



HAL
open science

Orientation de matrices et applications

Maksi Raco

► **To cite this version:**

Maksi Raco. Orientation de matrices et applications. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1983. Français. NNT: . tel-00308482

HAL Id: tel-00308482

<https://theses.hal.science/tel-00308482>

Submitted on 30 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE 3ème CYCLE
"Recherche Opérationnelle"**

par

Maksi RACO

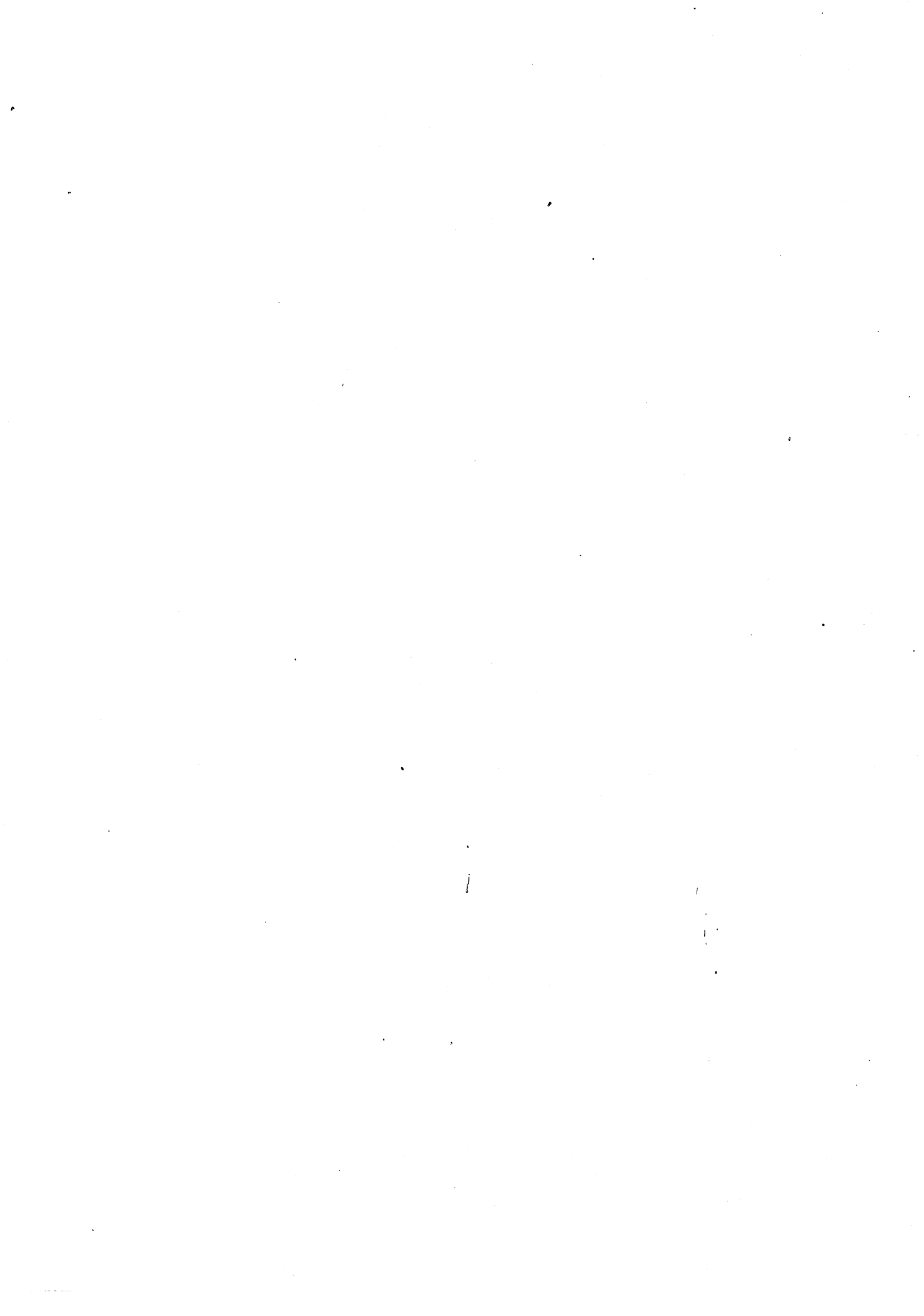


**ORIENTATION DE MATRICES
et
APPLICATIONS**



Thèse soutenue le 27 juin 1983 devant la Commission d'Examen :

Monsieur	Michel SAKAROVITCH	:	Président
Messieurs	Claude BENZAKEN	}	Examineurs
	Jean FONLUPT		
	Alain QUILLOT		
	Jean-Pierre UHRY		



UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

.../...

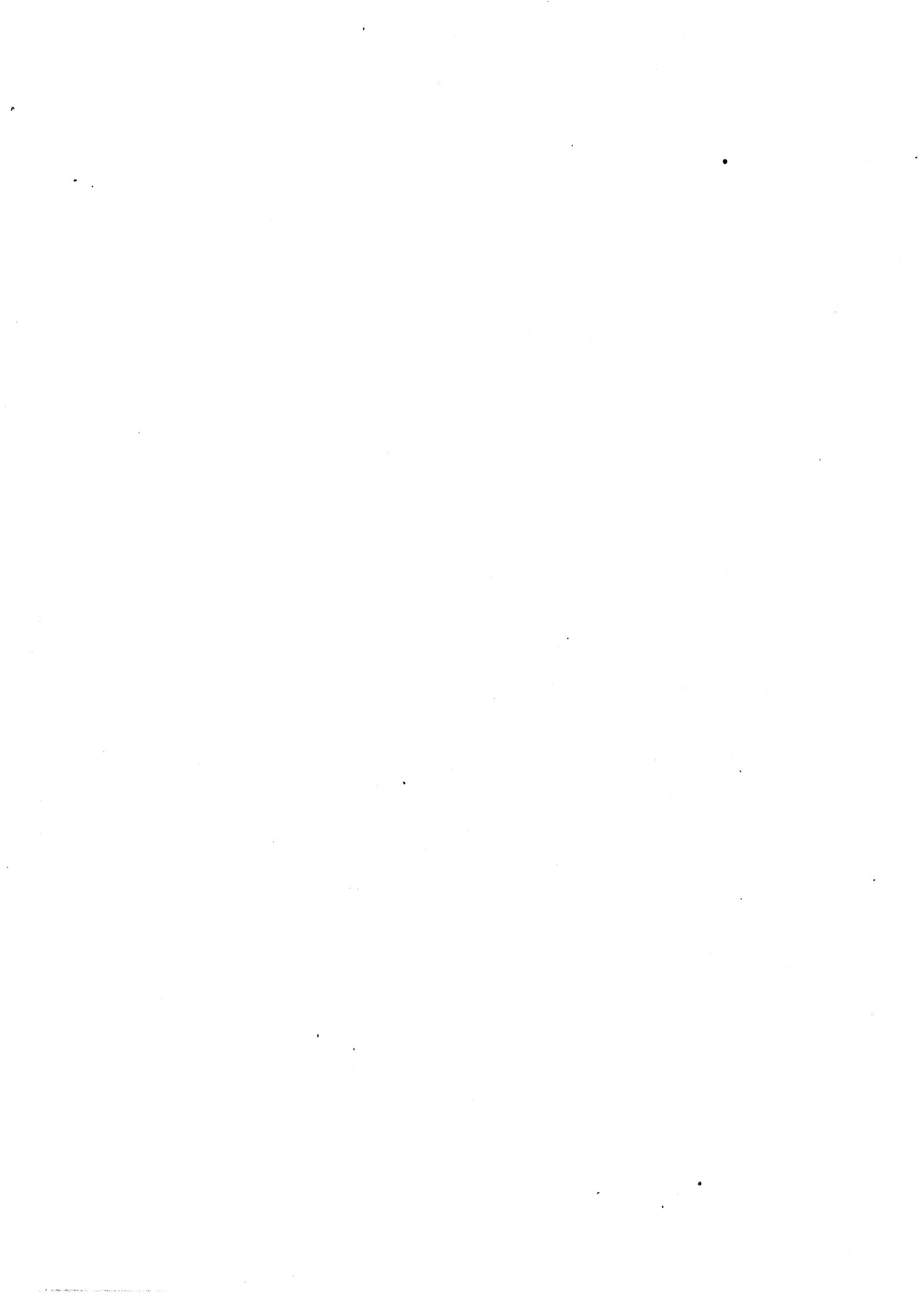
GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2^{ème} CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

.../...

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie



A l'occasion de cette thèse je tiens à remercier vivement Monsieur Michel SAKAROVITCH, de m'avoir accueilli dans son équipe et de l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Le travail de délaboration de cette thèse ne serait pas possible sans l'aide très importante de Monsieur Jean FONLUPT.

Je lui exprime toute ma reconnaissance. Je remercie Monsieur Claude BENZAKEN d'avoir accepté de faire partie du jury.

Tous mes remerciements à Monsieur Jean-Pierre UHRY pour l'honneur qu'il me fait en participant à ce jury.

Que Monsieur Alain QUILLIOT trouve l'expression de ma reconnaissance pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et à l'honneur qu'il me fait en acceptant de participer à ce jury.

Je profite de l'occasion pour exprimer ma sympathie à tous les membres de l'équipe de Recherche Opérationnelle.

Je tiens à remercier également tous les membres de l'équipe de Réprographie pour le soin qu'ils ont apporté à la reproduction de cette thèse.

Maksi RACO



Table des matières

Introduction

Chapitre 1

- 1.1 Définitions et notations
- 1.2 Opération de pivotage
- 1.3 Base et forme standard
- 1.4 Connectivité et pivotage

Chapitre 2 ORIENTATION DES MATRICES REELLES

- 2.1 Matrices équivalentes
- 2.2 Ordre lexicographique
- 2.3 Algorithme d'orientation d'une matrice réelle sous forme standard
- 2.4 Exemple d'orientation d'une matrice réelle
- 2.5 Interprétation géométrique du théorème
- 2.6 A propos d'un élément maximum de $\epsilon(A)$.
- 2.7 Orientation d'une matrice réelle quelconque

Chapitre 3 ORIENTATION DES MATRICES TOTALEMENT UNIMODULAIRES

- 3.1 Définition et propriétés des matrices totalement unimodulaires
- 3.2 Théorème d'orientation
- 3.3 Lemme de la ligne dominante
- 3.4 Efficacité de l'algorithme d'orientation

Chapitre 4 APPLICATIONS

- 4.1 Matrices graphiques et cographiques
- 4.2 Relation entre des opérations sur un graphe et sur les matrices graphiques et cographiques associées
- 4.3 Orientation de matrices graphiques et

cographiques

- 4.4 Matroïdes vectoriels. Relation entre des opérations sur le matroïde et sa matrice représentative
- 4.5 Matroïdes binaires. Théorème du cocircuit dominant. Théorème de TUTTE sur le cocircuit séparant.

Chapitre 5 MATRICES DE CORDE ET MATRICES TOTALEMENT UNIMODULAIRES

- 5.1 Matrices de corde
- 5.2 1-,2- et 3-somme de deux matroïdes binaires.
- 5.3 Matrices de corde et matrices graphiques et cographiques
- 5.4 2- et 3-somme de matrices graphiques et cographiques. Exemples et signification
- 5.5 Matrices totalement unimodulaires et matrices de corde

INTRODUCTION

L'objet principal du travail présenté dans cette thèse est l'étude des règles de pivotage dans la résolution d'un certain nombre de problèmes liés aux manipulations de matrices.

Parmi les exemples les plus connus où l'opération de pivotage (cf. définition 1.2.1) joue un rôle essentiel nous pouvons citer l'algorithme de Rantzig pour la résolution des programmes linéaires, la méthode du pivotage pour la résolution des systèmes d'équations linéaires, etc.

Notre objectif au départ de ce travail était de donner, par des opérations de pivotage, une forme aussi "simple" que possible à une matrice M totalement unimodulaire en vue d'étudier sa structure sans l'utilisation des techniques très élaborées de SEYMOUR dans [9].

Un premier pas dans cette direction était de transformer M en une matrice équivalente \bar{M} (totalement unimodulaire) dont les coefficients valent 0 ou 1. Aussi avons-nous été amené à introduire la notion de matrices équivalentes:

Une $n \times m$ - matrice réelle \bar{A} est dite équivalente à une $n \times m$ - matrice A si par des pivotages et multiplications de colonnes par -1 on peut transformer A en \bar{A} .

Cette notion a une signification très précise (et simple) dans le cadre des matrices graphiques, cographiques et plus généralement dans le cadre des matroïdes vectoriels. Ceci est détaillé dans le chapitre 4 de notre thèse, notons cependant à titre d'exemple qu'un matroïde vectoriel représentable par les vecteurs colonnes de la matrice A est également représentable par les vecteurs colonnes de la matrice \bar{A} , équivalente à A .

Pour construire une matrice M en $(0,1)$ équivalente à une matrice M totalement unimodulaire quelconque nous donnons un algorithme polynomial (le nombre d'opérations élémentaires est de l'ordre $n^2.m^2$ si M est à n lignes et à m colonnes). La transformation de M en \bar{M} est appelée orientation de M ; \bar{M} est

dite bien orientée.

L'étude de la structure des matrices totalement unimodulaires en $(0,1)$ est plus simple que leur étude dans le cas général. Ainsi par exemple, pour représenter le matroïde régulier R_{10} (cf. [9]) il n'y a qu'une seule matrice totalement unimodulaire en $(0,1)$ (à une permutation de lignes et de colonnes près) alors qu'en $(0, 1, -1)$ il peut être représenté par plusieurs matrices différentes.

Une telle transformation nous a été particulièrement appréciable pour établir le lien entre les matrices totalement unimodulaires et une classe de matrices que nous appelons de corde (cf. Définition 5.1.1). Ce sujet est traité dans le chapitre 5.

L'algorithme d'orientation d'une matrice totalement unimodulaire, à part le fait d'orienter, nous permet de tirer quelques conclusions sur la structure des matrices totalement unimodulaires. En particulier il contient une procédure que nous avons appelée procédure de construction d'une ligne dominante [procédure 3.2.2] qui fournit une démonstration algorithmique d'un théorème de TUTTE [13]. Ce théorème affirme qu'un matroïde binaire non-séparable de rang au moins 3, ne contenant pas le mineur de Fano, contient un cocircuit séparant. Une autre démonstration algorithmique de ce même théorème nous a été signalée par W. H. CUNNINGHAM.[5]

Ayant résolu le problème d'orientation des matrices totalement unimodulaires nous nous sommes posé le même problème dans un cadre plus général, notamment l'orientation des matrices réelles quelconques.

Une matrice réelle est dite bien orientée si tous ses éléments sont non-négatifs. Orienter une matrice réelle A signifie transformer A en une matrice \bar{A} bien orientée et équivalente à A .

