, mais résolvant une condition de glissement à la frontière. On peut ainsi affirmer que le modèle développé dans ce mémoire reste dans des ordres de grandeur de coût raisonnable. Remarquons que l'investissement que représente la construction de la matrice  $A$  devient de moins en moins important au fur et à mesure que l'on a à traiter des modèles plus fortement non linéaires et instationnaires, compte tenu du grand nombre d'itérations à faire. Pour l'exemple non linéaire présenté plus loin, on arrive à moins de 5 % du temps de calcul (cf. paragraphe suivant).



3.2 - VERIFICATION DE LA PRECISION DU MODELE3.2.1. - Solution analytique de référence

Pour étalonner les performances de notre modèle, on dispose d'une solution analytique approchée (Munk (1950), Pedlosky (1979)) dans le cas linéaire.

Considérons la version linéaire et stationnaire de (1.5), (le terme  $R_0 J(\psi^n, \omega^n)$  est négligé et  $\frac{\partial \omega}{\partial t}$  est nul) :

$$(3.8) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{R_0}{R_e} \nabla^4 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} = f(x, y) \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_E = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_W = \psi \Big|_{\partial \Omega} = 0 \\ \Omega = ]0, L[ \times ]0, 1[ \end{array} \right.$$

Munk (1950) et Pedlosky (1979) ont obtenu des solutions approchées de (3.8), en négligeant les termes de grandeur inférieure ou égale à l'épaisseur de la couche limite.

Ainsi l'erreur de la solution obtenue est bornée par une quantité connue.

Les solutions de Munk et Pedlosky sont très voisines et pratiquement on peut les assimiler à la suivante :

$$(3.9) \left\{ \begin{array}{l} \psi(x, y) = -LK \sin \pi y \left[ k e^{-\frac{1}{2} kx} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} kx + \frac{\sqrt{3}}{2kL} - \frac{\pi}{6} \right) + \right. \\ \quad \left. + 1 - \frac{1}{kL} (kx - e^{-k(L-x)} - 1) \right] \\ k = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{kL} \quad k = \sqrt[3]{\frac{R_e}{R_0}} \end{array} \right.$$

qui est une approximation d'ordre  $\sqrt[3]{\frac{R_0}{R_e}}$  de la solution du problème (3.8) lorsque le forcing dû au vent est pris égal à  $-\sin \pi y$ .

La solution (3.9) est trouvée en appliquant à (3.8) une méthode de séparation de variables et en résolvant de façon approchée l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 qui en résulte (cf. Munk (1950)).

Notons que l'on trouve une forme très proche de (3.9) en divisant  $\Omega$  en trois parties et en introduisant pour les deux bords Est et Ouest des coordonnées locales. Au milieu du bassin on considère valable la relation de Svedrup (cf. Pedlosky (1979)).

### 3.2.2. - Résolution du problème linéaire sur un domaine carré

On a utilisé pour tous les essais numériques un élément classique de Lagrange de degré un. Ce choix est dû au fait que les temps de calcul pour des éléments de degré deux deviennent grands, et que la précision que l'on obtient avec des éléments de degré un est déjà satisfaisante pour les expériences test que l'on a réalisés.

Les triangulations utilisées sont très denses sur la côte Ouest, car la solution a une variation très forte dans cette zone.

On résout le modèle dans le cas  $r = 0$ , c'est-à-dire, sans frottement de fond, la dissipation est faite par viscosité latérale, comme dans (3.8).

Etant donné l'existence d'une veine de recirculation à l'Ouest du bassin dont la largeur dépend de la racine cubique du quotient  $\frac{R_0}{R_e}$  (voir 1.6), l'une des difficultés du problème est la bonne représentation de la solution dans cette couche limite.

#### Remarque

Dans tous les cas on calcule :

$$(3.10) \quad \|\omega^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{enstrophie potentielle et}$$

$$(3.11) \quad \frac{1}{2} \|\psi^{n+1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \text{énergie cinétique, intégrales caractéristiques des mouvements dans le bassin.}$$

Les identités :

$$(3.12) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\omega^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} \omega^{n+1} \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial t}$$

et

$$(3.13) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\psi^{n+1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} \nabla \psi^{n+1} \nabla \left( \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial t} \right)$$

permettent d'affirmer que ces deux quantités deviennent stables à l'état stationnaire.

Pour présenter synthétiquement les résultats nous nous limitons aux courbes d'énergie cinétique et d'instabilité potentielle intégrale en fonction de temps et aux courbes de niveau de la solution à quelques pas de temps de façon à pouvoir observer son évolution.

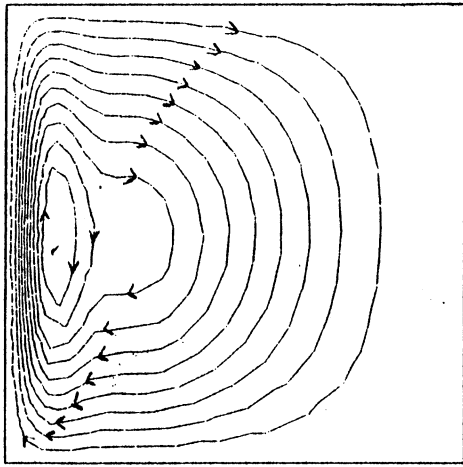
Afin de tester la précision de notre méthode on a pris les valeurs suivantes :

$$(3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_0}{R_e} = 2.7 \times 10^{-5} \\ \Delta t = 8.4 \\ r = 0 \\ \Omega = ]0,1[{}^2 \end{array} \right.$$

On présente sur la figure 3.1 la triangularisation utilisée, dont on remarque la densité supérieure du côté Ouest où se situe la veine de recirculation.

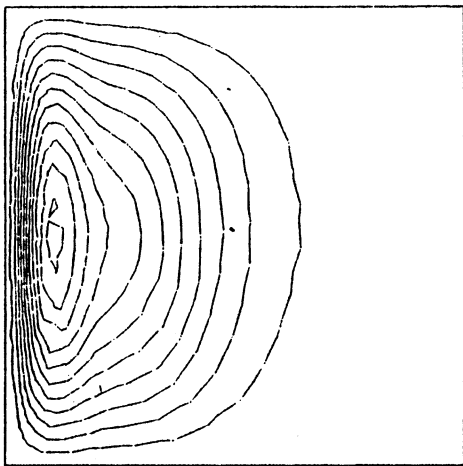
Les courbes d'énergie cinétique et d'instabilité potentielle sont présentées sur les figures (3.2) et (3.3); on remarque que la solution après plus de 400 unités de temps (1 u.t. =  $(\beta L)^{-1}$ , 7 heures environ, cf. introduction) n'est pas encore la solution du problème stationnaire, ceci est dû à l'existence d'une onde de Rossby engendrée dans la phase de spin-up du mouvement qui n'est pas encore amortie.





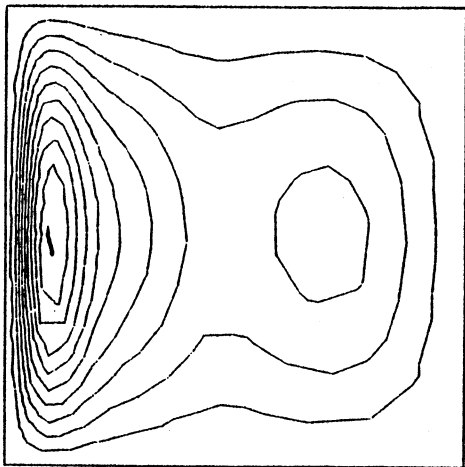
650 TRIANGLES  
378 u.t.

FIGURE 3.4



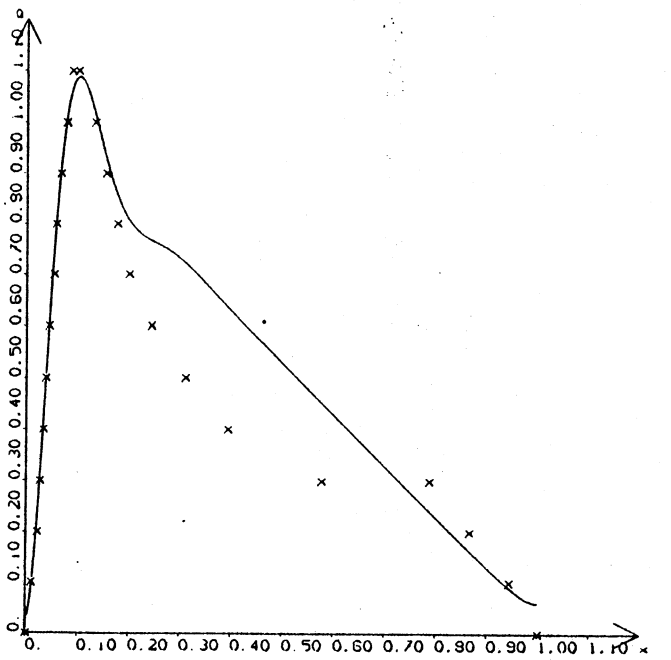
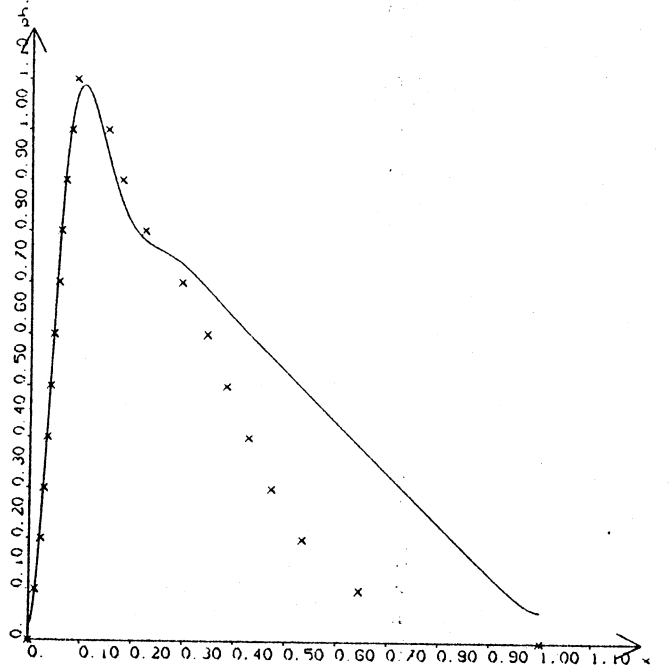
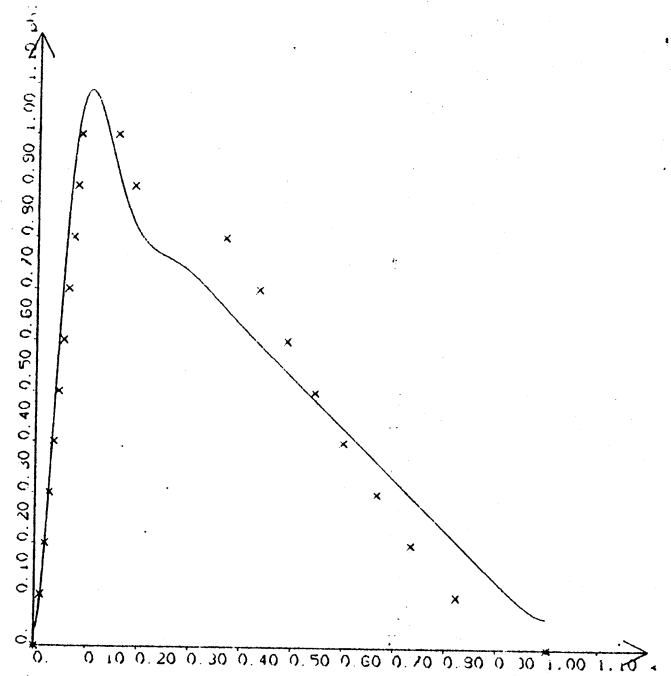
386.4 u.t.

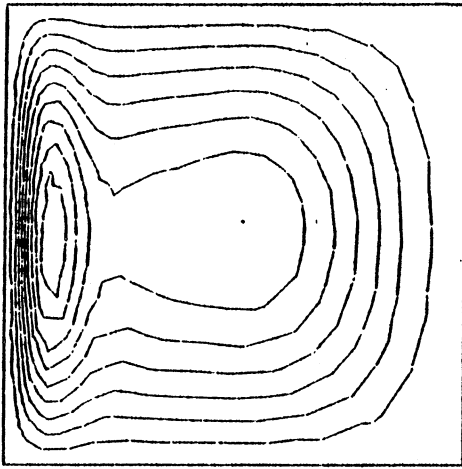
FIGURE 3.5



394.8 u.t.

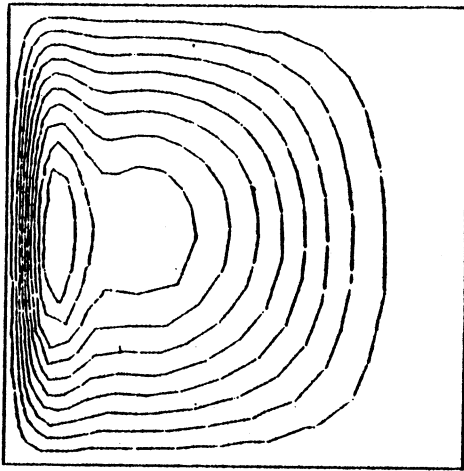
FIGURE 3.6





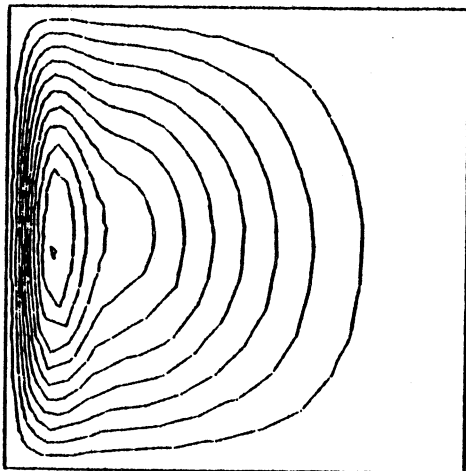
403.2 u.t.

