



HAL
open science

Étude de quelques modèles déterministes et stochastiques de systèmes dynamiques à temps discret

Victor Harison

► **To cite this version:**

Victor Harison. Étude de quelques modèles déterministes et stochastiques de systèmes dynamiques à temps discret. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1983. Français. NNT: . tel-00306748

HAL Id: tel-00306748

<https://theses.hal.science/tel-00306748>

Submitted on 28 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l' Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ème cycle

«mathématiques appliquées»

par

Victor HARISON



**ETUDE DE QUELQUES MODELES DETERMINISTES ET
STOCHASTIQUES DE SYSTEMES DYNAMIQUES A TEMPS DISCRET.**



Thèse soutenue le 31 mars 1983 devant la commission d'examen

B. VAN CUTSEM **Président**

A. LE BRÉTON
J.Y. OUVRARD } **Examineurs**
D.T. PHAM



UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

année scolaire 1980-1981

Président de l'Université : M. J.J. PAYAN

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

Mlle	AGNIUS DELORD Claudine	Biophysique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Clinique dermatologie
	AMBROISE THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	Physique nucléaire
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique pédiatrie et puériculture
	BELORISKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
M.	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale & traumatologie
	BILLET Jean	Géographie
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET EYMARD Joseph	Clinique Hépto-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Jane-Marie	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie

.../...

MM. BUTEL Jean	Orthopédie
CABANEL Guy	Clinique rhumatologie et hydrologie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHARACHON Robert	Clinique O.R.L.
CHATEAU Robert	Clinique neurologique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COEUR André	Chimie analytique et bromotologique
COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
CRABBE Pierre	C.E.R.M.O.
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude	M.I.A.G.
DELORMAS Pierre	Pneumo-phtisiologique
DENIS Bernard	Clinique cardiologique
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DODU Jacques	Mécanique appliquée IUT 1
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GAVEND Jean-Michel	Pharmacologie
GEINDRE Michel	Electro-radiologie
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
JANIN Bernard	Géographie
JEANNIN Charles	Pharmacie galénique
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
KAHANE André	Physique
KAHANE Josette	Physique
KLEIN Joseph	Mathématiques pures
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Hermodynamique
LACHARME Jean	Biologie cellulaire
LAJZEROWICZ Joseph	Physique

Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie thoracique
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutiques
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LE NOC Pierre	Bactériologie virologie
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LOUP Jean	Géographie
	LUU DUC Cuong	Chimie générale et minérale
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
Mlle	MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognostie
MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	NEGRE Robert	Mécanique IUT 1
	MOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OMONT Alain	Astrophysique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Sémiologie médicale (neurologie)
	PERRIER Guy	Géophysique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	RACHAIL Michel	Clinique médicale B
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
M.	REVOL Michel	Urologie
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
MM.	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
Mme	SEIGLE MURANDI Françoise	Botanique et cryptogamie
MM.	SENGEL Philippe	Biologie animale
	SIBILLE Robert	Construction mécanique IUT 1
	SOUTIF Michel	Physique
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MM. VAN CUTSEM Bernard
 VAUQUOIS Bernard
 VERAÏN Alice
 VERAÏN André
 VIGNAIS Pierre

Mathématiques appliquées
 Mathématiques appliquées
 Pharmacie galénique
 Biophysique
 Biochimie médicale

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

MM. ARNAUD Yves
 AURIAULT Jean-Louis
 BEGUIN Claude
 BOITET Christian
 BOUTHINON Michel
 BRUGEL Lucien
 BUISSON Roger
 CASTAING Bernard
 CHARDON Michel
 CHEHIKIAN Alain
 COHEN Henri
 COHENADDAD Jean-Pierre
 COLIN DE VERDIERE Yves
 CONTE René
 CYROT Michel
 DEPASSEL Roger
 DOUCE Roland
 DUFRESNOY Alain
 GASPARD François
 GAUTRON René
 GIDON Maurice
 GIGNOUX Claude
 GLENAT René
 GOSSE Jean-Pierre
 GROS Yves
 GUITTON Jacques
 HACQUES Gérard
 HERBIN Jacky
 HICTER Pierre
 IDELMAN Simon
 JOSELEAU Jean-Paul
 JULLIEN Pierre
 KERCKOVE Claude

Chimie IUT 1
 Mécanique IUT 1
 Chimie organique
 Mathématiques appliquées
 E.E.A. IUT 1
 Energétique IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique
 Géographie
 E.E.A. IUT 1
 Mathématiques pures
 Physique
 Mathématiques pures
 Physique IUT 1
 Physique du solide
 Mécanique des fluides
 Physiologie végétale
 Mathématiques pures
 Physique
 Chimie
 Géologie
 Sciences nucléaires
 Chimie organique
 E.E.A. IUT 1
 Physique IUT 1
 Chimie
 Mathématiques appliquées
 Géographie
 Chimie
 Physiologie animale
 Biochimie
 Mathématiques appliquées
 Géologie

MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique IUT 1
	KUPKA Yvon	Mathématiques pures
	LUNA Domingo	Mathématiques pures
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
Mme	MINIER Colette	Physique IUT 1
MM.	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
	OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
	PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie minéralogie
	PERRIN Claude	Sciences nucléaires
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
	ROBERT Gilles	Mathématiques pures
	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	ROSSI André	Physiologie végétale
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
	SARROT REYNAUD Jean	Géologie
	SAXOD Raymond	Biologie animale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique
MM.	STUTZ Pierre	Mécanique
	VIALON Pierre	Géologie
	VIDAL Michel	Chimie organique
	VIVIAN Robert	Géographie

CHARGES D'ENSEIGNEMENT PHARMACIE

MM.	ROCHAS Jacques	Hygiène et hydrologie
	DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie

PROFESSEURS SANS CHAIRE (médecine)

M.	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
----	--------------	-----------------

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie (hormonologie)
	CHAMPETIER Jean	Anatomie
	COLOMB Maurice	Biochimie
	COULOMB Max	Radiologie
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GROULADE Joseph	Biochimie A
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Gérontologie
	JALBERT Pierre	Histologie
	MAGNIN Robert	Hygiène
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VROUSOS Constantin	Radiothérapie

MAITRES DE CONFERENCES AGREGES (médecine)

MM.	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BENABID Alim Louis	Médecine et chirurgie
	BERNARD Pierre	Gynécologie obstétrique
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DEBRU Jean-Luc	Médecine interne
	DYON Jean-François	Chirurgie infantile
	FAURE Claude	Anatomie et organogénèse
	FAURE Gilbert	Urologie
	FLOYRAC Roger	Biophysique
	FOURNET Jacques	Hépto-gastro-entérologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIRARDET Pierre	Anesthésiologie
	GUIDICELLI Henri	Chirurgie générale
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique (réanimation)
	JUNIEN-LAVILLAULOY Claude	Clinique O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie biologique
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MASSOT Christian	Médecine interne
	MOUILLON Michel	Ophthalmologie

MM. PARAMELLE Bernard	Pneumologie
RACINET Claude	Gynécologie-Obstétrique
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
RAPHAEL Bernard	Stomatologie
SCHAEFER René	Cancérologie
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-virologie
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie
STOEBNER Pierre	Anatomie-pathologique



TABLE DES MATIERES

	pages
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I. - SYSTEMES DYNAMIQUES A TEMPS DISCRET : LE CADRE DE L'ETUDE ET L'EXEMPLE DU CAS LINEAIRE.	5
I. - Quelques problèmes de nature déterministe.	7
II. - Quelques problèmes de nature stochastique.	13
III. - Quelques problèmes de nature statistique.	26
CHAPITRE II. - ETUDE DU MODELE BILINEAIRE.	37
$Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} u_t + Cu_t ; X_t = HY_t .$	
I. - Etude des problèmes de nature déterministe.	38
II. - Caractéristiques du second-ordre et Stationnarités.	48
III. - Filtrage linéaire et filtrage non linéaire.	58
IV. - Etude d'un modèle particulier de série chronologique unidimensionnelle.	65
CHAPITRE III. - ETUDE DU MODELE BILINEAIRE	81
$Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} u_{t-1} + Cu_t ; X_t = HY_t .$	
I. - Etude des problèmes de nature déterministe.	82
II. - Caractéristiques du second-ordre et Stationnarités.	92
III. - Filtrage non linéaire optimal.	103
IV. - Etude d'un modèle particulier de série chronologique unidimensionnelle.	105



INTRODUCTION

Dans la littérature consacrée aux systèmes déterministes à temps discret, on trouve depuis assez longtemps des études portant sur des modèles non-linéaires dits modèles bilinéaires ou réguliers (cf. A. ISIDORI (1973), R.R. MOHLER (1973), T.J. TARN et al (1973), T. GOKA et al (1973), M.E. EVANS and D.N.P. MURTHY (1977, 1978), D.N.P. MURTHY (1979), Y. FUNAHASHI (1979), ...). Ce n'est que plus récemment que, dans la littérature concernant les séries chronologiques, les statisticiens se sont intéressés à certains analogues stochastiques de ces modèles déterministes (cf. C.W.J. GRANGER and A.P. ANDERSEN (1978), T. SUBBA RAO (1978, 1979), T.D. PHAM et L.T. TRAN (1980, 1981), D.F. NICHOLLS and B.G. QUINN (1980, 1981 a), b), 1982), M.M. GABR and T. SUBBA RAO (1981), D. GUEGAN (1981), E.J. HANNAN (1982), B.G. QUINN (1982), ...).

Dans ce travail nous étudions quelques modèles bilinéaires de systèmes dynamiques à temps discret, issus soit de l'analyse des systèmes soit de l'analyse des séries chronologiques, d'abord dans leur version déterministe puis dans leur version stochastique. Dans le cas déterministe nous nous intéressons en particulier aux propriétés de contrôlabilité, d'observabilité et d'identifiabilité partielle de l'entrée. Dans le cas stochastique nous examinons principalement le problème de l'existence d'un processus d'état stationnaire, celui de l'inversibilité du processus observé ; nous abordons aussi les problèmes de nature statistique : filtrage et estimation de paramètres. Nous envisageons enfin certains liens entre des problèmes de nature déterministe et d'autres de nature probabiliste.

Dans le premier chapitre nous présentons le cadre d'étude que nous avons retenu pour des modèles de systèmes dynamiques à temps discret en illustrant les propriétés abordées par l'exemple du cas d'un modèle linéaire. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un modèle où l'entrée est unidimensionnelle et agit à la fois de manière multiplicative et de manière additive sur l'état du système. Dans le troisième chapitre nous considérons un modèle où la nouvelle entrée à chaque instant agit additivement, l'entrée à l'instant antérieur restant présente et ayant une action multiplicative. Dans le quatrième chapitre nous examinons un modèle où l'entrée est bidimensionnelle, l'une de ses composantes agissant de façon multiplicative et l'autre de façon additive.

A cette présentation, qui suit la progression de notre travail, il aurait été possible et peut-être préférable de substituer une rédaction qui tienne compte du fait que les modèles que nous étudions sont tous du type

$$\begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1}u_t^1 + Cu_t^2 \\ X_t = HY_t \end{cases} ,$$

la particularité de chacun correspondant à un choix d'hypothèses concernant les entrées (u_t^1, u_t^2) . Le modèle linéaire servant d'illustration dans le premier chapitre apparaît comme le cas particulier où $u_t^1 = 0$; dans le modèle du deuxième chapitre les entrées sont soumises aux contraintes $u_t^1 = u_t^2$; dans celui du troisième elles satisfont aux contraintes $u_t^1 = u_{t-1}^2$; dans le modèle du quatrième chapitre les entrées sont libres.

Dans cet esprit nous aurions pu envisager avec une certaine unité l'étude des différents modèles, en particulier en ce qui concerne les versions stochastiques de ceux des deuxième et quatrième chapitres.

La présentation que nous avons choisie a l'inconvénient de masquer en partie cette unité et de conduire à certaines redites.

Elle présente aussi quelques avantages : elle nous permet de bien situer chaque modèle dans son contexte bibliographique et autorise une lecture indépendante de chaque étude.



CHAPITRE I

SYSTEMES DYNAMIQUES A TEMPS DISCRET :

LE CADRE DE L'ETUDE ET L'EXEMPLE DU CAS LINEAIRE

Nous nous intéressons à des systèmes dynamiques, évoluant en temps discret, décrits par des modèles "en représentation d'état" c'est-à-dire par des équations d'évolution et d'observation de la forme suivante

$$(1) \quad \begin{cases} Y_t = f(Y_{t-1}, u_t) ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = g(Y_t) ; t \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{ou (1')} \quad \begin{cases} Y_t = f(Y_{t-1}, u_t) \\ X_t = g(Y_t) \end{cases} ; t \in \mathbb{Z}$$

- f et g sont des applications mesurables de $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R}^r et de \mathbb{R}^r dans \mathbb{R} respectivement ;
- Y_t représente l'état r -dimensionnel (i.e $Y_t \in \mathbb{R}^r$) du système à l'instant t ;
- u_t représente l'entrée d -dimensionnelle (i.e $u_t \in \mathbb{R}^d$) agissant sur le système à l'instant t ;
- X_t représente la sortie observée du système à l'instant t dont nous supposerons systématiquement qu'elle est scalaire.

Notons qu'il s'agit de modèles de systèmes autonomes dans la mesure où les applications f et g ne dépendent pas explicitement du temps t . Deux situations se présentent selon que l'entrée du système est déterministe ou stochastique :

- si pour tout t , u_t est un vecteur déterminé et la suite (Y_t) est déterministe, le modèle est dit déterministe ;
- si (u_t) est une suite de vecteurs aléatoires (que nous supposons alors définis sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , centrés et de même loi possédant une matrice de covariance) l'évolution du système est aléatoire et le modèle est dit stochastique.

Dans ce chapitre nous nous proposons de présenter le cadre de l'étude que nous envisageons dans les chapitres suivants pour des modèles non linéaires particuliers, en illustrant les propriétés abordées par l'exemple du cas d'un modèle linéaire du type

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_t = AY_{t-1} + Cu_t ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = HY_t \quad ; t \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad \text{ou } (2') \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_t = AY_{t-1} + Cu_t \\ X_t = HY_t \end{array} \right. ; t \in \mathbb{Z}$$

où A et C sont des matrices d'ordres $r \times r$ et $r \times d$ respectivement et H un vecteur ligne $1 \times r$.

Remarquons que ce modèle recouvre par exemple la situation d'une sortie scalaire décrite à chaque instant t par

$$X_t = \sum_{j=1}^r a_j X_{t-j} + \sum_{\ell=1}^{d-1} b_\ell v_{t-\ell} + v_t, \quad (r \geq d)$$

où (v_t) est une suite de réels. En effet (X_t) peut se représenter comme l'observation dans un modèle du type (2) où l'état r -dimensionnel

$$Y_t = (Y_{t,1}, \dots, Y_{t,r})' \text{ défini par :}$$

$$Y_{t,1} = X_t$$

$$Y_{t,k} = \sum_{j=k}^r a_j X_{t+k-1-j} + \sum_{j=k}^r b_{j-1} v_{t+k-j}, \quad k = 2, \dots, r ;$$

$$(b_0 = 1, b_\ell = 0 ; \ell \geq d)$$

évolue selon l'équation

$$Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & \vdots & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \vdots \\ a_r & 0 & \cdot & \dots & 0 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{r-1} \end{bmatrix} v_t$$

l'équation d'observation étant

$$X_t = H Y_t$$

où H est le vecteur ligne $1 \times r$: $H = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$.

Pour les modèles déterministes nous nous intéressons en particulier aux propriétés de contrôlabilité, d'observabilité et d'identifiabilité partielle de l'entrée.

Pour les modèles stochastiques nous nous proposons principalement d'étudier le problème de l'existence d'un processus d'état stationnaire vérifiant l'équation d'évolution et de certains de ses moments, le problème de l'inversibilité du processus observé, celui du filtrage de l'état au vu de l'observation et dans des cas simples le problème statistique de l'estimation des paramètres.

Nous examinons aussi certains liens entre des problèmes de nature déterministe et d'autres de nature probabiliste.

I. QUELQUES PROBLEMES DE NATURE DETERMINISTE.

Nous considérons ici le cas d'un système décrit par un modèle déterministe de type (1) ou l'état initial Y_0 est un vecteur déterminé et la suite $(u_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ est déterministe.

I.1. Contrôlabilité déterministe.

Le problème de la contrôlabilité dans un modèle déterministe con-

cerne la possibilité pour un observateur ayant le choix de l'entrée (alors appelée contrôle ou commande) d'imposer au système d'évoluer entre un état initial et un état final donnés. De façon précise on pose :

I.1.1. Définition.

Etant donnés $Y_I, Y_F \in \mathbb{R}^r$ (état initial et état final respectivement), le système déterministe décrit par (1) est dit contrôlable de Y_I à Y_F s'il existe un entier K et une suite finie $(u_i; i=1, \dots, K)$ désignée par $u[1, K]$ telle que si $Y_0 = Y_I$ et $Y_t = f(Y_{t-1}, u_t)$, $1 \leq t \leq K$, on ait $Y_K = Y_F$. Le système est dit contrôlable s'il est contrôlable de Y_I à Y_F pour tout Y_I et Y_F .

Pour le système linéaire déterministe décrit par (2), on a le résultat classique suivant :

I.1.2. Théorème (cf. par exemple R.E. KALMAN et al (1969))

Le système linéaire déterministe décrit par (2) est contrôlable si et seulement si $\text{rg } C_r = r$ où C_r est la matrice d'ordre $r \times r$:

$$C_r = [C \quad AC \quad \dots \quad A^{r-1}C]$$

; on dit alors que le couple $[A, C]$ est contrôlable.

I.2. Observabilité déterministe.

Le problème de l'observabilité dans un modèle déterministe concerne la possibilité pour un observateur de retrouver l'état initial du système à partir de la donnée d'entrée et des sorties correspondantes.

On distingue trois situations selon la nature de cette donnée.

a) Observabilité avec quelques entrées connues.

I.2.1. Définition.

Le système déterministe décrit par (1) est dit observable avec quelques entrées connues s'il existe des entiers j et q et des suites d'entrées $u^1[1,j], \dots, u^q[1,j]$ tels que Y_0 puisse être déterminé uniquement en fonction de $u^1[1,j], \dots, u^q[1,j]$ et des suites de sorties correspondantes $X^1[0,j], \dots, X^q[0,j]$

($u^1[1,j]$ désigne une suite d'entrées u_1^1, \dots, u_j^1 et

$X^1[0,j]$ désigne la suite de sorties X_0^1, \dots, X_j^1 qui lui correspond)

on a le résultat classique suivant

I.2.2. Théorème (cf. par exemple T. YOSHIKAWA et al (1975))

Le système linéaire déterministe décrit par (2) est observable avec quelques entrées connues si et seulement si $\text{rg } O_r = r$ où O_r est la matrice d'ordre $r \times r$:

$$O_r = \begin{bmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{r-1} \end{bmatrix} ;$$

on dit alors que le couple $[A, H]$ est observable.

b) Observabilité avec n'importe quelle entrée connue.

I.2.3. Définition.

Le système déterministe décrit par (1) est dit observable avec n'importe quelle entrée connue s'il existe un entier j tel que, pour toute suite d'entrées $u[1,j]$, Y_0 puisse être déterminé uniquement en fonction de $u[1,j]$ et de la suite de sorties $X[0,j]$.

Dans le cas linéaire les deux notions précédentes se confondent.

I.2.4. Proposition.

Le système linéaire décrit par (2) est observable avec n'importe quelle entrée connue si et seulement si il est observable avec quelques entrées connues et donc si et seulement si le couple $[A, H]$ est observable i.e $\text{rg } O_r = r$.

Démonstration.

Le fait que la deuxième condition est nécessairement vérifiée si la première l'est, découle immédiatement des définitions. Montrons maintenant que si le système linéaire déterministe décrit par (2) est observable avec quelques entrées connues il est aussi observable avec n'importe quelle entrée connue. Soit donc (u_t) une suite quelconque d'entrées et (X_t) la suite de sorties correspondante. D'après l'équation (2) on a

$$X[0, r-1] - M_r u[1, r-1] = O_r Y_0$$

où

$X[0, r-1]$ désigne le vecteur colonne $r \times 1 = (X_0, X_1, \dots, X_{r-1})'$,

$$M_r \text{ est la matrice } M_r = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ HC & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ HA^{r-2} & C. & \cdot & \cdot & HC & \end{bmatrix} \text{ d'ordre } r \times (r-1)d,$$

$u[1, r-1]$ désigne le vecteur colonne $(r-1)d \times 1 : (u_1', \dots, u_{r-1}')'$,

et O_r est la matrice d'ordre $r \times r$ définie dans l'énoncé du Théorème I.2.2.

Or d'après l'hypothèse et le théorème I.2.2. on a $\text{rg } O_r = r$. Par suite on a

$$Y_0 = O_r^{-1} \{ X[0, r-1] - M_r u[1, r-1] \}$$

ce qui assure bien que le système est observable avec n'importe quelle entrée. ■

c) Observabilité avec entrée inconnue.

I.2.5. Définition.

Le système déterministe décrit par (1) est dit observable avec entrée inconnue s'il existe un entier j tel que, pour toute suite d'entrées $u[1,j]$, Y_0 puisse être déterminé uniquement en fonction de $X[0,j]$.
On a le résultat suivant qui se déduit par exemple du théorème général énoncé par T. YOSHIKAWA et al (1975).

I.2.6. Proposition.

Le système linéaire déterministe décrit par (2) est observable avec entrée inconnue si et seulement si on a

$$\text{rg } O_r = r \quad \text{et} \quad HA^j C = 0 \quad \text{pour } j = 0, \dots, r-2 .$$

I.3. Identifiabilité partielle d'une entrée déterministe.

Le problème de l'identifiabilité partielle d'une entrée déterministe concerne la possibilité pour un observateur de "retrouver une partie de l'entrée ayant agi sur le système" à partir de la seule donnée de l'état initial et de la suite de sorties correspondante. De façon précise on pose :

I.3.1. Définition.

Etant donnée une matrice Q d'ordre $l \times dj$ (l quelconque) on dit que l'entrée $u[1,j]$ est partiellement Q -identifiable dans le modèle défini par (1) si le vecteur $Qu[1,j]$ peut s'exprimer uniquement en fonction de Y_0 et de la suite de sorties correspondante $X[0,j]$.

Dans le cas linéaire on a le résultat suivant

I.3.2. Théorème (cf. par exemple T. YOSHIKAWA et al (1975))

Dans le modèle linéaire déterministe défini par (2), l'entrée $u[1, j]$ est partiellement Q-identifiable si et seulement si on a

$$\text{rg } \tilde{M}_j = \text{rg} \begin{bmatrix} \tilde{M}_j \\ Q \end{bmatrix} \quad \text{où } \tilde{M}_j \text{ est la matrice d'ordre } j \times jd$$

$$\tilde{M}_j = \begin{bmatrix} HC & 0 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ HA^{j-1}C & . & . & . & HC & . & . \end{bmatrix}$$

II. QUELQUES PROBLEMES DE NATURE STOCHASTIQUE.

Nous abordons ici la situation où la suite des entrées est une suite (e_t) de vecteurs aléatoires dans \mathbb{R}^d , équadistribués, d'espérance mathématique nulle et admettant une matrice de covariance Q_e .

Nous considérons alors le modèle stochastique défini par

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_t = f(Y_{t-1}, e_t) \quad ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = g(Y_t) \quad ; t \in \mathbb{N} , \end{array} \right.$$

où Y_0 est un vecteur aléatoire donné dans \mathbb{R}^f , représentant l'état initial du système, dont nous supposerons qu'il admet une espérance mathématique $m(0)$ et une matrice de covariance $C(0)$. A un tel modèle correspond toujours un unique processus solution $((Y_t, X_t) ; t \in \mathbb{N})$ et on peut remarquer que dans le cas particulier où $(e_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ est une suite de vecteurs aléatoires indépendants, indépendante de Y_0 , alors le processus (Y_t) décrivant l'évolution de l'état du système est un processus de Markov homogène d'ordre 1.

Nous envisageons aussi des modèles stochastiques de la forme

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_t = f(Y_{t-1}, e_t) \\ X_t = HY_t \end{array} \quad ; t \in \mathbb{Z} \right.$$

pour lesquels il conviendra de préciser ce qu'on entend par processus solution. Le modèle linéaire qui nous sert d'illustration s'écrit

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_t = AY_{t-1} + Ce_t \quad ; t \in \mathbb{N}^* , Y_0 \text{ donné} \\ X_t = HY_t \quad ; t \in \mathbb{N} , \end{array} \right.$$

ou

$$(4') \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_t = AY_{t-1} + Ce_t \\ X_t = HY_t \end{array} \quad ; t \in \mathbb{Z} . \right.$$

On peut, par exemple consulter H. AKAIKE (1974) et M.B. PRIESTLEY (1981 b) pour l'étude d'un tel modèle en liaison avec le modèle classique A.R.M.A. (Autorégressif Moyenne Mobile) de séries chronologiques.

Nous envisageons en particulier l'étude des caractéristiques du second ordre du processus d'état et du processus observé dans un modèle du type (3).

II.1. Caractéristiques du second-ordre-Stationnarité au second-ordre.

II.1.1. Définition.

Lorsque $(E \|Y_t\|^2 < +\infty \text{ et } EX_t^2 < +\infty)$, $t \in \mathbb{N}$, on dit que le processus solution de (3') est un processus du second ordre. On désigne alors par $m_Y(t)$ (resp. $m_X(t)$) l'espérance mathématique de Y_t (resp. X_t) et par $C_Y(t,s)$ (resp. $C_X(t,s)$) la covariance entre Y_t et Y_s (resp. X_t et X_s) pour $(t,s) \in \mathbb{N}^2$ i.e.

$$C_Y(t,s) = E(Y_t - EY_t)(Y_s - EY_s)'$$

(resp. $C_X(t,s) = E(X_t - EX_t)(X_s - EX_s)$).

Nous envisageons le calcul de ces caractéristiques du second-ordre pour les processus mis en jeu. Lorsque (Y_t) est donné par (4) on obtient aisément :

$$Y_t = A^{t-s} Y_s + \sum_{j=s}^{t-1} A^{t-1-j} C e_{j+1} \quad \text{pour } t > s .$$

Le résultat suivant se déduit immédiatement de cette égalité :

II.1.2. Théorème.

Si les vecteurs aléatoires $(Y_0, e_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ sont deux à deux non corrélés, alors le processus solution du modèle linéaire stochastique (4) est

du second ordre et on a :

$$m_Y(t) = A^t m(0) \quad ; \quad m_X(t) = H A^t m(0) \quad ; \quad t \in \mathbb{N} ,$$

$$C_Y(t,s) = \begin{cases} A^{t-s} C_Y(s,s) & \text{si } t \geq s \geq 0 \\ C_Y(t,t) (A')^{s-t} & \text{si } 0 \leq t \leq s \end{cases}$$

et $C_X(t,s) = H C_Y(t,s) H'$, $(t,s) \in \mathbb{N}^2$

avec

$$C_Y(t,t) = A C_Y(t-1,t-1) A' + C Q_e C' \quad ; \quad t \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad C_Y(0,0) = C(0) .$$

L'énoncé qui suit établit un lien entre la non-dégénérescence de la loi de probabilité de l'état du système stochastique (4) et la contrôlabilité d'un analogue déterministe du type (2) :

II.1.3. Proposition.

