



**HAL**  
open science

# Evaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique

Jacin Jerbi

► **To cite this version:**

Jacin Jerbi. Evaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique. Mathématiques [math]. Université Panthéon-Sorbonne - Paris I, 2006. Français. NNT: . tel-00308623

**HAL Id: tel-00308623**

**<https://theses.hal.science/tel-00308623>**

Submitted on 31 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Université Paris 1 – Panthéon – Sorbonne*

*Université de Sfax*

*Faculté des Sciences*

*Economiques et de Gestion de*

*Sfax*

***THESE DE DOCTORAT***

En cotutelle

En vue de l'obtention du titre de docteur

***Spécialité : Mathématiques appliquées***

Présentée et soutenue publiquement par

***Yacin JERBI***

Le 20 février 2006

***Evaluation des options et gestion des risques financiers par  
les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité  
stochastique***

Sous la direction du

***Pr. Marie COTTRELL et Pr. Fathi ABID***

***Jury :***

<b><i>Pr. Marie COTTRELL</i></b>	<b><i>Directeur</i></b>
<b><i>Pr. Fathi ABID</i></b>	<b><i>Directeur</i></b>
<b><i>Pr. Michel VERLEYSSEN</i></b>	<b><i>Président</i></b>
<b><i>Pr. Patrice GAUBERT</i></b>	<b><i>Rapporteur</i></b>
<b><i>Pr. Eric DEBODT</i></b>	<b><i>Rapporteur</i></b>
<b><i>Pr. Slaheddine HALLARA</i></b>	<b><i>Membre</i></b>

A mes parents

A Lamia

A mes enfants

A mes frères et sœurs

A tous ceux qui me sont chers

## *Remerciements*

Je remercie, vivement, Madame le Professeur Marie COTTRELL et Monsieur le Professeur Fathi ABID pour avoir dirigé ce travail, pour leur disponibilité et pour leurs qualités humaines et scientifiques.

Je remercie, également, Messieurs les membres du Jury :

Monsieur le Président, Professeur Michel VERLEYSEN  
Messieurs les rapporteurs, Professeur Patrice GAUBERT  
et le Professeur Eric DEBODT,  
ainsi que, le Professeur Slaheddine HALLARA,

qui ont accepté de juger mon travail.

Je remercie, aussi, Madame Marie Lou MARGARIA, secrétaire de l'UFR Mathématiques Appliquées, pour sa gentillesse, pour son amabilité et pour toute l'aide qu'elle m'a apportée.

Je remercie tous les membres du SAMOS et tous les membres du MODESFI qui sont à la source d'une bonne ambiance de travail.

Je suis sensible à l'honneur que m'a fait mon frère Sami JERBI pour son aide et pour avoir assisté à ma soutenance de thèse.

## Résumé de la thèse

La thèse consiste à comparer des modèles d'évaluation d'options européennes, aussi bien au niveau de l'évaluation, qu'au niveau de la gestion des risques, en se basant sur deux bases d'options européennes, sur l'indice CAC 40, cotées sur le MONEP. La première base est une base intraday s'étalant du mois de janvier 1998 au mois de juin 1998 et la seconde est journalière s'étalant du mois de janvier 1997 au mois de décembre 1999. Après traitement, ces bases sont découpées par contrats et par classes, selon la parité et la durée de vie résiduelle.

Un chapitre préliminaire est consacré à la présentation des outils et des fondements de la finance stochastique, nécessités par l'élaboration des modèles précités. Il se termine par la présentation des deux bases de données utilisées, en soulignant les traitements et les découpages nécessités par les différentes parties empiriques.

Le chapitre 1 présente la teneur du modèle de Black & Scholes (ses hypothèses, l'élaboration de son équation de Black & Scholes, la résolution de cette équation, l'élaboration de la formule, également, par un raisonnement risque-neutre), puis expose les différentes méthodes de calcul de la volatilité implicite et celle historique, dans le cas, aussi bien de données intraday, que de données journalières.

Le chapitre 2 est consacré à des modèles à volatilité stochastique. Après avoir élaboré l'équation différentielle correspondante, les paramètres de l'équation sont estimés, en se basant sur trois dynamiques de la volatilité, à savoir le mouvement Brownien, le processus Ornstein Uhlenbeck et un autre processus, tel que le logarithme de la volatilité de la volatilité est une fonction linéaire du logarithme de la volatilité. Les paramètres de ces trois processus sont déterminés empiriquement. Après l'étude de la consistance, de la stabilité et de la convergence de son schéma, l'équation

différentielle précitée est résolue numériquement en utilisant l'algorithme de Hopscotch, qui est inconditionnellement stable. Cette résolution a été faite, en considérant aussi bien les données intraday que les données journalières, aussi bien la volatilité implicite que la volatilité historique et selon les trois processus de la volatilité précités. Les résultats générés sont comparés à ceux générés par des simulations de Monte Carlo, appliquées aux mêmes données, et aux même processus de la volatilité.

Le chapitre 3 traite l'évaluation des options européennes, par les réseaux de neurones, en se basant sur l'algorithme « cascade correlation », en utilisant la technique de « cross-validation » et en s'appuyant sur les mêmes données utilisées pour les modèles à volatilité stochastique. Plus de 150 modèles ont été développés. Chaque modèle est défini par un jeu d'apprentissage et un jeu de test.

Dans le chapitre 4, après avoir élaboré les formules des greeks selon le modèle de Black & Scholes, la méthodologie de calcul de l'erreur de couverture moyenne absolue relative est exposée, dans le cas d'un portefeuille autofinancé, et en considérant quatre stratégies de couverture dynamiques. Ces calculs sont appliqués pour déterminer la matrice des risques et pour comparer le modèle de Black & Scholes, le modèle neuronal et les modèles à volatilité stochastique précités, en terme de couverture.

La comparaison des performances des différents modèles utilisés, aussi bien au niveau de l'évaluation qu'au niveau de la couverture, fait l'objet de la conclusion générale.

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	1
<b>1 THEORIE DES OPTIONS ET ELEMENTS DE CALCUL STOCHASTIQUE</b> .....	<b>69</b>
1.1 FONDEMENTS POUR L'EVALUATION D'UNE OPTION .....	71
1.1.1 Valeur d'une option et ses déterminants .....	71
1.1.1.1 Définition et généralités sur les contrats d'options .....	71
1.1.1.2 Les déterminants exogènes de la valeur d'une option.....	73
1.1.2 Equilibre arbitrage et efficacité d'un marché financier.....	78
1.1.2.1 Equilibre : .....	78
1.1.2.2 Absence d'opportunités d'arbitrage : .....	79
1.1.2.3 Efficacité : .....	79
1.1.3 Limites d'arbitrage et relation call-put.....	81
1.1.3.1 Limites d'arbitrage de la valeur d'une option négociable.....	81
1.1.3.2 Relation de parité Call-Put .....	84
1.2 CALCUL STOCHASTIQUE ET EVALUATION DES PRODUITS DERIVES.....	86
1.2.1 Propriété de Markov .....	86
1.2.2 Mouvement Brownien (ou Processus de Wiener).....	87
1.2.3 Mouvement Brownien géométrique.....	89
1.2.4 Processus d'Ornstein Uhlenbeck.....	89
1.2.5 Lemme d'Itô .....	92
1.2.5.1 Cas d'une seule variable stochastique .....	92
1.2.5.2 Cas de deux variables stochastiques.....	93
1.2.5.3 La version générale du lemme d'Itô.....	95
1.2.6 Raisonnement risque-neutre .....	96
1.2.7 Equation de Fokker Planck .....	99
1.2.7.1 Elaboration de l'équation .....	99
1.2.7.2 Application de l'équation de Fokker Planck aux processus stochastiques considérés pour la dynamique de la volatilité .....	103
1.2.8 Equation différentielle générale pour l'évaluation des produits dérivés.....	109
1.3 OPTIONS SUR INDICES BOURSIERS ET BASES DE DONNEES .....	114
1.3.1 Les options sur indices .....	114
1.3.1.1 Historique : .....	114
1.3.1.2 Indice boursier : définition et méthode de calcul .....	115
1.3.1.3 Spécificité du contrat d'option sur indice et les risques inhérents : .....	118
1.3.1.4 Tracker .....	120
1.3.1.5 Processus suivis par la valeur d'un indice ou par le prix d'un Tracker .....	121
1.3.2 Données .....	123
1.3.2.1 Le Monep .....	124
1.3.2.2 Base de données intraday .....	126
1.3.2.3 Base de données journalières .....	133

<b>2</b>	<b>MODELE DE BLACK &amp; SCHOLES.....</b>	<b>137</b>
2.1	EVALUATION D'UNE OPTION AVEC LE MODELE DE BLACK & SCHOLES	140
2.1.1	Hypothèses et raisonnement d'arbitrage.....	140
2.1.2	Marche au hasard du prix d'un sous-jacent (actif financier).....	141
2.1.3	Equation de Black & Scholes (couverture Delta-neutre et absence d'arbitrage) ..	142
2.1.3.1	Processus stochastique du prix de l'option .....	142
2.1.3.2	Elimination du risque couverture Delta-neutre .....	142
2.1.3.3	Absence d'arbitrage.....	143
2.1.4	Equation de Black & Scholes avec la méthode risque-neutre.....	144
2.1.5	Conditions aux limites.....	147
2.1.6	Résolution de l'équation de Black & Scholes.....	147
2.1.6.1	Changements de variables.....	148
2.1.6.2	Résolution de l'équation de la chaleur sous sa forme canonique:.....	151
2.1.6.3	Solution de l'équation de Black & Scholes.....	154
2.1.7	Formule de Black & Scholes par le raisonnement risque-neutre .....	156
2.1.8	Valeur d'une option sur un sous-jacent payant des dividendes .....	161
2.1.8.1	Les versements des dividendes sont connus .....	162
2.1.8.2	Les versements des dividendes sont inconnus .....	163
2.1.9	Evaluation des options sur indices boursiers.....	164
2.2	VOLATILITE .....	166
2.2.1	Volatilité historique.....	167
2.2.1.1	Données journalières .....	167
2.2.1.2	Données intraday.....	170
2.2.2	Volatilité implicite.....	172
2.2.2.1	Algorithme « interpolation » .....	173
2.2.2.2	Algorithme de descente du gradient (méthode de Newton-Raphson).....	174
2.2.2.3	Algorithme « récursif » .....	175
2.2.2.4	Résultats .....	177
2.2.3	Volatilité d'un indice boursier.....	179
2.2.4	Résultats de calcul de la volatilité .....	180
2.2.5	Le « Smile » de la volatilité .....	184
2.3	CONCLUSION .....	188
<b>3</b>	<b>MODELES A VOLATILITE STOCHASTIQUE .....</b>	<b>191</b>
3.1	EQUATION DIFFERENTIELLE POUR L'EVALUATION D'UNE OPTION AVEC DES MODELES A VOLATILITE STOCHASTIQUE.....	191
3.1.1	Hypothèses du modèle à volatilité stochastique.....	197
3.1.2	Equation différentielle du modèle à volatilité stochastique .....	198
3.1.3	Conditions aux limites relatives à l'équation différentielle du modèle à volatilité stochastique .....	204
3.1.4	Changement de variables .....	206
3.1.4.1	Nouvelle équation différentielle.....	207
3.1.4.2	Nouvelles Conditions aux limites et nouveau domaine : .....	211
3.2	ESTIMATION DES PARAMETRES DU MODELE .....	213
3.2.1	Estimation des paramètres liés à la dynamique de la volatilité : .....	213
3.2.1.1	Mouvement Brownien comme processus de la volatilité.....	214
3.2.1.2	Processus empirique comme processus de la volatilité.....	218
3.2.1.3	Processus d'Ornstein Uhlenbeck comme processus de la volatilité .....	239



3.2.2 Estimation des autres paramètres du modèle à volatilité stochastique.....	251
3.2.2.1 Estimation de Coefficient de corrélation.....	251
3.2.2.2 Estimation du taux de l'actif sans risque.....	253
3.2.2.3 Estimation du prix du marché du risque lié à la volatilité.....	254
3.3 RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES .....	256
3.3.1 Représentativité de la solution numérique d'une EDP.....	257
3.3.2 Méthode explicite.....	260
3.3.2.1 Elaboration du Schéma numérique .....	260
3.3.2.2 Conditions aux limites correspondantes au schéma numérique.....	264
3.3.2.3 Valeurs extrêmes du prix du sous-jacent et de la volatilité et pas de discrétisation du schéma numérique .....	264
3.3.2.4 Erreur de troncature et consistance du schéma numérique .....	270
3.3.2.5 Etude de la stabilité du schéma du schéma numérique relatif à la méthode explicite .....	275
3.3.2.6 Etude numérique de la stabilité .....	282
3.3.3 Méthode Hopscotch.....	289
3.3.3.1 Algorithme de Hopscotch.....	289
3.3.3.2 Méthodologie et application de l'algorithme Hopscotch à la résolution de l'équation différentielle .....	292
3.3.4 Détermination de la valeur de l'option et des pas du maillage $N$ , $\Delta S$ et $\Delta \sigma$ (algorithme de Hopscotch) .....	293
3.3.5 Résultats du modèle à volatilité stochastique (l'algorithme « Hopscotch ») .....	305
3.3.5.1 Test de l'algorithme par rapport au modèle de Black & Scholes.....	305
3.3.5.2 Résultats relatifs à la base intraday .....	308
3.3.5.3 Résultats relatifs à la base journalière .....	313
3.4 RESOLUTION PAR UN RAISONNEMENT RISQUE-NEUTRE : SIMULATION DE MONTE CARLO .....	326
3.4.1 Evaluation d'une option par un raisonnement risque neutre dans le cas où la volatilité est stochastique .....	326
3.4.2 Méthode d'évaluation des options par simulation de Monte-Carlo .....	327
3.4.3 Génération des variables aléatoires normales centrées et réduites : $Z_1$ et $Z_2$ :.....	329
3.4.3.1 Inversion de la fonction de répartition de la loi normale .....	330
3.4.3.2 Changement de variables .....	331
3.4.3.3 Changement de variables permettant un gain en temps CPU .....	332
3.4.4 Algorithme de calcul .....	334
3.4.5 Convergence de la simulation de Monte Carlo .....	336
3.4.6 Test de l'algorithme de simulation de Monte Carlo en référence au modèle Black & Scholes .....	338
3.4.7 Détermination du nombre de périodes $N$ et du nombre de simulations $M$ de l'algorithme de simulation de Monte Carlo en référence au modèle à volatilité stochastique .....	340
3.4.8 Résultats de l'évaluation des options par simulations de Monte Carlo avec volatilité stochastique .....	342
3.4.8.1 Résultats relatifs à la base intraday .....	342
3.4.8.2 Résultats relatifs à la base journalière .....	355
3.5 CONCLUSION .....	362

<b>4 MODELE NEURONAL.....</b>	<b>371</b>
4.1 THEORIE DES RESEAUX DE NEURONES .....	376
4.1.1 Présentation de l'approche neuronale .....	376
4.1.2 Réseau de neurones .....	379
4.1.2.1 Neurone formel .....	379
4.1.2.2 Perceptron linéaire.....	381
4.1.2.3 Réseaux de neurones .....	383
4.1.2.4 Comparaison entre MLP et RBF .....	386
4.1.2.5 Perceptron multicouches (MLP) .....	387
4.1.3 Algorithme de rétropropagation du gradient.....	389
4.1.3.1 Algorithme .....	389
4.1.3.2 La fonction d'activation .....	395
4.1.3.3 Le coefficient d'apprentissage .....	398
4.1.3.4 Mode d'apprentissage .....	399
4.1.3.5 Convergence de l'apprentissage.....	401
4.1.3.6 Recommandation pour l'utilisation de l'algorithme de rétropropagation.....	402
4.1.3.7 Contrainte de généralisation et technique de « Cross-validation » .....	404
4.1.3.8 Les vertus et les limites de l'algorithme de rétropropagation du gradient.....	406
4.1.4 Algorithme « cascade correlation ».....	406
4.2 EVALUATION DES OPTIONS PAR LES RESEAUX DE NEURONES .....	415
4.2.1 Modèle neuronal.....	415
4.2.1.1 Choix et traitement des inputs.....	416
4.2.1.2 Traitement de l'output.....	418
4.2.1.3 Choix du modèle .....	423
4.2.2 Modélisation par l'algorithme « cascade correlation ».....	427
4.2.2.1 Détermination du réseau.....	427
4.2.2.2 Choix de la meilleure architecture de réseau .....	431
4.2.3 Résultats de l'apprentissage .....	434
4.2.3.1 Résultats relatifs aux contrats de la base intraday.....	434
4.2.3.2 Résultats : par moneyness et temps à l'échéance (Base intraday) .....	439
4.2.3.3 Résultats par contrats de la base journalière .....	443
4.2.4 Détermination de la valeur de l'option calculée par le réseau de neurones .....	446
4.2.4.1 Détermination de la série C" .....	446
4.2.4.2 Calcul de la série C' à partir de la série C" .....	451
4.2.4.3 Calcul de la série C à partir de la série C' .....	454
4.2.5 Résultats de l'évaluation des options par les modèles neuronaux .....	456
4.2.5.1 Résultats relatifs à la base intraday .....	456
4.2.5.2 Résultats relatifs à la base journalière.....	461
4.3 CONCLUSION .....	464
<b>5 GESTION DYNAMIQUE DES RISQUES FINANCIERS PAR LES OPTIONS.....</b>	<b>469</b>
5.1 SENSIBILITE ET GESTION DYNAMIQUE DES RISQUES FINANCIERS LIES A UN PORTEFEUILLE FINANCIER .....	471
5.1.1 GREEKS .....	471
5.1.1.1 Delta d'une option :.....	473
5.1.1.2 Gamma d'une option:.....	475
5.1.1.3 Véga d'une option .....	477
5.1.1.4 Thêta d'une option .....	480

5.1.1.5 Rho d'une option.....	483
5.1.1.6 Relation entre Delta, Gamma et Thêta d'une option.....	485
5.1.1.7 Greeks d'un portefeuille de produits financiers.....	486
5.1.2 GESTION DYNAMIQUE DES RISQUES FINANCIERS.....	487
5.1.2.1 Les stratégies de couverture dynamiques :.....	488
5.1.2.2 Détermination de l'erreur de couverture d'un portefeuille financier avec des stratégies dynamiques.....	493
5.2 ETUDE EMPIRIQUE DE LA GESTION DYNAMIQUE DES RISQUES FINANCIERS PAR LES OPTIONS.....	518
5.2.1 Objectif :.....	518
5.2.2 Données :.....	519
5.2.3 Traitement des données.....	522
5.2.4 Résultats.....	525
5.2.4.1 Greeks.....	526
5.2.4.2 Stratégie Delta-neutre.....	541
5.2.4.3 Stratégie Delta Gamma neutre.....	549
5.2.4.4 Stratégie Delta-Véga-neutre.....	556
5.2.4.5 Stratégie Delta Gamma Véga neutre.....	563
5.3 CONCLUSION.....	567
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>573</b>
<b>TABLE DES FIGURES.....</b>	<b>592</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX.....</b>	<b>599</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>604</b>



## INTRODUCTION GENERALE

L'histoire des options se confond, presque, avec l'histoire de l'humanité. Depuis la nuit des temps, en effet, s'échangent des contrats permettant à leurs acquéreurs d'acheter (option d'achat) ou bien de vendre (option de vente) un actif déterminé, à un prix-dit d'exercice- et à une date future, préalablement, fixés, moyennant le règlement immédiat, au vendeur du contrat, d'une prime, dont le montant est, librement, débattu par les co-contractants.

Les options sur actions ont fait leur apparition, dès la fin du 17<sup>e</sup> siècle en Grande-Bretagne, et au 18<sup>e</sup> siècle aux Etats-Unis mais les contrats négociés n'étaient pas standardisés, les marchés n'étaient pas réglementés, de plus ces marchés n'ont consisté, jusqu'en 1973, qu'en des marchés primaires, les opérateurs étant, pratiquement, privés de la possibilité de se défaire, à tout moment, de leur contrat, sur un marché secondaire actif.

En 1973, les initiateurs du " Chicago Board Options Exchange (CBOE)" ont donné naissance à un nouveau type d'option dont la négociabilité, sur un marché secondaire actif, permettait aux opérateurs de solder leurs positions à tout moment et à moindre frais. Une chambre de compensation fut créée pour servir d'intermédiaire, entre acheteurs et vendeurs, et permettre la négociation de contrats d'options, entièrement standardisés, tant en ce qui concerne leur prix

d'exercice, que leur date d'échéance : les opérateurs peuvent désormais prendre leurs bénéfices ou, au contraire, limiter leurs pertes sur une position en option, avant l'échéance limite de celle-ci. Cette initiative fut couronnée de succès et on a vu la prolifération de marchés semblables, un peu partout, sur les grandes places financières.

Cette prolifération a été, d'autant plus motivée, que l'accroissement de la volatilité et l'incertitude de l'environnement n'arrêtent pas de stimuler les agents économiques à gérer les risques de marché. Les risques de change, de taux d'intérêt et de variation des cours boursiers sont devenus un sujet de préoccupation omniprésent. La gestion de ces risques est une activité stratégique qui est en train de connaître un essor considérable et un gain d'intérêt de plus en plus important de la part des institutions financières, des gérants de fonds et de nombreuses entreprises industrielles et commerciales.

Après des années de croissance effrénée et peu réglementée, nous assistons, aujourd'hui, à une phase de plus grande réglementation et de gestion plus contrôlée des risques. Cette gestion a fait des progrès notables grâce au développement des produits dérivés. Un produit dérivé ou contingent est un actif financier négocié sur un marché dont la valeur dépend du prix d'un autre actif appelé sous-jacent.

Cet essor considérable qu'ont connu les produits dérivés, s'explique, essentiellement, par l'accroissement de la volatilité et, donc, des risques financiers. C'est la nécessité de couvrir ces risques qui a été le véritable stimulant du développement des instruments dérivés. A travers le temps, ces derniers ont connu une vague de réformes sans précédent. En effet, face à l'accroissement de la volatilité des taux d'intérêt et des cours boursiers, conséquence des décisions prises pour la libération du commerce international et de l'économie, toute une série de nouveaux instruments financiers ont vu le jour grâce à l'imagination et au pragmatisme des intervenants sur le marché. Ce

mouvement d'innovation financière s'interprète comme une réponse face aux dangers occasionnés par la fluctuation accrue de la volatilité.

Les options négociables offrent un intérêt essentiel pour la gestion de portefeuille. Elles contribuent à rendre le marché financier plus complet, en permettant à tout opérateur, d'atteindre l'objectif de rentabilité et de risque souhaité qui, sans elles, aurait été impossible à obtenir avec un faible coût.

Pour les entreprises, la principale innovation introduite par l'option est la diversification des profils de risque. Elles peuvent désormais choisir le cours ou le taux à partir duquel elles cèdent leur risque à la banque.

De plus les chercheurs se sont vite aperçus, qu'au-delà du cadre des marchés financiers, stricto sensu, de nombreux problèmes de finance d'entreprise peuvent être traités dans le cadre de la théorie des options : le renouvellement de la théorie du choix des investissements, domaine assurance et réassurance, gestion de portefeuille, etc....

Dans ce cadre, l'évaluation des options est devenue, plus que jamais, un problème très important et très complexe. Il a attiré beaucoup d'économistes et de mathématiciens.

Dans sa thèse « la théorie de la spéculation », Bachelier (1900 ) a été le premier à suggérer une méthode pour le calcul d'un prix équitable d'une option basé sur un mouvement du marché modélisé par un processus stochastique. Il a supposé que le prix de l'actif sous-jacent suive un mouvement Brownien (avec un drift nul) et à procédé à l'évaluation de l'option d'achat sur ce sous-jacent. Les deux déficiences de ce modèle sont, d'une part, avec une probabilité égale à 1, le modèle engendre des prix de sous-jacent négatifs et le prix de l'option peut être supérieur au prix du sous-jacent, ce qui est en contradiction avec la réalité du

marché financier, d'autre part, l'hypothèse de nullité de la moyenne espérée de la variation du prix induit un taux d'intérêt nul.

Samuelson (1965) a amélioré la procédure en considérant un processus Brownien géométrique et en calculant la valeur de l'option comme l'espérance du pay-off actualisé à un taux continu égal au drift réel de l'option dont on cherche la valeur.

Les travaux d'Itô, qui a développé dans les années 40 et 50 une théorie mathématique pour la modélisation des processus stochastiques continues, ont été utilisés par Black & Scholes (1973) pour la résolution du problème d'évaluation de l'option d'achat d'un actif financier qui a aboutit à leur formule célèbre.

En se basant sur une logique d'arbitrage, appliquée d'une manière continue dans le temps, et en supposant l'absence de coût de transaction, d'impôt, de compte de marge et de toutes sortes de friction, ces auteurs ont développé une équation mettant en relation la valeur de l'option avec ses déterminants qui sont notamment la valeur du sous-jacent, la volatilité, le prix d'exercice, le taux d'intérêt sans risque et la maturité.

Bien que le modèle de Black & Scholes apporte une solution théorique et empirique aux problèmes d'évaluation des contrats d'options européennes il demeure toutefois tributaire d'un certain nombre d'hypothèses qui ne sont pas en accord avec les conditions concrètes du négoce des options et par conséquent limitent l'étendue de son application. S'il est aujourd'hui populaire c'est essentiellement parce que la formule qui en découle est facile à mettre en œuvre. Cette formule célèbre de valorisation des options permettait, non seulement, le développement de nouveaux instruments de couverture des risques de marché, mais marquait, également, le début de l'ère de la finance,



dite stochastique, c'est-à-dire reposant, largement, sur l'utilisation d'outils probabilistes sophistiqués, dans le processus d'évaluation des produits dérivés.

L'identification du processus de génération des prix des sous-jacents et de l'option est une étape nécessaire à la dérivation de l'équation d'évaluation. Dans la mesure, où la définition de la façon dont les prix sont générés est fonction de l'appréciation du modélisateur, la formule de Black & Scholes est considérée comme faisant partie de la catégorie des modèles paramétriques. De ce fait, le modèle de Black & Scholes a un sens théorique et empirique.

Malgré les critiques qui lui sont adressées, le modèle de Black & Scholes reste, toujours, le modèle de base, le plus utilisé, dans la plupart des travaux de recherche. Les praticiens, également, se basent sur ce modèle pour déterminer la volatilité implicite, à un instant donné, et pour coter l'option, à partir de cette volatilité, à l'instant suivant.

La construction d'un modèle théorique pour une évaluation fiable des nouveaux produits est devenue, plus que jamais, un défi majeur, où les enjeux sont très importants et les praticiens attendent toujours le substitut du modèle de Black & Scholes qui sera, aussi simple, au niveau de l'utilisation, mais, qui sera plus précis.

Dans les 25 dernières années, une armée de chercheurs s'est investi dans le but d'améliorer le modèle de Black & Scholes, afin de rendre certaines hypothèses plus proches de la réalité et, notamment, en considérant un taux d'intérêt stochastique, une couverture discrète, une volatilité stochastique, avec, éventuellement, des sauts de prix du sous-jacent et de la volatilité, un coût de transaction, ce qui constitue déjà une liste non exhaustive des tentatives pour l'amélioration du modèle de Black & Scholes. L'évaluation des produits dérivés devient, de plus en plus, complexe et fait appel aux évolutions les plus pointues et les plus compliquées des mathématiques. La ruée des physiciens et des

mathématiciens vers le domaine des mathématiques financières a stimulé la prolifération de modèles, de plus en plus, compliqués. Face à cette complexité des modèles, des questions se posent : y'a t-il vraiment besoin de développer encore des modèles d'évaluation d'option? Ou bien est ce que le marché est trop compliqué pour être modélisé ? « L'amélioration des modèles d'évaluation de produits dérivés est plutôt peu utile » (Jessica JAMES, 1999). Pourtant, les données statistiques sont en contradiction avec ce point de vue. En effet, environ 20% des pertes, au niveau des transactions sur produits dérivés, sont attribués à une mauvaise évaluation de ces produits ce qui se chiffre à des milliards de Dollars (Stix, 1998). Cette mauvaise évaluation, qui occasionne, à son tour, des stratégies de couverture inappropriées, engendre un risque comparable, aux autres risques inhérents à la négociation de produits dérivés. C'est ce qui explique la ruée des chercheurs vers un modèle idéal qui sera le substitut du modèle de Black & Scholes dans la pratique.

Du point de vue du chercheur (académicien), le modèle idéal d'évaluation d'une option est le modèle qui assure l'équité entre les contractants. Le chercheur est, donc, à la recherche d'un modèle juste et équitable.

Du point de vue du praticien, le modèle idéal est celui qui permet de minimiser les erreurs de gestion, en captant la logique du marché, pour en tirer profit, ou pour se couvrir contre un risque donné.

Le modèle idéal peut être, soit un modèle paramétrique, soit un modèle non paramétrique. Il peut être un modèle paramétrique qui repose sur des hypothèses conformes à la réalité. Ainsi, le calcul de la valeur de l'option est quasi-instantané et la précision est, d'autant meilleure, que les hypothèses sont réalistes. Cependant, dans certains cas, les modélisateurs ont plus le souci de la simplicité de calcul que celui de la conformité des hypothèses à la réalité.

Il peut être, également, un modèle non-paramétrique qui permet de capter la logique du marché, à partir de données historiques, et qui est doté d'un bon pouvoir de prédictibilité.

Dans les deux cas, la référence est l'historique du marché, soit pour tester la validité des hypothèses (réalistes ou non), dans le cas du modèle paramétrique, soit pour tester le modèle, proprement dit, dans le cas du modèle non paramétrique.

Dans les deux cas, on est en présence d'un système asservi (bouclé). Pour le modèle paramétrique, l'influence mutuelle entre le marché et le modèle se fait suivant la boucle : marché – hypothèses – modèle – marché. Pour le modèle non paramétrique, cette influence mutuelle se fait suivant la boucle : marché – modèle-marché.

En effet, c'est la réalité du marché qui permet de trouver le bon modèle, qu'il soit paramétrique ou non paramétrique. L'utilisation d'un tel modèle, par tous les praticiens du marché, va déterminer le marché, et de ce fait le modèle sera forcément bon.

Il est certain que les praticiens n'utilisent pas le même modèle d'évaluation, et c'est ce qui fait la complexité de la modélisation et son évolution dans le temps. Un modèle valable aujourd'hui le serait-il demain ?

Les acteurs sur le marché des options ne disposent pas des mêmes informations et, donc, n'ont pas les mêmes anticipations, entre autres, des comportements futurs des variables d'état du modèle. Ainsi, certains acteurs vont agir dans le sens de la demande (achat) alors que d'autres agissent dans le sens de l'offre. De plus, ils n'utilisent pas le même modèle pour générer les prix de l'option ce qui engendre des disparités au niveau de ce prix. Le prix du marché est la résultante de ces prix et, dans une boucle de retour (asservissement), il vient

s'ajouter à la masse d'informations dont dispose chaque acteur, en lui permettant la découverte du marché.

Les modèles paramétriques supposent que les variables d'états suivent des processus stochastiques donnés, dans le futur. Il s'agit d'anticipations communes à tous les acteurs du marché (anticipations homogènes). Les modèles non paramétriques ne sont pas basés sur de telles hypothèses.

Le modèle idéal est, donc, relatif à la réalité du marché et évolue dans le temps. Il allie à la fois la précision et la rapidité, ainsi qu'un bon pouvoir prédictif.

La rapidité de calcul est très importante en finance puisque dans la pratique, les conseils donnés par les spécialistes doivent se faire en temps réel sur un marché continu. D'ailleurs c'est ce qui fait le succès de la formule de Black & Scholes bien que celle-ci ne repose pas sur des hypothèses tout à fait réalistes, surtout en ce qui concerne le processus de diffusion du prix du sous-jacent, la continuité de la couverture du portefeuille de Black & Scholes, ainsi que la gratuité des transactions.

La précision d'un modèle est, également, très importante dans la mesure où les sommes manipulées sont très importantes. La précision de la valeur d'une option, fondée sur des hypothèses justes, garantit l'équité et l'intérêt de chacun des contractants, à savoir, le vendeur et l'acheteur du contrat d'option. Cette précision va de pair avec le réalisme des hypothèses sur lesquelles se fonde un modèle paramétrique.

Or, il est difficile d'avoir des hypothèses réalistes, quelle que soit la période relative au contrat d'option. Autrement dit, selon la période correspondante à la durée de vie de l'option, ces hypothèses peuvent être réalistes pour certains contrats et non réalistes, pour d'autres. D'où l'intérêt d'avoir recours à des

modèles non paramétriques ne reposant pas sur des hypothèses, à l'inverse des modèles paramétriques.

Pour allier la rapidité de calcul et la précision, les chercheurs sont partis à la recherche du modèle idéal. Dans cette recherche, deux voies sont, donc, envisagées. La première consiste à chercher des modèles paramétriques, en partant du modèle de Black & Scholes et en adaptant les hypothèses à la réalité. La première voie tend, donc, à trouver un modèle paramétrique, avec, idéalement, une solution sous forme analytique (closed-form solution) et à défaut une solution sous-forme numérique, ce qui est généralement le cas. Les solutions sous forme analytique constituent un défi majeur pour les chercheurs, surtout quand les modèles sont assez complexes.

La seconde voie, est de chercher un modèle non-paramétrique qui capte la logique du marché des options, en conjuguant la rapidité et la précision, en utilisant des techniques diverses et variées : comme l'économétrie, les réseaux de neurones, les algorithmes génétiques, les sous-ensembles flous, etc....

Les modèles non paramétriques présentent, par rapport aux modèles paramétriques, l'avantage de ne reposer sur aucune hypothèse, surtout concernant la dynamique du prix du sous-jacent. Par contre, ils tirent leurs logiques, à partir d'une base de donnée historique, dans le but de déterminer une relation entre inputs et outputs. Leurs pertinences dépendent de la fiabilité de cette base. Autrement dit, les erreurs de cotation, sur le marché, seront captées par un tel modèle. De plus, si l'avenir diffère complètement du passé et qu'il présente des chocs au niveau des données, le pouvoir prédictif et la performance de tels modèles peuvent être catastrophiques. Les modèles non paramétriques faisant appel à des calculs intensifs, se sont développés avec le développement de l'outil informatique. Il nécessite généralement une capacité mémoire importante et nécessite un temps de convergence assez long, fonction des algorithmes mis en oeuvre et de la capacité de calcul des moyens

informatiques, mis à disposition. Leurs précisions peuvent être bonnes mais restent limitées par la contrainte d'un bon pouvoir prédictif.

Un modèle non-paramétrique est assimilé à une boîte noire qui sert plus à capter la logique du marché qu'à déterminer un prix équitable. Ceci va de pair, avec le souci d'un praticien, qui n'est pas l'équité mais plutôt l'appréhension de cette logique afin d'en tirer profit.

Du fait que ces modèles sont des boîtes noires, ils ne permettent pas l'interprétation des résultats qu'ils génèrent. De ce fait, ils sont complètement déconnectés de la réalité financière, ce qui constitue un grand inconvénient. Par contre, ils ne sont pas influencés par le raisonnement financier qui repose parfois sur des hypothèses non réalistes.

Parmi les modèles non paramétriques, il y'a les réseaux de neurones. Ces dernières années, une telle approche a connu un engouement tout particulier en finance. En effet, les réseaux de neurones, dont l'étude remonte au début des années quarante (McCulloch et Pitts (1943)) et qui semblent dériver leur origine de la modélisation du fonctionnement du cerveau humain, ont connu récemment un vif regain d'intérêt à la suite des avancées majeures enregistrées dans ce domaine, en particulier la mise au point de l'algorithme de rétro-propagation de l'erreur (Parker ( 1985) et LeCun ( 1985) ) et sa capacité à traiter des problèmes non linéaires.

La propriété d'approximateur universel parcimonieux, la capacité de traiter des problèmes non linéaires, la robustesse et le pouvoir prédictif sont les avantages procurés par les modèles neuronaux. Ces avantages ont été à l'origine du jaillissement des applications y afférents, dans presque tous les domaines scientifiques, en particulier, la finance. Plus spécifiquement, l'approche neuronale a été utilisée pour évaluer et couvrir les options.

La majorité des études effectuées ((Malliaris et Salchenberger (1993), Hutchinson, Lo et Poggio (1994) , Lajbcygier (1997), Anders, Korn et Schmitt (1998), Garcia et Gençay (2000)) ont montré l'utilité pratique de celle-ci.

Dans la première voie de recherche, le modèle de base reste le modèle de Black & Scholes(1973). Le modèle de Black & Scholes est basé sur des hypothèses qui ne sont pas réalistes. Il présente des lacunes et notamment il tend à sous-évaluer les options «out-of the- money » et à surévaluer les options « in-the-money ». Ainsi les opérateurs sont en quête d'un modèle plus juste puisque les enjeux sont énormes et c'est pourquoi la recherche dans le domaine de l'évaluation des options connaît aujourd'hui un grand essor.

La recherche, dans cette première voie, consiste à trouver un modèle paramétrique meilleur que celui de Black & Scholes, en rendant les hypothèses de ce dernier plus conformes à la réalité. Ainsi, plusieurs modèles paramétriques ont connu le jour, pour lesquels le modèle de base reste celui de Black & Scholes(1973). En fait, le nombre des modèles d'évaluation d'options possible est virtuellement infini, sachant qu'il est impossible de travailler sur le relâchement ou l'amélioration de l'ensemble de ces hypothèses simultanément.

Pour chacun de ces modèles, l'évaluation se fait soit par la résolution d'une équation différentielle à dérivées partielles du second ordre avec des conditions aux limites spécifiques à chacun des problèmes, soit en se basant sur une approche martingale (raisonnement risque-neutre).

Parmi les critiques qu'on peut adresser au modèle de Black & Scholes est la log-normalité du processus de diffusion du prix du sous-jacent. Cette hypothèse suppose la constance de la volatilité qui est en complète contradiction avec la courbe de « smile » observée sur les données du marché, et qui lie la volatilité du rendement du sous-jacent à la parité de l'option et à sa maturité. Ce constat a

amené certains chercheurs à conclure que cette volatilité constitue une variable d'état stochastique.

Ainsi, l'étude empirique relative à la présente thèse consiste à comparer les performances d'un modèle paramétrique et d'un autre non paramétrique, en se basant sur le modèle de Black & Scholes. Le modèle paramétrique est un modèle à volatilité stochastique. Ce choix peut se justifier par le fait que le prix d'une option est très sensible à la volatilité et que la log-normalité du processus du prix du sous-jacent, pour le modèle de Black & Scholes, qui suppose la constance de la volatilité est, en parfaite contradiction avec la courbe de « smile ». La grande sensibilité de la valeur de l'option à la variation de la volatilité et l'incapacité du modèle de Black & Scholes à expliquer les courbes de « smile » rend cette voie de recherche très prometteuse.

Le choix des réseaux de neurones, dans la voie des modèles non paramétriques, se justifie par leurs propriétés d'approximateur universel parcimonieux de fonction. Elle se justifie, également, par leur capacité à résoudre des problèmes non linéaires et à leurs propriétés de flexibilité et de robustesse. Les résultats encourageants des auteurs précités qui ont traité le sujet et qui ont démontré la performance des modèles neuronaux, en terme d'évaluation et de couverture, vont dans le sens de cette justification.

L'objectif de la présente thèse est donc de comparer les performances de trois modèles d'évaluation d'option d'achat (de type européen) : le modèle neuronal, le modèle de Black & Scholes et les modèles à volatilité stochastique. Cette comparaison se situe aussi bien au niveau de l'évaluation qu'au niveau de la couverture, contre les risques financiers, par des stratégies dynamiques autofinancées, basées sur des options sur indice. Elle se situe, également, au niveau de la rapidité du calcul de la valeur de l'option, mesurée par le temps de convergence de l'algorithme de calcul correspondant à chaque modèle.



En considérant la volatilité historique ou la volatilité implicite, calculée à partir du modèle de Black & Scholes, en considérant des données intraday ou des données journalières, selon les critères précités, quel est le modèle d'évaluation qui est le plus performant en terme d'évaluation et en terme de couverture ? Est-ce le modèle à volatilité stochastique ou le modèle neuronal ? Dans le cas du modèle à volatilité stochastique, quelle sera la dynamique de la volatilité la mieux appropriée à l'évaluation de l'option?

Cette approche qui consiste à comparer un modèle paramétrique, en l'occurrence le modèle à volatilité stochastique, et un modèle non paramétrique (réseaux de neurones), aussi bien au niveau de l'évaluation qu'au niveau de la couverture, constitue déjà une première originalité du présent travail. Pour répondre aux questions précitées, une deuxième originalité est que le présent travail se fonde sur les données de deux bases de données : une base intraday et une base journalière.

Les critères de mesure de performance sont les erreurs d'évaluation et les erreurs de couverture. Les erreurs d'évaluation reflètent les performances statiques des modèles d'évaluation, alors que les erreurs de couverture reflètent leurs performances dynamiques.

Puisque la volatilité implicite est directement liée au prix actuel du marché, il est souvent affirmé que cette volatilité implicite est un estimateur de la volatilité meilleur que la volatilité historique. En effet, la volatilité implicite est basée sur le prix courant, qui incarne les anticipations des événements futurs concernant le marché. Par ailleurs, ce raisonnement simpliste ne prend pas en considération le fait que la volatilité implicite reproduite avec un modèle particulier d'évaluation d'option qui est intimement liée à la dynamique de l'actif sous-jacent.

Il y'a une bonne raison à priori de considérer la volatilité comme stochastique. Des études empiriques sur les rendements du cours du sous-jacent permettent d'estimer la volatilité qui semble présenter un comportement stochastique. Mais modéliser la volatilité par un processus stochastique, c'est en fait reconnaître que quantifier le risque à travers un paramètre de volatilité constant est aujourd'hui insuffisant pour expliquer certains phénomènes du marché, en particulier, pour expliquer la courbe de "smile". C'est une modification profonde et puissante qui permet de décrire un marché bien plus complexe que le marché de Black & Scholes. En effet, si le modèle de Black & Scholes ne fait intervenir que les deux premiers moments du rendement instantané du prix du sous-jacent, le modèle à volatilité stochastique fait intervenir, en plus, le moment d'ordre 3 (kurtosis) et le moment d'ordre 4 (skewness). (Le kurtosis est le coefficient de dissymétrie de la courbe de la distribution des rendements du sous-jacent, alors que le skewness est son coefficient d'aplatissement.). Ceci revient à dire que :

- Nous pouvons reproduire des lois de distribution plus réalistes pour les rendements. En particulier les queues de ces distributions sont plus épaisses que celles des lois log-normales, (effet de la volatilité de la volatilité sur le skewness)
- Ces distributions peuvent être rendues asymétriques corrélant les bruits de la volatilité avec ceux du prix du sous-jacent (effet du coefficient de corrélation du prix du sous-jacent et de la volatilité sur le kurtosis)
- Nous pouvons faire apparaître du "smile".

Mais modéliser la volatilité par un processus stochastique, c'est en fait reconnaître que quantifier le risque à travers un paramètre de volatilité constant est insuffisant pour expliquer certains phénomènes de marché. En particulier pour expliquer la courbe de « smile ». C'est donc une modification profonde et puissante qui permet de décrire un marché bien plus complexe que celui de Black & Scholes, puisque :

Le fait que les variations de la volatilité des rendements de l'actif sous-jacent ne puissent être que partiellement expliquées par les mouvements de son prix a amené plusieurs chercheurs Wiggins (1987), Hull & White (1987) et Scott (1987) à conclure que la volatilité des rendements de l'actif sous-jacent pourrait être elle-même une variable aléatoire qui évoluerait dans le temps suivant un processus spécifique. Ainsi, les variations du prix d'une option sont expliquées par les variations aléatoires des deux variables d'état qui sont le prix de l'actif sous-jacent et la volatilité.

Mais, à partir du moment où deux variables d'état interviennent dans le modèle, il n'est plus possible de constituer, comme dans le cadre du modèle de Black & Scholes, une position parfaitement couverte. En effet, l'analyse de Black & Scholes repose sur l'hypothèse selon laquelle il est possible de constituer une position parfaitement immunisée contre les variations du prix du sous-jacent, mais non pas contre celles de la volatilité. De plus, un raisonnement d'arbitrage, c-à-d, l'application du principe d'absence d'opportunités d'arbitrage, ne suffit plus pour évaluer une option lorsque son prix dépend d'une variable d'état, telle que la volatilité, qui n'est pas un actif négociable ou dont le risque ne peut être couvert par une position sur un actif négociable. C'est pourquoi ces auteurs sont contraints de faire appel à des méthodes d'évaluation plus sophistiquées. Le modèle d'évaluation des actifs auquel ils ont recours n'est plus un modèle d'arbitrage mais un modèle d'équilibre, dans lequel le prix d'une option est fonction de deux variables d'état et des préférences des investisseurs. Ce dernier paramètre est représenté dans l'équation d'évaluation par la prime de risque exigée par les investisseurs en compensation du risque induit par les variations aléatoires de la volatilité.

En effet, la formule d'évaluation n'est plus indépendante des préférences des investisseurs car le risque de la volatilité ne peut pas être couvert par une position sur un actif négociable. Pour appliquer ce modèle, il nous faudra, donc,

estimer cette prime de risque, à moins de faire sur ce paramètre des hypothèses simplificatrices. Dans un marché complet, en équilibre cette prime de risque est unique. La définition la plus simple d'un marché complet est que c'est un marché où chaque produit dérivé peut être répliqué par une stratégie autofinancée avec une position sur le sous-jacent et une position sur une obligation (Fouque & al., 2000)

La valeur de l'option peut être obtenue soit par résolution de l'équation différentielle à dérivées partielles de Garman (1976) soit par un raisonnement risque neutre en actualisant le payoff de l'option à l'échéance au taux d'intérêt sans risque. Dans l'hypothèse d'un marché complet, l'équation de Garman (1976) admet une solution unique, compte tenu des conditions aux limites, relatives à une option de type européen. La solution analytique n'est pas évidente à déterminer, sauf, dans certain cas, où la dynamique de la volatilité et le prix du marché du risque prennent une forme tout à fait particulière. Autrement, l'équation de Garman (1976) est résolue, numériquement, en général, par un schéma aux différences finies. De même, dans le raisonnement risque neutre, on fait souvent appel à la simulation de Monte Carlo qui donne, également, une solution sous forme numérique.

La valeur de l'option est fonction de deux variables d'état : le prix du sous-jacent et la volatilité. En utilisant le lemme d'Itô, on obtient la dynamique du prix de l'option et par conséquent l'expression du drift du rendement de l'option ainsi que les expressions des risques relatifs aux deux variables d'état. En constituant un portefeuille de couverture sans risque, composé de l'option à évaluer, du sous-jacent et d'une deuxième option (qui est sensée apporter l'information sur le prix du risque du marché), on obtient deux équations. Le portefeuille de couverture est rémunéré au taux de l'actif sans risque, ce qui constitue une troisième équation. Il en ressort de ce système d'équation que la prime de risque de l'option à évaluer est une combinaison linéaire du risque lié au sous-jacent et du risque lié à la volatilité. En remplaçant le drift de la valeur

de l'option ainsi que les risques liés à la volatilité et au prix du sous-jacent par leurs expressions dans le processus du prix de l'option obtenu par le lemme d'Itô, on obtient l'équation différentielle à dérivées partielles de Garman (1976) dans le cas de deux variables d'état. Compte tenu des conditions aux limites, cette équation admet une solution unique, dans le cas, où le marché serait complet et en équilibre. Dans ce cas, la résolution de cette équation donnera la valeur de l'option en considérant la volatilité comme stochastique.

En plus des hypothèses du modèle de Black & Scholes, le modèle repose sur une hypothèse sur la dynamique de la volatilité, la constance et dans le cas général, la non nullité du coefficient de corrélation, entre la volatilité et le prix du sous-jacent. Il repose, également, sur une hypothèse pour déterminer le prix du marché du risque de la volatilité, et une hypothèse sur la complétude du marché, pour que la solution du problème soit unique.

Le choix de la dynamique de la volatilité est fondamental dans la modélisation en considérant la volatilité comme stochastique. Ce choix est basé sur les propriétés de cette dynamique, tel que la stationnarité et le retour à la moyenne « mean reverting », qui doivent être en conformité avec la réalité du marché. A ce niveau, les modélisateurs ont plus le souci de la simplicité de calcul que la conformité à la réalité.

En ce qui concerne le coefficient de corrélation, Black (1975) a montré que la baisse des valeurs boursières implique que l'effet de levier des firmes augmente, ce qui suggère que le niveau de la bourse et la volatilité soient, négativement, corrélés. Empiriquement ceci se vérifie bien, mais la corrélation négative ne peut pas être expliquée uniquement par l'effet de levier. Les traders d'options disent que cette corrélation négative peut s'expliquer par le fait que lorsque la bourse baisse, les acteurs sur le marché paniquent et deviennent plutôt irrationnels dans leurs décisions.

Quand cette corrélation est positive l'écart du modèle à volatilité stochastique par rapport au modèle de Black & Scholes décroît avec le prix du sous-jacent, donc avec la parité de l'option. Cet écart est d'autant plus positif que l'option est en dehors de la monnaie et d'autant plus négatif que l'option est en dedans de la monnaie. L'écart est nul pour une parité, légèrement, inférieure à l'unité. Quand la corrélation de la volatilité avec le prix du sous-jacent est négative, on obtient l'effet inverse et l'écart sera nul pour une parité, légèrement, supérieure à l'unité. En fait, le cas où le prix du sous-jacent et la volatilité sont non-corrélés, est une combinaison des deux effets précités. Par ailleurs, l'écart tend vers zéro quand la parité tend vers l'infini quelle que soit la valeur du coefficient de corrélation et la durée de vie résiduelle de l'option.

Quand le coefficient de corrélation, entre le prix du sous-jacent et la volatilité, est positif, des valeurs élevées du prix du sous-jacent sont associées à des fortes valeurs de la volatilité : en effet, plus le prix du sous-jacent augmente, plus la probabilité de grandes variations positives augmente. Ce qui veut dire que des valeurs très élevées, du prix du sous-jacent, deviennent plus probables que, dans le cas, où la volatilité serait constante. De même des valeurs faibles du prix du sous-jacent sont associées à des valeurs faibles de la volatilité. En effet, plus le prix du sous-jacent est faible, moins il est probable que des grandes variations de ce prix auraient lieu. L'effet résultant est que la distribution du prix du sous-jacent à l'échéance est plus positivement « skewed » que la distribution log-normale, avec une volatilité constante. Quand le coefficient de corrélation, entre le prix du sous-jacent et la volatilité, est négatif, l'inverse reste vrai. La baisse des prix engendre une augmentation de la volatilité et par conséquent la probabilité de variations significativement positives du prix du sous-jacent. Autrement dit, des prix très faibles deviennent invraisemblables. Ceci a pour effet que la distribution du prix du sous-jacent à l'échéance aura un pic plus prononcé, au niveau du mode, que dans le cas d'une distribution log-normale usuelle.

On peut penser, intuitivement, que l'incertitude sur la volatilité engendre une incertitude sur la valeur du sous-jacent et par conséquent augmente la valeur de l'option et que ceci est d'autant plus vrai que la durée de vie résiduelle de l'option est grande. La véritable conclusion est juste l'opposée de cette intuition. A chaque fois que le modèle de Black & Scholes surévalue l'option, ceci est dû à la concavité locale de la courbe de Black & Scholes, par rapport à la volatilité. (c-à-d par rapport à la dérivée seconde du prix de l'option par rapport à la volatilité). La concavité précitée fait qu'une augmentation de la volatilité engendre une augmentation du prix de l'option d'achat d'une quantité différente de celle engendrée par une même augmentation de la volatilité, en cas d'absence de cette concavité.

Ainsi, pour toute option d'achat proche de la monnaie, en utilisant la formule de Black & Scholes, la valeur moyenne du prix de Black & Scholes pour une volatilité stochastique sera inférieure à celle de la valeur de l'option pour la valeur moyenne de la volatilité. De même, plus la durée de vie de l'option augmente, la volatilité de la volatilité augmente, tout en exacerbant l'effet de la courbure du prix de l'option par rapport à la volatilité. Quand le prix de Black & Scholes sous-évalue l'option, l'effet inverse est observé.

En ce qui concerne le prix du marché du risque, sa détermination se base soit sur un modèle théorique, à l'instar de celui de Wiggins (1987) ou Heston (1993), soit sur une hypothèse simplificatrice qui est en général la nullité de ce paramètre.

Si le modèle de Black & Scholes est populaire grâce à sa simplicité et à son niveau acceptable de précision, le modèle à volatilité stochastique est plus réaliste puisqu'il considère que la volatilité est stochastique et donc explique la courbe de "Smile". Le modèle de Black & Scholes donne une solution analytique (closed form solution), alors que le modèle à volatilité stochastique nécessite en général une résolution numérique qui présente une source d'erreur.

De plus, le modèle à volatilité stochastique nécessite l'estimation de plus de paramètres liés à la dynamique de la volatilité en plus du prix du risque du marché qui constituent d'autres sources d'erreurs. De plus le prix du risque lié à la volatilité n'est pas facile à estimer et nécessite des hypothèses supplémentaires qui peuvent être source d'erreurs supplémentaires, si celles-ci ne s'avèrent pas être réalistes. De plus, ces modèles à volatilité stochastique ne sont pas familiers (niveau de connaissance élevé), ils sont consommateurs de temps CPU et nécessitent un effort d'implémentation.

Ce modèle d'évaluation à deux facteurs, qui tient compte des fluctuations aléatoires de la volatilité, ne permet pas en général, d'obtenir une solution de forme réduite. Dans tous les cas, il va falloir estimer, dans un premier temps le processus stochastique qui caractérise l'évolution de la volatilité dans le temps, la prime associée au risque induit par les variations de la volatilité et la volatilité elle-même. Se sont là des calculs, relativement, délicats à effectuer car on dispose de peu de renseignements sur le processus stochastique que suit la volatilité, et l'on connaît encore moins bien la prime exigée par les investisseurs en échange du risque que représentent les variations non anticipées de la volatilité.

Les performances des modèles à volatilité stochastique, dépendent étroitement du choix des processus qui définissent les mouvements du prix du sous-jacent et de la volatilité.

Il y'a un prix à payer pour ces améliorations, puisqu'il faut estimer plus de paramètres. Ces estimations présentent un certain nombre de problème du fait du caractère inobservable de la volatilité. Ces erreurs, au niveau de l'estimation des différents paramètres, sont à cumuler avec les erreurs relatives aux calculs numériques de la solution de l'équation différentielle, si on ne dispose pas d'une solution numérique. Ce cumul d'erreurs constitue un inconvénient des modèles à volatilité stochastique.



Cependant, pour une dynamique particulière de la volatilité et suivant certaines hypothèses Stein & Stein (1991) et Heston (1993) ont réussi à trouver, analytiquement, une solution exacte relative au modèle à volatilité stochastique (closed form solution). Le premier s'est basé sur une technique relative à l'équation de la chaleur et le second sur l'inversion de Fourier. La plupart des autres chercheurs qui ont traité le sujet ont eu recours à une résolution numérique de cette équation. On peut citer, à cet effet, (Merton, 1976), Johnson & Shanno (1985), Eisenberg (1985), Hull & White (1987), Scott(1987), Wiggins (1987), Clifford & Roma (1994), Gurdip & al.(1997) et Fouque & al. (2000), Stein & Stein (1991) and Heston (1993).

Les approches de Hull & White et Stein & Stein dépendent de la distribution de la valeur moyenne de la volatilité stochastique et suppose que le coefficient de corrélation entre les deux variables d'état est constamment égal à zéro. Heston a appliqué la méthode de Fourier d'une manière plus générale et a démontré que l'approche de Stein & Stein peut être généralisée, même, si le coefficient de corrélation est non nul. Par contre, l'approche de Hull & White ne peut être appliquée que lorsque la corrélation est nulle.

D'une manière générale, ces travaux diffèrent par les hypothèses adoptées, en ce qui concerne la dynamique de la volatilité, la nullité ou non du coefficient de corrélation et enfin l'hypothèse sur le prix du marché du risque lié à la volatilité. Ils diffèrent, également, par l'approche considérée pour résoudre le problème.

Wiggins (1987) a considéré, dans son approche un processus de la volatilité  $\sigma_t$  tel que le drift réel de la volatilité est fonction, uniquement, de la volatilité et la volatilité de la volatilité est proportionnelle à la volatilité :  $d\sigma_t = f(\sigma_t)dt + q\sigma_t dz_\sigma$ , où  $dz_\sigma$  est un processus de Wiener-Lévy. Il a supposé que le coefficient de corrélation est constant et non nul.

En ce qui concerne le prix du marché du risque, il a eu une approche théorique pour estimer ce paramètre. Il a considéré un portefeuille sans risque (bêta zéro) constitué de l'option et du sous-jacent. Dans le cas général, où le sous-jacent n'est pas le portefeuille du marché, il suppose que le portefeuille de couverture n'est pas corrélé avec le prix du sous-jacent. Cette équation lui permet de déterminer les proportions du portefeuille de couverture dans le sous-jacent et l'option. En se basant sur le MEDAF, il détermine l'expression analytique du prix du risque du marché. En s'appuyant sur le lemme d'Itô, il aboutit à l'équation d'équilibre de Garman (1976) et Cox Ingersoll & Ross (1985), qui fait intervenir le drift réel de la volatilité et le prix du marché du risque dans son expression analytique. Il a considéré une fonction d'utilité des investisseurs de type logarithmique qui a débouché sur une expression analytique simplifiée du prix du marché du risque qui lui a permis d'étudier plusieurs cas particuliers.

En ce qui concerne la résolution du problème, Wiggins (1987) a utilisé la méthode des différences finies « Hopscotch » avec une transformation logarithmique des variables d'état pour résoudre l'équation de Garman (1976) et Cox Ingersoll & Ross (1985). Il s'est placé dans un cas particulier, où le prix du marché du risque est égal à zéro.

Hull & White (1987) ont considéré un processus du carré de la volatilité  $\sigma_t$  du type Brownien géométrique : si  $V_t = \sigma_t^2$ , on a  $\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \xi dz_\sigma$ . Le processus du prix du sous-jacent  $S_t$  est tel que:  $\frac{dS_t}{S_t} = \phi dt + \sigma_t dz_S$ . Le coefficient de corrélation de ces deux mouvements est supposé nul. Cette dernière hypothèse est essentielle dans la démarche de Hull & White (1987).

Dans la mesure où la volatilité n'est pas corrélée avec l'« aggregate consumption », le prix de l'option est indépendant du comportement des

investisseurs vis à vis du risque de la volatilité. (La volatilité a un risque systématique nul et le prix du marché du risque de la volatilité est supposé nul). Suivant ces hypothèses, pour une valeur de la volatilité au voisinage de la valeur moyenne précitée, ils ont déterminé une solution explicite de la valeur d'une option européenne, sous forme de série, en utilisant un développement de Taylor autour de la volatilité moyenne (c-à-d autour du point où la volatilité n'est pas stochastique). A ce niveau, ils ont fait appel aux moments centrés de cette volatilité moyenne, en se basant sur le processus log-normal précité et en considérant les dérivées partielles du modèle de Black & Scholes. Ces calculs sont faits en considérant que le drift, ainsi que la volatilité du rendement instantané de la volatilité, sont constants.

Dans le cas, où les hypothèses précitées ne seraient pas satisfaites, les auteurs ont fait appel aux méthodes numériques pour résoudre le problème de l'évaluation de l'option européenne. Dans un premier temps, ils ont gardé l'hypothèse de la nullité du coefficient de corrélation, entre la volatilité et le prix du sous-jacent, par contre, ils ont considéré que la volatilité suit un processus d'Ornstein Uhlenbeck, où le drift réel devient une fonction de la volatilité. En utilisant les simulations de Monte Carlo, conjuguée avec la technique des variables antithétiques, ils ont généré, uniquement, la volatilité. Pour chaque simulation, ils ont calculé la valeur moyenne de la volatilité. Pour chacune de ces valeurs moyennes de la volatilité, ils ont calculé la valeur de l'option  $C_i$  correspondante avec la formule de Black & Scholes. En utilisant la technique des variables antithétiques, la moyenne de ces valeurs  $C_i$  donne une estimation de la valeur de l'option.

Dans un second temps, ils ont considéré le coefficient de corrélation entre la volatilité et le prix du sous-jacent non nul, que le drift et la volatilité du rendement instantané de la volatilité sont des fonctions du prix du sous-jacent, de la volatilité et du temps. Ils ont maintenu l'hypothèse que la volatilité est non corrélée avec l'« aggregate consumption », autrement dit, que le prix du marché

du risque, lié à la volatilité, est nul. Cette fois, ils ont généré aussi bien le prix du sous-jacent que la volatilité, tout en utilisant la technique des variables antithétiques. Ils ont obtenu deux estimations du prix de l'option. En considérant une parité égale à l'unité, un taux de l'actif sans risque nul, une durée de vie résiduelle de 90 jours, une volatilité à l'instant présent de 15% annuelle, égale à la moyenne à long terme de cette variable, une volatilité de la volatilité égale à l'unité, un coefficient de retour à la moyenne égal à 10, avec un nombre d'intervalle par simulation de 90 et un nombre de simulation de 1000, ils ont obtenu une précision 3 fois moins bonne, dans le deuxième cas que dans le premier cas, avec environ 3 fois plus de temps CPU.

Si les mouvements de la volatilité ne sont pas corrélés avec ceux du prix de l'actif sous-jacent, le prix de l'option est plus faible que celui de Black & Scholes quand l'option est proche de la monnaie et plus grande quand l'option est loin, en dedans ou en dehors, de la monnaie.

Il semble étrange que l'aspect stochastique de la volatilité réduit le prix de l'option, à un niveau en dessous d'un prix tel que la volatilité n'est pas stochastique. Cependant, ce résultat est conforme à ceux de Merton (1976) relatives à un processus mixte de saut diffusion.

En comparant, le modèle de Black & Scholes et la valeur de l'option donnée par leur modèle développé, sous forme de série, dans l'hypothèse que la volatilité et le prix du sous-jacent sont non corrélés, et le drift et la volatilité de la volatilité sont constants, ils ont confirmé cette conclusion. Ils ont pris dans cette simulation un temps à l'échéance de 180 jours, une volatilité initiale de 15% annuelle, le drift de la volatilité est considéré comme nul et la volatilité de la volatilité est prise égale à l'unité. Le plus grand écart, entre les valeurs de l'option, données par les deux modèles, se situe pour des parités égales à l'unité ou au voisinage de l'unité. L'écart entre les deux modèles est d'autant plus faible qu'il faut utiliser une échelle 25 pour le rendre visible.

Ils ont étudié l'effet de la variation de la volatilité puis celui de la volatilité de la volatilité sur l'écart entre les deux modèles. Ils ont considéré, à cet effet, des volatilités de 10%, 15% et 20% annuel et des volatilités de la volatilité de 1, 2 et 3. Pour tous ces calculs, ils ont utilisé, pour le modèle à volatilité stochastique, le modèle sous forme de série, sauf, pour les cas, où la volatilité de la volatilité est égale à 2 ou 3, où ils ont utilisé des simulations de Monte Carlo associées à un processus d'Ornstein Uhlenbeck de la volatilité. L'effet de l'utilisation d'un tel processus est équivalent à celui de la réduction de la volatilité de la volatilité.

Ils ont trouvé que l'effet de l'augmentation de la volatilité de la volatilité est de baisser le prix de l'option, relatif à un modèle à volatilité stochastique (inférieur à celui de Black & Scholes), pour des options proches de la monnaie, et de l'augmenter, pour des options loin de la monnaie (supérieur à celui de Black & Scholes).

Stein & Stein (1991) ont déterminé analytiquement la distribution du prix du sous-jacent, dans le cas où le prix du sous-jacent suit un processus log-normal et où la volatilité suit un processus d'Ornstein Uhlenbeck. Ce résultat leur a permis d'élaborer une expression analytique « closed-form solution » qui incorpore les propriétés de la série de la volatilité et la queue épaisse qui caractérise la distribution du prix du sous-jacent, du fait de l'aspect stochastique de la volatilité. Ils ont commencé par déterminer la fonction densité de probabilité du prix du sous-jacent, en se basant sur un processus log-normal pour ce dernier et un processus d'Ornstein Uhlenbeck, pour la volatilité. Dans cette approche, ils ont supposé que le coefficient de corrélation entre les deux processus des variables d'état est nul. La densité de probabilité en question est déterminée, analytiquement, sous une forme complexe. Bien que la formule correspondante soit complexe, elle ne fait appel qu'à des fonctions élémentaires

(usuelles) et ne fait appel qu'à une seule intégration. Cette densité de probabilité peut être simplifiée par une formule approchée afin de faciliter les calculs.

La valeur de l'option est calculée, suivant un calcul risque neutre, autrement dit, en actualisant au taux de l'actif sans risque l'espérance du pay-off (valeur intrinsèque de l'option à l'échéance). Le calcul de ce payoff se base sur la densité de probabilité du sous-jacent précitée, aussi bien sous sa forme exacte que sous sa forme approchée.

Le calcul de la valeur de l'option se fait, numériquement, en se basant sur les formules trouvées, analytiquement, et sur l'hypothèse de la constance, voire la nullité, du prix du marché du risque lié à la volatilité. Un code de calcul numérique d'intégrale a été utilisé. Il permet de donner une valeur approchée d'une intégrale convergente ayant une borne finie. Le calcul est 10 à 100 fois plus rapide en considérant la densité de probabilité approchée que la celle exacte. D'où l'intérêt d'une telle approximation.

Une alternative à l'approche numérique utilisée est la transformée de Fourier rapide (FFT :Fast Fourier Transform) qui permet de réduire à un niveau comparable à celui du calcul numérique de la formule de Black & Scholes.

Dans ce travail empirique Stein & Stein (1991) se sont basés sur des données de panels. Ils ont utilisé dix panels. Pour chaque panel, on considère 7 parités et 3 dates d'échéance, soit 21 options par panel.

Pour tous les panels, sauf le dernier, la valeur moyenne de la volatilité est supposée égale à sa valeur initiale. Les panels diffèrent par les valeurs des paramètres décrivant le processus d'Ornstein Uhlenbeck de la volatilité.

Bien que, dans leur approche théorique, ils ont considéré le prix du marché du risque, lié à la volatilité, ( $\lambda$ ) comme constant, avec le cas particulier, où il

est égal à zéro, dans leur travail empirique, ils ont pris ce prix du risque égal à zéro. Par ailleurs, ils ont supposé que le taux d'intérêt soit égal à 9,53%.

Pour chaque option de chaque panel, ils ont calculé les valeurs de l'option, selon le modèle de Black & Scholes « CBS » et selon le modèle qu'ils ont développé « Cnew », en considérant la distribution exacte du prix du sous-jacent. Pour chacun de ces cas, ils ont calculé, aussi la valeur implicite de la volatilité, en inversant la formule de Black & Scholes et en prenant comme valeur de l'option « Cnew ».

En considérant les mêmes valeurs des paramètres du panel F, ils ont déterminé, en plus la valeur de l'option calculée avec l'approximation précitée de la densité de probabilité du prix du sous-jacent. Ce dernier calcul donne des valeurs très proches de celle de Cnew.

L'approche de Heston (1993) constitue une généralisation de l'approche de Stein & Stein (1991), dans le sens où le coefficient de corrélation peut ne pas être nul. Heston a utilisé une nouvelle technique, pour établir une «closed form solution», pour évaluer un call européen sur un actif, en considérant la volatilité comme stochastique. Avec des simulations, il a démontré que la corrélation, entre la volatilité et le prix du sous-jacent, est importante pour expliquer la skewness et les écarts par rapport au modèle à volatilité stochastique. Pour les deux variables d'états, S et V qui est le carré de la volatilité, il a considéré les processus suivants :  $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sqrt{V} dz_S$  et  $dV = \kappa(\theta - V)dt + \sigma\sqrt{V} dz_\sigma$  et, tel que le coefficient de corrélation  $\rho(dz_S; dz_\sigma) = \rho$ , entre ces deux mouvements, est constant.

Il a considéré, également, que le taux d'intérêt sans risque est constant.

En ce qui concerne le prix du marché du risque lié à la volatilité les travaux de Lamoureux et Lastrapes (1993) ont présenté l'évidence de la non nullité de ce prix pour une option. Ceci a constitué une base pour Heston pour la détermination d'un tel prix, en faisant appel au modèle de consommation de Breeden's (1979) qui suppose que le prix du risque du marché est donné par l'équation :  $\lambda(S;V;t)dt = \gamma \text{Cov}\left(dV; \frac{dC}{C}\right)$ , où C est le taux de consommation et  $\gamma$  l'aversion relative au risque pour un investisseur. Le processus de consommation qui découle du modèle général d'équilibre de Cox, Ingersoll & Ross (1985) est, donc :  $dC = \mu_V C dt + \sigma_C \sqrt{V} C dz_C$ , où la croissance de la consommation dC a une corrélation constante avec le rendement du sous-jacent.

Suivant ces hypothèses, le prix du risque du marché est proportionnel à la variance du rendement instantané du sous-jacent. Soit :  $\lambda(S;V;t) = \lambda V$

C'est bien cette hypothèse qui a été retenue dans l'étude de Heston. Dans la théorie, le paramètre  $\lambda$  peut être déterminé à partir d'un actif dépendant de la volatilité et peut être utilisé pour les autres actifs à évaluer.

Heston a résolu le problème de la volatilité stochastique, en partant de l'équation de Garman (1976). En considérant un changement de variable  $x = \ln(S)$ , S étant le prix du sous-jacent, il a considéré une solution par analogie avec la solution de Black & Scholes, avec une probabilité  $p_1$  affectée au prix du sous-jacent et une probabilité  $p_2$  affectée au prix d'exercice. Chacune de ces deux probabilités vérifie l'équation de Garman (1976). Les fonctions caractéristiques des probabilités  $p_1$  et  $p_2$  vérifient, également, l'équation de Garman (1976). A partir de leurs valeurs à l'échéance, Il a déterminé leurs expressions, à un instant t, situé dans la durée de vie résiduelle de l'option. En inversant les fonctions caractéristiques, on obtient les probabilités  $p_1$  et  $p_2$ . L'expression de ces probabilités nécessite le calcul numérique d'une intégrale, à l'instar, de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.



Il a étudié l'effet de l'aspect stochastique de la volatilité sur la valeur d'une option et la comparaison du modèle correspondant avec le modèle de Black & Scholes.

Avec l'hypothèse considérée pour ce modèle,  $\lambda(S;V;t) = \lambda V$ , la forme du processus de la variance du rendement du sous-jacent reste la même, dans un univers de probabilité risque neutre :

$$dV = \kappa^* (\theta^* - V)dt + \sigma\sqrt{V}dz_\sigma, \text{ avec } \kappa^* = \kappa + \lambda \text{ et } \theta^* = \frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda}.$$

Il est évident qu'une augmentation de  $\theta^*$  engendre une augmentation du prix de l'option. Il a fait une simulation en utilisant des valeurs arbitraires pour les différents paramètres, en considérant un taux d'intérêt nul.

Ces travaux antérieurs ont débouché sur les conclusions suivantes :

- Un niveau élevé de la volatilité du sous-jacent augmente le prix de toutes les options sur ce sous-jacent.
- La corrélation entre la volatilité et le prix du sous-jacent est nécessaire pour générer le skewness. Le skewness dans la distribution du rendement du sous-jacent affecte le prix des options en dedans, par rapport au prix des options en dehors. Sans cette corrélation l'aspect stochastique de la volatilité n'a d'effet que sur le kurtosis. Le kurtosis affecte le prix des options loin de la monnaie par rapport à ceux proches de la monnaie.
- Une corrélation positive entre le prix du sous-jacent et de la volatilité est de nature à rendre la queue droite de la distribution du rendement du sous-jacent plus épaisse alors que la queue gauche moins épaisse. Ceci a pour effet d'augmenter le prix des options en dehors et de diminuer ceux en dedans de la monnaie, par rapport au modèle de Black & Scholes, pour un niveau comparable de la volatilité. Une corrélation négative a totalement l'effet inverse. Autrement dit, elle diminue le prix des options en dehors, par rapport à ceux en dedans.

- Si la volatilité de la volatilité est nulle, la volatilité devient déterministe. Sinon, en absence de corrélation entre le prix du sous-jacent et la volatilité, la volatilité de la volatilité augmente le kurtosis du rendement du sous-jacent et non son skewness. Plus la volatilité de la volatilité augmente plus les queues de la distribution du rendement du sous-jacent deviennent épaisses aussi bien celle de droite que celle de gauche. La valeur maximale de la densité de probabilité elle aussi augmente. Ceci a pour effet d'augmenter la valeur des options loin de la monnaie et de diminuer celle proches de la monnaie. Plus la volatilité de la volatilité augmente plus ces effets deviennent exacerbés. Ainsi, les valeurs du coefficient de corrélation et de la volatilité de la volatilité sont déterminantes, dans l'évaluation d'une option, par un modèle à volatilité stochastique.
- Le modèle de Black & Scholes est acceptable pour les options proches de la monnaie. Comme les options sont, généralement, négociées proches de la monnaie, ceci explique, en partie, les fondements empiriques du modèle de Black & Scholes.

Le travail empirique, relatif à cette thèse, se base sur deux bases de données sur options d'achat sur CAC40. Une base intraday et une base journalière. Après le calcul de la volatilité implicite et la volatilité historique pour toutes les observations de ces bases, on procède à un découpage de ces bases, suivant des contrats et suivant des classes de parité (moneyness). Ce découpage est nécessité par les modèles neuronaux qui se fondent sur la technique de « cross validation » nécessitant un jeu d'apprentissage et un jeu de test, en respectant des ratios de taille qui conditionne les performances des réseaux et leurs capacités de bonne généralisation.

Après avoir élaboré la formule de Black & Scholes, par la résolution de l'équation de la chaleur et le raisonnement risque neutre, l'accent est mis sur différents algorithmes pour le calcul de la volatilité implicite et la volatilité historique. La diversification des modes de calcul permet de juger la validité de ces calculs.

A partir des données brutes, on a calculé la volatilité implicite et la volatilité historique, aussi bien pour la base journalière que pour la base intraday, en se basant sur les algorithmes et les formules, élaborées dans la deuxième partie du chapitre 2. Pour le calcul de la volatilité implicite, on a considéré un diviseur de la durée de vie résiduelle, de 250, pour la volatilité et de 365, pour le taux d'intérêt (année commerciale). Pour une valeur de l'option donnée, cette valeur de la volatilité est plus grande que celle qui correspond à un même diviseur de la volatilité et du taux d'intérêt, sans risque, égale à 365. Elle est, par contre, plus petite, si on considère un même diviseur de 250.

En inversant, la formule de Black & Scholes, la courbe de la volatilité implicite en fonction de la parité de l'option, met en évidence la dépendance de ces deux variables, pour une valeur de l'option donnée, ce qui est en totale contradiction avec l'hypothèse de constance de la volatilité sur laquelle se fonde le modèle de Black & Scholes.

En triant les données de la base, par rapport à la durée de vie résiduelle annualisée, on sélectionne une partie de la base où cette dernière ne varie pas (à  $10^{-3}$  près). Pour cet échantillon tiré, on trace la volatilité implicite et la volatilité historique en fonction de la parité de l'option. On met, ainsi, en évidence les courbes de "smile" (en forme de U) de la volatilité implicite et la volatilité historique. D'une manière similaire, en triant sur la parité de l'option et en sélectionnant un échantillon, où cette variable ne varie pas à  $10^{-3}$  près, on trace la volatilité implicite et la volatilité historique, en fonction de la durée de vie résiduelle, pour une parité donnée.

Ces courbes de "smile" mettent en évidence l'incapacité du modèle de Black & Scholes à expliquer un tel phénomène. Le recours aux modèles à volatilité stochastique va, justement, dans le sens d'expliquer un tel phénomène.

Le modèle à volatilité stochastique se base sur des hypothèses en plus de celles relatives au modèle de Black & Scholes. Premièrement, étant donné que la volatilité n'est pas un actif négociable, on a affaire à un modèle d'équilibre, qui suppose que le marché est complet pour que ce problème admette une solution unique. Une deuxième hypothèse concerne la dynamique de la volatilité qui incorpore le moment d'ordre 3 (kurtosis) et le moment d'ordre 4 (skewness) de la distribution du sous-jacent. Cette dynamique de la volatilité doit satisfaire un certain nombre de propriétés comme la propriété du retour à la moyenne ou la stationnarité etc. Une troisième hypothèse concernera la nullité ou non du coefficient de corrélation entre les bruits de la volatilité et ceux du prix du sous-jacent. Mais en plus ce coefficient est-il constant ? Déterministe ? Ou stochastique ?

Une quatrième hypothèse concerne le taux d'intérêt sans risque. Est-il constant, déterministe ou stochastique ? Comment l'estimer ?

Une dernière hypothèse est relative au prix du marché du risque lié à la volatilité qui n'est pas négociable. Cette hypothèse est fondamentale et conditionne la précision du modèle. Faut-il établir un modèle théorique pour estimer un tel paramètre, à partir des courbes d'utilité des acteurs sur le marché ? Faut-il considérer ce paramètre, comme nul, pour simplifier le problème ?

Il faut dire que le choix de ces hypothèses se fait, dans le souci, de simplifier les calculs et de les rendre plus commode, plus que dans le souci de conformité à la réalité.

On suppose que l'hypothèse de la complétude du marché est vérifiée. En ce qui concerne la dynamique de la volatilité, on en a considéré 3 dynamiques différentes afin de couvrir le maximum de propriété et afin de comparer leurs résultats respectifs. On a considéré, comme processus de la volatilité, le

mouvement Brownien, un processus baptisé empirique, tel que le logarithme de la volatilité de la volatilité est une fonction linéaire du logarithme de la volatilité et enfin le processus d'Ornstein Uhlenbeck.

On suppose que le coefficient de corrélation est constant et non nul. Le taux d'intérêt à court terme est, également, supposé constant, égal à la moyenne de l'année courante.

Enfin, en ce qui concerne la dernière hypothèse relative au prix du risque du marché, on suppose que le drift risque neutre est constant et qu'on est dans un monde risque-neutre. Si la volatilité est négociable ce drift risque neutre doit être égal au taux de l'actif sans risque qui n'est autre que le taux d'intérêt à court terme, puisque les options sont des options de court terme. Donc, cette hypothèse semble être plausible, d'autant plus que le drift risque neutre de la volatilité est calculé comme une moyenne sur un grand nombre d'observations. Autrement dit, même, si ce drift est variable il sera estimé par sa moyenne empirique qui, selon la loi des grands nombres, converge vers sa moyenne théorique quand le nombre d'observations devient grand.

Il est à noter que cette hypothèse de constance du drift risque neutre de la volatilité, dans un univers risque-neutre, est équivalente à la nullité du prix du marché du risque, lié à la volatilité, dans un univers réel, où le drift de la volatilité déduit, à partir du mouvement de la volatilité, n'est autre que le drift réel.

Ces hypothèses étant adoptées, le problème, maintenant, est d'estimer les paramètres, relatifs à ce modèle, qui viennent, en plus des déterminants du modèle de Black & Scholes. Certains de ces paramètres sont liés à la dynamique de la volatilité comme la volatilité de la volatilité, le drift risque-neutre de la volatilité, le coefficient de corrélation entre les mouvements de la volatilité et ceux du sous-jacent et dans certains cas le drift réel de la volatilité.

Le seul paramètre qui ne rentre pas dans la dynamique de la volatilité est bien le taux d'intérêt à court terme qui est constant et égal à la moyenne de l'année courante, comme précisé ci-haut.

Pour le mouvement Brownien, comme processus de la volatilité, après un tri sur la date courante, le drift risque-neutre de la volatilité se détermine comme la moyenne de la série dérivée de la volatilité, par rapport au temps. Ceci est vrai aussi bien pour la base journalière que pour la base intraday. La volatilité de la volatilité, qui est constante, dans le cas du mouvement Brownien, est déterminée, comme l'écart type de la série dérivée de la volatilité, divisée par l'intervalle de temps.

En ce qui concerne le processus empirique, le drift risque neutre se détermine comme dans le cas du mouvement Brownien. La volatilité de la volatilité est telle que son logarithme est proportionnel à celui de la volatilité, qu'elle soit implicite ou historique. Ces coefficients de régression  $\eta$  et  $\gamma$  sont fonction des coefficients de régression  $\alpha$  et  $\beta$  de la série logarithme du carré de la série dérivée de la volatilité, sur le logarithme de la volatilité et de l'intervalle de temps  $dt$  séparant deux observations consécutives. Cet intervalle de temps est constant, dans le cas de la base journalière, par contre dans le cas de la base intraday il est stochastique ce qui pose un problème. La solution est de considérer l'intervalle de temps moyen sur l'ensemble de la série. La détermination des coefficients  $\eta$  et  $\gamma$ , permet de calculer la volatilité de la volatilité, pour n'importe quelle observation, en fonction de la volatilité correspondante.

Il est à noter que les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  varient, en fonction du nombre d'intervalle de la volatilité, à considérer, ce qui veut dire, qu'en toute logique la régression devrait être non linéaire. Comme, ces variations sont plutôt faibles, on peut se contenter d'une régression linéaire, en définissant un critère pour

choisir le nombre d'intervalle de la volatilité à considérer et par conséquent les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  correspondants.

Ceci nous amène à fixer les valeurs de ces coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , pour la base journalière comme pour la base intraday, pour la volatilité implicite comme pour la volatilité historique, en considérant les données de l'ensemble de la base ou les données relatives à un contrat donné.

Pour cette dynamique de la volatilité empirique, il est possible, bien qu'il ne soit pas indispensable, de déterminer la série du drift réel de la volatilité, en s'appuyant sur les propriétés de stationnarité à long terme de la fonction densité de probabilité de transition, qui est une solution de l'équation de Fokker Planck. En supposant que les données de la base relatives à la volatilité correspondent bien à un régime stationnaire, on déduit l'expression du drift réel de la volatilité en fonction des deux premiers moments de la densité de probabilité de transition, en régime permanent, qu'on vérifie, à travers une étude empirique, qu'elle est log-normale.

Connaissant le drift réel et le drift risque-neutre, il est possible, dans le cas de cette dynamique de la volatilité, baptisée "empirique", de déterminer la série du prix du marché du risque lié à la volatilité. Compte tenu de la constance du drift risque neutre, la série du drift réel présente la même allure que celle du prix du marché du risque.

En ce qui concerne, le processus d'Ornstein Uhlenbeck, les 3 paramètres, relatifs à ce processus, sont solution d'un système de 3 équations à 3 inconnues, établies suivant la méthode des moments de la volatilité et des moments de la série dérivée de la volatilité. La détermination des moments théoriques a été établie dans le chapitre préliminaire, alors que les moments empiriques sont calculés, à partir des données de la base. La résolution de ce système a fait appel à un calcul itératif, suivant un algorithme, défini dans ce cadre, afin de

calculer la vitesse de retour à la moyenne. Les deux autres paramètres, à savoir la moyenne à long terme de la volatilité et la volatilité de la volatilité sont déduits, à partir de la vitesse de retour à la moyenne. Ces paramètres sont calculés, dans le cas de la volatilité implicite, sur l'ensemble de la base intraday, comme la base journalière. Plusieurs algorithmes ont été implémentés pour le calcul de ces trois paramètres et ont donné des résultats cohérents, qui permettent de juger de la fiabilité de ces calculs.

Le coefficient de corrélation supposé constant, est calculé, suivant la covariance empirique des processus de Wiener-lévy rapporté au produit de leurs écarts type empiriques respectifs. Il est négatif pour les raisons évoquées. Ceci a été confirmé par les calculs, en considérant les séries de la volatilité, par contrat ou sur l'ensemble de la base. Cependant, en considérant les séries de la volatilité et du prix du sous-jacent, sur l'ensemble de la base, qu'elle soit intraday ou journalière, on trouve que ce coefficient est, quasiment, nul, ce qui laisse penser que l'hypothèse de l'indépendance entre les deux variables d'états est bien plausible. Cependant, dans le présent travail, on a traité le problème dans le cas général, autrement dit, on ne s'est pas limité au cas où les deux variables d'états seraient indépendantes.

La solution du modèle à volatilité stochastique peut être obtenue par la résolution de l'équation de Garman (1976) et Cox, Ross & Ingersoll (1985) ou par un raisonnement risque neutre. En général, il n'est pas évident de trouver une solution analytique (closed form solution) sauf pour des dynamiques particulières de la volatilité et du prix du sous-jacent. C'est le cas pour Stein & Stein (1991) et de Heston (1993).

En général, la résolution de l'équation de Garman (1976) se fait numériquement, comme c'est le cas dans notre présent travail. Nous avons considéré à ce niveau une méthode de différences finies, sous forme explicite, avec un maillage sur les deux variables d'états et du temps. Le calcul se fait



d'une manière rétroactive, suivant une pyramide, partant de sa base vers son sommet, qui représente l'instant  $t$  pour lequel, on veut calculer la valeur de l'option. La base de la pyramide est un rectangle, se situant à la date d'échéance, subdivisé suivant un maillage des deux variables d'états. En tout point de maillage de ce rectangle la valeur de l'option est égale à sa valeur intrinsèque.

Normalement, les dimensions d'un tel rectangle sont infinies, compte tenu des bornes théoriques de la volatilité et du sous-jacent qui sont infinies. Ces dimensions sont réduites à des valeurs infinies, en considérant des valeurs maximales de la volatilité et du prix du sous-jacent, déterminées avec un risque de 1% sur les distributions de probabilité des variables d'états. Ceci est source d'erreur mais avec un risque de 1% on peut affirmer que l'erreur induite reste à un niveau négligeable.

Les valeurs de l'option correspondant, à un point du maillage, à un instant donné, se déduisent à partir de 9 valeurs se situant à un instant antérieur, dans le sens rétroactif. (Schéma trinomial suivant deux variables d'états).

Pour la résolution numérique de cette équation, il aurait fallu, dans un premier temps, estimer les pas du maillage, suivant les variables d'états. Ces pas de maillage sont des fonctions des valeurs maximales de la volatilité et du prix du sous-jacent à l'échéance et du nombre  $N$  de période de temps à considérer dans le calcul. Ce dernier nombre  $N$  détermine le pas du temps.

Seulement, ce pas du temps est conditionné par la consistance et la stabilité du schéma.

Etant donné que le schéma est explicite, il va falloir étudier la convergence de la solution du schéma numérique vers celle théorique correspondante à l'équation de Garman (1976). Pour se faire, la consistance du schéma a été

élaborée, en déterminant l'erreur de troncature, en exprimant les dérivées de la valeur de l'option, par rapport au temps, en fonction de ses dérivées, par rapport aux variables d'états. Cette étude de la consistance a révélé que le schéma est au maximum de sa consistance pour des pas du maillage tel que :

$$\frac{\Delta S}{S} = \Delta \text{Ln}(S) = \sigma \sqrt{3\Delta t} \quad \text{et} \quad \Delta \sigma = q \sqrt{3\Delta t}, \quad \text{où } S \text{ est le prix du sous-jacent, } \sigma$$

est sa volatilité,  $q$  est la volatilité de sa volatilité et  $\Delta t$  est le pas de temps.

L'étude de la stabilité du schéma est assez lourde. Elle a été menée sur un plan théorique jusqu'à une condition sur le pas du temps, qui découle d'une condition sur le gain  $G$  du schéma (fonction de deux paramètres  $\theta$  et  $\beta$ ) qui doit être inférieur à l'unité. Cette condition sur le gain  $G$  s'écrit :

$$G = \text{Max}(G_1(\theta_{\text{Max}}, \beta, \Delta t); G_2(\theta_{\text{min}}, \beta, \Delta t)) < 1$$

Si le paramètre  $\theta_{\text{min}}$  est égal au taux d'intérêt sans risque  $r$ , le paramètre  $\theta_{\text{Max}}$  est fonction du taux sans risque, des deux valeurs maximales et des pas des deux variables d'états avec en plus la volatilité de la volatilité. Le paramètre  $\beta_{\text{Max}}$  est fonction des drifts risque-neutre et des pas des deux variables d'états, en plus de la valeur maximale du prix du sous-jacent.

Partant de cette condition théorique, deux études de stabilité numériques ont été menées. La première, commence par la détermination des pas des deux variables d'états, à partir de leurs valeurs maximales à l'échéance, déterminées avec un risque de 1%. Les gains  $G_1$  et  $G_2$  sont, ensuite, calculés pour la base journalière. On a noté que, quel que soit le pas du temps, ils sont supérieurs à l'unité, ce qui a permis de conclure l'instabilité du schéma dans ce cas. Pour un nombre de période variant entre 2 et 7, la valeur de l'option calculée par le schéma explicite oscille autour de la valeur de l'option sur le marché avant de diverger vers des valeurs énormes en valeur absolue, à partir d'un nombre de période égal à 8.

La deuxième étude numérique de la stabilité a été menée, en considérant les pas des variables d'états, précisés ci-haut qui donnent la meilleure consistance du schéma numérique. Cette étude a révélé que si le gain  $G1$  est bien inférieur à l'unité, le gain  $G2$  est égal, quasiment, à l'unité, ce qui permet de conclure que le schéma est stable, mais, à la limite de l'instabilité. D'après le théorème de Lax, un schéma consistant et stable est nécessairement convergent. Le schéma, dans un second cas, est, donc, convergent, mais sa convergence doit être infiniment lente, dans la mesure où le gain est quasiment égal à l'unité.

Ces résultats d'instabilité du schéma ou de sa convergence trop lente nous ont amené à chercher un algorithme inconditionnellement stable, en l'occurrence l'algorithme Hopscotch (Gourlay, 1970). C'est un algorithme qui alterne entre un calcul implicite et un calcul explicite, à chaque fois, qu'on remonte le temps d'un pas. Chaque grille, dans l'espace engendré par les deux variables d'état, est divisée en deux ensembles : un ensemble de points représentés par des cercles noirs qui sont tels que la somme de l'indice de la volatilité et l'indice du prix du sous-jacent, est un entier naturel pair. Les autres points du maillage sont tels que la somme précitée est impaire. Pour, une période du temps donnée, on applique le schéma implicite sur les points, en cercles en noirs, et la méthode explicite sur les points, en carré blanc. Dans le pas suivant, on inverse le rôle des points en cercles noirs avec celui des points en carré blanc. L'algorithme Hopscotch, suppose la nullité des termes des dérivées croisées, dans l'équation de Garman (1976). Cet algorithme donnerait de meilleurs résultats lorsque les paramètres liés à la dynamique de la volatilité sont estimés à partir de l'ensemble des données de la base, aussi bien journalière que intraday, pour la simple raison que dans ces cas que les coefficients de corrélation sont nuls, ce qui implique que les termes des dérivées croisées sont aussi nuls.

Cependant, lorsque le coefficient de corrélation est non nul, on étudie le changement de variable qui élimine ces termes de dérivées croisées dans l'équation de Garman(1976), et qui engendre des transformations qui

concernent le domaine de définition des variables et les conditions aux limites. Ceci est le cas quand on estime les paramètres liés à la dynamique de la volatilité à partir des contrats.

La convergence de l'algorithme de Hopscotch, ainsi implémenté n'est pas nette, puisqu'on n'a pas observé une valeur asymptotique quand le nombre de périodes devient grand. Pour des pas, des variables d'états, donnés, dans un intervalle du nombre de périodes  $N$ , on a observé une forme de la valeur de l'option, sous forme de plateau. En dehors de cet intervalle, la valeur de l'option diverge, brusquement, vers des valeurs gigantesques.

On a constaté, qu'en faisant des simulations qui consistent à faire varier les pas des variables d'état, ainsi que le nombre de période  $N$ , on obtient des courbes en dents de scies qui admettent des valeurs minimales proches. Etant donné que la solution du schéma devrait être indépendante des pas du maillage, ceci nous a amené à conclure d'une manière inductive que les valeurs minimales de l'option correspondent à des quasi-points fixes qui, vraisemblablement, correspondent aux valeurs recherchées des options.

Dans un premier temps, on a essayé de calibrer le modèle sur une observation et de garder les pas de maillage trouvés pour les calculs des valeurs de l'option relatives aux autres observations. Cependant, nous avons constaté qu'il y'avait des sauts anormaux, ce qui nous a amené à calibrer le modèle, observation par observation.

Ceci nous a conduit à un algorithme qui cherche le minimum de la valeur de l'option, calculée par l'algorithme de Hopscotch, sur une plage des pas des variables d'états choisies, d'une manière adéquate. La plage, des pas de la volatilité et du prix du sous-jacent, doit être choisie de manière à ce qu'elle soit commune à l'ensemble des observations.

Pour le calcul de ce minimum, une astuce a été trouvée qui permet de gagner énormément sur le temps CPU. L'algorithme de Hopscotch conjugué avec ce programme de recherche de minimum a été implémenté et a donné des résultats encourageants, dans la mesure où les valeurs des options calculées sont très fortement corrélées avec les valeurs de l'option sur le marché.

Ce programme implémenté a été testé sur le modèle de Black & Scholes, en considérant le drift risque-neutre et la volatilité de la volatilité, comme nuls. Le programme a été validé avec ce test. La valeur de l'option, donnée par le programme converge vers celle de Black & Scholes, au fur et à mesure, que le nombre de périodes augmente. Si un léger écart persiste ça devrait être à cause du fait que les domaines des variables d'états sont ramenés, de limites infinies à des limites finies.

Cinq modèles à volatilité stochastique sont à envisager, selon que la volatilité considérée est implicite ou historique, selon que le processus est Brownien ou empirique et selon que la dynamique de la volatilité est déterminée à l'échelle d'un contrat ou sur l'ensemble de la base.

A noter que pour le processus d'Ornstein Uhlenbeck, il n'y a pas eu une zone de convergence de la valeur de l'option. Pour cette raison, ce processus n'a pas été considéré dans cette modélisation.

Les résultats de cette partie de la thèse sont à interpréter, en faisant le parallèle avec les séries des déterminants de l'option et la série de la valeur de l'option sur le marché. En représentant les courbes des différences des valeurs de l'option, données par les différents modèles à volatilité stochastique, et la valeur du marché, on peut comparer les modèles entre eux et avec la référence du marché. Le coefficient de corrélation de ces valeurs, avec celle du marché, est un indicateur qui permet, également, la comparaison de ces modèles avec la

référence du marché. Ces calculs appliqués aussi bien sur les données de la base journalière que la base intraday.

Bien entendu, ces résultats sont fondés sur le raisonnement inductif précité. Ils doivent être comparés à ceux d'autres méthodes de calcul, comme la résolution de l'équation de Garman (1976) par la méthode des éléments finis, où en adoptant un raisonnement risque neutre qui en le conjuguant avec les simulations de Monte Carlo, on obtient la solution du problème avec autant de précision qu'on le souhaite, moyennant un temps CPU fonction de cette précision.

A cet effet, c'est la simulation de Monte Carlo qui est adoptée pour donner une deuxième dimension aux calculs. Cette technique, basée sur un raisonnement risque-neutre, permet de simuler la trajectoire de la volatilité et de celle du prix du sous-jacent, en générant des lois normales centrées et réduites, à partir de lois uniformes sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ , générée elle-même par l'ordinateur. Cette génération des lois normales doit se faire, suivant une forme, qui consomme le moins de temps CPU, notamment en évitant de faire recours aux fonctions usuelles qui sont calculées, suivant des développements limités, consommateurs de temps CPU.

L'algorithme, une fois implémenté, a été testé sur le modèle de Black & Scholes, en considérant le drift risque neutre et la volatilité de la volatilité comme nuls.

Le nombre de période de temps et le nombre de simulations, à considérer dans le programme sont déterminés, suivant un compromis entre la précision de l'algorithme et sa rapidité de convergence vers la solution.

L'algorithme est appliqué sur les contrats de la base journalière et les contrats de la base intraday, en considérant les trois processus de la volatilité implicite,

choisis dans le cadre de ce travail. En considérant deux valeurs du coefficient de corrélation, on peut étudier l'influence de ce paramètre sur la valeur de l'option.

Les résultats, donnés par l'algorithme de simulation de Monte Carlo, relatifs aux différents contrats sont à comparer entre eux et avec la référence qui est le marché. La volatilité implicite a été calculée, en considérant des diviseurs, de la durée de vie résiduelle de l'option, différents, selon qu'il s'agisse du taux d'intérêt ou de la volatilité. Ainsi, la référence du marché est donnée, par le modèle de Black & Scholes, en considérant le même diviseur de la durée de vie résiduelle de l'option, à savoir 250. Cette référence est désignée par CBS(T1).

Les résultats de l'algorithme de simulation de Monte Carlo sont à comparer, également, avec les résultats générés par l'algorithme Hopscotch et sont à mettre en parallèle avec les conclusions de Hull&White (1987), Wiggins (1987), Stein & Stein (1991) et Heston(1993).

En ce qui concerne le modèle à volatilité stochastique, l'originalité du présent travail par rapport à l'existant se situe au niveau des données utilisées pour mener l'étude empirique. Elle se situe, également, au niveau des hypothèses adoptées pour résoudre le problème, ainsi que la technique utilisée pour résoudre un tel problème.

Hormis Wiggins (1987), tous les autres auteurs ont utilisé des données de panel. Une première originalité de ce travail est, justement, d'avoir utilisé deux bases de données relatives à des contrats d'options sur l'indice CAC40. La première est une base intraday (observations du 2/01/1998 au 30/06/1998) et la deuxième est une base journalière (observations du 2/01/1997 au 30/12/1999).

Dans ce sens, Hull & White, Heston et Stein & Stein n'ont pas estimé les paramètres empiriquement. Ils se sont contentés de faire des simulations sur des valeurs des paramètres fixées, arbitrairement, alors que dans le cadre de notre

travail, les paramètres ont été estimés, à partir de données, qui sont tirées de la réalité du marché des options MONEP.

Dans les travaux existants, les auteurs ont utilisé, uniquement, la volatilité implicite par inversion de la formule de Black & Scholes et en considérant comme valeur de l'option celle du marché. Justement, une deuxième originalité de notre travail est d'avoir considéré, aussi bien la volatilité implicite que la volatilité historique

Les auteurs n'ont pas utilisé les mêmes processus de la volatilité. Ceux qui ont trouvé des « closed form solution », comme Heston et Stein & Stein, leurs solutions ne prennent forme que pour une dynamique bien particulière de la volatilité qui présente, plus de commodité, pour les calculs, que de conformité à la réalité. Une véritable « closed form solution » doit donner la priorité à la conformité à la réalité plus que la commodité des calculs.

Une troisième originalité est d'avoir utilisé trois dynamiques différentes de la volatilité à savoir : le mouvement Brownien, le processus baptisé « empirique » et le processus d'Ornstein Uhlenbeck, qui couvrent les propriétés essentielles des processus stochastiques, comme le retour à la moyenne et la stationnarité. Les paramètres des ces trois processus ont été déterminés, empiriquement, à partir des données réelles soit à partir de l'ensemble des données historiques de l'ensemble de la base, soit à partir des données historiques relatives à un contrat donné.

Dans les travaux antérieurs il n'y a que Wiggins(1987) et Heston(1993) qui ont considéré le cas le plus général où le coefficient de corrélation est non nul. Dans notre approche, nous avons utilisé le cas le plus général, où le coefficient de corrélation est non nul. Cependant, ce coefficient a été estimé, empiriquement, et a donné des valeurs quasi nulles.



Dans leurs approches, Hull & White et Stein & Stein, ont considéré que le prix du marché du risque lié à la volatilité est nul. Même Wiggins (1987), bien qu'il ait développé un modèle théorique pour la détermination d'un tel paramètre, dans son travail empirique, il a considéré des hypothèses équivalentes à la nullité d'un tel paramètre. Heston a considéré que ce paramètre est proportionnel au carré de la volatilité.

Une quatrième originalité de notre travail est d'avoir considéré, à ce niveau, que le drift risque neutre de la volatilité comme constant, et que la réalité du marché correspond à un monde risque-neutre. Ainsi, on a estimé, tout simplement, le drift risque-neutre de la volatilité, par sa moyenne sur la durée de vie résiduelle de l'option, en supposant que les valeurs de l'option sur le marché correspondent à un monde risque neutre. Même si le drift risque neutre n'est pas considéré constant dans le temps, cette estimation constitue une bonne approximation de ce paramètre dans la mesure où elle est basée sur la réalité du marché. C'est, équivalent, de supposer qu'on soit dans un monde réel (non risque neutre) et que le prix du marché du risque lié à la volatilité est nul. D'ailleurs la valeur, du drift réel de la volatilité, calculé, dans le cas de la base journalière, égalise le taux d'intérêt sans risque, à croire que la volatilité est un actif négociable. Ce résultat nous reconforte dans l'adoption de l'hypothèse en question, à ce niveau de la modélisation. Cette hypothèse est moins forte que celle qui consiste à dire que la volatilité est un actif négociable.

Au niveau de la technique de résolution, Wiggins a fait appel à des calculs, exclusivement, numériques, en résolvant l'équation de Garman (1976), par l'algorithme de Hopscotch. Hull & White ont élaboré une solution analytique sous forme de série qui suppose que le prix du sous-jacent et la volatilité sont non corrélés. Ils ont fait appel à la simulation de Monte Carlo dans leur étude empirique, en générant dans un premier temps, uniquement, la variable d'état volatilité puis dans un second temps les deux variables d'état.

Stein & Stein et Heston ont élaboré des « closed form solution » qui font, quand même, appel à un calcul numérique d'une intégrale. (Raisonnement risqué-neutre)

Une cinquième originalité, de notre travail, est d'avoir comparé l'approche de résolution numérique de l'équation de Garman (1976) et l'approche de la résolution de ce problème par les simulations de Monte Carlo, dans sa forme la plus générale et en s'appuyant sur des données réelles.

Dans ce cadre de la résolution numérique, une étude détaillée de la consistance et de la stabilité du schéma numérique, ont été menées. Tous les algorithmes de résolution ont été implémentés, dans le cadre de ce travail.

Au cours de ce travail, pour avoir les meilleures performances, plusieurs questions se posent : Quel processus de la volatilité faut-il considérer pour avoir les meilleurs résultats ? Est-ce que les résultats basés sur les données de la base intraday sont meilleurs que ceux basés sur les données de la base journalière ?

En ce qui concerne les données, il s'agit, dans un premier temps, de déterminer la volatilité historique, relative à chaque observation des bases de données utilisées. Puis, en se basant sur cette volatilité, on calcule la valeur des différentes options sur CAC40, selon le modèle de Black & Scholes, en appliquant la formule correspondante. Ensuite, on calcule la volatilité implicite en inversant cette formule et en considérant la valeur du marché. Dans un second temps, le modèle à volatilité stochastique sera appliqué aux données de la base en résolvant, numériquement, l'équation différentielle correspondante. Enfin, un modèle neuronal permet d'approcher avec la meilleure précision la fonction qui lie la valeur d'une option à ses déterminants, sous la contrainte d'une bonne généralisation de ce modèle neuronal.

La recherche, dans le sens de la première voie évoquée, a comme but de trouver un modèle paramétrique qui repose sur des hypothèses les plus réalistes

possibles, et qui soit le plus simple et le rapide possible au niveau de l'utilisation. Par ailleurs, faute d'hypothèses réalistes, et étant donné que les praticiens ont besoin d'appréhender la logique de la cotation des options sur le marché, les modèles non paramétriques, qui constituent la deuxième voie de recherche, dans le cadre du présent travail, peuvent s'avérer très utiles et très complémentaires des modèles paramétriques.

Grâce à sa propriété d'approximateur universel parcimonieux de fonction, de sa capacité à résoudre des problèmes non linéaires avec une grande capacité de flexibilité et d'adaptabilité, les réseaux de neurones constituent un choix judicieux à ce niveau.

Un réseau de neurones est constitué par un certain nombre de neurones interconnectés. Chaque neurone peut recevoir plusieurs signaux intrant des autres neurones, les agrège en se basant sur une fonction d'entrée et génère enfin un signal sortant basé sur une fonction de sortie appelée fonction d'activation. Le signal sortant alimentera ensuite d'autres neurones suivant la typologie du réseau. La valeur numérique d'un poids synaptique, relatif à une connexion entre deux nœuds, reflète l'ampleur de l'influence d'un neurone sur l'autre neurone et le sens de cette influence. La résolution d'un problème neuronal revient à déterminer les poids relatifs aux connexions.

Dans sa forme typique, un réseau de neurones est composé de trois types de couches : une couche d'input, une couche d'output et des couches cachées. Les neurones de la couche d'input reçoivent les signaux de l'environnement, les neurones de la couche d'output émettent des signaux à l'environnement. Néanmoins, les neurones des couches cachées n'ont aucune interaction directe avec l'environnement, d'où leur appellation. Les connexions entre les couches se font dans une seule direction, de la couche d'input vers la couche d'output. Chaque couche est formée au moins d'un neurone.

En effet, choisir un réseau de neurone revient à sélectionner une architecture de réseau et par conséquent sélectionner la manière dont les neurones sont structurés et connectés, ainsi que le type d'algorithme d'apprentissage à utiliser.

Trois éléments sont, donc, particulièrement, importants, quelque soit le réseau de neurones :

- la structure des neurones
- la topologie du réseau (terme emprunté à la théorie des graphes)
- l'algorithme d'apprentissage qui permet de trouver les poids synaptiques du réseau

Les réseaux multicouches feedforward "multilayer feedforward networks" représentent une classe importante des réseaux de neurones. Pour un tel type de réseau, au sein d'une couche, chaque neurone agit, indépendamment, des autres, et, en particulier, il ne reçoit aucune connexion en provenance des neurones de cette couche.

Les réseaux de neurones possèdent une propriété qui est à l'origine de leur intérêt pratique dans des domaines très divers : ils sont des approximateurs universels parcimonieux. Cette expression traduit deux propriétés distinctes : d'une part, les réseaux de neurones sont des approximateurs universels, et d'autre part, une approximation à l'aide d'un réseau de neurones nécessite moins de paramètres ajustables qu'une approximation usuelle (développement de Taylor, série de fourrier,...)

Parmi les réseaux de neurones qui possèdent la propriété d'approximateur universelle de fonction, on trouve le Perceptron multicouche ( Multilayer Perceptron (MLP)) et le Radial Basis Function (RBF). Cependant, pour traiter des problèmes multidimensionnels, les RBF nécessite un nombre de cellule de type RBF ( et donc un nombre de paramètres) bien plus important que le nombre de cellules d'un MLP utilisant des fonctions sigmoïdes (Weigend,

Huberman et Rumelhart, 1990). C'est ce qui fait, en pratique, que la plupart des applications des réseaux de neurones en finance ont utilisé des MLP. C'est, particulièrement, le cas des applications relatives à l'évaluation des options par les réseaux de neurones.

Dans la mesure où ils ne reposent pas sur des hypothèses notamment sur la dynamique du sous-jacent, les réseaux de neurones sont, à ce niveau un outil très pratique et très puissant à condition de prendre des précautions, au niveau de leur utilisation. Il faut, ainsi, éviter les problèmes liés aux minima locaux et au surapprentissage.

Afin de doter les réseaux de neurones d'un bon pouvoir prédictif, et dans le but d'éviter le sur-apprentissage, les réseaux de neurones sont soumis à une contrainte de bonne généralisation, en appliquant la technique du « cross-validation » à l'apprentissage. La contrainte de bonne généralisation est primordiale, même, si elle détériore les performances du réseau, au niveau de l'apprentissage. Bien entendu, cette contrainte de bonne généralisation ne se pose pas pour les modèles paramétriques qui reposent sur des hypothèses supposées vraies dans le passé comme dans l'avenir. A titre d'exemple, si on suppose que le prix du sous-jacent suit un processus Brownien géométrique, c'est supposé, aussi vrai, dans le passé que dans l'avenir.

Dans l'évaluation des options par les réseaux de neurones plusieurs auteurs ont traité le sujet. On peut citer Malliaris & Salchenberger (1993), Hutchinson, Lo and Poggio (1994) et Garcia & Gençay (2000).

Malliaris & Salchenberger (1993) ont développé un modèle neuronal pour estimer le prix du marché de l'option sur l'indice S&P 100 à la fermeture pour la période du 1/01/1990 au 30/06/1990. Les performances du modèle neuronal a été comparées à celles du modèle de Black & Scholes (1973). Elles ont utilisé des perceptrons, à une seule couche cachée, associés à l'algorithme de

rétropropagation du gradient, comme algorithme d'apprentissage, et la fonction sigmoïde, comme fonction d'activation de tous les neurones du réseau. L'architecture considérée comporte 7 nœuds d'inputs, 4 nœuds cachés et 1 nœud d'output. Les inputs sont constitués, d'une part, des 5 déterminants de la valeur d'une option utilisés dans le modèle de Black & Scholes et, d'autre part, du prix du sous-jacent et du prix de l'option de la dernière séance de bourse. Le nœud d'output représente le prix de l'option correspondant à la séance de bourse considérée. Selon plusieurs critères de précision et, notamment, le critère de l'erreur quadratique moyenne les résultats suggèrent que la méthode des réseaux de neurones offre une alternative du modèle de Black & Scholes (1973) pour l'estimation du prix d'une option.

Hutchinson, Lo and Poggio (1994) ont, également, proposé une méthode non-paramétrique pour déterminer la valeur d'une option en utilisant les réseaux de neurones. Leurs résultats ont montré que les réseaux de neurones peuvent être utilisés avec succès. Pour estimer les performances de leurs modèles, ils ont utilisé des réseaux, selon trois techniques : fonctions radiales de base (RBF), perceptron multicouches (MLP) et "projection pursuit regression : (PPR)" avec une seule couche cachée. Ils ont pris comme input la parité (moneyness) et la maturité de l'option et comme output le prix de l'option. En ce qui concerne les perceptrons multicouches, quatre couches cachées ont été utilisées pour tous les réseaux de neurone. Ils se sont basés sur les valeurs de clôture de contrats à terme sur l'indice S&P 500 et des valeurs des options sur les contrats à terme sur l'indice précité pour la période de 5 ans de janvier 1987 à décembre 1991. Selon les critères de performance de l'évaluation de l'option et de la couverture, leurs résultats ont montré que les modèles neuronaux reproduisent le modèle de Black & Scholes, aussi bien, au niveau de l'évaluation des options, qu'au niveau de la couverture.

Garcia & Gençay (2000) ont mené une étude semblable à celle de Hutchinson & al.(1994). Ils se sont basés sur la valeur d'option européenne sur l'indice

S&P 500 de la période de janvier 1987 à octobre 1994. Ils ont considéré une seule couche cachée et la fonction sigmoïde comme fonction d'activation des neurones du réseau, à l'instar de Hutchison et al. (1994) et Garçia et al. (2000). Ils ont limité le nombre d'input à deux : la parité et la maturité. Leurs résultats ont permis de confirmer les conclusions de Hutchinson et al. (1994).

Au niveau du modèle neuronal, la première originalité de ce travail par rapport aux travaux existants est que la comparaison des performances du modèle neuronal se fait, par rapport à deux types de modèles paramétriques, à savoir le modèle de Black & Scholes et les modèles à volatilité stochastique. Sa seconde originalité tient au fait d'avoir utilisé deux bases de données une journalière et une intraday.

Sa troisième originalité tient au découpage des données, aussi bien, par contrats, que par classes de "moneyness" et de temps à l'échéance. La quatrième originalité est d'avoir considéré, aussi bien, la volatilité implicite que la volatilité historique, ainsi que l'absence de volatilité. Ce choix a donné six modèles-types, basés sur les réseaux de neurones. La cinquième originalité est l'utilisation de l'algorithme "cascade correlation" pour l'apprentissage, au lieu de l'algorithme de rétro-propagation du gradient. Enfin, la dernière originalité au niveau du modèle neuronal est d'avoir considéré pour le fichier d'apprentissage d'un contrat, différents fichiers de test, ce qui donne une matrice des performances d'apprentissage test, pour chaque classe de contrats.

Au niveau de l'évaluation des options, la comparaison des modèles neuronaux avec les modèles à volatilité stochastique est justifiée par le fait que la volatilité est le point le plus délicat dans l'établissement du prix d'une option et que l'hypothèse de constance de la volatilité constitue le plus grand reproche qu'on peut faire au modèle de Black & Scholes.

Dans les modèles d'évaluation des options, par les réseaux de neurones, relatives aux deux bases de données « intraday » et journalière on a considéré l'algorithme « cascade correlation ». En fait, un problème important mais difficile dans la modélisation par les réseaux de neurones, est la sélection du nombre de couches cachées et des nombres des neurones par couche cachée. L'algorithme « cascade-correlation » proposé par Fahlman and Lebiere résout ce problème par intégration de nouveaux neurones selon l'erreur d'approximation résiduelle. Cet algorithme a permis de trouver l'architecture adéquate et de réduire le temps nécessaire pour une telle tâche.

L'algorithme « cascade correlation » a des avantages, par rapport aux algorithmes d'apprentissage existants, dans la mesure, où il apprend très rapidement, qu'il détermine sa taille et sa topologie propre et ne nécessite pas une rétro-propagation du signal d'erreur, à travers les connexions du réseau.

Après avoir précisé les inputs à considérer et les traitements des données, on a défini 6 modèles-types. La série relative à la valeur de l'option n'étant pas stationnaire, on considère la série relative à la dérivée de son logarithme. Cette dernière série est transformée en une autre série  $C''$  dont les valeurs sont comprises entre 0.1 et 0.9, ce qui correspond aux valeurs d'une fonction sigmoïde, en dehors de ses asymptotes.

Pour la base intraday, on définit des matrices d'apprentissage test pour chacune des classes 1 et 9 en considérant les différents modèles type. De même on définit une matrice d'apprentissage pour chacune des deux classes 2 et 5 caractérisées par la « moneyness » et le temps à l'échéance. Pour ces matrices d'apprentissage une ligne correspond à un contrat ou à une sous-classe qui joue le rôle d'un jeu d'apprentissage, alors qu'une colonne correspond à un jeu de test.



Le meilleur modèle, correspondant à une case de la matrice, se détermine, selon 5 critères, qui sont les pourcentages de bon classement d'apprentissage et de test, les erreurs d'apprentissage et de test et enfin la minimalité de l'architecture du réseau de neurone.

Après avoir déterminé, les matrices d'apprentissage - test, relatives aux différents modèles-types, en considérant les 5 critères précités, on en conclue que les meilleures performances sont relatives au modèle-type 5 caractérisé par ses inputs qui sont : la moneyness, la durée de vie résiduelle, la volatilité historique, la volatilité implicite de l'instant précédent et par son output relatif à la série C".

Pour chaque case de la matrice d'apprentissage - test, relative au modèle type 5, on détermine les poids synaptiques, relatifs aux meilleurs modèles, et on détermine la série C" calculée par le réseau. Puis, on détermine, par la transformation inverse, la valeur de l'option calculée par ces modèles. Autant, pour les contrats, on trouve des résultats acceptables, autant pour le découpage par « moneyness » et temps à l'échéance, on trouve que cette transformation inverse qui calcule la valeur de l'option à partir de C", diverge.

On procède de même pour les contrats de la base journalière, en considérant le modèle type 5 et en comparant C" avec la série dérivée de la valeur de l'option elle-même rapportée au prix d'exercice. Il se trouve que la série C" est préférée à la deuxième série. Autant les résultats peuvent être obtenus avec n'importe quelle précision souhaitée, autant la contrainte d'une bonne généralisation limite cette précision. Autrement dit, il n'y a aucun intérêt à modéliser le passé avec le plus de précision et perdre le pouvoir prédictif du modèle.

Pour cette section, les résultats sont présentés, au fur et à mesure, de l'exposition de la méthodologie correspondante.

Un test complet d'un modèle d'évaluation doit tenir compte, non seulement, de la manière dont les prix générés, par ce modèle, sont en conformité avec les prix observés sur le marché, mais, également, à la capacité de ce modèle de couvrir contre les variations des variables d'état. Les performances des modèles, au niveau de l'évaluation, ne sont pas suffisantes pour juger de la qualité d'un modèle. Autrement dit, la performance au niveau de l'évaluation n'implique pas, forcément, la performance au niveau de la couverture, d'où la nécessité d'étudier les performances de couverture d'un modèle, d'évaluation d'option, donné.

Plusieurs stratégies s'offrent à l'investisseur, institutionnel ou particulier, qui détient un portefeuille constitué d'actions et d'options. La plus simple et la plus connue est la stratégie statique. Celle-ci consiste à prendre une position donnée et attendre le résultat enfin de période. Donc, quel que soit le motif suivi par l'opérateur (couverture, spéculation, arbitrage), cette stratégie dépend, étroitement, de l'horizon que ce dernier s'est fixé. Ainsi, dans le cadre d'une stratégie de couverture statique, l'investisseur ne procède pas à des révisions de la composition de son portefeuille, entre le début et la fin de la période de gestion, au fur et mesure, que les cours boursiers changent. Il lui importe, seulement, la valeur du portefeuille à l'échéance.

Ce type de couverture ne représente qu'une protection partielle puisqu'elle suppose, que le ratio de couverture (delta) reste constant durant l'horizon de couverture. Or, ce dernier a tendance à changer, en fonction des mouvements des variables d'états, qu'ils soient à la hausse comme à la baisse.

L'alternative consiste, donc, à procéder à une révision continue du portefeuille global. Il s'agit bien de la stratégie de couverture dynamique. La nécessité de recourir à cette stratégie provient de la non linéarité de la valeur réelle des options et, donc, du besoin de recalculer le ratio de couverture en fonction de l'évolution des cours boursiers.

À l'encontre de la stratégie statique, l'investisseur, suivant une stratégie dynamique, s'intéresse à la valeur de son portefeuille à chaque instant. Pour maintenir cette dernière inchangée, quels que soient les risques subis, l'investisseur doit gérer, en permanence, l'ensemble de son portefeuille. En fait, il recourt à des stratégies de couverture sophistiquées comme la stratégie delta-neutre, la stratégie gamma-neutre et la stratégie véga-neutre ou la stratégie delta-gamma-véga neutre. Comme, dans la pratique, il est impossible de couvrir un portefeuille d'option d'une manière continue dans le temps (coûts très élevés), ce type de couverture suppose une fréquence de réajustement, où le portefeuille sera révisé, à chaque fin de période correspondante. Plus cette fréquence de réajustement est grande, meilleure est la performance de la couverture du portefeuille.

L'objectif de la partie empirique relative à cette partie du travail est d'étudier les performances des modèles d'évaluation d'options, considérés jusqu'ici, à savoir le modèle de Black & Scholes, les modèles neuronaux et les modèles à volatilité stochastique (avec simulation de Monte Carlo). Cette étude sera faite suivant les quatre stratégies dynamiques autofinancées précitées. Une stratégie autofinancée est, telle que, les produits des ventes d'actifs, appartenant au portefeuille géré, servent à couvrir les achats d'autres actifs de ce même portefeuille.

Deux questions peuvent se poser, à ce niveau :

- Quel est, parmi les modèles étudiés, le meilleur modèle de couverture pour une stratégie dynamique autofinancée donnée ?
- Quelle est, parmi les quatre stratégies de couverture dynamiques autofinancées étudiées, celle qui donne les meilleures performances pour un modèle donné ?

La réponse à ces deux dernières questions suppose la réponse aux deux questions suivantes : Quelle dynamique de la volatilité faut-il adopter pour les modèles à volatilité stochastique et quelle architecture de réseau faut-il considérer pour les modèles neuronaux ?

Ainsi, une fois les résultats des différents modèles d'évaluation sont générés, on étudie les performances dynamiques de ces modèles, à travers la gestion des risques financiers par les options, en considérant des stratégies dynamiques de couverture autofinancées précitées.

Le critère de performance de la couverture étant l'erreur de couverture, l'objectif de ce travail est, donc, de déterminer les erreurs de couverture de ces différentes stratégies, relatives aux différents modèles précités.

En se basant sur les données des contrats de la base intraday (classe 1 et classe 9), en considérant la volatilité implicite relative au modèle de Black & Scholes, on a travaillé sur les fichiers d'apprentissage correspondant à la meilleure combinaison apprentissage test, en terme de performance des modèles neuronaux. On a considéré, comme période de couverture, celle commune aux contrats, qui rentrent dans une stratégie de couverture donnée. On a supposé une fréquence de réajustement journalière, c-à-d que le portefeuille est révisé chaque jour.

Ce travail empirique commence par l'estimation des greeks, pour tous les fichiers, en se basant sur les différents modèles de couverture. Ces greeks sont les déterminants des proportions du portefeuille de couverture, relatif à une stratégie donnée. En focalisant notre étude sur les contrats de la classe 9, nous générons, à partir de ces proportions l'endettement, l'erreur de couverture à la fin de la période de couverture et enfin l'erreur de couverture absolue moyenne relative qui permet de comparer les performances des différents modèles possibles, pour une stratégie donnée.

Si, pour le modèle de Black & Scholes, les formules de calcul des greeks sont exactes et ne posent pas de problème, ceci n'est pas le cas, pour les modèles neuronaux et les modèles à volatilité stochastique, où le calcul des greeks se fait suivant un calcul numérique approché. Dans le cas des modèles à volatilité stochastique, ceci suppose de refaire la simulation de Monte Carlo, autant que nécessaire, en faisant varier légèrement la variable d'état correspondante au greek à calculer. Ceci nécessite un temps de calcul CPU à multiplier par trois voire par quatre.

Une stratégie de couverture dynamique donnée nécessite une option de base et, éventuellement, des options additionnelles. Seule la stratégie delta-neutre ne nécessite pas d'options additionnelles.

En fonction de la stratégie de la stratégie étudiée, les séries des proportions du portefeuille, dans l'option de base et les options additionnelles, sont déterminées, en fonction des séries des greeks correspondantes à ces options.

En se basant sur l'approche de Coleman & al. (1999), on détermine la série de l'endettement et la série de l'erreur de couverture du portefeuille d'options considéré. Cette série d'erreur de couverture constitue un premier critère de performance de la couverture du portefeuille en question.

La valeur de cette erreur, à la fin de la période de couverture, rapportée à la fréquence d'ajustement et à la valeur initiale de l'option de base donne l'erreur absolue moyenne relative, qui constitue un deuxième critère de couverture du portefeuille d'option.

Cette méthodologie, basée sur les données précitées, donne des résultats qui permettront de comparer entre les différents modèles utilisés, pour une stratégie donnée, et de comparer entre les différentes stratégies, pour un modèle donné.

A ce niveau, une des originalités de notre travail est d'avoir considéré quatre stratégies de couvertures dynamiques autofinancées, à l'inverse des travaux existants précités. En effet, la totalité des travaux existant se rapportant aux modèles neuronaux ont traité, uniquement, la couverture delta-neutre, et ceux qui se rapportent aux modèles à volatilité stochastique n'ont pas traité du tout la couverture des risques financiers par les options.

Cette thèse comporte cinq chapitres :

Un chapitre préliminaire, divisé en trois sections, est consacré à l'analyse des fondements de la détermination de la valeur d'une option. La première section est consacrée à des généralités sur les options, aux déterminants de sa valeur, ainsi qu'à ses limites d'arbitrage. Elle est, également, consacrée, d'une part, aux fondements des hypothèses, relatives au marché, sur lesquels reposent les modèles d'évaluation des options. Cette première section traite, aussi, les conditions aux limites, liées à l'évaluation d'une option, ainsi qu'à la relation de parité call-put. La deuxième section est réservée aux différents fondements du calcul stochastique. De la définition de la propriété de Markov, jusqu'à l'élaboration de l'équation de Fokker-Planck relative à une variable d'état, en passant par les propriétés des processus stochastiques, utilisés dans le présent travail, le lemme d'Itô, dans le cas général, et par l'évaluation avec un raisonnement risque-neutre. L'équation de Fokker-Planck est appliquée au processus empirique, au processus d'Ornstein Uhlenbeck et au mouvement, pour étudier leurs propriétés à long terme. Cette deuxième section se termine par l'élaboration de l'équation générale d'évaluation d'une option (Garman, 1976), dans le cas, où la valeur de celle-ci dépend de  $n$  variables d'état.

La troisième section du chapitre préliminaire est consacrée à la définition d'un indice boursier et d'un tracker et traite les différents risques spécifiques à une option sur indice boursier. Elle se termine par l'élaboration du processus suivi par un indice boursier, compte tenu des processus des actions le composant.

La deuxième partie de cette section est réservée à la présentation des deux bases de données utilisées dans la partie empirique : Une base « intraday » et une base journalière, relatives à des contrats d'options sur l'indice CAC40. Elles sont considérées, aussi bien l'une que l'autre, pour l'évaluation des options avec le modèle de Black & Scholes, le modèle neuronal et le modèle à volatilité stochastique. La base « intraday » permet, également, d'étudier empiriquement la gestion des risques par les options avec les deux premiers modèles, ainsi que le modèle à volatilité stochastique, en considérant différentes dynamiques de la volatilité. Bien entendu, ces études empiriques supposent, dans un premier temps, le calcul de certains paramètres, le traitement de la base et son découpage, selon les besoins imposés par le modèle neuronal.

Le chapitre 2 traite l'évaluation d'une option par le modèle de Black & Scholes. Il comporte deux parties : la première est destinée au modèle de Black & Scholes et la seconde est destinée au calcul de la volatilité, aussi bien dans sa forme implicite qu'historique.

Dans la première partie, on commence par présenter les hypothèses du modèle de Black & Scholes. Ensuite, l'équation de Black & Scholes est établie en se basant, dans un premier temps, sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et dans un second temps sur un raisonnement risque-neutre, appliquées d'une manière continue dans le temps.

Une fois l'équation de Black & Scholes est établie, on procède à sa résolution, en considérant des changements de variables adéquats qui la ramène sous la forme canonique de l'équation de la chaleur. Connaissant la solution de cette dernière équation, on procède aux changements de variables inverses à ceux précités pour trouver la formule de Black & Scholes.

Cette formule est retrouvée, également, par la suite, par un raisonnement risqué-neutre. Elle sera adaptée à l'option sur indice boursier dont l'évaluation fait l'objet du présent travail.

La deuxième partie de ce chapitre, consacrée à la volatilité, consiste à présenter les différentes méthodes de calcul de la volatilité implicite (en inversant la formule de Black & Scholes) et de la volatilité historique, aussi bien pour des données « intraday » que pour des données journalières. L'accent est mis sur la volatilité implicite, pour laquelle on dénombre 3 algorithmes de calcul. On présente, également, une méthode de calcul de la volatilité implicite, dans le cas où l'actif sous-jacent est un indice boursier.

En choisissant les algorithmes de calcul adéquats, on détermine, pour l'ensemble de deux bases (intraday et journalière), les séries de la volatilité implicite et historique. Ces séries mettent en évidence l'aspect stochastique de la volatilité qui est confirmé, également, par la courbe de « smile » de la volatilité, aussi bien historique qu'implicite.

Enfin l'accent est mis sur la courbe de "Smile" (courbe en U). En fait, d'après les hypothèses de Black & Scholes, si le temps à l'échéance, le prix du sous-jacent et le taux d'intérêt sans risque sont fixés, le prix de l'option rapporté au prix d'exercice doit donner une valeur constante de la volatilité implicite. Dans la pratique, ceci n'est pas le cas. A chaque prix d'exercice correspond un niveau spécifique de la volatilité qui prend une forme de « Smile ». Cette courbe ne peut être expliquée par le modèle de Black & Scholes.

En guise de conclusion, ce chapitre se termine par une critique du modèle de Black & Scholes, en insistant sur le caractère irréaliste des hypothèses sur lesquelles il se fonde et notamment la dynamique du prix de l'actif sous-jacent, qui est déterminante dans l'évaluation d'une option. La courbe de "Smile" qui ne peut être expliquée par le modèle de Black & Scholes constitue une limite,



qui incite à considérer la volatilité comme une variable stochastique, comme il a été suggéré par Wiggins (1987), Hull & White (1987), Scott (1987), Heston (1993) et Stein & Stein (1991).

Le chapitre 3 est consacré à l'évaluation d'une option, par les modèles à volatilité stochastique. Il comporte quatre sections.

Dans la première section, après avoir exposé les hypothèses du modèle à volatilité stochastique, pour l'évaluation d'un call européen, on établit l'équation différentielle à dérivées partielles du second ordre, ainsi que les conditions aux limites relatives à ce modèle.

Pour le calcul numérique et, notamment, pour l'algorithme de Hopscotch, il est recommandé d'éliminer le terme de la dérivées croisées qui figure dans l'équation différentielle. Si, le prix du sous-jacent et de la volatilité, ne sont pas corrélés, ce terme sera éliminé de lui-même. Sinon, ce terme sera éliminé par un changement de variables adéquat.

Justement, le paragraphe suivant traite ce changement de variables, ainsi que la transformation des conditions aux limites et du domaine de calcul correspondant.

Dans l'étude empirique de ce chapitre, on a considéré trois processus de la volatilité à savoir, un mouvement Brownien, un processus empirique, tel que le logarithme de la volatilité de la volatilité est une fonction linéaire du logarithme de la volatilité, et enfin un processus d'Ornstein Uhlenbeck avec une volatilité de la volatilité constante.

Après avoir traité le changement de variable précité, l'objet de la section 2 est d'estimer les paramètres liés à la volatilité, pour chacun des trois processus de la volatilité considérés. On estime, après, les autres paramètres du modèle.

La résolution numérique de l'équation différentielle, par la méthode des différences finies, fait l'objet de la section 3. Elle suppose, dans un premier temps, l'établissement du schéma numérique explicite correspondant, puis, dans un second temps, l'étude de la consistance de la stabilité et de la convergence de ce schéma.

Ce schéma n'étant pas stable, on fait recours à l'algorithme de Hopscotch dont on présente la teneur et qu'on teste sur le modèle de Black & Scholes, en considérant le drift risque-neutre et la volatilité de la volatilité égales à zéro.

Enfin, on présente les différents résultats de calcul, en considérant parfois la volatilité implicite et parfois la volatilité historique, en considérant deux processus pour la volatilité à savoir le mouvement Brownien et le processus empirique précité, enfin en estimant les paramètres de ces processus, à partir des données d'un contrat, ou à partir de la base de donnée toute entière. Ces résultats sont à comparer avec ceux du modèle de Black & Scholes.

Ces résultats sont à comparer, également, avec ceux générés, par la simulation de Monte Carlo, qui se base sur un raisonnement risque-neutre. Justement, la section 4 de ce chapitre 3, traite l'évaluation de l'option, en se basant sur un tel raisonnement et sur un tel outil. Dans un premier temps, on détermine deux générateurs adéquats, des deux variables d'état, qui permettent un gain en temps CPU, très précieux pour un algorithme de simulation qui comporte environ 4 000 000 d'itérations pour calculer la valeur d'option relative à une seule observation de la base de donnée. (400 périodes et 10 000 sentiers)

Après avoir étudié la convergence de l'algorithme et testé le programme de simulation, sur le modèle de Black & Scholes, les résultats sont générés pour les 9 contrats de la base intraday et les 5 contrats de la base journalière, en considérant, comme processus de la volatilité, le mouvement Brownien, le

processus empirique et le processus d'Ornstein Uhlenbeck. Les résultats sont à comparer à ceux du modèle de Black & Scholes et avec celles générées par l'algorithme Hopscotch.

Le chapitre 4 traite l'évaluation des options d'achat, de type européennes, avec les réseaux de neurones. Il comporte deux sections.

La première section traite la théorie des réseaux de neurones. Après une introduction et une présentation de l'approche neuronale, elle traite les réseaux de neurones, en commençant par la présentation du neurone formel et du perceptron linéaire, puis la présentation d'un perceptron multicouches (MLP) ainsi que ses propriétés et en le comparant par rapport au « Radial basis function » (RBF) qui est un réseau à une couche caché, mais qui nécessite plus de paramètres (poids synaptiques) que le MLP pour une précision donnée. Ceci peut être justifié par l'aspect local de la fonction gaussienne utilisée par les neurones cachés d'un RBF, alors que la fonction sigmoïde partage l'espace des données en deux parties, autrement dit, elle n'est pas locale.

La suite de la section est réservée à la présentation de l'algorithme de rétro-propagation du gradient comme algorithme d'apprentissage. On y présente les deux phases de calcul à savoir la phase de calcul des outputs et la phase de la rétro-propagation du signal d'erreur, en considérant la fonction sigmoïde puis la fonction tangente hyperbolique comme fonction d'activation. Cet algorithme présente l'inconvénient d'être lent si le coefficient d'apprentissage est trop petit et instable si le coefficient d'apprentissage est grand. En incorporant un coefficient de moment, dans l'équation d'ajustement des poids synaptiques, on évite les oscillations et l'algorithme devient stable. On précisera, également, dans cette section les recommandations relatives à l'utilisation de cet algorithme. Cette section théorique se termine par la présentation de l'algorithme « cascade correlation » qui sera utilisée, comme algorithme d'apprentissage, pour la partie empirique.

La deuxième section de ce chapitre 4 est consacrée à l'évaluation des d'options relatives aux deux bases de données « intraday » et journalière par les réseaux de neurones en considérant l'algorithme « cascade correlation ». Les résultats trouvés, dans ce chapitre, sont à comparer avec ceux générés, par les modèles à volatilité stochastique, en utilisant la simulation de Monte Carlo.

Le chapitre 5 est consacré à la gestion dynamique des risques relatifs à une position sur options, en considérant des stratégies dynamiques autofinancées et les trois types de modèles d'évaluation d'option qui sont le modèle de Black & Scholes, le modèle neuronal et les modèles à volatilité stochastique.

Ce chapitre comporte deux sections. La première section traite l'approche théorique et la seconde l'approche empirique de la gestion des risques financiers par les options.

La première section commence par la présentation des différentes sensibilités de l'option par rapport à ses déterminants, avec l'élaboration de leurs formules correspondantes, selon le modèle de Black & Scholes, aussi bien pour un call que pour un put. Ensuite, sont présentées, les différentes stratégies dynamiques de couverture d'une position d'option. Puis, en suivant l'approche de Coleman et al. (1999), on étudie la performance des stratégies de couverture delta – neutre, gamma neutre, Véga neutre et Delta Gamma Véga neutre, selon le modèle de Black & Scholes, les modèles neuronaux et les modèles à volatilité stochastique, en considérant comme critère l'erreur de couverture. Il est à noter que pour la dernière stratégie citée, en considérant le modèle de Black & Scholes, il faut disposer de deux options additionnelles ayant des échéances différentes de celle de l'option de base. Il serait préférable, qu'en plus, ces deux options aient chacune une échéance différente de celle de l'option de base.

Pour le modèle neuronal, on calcule les sensibilités en l'approximant à des taux de variation. On trouve, pour la stratégie Delta gamma Vége neutre, que du fait de la symétrie, la proportion à considérer dans le sous-jacent est nulle.

La deuxième section qui constitue la partie empirique de ce chapitre est basée sur les données relatives à la base intraday. Du fait de la faible liquidité des différents contrats de cette base, celle-ci est transformée en une base journalière présentant une période commune entre les différents contrats d'une même classe qui correspond au total à une quarantaine d'observations.

On présente, ensuite, les résultats relatifs aux différents modèles étudiés, à savoir le modèle de Black & Scholes, le modèle neuronal et les modèles à volatilité stochastique. Ces résultats sont basés sur les données de la base intraday, en insistant, plus particulièrement, sur les contrats de la classe 9. En effet, en utilisant la simulation de Monte Carlo, les modèles à volatilité stochastique n'ont été appliqués qu'à ces contrats.

Les premiers résultats concernent le calcul des sensibilités de la valeur de l'option pour les différents contrats de la base intraday. Les autres résultats concernent les erreurs de couverture et les erreurs de couverture absolues moyennes relatives, correspondantes à ces mêmes contrats, pour les différents modèles et les différentes stratégies dynamiques considérées.

Ma contribution, dans le chapitre préliminaire, est d'avoir développé et détaillé les démonstrations qui mènent aux lemmes et aux équations qui constituent les fondements pour les modèles paramétriques d'évaluation des produits dérivés et plus particulièrement des options. Dans ce chapitre, ma contribution consiste, également, à traiter, à compléter par des calculs et à découper les deux bases de données utilisées dans le cadre de ce travail.

Ma contribution, dans le chapitre 1, consiste, d'une part, à détailler l'enchaînement des calculs qui mènent à la solution analytique de Black & Scholes aussi bien par résolution de l'équation de Black & Scholes que par un raisonnement risque neutre. D'autre part, ma contribution, dans ce chapitre, consiste, à formuler 3 algorithmes pour la détermination de la volatilité implicite et à élaborer un algorithme de calcul baptisé « algorithme récursif ». Enfin, après avoir déterminé les séries des volatilités historiques et implicites relatives à l'ensemble de la base intraday et celle journalière, une autre de mes contributions consiste à élaborer une méthodologie pour tracer les courbes de « smile », à partir des deux bases de données utilisées.

Ma contribution, dans le chapitre 2, consiste, premièrement, à détailler les calculs qui mènent à l'équation de Garman (1976). Deuxièmement, elle consiste à élaborer les conditions aux limites propres à la résolution de cette équation pour l'évaluation d'un call européen. Troisièmement, elle consiste à élaborer le changement de variables en vue d'éliminer le terme de la dérivée croisée, afin de faciliter la recherche d'une solution aussi bien analytique que numérique surtout, dans le cas, où le schéma numérique est instable et qu'on doit faire appel à l'algorithme de Hopscotch.

Quatrièmement, elle consiste à élaborer les schémas de calculs et les algorithmes qui en découlent, pour estimer les différents paramètres du modèle à volatilité stochastique pour chacun des processus considérés de la volatilité, à savoir le mouvement brownien, le processus empirique et le processus d'Ornstein Uhlenbeck. Pour le processus d'Ornstein Uhlenbeck, afin de fiabiliser les calculs on a eu recours à 3 différentes méthodes de calcul.

Cinquièmement, ma contribution, dans ce chapitre, consiste à élaborer le schéma numérique en vue de la résolution de l'équation de Garman (1976) et à étudier sa stabilité, sa consistance et sa convergence et à déterminer les pas des maillages et des valeurs maximales du couple de variables d'état considéré.

Sixièmement, ma contribution consiste à élaborer et implémenter l'algorithme Hopscotch en le conjuguant avec un algorithme, fruit d'un raisonnement inductif. Elle consiste, également, à élaborer, dans les détails, et à implémenter l'algorithme Simulation de Monte Carlo.

Septièmement, ma contribution se termine par l'interprétation des résultats des calculs et par une synthèse pour comparer entre les différents modèles et les différents algorithmes de calcul utilisés.

Ma contribution, dans le chapitre 3, consiste, d'abord, à découper et à calculer les paramètres manquants comme la volatilité historique et la volatilité implicite traitement des bases de données. Elle consiste, donc, à générer les 49 fichiers de training (39, pour la base intraday et 10, pour la base journalière) et les 53 fichiers de test (43, pour la base intraday et 10, pour la base journalière). A partir de ces fichiers sont générés les fichiers compatibles avec le logiciel thinkspro, qui sont le fruit de la transformation des inputs et output dans les fichiers, de training et de test, précités.

Ensuite, ma contribution consiste à élaborer les 181 modèles neuronaux (159 modèles pour la base intraday et 22 pour la base journalière), en faisant appel à l'algorithme "cascade correlation" comme algorithme d'apprentissage et, en se limitant à 10000 itérations.

Puis, elle consiste à proposer et à choisir parmi les 6 modèles-types définis par les inputs à considérer pour le modèle neuronal.

Ensuite, ma contribution, dans ce chapitre, consiste à implémenter les algorithmes permettant de remonter à la valeur de l'option, à partir des outputs calculés par les réseaux.

Enfin, elle consiste à interpréter les résultats relatifs aux modèles neuronaux et à faire une synthèse en vue de comparer les performances des différents modèles considérés dans la présente thèse.

Enfin, ma contribution, dans le dernier chapitre, se situe aussi bien dans la partie théorique que dans la partie empirique. Dans la partie théorique elle consiste, premièrement, à développer les calculs qui mènent aux formules des greeks relatifs au modèle de Black & Scholes, deuxièmement, à élaborer les différentes méthodes et formules de calcul des greeks pour les modèles neuronaux et les modèles à volatilité stochastique (Monte Carlo), troisièmement, à élaborer les formules de calcul des proportions d'un portefeuille de couverture en fonction des greeks, en soulignant les singularités et quatrièmement, à élaborer les formules de calcul de l'erreur de couverture et de la valeur de l'endettement, pour les différents modèles précités.

Dans la partie empirique, ma contribution se situe au niveau de la méthodologie pour estimer, à partir des valeurs d'options correspondantes, les greeks, l'endettement et les erreurs de couverture pour chacun des modèles étudiés. Ma contribution consiste, également, à implémenter tous les programmes de calcul et à générer et interpréter les résultats, relatifs à ce dernier chapitre.



## **CHAPITRE PRELIMINAIRE**

### **THEORIE DES OPTIONS ET ELEMENTS DE CALCUL STOCHASTIQUE**

Les modèles paramétriques d'évaluation des options se basent sur un certain nombre d'hypothèses et font appel à la théorie des actifs conditionnels ainsi qu'à des outils des mathématiques financières, ainsi qu'à des propriétés des variables d'états qui les déterminent.

Le but du présent chapitre est justement de présenter ces propriétés et ces outils qui vont servir de base pour les modèles paramétriques développés dans le cadre de ce travail. Cette présentation va jusqu'au développement des démonstrations des résultats les plus utiles pour le présent travail.

Les données servant à l'ensemble des études empiriques sont, également, présentées à la fin de ce chapitre en insistant sur les découpages requis par les modèles neuronaux.

Ce chapitre préliminaire, divisé en trois sections, est consacré à l'analyse des fondements de la détermination de la valeur d'une option. La première section

est consacrée à des généralités sur les options, aux déterminants de sa valeur, ainsi qu'à ses limites d'arbitrage. Elle est, également, consacrée, d'une part, aux fondements des hypothèses, relatives au marché, sur lesquelles reposent les modèles d'évaluation des options. Cette section traite, aussi, les conditions aux limites liées à l'évaluation d'une option, ainsi qu'à la relation de parité call-put.

La deuxième section est réservée aux différents fondements du calcul stochastique. De la définition de la propriété de Markov, jusqu'à l'élaboration de l'équation de Fokker-Planck relative à une variable d'état, en passant par les propriétés des processus stochastiques, utilisés dans le présent travail, le lemme d'Itô, dans le cas général, et par l'évaluation avec un raisonnement risque-neutre. L'équation de Fokker-Planck est appliquée au processus empirique, au processus d'Ornstein Uhlenbeck et au mouvement brownien pour étudier leurs propriétés à long terme. Cette deuxième section se termine par l'élaboration de l'équation générale d'évaluation d'une option (Garman, 1976), dans le cas, où la valeur de celle-ci dépend de  $n$  variables d'états.

La troisième section du chapitre préliminaire est consacrée à la définition d'un indice boursier et d'un tracker et traite les différents risques spécifiques à une option sur indice boursier. Elle se termine par l'élaboration du processus suivi par un indice boursier, compte tenu des processus des actions le composant.

La deuxième partie de cette troisième section est réservée à la présentation des deux bases de données utilisées dans la partie empirique : Une base « intraday » et une base journalière, relatives à des contrats d'options sur l'indice CAC40. Elles sont considérées, aussi bien l'une que l'autre, pour l'évaluation des options avec le modèle de Black & Scholes, le modèle neuronal et le modèle à volatilité stochastique. La base « intraday » permet, également, d'étudier empiriquement la gestion des risques par les options avec les deux premiers modèles, ainsi que le modèle à volatilité stochastique, en considérant différentes dynamiques de la volatilité. Bien entendu, ces études empiriques supposent,

dans un premier temps, le calcul de certains paramètres, le traitement de la base et son découpage, selon les besoins imposés par le modèle neuronal.

Ma contribution, dans ce chapitre, est d'avoir développé et détaillé les démonstrations qui mènent aux lemmes et aux équations qui constituent les fondements pour les modèles paramétriques d'évaluation des produits dérivés et plus particulièrement des options. Dans ce chapitre, ma contribution consiste, également, à traiter, à compléter par des calculs et à découper les deux bases de données utilisées dans le cadre de ce travail.

## **1.1 FONDEMENTS POUR L'EVALUATION D'UNE OPTION**

### ***1.1.1 Valeur d'une option et ses déterminants***

#### **1.1.1.1 Définition et généralités sur les contrats d'options**

Une option est un contrat qui confère à son détenteur le droit d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent, à un prix prédéterminé, et ce pendant une période de temps donnée. Un tel contrat représente un droit et non une obligation pour son détenteur. En d'autre terme, l'investisseur n'est pas contraint d'acheter ou de vendre l'actif sous-jacent. Pour une option européenne, la décision d'exercer ou de ne pas exercer ce droit aura lieu à l'échéance du contrat. Par contre, pour une option de type américaine, cette décision peut avoir lieu à n'importe quel moment de la vie du contrat. La plupart des options standardisées négociées, aujourd'hui, sur l'ensemble de la planète sont des options américaines. La plupart des options européennes sont aujourd'hui négociées sur le marché de gré à gré des options sur action, ainsi que sur le marché interbancaire de change.

Il existe deux types d'options : les options d'achat (call) et les options de vente (put) :

- Un call est un contrat qui confère à son détenteur le droit d'acheter l'actif sou-jacent à un prix fixé d'avance durant une période de temps donné.

- Un put est un contrat qui confère à son détenteur le droit de vendre l'actif sous-jacent à un prix prédéterminé durant une période donnée

Autant l'acheteur d'un contrat d'option a le choix d'exercer ou non son droit, autant, le vendeur d'un contrat d'option, est totalement soumis à la décision de l'acheteur d'option. En contrepartie, le vendeur du contrat reçoit de l'acheteur une somme égale au prix de marché de l'option, appelée prime de l'option.

L'acheteur d'une option américaine, bénéficie de plus de droit que l'acheteur d'une option européenne, puisqu'il peut exercer à tout moment son droit, alors que le second doit attendre l'échéance pour décider. De ce fait, le prix d'une option américaine doit être supérieur à celui d'une option européenne ayant les mêmes caractéristiques.

Les options se distinguent, également, par l'actif sur lequel elles portent, autrement dit l'actif sous-jacent. Celui-ci peut être une action, une obligation, un tracker, un indice, un titre de créance négociable, une devise, de l'or ou encore un contrat à terme.

En ce qui concerne les produits financiers, la grande popularité des options auprès des investisseurs tient au fait qu'elles représentent un outil de placement extrêmement souple. Combinées à des portefeuilles d'actions, les options peuvent aider l'investisseur à limiter le risque de perte ou à augmenter le potentiel du rendement des actions détenues. De plus, les options permettent à l'investisseur audacieux d'ajouter du levier à ses placements et à l'investisseur moins audacieux de fixer le prix d'un achat ou d'une vente ultérieure d'action. En un mot, les options représentent un outil précieux de contrôle des risques du portefeuille et, pour cette raison, elles doivent occuper une place importante dans les stratégies de placement de l'investisseur.

Dans le présent travail, on s'intéresse aux options d'achat (call) de type européen sur indice. Pour ce faire, tous les calculs sont faits dans le cas d'une option sur action et les résultats sont appliqués au cas de l'option sur indice, en tenant compte de la spécificité d'un contrat d'option sur indice, par rapport à un contrat d'option sur action. De même, les résultats pour un put peuvent être déduits à partir de ceux pour un call, en considérant la duplication d'un put à partir de la relation de parité call-put.

### 1.1.1.2 Les déterminants exogènes de la valeur d'une option

La valeur d'une option dépend du prix de l'actif support –sous-jacent-, du prix d'exercice, du taux d'intérêt sans risque, de l'échéance et de la volatilité du prix de l'action.

#### 1.1.1.2.1 Cours du sous-jacent :

De façon classique, la valeur de l'option se décompose en valeur intrinsèque et en valeur temps ou sur côte.

\* La valeur intrinsèque d'une option représente ce que serait la valeur du contrat si son échéance intervenait immédiatement. Elle est donc positive ou nulle, selon que l'option pourrait ou non être exercée par son détenteur.

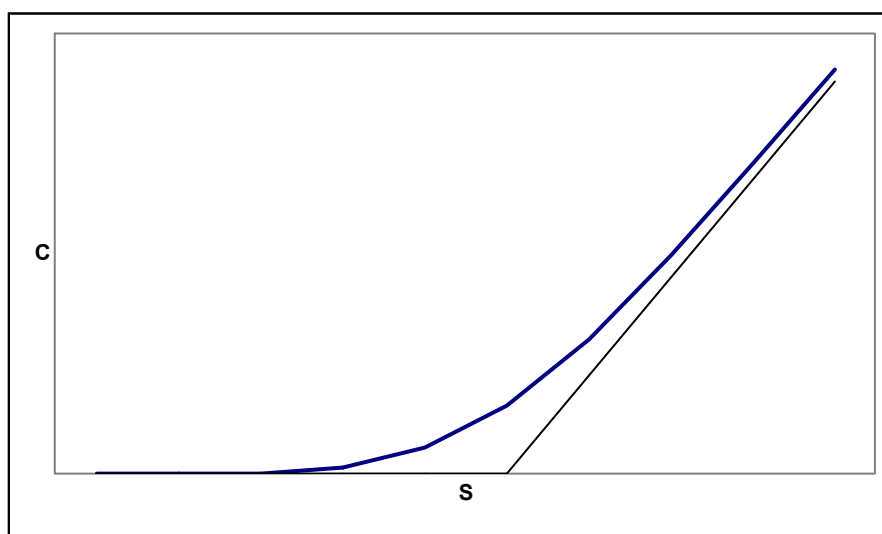


Figure 1 : Valeur intrinsèque et valeur temps d'une option d'achat

Comme l'indique la figure 1, la valeur intrinsèque d'une option d'achat (call) est nulle lorsque le cours de l'action  $S$  est inférieur (en dehors) ou égal (à parité) au prix d'exercice  $E$  de l'option. Elle devient positive lorsque le cours de l'action dépasse le prix d'exercice (en dedans). Dans ce cas, elle est égale au cours de l'action diminué du prix d'exercice :  $S - E$ .

En ce qui concerne l'option de vente (put), la valeur intrinsèque n'est différente de zéro que si le cours de l'action est inférieur au prix d'exercice (en dedans). Elle est, donc, égale au prix d'exercice diminué du cours de l'action :  $E - S$

\* La valeur temps ou sur côte d'une option représente le surplus de valeur de cette dernière par rapport à sa valeur intrinsèque, étant donné le temps qui lui reste à courir. Tant qu'il existe une probabilité positive de pouvoir exercer l'option à l'échéance et, par-là même, de réaliser un bénéfice, les investisseurs sont prêts à payer une sur côte pour détenir le contrat d'option.

Dans le cas de l'option d'achat, lorsque le cours de l'action est largement inférieur au prix d'exercice, la probabilité d'exercer l'option d'achat est faible et la sur côte aura une valeur proche de zéro puisque aucun investisseur ne sera intéressé par ce type de contrat. Par contre, dès que le cours de l'action s'élève et se rapproche du prix d'exercice, la probabilité que cette hausse continue dans le temps augmente et, donc, les chances de pouvoir exercer l'option s'accroissent. Les investisseurs seront intéressés par ce contrat d'option et acceptent de payer progressivement une sur côte de plus en plus importante. La sur côte atteint sa valeur maximale lorsque le cours de l'action égalise le prix d'exercice. En effet, à ce niveau, la probabilité pour que le cours de l'action baisse ou augmente par rapport au prix d'exercice est identique: il y a 50% de chances pour que  $S$  soit au-dessous de  $K$  et 50% de chances pour que  $S$  dépasse  $K$ .

Par conséquent, les options à parité présentent la valeur de sur côte maximale. Lorsque le cours de l'action dépasse le prix d'exercice, la sur côte commence à décroître. En effet, plus le cours de l'action augmente, plus il devient probable et même certain que l'option sera exercée à l'échéance. Les investisseurs ne sont pas disposés à payer une sur côte pour la détention d'une telle option dont la valeur est jugée très élevée, puisqu'il sera plus avantageux d'acquérir directement l'action sur le marché au comptant que sur le marché d'options. Pour des valeurs de l'action très supérieures au prix d'exercice, l'achat de l'option d'achat revient à acheter l'action à terme.

En ce qui concerne l'option de vente, le raisonnement est tout à fait l'inverse de l'option d'achat. En effet, lorsque le cours de l'action est supérieur au prix d'exercice, la probabilité d'exercer l'option de vente, ici l'échéance, est faible, et donc la valeur de la sur côte est nulle. Elle augmente progressivement, au fur et à mesure que le cours de l'action décroît et se rapproche du prix d'exercice. Lorsque le cours de l'action égalise le prix d'exercice, la sur côte atteint sa valeur maximale, mais commence à décroître à mesure que le cours de l'action devient inférieur au prix d'exercice. Pour des valeurs de l'action très inférieures au prix d'exercice, l'achat de l'option de vente revient, en réalité, à vendre l'action à terme.

En définitive, lorsque le cours de l'action est inférieur au prix d'exercice, l'option d'achat n'a pas de valeur intrinsèque et sa valeur totale sera égale à sa valeur temps, alors que, l'option de vente n'a pas de valeur temps et sa valeur totale est constituée exclusivement de la valeur intrinsèque. Lorsque le cours de l'action est supérieur au prix d'exercice, l'option d'achat présente une valeur intrinsèque et non une valeur temps, alors que l'option de vente comprend uniquement une valeur temps.

Lorsque le cours de l'action est égal au prix d'exercice, la sur côte atteint sa valeur maximale qu'il s'agit d'une option d'achat ou d'une option de vente. Il

ressort donc que la valeur d'une option est une fonction croissante (option d'achat) ou décroissante (option de vente) du cours de l'action.

#### **1.1.1.2.2 Taux d'intérêt à court terme :**

Dans la mesure où l'achat d'une option d'achat nécessite un investissement initial inférieur à celui de l'achat ferme du sous-jacent, le détenteur d'une option d'achat peut placer les capitaux provisoirement épargnés au taux d'intérêt sans risque pendant toute la durée du contrat d'option. Ainsi, plus le taux d'intérêt sans risque est élevé, plus l'avantage de l'achat d'une action par le biais de l'option sur l'achat ferme de cette même action est important, et par conséquent plus la valeur de l'option est élevée.

Du point de vue mathématique, un taux d'intérêt élevé implique une valeur plus faible du prix d'exercice actualisé et par conséquent une valeur de l'option d'achat représentée par la différence  $S - Ee^{-r(T-t)}$  plus élevée. Ce raisonnement n'est pas vérifié pour l'option de vente.

L'achat d'une option de vente, en comparaison avec la vente ferme des actions entraîne, outre le décaissement de la prime, un retard dans l'encaissement du montant de la vente des actions qui n'intervient qu'au moment de l'exercice de l'option. La valeur de l'option de vente représentée par  $Ee^{-r(T-t)} - S$  est donc d'autant plus faible que le taux d'intérêt sans risque est élevé.

#### **1.1.1.2.3 Durée de vie de l'option :**

Le pari sur l'évolution du cours de l'action, fait par l'acheteur d'une option (à la hausse ou à la baisse), a d'autant plus de chances d'être gagné que l'échéance est lointaine. En effet, l'éloignement de l'échéance augmente les possibilités de variation du cours de l'action et donc la probabilité d'exercice de l'option.

Il est important de signaler que la relation entre l'échéance et le prix de l'option n'est pas linéaire. A mesure que le temps passe, l'option perd sa valeur temps.



A l'échéance, cette dernière s'annule puisque l'option vaut sa valeur intrinsèque ou zéro.

Les options peuvent être classées en fonction de leurs échéances, en options à court terme et en options à long terme. Les premières ont des échéances qui sont très rarement supérieures à 6 mois à l'inverse des dernières et, plus particulièrement, des warrants dont l'échéance peut atteindre 18 mois, 2ans, voire 5 ans.

#### ***1.1.1.2.4 Prix d'exercice de l'option***

Une option d'achat a une probabilité d'autant plus forte de finir en dedans et donc d'être exercée que son prix d'exercice est faible. Sa valeur est alors une fonction décroissante de son prix d'exercice. A l'inverse, la probabilité d'exercer une option de vente est d'autant plus importante que son prix d'exercice est élevé. La valeur de l'option de vente est, par conséquent, une fonction croissante de son prix d'exercice.

Les deux paramètres inobservables pour le calcul de la valeur de l'option sont la volatilité et le taux d'intérêt. La volatilité est un paramètre déterminant dans le calcul de la valeur d'une option. C'est un paramètre stochastique contrairement, à l'hypothèse de Black & Scholes concernant la constance de ce paramètre. Les principaux estimateurs de ce paramètre sont la volatilité historique et la volatilité implicite.

#### ***1.1.1.2.5 Volatilité de l'action :***

La volatilité est représentée par l'écart type annualisé des rendements, déterminés à partir des variations relatives des prix de l'actif support de l'option à savoir le sous-jacent.

L'acheteur d'une option est un spéculateur à la hausse (option d'achat) ou à la baisse (option de vente) du titre support. Il est disposé à payer une prime

d'autant plus élevée que l'amplitude des fluctuations du cours de l'action est importante, et donc que son option a des chances de finir en dedans. En fait, plus la volatilité est forte, plus la probabilité, que le cours de l'action soit supérieur ou inférieur au prix d'exercice de l'option, est élevée.

Ainsi, la valeur de l'option (d'achat ou de vente) est une fonction croissante de la volatilité du sous-jacent. Celle-ci peut être estimée soit à partir des rendements des actions sur une période précédant la date d'émission des options, soit à partir des prix des options observés sur le marché. Ces deux méthodes d'estimation sont connues respectivement par la volatilité historique et la volatilité implicite.

La volatilité est un déterminant de la valeur de l'option qui présente la particularité d'être inobservable. L'estimation de sa valeur future est extrêmement délicate et requiert la plus grande précision possible. En effet, une estimation biaisée conduira à des prix erronés et donc à une mauvaise appréciation de la sur ou sous-évaluation des options.

### ***1.1.2 Equilibre arbitrage et efficience d'un marché financier***

#### **1.1.2.1 Equilibre :**

Un marché est dit en équilibre si l'offre du produit financier considéré égale sa demande. Cette égalité s'obtient grâce à l'ajustement des prix. Dès lors sur un marché financier en équilibre et suffisamment liquide, tout opérateur trouvera une contrepartie acceptant de traiter au prix du marché. L'équilibre est dit compétitif, si aucun agent n'a un poids relatif suffisant, pour peser sur les prix. Il s'ensuit que sur un marché financier en équilibre compétitif, tout opérateur peut acheter ou vendre des quantités arbitraires au prix du marché alors qu'il ne trouvera aucun vendeur acceptant un prix inférieur.

### **1.1.2.2 Absence d'opportunités d'arbitrage :**

L'arbitrage est une opération qui n'implique aucune mise de fonds et qui n'engendre que des flux de trésorerie positifs ou nuls. L'existence d'opportunité d'arbitrage sur un marché est incompatible avec l'équilibre de celui-ci. En effet, l'opportunité d'arbitrage déclenche une offre sur les produits « surcotés » et une demande sur les produits sous-cotés. En revanche, un marché exempt d'opportunité d'arbitrage n'est pas nécessairement en équilibre. La condition d'équilibre est, donc, plus forte que celle d'absence d'arbitrage, bien que cette dernière conduise, dans de nombreux contextes, à des modèles importants et constitue la pierre angulaire de la théorie financière moderne et, notamment, dans l'évaluation des options.

En effet, cette méthode de raisonnement par arbitrage est, très fréquemment, utilisée en finance, dès lors qu'on cherche à déterminer le prix d'un produit dérivé dont la valeur est liée à celle d'un actif sous-jacent. Elle repose sur l'idée que les actifs en question sont négociés sur des marchés parfaits où chaque information est prise en compte dès sa survenance et où n'interviennent que des investisseurs rationnels. Dès lors, toute possibilité d'arbitrage gagnant est exploitée à l'instant même de son apparition par des arbitragistes qui vont, en gonflant la demande du produit sous-évalué et l'offre du produit surévalué, ramener les prix de ces actifs à une valeur normale, et annuler ainsi, dans un temps très court, les possibilités d'arbitrage gagnant.

Deux stratégies qui conduisent au même résultat final seront, donc, valorisées de manière identique, puisqu'elles ne peuvent donner lieu à un arbitrage gagnant.

### **1.1.2.3 Efficience :**

L'équilibre d'un marché financier peut, éventuellement, résulter d'offres et de demandes émanant d'opérateurs irrationnels et/ou mal informés. Dans de telles conditions, le prix d'équilibre n'incorpore pas, nécessairement, toutes les

informations potentiellement disponibles et joue mal son rôle dans l'allocation des ressources.

D'après Fama (1970), un marché est efficient quand à chaque instant, les prix incorporent toute l'information pertinente et disponible.

Quand cette condition d'efficience est satisfaite, les prix du marché à l'instant précédent l'instant présent, incorporent correctement toute l'information disponible pertinente à la prévision des prix futurs et les rendements sont dits normaux. A contrario, quand le marché est inefficient, des informations disponibles peuvent être utilisées pour obtenir des rendements anormaux.

Selon le système d'information, présumé disponible à l'instant précédent l'instant présent, on considère trois formes d'efficience : l'efficience faible, l'efficience semi-forte et l'efficience forte.

L'efficience faible est celle d'un marché dont les prix incorporent à chaque instant le seul historique des prix passés. Dans ce cas, les opérateurs ne peuvent tirer parti de la connaissance de la chronique des prix passés pour réaliser des profits anormaux et systématiques.

L'efficience semi-forte est celle d'un marché dont les prix incorporent à chaque instant non seulement la chronique des prix passés mais également toutes les informations pertinentes (bénéfice, projets d'investissement et de financement, dividendes, etc. ....) rendues publiques. Dans ce cas, les opérateurs ne peuvent tirer parti d'informations rendues publiques pour réaliser des profits anormaux puisque les prix s'ajustent quasi instantanément dès qu'une information pertinente est annoncée.

Enfin, l'efficience forte est celle qui caractérise un marché dont les prix incorporent toute l'information disponible, qu'elle ait été rendue publique ou

non. Sur un tel marché, l'information privilégiée est très rapidement incorporée dans les prix d'équilibre et les profits d'initiés sont pratiquement inexistant.

Ces trois hypothèses d'efficience ont été mises en cause sur le plan théorique et empirique. C'est, évidemment, la forme forte qui est la plus contestée.

### **1.1.3 Limites d'arbitrage et relation call-put**

#### **1.1.3.1 Limites d'arbitrage de la valeur d'une option négociable**

Afin de respecter le principe d'absence d'opportunités d'arbitrage sans risque, une option doit vérifier un certain nombre de conditions qui correspondent à des valeurs limites de l'option considérée.

##### **1.1.3.1.1 L'actif sous-jacent ne distribue pas de dividendes**

Dans le cas, où l'actif sous-jacent ne verse pas de dividendes, les conditions que doit vérifier la valeur d'une option d'achat sont :

##### **Condition 1 :**

Une option est un actif financier qui procure une responsabilité limitée. La perte maximale que peut supporter l'acheteur d'un call est la valeur de l'option. De ce fait la valeur de l'option ne peut être négative :  $C \geq 0$

##### **Condition 2 :**

Si à l'échéance, le prix du sous-jacent est  $S_T$  est supérieur au prix d'exercice  $E$ , l'option d'achat est exercée et sa valeur est  $S_T - E$ . Par contre, si à l'échéance le prix du sous-jacent est inférieur ou égal au prix d'exercice de l'option, la valeur de l'option d'achat est nulle :

$$\text{soit } C(S_T, 0, E) = \text{Max}(0, S_T - E)$$

**Condition 3 :**

De toute évidence, le prix d'une option d'achat est une fonction décroissante du prix d'exercice de l'option :  $C(S, \tau, E_1) \leq \text{Max}(S, \tau, E_2)$  si  $E_1 \geq E_2$

**Condition 4 :**

Le prix d'un call ne peut être supérieur à celui de l'actif sous-jacent. En effet, si c'était le cas, un investisseur achètera le sous-jacent et jamais l'option. On a donc :  $C(S, \tau, E) \leq S$

Comme la valeur de l'option ne peut être négative (condition1), si la valeur du sous-jacent est nulle la valeur de l'option sera, également, nulle et on aura :

$$C(0, \tau, E) = 0$$

**Condition 5 :**

Cette condition s'énonce :

$$C(S, \tau, E) \geq S - Ee^{-r\tau}$$

Où  $\tau = T-t$  est la durée de vie résiduelle de l'option,  $t$  étant la date courante et  $T$  la date d'échéance.

Cette condition peut être démontrée, en considérant deux portefeuilles PF1 et PF2. Le portefeuille PF1 est constitué d'un call européen sur un actif sous-jacent ne payant pas de dividende, et d'un emprunt qui aura une valeur égale au prix d'exercice du call à son échéance. Le portefeuille PF2 est constitué d'une unité de l'actif sous-jacent.

Le tableau suivant donne les pay-off de ces deux portefeuilles dans le cas où l'option finit en dedans et dans le cas où l'option finit en dehors :

A l'échéance	$S_T < E$	$S_T \geq E$
PF1	E	$(S_T - E) + E = S_T$
PF2	$S_T$	$S_T$
Valeur à l'échéance	$V_{PF1} > V_{PF2}$	$V_{PF1} = V_{PF2}$

Tableau 1 : Pay-off des portefeuilles PF1 et PF2

A l'échéance, la valeur du portefeuille PF1 est au moins égale à celle de PF2. Dans l'hypothèse d'absence d'arbitrage, à chaque instant situé entre l'instant présent et la date d'échéance, la valeur du portefeuille PF1, est au moins égale à celle du portefeuille PF2. On peut, donc, écrire:

$$V_{PF1}(t) \geq V_{PF2}(t) \Rightarrow C(S, \tau, E) + Ee^{-r\tau} \geq S \Rightarrow C(S, \tau, E) \geq S - Ee^{-r\tau}$$

### ***1.1.3.1.2 L'actif sous-jacent distribue des dividendes***

Le versement de dividende engendre une baisse du prix de l'actif sous-jacent.

Dans un marché efficient, où il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage gagnant sans risque, la baisse du prix de l'actif sous-jacent est égale au montant des dividendes.

Si on suppose que le montant D des dividendes ainsi que sa date de versement sont connus, la condition 5 devient dans ce cas :  $C(S, \tau, E) \geq S - Ee^{-r\tau} - D$

Ceci peut être démontré, en considérant les deux portefeuilles suivants :

PF1 : achat du call C et emprunt d'une somme qui aura la valeur E à l'échéance

PF2 : achat d'une unité du sous-jacent S et emprunt d'une somme égale au dividende D à l'instant présent.