FIGURE 3.7



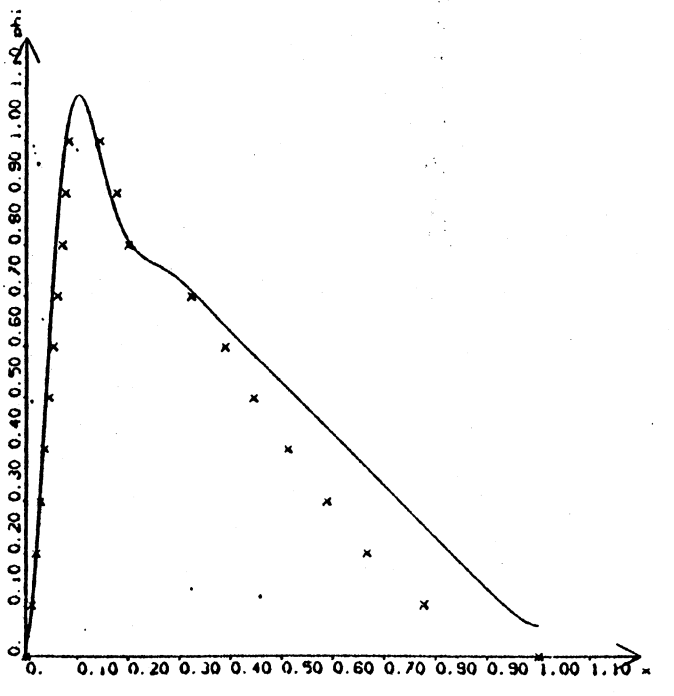
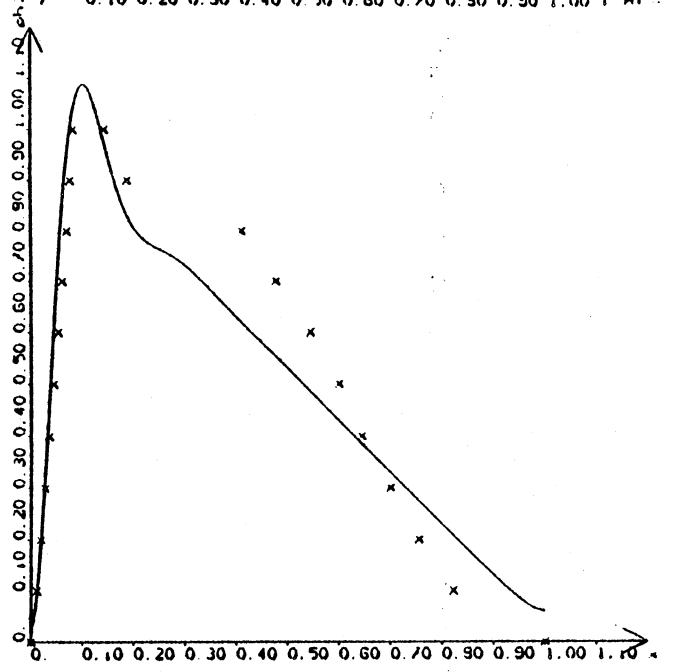
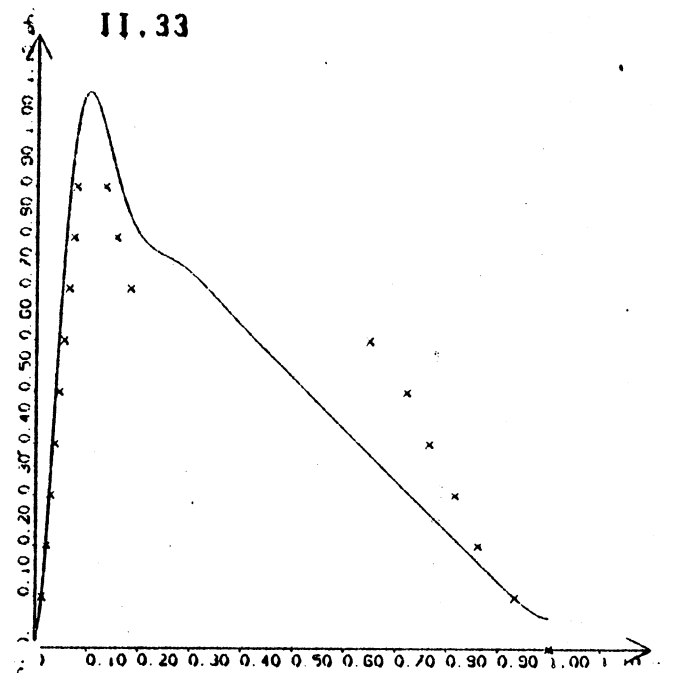
411.6 u.t.

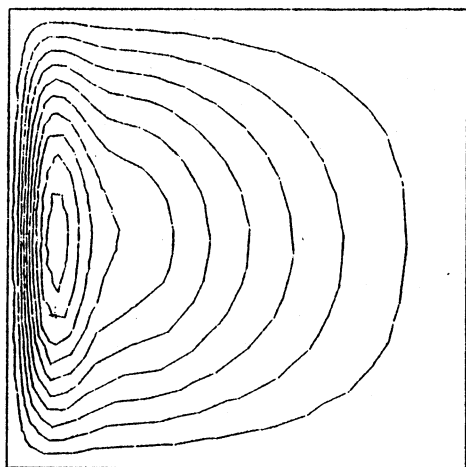
FIGURE 3.8



420 u.t.

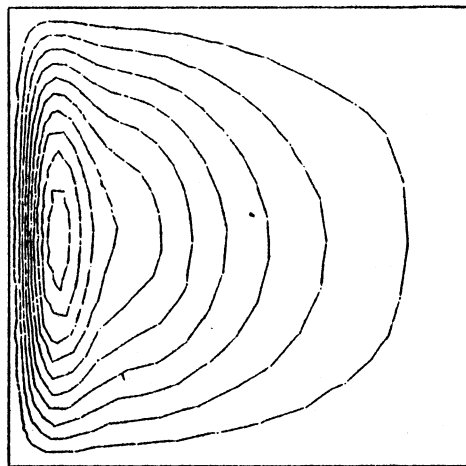
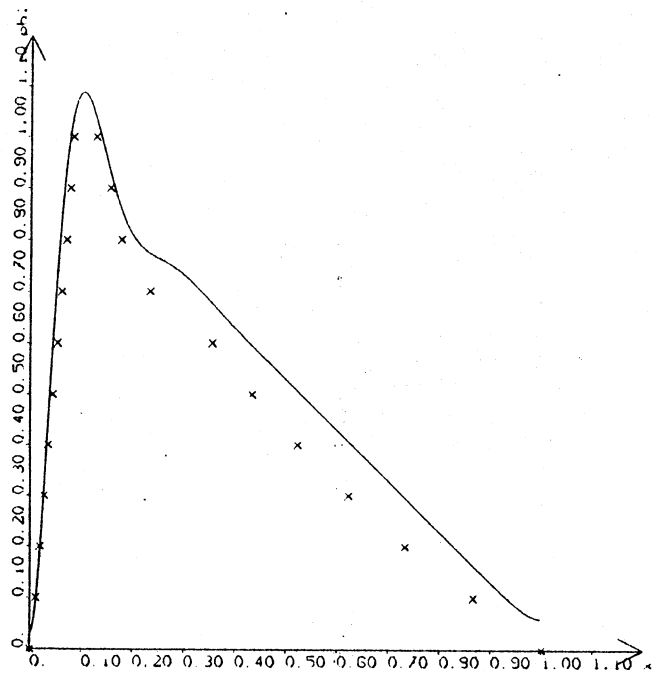
FIGURE 3.9





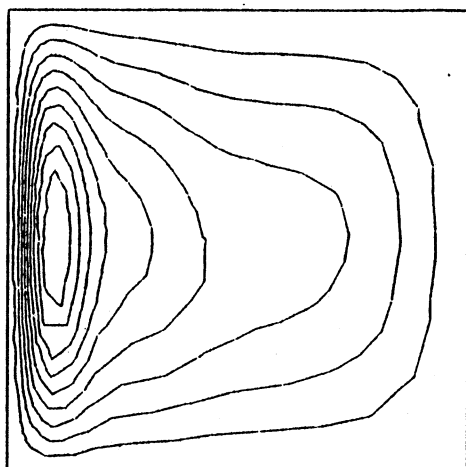
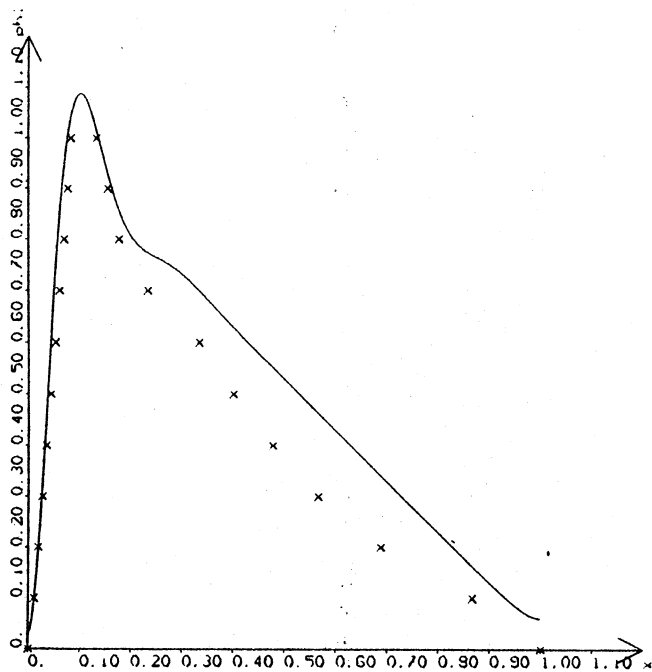
428.4 u.t.

FIGURE 3.10



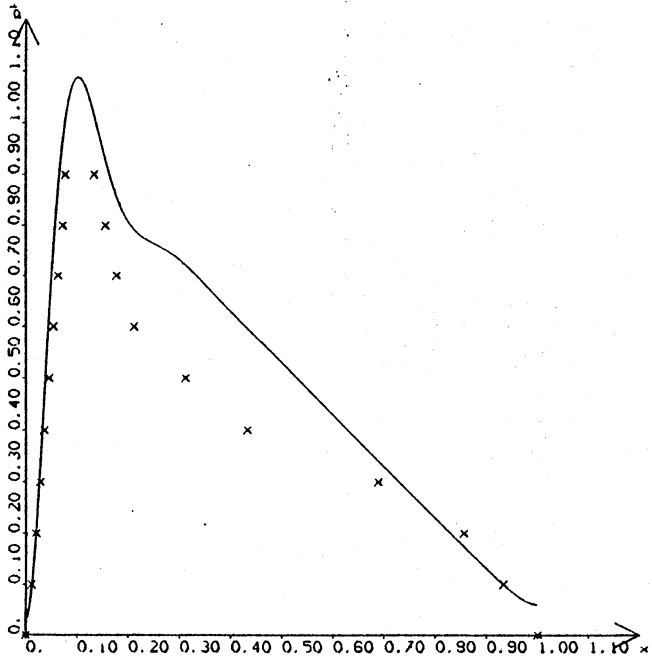
436.8 u.t.

FIGURE 3.11



445.2 u.t.

FIGURE 3.12



Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la précision des résultats obtenus, on donnera une explication détaillée du phénomène de spin-up dans le paragraphe suivant.

Les courbes de niveau des solutions et leur profil pour  $y = 0.5$   $0 \leq x \leq 1$  comparé à la solution stationnaire sont tracés sur les figures 3.4 à 3.12.

On remarque que sur la couche limite les deux solutions sont très proches, ce qui confirme la précision de notre solution numérique car (3.9) est calculée de façon à ce qu'elle soit très proche de la solution exacte sur la couche limite. Ailleurs, étant donné l'onde de Rossby non amortie notre solution oscille autour de la solution stationnaire pour converger vers elle.

### 3.2.3. - Résolution du problème sur un domaine rectangulaire

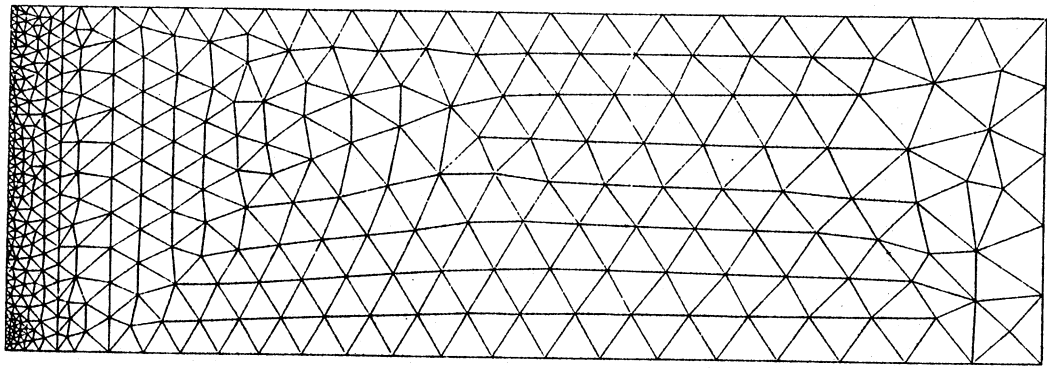
On considère les valeurs des paramètres suivants :

$$(3.15) \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_0}{R_e} = 6 \times 10^{-5} \\ r = 0 \\ \Delta t = 2 \\ \Omega = ]0,3[ \times ]0,1[. \end{array} \right.$$

La figure (3.13) présente la triangulation, elle garde les mêmes caractéristiques que celles de la figure (3.1), mais cette fois on a divisé le domaine en trois sous-domaines pour pouvoir faire décroître de façon continue la taille des triangles.

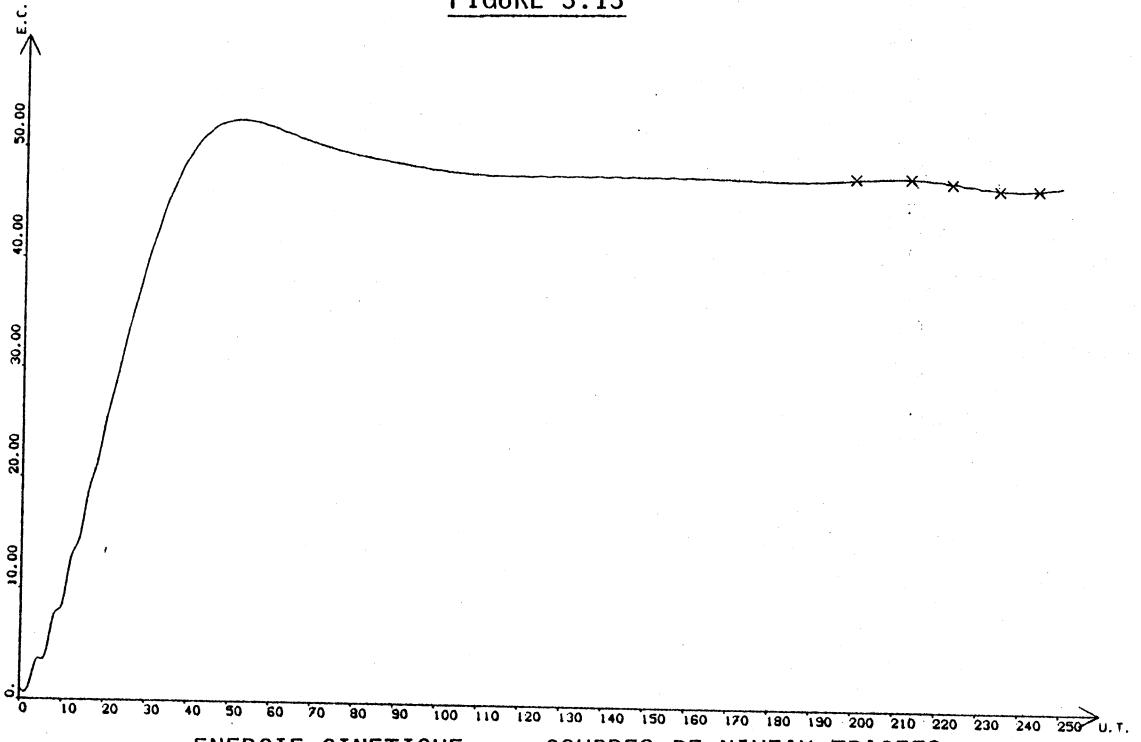
Les courbes d'énergie cinétique et d'entrophie potentielle sont présentées sur les figures (3.14) et (3.15). On remarque que dans ce cas la solution oscille beaucoup moins au cours du temps, à la fin de notre simulation, elle est nettement plus proche de la solution stationnaire que dans le cas de la solution sur un domaine carré.