Soit $Q_e^{1/2}$ une matrice telle que $Q_e^{1/2} \cdot [Q_e^{1/2}]' = Q_e$. Si le couple $[A, C Q_e^{1/2}]$ est contrôlable i.e si la condition $\text{rg} [C Q_e^{1/2}, A C Q_e^{1/2}, \dots, A^{r-1} C Q_e^{1/2}] = r$ est satisfaite, alors pour $t \geq r$ la matrice de covariance $C_Y(t,t)$ est définie positive.

Démonstration.

Constatons d'abord qu'il suffit de montrer le résultat pour $C(0) = 0$; en effet il est facile de voir que si $C_1(0) \geq C_2(0)$ au sens habituel, alors les covariances correspondantes sont telles que $C_{Y,1}(t,t) \geq C_{Y,2}(t,t)$ pour tout t . Supposons donc que $C(0) = 0$. On a alors

$$C_Y(1,1) = C Q_e C' \quad , \quad C_Y(2,2) = C Q_e C' + A C Q_e C' A' , \dots$$

$$C_Y(t,t) = C Q_e C' + A C Q_e C' A' + \dots + A^{t-1} C Q_e C' (A')^{t-1} .$$

Pour $t = r$ on a évidemment

$$C_Y(t,t) = C_Y(r,r) = [C Q_e^{1/2} , \dots , A^{r-1} C Q_e^{1/2}] [C Q_e^{1/2} , \dots , A^{r-1} C Q_e^{1/2}] ,$$

et pour $t > r$

$$C_Y(t,t) = C_Y(r,r) + \sum_{j=r}^{t-1} A^j C Q_e C' (A')^j .$$

Or comme le rang de la matrice $[C Q_e^{1/2} , \dots , A^{r-1} C Q_e^{1/2}]$ est supposé égal à r , le rang de la matrice $C_Y(r,r)$ est lui aussi égal à r . Par suite, les égalités précédentes assurent que pour tout $t \geq r$ la matrice $C_Y(t,t)$ est inversible. ■

Remarquons que si Q_e est supposée définie positive, la condition de la proposition précédente se réduit à la condition de contrôlabilité du couple $[A,C]$.

Dans la suite nous nous intéressons à des conditions assurant la stationnarité au second-ordre du processus d'état et du processus observé correspondant à un modèle de type (3) :

II.1.4. Définition.

Le processus du second ordre (Y_t) (resp. (X_t)) est dit stationnaire au second ordre si

$$m_Y(t) \equiv m(0) \quad (\text{resp. } m_X(t) \equiv m_X(0))$$

et

$$C_Y(t,s) = R_Y(t-s) \quad (\text{resp. } C_X(t,s) = R_X(t-s)) .$$

L'application R_Y (resp. R_X) est alors appelée fonction de covariance du processus (Y_t) (resp. (X_t)).

Dans le cas linéaire on déduit immédiatement du Théorème II.1.2. la proposition suivante :

II.1.5. Proposition.

Si les vecteurs aléatoires $(Y_0, e_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ sont deux à deux non corrélés, une condition nécessaire et suffisante pour que le processus d'état $(Y_t ; t \geq 0)$ satisfaisant à (4) soit stationnaire au second-ordre est que le vecteur $m(0)$ vérifie

$$A m(0) = m(0)$$

et que la matrice $C(0)$ soit solution de l'équation matricielle

$$(5) \quad \Gamma = A \Gamma A' + C Q_e C' .$$

Alors la fonction de covariance du processus (Y_t) est donnée par

$$R_Y(h) = \begin{cases} A^h \Gamma & \text{si } h \geq 0 \\ \Gamma (A')^{|h|} & \text{si } h \leq 0 \end{cases} .$$

Notons que si (Y_t) est stationnaire au second-ordre alors $((Y_t, X_t))$ est également un processus stationnaire au second-ordre dont il est facile d'écrire la fonction de covariance. Notons aussi que lorsque les valeurs propres de A' sont toutes strictement à l'intérieur du disque unité, l'équation matricielle (5) précédente admet une solution unique dans l'ensemble des matrices symétriques semi-définies positives, solution donnée par

$$\Gamma = \sum_{j=0}^{\infty} A^j C Q_e C' (A')^j .$$

Si de plus le couple $[A, C Q_e^{1/2}]$ est contrôlable, d'après la Proposition

II.1.3., cette solution est définie positive. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

Nous considérons aussi le problème de la stationnarité stricte dans un modèle stochastique du type (3').

II.2. Stationnarité stricte.

Nous précisons d'abord ce qu'on entend par processus solution stationnaire d'un modèle du type (3') :

II.2.1. Définition.

On dit qu'un processus $((Y_t, X_t); t \in \mathbb{Z})$ est solution stationnaire du modèle (3') s'il satisfait aux équations correspondantes, s'il est stationnaire au sens strict et si, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, Y_t est un vecteur aléatoire mesurable par rapport à la tribu \mathcal{E}_t engendrée par la famille $\{e_s; s \leq t\}$. On dit alors que la solution est adaptée à la famille (\mathcal{E}_t) de tribus.

Remarquons que si $(e_t; t \in \mathbb{Z})$ est une suite de vecteurs aléatoires telle que, pour tout t , e_t est indépendant de la tribu \mathcal{E}_{t-1} (en particulier si (e_t) est une suite de vecteurs aléatoires indépendants) alors pour tout t , e_t est indépendant de $\{Y_s; s < t\}$ et par suite le processus solution (Y_t) est un processus de Markov homogène d'ordre 1.

Remarquons aussi que si $((Y_t, X_t); t \in \mathbb{Z})$ est une solution stationnaire de (3') alors le processus $((Y_t, X_t); t \in \mathbb{N})$ est solution stationnaire de (3) avec condition initiale Y_0 ; plus généralement si Y_0 est un vecteur aléatoire dont la loi de probabilité est la loi commune aux états Y_t d'une solution stationnaire de (3'), alors la solution de (3) issue de Y_0 est un processus stationnaire.

Dans le cas linéaire on a (cf. par exemple E.J. HANNAN (1970) et M.B. PRIESTLEY (1981 a)) :

II.2.2. Théorème.

Si la suite $(e_t ; t \in \mathbb{Z})$ est une suite de vecteurs aléatoires indépendants et si la série $\sum_{j=0}^{\infty} A^j C Q_e C' (A')^j$ est convergente, alors le modèle linéaire (4') admet une solution stationnaire $((Y_t, X_t); t \in \mathbb{Z})$ uniquement déterminé par

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} A^j C e_{t-j}, \quad X_t = H Y_t ; t \in \mathbb{Z}$$

où la série est convergente en moyenne quadratique et presque sûrement. Une condition suffisante pour que la série matricielle de l'énoncé soit convergente est bien sûr que les valeurs propres de la matrice A sont toutes de module strictement inférieur à 1.

Il est clair que le processus $((Y_t, X_t))$ solution est un processus centré du second-ordre et qu'il est donc stationnaire au second-ordre de fonction de covariance donnée dans l'énoncé de la Proposition II.1.5. précédente, la matrice de covariance $C_Y(0,0)$ n'étant autre que

$$C_Y(0,0) = \sum_{j=0}^{\infty} A^j C Q_e C' (A')^j$$

laquelle est solution de l'équation matricielle (5).

Si on suppose de plus que la loi commune aux vecteurs aléatoires e_t est gaussienne alors le processus $((Y_t, X_t))$ est gaussien et, selon la remarque suivant la Définition II.2.1., si Y_0 est un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance $C(0) = C_Y(0,0)$ donnée ci-dessus, le processus d'état (Y_t) solution de (4) issu de Y_0 est gaussien centré markovien stationnaire.

En complément au Théorème II.2.2. on a

II.2.3. Proposition.

Sous les hypothèses du Théorème II.2.2., la matrice de variance

covariance commune aux vecteurs aléatoires Y_t , $t \in \mathbb{Z}$ est définie positive si et seulement si le couple $[A, CQ_e^{1/2}]$ est contrôlable.

Démonstration.

La Proposition II.1.3. assure que la condition de contrôlabilité est suffisante. Le fait que cette condition est nécessaire peut être déduit du Corollaire suivant le lemme 14.4. R.CH LIPTSER et A.N. SHYRIAIEV (1978); nous en donnons une démonstration "probabiliste".

Remarquons d'abord que, pour tout $i \geq 0$, $E(Y_t \cdot e'_{t-i})$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $E(Y_t \cdot e'_t)$, $E(Y_t \cdot e'_{t-1})$, ..., $E(Y_t \cdot e'_{t-r+1})$. En effet d'après l'égalité

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} A^i C e_{t-i}$$

on a

$$E(Y_t \cdot e'_{t-i}) = A^i C Q_e ; i \geq 0$$

et le théorème de Cayley-Hamilton prouve l'assertion.

Supposons maintenant que le couple $[A, CQ_e^{1/2}]$ n'est pas contrôlable i.e. que la matrice $C_r = [CQ_e^{1/2}, \dots, A^{r-1} CQ_e^{1/2}]$ est de rang strictement inférieur à r . Alors il existe un vecteur g non nul dans \mathbb{R}^r tel que l'on ait $g' C_r = 0$ et donc aussi $E(g' Y_t e'_{t-i}) = 0$ pour tout $i \geq 0$. Comme les composantes de Y_t appartiennent à la fermeture, dans l'espace des variables aléatoires de carré intégrable, du sous-espace vectoriel engendré par les composantes des e_s $s \leq t$, on en déduit que $g' Y_t$ est presque sûrement nul et que la matrice $C_Y(0,0)$ n'est pas définie positive. ■

Nous examinerons également le problème de l'inversibilité.

II.3. Inversibilité.

De même que nous nous intéressons à des conditions assurant

l'existence d'un processus stationnaire (X_t) solution d'un modèle du type (3') au sens de la Définition II.2.1., nous cherchons à savoir si, inversement, pour tout t , e_t est une fonction mesurable par rapport à la tribu engendrée par la famille $(X_s; s \leq t)$. Il s'agit du problème de l'inversibilité dans un modèle de série chronologique. Nous posons la

II.3.1. Définition.

Soit un modèle stochastique du type (3') admettant une solution stationnaire (X_t) (adaptée à la famille de tribus (\mathcal{E}_t)). On dit que le modèle est inversible s'il existe une suite $(\varphi_j; j \geq 0)$ d'applications mesurables de \mathbb{R}^{j+1} dans \mathbb{R}^d telle que définissant, pour tout t , la suite de vecteurs aléatoires $(\tilde{e}_t^j; j \geq 0)$ par $\tilde{e}_t^j = \varphi_j(X_t, \dots, X_{t-j})$ on ait

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \tilde{e}_t^j = e_t$$

en un certain sens de convergence (presque sûre, en probabilité...).

II.3.2. Remarques.

(a) Supposons qu'un modèle soit inversible au sens précédent pour la convergence en probabilité ou en moyenne d'ordre p .

Compte tenu de la stationnarité, la loi du processus $(\varphi_j(X_t, \dots, X_{t-j}) - e_t; j \geq 0)$ ne dépend pas de t et est donc identique à celle du processus $(\varphi_j(X_j, \dots, X_0) - e_j; j \geq 0)$. Alors, posant $\hat{e}_j = \tilde{e}_j^j$, $j \geq 0$, on a aussi

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} (\hat{e}_j - e_j) = 0 \quad \text{au sens de la convergence}$$

considérée.

Inversement, supposons qu'il existe une suite $(\psi_t; t \geq 0)$ d'applications mesurables de \mathbb{R}^{t+1} dans \mathbb{R}^d telle que la suite de vecteurs aléatoires $(\hat{e}_t; t \geq 0)$ définie par $\hat{e}_t = \psi_t(X_t, \dots, X_0)$, $t \geq 0$ vérifie.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\hat{e}_t - e_t) = 0 .$$

Alors, définissant pour tout t , la suite $(\tilde{e}_t^j ; j \geq 0)$ par

$$\tilde{e}_t^j = \psi_j(X_t, \dots, X_{t-j}) ; j \geq 0 ,$$

encore en raison de la stationnarité, on a aussi

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} (\tilde{e}_t^j - e_t) = 0$$

et donc le modèle est inversible.

(b) Pour étudier l'inversibilité d'un modèle (3') on peut alors penser utiliser l'approche suivante dans le cas où l'analogie déterministe (1) est à entrée partiellement identifiable (cf. Définition I.3.1.) ; si donc e_t peut être déterminé uniquement à partir de X_{t-h}, \dots, X_t et Y_{t-h} (ce qui revient à supposer que dans le modèle (1) l'entrée $u[1, h]$ est partiellement $[0, \dots, 0, I_d]$ -identifiable), avec

$$e_t = \rho(X_{t-h}, \dots, X_t, Y_{t-h}) .$$

On peut par exemple définir

$$\hat{e}_t = \rho(X_{t-h}, \dots, X_t, E(Y_{t-h}/X_0, \dots, X_{t-h})) ; t \geq h$$

et envisager l'étude de la convergence vers zéro de la suite $(\hat{e}_t - e_t)$ lorsque t tend vers l'infini à l'aide, en particulier, de celle de la convergence de la suite $(E(Y_{t-h}/X_0, \dots, X_{t-h}) - Y_{t-h} ; t \geq h)$ qui relève de l'étude du comportement asymptotique des équations de filtrage dont nous parlons plus loin .

Considérons le cas du modèle (4') avec $d = 1$ et $HC = 1$: on a bien sûr

$$e_t = X_t - HAY_{t-1} ; t \geq 1$$

et posant

$$\hat{e}_t = X_t - HA E(Y_{t-1} / X_0, \dots, X_{t-1}) ; t \geq 1 ,$$

il vient

$$\hat{e}_t - e_t = HA [Y_{t-1} - E(Y_{t-1} / X_0, \dots, X_{t-1})] ; t \geq 1 .$$

Cela fournit la condition suffisante d'inversibilité :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \{ Y_{t-1} - E(Y_{t-1} / X_0, \dots, X_{t-1}) \} = 0 .$$

On peut aussi envisager de définir une suite $(\overset{v}{e}_t ; t \geq h)$ de la manière suivante : étant donné y_0, \dots, y_{h-1} fixés, on pose

$$\overset{v}{e}_t = \rho(X_{t-h}, \dots, X_t, y_{t-h}) ; t = h, \dots, 2h-1$$

et

$$\overset{v}{e}_t = \rho(X_{t-h}, \dots, X_t, \overset{v}{Y}_{t-h}) ; t \geq 2h$$

avec
$$\overset{v}{Y}_t = f(\overset{v}{Y}_{t-1}, \overset{v}{e}_t) ; t \geq h ; \overset{v}{Y}_{h-1} = y_{h-1} .$$

Alors si la suite $(\overset{v}{e}_t - e_t)$ tend vers zéro, le modèle est inversible.

Dans le cas particulier considéré plus haut, on définit donc, à partir d'un y_0 donné

$$\overset{v}{Y}_t = A \overset{v}{Y}_{t-1} + C \overset{v}{e}_t ; t \geq 1 ; \overset{v}{Y}_0 = y_0$$

avec

$$\overset{v}{e}_t = X_t - HA \overset{v}{Y}_{t-1} ; t \geq 1 .$$

Alors
$$\overset{v}{e}_t - e_t = HA [Y_{t-1} - \overset{v}{Y}_{t-1}] ; t \geq 1$$

où
$$Y_{t-1} - \overset{v}{Y}_{t-1} = (A - CHA)^{t-1} (Y_0 - y_0) ; t \geq 1 ,$$

ce qui montre que si les valeurs propres de la matrice A-CHA sont toutes de module strictement inférieur à 1, le modèle est inversible.

En fait, dans le cas de ce modèle, on a le résultat précis :

II.3.3. Proposition.

Soit $(e_t ; t \in \mathbb{Z})$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, A une matrice $r \times r$, C un vecteur $r \times 1$ et H un vecteur $1 \times r$ tels que $HC = 1$.

Si $\det[I-Az] = 1 - \sum_{j=1}^r a_j z^j$ n'a pas de zéro de module inférieur ou égal à 1, alors le modèle (4') correspondant admet une solution stationnaire uniquement déterminée par

$$X_t = H \sum_{j=0}^{\infty} A^j C e_{t-j} ; t \in \mathbb{Z} \dots$$

Si de plus $1 + \sum_{i=1}^{r-1} b_i z^i$ n'a pas de zéro de module inférieur ou égal à 1 où

$$b_i = H [A^i + a_1 A^{i-1} + \dots + a_{i-1} I_r] C ; i = 1, \dots, r-1$$

alors le processus est inversible (en moyenne quadratique) avec

$$e_t = \sum_{j=0}^{\infty} d_j X_{t-j} ; t \in \mathbb{Z}$$

où les coefficients d_j sont ceux du développement de Taylor de

$$\left[1 + \sum_{i=1}^{r-1} b_i z^i \right]^{-1} \cdot \left[1 - \sum_{j=1}^r a_j z^j \right]$$

Démonstration.

La première partie de l'énoncé résulte immédiatement du Théorème

II.2.2. et du fait que la condition concernant A équivaut à ce que cette matrice n'a pas de valeur propre de module supérieur ou égal à 1 .

Pour démontrer la deuxième assertion remarquons que d'après le théorème

Cayley-Hamilton on a $A^r = \sum_{j=1}^r a_j A^{r-j}$. Alors, compte tenu de ce que

$$Y_{t+i} = A^i Y_t + \sum_{k=1}^i A^{i-k} C e_{t+k} ,$$

il est facile de montrer que

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_r X_{t-r} + b_0 e_t + b_1 e_{t-1} + \dots + b_{r-1} e_{t-r+1}$$

où $b_i = H[A^i + a_1 A^{i-1} + \dots + a_r I_r] C$; $i=1, \dots, r-1$; $b_0 = 1$.

En d'autres termes le processus (X_t) est un processus de la classe ARMA $(r, r-1)$. On sait (cf. par exemple E.J. HANNAN (1970) et M.B. PRIESTLEY (1981 a)) que ce processus est inversible si $1 + \sum_{i=1}^{r-1} b_i z^i$ n'a pas de zéro dans le domaine $|z| \leq 1$ auquel cas on a la représentation annoncée de e_t . ■

Remarquons que le processus (e_t) est le processus d'innovation de (X_t) i.e. $e_t = X_t - E(X_t / X_{t-1}, \dots)$. Notons aussi que la condition A-CHA n'a que des valeurs propres de module strictement inférieur à 1 évoquée plus haut est équivalente à la condition $1 + \sum_{i=1}^{r-1} b_i z^i$ n'a pas de zéro de module inférieur ou égal à 1 .

III. QUELQUES PROBLEMES DE NATURE STATISTIQUE.

Dans le cadre stochastique du paragraphe précédent, on envisage d'une part le problème d'estimation (de filtrage) de l'état du système au vu de l'observation de la sortie du modèle et d'autre part le problème d'estimation (d'identification) des paramètres du modèle.

III.1. Filtrage de l'état.

Etant donné un processus stochastique du second ordre $((\theta_t, \xi_t); t \geq 0)$ où (θ_t) (resp. (ξ_t)) est le processus d'état non observable (resp. de sortie observable) d'un système, on pose la définition :

III.1.1. Définition.

On dit que le vecteur aléatoire du second-ordre $\hat{\theta}_t$ est un filtre de l'état $\theta_t = (\theta_t^1, \dots, \theta_t^r)'$ du système à l'instant $t \geq 0$ au vu de l'observation $\xi[0, t]$ de la sortie du système de 0 à t si $\hat{\theta}_t$ est mesurable par rapport à la tribu \mathcal{F}_t^ξ engendrée par les variables aléatoires ξ_0, \dots, ξ_t . Si de plus $\hat{\theta}_t$ dépend linéairement de ξ_0, \dots, ξ_t on dit que $\hat{\theta}_t$ est un filtre linéaire.

Le problème de filtrage optimal (resp. filtrage linéaire optimal) est celui de la détermination du filtre optimal au sens suivant dans la classe de tous les filtres (resp. de tous les filtres linéaires) :

III.1.2. Définition.

Le filtre $\hat{\theta}_t = (\hat{\theta}_t^1, \dots, \hat{\theta}_t^r)'$ est dit optimal dans une classe donnée de filtres si quel que soit le filtre $\bar{\theta}_t = (\bar{\theta}_t^1, \dots, \bar{\theta}_t^r)'$ appartenant à cette classe on a pour tout t

$$E [\theta_t^j - \hat{\theta}_t^j]^2 \leq E [\theta_t^j - \bar{\theta}_t^j]^2 \quad ; \quad j=1, \dots, r .$$

Il est clair que le filtre optimal est l'espérance conditionnelle

$$\hat{\theta}_t = E(\theta_t / \mathcal{F}_t^\xi) = E(\theta_t / \xi[0, t]) .$$

Il est parfois possible de déterminer ce filtre de manière récurrente. L'étude du problème pour des modèles du type (3) que nous envisageons dans les chapitres suivants nécessite des résultats concernant la situation suivante.

Considérons un processus (θ_t, ξ_t) défini par des équations

$$(5) \quad \begin{cases} \theta_t = a(t-1, \xi[0, t-1]) \theta_{t-1} + b(t-1, \xi[0, t-1]) \epsilon_t ; \theta_0 \text{ donné ; } t \in \mathbb{N}^* \\ \xi_t = \alpha(t-1, \xi[0, t-1]) \theta_{t-1} + \beta(t-1, \xi[0, t-1]) \epsilon_t ; \xi_0 \text{ donné ; } t \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

où

$$\theta_t = (\theta_t^1, \dots, \theta_t^k)' , \quad \xi_t = (\xi_t^1, \dots, \xi_t^l)' , \quad \epsilon_t = (\epsilon_t^1, \dots, \epsilon_t^k)' .$$

Supposons que (θ_0, ξ_0) est non corrélé avec (ϵ_t) et que les vecteurs aléatoires ϵ_t , $t \in \mathbb{N}^*$ sont centrés de matrice de covariance I_k , deux à deux non corrélés. Supposons de plus que pour tout i, j on a :

(i) avec probabilité 1

$$|a_{ij}(t-1, \xi[0, t-1])| \leq C ; \quad |\alpha_{ij}(t-1, \xi[0, t-1])| \leq C$$

(ii) $E |b_{ij}(t-1, \xi[0, t-1])|^2 \leq +\infty ; E |\beta_{ij}(t-1, \xi[0, t-1])|^2 < +\infty$

on a alors le résultat :

III.1.3. Théorème (cf. Théorème 1 3.4, R.CH. LIPTSER et A.N. SHYRIAIEV (1978))

Si les hypothèses (i) et (ii) sont satisfaites, si (θ_0, ξ_0) est

indépendant de (ϵ_t) , si de plus les vecteurs aléatoires ϵ_t sont gaussiens (centrés de matrice de covariance I_k) et si la loi conditionnelle

$P[\theta_0 \in \cdot / \xi_0]$ est (P presque sûrement) gaussienne alors le filtre optimal $\hat{\theta}_t$ de θ_t au vu de l'observation de $\xi[0,t]$ dans le modèle (5) est donné par les équations de récurrence

$$(6) \quad \hat{\theta}_t = a \hat{\theta}_{t-1} + [b\beta' + a\gamma_{t-1}\alpha'] [\beta\beta' + \alpha\gamma_{t-1}\alpha']^+ [\xi_t - \alpha \hat{\theta}_{t-1}] ; t \geq 1$$

et

$$(7) \quad \gamma_t = [a\gamma_{t-1}a' + bb'] - [b\beta' + a\gamma_{t-1}\alpha'] [\beta\beta' + \alpha\gamma_{t-1}\alpha']^+ [b\beta' + a\gamma_{t-1}\alpha']' ; t \geq 1$$

avec $\hat{\theta}_0 = E(\theta_0 / \xi_0)$ et $\gamma_0 = E\{(\theta_0 - \hat{\theta}_0)(\theta_0 - \hat{\theta}_0)' / \xi_0\}$, où pour tout $t \geq 1$, $\gamma_t = E\{(\theta_t - \hat{\theta}_t)(\theta_t - \hat{\theta}_t)' / \xi[0,t]\}$.

(Dans l'énoncé on a omis l'argument $(t-1, \xi[0,t-1])$ dans a, b, α, β et le symbole $+$ désigne la pseudo-inverse). On a le corollaire suivant dans le cas linéaire qui nous intéresse :

III.1.4. Corollaire.

Si les vecteurs aléatoires e_t sont indépendants gaussiens centrés de matrice de covariance Q_e et si le vecteur aléatoire Y_0 est gaussien indépendant de (e_t) , alors le filtre optimal \hat{Y}_t dans le modèle (4) est donné par :

$$(6') \quad \hat{Y}_t = A\hat{Y}_{t-1} + [CQ_eC'H' + A\gamma_{t-1}A'H'] [HCQ_eC'H' + HA\gamma_{t-1}A'H']^+ [X_t - HA\hat{Y}_{t-1}]$$

et

$$(7') \quad \gamma_t = [A\gamma_{t-1}A' + CQ_eC'] - [CQ_eC'H' + A\gamma_{t-1}A'H'] [HCQ_eC'H' + HA\gamma_{t-1}A'H']^+ [CQ_eC'H' + A\gamma_{t-1}A'H']'$$

avec $\hat{Y}_0 = E(Y_0) + \text{cov}(Y_0, Y_0) \cdot H' [H \text{cov}(Y_0, Y_0) H']^{-1} (X_0 - E(X_0))$

et $\gamma_0 = \text{cov}(Y_0, Y_0) - \text{cov}(Y_0, Y_0) H' [H \text{cov}(Y_0, Y_0) H']^{-1} H \text{cov}(Y_0, Y_0)$.

Notons que dans ce cas la matrice γ_t est déterministe et n'est autre que

$$\gamma_t = E((Y_t - \hat{Y}_t)(Y_t - \hat{Y}_t)')$$

Démonstration.

D'après (4) on a

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = AY_{t-1} + Ce_t \\ X_t = HAY_{t-1} + HCe_t \end{array} \right.$$

qui, compte tenu de ce que $\text{cov}(Ce_t, Ce_t) = CQ_e C'$, peut se réécrire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = AY_{t-1} + (CQ_e C')^{1/2} \epsilon_t \\ X_t = HAY_{t-1} + H(CQ_e C')^{1/2} \epsilon_t \end{array} \right.$$

où ϵ_t est un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance I_r . Il est clair que sous l'hypothèse la loi $P[Y_0 \in \cdot / X_0]$ est gaussienne (en fait le processus (Y_t, X_t) est gaussien). Il suffit alors d'appliquer le Théorème III.1.3. avec $\theta_t = Y_t$, $\xi_t = X_t$, $a \equiv A$, $b \equiv (CQ_e C')^{1/2}$, $\alpha \equiv HA$ et $\beta \equiv H(CQ_e C')^{1/2}$ pour obtenir les relations de récurrence de l'énoncé. ■

Le Théorème III.1.3. a aussi le corollaire suivant, compte tenu du Lemme 14.1 de R.C.H. LIPTSER et A.N. SHYRIAIEV (1978).

III.1.5. Corollaire.