L'existence d'une matrice \bar{A} bien orientée et équivalente à A pour tout A réelle est assurée par un théorème de J. EDMONDS [Séminaire à l'Université de Grenoble, Juin 1981].

A partir d'une idée de CAMION exposée dans [4] nous avons trouvé un algorithme qui a à la base la notion d'ordre lexicographique semblable à la règle de RIANT [3] pour éviter

la dégénérescence en programmation linéaire.

Cet algorithme, que nous appelons algorithme d'orientation d'une matrice réelle, transforme une matrice réelle quelconque en une matrice équivalente bien orientée. Il n'est malheureusement pas polynomial.



Chapitre 1

1.1 Définitions et notations

Si I est un ensemble, $|I|$ désigne le cardinal de I .
Etant donné une $n \times m$ - matrice à coefficients dans \mathbb{R} :

a) L'élément de la i -ème ligne ($1 < i < n$) et de la j -ème colonne ($1 < j < m$) est noté A_i^j .

b) Si $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, A^j désigne le m - vecteur colonne constitué par la j -ème colonne de A .

c) Si $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ et $J \subset \{1, 2, \dots, m\}$ alors A_I^J désigne la $|I| \times |J|$ - matrice restriction de A à $I \times J$, c'est-à-dire la sous-matrice de A dont les éléments sont A_i^j pour $i \in I$ et $j \in J$.

A^J désigne la $n \times |J|$ - matrice constituée par la réunion (la mise côte à côte) des colonnes A^j pour $j \in J$.

A_I est la $|I| \times m$ - matrice constituée par la réunion des lignes A_i pour $i \in I$.

1.3 Base et forme standard

Soit A une $n \times m$ - matrice à coefficients réels de rang n .
On appelle base de A tout ensemble d'indices de colonnes
 $J \subset \{1, 2, \dots, m\}$ tel que la sous-matrice A^J soit carrée et
non-singulière.

Définition 2

Mettre A sous forme standard par rapport à une base J ,
signifie :

transformer A en une autre $n \times m$ - matrice \bar{A} (par des
opérations de pivotage) de manière à avoir :

$$\bar{A}^J = U_n \quad \text{où } U_n \text{ désigne la} \\ \text{matrice unité d'ordre } n$$

ce qui revient à multiplier A à gauche par la matrice $(A^J)^{-1}$

$$\bar{A} = (A^J)^{-1} \cdot A$$

Remarque 2

Si A est sous forme standard par rapport à une base J_1 ,

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix}}^{J_1} & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline & A' \end{array} \right]$$

(sur la figure on a supposé $J_1 = \{1, 2, \dots, n\}$)

et J_2 est une autre base de A alors la forme standard \bar{A} de A
par rapport à J_2 est

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline (A^{J_2})^{-1} & (A^{J_2})^{-1} A' \end{array} \right]$$

1.4 Connectivité de matrices

Soit $x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.

On appelle **support** de x et l'on note $s(x)$, l'ensemble des indices i pour lesquels $x_i \neq 0$:

$$s(x) = \{i \in \{1, 2, \dots, m\}; x_i \neq 0\}$$

Si A est une $n \times m$ - matrice à coefficients dans \mathbb{R} , deux lignes i et j de A sont dites **adjacentes** si $s(A_i) \cap s(A_j) \neq \emptyset$.

A la matrice A on associe un graphe non-orienté $G = (V, E)$ avec $|V| = n$ et défini de la manière suivante :

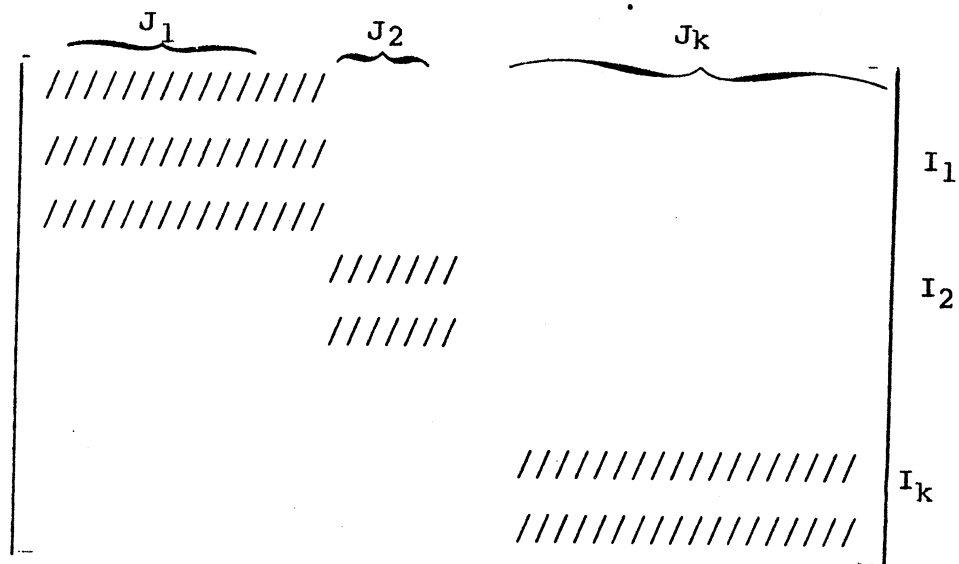
- le sommet v_i est associé à la ligne i pour $i = 1, 2, \dots, n$
- l'arête $(v_i, v_j) \in E$ si et seulement si les lignes i et j sont adjacentes.

Si $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ est une chaîne joignant les sommets

v_{i_1} et v_{i_k} du graphe G , on dira que (i_1, i_2, \dots, i_k) est une chaîne de lignes dans A joignant les lignes i_1 et i_k .

On peut ainsi introduire la notion de **composantes connexes** de A correspondant aux composantes connexes du graphe G .

Soient I_1, I_2, \dots, I_p les composantes connexes de A . En permutant convenablement les lignes et les colonnes de A on peut lui donner la forme :



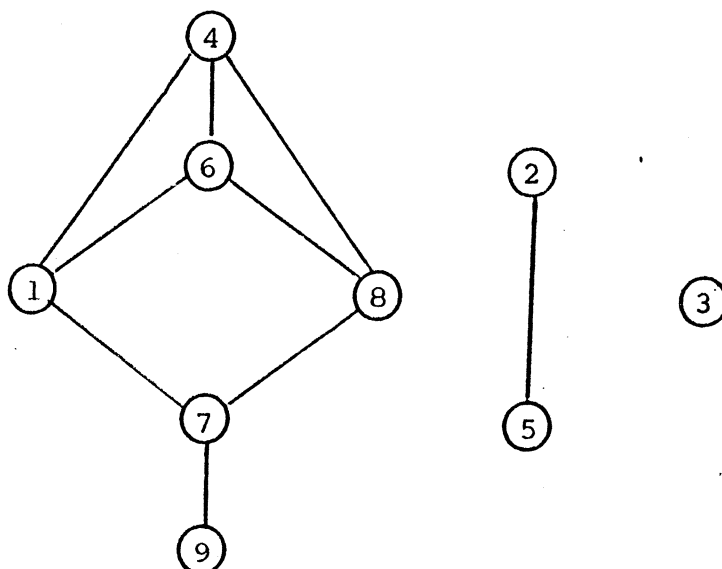
Exemple

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	3	1/2							4		1		
2					2			-1				1/5	
3		1											
4							1				-1		
5						4				-1		7	
6			1								2		
7	-1			3	-2								5
8	1		2		-1		2						
9													4

Après les permutations indiquées par les indices des lignes et des colonnes la matrice prend la forme:

	1	3	5	7	9	11	4	13	12	10	8	6	2
1	3	1/2				4	1						
8	1	2	-1	2									
4				1		-1							
6		1				2							
7	-1		2				3	5					
9								4					
2									1/5		-1	2	
5									7	-1		4	
3													1

Le graphe $G = (V, E)$ associé à la matrice ci-dessus est



Les composantes connexes de A correspondent aux composantes connexes de G .

Définition 3

Une chaîne élémentaire joignant deux sommets du graphe G est dite **minimale** s'il n'y a pas de sous-séquence propre qui soit une chaîne joignant ces mêmes sommets ; autrement dit si deux sommets quelconques de la chaîne sont adjacents si et seulement si ils sont consécutifs.

Proposition 1

Si $(i_1, i_2, \dots, i_{p-1}, i_p)$ est une chaîne minimale entre les lignes i_1 et i_p d'une matrice A , alors il existe une sous-matrice B de A telle que :

- . B contient un seul élément non-nul dans les lignes i_1 et i_p
- . B contient exactement deux éléments non-nuls dans les lignes i_2, i_3, \dots, i_{p-1} .
- . B contient exactement deux éléments non-nuls par colonne.



1.5 Connectivité et pivotage

Soit $A = [U_n, A']$ une $n \times (n + m)$ - matrice sous forme standard et $\bar{A} = P_{ij}^{-1} \cdot A$ la matrice obtenue de A en pivotant sur A_i^j . Les n premières colonnes de \bar{A} constituent donc la matrice P_{ij}^{-1} .

Remarque 3

Si l'on pivote dans \bar{A} sur l'élément \bar{A}_i^j , on retrouve la matrice A . Cette dernière opération est appelée pivotage inverse du pivotage sur A_i^j dans A . Si la matrice du pivotage sur A_i^j dans A est P_{ij}^{-1} alors la matrice du pivotage inverse est P_{ij} ; l'inverse de la matrice P_{ij}^{-1} .

Proposition 2

Si A est une $n \times (n + m)$ - matrice sous forme standard par rapport à une base I et connexe, alors la matrice $\bar{A} = P_{ij}^{-1} \cdot A$ est sous forme standard par rapport à la base $I' = I - \{i\} + \{j\}$ et connexe

Démonstration :

Supposons \bar{A} non-connexe. Soit \bar{A}' la composante connexe de \bar{A} qui contient la ligne i (du pivotage) et \bar{A}'' une autre composante connexe de \bar{A} . Le pivotage sur \bar{A}_i^j dans \bar{A} ne modifie pas les lignes de \bar{A}'' et ne connecte pas \bar{A}' et \bar{A}'' . Or, par ce pivotage on retrouve la matrice A (remarque 1.5 2) ce qui contredit la connexité de A .

Corollaire de la proposition 2

Si A est une matrice sous forme standard et I_1, I_2, \dots, I_p sont ses composantes connexes, alors la matrice $\bar{A} = P^{-1} \cdot A$ a pour composantes connexes I_1, I_2, \dots, I_p .

Remarque 4

Si on ne suppose pas A sous forme standard la propriété n'est pas vraie. Considérons par exemple:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ qui est connexe.}$$

Faisons le pivotage sur A_{11}^1 . On obtient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ qui n'est pas connexe.}$$

Chapitre 2

ORIENTATION DE MATRICES REELLES

2.1 Matrices équivalentes

Soient A et \bar{A} deux $n \times m$ - matrices réelles.

Définition 1

\bar{A} est dite **équivalente** à A si par des opérations de pivotage et de multiplications de colonnes par -1 , on peut transformer A en \bar{A} .

Remarque 1

Les deux opérations multiplication de colonnes par -1 et pivotage, ne sont pas illicites pour les applications envisagées. Les résultats qu'on a obtenus et qui utilisent la notion de matrices équivalentes qu'on vient d'introduire, seront appliqués aux matrices graphiques, cographiques et aux matroïdes vectoriels [voir définitions 4 1.1, 4 1.2] Ces notions sont définies de manière plus détaillée dans le chapitre 4 mais précisons dès maintenant que :

Pour les matrices graphiques et cographiques

- multiplier une colonne par -1 , revient à inverser l'orientation d'un certain arc du graphe auquel sont associées les matrices en question ;
- faire un pivotage, revient à écrire la matrice graphique (ou cographique) relative à un autre arbre du même graphe.

Pour les matroïdes vectoriels notons que

- deux matrices équivalentes représentent le même matroïde.

Remarque 2

Multiplier les colonnes d'indice k d'une matrice A , pour $k \in K \subset \{1, 2, \dots, m\}$, revient à multiplier A à droite par la

matrice $U_m(K)$ obtenue de la matrice unité en remplaçant les 1 par -1 dans les colonnes d'indice dans K .

Proposition 1

Si A est sous forme standard alors l'ensemble des matrices équivalentes à A est

$$\varepsilon(A) = \{(A^J)^{-1} \cdot A \cdot U_m(K); J \text{ base de } A, K \subset \{1, 2, \dots, m\}\}$$

Démonstration

Immédiate d'après les remarques 1.3.2 et 2.1.1.

Remarque 3

$\varepsilon(A)$ est stable par pivotage et multiplication de colonnes par -1.

Proposition 2

Si M est une matrice de $\varepsilon(A)$, alors la matrice obtenue de M en multipliant une ligne par -1, appartient encore à $\varepsilon(A)$.

Démonstration

Si e_i désigne le vecteur unité de \mathbb{R}^n ayant le 1 à la i -ème position alors une des colonnes de M est égale à e_i ou $-e_i$.

Si M contient e_i pour colonne alors on multiplie cette colonne par -1, on fait un pivotage sur le -1 de cette colonne (qui ne fait que changer le signe de la i -ème ligne) et on multiplie par -1 la colonne du pivotage.

Si M contient $-e_i$ pour colonne, il suffit de faire un pivotage sur cette colonne pour changer le signe de la i -ème ligne de M .

Définition 2

1. Une matrice réelle est dite **bien orientée** si tous ses éléments sont non-négatifs.
2. **Orienter** une matrice réelle A signifie transformer A en une matrice \bar{A} à éléments non-négatifs par des opérations de pivotage et multiplications de colonnes par -1 .

Théorème 1

Toute matrice réelle est équivalente à une matrice bien orientée.

Démonstration

On va d'abord démontrer le théorème pour une $n \times m$ - matrice A sous forme standard par rapport à une base J_0 .

Sans perte de généralité on peut supposer $J_0 = \{1, 2, \dots, n\}$. On supposera aussi que A n'a ni ligne ni colonne partout nulle. Pour une matrice A quelconque on se ramène dans les conditions ci-dessus par la procédure de la remarque 2.7.2 et la remarque 2.7.4 qu'on verra plus loin.

2.2 Ordre lexicographique

Définition 3

Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n définissons la relation d'ordre suivant appelé "**ordre lexicographique**" et qu'on notera : " \succ ".

Ordonnons d'abord les couples d'indices (i, j) pour $i, j \in N$.

On dira que le couple

(i_1, j_1) est "après" le couple (i_2, j_2)
si et seulement si

$$(i_1 > i_2) \text{ ou bien } (i_1 = i_2 \text{ et } j_1 > j_2)$$

Pour une matrice quelconque, on dira qu'un élément est "après" un autre si le couple d'indices du premier est après celui du deuxième.