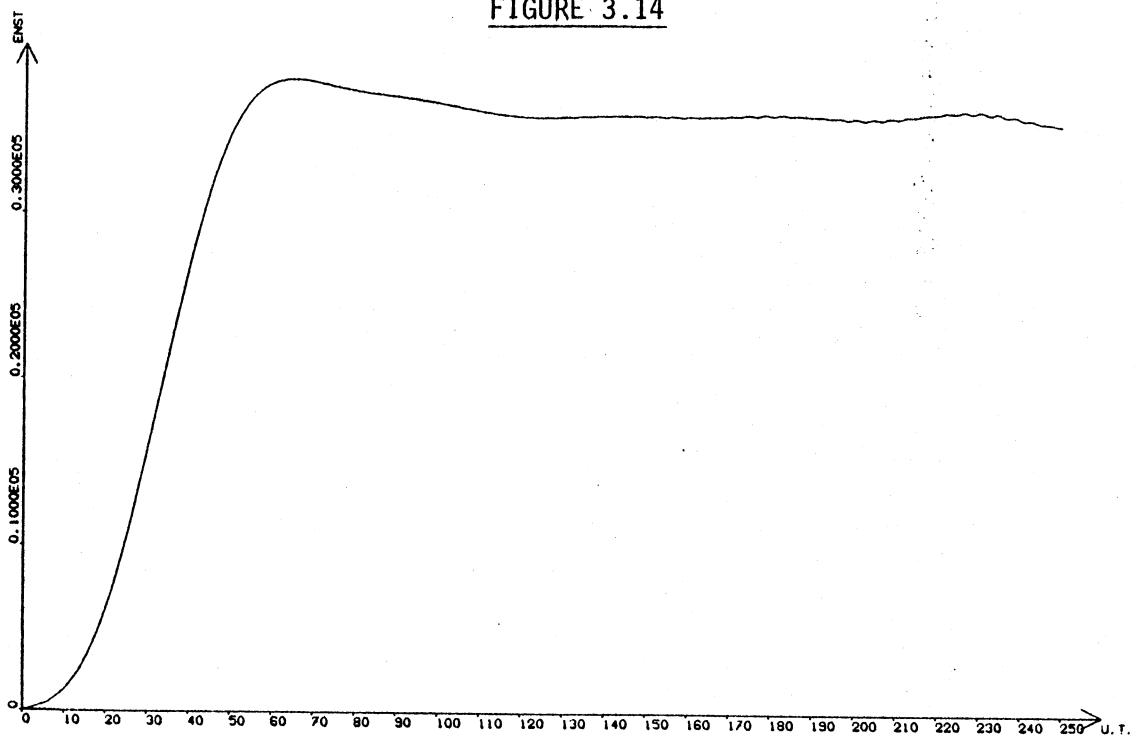
699 TRIANGLES

FIGURE 3.13



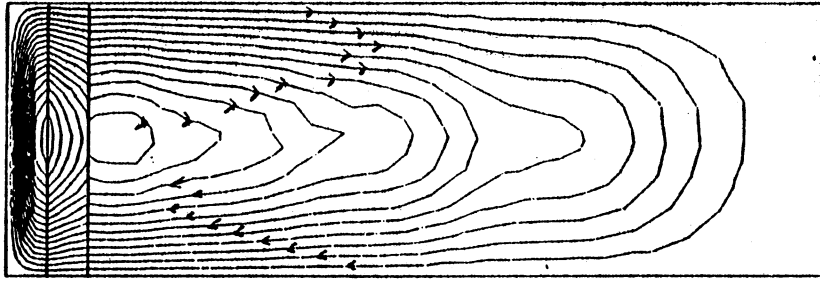
ENERGIE CINETIQUE : x COURBES DE NIVEAU TRACEES

FIGURE 3.14

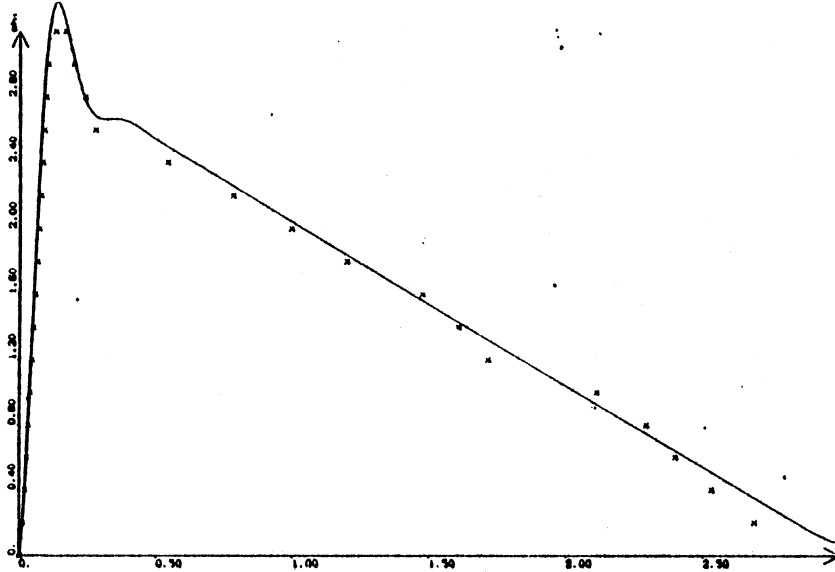


ENSTROPHE POTENTIELLE

FIGURE 3.15

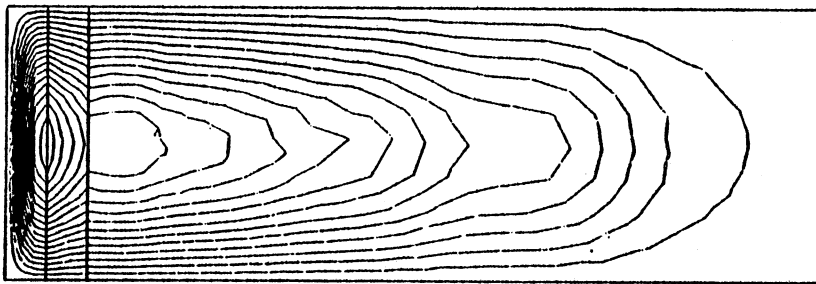


699 TRIANGLES 21 COURBES DE NIVEAU  
NIVEAU MINI. = 0  
NIVEAU MAXI. = 0.4000E01

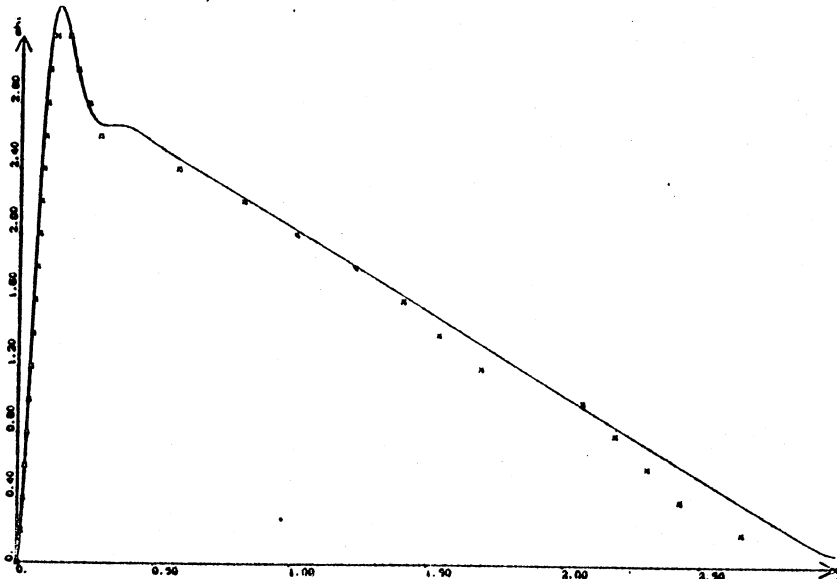


200 u.t.

FIGURE 3.16

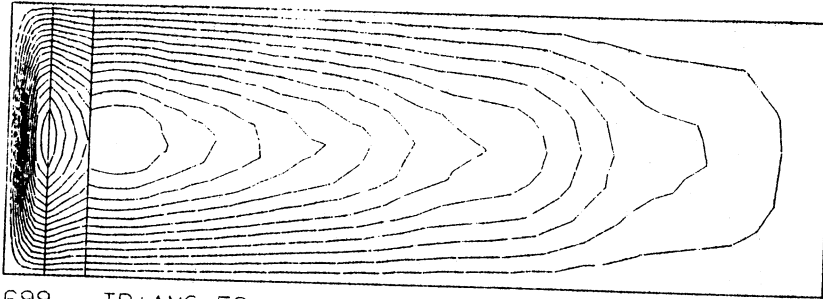


699 TRIANGLES 21 COURBES DE NIVEAU  
NIVEAU MINI. = 0  
NIVEAU MAXI. = 0.4000E01



212 u.t.

FIGURE 3.17



699 TRIANGLES

21 COURBES DE NIVEAU  
NIVEAU MINI. = 0  
NIVEAU MAXI. = 0.4000E01

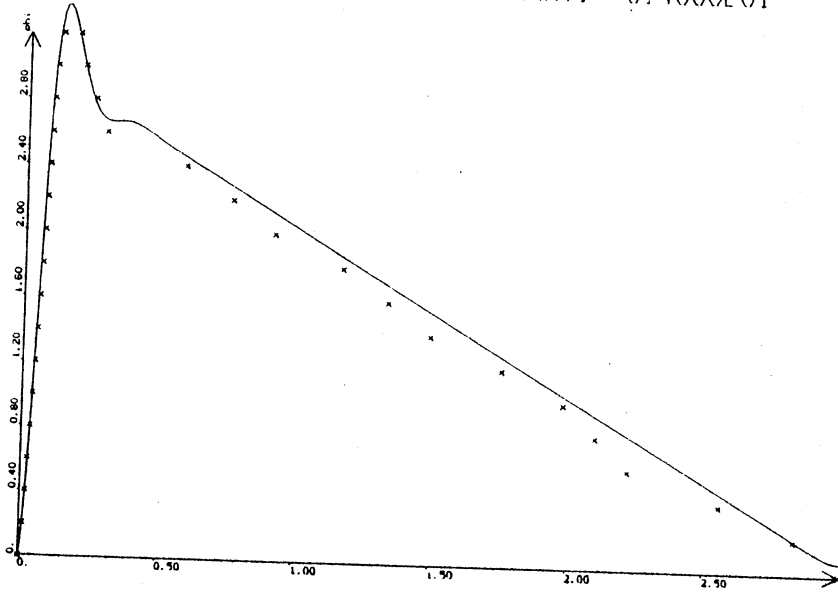
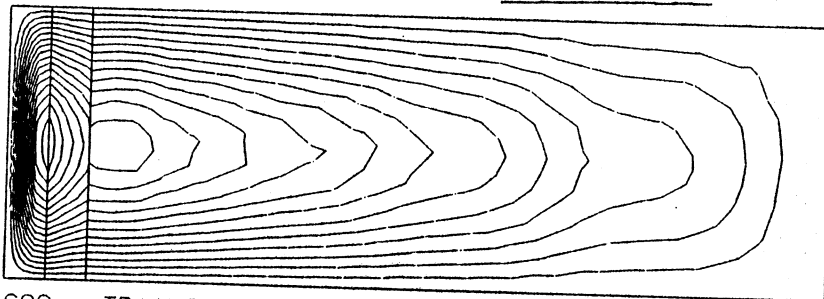


FIGURE 3.18

224 u.t.



699 TRIANGLES

21 COURBES DE NIVEAU  
NIVEAU MINI. = 0  
NIVEAU MAXI. = 0.4000E01

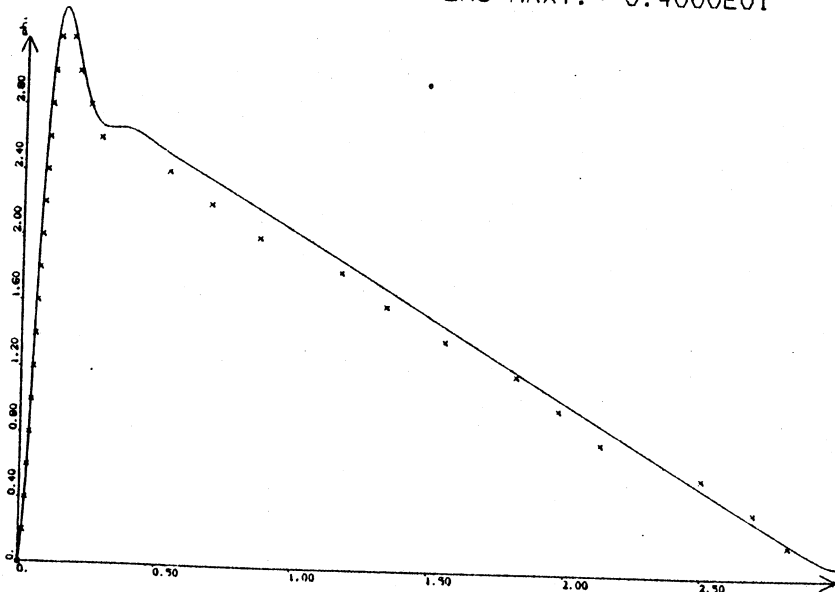
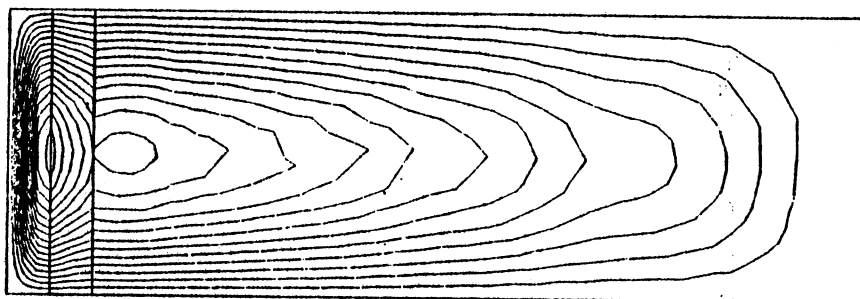


FIGURE 3.19

236 u.t.



699 TRIANGLES      21 COURBES DE NIVEAU  
NIVEAU MINI. = 0  
NIVEAU MAXI. = 0.4000E01

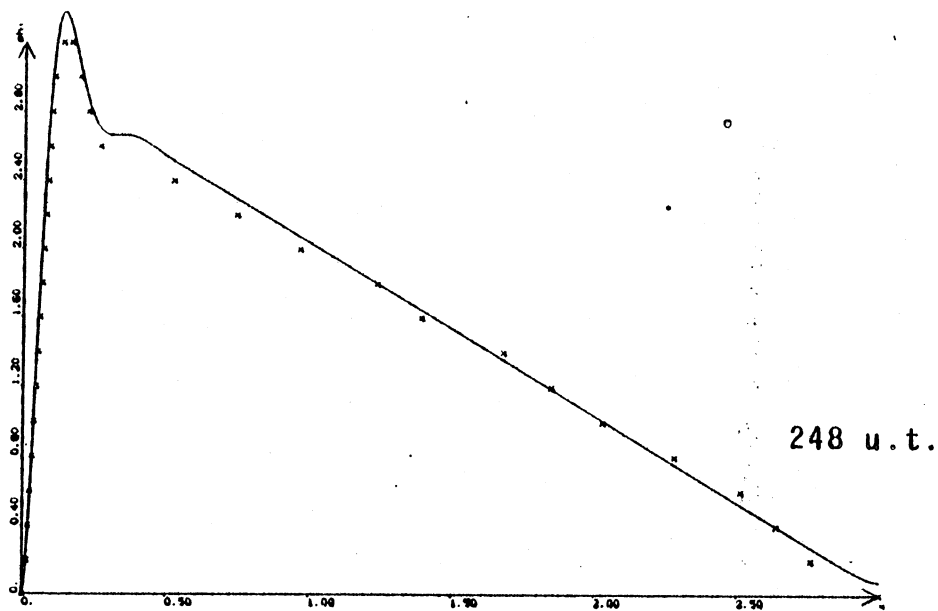


FIGURE 3.20

Les courbes de niveau des solutions et leur profil pour  $y = 0.5$ ,  $0 \leq x \leq 3$  sont tracées sur les figures 3.16 à 3.20. On remarque la bonne précision obtenue dans ce cas sur la couche limite et ailleurs, la faible oscillation de la solution autour de la solution stationnaire dû, comme auparavant, à la présence d'une onde de Rossby non amortie.

### III.3 - TEMPS DE CALCUL

Dans le but de comparer quelques unes des méthodes possibles pour intégrer le modèle précédemment exposé, on donne dans ce qui suit les temps de calcul identifiés sur l'ordinateur HB-68 du Centre Interuniversitaire de Calcul de Grenoble (C.I.C.G.).

Les coûts de calcul de l'algorithme proposé au paragraphe 3.1 et présentés ici sont seulement indicatifs car ils dépendent naturellement des ordinateurs et de l'efficacité des programmes utilisés.