Sous les hypothèses suivant les équations (5), le filtre linéaire

optimal $\hat{\theta}_t^l$ de θ_t au vu de l'observation $\xi [0,t]$ dans le modèle (5) est fourni par les équations de récurrence (6) et (7) avec

$$\hat{\theta}_0^l = E(\theta_0) + \text{cov}(\theta_0, \xi_0) \text{cov}^+(\xi_0, \xi_0)^{-1} (\xi_0 - E(\xi_0))$$

$$\gamma_0^l = \text{cov}(\theta_0, \theta_0) - \text{cov}(\theta_0, \xi_0) \text{cov}^+(\xi_0, \xi_0)^{-1} \text{cov}(\xi_0, \theta_0) ;$$

on a aussi

$$\gamma_t^l = E((\hat{\theta}_t^l - \theta_t) (\hat{\theta}_t^l - \theta_t)') ; t \geq 0 .$$

En particulier les équations (6') et (7') du Corollaire III.1.4. sont valables pour le filtre linéaire optimal dans le modèle (4) sous la seule hypothèse que les vecteurs aléatoires $Y_0, e_t ; t \in \mathbb{N}^*$ sont deux à deux non corrélés.

Un problème important est celui de l'étude du comportement asymptotique de la matrice γ_t lorsque t tend vers l'infini. Dans le cas linéaire, l'étude concernant la suite définie par (7') se ramène (cf. § 14.4.1 R.CH. LIPTSER et A.N. SHYRIAIEV (1978)) par les changements

$$a = A - (CQ_e C')^{-1} H' (HCQ_e C'H')^{-1} HA \quad ; \alpha = HA$$

$$b = [CQ_e C' - CQ_e C'H' (HCQ_e C'H')^{-1} HCQ_e C']^{1/2} ; \beta = (HCQ_e C'H')^{-1/2}$$

à celle de la suite définie par :

$$(8) \quad \gamma_{t+1} = a \gamma_t a' + b b' - a \gamma_t \alpha' [\beta \beta' + \alpha \gamma_t \alpha']^{-1} \alpha \gamma_t a'$$

pour laquelle on a

III.1.6. Théorème (cf. Théorème 14.3 R.CH. LIPTSER et A.N. SHYRIAIEV (1978))

Si le couple (a, a) est observable, si le couple (a, b) est contrôlable et si la matrice $\beta\beta'$ est inversible, alors, pour la suite (γ_t) définie par (8), la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_t = \gamma^*$ existe et ne dépend pas de la condition initiale γ_0 . On a de plus $\text{Tr } \gamma^* < +\infty$ et γ^* est l'unique solution (dans la classe des matrices symétriques définies positives) de l'équation matricielle

$$\gamma = a \gamma a' + b b' - a \gamma a' [\beta\beta' + a \gamma a']^+ a \gamma a' .$$

Dans la situation particulière envisagée au § II.3 on a :

III.1.7. Proposition.

Soit A une matrice $r \times r$, C un vecteur $r \times 1$, H un vecteur $1 \times r$ tels que $HC = 1$ et la matrice $A - CHA$ n'a que des valeurs propres de module strictement inférieur à 1. Alors si le vecteur aléatoire Y_0 et les variables aléatoires e_t , $t \geq 1$ sont gaussiens indépendants (resp. sont du second ordre et deux à deux non corrélés), le filtre optimal (resp. linéaire optimal) dans le modèle (4) correspondant, fourni par les équations (6') et (7') est tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_t = 0$$

quelle que soit la condition initiale γ_0 .

Démonstration.

D'après la remarque qui précède l'équation (8), la suite (γ_t) est définie par

$$\gamma_t = (A - CHA) \gamma_{t-1} (A - CHA)' -$$

$$- (A - CHA) \gamma_{t-1} A'H' [Q_e + HA \gamma_{t-1} A'H']^+ HA \gamma_{t-1} (A - CHA)' .$$

Alors il vient

$$\gamma_t \leq (A - CHA) \gamma_{t-1} (A - CHA)'$$

$$\text{puis } \gamma_t \leq (A - CHA)^t \gamma_0 (A - CHA)'^t$$

d'où il est facile de déduire le résultat compte tenu de l'hypothèse concernant la matrice $A - CHA$. ■

Ce résultat peut bien sûr servir dans le cadre de l'étude de l'inversibilité dans le modèle (4') correspondant (cf. Remarque II.3.2.b).

III.2. Estimation de paramètres.

Lorsqu'on observe à partir de l'instant $t = 0$ une trajectoire d'un processus stochastique (ξ_t) dont la loi de probabilité dépend d'un paramètre inconnu $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$, le problème statistique de l'estimation de ce paramètre est celui de la construction d'une suite d'estimateurs $(\hat{\theta}_t)$ telle que pour chaque t , $\hat{\theta}_t$ soit \mathcal{F}_t^ξ -mesurable, et qui possède certaines propriétés souhaitables en particulier de convergence :

III.2.1. Définition.

On dit que la suite d'estimateurs $(\hat{\theta}_t)$ est convergente presque sûrement (resp. en probabilité...) si pour tout $\theta \in \Theta$ on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{\theta}_t = \theta$ presque sûrement (resp. en probabilité...) lorsque la vraie valeur du paramètre est θ .

On dit que la suite d'estimateurs $(\hat{\theta}_t)$ est asymptotiquement gaussienne si pour tout $\theta \in \Theta$ il existe une suite $(I_t(\theta))$ telle que la suite de vecteurs aléatoires p -dimensionnels $(I_t^{1/2}(\theta)(\hat{\theta}_t - \theta))$ converge en loi vers un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance I_p lorsque la vraie valeur du paramètre est θ .

Dans la suite, pour l'étude de ce problème, nous nous restreindrons à des situations où le processus observé est un processus unidimensionnel, de façon précise, à des modèles du type (3), (3') où $r=1$ et g est l'application identité i.e. où le processus observé est le processus d'état lui-même, celui-ci étant supposé scalaire.

L'exemple linéaire correspondant est celui d'un processus stationnaire obéissant au modèle AR(1) autorégressif d'ordre 1 scalaire :

$$(9) \quad X_t = aX_{t-1} + e_t \quad ; \quad t \in \mathbb{Z}$$

où on suppose, conformément aux considérations du § II.2 que $|a| < 1$, les variables aléatoires (e_t) étant indépendantes équidistribuées centrées de même variance Q_e .

La méthode des moindres carrés conduit (cf. par exemple G.E.P BOX et G.M. JENKINS (1970) et M.B. PRIESTLEY (1981 a)) à estimer a et Q_e respectivement par

$$\hat{a}_t = \frac{\sum_{s=1}^t X_s X_{s-1}}{\sum_{s=1}^t X_{s-1}^2}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{Q}_e(t) &= \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t [X_s - \hat{a}_t X_{s-1}]^2 \\ &= \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t X_s^2 - \hat{a}_t \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t X_s \cdot X_{s-1} . \end{aligned}$$

Remarquons que ces estimateurs sont aussi, dans le cas où la loi commune aux e_t est supposée gaussienne, des estimateurs du maximum de vraisemblance approchée obtenus par maximisation de l'approximation

$$L_t^*(X_0, \dots, X_t; a, Q_e) = -\frac{t}{2} \text{Log } Q_e - \frac{1}{2Q_e} \sum_{s=1}^t (X_s - aX_{s-1})^2$$

de la fonction de Log-vraisemblance (facile à calculer, le processus étant gaussien markovien ; cf. § II.2)

$$L_t(X_0, \dots, X_t; a, Q_e) = -\frac{(t+1)}{2} \text{Log } 2\pi - \frac{1}{2} \text{Log } \frac{Q_e}{1-a^2} - \frac{t}{2} \text{Log } Q_e - \frac{1-a^2}{2Q_e} X_0^2 - \frac{1}{2Q_e} \sum_{s=1}^t (X_s - aX_{s-1})^2 .$$

D'autres estimateurs, dits estimateurs de Yule-Walker, sont définis par

$$\tilde{a}_t = \frac{\sum_{s=1}^t X_s X_{s-1}}{\sum_{s=0}^t X_s^2}$$

$$\tilde{Q}_e(t) = \frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^t X_s^2 - \tilde{a}_t \cdot \frac{1}{t+1} \sum_{s=1}^t X_s X_{s-1} .$$

Les propriétés asymptotiques des estimateurs de moindres carrés et des estimateurs de Yule-Walker sont données par

III.2.2 Théorème (cf. par exemple G.E.P. BOX et G.M. JENKINS (1970) et M.B. PRIESTLEY (1981 a)).

Les suites $(\hat{a}_t, \hat{Q}_e(t))$ et $(\tilde{a}_t, \tilde{Q}_e(t))$ d'estimateurs du paramètre (a, Q_e) sont convergentes presque sûrement. De plus chacune des suites (\hat{a}_t) et (\tilde{a}_t) est asymptotiquement gaussienne au sens que $(t^{1/2} (1-a^2)^{-1/2} \hat{a}_t)$ et $(t^{1/2} (1-a^2)^{-1/2} \tilde{a}_t)$ convergent en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.



CHAPITRE II

ETUDE DU MODELE BILINEAIRE

$$Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} u_t + Cu_t \quad ; \quad X_t = HY_t$$

Dans la littérature concernant l'analyse des systèmes déterministes, différents auteurs comme R.R. MOHLER (1973), T.J. TARN et al (1973), M.E. EVANS et D.N.P. MURTHY (1978) et S. HARA et J. FURUTA (1977) par exemple, ont proposé et étudié des modèles dits bilinéaires ou réguliers ou encore à entrées multiplicatives de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = AY_{t-1} + \sum_{i=1}^d [B_i Y_{t-1} + C_i] u_t^i \\ X_t = HY_t \end{array} \right.$$

où $u_t = (u_t^1, \dots, u_t^d)'$ est l'entrée d -dimensionnelle à l'instant t , A, B_1, \dots, B_d sont des matrices $r \times r$, C_1, \dots, C_d sont des vecteurs colonnes $r \times 1$ et H est une matrice à r -colonnes.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à ce type de modèle lorsque l'entrée est unidimensionnelle i.e $d = 1$ et aussi à son analogue stochastique, lequel a été en partie étudié par H. TONG (1981) dans le cas particulier où $X_t = Y_t$, l'état du système étant lui-même scalaire.

I. ETUDE DES PROBLEMES DE NATURE DETERMINISTE.

Le système considéré ici est décrit par le modèle

$$(1) \begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} u_t + Cu_t & ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = HY_t & ; t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où l'entrée déterministe u_t est scalaire, A et B sont des matrices $r \times r$, C est un vecteur colonne $r \times 1$ et H est un vecteur ligne $1 \times r$.

Par commodité nous imposerons parfois la condition $HC = 1$; remarquons que cette condition n'est pas vraiment restrictive car si elle n'est pas satisfaite mais que $HC \neq 0$, le changement de B, C et u_t en $(HC)^{-1}B$, $(HC)^{-1}C$ et $HC u_t$ respectivement permet de s'y ramener.

Nous suivons le plan d'étude proposé dans le chapitre I.

I.1. Contrôlabilité déterministe.

Remarquons que si on suppose la matrice A inversible et le rang de la matrice $r \times (r+1)$ [B,C] égal à 1 (i.e. il existe un vecteur $r \times 1$ γ tel que $B = C\gamma'$) alors le système déterministe décrit par le modèle bilinéaire (1) peut s'écrire sous la forme

$$(1') \begin{cases} Y_t = A \{ [I + \tilde{C}\gamma' u_t] Y_{t-1} + \tilde{C} u_t \} & ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = HY_t & ; t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où $\tilde{C} = A^{-1}C$ est un vecteur $r \times 1$.

Sous ces conditions M.E. EVANS et D.N.P. MURTHY (1978) ont démontré le résultat suivant

I.1.1. Théorème.

Supposons $\gamma \neq 0$. Soit m le rang de la matrice $r \times r$ $[\gamma, A'\gamma, \dots, (A')^{r-1}\gamma]'$, k le plus grand commun diviseur de l'ensemble $\{j \in \{1, \dots, m^2\} : \gamma' A^{j-1} C \neq 0\}$. Alors k est diviseur de m

et le système déterministe décrit par le modèle bilinéaire (1) est contrôlable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) le couple $[A, C]$ est contrôlable

(ii) le rang de la matrice $(\alpha+1) \times (r+1)$ $\begin{bmatrix} 1 & \gamma' \\ 1 & \gamma' A^k \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \gamma' A^{\alpha k} \end{bmatrix}$ est $\alpha+1$

où $\alpha = \frac{m}{k}$.

I.1.2. Exemple.

Le système déterministe décrit par

$$\begin{cases} Y_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Y_{t-1} u_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_t ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = [h_1 \ h_2] Y_t ; t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

avec a différent de 0 et de 1 est contrôlable.

En effet on vérifie aisément qu'on a

$$\text{rg} [C, AC] = \text{rg} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \text{ puis } m = 2, k = 1 \text{ et } \alpha = 2.$$

I.2. Observabilité déterministe.

Les résultats suivants peuvent se déduire aisément de ceux de

S. HARA et K. FURUTA (1977).

a) Observabilité avec quelques entrées connues.

On a la représentation suivante de l'état (Y_t^u) et de la sortie (X_t^u) du modèle (1) correspondant à la suite d'entrées $u = (u_t)$: posant

$$\xi_t^u = A \xi_{t-1}^u + B \xi_{t-1}^u u_t + C u_t ; t \geq 1 , \quad \xi_0^u = 0$$

$$A_u(t) = A + B u_t ; t \geq 1$$

et

$$\begin{cases} \bar{Y}_t^u = A_u(t) \bar{Y}_{t-1}^u ; t \geq 1 ; \bar{Y}_0^u = Y_0 \\ \bar{X}_t^u = H \bar{Y}_t^u ; t \geq 0 \end{cases}$$

on a
$$Y_t^u = \bar{Y}_t^u + \xi_t^u ; X_t^u = \bar{X}_t^u + H \xi_t^u ; t \geq 0 .$$

On voit alors que la propriété d'observabilité avec les entrées u^1, \dots, u^q connues pour le modèle (1) est liée à la propriété d'observabilité pour un modèle (linéaire non autonome sans entrée) de la forme :

$$\begin{cases} \tilde{Y}_t = \tilde{A}(t) \tilde{Y}_{t-1} \\ \tilde{X}_t = \tilde{H} \tilde{Y}_t \end{cases}$$

où $\tilde{A}(t)$ est la matrice d'ordre $qr \times qr$:
$$\tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} A_{u1}(t) & & & 0 \\ & A_{u2}(t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{uq}(t) \end{bmatrix}$$

et \tilde{H} est la matrice d'ordre $q \times qr$:
$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} H & & 0 \\ & H & \\ & & \ddots \\ 0 & & & H \end{bmatrix} .$$

Par suite on est conduit à définir pour chaque u et $j \geq 1$ la matrice

$N(u, j)$ d'ordre $j \times r$:
$$N(u, j) = \begin{bmatrix} HR(u, 0) \\ \vdots \\ HR(u, j-1) \end{bmatrix}$$
 et pour toute famille

u^1, \dots, u^q et $j \geq 1$ la matrice $\eta(u^1, \dots, u^q, j)$ d'ordre $jq \times r$:

$$\eta(u^1, \dots, u^q, j) = \begin{bmatrix} N(u^1, j) \\ \vdots \\ N(u^q, j) \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad R(u, \ell) = \begin{cases} I_r & \text{si } \ell = 0 \\ A_u(\ell) \dots A_u(1) & \text{si } \ell \geq 1 \end{cases} .$$

On a alors la condition nécessaire et suffisante :

1.2.1. Proposition.

Le système déterministe décrit par le modèle bilinéaire (1) est observable avec quelques entrées connues si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

(i) il existe un entier q et des suites d'entrées $u^1[1, r], \dots, u^q[1, r]$ tels que $\text{rg } \eta(u^1, \dots, u^q, r) = r$

(ii) le rang de la matrice $(2r - 1) \times r$
$$\begin{bmatrix} H \\ HA \\ HB \\ \vdots \\ HA^{r-1} \\ HB^{r-1} \end{bmatrix}$$
 est r .

I.2.2. Exemples.

(a) Il est clair que dans le cas linéaire i.e. $B = 0$ la condition (ii) se réduit au critère d'observabilité du couple $[A, H]$.

(b) Le système déterministe décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} Y_{t-1} u_t + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} u_t ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = [0, 1] Y_t ; t \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

avec $a_2 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$ est observable avec quelques entrées connues.

En effet on vérifie facilement la condition (ii) i.e

$$\text{rg} \begin{bmatrix} H \\ HA \\ HB \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} = 2 .$$

b) Observabilité avec n'importe quelle entrée connue.

Soit \bar{H} une matrice d'ordre $(r-1) \times r$ telle que la matrice d'ordre $r \times r$ $\begin{bmatrix} H \\ \bar{H} \end{bmatrix}$ soit inversible et $\begin{bmatrix} H \\ \bar{H} \end{bmatrix}^{-1} = [K, \bar{K}]$ où K est d'ordre $r \times 1$ et \bar{K} d'ordre $r \times (r-1)$. On peut alors définir

$$\begin{bmatrix} X_t \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ \bar{H} \end{bmatrix} Y_t \quad \text{ou} \quad Y_t = [K, \bar{K}] \begin{bmatrix} X_t \\ X_t \end{bmatrix} = K X_t + \bar{K} \bar{X}_t .$$

On peut alors réécrire le modèle (1) sous la forme

$$(2) \quad \begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + B\bar{K}\bar{X}_{t-1}u_t + BKX_{t-1}u_t + Cu_t \\ X_t = HY_t. \end{cases}$$

Lorsque la suite (u_t) est connue dans la représentation (2), les termes $BKX_{t-1}u_t$ et Cu_t sont connus, seul le terme $B\bar{K}\bar{X}_{t-1}u_t$ est inconnu ; on voit donc que la propriété d'observabilité avec n'importe quelle entrée connue dans (1) est liée à la propriété d'observabilité avec entrée inconnue dans un modèle linéaire autonome de la forme :

$$\begin{cases} \tilde{Y}_t = A\tilde{Y}_{t-1} + B\bar{K}v_t \\ \tilde{X}_t = H\tilde{Y}_t \end{cases}$$

où (v_t) est une suite d'entrées de dimension $(r-1)$ (cf. Proposition I.2.6. du Chapitre I). On a la condition suffisante :

I.2.3. Proposition.

Si le couple $[A,H]$ est observable et $HA^jB\bar{K} = 0$ pour $j = 0, \dots, r-2$ alors le système décrit par le modèle bilinéaire (1) est observable avec n'importe quelle entrée connue.

I.2.4. Exemples.

(a) Il est clair que dans le cas linéaire i.e. $B = 0$ la condition se réduit au critère d'observabilité du couple $[A,H]$: $\text{rg } O_r = r$.

(b) Le système déterministe décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} Y_{t-1} u_t + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} u_t ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ dc} \\ X_t = [1, -1] Y_t \quad ; t \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

avec $a_1 \neq a_2$, $a_1 a_2 \neq 0$ et $b_1 b_2 \neq 0$ est observable avec n'importe quelle entrée connue.

En effet on vérifie facilement qu'on a :

$$\text{rg} \begin{bmatrix} H \\ HA \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a_1 & -a_2 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{et} \quad HB\bar{K} = 0 .$$

c) Observabilité avec entrée inconnue.

La propriété d'observabilité avec entrée inconnue dans (1) est liée à la même propriété dans un modèle linéaire autonome du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{Y}_t = A\tilde{Y}_{t-1} + [B, C] \omega_t \\ \tilde{X}_t = H\tilde{Y}_t \end{array} \right.$$

où (ω_t) est une suite d'entrées de dimension $r+1$ (cf. Proposition I.2.6. du Chapitre I). On a la condition suffisante :

I.2.5. Proposition.

Si le couple $[A, H]$ est observable et $HA^j[B, C] = 0$ pour $j = 0, \dots, r-2$ alors le système décrit par le modèle bilinéaire (1) est observable avec entrée inconnue.

I.2.6. Exemples.

(a) Dans le cas linéaire i.e. $B = 0$, on voit que la condition n'est autre que celle de la Proposition I.2.6. du Chapitre I.

(b) Le système déterministe décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} Y_{t-1} u_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_t ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = [1, -1] Y_t ; t \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

avec $a_1 \neq a_2$, $a_1 a_2$ non nul et $b_1 b_2$ non nul est observable avec entrée inconnue.

En effet on vérifie facilement qu'on a :

$$\text{rg} \begin{bmatrix} H \\ HA \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a_1 & -a_2 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{et} \quad H[B, C] = 0 .$$

I.3. Identifiabilité partielle d'une entrée déterministe.

Soit $j \geq 1$ et Q une matrice quelconque d'ordre $l \times j$. On a la condition suffisante suivante :

I.3.1., Proposition.

Si $HB = 0$ et $HC \neq 0$, l'entrée $u[1, j]$ est partiellement Q -identifiable dans le modèle défini par (1).

Démonstration.

Il suffit bien sûr de montrer le résultat pour $Q = I_j$.
 Or si $HB = 0$ on a (supposant que $HC = 1$) pour tout $t \geq 1$

$$X_t = HAY_{t-1} + u_t$$

d'où

$$u_t = X_t - HAY_{t-1} .$$

Alors connaissant X_1 et Y_0 on sait calculer u_1 . Puis on peut calculer

$$Y_1 = AY_0 + BY_0 u_1 + Cu_1$$

et u_2 en fonction de X_1, X_2 et Y_0 par

$$u_2 = X_2 - HAY_1 .$$

Une récurrence facile permet alors de montrer le résultat annoncé. ■

I.3.2. Exemples.

(a) Dans le cas linéaire i.e. $B = 0$, la condition $HB = 0$ est évidemment satisfaite et l'énoncé assure que dès que $HC \neq 0$ l'entrée est identifiable.

(b) Dans le système déterministe décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} Y_{t-1} u_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = [1, -1] Y_t ; t \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

l'entrée $u[1,j]$ est I_j -identifiable.

En effet on a

$$HB = [1, -1] \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = [0 \quad 0] \quad \text{et} \quad HC = [1, -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 .$$

II. CARACTERISTIQUES DU SECOND-ORDRE ET STATIONNARITES.

Dans ce paragraphe on considère le système stochastique décrit par l'analogie du modèle (1) i.e

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} e_t + Ce_t ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = HY_t ; t \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

$$\text{ou (3')} \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} e_t + Ce_t \\ X_t = HY_t \end{array} \right. ; t \in \mathbb{Z}$$

où (e_t) est une suite de variables aléatoires réelles équidistribuées centrées, de variance $Q_e > 0$. Notons que ce modèle recouvre par exemple le modèle de série chronologique unidimensionnelle

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{k=1}^q b_k X_{t-k} e_t + e_t ; t \in \mathbb{Z} .$$

En effet (X_t) peut se représenter comme l'observation dans un modèle du type (3') ou l'état r -dimensionnel $Y_t = (X_t, \dots, X_{t-r+1})'$ avec $r = \max(p, q)$ évolue selon l'équation

$$Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_r \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_r \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} Y_{t-1} e_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} e_t$$

(avec la convention que $a_j = 0$ si $j > p$ et $b_k = 0$ si $k > q$)
l'équation d'observation étant

$$X_t = H Y_t$$

où H est le vecteur ligne $1 \times r$: $H = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$.

Nous étudions les modèles (3) - (3') pour des matrices A, B et des vecteurs C, H arbitraires. Par commodité nous imposerons encore parfois la condition $HC = 1$.

II.1. Caractéristiques du second-ordre - Stationnarité au second-ordre.

Le résultat suivant montre que la structure au second-ordre dans le modèle bilinéaire (3) est semblable à celle correspondant au modèle linéaire (cf. Théorème II.1.2. du Chapitre I).

II.1.1. Proposition.

(¹) Si $(Y_0, e_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ est une suite d'éléments aléatoires indépendants, alors le processus solution du modèle (3) est du second-ordre et on a :

$$m_Y(t) = A^t m(0) \quad ; \quad m_X(t) = H A^t m(0) \quad ; \quad t \in \mathbb{N} \quad ,$$

$$C_Y(t, s) = \begin{cases} A^{t-s} C_Y(s, s) & \text{si } t \geq s \geq 0 \\ C_Y(t, t) (A')^{s-t} & \text{si } 0 \leq t \leq s \end{cases}$$

et

$$C_X(t, s) = H C_Y(t, s) H' \quad ; \quad (t, s) \in \mathbb{N}^2$$

avec

$$C_Y(t, t) = A C_Y(t-1, t-1) A' + Q_e B C_Y(t-1, t-1) B' + \\ + Q_e (B m_Y(t-1) + C) (B m_Y(t-1) + C)' \quad ; \quad t \in \mathbb{N}^*$$

$$C_Y(0, 0) = C(0) \quad .$$

(¹) y_0 du second-ordre

Démonstration.

De la définition (3) on déduit aisément que pour $t > s$ on a

$$Y_t = \prod_{k=0}^{t-s-1} \{A + B e_{k+1+s}\} Y_s + \sum_{j=s}^{t-2} \prod_{\ell=0}^{t-2-j} \{A + B e_{\ell+s+2}\} C e_{j+1} + C e_t .$$

Il vient

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E \left\{ \prod_{k=0}^{t-s-1} \{A + B e_{k+1+s}\} \right\} m_Y(s) + E \left\{ \sum_{j=s}^{t-2} \prod_{\ell=0}^{t-2-j} \{A + B e_{\ell+s+2}\} C e_{j+1} + C e_t \right\} \\ &= A^{t-s} m_Y(s) \end{aligned}$$

soit $m_Y(t) = A^t m(0)$, $m_X(t) = H A^t m(0)$; $t \in \mathbb{N}$.

Pour $t \geq s \geq 0$

$$\begin{aligned} C_Y(t,s) &= E \left\{ \prod_{k=0}^{t-s-1} \{A + B e_{k+1+s}\} Y_s - A^{t-s} m_Y(s) + \sum_{j=s}^{t-2} \prod_{\ell=0}^{t-2-j} \{A + B e_{\ell+s+2}\} C e_{j+1} + C e_t \right\} \\ &\quad \times \{Y_s - m_Y(s)\}' . \\ &= \left\{ \prod_{k=0}^{t-s-1} \{A + B e_{k+1+s}\} Y_s - A^{t-s} m_Y(s) \right\} \{Y_s - m_Y(s)\}' + \\ &\quad + E \left\{ \sum_{j=s}^{t-2} \prod_{\ell=0}^{t-2-j} \{A + B e_{\ell+s+2}\} C e_{j+1} + C e_t \right\} \{Y_s - m_Y(s)\}' \\ &= A^{t-s} C_Y(s,s) . \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue fournit le résultat pour $0 \leq t \leq s$.

On a aussi, pour $t \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 C_Y(t,t) &= E \{ A Y_{t-1} - A m_Y(t-1) + (B Y_{t-1} + C) e_t \} \{ A Y_{t-1} - A m_Y(t-1) + (B Y_{t-1} + C) e_t \}' \\
 &= A C_Y(t-1,t-1) A' + E \{ (B Y_{t-1} + C) e_t \} \{ (B Y_{t-1} + C) e_t \}' \\
 &= A C_Y(t-1,t-1) A' + Q_e B E \{ Y_{t-1} Y_{t-1}' \} B' + Q_e \{ C m_Y'(t-1) B' + B m_Y(t-1) C' + C C' \} \\
 &= A C_Y(t-1,t-1) A' + Q_e B C_Y(t-1,t-1) B' + Q_e (B m_Y(t-1) + C)(B m_Y(t-1) + C)' . \blacksquare
 \end{aligned}$$

On déduit immédiatement de la Proposition précédente et de la Proposition II.1.3. du Chapitre I :

II.1.2. Proposition.