Sur le schéma ci-dessous, l'élément "suivant" d'un élément est indiqué par une flèche

$$\left[\begin{array}{cccc} \rightarrow B_1^1 \rightarrow & B_1^2 \rightarrow & \dots \rightarrow & B_1^n \rightarrow \\ \left(\begin{array}{cccc} \rightarrow B_2^1 \rightarrow & B_2^2 \rightarrow & & B_2^n \rightarrow \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cccc} \rightarrow B_n^1 \rightarrow & B_n^2 \rightarrow & \dots & B_n^n \rightarrow \end{array} \right) \end{array} \right]$$

Une matrice carrée B d'ordre n est dite **1-positive** si son premier élément non-nul (pour l'ordre des couples d'indices) est positif. On note : $B \succ 0$.

Si B est 1-positive ou la matrice nulle on écrira

$$B \succ 0$$

Si B et B' sont deux matrices carrées d'ordre n , on dit que B est **1-supérieure** à B' si $B - B' \succ 0$.

Exemple :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3/2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3/2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

On a $B \succ B'$ car le premier élément non-nul de $B - B'$ est :

$$(B - B')_2^3 = -2 - (-4) = +2 > 0$$

Soit J_0 une base de A . Cette base sera fixe jusqu'à la fin de la démonstration et va nous servir pour définir un

ordre dans l'ensemble $\varepsilon(A)$ de la manière suivante :

Pour deux matrices quelconques M, N de $\varepsilon(A)$, on dira que

M est 1-supérieure à N (et on notera $M \succ N$)

si et seulement si :

$$M^{J_0} \succ N^{J_0}.$$

2.3 Algorithme d'orientation d'une matrice réelle sous forme standard

Entrées: une $n \times m$ - matrice réelle A sous forme standard par rapport à la base $J_0 = \{1, 2, \dots, n\}$

Résultats : une $n \times m$ - matrice réelle équivalente à A , sous forme standard par rapport à une base et bien orientée.

PAS(1)

Rendre positive la première composante non-nulle de chaque ligne et de chaque colonne de A .

Pour ce faire on applique la procédure 2.3.1.

Si A n'est pas bien orientée alors aller au PAS (2).

PAS (2)

Soit A_i le premier élément négatif de A ("le premier" pour l'ordre des couples d'indices).

Multiplier par -1 la colonne d'indice i et faire un pivotage sur A_i . Aller au PAS (1).

Fin de l'algorithme d'orientation

Montrons que cet algorithme est fini :

Il est clair que les matrices successives obtenues à chaque itération appartiennent à $\varepsilon(A)$.

Etant donné que l'ensemble $\varepsilon(A)$ est fini (il y a au plus C_m^n bases de A et 2^m matrices de la forme $U_m(K)$), il suffit de montrer qu'on ne retrouve jamais une matrice déjà obtenue au cours des itérations précédentes. On va montrer plus précisément, que si M est transformée en \bar{M} par une

itération des PAS (1) et (2) de l'algorithme, alors \bar{M} est l-supérieure à M (dans le sens $\bar{M}^{J_0} \succ M^{J_0}$).

En effet : on n'exécute le PAS (2) que si l'on décèle un élément négatif, disons $M_{i_1}^j$, dans M.

Soit $M_{r_1}^j$ la première composante non-nulle de la colonne j et M_i^s la première composante non-nulle de la ligne i.

On a forcément $s \in J_0$ car $M_i^{J_0}$ est une ligne de la matrice régulière M^{J_0} (J_0 est une base de M).

L'exécution du PAS (1) nous assure que $M_{r_1}^j$ et M_i^s sont strictement positifs.

Le premier élément de M (pour l'ordre des couples d'indices) modifié par le PAS (2) est $M_{r_1}^s$; il devient :

$$\bar{M}_{r_1}^s := M_{r_1}^s - M_{r_1}^j \cdot \frac{M_i^s}{M_i^j}$$

On a : $\bar{M}_{r_1}^s > M_{r_1}^s$ d'où $\bar{M} \succ M$.

Procédure 1

pour rendre positive la première composante non-nulle de chaque ligne et de chaque colonne de M.
Entrées $n \times m$ - matrice M ayant $J_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ pour base.

Résultats $n \times m$ -matrice (obtenue de M par multiplications de lignes et de colonnes par -1) dont la première composante non-nulle de chaque ligne et de chaque colonne est positive

Début

x.1 pour $j := 1$ jusqu'à n faire

début

Trouver le premier élément non-nul de la colonne j ;

Commentaire : Soit M_i^j cet élément ;

Enregistrer dans un $2 \times n$ tableau S l'indice i

et le signe s_j de M_i^j à la j -ème position ;

fin ;

x.2 Pour $i := 1$ jusqu'à n faire

début

x.2.1 Trouver le premier élément non-nul M_i^j de la ligne i ;

Si $M_i^j < 0$ alors début

x.2.2 Multiplier par -1 la ligne i ;

x.2.3 Multiplier par -1 les colonnes k

pour k tels que $(s_1^k = i \text{ et } s_2^k = "+")$;

fin

sinon

x.2.3 multiplier par -1 les colonnes d'indice k , pour k
tels que $(s_1^k = i \text{ et } s_2^k = "-")$

fin;

x.3 Pour $j := n + 1$ jusqu'à m faire

début

Trouver le premier élément non-nul de la colonne j ;

s'il est négatif, multiplier cette colonne par -1

fin;

Fin de la procédure

Montrons par récurrence que cette procédure nous fournit le résultat désiré.

Posons

$$S_i^+ = \{k \in J_0 ; S_1^k = i \text{ et } S_2^k = "+" \}, S_i^- = \{k \in J_0 ; S_1^k = i \text{ et } S_2^k = "-" \}$$

$$\text{et } S_i = S_i^+ \cup S_i^-.$$

On a : $S_i \cap S_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = J_0$.

L'exécution des instructions x.2.1 et x.2.2, pour $i = 1$, rend positif le premier élément non-nul de la première ligne. Si $M_1^j < 0$ (resp. > 0) alors les colonnes d'indice dans S_1^+ (resp. dans S_1^-) commencent (ont leur premier élément non-nul) par un élément négatif (resp positif) après l'exécution de l'instruction X.2.2. Après l'exécution de l'instruction X.2.3, toutes les colonnes d'indice dans S_1 commencent par un élément positif.

Supposons qu'on ait exécuté la i -ème itération de l'instruction x.2 et que les lignes de 1 à i commencent par un élément positif ainsi que les colonnes d'indice dans

$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_i$. La sous-matrice de M formée par les lignes 1, 2, ..., i et les colonnes d'indice dans $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_i$ n'est pas modifiée par les itérations $i + 1$ jusqu'à n .

La ligne $i+1$ est multipliée par -1 si elle commence par un élément négatif, et toutes les colonnes d'indice dans S_{i+1} deviennent à premier élément non-nul positif.

Le nombre d'opérations élémentaires nécessaires à cette procédure est borné par $2.n.m$.

En effet :

On va noter $Op(N)$ une borne du nombre d'opérations nécessaires à l'instruction numérotée N .

Pour remplir le tableau S on fait au plus $S_1^1 + S_1^2 + \dots + S_1^n$ comparaisons. Ainsi $Op(x.1) \leq S_1^1 + S_1^2 + \dots + S_1^n$.

Pour l'instruction x.2.3 on a alors

$$Op(x.2.3) \leq (n - S_1^1) + (n - S_1^2) + \dots + (n - S_1^n)$$

multiplications par -1 D'où $O_p(x.1) + O_p(x.2.3) \leq n^2$.

De même si l'instruction x.2.1 fait $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ comparaisons pour trouver le premier élément non-nul de chaque ligne, alors

$$O_p(x.2.1) + O_p(x.2.2) \leq n.m.$$

$$O_p(x.3) \leq n.(m - n)$$

d'où

$$O_p(\text{procédure}) \leq n^2 + n.m + n.(m - n) = 2.n.m.$$

2.4 Exemple d'orientation d'une matrice réelle

Base de départ : $J_0 = \{1, 2, 3\}$.

	1	2	3	4	5	6	7
	1			-1	2	1	-2
		1		2	3	-1	1
			1	2	1	0	1
PAS (1)	1			1	2	1	2
		1		(-2)	3	-1	-1
			1	-2	1	0	-1
PAS (2)	1	1/2		0	7/2	1/2	3/2
		1/2		1	3/2	-1/2	-1/2
		-1	1	0	-2	1	0
PAS (1)	1	1/2		0	7/2	1/2	3/2
		1/2		1	3/2	(-1/2)	-1/2
		1	1	0	2	-1	0
PAS (2)	1	1		1	5	0	1
		1		2	3	1	(-1)
		2	1	2	5	0	-1
PAS (1) (ne modifie rien)							
PAS (2)	1	2		3	8	1	0
		1		2	3	1	1
		1	1	0	2	(-1)	0
PAS (1) (ne modifie rien)							
PAS (2)	1	3	1	3	10	0	0
		2	1	2	5	0	1
		1	1	0	2	1	0

base finale $J = \{1, 7, 6\}$

L'élément entouré indique le pivot.

Le sous-ensemble des matrices de $\varepsilon(A)$ ayant le premier élément non-nul de chaque ligne et de chaque colonne positif sera noté $\varepsilon^+(A)$.

Remarque 4

La première colonne de A reste inchangée tout au long de l'exécution de l'algorithme et égale au vecteur unité ${}^t(1, 0, \dots, 0)$.

En effet : on ne fait jamais de pivotage sur la première ligne de A car tous ses éléments sont non-négatifs à la suite du PAS (1) .

2.5 Interprétation géométrique du théorème

On utilisera alternativement \mathbb{R}^n avec sa structure d'espace vectoriel et sa structure d'espace affine.

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^n un sous-ensemble K est appelé **cône** si

$$x \in K \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \lambda x \in K$$

Si S est une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n on appelle **combinaison positive** d'éléments de S tout vecteur de la forme:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k$$

avec $\lambda_i > 0$ et $x_i \in S$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

On appelle **cône engendré par S** l'ensemble des combinaisons positives d'éléments de S .

Définition 4

Si $K(S)$ désigne le cône engendré par S , l'ensemble $K(S) \cup -K(S)$ sera appelé **bicône engendré par S** .

Soit A une $n \times m$ - matrice réelle de rang n . Considérons la colonne A_j de A comme l'expression d'un vecteur v_j de \mathbb{R}^n par ses coordonnées dans la base canonique pour $j = 1, 2, \dots, m$.

Posons $A^+ = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ et $A^- = -A^+$.

Notons que

* Mettre A sous forme standard par rapport à une base J signifie choisir les vecteurs $\{v_j\}_{j \in J}$ pour base et exprimer les autres colonnes de A par rapport à cette base.

* Si A est sous forme standard par rapport à une base J , faire un pivotage sur $A_i^j \neq 0$ ($j \notin J$) signifie : faire sortir de la base le vecteur ayant le 1 à la i -ème position et faire entrer dans la base le vecteur v_j .

A la suite du pivotage A est mise sous forme standard par rapport à la nouvelle base.

Interprétation du théorème 1

Le théorème affirme que parmi les vecteurs de l'ensemble $A^+ \cup A^-$ il en existe n linéairement indépendants tels que le bicône qu'ils engendrent contient tous les autres éléments de l'ensemble $A^+ \cup A^-$.

En effet :

A la fin de l'algorithme 2.3 on obtient une matrice \bar{A} bien orientée et sous forme standard par rapport à une base

$$J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}.$$

Pour une colonne j ($1 < j < m$) \bar{A}^j représente (dans J)

(a) les coordonnées du vecteur v_j si la colonne j a été multipliée par -1 un nombre pair de fois et

(b) les coordonnées du vecteur v_j si la colonne j a été multipliée par -1 un nombre impair de fois.

Dans le cas (a) on a :

$$v_j = \sum_{k=1}^n \bar{A}_k^j \cdot v_{j_k} \quad \text{avec } \bar{A}_k^j > 0 \text{ pour } k = 1, 2, \dots, n$$

ce qui signifie que v_j appartient au cône $K(J)$.

Dans le cas (b) on a :

$$-v_j = \sum_{k=1}^n \bar{A}_k^j v_{j_k} \quad \text{d'où} \quad v_j = \sum_{k=1}^n \bar{A}_k^j (-v_{j_k})$$

Dans ce cas v_j appartient au cône $K(-J) = -K(J)$.

Regardons sur un exemple dans \mathbb{R}^2 le déroulement de l'algorithme (cf. figure 2.5.1).

La base de départ est $J_0 = \{1, 2\}$

$$(1) \quad \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ 1 & 0 & 1/2 & -1 & -5/4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1/2 & -1/3 \end{array}$$

après le PAS (1) on a

$$(2) \quad \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & -v_4 & -v_5 & -v_6 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1 & 5/4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1/2 & 1/3 \end{array}$$

La matrice A n'est pas bien orientée. Le PAS (1) laisse A inchangée. On exécute le PAS (2)

$$(3) \quad \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & -v_3 & -v_4 & -v_5 & -v_6 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 7/6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1/2 & 1/3 \end{array}$$

Le PAS (1) laisse A inchangée. On exécute le PAS (2)

$$(4) \quad \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & -v_3 & v_4 & -v_5 & -v_6 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 & 3/4 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1/2 & 1/3 \end{array}$$

On exécute le PAS (2) (pivotage sur A_2^5).

$$(5) \quad \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & -v_3 & v_4 & v_5 & -v_6 \\ 1 & 5/2 & 2 & 3/2 & 0 & 11/6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2/3 \end{array}$$

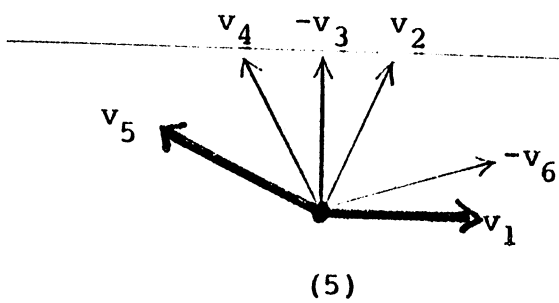
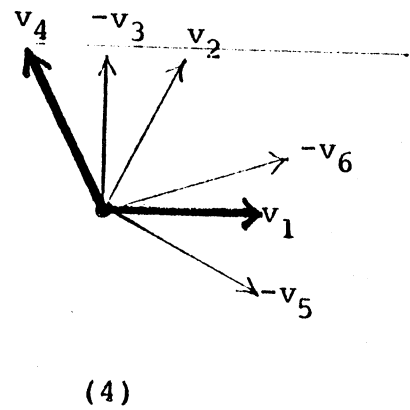
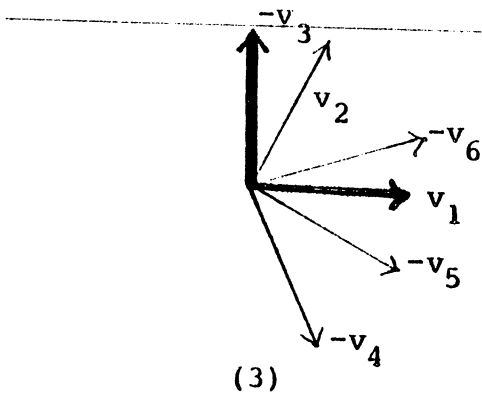
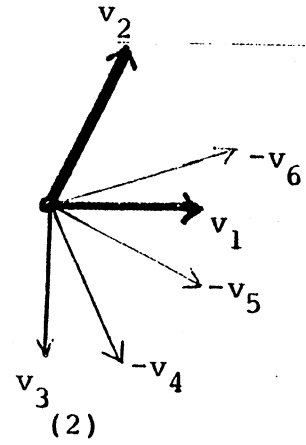
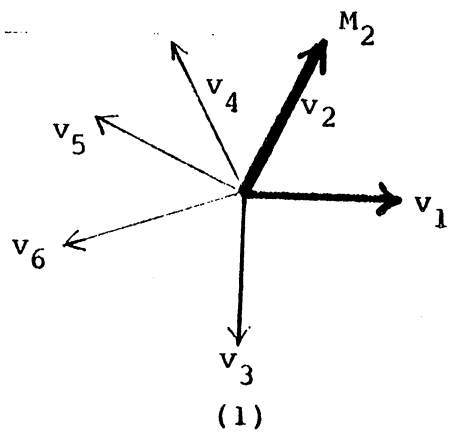


fig. 2.5.1

En gras sont indiqués les vecteurs de base pour chaque itération.