Maillage	Nombre d'inconnues sur les frontières Est et Ouest	Nombre total d'inconnues (lag 1)	Triangulation des matrices B et C (cf. 3.1) Calcul de $\omega^1, \psi^1$	Construction de la matrice A	Temps moyen par itération
699 triangles (fig. 3.22)	57	402	40 sec.	951 sec.	45 sec
650 triangles (fig. 3.1)	38	360	30 sec.	698 sec.	41 sec
500 triangles (fig. 3.40)	34	289	20 sec.	476 sec.	33 sec

Les temps de calcul sont les mêmes pour les cas linéaires et non linéaire car on résout explicitement la non linéarité. Le calcul de  $J(\psi^n, \omega^n)$  n'entraîne pas de travail supplémentaire, car les dérivées doivent être toujours calculées même dans le cas linéaire.

Bien que le nombre total d'inconnues soit assez modéré, on peut affirmer que l'on a déjà une bonne résolution sur la veine de recirculation à l'Ouest.

Remarque

Le problème :

$$(3.16) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta\psi) - \frac{R_0}{R_e} \nabla^4 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} = f(x,y) \text{ sur } \Omega \\ \psi|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \psi}{\partial n}|_E = \frac{\partial \psi}{\partial n}|_W = \Delta\psi|_N = \Delta\psi|_S = 0 \end{array} \right.$$

peut être résolu avec la même discrétisation temporelle, mais avec un élément d'argyris de degré 5 (cf. Poncet (1979) pour la description de l'élément).

L'expérience de cette méthode nous a donné des temps de calcul de l'ordre de 120 sec. par itération pour 266 inconnues au total. L'implémentation de cet élément étant difficile, on a utilisé un code général (cf. Poncet 1980) ce qui a pénalisé cette façon de résoudre. Un approfondissement de l'étude de la mise en oeuvre de l'algorithme nous amène à penser qu'un programme amélioré pourrait diviser les temps de calcul par un coefficient proche de deux. Mais il semble que la difficulté et l'encombrement de mémoire des programmes, plus des temps de calcul assez importants rendent cette dernière méthode impraticable sur des exemples réels.

### III.4 - APPLICATION A LA RESOLUTION DU PROBLEME NONLINEAIRE (bassin carré) POUR UN VENT DE TYPE $-\sin\pi x \sin\pi y$ .

#### III.4.1. - Problème linéaire correspondant

Dans ce paragraphe on considère le forcing :

$$(3.17) \quad f(x,y) = -\sin\pi x \sin\pi y \quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array}$$

et les valeurs des paramètres :

$$(3.18) \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_o}{R_e} = 2.7 \times 10^{-5} \\ \Delta t = 8.4 \\ r = 0. \\ \Omega = 10,1[2 \end{array} \right.$$

On a utilisé la triangulation de la figure 3.1. Cette simulation concerne comme précédemment une cellule de circulation anticyclonique avec une accélération sur le bord Ouest et un courant de retour qui envahit tout le domaine.

Les courbes d'énergie cinétique et d'entrophie potentielle globales tracées sur les figures 3.21 et 3.22 révèlent le comportement oscillatoire de la solution que nous avons déjà noté précédemment. Ces oscillations sont dues à la présence d'ondes de Rossby dans le bassin, engendrées pendant la phase de spin-up, et dont l'amortissement est très lent. Ces ondes se présentent sous la forme de cellules de circulation alternativement positives et négatives de taille successivement croissante puis décroissante, envahissant tout le bassin et se propagent d'Est en Ouest. (cf. Pedlosky (1979)). (cf. Figure 3.23)

L'évolution de la solution globale du problème en fonction du temps peut ainsi s'interpréter aisément : on observe sur la figure 3.24 la présence d'une faible cellule cyclonique dans la partie droite du bassin correspondant à l'amorce d'une cellule positive de Rossby, telle que nous l'avons décrite sur nos schémas ci-après. Sur la figure 3.25 les valeurs de la fonction de courant diminuent dans la partie ouest du bassin, car cette cellule cyclonique qui était dans la partie droite du bassin est entrée dans la partie gauche. Sur la figure 3.27, au contraire, la cellule principale retrouve son niveau d'énergie de la figure 3.24, car une cellule négative de Rossby occupe toute la partie ouest du bassin et accélère la circulation générale.

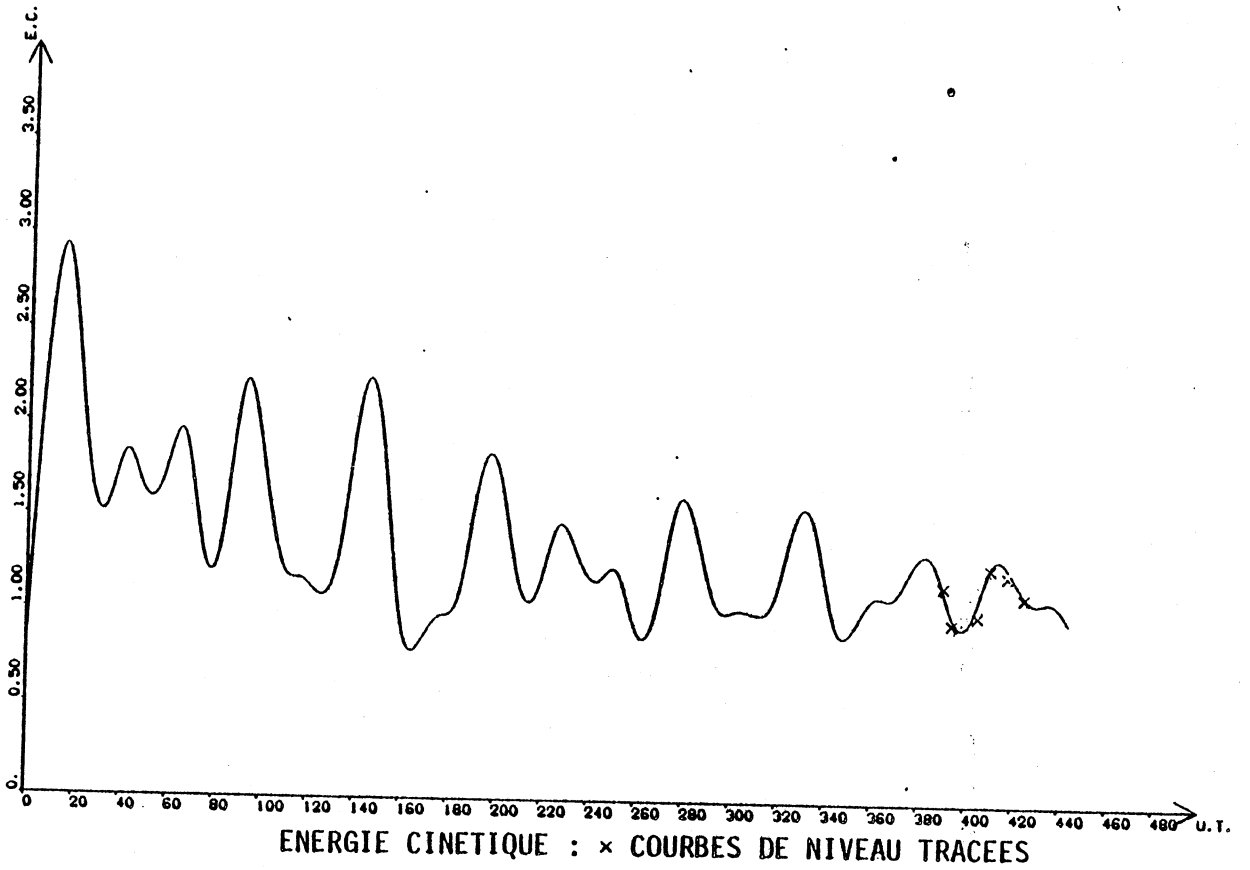
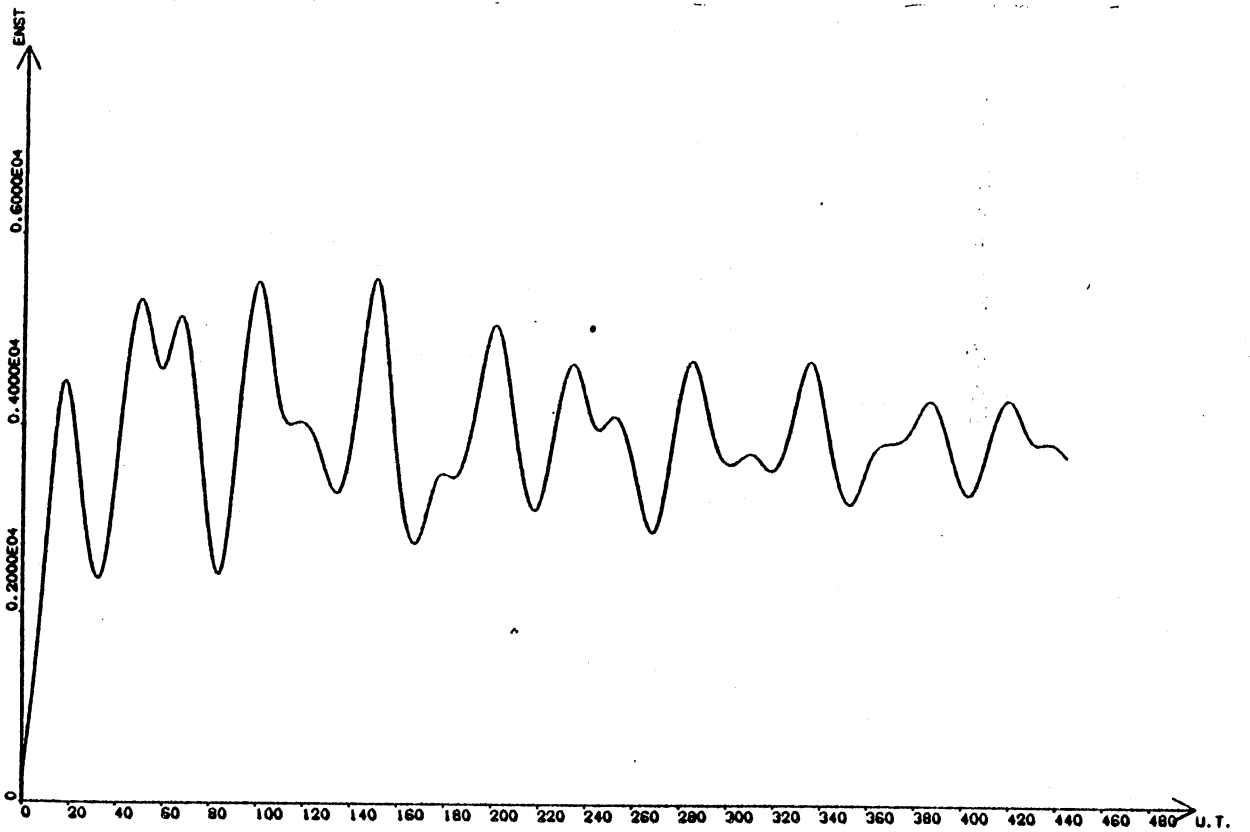


FIGURE 3.21



ENSTROPHIE POTENTIELLE

FIGURE 3.22



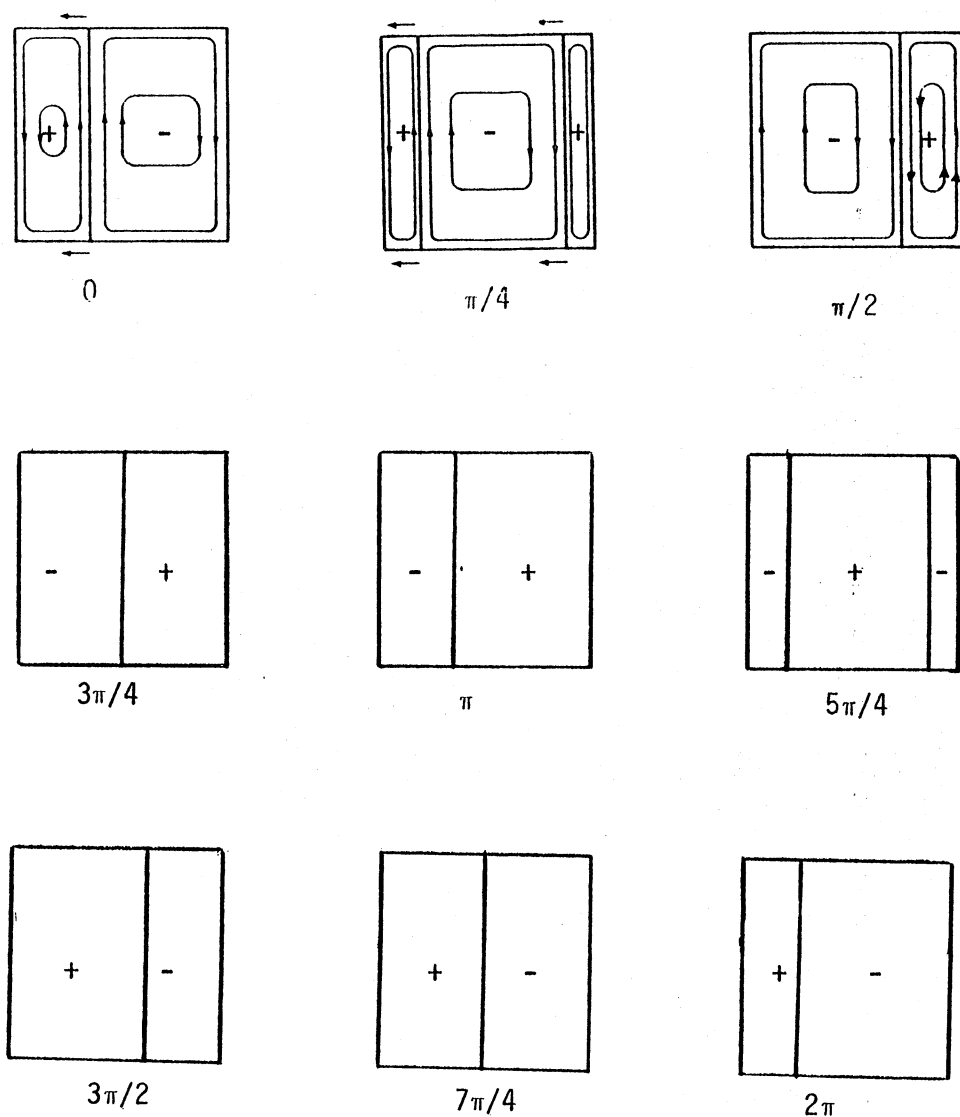
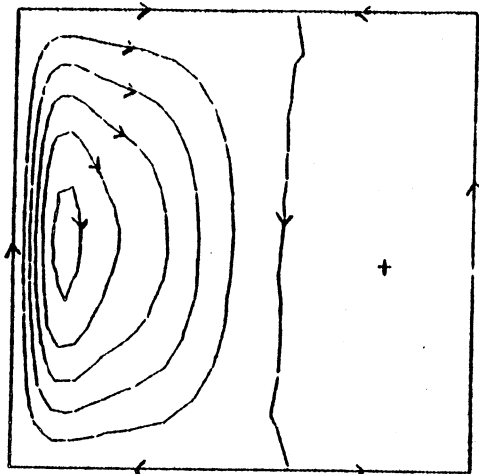


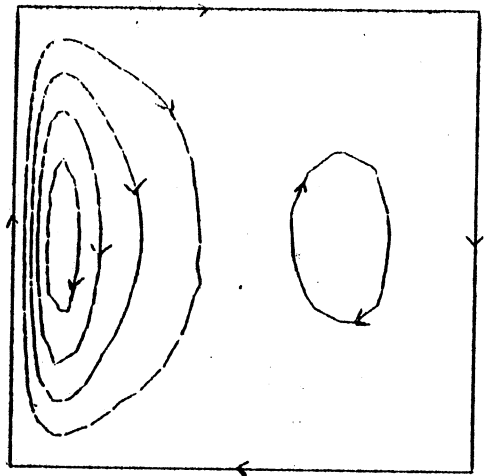
FIGURE 3.23

Notons que l'adhérence à la paroi que nous imposons ici introduit une dissipation d'énergie importante le long de la frontière ouest ; un problème analogue, mais comportant une condition de glissement aux parois a été traité par Dumas (1982) dans les mêmes conditions de vent et de viscosité latérale : on observe dans le cas traité par Dumas que l'énergie cinétique globale dans le bassin est deux à trois fois plus forte que dans notre cas.