Sous les hypothèses de la Proposition II.1.1., si $m(0) = 0$ et si le couple $[A, C]$ est contrôlable, alors la matrice de covariance $C_Y(t,t)$ est définie positive pour $t \geq r$.

On donne maintenant une caractérisation de la stationnarité au second-ordre :

II.1.3. Proposition.

Sous les hypothèses de la Proposition II.1.1., une condition nécessaire et suffisante pour que le processus d'état $(Y_t; t \geq 0)$ satisfaisant à (3) soit stationnaire au second-ordre est que le vecteur $m(0)$ vérifie

$$A m(0) = m(0)$$

et que la matrice $C(0)$ soit solution de l'équation matricielle

$$(4) \quad \Gamma = A \Gamma A' + Q_e B \Gamma B' + Q_e (B m(0) + C)(B m(0) + C)' .$$

Alors la fonction de covariance du processus (Y_t) est donnée par

$$R_Y(h) = \begin{cases} A^h \Gamma & \text{si } h \geq 0 \\ \Gamma(A')^{|h|} & \text{si } h \leq 0 \end{cases}$$

Notons que l'équation matricielle (4) peut s'écrire sous la forme

$$\text{vec } \Gamma = \{A \otimes A + Q_e B \otimes B\} \text{vec } \Gamma + Q_e \text{vec } (B m(0) + C)(B m(0) + C)'$$

où si $\Gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_r]$ on a posé $\text{vec } \Gamma = [\gamma_1', \dots, \gamma_r']'$ et si H et K sont deux matrices, $H \otimes K$ désigne leur produit de Kronecker. On voit alors que si les valeurs propres de la matrice $A \otimes A + Q_e B \otimes B$ sont toutes de module strictement plus petit que 1, l'équation (4) admet une solution unique dans l'ensemble des matrices symétriques semi-définies positives. Si de plus le couple $[A, C]$ est contrôlable alors, d'après la proposition II.1.2., cette solution est définie positive.

II.2. Stationnarité stricte et inversibilité.

En ce qui concerne la stationnarité stricte dans le modèle (3') on a le résultat :

II.2.1. Proposition.

Si la suite $(e_t ; t \in \mathbb{Z})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées et si les valeurs propres de la matrice $A \otimes A + Q_e B \otimes B$ sont toutes de module strictement inférieur à 1 alors le modèle (3') admet une solution stationnaire $((Y_t, X_t) ; t \in \mathbb{Z})$ uniquement déterminée par

$$Y_t = C e_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{k=0}^{j-1} [A + B e_{t-k}] \right\} C e_{t-j} ; X_t = H Y_t ; t \in \mathbb{Z}$$

où la série précédente est convergente en moyenne quadratique.

Démonstration.

Supposons d'abord qu'il existe un processus stationnaire (Y_t) vérifiant la première équation de (3') et montrons qu'il est nécessairement déterminé par

$$Y_t = C e_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{k=0}^{j-1} [A + B e_{t-k}] \right\} C e_{t-j} .$$

On a $Y_t = C e_t + (A + B e_t) Y_{t-1}$ puis, par récurrence :

$$Y_t = C e_t + \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \prod_{k=0}^{j-1} [A + B e_{t-k}] \right\} C e_{t-j} + \prod_{k=0}^{n-1} [A + B e_{t-k}] Y_{t-n} .$$

Posons $P(t, n) = \prod_{k=0}^{n-1} [A + B e_{t-k}] .$

On vérifie aisément que :

$$\text{vec } E \{ P(t, 1) P'(t, 1) \} = \text{vec } AA' + Q_e \text{vec } BB'$$

$$\text{vec } E \{ P(t, 2) P'(t, 2) \} = [A \otimes A + Q_e B \otimes B] [\text{vec } AA' + Q_e \text{vec } BB']$$

et, par récurrence

$$\text{vec } E \{ P(t, n) P'(t, n) \} = [A \otimes A + Q_e B \otimes B]^{n-1} [\text{vec } AA' + Q_e \text{vec } BB'] .$$

Comme les valeurs propres de $A \otimes A + Q_e B \otimes B$ sont à l'intérieur du disque unité on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(t, n) = 0 \quad \text{en moyenne quadratique.}$$

Comme les vecteurs aléatoires Y_{t-n} ont tous la même loi de probabilité on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(t, n) Y_{t-n} = 0 \quad \text{en probabilité.}$$

Ainsi il vient

$$Y_t = C e_t + \sum_{j=1}^{\infty} P(t, j) C e_{t-j}$$

où la série converge en probabilité.

Considérons maintenant le terme $P(t, j) C e_{t-j}$. On vérifie encore par récurrence que

$$\text{vec } E \{ [P(t, j) C e_{t-j}] [P(t, j) C e_{t-j}]' \} = Q_e [A \otimes A + Q_e B \otimes B]^j \text{vec}(CC') .$$

Comme on a aussi

$$E \left\{ \left[\sum_{j=1}^n P(t, j) C e_{t-j} \right] \left[\sum_{j=1}^n P(t, j) C e_{t-j} \right]' \right\} = \sum_{j=1}^n E \{ [P(t, j) C e_{t-j}] [P(t, j) C e_{t-j}]' \}$$

l'hypothèse sur les valeurs propres de $A \otimes A + Q_e B \otimes B$ assure que la série de terme général $P(t, j) C e_{t-j}$ est convergente en moyenne quadratique.

Il reste à montrer que la série $Y_t = C e_t + \sum_{j=1}^{\infty} P(t, j) C e_{t-j}$; $t \in \mathbb{Z}$ définit

bien un processus stationnaire solution de la première équation de (3').

Comme (e_t) est une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées, la formule précédente définit bien un processus stationnaire. On vérifie enfin que ce processus satisfait à

$$Y_{t+1} = [A + B e_{t+1}] Y_t + C e_{t+1} ; t \in \mathbb{Z} .$$

En effet

$$\begin{aligned}
 [A+Be_{t+1}] Y_t + Ce_{t+1} &= Ce_{t+1} + [A+Be_{t+1}] Ce_t + \\
 &+ [A+Be_{t+1}] \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{k=0}^{j-1} [A+Be_{t-k}] \right\} Ce_{t-j} \\
 &= Ce_{t+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{k=0}^{j-1} [A+Be_{t+1-k}] \right\} Ce_{t+1-j} = Y_{t+1} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Il est clair que le processus solution est aussi stationnaire au second-ordre centré de structure de covariance donnée dans la Proposition II.1.3.

Remarquons aussi que lorsqu'une solution stationnaire existe pour le modèle (3'), le processus (Y_t) défini par (3) est un processus de Markov d'ordre 1 stationnaire lorsque l'état initial Y_0 est une variable aléatoire indépendante de $(e_t; t \in \mathbb{N}^*)$ et distribuée selon la loi commune aux états d'une solution stationnaire de (3').

Abordons maintenant le problème de l'inversibilité du modèle (3').

II.2.2. Proposition.

Supposons que $B = KH$ avec $HK = 0$, $HC \neq 0$ et que les hypothèses de la Proposition II.2.1. sont satisfaites. Alors si $E \|A - [KX_0 + C]HA\| < \infty$ le modèle (3') est inversible.

(Pour une matrice M on a posé $\|M\|^2 = \text{tr } MM'$).

Démonstration.

On suit la démarche décrite dans la Remarque III.3.2. (b) du Chapitre I. Sous les hypothèses faites on a $HB = 0$ et (supposant $HC=1$) pour tout t

$$e_t = X_t - HAY_{t-1} .$$

Définissons alors, Y_0 étant un vecteur fixé,

$$e_t^v = X_t - HAY_{t-1}^v ; t \geq 1$$

où

$$Y_t^v = AY_{t-1}^v + KX_{t-1}^v e_t + Ce_t^v ; t \geq 1 ; Y_0^v = y_0 .$$

On a

$$e_t^v - e_t = HA(Y_{t-1} - Y_{t-1}^v)$$

où

$$Y_t - Y_t^v = \{A - [KX_{t-1} + C]HA\} (Y_{t-1} - Y_{t-1}^v)$$

soit
$$Y_t - Y_t^v = \left\{ \prod_{i=0}^{t-1} \{A - [KX_i + C]HA\} \right\} (Y_0 - y_0) ; t \geq 1 .$$

Il vient donc

$$\|Y_t - Y_t^v\|^2 = (Y_0 - y_0)' \left\{ \prod_{i=0}^{t-1} \{A - [KX_i + C]HA\} \right\}' \left\{ \prod_{i=0}^{t-1} \{A - [KX_i + C]HA\} \right\} (Y_0 - y_0)$$

puis

$$\|Y_t - Y_t^v\| \leq \|Y_0 - y_0\| \prod_{i=0}^{t-1} \|A - [KX_i + C]HA\| .$$

D'après l'inégalité de Jensen et l'hypothèse on a, (X_t) étant stationnaire au sens strict

$$E \{ \text{Log} \|A - [KX_i + C]HA\| \} < \text{Log} E \|A - [KX_i + C]HA\| < 0 .$$

En vertu du théorème ergodique on a donc, presque sûrement

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \text{Log} \|A - [KX_i + C]HA\| = E \{ \text{Log} \|A - [KX_0 + C]HA\| \} < 0$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \|A - [KX_i + C]HA\| = 0$$

et par suite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (e_t^v - e_t) = 0 \quad \blacksquare$$

Remarquons que si

$$E \|A - [KX_0 + C]HA\|^2 = \text{tr} AA' - 2\text{tr} CHAA' + (HA)(HA)' [EX_0^2 \text{tr} KK' + \text{tr} CC'] < 1$$

alors $E \|A - [KX_0 + C]HA\| < 1$.

III. FILTRAGE LINEAIRE ET FILTRAGE NON LINEAIRE.

On aborde ici le problème de filtrage dans le modèle (3) défini au paragraphe II précédent.

III.1. Filtrage linéaire optimal.

On démontre un résultat préliminaire :

III.1.1. Proposition.

Sous les hypothèses de la Proposition II.1.1., il existe une suite $(e_t^* ; t \in \mathbb{N}^*)$ de vecteurs aléatoires dans \mathbb{R}^r centrés, de matrice de covariance I_r , deux à deux non corrélés, non corrélés avec Y_0 , telle que le processus solution du modèle (3) admette la représentation linéaire :

$$\begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + \Sigma_{t-1}^{1/2} e_t^* \\ X_t = HAY_{t-1} + H \Sigma_{t-1}^{1/2} e_t^* ; t \in \mathbb{N}^* ; X_0 = HY_0 \end{cases}$$

où

pour $t \in \mathbb{N}$ $\Sigma_t^{1/2}$ est une matrice d'ordre $r \times r$ telle que

$$(5) \quad \Sigma_t^{1/2} \cdot (\Sigma_t^{1/2})' = \Sigma_t = Q_e B C_Y(t,t) B' + Q_e [B m_Y(t-1) + C] [B m_Y(t-1) + C]' .$$

Démonstration.

On a pour tout $t \geq 1$

$$E \{ [B Y_{t-1} + C] e_t^* \} = 0$$

et

$$\begin{aligned}
 E\{[BY_{t-1}+C]e_t^2[BY_{t-1}+C]'\} &= Q_e E\{[BY_{t-1}+C][BY_{t-1}+C]'\} \\
 &= Q_e BE\{Y_{t-1}Y_{t-1}'\}B' + Q_e Bm_Y(t-1)C' + Q_e Cm_Y'(t-1)B' + Q_e CC' \\
 &= Q_e BC_Y(t-1,t-1)B' + Q_e [Bm_Y(t-1)+C][Bm_Y(t-1)+C]' = \Sigma_{t-1} .
 \end{aligned}$$

On a aussi pour $t > s \geq 1$

$$E\{[BY_{t-1}+C]e_t e_s [BY_{s-1}+C]'\} = 0 .$$

Alors si Σ_t est définie positive pour $t \in \mathbb{N}$, définissant

$$e_t^* = \Sigma_{t-1}^{-1/2} [BY_{t-1}+C]e_t \text{ il est clair qu'on a la représentation annoncée.}$$

Si Σ_t pour $t \in \mathbb{N}$ n'est pas toujours définie positive, définissons

$$e_t^* = [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+ [BY_{t-1}+C]e_t + [I_r - [\Sigma_{t-1}^{1/2}] [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+] \tilde{e}_t ; t \geq 1 \quad (1)$$

où $(\tilde{e}_t ; t \geq 1)$ est une suite de vecteurs aléatoires centrés dans \mathbb{R}^r tels que $\text{cov}(\tilde{e}_t, \tilde{e}_s) = \delta_{t,s} I_r$, non corrélée avec $(Y_t ; t \in \mathbb{N})$.

(Une telle suite (\tilde{e}_t) existe pourvu que l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) soit "suffisamment riche" ; si ce n'est pas le cas on peut toujours s'y ramener en "augmentant" convenablement cet espace).

Il est facile de vérifier que $(e_t^* ; t \geq 1)$ satisfait aux conditions de l'énoncé.

En effet, pour tout $t \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 E e_t^* &= [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+ E\{[BY_{t-1}+C]e_t\} + [I_r - [\Sigma_{t-1}^{1/2}] [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+] E \tilde{e}_t \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(1) la notation $+$ désigne la pseudo-inverse

$$\text{et } \text{cov}(e_t^*, e_t^{*'}) = [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+ \Sigma_{t-1} [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+ + [I_r - [\Sigma_{t-1}^{1/2}]] [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+ [[I_r - [\Sigma_{t-1}^{1/2}]] [\Sigma_{t-1}^{1/2}]]^+$$

où, d'après les propriétés des matrices pseudo-inverses,

$$[\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+ \Sigma_{t-1} [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+ = [\Sigma_{t-1}^{1/2}] [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+$$

$$\text{et } [I_r - [\Sigma_{t-1}^{1/2}]] [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+ [[I_r - [\Sigma_{t-1}^{1/2}]] [\Sigma_{t-1}^{1/2}]]^+ = I_r - [\Sigma_{t-1}^{1/2}] [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+$$

$$\text{d'où } \text{cov}(e_t^*, e_t^{*'}) = [\Sigma_{t-1}^{1/2}] [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+ + I_r - [\Sigma_{t-1}^{1/2}] [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+ = I_r .$$

On a aussi compte tenu des hypothèses concernant les suites $(e_t ; t \geq 1)$ et $(\tilde{e}_t ; t \geq 1)$:

$$\cdot \text{ pour } t > s \geq 1 \quad E(e_t^* e_s^{*'}) = 0$$

$$\cdot (e_t^* ; t \in \mathbb{N}^*) \text{ non corrélés avec } Y_0 . \blacksquare$$

Remarquons que dans le cas particulier où le processus solution de (3) est stationnaire au second-ordre (cf. Proposition II.1.3.), il admet la représentation

$$\begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + \Sigma^{1/2} e_t^* \\ X_t = HAY_{t-1} + H\Sigma^{1/2} e_t^* ; t \in \mathbb{N}^* ; X_0 = HY_0 \end{cases}$$

où $\Sigma^{1/2}$ est une matrice d'ordre $r \times r$ telle que

$$(5') \quad \Sigma^{1/2} . (\Sigma^{1/2})' = \Sigma = Q_e B C_Y(0,0)B' + Q_e [B m_Y(0)+C][B m_Y(0)+C]' .$$

On est maintenant en mesure de démontrer :

III.1.3. Proposition.

Sous les hypothèses de la Proposition II.1.1 le filtre linéaire optimal \hat{Y}_t^l de Y_t au vu de $X[0, T]$ dans le modèle (3) est fourni par les équations de récurrence

$$\hat{Y}_t^l = A \hat{Y}_{t-1}^l + [\Sigma_{t-1} H' + A \gamma_{t-1}^l A' H'] [H \Sigma_{t-1} H' + H A \gamma_{t-1}^l A' H']^+ [X_t - H A \hat{Y}_{t-1}^l] ; t \geq 1$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_t^l &= A \gamma_{t-1}^l A' + \Sigma_{t-1}^{-1} \\ &- [\Sigma_{t-1} H' + A \gamma_{t-1}^l A' H'] [H \Sigma_{t-1} H' + H A \gamma_{t-1}^l A' H']^+ [\Sigma_{t-1} H' + A \gamma_{t-1}^l A' H']' ; t \geq 1 \end{aligned}$$

avec

$$\hat{Y}_0^l = m_Y(0) + C_Y(0,0) H' [H C_Y(0,0) H']^+ (X_0 - H m_Y(0))$$

$$\gamma_0^l = C_Y(0,0) - C_Y(0,0) H' [H C_Y(0,0) H']^+ H C_Y(0,0) ,$$

la suite $(\Sigma_t ; t \geq 0)$ définie par (5).

Démonstration.

Le résultat est une conséquence immédiate du Corollaire III.1.5. du Chapitre I et de la Proposition III.1.1. précédente. ■

Dans le cas particulier où le processus solution est stationnaire au second-ordre, il est possible d'étudier le comportement asymptotique de la matrice

$$\gamma_t^l = E((Y_t - \hat{Y}_t^l)(Y_t - \hat{Y}_t^l)')$$

Du Théorème III.1.6. du Chapitre I on déduit :

III.1.4. Proposition.

Supposons les hypothèses de la Proposition II.1.1. satisfaites et le processus solution stationnaire au second-ordre.

Si $H\Sigma H' > 0$, si le couple $(A - \Sigma H'(H\Sigma H')^{-1}HA, HA)$ est observable et si le couple $(A - \Sigma H'(H\Sigma H')^{-1}HA, [\Sigma - \Sigma H'(H\Sigma H')^{-1}H\Sigma]^{1/2})$ est contrôlable où Σ est définie par (5'), alors la suite $(\gamma_t^l; t \geq 1)$ a une limite γ^* telle que $\text{Tr } \gamma^* < +\infty$ qui est l'unique solution (dans la classe des matrices symétriques définies positives) de l'équation matricielle

$$\begin{aligned} \gamma = & [A - \Sigma H'(H\Sigma H')^{-1}HA] \gamma [A - \Sigma H'(H\Sigma H')^{-1}HA]' + [\Sigma - \Sigma H'(H\Sigma H')^{-1}H\Sigma] - \\ & - [A - \Sigma H'(H\Sigma H')^{-1}HA] \gamma [HA]' \{ [\Sigma - \Sigma H'(H\Sigma H')^{-1}H\Sigma + HA \gamma [HA]']^+ HA \gamma \times \\ & \times [A - \Sigma H'(H\Sigma H')^{-1}HA]' . \end{aligned}$$

III.2. Filtrage non linéaire optimal.

On fait l'hypothèse complémentaire suivante :

(B) la matrice B est de la forme KH où K est un vecteur colonne $r \times 1$.

Alors le modèle (3) est du type du modèle (5) introduit au paragraphe III du Chapitre I, à savoir :

$$\begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + [KX_{t-1} + C] e_t \\ X_t = HAY_{t-1} + [HKX_{t-1} + HC] e_t ; t \in \mathbb{N}^* ; X_0 = HY_0 . \end{cases}$$

On suppose de plus que la condition :

(G) $(e_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées selon une loi gaussienne centrée de variance $Q_e > 0$ est satisfaite. On a alors le résultat :

III.2.1. Proposition.

Sous les hypothèses (G) et (B) , si l'état initial Y_0 est un vecteur aléatoire gaussien indépendant de la suite $(e_t ; t \in \mathbb{N}^*)$, alors le filtre optimal \hat{Y}_t de Y_t au vu de $X[0,t]$ dans le modèle (3) est fourni par les équations de récurrence :

$$\hat{Y}_t = A\hat{Y}_{t-1} + [Q_e [KX_{t-1} + C][HKX_{t-1} + HC] + AY_{t-1}A'H'] \times \\ \times [Q_e [HKX_{t-1} + HC]^2 + HA\gamma_{t-1}A'H']^+ [X_t - HA\hat{Y}_{t-1}] ; t \geq 1$$

et

$$\gamma_t = A\gamma_{t-1}A' + Q_e [KX_{t-1} + C][KX_{t-1} + C]' - \\ - [Q_e [KX_{t-1} + C][HKX_{t-1} + HC] + AY_{t-1}A'H'] [Q_e [HKX_{t-1} + HC]^2 + HA\gamma_{t-1}A'H']^+ \\ \times [Q_e [KX_{t-1} + C][HKX_{t-1} + HC] + AY_{t-1}A'H'] ; t \geq 1$$

avec $\hat{Y}_0 = m_Y(0) + C_Y(0,0) H' [HC_Y(0,0)H']^+ (X_0 - Hm_Y(0))$

$$\gamma_0 = C_Y(0,0) - C_Y(0,0) H' [HC_Y(0,0)H']^+ HC_Y(0,0) .$$

Démonstration.

D'après l'écriture du modèle précédent l'énoncé et la Proposition II.1.1,

les conditions du Théorème III.1.3 du Chapitre I sont toutes satisfaites puisque si Y_0 vérifie l'hypothèse, (Y_0, X_0) est un vecteur aléatoire gaussien indépendant de $(e_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ et, en particulier, la loi conditionnelle $P[Y_0 \in \cdot | X_0]$ est gaussienne. ■

Remarquons que si on suppose $B = KH$ le filtre optimal linéaire ne diffère du filtre optimal que par les termes $Q_e \cdot E \{ [KX_{t-1} + C][HKX_{t-1} + HC]$ et $Q_e E \{ [HKX_{t-1} + HC]^2 \}$ qui se substituent aux termes $Q_e [KX_{t-1} + C][HKX_{t-1} + HC]$ et $Q_e [HKX_{t-1} + HC]^2$ respectivement. Cette différence résulte bien évidemment de la "linéarisation" du modèle (3).

IV. ETUDE D'UN MODELE PARTICULIER DE SERIE CHRONOLOGIQUE UNIDIMENSIONNELLE.

Nous étudions ici le cas particulier du modèle de série chronologique scalaire correspondant à la situation (3)-(3') où

$$r = 1, \quad A = a, \quad B = b, \quad H = C = 1 \quad \text{i.e}$$

$$(6) \quad X_t = aX_{t-1} + bX_{t-1} e_t + e_t ; t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ou (6')} \quad X_t = aX_{t-1} + bX_{t-1} e_t + e_t ; t \in \mathbb{N}^*, X_0 \text{ donné .}$$

Les résultats concernant la stationnarité stricte et l'inversibilité sont plus précis que dans le cas vectoriel $r > 1$; on est en mesure d'étudier le problème de l'existence des moments d'ordre supérieur à deux d'une solution stationnaire dans le cas où les variables (e_t) sont gaussiennes. On aborde aussi le problème statistique d'estimation des paramètres du modèle.

IV. 1. Stationnarité stricte. Moments.

Soit (H) l'hypothèse : la loi commune aux variables aléatoires (e_t) n'est pas concentrée en une ou deux valeurs. Notons que (H) est vérifiée si et seulement si il n'existe pas de constantes α et β telles que $P[e_t^2 = \alpha e_t + \beta] = 1$.

IV. 1. 1. Proposition.

Supposons que (e_t) est une suite de variables aléatoires indépen-

dantes équadistribuées telle que l'hypothèse (H) est satisfaite. Alors si $|a| < 1$ et $a^2 + b^2 Q_e \leq 1$ il existe un processus stationnaire (X_t) vérifiant l'équation (6) uniquement déterminé par

$$(7) \quad X_t = e_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{k=0}^{j-1} [a + b e_{t-k}] \right\} e_{t-j}$$

où la série du second membre converge presque sûrement et si $a^2 + b^2 Q_e < 1$ la convergence a lieu aussi en moyenne quadratique.

Démonstration.

Suivant le schéma de la démonstration de la Proposition II.2.1. il suffit de démontrer que presque sûrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(t, n) = 0$ et la série de terme général $P(t, j) e_{t-j}$ est convergente.

Or si
$$P(t, n) = \prod_{k=0}^{n-1} [a + b e_{t-k}]$$

on a
$$\frac{1}{n} \text{Log} |P(t, n)| = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \text{Log} [a + b e_{t-k}]^2$$

L'inégalité de Jensen montre que pour $b \neq 0$

$$E \{ \text{Log} [a + b e_t]^2 \} < \text{Log} E [a + b e_t]^2 = \text{Log} [a^2 + b^2 Q_e] \leq 0$$

car, d'après l'hypothèse (H), $[a + b e_t]^2$ n'est pas presque sûrement une constante. De même pour $b = 0$ on a encore

$$E \{ \text{Log} [a + b e_t]^2 \} < 0$$

puisque $a^2 < 1$.

Par la loi forte des grands nombres on obtient alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} |P(t, n)| = \frac{1}{2} E \{ \text{Log} [a + b e_t]^2 \} < 0$$

ce qui implique que presque sûrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} |P(t, n)| = 0$ et plus précisément

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |P(t, n)|^{1/n} = \rho = \exp \left\{ \frac{1}{2} E \{ \text{Log} [a + b e_t]^2 \} \right\} < 1.$$

Toujours d'après la loi forte des grands nombres, la quantité

$$\frac{1}{j} e_{t-j} = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j e_{t-k} - \frac{j-1}{j} \left\{ \frac{1}{j-1} \sum_{k=1}^{j-1} e_{t-k} \right\}$$

converge vers zéro presque sûrement quand j tend vers l'infini. Par conséquent pour j assez grand on a $e_{t-j} \leq j$ presque sûrement, ce qui entraîne que

$$|P(t, j) e_{t-j}| \leq j \rho^j$$

pour tout $\tilde{\rho}$, $\rho < \tilde{\rho} < 1$. Ainsi la série $\sum_{j=1}^{\infty} P(t, j) e_{t-j}$ converge aussi presque sûrement. ■

On a le résultat complémentaire

IV.1.2. Proposition.

Supposons que (e_t) satisfait aux hypothèses de la Proposition

IV.1.1. Alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution stationnaire (X_t) de (6) qui soit un processus du second-ordre centré est que $a^2 + b^2 Q_e < 1$ auquel cas le processus (X_t) est uniquement déterminé par (7) où la série du second-membre est convergente presque sûrement et en moyenne quadratique.

Démonstration.

D'après ce qui précède, il reste à montrer que la condition est nécessaire. Or on a nécessairement (cf. Proposition I.1.3.)

$$(1 - a^2 - b^2 Q_e) \text{ var } (X_t) = Q_e > 0$$

ce qui montre bien que $a^2 + b^2 Q_e < 1$. ■

Remarquons qu'en vertu de la Proposition IV.1.1, si $|a| < 1$ et $a^2 + b^2 Q_e = 1$ il existe encore un processus stationnaire qui vérifie (6) mais qui n'est pas du second-ordre centré d'après la Proposition IV.1.2.

Venons-en à l'étude de l'inversibilité.

Soit (H') l'hypothèse : la loi commune aux variables aléatoires (e_t) est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Sous l'hypothèse (H') la probabilité de transition $P(.,.)$

$$P(x, A) = P[X_t \in A / X_{t-1} = x] ; x \in \mathbb{R} , A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , t \in \mathbb{N}^*$$

est telle que pour $x \neq -\frac{1}{b}$, $P(x, .)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et pour $x = -\frac{1}{b}$

$$P\left(-\frac{1}{b}, A\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } -a/b \in A \\ 0 & \text{si } -a/b \notin A \end{cases} .$$

IV.1.3. Lemme.