La valeur du portefeuille PF2, à l'échéance, sera égale à  $S_T$  puisque l'emprunt au montant D sera remboursé dès la réception des dividendes. A l'échéance la valeur du portefeuille PF1 est supérieure à la valeur du portefeuille PF2. Dans l'hypothèse d'absence d'arbitrage, à chaque instant situé entre l'instant présent et la date d'échéance, la valeur du portefeuille PF1, est au moins égale à celle du portefeuille PF2. On peut, donc, écrire:

$$V_{PF1}(t) \geq V_{PF2}(t) \Rightarrow C(S, \tau, E) + Ee^{-r\tau} \geq S - D \Rightarrow C(S, \tau, E) \geq S - Ee^{-r\tau} - D$$

### 1.1.3.2 Relation de parité Call-Put

Si  $P$  désigne le prix d'un Put européen et  $C$  celui d'un call européen ayant le même sous-jacent  $S$ , la même échéance  $T$  et le même prix d'exercice  $E$ . Soit le portefeuille constitué de la vente d'un Put et de l'achat d'un call.

#### 1.1.3.2.1 L'actif sous-jacent ne distribue pas de dividendes

Si on considère le portefeuille constitué, à l'instant  $t$ , par l'achat d'une unité de l'actif sous-jacent, l'achat d'un put  $P$  et la vente d'un call  $C$ . Ainsi, le portefeuille désigné par  $\Pi$ , aura, à l'instant  $t$ , une valeur égale à :

$$\Pi(t) = S(t) + P(t) - C(t)$$

La valeur de ce portefeuille à l'échéance est tel que :

$$\text{- Si } S > E : \Pi(T) = S(T) + 0 - (S(T) - E) = E$$

le call est exercé et le put n'est pas exercé

$$\text{- Si } S \leq E : \Pi(T) = S(T) + (E - S(T)) - 0 = E$$

le call n'est pas exercé et le put est exercé

La valeur du portefeuille à l'échéance est donc égale au prix d'exercice quelle que soit la valeur du sous-jacent à l'échéance. Ce qui est important de savoir est quelle est, à l'instant considéré  $t$ , la valeur du portefeuille  $\Pi(t)$  ?

La valeur actualisée de la valeur du portefeuille à l'échéance est  $Ee^{-r\tau}$  avec  $\tau = T - t$ . En supposant qu'on ne peut pas réaliser un profit d'arbitrage sans risque, on peut écrire que  $\Pi(t) = Ee^{-r\tau}$  d'où la relation de parité call-put dans le cas où le sous-jacent ne paye pas de dividendes :

$$S(t) + P(t) - C(t) = Ee^{-r(T-t)} \quad \forall t; 0 \leq t \leq T$$

Soit :



$$C(t) - P(t) = S(t) - Ee^{-r(T-t)} \quad (1.1.3-1)$$

Ce raisonnement peut être illustré dans le tableau 2.

	Valeur à t	Valeur à l'échéance (T)	
		$S_T < E$	$S_T \geq E$
Achat du sous-jacent	$-S(t)$	$S_T$	$S_T$
Achat d'un put	$-P(t)$	$E - S_T$	0
Vente d'un call	$C(t)$	0	$S_T - E$
Emprunter	$Ee^{-r\tau}$	$-E$	$-E$
Total = $C(t) - S(t) - P(t) + Ee^{-r\tau}$		0	0

Tableau 2 : Pay-off du portefeuille  $\Pi$

Cette relation est très importante puisqu'elle permet de déduire la valeur d'un put à partir de celle d'un call et vice versa. Dans la présente étude on ne considère que les options d'achat call.

### 1.1.3.2.2 L'actif sous-jacent distribue des dividendes

En présence de dividendes, dans le cas discret, la relation de parité put-call devient :  $C(t) - P(t) = S(t) - D - Ee^{-r(T-t)}$

Ceci peut être démontré, en considérant les portefeuilles suivants:

- Le premier portefeuille est PF1 constitué de l'achat d'un call européen, d'une position cash d'un montant égal à  $D + Ee^{-r(T-t)}$  et de la vente d'une unité de l'actif sous-jacent. Le montant cash  $D$  est destiné à compenser la baisse du prix du sous-jacent due au versement des dividendes.
- Le deuxième portefeuille est PF2 est constitué, uniquement, d'un put européen de même prix d'exercice et de même échéance que le call du portefeuille PF1.

A l'échéance des options, les deux portefeuilles auront la même valeur :  $\text{Max}(E - S_T; 0)$ . Comme le call et le put sont tous les deux de type européen, ils ne peuvent être exercés qu'à l'échéance, ce qui implique que les deux portefeuilles auront la même valeur tout au long de la vie de l'option. D'où la relation suivante :

$$P(t) = C(t) - S(t) + D + Ee^{-r(T-t)}$$

$$\Rightarrow C(t) - P(t) = S(t) - D - Ee^{-r(T-t)}$$

## 1.2 CALCUL STOCHASTIQUE ET EVALUATION DES PRODUITS DERIVES

### 1.2.1 Propriété de Markov

Le processus de Markov est un type particulier de processus stochastique où seulement la valeur présente de la variable en question est déterminante dans la détermination de sa valeur future. L'historique de la variable et la manière, dont le présent a émergé du passé, n'ont aucune influence sur la valeur future de la variable. La propriété de Markov pour le prix d'un actif financier va de paire avec l'efficacité du marché sous sa forme faible. Cette forme d'efficacité peut s'énoncer sous la forme : le cours actuel d'un titre contient toute l'information disponible sur ce titre.

L'espérance de la variable aléatoire, conditionnée par les événements passés, dépend, uniquement, de la valeur précédente  $X_{t-1}$ . C'est un processus sans mémoire du passé.

Ceci peut être formalisé comme suit : si l'instant présent est  $t$ ,

- l'événement  $A = \{X_s; s > t\}$  représente le futur du processus  $X_t$

- l'événement  $B = \{X_s; s < t\}$  représente le passé du processus  $X_t$

Le processus  $X_t$  est dit Markovien, si et seulement si :

$$P(A / X_t, B) = P(A / X_t) \quad \forall t$$

Connaissant le présent, le passé et le futur du processus sont indépendants. Ainsi, la connaissance du passé d'un processus Markovien ne fournit aucune information sur son évolution à venir, en dehors de celle contenue dans la valeur présente qui seule détermine la distribution future des cours, en l'absence de nouvelles informations.

La propriété de Markov a une importance capitale dans la modélisation financière, en particulier dans l'évaluation des options, comme c'est le cas dans le présent travail.

### **1.2.2 Mouvement Brownien (ou Processus de Wiener)**

Le mouvement Brownien avec un drift est un processus stochastique  $\{X_t; t \geq 0\}$  qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Chaque variation  $(X_{t+s} - X_s)$  du processus  $\{X_t; t \geq 0\}$ , entre les instant  $s$  et  $s+t$ , suit la loi normale de moyenne  $\mu t$  et de variance  $\sigma^2 t$  où  $\mu$  et  $\sigma$  sont des paramètres constants.
2. Pour les instants  $(t_1 < t_2 < \dots < t_n)$ , les variations  $(X_{t_2} - X_{t_1}), (X_{t_3} - X_{t_2}), \dots, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$  sont indépendantes et suivent la loi normale, comme précisé en 1.
3.  $X_0 = 0$  et  $\{X_t; t \geq 0\}$  est continue par rapport au temps.

Il est à noter, avec ses propriétés, que la variation  $(X_{t+s} - X_s)$  est indépendante de l'historique du processus  $X_t$ , puisque la connaissance de  $X_\tau$  ( $\tau < s$ ) n'a aucun effet sur la distribution de probabilité de  $X_{t+s} - X_s$ . C'est précisément le caractère Markovien du mouvement Brownien.

Il est à noter, également, que dans le cas où  $\mu = 0$  et, le mouvement Brownien est appelé mouvement Brownien Standard, noté, dont la distribution de probabilité en continue est :

$$P(Z_t < z / Z_{t_0} = z_0) = P(Z_t - Z_{t_0} < z - z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{z-z_0} e^{-\frac{u^2}{2(t-t_0)}} du$$

Le processus  $\{X_t; t \geq 0\}$  peut s'écrire en fonction de  $\{Z_t; t \geq 0\}$  sous la forme:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dZ_t$$

Ainsi,

- $dZ_t$  est une variable aléatoire suivant une loi normale
- l'espérance mathématique de  $dZ_t$  est  $E(dZ_t) = 0$
- la variance de  $dZ_t$  est  $V(dZ_t) = dt$
- Les valeurs de  $dZ_t$ , relatives à des intervalles de temps courts  $dt$ , quelconques, sont indépendantes.

Le drift réel  $\mu$  et la volatilité  $\sigma$  sont deux paramètres qu'on peut estimer à partir de l'historique du prix de l'actif dont le prix suit le processus  $X_t$ .

Le processus  $dZ_t$  peut s'écrire sous la forme :  $dZ_t = U \sqrt{dt}$ , où  $U$  est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. La variable aléatoire  $U^2$  suit, donc, une loi du Khi-deux de degré 1 ( $U^2 \rightarrow \chi^2(1)$ ), tel que son espérance mathématique est  $E(U^2) = 1$ , et sa variance est  $V(U^2) = 2$ .

Comme, le carré du processus  $dZ_t$  est :  $dZ_t^2 = U^2 dt$ , on déduit de ce qui précède que l'espérance du processus  $dZ_t^2$  est  $E(dZ_t^2) = E(U^2) dt = dt$ , alors que sa variance est  $V(dZ_t^2) = V(U^2) dt^2 = 2 dt^2$ .

On peut, donc, affirmer que, quand  $dt$  tend vers 0, à l'ordre  $dt$  le processus  $dZ_t^2$  devient équivalent à  $dt$ , soit :  $dZ_t^2 \approx dt$

### 1.2.3 Mouvement Brownien géométrique

Soit le processus  $\{X_t; t \geq 0\}$  suivant un mouvement Brownien avec un drift  $\mu \geq 0$  et une variance constante égale à  $\sigma^2$ . Le processus stochastique, défini par :  $\{Y_t = e^{X_t}; t \geq 0\}$ , est appelé mouvement Brownien géométrique. Ce processus  $\{Y_t; t \geq 0\}$  est, donc, toujours positif. On dit qu'il suit, à chaque instant  $t$ , une loi Log-normale dont les paramètres dépendent du temps  $t$ . L'espérance et la variance de ce processus peuvent être déduites de celles de la loi Log-normale et on a :

$$E(Y_t / Y_0 = y_0) = y_0 e^{(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2})} \quad \text{et}$$

$$V(Y_t / Y_0 = y_0) = y_0^2 e^{(2\mu t + \sigma^2 t)} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

La fonction densité de  $Y_t$  est  $g(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(Lny - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}}$  ;  $y > 0$

Ainsi, pour les instants  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , les variables  $(Y_{t_2} / Y_{t_1})$ ,  $(Y_{t_3} / Y_{t_2})$ , ...,  $(Y_{t_n} / Y_{t_{n-1}})$  sont indépendantes et suivent la loi Log-normale.

En continue, un mouvement Brownien géométrique s'écrit en fonction du mouvement brownien standard  $\{Z_t; t \geq 0\}$ , sous la forme :

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \mu dt + \sigma dZ_t$$

### 1.2.4 Processus d'Ornstein Uhlenbeck

Le processus d'Ornstein Uhlenbeck est un processus gaussien et markovien. Il est de la forme :

$$dX_t = \kappa(\phi - X_t)dt + \sigma dZ_t \quad (1.2.4-1)$$

Où  $dZ_t = U\sqrt{dt}$  est un processus de Wiener-Lévy ;  $U$  étant une variable aléatoire normale centrée réduite.

La valeur à long terme de ce processus est égale à  $\phi$ . En effet, l'espérance de ce processus, à un instant  $t$ , s'écrit :  $E(dX_t) = E(X_{t+dt}) - E(X_t) = \kappa(\phi - E(X_t))dt$

Or, à long terme (quand  $t \longrightarrow +\infty$ ), on aura :  $E(X_t) \approx E(X_{t+dt}) \Rightarrow E(X_t) \approx \phi$

La variable d'état  $X_t$  a, donc, tendance à osciller autour de la moyenne à long terme, avant de converger vers celle-ci à long terme. Si la valeur de  $X_t$  est plus petite que celle de la moyenne à long terme  $\phi$ , alors le drift réel de ce processus est positif ce qui veut dire que sa moyenne a tendance à augmenter. Alors que dans le cas inverse, la moyenne du processus  $X$  aura tendance à diminuer. C'est, donc, un processus qui a tendance à retrouver sa moyenne à long terme  $\phi$ .

La vitesse de retour à la moyenne est déterminée par le taux de retour à la moyenne  $\kappa$ . Plus la valeur de  $\kappa$  est grande, plus le retour à la moyenne est rapide et vice versa.

L'expression de  $X_t$  peut être déterminée à partir de son équation de diffusion, par un changement de variable  $Y_t = e^{\kappa t} X_t$ . Si le processus  $X_t$  prend la valeur  $X_0$  à l'instant initial  $t=0$ , alors on a  $Y_0=X_0$ . En appliquant le lemme d'Itô au processus  $Y_t = f(t; X_t) = e^{\kappa t} X_t$ , on aura :

$$dY_t = \left( \frac{\partial f}{\partial X_t} \kappa(\phi - X_t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} \sigma dZ_t$$

Avec :  $\frac{\partial f}{\partial X_t} = e^{\kappa t} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \kappa e^{\kappa t} X_t \quad \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} = 0$

On a, donc,

$$\int_0^t dY_s = \int_0^t \left( \kappa(\phi - X_s) e^{\kappa s} + \kappa e^{\kappa s} X_s \right) ds + \int_0^t \sigma e^{\kappa s} dZ_s$$

Soit :  $Y_t - Y_0 = \phi \int_0^t \kappa e^{\kappa s} ds + q \int_0^t e^{\kappa s} dZ_s$

Comme  $Y_0 = X_0$  on a :

$$e^{\kappa t} X_t - X_0 = \phi(e^{\kappa t} - 1) + q \int_0^t e^{\kappa s} dZ_s$$

$$X_t = X_0 e^{-\kappa t} + \phi e^{-\kappa t} (e^{\kappa t} - 1) + q e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} dZ_s$$

alors, son expression explicite est :

$$X_t = \phi + (X_0 - \phi) e^{-\kappa t} + q e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} dZ_s$$

Le processus  $X_t$  est donc gaussien. Comme  $E(dZ_s) = 0$  et  $V(dZ_s) = 1 \forall s$ , l'espérance et la variance du processus  $X_t$  sont les suivantes :

$$E(X_t) = \phi + (X_0 - \phi) e^{-\kappa t} \quad (1.2.4-2)$$

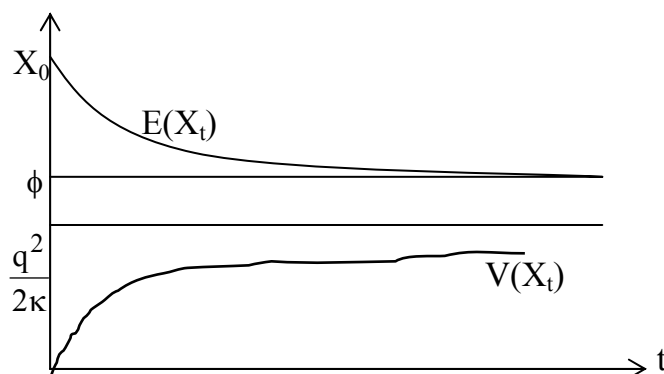
$$V(X_t) = q^2 e^{-2\kappa t} \int_0^t e^{2\kappa s} V(dZ_s) = q^2 e^{-2\kappa t} \int_0^t e^{2\kappa s} ds = q^2 e^{-2\kappa t} \left[ \frac{e^{2\kappa s}}{2\kappa} \right]_0^t$$

$$V(X_t) = \frac{q^2 e^{-2\kappa t}}{2\kappa} (e^{2\kappa t} - 1)$$

Soit,

$$V(X_t) = \frac{q^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) \quad (1.2.4-3)$$

Ainsi, on vérifie bien qu'à long terme, le processus reste gaussien avec, une moyenne  $\phi$  et une variance égale à  $\frac{q^2}{2\kappa}$ .



La convergence est plus rapide pour la variance que pour l'espérance, puisque le terme exponentiel pour la première est le double de celui de la deuxième.

### 1.2.5 Lemme d'Itô

Le prix d'une option est fonction du prix du sous-jacent et du temps. La connaissance de la fonction de variables suivant des processus stochastiques est, à cet effet, très importante pour l'évaluation des options. Le lemme d'Itô (1951) est la base du calcul stochastique.

#### 1.2.5.1 Cas d'une seule variable stochastique

Supposons que  $x$  est une variable stochastique suivant le processus d'Itô défini par:  $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$ , avec  $dz$  suivant un processus de Wiener-Levy et  $a$  et  $b$  sont des fonctions de  $x$  et du temps  $t$ . Ce processus peut s'écrire, également, sous la forme :

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)\sqrt{dt}U$$

Où  $U$  est une variable aléatoire normale centrée réduite.

Soit  $G(x,t)$  une fonction de  $x$  et du temps. Soit le développement en série de Taylor de la fonction  $G$  par rapport à  $x$  et au temps :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} dx dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} dt^2 + \dots$$

A l'ordre  $dt$ , on a :

$$dx^2 = (a(x,t)dt + b(x,t)\sqrt{dt}U)^2 \approx b^2 dt U^2 \quad \text{avec } U^2 \rightarrow \chi^2(1)$$

On a, donc,  $E(U^2) = 1$  et  $V(U^2) = 2$

d'où l'on a :

$$E(dx^2) \approx b^2 dt$$

$$V(dx^2) \approx 2b^4 dt^2$$



A l'ordre  $dt$ , on peut considérer que  $V(dx^2) \approx 0$  et que  $dx^2$  se comporte comme une constante tel que :  $dx^2 \approx b^2 dt$

Par ailleurs, le produit de  $dx$  par  $dt$  est donnée par l'équation suivante :

$$dxdt = (a(x,t)dt + b(x,t)\sqrt{dt}U)dt = adt^2 + bdt^{\frac{3}{2}}$$

On peut, donc, considérer qu'à l'ordre  $dt$  ce produit est nul :  $dxdt \approx 0$

Par conséquence, la différentielle de la fonction  $G$  peut donc s'écrire sous la forme :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt + \dots$$

Soit, en remplaçant  $dx$  par son expression, dans cette équation, on obtient l'expression de la différentielle d'une fonction  $G$  du temps et d'une variable d'état  $X$  suivant le processus prédéfini :

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

Cette équation est, donc, l'application du Lemme d'Itô à une fonction du temps et d'une seule variable d'état.

### 1.2.5.2 Cas de deux variables stochastiques

Dans le cas d'une fonction du temps et de deux variables d'états,  $x_1$  et  $x_2$ , on suppose que celles-ci suivent des processus stochastiques, décrits par les équations suivantes :

$$dx_1 = a_1(x_1, x_2, t)dt + b_1(x_1, x_2, t)dz_1$$

$$dx_2 = a_2(x_1, x_2, t)dt + b_2(x_1, x_2, t)dz_2$$

avec  $dz_1$  et  $dz_2$  suivant un processus de Wiener-Levy et  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  et  $b_2$  sont des fonctions des deux variables d'états,  $(x_1, x_2)$  et du temps  $t$ . Ces processus peuvent s'écrire également sous la forme :

$$dx_1 = a_1(x_1, x_2, t)dt + b_1(x_1, x_2, t)\sqrt{dt}U_1 \quad \text{et}$$

$$dx_2 = a_2(x_1, x_2, t)dt + b_2(x_1, x_2, t)\sqrt{dt}U_2$$

où  $U_1$  et  $U_2$  sont des variables aléatoires normales centrées réduites tel que leur coefficient de corrélation est notée :  $\rho = \rho(U_1, U_2)$ .

Soit  $G(x, t)$  une fonction des deux variables d'états  $(x_1, x_2)$  et du temps. Le développement, en série de Taylor, de la fonction  $G$  par rapport à  $(x_1, x_2)$  et du temps, s'écrit :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} dt^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial t} dx_1 dt + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2 \partial t} dx_2 dt \dots$$

Comme dans le cas d'une seule variable stochastique, on a :

$$dx_1^2 \approx b_1^2 dt \quad \text{et} \quad dx_2^2 \approx b_2^2 dt$$

De même, on a :

$$dx_1 dx_2 = a_1 a_2 dt^2 + (b_1 a_2 U_1 + b_2 a_1 U_2) dt^{\frac{3}{2}} + b_1 b_2 U_1 U_2 dt$$

A l'ordre  $dt$ , on peut écrire :

$$E(dx_1 dx_2) \approx b_1 b_2 dt E(U_1 U_2) = b_1 b_2 dt \text{Cov}(U_1, U_2) = b_1 b_2 \rho dt$$

$$V(dx_1 dx_2) \approx b_1^2 b_2^2 dt^2 E(U_1 U_2 - E(U_1 U_2))^2 = b_1^2 b_2^2 dt^2 E(U_1 U_2 - \rho)^2$$

Comme  $U_1 U_2 \neq \rho$ , à l'ordre  $dt$ , on peut faire l'approximation :

$$dx_1 dx_2 \approx b_1 b_2 \rho dt$$

Ainsi, à l'ordre  $dt$ , on aura :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} b_1^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} b_2^2 dt + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} b_1 b_2 \rho dt + \dots$$

Soit :

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} a_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} b_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} b_2^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} b_1 b_2 \rho \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x_1} b_1 dz_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} b_2 dz_2 \dots$$

Cette équation constitue, donc, l'application du Lemme d'Itô à une fonction du temps et de deux variables d'états.

### 1.2.5.3 La version générale du lemme d'Itô

Soit  $C$  une fonction du temps  $t$  et de  $n$  variables stochastiques (des variables d'états)  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ , suivant chacune un processus d'Itô. Les drifts réels instantanés de ces variables sont respectivement,  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$ . Leurs écarts-types instantanés sont, respectivement,  $b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n$ . Ainsi, on peut écrire :

$$dx_i = a_i dt + b_i dz_i \quad 1 \leq i \leq n$$

Où les  $dz_i$  ;  $1 \leq i \leq n$  sont des processus de Wiener. Les drifts réels sont des fonctions du temps et des  $n$  variables d'états :  $a_i = a_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, t)$ . Les écarts types sont, également, des fonctions du temps et des  $n$  variables d'états :

$$b_i = b_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, t).$$

On peut écrire, également :

$$dx_i = a_i dt + b_i U_i \sqrt{dt} \quad 1 \leq i \leq n$$

Où les  $U_i$  sont des variables aléatoires normales centrées et réduites. Le coefficient de corrélation entre deux variables  $U_i$  et  $U_j$  est noté :  $\rho_{ij} = \rho(U_i, U_j)$

Le développement en série de Taylor de la fonction  $C = C(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, t)$  s'écrit :

$$dC = \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial t} dx_i dt + \dots$$

En se référant aux calculs relatifs à la démonstration du lemme d'Itô, dans le cas d'une variable et dans le cas de deux variables stochastiques, on peut écrire, à l'ordre  $dt$ :

$$dx_i^2 \approx b_i^2 dt$$

$$dx_i dx_j \approx b_i b_j \rho_{ij} dt$$

$$dx_i dt \approx 0$$

Ces équivalences sont d'autant plus vraies que  $dt$  est proche de zéro. Lorsque  $dt$  tend vers zéro ( $dt \rightarrow 0$ ), tous les termes d'un ordre supérieur à  $dt$  sont négligés et la différentielle de la fonction  $C$  peut s'écrire :

$$dC = \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} dt$$

Soit en remplaçant  $dx_i$  par son expression, on obtient la forme générale du lemme d'Itô :

$$dC = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial x_i} a_i + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial x_i} b_i dz_i \quad (1.2.5-1)$$

Cette équation constitue, donc, la forme la plus générale du Lemme d'Itô.

### 1.2.6 Raisonement risque-neutre

Si on considère que le prix du sous-jacent et la valeur de l'option suivent des mouvements Browniens géométriques, tel que :

$$\frac{dS}{S} = \rho_S dt + \sigma_S dZ$$

$$\frac{dC}{C} = \rho_C dt + \sigma_C dZ$$

Le drift du prix de l'option, ainsi que sa volatilité peuvent être déterminés, à partir du lemme d'Itô.

La valeur de l'option est indépendante du comportement de l'investisseur face au risque, puisque celle-ci ne figure pas dans l'équation d'évaluation. Aucun des paramètres relatifs à l'attitude de l'investisseur, vis à vis du risque, ne figure

dans l'équation d'évaluation. Ainsi, pour simplifier l'évaluation des options, celle-ci se fera dans un monde risque-neutre, où la rentabilité espérée de l'option et celle du sous-jacent sont égales au taux d'intérêt sans risque. Autrement dit, le drift de la valeur de l'option et celui de la valeur du sous-jacent sont égaux au taux d'intérêt sans risque.

Si on suppose que ce taux est constant, le raisonnement risque neutre peut s'écrire :

$$E\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = e^{r(T-t)}$$

$$E\left(\frac{C_T}{C_t}\right) = e^{r(T-t)}$$

Comme  $C_T = \text{Max}(S_T - X; 0)$ ,

$$\text{on a } C_t = e^{-r(T-t)} E(\text{Max}(S_T - X; 0)) \quad (1.2.6-1)$$

L'opérateur espérance est relatif à une distribution de probabilité correspondante à la neutralité du risque. Celle-ci est log-normale avec un drift égal au taux d'intérêt sans risque.

Si  $f(S_T, S_t)$  désigne la fonction densité de probabilité de transition du prix du sous-jacent sachant le prix du sous-jacent  $S_t$  à l'instant  $t$ , l'équation (1.4.6-1) s'écrit :

$$C_t = e^{-r(T-t)} \int_0^{+\infty} \text{Max}(S_T - X; 0) f(S_T, S_t) dS_T$$

Ce raisonnement risque-neutre ne peut être tenu, que lorsque l'option peut être couverte par le sous-jacent de manière à former un portefeuille sans risque.

En faisant abstraction à la neutralité du risque, la dernière formule nécessitera l'estimation des taux de rentabilité espérés  $\rho_S$  et  $\rho_C$ , respectivement, du sous-jacent et de l'option. Ceci nous amène à la formule proposée par Samuelson (1965) :

$$C_t = e^{-\rho_c(T-t)} \int_0^{+\infty} \text{Max}(S_T - X; 0) f(S_T, S_t, \rho_S) dS_T$$

où :

- \*  $f(S_T, S_t, \rho_S)$  est la fonction densité de transition du prix du sous-jacent correspondante au drift  $\rho_S$ .
- \* le prix de l'option est actualisé au taux  $\rho_C$ .
- \* les valeurs espérées du sous-jacent et de l'option sont données par les équations :

$$E_S \left( \frac{S_T}{S_t} \right) = e^{\rho_S(T-t)}$$

$$E_C \left( \frac{C_T}{C_t} \right) = e^{\rho_C(T-t)}$$

Où  $E_S$  et  $E_C$  sont les espérances en considérant les drifts respectivement  $\rho_S$  et  $\rho_C$ . Ces paramètres ne sont pas faciles à estimer, et le raisonnement risque neutre résout ce problème puisqu'on peut écrire:  $\rho_S = \rho_C = r$ .

Le raisonnement risque neutre est basé sur l'égalité du prix du risque du marché du sous-jacent et de l'option :  $\frac{\rho_S - r}{\sigma_S} = \frac{\rho_C - r}{\sigma_C} = \lambda$ . Comme on considère que  $\rho_S = \rho_C = r$ , ceci implique que le prix du marché du risque est considéré comme nul :  $\lambda = 0$

En considérant cette égalité et en considérant la distribution de probabilité correspondante aux taux d'intérêt sans risque  $r$ , on peut écrire que :

$$E \left( e^{-r(T-t)} S_T / S_t \right) = S_t$$

Ceci veut dire que la quantité  $e^{-r(T-t)} S_T$  est une martingale qui a, donc, un drift égal à zéro. Cette propriété implique que la connaissance de l'historique des cours ne permet pas de prévoir leurs évolutions dans l'avenir. Une martingale apparaît comme un processus pour lequel l'anticipation rationnelle coïncide avec l'anticipation naïve.

### **1.2.7 Equation de Fokker Planck**

L'équation de Fokker Planck est importée dans le présent travail dans la mesure où elle permet d'étudier les propriétés à long terme des processus stochastiques de la volatilité, considérés dans le présent travail, à savoir le mouvement Brownien, le processus d'Ornstein Uhlenbeck et le processus baptisé « empirique », tel que le logarithme de la volatilité est une fonction linéaire du logarithme de la volatilité.

#### **1.2.7.1 Elaboration de l'équation**

On considère un processus stochastique  $Y_t$ , défini par l'équation suivante :

$$dY = \omega(y, t)dt + q(y, t)dz \quad \text{où } dz \text{ est un processus de Wiener-Lévy}$$

On définit la fonction densité de probabilité de transition  $P(y, t; y', t')$ , tel que :

$$\text{Prob}((a < Y < b \text{ à } t') / (Y = y \text{ à } t)) = \int_a^b p(y, t; y', t') dy'$$

Cette quantité correspond, donc, à la probabilité pour que la variable aléatoire  $Y$  soit comprise entre  $a$  et  $b$  à l'instant  $t'$ , sachant qu'à l'instant  $t$  elle prend la valeur  $y$ .

La fonction densité de probabilité de transition satisfait deux équations différentielles. La première concerne le futur, donc les variables  $y'$  et  $t'$ , et elle est appelée équation « forward ». La deuxième concerne le présent (l'état actuel) et donc les variables  $y$  et  $t$  et elle est appelée équation « backward ». Les deux équations sont du type parabolique.

Dans le présent travail, on s'intéresse à l'équation « forward » qui concerne le futur. Pour établir cette équation on se base sur un modèle trinomial qui constitue une approximation d'une marche aléatoire en temps continu.

Dans le modèle trinomial,  $y$  peut soit augmenter de  $dy$  avec une probabilité  $\pi^+$ , soit diminuer de  $dy$  avec une probabilité  $\pi^-$ , soit stagner au même niveau  $y$  avec une probabilité  $\pi^0=1-\pi^+-\pi^-$ .(cf figure 1)

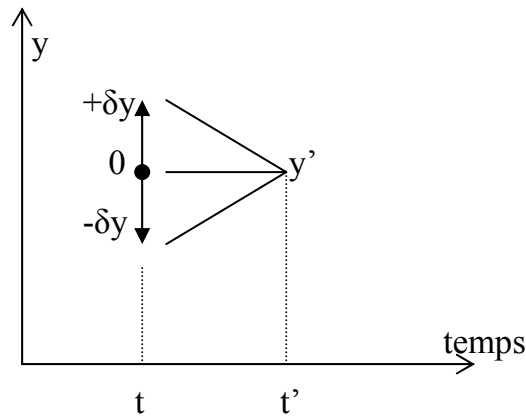


Figure 1 : Evolution de la variable Y, entre les instants t et t', suivant un modèle trinomial

Ainsi, le système comporte 3 inconnues  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  et  $dy$ . Deux équations permettent l'approximation du modèle en temps continu avec le modèle trinomial. La première concerne la moyenne et la deuxième la variance. Ainsi, on peut écrire :

$$E(dY) = \pi^+ dy - \pi^- dy = (\pi^+ - \pi^-)dy$$

$$V(dY) = \pi^+(dy)^2 + \pi^-(dy)^2 - (\pi^+ - \pi^-)^2(dy)^2$$

$$V(dY) = (\pi^+ + \pi^-)(1 - (\pi^+ - \pi^-))(dy)^2$$

$$V(dY) = \pi^+(1 - (\pi^+ - \pi^-))(dy)^2 + \pi^-(1 + (\pi^+ - \pi^-))(dy)^2$$

Si le processus  $Y$  est défini par l'équation :  $dY = \omega(y,t)dt + q(y,t)dz$ , alors on peut écrire :

$$E(dY) = \omega(y,t)dt \quad \text{et}$$

$$V(dY) = q^2(y,t)dt$$

D'où le système :

$$\omega dt = \pi^+ dy - \pi^- dy = (\pi^+ - \pi^-)dy$$



$$q^2 dt = \pi^+ dy(dy - (\pi^+ - \pi^-)dy) + \pi^- dy(dy + (\pi^+ - \pi^-)dy)$$

Soit,

$$\omega dt = \pi^+ dy - \pi^- dy$$

$$q^2 dt = \pi^+ dy(dy - \omega dt) + \pi^- dy(dy + \omega dt)$$

Il s'agit d'un système en  $\pi^+$  et  $\pi^-$ , dont le déterminant est égal à  $2dy^3$ . Ce système est un système de Cramer, si et seulement si  $dy$  est différent de zéro.

Dans ce cas, le système admet une solution unique qui est la suivante :

$$\pi^+ = \frac{\begin{vmatrix} \omega dt & -dy \\ q^2 dt & dy(dy + \omega dt) \end{vmatrix}}{2dy^3}$$

$$\pi^- = \frac{\begin{vmatrix} dy & \omega dt \\ dy(dy - \omega dt) & q^2 dt \end{vmatrix}}{2dy^3}$$

soit :

$$\pi^+ = \frac{1}{2} \frac{dt}{dy^2} (q^2 + \omega dy + \omega^2 dt) \text{ et}$$

$$\pi^- = \frac{1}{2} \frac{dt}{dy^2} (q^2 - \omega dy + \omega^2 dt)$$

Si on suppose que  $dy$  est d'un ordre équivalent à celui de  $\sqrt{dt}$ , le terme en  $dt$  sera négligeable devant  $dy$ . Ainsi, à l'ordre, on aura:

$$\pi^+ \approx \frac{1}{2} \frac{dt}{dy^2} (q^2 + \omega dy) \quad (1.2.7-1)$$

$$\pi^- \approx \frac{1}{2} \frac{dt}{dy^2} (q^2 - \omega dy) \quad (1.2.7-2)$$

Dans le modèle trinomial, pour que le processus  $Y$  prenne la valeur  $y'$  à l'instant  $t'$ , il faut qu'elle prenne, à l'instant  $t-dt$ , l'une des trois valeurs suivantes :  $y'+dy$ ,  $y'$  ou  $y'+dy$ . La probabilité pour que  $Y$  prenne la valeur  $y'$  à l'instant  $t'$  dépend de la probabilité de prendre l'une des trois valeurs précitées à l'instant  $t-dt$  et d'évoluer dans la bonne direction. Autrement dit, cette probabilité s'écrit comme suit :

$$p(y, t; y', t') = \pi^-(y'+dy, t'-dt).p(y, t; y'+dy, t'-dt) + (1 - \pi^-(y', t'-dt) - \pi^+(y', t'-dt)).p(y, t; y', t'-dt) + \pi^+(y'-dy, t'-dt).p(y, t; y'-dy, t'-dt) \quad (1.2.7-3)$$

Soit, en développant ces différentes fonctions, en série de Taylor, au voisinage du point  $(y', t')$ , on obtient les sept équations suivantes:

$$p(y, t; y'+dy, t'-dt) = p(y, t; y', t') + \frac{\partial p}{\partial y'} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y'^2} dy^2 - \frac{\partial p}{\partial t'} dt + \dots$$

$$p(y, t; y', t'-dt) = p(y, t; y', t') - \frac{\partial p}{\partial t'} dt + \dots$$

$$p(y, t; y'-dy, t'-dt) = p(y, t; y', t') - \frac{\partial p}{\partial y'} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y'^2} dy^2 - \frac{\partial p}{\partial t'} dt + \dots$$

$$\pi^+(y', t'-dt) = \pi^+(y', t') - \frac{\partial \pi^+}{\partial t'} dt + \dots$$

$$\pi^+(y'-dy, t'-dt) = \pi^+(y', t') - \frac{\partial \pi^+}{\partial y'} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \pi^+}{\partial y'^2} dy^2 - \frac{\partial \pi^+}{\partial t'} dt + \dots$$

$$\pi^-(y', t'-dt) = \pi^-(y', t') - \frac{\partial \pi^-}{\partial t'} dt + \dots$$

$$\pi^-(y'+dy, t'-dt) = \pi^-(y', t') + \frac{\partial \pi^-}{\partial y'} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \pi^-}{\partial y'^2} dy^2 - \frac{\partial \pi^-}{\partial t'} dt + \dots$$

Soit, en faisant l'abréviation, et en remplaçant les différentes probabilités par leurs expressions, dans l'équation (1.2.7-3), on obtient l'équation suivante :

$$p = p + (p \frac{\partial \pi^-}{\partial y'} + \pi^- \frac{\partial p}{\partial y'}) dy + \frac{1}{2} (p \frac{\partial^2 \pi^-}{\partial y'^2} + \pi^- \frac{\partial^2 p}{\partial y'^2} + 2 \frac{\partial \pi^-}{\partial y'} \frac{\partial p}{\partial y'}) dy^2 - (p \frac{\partial \pi^+}{\partial y'} + \pi^+ \frac{\partial p}{\partial y'}) dy + \frac{1}{2} (p \frac{\partial^2 \pi^+}{\partial y'^2} + \pi^+ \frac{\partial^2 p}{\partial y'^2} + 2 \frac{\partial \pi^+}{\partial y'} \frac{\partial p}{\partial y'}) dy^2 - \frac{\partial p}{\partial t'} dt + \dots$$

En simplifiant, on obtient l'équation suivante :

$$0 = \frac{\partial(p\pi^-)}{\partial y'} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(p\pi^-)}{\partial y'^2} dy^2 - \frac{\partial(p\pi^+)}{\partial y'} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(p\pi^+)}{\partial y'^2} dy^2 - \frac{\partial p}{\partial t'} dt$$

Soit, en regroupant les termes, on obtient l'équation suivante :

$$0 = \frac{\partial(p(\pi^- - \pi^+))}{\partial y'} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(p(\pi^- + \pi^+))}{\partial y'^2} dy^2 - \frac{\partial p}{\partial t'} dt \quad (1.2.7-4)$$

Or, d'après les équations (1.2.7-1) et (1.2.7-2), on a :

$$\pi^- - \pi^+ = -\omega \frac{dt}{dy} \text{ et}$$

$$\pi^- + \pi^+ = q^2 \frac{dt}{dy^2}$$

Ainsi, l'équation (1.2.7-4) devient :

$$0 = -\frac{\partial(p\omega)}{\partial y'} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(pq^2)}{\partial y'^2} dt - \frac{\partial p}{\partial t'} dt$$

Soit,

$$\frac{\partial p}{\partial t'} = -\frac{\partial(p\omega)}{\partial y'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(pq^2)}{\partial y'^2}$$

Il s'agit de l'équation de Fokker-Planck ou l'équation de Kolmogorov « forward ». C'est une équation de type parabolique. Lorsque le drift  $\omega$  et la volatilité de la volatilité  $q$  sont constants, on a affaire à un mouvement brownien géométrique, et la solution de cette équation n'est autre que la fonction densité correspondant à ce mouvement.

### **1.2.7.2 Application de l'équation de Fokker Planck aux processus stochastiques considérés pour la dynamique de la volatilité**

Nous appliquons l'équation de Fokker Planck sur les trois processus considérés pour la dynamique de la volatilité dans le chapitre 3, à savoir, un processus empirique, le processus d'Ornstein Uhlenbeck et le mouvement Brownien.

### 1.2.7.2.1 Processus empirique

Etant donné que la volatilité est stochastique et qu'elle suit une marche aléatoire suivant l'équation :  $d\sigma = \omega(\sigma)dt + q(\sigma)dX$ , la fonction densité de probabilité de transition de la volatilité :  $P(\sigma, t)$ , est, donc, donnée par l'équation Fokker-planck soit :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (q^2 P)}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial (\omega P)}{\partial \sigma}$$

Supposons qu'on connaît la distribution en régime permanent (régime stationnaire)  $P_\infty(\sigma)$ , pour laquelle on a :  $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$

Ce qui implique que : 
$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (q^2 P_\infty)}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial (\omega P_\infty)}{\partial \sigma} = 0$$

Dans ce cas, la probabilité de transition ne dépend plus du temps, elle ne dépend que de la volatilité. En intégrant une fois par rapport à la volatilité, on obtient :

$$\omega P_\infty = \frac{1}{2} \frac{\partial (q^2 P_\infty)}{\partial \sigma} + c \quad ; \quad c \text{ étant la constante d'intégration}$$

On démontre que cette constante  $c$  est égal à zéro, en considérant, le comportement de la volatilité pour des petites valeurs ou pour des grandes valeurs ( 0 et l'infini) (Oztukel, 1996). En effet,  $P_\infty(\sigma)$  doit tendre vers zéro lorsque la volatilité tend vers plus l'infini ce qui implique que  $c$  doit être égale à zéro. Soit,

$$\omega(\sigma) = \frac{1}{2 P_\infty} \frac{\partial (q^2 P_\infty)}{\partial \sigma}$$

Ainsi, si on connaît  $P_\infty(\sigma)$ , on peut déterminer le drift réel de la volatilité. La fonction  $P_\infty(\sigma)$  peut être déterminée si on suppose que tous les paramètres sont indépendants du temps.

$$P_{\infty} = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2a^2}(\text{Log}(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}))^2}$$

Où  $\text{Log}(\bar{\sigma})$  et  $a$  représentent, respectivement, la moyenne et l'écart type de  $\text{Log}(\sigma)$ .

Ainsi, on trouve : 
$$\omega(\sigma) = \frac{1}{2P_{\infty}} \frac{\partial(q^2 P_{\infty})}{\partial\sigma}$$

Soit en remplaçant  $q$  par son expression en fonction de la volatilité, on peut écrire :

$$q^2 P_{\infty} = \frac{\eta^2}{a\sqrt{2\pi}} \sigma^{2\gamma-1} e^{-\frac{1}{2a^2}(\text{Log}(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}))^2}$$

En dérivant, membre à membre, par rapport à la volatilité, on obtient :

$$\frac{\partial(q^2 P_{\infty})}{\partial\sigma} = \eta^2 P_{\infty} \sigma^{2(\gamma-1)} \left(2\gamma - 1 - \frac{1}{a^2} \text{Log}(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}})\right)$$

Le drift réel de la volatilité est, donc :

$$\omega(\sigma) = \frac{1}{2P_{\infty}} \frac{\partial(q^2 P_{\infty})}{\partial\sigma} = \eta^2 \sigma^{2(\gamma-1)} \left(\gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} \text{Log}(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}})\right) \quad (1.2.7-5)$$

Il est fonction de la volatilité et de sa distribution.

L'équation de diffusion de la volatilité peut s'écrire, sous la forme :

$$d\sigma = \left[ \eta^2 \sigma^{2(\gamma-1)} \left(\gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} \text{Log}(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}})\right) \right] dt + \eta \sigma^{\gamma} dX$$

Ce processus aura la propriété de retour à la moyenne, dans le cas, où :

$$E(d\sigma) = \left[ \eta^2 \sigma^{2(\gamma-1)} \left(\gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} E\left(\text{Log}(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}})\right)\right) \right] dt = 0$$

Ceci n'est vrai que dans le cas particulier où  $\gamma = \frac{1}{2}$  puisque  $E(\text{Log}(\sigma)) = \text{Log}(\bar{\sigma})$

Pour que ce processus soit « mean reverting », quel que soit  $\gamma$ , il faut que la moyenne à long terme de la volatilité soit  $\bar{\sigma}e^{(2\gamma-1)a^2}$  au lieu de  $\bar{\sigma}$ .

### 1.2.7.2 Processus d'Ornstein Uhlenbeck

Un processus d'Ornstein Uhlenbeck, appliqué à la volatilité, peut s'écrire sous la forme:  $d\sigma_t = \kappa(\phi - \sigma_t)dt + qdZ_t$  (avec  $dZ_t$  un processus de Wiener-Lévy)

Si on applique l'équation de Fokker-Planck à la densité de probabilité de transition on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (q^2 P)}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial (\kappa(\phi - \sigma_t) P)}{\partial \sigma}$$

Où P est la densité de probabilité de transition relative au processus de la volatilité.

Comme on l'a déjà vu dans le paragraphe (1.2.4), cette densité de probabilité correspond à une loi normale de moyenne :  $E(\sigma_t) = \phi + (\sigma_0 - \phi)e^{-\kappa t}$  et de

$$\text{variance} : V(\sigma_t) = \frac{q^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}).$$

En régime permanent (état stationnaire), la dérivée de la densité de probabilité, par rapport au temps, est nulle :  $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ . Ceci correspond à une densité

stationnaire qu'on désigne par  $P_\infty$ . Cette densité vérifie, donc, l'équation :

$$\frac{\partial^2 (q^2 P_\infty)}{\partial \sigma^2} = 2 \frac{\partial (\kappa(\phi - \sigma_t) P_\infty)}{\partial \sigma}$$

Puisque la variance de la volatilité  $q^2$  est constante, en intégrant une fois par rapport à  $\sigma$ , on obtient l'équation suivante :

$$q^2 \frac{\partial P_\infty}{\partial \sigma} = 2\kappa(\phi - \sigma)P_\infty + \text{cte}$$

En considérant une valeur infinie de  $\sigma$ , on démontre que la constante est nulle.

Ainsi,  $P_\infty$  vérifie l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$q^2 \frac{dP_\infty}{P_\infty} = -2\kappa\sigma + 2\kappa\phi$$

Soit, en intégrant membre à membre, on obtient:

$$\text{Ln}\left(\frac{P_\infty}{C}\right) = \frac{\kappa}{q^2}(2\phi\sigma - \sigma^2) = -\frac{\kappa}{q^2}(\sigma - \phi)^2 + \frac{\kappa\phi^2}{q^2}$$

On en déduit l'expression de la fonction densité de transition en régime permanent  $P_\infty$  :

$$P_\infty = Ce^{\frac{\kappa\phi^2}{q^2}} e^{-\frac{\kappa(\sigma-\phi)^2}{q^2}} \quad (1.2.7-6)$$

La constante d'intégration  $C$  peut être déterminée à partir de l'équation :

$\int_{-\infty}^{+\infty} P_\infty d\sigma = 1$ . En calculant cette intégrale, l'équation devient :

$$Ce^{\frac{\kappa\phi^2}{q^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{\sqrt{\kappa}} = 1$$

On en déduit que la constante  $C$  :

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\kappa}}{q} e^{-\frac{\kappa\phi^2}{q^2}}$$

En remplaçant cette constante, par son expression, dans l'équation (1.2.7-6), on obtient :

$$P_\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\kappa}}{q} e^{-\frac{\kappa(\sigma-\phi)^2}{q^2}}$$

De cette équation, on déduit que le processus  $\sigma$  est gaussien. Sa moyenne, en régime stationnaire, est  $\phi$  et sa variance  $\frac{q^2}{\kappa}$ , ce qui est conforme aux résultats du paragraphe (1.2.4).

### 1.2.7.2.3 *Mouvement Brownien*

Un mouvement Brownien, comme processus de la volatilité, peut s'écrire sous la forme :  $d\sigma_t = \phi dt + q dZ_t$ . Si le processus d'Ornstein Uhlenbeck est stationnaire, il n'est pas de même pour un mouvement Brownien qui n'a pas la propriété de retour à la moyenne et qui n'admet pas de régime stationnaire. En effet, Si on lui applique l'équation de Fokker Planck, sur un mouvement Brownien, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (q^2 P)}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial (\phi P)}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} - \phi \frac{\partial P}{\partial \sigma}$$

S'il existe un régime stationnaire, on aura :

$$q^2 \frac{\partial^2 P_\infty}{\partial \sigma^2} = 2\phi \frac{\partial P_\infty}{\partial \sigma}$$

Soit, en intégrant par rapport à  $\sigma$ , on obtient :

$$q^2 \frac{\partial P_\infty}{\partial \sigma} = 2\phi P_\infty + \text{constante}$$

En considérant une valeur infinie de  $\sigma$ , on démontre que la constante est nulle. Ainsi, la fonction densité de transition  $P_\infty$ , relative à un régime stationnaire, vérifie l'équation suivante :

$$\frac{dP_\infty}{P_\infty} = \frac{2\phi}{q^2} d\sigma \quad \Rightarrow \quad P_\infty = C e^{\frac{2\phi}{q^2} \sigma}$$

Si fonction densité de transition  $P_\infty$  existait, elle devrait vérifier l'équation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_\infty d\sigma = 1$$



$$\text{Or, cette intégrale est égale à : } \left[ \frac{q^2}{2\phi} C e^{\frac{2\phi}{q^2} \sigma} \right]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty \neq 1$$

Cette intégrale est donc divergente, ce qui veut dire que  $P_\infty$  n'existe pas et par conséquent le mouvement Brownien n'admet pas de régime stationnaire.

### **1.2.8 Equation différentielle générale pour l'évaluation des produits dérivés**

Considérons un produit dérivé dont la valeur dépend de  $n$  variables d'états. Si on considère  $n$  autres produits financiers, on a au total  $(n+1)$  produits financiers dont les prix dépendent d'une partie ou de la totalité des  $n$  variables d'états (variables stochastiques). Ces produits financiers peuvent être aussi bien des options avec différents prix d'exercice ou différentes dates d'échéance, que des contrats à terme, des obligations, des actions, des trackers, etc...

On suppose que les hypothèses du modèle de Black & Scholes sont vérifiées et qu'il n'y a pas de versement de dividendes ou de revenus similaires, par ces produits financiers.

Les  $n$  variables d'états sont supposées suivre un processus d'Itô continu dans le temps. On les désigne par :  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ . On suppose que le processus de la  $i$ ème variable d'état est donné par l'équation suivante :

$$dx_i = \mu_i x_i dt + \sigma_i x_i dz_i \quad 1 \leq i \leq n$$

Où les  $dz_i ; 1 \leq i \leq n$  sont des processus de Wiener. Le drift réel de  $x_i$  est fonction du temps et des  $n$  variables d'états. soit :

$$\mu_i = \mu_i (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, t)$$

La volatilité de la  $i$ ème variable d'état  $x_i$  est, également, fonction du temps et des  $n$  variables d'états. Elle peut s'écrire sous la forme:

$$\sigma_i = \sigma_i (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, t).$$

On peut écrire, également :

$$dx_i = \mu_i x_i dt + \sigma_i x_i U_i \sqrt{dt} \quad 1 \leq i \leq n$$

Où les  $U_i$  sont des variables aléatoires normales centrées et réduites. Le coefficient de corrélation, entre deux variables  $U_i$  et  $U_j$ , est noté :  $\rho_{ij} = \rho(U_i, U_j)$

Si on désigne par  $C_k$  la valeur du produit financier numéro  $k$  ( $1 \leq k \leq n+1$ ), et par  $r$  le taux d'intérêt à très court terme. Le prix du produit dérivé dont on cherche la valeur est un parmi les  $n+1$  produits financiers considérés. Le taux d'intérêt  $r$  peut être une variable parmi les  $n$  variables d'états considérées.

Comme les prix des  $n+1$  produits financiers sont des fonctions des  $n$  variables d'état  $x_i$ , leurs prix suivent les processus de diffusion suivants :

$$dC_k = \mu_k C_k dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{ik} C_k dz_i \quad \text{avec } 1 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad 1 \leq k \leq n+1$$

Où  $\mu_k$  est le drift réel du produit dérivé numéro  $k$  et  $\sigma_{ik}$  est la part de sa volatilité due à la variable d'état n°  $i$ .

Or, d'après le lemme d'Itô (équation 1.2.5-1), on a :

$$dC_k = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial x_i} \mu_i x_i + \frac{\partial C_k}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 C_k}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_i \sigma_j x_i x_j \rho_{ij} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial x_i} \sigma_i x_i dz_i \quad (1.2.8-1)$$

Par identification des deux équations ((1.2.8-1) et la précédente), on obtient les deux équations suivantes:

$$\mu_k C_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial x_i} \mu_i x_i + \frac{\partial C_k}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 C_k}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_i \sigma_j x_i x_j \rho_{ij} \quad (1.2.8-2)$$

et

$$\sigma_{ik} C_k = \frac{\partial C_k}{\partial x_i} \sigma_i x_i \quad (1.2.8-3)$$

Comme on dispose de  $n+1$  produits financiers et de  $n$  processus de Wiener dans l'équation (1.2.8.1), on peut former un portefeuille sans risque,  $\Pi$ , constitué de ces  $n+1$  produits financiers, dans des proportions  $\alpha_k$   $1 \leq k \leq n+1$ . La valeur de ce portefeuille s'écrit :

$$\Pi = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k C_k$$

soit

$$d\Pi = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k dC_k = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \mu_k C_k dt + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \sigma_{ik} C_k \right) dz_i$$

Pour que le portefeuille  $\Pi$  soit sans risque, il faut que les proportions  $\alpha_k$  soient choisies, de manière à éliminer tous les termes stochastiques. Soit :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \sigma_{ik} C_k = 0 \quad \forall i ; 1 \leq i \leq n$$

La variation de la valeur du portefeuille  $\Pi$  pendant un intervalle de temps infinitésimal s'écrit dans ces conditions :

$$d\Pi = \left( \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \mu_k C_k \right) dt$$

Si la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage gagnant sans risque est satisfaite, le portefeuille sera rémunéré au taux sans risque  $r$  et on a :

$$d\Pi = \left( \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \mu_k C_k \right) dt = r\Pi dt = r \left( \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k C_k \right) dt$$

d'où la relation :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k (\mu_k - r) C_k = 0$$

Soient  $Y$  et  $W$  deux vecteurs de rang  $n+1$ . Soient  $(V_i ; 1 \leq i \leq n)$   $n$  vecteurs, également, de rang  $n+1$  :

- Les composantes de  $Y$  sont  $\alpha_k ; 1 \leq k \leq n+1$
- Les composantes de  $(V_i ; 1 \leq i \leq n)$  sont  $\sigma_{ik} C_k ; 1 \leq k \leq n+1$

- Les composantes de  $W$  sont  $(\mu_k - r)C_k ; 1 \leq k \leq n+1$

D'une part, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \sigma_{ik} C_k = 0 \quad \forall i ; 1 \leq i \leq n$$

$\Leftrightarrow$  le produit scalaire de  $Y$  et  $V_i$  est nul :  $\forall i ; 1 \leq i \leq n \quad Y \cdot V_i = 0$

$\Leftrightarrow$  les vecteurs  $Y$  et  $V_i$  sont orthogonaux :  $\forall i ; 1 \leq i \leq n \quad Y \perp V_i$

$\Leftrightarrow$  le vecteurs  $Y$  est orthogonal à tout vecteur  $V$  combinaison linéaire des  $n$

vecteurs  $(V_i ; 1 \leq i \leq n)$  :  $V = \sum_{i=1}^n \gamma_i V_i ; \forall \gamma_i ; 1 \leq i \leq n \quad \Leftrightarrow \quad Y \perp V$

D'autre part, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k (\mu_k - r) C_k = 0$$

$\Leftrightarrow$  le produit scalaire des vecteurs  $Y$  et  $W$  est nul :  $Y \cdot W = 0$

$\Leftrightarrow Y$  et  $W$  sont orthogonaux :  $Y \perp W$

On en déduit que :  $\forall i ; \forall \gamma_i ; 1 \leq i \leq n \quad V = \sum_{i=1}^n \gamma_i V_i$  est colinéaire à  $W$

$\Leftrightarrow \forall i \forall \gamma_i ; 1 \leq i \leq n \quad \exists \alpha$  (unique, si le marché financier est complet), tel que :

$$W = \alpha V = \alpha \sum_{i=1}^n \gamma_i V_i = \sum_{i=1}^n \alpha \gamma_i V_i$$

Si on pose  $\lambda_i = \alpha \gamma_i ; (\forall i ; 1 \leq i \leq n)$ , on peut affirmer que:  $\forall W$  il existe un vecteur unique de composantes  $(\lambda_i ; 1 \leq i \leq n)$  tel que :

$$W = \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i \quad (1.2.8-4)$$

Le coefficient  $\lambda_i$  représente le prix du marché du risque lié au mouvement de la variable d'état n°  $i$ . En considérant les composantes des vecteurs  $V_i$  et  $W$ , l'équation vectorielle (1.2.8-4), est équivalente au système de  $n+1$  équations scalaires suivantes :

$$(\mu_k - r)C_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{ik} C_k \quad \forall k ; 1 \leq k \leq n+1$$

Les coefficients  $(\lambda_i ; 1 \leq i \leq n)$  sont des fonctions du temps et des  $n$  variables d'états. Soit, en remplaçant  $\mu_k C_k$  et  $\sigma_{ik} C_k$  par leurs expressions dans les équations, respectivement, (1.2.8-2) et (1.2.8-3), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_k}{\partial x_i} \mu_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 C_k}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_i \sigma_j x_i x_j \rho_{ij} - r C_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial C_k}{\partial x_i} \sigma_i x_i$$

En regroupant les termes en  $x_i$ , on peut écrire :

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^n (\mu_i - \lambda_i \sigma_i) \frac{\partial C_k}{\partial x_i} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 C_k}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_i \sigma_j x_i x_j \rho_{ij} - r C_k = 0$$

Cette équation donne le prix de chacun des  $(n+1)$  produits financiers  $1 \leq k \leq n+1$ , et plus particulièrement, du produit financier qu'on a considéré tout au début.

On peut affirmer que la valeur  $C$  d'un produit financier qui dépend du temps  $t$  et de  $n$  variables d'états  $(x_i ; 1 \leq i \leq n)$  est solution de l'équation différentielle, à dérivées partielles, linéaire de second ordre suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \sum_{i=1}^n (\mu_i - \lambda_i \sigma_i) \frac{\partial C}{\partial x_i} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_i \sigma_j x_i x_j \rho_{ij} - r C = 0$$

Il s'agit de l'équation différentielle à dérivées partielles générale d'équilibre des produits dérivés (contingent claims) développée par Garman (1976) et Cox, Ingersoll & Ross (1985).

La recherche d'une solution particulière de cette équation dépend des conditions aux limites qui sont spécifiques à chaque produit financier.

Si le marché des options est complet, cette équation admet une solution unique. Si la variable d'état  $x_i$  est négociable, alors la quantité  $\mu_i - \lambda_i \sigma_i$  est égale au taux de l'actif sans risque  $r$ . Sinon la solution de l'équation sera fonction du prix du marché du risque  $\lambda_i$ , qui reflète les préférences de l'investisseur, concernant la variable d'état  $x_i$ . Si le marché est complet, alors  $\lambda_i$  est unique.

## **1.3 OPTIONS SUR INDICES BOURSIERS ET BASES DE DONNEES**

### **1.3.1 Les options sur indices**

#### **1.3.1.1 Historique :**

Les options sur indices boursiers sont apparues en 1983 sur les marchés d'options négociables de Chicago, le Chicago Board options exchange (CBOE) et le Chicago Mercantile Exchange (CME).

Ce type d'option a connu un énorme succès suite au développement de la théorie et de la pratique financière et suite à l'essor des marchés d'options négociables dès 1973 à Chicago. Ce succès est, également, une conséquence de l'attention croissante des praticiens à la gestion indicielle et au risque du marché. Certains chercheurs ont contribué, par leurs travaux, au succès de ces marchés, en démontrant que des marchés financiers complets pouvaient être engendrés par des contrats d'options sur un portefeuille représentatif du marché financier dans son ensemble.

Le succès des options sur indices aux Etats-Unis a été suivi par la création de marchés de ce type en Asie et en Europe. Ainsi, les gestionnaires de portefeuilles disposent d'une large gamme d'options sur indices et peuvent gérer le risque des principaux marchés boursiers du monde avec plus de flexibilité.

Ce type d'option concerne, uniquement, le marché des actions qui soulève le plus d'intérêt en matière de gestion des risques et des activités spéculatives et qui reflète le mieux le potentiel de croissance d'une économie à moyen et long terme.

Les options sur indices permettent la répartition des risques dans l'économie et la contribution à la complétude des marchés. De plus elles ont un rôle informationnel : information-volatilité anticipée-prix des options sur indices-couverture se base sur un prix de couverture connu.

L'expérience a montré que les investisseurs privilégient les options sur indice en période troublée et se reportent sur les options sur action, une fois les incertitudes levées

#### **1.3.1.2 Indice boursier : définition et méthode de calcul**

Un indice boursier est une mesure statistique de la performance d'un marché d'action ou d'un segment de marché d'action. On peut citer, à cet effet, le CAC 40 et le SBF250 qui mesurent l'évolution du marché financier Français.

Un indice boursier ne comprend pas tous les titres du marché. Il doit être conçu de manière à ce que l'échantillon des titres sélectionnés fournisse une bonne approximation du marché à analyser. Il doit refléter la performance et le risque du marché, dans son ensemble, afin de servir comme point de repère dans la mesure des performances des portefeuilles boursiers.

Le CAC40 est un indice restreint qui comporte 40 titres cotés en continu. Le SBF 250 est un indice plus large qui comporte 250 titres. La bonne correspondance entre ces indices se mesure par le coefficient de corrélation qui doit approcher l'unité. C'est le cas pour le CAC 40 qui a un coefficient de corrélation avec le SBF250 très voisin de 1.

Cet aspect de bonne correspondance est important en matière de contrat d'options sur indices boursiers. La facilité d'arbitrage entre le marché sous-jacent et le marché des options dépend de la facilité de répliquer l'indice. Celle-ci est d'autant moins coûteuse que le nombre de titres qui composent l'indice est faible. C'est ainsi, que les indices boursiers qui servent de base aux options sont constitués d'un nombre de titres restreint.

Outre le nombre de titres qui composent l'indice et sa bonne correspondance avec l'indice de marché, la méthode de calcul de l'indice est aussi déterminante. Il existe principalement trois méthodes de calcul : la moyenne arithmétique simple, la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique pondérée.

C'est donc la troisième méthode, à savoir celle de la moyenne arithmétique pondérée par les capitalisations boursières des titres qui composent l'indice, qui est la plus utilisée pour le calcul des indices boursiers des marchés financiers.

La formule permettant de calculer l'indice est la suivante :

$$I(t) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} N_{it}}{K_t \sum_{i=1}^n P_{i0} N_{i0}} I(0)$$

$I(t)$  : Valeur de l'indice à l'instant  $t$

$I(0)=1000$  à  $t=0$  qui correspond au 31 décembre 1987 à l'ouverture de la bourse

$P_{it}$ : Prix du titre  $i$  à l'instant  $t$

$N_{it}$ : Nombre du titre  $i$  à l'instant  $t$

$N_{it}P_{it}$ : capitalisation boursière du titre  $i$  à l'instant  $t$

$P_{i0}$ : prix du titre  $i$  à l'instant 0

$N_{i0}$ : Nombre du titre  $i$  à l'instant 0

$N_{i0}P_{i0}$ : Capitalisation boursière du titre  $i$  à l'instant 0



$K_t$  : coefficient d'ajustement de la base qui tient compte des admissions et des radiations de l'échantillon, ainsi que, des opérations modifiant le capital des entreprises de l'échantillon.

Les indices boursiers, tel que le CAC40, sont ajustés lors d'opération affectant la capitalisation boursière d'un titre ou la modification de la composition de l'indice.

La formule précédente peut être réécrite pour faire apparaître le caractère de moyenne arithmétique pondérée.

$$I(t) = I(0) \sum_{i=1}^n \omega_i \left( \frac{P_{it}}{P_{i0}} \right) \quad \text{où}$$
$$\omega_i = \frac{N_{it} P_{i0}}{K_t \sum_{i=1}^n N_{it} P_{i0}} = \text{coefficient de pondération du titre } i$$

Depuis le début du mois de décembre 2003, pour le CAC40 la pondération ne se fait plus par la capitalisation boursière mais par la capitalisation flottante « le flottant » qui est une partie de la première, complémentaire de la capitalisation bloquée, qui sert à contrôler une société ou un groupe de sociétés.

Le CAC40 (Cotation Assistée en Continu) a été lancé en juin 1988. Il est calculé à partir d'un échantillon de 40 valeurs parmi les valeurs les plus liquides du marché. Ces valeurs sont choisies suivant des critères boursiers et économiques. Elles doivent figurer parmi les cent premières capitalisations boursières de la place de Paris et doivent avoir un flottant important de l'ordre de 65%. Une valeur de l'échantillon qui ne répond plus à ces critères sort de l'échantillon et sera remplacée par une autre valeur.

L'indice CAC40 est calculé en permanence et à chaque nouveau cours coté de l'une des valeurs de l'échantillon. Il est diffusé toutes les 30 secondes, en temps réel.

### **1.3.1.3 Spécificité du contrat d'option sur indice et les risques inhérents :**

Les caractéristiques d'une option sur indice sont semblables à celles d'une option sur action. La principale différence réside dans les modalités d'exercice. Le détenteur d'une option sur action reçoit ou livre l'action en question en cas d'exercice. Ce ne peut être le cas du détenteur d'une option sur indice boursier, puisque ce sous-jacent est fictif, non négociable et ne peut faire l'objet d'une transaction.

La bourse d'option attribue une valeur monétaire à l'indice afin de pouvoir l'utiliser comme sous-jacent d'une option. Il n'y aura pas de livraison du sous-jacent, mais le paiement de la différence, entre la valeur de l'indice et le prix d'exercice. Dans le cas d'une option d'achat, si la taille d'un contrat d'option sur le CAC40 est de  $N$ , si le prix d'exercice est  $E$  et que la valeur de l'indice est  $I$ , le jour de l'exercice de l'option, le détenteur de l'option encaisse la somme :

$$\begin{array}{lll} N(I - E) & \text{si} & I \geq E \\ 0 & \text{si} & I < E \end{array}$$

La non-négociabilité des indices boursiers engendre trois difficultés, pour les détenteurs d'options sur indices, à savoir :

- risque de réplique de l'indice
- risque d'exercice
- la multiplicité des dividendes

Ces trois risques sont sources de difficultés pour l'évaluation des options par les modèles traditionnels basés sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage.

#### ***1.3.1.3.1 Risque de réplique de l'indice***

Les arbitrages doivent pouvoir s'effectuer facilement pour qu'un marché d'option puisse fonctionner efficacement.

Afin de réaliser des arbitrages entre le marché des actions et le marché d'options sur indice, il doit être possible de répliquer l'indice en constituant un portefeuille d'action.

Il est d'autant plus facile de répliquer l'indice qu'il comporte un nombre limité d'actions. Si l'indice est basé sur un grand nombre d'actions, il est nécessaire de recourir à des techniques de gestion indicielle qui à partir d'un petit nombre de titres choisis, permettent de constituer un portefeuille offrant le même profil de rendement que l'indice. Ces techniques n'étant pas toujours parfaitement fiables il existe un risque de réplification de l'indice.

#### ***1.3.1.3.2 Risque d'exercice***

Lorsqu'un opérateur doit liquider son portefeuille répliquant l'indice pour faire face à un exercice de l'option, il n'est pas certain de pouvoir vendre les actions constituant son portefeuille aux prix qui ont servi à calculer la valeur de l'indice au moment de l'exercice. En effet le vendeur d'option assigné pour un exercice n'est informé que le lendemain de l'exercice. Pendant ce temps, les prix des actions constituant son portefeuille peuvent varier considérablement. Ce risque d'exercice différencie les options sur indices des options sur actions.

#### ***1.3.1.3.3 Risque de multiplicité des dividendes :***

Le paiement de dividendes pour une action doit s'accompagner, au niveau de son cours, du montant de ces dividendes, autrement, un profit par arbitrage peut être réalisé. La valeur d'une option dépend, donc, des perspectives de versement de dividendes pendant la vie de l'option. Dans le cas d'une option sur indice, le flux des dividendes des actions formant l'indice ne peut être négligé, ainsi, il faut connaître les dates et les montants de tous les dividendes futurs jusqu'à la date d'échéance de l'option, de toutes les actions formant l'indice.

#### **1.3.1.4 Tracker**

Le tracker constitue une réponse aux problèmes précités liés aux options sur indices boursiers. Le Tracker (ou Exchange Traded Fund, « ETF ») est un fond (OPCVM) indiciel négociable en bourse de la même manière qu'une action. Il est conçu pour répliquer la performance d'un indice boursier ou d'un panier d'actions. On dit, alors, qu'il traque l'indice d'où son nom de tracker.

Il peut être composé des actions d'un indice ou d'une sélection d'actions dont il répliquera précisément la performance.

Négociés aussi facilement que des actions, ils constituent un investissement diversifié qui limite les risques inhérents à un investissement important en actions individuelles. L'achat ou la vente d'un tracker est plus avantageux que l'achat ou la vente de l'ensemble des actions constitutives du panier sous-jacent. En effet, l'achat (la vente) de l'ensemble des actions composant le tracker génère, nécessairement, plus d'ordres donc davantage de coûts de transaction et peut impliquer des frais de courtage, des droits de garde et des droits de gestion administrative plus importants. En achetant un tracker ces éléments sont pris en charge par le fond.

Un tracker est coté en continu. Son prix de marché est le résultat de la confrontation entre l'offre et la demande. Il correspond à une fraction, une part d'un indice, (un dixième, un centième, voire un millième de la valeur de l'indice sous-jacent). Par exemple, si la valeur de l'indice s'élève à 3700 et que la fraction définie par l'émetteur est de 1/100, le prix du tracker sera d'environ 37 Euros.

Au fur et à mesure que les mois passent, deux facteurs vont jouer sur l'évolution de la valeur de la part, en plus de l'évolution même de l'indice : les frais de gestion courus, qui viennent en déduction du niveau de l'indice en Euros divisé par 100 jusqu'à un plafond annuel.

les dividendes et tous revenus perçus par le fonds, qui viennent s'ajouter au niveau de l'indice divisé par 100 au fur et à mesure des détachements des dividendes sur actions. Comme l'indice CAC40 ne valorise pas les détachements des dividendes des actions le composant, ceci peut engendrer une différence de la valeur liquidative du tracker et la valeur de l'indice divisée par 100.

Le tracker, comme sous-jacent d'un produit dérivé, présente un avantage par rapport à un indice boursier, puisqu'il est négociable et qu'il a des performances qui sont quasiment les mêmes que celles de l'indice boursier. De ce fait, les risques liés à la gestion de produits dérivés sur indice disparaissent complètement lorsque le sous-jacent est un tracker. Ceci est d'autant plus vrai dans la gestion du risque par les produits dérivés.

### **1.3.1.5 Processus suivis par la valeur d'un indice ou par le prix d'un Tracker**

Un indice ou un Tracker est constitué par un portefeuille d'actions ( $A_k ; 1 \leq k \leq n$ ), ayant des prix respectifs, à l'instant  $t$ , ( $S_{k,t} ; 1 \leq k \leq n$ ) avec des proportions respectives, à un instant  $t$ , ( $\alpha_{k,t} ; 1 \leq k \leq n$ ) qui correspondent à des nombres de titres respectifs ( $N_{k,t} ; 1 \leq k \leq n$ ). Ainsi, à l'instant  $t$ , la valeur du portefeuille est :

$$\Pi_t = \sum_{k=1}^n N_{k,t} S_{k,t}$$

On peut écrire, pour chacune des actions, l'égalité suivante :

$$N_{k,t} S_{k,t} = \alpha_{k,t} \Pi_t \quad \forall k; 1 \leq k \leq n \quad (1.3.1-1)$$

D'un autre coté, après un intervalle de temps infinitésimal  $dt$ , en supposant que le nombre d'actions, dans le portefeuille, reste inchangé entre  $t$  et  $t+dt$ , la valeur du portefeuille devient :

$$\Pi_{t+dt} = \sum_{k=1}^n N_{k,t} (S_{k,t+dt} + D_{k,t})$$

Où  $D_{k,t}$  sont les dividendes distribués par l'action  $k$  entre  $t$  et  $t+dt$ . S'il n'y a pas de distribution de dividendes, pendant cette période,  $D_{k,t}$  sera nul.

Le rendement instantané, ex-ante, du portefeuille s'écrit :

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = \frac{\Pi_{t+dt} - \Pi_t}{\Pi_t} = \sum_{k=1}^n \frac{N_{k,t}}{\Pi_t} (S_{k,t+dt} - S_{k,t} + D_{k,t})$$

Or, d'après la relation (1.3.1-1), on a :  $\frac{N_{k,t}}{\Pi_t} = \frac{\alpha_{k,t}}{S_{k,t}}$ . Donc, le rendement

instantané du portefeuille s'écrit :

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{k,t}}{S_{k,t}} (S_{k,t+dt} - S_{k,t} + D_{k,t})$$

Par abus de notation, on notera :  $S_{k,t+dt} - S_{k,t} + D_{k,t} = dS_{k,t}$

On peut, donc, écrire :

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,t} \frac{dS_{k,t}}{S_{k,t}}$$

On en déduit que le rendement instantané d'un portefeuille est la moyenne des rendements instantanés des actions le constituant, pondérés par les proportions respectives de ces actions dans le portefeuille.

Supposons que le prix de chacune des actions suit un mouvement Brownien

géométrique. Soit :  $\frac{dS_{k,t}}{S_{k,t}} = \mu_k dt + \sigma_k dz_k = \mu_k dt + \sigma_k U_k \sqrt{dt}$

Le rendement instantané du portefeuille est tel que :

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = \left( \sum_{k=1}^n \alpha_{k,t} \mu_k \right) dt + \left( \sum_{k=1}^n \alpha_{k,t} \sigma_k U_k \right) \sqrt{dt}$$

soit en posant :

$$\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,t} \mu_k$$

$$Y = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,t} \sigma_k U_k$$

$Y$  est une combinaison linéaire de lois normales centrées réduites. Elle est, donc, centrée mais pas réduite. Elle peut s'écrire sous la forme :

$$Y = \sigma U$$

où  $U$  est une loi normale centrée réduite et  $\sigma$  est l'écart type de  $Y$ . Ce dernier peut s'écrire :

$$\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{k,t} \alpha_{j,t} \sigma_k \sigma_j \rho_{k,j}}$$

où  $\rho_{k,j}$  est le coefficient de corrélation linéaire entre  $U_k$  et  $U_j$  qui vaut 1 lorsque  $k=j$ .

Ainsi, le rendement instantané du portefeuille peut s'écrire :

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = \mu dt + \sigma U \sqrt{dt} = \mu dt + \sigma dz$$

où  $dz = U \sqrt{dt}$  est un processus de Wiener-Lévy

On peut affirmer que le rendement instantané d'un indice boursier ou d'un Tracker suit un processus Brownien géométrique si les processus de diffusion, des prix des actions le constituant, sont eux-mêmes Browniens géométriques.

### 1.3.2 Données

L'évaluation, suivant les trois modèles, a nécessité l'utilisation de deux bases de données relative à des contrats d'options sur l'indice CAC40 négociés sur le Monep : la première est une base intraday et la seconde est une base journalière.

Pour la partie gestion du risque par les options, seule la base intraday a été utilisée.

Etant donné, que les données, relatives à la partie empirique de cette thèse, concernent des options d'achat sur l'indice CAC40, la présentation du marché de ces options, la description des contrats qui y sont négociés ainsi que leur cotation, s'avèrent nécessaires, avant de présenter les bases précitées.

### **1.3.2.1 Le Monep**

Le MONEP (Marché d'Options Négociables de Paris), ouvert depuis le 10 septembre 1987, compte aujourd'hui parmi les bourses d'options les plus actives dans le monde.

Le MONEP partie intégrante des marchés de la bourse de Paris, s'inscrit dans le cadre de ses structures et se trouve placé sous l'autorité réglementaire du Conseil du Marché Financier (CMF).

La bourse de Paris a connu des changements depuis, y compris le Monep. Ceci est dû, notamment, à la fusion entre les places de Paris, Bruxelles et Amsterdam et Lisbon et la création d'un nouveau marché financier européen Euronext. La description des contrats du MONEP est relative à la période correspondant aux données de la base soit la période 1997-1998, avant que cette fusion n'ait lieu.

#### ***1.3.2.1.1 Description des contrats d'options sur le MONEP***

Le Monep offre deux types de contrats d'options négociables : l'un porte sur les actions de très grandes sociétés françaises l'autre concerne l'indice CAC40. Il y'a deux types d'options sur indice CAC40 : options à maturité courte de type américaine et options à maturité longue de type européenne. C'est ce dernier type qui nous intéresse puisqu'il correspond aux observations des deux bases de données.



L'introduction des options à long terme, de type européen, permet aux gérants de portefeuilles de vendre des options pour se couvrir ou pour améliorer leurs performances, sans risquer d'être assignés (pas d'exercice anticipé), à un coût plus raisonnable, puisqu'une option à maturité longue coûte beaucoup moins cher qu'une succession d'options à maturité courte et une option de type européenne coûte moins cher qu'une option de type américain.

L'option sur CAC40 à maturité longue ne peut être exercée que le dernier jour de négociation à 16H00. Sa durée maximum jusqu'à l'échéance varie entre 18 mois et 2 ans. L'unité de négociation est de 50 francs par point d'indice. L'échelon de cotation est de 0.01 Francs par point soit 0,5 points par contrat et par point. Un contrat comporte 100 options. Deux échéances sont ouvertes, distantes l'une de l'autre de 6 mois. Ces échéances sont mars et septembre à échéance maximale de deux ans. Entre deux prix d'exercice, on a un intervalle standard de 150 points d'indice.

A l'ouverture d'une échéance, la SCMC (Société de Compensation des Marchés Conditionnels) crée trois séries dont les prix d'exercice sont les plus proches de la valeur de l'indice (1 à parité et 2 en dehors des cours). Puis il y a création de nouvelles séries, si le cours de l'indice varie de plus ou moins 75 points.

L'exercice d'une option donne lieu à un règlement en espèce correspondant au calcul suivant :  $(\text{indice de liquidation} - \text{prix d'exercice}) \times 50 \times \text{nombre de contrats}$ . L'indice de liquidation est la moyenne des indices calculés entre 15H40 et 16H00 le jour de l'échéance.

A l'échéance, les options qui expirent, dans les cours, sont exercées automatiquement, sauf instruction contraire du client.

### **1.3.2.1.2 Cotation**

Le prix d'une option sur le marché est le résultat de la confrontation des ordres d'achat et de vente relatifs à cette option.

En ce qui concerne la période relative aux données utilisées pour la partie empirique, les options sur l'indice CAC40 sont cotées sur le « groupe continu mixte ». Les négociations s'y effectuent en continu de 10H00 à 17H00, à la fois à la criée et par l'intermédiaire du Système de Transaction Automatisée du Monep (STAMP).

Actuellement, les classes d'options du Monep sont réparties en deux groupes de cotation qui sont soumis à des règles de fonctionnement différentes :

- Sur le groupe du continu, les contrats sont cotés, en continu, exclusivement, sur le système NSC.
- Sur le groupe e multi-fixing, les contrats sont cotés électroniquement selon une procédure de confrontation générale des ordres. Deux confrontations (fixing) sont organisées à une heure fixe, au cours de chaque séance de négociation.

### **1.3.2.2 Base de données intraday**

#### **1.3.2.2.1 Description**

La base de données est constituée d'options d'achat (Call) sur l'indice CAC40 de longue durée (PXL), donc, de type européen dont les observations, enregistrées toutes les trente secondes s'il y'a transaction, s'étalent entre le 2 janvier 1998 et le 30 juin 1998. Soit 57 contrats qui correspondent à 9204 observations. Les données par observation sont la valeur de l'indice CAC40, le prix d'exercice, la date courante, la date d'échéance et la valeur de l'option. Le montant des dividendes des valeurs qui composent l'indice CAC40, ainsi que les dates de leurs distributions ne figurent pas parmi les données. Le taux d'intérêt court terme ne figure pas non plus parmi les données.

#### **1.3.2.2.2 Données calculées**

A partir de ces données, sont calculés le temps restant jusqu'à l'échéance, la volatilité historique suivant un calcul approché (cf paragraphe 2.2.1.2), la volatilité implicite. La volatilité implicite est calculée en minimisant la différence entre la valeur d'une option calculée à partir de la formule de Black & Scholes et le prix de l'option sur le marché. L'algorithme « interpolation » (cf. paragraphe 2.2.2.1) a été utilisé pour ce calcul. Le temps restant à l'échéance est obtenu par différence de la date courante avec la date d'échéance de l'option.

#### **1.3.2.2.3 Traitement de la base**

Alors que, le calcul de la valeur de l'option se fait par observation, indépendamment des autres observations, pour les modèles de Black & Scholes et le modèle à volatilité stochastique, celui-ci nécessite la constitution d'un fichier d'apprentissage et d'un fichier test, dans le cas de l'évaluation des options, par le modèle neuronal, en utilisant la technique du cross-validation.

A cet effet, la base intraday fait l'objet de différents découpages : découpage selon des contrats et découpage selon des classes de moneyness et temps restant à l'échéance. Pour chaque découpage, on applique les trois types de modèles, à savoir, le modèle de Black & Scholes, le modèle à volatilité stochastique et le modèle neuronale. L'enchaînement des traitements et des découpages de la base intraday est illustré dans la figure 2.

Pour chaque classe de contrats (classe 1 et classe 9) et chaque classe de moneyness et de durée de vie résiduelle, on génère plusieurs fichiers d'apprentissage et de test qui dépendent des inputs à considérer et, donc, du modèle neuronal à développer.

La base intraday est agrégée par jour pour l'estimation des paramètres dans le cadre des modèles à volatilité stochastique et pour la gestion dynamique des risques financiers qui fait l'objet du chapitre 5.

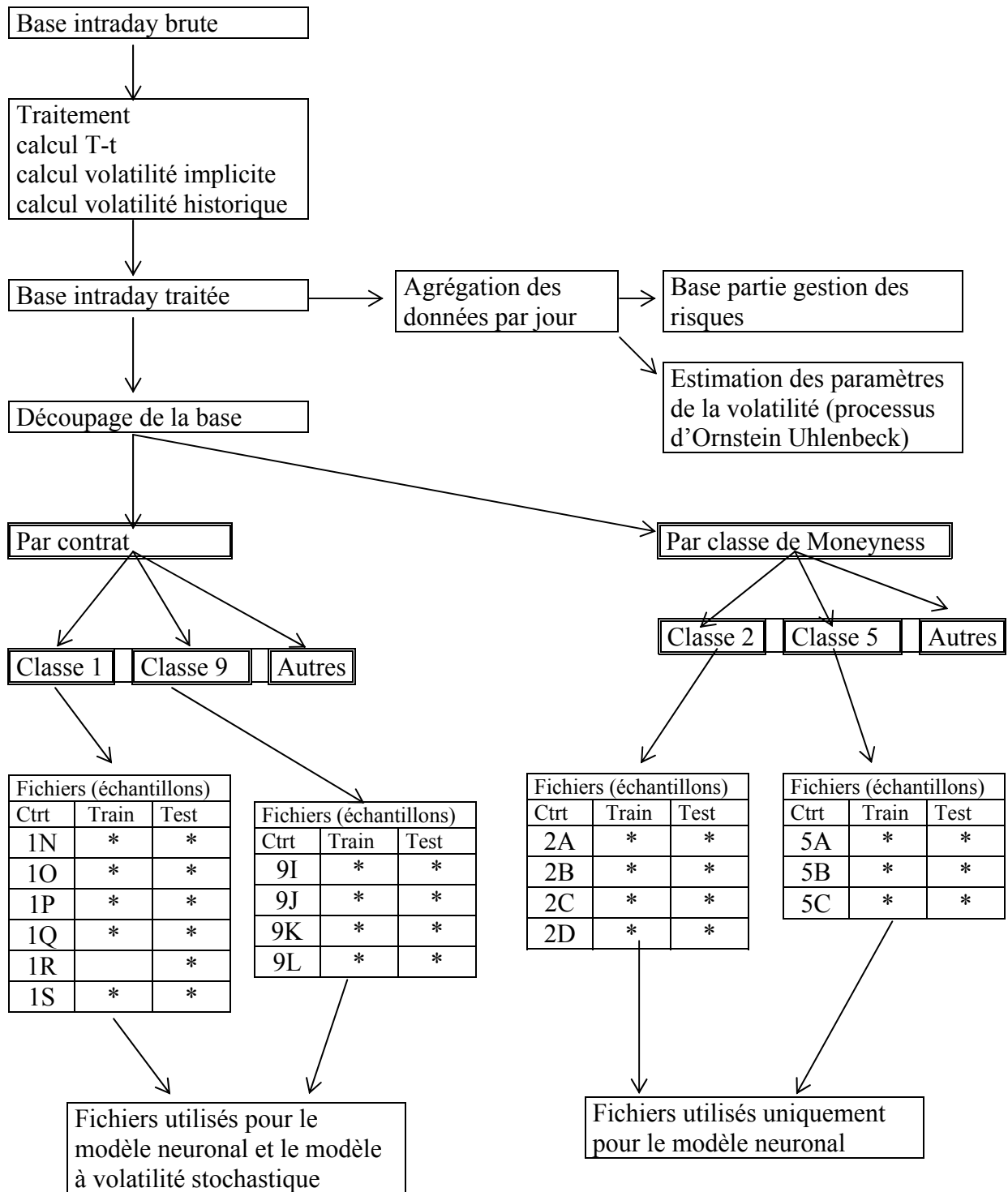


Figure 2: Traitement et découpage de la base intraday (ctr= contrat)

### ***1.3.2.2.3.1 Découpage de la base intraday par contrat***

#### **1.3.2.2.3.1.1 Choix des contrats de la base intraday pour l'étude empirique**

En principe, l'apprentissage doit se faire sur l'ensemble de la durée d'un contrat d'option depuis la date d'émission jusqu'à la date d'échéance. Le test doit se faire sur un contrat similaire au premier et notamment, en ce qui concerne le « moneyness ». Le test doit se faire sur la durée totale de ce contrat. En pratique, ceci ne peut être le cas, puisque les observations commencent, pour les bases en question, non pas au début du contrat mais pendant.

Ainsi, les contrats d'options doivent être classés suivant deux critères : le temps restant à l'échéance de l'option et le « moneyness ». En tenant compte de ces deux critères, on choisit deux classes de contrats d'options : La classe 1 et la classe 9. Les données relatives aux contrats de ces deux classes, à savoir le prix d'exercice  $E$ , la date d'échéance  $T$ , la valeur moyenne de la moneyness  $x_{moy}$ , l'écart en valeur absolue des extremums de la « moneyness » :  $|x_{max} - x_{min}|$ , ainsi que, la durée de vie résiduelle  $\tau=T-t$  (où  $t$  est la date courante) sont précisés, dans le tableau 3.

#### **1.3.2.2.3.1.2 Détermination des échantillons d'apprentissage et de test de chaque contrat**

La modélisation par les réseaux de neurones consiste à approcher la fonction qui lie les variables d'entrée (les inputs), qui sont les déterminants de la valeur de l'option, et la valeur du marché de l'option, qui constitue l'output du réseau, et qui n'est autre que la valeur désirée qu'on cherche à approcher.

La technique utilisée pour la modélisation est la "cross-validation" qui nécessite un échantillon d'apprentissage et un échantillon de test pour chaque modèle.

Pour le modèle neuronal, le choix d'un échantillon d'observations pour l'apprentissage et d'échantillon pour le test est déterminant pour la précision des résultats. Ainsi, un découpage de la base est nécessité par le modèle

neuronal et non pas par le modèle de Black & Scholes et le modèle à volatilité stochastique dont le calcul de la valeur de l'option se fait, pour chaque observation, à part.

Pour que le modèle neuronal soit performant il faut respecter un certain nombre de règles. Bien que l'apprentissage doit être stochastique, les échantillons d'apprentissage doivent être proches de ceux des tests, suivant un certain nombre de critères. De plus, pour une bonne généralisation du modèle neuronal, la taille de l'échantillon test doit être d'environ 20 à 33% la taille de celui de celui des échantillons d'apprentissage relatifs aux différents contrats d'une même classe. Le fichier d'apprentissage d'un contrat donné est l'ensemble du fichier du contrat. Les fichiers test sont déterminés en considérant une observation sur n observations du fichier du contrat.

En fait l'apprentissage se fait sur un contrat donné et le test se fait sur un des fichiers test des différents contrats d'une même classe. On définit un ratio R, égal au rapport du nombre d'observations d'un échantillon test et du nombre d'observations d'un contrat de la même classe. Idéalement, le nombre n se détermine, à partir des contrats ayant le plus grand et le plus petit nombre d'observations de manière à ce que le ratio R soit compris entre 20 à 33%. Les tailles des échantillons de test des contrats précités sont indiquées dans le tableau 3.

	Classe 1						Classe 9			
	1N	1O	1P	1Q	1R	1S	9I	9J	9K	9L
Taille	426	611	377	763	198	330	501	701	793	493
E	3850	4000	4150	4300	4450	4600	3100	3250	3400	3550
T-t	210	198	189	189	177	177	88	88	88	88
xmoy	0,987	0,971	0,952	0,924	0,918	0,882	1,016	0,988	0,968	0,953
Xmax - xmin	0,24	0,166	0,142	0,138	0,115	0,123	0,32	0,311	0,295	0,285
Taille test	142	152	188	152	198	165	165	174	197	163

Tableau 3 : Taille, prix d'exercice (E), durée de vie résiduelle (T-t), moneyness moyenne xmoy, l'écart maximale de moneyness (xmax -xmin) et la taille du fichier test des différents contrats intraday

A chacune des observations des échantillons d'apprentissage des différents contrats précités, on calcule la valeur de l'option par la formule de Black & Scholes et par le modèle à volatilité stochastique (par résolution numérique de l'équation à dérivées partielles du modèle ou par la simulation de Monte Carlo).

			Apprentissage			
			493	793	701	501
R(%)			9L	9K	9J	9I
Test	163	9L	33,27	20,68	23,40	32,73
	197	9K	40,16	24,97	28,25	39,52
	174	9J	35,50	22,07	24,96	34,93
	165	9I	33,67	20,93	23,68	33,13

Tableau 4 : taille du fichier test en pourcentage de la taille du fichier d'apprentissage pour la classe 9

Par exemple, pour la classe 9, les ratios R sont donnés dans le tableau 4. On voit bien que ce ratio est dans l'ordre de grandeur précité.

### 1.3.2.2.3.2 Découpage de la base intraday par « moneyness » et temps restant à l'échéance

#### 1.3.2.2.3.2.1 Choix des classes de la base intraday pour l'étude empirique

La base peut être classée suivant le « moneyness »  $x=S/E$  et le temps restant à l'échéance  $\tau=T-t$ , où S désigne le cours du sous-jacent, E le prix d'exercice de l'option, T la date d'échéance et t la date courante.

On considère 3 classes de la moneyness et 4 classes de la durée de vie résiduelle, soit au total 12 classes qui sont représentées dans le tableau 5.

Nb observations	$\tau < 0,35$	$0,35 \leq \tau < 0,7$	$0,7 \leq \tau < 1$	$1 \leq \tau$
$x < 0,9$	444 (C1)	546 (C4)	213 (C7)	63 (C10)
$0,9 \leq x < 1,1$	3181 (C2)	2446 (C5)	454 (C8)	330 (C11)
$1,1 \leq x$	381 (C3)	286 (C6)	54 (C9)	17 (C12)

Tableau 5: Répartition de la base suivant les critères de « moneyness »=x et temps restant à l'échéance  $\tau$  en douze classes de C1 à C12

On ne considère, pour la partie empirique, que les classes comportant plus de 200 observations. Autrement dit, les classes C9, C10 et C12 sont éliminées.

### 1.3.2.2.3.2 Détermination des échantillons d'apprentissage et de test de chaque classe

La classe C2 est subdivisée en 4 sous-classes, de 795 observations chacune, et la classe C5 est subdivisée en 3 sous-classes de 815 observations chacune. Soit, en répartissant les observations, de chacune des classes, sur l'apprentissage et le test, on obtient le tableau 6.

Pour toutes les classes, l'apprentissage se fait sur une partie de cette classe et le test sur la partie complémentaire en utilisant la technique de cross-validation comme dans le cas du découpage par contrat.

Classe	Nb ss classes	Nb observations	Nb obs. apprentissage	Nb obs. test
C1	1	444	355	89
C2	4	795	636	159
C3	1	381	305	76
C4	1	546	437	109
C5	3	815	652	163
C6	1	286	229	57
C7	1	213	170	43
C8	1	454	363	91
C11	1	330	264	66

Tableau 6: Nombre d'observations relatif à une classe de moneyness et de temps restant à l'échéance, à son fichier d'apprentissage et son fichier test classe

Le fichier test d'une classe ou d'une sous-classe, est obtenu en considérant le dernier cinquième des observations de cette classe ou de cette sous-classe. Autrement dit, on ne considère pas le tirage d'une observation sur  $n$  (avec  $n=5$ ) comme c'était le cas pour le découpage par contrat.



Pour la classe C2, comportant 4 sous-classes, toutes de mêmes tailles, l'apprentissage se fait sur un échantillon apprentissage d'une sous-classe (de taille  $795 \times 4/5 = 636$ ) et le test sur un échantillon test ( de taille  $795 \times 1/5 = 159$ ) d'une autre sous-classe. L'échantillon test de chaque sous-classe est constitué de ses 159 dernières observations.

Pour la classe C5, comportant 3 classes, toutes de mêmes tailles, l'apprentissage se fait sur un échantillon apprentissage d'une sous-classe (de taille  $815 \times 4/5 = 652$ ) et le test sur un échantillon test ( de taille  $815 \times 1/5 = 163$ ) d'une autre sous-classe. L'échantillon test de chaque sous-classe est constitué de ses 163 dernières observations.

### **1.3.2.3 Base de données journalières**

#### ***1.3.2.3.1 Description***

La base de données journalière est composée d'option d'achat(Call) sur l'indice CAC40, longue durée (PXL), donc, de type européen dont les observations sont enregistrées tous les jours à la clôture du marché. Les observations s'étalent entre le 2 janvier 1997 et le 30 décembre 1999, soit 538 contrats correspondant à 19229 observations.

Les données par observation sont la valeur de l'indice CAC40, le prix d'exercice, la date d'échéance, la date courante, la valeur de l'option. Les montant des dividendes, des 40 valeurs composant l'indice CAC40, ainsi que leurs dates de distribution ne figurent pas parmi les données. Le taux d'intérêt court terme ne figure pas, non plus, parmi les données.

L'enchaînement des traitements et des découpages de la base journalière est illustré dans la figure 3.

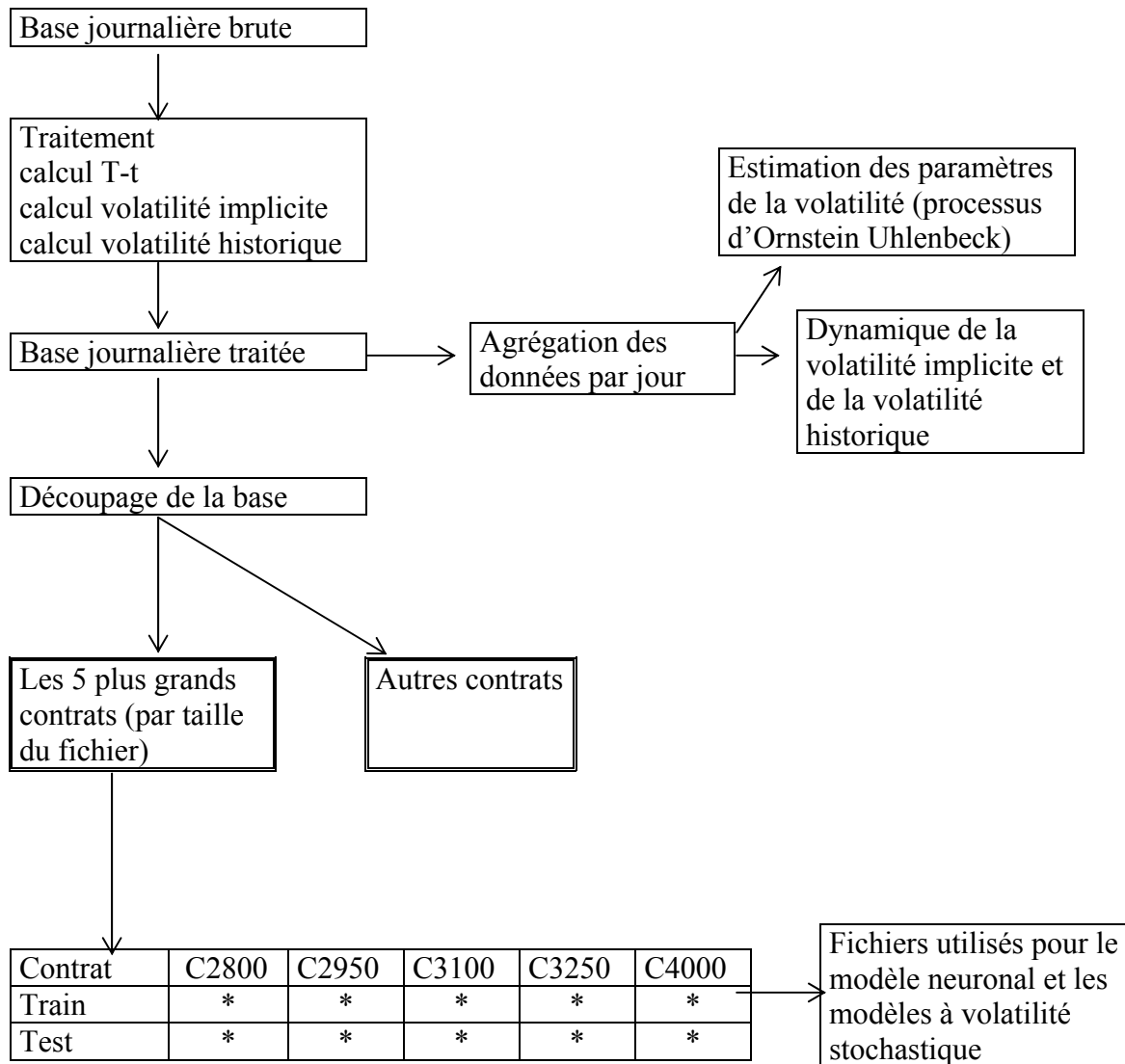


Figure 3: Traitement et découpage de la base journalière

### 1.3.2.3.2 Données calculées

A partir de ces données, sont calculés, le temps restant jusqu'à l'échéance, la volatilité historique et la volatilité implicite. La volatilité historique est calculée, à partir des rendements journaliers, relatifs à une durée passée égale au temps restant jusqu'à l'échéance. La volatilité implicite est calculée, à partir de la valeur de marché de l'option, en considérant un taux d'intérêt moyen sur la période relative à la base de donnée.

### 1.3.2.3.3 *Traitement de la base*

#### 1.3.2.3.3.1 *Choix des contrats de la base journalière pour l'étude empirique*

La base est constituée de 538 contrats obtenus par tri sur le prix d'exercice et la date d'échéance de l'option. En triant, suivant le nombre d'observations par contrat, on choisit les cinq premiers contrats qui comportent un nombre d'observations supérieur à 200. Soit les contrats numéro : 28, 36, 41, 47 et 102 qu'on désigne, respectivement, par C2800, C2950, C3100, C3250 et C4000. Les tailles, le prix d'exercice ainsi que la date d'échéance de ces contrats sont précisés dans le tableau 7.

Désignation	N°contrat	nombre d'observations	E	Échéance
C2800	28	198	2800	mars-98
C2950	36	214	2950	mars-98
C3100	41	224	3100	mars-98
C3250	47	229	3250	mars-98
C4000	102	205	4000	mars-99

Tableau 7: Prix d'exercice (E), Taille, Date d'échéance, des différents contrats de la base journalière choisis pour l'étude empirique

On considère pour cette base, uniquement, un découpage, par contrat. On évaluera les options relatives à ces différents contrats par le modèle de Black & Scholes, le modèle à volatilité stochastique et le modèle neuronal.

#### 1.3.2.3.3.2 *Détermination des échantillons d'apprentissage et de test de chaque contrat*

De même que la base intraday, la technique utilisée pour les modèles neuronaux est la technique de "cross-validation". Pour se faire, il faut constituer, pour chaque contrat, un fichier, destiné à l'apprentissage et un fichier, destiné au test. Afin d'avoir une bonne généralisation, il est recommandé d'avoir un fichier test qui a une taille égale au quart de celle du fichier d'apprentissage. Ainsi, le fichier test est constitué en faisant un tirage d'une observation sur 5. Le fichier d'apprentissage est constitué de l'ensemble des observations d'un contrat donné.

Les nombres d'observations des fichiers test des différents contrats, choisis pour cette étude empirique, sont donnés dans le tableau 8.

Contrat	Nombre d'observations pour l'apprentissage	Nombre d'observations pour le test
C1	198	67
C2	214	72
C3	224	75
C4	229	77
C5	205	69

Tableau 8 : Nombre d'observations, relatives au fichier apprentissage et fichier test, des différents contrats de la base journalière, choisis pour l'étude empirique.

## CHAPITRE 2

### MODELE DE BLACK & SCHOLES

Le modèle de Black & Scholes est un modèle populaire qui sert de référence pour les praticiens dans la cotation des options. Il a le mérite d'être un modèle paramétrique qui débouche sur une "closed form solution" facile d'utilisation. C'est un modèle qui présente un intérêt, aussi bien pour les praticiens que pour les académiciens. Il s'agit d'un modèle largement utilisé dans la profession bancaire et boursière et constitue une référence dans le monde universitaire. Bien que populaire, il est basé sur des hypothèses irréalistes.

Le modèle de Black & Scholes est basé sur une logique d'absence d'opportunité d'arbitrage, appliquée d'une manière continue dans le temps et en supposant l'absence de coût de transaction, d'impôt, de compte de marge et de toute sorte de friction. Il a été développé pour l'évaluation des options d'achat de type européenne, en l'absence de distribution de dividende.

Dans le présent travail, le modèle de Black & Scholes sert de référence pour juger les performances des modèles paramétriques à volatilité stochastique et des modèles neuronaux (non-paramétriques), aussi bien au niveau de l'évaluation qu'au niveau de la couverture. Il sert également à déterminer la volatilité implicite, qui servira de base pour le calcul de la valeur de l'option et la couverture par les modèles précités.

Ce chapitre comporte deux parties : la première est destinée au modèle de Black & Scholes et la seconde est destinée au calcul de la volatilité, aussi bien dans sa forme implicite qu'historique.

Dans la première partie, on commence par présenter les hypothèses du modèle de Black & Scholes. Ensuite, l'équation de Black & Scholes est établie en se basant, dans un premier temps, sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et dans un second temps sur un raisonnement risque-neutre, appliqués d'une manière continue dans le temps.

Une fois l'équation de Black & Scholes est établie, on procède à sa résolution, en considérant des changements de variables adéquats qui la ramène sous la forme canonique de l'équation de la chaleur. Connaissant la solution de cette dernière équation, on procède aux changements de variables, inverses à ceux précités, pour trouver la formule de Black & Scholes.

Cette formule est retrouvée, également, par la suite, par un raisonnement risque-neutre. Elle sera adaptée à l'option sur indice boursier dont l'évaluation fait l'objet du présent travail.

La deuxième partie de ce chapitre, consacrée à la volatilité, consiste à présenter les différentes méthodes de calcul de la volatilité implicite (en inversant la formule de Black & Scholes) et de la volatilité historique, aussi bien pour des données « intraday » que pour des données journalières. L'accent est mis sur la

volatilité implicite, pour laquelle on dénombre 5 algorithmes de calcul. On présente, également, une méthode de calcul de la volatilité implicite, dans le cas où l'actif sous-jacent est un indice boursier.

En choisissant les algorithmes de calcul adéquats, on détermine, pour l'ensemble de deux bases (intraday et journalière), les séries de la volatilité implicite et historique.

Enfin l'accent est mis sur la courbe de "Smile" (courbe en U). En fait, d'après les hypothèses de Black & Scholes, si le temps à l'échéance, le prix du sous-jacent et le taux d'intérêt sans risque sont fixés, le prix de l'option rapporté au prix d'exercice doit donner une valeur constante de la volatilité implicite. Dans la pratique, ceci n'est pas le cas. A chaque prix d'exercice correspond un niveau spécifique de la volatilité qui prend une forme de « Smile ». Cette courbe ne peut être expliquée par le modèle de Black & Scholes.

Ma contribution, dans ce chapitre, consiste, d'une part, à détailler l'enchaînement des calculs qui mènent à la solution analytique de Black & Scholes, aussi bien par résolution de l'équation de Black & Scholes, que par un raisonnement risque-neutre. D'autre part, ma contribution, dans ce chapitre, consiste, à formuler 3 algorithmes pour la détermination de la volatilité implicite et à élaborer un algorithme de calcul baptisé « algorithme récursif ». Enfin, après avoir déterminé les séries des volatilités historiques et implicites relatives à l'ensemble de la base intraday et celle journalière, une autre contribution consiste à élaborer une méthodologie pour tracer les courbes de « smile », à partir des deux bases de données utilisées.

## 2.1 EVALUATION D'UNE OPTION AVEC LE MODELE DE BLACK & SCHOLES

### 2.1.1 Hypothèses et raisonnement d'arbitrage

L'étude des principaux déterminants du prix d'une option permet d'aborder les modèles d'évaluation des options et essentiellement le modèle en temps continu de Fisher Black & Myron Scholes (1973). Ce dernier constitue le modèle de référence en matière d'évaluation des options.

Ce modèle a été développé en l'absence de dividendes pour l'évaluation des options européennes sur actions. Il repose sur les hypothèses suivantes :

- \* Il est admis que le marché est parfait et sans frictions. Autrement dit, il n'existe pas de coût de transaction, ni d'asymétrie d'information, ni d'impôt. Les transactions peuvent prendre place de façon continue sans qu'elles soient pénalisées. Il est possible d'emprunter et de prêter sans limitation à un taux sans risque.
- \* Les ventes à découvert sont autorisées.
- \* Le taux d'intérêt est supposé connu et constant au cours du temps.
- \* La volatilité est supposée connue et constante.
- \* Le cours de l'action suit un mouvement brownien géométrique.
- \* Le titre sous-jacent ne paye de dividende pendant la vie de l'option
- \* L'arbitrage n'est pas possible : l'intégration est parfaite entre le marché des options et celui de leurs sous-jacent de manière à ce que tous les portefeuilles sans risque rapportent le même taux. Ceci est compatible avec la théorie de l'efficience des marchés qui exige qu'un actif risqué rapporte un rendement aléatoire et qu'un actif non risqué génère un rendement sans risque.
- \* les titres sont divisibles.

Il convient de mentionner que la formule de Black & Scholes ne tient pas compte des préférences des investisseurs face au risque, puisque l'actif sous-jacent est négociable.



### **2.1.2 Marche au hasard du prix d'un sous-jacent (actif financier)**

La marche au hasard d'un actif financier et d'une manière générale du prix du sous-jacent est due à l'hypothèse d'efficience du marché financier. L'efficience du marché, comme précisé dans le chapitre préliminaire, peut prendre trois formes qui sont l'efficience faible l'efficience semi-forte et l'efficience forte.

L'efficience, quelque soit sa forme, engendre les deux points suivants :

- Les prix présents des actifs financiers reflètent leur historique.
- Le marché financier incorpore, immédiatement, toute nouvelle information concernant un actif financier.

Ainsi, la connaissance du passé du processus du cours du prix de l'actif ne nous fournit aucune information sur son évolution à venir, en dehors de celle contenue dans la valeur présente qui seule détermine la distribution future des cours, en l'absence de nouvelles informations. Il s'agit, donc, d'un processus markovien typique.

En cas d'absence de frictions, le rendement instantané du sous-jacent est :  $\frac{dS}{S}$

Où  $S$  est le prix de l'actif sous-jacent et  $dS$  est la variation de son prix pendant un intervalle de temps infinitésimal  $dt$ . Ce rendement instantané :  $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$  est dû à deux contributions : la première est déterministe et prévisible :  $\mu dt$  (où  $\mu$  est une constante) et la deuxième représente la variation aléatoire du prix de l'actif ( $\sigma dz$ ), due à des effets externes, comme des nouvelles inattendues,  $\sigma$  étant la volatilité du rendement de l'actif et  $dz$  est un processus de Wiener-Lévy.

### 2.1.3 Equation de Black & Scholes (couverture Delta-neutre et absence d'arbitrage)

#### 2.1.3.1 Processus stochastique du prix de l'option

On considère une option d'achat de type européenne, à la date courante  $t$ , émise à la date  $t=0$  et arrivant à échéance à la date  $T$ , sur un actif sous-jacent, dont le prix  $S$ , suit un mouvement Brownien géométrique :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (2.1.3-1)$$



D'une manière générale, le prix d'une option  $C$  est fonction du prix de l'actif sous-jacent  $S$  qui suit un processus stochastique et du temps  $t$  :  $C(S,t)$ .

En appliquant le lemme d'Itô, on trouve l'équation du processus suivi par le prix de l'option. Ainsi, la variation infinitésimale de la valeur d'une option est  $dC$  tel que :

$$dC = \left( \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dz \quad (2.1.3-2)$$

Cette équation nous donne l'équation de la marche au hasard suivie par la valeur d'une option  $C$  qui doit avoir une dérivée d'ordre 1 par rapport au temps et deux dérivées d'ordre 1 et 2 par rapport au cours du sous-jacent  $S$ .

#### 2.1.3.2 Elimination du risque couverture Delta-neutre

Si on considère le portefeuille constitué de l'achat d'une option et de la vente de l'actif sous-jacent, sa valeur est donc :

$$\Pi = C - \Delta S \quad (2.1.3-3)$$

Pendant un intervalle de temps infinitésimal  $dt$ , la quantité  $\Delta$  reste inchangée et la variation de la valeur du portefeuille est donc  $d\Pi = dC - \Delta dS$

En remplaçant  $dS$  et  $dC$  par leurs expressions dans les équations respectivement (2.1.3-1) et (2.1.3-2), il vient :

$$d\Pi = (\mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - \mu \Delta S) dt + \sigma S (\frac{\partial C}{\partial S} - \Delta) dz$$

La marche au hasard de la valeur du portefeuille  $\Pi$  est due à la partie aléatoire :

$$\sigma S (\frac{\partial C}{\partial S} - \Delta) dz$$

Si on veut éliminer cette partie aléatoire, on choisira :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \quad (2.1.3-4)$$

La variation  $d\Pi$  devient :

$$d\Pi = (\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}) dt \quad (2.1.3-5)$$

### 2.1.3.3 Absence d'arbitrage

Les variations du portefeuille  $\Pi$  sont, donc, déterministes, si, à chaque instant, la condition (2.1.3-4) est vérifiée. Le portefeuille  $\Pi$  se comporte, donc, comme un actif sans risque. Ainsi, le placement d'un montant d'argent  $\Pi$  rapportera, pendant un intervalle de temps  $dt$ , la somme  $r\Pi dt$ . En effet,

$$* \text{ si } (\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}) dt > r\Pi dt$$

Un arbitragiste peut faire un profit sans risque en empruntant une somme  $\Pi$  qu'il investit dans le portefeuille et inversement.

$$* \text{ si } (\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}) dt < r\Pi dt$$

l'arbitragiste peut faire un profit en vendant le portefeuille et en plaçant la somme correspondante dans l'actif sans risque.

D'après l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et d'absence de coût de transaction, on a l'égalité :

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt = r\Pi dt$$

En remplaçant  $\Pi$  par sa valeur, à partir, des équations (2.1.3-3) et (2.1.3-4), à savoir, on obtient la fameuse équation de Black & Scholes :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (2.1.3-6)$$

### **2.1.4 Equation de Black & Scholes avec la méthode risque-neutre**

L'équation de Black & Cholet peut être établie suivant l'approche risque-neutre (Cox-Ross, 1976). Dans ce contexte, le prix du sous-jacent  $S$  et le prix de l'option  $C$  suivent des mouvements Browniens géométriques décrits par les équations suivantes :

$$\frac{dS}{S} = \mu_S dt + \sigma_S dz \quad \Rightarrow \quad dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dz \quad (2.1.4-1)$$

$$\frac{dC}{C} = \mu_C dt + \sigma_C dz \quad \Rightarrow \quad dC = \mu_C C dt + \sigma_C C dz \quad (2.1.4-2)$$

Où  $\mu_S$  et  $\mu_C$  sont les drifts réels, respectivement, de l'actif sous-jacent et de l'option, alors que  $\sigma_S$  et  $\sigma_C$  sont leurs volatilités respectives.

Comme la valeur de l'option  $C=C(S,t)$  est fonction de la valeur du sous-jacent et du temps, en appliquant le lemme d'Itô, il vient :

$$dC = \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \mu_S S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S} S \sigma_S dz \quad (2.1.4-3)$$

Par identification entre les équations (2.1.4-2) et (2.1.4-3), on obtient les égalités suivantes :

$$\mu_C = \frac{\frac{\partial C}{\partial t} + \mu_S S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}}{C} \quad (2.1.4-4)$$

et

$$\sigma_C = \frac{S\sigma_S \frac{\partial C}{\partial S}}{C} \quad (2.1.4-5)$$

En réarrangeant l'équation (2.1.4-4), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \mu_S S \frac{\partial C}{\partial S} - \mu_C C = 0 \quad (2.1.4-6)$$

Il s'agit d'une équation qui dépend des drifts réels du sous-jacent et de l'option  $\mu_S$  et  $\mu_C$ . Pour résoudre un tel problème, il faut, dans un premier temps, déterminer ces deux paramètres.

Ceci peut se faire en formant un portefeuille sans risque de l'option C et du sous-jacent S. Soit, en considérant les équations (2.1.4-1) et (2.1.4-2), on a :

$$\Pi = (\sigma_C C)S - (\sigma_S S)C = SC(\sigma_C - \sigma_S) \quad (2.1.4-7)$$

Etant donné, que le terme de risque est éliminé, il vient :

$$d\Pi = SC(\mu_S \sigma_C - \mu_C \sigma_S)dt \quad (2.1.4-8)$$

D'autre part, comme  $\Pi$  est sans risque et en supposant l'absence d'opportunité d'arbitrage, on peut écrire :

$$d\Pi = SC(\mu_S \sigma_C - \mu_C \sigma_S)dt = r\Pi dt = rSC(\sigma_C - \sigma_S)dt \quad (2.1.4-9)$$

Soit en simplifiant par la quantité  $SCdt$ , on a :

$$(\mu_S - r)\sigma_C = (\mu_C - r)\sigma_S \quad (2.1.4-10)$$

On peut écrire cette équation, sous la forme :

$$\frac{(\mu_S - r)}{\sigma_S} = \frac{(\mu_C - r)}{\sigma_C} = \text{prix du marché du risque}$$

On en déduit que l'option et l'action ont donc le même prix de risque du marché. La relation (2.1.4-10) peut s'écrire :

$$(\mu_C - r) = \frac{\sigma_C}{\sigma_S}(\mu_S - r) \quad (2.1.4-11)$$

Soit, en remplaçant  $\mu_C$  et  $\sigma_C$  par leurs valeurs, respectivement, dans les équations (2.1.4-4) et (2.1.4-5), on obtient l'équation suivante:

$$\frac{\frac{\partial C}{\partial t} + \mu_S S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}}{C} - r = \frac{S \sigma_S \frac{\partial C}{\partial S}}{C \sigma_S} (\mu_S - r) \quad (2.1.4-12)$$

qui peut se mettre, sous la forme :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mu_S S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = (\mu_S - r) S \frac{\partial C}{\partial S}$$

Soit, en simplifiant, on obtient l'équation de Black & Scholes :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

Cette équation ne dépend ni de  $\mu_S$  ni de  $\mu_C$ . Elle est identique à l'équation (2.1.4-6), si on remplaçait  $\mu_S$  et  $\mu_C$  par  $r$ .

Ainsi, on peut conclure que la valeur de l'option est indépendante du choix de l'investisseur puisque les drifts réels n'apparaissent pas dans cette équation. Donc, n'importe quel comportement de l'investisseur peut être utilisé pour trouver la valeur de l'option. Pour la simplicité, l'évaluation se fait dans un monde risque-neutre. Dans un monde risque-neutre, les valeurs espérées des rendements de l'action et de l'option sont égales au taux d'intérêt sans risque.

### 2.1.5 Conditions aux limites

L'option d'achat (call) considérée est de type européen, dont la valeur est notée  $C(S,t)$ . Dans ce cas, pour que l'équation de Black & Scholes admette une solution unique, il faut avoir 3 conditions aux limites. Une condition sur le temps  $t$  et deux conditions sur le prix du sous-jacent  $S$ .

Les conditions aux limites, pour une option d'achat de type européenne, sont les suivantes :

\* La valeur de l'option à l'échéance ( $t=T$ ) est :  $C(S,T)=\text{Max}(S-E,0)$

En effet, à l'échéance, puisque l'option est de type européen, la valeur de l'option est égale à sa valeur intrinsèque.

Pour les conditions aux limites, pour le prix du sous-jacent  $S$  sont les suivantes:

\* pour  $S=0$  :  $C(0,t)=0$

En effet, pour une valeur du sous-jacent nulle, la valeur de l'option est nulle puisque, la valeur de l'option ne peut excéder la valeur du sous-jacent.

\* pour  $S \rightarrow +\infty$  :  $\left[ \frac{\partial C}{\partial S} \right]_{S=\infty} = 1$

En effet, quand la valeur du sous-jacent tend vers l'infini, la probabilité d'exercer l'option converge vers l'unité. Par conséquent la valeur temps tend vers zéro et la valeur de l'option converge vers sa valeur intrinsèque. Comme pour un call, en dedans, la valeur intrinsèque est représentée, dans le plan  $(S,C)$ , par une droite parallèle à la première bissectrice, et, donc, de pente égale à l'unité, alors la dérivée de la valeur de l'option, par rapport à celle du sous-jacent, tend vers l'unité.

### 2.1.6 Résolution de l'équation de Black & Scholes

Compte tenu des conditions aux limites précitées, l'équation de Black & Scholes admet une solution analytique unique. Cette solution peut être déterminée, analytiquement, à partir de la solution de l'équation de la chaleur,

sous sa forme canonique. Il faut, dans un premier temps, faire les changements de variables qui transforment l'équation de Black & Scholes sous la forme de l'équation de la chaleur, sous sa forme canonique.

### 2.1.6.1 Changements de variables

Pour être résolue, l'équation de Black & Scholes doit être mise sous la forme canonique de l'équation de la chaleur. Pour se faire, on pose, dans un premier temps:

$$\begin{aligned} S = Ee^x &\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial x} = Ee^x &\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{e^{-x}}{E} \\ t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} &\Rightarrow \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{2}{\sigma^2} &\Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2} \\ C = EW(x, \tau) &\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial x} = E \frac{\partial W}{\partial x} &\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial \tau} = E \frac{\partial W}{\partial \tau} \end{aligned}$$

Ainsi, les dérivées du prix de l'option par rapport au temps et par rapport au prix du sous-jacent, ainsi que sa dérivée seconde par rapport au prix du sous-jacent sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial C}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\sigma^2 E}{2} \frac{\partial W}{\partial \tau} \\ \frac{\partial C}{\partial S} &= \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{e^{-x}}{E} E \frac{\partial W}{\partial x} = e^{-x} \frac{\partial W}{\partial x} \end{aligned}$$

La dérivée seconde de la valeur de l'option, par rapport à la valeur du sous-jacent, est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial C}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left( e^{-x} \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{-x} \frac{\partial W}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial S}$$

Soit, en remplaçant la dérivée de x par rapport à S et en développant la dérivée du terme de la parenthèse par rapport à x, on obtient :



$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{e^{-x}}{E} \left( -e^{-x} \frac{\partial W}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$$

Soit, après simplification, cette équation devient :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{e^{-2x}}{E} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial x} \right)$$

Soit, en remplaçant les expressions de ces dérivées dans l'équation de Black & Scholes, on obtient l'équation différentielle, en W, suivante:

$$-\frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 E^2 e^{2x} \frac{e^{-2x}}{E} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + r E e^x e^{-x} \frac{\partial W}{\partial x} - r E W = 0$$

Soit, après simplification et en divisant par E, on aura :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial W}{\partial \tau} - r W = 0$$

En divisant par  $\frac{\sigma^2}{2}$  et en posant,  $k = \frac{r}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)}$ , il vient :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (k - 1) \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial \tau} - kW = 0$$

Comme :

$$\text{quand : } S = 0 \quad \Rightarrow \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\text{quand : } S \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\text{quand : } t=T \quad \Rightarrow \quad \tau = 0$$

les conditions aux limites deviennent :

$$C(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(-\infty, \tau) = 0$$

$$\left( \frac{\partial C}{\partial S} \right)_{S=+\infty} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=+\infty} = (e^x)_{x=+\infty} = +\infty$$

$$C(S, T) = \max(S - E; 0) \quad \Rightarrow \quad W(x, 0) = \max(e^x - 1; 0)$$

Pour arriver à la forme canonique de l'équation de la chaleur, un deuxième changement de variables est nécessaire. Ainsi, on pose :  $W(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} U(x, \tau)$  et on peut écrire :

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \beta U + \frac{\partial U}{\partial \tau} \right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \alpha U + \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \alpha^2 U + 2\alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)$$

Après simplification par, l'équation devient :

$$\alpha^2 U + 2\alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (k-1) \left( \alpha U + \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \left( \beta U + \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) - kU = 0$$

En réarrangeant les termes de cette équation, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (2\alpha + k - 1) \frac{\partial U}{\partial x} + (\alpha^2 + \alpha(k-1) - \beta - k) U = \frac{\partial U}{\partial \tau}$$

Pour trouver la forme canonique de l'équation de la chaleur, il suffit de choisir  $\alpha$  et  $\beta$  suivant le système :

$$(2\alpha + k - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{2}(k-1)$$

$$(\alpha^2 + \alpha(k-1) - \beta - k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \left( -\frac{1}{4}(k-1)^2 - k \right) = -\frac{1}{4}(k+1)^2$$

Le changement de variables est, donc :

$$W(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2 \tau} U(x, \tau) \quad \text{avec } k = \frac{2r}{\sigma^2}$$

$$\text{Soit : } U(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2 \tau} W(x, \tau)$$

L'équation prend, donc, la forme canonique de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial \tau}$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$* C(0, t) = 0 \Rightarrow W(-\infty, \tau) = 0 \Rightarrow U(-\infty, \tau) = 0$$

$$\begin{aligned} * \left( \frac{\partial C}{\partial S} \right)_{S=+\infty} = 1 &\Rightarrow \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=+\infty} = (e^x)_{x=+\infty} = +\infty \\ &\Rightarrow \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=+\infty} = \left( \frac{1}{e^2} (k-1)x + \frac{1}{4} (k+1)^2 \tau \left( \frac{1}{2} (k-1) W(x; \tau) + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right)_{x=+\infty} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=+\infty} = \left( \frac{1}{2} (k+1) e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2 \tau} \right)_{x=+\infty} = +\infty$$

$$* C(S, T) = \text{Max}(S - E; 0) \Rightarrow W(x, 0) = \text{Max}(e^x - 1; 0)$$

$$\Rightarrow U(x, 0) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \text{Max}(e^x - 1; 0)$$

$$\Rightarrow U(x, 0) = \text{Max}(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}; 0)$$

$$\text{Or, on a : } (e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x} > 0) \Rightarrow e^{\frac{1}{2}(k+1)x} > e^{\frac{1}{2}(k-1)x}$$

$$\Rightarrow x > -x \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$$

Ainsi, la fonction  $U(x, 0)$  est définie, comme suit :

$$\text{- si } x > 0 \Rightarrow U(x, 0) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \quad (2.1.6-1)$$

$$\text{- si } x \leq 0 \Rightarrow U(x, 0) = 0 \quad (2.1.6-2)$$

### 2.1.6.2 Résolution de l'équation de la chaleur sous sa forme canonique:

On a vu que l'équation de la chaleur, sous sa forme canonique, s'écrit :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial \tau} \quad \tau > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

Pour résoudre une telle équation, il faut déterminer sa solution générale ainsi qu'une solution particulière.

Si  $U(x,t)$  est une solution de cette équation, alors à l'instant  $t=0$ , la solution de cette équation est notée :  $U(x,0)=U_0(x)$ . D'après les équations (2.1.6-1) et (2.1.6-2), cette solution s'écrit :

$$U_0(x) = \text{Max} \left( e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}; 0 \right)$$

La solution générale de cette équation est :

$$U(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(s) e^{-\frac{1}{4\tau}(x-s)^2} ds$$

Si on pose  $y = \frac{(s-x)}{\sqrt{2\tau}} \Rightarrow s = x + y\sqrt{2\tau}$ ,  $U(x,\tau)$  devient :

$$U(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x + y\sqrt{2\tau}) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$* \text{ si } s > 0 \Rightarrow U_0(s) = e^{\frac{1}{2}(k+1)s} - e^{\frac{1}{2}(k-1)s}$$

$$\text{et, donc, si } y > \frac{-x}{\sqrt{2\tau}} \Rightarrow$$

$$U_0(x + y\sqrt{2\tau}) = e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})}$$

$$* \text{ si } s \leq 0 \Rightarrow U_0(s) = 0$$

$$\text{et, donc, si } y \leq \frac{-x}{\sqrt{2\tau}} \Rightarrow U_0(x + y\sqrt{2\tau}) = 0$$

Ainsi, la solution de l'équation de la chaleur s'écrit :

$$U(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = I_1 - I_2$$

Elle se calcule comme la différence des quantités  $I_1$  et  $I_2$ . L'intégrale  $I_1$  se calcule comme suit :

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Soit :

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dy$$

Si on pose, on a :

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

La fonction à intégrer étant paire, l'intégrale  $I_1$ , peut s'écrire :

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

En désignant par  $N(\cdot)$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on peut écrire :

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) \quad \text{avec } d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

Le calcul de  $I_2$  est analogue à celui de  $I_1$ , Il suffit de remplacer  $(k+1)$  par  $(k-1)$ . Ainsi, l'intégrale  $I_2$  s'écrit :

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \quad \text{avec } d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau} = d_1 - \sqrt{2\tau}$$

Etant donné que la fonction  $U(x, \tau)$  est la différence des intégrales  $I_1$  et  $I_2$ , on peut l'écrire sous la forme :

$$U(x, \tau) = I_1 - I_2 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2)$$

### 2.1.6.3 Solution de l'équation de Black & Scholes

En considérant l'expression de W en fonction de U, on peut écrire :

$$W(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} (I_1 - I_2)$$

$$W(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \left( e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \right)$$

$$W(x, \tau) = e^x N(d_1) - e^{-k\tau} N(d_2)$$

Soit en remplaçant la valeur de l'option C, par son expression en fonction de W,

$$\text{on a : } C(S, t) = EW(x, \tau) = Ee^x N(d_1) - Ee^{-k\tau} N(d_2)$$

Comme, on a  $e^x = \frac{S}{E}$  et  $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ , on obtient :

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-\frac{2r}{\sigma^2}\tau} N(d_2)$$

$$\text{Or, on a : } 2\tau = (T - t)\sigma^2$$

En conjuguant ces deux dernières équations, on obtient l'expression définitive de la valeur de l'option qui correspond à la formule de Black & Scholes :

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)} N(d_2)$$

où

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \quad \text{avec} \quad x = \ln\left(\frac{S}{E}\right) \quad \text{et} \quad k = \frac{2r}{\sigma^2}$$

donc,

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \left( \ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right)\tau \right) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}} \left( \ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right)$$

En définitive, on a :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{(T - t)}}$$

alors que,

$$d_2 = d_1 - \sqrt{2\tau} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

La solution de l'équation de Black & Scholes, pour une option d'achat de type européenne, en l'absence de distribution de dividendes, est la suivante :

$$C = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (2.1.6-3)$$

Avec,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{(T - t)}} \quad (2.1.6-4)$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \quad (2.1.6-5)$$

D'après cette formule, il s'avère bien que cinq variables suffisent pour déterminer la valeur d'une option. Trois, d'entre elles, sont directement définies, à savoir, le cours du titre S, le prix d'exercice E et la durée de vie T. Les deux variables restantes, le taux d'intérêt et la volatilité, sont plus délicates à définir.

En ce qui concerne le taux d'intérêt, il peut être observé sur le marché ou estimé, implicitement, à partir d'un modèle d'évaluation d'options. Quant à la volatilité, elle exige une estimation puisqu'elle n'est pas directement observable sur le marché.

En général, les deux méthodes d'estimation de la volatilité les plus connues sont celles de la volatilité historique et de la volatilité implicite dont les méthodes de calcul seront explicitées dans la deuxième partie du présent chapitre.

En toute rigueur, comme on considère pour la volatilité une année de 250 jours et pour l'intérêt commercial une année de 365 jours, on définit :

$$\tau_1 = (T-t)/365 \text{ le temps restant à échéance annualisé (taux d'intérêt)}$$

$$\tau_2 = (T-t)/250 \text{ le temps restant à échéance annualisé (volatilité)}$$

La formule de Black & Scholes devient :

$$C = SN(d_1) - Ee^{-r\tau_1}N(d_2) \text{ avec}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r\tau_1 + \frac{\sigma^2}{2}\tau_2)}{\sigma\sqrt{\tau_2}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau_2}$$

Si on considère que  $\tau_1 = \tau_2 = (T-t)/365$ , la valeur de l'option obtenue sera, significativement, différente de la valeur trouvée par la formule ci-dessus. En effet, si on considère l'option dont les déterminants sont donnés dans le tableau 9, l'écart absolu entre les deux valeurs est de 45,6049 soit un écart relatif de 31,81%.

S	E	T-t	Volimp	r	Cmarché	C( $\tau_1 = \tau_2$ )	C( $\tau_1; \tau_2$ )
3661,63	4000	379	0,1512	0,033	189,61	143,3596	188,9644

Tableau 9 : Déterminants et valeurs de l'option à l'instant t si on considère  $\tau_1 = \tau_2 = (T-t)/365$ , et si on considère  $\tau_1 = (T-t)/365$  et  $\tau_2 = (T-t)/250$

A noter que la valeur de l'option du marché est quasiment la même que C( $\tau_1; \tau_2$ ), tout simplement parce que la volatilité implicite a été calculée en considérant  $\tau_1 = (T-t)/365$  et  $\tau_2 = (T-t)/250$ .

### 2.1.7 Formule de Black & Scholes par le raisonnement risque-neutre

La formule de Black & Scholes peut apparaître énigmatique au premier abord, son interprétation est facilitée par le recours à un argument de neutralité par rapport au risque découvert par Cox et Ross (1976).

Cet argument part de la constatation suivante : le drift réel  $\mu$  n'apparaît nulle part, ni dans l'équation différentielle ni dans la formule. Or ce paramètre n'est



autre que la rentabilité espérée, qui à l'équilibre, dépend des anticipations des investisseurs et de leurs préférences. Ces préférences se traduisent sur les marchés par un niveau de prime de risque déterminé, c-à-d par un surplus de rentabilité réclamé à tout investissement risqué par rapport à un investissement non risqué. L'absence de référence aux préférences implique donc qu'une option, sera évaluée au même prix, quel que soit le type d'économie où évoluent les investisseurs.

Cette absence du drift réel, constatée dans les équations, provient uniquement de la possibilité de créer, en continu, une couverture sans risque en vendant des calls dans la proportion adéquate, en fonction du nombre de titres détenus.

Le portefeuille couvert, ainsi constitué, vaut, donc, le même prix, dans toutes les économies, puisqu'il est sans risque. En particulier, sa valeur peut être calculée dans une économie, où tous les investisseurs sont neutres vis à vis du risque, autrement dit, qui n'ont ni du goût ni de l'aversion pour le risque.

Dans une telle économie, tous les actifs doivent offrir, par définition, la même rentabilité, celle du taux sans risque. Donc, le titre aura, dans cette économie, neutre au risque, une rentabilité espérée  $\mu$ , égale à  $r$ , et sa valeur à l'échéance  $S_T$  suivra toujours une loi Log-normale.

L'option, pour sa part, aura, aussi, une rentabilité espérée égale au taux sans risque. Soit sur la période de vie résiduelle, on peut écrire :

$$E(C_T) = C_t e^{-r\tau}$$

Ce qui s'inverse, sous la forme :  $C_t = e^{-r\tau} E(C_T)$

Pour calculer la valeur de l'option  $C_t$ , à un instant  $t$ , il suffit, donc, de savoir calculer l'espérance de la valeur de l'option à l'échéance  $E(C_T)$ . Or, à l'échéance, on a :  $C_T = \text{Max}(S_T - E, 0)$  qui peut s'écrire, sous la forme :

- Si  $S_T \leq E$  alors  $C_T = 0$
- Si  $S_T > E$  alors  $C_T = S_T - E$

Donc  $E(C_T)$  est l'espérance mathématique de  $(S_T - E)$  pondérée par la probabilité que  $S_T$  soit supérieur au prix d'exercice, à l'échéance, dans l'économie neutre au risque, considérée. Le passage de la probabilité réelle, pour laquelle  $S_T$  atteint une certaine valeur  $x$ , à la probabilité risque neutre, pour laquelle  $S_T$  atteint cette même valeur  $x$ , s'effectue, simplement, en remplaçant le drift réel  $\mu$  par le taux de l'actif sans risque  $r$  dans la fonction densité de  $S_T$  et dans les formules d'espérance et de variance.

Cette procédure d'évaluation, dite en risque neutre, découle, uniquement, de la condition d'absence de stratégies d'arbitrage non gagnantes.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dz \quad \text{soit} \quad \frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dz$$

En appliquant le lemme d'Itô, il vient :

$$d \ln S_t = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz$$

En intégrant, membre à membre, l'équation s'écrit :

$$\int_t^T d \ln S_t = \int_t^T \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma U \int_t^T \sqrt{dt} \quad \text{avec} \quad U \rightarrow N(0,1)$$

Le logarithme du prix du sous-jacent à l'échéance, est, donc, donné par l'équation suivante :

$$\ln(S_T) = \ln S_t + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma \sqrt{T - t} U$$

En posant, on déduit que ce logarithme suit une loi normale de moyenne  $a$  et d'écart type  $b$  :  $\ln(S_T) \rightarrow N(a; b)$ , tel que :

$$a = \ln(S_t) + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \quad \text{et}$$

$$b = \sigma\sqrt{\tau}$$

Si on désigne par  $f(s)$  la fonction densité de probabilité du prix du sous-jacent, à l'échéance, on peut écrire :

$$E(C_T) = \int_E^{+\infty} (s - E)f(s)ds$$

Vu la distribution de  $\text{Ln}(S_T)$ , la variable aléatoire  $U = \frac{\text{Ln}(S_T) - a}{b}$  suit une loi

normale centrée et réduite. On peut écrire :  $S_T = e^{a+bU}$

Si on désigne par  $g(u)$  la fonction densité de probabilité de  $U$ , on peut écrire :

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

Par ailleurs, on a  $g(u)du = f(s)ds$  et si on pose  $X = \frac{\text{Ln}(E) - a}{b}$  on aura :

$$E(C_T) = \int_X^{+\infty} (e^{a+bu} - E)g(u)du$$

Soit, en remplaçant  $g(u)$  par son expression, on obtient :

$$E(C_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_X^{+\infty} e^{a+bu} e^{-\frac{1}{2}u^2} du - E \int_X^{+\infty} g(u)du$$

En considérant la fonction de répartition  $N(\cdot)$  de la loi normale centrée réduite (loi de  $U$ ), cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$E(C_T) = \frac{e^a}{\sqrt{2\pi}} \int_X^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2 - 2bu)} du - E(1 - N(X))$$

En considérant l'égalité :  $u^2 - 2bu = (u - b)^2 - b^2$ , l'équation devient :

$$E(C_T) = \frac{e^{a + \frac{b^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_X^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-b)^2} du - E(1 - N(X))$$

Si on pose, l'équation devient :

$$E(C_T) = \frac{e^{\frac{a+b^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{X-b}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv - Ee^{-r\tau}(1 - N(X))$$

Soit, en considérant la fonction de répartition  $N(\cdot)$  de la loi normale centrée réduite, une nouvelle fois, l'équation peut s'écrire :

$$E(C_T) = e^{\frac{a+b^2}{2}} (1 - N(X - b)) - Ee^{-r\tau}(1 - N(X))$$

Or, on a :  $C_t = e^{-r\tau}E(C_T)$ . D'où l'équation :

$$C_t = e^{-r\tau + a + \frac{b^2}{2}} (1 - N(X - b)) - Ee^{-r\tau}(1 - N(X)) \quad (2.1.7-1)$$

Or, d'une part, on a :

$$-r\tau + a + \frac{b^2}{2} = -r\tau + \text{Ln}(S_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \frac{(\sigma\sqrt{\tau})^2}{2} = \text{Ln}(S_t)$$

$$\text{et, donc, on a : } e^{-r\tau + a + \frac{b^2}{2}} = S_t$$

D'autre part, on a :

$$X = \frac{\text{Ln}(E) - a}{b} = \frac{\text{Ln}(E) - \text{Ln}(S_t) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = -\frac{\text{Ln}\left(\frac{S_t}{E}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = -d_2$$

et

$$X - b = -d_2 - b = -(d_2 + b)$$

La dernière équation peut s'écrire :

$$X - b = -\frac{\text{Ln}\left(\frac{S_t}{E}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = -\frac{\text{Ln}\left(\frac{S_t}{E}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = -d_1$$

Ainsi, l'équation (2.1.7-1) devient :

$$C_t = S_t(1 - N(-d_1)) - Ee^{-r\tau}(1 - N(-d_2))$$

En simplifiant, on obtient la formule de Black & Scholes :

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S_t}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S_t}{E}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

### **2.1.8 Valeur d'une option sur un sous-jacent payant des dividendes**

Dans le cas de distribution de dividendes, l'hypothèse à retenir est celle qui stipule que les versements de dividendes, pendant la durée résiduelle de l'option, sont une fonction connue du temps et ou du prix du sous-jacent. Dans le cas contraire, une autre source d'incertitude vient s'ajouter aux variations du prix du sous-jacent et le prix de l'option s'en trouve affecté.

Comme la formule de Black & Scholes repose sur un raisonnement d'arbitrage, selon lequel il est possible de constituer, à partir de l'option et une certaine quantité d'action sous-jacente, une position sans risque. Cette position doit, en l'absence d'opportunités d'arbitrage rapporter le taux sans risque. Cette position est immunisée contre toute variation non anticipée du prix de l'action.

Mais si les dividendes sont aléatoires, il apparaît une autre source du risque contre laquelle cette position n'est pas immunisée, ce qui viole les hypothèses de Black & Scholes, qui suppose que la seule source d'incertitude est la variation du cours du sous-jacent.

En retenant l'hypothèse de dividendes déterministes, nous distinguons deux cas. Dans le premier, les dates de versement et le montant des dividendes sont connus et dans le second, ils sont inconnus, mais, reliés de manière déterministe, au prix du sous-jacent.

### 2.1.8.1 Les versements des dividendes sont connus

Sous cette hypothèse, aussi bien le montant des dividendes à verser pendant la durée de vie résiduelle de l'option, que les dates auxquelles il seront versés, ne sont soumis à aucune source d'incertitude. Cette hypothèse est quasi-réaliste, d'une part, parce que les entreprises adoptent une politique de dividendes, relativement, stable à court terme et que les options standardisées ont une durée de vie, relativement, courte, d'autre part, les entreprises choisissent, généralement, d'une année à l'autre, ou d'un trimestre à l'autre, la même date pour le paiement de leurs dividendes. Ainsi, les versements peuvent être prévus avec une précision, relativement, bonne, aussi bien, du point de vue montant, que date de distribution.

Dans ce cas, pour déterminer la valeur de l'option il suffit d'appliquer la formule de Black & Scholes, en soustrayant au prix de l'action la valeur actualisée des dividendes qui seront versés d'ici l'échéance de l'option. Ceci est cohérent avec le fait que le détenteur d'un call n'a aucun droit sur les dividendes qui seront versés d'ici à l'échéance de son option, puisque la valeur d'une telle option est toujours inférieure à celle d'une option identique dont le sous-jacent ne paie pas de dividendes.

Si on suppose que le dividende est d'un montant  $D$  et qu'il est payé en  $t_1$  ( avec  $t < t_1 < T$ ), le prix de l'option est donné par les formules suivantes :

$$C = (S - De^{-r\tau_1})N(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S - De^{-r\tau_1}}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$\text{avec } \tau = T - t \quad \text{et} \quad \tau_1 = t_1 - t$$

### 2.1.8.2 Les versements des dividendes sont inconnus

Lorsque, ni le montant, ni la date de versement des dividendes, ne sont connus, on suppose qu'ils sont une fonction connue du prix de l'action sous-jacente. Les modèles d'évaluation d'option dont le sous-jacent paie des dividendes reposent sur l'hypothèse d'un rendement en dividendes constant. En d'autre terme, on suppose que le dividende versé par unité de temps représente une fraction  $\delta(S,t)$  constante du prix de l'action, soit  $\delta(S,t) = \delta$ .

Cette hypothèse est plutôt discutable, d'autant plus, qu'elle est en contradiction avec la politique de versement de dividendes constants.

Le modèle de Black & Scholes étant un modèle en temps continu, la première chose à faire est d'estimer le rendement, en dividendes instantanés, à partir des prix et des dividendes passés. Il sera réactualisé, chaque fois, qu'il y'a un changement dans la politique de dividende de l'entreprise.

Sous cette hypothèse, il suffit pour évaluer un call européen de soustraire au prix du sous-jacent la valeur actualisée du flux du dividende qui sera versé durant la vie de l'option. Cet ajustement est nécessaire, car les détenteurs d'une option n'ont aucun droit sur les dividendes payés par l'action sous-jacente à leur option. Par conséquent, le prix d'un call, dont le sous-jacent a un rendement, en dividendes instantanés, égal à  $\delta$ , est donné par les équations suivantes :

$$C = Se^{-\delta\tau}N(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2) \quad (2.1.8-1)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left((r - \delta) + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

### 2.1.9 Evaluation des options sur indices boursiers

Evaluer une option sur indice revient à évaluer une option sur un tracker de cet indice. Le tracker est un portefeuille constitué des actions composant l'indice dans des proportions  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Pour chaque action  $A_i$ , la proportion  $x_i$  correspondante, est égale à sa capitalisation boursière divisée par la capitalisation boursière de l'ensemble des actions composant l'indice. Soit :

$$x_i = \frac{CB_i}{\sum_{i=1}^n CB_i} = \frac{N_i S_i}{\sum_{i=1}^n N_i S_i}.$$

Le tracker traque l'indice, autrement dit, sa valeur reproduit, quasiment, le mouvement de la valeur de l'indice.

On suppose que le prix du tracker suit une loi log-normale. C'est une hypothèse qui découle du fait que tous les prix des actions constituant le tracker sont supposés suivre chacun un processus log-normal.

Il faut cependant tenir compte des dividendes versés par les différentes actions  $A_i$  composant l'indice pendant la durée de vie résiduelle de l'option. Si on suppose qu'une action  $A_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) verse des dividendes  $D_{ij}$ , à l'instant  $t_j$ , ( $1 \leq j \leq m$ ) et qu'il lui reste une durée  $\tau_{ij}$ , jusqu'au versement des dividendes à la date  $t_j$ , alors, le montant global des dividendes, versés par les différentes actions constituant l'indice, est la somme pondérée, par les proportions  $x_i$ , des dividendes, actualisées à la date  $t$ , de l'ensemble des actions composant l'indice. Soit:

$$D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i D_{ij} e^{-r\tau_{ij}}$$

Si on considère que la distribution des dividendes est continue dans le temps, la somme pondérée des dividendes actualisés  $D$ , sera donnée par la formule suivante :



$$D = \int_t^T \left[ \sum_{i=1}^n x_i D_{is} \right] e^{-r(s-t)} ds$$

Avec  $D_{is}$  : montant du dividende versé par l'action de rang  $i$  à l'instant  $s > t$ .

- S'il y'a versement de dividende à l'instant  $s$ , alors :  $D_{is} \neq 0$

- S'il n'y a pas versement de dividende à l'instant  $s$ , alors :  $D_{is} = 0$

Si on désigne, par  $I$ , la valeur de l'indice, à l'instant  $t$ , et par  $I^*$  la valeur de cet indice diminuée du montant des dividendes, alors, la formule de la valeur d'une option d'achat sur indice boursier est la suivante :

$$C = I^* N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad \text{avec} \quad I^* = I - D$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{I^*}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

En général, il est difficile de connaître le montant et la date de distribution du dividende de chacune des actions qui composent l'indice. Cette formule est, donc, difficile à utiliser.

Il serait plus judicieux de considérer une distribution continue des dividendes, bien que cette hypothèse ne reflète pas la réalité. La formule relative à cette hypothèse est plus facile à mettre en œuvre. En considérant un taux de rendement instantané des dividendes moyen  $\delta$ , la formule d'évaluation de l'option, dans ce cas, est la formule (2.1.8-1), en remplaçant la valeur de l'action sous-jacente  $S$ , par la valeur de l'indice sous-jacent  $I$ .

Ces deux formules supposent que le rendement instantané de l'indice suit un mouvement brownien géométrique ce qui implique que la valeur de l'indice est distribuée selon une loi log-normale (cf §1.3.1.5). Ceci est vrai, tant que les rendements des actions, constituant l'indice, sont normaux. Dans l'approche de

Black & Scholes, cette hypothèse est relative aux rendements des actions. Il est, toutefois, considéré, en général, que l'hypothèse de normalité des rendements est plus acceptable, dans le cas d'un portefeuille, que dans le cas d'une action individuelle.

L'hypothèse de constitution d'un portefeuille, continuellement, sans risque est aussi contestable, dans la mesure, où il faut ajuster en temps continu un portefeuille composé de quelques titres afin d'imiter au maximum l'indice visé. Ceci est difficile à mettre en œuvre et engendre des coûts de transaction élevés. En fait, il serait, plus judicieux et moins coûteux, d'acheter et de vendre un tracker plutôt que d'acheter et de vendre les titres constituant l'indice.

## **2.2 VOLATILITE**

Dans le calcul de la valeur d'une option, la volatilité et le taux d'intérêt sont deux paramètres inobservables. La volatilité est un paramètre déterminant dans le calcul de la valeur d'une option. C'est un paramètre stochastique contrairement, à l'hypothèse de Black & Scholes qui le considère comme constant. Les principaux estimateurs de ce paramètre sont la volatilité historique et la volatilité implicite.

L'estimation de la volatilité est le point le plus délicat dans l'établissement d'un prix, d'autant plus, que la valeur d'une option est très sensible aux variations de la volatilité. Elle est la source d'estimations différentes des prix des options qui peuvent changer très brusquement, même, si le cours de l'actif sous-jacent est stable.

Cette dépendance est très importante pour faire du « trading » car elle permet de spéculer sur la volatilité des cours. Ainsi si un opérateur anticipe une volatilité future plus forte que celle anticipée par le marché, il achètera des options qu'il estimera sous-évaluées, dans l'espoir que le marché réalisera son erreur avant la date d'expiration et qu'il pourra la revendre avec un bénéfice. En cas

d'anticipation de volatilité plus faible, il vendra des options qu'il estimera « surévaluées ». On parle, alors, non plus d'acheter ou de vendre des options, mais, d'acheter et de vendre de la volatilité.

Ainsi, un call n'est pas surévalué dans l'absolu, il l'est par rapport à une valeur donnée par un modèle. Comme les modèles utilisés par les opérateurs sont très semblables, l'écart entre la valeur observée sur le marché et la valeur estimée par un opérateur, à un moment donné, ne peut provenir que d'une estimation différente de la volatilité.

La volatilité se présente, ainsi, comme un paramètre très important dans la détermination de la valeur d'une option et la précision de son estimation conditionne la précision de l'évaluation de l'option. Autrement dit, il ne suffit pas d'avoir un bon modèle d'évaluation d'une option, il faut également avoir une estimation la plus précise possible de la volatilité. Justement, cette partie du chapitre 2 est consacrée aux méthodes et algorithmes de calcul de la volatilité historique et la volatilité implicite, aussi bien pour une base intraday que pour une base journalière.

## **2.2.1 Volatilité historique**

### **2.2.1.1 Données journalières**

L'estimation de la volatilité, à partir de données historiques, a été utilisée par plusieurs chercheurs tels que Black & Scholes (1972), Galai (1977) et Finnerty (1978).

La volatilité historique est mesurée par l'écart type du rendement  $R_t$  du sous-jacent, durant la période qui précède l'émission des options. Si on fait abstraction des dividendes, si on désigne par  $S_{t-dt}$  et  $S_t$  le cours du sous-jacent, respectivement, au début et à la fin de période, ce rendement s'écrit :

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-dt}}{S_{t-dt}} = \frac{dS}{S} = d\ln S$$

Le rendement instantané du sous-jacent est supposé suivre un mouvement Brownien géométrique suivant l'équation :  $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$  où  $dz$  est un processus de Wiener-Lévy (ce qui est équivalent à dire que la variable  $dz$  suit une loi normale centrée de variance  $dt$ ). Il est équivalent d'affirmer que  $R_t$  suit une loi log-normale ou que  $\ln(1+R_t)$  suit une loi Normale, ou encore,  $\ln(S_t/S_{t-dt})$  suit une loi Normale. La volatilité  $\sigma$  du rendement instantané est supposée être constante dans le modèle de Black & Scholes. Avec des observations rapprochées du cours du sous-jacent il est possible d'estimer la volatilité instantanée. Suivant l'hypothèse de constance de la volatilité de Black & Scholes, la meilleure estimation de la volatilité, pour des données journalières, est la racine carrée de la variance empirique sans biais ( $\hat{\sigma}^2$ ), donnée par les formules suivantes :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) - \hat{\mu} \right)^2$$

où  $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$

avec  $n$  est le nombre jours ouvrables passés et, par conséquent, le nombre d'observations à considérer pour le calcul de la volatilité. En général, on retient un nombre de jours, égal à la durée de vie résiduelle de l'option.

Dans la formule de Black & Scholes, l'unité de temps pour mesurer les paramètres est, par convention, l'année. Ceci est vrai, en particulier, pour la volatilité. Ainsi, si on considère un nombre de jours ouvrables de 250 par an, la volatilité annualisée est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_{AN} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{250}{\Delta t}}$$

L'hypothèse de Black & Scholes concernant la stationnarité du prix du sous-jacent n'est pas conforme à la réalité. D'ailleurs la volatilité historique ne peut

être que stochastique, rien qu'en considérant une période de calcul, sous la forme d'une fenêtre coulissante, dans le temps.

En fait, sa valeur dépend du nombre d'observations à considérer pour son calcul, ainsi que l'intervalle de temps entre deux observations consécutives. Cette approche a été critiquée, principalement, pour le fait qu'elle suppose que la perception du risque par les investisseurs est, uniquement, reliée à la variabilité des cours des actions dans le passé. Par conséquent, nous pouvons dire qu'elle représente une estimation biaisée de la volatilité des marchés, ce qui se traduit dans l'écart important constaté entre le prix de marché de l'option et son prix théorique.

En considérant un passé égal, dans sa durée, à la durée de vie résiduelle d'une option (jours ouvrés uniquement), les résultats du calcul de la volatilité historique, pour l'ensemble de la base journalière, sont illustrés dans la figure 4, avec des données, triées, selon la chronologie.

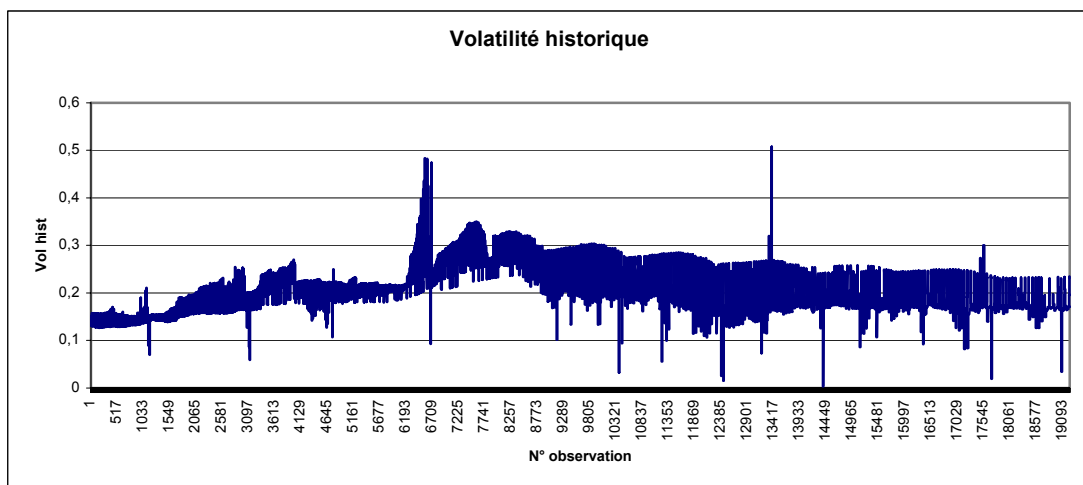


Figure 4 : Série de la volatilité historique sur l'ensemble de la base journalière

Contrairement, à l'hypothèse de Black & Scholes, concernant la stationnarité de la volatilité, on remarque bien, sur la figure 4, que la volatilité historique n'est pas constante, comme le laisse entendre le modèle de Black & Scholes.

### 2.2.1.2 Données intraday

Si par contre, on dispose d'observations intraday rapprochées, le calcul de la volatilité instantanée est possible.

En effet, on a :  $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz = \mu dt + \sigma \sqrt{dt} U$

En appliquant le lemme d'Itô, cette équation devient :

$$d\ln(S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma \sqrt{dt} U$$

Soit, en intégrant, entre les instants  $t$  et  $t+\Delta t$  (désigné par  $(t+1)$ ), on peut écrire :

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} U$$

En élevant, au carré membre à membre, cette équation devient :

$$\left(\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)\right)^2 = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \Delta t^2 + 2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sigma U \Delta t^{\frac{3}{2}} + \sigma^2 U^2 \Delta t$$

A l'échelle  $\Delta t$ , en appliquant l'opérateur espérance, membre à membre, seul le terme en  $\Delta t$ , subsiste, les autres termes sont négligeables. Ainsi, on peut écrire :

$$E\left(\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)\right)^2 = \sigma^2 \Delta t, \text{ puisque } U^2 \rightarrow \chi^2(1) \text{ et que, donc, } E(U^2) = 1$$

D'un autre coté, à l'échelle  $\Delta t$ , on peut écrire :

$$V\left(\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)\right) \approx E\left(\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)\right)^2 = \sigma^2 \Delta t$$

Plus l'intervalle de temps  $\Delta t$  est petit, plus on peut assimiler  $\left(\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)\right)^2$  à une constante, qui est, donc, égale à son espérance. Ainsi, on peut écrire :

$$\sigma \approx \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left| \ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) \right|, \text{ lorsque } \Delta t \text{ est petit}$$

Si on considère que  $\sigma$  est la volatilité instantanée, relative à une durée d'une seconde, qu'une année comprend 250 jours ouvrables, et que chaque jour

comporte une séance de sept heures de cotation en continu, la volatilité instantanée annualisée peut être déterminée, suivant la formule suivante:

$$\sigma_a = \sigma \sqrt{250 * 7 * 3600} = \sigma \sqrt{6300000} = 2510\sigma$$

Soit, en remplaçant  $\sigma$ , par son expression, on obtient:

$$\sigma_a = \frac{2510}{\sqrt{\Delta t}} \left| \text{Ln}\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) \right| \quad \text{avec } \Delta t \text{ en seconde.}$$

Si  $n$  est le nombre d'observations par séance de cotation, on peut écrire :

$$n = \frac{7 * 3600}{\Delta t}$$

La volatilité historique peut s'écrire, ainsi, suivant une formule équivalente à la précédente. Soit :

$$\sigma_a = \sqrt{250 * n} * \left| \text{Ln}\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) \right|$$

Cette formule a permis le calcul de la volatilité historique, pour l'ensemble des contrats relatifs à la base Monep Intraday utilisée dans le présent travail. La figure 5 illustre la forme de cette volatilité, pour l'ensemble de la base intraday précitée, où les données sont triées, selon la chronologie.

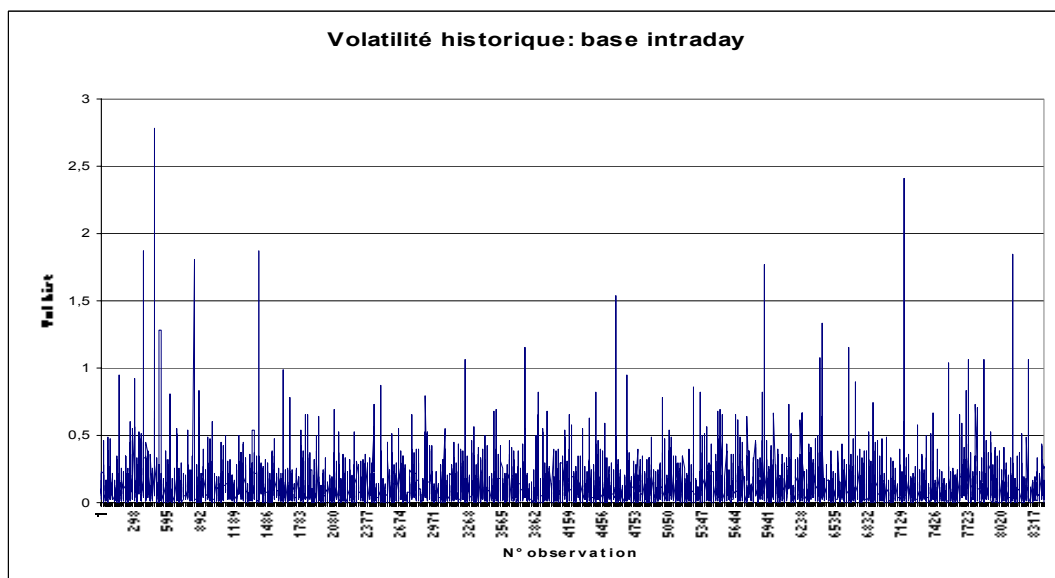


Figure 5 : Série de la volatilité historique relative à l'ensemble de la base intraday

En fait cette volatilité est proportionnelle au rendement instantané du sous-jacent. On remarque, sur la figure 5, que la volatilité n'est pas constante, au même titre que pour la base journalière.

### **2.2.2 Volatilité implicite**

Étant donné les critiques adressées à la méthode de la volatilité historique, une méthode alternative consiste à utiliser les prix observés sur les marchés pour en extraire une volatilité implicite.

Comme la volatilité implicite est liée à la valeur présente du marché, elle est un estimateur meilleur que la volatilité historique. L'idée est que la volatilité implicite est basée sur le prix présent de l'option qui inclue les prévisions des événements futurs.

Le vrai problème, avec la volatilité implicite, est sa liaison intime avec le processus de diffusion du sous-jacent. Dans, le cas du modèle de Black & Scholes, celui-ci est Brownien géométrique, ce qui ne colle pas avec la réalité.

Selon une étude empirique, réalisée par Beckers (1981), la volatilité implicite, calculée, à partir, du prix de l'option qui est la plus « at the Money », c-à-d, à partir, de l'option qui est la plus sensible aux variations de la volatilité, constitue la meilleure prévision de la volatilité future.

La volatilité implicite de Black & Scholes est définie comme la valeur de la volatilité  $\sigma$  qui égalise le prix de l'option donné par la formule de Black & Scholes et le prix de l'option observé sur le marché. Le calcul de la volatilité implicite nécessite donc l'inversion de la formule d'évaluation, en l'occurrence celle de Black & Scholes, tout en considérant la valeur de l'option sur le marché. Cette inversion est possible dans la mesure, où la valeur du marché fonction de la volatilité est une bijection.



L'inversion d'une formule d'évaluation d'options permet d'estimer les anticipations du marché, relatives à la volatilité future des cours des actifs sous-jacents. En effet, un opérateur détenant une option, dont il veut estimer sa volatilité, observe, généralement, le cours coté de cette même option la veille (où un cours coté de l'option sur le même titre pour une autre échéance, par exemple). Puis, en supposant la formule de Black & Scholes exacte, l'opérateur déduit la volatilité  $\sigma$  inconnue, à partir du cours observé. Celle-ci permet le calcul de la valeur future de l'option. En pratique, la volatilité implicite est la méthode d'estimation la plus utilisée par les praticiens.

Pour calculer la volatilité implicite, on fait recours à des méthodes numériques, pour inverser les formules d'évaluation. On présente, dans la suite, quelques méthodes dont la plus communément utilisée est celle de Newton-Rhapson.

#### **2.2.2.1 Algorithme « interpolation »**

Cette méthode consiste à calculer la volatilité implicite, à partir de la valeur de l'option sur le marché, en se basant sur la formule de Black & Scholes. A partir d'un intervalle borné de la volatilité, on crée deux suites de volatilité adjacentes qui converge vers la valeur réelle de la volatilité. On calcule  $C_t$  pour une volatilité maximale  $\sigma_{\text{Max}}$  et une volatilité minimale  $\sigma_{\text{min}}$ . Ces deux bornes de la volatilité sont initialisées par une valeur proche de 0.5, par exemple, pour  $\sigma_{\text{Max}}$  et proche de 0 pour  $\sigma_{\text{min}}$ . La valeur de l'option  $C_t(\sigma)$  est désignée, respectivement, par  $C_{\text{Max}} > C$  pour la valeur maximale de la volatilité  $\sigma_{\text{Max}}$  et par  $C_{\text{min}} < C$  pour la valeur minimale de la volatilité  $\sigma_{\text{min}}$  ( $C$  étant la valeur de l'option sur le marché). Elle est calculée par la formule de Black & Scholes, ou par n'importe quel autre modèle paramétrique.

Puis, on calcule  $C_t(\sigma)$ , pour chaque valeur de la moyenne des bornes de l'intervalle de la volatilité :

$$\sigma = \frac{\sigma_{Max} + \sigma_{min}}{2} \quad (2.2.2-1)$$

- Si  $C_t(\sigma) < C$  alors  $C_{min} = C_t(\sigma)$  et  $\sigma_{min} = \sigma$

- Si  $C_t(\sigma) > C$  alors  $C_{Max} = C_t(\sigma)$  et  $\sigma_{Max} = \sigma$

Ce calcul itératif s'arrête quand l'écart  $\varepsilon_t = |C_t(\sigma) - C|$  devient inférieur, à une certaine valeur  $\zeta$ , qu'on se donne et qui est d'un ordre inférieur à  $10^{-7}$ , par exemple.

Cette méthode permet une convergence, relativement rapide, pour une précision  $\zeta$  donnée. Dans le souci d'une convergence, encore plus rapide, on peut utiliser, à la place de la formule (2.2.2-1), la formule d'interpolation linéaire suivante:

$$\sigma = \sigma_{min} + \frac{C - C_{min}}{C_{Max} - C_{min}} (\sigma_{Max} - \sigma_{min})$$

Toutefois, avec cette formule, on n'est pas à l'abri d'une division par zéro, contrairement, à la formule (2.2.2-1).

### 2.2.2.2 Algorithme de descente du gradient (méthode de Newton-Raphson)

Pour cet algorithme, il convient de choisir une formule pour l'erreur désignée par  $\varepsilon_t$ , entre la valeur de l'option calculée et sa valeur sur le marché, pour qu'elle soit dérivable. A cet effet, la fonction énergie est simple et pratique.

Dans ce cas, l'erreur s'écrit :  $\varepsilon_t = \frac{1}{2}(C_t(\sigma) - C)^2$ , avec  $C_t(\sigma)$  qui est la valeur de l'option, calculée à partir d'un modèle paramétrique donné (le modèle de Black & Scholes par exemple) et  $C$  est la valeur de l'option sur le marché des options.

Suivant le modèle de Black & Scholes, la sensibilité de la valeur de l'option, par rapport à la volatilité, est donnée par la formule suivante :

$$\frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = S\sqrt{\tau}N'(d_1) \quad \text{avec} \quad N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

Pour chacune des valeurs  $\sigma_t$  on calcule par la formule de Black & Scholes la valeur de l'option  $C_t(\sigma_t)$  et  $\varepsilon_t$ . Pour l'itération suivante, on a :

$$\sigma_{t+1} = \sigma_t - \lambda \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \sigma_t} \quad \text{où} \quad \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \sigma_t} = (C_t(\sigma_t) - C) \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_t} = (C_t(\sigma_t) - C) \frac{S\sqrt{\tau} e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Le calcul itératif se fait jusqu'à ce que l'erreur  $\varepsilon_t$  soit inférieure à un seuil donné  $\zeta$ . La valeur définitive de  $\sigma_t$  de ce calcul correspond à la volatilité implicite. Le choix de  $\zeta$  et  $\lambda$  conditionne la précision de ce calcul. Le choix de  $\lambda$  est déterminant pour la rapidité de la convergence de cet algorithme. Un compromis doit être fait. Ce coefficient  $\lambda$  ne doit pas être très grand, d'une part, pour avoir une bonne précision, et d'autre part, pour que le schéma de calcul soit stable. Il ne doit pas, non plus, être trop petit pour que la convergence se fasse assez rapidement. Celle-ci est, également, conditionnée par le choix de la valeur initiale de  $\sigma_0$  de la volatilité.

### 2.2.2.3 Algorithme « récursif »

Pour cet algorithme, le calcul se fait d'une manière itérative, suivant une boucle, en considérant 4 étapes. D'abord, on note que les quantités  $d_1$  et  $d_2$  de la formule de Black & Scholes peuvent se mettre sous la forme :

$$d_1 = \frac{A}{\sigma} + B\sigma \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{A}{\sigma} - B\sigma$$

$$\text{où} \quad A = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S}{Ee^{-r\tau}}\right)}{\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2}\sqrt{\tau}$$

Les 4 étapes de calcul sont les suivantes :

1.  $\sigma = \sigma_0$  la volatilité est initialisée avec une valeur  $\sigma_0$
2.  $d_1 = \frac{A}{\sigma} + B\sigma$  d'où  $N(d_1)$

3.  $N(d_2) = \frac{SN(d_1) - C}{Ee^{-r\tau}}$  d'où  $d_2$
4.  $\sigma = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{\tau}}$  puis retour à la case 1

Le calcul se fait, jusqu'à ce que la différence des volatilités implicites, correspondantes à deux itérations successives, soit inférieure à un seuil donné  $\zeta$ . La valeur de l'option  $C_t$  est stockée, après le calcul de la volatilité. La valeur minimale de l'écart  $\varepsilon_t = |C_t - C|$  correspondra à la volatilité implicite recherchée. Cet algorithme est représenté par le logigramme de la figure 6.