Sur cet exemple le premier vecteur de la base recherchée étant v_1 , on doit en trouver un deuxième parmi les v_j ($2 \leq j \leq 6$), non-colinéaire à v_1 et tel que le bicône engendré par $\{v_1, v_j\}$ contienne les autres.

Dans la démonstration du théorème 1 de ce chapitre on a vu qu'à chaque itération du PAS (2) la matrice croissait lexicographiquement;

c'était l'élément M_r^S qui croissait (voir la démonstration) à l'itération considérée. Sur cet exemple c'est toujours A_1^2 qui jouera le rôle de M_r^S .

Si à une itération on a pour base $\{v_1, v_j\}$, A_1^2 représente la coordonnée de v_2 sur v_1 dans cette base.

Soit M_2 le point du plan pour lequel $\overrightarrow{OM_2} = \vec{v}_2$ et M_j le point d'intersection de la droite d parallèle à v_1 et passant par M_2 avec la droite d_j parallèle à v_j et passant par l'origine. A_1^2 représente la longueur $M_j M_2$.

Il est clair que l'algorithme s'arrête lorsqu'il trouve le vecteur v_j correspondant au point M_j le plus éloigné de M_2 dans le sens opposé à v_1 .

2.6 A propos d'un élément maximum de $\varepsilon(A)$.

Proposition 3

Si A est un élément maximum de $\varepsilon(A)$ alors, après avoir appliqué le pas (1) de l'algorithme, la matrice obtenue est bien orientée.

Démonstration

C'est une conséquence immédiate de l'algorithme d'orientation.

Remarque 5

Pour obtenir une matrice A bien orientée à partir de A

l'algorithme passe par une suite croissante d'éléments de $\varepsilon(A)$.

Une question qui se pose tout naturellement est la suivante : \bar{A} est-elle un élément maximum de $\varepsilon(A)$?

La réponse à cette question est négative. en effet Dans l'exemple précédent la matrice A obtenue à la fin de l'algorithme est :

$$\bar{A} = \begin{array}{cccccc} & v_1 & v_2 & -v_3 & v_4 & v_5 & -v_6 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 5/2 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 3/2 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 11/6 \\ 2/3 \end{array} \end{array}$$

Cette matrice est bien orientée mais elle n'est cependant pas maximum ; il suffit de choisir pour base $\{v_1, v_6\}$ pour avoir

$$\bar{A} = \begin{array}{cccccc} & v_1 & -v_2 & v_3 & -v_4 & -v_5 & v_6 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 7/2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 11/4 \\ 3/2 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

On a $\bar{A} \succ \bar{A}$.

Ces observations se généralisent de la manière suivante dans \mathbb{R}^n :

La base fixe est toujours $J_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ et la première colonne, le vecteur unité $t(1, 0, \dots, 0)$.

Si A est mise sous forme standard par rapport à une base

$J = \{1, j_2, \dots, j_n\}$ alors A_1^2 est la coordonnée de v_2 sur v_1 dans J .

Soit d la droite (de l'espace affine \mathbb{R}^n) passant par le point M_2 (défini par $\vec{OM}_2 = v_2$) et parallèle au vecteur v_1
 $d = \{M \in \mathbb{R}^n; \vec{OM} = \vec{OM}_2 + \lambda v_1, \lambda \in \mathbb{R}\}$ et H l'hyperplan affine passant par l'origine et parallèle à l'hyperplan vectoriel engendré par les vecteurs $v_{j_2}, v_{j_3}, \dots, v_{j_n}$

La relation

$$v_2 = A_1^2 v_1 + A_2^2 v_{j_2} + \dots + A_n^2 v_{j_n}$$

indique que A_1^2 est la mesure algébrique du segment $[M_2, M']$ où M' est le point d'intersection de la droite d avec l'hyperplan H (cf. la figure 2.6.1 pour \mathbb{R}^3)

2.7 Orientation d'une matrice réelle quelconque

Remarque 6

La démonstration du théorème a été faite en supposant A sans colonne nulle et sous forme standard par rapport à une base.

Si A contient des lignes ou des colonnes nulles, posons A' la sous-matrice de A formée par les lignes et les colonnes non-nulles, appliquons l'algorithme d'orientation à la matrice A' et ensuite rajoutons les lignes et les colonnes nulles aux positions respectives pour obtenir une matrice \bar{A} bien orientée

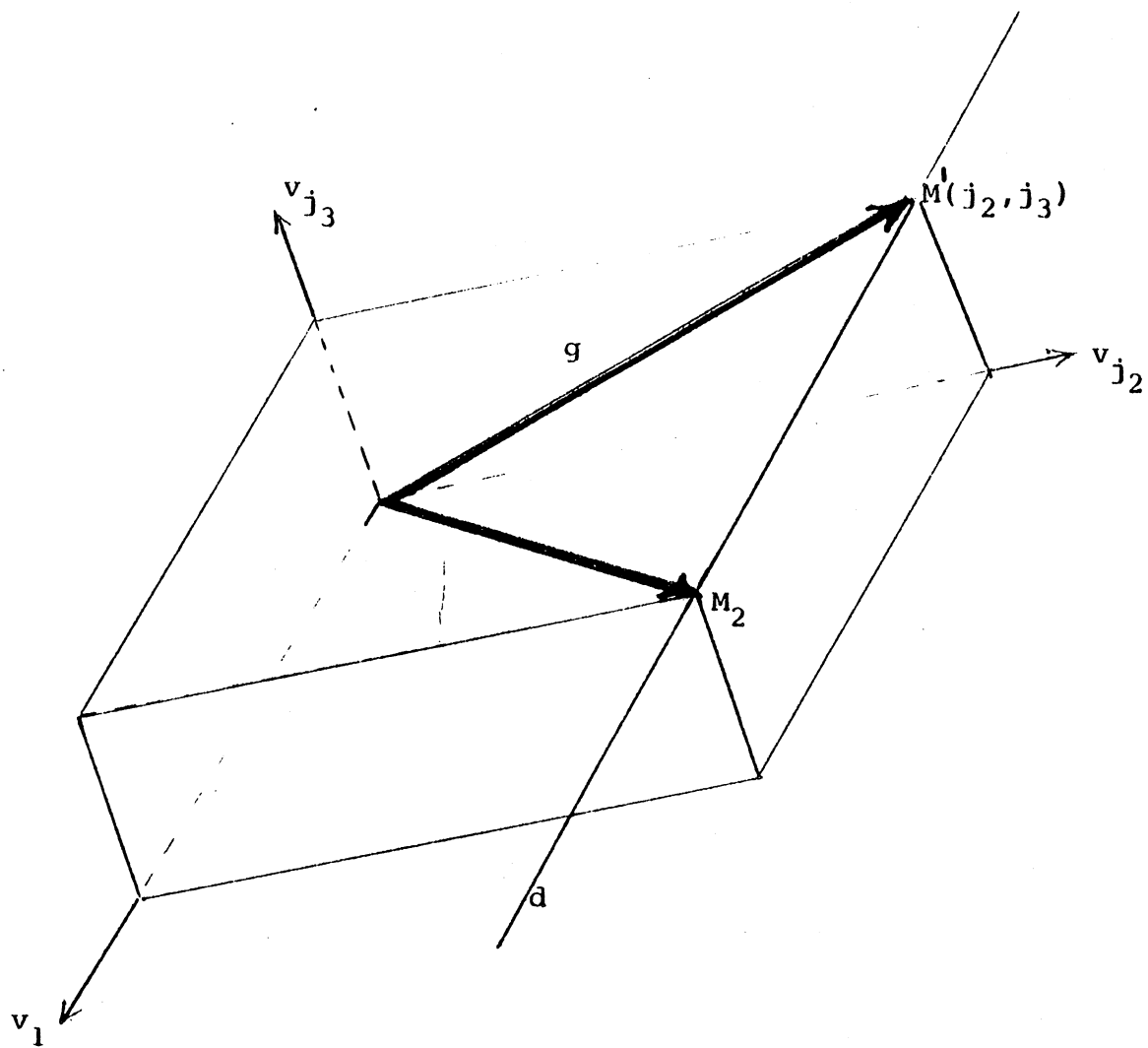


fig. 2.6.1

équivalente à A.

Si A n'est pas sous forme standard, pour se ramener aux conditions de l'application de l'algorithme d'orientation on peut appliquer la procédure suivante :

Procédure 2

Mettre A sous forme standard

Entrées : $n \times m$ - matrice réelle A.

Résultats : $n \times m$ - matrice réelle \bar{A} équivalente à A, avec

$I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ tel que A_I soit de plein rang.

$A_{\bar{I}} = 0$ (où $\bar{I} = \{1, 2, \dots, n\} - I$) et $J \subset \{1, 2, \dots, m\}$ tel que \bar{A}_I soit sous forme standard par rapport à J.

A =

$ \begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array} $		}	I
0	0	}	\bar{I}

Début

$I := \emptyset; \quad J = \emptyset;$

Pour $i := 1$ jusqu'à n faire

S'il existe un j tel que $A_i^j \neq 0$ alors

début

choisir le premier j tel que $A_i^j \neq 0$. Pivoter sur A_i^j ;

Poser $I := I \cup \{i\}; \quad J := J \cup \{j\};$

fin

fin de la procédure.

Chapitre 3

ORIENTATION DE MATRICES TOTALEMENT UNIMODULAIRES

3.1 Définition et propriétés élémentaires des matrices totalement unimodulaires

Définition 1

Une matrice M à coefficients dans $\{0, 1, -1\}$ est dite **totalement unimodulaire** si toutes les sous-matrices carrées extraites de M ont un déterminant égal à $0, 1$ ou -1 .

Rappelons quelques propriétés élémentaires bien connues des matrices totalement unimodulaires.

Si M est une $n \times m$ - matrice totalement unimodulaire, alors

P1 tM (la transposée de M) est totalement unimodulaire.

P2 Toute sous-matrice de M est totalement unimodulaire.

P3 Si N est une matrice dont les colonnes sont extraites de M ou de la matrice unité U_n , alors $[M, N]$ est totalement unimodulaire.

P4 Si on multiplie une colonne ou une ligne de M par -1 , alors la matrice obtenue est encore totalement unimodulaire.

La démonstration de P1, P2, P3 et P4 est immédiate, compte tenu des propriétés élémentaires des déterminants.

P5 [4] L'opération de pivotage préserve la totale unimodularité.

3.2 Théorème d'orientation

Théorème 1

Toute matrice totalement unimodulaire peut être orientée en temps polynomial.

Démonstration

On va tout d'abord démontrer le théorème pour une $n \times m$ - matrice sous forme standard c'est-à-dire pour une matrice de la forme $M = [U_n, N]$, où U_n est la matrice unité d'ordre n . Pour cela on va présenter un algorithme qui oriente effectivement M .

Conventions 1: Comme l'ordre des colonnes n'affectera en rien la démonstration du théorème, chaque fois qu'on fera un pivotage dans M la colonne du pivot (qui devient unité) sera permutée avec la colonne de U_n affectée par ce pivotage.

Ainsi, les n premières colonnes constitueront toujours la matrice unité U_n .

Après chaque opération sur M , la nouvelle matrice obtenue sera encore désignée par $M = [U_n, N]$.

Avec ces conventions, on ne travaillera que sur N sachant qu'il y a U_n à sa gauche.

Proposition 1

Si $s(M_i)$ est le support de la ligne i de M , alors la sous-matrice $M^{s(M_i)}$ peut être orientée par simples multiplications d'un certain nombre de colonnes et de lignes de M par -1 .

Démonstration

Pour démontrer cette proposition on donne la procédure suivante qu'on appellera :

Procédure 1

Orienter $M^{s(M_i)}$

début

Multiplier par -1 les colonnes de M d'indice dans $s(M_i)$ qui ont -1 dans la i -ème ligne c'est-à-dire les colonnes d'indice j pour lesquelles $M_i^j = -1$.

Commentaire : Après cette opération toutes les composantes de $M_i^{s(M_i)}$ sont égales à $+1$ et chaque ligne de $M^{s(M_i)}$ est constituée d'éléments de même signe.

En effet si dans une ligne k on avait $M_k^{j'} = -1$ et $M_k^{j''} = +1$ ($j', j'' \in s(M_i)$), alors la sous-matrice de M formée par les lignes i, k et les colonnes j', j'' serait :

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}$$

dont le déterminant vaut 2 . Ceci est en contradiction avec la totale unimodularité de M .

Multiplier par -1 les lignes k de M pour lesquelles $M_k^{s(M_i)}$ est constitué de 0 et -1 .

Fin de la procédure orienter $M^{s(M_i)}$.

M étant de la forme $[U_n, N]$, on va poser

$$I := \{1, 2, \dots, n\} \quad J := \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$$

$$J_1 := s(N_r) \quad \text{et} \quad J_0 := J - J_1.$$

N_r désigne la ligne d'indice r de N et par la suite sera appelée **ligne de référence**.

Pour simplifier les notations on va prendre la première ligne pour ligne de référence. On pose donc $r = 1$.

Après avoir exécuté la "procédure orienter M^{J_1} ", N prend la forme :

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{2cm}}^{J_1} \hspace{1cm} \overbrace{\hspace{2cm}}^{J_0} \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \quad 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline P & Q \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \leftarrow \text{ligne } r = 1$$

Où P (resp Q) est la sous-matrice de N constituée par les lignes $2, 3, \dots, n$ et les colonnes qui ont un 1 (resp. un 0) en première position.