Sous les hypothèses de la Proposition IV.1.1. avec (H) remplacée par (H'), la loi commune ν_0 aux variables aléatoires X_t du processus solution est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Démonstration.

La loi ν_0 est une probabilité invariante pour la chaîne de Markov $X_t = aX_{t-1} + bX_{t-1} e_t + e_t$.

Soit $A \in \mathfrak{B}_R$ de mesure de Lebesgue nulle

$$\begin{aligned} \nu_0(A) &= \int_{\mathbb{R}} P(x, A) d\nu_0(x) \\ &= P\left(-\frac{1}{b}, A\right) \nu_0\left(\left\{-\frac{1}{b}\right\}\right). \end{aligned}$$

En particulier

$$\nu_0\left(\left\{-\frac{1}{b}\right\}\right) = P\left(-\frac{1}{b}, \left\{-\frac{1}{b}\right\}\right) \cdot \nu_0\left(\left\{-\frac{1}{b}\right\}\right)$$

et par suite, puisque par hypothèse $a \neq 1$,

$$\nu_0\left(\left\{-\frac{1}{b}\right\}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \nu_0(A) = 0. \quad \blacksquare$$

IV.1.4. Proposition.

Sous les hypothèses de la Proposition IV.1.1. avec (H) remplacée par (H') le modèle (6) est inversible.

Démonstration.

Ecrivant (6) sous la forme

$$X_t - aX_{t-1} = (bX_{t-1} + 1)e_t$$

on voit que, compte tenu de ce que $P[bX_{t-1} + 1 \neq 0] = 1$ (puisque d'après le lemme IV.1.3. la loi de probabilité ν_0 commune aux X_t n'a pas de masse en $-\frac{1}{b}$), e_t peut être calculé par

$$e_t = (X_t - aX_{t-1}) (bX_{t-1} + 1)^{-1} . \blacksquare$$

Les hypothèses de la Proposition IV.1.1. assurent l'existence d'un processus de Markov stationnaire vérifiant l'équation (6') (en effet si X_0 est une variable aléatoire de loi ν_0 indépendante de $(e_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ le processus (X_t) issu de X_0 est de ce type). H. TONG (1981) a abordé cette question par une autre voie sous l'hypothèse (G). Substituant à (G) l'hypothèse (H') et utilisant des arguments analogues à ceux de H. TONG, on peut démontrer :

IV.1.5. Théorème.

Supposons que l'hypothèse (H') soit satisfaite et que $E\{|a+be_t|\} < 1$. Alors le processus de Markov associé à la famille $(P(x, \cdot); x \in \mathbb{R})$ est ergodique.

Par exemple dans le cas où l'hypothèse (G) est satisfaite une condition suffisante pour que $E\{|a+be_t|\} < 1$ est évidemment que $|a| + |b| \left(\frac{2}{\pi} Q_e\right)^{1/2} < 1$ (puisque $E|e_t| = \left(\frac{2}{\pi} Q_e\right)^{1/2}$), condition qui peut être comparée à la condition suffisante $a^2 + b^2 Q_e < 1$ étudiée précédemment (cf. Figure ci-après).

Dans les conditions du Théorème IV.1.5. on est assuré de l'existence et de l'unicité d'une loi de probabilité invariante ν_0 pour la famille $(P(x, \cdot) ; x \in \mathbb{R})$ i.e. telle que :

$$\nu_0(A) = \int_{\mathbb{R}} P(x, A) d\nu_0(x) \quad ; A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} .$$

Il est facile (par un raisonnement analogue à celui de la preuve du Lemme IV.1.3.) de voir que $\nu_0\{-\frac{1}{b}\} = 1$ ou 0 selon que $a = 1$ ou $a \neq 1$. Dans le premier cas le processus $X_t \equiv -\frac{1}{b}$, $t \in \mathbb{N}$ est la solution stationnaire de (6') ; c'est évidemment un processus non centré qui admet des moments de tous ordres. Dans le cas où $a \neq 1$ et l'hypothèse (G) est satisfaite, la probabilité de transition s'écrit, pour $x \neq -\frac{1}{b}$:

$$P(x, A) = \int_A (2\pi[1+bx]{}^2 Q_e)^{-1/2} \cdot \exp\{-\frac{1}{2}(y-ax){}^2([1+bx]{}^2 Q_e)^{-1}\} \cdot dy .$$

et on peut étudier l'existence des moments de la solution stationnaire de (6') à l'aide de la fonction caractéristique ψ de la loi ν_0 . ψ vérifie :

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{iaxu - \frac{1}{2} Q_e (1+bx) {}^2 u^2\} d\nu_0(x) .$$

Lorsque les moments non centrés $\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k d\nu_0(x)$ existent pour $k = 0, \dots, n$ on a (cf. H. TONG (1981)) :

$$\mu_0 = 1 \quad ; \quad \mu_1 = 0$$

et

$$\mu_k = \sum_{s=0}^{[k/2]} \binom{k}{2s} \left(-\frac{Q_e}{2}\right)^s C_s a^{k-2s} \left[\sum_{j=0}^{2s} \binom{2s}{j} b^j \mu_{k-2s+j} \right] \quad ; k=2, \dots, n$$

$$\text{où } C_s = -2(2s-1) C_{s-1} \quad ; \quad s = 1, 2, \dots \quad ; \quad C_0 = 1 .$$

Une condition suffisante pour que le moment μ_{2n} existe est que pour $j = 1, 2, \dots, n$ on ait :

$$\begin{aligned} & a^{2j} + Q_e \binom{2j}{2} 1 \cdot a^{2j-2} b^2 + Q_e^2 \binom{2j}{4} 1.3 a^{2j-4} b^4 + \\ & + Q_e^3 \binom{2j}{6} 1.3.5 a^{2j-6} b^6 + \dots + Q_e^j \binom{2j}{2j} 1.3.5 \dots (2j+1) b^{2j} < 1 . \end{aligned}$$

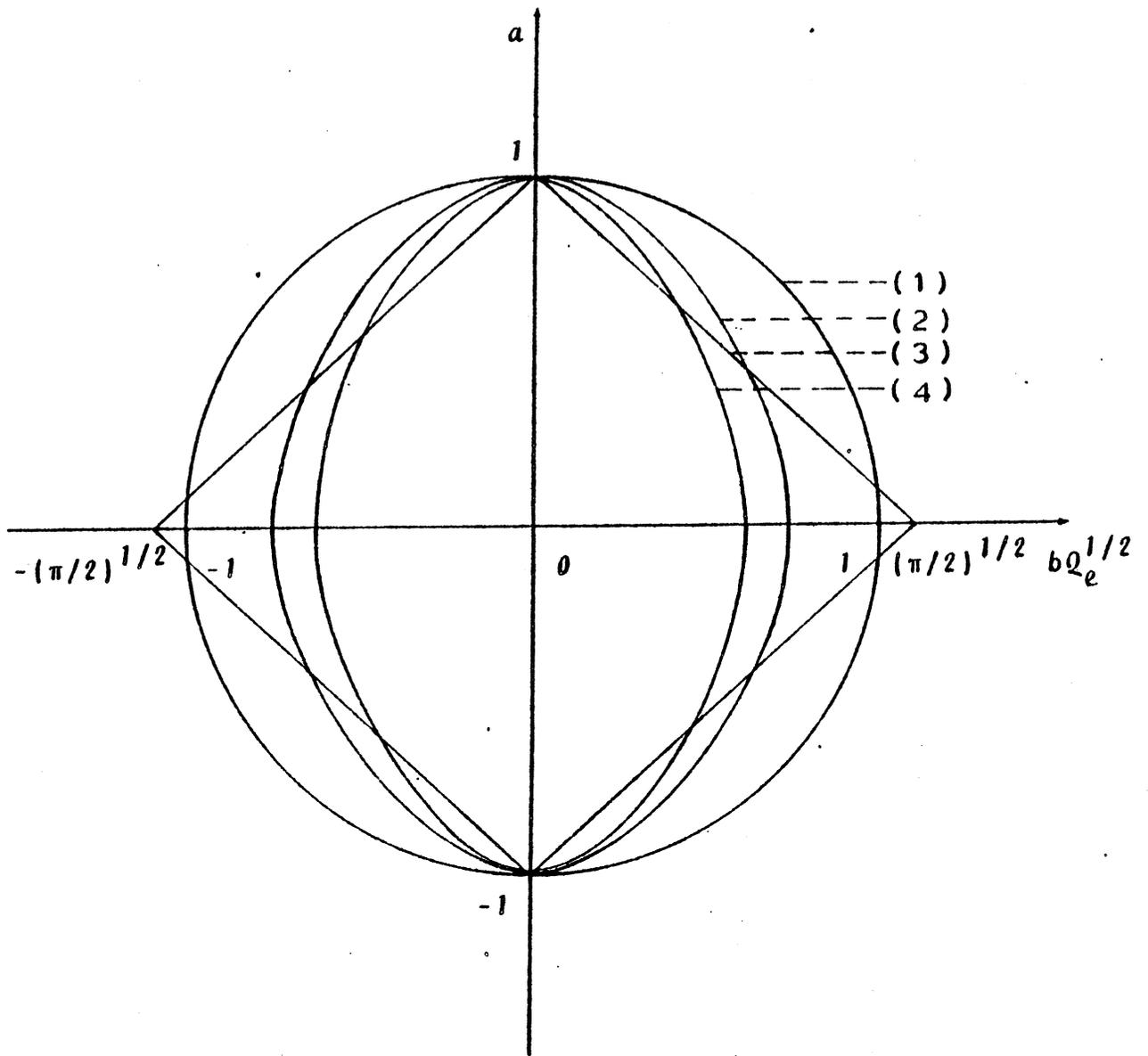
En particulier μ_4 existe si $1 - a^4 - 6a^2 b^2 Q_e - 3b^4 Q_e^2 > 0$ et alors

$$\mu_2 = Q_e \cdot [1 - a^2 - b^2 Q_e]^{-1}$$

$$\mu_3 = 6ab Q_e \mu_2 \cdot [1 - a(a^2 + 3b^2 Q_e)]^{-1}$$

$$\mu_4 = 3Q_e [4b(a^2 + b^2 Q_e)\mu_3 + 2(a^2 + 3b^2 Q_e)\mu_2 + Q_e] [1 - a^4 - 6a^2 b^2 Q_e - 3b^4 Q_e^2]^{-1} .$$

On représente dans la figure ci-dessous les frontières de domaines de valeurs de $(a, b Q_e^{1/2})$ à l'intérieur desquels les moments μ_{2n} existent pour $n = 1, 2, 3$.



$$(1) \quad a^2 + b^2 Q_e = 1$$

$$(2) \quad a^4 + 6a^2 b^2 Q_e + 3b^4 Q_e^2 = 1$$

$$(3) \quad |a| + |b| (2Q_e/\pi)^{1/2} = 1$$

$$(4) \quad a^6 + 15a^4 b^2 Q_e + 45a^2 b^4 Q_e^2 + 15b^6 Q_e^3 = 1$$

IV.2. Estimation de paramètres.

On suppose qu'on observe un processus stationnaire centré $(X_t ; t \in \mathbb{N})$ solution de l'équation (6') où $(e_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ satisfait l'hypothèse (G) avec $\Omega_e = 1$. On envisage d'abord le problème d'estimation du paramètre (a, b^2) . On suppose que la vraie valeur (a_0, b_0) du paramètre (a, b) vérifie la condition

$$a_0^4 + 6a_0^2 b_0^2 + 3b_0^4 < 1$$

i.e (cf. les résultats du paragraphe IV.1) que le processus admet des moments jusqu'à l'ordre 4. La méthode des moments conduit à estimer a et b^2 au vu de l'observation de 0 à n respectivement par

$$\hat{a}_n = \frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \quad \text{et} \quad \hat{b}_n^2 = 1 - (\hat{a}_n)^2 - \frac{n}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}.$$

On a le résultat suivant concernant le comportement asymptotique de l'estimateur (\hat{a}_n, \hat{b}_n^2) :

IV.2.1. Proposition.

La suite d'estimateurs $((\hat{a}_n, \hat{b}_n^2) ; n \geq 1)$ de (a, b^2) est presque sûrement convergente. De plus, lorsque n tend vers l'infini

la suite $(n^{1/2} \begin{bmatrix} \hat{a}_n - a_0 \\ \hat{b}_n^2 - b_0^2 \end{bmatrix} ; n \geq 1)$ converge en loi vers un vecteur

aléatoire gaussien centré de matrice de covariance

$$[E_{a_0, b_0} (X_0^2)]^{-2} \begin{bmatrix} E_{a_0, b_0} [b_0^2 X_0^2 + X_0^2] & 0 \\ 0 & 2 E_{a_0, b_0} [(b_0^2 X_0^2 + 1)^2 + 6b_0^2 X_0^2] \end{bmatrix}.$$

La démonstration de cette proposition repose sur le théorème suivant de la limite centrale pour les martingales (cf. B.M. BROWN (1971))

IV.2.2 Théorème

Soit $(S_n, F_n ; n \geq 1)$ une martingale sur l'espace probabilisé (Ω, F, P) , avec $S_0 = 0$ et $Y_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$ (F_0 n'est pas obligatoirement la tribu grossière),

$$V_n^2 = \sum_{t=1}^n E \{ Y_t^2 / F_{t-1} \} \text{ et } s_n^2 = E V_n^2 .$$

Si on a :

(i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n^2 s_n^{-2} = 1$ en probabilité

(ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^{-2} \sum_{t=1}^n E \{ Y_t^2 \mathbb{1}_{[|Y_t| \geq \epsilon s_n]} \} = 0$ pour tout $\epsilon > 0$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P [S_n s_n^{-1} \leq x] = \Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^2 \right\} . dy$$

pour tout x .

Démonstration de la Proposition IV.2.1.

La convergence presque sûre est une conséquence immédiate du théorème ergodique qui assure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 = E_{a_0, b_0} (X_0^2) = (1 - a_0^2 - b_0^2)^{-1}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t X_{t-1} = E_{a_0, b_0} (X_1 X_0) = a_0 (1 - a_0^2 - b_0^2)^{-1} .$$

Montrons maintenant la normalité asymptotique de l'estimateur (\hat{a}_n, \hat{b}_n^2) .

Rappelons d'abord que cet estimateur est solution du système :

$$M_n (X_0, \dots, X_n ; a, b^2) = 0$$

où

$$M_n (X_0, \dots, X_n ; a, b^2) = \begin{bmatrix} 1 & n \\ - \sum_{t=1}^n X_t & X_{t-1} - a - \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & n \\ - \sum_{t=1}^n X_t^2 & - a^2 - \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 - b^2 - \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \end{bmatrix}$$

On peut alors écrire , pour tout a et b :

$$M_n (X_0, \dots, X_n ; a, b^2) = M_n (X_0, \dots, X_n ; a_0, b_0^2) +$$

$$+ \begin{bmatrix} - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 & 0 \\ -(a+a_0) \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 & - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - a_0 \\ b - b_0 \end{bmatrix}$$

Ainsi

$$(n)^{1/2} \begin{bmatrix} \hat{a}_n - a_0 \\ \hat{b}_n^2 - b_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 & 0 \\ (\hat{a}_n + a_0) \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 & - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times (n)^{1/2} M_n (X_0, \dots, X_n ; a_0, b_0^2)$$

où la matrice dont l'inverse apparait au second membre converge

presque sûrement vers $E_{a_0, b_0} (X_0^2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2a_0 & 1 \end{bmatrix}$.

Montrons que $(n)^{1/2} M_n (X_0, \dots, X_n ; a_0, b_0^2)$ est asymptotiquement gaussien.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)' \in \mathbb{R}^2$ et $Y_t^\lambda = \lambda_1 (X_t X_{t-1} - a_0 X_{t-1}^2) + \lambda_2 (X_t^2 - a_0 X_{t-1}^2 - b_0^2 X_{t-1}^2 - 1)$. On vérifie aisément que

$$E_{a_0, b_0} (Y_t^\lambda / F_{t-1}^X) = 0,$$

$$\begin{aligned} (V_n^\lambda)^2 &= \sum_{t=1}^n E_{a_0, b_0} \{ (Y_t^\lambda)^2 / F_{t-1}^X \} = \sum_{t=1}^n \{ \lambda_1^2 (b_0 X_{t-1}^2 + X_{t-1})^2 + \\ &+ \lambda_2^2 [2(b_0 X_{t-1}^2 + 1)^2 + 12b_0^2 X_{t-1}^2 + 4(a_0 b_0 X_{t-1}^2 + a_0 X_{t-1})^2] + \\ &+ 2 \lambda_1 \lambda_2 [2a_0 (b_0 X_{t-1}^2 + X_{t-1})^2] \}. \end{aligned}$$

Alors si $(s_n^\lambda)^2 = E_{a_0, b_0} \{ (V_n^\lambda)^2 \} = n E_{a_0, b_0} \{ (Y_1^\lambda)^2 \}$

on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(V_n^\lambda)^2}{(s_n^\lambda)^2} = 1$ presque sûrement.

On a aussi, pour $\epsilon > 0$,

$$(s_n^\lambda)^{-2} \sum_{t=1}^n E_{a_0, b_0} \{ (Y_t^\lambda)^2 \prod_{[|Y_t^\lambda| > \epsilon s_n]} \} = \frac{1}{E_{a_0, b_0} \{ (Y_1^\lambda)^2 \}} \times$$

$$\times E_{a_0, b_0} \{ (Y_1^\lambda)^2 \prod_{[|Y_1^\lambda| > \epsilon s_n]} \}$$

et par suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n^\lambda)^{-2} \sum_{t=1}^n E_{a_0, b_0} \{ (Y_t^\lambda)^2 \prod_{[|Y_t^\lambda| > \epsilon s_n]} \} = 0 .$$

Ainsi , toutes les conditions du Théorème IV.2.2. étant vérifiées la suite $((s_n^\lambda)^{-1} \sum_{t=1}^n Y_t^\lambda ; n \geq 1)$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite et donc la suite

$((n)^{-1/2} \sum_{t=1}^n Y_t^\lambda ; n \geq 1)$ converge en loi vers une loi gaussienne de variance $E_{a_0, b_0} \{ (Y_1^\lambda)^2 \}$. Comme

$$\lambda' (n)^{1/2} M_n (X_0, \dots, X_n ; a_0, b_0^2) = (n)^{-1/2} \sum_{t=1}^n Y_t^\lambda$$

$$\text{et } E_{a_0, b_0} \{ (Y_1^\lambda)^2 \} =$$

$$\lambda' \times \begin{bmatrix} E_{a_0, b_0} [b_0 X_0^2 + X_0]^2 & 2a_0 E_{a_0, b_0} [b_0 X_0^2 + X_0]^2 \\ 2a_0 E_{a_0, b_0} [b_0 X_0^2 + X_0]^2 & E_{a_0, b_0} [2(b_0 X_0^2 + 1)^2 + 12b_0^2 X_0^2 + 4(a_0 b_0 X_0^2 + a_0 X_0^2)^2] \end{bmatrix}^x$$

il s'en suit que la suite $((n)^{1/2} M_n (X_0, \dots, X_n ; a_0, b_0^2) ; n \geq 1)$ converge en loi vers un vecteur gaussien centré de matrice de covariance Λ_{a_0, b_0} la matrice 2×2 intervenant ci-dessus . En

définitive la suite $((n)^{1/2} \begin{bmatrix} \hat{a}_n - a_0 \\ \hat{b}_n^2 - b_0^2 \end{bmatrix} ; n \geq 1)$ converge

en loi vers un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$E_{a_0, b_0} (X_0^2)^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2a_0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda_{a_0, b_0} \begin{bmatrix} 1 & -2a_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Un calcul facile fournit alors le résultat annoncé . ■

IV.2.2. Remarque .

(a) Les conclusions de la Proposition IV.2.1. restent valables sans l'hypothèse (G) lorsqu'on suppose seulement que le moment d'ordre 4 du processus $(X_t ; t \in \mathbb{N})$ existe et qu'on remplace la matrice de covariance asymptotique par

$$E_{a_0, b_0} (X_0^2)^{-2} \times$$

$$\left[\begin{array}{l} E_{a_0, b_0} [b_0 X_0^2 + X_0]^2 \\ E_{a_0, b_0} [b_0^3 X_0^4 + 3b_0^2 X_0^3 + 3b_0 X_0^2] E e_0^3 \\ E_{a_0, b_0} [(b_0 X_0^2 + 1)^2 + 4b_0^2 X_0^2] E e_0^4 - \\ - E_{a_0, b_0} [(b_0 X_0^2 + 1)^2 + 4b_0 (b_0 X_0^3 + X_0)] \end{array} \right]$$

(b) Pour estimer b il reste à estimer son signe . Or le moment μ_3 est du signe de ab et donc le signe de b est du signe de $a \cdot \mu_3$. Une estimation du signe de b est donc fournie par

le signe de $\hat{a}_n \cdot \sum_{t=1}^n X_t^3$.



CHAPITRE III

ETUDE DU MODELE BILINEAIRE

$$Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} u_{t-1} + Cu_t \quad ; \quad X_t = HY_t$$

Partant des modèles bilinéaires déterministes de la forme de ceux décrits dans l'introduction du Chapitre II, introduits par des automaticiens, les statisticiens C.W.J. GRANGER et A.P. ANDERSEN (1978) ont proposé comme modèles de séries chronologiques scalaires des analogues stochastiques du type

$$X_t = \sum_l a_l X_{t-l} + e_t + \sum_j c_j e_{t-j} + \sum_k \sum_l b_{kl} e_{t-k} X_{t-l},$$

où (e_t) est une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées.

Plusieurs auteurs comme T.D. PHAM et L.T. TRAN (1981), D. GUEGAN (1981) et B.G. QUINN (1982) ont étudié des cas particuliers de la forme

$$X_t = aX_{t-1} + e_t + be_{t-k} X_{t-l} \quad ; \quad k, l > 0.$$

Dans ce chapitre nous nous intéressons au modèle stochastique vectoriel s'écrivant

$$\begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} e_{t-1} + Ce_t \\ X_t = HY_t \end{cases}$$

qui a été en partie étudié par T. SUBBA RAO (1978, 1979) et T.D. PHAM et L.T. TRAN (1980) et à son analogue déterministe.

I. ETUDE DES PROBLEMES DE NATURE DETERMINISTE.

Le système considéré ici est décrit par le modèle

$$(1) \begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} u_{t-1} + Cu_t & ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = HY_t \end{cases}$$

où l'entrée déterministe u_t est scalaire, A est une matrice $r \times r$, C est un vecteur colonne $r \times 1$ et H un vecteur ligne $1 \times r$. Notons que le modèle est de la forme générale présentée au Chapitre I dans la mesure où on peut écrire

$$Y_t = f(Y_{t-1}, w_t)$$

une suite d'entrées étant une suite $w_t = (w_t^1, w_t^2)'$ dans \mathbb{R}^2 devant satisfaire les contraintes $w_{t+1}^1 = w_t^2$; $t \geq 0$.

Par commodité on est parfois amené à imposer la condition $HC = 1$ qui, remarquons le, n'est pas vraiment restrictive car si elle n'est pas satisfaite mais que $HC \neq 0$, le changement de B, C et u_t en $(HC)^{-1}B$, $(HC)^{-1}C$ et $HC u_t$ respectivement permet de s'y ramener.

I.1. Contrôlabilité déterministe.

Nous démontrons le résultat suivant :

I.1.1. Proposition.

Supposons que le rang de la matrice $r \times (r+1)$ $[B, C]$ est égal à 1 (i.e qu'il existe un vecteur $r \times 1$ γ tel que $B = C\gamma'$). Alors le système déterministe décrit par le modèle bilinéaire (1) est contrôlable si et seule-

ment si le couple $[A, C]$ est contrôlable.

Démonstration.

Si $B = C\gamma'$, l'équation d'évolution dans le modèle (1) s'écrit

$$(2) \quad Y_t = AY_{t-1} + Cv_t \quad \text{où (2')} \quad v_t = \gamma'Y_{t-1}u_{t-1} + u_t.$$

Supposons alors que le système décrit par (1) est contrôlable : alors étant donné Y_I et Y_F il existe une suite u_0, \dots, u_K telle que si $Y_0 = Y_I$, $Y_t = AY_{t-1} + C\gamma'Y_{t-1}u_{t-1} + Cu_t$, $1 \leq t \leq K$, on ait $Y_K = Y_F$. On voit que le système décrit par (2) est contrôlable de Y_I à Y_F à l'aide de la suite d'entrées (v_1, \dots, v_K) définie par la relation (2').

Supposons maintenant que le système décrit par (2) est contrôlable : alors étant donné Y_I et Y_F il existe une suite v_1, \dots, v_K telle que si $Y_0 = Y_I$, $Y_t = AY_{t-1} + Cv_t$, $1 \leq t \leq K$, on ait $Y_K = Y_F$.

Soit alors u_0 quelconque, on voit que le système décrit par (1) est contrôlable de Y_I à Y_F à l'aide de la suite d'entrées (u_0, \dots, u_K) définie par $u_t = v_t - \gamma'Y_{t-1}u_{t-1}$; $1 \leq t \leq K$.

En vertu du Théorème I.1.2 du Chapitre I, la Proposition est démontrée. ■

I.1.2. Exemples.

(a) Il est clair que dans le cas $B = 0$ on retrouve le résultat du Théorème I.1.2 du Chapitre I.

(b) Le système déterministe décrit par

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Y_{t-1} u_{t-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_t ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = [h_1 \ h_2] Y_t ; t \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

est contrôlable.

En effet on vérifie aisément qu'on a :

$$\text{rg}[C, AC] = \text{rg} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 .$$

I.2. Observabilité déterministe.

Les résultats suivants se déduisent de ceux de S. HARA et K. FURUTA (1977).

a) Observabilité avec quelques entrées connues.

On a la représentation suivante de l'état (Y_t^u) et de la sortie (X_t^u) du modèle (1) correspondant à la suite d'entrées $u = (u_t)$: posant

$$\xi_t^u = A \xi_{t-1}^u + B \xi_{t-1}^u u_{t-1} + C u_t ; t \geq 1 , \xi_0^u = 0$$

$$A_u(t) = A + B u_t ; t \geq 0$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Y}_t^u = A_u(t-1) \bar{Y}_{t-1}^u ; t \geq 1 ; \bar{Y}_0^u = Y_0 \\ \bar{X}_t^u = H \bar{Y}_t^u ; t \geq 0 \end{array} \right.$$

on a
$$Y_t^u = \bar{Y}_t^u + \xi_t^u ; X_t^u = \bar{X}_t^u + H \xi_t^u ; t \geq 0 .$$

I.2.1. Proposition.

Le système déterministe décrit par le modèle bilinéaire (1) est observable avec quelques entrées connues si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

(i) il existe un entier q et des suites d'entrées $u^1[0, r-1], \dots, u^q[0, r-1]$ tels que $\text{rg } \mathcal{N}(u^1, \dots, u^q, r-1) = r$

(ii) le rang de la matrice $(2r-1) \times r$
$$\begin{bmatrix} H \\ HA \\ HB \\ \vdots \\ HA^{r-1} \\ HB^{r-1} \end{bmatrix}$$
 est r .

I.2.2. Exemples.

(a) Il est clair que dans le cas linéaire i.e $B = 0$ la condition (ii) se réduit au critère d'observabilité du couple $[A, H]$.