650 TRIANGLES  
386,4 u.t.

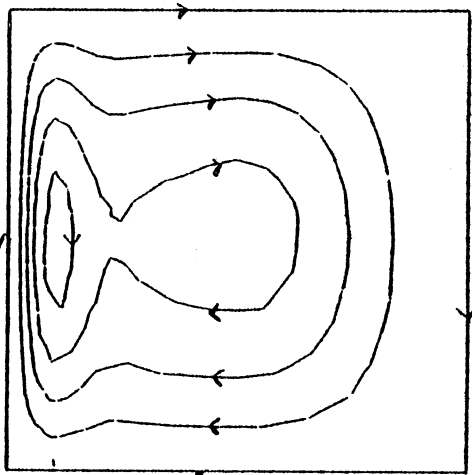
FIGURE 3.24



394,8 u.t.

FIGURE 3.25

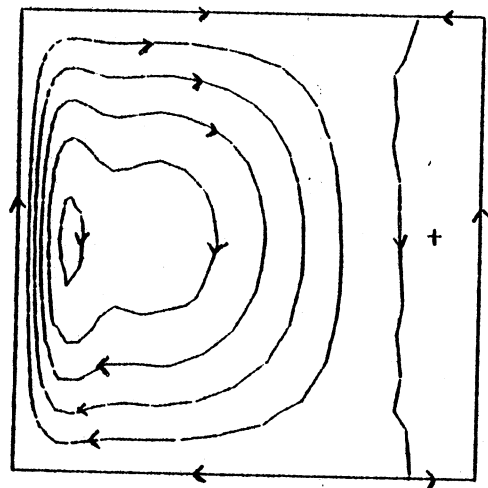
courbes de niveau



403,2 u.t.

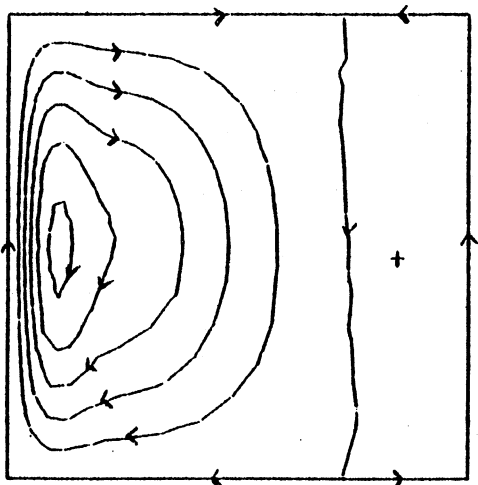
FIGURE 3.26

- 0.
- 0.15
- 0.30
- 0.45
- 0.60
- 0.75



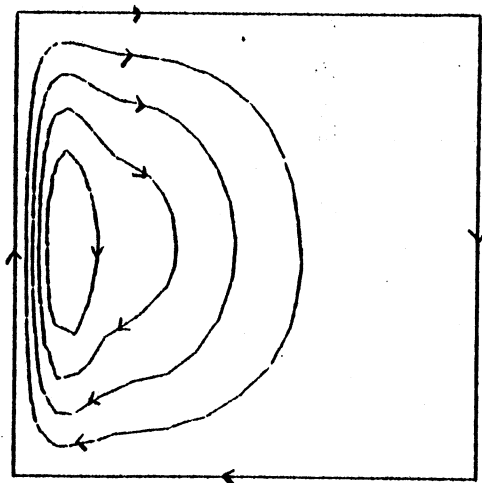
411,5 u.t.

FIGURE 3.27



420 u.t.

FIGURE 3.28



428,4 u.t.

FIGURE 3.29

3.4.2 - Problème non linéaire

Considérons l'exemple non linéaire suivant :

$$(3.19) \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_o}{R_e} = 2.7 \times 10^{-5} \quad R_o = 9 \times 10^{-4} \\ r = 0 \\ \Delta t = 0.75 \\ \Omega = ]0,1[{}^2 \end{array} \right.$$

La résolution est faite sur la triangulation de la figure 3.1. Sur les figures 3.30 et 3.31 sont tracées les courbes d'énergie cinétique et d'entrophie potentielle globale:elles oscillent avec une périodicité évidente, qui est celle du premier mode des ondes de Rossby décrit au paragraphe précédent. (On peut remarquer par ailleurs, quelques petites oscillations dues au schéma "leap-frog").

La figure 3.32 présente les courbes de niveau au premier maximum d'énergie, il s'agit de la mise en route ('spin-up') du système. La solution ressemble à celle du problème linéaire : on voit une cellule de recirculation anticyclonique avec une couche limite à l'Ouest du bassin. La solution n'est pas stationnaire et sur cette figure on remarque en particulier l'amorce d'une cellule positive de Rossby à l'Est du bassin.

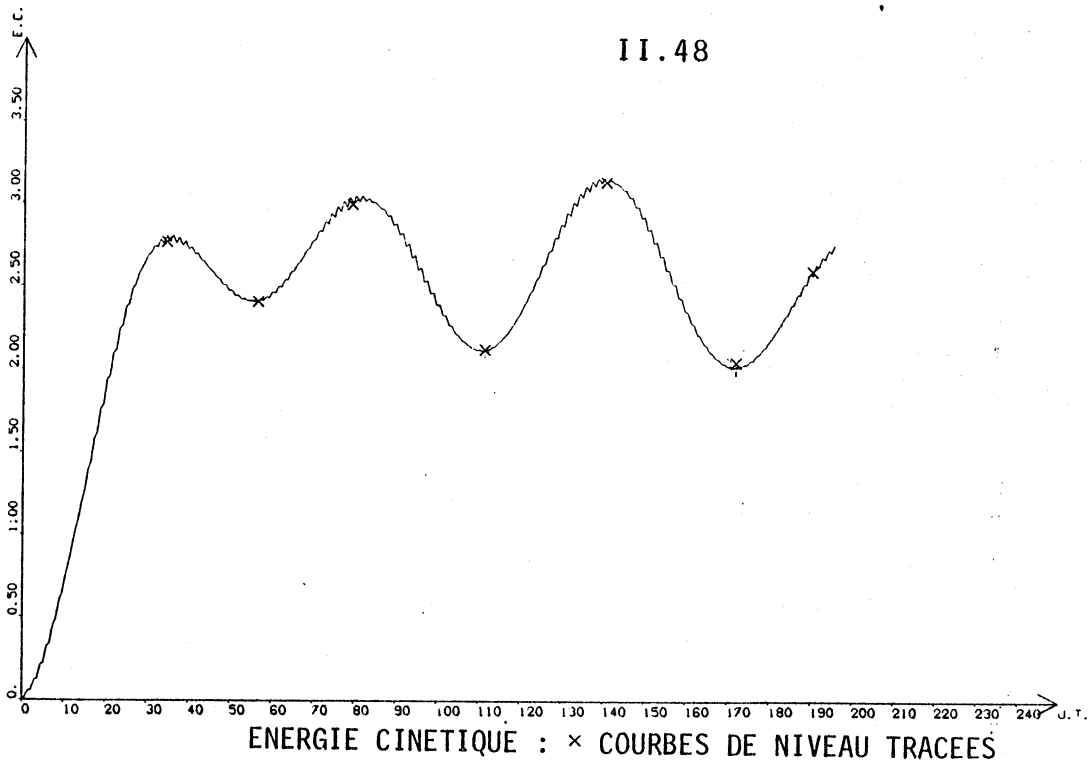
Sur la figure 3.33 solution à 56,25 u.t., la cellule positive de Rossby a envahi le bassin freinant ainsi la circulation générale induite par le vent. On observe par ailleurs, un déplacement du centre de la cellule anticyclonique vers le Nord.

Sur la figure 3.34, solution à 78,75 u.t., une nouvelle cellule positive de Rossby apparaît à droite.

Sur la figure 3.35, solution à 108,75 u.t., on retrouve une configuration semblable à la figure 3.33 mais le centre de la cellule principale de circulation anticyclonique est maintenant dans le coin Nord-Ouest du bassin. Notons le développement d'une couche limite dans ce coin.

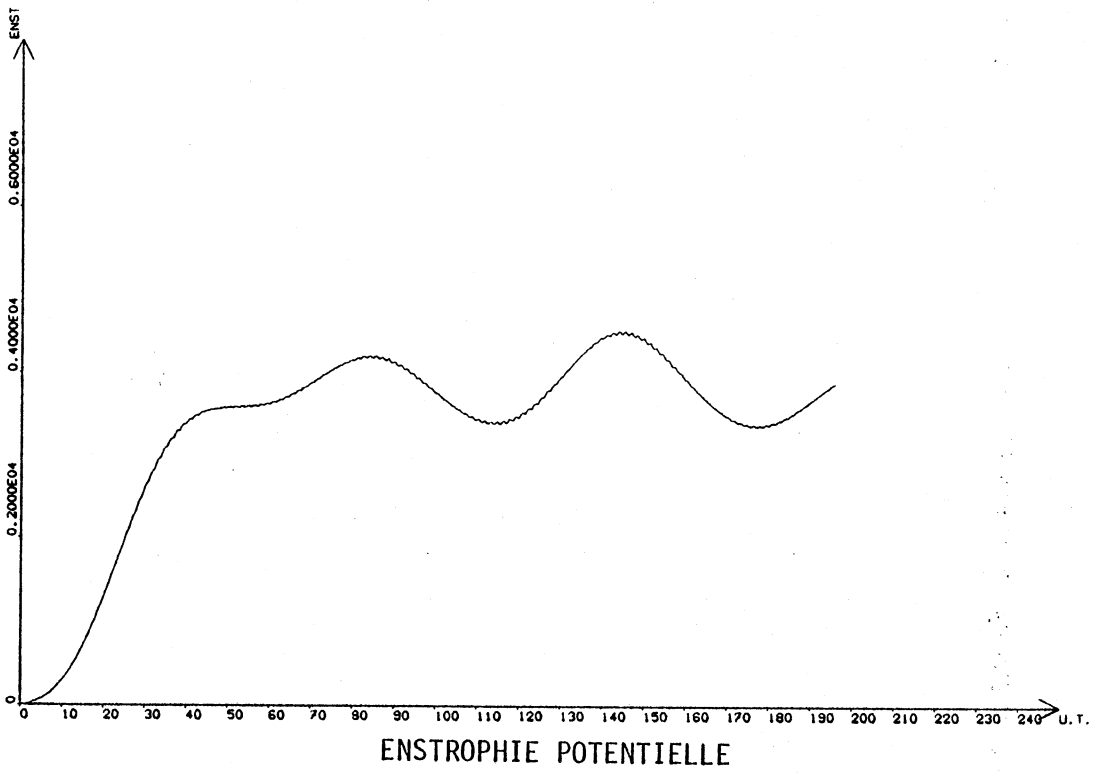
A la sortie de cette couche limite, l'écoulement est dévié vers le Sud avant de retrouver une dynamique d'équilibre du type Sverdrup (cf. Equation 1.3) ; c'est un effet caractéristique de la nonlinéarité de l'écoulement dans ce type de circulation.

Nous présentons à titre d'illustration sur les figures 3.36 et 3.37 les solutions aux deux extrêmes suivants d'énergie cinétique : au temps 138,75 u.t., voisin du maximum d'énergie cinétique dans le bassin, la cellule négative de l'onde de Rossby accélère le mouvement anticyclonique imposé par le vent ; au temps 168,75 u.t., au contraire, une cellule positive de Rossby a envahi tout le domaine et freine l'écoulement.



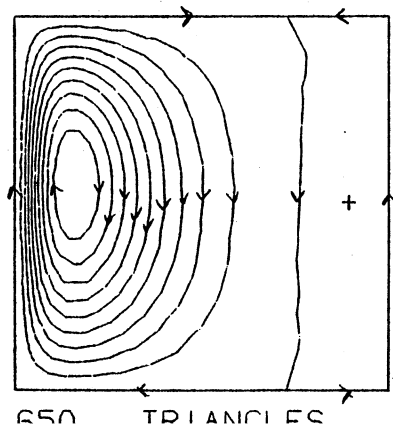
ENERGIE CINETIQUE : x COURBES DE NIVEAU TRACES

FIGURE 3.30



ENSTROPHE POTENTIELLE

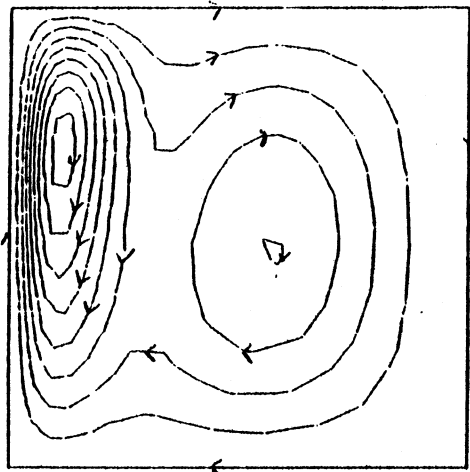
FIGURE 3.31



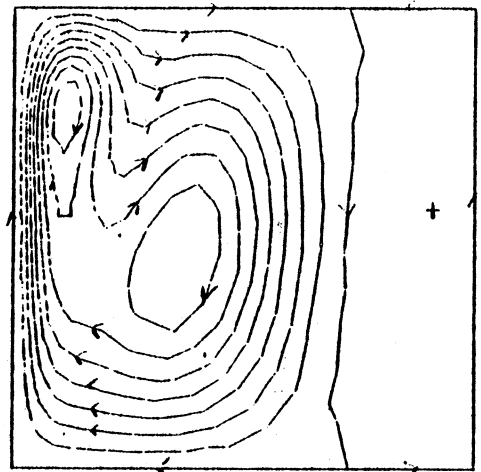
33,75 u.t.