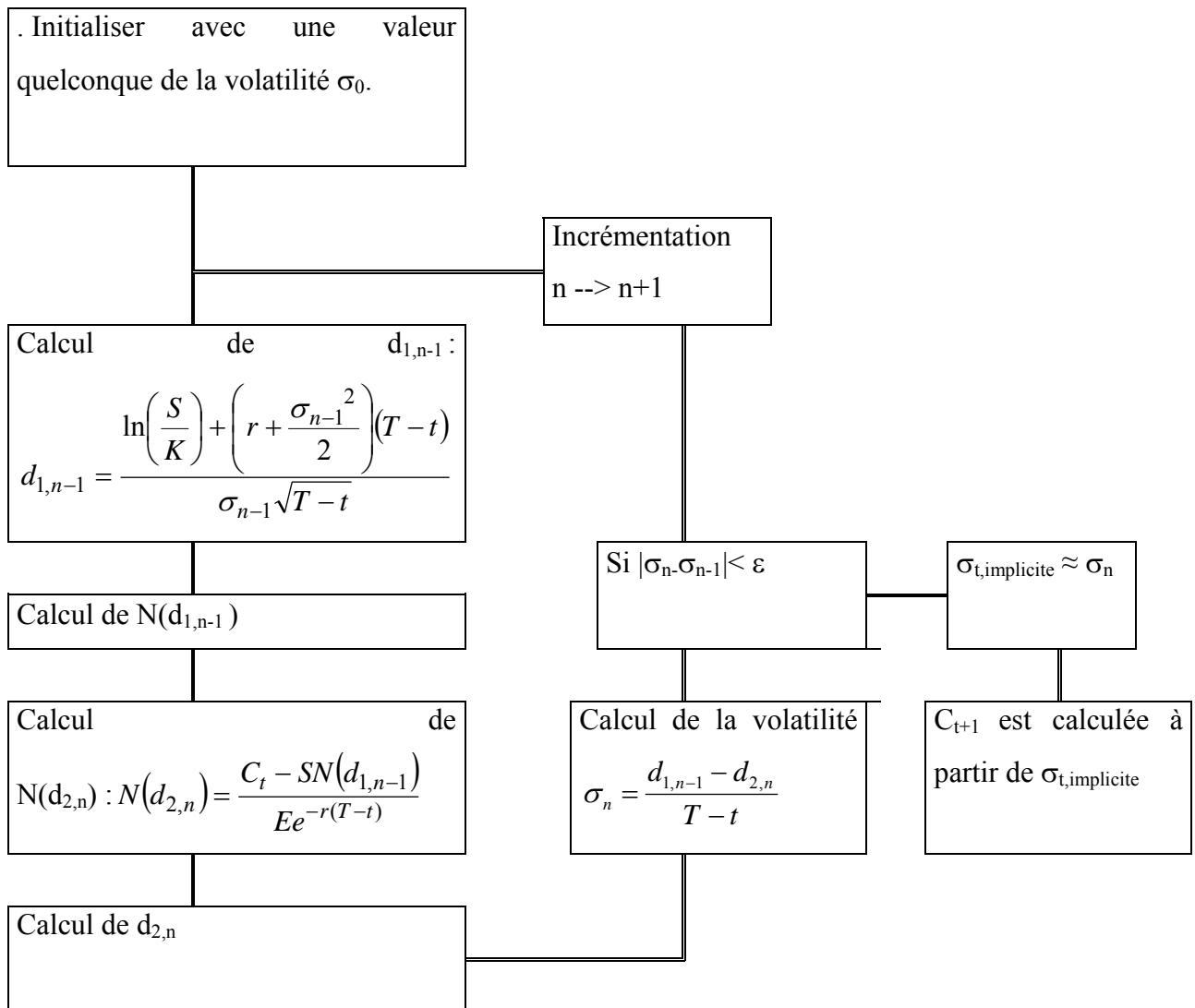


Figure 6 : Logigramme pour le calcul de la volatilité implicite par l'algorithme « récursif »

Dans la pratique, on suppose que le modèle de Black & Scholes est vraie à un instant  $t$ , ce qui permet de déterminer la volatilité implicite, à cet même instant  $\sigma_{t, \text{implicite}}$ , en inversant la formule de Black & Scholes suivant l'algorithme défini ci-dessous, où  $n$  est le numéro de l'itération,  $C_t$  est la valeur donnée de l'option, à l'instant  $t$ , et  $\zeta$  l'erreur tolérée pour la détermination de la volatilité implicite.

En supposant que, sur l'intervalle de temps  $[t ; t+\Delta t]$ , la volatilité ne varie pas, la détermination de la volatilité implicite, à l'instant  $t$ , permet au praticien d'évaluer une option sur le même sous-jacent, à l'instant suivant  $t+\Delta t$ , où  $\Delta t$  est petit. Le prix de l'option à  $t+\Delta t$  est  $C_{t+1}$ .

La convergence avec cet algorithme est rapide pour une précision donnée. Un seul inconvénient à cette méthode est qu'on peut rencontrer des aberrations, au niveau des calculs, tel que, par exemple, la quantité  $N(d_2)$  soit supérieure à l'unité, dans la ligne 3.

#### **2.2.2.4 Résultats**

Ces 3 algorithmes ont été programmés et ont permis de faire des calculs sur des observations des deux bases intraday et journalière. Pour le calcul de la volatilité implicite, sur l'ensemble de ces deux bases, c'est le premier algorithme « interpolation » qui a été utilisé. Pour l'ensemble de la base intraday, la volatilité implicite est représentée dans le graphique 7.

L'erreur de calcul, égale à l'écart absolu entre la valeur de l'option calculée par le modèle de Black & Scholes et celle du marché, est de l'ordre de  $10^{-6}$  à  $10^{-5}$ . Les données sont classées dans l'ordre chronologique. En dehors des intervalles de temps, où la volatilité est variable, celle-ci est, relativement, stable, au voisinage de 20%.

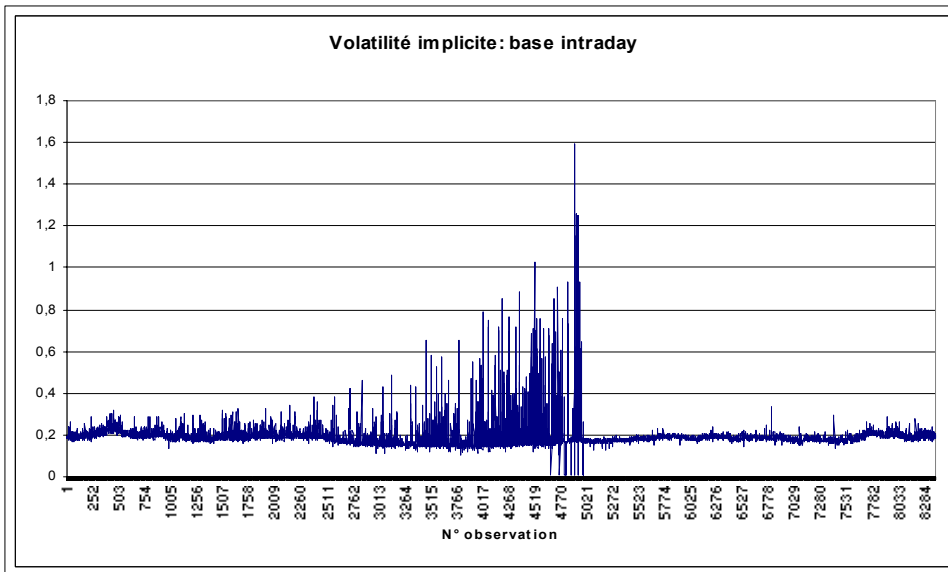


Figure 7 : Série de la volatilité implicite relative à l'ensemble de la base intraday

Pour l'ensemble de la base journalière, la volatilité implicite est représentée dans le graphique 8, avec des observations classées dans le sens chronologique.

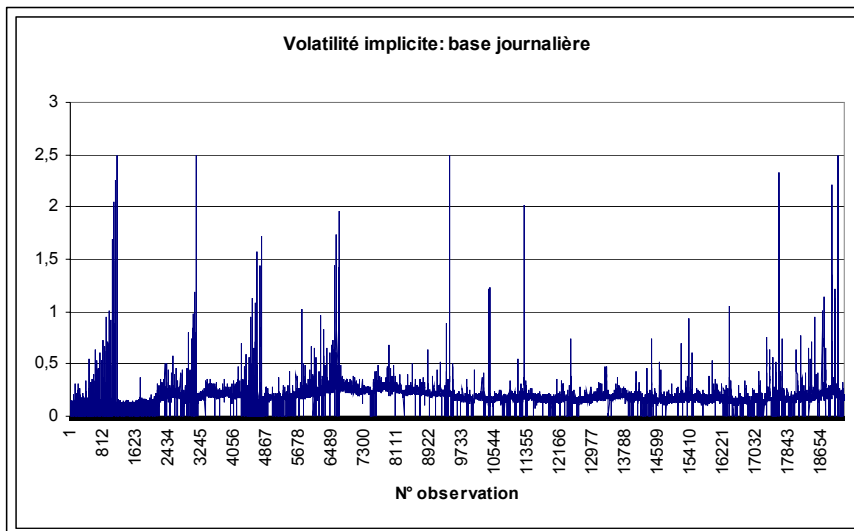


Figure 8 : Série de la volatilité implicite relative à l'ensemble de la base journalière

Pour cette base, l'erreur de calcul est comprise entre 0 et  $10^{-5}$ . On trouve pour certaines observations, une volatilité nulle, dans le cas, où la valeur temps est nulle. La volatilité est, relativement, variable. En tout cas, elle n'est pas

constante, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de stationnarité du prix de l'actif sous-jacent, sur laquelle se base le modèle de Black & Scholes.

### 2.2.3 Volatilité d'un indice boursier

Théoriquement, pour des options ayant le même sous-jacent, le même prix d'exercice, la même durée et la même échéance, quelles soient des options d'achat ou des options de vente, la volatilité implicite est la même. Ceci n'est pas vrai dans la pratique.

La volatilité implicite du sous-jacent peut être déterminée, à partir des  $n$  options les plus liquides du marché, comme la moyenne arithmétique des volatilités implicites de ces différentes options. La volatilité implicite, à l'instant  $t$ , est, donc,

$$\bar{\sigma}_{imp,t} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma_{imp,k,t} \quad (2.2.3-1)$$

où  $\sigma_{imp,k,t}$  est la volatilité de l'option  $k$ , à l'instant  $t$ .

Cette moyenne peut être pondérée, par les prix des options, ou par leurs sensibilités, par rapport à la volatilité.

Par ailleurs, il est plus logique de calculer la volatilité comme la racine carrée de la moyenne des carrés des volatilités des options considérées. Soit :

$$\bar{\sigma}_{imp,t} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma_{imp,k,t}^2} \quad (2.2.3-2)$$

L'hypothèse, selon laquelle la volatilité du sous-jacent est constante, n'est pas réaliste. Il suffit de suivre le marché financier pour tirer une telle conclusion. De plus, si on suppose que les volatilités, des actions qui composent l'indice, sont constantes, cette hypothèse ne peut pas être retenue, pour l'indice, lui-même, dont la volatilité du rendement résultant est stochastique.

Lartané et Rendleman(1976) définissent la volatilité implicite, comme étant la valeur de la volatilité qui minimise une fonction énergie de  $\sigma_t$  tel que :

$$\sigma_{imp,t} = \text{Arg} \left( \min_{\sigma_t} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (C_{k,t} - C_{k,t}(\sigma_t))^2 \right)$$

où

$C_{k,t}$  est la valeur du marché de l'option k, à l'instant t, et

$C_{k,t}(\sigma_t)$  est la valeur de l'option k, à l'instant t, calculée à partir d'un modèle d'évaluation donné.

#### **2.2.4 Résultats de calcul de la volatilité**

Pour la base journalière, on considère les volatilités implicites et historiques, calculées pour chaque observation. La première est la volatilité historique calculée sur un historique égale à la durée de vie résiduelle. La deuxième est la volatilité implicite, à partir du modèle de Black & Scholes, par la méthode d'interpolations linéaires successives sur la base d'un taux d'intérêt  $r = 3,3\%$  (taux moyen de l'année 1998). A partir des volatilités calculées pour chaque observation, il fallait déterminer la volatilité journalière correspondante au sous-jacent, sachant que plusieurs options sont cotées chaque jour. On a, également, fait ce calcul pour la volatilité implicite en tenant compte de la variation du taux d'intérêt qui est de 3,24% pour l'année 1997, 3,3% pour 1998 et 2,96% pour l'année 1999.

Les calculs de la volatilité, de l'indice CAC 40, sur la période couverte par la base de données, ont été fait avec les formules (2.2.3-1) et (2.2.3-2) qui ont donné, quasiment, les mêmes résultats.

Le Figure 9 représente ces volatilités (moyennes journalières), en fonction du temps (en jour), puisque les observations sont triées, suivant la chronologie, en considérant la formule (2.2.3-1).



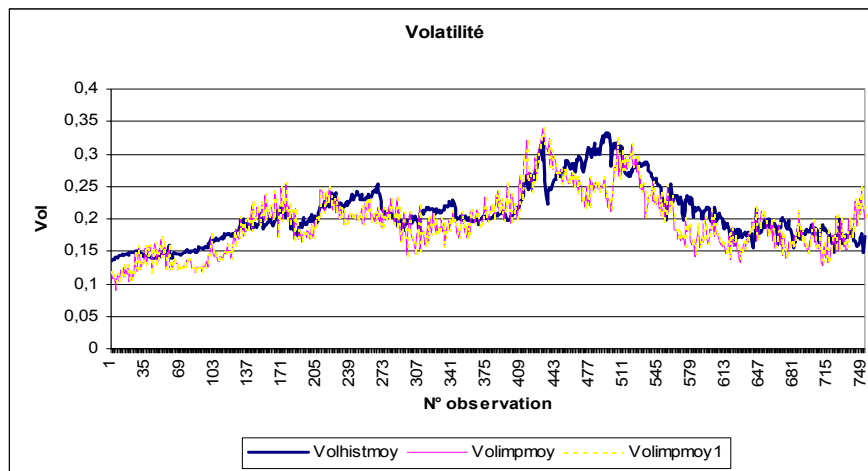


Figure 9 : Séries des volatilités implicites et de la volatilité historique : moyennes journalières, relatives à la base journalière.

On remarque, sur cette figure9, que les volatilités implicites, sont, quasiment, confondues. Ainsi, que l'on tienne compte de la variation de la moyenne annuelle du taux d'intérêt, ou non, le résultat est, sensiblement, le même. De plus, la volatilité historique est très proche de la volatilité implicite.

En comparant les résultats des deux formules (2.2.3-1) et (2.2.3-2), on a obtenu, pour la volatilité historique, les résultats représentés, dans la figure 10.

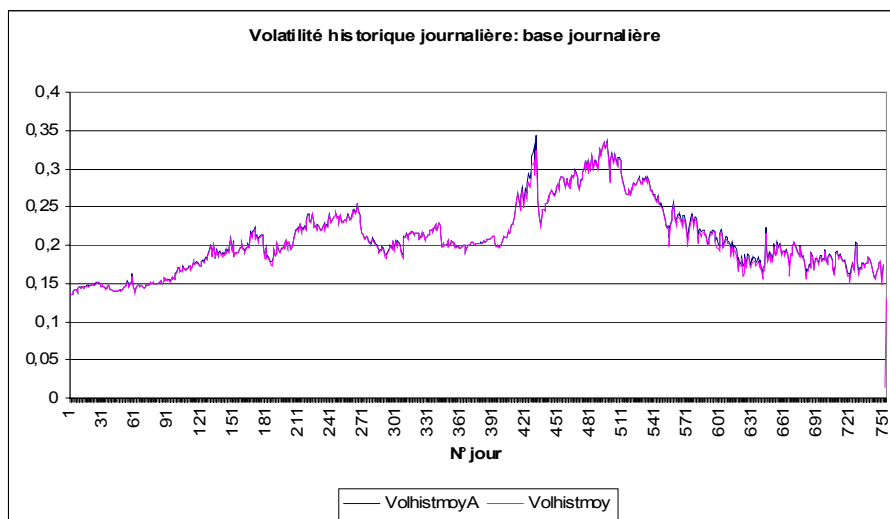


Figure 10 : Séries des volatilités historiques, moyennes sur un jour, de la base journalière : Volhistmoy calculée par la formule (2.2.3-1) et VolhistmoyA calculée par la formule (2.2.3-2)

Les deux courbes sont, parfaitement, confondues, ce qui implique, que les deux formules mènent aux mêmes résultats.

En comparant les résultats des deux formules (2.2.3-1) et (2.2.3-2), on a obtenu, pour la volatilité implicite, les résultats illustrés dans la figure 11.

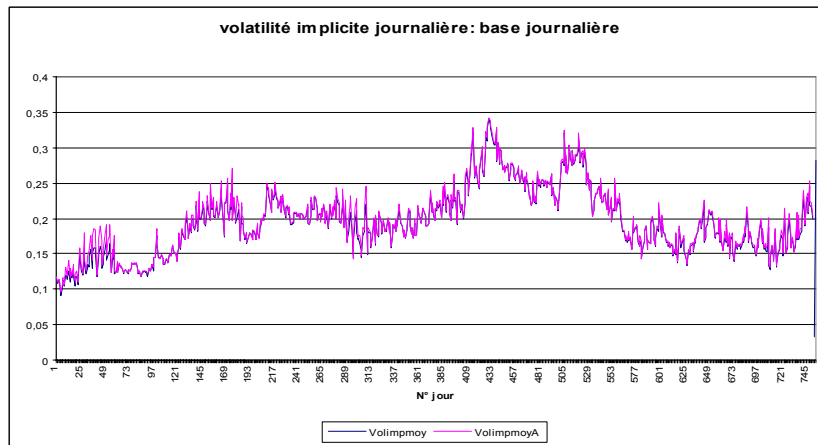


Figure 11 : Séries des volatilités implicites, moyennes sur un jour, de la base journalière : Volimp moy calculée par la formule (2.2.3-1) et Volimp moy A calculée par la formule (2.2.3-2)

Comme pour les volatilités historiques, on obtient des courbes confondues.

Pour la base intraday, nous avons calculé la valeur de la volatilité implicite journalière, en se basant sur la formule (2.2.3-2) et nous avons obtenu le résultat illustré dans la figure 12.

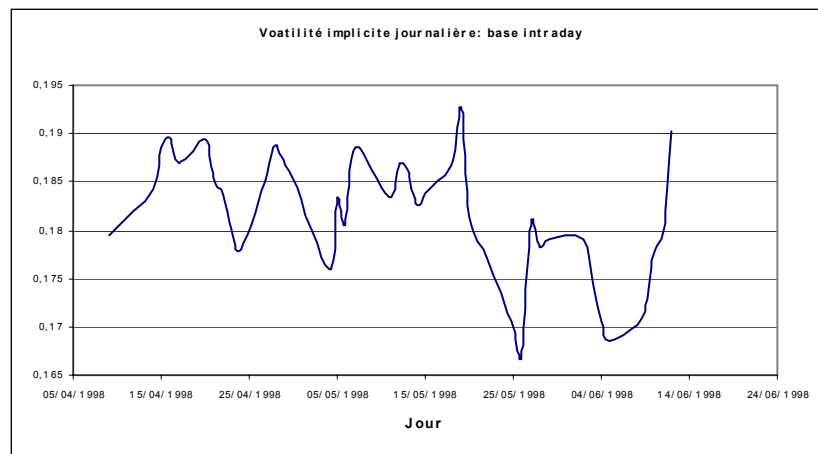


Figure 12 : Série de la volatilité implicite, moyenne sur un jour, de la base intraday (après sa transformation en base journalière), calculée par la formule (2.2.3-2)

Dans la formule de Black & Scholes, la durée de vie résiduelle doit être annualisée. Pour ce faire, il faut la diviser par le nombre de jours, relatif à une année. Or, l'intérêt commercial court sur toute l'année commerciale, qui comporte 365 jours donc la durée de vie résiduelle annualisée correspondante est :  $\tau_1=(T-t)/365$ . Alors que, la volatilité est calculée sur la durée d'ouverture de la bourse sur l'ensemble d'une année. Cette durée d'ouverture comporte, en moyenne, 250 jours et le calcul de la volatilité doit faire appel à ce nombre de jour. Donc, pour la volatilité la durée de vie résiduelle annualisée correspondante est  $\tau_2=(T-t)/250$ . En toute rigueur, il faut considérer cette différence des diviseurs.

A noter, que la valeur de la volatilité est plus petite, dans le cas où, on considère la différence de ces diviseurs de la durée de vie résiduelle, que dans le cas, où on considère le même diviseur, pour la durée de vie résiduelle, que se soit pour le taux d'intérêt que pour la volatilité, c-à-d, quand  $\tau_1= \tau_2=(T-t)/365$ . Cette conclusion qui paraît évidente, sur le plan théorique, est confirmée par les résultats de la figure 13, en considérant la base intraday.

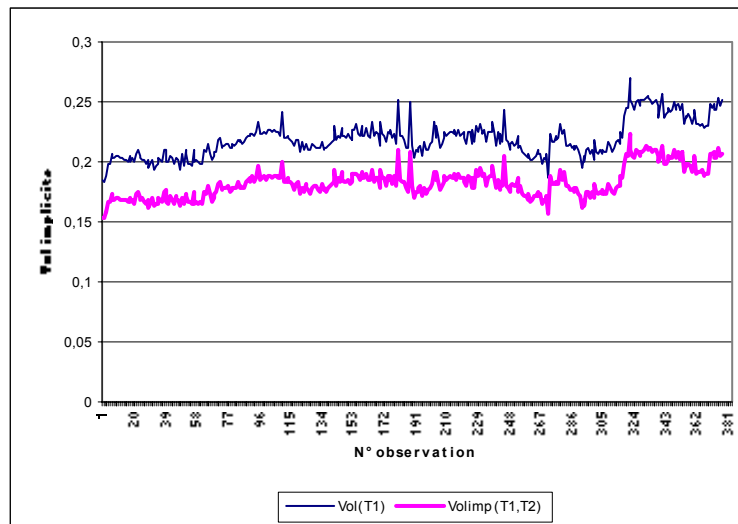


Figure 13 : Volatilité implicite, à l'instant t, sur l'ensemble de la base intraday.  
 Vol(T1) : si on considère  $\tau_1= \tau_2=(T-t)/365$ , et  
 Volimp (T1,T2) : si on considère  $\tau_1=(T-t)/365$  et  $\tau_2=(T-t)/250$

Le gap, entre les deux courbes, est bien manifeste et le résultat théorique précité est bien vérifié. En ce qui concerne la base journalière, la série de la volatilité

implicite a été calculée, en considérant des diviseurs différents de la durée de vie résiduelle :  $\tau_1=(T-t)/365$ , pour le taux d'intérêt, et  $\tau_2=(T-t)/250$ , pour la volatilité.

### 2.2.5 Le « Smile » de la volatilité

Le modèle de Black & Scholes repose sur l'hypothèse que le prix du sous-jacent suit une loi log-normale à chaque instant de la durée de vie future de l'option. Abstraction faite du taux d'intérêt à court terme, comme la volatilité est le seul paramètre inobservable dans le modèle de Black & Scholes, on peut considérer le prix de l'option comme fonction de la volatilité. Si le modèle de Black & Scholes était parfait, la volatilité implicite serait la même quel que soit le prix du marché de l'option. Cependant, plusieurs études empiriques ont révélé que la volatilité implicite est, très étroitement liée, au prix d'exercice de l'option et à sa durée de vie résiduelle, s'il s'agit d'une option européenne.

Si on représente la volatilité implicite, en fonction du prix d'exercice de l'option, pour une maturité donnée, on obtient une courbe de forme convexe plutôt qu'une droite horizontale comme le suppose le modèle de Black & Scholes. Vu la forme de la courbe, un tel phénomène est désigné de « smile » de, par les chercheurs et les praticiens.

Selon le modèle de Black & Scholes, la volatilité implicite, fonction de la moneyness, est représentée dans le graphique 14. On considère, à cet effet, la cotation du contrat 1P le 30 mars 1998 à 10 :24 :01. Les paramètres de cette cotation sont définis dans le tableau 10.

Valeur de l'indice: S	Prix d'exercice del'option :E	Durée de vie résiduelle :T-t	Taux d'intérêt à court terme : r	Valeur de l'option d'achat :C
3804,98	4150	184	0,033	116,00

Tableau 10 : Déterminants et valeur du contrat d'option 1P (base intraday) le 30 mars 1998 à 10 :24 :01.

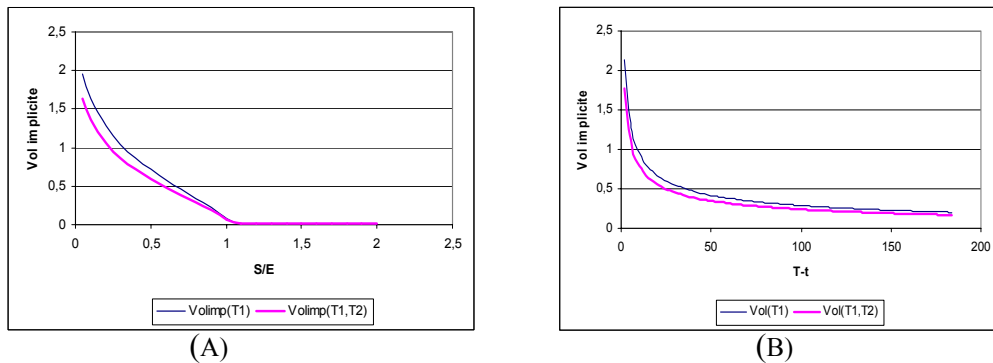


Figure 14 : (A) : Volatilité implicite, en fonction de la moneyness de l'option,  
 (B) : Volatilité implicite, en fonction de la durée de vie résiduelle de l'option,  
 sur la base de la cotation du contrat 1P (base intraday) le 30 mars 1998 à 10 :24 :01  
 $Vol(T_1)$  : si on considère  $\tau_1 = \tau_2 = (T-t)/365$ , et  $Volimp(T_1, T_2)$  : si on considère  
 $\tau_1 = (T-t)/365$  et  $\tau_2 = (T-t)/250$

La volatilité implicite  $Volimp(T_1, T_2)$ , calculée, avec un diviseur du temps à l'échéance annualisé, qui diffèrent, selon qu'il s'agisse de la volatilité ou du taux d'intérêt, est inférieur à la volatilité implicite  $Volimp(T_1)$ , qui correspond au cas, où les diviseurs du temps à l'échéance sont les mêmes, pour les variables précitées.

On voit, bien, sur le graphique 14-A, que la volatilité implicite, pour un call, est décroissante avec la parité et, qu'à partir d'une parité égale à l'unité, pour une valeur donnée de l'option, la volatilité implicite devient nulle. Ceci est en contradiction avec le modèle de Black & Scholes qui considère que la volatilité reste constante quelle que soit la parité. Les praticiens considèrent une volatilité pour chaque valeur de la parité.

On remarque sur le graphique 14 B, pour une valeur donnée de l'option, la volatilité implicite est décroissante avec le temps à l'échéance et qu'à l'approche de l'échéance, celle-ci converge vers zéro.

Si on conjugue les variations de la parité et celles du temps à l'échéance, pour une valeur donnée de l'option (cf tableau 10), on obtient la figure 15.

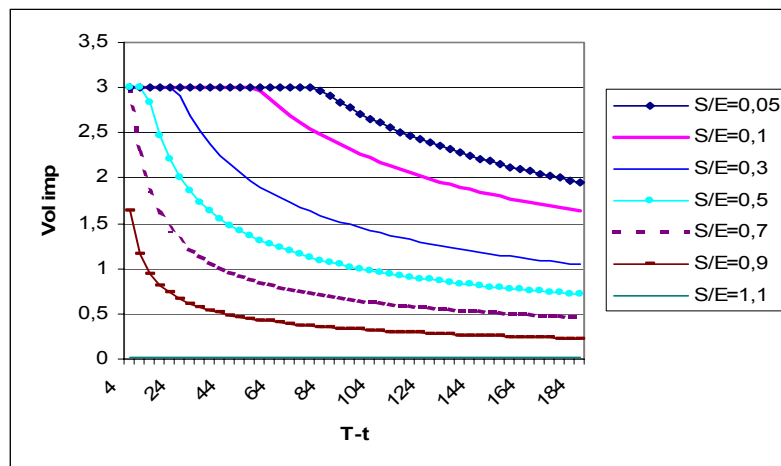


Figure 15 : Volatilité implicite, en fonction de la durée de vie résiduelle de l'option, pour différentes valeurs de la moneyness sur la base de la cotation du contrat 1P (base intraday) le 30 mars 1998 à 10 :24 :01.

Plus la parité de l'option est grande, plus la volatilité implicite est faible pour une valeur de l'option donnée et pour un temps à l'échéance donné. Pour une parité inférieure à 0,7, la courbe de la volatilité implicite fonction du temps à l'échéance, présente un seuil de saturation, identique pour toutes les parités et qui grandit à chaque fois que celles-ci baissent.

Les courbes 14 et 15 montrent bien que l'hypothèse de la constance de la volatilité ne tient pas debout, dans le modèle de Black & Scholes, mais ne correspondent, évidemment, pas à la courbe de « Smile ».

Dans la surface de la volatilité, la volatilité varie avec la parité (courbes de smile) et la durée de vie résiduelle de l'option (temps à l'échéance). Pour représenter la courbe de « Smile », il faut à partir de la base de donnée considérée, par exemple, la base journalière, faire un tri des données sur le temps à échéance. Ce tri permet de détecter des observations pour lesquelles ce temps à l'échéance ne varie pas ou bien varie très peu. Ces observations sont triées, ensuite, sur la parité et permettent de tracer la courbe de "smile". (figure 16-A). Le même raisonnement conduit à la courbe de la volatilité, en fonction du temps à l'échéance (figure 16-B).

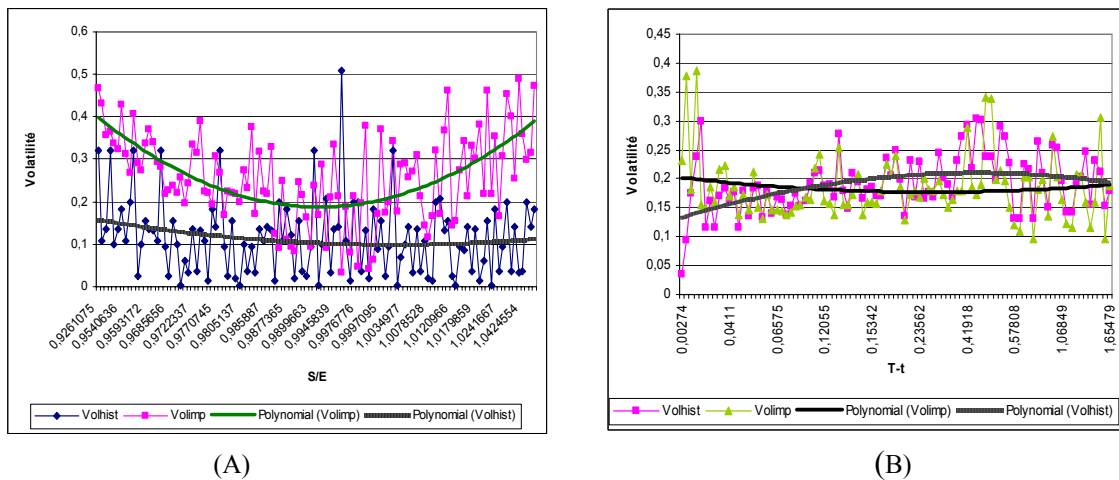


Figure 16 : (A) Courbes de « Smile » : Volatilité (implicite et historique), en fonction de la parité de l'option,  $T-t = 0,00274$ . (B) :Volatilité (implicite et historique), en fonction de la durée de vie résiduelle de l'option,  $S/E = 0,981$ . Base journalière

La volatilité en fonction de la parité n'est pas strictement monotone, elle présente des oscillations. Par contre, la courbe correspondante, obtenue par régression non linéaire, de type polynomial, donne, exactement, l'allure de la courbe de "Smile", aussi bien pour la volatilité implicite, que pour la volatilité historique.

La courbe de la volatilité implicite en fonction de la parité (figure 16-A) présente une courbure plus prononcée que celle de la volatilité historique et présente un minimum, pour une parité, légèrement inférieure à l'unité, pour la simple raison que le calcul de la volatilité implicite a été fait, en considérant un diviseur de la durée de vie résiduelle de 250 pour la volatilité et de 365 pour le taux d'intérêt. Cette différence n'est pas prise en compte par les praticiens et c'est ce qui explique le léger décalage de la courbe de « Smile » vers la gauche.

En ce qui concerne la courbe de la volatilité implicite, en fonction de la durée de vie résiduelle (figure 16-B), elle présente une concavité inverse à celle de la volatilité historique.

## 2.3 CONCLUSION

Le modèle de Black & Scholes (1973) sert de référence à tous ceux qui pratiquent la finance des marchés. Bien qu'il soit un modèle très populaire dans le monde de la finance, celui-ci repose sur des hypothèses plus ou moins réalistes.

D'abord, la couverture delta-neutre, nécessaire pour éliminer le risque, est supposée continue dans le temps. Si cette couverture n'est pas continue et qu'ils existent des intervalles de temps entre les différentes révisions du portefeuille, alors il y'a un risque qui subsiste ce qui est en contradiction avec le modèle de Black & Scholes.

Ensuite, les coûts de transaction relatifs à la couverture du portefeuille sont supposés nuls. Ceci n'est pas du tout réaliste, car, sur toutes les places du monde, il y'a des coûts supportés, à l'achat et la vente de produits financiers. Si ces coûts sont élevés, ceci va à l'encontre d'une couverture du portefeuille en continu.

Le modèle de Black & Scholes suppose que le rendement instantané du sous-jacent suit une loi normale. Tous les tests statistiques invalident cette hypothèse. Il semble que les queues de distribution soient plus épaisses que ne le prévoit le modèle de Black & Scholes. De plus, les queues de distribution empiriques du logarithme de la valeur du sous-jacent, sont parfois asymétriques.

Le modèle de Black & Scholes suppose que la volatilité du sous-jacent est, non seulement, connue mais aussi constante ou plutôt une fonction déterministe et connue. Or les séries temporelles de la volatilité montrent que celle-ci est variable et imprédictible donc stochastique. La volatilité ne peut-être directement observable et sa mesure est très difficile. De plus, il est difficile de modéliser une variable qu'on ne peut pas observer.



Le modèle de Black & Scholes suppose que le cours du sous-jacent suit un processus de diffusion stochastique continu dans le temps, ce qui est en contradiction avec la réalité puisque le cours du sous-jacent peut manifester des sauts inattendus de temps en temps, suite à la survenance d'évènements inattendus. Ces sauts sont, souvent, des chutes du cours « Krach ». Non seulement les sauts ne sont pas incorporés dans l'équation de la diffusion, suivant la loi log-normale (mouvement Brownien géométrique), mais, en plus, ils sont en contradiction avec la couverture en continu, puisque ces sauts surviennent, d'une manière aléatoire et soudaine.

Le modèle de Black & Scholes suppose que le taux d'intérêt est constant. Or, celui-ci est de toute évidence stochastique. Puisqu'il fluctue d'une manière aléatoire.

Bien qu'il soit facile de trouver des modèles meilleurs que celui de Black & Scholes, du point de vue technique et mathématique, il est presque impossible que ceux-ci aient un succès commercial similaire au modèle de Black & Scholes.

Par ailleurs, la volatilité implicite fournit une meilleure prévision de la volatilité future d'une action que la volatilité historique et donne, généralement, des résultats plus fiables, lorsqu'elle est utilisée pour évaluer des options (Latané et Rendeleman (1976) et Becker (1981)). Par ailleurs, des études ont révélé qu'elles sont fortement, (non parfaitement) positivement corrélées. Ceci a été confirmé, par les résultats trouvés dans ce chapitre.

L'algorithme baptisé récursif qui a été développé, dans le cadre de ce chapitre, pour le calcul de la volatilité implicite présente parfois l'inconvénient d'avoir une fonction de répartition qui dépasse l'unité s'il n'est pas bien initialisé.

Dans le calcul des séries de la volatilité implicite on n'a pas considéré le même diviseur du temps à l'échéance, pour la volatilité et le taux d'intérêt. On a plutôt considéré un diviseur égal à 250, pour la volatilité et à 365 pour le taux d'intérêt. Bien que les praticiens ne tiennent pas compte de cette différence, tous les calculs ultérieurs dans le présent travail en tiennent compte.

Enfin, d'après les hypothèses de Black & Scholes, si le temps à l'échéance et le taux d'intérêt sont fixés, pour une valeur donnée de l'option la volatilité implicite doit être constante quelle que soit la valeur de la parité (« moneyness »). On a mis en évidence que cette hypothèse n'est pas conforme à la réalité et qu'à chaque valeur de la parité correspond un niveau spécifique de la volatilité qui prend une forme de courbe en U (« Smile »).

Le tracé des courbes de « Smile » pour la volatilité implicite et la volatilité historique (lissage polynomial d'ordre 2) a révélé une courbure plus prononcée pour la première que pour la seconde, bien qu'elles aient la même allure. La première présente un minimum au voisinage d'une moneyness de 0,994, alors que la deuxième présente un minimum au voisinage de l'unité. Cet écart s'explique par le fait que le diviseur du temps à l'échéance n'est pas le même pour la volatilité et le taux d'intérêt.

Le modèle de Black & Scholes ne pouvant pas expliquer la courbe de « Smile », la valeur de l'option étant très sensible aux variations de la volatilité, ceci nous conduit à considérer la volatilité comme une variable d'état stochastique.

# CHAPITRE 3

## MODELES A VOLATILITE STOCHASTIQUE

### 3.1 EQUATION DIFFERENTIELLE POUR L'EVALUATION D'UNE OPTION AVEC DES MODELES A VOLATILITE STOCHASTIQUE

Une caractéristique de la volatilité implicite est qu'elle n'est pas constante quand le prix d'exercice change. En principe, d'après les hypothèses de Black & Scholes, si le temps à l'échéance, le prix du sous-jacent et le taux d'intérêt sans risque, sont fixés, le prix de l'option, rapporté au prix d'exercice, doit donner une valeur constante de la volatilité implicite. Dans la pratique, ceci n'est pas le cas. A chaque prix d'exercice correspond un niveau spécifique de la volatilité. Les différentes volatilités utilisées (une pour chaque prix d'exercice) définissent ce que les professionnels appellent « smile » de la volatilité.

En cotant et en affichant les prix, les opérateurs affectent une volatilité spécifique à chaque prix d'exercice pour un même support. La volatilité utilisée est déterminée par rapport à une volatilité centrale ou moyenne.

Selon Black (1972) et Macbeth et Merville (1979, 1980), le modèle de Black & Scholes tend à surévaluer les calls « in the money » et à sous-évaluer les calls « out of the money », bien que le modèle de Black & Scholes soit extrêmement

populaire, il connaît certaines limites et certaines imperfections. Il faut donc considérer avec prudence l'écart pouvant exister entre le prix du marché d'une option et son prix théorique fourni par ce modèle, avant de l'attribuer, automatiquement, à l'existence d'une opportunité d'arbitrage.

Les hypothèses sur lesquelles repose le modèle de Black & Scholes ne sont pas en accord avec les conditions concrètes du négoce des options. Il est, bien sûr, impossible de relâcher toutes ces hypothèses simultanément. Parmi les hypothèses à relâcher est la log-normalité du processus suivi par le prix du sous-jacent qui suppose une stationnarité de la volatilité des rendements du sous-jacent.

Le fait que les variations de la variance des rendements de l'actif sous-jacent ne puissent être que partiellement expliquées, par les mouvements de son prix, a amené plusieurs chercheurs Wiggins (1987), Hull & White 1987 et Scott (1987) à conclure que la volatilité des rendements de l'actif sous-jacent pourrait être elle-même une variable aléatoire qui évoluerait dans le temps suivant un processus spécifique. Ainsi, les variations du prix d'une option sont expliquées par les variations aléatoires des deux variables d'état qui sont le prix de l'actif sous-jacent et la volatilité.

En se basant sur un certain nombre d'hypothèses, la valeur de l'option donnée par le modèle à volatilité stochastique, est solution d'une équation différentielle à dérivées partielles du second ordre, qui n'est autre qu'un cas particulier de l'équation générale de Garman (1976), avec seulement deux variables d'état, qui sont le prix de l'actif sous-jacent et la volatilité. Compte tenu de ces conditions aux limites, relatives à ce modèle, pour un call européen, dans le cas où le marché est complet et en équilibre, cette équation admet une solution unique. Par contre, la solution exacte, n'est pas évidente à trouver.

Cependant, pour une dynamique particulière de la volatilité et suivant certaines hypothèses Stein & Stein (1991) et Heston (1993) ont réussi à trouver, analytiquement, une solution exacte de cette équation (closed form solution). Le premier s'est basé sur une technique relative à l'équation de la chaleur et le second sur l'inversion de Fourier. La plupart des autres chercheurs qui ont traité le sujet ont eu recours à une résolution numérique de cette équation. On peut citer, à cet effet, Hull & White (1987), Scott(1987), Wiggins (1987), et Fouque & al. (2000).

C'est le cas dans la présente étude, où on fait appel aux méthodes des différences finies pour résoudre l'équation différentielle en question et à la simulation de Monte Carlo, en considérant un raisonnement risque-neutre. On a utilisé les deux techniques afin de fiabiliser les calculs.

En ce qui concerne la méthode des différences finies, on fait appel à la méthode explicite. Si la condition de stabilité, du schéma numérique correspondant, n'est pas vérifiée pour cette méthode, on fait appel à l'algorithme de Hopscotch qui est inconditionnellement stable, du fait qu'il alterne entre la méthode explicite et la méthode implicite.

L'objectif du présent travail est de comparer les performances des modèles à volatilité stochastique avec celles du modèle de Black & Scholes et des modèles neuronaux, au niveau de l'évaluation d'options d'achat sur l'indice CAC 40.

Au cours de ce travail, pour avoir les meilleures performances, plusieurs questions se posent : Quel processus de la volatilité faut-il considérer pour avoir les meilleurs résultats ? Est-ce que les résultats basés sur les données de la base intraday sont meilleurs que ceux basés sur les données de la base journalière ? Faut-il estimer les paramètres liés à la dynamique de la volatilité, à partir d'un contrat d'option ou à partir de l'ensemble de la base de données ?

Ce chapitre comporte quatre sections.

Dans la première section de chapitre, après avoir exposé les hypothèses du modèle à volatilité stochastique, pour l'évaluation d'un call européen, on établit l'équation différentielle à dérivées partielles du second ordre, correspondante, ainsi que les conditions aux limites relatives à ce modèle.

Pour le calcul numérique et, notamment, pour l'algorithme de Hopscotch, il est recommandé d'éliminer le terme de la dérivées croisées qui figure dans l'équation différentielle. Si, le prix du sous-jacent et la volatilité, ne sont pas corrélés, ce terme sera éliminé de lui-même. Sinon, ce terme sera éliminé, par un changement de variables, adéquat.

Justement, le paragraphe suivant traite ce changement de variables, ainsi que la transformation des conditions aux limites et du domaine de calcul correspondant.

Dans l'étude empirique de ce chapitre, on a considéré trois processus de la volatilité à savoir, un mouvement Brownien, un processus empirique tel que le logarithme de la volatilité de la volatilité est une fonction linéaire de la volatilité et, enfin, un processus d'Ornstein Uhlenbeck avec une volatilité de la volatilité constante.

Après avoir traité le changement de variable précité, l'objet de la deuxième section, est d'estimer les paramètres liés à la volatilité, pour chacun des trois processus de la volatilité considérés. On estime, enfin, les autres paramètres du modèle à volatilité stochastique.

La résolution numérique de l'équation différentielle par la méthode des différences finies, fait l'objet de la troisième section. Elle suppose, dans un premier temps, l'établissement du schéma numérique explicite correspondant,

puis, dans un second temps, l'étude de la consistance de la stabilité et de la convergence de ce schéma.

Ce schéma n'étant pas stable, on fait recours à l'algorithme de Hopscotch dont on présente la teneur et qu'on teste sur le modèle de Black & Scholes, en considérant le drift risque-neutre et la volatilité de la volatilité, égales à zéro.

Enfin, on présente les différents résultats de calcul de la valeur de l'option, avec, parfois, la volatilité implicite et parfois la volatilité historique, en considérant trois processus pour la volatilité, à savoir le mouvement Brownien et le processus empirique précité et le processus d'Ornstein Uhlenbeck. Enfin, en estimant les paramètres de ces processus, à partir des données d'un contrat ou à partir de la base de donnée toute entière. Ces résultats sont à comparer avec ceux du modèle de Black & Scholes.

Ces résultats sont à comparer, également, à ceux générés, par la simulation de Monte Carlo, qui se base sur un raisonnement risque-neutre. Justement, la quatrième section traite l'évaluation de l'option, en se basant, sur un tel raisonnement et un tel outil. Dans un premier temps, on détermine deux générateurs adéquats, des deux variables d'état, qui permettent un gain en temps CPU, très précieux pour un algorithme de simulation qui comporte, environ 4 000 000 itérations, pour calculer la valeur d'option relative à une seule observation de la base de donnée.

Après avoir étudié la convergence de l'algorithme et testé le programme de simulation, sur le modèle de Black & Scholes, les résultats du modèle à volatilité stochastique sont générés pour les 9 contrats de la base intraday et les 5 contrats de la base journalière, en considérant, comme processus de la volatilité, le mouvement Brownien, le processus empirique et le processus d'Ornstein Uhlenbeck. Les résultats sont à comparer à ceux du modèle de Black & Scholes et avec ceux générés par l'algorithme Hopscotch.

Tous ces résultats sont à comparer à ceux de Heston (1993) qui sont en totale concordance avec ceux de Hull & White (1987).

Ma contribution, dans ce chapitre, consiste, premièrement, à détailler les calculs qui mènent à l'équation de Garman (1976). Deuxièmement, elle consiste à élaborer les conditions aux limites propres à la résolution de cette équation pour l'évaluation d'un call européen. Troisièmement, elle consiste à élaborer le changement de variables en vue d'éliminer le terme de la dérivée croisée, afin de faciliter la recherche d'une solution aussi bien analytique que numérique surtout, dans le cas où le schéma numérique est instable et qu'on doit faire appel à l'algorithme de Hopscotch.

Quatrièmement, elle consiste à élaborer les schémas de calculs et les algorithmes qui en découlent, pour estimer les différents paramètres du modèle à volatilité stochastique pour chacun des processus considérés de la volatilité, à savoir le mouvement brownien, le processus empirique et le processus d'Ornstein Uhlenbeck. Pour le processus d'Ornstein Uhlenbeck, afin de fiabiliser les calculs on a eu recours à 3 différentes méthodes de calcul.

Cinquièmement, ma contribution, dans ce chapitre, consiste à élaborer le schéma numérique en vue de la résolution de l'équation de Garman (1976) et à étudier sa stabilité, sa consistance et sa convergence et à déterminer les pas des maillages et des valeurs maximales du couple de variables d'état considéré.

Sixièmement, ma contribution consiste à élaborer et implémenter l'algorithme Hopscotch en le conjuguant avec un algorithme fruit d'un raisonnement inductif. Elle consiste, également, à élaborer dans les détails et à implémenter l'algorithme Simulation de Monte Carlo.



Septièmement, ma contribution se termine par l'interprétation des résultats des calculs et par une synthèse pour comparer entre les différents modèles et les différents algorithmes de calcul utilisés.

### **3.1.1 Hypothèses du modèle à volatilité stochastique**

L'option d'achat, à évaluer, est de type-européenne. On suppose, également, que le sous-jacent ne distribue pas de dividendes et que la volatilité du sous-jacent est stochastique.

Ainsi, les hypothèses du modèle à volatilité stochastique sont les mêmes que celles du modèle de Black & Scholes sauf que la volatilité est stochastique et que le coefficient de corrélation  $\rho$ , entre les mouvements du rendement instantané du sous-jacent et les mouvements de la volatilité, est constant. La volatilité étant stochastique, le prix du sous-jacent ne suit plus un mouvement Brownien géométrique, comme c'est le cas pour le modèle de Black & Scholes.

Le prix du sous-jacent  $S$  et la volatilité de son rendement instantané  $\sigma$  sont les deux variables d'état du modèle. Elles suivent des processus décrits par les équations suivantes :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz_S$$

$$d\sigma = \omega(S, \sigma, t) dt + q(S, \sigma, t) dz_\sigma$$

Où, les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  sont, respectivement, le drift réel et la volatilité instantanée du rendement instantané du sous-jacent. Les quantités  $\omega$  et  $q$  sont, respectivement, le drift réel et la volatilité de la volatilité, qui sont des fonctions du prix du sous-jacent, de la volatilité et du temps. Les processus  $dz_S$  et  $dz_\sigma$  sont des processus de Wiener-Lévy qu'on peut écrire sous la forme :

$$dz_S = U_S \sqrt{dt} \quad \text{et} \quad dz_\sigma = U_\sigma \sqrt{dt}$$

avec,  $U_S$  et  $U_\sigma$  sont des variables aléatoires suivant chacune une loi normale centrée réduite. Le coefficient de corrélation entre ces deux variables aléatoires est égal à  $\rho$ .

Ainsi, les équations de diffusion du prix du sous-jacent et de la volatilité peuvent s'écrire, donc, sous la forme :

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma S \sqrt{dt} U_S \\ d\sigma &= \omega(S, \sigma, t) dt + q(S, \sigma, t) \sqrt{dt} U_\sigma \\ \rho &= \rho(U_S, U_\sigma) \end{aligned} \quad (3.1.1-1)$$

Le drift réel du prix du sous-jacent, le coefficient de corrélation, ainsi que la dynamique de la volatilité peuvent être estimés, à partir de l'historique du prix de l'actif sous-jacent, et éventuellement, du prix de l'option, si on considère une volatilité implicite. On considère dans cette étude, trois dynamiques de la volatilité, à savoir : le mouvement Brownien, le processus empirique prédéfini et le processus d'Ornstein Uhlenbeck.

Comme dans le cas du modèle de Black & Scholes, la valeur de l'option  $V$  est fonction des cinq déterminants, avec en plus, le drift réel de la volatilité, la volatilité de la volatilité et le coefficient de corrélation entre les mouvements du sous-jacent et ceux de la volatilité. Ce coefficient de corrélation, ainsi que le taux d'intérêt sont supposés constants. Etant donné que le modèle à volatilité stochastique est un modèle d'équilibre et que la volatilité n'est pas un actif négociable, en soi, un autre paramètre intervient dans cette évaluation, qui n'est autre que le prix du marché du risque qui reflète la préférence des investisseurs et qui est unique si le marché est supposé complet. L'estimation de ce paramètre, nécessite au moins une hypothèse supplémentaire, qui sera déterminante dans la détermination du prix de l'option.

### **3.1.2 Equation différentielle du modèle à volatilité stochastique**

L'équation différentielle du modèle à volatilité stochastique est, à une différence près, un cas particulier de l'équation développée dans le paragraphe 1.2.8 du chapitre préliminaire.

Pour évaluer une option  $V$ , le modèle à volatilité stochastique comporte deux variables d'état stochastiques, à savoir, le prix du sous-jacent et la volatilité. Le prix du sous-jacent est négociable sur le marché, à l'inverse de la volatilité qui ne l'est pas et dont la valeur instantanée, peut être déduite, à partir du prix d'une deuxième option  $V_1$ .

L'élaboration de l'équation en question peut être obtenue, par un raisonnement similaire à celui du paragraphe 1.2.8.

Si on applique le lemme d'Itô à la valeur de l'option  $V(S, \sigma)$  qui est fonction des deux variables d'état (cf paragraphe 1.2.5.2), on peut écrire :

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \omega \frac{\partial V}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \rho q \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dZ_S + q \frac{\partial V}{\partial \sigma} dZ_\sigma \quad (3.1.2-1)$$

La différentielle de l'option additionnelle  $dV_1$  s'écrit, exactement, sous la même forme, en remplaçant  $V$  par  $V_1$ .

D'un autre côté, les processus des options sont Browniens géométriques. Ce qui amène à écrire :

$$\frac{dV}{V} = \mu_V dt + \sigma_{V_S} dZ_S + \sigma_{V_\sigma} dZ_\sigma \quad (3.1.2-2)$$

et

$$\frac{dV_1}{V_1} = \mu_{V_1} dt + \sigma_{V_1 S} dZ_S + \sigma_{V_1 \sigma} dZ_\sigma \quad (3.1.2-3)$$

Des équations (3.1.2-1) et (3.1.2-2) se dégagent trois équations pour l'option  $V$ .  
Soit :

$$\mu_V V = \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \omega \frac{\partial V}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \rho q \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \quad (3.1.2-4)$$

$$\sigma_{VS} V = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \quad (3.1.2-5)$$

$$\sigma_{V\sigma} V = q \frac{\partial V}{\partial \sigma} \quad (3.1.2-6)$$

On peut, également, écrire, des équations analogues pour  $V_1$ , en remplaçant  $V$  avec.

Pour évaluer l'option  $V$ , il faut constituer un portefeuille  $\Pi$  sans risque composé de l'option  $V$ , de l'option  $V_1$  et du sous-jacent  $S$ , dans des proportions respectives  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ . La valeur de l'option additionnelle  $V_1$  nous renseigne sur la valeur de la volatilité, puisque cette dernière n'est pas négociable.

$$\Pi = \alpha_1 V + \alpha_2 V_1 + \alpha_3 S \quad (3.1.2-7)$$

La variation de la valeur du portefeuille  $\Pi$ , pendant un intervalle de temps  $dt$ , est  $d\Pi$  tel que :  $d\Pi = \alpha_1 dV + \alpha_2 dV_1 + \alpha_3 dS$

En remplaçant  $dV$  et  $dV_1$ , par leurs expressions dans les équations (3.1.2-2) et (3.1.2-3), on obtient :

$$d\Pi = (\alpha_1 \mu_V V + \alpha_2 \mu_{V_1} V_1 + \alpha_3 \mu S) dt + (\alpha_1 \sigma_{VS} V + \alpha_2 \mu_{V_1 S} V_1 + \alpha_3 \sigma S) dS + (\alpha_1 \sigma_{V\sigma} V + \alpha_2 \mu_{V_1 \sigma} V_1) d\sigma$$

Pour que le portefeuille  $\Pi$  soit sans risque, il faut que les termes, en  $dS$  et  $d\sigma$ , soient non nuls. Soit le système :

$$\alpha_1 \sigma_{VS} V + \alpha_2 \mu_{V_1 S} V_1 + \alpha_3 \sigma S = 0 \quad (3.1.2-8)$$

$$\alpha_1 \sigma_{V\sigma} V + \alpha_2 \mu_{V_1 \sigma} V_1 = 0 \quad (3.1.2-9)$$

Etant donné que le modèle à volatilité stochastique est un modèle d'équilibre, en l'absence d'opportunités d'arbitrage sur le sous-jacent, le portefeuille sans

risque (supposé couvert également contre le risque lié à la volatilité) doit être rémunéré au taux sans risque. Ceci nous amène à écrire :

$$d\Pi = r\Pi dt$$

$$d\Pi = (\alpha_1\mu_V V + \alpha_2\mu_{V_1} V_1 + \alpha_3\mu S)dt = r(\alpha_1 V + \alpha_2 V_1 + \alpha_3 S)dt$$

D'où l'équation :

$$\alpha_1(\mu_V - r)V + \alpha_2(\mu_{V_1} - r)V_1 + \alpha_3(\mu - r)S = 0 \quad (3.1.2-10)$$

Si on passe à une écriture vectorielle, on définit les vecteurs suivants :

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad X_S = \begin{pmatrix} \sigma_{VS}V \\ \sigma_{V_1S}V_1 \\ \sigma S \end{pmatrix} \quad X_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{V\sigma}V \\ \sigma_{V_1\sigma}V_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} (\mu_V - r)V \\ (\mu_{V_1} - r)V_1 \\ (\mu - r)S \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $Y$  est le vecteur des proportions du portefeuille sans risque dans l'option  $V$ , l'option  $V_1$  et le sous-jacent. Les vecteurs  $X_S$  et  $X_\sigma$  sont les vecteurs des risques correspondants à ces trois produits liés, respectivement, aux fluctuations du sous-jacent et aux fluctuations de la volatilité. Enfin, le vecteur  $W$  est le vecteur des primes de rentabilité correspondant aux trois produits financiers précités.

Sous la forme vectorielle, les équations (3.1.2-8) ; (3.1.2-9) et (3.1.2-10) s'écrivent :

$$Y \cdot X_S = 0 \quad \Rightarrow Y \text{ est perpendiculaire à } X_S : Y \perp X_S$$

$$Y \cdot X_\sigma = 0 \quad \Rightarrow Y \text{ est perpendiculaire à } X_\sigma : Y \perp X_\sigma$$

$$Y \cdot W = 0 \quad \Rightarrow Y \text{ est perpendiculaire à } W : Y \perp W$$

On en déduit que le vecteur  $Y$  est perpendiculaire au plan engendré par  $X_S$  et  $X_\sigma$ . Comme  $Y$  est, en plus, perpendiculaire à  $W$ , et qu'on est en dimension 3, on en déduit que  $W$  est une combinaison linéaire de  $X_S$  et  $X_\sigma$ . Soit :

$$W = \lambda_S X_S + \lambda_\sigma X_\sigma \quad (3.1.2-11)$$

Les coefficients  $\lambda_S$  et  $\lambda_\sigma$  ne sont autres que les prix du marché des risques liés, respectivement, à la valeur du sous-jacent et à la volatilité. Comme, nous nous intéressons, uniquement, à la valeur de l'option  $V$ , seule la première composante de l'équation vectorielle (3.1.2-11) nous intéresse. Soit, l'équation suivante :

$$(\mu_V - r)V = \lambda_S \sigma_{VS} V + \lambda_\sigma \sigma_{V\sigma} V$$

Cette équation peut s'écrire, également, sous la forme :

$$\mu_V V - rV = \lambda_S \sigma_{VS} V + \lambda_\sigma \sigma_{V\sigma} V$$

En remplaçant  $\mu_V V$ ,  $\sigma_{VS} V$  et  $\sigma_{V\sigma} V$  par leurs expressions, respectivement, dans les équations (3.1.2-4) ; (3.1.2-5) et (3.1.2-6), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \omega \frac{\partial V}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \rho q \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} - rV = \lambda_S \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} + \lambda_\sigma q \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

Soit, en réarrangeant les termes, on peut écrire :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \rho q \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + (\mu - \lambda_S \sigma) S \frac{\partial V}{\partial S} + (\omega - \lambda_\sigma q) \frac{\partial V}{\partial \sigma} - rV = 0$$

Or, puisque le taux d'intérêt sans risque est le drift risque-neutre du prix du sous-jacent, on a :  $r = \mu - \lambda_S \sigma$ . De même, le drift risque-neutre de la volatilité est égal à :  $\omega - \lambda_\sigma q$ .

En définitive, l'équation relative au modèle à volatilité stochastique s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \rho q \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + (\omega - \lambda_\sigma q) \frac{\partial V}{\partial \sigma} - rV = 0 \quad (3.1.2-12)$$

C'est, donc, l'équation différentielle d'une option d'achat  $V(S, \sigma, t)$ , sur un sous-jacent dont le rendement instantané est à volatilité stochastique. Il s'agit d'une équation linéaire, qui est un cas particulier de l'équation générale

développée par Garman (1976) et Cox, Ross & Ingersoll (1985) (cf §1.2.8 du chapitre préliminaire). Cette équation suscite un certain nombre de remarques :

- Cette équation, comme dans le cas de l'équation de Black & Scholes ne dépend que des drifts risque-neutre,  $r$  et  $D$ , des deux variables stochastiques, qui sont, respectivement, le prix du sous-jacent  $S$  et la volatilité  $\sigma$ . Elle ne comprend pas le drift réel du prix du sous-jacent. Par contre, le drift risque neutre  $D$  de la volatilité est fonction du risque du marché du risque lié aux mouvements de la volatilité. Comme la volatilité n'est pas négociable, son drift risque neutre n'est pas déterminé par le marché et pour le calculer, il faut faire appel au prix du risque du marché correspondant, fonction de paramètres de la fonction d'utilité. La valeur de l'option dépendra, ainsi du prix du risque de marché lié aux mouvements de la volatilité, qu'il va falloir estimer ou contourner par une hypothèse simplificatrice.
- Il s'agit d'une équation de type elliptique dans le plan  $(S, \sigma)$  puisque le discriminant  $m(S, \sigma)$  correspondant est inférieur à zéro. En effet :

$$m(S, \sigma) = (\rho q \sigma S)^2 - 4 \frac{1}{2} q^2 \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \right) = (q \sigma S)^2 (\rho^2 - 1) < 0$$

- Ce discriminant sera égal à zéro pour les cas limites du coefficient de corrélation :  $\rho = 1$  et  $\rho = -1$ . Dans ce cas, l'équation est de type parabolique.
- Globalement, l'équation est de type parabolique puisque son discriminant est nul lorsque l'on intègre l'espace temps, soit :  $m(S, \sigma, t) = 0$ .  $m(S, \sigma) = 0$ . (En effet, la dérivée seconde et toutes les dérivées croisées, par rapport au temps, sont nulles.)
- Cette équation peut être décomposée, suivant l'équation de Black & Scholes et le reste des termes. Elle peut se mettre, donc, sous la forme :

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) + \left( \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \rho q \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + (\omega - \lambda q) \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right) = 0$$

Soit, en mettant en facteur, l'opérateur dérivée, par rapport à la volatilité, dans la deuxième parenthèse, on obtient :

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial V}{\partial \sigma} + \rho q \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} + (\omega - \lambda q) V \right) = 0$$

- Ainsi, on voit bien que lorsque la volatilité est constante, la deuxième parenthèse donnera une valeur nulle et on retrouve l'équation de Black & Scholes. Dire que la volatilité est constante est, également, équivalent à dire que la volatilité de la volatilité est nulle ( $q=0$ ), et le drift réel de la volatilité, aussi ( $\omega=0$ ).
- Un changement de variables adéquat permet d'éliminer le terme de la dérivée mixte et mettre cette équation sous sa forme canonique. Il est à noter que ce terme est éliminé de lui-même si on considère que la dynamique de la volatilité est indépendante de celle du prix du sous-jacent, autrement dit, si le coefficient de corrélation entre les mouvements des variables d'états est nul :  $\rho = 0$ . Cette hypothèse n'est pas toujours conforme à la réalité, bien qu'elle soit adoptée, par un certain nombre de chercheurs, qui ont traité le sujet.
- La solution exacte de cette équation dépendra des conditions aux limites. A priori, elle n'est pas facile à trouver. Un recours à une résolution numérique s'avère nécessaire. Pour une résolution numérique de cette équation, il faut dans un premier temps estimer les paramètres définissant le processus de la volatilité. Il faut, également, estimer le taux d'intérêt  $r$  et le coefficient de corrélation  $\rho$  entre les mouvements des deux variables d'états.

### **3.1.3 Conditions aux limites relatives à l'équation différentielle du modèle à volatilité stochastique**

Afin d'établir les conditions aux limites, relatives à cette équation différentielle, il est utile de rappeler la formule de Black & Scholes dans le cas d'un call.

Soit :

$$V = SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2)$$

avec



$$d_1 = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right) + r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau} \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right) + r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$$

Les conditions aux limites sont au nombre de six, puisque l'équation considérée comporte six dérivées partielles. Soient deux conditions, par rapport au sous-jacent  $S$ , trois conditions, par rapport à la volatilité, et une condition, par rapport au temps. Ces conditions sont les suivantes :

C1 :  $V(0, \sigma, t) = 0$  : puisque le pay-off est nul quand le prix du sous-jacent est nul, en effet, la valeur de l'option est comprise entre zéro et la valeur du sous-jacent. Il est normal si cette dernière est nulle, la valeur de l'option sera nécessairement nulle.

C2 :  $\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{(\sigma; S=\infty; t)} = 1$  : puisque, quelle que soit la valeur de la volatilité  $\sigma$ , quand la valeur du sous-jacent est infinie, la valeur de l'option se confond avec sa valeur intrinsèque ( la valeur temps est nulle car, dans ce cas, on est sûr de l'exercice de l'option). La dérivée de prix de l'option par rapport au prix du sous-jacent n'est autre que le coefficient directeur de l'asymptote à cette courbe égal à 1. Cette condition est analogue à la condition :  $V(+\infty, \sigma, t) = S$ .

C3 :  $V(S, 0, t) = \text{Max}(0; S - Ee^{-r(T-t)})$  : selon le modèle de Black & Scholes, qui est un cas particulier du modèle à volatilité stochastique, où la volatilité est constante et égale 0, ce résultat peut être illustré par le tableau suivant :

$\sigma = 0$	$d_1$	$d_2$	$N(d_1)$	$N(d_2)$	$V$
$S < Ee^{-r\tau}$	$-\infty$	$-\infty$	0	0	0
$S \geq Ee^{-r\tau}$	$+\infty$	$+\infty$	1	1	$S - Ee^{-r\tau}$

C4 :  $V(S, +\infty, t) = S$  : selon le modèle de Black & Scholes, qui est un cas particulier du modèle à volatilité stochastique, où la volatilité est constante et égale à  $+\infty$ , ceci peut être expliqué par le tableau suivant :

$\sigma = +\infty$	$d_1$	$d_2$	$N(d_1)$	$N(d_2)$	$V$
$\forall S$	$+\infty$	$-\infty$	1	0	S

C5 :  $V(S, \sigma, T) = \text{Max}(0; S - E)$  : puisqu'il s'agit d'une option de type européen, sa valeur à l'échéance T ( le pay-off ), est égal à sa valeur intrinsèque.

C6 :  $\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)_{(S; \sigma=0; t)} = 0$  : selon le modèle de Black & Scholes, qui est un cas particulier du modèle à volatilité stochastique, où la volatilité est constante et égale 0, ce résultat peut être illustré par le tableau suivant :

$\sigma = 0$	$d_1^2$	$N'(d_1)$	$\Lambda_V = \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = S\sqrt{\tau}N'(d_1)$
$\forall S$	$+\infty$	0	0

Avec ces conditions aux limites, et dans l'hypothèse de la complétude du marché financier, l'équation (3.1.2-12) admet une solution unique.

### 3.1.4 Changement de variables

La résolution, aussi bien analytique que numérique, de l'équation différentielle (3.1.2-12), est facilitée par l'élimination du terme de la dérivée croisée, correspondant au prix du sous-jacent et à la volatilité. Dans le cas, où le

coefficient de corrélation est non nul, il faut procéder à un changement de variables. Un tel changement de variable va réduire l'équation différentielle, à une forme plus simple et va occasionner une transformation dans le domaine des variables et des conditions aux limites.

### 3.1.4.1 Nouvelle équation différentielle

Les coefficients des termes des dérivées d'ordre 2 de l'équation différentielle

considérée sont :  $a = \frac{1}{2}\sigma^2S^2$  ;  $b = \frac{1}{2}\rho q\sigma S$  et  $c = \frac{1}{2}q^2$

Si on fait un changement de variables tel que :  $X = X(S, \sigma, t)$  et  $Y = Y(S, \sigma, t)$ , les nouveaux coefficients A, B et C des termes des dérivées d'ordre 2, par rapport à X et Y, sont tel que:

$$a \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2b \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + c \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} = A \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + 2B \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} + C \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}$$

avec

$$A = a \left( \frac{\partial X}{\partial S} \right)^2 + 2b \frac{\partial X}{\partial S} \frac{\partial X}{\partial \sigma} + c \left( \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2$$

$$B = a \left( \frac{\partial X}{\partial S} \frac{\partial Y}{\partial S} \right) + b \left( \frac{\partial X}{\partial \sigma} \frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{\partial X}{\partial S} \frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right) + c \left( \frac{\partial X}{\partial \sigma} \frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right) \quad (3.1.4-1)$$

$$C = a \left( \frac{\partial Y}{\partial S} \right)^2 + 2b \frac{\partial Y}{\partial S} \frac{\partial Y}{\partial \sigma} + c \left( \frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right)^2$$

Le type de l'équation est conservé par le changement de variables. En effet, on démontre que l'on a :  $B^2 - AC = J^2(b^2 - ac)$  ; où J est le jacobien correspondant à ce changement de variables. Ce Jacobien est donnée par le déterminant suivant :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial S} & \frac{\partial X}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial Y}{\partial S} & \frac{\partial Y}{\partial \sigma} \end{vmatrix}$$

Par ce changement de variables, on souhaite annuler le terme des dérivées croisées, soit :  $B=0$

Comme, sur une iso-X, X est constante, on a :

$$X = X(S, \sigma) = \text{constante} \Rightarrow dX = \frac{\partial X}{\partial S} dS + \frac{\partial X}{\partial \sigma} d\sigma = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{dS} = -\frac{\frac{\partial X}{\partial \sigma}}{\frac{\partial X}{\partial S}}$$

De même sur une iso-Y, Y est constante, on a :

$$Y = Y(S, \sigma) = \text{constante} \Rightarrow dY = \frac{\partial Y}{\partial S} dS + \frac{\partial Y}{\partial \sigma} d\sigma = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{dS} = -\frac{\frac{\partial Y}{\partial \sigma}}{\frac{\partial Y}{\partial S}}$$

En divisant l'équation (3.1.2-1) par  $\frac{\partial X}{\partial \sigma} \frac{\partial Y}{\partial \sigma}$ , il vient :

$$B = a \left( \frac{\frac{\partial X}{\partial S}}{\frac{\partial X}{\partial \sigma}} \cdot \frac{\frac{\partial Y}{\partial S}}{\frac{\partial Y}{\partial \sigma}} \right) + b \left( \frac{\frac{\partial Y}{\partial S}}{\frac{\partial Y}{\partial \sigma}} + \frac{\frac{\partial X}{\partial S}}{\frac{\partial X}{\partial \sigma}} \right) + c$$

soit, en simplifiant par les dérivées suivant X et Y, il vient :

$$B = a \left( \frac{d\sigma}{dS} \right)^2 - 2b \frac{d\sigma}{dS} + c = 0$$

Cette équation caractéristique n'est autre qu'une équation du second degré où l'inconnue est la dérivée de la volatilité par rapport à la valeur du sous-jacent le long des iso-X et des iso-Y.

Comme, dans le plan  $(S, \sigma)$ , l'équation est de type elliptique ( $b^2 - ac < 0$ ), cette équation admet deux solutions complexes :

$$\frac{d\sigma}{dS} = \frac{b}{a} \pm p \sqrt{\frac{ac - b^2}{a^2}} ; \text{ avec } p \text{ le nombre complexe tel que } \sqrt{p} = -1$$

Soit, en remplaçant  $a$ ,  $b$  et  $c$ , par leurs valeurs, par leurs expressions, en fonction des variables  $\rho$ ,  $q$ ,  $S$  et  $\sigma$  dans la précédente équation, il vient :

$$\frac{d\sigma}{dS} = \frac{q}{\sigma S} \left( \rho \pm p \sqrt{1 - \rho^2} \right)$$

Soit, en séparant les deux variables, on a :

$$\frac{\sigma}{q} d\sigma = \frac{dS}{S} \left( \rho \pm p \sqrt{1 - \rho^2} \right)$$

En intégrant, on obtient :

$$\left( \rho \text{Ln}S - \int \frac{\sigma}{q} d\sigma \right) \pm p \sqrt{1 - \rho^2} \text{Ln}S = \text{constante}$$

On peut choisir le changement de variables, tel que :

$$X = \rho \text{Ln}S - \int \frac{\sigma}{q} d\sigma$$

$$Y = \sqrt{1 - \rho^2} \text{Ln}S$$

On a, ainsi :

$$\frac{\partial X}{\partial S} = \frac{\rho}{S} \qquad \frac{\partial X}{\partial \sigma} = -\frac{\sigma}{q}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial S} = \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{S} \qquad \frac{\partial Y}{\partial \sigma} = 0$$

Avec ce changement de variable, on obtient :

$$A = C = \frac{\sigma^2}{2}(1-\rho^2) \quad \text{et, évidemment : } B=0$$

Par ailleurs, on a :

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial S} = \frac{\rho}{S} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{S} \frac{\partial V}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \sigma} = -\frac{\sigma}{q} \frac{\partial V}{\partial X}$$

Soit, en remplaçant dans l'équation différentielle originelle (3.1.2-12), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}(1-\rho^2) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \left( \rho r - (\omega - \lambda q) \frac{\sigma}{q} \right) \frac{\partial V}{\partial X} + r\sqrt{1-\rho^2} \frac{\partial V}{\partial Y} - rV = 0$$

avec  $\sigma = \sigma(X, Y)$  qu'il va falloir définir.

Si on considère que la volatilité de la volatilité est de la forme :  $q = \eta\sigma^\gamma$ , la variable X s'écrira :

$$X = \rho \text{Ln} S - \int \frac{\sigma}{q} d\sigma = \rho \text{Ln} S - \frac{1}{\eta} \int \sigma^{(1-\gamma)} d\sigma \quad (3.1.4-2)$$

A ce niveau, quatre cas peuvent se présenter :

Cas 1 :  $\gamma = 1$

Cas 2 :  $\gamma = 2$

Cas 3 :  $\gamma \neq 1; \gamma \neq 2$

Cas 4 :  $\gamma = 0$

Le cas 4 est un cas particulier du cas 3, où la volatilité de la volatilité est constante, ce qui correspond, dans notre présent travail, au mouvement Brownien ou au processus d'Ornstein Uhlenbeck, comme processus de la volatilité.

Les expressions, de S et Y, sont les mêmes, quelque soit, le cas de figure :

$$S = S(X, Y) = e^{\frac{Y}{\sqrt{1-\rho^2}}}$$

$$Y = Y(S, \sigma) = \sqrt{1-\rho^2} \text{Ln}S$$

Par contre, les expressions de  $\sigma$  et de X varient suivant la relation entre la volatilité de la volatilité et la volatilité. Elles varient, donc, selon le cas de figure, suivant l'équation (3.1.4-2). Ces différents cas sont illustrés dans le tableau 11.

	q	X = X(S, $\sigma$ )	$\sigma = \sigma(X, Y)$
Cas 1	q = $\eta\sigma$	$X = \rho \text{Ln}S - \frac{\sigma}{\eta}$	$\sigma = \eta \left( \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} Y - X \right)$
Cas 2	q = $\eta\sigma^2$	$X = \rho \text{Ln}S - \frac{\text{Ln}\sigma}{\eta}$	$\sigma = e^{\frac{\eta \left( \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} Y - X \right)}{\eta}}$
Cas 3	q = $\eta\sigma^\gamma$ avec $\gamma \neq 1$ et $\gamma \neq 2$	$X = \rho \text{Ln}S - \frac{1}{\eta} \frac{\sigma^{2-\gamma}}{(2-\gamma)}$	$\sigma = \left( \eta(2-\gamma) \left( \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} Y - X \right) \right)^{\frac{1}{2-\gamma}}$
Cas 4	q = $\eta$  $\gamma = 0$	$X = \rho \text{Ln}S - \frac{\sigma^2}{2\eta}$	$\sigma = \left( 2\eta \left( \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} Y - X \right) \right)^{\frac{1}{2}}$

Tableau 11 : Expression de X = X(S,  $\sigma$ ) et de  $\sigma = \sigma(X, Y)$ , en fonction de l'expression de la volatilité de la volatilité.

### 3.1.4.2 Nouvelles Conditions aux limites et nouveau domaine :

Les conditions aux limites s'obtiennent, en remplaçant S et  $\sigma$ , par leurs expressions, en fonction de X et Y, dans les conditions aux limites définies dans le paragraphe 3.1.3. Les transformations de ces conditions aux limites sont récapitulées, dans le tableau 12, dans le cas général, qui n'est autre que le cas 3.

Conditions	Dans le plan $(S, \sigma)$	Dans le plan $(X, Y)$
C1	$V(S = 0, \sigma, t) = 0$	$V(X = -\infty, Y = -\infty, t) = 0$
C2	$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{(S=+\infty; \sigma; t)}$	$\rho \frac{\partial V}{\partial X} + \sqrt{1-\rho^2} \frac{\partial V}{\partial Y} = S$
C3	$V(S, \sigma = 0, t) = \text{Max}(0; S - Ee^{-r(T-t)})$	$V(X, \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} X, t) = \text{Max}(0; e^{\frac{X}{\rho}} - Ee^{-r(T-t)})$
C4	$V(S, \sigma = +\infty, t) = S$	$V(X = -\infty, Y, t) = e^{\frac{Y}{\sqrt{1-\rho^2}}}$
C5	$V(S, \sigma, T) = \text{Max}(0, S - E)$	$V(X, Y, T) = \text{Max}(0, e^{\frac{Y}{\sqrt{1-\rho^2}}} - E)$
C6	$\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)_{(S; \sigma=0; t)} = 0$	$\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)_{(X, \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} X, t)} = 0$

Tableau 12 : Conditions aux limites dans le plan  $(S, \sigma)$  et dans le plan  $(X, Y)$ , dans le cas où la volatilité de la volatilité est de la forme :  $q = \eta\sigma^\gamma$  avec  $\gamma \neq 1$  et  $\gamma \neq 2$

Etant donné qu'il n'y a pas de terme de dérivée croisée, même dans le cas, où le coefficient de corrélation est non nul, il sera plus pratique de mettre en oeuvre l'algorithme Hopscotch pour la résolution numérique de l'équation.

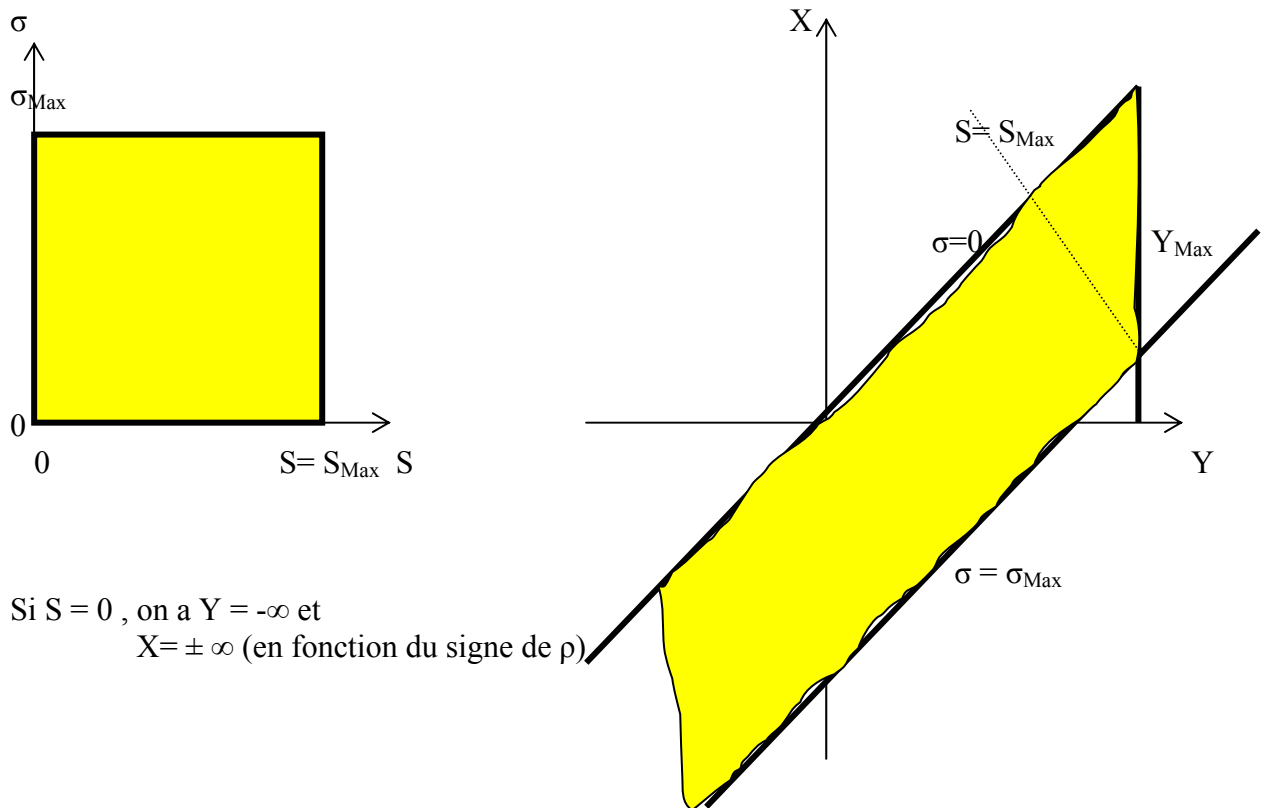


Figure 17 : Transformation du domaine de calcul de  $(S, \sigma)$  par le changement de variables en  $(X, Y)$ .



Cependant, la forme du domaine de définition de  $V(X,Y)$  rend plutôt cette tâche difficile. En effet, en faisant le changement de variable de  $(S, \sigma)$  vers  $(X,Y)$ , la forme du domaine se transforme, comme illustré dans la figure 17.

## 3.2 ESTIMATION DES PARAMETRES DU MODELE

### 3.2.1 Estimation des paramètres liés à la dynamique de la volatilité :

Plusieurs dynamiques de la volatilité peuvent être considérées. Cette dynamique est déterminée, essentiellement, par la forme que peut prendre la volatilité de la volatilité et par l'aspect retour à la moyenne au niveau du drift. Par ailleurs, la nullité ou non du coefficient de corrélation est un facteur à considérer dans cette modélisation.

Certains modèles, étudiés dans la littérature sont listés dans le tableau 13. Ces modèles sont choisis, plutôt pour leurs bonnes propriétés (positivité, retour à la moyenne,...) et la simplicité du calcul analytique, que pour des pures raisons financières.

Auteurs	Corrélation	$q(\sigma)$	Processus de $\sigma$
Hull-White	$\rho=0$	$\sqrt{\sigma}$	Lognormal
Scott	$\rho=0$	$e^{\sigma}$	Ornstein-Uhlenbeck
Stein-Stein	$\rho=0$	$ \sigma $	Ornstein-Uhlenbeck
Heston	$\rho \neq 0$	$\sqrt{\sigma}$	Cox-Ingersoll-Ross

Tableau 13 : Modèle de la dynamique de la volatilité dans la littérature

Dans le présent travail, on considère trois processus pour la volatilité : le premier est, tout simplement, un mouvement Brownien, le deuxième est un processus gaussien, baptisé processus empirique, est tel que la volatilité de la

volatilité est de la forme :  $q(\sigma) = \eta\sigma^\gamma$  où  $\eta$  et  $\gamma$  sont des constantes. Le troisième est un processus d'Ornstein Uhlenbeck. Les paramètres de ces trois processus sont à estimer à partir de l'historique des données (par contrat ou sur l'ensemble de la base de données), en considérant, aussi bien la volatilité historique que la volatilité implicite. Il est à noter que le mouvement Brownien est un cas particulier du deuxième processus baptisé processus empirique, dans le cas où  $\gamma=0$ . Le processus d'Ornstein Uhlenbeck a été considéré pour sa propriété de retour à la moyenne.

Il est certain, qu'en vue d'avoir des processus plus proches de la réalité, il faut inclure des sauts de volatilité, qui peuvent être poissonniens, par exemple. Ces sauts sortent du cadre du présent travail.

L'objectif de la présente section est d'estimer les paramètres liés à la dynamique de la volatilité. On commence par le mouvement Brownien, puis le processus baptisé empirique et enfin le processus d'Ornstein Uhlenbeck.

### **3.2.1.1 Mouvement Brownien comme processus de la volatilité**

Dans une économie neutre, si la volatilité suit un mouvement Brownien, on peut écrire :  $d\sigma_t = Ddt + qdZ_t$  ; où  $D$  est le drift risque neutre de la volatilité et  $q$  est la volatilité de la volatilité. Ces deux paramètres sont à estimer à partir des données historiques de la volatilité, en considérant la volatilité historique ou implicite.

#### ***3.2.1.1.1 Estimation du drift risque neutre de la volatilité : D***

Le drift risque neutre  $D$  est lié au drift réel  $\omega$ , par la relation faisant intervenir le prix du risque du marché, lié au risque de la volatilité  $\lambda$ , et la volatilité de la volatilité  $q$ . Soit,  $D = \omega - \lambda q$ , à l'instar du MEDAF. De toute façon si la volatilité était un actif négociable, on aurait  $D$  égal au taux de l'actif sans risque. Bien sûr ceci n'est pas conforme, à la réalité, puisque la volatilité n'est pas négociable.

A priori,  $D$  est stochastique. Son estimation dépend de l'estimation des trois paramètres précités. Par contre, si on considère que ce drift est constant, à l'instar du drift risque neutre du prix du sous-jacent  $r$ , il est calculé comme étant la moyenne de la dérivée de la volatilité par rapport au temps. On a, ainsi :

$$E(d\sigma_t) = Ddt$$

D'où, l'expression du drift risque-neutre de la volatilité :

$$D = E\left(\frac{d\sigma_t}{dt}\right) \quad (3.2.1-1)$$

Ainsi, si on a une série temporelle de la volatilité  $(t_i, \sigma_i)$ , de taille  $n$ , triée suivant le temps  $t_i$ , on peut déduire la série  $(\Delta t_i, \Delta \sigma_i)$ . D'après l'équation (3.1.6-1), l'estimateur du drift risque neutre de la volatilité est la moyenne empirique des variations de la volatilité rapportées aux intervalles de temps correspondants. Soit :

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta t_i}$$

Pour la base intraday,  $\Delta t_i$  est l'intervalle de temps séparant deux cotations. De ce fait, cet intervalle est stochastique. Le calcul de  $D$  avec cette formule ne constitue qu'une approximation.

Le drift risque-neutre peut être déterminé, à partir des valeurs de marché d'autres options  $X$  que l'option considérée, portant sur le même sous-jacent. Dans ce cas, le problème est inversé. Le drift risque-neutre peut être calculé, en utilisant l'une des trois approches suivantes :

1. Pour l'observation n°  $i$ , la valeur de l'option peut être calculée, pour plusieurs valeurs du drift risque-neutre. La valeur à retenir pour celui-ci, sera celle qui minimise l'écart entre la valeur du marché de l'option  $X$  et la

valeur calculée par un modèle à volatilité stochastique, en utilisant ce drift

risque-neutre. Soit :  $D_i = \text{Arg} \left( \min_D |C_{\text{calculée}} - C_{\text{marché}}| \right)$

- On peut considérer comme valeur du drift risque-neutre une moyenne de drifts :  $\{D_i; 1 \leq i \leq n\}$  calculés suivant la première approche. Soit,  $D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i$
- A partir des  $n$  drifts risque-neutre  $\{D_i; 1 \leq i \leq n\}$ , on détermine le paramètre drift risque-neutre sous la forme d'une fonction  $D(S, \sigma, t)$  qui servira de base pour la résolution de l'équation différentielle sur une partie de l'échantillon.

Les drifts risque-neutre de la volatilité, pour la base journalière et la base intraday, ont été calculés, aussi bien par contrat que pour l'ensemble de chacune des deux bases, en utilisant l'équation (3.2.1-1). Les résultats correspondants sont récapitulés dans les tableaux 14 et 15.

Pour chacune de ces deux bases de données, le drift risque-neutre est donné, pour chaque contrat choisi, de la base considérée, ainsi que pour l'ensemble de cette base.

D	C2800	C2950	C3100	C3250	C4000	Base journalière
<b>Vol hist</b>	0,0365	0,0378	-0,0089	-0,0073	-0,0209	0,0130
<b>Vol imp</b>	0,3668	0,4251	0,3527	0,3895	0,3951	0,0326

Tableau 14: Drift risque-neutre de la volatilité historique « Vol hist » et de la volatilité implicite « Vol imp » pour les 5 contrats choisis de la base journalière et pour l'ensemble de cette base.

D	Base intraday	1N	1O	1P	1Q	1S	9I	9J	9K	9L
<b>Vol imp</b>	0,0991	11,438	-6,026	3,6498	1,1019	-1,3633	18,9751	-95,7939	-14,8552	6,9305

Tableau 15 : Drift risque-neutre de la volatilité implicite « Vol imp » pour les 9 contrats choisis de la base intraday et pour l'ensemble de cette base.

Si le calcul du drift risque-neutre  $D$  de la volatilité donne une valeur acceptable pour l'ensemble de chacune des deux bases de données, les valeurs de  $D$ , par contrat, sont parfois aberrantes avec des valeurs fortement négatives ou fortement positives. A priori, le drift risque neutre peut être négatif. Les valeurs

correspondantes à l'ensemble de chacune des deux bases de données semblent être plus plausibles, dans la mesure où la taille de la base est supérieure à celle de chacun des contrats la constituant.

On remarque que si on considère la volatilité implicite et l'ensemble de la base journalière, le drift risque-neutre est dans ce cas, quasiment, égal au taux d'intérêt sans risque (qui n'est autre que le drift risque neutre du prix du sous-jacent).

### 3.2.1.1.2 Estimation de la volatilité de la volatilité : $q$

Le drift risque-neutre de la volatilité est calculé comme étant la moyenne de la dérivée de la volatilité par rapport au temps. Etant donné que la volatilité de la volatilité  $q$  est supposée constante, elle peut être calculée comme l'écart type de la variable  $\frac{d\sigma}{\sqrt{dt}}$ . En effet, Comme l'on a :  $\frac{d\sigma}{\sqrt{dt}} = D\sqrt{dt} + Uq$  ; et que  $U$  est une

variable aléatoire normale centrée réduite, on peut écrire :

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{dt}} \longrightarrow N(D\sqrt{dt}; q) \quad \text{et} \quad V\left(\frac{d\sigma}{\sqrt{dt}}\right) = q^2$$

Par conséquent, si on considère la série  $(t_i, \sigma_i ; 1 \leq i \leq n)$ , la volatilité de la volatilité peut être estimée par la quantité :

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{d\sigma_i}{\sqrt{dt_i}} - D\sqrt{dt_i} \right)^2}$$

Pour la base journalière, étant donné que le temps n'est pas stochastique, les formules sont plus exactes. Par contre, pour la base intraday, le temps est stochastique et ces formules ne donnent qu'une approximation des valeurs de la volatilité de la volatilité  $q$ . Dans ce cas, on peut considérer un intervalle de temps moyen  $\bar{dt}$  pour estimer la volatilité de la volatilité  $q$ .

Pour la base journalière, les valeurs estimées de la volatilité de la volatilité  $q$  sont récapitulées dans le tableau 16.

$\hat{q}$	<b>C2800</b>	<b>C2950</b>	<b>C3100</b>	<b>C3250</b>	<b>C4000</b>	<b>Base journalière</b>
<b>Vol hist</b>	0,0760	0,0709	0,0802	0,0837	0,1857	0,1296
<b>Vol imp</b>	0,3953	0,4173	0,3282	0,2547	0,6355	0,2825

Tableau 16: Volatilité de la volatilité, pour chacun des 5 contrats choisis, de la base journalière, et pour, l'ensemble de la base, en considérant la volatilité historique « Vol hist » et la volatilité implicite « Vol imp ».

Pour la base intraday, en considérant l'ensemble de la base, la valeur de la volatilité de la volatilité implicite est  $q=0,3462$ .

On remarque que :

- Dans tous les cas, la volatilité de la volatilité implicite est supérieure à celle de la volatilité historique. Ceci est conforme à la courbe du "smile" de la figure 16, où la courbure du "smile" est plus grande pour la volatilité implicite que pour la volatilité historique du fait de la supériorité de la volatilité de la volatilité de la première par rapport à celle de la seconde.
- Hormis, le contrat C4000, la volatilité de la volatilité historique de l'ensemble de la base est supérieure à celles des contrats de la base. Par contre, c'est le cas inverse pour la volatilité implicite.
- La volatilité de la volatilité implicite, de l'ensemble de la base intraday, est supérieure à celle, de l'ensemble de la base journalière.

### 3.2.1.2 Processus empirique comme processus de la volatilité

Ce processus, baptisé « empirique », est défini par l'équation de diffusion suivante :  $d\sigma = \omega(\sigma)dt + q(\sigma)dX$  où  $dX$  est un processus de Wiener-Lévy et tel que le logarithme de la volatilité de la volatilité est une fonction linéaire du logarithme de la volatilité. Autrement dit, la volatilité de la volatilité est une fonction de la volatilité, de la forme :  $q(\sigma) = \eta\sigma^\gamma$ , où  $\eta$  et  $\gamma$  sont des constantes qui ne sont autres que des fonctions, des coefficients de régression linéaire du logarithme de la volatilité de la volatilité, par rapport au logarithme de la volatilité.

Le drift réel de la volatilité  $\omega(\sigma)$  peut être déterminé, sous forme d'une fonction de la volatilité, de la volatilité de la volatilité et de ses paramètres, en étudiant les propriétés du processus considéré à long terme.

### **3.2.1.2.1 Estimation du drift réel de la volatilité : $\omega$**

Pour l'estimation du drift réel de la volatilité, on ne va pas utiliser la même procédure que pour l'estimation de la volatilité de la volatilité, pour être certain que le modèle dynamique de la volatilité a des propriétés à long terme qui collent à la réalité. Si la volatilité de la volatilité peut être estimée, en considérant des intervalles de temps très courts, le drift réel ne peut être calculé que sur une échelle de temps assez grande (en se basant sur les propriétés à long terme du processus de la volatilité).

C'est, ainsi, que l'estimation du drift réel de la volatilité fait appel à l'équation de Fokker-Planck (ou l'équation de Kolmogorov « forward ») concernant la densité de probabilité de transition, établie dans le chapitre préliminaire dans le paragraphe (§1.2.7.1) et appliquée au processus considéré dans le paragraphe (§1.2.7.2.1) du même chapitre.

Etant donné, que la volatilité est stochastique, et qu'elle suit une marche aléatoire suivant l'équation précisée ci-haut, la fonction densité de probabilité de transition de la volatilité, désigné par  $P(\sigma,t)$ , est, donc, une solution de l'équation de Fokker-planck, élaborée dans le paragraphe (1.2.7), et qui est la suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (q^2 P)}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial (\omega P)}{\partial \sigma}$$

La fonction densité de probabilité de transition  $P_\infty(\sigma)$ , de la volatilité, en régime permanent (régime stationnaire), vérifie l'équation :  $\frac{\partial P_\infty}{\partial t} = 0$

Ceci, implique que cette densité de probabilité de transition vérifie, également, l'équation :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (q^2 P_\infty)}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial (\omega P_\infty)}{\partial \sigma} = 0 \quad (3.2.1-2)$$

La constante d'intégration étant nulle, en intégrant, membre à membre, l'équation (3.2.1-2), le drift réel de la volatilité peut s'écrire, en régime permanent, sous la forme:

$$\omega(\sigma) = \frac{1}{2P_\infty} \frac{\partial (q^2 P_\infty)}{\partial \sigma} \quad (3.2.1-3)$$

Ainsi, si on connaît la fonction densité  $P_\infty(\sigma)$ , on peut déterminer le drift réel de la volatilité. La fonction densité  $P_\infty(\sigma)$  peut être déterminée si on suppose que tous les paramètres sont indépendants du temps. Cette fonction densité  $P_\infty(\sigma)$ , solution de l'équation (3.2.1-2), n'est autre que la fonction densité de probabilité de la loi Log-normale de paramètres  $Log(\bar{\sigma})$  et  $a$ . Soit :

$$P_\infty = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2a^2} (Log(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}))^2} \quad (3.2.1-4)$$

Les quantités  $Log(\bar{\sigma})$  et  $a$  représentent, donc, respectivement, la moyenne et l'écart type du logarithme de la volatilité  $Log(\sigma)$ , dans un régime stationnaire.

Dans un premier temps, il faut vérifier l'hypothèse que les séries disponibles de la volatilité correspondent bien à un régime stationnaire. Autrement dit, il faut vérifier que les séries, logarithmes des séries de la volatilité, sont distribuées suivant une loi normale. Pour se faire, on doit démontrer que leurs fréquences de distribution et leurs fonctions cumulatives correspondent, respectivement, à la fonction densité de probabilité et la fonction de répartition de la loi normale, dont la moyenne est  $Log(\bar{\sigma})$  et l'écart-type  $a$ .



Pour tracer la fréquence de distribution de la variable logarithme de la volatilité, il faut diviser la plage des valeurs de cette série en N intervalles égaux, de centres  $\text{Log}(C_i)$  ( $1 \leq i \leq N$ ). La fréquence  $f_i$ , relative à l'intervalle  $i$ , est estimée par le nombre de données se situant dans cet intervalle. Les paramètres de la loi normale sont estimés par la moyenne empirique de la variable  $\text{Log}(C_i)$  et son écart-type. Ces paramètres qui sont  $a$  et  $\text{Log}(\bar{\sigma})$  peuvent être estimés, à partir du diagramme empirique de de la série  $\text{Log}(\sigma_t)$ . On a, donc,

$$\log(\bar{\sigma}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \text{Log}(\sigma_t) = \sum_{i=1}^N f_i \text{Log}(c_i) \quad \text{et}$$

$$a^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n \left( \text{Log}\left(\frac{\sigma_t}{\bar{\sigma}}\right) \right)^2 = \sum_{i=1}^N f_i (\text{Log}(c_i))^2 - (\text{Log}(\bar{\sigma}))^2$$

Où,

$n$  = nombre d'observations de la volatilité

$\sigma_t$  = volatilité relative à l'observation  $n^\circ t$

$N$  = nombre d'intervalle de la volatilité

$C_i$  = le centre de l'intervalle de la volatilité  $n^\circ i$

$$U_i = \frac{\text{Log}(C_i) - \text{Log}(\bar{\sigma})}{a}$$

$f_i$  = fréquence de distribution de la volatilité relative à l'intervalle  $i$

Les diagrammes des fréquences de distribution du logarithme de la volatilité en fonction des valeurs moyennes des intervalles correspondants, aussi bien pour la base intraday que pour la base journalière, sont illustrés, ainsi que les fonctions cumulatives correspondantes dans les figures 18, 19 et 20. Ces diagrammes sont à comparer avec ceux de la loi normale.

Quel que soit le type de la volatilité, implicite ou historique, quelle que soit la base, intraday ou journalière, on remarque, sur les figures 18, 19 et 20, que les courbes densité de probabilité sont proches de celles de la loi normale de moyenne  $\text{Log}(\bar{\sigma})$  et l'écart-type  $a$ .

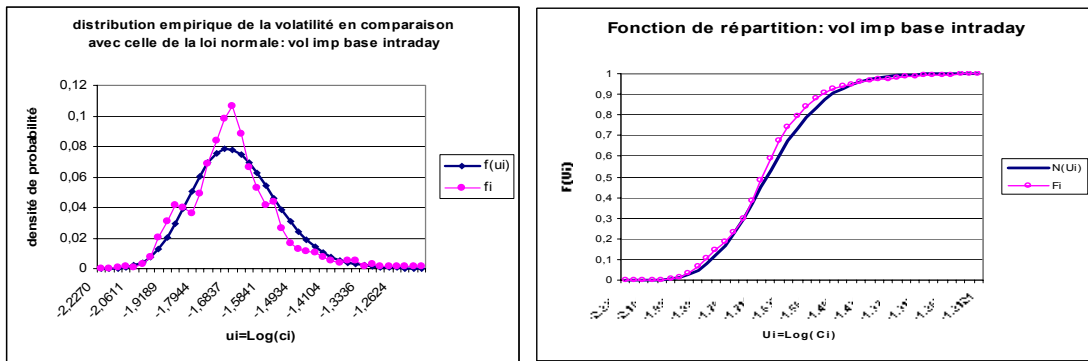


Figure 18 : Fréquence de distribution et fonction cumulative de la volatilité implicite en fonction du logarithme des centres des intervalles de la volatilité en comparaison avec ceux de la loi normale ( $\text{Log}(0,1339) ; 0,1353$ ): cas de la base intraday

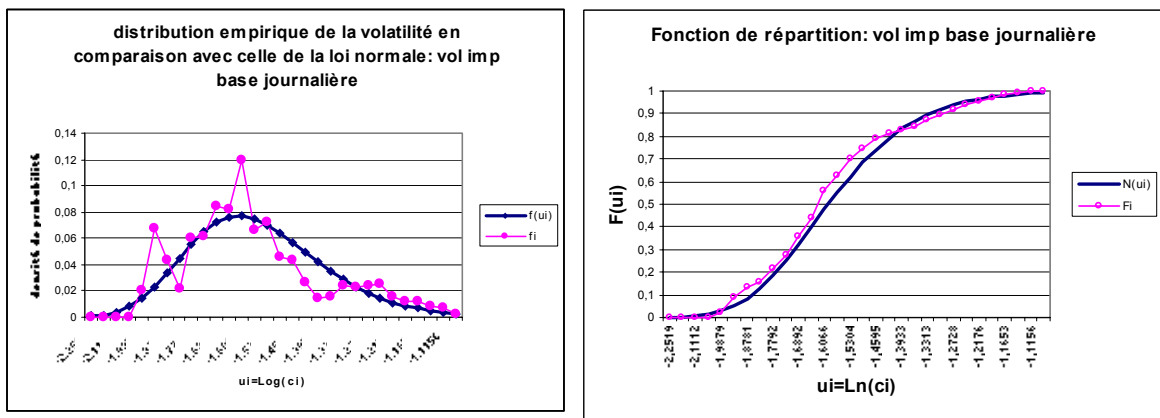


Figure 19 : Fréquence de distribution et fonction cumulative de la volatilité implicite en fonction du logarithme des centres des intervalles de la volatilité en comparaison avec ceux de la loi normale ( $\text{Log}(0,2031) ; 0,2074$ ): cas de la base journalière

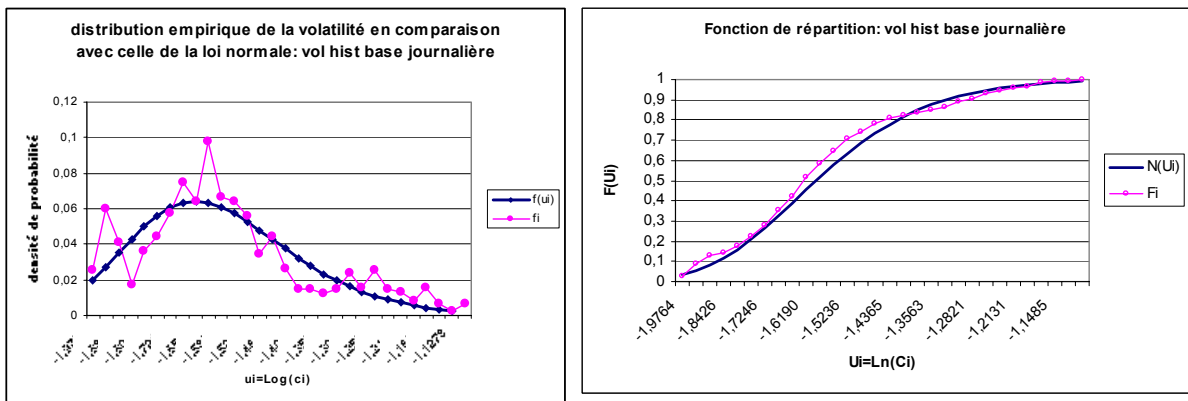


Figure 20 : Fréquence de distribution et fonction cumulative de la volatilité historique en fonction du logarithme des centres des intervalles de la volatilité en comparaison avec ceux de la loi normale ( $\text{Log}(0,2030) ; 0,2066$ ): cas de la base journalière

De même, les courbes des fonctions cumulatives  $F_i$  de la distribution empirique de la volatilité sont très proches des fonctions de répartition de la loi normale  $N(ui)$ , avec les mêmes paramètres précités. Pour la base journalière, aussi bien pour la volatilité implicite qu'historique, l'écart quadratique moyen entre  $F_i$  et  $N(ui)$  est d'environ 0,035, et leur coefficient de corrélation est de 0,99. Pour la base intraday, en considérant la volatilité implicite, ces critères prennent les valeurs respectives de 0,03 et 0,99. Si on considère un niveau moyen de 0,5 de la fonction  $N(ui)$ , on commet une erreur de 6%, en assimilant la fonction cumulative  $F_i$  à la fonction  $N(ui)$ .

L'approximation de la distribution des nuages de points, par celle de la loi log-normale est bien plausible. Les données des deux bases de données, intraday et journalière, se situent bien, dans un régime stationnaire.

Ainsi, on peut raisonnablement dire que la loi de la volatilité en régime permanent est log-normale et que ces paramètres peuvent être estimés, à partir des données disponibles dans chacune des deux bases de données.

En remplaçant la densité  $P_\infty(\sigma)$  par son expression, relative à l'équation (3.2.1-4), dans l'équation (3.2.1-3), le drift réel de la volatilité peut s'écrire :

$$\omega(\sigma) = \frac{1}{2P_\infty} \frac{\partial(q^2 P_\infty)}{\partial \sigma} = \eta^2 \sigma^{2(\gamma-1)} \left( \gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} \text{Log}\left(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}\right) \right) \quad (3.2.1-5)$$

Il est fonction de la volatilité et de sa distribution. Les deux grandeurs, caractérisant la distribution de  $P_\infty(\sigma)$ . Les paramètres  $a$  et  $\text{Log}(\bar{\sigma})$ , pour la volatilité historique et la volatilité implicite, relatives à l'ensemble de la base journalière, ainsi que, leurs valeurs, pour la volatilité implicite, relative à la base intraday sont données dans le tableau 17.

En considérant la base journalière, la moyenne à long terme de la volatilité, en supposant un régime permanent est, quasiment, la même pour la volatilité implicite que pour la volatilité historique et s'élève à 20,3%. De même, la valeur de l'écart type est, sensiblement, la même pour les deux types de volatilité, et pour la même base journalière.

Volatilité	$\bar{\sigma}$	a	$\gamma$	$\eta$	$\sigma_0$
Historique: base journalière	0,2030	0,2066	0,9901	0,5482	0,2117
Implicite : base journalière	0,2031	0,2074	0,4544	0,5375	0,2023
Implicite : base intraday	0,1839	0,1353	0,8521	stochastique	0,1863

Tableau 17 : La moyenne et l'écart type de la distribution du logarithme de la volatilité en régime permanent, ainsi que les coefficients  $\gamma$  et  $\eta$  relatifs au calcul de la volatilité de la volatilité et la valeur  $\sigma_0$  de la volatilité qui annule le drift réel de la volatilité.

Cependant, si le coefficient  $\eta$  est, quasiment, le même pour les deux volatilités, le coefficient  $\gamma$  est le double, dans le cas de la volatilité historique, par rapport au cas de la volatilité implicite.

En ce qui concerne la base intraday, pour laquelle on considère, uniquement, la volatilité implicite, comparée à la base journalière, on remarque que la volatilité à long terme est, légèrement, plus faible que celle de cette dernière, en soulignant au passage la grande sensibilité de la valeur de l'option, par rapport à la volatilité. L'écart type « a » de la distribution  $P_{\infty}(\sigma)$ , dans le cas de la base journalière, est une fois et demi celui de la base intraday. Ceci, serait aberrant, si les périodes des deux bases étaient les mêmes.

Pour la base intraday, le coefficient  $\gamma$  n'est pas très différent de celui de la base journalière, par contre le coefficient  $\eta$ , qui dépend de l'intervalle de temps entre deux cotations, est stochastique.

Le Drift réel de la volatilité est calculé, à partir de l'équation (3.2.1-3), en utilisant les valeurs des paramètres précisés dans le tableau 17. Ces drifts réels,

relatifs à la volatilité implicite, sont représentés, dans les figures 21 et 22, respectivement, pour la base journalière et la base intraday.

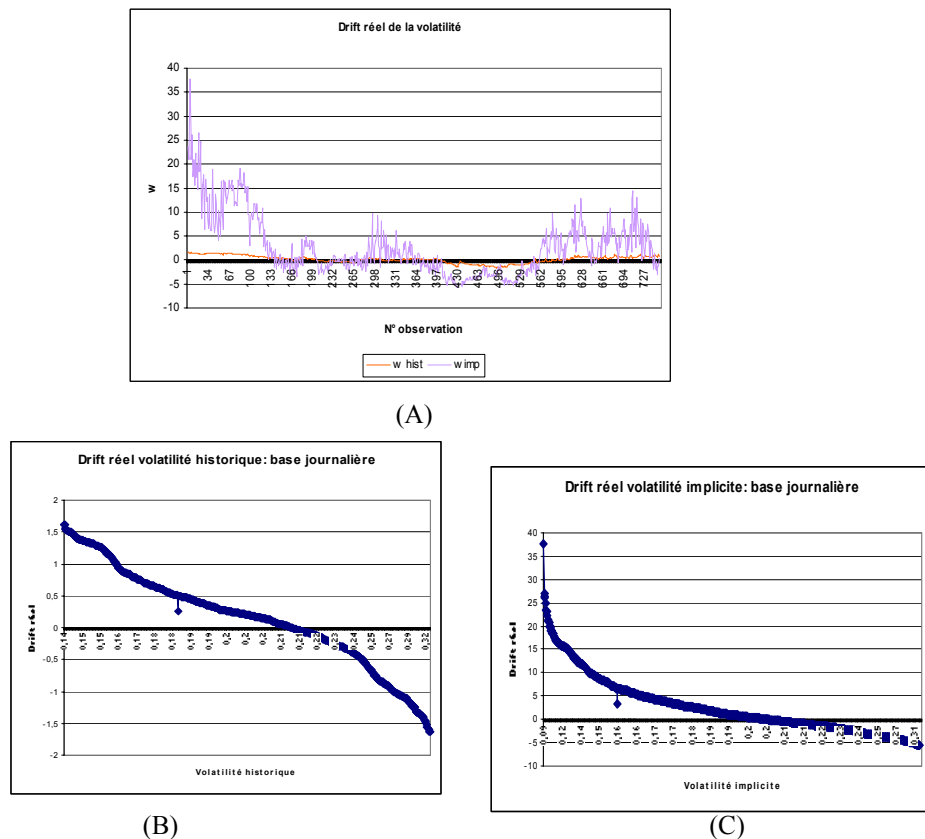
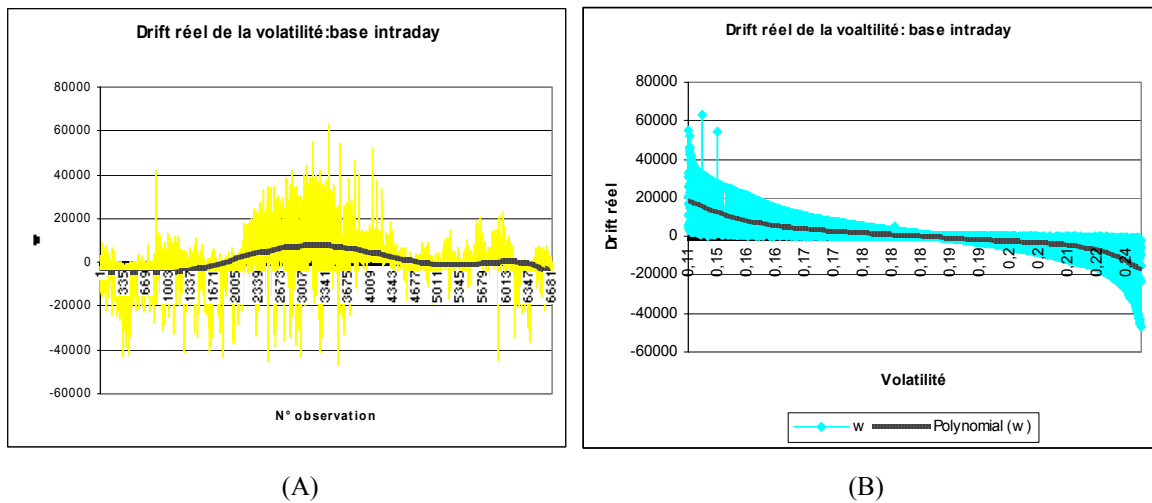


Figure 21 : Séries des drifts réels de la volatilité implicite et de la volatilité historique : cas de la base journalière. (A) tri suivant la date courante ; (B) tri suivant la volatilité historique et (C) tri suivant la volatilité implicite.

Le drift réel de la volatilité est une fonction décroissante de la volatilité. Etant donné que la volatilité est positive, le signe du drift réel est celui de la parenthèse dans l'équation (3.2.1-5).

Ainsi, le drift réel est positif, si la volatilité  $\sigma$  est inférieure à la quantité  $\sigma_0$  et vice versa. La quantité  $\sigma_0$  est celle qui annule le drift réel. Elle est donnée par l'équation :  $\sigma_0 = \bar{\sigma} e^{(2\gamma-1)a^2}$ . Ses valeurs, précisées dans le tableau 17, correspondent bien, à l'intersection des courbes avec l'axe des abscisses, dans les figures 21-B, 21-C et 22-B. La valeur  $\sigma_0$  de la volatilité correspond à un point d'inflexion de la courbe du drift réel.



(A) (B)  
 Figure 22 : Séries du drift réel de la volatilité implicite et séries des régressions de type polynomial d'ordre 6: cas de la base intraday  
 (A) tri suivant la date courante et (B) tri suivant la volatilité implicite

Dans le cas de la base journalière, le drift réel de la volatilité implicite est supérieur, en valeur absolue, à celui de la volatilité historique. Ils sont corrélés, dans la mesure, où ils sont tous deux positifs ou tous deux négatifs.

Pour la volatilité implicite, la valeur du drift est, relativement, élevée. Elle décroît de 35, pour une volatilité de 9%, avant de devenir négative pour des valeurs supérieures à  $\sigma_0$ .

Dans le cas de la base intraday, le drift de la volatilité implicite a la même allure que dans le cas de la base journalière, sauf qu'il peut atteindre des valeurs plutôt élevées, se situant, en majorité entre  $-20000$  et  $+20000$ .

### 3.2.1.2.2 Estimation du drift risque-neutre de la volatilité

Dans le cas du processus empirique de la volatilité, l'estimation du drift risque-neutre, devrait se déduire, à partir du drift réel de la volatilité. Mais pour cela, il faut connaître le prix du marché du risque lié à la volatilité. Cette information, n'est pas facile à estimer. C'est pour cela, qu'on suppose que le drift risque-neutre  $D$  est constant, et on suppose, comme dans le cas du mouvement Brownien, que les valeurs calculées dans le paragraphe (§3.2.1.1.1) restent valables. Ceci n'est pas, sans conséquence, puisque la constance du drift risque-

neutre fait perdre à la volatilité sa propriété de retour à la moyenne (mean reverting), évoquée dans le paragraphe (§1.2.7.2.1) du chapitre préliminaire.

### 3.2.1.2.3 Estimation de la volatilité de la volatilité : $q$

La diffusion de la volatilité, dans ce cas, se fait suivant le processus défini, au début du paragraphe (§3.2.1.2). Ainsi, pour les données journalières ou « intraday », la variation de la volatilité  $d\sigma_t$ , pendant un temps  $dt$ , est telle que :

$$(d\sigma_t)^2 = [q(\sigma_t)]^2 U^2 dt ; \text{ où } U \text{ est une variable aléatoire normale centrée et réduite.}$$

A partir de la série temporelle relative à la volatilité, on détermine la série temporelle relative à  $d\sigma_t$  et, donc, celle relative à  $(d\sigma_t)^2$  dont l'espérance mathématique est tel que :  $E[(d\sigma_t)^2] = [q(\sigma_t)]^2 dt$ , puisque  $U^2$  suit la loi de Chi-deux de degré 1, et que son espérance est, donc,  $E(U^2) = 1$ .

Ainsi, on peut écrire :  $\text{Log}(E[(d\sigma_t)^2]) = 2\text{Log}[q(\sigma_t)] + \text{Log}(dt)$  (3.2.1-6)

La volatilité de la volatilité est tel que :  $q(\sigma) = \eta\sigma^\gamma$ . Autrement dit, en remplaçant  $q$  par son expression dans l'équation (3.2.1-5), on obtient :

$$\text{Log}(E[(d\sigma_t)^2]) = 2\gamma\text{Log}(\sigma_t) + \text{Log}(\eta^2 dt) = \alpha\text{Log}(\sigma_t) + \beta \quad (3.2.1-7)$$

La régression de  $\text{Log}(E[(d\sigma_t)^2])$ , par rapport à  $\text{Log}(\sigma_t)$ , par la méthode de moindre carré ordinaire, donne la relation :  $\text{Log}(E[(d\sigma_t)^2]) = \alpha\text{Log}(\sigma_t) + \beta$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coefficients de régression, tel que si on désigne par :

$$Y_t = \text{Log}(E[(d\sigma_t)^2]) \quad \text{et} \quad X_t = \text{Log}(\sigma_t)$$

ces coefficients sont définis par le système suivant:

$$\alpha = \frac{\text{Cov}(X_t, Y_t)}{V(X_t)} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (3.2.1-8)$$

$$\beta = \bar{Y} - \alpha \bar{X} = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n y_i - \alpha \sum_{i=1}^n x_i) \quad (3.2.1-9)$$

A partir des données (séries X et Y), on peut estimer  $\alpha$  et  $\beta$ . Par identification, on peut déduire, par la suite, les valeurs des coefficients  $\eta$  et  $\gamma$ , à partir des coefficients de régression  $\alpha$  et  $\beta$  et de l'intervalle de temps  $dt$ . D'où le système :

$$2\gamma = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \frac{\alpha}{2} \quad (3.2.1-10)$$

$$\text{Log}(\eta^2 dt) = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \eta = \sqrt{\frac{e^\beta}{dt}} \quad (3.2.1-11)$$

Pour déterminer la volatilité de la volatilité, il va falloir, dans un premier temps, déterminer l'intervalle de temps  $dt$  et les coefficients  $\eta$  et  $\gamma$ . Il va falloir définir, également, les données sur lesquelles on va se fonder pour estimer ces paramètres.

- **Données de base**

La dynamique de la volatilité, peut être déterminée en considérant l'ensemble des observations, relatives à la base entière, ou bien, les observations relatives à un contrat d'option. Ceci est, aussi, vrai pour la base intraday que pour la base journalière. Pour la base journalière, le fichier servant à la détermination de la volatilité est constitué de 751 observations, soit le nombre de jours de cotation correspondant à cette base.

La volatilité implicite, respectivement historique, journalière est calculée comme la moyenne arithmétique des volatilités implicites, respectivement historiques, relatives aux différentes observations de ce jour. Il est à noter que



les résultats de ces calculs sont quasiment les mêmes en considérant l'une ou l'autre des formules suivantes :

$$\sigma_{jr} = \frac{1}{N_{jr}} \sum_{t=1}^{N_{jr}} \sigma_{t,jr} \quad \text{ou bien} \quad \sigma_{jr} = \left( \frac{1}{N_{jr}} \sum_{t=1}^{N_{jr}} \sigma_{t,jr}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où,  $\sigma_{jr}$  est la volatilité journalière, relative au jour jr,  $\sigma_{t,jr}$  est la volatilité correspondant à l'observation t du jour jr et  $N_{jr}$  est le nombre d'observations pendant le jour jr.

- **détermination de l'intervalle de temps dt**

L'intervalle de temps dt, est la différence entre l'heure et la date de deux observations consécutives. Pour ce qui concerne la date, si un jour ou plus séparent deux observations, il faut savoir s'il s'agit d'un « week-end » ou d'un jour férié ou d'une séance de bourse où il n'y a pas eu la cotation du contrat d'option considéré. Pour se faire, on compare la différence de jour entre deux observations consécutives et on le compare à celui du calendrier des jours de bourses.

Ainsi, on trouve un intervalle de temps stochastique pour la base intraday, alors que pour la base journalière l'intervalle de temps est constant. La volatilité étant annuelle, l'intervalle de temps dt doit être exprimé en année, aussi bien pour la base journalière que pour la base « intraday ».

Pour la base intraday, la conversion de la durée en seconde en durée en année se fait en considérant 250 séances de bourse, par année, et 7 heures de cotation, par séance, soit 1750 heures de cotation, par an, ce qui correspond à 6 300 000 secondes. D'où la relation qui lie l'intervalle de temps en année, à celui en seconde :  $dt_{Année} = \frac{dt_{Secondes}}{6300000}$ . Cet intervalle de temps est stochastique (comme

le montre le figure 23). La conversion a pour effet de réduire l'aspect stochastique de l'intervalle de temps dt, autrement dit, la variabilité de celui-ci.

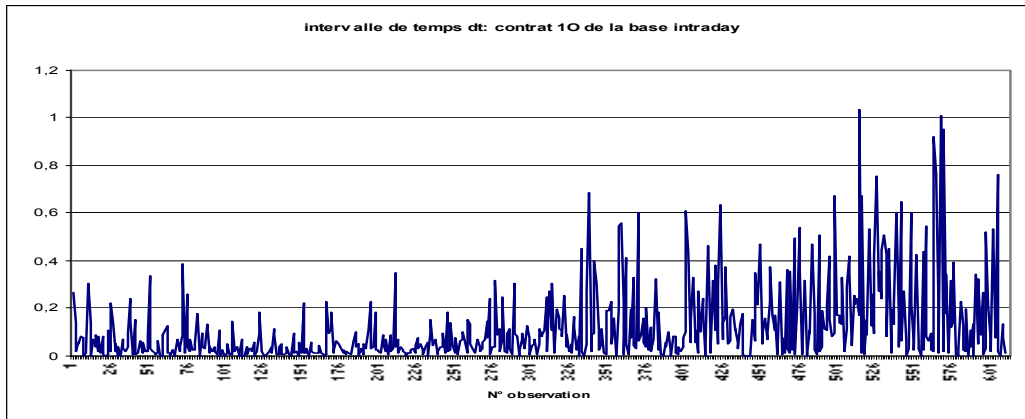


Figure 23 : Intervalle de temps stochastique dt du contrat 10 de la base intraday

Pour la base journalière, on considère 250 jours de bourse. Comme, l'intervalle de temps dt est exprimé en jour, l'intervalle de temps exprimé en année est

donné par la relation :  $dt_{Année} = \frac{dt_{jour}}{250}$  qui est constant.

- **détermination des coefficients de régression  $\alpha$  et  $\beta$**

Comme, le modèle de calcul de la volatilité de la volatilité retenu est de la forme :  $q = \eta\sigma^\gamma$ , pour pouvoir calculer la volatilité de la volatilité relative à chaque observation de la base, il va falloir estimer les valeurs de  $\eta$  et de  $\gamma$ .

Comme ces paramètres sont fonctions des coefficients de régression  $\alpha$  et  $\beta$  de  $Y_t = \text{Log}\left(E\left[(d\sigma_t)^2\right]\right)$  sur  $X_t = \text{Log}(\sigma_t)$  suivant les équations (3.2.1-8) et (3.2.1-9), le problème revient à estimer les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ .

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être estimés, à partir des données de la base, suivant les équations (3.2.1-8) et (3.2.1-9). Pour se faire, il faut estimer, dans un premier temps,  $E(d\sigma_t)^2$ . L'estimation de  $E(d\sigma_t)^2$  pose un vrai problème, puisqu'il faut déterminer la moyenne empirique de la série  $(d\sigma_t)^2$ , sur l'intervalle de temps dt. Ce problème peut être résolu comme suit :

- D'abord, la série  $(d\sigma_t)$  est estimée par la différence de la volatilité entre deux observations consécutives suivant la chronologie, soit  $\Delta\sigma_t = \sigma_t - \sigma_{t-1}$ . Si on considère un fichier comportant n observations, on a :  $\{t; 2 \leq t \leq n\}$ .
- Ensuite, on divise l'intervalle  $I(\sigma_t)$ , domaine de définition de la série de la volatilité  $I(\sigma_t) = [\sigma_{\min}; \sigma_{\max}]$  en N intervalles  $\{I_p; 1 \leq p \leq N\}$  de longueurs égales à l, tel que :  $l = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{N}$ . (cf figure 24)

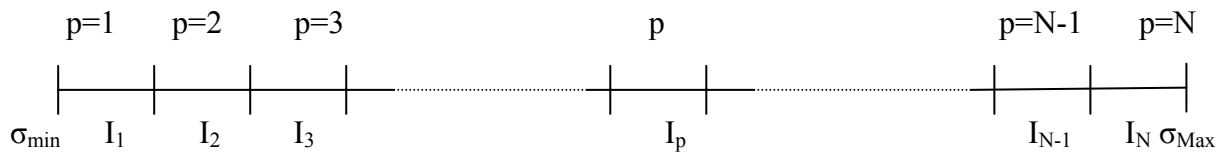


Figure 24 : Découpage de l'écart maximum de la volatilité en N intervalles égaux

L'intervalle  $I_p$  est telle que :  $I_p = [\sigma_{\min} + (p - 1)l; \sigma_{\min} + pl]$

Le centre de cet intervalle est :  $U_p = \sigma_{\min} + (p - \frac{1}{2})l$

La série de la volatilité, comportant n observations est dispatchée sur les N intervalles de la volatilité tel que :

pour une observation t donnée,

si  $\sigma_{\min} + (p - 1)l \leq \sigma_t < \sigma_{\min} + pl$ , alors  $\sigma_t \in I_p$ .

L'intervalle  $I_p$  comportera  $N_p$  valeurs de la série de la volatilité tel que:

$n = \sum_{p=1}^{p=N} N_p$ . La longueur des intervalles l est choisie de manière à ce que les

nombre  $\{N_p; 1 \leq p \leq N\}$  soient tous significatifs.

Pour chaque intervalle  $I_p$ , on définit un ensemble  $E_p$  tel que :

$$E_p = \{\Delta\sigma_t = (\sigma_t - \sigma_{t-1}) / \sigma_t \in I_p\} \text{ et la somme } Z_p = \sum_{\Delta\sigma_t \in E_p} (\Delta\sigma_t)^2$$

Ainsi, la quantité  $V_p = \frac{Z_p}{N_p} = \frac{1}{N_p} \sum_{\Delta\sigma_t \in E_p} (\Delta\sigma_t)^2$  est l'estimateur de  $E(d\sigma_t)^2$  et la régression de  $\text{Log}(E[(d\sigma_t)^2])$  sur  $\text{Log}(\sigma_t)$  n'est autre que la régression de la série  $Y_p$  sur la série  $X_p$ , avec :

$$Y_p = \text{Log}(V_p) = \text{Log}\left(\frac{1}{N_p} \sum_{\Delta\sigma_t \in E_p} (\Delta\sigma_t)^2\right)$$

et

$$X_p = \text{Log}(U_p) = \text{Log}\left(\sigma_{\min} + (p - \frac{1}{2})l\right).$$

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont autres que les coefficients de cette régression. On a, donc :

$$\alpha = \frac{\text{Cov}(X_p, Y_p)}{V(X_p)} = \frac{N \sum_{i=1}^N x_p y_p - \sum_{i=1}^N x_p \sum_{i=1}^N y_p}{N \sum_{i=1}^N x_p^2 - (\sum_{i=1}^N x_p)^2}$$

et

$$\beta = \bar{Y} - \alpha \bar{X} = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^n y_p - \alpha \sum_{i=1}^n x_p \right)$$

Pour cette régression, on ne considère pas les intervalles  $I_p$  vides (tel que  $N_p=0$ ) et, donc, les  $X_p$  correspondants.

Les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent du nombre d'intervalles à considérer  $N$ . Celui-ci ne doit pas être, ni trop petit, ni trop grand. Il ne doit pas être très petit, puisque les calculs précédents supposent la continuité de la volatilité et donc, une largeur infinitésimale des intervalles de celle-ci, elle doit être, donc, la plus petite possible. Il ne doit pas être trop grand, non plus, pour que les intervalles ne soient vides, en majorité, et que les nombres  $N_p$  ne soient pas, majoritairement, nuls. Ainsi, un compromis doit être fait, ceci en considérant comme critère : le maximum de  $N$  relatif au maximum de  $N_x$ ,  $N_x$  étant le nombre d'intervalle tel que  $N_p$  n'est pas nul. Ceci revient à considérer le

maximum de N relatif au maximum du pourcentage x des intervalles  $I_p$  non vides, x étant le rapport de  $N_x$  par N.

De plus, statistiquement parlant, il faut que chaque intervalle contienne un minimum d'observations pour que la moyenne arithmétique de ces valeurs corresponde, au mieux, à l'espérance mathématique de la variable aléatoire. Par exemple, si chaque intervalle doit contenir en moyenne 10 valeurs, le nombre d'intervalles ne doit dépasser le dixième du nombre d'observations, soit  $N < \frac{n}{10}$ . Avec une telle contrainte, si on considère le fichier « Fichjour » de la base journalière, destiné à déterminer la dynamique de la volatilité sur l'ensemble de la base, qui comporte 751 observations, le nombre d'intervalles ne doit pas dépasser 75.

En considérant un nombre d'intervalle, N évoluant progressivement de 20 à 200, on obtient pour la base journalière, pour le fichier, respectivement, pour la volatilité implicite et la volatilité historique les tableaux 18 et 19.

Vol imp					
N	$\alpha$	$\beta$	$N_x$	x	$\gamma = \alpha/2$
20	0,64712054	-7,21139288	20	100,00%	
25	0,87586868	-6,80193281	25	100,00%	
<b>30</b>	<b>0,90871787</b>	<b>-6,76292896</b>	<b>30</b>	<b>100,00%</b>	0,45435894
40	0,90719372	-6,80819416	39	97,50%	
50	0,8350696	-6,94808531	50	100,00%	
60	0,76796579	-7,13598251	59	98,33%	
75	0,47549173	-7,61085844	70	93,33%	
100	0,63575149	-7,50222969	94	94,00%	
200	0,90686369	-7,19277811	171	85,50%	

Tableau 18: Coefficients de régression  $\alpha$  et  $\beta$ , en fonction du nombre d'intervalles N, pour la volatilité implicite, base journalière fichier « Fichjour ».

Vol hist					
N	$\alpha$	$\beta$	Nx	x	$\gamma = \alpha/2$
20	2,17846346	-6,32815504	20	100,00%	0,99009967
30	1,90820873	-6,74710369	30	100,00%	
40	1,81731319	-6,96601629	40	100,00%	
50	1,98019934	-6,72352076	50	100,00%	
60	1,91412854	-6,9084301	59	98,33%	
75	1,78168786	-7,21692705	74	98,67%	
100	1,76013708	-7,28248739	96	96,00%	
200	1,98871279	-7,20145035	170	85,00%	

Tableau 19: Coefficients de régression  $\alpha$  et  $\beta$ , en fonction du nombre d'intervalles N, pour la volatilité historique, base journalière fichier « Fichjour ».

On remarque que, aussi bien pour la volatilité implicite que pour la volatilité historique, les coefficients de régression  $\alpha$  et  $\beta$  varient, légèrement, avec N. Le pourcentage x, d'intervalles non vides, décroît avec N, ce qui est tout à fait logique. Il reste à un niveau, relativement, élevé (85%) pour un nombre d'intervalles très élevé, soit N=200.

Pour la présente simulation et selon le critère défini ci-dessus, le nombre d'intervalles à considérer, pour la volatilité implicite, est N=30, puisque le maximum de x est de 100% et que le maximum de N pour x=100% est bien 30. Avec un raisonnement similaire, le nombre à considérer pour la volatilité historique, dans ce cas est N=50. Les valeurs sélectionnées sont en foncé. Les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  et, donc, de  $\gamma$  sont données, dans le tableau 20 pour les deux volatilités : historique et implicite.

	hist	imp
$\gamma$	0,99009967	0,45435894
$\beta$	-6,72352076	-6,76292896

Tableau 20 : Les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pour la volatilité Historique (hist) et la volatilité implicite (imp), en considérant la base journalière

Ces résultats sont à comparer avec les résultats trouvés par Wilmott (2000). Ce dernier a utilisé les valeurs à la clôture l'indice Dow Jones Industrial, sur une période s'étalant de janvier 1975 jusqu'à Août 1995 (soit 20 ans, 5000 observations journalières). A partir de ces données, il a calculé les rendements

journaliers de cet indice et la volatilité historique correspondante sur un historique de 30 jours. Il a trouvé:  $\gamma=1,05$  et  $\beta=-6,264588$ . Bien qu'il ne s'agisse pas du même indice, ni de la même durée, les résultats trouvés, pour la volatilité historique, sont proches de ceux trouvés par Willmott (2000).

En fait, les coefficients  $\gamma$  et  $\beta$  changent avec la période considérée sur laquelle on étudie la dynamique de la volatilité. Ainsi, pour la base journalière on trouve pour les 5 contrats choisis dans le paragraphe (§1.3.2.3) des valeurs différentes, aussi bien, pour la volatilité implicite que pour la volatilité historique. Ces valeurs sont données dans le tableau 21, pour la volatilité implicite et dans le tableau 22, pour la volatilité historique.

Vol imp	<b>C2800</b>	<b>C2950</b>	<b>C3100</b>	<b>C3250</b>	<b>C4000</b>
$\beta$	-1,8657	-1,6695	-0,5398	-2,4518	-2,3056
$\gamma$	1,9492	2,0435	2,5740	1,9298	1,8106

Tableau 21: Coefficients  $\gamma$  et  $\beta$  pour chacun des contrats choisis de la base journalière pour la volatilité implicite

Vol hist	C2800	C2950	C3100	C3250	C4000
$\beta$	-7,2265	-7,7315	-11,0899	-14,7828	-16,8388
$\gamma$	1,2529	1,1521	0,3316	-1,1260	-2,5378

Tableau 22: Coefficients  $\gamma$  et  $\beta$  pour chacun des contrats choisis de la base journalière pour la volatilité historique

Pour chacune des deux volatilités, ces valeurs varient d'un contrat à un autre. Elles n'ont rien à voir avec celles trouvées en considérant l'ensemble de la base. Pour la volatilité historique, les valeurs pour les contrats C2800 et C2950 sont, relativement, proches de celles trouvées en considérant l'ensemble de la base. Pour les contrats C3250 et C4000, le coefficient  $\gamma$  est négatif.

Comme pour le drift risque neutre  $D$ , la valeur de  $\gamma$  et celle de  $\beta$  sont plus plausibles, quand on considère l'ensemble de la base journalière, que lorsqu'on considère ses contrats un par un.

En ce qui concerne la base intraday, en considérant l'ensemble de la base et en ne considérant que la volatilité implicite, les valeurs des coefficients  $\gamma$  et  $\beta$  trouvés sont les suivantes :

$\gamma$	$\beta$
0,85207516	-3,72754788

Tableau 23 : coefficients  $\gamma$  et  $\beta$  pour l'ensemble de la base intraday pour la volatilité implicite

Ces valeurs sont différentes des valeurs trouvées pour la base journalière, bien qu'il s'agisse du même sous-jacent qui est l'indice CAC40. Cependant, la période de référence n'est pas la même pour les deux bases, sans oublier que la dynamique de la volatilité n'est pas la même, selon que la base est journalière ou intraday.

Comme pour la base journalière, les coefficients  $\gamma$  et  $\beta$  changent, complètement, selon qu'on considère l'ensemble de la base, ou les contrats choisis dans cette base. Par contre, ils sont, quasiment, les mêmes pour l'ensemble de ces contrats. Les coefficients relatifs à ces 9 contrats sont donnés dans le tableau 24.

	<i>IN</i>	<i>IO</i>	<i>IP</i>	<i>IQ</i>	<i>IS</i>	<i>9I</i>	<i>9J</i>	<i>9K</i>	<i>9L</i>
$\gamma$	2,3704	2,3575	2,3916	2,2726	2,1061	2,1075	2,0826	2,0276	1,9904
$\beta$	-0,0413	-0,0591	-0,0571	-0,0567	-0,0534	0,0500	-0,0564	-0,0257	-0,0741

Tableau 24 : Coefficients  $\gamma$  et  $\beta$ , pour les 9 contrats, choisis de la base intraday, pour la volatilité implicite

Comme pour la base journalière, les valeurs de  $\gamma$  et  $\beta$  sont plus plausibles quand on considère l'ensemble de la base intraday que lorsqu'on considère ses contrats un par un.

- **détermination de la volatilité de la volatilité  $q$**

La volatilité de la volatilité  $q$  est une fonction de la volatilité du sous-jacent et des coefficients  $\gamma$  et  $\eta$ , tel que :  $q = \eta\sigma^\gamma$ . Si le coefficient  $\gamma$  a été déterminé,  $q$



peut être calculé, à partir de l'intervalle de temps  $dt$ , et du coefficient  $\beta$ , suivant

la formule :  $\eta = dt \frac{1}{2} \frac{\beta}{e^2}$

Si on considère la dynamique de la volatilité,  $\gamma$  est une constante aussi bien pour la base journalière que pour la base intraday. Par contre,  $\eta$  ne peut être une constante que si l'intervalle de temps entre deux observations consécutives est constant. Le coefficient  $\eta$  est, donc, constant pour la base journalière et stochastique pour la base intraday, comme le montre la figure 25.

La série de la volatilité de la volatilité est donnée par le graphique 26, pour la base journalière et par le graphique 27, pour la base intraday.

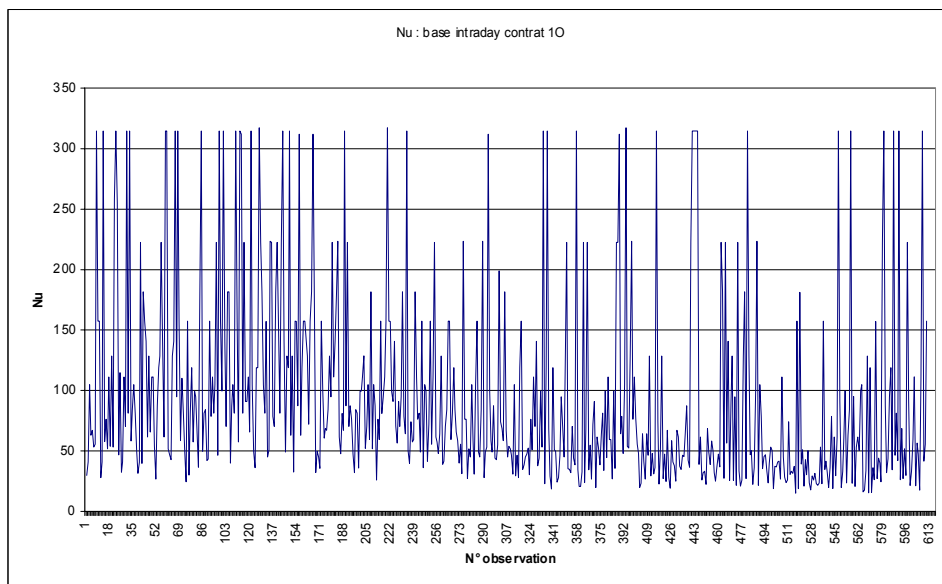


Figure 25 : Série du coefficient  $\eta$ , relative au contrat 10, de la base intraday.

La série de la volatilité de la volatilité est donnée, dans la figure 25, pour la base journalière, et dans la figure 26, pour la base intraday .

On remarque sur la figure 26, que la volatilité de la volatilité implicite est supérieure à celle de la volatilité historique. L'écart des deux courbes est, quasiment, constant et peut être chiffré à environ 0,125. On peut faire le parallèle avec la figure 9 qui confirme bien ce résultat.

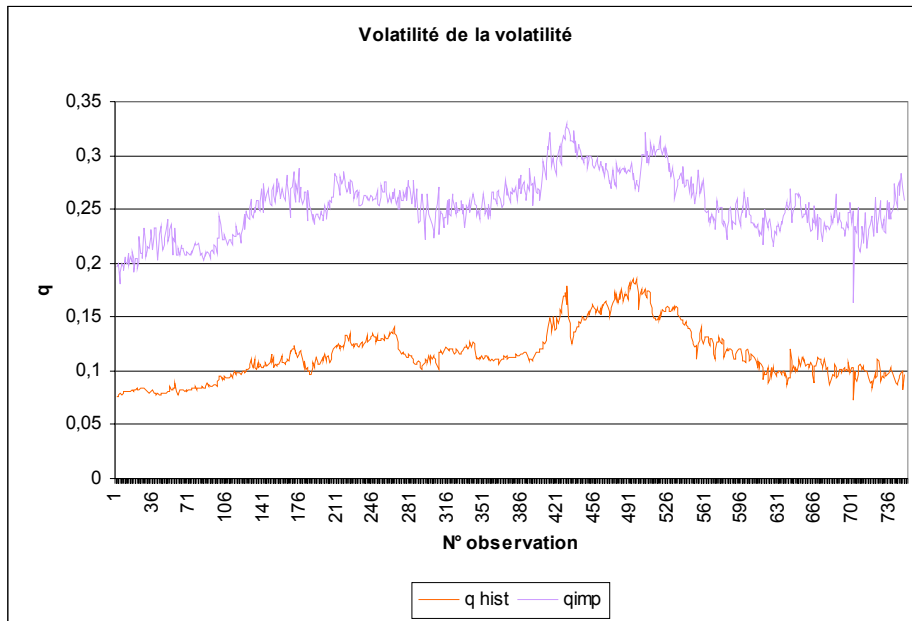


Figure 26 : Volatilité de la volatilité relative à la volatilité implicite et la volatilité historique, pour la base journalière en considérant l'ensemble de la base.

La comparaison des courbes de la volatilité de la volatilité, relatifs à la figure 26, avec ses valeurs, concernant le mouvement Brownien, données dans le tableau 16, montre une certaine cohérence entre ces résultats dans la mesure où les valeurs du tableau 16 correspondent bien à la moyenne des courbes de la figure 26.

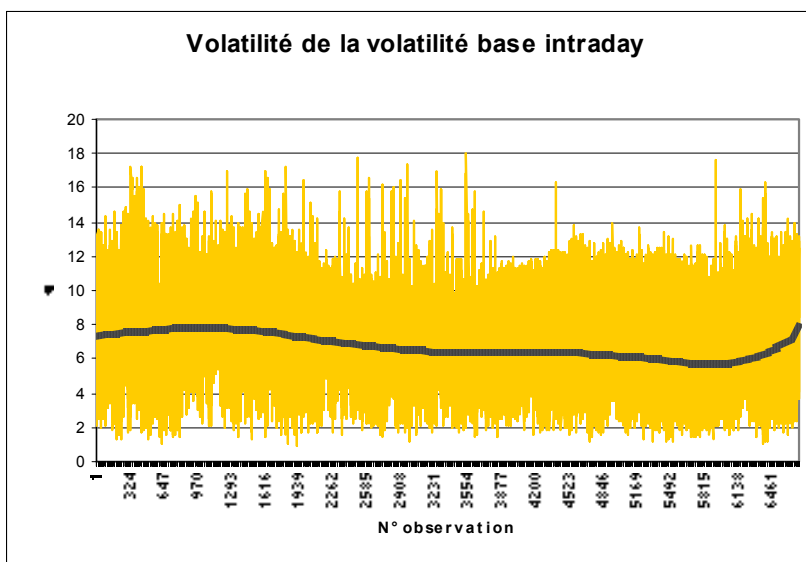


Figure 27 : Série de la volatilité de la volatilité implicite relative à l'ensemble de la base intraday

Une bonne partie de cet aspect stochastique, de la volatilité de la volatilité implicite, relative à l'ensemble de la base journalière (figure 27), provient de la variabilité de l'intervalle du temps  $dt$ , entre deux observations consécutives. La volatilité de la volatilité implicite est bien supérieure pour la base intraday que pour la base journalière. C'est normal, puisque les données, pour la première, sont des données "haute fréquence".

### **3.2.1.3 Processus d'Ornstein Uhlenbeck comme processus de la volatilité**

Si on considère le processus d'Ornstein Uhlenbeck, pour la volatilité, la dynamique de celle-ci sera régie par l'équation :  $d\sigma_t = \kappa(\phi - \sigma_t)dt + q\sqrt{dt}U$  ; où  $U$  est une loi normale centrée réduite,  $\phi$  est la moyenne à long terme de la volatilité,  $\kappa$  est le taux de retour à la moyenne et  $q$  est la volatilité de la volatilité.

L'intérêt d'avoir considéré le processus d'Ornstein Uhlenbeck est la propriété de retour à la moyenne qui le distingue du mouvement Brownien. Comme le drift risque neutre pour ce type de processus conserve la même forme que le drift réel (Heston, 1993), dans ce cas, l'hypothèse de la constance du drift risque-neutre de la volatilité est abandonnée.

Les paramètres à estimer, pour ce type de modèle sont, donc, la moyenne à long terme  $\phi$ , la vitesse de retour à la moyenne  $\kappa$  et la volatilité de la volatilité  $q$ . Ces trois paramètres sont considérés constants. Ils seront déterminés à partir des données figurant dans la base entre l'instant  $t_0$  et  $T$ , qui sont, respectivement, la première et la dernière date figurant dans la base, ce qui revient à dire que les paramètres de la dynamique de la volatilité sont déterminés sur une durée s'étalant entre 0 et  $t_1$ . Cette durée est divisée, en  $N$  intervalles égaux à 1 jour, comme indiqué dans la figure 28, aussi bien pour la base intraday que pour la base journalière.

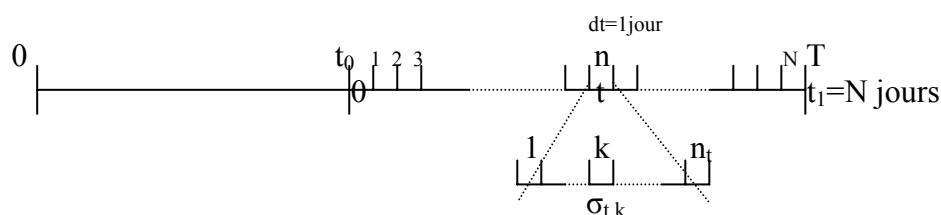


Figure 28 : Division de la période couverte par les données de la base en  $N$  intervalles égaux comprenant chacun  $n_k$  observations.

Les trois paramètres sont estimés, simultanément, en considérant l'une des trois méthodes suivantes : méthode 1, méthode 2 et méthode 3.

### 3.2.1.3.1 Estimation des paramètres du processus d'Ornstein Uhlenbeck : Méthode 1

La première méthode consiste à déterminer ces trois paramètres, simultanément, pour chacun des  $N$  intervalles de temps, compris entre l'instant 0 et la dernière date  $t_1$ , figurant dans base.

L'estimation de ces trois paramètres correspondra aux moyennes respectives de leurs valeurs sur les  $N$  intervalles de temps.

Cet intervalle de temps, qui est le jour, comprend plusieurs observations du processus  $\sigma_t$ , correspondantes aux intervalles de temps  $dt$ , afin de pouvoir estimer l'espérance et la variance du processus considéré, ainsi que le processus dérivé. Il peut, donc, être le jour, dans le cas d'une base intraday, avec différentes observations, pour un même contrat ou pour des contrats différents. Il peut être, également, le jour, dans le cas d'une base journalière, puisque plusieurs contrats d'options sont cotés le même jour et, donc, plusieurs observations de la volatilité peuvent y avoir lieu.

Les intervalles de temps  $dt$ , compris dans une journée, sont stochastiques pour la base intraday, alors qu'ils sont constants, dans le cas de la base journalière.

Pour un intervalle  $dt$ , connaissant la volatilité initiale  $\sigma_0$ , à l'instant 0, les valeurs des paramètres sont déterminées, à partir de l'espérance et la variance de la volatilité, ainsi que l'espérance et la variance de la série dérivée de la volatilité, à savoir,  $E(\sigma_t)$  ;  $V(\sigma_t)$  ;  $E(d\sigma_t)$  et  $V(d\sigma_t)$ . Ainsi, on a le système des quatre équations suivantes :

$$E(\sigma_t) = \phi + (\sigma_0 - \phi)e^{-\kappa t} \quad (3.2.1-12)$$

$$V(\sigma_t) = \frac{q^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) \quad (3.2.1-13)$$

$$E(d\sigma_t) = \kappa(\phi - E(\sigma_t))dt = \kappa(\phi - \sigma_0)e^{-\kappa t}dt \quad (3.2.1-14)$$

$$V(d\sigma_t) = \kappa^2 dt^2 V(\sigma_t) + q^2 dt = \frac{\kappa q^2}{2} (1 - e^{-2\kappa t}) dt^2 + q^2 dt$$

Cette dernière équation peut s'écrire, sous la forme :

$$V(d\sigma_t) = \left( \frac{\kappa}{2} (1 - e^{-2\kappa t}) dt + 1 \right) q^2 dt \quad (3.2.1-15)$$

Pour certaines valeurs de  $\kappa$  et de  $dt$ , le terme en  $dt$ , à l'intérieur de la parenthèse, doit être négligé et on aura :  $V(d\sigma_t) \approx q^2 dt$

A noter que les deux premières équations sont déduites, à partir des équations (1.2.4-2) et (1.2.4-3) du chapitre préliminaire.

- **Estimation des moments**

Les observations de la base sont dispatchées sur les  $N$  intervalles de temps (le jour). Soit  $n_t$  le nombre d'observations correspondant à la date  $t$ , on peut ainsi écrire :

$$\sum_{t=1}^N n_t = \text{nombre total d'observations dans la base}$$

Les moments d'ordre 1 et d'ordre 2 de la volatilité et de sa différentielle (série dérivée) peuvent être estimés, sur un jour comportant  $n_t$  observations, comme suit :

$$E(\sigma_t) \text{ par } \bar{\sigma}_t = \frac{1}{n_t} \sum_{k=1}^{n_t} \sigma_{t,k}$$

$$V(\sigma_t) \text{ par } s^2(\sigma_t) = \frac{1}{n_t - 1} \sum_{k=1}^{n_t} (\sigma_{t,k} - \bar{\sigma}_t)^2$$

$$E(d\sigma_t) \text{ par } \overline{d\sigma}_t = \frac{1}{n_t} \sum_{k=1}^{n_t} d\sigma_{t,k} = \frac{1}{n_t} \sum_{k=1}^{n_t} (\sigma_{t,k} - \sigma_{t,k-1})$$

et

$$V(d\sigma_t) \text{ par } s^2(d\sigma_t) = \frac{1}{n_t - 1} \sum_{k=1}^{n_t} (d\sigma_{t,k} - \overline{d\sigma}_t)^2$$

Ainsi, le système peut s'écrire :

$$\left| \begin{array}{l} \bar{\sigma}_t = \phi + (\sigma_0 - \phi)e^{-\kappa t} \end{array} \right. \quad (3.2.1-16)$$

$$\left| \begin{array}{l} s^2(\sigma_t) = \frac{q^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) \end{array} \right. \quad (3.2.1-17)$$

$$\left| \begin{array}{l} \overline{d\sigma}_t = \kappa(\phi - \sigma_0)e^{-\kappa t} dt \end{array} \right. \quad (3.2.1-18)$$

$$\left| \begin{array}{l} s^2(d\sigma_t) = \left( \frac{\kappa}{2} (1 - e^{-2\kappa t}) dt + 1 \right) q^2 dt \end{array} \right. \quad (3.2.1-19)$$

où  $dt = t_1/N = 1$  jour

Ainsi, on a un système de 4 équations à trois inconnues  $\kappa, \phi$  et  $q$ . Ces trois paramètres sont déterminés, à partir des équations (3.2.1-16), (3.2.1-17) et (3.2.1-18). L'équation (3.2.1-19) est vérifiée par la suite en y remplaçant les valeurs des paramètres trouvés.

- **Résolution**

A partir de l'équation (3.2.1-16), on peut tirer la valeur de  $\phi_t$  en fonction de  $\kappa$  :

$$\phi_t = \frac{\bar{\sigma}_t - \sigma_0 e^{-\kappa t}}{1 - e^{-\kappa t}} \quad (3.2.1-20)$$

En remplaçant cette expression de  $\phi_t$  dans l'équation (3.2.1-18), on obtient une équation en  $\kappa$  qui peut être résolue par un calcul itératif:

$$\frac{\kappa e^{-\kappa t}}{1 - e^{-\kappa t}} = \frac{d\text{Ln}(1 - e^{-\kappa t})}{dt} = \frac{1}{\sigma_t - \sigma_0} \frac{d\sigma_t}{dt} = a_t$$

Soit,

$$\kappa = a_t(e^{\kappa t} - 1)$$

Cette équation admet au moins la solution triviale  $\kappa=0$ . Elle peut admettre une deuxième solution, à condition que la courbe de la fonction du second membre passe sous la première bissectrice qui représente le premier membre de l'équation. Soit, en dérivant l'équation, membre à membre, par rapport à  $\kappa$  :

$$1 > ta_t e^{\kappa t} \Rightarrow \frac{1}{ta_t} > e^{\kappa t} \Rightarrow -\text{Ln}(ta_t) > \kappa t \Rightarrow 0 < \kappa < -\frac{\text{Ln}(ta_t)}{t}$$

Si cette condition est vérifiée  $\kappa$  sera déterminée par un calcul itératif. Une fois  $\kappa$  est déterminée, on peut déterminer  $q$  et  $\phi$ , respectivement, à partir des équations (3.2.1-17) et (3.2.1-20).

En récapitulant, la solution du système d'équations peut être présentée comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= a_t(e^{\kappa t} - 1) && \kappa_t \text{ est déterminée par un calcul itératif à condition que} \\ & && 0 < \kappa < -\frac{\text{Ln}(ta_t)}{t} \\ \phi_t &= \frac{\sigma_t - \sigma_0 e^{-\kappa t}}{1 - e^{-\kappa t}} && \text{en remplaçant le } \kappa_t \text{ trouvé} \\ q_t &= \sqrt{\frac{2\kappa s^2(\sigma_t)}{1 - e^{-2\kappa t}}} && \text{en remplaçant le } \kappa_t \text{ trouvé} \end{aligned} \right\}$$

L'équation (3.2.1-19) doit être vérifiée, en y remplaçant les valeurs de  $\kappa_t$ ,  $\phi_t$  et  $q_t$  trouvées.

Les valeurs de  $\kappa$ ,  $\phi$  et  $q$  à considérer sont, respectivement, les moyennes des valeurs  $\kappa_t$ ,  $\phi_t$  et  $q_t$  trouvées, sur l'ensemble de la base. Soit :

$$\kappa = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \kappa_t \quad \phi = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi_t \quad q = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N q_t$$

### 3.2.1.3.2 Estimation des paramètres du processus d'Ornstein Uhlenbeck : Méthode 2

Si on considère que le paramètre  $\kappa$  est grand, l'espérance et la variance du processus  $X_t$  vont atteindre, rapidement, leurs valeurs asymptotiques.

On peut dire que  $\kappa$  est grand si, à l'instant  $\frac{2t_1}{3}$ , on a :

$$e^{-\frac{2\kappa t_1}{3}} < 0.05 \Rightarrow \kappa > \frac{-3\text{Ln}(0.05)}{2t_1} = \frac{4,493598}{t_1}$$

A partir de l'équation (3.2.1-16), on peut écrire :

$$\phi = \bar{\sigma} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sigma_t$$

A partir de l'équation (3.2.1-19), en assimilant le second membre à  $q^2 dt$  et en prenant la moyenne membre à membre, sur les  $N$  intervalles, on obtient l'équation :

$$q^2 = \frac{1}{dt} \overline{s^2(d\sigma_t)} = \frac{1}{dt} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N s^2(d\sigma_t)$$

Enfin, à partir de l'équation (3.2.1-17), on a :

$$\text{et } \frac{q^2}{2\kappa} = \overline{s^2(\sigma_t)} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N s^2(\sigma_t) \Rightarrow \kappa = \frac{q^2}{2\overline{s^2(\sigma_t)}}$$

Ainsi, dans ce cas les moyennes et les variances empiriques seront déterminées, à partir des données, correspondantes à l'intervalle de temps  $\left[\frac{2t_1}{3}; t_1\right]$ .

Dans le cas, où  $\kappa$  ne vérifie pas cette inégalité, il faut considérer la méthode 1 ou la méthode à suivre.



### 3.2.1.3.3 Estimation des paramètres du processus d'Ornstein Uhlenbeck : Méthode 3

Cette méthode permet de déterminer  $\kappa$ ,  $\phi$  et  $q$ , en considérant l'équation (3.2.1-15) et les valeurs moyennes de l'espérance et de la variance sur l'intervalle de temps  $[0; t_1]$ . A partir de l'équation (3.2.1-12), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \overline{E(\sigma_t)} &= \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} E(\sigma_s) ds = \phi + \frac{(\sigma_0 - \phi)}{t_1} \int_0^{t_1} e^{-\kappa s} ds = \bar{\sigma} \\ \Rightarrow \phi + \frac{(\sigma_0 - \phi)}{\kappa t_1} (1 - e^{-\kappa t_1}) &= \bar{\sigma} \end{aligned} \quad (3.2.1-21)$$

A partir de l'équation (3.1.6-13), on peut écrire

$$\begin{aligned} \overline{V(\sigma_t)} &= \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} V(\sigma_s) ds = \frac{q^2}{2\kappa t_1} \int_0^{t_1} (1 - e^{-2\kappa s}) ds = \overline{s^2(\sigma_t)} \\ \Rightarrow \frac{q^2}{2\kappa} \left( 1 - \frac{1}{2\kappa t_1} (1 - e^{-2\kappa t_1}) \right) &= \overline{s^2(\sigma_t)} \end{aligned} \quad (3.2.1-22)$$

De plus, à partir de l'équation (3.2.1-15), on obtient l'équation suivante :

$$\left( \frac{\kappa}{2} (1 - e^{-2\kappa t}) dt + 1 \right) q^2 dt = s^2(d\sigma_t) \quad (3.2.1-23)$$

En considérant la moyenne sur l'intervalle  $[0; t_1]$ , on obtient :

$$\begin{aligned} q^2 dt \left( 1 + \frac{\kappa}{2} dt \right) - \frac{\kappa q^2 dt^2}{2t_1} \int_0^{t_1} e^{-2\kappa s} ds &= \overline{s^2(d\sigma_t)} \\ q^2 dt \left( 1 + \frac{\kappa}{2} dt \right) - \frac{q^2 dt^2}{4t_1} (1 - e^{-2\kappa t_1}) &= \overline{s^2(d\sigma_t)} \\ \Rightarrow q^2 dt \left( 1 + \left( \kappa - \frac{1}{2t_1} (1 - e^{-2\kappa t_1}) \right) \frac{dt}{2} \right) &= \overline{s^2(d\sigma_t)} \end{aligned} \quad (3.2.1-24)$$

Les équations (3.2.1-21), (3.2.1-22) et (3.2.1-23) ou (3.2.1-24) permettent de déterminer les paramètres inconnus :  $\kappa$ ,  $\phi$  et  $q$ .

• **Résolution**

En faisant le rapport de (3.2.1-23) sur (3.2.1-22), on obtient une équation en  $\kappa$  :

$$\kappa = \frac{1}{2dt} \frac{s^2(d\sigma_t)}{s^2(\sigma_t)} \left( \frac{1 - \frac{1}{2\kappa t_1}(1 - e^{-2\kappa t_1})}{1 + \frac{\kappa}{2}(1 - e^{-2\kappa t})dt} \right)$$

On voit que la valeur de  $\kappa$  peut être notée  $\kappa(t)$ , puisqu'elle dépend de l'instant  $t$ , qu'on considère pour la détermination de la volatilité de la volatilité. Par une méthode itérative, on peut déterminer  $\kappa(t)$ .

Si on pose :  $a_t = \frac{1}{2dt} \frac{s^2(d\sigma_t)}{s^2(\sigma_t)}$ , trouver  $\kappa(t)$  revient à résoudre l'équation

suivante :

$$f(\kappa) = \left( \frac{1 - \frac{1}{2\kappa t_1}(1 - e^{-2\kappa t_1})}{1 + \left( \kappa - \frac{1}{2t_1}(1 - e^{-2\kappa t}) \right) \frac{dt}{2}} \right) - \frac{\kappa}{a_t} = 0$$

On démontre que cette fonction admet une racine unique, ce qui a été vérifié, empiriquement, comme illustré dans la figure 29.

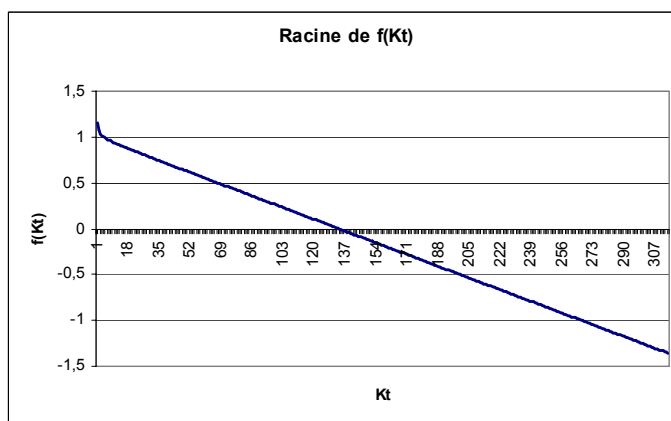


Figure 29 : Détermination de  $\kappa$  relative à la première observation de la base intraday comme racine unique de l'équation  $f(\kappa)=0$

La valeur du paramètre  $\kappa$ , à retenir, est la moyenne des valeurs  $\kappa(t)$ . Soit :

$$\kappa = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \kappa(t)$$

Une méthode 3' consiste à considérer l'équation (3.2.1-24) à la place de l'équation (3.2.1-23). Dans ce cas, on obtiendra directement la valeur de  $\kappa$ , par un calcul itératif, à partir de l'équation suivante :

$$\kappa = \frac{1}{2dt} \frac{\overline{s^2(d\sigma_t)}}{s^2(\sigma_t)} \left( \frac{1 - \frac{1}{2\kappa t_1} (1 - e^{-2\kappa t_1})}{1 + \left( \kappa - \frac{1}{2t_1} (1 - e^{-2\kappa t_1}) \right) \frac{dt}{2}} \right)$$

Si on pose :  $a = \frac{1}{2dt} \frac{\overline{s^2(d\sigma_t)}}{s^2(\sigma_t)}$ , on démontre que le paramètre  $\kappa$  est une solution

unique de l'équation suivante :

$$f(\kappa) = \left( \frac{1 - \frac{1}{2\kappa t_1} (1 - e^{-2\kappa t_1})}{1 + \left( \kappa - \frac{1}{2t_1} (1 - e^{-2\kappa t_1}) \right) \frac{dt}{2}} \right) - \frac{\kappa}{a} = 0$$

En remplaçant la valeur de  $\kappa$  trouvée, dans l'équation (3.2.1-22), on détermine  $q$ . Soit :

$$q = \sqrt{\frac{2\kappa s^2(\sigma_t)}{1 - \frac{(1 - e^{-2\kappa t_1})}{2\kappa t_1}}}$$

De même, en remplaçant la valeur de  $\kappa$  trouvée dans l'équation (3.2.1-21), on détermine  $\phi$ . Soit :

$$\phi = \frac{\kappa t_1 \bar{\sigma} - \sigma_0 (1 - e^{-\kappa t_1})}{\kappa t_1 - (1 - e^{-\kappa t_1})}$$

$\phi$  est, donc, le barycentre de  $\bar{\sigma}$  et  $\sigma_0$  affectés par les coefficients respectifs  $\kappa t_1$  et  $-(1 - e^{-\kappa t_1})$ .

Enfin, l'équation (3.2.1-24) doit être vérifiée en remplaçant les valeurs de  $\kappa$ ,  $q$  et  $\phi$  trouvées.

En définitive, si  $\kappa$  est grand conformément à l'inégalité précitée, il sera plus facile de déterminer les paramètres, à partir des valeurs asymptotiques de l'espérance et de la variance, en considérant le dernier tiers des données de la base. Dans le cas contraire, il serait plus pratique d'utiliser la méthode 3 pour déterminer les paramètres en question, surtout si la condition d'existence de  $\kappa$  n'est pas vérifiée pour la méthode 1.

#### ***3.2.1.3.4 Résultats de l'estimation des paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck***

Pour la base intraday, les données sont agrégées par jour. Les valeurs moyennes et les écarts-types de la volatilité, de sa différentielle et de sa dérivée par rapport au temps sont déterminés, pour chaque observation de la série. Ensuite, sont calculées leurs valeurs moyennes sur l'ensemble de la base.

Pour la base journalière, après avoir trié la base selon la date, puis le prix d'exercice et, enfin, la date d'échéance, les données relatives aux différents contrats d'options sont agrégées, jour par jour. Les moyennes journalières de la volatilité et de sa différentielle, ainsi que, leurs écarts-types respectifs sont, également, calculés.

La méthode 1 n'a pas permis de déterminer les valeurs de  $\kappa$ , aussi bien pour la base intraday que pour la base journalière. En effet, on constate que la série  $-\frac{\text{Ln}(t * a_t)}{t}$  est négative pour plusieurs observations. Ce qui implique que

l'équation  $\kappa_t = a_t(e^{\kappa t} - 1)$  n'admet que la solution banale  $\kappa_t = 0$  quel que soit  $t$ .

Cette méthode n'est, donc, pas bien adaptée dans ce contexte.

La méthode 2 a permis de trouver facilement les valeurs des paramètres pour les deux bases. La méthode 3 a donné la série de  $\kappa(t)$  et de  $a_t$ , illustré, dans la figure 30 pour la base intraday, et la figure 31 pour la base journalière.

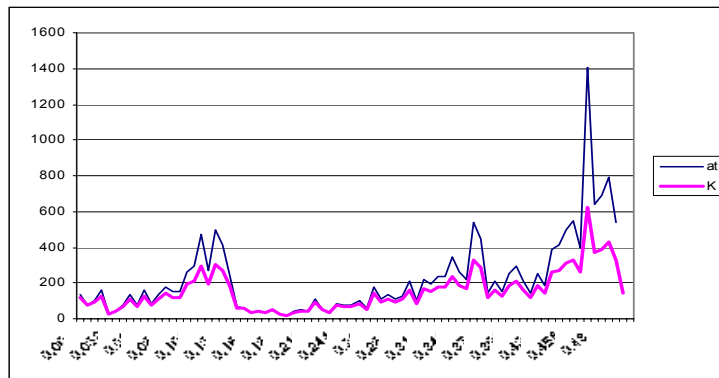


Figure 30 : Série du taux de retour à la moyenne  $\kappa$  (déterminée par la méthode 3' avec une erreur inférieure à  $10^{-8}$ ) et du coefficient  $a_t$  de la base intraday ( $t$  en année).

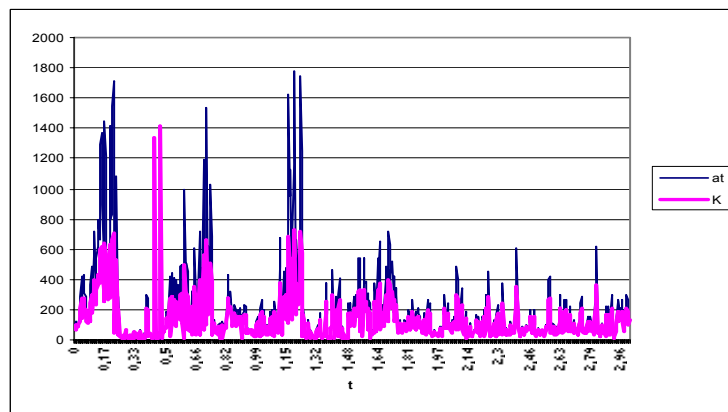


Figure 31 : Série du taux de retour à la moyenne  $\kappa$  (déterminée par la méthode 3' avec une erreur inférieure à  $10^{-7}$ ) et du coefficient  $a_t$  de la base journalière

La méthode 3' a permis de trouver  $\kappa$  avec la même précision que la méthode 3. L'erreur de calcul est de  $10^{-8}$ , pour la base intraday, et de  $10^{-7}$ , pour la base journalière.

Les résultats de l'estimation des paramètres du processus d'Ornstein Uhlenbeck, en tant que processus de la volatilité implicite, sont résumés dans le tableau 25.

	Base Journalière			Base Intraday		
	K	q	$\Phi$	K	q	$\Phi$
Méthode 3'	192,656281	0,8733439	0,19526947	168,48938	0,37094975	0,18489262
Méthode 3	132,320524	0,65093063	0,1951824	144,969242	0,33199534	0,18490284
Méthode 1	192,490224	0,87334395	0,1951824	184,711014	0,38920046	0,18488194

Tableau 25 : Valeurs des paramètres du processus d'Ornstein Uhlenbeck en tant que processus de la volatilité implicite pour la base journalière et la base intraday

Les paramètres  $K$  et  $\Phi$  correspondent au drift risque-neutre de la volatilité.