(b) Le système déterministe décrit par

$$\begin{cases} Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} Y_{t-1} u_{t-1} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} u_t; t \in \mathbb{N}^*; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = [0, 1] Y_t; t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

avec $a_2 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$ est observable avec quelques entrées connues. En effet on vérifie facilement la condition (ii) i.e.

$$\text{rg} \begin{bmatrix} H \\ HA \\ HB \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} = 2.$$

b) Observabilité avec n'importe quelle entrée connue.

Soit \bar{H} une matrice d'ordre $(r-1) \times r$ telle que la matrice d'ordre $r \times r$ $\begin{bmatrix} H \\ \bar{H} \end{bmatrix}$ soit inversible et $\begin{bmatrix} H \\ \bar{H} \end{bmatrix}^{-1} = [K, \bar{K}]$ où K est d'ordre $r \times 1$ et \bar{K} d'ordre $r \times (r-1)$. On peut alors définir

$$\begin{bmatrix} X_t \\ \bar{X}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ \bar{H} \end{bmatrix} Y_t \quad \text{ou} \quad Y_t = [K, \bar{K}] \begin{bmatrix} X_t \\ \bar{X}_t \end{bmatrix} = KX_t + \bar{K}\bar{X}_t.$$

On peut alors réécrire le modèle (1) sous la forme

$$(3) \quad \begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + B\bar{K}\bar{X}_{t-1} u_{t-1} + BKX_{t-1} u_{t-1} + Cu_t \\ X_t = HY_t \end{cases}$$

Lorsque la suite (u_t) est connue dans la représentation (3), les termes $BKX_{t-1} u_{t-1}$ et Cu_t sont connus, seul le terme $B\bar{K}\bar{X}_{t-1} u_{t-1}$ est inconnu ; on voit donc que la propriété d'observabilité avec n'importe quelle entrée connue dans (1) est liée à la propriété d'observabilité avec entrée inconnue dans un modèle linéaire autonome de la forme :

$$\begin{cases} \tilde{Y}_t = A\tilde{Y}_{t-1} + B\bar{K}v_{t-1} \\ \tilde{X}_t = H\tilde{Y}_t \end{cases}$$

où (v_t) est une suite d'entrées de dimension $(r-1)$ (cf. Proposition I.2.6 du Chapitre I).

On a la condition suffisante :

I.2.3. Proposition.

Si le couple $[A, H]$ est observable et ${}^t H A^j B \bar{K} = 0$ pour

$j = 0, \dots, r-2$ alors le système décrit par le modèle bilinéaire (1) est observable avec n'importe quelle entrée connue.

I.2.4. Exemples.

(a) Il est clair que dans le cas linéaire i.e $B = 0$, la condition se réduit au critère d'observabilité du couple $[A, H]$: $\text{rg } O_r = r$.

(b) Le système déterministe décrit par :

$$\begin{cases} Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} Y_{t-1} u_{t-1} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} u_t ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = [1, -1] Y_t ; t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

avec $a_1 \neq a_2$, $a_1 a_2 \neq 0$ et $b_1 b_2 \neq 0$ est observable avec n'importe quelle entrée connue.

En effet on vérifie facilement qu'on a

$$\text{rg} \begin{bmatrix} H \\ HA \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a_1 & -a_2 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{et} \quad HB\bar{K} = 0 .$$

c) Observabilité avec entrée inconnue.

La propriété d'observabilité avec entrée inconnue dans (1) est liée à la même propriété dans un modèle linéaire autonome du type

$$\begin{cases} \tilde{Y}_t = A\tilde{Y}_{t-1} + [B, C] \omega_t \\ \tilde{X}_t = H\tilde{Y}_t \end{cases}$$

où (ω_t) est une suite d'entrées de dimension $r+1$ (cf. Proposition I.2.6 du Chapitre I)

On a la condition suffisante :

I.2.5. Proposition.

Si le couple $[A, H]$ est observable et $HA^j[B, C] = 0$ pour $j = 0, \dots, r-2$ alors le système décrit par le modèle bilinéaire (1) est observable avec entrée inconnue.

I.2.6. Exemples.

(a) Dans le cas linéaire i.e. $B = 0$, on voit que la condition n'est autre que celle de la Proposition I.2.6 du Chapitre I.

(b) Le système déterministe décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} Y_{t-1} u_{t-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_t ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = [1, -1] Y_t ; t \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

avec $a_1 \neq a_2$, $a_1 a_2 \neq 0$ et $b_1 b_2 \neq 0$ est observable avec entrée inconnue. En effet on vérifie facilement qu'on a

$$\text{rg} \begin{bmatrix} H \\ HA \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a_1 & -a_2 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{et} \quad H[B, C] = 0 .$$

I.3. Identifiabilité partielle d'une entrée déterministe.

Soit $j \geq 1$ et Q une matrice quelconque d'ordre $l \times j$. On a la condition suffisante suivante :

I.3.1. Proposition.

Si $HB = 0$ et $HC \neq 0$, l'entrée $u[0,j]$ est partiellement $\begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix}$ -identifiable dans le modèle défini par (1).

Démonstration.

Il suffit bien sûr de montrer le résultat pour $Q = I_j$.
Or on a (supposant que $HC = 1$) pour tout $t \geq 1$

$$X_t = HAY_{t-1} + u_t$$

d'où

$$u_t = X_t - HAY_{t-1}.$$

La preuve est alors analogue à celle de la Proposition I.3.1 du Chapitre II. ■

I.3.2. Exemples.

(a) Dans le cas linéaire i.e $B = 0$, la condition $HB = 0$ est satisfaite et l'énoncé assure que dès que $HC \neq 0$ l'entrée est identifiable.

(b) Dans le système déterministe décrit par

$$\begin{cases} Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} Y_{t-1} u_{t-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = [1, -1] Y_t ; t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

l'entrée $u[0, j]$ est $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ -identifiable.

En effet on a $HB = 0$ et $HC = 1$.

1.3.3. Remarque.

En fait si la condition $HB = 0$ n'est pas satisfaite la suite d'entrées $u[1, j]$ peut être déterminée dès que l'on connaît l'entrée u_0 et l'état Y_0 . La démonstration, analogue à la précédente, est basée sur le fait que

$$u_t = X_t - HAY_{t-1} - HBY_{t-1} u_{t-1} .$$

II. CARACTERISTIQUES DU SECOND-ORDRE ET STATIONNARITES

Dans ce paragraphe on considère le système stochastique décrit par l'analogie du modèle (1) i.e

$$(4) \begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} e_{t-1} + Ce_t ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = HY_t \end{cases}$$

$$\text{ou (4')} \begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} e_{t-1} + Ce_t ; t \in \mathbb{Z} \\ X_t = HY_t \end{cases}$$

où (e_t) est une suite de variables aléatoires réelles équidistribuées centrées, de variance $Q_e > 0$. Notons que ce modèle recouvre par exemple le modèle de série chronologique unidimensionnelle

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{k=1}^q b_k X_{t-k} e_{t-1} + e_t ; t \in \mathbb{Z} .$$

En effet (X_t) peut se représenter comme l'observation dans un modèle du type (4') où l'état r -dimensionnel $Y_t = (X_t, \dots, X_{t-r+1})'$ avec $r = \max(p, q)$ évolue selon l'équation

$$Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_r \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_r \\ 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \dots \\ \cdot & \dots & \dots \\ \cdot & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} Y_{t-1} e_{t-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} e_t$$

(avec la convention que $a_j = 0$ si $j > p$ et $b_k = 0$ si $k > q$)
l'équation d'observation étant

$$X_t = HY_t$$

où H est le vecteur ligne $1 \times r$; $H = (1 \ 0 \dots 0)$.

Nous étudions les modèles (4) - (4') qui, notons le, ne sont pas markoviens, pour des matrices A, B et des vecteurs C, H arbitraires. Par commodité nous imposerons encore parfois la condition $HC = 1$.

II.1. Caractéristiques du second-ordre - Stationnarité au second-ordre.

Les résultats suivants recouvrent ceux de T. SUBBA RAO (1979) et T.D. PHAM et L.T. TRAN (1980).

II.1.1. Proposition.

(¹) Si $(Y_0, (e_t; t \in \mathbb{N}))$ est une suite d'éléments aléatoires telle que les suites $(e_t; t \in \mathbb{N})$ et $(Y_0, e_t; t \in \mathbb{N}^*)$ soient deux suites de variables aléatoires indépendantes et e_t admet un moment d'ordre 4 alors le processus solution du modèle (4) est du second ordre.

Sa moyenne est donnée par

$$m_Y(0) = m(0) ; m_Y(1) = A m(0) + B V(0) ; V(0) = E \{ Y_0 e_0 \} ;$$

$$m_Y(t) = A^{t-1} m_Y(1) + Q_e \sum_{j=0}^{t-2} A^{t-2-j} B C ; t \geq 2$$

$$m_X(t) = H m_Y(t) ; t \in \mathbb{N} .$$

Sa fonction de covariance est donnée par

(¹) Y_0 du second-ordre .

$$C_Y(0,0) = C(0) ;$$

$$C_Y(s,s) = AC_Y(s-1,s-1)A' + Q_e B C_Y(s-1,s-1)B' + Q_e^{-1} \cdot D(s-1) D'(s-1) + \\ + BCC'B' [\text{var}\{e_o^2\} - \{E e_o^3\}^2 \cdot Q_e^{-1}] + Q_e CC' ; s \in \mathbb{N}^*$$

où

$$D(s) = Q_e AC + Q_e B m_Y(s) + BCE \{e_o^3\} ; s \in \mathbb{N}$$

$$C_Y(1,0) = AC(0) + B[W(0) - V(0) m'(0)]$$

où

$$W(0) = E\{Y_o Y_o' e_o\}$$

$$C_Y(s+1,s) = AC_Y(s,s) + BE\{Y_s Y_s' e_s\} - Q_e B C m_Y'(s) ; s \in \mathbb{N}^*$$

où

$$E\{Y_1 Y_1' e_1\} = Q_e Am(0)C' + Q_e BV(0)C' + Q_e C m'(0)A' + Q_e CV'(0)B' + E\{e_o^3\}CC' ;$$

$$E\{Y_s Y_s' e_s\} = Q_e Am_Y(s-1)C' + Q_e^2 BCC' + Q_e C m_Y'(s-1)A' + Q_e^2 CC'B' + E\{e_o^3\}CC' ; s > 1$$

et

$$C_Y(t,s) = \begin{cases} A^{t-s-1} C_Y(s+1,s) & \text{si } t > s \geq 1 \\ C_Y(t,t+1)(A')^{s-t-1} & \text{si } 1 \leq t < s \end{cases}$$

$$C_X(t,s) = HC_Y(t,s)H' ; (t,s) \in \mathbb{N}^2 .$$

Démonstration.

De la définition (4) on déduit aisément que pour $t > s$ on a

$$Y_t = \prod_{k=0}^{t-s-1} \{A + B e_{k+s}\} Y_s + \sum_{j=s}^{t-2} \prod_{\ell=0}^{t-2-j} \{A + B e_{\ell+s+1}\} C e_{j+1} + C e_t .$$

Il vient

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E \left\{ \prod_{k=0}^{t-s-1} \{A + B e_{k+s}\} Y_s + \sum_{j=s}^{t-2} \prod_{\ell=0}^{t-2-j} \{A + B e_{\ell+s+1}\} C e_{j+1} + C e_t \right\} \\ &= A^{t-s} m_Y(s) + A^{t-s-1} B E \{ Y_s e_s \} + Q_e \sum_{j=s}^{t-2} A^{t-2-j} B C \end{aligned}$$

$$\text{soit } m_Y(t) = A^{t-1} m_Y(1) + Q_e \sum_{j=s}^{t-2} A^{t-2-j} B C ; t \geq 2$$

$$m_Y(1) = A m(0) + B V(0) ,$$

$$m_X(t) = H m_Y(t) ; t \in \mathbb{N} .$$

Pour $t > s \geq 1$

$$\begin{aligned} C_Y(t,s) &= E \left\{ \prod_{k=0}^{t-s-1} \{A + B e_{k+s}\} Y_s - A^{t-s} m_Y(s) - A^{t-s-1} B E \{ Y_s e_s \} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=s}^{t-2} \prod_{\ell=0}^{t-2-j} \{A + B e_{\ell+s+1}\} C e_{j+1} - Q_e \sum_{j=s}^{t-2} A^{t-2-j} B C + C e_t \right\} \{ Y_s - m_Y(s) \}' \\ &= E \left\{ \prod_{k=0}^{t-s-1} \{A + B e_{k+s}\} Y_s - A^{t-s} m_Y(s) - A^{t-s-1} B E \{ Y_s e_s \} \right\} \{ Y_s - m_Y(s) \}' + \\ &\quad + E \left\{ \sum_{j=s}^{t-2} \prod_{\ell=0}^{t-2-j} \{A + B e_{\ell+s+1}\} C e_{j+1} - Q_e \sum_{j=s}^{t-2} A^{t-2-j} B C + C e_t \right\} \{ Y_s - m_Y(s) \}' \\ &= E \left\{ \prod_{k=1}^{t-s-1} \{A + B e_{k+s}\} \{ Y_{s+1} - C e_{s+1} \} - A^{t-s} m_Y(s) - A^{t-s-1} B E \{ Y_s e_s \} \right\} \{ Y_s - m_Y(s) \}' \\ &= A^{t-s-1} C_Y(s+1,s) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} C_Y(s+1, s) &= E \{ A(Y_s - m_Y(s)) + B(Y_s e_s - Q_e C) + C e_{s+1} \} \{ Y_s - m_Y(s) \}' \\ &= A C_Y(s, s) + B E \{ (Y_s e_s - Q_e C) (Y_s - m_Y(s))' \} \\ &= A C_Y(s, s) + B E \{ Y_s Y_s' e_s \} - Q_e B C m_Y'(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_Y(1, 0) &= E \{ A(Y_0 - m(0)) + B(Y_0 e_0 - V(0)) + C e_1 \} \{ Y_0 - m(0) \}' \\ &= A C(0) + B [W(0) - V(0) m'(0)] \end{aligned}$$

Posant $U_s = [A + B e_s] Y_s$; $s \in \mathbb{N}^*$

on a

$$\begin{cases} Y_s = U_{s-1} + C e_s \\ U_s = [A + B e_s] [U_{s-1} + C e_s] \end{cases}$$

puis $U_s - m_U(s) = [A + B e_s] [U_{s-1} - m_U(s-1)] + [AC + B m_U(s-1)] e_s + BC [e_s^2 - Q_e]$.

Alors

$$\begin{aligned} C_Y(s, s) &= A C_Y(s-1, s-1) A' + Q_e B C_Y(s-1, s-1) B' + Q_e^{-1} \cdot D(s-1) D'(s-1) + \\ &\quad + B C C' B' [\text{var} \{ e_0^2 \} - \{ E e_0^3 \}^2 \cdot Q_e^{-1}] + Q_e C C' \quad ; s \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

avec $D(s) = Q_e A C + Q_e B m_Y(s) + B C E \{ e_0^3 \}$; $s \in \mathbb{N}$.

Pour $s > 1$ on a

$$\begin{aligned} E \{ Y_s Y_s' e_s \} &= E \{ A Y_{s-1} + B Y_{s-1} e_{s-1} + C e_s \} \{ A Y_{s-1} e_s + B Y_{s-1} e_{s-1} e_s + C e_s^2 \}' \\ &= Q_e A m_Y(s-1) C' + Q_e^2 B C C' + Q_e C m_Y'(s-1) A' + Q_e^2 C C' B' + E \{ e_0^3 \} C C' \end{aligned}$$

On a aussi

$$E\{Y_1 Y_1' e_1\} = Q_e A m(0) C' + Q_e B V(0) C' + Q_e C m'(0) A' + Q_e C V'(0) B' + E\{e_0^3\} C C' .$$

Un raisonnement analogue fournit le résultat pour $1 \leq t < s$. ■

La stationnarité au second-ordre est caractérisée par :

II.1.2. Proposition.

Sous les hypothèses de la Proposition II.1.1, une condition nécessaire et suffisante pour que le processus d'état $(Y_t ; t \geq 0)$ satisfaisant à (4) soit stationnaire au second-ordre est que le vecteur $m(0)$ vérifie

$$m(0) = A m(0) + B V(0)$$

et que la matrice $C(0)$ soit solution de l'équation matricielle

$$(5) \quad \Gamma = A \Gamma A' + Q_e B \Gamma B' + Q_e^{-1} D D' + B C C' B' [\text{var}\{e_0^2\} - \{E e_0^3\}^2 \cdot Q_e^{-1}] + Q_e C C'$$

$$\text{où } D = Q_e A C + Q_e B m(0) + B C E\{e_0^3\} .$$

Alors la fonction de covariance du processus (Y_t) est donnée par

$$R_Y(h) = \begin{cases} A^{h-1} R_Y(1) & \text{si } h \geq 1 \\ R_Y'(1) (A')^{|h|-1} & \text{si } h \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{avec } R_Y(1) = A \Gamma + B W - Q_e B C m'(0) ;$$

$$W = Q_e A m(0) C' + Q_e^2 B C C' + Q_e C m'(0) A + Q_e^2 C C' B' + E\{e_0^3\} C C' .$$

Notons que l'équation matricielle (5) peut s'écrire sous la forme

$$\text{vec } \Gamma = \{A \otimes A + Q_e B \otimes B\} \text{vec } \Gamma + \text{vec} [DD' Q_e^{-1} + BCC'B' \{ \text{var}\{e_o^2\} - \{E e_o^3\}^2 Q_e^{-1} \} + Q_e$$

On voit alors que si les valeurs propres de la matrice $A \otimes A + Q_e B \otimes B$ sont toutes de module strictement inférieur à 1, l'équation (5) admet une solution unique dans l'ensemble des matrices symétriques semi-définies positives.

On verra plus loin que si de plus le couple $[A, C]$ est contrôlable, cette solution est définie positive.

II.2. Stationnarité stricte et inversibilité.

En ce qui concerne la stationnarité stricte dans le modèle (4') T.D. PHAM et L.T. TRAN (1980) ont démontré le résultat suivant :

II.2.1. Théorème.

Si la suite $(e_t ; t \in \mathbb{Z})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées et si les valeurs propres de la matrice $A \otimes A + Q_e B \otimes B$ sont toutes de module strictement inférieur à 1 alors le modèle (4') admet une solution stationnaire $((Y_t, X_t); t \in \mathbb{Z})$ uniquement déterminée par

$$Y_t = C e_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{k=1}^j [A + B e_{t-k}] \right\} C e_{t-j} ; X_t = H Y_t ; t \in \mathbb{Z}$$

où la série précédente est convergente en moyenne quadratique.

Il est clair que le processus solution est aussi stationnaire au second-ordre de structure de covariance donnée dans la Proposition II.1.2. On déduit aussi :

II.2.2. Proposition.

Sous les hypothèses du Théorème II.2.1, si le couple $[A, C]$ est contrôlable, alors la matrice de variance covariance commune aux vecteurs aléatoires $Y_t, t \in \mathbb{Z}$ est définie positive.

Démonstration.

Supposons que le couple $[A, C]$ est contrôlable i.e que la matrice $C_r = [C, \dots, A^{r-1}C]$ est de rang r mais que la distribution de Y_t est dégénérée i.e qu'il existe un vecteur g non nul dans R^r tel que l'on ait presque sûrement $g' \cdot Y_t = 0$.

D'après l'égalité

$$Y_t = Ce_t + \sum_{j=1}^{+\infty} \left\{ \prod_{k=1}^j [A + Be_{t-k}] \right\} Ce_{t-j}$$

on a

$$0 = E(g' \cdot Y_t e_{t-1}) = Q_e \cdot g' \cdot A^1 C \quad ; \quad l \geq 0$$

d'où $g' C_r = 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. ■

Abordons maintenant le problème de l'inversibilité du modèle (4').

Remarquons d'abord que si $B = KH$, posant $Z_t = (Y_t', e_t)'$ le modèle s'écrit

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_t = \begin{bmatrix} A & KX_{t-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z_{t-1} + \begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix} e_t \\ X_t = [H \quad 0] \begin{bmatrix} A & KX_{t-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z_{t-1} + H C e_t \end{array} \right.$$

On énonce alors :

II.2.3. Proposition.

Supposons que $B = KH$, $HC \neq 0$ et que les hypothèses du Théorème II.2.1 sont satisfaites. Alors si $E \left\| \begin{bmatrix} A - CHA & [K - CHK]X_0 \\ -HA & -HKX_0 \end{bmatrix} \right\| < 1$ le modèle (4') est inversible.

Démonstration.

En vertu de (6) on a (supposant $HC = 1$) pour tout t

$$e_t = X_t - [HA \quad HKX_{t-1}] Z_{t-1} .$$

Suivant la démarche décrite dans la Remarque II.3.2. (b) du Chapitre I, on définit alors, z_0 étant un vecteur fixé,

$$\overset{v}{e}_t = X_t - [HA \quad HKX_{t-1}] \overset{v}{Z}_{t-1} ; t \geq 1$$

où

$$\overset{v}{Z}_t = \begin{bmatrix} A & KX_{t-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{v}{Z}_{t-1} + \begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix} \overset{v}{e}_t ; t \geq 1 ; \overset{v}{Z}_0 = z_0 .$$

On a

$$\overset{v}{e}_t - e_t = [HA \quad HKX_{t-1}] (Z_{t-1} - \overset{v}{Z}_{t-1})$$

où

$$Z_t - \overset{\vee}{Z}_t = \begin{bmatrix} A-CHA & [K-CHK]X_{t-1} \\ -HA & -CHA \end{bmatrix} (Z_{t-1} - \overset{\vee}{Z}_{t-1})$$

solt $Z_t - \overset{\vee}{Z}_t = \prod_{i=0}^{t-1} \begin{bmatrix} A-CHA & [K-CHK]X_i \\ -HA & -CHA \end{bmatrix} (Z_0 - z_0) ; t \geq 1 .$

Il vient donc

$$\|Z_t - \overset{\vee}{Z}_t\|^2 = (Z_0 - z_0) \cdot \left[\prod_{i=0}^{t-1} \begin{bmatrix} A-CHA & [K-CHK]X_i \\ -HA & -CHA \end{bmatrix} \right]^2 \cdot (Z_0 - z_0)$$

puis

$$\|Z_t - \overset{\vee}{Z}_t\| \leq \|Z_0 - z_0\| \prod_{i=0}^{t-1} \left\| \begin{bmatrix} A-CHA & [K-CHK]X_i \\ -HA & -CHA \end{bmatrix} \right\| .$$

D'après l'inégalité de Jensen et l'hypothèse on a

$$E \left\{ \text{Log} \left\| \begin{bmatrix} A-CHA & [K-CHK]X_0 \\ -HA & -CHA \end{bmatrix} \right\| \right\} < \text{Log} E \left\| \begin{bmatrix} A-CHA & [K-CHK]X_0 \\ -HA & -CHA \end{bmatrix} \right\| < 0 .$$

En vertu du théorème ergodique on a donc, presque sûrement

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \text{Log} \left\| \begin{bmatrix} A-CHA & [K-CHK]X_i \\ -HA & -CHA \end{bmatrix} \right\| = E \left\{ \text{Log} \left\| \begin{bmatrix} A-CHA & [K-CHK]X_0 \\ -HA & -CHA \end{bmatrix} \right\| \right\} < 0$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \prod_{i=0}^{t-1} \left\| \begin{bmatrix} A-CHA & [K-CHK]X_i \\ -HA & -CHA \end{bmatrix} \right\| = 0 .$$

Et comme (à cause de la stationnarité) la loi de $[HA \ HKX_{t-1}]$ ne dépend

pas de t , il s'ensuit que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (e_t^v - e_t) = 0 \text{ en probabilité. } \blacksquare$$

Remarquons que si $E \left\| \begin{bmatrix} A-CHA & [K-CHK]X_0 \\ -HA & -CHA \end{bmatrix} \right\|^2 = \text{tr}[A-CHA][A-CHA]' +$
 $+ EX_0^2 \text{tr}[K-CHK][K-CHK]' + [HA][HA]' + EX_0^2 \text{tr}[HK][HK]' < 1$

alors $E \left\| \begin{bmatrix} A-CHA & [K-CHK]X_0 \\ -HA & -CHA \end{bmatrix} \right\| < 1 .$

III. FILTRAGE NON LINEAIRE OPTIMAL. (1)

Si la matrice B est de la forme $B = KH$ où K est un vecteur colonne $r \times 1$, le modèle (4) se met sous la forme (6) qui est du type du modèle (5) introduit au paragraphe III du Chapitre I.

On note (G) l'hypothèse :

(G) $(e_t; t \in \mathbb{N})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées selon une loi gaussienne centrée de variance $Q_e > 0$. On a alors le résultat

Proposition.

Si $B = KH$, si l'hypothèse (G) est satisfaite et si l'état initial Y_0 est un vecteur aléatoire gaussien indépendant de la suite $(e_t; t \in \mathbb{N})$, alors le filtre optimal \hat{Y}_t de Y_t au vu de $X[0, t]$ dans le modèle (4) est fourni par :

$$\hat{Y}_t = [I_r \ 0] \hat{Z}_t$$

où $(\hat{Z}_t; t \geq 0)$ est défini par les équations de récurrence :

$$\begin{aligned} \hat{Z}_t = & \begin{bmatrix} A & KX_{t-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{Z}_{t-1} + \left\{ \begin{bmatrix} A & KX_{t-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{t-1} [HA \ HKX_{t-1}]' + \begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \times \\ & \times \{ [HA \ HKX_{t-1}] \Gamma_{t-1} [HA \ HKX_{t-1}]' + HC \} \{ X_t - [HA \ HAX_{t-1}] \hat{Z}_{t-1} \}; t \geq 1 \end{aligned}$$

et

$$\Gamma_t = \begin{bmatrix} A & KX_{t-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{t-1} \begin{bmatrix} A & KX_{t-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} CC' & C \\ C' & 1 \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} A & KX_{t-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{t-1} [HA \ HKX_{t-1}]' + \begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \times$$

(1) La structure au second ordre de (Y_t) ne conduit pas ici à une représentation linéaire de ce processus et à la solution correspondante du problème de filtrage linéaire.

$$\times \{ [HA \ HKX_{t-1}] \Gamma_{t-1} [HA \ HKX_{t-1}]' + HC \} + \left\{ \begin{bmatrix} A & KX_{t-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma_{t-1} [HA \ HKX_{t-1}]' + \begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix} \right\}' ; t$$

avec $\hat{Z}_0 = m_Z(0) + C_Z(0,0)[H \ 0]' \{ [H \ 0] C_Z(0,0)[H \ 0]' \}^+ (X_0 - [H \ 0] m_Z(0)) ;$

$$\Gamma_0 = C_Z(0,0) - C_Z(0,0)[H \ 0]' \{ [H \ 0] C_Z(0,0)[H \ 0]' \}^+ [H \ 0]' \}^+ [H \ 0] C_Z(0,$$

$$m_Z(0) = \begin{bmatrix} m(0) \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad C_Z(0,0) = \begin{bmatrix} C(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Démonstration.