3.2 Lemme de la ligne dominante.

Définition 2

Pour deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^k$ et J un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, k\}$ on dira que

x domine y sur J si et seulement si $s(y) \cap J \subset s(x) \cap J$.

Lemme 1 (de la ligne dominante)

Si Q est connexe, alors par des opérations de pivotage dans Q et des multiplications de colonnes par -1 on peut construire une ligne $d \in \{2, 3, \dots, n\}$ de N qui domine toutes les autres sur J_1 (on dira aussi que la ligne d domine les autres dans P) sans modifier la ligne 1.

Démonstration

La démonstration du lemme est faite par une procédure qui construit effectivement une ligne dominante d .

Procédure 2

Construction d'une ligne dominante dans P

Début

Considérer une ligne $i_1 \in \{2, 3, \dots, n\}$ telle que son support dans P soit de cardinalité maximum parmi les

$\{s(P_i); i \in \{2, 3, \dots, n\}\}$. On pourra supposer $i_1 = 2$:

Si le support de cette ligne contient les supports des autres dans P alors la ligne 2 répond à l'énoncé du lemme; il suffit de poser $d = 2$

sinon

soit K l'ensemble des indices des lignes de P qui ne sont pas dominées par la ligne 2 dans P . Comme Q a été supposé

connexe pour chaque $k \in K$, il existe une chaîne de lignes et donc une chaîne minimale joignant la ligne 2 à la ligne k . Parmi ces chaînes choisissons-en une plus courte en nombre de lignes. Soit C qui correspond à cette plus courte chaîne et qui joint la ligne 2 avec la ligne p . On peut supposer $C = (2, 3, \dots, p)$.

Soient j_1, j_2, \dots, j_{p-2} les colonnes correspondant à cette chaîne minimale, telles qu'on les a définies dans la démonstration de la proposition 1.4.1.

La sous-matrice de M formée par les lignes $1, 2, \dots, p$ et par les colonnes d'indice dans $[s(2) \cup s(p)] \cap J_1$ et les colonnes j_1, j_2, \dots, j_{p-2} a la forme:

		j_1	j_2		j_{p-2}
1	$1 \dots 1$	1	1	1	$1 \dots 1$
2	$1 \dots 1$	0	0	$0 \dots 0$	0
3		0		0	
		0		0	
p		1	1	$1 \dots 1$	± 1

(± 1)

La sous-matrice encadrée formée par les colonnes d'indice dans $[s(p) - s(2)] \cap J_1$ et les lignes $3, \dots, p-1$ a tous ses éléments nuls d'après le choix minimal et minimum de la chaîne C .

Si $p > 3$, en effectuant le pivotage sur l'élément $N_p^{j_{p-2}}$ (sur le schéma cet élément est entouré) les 1 qui se trouvent à l'intersection de la ligne p et des colonnes $[s(p) - s(2)] \cap J_1$

remontent à la ligne $p - 1$. La longueur de la chaîne C diminue d'une unité. En effectuant les pivotages sur $N_{p-1}^{j_{p-3}}, N_{p-2}^{j_{p-4}}, \dots, N_4^{j_2}$ on se retrouve dans un des deux cas suivants:

Cas (1) $N_3^{j_1} = -1$

						j_1
1	1	1...1	1	1...1		0
2	1	1...1	0	0...0		1
3	*	*...*	1	1...1		-1

Dans ce cas on a nécessairement $P_3^f = 0$ pour tout f dans $s(P_2)$ (sur le schéma ces éléments sont représentés par un astérisque). En effet : si pour un $f_0 \in s(P_2)$ on avait $P_3^{f_0} = 1$ alors M aurait pour sous-matrice

1	1
1	-1

(à l'intersection des lignes 2, 3 et des colonnes f_0, j_1) ce qui contredit la totale unimodularité de M .

Le schéma est alors :

						j_1
1	1	1...1	1	1...1		0
2	1	1...1	0	0...0		1
3	0	0...0	1	1...1		-1

Le pivotage sur $N_3^{j_1}$ fait augmenter le support de la ligne 2 d'au moins les indices dans $[s(p) - s(2)] \cap J_1$.

Cas (2) $N_3^{j_1} = 1$

		j_1			
1	1	1 . . . 1	1	1 . . . 1	0
2	1	1 . . . 1	0	0 . . . 0	1
3	*	* . . . *	1	1 . . . 1	1

Dans ce cas on a nécessairement $P_3^f = 1$ pour tout $f \in s(P_2)$. En effet: si pour un $f \in s(P_3)$ on avait $P_3^f = 0$ alors M aurait pour sous-matrice

1	1	0
1	0	1
0	1	1

(considérer les lignes 1, 2, 3 et les colonnes f_0, j, j_1) avec $j \in [s(p) - s(2)] \cap J_1$ dont le déterminant vaut -2, ce qui contredit la totale unimodularité de M.

Sur le schéma on a :

		j_1			
1	1	1 . . . 1	1 . . . 1		0
2	1	1 . . . 1	0 . . . 0		1
3	1	1 . . . 1	1 . . . 1		1

Dans ce cas le support de la ligne P_3 contient strictement le support de P_2 .

Aller au début de la procédure.

Remarque 1

La ligne de référence (ligne r) de la matrice n'est pas modifiée par cette procédure. En effet: les seules opérations qu'on a effectuées sur N étaient des pivotages dans Q et des multiplications de colonnes par -1. Or les éléments de la ligne r sont tous nuls sur J_0 . D'après la remarque 1.2.1 cette ligne n'est pas modifiée par ces pivotages. D'autre

part à la suite de la procédure "orienter M_{J_1} ", les éléments de la ligne r valent tous +1 sur J_1 et restent tels jusqu'à la fin de la procédure.

Remarque 2

Compte tenu de la proposition 1.5.2 et des conventions 3.2.1 les opérations effectuées au cours de la procédure qu'on vient de décrire ne détruisent pas la connexité de Q . La ligne d'indice d de M contient donc au moins un élément non-nul dans la partie Q . Autrement dit l'ensemble $S = s(N_d) \cap J_0$ est non-vide.

Il suffit d'appliquer la procédure "orienter MS " pour orienter la sous matrice constituée par les colonnes d'indice dans $s(r) \cap s(d)$ ($s(r)$ désigne le support de la ligne d'indice r . On utilisera cette notation chaque fois que le contexte ne prête pas à confusion)

A la suite de cette opération on a orienté au moins une colonne supplémentaire de M ; plus exactement les colonnes d'indice dans $s(d) \cap J_0$.

Schématiquement on a

	s(r) - s(d)			s(d) ∩ J ₀			J ₀ - (s(r) ∪ s(d))		
r = 1	1	1...1	1	1...1	0	0...0	0	0...0	0
d = 2	0	0	0	1	1...1	1	1...1	0	0...0
	0			0 ou 1			0, 1 ou -1		

Posons:

$I := I - \{r\}$ commentaire; on efface la ligne de référence.

$J := J - \{s(N_r) - s(N_d)\}$;

$r := d$; commentaire; on prend la ligne dominante dans P pour ligne de référence.

$M := \begin{bmatrix} U_{n-1} & N_I^J \end{bmatrix}$.

Remarque 3

La ligne dominante d a pu être construite en supposant Q connexe. Considérons maintenant le cas général où Q n'est pas connexe.

Soient I_1, I_2, \dots, I_h les composantes connexes de Q . Les indices des lignes nulles de Q constitueront une composante connexe spéciale qu'on notera I_0 .

Pour chacune des matrices:

$$[U_{|I_k|+1, N_{I_k \cup \{r\}}}] \text{ pour } k = 1, 2, \dots, h$$

les conditions du lemme 3.2.1 sont satisfaites ainsi nous pouvons appliquer à chacune de ces matrices l'algorithme de construction de la ligne dominante.

L'application de cet algorithme à une composante laisse inchangées les autres.

3 4 Efficacité de l'algorithme

Un pivotage dans M nécessite un nombre d'opérations borné par $O(n \cdot m)$.

Déterminer une chaîne minimale entre deux sommets d'un graphe $G = (V, E)$ nécessite un nombre d'opérations borné par $O(n \cdot m)$ où $n = |V(G)|$ et $m = |E(G)|$.

La complexité de l'algorithme est déterminée par la procédure 2 : **construction une ligne dominante**. Une exécution de cette procédure nécessite au plus $n - 1$ pivotages et donc le nombre d'opérations est borné par $O(n^2 \cdot m)$.

A chaque appel de la procédure 2, à l'ensemble des colonnes orientées est ajoutée au moins une colonne supplémentaire. Ainsi le nombre d'appels à cette procédure est sûrement inférieur à m ; d'où :

Le nombre total des opérations élémentaires pour orienter une $n \times (n + m)$ matrice $M = [U_n, N]$ est borné par

$$O(n^2 \cdot m^2)$$

Chapitre 4

APPLICATIONS

4.1 Matrices graphiques et cographiques

Rappels :

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté connexe avec :

$|V| = n + 1$ et $|A| = m$.

Considérons un arbre $T = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de G

et le coarbre associé $\bar{T} = A - T = \{a_{n+1}, \dots, a_m\}$.

Matrice graphique associée au graphe G relative à un arbre T

On sait que pour tout arc $a_i \in T$, le graphe $(V, T - \{a_i\})$ a deux composantes connexes, chacune ayant pour sommets V_i' , V_i'' . L'ensemble des arcs de G ayant une extrémité dans V_i' et l'autre dans V_i'' est un cocycle élémentaire qu'on notera $\Omega_{a_i} = (\Omega_{a_i}^+, \Omega_{a_i}^-)$, l'orientation étant telle que $a_i \in \Omega_{a_i}^+$.

Les cocycles Ω_{a_i} sont appelés **cocycles T - fondamentaux**.

A chaque Ω_{a_i} on associe un vecteur ligne

$(\omega_i^1, \omega_i^2, \dots, \omega_i^m)$ de $\{0, 1, -1\}^m$ avec :

$$\omega_i^j = \begin{cases} +1 & \text{si } a_j \in \Omega_{a_i}^+ \\ -1 & \text{si } a_j \in \Omega_{a_i}^- \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Définition 1

La $n \times m$ - matrice $M_T(G) = (\omega_i^j)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$

est appelée **matrice graphique associée au graphe G relative à l'arbre T.**

Matrice cographique

associée au graphe G relative à un coarbre $\bar{T} = E - T$.

Pour tout arc $a_i \in \bar{T}$, le graphe $(V, T \cup \{a_i\})$ contient un seul cycle $\Gamma_{a_i} = (\Gamma_{a_i}^+, \Gamma_{a_i}^-)$, l'orientation étant telle que $a_i \in \Gamma_{a_i}^+$.

Les cycles Γ_{a_i} sont appelés **cycles T-fondamentaux.**

A chaque Γ_{a_i} on associe un vecteur ligne

$(\gamma_i^1, \gamma_i^2, \dots, \gamma_i^m)$ de $\{0, 1, -1\}^m$ avec :

$$\gamma_i^j = \begin{cases} +1 & \text{si } a_j \in \Gamma_{a_i}^+ \\ -1 & \text{si } a_j \in \Gamma_{a_i}^- \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Définition 2

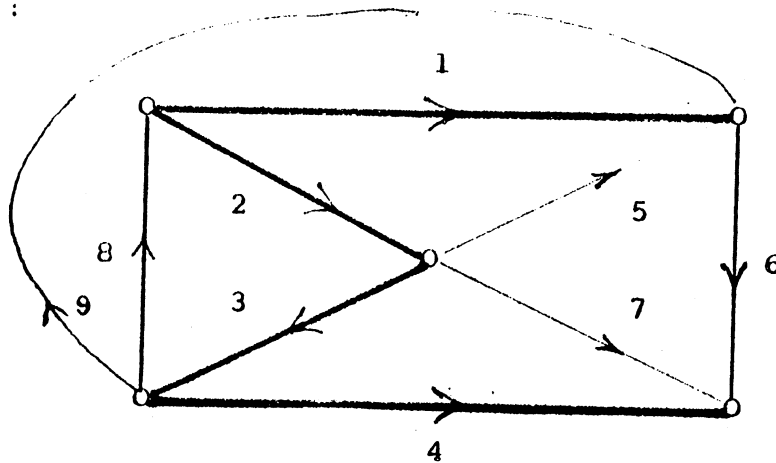
La $(m - n) \times m$ - matrice

$$M_{\bar{T}}^*(G) = (\gamma_i^j) , (n + 1 \leq i \leq m - n), (1 \leq j \leq m)$$

est appelée **matrice cographique associée au graphe G relative au coarbre \bar{T} .**

Théorème 1[8] Les matrices graphiques et cographiques sont totalement unimodulaires.

Exemple :



1	2	3	4	5	6	7	8	9
1			1	-1				1
	1		-1	1		-1	-1	
		1		1	1	-1	-1	
			1		1			

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1			1				
1	-1	-1	-1		1			
		-1	-1			1		
	1	1					1	
1	1	1						1

La matrice graphique $M_T(G)$

La matrice cographique $M_T^*(G)$.

Par la suite, dans cette partie on notera M et M^* les matrices $M_T(G)$ et $M_T^*(G)$ lorsqu'il sera question du graphe G et de l'arbre T .

Rappelons un certain nombre de propriétés des matrices M et M^* qui vont nous servir à donner une interprétation de l'algorithme d'orientation des matrices totalement unimodulaires dans ce cas particulier.

Les lignes de M forment une base de l'espace des tensions sur G et les lignes de M^* une base de l'espace des flots

D'après la définition de M et M^* on a

$M^T = U_n$ et $(M^*)^T = U_{m-n}$. (M^T désigne la sous-matrice constituée par la réunion des colonnes correspondant aux arcs de l'arbre T .)

Posons $M^T = N$. D'après l'orthogonalité de l'espace des flots avec celui des tensions, on a :

${}^t M M^* = 0$ c'est-à-dire ${}^t [U_n, N] \cdot [(M^*)^T, U_{m-n}] = 0$
ou encore ${}^t U_n \cdot (M^*)^T + {}^t N \cdot U_{m-n} = 0$ d'où $(M^*)^T = -{}^t N$.

Ainsi, si $M = [U_n, N]$ alors $M^* = [-{}^t N, U_{m-n}]$.

4.2 Relation entre des opérations sur le graphe et les matrices graphiques et cographiques.

Regardons brièvement comment sont transformées les matrices $M_T(G)$ et $M_T^*(G)$ lorsqu'on transforme le graphe G ou l'arbre T .

Remarque 1

Inverser l'orientation d'un arc a_j du coarbre \bar{T} de G revient à multiplier par -1 la colonne correspondante de M (dans le sens que si $a_j \in \bar{T}$ et $G' = (V, A - a_j + a_j^{-1})$ alors $M_T(G')$ est obtenue de M en multipliant la colonne j par -1).