FIGURE 3.32

650 TRIANGLES

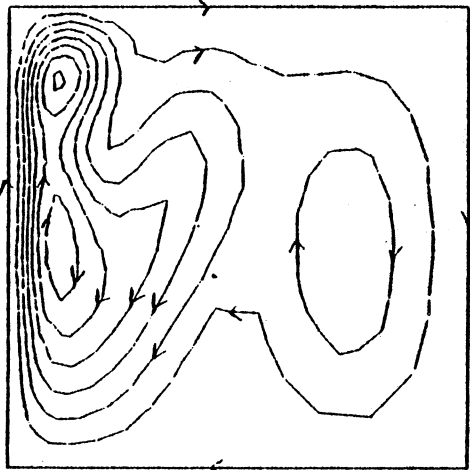


650 TRIANGLES  
56,25 u.t.  
FIGURE 3.33



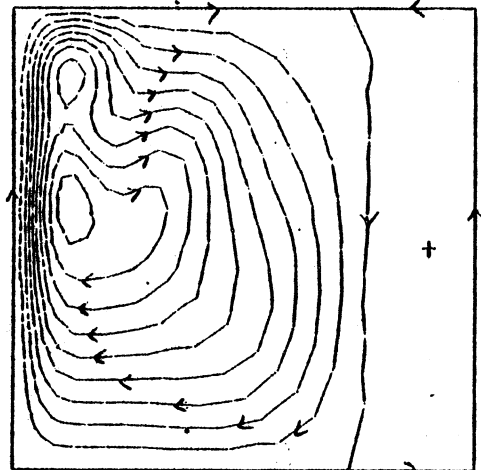
78,75 u.t.  
FIGURE 3.34

Courbes de niveau

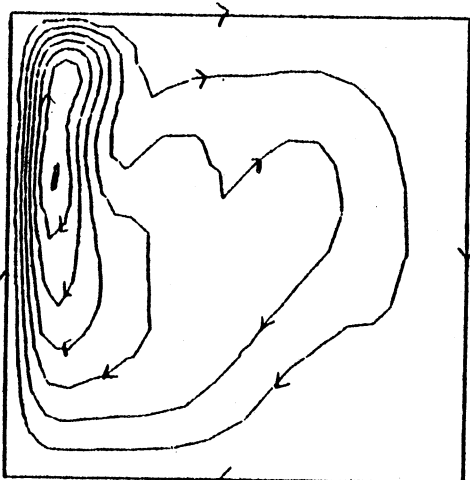


108.75 u.t.  
FIGURE 3.35

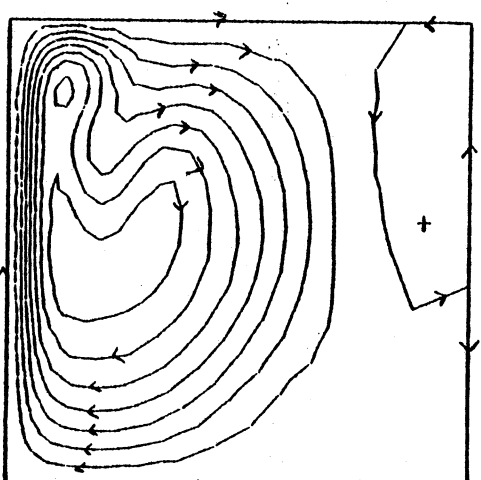
- 0.0
- 0.0911
- 0.1822
- 0.2733
- 0.3644
- 0.4555
- 0.5466
- 0.6377
- 0.7288
- 0.8199



138.75  
FIGURE 3.36



168.75 u.t.  
FIGURE 3.37



195 u.t.  
FIGURE 3.38

III.5 - APPLICATION A LA RESOLUTION D'UN PROBLEME DE CIRCULATION  
SUR UN BASSIN RECTANGULAIRE AVEC UNE STRUCTURE DE VENT  
A PLUSIEURS CELLULES

Dans ce paragraphe on a considéré le forcing :

$$(3.20) \quad f(x,y) = -\sin\pi x \sin\pi y \quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array}$$

visualisé sur la figure 3.39.

On remarque qu'il s'agit d'un forcing qui présente trois cellules sur le domaine, celles des extrêmes dans le sens anticyclonique (-) et celle du milieu dans le sens cyclonique (+). Sur toutes les figures les centres de rotations de ces forcings sera matérialisé par un T.

Nous prenons les paramètres suivants :

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_o}{R_e} = 6 \times 10^{-5} \\ r = 0 \\ \Delta t = 2. \\ \Omega = ]0,3[ \times ]0,1[. \end{array} \right.$$

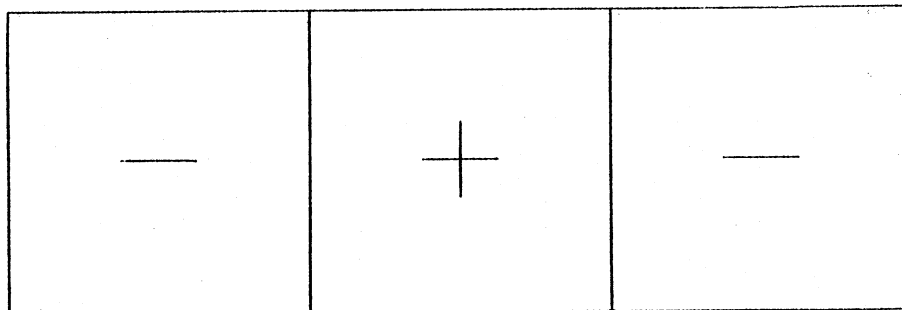


FIGURE 3.39

On a utilisé la triangulation de la figure 3.40 pour la résolution numérique du problème. Les courbes d'énergie cinétique et d'entrophie potentielle ont été tracées sur les figures 3.41 et 3.42. Comme précédemment on note le caractère oscillatoire de la solution que nous allons analyser.

Sur la figure 3.43, solution à 190 u.t., on voit le développement, engendré par les 3 forcings, de 3 cellules de circulation dont 2 anticycloniques et l'autre cyclonique. Les deux cellules anticycloniques sont sensiblement de même intensité, tandis que la cellule cyclonique est beaucoup plus faible. Les cellules de droite doivent se déplacer vers l'Ouest puisque nous sommes sur un  $\beta$ -plan (terme  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  de l'équation, cf. chapitre d'introduction).

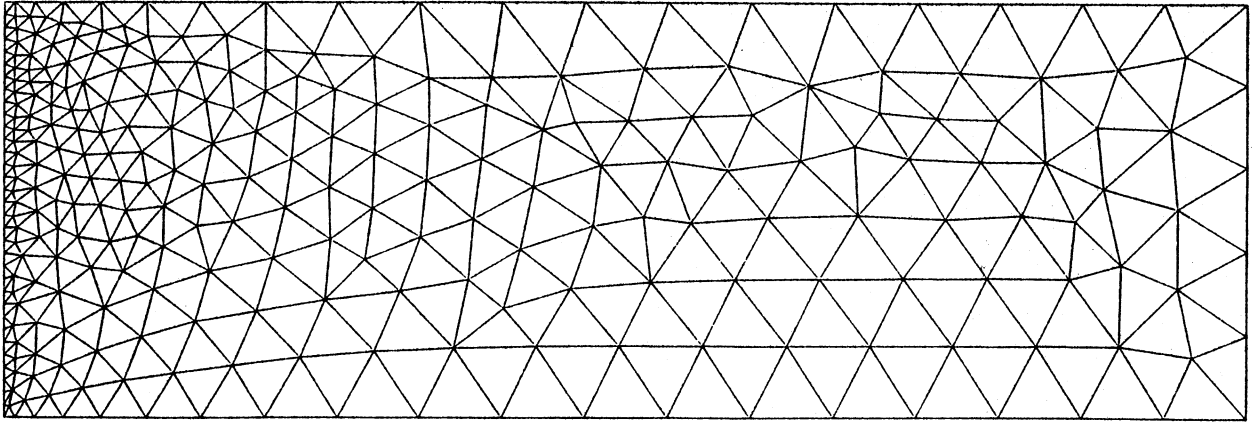
La cellule de recirculation cyclonique va venir se dissiper vers l'Ouest du bassin et atténuer, pendant quelques temps, la circulation anticyclonique.

La cellule anticyclonique de droite, elle, se déplace progressivement sur le forcing cyclonique, elle perd de son intensité et empêche la cellule du centre du bassin de se développer de façon notable ce qui explique la différence d'intensité des trois cellules.

On constate effectivement sur la figure (3.44), solution à 198 u.t., que les centres des deuxième et troisième cellules se sont déplacés vers l'Ouest du bassin, la deuxième pénètre dans la zone du premier forcing, son intensité diminue et elle ralentit la première cellule. La troisième cellule commence à entrer dans la zone du deuxième forcing et son intensité diminue donc. On note par ailleurs, sur le bord Est du bassin, une faible circulation cyclonique, qui doit correspondre à la présence d'une onde de Rossby.

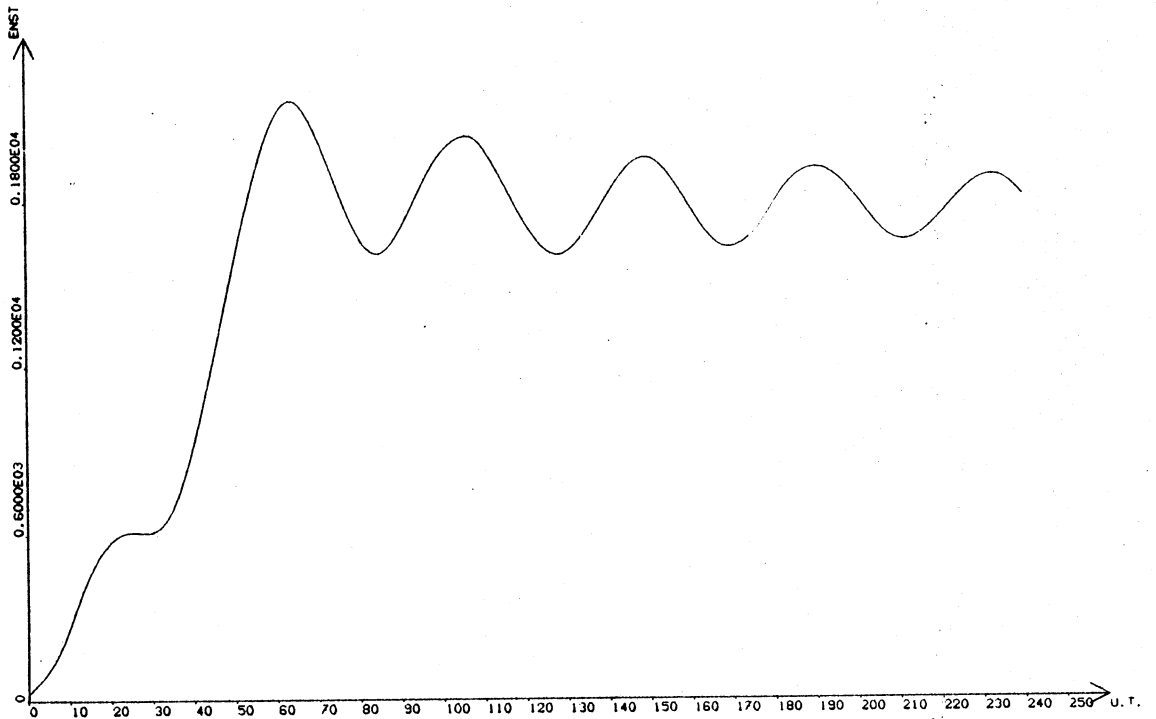
Sur la figure (3.45), solution à 206 u.t., la situation reste semblable, la troisième cellule diminue en intensité, car elle devient centrée dans la zone du deuxième forcing, qui est cyclonique. On observe que cette cellule devient dissymétrique à cause de l'onde de Rossby qui la poursuit sur la droite. La cellule cyclonique, elle a presque disparu.





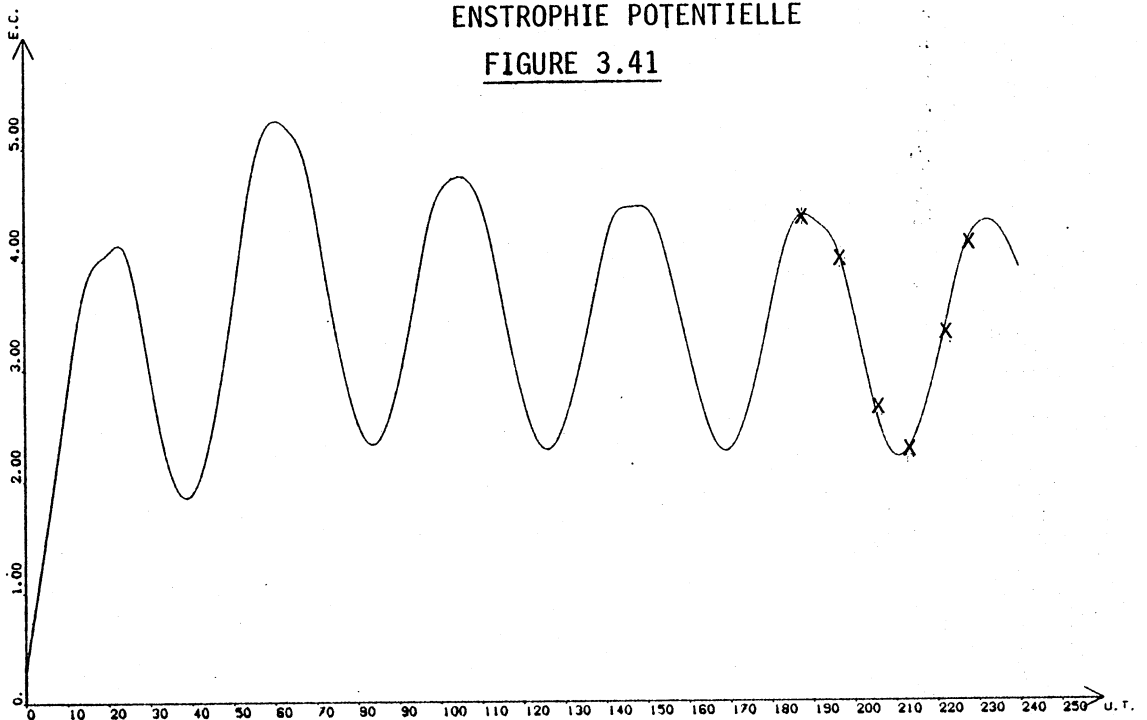
500 TRIANGLES

FIGURE 3.40

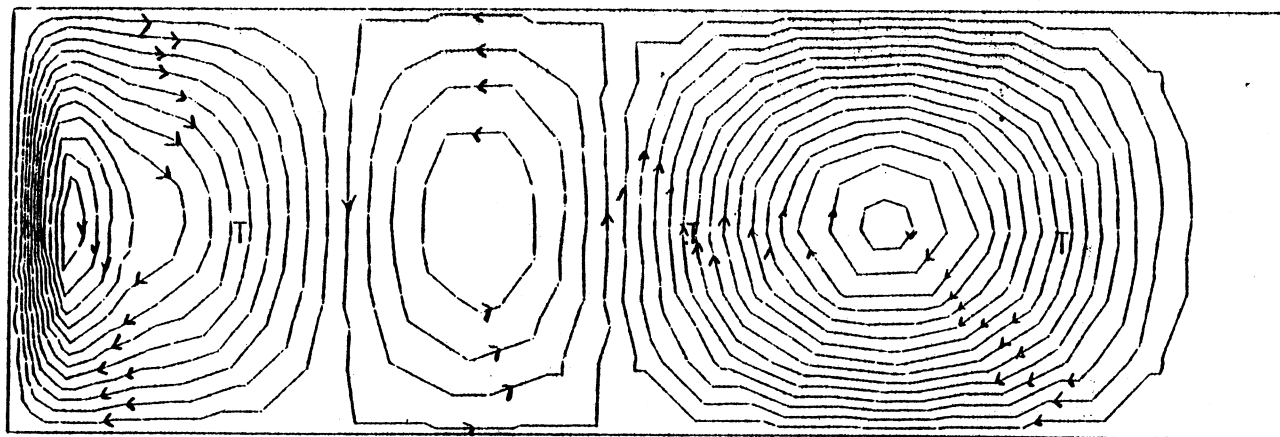


ENSTROPHE POTENTIELLE

FIGURE 3.41



ENERGIE CINETIQUE : x COURBES DE NIVEAU TRACEES



500 TRIANGLES

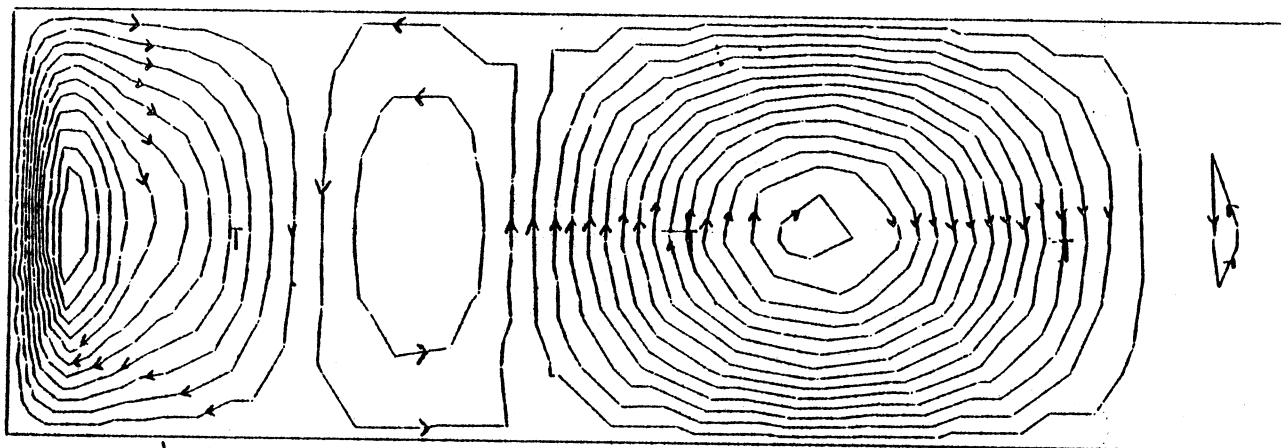
190 u.t.