Les trois méthodes ne présentent pas de différence pour les valeurs de  $\Phi$ . Aussi bien pour la base journalière que pour la base intraday, la méthode 3' et la méthode 1 donnent quasiment les mêmes résultats. La méthode 3 donne des résultats, dans tous les cas inférieurs à ceux des deux méthodes précitées. La méthode 3 permet d'estimer les 3 paramètres, à partir d'une seule observation de la base, alors que la méthode 3' permet de les estimer, à partir de l'ensemble de la base. Ainsi, logiquement la méthode 3' est plus fiable que la méthode 3. C'est ainsi que, dans la suite des calculs, on considérera les valeurs des paramètres donnés par la méthode 3'.

Les résultats concernant la volatilité de la volatilité sont à comparer avec ceux du processus Brownien. En effet, pour la base intraday, pour la volatilité implicite, avec le processus Brownien, la volatilité de la volatilité est estimée à  $q=0.3462$ , alors que pour le processus d'Ornstein Uhlenbeck, on trouve, avec la méthode 3',  $q=0,3709$ . Les deux résultats sont, donc, cohérents.

Pour la base journalière, en considérant la volatilité implicite, la volatilité de la volatilité est  $q=0.2825$  pour le mouvement Brownien (cf tableau 16), alors que pour le processus d'Ornstein Uhlenbeck, il est de 0.8733, en considérant la méthode 3'. Ces valeurs ne sont pas aussi proches que dans le cas de la base intraday.

### 3.2.2 Estimation des autres paramètres du modèle à volatilité stochastique

#### 3.2.2.1 Estimation de Coefficient de corrélation

Bien que le coefficient de corrélation entre le mouvement du prix du sous-jacent et de celui de la volatilité, soit stochastique en réalité, on le suppose constant.

Ce coefficient est sensé être négatif. En effet, plusieurs auteurs (Black 1976), Schmalensee et Trippi (1978), Beckers (1981) et Christie (1982) ont observé que la variance des rendements d'une action est inversement liée au prix de celle-ci. Selon ces auteurs, cette relation négative entre le prix de l'action et sa volatilité par l'endettement des entreprises. En effet, si le prix d'une action baisse le ratio d'endettement (dettes / fonds propres) de l'entreprise correspondante augmente et le risque de l'action, mesuré par la volatilité, aussi, et vice versa. Le coefficient de corrélation est, donc, souvent négatif et ça a été confirmé par des études empiriques : les prix des actifs financiers tendent à baisser quand la volatilité augmente.

Le coefficient de corrélation  $\rho$ , entre les mouvements du rendement du sous-jacent et les mouvements de la volatilité, est supposé constant. Il est calculé sur l'ensemble de l'échantillon d'observations choisies, en considérant la série temporelle  $\{U_{1,t}; 1 \leq t \leq n\}$ , relative au processus du prix du sous-jacent et  $\{U_{2,t}; 1 \leq t \leq n\}$  et celle relative au processus de la volatilité, données par les formules suivantes :

$$U_{1,t} = \frac{\frac{dS_t}{S_t} - rdt}{\sigma_t \sqrt{dt}} \quad \text{et} \quad U_{2,t} = \frac{d\sigma_t - Ddt}{q_t \sqrt{dt}}$$

Pour ces deux séries, on a considéré les drifts risque-neutre du prix du sous-jacent et de la volatilité. Le coefficient de corrélation, entre ces deux séries, est donné par la formule suivante :

$$\rho = \frac{\text{Cov}(U_{1,t}, U_{2,t})}{\sqrt{V(U_{1,t})V(U_{2,t})}} = \frac{\frac{n \sum_{t=1}^n u_{1,t} u_{2,t} - \sum_{t=1}^n u_{1,t} \sum_{t=1}^n u_{2,t}}{n \sum_{t=1}^n u_{1,t}^2 - (\sum_{t=1}^n u_{1,t})^2}}{\sqrt{\frac{n \sum_{t=1}^n u_{1,t}^2 - (\sum_{t=1}^n u_{1,t})^2}{n \sum_{t=1}^n u_{2,t}^2 - (\sum_{t=1}^n u_{2,t})^2}}}$$

Il est évident, que lorsqu'on considère le processus d'Ornstein Uhlenbeck, pour la volatilité, on considèrera comme drift :  $\kappa(\phi - \sigma_t)$ .

Pour le mouvement Brownien et le processus empirique de la volatilité, les valeurs du coefficient de corrélation sont données, pour les différents contrats de la base journalière, en considérant les deux volatilités implicite et historique, par le tableau 26 et pour les contrats de la base intraday, en considérant la volatilité implicite, par le tableau 27.

$\rho$	<b>C2800</b>	<b>C2950</b>	<b>C3100</b>	<b>C3250</b>	<b>C4000</b>
Volatilité historique q=cte	-0,1376	-0,0731	-0,1818	-0,0187	-0,0660
Volatilité historique q	-0,1539	-0,0930	-0,1931	-0,0243	-0,0233
Volatilité implicite q=cte	-0,0818	-0,1585	-0,0903	-0,1216	-0,1795
Volatilité implicite q	-0,1939	-0,3234	-0,2099	-0,2080	-0,1899

Tableau 26: Le coefficient de corrélation entre le mouvement de l'indice CAC 40 et de celui de sa volatilité pour la base journalière, en considérant la volatilité historique et la volatilité implicite, avec un mouvement Brownien ou le processus empirique prédéfini.

$\rho$	<b>1N</b>	<b>1O</b>	<b>1P</b>	<b>1Q</b>	<b>1S</b>	<b>9I</b>	<b>9J</b>	<b>9K</b>	<b>9L</b>
imp q=cte	-0,46719	-0,00365	-0,10302	-0,23279	-0,35883	-0,47210	0,12237	0,06311	-0,44134
imp q	-0,42663	0,05098	0,01742	-0,26825	-0,43577	-0,66891	0,90555	0,16738	-0,43682

Tableau 27: Le coefficient de corrélation entre le mouvement de l'indice CAC 40 et de celui de sa volatilité pour la base intraday, en considérant la volatilité implicite, avec un mouvement Brownien ou le processus empirique prédéfini.

Pour la base journalière, toutes les valeurs du coefficient de corrélation  $\rho$  sont négatives, conformément au raisonnement précité. Pour la base intraday, tous les coefficients de corrélation relatifs aux différents contrats sont négatifs, à part ceux relatifs aux contrats 9J et 9K qui sont positifs.



Pour la suite des calculs, on considère les coefficients de corrélation sur l'ensemble de la base journalière, ou la base intraday, pour chacun des processus de la volatilité considérés jusqu'ici. Ces valeurs sont résumées dans le tableau 28.

$\rho$	Ensemble de base intraday	Ensemble de la base journalière
Mouvement Brownien	- 0,02750	- 0,03629
Processus empirique	- 0,04370	- 0,19787
Processus « OU »	- 0,02788	- 0,03753

Tableau 28 : Le coefficient de corrélation entre le mouvement de la volatilité implicite et le mouvement du prix du sous-jacent, en considérant l'ensemble de chacune des bases intraday et journalière, pour les trois processus considérés de la volatilité.  
« OU »=Ornstein Uhlenbeck

Ces coefficients sont négatifs. Ils sont voisins de zéro ce qui est équivalent à dire que, dans tous les cas, le mouvement de l'indice est indépendant de celui de sa volatilité, ce qui peut justifier les hypothèses considérées par certains auteurs qui ont traité le sujet, comme Hull & White (1987) ou Stein & Stein (1991).

Théoriquement, on devrait avoir les mêmes coefficients de corrélation pour les trois processus. Ceci est vrai pour la base intraday. Par contre, pour la base journalière, autant le mouvement Brownien et le processus d'Ornstein Uhlenbeck donnent les mêmes résultats, autant le processus empirique donne un résultat différent.

Il faut noter, également, qu'en considérant aussi bien le mouvement Brownien ou le processus d'Ornstein Uhlenbeck, pour la volatilité implicite, le coefficient de corrélation, relatif à l'ensemble de la base, reste, sensiblement, le même, aussi bien pour la base intraday que pour la base journalière.

### 3.2.2.2 Estimation du taux de l'actif sans risque

Bien qu'il soit stochastique en réalité, le taux d'intérêt à court terme est supposé constant, égal à sa valeur moyenne sur l'année 1998 qui est de 3,3% (selon Bloomberg). La base journalière s'étale de 1997 à 1999. La valeur annuelle

moyenne de ce taux est de  $r = 3,24\%$  pour l'année 1997 et de  $r = 2,96\%$  pour l'année 1999.

### 3.2.2.3 Estimation du prix du marché du risque lié à la volatilité

L'estimation du drift risque neutre, à partir des données de la base, rend l'estimation du prix du marché du risque  $\lambda$ , lié aux mouvements de la volatilité, non indispensable dans la résolution de l'équation différentielle. En effet, le drift risque-neutre incorpore le prix du marché du risque lié à la volatilité. Cependant l'estimation de  $\lambda$  permet de juger la cohérence des estimations relatives aux autres paramètres.

En principe il devrait exister un modèle théorique pour déterminer le prix du risque du marché  $\lambda$  qui est fonction du prix du sous-jacent, de la volatilité et du temps :  $\lambda = \lambda(S, \sigma, t)$ . Le drift risque-neutre de la volatilité  $D = \omega - \lambda q$ , est supposé constant par analogie avec le MEDAF (sans qu'il soit égal au rendement de l'actif sans risque  $r$ , comme dans le cas, où la volatilité est un actif négociable).

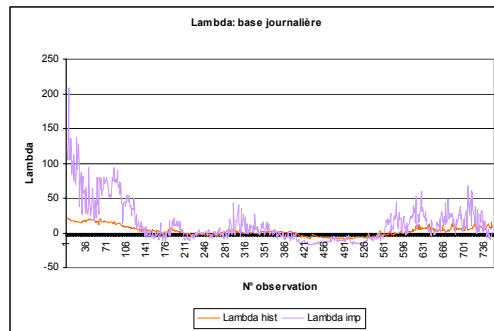
Ainsi, on estime ce drift pour un petit nombre d'observations de la valeur de marché de l'option et de ses déterminants et on prend la valeur moyenne. Celle-ci va servir de base pour le calcul de la valeur de l'option.

Le prix du risque du marché, lié au mouvement de la volatilité, peut se calculer, à partir du drift réel, du drift risque neutre et de la volatilité de la volatilité

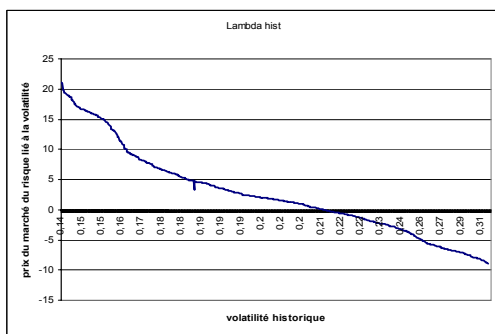
suivant la formule : 
$$\lambda(S, \sigma, t) = \frac{\omega(S, \sigma, t) - D}{q(S, \sigma, t)}$$

Les séries du prix du risque du marché lié aux mouvements de la volatilité (mouvement Brownien), en considérant l'ensemble de la base, sont représentées, dans la figure 32, en ce qui concerne la base journalière et dans la figure 37, pour ce qui concerne la base intraday.

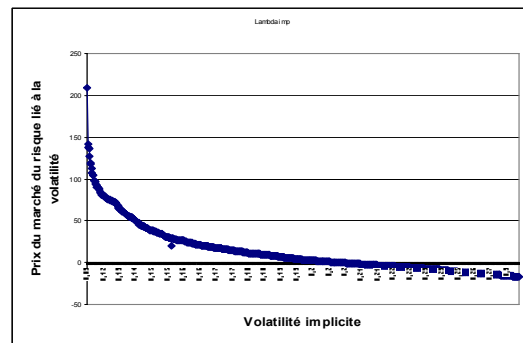
Dans la mesure, où le drift risque-neutre  $D$  et la volatilité de la volatilité  $q$  sont constants, la courbe relative au prix du risque du marché à la même allure que celle du drift réel, dans le cas d'un mouvement Brownien. Dans ce cas, les remarques faites pour le drift réel restent valables pour le prix du risque du marché.



(A)



(B)



(C)

Figure 32 : Séries des prix du marché du risque lié aux mouvements Browniens de la volatilité historique et de la volatilité implicite : cas de la base journalière  
 (A):  $\lambda$  de la volatilité implicite et  $\lambda$  de la volatilité historique, en fonction du temps  
 (B):  $\lambda$  de la volatilité historique, en fonction de la volatilité  
 (C):  $\lambda$  de la volatilité implicite, en fonction de la volatilité

Autant, les valeurs du prix du risque du marché, sont plausibles pour la base journalière, dans le cas d'un mouvement Brownien, autant elles sont excessives dans le cas de la base intraday.

A noter, que par analogie avec le MEDAF, une autre méthode permet d'estimer, simultanément, le prix du marché du risque et le drift risque neutre. Cette méthode consiste à faire une régression linéaire du drift réel de la volatilité  $\omega_t$  sur la volatilité de la volatilité  $q_t$  et on aura, dans ce cas :

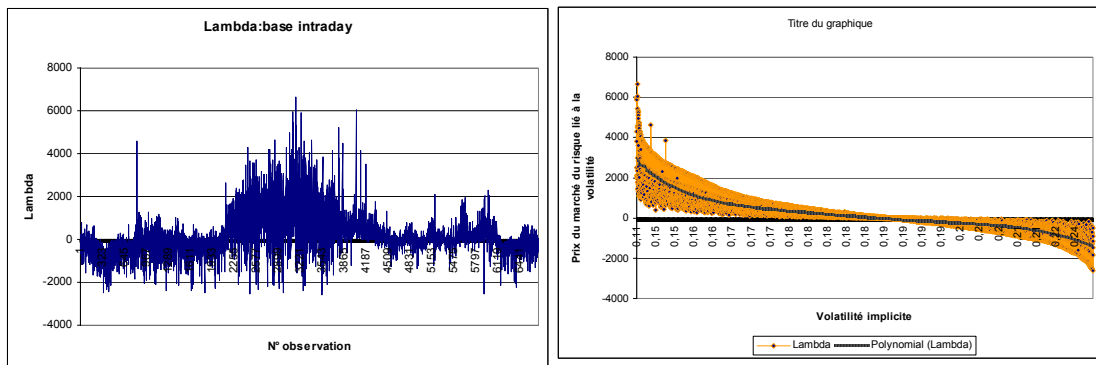


Figure 33 : Série du prix du marché du risque lié aux fluctuations de la volatilité implicite : cas de la base intraday

$$\lambda = \frac{\text{Cov}(\omega_t, q_t)}{V(q_t)} = \text{coefficient directeur de la droite de régression}$$

$$D = \bar{\omega} - \lambda \bar{q} = \text{ordonnée à l'origine de la droite de régression}$$

Cette méthode exige, la connaissance du drift réel de la volatilité, et dans le présent travail, elle ne peut, donc, être appliquée, que dans le cas du processus empirique de la volatilité.

### 3.3 RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

L'équation différentielle aux dérivées partielles (EDP) considérée, avec ses conditions aux limites, admet une solution analytique unique. Mais la détermination de celle-ci n'est pas évidente. Ce qui nous conduit à la résolution de cette équation, numériquement. Comme, dans le présent problème on a deux variables d'états, la méthode des différences finies est préférée à la simulation de Monte Carlo. Cette dernière sera préférée à la première, dans le cas, où le nombre de variables d'état excède trois. Cependant, on fera appel, dans le présent travail, à la simulation de Monte Carlo pour vérifier les calculs.

En ce qui concerne les méthodes des différences finies, trois méthodes peuvent être considérées, dans notre cas, à savoir : la méthode explicite, la méthode ADI (Alternating Direction Implicit) et enfin la méthode Hopscotch développée par

Gourlay (1970). Dans le présent travail, on n'a considéré que la première et la troisième méthode.

Comme dans toute résolution numérique d'une EDP, il faut s'assurer de l'existence de sa solution, de son unicité et de sa dépendance des conditions initiales et aux limites au sens de Lipschitz.

### **3.3.1 Représentativité de la solution numérique d'une EDP**

Une méthode numérique, de part sa nature, ne peut conduire à une solution exacte, puisque l'information qui lui est fournie sera toujours insuffisante. On désigne par :

$L(V)$  l'opérateur continue associé à l'équation différentielle

$L_{\Delta}(V)$  l'opérateur discret ou schéma de discrétisation

$U$  est la solution exacte de l'équation différentielle  $L(V)=0$

$U_{\Delta}$  solution du schéma aux différences finies  $L_{\Delta}(V)=0$

Résoudre, numériquement, l'équation  $L(V)=0$  revient à considérer la solution  $U_{\Delta}$  comme solution approchée de sa solution exacte  $U$ .

Avant d'admettre que  $U_{\Delta}$  est une approximation valable de  $U$ , il faut d'abord être certain que le schéma discrétisé représente correctement l'équation d'origine. Il faut, ensuite, que la méthode numérique adoptée pour résoudre le schéma numérique conduise à une solution  $U_{\Delta}$  qui vérifie, effectivement, les équations relatives aux schémas numériques. Enfin, il convient de s'assurer que cette solution  $U_{\Delta}$  est bien une approximation convenable de la solution exacte  $U$ .

Ces trois exigences sont celles de la représentativité du système numérisé. Ce sont successivement :

- la consistance du schéma numérique avec l'équation d'origine

- la stabilité de la résolution du schéma numérique
- la convergence de la solution numérique  $U_{\Delta}$  vers la solution théorique  $U$ .

La consistance est mesurée par l'erreur de troncature. On appelle erreur de troncature (ou erreur de discrétisation) l'expression littérale définie par :

$$R_{\Delta}(V) = L_{\Delta}(V) - L(V)$$

C'est l'erreur qui est faite systématiquement lorsqu'un opérateur continu est approché par un opérateur discret aux différences finies. L'approximation de  $L(V)$  par  $L_{\Delta}(V)$  est dite consistante, si l'erreur de troncature  $R_{\Delta}(V)$  tend vers zéro lorsque tous les pas de la discrétisation tendent eux-mêmes vers zéro. La consistance d'un opérateur discret assure à celui-ci de pouvoir représenter exactement l'équation d'origine lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéro.

Par définition, un processus de calcul séquentiel ou itératif est dit stable, si les erreurs d'arrondis ne s'amplifient pas au fur et à mesure que les calculs progressent. Cette définition s'étend aux schémas de discrétisation qui engendrent ces calculs. Un schéma numérique est dit stable si la solution exacte, qui lui correspond, limite les amplifications induites par les conditions initiales. D'après Von Neumann, un schéma numérique est stable si le module de son facteur d'amplification (gain) est inférieur à l'unité.

On dit que le schéma aux différences finies est convergent si la quantité  $U - U_{\Delta}$  tend vers zéro quand les pas de discrétisation tendent vers zéro. Autrement dit, un schéma numérique est dit convergent si la solution numérique  $U_{\Delta}$  de l'équation différentielle aux dérivées partielles tend vers sa solution exacte, en tout point du maillage, lorsque tous les pas de ce dernier tendent tous vers zéro.

Il est bien évident que la notion de convergence est la seule qui intéresse le modélisateur, puisque le problème consiste à trouver une solution  $U_{\Delta}$  approchée

aussi voisine que possible de  $U$ . Les notions de consistance et de stabilité n'ont d'importance qu'en regard de la notion de convergence.

C'est justement le théorème de Lax qui fait la liaison entre d'une part la convergence et d'autre part la consistance et la stabilité d'un schéma numérique. Ce théorème s'énonce : pour un problème linéaire bien posé et satisfaisant la condition de consistance, alors convergence et stabilité sont deux notions équivalentes. Autrement dit, pour un problème linéaire et bien posé, la consistance et la stabilité sont nécessaires et suffisantes pour assurer la convergence.

En résumé, ils existent des liaisons qualitatives entre l'équation d'origine  $L(V)=0$  et le schéma de discrétisation  $L_{\Delta}(V)=0$  et leurs solutions respectives  $U$  et  $U_{\Delta}$ . Ces liaisons qualitatives sont les trois notions fondamentales de représentativité : consistance, stabilité et convergence. Avant de procéder à la résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles, il convient de s'assurer que le schéma de discrétisation choisi possède ces trois qualités.

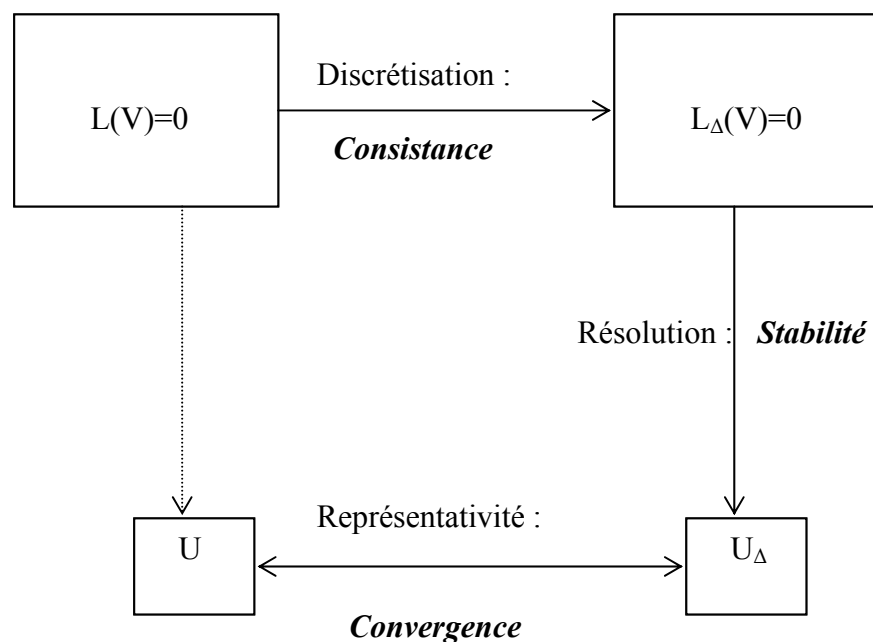


Figure 34: Représentativité d'une solution numérique

Avant de procéder à la résolution numérique d'une équation différentielle, il faut étudier la consistance, la stabilité et la convergence du schéma numérique associé.

Nous abordons dans le présent travail la méthode explicite et la méthode Hopscotch. La première est semblable à la méthode binomiale est plutôt lente, au niveau de la convergence, facile à programmer et peut ne pas être stable. La dernière a le mérite d'être plus rapide et inconditionnellement stable, par contre elle est, relativement, plus complexe, au niveau de la programmation. Nous commençons par étudier la méthode explicite en élaborant son schéma et nous étudions ensuite sa consistance et sa stabilité. En cas de non-stabilité du schéma explicite, l'équation sera résolue, numériquement, avec l'algorithme Hopscotch qui est, inconditionnellement, stable

### 3.3.2 Méthode explicite

#### 3.3.2.1 Elaboration du Schéma numérique

Les variables, prix du sous-jacent  $S$ , volatilité  $\sigma$  et la durée de vie résiduelle de l'option  $T-t$  sont discrétisées comme suit :

$$S = i\Delta S \quad 0 \leq i \leq I$$

$$\sigma = j\Delta\sigma \quad 0 \leq j \leq J$$

$$T - t = k\Delta t \quad 0 \leq k \leq K$$

où  $\Delta S$ ,  $\Delta\sigma$  et  $\Delta t$  sont les pas respectifs des variables précitées, et  $I$ ,  $J$  et  $K$  correspondent, respectivement, aux valeurs maximales de ces mêmes variables.

Le calcul de la valeur de l'option, considérée de type européen, va se faire dans le sens anti-chronologique, à partir de la date d'échéance  $T$ . A cette date, étant donné que l'option est de type européen, sa valeur est égale à sa valeur intrinsèque. Ainsi, à cet instant, pour tous les points du plan  $(S, \sigma)$  correspondant, la valeur de l'option est connue. La valeur de l'option à l'instant  $t$  se calcule d'une manière rétroactive, suivant le schéma numérique.



Le domaine du prix du sous-jacent et de sa volatilité est, théoriquement, infini. Pour le calcul numérique, ce domaine doit être réduit, sous forme d'un rectangle, dont le centre est le point qui correspond au prix du sous-jacent et de sa volatilité, à l'instant  $t$ , pour lequel on cherche à évaluer l'option. Il est à noter que ce domaine peut comporter des zones, où le prix du sous-jacent ou sa volatilité sont négatifs, comme illustré dans la figure 35. Pour les points correspondants à cette zone, la valeur de l'option est prise égale à zéro.

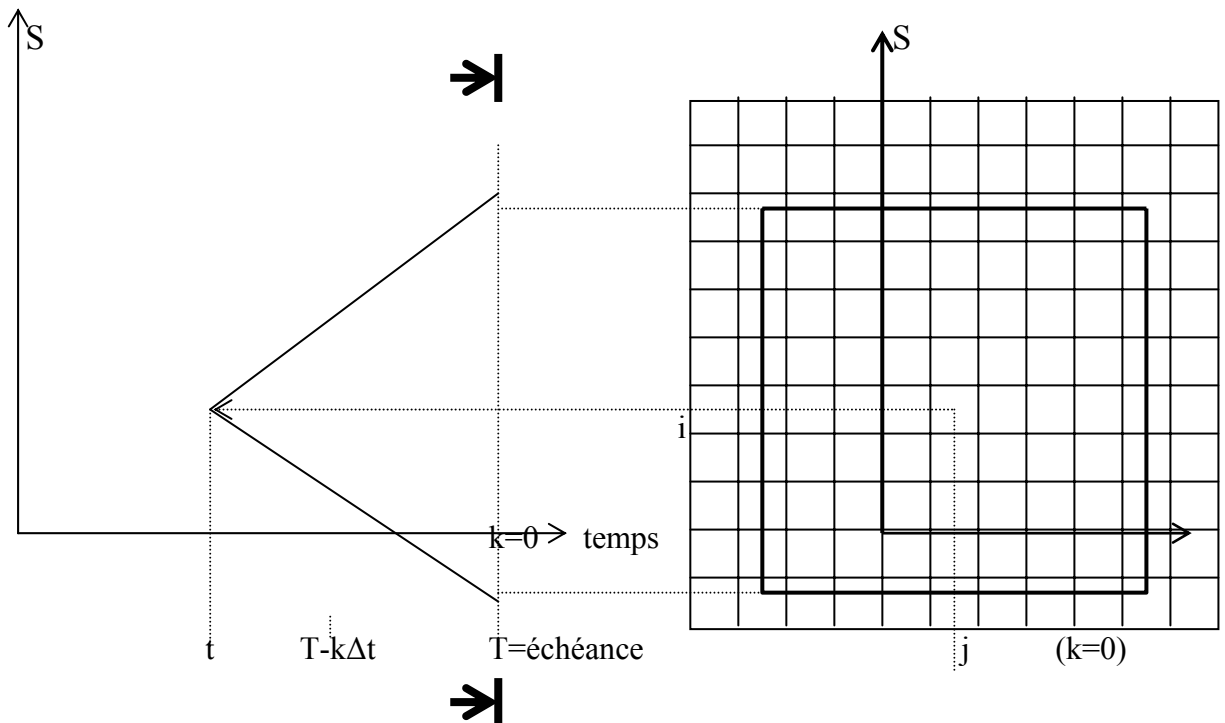


Figure 35 : Maillage suivant le prix du sous-jacent, la volatilité et le temps pour le calcul numérique de la valeur de l'option à l'instant  $t$

L'équation du modèle à volatilité stochastique est la suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \rho q \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + (\omega - \lambda q) \frac{\partial V}{\partial \sigma} - rV = 0$$

Cette équation est transformée, en un schéma numérique, par discrétisation, afin d'approcher la valeur de l'option  $V(S, \sigma, t)$  par  $V_{ij}^k = V(i\Delta S, j\Delta\sigma, T - k\Delta t)$

Ainsi, les dérivées de la valeur de l'option, par les différentes variables, s'écrivent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S} &\approx \frac{V_{i+1,j}^k - V_{i-1,j}^k}{2\Delta S} & \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &\approx \frac{V_{i+1,j}^k - 2V_{i,j}^k + V_{i-1,j}^k}{\Delta S^2} \\ \frac{\partial V}{\partial \sigma} &\approx \frac{V_{i,j+1}^k - V_{i,j-1}^k}{2\Delta \sigma} & \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} &\approx \frac{V_{i,j+1}^k - 2V_{i,j}^k + V_{i,j-1}^k}{\Delta \sigma^2} \\ \frac{\partial V}{\partial t} &\approx \frac{V_{i,j}^k - V_{i,j}^{k+1}}{\Delta t} & \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} &\approx \frac{V_{i+1,j+1}^k - V_{i+1,j-1}^k - V_{i-1,j+1}^k + V_{i-1,j-1}^k}{4\Delta S \Delta \sigma} \end{aligned}$$

Soit, en remplaçant dans l'équation de la volatilité stochastique, on obtient le schéma numérique suivant:

$$\begin{aligned} V_{i,j}^{k+1} = & a_{i,j}^k V_{i,j}^k + b_{i,j}^k V_{i+1,j+1}^k + c_{i,j}^k V_{i+1,j}^k + d_{i,j}^k V_{i+1,j-1}^k + e_{i,j}^k V_{i,j+1}^k + f_{i,j}^k V_{i,j-1}^k + \\ & + g_{i,j}^k V_{i-1,j+1}^k + h_{i,j}^k V_{i-1,j}^k + l_{i,j}^k V_{i-1,j-1}^k \end{aligned}$$

où

$$a_{i,j}^k = 1 - \left( r + \frac{(q_{i,j}^k)^2}{\Delta \sigma^2} + \frac{(\sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k)^2}{\Delta S^2} \right) \Delta t \quad (3.3.2-1)$$

$$b_{i,j}^k = \frac{\rho q_{i,j}^k \sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k}{4\Delta S \Delta \sigma} \Delta t$$

$$c_{i,j}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{r S_{i,j}^k}{\Delta S} + \frac{(\sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k)^2}{\Delta S^2} \right) \Delta t$$

$$d_{i,j}^k = -\frac{\rho q_{i,j}^k \sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k}{4\Delta S \Delta \sigma} \Delta t$$

$$e_{i,j}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{(q_{i,j}^k)^2}{\Delta \sigma^2} + \frac{(\omega_{i,j}^k - \lambda_{i,j}^k S_{i,j}^k)}{\Delta \sigma} \right) \Delta t = \frac{1}{2} \left( \frac{(q_{i,j}^k)^2}{\Delta \sigma^2} + \frac{D_{i,j}^k}{\Delta \sigma} \right) \Delta t$$

$$f_{i,j}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{(q_{i,j}^k)^2}{\Delta \sigma^2} - \frac{(\omega_{i,j}^k - \lambda_{i,j}^k S_{i,j}^k)}{\Delta \sigma} \right) \Delta t = \frac{1}{2} \left( \frac{(q_{i,j}^k)^2}{\Delta \sigma^2} - \frac{D_{i,j}^k}{\Delta \sigma} \right) \Delta t$$

$$g_{i,j}^k = -\frac{\rho q_{i,j}^k \sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k}{4\Delta S \Delta \sigma} \Delta t$$

$$h_{i,j}^k = \frac{1}{2} \left( -\frac{rS_{i,j}^k}{\Delta S} + \frac{(\sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k)^2}{\Delta S^2} \right) \Delta t$$

$$l_{i,j}^k = \frac{\rho q_{i,j}^k \sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k}{4\Delta S \Delta \sigma} \Delta t$$

A noter que la valeur de l'option  $V_{i,j}^{k+1}$  à un instant  $t = T - (k+1) \Delta t$  se calcule à partir de 9 valeurs de l'option de l'instant précédent  $t = T - k\Delta t$ , dans le sens anti-chronologique (rétroactif), comme illustré dans la figure 36. Ce schéma est l'équivalent d'un modèle trinomial à deux dimensions ( $3 \times 3 = 9$ ).

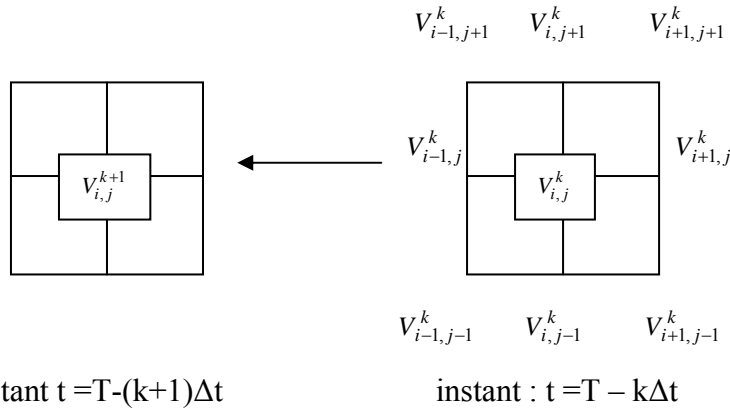


Figure 36 : Rétropropagation des calculs : la valeur de l'option à l'instant  $t = T - (k+1)\Delta t$  est fonction de 9 valeurs de l'option à l'instant :  $t = T - k\Delta t$

On remarque que :

$$a_{i,j}^k + b_{i,j}^k + c_{i,j}^k + d_{i,j}^k + e_{i,j}^k + f_{i,j}^k + g_{i,j}^k + h_{i,j}^k + l_{i,j}^k = 1 - r\Delta t$$

$$l_{i,j}^k = b_{i,j}^k \quad d_{i,j}^k = -b_{i,j}^k \quad g_{i,j}^k = -b_{i,j}^k$$

Cette remarque nous permet d'écrire :  $a_{i,j}^k + c_{i,j}^k + e_{i,j}^k + f_{i,j}^k + h_{i,j}^k = 1 - r\Delta t$

Le schéma de calcul devient donc:

$$V_{i,j}^{k+1} = a_{i,j}^k V_{i,j}^k + b_{i,j}^k \left( V_{i+1,j+1}^k - V_{i+1,j-1}^k - V_{i-1,j+1}^k + V_{i-1,j-1}^k \right) + c_{i,j}^k V_{i+1,j}^k + e_{i,j}^k V_{i,j+1}^k + f_{i,j}^k V_{i,j-1}^k + h_{i,j}^k V_{i-1,j}^k \quad (3.3.2-2)$$

Le modèle de Black & Scholes est un cas particulier. En effet en considérant, la volatilité de la volatilité  $q$  comme nulle, ainsi que le drift risque neutre  $D$ , on retrouve l'équation de Black & Scholes. Dans ce cas, hormis les coefficients  $a$ ,  $c$  et  $h$ , tous les autres coefficients sont nuls. Dans ce cas, le schéma devient :

$$V_{i,j}^{k+1} = a_{i,j}^k V_{i,j}^k + c_{i,j}^k V_{i+1,j}^k + h_{i,j}^k V_{i-1,j}^k$$

avec

$$a_{i,j}^k = 1 - \left( r + \frac{(\sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k)^2}{\Delta S^2} \right) \Delta t$$

$$c_{i,j}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{r S_{i,j}^k}{\Delta S} + \frac{(\sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k)^2}{\Delta S^2} \right) \Delta t$$

$$h_{i,j}^k = \frac{1}{2} \left( -\frac{r S_{i,j}^k}{\Delta S} + \frac{(\sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k)^2}{\Delta S^2} \right) \Delta t$$

### 3.3.2.2 Conditions aux limites correspondantes au schéma numérique

Les valeurs limites des indices doivent être égales, compte tenu du fait qu'à chaque pas de calcul, c-à-d à chaque fois que l'indice  $k$  est incrémenté de 1, chacun des indices  $i$  et  $j$  est décrémenté de 1. On a, donc,  $I = J = K$ .

Les conditions aux limites (cf §3.1.3) s'écrivent :

$$C1 : V_{0,j}^k = 0; \forall j, \forall k$$

$$C2 : V_{I,j}^k = S_{I,j}^k; \forall j, \forall k$$

$$C3 : V_{i,j}^0 = \text{Max}(0, S_{i,j}^0 - E); \forall i, \forall j$$

$$C4 : V_{i,0}^k = \text{Max}(0, S_{i,0}^k - E e^{-kr\Delta t}); \forall i, \forall k$$

$$C5 : V_{i,J}^k = S_{i,J}^k; \forall i, \forall k$$

$$C6 : V_{i,1}^k = V_{i,0}^k; \forall i, \forall k$$

### 3.3.2.3 Valeurs extrêmes du prix du sous-jacent et de la volatilité et pas de discrétisation du schéma numérique

Le calcul des valeurs maximales et minimales des variables d'état à l'échéance permet de délimiter le champs à considérer, à l'échéance, pour la détermination

de la valeur de l'option, à un instant  $t$ . Pour chacune des deux variables d'états, ces valeurs maximales et minimales, à l'échéance de l'option, sont déterminées, à partir des densités marginales correspondantes, comme les bornes d'un intervalle de confiance, en considérant un risque donné (1%, par exemple).

Dans un tel problème, les variables à considérer sont les pas des maillages, relatifs aux deux variables d'états, leurs valeurs maximales et, donc, celles minimales qui en dépendent, ainsi que le nombre de périodes de temps à considérer.

Un tel problème comporte cinq inconnues et deux équations. Il est, donc, à trois degrés de liberté. On peut choisir les valeurs maximales des variables d'états, à l'échéance de l'option (et, donc, celles minimales), ainsi que le nombre de périodes du temps, dans ce cas les pas des maillages, relatifs aux deux variables d'état, s'en déduiront. Le problème peut être inversé, dans la mesure, où les pas du maillage peuvent être choisis, au préalable, en plus du nombre de périodes de temps. Dans ce cas, les valeurs maximales et, donc, minimales des deux variables d'états à l'échéance, peuvent être déterminées, à partir des paramètres, déjà, choisis. Il est possible, également, de choisir les valeurs maximales, et, donc, minimales des variables d'états, ainsi que leurs pas respectifs et de déduire le nombre de période de temps à considérer.

#### ***3.3.2.3.1 Calcul des valeurs maximales du prix du sous-jacent et de la volatilité***

Pour chacun des processus considérés de la volatilité, à savoir, le mouvement Brownien, le processus empirique et le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, on détermine, dans un premier temps la valeur maximale  $\sigma_{T,Max}$  de la volatilité à l'échéance et on déduit par la suite la valeur maximale du prix du sous-jacent à l'échéance  $S_{T,Max}$ . Pour ces calculs, on considère un intervalle de confiance bilatérale symétrique de la volatilité du sous-jacent à l'échéance, avec un risque de  $\alpha=1\%$ , soit un fractile  $u=2,58$  d'ordre 0,99 de la loi normale centrée et réduite. On considère, également, qu'entre l'instant  $t$  et l'échéance, la volatilité

est comprise dans l'intervalle  $[0 ; \sigma_M]$ . La valeur  $\sigma_M$  est, donc, le majorant de la volatilité sur la durée de vie résiduelle de l'option. Cette valeur maximale constitue un paramètre à se donner.

Comme, on est, dans une économie risque-neutre, en considérant la volatilité, comme stochastique, l'équation de diffusion du prix du sous-jacent est la suivante:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t \sqrt{dt} U_2$$

Soit en appliquant, le lemme d'Itô à la fonction logarithme du prix du sous-jacent on a :

$$d\text{Ln}(S_t) = \left(r - \frac{\sigma_t^2}{2}\right)dt + \sigma_t \sqrt{dt} U_2$$

$$\text{Ln}(S_T) = \text{Ln}(S_t) + r(T-t) - \int_t^T \frac{\sigma_s^2}{2} ds + U_2 \int_t^T \sigma_s \sqrt{ds}$$

Avec un risque de 1% le fractile de  $U_2$ , qui suit une loi normale centrée réduite, est  $u=2,58$ . Les valeurs extrêmes du prix du sous-jacent, à l'échéance, sont données par les équations :

$$\text{Ln}(S_{T,\text{Max}}) = \text{Ln}(S_t) + r(T-t) - \min_{t \leq t_1 \leq T} \left( \int_t^{t_1} \frac{\sigma_s^2}{2} ds \right) + 2,58 \text{Max}_{t \leq t_1 \leq T} \left( \int_t^{t_1} \sigma_s \sqrt{ds} \right)$$

$$\text{Ln}(S_{T,\text{min}}) = \text{Ln}(S_t) + r(T-t) - \text{Max}_{t \leq t_1 \leq T} \left( \int_t^{t_1} \frac{\sigma_s^2}{2} ds \right) - 2,58 \text{Max}_{t \leq t_1 \leq T} \left( \int_t^{t_1} \sigma_s \sqrt{ds} \right)$$

En considérant la valeur maximale et celle minimale de la volatilité sur la durée de vie résiduelle de l'option, ces équations deviennent :

$$\text{Ln}(S_{T,\text{Max}}) = \text{Ln}(S_t) + r(T-t) - \frac{(T-t)}{2} \left( \min_{t_1} \sigma_{t_1} \right)^2 + 2,58 \left( \text{Max}_{t_1} \sigma_{t_1} \right) \sqrt{T-t} \quad (3.3.2-3)$$

$$\text{Ln}(S_{T,\text{min}}) = \text{Ln}(S_t) + r(T-t) - \frac{(T-t)}{2} \left( \text{Max}_{t_1} \sigma_{t_1} \right)^2 - 2,58 \left( \text{Max}_{t_1} \sigma_{t_1} \right) \sqrt{T-t} \quad (3.3.2-4)$$

Ces valeurs maximales et minimales dépendent du processus suivi par la volatilité. Ainsi, les valeurs extrêmes du prix du sous-jacent et la volatilité sont déterminées, pour chacun des trois processus de la volatilité considérés, à savoir, le mouvement Brownien, le processus empirique et le processus d'Ornstein Uhlenbeck. Dans chaque cas, il va falloir déterminer la valeur maximale et celle minimale de la volatilité, non seulement à la date d'échéance, mais, en plus, entre la date courante et la date d'échéance, afin de calculer la valeur maximale et la valeur minimale du prix du sous-jacent à l'échéance.

### 3.3.2.3.1 Mouvement Brownien

Dans ce cas, le processus suivi par la volatilité est régi, par l'équation suivante :

$$d\sigma_t = Ddt + q\sqrt{dt}U_1$$

Soit en intégrant par rapport au temps, entre l'instant  $t$  et la date d'échéance  $T$ , on obtient l'équation :

$$\sigma_T = \sigma_t + D(T-t) + q\sqrt{T-t}U_1$$

Avec un risque de 1%, le fractile de  $U_1$  est  $u=2,58$ . Avec un tel niveau de risque, on peut écrire :

$$\sigma_{T,Max} = \sigma_t + D(T-t) + 2,58q\sqrt{T-t}$$

$$\sigma_{T,min} = \sigma_t + D(T-t) - 2,58q\sqrt{T-t}$$

D'une manière générale, on a :

$$\sigma_{t_1,Max} = \sigma_t + D(t_1-t) + 2,58q\sqrt{t_1-t}$$

$$\sigma_{t_1,min} = \sigma_t + D(t_1-t) - 2,58q\sqrt{t_1-t}$$

$$\text{Max}_{t_1} \sigma_{t_1} = \text{Max}_{t_1} (\sigma_{t_1,Max}) = \text{Max}_{t_1} (\sigma_t + D(t_1-t) + 2,58q\sqrt{t_1-t}) = \sigma_{T,Max}$$

$$\text{min}_{t_1} \sigma_{t_1} = \text{min}_{t_1} (\sigma_{t_1,min}) = \text{min}_{t_1} (\sigma_t + D(t_1-t) - 2,58q\sqrt{t_1-t})$$

La valeur de  $t_1$  qui minimise cette quantité est, telle que, la dérivée de cette dernière, par rapport à  $t_1$ , est nulle. Soit :

$$D - \frac{2,58q}{2\sqrt{t_1 - t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = t + \left( \frac{1,29q}{D} \right)^2$$

### 3.3.2.3.1.2 Processus empirique

Le processus suivi par la volatilité est régi, dans ce cas, par l'équation suivante :

$$d\sigma_t = Ddt + \eta\sigma_t^\gamma \sqrt{dt}U_1$$

$$\sigma_{t_1} = \sigma_t + D(t_1 - t) + U_1 \int_t^{t_1} \eta\sigma_s^\gamma ds$$

$$\sigma_{T,Max} = \sigma_t + D(T - t) + 2,58 \text{Max} \left( \int_t^T \eta\sigma_s^\gamma ds \right)$$

$$\sigma_{T,min} = \sigma_t + D(T - t) - 2,58 \text{Max} \left( \int_t^T \eta\sigma_s^\gamma ds \right)$$

En suivant le même raisonnement que pour le mouvement Brownien et en considérant la valeur maximale  $\sigma_M$  de la volatilité entre  $t$  et  $T$ , la valeur maximale de la volatilité à l'échéance et celle minimale, dans le cas du processus empirique, sont données par les équations suivantes :

$$\sigma_{T,Max} = \sigma_t + D(T - t) + 2,58\eta\sigma_M^\gamma \sqrt{T - t}$$

$$\sigma_{T,min} = \sigma_t + D(T - t) - 2,58\eta\sigma_M^\gamma \sqrt{T - t}$$

La valeur maximale  $\sigma_M$  de la volatilité entre  $t$  et  $T$ , est la valeur maximale des bornes supérieures des intervalles de confiance de la volatilité, en considérant un risque de 1%.

$$\text{Max}_{t_1} \sigma_{t_1} = \text{Max}_{t_1} (\sigma_{t_1,Max}) = \text{Max}_{t \leq t_1 \leq T} \left( \sigma_t + D(t_1 - t) + 2,58\eta\sigma_M^\gamma \sqrt{t_1 - t} \right) = \sigma_{T,Max}$$

$$\text{min}_{t_1} \sigma_{t_1} = \text{min}_{t_1} (\sigma_{t_1,min}) = \text{min}_{t \leq t_1 \leq T} \left( \sigma_t + D(t_1 - t) - 2,58\eta\sigma_M^\gamma \sqrt{t_1 - t} \right)$$

La valeur de  $t_1$  qui minimise cette quantité est, telle que, la dérivée de cette dernière, par rapport à  $t_1$ , est nulle et la dérivée seconde positive. Soit :



$$D - \frac{2,58\eta\sigma_M^\gamma}{2\sqrt{t_1 - t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = t + \left( \frac{1,29\eta\sigma_M^\gamma}{D} \right)^2$$

### 3.3.2.3.1.3 Processus d'Ornstein Uhlenbeck

Le processus d'Ornstein Uhlenbeck est donné par l'équation suivante :

$$d\sigma_t = \kappa(\phi - \sigma_t)dt + q\sqrt{dt}U_1$$

En suivant le même raisonnement que pour le mouvement Brownien et en considérant la valeur maximale  $\sigma_M$  de la volatilité entre  $t$  et  $T$ , la valeur maximale de la volatilité à l'échéance, dans le cas du processus empirique, est donnée par l'équation suivante :

$$\sigma_T = \sigma_t + \int_t^T \kappa(\phi - \sigma_s)ds + q\sqrt{T-t}U_1$$

$$\sigma_T = \sigma_t + \kappa\phi(T-t) + q\sqrt{T-t}U_1 - \int_t^T \sigma_s ds$$

$$\sigma_{T,Max} = \sigma_t + \kappa(\phi - \sigma_{min})(T-t) + 2,58q\sqrt{T-t}$$

Par souci de simplification, on remplace  $\sigma_{min}$  par zéro

$$\sigma_{T,Max} = \sigma_t + \kappa\phi(T-t) + 2,58q\sqrt{T-t}$$

$$\text{Max}_{t_1} \sigma_{t_1} = \text{Max}_{t \leq t_1 \leq T} (\sigma_{t_1,Max}) = \text{Max}_{t \leq t_1 \leq T} (\sigma_t + \kappa\phi(t_1 - t) + 2,58q\sqrt{t_1 - t}) = \sigma_{T,Max}$$

$$\text{min}_{t_1} \sigma_{t_1} = \text{min}_{t \leq t_1 \leq T} (\sigma_{t_1,min}) = \text{min}_{t \leq t_1 \leq T} (\sigma_t + \kappa(\phi - \sigma_M)(t_1 - t) - 2,58q\sqrt{t_1 - t})$$

La valeur de  $t_1$  qui minimise cette quantité est tel que la dérivée de cette dernière, par rapport à  $t_1$  est nulle et la dérivée seconde positive. Soit :

$$\kappa(\phi - \sigma_M) - \frac{2,58q}{2\sqrt{t_1 - t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = t + \left( \frac{1,29q}{\kappa(\phi - \sigma_M)} \right)^2$$

### 3.3.2.3.2 Calcul des pas du maillage relatif au schéma numérique

D'après la figure 35, les valeurs maximales du prix du sous-jacent et de la volatilité  $S_{T,Max}$ ,  $\sigma_{T,Max}$ , leurs pas respectifs,  $\Delta S$  et  $\Delta\sigma$  et le nombre de périodes  $N$ , à considérer, sont liés par les équations suivantes :

$$\frac{S_{T,Max} - S_t}{\Delta S} = \frac{\sigma_{T,Max} - \sigma_t}{\Delta \sigma} = \frac{T - t}{\Delta t} = N$$

Comme à l'instant  $t$ , la durée de vie résiduelle est connue, le choix de  $N$ , définira le pas du temps. Le choix de  $N$  va, donc, conditionner, la consistance et la stabilité du schéma numérique, lorsque des plages de consistance et de stabilité existent.

Deux choix sont possibles. Le premier consiste à fixer les valeurs maximales du prix du sous-jacent et de la volatilité à l'échéance et la détermination des pas du maillage en découle, à partir des équations suivantes:

$$\Delta S = \frac{S_{T,Max} - S_t}{N} \quad \Delta \sigma = \frac{\sigma_{T,Max} - \sigma_t}{N} \quad \Delta t = \frac{T - t}{N}$$

Le second choix est tel qu'on choisit les pas du maillage, et les valeurs maximales  $S_{T,Max}$  et  $\sigma_{T,Max}$  seront déterminées, à partir des pas du maillage, suivant les équations suivantes :

$$S_{T,Max} = S_t + N\Delta S$$

$$\sigma_{T,Max} = \sigma_t + N\Delta \sigma$$

#### **3.3.2.4 Erreur de troncature et consistance du schéma numérique**

L'erreur de troncature (ou erreur de discrétisation) est l'erreur qui correspond à l'approximation d'un opérateur continu par un opérateur discret aux différences finies.

L'approximation de l'opérateur continu par l'opérateur discret est dite consistante, si l'erreur de troncature tend vers zéro lorsque tous les pas de la discrétisation tendent eux-mêmes vers zéro. Ainsi, la consistance d'un opérateur discret assure à celui-ci de pouvoir représenter, exactement, l'équation d'origine lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéro.

Pour calculer l'erreur de troncature de l'équation aux différences finies, on effectue les développements, en séries de Taylor, à l'ordre 4 des 10 termes présents dans le schéma numérique, à savoir:

$$V_{i,j}^{k+1} ; V_{i,j}^k ; V_{i,j+1}^k ; V_{i,j-1}^k ; V_{i+1,j+1}^k ; V_{i+1,j}^k ; V_{i+1,j-1}^k ; V_{i-1,j+1}^k ; V_{i-1,j}^k \text{ et } V_{i-1,j-1}^k$$

A titre d'exemple, le développement de  $V_{i+1,j+1}^k$  est le suivant :

$$\begin{aligned} V_{i+1,j+1}^k &= V(t, S + \Delta S, \sigma + \Delta \sigma) \\ &= V_{i,j}^k + \left( \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \Delta \sigma \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta S^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \Delta S \Delta \sigma + \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \Delta \sigma^2 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 V}{\partial S^3} \Delta S^3 + 3 \frac{\partial^3 V}{\partial S^2 \partial \sigma} \Delta S^2 \Delta \sigma + 3 \frac{\partial^3 V}{\partial S \partial \sigma^2} \Delta S \Delta \sigma^2 + \frac{\partial^3 V}{\partial \sigma^3} \Delta \sigma^3 \right) + \\ &\quad \frac{1}{24} \left( \frac{\partial^4 V}{\partial S^4} \Delta S^4 + 4 \frac{\partial^4 V}{\partial S^3 \partial \sigma} \Delta S^3 \Delta \sigma + 6 \frac{\partial^4 V}{\partial S^2 \partial \sigma^2} \Delta S^2 \Delta \sigma^2 + 4 \frac{\partial^4 V}{\partial S \partial \sigma^3} \Delta S \Delta \sigma^3 + \frac{\partial^4 V}{\partial \sigma^4} \Delta \sigma^4 \right) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

En développant ces termes, l'équation aux différences finies peut être illustrée, par le tableau 29, où les coefficients respectifs ne tiennent pas compte des dérivées partielles, c.-à-d. que le terme à  $\Delta S^i \Delta \sigma^j$  correspond, en fait, à la quantité  $\frac{\partial^i V}{\partial S^i} \frac{\partial^j V}{\partial \sigma^j} \Delta S^i \Delta \sigma^j$ .

Dans ce tableau, chaque ligne correspond au développement limité, à l'ordre 4, d'un terme, parmi les 10 termes précités, correspondant à la valeur de l'option. La somme des termes de chaque colonne, représente le coefficient de la quantité  $\frac{\partial^i V}{\partial S^i} \frac{\partial^j V}{\partial \sigma^j} \Delta S^i \Delta \sigma^j$ , dans l'erreur de troncature. Les termes d'ordre 2, en  $\Delta S$  et  $\Delta \sigma$ , correspondent à l'équation de Garman (1976).

Termes	$V_{i,j}^k$	$\Delta S$	$\Delta\sigma$	$\Delta S^2$	$\Delta S\Delta\sigma$	$\Delta\sigma^2$	$\Delta S^3$	$\Delta S^2\Delta\sigma$	$\Delta S\Delta\sigma^2$	$\Delta\sigma^3$	$\Delta S^4$	$\Delta S^3\Delta\sigma$	$\Delta S^2\Delta\sigma^2$	$\Delta S\Delta\sigma^3$	$\Delta\sigma^4$
$V_{i,j}^k$	a														
$V_{i+1,j}^k$	c	c		c/2			c/6				c/24				
$V_{i-1,j}^k$	h	-h		h/2			-h/2				h/24				
$V_{i,j+1}^k$	e		e			e/2				e/6					e/24
$V_{i,j-1}^k$	f		-f			f/2				-f/6					f/24
$V_{i+1,j+1}^k$	b	b	b	b/2	b	b/2	b/6	b/2	b/2	b/6	b/24	b/6	b/4	b/6	b/24
$V_{i-1,j-1}^k$	b	-b	-b	b/2	b	b/2	-b/6	-b/2	-b/2	-b/6	b/24	b/6	b/4	b/6	b/24
$V_{i+1,j-1}^k$	-b	-b	b	-b/2	b	-b/2	-b/6	b/2	-b/2	b/6	-b/24	b/6	-b/4	b/6	-b/24
$V_{i-1,j+1}^k$	-b	b	-b	-b/2	b	-b/2	b/6	-b/2	b/2	-b/6	-b/24	b/6	-b/4	b/6	-b/24
Total=	$1-r\Delta t$	c-h	e-f	$\frac{(c+h)}{2}$	4b	$\frac{(e+f)}{2}$	$\frac{(c-h)}{6}$	0	0	$\frac{(e-f)}{6}$	$\frac{(c+h)}{24}$	4b/6	0	4b/6	$\frac{(e+f)}{24}$

Tableau 29: Calcul des coefficients du membre de droite du schéma numérique. Ces coefficients sont à multiplier par les dérivées partielles qui correspondent aux exposants de  $\Delta S$  et  $\Delta\sigma$ . Les coefficients encadrés correspondent à l'équation différentielle et les autres coefficients correspondants à l'erreur de troncature.

A noter que :

$$c + h = \frac{\sigma^2 S^2}{\Delta S^2} \Delta t \quad \text{et} \quad c - h = \frac{rS}{\Delta S} \Delta t$$

$$e + f = \frac{q^2}{\Delta\sigma^2} \Delta t \quad \text{et} \quad e - f = \frac{D}{\Delta\sigma} \Delta t$$

$$b = \frac{\rho q S \sigma}{4 \Delta S \Delta \sigma} \Delta t$$

De plus, sachant qu'à chaque fois que k est incrémentée de 1, le temps est remonté de  $\Delta t$ , et on a :

$$V_{i,j}^{k+1} = V(t - \Delta t, S, \sigma) = V_{i,j}^k - \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \Delta t^2 - \dots \quad (3.3.2-5)$$

L'erreur de troncature est égale à la différence entre les développements en série de Taylor du membre de droite et du membre de gauche du schéma numérique considéré.

Soit, en remplaçant c+h, c-h, e+f et e-f par leurs expressions, en multipliant les coefficients du bas du tableau par leurs dérivées partielles respectives et les variations correspondantes du prix du sous jacent et de la volatilité avec leurs exposants respectifs, en égalant les termes obtenus avec le membre de droite de l'équation (3.3.2-5) et enfin en simplifiant, membre à membre par  $\Delta t$ , on trouve l'erreur de troncature  $\varepsilon(V)$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon(V) = & \frac{1}{6} \left( rS \frac{\partial^3 V}{\partial S^3} + \frac{\sigma^2 S^2}{4} \frac{\partial^4 V}{\partial S^4} + \rho q S \sigma \frac{\partial^4 V}{\partial S^3 \partial \sigma} \right) \Delta S^2 + \\ & + \frac{1}{6} \left( D \frac{\partial^3 V}{\partial \sigma^3} + \frac{q^2}{4} \frac{\partial^4 V}{\partial \sigma^4} + \rho q S \sigma \frac{\partial^4 V}{\partial S \partial \sigma^3} \right) \Delta \sigma^2 - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \Delta t + O(\Delta t, \Delta S^2, \Delta \sigma^2) \quad (3.3.2-6) \end{aligned}$$

L'erreur de troncature étant la quantité produite en substituant la solution exacte dans l'équation aux différences finies. Cette erreur  $\varepsilon(V)$  tend vers zéro quand les pas du maillage  $\Delta t$ ,  $\Delta S$  et  $\Delta \sigma$  tendent vers zéro. On en déduit que le schéma numérique considéré est consistant. Autrement dit, l'équation aux différences finies, tend vers l'équation aux dérivées partielles originale dont elle est dérivée, lorsque les pas du maillage tendent vers zéro.

Pour mieux cerner l'erreur de troncature, il serait utile de remplacer la dérivée seconde du prix de l'option par rapport au temps, par des dérivées partielles par rapport aux deux variables d'états  $S$  et  $\sigma$ . Pour se faire, on écrit :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (3.3.2-7)$$

Or, d'après l'équation (3.1.3-12), la dérivée de la valeur de l'option, par rapport au temps, s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = - \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \rho q S \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + D \frac{\partial V}{\partial \sigma} - rV \right) \quad (3.3.2-8)$$

Soit, en remplaçant cette expression dans l'équation (3.3.2-7), on obtient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \rho q \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + D \frac{\partial V}{\partial \sigma} - rV \right)$$

Compte tenu de la linéarité de l'opérateur dérivée, on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = - \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \rho q \sigma S \frac{\partial^2}{\partial S \partial \sigma} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) + rS \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) + D \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) - r \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

Soit, en remplaçant tous les termes de la dérivée de l'option par rapport au temps, par son expression dans l'équation (3.3.2-8), on obtient l'expression de

$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ . Enfin, en remplaçant cette dernière expression dans l'équation de l'erreur

de troncature (3.3.2-6), on obtient l'équation :

$$\begin{aligned} \varepsilon(V) = & \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta S^2}{3} - \sigma^2 S^2 \Delta t \right) \left( \frac{\sigma^2 S^2}{4} \frac{\partial^4 V}{\partial S^4} + \rho q \sigma S \frac{\partial^4 V}{\partial S^3 \partial \sigma} + rS \frac{\partial^3 V}{\partial S^3} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta \sigma^2}{3} - q^2 \Delta t \right) \left( \frac{q^2}{4} \frac{\partial^4 V}{\partial \sigma^4} + \rho q \sigma S \frac{\partial^4 V}{\partial S \partial \sigma^3} + D \frac{\partial^3 V}{\partial \sigma^3} \right) - \\ & - \frac{1}{2} A \Delta t + O(\Delta t, \Delta S^2, \Delta \sigma^2) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} A = & \sigma^2 S^2 q^2 \left( \frac{1}{2} + \rho^2 \right) \frac{\partial^4 V}{\partial S^2 \partial \sigma^2} + \sigma S^2 (D\sigma + 2\rho r q) \frac{\partial^3 V}{\partial S^2 \partial \sigma} + qS(rq + 2\rho \sigma D) \frac{\partial^3 V}{\partial S \partial \sigma^2} + \\ & + rS^2 (r - \sigma^2) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2rS(D - \rho q \sigma) \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + (D^2 - rq^2) \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \\ & + 2r^2 S \frac{\partial V}{\partial S} + 2rD \frac{\partial V}{\partial \sigma} + r^2 V \end{aligned}$$

On voit bien qu'un choix judicieux des pas de discrétisation minimise l'erreur de troncature et, donc, améliorera la consistance du schéma, ainsi que, la précision de l'approximation de l'équation différentielle par son schéma numérique. Ce choix judicieux est tel que :

$$\Delta S = \sigma S \sqrt{\Delta t} \quad (3.3.2-9)$$

$$\Delta \sigma = q \sqrt{\Delta t} \quad (3.3.2-10)$$

Ainsi, pour une bonne consistance du schéma numérique, on a intérêt à choisir le pas du temps  $\Delta t$  le plus petit possible. Ce pas du temps doit répondre à une condition de stabilité, s'il existe un intervalle de stabilité du schéma numérique. Prendre un intervalle de temps  $\Delta t$  petit, est équivalent à considérer un nombre de périodes  $N$  grand. Pour avoir une convergence rapide, il ne faut pas avoir  $\Delta t$  trop petit. Il y'a ainsi un compromis à faire entre la précision et la rapidité de la convergence.

Une fois le pas du temps est choisi, les pas du sous-jacent et de la volatilité sont choisis suivant les équations (3.3.2-9) et (3.3.2-10), afin d'avoir un schéma aussi consistant que possible.

### **3.3.2.5 Etude de la stabilité du schéma numérique relatif à la méthode explicite**

Un schéma numérique doit être consistant afin que la solution numérique puisse converger vers la solution exacte de l'équation différentielle en question. La consistance est une condition nécessaire mais non suffisante pour la convergence. En plus de l'analyse de l'erreur de troncature, il est nécessaire d'analyser la stabilité d'un schéma numérique. Un schéma est stable si l'erreur du schéma n'est pas amplifiée pendant les calculs. Pour une équation différentielle comme celle étudiée actuellement ou comme l'équation de Black & Scholes qui est un cas particulier de la première, le théorème d'équivalence de Lax stipule que la stabilité est la condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'un schéma numérique consistant.

### 3.3.2.5.1 Détermination du module du gain

Pour l'analyse de la stabilité, relative à l'équation considérée, on utilise la méthode de Fourier. On considère la transformée de Fourier de  $V(S,\sigma,t)$  et on admet que le schéma numérique en question, admet une solution de la forme :

$$V_{i,j}^k = \xi^k e^{p(k_s i \Delta S + k_\sigma j \Delta \sigma)} = \xi^k e^{p(i\mu_s + j\mu_\sigma)}$$

$$\text{avec } \mu_s = k_s \Delta S \text{ et } \mu_\sigma = k_\sigma \Delta \sigma$$

où  $k_s$  et  $k_\sigma$  sont les numéros d'ondes, respectivement, pour le sous-

jacent et sa volatilité et  $p$  est le nombre complexe tel que  $\sqrt{p} = -1$

Soit, en remplaçant dans l'équation (3.3.2 -2), en divisant par  $V_{i,j}^k$ , on a :

$$\begin{aligned} \xi = \frac{V_{i,j}^{k+1}}{V_{i,j}^k} = & a_{i,j}^k + b_{i,j}^k \left( e^{p(\mu_s + \mu_\sigma)} - e^{p(\mu_s - \mu_\sigma)} - e^{-p(\mu_s - \mu_\sigma)} + e^{-p(\mu_s + \mu_\sigma)} \right) + \\ & + c_{i,j}^k e^{p\mu_s} + e_{i,j}^k e^{p\mu_\sigma} + f_{i,j}^k e^{-p\mu_\sigma} + h_{i,j}^k e^{-p\mu_s} \end{aligned}$$

Cette équation se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned} \xi = & a_{i,j}^k + 2b_{i,j}^k (\cos(\mu_s + \mu_\sigma) - \cos(\mu_s - \mu_\sigma)) + (c_{i,j}^k + h_{i,j}^k) \cos(\mu_s) + (e_{i,j}^k + f_{i,j}^k) \cos(\mu_\sigma) + \\ & p \left( (c_{i,j}^k - h_{i,j}^k) \sin(\mu_s) + (e_{i,j}^k - f_{i,j}^k) \sin(\mu_\sigma) \right) \quad (3.3.2-11) \end{aligned}$$

Si on pose :

$$u_{i,j}^k = c_{i,j}^k + h_{i,j}^k = (\sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k)^2 \frac{\Delta t}{\Delta S^2} = u \Delta t \geq 0$$

$$v_{i,j}^k = c_{i,j}^k - h_{i,j}^k = r S_{i,j}^k \frac{\Delta t}{\Delta S} \geq 0$$

$$w_{i,j}^k = e_{i,j}^k + f_{i,j}^k = (q_{i,j}^k)^2 \frac{\Delta t}{\Delta \sigma^2} = w \Delta t \geq 0$$

$$z_{i,j}^k = e_{i,j}^k - f_{i,j}^k = D_{i,j}^k \frac{\Delta t}{\Delta \sigma} \geq 0$$

on a

$$a_{i,j}^k = 1 - r \Delta t - w_{i,j}^k - u_{i,j}^k$$



et l'équation (3.3.2-11) devient :

$$\xi = a_{i,j}^k + 2b_{i,j}^k(\cos(\mu_S + \mu_\sigma) - \cos(\mu_S - \mu_\sigma)) + u_{i,j}^k \cos(\mu_S) + w_{i,j}^k \cos(\mu_\sigma) + p(v_{i,j}^k \sin(\mu_S) + z_{i,j}^k \sin(\mu_\sigma))$$

Soit, en simplifiant, on obtient :

$$\xi = a_{i,j}^k - 4b_{i,j}^k \sin(\mu_S) \sin(\mu_\sigma) + u_{i,j}^k \cos(\mu_S) + w_{i,j}^k \cos(\mu_\sigma) + p(v_{i,j}^k \sin(\mu_S) + z_{i,j}^k \sin(\mu_\sigma))$$

Le module de  $\xi$  est, donc, tel que :

$$|\xi|^2 = (a_{i,j}^k - 4b_{i,j}^k \sin(\mu_S) \sin(\mu_\sigma) + u_{i,j}^k \cos(\mu_S) + w_{i,j}^k \cos(\mu_\sigma))^2 + (v_{i,j}^k \sin(\mu_S) + z_{i,j}^k \sin(\mu_\sigma))^2$$

Soit, en remplaçant :  $a_{i,j}^k = 1 - r\delta t - w_{i,j}^k - u_{i,j}^k$ , on peut écrire :

$$|\xi|^2 = (1 - r\delta t - 4b_{i,j}^k \sin(\mu_S) \sin(\mu_\sigma) + u_{i,j}^k (\cos(\mu_S) - 1) + w_{i,j}^k (\cos(\mu_\sigma) - 1))^2 + (v_{i,j}^k \sin(\mu_S) + z_{i,j}^k \sin(\mu_\sigma))^2$$

Cette dernière équation peut s'écrire, sous la forme :

$$|\xi|^2 = (1 - \theta\Delta t)^2 + (\beta\Delta t)^2$$

avec

$$\theta = r + \frac{\rho q_{i,j}^k \sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k}{\Delta S \Delta \sigma} \sin(\mu_S) \sin(\mu_\sigma) + \frac{(\sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k)^2}{\Delta S^2} (1 - \cos(\mu_S)) + \frac{(q_{i,j}^k)^2}{\Delta \sigma^2} (1 - \cos(\mu_\sigma))$$

soit,

$$\theta = r + \alpha \sin(\mu_S) \sin(\mu_\sigma) + u(1 - \cos(\mu_S)) + w(1 - \cos(\mu_\sigma))$$

avec

$$\alpha = \frac{4b_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{\rho q_{i,j}^k \sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k}{\Delta S \Delta \sigma}$$

et

$$\beta = \frac{r S_{i,j}^k}{\Delta S} \sin(\mu_S) + \frac{D_{i,j}^k}{\Delta \sigma} \sin(\mu_\sigma)$$

Selon le critère de stabilité de Von Neumann, pour que le schéma soit stable il faut que le gain en module soit inférieur à l'unité. Soit:  $|\xi| < 1 \quad \forall \mu_S$  et  $\forall \mu_\sigma$

Cette condition sera satisfaite si  $|\xi|_{\text{Max}} < 1$ , ce qui suppose que :

$$|1 - \theta \Delta t|_{\text{Max}} < 1 \Rightarrow 0 < \theta \Delta t < 2$$

et  $|\beta|_{\text{Max}} \Delta t < 1$

Le calcul de  $|\xi|_{\text{Max}}$  dépend de la valeur minimale  $\theta_{\text{min}}$  et la valeur maximale  $\theta_{\text{Max}}$  de  $\theta$ , ainsi que de  $|\beta|_{\text{Max}}$  de  $\beta$ .

### 3.3.2.5.2 Calcul des valeurs extrêmes de $\theta$ : $\theta_{\text{min}}$ et $\theta_{\text{Max}}$

Ces valeurs extrêmes peuvent être calculées en dérivant  $\theta$  par rapport à  $\mu_S$  et  $\mu_\sigma$  soit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mu_S} = \alpha \cos(\mu_S) \sin(\mu_\sigma) + u \sin(\mu_S) = 0 \Rightarrow \alpha \cos(\mu_S) \sin(\mu_\sigma) = -u \sin(\mu_S)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mu_\sigma} = \alpha \sin(\mu_S) \cos(\mu_\sigma) + w \sin(\mu_\sigma) = 0 \Rightarrow \alpha \sin(\mu_S) \cos(\mu_\sigma) = -w \sin(\mu_\sigma)$$

Ce système admet, déjà, la solution banale:  $\sin(\mu_S) = \sin(\mu_\sigma) = 0$

A ce niveau, une question s'impose : y'a t'il d'autres solutions ?

Si une autre solution existe, elle doit satisfaire la condition obtenue en multipliant les deux équations, membre par membre :

$$\cos(\mu_S) \cos(\mu_\sigma) = \frac{uw}{\alpha^2} = \frac{(\sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k q_{i,j}^k)^2}{\Delta S^2 \Delta \sigma^2} \frac{\Delta S^2 \Delta \sigma^2}{(\rho \sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k q_{i,j}^k)^2} = \frac{1}{\rho^2} \geq 1$$

Il n'y aura, donc, une autre solution que si  $\rho = 1$ , ce qui correspond, dans la pratique, à un cas invraisemblable. On en déduit qu'il n'existe que la solution

banale comme solution de ce système. Sur l'intervalle  $[0;2\pi[$ , la solution est, donc:  $(\mu_S = 0$  ou  $\mu_S = \pi)$  et  $(\mu_\sigma = 0$  ou  $\mu_\sigma = \pi)$

Etant donné que les valeurs de  $\alpha$ ,  $u$  et  $w$  sont toutes, les trois, positives, la valeur minimale de  $\theta$  s'obtient pour  $\mu_S = \mu_\sigma = 0$ , soit  $\cos \mu_S = \cos \mu_\sigma = 1$ . On a, donc :

$$\theta_{\min} = r \quad (3.3.2-12)$$

La valeur maximale de  $\theta$  s'obtient, pour  $\mu_S = \mu_\sigma = \pi$ , tel que l'on ait  $\cos \mu_S = \cos \mu_\sigma = -1$ . Cette valeur maximale s'écrit, donc :

$$\theta_{\text{Max}} = r + 2(u_{\text{Max}} + w_{\text{Max}}) = r + 2 \left( \frac{(\sigma_{i,j}^k S_{i,j}^k)^2}{\Delta S^2} + \frac{(q_{i,j}^k)^2}{\Delta \sigma^2} \right)_{\text{Max}} \quad (3.3.2-13)$$

La valeur maximale du prix du sous-jacent est :

$$S_{\text{Max}} = \text{Max} \left\{ S_{i,j}^k; 1 \leq i \leq I; 1 \leq j \leq J; 1 \leq k \leq K \right\}$$

$$\Rightarrow S_{\text{Max}} = S_t + K \Delta S = S_t + \frac{(T-t)}{\Delta t} \Delta S$$

La valeur maximale de la volatilité est:

$$\sigma_{\text{Max}} = \text{Max} \left\{ \sigma_{i,j}^k; 1 \leq i \leq I; 1 \leq j \leq J; 1 \leq k \leq K \right\}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{Max}} = \sigma_t + K \Delta \sigma = \sigma_t + \frac{(T-t)}{\Delta t} \Delta \sigma$$

La valeur maximale de la volatilité de la volatilité est  $q_{\text{Max}} = \eta \sigma_{\text{Max}}^\gamma$ .

En considérant ces trois valeurs maximales, on obtient :

$$\theta_{\text{Max}} = r + 2 \left( \frac{(\sigma_{\text{Max}} S_{\text{Max}})^2}{\Delta S^2} + \frac{(\eta \sigma_{\text{Max}}^\gamma)^2}{\Delta \sigma^2} \right)$$

### 3.3.2.5.3 Calcul des valeurs extrêmes de $\beta$ : $\beta_{\min}$ et $\beta_{\text{Max}}$

De toute évidence la valeur maximale de  $\beta$  est :

$$\beta_{\text{Max}} = |\beta|_{\text{Max}} = \frac{rS_{i,j}^k}{\Delta S} + \frac{D_{i,j}^k}{\Delta \sigma} = -\beta_{\text{min}}$$

Soit en considérant les valeurs maximales du sous-jacent  $S_{\text{Max}}$ , et du drift risque-neutre  $D_{\text{Max}}$ , il vient :

$$\beta_{\text{Max}} = \frac{rS_{\text{Max}}}{\Delta S} + \frac{D_{\text{Max}}}{\Delta \sigma} = -\beta_{\text{min}}$$

### 3.3.2.5.4 Calcul de $|1 - \theta \Delta t|_{\text{Max}}$ et condition sur le pas du temps

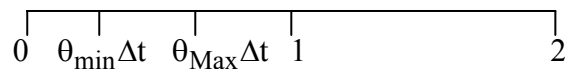
Dans tous les cas,  $\theta_{\text{min}} \Delta t = r \Delta t < 1$  car  $r < 1$  et  $\Delta t < 1$ .

Par contre, on ne peut pas juger pour  $\theta_{\text{Max}} \Delta t$  qui peut être inférieure ou supérieure à 1 selon le choix de  $\Delta S$  et  $\Delta \sigma$ . Ainsi, deux cas extrêmes peuvent se présenter :

Cas 1 : Si  $\theta_{\text{Max}} \Delta t$  appartient à l'intervalle de centre 1 et de rayon  $1 - \theta_{\text{min}} \Delta t$ , autrement dit, si  $\theta_{\text{Max}} \Delta t \in [\theta_{\text{min}} \Delta t; 2 - \theta_{\text{min}} \Delta t]$ , deux sous-cas peuvent se présenter :

- Sous-cas 1,1 : si  $\theta_{\text{Max}} \Delta t < 1$

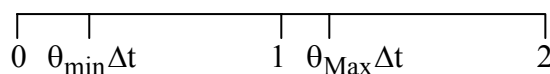
$$\Rightarrow 1 - \theta_{\text{Max}} \Delta t < 1 - \theta_{\text{min}} \Delta t \quad \text{ce qui est évident } \forall \Delta t$$



- Sous-cas 1,2 : si  $\theta_{\text{Max}} \Delta t > 1$

$$\Rightarrow \theta_{\text{Max}} \Delta t - 1 < 1 - \theta_{\text{min}} \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t < \frac{2}{(\theta_{\text{min}} + \theta_{\text{Max}})}$$



En fait, ces deux sous-cas se résument, à la condition :  $\theta_{\text{Max}}\Delta t - 1 < 1 - \theta_{\text{min}}\Delta t$

dans ce cas on a  $|1 - \theta\Delta t|_{\text{Max}} = |1 - \theta_{\text{min}}\Delta t| = 1 - \theta_{\text{min}}\Delta t$

De plus, la condition ( $|\xi|_{\text{Max}} < 1$ ) nous donne une deuxième condition :

$$(1 - \theta_{\text{min}}\Delta t)^2 + \beta_{\text{Max}}^2\Delta t^2 < 1$$

Soit,  $1 - 2\theta_{\text{min}}\Delta t + (\theta_{\text{min}}^2 + \beta_{\text{Max}}^2)\Delta t^2 < 1$

$$\Rightarrow (\theta_{\text{min}}^2 + \beta_{\text{Max}}^2)\Delta t^2 < 2\theta_{\text{min}}\Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t < \frac{2\theta_{\text{min}}}{(\theta_{\text{min}}^2 + \beta_{\text{Max}}^2)} = \frac{2}{\theta_{\text{min}} + \frac{\beta_{\text{Max}}^2}{\theta_{\text{min}}}}$$

Dans ce cas, on a :

$$\Delta t < \text{Inf} \left( \frac{2}{\theta_{\text{min}} + \theta_{\text{Max}}}; \frac{2}{\left(\theta_{\text{min}} + \frac{\beta_{\text{Max}}^2}{\theta_{\text{min}}}\right)} \right)$$

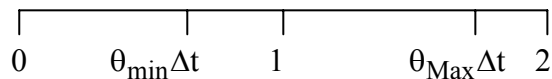
qui se résume comme suit :

$$\text{si } \beta_{\text{Max}}^2 < \theta_{\text{min}}\theta_{\text{Max}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t < \frac{2}{\theta_{\text{min}} + \theta_{\text{Max}}}$$

$$\text{si } \beta_{\text{Max}}^2 > \theta_{\text{min}}\theta_{\text{Max}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t < \frac{2}{\theta_{\text{min}} + \frac{\beta_{\text{Max}}^2}{\theta_{\text{min}}}}$$

- Cas 2 : Si  $\theta_{\text{Max}}\Delta t \in [2 - \theta_{\text{min}}\Delta t; 2]$ ,

$$\text{soit, } \theta_{\text{Max}}\Delta t > 2 - \theta_{\text{min}}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t > \frac{2}{(\theta_{\text{min}} + \theta_{\text{Max}})}$$



$$\Rightarrow |1 - \theta\Delta t|_{\text{Max}} = |1 - \theta_{\text{Max}}\Delta t| = \theta_{\text{Max}}\Delta t - 1$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, } |\xi|_{\text{Max}} < 1 &\Rightarrow (\theta_{\text{Max}}\Delta t - 1)^2 + \beta_{\text{Max}}^2\Delta t^2 < 1 \\ &\Rightarrow \Delta t < \frac{2\theta_{\text{Max}}}{(\theta_{\text{Max}}^2 + \beta_{\text{Max}}^2)} = \frac{2}{\theta_{\text{Max}} + \frac{\beta_{\text{Max}}^2}{\theta_{\text{Max}}}} \end{aligned}$$

L'encadrement de  $\Delta t$  est, tel que :

$$\frac{2}{\theta_{\text{min}} + \theta_{\text{Max}}} < \Delta t < \frac{2\theta_{\text{Max}}}{(\theta_{\text{Max}}^2 + \beta_{\text{Max}}^2)} = \frac{2}{\theta_{\text{Max}} + \frac{\beta_{\text{Max}}^2}{\theta_{\text{Max}}}} < \frac{2}{\theta_{\text{Max}}}$$

Par conséquent, on a :

$$\boxed{\frac{2}{\theta_{\text{min}} + \theta_{\text{Max}}} < \Delta t < \frac{2}{\left(\theta_{\text{Max}} + \frac{\beta_{\text{Max}}^2}{\theta_{\text{Max}}}\right)}}$$

### 3.3.2.6 Etude numérique de la stabilité

La stabilité, ainsi que, la consistance, dépendent, étroitement, des relations qui existent entre les pas du maillage. Autrement dit, s'il existe une relation entre  $\Delta S$ ,  $\Delta \sigma$  et  $\Delta t$  les conditions de stabilité sont, à priori, différentes, par rapport au cas, où elles sont choisies d'une manière indépendante.

Dans tous les cas, le pas du temps est donné par la relation :  $\Delta t = \frac{T - t_t}{N}$

Ainsi, deux études numériques de stabilité du schéma explicite ont été faites, au niveau de la base journalière, en considérant un mouvement Brownien comme processus de la volatilité. Pour la première étude, les valeurs maximales à l'échéance de l'option des deux variables d'états,  $S_{T,\text{Max}}$  et  $\sigma_{T,\text{max}}$ , sont déterminées, suivant les équations établies au paragraphe (3.3.2-3). Les pas du prix du sous-jacent et de la volatilité sont déterminés, à partir de ces valeurs maximales, conformément aux équations suivantes:

$$\Delta S = \frac{S_{T,\text{Max}} - S_t}{N} \quad \text{et} \quad \Delta \sigma = \frac{\sigma_{T,\text{Max}} - \sigma_t}{N}$$

Pour la deuxième étude, on a considéré que les pas, du prix du sous-jacent et de la volatilité, qui minimise l'erreur de troncature et qui sont donnés par les équations (3.3.2-9) et (3.3.2-10)

### 3.3.2.6.1 Première étude numérique de la stabilité du schéma numérique

Pour la première étude, une étude analytique a montré que le schéma numérique explicite est instable. Cette instabilité du schéma a été confirmée et illustrée par un calcul numérique. Pour se faire, dans un premier temps, la valeur maximale du prix du sous-jacent, ainsi que la valeur maximale de la volatilité à l'échéance qui sont distribuées suivant une loi normale, ont été estimées. Ces deux valeurs peuvent être estimées, à partir de la distribution de ces deux variables à l'échéance, en considérant un intervalle de confiance avec un risque de 1%, avec le processus empirique comme dynamique de la volatilité. (cf §3.3.2.2.3)

En considérant ces valeurs des intervalles, on étudie la stabilité du schéma, en observant les quantités :  $\theta_{\text{Max}}\Delta t$  et  $\theta_{\text{min}}\Delta t$  et en calculant les gains respectifs  $G_1$  et  $G_2$  tel que :  $G_1^2 = (1 - \theta_{\text{Max}}\Delta t)^2 + (\beta\Delta t)^2$  et  $G_2^2 = (1 - \theta_{\text{min}}\Delta t)^2 + (\beta\Delta t)^2$

Les courbes des gains sont illustrées dans les graphiques 36 et 37.

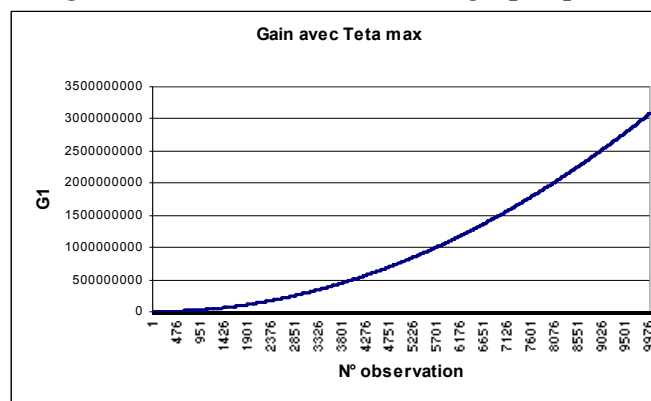


Figure 37 : Le gain  $G_1$  en considérant la valeur maximale de  $\theta : \theta_{\text{Max}}$   
 Pour  $N=2$ . Le gain  $G_1$  est supérieur à 102. Base journalière dynamique empirique de la volatilité

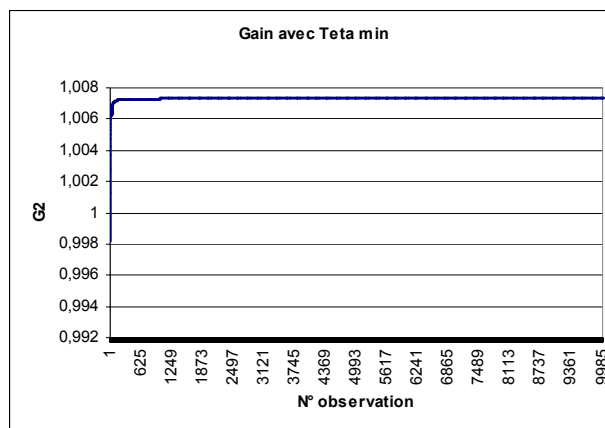


Figure 38 : Le gain  $G_2$  en considérant la valeur minimale de  $\theta : \theta_{\min}$  base journalière. Processus empirique de la volatilité.  
 Pour  $N=2$   $G_2=0,9982$  ; Pour  $N > 2$   $G_2 > 1$

Ces courbes de gain correspondent à la base journalière, avec le mouvement Brownien comme processus de la volatilité. En faisant varier  $N$  on remarque que ces deux gains sont supérieurs à 1 même pour  $N=2$  et on peut conclure que le schéma est instable quel que soit le pas du temps à considérer, d'autant plus que la quantité  $\theta_{\text{Max}} \Delta t$  est toujours supérieure à 2.

En calculant la valeur de l'option avec ce modèle à volatilité stochastique, en utilisant la méthode explicite, en considérant le mouvement Brownien géométrique comme processus de la volatilité, on obtient pour la première observation de la base journalière les résultats illustrés dans le tableau 30.

N	Cvs	C
2	143,757574	117
3	106,560374	117
5	124,601177	117
6	60,5634395	117
7	386,354666	117
8	-4718,61178	117
9	-50110,2164	117
10	313815,54	117
20	1,3631E+22	117
40	2,4543E+63	117

Tableau 30 : Valeur de l'option Cvs par le modèle à volatilité stochastique, en fonction du nombre  $N$  de périodes, en considérant un schéma explicite et sa valeur du marché  $C$  égale à 117



On remarque qu'à partir de  $N=8$ , les valeurs de l'option, déterminées par le modèle considéré, deviennent fortement négatives puis très fortement positives. A priori, on peut conclure à une divergence de la solution numérique du schéma par rapport à la solution théorique de l'équation différentielle, en prenant les valeurs maximales du prix du sous-jacent et celles de la volatilité calculées. Cependant, jusqu'à  $N=7$ , on remarque que la valeur de l'option oscille autour de la valeur du marché, comme c'est illustré dans la figure 39.

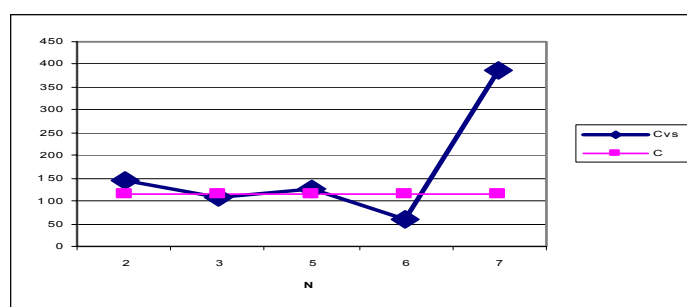


Figure 39 : La valeur de l'option déterminée avec le modèle à volatilité stochastique oscille autour de la valeur de l'option sur le marché, pour un faible nombre de période  $N$  allant de 2 à 7. Ceci, en considérant la première observation de la base journalière et considérant un processus Brownien pour la volatilité

Le modèle est manifestement divergent. C'est normal puisque le gain est supérieur à 1. Par conséquent, il y'a amplification de l'erreur du schéma qui conduit à des valeurs énormes de la valeur du call. Les valeurs de l'option, pour  $N$  faible, sont raisonnables sauf que pour de telles valeurs, le pas du temps est très important et, donc, en contradiction avec l'hypothèse de la continuité du modèle. Ce calcul se fait, observation par observation de l'échantillon.

En considérant la méthode de la détermination des pas du maillage et à la lumière de l'instabilité du schéma explicite, la méthode Hopscotch, inconditionnellement stable, constitue une alternative pour résoudre, numériquement, l'équation différentielle aux dérivées partielles.

### 3.3.2.6.2 Deuxième étude numérique de stabilité

Les pas du maillage qui minimisent l'erreur de troncature, sont, donnés par les équations (3.3.2-9) et (3.3.2-10) :  $\Delta S = \sigma S \sqrt{3\Delta t}$  et  $\Delta \sigma = q \sqrt{3\Delta t}$ , avec  $\Delta t$  le plus petit possible (soit un nombre de période  $N$  aussi grand que possible).

Dans ce cas, en remplaçant les pas  $\Delta S$  et  $\Delta \sigma$  par leurs expressions, relatives aux équations (3.3.2-9) et (3.3.2-10), dans les équations (3.3.2-12) et (3.3.2-13), on a :

$$\theta_{\text{Max}} \Delta t = r \Delta t + \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad 0 < \Delta t < \frac{2}{3r}$$

$$\theta_{\text{min}} \Delta t = r \Delta t \quad \Rightarrow \quad 0 < \Delta t < \frac{1}{r}$$

Ce qui fait une seule condition préalable, sur le pas du temps, pour que le schéma soit stable :  $0 < \Delta t < \frac{2}{3r}$

Les gains sont donnés par les relations suivantes :

$$G_1^2 = (1 - \theta_{\text{Max}} \Delta t)^2 + (\beta \Delta t)^2 = r^2 \Delta t^2 + \left(\frac{2r + A}{3}\right) \Delta t + \frac{1}{9}$$

$$G_2^2 = (1 - \theta_{\text{min}} \Delta t)^2 + (\beta \Delta t)^2 = r^2 \Delta t^2 + \left(\frac{A}{3} - 2r\right) \Delta t + 1$$

avec  $A = \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{D}{q}\right)^2$

La condition de stabilité, s'écrit en considérant que les gains sont inférieurs à 1 :

$$0 < \Delta t < \min \left( \frac{2}{3r}; \Delta t(G_1) = \frac{-(2r + A) + \sqrt{(2r + A)^2 + 32r^2}}{6r^2}; \Delta t(G_2) = \left(\frac{2}{r} - \frac{A}{3r^2}\right) \right)$$

Ces trois contraintes sur le pas du temps sont représentées dans le graphique 40, en considérant la base journalière, avec le mouvement brownien comme processus de la volatilité.

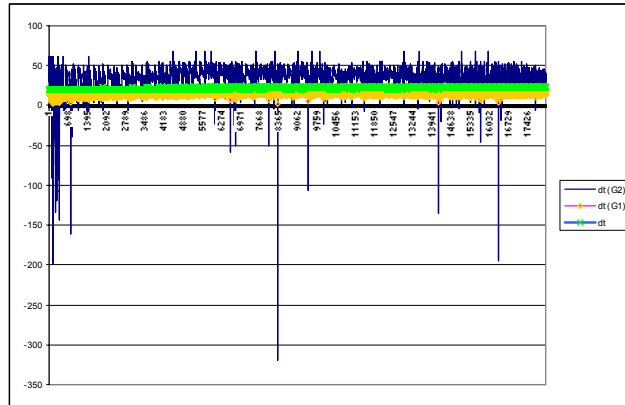


Figure 40 : Les trois contraintes sur le pas du temps pour un schéma stable Base journalière, mouvement Brownien de la volatilité

On note que c'est la contrainte sur  $G_1$  qui donne le pas du temps le plus petit. Les pas du temps restent, relativement, élevés de l'ordre de 15 pour  $\Delta t (G_1)$ .

En considérant un nombre de périodes  $N$  égal à 10, les courbes des gains  $G_1$  et  $G_2$  sont représentées dans le graphique 41.

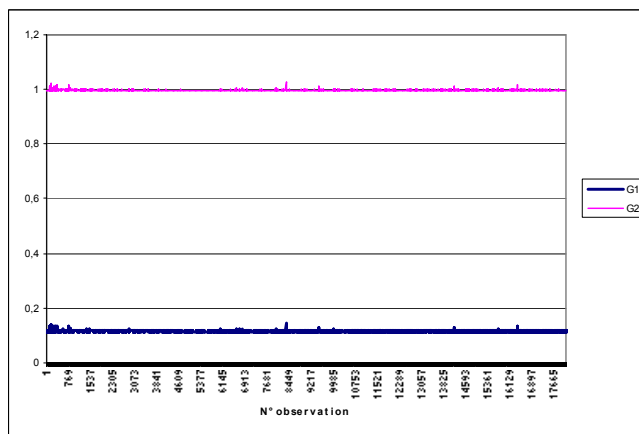


Figure 41 : Gain  $G_1$  et gain  $G_2$  en fonction du numéro d'observation en considérant un nombre de période  $N=10$ , Base journalière

Le gain  $G_1$  converge vers 1 lorsque le nombre de période  $N$  devient infini. Pour  $N=10$ , il est déjà, quasiment, égal à 1 et on est à la limite de la stabilité. S'il y'a convergence elle sera très lente. Pour certaines observations, le gain est

supérieur à 1. Les portions des courbes des gains (figure 41), pour les premières observations de la base journalière, sont représentées dans la figure 42.

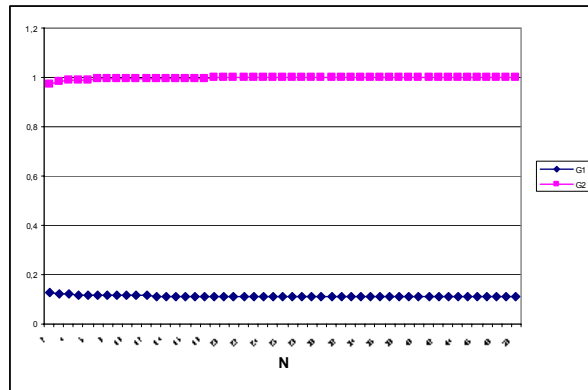


Figure 42 : Les Gains  $G_1$  et  $G_2$ , en fonction du nombre de pas du temps  $N$ , pour la première observation de la base journalière

Quel que soit le nombre de périodes, le schéma est, donc, stable puisque, dans tous les cas, le maximum du gain est inférieur à 1. Par ailleurs, la condition sur le pas du temps est respectée, quel que soit le nombre de période à considérer.

Le schéma est au meilleur de sa consistance lorsqu'on considère un grand nombre  $N$  de période, autrement dit, un pas du temps petit avec des pas du prix du sous-jacent et de la volatilité choisis, selon les équations (3.3.2-9) et (3.3.2-10).

Un pas de temps petit implique la stabilité du schéma. D'après le théorème de Lax, comme le problème est bien posé, et puisque le schéma est consistant et stable, on peut conclure qu'il est convergent. Par contre, comme le gain est, quasiment, égal à l'unité, par valeur inférieure, le temps de convergence est, quasiment, infini.

En définitive, la stabilité du schéma dépend du choix des pas du maillage et des relations qui peuvent les lier. Dans le cas de la première étude de stabilité, le schéma est instable. Pour la deuxième étude, bien que la stabilité semble être conditionnelle, elle ne l'est pas quel que soit le nombre de périodes à considérer, puisque à partir de  $N=1$ , le schéma est stable. Il n'en demeure pas

moins, que pour certaines observations, le gain dépasse 1 et par conséquent le schéma est instable pour ces observations.

En conclusion, pour la première étude numérique de la stabilité, le schéma est instable, bien que consistant. Pour la seconde étude, le schéma est consistant, conditionnellement stable, et même convergent. Ceci n'empêche pas que la convergence du schéma est très lente, puisque le gain est, quasiment, égal à l'unité. Par conséquent, le recours à un algorithme inconditionnellement stable s'impose. A cet effet, l'algorithme de Hopscotch, répond bien à ce besoin et constitue un choix judicieux, dans la mesure, où il est, inconditionnellement stable, et qu'il a fait ses preuves, en matière de résolution numérique d'équations différentielles à dérivées partielles, dans au moins deux domaines de la science, à savoir les sciences physiques et la finance.

### **3.3.3 Méthode Hopscotch**

L'algorithme Hopscotch est, inconditionnellement, stable. Il est, donc, utile, à chaque fois, que la résolution de l'équation différentielle nécessite la résolution d'un schéma numérique instable ou convergent, dans un temps non raisonnable. Cet algorithme, est d'autant plus performant que les termes des dérivées croisées de l'équation différentielle sont nuls. Dans le cas, où le prix du sous-jacent et la volatilité sont non-corrélés, ceci justifie le développement du paragraphe (§3.1.4) consacré aux changements de variables, dans le but d'éliminer les termes des dérivées croisées de l'équation (3.1.2-12).

#### **3.3.3.1 Algorithme de Hopscotch**

Cette méthode permet d'introduire un caractère implicite à une méthode explicite. Le maillage est divisé en deux familles de points : la première indiquée par des cercles noirs pour les points tel que  $(i+j)$  est impair et la deuxième par des carrés relatifs aux points tel que  $(i+j)$  est pair, comme illustré dans la figure 43.

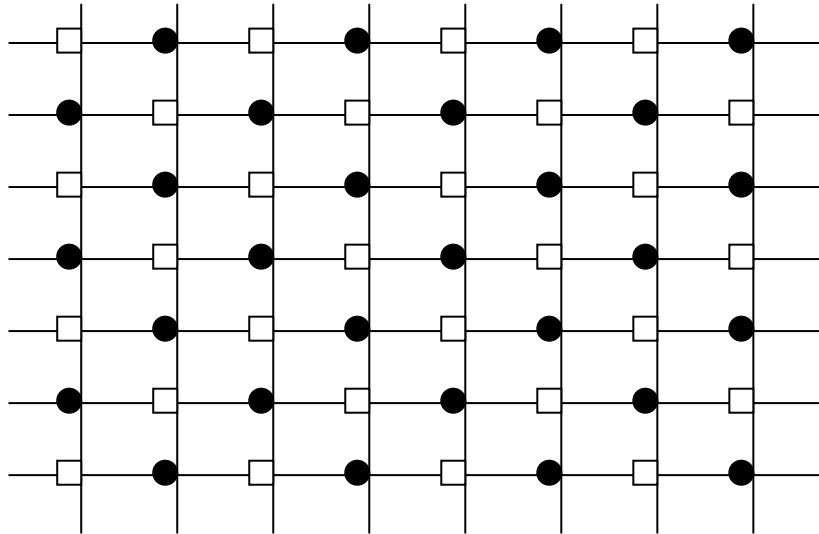


Figure 43 : Maillage suivant le prix du sous-jacent et la volatilité : par exemple, les carré correspondent à  $i+j$  pair et les cercles à  $i+j$  impair

Pour un pas de temps donné, pour la famille des cercles noirs, le calcul de la valeur de l'option, correspondant au pas du temps suivant, se fait explicitement. Pour les carrés blancs, bien que le schéma de calcul soit implicite, sa résolution se fait d'une manière explicite, puisque les valeurs de l'option correspondantes aux cercles noirs, sont, déjà, connues.

La valeur de l'option  $V_{i,j}^{k+1}$ , à un instant  $t = T - (k+1) \Delta t$ , se calcule à partir de 9 valeurs de l'option de l'instant précédent  $t = T - k \Delta t$  (sens anti-chronologique). Si la valeur  $V_{i,j}^{k+1}$  correspond à un cercle noir, elle sera calculée à partir de 5 valeurs correspondantes à des cercles noirs (une seule valeur lorsque le coefficient de corrélation est nul) et 4 valeurs correspondantes à des carrés, et vice versa.

Il s'agit d'une méthode qui est d'autant plus facile à mettre en oeuvre que le terme de la dérivée mixte est nul. Ceci peut se faire par un changement de variables (voir §3.1.4) ou en considérant que les deux variables d'état, à savoir le prix du sous-jacent et la volatilité, non corrélées. Par ailleurs, il existe un algorithme Hopscotch, qui tient compte de la non nullité du terme de la dérivée croisée.

L'algorithme Hopscotch consiste :

\* dans un premier temps, à initialiser la valeur de l'option au niveau de tous les points du maillage (quelques soient  $i$  et  $j$ ), à la date d'échéance ( $t=T$  et  $k=0$ ) tel que :

$$- \text{si } S_{i,j}^0 > E \Rightarrow V_{i,j}^0 = S_{i,j}^0 - E$$

$$- \text{si } S_{i,j}^0 < E \Rightarrow V_{i,j}^0 = 0$$

\* dans un second temps, à chaque pas du temps (où  $k$  est différent de zéro), il y'a deux phases de calculs :

**- Si  $k$  est impair :**

1. Pour les points en cercles noirs ( $i+j$  impair), on calcule, dans un premier temps,  $V_{i,j}^{k+1}$ , suivant le schéma explicite suivant :

$$V_{i,j}^{k+1} = a_{i,j}^k V_{i,j}^k + b_{i,j}^k (V_{i+1,j+1}^k + V_{i-1,j-1}^k - V_{i+1,j-1}^k - V_{i-1,j+1}^k) + c_{i,j}^k V_{i+1,j}^k + e_{i,j}^k V_{i,j+1}^k + f_{i,j}^k V_{i,j-1}^k + h_{i,j}^k V_{i-1,j}^k$$

2. Pour les points en carré, on calcule les valeurs  $V_{i,j}^{k+1}$  correspondantes. Ceci se fait, explicitement, à partir des valeurs de  $V_{i,j}^{k+1}$  qu'on vient de calculer pour les cercles noirs et à partir des valeurs précédentes  $V_{i,j}^k$  des points en carré. En remarquant que le coefficient  $a_{i,j}^k$  n'est pas proportionnel à  $\Delta t$ , alors que  $(a_{i,j}^k - 1)$  l'est (cf équation (3.3.2-1)), ainsi que tous les autres coefficients  $b$ ,  $c$ ,  $e$ ,  $f$  et, on peut écrire l'équation sous la forme :

$$V_{i,j}^{k+1} = V_{i,j}^k + (a_{i,j}^k - 1)V_{i,j}^k + b_{i,j}^k (V_{i+1,j+1}^k + V_{i-1,j-1}^k - V_{i+1,j-1}^k - V_{i-1,j+1}^k) + c_{i,j}^k V_{i+1,j}^k + e_{i,j}^k V_{i,j+1}^k + f_{i,j}^k V_{i,j-1}^k + h_{i,j}^k V_{i-1,j}^k$$

L'expression de  $V_{i,j}^k$  est, donc:

$$V_{i,j}^k = V_{i,j}^{k+1} - (a_{i,j}^k - 1)V_{i,j}^k - b_{i,j}^k(V_{i+1,j+1}^k + V_{i-1,j-1}^k - V_{i+1,j-1}^k - V_{i-1,j+1}^k) - c_{i,j}^k V_{i+1,j}^k - e_{i,j}^k V_{i,j+1}^k - f_{i,j}^k V_{i,j-1}^k - h_{i,j}^k V_{i-1,j}^k$$

Soit, en donnant un caractère implicite à ce schéma, et en mettant tous les membres de droite à l'indice k+1, il vient :

$$V_{i,j}^k = V_{i,j}^{k+1} - (a_{i,j}^{k+1} - 1)V_{i,j}^{k+1} - b_{i,j}^{k+1}(V_{i+1,j+1}^{k+1} + V_{i-1,j-1}^{k+1} - V_{i+1,j-1}^{k+1} - V_{i-1,j+1}^{k+1}) - c_{i,j}^{k+1} V_{i+1,j}^{k+1} - e_{i,j}^{k+1} V_{i,j+1}^{k+1} - f_{i,j}^{k+1} V_{i,j-1}^{k+1} - h_{i,j}^{k+1} V_{i-1,j}^{k+1}$$

Soit, en réarrangeant les termes, on peut écrire :

$$V_{i,j}^k = (2 - a_{i,j}^{k+1})V_{i,j}^{k+1} - b_{i,j}^{k+1}(V_{i+1,j+1}^{k+1} + V_{i-1,j-1}^{k+1} - V_{i+1,j-1}^{k+1} - V_{i-1,j+1}^{k+1}) - c_{i,j}^{k+1} V_{i+1,j}^{k+1} - e_{i,j}^{k+1} V_{i,j+1}^{k+1} - f_{i,j}^{k+1} V_{i,j-1}^{k+1} - h_{i,j}^{k+1} V_{i-1,j}^{k+1}$$

Ce qui est équivalent à :

$$V_{i,j}^{k+1} = \frac{V_{i,j}^k + b_{i,j}^{k+1}(V_{i+1,j+1}^k + V_{i-1,j-1}^k - V_{i+1,j-1}^k - V_{i-1,j+1}^k) + c_{i,j}^{k+1} V_{i+1,j}^k + e_{i,j}^{k+1} V_{i,j+1}^k + f_{i,j}^{k+1} V_{i,j-1}^k + h_{i,j}^{k+1} V_{i-1,j}^k}{(2 - a_{i,j}^{k+1})}$$

Comme, les valeurs  $V_{i+1,j+1}^k; V_{i+1,j-1}^k; V_{i-1,j+1}^k; V_{i-1,j-1}^k$ , correspondent à un carré blanc, au même titre que  $V_{i,j}^k$ , on ne dispose pas de leurs valeurs au pas k+1, ce qui impose de prendre leurs valeurs au pas k. En définitive, l'équation devient :

$$V_{i,j}^{k+1} = \frac{V_{i,j}^k + b_{i,j}^{k+1}(V_{i+1,j+1}^k + V_{i-1,j-1}^k - V_{i+1,j-1}^k - V_{i-1,j+1}^k) + c_{i,j}^{k+1} V_{i+1,j}^k + e_{i,j}^{k+1} V_{i,j+1}^k + f_{i,j}^{k+1} V_{i,j-1}^k + h_{i,j}^{k+1} V_{i-1,j}^k}{(2 - a_{i,j}^{k+1})}$$

- **Si k est pair** : on inverse les rôles des points en cercles noirs et des points en carré blanc

### 3.3.3.2 Méthodologie et application de l'algorithme Hopscotch à la résolution de l'équation différentielle

Cet algorithme a été utilisé, pour calculer les valeurs de l'option pour les cinq contrats de la base journalière en considérant, comme processus de la volatilité,



le mouvement Brownien et le processus baptisé empirique. Il a été, également, utilisé pour déterminer la valeur de l'option pour les 9 contrats de la base intraday avec, uniquement, le mouvement Brownien, comme processus de la volatilité. En fait, dans le cas de la base intraday (données haute fréquence), on trouve que la valeur de l'option diverge si on considère le processus empirique, comme processus de la volatilité.

### **3.3.4 Détermination de la valeur de l'option et des pas du maillage $N$ , $\Delta S$ et $\Delta \sigma$ (algorithme de Hopscotch)**

Pour le calcul de la valeur de l'option par le modèle à volatilité stochastique, nous considérons l'ensemble des contrats intraday 1N, 1O, 1P, 1Q, 1S, 9I, 9J, 9K et 9L avec la volatilité implicite, ainsi que les 5 contrats de la base journalière C2800, C2950, C3100, C3250 et C4000, avec la volatilité aussi bien implicite qu'historique.

Ce calcul nécessite dans un premier temps la détermination des pas du maillage :  $\Delta S$ ,  $\Delta \sigma$  et  $\Delta t$ . Plusieurs simulations ont permis de mettre en évidence la dépendance de la valeur de l'option, déterminée suivant le schéma numérique, avec ces pas du maillage. Ceci, est plutôt évident puisque l'erreur de troncature en dépend.

On peut déterminer ces pas, en estimant d'abord  $S_{T,Max}$  et  $\sigma_{T,Max}$  et en choisissant  $N$  pas, entre l'instant présent  $t$  et l'échéance  $T$ . Ainsi, on peut écrire :

$$\Delta t = \frac{T-t}{N} \quad \Delta S = \frac{S_{T,Max} - S_t}{N} \quad \text{et} \quad \Delta \sigma = \frac{\sigma_{T,Max} - \sigma_t}{N}$$

Dans ce cas, ces pas sont, inversement proportionnels à  $N$ , alors que  $S_{T,Max}$  et  $\sigma_{T,Max}$  sont figés.

On peut, également, choisir ces paramètres en faisant une simulation dans laquelle on fait varier  $\Delta S$ ,  $\Delta \sigma$  et  $N$ . Dans ce cas, le choix de ces paramètres

déterminera  $S_{T,Max}$  et  $\sigma_{T,Max}$ . Cette fois, se sont les pas du maillage,  $\Delta S$  et  $\Delta \sigma$ , qui resteront figés, alors que  $S_{T,Max}$  et  $\sigma_{T,Max}$  varieront avec  $N$ .

On peut, également, choisir  $\Delta S$ ,  $\Delta \sigma$  suivant les relations (3.3.2-9) (3.3.2-10). Dans ce cas, il a été démontré que le schéma est convergent, puisqu'il est consistant et stable. Par contre, étant donné que le gain est quasiment égal à l'unité, la convergence est très lente et le recours à l'algorithme de Hopscotch s'avère indispensable pour résoudre le problème.

Etant donné, qu'on ne connaît ni la solution exacte de l'équation différentielle aux dérivées partielles, ni l'erreur de troncature, le but de la présente partie est de déterminer, à travers des simulations,  $\Delta S$ ,  $\Delta \sigma$  et  $N$ , qui permettent d'approcher au mieux la solution exacte. Il va falloir donc définir un critère pour les choisir.

A priori, la solution de l'équation (3.1.2-12) doit converger vers la solution relative aux simulations de Monte Carlo, avec une erreur de troncature, en plus de l'erreur de convergence. La solution de Monte Carlo peut servir de référence pour la détermination des pas du maillage.

Pour déterminer les pas du maillage, on procède à des simulations, en utilisant l'algorithme (Hopscotch, 1970), pour le calcul de la valeur de l'option à travers le schéma numérique, en faisant varier les pas du maillage.

On considère, à cet effet, une observation de la base journalière définie par les données suivantes :

Valeur du sous-jacent (indice): S	Prix d'exercice : E	Durée de vie résiduelle: T- t	Volatilité implicite : Vol	taux d'intérêt à court terme : r	valeur de l'option sur le marché : C
2349,08	2350	446	0,09847	0,0324	173

La volatilité implicite est supposée suivre un mouvement Brownien, déterminé à partir de l'ensemble de la base journalière. Ce processus est défini par les paramètres suivants :

- Drift risque neutre de la volatilité implicite :  $D=0,0326$ .
- Volatilité de la volatilité implicite:  $q =0,2825$ .
- Coefficient de corrélation entre le mouvement de la volatilité implicite et le mouvement du prix du sous-jacent :  $\rho =-0,4024$ .

Le pas du temps  $\Delta t$  dépend du nombre de pas  $N$ . A priori, la valeur de  $N$  ne doit être ni trop grande pour limiter le temps de calcul, ni trop petite car la précision des calculs sera mauvaise d'autant plus que c'est incompatible avec la continuité du temps, de la volatilité et du prix de l'actif sous-jacent. Il y'a, donc, un compromis à faire dans le choix de ce paramètre.

On a remarqué à travers des simulations que quand  $N$  devient très grand ou très petit la valeur de  $C$  augmente, considérablement. De même lorsque les pas du prix du sous-jacent et de la volatilité deviennent, relativement, petits, la valeur de l'option solution du schéma diverge. On est amené, à cet effet, à considérer des pas du maillage, suffisamment, grands.

On procède au calcul de la valeur de l'option pour chaque couple  $\Delta S$  et  $\Delta \sigma$ , en faisant varier :  $\Delta S$  de 550 à 2050, par pas de 100, et  $\Delta \sigma$  de 0.05 à 0.15, par pas de 0.01, avec comme paramètre, le nombre de pas du maillage  $N$  qui prend les valeurs 10, 20, 30, 40, 50 et 60. Cette simulation a permis de représenter la valeur de l'option en fonction du pas du prix du sous-jacent et du pas de la volatilité. La surface correspondante, est donnée dans le graphique 3-D (figure 44), pour un nombre de période  $N$  égal à 10 :

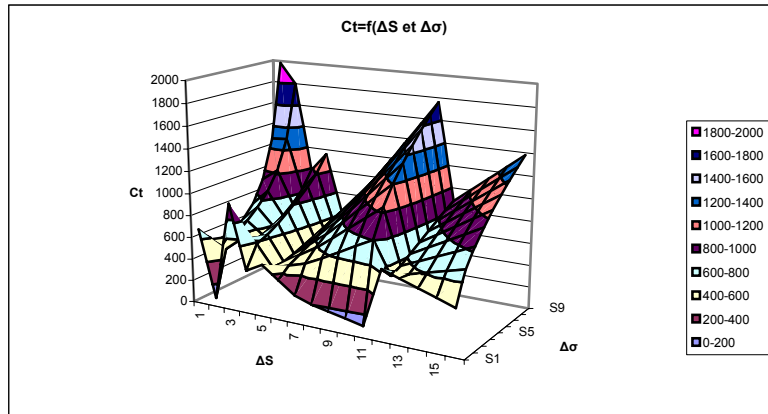


Figure 44 : Surface : Valeur de l’option calculée avec le modèle à volatilité stochastique en fonction des pas du prix du sous-jacent et de la volatilité (N=10 )

On a confirmé, à travers un grand nombre de simulations, que pour des grandes valeurs comme pour des petites valeurs de N, la valeur de l’option devient quasi-infinie. C’est aussi la même constatation pour  $\Delta S$  et  $\Delta \sigma$ . Entre les valeurs extrêmes de ces pas du maillage, les valeurs de l’option se trouvent dans une plage où la valeur de l’option est plus ou moins constante et surtout à un niveau acceptable, si on la compare par rapport à la valeur du marché ou déterminée par les simulations de Monte Carlo.

En prenant les courbes intersection de cette surface, avec les plans ( $P_n$ ) (tel que le pas de la volatilité est constant égal à :  $\Delta \sigma_n = 0.07 + 0.01 * n$  ;  $0 \leq n \leq 8$ ), on obtient les courbes représentées, dans la figure 45.

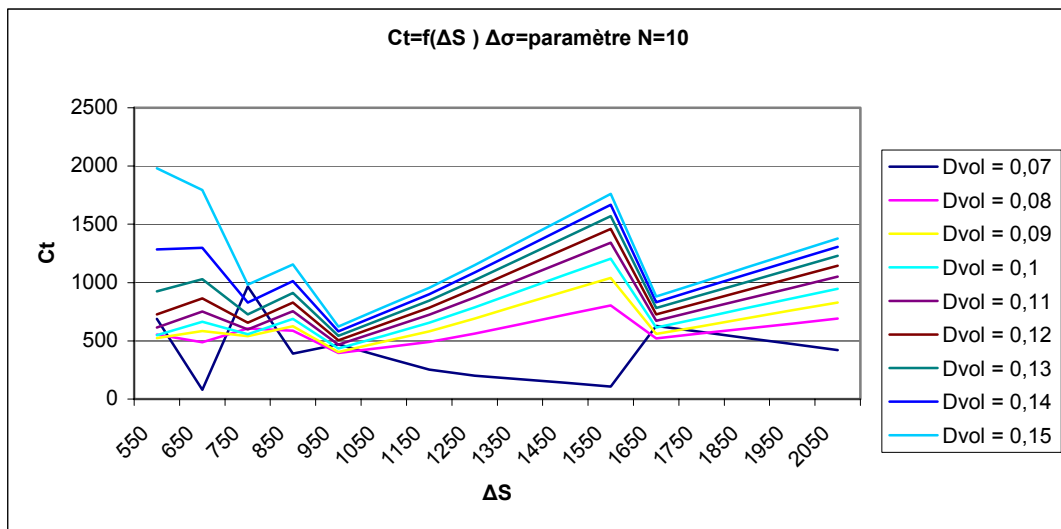


Figure 45 : Trace de la surface valeur de l’option en fonction des pas du sous-jacent et de la volatilité dans les plans ( $P_n$ ) de la volatilité ; N=10

On remarque que la courbe  $\Delta\sigma = 0.07$  varie, en sens inverse avec les autres courbes. On remarque, également, que toutes les courbes passent par des quasi-points fixes quelle que soit la valeur du paramètre  $\Delta\sigma$ . Ces pseudo-points fixes correspondent quasiment à un même niveau de la valeur de l'option (dans le cas présent une valeur qui avoisine 500).

Les traces de la surface dans les plans  $(Q_n)$  (tel que le pas du sous-jacent est constant et égal à  $\Delta S = 550 + 100 * m$  ;  $0 \leq m \leq 15$ ), sont des courbes  $C_t = f(\Delta\sigma)$  qui sont représentées dans le graphique 46.

On remarque, sur ce graphique, que toutes les courbes passent par un quasi-point fixe quelle que soit la valeur du paramètre  $\Delta S$  qui avoisine  $C_t = 500$ .

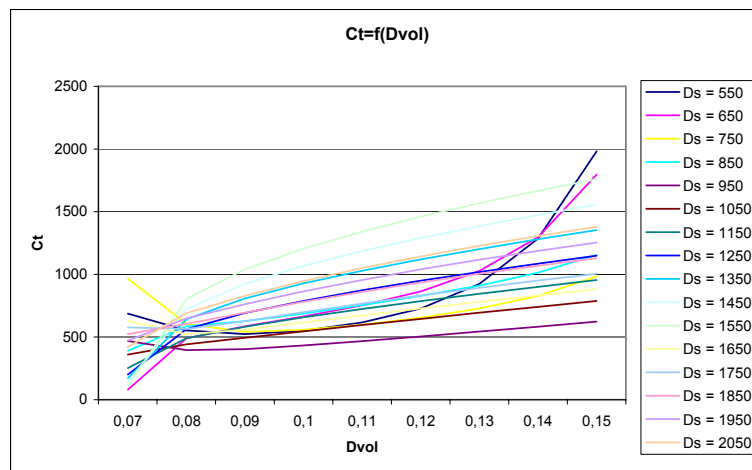


Figure 46 : Trace de la surface : valeur de l'option en fonction des pas du sous-jacent et de la volatilité dans les plans  $(Q_n)$  du prix du sous-jacent;  $N=10$

De même si on fait varier  $N$  de 10 à 20 par pas de 5, on remarque que la courbe  $C_t = f(\Delta S)$  garde la même allure comme le montre la figure 47.

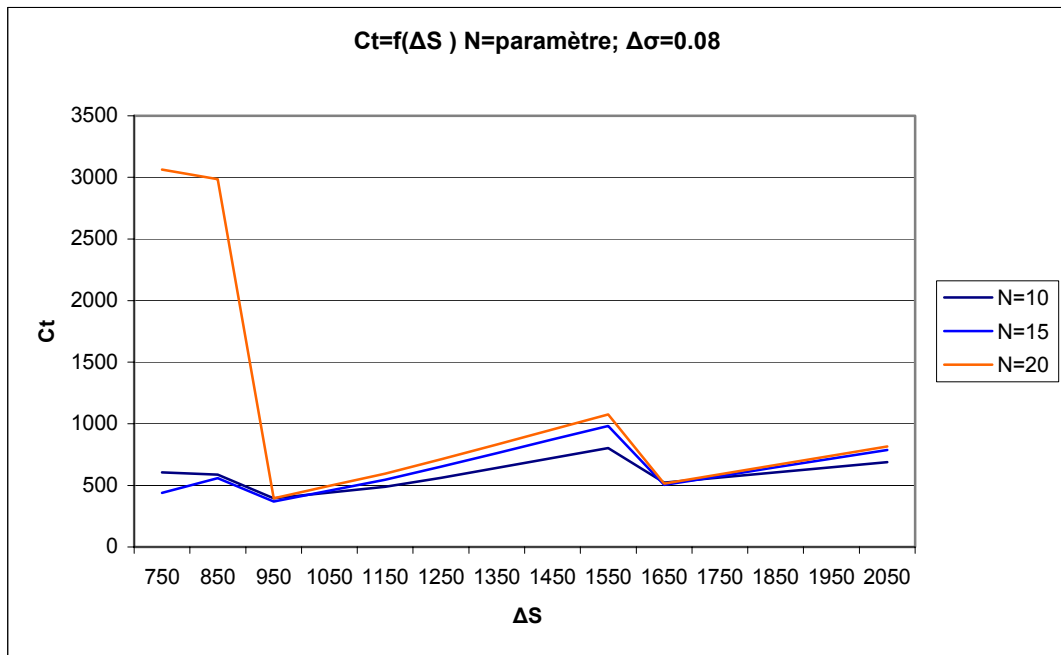


Figure 47 : Trace de la surface : valeur de l'option en fonction des pas du sous-jacent pour un nombre de pas N=10, 15 et 20 et pour un pas de la volatilité égal à 0,08

On remarque sur ce graphique, que les courbes  $C_t=f(\Delta S)$  ont la même allure que celles de la figure 45 et la figure 46. De plus, elles passent par les mêmes points fixes (au voisinage de  $C_t=500$ ) quel que soit N. La courbe N=10 est préférée à celle correspondante à N=15 parce qu'on obtient le même résultat avec moins de calcul. Elle est préférée à celle de N=20 compte tenu du moindre calcul mais aussi vue l'allure de la courbe au voisinage du point ( $\Delta S =950$ ,  $C_t= 395,498$ ). Nous considérons pour la suite un nombre de périodes N=10.

Sur une autre observation de la base journalière, en faisant varier les plages et le pas du maillage de  $\Delta S$  et  $\Delta\sigma$ , on obtient la même valeur de l'option au niveau des points fixes, autrement dit, ils restent invariants. Par contre, en considérant  $\Delta S < S/N$  et  $\Delta\sigma < \sigma/N$ , nous obtenons des valeurs de l'option quasi-infinies.

Faute de connaissance de la solution théorique et de l'erreur de troncature, un raisonnement purement inductif nous amène à conclure que la valeur de l'option doit correspondre au minimum de  $C_t$  qui n'est autre que la valeur correspondante aux quasi-points fixes. Ainsi, les valeurs des paramètres  $\Delta S$  et

$\Delta\sigma$  et  $N$  sont tel qu'ils doivent correspondre à ces points fixes, soit  $\Delta S = 950$ ,  $\Delta\sigma = 0.08$  et  $N=10$ . La valeur de l'option, dans ce cas, est :  $C_t = 395,498$ .

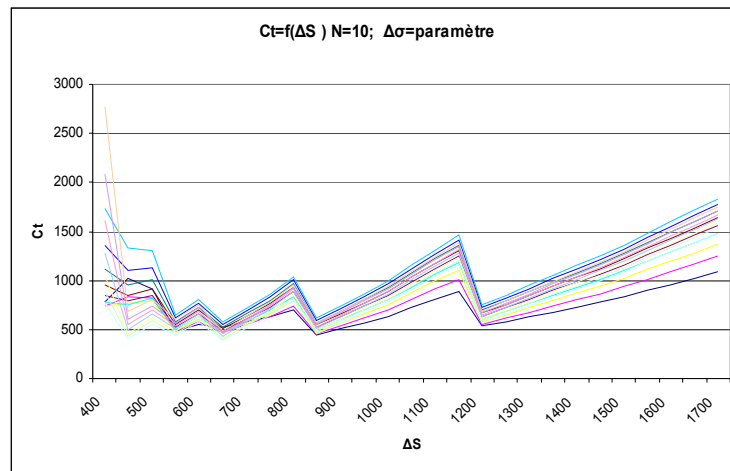


Figure 48 : Trace de la surface valeur de l'option en fonction des pas du sous-jacent et de la volatilité dans les plans ( $P_n$ ) de la volatilité ;  $N=10$ ,  $\Delta\sigma$  variant de 0.065 à 0.14 par pas de 0.005 ; observation n°65 du contrat C2950 tel que  $S=2893,64$ ,  $E=2950$ ,  $T-t=278$ ,  $Volimp=0,1616$ ,  $C=205$ .

Le critère de la valeur moyenne peut être plus précis, cependant, le critère du minimum est plus simple et au niveau des calculs. De plus, pour calculer une moyenne, il faut définir au préalable l'intervalle de calcul. La valeur moyenne dépend, étroitement, du choix de l'intervalle, qui ne peut être défini suivant des critères objectifs.

Pour la suite, on détermine, pour chaque contrat de la base journalière, les pas des variables considérées avec la même méthodologie, en se basant sur une seule observation, avec une volatilité suivant un mouvement Brownien ( $q=cte$ ). Pour les différents contrats choisis de la base journalière, on obtient les valeurs résumées dans le tableau 31.

En considérant ces valeurs des pas, déterminés, à partir d'une seule observation, on calcule la valeur de l'option pour toutes les observations des contrats précités.

Base journalière	N	$\Delta S$	$\Delta\sigma$
C2800	10	1100	0,085
C2950	10	650	0,115
C3100	10	550	0,12
C3250	10	700	0,125
C4000	10	900	0,1

Tableau 31 : Pas du temps (nombre de périodes N), pas du prix du sous-jacent  $\Delta S$  et pas de la volatilité  $\Delta\sigma$ , déterminés, à partir d'une observation de chaque contrat de la base journalière.

Le graphique suivant représente la courbe de la valeur de l'option pour l'ensemble des observations du contrat C4000.

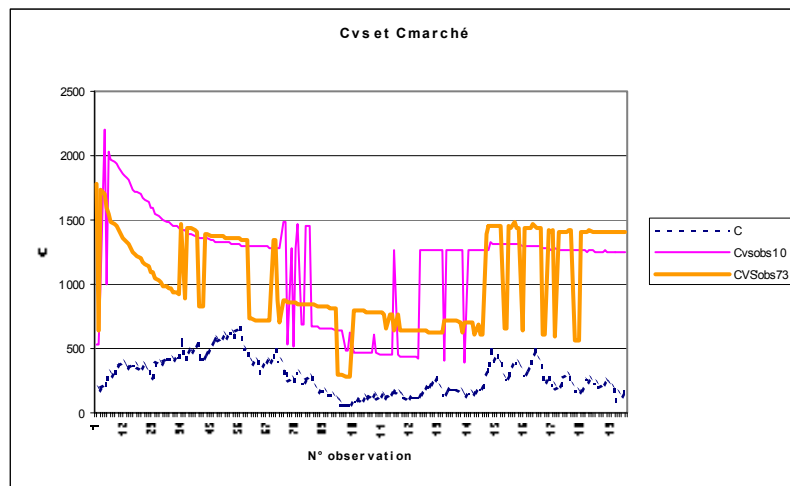


Figure 49 : valeur de marché de l'option et sa valeur déterminée par le modèle à volatilité stochastique en déterminant les pas du maillage, à partir de l'observation 10, puis, à partir de l'observation 73, du contrat C4000 de la base journalière.

Ce graphique suscite deux observations :

- La courbe de la valeur de l'option (volatilité stochastique) calibrée avec l'observation 10 est différente de celle calibrée sur l'observation 73. Tout simplement, parce que les calibrages ne mènent pas vers les mêmes valeurs des pas de la volatilité et du prix du sous-jacent.
- Ces deux courbes présentent des sauts qui n'ont aucune raison d'être. En effet, pour des observations voisines du point de vue des différentes variables, on trouve des écarts très importants au niveau de la valeur de l'option. Ceci est dû à la grande sensibilité de la valeur de l'option aux pas de la volatilité et du prix du sous-jacent.



Ces deux remarques conduisent à ne pas se contenter de déterminer les pas de la volatilité et du prix du sous-jacent, par calibrage sur une seule observation. Bien au contraire, on est tenté de les déterminer observation par observation, afin de calculer les valeurs respectives de l'option.

En guise de conclusion, trois remarques peuvent être faites:

- La valeur de l'option avec le modèle à volatilité stochastique correspond à un quasi-point fixe.
- Tous les points fixes ont, quasiment, la même valeur de  $C_t$ .
- La valeur de  $C_t$  correspondant aux points fixes correspond à un minimum.

Ces trois remarques nous permettent de conclure que la valeur de l'option, pour chaque observation, correspond au minimum des valeurs de l'option calculées en faisant varier le pas de la volatilité et le pas du prix du sous-jacent,  $N$  étant fixé à 10. Seulement, il faut prendre en considération, que des courbes, évoluant en sens inverse, peuvent fausser le résultat, comme c'est le cas dans la figure 45.

Il faut définir, au préalable, la plage des pas du prix du sous-jacent et de la volatilité,  $\Delta S$  et  $\Delta \sigma$ , sur laquelle on va calculer la valeur minimale du prix de l'option. Elle doit correspondre à une zone plate du prix de l'option, autrement dit, une zone sur laquelle, la valeur de l'option varie peu.

La valeur de l'option ne peut être, ni inférieure à sa valeur intrinsèque, ni supérieure au prix du sous-jacent, pour un instant donné. Ainsi, les pas de la volatilité et du prix du sous-jacent sont donnés par l'équation :

$$\min_{\Delta S, \Delta \sigma} C(\Delta S, \Delta \sigma)$$

sous la condition :  $S > C(\Delta S, \Delta \sigma) > \text{Max}(S - E; 0)$  (algorithme 1)

La détermination de ce minimum est facilitée par le fait que la valeur de l'option, relative aux quasi-points fixes est le minimum de toutes les courbes quelle que soit la valeur du paramètre pas de la volatilité. La détermination de ce minimum (algorithme 2) se fait donc en deux phases :

- détermination du minimum relatif à la courbe  $C_t=f(\Delta S)$  pour un  $\Delta\sigma$  fixé, soit  $\Delta S_0$  la valeur qui correspond à ce minimum
- détermination du minimum relatif à la courbe  $C_t=f(\Delta\sigma)$ , le pas du prix du sous-jacent étant fixé à  $\Delta S_0$  :

Soit :

$$\min_{\Delta S} C(\Delta S, \Delta\sigma_{initial})$$

$$\text{sous la condition : } S > C(\Delta S, \Delta\sigma_{initial}) > \text{Max}(S - E; 0)$$

avec  $\Delta S_0$  la valeur du pas du prix du sous-jacent qui correspond au minimum de la valeur de l'option, par rapport au pas de la volatilité.

On détermine le minimum de la valeur de l'option  $C$  par rapport à  $\Delta\sigma$ , en prenant le pas du prix du sous-jacent  $\Delta S = \Delta S_0$ . En définitive, la valeur de l'option est  $C^*$  donné par l'équation suivante :

$$C^* = \min_{\Delta\sigma} C(\Delta S_0, \Delta\sigma) \text{ sous la condition } S > C(\Delta S_0, \Delta\sigma) > \text{Max}(S - E; 0)$$

Bien entendu, le temps de calcul n'est plus le même, puisque avec l'algorithme 2, il faut compter un temps d'exécution de quelques secondes alors qu'avec l'algorithme 1, il est de l'ordre de 20 minutes, pour un fichier d'environ 250 observations.

L'application de l'algorithme 2 au contrat C4000 a donné les résultats de la figure 50. On remarque, sur ce graphique, une corrélation quasi-parfaite entre la courbe du marché et celle du modèle à volatilité stochastique. Si on fait la liaison avec le graphique de la volatilité implicite, on remarque que plus le rapport : volatilité de la volatilité/volatilité est faible plus l'écart entre les deux courbes est grand et vice versa.

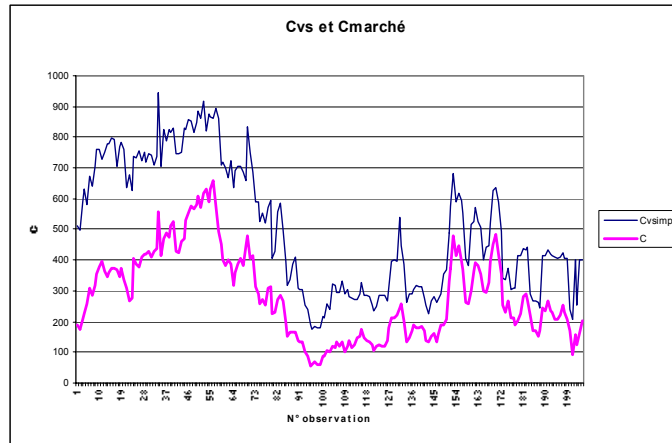


Figure 50 : Valeur de l'option sur le marché et valeur déterminée avec le modèle à volatilité stochastique, en considérant, observation par observation, la valeur  $C^*$ , correspondant au minimum (contrat C4000 de la base journalière).

A noter que, pour tous ces calculs, on a considéré la volatilité de la volatilité comme constante, égale à l'écart type de la différentielle de la volatilité. Ceci peut s'expliquer par le fait que, comparée aux valeurs faibles de la volatilité de la volatilité, la valeur de l'option est surévaluée puisqu'elle est fonction croissante de la volatilité de la volatilité, par conséquent le modèle amplifie l'écart entre la valeur de l'option par le modèle à volatilité stochastique et la valeur de l'option sur le marché. Le raisonnement contraire peut être appliqué aux observations avec forte volatilité de la volatilité, autrement dit l'option est sous-évaluée par le modèle puisqu'on est dans une plage où la volatilité de la volatilité est nettement supérieure à la moyenne. Pour les observations dont la volatilité de la volatilité est proche de la moyenne, l'option n'est ni sous-évaluée ni surévaluée.

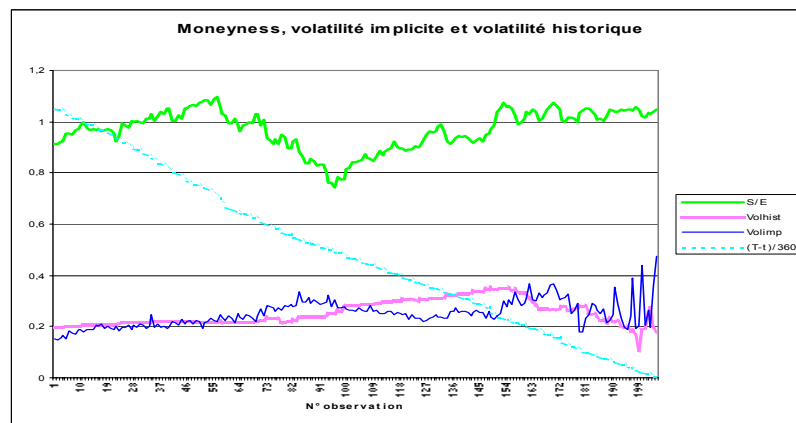


Figure 51 : Série de la volatilité implicite relative au contrat C4000 de la base journalière

Tous ces résultats ont été relatifs à des simulations, concernant la base journalière, en considérant la volatilité implicite avec un mouvement Brownien déterminé à partir de l'ensemble de la base. Avec de nombreuses simulations, ces résultats ont pu être généralisés aux cas suivants :

- que la base soit intraday ou journalière
- que la volatilité est historique ou implicite
- que la dynamique de la volatilité est un processus Brownien ou le processus empirique
- Quelle que soit l'observation et quelle que soit la moneyness

Cependant, pour la base intraday, en utilisant un processus empirique pour la volatilité implicite, déterminée à partir de l'ensemble de la base, le modèle a donné des valeurs quasi-infinies, quel que soient le pas de la volatilité et le pas du prix du sous-jacent, ainsi que le nombre de pas. De même, pour les contrats de la base journalière, on trouve des valeurs quasi-infinies lorsqu'on considère un processus empirique de la volatilité implicite déterminé, à partir d'un contrat d'option.

A la lumière de ces constatations, et ne connaissant, ni la solution exacte de l'équation différentielle à dérivée partielle (3.1.2-12), ni l'erreur de troncature, une démarche inductive a été jugée nécessaire pour trouver une méthode afin de déterminer la solution du schéma numérique de cette équation. Dans un temps futur, il va falloir approfondir l'analyse et démontrer, théoriquement, ce résultat. Ce résultat peut être comparé à celui résultant de la simulation de Monte Carlo, dont le développement fait l'objet de la section 3.4.

Financièrement parlant, ces résultats sont d'autant plus motivés par le fait que déjà, en considérant le minimum, le niveau de l'option reste en parfaite corrélation avec le prix de l'option sur le marché.

En conclusion, la valeur de l'option, relative au modèle à volatilité stochastique, est déterminée, par l'algorithme Hopscotch (Gourlay 1970), conjugué avec l'algorithme 2 précités. Le profil des courbes trouvées est plutôt réconfortant dans la mesure où il suit le mouvement du prix du marché de l'option.

### **3.3.5 Résultats du modèle à volatilité stochastique (l'algorithme « Hopscotch »)**

En utilisant l'algorithme précité, on cherche à comparer les différents modèles à volatilité stochastique en discutant les choix suivants :

- Volatilité implicite ou volatilité historique ?
- Quel processus de la volatilité faut-il considérer ?
- Faut-il estimer les paramètres de la dynamique de la volatilité à partir d'un contrat ou à partir de l'ensemble de la base ?
- Les modèles basés sur des données intraday ont-ils des performances meilleures que ceux basés sur les données journalières ?

Par ailleurs, on cherche à comparer les résultats trouvés avec les résultats théoriques trouvés par Heston (1993) et à étudier l'effet du coefficient de corrélation entre et le prix du sous-jacent et la volatilité, ainsi que la volatilité de la volatilité sur le prix de l'option.

Dans un premier temps, il va falloir tester l'algorithme précité (de Hopscotch), sur le modèle de Black & Scholes.

#### **3.3.5.1 Test de l'algorithme par rapport au modèle de Black & Scholes**

L'algorithme Hopscotch, conjugué avec l'algorithme 2, a été programmé pour déterminer la valeur de l'option, avec volatilité stochastique. Le test du programme, en question, a été fait, sur le modèle de Black & Scholes, pour le schéma numérique, aussi bien avec que sans changement de variables (cf §3.1.4). Ce test consiste à remplacer dans le programme informatique les

paramètres de la dynamique de la volatilité, à avoir le drift et la volatilité de la volatilité, par zéro.

L'algorithme Hopscotch, avec changement de variables dans l'équation différentielle (3.1.2-12), a été appliqué à la première observation du contrat C4000, défini par les données suivantes :

<b>E</b>	<b>C<sub>t</sub></b>	<b>S<sub>t</sub></b>	<b>T-t</b>	<b>Vol imp</b>
4000	189,61	3661,63	379	0,1512

Le domaine considéré, du prix du sous-jacent et la volatilité, à l'échéance T, est défini par :

$$S_t - \alpha.E < S_T < \alpha.E$$

$$(1-\beta)\sigma_t < \sigma_T < \beta\sigma_t \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes}$$

Les résultats de ces calculs sont illustrés dans le graphique 52. On note sur ce graphique, que l'algorithme converge vers une valeur de l'option autour de 145, alors que la valeur de l'option sur le marché est de 189,61. En fait, cette valeur ne doit pas être comparée, par rapport à la valeur du marché de l'option, mais plutôt à CBS(T1) qui correspond à la valeur de l'option, donnée par le modèle de Black & Scholes, en considérant le même diviseur de la durée de vie résiduelle de l'option, aussi bien pour la volatilité que pour le taux d'intérêt.

Ceci, parce que l'algorithme suppose le même diviseur du temps à l'échéance, pour la volatilité et pour le taux d'intérêt, soit 365. La valeur de CBS(T1) dans ce cas est égale à 143,3611.

Ainsi, on vérifie bien que l'algorithme donne, à peu près, la même valeur que le modèle de Black & Scholes. Plus la valeur de  $\alpha$  augmente plus la valeur moyenne de l'option calculée est grande, comme illustré dans les graphiques 52 et 53.

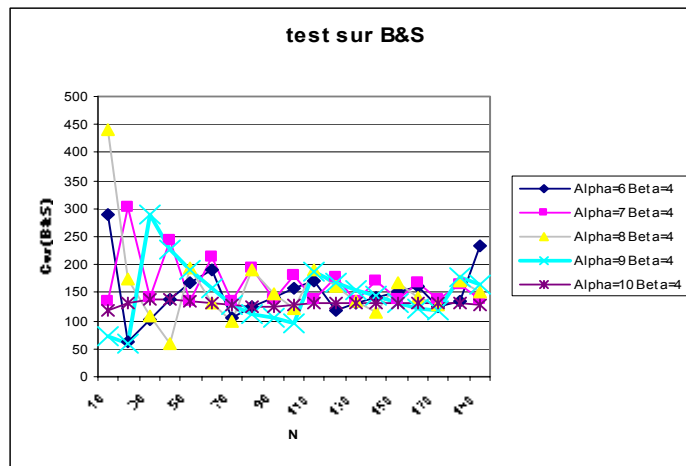


Figure 52 : Valeur de l’option calculée à partir du modèle à volatilité stochastique, en fonction du nombre de périodes, dans le cas ou  $D=0$  et  $q=0$  (Black & Scholes) pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$

Le biais, entre l’algorithme de calcul et le modèle de Black & Scholes peut être expliqué, entre autre, par le fait que les limites du domaine ont été réduites de l’infini vers des valeurs finies.

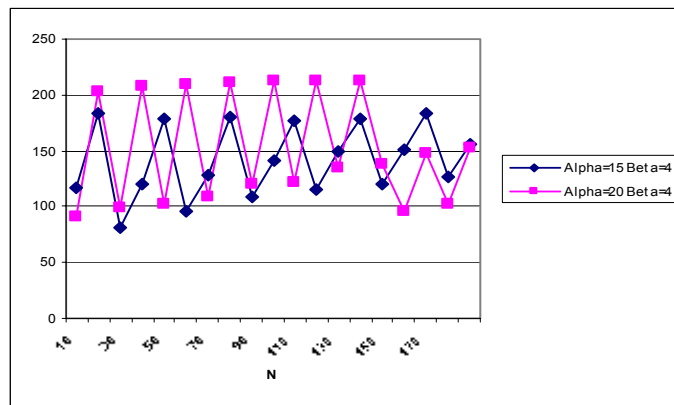


Figure 53: Valeur de l’option, calculée, à partir du modèle à volatilité stochastique, en fonction du nombre de périodes, dans le cas où  $D=0$  et  $q=0$  (Black & Scholes) pour des valeurs élevées de  $\alpha$ .

La valeur de l’option calculée par le modèle avec des paramètres nuls de la volatilité est donnée dans le graphique 54.

Par ailleurs, pour chaque valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  il existe un  $N$  à partir duquel la valeur de l’option augmente, brusquement, vers des valeurs quasi-infinies et, donc, la valeur de l’option diverge. A priori, on peut démontrer qu’au-delà d’un

certain nombre de périodes critique  $N^*$ , le schéma devient instable et, par conséquent, diverge, dans le cas, où les paramètres, liés à la volatilité, sont nuls.

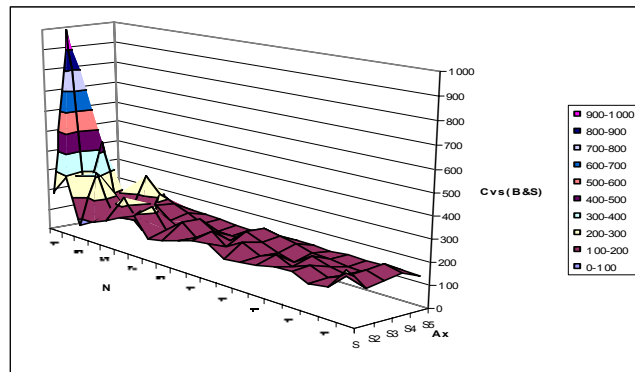


Figure 54 : Convergence du modèle à volatilité stochastique, appliqué au cas de Black & Scholes (drift et volatilité de la volatilité sont nuls :  $D=0$  et  $q=0$ )

Ainsi, la valeur de l'option doit être calculée, comme une moyenne des valeurs de l'option pour des grandes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  et pour les différentes valeurs de  $N$  inférieures à  $N^*$ .

### 3.3.5.2 Résultats relatifs à la base intraday

Pour le calcul de la valeur de l'option, par le modèle à volatilité stochastique, dans le cas de la base intraday, on a considéré la volatilité implicite avec un processus Brownien dont les paramètres ont été déterminés sur l'ensemble de la base. Ces paramètres sont le drift réel ( $D=0,0991$ ), la volatilité de la volatilité ( $q=0,3462$ ) et le coefficient de corrélation avec le mouvement du prix du sous-jacent ( $\rho = -0,08435$ ). En ce qui concerne les autres dynamiques de la volatilité, aussi bien implicite qu'historique, l'algorithme a divergé. Ceci explique que pour la base intraday, on se limite à la volatilité implicite comme type de la volatilité et au processus Brownien comme processus de la volatilité.

Pour le contrat 1P, en considérant que la volatilité suit un mouvement Brownien, le prix de l'option donné par le modèle à volatilité stochastique  $Cvs$ , est illustré dans le graphique 55, en comparaison avec la valeur corrigée de l'option sur le marché CBS(T1), en fonction du numéro d'observation puis de la moneyness.



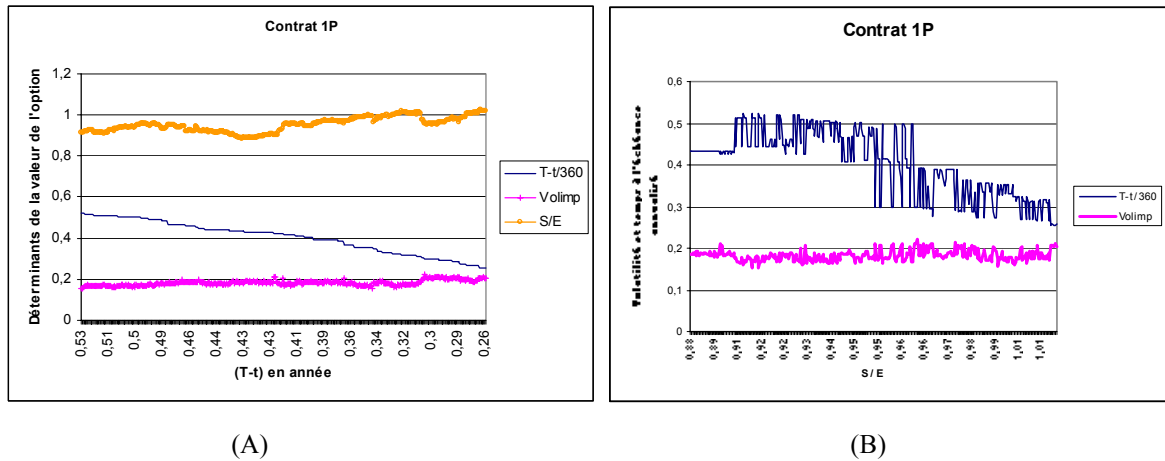


Figure 55: Déterminants de la valeur de l'option (contrat 1P).  
 (A) : en fonction du N° de l'observation  
 (B) : en fonction de la moneyness

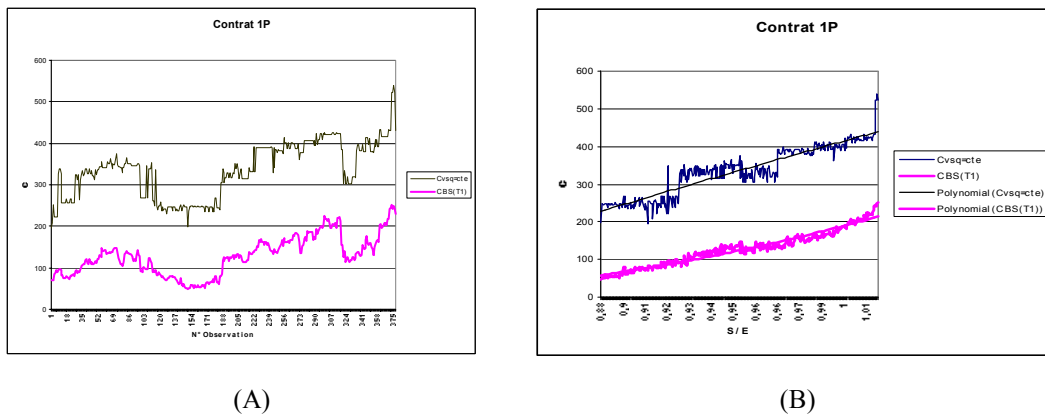


Figure 56 : Valeur de l'option, sur le marché pour le contrat 1P de la base intraday, et valeur de l'option, calculée par le modèle à volatilité stochastique (volatilité suit un mouvement Brownien). (A) : Valeur de l'option fonction N° de l'observation (contrat 1P)  
 (B) : Valeur de l'option en fonction de la « moneyness » (contrat 1P)  
 $D=0,0991$  ;  $q=0,3462$  et  $\rho=-0,248$

Manifestement, dans le cas du contrat 1P, la valeur de l'option relative au modèle à volatilité stochastique Cvs est supérieure à celle du modèle de Black & Scholes, quelle que soit la parité de l'option comprise entre 0,88 et 1,02.

On remarque, que les deux prix sont fortement corrélés et à un facteur amplificateur près, ils évoluent au même rythme que la moneyness, puisque la volatilité est quasi-constante. Justement, la valeur de l'option serait celle du modèle de Black & Scholes si on avait considéré la dynamique de la volatilité,

sur le contrat 1P, et non sur l'ensemble de la base intraday. Ceci explique, en partie, l'écart entre les deux courbes. Pour le contrat 1P, le coefficient de corrélation, entre les deux séries de valeurs de l'option Cvs et CBS(T1), est de 0,944, celui entre la moneyness et Cvs est de 0,9326 et celui entre la moneyness et CBS(T1) est de 0,9834.

Pour les différents contrats de la base intraday, on a noté de même une forte corrélation entre les valeurs Cvs et CBS(T1), ainsi que la moneyness. Le coefficient de corrélation, ainsi que l'écart quadratique moyen entre la valeur de l'option déterminée par le modèle à volatilité stochastique Cvs et son prix du marché CBS(T1) est résumé dans le tableau 32.

	1N	1O	1P	1Q	1S	9I	9J	9K	9L
$\rho$ (CBS(T1);Cvs)	0,954	0,927	0,944	0,923	0,781	0,966	0,953	0,897	0,824
MSE (CBS(T1);Cvs)	214,814	219,139	209,306	188,659	141,055	285,963	260,267	252,827	241,427
C BS(T1)moy	199,470	164,496	127,859	84,440	30,699	171,756	123,325	72,084	38,176
MSE/CBS(T1)moy	107,692%	133,218%	163,701%	223,423%	459,485%	166,494%	211,041%	350,742%	632,413%

Tableau 32: Coefficient de corrélation, écart quadratique moyen MSE entre la valeur de l'option CBS(T<sub>1</sub>) et la valeur calculée par le modèle à volatilité stochastique pour les différents contrats de la base intraday. Valeur moyenne de l'option sur le marché et le MSE rapporté à cette valeur moyenne pour tous les contrats précités ; Dynamique de la volatilité= mouvement Brownien, déterminé, à partir de l'ensemble de la base.  $\rho=-0,248$

Ces résultats confirment la forte corrélation entre le prix de l'option donné, par le modèle à volatilité stochastique Cvs, et celui du marché, corrigé CBS(T1). On a pu vérifier que, dans tous les cas, la valeur Cvs est toujours supérieure à celle de CBS(T1).

En ce qui concerne l'écart quadratique moyen MSE entre Cvs et CBS(T1), il est, quasiment, le même pour tous les contrats d'une même classe. Il est de l'ordre de 200 pour les contrats de la classe 1, alors qu'il est de l'ordre de 250 pour les contrats de la classe 9. Son ratio avec le prix moyen du marché de l'option CBS(T1) est d'autant plus important que ce prix moyen est faible. Ce ratio atteint la valeur de 6,32, pour le contrat 9L, qui présente une valeur moyenne de CBS(T1), plutôt faible, égale à environ 38.

Ceci peut s'expliquer, entre autre, par le fait qu'on a considéré pour la volatilité un mouvement Brownien, déterminé à partir de l'ensemble de la base, et non à partir des contrats respectifs.

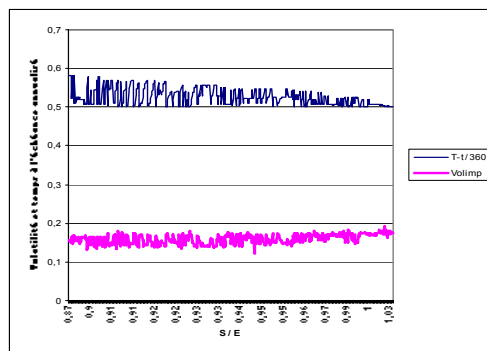
A noter qu'en considérant aussi bien la volatilité implicite que la volatilité historique, pour le processus empirique, déterminé à partir de l'ensemble de la base intraday, on a obtenu des valeurs de l'option quasi-infinies et ceci quels que soient les pas des maillages. Ainsi, dans le cas de la base intraday, on ne peut pas faire la comparaison entre les résultats relatifs à la volatilité implicite et ceux relatifs à la volatilité historique. De même, on ne peut pas faire la comparaison entre les différentes dynamiques de la volatilité, ainsi que les échantillons pour l'estimation de leurs paramètres (base ou contrat).

Par ailleurs, pour comparer ces résultats avec ceux théoriques de Heston (1993), il va falloir tracer la courbe de la valeur de l'option, à un instant donné (ou de son écart par rapport à la référence CBS(T1)), en fonction de la moneyness. Or, pour un instant  $t$  donné, on ne dispose pas de suffisamment de donnée pour pouvoir tracer de telles courbes. Ceci nous conduit à considérer un intervalle de temps  $\Delta t$ , dont le choix doit être le résultat d'un compromis : d'une part, il doit être petit pour que l'hypothèse «  $t=\text{constante}$  » soit aussi proche de la réalité. D'autre part, il doit être, suffisamment, grand pour avoir le maximum d'observations pour tracer les courbes précitées. Ceci nous conduit à choisir un intervalle de temps  $\Delta t$  de l'ordre de 0,1 avec un temps à l'échéance maximum, de manière à avoir une variation, relative de cette variable, aussi faible, que possible.

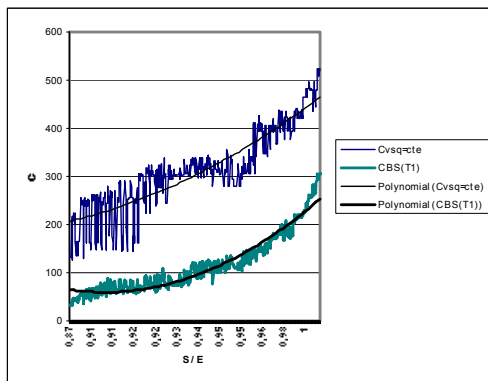
Sur un plan pratique, ceci nécessite de faire deux tris des données de la base. Un premier tri sur le temps à l'échéance, permet de localiser les données à sélectionner qui sont les dernières observations, après ce tri, correspondantes à un intervalle de temps  $\Delta t=0,1$ . Un tri de ces observations sélectionnées, sur la moneyness, permet de tracer la courbe de la valeur de l'option en fonction de la

moneyness, pour une faible variation du temps à l'échéance. Une telle courbe permet de comparer les résultats avec ceux de Heston (1993).

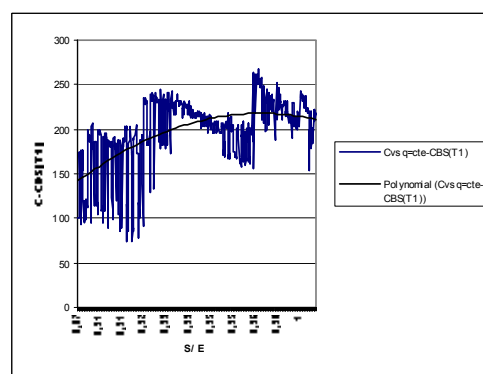
On a appliqué cette méthode sur les différentes observations des différents contrats choisis, de la classe 1 de la base intraday, réunis. (à savoir 1N, 1O, 1P, 1Q et 1S). On a considéré une plage du temps à l'échéance de 0,5 à 0,581, ce qui a donné une parité comprise entre 0,866 et 1,035. Les courbes de la valeur de l'option en fonction de la moneyness sont illustrées dans la figure 57.



(A)



(B)



(C)

Figure 57 : (A) Déterminants de la valeur de l'option  
 (B) Valeur de l'option Cvs et CBS(T1) en fonction de la moneyness  
 (C) Ecart entre Cvs et la référence CBS(T1), en fonction de la moneyness  
 Pour tous les contrats de classe 1, de la base intraday réunis. Mouvement Brownien de la volatilité implicite pour Cvs :  $D=0,0991$  ;  $q=0,3462$  et  $p=-0,248$ .  $0,866 < S/E < 1,036$  et  $0,5 < T-t < 0,581$ (en années).

On voit bien, sur la figure 57(A) que le temps à l'échéance est stationnaire autour d'une moyenne de 0,54 environ. La volatilité est, également, quasiment, stationnaire.

Vu la faible corrélation, entre les mouvements du prix du sous-jacent et de la volatilité, on peut dire ces deux variables sont proches de l'indépendance. Dans un tel cas, Heston (1993), a trouvé que pour des options proches de la monnaie (entre 0,92 et 1,08), le modèle à volatilité stochastique donne des valeurs inférieures à celles du modèle de Black & Scholes. Or, d'après les figures 57(B) et 57(C), on remarque qu'on a obtenu le résultat inverse pour une plage de moneyness, se situant entre 0,866 et 1,035. Par contre, on trouve une certaine conformité si on considère que le coefficient de corrélation est négatif bien que faible, puisque, pour des options dans la monnaie, le modèle à volatilité stochastique donne des valeurs plus élevées que celles du modèle de Black & Scholes et vice versa.

L'algorithme de Hopscotch conjugué avec l'algorithme 2 (cf paragraphe précédent) semble avoir donné des résultats conformes du point de vue de l'allure et de la convexité de la courbe de la valeur de l'option. Cependant, l'écart avec la référence CBS(T1) méritent un approfondissement et une vérification par rapport à un autre algorithme de calcul. Surtout que les résultats trouvés ne sont pas en totale conformité par rapport à ceux de Heston (1993).

### **3.3.5.3 Résultats relatifs à la base journalière**

Alors que pour la base intraday, la valeur de l'option relative au modèle à volatilité stochastique, n'a pu être calculée que pour la volatilité implicite, en considérant un mouvement brownien, dans le cas de la base journalière, la valeur de l'option a été calculée, aussi bien pour la volatilité implicite que pour la volatilité historique, en considérant les trois dynamiques de la volatilité, et ce pour tous les contrats choisis de la base journalière. Ces modèles à volatilité stochastique, résumés dans le tableau 33, diffèrent par le type de volatilité (historique ou implicite), par le processus caractérisant la dynamique de la volatilité considérée, et par l'ensemble des observations, à partir desquelles, sont estimés les paramètres de cette dynamique (ensemble de la base ou par contrat).

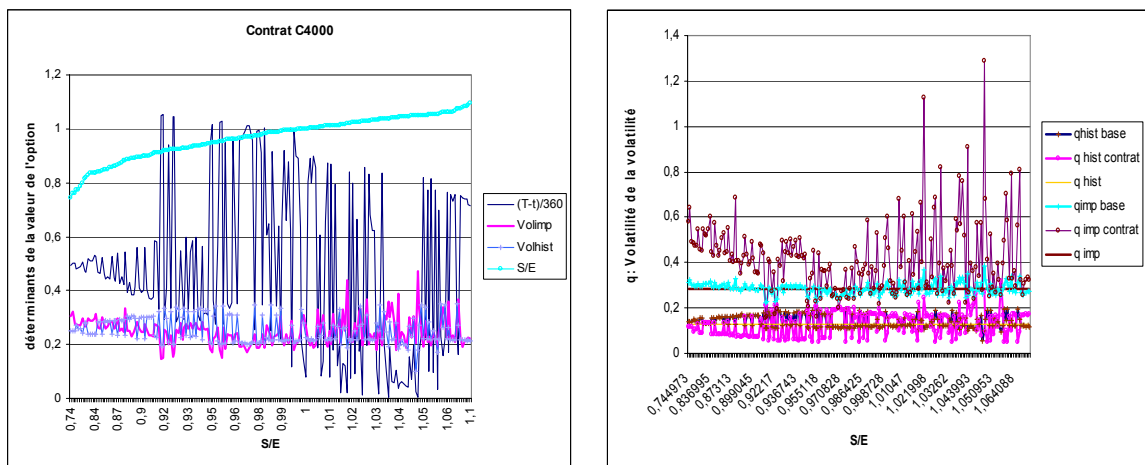
Base journalière	Dynamique empirique de la volatilité		Mouvement Brownien
	Ensemble de la base	Par contrat	Ensemble de la base
Volatilité implicite	<i>CVSqimpbase</i>	-	<i>CVSimp</i>
Volatilité historique	<i>Cvqhist base</i>	<i>Cvqhist contrat</i>	<i>CVShist</i>

Tableau 33: Désignation des différents modèles à volatilité stochastique, relatifs à la base journalière.

A noter qu'en utilisant la dynamique empirique de la volatilité implicite sur un contrat déterminé, on a trouvé des valeurs de l'option trop grandes qui dénotent d'une divergence du schéma et ceci quels que soient les pas des maillages. On a eu la même constatation avec le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, comme processus de la volatilité. Ceci explique l'absence de ces modèles du tableau 33.

Par ailleurs, il est bien évident que le calcul de la valeur de l'option par le modèle de Black & Scholes, en utilisant la volatilité implicite, donne le prix de l'option sur le marché. C'est ce qui explique que pour ce modèle on a considéré, également, la volatilité historique. Ce dernier modèle est désigné par B&Shist.

Le graphique 58 représente les déterminants de la valeur de l'option relatifs au contrat C4000 de la base journalière.



(A) (B)  
Figure 58 : Déterminants de la valeur de l'option relatifs au contrat C4000 de la base journalière. (A): Série de la Moneyness (S/E), de la volatilité historique « volhist » et de la volatilité implicite « volimp » et de la durée de vie résiduelle « (T-t)/360 », (B) : série de la volatilité de la volatilité historique et implicite,

Sur le graphique 58(A) on remarque que :

- Les séries de la volatilité historique et la volatilité implicite sont très proches, surtout pour les valeurs supérieures de la moneyness.
- Le temps à l'échéance oscille, très fortement, autour d'un trend négatif, dans le sens d'une moneyness croissante.

Sur le graphique 58(B) on remarque que :

- Aussi bien pour la volatilité implicite, que pour la volatilité historique, la volatilité de la volatilité, relative au mouvement Brownien ( $q_{imp}$  et  $q_{hist}$ ), qui est constante, est la moyenne de celle relative au processus empirique dont les paramètres sont déterminés, à partir de l'ensemble de la base ( $q_{impbase}$  et  $q_{histbase}$ ).
- On note pour les volatilités de la volatilité l'ordre suivant :  
 $0 < q_{hist\ contrat} < q_{hist} < q_{hist\ base} < q_{impbase} < q_{impcontrat}$   
(La volatilité de la volatilité est nulle pour le modèle de Black & Scholes).
- Si la volatilité de la volatilité «  $q_{histcontrat}$  » et «  $q_{histbase}$  » se situe à un même niveau «  $q_{impcontrat}$  » se situe à un niveau nettement supérieur à «  $q_{impbase}$  ».

La valeur de l'option pour ces différents modèles, est représentée dans le graphique 59.

Dans cette plage de la moneyness qui s'étend de 0,74 à 1,06, on remarque que tous les modèles donnent des valeurs de l'option supérieures à la référence CBS(T1). Les modèles à volatilité implicite stochastique donnent les valeurs les plus élevées (mouvement brownien et processus empirique dont les paramètres sont déterminés à partir de l'ensemble de la base). Au voisinage d'une parité de 0,74, les courbes se rapprochent. Au-delà, il y'a un éloignement de ces courbes.

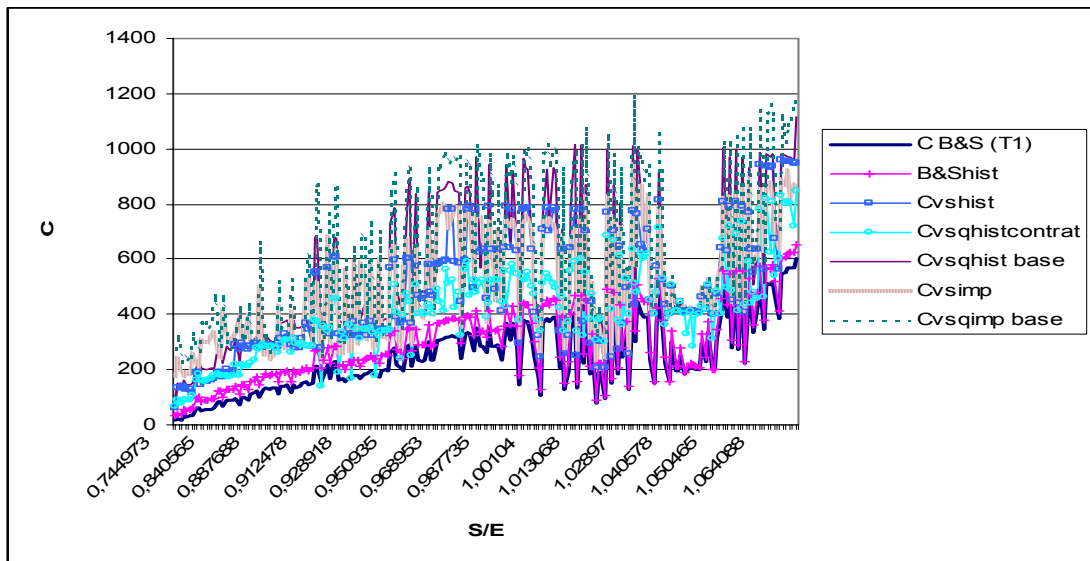


Figure 59 : Valeur de l'option pour les différents modèles à volatilité stochastique, par utilisation de l'algorithme de Hopscotch (contrat C4000 de la base journalière)  $\rho=0.14038$ .

La densité des informations, sur ce graphique, nous conduit à le décomposer suivant les graphiques de la figure 60.

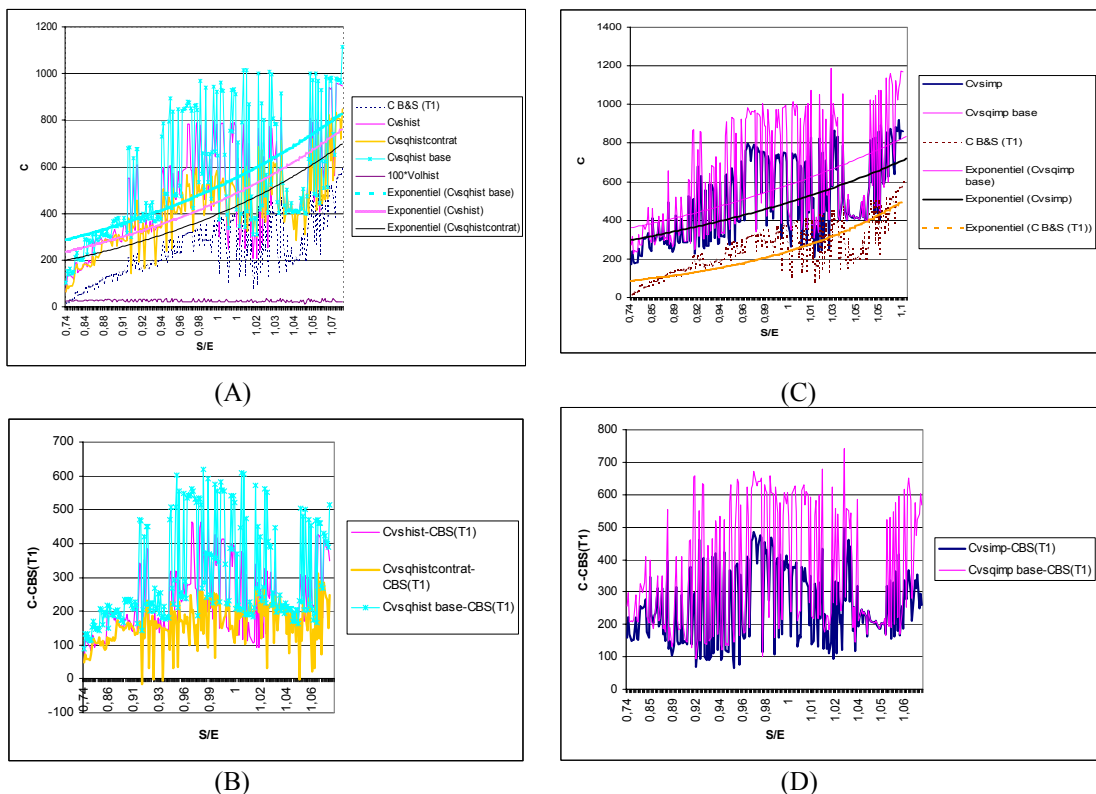


Figure 60 : Valeur de l'option calculée par les différents modèles à volatilité stochastique avec L'algorithme Hopscotch, et le modèle de Black & Scholes contrat de la base journalière C4000 ;  $\rho=0.14038$ .