Remarque 2

Inverser l'orientation d'un arc a_i de l'arbre T revient à multiplier par -1 la ligne i de N .

Remarque 3

Passer de l'arbre T à l'arbre $T' = T - a_i + a_j$ avec $a_j \in \Omega_{a_i}$ (voir la définition de $M_T(G)$) revient à faire un pivotage sur l'élément M_i^j et à permuter les colonnes i et j on obtient ainsi $M_{T'}(G)$.

Remarque 4

Contracter un arc a_i de T dans G (supprimer a_i et identifier ses extrémités) revient à supprimer la i -ème ligne et la i -ème colonne de M . On obtient ainsi la matrice $M_{T-\{a_i\}}(G/\{a_i\})$.

Pour obtenir la matrice graphique du graphe $G/\{a_j\}$ avec $a_j \in \bar{T}$ à partir de M , on considère un élément $M_i^j \neq 0$ dans la j -ième colonne et l'on construit $M_{T'}(G)$ avec $T' = T - a_i + a_j$ suivant la remarque 3. On se ramène ainsi dans le cas où $a_j \in T'$.

Remarque 5

Supprimer un arc $a_j \in \bar{T}$ dans G (le graphe obtenu est $G \setminus \{a_j\}$) revient à supprimer la j -ième colonne de M .
 Pour obtenir la matrice graphique du graphe $G \setminus \{a_i\}$ avec $a_i \in T$ à partir de M , on procède de la manière suivante :
 S'il existe $M_i^j \neq 0$ ($i \neq j$) on fait un pivotage sur M_i^j et l'on est ainsi ramené au cas précédent avec $T' = T - a_i + a_j$.
 Si un tel élément n'existe pas, on supprime simplement la i -ème colonne et la i -ème ligne de M .

Remarque 1*

Inverser l'orientation d'un arc a_i de l'arbre T revient à multiplier par -1 la colonne correspondante de M^*

Remarque 2*

Inverser l'orientation d'un arc a_j du coarbre T revient à multiplier par -1 la ligne d'indice $j - i$ de $-{}^tN$ (Rappelons que $M^* = [{}^{-t}N, U_{m-n}]$).

Remarque 3*

Passer du coarbre T au coarbre $T' = T - a_j + a_i$ avec $a_j \in T$ et $a_i \in \bar{T}$ revient à faire un pivotage sur l'élément $(M^*)_i^j$ dans M^* et à permuter les colonnes d'indice i et j ; on obtient ainsi la matrice $M_{T'}^*(G)$.

4.3 Orientation de matrices graphiques et cographiques

Interprétation de l'algorithme d'orientation d'une matrice totalement unimodulaire dans le cas des matrices graphiques et cographiques.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

Donnons à G une orientation quelconque et posons $G = (V, A)$ le graphe ainsi obtenu. Considérons un arbre T de G et écrivons la matrice $M_T(G)$. Cette matrice étant totalement unimodulaire on peut lui appliquer l'algorithme d'orientation.

A chaque opération sur M , d'après les remarques 4.2, correspond une des opérations : inverser l'orientation d'un arc de G ou passer d'un arbre de G à un autre arbre de G .

A la fin de l'algorithme on obtient une orientation de G et un arbre T de G tels que :

a- tous les cocycles T -fondamentaux Ω_{a_i} sont des cocircuits, c'est-à-dire qu'on a

$$\Omega_{a_i}^+ = \Omega_{a_i}^- \text{ et } \Omega_{a_i}^- = \emptyset \text{ pour tout } a_i \in T$$

Si $M_T(G) = [U, N]$ alors $M_T^*(G) = [-{}^tN, U]$

Si l'on inverse les arcs de T alors

b- tous les cycles T -fondamentaux Γ_{a_i} sont des circuits, c'est-à-dire qu'on a :

$$\Gamma_{a_i}^+ = \Gamma_{a_i}^- \text{ et } \Gamma_{a_i}^- = \emptyset \text{ pour tout } a_i \in \bar{T}.$$

4.4 Matroïdes vectoriels Relation entre des opérations sur le matroïde et sa matrice représentative

Les matroïdes vectoriels sont définis de la manière suivante:

Soit M une $n \times m$ - matrice à éléments dans un corps \mathbb{K} et E l'ensemble des indices des colonnes de M .

Notons $\mathcal{M}(M)$ le matroïde sur E ayant pour indépendants les sous ensembles $F \subset E$ tels que $\{M^i ; i \in F\}$ soient linéairement indépendants sur \mathbb{K} :

Un matroïde quelconque \mathcal{M} est dit **vectoriel** ou **représentable** s'il existe un corps \mathbb{K} et une matrice à éléments dans ce corps et qu'on a $\mathcal{M} = \mathcal{M}(M)$. La matrice M est appelée **matrice représentative de \mathcal{M}** .

Si M est sous forme standard par rapport à une base J alors J est une base du matroïde $\mathcal{M}(M)$ et $\bar{J} = E - J$ est une cobase. La matrice M est notée $M_J(\mathcal{M})$.

En supposant $J = \{1, 2, \dots, n\}$ les remarques 4.2.3, 4.2.4 et 4.2.5 se généralisent immédiatement :

Remarque 6

Passer de la base J à une base $J' = J - \{i\} + \{j\}$ avec $i \in J$ (M^i est le i -ème vecteur unité) et $j \in \bar{J}$ tel que $M_1^j \neq 0$ revient à faire un pivotage sur M_1^j dans M .

Remarque 7

Contracter un élément $i \in J$ dans le matroïde $\mathcal{M} = \mathcal{M}(M)$ revient à supprimer la i -ème ligne et la i -ème colonne de M . On obtient ainsi la matrice :

$$M_{J-\{i\}}(\mathcal{M}/\{i\})$$

Pour obtenir une matrice représentative du matroïde $\mathcal{M}/\{j\}$ avec $j \in \bar{J}$ à partir de M , on considère un élément $M_1^j \neq 0$ dans la colonne d'indice j et l'on construit $M_{J'}(\mathcal{M})$ avec $J' = J - \{i\} + \{j\}$ suivant la remarque 4.4.6. On se ramène ainsi au cas où $j \in J'$.

Remarque 8

Supprimer un élément $j \in \bar{J}$ dans le matroïde $\mathcal{M}(M)$ revient à supprimer la colonne d'indice j de M .

Pour obtenir une matrice représentative du matroïde $\mathcal{M} \setminus \{j\}$, avec $j \in J$, à partir de M , on procède de la manière suivante :

S'il existe $M_{i1}^j \neq 0$ ($i \neq j$), on fait un pivotage sur M_{i1}^j ; on est ainsi ramené au cas précédent avec $J' = J - \{i\} + \{j\}$.

Si un tel élément n'existe pas, on supprime simplement la ligne et la colonne i de M .

4.5 Matroïdes binaires. Théorème du cocircuit dominant.

Théorème de TUTTE [13] sur le cocircuit séparant.

Nous allons maintenant reprendre quelques définitions de l'article [5], exposer brièvement son résultat principal, et montrer comment on peut le déduire du théorème de la ligne dominante que nous démontrons dans ce paragraphe.

Si r est la fonction rang d'un matroïde \mathcal{M} sur E , un **séparateur** de \mathcal{M} est un ensemble $S \subset E$ tel que $r(S) + r(E - S) = r(E)$.

Un **séparateur élémentaire** de \mathcal{M} est un séparateur minimal non-vidé. Un matroïde est **non-séparable** s'il a au plus un séparateur élémentaire. Etant donné une base B de \mathcal{M} , un **cocircuit B-fondamental** de \mathcal{M} est un cocircuit ayant un seul élément de B . Une **composante** de \mathcal{M} est obtenue en supprimant tous les séparateurs élémentaires de \mathcal{M} sauf un. Si Y est un cocircuit de \mathcal{M} , un **pont** de Y dans \mathcal{M} est un séparateur élémentaire de $\mathcal{M} \setminus Y$ où $\mathcal{M} \setminus Y$ (resp. \mathcal{M}/Y) désigne le matroïde obtenu de \mathcal{M} en supprimant (resp. en contractant) Y .

Une **Y-composante** de \mathcal{M} est un matroïde obtenu de \mathcal{M} en contractant tous les ponts de Y sauf un.

Si \mathcal{M} contient plus d'une Y -composante, Y est **séparant**, sinon Y est **non-séparant**.

Dans [13] TUTTE a introduit la notion de **matroïdes binaires** comme étant les matroïdes représentables sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit M une $n \times m$ - matrice à éléments dans $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sous forme standard et E l'ensemble des indices des colonnes de M . M est alors appelée matrice représentative standard (M.R.S.) pour le matroïde $\mathcal{M} = \mathcal{M}(M)$.

Dans ce cas les colonnes identité correspondent à une base B de \mathcal{M} et les lignes de M sont les vecteurs représentatifs des cocircuits B -fondamentaux de \mathcal{M} .

On peut calculer les séparateurs élémentaires de $\mathcal{M}(M)$ en introduisant la notion de "chaîne" dans M .

On définit la notion de chaîne entre deux colonnes (comme nous l'avons fait pour les lignes), entre une colonne et une ligne, et entre deux lignes.

Les séparateurs élémentaires sont les composantes connexes des colonnes de M .

Théorème 2 TUTTE [13, 8.63]

Si \mathcal{M} est un matroïde binaire non-séparable de rang au moins 3, alors \mathcal{M} contient un cocircuit séparant ou le mineur de Fano.

Appelons que le matroïde de Fano est défini comme étant le matroïde représenté par la matrice binaire :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 & 1 & & 1 \\ & 1 & & & & 1 & 1 \\ & & 1 & & & & & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice F est appelée matrice de Fano.

Remarque 9 [5, p. 72]

On dit qu'un matroïde défini par une matrice binaire A contient le mineur de Fano si par des pivotages dans A on peut obtenir une sous-matrice de A identique à la matrice de Fano (à une permutation de colonnes près).

Nous allons montrer ici que le lemme de la ligne dominante peut s'étendre aux matroïdes binaires par le théorème suivant que nous appellerons théorème du cocircuit dominant.

Soit \mathcal{M} un matroïde et e un élément de \mathcal{M} qui n'est pas une boucle. On appelle fermeture de e l'ensemble des éléments e' de \mathcal{M} tels que $\{e, e'\}$ soit un circuit de \mathcal{M} .

Théorème 3 du cocircuit dominant

Soit \mathcal{M} un matroïde binaire sans mineur de Fano.

Soit C_1 un cocircuit non-séparant de \mathcal{M} .

Alors, pour tout $e \in C_1$, il existe un cocircuit C_2 de \mathcal{M} tel que $(C_1 \setminus \text{cl}(e)) \subset C_2$.

Démonstration

Il existe une matrice binaire représentative standard M de \mathcal{M} telle que le support de la première ligne de M soit C_1 et la première colonne de la matrice identité corresponde à l'élément e . Comme C_1 est supposé non-séparant, en enlevant les colonnes de M d'indice dans C_1 , la matrice restante est connexe. Nous sommes dans les conditions d'application du lemme de la ligne dominante. Les opérations de pivotage considérées dans la démonstration p. 39-40 s'effectuent de la même façon sur les matrices binaires. La seule différence est que les -1 sont remplacés par des 1 (cf. la figure p. 40). Ces pivotages font diminuer la longueur de la chaîne C (reliant la ligne 2 avec la ligne p) de $p - 2$ à 1 et font remonter les 1 de $[s(p) - s(2)] \cap J_1$ à la troisième ligne. Les deux cas auxquels on aboutit p. 41 et 42 se résument par un seul dessin :

						j_1
1	1	1...1	1	1...1		0
2	1	1	0	0...0		1
3	*	*...*	1	1...1		1

Si les éléments représentés par des astérisques valent tous 0, nous pouvons augmenter le support de la deuxième ligne en pivotant sur le 1 de la troisième ligne et la colonne j_1 .

S'ils valent tous 1, le support de la ligne 3 est plus grand que celui de la ligne 2.

Dans le cas où un des astérisques vaut 0 et un autre vaut 1, nous sommes en présence du mineur de Fano. Sur le schéma, ce mineur est indiqué par les éléments entourés :

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccc|c}
 \textcircled{1} & \textcircled{1} & \dots & 1 & \textcircled{1} & 1 & \dots & 1 & \textcircled{0} \\
 \textcircled{1} & \textcircled{1} & \dots & 1 & \textcircled{0} & 0 & \dots & 0 & \textcircled{1} \\
 \textcircled{0} & \textcircled{1} & \dots & * & \textcircled{1} & 1 & \dots & 1 & \textcircled{1}
 \end{array} \right]$$

Ainsi, si au cours de l'algorithme nous ne rencontrons pas le mineur de Fano, nous obtenons une ligne dominante sur J_1 (elle domine les lignes autres que la première). Sur la matrice obtenue à la fin de l'algorithme, la première ligne et la première colonne ne sont pas modifiées. La première ligne représente le cocircuit C_1 de \mathcal{M} . Les éléments de $cl(e)$ sont représentés par les colonnes identiques à la première.

Soit C_2 le support de la ligne dominante. Ce cocircuit vérifie le résultat énoncé.

Dans [5] la démonstration du théorème [13, 8.63] est donnée par un algorithme [5, algorithme 3.2] avec à l'entrée une matrice représentative A de \mathcal{M} sous forme standard.

Corollaire 1

A partir du théorème 3 du cocircuit dominant, nous pouvons déduire le théorème de TUTTE [13, 8.63] de la manière suivante :

Considérons un cocircuit C_1 du matroïde binaire \mathcal{M} .

Si C_1 est séparant, alors il répond à l'énoncé du théorème, sinon :

Soit $e \in C_1$. Considérons la matrice M telle qu'elle a été décrite dans la démonstration du théorème précédent. Soit B la base obtenue à la fin de l'algorithme de

construction du cocircuit dominant C_2 . On a $e \in P$ et $e \notin C_2$.
 \mathcal{M} étant de rang au moins 3, B contient au moins trois éléments
dont e . Soit g un élément de B n'appartenant ni à C_1 ni à
 C_2 . $cl(e)$ n'intersecte pas C_2 .
Ainsi $cl(e)$ est une C_2 - composante de \mathcal{M} et g appartient à une
autre C_2 - composante de \mathcal{M} car $g \notin cl(e)$ et $g \notin C_2$. D'où C_2
est un cocircuit séparant de \mathcal{M} .

Chapitre 5

5.1 Matrices "de corde"

Pour un graphe non orienté $G = (V, E)$ ayant V pour ensemble de sommets et E pour ensemble d'arêtes les notions de chaîne, chaîne élémentaire, cycle, cycle élémentaire, etc., sont celles définies dans [2].

On appelle longueur d'un cycle élémentaire le nombre de ses arêtes.