Il est clair que le filtre optimal \hat{Y}_t de Y_t se déduit du filtre optimal \hat{Z}_t de Z_t par $\hat{Y}_t = [I_r \ 0] \hat{Z}_t$. Or dans le modèle (6), d'après la Proposition II.1.1., les moments d'ordre 2, $E\{ \|Z_t\|^2 + X_t^2 \}$, existent et donc les conséquences des hypothèses (i) - (ii) du Théorème III.1.3 du Chapitre I utiles à sa démonstration (cf. R.CH. LIPTSER et A.N. SHYRIAIEV (1978)) sont satisfaites. Enfin sous les hypothèses faites, la loi du vecteur

aléatoire $\begin{pmatrix} Z_0 \\ X_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ e_0 \\ HY_0 \end{pmatrix}$ est gaussienne et donc la loi conditionnelle

$P[Z_0 \in . / X_0]$ est gaussienne. Ainsi les conclusions du Théorème III.1.3 du Chapitre I sont valables pour le filtre optimal de Z_t ; elles se traduisent immédiatement comme dans l'énoncé. ■

IV. ETUDE D'UN MODELE PARTICULIER DE SERIE CHRONOLOGIQUE UNIDIMENSIONNELLE

Nous considérons ici le cas particulier du modèle de série chronologique scalaire correspondant à la situation (4') où

$$r = 1, A = a, B = b, H = C = 1 \text{ i.e}$$

$$(7) \quad X_t = aX_{t-1} + bX_{t-1} e_{t-1} + e_t; t \in \mathbb{Z}.$$

Les résultats concernant la stationnarité stricte et l'inversibilité sont plus précis que dans le cas vectoriel $r > 1$; on étudie le problème de l'existence des moments d'ordre supérieur à deux d'une solution stationnaire dans le cas où les variables (e_t) sont gaussiennes. On s'intéresse au problème statistique d'estimation des paramètres du modèle.

IV.1. Stationnarité stricte, Moments.

Soit (H) l'hypothèse introduite dans le paragraphe IV du Chapitre II, à savoir : la loi commune aux variables aléatoires (e_t) n'est pas concentrée en une ou deux valeurs.

T.D. PHAM et L.T. TRAN (1981) ont démontré les résultats suivants :

IV.1.1. Théorème.

(1) Supposons que (e_t) est une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées telle que l'hypothèse (H) est satisfaite. Alors si $|a| < 1$ et $a^2 + b^2 Q_e \leq 1$ il existe un processus stationnaire (X_t) vérifiant l'équation (7) uniquement déterminé par

$$(8) \quad X_t = e_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{k=1}^j [a + b e_{t-k}] \right\} e_{t-j}$$

(2) e_t du second-ordre.

où la série du second membre converge presque sûrement et si $a^2 + b^2 Q_e < 1$ la convergence a lieu aussi en moyenne quadratique.

IV.1.2. Théorème.

Supposons que les hypothèses du Théorème IV.1.1 sont satisfaites et que e_t admet des moments jusqu'à l'ordre 4. Alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution stationnaire (X_t) de (7) qui soit un processus du second-ordre est que $a^2 + b^2 Q_e < 1$ auquel cas le processus (X_t) est uniquement déterminé par (8) où la série du second membre est convergente presque sûrement et en moyenne quadratique.

Quant à l'inversibilité, on a :

IV.1.3. Théorème.

Supposons que les hypothèses du Théorème IV.1.1 sont satisfaites. Alors le modèle (7) est inversible ou non (au sens de la convergence presque sûre) selon que $E \text{Log} |bX_0|$ est strictement négatif ou strictement positif. Dans le premier cas, on a la représentation

$$e_t = X_t - \sum_{j=1}^{\infty} (-b)^{j-1} \left\{ \prod_{k=1}^j X_{t-k} \right\} \{ a + bX_{t-j} \}$$

où la série du second membre converge presque sûrement.

Remarquons que si on prend $r = 1$, $A = a$, $K = b$, $H = C = 1$ dans la Proposition II.2.3, la condition d'inversibilité devient $E |bX_0| < 1$. Comme d'après l'inégalité de Jensen $E \text{Log} |bX_0| < \text{Log} E |bX_0|$, si $E |bX_0| < 1$ alors $E \text{Log} |bX_0| < 0$.

Abordons maintenant le problème d'existence des moments d'ordre

supérieur à deux.

On note, lorsqu'il existe, μ_n le moment non centré d'ordre n de la variable X_t . On a alors le résultat :

IV.1.4. Proposition.

Sous l'hypothèse (G) (cf. paragraphe III) et les hypothèses du Théorème IV.1.1 si le moment d'ordre n existe, on a alors :

$$\mu_0 = 1 ;$$

$$\mu_n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} E U_0^l E e_0^{n-l} ; n \geq 1$$

où

$$U_0 = (a + b e_0) X_0$$

et

$$E U_0^l = \frac{1}{1 - E(a + b e_0)^l} \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} E \{ (a + b e_0)^l e_0^{l-k} \} E U_0^k ; l \geq 1 ,$$

$$E U_0 = \frac{b Q_e}{1 - a} .$$

Démonstration.

Si on pose $U_t = (a + b e_t) X_t$, le modèle (7) admet la représentation suivante :

$$\begin{cases} X_t = U_{t-1} + e_t \\ U_t = (a + b e_t) U_{t-1} + (a + b e_t) e_t \end{cases}$$

d'où

$$X_t^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} U_{t-1}^\ell e_t^{n-\ell}$$

et

$$E X_t^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} E_{t-1}^\ell E e_t^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} E_0^\ell E_0^{n-\ell}.$$

Comme

$$\begin{aligned} U_{t-1}^\ell &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (a + b e_{t-1})^k U_{t-2}^k (a + b e_{t-1})^{\ell-k} e_{t-1}^{\ell-k} ; \ell \geq 1 \\ &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (a + b e_{t-1})^\ell e_{t-1}^{\ell-k} U_{t-2}^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } E U_{t-1}^\ell &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} E \{ (a + b e_{t-1})^\ell e_{t-1}^{\ell-k} \} E U_{t-2}^k \\ &= \frac{1}{1 - E(a + b e_{t-1})^\ell} \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{k} E \{ (a + b e_{t-1})^\ell e_{t-1}^{\ell-k} \} E U_{t-2}^k \\ &= \frac{1}{1 - E(a + b e_0)^\ell} \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{k} E \{ (a + b e_0)^\ell e_0^{\ell-k} \} E U_0^k . \blacksquare \end{aligned}$$

Il est clair que le moment non centré d'ordre n , μ_n , existe si on a $E(a + b e_0)^\ell < 1$ pour $\ell = 1, \dots, n$. De plus on peut déterminer explicitement $E(a + b e_0)^\ell$ pour $\ell = 1, \dots, n$. En particulier μ_3 existe si $1 - a(a^2 + 3b^2 Q_e) > 0$ et alors

$$\mu_1 = b Q_e \cdot [1 - a]^{-1}$$

$$\mu_2 = Q_e [1 + 2b^2 Q_e + 4ab^2 Q_e \cdot [1 - a]^{-1}] [1 - a^2 - b^2 Q_e]^{-1}$$

$$\mu_3 = 3bQ_e^2 [[3a^2 + 5b^2 Q_e] + [1 + 6ab^2 Q_e] [1-a]^{-1} + 3[a^2 + b^2 Q_e] [a^2 + 3b^2 Q_e + 4ab^2 Q_e [1-a]^{-1}] [1-a^2 - b^2 Q_e]^{-1}] [1-a[a^2 + 3ab^2 Q_e]]^{-1} .$$

Remarquons alors que les frontières de domaines de valeurs de $(a, b Q_e^{1/2})$ à l'intérieur desquels les moments μ_{2n} existent pour $n = 1, 2, 3$ sont identiques à celles obtenues pour le modèle (7') du Chapitre II (cf. Figure dans le paragraphe IV du Chapitre II).

IV.2. Estimation des paramètres.

Nous décrivons ici brièvement l'approche proposée par T.D. PHAM et L.T. TRAN (1981) pour le problème de l'estimation des paramètres a et b du modèle (7) au vu de l'observation d'une trajectoire X_0, \dots, X_t, \dots du processus stationnaire solution.

On suppose que la vraie valeur $\theta_0 = (a_0, b_0)$ du paramètre $\theta = (a, b)$ est telle que

$$(10) \quad |b_0| < \exp \{ -E_{\theta_0} \text{Log} |X_0| \} - \delta/2$$

$$(i.e. E_{\theta_0} \text{Log} [(\delta/2 + |b_0|) |X_0|] < 0)$$

On définit alors une suite $(\Theta_n ; n \geq 0)$ d'ensembles aléatoires par

$$\Theta_n = \{ (a, b) : |a| \leq 1, |b| \leq [\prod_{t=0}^n X_t]^{-1/n+1} - \delta \}$$

et on appelle estimateur des moindres carrés modifiés au vu de l'observation X_0, \dots, X_n un estimateur $\hat{\theta}_n$ solution du problème

$$(11) \quad \text{Min} \{ \sum_{t=0}^n e_{\theta}^2(t, X_0, \dots, X_t/u) ; \theta \in \Theta_n \}$$

où la suite $(e_{\theta}(t, X_0, \dots, X_t/u); t \geq 0)$ est définie par :

$$e_{\theta}(t, X_0, \dots, X_t/u) = X_t - U_{t-1} \quad ; \quad t \geq 1$$

$$U_t = \{a+bX_t\}X_t - bX_t U_{t-1} \quad ; \quad t \geq 1 ; U_0 = u ,$$

u étant une valeur réelle arbitraire.

T.D. PHAM et L.T. TRAN (1981) ont démontré le résultat suivant :

IV.2.1. Théorème.

Si la condition (10) est vérifiée, alors la suite d'estimateurs $(\hat{\theta}_n; n \geq 0)$ définie par (11) converge presque sûrement.

IV.2.2. Remarques.

(a) La question de la normalité asymptotique de cet estimateur reste posée, les méthodes standards d'étude de cette propriété ne pouvant ici être utilisées.

(b) On peut bien sûr envisager d'utiliser des estimateurs construits par la méthode des moments.

CHAPITRE IV

ETUDE DU MODELE BILINEAIRE

$$Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} u_t^1 + C u_t^2 \quad ; \quad X_t = HY_t$$

Dans ce chapitre nous nous intéressons à un type de modèle faisant partie de la famille de ceux décrits dans l'introduction du Chapitre II, proposés initialement dans un cadre déterministe.

Dans le Chapitre II nous avons considéré le cas d'une entrée unidimensionnelle agissant à la fois de manière multiplicative et de manière additive sur l'état du système. Ici nous étudions dans le cadre déterministe d'une part et dans le cadre stochastique d'autre part, la situation d'une entrée bidimensionnelle dont une composante agit multiplicativement et l'autre agit additivement. La version stochastique de ce modèle fait partie de la famille des modèles étudiés dans la littérature sous le nom de modèles autorégressifs à coefficients aléatoires (cf. D.F. NICHOLLS and B.G. QUINN (1980, 1981 a), b), 1982).

I. ETUDE DES PROBLEMES DE NATURE DETERMINISTE.

Le système considéré ici est décrit par le modèle

$$(1) \quad \begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} u_t^1 + C u_t^2 ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = HY_t ; t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où l'entrée bidimensionnelle $u_t = (u_t^1, u_t^2)'$ est déterministe, A et B sont des matrices $r \times r$, C est un vecteur colonne $r \times 1$ et H est un vecteur ligne $1 \times r$.

Par commodité nous imposerons parfois la condition $HC = 1$ qui, remarquons-le, n'est pas vraiment restrictive car si elle n'est pas satisfaite mais que $HC \neq 0$, le changement de B, C et u_t^2 en $(HC)^{-1}B$, $(HC)^{-1}C$ et $HC u_t^2$ respectivement permet de s'y ramener.

I.1. Contrôlabilité déterministe.

Il est évident qu'une condition suffisante pour la contrôlabilité du système déterministe décrit par le modèle bilinéaire (1) est que le couple $[A, C]$ soit contrôlable.

I.2. Observabilité déterministe.

Le système déterministe décrit par le modèle bilinéaire (1) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} u_t^1 + [0, C] u_t^2 ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = HY_t ; t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et les résultats concernant l'observabilité peuvent se déduire aisément de ceux de S. HARA et K. FURUTA (1977).

a) Observabilité avec quelques entrées connues.

On a la représentation suivante de l'état (Y_t^u) et de la sortie

(X_t^u) du modèle (1) correspondant à la suite d'entrées $u = (u_t)$: posant

$$\xi_t^u = A \xi_{t-1}^u + B \xi_{t-1}^u u_t^1 + [0, C] u_t ; t \geq 1 \quad , \quad \xi_0^u = 0$$

$$A_{u_t} = A + B u_t^1 ; t \geq 1$$

et

$$\begin{cases} \bar{Y}_t^u = A_{u_t} \bar{Y}_{t-1}^u ; t \geq 1 ; \bar{Y}_0 = Y_0 \\ \bar{X}_t^u = H \bar{Y}_t^u ; t \geq 0 \end{cases}$$

on a $Y_t^u = \bar{Y}_t^u + \xi_t^u ; X_t^u = \bar{X}_t^u + H \xi_t^u ; t \geq 0 .$

On voit alors que la propriété d'observabilité avec les entrées $u(1), \dots, u(q)$ connues pour le modèle (1) est liée à la propriété d'observabilité pour un modèle (linéaire non autonome sans entrée) de la forme :

$$\begin{cases} \tilde{Y}_t = \tilde{A}(t) \tilde{Y}_{t-1} \\ \tilde{X}_t = \tilde{H} \tilde{Y}_t \end{cases}$$

où $\tilde{A}(t)$ est la matrice d'ordre $qr \times qr$: $\tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} A_{u_t(1)} & & & 0 \\ & A_{u_t(2)} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & A_{u_t(q)} \end{bmatrix}$

et \tilde{H} est la matrice d'ordre $q \times qr$: $\tilde{H} = \begin{bmatrix} H & & & 0 \\ & H & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & H \end{bmatrix}$

Par suite on est conduit à définir pour chaque u et $j \geq 1$ la matrice

$N(u, j)$ d'ordre $j \times r$: $N(u, j) = \begin{bmatrix} HR(u, 0) \\ \vdots \\ HR(u, j) \end{bmatrix}$ et pour toute famille

$u(1), \dots, u(q)$ et $j \geq 1$ la matrice $\mathcal{N}(u(1), \dots, u(q), j)$ d'ordre

$$jq \times r : \mathcal{N}(u(1), \dots, u(q), j) = \begin{bmatrix} N(u(1), j) \\ \vdots \\ N(u(q), j) \end{bmatrix} \quad \text{où } R(u, \ell) = \begin{cases} I_r & \text{si } \ell = 0 \\ A_{u_\ell} \dots A_{u_1} & \text{si } \ell \geq 1 \end{cases}$$

On a alors la condition nécessaire et suffisante :

I.2.1. Proposition.

Le système déterministe décrit par le modèle bilinéaire (1) est observable avec quelques entrées connues si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

(i) il existe un entier q et des suites d'entrées $u(1) [1, r], \dots, u(q) [1, r]$, tels que $\text{rg } \mathcal{N}(u(1), \dots, u(q), r) = r$

(ii) le rang de la matrice $(2r-1) \times r$ $\begin{bmatrix} H \\ HA \\ HB \\ \vdots \\ HA^{r-1} \\ HB^{r-1} \end{bmatrix}$ est r .

I.2.2. Exemples.

(a) Il est clair que dans le cas linéaire i.e $B = 0$ la condition (ii) se réduit au critère d'observabilité du couple $[A, H]$.

(b) Le système déterministe décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} Y_{t-1} u_t^1 + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} u_t^2 ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = [0, 1] Y_t ; t \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

avec $a_2 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$ est observable avec quelques entrées connues.

En effet on vérifie facilement la condition (11) i.e

$$\text{rg} \begin{bmatrix} HA \\ HA \\ HB \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} = 2 .$$

b) Observabilité avec n'importe quelle entrée connue.

Soit \bar{H} une matrice d'ordre $(r-1) \times r$ telle que la matrice d'ordre $r \times r$ $\begin{bmatrix} H \\ \bar{H} \end{bmatrix}$ soit inversible et $\begin{bmatrix} H \\ \bar{H} \end{bmatrix}^{-1} = [K, \bar{K}]$ où K est d'ordre $r \times 1$ et \bar{K} d'ordre $r \times (r-1)$. On peut alors définir

$$\begin{bmatrix} X_t \\ \bar{X}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ \bar{H} \end{bmatrix} Y_t \quad \text{ou} \quad Y_t = [K, \bar{K}] \begin{bmatrix} X_t \\ \bar{X}_t \end{bmatrix} = KX_t + \bar{K}\bar{X}_t .$$

On peut alors réécrire le modèle (1) sous la forme

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} Y_t = AY_{t-1} + B\bar{K}\bar{X}_{t-1} u_t^1 + BKX_{t-1} u_t^1 + [0, C] u_t^2 \\ X_t = HY_t . \end{array} \right.$$

Lorsque la suite (u_t) est connue dans la représentation (2), les termes $BKX_{t-1}u_t^1$ et $[0,C]u_t$ sont connus, seul le terme $B\bar{K}\bar{X}_{t-1}u_t^1$ est inconnu ; on voit donc que la propriété d'observabilité avec n'importe quelle entrée connue dans (1) est liée à la propriété d'observabilité avec entrée inconnue dans un modèle linéaire autonome de la forme :

$$\begin{cases} \tilde{Y}_t = A\tilde{Y}_{t-1} + BKv_t \\ \tilde{X}_t = H\tilde{Y}_t \end{cases}$$

où (v_t) est une suite d'entrées de dimension $(r-1)$ (cf. Proposition I.2.6 du Chapitre I).

On a la condition suffisante :

I.2.3. Proposition.

Si le couple $[A,H]$ est observable et $HA^jB\bar{K} = 0$ pour $j = 0, \dots, r-2$ alors le système décrit par le modèle bilinéaire (1) est observable avec n'importe quelle entrée connue.

I.2.4. Exemples.

(a) Il est clair que dans le cas linéaire i.e $B = 0$ la condition se réduit au critère d'observabilité du couple $[A,H]$: $\text{rg } O_r = r$.

(b) Le système déterministe décrit par :

$$\begin{cases} Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} Y_{t-1} u_t^1 + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} u_t^2 ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = [1, -1] Y_t ; t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

avec $a_1 \neq a_2$, $a_1 a_2 \neq 0$ et $b_1 b_2 \neq 0$ est observable avec n'importe quelle entrée connue.

En effet on vérifie facilement qu'on a :

$$\text{rg} \begin{bmatrix} H \\ HA \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a_1 & -a_2 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{et} \quad HB\bar{K} = 0 .$$

c) Observabilité avec entrée inconnue.

La propriété d'observabilité avec entrée inconnue dans (1) est liée à la même propriété dans un modèle linéaire autonome du type :

$$\begin{cases} \tilde{Y}_t = A\tilde{Y}_{t-1} + [B, C]\omega_t \\ \tilde{X}_t = H\tilde{Y}_t \end{cases}$$

où (ω_t) est une suite d'entrées de dimension $r+1$ (cf. Proposition I.2.6 du Chapitre I).

On a la condition suffisante :

I.2.5. Proposition.

Si le couple $[A, H]$ est observable et $HA^j[B; C] = 0$ pour $j = 0, \dots, r-2$ alors le système décrit par le modèle bilinéaire (1) est observable avec entrée inconnue.

I.2.6. Exemples.

(a) Dans le cas linéaire i.e $B = 0$, on voit que la condition n'est

autre que celle de la Proposition I.2.6 du Chapitre I.

(b) Le système déterministe décrit par :

$$\begin{cases} Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} Y_{t-1} u_t^1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_t^2 ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = [1, -1] Y_t ; t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

avec $a_1 \neq a_2$, $a_1 a_2$ non nul et $b_1 b_2$ non nul est observable avec entrée inconnue.

En effet on vérifie facilement qu'on a :

$$\text{rg} \begin{bmatrix} H \\ HA \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a_1 & -a_2 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{et} \quad H[B, C] = 0 .$$

I.3. Identifiabilité partielle d'une entrée déterministe.

Soit $j \geq 1$ et Q une matrice quelconque d'ordre $l \times j$. On a la condition suffisante suivante :

I.3.1. Proposition.

Si $HC \neq 0$ et si $u^1[1, j]$ est connue, l'entrée $u^2[1, j]$ est partiellement Q -identifiable dans le modèle défini par (1).

Démonstration.

Il suffit bien sûr de montrer le résultat pour $Q = I_j$.

On a (supposant $HC = 1$) pour tout $t \geq 1$

$$X_t = HAY_{t-1} + HBY_{t-1} u_t^1 + u_t^2$$

d'où

$$u_t^2 = X_t - HAY_{t-1} - HBY_{t-1} u_t^1 .$$

Alors connaissant X_1, Y_0 et u_1^1 on sait calculer u_1^2 . Puis on peut calculer

$$Y_1 = AY_0 + BY_0 u_1^1 + Cu_1^2$$

et u_2^2 en fonction de X_1, X_2, Y_0, u_1^1 et u_2^1 par :

$$u_2^2 = X_2 - HAY_1 - HBY_1 u_2^1 .$$

Une récurrence permet alors de montrer le résultat annoncé. ■

I.3.2. Exemples.

(a) Dans le cas linéaire i.e $B = 0$, la condition $HB = 0$ est évidemment satisfaite et l'énoncé assure que dès que $HC \neq 0$ l'entrée est identifiable.

(b) Dans le système déterministe décrit par

$$\begin{cases} Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} Y_{t-1} u_t^1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t^2 ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = [1, -1] Y_t ; t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

l'entrée $u^2[1,j]$ est I_j -identifiable si $u^1[1,j]$ est connue.
En effet on a :

$$HC = [1, -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 .$$

II. CARACTERISTIQUES DU SECOND-ORDRE ET STATIONNARITES.

Dans ce paragraphe on considère le système stochastique décrit par l'analogie du modèle (1) i.e

$$(3) \begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1}e_t + Cf_t ; t \in \mathbb{N}^* ; Y_0 \text{ donné} \\ X_t = HY_t ; t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{ou (3')} \begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1}e_t + Cf_t \\ X_t = HY_t \end{cases} ; t \in \mathbb{Z}$$

où (e_t) et (f_t) sont deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes, équidistribuées de moyennes nulles et de variances respectives $Q_e > 0$ et $Q_f > 0$. Notons que ce modèle recouvre par exemple le modèle de série chronologique unidimensionnelle

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{k=1}^q b_k X_{t-k} e_t + f_t ; t \in \mathbb{Z}.$$

En effet (X_t) peut se représenter comme l'observation dans un modèle du type (3') où l'état r -dimensionnel $Y_t = (X_t, \dots, X_{t-r+1})'$ avec $r = \max(p, q)$ évolue selon l'équation

$$Y_t = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_r \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_r \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} Y_{t-1} e_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} f_t$$

(avec la convention que $a_j = 0$ si $j > p$ et $b_k = 0$ si $k > q$)
l'équation d'observation étant

$$X_t = H Y_t$$

où H est le vecteur ligne $1 \times r$: $H = (1 \ 0 \dots 0)$.

Nous étudions les modèles (3) - (3') pour des matrices A, B et des vecteurs C, H arbitraires. Par commodité nous imposerons encore parfois la condition $HC = 1$.

II.1. Caractéristiques du second-ordre - Stationnarité au second-ordre.

Le résultat suivant montre que la structure au second-ordre dans le modèle bilinéaire (3) est semblable à celle correspondant au modèle linéaire (cf. Théorème II.1.2 du Chapitre I) et à celle correspondant au modèle bilinéaire étudié dans le Chapitre II (cf. Proposition II.1.1 du Chapitre II).

II.1.1. Proposition.

(¹) Si $(Y_0, e_t, f_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ est une suite d'éléments aléatoires indépendants, alors le processus solution du modèle (3) est du second-ordre et on a :

$$m_Y(t) = A^t m(0) \quad ; \quad m_X(t) = H A^t m(0) \quad ; \quad t \in \mathbb{N} ,$$

$$C_Y(t, s) = \begin{cases} A^{t-s} C_Y(s, s) & \text{si } t \geq s \geq 0 \\ C_Y(t, t) (A')^{s-t} & \text{si } 0 \leq t \leq s \end{cases}$$

et $C_X(t, s) = H C_Y(t, s) H'$; $(t, s) \in \mathbb{N}^2$

avec

$$C_Y(t, t) = A C_Y(t-1, t-1) A' + Q_e B C_Y(t-1, t-1) B' + Q_e B m_Y(t-1) m_Y'(t-1) B' + Q_f C C' \quad ; \quad t \in \mathbb{N}^*$$

(¹) v_0 du second-ordre

$$C_Y(0,0) = C(0) .$$

On omet la démonstration qui est en tous points analogue à celle de la Proposition II.1.1 du Chapitre II.

On déduit immédiatement de la Proposition précédente et de la Proposition II.1.3 du Chapitre I :

II.1.2. Proposition.

Sous les hypothèses de la Proposition II.1.1, si $m(0) = 0$ et si le couple $[A,C]$ est contrôlable, alors la matrice de covariance $C_Y(t,t)$ est définie positive pour $t \geq r$.

On donne maintenant une caractérisation de la stationnarité au second-ordre qui recoupe les résultats de D.F. NICHOLLS et B.G. QUINN (1981 a)).

II.1.3. Proposition.

Sous les hypothèses de la Proposition II.1.1, une condition nécessaire et suffisante pour que le processus d'état $(Y_t ; t \geq 0)$ satisfaisant à (3) soit stationnaire au second-ordre est que le vecteur $m(0)$ vérifie

$$A m(0) = m(0)$$

et que la matrice $C(0)$ soit solution de l'équation matricielle

$$(4) \quad \Gamma = A \Gamma A' + Q_e B \Gamma B' + Q_e B m(0) m'(0) B' + Q_f C C' .$$

Alors la fonction de covariance du processus (Y_t) est donnée par

$$R_Y(h) = \begin{cases} A^h \Gamma & \text{si } h \geq 0 \\ \Gamma(A')^{|h|} & \text{si } h \leq 0 . \end{cases}$$

Notons que l'équation matricielle (4) peut s'écrire sous la forme

$$\text{vec } \Gamma = \{A \otimes A + Q_e B \otimes B\} \text{vec } \Gamma + Q_e \text{vec } (B m(0) m'(0) B') + Q_f \text{vec } C C' .$$

On voit alors que si les valeurs propres de la matrice $A \otimes A + Q_e B \otimes B$ sont toutes de module strictement inférieur à 1, l'équation (4) admet une solution unique dans l'ensemble des matrices symétriques semi-définies positives. Si de plus le couple $[A, C]$ est contrôlable alors, d'après la Proposition II.1.2, cette solution est définie positive.

II.2. Stationnarité stricte.

En ce qui concerne la stationnarité stricte dans le modèle (3') on a le résultat :

II.2.1. Proposition.

Si les suites $(e_t ; t \in \mathbb{Z})$ et $(f_t ; t \in \mathbb{Z})$ sont deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes équidistribuées et si les valeurs propres de la matrice $A \otimes A + Q_e B \otimes B$ sont toutes de module strictement inférieur à 1 alors le modèle (3') admet une solution stationnaire $((Y_t, X_t) ; t \in \mathbb{Z})$ uniquement déterminée par

$$Y_t = C f_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{k=0}^{j-1} [A + B e_{t-k}] \right\} C f_{t-j} ; X_t = H Y_t ; t \in \mathbb{Z}$$

où la série précédente est convergente en moyenne quadratique.

On omet la démonstration qui est en tous points analogue à celle de la Proposition II.2.1 du Chapitre II.