En considérant les modèles à volatilité historique stochastique, on peut faire les remarques suivantes :

- Il n'y a quasiment pas de recoupement entre ces différentes courbes. A partir des figures 60(A) et 60(B), on peut dire qu'il y'a un ordre qui se maintient sur l'ensemble des observations :  $CBS(T1) < Cvsqhist\ contrat < Cvshist < CVSqhist$ . Cet ordre peut se mettre en parallèle avec la comparaison de la volatilité de la volatilité, déterminée à partir du graphique 58(B) et qui est tel que :  $0 < qhist\ contrat < qhist < qhist\ base$  (la volatilité de la volatilité étant nulle pour le modèle de Black & Scholes).
- Les écarts entre les valeurs données par les différents modèles varient en fonction des écarts de la volatilité de la volatilité. Quand les volatilités de la volatilité sont proches, ces courbes donnent les mêmes valeurs de l'option.
- Pour un même niveau de la volatilité, la dynamique de la volatilité, déterminée à partir d'un contrat donné permet de donner une valeur de l'option plus proche de la référence que celle déterminée, à partir de l'ensemble de la base.

D'après les graphiques 60(C) et 60(D), ces mêmes conclusions restent valables dans le cas de la volatilité implicite. Le mouvement Brownien donne une valeur de l'option toujours inférieure à celle du processus empirique. Les deux modèles à volatilité stochastiques correspondants donnent des valeurs toujours supérieures à celle de la référence CBS(T1).

A priori, par souci d'une bonne prédictibilité, les paramètres de la dynamique de la volatilité doivent être déterminés, à partir de l'ensemble de la base, et non pas par contrat. Dans ce contexte, si on compare les modèles à volatilité stochastiques basés sur la volatilité historique avec ceux basés sur la volatilité implicite (figure 61), on remarque que les premiers donnent des valeurs de l'option inférieures à celles données par les deuxièmes. Ceci est normal, puisque le niveau de la volatilité de la volatilité implicite est supérieur à celui de

la volatilité de la volatilité historique. Tous les deux donnent des valeurs supérieures à la référence CBS(T1).

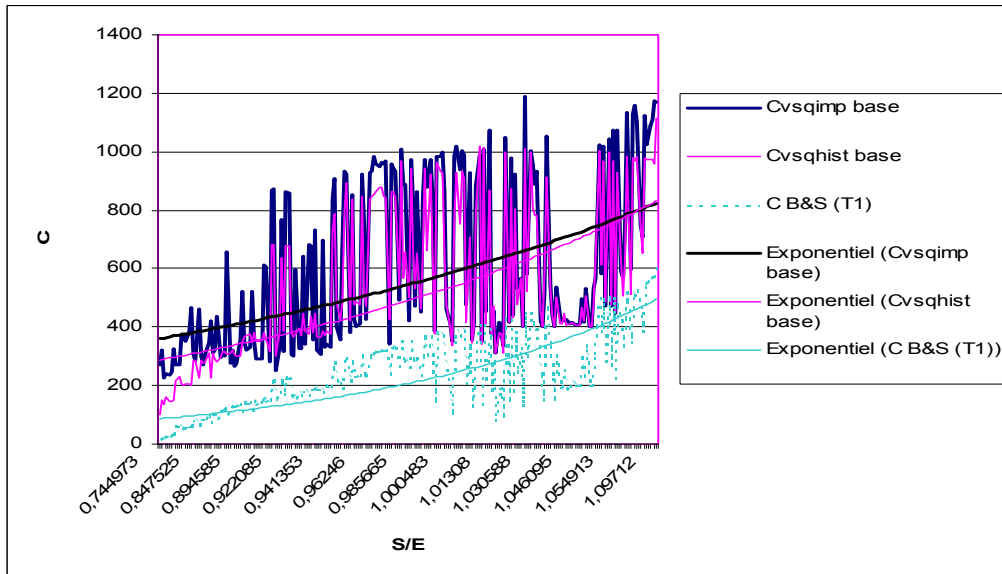


Figure 61 : Comparaison entre la volatilité historique et la volatilité implicite. Modèles à volatilité stochastique (algorithme de Hopscotch), dynamique empirique de la volatilité dont les paramètres sont déterminés à partir de l'ensemble de la base journalière contrat C4000 ;  $\rho = 0.14038$ .

Les courbes correspondantes sont quasiment confondues pour des valeurs de la moneyness proche de l'unité, alors que l'écart se creuse à mesure que les valeurs de la moneyness s'écartent de l'unité. Ceci peut être vérifié en se focalisant sur les courbes du lissage exponentiel. Ces courbes se coupent, pour les deux modèles à volatilité stochastique au niveau d'une parité de 1,07 environ.

Compte tenu de la même valeur utilisée du coefficient de corrélation, entre le prix du sous-jacent et la volatilité, ces conclusions sont à mettre en parallèle avec la figure 58(B) où la volatilité de la volatilité implicite est supérieure à celle de la volatilité historique. Ceci explique l'écart entre les courbes de la figure 61.

Pour mesurer l'effet du coefficient de corrélation, entre le prix du sous-jacent et la volatilité, on calcule les écarts absolus et relatifs entre les valeurs de l'option

données par le modèle utilisant un coefficient de corrélation ( $\rho_1 = 0,14038$ ) et le modèle utilisant le vrai coefficient de corrélation ( $\rho_2 = -0,03629$ ).

Les écarts des valeurs de l'option, générées par les deux modèles sont donnés, pour tous les contrats de la base journalière, dans le tableau 34, sous forme d'écart absolu et d'écart relatif.

MSE(Ro ;Ro réel)	<b>C2800</b>	<b>C2950</b>	<b>C3100</b>	<b>C3250</b>	<b>C4000</b>
<b>MSE(C(<math>\rho_1</math>);C(<math>\rho_2</math>))</b>	19,3095	17,2479	12,5741	12,3468	19,9042
<b>C(<math>\rho_1</math>) moyen</b>	433,9207	371,6033	299,7503	235,6054	505,0776
<b>MSE(C(<math>\rho_1</math>);C(<math>\rho_2</math>))/(C (<math>\rho_1</math>) moyen)</b>	0,0445	0,0464	0,0419	0,0524	0,0394

Tableau 34 : Erreur quadratique moyenne MSE( $\rho_1$ ;  $\rho_2$ ) entre les valeurs de l'option par les modèles à volatilité stochastique C( $\rho_1 = 0,14038$ ) et C( $\rho_2 = -0,03629$ ), la volatilité suit un mouvement Brownien ; Base journalière.

On peut conclure que, l'écart entre ces deux valeurs, relativement, proches des coefficients de corrélation, engendre un écart relatif au niveau de la valeur de l'option de l'ordre de 5%, quel que soit le contrat de la base journalière considéré.

Pour comparer les performances des différents modèles à volatilité stochastique, par rapport à la référence CBS(T1), en se basant sur l'ensemble des contrats de la base journalière, on s'appuie sur les critères suivants :

- Corrélation de la valeur de l'option, donné par un modèle, par rapport à la référence CBS(T1) :  $\rho(\text{Modèle}, \text{CBS}(T_1))$ .
- Erreur quadratique moyenne entre la valeur de l'option, donné par un modèle, et la référence CBS(T1) : MSE.
- Rapport entre cette valeur quadratique et la valeur moyenne C<sub>moy</sub> de CBS(T1), pour un contrat donné : MSE/C<sub>moy</sub>.

Le tableau 35 donne les coefficients de corrélation des valeurs de l'option, données par les différents modèles, avec le prix de l'option de référence CBS(T1).

$\rho(\text{Modèle}, \text{CBS}(T_1))$	<b>C2800</b>	<b>C2950</b>	<b>C3100</b>	<b>C3250</b>	<b>C4000</b>
<i>imp (q=cte)</i>	0,9287	0,8271	0,8008	0,7527	0,8778
<i>hist (q=cte)</i>	0,9573	0,9259	0,9249	0,9173	0,9541
<i>qhist contrat</i>	0,9568	0,9628	0,9575	0,9482	0,9331
<i>qhist base</i>	0,9382	0,9232	0,9191	0,9088	0,9159
<i>qimp base</i>	0,4042	0,3683	0,6089	0,6058	0,8424
<i>B&amp;S(hist)</i>	0,9991	0,997	0,9954	0,9933	0,9948
<i>Marché</i>	0,9839	0,9775	0,9748	0,9663	0,9523

Tableau 35 : Coefficient de corrélation entre la valeur de marché de l'option et les valeurs de l'option calculées par les différents modèles (volatilité stochastique, et modèle de Black & Scholes : pour les différents contrats de la base journalière.  $\rho = 0.14038$ .

Le tableau 36 donne l'écart quadratique moyen entre les valeurs de l'option, données par les différents modèles, et le prix de référence de l'option CBS(T1).

MSE	<b>C2800</b>	<b>C2950</b>	<b>C3100</b>	<b>C3250</b>	<b>C4000</b>
<i>imp</i>	228,011	216,572	194,012	173,353	281,637
<i>hist</i>	188,737	177,688	153,637	130,409	249,675
<i>qhistcontrat</i>	206,18	201,875	173,086	145,437	174,995
<i>qhist base</i>	255,159	231,261	205,654	177,719	332,609
<i>qimp base</i>	416,483	359,309	295,853	258,644	410,074
<i>B&amp;Shist</i>	28,558	28,947	27,768	24,597	48,425
<i>marché</i>	38,2	36,078	31,191	26,134	56,315

Tableau 36 : Ecart quadratique moyen entre les valeurs de l'option calculées par les différents modèles (volatilité stochastique, modèle de Black & Scholes) et la valeur de référence de l'option, pour les différents contrats de la base journalière.

Le prix de référence moyen de l'option, par contrat, est  $C_{\text{moy}}$ , donné par le tableau 37.

	<b>C2800</b>	<b>C2950</b>	<b>C3100</b>	<b>C3250</b>	<b>C4000</b>
<b><math>C_{\text{moy}}</math></b>	210,76111	162,5877	116,6713218	76,00387981	248,43134

Tableau 37 : Prix moyen de l'option sur le marché, relatifs aux différents contrats de la base journalière

L'écart quadratique moyen, en pourcentage de la valeur moyenne du prix de l'option, sur un contrat, est donné dans le tableau 38.

A la lumière des résultats de ces tableaux, on remarque une corrélation très forte, entre les valeurs de l'option des différents modèles et la valeur de l'option de référence. Cependant, en considérant une dynamique empirique de la volatilité implicite, déterminée à partir de l'ensemble de la base journalière, on remarque un coefficient de corrélation relativement moins élevé, voire faible dans le cas des contrats C2800 et C2950.

<i>MSE/Cmoy</i>	<i>C2800</i>	<i>C2950</i>	<i>C3100</i>	<i>C3250</i>	<i>C4000</i>
<i>imp</i>	108,18%	133,20%	166,29%	228,08%	113,37%
<i>hist</i>	89,55%	109,29%	131,68%	171,58%	100,50%
<i>qhistcontrat</i>	97,83%	124,16%	148,35%	191,35%	70,44%
<i>qhist base</i>	121,07%	142,24%	176,27%	233,83%	133,88%
<i>qimp base</i>	197,61%	220,99%	253,58%	340,30%	165,07%
<i>B&amp;Shist</i>	13,55%	17,80%	23,80%	32,36%	19,49%
<i>marché</i>	18,12%	22,19%	26,73%	34,38%	22,67%

Tableau 38 :Ecart quadratique moyen entre les valeurs de l'option calculées par les différents modèles (modèle à volatilité stochastique et modèle de Black & Scholes) et la valeur de référence, pour les différents contrats de la base journalière, rapporté au prix moyen de la valeur de l'option de référence.

En fait, dans le cas où on considère, pour la volatilité implicite un processus empirique de la volatilité, déterminé à partir du contrat considéré, le résultat devrait être meilleur. Seulement, dans ce cas, le modèle n'a pas convergé puisque l'algorithme de Hopscotch a donné des valeurs quasi-infinies et ceci quels que soient les pas du maillage.

Dans le cas de la volatilité historique, on voit bien que la corrélation, entre la valeur de l'option, calculée par le modèle à volatilité stochastique et celle du marché, est plus forte lorsqu'on considère un processus empirique déterminé à partir du contrat, que dans le cas, où ce processus est déterminé à partir de l'ensemble de la base. De plus, l'écart quadratique moyen en pourcentage du prix de référence moyen de l'option est plus faible dans le premier cas que dans le second.

La dynamique de la volatilité, à partir d'un contrat, engendre une surévaluation de l'option supérieure à celle relative à une dynamique déterminée à partir de l'ensemble de la base. La première tient compte des spécificités des paramètres du modèle pour un contrat donné, alors que la seconde permet un pouvoir prédictif meilleur. Comme il s'agit de prévoir le mouvement de la volatilité dans le futur, l'estimation des paramètres de ce mouvement sur l'ensemble de la base est, certainement, plus fiable, même si la volatilité a un comportement spécifique, pendant la durée d'un contrat donné.

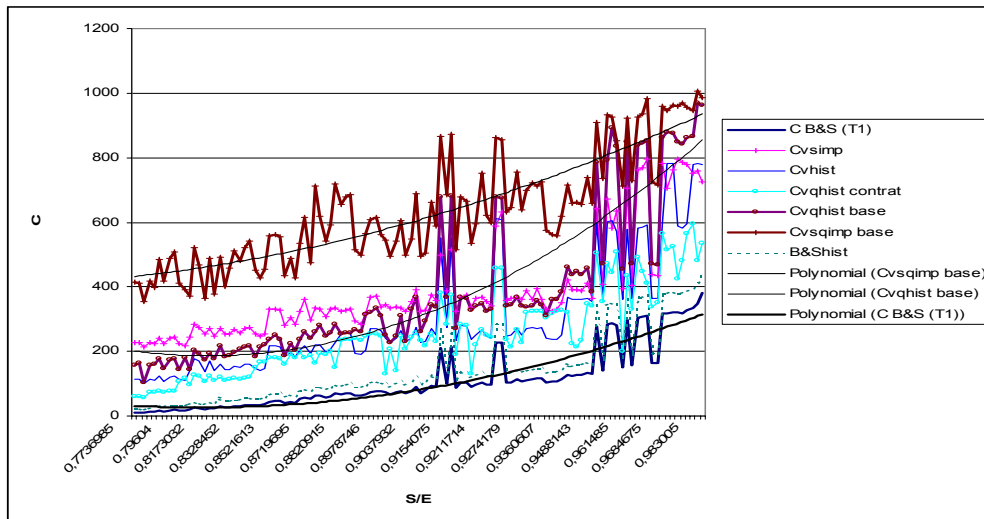
En conclusion, à la lumière des données présentées dans les tableaux précédents, on peut dire que :

- En ce qui concerne la volatilité historique le mouvement brownien donne l'écart quadratique avec la référence CBS(T1) le plus faible, suivi par le processus empirique, avec des paramètres déterminés à partir du contrat et enfin par le processus empirique, avec des paramètres déterminés à partir de l'ensemble de la base. Ces trois modèles ont des niveaux équivalents de la corrélation de la valeur de l'option correspondante avec la référence, supérieur dans tous les cas à 0,9.
- En ce qui concerne la volatilité implicite, le niveau de la corrélation est assez élevé pour le processus brownien, alors qu'il est plutôt faible dans le cas du processus empirique (déterminé à partir de l'ensemble de la base journalière). Comme dans le cas de la volatilité historique, le modèle basé sur un processus empirique déterminé à partir de l'ensemble de la base présente un écart quadratique plus élevé que celui du modèle basé sur un processus brownien de la volatilité.
- Si on compare les modèles à volatilité implicite avec les modèles à volatilité historique, on remarque que, dans le cas du mouvement brownien, le premier présente un écart quadratique moyen plus grand que celui du second, alors qu'il présente un niveau de corrélation avec la référence CBS(T1) plus faible. Dans le cas du processus empirique de la volatilité, déterminé, à partir de l'ensemble de la base, on retrouve les mêmes résultats que dans le cas du mouvement Brownien, sauf que la différence entre les écarts quadratiques moyens est plus grande et que la corrélation est plutôt faible dans le cas de la volatilité implicite.
- Toutes ces conclusions restent les mêmes au vu du troisième critère MSE/Cmoy.

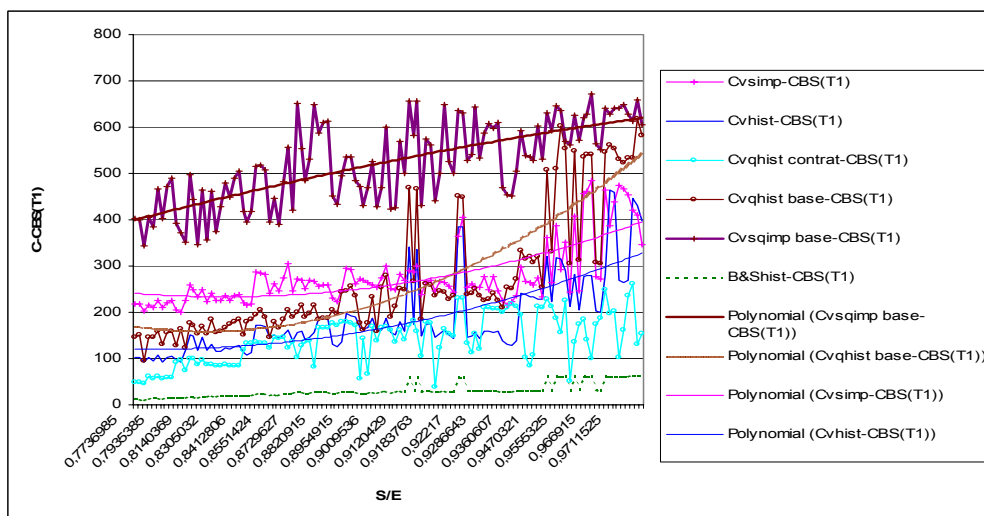
Ces comparaisons entre ces différents modèles à volatilité stochastique étant faites, une comparaison avec la théorie s'avère nécessaire. Ces résultats sont, donc, à comparer avec ceux de Heston(1993). Pour se faire, et afin de présenter

la courbe de la valeur de l'option en fonction de la moneyness pour un instant donné, on procède comme précisé dans le paragraphe précédent. Ainsi, on considère un premier tri suivant le temps à d'échéance, puis un tri suivant la moneyness, après avoir choisi une plage de temps où la variation relative du temps à l'échéance reste, raisonnablement, faible.

Pour ces différents modèles à volatilité stochastique (algorithme de Hopscotch), les courbes de la valeur de l'option et de sa différence avec la référence CBS(T1), en fonction de la parité, sont représentées dans les graphiques 63(A) et 63(B).



(A)



(B)

Figure 62 : (A) Courbes de la valeur de l'option, en fonction de la parité, (B) courbe de la différence de la valeur de l'option avec la référence CBS(T1), en fonction de la parité.  $\rho=0.14038$

Deux paramètres rentrent en jeu dans l'interprétation de ces courbes : la volatilité de la volatilité et le coefficient de corrélation  $\rho$  entre le prix du sous-jacent et la volatilité de la volatilité. Le premier agit sur le coefficient d'aplatissement de la densité de probabilité du sous-jacent, alors que le second agit sur le coefficient d'asymétrie de celle-ci.

A la lumière des résultats des graphiques 63(A) et 63(B), on remarque que :

- Tous les modèles à volatilité stochastique utilisés surévaluent la valeur de l'option, par rapport aux modèles de référence CBS(T1), pour une parité de l'option comprise entre 0,77 et 0,99.
- Ce sont les modèles à volatilité historique stochastique qui surévaluent le moins la valeur de l'option, par rapport à la référence CBS(T1).
- Les modèles avec processus empirique de la volatilité surévaluent plus la valeur de l'option, par rapport à la référence CBS(T1), dans l'intervalle de parité précité, aussi bien pour la volatilité implicite que pour la volatilité historique. L'écart de cette surévaluation est plus prononcé, dans le cas de la volatilité implicite.
- Le modèle avec processus empirique de la volatilité implicite est celui qui surévalue le plus la valeur de l'option par rapport à CBS(T1).

Il est à noter que, pour tous ces modèles, on a considéré la vraie valeur du coefficient de corrélation  $\rho$  estimée à  $-0,03629$ , ce qui revient à dire que le prix du sous-jacent et la volatilité de la volatilité sont quasi-indépendants. Dans ce cas, Heston (1993) prévoit que le modèle à volatilité stochastique sous-évalue l'option par rapport au modèle de Black & Scholes, pour des parités comprises dans un intervalle  $I=[1\pm 0,8]$  dont les bornes sont indépendantes de la volatilité de la volatilité. Cette sous-évaluation est d'autant plus importante que la volatilité de la volatilité est grande. (cf figure 70)

Nos résultats sont inverses à ceux trouvés par Heston (1993), pour des intervalles de parités communs. Ces résultats dépendent bien sûr des



dynamiques adoptées, pour les deux variables d'état. Si pour le prix du sous-jacent, on a adopté le même processus que Heston, le processus adopté pour la volatilité est différent. En fait, Heston (1993) a considéré un processus "mean-reverting" du carré de la volatilité, qui est le suivant :

$$dv = \kappa(\theta - v)dt + \alpha\sqrt{v}dZ$$

Où  $\kappa$ ,  $\alpha$  et  $\theta$  sont des constantes,  $v$  est le carré de la volatilité et  $dZ$  est un processus de Wiener-Lévy.

De plus Heston a considéré que le prix du risque du marché lié à la volatilité est proportionnel à la variable  $v$  qui est le carré de la volatilité, alors qu'on a considéré l'hypothèse que le drift risque neutre est, tout simplement, constant (pas forcément égal au taux de l'actif sans risque, il y'aura égalité si la volatilité est un actif négociable).

La différence au niveau de ces deux hypothèses, peut expliquer, en partie, la différence de nos résultats par rapport à ceux de Heston.

Il est certain que dans cette partie, le calcul de la valeur de l'option, par la résolution de l'équation différentielle à dérivées partielles, en utilisant l'algorithme de Hopscotch, on a fait appel, dans un sens, à une démarche inductive qui nécessite d'être approfondie dans l'avenir. Les résultats donnés par cette démarche de calcul semblent être plausibles. Cependant, ces résultats doivent être vérifiés en faisant appel à un outil plus fiable et plus précis, en l'occurrence la simulation de Monte Carlo, même si elle nécessite un temps de convergence plus long.

### 3.4 RESOLUTION PAR UN RAISONNEMENT RISQUE-NEUTRE : SIMULATION DE MONTE CARLO

#### 3.4.1 *Evaluation d'une option par un raisonnement risque neutre dans le cas où la volatilité est stochastique*

La valeur d'une option européenne  $C_T$ , à la date d'échéance  $T$ , est égale à sa valeur intrinsèque, puisque la valeur temps est nulle, à cet instant. Ainsi, si on désigne par  $S_T$ , la valeur du sous-jacent à l'échéance, et par  $K$  le prix d'exercice de l'option, on peut écrire :

$$C_T = E(\text{Max}(S_T - K; 0)) = \text{Max}(E(S_T) - K; 0)$$

Dans le cas général, selon un raisonnement risque neutre où le taux d'intérêt  $r$  est considéré, comme stochastique, la valeur de l'option  $C_t$ , à l'instant courant  $t$ , est donnée, par l'équation :

$$C_t = e^{-\int_t^T r_0 d\theta} E(C_T) = e^{-\int_t^T r_0 d\theta} \text{Max}(E(S_T) - K; 0)$$

Si on désigne par  $f(S_T, \sigma_T)$  la fonction densité de probabilité jointe du couple, valeur du sous-jacent  $S_T$  et sa volatilité  $\sigma_T$  à l'échéance, on peut écrire :

$$C_t = e^{-\int_t^T r_0 d\theta} \int_K^{+\infty} \int_0^{+\infty} (S_T - K) f(S_T, \sigma_T) dS_T d\sigma_T$$

Soit, en développant, on obtient l'équation :

$$C_t = e^{-\int_t^T r_0 d\theta} \int_K^{+\infty} \int_0^{+\infty} S_T f(S_T, \sigma_T) dS_T d\sigma_T - K e^{-\int_t^T r_0 d\theta} \int_K^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(S_T, \sigma_T) dS_T d\sigma_T$$

La fonction densité de probabilité  $f(S_T, \sigma_T)$  est donnée par les processus de diffusion des deux variables d'état, à savoir la valeur du sous-jacent et sa volatilité. La connaissance de cette fonction est déterminante pour déterminer la valeur de l'option en se basant sur un raisonnement risque-neutre.

Si on suppose que la valeur du sous-jacent suit un mouvement Brownien géométrique, on peut écrire :

$$\text{Ln}(S_T) = \text{Ln}(S_t) + \int_t^T (r_\theta - \frac{\sigma_\theta^2}{2})d\theta + U_1 \int_t^T \sigma_\theta \sqrt{d\theta} \quad \text{avec } U_1 \longrightarrow N(0;1)$$

De même, si la volatilité suit le processus régit par l'équation suivante :

$$d\sigma_t = (\omega_t - \lambda q(\sigma_t))dt + U_2 q(\sigma_t) \sqrt{dt} \quad \text{avec } U_2 \longrightarrow N(0;1)$$

alors, la volatilité à l'échéance est donnée par l'équation suivante :

$$\sigma_T = \sigma_t + \int_t^T (\omega_\theta - \lambda q(\sigma_\theta))d\theta + U_2 \int_t^T q(\sigma_\theta) \sqrt{d\theta}$$

Les deux variables aléatoires  $U_1$  et  $U_2$  qui sont normales centrées réduites, sont corrélées avec un coefficient  $\rho$  supposé constant.

Autant, l'espérance et la variance de la valeur du sous-jacent à l'échéance  $S_T$  ne dépendent pas de celle-ci, autant elles dépendent de  $\sigma_T$ , au même titre que l'espérance et la variance de cette dernière. Ceci veut dire que la densité de probabilité jointe à ces deux variables ne peut être déterminée, facilement, et reste fonction surtout du modèle de la dynamique de la volatilité. Il faut, donc, choisir un modèle de volatilité qui allie la facilité de calcul et la conformité du mouvement du sous-jacent à la réalité.

La difficulté de déterminer, analytiquement, la fonction densité de probabilité jointe du couple  $(S_T, \sigma_T)$ , nous conduit à estimer l'espérance de la valeur de l'option à l'échéance, numériquement. Avec un raisonnement risque-neutre, la méthode numérique la mieux adaptée est la simulation de Monte Carlo.

### **3.4.2 Méthode d'évaluation des options par simulation de Monte-Carlo**

La méthode de Monte Carlo est, numériquement, plus efficace que les autres méthodes numériques, quand il y'a trois variables stochastiques et plus. Ceci parce que le temps alloué pour une simulation de Monte Carlo évolue, pratiquement, linéairement, avec le nombre de variables, alors que pour les

autres méthodes de résolution, le temps de convergence évolue, pratiquement, exponentiellement, avec le nombre de variables.

La valeur de l'option peut être déterminée par la simulation de Monte Carlo, dans la mesure, où la valeur de l'option est égale à la valeur actualisée de l'espérance de la valeur de l'option à l'échéance pour une option européenne.

Soit,  $C_t = e^{-\int_t^T r_0 d\theta} E(C_T)$ , dans le cas, où le taux d'intérêt est stochastique. Dans le cas où le taux d'intérêt est supposé constant, égal à  $r$ , cette équation devient :

$$C_t = e^{-r(T-t)} E(C_T).$$

Ainsi, pour estimer la valeur de  $C_t$  il faut estimer la valeur de  $E(C_T)$ . Puisque, le meilleur estimateur de l'espérance est la moyenne empirique, il va falloir faire un nombre  $M$  de simulations, qui permettent de calculer à chaque fois la valeur de l'option à l'échéance, soit  $C_T^m$  pour la simulation numéro  $m$  ( $1 \leq m \leq M$ ). Au bout des  $M$  simulations,  $E(C_T)$  sera estimée par la moyenne arithmétique :

$$\overline{C_T} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M C_T^m$$

Comme la valeur d'une option européenne, à l'échéance, est égale à sa valeur intrinsèque  $C_T = \text{Max}(S_T - E; 0)$ , il suffit de calculer pour chaque simulation, numéro  $m$ , la valeur du sous-jacent à l'échéance  $S_T^m$ . Ce calcul se fait, en divisant la durée de vie résiduelle de l'option  $(T-t)$ , en  $N$  intervalles du temps, égaux, ayant une durée  $\Delta t = \frac{T-t}{N}$ , puis en calculant la valeur de la volatilité et du sous-jacent à la fin de chaque intervalle de temps. Ce dernier calcul se fera en se basant sur les équations de diffusion de la valeur du sous-jacent et de la volatilité.

Si on désigne par :

$r_t$  : le taux d'intérêt à l'instant  $t$ ,

$\sigma_t$  : la volatilité du sous-jacent à cet même instant  $t$  et

$Z_{1,t}$  : la valeur prise par la variable aléatoire normale centrée réduite  $Z_1$  à cet même instant  $t$ ,

alors, la dynamique du sous-jacent peut s'écrire :  $\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t \sqrt{dt} Z_{1,t}$

En appliquant le lemme d'Itô à  $G(S_t) = \text{Ln}(S_t)$ , cette équation devient :

$$d\text{Ln}(S_t) = \left( r_t - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \sigma_t \sqrt{dt} Z_{1,t}$$

D'autre part, la dynamique de la volatilité peut s'écrire :

$$d\sigma_t = D_t dt + q_t \sqrt{dt} Z_{2,t} \quad (3.4.2-1)$$

où :

$D_t$  est le drift risque-neutre de la volatilité,

$q_t$  est la volatilité de la volatilité à l'instant  $t$  et

$Z_{2,t}$  est la valeur prise par la variable aléatoire normale centrée réduite  $Z_2$  à cet même instant  $t$ .

Le coefficient de corrélation, entre les deux variables aléatoires  $Z_1$  et  $Z_2$ , est constant, égal à  $\rho$ .

L'estimation de la valeur de l'option à l'échéance, pour chacune des simulations, est basée sur la génération des processus  $Z_{1,t}$  et  $Z_{2,t}$ , à chaque pas du temps  $\Delta t$ .

### **3.4.3 Génération des variables aléatoires normales centrées et réduites : Z1 et Z2 :**

Pour estimer les valeurs du sous-jacent et de la volatilité à chacun des  $N$  intervalles du temps, il va falloir générer les variables  $Z_1$  et  $Z_2$ . Or, les machines informatiques ne permettent de générer que des variables aléatoires

indépendantes, suivant des lois uniformes sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ . Il va falloir établir, dans un premier temps, une relation transformant deux variables aléatoires  $U_1$  et  $U_2$  uniformes sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  et indépendantes (gérées par la machine), en deux variables aléatoires  $Z_1$  et  $Z_3$  normales, centrées, réduites et indépendantes. Dans un second temps, on peut déduire  $Z_2$ , à partir de  $Z_1$  et  $Z_3$ , sachant qu'elle est normale centrée, réduite et que son coefficient de corrélation avec  $Z_1$  est constant égal à  $\rho$ . Soit :

$$Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_3 \longrightarrow N(0 ; 1) \quad \text{et} \quad \rho(Z_1; Z_2) = \rho$$

La génération des variables aléatoires normales centrées, réduites et indépendantes se fait à partir de variables aléatoires uniformes sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  et indépendantes, générées par un ordinateur.

Soient :  $U_1 \longrightarrow U[0 ; 1]$

et  $U_2 \longrightarrow U[0 ; 1]$  indépendantes  $\rho(U_1; U_2) = 0$

Deux techniques, entre autres, peuvent être utilisées : l'inversion de la fonction de répartition de la loi normale, ou bien un changement de variables adéquat qui transforme deux variables aléatoires uniformes et indépendantes, en deux variables aléatoires normales centrées, réduites et indépendantes. Etant donné le nombre élevé d'itérations, dans une simulation de Monte Carlo, le temps CPU, nécessaire, pour la transformation est déterminant, dans le choix de la technique à adopter.

#### **3.4.3.1 Inversion de la fonction de répartition de la loi normale**

Une variable aléatoire centrée réduite peut être déduite, à partir d'une loi uniforme sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ , tout simplement, par inversion de la fonction de répartition  $F$  de la loi normale centrée réduite. Ainsi, les variables aléatoires normales centrées, réduites et indépendantes  $Y_1$  et  $Y_2$  peuvent être déduites, à partir du couple de variables indépendantes et uniformes sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ , suivant la transformation :

$$Y_1 = F^{-1}(U_1)$$

$$Y_2 = F^{-1}(U_2)$$

Les variables aléatoires  $Y_1$  et  $Y_2$  sont indépendantes puisque  $U_1$  et  $U_2$  sont elles-mêmes indépendantes.

Cette inversion consomme trop de temps CPU et elle n'est pas recommandée pour une simulation de Monte Carlo, où le nombre d'itérations doit être suffisamment grand pour assurer une bonne précision de calcul.

### 3.4.3.2 Changement de variables

On démontre, également, que le changement de variables suivant :

$$Y_1 = \sqrt{-2\text{Ln}(U_1)}\text{Cos}(2\pi U_2) \longrightarrow N(0 ; 1)$$

$$Y_2 = \sqrt{-2\text{Ln}(U_1)}\text{Sin}(2\pi U_2) \longrightarrow N(0 ; 1)$$

permet de transformer le couple de variables uniformes et indépendantes  $(U_1; U_2)$ , en un couple de variables aléatoires normales centrées et réduites et indépendantes  $(Y_1; Y_2)$ .

En effet, si on désigne par :

$f(u_1 ; u_2)$  la densité jointe au couple  $(U_1 ; U_2)$

$g(y_1 ; y_2)$  la densité jointe au couple  $(Y_1 ; Y_2)$

on a :

$$f(u_1; u_2) = 1 \quad \text{si } (u_1; u_2) \in D_U = [0 ; 1] \times [0 ; 1]$$

$$f(u_1; u_2) = 0 \quad \text{si } (u_1; u_2) \in \overline{D_U}$$

Par le changement de variables :  $(U_1; U_2) \longrightarrow (Y_1; Y_2)$ , le domaine  $D_U$  est transformé en  $\mathbb{R}^2$ . La fonction densité de probabilité du couple  $(Y_1; Y_2)$  se déduit, à partir de celle relative au couple  $(U_1; U_2)$ , à partir de l'équation suivante :

$$g(y_1; y_2) = f(u_1(y_1; y_2); u_2(y_1; y_2)) |J|$$

où

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \text{ est le jacobien relatif à la transformation en question}$$

L'inversion des formules de changement de variables se fait suivant les équations suivantes :

$$Y_1^2 + Y_2^2 = -2\text{Ln}U_1 \quad \Rightarrow \quad U_1 = e^{-\frac{1}{2}(Y_1^2 + Y_2^2)}$$

$$\frac{Y_2^2}{Y_1^2} = \text{tg}(2\pi U_2) \quad \Rightarrow \quad U_2 = \frac{1}{2\pi} \text{Arctg}\left(\frac{Y_2^2}{Y_1^2}\right)$$

A partir de ces équations, on déduit le jacobien relatif, à cette transformation :

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{-y_1 u_1}{2\pi(y_1^2 + y_2^2)} & \frac{-y_2 u_1}{2\pi(y_1^2 + y_2^2)} \\ -y_2 & y_1 \end{vmatrix} = \left| \frac{-u_1}{2\pi} \right| = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)}$$

Ainsi, la fonction densité jointe du couple  $(Y_1; Y_2)$  s'écrit :

$$g(y_1; y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_2^2} = g_{Y_1}(y_1) \cdot g_{Y_2}(y_2)$$

Ainsi, on vérifie, d'une part, que la densité marginale de chacune des variables correspond bien à celle de la loi normale centrée réduite, d'autre part, on vérifie bien que les deux variables  $Y_1$  et  $Y_2$  sont indépendantes puisque la densité jointe est égale au produit des densités marginales, ce qui est une conséquence logique de l'indépendance des variables uniformes tirées  $U_1$  et  $U_2$ .

### 3.4.3.3 Changement de variables permettant un gain en temps CPU

Comme, la simulation de Monte Carlo nécessite un nombre d'itérations élevé, égal au produit du nombre d'intervalles à considérer  $N$ , par le nombre total de simulations  $M$ , tout gain de temps CPU, au niveau d'une itération, permet un



gain significatif, au niveau du temps de calcul global. Pour se faire, il faut éviter, au maximum, l'utilisation des fonctions usuelles qui sont programmées, comme un développement limité à un ordre, défini par la précision de calcul de la machine. C'est, ainsi qu'il faut éviter la génération d'une loi normale centrée réduite à partir d'une loi uniforme, par inversion de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

De plus, le changement de variable étudié ci-dessus, nécessite le calcul de trois fonctions, à savoir, le logarithme népérien, le sinus et le cosinus. Pour ne recourir qu'à la fonction logarithme, il faut transformer  $U_1$  et  $U_2$  en  $V_1$  et  $V_2$ , tel que ces deux dernières variables peuvent jouer le rôle d'un sinus et d'un cosinus, sans que leurs calculs ne nécessitent le recours à des fonctions usuelles. Pour se faire, on prend :

$$V_1 = 2U_1 - 1$$

$$V_2 = 2U_2 - 1$$

$V_1$  et  $V_2$  suivent chacune une loi uniforme sur l'intervalle  $[-1 ; 1]$  et elles sont indépendantes. Elles sont assimilables, respectivement, à un cosinus et à un sinus.

Si on choisit une variable aléatoire  $Z$ , assimilable au carré du module d'un point, situé à l'intérieur du cercle trigonométrique, on peut, alors, écrire :

$$Z = V_1^2 + V_2^2 \quad \text{avec} \quad |Z| \leq 1$$

On démontre, de la même manière que précédemment, que les variables aléatoires  $Z_1$  et  $Z_3$ , définies par les équations (3.4.3-1) et (3.4.3-2), sont normales centrées réduites et indépendantes.

$$Z_1 = V_1 \sqrt{\frac{-2\text{Ln}(Z)}{Z}} = V_1 \sqrt{\frac{-2\text{Ln}(V_1^2 + V_2^2)}{V_1^2 + V_2^2}} \longrightarrow N(0 ; 1) \quad (3.4.3-1)$$

$$Z_3 = V_2 \sqrt{\frac{-2\text{Ln}(Z)}{Z}} = V_2 \sqrt{\frac{-2\text{Ln}(V_1^2 + V_2^2)}{V_1^2 + V_2^2}} \longrightarrow N(0 ; 1) \quad (3.4.3-2)$$

La variable  $Z_1$  sera considérée, pour simuler le mouvement du prix du sous-jacent, alors que la variable aléatoire  $Z_2$ , fonction linéaire de  $Z_1$  et  $Z_3$ , sera considérée pour simuler le mouvement de la volatilité. La variable  $Z_2$  est donnée par l'équation suivante:  $Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_3$

En ce qui concerne la volatilité, avec le processus, régit par l'équation (3.4.2-1), elle peut prendre des valeurs négatives. Pour éviter ce genre de problème, il vaut mieux calculer la volatilité comme l'exponentielle de son logarithme népérien. Soit :  $\sigma_t = e^{\text{Ln}(\sigma_t)}$ . En appliquant le Lemme d'Itô, sur processus de  $G(\sigma_t) = \text{Ln}(\sigma_t)$ , on obtient l'équation suivante :

$$d\text{Ln}(\sigma_t) = \left( \frac{D}{\sigma_t} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{\sigma_t^2} \right) dt + \frac{q}{\sigma_t} Z_{2,t} \sqrt{dt}$$

La volatilité est déterminée, à chaque intervalle de temps, à partir de son logarithme et elle est toujours positive puisqu'elle est une exponentielle. Ainsi, le problème de tomber sur une valeur négative de la volatilité, au cours d'une simulation de Monte Carlo, est résolu.

#### **3.4.4 Algorithme de calcul**

En définitive, le calcul de la valeur de l'option, par simulation de Monte de Carlo (CMC), avec une volatilité stochastique, va se faire suivant l'algorithme suivant:

m = numéro de simulation avec  $1 \leq m \leq M$

M= nombre total de simulations

T= date d'échéance

t=date courante

N=nombre de périodes de temps, séparant l'instant présent et la date d'échéance

$$\Delta t = \frac{T-t}{N} = \text{intervalle de temps relatif à une période}$$

n = numéro de l'intervalle de temps  $1 \leq n \leq N$

Pour m= 1 à M

Pour n = 1 à N

Faire

$$v_1 = 2 * \text{Rnd}() - 1$$

$$v_2 = 2 * \text{Rnd}() - 1$$

$$z = v_1^2 + v_2^2$$

jusqu'à ce que:  $z < 1$

$$z_1 = v_1 \sqrt{\frac{-2 \text{Ln}(z)}{z}}$$

$$z_3 = v_2 \sqrt{\frac{-2 \text{Ln}(z)}{z}}$$

$$z_2 = \rho z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} z_3$$

$$\sigma(n; m) = \sigma(n-1; m) + D(n-1; m) \Delta t + q(n-1; m) \sqrt{\Delta t} z_2(n, m)$$

$$A(n; m) = \left( r - \frac{1}{2} (\sigma(n; m))^2 \right) \Delta t + \sigma(n; m) \sqrt{\Delta t} z_1(n, m)$$

$$S(n; m) = e^{A(n; m)}$$

Next n

$$C(m) = \text{Max}(S(N; m) - E; 0)$$

$$\Sigma C(m) = \Sigma C(m) + C(m)$$

Next m

$$C_{MC} = e^{-r(T-t)} \left( \frac{1}{M} \Sigma C(m) \right)$$

FIN

Pour gagner en temps CPU, il vaut mieux calculer, à chaque pas de temps, les quantités :  $\sigma(n; m) = \sigma(n-1; m) + D(n-1; m)\Delta t + q(n-1; m)\sqrt{\Delta t}z_2(n; m)$

Or, on a :

$$S(N; m) = S(0; m)\text{Exp}\left(r(T-t) - \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^2(n; m) + \sqrt{\Delta t} \sum_{n=1}^N \sigma(n; m)z_1(n; m)\right)$$

A chaque simulation  $m$ , on calcule, les quantités :

$$S_{\sigma}(m) = \sum_{n=1}^N \sigma^2(n; m) \quad \text{et}$$

$$X_{\sigma}(m) = \sum_{n=1}^N \sigma(n; m)z_1(n; m)$$

La valeur du sous-jacent à l'échéance, pour la simulation  $N$ , est donnée par l'équation suivante :

$$S(N; m) = S(0; m)\text{Exp}\left(r(T-t) - \frac{\Delta t}{2} S_{\sigma}(m) + \sqrt{\Delta t} X_{\sigma}(m)\right)$$

Ce n'est qu'à la fin de la simulation  $m$  qu'on calcule la valeur du sous-jacent à l'échéance relative à cette simulation. La valeur de l'option, relative à la simulation  $m$ , est :  $C(m) = S(N, m) - E$

La valeur finale de l'option, par de la simulation de Monté Carlo, est :

$$\bar{C} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M C(m) = \left( \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M S(N, m) \right) - E$$

La valeur de l'option, à l'instant  $t$ , est donc :  $C_{MC} = \bar{C}e^{-r(T-t)}$

### 3.4.5 Convergence de la simulation de Monte Carlo

Le nombre  $M$  de simulations accomplies dépend de la précision souhaitée. La valeur de chaque option, calculée à la fin de chaque simulation, constitue un

tirage d'une variable aléatoire normale.  $M$  simulations constituent, donc,  $M$  tirages indépendants de la variable aléatoire  $C$  qui est le prix de l'option. Soit un  $M$ -échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées  $(C_1, C_2, \dots, C_M)$ , qui sont, donc, les prix de l'option calculés à la fin de chaque simulation. Si on désigne par  $m$  la moyenne empirique du prix de l'option et par  $s$  son écart-type empirique. Les  $M$  variables  $(C_1, C_2, \dots, C_M)$  sont indépendantes et identiquement distribuées de la variable parente  $C$  et, donc, elles ont la même moyenne et le même écart-type. La valeur de l'option, calculée par la simulation de Monte Carlo, est :  $\bar{C} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M C_m$  qui suit une loi normale de moyenne  $E(\bar{C}) = m$ , de variance  $V(\bar{C}) = \frac{Ms^2}{M^2} = \frac{s^2}{M}$  et, donc, un écart type  $\sigma(\bar{C}) = \frac{s}{\sqrt{M}}$ .

Avec un risque  $\alpha$ , si on désigne par  $f_{1-\alpha}$  le fractile d'ordre  $(1-\alpha)$  de la loi normale centrée réduite, on peut écrire :  $m - f_{1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{M}} \leq \bar{C} \leq m + f_{1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{M}}$

Ainsi, quand  $M$  tend vers l'infini,  $\bar{C}$  converge vers la moyenne  $m$  de la valeur de l'option qu'on cherche à estimer. La précision de ce calcul est  $f_{1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{M}}$ . Plus  $M$  est grand, meilleur est la précision. Pour diviser cette erreur par deux, il faut quadrupler le nombre de simulation  $M$ . Pour la diviser par 10, il faut multiplier le nombre de simulation par 100.

Il y'a là un compromis à faire entre la précision et le temps de calcul. En effet, l'efficacité de l'estimateur est :  $Eff(\bar{C}) = \frac{1}{V(C) * tC} = \frac{M}{s^2 * tC}$  avec  $tC$  le temps de convergence de l'algorithme de calcul.

Plusieurs techniques permettent d'améliorer l'efficacité de la simulation de Monte Carlo, qui pour un temps donné de calcul permettent de réduire la variance et, donc, améliorer la précision. On peut citer, à cet effet, les techniques des variations antithétiques, se basant sur l'idée que l'ordinateur, génère toujours un biais dans le même sens, en générant les valeurs de la loi uniforme. Cette technique consiste, donc, à faire les calculs de la valeur de l'option  $C^+$  pour les valeurs générées de la loi normale centrée réduite ( $Z_i$ ), les calculs de  $C^-$  pour les valeurs ( $-Z_i$ ). En considérant la valeur de  $C$ , comme moyenne de  $C^+$  et  $C^-$ , on divise la variance par 2, pour un temps de calcul donné.

### **3.4.6 Test de l'algorithme de simulation de Monte Carlo en référence au modèle Black & Scholes**

En testant l'algorithme de simulation sur le modèle de Black & Scholes, c-à-d en considérant le drift risque-neutre et la volatilité de la volatilité comme nuls ( $D=0$  et  $q=0$ ), on a vérifié, empiriquement, la convergence de l'algorithme vers le modèle de Black & Scholes. Le nombre de période  $N$  est pris égal à 400, alors que le nombre d'itération  $M$  est pris égal à 5000.

On a considéré, pour cette simulation, la première observation du contrat C2800, définie par les données suivantes :

S	E	T-t	Volimp	r	D	q	Ro	C B&S
2465	2800	426	0,1104	0,0330	0	0	-0,03	61,2

Tableau 39 : Données considérées pour tester la convergence de la simulation de Monte Carlo vers le modèle de Black & Scholes

A noter que la valeur du marché de l'option  $C$  est égale à celle donnée par la formule de Black & Scholes, puisqu'on considère, ici, la volatilité implicite.

La série de la valeur de l'option, générée par la simulation de Monte Carlo, ainsi que celle relative au modèle de Black & Scholes, sont représentées dans le graphique 63.

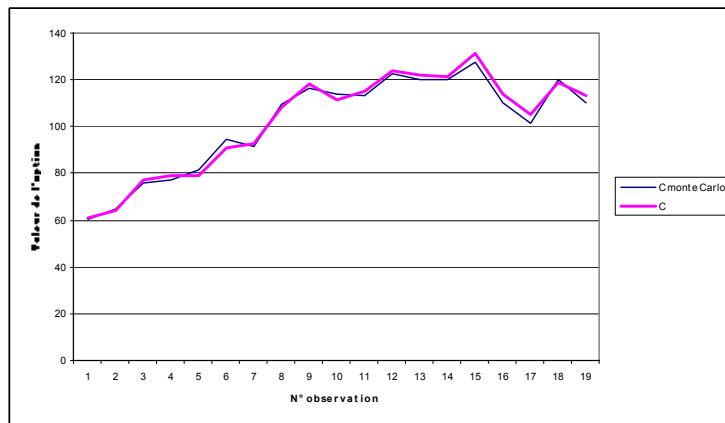


Figure 63 : Convergence de l’algorithme de la simulation Monte Carlo vers la formule de Black & Scholes un nombre de période  $N=400$  et un nombre d’itérations  $M=5000$  et  $D=q=0$ .

On note que les deux courbes sont très proches. Tantôt, c’est le modèle à volatilité stochastique qui donne des valeurs, légèrement supérieures, à celles du modèle de Black & Scholes, tantôt c’est l’inverse et tantôt les deux courbes sont parfaitement confondues. L’écart quadratique moyen, entre la série de la valeur de l’option par les simulations de Monte Carlo et celle relative à Black & Scholes est :  $MSE(C \text{ Monte carlo}, C) = 2,4326$  et le coefficient de corrélation est  $\rho(C \text{ Monte carlo}, C)=0,9422$ . Ces deux mesures confirment la proximité des deux courbes et par conséquent, permettent de valider le programme de calcul de la valeur de l’option, par simulation de Monte Carlo.

En faisant une simulation sur le nombre de périodes  $N$  et le nombre de simulation de Monte Carlo  $M$ , avec comme référence le modèle de Black & Scholes, en prenant  $D=0$  et  $q=0$ , on obtient les résultats, en terme de précision et de temps de convergence illustrés dans le tableau 40.

A la lumière de ces résultats, on remarque que ce n’est pas en prenant le nombre de périodes  $N$  le plus élevé et le nombre de simulation le plus élevé qu’on va avoir l’écart le plus faible, en valeur absolue, pour un temps de convergence donné.

M	N	20	50	100	200	400	500
1000		<b>0,289</b>	<b>0,680</b>	<b>6,432</b>	<b>4,349</b>	<b>2,503</b>	<b>-3,386</b>
		0 s	1 s	2 s	4 s	7 s	9 s
5000		<b>2,834</b>	<b>6,365</b>	<b>-0,595</b>	<b>1,609</b>	<b>-0,625</b>	<b>0,066</b>
		2 s	5 s	9 s	18 s	36 s	45 s
10000		<b>0,083</b>	<b>-1,081</b>	<b>-1,096</b>	<b>-0,659</b>	<b>-1,172</b>	<b>-1,010</b>
		4 s	9 s	19 s	37 s	73 s	91 s
15000		<b>-2,887</b>	<b>1,073</b>	<b>-0,838</b>	<b>-0,209</b>	<b>-1,952</b>	<b>0,313</b>
		5 s	14 s	27 s	55 s	110 s	139 s

Tableau 40 : Temps de convergence et écart (en gras) de la valeur de l'option  $C(N,M)$  relatifs à la simulation de Monte Carlo, (en considérant  $N$  périodes et  $M$  simulations), par rapport au modèle de Black & Scholes. On a considéré la première observation du contrat C2800 dont les caractéristiques sont données dans le tableau 39.

A titre d'exemple, pour  $N=500$  et  $M=5000$  on consomme 45s de temps CPU pour avoir une précision de 0,066 alors qu'en considérant  $N=500$  et  $M=15000$ , on consomme 139s de temps CPU pour atteindre une précision de 0,313. Ceci est du, à priori, à un phénomène d'instabilité (oscillations).

### 3.4.7 Détermination du nombre de périodes $N$ et du nombre de simulations $M$ de l'algorithme de simulation de Monte Carlo en référence au modèle à volatilité stochastique

Si on considère toujours la première observation du contrat C2800, avec une volatilité stochastique dont les paramètres, définis sur l'ensemble de la base journalière ( $D=0,0326$  et  $q=0,2825$ ), les résultats de la simulation de Monte Carlo, sont donnés dans le tableau 41, pour différentes valeurs du nombre  $N$  de périodes par itération et du nombre d'itérations  $M$ .

	20	50	100	200	400	500
1000	<b>226,288</b>	<b>209,714</b>	<b>211,191</b>	<b>264,457</b>	<b>211,171</b>	<b>258,375</b>
	0	1	2	4	7	10
5000	<b>227,308</b>	<b>214,686</b>	<b>221,093</b>	<b>235,266</b>	<b>220,751</b>	<b>223,485</b>
	2	5	10	19	37	46
10000	<b>241,295</b>	<b>231,230</b>	<b>220,963</b>	<b>228,515</b>	<b>227,800</b>	<b>233,515</b>
	3	9	18	37	74	92
15000	<b>237,230</b>	<b>235,687</b>	<b>224,336</b>	<b>214,532</b>	<b>224,967</b>	<b>222,289</b>
	6	14	28	55	111	138

Tableau 41 Valeur de l'option avec volatilité stochastique  $C(N,M)$ (en gras) et le temps de convergence correspondant par la simulation de Monte Carlo, en considérant  $N$  périodes et  $M$  simulations. On a considéré la première observation du contrat C2800 dont les caractéristiques sont données dans le tableau 39, avec  $D=0,0326$  et  $q=0,2825$ .



On remarque que, comme, dans le cas du modèle de Black & Scholes, la valeur de l'option donnée par le modèle à volatilité stochastique (simulation de Monte Carlo) converge en oscillant autour d'une valeur moyenne. Ceci est dû à une instabilité au niveau de la convergence de l'algorithme de Monte Carlo. Cette remarque est confirmée par le graphique 64.

Ce phénomène d'instabilité rappelle les oscillations constatées, lors de la résolution du schéma numérique de l'équation différentielle, en faisant varier le nombre de périodes et les pas du prix du sous-jacent et de la volatilité.

On remarque que, les oscillations de la valeur de l'option, autour de sa valeur moyenne, s'estompent avec l'augmentation du nombre de simulation  $M$

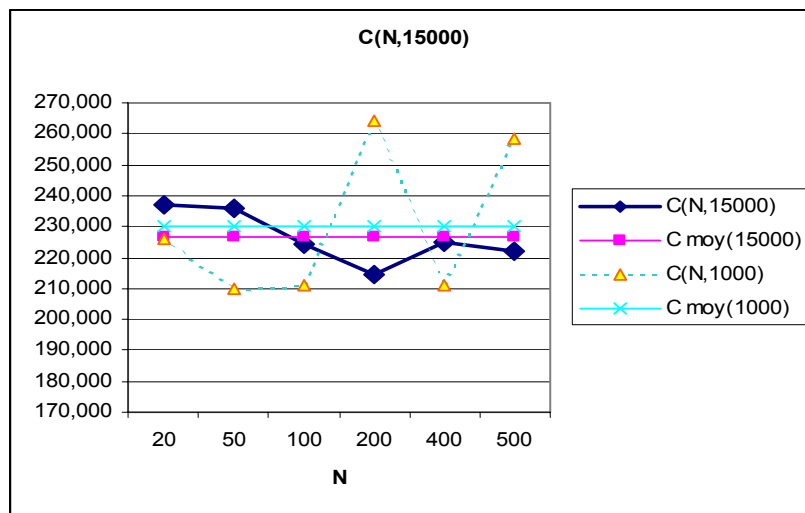


Figure 64 : Les valeurs de l'option obtenues avec la simulation de Monte Carlo pour  $M=15000$  et  $M=1000$  simulations, en fonction du nombre de période  $N$ , ainsi que les valeurs moyennes respectives.

Comme le montre le graphique 64, les oscillations ont des amplitudes plus importantes, dans le cas où  $M=1000$ , que dans le cas où  $M=15000$ . C'est normal puisque l'écart-type de la valeur de l'option diminue avec  $M$ . Par contre, les valeurs moyennes de l'option, pour ces deux valeurs de  $M$ , sont assez proches.

Plus les valeurs de N et M sont grandes, plus la précision de calcul est meilleure et plus le temps CPU nécessaire pour la convergence de l'algorithme de Monte Carlo est grand. Ainsi, dans le choix de N et M, il faut faire un compromis entre la précision et la rapidité de convergence.

Pour les calculs ultérieurs de la valeur de l'option par l'algorithme de Monte Carlo, on a considéré un nombre de périodes  $N=400$  et un nombre d'itérations  $M=10000$ .

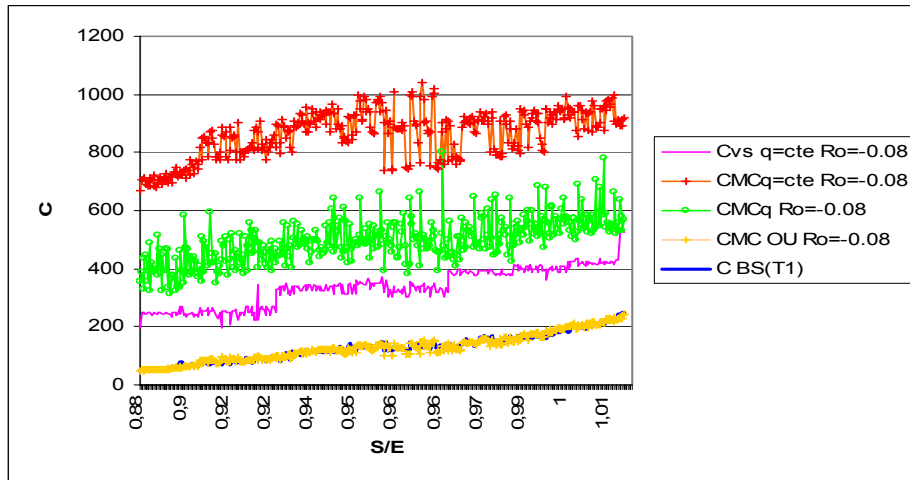
### **3.4.8 Résultats de l'évaluation des options par simulations de Monte Carlo avec volatilité stochastique**

Dans cette partie, où on utilise les simulations de Monte Carlo, on calcule la valeur de l'option, avec le modèle à volatilité stochastique, pour les différents contrats de la base intraday (classe 1 et classe 9) et les différents contrats de la base journalière. On considère, à ce niveau, la volatilité implicite conjuguée avec chacun des trois processus stochastiques de la volatilité, qui sont le mouvement Brownien, le processus empirique et le processus d'Ornstein Uhlenbeck. Les paramètres de chacun de ces trois processus sont estimés à partir de l'ensemble de la base de donnée, quelle soit intraday ou journalière.

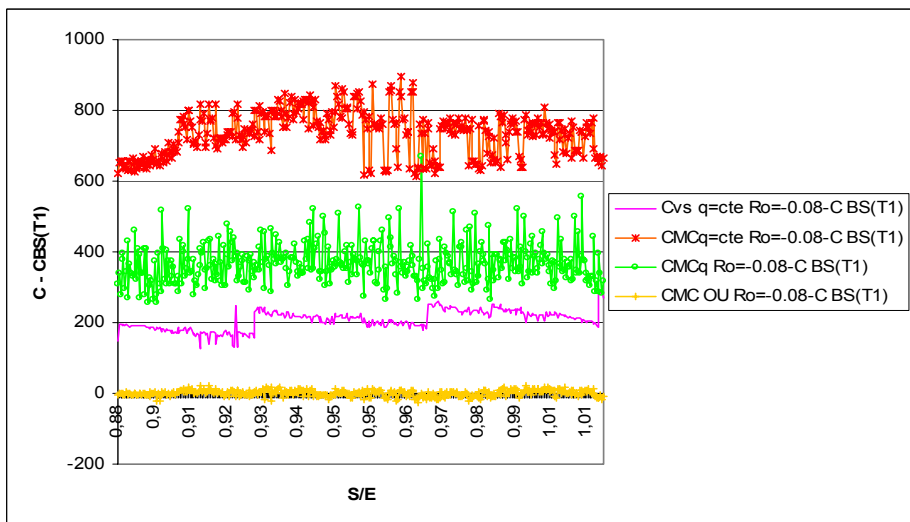
L'objectif de cette partie est, d'abord, de comparer les résultats relatifs aux trois processus considérés de la volatilité. Puis, ces résultats sont à comparer avec ceux générés par l'algorithme de Hopscotch dans la précédente section. Enfin, ils sont à comparer avec les résultats théoriques de Heston (1993).

#### **3.4.8.1 Résultats relatifs à la base intraday**

La simulation de Monte Carlo, est appliquée à tous les contrats de la classe 1 et de la classe 9 de la base intraday, en considérant les modèles à volatilité stochastique, avec les trois processus stochastiques de la volatilité implicite, dont les paramètres sont estimés, à partir de l'ensemble de la base intraday. En exemple, les résultats, relatifs au contrat 1P, sont illustrés dans la figure 65 (A et B).



(A)



(B)

Figure 65 : (A) : Les valeurs de l'option données par les différents modèles à volatilité stochastique en fonction de la moneyness ; (B) différence de ces valeurs avec la référence CBS(T1). Contrat IP de la base intraday. CBS(T1) est ici la valeur de l'option, suivant le modèle de Black & Scholes, en considérant la même durée de vie résiduelle annualisée pour la volatilité implicite et le taux d'intérêt).  $\rho = -0,08$ .

A la lumière de ces résultats, on remarque que :

- Le modèle à volatilité stochastique (CMC OU;  $R_o = -0.08$ ), tel que la volatilité suit un processus d'Ornstein Uhlenbeck donnent une valeur, quasiment, égale, à celle du modèle de Black & Scholes, quelle que soit la parité de l'option comprise dans l'intervalle  $[0,88 ; 1,04]$ . Ceci paraît normal, dans la mesure, où on a considéré la volatilité implicite et que le processus

d'Ornstein Uhlenbeck est « mean-reverting » autour de la volatilité (à long terme).

- Pour les 3 modèles à volatilité stochastique considérés avec la simulation de Monte Carlo, on peut faire le classement :  $CMC_{OU} < CMC_q < CMC_{q=cte}$ . Autrement dit, le mouvement Brownien donne la valeur de l'option la plus élevée.
- La simulation de Monte Carlo donne une valeur de l'option supérieure à celle donnée par l'algorithme de Hopscotch, dans le cas du processus Brownien de la volatilité.

Afin d'étudier l'influence du coefficient de corrélation, on trace les courbes de la valeur de l'option, diminuée de la référence CBS(T1), en fonction de la parité de l'option (moneyness), pour les modèles à volatilité stochastique avec le processus brownien et le processus empirique. Ces courbes sont représentées dans la figure 66.

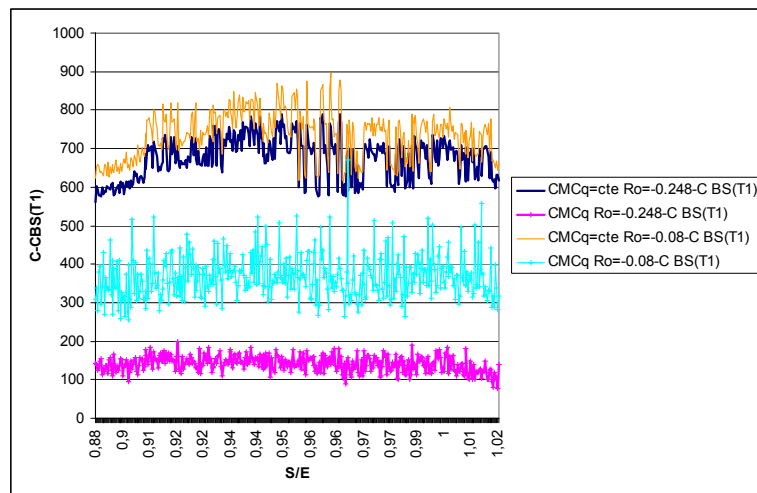


Figure 66 : Les différences des valeurs de l'option avec la référence CBS(T1) en fonction de la moneyness, avec comme paramètre le coefficient de corrélation pour les différents modèles à volatilité stochastique; Contrat 1P de la base intraday. CBS(T1) est la valeur de l'option, suivant le modèle de Black & Scholes, en considérant la même durée de vie résiduelle annualisée pour la volatilité implicite et le taux d'intérêt.

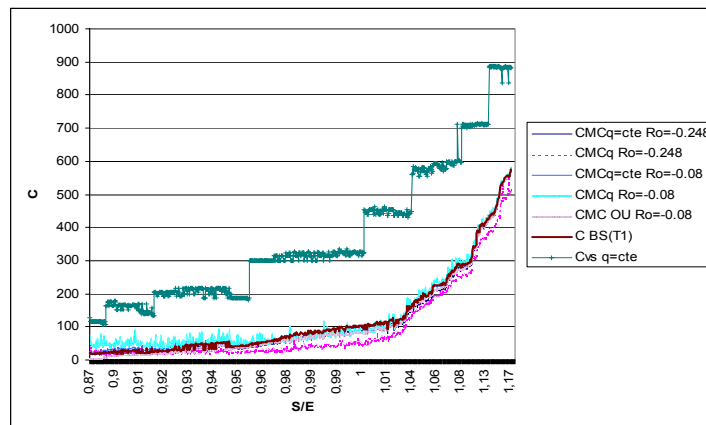
A la lumière des résultats de la figure 66, on remarque que :

- Les modèles à volatilité stochastique, avec un coefficient de corrélation  $\rho = -0.08$ , donnent des valeurs de l'option supérieures à celles des mêmes

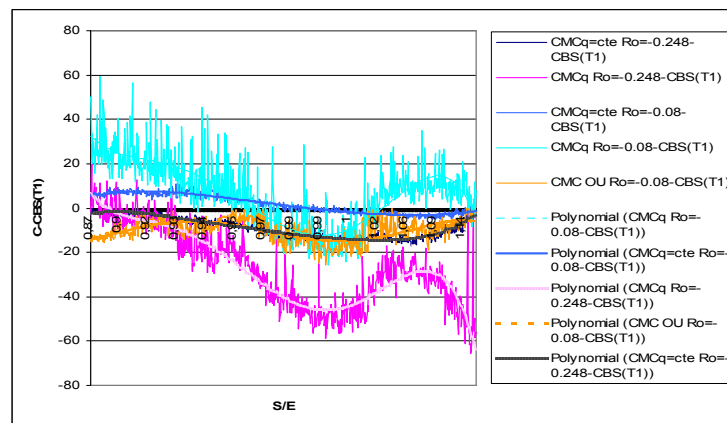
modèles avec  $\rho=-0.248$ , aussi bien pour le processus Brownien que pour le processus empirique de la volatilité implicite.

- L'écart engendré par la variation du coefficient de corrélation (entre  $\rho=-0.08$  et  $\rho=-0.248$ ) est, nettement, plus réduit, dans le cas du processus Brownien, que dans le cas du processus empirique.
- Le modèle à volatilité stochastique, avec processus brownien de la volatilité, donne des valeurs de l'option, nettement, supérieures à celles engendrées par le modèle à processus empirique, quel que soit le coefficient de corrélation.

Le tracé des courbes de la valeur de l'option, en fonction de la moneyness, pour les différents modèles à volatilité stochastique nous permet d'approfondir cette analyse, dans le cas du contrat 9J. Ces courbes sont représentées dans la figure 67.



(A)



(B)

Figure 67 : (A) Valeur de l'option par les modèles à volatilité stochastique pour différentes dynamiques de la volatilité implicite et différents coefficients de corrélation (B) différence entre cette valeur de l'option et la référence CBS(T1) avec lissage polynomial de degré 5. (contrat 9J de la base intraday)

A la lumière du graphique 67, on peut faire les remarques suivantes :

- La forme des courbes de l'option dans la figure 67(B) est plausible.
- Abstraction faite de la courbe, relative à l'algorithme de Hopscotch, les courbes de la valeur de l'option sont plus proches dans le cas du contrat 9J (figure 67) que dans le cas du contrat 1P (figure 66).
- Les modèles qui nous importent le plus dans cette étude sont le modèle CMCq et le modèle CMCq=cte, pour un coefficient de corrélation entre le prix du sous-jacent et la volatilité,  $\rho$  égal à sa vraie valeur de -0,08. Le premier sous-évalue la valeur de l'option, par rapport à la référence CBS(T1), pour des valeurs de la parité autour de l'unité. Le second sous-évalue, très légèrement, la valeur de l'option, par rapport à la même référence, pour des parités, légèrement, supérieures à l'unité.
- Bien que le temps à l'échéance n'est pas constant, quelle que soit la parité, les formes, ces deux modèles donnent des courbes ayant la même allure que celle de Heston (1993)
- Tous les autres modèles sous-évaluent la valeur de l'option, quelle que soit la valeur de la parité comprise dans la plage étudiée qui s'étend de 0,87 à 1,17.
- Pour un processus donné, les courbes de la valeur de l'option sont, quasiment, parallèles, c-à-d elles conservent un écart, quasiment, constant quelle que soit la parité. Cependant, cet écart est plus grand, dans le cas du processus empirique, que dans le cas du processus brownien, comme il a été déjà prouvé pour le contrat 1P de la base intraday (figure 66).

Pour comparer les performances des différents modèles à volatilité stochastique, par rapport à la référence CBS(T1), en se basant sur l'ensemble des contrats de la base intraday, on s'appuie sur les critères de corrélation:  $\rho(\text{Modèle}, \text{CBS}(T_1))$ , d'erreur quadratique moyenne  $\text{MSE}(\text{Modèle}, \text{CBS}(T_1))$  et de son rapport avec la valeur moyenne  $C_{\text{moy}}$ :  $\text{MSE}/C_{\text{moy}}$ .

Pour les différents contrats de la base intraday (classe 1 et classe 9), le tableau 42 récapitule les coefficients de corrélation des différents modèles, avec la référence CBS(T1).

$\rho$ (CMC,CBS(T1))	1N	1O	1P	1Q	1S	9I	9J	9K	9L
CMC $q=cte$ $\rho=-0.248$	0,9968	0,9942	0,7250	0,9710	0,8501	0,9996	0,9994	0,9991	0,9988
CMC $q$ $\rho=-0.248$	0,9625	0,9318	0,8979	0,7840	0,2677	0,9954	0,9920	0,9908	0,9785
CMC $q=cte$ $\rho=-0.08$	0,9966	0,9889	0,6484	0,9237	0,7525	0,9999	0,9997	0,9994	0,9991
CMC $q$ $\rho=-0.08$	0,9738	0,9438	0,6652	0,6363	0,2074	0,9961	0,9929	0,9880	0,9705
CMC OU $\rho=-0.08$	0,9887	0,9781	0,9831	0,9650	0,8898	0,9992	0,9993	0,9986	0,9966
Cvs $q=cte$ $\rho=-0.248$	0,954	0,927	0,944	0,923	0,781	0,966	0,953	0,897	0,824
C marché	0,9990	0,9984	0,9981	0,9970	0,9928	0,9997	0,9997	0,9995	0,9991

Tableau 42: Coefficient de corrélation de la valeur de l'option, par les modèles à volatilité stochastique CMC, déterminée par la simulation de Monte Carlo, avec le CBS(T1), pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre les fluctuations du prix du sous-jacent et celles de la volatilité (base intraday).

A la lumière des résultats de ce tableau, on remarque que :

- Les coefficients de corrélation, entre les valeurs de l'option, calculées par les modèles à volatilité stochastique par les simulations de Monte Carlo, et la référence CBS(T1), sont très proches de l'unité pour tous les contrats de la classe 9. Pour les contrats de la classe 1, ceci reste vrai pour les contrats 1N et 1O, mais pour les autres contrats (1P, 1Q et 1S), ces coefficients de corrélation, sont parfois assez loin de l'unité. On dénote, sur un total de 54 cas, 5 cas où le coefficient de corrélation est inférieur à 0,7 dont deux cas où il est inférieur à 0,3. Pour le contrat 1S, le modèle (CMCq Ro=-0.248) donne une valeur de 0.2677 qui est très faible, alors que le modèle CMC q Ro=-0.08 donne une valeur encore plus faible, soit 0.2074. Ces exceptions ( $\rho < 0,7$ ) incombent au processus empirique dans 80% des cas.
- La corrélation est plus forte, pour les contrats de la classe 9, que pour les contrats de la classe 1, quel que soit le processus de la volatilité.
- Il n'y a pas une grande influence du coefficient de corrélation, entre la valeur du sous-jacent et la volatilité, et celui, entre la valeur de l'option et la référence CBS(T1).
- En considérant le processus Brownien, la corrélation, entre la valeur de l'option et la référence, est, sensiblement, la même pour le modèle à

volatilité stochastique, avec simulation de Monte Carlo, que pour celui avec l'algorithme de Hopscotch (à l'exception le contrat 1P).

- Le vrai coefficient de corrélation, entre les mouvements du prix du sous-jacent et la volatilité, est de -0.08. On dénote dans ce cas, 5 cas sur 27, où le coefficient de corrélation entre la valeur d'un modèle et la référence, n'est pas très proche de l'unité. (Inférieur à 0,92). Ce sont les contrats 1P et 1S qui font cette exception.

Les écarts quadratiques moyens, entre les valeurs de l'option, données par les différents modèles à volatilité stochastique, et la valeur de référence CBS(T1), sont résumés dans le tableau 43.

<i>MSE(CMC,CBS(T1))</i>	<i>1N</i>	<i>1O</i>	<i>1P</i>	<i>1Q</i>	<i>1S</i>	<i>9I</i>	<i>9J</i>	<i>9K</i>	<i>9L</i>
<i>CMC q=cte ρ=-0.248</i>	28,827	21,969	680,036	11,089	8,402	15,150	10,014	6,700	3,980
<i>CMC q ρ=-0.248</i>	88,065	84,315	142,676	45,786	10,702	47,684	32,411	18,863	13,229
<i>CMC q=cte ρ=-0.08</i>	38,844	35,900	738,885	31,580	25,545	3,117	4,608	4,286	3,298
<i>CMC q ρ=-0.08</i>	27,818	27,525	372,555	26,185	44,061	13,582	16,693	18,715	21,520
<i>CMC OU ρ=-0.08</i>	29,882	24,902	8,647	12,159	5,130	21,468	11,195	5,358	5,296
<i>Cvs q=cte ρ=-0.248</i>	214,814	219,139	209,306	188,659	141,055	285,963	260,267	252,827	241,427
<i>C marché</i>	32,983	34,928	34,265	31,252	20,988	19,410	15,903	12,402	8,315

Tableau 43 : Ecart moyen quadratique de la valeur de l'option, par les modèles à volatilité stochastique CMC, déterminée par la simulation de Monte Carlo, avec le CBS(T1), pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre les fluctuations du prix du sous-jacent et celles de la volatilité (contrats de la base intraday).

A la lumière de ces résultats, on remarque que :

- Pour les contrats de la classe 9, les valeurs des écarts quadratiques moyens sont plus grands pour  $\rho=-0.248$  que pour  $\rho=-0.08$ . Pour la classe 1, ce résultat reste vrai pour le modèle CMC q, par contre, on a le résultat inverse pour le modèle CMC q=cte.
- Pour un coefficient de corrélation du prix du sous-jacent avec la volatilité égal à  $-0.08$ , c'est le Modèle CMC OU qui donne l'écart quadratique moyen le plus faible, pour la classe 1. En revanche, pour la classe 9, c'est le modèle CMCq=cte qui donne la valeur la plus faible de l'écart quadratique moyen.
- Les écarts, donnés par l'algorithme Hopscotch, sont, nettement, plus grands que ceux donnés par la simulation de Monte Carlo, pour le



processus brownien de la volatilité, en considérant un coefficient de corrélation de -0,248.

Si on rapporte cet écart quadratique moyen à la valeur moyenne de la référence CBS(T1), pour un contrat donné, on obtient le tableau 44.

<i>MSE/Cmoy</i>	<i>1N</i>	<i>1O</i>	<i>1P</i>	<i>1Q</i>	<i>1S</i>	<i>9I</i>	<i>9J</i>	<i>9K</i>	<i>9L</i>
<i>CMC q=cte ρ=-0.248</i>	15,67%	14,48%	84,49%	13,40%	22,65%	9,64%	8,75%	10,04%	11,18%
<i>CMC q ρ=-0.248</i>	73,92%	98,62%	53,08%	102,8%	34,81%	37,86%	33,71%	31,93%	37,57%
<i>CMC q=cte ρ=-0.08</i>	16,67%	18,30%	85,60%	27,81%	46,22%	1,81%	3,68%	5,78%	8,25%
<i>CMC q ρ=-0.08</i>	14,77%	18,28%	75,18%	27,27%	61,46%	8,07%	12,84%	21,96%	39,07%
<i>CMC OU ρ=-0.08</i>	16,14%	16,71%	6,74%	16,14%	17,35%	14,17%	9,88%	7,72%	13,14%
<i>Cvs q=cte ρ=-0.248</i>	107,7%	133,2%	163,7%	223,4%	459,5%	166,5%	211,0%	350,7%	632,4%
<i>C marché</i>	14,22%	17,54%	21,16%	27,06%	40,82%	10,21%	11,50%	14,77%	18,01%

Tableau 44 : Ecart moyen quadratique de la valeur de l'option CMC déterminée par la simulation de Monte Carlo, par rapport au prix de BS(T1), rapporté à ce dernier prix pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre le prix du sous-jacent et la volatilité (contrats de la base intraday)

Les résultats de ce tableau confirment les dernières conclusions. D'une part, le meilleur modèle reste CMCOU pour la classe 1 et CMC q=cte pour la classe 9, et d'autre part, l'algorithme de Hopscotch donne des valeurs, nettement, supérieures à celles données par la simulation de Monte Carlo, en considérant le processus Brownien avec un coefficient de corrélation de -0,248.

On peut considérer, également, comme critère de comparaison, entre la valeur de l'option, donnée par le modèle et celle de la référence CBS(T1), la moyenne des écarts quadratiques moyens relatifs X, telle que :

$$X = \left( \sum_{t=1}^n \left( \frac{C_t(\text{Modèle})}{\text{CBS}_t(T_1)} - 1 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4.8-1)$$

Si on considère ce critère, on obtient le tableau 45.

X	1N	1O	1P	1Q	1S	9I	9J	9K	9L
<b>CMC q=cte <math>\rho=-0.248</math></b>	19,4%	15,1%	650,9%	15,8%	43,6%	12,8%	11,7%	13,4%	26,2%
<b>CMC q <math>\rho=-0.248</math></b>	44,6%	50,3%	141,8%	46,3%	59,6%	41,5%	36,8%	48,9%	157,0%
<b>CMC q=cte <math>\rho=-0.08</math></b>	50,5%	40,6%	709,8%	52,7%	111,3%	3,6%	14,5%	33,0%	67,3%
<b>CMC q <math>\rho=-0.08</math></b>	26,9%	22,2%	360,7%	50,3%	204,0%	14,3%	54,7%	154,5%	520,2%
<b>CMC OU <math>\rho=-0.08</math></b>	19,1%	17,2%	7,5%	14,8%	17,2%	24,1%	23,2%	17,6%	37,4%
<b>C marché</b>	26,4%	27,0%	32,1%	43,2%	74,5%	22,3%	37,3%	53,7%	82,0%

Tableau 45 : Ecart moyen quadratique relatif de la valeur de l'option, par le modèle à volatilité stochastique CMC, déterminée par la simulation de Monte Carlo, par rapport au prix de BS( $T_1$ ), prix pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre le prix du sous-jacent et la volatilité :  
 $X=(\text{Somme}(C(\text{modèle})/CBS(T_1)-1)^2)^{1/2}$

Les résultats de ce tableau confirment les précédentes conclusions.

Pour comparer les résultats générés par la simulation de Monte Carlo, avec ceux théoriques de Heston (1993), on procède à la génération de la courbe de la valeur de l'option en fonction de la moneyness, pour une valeur du temps à l'échéance quasi-constante, en utilisant la même méthodologie utilisée dans le chapitre relatif aux résultats générés par l'algorithme de Hopscotch. Pour la classe 1, on regroupe tous les contrats, sauf le contrat 1P qui présente une anomalie. On obtient les résultats illustrés dans le graphique 68.

A la lumière des résultats, illustrés dans ce graphique, on remarque que :

- Dans le cas où  $\rho=-0,08$ , le modèle à volatilité implicite stochastique, avec le processus Brownien, sur-évalue la valeur de l'option, quelle que soit la parité comprise entre 0,866 et 1, 035. Pour  $\rho=-0,248$ , le même modèle surévalue la valeur de l'option pour une parité inférieure à 0,95 et la sous-évalue, au-delà de cette même valeur de la parité.
- Que le coefficient de corrélation soit de  $-0,08$  ou  $-0,248$ , la valeur de l'option, par le modèle à volatilité stochastique, avec processus empirique de la volatilité implicite, est toujours inférieure à celle donné par le modèle avec processus brownien de la volatilité.

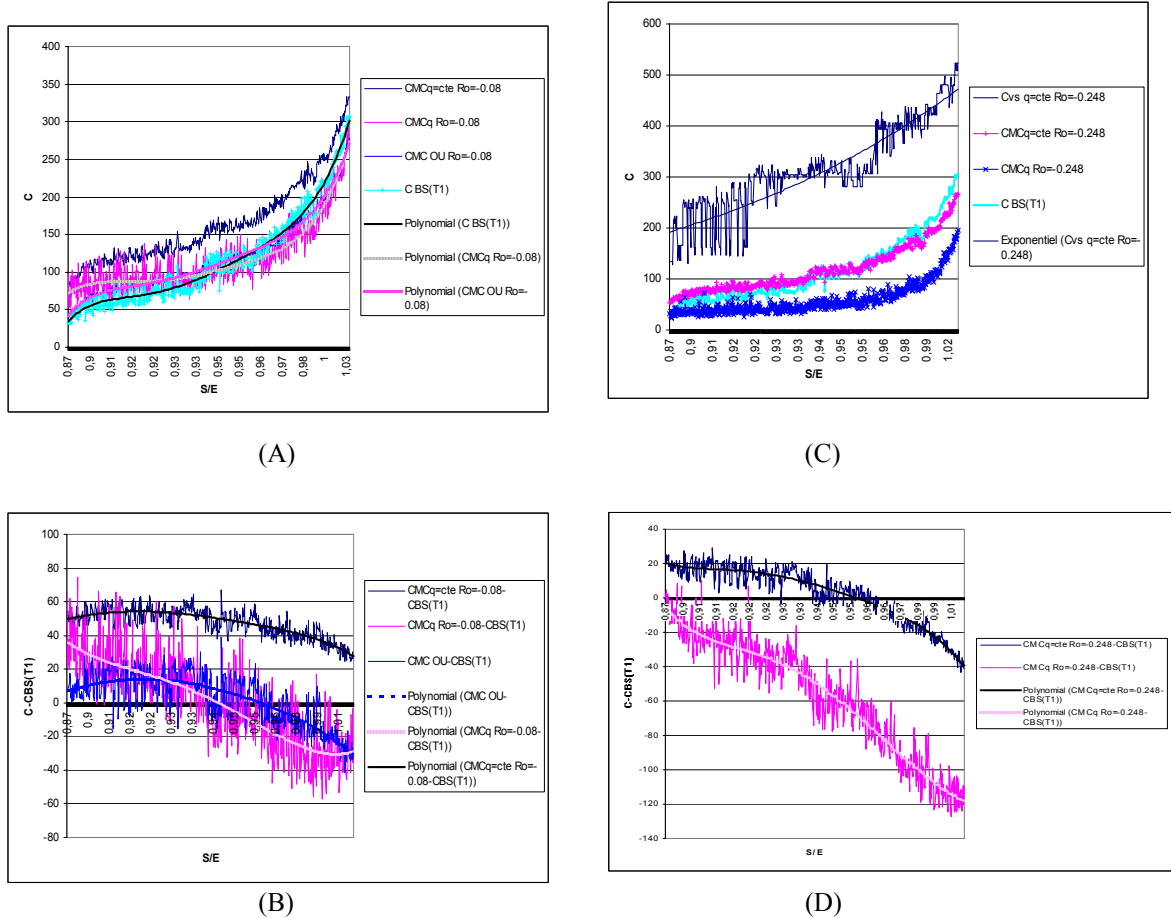


Figure 68 : Valeur de l’option et sa différence avec CBS(T1) en fonction de la moneyness. Valeur de l’option en fonction de la moneyness pour les différents processus de la volatilité avec (A)  $\rho=-0,08$  (C)  $\rho=-0,248$ . Différence de la valeur de l’option avec CBS(T1) pour les mêmes processus de la volatilité avec (B)  $\rho=-0,08$  (D)  $\rho=-0,248$ . Contrats de la classe 1 de la base intraday. Moneyness entre 0,866 et 1,035 et temps à l’échéance entre 0,5 et 0,581. Il a été utilisé un lissage polynomial d’ordre 5.

- Dans le cas où  $\rho=-0,248$ , le modèle à volatilité stochastique, avec processus empirique de la volatilité implicite sous-évalue la valeur de l’option par rapport à la référence CBS(T1), quelle que soit la parité comprise entre 0,866 et 1,035.
- Dans le cas où  $\rho=-0,08$ , le modèle à volatilité stochastique, avec processus d’Ornstein Uhlenbeck de la volatilité implicite donne une courbe de la valeur de l’option, diminuée de la référence CBS(T1), qui a, quasiment, de la même forme, que celle relative au modèle à processus brownien de la volatilité, mais qui se situe à un niveau

nettement inférieur. Elle coupe la courbe, relative au modèle avec processus empirique de la volatilité.

- La courbe de la valeur de l'option avec le modèle à volatilité stochastique, avec algorithme de Hopscotch se situe à un niveau, nettement, supérieur, à ceux des courbes des mêmes modèles, en utilisant la simulation de Monte Carlo.

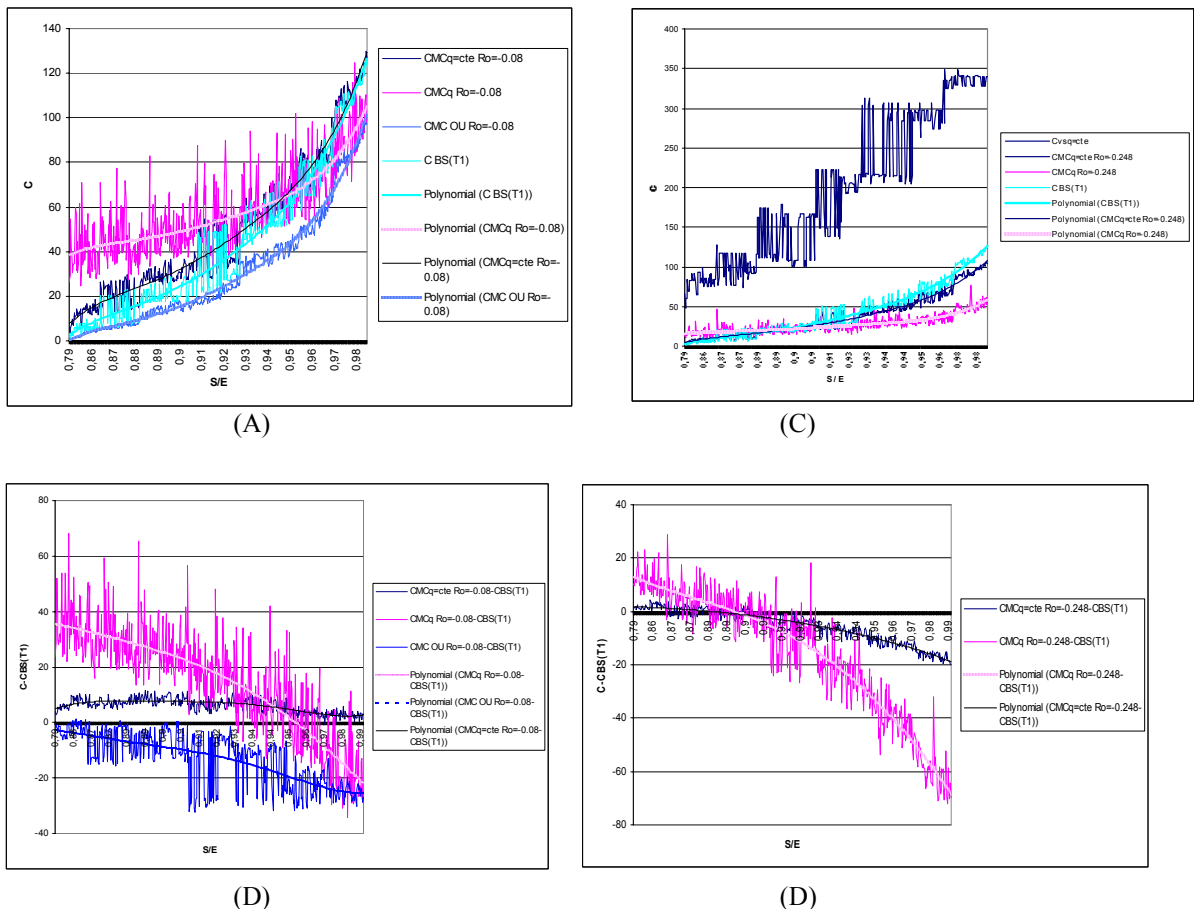


Figure 69 : Valeur de l'option et sa différence avec CBS(T1) en fonction de la moneyness. Valeur de l'option en fonction de la moneyness pour les différents processus de la volatilité : (A)  $\rho = -0,08$  (C)  $\rho = -0,248$ . Différence de la valeur de l'option avec CBS(T1) pour les mêmes processus de la volatilité : (B)  $\rho = -0,08$  (D)  $\rho = -0,248$ .

Contrat de la classe 9 de la base intraday. Moneyness entre 0,792 et 0,991 et temps à l'échéance entre 0,217 et 0,236. Il a été utilisé un lissage polynomial d'ordre 5.

A la lumière de ces résultats, si on tient compte des courbes de lissage polynomial d'ordre 5, on remarque que :

- Dans le cas de la classe 9, que se soit pour  $\rho = -0,08$  ou  $\rho = -0,248$ , le modèle à volatilité stochastique, avec processus empirique de la

volatilité implicite donne une courbe de la valeur de l'option diminuée de la référence CBS(T1) qui garde la même allure que, dans le cas de la classe 1, de la base intraday. Elle se situe, pour une parité inférieure à 0,96, à un niveau, supérieur à celui de la courbe, relative au processus Brownien et vice versa.

- Pour le processus brownien, avec  $\rho=-0,08$ , le modèle à volatilité stochastique surévalue, légèrement, la valeur de l'option quelle que soit la parité de l'option comprise entre 0,792 et 0,991. A l'inverse du modèle avec processus d'Ornstein Uhlenbeck qui sous-évalue la valeur de l'option, dans cette même plage de la parité.
- Comme pour la classe 1 de la base intraday, les valeurs de l'option données par les modèles, utilisant l'algorithme de Hopscotch, sont supérieures à celles des modèles utilisant la simulation de Monte Carlo.

Pour faire une comparaison de ces résultats avec ceux de Heston (1993), il serait judicieux de présenter les courbes théoriques correspondantes, élaborées par Heston (1993) (cf figure 70). Si les résultats de Heston (1993) se basent sur une parité, allant de 0,7 à 1,3, nos résultats se basent sur une parité comprise dans un intervalle 0,866 à 1,035, pour la classe 1, et 0,792 et 0,991, pour la classe 9. La comparaison de nos résultats avec ceux de Heston se situe, donc, au niveau de ces deux intervalles de parité.

Le vrai coefficient de corrélation est de  $-0,08$ . Autant dire, qu'il est, quasiment, nul. On peut dire que, aussi bien pour la classe 1 que la classe 9 c'est le modèle à volatilité stochastique, à processus empirique, qui donne la forme de la courbe la plus plausible qui correspond à la partie de la courbe de Heston ( $\rho=0$ ). C'est presque le cas, également, du processus d'Ornstein Uhlenbeck qui présente une courbe ayant une allure acceptable, pouvant être mise en parallèle, avec la courbe de Heston précitée.

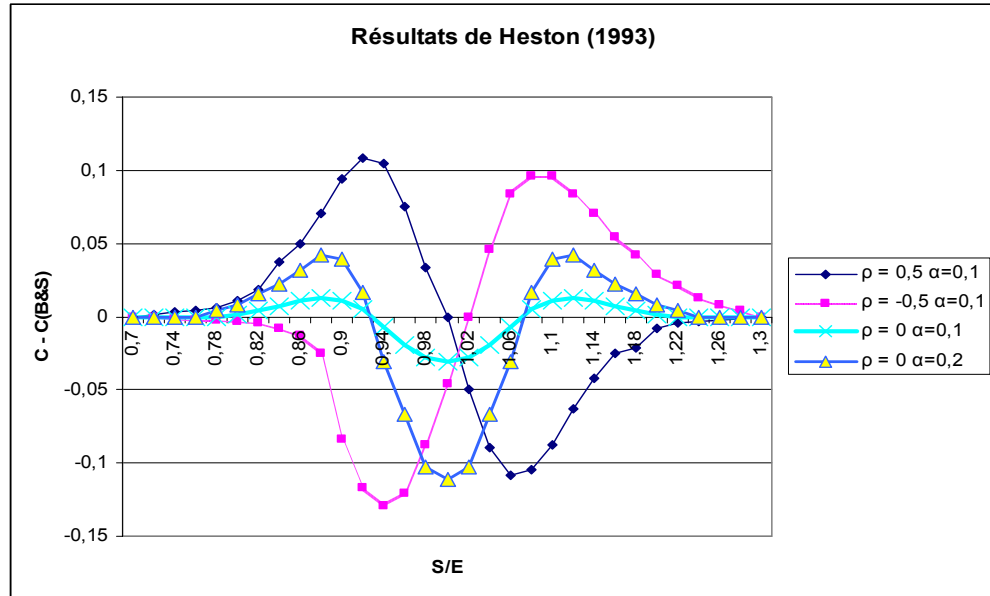


Figure 70 : Différence de la valeur de l'option avec le modèle de Black & Scholes pour le processus de la volatilité, pour différentes valeurs de la corrélation entre le prix du sous-jacent et la volatilité.

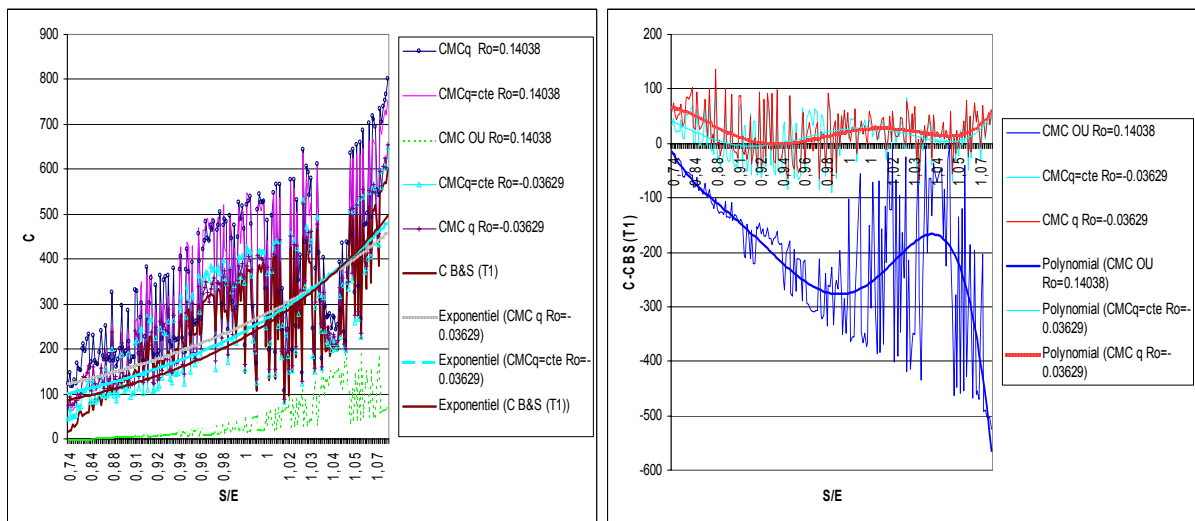
Aussi bien pour la classe 1 que la classe 9 de la base intraday, dans le cas d'un coefficient de corrélation de  $-0,248$ , les courbes du modèle à processus empirique restent conformes à celles de Heston (1993). En effet, la courbe de Heston pour un tel coefficient de corrélation est intermédiaire, entre celles pour un coefficient de corrélation nul et pour un coefficient de corrélation égal à  $-0,5$ .

Les résultats sont plus conformes à ceux de Heston, dans le cas du processus empirique, tout simplement parce qu'un tel processus présente le plus de similitude avec le processus utilisé par Heston, au niveau de la forme de la volatilité de la volatilité. Alors que, pour la base intraday, la puissance de la volatilité est de  $0,85$ , dans le cas du processus empirique, elle est de  $0,5$ , dans le cas du processus de Heston. Le Processus de Heston est doté de la propriété de retour à la moyenne « mean-reverting ». Le modèle qui doit être au maximum de la conformité avec le processus de Heston doit être une combinaison du modèle utilisant le processus empirique de la volatilité et de celui du processus d'Ornstein Uhlenbeck.

La différence de nos résultats avec ceux de Heston à ce niveau, doit se situer au niveau de l'hypothèse sur le prix du risque du marché de la volatilité. En effet, Heston suppose qu'il est proportionnel au carré de la volatilité, alors qu'on a adopté une hypothèse implicite qui veut que le drift risque neutre de la volatilité est constant. Ce drift est fonction du prix du risque du marché.

### 3.4.8.2 Résultats relatifs à la base journalière

On applique la simulation de Monte Carlo, à tous les contrats de la base journalière, en considérant les modèles à volatilité stochastique, avec les trois processus stochastiques de la volatilité implicite, dont les paramètres sont estimés, à partir de l'ensemble de la base journalière. En exemple, les résultats relatifs au contrat C4000 sont illustrés dans la figure 71 (A et B).



(A)

(B)

Figure 71 : (A) Valeur de l'option, par les modèles à volatilité stochastique, déterminée par les simulations de Monte Carlo avec volatilité stochastique en fonction de la moneyness avec  $\rho=-0,03629$  et  $0,14018$ . (B) Différence de la valeur de l'option, par les modèles à volatilité stochastique et la valeur de référence CBS(T1), avec  $\rho=-0,03629$  et  $0,14018$ . (Contrat C4000 de la base journalière).

A la lumière de cette figure, on remarque que :

- Le vrai coefficient de corrélation étant de  $-0,0329$ , les courbes de la valeur de l'option sont très proches de celle de la référence CBS(T1). (Lissage exponentiel figure 71(A) ). Cependant la valeur de l'option,

relative au processus empirique de la volatilité, est surévaluée, par rapport à la référence CBS(T1), au même titre que celle relative au processus Brownien de la volatilité, pour une parité de l'option inférieure à 1,04 environ.

- La proximité des courbes, relatives au processus empirique et brownien de la volatilité est normale, dans la mesure, où les deux modèles utilisent le même coefficient de corrélation et que la volatilité de la volatilité du processus empirique oscille, faiblement, autour de la volatilité de la volatilité, relative au processus brownien.
- Le modèle relatif au processus d'Ornstein Uhlenbeck sous-évalue la valeur de l'option quelle que soit la parité et donne des valeurs de l'option, significativement, différentes de celle des deux autres processus.
- Comme il a été déjà démontré pour la base intraday, la valeur de l'option augmente avec le coefficient de corrélation, quel que soit le processus de la volatilité et quelle que soit la parité de l'option.

Pour comparer le modèle à volatilité stochastique avec simulation de Monte Carlo avec celui avec l'algorithme de Hopscotch, on représente la valeur de l'option diminuée de la référence CBS(T1), en fonction de la moneyness pour le processus empirique et le processus Brownien de la volatilité. Un seul problème est que le coefficient de corrélation entre le prix de l'option et la volatilité n'est pas le même pour les deux algorithmes. Il est de  $-0,036$  pour l'algorithme de Monte Carlo alors qu'il est de  $0,14038$ , pour l'algorithme de Hopscotch.

A la lumière des résultats de ce graphique, on remarque que :

- L'effet de la différence du coefficient de corrélation a, certainement, joué, pour que les valeurs de l'option (diminuées de la référence CBS(T1) de l'algorithme de Hopscotch) soient, nettement, supérieures à celles de l'algorithme de Monte Carlo.



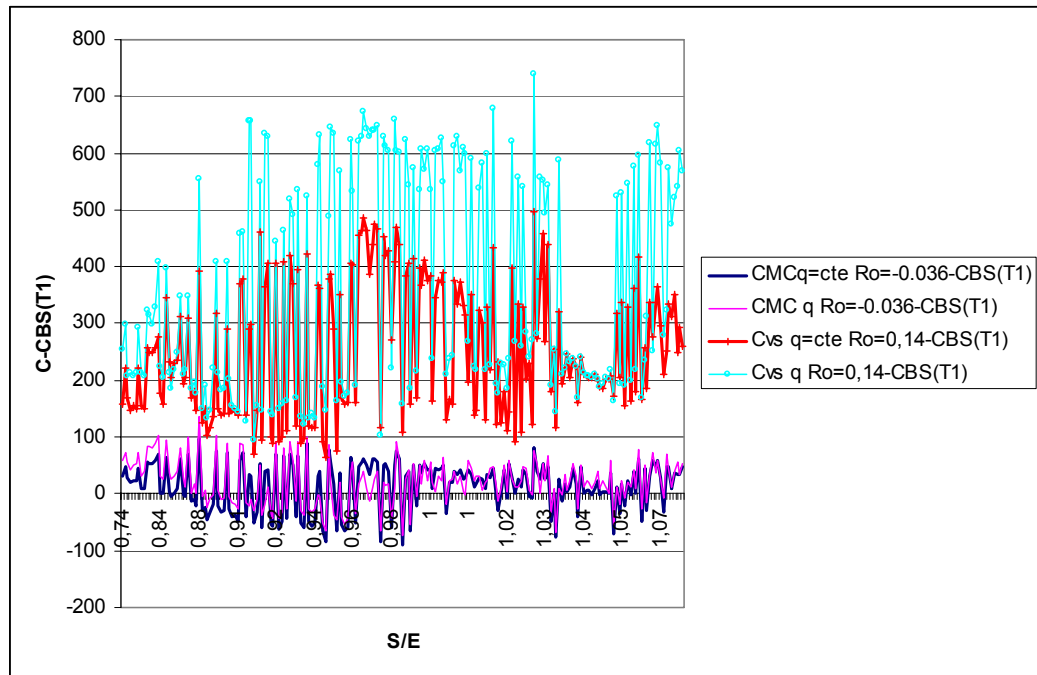


Figure 72 : Différence de la valeur de l'option, par les modèles à volatilité stochastique et la valeur de référence CBS(T1), pour le processus empirique et brownien de la volatilité, avec algorithme de Monte Carlo ( $\rho=-0,03629$ ) et algorithme de Hoscotsch ( $\rho=0,14018$ ). (Contrat C4000 de la base journalière).

- Pour les deux algorithmes, les valeurs de cette différence, entre la valeur de l'option et la référence CBS(T1), sont très proches, aussi bien pour le processus empirique que pour le processus Brownien.

La comparaison, déjà faite sur le contrat C4000, peut être faite sur l'ensemble des contrats de la base journalière. A cet effet, on utilise les mêmes critères, utilisés pour la base intraday qui sont la corrélation avec la référence CBS(T1)  $\rho(\text{Modèle}, \text{CBS}(T_1))$ , d'erreur quadratique moyenne  $\text{MSE}(\text{Modèle}, \text{CBS}(T_1))$  et de son rapport avec la valeur moyenne  $C_{\text{moy}}$ :  $\text{MSE}/C_{\text{moy}}$ .

Le tableau 46 donne le coefficient de corrélation, entre la valeur de l'option, donnée par un modèle à volatilité stochastique et la référence CBS(T1), pour l'ensemble des contrats de la base journalière.

$\rho(\text{modèle, CBS}(T1))$	<b>C2800</b>	<b>C2950</b>	<b>C3100</b>	<b>C3250</b>	<b>C4000</b>
CMCq $\rho=-0,41239$	0,9804	0,9593	0,9394	0,9182	0,9453
CMCq=cte $\rho=-0,40244$	0,9349	0,8557	0,8623	0,8464	0,9384
CMC OU $\rho=-0,40244$	0,8551	0,8382	0,8976	0,9302	0,2559
CMCq=cte $\rho=-0,03629$	0,9831	0,9448	0,9359	0,9251	0,9586
CMC q $\rho=-0,03629$	0,9921	0,9785	0,9685	0,9580	0,9563
Cmarché	0,9839	0,9775	0,9748	0,9663	0,9523
Cvs q=cte $\rho=0,14038$	0,9287	0,8271	0,8008	0,7527	0,8778
Cvs q $\rho=0,14038$	0,4042	0,3683	0,6089	0,6058	0,8424

Tableau 46 : Coefficient de corrélation de la valeur de l'option, donnée par le modèle à volatilité stochastique CMC, par la simulation de Monte Carlo, avec le prix du marché, pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre les fluctuations du prix du sous-jacent et celles de la volatilité (base journalière).

On remarque une forte corrélation entre la valeur de l'option de référence et celles données, par les différents modèles à volatilité stochastique, quel que soit le coefficient de corrélation, entre le prix du sous-jacent et la volatilité. C'est d'autant plus vrai que ce coefficient de corrélation est égal à sa vraie valeur de  $-0,03629$ . En effet, dans ce cas, tous les coefficients de corrélation, entre la référence et la valeur de l'option, déterminée par les modèles à volatilité stochastique sont supérieurs à 0.92, quelle que soit la dynamique de la volatilité. C'est le contrat C2800 qui donne les coefficients de corrélation les plus élevés.

En faisant une comparaison avec les résultats du modèle avec algorithme de Hopscotch, on remarque que :

- Le niveau du coefficient de corrélation entre la valeur de l'option et la valeur de référence, relatif à l'algorithme Hopscotch est inférieur à celui de la simulation de Monte Carlo, pour un modèle donné et un contrat donné.
- Si pour les deux algorithmes, les niveaux de ce coefficient de corrélation restent proches, pour le processus Brownien, ce n'est pas le cas du processus empirique où ces valeurs de coefficient de corrélation sont plutôt faibles.

Les écarts entre les valeurs de l'option données par les différents modèles et la valeur de référence CBS(T1) sont donnés dans le tableau 47.

MSE(modèle, CBS(T1))	<i>C2800</i>	<i>C2950</i>	<i>C3100</i>	<i>C3250</i>	<i>C4000</i>
CMCq $\rho=-0.41239$	99,2815	89,2193	81,0402	75,2089	120,3360
CMCq=cte $\rho=-0.40244$	105,1027	85,7687	70,3069	60,6856	96,2714
CMC OU $\rho=-0.40244$	171,5241	132,8766	93,5282	59,8660	244,3437
CMCq=cte $\rho=-0.03629$	48,2575	41,9387	37,0767	33,5743	44,1865
CMC q $\rho=-0.03629$	33,4086	32,9424	32,9944	34,6943	45,1587
Cmarché	38,1999	36,0781	31,1905	26,1338	56,3153
Cvs q=cte $\rho=0,14038$	228,011	216,572	194,012	173,353	281,637
Cvs q $\rho=0,14038$	416,483	359,309	295,853	258,644	410,074

Tableau 47 : Ecart moyen quadratique de la valeur de l'option CMC déterminée par le modèle à volatilité stochastique par la simulation de Monte Carlo, par rapport au prix de BS(T<sub>1</sub>), pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre les fluctuations du prix du sous-jacent et celles de la volatilité (base journalière).

Pour les modèles, avec algorithme de Monte Carlo, on remarque que :

- Les écarts sont, d'autant plus importants, que le coefficient de corrélation, entre le prix du sous-jacent et la volatilité, est faible, en valeur absolue.
- Pour un coefficient de corrélation, égal à sa vraie valeur de  $-0.03629$ , le modèle CMCq=cte présente des écarts plus faibles que le modèle CMCq, pour les contrats C2800, C2950 et C3100. En revanche, il présente des écarts plus importants pour les contrats C3250 et C4000.
- Le contrat C3250 présente les écarts les plus faibles.

Si on compare les résultats de l'algorithme de Monte Carlo avec ceux de Hopscotch, au niveau du critère de MSE, on trouve des écarts très importants, aussi bien pour le processus brownien que le processus empirique. Cet écart ne peut être expliqué, par la différence, entre les coefficients de corrélation considérés, qui sont, de  $-0.03629$  pour l'algorithme de Monte Carlo, et de  $0,14038$  pour l'algorithme de Hopscotch.

Pour étudier les écarts relatifs, on divise l'écart quadratique moyen par la valeur moyenne de CBS(T1) (tableau 48) et on obtient le tableau 49.

CMC moy	<i>C2800</i>	<i>C2950</i>	<i>C3100</i>	<i>C3250</i>	<i>C4000</i>
CMCq Ro=-0.41239	306,6394	247,7352	192,1164	145,3243	352,7258
CMCq=cte Ro=-0.40244	306,1865	234,9876	172,1234	122,0955	314,1896
CMC OU Ro=-0.40244	51,0442	38,8869	30,7069	21,9854	41,2388
CMCq=cteRo=-0,03629	252,1222	192,9899	139,5375	96,0255	262,5658
CMC q Ro=-0,03629	240,6010	190,0399	142,4535	104,3015	269,9906
Cmarché	241,5652	192,5036	141,1920	93,7877	283,9512
Cvs q=cte $\rho=0,14038$	210.761	162.588	116.671	76.004	248.431
Cvs q $\rho=0,14038$	210.761	162.588	116.671	76.004	248.431

Tableau 48 : Valeur moyenne de l'option déterminée par les différentes simulations de Monte Carlo (base journalière)

A noter que, pour les deux modèles avec algorithme de Hopscotch, on considère la même valeur moyenne de l'option, quel que soit le contrat.

MSE/CMC moy	<i>C2800</i>	<i>C2950</i>	<i>C3100</i>	<i>C3250</i>	<i>C4000</i>
CMCq Ro=-0.41239	32,38%	36,01%	42,18%	51,75%	34,12%
CMCq=cte Ro=-0.40244	34,33%	36,50%	40,85%	49,70%	30,64%
CMC OU Ro=-0.40244	336,03%	341,70%	304,58%	272,30%	592,51%
CMCq=cteRo=-0,03629	19,14%	21,73%	26,57%	34,96%	16,83%
CMC q Ro=-0,03629	13,89%	17,33%	23,16%	33,26%	16,73%
Cmarché	15,81%	18,74%	22,09%	27,86%	19,83%
Cvs q=cte $\rho=0,14038$	108.18%	133.20%	166.29%	228.08%	113.37%
Cvs q $\rho=0,14038$	197.61%	220.99%	253.58%	340.30%	165.07%

Tableau 49 : Ecart moyen quadratique de la valeur de l'option CMC déterminée par les modèles à volatilité stochastique, par la simulation de Monte Carlo, par rapport au prix de BS(T<sub>1</sub>), rapporté à ce dernier prix pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre les fluctuations du prix du sous-jacent et celles de la volatilité (base journalière).

Manifestement, les écarts relatifs les plus faibles sont enregistrés lorsque le coefficient de corrélation, entre le prix du sous-jacent et la volatilité, est égal à sa vraie valeur de  $-0.03629$ . Pour l'algorithme de Monte Carlo, le niveau des écarts relatifs est de l'ordre de 15 à 50%. L'algorithme de Hopscotch donne des valeurs, nettement, plus élevées (supérieur à 100%).

Ce dernier résultat est confirmé par le tableau 50, qui mesure l'écart relatif par l'écart relatif quadratique moyen.

X	C2800	C2950	C3100	C3250	C4000
CMCq Ro=-0.41239	62,85%	82,49%	134,34%	245,62%	116,26%
CMCq=cte Ro=-0.40244	83,91%	96,83%	140,85%	233,59%	63,51%
CMC OU Ro=-0.40244	86,67%	86,11%	87,50%	89,24%	86,13%
CMCq=cteRo=-0,03629	41,06%	50,94%	79,60%	141,07%	39,58%
CMC q Ro=-0,03629	22,50%	34,78%	67,08%	134,74%	62,24%
Cmarché	21,31%	26,67%	35,98%	47,25%	57,19%

Tableau 50 : Ecart moyen quadratique relatif de la valeur de l'option CMC déterminée par les modèles à volatilité stochastique, par la simulation de Monte Carlo, par rapport au prix de BS(T<sub>1</sub>), prix pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre les fluctuations du prix du sous-jacent et celles de la volatilité :  $X=(\text{Somme}(C(\text{modèle})/CBS(T_1)-1)^2)^{1/2}$  (cf équation (3.2.2-4)).

Cet écart est d'autant plus faible que le coefficient de corrélation, entre le prix du sous-jacent et la volatilité, est proche de zéro en valeur absolue.

En procédant à la comparaison avec les résultats de Heston (1993), de la même manière que dans le cas de la base intraday, on obtient le graphique 73.

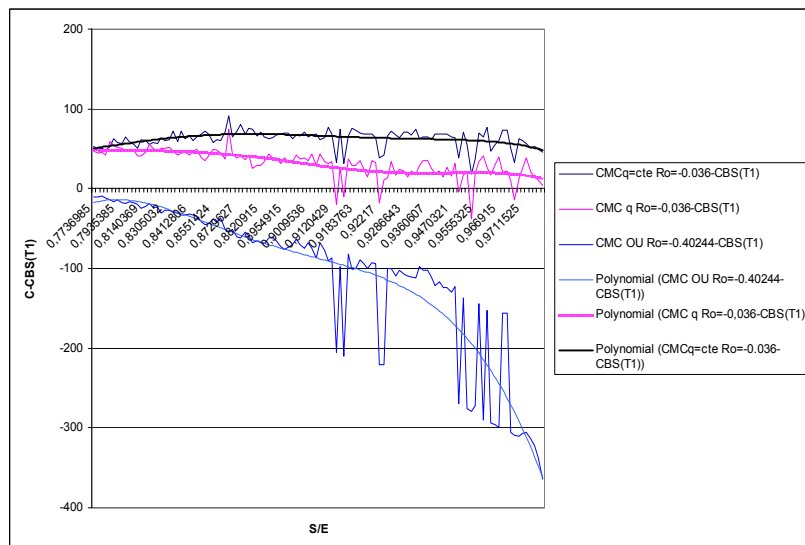


Figure 73 : Différence de la valeur de l'option avec CBS(T<sub>1</sub>) pour processus empirique et brownien de la volatilité :  $\rho=-0,036$ . Contrats de la base journalière. Moneyness entre 0,77 et 0,99 et temps à l'échéance entre 0,95 et 1,025. Il a été utilisé un lissage polynomial d'ordre 5.

A la lumière des résultats de ce graphique, on remarque que :

- Le processus brownien et le processus empirique de la volatilité surévaluent la valeur de l'option, par rapport à la référence CBS(T<sub>1</sub>), quelle que soit la parité de l'option comprise entre 0,77 et 0,99, tout à

l'inverse du processus d'Ornstein Uhlenbeck qui sous-évalue la valeur de l'option, pour cette plage de parité.

- La forme de la courbe relative au processus d'Ornstein Uhlenbeck ( $\rho=-0,40244$ ) correspond au profil de la courbe de Heston pour  $\rho=-0,5$ , alors que celle des processus brownien et empirique de la volatilité ( $\rho=-0,036$ ) correspondent à la courbe de Heston ( $\rho=0$ ).

### 3.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, après avoir établi l'équation différentielle de Garman (1976), ainsi que les conditions aux limites qui lui sont associés, on a procédé à l'estimation des différents paramètres des modèles à volatilité stochastique, en s'appuyant sur certaines hypothèses. Puis, on a utilisé l'algorithme de Hopscotch, qui est une méthode des différences finies pour la résolution d'équation différentielle aux dérivées partielles. Pour la résolution de l'équation de Garman (1976), cet algorithme de Hopscotch est complété par à un deuxième algorithme qui est le fruit d'une démarche inductive s'appuyant sur les résultats générés par l'algorithme de Hopscotch. Ces algorithmes ont généré des valeurs de l'option qui sont plausibles. Cependant, vu le caractère inductif de l'algorithme qui complète l'algorithme de Hopscotch, vu que cet algorithme n'a donné de résultats que pour le processus brownien de la volatilité, il a été essentiel de recourir à une méthode de résolution plus fiable et qui converge quel que soit le modèle à volatilité stochastique, en l'occurrence la simulation de Monte Carlo.

En ce qui concerne l'estimation des paramètres, l'hypothèse selon laquelle le drift risque neutre est constant s'avère empiriquement valide, surtout si on s'appuie sur les données de la base intraday, où ce drift risque-neutre est, carrément, égal au taux d'intérêt sans risque, comme si la volatilité était un actif négociable. Dans le cas de la base journalière le drift risque neutre est égal à trois fois le taux d'intérêt.

La volatilité de la volatilité du processus brownien est d'une part, à peu près égale à celle du processus d'Ornstein Uhlenbeck, et d'autre part représente, quasiment, la moyenne de celle du processus empirique. Pour le processus d'Ornstein Uhlenbeck, on a utilisé trois méthodes pour l'estimation des paramètres de la dynamique de la volatilité, afin de fiabiliser les calculs.

Dans le cas du processus empirique, les paramètres de la volatilité de la volatilité, pour la base journalière, sont du même ordre de grandeur que ceux de Willmott(2000).

Bien que l'on ait considéré le cas le plus général, on a trouvé que le coefficient de corrélation des mouvements du prix de l'option avec ceux de la volatilité est nul, aussi bien dans le cas de la base intraday que la base journalière.

On a trouvé, également, que le prix du risque du marché de la volatilité est une fonction décroissante de la volatilité qui admet une seule racine et qui a la même allure que la base soit intraday ou journalière. L'estimation de ce paramètre n'est pas essentielle, dans la mesure, où on a considéré l'hypothèse de la constance du drift risque-neutre de la volatilité.

En ce qui concerne la résolution du problème par la méthode des différences finies, on a trouvé que le schéma numérique est toujours consistant. Il est au meilleur de sa consistance quand les pas des variables d'états sont égaux aux produits des volatilités respectives de ces deux variables d'états, par la racine carrée du triple du pas du temps. Pour la stabilité, on a mené une étude théorique qu'on a relayée par deux études numériques, en considérant un processus brownien de la volatilité. Dans la première, en se donnant leurs valeurs maximales des variables d'états, leurs pas respectifs sont, inversement proportionnels, au nombre de périodes du temps. Dans la deuxième, les pas des variables d'états correspondent à celles qui minimisent l'erreur de troncature et, donc, qui rendent le schéma au meilleur de sa consistance.

Compte tenu des hypothèses adoptées, la première étude numérique de stabilité a révélé que le schéma est instable. La deuxième étude a révélé qu'il était stable mais à la limite de l'instabilité, dans la mesure où le gain est, quasiment, égal à l'unité. Ce qui implique une convergence très lente du schéma.

Dans tous les cas, le recours à l'algorithme de Hopscotch, inconditionnellement stable, s'est avéré nécessaire. En s'appuyant sur les résultats de cet algorithme, on a remarqué qu'il existe une plage des pas des variables d'état, où la valeur de l'option était finie. Partout ailleurs, elle est, quasiment, infinie. Ceci, nous a conduit à compléter l'algorithme de Hopscotch par un autre algorithme. Ce dernier se base sur une démarche inductive, qui a révélé que la valeur de l'option est le minimum de celles générés, par l'algorithme de Hopscotch, pour un domaine donné des deux variables d'états, sachant qu'elle est comprise entre la valeur intrinsèque et la valeur du sous-jacent.

Les résultats de cet algorithme nécessitent d'être appuyés par ceux de l'algorithme de la simulation de Monte Carlo dont la convergence a été démontrée théoriquement et empiriquement.

Tous les algorithmes développés, dans le cadre de cette résolution, ont été testés, avec succès, sur le modèle de Black & Scholes, en considérant un drift risque-neutre et une volatilité de la volatilité nuls.

Les valeurs de l'option calculées, par ces modèles à volatilité stochastique, ont été comparées à une référence. Cette référence n'est pas la valeur de l'option sur le marché qui est égale à la valeur de l'option, donnée par Black & Scholes. En effet, la volatilité implicite a été calculée, en considérant un diviseur, pour annualiser le temps à l'échéance, qui est de 250 pour la volatilité, et de 365 pour le taux d'intérêt. Etant donné, que pour les modèles considérés on n'a



utilisé qu'un seul diviseur, aussi bien pour la volatilité que pour le taux d'intérêt, il est évident que la référence devient la valeur  $CBS(T_1)$  du modèle de Black & Scholes, en considérant un unique diviseur du temps à l'échéance.

Dans le cas de l'algorithme de Hopscotch, on n'a considéré que le processus brownien de la volatilité implicite, aussi bien pour la base intraday que pour la base journalière. Dans le cas de la simulation de Monte Carlo, on a considéré aussi bien les contrats de la base journalière que les contrats de la base intraday, avec trois dynamiques de la volatilité implicite déterminées, à partir de l'ensemble de la base journalière. Ces trois dynamiques sont le mouvement Brownien, le processus empirique et le processus d'Ornstein Uhlenbeck. Pour ces calculs, on a considéré deux coefficients de corrélation, aussi bien pour la base intraday que pour la base journalière. Ils sont de  $-0.08$  et  $-0.248$ , pour la base intraday et de  $-0.036$  et  $-0.41$  pour la base journalière. Les vrais coefficients de corrélation sont de  $-0.08$  pour la base intraday et  $-0.036$  pour la base journalière.

Les conclusions de ces calculs, sont les suivantes :

Aussi bien pour l'algorithme de Hopscotch que pour l'algorithme de la simulation de Monte Carlo, on a trouvé une forte corrélation (proche de l'unité) de la valeur de l'option avec la référence  $CBS(T_1)$ . En général, le coefficient de corrélation correspondant est plus grand, dans le cas de la simulation de Monte Carlo, que dans le cas de l'algorithme de Hopscotch.

La valeur de l'option, calculée par l'algorithme de Hopscotch, est toujours supérieure à la référence  $CBS(T_1)$ , quelle que soit la parité de l'option et quelle que soit la base intraday ou journalière. Ceci n'est pas le cas de la simulation de Monte Carlo qui, en fonction de la parité de l'option, il survalue ou sous-évalue la valeur de l'option par rapport à la référence  $CBS(T_1)$ .

L'écart quadratique moyen de la valeur de l'option avec la référence CBS(T1) est plus grand, dans le cas de l'algorithme de Hopscotch, que dans le cas de la simulation de Monte Carlo.

Pour le calcul de la valeur de l'option, pour une observation donnée, le temps de convergence est de 5 secondes pour l'algorithme de Hopscotch et de 74 secondes pour la simulation de Monte Carlo, en considérant un nombre de périodes de 400 et un nombre de simulations de 10 000. Ces temps de convergence supposent l'utilisation de la même machine pour l'exécution des deux algorithmes. Il est certain, que le nombre, de pas des maillages respectifs aux deux algorithmes, ne correspondent pas à un même niveau de précision.

Les modèles, à volatilité historique stochastique, n'ont été étudiés que pour l'algorithme de Hopscotch, pour la base journalière.

Dans ce cas et d'une manière générale, la valeur de l'option donnée par les modèles à volatilité historique, de même que sa corrélation, avec CBS(T1), sont plus faibles que celles relatives aux modèles à volatilité implicite.

Dans le cas du processus empirique de la volatilité historique, on a vu que les modèles basés sur des paramètres de la dynamique de la volatilité, déterminés, à partir de l'ensemble de la base ont des performances meilleures que ceux basés sur des paramètres déterminés à partir d'un contrat donné. Ceci est dû au fait que chaque contrat présente des spécificités. Cependant, l'estimation des paramètres de la volatilité, à partir de l'ensemble de la base, est plus fiable, dans la mesure où les modèles ont un meilleur pouvoir prédictif.

Les performances des modèles à volatilité stochastique sont différentes, selon le processus de la volatilité considéré. Pour la volatilité implicite, au vu des critères de corrélation avec la référence CBS(T1), de l'écart quadratique moyen et de son rapport avec la valeur moyenne de l'option, le modèle à processus

brownien de la volatilité présente des performances meilleures que celles du modèle à processus empirique de la volatilité. Ceci est vrai, dans le cas, où on applique l'algorithme de Hopscotch à la base journalière ou l'algorithme de la simulation de Monte Carlo appliqué à la base intraday.

Dans le cas de la base intraday, au vu des critères précités les meilleures performances sont relatives aux modèles avec processus d'Ornstein Uhlenbeck, comme processus de la volatilité utilisant comme algorithme la simulation de Monte Carlo. Pour ce même algorithme, si on considère la base journalière, les meilleures performances sont relatives au modèle avec processus empirique de la volatilité, suivis par les modèles avec processus brownien de la volatilité, quelle que soit la valeur du coefficient de corrélation. Les modèles avec processus d'Ornstein Uhlenbeck présentent dans ce cas les performances les moins bonnes.

Par ailleurs, le coefficient de corrélation entre la valeur du sous-jacent et la volatilité a une influence sur la performance du modèle. Pour la base intraday, on a considéré deux coefficients de corrélation :  $\rho = -0,248$  et la vraie valeur  $\rho = -0,08$ . Pour la base journalière, on a considéré, également, deux coefficients de corrélation :  $\rho = -0,40244$  et la vraie valeur  $\rho = -0,03629$ .

Pour la base intraday, le coefficient de corrélation entre la valeur de l'option et la référence CBS(T1) n'est pas très sensible à la variation de la corrélation entre la valeur du sous-jacent et la volatilité. Dans les deux cas, il est, à peu près, égal à l'unité. L'écart quadratique moyen et son rapport avec la valeur moyenne de l'option sont sensibles à la variation du coefficient de corrélation  $\rho$ . Pour la base intraday ces grandeurs sont plus faibles pour  $\rho = -0,08$  que pour  $\rho = -0,248$ . De même, dans le cas de la base journalière, elles sont plus faibles pour  $\rho = -0,03629$  que pour  $\rho = -0,40244$ . Pour l'algorithme de la simulation de Monte Carlo, au vu de ces trois critères, la sensibilité à la variation du coefficient de corrélation  $\rho$ ,

du modèle à volatilité stochastique, avec processus empirique de la volatilité est plus grande que celle du modèle à processus brownien de la volatilité.

La comparaison de nos résultats avec ceux de Heston, a permis de dégager les conclusions suivantes :

- Dans le cas de l'algorithme de Hopscotch, appliqué à la base intraday, le profil de la courbe de la valeur de l'option diminuée de la référence CBS(T1), n'est pas le même que celui de Heston, dans le cas d'un processus brownien de la volatilité implicite, ( $\rho=-0,08$ ) dans une plage de parité telle que :  $0,866 < S/E < 1,035$ . Ce résultat reste le même dans le cas de la base journalière, pour le même processus aussi bien pour la volatilité implicite qu'historique (avec  $\rho=0,14038$ ) et dans une plage de parité telle que :  $0,77 < S/E < 0,99$ .
- D'une manière générale, les courbes de la valeur de l'option, données par l'algorithme de Monte Carlo, sont plus proches de celle de Heston, que les courbes, données par l'algorithme de Hopscotch.
- Pour la base intraday, en considérant l'algorithme de simulation de Monte Carlo, en considérant un coefficient de corrélation ( $\rho=-0,08$ ), le processus empirique donne la forme la plus plausible correspondante à la courbe correspondante de Heston ( $\rho=0$ ), sur des plages de parité ( $0,866 < S/E < 1,035$ ), pour la classe 1) et ( $0,792 < S/E < 0,991$ ) pour la classe 9. Pour un coefficient de corrélation ( $\rho=-0,248$ ), toute chose égale par ailleurs, c'est le processus d'Ornstein Uhlenbeck qui donne les courbes les plus plausibles sur les mêmes plages de parité.

Pour la base journalière, en considérant l'algorithme de simulation de Monte Carlo, en considérant un coefficient de corrélation ( $\rho=-0,40244$ ), le processus d'Ornstein Uhlenbeck donne une courbe de la valeur de l'option, diminuée de la référence CBS(T1), qui correspond à la courbe de Heston pour  $\rho=-0,5$  sur la plage de parité telle que : ( $0,77 < S/E < 0,99$ ). De même le processus brownien et le processus empirique de la volatilité implicite donnent des courbes de la

valeur de l'option, diminuée de la référence CBS(T1), qui correspondent à la courbe de Heston pour  $\rho=0$ , sur la même plage de parité.



## CHAPITRE 4

### MODELE NEURONAL

Les difficultés d'estimation de la dynamique des prix des actifs financiers, dans les modèles paramétriques, ont mené à des tentatives de modéliser ces dynamiques avec des modèles non paramétriques. Les modèles paramétriques sont préférés, quand ils existent, puisqu'ils permettent d'appréhender la logique de la formation des prix. Les modèles non paramétriques, qui sont des boîtes noires, présentent plutôt des substituts, dans le cas, où les hypothèses des modèles paramétriques ne sont pas vérifiées. Parmi ces modèles non paramétriques, il y a les réseaux de neurones.

Les modèles neuronaux présentent plusieurs avantages par rapport aux modèles paramétriques traditionnels. Tout d'abord, ils permettent de ne poser aucune hypothèse, a priori, sur la forme de la relation qui unit les différentes variables, mais, de la déduire à partir des données. En d'autres termes, ils ne nécessitent aucune hypothèse particulière sur la nature du processus liant les variables d'entrée aux variables de sortie. D'autre part, ils ont l'avantage de ne pas se fonder sur des hypothèses spécifiques concernant les dynamiques des variables d'état (prix de l'actif sous-jacent et la volatilité) et, donc, ils sont robustes aux erreurs de spécification qui affectent, au contraire, les modèles paramétriques.

Ainsi, les modèles neuronaux constituent une alternative prometteuse, aux modèles paramétriques, puisqu'ils sont dotés des propriétés de non-linéarité, d'approximateur universel et parcimonieux de fonction et qu'ils ne se basent pas sur des hypothèses sur le processus de diffusion ni sur les comportements des données qui doivent être juste stationnaires. Par contre, le défi auquel les modélisateurs doivent faire face est qu'il n'y a pas de théorie qui permet de déterminer le modèle neuronal optimal. Le développement d'un modèle neuronal relève plus de l'art que de la science.

Etant donné la flexibilité et le pouvoir des réseaux de neurones d'approximer des fonctions complexes et non linéaires, il est normal de l'appliquer à l'évaluation des produits dérivés dont les formules d'évaluation sont fortement non linéaires.

Parmi les réseaux de neurones qui sont dotés de cette propriété, il y'a le perceptron multicouche (MLP) qui se base, en général, sur des fonctions d'activation de type sigmoïde et les fonctions radiales de base (RBF) qui se basent sur des fonctions d'activation de type gaussienne dont les centres sont à déterminer au cours de l'apprentissage.

L'approche la plus utilisée, actuellement, en finance, est de ce fait, le perceptron multicouche. Associée à l'algorithme de rétropropagation du gradient, elle peut être présentée comme une forme d'extension des modèles de régression dans un contexte non linéaire.

Cette approche a été utilisée dans plusieurs travaux qui ont traité le sujet de l'évaluation des options par les réseaux de neurones. On peut citer, à cet effet, Malliaris (1993), Hutchinson (1994), Fiordaliso (1997), Anders & Korn (1998), Garcia & Gençay (2000) et Amilon (2001).



Un problème important mais difficile, dans la modélisation par les réseaux de neurones, est la sélection du nombre de couches cachées et des nombres des neurones par couche cachée. L'algorithme « cascade-correlation » proposé par Fahlman and Lebiere résout ce problème par intégration de nouveaux neurones, selon l'erreur d'approximation résiduelle. Cet algorithme a permis de trouver l'architecture adéquate et de réduire le temps nécessaire pour une telle tâche.

Une des originalités du présent travail est d'avoir utilisé, l'algorithme « Cascade correlation », comme algorithme d'apprentissage. Cet algorithme combine deux idées clés: la première est l'architecture « Cascade » pour laquelle les unités cachées sont ajoutées au réseau, d'une manière incrémentale, et chaque unité ne change pas une fois ajoutée. La deuxième idée est l'algorithme d'apprentissage qui crée et installe les nouvelles unités cachées. Pour chaque unité cachée, l'algorithme cherche à maximiser l'intensité de la corrélation entre l'output de cette unité cachée et le signal d'erreur résiduel, à la sortie du réseau, qu'on cherche à réduire.

L'algorithme « cascade correlation » a des avantages, par rapport aux algorithmes d'apprentissage existants, dans la mesure, où il apprend très rapidement, qu'il détermine sa taille et sa topologie propre et ne nécessite pas une rétro-propagation du signal d'erreur à travers les connexions du réseau.

Pour utiliser les MLP et l'algorithme « cascade-correlation », aucune hypothèse ne sera posée, a priori, sur la forme des distributions des variables observées, sur la forme de la relation qui unit ces variables, sur la forme des résidus du modèle ou sur l'existence d'interactions entre les variables ( à contrario des modèles de régression qui supposent une relation linéaire, l'absence de colinéarité, les résidus de moyenne nulle, de variance constante et non-autocorrélés).

L'objectif, dans ce chapitre, est de comparer les performances des modèles neuronaux, pour l'évaluation d'options d'achat sur l'indice CAC 40, par rapport au modèle de Black & Scholes et des modèles à volatilité stochastiques. Ce travail s'appuie sur les données de la base intraday et de la base journalière. Pour la base intraday, on considère un découpage selon les contrats ou selon les classes de parité (moneyness) et de temps à l'échéance. Pour la base journalière, on considère, uniquement, un découpage selon les contrats.

Au cours de ce travail, pour avoir les meilleures performances du modèle, plusieurs questions se posent : Quels sont les inputs à considérer ? Faut-il utiliser la volatilité implicite ou la volatilité historique ? Les résultats basés sur les données de la base intraday sont-ils meilleurs que ceux basés sur la base journalière ? Quel est le meilleur découpage, au niveau des résultats, celui suivant les contrats ou celui suivant la parité (moneyness) et le temps à échéance ?

Ce chapitre comporte deux sections.

Dans la première section, après avoir présenté l'approche neuronale, et les réseaux de neurones ainsi que leurs propriétés, on étudie en profondeur, l'algorithme de rétro-propagation du gradient, avec ses propriétés et ses limites d'utilisation. Ensuite, est décrit l'algorithme « cascade corrélation » qui est utilisé, dans la partie empirique, pour l'évaluation de l'option.

La deuxième section constitue la partie empirique de ce chapitre. Après avoir choisi les inputs et l'output du modèle neuronal, on précise les traitements de l'output compatibles avec la stationnarité de celui-ci ainsi qu'avec la fonction d'activation du neurone de sortie. En fonction des inputs à considérer, on définit 6 modèles-types. Ensuite, on définit la méthodologie de modélisation par l'algorithme « cascade corrélation », avec la technique de « cross validation » qui impose une contrainte de bonne généralisation, permettant d'éviter tout

phénomène de sur-apprentissage. On précise, également, les critères de convergence de l'algorithme "cascade corrélation", comme algorithme d'apprentissage. Enfin, sont présentés les résultats de calculs et les transformations inverses de l'output, afin de remonter à la valeur de l'option, aussi bien, pour la base intraday, que pour la base journalière. Les résultats trouvés sont à comparer avec ceux du modèle de Black & Scholes et des modèles à volatilité stochastique, en utilisant la simulation de Monte Carlo.

Ma contribution, dans ce chapitre, consiste, d'abord, à découper et à calculer les paramètres manquants comme la volatilité historique et la volatilité implicite traitement des bases de données. Elle consiste, donc, à générer les 49 fichiers de training (39, pour la base intraday et 10, pour la base journalière) et les 53 fichiers de test (43 pour la base intraday et 10 pour la base journalière). A partir de ces fichiers sont générés les fichiers compatibles avec le logiciel thinkspro, qui sont le fruit de la transformation des inputs et output dans les fichiers, de training et de test, précités.

Ensuite, ma contribution consiste à élaborer les 181 modèles neuronaux (159 modèles pour la base intraday et 22 pour la base journalière), en faisant appel à l'algorithme "cascade correlation", comme algorithme d'apprentissage, et en se limitant à 10000 itérations.

Puis, elle consiste à proposer et à choisir parmi les 6 modèles-types définis par les inputs à considérer pour le modèle neuronal.

Ensuite, ma contribution, dans ce chapitre, consiste à implémenter les algorithmes permettant de remonter à la valeur de l'option, à partir des outputs calculés par les réseaux.

Enfin, elle consiste à interpréter les résultats relatifs aux modèles neuronaux et à faire une synthèse, en vue de comparer les performances des différents modèles considérés dans la présente thèse.

## **4.1 THEORIE DES RESEAUX DE NEURONES**

### ***4.1.1 Présentation de l'approche neuronale***

Un réseau de neurones artificiel est un processus composé d'unités de traitement simples, parallèlement, distribuées, destinées à accumuler la connaissance expérimentale et la rendre opérationnelle ( Aleksander et Morton (1990)).

Il ressemble au cerveau, par les deux caractéristiques suivantes:

1. Le réseau acquiert la connaissance de son environnement, à travers un processus d'apprentissage.
2. L'intensité d'une connexion, entre les neurones, connue sous le nom de poids synaptique, est utilisée pour accumuler la connaissance acquise

Le problème majeur, pour un réseau de neurones, consiste à identifier un modèle capable de reproduire, le plus fidèlement possible, la réalité imposée par le modélisateur, le plus souvent exprimée par des objectifs clairs et précis et définis dans un environnement spécifique. Cependant, la connaissance de l'environnement nécessite :

- La connaissance des états de la nature basée sur les informations passées et présentes.
- L'observation est obtenue au moyen d'une analyse approfondie de l'environnement. Les observations sont, fondamentalement, bruitées et dépendent de l'erreur due aux imperfections du système d'analyse. Les observations obtenues fournissent un ensemble d'informations, à partir duquel, les nœuds d'inputs du réseau de neurones sont alimentés.

En fait, la connaissance, fournie au réseau de neurones, va être stockée dans l'échantillon d'apprentissage. Ce dernier est constitué, quant-à-lui, d'un ensemble de combinaisons d'inputs et d'outputs. Chaque combinaison est constituée de signaux d'inputs, auxquels correspondent des réponses désirées.

La construction du réseau de neurone s'opère de la manière suivante :

- Premièrement, une architecture appropriée va être sélectionnée pour le réseau de neurones avec une couche d'inputs et une couche d'output. Alors, un sous-ensemble d'exemples doit être utilisé pour permettre au réseau de neurones d'apprendre par un algorithme approprié. Cette phase correspond au cycle d'apprentissage.
- Deuxièmement, la performance de la reconnaissance du réseau de neurone en cours d'apprentissage est testée avec des données nouvelles. La performance du réseau est estimée, en comparant le signal de sortie, rapporté, par le réseau, avec sa valeur réelle. Cette deuxième phase de l'opération du réseau est appelée la généralisation.

Dans un réseau de neurones, et pour une architecture donnée, la représentation de la connaissance de l'environnement est définie par les valeurs des paramètres du réseau (c'est-à-dire les poids synaptiques et les biais). La forme de cette représentation de la connaissance constitue la représentation-même du réseau de neurones, et par conséquent, elle influence sa performance.

La représentation de la connaissance dans un réseau de neurones artificiel est très complexe. Néanmoins, il y a quatre règles, tirés du bon sens général à respecter (Anderson (1988)):

Règle 1. Les inputs similaires, appartenant à une même classe, doivent produire, généralement, une représentation semblable au sein du réseau et doivent, par conséquent, être classés, dans une même catégorie.

Règle 2. Les items (observations) à catégoriser dans des classes différentes doivent donner lieu à des représentations différentes dans le réseau. La deuxième règle est, exactement, l'opposée de la première règle.

Règle 3. Si une caractéristique particulière est importante, alors, il doit y avoir un grand nombre de neurones impliqués dans la représentation de cette caractéristique dans le réseau.

Règle 4. L'information antérieure doit être traitée avant qu'elle ne soit présentée au réseau de neurone, de cette façon la structure du réseau va être simplifiée et allégée.

Ces règles sont, fortement, recommandées pour plusieurs raisons. Ainsi, Russo (1991) suggère qu'un réseau de neurones à structure spécialisée (appropriée pour résoudre un type de problème spécifique) doit avoir un nombre réduit de paramètres susceptibles d'être ajustés. Par conséquent, un réseau spécialisé exige un nombre réduit d'informations pour apprendre vite et offre une meilleure généralisation.

Le réseau de neurones tire son pouvoir de modélisation, premièrement, de sa structure composée de nœuds massivement et parallèlement interconnectés, deuxièmement, de sa capacité d'apprentissage et par la suite sa capacité de généralisation. La capacité de généralisation est, en fait, la capacité de retrouver et établir, correctement, des états de la nature pour des observations autres que celles rencontrées, lors du déroulement du processus d'apprentissage. Ces deux capacités de traitement de l'information donnent aux réseaux de neurones la possibilité de résoudre des problèmes complexes. Cependant, en pratique les réseaux de neurones ne peuvent pas fournir, individuellement, une solution au problème dans sa totalité, plutôt, ils ont besoin d'être intégrés dans une approche logique. C'est, ainsi, qu'un problème complexe est décomposé en plusieurs sous-problèmes, relativement, simples.

## 4.1.2 Réseau de neurones

### 4.1.2.1 Neurone formel

Un neurone est considéré comme un dispositif qui reçoit, à partir d'autres neurones ou de l'extérieur, des stimulations par des entrées (inputs), au nombre de  $n$ , et les pondère grâce à des valeurs réelles appelées coefficients synaptiques ou poids synaptiques. Ces coefficients peuvent être positifs, et l'on parle alors de synapses excitatrices, ou négatifs pour des synapses inhibitrices. Un neurone  $j$  calcule ainsi, un potentiel  $P_j$ , égal à la somme de ses entrées (inputs) ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) pondérées, par les coefficients synaptiques respectifs ( $w_1, w_2, \dots, w_n$ ), à laquelle on ajoute un terme constant : le biais  $b_j$ . La valeur du potentiel  $P_j$  est donnée par l'équation suivante:

$$P_j = \sum_{i=1}^n w_{ij}x_i + b_j.$$

A ce potentiel, le neurone applique une fonction d'activation  $\Phi$ , de manière à ce que la sortie  $y_j$ , calculée par le neurone, soit égale à  $\Phi(P_j)$ , tel que :

$$y_j = \Phi(P_j) = \phi \left( \sum_{i=1}^n w_{ij}x_i + b_j \right)$$

La valeur de sortie  $y_j$  (output) est émise par le neurone vers d'autres neurones ou vers l'extérieur. Ainsi, un neurone est caractérisé par trois concepts : son état interne qui est son potentiel, ses connexions avec d'autres neurones et sa fonction de transfert.

Le schéma d'un neurone formel peut être présenté comme suit (figure 74) :

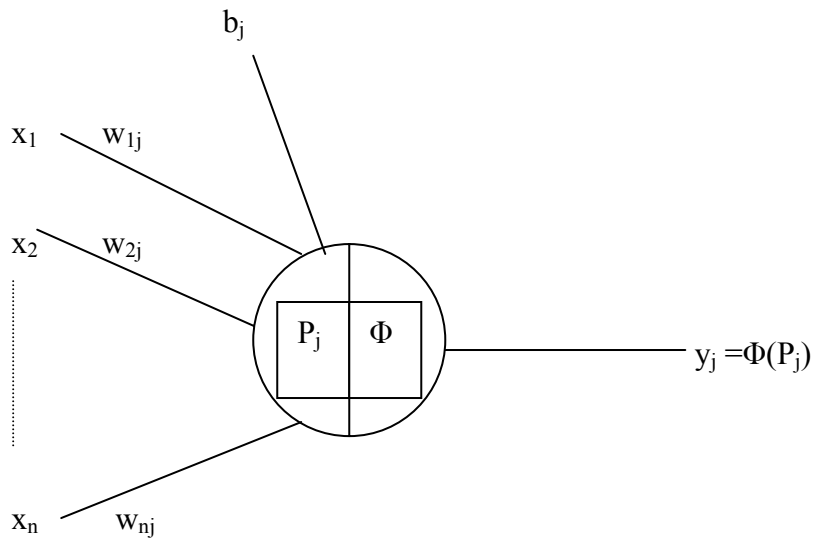


Figure 74 : Neurone formel : inputs et bias  $b_j$  :  $x_{0j}=b_j$  et  $w_{0j}=+1$

L'utilisation du biais est de nature à appliquer une transformation affine au potentiel. En fait le biais est un paramètre externe du neurone  $j$ , il peut être intégré dans l'équation du potentiel, comme étant le signal  $x_0$  qui prend la valeur 1, pondéré par le poids  $w_{0j}$ , dont la valeur est égale au biais  $b_j$ . La présentation du modèle neuronal, où le biais est considéré comme un nœud d'input, est la suivante :

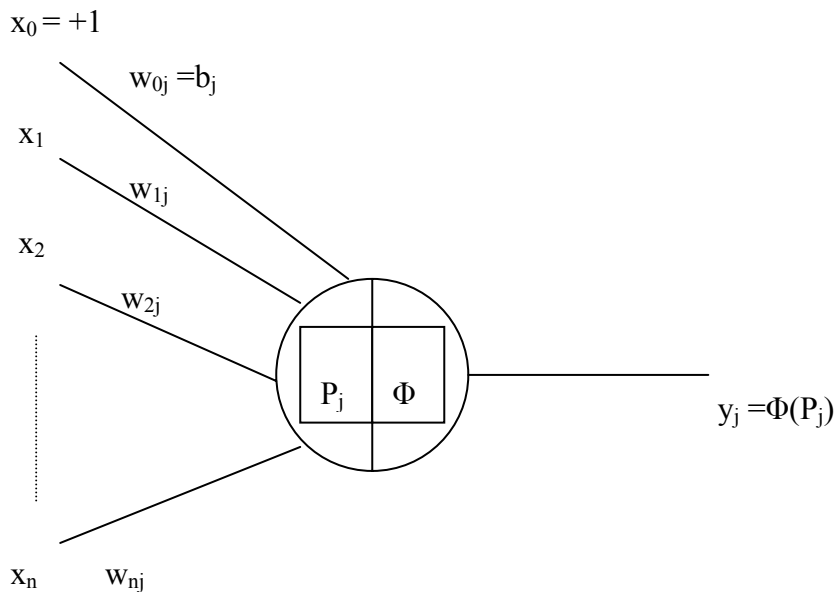


Figure 75 : Neurone formel : input et bias poids synaptique, input bias=+1

Le modèle devient, ainsi :



$$P_j = \sum_{i=0}^n w_{ij}x_i \quad \text{et} \quad y_j = \Phi(P_j) = \phi\left(\sum_{i=0}^n w_{ij}x_i\right)$$

#### 4.1.2.2 Perceptron linéaire

Pour un problème de classement bidimensionnel, l'objectif du réseau de neurones est de classer correctement les observations, caractérisées par les signaux d'inputs  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dans l'une des deux classes  $C_1$  ou  $C_2$ .

Si on considère une fonction d'activation binaire, la règle de décision retenue, pour ce type de problème, est l'affectation d'une observation donnée à la classe  $C_1$  si la valeur de l'output est égale à 1 et à la classe  $C_2$  si la valeur de l'output est égale à zéro. Les valeurs, un et zéro, sont choisies, arbitrairement.

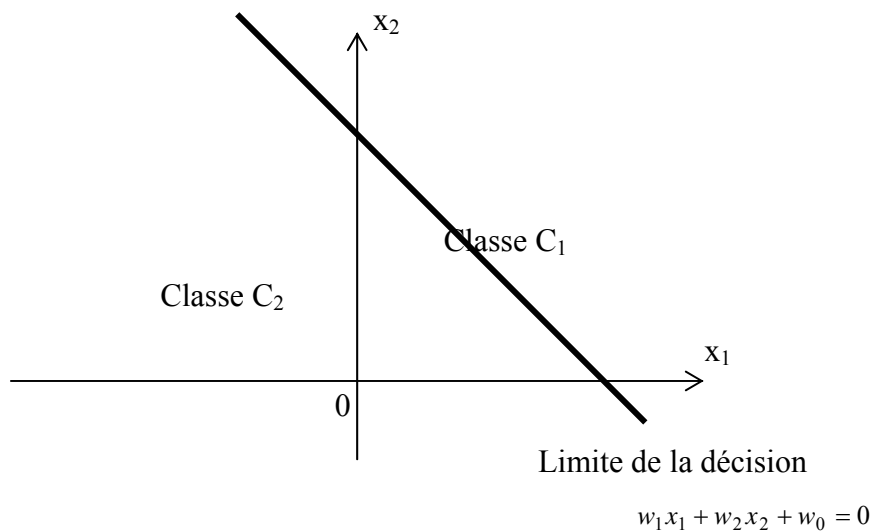


Figure 76 : séparation de l'espace des inputs en deux classes  $C_1$  et  $C_2$  par un perceptron linéaire

Dans un tel cas, la limite de la décision est, donc, une droite. Un point situé au-dessus de la ligne limite est affecté à la classe  $C_1$  et un point qui se trouve au-dessous de la ligne limite est affecté à la classe  $C_2$ . Le biais représente tout simplement l'ordonnée (valeur du potentiel) à l'origine.

Dans la forme la plus simple du perceptron, là où il y'a deux régions de

décision, la séparation se fait via un hyperplan défini par :  $\sum_{i=1}^n w_i x_i + w_0 = 0$

Si, pour l'itération  $m$ , on désigne, par  $X(m) = [+1, x_1(m), x_2(m), \dots, x_n(m)]$  le vecteur des inputs, et par  $W(m) = [w_0(m), w_1(m), w_2(m), \dots, w_n(m)]$ , le vecteur des poids synaptiques, le potentiel s'écrit :

$$P(m) = \sum_{i=0}^n w_i(m)x_i(m) = W^T(m)X(m).$$

Ainsi, pour une itération  $m$  donnée, l'équation  $w^T X = 0$  définie dans l'espace à  $n$  dimensions un hyperplan qui sépare entre deux différentes classes d'input  $C_1$  et  $C_2$ . Pour un fonctionnement correct du perceptron les deux classes  $C_1$  et  $C_2$  doivent être linéairement séparées (voir figure 77, cas d'un perceptron à deux dimensions).

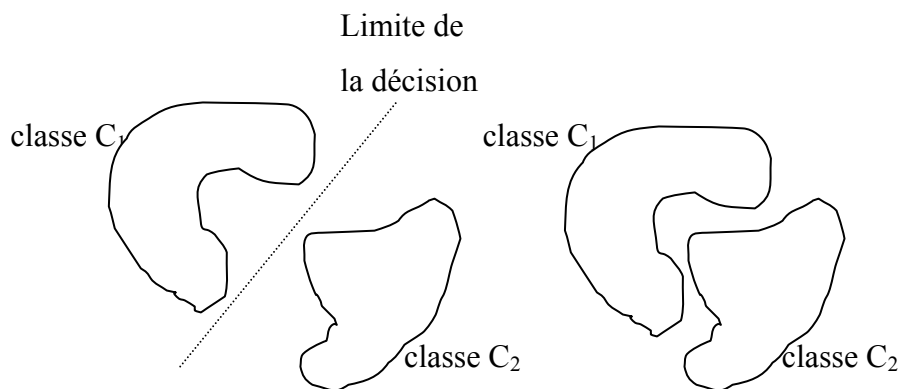


Figure 77 : classes d'observations linéairement séparées et classes non linéairement séparées

Cependant si les classes  $C_1$  et  $C_2$  sont rapprochées comme le montre la figure 77, dans le cas d'un perceptron à deux dimensions, celles-ci deviennent non linéairement séparées. Il s'agit d'une situation qui dépasse les capacités de calcul d'un perceptron linéaire simple.

Un tel problème nécessite l'utilisation d'un neurone formel ou d'un réseau de neurones non linéaire. Pour un neurone avec une fonction d'activation non linéaire, l'hyperplan devient une courbe. Des deux cotés de la courbe, il peut exister des observations mal classées, ce qui constitue une erreur de

classification. La qualité de la classification est mesurée, par le pourcentage des données classées, correctement.

Pour un réseau de neurones, à chaque neurone ajouté, correspond un hyperplan (une courbe). Ces hyperplans coupent l'espace des données en plusieurs classes dont le nombre évolue en fonction du nombre des neurones du réseau.

Plus on introduit de neurones, plus on introduit des non-linéarités dans la structure du réseau, plus la partition de l'espace obtenue se rapproche de celle suggérée par les données. Autrement dit, le MLP non linéaire a la capacité de partitionner l'espace des variables d'entrée de manière non-linéaire. Ce qui implique que plus la topologie du réseau est complexe (plus le nombre des paramètres du modèle est important), plus la partition de l'espace obtenue est « torturée » ou déformée.

### **4.1.2.3 Réseaux de neurones**

#### ***4.1.2.3.1 Définition d'un réseau de neurones***

Un réseau de neurones est constitué par un certain nombre de neurones interconnectés. Chaque neurone peut recevoir plusieurs signaux intrant des autres neurones, les agrège en se basant sur une fonction d'entrée et génère, enfin, un signal sortant, basé sur une fonction de sortie, appelée fonction d'activation. Le signal sortant alimentera, ensuite, d'autres neurones, suivant la typologie du réseau. La valeur numérique d'un poids synaptique, relatif à une connexion entre deux nœuds, reflète l'ampleur de l'influence d'un neurone sur l'autre neurone et le sens de cette influence. La résolution d'un problème neuronal revient à déterminer les poids relatifs aux connexions.

Dans sa forme typique, un réseau de neurones est composé de trois types de couches : une couche d'input, une couche d'output et des couches cachées. Les neurones de la couche d'input reçoivent les signaux de l'environnement, les neurones de la couche d'output émettent des signaux à l'environnement.

Néanmoins, les neurones des couches cachées n'ont aucune interaction directe avec l'environnement, d'où leur appellation. Les connexions entre les couches se font dans une seule direction, de la couche d'input vers la couche d'output. Chaque couche est formée au moins d'un neurone. (Voir figure 78)

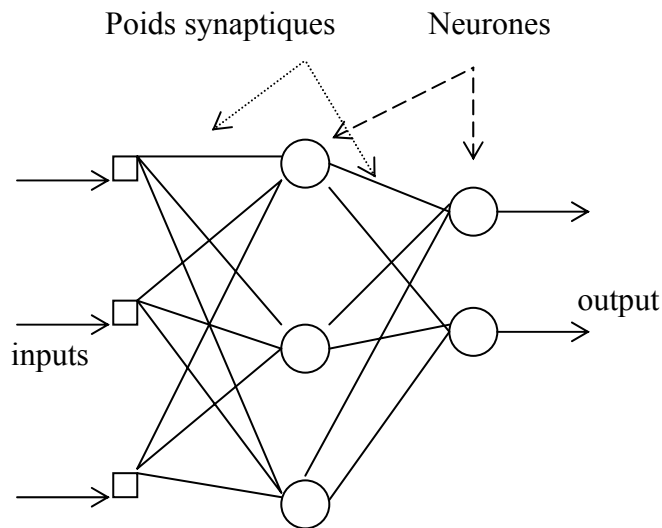


Figure 78 : Réseau de neurones : architecture "feedforward" MLP à une couche cachée

En effet, choisir un réseau de neurone, revient à sélectionner une architecture de réseau et, par conséquent, sélectionner la manière, dont les neurones sont structurés et connectés, ainsi que, le type d'algorithme d'apprentissage à utiliser.

Trois éléments sont, donc, particulièrement importants quelque soit le réseau de neurones :

- la structure des neurones
- la topologie du réseau (terme emprunté à la théorie des graphes)
- l'algorithme d'apprentissage qui permet de trouver les poids synaptiques du réseau

Les réseaux multicouches « feedforward » "multilayer feedforward networks" représentent une classe importante des réseaux de neurones. Pour un tel type de réseau, au sein d'une couche, chaque neurone agit indépendamment des autres,

et en particulier, il ne reçoit aucune connexion en provenance des neurones de cette couche.

#### **4.1.2.3.2 Propriété fondamentale des réseaux de neurones : l'approximation universelle parcimonieuse :**

Les réseaux de neurones possèdent une propriété qui est à l'origine de leur intérêt pratique dans des domaines très divers : Ils sont des approximateurs universels parcimonieux. Cette expression traduit deux propriétés distinctes : d'une part, les réseaux de neurones sont des approximateurs universels, et d'autre part, une approximation à l'aide d'un réseau de neurones nécessite moins de paramètres ajustables qu'une approximation usuelle (développement de Taylor, série de fourrier, etc...).

La propriété d'approximation universelle peut être énoncée comme suit : « Toute fonction, bornée, suffisamment régulière,  $f$  peut être approchée, uniformément, avec une précision arbitraire, dans un domaine fini de l'espace de ses variables, par un réseau de neurones comportant une couche de neurones cachés en nombre fini ».

Si on considère un nombre d'input égal à  $n$  et un nombre d'output égal à  $p$  on aura à approcher une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ . Le théorème de l'approximation universelle de fonction s'énonce comme suit :

- soit  $\varphi$  une fonction bornée, continue et strictement croissante,
  - soit  $I_n = [0, 1]^n$ , un intervalle de  $\mathbb{R}^n$ ,
  - soit  $C(I_n)$  l'espace des fonctions continue sur  $I_n$  et soit  $\varepsilon$  un réel positif
- alors, il existe un entier  $p$  et des suites de paramètres  $\alpha_i$ ,  $b_i$  et  $\omega_{ij}$  (avec  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq n$ ), tel que :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi \left( \sum_{j=1}^n \omega_{ij} x_j + b_i \right)$$

soit une approximation de la fonction  $f$  tel que :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) ; |F(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)| < \varepsilon$$

Cette propriété n'est pas spécifique aux réseaux de neurones, ils existent bien d'autres familles de fonctions paramétrées possédant cette propriété, c'est le cas, notamment, des polynômes, des séries de Fourier, etc .... La spécificité des réseaux de neurones réside dans le caractère parcimonieux de l'approximation : A précision égale, les réseaux de neurones nécessitent moins de paramètres ajustables (poids synaptiques) que les approximateurs universels utilisés. Plus précisément, le nombre de poids synaptiques varie, linéairement, avec le nombre de variables de la fonction à approcher, alors, qu'il varie, exponentiellement, pour la plupart des autres approximateurs. En pratique, dès qu'un problème fait intervenir plus de deux variables, les réseaux de neurones sont, en général, préférables aux autres méthodes.

Parmi les réseaux de neurones qui possèdent la propriété d'approximateur universelle de fonction, on trouve le Perceptron multicouche (Multilayer Perceptron (MLP)) et le Radial Basis Function (RBF).

#### **4.1.2.4 Comparaison entre MLP et RBF**

Deux exemples de « nonlinear layered feedforward networks » sont le Perceptron Multicouches (MultiLayered Perceptron : MLP) et la fonction radiale de base (Radial Basis Function :RBF). Bien que ces deux types de réseaux aient la propriété d'approximateur universel de fonctions, ils présentent un certain nombre de différences qui sont essentiellement :

- Un RBF n'a qu'une seule couche cachée, alors qu'un MLP peut avoir une ou plusieurs couches cachées.
- Pour un MLP, les neurones des couches cachées ou de la couche de sortie ont le même modèle, alors que les neurones de la couche cachée du RBF n'ont pas le même modèle et en plus différent, au niveau de leurs fonctions d'activation, des neurones de la couche de sortie.

- La couche cachée d'un RBF est non linéaire et la couche de sortie est linéaire alors que les couches cachées et la couche de sortie d'un MLP sont toutes non linéaires. Cependant, en cas de régression non linéaire la couche de sortie est de préférence linéaire.

Pour une approximation non linéaire d'une fonction et pour un même degré de précision, le MLP nécessite un nombre plus réduit de paramètres (poids synaptiques) que le RBF.

L'utilisation de fonctions radiales implique une modification de l'algorithme de rétropropagation. L'apprentissage est souvent réalisé en deux étapes distinctes : une phase de détermination des centres des fonctions radiales suivie d'une phase de détermination des poids synaptiques. Cependant, cette approche ne garantit pas de conduire à un optimum de la fonction d'erreur.

Cependant, pour traiter des problèmes multidimensionnels, les RBF nécessitent un nombre de cellule de type RBF (et, donc, un nombre de paramètres), bien plus important, que le nombre de cellules d'un MLP utilisant des fonctions sigmoïdes (Weigend, Huberman et Rumelhart, 1990). C'est ce qui fait, en pratique, que la plupart des applications des réseaux de neurones en finance ont utilisé des MLP. C'est, particulièrement, le cas des applications relatives à l'évaluation des options par les réseaux de neurones.

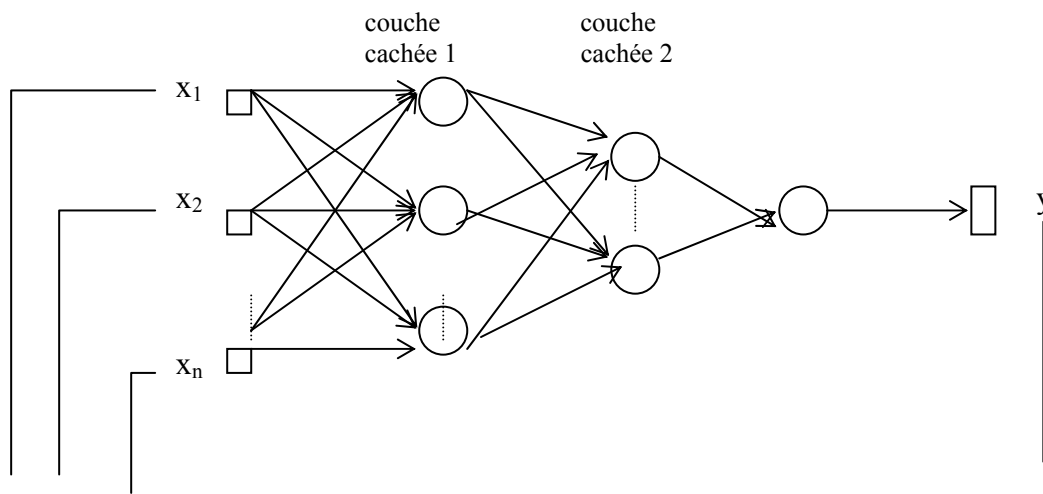
#### **4.1.2.5 Perceptron multicouches (MLP)**

Le "MultiLayer Perceptron" est l'architecture la plus connue des réseaux de neurones du type « feedforward ». Il représente le modèle le plus courant et le plus simple de réseau non linéaire.

Pour doter le perceptron multicouches de la propriété de non-linéarité, il faut qu'il comporte, au moins, une couche cachée, et que les fonctions d'activation des neurones, qui le composent, soient non-linéaires.

Plus on introduit de neurones avec une fonction d'activation non linéaire, plus on dote le réseau d'une capacité pour résoudre des problèmes complexes et plus le découpage de l'espace des inputs obtenu se rapproche de celui des données.

Dans la pratique, il est rare d'utiliser plus de deux couches cachées. L'architecture suivante est relative à un réseau multicouches « feedforward », avec deux couches cachées et un seul output.



$(x_1, x_2, \dots, x_n)_1$	1	$y_1$
$(x_1, x_2, \dots, x_n)_2$	2	$y_2$
$(x_1, x_2, \dots, x_n)_3$	3	$y_3$
⋮	⋮	⋮
$(x_1, x_2, \dots, x_n)_N$	N	$y_N$
Vecteur input	Numéro de l'observation	Output désiré

Figure 79: Réseau de neurones MLP : les poids synaptiques sont estimés à travers un apprentissage sur une base de donnée comportant les arguments de la fonction  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) et sa valeur  $y=(y_1, y_2, \dots, y_N)$ .

Les connexions, entre les couches, se font dans une seule direction, de la couche d'input vers la couche d'output. Un neurone d'une couche donnée reçoit, de tous les neurones de la couche précédente, des signaux intrants pondérés par des poids synaptiques. Après agrégation de ces signaux, suivant une fonction d'entrée, il génère un signal sortant basé sur une fonction de sortie appelée



fonction d'activation, lequel signal est envoyé avec pondération, avec des coefficients synaptiques, à tous les neurones de la couche suivante. Le signal d'input se propage à travers le réseau dans une direction « forward », de couche en couche.

Le nombre de neurones constituant les couches d'input et d'output dépend du problème à traiter, alors que, le nombre de couches cachées, ainsi que, le nombre de neurones, sur chacune d'elles, sont fixés par le modélisateur.

Un réseau sans couches cachées ne peut résoudre que des problèmes linéaires. La propriété de non-linéarité est acquise par l'introduction de la première couche cachée.

### **4.1.3 Algorithme de rétropropagation du gradient**

#### **4.1.3.1 Algorithme**

L'apprentissage par l'algorithme de rétropropagation des gradients est une application d'une méthode statistique connue sous le nom « approximation stochastique » qui a été proposée par Robbins & Monro (1951).

On considère un réseau de neurones, du type MLP à Q couches. Soit  $N_q$  le nombre de neurones sur la couche numéro q (avec  $1 \leq q \leq Q$ ). A l'itération n, qui correspond à la n<sup>ième</sup> observation du fichier « training », si le neurone j est un neurone appartenant à la couche de sortie, le signal d'erreur à la sortie de ce neurone est :  $e_j(n) = d_j(n) - y_j(n)$

Les neurones de la couche de sortie sont les seuls pour lesquels le signal de sortie peut être calculé directement. L'erreur quadratique, relative à l'ensemble des neurones de sortie, est la somme des fonctions énergie des erreurs

correspondantes à ces neurones, soit : 
$$\xi(n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_q} e_j^2(n)$$

Pour un fichier de training comportant N observations. L'erreur quadratique moyenne, sur l'ensemble de ces N observations, et relative à l'itération n, est :

$$\xi_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi(n)$$

L'objectif de l'apprentissage est d'ajuster les poids synaptiques du réseau, afin de, minimiser cette erreur  $\xi_m$ . On considère un processus d'apprentissage pour lequel les poids synaptiques sont mis à jour pour chaque observation du fichier training. Une itération correspond au parcours de l'ensemble des observations du jeu d'apprentissage par l'algorithme d'apprentissage.