Une arête adjacente à deux sommets non consécutifs d'un cycle élémentaire est appelée corde de ce cycle.

Un trou de G est un cycle élémentaire sans corde.

Un sous-ensemble A de V est dit d'articulation si le sous-graphe induit par $V - A$ contient plus de composantes connexes que G .

Un graphe biparti est appelé de corde si tout cycle élémentaire de longueur strictement supérieure à 4 possède une corde.

A une $n \times m$ - matrice M en $\{0,1\}$ on associe un graphe biparti noté $B(M) = (V, E)$ défini de la manière suivante :

- à chaque ligne d'indice i on associe un sommet r_i ($1 \leq i \leq n$) ;

- à chaque colonne d'indice j on associe un sommet c_j ($1 \leq j \leq m$) ;

Les sommets r_i, c_j sont reliés par une arête si et seulement si $M_i^j \neq 0$.

On pose $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ et

$$V = R \cup C, \quad E = \{(r_i, c_j); M_i^j \neq 0\}.$$

Les sommets de R (resp. de C) sont appelés r -sommets (resp. c -sommets).

Remarque 1

Si $I \subset R$ et $J \subset C$ alors à la matrice $M_{I \cup J}^J$ correspond le sous-graphe de $B(M)$ induit par $I \cup J$ et qu'on notera $B_{I \cup J}(M)$.

Remarque 2

Pour obtenir le graphe biparti $B({}^tM)$ où tM désigne la transposée de M , il suffit de considérer dans le graphe $B(M)$ les r -sommets (resp. les c -sommets) comme c -sommets (resp. comme r -sommets).

Définition 1

Une matrice M en $\{0,1\}$ est appelée "de corde" si le graphe associé $B(M)$ est de corde. (Dans [7] une telle matrice est appelée totalement équilibrée).

5.2 1-, 2- et 3-somme de deux matroïdes binaires.

Soient M_1 et M_2 deux matroïdes binaires sur les ensembles S_1 et S_2 respectivement.

Considérons un nouveau matroïde binaire $M_1 \oplus M_2$ sur l'ensemble $S_1 \Delta S_2$ dont les circuits sont les éléments minimaux de la famille

$$\{\bar{S}_1 \Delta \bar{S}_2 ; \bar{S}_1 \Delta \bar{S}_2 \subseteq S_1 \Delta S_2 \text{ avec } \bar{S}_i = \text{union disjointe de circuits de } M_i \text{ pour } i = 1, 2\}$$

On considère les trois cas suivants:

(i) $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ et $S_1, S_2 \neq \emptyset$.

Alors $M_1 \Delta M_2$ est appelé 1-somme des matroïdes M_1 et M_2 .

(ii) $|S_1| \geq 3$, $|S_2| \geq 3$ et $S_1 \cap S_2 = \{e\}$ où e n'est pas une boucle ou une coboucle ni pour M_1 ni pour M_2 .

Alors $M_1 \Delta M_2$ est appelé 2-somme des matroïdes M_1 et M_2 .

(iii) $|S_1|, |S_2| \geq 7$ et $S_1 \cap S_2 = Z = \{e, f, g\}$ tel que

a) e, f, g sont distincts.

b) Z ne contient pas de cocircuit de M_1 ou de M_2 .

c) Z est un circuit dans les deux matroïdes.

Alors $M_1 \Delta M_2$ est appelé 3-somme de M_1 et M_2 .

Remarque 3 : (Truemper, [12] p. 7)

Si \oplus_k désigne l'opération de k-somme de deux matroïdes M_1 et M_2 alors on peut vérifier que :

$M = M_1 \oplus_k M_2$ si et seulement si $M^* = M_2^* \oplus_k M_1^*$.

Lemme 1 (Truemper, [11] Lemme 4)

Soit R un matroïde 2-somme (resp. 3-somme) de deux matroïdes binaires R_1 et R_2 où leurs ensembles de base S_1 et S_2 s'intersectent en $\{e\}$ (resp. en $Z = \{e, f, g\}$).

Alors si

X_1 est une base de R_1 telle que $e \in X_1$ (resp. $\{e, f\} \subset X_1$).

X_2 est une base de R_2 ne contenant aucun élément de $S_1 \cap S_2$ alors $X = X_1^1 \cup X_2$ est une base de R où $X_1^1 = X_1 - \{e\}$ (resp. $X_1^1 = X_1 - \{e, f\}$).

Pour construire une matrice représentative de R à partir des représentations de R_1 et R_2 on procède de la manière suivante:

a) Pour la 2-somme.

$$M(R_1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & X_1 & e & Y_1 & Y_2 \\ \hline 1 & & & & \\ & \dots & 0 & B^1 & B^e \\ & & 1 & & \\ \hline 0 & & & 0 & 1 \dots 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & X_2 & Y_2 & e \\ \hline 1 & & & \\ & \dots & B^2 & b^e \\ & & 1 & \\ \hline \end{array}$$

$M(R_2)$

$M(R_1)$ désigne la matrice représentative du matroïde R_R .

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & Y_1 & Y_2 & Y_2 \\ \hline 1 & & & & & \\ & \dots & 0 & B^1 & B^e & 0 \\ & & 1 & & & \\ \hline 0 & & & 0 & b^e \dots b^e & B^2 \\ & & & & 1 & \\ \hline \end{array}$$

$M(R)$

avec $R = R_1 \oplus_2 R_2$

fig. 1

b) Pour la 3 - somme

$$M(R_1) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & X_1^1 & e & f & Y_1 & Y_e & Y_f & Y_g & g \\ \hline 1 & \dots & 0 & & B^1 & B^e & B^f & B^g & 0 \\ & & & & & & & & \\ \hline 0 & & 1 & & 0 & 1 \dots 1 & 0 \dots 0 & 1 \dots 1 & 1 \\ & & & & & 0 \dots 0 & 1 \dots 1 & 1 \dots 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$M(R_2) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & X_2 & Y_2 & e & f & g \\ \hline 1 & \dots & B^2 & b^e & b^f & b^g \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$M(R) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & X_1^1 & X_2 & Y_1 & Y_e & Y_f & Y_g & Y_2 \\ \hline 1 & \dots & 0 & B^1 & B^e & B^f & B^g & 0 \\ & & & & & & & \\ \hline 0 & & 1 & 0 & b^e \dots b^e & b^f \dots b^f & b^g \dots b^g & B^2 \\ & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

avec $R = R_1 \oplus_3 R_2$

Proposition 1

Si $M(R_1)$ et $M(R_2)$ sont de corde alors $M(P)$ est de corde.

Démonstration :

Nous donnons la démonstration pour la 3-somme, celle de la 2-somme étant bien plus simple.

Supposons $M(R_1)$ et $M(R_2)$ de corde et $M(R)$ avec un trou de longueur 4.

Soit N la sous-matrice de M correspondant à ce trou. N contient deux 1 par ligne et par colonne et est minimale pour cette propriété. Posons

$\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_e, \bar{Y}_f, \bar{Y}_g$ les ensembles des indices des colonnes de Y_1, Y_2, Y_e, Y_f, Y_g qui sont dans N respectivement et \bar{B}^1, \bar{B}^2 les sous-matrices de N provenant respectivement de B^1, B^2 .

I (resp. J) l'ensemble des indices des lignes de N qui rencontrent B^1 (resp. B^2)

N_e, N_f, N_g les sous-matrices de N formées respectivement par l'intersection des colonnes d'indice dans $\bar{Y}_e, \bar{Y}_f, \bar{Y}_g$ avec les lignes d'indice dans J .

N a la forme :

$N =$

	\bar{Y}_1	\bar{Y}_e	\bar{Y}_f	\bar{Y}_g	\bar{Y}_2	
	\bar{B}^1	B^c	B^f	B^g		I
		N_e	N_f	N_g	\bar{B}^2	J

Cas 1 : $\bar{Y}_e, \bar{Y}_f, \bar{Y}_g$ ne sont pas vides.

Montrons que N_e a une seule colonne (il en sera de même pour N_f et N_g).

Les colonnes de N_e sont identiques et égales à b^e . b^e n'est pas le vecteur nul car e n'est pas une boucle du matroïde R_2 . Si b^e contient un 1 à la j -ième position et N_e contenait plus d'une colonne, alors la ligne j de N contiendrait les deux 1 dans N_e . Comme \bar{Y}_f et \bar{Y}_g ne sont pas vides, alors b^e ne peut être combinaison linéaire (sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) de b^f et b^g car les deux ont un 0 à la j -ième position. Ceci contredit le fait que Z est un circuit de R_1 et R_2 .

La sous-matrice de N' formée par la mise côte à côte des sous-matrices N_e, N_f, N_g est de la forme :

$$N' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline b^e & b^f & b^g \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Comme N' est de rang 2, chacune de ses lignes contient soit deux 1, soit aucun. Ainsi N' n'est pas connecté à \bar{B}^2 . D'où N ne peut être qu'un trou n'intersectant pas \bar{B}^2 . Ceci entraînerait que $M(R_1)$ contient un trou de longueur > 4 . Contradiction !

Cas 2 Un des ensembles $\bar{Y}_e, \bar{Y}_f, \bar{Y}_g$ est vide; disons \bar{Y}_e .

Comme pour le cas 1, il est facile de voir que $|\bar{Y}_f|, |\bar{Y}_g| < 2$.

2.1 $|\bar{Y}_f| = |\bar{Y}_g| = 2$. Ceci est impossible car la sous-matrice \bar{B}^1 serait déconnectée du reste de N .

2.2 $|\bar{Y}_f| = 2, |\bar{Y}_g| = 1$. Impossible car la suppression du c -sommet associé à la colonne \bar{Y}_g déconnecterait le graphe biparti $B(N)$ qui est un cycle, donc 2-connexe.

2.3 $|\bar{Y}_f| = |\bar{Y}_g| = 1$. Les matrices N_f et N_g sont à une colonne. Si ces deux colonnes contenaient deux 1 chacune, N ne serait pas connexe (les colonnes d'indice \bar{Y}_f , \bar{Y}_g seraient nulles sur I).

Si l'une de ces colonnes avait deux 1 et l'autre un seul, à la ligne j , alors la suppression de la ligne j déconnecterait le cycle $R(N)$, ce qui est impossible.

Il reste à examiner le cas $|\bar{Y}_f| = |\bar{Y}_g| = 1$ et la matrice $[N_f, N_g]$ est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, la sous-matrice de N formée par les colonnes d'indices dans \bar{Y}_1 , \bar{Y}_f , \bar{Y}_g est une chaîne minimale de longueur au moins 4. Cette chaîne avec la colonne d'indice g forme un trou de longueur au moins 6 dans $M(R_1)$.
 Contradiction !

TUTTE a introduit la notion de matroïdes réguliers comme étant les matroïdes représentables par une matrice totalement unimodulaire [cf. 13].

Notre résultat implique que cette matrice peut toujours être prise en $(0,1)$.

Récemment SEYMOUR [9] a démontré un résultat remarquable, le théorème de décomposition concernant les matroïdes réguliers qui s'énonce de la manière suivante:

Théorème de SEYMOUR [9]

Tout matroïde régulier peut être décomposé en matroïdes graphiques, cographiques et copies de R_{10} par répétition de décompositions en 1-, 2- et 3-somme. Réciproquement, tout matroïde binaire obtenu par répétitions de compositions en 1-, 2- et 3-somme de matrices graphiques, cographiques et copies de R_{10} est régulier.

D'après le théorème 3.2.1 on déduit qu'un matroïde est régulier si et seulement si il est représentable par une

Théorème

Toute matrice obtenue par répétitions de compositions en 1-, 2- et 3-somme de matrices graphiques, cographiques est équivalente à une matrice de corde (en $(0,1)$).

Démonstration

la démonstration de ce théorème va être donnée par une suite de résultats intermédiaires.

5.3 Matrices de corde et matrices graphiques et cographiques

Théorème 1

Toute matrice graphique ou cographique est équivalente à une matrice en $\{0,1\}$ de corde.

Démonstration

On a vu que si $[U,N]$ est une matrice graphique alors $[-tN,U]$ est une matrice cographique.

D'après la remarque 5.2.2 il suffit de démontrer le théorème pour une matrice cographique M .

A l'aide de l'algorithme présenté dans [6] on peut construire un graphe G tel que M soit la matrice cographique associée à G relative à un arbre T . Cet algorithme résoud le problème en temps polynomial (presque linéaire par rapport au nombre d'éléments non nuls de la matrice M).

Pour construire une matrice équivalente à M telle que le théorème l'affirme, nous allons utiliser une procédure connue sous le nom DFS (Depth-First-Search) dont nous donnons une esquisse. Pour plus de détails voir [1] pp 215-218, 239, 241-242.

Etant donné un graphe non-orienté $G = (V,E)$ on donne à

tous ses sommets la marque "non-inspecté".

On sélectionne un sommet $v \in V$ comme sommet de départ et on le marque "inspecté". On choisit un sommet w adjacent à v "non-inspecté" et on lui donne la marque "inspecté" et on continue ce processus tant qu'on peut. Lorsqu'on ne peut plus continuer le marquage on revient au sommet le plus récemment marqué et on applique le processus de marquage. De manière récursive cette procédure s'écrit:

procédure DFS (sommet v).

début

marque (v) = inspecté;

Pour tout sommet adjacent à w faire

si marque w = "non inspecté" alors DFS(w)

fin de la procédure DFS.

Chaque fois qu'à partir d'un sommet v marqué "inspecté" on marque un nouveau sommet w , donnons l'orientation $v \rightarrow w$ à l'arête qui nous a permis le marquage.

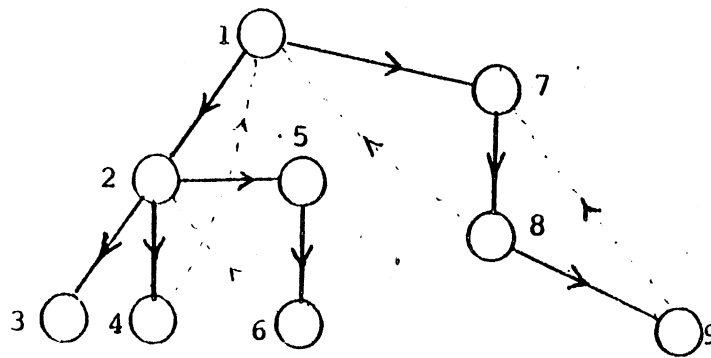
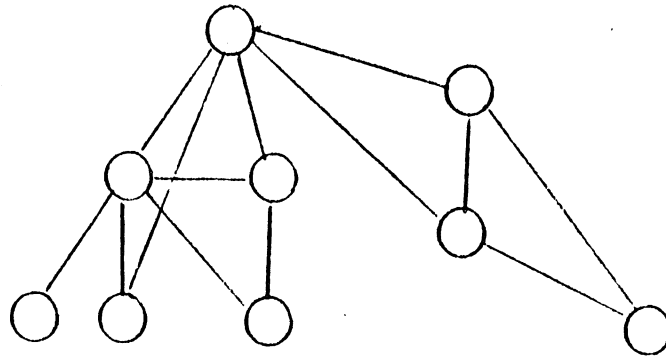
Si $V = \{n\}$ numérotions les sommets de 1 à n dans l'ordre de leur inspection.