20 COURBES DE NIVEAU

NIVEAU MINI. = -0.2000E00

NIVEAU MAXI. = 0.1000E01

FIGURE 3.43



500 TRIANGLES

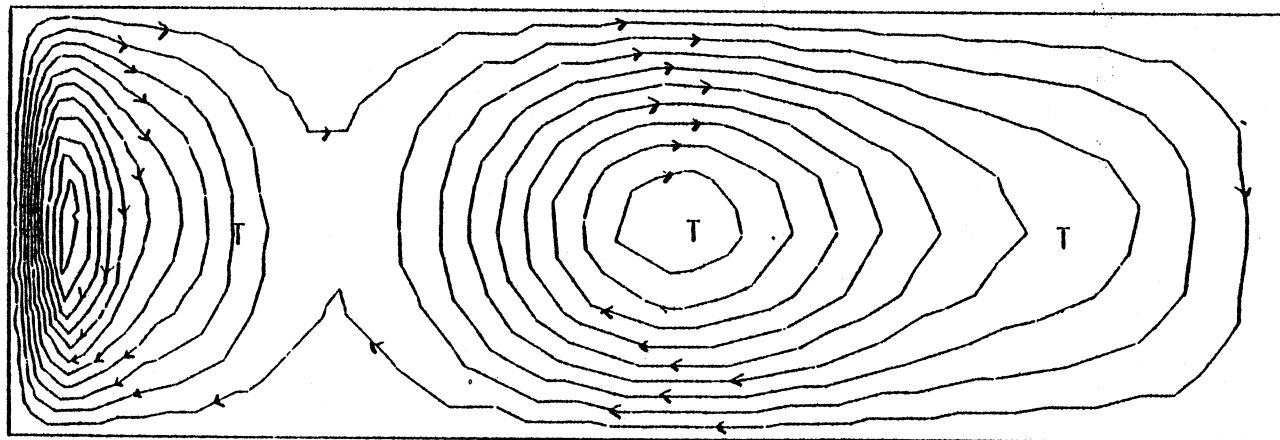
198 u.t.

20 COURBES DE NIVEAU

NIVEAU MINI. = -0.2000E00

NIVEAU MAXI. = 0.1000E01

FIGURE 3.44



500 TRIANGLES

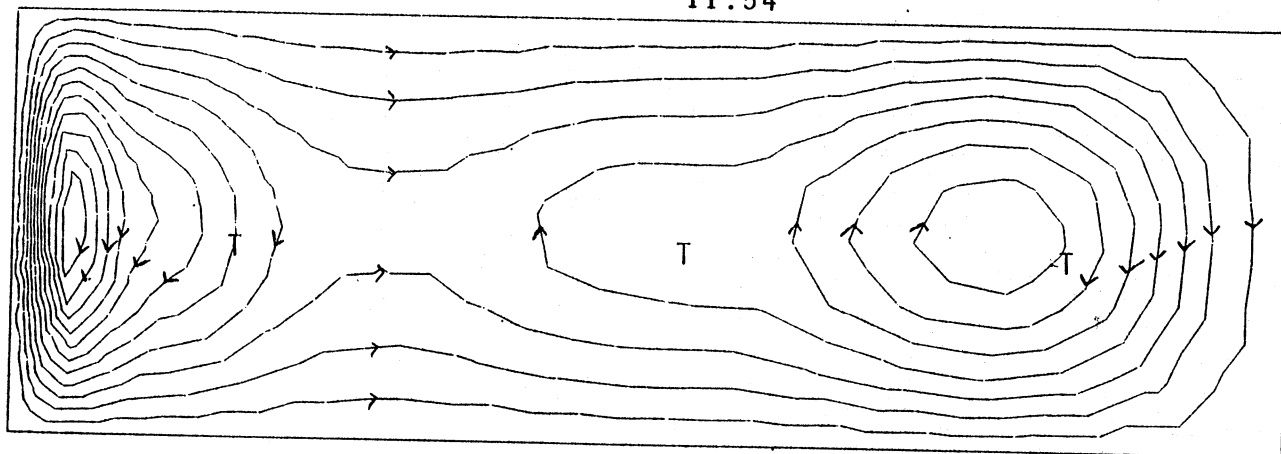
206 u.t.

20 COURBES DE NIVEAU

NIVEAU MINI. = -0.2000E00

NIVEAU MAXI. = 0.1000E01

FIGURE 3.45

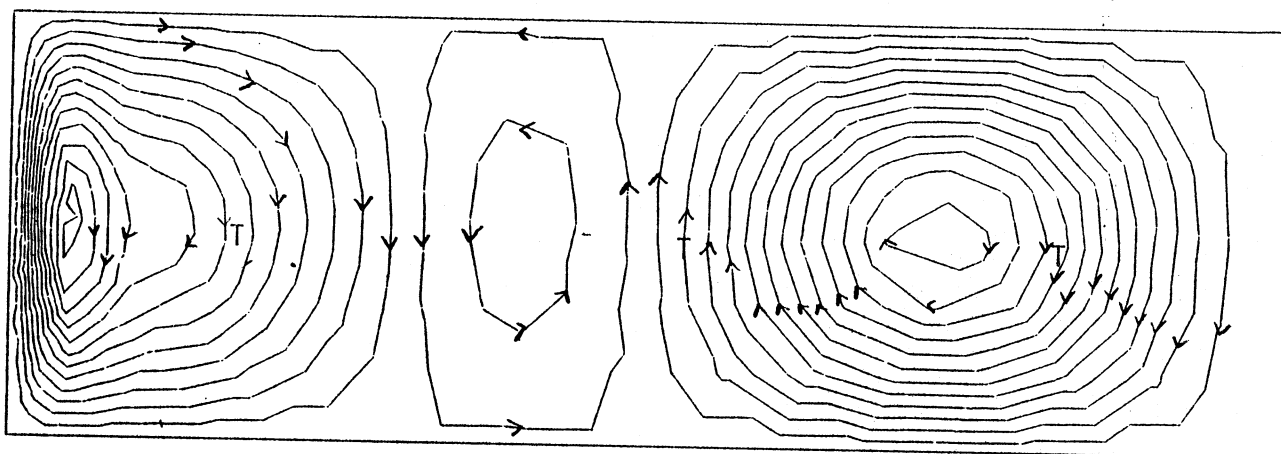


500 TRIANGLES

214 u.t.

20 COURBES DE NIVEAU  
NIVEAU MINI. = -0.2000E00  
NIVEAU MAXI. = 0.1000E01

FIGURE 3.46

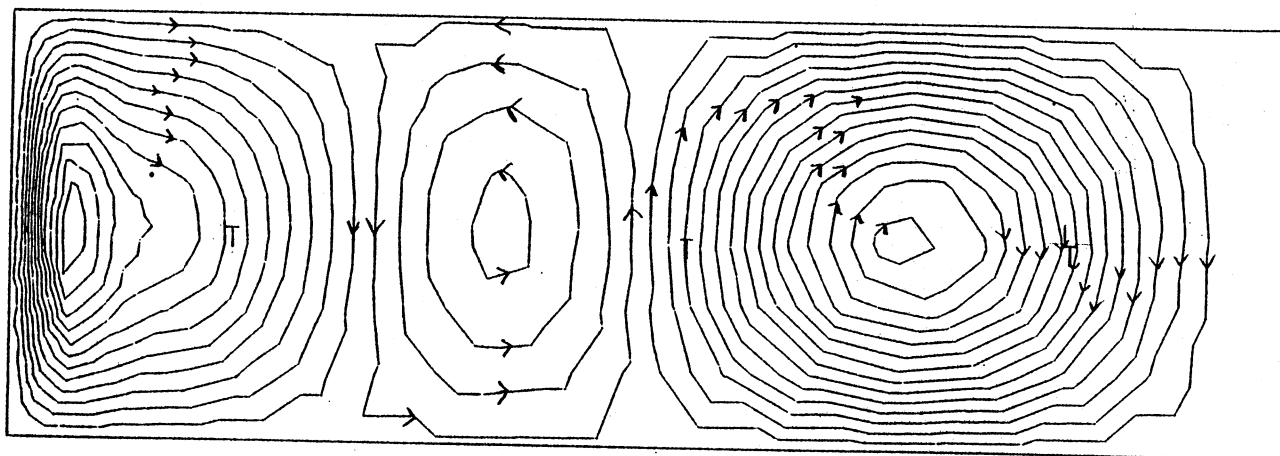


500 TRIANGLES

222 u.t.

20 COURBES DE NIVEAU  
NIVEAU MINI. = -0.2000E00  
NIVEAU MAXI. = 0.1000E01

FIGURE 3.47



500 TRIANGLES

230 u.t.

20 COURBES DE NIVEAU  
NIVEAU MINI. = -0.2000E00  
NIVEAU MAXI. = 0.1000E01

FIGURE 3.48

Sur la figure (3.46), solution à 214 u.t., la troisième cellule qui se trouvait sur la figure 3.45 au centre du domaine a presque entièrement disparu, on remarque par ailleurs, l'apparition d'une nouvelle cellule dans la zone du troisième forcing.

Sur la figure (3.47), solution à 222 u.t., on observe que les deux cellules anticycloniques reprennent de l'intensité et on remarque que la cellule cyclonique centrale est à nouveau excitée.

Sur la figure (3.48), solution à 230 u.t., on retrouve les mêmes caractéristiques de la solution qu'à 190 u.t. Nous avons décrit un cycle complet.

### III.6 - COMPARAISON AVEC D'AUTRES METHODES

Plusieurs méthodes ont été développées dans le cadre des différences finies pour résoudre ce même problème. Nous allons brièvement en rappeler quelques traits essentiels avant de les comparer à notre propre méthode.

#### 3.6.1. - Traitement de la condition aux limites pour les méthodes de différences finies

La condition aux limites sur la fonction de vorticité aux frontières Est et Ouest est obtenue à partir de la condition sur la fonction de courant de la façon suivante :

On considère un développement limité de Taylor de la fonction de courant sur la frontière en un point de maillage régulier de pas  $\Delta X$ , la frontière étant parallèle à l'axe des ordonnées.

On développe la valeur de la fonction de courant sur le premier point intérieur de la ligne  $j$ , autour du point frontière :

$$(3.22) \quad \psi_{2j} = \psi_{1j} + \Delta x \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{1j} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{1j} \\ + \frac{(\Delta x)^3}{6} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right)_{1j} + O(\Delta x^4)$$

Les conditions aux limites sont traduites par  $\psi_{1j} = 0$  et  $\left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{1j} = 0$ , on trouve donc que l'on peut approcher la vorticité  $\omega$ , réduite à  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$  sur la frontière, par :

$$(3.23) \quad \omega \approx \frac{2}{(\Delta x)^2} \psi_{2j}.$$

Ce développement n'est valable que pour des maillages réguliers sur des rectangles : on obtient une approximation de premier ordre de la valeur de la frontière et suppose une suffisante régularité de la fonction  $\psi$ .

Pour résoudre alors le problème découplé, on utilise la fonction de courant calculée à l'étape  $n\Delta t$  pour avoir une condition aux limites pour le calcul de la fonction de vorticité au pas  $(n+1)\Delta t$ .

Cette façon d'approcher la vorticité au bord ramène le problème à la résolution des équations de type Helmholtz et Poisson.

### 3.6.2. - Quelques méthodes de résolution du problème découplé avec des techniques aux différences finies

#### Méthode de surrelaxation

En différences finies, les méthodes pour résoudre le problème posé sont nombreuses, la plus générale, mais aussi la moins efficace, est la méthode de surrelaxation. Elle est très facile à mettre en oeuvre sur n'importe quelle géométrie de domaine et l'on peut utiliser des maillages adaptés ; mais elle est lente à cause des difficultés, dans le cas général, de détermination du paramètre de relaxation et de la solution de départ de chaque itération, la solution atteinte peut par ailleurs, dépendre du critère d'arrêt choisi. (Notons que des versions vectorielles de cette méthode sont actuellement développées).

Cette méthode est aujourd'hui la seule applicable de façon opérationnelle pour traiter des domaines dont les frontières sont complexes.

Cependant, sont actuellement à l'étude des méthodes avec "caches" qui devraient permettre de traiter avec des méthodes très efficaces, comme celles que l'on va décrire maintenant, des domaines à frontières irrégulières.

### Méthode spectrale

Si l'on développe à chaque pas de temps la fonction de vorticité, la fonction de courant et le second membre des équations en série de fonctions orthogonales formant un système complet et on injecte cette décomposition dans les équations discrétisées temporellement, on obtient des relations algébriques entre les coefficients des séries. Il s'agit en fait, d'un système linéaire à diagonaliser, dont les inconnues sont les coefficients de la série de la solution.

Cette méthode est précise mais elle n'est applicable que sur des domaines carrés. Par contre, elle permet d'utiliser des termes de dissipation plus complexes (cf. Haidvogel et al (1980)).

### Méthode de réduction cyclique

Une méthode très efficace est la suivante : (cf. Branger (1983), Hockney (1971)). (Méthode mixte "Réduction-cyclique, Transformée de Fourier Rapide").

Considérons l'équation :

$$(3.24) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u - \lambda u = f \quad \text{sur un carré} \\ u \text{ connue sur la frontière, } \lambda \text{ constante, } f \text{ forcing.} \end{array} \right.$$

et un maillage régulier du domaine :

$$(3.25) \quad \begin{aligned} x_{ij} - x_{i\pm 1j} &= h & i, j &= 2, \dots, N \\ x_{ij} - x_{ij\pm 1} &= h \end{aligned}$$

Le système d'équations discrétisées pour les noeuds intérieurs du domaine s'écrit :

$$(3.26) \quad \bar{u}_{j-1} + A \bar{u}_j + \bar{u}_{j+1} = \bar{q}_j \quad 2 \leq j \leq N$$

$$\text{où :} \quad \bar{u}_j := (u_{ij}) \quad i = 1, \dots, N$$

$$\bar{q}_j := (q_{ij}) \quad i = 1, \dots, N$$

$$A := (a_{ij}) \quad i, j = 1, \dots, N \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \pm 1 \\ -(4+\lambda) & j = i \\ 0 & \text{dans d'autres cas} \end{cases}$$

Etape 1 - On transforme (3.26) de façon à éliminer  $\bar{u}_{j-1}$ ,  $\bar{u}_{j+1}$ , on obtient :

$$(3.27) \quad \bar{u}_{j-2} + (2I - A^2)\bar{u}_j + \bar{u}_{j+2} = \bar{q}_j^*$$

$$\text{où :} \quad \bar{q}_j^* := q_{j-1} - A q_j + q_{j+1}$$

Nous allons résoudre (3.27) qui a deux fois moins d'équations (et d'inconnues) que (3.26).