Si on considère un neurone j, qui reçoit des signaux de tous les neurones de la couche précédente, le potentiel à l'entrée de ce neurone est, donc :

$$p_j(n) = \sum_{i=0}^m \omega_{ij}(n) y_i(n)$$

Le signal de sortie correspondant est :  $y_j(n) = \varphi_j(p_j(n))$

L'algorithme de rétropropagation du gradient consiste à corriger les poids synaptiques  $\omega_{ji}$ , selon la règle Delta, tel que ce poids devient :

$$\omega_{ji}(n+1) = \omega_{ji}(n) + \Delta\omega_{ji}(n)$$

où, si on désigne par  $\eta$  est le coefficient d'apprentissage, alors :

$$\Delta\omega_{ji}(n) = -\eta \frac{\partial \xi(n)}{\partial \omega_{ji}(n)} \quad (4.1.3-1)$$

La dérivée partielle de la fonction d'erreur, par rapport au poids synaptique  $\omega_{ji}(n)$ , peut être décomposée comme suit :

$$\frac{\partial \xi(n)}{\partial \omega_{ji}(n)} = \frac{\partial \xi(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial p_j(n)} \frac{\partial p_j(n)}{\partial \omega_{ji}(n)} \quad (4.1.3-2)$$

D'après la définition, même, de chacune de ces variables, on a :

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{n}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_g} e_j^2(\mathbf{n}) & \Rightarrow & \frac{\partial \xi(\mathbf{n})}{\partial e_j(\mathbf{n})} = e_j(\mathbf{n}) \\ e_j(\mathbf{n}) &= d_j(\mathbf{n}) - y_j(\mathbf{n}) & \Rightarrow & \frac{\partial e_j(\mathbf{n})}{\partial y_j(\mathbf{n})} = -1 \\ y_j(\mathbf{n}) &= \varphi_j(p_j(\mathbf{n})) & \Rightarrow & \frac{\partial y_j(\mathbf{n})}{\partial p_j(\mathbf{n})} = \varphi_j'(p_j(\mathbf{n})) \\ p_j(\mathbf{n}) &= \sum_{i=0}^m \omega_{ij}(\mathbf{n}) y_i(\mathbf{n}) & \Rightarrow & \frac{\partial p_j(\mathbf{n})}{\partial \omega_{ji}(\mathbf{n})} = y_i(\mathbf{n}) \end{aligned}$$

Soit en remplaçant, dans l'équation (4.1.3-2), on obtient :

$$\frac{\partial \xi(\mathbf{n})}{\partial \omega_{ji}(\mathbf{n})} = -e_j(\mathbf{n}) \varphi_j'(p_j(\mathbf{n})) y_i(\mathbf{n})$$

En remplaçant cette expression, dans l'équation (4.1.3-1), on a :

$$\Delta \omega_{ji} = \eta e_j(\mathbf{n}) \varphi_j'(p_j(\mathbf{n})) y_i(\mathbf{n}) = \eta \psi_j(\mathbf{n}) y_i(\mathbf{n})$$

avec,

$$\psi_j(\mathbf{n}) = -\frac{\partial \xi(\mathbf{n})}{\partial p_j(\mathbf{n})} = e_j(\mathbf{n}) \varphi_j'(p_j(\mathbf{n}))$$

$\psi_j(\mathbf{n})$  est le gradient local de l'erreur relatif à la sortie du neurone  $j$ .

Le signal d'erreur  $e_j(\mathbf{n})$ , à la sortie du neurone  $j$ , est une variable clé pour l'ajustement des poids synaptiques. Que le neurone  $j$  fasse partie d'une couche cachée ou de la couche de sortie, il participe à la génération de l'erreur à la sortie du réseau. Cependant, le calcul du signal de l'erreur change, selon le cas.

**Cas 1 : Le neurone  $j$  fait partie de la couche de sortie :**

Dans ce cas, à ce neurone, correspond une valeur désirée de l'output du réseau  $d_j(\mathbf{n})$ , spécifique à ce neurone, et, dans ce cas, on a, directement :

$$e_j(\mathbf{n}) = d_j(\mathbf{n}) - y_j(\mathbf{n})$$

et le gradient local :  $\psi_j(\mathbf{n}) = e_j(\mathbf{n}) \varphi_j'(p_j(\mathbf{n}))$ .

**Cas 2 : Le neurone j ne fait pas partie d'une couche cachée :**

Dans ce cas, il n'y a pas de valeur d'output spécifique à ce neurone et le signal d'erreur doit être calculé à partir des signaux d'erreur des neurones de la couche suivante qui sont directement connectés à ce neurone. Pour le calcul suivant, on suppose que le neurone j appartient à la couche cachée qui précède la couche de sortie. Dans ce cas, le gradient local, relatif au neurone j, à l'itération n, est :

$$\psi_j(n) = -\frac{\partial \xi(n)}{\partial p_j(n)} = -\frac{\partial \xi(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial p_j(n)} = -\frac{\partial \xi(n)}{\partial y_j(n)} \phi_j'(p_j(n)) \quad (4.1.3-3)$$

Etant donnée que  $\xi(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_q} e_k^2(n)$  où les neurones k sont des neurones de sortie, on a :

$$\frac{\partial \xi(n)}{\partial y_j(n)} = \sum_{k=1}^{N_q} e_k \frac{\partial e_k(n)}{\partial y_j(n)} = \sum_{k=1}^{N_q} e_k \frac{\partial e_k(n)}{\partial p_k(n)} \frac{\partial p_k(n)}{\partial y_j(n)} \quad (4.1.3-4)$$

Or, pour le neurone de sortie k le signal d'erreur est :

$$e_k(n) = d_k(n) - y_k(n) = d_k(n) - \phi_k(p_k(n))$$

Ce qui explique que :  $\frac{\partial e_k(n)}{\partial p_k(n)} = -\phi_k'(p_k(n))$

A l'itération n, le potentiel pour le neurone de sortie k est :

$$p_k(n) = \sum_{j=0}^m \omega_{kj}(n) y_j(n)$$

Par conséquent, on a :  $\frac{\partial p_k(n)}{\partial y_j(n)} = \omega_{kj}(n)$

Et en remplaçant cette expression, dans l'équation (4.1.3-4), et, puisque,  $\psi_k(n) = e_k(n) \phi_k'(p_k(n))$ , on peut écrire:

$$\frac{\partial \xi(n)}{\partial y_j(n)} = - \sum_{k=1}^{N_o} \omega_{kj}(n) e_k(n) \phi'_k(p_k(n)) = - \sum_{k=1}^{N_o} \omega_{kj}(n) \psi_k(n)$$

Ainsi, en remplaçant dans l'équation (4.1.3-3), le gradient local, relatif au neurone j, s'écrit, à l'itération n :

$$\psi_j(n) = \phi'_j(p_j(n)) \sum_{k=1}^{N_o} \omega_{kj}(n) \psi_k(n)$$

Cette dernière équation traduit la rétropropagation du gradient local.

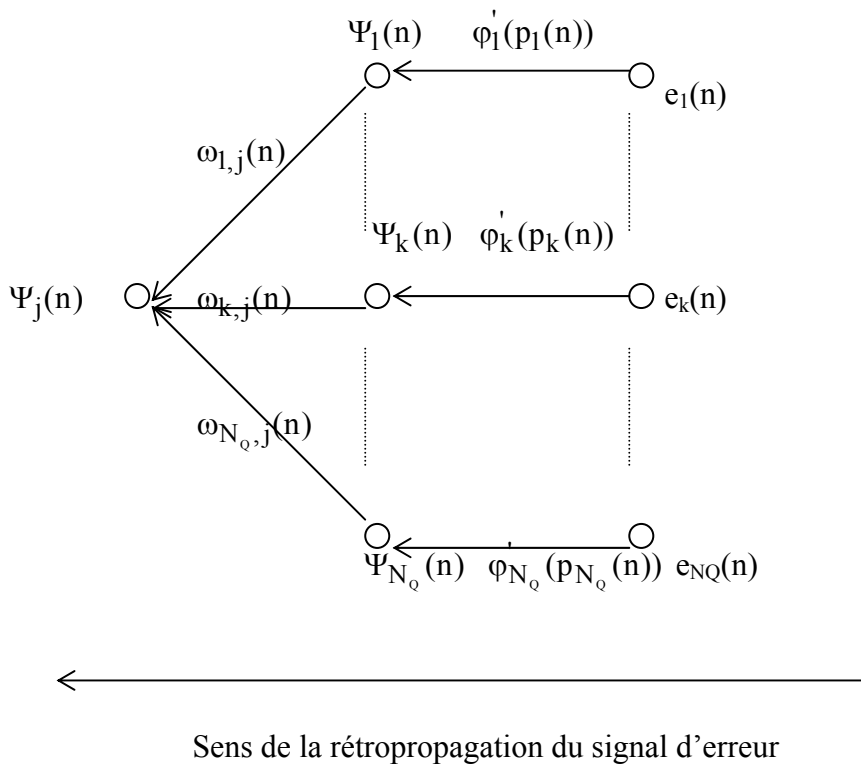


Figure 80 : Rétropropagation du signal d'erreur, dans un réseau de neurone de type MLP

En conclusion, suivant l'algorithme de rétropropagation du gradient, on peut dire que :

1. La correction des poids synaptiques  $\omega_{ji}(n)$ , reliant un neurone  $j$  d'une couche, à un neurone  $i$  de la couche suivante, se fait, selon la règle Delta, tel que : 
$$\Delta\omega_{ji}(n) = \eta\Psi_j(n)y_i(n)$$
 (Où  $\Psi_j(n)$  est le gradient local relatif au neurone  $j$  à l'itération  $n$ ,  $y_i(n)$  est le signal d'input au neurone  $j$  qui est en même temps l'output calculé du neurone  $i$  et  $\eta$  est le coefficient d'apprentissage.)
2. Le gradient local dépend de l'appartenance du neurone à la couche de sortie ou à une couche cachée :
  - si le neurone  $j$  appartient à la couche de sortie, le gradient local  $\Psi_j(n)$  est égal au produit du signal d'erreur de ce neurone  $e_j(n)$  et de la dérivée de la fonction d'activation, par rapport, au potentiel l'entrée de ce neurone :  $\varphi'_j(p_j(n))$ .
  - si le neurone  $j$  appartient à une couche cachée : le gradient local  $\Psi_j(n)$  est égal au produit de la dérivée de la fonction d'activation par rapport au potentiel  $\varphi'_j(p_j(n))$ , à l'entrée de ce neurone, et de la somme pondérée par les poids synaptiques respectifs des gradients locaux de tous les neurones de la couche suivante qui sont connectés avec le neurone  $j$ .

L'algorithme de rétropropagation du gradient comporte, donc, deux phases :

- la première phase « forward » concerne le signal fonction qui se propage vers l'avant du réseau, d'un neurone à un autre, à partir des neurones de sortie. Pendant cette phase, les poids synaptiques restent inchangés. Pour chaque neurone  $j$ , le signal fonction est  $y_j(n) = \varphi(p_j(n))$ , où  $p_j(n)$  est le potentiel à l'entrée du neurone  $j$ , qui est la somme pondérée par les poids synaptiques respectifs de tous les signaux d'entrée, qui sont, également, les signaux de sortie de tous les neurones de la couche précédente. Soit :

$$p_j(n) = \sum_{i=0}^m \omega_{ij}(n)y_i(n)$$

- s'il s'agit de la couche d'entrée on a  $y_i(n) = x_i(n)$ , c'est à dire, la  $i$ ème composante du vecteur input relatif à une observation du fichier training.
- s'il s'agit de la couche de sortie, on a  $y_j(n) = s_j(n)$ . C'est à dire, la  $j$ ème composante du vecteur output. Cet output sera comparé à une valeur désirée correspondante  $d_j(n)$  relative au  $j$ ème output d'une observation du fichier training. Cette comparaison va générer un signal d'erreur :  $e_j(n) = d_j(n) - y_j(n)$ . Cette phase commence, donc, à la première couche cachée par le calcul du signal fonction de tous les neurones la constituant et se termine à la couche de sortie par le calcul de la fonction d'erreur de tous les neurones la constituant.

- La deuxième phase « backward » concerne le signal erreur qui se propage, dans le sens contraire, couche par couche, à partir de la couche de sortie. Pour chaque neurone  $j$ , on calcule le gradient local  $\psi_j(n)$  qui permet de calculer la correction des poids synaptiques, liaison par liaison, selon la règle Delta. Dans le cas d'un neurone de sortie, le gradient local est égal au signal d'erreur multiplié par la dérivée de la fonction d'activation appliquée au potentiel à l'entrée de ce neurone.

#### **4.1.3.2 La fonction d'activation**

Le gradient local de l'erreur, pour chaque neurone, dépend de la dérivée de la fonction d'activation. Ainsi, cette fonction est supposée dérivable, donc, continue. Les fonctions d'activation non linéaires et différentiables, couramment utilisées dans les perceptrons multicouches, sont la fonction sigmoïde et la fonction tangente hyperbolique.

### 4.1.3.2.1 La fonction sigmoïde

La forme générale de la fonction sigmoïde, appliquée à un neurone  $j$ , est définie

par :  $\varphi(p_j(n)) = \frac{1}{1 + e^{-ap_j(n)}}$ , où  $a$  est un réel strictement positif et  $p_j(n)$  est le

potentiel à l'entrée du neurone  $j$ , à l'itération  $n$ . Cette fonction est à valeur dans l'intervalle  $[0,1]$ , soit :  $y_j(n) = \varphi(p_j(n)) \in [0,1]$ . La courbe de la fonction sigmoïde est représentée dans le graphique 81.

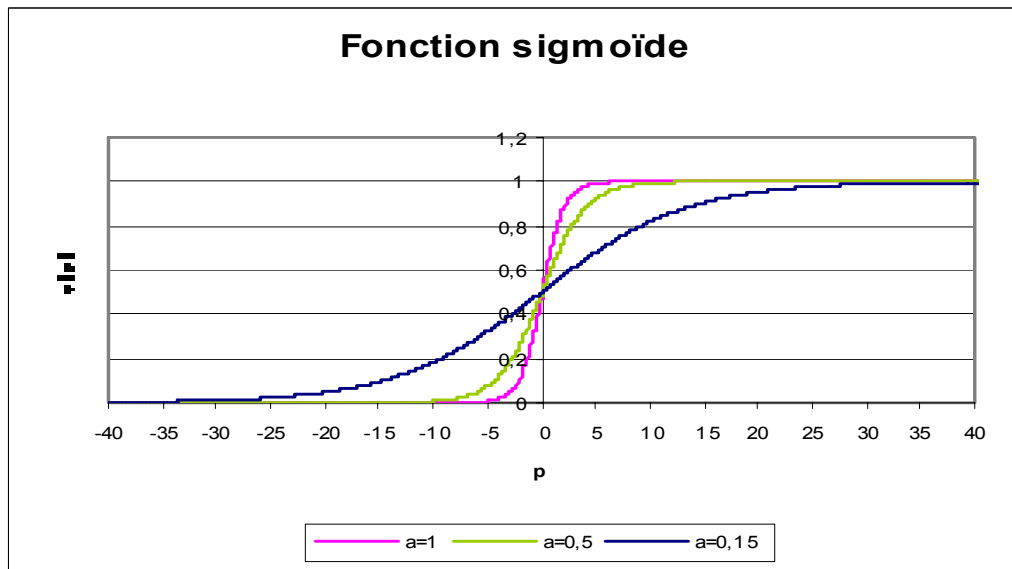


Figure 81 : Graphique de la fonction d'activation sigmoïde pour  $a=0,15$  ;  $a=0,5$  et  $a=1$

Sa fonction dérivée est  $\frac{\partial y_j(n)}{\partial p_j(n)} = \varphi'(p_j(n)) = \frac{ae^{-ap_j(n)}}{(1 + e^{-ap_j(n)})^2} = ay_j(n)(1 - y_j(n))$

Ainsi, dans le cas d'une fonction sigmoïde, le gradient local peut s'exprimer comme suit :

- si le neurone fait partie de la couche de sortie, le gradient local est :

$$\psi_j(n) = \varphi'(p_j(n))e_j(n) = a[d_j(n) - s_j(n)]s_j(n)[1 - s_j(n)]$$

- si le neurone fait partie d'une couche cachée, le gradient local est :

$$\psi_j(n) = \varphi'(p_j(n)) \sum_{k=1}^{N_o} \omega_{kj}(n) \psi_k(n) = ay_j(n)[1 - y_j(n)] \sum_{k=1}^{N_o} \omega_{kj}(n) \psi_k(n)$$



La dérivée de la fonction sigmoïde atteint :

- sa valeur maximale, pour  $y_j(n) = \varphi(p_j(n)) = 0.5$ , quand  $p_j(n) = 0$ ,
- sa valeur minimale, pour  $y_j(n) = \varphi(p_j(n)) = 0$ , quand  $(p_j(n) = -\infty)$ ,
- l'unité, pour  $y_j(n) = \varphi(p_j(n)) = 1$ , quand  $(p_j(n) = +\infty)$ .

Il s'en suit que la variation des poids synaptiques, reliant un neurone  $j$ , à des neurones  $k$ , est d'autant plus importante, que le gradient local du neurone  $j$  est grand et, donc, que la valeur de la fonction signal à la sortie de ce neurone est d'autant plus proche de 0.5 et, donc, le potentiel à son entrée proche de 0. Elle est, d'autant plus faible, que le potentiel est grand en valeur absolue. D'après Rumelhart et al. (1986), c'est ce qui fait la stabilité de l'algorithme de rétropropagation du gradient.

#### 4.1.3.2 Fonction tangente hyperbolique

La forme générale de la fonction tangente hyperbolique est définie par :

$$\varphi(p_j(n)) = a \tanh(bp_j(n)) \text{ avec } a > 0 \text{ et } b > 0$$

Cette fonction est, à valeur dans l'intervalle  $[-1,1]$ , tel que :

$$y_j(n) = \varphi(p_j(n)) \in [-1,1]$$

Sa fonction dérivée est :

$$\frac{\partial y_j(n)}{\partial p_j(n)} = \varphi'(p_j(n)) = ab \left[ 1 - (\tanh(bp_j(n)))^2 \right] = \frac{b}{a} [a - y_j(n)] [a + y_j(n)]$$

Ainsi, dans le cas d'une fonction tangente hyperbolique, le gradient local peut s'exprimer comme suit :

- si le neurone fait partie de la couche de sortie, le gradient local s'écrit :

$$\psi_j(n) = \varphi'_j(p_j(n)) e_j(n) = \frac{b}{a} [d_j(n) - s_j(n)] [a - s_j(n)] [a + s_j(n)]$$

- si le neurone fait partie d'une couche cachée, le gradient local s'écrit :

$$\psi_j(n) = \varphi'_j(p_j(n)) \sum_{k=1}^{N_o} \omega_{kj}(n) \psi_k(n) = \frac{b}{a} [a - y_j(n)] [a + y_j(n)] \sum_{k=1}^{N_o} \omega_{kj}(n) \psi_k(n)$$

### 4.1.3.3 Le coefficient d'apprentissage

La correction des poids synaptiques est proportionnelle au coefficient d'apprentissage  $\eta$ . Plus ce coefficient est petit, plus les variations des poids synaptiques du réseau sont faibles, d'une itération à une autre, et vice versa. Un faible coefficient d'apprentissage rend la convergence de l'algorithme plus lente mais permet une précision meilleure et surtout permet d'éviter les minimas locaux qui faussent la solution du problème. Un coefficient d'apprentissage grand, permet d'accélérer le rythme de l'apprentissage avec des variations importantes des poids synaptiques, d'une itération à l'autre, en contrepartie le réseau peut devenir instable (oscillations des valeurs des poids synaptiques). En plus, le risque de tomber dans un minimum local est d'autant plus grand que le coefficient d'apprentissage est grand. Il y'a donc un arbitrage à faire pour converger, rapidement, vers une solution tout en améliorant la précision, éliminer le risque d'instabilité du réseau et le risque de tomber dans des minimas locaux.

Le risque d'instabilité du réseau peut être évité, en utilisant la règle Delta généralisée, au lieu de la règle Delta, tout court, Rumelhart et al. (1986). Ceci, en incluant un coefficient  $\alpha$  positif, tel que, la règle d'apprentissage devient :

$$\Delta\omega_{ji}(n) = \alpha\Delta\omega_{ji}(n-1) + \eta\psi_j(n)y_i(n).$$

La règle Delta correspond à  $\alpha=0$ . On considère la variation  $(\Delta\omega_{ij}(t); 0 \leq t \leq n)$ , comme une suite de premier terme :  $\Delta\omega_{ij}(0) = \eta\psi_j(0)y_i(0)$ . En multipliant l'expression de  $(\Delta\omega_{ij}(t); 1 \leq t \leq n)$ , par  $\alpha^{n-t}$ , et en faisant la différence entre ces  $n$  équations, on obtient :

$$\Delta\omega_{ji}(n) = \alpha^n \Delta\omega_{ij}(0) + \eta \sum_{t=1}^n \alpha^{n-t} \psi_j(t) y_i(t) = \eta \sum_{t=0}^n \alpha^{n-t} \psi_j(t) y_i(t)$$

Comme, on a :

$$\psi_j(t)y_i(t) = -\frac{\partial \xi(t)}{\partial \omega_{ij}(t)}$$

on peut écrire :

$$\Delta\omega_{ji}(n) = -\eta \sum_{t=0}^n \alpha^{n-t} \frac{\partial \xi(t)}{\partial \omega_{ji}(t)}$$

D'où les remarques suivantes :

- Pour que l'algorithme soit convergent il faut que :  $0 \leq |\alpha| < 1$ .

- Si  $\alpha=0$ , on a :

$$\alpha^{n-t} = 1 \text{ si } t = n$$

$$\alpha^{n-t} = 0 \text{ si } t \neq n$$

et, donc,  $\Delta\omega_{ji}(n) = \eta \psi_j(n) y_i(n)$  (ce qui revient à la règle Delta)

- L'introduction du coefficient  $\alpha$  à un effet stabilisateur qui permet d'éviter les oscillations dans la détermination des coefficients synaptiques. En effet :

- Si le signe de  $\frac{\partial \xi(t)}{\partial \omega_{ij}(t)}$  ne change pas, pour des itérations  $t$  consécutives,

la somme  $S$ , tel que  $S = \sum_{t=0}^n \alpha^{n-t} \frac{\partial \xi(t)}{\partial \omega_{ij}(t)}$ , devient importante en valeur

absolue ce qui engendre une modification importante du poids synaptique en question.

- Par contre, si le signe de  $\frac{\partial \xi(t)}{\partial \omega_{ij}(t)}$  change, d'une itération à une autre, la

somme  $S$ , tel que  $\sum_{t=0}^n \alpha^{n-t} \frac{\partial \xi(t)}{\partial \omega_{ij}(t)}$ , devient faible en valeur absolue, ce

qui engendre une petite modification du poids synaptique en question.

#### 4.1.3.4 Mode d'apprentissage

##### 4.1.3.4.1 Mode séquentiel et mode « Batch »

Une itération correspond à la présentation de l'ensemble des observations de l'échantillon d'apprentissage  $\{(x(k); d(k)); 1 \leq k \leq N\}$  où  $x(k)$  correspond au vecteur input du réseau et  $d(k)$ , correspond au vecteur output désiré, à la sortie du réseau de neurones. Le processus d'apprentissage permet de modifier les

pois synaptiques, d'une itération à une autre, jusqu'à leur stabilisation et la convergence de l'erreur quadratique moyenne  $\xi_m$ , relative à l'ensemble de l'échantillon apprentissage, vers une valeur minimale.

L'apprentissage, selon l'algorithme de rétropropagation du gradient, peut-être fait selon deux modes : le mode séquentiel ou le mode « Batch ».

#### 4.1.3.4.2 Mode séquentiel

Dans ce mode, il y'a pour chaque observation de l'échantillon d'apprentissage une propagation « forward », suivi, immédiatement, d'une rétropropagation. La propagation « forward » permet de calculer le signal fonction, à la sortie de chaque neurone, et, en particulier, les neurones de la couche de sortie. La rétropropagation de l'erreur à travers le réseau permet le calcul du gradient local, relatif à chaque erreur, qui permet, au fur et à mesure, de corriger les poids synaptiques.

#### 4.1.3.4.3 Mode Batch

Dans ce mode, une première phase « forward » consiste à calculer le signal fonction du réseau pour chacune des observations de l'échantillon d'apprentissage  $\{(x(k); d(k)); 1 \leq k \leq N\}$ . Cette phase comporte, donc,  $N$  propagations « forward » dans le réseau pendant lesquels les poids synaptiques du réseau restent inchangés. Pour chaque propagation, on calcule l'erreur à la sortie des neurones de la couche de sortie. L'erreur moyenne qui correspond à l'ensemble des  $N$  propagations est donc :

$$\xi_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi(n)$$

$$\text{avec, } \xi(n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_o} e_j^2(n) \quad \text{et} \quad e_j(n) = d_j(n) - y_j(n)$$

Soit, en remplaçant  $\xi(n)$  par son expression, on obtient :

$$\xi_m = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{N_o} (d_j(n) - y_j(n))^2$$

Après ces  $N$  propagations « forward », la correction des poids synaptiques se fait pendant une seule propagation « backward » tel que :

$$\Delta\omega_{ji} = -\eta \frac{\partial \xi_m}{\partial \omega_{ji}} = -\frac{\eta}{N} \sum_{n=1}^N e_j(n) \frac{\partial e_j(n)}{\partial \omega_{ji}}$$

Le mode séquentiel est préféré au mode « Batch », puisqu'il nécessite moins de capacité-mémoire.

#### 4.1.3.5 Convergence de l'apprentissage

L'étude de la convergence du processus d'apprentissage vers un minimum de la fonction d'erreur soulève au moins deux questions :

- Vers quel minimum la convergence s'effectue-t-elle ?
- A quelle vitesse l'algorithme converge-t-il ?

Dans un contexte linéaire, le minimum vers lequel converge l'algorithme est unique. Dans un contexte non linéaire, les choses se compliquent, singulièrement. Il peut y avoir de nombreux minimas locaux, plusieurs minimas globaux. Dans ces conditions, le minimum, vers lequel converge l'algorithme de rétropropagation, sera fonction de son point de départ (initialisation aléatoire des connexions). Dans ces conditions, rien ne garantit que deux apprentissages successifs conduiront à une même estimation des paramètres du réseau.

La vitesse de convergence est fonction de plusieurs facteurs : la complexité du problème (le nombre de variables d'entrée, le nombre de variables de sortie, le nombre de données dans l'échantillon d'apprentissage), la complexité de la topologie retenue (plus l'espace des paramètres est de dimension importante, plus la recherche d'un minimum acceptable sera lente et difficile) et le coefficient d'apprentissage choisi.

La convergence de l'algorithme de rétropropagation du gradient ne peut-être démontrée. De plus, il n'y a pas de critère bien défini pour définir la

convergence. Un critère d'ordre pratique correspond au minimum global de la surface d'erreur. On peut définir un critère comme suit (Kramer & Sangiovanni-Vincentelli, 1989) :

« La convergence de l'algorithme de rétropropagation du gradient est considérée comme atteinte quand la norme Euclidienne du vecteur gradient de l'erreur atteint un niveau, suffisamment, faible ».

Une autre propriété du minimum est que l'erreur quadratique moyenne devient stationnaire au voisinage du minimum. Ainsi, un autre critère peut-être défini : « La convergence de l'algorithme de rétropropagation du gradient est considérée comme atteinte quand le taux absolu de variation de l'erreur quadratique moyenne par itération atteint un niveau, suffisamment, faible ».

Le taux de variation est considéré, suffisamment, petit, quand il est compris dans l'intervalle de 0,1% à 1% par itération. Un tel critère peut provoquer un arrêt prématuré du processus d'apprentissage.

Un autre critère de convergence : après chaque itération relative à l'apprentissage, le réseau est testé pour sa performance de généralisation. Le processus d'apprentissage est arrêté quand cette performance a atteint un niveau maximum (Early Stopping).

#### **4.1.3.6 Recommandation pour l'utilisation de l'algorithme de rétropropagation**

Bien que la modélisation avec les réseaux de neurones relève plus de l'art que de la science, il y'a quelques recommandations pour améliorer les performances de l'algorithme de rétropropagation du gradient. Ces recommandations sont les suivantes :

- Le mode séquentiel est préféré au mode Batch, et c'est d'autant plus vrai que la taille de l'échantillon d'apprentissage est grande.
- Un MLP apprend plus vite, avec l'algorithme de rétropropagation du gradient, quand la fonction d'activation utilisée pour les neurones du réseau est impaire. Ceci ce n'est pas le cas de la fonction sigmoïde, par contre, c'est le cas de la fonction tangente hyperbolique ( $\varphi(x)=a \tanh(bx)$ ). Les valeurs optimales, pour les constantes a et b, sont  $a=1.7159$  et  $b=2/3$  (LeCun ; 1989,1993). Pour une telle fonction, on a  $\varphi(1)=1$  et  $\varphi(-1)=-1$ . Sa fonction dérivée étant  $\varphi'(x)=ab(1-\tanh^2(bx))$ , la pente de la courbe en  $x=0$  est, donc,  $\varphi'(0)=ab=1.7159 \times 2/3=1.1424$ .
- Les valeurs désirées doivent être dans l'intervalle image du domaine de définition de la fonction d'activation. Le domaine doit être réduit pour les parties asymptotiques de la courbe de la fonction d'activation pour éviter le ralentissement du processus d'apprentissage par saturation des neurones du réseau. Ainsi, on retient un intervalle  $[\varepsilon ; 1-\varepsilon]$  pour la fonction sigmoïde et un intervalle  $[-1+\varepsilon ; 1-\varepsilon]$  pour la fonction tangente hyperbolique,  $\varepsilon$  est un nombre de l'ordre de 0,1. (Pour la partie empirique, on a pris  $\varepsilon=0,1$ .)
- Chaque variable input doit subir un pré-traitement, tel que sa valeur moyenne, calculée sur l'ensemble de l'échantillon d'apprentissage, soit la plus proche de zéro, ou bien la plus petite comparée à son écart type correspondant (LeCun 1993). De plus, afin d'accélérer le processus d'apprentissage, les variables input, relatives à l'échantillon d'apprentissage, doivent être décorréelées ce qui peut être fait par l'analyse en composante principale. Une fois décorréelées, les variables input doivent être mises à une échelle tel que les covariances soient, à peu près égales, ce qui permet une vitesse d'apprentissage uniforme, au niveau de l'ensemble des poids synaptiques.
- Un choix judicieux des valeurs initiales des poids synaptiques permet une convergence plus rapide de l'algorithme de rétropropagation du gradient. En effet, des valeurs initiales grandes engendrent une saturation des neurones et, donc, un ralentissement du processus d'apprentissage puisque les

gradients locaux prennent des valeurs faibles. Des valeurs initiales petites font que l'algorithme va tourner dans une zone réduite de la surface d'erreur, au voisinage de l'origine. Ceci est d'autant plus vrai dans le cas d'une fonction d'activation impaire, comme la tangente hyperbolique.

- Idéalement, les neurones du réseau doivent apprendre avec le même coefficient d'apprentissage. Plus une couche est proche de la couche de sortie, plus les gradients locaux, au niveau des neurones qui la composent sont grands. L'inverse est, aussi, vrai, pour une couche proche de la couche d'input. Ainsi, on devrait affecter un coefficient d'apprentissage plus faible pour les couches proches de la couche de sortie que pour les couches proches de la couche d'input.

#### **4.1.3.7 Contrainte de généralisation et technique de « Cross-validation »**

Un réseau conçu, pour bien généraliser, génère une correspondance correcte, même si, les inputs sont, légèrement, différents de l'exemple qui a permis l'apprentissage.

Quand l'apprentissage se fait sur un échantillon d'une taille importante, le réseau de neurones peut capter un bruit présent dans l'échantillon d'apprentissage et qui est, complètement, étranger à la fonction qu'on cherche à modéliser. C'est le phénomène de sur-paramétrage ou de sur-apprentissage. Ce phénomène réduit, considérablement, la capacité de généralisation du réseau. A ce niveau deux questions se posent :

- Comment organiser l'apprentissage de manière à doter le MLP retenu de la meilleure capacité de généralisation possible ?
- Comment contrôler le problème de sur-paramétrage ?

L'objectif est d'utiliser un minimum de paramètres pour atteindre un niveau d'erreur donné afin d'améliorer d'autant la capacité de généralisation. D'une



manière générale, un excès de neurones dans les couches cachées (autrement dit, un excès de paramètres) réduit la capacité de généralisation du réseau.

La généralisation est influencée, par trois facteurs :

- La taille de l'échantillon de training,
- L'architecture du réseau de neurones,
- La complexité du problème traité.

En ce qui concerne les deux premiers facteurs, la généralisation peut être vue de deux manières :

- L'architecture du réseau est fixée et on détermine la taille de l'échantillon de training requise pour une bonne généralisation.
- La taille de l'échantillon est fixée et on détermine la meilleure architecture du réseau qui permet une bonne généralisation.

En pratique, pour une bonne généralisation, la taille de l'échantillon du training doit satisfaire la condition : le nombre d'observations (items)  $N$  doit être du même ordre de grandeur que le rapport  $(W/\epsilon)$ . ( $W$  étant le nombre total de paramètres (poids synaptiques et biais) et  $\epsilon$  est l'erreur de classification permise dans l'échantillon test). Par exemple, avec une erreur de test de 10%, le nombre d'observations dans l'échantillon de training doit être autour de 10 fois le nombre de poids synaptiques dans le réseau.

La technique de "cross-validation" est un outil statistique standard (Stone, 1974, 1978). L'échantillon d'observations disponible (les datas) est subdivisé d'une manière aléatoire entre un échantillon d'apprentissage et un échantillon test. L'échantillon d'apprentissage est, à son tour, subdivisé en deux échantillons : échantillon pour l'estimation des paramètres et un échantillon pour tester le modèle relatif à ces paramètres. Le but est de valider le modèle sur des données autres que celles utilisées pour l'apprentissage.

Ainsi, un bon apprentissage ne suffit pas, il faut aussi avoir des bonnes performances au niveau du test, autrement dit, une erreur de test minimale et un pourcentage de bon classement maximal au niveau de l'échantillon de test.

La technique de "cross-validation" est utilisée surtout quand on cherche une bonne généralisation.

#### **4.1.3.8 Les vertus et les limites de l'algorithme de rétropropagation du gradient**

L'algorithme de la rétropropagation du gradient est, sans doute, le plus populaire des algorithmes d'apprentissage pour le perceptron multicouche. Il présente la simplicité de calcul du signal fonction et du signal erreur, au niveau de chaque neurone. Il permet une descente stochastique du gradient dans l'espace des poids synaptiques (puisque ces poids sont mis à jour, d'une observation à une autre, et que les observations sont relatives à des variables elles-mêmes stochastiques). Cette propriété fait que l'algorithme converge vers le minimum global de l'erreur en faisant des zigzags autour de la vraie direction à partir de l'erreur initiale. Ces « zigzags » sont à l'origine de la lenteur de la convergence de l'erreur vers le minimum global.

L'inconvénient le plus évoqué de l'algorithme de rétropropagation du gradient est que le temps nécessaire à l'apprentissage évolue, exponentiellement, avec le nombre de neurones, sans aucune assurance que le minimum global de l'erreur sera atteint. A ce niveau, l'algorithme d'apprentissage « cascade correlation » s'avère plus avantageux.

#### **4.1.4 Algorithme « cascade correlation »**

L'algorithme « cascade correlation » a des avantages, par rapport aux algorithmes d'apprentissage existants, dans la mesure, où il apprend très rapidement, qu'il détermine sa taille et sa topologie propre et ne nécessite pas une rétro-propagation du signal d'erreur à travers les connexions du réseau.

Cet algorithme a été développé dans le but de surmonter un certain nombre de problèmes et de limitations relatives à l'algorithme d'apprentissage le plus populaire, à savoir l'algorithme de rétro-propagation de l'erreur. La limitation majeure d'un tel algorithme est sa lenteur. Deux raisons majeures qui sont à l'origine de cette lenteur : d'une part, le pas de calcul et d'autre part, le problème de déplacement de l'objectif.

Le choix du pas de calcul, c-à-d, le coefficient d'apprentissage est déterminant, dans le cas de l'algorithme de rétro-propagation des gradients. Si ce pas est petit, la précision sera bonne, on ne risque pas d'être piégé dans un minimum local. Par contre, le temps de convergence sera très long. Si on veut augmenter la vitesse de convergence, il faut augmenter le pas de calcul, et le risque de tomber sur un minimum local sera, d'autant plus grand, que le pas de calcul est grand.

Lors de l'apprentissage par rétro-propagation de l'erreur, toutes les unités verront leurs poids synaptiques changer, en même temps, d'une manière aléatoire, avant que le réseau ne converge vers une solution convenable. Un moyen pour éviter ce problème est de permettre, uniquement, à certains poids synaptiques de changer en même temps, alors que les autres poids synaptiques doivent rester constants.

L'algorithme « cascade correlation » est une réponse aux deux problèmes précités. En effet, l'algorithme « Cascade correlation » combine deux idées clés: la première est l'architecture « Cascade », pour laquelle les unités cachées sont ajoutées au réseau, d'une manière incrémentale, et chaque unité ne change pas, une fois ajoutée. La deuxième idée est l'algorithme d'apprentissage qui crée et installe les nouvelles unités cachées. Pour chaque unité cachée, l'algorithme cherche à maximiser l'intensité de la corrélation entre l'output de cette unité cachée et le signal d'erreur résiduel qu'on cherche à réduire.

Un problème important, mais difficile dans la modélisation par les réseaux de neurones, est la sélection du nombre de couches cachées et des nombres des neurones par couche cachée. L'algorithme « cascade-correlation », proposé par Fahlman & Lebiere, résout ce problème par intégration de nouveaux neurones selon l'erreur d'approximation résiduelle. Cet algorithme a permis de trouver l'architecture adéquate et de réduire le temps nécessaire pour une telle tâche.

L'architecture du réseau de neurones utilisant l'algorithme d'apprentissage de type « Cascade-Correlation » ou « Cascor » (Fahlman et Lebiere (1990)) est un exemple de l'approche de réseau croissant. Initialement, le réseau de neurone de ce type ne comporte aucun nœud caché (voir figure 82).

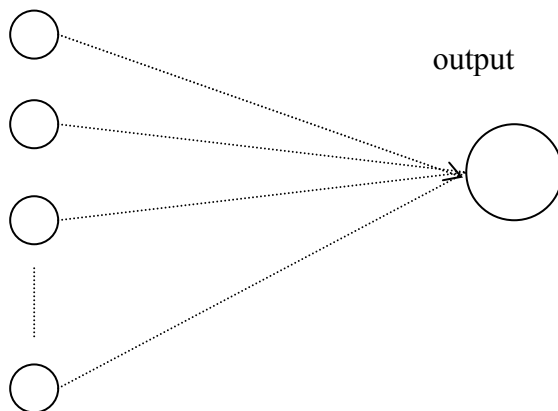


Figure 82 : Réseau cascador au début de l'apprentissage.

Ensuite, les nœuds cachés vont être créés et installés d'une façon incrémentale (un seul nœud à la fois). L'insertion d'un nœud caché dans le réseau n'élimine, en aucun cas, les interconnexions qui existent entre les nœuds de la couche d'inputs et le nœud de la couche d'output. Chaque nouveau nœud caché reçoit une connexion de chaque nœud d'inputs et aussi de chaque nœud caché préexistant. (Voir figure 83 et figure 84). Lorsqu'un nouveau nœud caché vient s'ajouter, les poids synaptiques, relatifs aux connexions de ce nœud, avec les nœuds d'inputs, vont être fixés et seul le poids synaptique de la connexion de ce même nœud avec le nœud d'output va subir des ajustements. Le nœud caché, nouvellement créé, devient, alors, un nœud permanent qui caractérise le réseau.

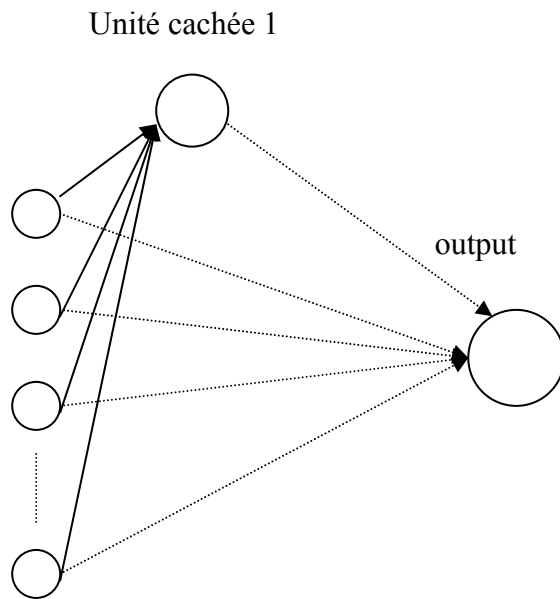


Figure 83: Ajout de la première unité cachée.

La procédure d'addition des nouveaux nœuds cachés se poursuit de la même manière jusqu'à ce qu'une performance satisfaisante soit réalisée.

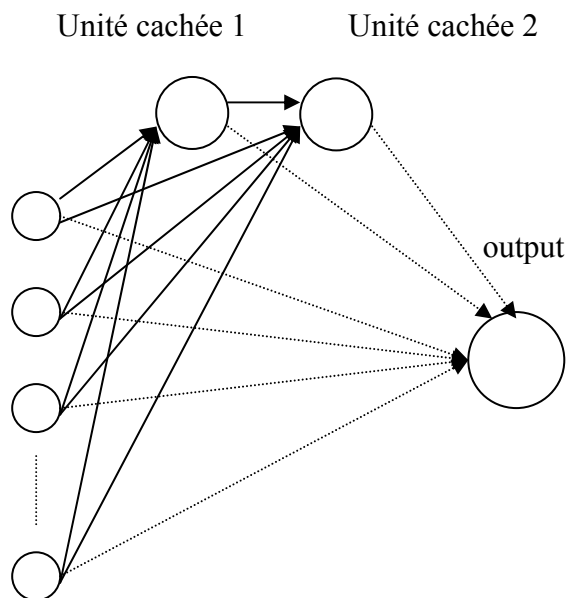


Figure 84: Ajout du deuxième nœud caché.

Dans une première étape, le réseau de neurones « Cascor » fonctionne en parcourant toutes les observations qui figurent dans l'échantillon

d'apprentissage. Cette opération est effectuée plusieurs fois à travers des cycles d'apprentissage, entraînant, ainsi, des ajustements des poids synaptiques. Tout au long du processus d'apprentissage, le réseau mesure l'erreur commise lors de la recherche des valeurs désirées des outputs. Si les performances du réseau sont satisfaisantes, ou si l'ajustement supplémentaire des poids ne produit pas une réduction significative des erreurs, après un certain nombre de cycles d'apprentissage, alors, le processus de connexion et d'ajustement des poids s'arrête. Par contre, si l'erreur résiduelle n'est pas convenable, Cascor crée un nœud caché supplémentaire, etc....

Chaque fois, qu'il est nécessaire de créer un nœud caché, Cascor reprend les calculs en considérant le nouveau nœud candidat, non encore connecté avec les autres nœuds d'une façon permanente. Le nœud candidat reçoit des connexions de tous les nœuds d'input et de tous les nœuds cachés déjà installés. Le réseau de neurone de type « Cascor » va effectuer plusieurs itérations, pour ajuster les poids des connexions entrants du nœud caché candidat. Le but de cet ajustement est de maximiser la corrélation, entre l'output du nœud candidat et l'erreur résiduelle que le réseau tente de réduire.

En effet chaque unité cachée est entraînée seule, tout en étant séparée du reste du réseau, et en maximisant la quantité  $S$  qui correspond à la valeur absolue de la covariance entre la valeur de l'output et l'erreur du réseau, soit :

$$S = \left| \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(E_i - \bar{E}) \right|$$

où

$E_i$  est l'erreur quadratique du réseau relative à l'observation  $i$

$\bar{E}$  est l'erreur quadratique moyenne du réseau relative à l'ensemble des observations

$Y_i$  est l'output de l'unité cachée relatif à l'observation  $i$

$\bar{Y}$  est la moyenne de l'output relatif à l'unité cachée, en considérant l'ensemble des observations.

Une fois l'unité cachée est entraînée, autrement dit, quand le niveau de corrélation ne peut être amélioré davantage, l'unité est introduite dans le réseau comme le montre les figures (83) et (84). Les poids synaptiques de l'unité cachée introduite, qui la lient avec les inputs, sont gelés. L'unité d'output reçoit, maintenant, des poids synaptiques des couches d'input, comme au départ, mais aussi de la nouvelle unité cachée. Tous les poids de l'unité d'output sont ajustés lors d'un processus d'apprentissage, jusqu'à ce que l'erreur d'apprentissage baisse, jusqu'à un certain niveau, et on teste si une nouvelle unité cachée est nécessaire. Chaque nouvelle unité cachée reçoit des poids synaptiques des unités d'input et des unités cachées précédentes. Ainsi, le nouveau nœud caché est destiné à réduire davantage l'erreur résiduelle de l'ensemble du réseau. Une fois le nœud candidat est implémenté, le réseau de neurone ajuste les poids des connexions avec le nœud d'output. Ce cycle d'ajout incrémental des nœuds cachés est répété jusqu'à l'aboutissement à un état stable, autrement dit, un état, où l'ajout d'un nouveau nœud caché n'a pas d'incidence sur la réduction de l'erreur ou un état, où le niveau de l'erreur est convenable.

La démarche mathématique du processus d'apprentissage d'un réseau de neurone de type « Cascor » peut être décrite comme suit : lors du processus d'apprentissage le réseau de neurone génère une valeur d'output, basée sur les informations utilisées, et la compare avec la vraie valeur (la valeur désirée), vers laquelle le réseau essaie de converger. Le problème du réseau de neurone pendant l'apprentissage consiste à trouver un minimum global de la fonction d'erreur globale qui correspond à l'ensemble du réseau.

#### ***4.1.4.1.1 Modélisation avec l'algorithme « cascade correlation »***

Le réseau de neurone de type Cascor effectue des transformations sur la structure du réseau par l'ajout incrémenté de nœuds cachés. Cependant, ces transformations n'éliminent, en aucun cas, les connexions entre les nœuds d'input et le nœud d'output. Chaque nœud d'input émet autant de signaux que de nœuds cachés et de nœuds d'output. Chaque nœud caché va émettre autant de signaux que de nœuds cachés subséquents et de nœuds d'output. Par ces

ajustements, la détermination de la valeur  $y$  du signal émis par le nœud d'output devient de plus en plus compliquée puisqu'elle dépendra de nouveaux paramètres. Si on désigne par  $m$  le nombre de nœuds cachés, la valeur de  $y$  est déterminée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \text{- Si } m=0 \quad \text{alors} \quad y_j = \varphi \left\{ \sum_{i=0}^n w_i^0 x_{ij} \right\} \\
 & \text{- Si } m>0 \quad \text{alors} \\
 & y_j = \varphi \left\{ \sum_{i=0}^n w_i^0 x_{ij} + \sum_{k=1}^m w_{n+k}^0 \varphi \left( \sum_{i=0}^n w_i^k x_{ij} + \sum_{h=1}^{k-1} w_{n+h}^k z_{hj} \right) \right\} \quad (4.1.4-1)
 \end{aligned}$$

Où

$n$  = le nombre d'input

$j$  = le rang de l'observation de l'échantillon d'apprentissage

$m$  = nombre de nœuds cachés dans l'architecture du réseau de neurones  
(ce nombre varie d'un cycle d'apprentissage à un autre.

Initialement, il est égal à zéro)

$i$  = l'indice du nœud d'input ( $i = 0$  ; indice du biais)

$k$  = indice d'un nœud caché (si  $1 \leq k \leq m$ )

$x_{ij}$  = le signal émis par le nœud  $i$ , relatif à l'observation  $j$

$w_i^0$  = poids synaptique qui caractérise la connexion entre le nœud  
d'input  $i$  et le nœud d'output,

$w_i^k$  = poids synaptique qui caractérise la connexion entre le nœud  
d'input  $i$  et le nœud caché  $k$ ,

$w_{n+h}^k$  = poids synaptique qui caractérise la connexion entre le nœud  
caché  $h$  et le nœud caché  $k$ ,

$y_j$  = valeur calculée par le réseau relative à l'observation  $j$  de  
l'échantillon d'apprentissage

$\varphi(.)$  = fonction d'activation (ou de transfert)

Si un nouveau nœud caché vient d'être intégré dans le réseau, les valeurs des poids synaptiques, relatifs aux connexions de ce nœud, avec les nœuds d'input sont fixées, seuls les poids synaptiques de la connexion de ce même nœud avec



le nœud d'output subit des ajustements. Le nœud caché, nouvellement intégré, dans la structure du réseau, devient alors un nœud permanent, et c'est, à ce niveau, que la valeur de son signal  $z_{kj}$  de sortie est calculée suivant l'équation suivante :

$$z_{kj} = \varphi \left\{ \sum_{i=0}^n w_i^k x_{ij} + \sum_{h=1}^{k-1} w_{n+h}^k z_{hj} \right\}$$

Une fois calculée, la valeur de  $z_{kj}$  est fixée, définitivement. Elle est utilisée par le réseau de neurones, exactement, comme un signal d'un nœud d'input. Les poids, relatifs aux connexions entre les nœuds d'input et le nœud caché, qui sont présents dans l'équation (4.1.4-1), sont fixés, une fois le nœud caché en question est intégré dans le réseau.

Au cours du processus d'apprentissage, le réseau de neurone fournit quelques informations sur :

- le pourcentage du bon classement des observations aussi bien de l'échantillon d'apprentissage que de l'échantillon test. Ce pourcentage n'est autre que le rapport entre le nombre des observations correctement classées et le nombre total des observations d'un échantillon donné.
- l'erreur commise lors du processus d'apprentissage : l'erreur commise pour une seule observation est déterminée par la différence entre la valeur désirée  $d_j$  et la valeur calculée par le réseau  $y_j$ . L'erreur globale est déterminée comme une moyenne quadratique des erreurs relatives aux différentes observations, soit :  $E = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - d_j)^2$ , avec  $n$  le nombre d'observations dans l'échantillon considéré.

Ces deux indicateurs (pourcentage de bon classement et erreur d'apprentissage), qui viennent d'être énumérés, évoluent dans des sens opposés, car, une baisse de l'erreur signifie qu'il y'a augmentation du nombre d'observations

correctement classées et, donc, le pourcentage de bon classement des observations augmente.

## **4.2 EVALUATION DES OPTIONS PAR LES RESEAUX DE NEURONES**

L'objectif de cette étude empirique est de déterminer la valeur d'une option d'achat sur indice CAC40, par des modèles neuronaux, aussi bien pour la base intraday que pour la base journalière, et de la comparer, par rapport aux valeurs données par le modèle de Black & Scholes et les modèles à volatilité stochastique. Cette comparaison est fondée sur les bases de données décrites dans le chapitre préliminaire.

### **4.2.1 Modèle neuronal**

L'objectif de la modélisation, par les réseaux de neurones, est de déterminer les variables d'entrée et l'architecture de réseau, qui permettent d'approcher, au mieux, la valeur d'une option sur l'indice CAC40.

Il existe, fondamentalement, deux classes importantes de réseaux de neurones à savoir le perceptron multicouche (MLP) ou « multilayer feedforward networks » et la fonction radiale de base ou « Radial Basis Function » (RBF).

Bien que les deux types de réseaux disposent d'une capacité d'approximation universelle et, donc, sont convenables à la modélisation des prix des options, nous avons choisi d'utiliser le perceptron multicouche : c'est le type de réseau qui a été utilisé dans l'application des réseaux de neurones à la finance et entre autre à l'évaluation d'options (Hutchinson et al. 1994, etc.....) qui nécessite moins de paramètres et, donc, moins de neurones que le RBF, pour approximer une fonction avec une précision donnée.

Une approche utile à la spécification des modèles telle qu'elle a été utilisée dans les travaux de Hutchinson, Lo et Poggio (1994), Lajbeygier et al. (1995), Malliaris et Salchenberger (1993), Fiordaliso (1997), Garcia et Gençay (2000)

est celle nommée « cross-validation ». Cette approche est caractérisée par le fait que les données sont divisées en échantillon d'apprentissage et en échantillon test. Les réseaux sont estimés à partir de l'échantillon d'apprentissage et jugés en terme de performance à partir de l'échantillon test.

En principe, un bon modèle neuronal, exige au préalable le classement des données (input) suivant des critères adéquats, comme la moneyness et le temps à maturité, dans notre étude. Ce classement permettra une bonne généralisation.

Les résultats des modèles neuronaux dépendent du choix de l'échantillon d'apprentissage et de l'échantillon de test et de leur similarité, notamment pour le temps restant à échéance et de la moneyness, de leur chronologie relative ainsi que de leurs tailles. Ils dépendent, également, du choix des variables qui seront les inputs du réseau, ainsi que de leurs corrélations et de leurs traitements. Enfin, les résultats dépendent, de toute évidence, de l'architecture du réseau (nombre de couches cachées, nombres de neurones dans les couches cachées, fonctions de transfert, etc...), de l'algorithme d'apprentissage, du coefficient d'apprentissage, et des valeurs initiales des poids synaptiques.

L'algorithme utilisé pour la détermination de la meilleure architecture est l'algorithme « Cascade corrélation ».

#### **4.2.1.1 Choix et traitement des inputs**

##### ***4.2.1.1.1 Choix des inputs***

En s'inspirant du modèle d'évaluation des options de Black & Scholes (1973), quatre variables sont considérées pour estimer le prix d'une option d'achat à savoir : la valeur de l'indice  $S$ , le prix d'exercice, l'échéance à maturité et la volatilité (historique  $\sigma_H$  ou implicite, de l'instant présent  $\sigma_t$ , ou de l'observation précédente  $\sigma_{t-1}$ ). Le taux d'intérêt  $r$ , le coefficient continu de la distribution des dividendes  $\delta$  et dans certains cas, la volatilité sont supposés des

paramètres constants et, donc, ne sont pas considérés comme inputs. En effet, même s'ils sont introduits, le réseau ne va pas capter les impacts de ces paramètres sur le prix de l'option.

Pour la comparaison avec le modèle stochastique, le coefficient de corrélation  $\rho$  de la valeur de l'indice avec sa volatilité est supposé, comme un paramètre constant, alors, qu'en réalité, il est stochastique.

Une autre variable supplémentaire qui peut être intéressante pour la modélisation est le rendement instantané de l'indice :  $\eta_t = \text{Ln}\left(\frac{S_t^*}{S_{t-1}^*}\right)$  qui fait intervenir la valeur de l'indice, à l'instant précédent.

Pour la présente thèse, les inputs des modèles neuronaux, à considérer, sont une partie de ces 8 variables ou des fonctions de ces 8 variables.

#### **4.2.1.1.2 Traitement des inputs**

On note que la valeur de l'indice n'est pas stationnaire. Par contre en divisant celle-ci par le prix d'exercice nous obtenons une série stationnaire. Cette division est, d'autant plus avantageuse, qu'elle réduit le nombre d'input, ce qui facilite la tâche d'apprentissage pour le réseau. Cette division se fait, par analogie avec la formule Black & Scholes, qui est homogène de degré 1. En effet, en divisant cette formule, par le prix d'exercice E, on peut l'écrire, sous la forme :

$$\frac{C}{E} = \frac{S}{E} N(d_1) - e^{-r\tau} N(d_2) \quad (4.2.1-1)$$

$$\text{avec : } d_1 = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Où C est la valeur de l'option d'achat sur l'indice de valeur S dont le prix d'exercice est E et la durée de vie résiduelle de l'option est  $\tau$ .

On peut écrire :

\*  $C = f\left(\frac{S}{E}, \tau\right)$  : si on suppose que la volatilité est constante comme c'est le cas pour le modèle de Black & Scholes.

\*  $C = f\left(\frac{S}{E}, \tau, \sigma_H\right)$  : si on considère la volatilité historique comme une variable stochastique.

\*  $C = f\left(\frac{S}{E}, \tau, \sigma_I\right)$  : si on considère la volatilité implicite comme une variable stochastique.

Pour chacune des observations de la base, les variables représentent les inputs du réseau alors que la valeur de l'option (éventuellement divisée par le prix d'exercice) représente l'output désiré du réseau.

Dans le deuxième cas et le troisième cas, notre étude se distingue de celle de Hutchinson et al. (1994) et Garcia et al. (2000) dans l'introduction de la volatilité implicite ou historique comme input. Ceci a pour intérêt d'améliorer les résultats comme c'est prouvé par Anders et al. (1998).

#### **4.2.1.2 Traitement de l'output**

Etant donné, qu'on cherche à approcher la valeur d'une option, par un modèle neuronal, l'output de ce modèle est, à priori, la valeur de cette option. Les inputs de ce modèle sont les déterminants de la valeur de cette option.

D'une manière générale, un modèle neuronal s'écrit sous la forme :  $Y = f(X) + \varepsilon$ , où  $Y$  est l'output (qui doit être stationnaire),  $X$  est le vecteur input et  $\varepsilon$  un bruit.

Compte tenu de l'équation (4.2.1-1), l'output du modèle devrait être :  $\frac{C_t}{E}$ . Seulement, cette grandeur n'est pas stationnaire comme l'exige la modélisation avec un réseau de neurones. La série  $\frac{C_t}{E}$ , doit, donc, être stationnarisée, tout comme dans l'étude de Fiordaliso(1997). Pour se faire, on détermine, dans un premier temps, la série dérivée de la série  $\frac{C_t}{E}$ . En fait, pour plus de sensibilité, il vaut mieux déterminer la série dérivée du logarithme de la série  $\frac{C_t}{E}$ , soit la série :

$$C'_t = \frac{\text{Ln}\left(\frac{C_t}{E_t}\right) - \text{Ln}\left(\frac{C_{t-dt}}{E_{t-dt}}\right)}{dt} = \frac{1}{dt} \text{Ln}\left(\frac{\frac{C_t}{E_t}}{\frac{C_{t-dt}}{E_{t-dt}}}\right)$$

Puis, dans un second temps, dans le but de ramener l'output dans l'intervalle  $[a=0.1 ; b=0.9]$ , comme l'exige la fonction sigmoïde qui est la fonction d'activation du neurone de sortie la série  $C'_t$  est remplacée par la série  $C''_t$ , en considérant une transformation linéaire, tel que:

$$C''_t = \alpha C'_t + \beta \quad (4.2.1-2)$$

Cette deuxième transformation est justifiée par le fait que les valeurs des outputs, calculées par le réseau, sont comprises entre 0 et 1, puisqu'elles sont calculées avec la fonction sigmoïde. De plus, dans la pratique, le domaine de variation de l'output désiré se limite, en général, à l'intervalle  $[0.1 ; 0.9]$ , puisque les bornes 0 et 1 sont des valeurs asymptotiques et pour que le calcul se fasse sur la partie linéaire de la sigmoïde et qu'il n'y aura, donc, pas de saturation (dérivée proche de zéro). Dans ces conditions, l'algorithme de rétropropagation des erreurs fonctionne mieux.

Si on désigne par  $C'_M$  et  $C'_m$ , respectivement, la valeur maximale et la valeur minimale de la série  $C'_t$ , on peut écrire :

$$b = \alpha C'_M + \beta \quad ; \quad b=0.9$$

$$a = \alpha C'_m + \beta \quad ; \quad a=0.1$$

Par différence des deux équations, on obtient :  $\alpha = \frac{b - a}{C'_M - C'_m}$

Puis, à partir de la deuxième équation, on obtient :  $\beta = \frac{aC'_M - bC'_m}{C'_M - C'_m}$

Ainsi, la série  $C_t''$  s'exprime, en fonction de la série  $C_t'$ , suivant l'équation :

$$C_t'' = \frac{a(C'_M - C'_t) + b(C'_t - C'_m)}{(C'_M - C'_m)} \quad a=0.1 \quad \text{et} \quad b=0.9$$

Les valeurs de  $C'_M$  et  $C'_m$  doivent être les mêmes pour le fichier apprentissage et le fichier test.

Ainsi, pour la détermination de l'output du réseau de neurones, trois cas sont à considérer selon, d'une part, le découpage, par contrat ou par moneyness et temps restant à l'échéance et d'autre part, selon que la base est journalière ou intraday. Soit :

- cas 1 : découpage par contrat de la base journalière
- cas 2 : découpage par contrat de la base intraday
- cas 3 : découpage par classes de la moneyness et du temps à l'échéance de la base intraday

#### ***4.2.1.2.1 Découpage par contrat de la base journalière :***

Pour un contrat, deux observations consécutives présentent le même prix d'exercice ( $E_t = E_{t-1}$ ), de plus, l'intervalle de temps est constant, égal à 1 jour.

Ainsi, on peut écrire :

$$C_t' = \text{Ln} \left( \frac{C_t}{C_{t-1}} \right)$$



Dans ce cas, la valeur minimale et celle maximale de la série  $C'_t$ , ainsi que les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , relatives à l'ensemble des contrats choisis de la base journalière, sont données dans le tableau 51.

Ln	2800	2950	3100	3250	4000
Max : $C'_M$	0,579818	0,348307	0,606136	0,581922	0,551902
min : $C'_m$	-0,414515	-0,344221	-0,579818	-0,639080	-0,635537
$\alpha$	0,804559	1,155188	0,674562	0,655200	0,673719
$\beta$	0,433502	0,497640	0,491124	0,518725	0,528173

Tableau 51 : Valeurs minimales et valeurs maximales de la série  $C'_t$  ainsi que les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pour chacun des contrats choisis de la base journalière.

En fait, dans le cas de la base journalière, on considère aussi la série dérivée de  $\frac{C_t}{E}$ , soit  $C'_{t,diff} = \frac{C_t - C_{t-1}}{E}$ , afin de juger s'il vaut mieux considérer la dérivée de la série  $\frac{C_t}{E}$ , ou bien, de son logarithme (ceci, uniquement, pour les contrats journaliers).

Dans ce cas, la valeur minimale et celle maximale, de la série  $C'_{t,diff}$ , ainsi que les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , relatives à l'ensemble des contrats choisis de la base journalière, sont données dans le tableau 52.

différence	2800	2950	3100	3250	4000
Max	0,048571	0,035932	0,027097	0,036923	0,032250
min	-0,040357	-0,028136	-0,014839	-0,010462	-0,035750
$\alpha$	8,995984	12,486773	19,076923	16,883117	11,764706
$\beta$	0,463052	0,451323	0,383077	0,276623	0,520588

Tableau 52 : Valeurs minimales et valeurs maximales de la série  $C'_{t,diff}$  ainsi que les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pour chacun des contrats choisis de la base journalière

#### 4.2.1.2.2 Découpage par contrat de la base intraday

De même que pour la base journalière, deux observations consécutives présentent le même prix d'exercice ( $E_t = E_{t-1}$ ). Par contre, l'intervalle de

temps, correspondant, est stochastique. On peut considérer, dans un tel cas, la valeur moyenne de cet intervalle de temps et on considère ainsi, la série :

$$C'_t = \text{Ln} \left( \frac{C_t}{C_{t-1}} \right)$$

Dans ce cas, la valeur minimale et celle maximale de la série  $C'_t$ , ainsi que les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , relatifs à l'ensemble des contrats choisis de la base intraday, sont donnés, dans le tableau 53.

	1N	1O	1P	1Q	1S	9I	9J	9K	9L
<b>Cm'</b>	-0,225640	-0,263762	-0,271934	-0,284512	-0,606136	-0,245743	-0,242562	-0,255933	-0,401011
<b>CM'</b>	0,413764	0,218622	0,294072	0,291343	0,619680	0,285779	0,245122	0,336472	0,517215
$\alpha$	0,652529	0,652900	0,652801	0,652521	0,652572	0,870764	0,871151	0,869172	0,871800
$\beta$	0,495584	0,495582	0,495556	0,495550	0,495605	0,449382	0,449380	0,449400	0,449365

Tableau 53 : Valeur minimale et valeur maximale de la série  $C'_t$  ainsi que les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pour chacun des contrats choisis de la base intraday.

#### 4.2.1.2.3 Découpage par classes de moneyness et du temps à l'échéance de la base intraday :

Dans le cas, où le découpage se fait, par classe de moneyness et de temps à l'échéance, deux observations consécutives, pour une classe donnée, n'ont pas le même prix d'exercice. De plus, l'intervalle de temps est stochastique. En considérant la moyenne de l'intervalle de temps  $\bar{dt}$ , de l'ensemble de la série  $dt$ ,

la série  $C'_t$  s'écrit : 
$$C'_t = \text{Ln} \left( \frac{\frac{C_t}{E_t}}{\frac{C_{t-1}}{E_{t-1}}} \right)$$

Dans ce cas, la valeur minimale et celle maximale, de la série  $C'_t$ , ainsi que les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , relatifs à l'ensemble des classes 2 et 5 de la base intraday, sont donnés, dans le tableau 54.

	2A,2B,2C et 2D	5A,5B et 5C
<b>Cm'</b>	-2,397895	-0,934309
<b>CM'</b>	3,433987	0,904456
$\alpha$	0,137177	0,4350746
$\beta$	0,428936	0,506494

Tableau 54: Valeur minimale et valeur maximale de la série  $C'_t$  ainsi que les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pour chacune des classes 2 et 5 de la base intraday

### 4.2.1.3 Choix du modèle

On peut envisager 5 modèles type en fonction des inputs à considérer. La différence entre ces modèles se situe, essentiellement, au niveau de la volatilité à prendre en compte dans le modèle. Faut-il, ne pas considérer la volatilité, comme c'est le cas du modèle de Black & Scholes ? (volatilité constante). Faut-il considérer la volatilité historique  $\sigma_{\text{hist}}$  ou la volatilité implicite  $\sigma_{\text{imp}}$  ou les deux ? Faut-il considérer la volatilité implicite de l'instant présent ou de l'instant le précédent ? La réponse à la dernière question semble être évidente du point de vue pratique. En effet, la plupart des praticiens utilisent la formule de Black & Scholes pour coter les options, en considérant la volatilité implicite  $\sigma_{\text{imp},(t-1)}$  de l'instant précédent (t-1), la volatilité implicite  $\sigma_{\text{imp},t}$  de l'instant présent (t) étant inconnue.

Les 6 modèles-types sont résumés dans le tableau 55.

	Input 1	Input 2	Input 3	Input 4	Output
Modèle-type 1	$\frac{S}{E}$	$\frac{T-t}{360}$			$C''$
Modèle-type 2	$\frac{S}{E}$	$\frac{T-t}{360}$	$\sigma_{\text{hist}}$		$C''$
Modèle-type 3	$\frac{S}{E}$	$\frac{T-t}{360}$	$\sigma_{\text{imp},t}$		$C''$
Modèle-type 4	$\frac{S}{E}$	$\frac{T-t}{360}$	$\sigma_{\text{imp},(t-1)}$		$C''$
Modèle-type 5	$\frac{S}{E}$	$\frac{T-t}{360}$	$\sigma_{\text{imp},(t-1)}$	$\sigma_{\text{hist}}$	$C''$
Modèle-type 6	$\frac{S}{E}$	$\frac{T-t}{360}$	$\sigma_{\text{imp},t}$	$\sigma_{\text{hist}}$	$C''$

Tableau 55: Les inputs et l'output des modèles neuronaux type à considérer dans l'étude empirique

Il est certain que la meilleure information qu'on peut avoir sur la volatilité à un instant t est la volatilité implicite de cet instant,  $\sigma_{\text{imp},t}$ . Ainsi, on considère pour l'ensemble des modèles la volatilité implicite pour l'instant t. Seulement, sur un

plan pratique, on ne peut pas disposer de la volatilité implicite à l'instant  $t$ . Il faut définir donc, des modèles avec la volatilité implicite de l'instant  $t-1$ , auquel on peut ajouter, éventuellement, la volatilité historique.

En principe, dans le cas de la base journalière, où on dispose de la volatilité historique, on ne doit considérer que les modèles types 5 et 6, puisque les autres modèles sont implicites. En effet, le meilleur modèle correspond à un ensemble d'input le plus exhaustif possible. Si un input est redondant, il verra les valeurs des poids synaptiques, qui lui sont relatifs, proches de zéro voir nuls. Cependant, la considération d'un input redondant peut influencer la vitesse de convergence de l'algorithme d'apprentissage, ainsi que la capacité de généralisation. Le fait de sélectionner seuls les inputs pertinents avant l'apprentissage permet de gagner en temps de convergence de l'algorithme d'apprentissage.

Les inputs et l'output désiré, relatif au contrat 1Q de la base intraday, sont représentés dans le graphique 85.

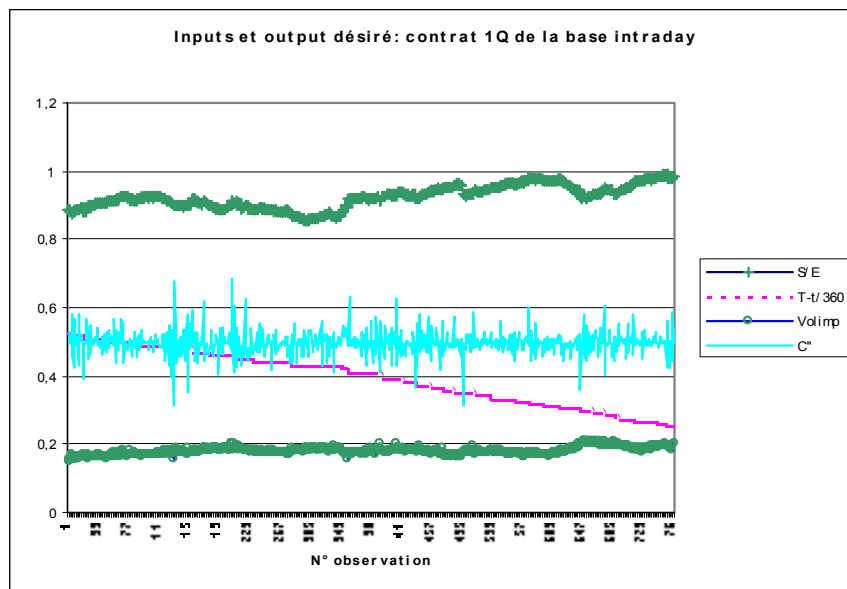


Figure 85 : Input et output du modèle neuronal relatifs au contrat 1Q de la base intraday

Les inputs et l'output désiré, relatifs au contrat C2800 de la base journalière, sont représentés dans le graphique 86. On remarque que la parité de l'option a un trend croissant, et que les séries, dérivées de la série  $C_t$ , sont stationnaires.

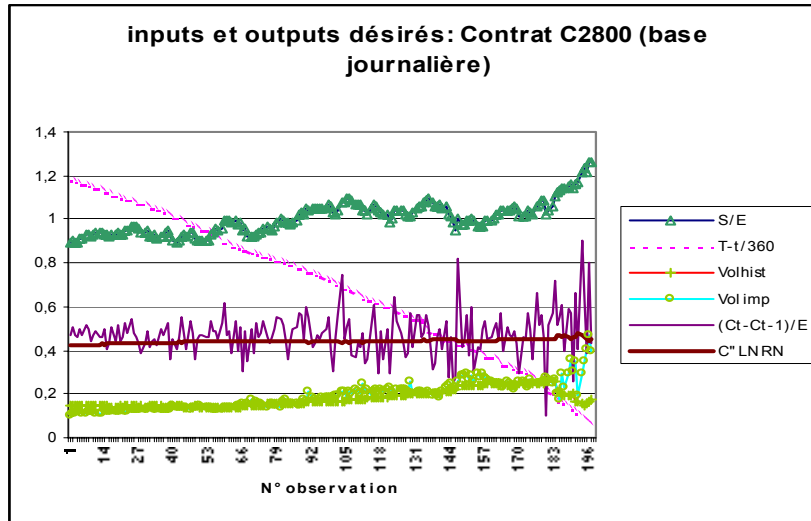


Figure 86 : Inputs et outputs du modèle neuronal, relatifs au contrat C2800 de la base journalière

#### 4.2.1.3.1 Les modèles relatifs au découpage par contrat

Pour la classe 1 et la classe 9 de contrats de la base intraday et pour les contrats de la base journalière, on définit une matrice d'apprentissage-test d'ordres respectifs 6, 4 et 5. Chaque case de cette matrice correspond à un modèle neuronal. Une case  $(i,j)$  correspond au modèle neuronal ayant le fichier d'apprentissage du contrat  $i$  et le fichier test du contrat  $j$ . Ainsi, pour une classe de contrats et pour un modèle type donnée, on a, au total, 30 modèles pour la classe 1, 16 modèles pour la classe 9 et 25 modèles pour les contrats de la base journalière. Pour la classe 1, on a 30 modèles au lieu de 36 parce que le contrat 1R n'est pas considéré pour l'apprentissage.

Il est à noter que pour un modèle de la diagonale de la matrice apprentissage-test, les performances relatives à la généralisation ne sont pas significatives, puisque les fichiers d'apprentissage et de test sont issus d'un même contrat et que le fichier test est constitué, à partir du fichier du contrat, par tirage d'une observation sur  $n$  observations.

Pour les contrats de la classe 1, on applique le modèle-type 5. Pour les contrats de la classe 9, on applique tous les modèles-types sauf le modèle-type 2 et le modèle-type 3. Pour les contrats de la base journalière, on applique, uniquement, le modèle-type 5.

#### ***4.2.1.3.2 Les modèles relatifs au découpage par classes de moneyness et de temps à l'échéance***

Pour chaque classe de moneyness et de temps à l'échéance, autre que les classes 2 et 5, on applique le modèle-type 5.

La classe 2 est divisée en 4 sous-classes, désignées par 2A, 2B, 2C et 2D. Pour cette classe, on définit une matrice d'apprentissage – test, d'ordre 4. Chaque case de cette matrice correspond à un modèle neuronal. Une case (i,j) correspond au modèle neuronal ayant le fichier d'apprentissage de la sous-classe i et le fichier test de la sous-classe j. Ainsi, pour cette classe 2 et pour un modèle-type donné, on a au total 16 modèles.

On applique à cette classe les modèles-types 5 et 6. Pour les modèles type 1, 2 et 4 on ne considère que les modèles diagonaux où les fichiers d'apprentissage et de test sont tous deux issus de la même sous-classe.

De même, la classe 5 est divisée en 3 sous-classes désignées par 5A, 5B et 5C. Pour cette classe, on définit une matrice d'apprentissage - test d'ordre 3. Chaque case de cette matrice correspond à un modèle neuronal. Une case (i , j) correspond au modèle neuronal ayant le fichier d'apprentissage de la sous-classe i et le fichier test de la sous-classe j. Ainsi, pour cette classe 5 et pour un modèle type donnée, on a au total 9 modèles.

On applique à cette classe les modèles-type 5 et 6. Pour le modèle-type 1, on ne considère que les modèles diagonaux où les fichiers d'apprentissage et de test sont tous deux issus de la même sous-classe.

### **4.2.2 Modélisation par l'algorithme « cascade correlation »**

L'architecture du réseau de neurones de type « cascade corrélation », soit « corrélation en cascade », est utilisée pour construire les modèles d'évaluation des options sur indice CAC40. Ce choix est justifié pour les deux raisons suivantes :

- Premièrement, le réseau de neurones de type « Cascor » détermine sa propre structure, et il ajuste l'architecture suivant le degré de complexité du problème traité. C'est ainsi qu'un réseau de neurone de type « Cascor » peut avoir à l'origine zéro couche cachée pour finir avec plus d'une. Cet avantage dispense l'utilisateur de faire plusieurs essais, afin, de trouver la structure qui convient à ce problème, comme dans le cas d'un MLP.
- Deuxièmement, l'algorithme du réseau de neurone de type « Cascor » est l'un des algorithmes les plus rapides, il combine la vitesse et la capacité de construire des réseaux multicouches complexes.

#### **4.2.2.1 Détermination du réseau**

Etant donné, qu'il n'existent pas des règles théoriques solides, pour la détermination d'une structure de réseau appropriée, dans le cas d'un MLP, conjugué avec l'algorithme d'apprentissage de rétropropagation du gradient, il faut procéder, empiriquement, en la matière. A ce niveau, l'expérimentation est la meilleure solution. L'algorithme « cascade corrélation » est plus avantageux que l'algorithme précité, d'une part parce qu'il détermine sa structure par lui-même et de ce fait l'intervention humaine n'est pas nécessaire. D'autre part, l'apprentissage, dans le cas de l'algorithme "cascade correlation", ne nécessite pas une rétropropagation du signal d'erreur, ce qui permet un gain en temps CPU , autrement dit, une convergence plus rapide.

De ce fait, on a utilisé l'algorithme « cascade correlation » qui autorise une seule couche cachée qui comporte, initialement, zéro nœuds. Cet algorithme ajoute des nœuds, au fur et à mesure que l'apprentissage avance, afin de minimiser l'écart, entre l'output désiré et l'output calculé, par le réseau, et de ce

fait de maximiser la probabilité d'une bonne classification des données, aussi bien pour l'apprentissage que pour le test.

La couche d'input est constituée d'un nombre de nœuds, égal au nombre des inputs représentés par les valeurs des variables sélectionnées et d'un biais qui a pour valeur l'unité. Pour le modèle-type 1, la couche d'input est constituée de deux nœuds et d'un biais. Pour le modèle-type 2 et le modèle-type 3, elle est constituée de trois nœuds et un biais, alors que pour le modèle-type 5 et le modèle-type 6, elle est constituée de 4 nœuds et d'un biais.

La couche d'output est composée, pour les cinq modèles-types par un seul nœud, représenté par la valeur de l'option d'achat modifiée conformément à la procédure décrite ci-dessus, émettant une valeur calculée de l'output qui sera comparée à la valeur désirée contenue dans la base de donnée. Le réseau de neurones va effectuer une série de cycles d'apprentissage, dans le but de trouver le système de poids synaptiques qui minimisent l'écart, entre la valeur de l'option calculée par le réseau et la valeur désirée.

Le type d'erreur choisie est l'erreur quadratique moyenne : MSE « Mean Square Error ». Pour éviter les minima locaux de la surface d'erreur, il faudrait faire, pour chaque architecture, plusieurs initialisations aléatoires.

Le modèle neuronal défini calcule l'output du réseau pour chaque observation du fichier d'apprentissage. Puis, il calcule l'erreur d'apprentissage comme une moyenne quadratique des erreurs des différentes observations du fichier d'apprentissage. Ensuite, avec les mêmes poids synaptiques du réseau, il calcule l'output du réseau relatif au fichier test, et enfin calcule l'erreur de test comme moyenne quadratique des différentes erreurs relatives aux observations du fichier test.



La fonction sigmoïde est la fonction de transfert choisie pour l'ensemble des neurones du réseau. Les couches cachées comporte 0 nœuds au début de l'apprentissage, puis le nombre de nœuds cachés augmente d'une manière incrémentale, avec une limite supérieure de 64 nœuds. Les nœuds cachés sont choisis parmi 16 candidats.

Pour l'apprentissage, on considère un nombre d'itération égal à 10000. Ce nombre peut être augmenté, dans le cas, où les résultats sont supposés être améliorés au-delà de ce nombre d'itérations.

Pendant cet apprentissage, on contrôle les enregistrements des variables suivantes :

- **CTrn** (correct training) : qui correspond au pourcentage des observations de l'échantillon d'apprentissage qui sont correctement classées
- **CTst** (correct test) : qui correspond au pourcentage des observations de l'échantillon de test correctement classées
- **ETrn** (erreur de training): Erreur quadratique moyenne relative à l'échantillon d'apprentissage
- **ETst** (erreur de test) Erreur quadratique moyenne relative à l'échantillon test

Pour le modèle avec comme fichier d'apprentissage celui relatif au contrat 1P et comme fichier test celui relatif au contrat 1Q, on a obtenu les enregistrements illustrés dans la figure 87.

Plus le nombre d'itérations augmente,

- plus le nombre de nœuds cachés augmente
- plus les performances de l'apprentissage s'améliorent (le réseau s'adapte à l'historique et épouse sa forme, suivant un degré de complexité et de non-linéarité croissant)
- par contre, les performances du test s'améliorent puis se dégradent. Ceci est normal, puisque la capacité de généralisation du réseau est au top quand

l'apprentissage atteint le minimum de l'erreur de test qui correspond au point d' « Early stopping ».

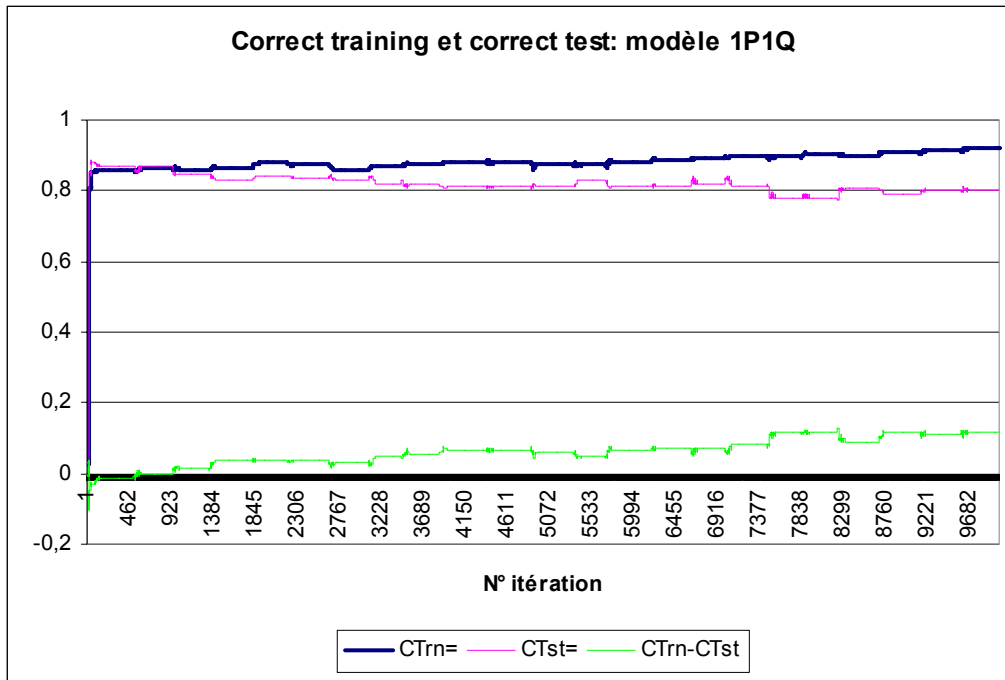


Figure 87: correct training, correct test et leur différence en fonction du numéro d'itération. Le fichier d'apprentissage étant le contrat 1P et le fichier de test étant le contrat 1Q de la base intraday.

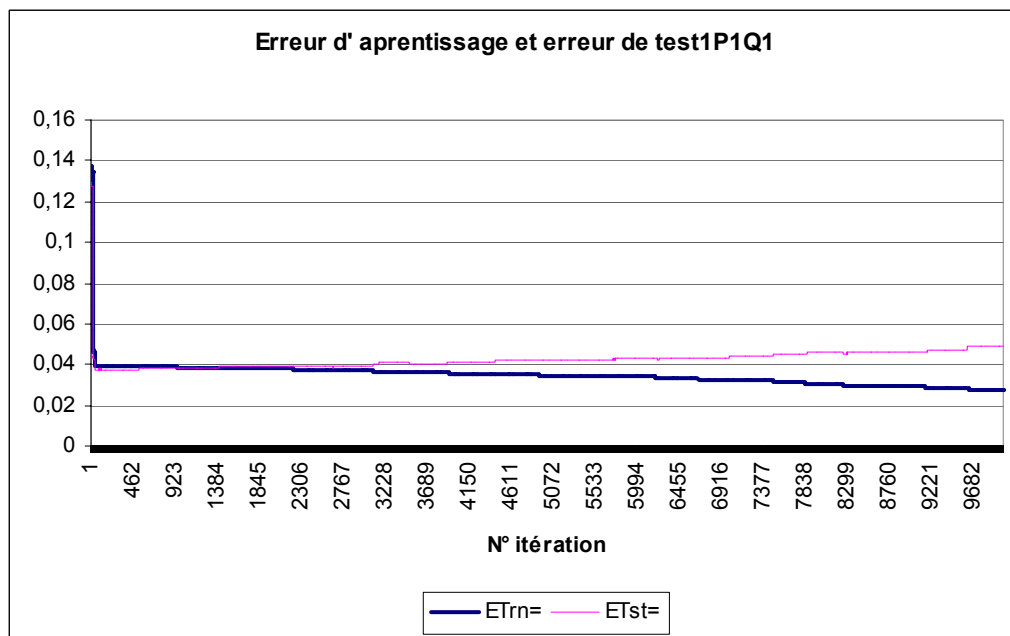


Figure 88: Erreur de training, Erreur de test en fonction du numéro d'itération. Le fichier d'apprentissage étant le contrat 1P et le fichier de test étant le contrat 1Q de la base intraday.

Le correct training (CTrn) doit être supérieur au correct test (CTst). De même l'erreur d'apprentissage doit être inférieure à l'erreur de test. C'est paradoxal d'avoir des performances de test meilleures que les performances d'apprentissage.

Pourtant, lors de l'apprentissage, certains modèles, connaissent un tel phénomène avant de retrouver une situation normale, autrement dit, où l'inégalité en question s'inverse. Parfois, cette phase subsiste jusqu'à la fin de l'apprentissage, c'est à dire, au-delà de 10 000 itérations.

Le correct training ne cesse de s'améliorer, au fur et à mesure, que l'apprentissage avance, alors que le correct test évolue d'une manière aléatoire. De même l'erreur d'apprentissage diminue avec l'apprentissage, par contre, l'erreur de test diminue, au départ, avant d'atteindre un minimum et reprendre le chemin de la hausse.

#### **4.2.2.2 Choix de la meilleure architecture de réseau**

Le choix des structures neuronales à retenir s'opère non seulement sur la base des indicateurs de performance des réseaux, à savoir, les pourcentages de bon classement et les erreurs d'apprentissage et de test, mais aussi, sur la base de la différence entre le pourcentage de bon classement d'apprentissage et de celui du test. La simplicité de l'architecture est, aussi, un critère à prendre en considération.

La meilleure structure sélectionnée, pour chaque architecture, doit satisfaire les conditions suivantes :

- Les pourcentages de bon classement d'apprentissage et de test devraient être à des niveaux élevés.
- Les erreurs d'apprentissage et de test doivent être assez faibles
- La différence, entre le pourcentage de bon classement d'apprentissage et celui de test, devrait être positive et minimale.

- L'architecture du réseau doit être la plus simple possible (architecture minimale)

Les deux premiers indicateurs évoluent, en sens opposé, puisqu'une erreur très faible signifie que l'écart entre les valeurs désirées et celles calculées est, également, faible. Par conséquent, le vecteur output calculé est le plus correctement classé puisqu'il est le plus proche du désiré.

Bien qu'opposés, chacun de ces deux critères est indispensable afin de pouvoir comparer deux structures tel que la première a une erreur et un pourcentage de « bon classement » plus faibles que ceux de la deuxième structure.

De plus, la performance globale du réseau dépend de la proximité des résultats de l'apprentissage et du test, autrement dit, d'un écart faible entre le pourcentage de « bon classement », de l'apprentissage et de celui du test. En effet, un pourcentage élevé « de bon classement » d'apprentissage et, en même temps, un pourcentage faible de « bon classement » de test va à l'encontre de la performance du réseau puisque celle-ci est jugée, à partir de l'échantillon test. C'est ce qui fait que le troisième critère est aussi indispensable, dans la mesure, où la bonne capacité de généralisation d'un réseau de neurones est exigée.

Pour ce qui concerne le critère 4, plus le nombre de neurones cachés est important plus la performance du réseau est meilleure. On gagne en précision mais en perd sur le plan temps de convergence de l'algorithme et sur la capacité de généralisation du réseau. Pour une bonne généralisation on choisira la structure minimale pour des objectifs de performances donnés.

En définitive, seules les structures qui sont conformes aux quatre critères précités sont sélectionnées.

Au début de l'apprentissage, compte tenu de la taille du fichier d'apprentissage, le nombre de poids synaptiques n'est pas suffisant pour cerner la complexité du problème. Au fur et à mesure de l'avancement de l'apprentissage, le nombre de nœuds cachés augmente et le nombre de paramètres (poids synaptiques) augmente, également, et deviendra suffisant, de manière à ce que l'erreur d'apprentissage soit au plus faible, sans oublier la contrainte de bonne généralisation qui impose un nombre optimum de nœuds, loin du surapprentissage.

Ainsi, les performances du réseau s'améliorent avec l'accroissement du nombre d'itérations, bien que, dans certains cas, la non-linéarité puisse provenir de la présence d'observations aberrantes (bruits), dans le fichier. Il s'agit, dans ce cas, du surapprentissage.

### 4.2.3 Résultats de l'apprentissage

#### 4.2.3.1 Résultats relatifs aux contrats de la base intraday

Les performances des meilleurs modèles, déterminés selon les critères pré-définis sont données sous forme de tableaux relatifs à chaque classe de contrats et à chaque classe de moneyness et de temps à l'échéance. Les performances des modèles, relatifs à la classe1, sont présentées dans le tableau 56.

	<b>1N</b>	<b>1O</b>	<b>1P</b>	<b>1Q</b>	<b>1R</b>	<b>1S</b>	
<b>1N</b>	460	3353	1971	998	2770	561	N itération
	0,0386118	0,034984	0,0368304	0,0376172	0,0356207	0,0382033	ETrn=
	0,037268	0,0353574	0,0433718	0,0395737	0,0519401	0,075782	ETst=
	86,95%	90,6%	88,51%	88,51%	89,56%	88,51%	CTrn=
	86,52%	88,74%	86,10%	84,77%	79,08%	62,80%	CTst=
	0,0043	0,0186	0,0241	0,0374	0,1048	0,2571	CTrn-CTst
	1	7	4	2	5	1	N CC
<b>1O</b>	139	3812	49	49	49	49	N itération
	0,0347666	0,0309555	0,0348523	0,0348523	0,0348523	0,0348523	ETrn=
	0,0374328	0,0289094	0,0435246	0,0386709	0,053517	0,0708501	ETst=
	88,14%	90,51%	87,96%	87,96%	87,96%	87,96%	CTrn=
	87,23%	90,07%	83,96%	86,09%	77,55%	70,73%	CTst=
	0,0091	0,0044	0,04	0,0187	0,1041	0,1723	CTrn-CTst
	0	8	0	0	0	0	N CC
<b>1P</b>	140	4446	46	980	104	127	N itération
	0,039374	0,0352635	0,0397234	0,0384924	0,0392491	0,0393972	ETrn=
	0,039576	0,0345687	0,0430051	0,0382417	0,051008	0,0688377	ETst=
	85,60%	88,00%	85,33%	86,67%	86,67%	85,87%	CTrn=
	85,11%	87,42%	85,03%	84,77%	79,08%	71,95%	CTst=
	0,0049	0,0058	0,003	0,019	0,0759	0,1392	CTrn-CTst
	0	10	0	0	0	0	N CC
<b>1Q</b>	96	594	125	89	89	78	N itération
	0,0344244	0,0337632	0,0344029	0,0344386	0,0344386	0,0344825	ETrn=
	0,0433448	0,0333131	0,0435223	0,0382478	0,0491908	0,0670797	ETst=
	89,33%	89,99%	89,20%	89,33%	89,33%	89,20%	CTrn=
	82,98%	87,42%	85,03%	86,75%	82,14%	71,95%	CTst=
	0,0635	0,0257	0,0417	0,0258	0,0719	0,1725	CTrn-CTst
	0	1	0	0	0	0	N CC
<b>1S</b>	140	1793	2224	3594	3210	43	N itération
	0,0657424	0,0630398	0,062615	0,0606863	0,0608045	0,0659031	ETrn=
	0,0530818	0,0443088	0,0521822	0,0483305	0,0540801	0,0665684	ETst=
	77,13%	78,96%	78,05%	76,83%	76,22%	78,05%	CTrn=
	70,92%	78,81%	75,40%	76,82%	76,02%	75,61%	CTst=
	0,0621	0,0015	0,0265	1E-04	0,002	0,0244	CTrn-CTst
	0	4	5	8	7	0	N CC

Tableau 56: Matrice d'apprentissage-test relative à la classe 1 des contrats de la base journalière. Modèle-type 5. Pour un élément, le contrat de ligne est un contrat apprentissage et le contrat de colonne est un contrat test. NCC est le nombre de couches cachées.

Ces résultats suscitent les remarques suivantes :

- Le niveau des performances du réseau, notamment, le correct training (CTrn) et le correct test (CTst) sont plutôt élevés, ce qui prouve que le réseau de neurones a capté la logique de l'évaluation des options, sur le marché.
- Bien que, dans la majorité des cas, le réseau de neurones ne présente pas de couches cachées, il n'en demeure pas moins, dans certains cas, il en présente jusqu'à 8 couches cachées. Par conséquent, on ne peut conclure qu'il existe un modèle universel.
- Le nombre de couches cachées témoigne du degré de non-linéarité du modèle et, donc, de la complexité du problème. Ce degré de non-linéarité dépend des données de chaque couple de fichiers apprentissage-test.
- Plus la volatilité, la durée de vie résiduelle, la moneyness sont non-linéaires, plus le réseau comporte un nombre de couches cachées élevé.
- La performance d'un réseau de neurones, au niveau de la généralisation, est d'autant plus élevée, qu'il existe une grande homogénéité entre les jeux d'apprentissage et de test.
- Plus le degré de non-linéarité du problème est important, plus le nombre de couches cachées est élevé et plus le nombre d'itérations est élevé puisque les couches cachées sont ajoutées au fur et à mesure de l'apprentissage, avec l'algorithme « cascade correlation ».
- La non-linéarité est manifeste dans le cas où le jeu d'apprentissage correspond aux contrats 1N ou 1S, et, également, lorsque le jeu de test correspond au contrat 1O. Dans les autres cas, le problème reste quasi-linéaire. En fait, la seule source de non-linéarité reste la fonction d'activation du nœud d'output. Comme l'output se trouve au voisinage de 0.5, sur cette partie, la fonction d'activation peut être assimilée à un segment de droite.
- Les performances des modèles sont les plus mauvaises, lorsque le contrat 1S correspond au jeu d'apprentissage, malgré la non-linéarité de ces modèles.

- La matrice apprentissage test n'est pas symétrique, ce qui est tout à fait normal, dans la mesure où les jeux d'apprentissage et de test sont différents.
- Les éléments de la partie supérieure à la diagonale du tableau présentent des performances supérieures, par rapport à leurs symétriques dans le tableau. C'est la preuve que la chronologie et l'antériorité des contrats a une influence sur les résultats des modèles neuronaux.
- A part, le contrat 1O et 1N, on remarque que les éléments diagonaux sont non linéaires. Les performances des modèles diagonaux ne sont pas significatives puisque l'apprentissage et le test se font sur le même contrat.
- Le niveau de l'erreur de training est, quasiment, la même, pour tous les modèles, sauf pour les modèles, avec 1S, comme contrat d'apprentissage.
- L'erreur de training est variable d'un contrat à un autre. Globalement, elle est plus faible, pour les modèles non-linéaires que pour les modèles linéaires.

#### ***4.2.3.1.1 Analyse des résultats du contrat 9 :***

Les résultats relatifs aux contrats, de la classe 9, sont présentés dans les tableaux 57 et 58, suivant les inputs utilisés pour les modèles respectifs.

Ces résultats suscitent les remarques suivantes :

- La matrice d'apprentissage-test n'est pas symétrique: les performances des modèles sont différentes si on permute le contrat d'apprentissage et le contrat de test.
- Dans la majorité des cas, l'architecture pour les contrats de la classe 9, comporte zéro nœuds cachés. Ceci implique une linéarité du problème. La seule source de non-linéarité provient de la non-linéarité des fonctions de transfert du nœud d'output.
- Les performances sont médiocres quand on considère le contrat 9L, comme fichier d'apprentissage. Ceci est vrai, quel que soit, le contrat relatif au fichier test.



9ih1					9ih					
	9I	9J	9K	9L		9I	9J	9K	9L	
9I	66	65	105	105	9I		1172	1205	1550	N itération
	0,0362716	0,0362729	0,0361887	0,0361887			0,0699954	0,0696003	0,0653323	ETrn=
	0,0407178	0,0515463	0,0518277	0,0939403		anomalie	0,0686039	0,0599598	0,0972999	ETst=
	87,66%	87,66%	87,91%	87,91%		76,89%	75,97%	78,95%	CTrn=	
	86,23%	79,45%	79,87%	54,23%		76,19%	75,63%	53,15%	CTst=	
	0,0143	0,0821	0,0804	0,3368		0,007	0,0034	0,258	CTrn-CTst	
0	0	0	0	2	2	3	N CC			
9J	141	83	141	69	9J	101	101	77	56	N itération
	0,0418549	0,0419357	0,0418549	0,0419634		0,0421681	0,0421681	0,042187	0,0423699	ETrn=
	0,0428195	0,050225	0,0498134	0,0890805		0,0425058	0,0497	0,0492367	0,0890503	ETst=
	85,51%	85,11%	85,51%	85,11%		84,74%	84,74%	84,74%	84,14%	CTrn=
	82,61%	82,19%	81,13%	55,63%		82,73%	82,31%	80,63%	55,94%	CTst=
	0,029	0,0292	0,0438	0,2948		0,0201	0,0243	0,0411	0,282	CTrn-CTst
0	0	0	0	0	0	0	0	N CC		
9K	633	2000	7456	73	9K	2670	7166		86	N itération
	0,0504138	0,0495765	0,0448253	0,051123		0,0506893	0,0468458		0,0519673	ETrn=
	0,0513578	0,053394	0,0506001	0,0869203		0,0468598	0,0532677		0,0873965	ETst=
	75,69%	76,42%	78,31%	76,13%		75,58%	76,16%	anomalie	74,71%	CTrn=
	75,36%	76,03%	77,99%	55,63%		75,54%	75,51%		55,24%	CTst=
	0,0033	0,0039	0,0032	0,205		0,0004	0,0065		0,1947	CTrn-CTst
1	3	15	0	5	14		0	N CC		
9L	669	24	25	47	9L	1123	9085		47	N itération
	0,0885224	0,0942515	0,103139	0,0893587		0,0880994	0,0745731		0,0899002	ETrn=
	0,060116	0,0806084	0,0707658	0,0863643		0,0595936	0,0733916		0,0867943	ETst=
	61,21%	54,21%	46,03%	61,21%		60,98%	59,21%	anomalie	61,31%	CTrn=
	57,25%	52,74%	43,40%	60,56%		57,25%	57,82%		60,84%	CTst=
	0,0396	0,0147	0,0263	0,0065		0,0373	0,0139		0,0047	CTrn-CTst
1	0	0	0	1	18		0	N CC		

Tableau 57 : Résultats modèles neuronaux pour les contrats de la classe 9 ; 9ih1= Modèle-type 5 ; 9ih= Modèle-type 6. Anomalie= performances test meilleures que celles de l'apprentissage.

Une ligne : contrat apprentissage ; Une colonne : contrat test

- En ce qui concerne les éléments diagonaux, quasiment, tous les modèles ne comportent aucun nœud caché, sauf pour le contrat 9K, où on a, soit une structure très complexe comportant 14 ou 15 nœuds, soit des performances de test supérieures à celles relatives à l'apprentissage. En cas où la volatilité n'est pas considérée comme input, le modèle diagonal relatif au contrat 9I, comporte deux nœuds cachés.

9i					9ss					
	9I	9J	9K	9L		9I	9J	9K	9L	
9I	186	186	159	149	9I	1577	2551	1894	901	N itération
	0,0364672	0,0364672	0,036279	0,0364337		0,0814928	0,0800917	0,0678059	0,117817	ETrn=
	0,0412186	0,0525026	0,0540428	0,0969909		0,117176	0,151591	0,265088	0,217543	ETst=
	87,47%	87,47%	87,47%	87,47%		58,75%	68,47%	70,84%	62,63%	CTrn=
	85,61%	78,23%	76,88%	52,45%		57,55%	61,22%	51,25%	16,08%	CTst=
	0,0186	0,0924	0,1059	0,3502		0,012	0,0725	0,1959	0,4655	CTrn-CTst
0	0	0	0	2	4	3	1	N CC		
9J	497	85	28	127	9J	46	30	66	47	N itération
	0,0417219	0,0422443	0,0425041	0,0422259		0,0426222	0,0528837	0,0418228	0,0425896	ETrn=
	0,0405337	0,0499486	0,0479199	0,0900179		0,0428958	0,0510649	0,0492864	0,0874282	ETst=
	85,34%	84,74%	84,34%	84,34%		84,74%	84,74%	85,74%	84,94%	CTrn=
	84,89%	82,31%	80,63%	56,64%		84,17%	80,95%	78,13%	57,34%	CTst=
	0,0045	0,0243	0,0371	0,277		0,0057	0,0379	0,0761	0,276	CTrn-CTst
1	0	0	0	0	0	0	0	N CC		
9K	6106	9647	7125	48	9K	5242	6424		85	N itération
	0,0488195	0,0474366	0,0490219	0,0520928		0,0495374	0,0485791		0,057561	ETrn=
	0,0474142	0,0527875	0,0453157	0,0871421		0,0504364	0,0534933		0,0898124	ETst=
	76,45%	77,47%	76,31%	75,73%		74,42%	77,18%	anomalie	75,44%	CTrn=
	75,54%	76,87%	76,25%	58,04%		74,10%	75,51%		59,21%	CTst=
	0,0091	0,006	0,0006	0,1769		0,0032	0,0167		0,1623	CTrn-CTst
11	21	14	0	12	15		0	N CC		
9L	7210		9812	66	9L	8293	4349	7168	30	N itération
	0,0794945		0,0738652	0,0898278		0,0807617	0,0857306	0,0822257	0,0960223	ETrn=
	0,0618138		0,0757858	0,0862699		0,0619156	0,06526	0,0674888	0,0864507	ETst=
	58,51%	anomalie	63,17%	61,31%		62,00%	59,91%	58,97%	61,54%	CTrn=
	58,27%		63,13%	59,44%		53,24%	57,14%	50,63%	60,14%	CTst=
	0,0024		0,0004	0,0187		0,0876	0,0277	0,0834	0,014	CTrn-CTst
16		21	0	18	10	16	0	N CC		

Tableau 58: Résultats modèles neuronaux pour les contrats de la classe 9 9i = Modèle-type ; 9ss= Modèle-type; Anomalie= performances test meilleures que celles de l'apprentissage. Une ligne : contrat apprentissage Une colonne : contrat test

A priori, les résultats des modèles 9ih et 9ih1 doivent être les meilleurs puisqu'ils comportent le maximum d'input incluant les inputs des autres modèles 9i et 9ss. La meilleure structure des inputs, sera, donc, déterminée par la comparaison entre les modèles 9ih et 9ih1.

Empiriquement, on remarque que 9ih1 domine 9ih, dans la majorité des cas, aussi bien pour les performances de l'apprentissage que pour les performances du test.

En conclusion, puisque 9ih1 domine toutes les autres architectures, ça sera la structure d'input correspondante qui sera prise en considération dans la suite de

l'étude. D'autant plus, qu'il est intéressant d'un point de vue pratique, dans la mesure où il se base sur la volatilité implicite de l'instant précédent et non sur celle de l'instant présent qui est inconnue, à priori, dans le présent.

Pour le tableau 9ih1, les éléments de la partie supérieure à la diagonale de la matrice apprentissage-test dominant ceux de la partie inférieure. Ceci veut dire que la chronologie a une influence sur les performances des modèles neuronaux, en terme d'apprentissage et de capacité de bonne généralisation.

Tous les éléments de la partie supérieure de la matrice d'apprentissage-test sont linéaires. Ce n'est pas toujours le cas pour tous les éléments inférieurs.

Les performances des modèles neuronaux, relatifs au modèle-type 5 (9ih1), sont bonnes et témoignent que le réseau de neurones capte la relation, qui existe entre les inputs et l'output, c'est à dire, entre la valeur de l'option et ses déterminants. Reste que les performances des modèles, avec 9L comme contrat d'apprentissage, ne sont pas très bonnes, ni au niveau du pourcentage de classification, ni au niveau des erreurs d'apprentissage et de test.

#### **4.2.3.2 Résultats : par moneyness et temps à l'échéance (Base intraday)**

##### **4.2.3.2.1 Analyse des résultats de la classe 2 :**

Les résultats relatifs à la classe 2 (classement par moneyness et temps à l'échéance) sont présentés dans les tableaux 59 et 60, selon les inputs considérés. A noter que pour les trois derniers modèles, on n'a considéré que les éléments diagonaux des matrices apprentissage-test correspondantes.

Ces résultats suscitent les remarques suivantes :

- Les performances de l'apprentissage et du test sont bonnes, dans l'ensemble.
- La majorité des modèles est non linéaire, exception faite des modèles, où la classe 2D sert de jeu d'apprentissage.

- La classe 2 est une classe hétérogène, du point de vue de la classification par « temps à l'échéance », puisqu'elle correspond à une « moneyness », comprise entre 0.9 et 1.1 et un temps à l'échéance inférieur à 0.35, ce qui est une source d'hétérogénéité.

2					2ih					
	2A	2B	2C	2D		2A	2B	2C	2D	
2A	2281	3268	3094	1718	2A	2536	598	580	25	N itération
	0,0690585	0,0673831	0,0673834	0,0711884		0,0616132	0,0712805	0,0712793	0,100427	ETrn=
	0,0707471	0,0682805	0,0904585	0,0874455		0,0682355	0,0595856	0,0720095	0,0702616	ETst=
	80,44%	80,13%	80,13%	74,29%		76,18%	73,97%	72,71%	68,61%	CTrn=
	71,88%	66,88%	49,38%	30,07%		71,25%	67,5%	48,58%	60,78%	CTst=
	0,0856	0,1325	0,3075	0,4422		0,0493	0,0647	0,2413	0,0783	CTrn-CTst
5	5	6	4	4	1	1	0	N CC		
2B	608	3582	1689	53	2B	1070	4365	2440	anomalie	N itération
	0,0774197	0,0708241	0,073013	0,0911461		0,06787	0,0505455	0,056983		ETrn=
	0,0679906	0,0667845	0,0418978	0,039848		0,0613704	0,0554685	0,0574303		ETst=
	73,54%	78,27%	79,69%	80,94%		80,76%	89,12%	89,43%		CTrn=
	72,50%	77,50%	79,38%	79,08%		77,50%	83,75%	70,63%		CTst=
	0,0104	0,0077	0,0031	0,0186		0,0326	0,0537	0,188		CTrn-CTst
1	8	4	0	2	10	4	N CC			
2C	56	4431	7150	36	2C	1032	1070	1190	anomalie	N itération
	0,06356	0,0486518	0,043781	0,0768444		0,0501753	0,0494037	0,0499698		ETrn=
	0,0728581	0,0627146	0,0477394	0,0402294		0,0705283	0,0642741	0,0367439		ETst=
	85,67%	85,35%	87,09%	83,46%		88,17%	86,59%	87,54%		CTrn=
	85,63%	72,50%	86,25%	78,43%		66,88%	70,00%	86,25%		CTst=
	0,0004	0,1285	0,0084	0,0503		0,2129	0,1659	0,0129		CTrn-CTst
0	10	17	0	2	2	2	N CC			
2D	51	61	243	27	2D	704	3750	491	130	N itération
	0,0406545	0,02727	0,0358814	0,040469		0,0264467	0,022728	0,0272505	0,0272822	ETrn=
	0,0779042	0,0629005	0,0357364	0,0319929		0,0762327	0,0641254	0,0359554	0,0312102	ETst=
	92,13%	95,43%	95,28%	86,61%		94,01%	96,06%	93,38%	93,38%	CTrn=
	76,88%	90,63%	92,50%	85,62%		65,63%	76,25%	88,75%	90,85%	CTst=
	0,1525	0,048	0,0278	0,0099		0,2838	0,1981	0,0463	0,0253	CTrn-CTst
0	0	0	0	1	6	0	0	N CC		

Tableau 59 : Résultats des modèles neuronaux pour les sous-classes de la classe 2 ; 2 = modèle-type 6 ; 2ih= modèle-type 5 ; Anomalie= performances test meilleures que celles de l'apprentissage. Une ligne : contrat apprentissage ; Une colonne : contrat test

- Cette hétérogénéité, est une source de complexité, de bruit et, donc, de non-linéarité, qui se vérifie, empiriquement, puisque la majorité des modèles comporte un certain nombre de couches cachées.

- La classe D, quand elle correspond au fichier d'apprentissage, les modèles correspondants se distinguent par l'absence de nœuds cachés avec de très bonnes performances, aussi bien pour l'apprentissage que pour le test, ceci quelle que soit la classe relative au fichier test.

	2A2A	2B2B	2C2C	2D2D	
<b>2i</b>	6863	5356	938	468	N itération
	0,0530813	0,044284	0,0510824	0,0272651	ETrn=
	0,0600993	0,0462991	0,0390133	0,0301111	ETst=
	83,91%	90,85%	87,07%	93,69%	CTrn=
	80,00%	88,75%	83,75%	92,16%	CTst=
	0,0391	0,021	0,0332	0,0153	CTrn-CTst
	15	10	2	0	N CC
<b>2h</b>	3451	8253	5344	12845	N itération
	0,0683224	0,0609342	0,0484719	0,0192534	ETrn=
	0,0728603	0,0668234	0,0487325	0,021152	ETst=
	76,97%	78,86%	85,80%	96,53%	CTrn=
	73,75%	78,75%	80,63%	95,42%	CTst=
	0,0322	0,0011	0,0517	0,0111	CTrn-CTst
	7	19	12	26	N CC
<b>2ss</b>	3646	2484	11051		N itération
	0,0694172	0,0729058	0,0464234		ETrn=
	0,0710126	0,0582465	0,0481398		ETst=
	77,29%	76,03%	87,07%	anomalie	CTrn=
	76,88%	74,38%	86,25%		CTst=
	0,0041	0,0165	0,0082		CTrn-CTst
	7	5	24		N CC

Tableau 60 : Résultats modèles neuronaux pour les sous-classes de la classe 2 ; modèles diagonaux pour les modèles types relatif à 2i= modèle-type 3, 2h= modèle-type 2, 2ss=modèle-type 1 ; Anomalie= performances test meilleures que celles de l'apprentissage. Une ligne : contrat apprentissage ; Une colonne : contrat test

- Compte tenu du fait que les inputs de 2 et 2ih incluent ceux des autres modèles 2i, 2h et 2ss, logiquement, le choix doit se faire entre les deux premiers.
- En comparant les tableaux de résultats de 2 et 2ih, on remarque que, globalement, les résultats de 2ih sont meilleurs que ceux de 2 et, dans les quelques cas, où ceci n'est pas vrai, on remarque que la structure relative à celle de 2ih est plus simple que celle de 2.

L'architecture retenue est, donc, celle relative à 2ih (modèle-type 5).

**4.2.3.2.2 Analyse des résultats de la classe 5 :**

Les résultats relatifs à la classe 5, sont représentés, dans les tableaux 61 et 62.

		5					5ih			
		5A	5B	5C			5A	5B	5C	
<b>5A</b>		7746		1267	<b>5A</b>		3134	3945	814	N itération
		0,0574349		0,0692023			0,0573523	0,0543437	0,075961	ETrn=
		0,0582554		0,0504799			0,0597176	0,0549873	0,0525478	ETst=
		73,85%	Anomalie	68,77%			78,74%	78,89%	74,88%	CTrn=
		71,34%		65,45%			76,97%	55,76%	72,56%	CTst=
		0,0251		0,0332			0,0177	0,2313	0,0232	CTrn-CTst
	16		3		7	8	1	N CC		
<b>5B</b>		132	4127	1606	<b>5B</b>		190	2327	2170	N itération
		0,0638857	0,0518895	0,0549237			0,0680294	0,0390127	0,0403999	ETrn=
		0,0652589	0,0465754	0,0470834			0,0710361	0,0385154	0,0575521	ETst=
		78,65%	81,72%	78,19%			79,66%	88,44%	88,60%	CTrn=
		78,05%	81,71%	76,97%			75,15%	87,27%	73,17%	CTst=
		0,006	1E-04	0,0122			0,0451	0,0117	0,1543	CTrn-CTst
	0	9	3		0	4	4	N CC		
<b>5C</b>		1606	745	4276	<b>5C</b>		1590	1133	2384	N itération
		0,0549237	0,0412803	0,0372361			0,0314352	0,0325249	0,0317535	ETrn=
		0,0470834	0,0477157	0,0337627			0,0533989	0,0384898	0,0343758	ETst=
		78,19%	82,95%	86,18%			89,25%	87,61%	89,06%	CTrn=
		76,97%	82,32%	85,45%			78,18%	85,45%	83,54%	CTst=
		0,0122	0,0063	0,0073			0,1107	0,0216	0,0552	CTrn-CTst
	3	0	10		3	2	4	N CC		

Tableau 61 : Résultats des modèles neuronaux pour les sous-classes de la classe 5 ; 5=modèle-type 6;5ih = modèle-type 5 ; Anomalie= performances test meilleures que celles de l'apprentissage. Une ligne : contrat apprentissage ; Une colonne : contrat test

		5A5A	5B5B	5C5C	
<b>5SS</b>		48	1704	178	N itération
		0,0808139	0,0564658	0,0495001	ETrn=
		0,0727973	0,0462529	0,0407933	ETst=
		74,42%	77,35%	81,41%	CTrn=
		73,33%	76,97%	81,10%	CTst=
		0,0109	0,0038	0,0031	CTrn-CTst
	0	1	0	N CC	

Tableau 62 : Résultats des modèles neuronaux pour les sous-classes de la classe 5 ; modèles diagonaux, 5ss = modèle-type 1.

Ces résultats suscitent les remarques suivantes :

- La classe 5 est homogène suivant la moneyness et le temps à l'échéance. Elle correspond à une moneyness comprise entre 0.9 et 1.1 et un temps à l'échéance, exprimé en année, compris entre 0.35 et 0.7.
- Malgré cette homogénéité, les modèles correspondants sont non linéaires.
- Les modèles 5ih (modèle-type 5) dominent les autres modèles, au niveau des performances, aussi bien de l'apprentissage que du test.
- Le niveau des performances des différents modèles 5ih est convenable, aussi bien au niveau du pourcentage de bon classement que de l'erreur, pour l'apprentissage comme pour le test.

En conclusion, le modèle "ih" est le modèle qui donne les meilleurs résultats, aussi bien, pour les contrats, que pour les classes de moneyness et temps à l'échéance. Il y'a plus de linéarité pour les Classes de moneyness et temps à l'échéance que pour les contrats. Ceci peut être du à l'homogénéité des données.

Il est difficile de trouver un modèle universel relatif à l'évaluation des options par réseaux de neurone. Tous simplement, à chaque problème son modèle et à chaque ensemble de données leurs modèles. Les résultats sont, d'autant meilleurs, que le jeu d'apprentissage et le jeu de test présentent une certaine homogénéité, ce qui suppose une classification antérieure à l'apprentissage.

#### **4.2.3.3 Résultats par contrats de la base journalière**

Pour la base journalière, on a fait l'apprentissage avec comme output, d'abord la série dérivée de la valeur de l'option, puis la série dérivée de son logarithme (comme pour les contrats de la base intraday). Pour chaque contrat choisi de la base journalière, comme jeu d'apprentissage, on a considéré tous les modèles avec comme jeu de test les contrats postérieurs à ce contrat. Ce qui fait une matrice d'apprentissage-test, sans diagonale, avec, uniquement, la partie supérieure à la diagonale.

*En considérant une dérivation par la différence*

En considérant, comme output, la série dérivée de la valeur de l'option, on obtient les résultats résumés dans le tableau 63.

	<b>C2800</b>	<b>C2950</b>	<b>C3100</b>	<b>C3250</b>	<b>C4000</b>	
<b>C2800</b>		42 0,0984555 0,115379 52,79% 42,25% 0,1054 0	27 0,103246 0,138765 47,21% 33,78% 0,1343 0	3251 0,0787603 0,085405 55,84% 50,00% 0,0584 7	29 0,0993744 0,136469 54,31% 35,29% 0,1902 0	N itération ETrn= ETst= CTrn= CTst= CTrn-CTst NCC
<b>C2950</b>			1472 0,0958941 0,128446 46,23% 44,59% 0,0164 3	7174 0,0745123 0,188074 50,00% 25,00% 0,25 15	51 0,0999536 0,151724 43,87% 27,94% 0,1593 0	N itération ETrn= ETst= CTrn= CTst= CTrn-CTst NCC
<b>C3100</b>				1233 0,116672 0,124655 37,39% 25,00% 0,1239 2	44 0,124354 0,198275 39,19% 16,18% 0,2301 0	N itération ETrn= ETst= CTrn= CTst= CTrn-CTst NCC
<b>C3250</b>					1427 0,0787638 0,296991 62,28% 7,35% 0,5493 2	N itération ETrn= ETst= CTrn= CTst= CTrn-CTst NCC
<b>C4000</b>				1617 0,112467 0,204879 43,14% 2,63% 0,4051 2		N itération ETrn= ETst= CTrn= CTst= CTrn-CTst NCC

Tableau 63 : Partie supérieure de la matrice apprentissage-test hors diagonale. Dérivation simple de la série de l'output ; contrats de la base journalière ; Modèle type 5.

*En considérant une dérivation par la différence de logarithmes*

En considérant, comme output, la série dérivée du logarithme de la valeur de l'option, on obtient les résultats résumés dans le tableau 64.



	<b>C2800</b>	<b>C2950</b>	<b>C3100</b>	<b>C3250</b>	<b>C4000</b>	
<b>C2800</b>		690 0,0982756 0,0918306 47,72% 45,45% 0,0227 1	113 0,107544 0,103616 48,73% 39,19% 0,0954 0	113 0,107544 0,119795 48,73% 36,84% 0,1189 0	23 0,108942 0,119843 42,64% 41,18% 0,0146 0	N itération ETrn= ETst= CTrn= CTst= CTrn-CTst NCC
<b>C2950</b>			6615 0,11243 0,116065 39,15% 35,14% 0,0401 13	1059 0,138674 0,120163 32,08% 31,58% 0,005 2	1119 0,13572 0,155803 33,49% 26,47% 0,0702 2	N itération ETrn= ETst= CTrn= CTst= CTrn-CTst NCC
<b>C3100</b>				59 0,110232 0,10469 43,69% 40,79% 0,029 0	4152 0,085953 0,136659 45,05% 42,65% 0,024 10	N itération ETrn= ETst= CTrn= CTst= CTrn-CTst NCC
<b>C3250</b>					507 0,112773 0,111343 40,35% 38,24% 0,0211 2	N itération ETrn= ETst= CTrn= CTst= CTrn-CTst NCC
<b>C4000</b>				57 0,120106 0,110011 43,14% 42,11% 0,0103 0		N itération ETrn= ETst= CTrn= CTst= CTrn-CTst NCC

Tableau 64: Partie supérieure de la matrice apprentissage-test hors diagonale. Dérivation du logarithme de la série de l'output. Contrats de la base journalière ; Modèle-type 5.

On remarque que :

- Les performances, aussi bien, de l'apprentissage que du test, sont médiocres. Ces mauvaises performances sont dues à la contrainte d'une meilleure généralisation, avec un manque d'homogénéité des contrats de la base journalière.
- Les performances de la dérivation logarithmique sont pires que celles de la dérivation normale (dérivée de la valeur de l'option).

- Le degré de linéarité d'un modèle est différent selon qu'on considère la série dérivée de la valeur de l'option ou celle de son logarithme. A titre d'exemple, le modèle C3100-C4000 est linéaire, si on considère la dérivée de la série de la valeur de l'option, alors qu'il est non linéaire avec 10 nœuds, si on considère la série logarithme de la valeur de l'option.

#### **4.2.4 Détermination de la valeur de l'option calculée par le réseau de neurones**

Sous contrainte de la meilleure généralisation, pour déterminer la valeur de l'option, obtenue par les réseaux de neurones, il va falloir inverser la relation qui a permis de calculer l'output du réseau  $C''$ , à partir de la valeur de l'option sur le marché  $C$ . Mais dans un premier temps, il va falloir, déterminer la valeur de l'output  $C''$ , calculée par le réseau de neurones. Pour se faire, pour chaque modèle, on enregistre les poids synaptiques de l'ensemble du réseau, et on applique aux inputs, du modèle considéré, la formule (4.1.4-1). La série  $C''$  est la transformée de la série dérivée  $C'$  du logarithme de la valeur de l'option  $C$ , dans l'intervalle  $[0.1 ; 0.9]$ . La série  $C'$  est obtenue par inversion de sa relation avec  $C''$ . La série  $C$  est obtenue par intégration de la série  $C'$ .

##### **4.2.4.1 Détermination de la série $C''$**

La série  $C''$  est fonction du nombre des couches cachées, des poids synaptiques des réseaux de neurones et des inputs. Pour ce calcul, on considère le même découpage, utilisé pour l'apprentissage des réseaux de neurones.

##### **4.2.4.1.1 Détermination de la série $C''$ dans le cas de la base intraday avec découpage par contrat**

Après l'enregistrement des « logging » des différents modèles, on choisit, selon les critères précités, la meilleure architecture. Cette architecture correspond à un nombre d'itérations et, également, à un nombre de nœuds cachés. L'apprentissage est refait jusqu'à ce nombre d'itérations, afin de récupérer les valeurs des poids synaptiques.

Le meilleur réseau, correspondant au modèle 1P1Q, ne présente que deux couches cachées. Le modèle 1P1Q est celui pour lequel le fichier d'apprentissage est le contrat 1P, et le fichier test est le contrat 1Q. L'output C"RN, calculé par le réseau correspondant, se détermine, à partir des inputs et à partir des poids synaptiques, conformément à la formule (4.1.4-1). Les poids synaptiques, relatifs à ce modèle 1P1Q, sont résumés, dans le tableau 65.

	Bias	input1=S/E	input2=(T-t)/360	input 3= $\sigma(t-1)$	input4= ohist	output NC1	output NC2
output NC1	-3,116179	-8,934195	34,020055	-69,449154	8,926288		
output NC2	1,456281	-2,567674	-33,593981	5,450291	77,95743	3,858234	
C" RN	1,080546	-0,620316	-0,304531	-0,134151	-1,616932	-0,076612	-0,063515

Tableau 65 : Poids synaptiques relatifs à la meilleure architecture du modèle 1P1Q. NC1 et NC2 sont les neurones cachés 1 et 2

On calcule d'abord l'output du premier neurone caché, puis celui du deuxième neurone caché et, enfin, en utilisant ces outputs ainsi que les inputs du réseau (y compris le biais qui est égal à 1), on calcule la valeur de l'output du réseau. La série qui correspond à ce calcul est représentée dans la figure 89, en comparaison avec la série désirée.

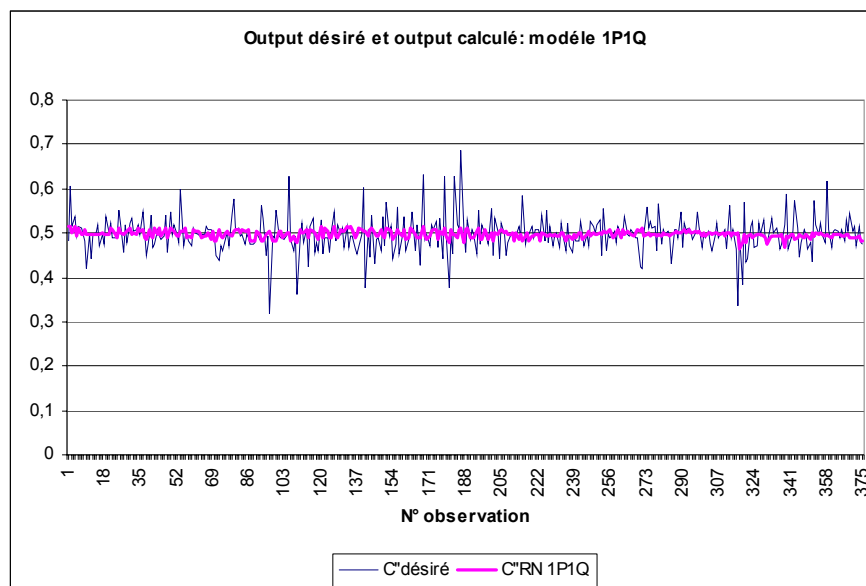


Figure 89 : Séries C" RN et C" désiré pour le modèle 1P1Q base intraday ; modèle-type 5

Compte tenu, d'un nombre faible de neurones cachés, le réseau, relatif au modèle 1P1Q, a une propriété de non-linéarité réduite. En effet, il ne comporte

aucune couche cachée. Il ne capte pas toutes les variations de l'output désiré, notamment, les bruits. Pourtant, le niveau de bon classement, qui est de 86,67% est plutôt convenable. Il est, également, doté d'une bonne capacité de généralisation, puisque le correct test est de 84,77%.

Il est certain que, sans la contrainte de généralisation, le modèle aura un pourcentage de bon classement qui converge vers 100% quand le nombre d'itérations augmente indéfiniment. Dans ce cas,  $C''$  calculé, par le modèle 1P1Q, épouse la forme de la courbe de  $C''$  désiré. Mais, le réseau captera les bruits de  $C''$  désiré, il deviendra très complexe, avec un nombre de neurones qui augmente au rythme des itérations. Le modèle devient tellement complexe, qu'il aura un problème d'overfitting synonyme d'une mauvaise capacité de généralisation. C'est, ainsi, que cette contrainte de bonne généralisation doit être imposée au réseau, par le biais de la technique de « cross validation ».

#### ***4.2.4.1.2 Détermination de $C''$ avec découpage de la base intraday par classes de moneyness et de temps à l'échéance***

Pour ces classes de « moneyness » et de temps à l'échéance, on considère les deux modèles 2A2A et 2A2D. L'apprentissage pour ces deux modèles, se fait sur la même classe 2A, alors que les jeux de test sont, respectivement, 2A et 2D. Ici l'exemple est frappant, pour démontrer que la capacité de généralisation dépend, étroitement, du jeu de test. Le modèle 2A2A est doté de 4 couches cachées, alors que le modèle 2A2D ne comprend aucune couche cachée. Bien qu'ils aient, tous les deux, un bon pourcentage de bon classement à l'apprentissage, respectivement, 76.18% et 68.61%, le premier a une capacité de généralisation, meilleure que celle du second, puisque les pourcentages de « bon classement de test » sont, respectivement, 71.25% et 60.78%, avec un même niveau d'erreur aussi bien pour l'apprentissage que pour le test.

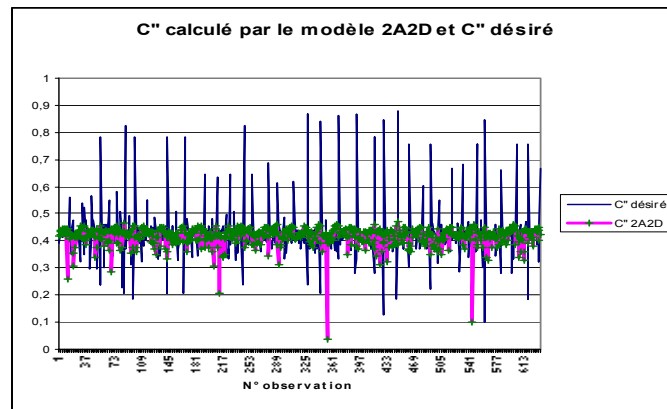


Figure 90 : Séries C'' calculée par les réseaux de neurones et série C'' désirée, pour le modèle 2A2D (classes de moneyness et de temps à l'échéance de la base intraday) ; modèle-type 5.

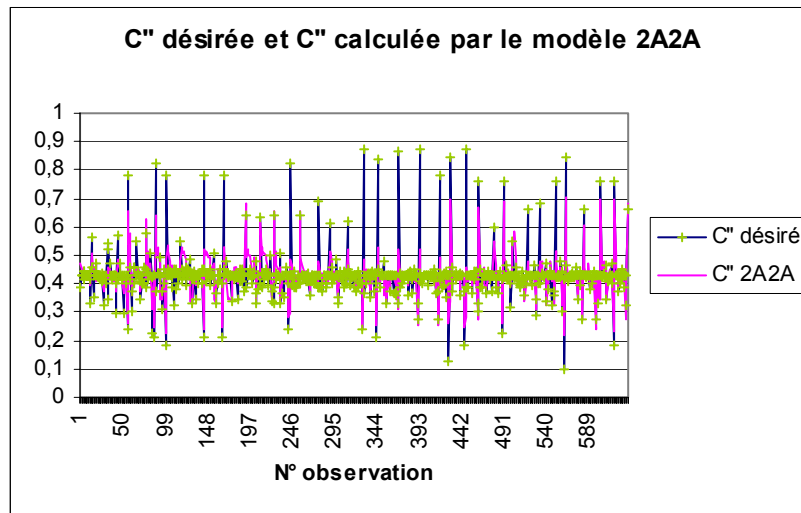


Figure 91: Séries « C'' désirée » et série « C'' calculée par les réseaux de neurones » pour le modèle 2A2A de la classe de moneyness 2 de la base intraday ; Modèle-type 5

Cette différence, au niveau de la capacité de généralisation est manifeste, puisque, pour le modèle 2A2A, la « série C'' calculée » épouse la courbe de la « série C'' désirée » (voir figure 91), alors que pour le modèle 2A2D, la courbe « C'' calculée » se situe entre les niveaux 0.1 et environ 0.45, alors que la courbe « C'' désirée » se situe entre les niveaux 0.1 et 0.9 (voir figure 90).

Ainsi, la capacité de généralisation dépend, étroitement, du jeu de test et de son homogénéité avec le jeu d'apprentissage.

#### 4.2.4.1.3 Détermination de la série $C''$ dans le cas de la base journalière

Pour la base journalière, les performances des modèles ne sont pas très bonnes. Ceci est dû à la contrainte d'une bonne généralisation, qui veut que le nombre de neurones cachés soit le plus réduit possible. Pour que l'output soit rendu stationnaire, on a dérivé la série qui lui correspond ou son logarithme. Les résultats, relatifs à la dérivation du logarithme, sont, relativement, moins bonnes, selon les critères prédéfinis.

Le modèle C3250-C4000 est tel que son fichier apprentissage est celui du contrat C3250 et son fichier test est celui relatif au contrat C4000. Les valeurs de l'output calculées, pour ce modèle, par le réseau, ainsi que sa valeur désirée sont représentées dans le graphique 92.

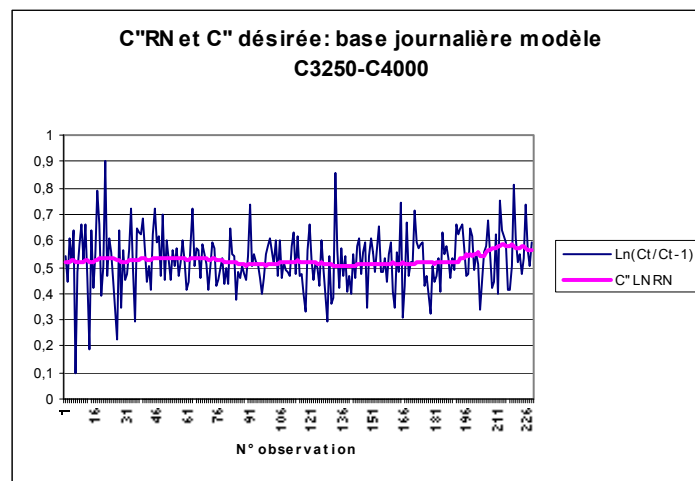


Figure 92 : Série «  $C''$  calculée par les réseaux de neurones » et la série «  $C''$  désirée », pour le modèle C3250-C400 base journalière; modèle-type 5

Le modèle n'est pas très fortement non linéaire. Il ne comporte que deux nœuds cachés, avec des faibles pourcentages de bon classement, aussi bien pour l'apprentissage que pour le test (respectivement 40.35% et 38.24%) et des erreurs d'apprentissage et de test autour de 11%. Ainsi, la série «  $C''$  calculée » est loin d'épouser la forme de la courbe de la série «  $C''$  désirée ». Cependant, sous la contrainte d'une bonne généralisation, même si les performances du réseau sont médiocres, le phénomène de surapprentissage « overfitting » est évité.

#### 4.2.4.2 Calcul de la série C' à partir de la série C''

La valeur de l'output devrait être la valeur de l'option C. Comme cette série n'est pas stationnaire, on a considéré la série dérivée de son logarithme C'. Or, le neurone de sortie a comme fonction d'activation la fonction sigmoïde, dont l'ensemble d'arrivée est l'intervalle [0 ;1]. Ainsi, la série C' est transformée, linéairement, en la série C'', de manière à être dans l'intervalle [0.1 ;0.9], en dehors des zones asymptotiques. Pour avoir la valeur de l'output dans l'intervalle [0.1 ;0.9], la série C'' est calculée, suivant la formule :

$$C_t'' = \alpha C_t' + \beta$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients constants, qui sont des fonctions de la valeur maximale et de celle minimale de la série C' considérée (cf tableaux 51, 52, 53 et 54).

Comme, les valeurs de la série C'' ont été calculées par le réseau, on cherche, maintenant, à déduire la valeur de l'option. Pour se faire, il va falloir déduire, dans un premier temps, les valeurs de la série C', en inversant la formule considérée (4.2.1-2). Soit :

$$C_t' = \alpha_1 C_t'' + \beta_1 = \frac{1}{\alpha} C_t'' - \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \beta_1 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Les valeurs de  $\alpha_1$  et  $\beta_1$ , ainsi que la valeur initiale de l'option, pour les différents contrats et les différentes classes de moneyness et de temps à l'échéance, sont données dans les tableaux 66, 67 et 68.

	1N	1O	1P	1Q	1S	9I	9J	9K	9L
$\alpha_1$	1,532500	1,531629	1,531861	1,532517	1,532398	1,148417	1,147907	1,150520	1,147051
$\beta_1$	-0,759483	-0,759047	-0,759122	-0,759439	-0,759464	-0,516078	-0,515846	-0,517044	-0,515444
C0	64	58	100	65	51,5	128	63	28	12,2

Tableau 66 : Coefficients  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  et valeur initiale C0 de l'option, pour déterminer la série C', à partir de la série C'' ; contrats de la base intraday.

	2A,2B,2C et 2D	5A,5B et 5C
$\alpha_1$	7,289853	2,298456

<b><math>\beta_1</math></b>	-3,126880	-1,164154
-----------------------------	-----------	-----------

Tableau 67: Coefficients  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  pour déterminer la série C' à partir de la série C", classes de la moneyness et du temps à l'échéance de la base intraday.

	<b>2800</b>	<b>2950</b>	<b>3100</b>	<b>3250</b>	<b>4000</b>
<b><math>\alpha_1</math></b>	1,242917	0,865660	1,482443	1,526252	1,484299
<b><math>\beta_1</math></b>	-0,538807	-0,430788	-0,728063	-0,791705	-0,783967
<b>C0</b>	61,2	67	76	28	189,61

Tableau 68: Coefficients  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  pour déterminer la série C' à partir de la série C" ; ainsi que la valeur initiale de l'option C0 ; contrats de la base journalière.

On remarque que :

- Les valeurs de  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont, quasiment, les mêmes pour tous les contrats d'une même classe de la base intraday (classe 1 ou classe 9). Ce n'est pas le cas pour la base journalière, où les valeurs de  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  varient d'un contrat à un autre.
- Aussi bien pour la base intraday que la base journalière, la valeur initiale de l'option (de la première observation) varie d'un contrat à un autre.
- Autant les coefficients  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont les mêmes pour les différentes sous-classes d'une même classe, de moneyness et de temps à l'échéance, autant la valeur initiale de l'option est spécifique à chaque sous-classe.

Pour le modèle 1P1Q, la série C' calculée par le réseau de neurones et celle désirée sont représentées dans le graphique 93. Ces mêmes séries sont représentées dans le graphique 94, pour le modèle 2A2A.

La série C', calculée par le modèle 1P1Q, ne suit pas à la trace celle désirée. Son aspect « non linéaire » est moins prononcé que celui de la série désirée. Ceci est dû à la contrainte d'une bonne généralisation qui suppose que le phénomène de sur-apprentissage est évité.

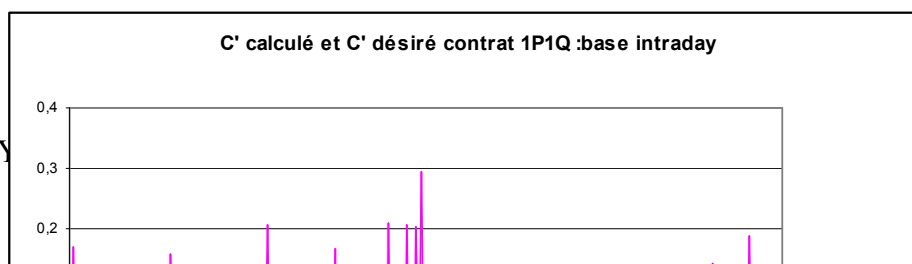




Figure 93 :La série « C' calculée » et la série « C' désirée » du modèle neuronal 1P1Q : base intraday ; Modèle-type 5.

Il est certain qu'en l'absence de cette contrainte, la série C', calculée par le réseau, peut approcher la série C' désirée avec autant de précision qu'on le souhaite, avec un réseau plus complexe, comportant un grand nombre de neurones.

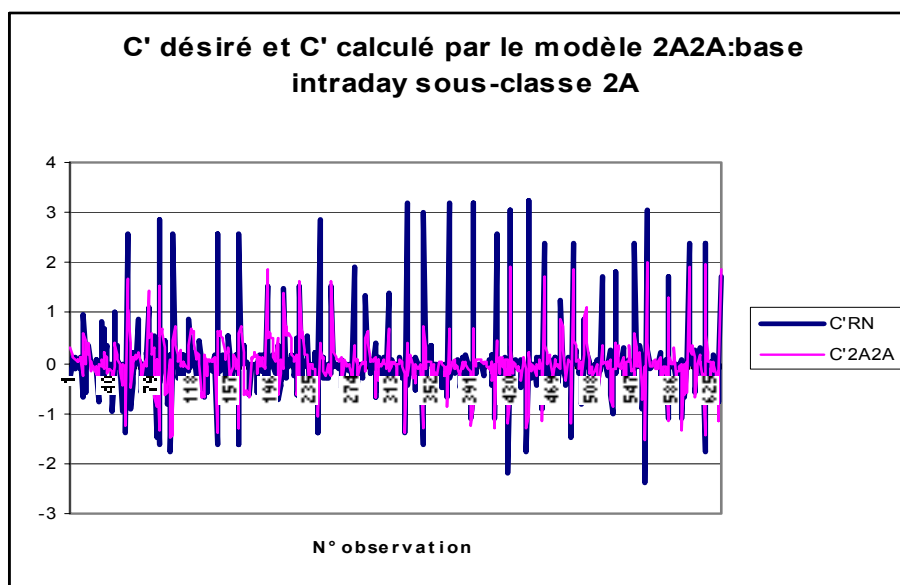


Figure 94: La séries « C' désirée » et la série « C' calculée », pour le modèle 2A2A de la classe de moneyness 2 de la base intraday ; modèle-type5.

Il est manifeste que le modèle 2A2A est plus complexe que le modèle 1P1Q. On remarque que pour le modèle 2A2A, la série calculée et la série désirée de  $C'$  sont, nettement, plus proche que dans le cas du modèle 1P1Q. En fait, la contrainte de généralisation est moins sévère pour le contrat 2A2A que pour le contrat 1P1Q, puisque pour le premier modèle les jeux d'apprentissage et de test sont plus homogènes que pour le second modèle.

#### 4.2.4.3 Calcul de la série C à partir de la série C'

##### 4.2.4.3.1 Détermination de la série C pour les contrats de la base intraday et la base journalière

Une fois la série  $C'_t$  est déterminée, à partir de la série  $C''_t$ , calculée par le réseau de neurones, la valeur de l'option  $C_t$  est déterminée, à partir de la série  $C'_t$ . En effet, pour un contrat, on avait :

$$C'_t = \text{Ln}\left(\frac{C_t}{C_{t-1}}\right) \quad \Rightarrow \quad C_t = C_{t-1} \exp(C'_t)$$

On peut calculer  $C_t$ , en considérant les équations :

$$C_i = C_{i-1} \exp(C'_i) \quad \text{avec} \quad (1 \leq i \leq t)$$

Le calcul de la série  $C_t$  peut se faire, étape par étape, ou bien en faisant des simplifications, au niveau des  $t$  équations. D'où l'équation résultante :

$$C_t = C_0 \exp\left(\sum_{i=1}^t C'_i\right)$$

##### 4.2.4.3.2 Détermination de la série C pour les classes de « Moneyness » et de temps à l'échéance les de la base intraday

Pour une classe de Moneyness et de temps à l'échéance, on ne considère pas la série valeur de l'option, mais plutôt la série rapport de la valeur de l'option au prix d'exercice. Ceci, parce que le contrat d'option diffère d'une observation à une autre. La série  $C'$  est, donc, la série dérivée du logarithme de la dernière série précitée. Soit :

$$C'_t = \text{Ln} \left( \frac{\frac{C_t}{E_t}}{\frac{C_{t-1}}{E_{t-1}}} \right) \Rightarrow \frac{C_t}{E_t} = \frac{C_{t-1}}{E_{t-1}} \exp(C'_t)$$

Contrairement, au fichier par contrat, ici il y'a une nouvelle source stochastique, à savoir la variation du prix d'exercice entre deux observations consécutives.

Ainsi, on détermine dans un premier temps  $C'_t$ , puis  $\frac{C_t}{E_t}$  par pas successifs ou

en simplifiant entre les  $t$  équations :  $\frac{C_i}{E_i} = \frac{C_{i-1}}{E_{i-1}} \exp(C'_i)$  avec  $(1 \leq i \leq t)$ .

Soit :

$$\frac{C_t}{E_t} = \frac{C_0}{E_0} \exp \left( \sum_{i=1}^t C'_i \right)$$

Enfin, on calcule la valeur de l'option  $C_t$ , en multipliant par  $E_t$ . Or, dans tous les cas, et pour toutes les classes, on a obtenu une amplification d'un bruit. En effet, si on considère le modèle 2A2A, bien que l'on ait des résultats, au niveau de l'output  $C''_t$  du réseau, qui semblent être bons.

La série  $C'$  est, tellement, différente de celle désirée par valeur supérieure (cf figure 95), que le cumul de la série  $C'$  donne des valeurs de l'option très grandes, dont on considère l'exponentielle, ce qui fait des valeurs, encore plus grandes, voire énormes.

Ce problème peut s'expliquer par la sensibilité du modèle par rapport à la volatilité. En effet, un écart absolu de 2% sur celle-ci, rend le modèle divergent, alors que, sans cet écart, le modèle est convergent.

D'un autre coté, en considérant la série rapport de la valeur de l'option au prix d'exercice, on introduit une nouvelle source d'aléas qui est le prix d'exercice, pour une observation donnée.

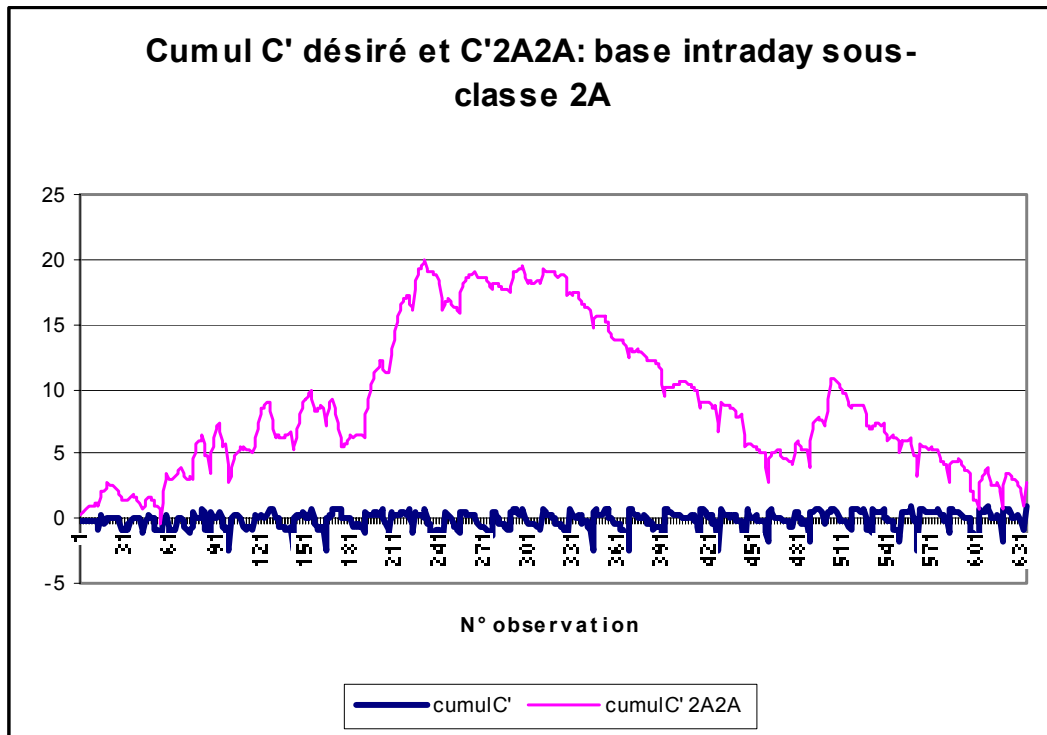


Figure 95 : La série cumul de C', calculée par le modèle neuronal, et la série cumul de C' relative au marché, qui montre la divergence du modèle neuronal.

Cette divergence de la valeur de l'option nous fait penser à la divergence rencontrée, lors du calcul avec l'algorithme de Hopscotch.

#### 4.2.5 Résultats de l'évaluation des options par les modèles neuronaux

##### 4.2.5.1 Résultats relatifs à la base intraday

Après avoir déterminé la valeur de l'option, suivant cette équation, pour l'ensemble des modèles, on choisit, pour chaque contrat de la base intraday, les résultats qui correspondent à la meilleure généralisation (soit le meilleur couple, de contrats d'apprentissage et de test, du point de vue des performances). Les courbes de la valeur de l'option calculée, par les différents modèles neuronaux correspondant au contrat 1P, comme contrat d'apprentissage, et par les modèles à volatilité stochastique, ainsi que de la valeur de l'option calculée par le modèle de Black & Scholes (en considérant une volatilité implicite

stochastique), sont représentées dans le graphique 96(A) et 96(B). De même, pour le contrat 9J, on a obtenu les graphiques 96(C) et 96(D).

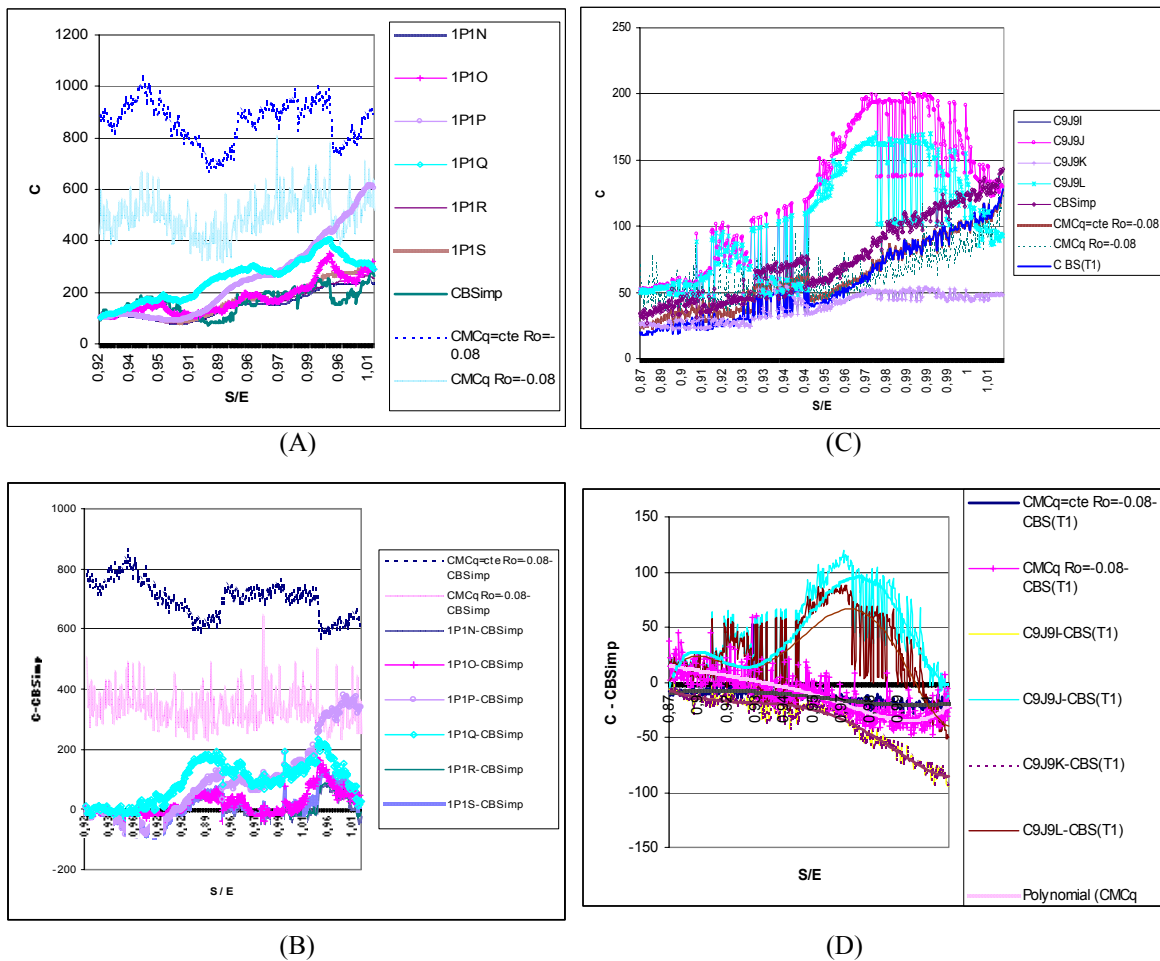


Figure 96 : Série de la valeur de l'option et sa différence avec la référence CBSimp calculée par les modèles neuronaux et les modèles à volatilité stochastique (simulation de Monte Carlo) et le modèle de Black & Scholes. (A) valeur de l'option en fonction de la moneyness où le contrat 1P sert pour l'apprentissage et les autres contrats (classe 1 de la base intraday), pour le test (B) différence de cette valeur de l'option avec la référence CBSimp en fonction de la moneyness. (C) valeur de l'option en fonction de la moneyness où le contrat 9J sert pour l'apprentissage et les autres contrats (classe 9 de la base intraday), pour le test (D) différence de cette valeur de l'option avec la référence CBSimp en fonction de la moneyness. On a utilisé un lissage polynomial d'ordre 5.

Le contrat 1P, présente une aberration, comme on l'a déjà vu dans la partie simulation de Monte Carlo. Pour ce contrat la moneyness est comprise entre 0,92 et 1,02 et le temps à l'échéance entre 0,25 et 0,52 années. A la lumière des résultats des graphiques 96(A) et 96(B), on remarque que :

- Les différents modèles neuronaux ne donnent pas les mêmes valeurs de l'option, puisque les différents contrats de test ne présentent pas la même contrainte de généralisation, au niveau de l'apprentissage.
- Les modèles 1P1N, 1P1O et 1P1S sont les plus proches de la référence CBSimp
- Les modèles à volatilité stochastique avec processus brownien et processus empirique de la volatilité donnent des valeurs de l'option, nettement, supérieures à celles données par les modèles neuronaux.
- Les modèles neuronaux captent la référence CBSimp avec une certaine erreur et du fait que les modèles à volatilité stochastique donnent des valeurs, nettement, supérieures à CBSimp, leurs résultats sont, nettement, différents de celles des modèles neuronaux.

Pour le contrat 9J, la moneyness est comprise entre 0,87 et 1,02 et le temps à l'échéance entre 0,12 et 0,25 années. A la lumière des résultats des graphiques 96(C) et 96(D), on remarque que :

- Les contrats 9J9J et 9J9L surévaluent la valeur de l'option, par rapport à la valeur désirée (de référence) CBSimp. A l'inverse, les contrats 9J9I et 9J9K sous-évaluent la valeur de l'option, par rapport à la référence CBSimp, tout comme les modèles à volatilité stochastique.
- Pour un contrat d'apprentissage donné, le fichier test joue un rôle capital dans la performance des réseaux de neurones et influence, fortement, les résultats des calculs. Les fichiers test ne représentent pas la même contrainte de généralisation, pour un contrat d'apprentissage donné.
- Bien que le temps à l'échéance évolue dans un intervalle de 0,12 à 0,25 années, c-à-d, avec une variation relative conséquente, on peut se permettre une comparaison avec les résultats théoriques de Heston (1993) concernant les modèles à volatilité stochastique. En se référant à un lissage polynomial d'ordre 5, les modèles neuronaux 9J9I et

9J9K donnent des courbes de différence de la valeur de l'option par rapport à la référence CBSimp, ayant le même profil que ceux de Heston pour les plages de moneyness et de temps à l'échéance étudiées.

A partir de la valeur de l'option calculée par le réseau de neurone, le calcul du coefficient de corrélation et de l'erreur quadratique moyenne, par rapport à la valeur de l'option de référence CBSimp, permet de déterminer, pour chaque contrat, le modèle qui donne la valeur de l'option la plus proche de celle du marché.

$\rho(RN(1i ; 1j) ; CBSimp)$	1N	1O	1P	1Q	1R	1S	CMCq=cte $\rho=-0.08$	CMC q $\rho=-0.08$
1N	<b>0,3152</b>	0,2215	0,1805	0,1561	0,1396	0,1805	0.9966	0.9738
1O	0,4668	<b>0,5297</b>	0,4140	0,3720	0,3498	0,3361	0.9889	0.9438
1P	0,6804	<b>0,6942</b>	0,5819	0,5586	0,5493	0,5566	0.6484	0.6652
1Q	<b>0,6352</b>	0,4960	0,4973	0,4336	0,4007	0,4207	0.9237	0.6363
1S	<b>0,6584</b>	0,4101	0,3681	0,3717	0,3673	0,3813	0.7525	0.2074
MSE(RN(1i ; 1j) ; CBSimp)	1N	1O	1P	1Q	1R	1S	CMCq=cte $\rho=-0.08$	CMC q $\rho=-0.08$
1N	194,070	30,221	32,428	96,931	<b>24,184</b>	194,070	38.844	27.818
1O	63,987	<b>54,780</b>	82,204	82,204	82,204	82,204	35.900	27.525
1P	<b>42,443</b>	44,286	152,999	110,261	44,178	48,849	738.885	372.555
1Q	41,240	97,234	<b>38,033</b>	66,015	66,015	50,984	31.580	26.185
1S	96,783	20,404	<b>14,119</b>	31,644	20,227	20,334	25.545	44.061

Tableau 69 : Coefficient de corrélation et écart quadratique moyen de la valeur de l'option calculée par le modèle (1i, 1j), par rapport à la référence CBSimp. contrats de la classe 1 de la base intraday. RN(1i ; 1j) valeur de l'option donnée par le modèle neuronal avec 1i Contrat apprentissage (ligne) et 1j Contrat de test (colonne).

On remarque que, contrairement, aux modèles à volatilité stochastique, la corrélation des valeurs de l'option données par les différents modèles neuronaux avec la référence n'est pas très élevée (cf tableau 69). A noter que la référence utilisée, dans le cas des modèles à volatilité stochastique, est plutôt CBS(T1), qui donnerait, dans le cas des modèles neuronaux, des coefficients de corrélation encore moins élevés. Le contrat 1P est celui qui donne des coefficients de corrélation supérieurs à 0,5 quel que soit le contrat test utilisé. Le modèle 1P1O donne un coefficient de corrélation plus élevé que celui des

modèles à volatilité stochastique pour le contrat 1P. A l'opposé le modèle 1O1O donne des coefficients de corrélations inférieurs à ceux des modèles à volatilité stochastiques, pour le contrat 1O.

En ce qui concerne l'erreur quadratique moyenne (MSE), elle devrait être proche de zéro. Les écarts avec la référence sont dus, essentiellement, à la contrainte de généralisation. La MSE se situe à un niveau, dans l'ensemble, dans un même ordre de grandeur, pour tous les modèles neuronaux. L'écart avec la référence CBSimp reste tout de même significatif. Pour le contrat 1P, le modèle 1P1N est le meilleur, du point de vue de l'erreur quadratique moyenne. Alors que le modèle 1P1O est le meilleur du point de vue de la corrélation avec CBSimp. Le maximum de corrélation ne correspond pas, généralement, au minimum de l'erreur quadratique. Il y'a un compromis à faire entre les deux critères. Les modèles à volatilité stochastique donnent des écarts quadratiques moyens du même ordre de grandeur que ceux des modèles neuronaux.

Pour la classe 9, les coefficients de corrélation et l'erreur quadratique moyenne, des différents modèles, sont donnés dans le tableau 70.

$\rho(\text{RN}(9_i,9_j),\text{CBSimp})$	<b>9I</b>	<b>9J</b>	<b>9K</b>	<b>9L</b>	CMCq=cte $\rho=-0.08$	CMC q $\rho=-0.08$
<b>9I</b>	0,6653	0,6554	0,6774	<b>0,6905</b>	0,9999	0,9961
<b>9J</b>	<b>0,8051</b>	0,4042	0,3604	0,3811	0,9997	0,9929
<b>9K</b>	<b>0,7401</b>	0,5056	0,4084	0,3518	0,9994	0,9880
<b>9L</b>	<b>0,8169</b>	0,4097	0,2939	0,2537	0,9991	0,9705
MSE(RN(9 <sub>i</sub> ,9 <sub>j</sub> ),CBSimp)	<b>9I</b>	<b>9J</b>	<b>9K</b>	<b>9L</b>	CMCq=cte $\rho=-0.08$	CMC q $\rho=-0.08$
<b>9I</b>	113,715	100,788	<b>83,748</b>	<b>83,748</b>	3.117	13.582
<b>9J</b>	<b>42,884</b>	58,758	<b>42,884</b>	44,344	4.608	16.693
<b>9K</b>	-	27,454	-	<b>24,015</b>	4.286	18.715
<b>9L</b>	<b>12,121</b>	33,638	33,638	26,199	3.298	21.520

Tableau 70: Coefficient de corrélation et écart quadratique moyen de la valeur de l'option calculée par le modèle (9<sub>i</sub>,9<sub>j</sub>), par rapport à la référence CBSimp. contrats de la classe 9 de la base intraday. RN(9<sub>i</sub> ;9<sub>j</sub>) valeur de l'option donnée par le modèle neuronal avec 9<sub>i</sub> Contrat apprentissage (ligne) et 9<sub>j</sub> Contrat de test (colonne).

Le niveau de corrélation pour cette classe se situe à un niveau supérieur à celui de la classe 1, mais à un niveau, nettement, inférieur à celui des modèles à volatilité stochastique, pour lesquels ce coefficient est très proche de l'unité.



L'erreur quadratique moyenne des modèles neuronaux est supérieure, dans l'ensemble, à ceux des modèles à volatilité stochastique.

Dans ce tableau, deux modèles sont absents qui sont les modèles 9K9I et 9K9K. Pour le modèle 9K9I, on trouve pour les dernières observations du fichier des valeurs de l'option qui divergent. Cette divergence est due à une accumulation d'erreurs. Pour le contrat 9K9K, on a sur les 10 000 itérations relatives à l'apprentissage, le correct test qui est supérieur au correct training ce qui constitue une anomalie.

#### **4.2.5.2 Résultats relatifs à la base journalière**

En ce qui concerne la base journalière, en considérant le contrat C4000, et le contrat C3250, on calcule la valeur de l'option par les modèles neuronaux C4000-C3250 et C3250-C4000. Les résultats de ces calculs sont illustrés dans le graphique 97.

A la lumière des résultats relatifs au contrat C4000 (graphiques 97(A), 97(B), et 97(C)), on remarque que :

- Pour ce contrat, le modèle neuronal correspond au modèle C4000-C3250 qui présente une erreur d'apprentissage de 11,2% une erreur de test de 20,48% un correct training de 43,14% et un correct test de 2,63%. Ces résultats sont médiocres.
- Alors que les modèles à volatilité stochastique, avec processus empirique et processus brownien de la volatilité donnent des valeurs de l'option proches de celles du marché, le modèle neuronal donne une courbe loin de cette valeur de référence C (figure 97(B)). Ceci est normal vu les performances médiocres précitées. Cette différence est encore plus manifeste sur le graphique 97(A), où la courbe de la valeur de l'option par le modèle neuronal en fonction de la moneyness présente une pente négative (lissage polynomial d'ordre 5), ce qui constitue une aberration pour un call. Cet écart, avec la valeur de référence C, est aussi clair sur le graphique 97(C), où le

modèle neuronal surévalue, fortement, la valeur de l'option, pour des parités inférieures à 0,99, et la sous-évalue, fortement, au-delà.

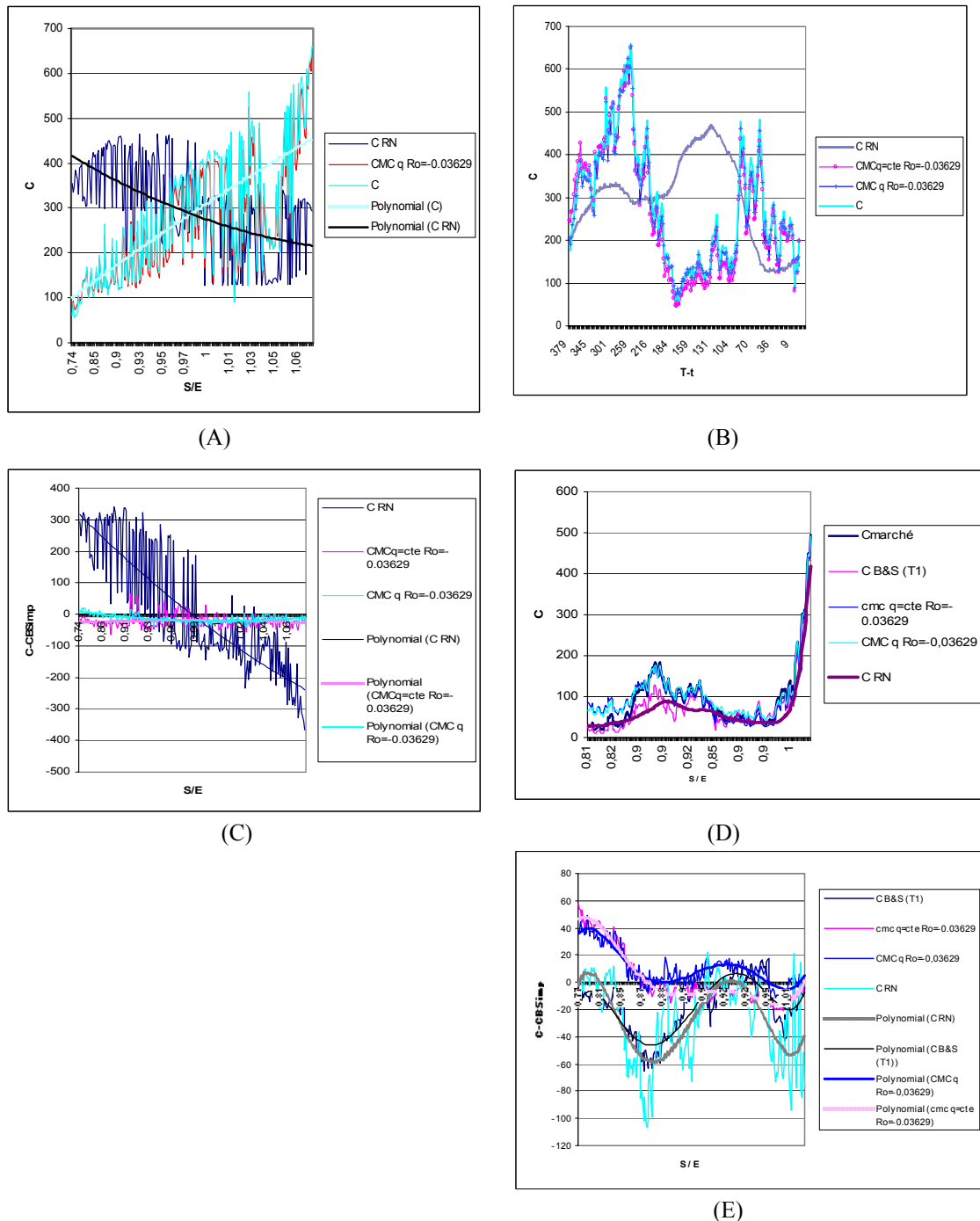


Figure 97 : Comparaison entre les modèles neuronaux et les modèles à volatilité stochastique.

- (A) valeur de l'option en fonction de la moneyness contrat C4000
- (B) valeur de l'option en fonction du temps à l'échéance contrat C4000
- (C) valeur de l'option diminuée de la valeur du marché en fonction de la moneyness Contrat C4000
- (D) valeur de l'option en fonction de la moneyness contrat C3250
- (E) valeur de l'option diminuée de la valeur du marché en fonction de la moneyness Contrat C3250

A la lumière des résultats relatifs au contrat C3250, illustrés dans les graphiques 97(D) et 97(E), on remarque que :

- Pour ce contrat, le modèle neuronal correspond au modèle C3250-C4000 qui présente une erreur d'apprentissage de 7,8% une erreur de test de 29,7% un correct training de 62,28% et un correct test de 7,35%. Ces résultats sont meilleurs que ceux du modèle C4000-C3250.
- Les modèles à volatilité stochastique sont, encore une fois, très proches de la valeur de l'option sur le marché C.
- Cette fois, la courbe de la valeur de l'option, donnée par le modèle neuronal, en fonction de la moneyness présente un profil normal pour un call (figure 97 D). On voit bien que la courbe de la valeur de l'option, calculée par le réseau de neurones, suit les tendances de la valeur de l'option désirée (valeur de marché), avec un degré de non-linéarité moindre. Ceci est logique si on considère une contrainte de bonne généralisation et si on veut éviter le sur-apprentissage.
- Le modèle neuronal sous-évalue la valeur de l'option, par rapport à la référence du marché C, plus fortement, que les modèles à volatilité stochastique.

On procède, maintenant, à la comparaison des performances des modèles neuronaux avec le modèle à volatilité stochastique avec processus empirique de la volatilité, sur l'ensemble des contrats choisis de la base intraday, en se référant aux critères de corrélation avec la référence et l'erreur quadratique moyenne. Le tableau 71 récapitule les résultats des calculs correspondants.

A la lumière des résultats de ce tableau, on peut faire les remarques suivantes :

- A part les contrats C3250 et C2800, les autres contrats présentent un coefficient de corrélation avec la référence CBS(T1) faible. On confirme même la pente négative de la valeur de l'option en fonction

de la moneyness, pour le contrat C4000, puisque le coefficient de corrélation avec la référence correspondant à ce modèle est négatif.