Les arêtes du graphe G sont partitionnées en deux classes:

a) Les arêtes qui ont été orientées forment une arborescence T (un forêtscence si le graphe n'est pas connexe).

b) Les arêtes de $E-T$ qui n'ont pas été orientées et qui sont appelées arêtes de retour. Chaque arête de retour relie deux sommets se trouvant sur le même chemin de l'arborescence T . Orientons les arêtes de retour de manière

Exemple d'application de la procédure DFS.



à avoir le numéro de l'extrémité initiale plus grand que le numéro de l'extrémité finale.

Avec cette orientation tous les cycles T-fondamentaux sont des circuits.

Montrons que la matrice cographique associée au graphe G relative au coarbre E-T est en $\{0,1\}$ et de corde.

$M^* = M_T^*(G)$ est en $\{0,1\}$ car tous les cycles T-fondamentaux sont des circuits.

Montrons par récurrence sur le nombre d'arcs de l'arborescence T que M^* est de corde.

La matrice M^* est de la forme $[U,N]$ où N représente en ligne les vecteurs (en $\{0,1\}$) représentatifs des chemins correspondant aux cycles T-fondamentaux sur l'arborescence. Il suffit de montrer que N ne contient pas de trou de longueur supérieur à 4.

Pour $|T| < 3$ il est facile de voir que N est de corde.

Supposons la propriété vraie pour les matrices construites par DFS avec $|T| < n-1$ et considérons une matrice N ainsi construite avec $|T| = n$.

Soit $e = (a,b)$ le dernier arc orienté par la procédure DFS. Supposons que N contienne un trou > 4 . Il existe alors une sous-matrice N' de N ayant deux 1 par ligne et par colonne. Les supports des chemins qui

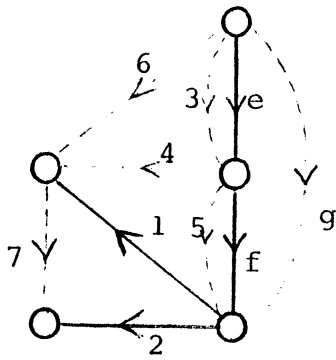
constituent N' sont incomparables pour l'inclusion. La colonne N^e correspondant à e est forcément parmi les colonnes de N' (l'hypothèse de récurrence).

Soient C' et C'' les deux chemins correspondant aux deux 1 de N' dans la colonne d'indice e .

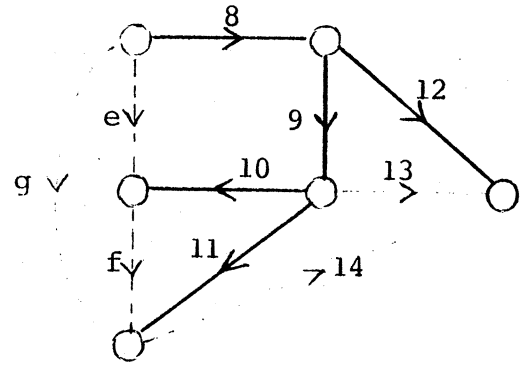
Ces deux chemins sont contenus dans l'unique chemin de l'arborescence qui va de la racine au sommet b , extrémité terminale de e . C' et C'' contiennent tous les deux l'arc e . L'arc e a pour extrémité terminale le sommet b qui est pendant de T .

D'où le support du plus long de ces deux chemins contient celui de l'autre. Contradiction.

Exemple de 3-somme de deux matrices graphiques.



G_1



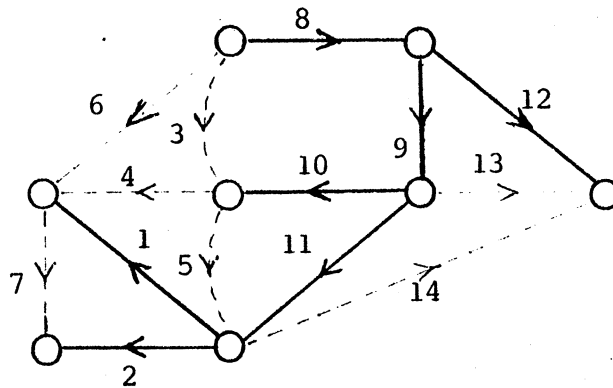
G_2

1	2	e	f	7	3	4	5	6	g
1				-1		1		1	
	1			1					
		1			1		1	1	
			1			1	1	1	1

$M(G_1)$

8	9	10	11	12	13	14	e	f	g
1							1		1
	1				-1	-1	1		1
		1					1	-1	
			1			-1		1	1
				1	1	1			

$M(G_2)$

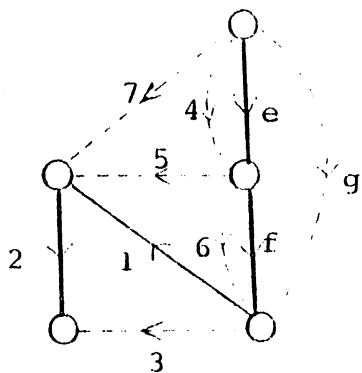


$G = G_1 \theta_3 G_2$

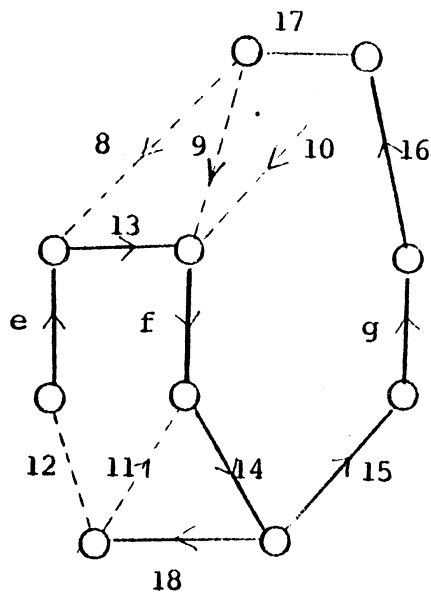
1	2	8	9	10	11	12	7	3	4	5	6	13	14
1							-1		1		1		
	1						1						
		1									1		
			1									-1	-1
				1			1	-1	-1				
					1				1	1	1		-1
						1						1	1

$M(G)$

Exemple de 3-somme d'une matrice graphique avec une matrice cographique.



G_1



G_2

1	2	e	f	3	4	5	6	7	g
1				1		1		1	
	1			1					
		1			1			1	1
			1			1	1	1	1

$M(G_1)$

8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	e	f	g
1					1	1	1	1	1			1	1
	1					1	1	1	1			1	1
		1				1	1	1				1	1
			1			1						1	1
				1		1	1				1	1	1

$M^*(G_2)$

1	2	8	9	10	11	12	3	4	5	6	7	13	14	15	16	17	18
1							1		1		1						
	1						1										
		1						1	1	1	1	1	1	1	1	1	
			1					1	1	1		1	1	1	1		
				1				1	1	1		1	1	1			
					1							1					1
						1		1	1	1		1					1

$M(G_1) \oplus_3 M^*(G_2)$

Corollaire 1

La k -somme ($k = 1, 2, 3$) de deux matroïdes graphiques $M(G_1), M(G_2)$ est un matroïde graphique $M(G_1 \oplus_k G_2)$

Corollaire 2

La k -somme ($k = 1, 2, 3$) de deux matroïdes cographiques est un matroïde cographique.

En effet: d'après la remarque 5.2.3

$$M = M_1 \oplus_k M_2 \text{ si et seulement si } M^* = M_2^* \oplus_k M_1^*$$

Corollaire 3

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté (connexe) et $Z = \{e, f, g\} \subset E$ ayant les propriétés

- a) e, f, g sont trois arêtes distinctes
- b) Z ne contient pas de cocycle de G
- c) Z est un cycle de G .

alors il existe une orientation de G et une arborescence T de G telles que

- 1) $e, f \in T$ et $g \notin T$.
- 2) La matrice $M_T(G)$ est en $\{0, 1\}$ et de corde

Démonstration

Si $e = (a_1, a_2)$, $f = (a_2, a_3)$ et $g = (a_3, a_1)$ il suffit d'appliquer la procédure DFS en choisissant pour racine a_1 , orienter e de a_1 vers a_2 , après f de a_2 vers

a_3 et continuer normalement la procédure pour le reste du graphe. Les arêtes du coarbre seront orientées du sommet au numéro plus petit vers le sommet au numéro plus grand.

Avec ce procédé tous les cocycles \mathcal{T} -fondamentaux sont des cocircuits et $e, f \in \mathcal{T}$.

Corollaire 4

Soit $G = (V, F)$ un graphe non orienté 2-connexe et $Z = \{e, f, g\} \subset F$ ayant les propriétés:

- a) e, f, g sont trois arêtes distinctes,
- b) Z ne contient pas de cycle de G ,
- c) Z est un cocycle élémentaire de G ,

alors il existe une orientation de G et une arborescence \mathcal{T} de G telles que:

- 1) $e, f, g \in \mathcal{T}$,
- 2) $M_{\mathcal{T}}^*(G)$ est en $\{0, 1\}$ et de corde.

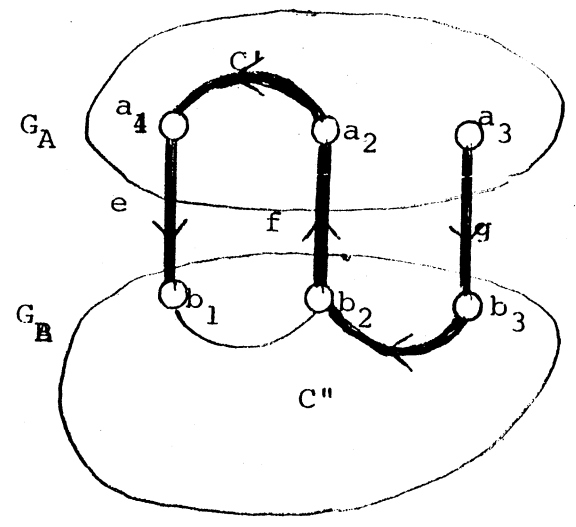
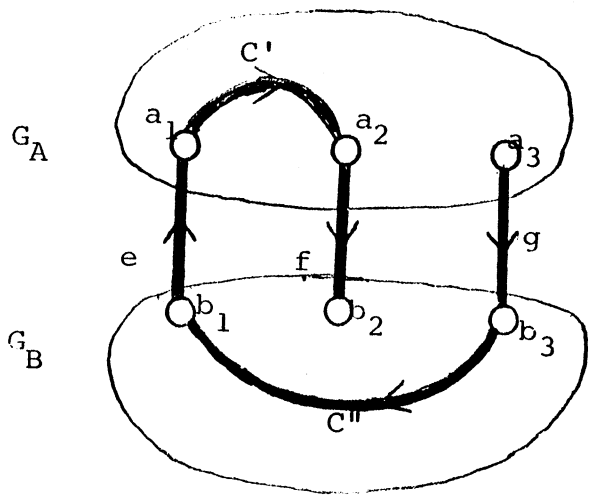
Démonstration

En effet: si l'on enlève Z , le graphe restant a deux composantes connexes G_A et G_B . Soient $e = (a_1, b_1)$, $f = (a_2, b_2)$ et $g = (a_3, b_3)$ avec $a_i \in A$ et $b_i \in B$ pour $i = 1, 2, 3$.

Considérons une chaîne élémentaire C' dans G_A joignant deux des trois sommets a_1, a_2, a_3 sans contenir le troisième. Supposons que C' joint a_1 avec a_2 et ne contient pas a_3 (cf. la figure ci-de suite).

Dans G_B il existe une chaîne élémentaire C'' joignant b_1

avec b_3 . Si C'' ne contient pas b_2 , alors on prend a_3 pour racine et on oriente d'abord la chaîne indiquée en gras sur la figure 5.3.6.1 et si C_2 contient b_2 , alors on oriente d'abord la chaîne indiquée en gras sur la figure 5.3.6.2. Ensuite on continue la procédure DFS normalement.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABC, A.V., HOPCROFT, J.F., et ULLMAN, J.D., "Data Structures and Algorithms", ADDISON-WESLEY PUBLISHING CO.(1983).
- [2] BERGE, C., "Graphes et Hypergraphes" (Dunod, Paris,1973).
- [3] BIAND, R. B., "New finite rules for simplex method", Math. of Operations Research, 2(1977). 103-107.
- [4] CAMION, P., "Modules Unimodulaires", J. of Combinatorial Theory, 4, 301-362(1968).
- [5] CUNNINGHAM, W. H., "Separating Cocircuits in Binary Matroids", LINEAR ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS, 43: 69-86(1982).
- [6] FUJISHIGE, S., "An efficient PQ-Graph Algorithm for Solving the Graph-Realisation Problem.", J. of COMPUTER AND SYSTEM SCIENCES, 21, 63-86(1980).
- [7] HOFFMAN, A. J., KOLEN, A. W. J., SAFAROVITCH, M., "Totally balanced and greedy matrices", Communication au 9ème Simposium de Math. Programming, Bonn, Août 1982. A paraître dans SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods.
- [8] POINCARÉ, H., Proc. Lond. Math. Soc., 32, 1901, p.277.
- [9] SEYMOUR, P.D., "Decomposition of Regular Matroids", J. of Combinatorial Theory, B28, 305-359(1980).
- [10] TARJAN, R. F., "Depth-first Search and Linear Graph Algorithms", J. SIAM Comp., no.2(1972), 146-160.
- [11] TRUFEMPER, K., "On the Efficiency of Representability

Tests for Matroids", Europ. J. Comb. 3(1982) 275-291

- [12] TRUEMPER, K., "A Decomposition Theory for Matroids", I: General Results", Working Paper, University of Texas at Dallas, 1982.
- [13] TUTTE, W. T., "Lectures on Matroids", J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B69 : 1-47(1965).
- [14] TUTTE, W. T., "An algorithm for determining whether a given binary matroid is graphic", Proc. Amer. Math. Soc. 11: 905-917(1960).

DERNIERE PAGE D'UNE THESE

3È CYCLE, DOCTEUR INGÉNIEUR OU UNIVERSITÉ

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M. FONLUPT.....

M.

M. RACO Maksi..... est autorisé
à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR de 3^e cycle
.....

Ans Panselle
J. L. Panselle

Grenoble, le 06 JUIN 1983

Le Président de l'Université Scientifique
et Médicale

M. TANCHE
B. Tanche