Etape 2 - Supposons N pair. Le développement en série de Fourier de  $u_{ij}$  s'écrit :

$$(3.28) \quad \left\{ \begin{aligned} u_{ij} &= \frac{1}{2} u_{0j}^c + \frac{1}{2} u_{N-1j}^c (-1)^i + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (u_{kj}^c \cos \frac{2\pi ki}{N-1} + u_{kj}^s \frac{\sin 2\pi ki}{N-1}) \\ & \quad 2 \leq i \leq N-1 \quad j \text{ pair} \end{aligned} \right.$$

où :

$$u_{kj}^c := \frac{2}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} u_{ij} \cos \frac{2\pi ki}{N-1}$$

$$u_{kj}^s := \frac{2}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} u_{ij} \sin \frac{2\pi ki}{N-1}$$

On fait un développement analogue pour  $q_{ij}^*$ ,  $q_{ij}^{*c}$  et  $q_{ij}^{*s}$ . Cette transformation est linéaire et elle n'implique aucune troncation.

Etape 3 - On met (3.28) dans (3.27) et l'on obtient :

$$(3.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{kj-2}^c + \lambda_k^c u_{kj}^c + u_{kj+2}^c = q_{kj}^{c**} \\ u_{kj-2}^s + \lambda_k^s u_{kj}^s + u_{kj+2}^s = q_{kj}^{s**} \end{array} \right.$$

$$j \text{ pair} \quad 1 \leq k \leq \frac{N-1}{2}$$

$\lambda_k^s, \lambda_k^c$  sont des valeurs propres de A dont les fonctions propres sont  $u_{kj}^s$  et  $u_{kj}^c$ . Par exemple pour  $\lambda = 0$  (équation de Poisson) :

$$(3.30) \quad \lambda_k^c = -2 \left( 8 - 8 \cos \frac{2\pi k}{N-1} + \cos \frac{4\pi k}{N-1} \right)$$

Etape 4 - On élimine  $u_{kj-2}^c$  et  $u_{kj+2}^c$ ,  $u_{kj-2}^s$  et  $u_{kj+2}^s$  de la même façon qu'à l'étape 1.

Etape 5 - On recommence l'étape 4 jusqu'à ce que le système soit réduit à une seule équation à une inconnue.

Etape 6 - Par substitution et en remontant tous les systèmes on en déduit les valeurs  $u_{kj}^c$  et  $u_{kj}^s$  qui permettent de reconstituer les valeurs de la solution aux noeuds de la maille grâce aux équations (3.28).

On effectue en tout  $\log_2 N$  réductions. Hockney (1971) démontre que le coût des algorithmes est proportionnel à  $N^2 + \log_2 N$ .



Remarquons que la clé de cette méthode est l'utilisation des fonctions propres de l'opérateur  $(\Delta - \lambda I)$  sur un carré. Donc, les extensions à domaines non simples n'est pas évidente et un traitement semi-implicite des termes de Coriolis rendrait nécessaire la résolution de (3.24) avec  $\lambda$  non constant ce qui est impossible, car il faudrait connaître les fonctions propres de  $(\Delta - \lambda I)$  dans ce cas.

Cette méthode est donc très efficace, mais très particulière. Elle utilise les fonctions propres de l'opérateur. Pour les détails de calculs et de l'implémentation, voir Branger (1983)).

### 3.6.3. - Comparaison des temps de calcul avec notre méthode d'éléments finis

A titre comparatif on peut citer les résultats obtenus par Branger (1983) avec des méthodes des différences finies pour le même type de problème que celui traité ici et sur le même ordinateur.

Avec la méthode de surrelaxation pour une discrétisation de la veine de recirculation Ouest similaire à la notre (maillage 40 x 40), on obtient des temps moyens de calcul de 21 secondes par itération qui sont du même ordre de grandeur que pour notre méthode (cf. paragraphe III.3).

Par contre, avec la méthode de réduction cyclique que l'on vient de décrire, on obtient avec la même discrétisation des temps de calcul de 2,6 secondes par itération (dix fois moins que la méthode de surrelaxation). Du point de vue de la précision, pour une discrétisation équivalente le long de la frontière Ouest du bassin, les résultats des méthodes des différences finies que nous avons testées sont semblables aux nôtres. Toutefois notons que pour le calcul de l'énergie cinétique et de l'enstrophie potentielle, les intégrales sont mieux calculées en éléments finis, car l'approximation de la solution est linéaire par morceaux dans ce cas, tandis qu'en différences finies elle n'est que constante par morceaux.

## CONCLUSIONS

Ce travail vient compléter celui entrepris par Dumas (1982) et Dumas et al (1982) pour démontrer la faisabilité des méthodes d'éléments finis pour intégrer sur des domaines de géométrie complexe, le problème typique de la circulation générale de l'océan induit par l'action des vents moyens. Notre contribution a été, au travers de ce mémoire, de présenter une méthode permettant d'introduire dans le modèle aux éléments finis précédemment développé, une condition de non glissement le long des frontières Est et Ouest du domaine modélisé.

Comme nous l'avons noté, l'introduction de cette condition de non glissement complique considérablement le problème : la solution que nous proposons permet de résoudre cette condition de façon "exacte" (formulation faible), contrairement à toutes les méthodes de différences finies utilisées classiquement, qui reposent sur une approximation de premier ordre de cette condition.

Pour résoudre le problème comportant une condition de non glissement aux frontières, la méthode proposée conduit à doubler le temps de calcul observé antérieurement par Dumas (1982) pour intégrer un problème analogue mais ne comportant qu'une condition de glissement le long des parois. Cette méthode est donc abordable et comparable aux autres méthodes plus classiques du type différences finies.

A l'issue de ce travail, nous disposons donc d'un modèle opérationnel reposant sur des techniques aux éléments finis, pour traiter le problème classique des circulations océaniques engendrées par le vent (en approximation barotrope pour l'instant).

L'intérêt primordial de cette méthode est de permettre d'intégrer ce type de problème dans des bassins de géométrie complexe en raffinant le maillage dans les zones où la solution présente de forts gradients.

--:--:--:--:--:--

Notons que le modèle présenté dans ce mémoire, doit pouvoir être étendu au cas d'un bassin de profondeur variable, les techniques de résolution restant les mêmes

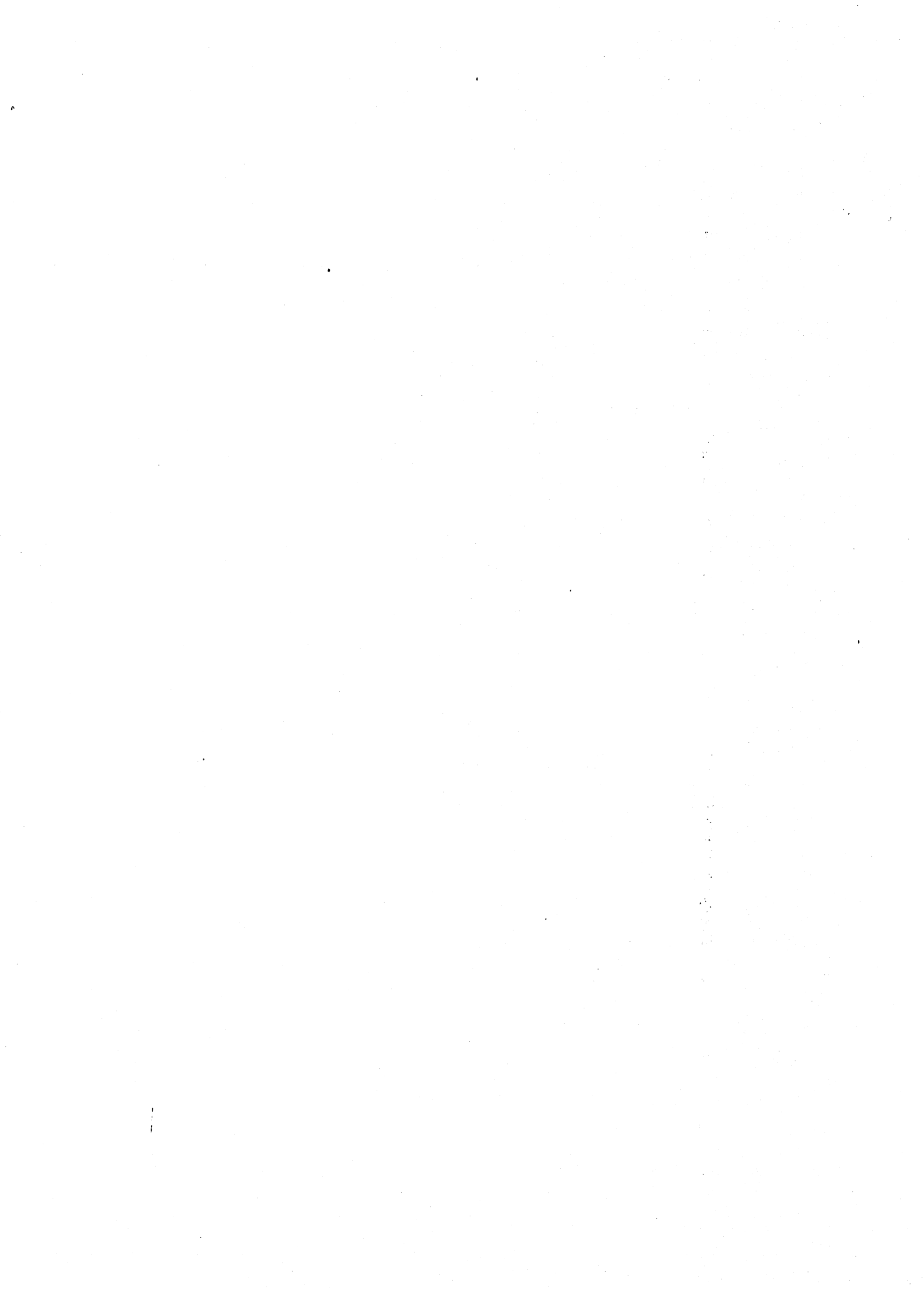


## REFERENCES

1. A. ARAKAWA et F. MESINGER (1976)  
"Numerical methods used in atmospheric models"  
Global atmospheric program. GARP Pub. Series # 1.
2. H. BRANGER (1983)  
Thèse Docteur-Ingénieur. Mécanique des Fluides.  
INPG. Grenoble France (à paraître).
3. H. BRANGER, E. DUMAS, C. LE PROVOST, M. TELIAS (1983)  
"Feasibility of finite element methods for oceanic modelling"  
(Soumis pour publication).
4. K. BRYAN (1963)  
A numerical method of a non linear model of a wind-driven ocean"  
J. of Atmosph. Sc. 20, pp. 594-606.
5. E. DUMAS (1982)  
"Modélisation des circulations océaniques générales par des méthodes  
aux éléments finis".  
Thèse Docteur Ingénieur Mécanique des Fluides. INPG Grenoble France
6. E. DUMAS, C. LE PROVOST, A. PONCET (1982)  
"Feasibility of finite element method for oceanic general circulation  
modelling"  
in Finite element methods in water resources. Proceedings of the  
4th conference. Hannover, Germany. KP Holz, O. Meisner, W. Zielke,  
CA Brebbia, G. Pinder, W. Gray (eds) Springer-Verlag. pp. 5-43, 5-55.
7. G. FIX (1975)  
"Finite element models for ocean circulation"  
SIAM J. Appl. Math. Vol. 3, # 3 November pp. 371-387
8. M. FORREST, J. HOLLY and A. PREISSMAN (1977)  
"Accurate calculation of transport in two dimensions"  
J. of Hydraulics Division HY11. pp. 1279-1277
9. R. GLOWINSKI et O. PIRONNEAU (1976)  
"Sur la résolution numérique du problème de Dirichlet pour  $\Delta^2$   
par une méthode quasi-directe"  
C.R.A.S. 282 - pp. 225-228.
10. R. GLOWINSKI et O. PIRONNEAU (1977)  
"Sur une méthode quasi-directe pour l'opérateur biharmonique et  
ses applications à la résolution de Navier-Stokes"  
Am. Sc. Math. Quebec, Vol. 1, n° 2, pp. 231-245.
11. R. GLOWINSKI et O. PIRONNEAU (1979)  
"Numerical method for the first biharmonic equation and for the  
two dimensional "Stokes problem" SIAM Strev Vol. 21 # pp. 167-212

12. D.B. HAIDVOGEL, A.R. ROBINSON and E.E. SCHULMANN (1980)  
 "The accuracy, efficiency and stability of three numerical models with applications to open ocean problems"  
 J. of Comp. Physics, 34 : pp. 1-53.
13. J.E. HIRSCH (1975)  
 "The finite element method applied to ocean circulation problems" in Numerical models of ocean circulation. Proceedings of a Symposium held at Durham New-Hampshire. October 17-20. 1972 - National Academy of Sc. pp. 340-346.
14. HOCKNEY (1971)  
 "The potential calculation and some applications"  
 Methods in Comp. Physics. Vol. 9, pp. 135-211.
15. W. HOLLAND (1978)  
 "The role of mesoscale eddies in general circulation of the ocean. Numerical experiments using a wind-driven quasi-geostrophic-model"  
 Journal of Physical Oceanography Vol. 8 - pp. 363-392
16. J. MONSALVE (1982)  
 "Sur la résolution numérique du problème de Navier-Stokes tridimensionnel axisymétrique en fonction courant-vorticité"  
 Thèse 3ème Cycle. Math. Appliquées, Analyse Numérique USMG Grenoble France.
17. W. MUNK (1950)  
 "On the wind-driven ocean circulation"  
 J. of Meteo 7, n° 2 pp. 79-82
18. O. PIRONNEAU (1982)  
 "On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equation"  
 Numer. Math. 38, pp. 309-332.
19. J. PEDLOSKY (1979)  
 "Geophysical fluid dynamics"  
 Springer-Verlag.
20. A. PONCET (1979)  
 "Autour de l'écriture d'un code d'éléments finis"  
 Thèse Docteur es Sciences - Math. USMG Grenoble France
21. A. PONCET (1980)  
 "Le code Delta : notice d'utilisation"  
 IMAG Grenoble France
22. H.M. STOMMEL (1948)  
 "The west word intensification of wind-driven ocean circulation"  
 Deep sea research : 13, pp. 597-606

23. G. VERONIS (1966)  
"Wind-driven ocean circulation" .  
Deep sea research : 13 , pp. 17-29, 31-55.
24. M. VIDRASCU (1978)  
"Sur la résolution numérique du problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique"  
Thèse 3ème cycle. Math. Appliquées. Université de Paris VI. France.
25. K. TAKANO (1975)  
"Relationship between the grid size and the coefficient of lateral eddy viscosity in the finite difference computation of the linear vorticity equation in the ocean"  
J. of the Oceanographical Soc. of Japan, 31, pp. 105-108.



## RESUME

Dans la première partie de ce travail on présente des méthodes numériques pour résoudre l'équation de convection-diffusion et on propose une méthode qui ramène le problème à une formulation symétrique qui permet de traiter les cas de faible viscosité. Les problèmes unidimensionnel, bidimensionnel stationnaires et unidimensionnel non stationnaire sont abordés.

La deuxième partie est consacrée à la résolution d'un modèle test de circulation océanique aux latitudes moyennes dont le mouvement est dû au vent. On introduit une condition d'adhérence aux parois Est et Ouest qui représentent les côtes terrestres. On utilise une méthode d'éléments finis qui permet de résoudre le modèle comme une "cascade" des problèmes très simples. On compare avec des méthodes de différences finies du point de vue de la précision, du coût de calcul et de l'applicabilité.

MOTS-CLES : *Equations de convection-diffusion, circulation océanique, éléments finis mixtes.*





AUTORISATION DE SOUTENANCE

VU les dispositions de l'article 3 de l'arrêté du 16 avril 1974,

VU les rapports de présentation de Messieurs

- . C. LE PROVOST, Maître de recherche
- . A. PONCET, Chargé de recherche

**Monsieur TELIAS Mauricio**

est autorisé à présenter une thèse en soutenance pour l'obtention du diplôme de  
DOCTEUR-INGENIEUR, spécialité "Mathématiques Appliquées".

Fait à Grenoble, le 9 mai 1983

Le Président de l'I.N.P.-G.

**D. BLOCH**  
Président  
de l'Institut National Polytechnique  
de Grenoble

*P.O. le Vice-Président,*