	C2800	C2950	C3100	C3250	C4000
$\rho(\text{RN,CBS(T1)})$	0,7691	-	0,5324	0,9448	-0,1219
$\rho(\text{CMC } q \rho=-0,03;\text{CBS(T1)})$	0,9921	0,9785	0,9685	0,9580	0,9563
Cmoy (RN)	210,761	-	116.671	76,004	248,431
Cmoy(CMC $q \rho=-0,03$ )	240.601	190.040	142.453	104.301	269.990
MSE(RN, CBS(T1))	106,019	-	84,623	25,744	181,761
MSE(CMC $q \rho=-0,03;\text{CBS(T1)})$	33.409	32.942	32.994	34.694	45.159
MSE(RN,CBS(T1))/Cmoy(RN)	50,30%	-	72,53%	33,87%	73,16%
(MSE/Cmoy)(CMC $q \rho=-0,03$ )	13 .89%	17.33%	23.16%	33.26%	16.73%

Tableau 71 : Ecart quadratique moyen entre la valeur de l'option calculée par le meilleur modèle Neuronal, pour un contrat d'apprentissage considéré et la valeur de l'option sur le marché : base journalière

- A l'exception, du contrat C3250, les coefficients de corrélation des modèles neuronaux avec la référence CBS(T1) sont nettement inférieurs à ceux relatifs aux modèles à volatilité stochastique.
- Les modèles neuronaux donnent en général des écarts quadratiques moyens supérieurs à ceux des modèles à volatilité stochastique, aussi bien en valeur absolue qu'en valeur rapportée à la valeur moyenne de l'option.
- Selon les critères de corrélation et de MSE, le modèle à volatilité stochastique donne les meilleures performances, au niveau du contrat C2800, alors que le modèle neuronal donne les meilleures performances pour le contrat C3250, au vu de ces mêmes critères.

### 4.3 CONCLUSION

Dans notre approche, nous avons considéré la technique de « cross validation », associée à l'algorithme « Cascade correlation ». On a considéré un découpage des bases (intraday et journalière) suivant des contrats ou suivant des classes de parité (moneyness) et de temps à l'échéance. On a considéré 6 modèle-types selon les inputs, selon qu'on considère la volatilité implicite ou la volatilité historique, de l'instant présent ou de l'instant passé, ou l'absence de volatilité.

L'output qui est la valeur de l'option est stationnarisé par dérivation, puis transformé pour appartenir à l'intervalle  $[0 ; 1]$  qui correspond à l'espace des valeurs de la fonction sigmoïde qui est la fonction d'activation du neurone de sortie.

Les critères qui définissent le modèle neuronal optimal sont, le maximum du pourcentage de bon classement aussi bien pour l'apprentissage que pour le test, avec un écart minimum entre les deux, le minimum d'erreur aussi bien pour l'apprentissage que pour le test, et, enfin, la minimalité de l'architecture du réseau (nombre minimum de neurones).

Les conclusions sont les suivantes :

- Les performances de l'apprentissage et du test témoignent que le modèle a capté une certaine logique du marché. La contrainte de bonne généralisation induite par la technique de « cross validation » dégrade les performances du réseau, en même temps qu'elle évite tout problème de sur-apprentissage.
- Dans la majorité des cas, on trouve un problème quasi-linéaire. Ceci dépend en fait de la parité de l'option (moneyness). Il est évident que le modèle ne serait pas le même pour une option « at the money » que pour une option « deep in the money » ou « deep out of the money » .
- Le modèle-type 5, qui correspond à la volatilité implicite de l'instant précédent donne les meilleures performances, selon les critères précités. Ceci est normal, dans la mesure, où en appliquant la formule de Black & Scholes, en considérant la volatilité implicite, on trouve la valeur du marché de l'option. Donc, il est normal que les performances du réseau, dans ce cas, seront meilleures.

Pour la base journalière, en utilisant le modèle-type 5, l'output du réseau est stationnarisé par dérivation de l'output lui-même ou par son logarithme. Il s'est avéré que la dérivation du logarithme donne des résultats pires que la dérivation

de la valeur de l'option elle-même. Les résultats relatifs à la base intraday sont meilleurs que ceux relatifs à la base journalière

Après avoir déterminé la meilleure architecture, relative à chaque modèle, c-à-d à chaque couple de jeu d'apprentissage et de test, on détermine les poids synaptiques correspondants et on calcule la valeur de l'option.

En comparant les tableaux 43 et 69, on s'aperçoit que, globalement, les modèles à volatilité stochastique (simulations de Monte Carlo) donnent des erreurs quadratiques moyennes plus faibles que celles du modèle neuronal. En tout cas, pour les contrats de la classe 9, c'est toujours le cas. A noter que, si la référence utilisée pour le modèle neuronal est le prix du marché de l'option, celle utilisée pour les modèles à volatilité stochastique est la valeur prédéfinie CBS(T1), qui est inférieure à la première référence.

En comparant également les tableaux 47 et 71, on s'aperçoit que le résultat précédent est aussi vrai, dans le cas, où on considère la base journalière.

Enfin, il est à noter que dans le cas des classes de parité (Moneyness) et de temps à l'échéance, étant donné que le prix d'exercice varie d'une observation à une autre, l'intégration de l'output du réseau a donné des valeurs, tellement grandes, que la valeur de l'option diverge. Ce même phénomène de divergence a été remarqué, au niveau du modèle neuronal, appliqué à un contrat, lorsqu'on a baissé la volatilité de 0,02 pour chaque observation de la série d'apprentissage. La valeur de l'option est très sensible aux variations de la volatilité.

Les modèles neuronaux ont donné des coefficients de corrélation, entre la valeur de l'option et la référence du marché C, qui sont faibles, comparés à ceux données par les modèles à volatilité stochastiques qui sont proches de l'unité.

On a remarque que ces coefficients de corrélation sont plus grands, dans le cas de la classe 9, que dans le cas de la classe 1 de la base intraday.

Au vu des critères de la corrélation avec la valeur de l'option de référence, de l'écart quadratique moyen et de son rapport avec la valeur moyenne de l'option, les modèles neuronaux ont donné des performances moins bonnes que les modèles à volatilité stochastique. Ceci est vrai, aussi bien pour un processus brownien qu'empirique de la volatilité implicite et aussi bien dans le cas de la base intraday que dans le cas de la base journalière.





## **CHAPITRE 5**

### **GESTION DYNAMIQUE DES RISQUES FINANCIERS PAR LES OPTIONS**

Dans le cadre d'une gestion dynamique des risques financiers, l'investisseur cherche à rendre son portefeuille de couverture insensible à l'influence de tous les aléas. Pour maintenir la valeur de son portefeuille inchangée à chaque instant, il doit disposer d'un modèle d'évaluation qui lui permet de mesurer, d'analyser et de gérer les risques associés à son portefeuille. Les opérateurs utilisent les marchés en temps réel pour mettre en œuvre des stratégies de gestion fondées sur des modèles d'évaluation d'option.

Le but du présent travail est de comparer les performances du modèle de Black & Scholes, des modèles neuronaux et des modèles à volatilité stochastique, au niveau de la couverture contre les risques liés au prix de l'actif sous-jacent et de la volatilité, en considérant des stratégies de couverture dynamiques et autofinancées. Ces stratégies sont Delta-neutre, Delta-Gamma neutre, Delta-Véga neutre et Delta-Gamma-Véga neutre. La comparaison de ces

performances se base, exclusivement, sur les données de la base intraday. A ce niveau deux questions se posent : Quel est, parmi les modèles utilisés, le meilleur modèle de couverture ? Quelle est la meilleure stratégie de couverture ?

Ce chapitre comporte deux sections. La première section constitue la partie théorique et la deuxième section constitue la partie empirique de ce chapitre.

Dans la première section, on commence par établir les formules des différentes sensibilités par rapport aux différents déterminants de l'option dans le cadre du modèle de Black & Scholes.

Puis, on présente les différentes stratégies dynamiques de couverture précitées. Enfin, sont exposés les différents algorithmes de calcul de l'erreur de couverture, correspondants à ces mêmes stratégies et basés sur l'approche de Coleman et al. (1999).

En fait, la couverture se fait par des options sur indice. L'indice n'est pas un actif négociable, alors que les stratégies de couverture le supposent. L'indice peut être assimilé à un tracker qui reproduit sa trajectoire et, donc, ses performances, tout en étant négociable.

Dans la deuxième section qui constitue la partie empirique, on présente, dans un premier temps, les traitements des données nécessaires avant de générer les résultats. On présente, dans un second temps, les résultats relatifs aux différents modèles étudiés, à savoir le modèle de Black & Scholes, le modèle neuronal et les modèles à volatilité stochastique. Ces résultats sont basés sur les données de la base intraday, en insistant, plus particulièrement, sur les contrats de la classe 9. En effet, les modèles à volatilité stochastique n'ont été appliqués qu'à ces contrats, en utilisant la simulation de Monte Carlo.

Les premiers résultats concernent le calcul des sensibilités de la valeur de l'option pour les différents contrats de la base intraday. Les autres résultats concernent les erreurs de couverture et les erreurs de couverture absolues moyennes relatives correspondantes à ces mêmes contrats.

Ma contribution, dans ce chapitre, se situe aussi bien dans la partie théorique que dans la partie empirique. Dans la partie théorique elle consiste, premièrement, à développer les calculs qui mènent aux formules des greeks relatifs au modèle de Black & Scholes, deuxièmement, à élaborer les différentes méthodes et formules de calcul des greeks pour les modèles neuronaux et les modèles à volatilité stochastique (Monte Carlo), troisièmement, à élaborer les formules de calcul des proportions d'un portefeuille de couverture en fonction des greeks, en soulignant les singularités et quatrièmement, à élaborer les formules de calcul de l'erreur de couverture et de la valeur de l'endettement, pour les différents modèles précités.

Dans la partie empirique, ma contribution se situe au niveau de la méthodologie pour estimer, à partir des valeurs d'options correspondantes, les greeks, l'endettement et les erreurs de couverture pour chacun des modèles étudiés. Ma contribution consiste, également, à implémenter tous les programmes de calcul et à Générer et interpréter les résultats relatifs à ce dernier chapitre.

## **5.1 SENSIBILITE ET GESTION DYNAMIQUE DES RISQUES FINANCIERS LIES A UN PORTEFEUILLE FINANCIER**

### **5.1.1 GREEKS**

Les greeks sont les sensibilités de la valeur d'une option, par rapport à ses déterminants. Les sensibilités sont, donc, mesurées par les dérivées partielles de la valeur de l'option, par rapport à ses déterminants.

Ces dérivées partielles se calculent par rapport à un modèle donné. Les formes analytiques de ces dérivées partielles ne peuvent être connues que lorsqu'on connaît la formule analytique qui lie la valeur de l'option à ses déterminants, comme c'est le cas du modèle de Black & Scholes.

Lorsque la fonction qui lie la valeur de l'option et ses déterminants n'est pas connue, les greeks sont déterminés, numériquement, sous forme de taux d'accroissement, déduit à partir des séries temporelles de la valeur de l'option et de ses déterminants. Ce mode de calcul des greeks a été utilisé, pour les modèles à volatilité stochastique et des modèles neuronaux.

Dans cette section, on établit les formes analytiques des greeks, dans le cadre du modèle de Black & Scholes.

Pour déterminer les différentes formules des sensibilités de la valeur d'une option (call ou put), par rapport à ses déterminants, suivant le modèle de Black & Scholes, il convient d'établir, tout d'abord, une formule fondamentale qui permet la simplification de ces formules. Cette formule qu'on cherche à établir constitue, donc, une base pour le calcul des greeks, suivant le modèle de Black & Scholes.

Partant de la formule de la quantité  $d_1$ , relative à l'équation de Black & Scholes, tel que :

$$d_1 = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Cette relation peut être écrite, sous la forme :

$$\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right) = -\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + d_1\sigma\sqrt{\tau}$$

Soit, en ajoutant aux deux membres de l'égalité, le terme  $-\frac{d_1^2}{2}$ , on aura :

$$\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right) - \frac{d_1^2}{2} = -r\tau - \frac{d_1^2 - 2d_1\sigma\sqrt{\tau} + \sigma^2\tau}{2}$$

soit, en réarrangeant le second membre, on peut écrire :

$$\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right) - \frac{d_1^2}{2} = -r\tau - \frac{(d_1 - \sigma\sqrt{\tau})^2}{2}$$

Comme l'on a :  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$ , on peut écrire :

$$\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right) - \frac{d_1^2}{2} = -r\tau - \frac{d_2^2}{2}$$

En appliquant la fonction exponentielle aux deux membres, puis, en multipliant par  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , l'équation devient :

$$\frac{S}{E} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} = e^{-r\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}}$$

Sachant que  $N'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2}}$  est la densité de la loi normale centrée et réduite, c-à-d la dérivée de sa fonction de répartition  $N(d)$ , on obtient, en définitive, la formule suivante :

$$SN'(d_1) = Ee^{-r\tau}N'(d_2)$$

Cette équation peut être mise, sous la forme :

$$SN'(d_1) - Ee^{-r\tau}N'(d_2) = 0 \quad (5.1.1-1)$$

### 5.1.1.1 Delta d'une option :

Le Delta mesure la sensibilité de la valeur de l'option à la variation du cours du sous-jacent. Il est, donc, la dérivée partielle première de la valeur de l'option, par rapport au cours du sous-jacent. C'est, donc, la pente de la courbe qui relie le prix de l'option au cours du sous-jacent. On peut écrire :

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} \quad \text{et} \quad \Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S}$$

Le Delta du call et celui du put, calculés, selon le modèle de Black & Scholes, sont représentés dans le graphique 98.

#### **5.1.1.1.1 Delta d'un call selon le modèle de Black & Scholes**

Selon, le modèle de Black & Scholes, le Delta d'une option d'achat se calcule comme suit :

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} \left[ SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2) \right]$$

En dérivant, par rapport au prix du sous-jacent, on obtient :

$$\Delta_C = N(d_1) + SN'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - Ee^{-r\tau}N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S}$$

Comme, on a :  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$ , en dérivant par rapport au prix du sous-jacent, on peut écrire :  $\frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}}$

En tenant compte de ces égalités dans l'équation précédente du Delta, cette équation devient :

$$\Delta_C = N(d_1) + \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} \left[ SN'(d_1) - Ee^{-r\tau}N'(d_2) \right]$$

En tenant compte de l'équation de base (5.1.1-1), l'expression définitive du Delta pour un call est, donc, :  $\Delta_C = N(d_1)$

Puisque le Delta d'un call est équivalent à une probabilité, il est compris entre zéro et l'unité :  $0 \leq \Delta_C \leq 1$

#### **5.1.1.1.2 Delta d'un Put selon le modèle de Black & Scholes**

Le Delta d'un put, selon le modèle de Black & Scholes, se déduit à partir de celui d'un call, par référence à la relation de parité call-put.

La relation de parité call-put (1.1.3-1), s'écrit :  $C - P = S - Ee^{-rt}$

En dérivant, cette équation, membre à membre, par rapport au prix du sous-

jacent, on peut écrire :  $\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial P}{\partial S} = 1$

Soit :  $\Delta_C - \Delta_P = 1$

Donc, le Delta d'un put est donné par la relation :  $\Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S} = \Delta_C - 1 = N(d_1) - 1$

Par conséquent, on a :  $-1 \leq \Delta_P \leq 0$

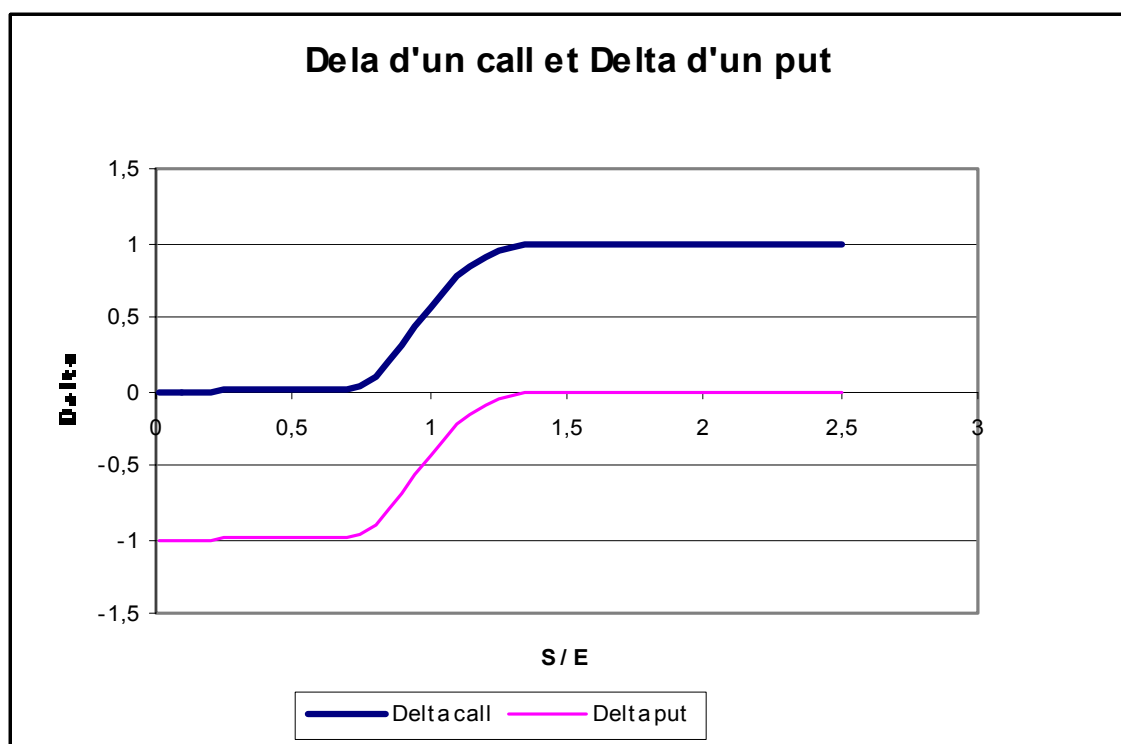


Figure 98 : Le Delta d'un call et d'un put européen, selon le modèle de Black & Scholes

### 5.1.1.2 Gamma d'une option:

Le Gamma est la sensibilité du delta par rapport au cours du sous-jacent. C'est, donc, la dérivée du Delta par rapport au sous-jacent par conséquent la dérivée seconde de la valeur de l'option, par rapport au cours du sous-jacent. Soit :

$$\Gamma_C = \frac{\partial \Delta_C}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \quad \text{pour un call, et}$$

$$\Gamma_P = \frac{\partial \Delta_P}{\partial S} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \quad \text{pour un put}$$

Le Gamma permet de mesurer la fréquence des ajustements nécessaires pour maintenir le Delta d'un portefeuille à un niveau désiré, en général égal à zéro. Comme la révision continue de la composition du portefeuille est trop coûteuse et, donc, en pratique impossible, il est nécessaire de fixer des seuils de révisions, au-delà desquels, une transaction est déclenchée qui ramène le Delta à son niveau souhaité. Les variations du Delta sont, d'autant plus faibles, que Gamma est petit. Ainsi, les ajustements nécessaires sont d'autant moins fréquents. La meilleure couverture s'obtient pour un delta nul et un Gamma aussi proche de zéro que possible. Le Gamma d'un call et le Gamma d'un put, selon Black & Scholes, sont représentés, dans le graphique 99. Les deux courbes sont confondues.

#### **5.1.1.2.1 Gamma d'un call selon le modèle de Black & Scholes**

Le Gamma d'un call ne peut être connu, sous une forme analytique, que lorsque la relation qui lie la valeur de l'option à ses déterminants est connue elle-même sous forme analytique, comme c'est le cas pour le modèle de Black & Scholes. Conformément à ce modèle, le Gamma d'un call peut s'écrire :

$$\Gamma_C = \frac{\partial \Delta_C}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} (N(d_1)) = N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$$

Selon le modèle de Black & Scholes le Gamma du call n'est autre que la fonction densité de probabilité du prix du sous-jacent qui suit une loi log-normale de moyenne  $\ln \left( E e^{-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau} \right)$  et d'écart type  $\sigma$ . Le terme de

l'exponentielle n'est autre que le drift du processus du logarithme de la valeur du sous-jacent à l'échéance.

#### **5.1.1.2.2 Gamma d'un Put selon le modèle de Black & Scholes**

Le Gamma d'un put, selon le modèle de Black & Scholes, s'écrit comme suit :



$$\Gamma_P = \frac{\partial \Delta_P}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} (N(d_1) - 1) = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}} = \Gamma_C$$

Ce qui est conforme à la relation de parité call-put qui donne le même résultat, en dérivant deux fois, par rapport au prix du sous-jacent, membre à membre. Ce résultat est, également, confirmé par le graphique 99.

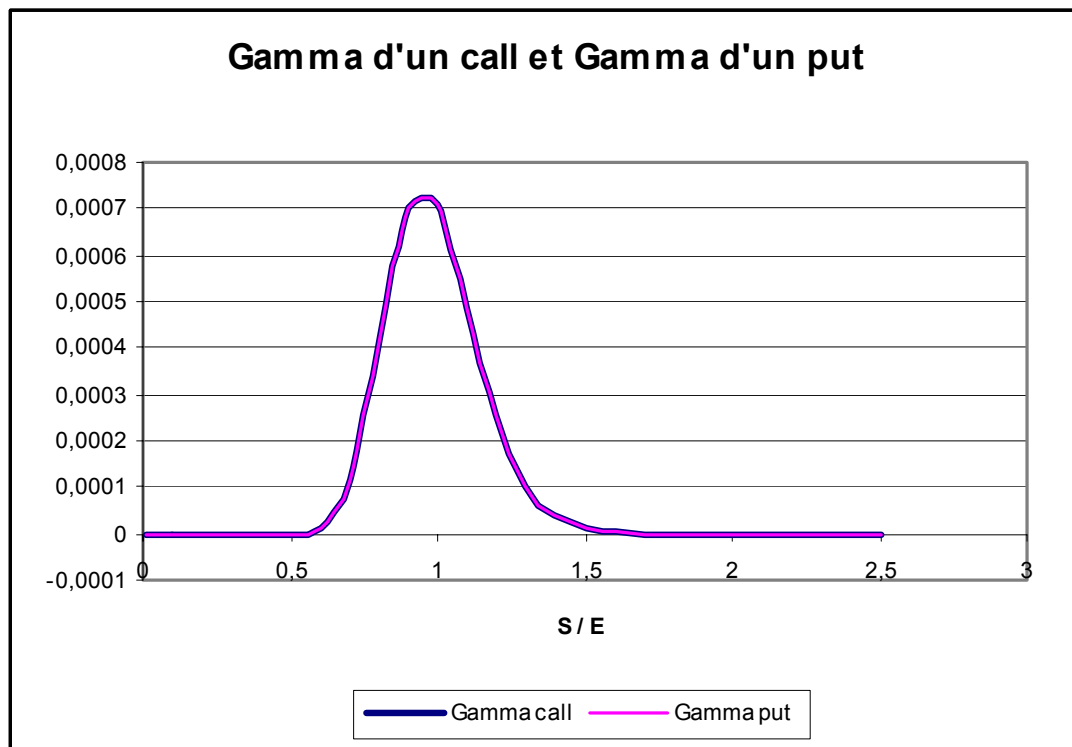


Figure 99 : Gamma d'un call et Gamma d'un put, selon le modèle de Black & Scholes.

Au même titre que le Gamma d'un call, le Gamma d'un put est, également, une fonction densité de probabilité du prix du sous-jacent, suivant la loi log-normale avec la même moyenne et le même écart-type.

### 5.1.1.3 Véga d'une option

Contrairement, à l'une des hypothèses du modèle de Black & Scholes, la volatilité du sous-jacent n'est pas constante, dans la pratique. Elle est même stochastique. En élaborant leurs stratégies, les opérateurs doivent tenir compte de cette source de risque, constituée par le caractère aléatoire de la volatilité future du sous-jacent.

Ainsi, la sensibilité de la valeur de l'option à un changement de la volatilité, désignée par la lettre Véga, présente, dans la pratique, un intérêt certain. Le Véga est la dérivée de la valeur de l'option, par rapport à la volatilité. Soit,

$$\Gamma_C = \frac{\partial C}{\partial \sigma} \text{ pour un call, et}$$

$$\Gamma_P = \frac{\partial P}{\partial \sigma} \text{ pour un put}$$

Le Véga du call et celui du put, selon Black & Scholes, sont représentés dans la figure 100. Les deux courbes correspondantes sont confondues.

### 5.1.1.3.1 Véga d'un call selon le modèle de Black & Scholes

Selon le modèle de Black & Scholes, on peut établir l'expression analytique du Véga pour un call. Soit :

$$\Lambda_C = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2) \right) = S \frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma} - Ee^{-r\tau} \frac{\partial N(d_2)}{\partial \sigma}$$

En calculant les dérivées par rapport à la volatilité, le Gamma du call s'écrit :

$$\Lambda_C = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = SN'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ee^{-r\tau}N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$$

Or, d'après la formule (2.1.6-4), on a :

$$d_1 = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Cette quantité peut se mettre sous la forme :

$$d_1 = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right) + r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$$

En posant  $A = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right) + r\tau}{\sqrt{\tau}}$ , la quantité  $d_1$  s'écrit, sous la forme :

$$d_1 = \frac{A}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$$

Par conséquent, la dérivée de  $d_1$ , par rapport à la volatilité, s'écrit :

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = -\frac{A}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\tau} = -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{A}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}\right) + \sqrt{\tau} = -\frac{d_1}{\sigma} + \sqrt{\tau}$$

D'un autre côté, on a  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$ . Ainsi, la dérivée de  $d_2$ , par rapport à la volatilité, s'écrit :

$$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{\tau} = -\frac{d_1}{\sigma} + \sqrt{\tau} - \sqrt{\tau} = -\frac{d_1}{\sigma}$$

L'expression du Véga devient, donc :

$$\Lambda_C = SN'(d_1)\left(-\frac{d_1}{\sigma} + \sqrt{\tau}\right) - Ee^{-r\tau}N'(d_2)\left(-\frac{d_1}{\sigma}\right)$$

En réarrangeant cette équation, il vient :

$$\Lambda_C = S\sqrt{\tau}N'(d_1) - \frac{d_1}{\sigma}\left[SN'(d_1) - Ee^{-r\tau}N'(d_2)\right]$$

Or, d'après la relation (5.1.1-1), on a  $SN'(d_1) - Ee^{-r\tau}N'(d_2) = 0$ . Par conséquent, le Véga d'un call selon le modèle de Black & Scholes s'écrit :

$$\Lambda_C = S\sqrt{\tau}N'(d_1)$$

### 5.1.1.3.2 Véga d'un Put selon le modèle de Black & Scholes

D'après la relation de parité call-put, l'équation (1.1.3-1), on a :

$$C - P = S - Ee^{-r\tau}$$

Soit, en dérivant, membre à membre, par rapport à la volatilité, on a :

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} - \frac{\partial P}{\partial \sigma} = 0$$

Ainsi, selon le modèle de Black & Scholes, le Véga du put s'écrit :

$$\Lambda_P = \Lambda_C = S\sqrt{\tau}N'(d_1)$$

Le Vége du put est égal au Vége du call, selon le modèle de Black & Scholes, comme le confirme la figure 100.

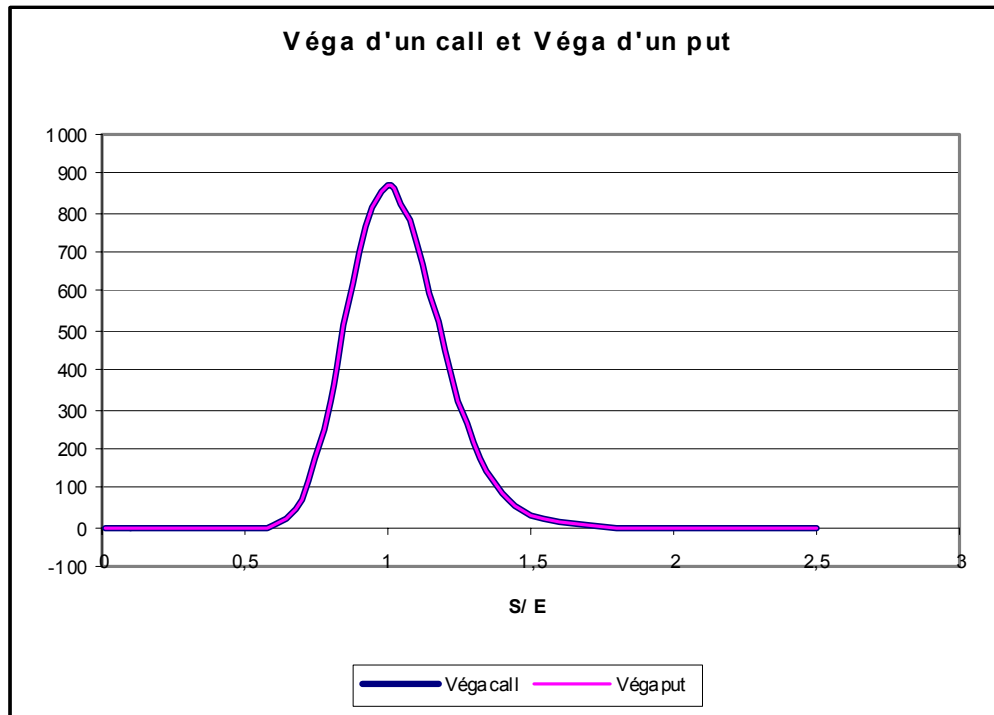


Figure 100 : Vége d'un call et d'un put européen, selon le modèle de Black & Scholes.

#### 5.1.1.4 Thêta d'une option

Le passage du temps est une autre source de la variation de la valeur d'une option. D'une manière générale (Sauf pour les puts européens « deep in the money »), les valeurs des options sont d'autant plus élevées que leurs échéances sont éloignées. La valeur d'une option diminue, en général, au fil du temps, toutes choses égales par ailleurs.

La sensibilité de la valeur d'une option au passage du temps est désignée par Thêta. Elle est donc la dérivée première de la valeur de l'option par rapport au temps. Soit :

$$\theta_C = \frac{\partial C}{\partial t} \text{ pour un call, et}$$

$$\theta_P = \frac{\partial P}{\partial t} \text{ pour un put}$$

Le Thêta d'un call et celui d'un put, selon le modèle de Black & Scholes, sont représentés, dans la figure 101.

#### 5.1.1.4.1 Thêta d'un call selon le modèle de Black & Scholes

Selon le modèle de Black & Scholes, on peut établir l'expression analytique du Thêta pour un call. Soit :

$$\Theta_C = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial \tau}$$

Soit, en remplaçant la valeur de l'option par son expression dans la formule de Black & Scholes, on obtient :

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2) \right)$$

Soit, en dérivant, par rapport à la durée de vie résiduelle  $\tau$ , on a :

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = SN'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \tau} + rEe^{-r\tau}N(d_2) - Ee^{-r\tau}N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \tau}$$

Or, la quantité  $d_1$ , relative à la formule de Black & Scholes, peut s'écrire, sous la forme :

$$d_1 = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\right)\sqrt{\tau}$$

En dérivant cette quantité, par rapport à la durée de vie résiduelle  $\tau$ , on a :

$$\frac{\partial d_1}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right)}{\sigma} \frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\right) \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

Soit, en réarrangeant cette expression, on obtient :

$$\frac{\partial d_1}{\partial \tau} = -\frac{1}{2\tau} \left[ \frac{\text{Ln}\left(\frac{S}{E}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\right)\sqrt{\tau} \right] + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\right) \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

Ce qui revient à écrire :

$$\frac{\partial d_1}{\partial \tau} = -\frac{d_1}{2\tau} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\right) \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

D'un autre côté, on a :  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$

En dérivant la quantité  $d_2$ , par rapport à la durée de vie résiduelle de l'option  $\tau$ , il vient :

$$\frac{\partial d_2}{\partial \tau} = \frac{\partial d_1}{\partial \tau} - \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\sigma = -\frac{d_1}{2\tau} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\tau}} - \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\sigma = -\frac{d_1}{2\tau} + \frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

En remplaçant les dérivées de  $d_1$  et  $d_2$ , par rapport à  $\tau$ , par leurs expressions, la dérivée de la valeur de l'option par rapport à  $\tau$ , s'écrit :

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = SN'(d_1)\left[-\frac{d_1}{2\tau} + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right] + rEe^{-r\tau}N(d_2) - Ee^{-r\tau}N'(d_2)\left[-\frac{d_1}{2\tau} + \frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]$$

En simplifiant, on obtient :

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{S\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{\tau}} + rEe^{-r\tau}N(d_2) + \left[SN'(d_1) - Ee^{-r\tau}N'(d_2)\right]\left(-\frac{d_1}{2\tau} + \frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

Or, d'après la relation de base (5.1.1-1), on a :  $SN'(d_1) - Ee^{-r\tau}N'(d_2) = 0$

D'où la formule définitive du Thêta de l'option d'achat, suivant le modèle de Black & Scholes, qui n'est autre que l'opposé de la dérivée de la valeur du call par rapport à la durée de vie résiduelle de l'option :

$$\Theta_C = -\frac{S\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{\tau}} - rEe^{-r\tau}N(d_2)$$

Le Thêta d'un call, calculé selon le modèle de Black & Scholes, est toujours négatif, ce qui se confirme sur le graphique 101.

#### 5.1.1.4.2 Thêta d'un Put selon le modèle de Black & Scholes

La relation de parité call-put (équation (1.1.3-1)) s'écrit :  $C - P = S - Ee^{-r\tau}$

En dérivant, par rapport au temps, on peut écrire :

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} - \frac{\partial P}{\partial \tau} = -rEe^{-r\tau}$$

Ce qui revient à écrire :  $\Theta_P = \Theta_C + rEe^{-r\tau}$

D'où l'expression analytique du Thêta d'un put, selon le modèle de Black & Scholes :

$$\Theta_P = -\frac{S\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{\tau}} + rEe^{-r\tau}(1 - N(d_2))$$

Le Thêta d'un put est parfois positif parfois négatif, comme c'est illustré dans la figure 101.

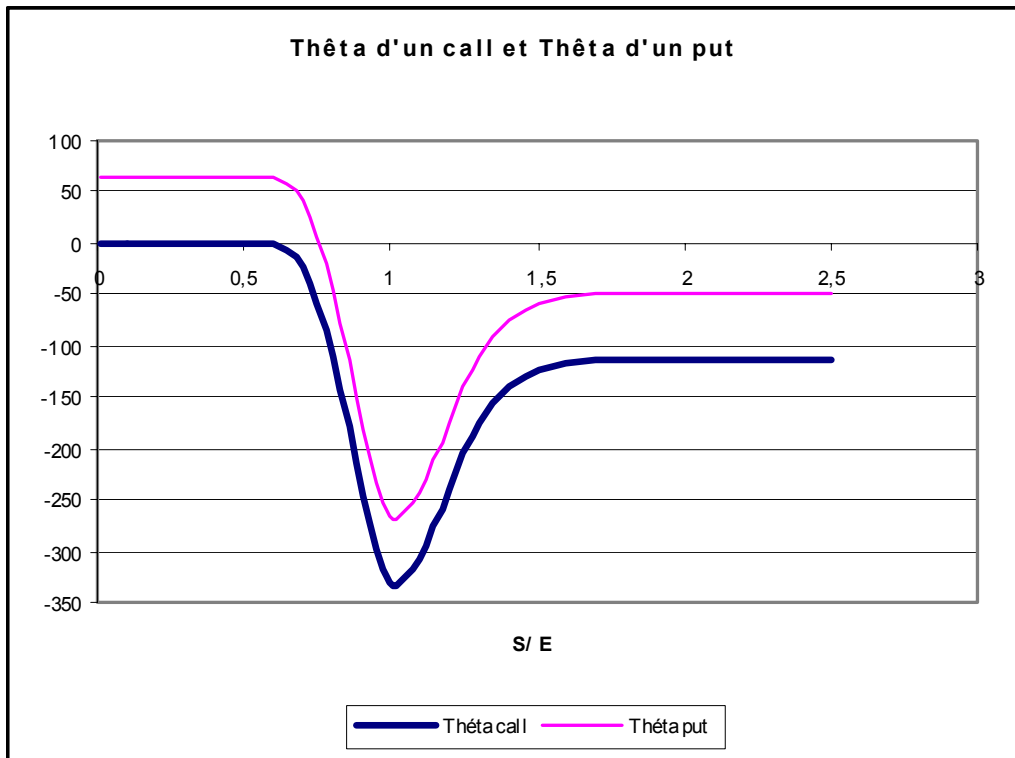


Figure 101 :Thêta d'un call et d'un put européen, selon le modèle de Black & Scholes

Le thêta d'un put s'annule, pour une valeur de la parité (« moneyness »),

égale à :

$$\frac{S}{E} = \frac{2r}{\sigma} \sqrt{\tau} e^{-r\tau} \left( \frac{1 - N(d_2)}{N'(d_1)} \right)$$

### 5.1.1.5 Rho d'une option

Le rho mesure l'influence d'une variation du taux d'intérêt  $r$  sur la valeur d'une option (bien que formellement, comme dans le cas de la volatilité,  $r$  soit supposé constant dans le modèle de Black & Scholes). Cette sensibilité n'est pas très importante. Elle est souvent négligée dans la pratique.

La valeur du call augmente et celle du put diminue quand le niveau du taux d'intérêt  $r$  augmente.

Le Rho est, donc, la dérivée première de la valeur de l'option, par rapport au taux d'intérêt  $r$  :

$$\rho_C = \frac{\partial C}{\partial r} \text{ pour un call, et}$$

$$\rho_P = \frac{\partial P}{\partial r} \text{ pour un put}$$

Le Rho d'un call et celui d'un put, selon le modèle de Black & Scholes, sont représentés, dans la figure 102.

#### **5.1.1.5.1 Rho d'un call selon le modèle de Black & Scholes**

Selon le modèle de Black & Scholes, le Rho peut être déterminé, comme suit :

$$\rho_C = \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2) \right)$$

En dérivant, par rapport au taux d'intérêt  $r$ , on obtient :

$$\rho_C = \frac{\partial C}{\partial r} = SN'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} + \tau Ee^{-r\tau}N(d_2) - Ee^{-r\tau}N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r}$$

Or, on a :  $\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{\partial d_2}{\partial r} = \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}$

On peut, donc, écrire :

$$\rho_C = \tau Ee^{-r\tau}N(d_2) + \left( SN'(d_1) - Ee^{-r\tau}N'(d_2) \right) \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}$$

Or, d'après la relation (5.1.1-1), on a :  $SN'(d_1) - Ee^{-r\tau}N'(d_2) = 0$

Ainsi, en simplifiant l'équation précédente, on obtient l'expression analytique du Rho d'un call, selon le modèle de Black & Scholes :

$$\rho_C = \tau Ee^{-r\tau}N(d_2) > 0$$

Le Rho d'un call est, donc, toujours positif, comme c'est illustré dans la figure 102.



### 5.1.1.5.2 Rho d'un Put selon le modèle de Black & Scholes

D'après la relation de parité call-put (1.1.3-1), on a :  $C - P = S - Ee^{-r\tau}$

En dérivant cette équation, membre à membre, par rapport au taux d'intérêt  $r$ , on obtient :

$$\frac{\partial C}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} = \tau E e^{-r\tau}$$

Ce qui revient à écrire :  $\rho_P = \rho_C - \tau E e^{-r\tau}$

D'où l'expression définitive du Rho d'un put, selon le modèle de Black & Scholes :  $\rho_P = \tau E e^{-r\tau} (N(d_2) - 1) < 0$

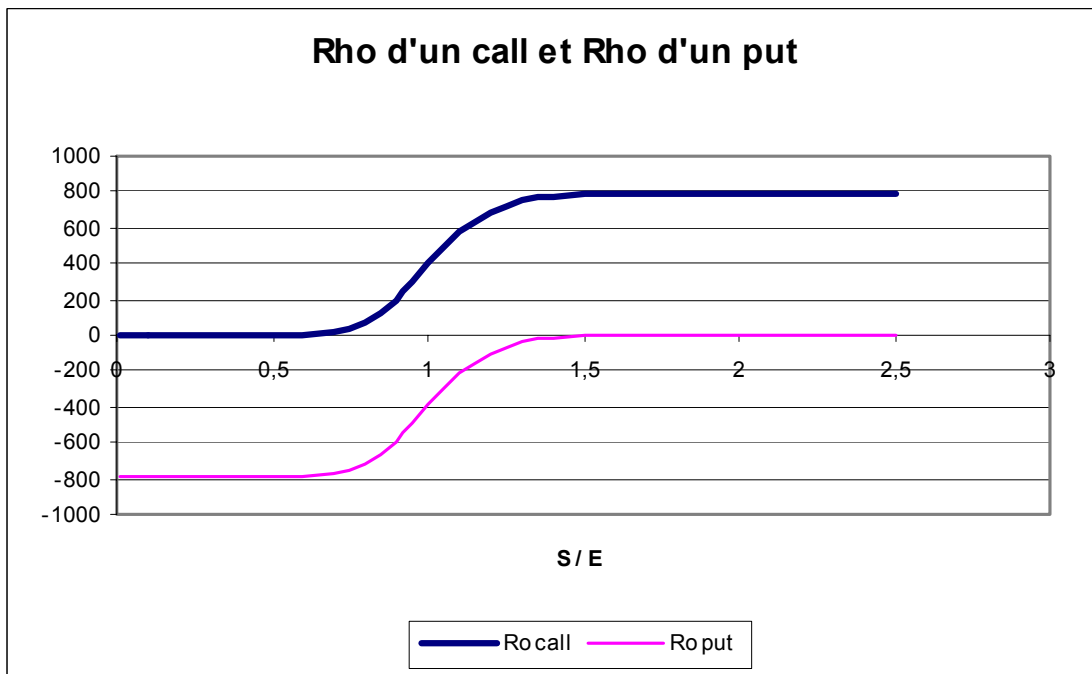


Figure 102 : Rho d'un Call et celui d'un put, selon le modèle de Black & Scholes.

### 5.1.1.6 Relation entre Delta, Gamma et Thêta d'une option

Selon le modèle de Black & Scholes, l'équation différentielle (2.1.3-6) que doit vérifier le prix d'une option, fonction d'une seule variable d'état, qui n'est autre que le prix de l'actif sous-jacent (ne payant pas de dividendes), est :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC$$

Soit en remplaçant les dérivées, par les greeks correspondants, on obtient :

$$\Theta_C + rS\Delta_C + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\Gamma_C = rC$$

Dans le cas d'une stratégie Delta-neutre, l'équation devient :

$$\Theta_C + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\Gamma_C = rC$$

Dans le cas d'une stratégie Delta –Gamma- neutre, l'équation s'écrit :

$$\Theta_C = rC = \frac{\partial C}{\partial t}$$

Dans ce cas, le portefeuille de couverture se comporte, comme un actif sans risque, qui n'est sensible qu'à l'écoulement du temps, en tout cas il est insensible à la variation du prix du sous-jacent S et à la variation de sa variation.

D'après les propriétés de la linéarité de l'opérateur dérivée, ces équations sont valables pour un portefeuille de produits financiers.

#### 5.1.1.7 Greeks d'un portefeuille de produits financiers

On considère un portefeuille constitué de n produits financiers, qui peuvent être, entre autres, des options, dans des proportions  $(x_i ; 1 \leq i \leq n)$  comprises entre zéro et l'unité. On désigne par G un « Greek » qui peut être aussi bien le Delta, le Gamma, le Véga, le thêta, ou le Ro. Compte tenu de la linéarité de l'opérateur dérivée, quelque soit le greek à considérer, quelque soit le type des n produits financiers, le Greek du portefeuille  $G_p$  s'écrit comme combinaison linéaire des Greeks  $(G_i ; 1 \leq i \leq n)$  des produits financiers le composant. Soit :

$$G_p = \sum_{i=1}^n x_i G_i$$

### 5.1.2 GESTION DYNAMIQUE DES RISQUES FINANCIERS

Le recours aux opérations de couverture dynamique est impératif, pour tout investisseur détenant une position, aussi bien courte que longue, sur une option. La couverture permet de rendre un portefeuille insensible par rapport aux variations des déterminants des valeurs des options le constituant. Cette couverture peut s'étaler sur un horizon  $[0 ; \tau]$ , inclus dans la vie de toutes les options composant le portefeuille.



Etant donné les coûts engendrés par les transactions sur les titres du portefeuille, la couverture de celui-ci ne peut être instantanée. Elle consiste, ainsi, en des ajustements périodiques suivant des fréquences à définir par l'investisseur. Elle est basée sur des stratégies selon le paramètre dont on cherche à rendre le portefeuille insensible à ses variations. La stratégie peut être, aussi bien, statique que dynamique.

Pour une stratégie dynamique, un portefeuille autofinancé (self-financed) est un portefeuille, tel que pendant la durée de couverture  $\tau$ , aucun versement ni retrait intermédiaires, sont effectués. Autrement dit, les produits de vente d'un actif servent à couvrir les achats d'un autre actif, du même portefeuille. Par exemple, une position courte dans une option d'achat est couverte par une position longue dans l'actif sous-jacent.

Dans le cadre de la présente étude, on s'intéresse, essentiellement, aux stratégies dynamiques avec des portefeuilles autofinancés. Les stratégies à considérer sont :

- Stratégie Delta-neutre
- Stratégie Delta et Gamma neutre
- Stratégie Delta et Véga- neutre

- Stratégie Delta Gamma et Véga-neutre

### **5.1.2.1 Les stratégies de couverture dynamiques :**

Plusieurs stratégies s'offrent à l'investisseur, institutionnel ou particulier, qui détient un portefeuille constitué d'options et de l'actif sous-jacent.

La plus simple et la plus connue est la stratégie statique. Celle-ci consiste à prendre une position donnée et attendre le résultat à la fin de la période de couverture. Donc, quel que soit le motif suivi par l'opérateur (couverture, spéculation, arbitrage), cette stratégie dépend étroitement de l'horizon que ce dernier s'est fixé. Ainsi, dans le cadre d'une stratégie de couverture statique, l'investisseur ne procède pas à des révisions de la composition de son portefeuille, entre le début et la fin de la période de gestion, au fur et mesure que les cours boursiers changent. Ce qui l'importe est, seulement, la valeur du portefeuille à l'échéance.

Ce type de couverture ne représente qu'une protection partielle puisqu'elle suppose que le ratio de couverture (Delta) reste constant durant l'horizon de couverture. Or, ce dernier a tendance à changer en fonction des mouvements, que se soient, à la hausse ou à la baisse du marché.

L'alternative consiste, donc, à procéder à une révision continue du portefeuille global. Il s'agit bien de la stratégie de couverture dynamique. La nécessité de recourir à cette stratégie provient de la non-linéarité de la valeur réelle des options et, donc, du besoin de recalculer le ratio de couverture en fonction de l'évolution des cours boursiers.

À l'encontre de la stratégie statique, l'investisseur suivant une stratégie dynamique, s'intéresse à la valeur de son portefeuille, à chaque instant. Pour maintenir cette dernière inchangée, quels que soient les risques subis,

l'investisseur doit gérer en permanence l'ensemble de son portefeuille. En fait, il recourt aux stratégies dynamiques de couverture sophistiquées, précitées.

#### ***5.1.2.1.1 La stratégie delta-neutre :***

L'objectif de la couverture en Delta est de rendre le portefeuille insensible aux variations des cours du sous-jacent, c'est à dire de faire en sorte que le Delta du portefeuille soit nul. On dit, alors, que le portefeuille est Delta-neutre. Il devient, donc, nécessaire de procéder à des ajustements permanents de la structure du portefeuille conformément au ratio de couverture Delta.

Le Delta donne le nombre d'unités de l'actif support ou le nombre d'options à acheter ou à vendre pour réaliser une couverture sans risque.

Se couvrir contre le risque de variation du cours du sous-jacent, c'est à dire rendre le portefeuille (combinaison d'actions et d'options) immunisé contre de petites variations des cours, exige de prendre une position soit dans l'actif sous-jacent soit dans le contrat d'option. Ainsi, l'achat (la vente) d'une option d'achat est couvert(e) par la vente (l'achat) du titre sous-jacent, et l'achat (la vente) d'une option de vente est couvert(e) par l'achat (la vente) du titre support, et vice versa. L'investisseur se trouve, donc, dans une position en Delta-neutre. Cependant, la position de l'investisseur reste couverte en Delta pour, uniquement, une période de temps, relativement, courte. Ceci parce que le Delta varie au gré de l'évolution du cours de l'actif sous-jacent, de la volatilité, du temps et du taux d'intérêt.

En pratique, lorsque la couverture en Delta est mise en œuvre, celle-ci doit être ajustée de façon permanente pour tenir compte de l'évolution du Delta au cours du temps. Cette opération connue sous le nom de réajustement dynamique engendre des coûts de couverture énormes, ce qui rend la révision continue de la composition du portefeuille requise par cette stratégie, matériellement,

impossible. La minimisation du Gamma du portefeuille vise à pallier cet inconvénient.

Un autre problème, inhérent à la couverture Delta-neutre, tient au fait que cette stratégie de couverture ne tient pas compte du risque, lié aux variations de la volatilité du sous-jacent. Même si le portefeuille est Delta-neutre, il n'est pas, pour autant, à l'abri de tous les risques, essentiellement, celui induit par les variations de la volatilité. La minimisation du Véga du portefeuille vise à limiter ce risque.

#### ***5.1.2.1.2 La stratégie gamma-neutre :***

Étant donné les difficultés d'ordres pratiques et économiques (coûts) quant au réajustement dynamique du portefeuille, les praticiens se fixent des seuils de révision. Une transaction n'est alors déclenchée qu'à l'instant où la valeur Delta du portefeuille s'écarte suffisamment de zéro, c'est à dire atteint le seuil de révision. En d'autres termes, l'opérateur n'a pas besoin de procéder à une révision systématique de la structure de son portefeuille pour chaque variation du cours du support. Il ne raisonne plus, en terme de Delta-neutre, mais en terme de Delta qui s'approche de zéro réduisant ainsi la fréquence de révision du portefeuille et minimisant, par conséquent, les coûts de couverture.

Le coefficient Gamma permet d'apprécier, avec précision, la fréquence des réajustements nécessaires pour maintenir le Delta, suffisamment, proche de zéro. La nécessité de revoir la structure du portefeuille est, d'autant plus faible, que le Gamma est nul ou proche de zéro, puisque le Delta varie d'autant moins que le Gamma est petit. Réaliser un portefeuille Gamma neutre peut être considéré comme une première correction pour la couverture en Delta, vu l'impossibilité d'un réajustement continu du portefeuille.

Si la neutralisation du Delta protège le portefeuille, contre de petites variations de prix, la neutralisation du Gamma le protège contre les grandes variations du

prix de l'actif sous-jacent. En effet, si le titre sous-jacent présente une forte volatilité, il sera nécessaire de procéder à des réajustements fréquents, puisque, dans ce cas, le Delta est fortement sensible au prix du titre support. La meilleure couverture possible s'obtient avec un Delta nul et un Gamma proche de zéro.

Pour rendre un portefeuille gamma neutre, l'investisseur a besoin d'une nouvelle position dans une option négociable (option additionnelle). Si  $\Gamma$  est le gamma du portefeuille et  $\Gamma_0$  le gamma d'une option négociable, la position dans l'option négociable qui rend le portefeuille gamma neutre est  $-\Gamma / \Gamma_0$ . Ce résultat sera démontré dans le paragraphe (§5.1.2.2.3), équation (5.1.2-11).

Bien évidemment, l'inclusion de telle option dans le portefeuille aura des répercussions sur le Delta de ce dernier puisque l'option intégrée a son propre Delta, d'où la nécessité de réajuster les positions, en vue de rétablir la neutralité de Delta du portefeuille. A mesure que le temps passe, la neutralité de Gamma peut être maintenue, seulement si, la position dans l'option négociable est ajustée de sorte qu'elle soit toujours égale à  $-\Gamma / \Gamma_0$ . Une telle stratégie est appelée Delta-Gamma neutre.

### ***5.1.2.1.3 La stratégie Véga neutre***

L'investisseur redoutant le risque est amené à se couvrir contre toute incertitude menaçant la valeur de son portefeuille. Il cherche, par conséquent, à rendre son portefeuille insensible à l'influence des variations du cours de l'actif sous-jacent. De plus, et contrairement à l'hypothèse de Black & Scholes (1973), la volatilité du titre support n'est guère constante et l'investisseur doit, donc, tenir compte du risque dû aux variations de cette volatilité dans la mise en oeuvre de sa stratégie de couverture.

L'intensité de ce dernier risque peut être mesurée par le coefficient Véga. Un portefeuille, dont le Véga est maintenu, constamment, égal à zéro, par des

transactions appropriées est, en principe, insensible à des variations de la volatilité.

Comme dans le cas de la stratégie Gamma-neutre, pour rendre le portefeuille immunisé contre les changements dans la volatilité du cours de l'actif sous-jacent, l'investisseur prend une nouvelle position  $-v / v_0$ , dans une option négociable, où  $v$  et  $v_0$  sont, respectivement, les Végas du portefeuille et de l'option négociable. Ce résultat sera démontré dans le paragraphe § 5.1.2.2-4, équation (5.1.2-13). Cette position doit être réajustée, continuellement, pour maintenir le portefeuille Véga-neutre. De même, la structure du portefeuille doit être réajustée, tout en tenant compte de l'addition de la nouvelle option, pour garder la neutralité du Delta du portefeuille. Telle stratégie est appelée Delta-Véga neutre. Elle répond à un souci de couverture maximale.

#### ***5.1.2.1.4 La stratégie Delta-Gamma-Véga neutre***

Si un investisseur exige un portefeuille, simultanément, gamma-neutre et véga-neutre, il doit utiliser au moins deux options négociables portant sur le même actif sous-jacent pour réaliser cette stratégie de couverture.

Il est important de signaler que dans le cadre d'une gestion dynamique du portefeuille, les coefficients Delta, Gamma et Véga sont gérés, de manière plus ou moins conservatrice, selon l'importance relative de la couverture.

La stratégie Delta-Gamma-Véga neutre peut être qualifiée de couverture pure. C'est la stratégie idéale pour l'investisseur puisqu'elle lui permet de neutraliser tous les risques auxquels son portefeuille est exposé, le taux d'intérêt à court terme étant supposé constant.

Les stratégies impliquant un Delta-neutre mais pas nécessairement Gamma et/ou Véga neutre sont qualifiées de couvertures partielles puisqu'elles comprennent une composante spéculative.



### **5.1.2.2 Détermination de l'erreur de couverture d'un portefeuille financier avec des stratégies dynamiques**

Pour déterminer l'erreur de couverture d'un portefeuille financier par les 4 stratégies dynamiques précitées, il va falloir, dans un premier temps, définir la méthode de calcul des greeks.

Si pour le modèle de Black & Scholes, les greeks sont calculés avec exactitude, à partir de leurs formules analytiques, établies dans le paragraphe §5.1.1, pour les modèles neuronaux et les modèles à volatilité stochastique (avec simulation de Monte Carlo), on fait appel à des approximations des greeks via des formules numériques.

Dans un second temps, il va falloir établir les formules de calcul de l'erreur de couverture de chacune des stratégies dynamiques précitées, en se basant sur l'approche de Coleman(1999).

Ces méthodes de calcul seront utilisées pour générer les résultats de partie empirique, relative à ce chapitre.

#### ***5.1.2.2.1 Calcul du Delta, Gamma et Véga d'une option***

Les stratégies dynamiques ont pour objectif de réagir aux variations de la valeur du sous-jacent, de la volatilité et du temps, dans l'hypothèse où le taux d'intérêt à court terme est constant.

Dans la mesure, où on cherche à comparer les performances de couverture du modèle de Black & Scholes, du modèle neuronal et du modèle à volatilité stochastique avec simulation de Monte Carlo, en considérant les stratégies dynamiques de couverture, il va falloir donner, dans un premier temps, les formules de calcul du Delta, du Gamma et du Véga d'une option d'achat, relatifs à chacun de ces trois modèles.

A chaque date de réajustement  $t_i$ , ces formules permettent le calcul du ratio de couverture  $\Delta_C(t_i)$ , du Gamma  $\Gamma_C(t_i)$  et du Véga  $\vartheta_C(t_i)$  de l'option sur l'indice sous-jacent  $I(t_i)$ . Ces greeks permettent à leur tour de déterminer la composition du portefeuille autofinancé de couverture, à chaque date de réajustement  $t_i$ , et par conséquent, l'endettement et l'évolution de l'erreur de couverture, au fil du temps.

Etant donné, que les données sont agrégées par jour, en considérant les valeurs moyennes journalières de la valeur de l'option et de ses déterminants, les greeks peuvent être calculés en considérant leurs valeurs moyennes journalières, ou en appliquant leurs formules de calcul aux valeurs moyennes journalières des déterminants de la valeur de l'option. Ceci est valable, quels que soient les modèles considérés.

#### **5.1.2.2.1.1 Calcul des greeks selon le modèle de Black & Scholes :**

Pour une observation donnée, les valeurs de Delta, Gamma et Véga pour une option d'achat de type européenne, sont calculées suivant les formules suivantes:

$$\text{- Delta d'un call} \quad : \Delta_C(t_i) = N(d_{1,t_i}) \quad (5.1.2-1)$$

$$\text{- Gamma d'un call} \quad : \Gamma_C(t_i) = \frac{N'(d_{1,t_i})}{I(t_i)\sigma(t_i)\sqrt{T-t_i}} \quad (5.1.2-2)$$

$$\text{- Véga d'un call} \quad : \vartheta_C(t_i) = I(t_i)\sqrt{T-t_i}N'(d_{1,t_i}) \quad (5.1.2-3)$$

$$\text{avec } d_{1,t_i} = \frac{\ln\left(\frac{I(t_i)}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2(t_i)}{2}\right)(T-t_i)}{\sigma(t_i)\sqrt{T-t_i}}$$

#### **5.1.2.2.1.2 Calcul des greeks selon les modèles neuronaux**

Pour le modèle neuronale, les greeks peuvent être déterminés, un par un, selon une méthode A, ou simultanément, selon une méthode B. La méthode A, suppose avant le calcul du greek, un tri suivant la variable par rapport à laquelle

on dérive. Pour cette méthode A, on néglige les variations des autres variables autres que la variable par rapport à laquelle on dérive. De ce fait, la méthode B, donne, vraisemblablement, des résultats plus précis que celui de la méthode A.

**Méthode A**

Pour cette méthode les calculs du Delta, du Gamma et du Véga se font, comme suit :

\* Delta : Après un tri, suivant la valeur de l'indice I(t), on détermine la série :

$$\Delta_C(t_i) = \frac{C(t_i) - C(t_{i-1})}{I(t_i) - I(t_{i-1})} \quad (5.1.2-4)$$

Dans ce cas, parfois on peut tomber sur une valeur calculée du ratio de couverture, supérieure à 1 ou inférieure à -1. Ceci est dû, notamment, au fait que la valeur de l'option est une fonction non monotone de la valeur du sous-jacent (puisqu'elle présente des oscillations).

\* Gamma: Après un tri, suivant la valeur de l'indice I(t), on détermine la série de Gamma suivant la formule suivante :

$$\Gamma_C(t_i) = \frac{\Delta(t_i) - \Delta(t_{i-1})}{I(t_i) - I(t_{i-1})} \quad (5.1.2-5)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\Gamma_C(t_i) = \frac{C(t_i) - 2C(t_{i-1}) + C(t_{i-2})}{(I(t_i) - I(t_{i-1}))^2}$$

\* Véga: Après un tri sur la volatilité, on détermine la série du Véga de l'option suivant la formule suivante :

$$\vartheta_C(t_i) = \frac{C(t_i) - C(t_{i-1})}{\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})} \quad (5.1.2-6)$$

**Méthode B**

En fait, les formules empiriques précitées, relatives à la méthode A, ne donnent que des approximations grossières des valeurs du Delta, Gamma et du Véga. En effet, entre deux instants consécutifs, la variation de la valeur de l'option dC est

due aux variations du prix du sous-jacent  $dI$ , de la volatilité  $d\sigma$  et du temps  $dt$ .

On peut, donc, écrire :

$$dC = \frac{\partial C}{\partial I} dI + \frac{\partial C}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial C}{\partial t} dt$$

Ce qui est équivalent à écrire :

$$dC = \Delta_C dI + \vartheta_C d\sigma + \Theta_C dt$$

Si on suppose que ces Greeks ne changent pas, entre les instants  $t_{i-3}$ ,  $t_{i-2}$ ,  $t_{i-1}$  et  $t_i$ , on peut écrire le système (à trois équations et trois inconnues) suivant :

$$\delta C(t_i) = \Delta_C(t_i) \delta I(t_i) + \vartheta_C(t_i) \delta \sigma(t_i) + \Theta_C(t_i) \delta t(t_i)$$

$$\delta C(t_{i-1}) = \Delta_C(t_i) \delta I(t_{i-1}) + \vartheta_C(t_i) \delta \sigma(t_{i-1}) + \Theta_C(t_i) \delta t(t_{i-1})$$

$$\delta C(t_{i-2}) = \Delta_C(t_i) \delta I(t_{i-2}) + \vartheta_C(t_i) \delta \sigma(t_{i-2}) + \Theta_C(t_i) \delta t(t_{i-2})$$

En négligeant l'effet du temps sur la valeur de l'option, entre deux observations consécutives, le système se simplifie à un système à deux équations à deux inconnues. Soit :

$$\delta C(t_i) = \Delta_C(t_i) \delta I(t_i) + \vartheta_C(t_i) \delta \sigma(t_i)$$

$$\delta C(t_{i-1}) = \Delta_C \delta I(t_{i-1}) + \vartheta_C(t_i) \delta \sigma(t_{i-1})$$

Si le déterminant de ce système est non nul, soit :

$$\delta I(t_i) \delta \sigma(t_{i-1}) - \delta I(t_{i-1}) \delta \sigma(t_i) \neq 0,$$

alors, le système est un système de Cramer qui admet la solution unique suivante :

$$\Delta_C(t_i) = \frac{\delta C(t_i) \delta \sigma(t_{i-1}) - \delta C(t_{i-1}) \delta \sigma(t_i)}{\delta I(t_i) \delta \sigma(t_{i-1}) - \delta I(t_{i-1}) \delta \sigma(t_i)}$$

$$\vartheta_C(t_i) = \frac{\delta C(t_{i-1}) \delta I(t_i) - \delta C(t_i) \delta I(t_{i-1})}{\delta I(t_i) \delta \sigma(t_{i-1}) - \delta I(t_{i-1}) \delta \sigma(t_i)}$$

avec

$$\delta C(t_i) = C(t_i) - C(t_{i-1})$$

$$\delta I(t_i) = I(t_i) - I(t_{i-1})$$

$$\delta \sigma(t_i) = \sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})$$

Le Gamma de l'option s'obtient par la formule empirique suivante :

$$\Gamma_C(t_i) = \frac{\Delta(t_i) - \Delta(t_{i-1})}{I(t_i) - I(t_{i-1})}$$

On peut penser à une troisième méthode, qui consiste à calculer les Greeks, en déterminant les valeurs de l'option pour de légères variations d'une variable, avec une constance de toutes les autres variables. Seulement, cette méthode ne s'applique pas à un réseau de neurones qui a déjà fait son apprentissage. Une légère variation d'une variable et, donc, d'un input, suppose de recommencer l'apprentissage du réseau sur ces nouvelles données, ce qui nécessite une procédure de calcul de la valeur de l'option assez longue et assez consommatrice en temps CPU. De plus, la sensibilité du modèle aux variations de la volatilité, fait diverger le modèle, dès que la série temporelle de cette dernière variable s'écarte de sa série utilisée au cours de l'apprentissage.

#### ***5.1.2.2.1.3 Calcul des Greeks selon le modèle à volatilité stochastique (Simulation de Monte Carlo)***

Si pour un réseau de neurones, les calculs permettent de déterminer un modèle d'évaluation d'une option, défini par ses poids synaptiques, dans le cas de la simulation de Monte Carlo, la valeur de l'option est déterminée, en se basant sur un modèle paramétrique, en l'occurrence le modèle à volatilité stochastique. Par conséquent, dans ce cas, les valeurs des Greeks peuvent être calculées, après le calcul de la valeur de l'option pour des valeurs supérieures et/ou inférieures d'un déterminant de l'option, en considérant les autres déterminants constants.

Dans la présente étude, on calcule les valeurs de l'option :  $C(I, \sigma)$  ;  $C(I - \Delta I, \sigma)$  ;  $C(I + \Delta I, \sigma)$  et  $C(I, \sigma - \Delta \sigma)$ , par simulation de Monte Carlo, pour un temps donné et pour les mêmes valeurs aléatoires, générées suivant une loi normale centrée réduite. ( $\Delta I$  et  $\Delta \sigma$  étant des petites variations du prix du sous-jacent  $I$  et de la volatilité  $\sigma$ .)

Ces calculs sont très consommateurs en temps CPU. Il serait commode de calculer, uniquement, le Delta à droite ou le Delta à gauche, pour gagner du temps CPU. Mais il serait plus précis de considérer la moyenne de ces deux quantités précitées. Ainsi, à chaque date de réajustement, les greeks relatifs aux modèles à volatilité stochastique (avec simulation de Monte Carlo), se calculent, comme suit :

\* Le Delta:

- On calcule d'abord le Delta à droite :

$$\Delta_C^+(t_i) = \frac{C(I(t_i) + \Delta I; \sigma(t_i)) - C(I(t_i); \sigma(t_i))}{\Delta I}$$

- Puis on calcule le Delta à gauche :

$$\Delta_C^-(t_i) = \frac{C(I(t_i); \sigma(t_i)) - C(I(t_i) - \Delta I; \sigma(t_i))}{\Delta I}$$

- Enfin le Delta se calcule, comme moyenne du delta à droite et du delta à gauche :

$$\Delta_C(t_i) = \frac{\Delta_C^+(t_i) + \Delta_C^-(t_i)}{2} \quad (5.1.2-7)$$

\* Le Gamma se calcule, comme la variation du Delta, rapporté aux variations de la valeur de l'indice. Soit la différence entre le Delta à droite et le Delta à gauche, rapportée à la variation de la valeur du sous-jacent :

$$\Gamma_C(t_i) = \frac{\Delta_C^+(t_i) - \Delta_C^-(t_i)}{\Delta I} \quad (5.1.2-8)$$

\* Le Véga se calcule comme suit :

$$\vartheta_C(t_i) = \frac{C(I(t_i); \sigma(t_i)) - C(I(t_i); \sigma(t_i) - \Delta \sigma)}{\Delta \sigma} \quad (5.1.2-9)$$

### 5.1.2.2.2 *Calcul de l'erreur de couverture dans le cas de la stratégie Delta-neutre*

On considère le portefeuille constitué par la vente d'une option d'achat et l'achat simultané de Delta unités de l'actif sous-jacent, soit une position courte dans une option d'achat couverte par une position longue dans le sous-jacent.

Si le portefeuille est autofinancé, l'achat des unités du sous-jacent est, entièrement financé, par la vente de l'option d'achat et un emprunt. Ainsi, la valeur initiale du portefeuille couvert, au début de l'horizon de couverture, est nulle.

Si on désigne par :

$\Pi(t)$  : la valeur du portefeuille à l'instant  $t$

$C(t)$  : la valeur du call à l'instant  $t$

$I(t)$  : la valeur de l'indice à l'instant  $t$

$\Delta_C(t) = \left[ \frac{\partial C}{\partial I} \right]_t$  : le ratio de couverture du call considéré

$B(t)$  : la valeur de l'emprunt en unités monétaires relatif à l'instant  $t$

La valeur du portefeuille, à l'instant  $t=0$ , est :

$$\Pi(0) = C(0) + \Delta_C(0)I(0) + B(0) = 0$$

Comme cette valeur est nulle, on peut déduire la valeur de l'obligation, à l'instant  $t=0$ . Soit:  $B(0) = -(C(0) + \Delta_C(0)I(0))$

On entreprend la stratégie d'ajustement dynamique dans l'indice sous-jacent et l'obligation, pour couvrir cette option d'achat, durant l'horizon de couverture. Autrement dit, les proportions du sous-jacent et de l'obligation sont ajustées, de façon dynamique, selon l'évolution de la valeur du sous-jacent, en considérant une certaine fréquence de réajustement.

Nous supposons que le réajustement du portefeuille prend place à des instants  $t_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) comprises dans l'intervalle de couverture et séparées par des intervalles de temps  $\delta t$  qui peuvent être de l'ordre de l'heure, du jour, de la semaine ou du mois.

A chaque instant  $t$ , appartenant à la période de couverture,  $0 \leq t \leq \tau$ , la valeur du portefeuille est :

$$\Pi(t) = C(t) + \Delta_C(t)I(t) + B(t)$$

Etant donné que ce portefeuille est autofinancé, on devrait avoir:

$$\Pi(t) = 0 \quad \forall t ; 0 \leq t \leq \tau$$

#### 5.1.2.2.2.1 Calcul de la valeur de l'obligation à l'instant $t_i$

Le portefeuille de couverture, à l'instant  $t_{i-1}$ , est constitué d'une option, de  $\Delta(t_{i-1})$  unités du sous-jacent et d'une unité de l'obligation. Soit :

$$\Pi(t_{i-1}) = C(t_{i-1}) + \Delta_C(t_{i-1})I(t_{i-1}) + B(t_{i-1}) = 0$$

A l'instant  $t_i$ , les proportions restent les mêmes, alors que la valeur de l'option devient  $C(t_i)$ , la valeur du sous-jacent devient  $I(t_i)$  et la dette ou l'emprunt (obligation) devient  $e^{r\delta t}B(t_{i-1})$ . Ainsi, la valeur du portefeuille de couverture devient :

$$\Pi'(t_i) = C(t_i) + \Delta_C(t_{i-1})I(t_i) + e^{r\delta t}B(t_{i-1}) \quad \text{avec } \delta t = t_i - t_{i-1}$$

Etant donné que le portefeuille est autofinancé, il faut que sa valeur soit ramenée à 0, en jouant sur les proportions de l'option, du sous-jacent et de l'obligation. En fait, la valeur du portefeuille doit être ramenée à :

$$\Pi(t_i) = C(t_i) + \Delta_C(t_i)I(t_i) + B(t_i) = 0$$

Ainsi, la somme concernant la vente (respectivement l'achat) du sous-jacent va compenser l'achat (respectivement la vente) de l'obligation. On a, donc :

$$B(t_i) - e^{r\delta t}B(t_{i-1}) = -(\Delta_C(t_i) - \Delta_C(t_{i-1}))I(t_i)$$



D'où la formule qui détermine l'endettement, à chaque instant  $t_i$  de la période de couverture :

$$B(t_i) = e^{r\delta t} B(t_{i-1}) - (\Delta_C(t_i) - \Delta_C(t_{i-1}))I(t_i)$$

#### 5.1.2.2.2 Calcul de l'erreur de couverture à l'instant $t_i$

A chaque instant  $t_i$ , l'erreur de couverture correspond à la valeur du portefeuille, à la fin de l'intervalle de temps  $\delta t$ . Elle est, donc, égale à :

$$\Pi(t_i) = C(t_i) + \Delta_C(t_i)I(t_i) + B(t_i)$$

Selon l'argument d'arbitrage de Black & Scholes (1973), si on suit cette stratégie de couverture dynamique, alors à l'expiration, la valeur combinée des positions dans l'indice sous-jacent et dans l'obligation doit être, exactement, égale, à la valeur de l'option d'achat. Autrement dit, la position courte dans le call est couverte par une position longue dans un call, crée, synthétiquement, par l'action et l'obligation, suivant le principe de duplication.

Ainsi, la différence entre la valeur finale du call et la valeur combinée des positions dans le sous-jacent et dans l'obligation constitue l'erreur de couverture. Soit :

$$\Pi(\tau) = C(\tau) + \Delta_C(\tau)I(\tau) + B(\tau) \text{ avec } \tau = t_N$$

L'erreur de couverture est, donc, définie comme la valeur absolue du portefeuille à la fin de l'horizon de couverture du call soit  $\varepsilon = |\Pi(\tau)|$ .

L'erreur de couverture absolue moyenne relative peut être définie, comme la valeur absolue du portefeuille, à la fin de la période de couverture, divisée par le nombre de réajustements  $N$  et par le prix initial du call. Soit :

$$\varepsilon_{MR} = \frac{|\Pi(\tau)|}{NC(0)} \quad (5.1.2-10)$$

Cette erreur est dite, d'une part, absolue, puisqu'on considère la valeur absolue de l'erreur finale (en fin de période de couverture), et d'autre part, relative, puisqu'elle est rapportée à la valeur initiale de l'option.

### **5.1.2.2.3 Stratégie Delta-Gamma neutre :**

Afin de rendre un portefeuille Gamma-neutre en plus la couverture Delta-neutre, on a besoin d'une nouvelle position, dans un autre call  $C_1$ . Ainsi, le portefeuille est constitué de deux options, le sous-jacent et une obligation. Soit :

$$\Pi(t) = C(t) + x(t)I(t) + y(t)C_1(t) + B(t)$$

où :

$\Pi(t)$  est la valeur du portefeuille à l'instant  $t$

$C(t)$  est la valeur du call , à couvrir, à l'instant  $t$

$I(t)$  est la valeur de l'indice à l'instant  $t$

$C_1(t)$  est la valeur du call additionnel

$B(t)$  est la valeur de l'emprunt en unités monétaires relatif à l'instant  $t$

$x(t)$  et  $y(t)$  sont, respectivement, les proportions dans l'actif sous-jacent et l'option additionnelle.

L'inclusion de cette seconde option d'achat induit un changement du Delta du portefeuille de couverture, ce qui exige que la position, prise dans l'action, soit réajustée, pour préserver un portefeuille Delta neutre. De même, la neutralité en Gamma ne peut être maintenue que si la position prise dans l'option d'achat additionnelle soit ajustée.

#### **5.1.2.2.3.1 Calcul des proportions $x(t)$ et $y(t)$ dans le cas de la stratégie Delta-Gamma neutre**

Les proportions  $x(t)$  et  $y(t)$  sont choisies de manière à ce que le portefeuille soit à la fois Delta-neutre et Gamma-neutre. Elles sont solutions du système suivant :

$$\text{- Delta -neutre} \Rightarrow \Delta_C(t) + x(t) + y(t)\Delta_{C_1}(t) = 0$$

$$\Rightarrow x(t) + y(t)\Delta_{C_1}(t) = -\Delta_C(t)$$

$$\begin{aligned}
 - \text{Gamma-neutre} &\Rightarrow \Gamma_C(t) + y(t)\Gamma_{C_1}(t) = 0 \\
 &\Rightarrow y(t)\Gamma_{C_1}(t) = -\Gamma_C(t)
 \end{aligned}$$

où  $\Delta_C(t)$  et  $\Gamma_C(t)$  représentent respectivement, le Delta et le Gamma de l'option d'achat C, alors que,  $\Delta_{C_1}(t)$  et  $\Gamma_{C_1}(t)$  représentent, respectivement, le Delta et le Gamma de l'option d'achat  $C_1(t)$ .

Dans la mesure où le Gamma de l'option additionnelle est non nul ( $\Gamma_{C_1}(t) \neq 0$ ), le système est un système de Cramer. Il admet, donc, une solution unique qui est:

$$y(t) = -\frac{\Gamma_C(t)}{\Gamma_{C_1}(t)} \quad (5.1.2-11)$$

et

$$x(t) = -\Delta_C(t) + \frac{\Gamma_C(t)}{\Gamma_{C_1}(t)}\Delta_{C_1}(t) \quad (5.1.2-12)$$

Comme, les proportions sont des fonctions des Deltas et des Gammas des options C et C1, leurs formules de calcul vont dépendre du modèle de couverture considéré, qui peut être, soit le modèle de Black & Scholes, soit le modèle neuronal, soit le modèle à volatilité stochastique.

**Cas1** : Calcul des proportions du portefeuille par le modèle de Black & Scholes, dans le cas d'une stratégie Delta-Gamma neutre

Si on remplace les Deltas et les Gammas des options C et  $C_1$  par leurs expressions, relatives au modèle de Black & Scholes (équations (5.1.2-1) et (5.1.2-2)), dans les équations de  $x(t)$  et  $y(t)$ , on obtient :

$$y(t) = -\frac{N'(d_1) \sqrt{T_1 - t}}{N'(d_1^1) \sqrt{T - t}}$$

et

$$x(t) = -N(d_1) + \frac{N'(d_1) \sqrt{T_1 - t}}{N'(d_1^1) \sqrt{T - t}} N(d_1^1)$$

Pour un même sous-jacent, et un même taux d'intérêt, les quantités  $d_1$  et  $d_1^1$ , relatives, respectivement, aux options  $C$  et  $C_1$ , sont différentes si et seulement si, les prix d'exercices ou les durées de vie résiduelles des deux options sont différents. Autrement dit, l'option  $C_1$  doit être différente de l'option  $C$ , par le prix d'exercice  $E$ , et/ou la date d'échéance  $T_1$  sinon on aura :

$$x(t)=0 \quad \text{et} \quad y(t)=-1$$

En effet, si  $E_1=E$  et  $T_1=T$ , on a, alors :

$$d_1^1 = d_1 \Rightarrow N(d_1^1) = N(d_1) \Rightarrow N'(d_1^1) = N'(d_1)$$

$$\text{et } C_1(t) = C(t) \quad \forall t$$

Ce qui implique, dans ce cas, que  $x(t)=0$  et  $y(t) = -1$  et que le portefeuille n'est autre qu'une obligation, et ne correspond en rien à un portefeuille de couverture. Il s'agit, bien entendu, d'une singularité.

En définitive, l'option de base et l'option additionnelle doivent se différencier, par la date d'échéance et/ou le prix d'exercice.

**Cas2** : Calcul des proportions du portefeuille de couverture, par les modèles neuronaux, dans le cas d'une stratégie Delta-Gamma neutre

Si on remplace les Deltas et les Gammas des options  $C$  et  $C_1$  par leurs expressions, relatives aux modèles neuronaux (équations (5.1.2-4) et (5.1.2-5)), dans les équations des proportions du portefeuille de couverture  $x(t)$  et  $y(t)$ , on obtient :

$$y(t) = -\frac{\Delta_C(t) - \Delta_C(t-1)}{\Delta_{C_1}(t) - \Delta_{C_1}(t-1)} = -\frac{C(t) - 2C(t-1) + C(t-2)}{C_1(t) - 2C_1(t-1) + C_1(t-2)}$$

$$x(t) = \frac{\Delta_{C_1}(t)(\Delta_C(t) - \Delta_C(t-1)) - \Delta_C(t)(\Delta_{C_1}(t) - \Delta_{C_1}(t-1))}{\Delta_{C_1}(t) - \Delta_{C_1}(t-1)}$$

**Cas3** : Calcul des proportions du portefeuille de couverture, par les modèles à volatilité stochastique, avec simulation de Monte Carlo, dans le cas d'une stratégie Delta-Gamma neutre.

Les Deltas et les Gammas des options C et C<sub>1</sub>, relatifs aux modèles à volatilité stochastique sont calculés, suivant les équations (5.1.2-7) et (5.1.2-8), puis remplacés, dans les équations (5.1.2-11) et (5.1.2-12), afin de déterminer, à chaque observation t, la proportion du portefeuille dans le sous-jacent x(t) et celle dans l'option additionnelle y(t).

#### **5.1.2.2.3.2 Calcul de la valeur de l'obligation à l'instant t<sub>i</sub> dans le cas de la stratégie Delta-Gamma neutre**

A l'instant initial t=0, la valeur du portefeuille de couverture est nulle :  $\Pi(0) = 0$ . Connaissant les valeurs initiales des options, la valeur initiale du sous-jacent, ainsi que les proportions respectives, à cet instant t=0, on en déduit la valeur de l'obligation à l'instant initial :

$$B(0) = -(C(0) + x(0)I(0) + y(0)C_1(0))$$

A chaque date de réajustement t<sub>i</sub>, les deux facteurs de couverture Delta et Gamma sont recalculés pour les deux options C et C<sub>1</sub> et servent de base pour calculer, ensuite, les proportions du portefeuille de couverture dans le sous-jacent x(t<sub>i</sub>) et dans l'option additionnelle y(t<sub>i</sub>). Enfin, la proportion de l'obligation est ajustée, de manière à ce que les flux financiers, relatifs aux variations des positions sur le sous-jacent et l'option C<sub>1</sub>, soient compensés, selon le cas, par le flux du prêt ou de l'emprunt. A chaque instant t<sub>i</sub>, la valeur de l'obligation s'écrit, donc :

$$B(t_i) = e^{r\delta t} B(t_{i-1}) - (x(t_i) - x(t_{i-1}))I(t_i) - (y(t_i) - y(t_{i-1}))C_1(t_i)$$

### 5.1.2.2.3.3 Calcul de l'erreur de couverture à l'instant $t_i$ dans le cas de la stratégie Delta-Gamma neutre

Comme pour toute stratégie dynamique autofinancée, à chaque instant  $t_i$ , l'erreur de couverture est la valeur du portefeuille, s'écrit:

$$\Pi(t_i) = C(t_i) + x(t_i)I(t_i) + y(t_i)C_1(t_i) + B(t_i)$$

A la fin de la période de couverture, l'erreur de couverture est, donc :

$$\Pi(\tau) = C(\tau) + x(\tau)I(\tau) + y(\tau)C_1(\tau) + B(\tau)$$

Comme pour toute stratégie dynamique autofinancée, l'erreur de couverture absolue moyenne relative se calcule, selon la formule (5.1.2-10).

### 5.1.2.2.4 Stratégie Delta-Véga neutre :

En plus de la couverture Delta-neutre, nous pouvons rendre un portefeuille immunisé contre les variations de la volatilité de l'indice (ou du tracker) sous-jacent, en prenant une nouvelle position dans une autre option d'achat  $C_1$ . A un instant  $t$ , le portefeuille de couverture, ainsi formé, a comme valeur:

$$\Pi(t) = C(t) + x(t)I(t) + y(t)C_1(t) + B(t)$$

Pour maintenir la neutralité du portefeuille en Delta et en Véga neutre, il est nécessaire de réajuster la position dans l'actif sous-jacent (indice ou tracker) et dans l'option d'achat additionnelle  $C_1$ .

Il va falloir, donc, calculer, à chaque instant, les proportions du portefeuille de couverture, dans l'actif sous-jacent et dans l'option additionnelle  $C_1$ .

#### 5.1.2.2.4.1 Calcul des proportions $x(t)$ et $y(t)$ dans le cas de la stratégie Delta-Véga neutre

Les proportions dans l'actif sous-jacent et dans l'option additionnelle,  $x(t)$  et  $y(t)$  sont choisies, de manière à ce que, le portefeuille soit, à la fois Delta neutre et Véga neutre. Elles sont solutions du système suivant :

$$\Delta_C(t) + x(t) + y(t)\Delta_{C_1}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) + y(t)\Delta_{C_1}(t) = -\Delta_C(t)$$

$$\vartheta_C(t) + y(t)\vartheta_{C_1}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t)\vartheta_{C_1}(t) = -\vartheta_C(t)$$

Dans la mesure, où le Véga de l'option additionnelle est non nul ( $\vartheta_{C_1}(t) \neq 0$ ), le système est un système de Cramer qui admet une solution unique qui est la suivante:

$$y(t) = -\frac{\vartheta_C(t)}{\vartheta_{C_1}(t)} \quad (5.1.2-13)$$

et

$$x(t) = -\Delta_C(t) + \frac{\vartheta_C(t)}{\vartheta_{C_1}(t)}\Delta_{C_1}(t) \quad (5.1.2-14)$$

Ces formules sont similaires, à celles des proportions, dans le cas de la stratégie Delta-Gamma neutre, à la seule différence que les Gammas sont remplacés par les Végas. Comme, les proportions  $x(t)$  et  $y(t)$  sont fonction des Deltas et des Végas des options  $C$  et  $C_1$ , leurs formules vont dépendre du modèle à considérer.

**Cas I** : Calcul des proportions du portefeuille de couverture par le modèle de Black & Scholes dans le cas de la stratégie Delta-Véga neutre

Si on remplace les Deltas et les Végas des options d'achat  $C$  et  $C_1$ , par leurs expressions, selon les équations (5.1.2-1) et (5.1.2-3), dans les équations (5.1.2-13) et (5.1.2-14), on obtient :

$$y(t) = -\frac{N'(d_1) \sqrt{T-t}}{N'(d_1^1) \sqrt{T_1-t}}$$

et

$$x(t) = -N(d_1) + \frac{N'(d_1) \sqrt{T-t}}{N'(d_1^1) \sqrt{T_1-t}} N(d_1^1)$$

Etant donné que les options  $C$  et  $C_1$  ont le même sous-jacent, les prix d'exercice et les dates d'échéances sont les mêmes pour les options  $C$  et  $C_1$  ( $E_1=E$  et  $T_1=T$ ), on a alors, à chaque instant  $t$  :

$$d_1^1 = d_1 \Rightarrow N(d_1^1) = N(d_1) \Rightarrow N'(d_1^1) = N'(d_1)$$

et  $C_1(t) = C(t) \quad \forall t$

Ce qui implique, dans ce cas, que  $x(t)=0$  et  $y(t) = -1$  et que le portefeuille n'est autre qu'une obligation, et ne correspond en rien à un portefeuille de couverture. Il s'agit, encore une fois, d'une singularité.

En définitive, l'option  $C_1$  doit être différente de l'option  $C$ , par le prix d'exercice  $E$ , et/ou la date d'échéance  $T_1$ .

**Cas2** : Calcul des proportions du portefeuille de couverture par les modèles neuronaux dans le cas de la stratégie Delta-Véga neutre

Si on remplace les Deltas et les Végas des options d'achat  $C$  et  $C_1$ , par leurs expressions, selon les équations (5.1.2-4) et (5.1.2-6), dans les équations (5.1.2-13) et (5.1.2-14), on obtient les expressions des proportions  $x(t)$  et  $y(t)$  dans le cas des modèles neuronaux, pour une stratégie Delta-Véga neutre.

$$y(t) = -\frac{C(t) - C(t-1)}{C_1(t) - C_1(t-1)}$$

$$x(t) = -\Delta_C(t) + \frac{C(t) - C(t-1)}{C_1(t) - C_1(t-1)} \Delta_{C_1}(t) = 0$$

Ainsi, la proportion dans le sous-jacent est constamment nulle (quel que soit l'instant  $t$ ). Ceci, est propre à cette méthode de calcul qui est approximative. A priori, il n'y a aucune raison pour que  $x(t)$  soit nulle. D'ailleurs, ce n'est pas le cas pour le modèle de Black Scholes ni pour le modèle à volatilité stochastique.



Si on se réfère à ce mode de calcul, la couverture Delta-Véga neutre ne fait pas intervenir le sous-jacent dans le portefeuille de couverture. Ce type de couverture nécessite un portefeuille constitué juste de l'option C, de l'option  $C_1$  et de l'obligation B. Dans ce cas, la valeur du portefeuille de couverture s'écrit :

$$\Pi(t) = \frac{C_1(t)C(t-1) - C(t)C_1(t-1)}{C_1(t) - C_1(t-1)} + B(t)$$

Comme le sous-jacent est absent du portefeuille, la couverture Delta-neutre n'est pas assurée. En toute logique, les valeurs du Delta et du Véga, pour le modèle neuronal, doivent se faire sur une formule plus rigoureuse. C'est, justement, l'intérêt de la méthode B, développée dans le paragraphe (§5.1.2.2.1.2), qui constitue une réponse, à ce problème.

**Cas3** : Calcul des proportions du portefeuille de couverture, par les modèles à volatilité stochastique, avec simulation de Monte Carlo, dans le cas de la stratégie Delta-Véga neutre.

Les Deltas et les Végas des options C et  $C_1$ , relatives aux modèles à volatilité stochastique sont calculés, suivant les équations (5.1.2-7) et (5.1.2-9), puis remplacés dans les équations (5.1.2-13) et (5.1.2-14) afin de déterminer, à chaque observation t, la proportion du portefeuille dans le sous-jacent  $x(t)$  et celle dans l'option additionnelle  $y(t)$ .

#### **5.1.2.2.4.2 Calcul de la valeur de l'obligation à l'instant $t_i$ dans le cas d'une stratégie Delta Véga neutre**

Quel que soit le modèle considéré, la valeur du portefeuille de couverture, à l'instant initial ( $t=0$ ), est nulle :  $\Pi(0) = 0$ . Par conséquent, la valeur de l'obligation, à cet instant initial est :

$$B(0) = -(C(0) + x(0)I(0) + y(0)C_1(0))$$

A chaque date de réajustement  $t_i$ , les deux facteurs de couverture Delta et Véga sont recalculés pour les deux options C et  $C_1$ . Ensuite, on calcule les

proportions du portefeuille de couverture dans le sous-jacent  $x(t_i)$  et dans l'option additionnelle  $(C_1)$ ,  $y(t_i)$ . Enfin, la valeur de l'obligation est ajustée, de manière à ce que les flux financiers, relatifs aux variations des positions sur le sous-jacent et l'option  $C_1$ , soient compensés, selon le cas par le flux du prêt ou de l'emprunt. Soit, à chaque instant  $t_i$ , la valeur de l'obligation s'écrit :

$$B(t_i) = e^{r\delta t} B(t_{i-1}) - (x(t_i) - x(t_{i-1}))I(t_i) - (y(t_i) - y(t_{i-1}))C_1(t_i)$$

#### **5.1.2.2.4.3 Calcul de l'erreur de couverture à l'instant $t_i$ dans le cas d'une stratégie Delta-Véga neutre**

Comme pour chaque stratégie dynamique autofinancée, à chaque instant  $t_i$ , l'erreur de couverture est la valeur du portefeuille, à cet instant. Soit :

$$\Pi(t_i) = C(t_i) + x(t_i)I(t_i) + y(t_i)C_1(t_i) + B(t_i)$$

A la fin de la période de couverture, l'erreur de couverture est, donc :

$$\Pi(\tau) = C(\tau) + x(\tau)I(\tau) + y(\tau)C_1(\tau) + B(\tau)$$

L'erreur de couverture absolue moyenne relative se calcule suivant la formule (5.1.2-10).

#### **5.1.2.2.5 Stratégie Delta-Gamma-Véga neutre :**

Pour avoir un portefeuille Delta, Gamma et Véga neutre, il faut inclure, dans le portefeuille de couverture, deux options d'achat additionnelles,  $C_1$  et  $C_2$ , en plus de l'option de base considérée  $C$ . Ainsi, à chaque instant  $t$ , la valeur du portefeuille de couverture est :

$$\Pi(t) = C(t) + x(t)I(t) + y(t)C_1(t) + z(t)C_2(t) + B(t)$$

Il va falloir calculer, dans un premier temps, les proportions  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ .

##### **5.1.2.2.5.1 Calcul des proportions $x(t)$ , $y(t)$ et $z(t)$ pour une stratégie Delta-Gamma-Véga neutre**

Les proportions  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  sont choisies, de manière à ce que le portefeuille soit, à la fois, Delta neutre, Gamma neutre et Véga neutre. Elles sont solutions du système suivant :

$$\begin{aligned} \Delta_C(t) + x(t) + y(t)\Delta_{C_1}(t) + z(t)\Delta_{C_2}(t) &= 0 \Rightarrow \\ x(t) + y(t)\Delta_{C_1}(t) + z(t)\Delta_{C_2}(t) &= -\Delta_C(t) \\ \Gamma_C(t) + y(t)\Gamma_{C_1}(t) + z(t)\Gamma_{C_2}(t) &= 0 \Rightarrow \\ y(t)\Gamma_{C_1}(t) + z(t)\Gamma_{C_2}(t) &= -\Gamma_C(t) \\ \vartheta_C(t) + y(t)\vartheta_{C_1}(t) + z(t)\vartheta_{C_2}(t) &= 0 \Rightarrow \\ y(t)\vartheta_{C_1}(t) + z(t)\vartheta_{C_2}(t) &= -\vartheta_C(t) \end{aligned}$$

Si on désigne par D, le déterminant de ce système d'équations, on a :

$$D(t) = \Gamma_{C_1}(t)\vartheta_{C_2}(t) - \Gamma_{C_2}(t)\vartheta_{C_1}(t)$$

Pour que le système admette une solution unique (système de Cramer), il faut que D(t) soit non nul, quel que soit t. Dans ce cas, les proportions x(t), y(t) et z(t), sont données, par les équations suivantes :

$$y(t) = \frac{\Gamma_{C_2}(t)\vartheta_C(t) - \Gamma_C(t)\vartheta_{C_2}(t)}{D(t)} \quad (5.1.2-15)$$

$$z(t) = \frac{\Gamma_C(t)\vartheta_{C_1}(t) - \Gamma_{C_1}(t)\vartheta_C(t)}{D(t)} \quad (5.1.2-16)$$

et

$$x(t) = -\Delta_C(t) - y(t)\Delta_{C_1}(t) - z(t)\Delta_{C_2}(t) \quad (5.1.2-17)$$

Comme ces proportions sont des fonctions des Deltas, des Gammas et des Véga des options constituant le portefeuille de couverture, leurs formules dépendent des modèles de couverture à considérer, parmi le modèle de Black & Scholes, les modèles neuronaux et les modèles à volatilité stochastique.

**Cas1** : Calcul des proportions du portefeuille de couverture par le modèle de Black & Scholes dans le cas de la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre

En remplaçant les Deltas, les Gammas et les Végas des options d'achat C, C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub>, par leurs expressions, selon les équations (5.1.2-1), (5.1.2-2) et (5.1.2-3),

dans les équations (5.1.2-15), (5.1.2-16) et (5.1.2-17), le déterminant peut s'écrire, dans le cas du modèle de Black & Scholes, sous la forme:

$$D(t) = \frac{N'(d_{1,1})N'(d_{1,2})}{\sigma} \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right)$$

En remarquant la similarité entre l'expression du déterminant et l'expression des numérateurs de  $y(t)$  et  $z(t)$ , on peut écrire :

$$y(t) = \frac{N'(d_1)}{N'(d_{1,1})} \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau}} \frac{(\tau - \tau_2)}{(\tau_2 - \tau_1)}$$

et

$$z(t) = \frac{N'(d_1)}{N'(d_{1,2})} \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau}} \frac{(\tau_1 - \tau)}{(\tau_2 - \tau_1)}$$

La proportion  $x(t)$  est donnée par l'équation (5.1.2-16). Elle peut se mettre, sous la forme :

$$x(t) = -N(d_1) - \frac{N'(d_1)}{(\tau_2 - \tau_1)\sqrt{\tau}} \left( \frac{N(d_{1,1})}{N'(d_{1,1})} (\tau - \tau_2)\sqrt{\tau_1} + \frac{N(d_{1,2})}{N'(d_{1,2})} (\tau_1 - \tau)\sqrt{\tau_2} \right)$$

Le système admet, donc, une solution unique lorsque les durées de vie résiduelles de l'option de base C et des options additionnelles  $C_1$  et  $C_2$  sont différentes. Autrement dit, que les prix d'exercice soient différents ou non, ces options ne doivent pas avoir la même date d'échéance.

On compte, ainsi, 3 couples  $(\tau ; \tau_1)$ ,  $(\tau ; \tau_2)$  et  $(\tau_1 ; \tau_2)$  et deux états (égal (=) ou différent  $\neq$ ). La conjugaison de ces 3 couples avec ces deux états génère  $2^3 = 8$  cas, qu'on peut envisager comme illustré dans le tableau 72. Parmi ces 8 cas, compte tenu de la transitivité de la relation "égal (=)", il n'y a que 5 cas qui sont mathématiquement possibles. Les cas 2, 3 et 4 sont mathématiquement impossibles.

CAS	$(\tau ; \tau_1)$	$(\tau ; \tau_2)$	$(\tau_1 ; \tau_2)$	POSSIBILITE	Déterminant: D(t)
Cas 1	=	=	=	possible	= 0
Cas 2	=	=	≠	impossible	≠ 0
Cas 3	=	≠	=	impossible	= 0
Cas 4	≠	=	=	impossible	= 0
Cas 5	≠	≠	=	possible	= 0
Cas 6	≠	=	≠	possible	≠ 0
Cas 7	=	≠	≠	possible	≠ 0
Cas 8	≠	≠	≠	possible	≠ 0

Tableau 72 : Cas possibles concernant les durées de vie résiduelles de l'option de base et des options additionnelles

Parmi les cinq cas possibles, il n'y a que 3 cas à retenir, à savoir le cas 6, le cas 7 et le cas 8. En effet, le cas 1 et le cas 5 sont, tel que le déterminant du système est nul, ce qui veut dire qu'il n'admet pas de solution unique.

Dans le cas 8, qui est le cas le plus général et le mieux adaptée, pour la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre, la solution des proportions  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  est unique et elle est donnée par les équations déjà établies. Dans les cas 6 et 7, ces proportions sont données par les équations définies, dans le tableau 73, qui sont des cas particuliers des équations précitées.

Cas 7	Proportions	$E_1 \neq E$	$E_1 = E$
$\tau_1 = \tau$	$x(t) =$	$-N(d_1) + N'(d_1) \frac{N(d_{1,1})}{N'(d_{1,1})}$	0
	$y(t) =$	$-\frac{N'(d_1)}{N'(d_{1,1})}$	-1
	$z(t)$	0	0

Tableau 73 : Proportions du portefeuille de couverture lorsque  $\tau_1 = \tau$ .

Dans le cas 7, où la date d'échéance de l'option C est la même que celle de l'option  $C_1(\tau = \tau_1)$ , si les prix d'exercice respectifs sont différents ( $E \neq E_1$ ), il y'a équivalence entre une stratégie Gamma-neutre et une stratégie Véga-neutre.

Dans ce cas, le portefeuille de couverture n'est constitué que d'une option additionnelle  $C_2$ , l'option  $C_1$  n'est pas prise en compte. Si, par contre, les prix d'exercice, en question, sont égaux ( $E = E_1$ ), ceci veut dire que les options  $C$  et  $C_1$ , sont les mêmes, puisqu'elles ont le même sous-jacent. Il n'est pas étonnant d'avoir comme solution du système :  $x(t) = 0$  ;  $y(t) = -1$  et  $z(t) = 0$ . Ce qui veut dire que le portefeuille de couverture se réduit à une obligation. Il s'agit d'une singularité.

Cas 6	Proportions	$E_2 \neq E$	$E_2 = E$
$\tau_2 = \tau$	$x(t) =$	$-N(d_1) + N'(d_1) \frac{N(d_{1,2})}{N'(d_{1,2})}$	0
	$y(t) =$	0	0
	$z(t)$	$-\frac{N'(d_1)}{N'(d_{1,2})}$	-1

Tableau 74 : Proportions du portefeuille de couverture lorsque  $\tau_2 = \tau$ .

Dans le cas 6, où la date d'échéance de l'option  $C$  est la même que celle de l'option  $C_2$  ( $\tau = \tau_2$ ), si les prix d'exercice respectifs sont différents ( $E \neq E_2$ ), il y'a équivalence entre une stratégie Gamma-neutre et une stratégie Véga-neutre. Dans ce cas, le portefeuille de couverture n'est constitué que d'une option additionnelle  $C_1$ , l'option  $C_2$  n'est pas prise en compte. Si, par contre, les prix d'exercice, en question, sont égaux ( $E = E_2$ ), ceci veut dire que les options  $C$  et  $C_2$ , sont les mêmes, puisqu'elles ont le même sous-jacent. Il n'est pas étonnant d'avoir comme solution du système :  $x(t) = 0$  ;  $y(t) = 0$  et  $z(t) = -1$ . Ce qui veut dire que le portefeuille de couverture se réduit à une obligation. Il s'agit d'une singularité.

En conclusion, la couverture Delta-Gamma-Véga neutre ne peut avoir lieu que lorsque les contrats d'options, constituant le portefeuille de couverture ont des prix d'exercices et des dates d'échéances différents deux à deux. Autrement, la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre se réduit à une stratégie Delta-Véga neutre

ou bien, il n'aura aucune couverture, dans le cas, où une option de base joue, en plus, le rôle d'une option additionnelle.

**Cas2** : Calcul des proportions du portefeuille de couverture par les modèles neuronaux dans le cas de la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre

En remplaçant les Deltas, les Gammas et les Végas des options d'achat C, C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub>, par leurs expressions, selon les équations (5.1.2-4), (5.1.2-5) et (5.1.2-6), dans les équations (5.1.2-15), (5.1.2-16) et (5.1.2-17), on démontre que, dans le cas des modèles neuronaux, le déterminant s'écrit sous la forme:

$$D(t) = \frac{\Delta_{C_1}(t)\Delta_{C_2}(t-1) - \Delta_{C_1}(t-1)\Delta_{C_2}(t)}{\sigma(t) - \sigma(t-1)}$$

Par analogie entre le déterminant et les numérateurs de y(t) et z(t), on peut écrire :

$$y(t) = \frac{\Delta_{C_2}(t)\Delta_C(t-1) - \Delta_{C_2}(t-1)\Delta_C(t)}{(\sigma(t) - \sigma(t-1))D(t)}$$

et

$$z(t) = \frac{\Delta_C(t)\Delta_{C_1}(t-1) - \Delta_C(t-1)\Delta_{C_1}(t)}{(\sigma(t) - \sigma(t-1))D(t)}$$

Par ailleurs, on remarque bien que, quelque soit l'instant t, on a :

$$D(t)\Delta_C(t) + D(t)y(t)\Delta_{C_1}(t) + D(t)z(t)\Delta_{C_2}(t) = 0$$

soit,  $\Delta_C(t) + y(t)\Delta_{C_1}(t) + z(t)\Delta_{C_2}(t) = -x(t) = 0$

On en déduit, ainsi, que :  $\forall t \ x(t) = 0$

Ainsi, le portefeuille de couverture ne comporte pas le sous-jacent. Ce qui implique, que la couverture Delta neutre n'est pas réalisée.

Bien entendu, ceci n'est vrai que lorsqu'on utilise ces formules d'approximation des Deltas, des Gammas et des Végas qui ne sont pas tout à fait rigoureuses. En principe, ces Greeks doivent être calculées, en calculant la valeur de l'option pour des petites variations du prix du sous-jacent et de la volatilité, comme pour les simulations de Monte Carlo. Seulement, ceci suppose de refaire l'apprentissage à chaque fois et de sélectionner le meilleur modèle neuronal suivant les critères prédéfinis dans le chapitre précédent (paragraphe §4.2.2). Ceci, suppose, donc, une procédure très longue et très lourde. Il faut considérer les formules des Greeks développées, dans la méthode B définie dans le chapitre §5.1.2.2.1.2.

**Cas3** : Calcul des proportions du portefeuille de couverture par les modèles à volatilité stochastique, avec simulation de Monte Carlo, dans le cas de la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre.

Les Deltas, les Gammas et les Végas des options  $C$ ,  $C_1$  et  $C_2$ , relatives aux modèles à volatilité stochastique sont calculés, suivant les équations (5.1.2-7), (5.1.2-8) et (5.1.2-9), puis remplacés dans les équations (5.1.2-15), (5.1.2-16) et (5.1.2-17), afin de déterminer, à chaque observation  $t$ , la proportion du portefeuille dans le sous-jacent  $x(t)$ , celle dans l'option additionnelle  $C_1$  ( $y(t)$ ) et celle dans l'option additionnelle  $C_2$  ( $z(t)$ ).

#### ***5.1.2.2.5.2 Calcul de la valeur de l'obligation à l'instant $t_i$ dans le cadre d'une stratégie Delta-Gamma-Véga neutre***

Quelle que soit le modèle considéré, la valeur du portefeuille de couverture, à l'instant initial ( $t=0$ ), est nulle. Soit  $\Pi(0) = 0$

Par conséquent, la valeur initiale de l'obligation est :

$$B(0) = -(C(0) + x(0)I(0) + y(0)C_1(0) + z(0)C_2(0))$$

A chaque date de réajustement  $t_i$ , les trois facteurs de couverture Delta, Gamma et Véga sont recalculés pour les trois options  $C$ ,  $C_1$  et  $C_2$ . Ensuite, on calcule les proportions du portefeuille de couverture, dans le sous-jacent ( $x(t)$ ), dans



l'option additionnelle  $C_1$  ( $y(t)$ ) et dans l'option additionnelle  $C_2$  ( $z(t)$ ). Enfin, la valeur de l'obligation est ajustée, de manière à ce que les flux financiers, relatifs aux variations des positions sur le sous-jacent et les options additionnelles  $C_1$  et  $C_2$  soient compensées, selon le cas par le flux du prêt ou de l'emprunt. Soit, à chaque instant  $t_i$  on a :

$$B(t_i) = e^{r\delta t}B(t_{i-1}) - (x(t_i) - x(t_{i-1}))I(t_i) - (y(t_i) - y(t_{i-1}))C_1(t_i) - (z(t_i) - z(t_{i-1}))C_2(t_i)$$

En effet, on a :

$$\Pi(t_{i-1}) = C(t_{i-1}) + x(t_{i-1})I(t_{i-1}) + y(t_{i-1})C_1(t_{i-1}) + z(t_{i-1})C_2(t_{i-1}) + B(t_{i-1})$$

A l'instant  $t_i$ , les valeurs des options et du sous-jacent deviennent :  $C(t_i)$ ,  $C_1(t_i)$ ,  $C_2(t_i)$  et  $I(t_i)$ , alors que la valeur de l'obligation devient  $e^{r\delta t}B(t_{i-1})$ . Ainsi, la valeur du portefeuille devient :

$$\Pi'(t_i) = C(t_i) + x(t_{i-1})I(t_i) + y(t_{i-1})C_1(t_i) + z(t_{i-1})C_2(t_i) + e^{r\delta t}B(t_{i-1})$$

Les proportions du portefeuille de couverture doivent être ramenées à des valeurs qui respectent les équations (5.1.2-2), (5.1.2-3) et (5.1.2-4). Ainsi, la valeur du portefeuille de couverture devient :

$$\Pi(t_i) = C(t_i) + x(t_i)I(t_i) + y(t_i)C_1(t_i) + z(t_i)C_2(t_i) + B(t_i) = 0$$

Pour se faire, la valeur des transactions sur le sous-jacent et les options additionnelles doit compenser celle sur la transaction (dans le sens opposé) sur l'obligation. Autrement dit, on doit avoir :

$$B(t_i) - e^{r\delta t}B(t_{i-1}) = -(x(t_i) - x(t_{i-1}))I(t_i) - (y(t_i) - y(t_{i-1}))C_1(t_i) - (z(t_i) - z(t_{i-1}))C_2(t_i)$$

En définitive, la valeur de l'obligation, à l'instant  $t_i$ , s'écrit :

$$B(t_i) = e^{r\delta t}B(t_{i-1}) - (x(t_i) - x(t_{i-1}))I(t_i) - (y(t_i) - y(t_{i-1}))C_1(t_i) - (z(t_i) - z(t_{i-1}))C_2(t_i)$$

### 5.1.2.2.5.3 Calcul de l'erreur de couverture dans le cadre d'une stratégie Delta-Gamma-Véga neutre

A chaque instant  $t_i$ , l'erreur de couverture est la valeur du portefeuille à cet instant. Soit :

$$\Pi(t_i) = C(t_i) + x(t_i)I(t_i) + y(t_i)C_1(t_i) + z(t_i)C_2(t_i) + B(t_i)$$

A la fin de la période de couverture, l'erreur de couverture est donc :

$$\Pi(\tau) = C(\tau) + x(\tau)I(\tau) + y(\tau)C_1(\tau) + z(\tau)C_2(\tau) + B(\tau)$$

Comme pour les autres stratégies dynamiques autofinancées, l'erreur de couverture absolue moyenne relative se calcule suivant la formule (5.1.2-10).

## 5.2 ETUDE EMPIRIQUE DE LA GESTION DYNAMIQUE DES RISQUES FINANCIERS PAR LES OPTIONS

### 5.2.1 Objectif :

L'objectif de cette partie empirique est de comparer le modèle de Black & Scholes, le modèle neuronal, ainsi que les modèles à volatilité stochastique (simulation de Monte Carlo), du point de vue de la performance de la couverture d'un risque financier. Pour se faire, on calcule l'erreur de couverture, relative à chacun de ces trois modèles, pour une fréquence de réajustement de 1 jour, pour les quatre stratégies dynamiques autofinancées : Delta-neutre, Delta-Gamma-neutre, Delta-Véga-neutre et Delta-Gamma-Véga-neutre. Pour cette comparaison entre les modèles précités, on se base sur les données de la base intraday (contrats de la classe 1 et contrats de la classe 9), en considérant la volatilité implicite. En ce qui concerne les modèles à volatilité stochastique (simulation de Monte Carlo), on considère les trois dynamiques de la volatilité, déjà utilisées pour l'évaluation, à savoir : le mouvement Brownien, le processus empirique et le processus d'Ornstein Uhlenbeck.

### **5.2.2 Données :**

Les options à considérer sont des options d'achat de type européen, qui font partie de la classe 1 ou la classe 9 de la base intraday.

En ce qui concerne le modèle neuronal et le modèle de Black & Scholes, on considère aussi bien la classe 1 que la classe 9 des contrats de la base intraday. Pour chaque contrat, les données à considérer, sont relatives au fichier training du meilleur modèle neuronal, autrement dit, à la meilleure combinaison de fichier training-fichier test, en terme d'erreur quadratique. Soit :

- Pour les contrats de la classe 1, à savoir 1N, 1O, 1P, 1Q et 1S, on considère, respectivement les modèles: 1N1O, 1O1O, 1P1N, 1Q1P et 1S1P. (Nota : modèle 1X1Y veut dire 1X=jeu d'apprentissage et 1Y=jeu de test)
- Pour les contrats de la classe 9, qui sont : 9I, 9J, 9K et 9L, on considère, respectivement, les modèles : 9I9L, 9J9K, 9K9L et 9L9I.

Les périodes relatives aux données disponibles, pour chaque contrat, s'étalent de la date de « début de fichier » à la date de « fin de fichier » d'apprentissage (cf tableau 75).

En ce qui concerne les modèles à volatilité stochastique (avec simulation de Monte Carlo), on ne considère que les données relatives à la classe 9. Les données, dans ce cas, sont prises entre la date de « début du fichier » et la « date d'échéance de l'option » qui sont indiquées dans le tableau 75, soit la totalité du fichier, relatif à un contrat donné, appartenant à la classe 9.

Le décalage entre la date de fin de fichier et la date d'échéance, provient de l'élimination des dernières données du fichier, où la volatilité présente une instabilité, constituant une nuisance pour la modélisation avec les réseaux de neurones. Ce décalage provient, également, d'une contrainte de taille limite imposée par le logiciel de réseaux de neurones utilisé (thinks pro).

	Début fichier	Fin fichier	Echéance
1N	5/03/1998	12/06/1998	30/06/1998
1O	17/03/1998	12/06/1998	30/06/1998
1P	26/03/1998	30/06/1998	30/06/1998
1Q	25/03/1998	30/06/1998	30/06/1998
1S	7/04/1998	30/06/1998	30/06/1998
9I	2/01/1998	20/02/1998	31/03/1998
9J	2/01/1998	19/02/1998	31/03/1998
9K	2/01/1998	11/03/1998	31/03/1998
9L	2/01/1998	16/03/1998	31/03/1998

Tableau 75 : Date de début et de fin de fichier et date d'échéance des différents contrats de la base intraday.

Par ailleurs, on remarque que les contrats d'option d'une même classe ont la même date d'échéance. Pour une stratégie Delta-gamma-véga-neutre, on doit considérer deux options additionnelles de classes différentes. Ceci est possible. Par contre, les deux classes ont une durée de vie commune très réduite. La seule possibilité, serait de considérer une option de base et une option additionnelle, parmi les contrats 9K et 9L, et le contrat 1N constituera une deuxième option additionnelle. Soit une période de couverture, commune à ces trois contrats, s'étalant du 5/03/98 au 11/03/98, si on considère le modèle de Black & Scholes et le modèle neuronal. Si on considère le modèle à volatilité stochastique (avec simulation de Monte Carlo). Cette période de couverture s'étalera du 4/03/98 au 16/03/98, ce qui fait, au total, 6 à 9 observations, si on agrège les données, par jour. Un tel nombre est bien insuffisant et limite les conclusions concernant une telle stratégie (Delta-Gamma-Véga- neutre).

A part cette dernière stratégie qui fait appel aux deux classes 1 et 9, les autres stratégies sont basées sur des combinaisons de contrats appartenant à une même classe (1 ou 9). Les nombres de stratégies à appliquer, pour chacun des trois types de modèles, et pour chacune des classes 1 et 9, sont donnés dans le tableau 76.

Pour chaque contrat de la classe 1, il y'a 3 valeurs d'options : celle du marché, celle donnée par le modèle de Black & Scholes et celle calculée par le modèle neuronal. Les deux premières valeurs sont, quasiment, les mêmes, puisque pour

le calcul de la valeur de l'option, on considère la volatilité implicite. C'est pour cela, d'ailleurs, qu'on ne considère, parmi ces deux valeurs, que celles relatives au modèle de Black & Scholes.

		Delta-neutre	Delta-Gamma-neutre	Delta-Véga-neutre	Delta-Gamma-Véga-neutre
<b>Contrat 1</b>	BS et RN	5	20	20	1
<b>Contrat 9</b>	BS et RN	4	12	12	
	VS q=cte				
	VS q				
	VS OU				

Tableau 76 : Nombre de cas possibles pour chacune des stratégies dynamiques de couverture, en considérant les contrats des classes 1 et 9 de la base intraday et le modèle de Black & Scholes (BS), le modèle neuronal (RN) et le modèle à volatilité stochastique (VS) avec les trois processus de la volatilité : Brownien VS(q=cte), empirique VS(q) et Ornstein Uhlenbeck VS (OU)

Pour chaque contrat de la classe 9, on considère, en plus du modèle de Black & Scholes et du modèle neuronal, les modèles à volatilité stochastique, en considérant les trois dynamiques de la volatilité utilisées jusqu'ici. (mouvement Brownien, processus empirique et processus d'Ornstein Uhlenbeck)

A noter, que dans le calcul de la volatilité implicite, pour annualiser la durée de vie résiduelle, on a divisé celle-ci par 365, si elle correspond au taux d'intérêt ( $\tau_1$ ), et par 250, si elle correspond à la volatilité ( $\tau_2$ ).

Comme, pour le modèle à volatilité stochastique, on a considéré la volatilité implicite. Dans les simulations de Monte Carlo, on a pris en compte cette distinction entre ( $\tau_1$ ) et ( $\tau_2$ ).

Bien entendu, pour l'étude de la stratégie Delta-Gamma-Véga-neutre, la valeur de l'option est calculée, à partir des modèles à volatilité stochastique, pour l'ensemble des observations du contrat 1N, correspondantes à la période du 4/03/98 au 16/03/98, en considérant l'ensemble des 3 dynamiques précitées de la volatilité implicite.

### **5.2.3 Traitement des données**

En fait, les cotations des options ne se font pas, à une même heure, même minute et même seconde. L'intervalle de temps entre deux cotations consécutives est stochastique. C'est déjà un problème à résoudre. Il faut considérer une période de temps commune aux différents contrats d'une même classe. Vu le niveau de liquidité des options, on considère, comme période de temps, le jour.

Les données nécessitées par la présente étude sont la date, l'heure, le prix de l'actif sous-jacent, le temps à l'échéance, la volatilité implicite, et les prix des options relatifs aux différents modèles de couverture considérés. Les Deltas, les Gammas et les Végas sont calculés pour chaque observation et pour chaque modèle, conformément, aux formules préétablies.

Dans un premier temps, les données relatives aux différents contrats, d'une même classe, sont rassemblées, dans un même fichier : un fichier pour la classe 1 et un fichier pour la classe 9. Le fichier, relatif à la classe 1, comporte 2393 observations. Le fichier, relatif à la classe 9, comporte 2009 observations, si on considère le modèle de Black & Scholes et le modèle neuronal et 2489 observations, si on considère les modèles à volatilité stochastique (quelle que soit la dynamique de la volatilité).

Les données relatives à chacun des fichiers précités sont agrégées par jour. Pour se faire, on calcule :

- la valeur moyenne du sous-jacent sur un jour :  $\bar{S}_j$
- la volatilité implicite moyenne sur un jour qui n'est autre que la racine carrée de la moyenne du carré de la volatilité implicite, sur un jour :  $\bar{\sigma}_j$

Etant donné, que les contrats d'une même classe ont la même date d'échéance, la durée de vie résiduelle est déterminée en fonction de la date courante ( le jour) :  $(T-t)_j$ .

Pour chacun des modèles considérés, pour chaque contrat (d'une classe donnée 1 ou 9), la valeur de l'option est calculée, comme une moyenne arithmétique de ses valeurs enregistrées, pendant un jour donné.

Pour le calcul du Delta, du Gamma et du Véga, relatifs à un jour et un contrat donné, deux méthodes de calcul peuvent être considérées, la méthode 1 et la méthode 2.

La méthode 1 consiste à calculer, les valeurs moyennes du Delta, du Gamma et du Véga, relatives aux observations correspondantes à un jour  $j$  donné, à un modèle donné et à un contrat (Op) donné. Soit :

$$\Delta_{Op,Modèle,j} = \frac{1}{n_j} \sum_{t=1}^{n_j} \Delta_{Modèle}(S_{t,j}; \sigma_{t,j}; (T-t)_j; E_{Op}; C_{t,Op,j}; r)$$

$$\Gamma_{Op,Modèle,j} = \frac{1}{n_j} \sum_{t=1}^{n_j} \Gamma_{Modèle}(S_{t,j}; \sigma_{t,j}; (T-t)_j; E_{Op}; C_{t,Op,j}; r)$$

$$\vartheta_{Op,Modèle,j} = \frac{1}{n_j} \sum_{t=1}^{n_j} \vartheta_{Modèle}(S_{t,j}; \sigma_{t,j}; (T-t)_j; E_{Op}; C_{t,Op,j}; r)$$

La méthode 2 consiste à calculer les valeurs du Delta, du Gamma et du Véga, suivant les formules préétablies pour chaque modèle, en considérant les valeurs moyennes du sous-jacent  $\bar{S}_j$  et de la volatilité  $\bar{\sigma}_j$ , le prix d'exercice  $E_{Op}$  du contrat (Op) considéré et s'il le faut de la valeur moyenne de ce contrat  $\bar{C}_{Op,j}$  sur un jour  $j$ . Soit :

$$\Delta_{Op,Modèle,j} = \Delta_{Modèle}(\bar{S}_j; \bar{\sigma}_j; (T-t)_j; E_{Op}; \bar{C}_{Op,j}; r)$$

$$\Gamma_{Op,Modèle,j} = \Gamma_{Modèle}(\bar{S}_j; \bar{\sigma}_j; (T-t)_j; E_{Op}; \bar{C}_{Op,j}; r)$$

$$\vartheta_{Op,Modèle,j} = \vartheta_{Modèle}(\bar{S}_j; \bar{\sigma}_j; (T-t)_j; E_{Op}; \bar{C}_{Op,j}; r)$$

Ce traitement nous conduit, pour le modèle de Black & Scholes et les modèles neuronaux, à une base comportant 78 observations pour la classe 1 et 52

observations pour la classe 9. La période commune aux différents contrats d'options, est de 41 jours pour la classe 1 et de 35 jours pour la classe 9.

Si on considère les modèles à volatilité stochastique, appliqués à la classe 9 des contrats de la base intraday, le même traitement conduit à une base de 60 observations journalières, avec, évidemment, une période commune, dans ce cas, de 60 jours.

Quel que soit le modèle, ces nombres d'observations, sont plutôt réduits. On étudiera la variation de l'erreur de couverture sur ces périodes respectives aux deux classes 1 et 9.

Les fichiers, ainsi constitués, peuvent être récapitulés dans le tableau 77, selon la méthode utilisée pour le calcul des Greeks, suivant le modèle considéré et, enfin, suivant la classe de contrat de la base intraday (1 ou 9). On peut compter 17 fichiers pour l'étude de la performance de la couverture mesurée par l'erreur de couverture.

Modèle	Formule	Classe	Méthode 1	Méthode 2
RN	Empirique	1	RN1bar	RN1
		9	RN9bar	RN9
	B&S	1	RN1BS	-
		9	RN9BS	-
	Det	1	RN1detbar	RN1det
		9	RN9detbar	RN9det
B & S	B&S	1	BS1bar	BS1
		9	BS9bar	BS9
VS(q=cte)	VS(q=cte) (Monte Carlo)	9	VS9 q=cte	-
VS(q)	VS (q ) (Monte Carlo)		VS9 q	-
VS(OU)	VS(OU) (Monte Carlo)		VS9 OU	-

Tableau 77 : Différentes méthodes de calcul des Greeks et différents fichiers correspondants, pour le calcul de l'erreur de couverture en considérant les classes de contrats 1 et 9 de la base intraday le modèle de Black & Scholes (BS), les modèles neuronaux (RN) et les modèles à volatilité stochastique (VS) avec les trois processus de la volatilité : Brownien VS(q=cte), empirique VS (q) et Ornstein Uhlenbeck VS(OU)  
 Méthode 1 : Greek= moyenne de ce Greek sur 1 jour  
 Méthode 2 : Greek=Greek(valeurs moyenne des déterminants sur 1jour)



Pour chacun des 17 fichiers, ainsi constitués, on calcule, jour par jour, les erreurs de couverture avec une fréquence de révision journalière pour les quatre stratégies de couverture dynamiques précitées. Ces erreurs sont calculées après avoir calculé les coefficients de pondération du portefeuille de couverture et après le calcul de l'endettement correspondant.

Le calcul se termine par la détermination de l'erreur absolue moyenne relative, en rapportant la valeur absolue de l'erreur de couverture relative au dernier jour de couverture, au nombre de réajustement du portefeuille et à la valeur initiale de l'option, c-à-d la valeur de l'option au début de la période de couverture.

#### **5.2.4 Résultats**

Etant donné que les modèles à volatilité stochastique ont été utilisés, uniquement, pour la classe 9, les résultats à présenter, sont focalisés sur les contrats de la classe 9, et notamment les contrats 9K et 9L, utilisés dans la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre. Cependant, certains résultats sont présentés pour le contrat 1P de la classe 1.

Pour les modèles à volatilité stochastique, il y'a plus d'observations (61) que pour les autres modèles (35), puisque les fichiers utilisés, pour l'apprentissage par les réseaux de neurones sont amputés des dernières observations qui correspondent à des variations brusques de la volatilité qui constitue une source de nuisance pour les modèles neuronaux.

Avant de présenter les résultats relatifs aux Greeks, et aux erreurs de couverture des différentes stratégies dynamiques étudiées, il est judicieux de présenter l'évolution des déterminants des valeurs des options, au cours de la période de l'étude, à savoir du 2/01/1998 au 25/03/1998 (voir figure 103). Ces déterminants qui sont la valeur du sous-jacent (indice CAC 40), la volatilité implicite et le temps à l'échéance vont servir de base pour générer les résultats de ce chapitre.

On remarque que la valeur de l'indice CAC40 a eu une progression soutenue pendant cette période, alors que la volatilité était stable autour de 20%, jusqu'au 50<sup>em</sup> jour, environ, date à laquelle elle a commencé une augmentation brusque, au même moment où les options de la classe 9, sont passés de l'état en « out of the money » à l'état « in the money », quelques jour avant leurs échéances. Le temps à l'échéance est, bien entendu, décroissant avec le temps, jusqu'à l'échéance, où il prend la valeur zéro.

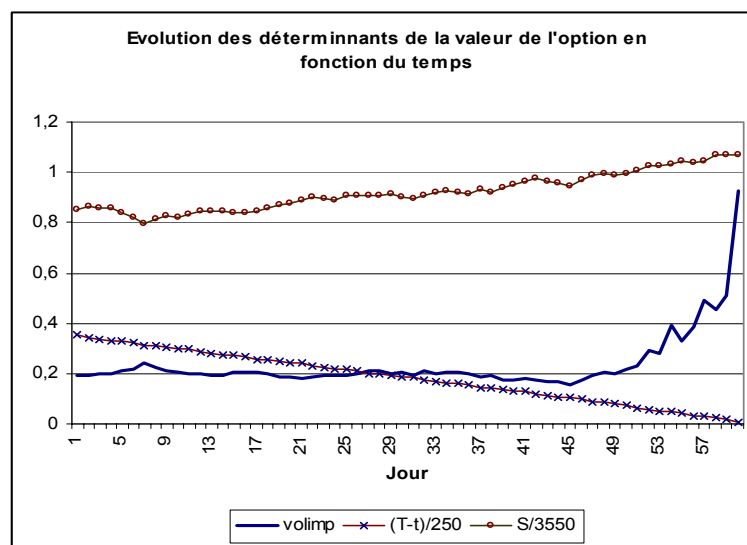


Figure 103 : Evolution des déterminants de la valeur de l'option, en fonction du temps (en jour) :  
 volimp= volatilité implicite ; (T-t)/250=durée de vie résiduelle ;  
 S/E=S/3550= prix du sous-jacent rapporté au prix d'exercice du contrat 9L

L'évolution du marché des options, et son incidence sur les Greeks et les erreurs de couverture, n'est mise en évidence que pour les modèles à volatilité stochastique (VS9q=cte ; VS9q et VS9OU). Pour les autres modèles, les données s'arrêtent au 35<sup>em</sup> jour, pour les raisons, évoquées ci-dessus.

### 5.2.4.1 Greeks

Les Deltas, les Gammas et les Végas des contrats de la classe 1 et de la classe 9 peuvent être calculés, selon les formules, précisées dans le tableau 77.

### 5.2.4.1.1 Calcul du Delta

Pour la classe 1, le Delta du contrat 1P, a été calculé, pour les différents modèles précisés dans le tableau 77. Les résultats de ces calculs sont illustrés dans la figure 104.

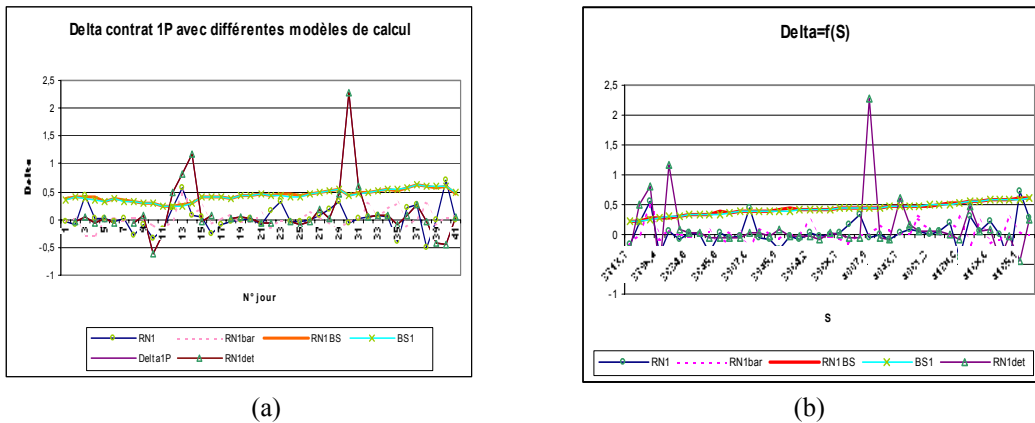


Figure 104 : Delta du contrat 1P pour différentes méthodes de calcul  
 (a) tri sur la date (b) tri sur le prix du sous-jacent

Nous remarquons, qu'en calculant le Delta, avec le modèle de Black & Scholes, il est équivalent de calculer le Delta, à partir des valeurs moyennes des déterminants (BS1), que de calculer la moyenne des Deltas, relatifs aux différentes observations (BS1bar).

A la lumière de ces résultats, on remarque que :

- Pour le modèle de Black & Scholes, pour le contrat 1P, la courbe du Delta se trouve au niveau de la partie linéaire de la courbe théorique (figure104). Sa valeur se situe, au alentour de 0.5. On vérifie que, dans ce cas, le Delta se situe bien dans l'intervalle  $[0;1]$ . Les calculs par RN1BS et BS1 donnent des courbes confondues. C'est la preuve qu'il est équivalent de calculer le Delta comme la moyenne des Deltas, calculés par la formule de Black & Scholes, sur un jour que selon cette même formule appliquée sur les moyennes des déterminants de la valeur de l'option sur le même jour.

- Les formules empiriques de  $RN1$  et  $RN1bar$  donnent des résultats qui pour certaines observations sont aberrantes, dans la mesure, où le Delta se situe parfois, en dehors de l'intervalle  $[0,1]$ , pourtant il s'agit d'un call.
- Ces aberrations peuvent provenir du fait que la formule de calcul du Delta n'est pas tout à fait exacte, puisque la variation du prix du call, entre deux observations empiriques, est supposée être engendrée, uniquement, par la variation du prix du sous-jacent. Or, ceci n'est pas tout à fait vrai, dans la mesure, où cette variation du prix de l'option est, également due, aux variations de la volatilité et du temps à l'échéance.
- En fait, la formule de calcul relative à  $RN1det$ , est une réponse au défaut de calcul précité, en négligeant les effets de la variation du temps à l'échéance. Pourtant, les aberrations ne sont pas, totalement, éliminées.
- Pour ces trois modes de calcul  $RN1$ ,  $RN1bar$  et  $RN1det$ , le Delta se situe à un niveau, autour de zéro et quasiment, dans tous les cas, les valeurs du Delta correspondantes, à ces modes de calculs, sont bien inférieures à celles données par les modes  $BS1$  et  $RN1BS$ .
- Les mêmes remarques restent vraies pour les autres contrats de la classe 1 et pour les contrats de la classe 9.

Les observations correspondantes à un Delta supérieur à 1, en valeur absolue, ont été éliminées, de manière à supprimer certaines sources de nuisance, pour les calculs ultérieurs et notamment, ceux relatifs à l'erreur de couverture. Ainsi, 239 sur 2393 observations ont été éliminées, alors que pour la classe 9, 147 observations sur 2009 ont été, également, éliminées.

Pour la classe 9, le Delta a été calculé, pour tous les contrats de cette classe, et pour tous les modèles précisés, dans le tableau 77. Les résultats sont illustrés dans le graphique 105, pour le modèle de Black & Scholes, le graphique 106, pour les modèles neuronaux et le graphique 107, pour les modèles à volatilité stochastique.

A la lumière de ces résultats, on remarque que :

- Pour les modèles BS9 et RNBS9, les Deltas des contrats sont dans un ordre inverse des prix d'exercice des contrats (de la classe 9). En effet, les deltas sont dans l'ordre suivant:  $\Delta_{9L} < \Delta_{9K} < \Delta_{9J} < \Delta_{9I}$ , alors que les prix d'exercices sont tel que :  $E_{9L} > E_{9K} > E_{9J} > E_{9I}$ . Ceci est normal, dans la mesure où on considère, pour tous les contrats considérés, à chaque observation, la même valeur du sous-jacent, du temps à l'échéance, de la volatilité et du taux d'intérêt. La seule différence provient du prix d'exercice et le Delta est une fonction décroissante du prix d'exercice.

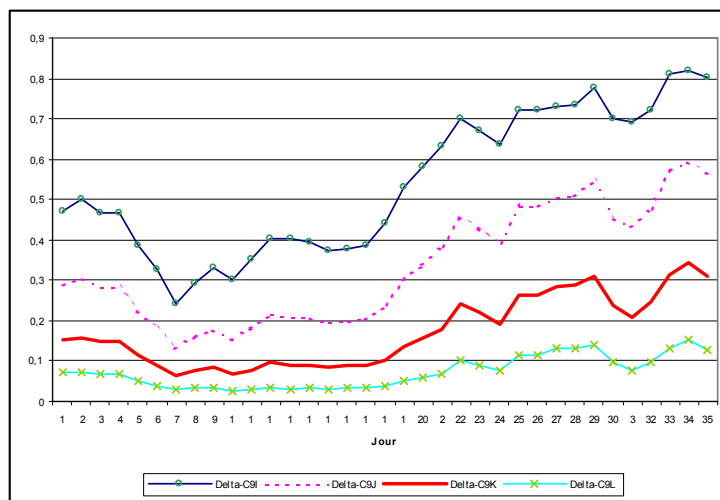


Figure 105 : Deltas des différents contrats de la classe 9 calculés par le modèle de Black & Scholes (BS9)

- Cet ordre n'est pas vérifié, pour les modèles RN9bar et RN9. Les Deltas oscillent d'une manière chaotique, autour de zéro, avec des aberrations, tel que le Delta peut se situer en dehors de l'intervalle  $[0 ; 1]$ .
- Même RN9 det qui est sensé être une amélioration des deux modèles précités, n'a pas permis de générer des Deltas plus conformes à la théorie.
- Les anomalies relatives aux calculs du Delta par RN9 et RN9bar et RN9det peuvent provenir des écarts des valeurs de l'option calculées, par les réseaux de neurones, dues à la contrainte de généralisation, d'une part, d'autre part, elle peuvent s'expliquer, par le retard de la réaction du marché de l'option par rapport à la variation des tendances sur le marché du sous-jacent.

Le modèle de Black & Scholes laisse supposer que la valeur de l'option d'achat et son Delta sont des fonctions strictement croissantes de la valeur du sous-jacent. Dans la pratique, ceci n'est pas tout à fait réaliste, puisque la réaction du marché de l'option, par rapport aux variations du sous-jacent, ne se fait pas, instantanément, et engendre des oscillations, autour d'une valeur d'équilibre. Qui dit oscillations, dit que la dérivée est, tantôt positive, tantôt négative. Dans ce cas, le Delta n'échappe pas à cette règle.

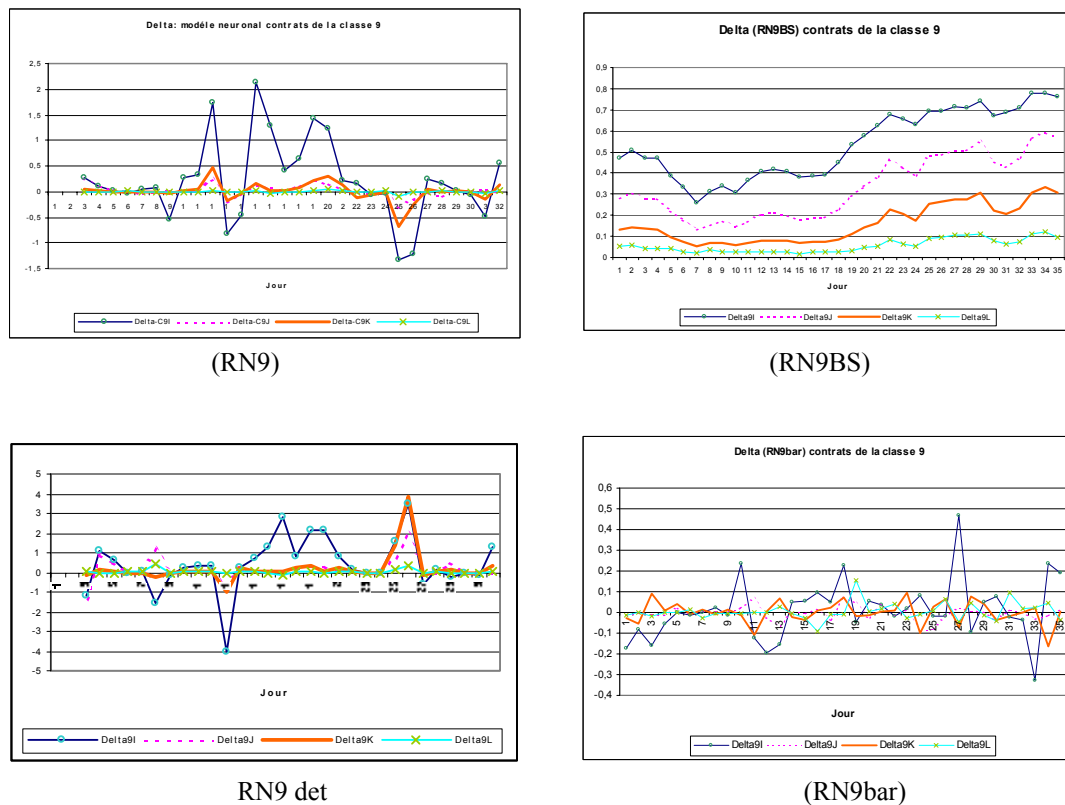


Figure 106 : Deltas des différents contrats de la classe 9 pour les modèles neuronaux

Pour les contrats de la classe 9, l'ordre des Deltas reste le même pour les modèles à volatilité stochastique que le modèle de Black & Scholes. Cet ordre est dû à l'ordre inverse des prix d'exercice, tous les autres déterminants des valeurs des options, étant les mêmes, pour tous les contrats. Plus le prix d'exercice est élevé, plus le Delta du contrat est faible.

Le Delta est situé, dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ , pour tous les modèles à volatilité stochastique, quelle que soit la dynamique de la volatilité considérée, et quel que soit le contrat de la classe 9. Avec l'augmentation de la valeur du sous-jacent et de la volatilité, en fin de période, les courbes se rejoignent pour s'approcher, asymptotiquement, de 1.

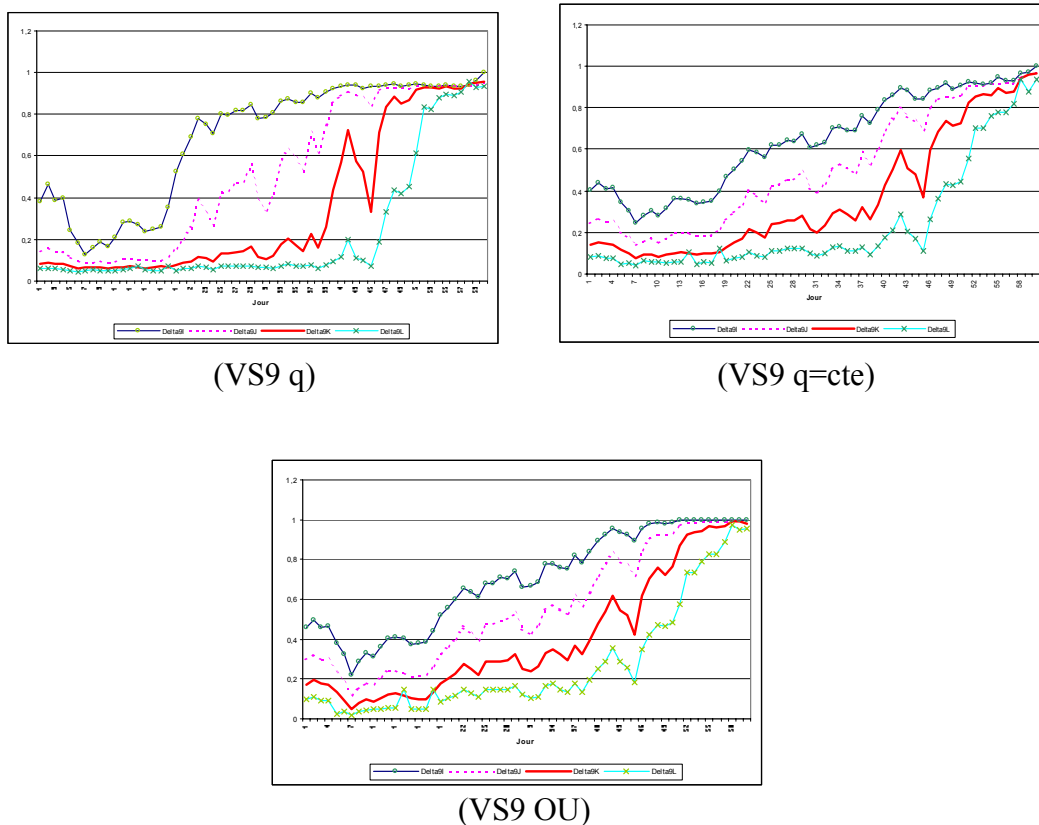


Figure 107 : Delta, pour les contrats de la classe 9, calculée par les modèles à volatilité stochastique (simulation de Monte Carlo)

Pour le contrat 9L, si on représente les Deltas, relatifs aux différents modèles de calcul, en fonction du prix du sous-jacent, pour la période commune du 2/01/1998 au 19/02/1998, on obtient le graphique 108.

On voit, bien, que les résultats diffèrent, d'un modèle à un autre. Non seulement, les formules de calcul sont différentes, mais en plus les écarts enregistrés au niveau de l'évaluation des options, par les différents modèles est une autre source de différence, dans le calcul des Deltas.

Les modèles à volatilité stochastique donnent les valeurs les plus élevées du Delta. Ils sont secondés par le modèle de Black & Scholes. Les autres modes de calcul, et notamment pour le modèle neuronal, donnent des valeurs de Delta oscillantes autour de zéro, et qui sont parfois négatives.

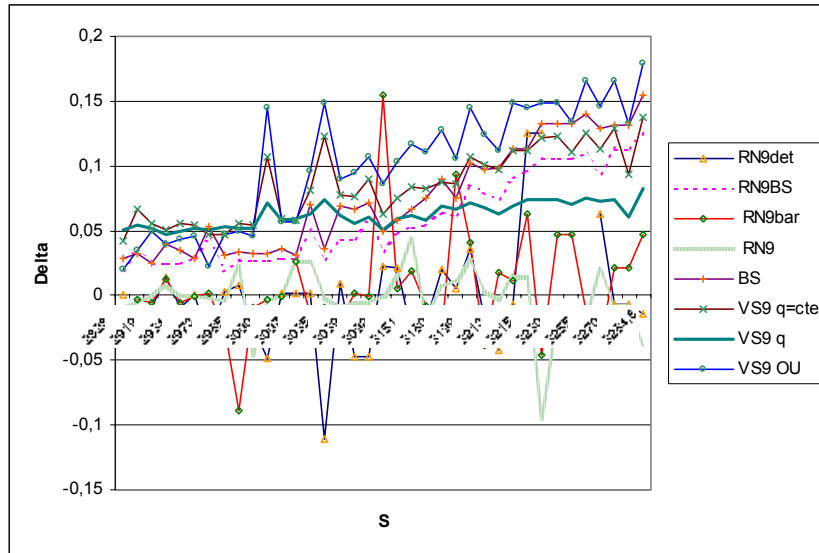


Figure 108 : Deltas des différents modèles de calcul en fonction du prix du sous-jacent, pour le contrat 9L, sur la période commune du 2/01/1998 au 19/02/1998

Si on représente les Deltas des modèles à volatilité stochastique, en fonction du prix du sous-jacent, pour le contrat 9L, pour la période allant du 2/01/1998 au 25/03/1998, on obtient le graphique 109.

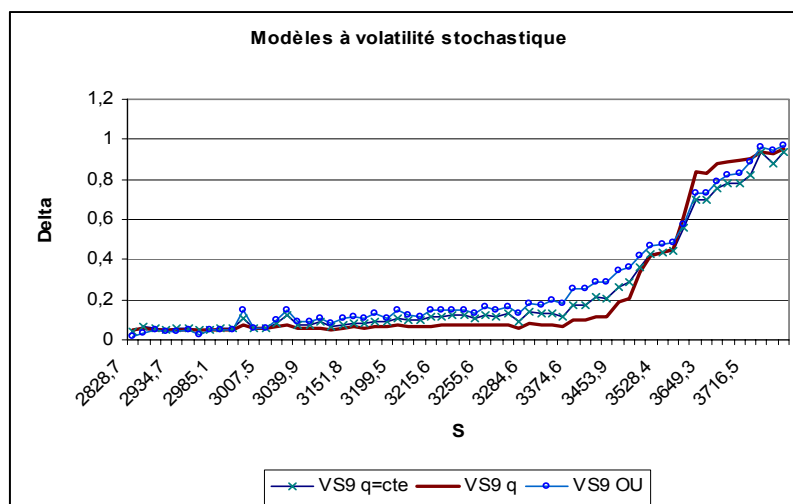


Figure 109 : Deltas du contrat 9L calculés avec les modèles à volatilité stochastique, en fonction du prix du sous-jacent, pour la période du 2/01/1998 au 25/03/1998



A la lumière de ces résultats, on remarque que :

- Etant donné que le prix du sous-jacent est croissant sur la période considérée, l'évolution de la courbe du delta en fonction du temps a la même allure, que celle du delta fonction du prix du sous-jacent.
- Les Deltas des modèles à volatilité stochastique sont légèrement supérieurs à zéro, en début de période, puis ils se sont envolés à l'approche de l'échéance, dans le même rythme que la volatilité. Cette dernière a connu une augmentation brusque, à l'échéance des options. Le prix du sous-jacent, a lui aussi connu une croissance soutenue, sur l'ensemble de la période, et qui a contribué à l'augmentation brusque des Deltas.
- Le Delta est une fonction strictement croissante du prix du sous-jacent. Ceci est confirmé, pour les modèles à volatilité stochastique. L'allure des courbes correspondantes est vraisemblablement conforme à la théorie et, en tout cas, semblable à la courbe théorique relative au modèle de Black & Scholes.
- Jusqu'à un point d'inflexion situé à une valeur de l'indice sous-jacent de 3649, le modèle VS9 OU donne un delta supérieur à celui de VS9  $q=cte$ , qui à son tour a un delta supérieur à celui de VS9 $q$ . Au-delà de ce point d'inflexion, il y'a un renversement, où le dernier modèle, a le Delta le plus grand, suivi du modèle VS9 OU et VS9 $q=cte$ , qui a un Delta proche, mais par valeur inférieure. Toutes ces courbes évoluent, asymptotiquement, vers une valeur de Delta égale à l'unité.
- Le modèle VS9 $q$  est le plus sensible à la variation brusque de la volatilité, puisque la volatilité est élevée à une puissance supérieure à 1, dans la formule de la volatilité de la volatilité.

Dans la mesure où le Delta sera utilisé dans toutes les stratégies de couverture à étudier, le calcul du Delta est, donc, déterminant, pour la suite des calculs et pour les conclusions à en tirer.

Pour le modèle de Black & Scholes et les modèles à volatilité stochastique, le calcul du Delta est cohérent avec la théorie. Pour les modèles neuronaux, ce

n'est pas tout à fait le cas, et il serait judicieux de considérer la formule du Delta, relatif au modèle de Black & Scholes, pour étudier les stratégies de couverture, relatives aux modèles neuronaux.

### 5.2.4.1.2 Calcul du gamma

Pour le modèle de Black & Scholes (BS9) et le modèle neuronal (RNBS9), on a utilisé, aussi bien pour l'un que pour l'autre, la formule de calcul du Gamma, relative au modèle de Black & Scholes. Pour le modèle BS9, on a utilisé la méthode1, alors que pour le modèle RNBS9, on a utilisé la méthode2 (cf §5.3.3). Les résultats de ces calculs sont illustrés dans le graphique 110.

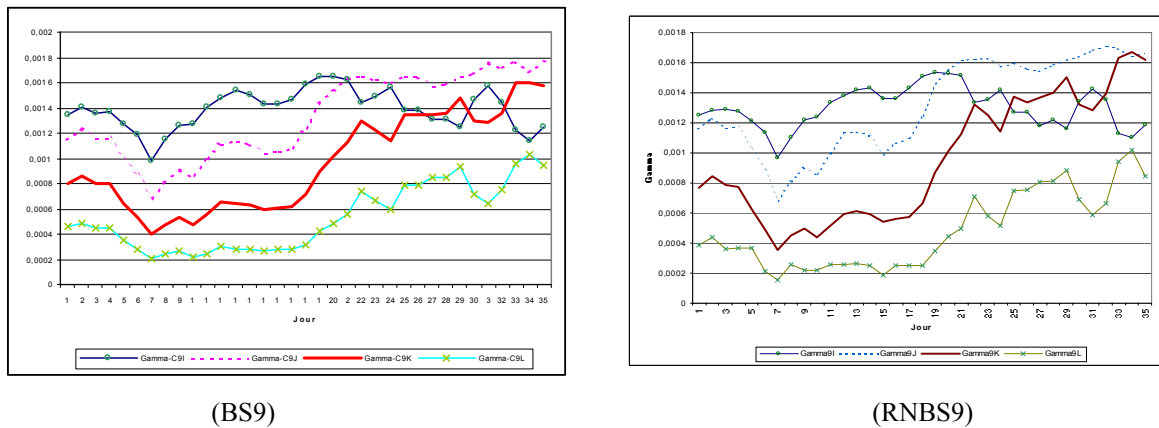


Figure 110 : Gamma des contrats de la classe 9, par les modèles BS9 et RN9BS

A la lumière de ces résultats, on remarque que :

- Bien que les deux méthodes de calcul soient différentes, les profils des courbes de Gamma, en fonction du temps, sont les mêmes. On retrouve, également, le même ordre entre ces courbes.
- Si, jusqu'au 20<sup>em</sup> jour, on peut faire un rapprochement, entre l'ordre des Gammas et des prix d'exercice des différentes options, ceci n'est pas vérifié au delà de cette journée. Ceci, est normal, parce que lorsque la parité de l'option tend vers 1, le Gamma tend vers sa valeur maximale. Plus le prix d'exercice est élevé, plus cette valeur maximale est élevée. C'est ainsi, qu'on assiste à un renversement de l'ordre de début de période, à l'approche d'une parité égale à l'unité, qui n'aura pas lieu, le même jour, pour les différents contrats d'option.

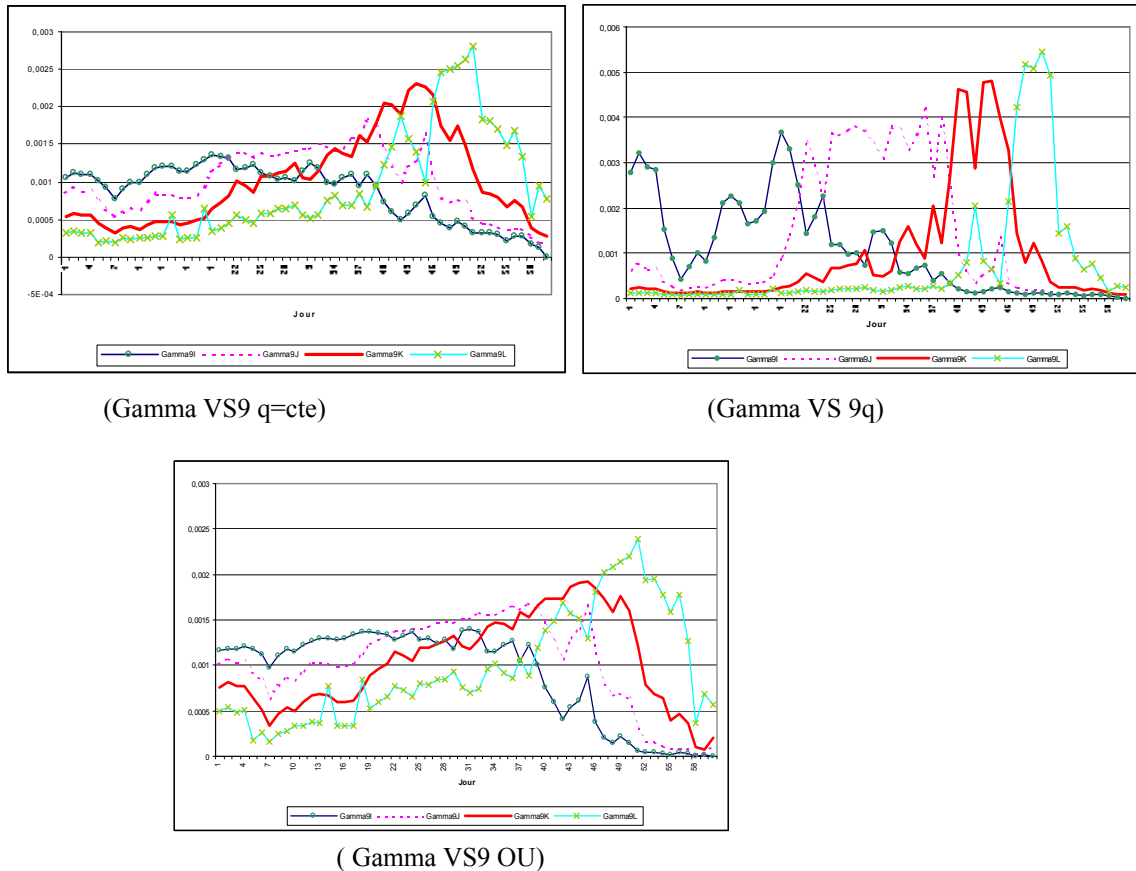


Figure 111 Gamma pour les contrats de la classe 9 calculée

Ce qui vient d'être dit pour les modèles BS9 et RNBS9 est manifeste, dans le cas où les données vont jusqu'à la date d'échéance, lorsqu'on considère les modèles à volatilité stochastique. En effet, on remarque que plus la valeur du prix d'exercice est élevée, plus la valeur maximale du Gamma est grande, plus la valeur correspondante à des faibles parités est faible (c'est le cas du début de la période), et, enfin, plus cette valeur maximale, tarde à arriver, puisque le long de toute la période, l'indice n'a cessé d'augmenter et que l'égalité entre la valeur de l'indice est le prix d'exercice (parité égale à l'unité qui correspond à la valeur maximale de Gamma), se fait, d'autant plus tard, que le prix d'exercice est élevé.

Pour le modèle de Black & Scholes, si le delta est représenté par la fonction de répartition de la loi Log-normale, le Gamma qui n'est autre que la dérivée du Delta, est la fonction densité de probabilité de cette même loi log-normale dont

la moyenne dépend du prix d'exercice. Ceci peut être une justification de la remarque précédente. La valeur maximale du Gamma correspond à une valeur

du sous-jacent égale à :  $Ee^{-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}$ .

Puisque les prix d'exercice des différents contrats de la classe 9 sont tel que :  $E_{9L} > E_{9K} > E_{9J} > E_{9I}$ , les valeurs correspondantes à des faibles parités sont dans un ordre inverse, les valeurs maximales, ainsi que leurs dates correspondantes sont dans le même ordre que ces prix d'exercice.

Quel que soit, le modèle à volatilité stochastique, les dates des valeurs maximales des Gammas sont les mêmes pour un contrat d'option donné. Par exemple, pour le contrat 9L, pour chacun des modèles à volatilité stochastique considérés, la valeur maximale des Gammas correspond au jour 50 (cf figure 111).

Si on représente les Gammas du contrat 9L, pour les différents modèles, pour des faibles parités ( début de période), on obtient le graphique 112.

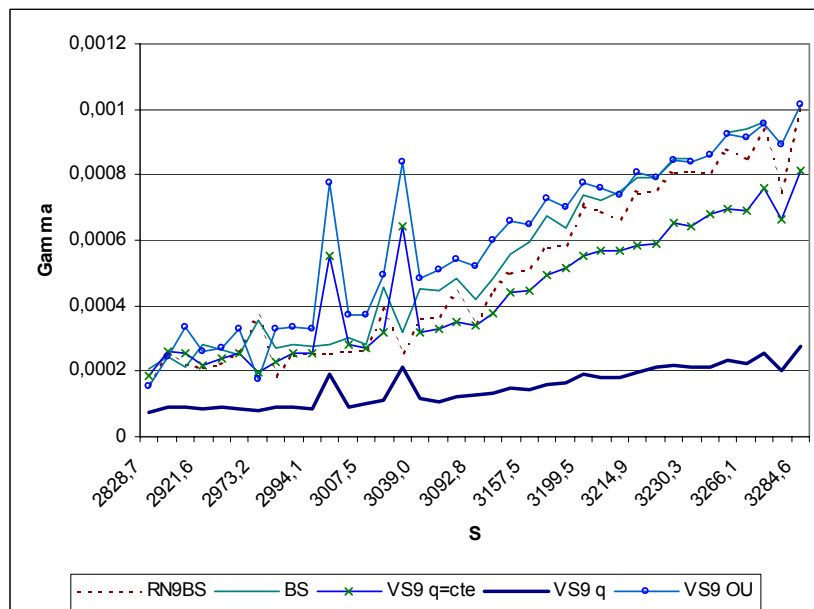


Figure 112 : Gammas des différents modèles de calcul en fonction du prix du sous-jacent, pour le contrat 9L, sur la période commune du 2/01/1998 au 19/02/1998

A la lumière des courbes représentées, dans ce graphique 112, on remarque que :

- Le modèle VS9q donne les plus faibles valeurs de gamma, quelle que soit la valeur du sous-jacent, qui est croissante jusqu'à la valeur 3285 environ, c.-à-d. en dessous du prix d'exercice du contrat 9L (3550), avec une parité inférieure, donc, à l'unité.
- Le modèle BS9 donne une courbe de Gamma, en fonction de la valeur de l'indice, proche de celle du modèle à volatilité stochastique VS9 OU, voire même confondues, au-delà de 3215.
- La courbe de Gamma, relative à RNBS9, est proche de celle de BS9, tout en étant en dessous, avec la même allure. Ces deux courbes se situent entre les deux courbes des modèles à volatilité stochastique VS9 q=cte et VS9 OU.

Si on représente les Gammas relatifs aux modèles à volatilité stochastique, pour le contrat 9L, en fonction de la valeur de l'indice sous-jacent S, on obtient le graphique 113.

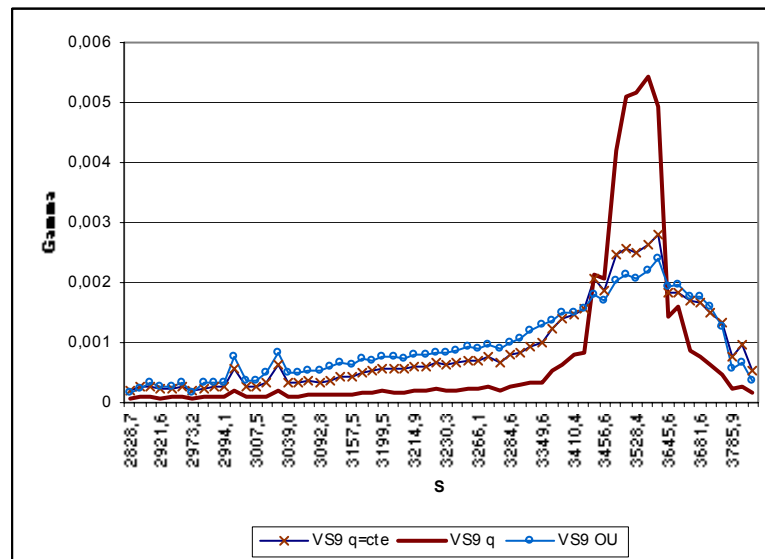


Figure 113 : Gammas du contrat 9L calculés avec les modèles à volatilité stochastique, en fonction du prix du sous-jacent, pour la période du 2/01/1998 au 25/03/1998

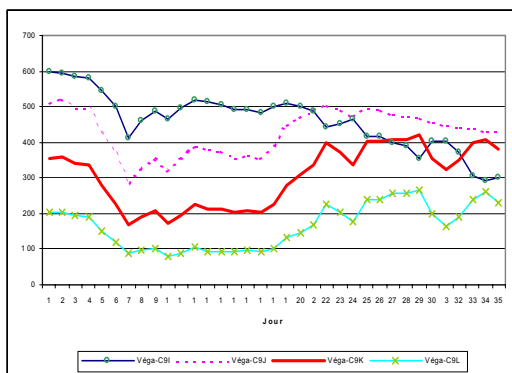
A la lumière de ces résultats, on remarque que :

- Les courbes des Gammas, pour les trois modèles à volatilité stochastique, ont la même allure.

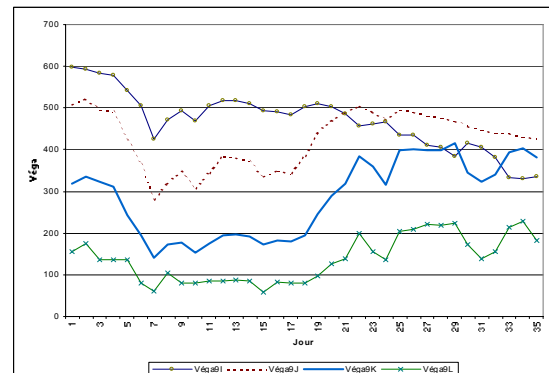
- Les valeurs maximales correspondent à une même valeur du sous-jacent, qui n'est autre que le prix d'exercice de l'option 9L (3550.00).
- Pour le modèle de Black & Scholes, le Gamma représente la fonction densité de probabilité de la loi log-normale. Vu l'allure des courbes de Gamma en fonction de S, pour les modèles à volatilité stochastique, on peut faire le rapprochement avec la densité de probabilité de la loi log-normale. Cependant, pour ces modèles la volatilité, n'est pas constante, comme c'est le cas du modèle de Black & Scholes. Elle varie en même temps que l'indice sous-jacent. Autrement dit, le Gamma est ici une fonction des deux variables d'état : le prix du sous-jacent et la volatilité.
- Les autres modes de calcul, donnent, pour les modèles neuronaux, des valeurs de Gamma, parfois, légèrement, négatives. Ceci est du au fait que le Delta n'est pas une fonction, strictement, monotone, de la valeur de l'indice sous-jacent.

### 5.2.4.1.3 Calcul du Véga

Pour le modèle de Black & Scholes (BS9) et le modèle neuronal (RNBS9), on a utilisé, aussi bien pour l'un que pour l'autre, la formule de calcul du Véga relative au modèle de Black & Scholes. La seule différence est que pour le premier modèle, on a utilisé la méthode1, alors que pour le second, on a utilisé la méthode2 (cf §5.2.3). Les résultats de ces calculs sont illustrés dans les graphiques 114.



(BS9)



(RN9BS)

Figure 114 : Véga des contrats d'option de la classe 9, pour les modèles BS9 et RN9BS

On peut conclure, à la lumière de ces résultats, qu'il est équivalent de calculer le Véga, par la méthode 1 que par la méthode 2 précitées, quand il s'agit d'appliquer la formule de Black & Scholes pour le calcul du Véga.

Si on considère, en plus, les trois modèles à volatilité stochastiques, on obtient les courbes du Véga, des différents contrats d'options de la classe 9, illustrées dans le graphique 115.

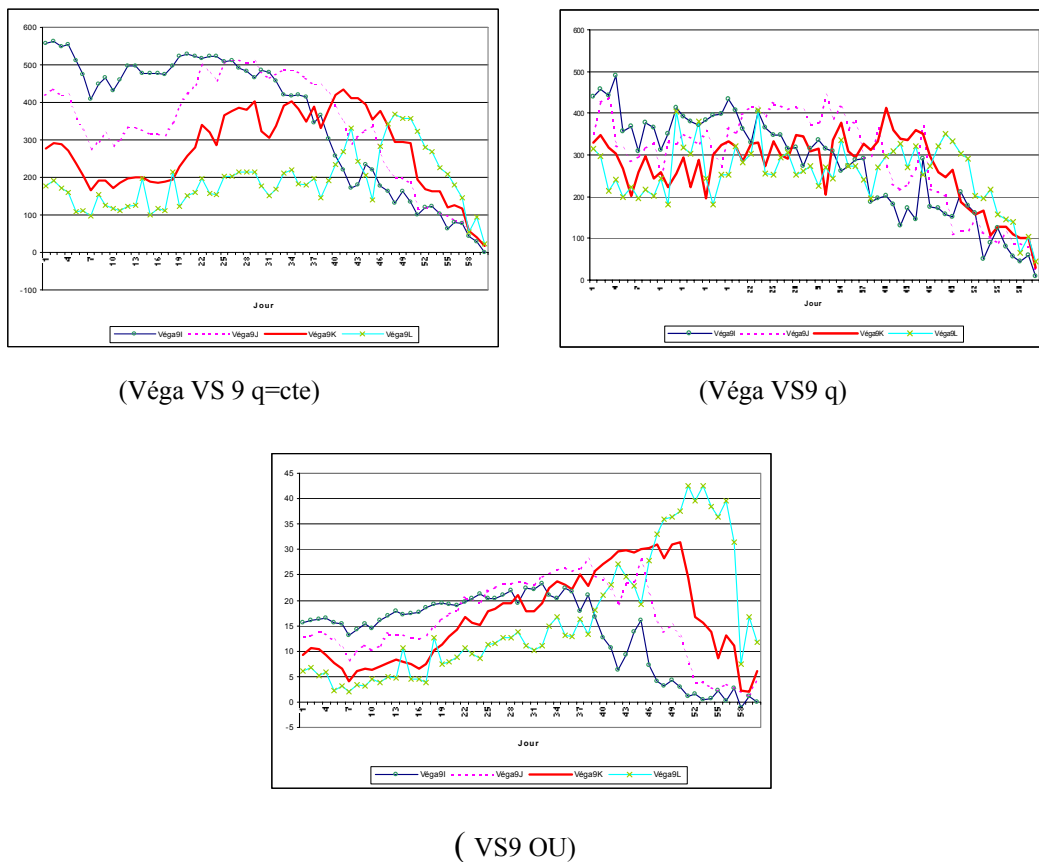


Figure 115 Végas pour les contrats de la classe 9, modèles à volatilité stochastique

A la lumière de ces résultats, on remarque que :

- L'allure de la courbe du Véga diffère d'un contrat d'option de la classe 9 à un autre.
- En début de période, il y'a un ordre entre les Végas des contrats qui s'inverse, en fin de période.
- A chaque contrat d'option de la classe 9, correspond une valeur maximale du Véga, qui correspond à une valeur de l'indice, égale au prix d'exercice

du contrat considéré. Cette valeur maximale ne se voit pas, nettement, dans le cas du modèle VS9q.

- Pour les contrats de la classe 9, les valeurs du Véga, données par le modèle VS9OU, sont très faibles, par rapport, à celles données par les autres modèles à volatilité stochastique.

En représentant, les courbes du Véga, données par les différents modèles à volatilité stochastique, ainsi que RNBS9 et BS pour le contrat 9L, (graphique 116), on peut formuler les remarques suivantes :

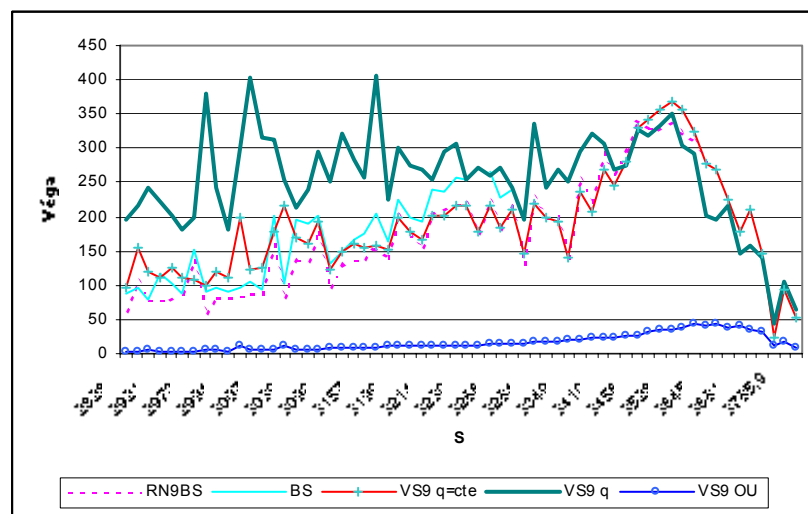


Figure 116 : Végas du contrat 9L, pour les différents modèles en fonction de la valeur du sous-jacent S

En début de période, les différentes courbes sont très proches et ont quasiment la même allure, à part celles relatives aux modèles VS9q et VS9OU. Le modèle VS9 q donne des valeurs de Gamma, relativement élevées, avec une certaine instabilité, alors que le modèle VS9OU donne des valeurs très faibles (très proches de zéro).

En fin de période, ce qui correspond à une volatilité et une parité élevées, les courbes VS9 q=cte et VS9 q retrouvent une même allure, et sont très proches. Alors que la courbe, relative au modèle VS9OU, reste à un niveau très faible.



A l'instar des courbes des Gammas, les courbes des Véga pour les modèles à volatilité stochastique, présentent des valeurs maximales pour une même valeur du sous-jacent, égale au prix de l'exercice de l'option 9L : (3550.00).

Les Végas des modèles à volatilité stochastique tendent vers zéro à l'approche de l'échéance du contrat d'option.

Pour le modèle de Black & Scholes, la courbe du Véga est en cloche. Dans le cas des modèles à volatilité stochastique, on retrouve cette forme, sauf que l'allure est différente, dans la mesure, où la volatilité est stochastique.

### 5.2.4.2 Stratégie Delta-neutre

#### 5.2.4.2.1 Contrats de la classe 1

Après avoir appliqué l'algorithme de calcul de l'erreur de couverture moyenne relative, pour le modèle de Black & Scholes et le modèle neuronal, et concernant les contrats de la classe 1 de la base intraday, nous obtenons le graphique 117.

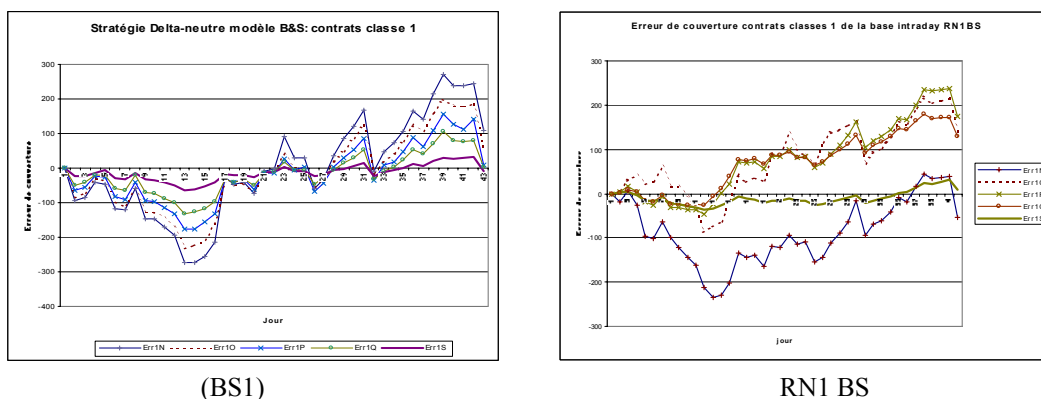


Figure 117: Erreurs de couverture Delta-neutre relatives aux différents contrats de la classe 1 de la base intraday. BS1 : modèle de Black & Scholes et RN1BS : modèle neuronal

Pour le modèle de Black & Scholes, on remarque que, plus le prix d'exercice est faible, plus l'erreur de couverture en valeur absolue a de plus grandes amplitudes, et vice versa. Il existe, donc, un ordre, entre les contrats et le contrat 1N a les amplitudes les plus grandes, alors que le contrat S a les amplitudes les plus faibles. On ne retrouve pas cet ordre dans le modèle neuronal.

Dans le cas du modèle de Black & Scholes, les ajustements des valeurs de delta (ratio de couverture) engendrent des retours de l'erreur de couverture vers zéro. Ceci est mis en évidence par le graphique 117. Alors que pour le modèle neuronal, à part pour les contrats 1N et 1S, l'erreur ne présente pas de retour à zéro. Pour les deux modèles, le contrat 1S donne les meilleurs résultats pour la couverture, puisque l'erreur de couverture est, constamment, proche de zéro.

Les erreurs de couverture absolues moyennes relatives, des différents contrats de la classe 1, correspondantes à la stratégie Delta-neutre, pour le modèle neuronal et le modèle de Black & Scholes sont résumées dans le tableau 78.

	<b>Err1N</b>	<b>Err1O</b>	<b>Err1P</b>	<b>Err1Q</b>	<b>Err1S</b>
<b>RN1</b>	1,52608	1,34396	4,58092	7,58335	0,43482
<b>RN1bar</b>	0,02341	0,00232	0,06022	0,06367	0,01395
<b>RN1BS</b>	0,00427	0,02277	0,04549	0,06757	0,00432
<b>BS1</b>	0,01351	0,01371	0,02300	0,02019	0,01668

Tableau 78 : Erreur de couverture absolue moyenne relative, pour les différents contrats de la classe 1 (base intraday), calculée par les différentes méthodes.

Les résultats de ce tableau suscitent les remarques suivantes :

- Compte tenu des aberrations, trouvées dans le calcul du Delta, les résultats des modèles de calcul RN1 et RN1bar ne sont pas très significatifs. Ainsi, la comparaison se limite aux modèles RN1BS et BS1.
- L'erreur de couverture moyenne relative absolue est minimale pour le contrat 1N.
- Le niveau de l'erreur reste faible, pour tous les contrats. Pour les contrats 1N et 1S, le modèle neuronal donne des résultats meilleurs que pour le modèle de Black & Scholes, alors que pour les contrats 1O, 1P et 1Q c'est l'inverse. Ceci est en conformité avec le graphique 117.

#### **5.2.4.2.2 Contrats de la classe 9**

Les résultats de la stratégie Delta-neutre pour les contrats de la classe 9, à savoir, l'erreur de couverture, et l'endettement, correspondants au modèle de Black & Scholes sont illustrés dans le graphique 118.

A la lumière de ces résultats, on peut faire les remarques suivantes :

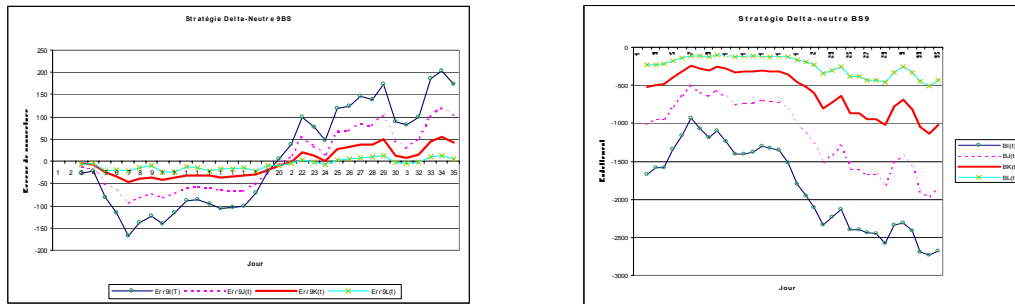


Figure 118: Erreur de couverture et endettement, relatifs aux différents contrats de la classe 9, et correspondants au modèle de Black & Scholes.

- Concernant le modèle de Black & Scholes, on retrouve la même relation, entre l'ordre des prix d'exercice et la valeur absolue, au niveau de l'erreur de couverture, pour les contrats de la classe 9 que pour ceux de la classe 1. Ainsi, le contrat 9I qui a le prix d'exercice le plus faible a l'erreur de couverture, la plus élevée, en valeur absolue et c'est l'inverse, pour le contrat 9L.

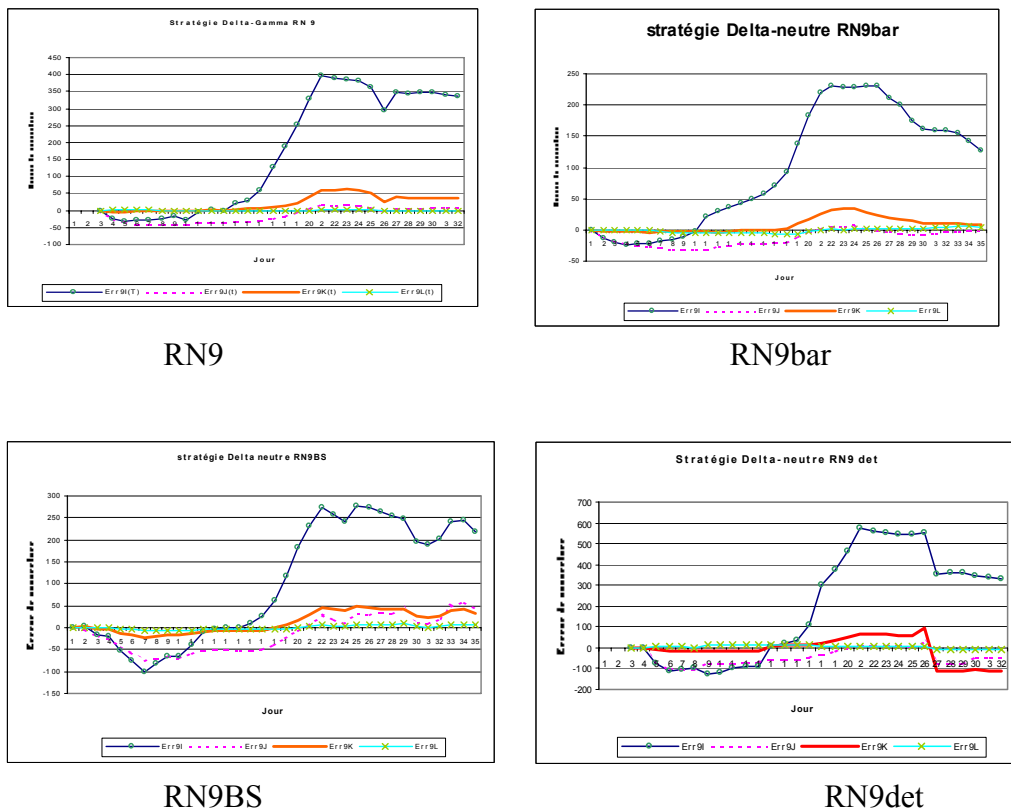


Figure 119 : Erreurs de couverture relatives à la stratégie Delta-neutre pour les différents contrats de la classe 9 et pour les différentes méthodes de calcul du Delta

- Il existe, également, une relation entre l'ordre des prix d'exercice et l'ordre de l'endettement, pour les différents contrats. En effet, plus l'erreur de couverture est grande en valeur absolue, plus l'endettement est grand en valeur absolue. C'est ainsi qu'au contrat 9I, correspond l'endettement le plus élevé et au contrat 9L, l'endettement le plus faible.

Pour le modèle neuronal, les différents modes de calcul (RN9, RN9bar, RN9BS et RN9det) donnent des erreurs de couverture, avec des courbes ayant des allures similaires (cf figure 119). Pour le contrat 9L, l'erreur de couverture est, constamment, proche de zéro, quel que soit le modèle de calcul.

Globalement, les résultats du modèle neuronal, sont très différents de ceux du modèle de Black & Scholes. Le mode de calcul RN9BS donne les résultats les plus proches de ceux du modèle de Black & Scholes.

Si on considère les modèles à volatilité stochastique ( figures 120, 121 et 122), on remarque, pour la stratégie Delta-Gamma neutre, que :

- quand la volatilité est stationnaire, les courbes des erreurs de couverture ont tendance à retourner à zéro, à chaque observation (donc à chaque ajustement). Mais la variation brusque de la volatilité implicite, en fin de contrat, a engendré une augmentation incessante de l'erreur de couverture. Ceci est normal, puisque la stratégie Delta-neutre permet de se couvrir contre les variations de l'indice sous-jacent et non pas contre celles de la volatilité.

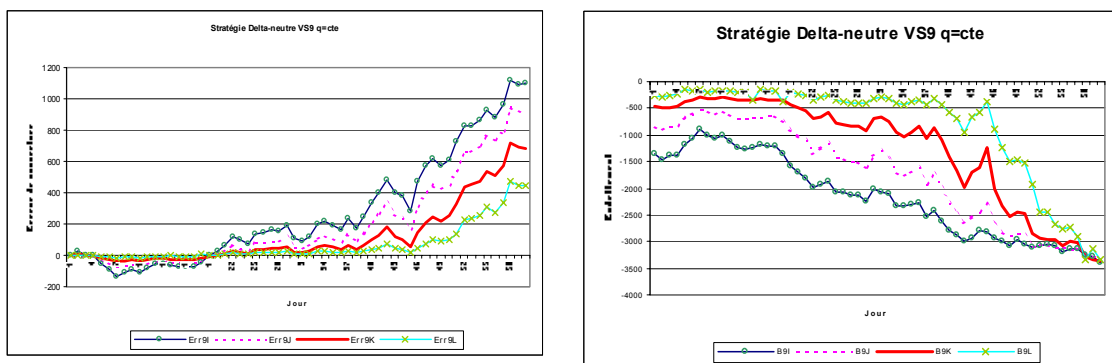


Figure 120: Erreur de couverture et endettement, Stratégie Delta-neutre, modèle VS9 q=cte, contrats de la classe 9.

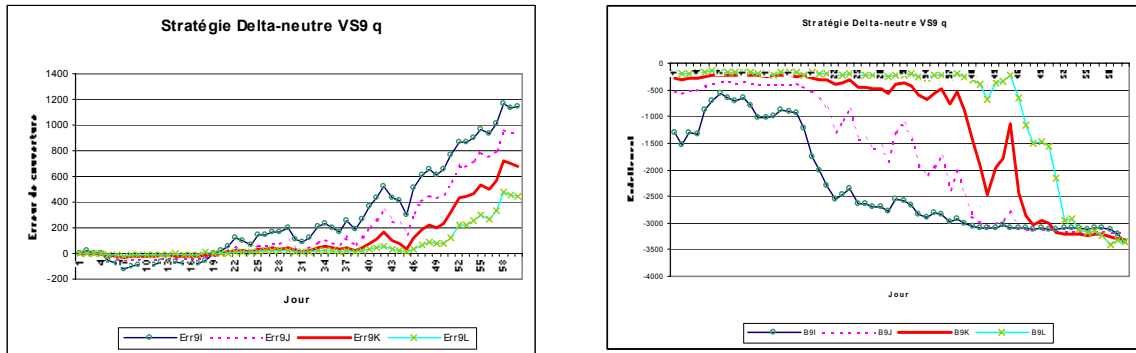


Figure 121: Erreur de couverture et endettement, Stratégie Delta-neutre, modèle VS9 q, contrats de la classe 9

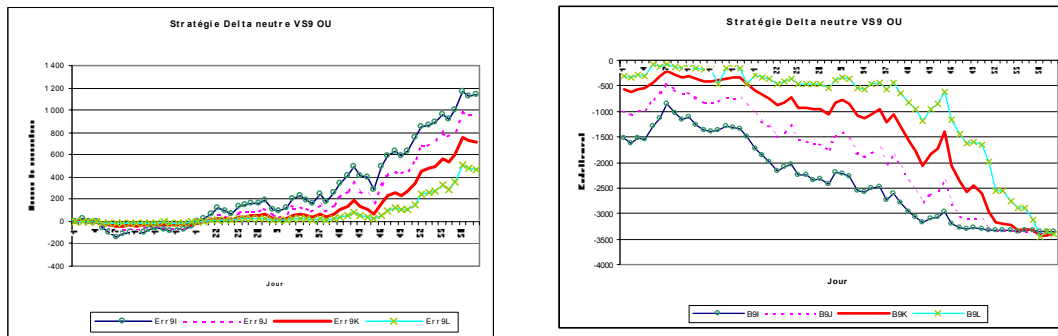


Figure 122: Erreur de couverture et endettement, Stratégie Delta-neutre, modèle VS9 OU, contrats de la classe 9.

- Quel que soit le modèle à volatilité stochastique, les courbes de l'erreur de couverture, en fonction du temps, sont quasiment les mêmes.
- On retrouve exactement la même relation d'ordre entre les prix d'exercice et les niveaux des erreurs de couverture, pour les contrats de la classe 9, que pour le modèle de Black & Scholes. C'est, également, vrai, pour l'endettement.
- L'erreur de couverture augmente, en fin de période à des niveaux relativement élevés, qui diffèrent, d'un contrat de la classe 9 à un autre. L'endettement, également, augmente en fin de période, mais pour les différents contrats les courbes de l'endettement se rejoignent et évoluent vers une limite qui semble être asymptotique. Cette limite est d'environ 3500.00, quel que soit le contrat considéré de la classe 9 et le modèle à volatilité stochastique.

Si on représente, l'erreur de couverture et l'endettement, relatifs à une stratégie Delta-neutre, pour tous les contrats de la classe 1, pour tous les modèles et jusqu'à la date du 28/02/1998, on obtient les graphiques 123. On remarque que : Les modèles à volatilité stochastique donnent, tous, des valeurs de l'erreur de couverture et de l'endettement très proches. Parmi tous les modèles, c'est le modèle RN9OU qui a la plus grande amplitude de l'erreur de couverture, sauf pour les valeurs négatives ou le modèle de Black & Scholes a une amplitude plus grande. Le modèle RN9OU présente, également, le plus grand endettement.

- Les modèles RN9bar et RN9BS donnent les erreurs de couverture les plus faibles.
- La courbe de l'erreur de couverture a la même allure que celles des modèles à volatilité stochastique. Par contre, elle se situe en dessous de ces courbes.

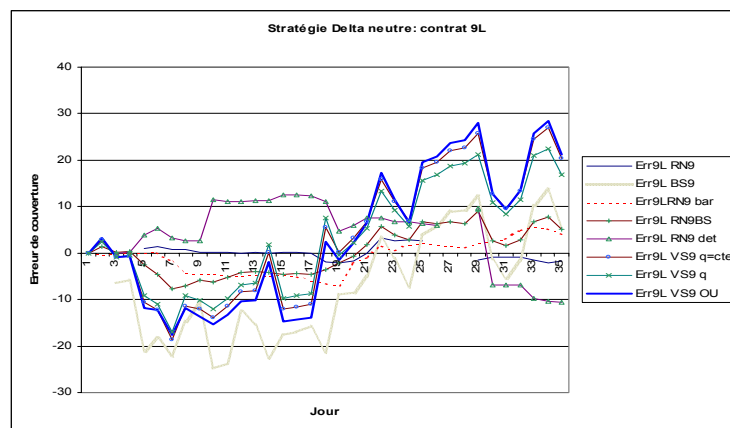


Figure 123: Erreur de couverture, stratégie Delta-neutre, pour tous les modèles, contrat 9L, jusqu'au 18/02/1998.

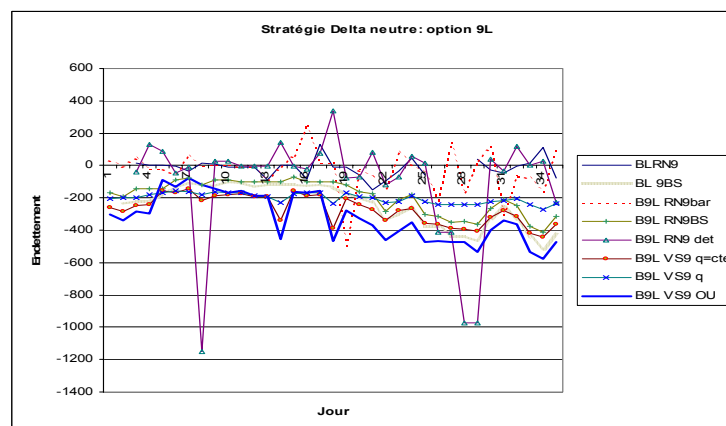


Figure 124: Endettement, stratégie Delta-neutre, pour tous les modèles, contrat 9L, jusqu'au 18/02/1998.

- La courbe de l'endettement, relative au modèle de Black & Scholes, est très proche de celles des modèles à volatilité stochastique.
- Les modèles RN9, RN9bar et RN9 det, ont tous des courbes d'endettement qui présentent des oscillations autour de zéro.

Si on considère le contrat 9L, l'erreur de couverture et l'endettement, relatifs aux modèles à volatilité stochastique, pour une stratégie Delta-neutre, sur l'ensemble de la période de couverture s'étalant du 2/02/1998 au 31/03/1998, sont représentés dans les graphiques 125 et 126.

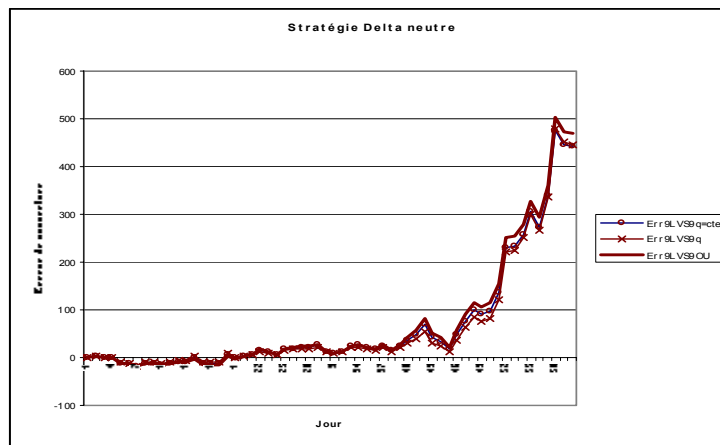


Figure 125: Erreur de couverture, stratégie Delta-neutre, modèles à volatilité stochastique, contrat 9L, sur l'ensemble de la période de couverture

A ce niveau, on peut faire les remarques suivantes :

- Les courbes de l'erreur de couverture, relatives aux modèles à volatilité stochastique, sont quasiment confondues, si on considère le contrat 9L.

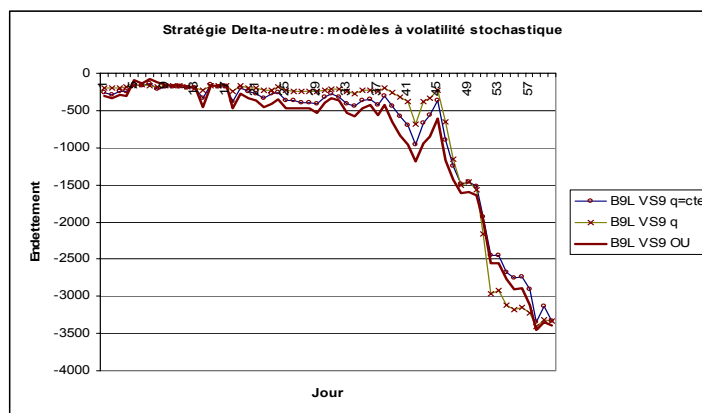


Figure 126: Endettement, stratégie Delta-neutre, pour ces modèles à volatilité stochastique, contrat 9L, sur l'ensemble de la période de couverture.

- En début de période, l'erreur est voisine de zéro, quel que soit le modèle, puis elle augmente, brusquement, vers une valeur de 500, suite à l'augmentation brusque de la volatilité.
- Le modèle VS9OU donne, une erreur de couverture, légèrement supérieur à celle de VS9 q=cte, dont l'erreur est légèrement supérieure à celle de VS9q.
- L'endettement, est resté au voisinage de zéro, en début de période, avant d'augmenter en valeur absolue, en fin de période, au même rythme que la volatilité. A l'échéance, il s'est stabilisé au alentour de 3500, quel que soit le modèle à volatilité stochastique considéré.
- On retrouve le même ordre, dans le temps, pour l'erreur de couverture et l'endettement en valeur absolue

Pour le calcul de l'erreur de couverture absolue moyenne relative, correspondant aux différents modèles et aux différents contrats, il va falloir considérer la même date de calcul, pour tous les modèles, soit la date commune du 18/02/1998. Pour cette période du temps, la volatilité est, relativement, stable autour de 20%. Les résultats de ce calcul sont résumés dans le tableau 79.

	<b>Err9I</b>	<b>Err9J</b>	<b>Err9K</b>	<b>Err9L</b>
<b>RN9</b>	0,09695	0,00858	0,04256	0,00436
<b>RN9bar</b>	0,03085	0,00063	0,00853	0,00971
<b>RN9 det</b>	0,08773	0,02563	0,12814	0,02798
<b>RN9BS</b>	0,05332	0,02490	0,03486	0,01223
<b>BS9</b>	0,03667	0,04276	0,03859	0,0111
<b>VS9 q=cte</b>	0,04040	0,04769	0,04789	0,04711
<b>VS9 q</b>	0,04288	0,03942	0,03930	0,03918
<b>VS9 OU</b>	0,04167	0,05037	0,05259	0,04893

Tableau 79: Erreur absolue moyenne relative de la couverture Delta-neutre des contrats de la classe 9 pour les différents modèles, à la date du 18 février 1998.

Le niveau de l'erreur, à cette date, est plutôt faible, pour l'ensemble des modèles. Ceci s'explique par la stabilité de la volatilité (le risque, lié à la volatilité, étant faible) et l'élimination du risque du sous-jacent, par la stratégie Delta-neutre. C'est pour le contrat 9L, qu'on enregistre les erreurs de couverture absolues moyennes relatives les plus faibles.



La comparaison entre le modèle de Black & Scholes et le modèle neuronal, peut se faire, au niveau de BS9 et RN9BS. Les modèles donnent des valeurs très proches. Si le modèle BS9 donne une valeur de l'erreur de couverture absolue moyenne relative, plus faible, que celle de RNBS9, pour le contrat 9I, c'est l'inverse pour le contrat 9J. Alors que, si on considère les contrats 9K et 9L, les deux modèles sont équivalents.

En ce qui concerne les modèles à volatilité stochastique, ils donnent chacun, quasiment, la même erreur de couverture, pour tous les contrats de la classe 9. Le modèle VS9q donne l'erreur la plus faible, suivi du modèle VS9 q=cte. Par rapport au modèle à volatilité stochastique, le modèle VS9OU donne l'erreur de couverture absolue moyenne relative la plus élevée.

Globalement, le niveau d'erreur est plus élevé pour VS9q que pour BS9 et RN9BS. Ceci ne permet pas de conclure, que l'un des modèles (Black & Scholes, neuronal, ou modèles à volatilité stochastique) est meilleur que l'autre, au niveau de la couverture, par une stratégie Delta-neutre.

Il est certain de la qualité de la couverture passe par la qualité de l'évaluation de l'option. De plus, les conclusions concernant la qualité de la couverture, mesurée par l'erreur de couverture absolue moyenne relative, peuvent changer du jour au lendemain, dans la mesure, où cette erreur dépend du jour de son calcul.

#### **5.2.4.3 Stratégie Delta Gamma neutre**

Pour la stratégie Gamma-neutre, pour chaque classe de contrat (1 ou 9), on étudie les différentes couvertures qui correspondent à un couple d'options de cette même classe. Une des options est à dupliquer. L'autre joue le rôle d'une option additionnelle. Au total, il y'a 20 couples d'options, de la classe 1, et 12 couples, de la classe 9. Pour chaque couple d'options d'une même classe, à chaque observation  $t$ , on calcule les Gammas, les coefficients  $x(t)$  et  $y(t)$  puis on

calcule la valeur de l'obligation  $B(t)$  et enfin on calcule l'erreur de couverture  $\varepsilon(t)$ .

#### 5.2.4.3.1 Contrats de la classe 1

L'erreur de couverture absolue moyenne relative, correspondant à une stratégie Gamma neutre, est donnée, pour tous les couples d'options de la classe 1, (option de base - option additionnelle), dans le tableau 80.

Erreur de couverture: stratégie Delta Gamma neutre Classe 1					
N°	options base	Option additionnelle	BS1	RN1bar	RN1BS
1	N	O	0,002435	0,022174	0,017364
2	N	P	0,002809	0,294009	0,025106
3	N	Q	0,002444	0,005028	0,027201
4	N	S	0,002317	0,040148	0,018659
5	O	N	0,004294	0,045525	0,035747
6	O	P	0,001256	0,245626	0,016173
7	O	Q	0,000470	0,141650	0,019629
8	O	S	0,000544	0,033609	0,001672
9	P	N	0,009525	0,258939	0,075235
10	P	O	0,002661	0,271396	0,025574
11	P	Q	0,001413	0,065135	0,002416
12	P	S	0,001085	0,117664	0,023026
13	Q	N	0,012211	0,808361	0,128845
14	Q	O	0,002304	0,315456	0,048504
15	Q	P	0,002189	0,294597	0,000033
16	Q	S	0,000594	0,240434	0,041037
17	S	N	0,023174	0,487823	0,040248
18	S	O	0,006060	0,247997	0,002939
19	S	P	0,002941	2,794390	0,023271
20	S	Q	0,001054	0,058762	0,019106

Tableau 80 : Erreur de couverture absolue moyenne relative, pour les stratégies Delta-Gamma-neutre, couple de contrats de la classe 1, modèle de Black & Scholes et modèle neuronal, à la date du 12/06/1998.

Le modèle de Black & Scholes donne des valeurs de l'erreur de couverture absolue moyenne relative, qui sont, nettement, plus faibles que celles de RN1BS. Le choix de la volatilité implicite, comme mesure de la volatilité, peut être à l'origine de cette constatation. L'erreur minimale enregistrée, correspond au modèle de Black & Scholes, où le contrat 1O joue le rôle de l'option de base, alors que le contrat 1S, celui de l'option additionnelle.

### 5.2.4.3.2 Contrats de la classe 9

Si on considère, les contrats de la classe 9, les erreurs de couverture, relatives au modèle de Black & Scholes et au modèle neuronal, pour la stratégie Delta Gamma neutre, peuvent être illustrées par le graphique 127.

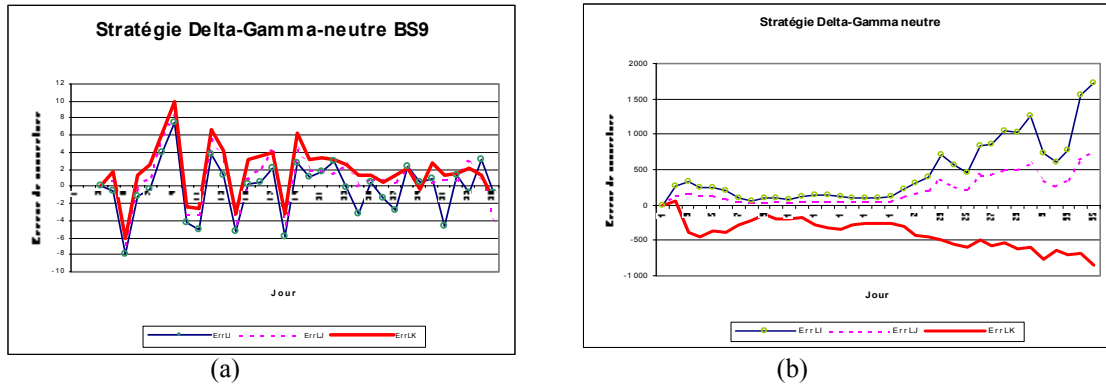


Figure 127 : Erreur de couverture absolue moyenne relative, en fonction du jour de couverture, stratégie Delta-Gamma-neutre, modèle BS9 et (b) modèle RNBS9, contrats de la classe 9. 9L=option de base, 9I, 9J ou 9K =option additionnelle

A la lumière de ces résultats, on remarque que :

- Pour le modèle de Black & Scholes, l'erreur de couverture oscille autour de zéro avec des valeurs extrêmes, relativement, faibles ( -8 et 10).
- Pour le modèle neuronal, l'allure de la courbe de l'erreur de couverture n'a rien à voir avec celle du modèle de Black & Scholes. De plus, elle évolue entre des valeurs extrêmes, relativement élevées, par rapport à celle du modèle de Black & Scholes. Elle s'éloigne de zéro, à l'approche de la date du 2/02/1998.

Pour les modèles à volatilité stochastique, le graphique 128 illustre l'erreur de couverture, pour la stratégie Delta-Gamma neutre, avec le contrat 9L et une des options 9I, 9J ou 9K comme option additionnelle.

A la lumière de ces résultats, on remarque que,

- Pour les trois modèles à volatilité stochastique, l'erreur de couverture a le même profil. Elle se situe, à un niveau, relativement proche de zéro, en début de période de couverture, mais à la fin de cette période, l'erreur explose, suite à l'augmentation brusque de la volatilité, pour atteindre des valeurs de 27000 pour VS9 q=cte, de 180000 pour VS9q et de 600000 pour VS9OU. Ceci est du

au fait qu'une stratégie Delta-Gamma-neutre ne permet pas une couverture contre le risque de la volatilité. L'erreur de couverture revient à zéro, à l'échéance, lorsque le temps à l'échéance atteint la valeur zéro.

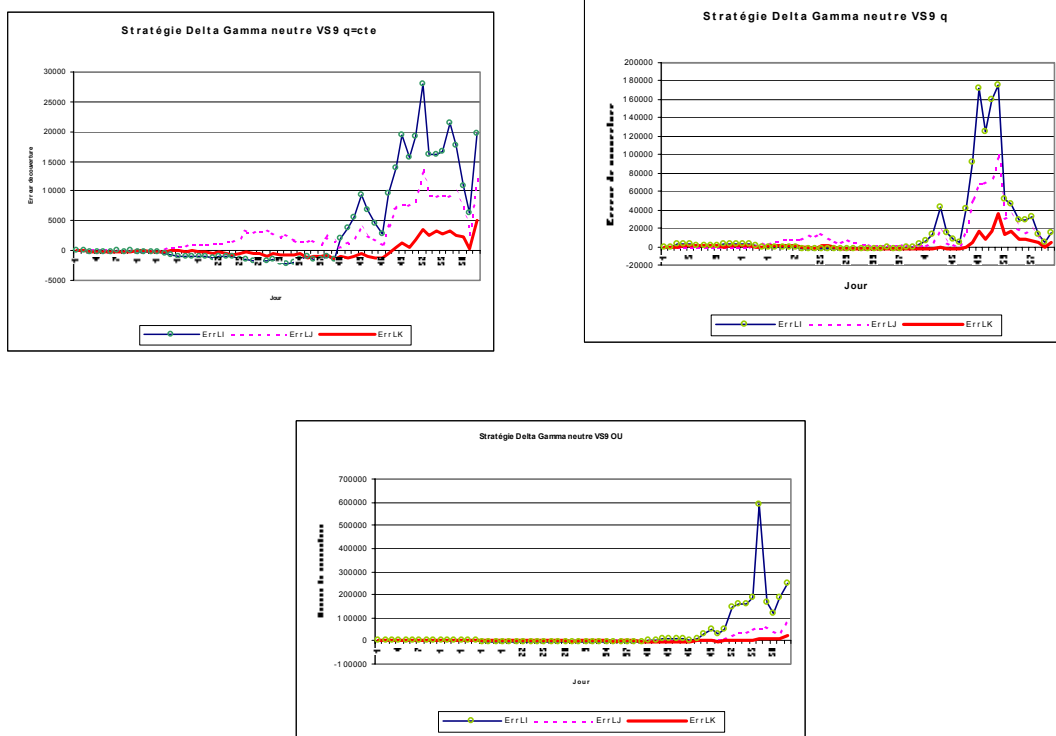


Figure 128 : Erreur de couverture, Stratégie Delta-Gamma-neutre, Modèles à volatilité stochastique (VS9q, VS9q=cte et VS9OU), contrats de la classe 9. 9L=option de base, 9I, 9J ou 9K =option additionnelle

- La stratégie basée sur les options 9L et 9K est la moins sensible, à cette variation brusque de la volatilité. Celle basée sur les contrats 9L et 9I est la plus sensible.

Si on représente l'erreur de couverture, relative à la stratégie Delta-gamma neutre, pour tous les modèles, avec 9L comme option de base et 9K comme option additionnelle, pour le début de la période de couverture, on obtient le graphique 129.

A la lumière de ces résultats, on remarque que :

- Le modèle de Black & Scholes donne une erreur de couverture constamment proche de zéro.

- Le modèle neuronal donne une erreur constamment négative. D'ailleurs, elle est proche des erreurs des modèles à volatilité stochastique VS9q=cte et VS9OU.

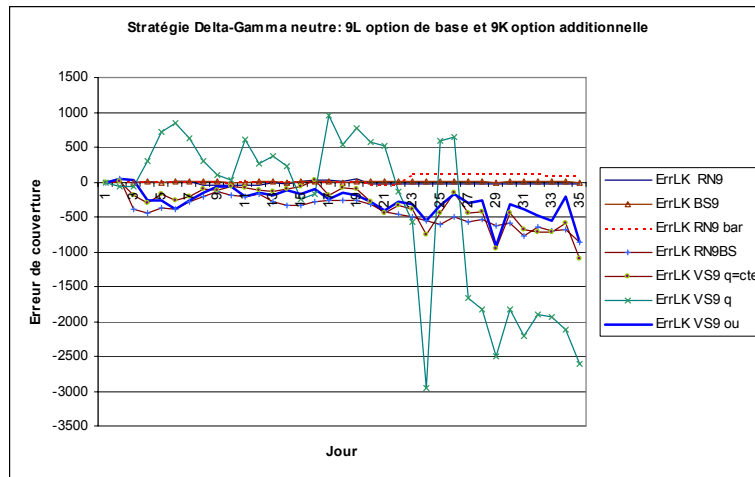


Figure 129 : Erreur de couverture, Stratégie Delta-Gamma-neutre, Tous les modèles, contrat 9L=option de base, 9K =option additionnelle, période du 2/02/1998 au 19/02/1998

Ces deux derniers modèles donnent, également, des erreurs de couverture, constamment, négatives. Parmi les modèles à volatilité stochastique, il n'y a que le modèle VS9q qui donne des erreurs de couverture, parfois positives et parfois négatives, avec des niveaux supérieurs à ceux des autres modèles.

Si on représente l'erreur de couverture, relative à la stratégie Delta-gamma neutre, pour les modèles à volatilité stochastique, avec 9L comme option de base et 9K comme option additionnelle, sur l'ensemble de la période de couverture, on obtient le graphique 130.

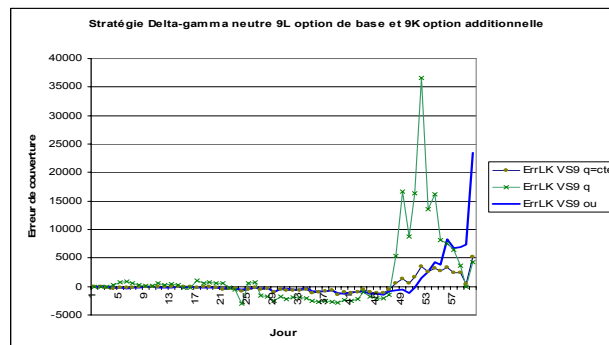


Figure 130 : Erreur de couverture, en fonction du jour de couverture, pour la stratégie Delta-Gamma-neutre, Modèles à volatilité stochastique, contrat 9L=option de base, 9K =option additionnelle, période du 2/02/1998 au 30/03/1998.

A la lumière de ces résultats, on remarque, qu'en fin de période de couverture :

- Pour le modèle VS9q, l'erreur de couverture atteint un pic de 37000 environ, avant de retourner à zéro. Ce pic est dû à une augmentation brusque de la volatilité, à l'approche de l'échéance des options 9L et 9K. Le retour à zéro est dû à l'antagonisme entre l'effet de l'augmentation de la volatilité et la baisse du temps à l'échéance.

- Le pic, relatif au modèle VS9q=cte, arrive le même jour que celui de VS9q, mais à un niveau nettement moins élevé.

- Le modèle VS9OU donne une erreur qui augmente brusquement, en fin de période de couverture, pour atteindre un niveau d'environ 25000, sans retour à zéro. Cette augmentation brusque se fait au même rythme que la volatilité implicite.

Si on représente l'endettement, relatif à la même stratégie précitée, pour l'ensemble des modèles, pour l'ensemble de la période de couverture, on obtient le graphique 131.

A la lumière de ces résultats, on remarque que :

- Compte tenu, d'une erreur de couverture, voisine de zéro, il n'y a pas recours à l'endettement, en début de période, sauf pour RN9 et RN9det, où le niveau de l'endettement oscille parfois, entre -10000 et + 10000.

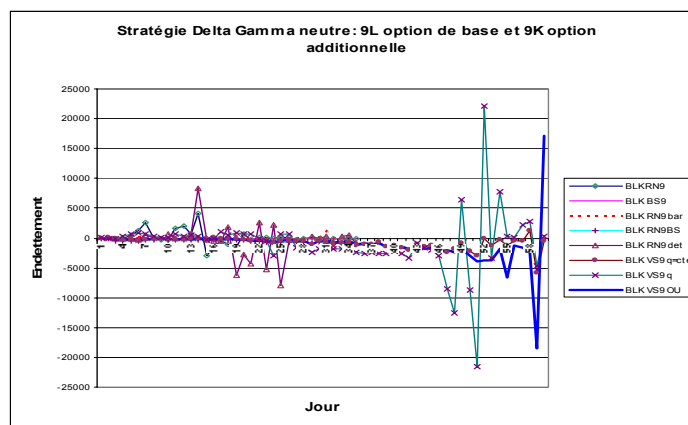


Figure 131 : Endettement, Stratégie Delta-Gamma-neutre, tous les modèles, contrat 9L=option de base, 9K =option additionnelle, période du 2/02/1998 au 30/03/1998.

- Pour les modèles VS9q=cte et VS9OU, en début de période, l'investisseur est toujours en position d'emprunteur, alors que pour le modèle VS9q, il est parfois en position prêteur et, parfois, en position emprunteur.
- En fin de période de couverture, l'endettement oscille, très fortement, pour les modèles VS9q et VS9OU, alors qu'il est, relativement, stable pour VS9q=cte.

Pour les différentes stratégies de couverture Delta-Gamma neutre, pour chacun des 12 couples possibles, et pour chacun des modèles, l'erreur de couverture absolue moyenne relative, à la date du 19/02/1998, est donnée dans le tableau 81.

Erreur de couverture: stratégie Delta Gamma neutre classe 9										
H	Options 1	Option 2	BS9	RN9	RN9bar	RN9 det	RN9BS	VS9 q=cte	VS9 q	VS9 OU
1	9I	9J	0,0015	0,0615	0,0005	0,5377	0,2511	0,2229	0,5492	0,2124
2	9I	9K	0,0005	0,0184	0,0089	0,1064	0,3888	0,3004	0,4709	0,5802
3	9I	9L	0,0044	10,2267	0,0472	0,1222	0,4539	0,2422	0,3119	0,4069
4	9J	9I	0,0043	0,1021	1,5329	0,2274	0,8269	0,6088	5,5820	0,6914
5	9J	9K	0,0023	0,0174	0,0281	0,2409	0,4532	0,4025	7,6673	18,7581
6	9J	9L	0,0001	25,2939	0,3658	0,1147	0,6677	0,0542	8,2499	5,2291
7	9K	9I	0,0029	0,0838	32,9306	0,4062	2,5788	1,1087	14,0696	2,8813
8	9K	9J	0,0044	0,1187	0,0494	0,8106	0,9130	0,0382	0,0067	1,6129
9	9K	9L	0,0005	6,1545	0,5466	0,1297	0,4319	1,7640	0,6135	3,0046
10	9L	9I	0,0022	0,0587	1,0806	0,1694	4,1861	2,4067	3,6859	3,5477
11	9L	9J	0,0136	8,5854	0,4361	0,2109	1,8700	3,3336	0,6600	21,0536
12	9L	9K	0,0047	0,0586	0,2567	2,3244	2,0719	2,5397	6,0094	1,9945

Tableau 81: Erreur de couverture absolue moyenne relative pour les différentes stratégies Delta-Gamma-neutre, pour chacun des modèles de couverture, pour les contrats de la classe 9 (base intraday), à la date du 19 février 1998

A la lumière des résultats de ce tableau, on remarque que :

- La stratégie Delta-Gamma neutre n'a amélioré la couverture que pour BS9. Pour les autres modèles, les résultats sont moins bons que ceux, relatifs à la stratégie Delta-neutre.
- Comme dans le cas de la stratégie Delta-neutre, le modèle de Black & Scholes BS9 donne les valeurs de l'erreur de couverture absolue moyenne relative, les plus faibles.

- Dans plusieurs cas, l'erreur de couverture absolue moyenne relative est supérieure à 1 (jusqu'à 32). C'est dû à un niveau d'erreur de couverture élevé à la date du 19/02/1998.
- On ne peut pas classer les modèles à volatilité stochastique, selon le critère l'erreur de couverture absolue moyenne relative, mais, globalement, on peut dire que le modèle  $VS9_{q=cte}$  présente une erreur plus faible que celle du modèle  $VS9_q$  et  $VS9_{OU}$ .
- Globalement, le modèle neuronal (RN9BS), donne une erreur plus grande que celle du modèle  $VS9_{q=cte}$ .

Comme, on l'a déjà dit, pour la stratégie Delta-neutre, les conclusions qui peuvent être prises, dépendent, étroitement, du jour de calcul de l'erreur de couverture absolue moyenne relative. Les conclusions qui peuvent être prises à un jour peuvent changer le jour suivant.

Il est certain que, dans le cas de la stratégie Delta-Gamma neutre, c'est le modèle de Black & Scholes qui donne l'erreur de couverture la plus faible, mais ceci peut être lié au choix de la volatilité implicite, comme mesure de la volatilité.

On peut, également, dire que le meilleur modèle de couverture, parmi les modèles à volatilité stochastique, est le modèle  $VS9_{q=cte}$ . Au niveau de la couverture, il a des performances, meilleures que celles du modèle neuronal RN9BS, si les Greeks sont calculés selon la formule de Black & Scholes pour ce dernier.

#### **5.2.4.4 Stratégie Delta-Véga-neutre**

Pour la stratégie Delta-Véga-neutre, pour chaque classe de contrat (1 ou 9), on étudie les différentes couvertures qui correspondent à un couple d'options de cette même classe. Une des options est à dupliquer. L'autre joue le rôle d'une option additionnelle. Au total il y'a 20 couples d'options, de la classe 1, et 12



couples, de la classe 9. Pour chaque couple d'options d'une même classe, à chaque observation  $t$ , on calcule les Végas, les coefficients  $x(t)$  et  $y(t)$  puis on calcule la valeur de l'obligation  $B(t)$  et enfin on calcule l'erreur de couverture  $\varepsilon(t)$ .

#### 5.2.4.4.1 Contrats de la classe 1

L'erreur de couverture absolue moyenne relative, correspondant à une stratégie Véga neutre, est donnée, pour les 20 couples d'options de la classe 1, (option de base - option additionnelle), dans le tableau 82.

Erreur de couverture: stratégie Delta Véga neutre Classe 1					
N°	options de base	Option additionnelle	BS1	RN1bar	RN1BS
1	N	O	0,002435	0,172139	0,015227
2	N	P	0,002809	0,010257	0,021946
3	N	Q	0,002444	0,143406	0,022847
4	N	S	0,002317	0,097335	0,013100
5	O	N	0,004294	0,072327	0,028109
6	O	P	0,001256	0,033992	0,013180
7	O	Q	0,000470	0,277052	0,013577
8	O	S	0,000544	0,488090	0,006983
9	P	N	0,009525	0,061127	0,055997
10	P	O	0,002661	0,124376	0,018519
11	P	Q	0,001413	0,242615	0,002585
12	P	S	0,001085	2,756489	0,032476
13	Q	N	0,012211	0,033117	0,077099
14	Q	O	0,002304	0,006508	0,023496
15	Q	P	0,002189	0,063268	0,010601
16	Q	S	0,000594	0,033270	0,050258
17	S	N	0,023174	5,019252	0,000222
18	S	O	0,006060	0,599902	0,019757
19	S	P	0,002941	0,424159	0,035425
20	S	Q	0,001054	0,943942	0,025036

Tableau 82 : Erreur de couverture absolue moyenne relative pour les différentes stratégies Delta-Véga-neutre, pour le modèle de Black & Scholes et modèle neuronal, contrats de la classe 1 (base intraday), à la date du 19/02/1998

A la lumière des résultats de ce tableau, on remarque que :

- Le modèle de Black & Scholes donne les valeurs de l'erreur de couverture les plus faibles. En tout cas, il a des performances de couverture meilleures que celles du modèle neuronal (RN9BS).
- La stratégie de couverture, avec 1O comme option de base et 1S comme option additionnelle, donne l'erreur la plus faible (0.000544), aussi bien

pour le modèle de Black & Scholes BS9, que pour le modèle neuronal RN9BS.

#### 5.2.4.4.2 Contrats de la classe 9

Si on considère, les contrats de la classe 9, les erreurs de couverture relatives au modèle de Black & Scholes et au modèle neuronal, pour la stratégie Delta Véga- neutre peuvent être illustrées par le graphique 132.

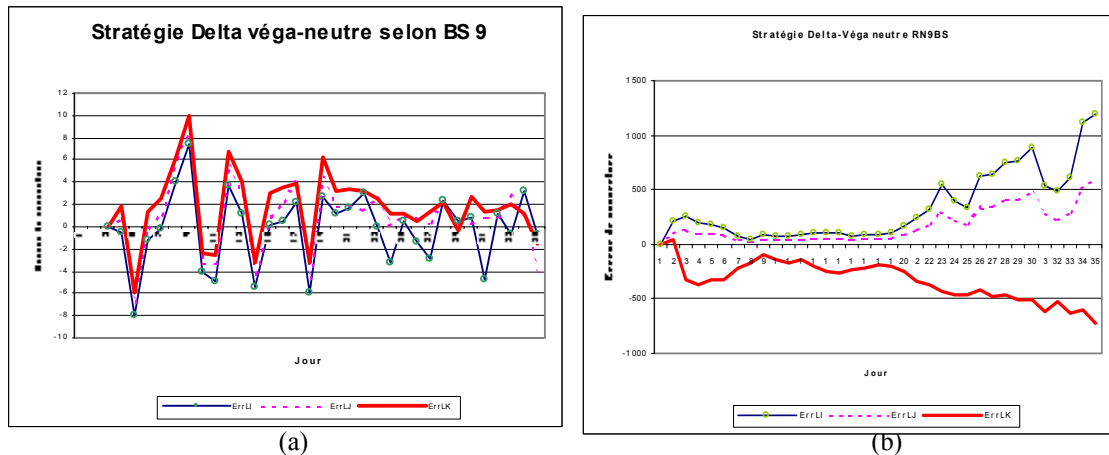


Figure 132: Erreur de couverture absolue moyenne relative, en fonction du jour de couverture stratégie Delta-Véga-neutre, pour le modèle BS9 et (b) modèle RNBS9, contrats de la classe 9. 9L=option de base, 9I, 9J ou 9K =option additionnelle

A la lumière de ces résultats, on remarque que :

- Pour le modèle de Black & Scholes, l'erreur de couverture oscille autour de zéro avec des valeurs extrêmes, relativement, faibles ( -8 et 10). Sa courbe est similaire à celle de la stratégie Delta-Gamma neutre.
- Pour le modèle neuronal, l'allure de la courbe de l'erreur de couverture n'a rien à voir avec celle du modèle de Black & Scholes. De plus, elle évolue entre des valeurs extrêmes relativement élevées, par rapport à ceux du modèle de Black & Scholes. Elle s'éloigne de zéro, à l'approche de la date du 2/02/1998.
- L'erreur relative à la stratégie LK est toujours négative, alors que celles des stratégies LI et LJ, sont toujours positives.

Pour les modèles à volatilité stochastique, le graphique 133 illustre l'erreur de couverture, en fonction du jour de couverture, pour la stratégie Delta-Véga neutre, avec le contrat 9L, avec une des options 9I, 9J ou 9K, comme option additionnelle.

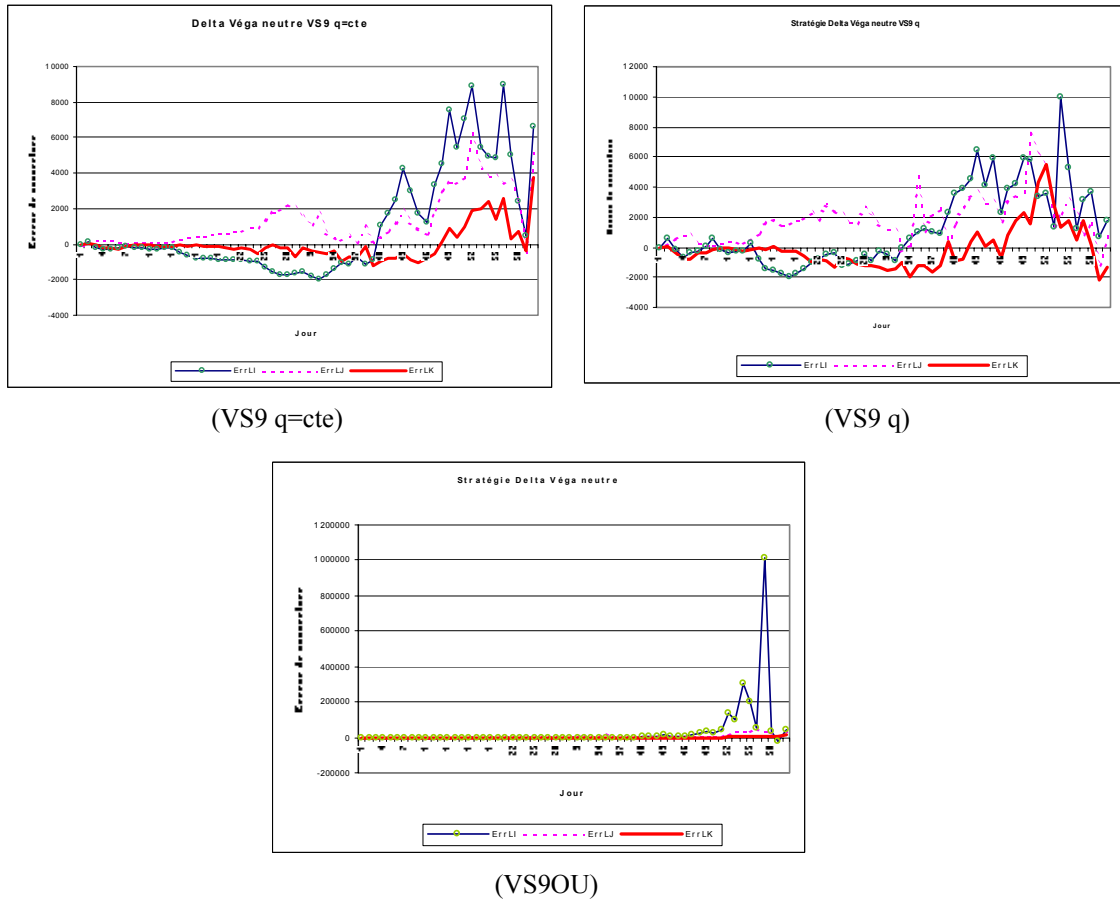


Figure 133: Erreur de couverture, Stratégie Delta-Vége-neutre, Modèles à volatilité stochastique (VS9q, VS9q=cte et VS9OU), contrats de la classe 9. 9L=option de base, 9I, 9J ou 9K =option additionnelle

A la lumière de ces résultats, on remarque que,

- Pour les trois modèles à volatilité stochastique, l'erreur de couverture se situe, à un niveau, relativement proche de zéro, en début de période de couverture, mais à la fin de cette période, l'erreur explose, pour atteindre des valeurs de 9000 pour VS9 q=cte, de 10000 pour VS9q et de 1000 000 pour VS9OU, pour le couple de contrats 9L et 9I. L'erreur de couverture revient à zéro, à l'échéance, lorsque le temps à l'échéance atteint la valeur zéro.
- La stratégie basée sur les options 9L et 9K est la moins sensible, à cette variation brusque de la volatilité. Celle basée sur les contrats 9L et 9I est la plus sensible.

L'erreur de couverture relative au modèle de Black & Scholes se situe à un niveau, bien plus important, que celui du modèle de Black & Scholes et le modèle neuronal.

Si on représente l'erreur de couverture, relative à la stratégie Delta-Véga neutre, pour tous les modèles, avec 9L comme option de base et 9K comme option additionnelle, sur la période de couverture considérée, on obtient le graphique 134.

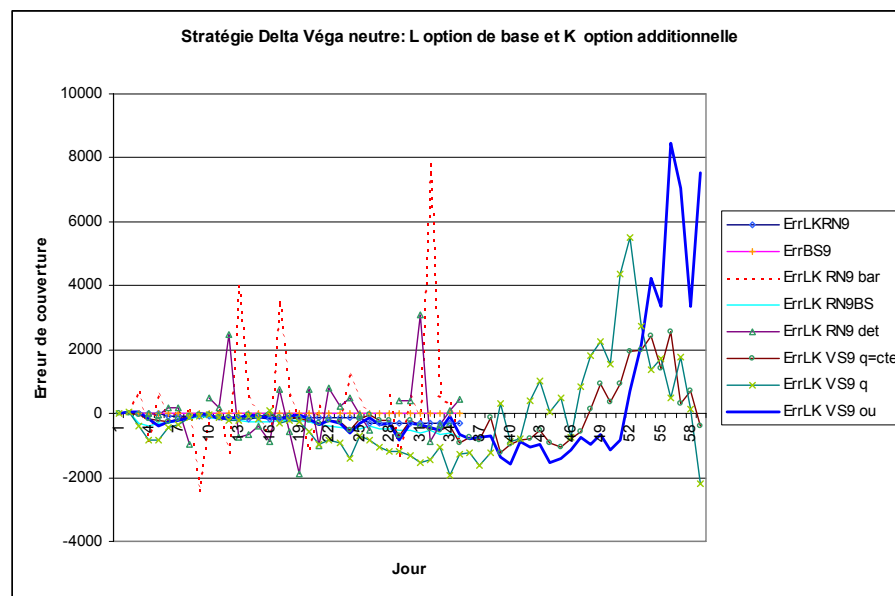


Figure 134: Erreur de couverture, en fonction du jour de couverture, pour la stratégie Delta-Véga neutre, tous les modèles, contrat 9L=option de base, 9K =option additionnelle, période du 2/01/1998 au 30/03/1998.

A la lumière de ces résultats, on remarque que :

- En début de période de couverture, les erreurs de couverture se situent à un même niveau, sauf pour les modèles neuronaux RN9bar et RN9det où l'erreur présente des oscillations atteignant des valeurs extrêmes allant jusqu'à 8000.
- A la fin du contrat, où la volatilité a connu une variation brusque, les courbes des erreurs de couvertures, relatives aux modèles à volatilité stochastique, présentent des pics qui sont, respectivement, de 2000 environ pour VS9q=cte, de 6000 pour VSq et 8000 pour VSOU. Ces valeurs sont à comparer à celles de la stratégie Delta-Gamma neutre qui était,

respectivement, de 4000, de 37000 et de 25000. Ca prouve que la couverture contre le risque de la volatilité a eu son effet.

- Quant à l'endettement, il se situe à un même niveau pour tous les contrats, à l'exception de quelques sauts des modèles RN9 et RN9bar (figure135).

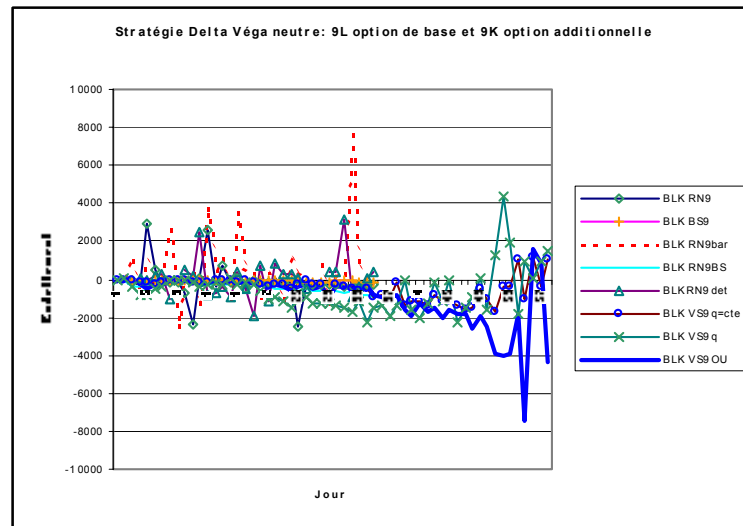


Figure 135: Endettement, en fonction du jour pour la stratégie Delta-Véga-neutre, tous les modèles, contrat 9L=option de base, 9K =option additionnelle, période du 2/01/1998 au 30/03/1998.

- En fin de période de couverture, l'endettement oscille très fortement, dans le cas des modèles à volatilité stochastique. Pour les modèles à volatilité stochastique, dans le cas de la couverture Delta-gamma neutre, l'investisseur se trouve pratiquement toujours, dans une position emprunteur, si on se base sur le couple de contrat 9L et 9K.

Pour les différentes stratégies de couverture Delta-Véga neutre, pour chacun des 12 couples possibles, et pour chacun des modèles, l'erreur de couverture absolue moyenne relative, à la date du 19/02/1998, est donnée dans le tableau 84.

A la lumière des résultats de ce tableau, on remarque que :

- Comme dans le cas des stratégies Delta-neutre et Delta-Gamma-neutre, le modèle de Black & Scholes BS9 donne les valeurs de l'erreur de couverture absolue moyenne relative, les plus faibles.

- Dans plusieurs cas, l'erreur de couverture absolue moyenne relative est supérieure à 1 (et peut aller jusqu'à une valeur de 51). Ceci est dû à un niveau d'erreur de couverture élevé à la date du 19/02/1998.

Erreur de couverture: stratégie Delta Véga neutre classe 9										
H	options 1	Option 2	BS9	RN9	RN9bar	RN9 det	RN9BS	VS9 q=cte	VS9 q	VS9 OU
1	9I	9J	0,0015	0,0218	5,1428	0,0371	0,2071	0,1736	0,3076	0,1969
2	9I	9K	0,0005	0,1568	24,6930	0,0082	0,3485	0,2803	0,7224	14,3479
3	9I	9L	0,0044	0,1090	7,9547	0,0605	0,4186	0,2388	0,3781	0,0468
4	9J	9I	0,0043	0,0062	0,0452	0,0029	0,5961	0,3078	1,0903	0,6305
5	9J	9K	0,0023	0,0730	0,2620	0,0023	0,4070	0,2970	1,8965	68,1851
6	9J	9L	0,0001	0,1947	0,1150	0,0019	0,6088	0,1247	0,7223	3,2722
7	9K	9I	0,0029	0,0318	0,6079	0,0090	1,8651	0,9943	3,2506	3,6867
8	9K	9J	0,0044	0,0044	0,7345	0,0318	0,7567	0,4165	0,3351	2,0793
9	9K	9L	0,0005	0,0545	0,4121	0,0576	0,3753	0,7677	2,0993	3,1099
10	9L	9I	0,0022	0,1418	0,3479	0,0364	2,8776	2,3574	2,4036	3,9598
11	9L	9J	0,0136	0,3539	0,5728	0,0141	1,4539	0,5487	10,7241	51,3735
12	9L	9K	0,0047	0,8164	2,2137	1,1863	1,7609	2,1299	2,9426	1,5351

Tableau 83: Erreur de couverture absolue moyenne relative pour les différentes stratégies Delta-Véga-neutre, pour chacun des modèles de couverture, pour les contrats de la classe 9 (base intraday), à la date du 19 février 1998

- Dans la majorité des cas, le modèle VS9OU présente une erreur de couverture absolue moyenne relative supérieure à 1, notamment pour la stratégie 9L9J où elle prend la valeur de 51,37 et la stratégie 9J9K, où elle prend la valeur 68,1851.
- On ne peut pas classer les modèles à volatilité stochastique, selon le critère l'erreur de couverture absolue moyenne relative, mais, globalement, on peut dire que le modèle VS9q=cte présente une erreur plus faible que celle du modèle VS9q et VS9OU.
- Globalement, le modèle neuronal (RN9BS), donne une erreur plus grande que celle du modèle VS9q=cte.

Comme on l'a, déjà, dit pour la stratégie Delta-neutre, les conclusions qui peuvent être prises, dépendent étroitement, du jour de calcul de l'erreur de couverture absolue moyenne relative. Les conclusions qui peuvent être prises à un jour peuvent changer le jour suivant.

Il est certain que, dans le cas de la stratégie Delta-Véga neutre, c'est le modèle de Black & Scholes qui donne l'erreur de couverture la plus faible, mais ceci peut être lié au choix de la volatilité implicite, comme mesure de la volatilité.

On peut, également dire que le meilleur modèle de couverture, parmi les modèles à volatilité stochastique, est le modèle VS9  $q=cte$  et qu'il a des performances, au niveau de la couverture, meilleures que celles du modèle neuronal RN9BS, si les Greeks sont calculés, selon la formule de Black & Scholes pour ce dernier.

#### **5.2.4.5 Stratégie Delta Gamma Véga neutre**

Pour la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre, il faut, d'abord, que les deux options additionnelles aient des dates d'échéance différentes. Il faut que l'option de base ait, également, une date d'échéance différente de celles des deux options additionnelles.

Compte tenu des données disponibles, la première condition ne peut être respectée que lorsqu'on considère une option de base de la classe 9 et l'option additionnelle 1N, la seule de la classe 1 qui a une durée de vie commune avec les options de la classe 9. Comme cette option a une date d'échéance différente de celles des options de la classe 9, on peut considérer une deuxième option additionnelle de la classe 9. Ainsi, la deuxième condition n'est pas satisfaite, puisque l'option de base et l'option additionnelle, de la classe 9, auront la même date d'échéance.

Ainsi, la seule possibilité pour étudier la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre et de considérer le contrat 9L, comme option de base, le contrat 9K comme une première option additionnelle et le contrat 1N, comme une deuxième option additionnelle. La période de couverture s'étale du 4/03/1998 au 16/03/1998.

Si on représente les erreurs de couverture, relatives aux différents modèles (fig136), on peut remarquer que :

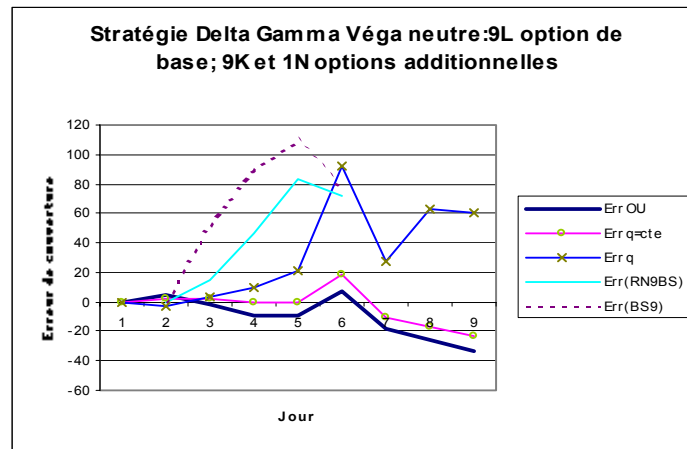


Figure 136 : Erreur de couverture, en fonction du jour, pour la stratégie Delta-gamma-véga-neutre, modèles à volatilité stochastique modèle neuronal et modèle de Black & Scholes, 9L=option de base 9K et 1N = options additionnelles, période du 4/03/1998 au 16/03/1998

- Jusqu'au 11 mars 1998, le modèle de Black & Scholes, présente l'erreur de couverture la plus élevée, suivi du modèle neuronal (RN9BS).
- Au-delà de cette date, parmi les modèles à volatilité stochastique, c'est le modèle VS9q qui donne l'erreur la plus importante, en valeur absolue.
- Les modèles VS9q=cte et VS9OU présentent des courbes d'erreur ayant la même allure. La courbe du premier modèle se situe au-dessus de celle du deuxième.
- Globalement, parmi tous les modèles, c'est le modèle VS9q=cte qui donne le niveau d'erreur le plus faible, pour cette stratégie.
- Globalement, le niveau de l'erreur est plus faible, pour la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre, que pour toutes les autres stratégies, sauf pour le modèle de Black & Scholes où les stratégies Delta-Gamma neutre et Delta-Véga-neutre donnent des erreurs plus faibles.

Si on étudie l'endettement, pour chacun des modèles considérés, pour la période de couverture considérée (figure 137), on constate que :



- Quel que soit le modèle, l'investisseur est toujours en position emprunteur, avec une somme entre 0 et 5000, sauf pour le modèle VS9 q.

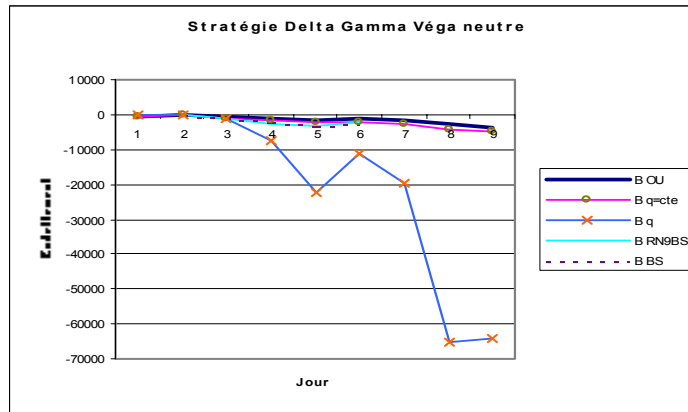


Figure 137 : Endettement, en fonction du jour stratégie Delta-gamma-véga-neutre, modèles à volatilité stochastique modèle neuronal et modèle de Black & Scholes, 9L=option de base 9K et 1N = options additionnelles, période du 4/03/1998 au 16/03/1998

- Justement, tous les modèles donnent des courbes d'endettement proches et d'une même allure, sauf le modèle VS9q, où l'emprunt explose jusqu'à -65000 en fin de période de couverture. Il dépasse de loin l'endettement des stratégies Delta-Gamma neutre et Delta-Véga-neutre.

Si on étudie les proportions du portefeuille de couverture, on remarque, aussi bien, pour x, que pour y, que pour z, que tous les modèles donnent des courbes équivalentes sauf le modèle VS9q. (figure138)

Quel que soit le modèle considéré, les proportions x et z sont positives, alors que la proportion y est toujours négative.

Hormis le modèle VS9q, tous les autres modèles donnent la proportion z comprise entre 0 et 1, la proportion x comprise entre 0 et 1.5 environ, et la proportion y comprise entre 0 et à peu près -2.5.

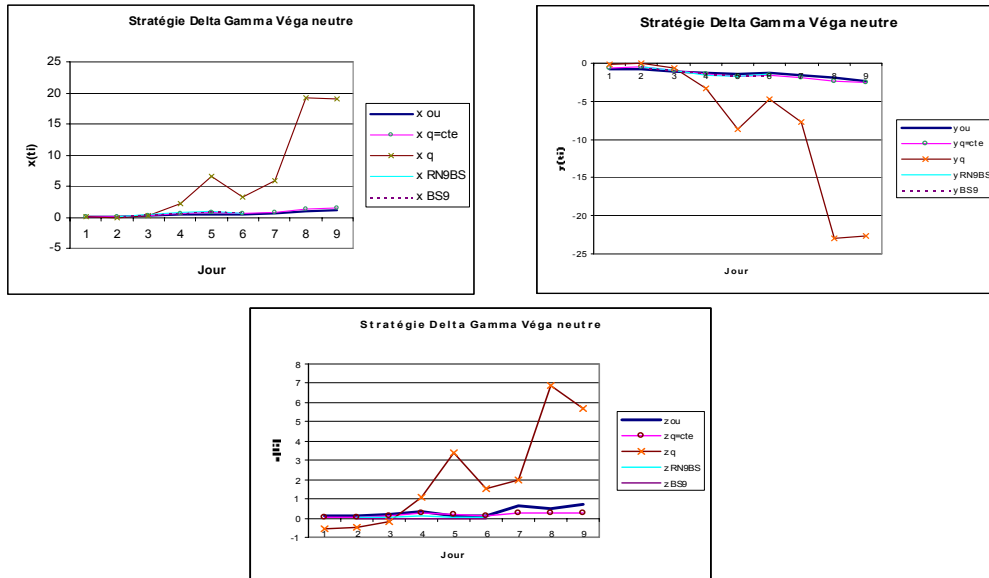


Figure 138 : Proportions du portefeuille de couverture, dans le sous-jacent ( $x(t)$ ), dans la première option additionnelle 9K ( $y(t)$ ) et dans la deuxième option additionnelle 1N ( $z(t)$ ), stratégie Delta-Gamma-Véga neutre sur la période du 4/03/1998 au 16/03/1998

L'erreur de couverture absolue moyenne relative est donnée pour les différents modèles dans le tableau 85.

Stratégie	Option de base	Option(s) Additionnelle(s)	Date	BS9	RN9BS	VS9 q=cte	VS9 q	VS9 OU
Delta-neutre	9K	-	09/02/1998	0,03859	0,03486	0,04789	0,0393	0,05259
Delta-Gamma neutre	9K	9L		0,0005	0,4319	1,764	0,6135	3,0046
Delta-Véga neutre	9K	9L		0,0005	0,3753	0,7677	2,099	3,1
Delta-Gamma-Véga neutre	9K	9L + 1N	11/03/1998	0,3844	0,5279	0,2081	1,0251	0,0729

Tableau 84 : Erreur de couverture moyenne absolue relative, pour les différentes stratégies dynamiques basées sur le contrat 9K et les différents modèles à volatilité stochastique (VS9q=cte, VS9 q et VS9OU), le modèle neuronal (RN9BS) et le modèle de Black & Scholes (BS9).

Pour la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre, le calcul de l'erreur absolue moyenne relative se fait, à une date, différente de celles des autres stratégies, ce qui empêche de faire une comparaison des performances de couverture, avec les autres stratégies dynamiques de couverture.

A la lumière des résultats concernant la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre, on constate que le modèle VS9OU donne l'erreur de couverture la plus faible. Selon un ordre croissant de l'erreur de couverture moyenne absolue relative, on constate le classement suivant, entre les modèles :

$$\varepsilon(\text{VS9OU}) < \varepsilon(\text{VS9q=cte}) < \varepsilon(\text{BS9}) < \varepsilon(\text{RN9BS}) < \varepsilon(\text{VS9q})$$

Pour le modèle de Black & Scholes, le niveau de l'erreur de couverture, correspondant à cette même stratégie, est supérieur à celui de la stratégie Delta-Gamma neutre et Delta-Véga-neutre, bien que la date de calcul ne soit pas la même pour les deux stratégies.

D'une manière générale, on constate les classements suivants, entre les différentes stratégies de couverture étudiées, selon le modèle à considérer :

- Modèle de Black & Scholes :

$$\varepsilon(\text{D-V neutre}) = \varepsilon(\text{D-G neutre}) < \varepsilon(\text{D-neutre}) < \varepsilon(\text{D-G-V neutre})$$

- Modèles neuronaux :

$$\varepsilon(\text{D-neutre}) < \varepsilon(\text{D-V neutre}) < \varepsilon(\text{D-G neutre}) < \varepsilon(\text{D-G-V neutre})$$

- Modèles à volatilité stochastiques

$$\varepsilon(\text{D-neutre}) < \varepsilon(\text{D-G-V neutre}) < \varepsilon(\text{D-V neutre}) < \varepsilon(\text{D-G neutre})$$

Comme on l'a déjà dit, pour les autres stratégies, les conclusions qui peuvent être prises, dépendent étroitement, du jour de calcul de l'erreur de couverture absolue moyenne relative. Les conclusions qui peuvent être prises peuvent changer d'un jour à l'autre.

### 5.3 CONCLUSION

Dans la partie gestion des risques nous avons comparé 4 stratégies dynamiques de gestion des risques financiers par les options, à savoir, la stratégie Delta-neutre, la stratégie Delta-Gamma neutre, la stratégie Delta-Véga neutre et la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre, en considérant le modèle de Black & Scholes, le modèle neuronal et les modèles à volatilité stochastique (avec

simulation de Monte Carlo) basés sur les trois processus de la volatilité (mouvement Brownien, processus empirique et processus d'Ornstein Uhlenbeck). On considère, dans cette partie, uniquement, les contrats de la base intraday, avec comme volatilité, la volatilité implicite. La fréquence de réajustement utilisée est fixée à 1 jour, ce qui occasionne, dans la pratique, des frais de transaction assez importants.

Pour les modèles neuronaux et les modèles à volatilité stochastique le calcul des greeks, se fait d'une manière approximative, faute de formules analytiques, ce qui engendre des erreurs de calculs supplémentaires.

Les différents modes de calcul des Greeks, relatifs aux modèles neuronaux, donnent des valeurs différentes. C'est, ainsi, qu'on considère le calcul de l'erreur de couverture suivant les différents résultats obtenus pour ces Greeks. On trouve, même des fois, des aberrations. Une alternative est de considérer les formules de Black & Scholes pour le calcul de ces Greeks.

Les modèles à volatilité stochastiques donnent les valeurs les plus élevées du Delta. A ce niveau, ils sont suivis du modèle de Black & Scholes.

Le modèle VS9 OU donne la plus grande valeur de Gamma alors que le modèle VS9 q donne sa valeur la plus faible.

Pour les modèles à volatilité stochastique, les maximums des valeurs de Gamma et de Véga correspondent, à une parité égale à 1, comme dans le cas du modèle de Black & Scholes.

Pour la stratégie Delta-neutre, si on considère pour le modèle neuronal, le calcul du Delta par la formule de Black & Scholes, on voit que, dans la majorité des cas, la performance du modèle de Black & Scholes est meilleure que celle du modèle neuronal, en terme d'erreur absolue moyenne relative calculée à la date

du 18/02/1998. Cependant, le modèle neuronal donne des résultats meilleurs, dans le cas des contrats 1N, 1S et 9J. Pour la classe 9 des contrats de la base intraday, suivant le même critère, et à la même date, les modèles à volatilité stochastiques ont des performances, dans l'ensemble, moins bonnes que celles des modèles neuronaux et, donc, que celles du modèle de Black & Scholes.

Parmi les modèles à volatilité stochastique, le modèle qui correspond au processus empirique, comme dynamique de la volatilité donne la meilleure performance, selon le critère précité. Suivant ce critère, il est suivi, dans l'ordre par le modèle avec processus brownien et le modèle à processus d'Ornstein Uhlenbeck de la volatilité.

Pour la stratégie Delta-Gamma neutre le modèle de Black & Scholes montre une erreur qui revient à zéro sans cesse. Ce n'est pas le cas pour les autres modèles, notamment, les modèles à volatilité stochastiques. En effet, pour ces modèles, l'erreur de couverture diverge à l'échéance de l'option de base, compte tenu de la non-couverture par rapport aux risques de la volatilité, qui explose à l'approche de l'échéance (pour les données considérées).

Pour cette même stratégie, pour les contrats, aussi bien de la classe 1 que de la classe 9, le modèle de Black & Scholes donne une erreur, nettement, plus faible que celles des modèles neuronaux, lorsque le calcul du Delta et du Gamma se font selon les formules de Black & Scholes. Ceci peut s'expliquer, entre autres, par le fait que la volatilité, considérée dans ces calculs, est la volatilité implicite. Bien que, le modèle de Black & Scholes suppose que la volatilité est constante, le niveau de l'erreur de couverture, pour la stratégie Delta-Gamma neutre est très faible.

Parmi les modèles à volatilité stochastique, c'est le modèle avec le mouvement Brownien, comme processus suivi par la volatilité (VS9  $q=cte$ ), donne les erreurs les plus faibles, quelle que soit la stratégie de la couverture, suivi. Mais

il donne des erreurs, globalement, supérieures à celles du modèle de Black & Scholes et des modèles neuronaux.

En considérant les contrats de la classe 1, pour la stratégie Delta-Véga-neutre, encore une fois, le modèle de Black & Scholes donne des erreurs plus faibles que celles du modèle neuronal RN1BS et c'est, encore, plus vrai, pour les contrats de la classe 9.

Parmi les modèles à volatilité stochastique, c'est le modèle VS9  $q=cte$  qui donne l'erreur la plus faible, qui reste cette fois, globalement, inférieure à celle du modèle neuronale RN9BS, mais à un niveau, nettement, supérieur, à celle du modèle de Black & Scholes

Pour la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre, les conclusions vont se fonder sur une seule combinaison de l'option et sur une période de couverture courte. Ces deux aspects limitent l'étendu des conclusions. Pour cette seule combinaison, le modèle de Black & Scholes donne une erreur inférieure à celle du modèle neuronal RN9BS, mais supérieure à celle des modèles à volatilité stochastique « VS9 OU » et « VS9  $q=cte$  ». Parmi les modèles à volatilité stochastique, c'est le modèle « VS9 OU » qui donne l'erreur de couverture la plus faible, suivi dans l'ordre par les modèles « VS9  $q=cte$  » et « VS9  $q$  ».

A la lumière des résultats trouvés, pour la journée du 19 février 1998, si on compare les stratégies Delta-neutre et Delta-Gamma neutre, au niveau de la classe 1, on trouve que, en général, l'erreur de couverture moyenne absolue relative est plus petite pour la première stratégie que pour la seconde, dans le cas du modèle neuronal et on trouve le résultat inverse dans le cas du modèle de Black & Scholes. La même conclusion reste vraie, dans le cas de la classe 9. De plus, dans ce cas, les modèles à volatilité stochastique, comme les modèles neuronaux, présentent, pour la stratégie Delta-neutre, une erreur plus faible, que

celle de la stratégie Delta-Gamma neutre. Ceci est bien sûr paradoxal, puisque plus de couverture doit impliquer une erreur plus faible.

Paradoxalement, si on compare l'erreur relative à la stratégie Delta-Gamma neutre avec celle de la stratégie Delta-Véga neutre, on a exactement la même erreur, pour le modèle de Black & Scholes. Pour les autres modèles, il n'y a pas une règle stricte. Par contre, globalement, c'est la stratégie Delta-Véga neutre qui donne une erreur plus faible que celle de la stratégie Delta-Gamma neutre, pour tous les modèles y compris les modèles à volatilité stochastique.

Enfin, à la lumière des résultats du tableau 84, on remarque que pour les modèles à volatilité stochastique, les stratégies sont classées, dans l'ordre croissant de l'erreur de couverture : Delta-neutre, Delta-Véga-Gamma neutre, Delta-Véga neutre et, enfin, Delta-Gamma neutre. Pour le modèle de Black & Scholes et les modèles neuronaux, la classification suivant le même critère, dans le même sens est : Delta-neutre, Delta-Véga neutre, Delta-Gamma neutre et Delta-Véga-Gamma neutre.

Enfin, il faut souligner que l'utilisation de la volatilité implicite calculée par inversion du modèle de Black & Scholes influence, fortement, les résultats. Il faut noter, également, que le critère de l'erreur moyenne absolue relative, présente l'inconvénient de déboucher sur des conclusions qui peuvent changer d'un jour à l'autre. Ce qui est vrai aujourd'hui ne l'est pas forcément demain.





## **CONCLUSION GENERALE**

Cette thèse traite la comparaison de modèles d'évaluation d'option d'achat, à savoir le modèle de Black & Scholes, le modèle neuronal et les modèles à volatilité stochastique. Cette comparaison se situe, au niveau des performances de l'évaluation, mesurée par la corrélation et l'écart quadratique moyen, par rapport à la référence du marché. Elle se situe, également, au niveau des performances, de la gestion du risque financier, mesurées par l'erreur de couverture absolue moyenne relative. Cette gestion des risques financiers est basée sur des stratégies de couverture dynamiques autofinancées.

On s'est basé, dans ce travail, sur les données de deux bases de contrats d'options d'achat sur l'indice CAC40 : Une base intraday avec des données s'étalant, du 2 janvier 1998 au 30 juin 1998, et une base journalière avec des observations s'étalant, du 2 janvier 1997 au 30 décembre 1999.

A l'exception du logiciel thinkspro qui a servi pour l'apprentissage des modèles neuronaux, tous les algorithmes et les programmes, qui ont servi à générer les résultats dans les différentes parties de cette thèse ont été développés, dans le cadre de ce travail, et constituent une bonne partie de ma contribution.

Dans cette thèse on a, donc, exploré deux voies de recherche. La première consiste à développer des modèles paramétriques, à volatilité stochastique et la seconde à développer des modèles non paramétriques (modèles neuronaux).

Pour ces deux voies de recherche, le modèle de Black & Scholes a servi de référence. Il a servi, également, pour la détermination de la volatilité implicite utilisée dans le cadre de ce travail.

Le prix d'une option sur le marché est le résultat de la confrontation entre offre et demande. La différence de cotation, d'un praticien à un autre, provient de l'utilisation de modèles d'évaluation qui sont différents mais surtout de la différence de l'estimation au niveau de la volatilité du sous-jacent..

Le modèle de Black & Scholes ne donne pas une explication de la courbe de « Smile ». Dans le chapitre 2, on a mis en évidence qu'aussi bien la volatilité implicite que la volatilité historique sont variables, contrairement à l'hypothèse du modèle de Black & Scholes qui les considère comme constantes. On a trouvé que le niveau de la volatilité implicite est supérieur à celui de la volatilité historique et que le « Smile » de la volatilité implicite présente une courbure plus prononcée que celle de la volatilité historique.

L'importance de la volatilité dans l'évaluation de l'option et l'incapacité du modèle de Black & Scholes à expliquer la courbe du « Smile » a rendu le recours au modèle à volatilité stochastique, comme modèle paramétrique, une nécessité dans la recherche d'une précision plus accrue.

Pour ce modèle, on a considéré trois dynamiques de la volatilité, à savoir le processus brownien, le processus empirique et le processus d'Ornstein Uhlenbeck. On a considéré des données intraday et des données journalières. On a fait recours à deux techniques de résolution de ce problème à savoir l'algorithme de Hopscotch et l'algorithme de la simulation de Monte Carlo. La

première est basée sur la résolution de l'équation différentielle aux dérivées partielles de Garman (1976) et la deuxième est basée sur un raisonnement risque neutre.

L'hypothèse de base dans ce travail concerne le prix du marché du risque lié à la volatilité. Dans ce sens, on a tout simplement supposé que le drift risque neutre de la volatilité est constant. Cette hypothèse est moins forte que celle qui consiste à dire que la volatilité est un actif négociable, autrement dit que son drift risque neutre est égal au taux d'intérêt.

Justement, dans le cas de la base intraday, cette hypothèse s'est avérée, empiriquement, valide, dans la mesure, où on a trouvé le drift risque neutre, de la volatilité, égal au taux d'intérêt sans risque. Par contre, dans le cas de la base journalière, ce drift est égal à trois fois le taux d'intérêt sans risque.

Bien que l'on ait considéré le cas le plus général, où le coefficient de corrélation entre les mouvements du prix du sous-jacent et les mouvements de la volatilité est nul, empiriquement, on a trouvé celui-ci quasiment égal à zéro, tout en étant légèrement négatif, aussi bien pour la base intraday que pour la base journalière. Ceci présente un avantage pour l'algorithme de Hopscotch qui suppose que le terme de la dérivée croisée de l'équation de Garman est nul.

Les coefficients de corrélation, déterminés à partir des contrats de la base intraday et de la base journalière, sont tous négatifs, conformément à la théorie Black (1976), Schmalensee et Trippi (1978), Beckers (1981) et Christie (1982).

La volatilité de la volatilité du processus brownien est d'une part, à peu près égale à celle du processus d'Ornstein Uhlenbeck et d'autre part, on a vérifié qu'elle représente, quasiment, la moyenne de celle du processus empirique, aussi bien pour la volatilité implicite qu'historique. La volatilité de la volatilité implicite est supérieure à celle de la volatilité historique.

Dans le cas du processus empirique, les paramètres de la volatilité, pour la base journalière sont du même ordre de grandeur que ceux de Oztukzel & Willmott (1998) et Willmott (2000).

Pour la résolution de l'équation de Garman (1976), par la méthode des différences finies, en calculant l'erreur de troncature du schéma numérique correspondant, on a conclu que celui-ci est consistant. Un calcul analytique, relayé par deux études numériques, ont mis en évidence que, dans un cas, le schéma est instable et dans l'autre cas que le schéma est stable avec un gain, quasiment, égal à l'unité, ce qui implique une convergence trop lente. Dans les deux cas, le recours à l'algorithme de Hopscotch, inconditionnellement stable, s'est avéré indispensable. Hormis, un domaine fini des pas du maillage des deux variables d'état, l'algorithme donne des valeurs de l'option quasi-infinies. A ce niveau, le choix du pas des maillages n'est pas délibéré, en respectant une condition de stabilité, mais plutôt basé sur un raisonnement, purement, inductif, qui permet de trouver la valeur de l'option à calculer et de déduire les pas du maillage, en même temps. Cet algorithme a été testé avec succès sur le modèle de Black & Scholes.

Conjuguée avec l'algorithme de Hopscotch, il a permis de générer les valeurs de l'option, pour le processus brownien de la volatilité, aussi bien pour les contrats de la base intraday que ceux de la base journalière. Pour les autres processus de la volatilité, cet algorithme n'a pas permis de générer les valeurs de l'option, à cause de la divergence de l'algorithme ce qui constitue une aberration.

C'est ainsi que le recours à l'algorithme de simulation de Monte Carlo était indispensable, puisqu'il est fiable, que sa convergence a été démontrée théoriquement et, empiriquement, dans le cadre de ce travail, et qu'il permet d'atteindre n'importe quel niveau de précision, pourvu qu'en investisse en

temps machine. Pour une machine donnée, et pour une précision donnée, le temps de calcul de cet algorithme est, nettement, supérieur, à celui, relatif à l'algorithme de Hopscotch. Il est de 74 secondes pour un nombre de période égal à 400, et un nombre de simulation, égal à 10 000.

Pour cet algorithme, on a considéré, uniquement, la volatilité implicite, associée aux trois processus stochastiques précités, aussi bien, pour la base intraday que pour la base journalière.

Aussi bien pour l'algorithme de Hopscotch que pour l'algorithme de la simulation de Monte Carlo, on a trouvé une forte corrélation (proche de l'unité) de la valeur de l'option avec la référence CBS(T1). En général, le coefficient de corrélation correspondant est plus grand dans le cas de la simulation de Monte Carlo que dans le cas de l'algorithme de Hopscotch.

La valeur de l'option, calculée par l'algorithme de Hopscotch, est, toujours, supérieure, à la référence CBS(T1), quelle que soit la parité de l'option et quelle que soit la base intraday ou journalière. Ceci n'est pas le cas de la simulation de Monte Carlo puisque, en fonction de la parité de l'option, le modèle correspondant surévalue ou sous-évalue la valeur de l'option par rapport à la référence CBS(T1).

L'écart quadratique moyen de la valeur de l'option avec la référence CBS(T1) est plus grand dans le cas de l'algorithme de Hopscotch que dans le cas de la simulation de Monte Carlo.

Les modèles, à volatilité historique stochastique, n'ont été étudiés que pour l'algorithme de Hopscotch, pour la base journalière, en considérant le processus brownien et le processus empirique.

Dans ce cas, d'une manière générale, au vu des critères de corrélation et d'écart quadratique moyen, avec la référence CBS(T1), les performances des modèles à volatilité historique sont meilleures que celles, relatives aux modèles à volatilité implicite.

La comparaison entre les modèles, avec des paramètres de la dynamique de la volatilité, estimés, à partir d'un contrat, et ceux avec les mêmes paramètres, estimés à partir de l'ensemble de la base, est faite, uniquement, dans le cas de la base journalière, avec comme volatilité, la volatilité historique. Les performances des premiers modèles sont meilleures que celles des seconds. Ceci est logique puisque chaque contrat présente des spécificités, par rapport à l'ensemble de la base. Par contre, les seconds modèles assurent une meilleure prédictibilité et une meilleure capacité de généralisation.

Les performances des modèles à volatilité stochastique sont différentes, selon le processus de la volatilité considéré.

Pour la volatilité implicite, au vu des critères précités, le modèle à processus brownien de la volatilité présente des performances meilleures que celles du modèle à processus empirique de la volatilité. Ceci est vrai, dans le cas, où on applique, l'algorithme de Hopscotch à la base journalière ou l'algorithme de la simulation de Monte Carlo à la base intraday.

Dans le cas de la base intraday, au vu des mêmes critères, les meilleures performances sont relatives aux modèles avec processus d'Ornstein Uhlenbeck, comme processus de la volatilité utilisant comme algorithme la simulation de Monte Carlo. Pour ce même algorithme, si on considère la base journalière, les meilleures performances sont relatives au modèle avec processus empirique de la volatilité, suivis par les modèles avec processus brownien de la volatilité, quelle que soit la valeur du coefficient de corrélation. Les modèles avec

processus d'Ornstein Uhlenbeck présentent, dans ce cas, les performances les moins bonnes.

Ces résultats sont à comparer avec ceux de Heston (1993) qui sont semblables à ceux de Hull & White (1987). En fait la comparaison de nos résultats avec ceux de Heston doit se situer, uniquement, au niveau des résultats générés par la simulation de Monte Carlo qui sont plus fiables que ceux générés par l'algorithme de Hopscotch. Cependant, on n'omette pas de dire que, dans le cas de l'algorithme de Hopscotch, le profil de la courbe de la valeur de l'option diminuée de la référence CBS(T1), n'est pas le même que celui de Heston, dans le cas d'un processus brownien de la volatilité, aussi bien, pour la base intraday (volatilité implicite,  $\rho=-0,08$  et dans une plage de parité telle que :  $0,866 < S/E < 1,035$ ), que pour la base journalière, (volatilité implicite ou historique avec  $\rho=0,14038$  et dans une plage de parité:  $0,77 < S/E < 0,99$ ).

Pour la base intraday, en considérant l'algorithme de simulation de Monte Carlo, en considérant un coefficient de corrélation ( $\rho=-0,08$ ), le processus empirique donne la forme la plus plausible correspondante à la courbe correspondante de Heston ( $\rho=0$ ), sur des plages de parité ( $0,866 < S/E < 1,035$ ), pour la classe 1) et ( $0,792 < S/E < 0,991$ ) pour la classe 9. Pour un coefficient de corrélation ( $\rho=-0,248$ ), toute chose égale par ailleurs, c'est le processus d'Ornstein Uhlenbeck qui donne les courbes les plus proches de celles de Heston, avec  $\rho=-0,5$ , sur les mêmes plages de parité.

Pour la base journalière, en considérant l'algorithme de simulation de Monte Carlo, en considérant un coefficient de corrélation ( $\rho=-0,40244$ ), le processus d'Ornstein Uhlenbeck donne une courbe de la valeur de l'option diminuée de la référence CBS(T1) qui correspond à la courbe de Heston, pour  $\rho=-0,5$ , sur la plage de parité telle que : ( $0,77 < S/E < 0,99$ ). De même le processus brownien et le processus empirique de la volatilité implicite donnent des courbes de la

valeur de l'option diminuée de la référence CBS(T1) qui correspondent à la courbe de Heston, pour  $\rho=0$ , sur la même plage de parité.

La différence de nos résultats, par rapport à ceux de Heston (1993), peut s'expliquer, en partie, par la différence, au niveau des hypothèses adoptées pour la dynamique de la volatilité et le prix du marché du risque lié à la volatilité.

Ces résultats sont plus conformes, à ceux de Heston, dans le cas du processus empirique, tout simplement, parce qu'un tel processus présente le plus de similitude avec le processus utilisé par Heston, au niveau de la forme de la volatilité de la volatilité. Alors que, pour la base intraday, la puissance de la volatilité est de 0,85 dans le cas du processus empirique, elle est de 0,5 dans le cas du processus de Heston. Le Processus de Heston est doté de la propriété de retour à la moyenne « mean-reverting ». Le modèle qui doit être au maximum de la conformité avec le processus de Heston doit être une combinaison du modèle utilisant le processus empirique de la volatilité et de celui du processus d'Ornstein Uhlenbeck.

La différence de nos résultats, avec ceux de Heston, dans ce cas, se situe, surtout, au niveau de l'hypothèse sur le prix du marché du risque de la volatilité. En effet, Heston suppose qu'il est proportionnel au carré de la volatilité, alors qu'on a adopté l'hypothèse implicite de la constance du drift risque-neutre de la volatilité qui est une fonction du prix du marché du risque lié à celle-ci.

Pour la deuxième voie de recherche (non-paramétrique), basée sur les réseaux de neurones, nous avons considéré pour l'apprentissage la technique de « cross-validation » associée à l'algorithme « cascade correlation ». Les fichiers d'apprentissage et de test sont générés, à partir d'un découpage des deux bases de données, suivant des contrats ou suivant des classes de parité et de maturité. Selon les inputs à considérer à l'entrée du réseau de neurones, on définit 6



possibilités (modèle-types), selon qu'on considère la volatilité implicite, la volatilité historique (de l'instant présent ou de l'instant précédent) ou l'absence de volatilité, en plus de la moneyness et de la maturité.

La valeur de l'option est stationnarisé par dérivation puis transformée pour être incluse dans l'intervalle  $[0 ; 1]$  qui correspond à l'espace des valeurs de la fonction sigmoïde.

L'erreur considérée pour l'apprentissage est du type erreur quadratique moyenne. Pour des fichiers, d'apprentissage et de test, donnés, les critères qui définissent le modèle optimal sont le maximum du pourcentage de bon classement pour le test et l'apprentissage, avec un écart minimum entre les deux, le minimum de l'erreur d'apprentissage et de test et enfin la minimalité de l'architecture du réseau.

Dans l'ensemble, les performances de l'apprentissage et du test, témoignent que les réseaux de neurones ont capté une certaine logique du marché. La contrainte de bonne généralisation induite par la technique de « cross-validation » dégrade les performances du réseau, en même temps qu'elle le dote d'un bon pouvoir prédictif et qu'elle évite tout problème de sur-apprentissage.

Le modèle type 5, qui correspond à la volatilité implicite de l'instant précédent donne les meilleures performances, selon les critères précités. Ceci est normal, dans la mesure, où en appliquant la formule de Black & Scholes, en considérant la volatilité implicite, on trouve la valeur du marché de l'option. Donc, il est normal que les performances du réseau, dans ce cas, seront meilleures.

Dans la majorité des cas, on trouve un problème quasi-linéaire. Ceci dépend, en fait, de la parité de l'option (moneyness). Il est évident que le modèle ne serait pas le même pour une option « at the money » que pour une option « deep in the money » ou « deep out of the money ».

Les résultats, relatifs à la base intraday, sont meilleurs que ceux relatifs à la base journalière.

Après avoir déterminé la meilleure architecture, relative à chaque modèle, c-à-d à chaque couple de jeu d'apprentissage et de test, on détermine les poids synaptiques correspondants et on calcule la valeur de l'option.

Les résultats sont résumés dans une matrice. Dans chaque case qui correspond à un contrat d'apprentissage (ligne) et un contrat test (colonne), est indiquée la valeur de l'erreur quadratique moyenne correspondante, de la valeur de l'option par rapport à la référence (valeur de marché).

Enfin, il est à noter que dans le cas des classes de parité (Moneyness) et de temps à l'échéance, étant donné que le prix d'exercice varie d'une observation à une autre, l'intégration de l'output du réseau a donné des valeurs, tellement grandes, que la valeur de l'option diverge. Ce même phénomène de divergence a été remarqué, au niveau du modèle neuronal, appliqué à un contrat, lorsqu'on a baissé la volatilité de 0,02, pour chaque observation de la série d'apprentissage. La valeur de l'option est très sensible aux variations de la volatilité. Cette aberration peut être mise en parallèle avec celle observée au niveau de l'algorithme de Hopscotch.

La sensibilité de la valeur de l'option, par rapport à la volatilité, est très grande. La volatilité doit, donc, être estimée avec beaucoup de précision sinon on peut avoir une divergence.

Le logiciel thinkspro n'accepte pas des données, avec plus de 3 chiffres, après la virgule et pas plus de 700 observations, dans le jeu du training. Ceci limite la précision des calculs et peut avoir une incidence sur les résultats, dans la mesure

ou une variation de 0.02 sur la valeur de la volatilité fait diverger la valeur de l'option.

Le temps pour l'apprentissage d'un réseau de neurone est, relativement, long. Une fois cet apprentissage est fait, le calcul de la valeur de l'output par le réseau de neurone est quasi-instantané.

Les modèles neuronaux ont donné des coefficients de corrélation entre la valeur de l'option et la référence du marché C, qui sont faibles, comparés à ceux données par les modèles à volatilité stochastiques qui sont proches de l'unité.

On a remarqué que ces coefficients de corrélation sont plus grands, dans le cas de la classe 9, que dans le cas de la classe 1 de la base intraday.

Au vu des critères de la corrélation avec la valeur de référence de l'option (Black & Scholes), de l'écart quadratique moyen et de son rapport avec la valeur moyenne de l'option, les modèles neuronaux ont donné des performances moins bonnes que les modèles à volatilité stochastique (simulation de Monte Carlo). Ceci est vrai, aussi bien pour un processus brownien qu'empirique de la volatilité implicite et aussi bien, dans le cas de la base intraday que dans le cas de la base journalière.

C'est au niveau de la corrélation que les performances des réseaux de neurones ne sont pas tout à fait satisfaisantes. L'erreur quadratique moyenne se situe à un niveau comparable à celui des modèles à volatilité stochastique.

Dans le cas, où on a utilisé la volatilité implicite, la valeur de l'option du marché correspond à celle du modèle de Black & Scholes.

On peut affirmer que les réseaux de neurones donnent des résultats satisfaisants, comme il a été démontré par Malliaris & al. (1993), Hutchinson & al. (1994),

Garcia & Gençay (2000), Amilon (2001) qui ont trouvé que les réseaux de neurones donnent des résultats satisfaisants en comparaison avec le modèle de Black & Scholes.

Cependant, les modèles à volatilité stochastique (simulation de Monte Carlo) donnent des résultats, au niveau de l'évaluation, qui sont meilleurs que ceux des modèles neuronaux et présentent l'avantage d'être des modèles paramétriques qui s'interprètent facilement.

Il faudrait que ces modèles à volatilité stochastique deviennent une alternative opérationnelle au modèle de Black & Scholes, que l'on arrive à identifier, précisément, le processus stochastique que suit la volatilité.

Plus la recherche progresse, plus il semble que l'on doive se fier à des paramètres et à des variables, représentant le comportement des individus (telle que la prime de risque), qui ne peuvent être estimées que sous des hypothèses très restrictives. Il n'est, donc, pas certain, que la précision accrue que permettraient d'obtenir, théoriquement, les modèles à volatilité stochastique se matérialisera aussi longtemps que les erreurs, de spécification et d'estimation, supplémentaires nous empêcheront de bénéficier, pleinement, de leur pouvoir explicatif accru. De nombreux utilisateurs, utiliseraient le modèle de Black & Scholes, en réactualisant, tous les jours, voire toutes les heures, leurs estimations de la volatilité

Dans la partie gestion des risques financiers, nous avons comparé 4 stratégies dynamiques autofinancées de gestion des risques financiers par les options, à savoir, la stratégie Delta-neutre, la stratégie Delta-Gamma neutre, la stratégie Delta-Véga neutre et la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre, en considérant le modèle de Black & Scholes, le modèle neuronal et les modèles à volatilité stochastique (avec simulation de Monte Carlo) basés sur les trois processus de la volatilité implicite (mouvement Brownien, processus empirique et processus

d'Ornstein Uhlenbeck). On considère, dans cette partie, uniquement, les contrats de la base intraday. La fréquence de réajustement utilisée est fixée à 1 jour, ce qui occasionne, dans la pratique, des frais de transaction assez importants.

On a considéré une période de couverture commune à la classe 1 des contrats de la base journalière, à savoir du 7/04/1998 au 12/06/1998. Pour la classe 9, cette période de couverture s'étale du 2/01/1998 au 19/02/1998.

Pour le modèle neuronal, on a considéré, pour chaque contrat de la base intraday, le fichier d'apprentissage correspondant au meilleur modèle, au niveau de l'évaluation, défini par le fichier de test correspondant.

Autant, pour toutes les stratégies dynamiques évoquées, il y'a une multitude de combinaisons de contrats, autant pour la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre, il n'y a qu'une seule combinaison possible. En faite, les contrats d'options additionnelles pour une telle stratégie doivent avoir, une date d'échéance et un prix d'exercice, différents, et en plus différents de ceux de l'option de base. Les trois contrats doivent avoir une période de vie commune. La seule possibilité, donc, sur la période du 5/03/1998 au 11/03/1998 est la combinaison des contrats 1N, 9K et 9L. Ainsi, on a considéré le contrat 9L, comme option de base, et les contrats 1N et 9k, comme options additionnelles.

Les stratégies delta gamma et delta Véga neutre font intervenir une option de base et une option additionnelle. Conformément au modèle de Black & Scholes, ces deux options doivent avoir des dates d'échéance différentes et pourquoi pas des prix d'exercice différents. Dans le cas contraire, le portefeuille de couverture, constitué du sous-jacent, de ces deux options et d'une obligation se réduit à une obligation.

Les calculs des sensibilités de l'option, par rapport à la volatilité et au prix du sous-jacent, ont été faits par des calculs différents qui donnent des résultats différents.

Compte tenu du niveau de liquidité des options considérées, la base intraday a été transformée en une base journalière, comportant environ 61 observations.

Un premier critère retenu, pour comparer ces différentes stratégies, est l'erreur de couverture, déterminée, suivant l'approche de Colman & al.(1996). L'erreur absolue moyenne relative, calculée à une même date donnée, constitue un deuxième critère pour comparer ces stratégies de couverture. Cette erreur est égale au rapport de la valeur absolue de l'erreur de couverture à cette date divisée par le nombre d'ajustements (entre le début de la période de couverture et la date considérée) et par la valeur de l'option en début de la période de couverture.

Il est certain que la couverture des risques financiers, dans le cas des modèles à volatilité stochastique, nécessite l'utilisation d'autres Greeks que ceux qu'on a utilisés.

Pour la stratégie Delta-neutre, si on considère pour le modèle neuronal, le calcul du Delta par la formule de Black & Scholes, on voit que, dans la majorité des cas, la performance du modèle de Black & Scholes est meilleure que celle du modèle neuronal, en terme d'erreur absolue moyenne relative, calculée à la date du 18/02/1998. Cependant, le modèle neuronal donne des résultats meilleurs, dans le cas des contrats 1N, 1S et 9J. Pour la classe 9 des contrats de la base intraday, suivant le même critère, et à la même date, les modèles à volatilité stochastiques ont des performances, dans l'ensemble, moins bonnes que celles des modèles neuronaux et, donc, que celles du modèle de Black & Scholes.

Parmi les modèles à volatilité stochastique, le modèle qui correspond au processus empirique, comme dynamique de la volatilité donne la meilleure performance selon le critère précité. Suivant ce critère, il est suivi, dans l'ordre par le modèle avec processus brownien et le modèle à processus d'Ornstein Uhlenbeck de la volatilité.

Pour la stratégie Delta-Gamma neutre le modèle de Black & Scholes montre une erreur qui revient à zéro sans cesse. Ce n'est pas le cas pour les autres modèles, notamment, les modèles à volatilité stochastiques. En effet, pour ces modèles, l'erreur de couverture diverge à l'échéance de l'option de base, compte tenu de la non-couverture par rapport aux risques de la volatilité, qui explose à l'approche de l'échéance (pour les données considérées).

Pour cette même stratégie, pour les contrats, aussi bien de la classe 1 que de la classe 9, le modèle de Black & Scholes donne une erreur, nettement, plus faible que celles des modèles neuronaux, lorsque le calcul du Delta et du Gamma se font selon les formules de Black & Scholes. Ceci peut s'expliquer, entre autres, par le fait que la volatilité, considérée dans ces calculs, est la volatilité implicite. Bien que, le modèle de Black & Scholes suppose que la volatilité est constante, le niveau de l'erreur de couverture, pour la stratégie Delta-Gamma neutre est très faible.

Parmi les modèles à volatilité stochastique, c'est le modèle avec le mouvement Brownien, comme processus suivi par la volatilité (VS9  $q=cte$ ), donne les erreurs les plus faibles, quelle que soit la stratégie de la couverture, suivi. Mais il donne des erreurs, globalement supérieures, à celles du modèle de Black & Scholes et des modèles neuronaux.

En considérant les contrats de la classe 1, pour la stratégie Delta-Véga-neutre, encore une fois, le modèle de Black & Scholes donne des erreurs plus faibles

que celles du modèle neuronal RN1BS et c'est encore plus vrai pour les contrats de la classe 9.

Parmi les modèles à volatilité stochastique, c'est le modèle VS9  $q=cte$  qui donne l'erreur la plus faible, qui reste cette fois, globalement, inférieure à celle du modèle neuronale RN9BS, mais, à un niveau, nettement, supérieur, à celui du modèle de Black & Scholes

Pour la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre, les conclusions vont se fonder sur une seule combinaison de l'option et sur une période de couverture courte. Ces deux aspects limitent l'étendu des conclusions. Pour cette seule combinaison, le modèle de Black & Scholes donne une erreur inférieure à celle du modèle neuronal RN9BS, mais supérieure à celle des modèles à volatilité stochastique « VS9 OU » et « VS9  $q=cte$  ». Parmi les modèles à volatilité stochastique, c'est le modèle « VS9 OU » qui donne l'erreur de couverture la plus faible, suivi, dans l'ordre, par les modèles « VS9  $q=cte$  » et « VS9  $q$  ».

A la lumière des résultats trouvés, pour la journée du 19 février 1998, si on compare les stratégies Delta-neutre et Delta-Gamma neutre, au niveau de la classe 1, on trouve, qu'en général, l'erreur de couverture moyenne absolue relative est plus petite pour la première stratégie que pour la seconde, dans le cas du modèle neuronal et on trouve le résultat inverse, dans le cas du modèle de Black & Scholes. La même conclusion reste vraie, dans le cas de la classe 9. De plus, dans ce cas, les modèles à volatilité stochastique, comme les modèles neuronaux, présentent, pour la stratégie Delta-neutre, une erreur plus faible, que celle de la stratégie Delta-Gamma neutre. Ceci est bien sûr paradoxal, puisque plus de couverture doit impliquer une erreur plus faible.

Paradoxalement, si on compare l'erreur relative à la stratégie Delta-Gamma neutre avec celle de la stratégie Delta-Véga neutre, on a, exactement, la même erreur, pour le modèle de Black & Scholes. Pour les autres modèles, il n'y a pas



une règle stricte. Par contre, globalement, c'est la stratégie Delta-Véga neutre qui donne une erreur plus faible que celle de la stratégie Delta-Gamma neutre, pour tous les modèles y compris les modèles à volatilité stochastique.

Enfin, à la lumière des résultats du tableau 84, on remarque que pour les modèles à volatilité stochastique, les stratégies sont classées, dans l'ordre croissant de l'erreur de couverture : Delta-neutre, Delta-Véga-Gamma neutre, Delta-Véga neutre et enfin Delta-Gamma neutre. Pour le modèle de Black & Scholes et les modèles neuronaux, la classification suivant le même critère, dans le même sens est : Delta-neutre, Delta-Véga neutre, Delta-Gamma neutre et Delta-Véga-Gamma neutre.

Enfin, il faut souligner que l'utilisation de la volatilité implicite, calculée par inversion du modèle de Black & Scholes, influence, fortement, les résultats. Le modèle de Black & Scholes est un modèle de couverture Delta-neutre et le modèle à volatilité stochastique nécessite une couverture supplémentaire, par rapport à des greeks autres que ceux du modèle de Black & Scholes.

Il faut noter, également, que le critère de l'erreur moyenne absolue relative, présente l'inconvénient de déboucher sur des conclusions qui peuvent changer d'un jour à l'autre. Ce qui est vrai aujourd'hui, ne l'est pas, forcément, demain.

Dans l'évaluation avec le modèle neuronal, si on veut comparer les performances du modèle neuronal avec le modèle de Black & Scholes, il vaut mieux considérer la volatilité historique que la volatilité implicite. Car, avec cette dernière, on favorise le modèle de Black & Scholes. La modélisation avec les réseaux de neurones, dans ce cas, sera une reproduction pure et simple du modèle de Black & Scholes ;

Le cross-validation est une technique qui permet d'éviter le sur-apprentissage et d'obtenir un modèle neuronal doté d'une bonne capacité de généralisation et

d'un pouvoir prédictif. Cependant cette technique limite les performances des réseaux de neurones, au niveau de l'apprentissage.

Pour avoir une bonne généralisation, il faut avoir des données, d'apprentissage et de test, homogènes. Pour ce faire, il faut d'abord classer les données suivant la parité (moneyness) et le temps à échéance, en considérant une sévérité adéquate de manière à assurer une homogénéité, entre le jeu d'apprentissage et le jeu de test, notamment, en ce qui concerne le degré de non-linéarité qui est fonction de la parité. L'idéal est d'avoir, pour chaque point de l'espace des données, un réseau de neurone qui régit la valeur de la fonction en ce point. En fait, il s'agit d'une utopie, dans la mesure, où l'apprentissage ne peut se faire sur quelques données. Il y'a, donc, un compromis à faire entre la sévérité de la classification et le nombre de données appartenant à cette classe.

Dans cette étude, on a considéré que le drift risque neutre de la volatilité est constant, c'est une hypothèse qui concerne en fait, le prix du marché du risque lié à la volatilité. En fait, il serait recommandable d'estimer ce prix du marché du risque, à l'instant présent, à partir de la valeur de marché d'autres d'options connues dans le présent ou à partir de l'historique du prix de l'option considérée, en inversant la formule d'évaluation. Il serait, encore mieux d'élaborer un modèle paramétrique qui génère ce paramètre, à partir des comportements des investisseurs, vis à vis du risque.

Le modèle à volatilité stochastique lui-même n'est pas conforme à la réalité, dans la mesure, où le prix de l'actif sous-jacent et la volatilité connaissent des sauts dans leurs évolutions. Ainsi, il faut inclure ces sauts, pour évaluer l'option considérée, avec un modèle encore plus complexe.

Dans cette étude, on a utilisé un coefficient de corrélation, entre le prix du sous-jacent et la volatilité, qui est constant. Il serait intéressant d'étudier l'effet des copulas sur un tel modèle.

Ces modèles à volatilité stochastique peuvent être étendus à l'évaluation des options américaines et à des options sur d'autres types de sous-jacents comme le taux d'intérêt ou le taux de change.

Il est vrai que la résolution numérique de l'équation de Garman (1976) nécessite une exploration encore plus approfondie, à travers d'autres méthodes de résolution du type méthodes des différences finies ou méthode des éléments finis.

Pour la gestion des risques, il faut avoir plus de données pour étudier la stratégie Delta-Gamma-Véga neutre. De plus, il faut considérer d'autres Greeks, dans le cas des modèles à volatilité stochastique.

Il est intéressant de chercher une solution analytique (closed form solution) d'un modèle à volatilité stochastique, en considérant une dynamique de la volatilité qui allie à la fois le réalisme et la facilité de calcul. Ça peut être, aussi bien, par la résolution de l'équation de Garman(1976), que par un calcul, suivant un raisonnement risque-neutre (Martingale). L'utilisation de la technique d'inversion de Fourier (Heston, 1993) peut constituer une aide à ce niveau.

Il est intéressant de conjuguer la rapidité de calcul des modèles neuronaux et la précision de la simulation de Monte Carlo pour coter les options. Ceci n'est pas, uniquement, vrai pour les modèles à volatilité stochastique, mais, pour n'importe quel model paramétrique, aussi complexe soit-il. Ceci constitue une aide non négligeable dans la recherche d'une solution analytique.

# TABLE DES FIGURES

Figure 1 : Evolution de la variable $Y$ , entre les instants $t$ et $t'$ , suivant un modèle trinomial	100
Figure 2: Traitement et découpage de la base intraday (ctr= contrat).....	128
Figure 3: Traitement et découpage de la base journalière.....	134
Figure 4 : Série de la volatilité historique sur l'ensemble de la base journalière.....	169
Figure 5 : Série de la volatilité historique relative à l'ensemble de la base intraday .....	171
Figure 6 : Logigramme pour le calcul de la volatilité implicite par l'algorithme « récursif » .....	176
Figure 7 : Série de la volatilité implicite relative à l'ensemble de la base intraday .....	178
Figure 8 : Série de la volatilité implicite relative à l'ensemble de la base journalière.....	178
Figure 9 : Séries des volatilités implicites et de la volatilité historique : moyennes journalières, relatives à la base journalière. ....	181
Figure 10 : Séries des volatilités historiques, moyennes sur un jour, de la base journalière : Volhistmoy calculée par la formule (2.2.3-1) et VolhistmoyA calculée par la formule (2.2.3-2).....	181
Figure 11 : Séries des volatilités implicites, moyennes sur un jour, de la base journalière : Volimp moy calculée par la formule (2.2.3-1) et Volimp moyA calculée par la formule (2.2.3-2).....	182
Figure 12 : Série de la volatilité implicite, moyenne sur un jour, de la base intraday (après sa transformation en base journalière), calculée par la formule (2.2.3-2) .....	182
Figure 13 : Volatilité implicite, à l'instant $t$ , sur l'ensemble de la base intraday. Vol(T1) : si on considère $\tau_1 = \tau_2 = (T-t)/365$ , et Volimp (T1,T2) : si on considère $\tau_1 = (T-t)/365$ et $\tau_2 = (T-t)/250$ .....	183
Figure 14 : (A) : Volatilité implicite, en fonction de la moneyness de l'option, (B) :Volatilité implicite, en fonction de la durée de vie résiduelle de l'option, sur la base de la cotation du contrat 1P (base intraday) le 30 mars 1998 à 10 :24 :01 Vol(T1) : si on considère $\tau_1 = \tau_2 = (T-t)/365$ , et Volimp (T1,T2) : si on considère $\tau_1 = (T-t)/365$ et $\tau_2 = (T-$ $t)/250$ .....	185
Figure 15 : Volatilité implicite, en fonction de la durée de vie résiduelle de l'option, pour différentes valeurs de la moneyness sur la base de la cotation du contrat 1P (base intraday) le 30 mars 1998 à 10 :24 :01.....	186
Figure 16 : (A) Courbes de « Smile » : Volatilité (implicite et historique), en fonction de la parité de l'option, $T-t = 0,00274$ . (B) :Volatilité (implicite et historique), en fonction de la durée de vie résiduelle de l'option, $S/E = 0,981$ . Base journalière .....	187
Figure 17 : Transformation du domaine de calcul de $(S, \sigma)$ par le changement de variables en $(X, Y)$ . ....	212
Figure 18 : Fréquence de distribution et fonction cumulative de la volatilité implicite en fonction du logarithme des centres des intervalles de la volatilité en comparaison avec ceux de la loi normale (Log(0,1339) ;0,1353): cas de la base intraday .....	222
Figure 19 : Fréquence de distribution et fonction cumulative de la volatilité implicite en fonction du logarithme des centres des intervalles de la volatilité en comparaison avec ceux de la loi normale (Log(0,2031) ;0,2074): cas de la base journalière .....	222
Figure 20 : Fréquence de distribution et fonction cumulative de la volatilité historique en fonction du logarithme des centres des intervalles de la volatilité en comparaison avec ceux de la loi normale (Log(0,2030) ;0,2066): cas de la base journalière .....	222

Figure 21 : Séries des drifts réels de la volatilité implicite et de la volatilité historique : cas de la base journalière. (A) tri suivant la date courante ; (B) tri suivant la volatilité historique et (C) tri suivant la volatilité implicite. ....	225
Figure 22 : Séries du drift réel de la volatilité implicite et séries des régressions de type polynomial d'ordre 6: cas de la base intraday (A) tri suivant la date courante et (B) tri suivant la volatilité implicite .....	226
Figure 23 : Intervalle de temps stochastique $dt$ du contrat 1O de la base intraday .....	230
Figure 24 : Découpage de l'écart maximum de la volatilité en $N$ intervalles égaux .....	231
Figure 25 : Série du coefficient $\eta$ , relative au contrat 1O, de la base intraday. ....	237
Figure 26 : Volatilité de la volatilité relative à la volatilité implicite et la volatilité historique, pour la base journalière en considérant l'ensemble de la base.....	238
Figure 27 : Série de la volatilité de la volatilité implicite relative à l'ensemble de la base intraday.....	238
Figure 28 : Division de la période couverte par les données de la base en $N$ intervalles égaux comprenant chacun $n_k$ observations. ....	240
Figure 29 : Détermination de $\kappa$ relative à la première observation de la base intraday comme racine unique de l'équation $f(\kappa)=0$ .....	246
Figure 30 : Série du taux de retour à la moyenne $\kappa$ (déterminée par la méthode 3' avec une erreur inférieure à $10^{-8}$ ) et du coefficient $a_t$ de la base intraday ( $t$ en année). ....	249
Figure 31 : Série du taux de retour à la moyenne $\kappa$ (déterminée par la méthode 3' avec une erreur inférieure à $10^{-7}$ ) et du coefficient $a_t$ de la base journalière.....	249
Figure 32 : Séries des prix du marché du risque lié aux mouvements Browniens de la volatilité historique et de la volatilité implicite : cas de la base journalière (A): $\lambda$ de la volatilité implicite et $\lambda$ de la volatilité historique, en fonction du temps (B): $\lambda$ de la volatilité historique, en fonction de la volatilité (C): $\lambda$ de la volatilité implicite, en fonction de la volatilité.....	255
Figure 33 : Série du prix du marché du risque lié aux fluctuations de la volatilité implicite : cas de la base intraday .....	256
Figure 34: Représentativité d'une solution numérique .....	259
Figure 35 : Maillage suivant le prix du sous-jacent, la volatilité et le temps pour le calcul numérique de la valeur de l'option à l'instant $t$ .....	261
Figure 36 : Rétropropagation des calculs : la valeur de l'option à l'instant $t = T - (k+1)\Delta t$ ....	263
Figure 37 : Le gain $G_1$ en considérant la valeur maximale de $\theta : \theta_{Max}$ Pour $N=2$ . Le gain $G_1$ est supérieur à 102. Base journalière dynamique empirique de la volatilité.....	283
Figure 38 : Le gain $G_2$ en considérant la valeur minimale de $\theta : \theta_{min}$ base journalière. Processus empirique de la volatilité. Pour $N=2$ $G_2=0,9982$ ; Pour $N > 2$ $G_2 > 1$ .....	284
Figure 39 : La valeur de l'option déterminée avec le modèle à volatilité stochastique oscille autour de la valeur de l'option sur le marché, pour un faible nombre de période $N$ allant de 2 à 7. Ceci, en considérant la première observation de la base journalière et considérant un processus Brownien pour la volatilité.....	285
Figure 40 : Les trois contraintes sur le pas du temps pour un schéma stable.....	287
Figure 41 : Gain $G_1$ et gain $G_2$ en fonction du numéro d'observation .....	287
Figure 42 : Les Gains $G_1$ et $G_2$ , en fonction du nombre de pas du temps $N$ , pour la première observation de la base journalière .....	288
Figure 43 : Maillage suivant le prix du sous-jacent et la volatilité : par exemple, les carré correspondent à $i+j$ pair et les cercles à $i+j$ impair.....	290
Figure 44 : Surface : Valeur de l'option calculée avec le modèle à volatilité stochastique en fonction des pas du prix du sous-jacent et de la volatilité ( $N=10$ ).....	296
Figure 45 : Trace de la surface valeur de l'option en fonction des pas du sous-jacent et de la volatilité dans les plans ( $P_n$ ) de la volatilité ; $N=10$ .....	296

Figure 46 : Trace de la surface : valeur de l'option en fonction des pas du sous-jacent et de la volatilité dans les plans ( $Q_n$ ) du prix du sous-jacent; $N=10$ .....	297
Figure 47 : Trace de la surface : valeur de l'option en fonction des pas du sous-jacent pour un nombre de pas $N=10, 15$ et $20$ et pour un pas de la volatilité égal à $0,08$ .....	298
Figure 48 : Trace de la surface valeur de l'option en fonction des pas du sous-jacent et de la volatilité dans les plans ( $P_n$ ) de la volatilité ; $N=10$ , $\Delta\sigma$ variant de $0.065$ à $0.14$ par pas de $0.005$ ; observation n°65 du contrat C2950 tel que $S=2893,64$ , $E=2950$ , $T-t=278$ , $Volimp=0,1616$ , $C=205$ . .....	299
Figure 49 : valeur de marché de l'option et sa valeur déterminée par le modèle à volatilité stochastique en déterminant les pas du maillage, à partir de l'observation 10, puis, à partir de l'observation 73, du contrat C4000 de la base journalière. ....	300
Figure 50 : Valeur de l'option sur le marché et valeur déterminée avec le modèle à volatilité stochastique, en considérant, observation par observation, la valeur $C^*$ , correspondant au minimum (contrat C4000 de la base journalière).....	303
Figure 51 : Série de la volatilité implicite relative au contrat C4000 de la base journalière .	303
Figure 52 : Valeur de l'option calculée à partir du modèle à volatilité stochastique, en fonction du nombre de périodes, dans le cas où $D=0$ et $q=0$ (Black & Scholes) pour différentes valeurs de $\alpha$ et $\beta$ .....	307
Figure 53: Valeur de l'option, calculée, à partir du modèle à volatilité stochastique, en fonction du nombre de périodes, dans le cas où $D=0$ et $q=0$ (Black & Scholes) pour des valeurs élevées de $\alpha$ .....	307
Figure 54 : Convergence du modèle à volatilité stochastique, appliqué.....	308
Figure 55: Déterminants de la valeur de l'option (contrat 1P). (A) : en fonction du N° de l'observation (B) : en fonction de la moneyness.....	309
Figure 56 : Valeur de l'option, sur le marché pour le contrat 1P de la base intraday, et valeur de l'option, calculée par le modèle à volatilité stochastique (volatilité suit un mouvement Brownien). (A) : Valeur de l'option fonction N° de l'observation (contrat 1P) (B) : Valeur de l'option en fonction de la « moneyness » (contrat 1P) $D=0,0991$ ; $q=0,3462$ et $\rho=-0,248$ .....	309
Figure 57 : (A) Déterminants de la valeur de l'option (B) Valeur de l'option Cvs et CBS(T1) en fonction de la moneyness (C) Ecart entre Cvs et la référence CBS(T1), en fonction de la moneyness Pour tous les contrats de classe 1, de la base intraday réunis. Mouvement Brownien de la volatilité implicite pour Cvs : $D=0,0991$ ; $q=0,3462$ et $\rho=-0,248$ . $0,866 < S/E < 1,036$ et $0,5 < T-t < 0,581$ (en années).....	312
Figure 58 : Déterminants de la valeur de l'option relatifs au contrat C4000 de la base journalière. (A): Séries de la Moneyness ( $S/E$ ), de la volatilité historique « volhist » et de la volatilité implicite « volimp » et de la durée de vie résiduelle « $(T-t)/360$ », (B) : séries de la volatilité de la volatilité historique et implicite,.....	314
Figure 59 : Valeur de l'option pour les différents modèles à volatilité stochastiques, par utilisation de l'algorithme de Hopscotch (contrat C4000 de la base journalière) $\rho=0.14038$ .....	316
Figure 60 : Valeur de l'option calculée par les différents modèles à volatilité stochastique avec l'algorithme Hopscotch, et le modèle de Black & Scholes contrat de la base journalière C4000 ; $\rho=0.14038$ .....	316
Figure 61 : Comparaison entre la volatilité historique et la volatilité implicite. Modèles à volatilité stochastique (algorithme de Hopscotch), dynamique empirique de la volatilité dont les paramètres sont déterminés à partir de l'ensemble de la base journalière contrat C4000 ; $\rho=0.14038$ .....	318

Figure 62 : (A) Courbes de la valeur de l'option, en fonction de la parité, (B) courbe de la différence de la valeur de l'option avec la référence CBS(T1), en fonction de la parité. $\rho=0,14038$ .....	323
Figure 63 : Convergence de l'algorithme de la simulation Monte Carlo vers la formule de Black & Scholes un nombre de période $N=400$ et un nombre d'itérations $M=5000$ et $D=q=0$ . .....	339
Figure 64 : Les valeurs de l'option obtenues avec la simulation de Monte Carlo pour $M=15000$ et $M=1000$ simulations, en fonction du nombre de période $N$ , ainsi que les valeurs moyennes respectives. ....	341
Figure 65 :(A) : Les valeurs de l'option données par les différents modèles à volatilité stochastique en fonction de la moneyness ; (B) différence de ces valeurs avec la référence CBS(T1). Contrat 1P de la base intraday. CBS(T1) est ici la valeur de l'option, suivant le modèle de Black & Scholes, en considérant la même durée de vie résiduelle annualisée pour la volatilité implicite et le taux d'intérêt). $\rho = -0,08$ . ....	343
Figure 66 : Les différences des valeurs de l'option avec la référence CBS(T1) en fonction de la moneyness, avec comme paramètre le coefficient de corrélation pour les différents modèles à volatilité stochastique; Contrat 1P de la base intraday. CBS(T1) est la valeur de l'option, suivant le modèle de Black & Scholes, en considérant la même durée de vie résiduelle annualisée pour la volatilité implicite et le taux d'intérêt.....	344
Figure 67 : (A) Valeur de l'option par les modèles à volatilité stochastique pour différentes dynamiques de la volatilité implicite et différents coefficients de corrélation (B) différence entre cette valeur de l'option et la référence CBS(T1) avec lissage polynomial de degré 5. (contrat 9J de la base intraday).....	345
Figure 68 : Valeur de l'option et sa différence avec CBS(T1) en fonction de la moneyness. Valeur de l'option en fonction de la moneyness pour les différents processus de la volatilité avec (A) $\rho=-0,08$ (C) $\rho=-0,248$ . Différence de la valeur de l'option avec CBS(T1) pour les mêmes processus de la volatilité avec (B) $\rho=-0,08$ (D) $\rho=-0,248$ . Contrats de la classe 1 de la base intraday. Moneyness entre 0,866 et 1,035 et temps à l'échéance entre 0,5 et 0,581. Il a été utilisé un lissage polynomial d'ordre 5. ....	351
Figure 69 : Valeur de l'option et sa différence avec CBS(T1) en fonction de la moneyness. Valeur de l'option en fonction de la moneyness pour les différents processus de la volatilité : (A) $\rho=-0,08$ (C) $\rho=-0,248$ . Différence de la valeur de l'option avec CBS(T1) pour les mêmes processus de la volatilité : (B) $\rho=-0,08$ (D) $\rho=-0,248$ . Contrat de la classe 9 de la base intraday. Moneyness entre 0,792 et 0,991 et temps à l'échéance entre 0,217 et 0,236. Il a été utilisé un lissage polynomial d'ordre 5. ....	352
Figure 70 : Différence de la valeur de l'option avec le modèle de Black & Scholes pour le processus de la volatilité, pour différentes valeurs de la corrélation entre le prix du sous-jacent et la volatilité. ....	354
Figure 71 : (A) Valeur de l'option, par les modèles à volatilité stochastique, déterminée par les simulations de Monte Carlo avec volatilité stochastique en fonction de la moneyness avec $\rho=-0,03629$ et 0,14018. (B) Différence de la valeur de l'option, par les modèles à volatilité stochastique et la valeur de référence CBS(T1), avec $\rho=-0,03629$ et 0,14018. (Contrat C4000 de la base journalière). ....	355
Figure 72 : Différence de la valeur de l'option, par les modèles à volatilité stochastique et la valeur de référence CBS(T1), pour le processus empirique et brownien de la volatilité, avec algorithme de Monte Carlo ( $\rho=-0,03629$ ) et algorithme de Hoscotsch ( $\rho=0,14018$ ). (Contrat C4000 de la base journalière). ....	357
Figure 73 : Différence de la valeur de l'option avec CBS(T1) pour processus empirique et brownien de la volatilité : $\rho=-0,036$ . Contrats de la base journalière. Moneyness entre	

0,77 et 0,99 et temps à l'échéance entre 0,95 et 1,025. Il a été utilisé un lissage polynomial d'ordre 5.....	361
Figure 74 : Neurone formel : inputs et bias $b_j$ : $x_{0j}=b_j$ et $w_{0j}=+1$ .....	380
Figure 75 : Neurone formel : input et bias poids synaptique, input bias= $+1$ .....	380
Figure 76 : séparation de l'espace des inputs en deux classes C1 et C2 par un perceptron linéaire.....	381
Figure 77 : classes d'observations linéairement séparées et classes non linéairement séparées.....	382
Figure 78 : Réseau de neurones : architecture "feedforward" MLP à une couche cachée.....	384
Figure 79: Réseau de neurones MLP : les poids synaptiques sont estimés à travers un apprentissage sur une base de donnée comportant les arguments de la fonction $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)_i$ ( $1 \leq i \leq N$ ) et sa valeur $y=(y_1, y_2, \dots, y_N)$ .....	388
Figure 80 : Rétropropagation du signal d'erreur, dans un réseau de neurone de type MLP..	393
Figure 81 : Graphique de la fonction d'activation sigmoïde pour $a=0,15$ ; $a=0,5$ et $a=1$ .....	396
Figure 82 : Réseau cascor au début de l'apprentissage.....	408
Figure 83: Ajout de la première unité cachée.....	409
Figure 84: Ajout du deuxième nœud caché.....	409
Figure 85 : Input et output du modèle neuronal relatifs au contrat 1Q de la base intraday ...	424
Figure 86 : Inputs et outputs du modèle neuronal, relatifs au contrat C2800 de la base journalière.....	425
Figure 87: correct training, correct test et leur différence en fonction du numéro d'itération Le fichier d'apprentissage étant le contrat 1P et le fichier de test étant le contrat.....	430
Figure 88: Erreur de training, Erreur de test en fonction du numéro d'itération. Le fichier d'apprentissage étant le contrat 1P et le fichier de test étant le contrat 1Q de la base intraday.....	430
Figure 89 : Séries C" RN et C" désiré pour le modèle 1P1Q base intraday ; modèle-type 5.....	447
Figure 90 : Séries C" calculée par les réseaux de neurones et série C" désirée,.....	449
Figure 91: Séries « C" désirée » et série « C" calculée par les réseaux de neurones » pour le modèle 2A2A de la classe de moneyness 2 de la base intraday ; Modèle-type 5.....	449
Figure 92 : Séries « C" calculée par les réseaux de neurones » et la série « C" désirée », pour le modèle C3250-C400 base journalière; modèle-type 5.....	450
Figure 93 :La série « C' calculée » et la série « C' désirée » du modèle neuronal 1P1Q : base intraday ; Modèle-type 5.....	453
Figure 94: La séries « C' désirée » et la série « C' calculée », pour le modèle 2A2A de la classe de moneyness 2 de la base intraday ; modèle-type5.....	453
Figure 95 : La séries cumul de C', calculée par le modèle neuronal, et la série cumul de C' relative au marché, qui montre la divergence du modèle neuronal.....	456
Figure 96 : Série de la valeur de l'option et sa différence avec la référence CBSimp calculée par les modèles neuronaux et les modèles à volatilité stochastique (simulation de Monte Carlo) et le modèle de Black & Scholes. (A) valeur de l'option en fonction de la moneyness où le contrat 1P sert pour l'apprentissage et les autres contrats (classe 1 de la base intraday), pour le test (B) différence de cette valeur de l'option avec la référence CBSimp en fonction de la moneyness. (C) valeur de l'option en fonction de la moneyness où le contrat 9J sert pour l'apprentissage et les autres contrats (classe 9 de la base intraday), pour le test (D) différence de cette valeur de l'option avec la référence CBSimp en fonction de la moneyness. On a utilisé un lissage polynomial d'ordre 5. ...	457
Figure 97 : Comparaison entre les modèles neuronaux et les modèles à volatilité stochastique. (A) valeur de l'option en fonction de la moneyness contrat C4000 (B) valeur de l'option en fonction du temps à l'échéance contrat C4000 (C) valeur de l'option diminuée de la	



valeur du marché en fonction de la moneyness. Contrat C4000 (D) valeur de l'option en fonction de la moneyness contrat C3250 (E) valeur de l'option diminuée de la valeur du marché en fonction de la moneyness. Contrat C3250 .....	462
Figure 98 : Le Delta d'un call et d'un put européen, selon le modèle de Black & Scholes...	475
Figure 99 : Gamma d'un call et Gamma d'un put, selon le modèle de Black & Scholes.....	477
Figure 100 : Vêga d'un call et d'un put européen, selon le modèle de Black & Scholes.....	480
Figure 101 : Thêta d'un call et d'un put européen, selon le modèle de Black & Scholes .....	483
Figure 102 : Rho d'un Call et celui d'un put, selon le modèle de Black & Scholes.....	485
Figure 103 : Evolution des déterminants de la valeur de l'option, en fonction du temps (en jour) : volimp= volatilité implicite ; (T-t)/250=durée de vie résiduelle; S/E=S/3550= prix du sous-jacent rapporté au prix d'exercice du contrat 9L .....	526
Figure 104 : Delta du contrat 1P pour différentes méthodes de calcul (a) tri sur la date (b) tri sur le prix du sous-jacent .....	527
Figure 105 : Deltas des différents contrats de la classe 9 calculés par le modèle de Black & Scholes (BS9) .....	529
Figure 106 : Deltas des différents contrats de la classe 9 pour les modèles neuronaux.....	530
Figure 107 : Delta, pour les contrats de la classe 9, calculée par les .....	531
Figure 108 : Deltas des différents modèles de calcul en fonction du prix du sous-jacent, pour le contrat 9L, sur la période commune du 2/01/1998 au 19/02/1998.....	532
Figure 109 : Deltas du contrat 9L calculés avec les modèles à volatilité stochastique,.....	532
Figure 110 : Gamma des contrats de la classe 9, par les modèles BS9 et RN9BS .....	534
Figure 111 Gamma pour les contrats de la classe 9 calculée .....	535
Figure 112 : Gammas des différents modèles de calcul en fonction du prix du sous-jacent, pour le contrat 9L, sur la période commune du 2/01/1998 au 19/02/1998 .....	536
Figure 113 : Gammas du contrat 9L calculés avec les modèles à volatilité stochastique, en fonction du prix du sous-jacent, pour la période du 2/01/1998 au 25/03/1998.....	537
Figure 114 : Vêga des contrats d'option de la classe 9, pour les modèles BS9 et RN9BS....	538
Figure 115 Végas pour les contrats de la classe 9, modèles à volatilité stochastique.....	539
Figure 116 : Végas du contrat 9L, pour les différents modèles en fonction de la valeur.....	540
Figure 117: Erreurs de couverture Delta-neutre relatives aux différents contrats de la classe 1 de la base intraday. BS1 : modèle de Black & Scholes et RN1BS : modèle neuronal ..	541
Figure 118: Erreur de couverture et endettement, relatifs aux différents contrats de la classe 9, et correspondants au modèle de Black & Scholes.....	543
Figure 119 : Erreurs de couverture relatives à la stratégie Delta-neutre pour les différents contrats de la classe 9 et pour les différentes méthodes de calcul du Delta.....	543
Figure 120: Erreur de couverture et endettement, Stratégie Delta-neutre, modèleVS9 q=cte, contrats de la classe 9. ....	544
Figure 121: Erreur de couverture et endettement, Stratégie Delta-neutre, modèleVS9 q, contrats de la classe 9 .....	545
Figure 122: Erreur de couverture et endettement, Stratégie Delta-neutre, modèleVS9 OU, contrats de la classe 9.....	545
Figure 123: Erreur de couverture, stratégie Delta-neutre, pour tous les modèles, contrat 9L, jusqu'au 18/02/1998.....	546
Figure 124: Endettement, stratégie Delta-neutre, pour tous les modèles, contrat 9L, jusqu'au 18/02/1998. ....	546
Figure 125: Erreur de couverture, stratégie Delta-neutre, modèles à volatilité stochastique, contrat 9L, sur l'ensemble de la période de couverture .....	547
Figure 126: Endettement, stratégie Delta-neutre, pour ces modèles à volatilité stochastique, contrat 9L, sur l'ensemble de la période de couverture. ....	547

Figure 127 : Erreur de couverture absolue moyenne relative, en fonction du jour de couverture, stratégie Delta-Gamma-neutre, modèleBS9 et (b) modèle RNBS9, contrats de la classe 9. 9L=option de base, 9I, 9J ou 9K =option additionnelle.....	551
Figure 128 : Erreur de couverture, Stratégie Delta-Gamma-neutre, Modèles à volatilité stochastique (VS9q, VS9q=cte et VS9OU), contrats de la classe 9. 9L=option de base, 9I, 9J ou 9K =option additionnelle.....	552
Figure 129 : Erreur de couverture, Stratégie Delta-Gamma-neutre, Tous les modèles, contrat 9L=option de base, 9K =option additionnelle, période du 2/02/1998 au 19/02/1998....	553
Figure 130 : Erreur de couverture, en fonction du jour de couverture, pour la stratégie Delta-Gamma-neutre, Modèles à volatilité stochastique, contrat 9L=option de base, 9K =option additionnelle, période du 2/02/1998 au 30/03/1998.....	553
Figure 131 : Endettement, Stratégie Delta-Gamma-neutre, tous les modèles, contrat 9L=option de base, 9K =option additionnelle, période du 2/02/1998 au 30/03/1998....	554
Figure 132: Erreur de couverture absolue moyenne relative, en fonction du jour de couverture stratégie Delta-Véga-neutre, pour lemodèleBS9 et (b) modèle RNBS9, contrats de la classe 9. 9L=option de base, 9I, 9J ou 9K =option additionnelle .....	558
Figure 133: Erreur de couverture, Stratégie Delta-Véga-neutre, Modèles à volatilité stochastique (VS9q, VS9q=cte et VS9OU), contrats de la classe 9. 9L=option de base, 9I, 9J ou 9K =option additionnelle.....	559
Figure 134: Erreur de couverture, en fonction du jour de couverture, pour la stratégie Delta-Véga-neutre, tous les modèles, contrat 9L=option de base, 9K =option additionnelle, période du 2/01/1998 au 30/03/1998.....	560
Figure 135: Endettement, en fonction du jour pour la stratégie Delta-Véga-neutre, tous les modèles, contrat 9L=option de base, 9K =option additionnelle, période du 2/01/1998 au 30/03/1998.....	561
Figure 136 : Erreur de couverture, en fonction du jour, pour la stratégie Delta-gamma-véga-neutre, modèles à volatilité stochastique modèle neuronal et modèle de Black & Scholes, 9L=option de base 9K et 1N = options additionnelles, période du 4/03/1998 au 16/03/1998.....	564
Figure 137 : Endettement, en fonction du jour stratégie Delta-gamma-véga-neutre, modèles à volatilité stochastique modèle neuronal et modèle de Black & Scholes, 9L=option de base 9K et N = options additionnelles, période du 4/03/1998 au 16/03/1998.....	565
Figure 138 : Proportions du portefeuille de couverture, dans le sous-jacent (x(t)), dans la première option additionnelle 9K (y(t)) et dans la deuxième option additionnelle 1N (z(t)), stratégie Delta-Gamma-Véga neutre sur la période du 4/03/1998 au 16/03/1998 .....	566

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Pay-off des portefeuilles PF1 et PF2.....	82
Tableau 2 : Pay-off du portefeuille $\Pi$ .....	85
Tableau 3 : Taille, prix d'exercice (E), durée de vie résiduelle (T-t), moneyness moyenne $x_{moy}$ , l'écart maximale de moneyness ( $x_{max} - x_{min}$ ) et la taille du fichier test des différents contrats intraday.....	130
Tableau 4 : taille du fichier test en pourcentage de la taille du fichier d'apprentissage.....	131
Tableau 5: Répartition de la base suivant les critères de « moneyness »= $x$ et temps restant à l'échéance $\tau$ en douze classes de C1 à C12.....	131
Tableau 6: Nombre d'observations relatif à une classe de moneyness et de temps restant à l'échéance, à son fichier d'apprentissage et son fichier test classe.....	132
Tableau 7: Prix d'exercice (E), Taille, Date d'échéance, des différents contrats de la base journalière choisis pour l'étude empirique.....	135
Tableau 8 : Nombre d'observations, relatives au fichier apprentissage et fichier test, des différents contrats de la base journalière, choisis pour l'étude empirique.....	136
Tableau 9 : Déterminants et valeurs de l'option à l'instant t si on considère $\tau_1 = \tau_2 = (T-t)/365$ , et si on considère $\tau_1 = (T-t)/365$ et $\tau_2 = (T-t)/250$ .....	156
Tableau 10 : Déterminants et valeur du contrat d'option 1P (base intraday) le 30 mars 1998 à 10 :24 :01.....	184
Tableau 11 : Expression de $X = X(S, \sigma)$ et de $\sigma = \sigma(X, Y)$ , en fonction de l'expression.....	211
Tableau 12 : Conditions aux limites dans le plan (S, $\sigma$ ) et dans le plan (X,Y), dans le cas où la volatilité de la volatilité est de la forme : $q = \eta \sigma^\gamma$ avec $\gamma \neq 1$ et $\gamma \neq 2$ .....	212
Tableau 13 : Modèle de la dynamique de la volatilité dans la littérature.....	213
Tableau 14: Drift risque-neutre de la volatilité historique « Vol hist » et de la volatilité implicite « Vol imp » pour les 5 contrats choisis de la base journalière et pour l'ensemble de cette base.....	216
Tableau 15 : Drift risque-neutre de la volatilité implicite « Vol imp » pour les 9 contrats choisis de la base intraday et pour l'ensemble de cette base.....	216
Tableau 16: Volatilité de la volatilité, pour chacun des 5 contrats choisis, de la base journalière, et pour, l'ensemble de la base, en considérant la volatilité historique « Vol hist » et la volatilité implicite « Vol imp ».....	218
Tableau 17 : La moyenne et l'écart type de la distribution du logarithme de la volatilité en régime permanent, ainsi que les coefficients $\gamma$ et $\eta$ relatifs au calcul de la volatilité de la volatilité et la valeur $\sigma_0$ de la volatilité qui annule le drift réel de la volatilité.....	224
Tableau 18: Coefficients de régression $\alpha$ et $\beta$ , en fonction du nombre d'intervalles N, pour la volatilité implicite, base journalière fichier « Fichjour ».....	233
Tableau 19: Coefficients de régression $\alpha$ et $\beta$ , en fonction du nombre d'intervalles N, pour la volatilité historique, base journalière fichier « Fichjour ».....	234
Tableau 20 : Les valeurs des coefficients $\alpha$ et $\beta$ pour la volatilité historique (hist) et la volatilité implicite (imp), en considérant la base journalière.....	234
Tableau 21: Coefficients $\gamma$ et $\beta$ pour chacun des contrats choisis de la base journalière pour la volatilité implicite.....	235

Tableau 22: Coefficients $\gamma$ et $\beta$ pour chacun des contrats choisis de la base journalière pour la volatilité historique.....	235
Tableau 23 : coefficients $\gamma$ et $\beta$ pour l'ensemble de la base intraday pour la volatilité implicite.....	236
Tableau 24 : Coefficients $\gamma$ et $\beta$ , pour les 9 contrats, choisis de la base intraday, pour la volatilité implicite .....	236
Tableau 25 : Valeurs des paramètres du processus d'Ornstein Uhlenbeck en tant que processus de la volatilité implicite pour la base journalière et la base intraday.....	250
Tableau 26: Le coefficient de corrélation entre le mouvement de l'indice CAC 40 et de celui de sa volatilité pour la base journalière, en considérant la volatilité historique et la volatilité implicite, avec un mouvement Brownien ou le processus empirique prédéfini. ....	252
Tableau 27: Le coefficient de corrélation entre le mouvement de l'indice CAC 40 et de celui de sa volatilité pour la base intraday, en considérant la volatilité implicite, avec un mouvement Brownien ou le processus empirique prédéfini. ....	252
Tableau 28 : Le coefficient de corrélation entre le mouvement de la volatilité implicite et le mouvement du prix du sous-jacent, en considérant l'ensemble de chacune des bases intraday et journalière, pour les trois processus considérés de la volatilité. « OU »=Ornstein Uhlenbeck.....	253
Tableau 29: Calcul des coefficients du membre de droite du schéma numérique. Ces coefficients sont à multiplier par les dérivées partielles qui correspondent aux exposants de $\Delta S$ et $\Delta \sigma$ . Les coefficients encadrés correspondent à l'équation différentielle et les autres coefficients correspondants à l'erreur de troncature.....	272
Tableau 30 : Valeur de l'option $C_{vs}$ par le modèle à volatilité stochastique, en fonction du nombre $N$ de périodes, en considérant un schéma explicite et sa valeur du marché $C$ égale à 117.....	284
Tableau 31 : Pas du temps (nombre de périodes $N$ ), pas du prix du sous-jacent $\Delta S$ et pas de la volatilité $\Delta \sigma$ , déterminés, à partir d'une observation de chaque contrat de la base journalière.....	300
Tableau 32: Coefficient de corrélation, écart quadratique moyen MSE entre la valeur de l'option $CBS(T_1)$ et la valeur calculée par le modèle à volatilité stochastique pour les différents contrats de la base intraday. Valeur moyenne de l'option sur le marché et le MSE rapporté à cette valeur moyenne pour tous les contrats précités ; Dynamique de la volatilité= mouvement Brownien, déterminé, à partir de l'ensemble de la base. $\rho=-0,248$ .....	310
Tableau 33: Désignation des différents modèles à volatilité stochastique, relatifs à la base journalière.....	314
Tableau 34 : Erreur quadratique moyenne $MSE(\rho_1; \rho_2)$ entre les valeurs de l'option par les modèles à volatilité stochastique $C(\rho_1= 0.14038)$ et $C(\rho_2= - 0,03629)$ , la volatilité suit un mouvement Brownien ; Base journalière. ....	319
Tableau 35 : Coefficient de corrélation entre la valeur de marché de l'option et les valeurs de l'option calculées par les différents modèles (volatilité stochastique, et modèle de Black & Scholes : pour les différents contrats de la base journalière. $\rho= 0.14038$ .....	320
Tableau 36 : Ecart quadratique moyen entre les valeurs de l'option calculées par les différents modèles (volatilité stochastique, modèle de Black & Scholes) et la valeur de référence de l'option, pour les différents contrats de la base journalière.....	320
Tableau 37 : Prix moyen de l'option sur le marché, relatifs aux différents contrats .....	320
Tableau 38 :Ecart quadratique moyen entre les valeurs de l'option calculées par les différents modèles (modèle à volatilité stochastique et modèle de Black & Scholes) et la valeur de	

référence, pour les différents contrats de la base journalière, rapporté au prix moyen de la valeur de l'option de référence.....	321
Tableau 39 : Données considérées pour tester la convergence de la simulation de Monte Carlo .....	338
Tableau 40 : Temps de convergence et écart (en gras) de la valeur de l'option C(N,M) relatifs à la simulation de monte Carlo, (en considérant N périodes et M simulations), par rapport au modèle de Black & Scholes. On a considéré la première observation du contrat C2800 dont les caractéristiques sont données dans le tableau 39. ....	340
Tableau 41 Valeur de l'option avec volatilité stochastique C(N,M)(en gras) et le temps de convergence correspondant par la simulation de monte Carlo, en considérant N périodes et M simulations. On a considéré la première observation du contrat C2800 dont les caractéristiques sont données dans le tableau 39, avec $D=0,0326$ et $q=0,2825$ . ....	340
Tableau 42: Coefficient de corrélation de la valeur de l'option, par les modèles à volatilité stochastique CMC, déterminée par la simulation de Monte Carlo, avec le CBS(T1), pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre les fluctuations du prix du sous-jacent et celles de la volatilité (base intraday). ....	347
Tableau 43 : Ecart moyen quadratique de la valeur de l'option, par les modèles à volatilité stochastique CMC, déterminée par la simulation de Monte Carlo, avec le CBS(T1), pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre les fluctuations du prix du sous-jacent et celles de la volatilité (contrats de la base intraday). ....	348
Tableau 44 : Ecart moyen quadratique de la valeur de l'option CMC déterminée par la simulation de Monte Carlo, par rapport au prix de BS(T <sub>1</sub> ), rapporté à ce dernier prix pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre le prix du sous-jacent et la volatilité (contrats de la base intraday) ....	349
Tableau 45 : Ecart moyen quadratique relatif de la valeur de l'option, par le modèle à volatilité stochastique CMC, déterminée par la simulation de Monte Carlo, par rapport au prix de BS(T <sub>1</sub> ), prix pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre le prix du sous-jacent et la volatilité : $X=(\text{Somme}(C(\text{modèle})/CBS(T_1)-1)^2)^{1/2}$ .....	350
Tableau 46 : Coefficient de corrélation de la valeur de l'option, donnée par le modèle à volatilité stochastique CMC, par la simulation de Monte Carlo, avec le prix du marché, pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre les fluctuations du prix du sous-jacent et celles de la volatilité (base journalière). ....	358
Tableau 47 : Ecart moyen quadratique de la valeur de l'option CMC déterminée par le modèle à volatilité stochastique par la simulation de Monte Carlo, par rapport au prix de BS(T <sub>1</sub> ), pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre les fluctuations du prix du sous-jacent et celles de la volatilité (base journalière). ....	359
Tableau 48 : Valeur moyenne de l'option déterminée par les différentes simulations de Monte Carlo (base journalière).....	360
Tableau 49 : Ecart moyen quadratique de la valeur de l'option CMC déterminée par les modèles à volatilité stochastique, par la simulation de Monte Carlo, par rapport au prix de BS(T <sub>1</sub> ), rapporté à ce dernier prix pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre les fluctuations du prix du sous-jacent et celles de la volatilité (base journalière). ....	360
Tableau 50 : Ecart moyen quadratique relatif de la valeur de l'option CMC déterminée par les modèles à volatilité stochastique, par la simulation de Monte Carlo, par rapport au prix	

de  $BS(T_1)$ , prix pour les différentes dynamiques de la volatilité en considérant deux coefficients de corrélation entre les fluctuations du prix du sous-jacent et celles de la volatilité :  $X=(\text{Somme}(C(\text{modèle})/CBS(T_1)-1)^2)^{1/2}$  (cf équation (3.2.2-4)). ..... 361

Tableau 51 : Valeurs minimales et valeurs maximales de la série  $C'_t$  ainsi que les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pour chacun des contrats choisis de la base journalière. .... 421

Tableau 52 : Valeurs minimales et valeurs maximales de la série  $C'_{t,\text{diff}}$  ainsi que les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pour chacun des contrats choisis de la base journalière ..... 421

Tableau 53 : Valeur minimale et valeur maximale de la série  $C'_t$  ainsi que les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pour chacun des contrats choisis de la base intraday..... 422

Tableau 54: Valeur minimale et valeur maximale de la série  $C'_t$  ainsi que les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pour chacune des classes 2 et 5 de la base intraday..... 422

Tableau 55: Les inputs et l'output des modèles neuronaux type à considérer dans l'étude empirique ..... 423

Tableau 56: Matrice d'apprentissage-test relative à la classe 1 des contrats de la base journalière. Modèle-type 5. Pour un élément, le contrat de ligne est un contrat apprentissage et le contrat de colonne est un contrat test. NCC est le nombre de couches cachées..... 434

Tableau 57 : Résultats modèles neuronaux pour les contrats de la classe 9 ; 9ih1= Modèle-type 5 ; 9ih= Modèle-type 6. Anomalie= performances test meilleures que celles de l'apprentissage. Une ligne : contrat apprentissage ; Une colonne : contrat test..... 437

Tableau 58: Résultats modèles neuronaux pour les contrats de la classe 9 9i = Modèle-type ; 9ss= Modèle-type; Anomalie= performances test meilleures que celles de l'apprentissage. Une ligne : contrat apprentissage Une colonne : contrat test..... 438

Tableau 59 : Résultats des modèles neuronaux pour les sous-classes de la classe 2 ; 2 = modèle-type 6 ; 2ih= modèle-type 5 ; Anomalie= performances test meilleures que celles de l'apprentissage. Une ligne : contrat apprentissage ; Une colonne : contrat test ..... 440

Tableau 60 : Résultats modèles neuronaux pour les sous-classes de la classe 2 ; modèles diagonaux pour les modèles types relatif à 2i= modèle-type 3, 2h= modèle-type 2, 2ss=modèle-type 1 ; Anomalie= performances test meilleures que celles de l'apprentissage. Une ligne : contrat apprentissage ; Une colonne : contrat test..... 441

Tableau 61 : Résultats des modèles neuronaux pour les sous-classes de la classe 5 ; 5=modèle-type 6;5ih = modèle-type 5 ; Anomalie= performances test meilleures que celles de l'apprentissage. Une ligne : contrat apprentissage ; Une colonne : contrat test ..... 442

Tableau 62 : Résultats des modèles neuronaux pour les sous-classes ..... 442

Tableau 63 : Partie supérieure de la matrice apprentissage-test hors diagonale. Dérivation simple de la série de l'output ; contrats de la base journalière ; Modèle type 5. .... 444

Tableau 64: Partie supérieure de la matrice apprentissage-test hors diagonale. Dérivation du logarithme de la série de l'output. Contrats de la base journalière ; Modèle-type 5..... 445

Tableau 65 : Poids synaptiques relatifs à la meilleure architecture du modèle 1P1Q. NC1 et NC2 sont les neurones cachés 1 et 2 ..... 447

Tableau 66 : Coefficients  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  et valeur initiale  $C_0$  de l'option, pour déterminer la série  $C'$ , à partir de la série  $C''$  ; contrats de la base intraday. .... 451

Tableau 67: Coefficients  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  pour déterminer la série  $C'$  à partir de la série  $C''$ , classes de la moneyness et du temps à l'échéance de la base intraday. .... 452

Tableau 68: Coefficients  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  pour déterminer la série  $C'$  à partir de la série  $C''$  ; ainsi que la valeur initiale de l'option  $C_0$  ; contrats de la base journalière. .... 452

Tableau 69 : Coefficient de corrélation et écart quadratique moyen de la valeur de l'option calculée par le modèle (1i,1j), par rapport à la référence CBSimp. contrats de la classe 1 de la base intraday. RN(1i ;1j) valeur de l'option donnée par le modèle neuronal avec 1i Contrat apprentissage (ligne) et 1j Contrat de test (colonne). .....	459
Tableau 70: Coefficient de corrélation et écart quadratique moyen de la valeur de l'option .....	460
Tableau 71 : Ecart quadratique moyen entre la valeur de l'option calculée par le meilleur modèle Neuronal, pour un contrat d'apprentissage considéré et la valeur de l'option sur le marché : base journalière.....	464
Tableau 72 : Cas possibles concernant les durées de vie résiduelles de l'option de base et des options additionnelles.....	513
Tableau 73 : Proportions du portefeuille de couverture lorsque $\tau_1 = \tau$ .....	513
Tableau 74 : Proportions du portefeuille de couverture lorsque $\tau_2 = \tau$ .....	514
Tableau 75 : Date de début et de fin de fichier et date d'échéance des différents .....	520
Tableau 76 : Nombre de cas possibles pour chacune des stratégies dynamiques de couverture, en considérant les contrats des classes 1 et 9 de la base intraday et le modèle de Black & Scholes (BS), le modèle neuronal (RN) et le modèle à volatilité stochastique (VS) avec les trois processus de la volatilité : Brownien VS(q=cte), empirique VS(q) et Ornstein Uhlenbeck VS (OU) .....	521
Tableau 77 : Différentes méthodes de calcul des Greeks et différents fichiers correspondants, pour le calcul de l'erreur de couverture en considérant les classes de contrats 1 et 9 de la base intraday le modèle de Black & Scholes (BS), les modèles neuronaux (RN) et les modèles à volatilité stochastique (VS) avec les trois processus de la volatilité : Brownien VS(q=cte), empirique VS (q) et Ornstein Uhlenbeck VS(OU) Méthode 1 : Greek= moyenne de ce Greek sur 1 jour Méthode 2 : Greek=Greek(valeurs moyenne des déterminants sur 1jour).....	524
Tableau 78 : Erreur de couverture absolue moyenne relative, pour les différents contrats de la classe 1 (base intraday), calculée par les différentes méthodes.....	542
Tableau 79: Erreur absolue moyenne relative de la couverture Delta-neutre des contrats de la classe 9 pour les différents modèles, à la date du 18 février 1998. ....	548
Tableau 80 : Erreur de couverture absolue moyenne relative, pour les stratégies Delta-Gamma- neutre, couple de contrats de la classe 1, modèle de Black & Scholes et modèle neuronal, à la date du 12/06/1998. ....	550
Tableau 81: Erreur de couverture absolue moyenne relative pour les différentes stratégies Delta-Gamma-neutre, pour chacun des modèles de couverture, pour les contrats de la classe 9 (base intraday), à la date du 19 février 1998 .....	555
Tableau 82 : Erreur de couverture absolue moyenne relative pour les différentes stratégies Delta-Véga-neutre, pour le modèle de Black & Scholes et modèle neuronal, contrats de la classe 1 (base intraday), à la date du 19/02/1998 .....	557
Tableau 83: Erreur de couverture absolue moyenne relative pour les différentes stratégies Delta-Véga-neutre, pour chacun des modèles de couverture, pour les contrats de la classe 9 (base intraday), à la date du 19 février 1998 .....	562
Tableau 84 : Erreur de couverture moyenne absolue relative, pour les différentes stratégies dynamiques basées sur le contrat 9K et les différents modèles à volatilité stochastique (VS9q=cte, VS9 q et VS9OU), le modèle neuronal (RN9BS) et le modèle de Black & Scholes (BS9).....	566

## **BIBLIOGRAPHIE**

- Aleksander I. et Morton H. (1990) An introduction to Neural computing London- Chapman & Hall
- Amilon H. (2001) A neural network versus Black-Scholes : A comparison of pricing and hedging performances. International finance conference on financial markets, risk management and corporate governance-Sousse Tunisia 2001. Tome 2 page 240-263
- Anders U., Korn O. and Schmitt C. (1998) Improving the pricing of options :A neural network approach. Journal of forecasting Vol. 17, pp 369-388
- Anderson J.A. (1988) General introduction Neurocomputing Foundation of research (JA Anderson and Rosenfeld E, eds), pp xiii-xxi; Cambridge; MA:MIT press
- Bachelier L. (1900) Théorie de la spéculation. Paris : Gauthier-Villars
- Beckers S. (1981) Standard deviations implied in options prices as predictors of future stock price variability; Journal of Banking and Finance, vol 5;pp 363-382
- Black F. & Scholes M. (1973) The pricing of options and corporate Liabilities. Journal of political economy Vol. 81, May-June, pp. 637-654
- Black F. (1976) Studies of stock price volatility changes; Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Associations, Business and Economic Statistics section 177-181
- Black F.(1976) The pricing of commodity contracts, Journal of financial economics Vol. 3 January-March, pp 167-179
- Christie A. A. (1982) The stochastic Behavior of common stock variances Journal of Financial Economics 10, 407-432
- Coleman T.F., Kim Y., LI Y. & Verma A. (1999) Dynamic hedging in a volatile Market ; Working paper ; Cornell University; pp1-9
- Cox J. C. and Ross S.A. (1976) The valuation of options for alternative stochastic processes. Journal of financial economics Vol. 3 pp145-166
- Cox J. C. and Ross S.A. (1985) An intertemporal general equilibrium model of asset prices Econometrica 53, 363-384



- Fahlman et Lebiere (1990) The cascade correlation learning architecture; advances in neural information processing systems vol2, pp 524-532, San Mateo CA: Morgan Kaufmann
- Fama E. (1970) Efficient capital markets: a review of theory and empirical work; Journal of Finance vol 25
- Finnerty J. (1978) The CBOE and market efficiency, Journal of financial and quantitative analysis, Vol. 13, 1978, pp 29-38
- Fiordaliso A. (1997) Une application des réseaux de neurones artificiels MLP à la prévision du prix d'une option négociable—Economie et prévision n° 127 pp 47-62
- Fouque J.P. and Papanicolaou G. and Sifar K. R. (2000) Derivatives in financial markets with stochastic volatility Cambridge University Press
- Garcia R. Gençay R. (2000) Pricing and hedging derivative securities with neural networks and a homogeneity hint. Journal of econometrics Vol 94, pp 93 –115
- Garman M. (1976) A general theory of asset valuation under diffusion state processes; Working paper N°50 (Graduate School of Business Administration University of California Berkeley, CA
- Gourlay A. R. (1970) Hopscotch :A fast second order partial differential equation solver ; Institute of Mathematics and Applications Journal 6, 375-390
- Heston S. L. (1993) Closed form solution for options with stochastic volatility with application to bonds and currency options The review of financial studies Vol. 6 Issue 2 (1993), 327-343
- Hull J. and White A. (1987) The pricing of options on assets with stochastic volatilities. The journal of finance Vol. XLII N° 2 june 1987
- Hutchinson J.M, Lo A. W.and Poggio T. (1994) A non parametric Approach to Pricing and Hedging Derivative securities via learning Networks, Journal of finance, Vol. 49 n°3 pp 851-889
- Jessica James (1999) Modelling the money market. Phys. World 12 (9), 13-15
- Johnson H. & Shanno D. (1985) Option pricing when the variance is changing; Journal of Finance and Quantitative analysis vol 22 pp 143-151
- Kramer and Sangiovanni-Vincentelli, (1989) Efficient parallel learning algorithms for neural networks: advances in neural information processing systems, vol 1;pp 40-48; CA: Morgan Kaufmann

- Lajbcygier P. R. and Connor J. T. (1997) Improved option pricing using artificial neural networks and bootstrap methods. *International Journal of Neural Systems*, Vol. 8, No 4 pp 457-471
- Latane H.R.et Rendleman Jr (1976) Standard deviations of stocks prices Implied in option prices ; *Journal of Finance* 31; 369-381
- Le Cun Y. ( 1985) Une procédure d'apprentissage pour réseau à seuil assymétrique ; *Cognitiva* vol 85 pp 599-604
- Le Cun Y. (1989) Généralisation and network design strategies « technical report CRG-TR-89-4 ; Department of computer science University of Toronto Canada
- Le Cun Y. (1993) Efficient learning and second order methods; A Tutorial at NIPS 93; Denver
- Malliaris M., Salchenberger L. (1993) A neural network model for estimating option prices.– *Journal of applied intelligence* 3
- McCulloch W.S. et Pitts W. (1943) A Logical calculus of the ideas immanent in nervous activity ; *Bulletin of Mathematical Biophysics* Vol 5 pp 115-133
- Merton (1976) Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of financial Economics*
- Oztukel A. and Willmott P. (1998) Uncertain parameters, an Empirical stochastic volatility model and confidence limits. *Intertemporal Journal of theoretical and applied Finance* 1; 175-189
- Parker D. B.( 1985) Learning –logic: Casting the cortex of the humain brain in silicon; Technical report TR47 center of computational research in Economics & Management Science Cambridge MA:MIT Press
- Robbins H. & Monro S. (1951) A Stochastic approximation method; *Annals of Mathematical Statistics* Vol 22 pp400-407
- Rumelhart B.A., (1986) Learning representations of backpropagation errors; *Nature (London)* Vol 323;pp533-536
- Russo A.P. (1991) Neural Networks for sonar signal processing Tutorial N°8;IEEE conference in neural networks for Ocean engineering Washington D.C
- Samuelson (1965) *Indust. Mgmt. Rev* 6(2), 13-39
- Schmalensee R. et Trippi R.R. (1978), Common stock volatility expectations implied by option premia; *Journal of Finance* 33, pp129-147
- Scott L. O. (1987) Option pricing when the variance changes randomly: Theory,

- estimation and an application. *Journal of financial and quantitative analysis* Vol. 22 N°4 December 1987
- Stein E.M. and Stein J.C. (1991) Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach. *The review of financial studies* Vol.4 number 4 pp727-752
- Stix G. (1998) A calculus of risk, *Sci. Am.*, May 70-75
- Stone M. (1974) Cross-validators choice and assessment of statistical predictions. *J. Roy. Statist. Soc.*, **36B**, 111–147.
- Stone M. (1978) Cross-validation: A review. *Math. Operations for sch. Statist., Ser. Statistics*, **9**, 127–139.
- Weigend A.S., Huberman D.E. et Rumelhart B.A., (1990) Predicting the future: A connexionist approach; *International Journal of Neural systems* Vol 3; pp193-209
- Wiggins J. B. (1987) Option values under stochastic volatility :Theory and Empirical estimates.. *Journal of Financial Economics* Vol. 19 pp 351-372
- Willmott P. (2000) *Derivatives :The theory and practice of financial engineering* John Wiley and Sons