II.2.2. Remarques.

(a) Il est clair que le processus solution est aussi stationnaire au second-ordre centré dont la structure de covariance est donnée dans la Proposition II.1.3.

(b) Remarquons aussi que lorsqu'une solution stationnaire existe pour le modèle (3'), le processus (Y_t) défini par (3) est un processus de Markov d'ordre 1 stationnaire lorsque l'état initial Y_0 est une variable aléatoire indépendante de $(e_t; t \in \mathbb{N}^*)$ et de $(f_t; t \in \mathbb{N}^*)$ et distribuée selon la loi commune aux états d'une solution stationnaire de (3').

(c) Notons enfin que nous n'envisageons pas ici le problème de l'inversibilité du modèle (3') : en effet nous sommes en présence d'une situation où l'entrée est bidimensionnelle alors que l'observation est unidimensionnelle.

III. FILTRAGE LINEAIRE ET FILTRAGE NON LINEAIRE.

On aborde ici le problème de filtrage dans le modèle (3) défini au paragraphe II précédent.

III.1. Filtrage linéaire optimal.

On démontre un résultat préliminaire :

III.1.1. Proposition.

Sous les hypothèses de la Proposition II.1.1, il existe une suite $(e_t^* ; t \in \mathbb{N}^*)$ de vecteurs aléatoires dans \mathbb{R}^r centrés, de matrice de covariance I_r , deux à deux non corrélés, non corrélés avec Y_0 , telle que le processus solution du modèle (3) admette la représentation linéaire :

$$\begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + \Sigma_{t-1}^{1/2} e_t^* \\ X_t = HAY_{t-1} + H\Sigma_{t-1}^{1/2} e_t^* ; t \in \mathbb{N}^* ; X_0 = HY_0 \end{cases}$$

où

pour $t \in \mathbb{N}$ $\Sigma_t^{1/2}$ est une matrice d'ordre $r \times r$ telle que

$$(5) \quad \Sigma_t^{1/2} . (\Sigma_t^{1/2})' = \Sigma_t = Q_e BC_Y(t,t)B' + Q_e B m_Y(t-1)m_Y'(t-1)B' + Q_f CC' .$$

Démonstration.

On a pour tout $t \geq 1$

$$E\{[BY_{t-1}e_t + Cf_t]\} = 0$$

et

$$\begin{aligned} E\{[BY_{t-1}e_t + Cf_t][BY_{t-1}e_t + Cf_t]'\} &= Q_e BE\{Y_{t-1}Y_{t-1}'\}B' + Q_f CC' \\ &= Q_e BC_{Y(t-1,t-1)}B' + Q_e B m_Y(t-1)m_Y'(t-1)B' + Q_f CC' \\ &= \Sigma_{t-1} . \end{aligned}$$

On a aussi pour $t > s \geq 1$

$$E\{[BY_{t-1}e_t + Cf_t][BY_{s-1}e_s + Cf_s]'\} = 0 .$$

Alors si Σ_t est définie positive pour $t \in \mathbb{N}$, définissant

$$e_t^* = \Sigma_{t-1}^{-1/2} [BY_{t-1}e_t + Cf_t] \quad \text{il est clair qu'on a la représentation annoncée.}$$

Si Σ_t pour $t \in \mathbb{N}$ n'est pas toujours définie positive, définissons

$$e_t^* = [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+ [BY_{t-1}e_t + Cf_t] + [I_r - [\Sigma_{t-1}^{1/2}] [\Sigma_{t-1}^{1/2}]^+] \tilde{e}_t ; t \geq 1$$

où $(\tilde{e}_t ; t \geq 1)$ est une suite de vecteurs aléatoires centrés dans \mathbb{R}^r tels que $\text{cov}(\tilde{e}_t, \tilde{e}_s) = \delta_{t,s} I_r$, non corrélée avec $(Y_t ; t \in \mathbb{N})$.

(Une telle suite (e_t) existe pourvu que l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) soit "suffisamment riche"; si ce n'est pas le cas on peut toujours s'y ramener en "augmentant" convenablement cet espace).

Ensuite compte tenu des hypothèses concernant les suites $(e_t ; t \geq 1)$, $(f_t ; t \geq 1)$ et $(\tilde{e}_t ; t \geq 1)$ et des propriétés des matrices pseudo-inverses : il est facile de vérifier (cf. Démonstration de la Proposition III.1.1 du Chapitre II) que $(e_t^* ; t \geq 1)$ satisfait aux conditions de l'énoncé. ■

Remarquons que dans le cas particulier où le processus solution de (3) est stationnaire au second-ordre (cf. Proposition II.1.3), il admet

la représentation

$$\begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + \Sigma^{1/2} e_t^* \\ X_t = HAY_{t-1} + H\Sigma^{1/2} e_t^* ; t \in \mathbb{N}^* ; X_0 = HY_0 \end{cases}$$

où $\Sigma^{1/2}$ est une matrice d'ordre $r \times r$ telle que

$$(5') \quad \Sigma^{1/2} . (\Sigma^{1/2})' = \Sigma = Q_e B C_Y(0,0) B' + Q_e B m_Y(0) m_Y'(0) B' + Q_f C C' .$$

On est maintenant en mesure de démontrer :

III.1.3. Proposition.

Sous les hypothèses de la Proposition II.1.1 le filtre linéaire optimal \hat{Y}_t^ℓ de Y_t au vu de $X[0,t]$ dans le modèle (3) est fourni par les équations de récurrence

$$\hat{Y}_t^\ell = A \hat{Y}_{t-1}^\ell + [\Sigma_{t-1} H' + A \gamma_{t-1}^\ell A' H'] [H \Sigma_{t-1} H' + H A \gamma_{t-1}^\ell A' H']^+ [X_t - H A \hat{Y}_{t-1}^\ell] ; t \geq 1$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_t^\ell &= A \gamma_{t-1}^\ell A' + \Sigma_{t-1} - \\ &- [\Sigma_{t-1} H' + A \gamma_{t-1}^\ell A' H'] [H \Sigma_{t-1} H' + H A \gamma_{t-1}^\ell A' H']^+ [\Sigma_{t-1} H' + A \gamma_{t-1}^\ell A' H']' ; t \geq 1 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \hat{Y}_0^\ell = m_Y(0) + C_Y(0,0) H' [H C_Y(0,0) H']^+ (X_0 - H m_Y(0))$$

$$\gamma_0^\ell = C_Y(0,0) - C_Y(0,0) H' [H C_Y(0,0) H']^+ H C_Y(0,0) ,$$

la suite $(\Sigma_t ; t \geq 0)$ étant définie par (5).

Démonstration.

Le résultat est une conséquence immédiate du Corollaire III.1.5 du Chapitre I et de la Proposition III.1.1 précédente. ■

Dans le cas particulier où le processus solution est stationnaire au second-ordre, il est possible d'étudier le comportement asymptotique de la matrice

$$\gamma_t^t = E \{ (Y_t - \hat{Y}_t^t)(Y_t - \hat{Y}_t^t)' \} .$$

Du Théorème III.1.6 du Chapitre I on déduit :

III.1.4. Proposition.

Supposons les hypothèses de la Proposition III.1.1 satisfaites et le processus solution stationnaire au second-ordre.

Si $H \Sigma H' > 0$, si le couple $(A - \Sigma H' (H \Sigma H')^{-1} H A, H A)$ est observable et si le couple $(A - \Sigma H' (H \Sigma H')^{-1} H A, [\Sigma - \Sigma H' (H \Sigma H')^{-1} H \Sigma]^{1/2})$ est contrôlable où Σ est définie par (5'), alors la suite $(\gamma_t^t; t \geq 1)$ a une limite γ^* telle que $\text{Tr } \gamma^* < +\infty$ qui est l'unique solution (dans la classe des matrices symétriques définies positives) de l'équation matricielle

$$\begin{aligned} \gamma = & [A - \Sigma H' (H \Sigma H')^{-1} H A] \gamma [A - \Sigma H' (H \Sigma H')^{-1} H A]' + [\Sigma - \Sigma H' (H \Sigma H')^{-1} H \Sigma] - \\ & - [A - \Sigma H' (H \Sigma H')^{-1} H A] \gamma [H A]' \{ [\Sigma - \Sigma H' (H \Sigma H')^{-1} H \Sigma + H A \gamma [H A]' \}^+ H A \gamma \times \\ & \times [A - \Sigma H' (H \Sigma H')^{-1} H A]' . \end{aligned}$$

III.2. Filtrage non linéaire optimal.

On fait l'hypothèse complémentaire suivante :

(B) la matrice B est de la forme KH où K est un vecteur colonne $r \times 1$.

Alors le modèle (3) est du type du modèle (5) introduit au paragraphe III du Chapitre I, à savoir :

$$\begin{cases} Y_t = AY_{t-1} + [KX_{t-1}, C] \epsilon_t \\ X_t = HAY_{t-1} + H[KX_{t-1}, C] \epsilon_t \end{cases} ; t \in \mathbb{N}^* ; X_0 = HY_0$$

avec $\epsilon_t = (e_t, f_t)'$.

On suppose de plus que la condition :

(G) $(\epsilon_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ est une suite de vecteurs aléatoires indépendants équidistribués selon une loi gaussienne centrée, de matrice de variance covariance $\begin{bmatrix} Q_e & 0 \\ 0 & Q_f \end{bmatrix}$ (avec $Q_e > 0$ et $Q_f > 0$), est satisfaite. On a alors le résultat :

III.2.1. Proposition.

Sous les hypothèses (G) et (B), si l'état initial Y_0 est un vecteur aléatoire gaussien indépendant de la suite $(\epsilon_t ; t \in \mathbb{N}^*)$, alors le filtre optimal \hat{Y}_t de Y_t au vu de $X[0, t]$ dans le modèle (3) est fourni par les équations de récurrence :

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t = & A\hat{Y}_{t-1} + [Q_e KK'H'X_{t-1}^2 + Q_f CC'H' + AY_{t-1}A'H'] [Q_e HKK'H'X_{t-1}^2 + Q_f HCC'H' + \\ & + HAY_{t-1}A'H']^{-1} \times [X_t - HAY_{t-1}] ; t \geq 1 \end{aligned}$$

et

$$Y_t = A Y_{t-1} A' + Q_e K K' X_{t-1}^2 + Q_f C C' -$$

$$- [Q_e K K' H' X_{t-1}^2 + Q_f C C' H' + A Y_{t-1} A' H'] [Q_e H K K' H' X_{t-1}^2 + Q_f H C C' H' + H A Y_{t-1} A' H']^+ \times$$

$$\times [Q_e K K' H' X_{t-1}^2 + Q_f C C' H' + A Y_{t-1} A' H']^+ ; t \geq 1$$

avec $\hat{Y}_0 = m_Y(0) + C_Y(0,0) H' [H C_Y(0,0) H']^+ (X_0 - H m_Y(0))$

$$Y_0 = C_Y(0,0) - C_Y(0,0) H' [H C_Y(0,0) H']^+ H C_Y(0,0) .$$

Démonstration.

D'après l'écriture du modèle précédent l'énoncé et la Proposition II.1.1, les conditions du Théorème III.1.3 du Chapitre I sont toutes satisfaites puisque si Y_0 vérifie l'hypothèse, (Y_0, X_0) est un vecteur aléatoire gaussien indépendant de $(\epsilon_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ et, en particulier, la loi conditionnelle $P[Y_0 \in . / X_0]$ est gaussienne. ■

Remarquons que si on suppose $B = KH$ le filtre optimal linéaire ne diffère du filtre optimal que par les termes $Q_e E X_{t-1}^2 K K' H'$ et $Q_e E X_{t-1}^2 H K K' H'$ qui se substituent aux termes $Q_e X_{t-1}^2 K K' H'$ et $Q_e X_{t-1}^2 H K K' H'$ respectivement. Cette différence résulte bien évidemment de la "linéarisation" du modèle (3).

IV ETUDE D'UN MODELE PARTICULIER DE SERIE CHRONOLOGIQUE UNIDIMENSIONNELLE.

Nous étudions ici le cas particulier du modèle de série chronologique scalaire correspondant à la situation (3) - (3') où

$$r = 1, A = a, B = b, H = C = 1 \text{ i.e}$$

$$(6) \quad X_t = aX_{t-1} + bX_{t-1}e_t + f_t; \quad t \in \mathbb{Z}$$

ou

$$(6') \quad X_t = aX_{t-1} + bX_{t-1}e_t + f_t; \quad t \in \mathbb{N}^*, X_0 \text{ donné.}$$

Les résultats concernant la stationnarité stricte sont plus précis que dans le cas vectoriel $r > 1$; on est en mesure d'étudier le problème de l'existence des moments d'ordre supérieur à deux d'une solution stationnaire dans le cas où les variables (e_t) et (f_t) sont toutes gaussiennes. On aborde aussi le problème statistique d'estimation des paramètres du modèle.

IV.1. Stationnarité stricte. Moments.

Soit (H) l'hypothèse introduite dans le paragraphe IV du Chapitre II, à savoir : la loi commune aux variables aléatoires (e_t) n'est pas concentrée en une ou deux valeurs.

IV.1.1. Proposition.

Supposons que les suites $(e_t; t \in \mathbb{Z})$ et $(f_t; t \in \mathbb{Z})$ sont deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes équidistribuées

telles que la condition (H) soit satisfaite. Alors si $|a| < 1$ et $a^2 + b^2 Q_e \leq 1$ il existe un processus stationnaire (X_t) vérifiant l'équation (6) uniquement déterminé par :

$$(7) \quad X_t = f_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{k=0}^{j-1} [a + b e_{t-k}] \right\} f_{t-j}$$

où la série du second membre converge presque sûrement et si $a^2 + b^2 Q_e < 1$ la convergence a lieu aussi en moyenne quadratique.

On omet la démonstration qui est en tous points analogue à celle de la Proposition IV.1.1 du Chapitre II .

On a le résultat complémentaire.

IV.1.2. Proposition.

Supposons que (e_t) et (f_t) satisfont aux hypothèses de la Proposition IV.1.1. Alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution stationnaire (X_t) de (6) qui soit un processus du second-ordre centré est que $a^2 + b^2 Q_e < 1$ auquel cas le processus (X_t) est uniquement déterminé par (7) où la série du second membre est convergente presque sûrement et en moyenne quadratique.

Démonstration.

D'après ce qui précède, il reste à montrer que la condition est nécessaire. Or on a nécessairement (cf. Proposition I.1.3)

$$(1 - a^2 - b^2 Q_e) \text{var}(X_t) = Q_f > 0$$

ce qui montre bien que $a^2 + b^2 Q_e < 1$. ■

Remarquons qu'en vertu de la Proposition IV.1.1, si $|a| < 1$ et $a^2 + b^2 Q_e = 1$ il existe encore un processus stationnaire vérifiant (6) mais qui n'est pas du second-ordre centré d'après la Proposition IV.1.2.

On peut aussi remarquer que les hypothèses de la Proposition IV.1.1 assurent l'existence d'un processus de Markov stationnaire vérifiant l'équation (6') (en effet si X_0 est une variable aléatoire de loi ν_0 indépendante de $(e_t; t \in \mathbb{N}^*)$ et de $(f_t; t \in \mathbb{N}^*)$ le processus (X_t) issu de X_0 est de ce type) .

Nous nous proposons d'aborder cette question par une autre voie, sous l'hypothèse (G) introduite au paragraphe III.

En effet la probabilité de transition correspondante s'écrit :

$$P(x, A) = \int_A (2\pi [Q_f + Q_e b^2 x^2])^{-1/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} [y-ax]^2 [Q_f + Q_e b^2 x^2]^{-1} \right\} \cdot dy$$

On a alors le résultat suivant :

IV.1.3. Proposition.

Supposons que l'hypothèse (G) soit satisfaite et que $E\{|a + b e_t|\} < 1$. Alors le processus de Markov associé à la famille $(P(x, \cdot); x \in \mathbb{R})$ est ergodique.

La démonstration de cette Proposition s'appuie sur le Théorème suivant :

IV.1.4. Théorème (cf. par exemple R.L. TWEEDIE (1975)).

Soit (X_t) un processus de Markov dont la transition $\{P(x, \cdot)\}$

est continue. Si $\gamma_x = E\{|X_t| - |X_{t-1}| \mid X_{t-1} = x\}$, alors une condition suffisante pour l'ergodicité de (X_t) est qu'il existe un compact K de \mathbb{R} de mesure de Lebesgue strictement positive et deux constantes $C > 0$, $B > 0$ tels que

$$\gamma_x \leq -C \quad \text{pour tout } x \notin K$$

$$\gamma_x \leq B < +\infty \quad \text{pour tout } x \in K .$$

Démonstration de la Proposition IV.1.3.

Il est clair que, pour A fixé, $P(x, A)$ est une fonction continue en x .

Posant $\eta = E\{|a + be_t|\}$ et $\delta = E\{|f_t|\} = \left(\frac{2}{\pi} Q_f\right)^{1/2}$ on a :

$$\begin{aligned} \gamma_x &= E\{|(a + be_t)x + f_t|\} - |x| \\ &\leq E\{|a + be_t|\}|x| + E\{|f_t|\} - |x| \end{aligned}$$

d'où $\gamma_x \leq (\eta - 1)|x| + \delta$.

Alors choisissant une constante $C > 0$ et $K = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq (C + \delta)(1 - \eta)^{-1}\}$ (K est de mesure de Lebesgue non nulle puisque $\eta < 1$) on a

$$\gamma_x \leq -C \quad \text{pour tout } x \notin K$$

et $\gamma_x \leq \delta < +\infty$ pour tout $x \in K$ (en fait pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Les hypothèses du Théorème IV.1.4 sont donc toutes vérifiées et par suite l'ergodicité de (X_t) est démontrée. ■

Une condition suffisante pour que $E\{|a + be_t|\} < 1$ est évidemment que $|a| + |b|\left(\frac{2}{\pi} Q_e\right)^{1/2} < 1$ (puisque $E\{|e_t|\} = \left(\frac{2}{\pi} Q_e\right)^{1/2}$) condition qui peut être comparée à la condition suffisante $a^2 + b^2 Q_e < 1$ étudiée

précédemment (cf. Figure dans le paragraphe IV du Chapitre II).

Dans les conditions de la Proposition IV.1.3 on est assuré de l'existence et de l'unicité d'une loi de probabilité invariante ν_0 pour la famille $(p(x, \cdot); x \in \mathbb{R})$ i.e telle que :

$$\nu_0(A) = \int_{\mathbb{R}} P(x, A) d\nu_0(x) \quad ; \quad A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} .$$

Etudions maintenant l'existence des moments de la solution stationnaire de (6') à l'aide de la fonction caractéristique ψ de la loi ν_0 .

ψ vérifie :

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i a x u - \frac{1}{2} (Q_f + Q_e b^2 x^2) u^2 \right\} d\nu_0(x) .$$

Lorsque le moment non centré $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n d\nu_0(x)$ existe on le note μ_n , on a le résultat :

IV.1.5. Proposition.

Supposons que les hypothèses de la Proposition IV.1.1 et l'hypothèse (G) sont toutes satisfaites et que le moment d'ordre n de X_t existe. Alors on a :

$$\mu_0 = 1 \quad ; \quad \mu_1 = 0$$

et

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ impair} \\ \sum_{s=0}^{n/2} \binom{n}{2s} \left(-\frac{1}{2}\right)^s C_s a^{n-2s} \left[\sum_{j=0}^s \binom{s}{j} b^{2j} Q_f^{s-j} Q_e^j \mu_{n-2s-2j} \right] & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases}$$

où $C_s = -2(2s-1)C_{s-1} ; s \geq 1$
 $C_0 = 1 .$

Démonstration.

Rappelons que, d'après la formule d'Hermite, on a :

$$\frac{d^r}{du^r} \exp \{-\xi u^2\} = (-1)^r H_r(u) . \exp \{-\xi u^2\}$$

avec

$$\begin{cases} H_0(u) = 1 , H_1(u) = 2 \xi u \\ H_{r+1}(u) - 2 \xi u H_r(u) + 2r \xi H_{r-1}(u) = 0 ; r \geq 1 \end{cases}$$

(en particulier : $H_0(0) = 1$, $H_1(0) = 0$ et $H_r(0) = -2(r-1) \xi H_{r-2}(0) ; r \geq 2$) .

Ainsi si ψ est la fonction caractéristique de la ν_0 définie ci-dessus, sa dérivée n-ième est donnée par :

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{d^r}{du^r} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Q_f + Q_e b^2 x^2) u^2 \right\} . \frac{d^{n-r}}{du^{n-r}} \exp \{ i a x u \} . d\nu_0(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r H_r(u) . \exp \{-\xi u^2\} . (i a x)^{n-r} . \exp \{ i a x u \} . d\nu_0(x) \end{aligned}$$

avec $\xi = \frac{1}{2} \{ Q_f + Q_e b^2 x^2 \} .$

Comme $\mu_n = \frac{\psi^{(n)}(0)}{i^n}$, il vient :

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r H_r(0) i^{-r} (ax)^{n-r} d\nu_0(x) .$$

D'après la formule de récurrence ci-dessus, on a :

$$H_r(0) = \begin{cases} (-2)^{r/2} 1.3 \dots (r-1) \xi^{r/2} & ; r \geq 2 \text{ pour } r \text{ pair} \\ 0 & \text{pour } r \text{ impair.} \end{cases}$$

Posant $H_r = H_r(0) \xi^{-r/2}$; $r \geq 2$ on vérifie facilement que H_r satisfait à

$$H_r = -2(r-1)H_{r-2} ; r \geq 2$$

$$H_1 = 0$$

$$H_0 = 1 .$$

Par suite μ_n peut s'écrire

$$\mu_n = \sum_{r=0}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{n}{r} H_r (i \xi^{1/2})^r (ax)^{n-r} d\nu_0(x) .$$

Alors comme $\mu_0 = 1$ et $\mu_1 = 0$ et que $H_{2s+1} = 0$ pour $s \geq 0$, il vient

$$\mu_n = \sum_{s=0}^{[n/2]} \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{n}{2s} H_{2s} i^{2s} \xi^s (ax)^{n-2s} d\nu_0(x) .$$

où $\xi^s = \frac{1}{2^s} (Q_f + Q_e b^2 x^2)^s = \frac{1}{2^s} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} b^{2j} Q_f^{s-j} Q_e^j x^{2j}$ et $[n/2]$ désigne

la partie entière de $n/2$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mu_n &= \sum_{s=0}^{[n/2]} \binom{n}{2s} (-1)^s C_s a^{n-2s} \left[\sum_{j=0}^s \binom{s}{j} b^{2j} Q_f^{s-j} Q_e^j \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n+2j-2s} d\nu_0(x) \right] \\ &= \sum_{s=0}^{[n/2]} \binom{n}{2s} \left(-\frac{1}{2}\right)^s C_s a^{n-2s} \left[\sum_{j=0}^s \binom{s}{j} b^{2j} Q_f^{s-j} Q_e^j \mu_{n+2j-2s} \right] \end{aligned}$$

où $C_s = H_{2s}$ vérifie $C_s = -2(2s-1)C_{s-1}$; $s \geq 1$

$$C_0 = 1 .$$

Il s'ensuit donc que :

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ impair} \\ \sum_{s=0}^{n/2} \binom{n}{2s} (-1)^s C_s a^{n-2s} \left[\sum_{j=0}^s \binom{s}{j} b^{2j} Q_f^{s-j} Q_e^j \mu_{n+2j-2s} \right] & \text{pour } n \text{ pair. } \blacksquare \end{cases}$$

Une condition suffisante pour que le moment μ_{2n} existe est que pour $j = 1, 2, \dots, n$ on ait :

$$a^{2j} + Q_e \binom{2j}{2} 1. a^{2j-2} b^2 + Q_e^2 \binom{2j}{4} 1.3 a^{2j-4} b^4 + \\ + Q_e^3 \binom{2j}{6} 1.3.5 a^{2j-6} b^6 + \dots + Q_e^j \binom{2j}{2j} 1.3.5 \dots (2j+1) b^{2j} < 1 .$$

En particulier μ_6 existe si $1 - a^6 - 15 a^4 b^2 Q_e - 45 a^2 b^4 Q_e^2 - 15 b^6 Q_e^3 > 0$ et alors

$$\mu_2 = Q_f \cdot [1 - a^2 - b^2 Q_e]^{-1}$$

$$\mu_4 = 3Q_f \cdot [2a^2 \mu_2 + Q_f] [1 - a^4 - 6a^2 b^2 Q_e - 3b^4 Q_e^2]^{-1}$$

$$\mu_6 = 15 Q_f \cdot [(a^4 + 6a^2 b^2 Q_e + 3b^4 Q_e^2) \mu_4 + 3Q_f (a^2 + b^2 Q_e) \mu_2 + Q_f^2] \times \\ \times [1 - a^6 - 15 a^4 b^2 Q_e - 45 a^2 b^4 Q_e^2 - 15 b^6 Q_e^3]^{-1} .$$

On peut aussi remarquer que les frontières de domaines de valeurs de $(a, b Q_e^{1/2})$ à l'intérieur desquels les moments μ_{2n} existent pour $n = 1, 2, 3$ sont identiques à celles représentées dans la figure du paragraphe IV du Chapitre II.

IV.2. Estimation des paramètres.

On suppose qu'on observe un processus stationnaire, centré

$(X_t ; t \in \mathbb{N})$ solution de l'équation (6') où $(e_t, f_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ satisfait l'hypothèse (G) avec $Q_e = Q_f = 1$ (cas auquel on peut toujours se ramener si Q_e et Q_f sont supposées connues). Il est clair que la loi de $(X_t ; t \in \mathbb{N})$ ne dépend pas de b qu'à travers b^2 .

On envisage donc le problème d'estimation du paramètre (a, b^2) par la méthode du maximum de vraisemblance approché. On fait l'hypothèse :
 (⊙) la vraie valeur $\theta^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0)' = (a_0, b_0^2)'$ du paramètre $\theta = (\theta_1, \theta_2)' = (a, b^2)'$ vérifie

$$(\theta_1^0)^2 + \theta_2^0 < 1$$

(i.e cf. Proposition IV.1.2) que le processus est du second-ordre. Le processus étant markovien homogène d'ordre 1, on dispose de résultats classiques pour étudier les propriétés asymptotiques des estimateurs du maximum de vraisemblance approché (cf. par exemple P. BILLINGSLEY (1961) et P.D. FEIGIN (1975)).

Soit $(X_t ; t \in \mathbb{N})$ un processus de Markov homogène d'ordre 1 stationnaire dont la densité de transition $f_\theta(x/y)$ dépend d'un paramètre $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)'$.

$$\text{On pose } L_n^*(X_0, \dots, X_n ; \theta) = \sum_{t=1}^n \text{Log } f_\theta(X_t | X_{t-1})$$

Définissons lorsque les dérivées partielles existent

$$u_t(\theta) = \text{grad}_\theta \text{Log } f_\theta(X_t | X_{t-1}) ;$$

$$v_t(\theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \text{Log } f_\theta(X_t | X_{t-1}) \right)_{i,j=1, \dots, s} ;$$

$$w_t^j(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} v_t(\theta) ;$$

$$U_n(\theta) = \sum_{t=1}^n u_t(\theta) ; \quad V_n(\theta) = \sum_{t=1}^n v_t(\theta) ; \quad W_n^j(\theta) = \sum_{t=1}^n w_t^j(\theta) .$$

On désigne par θ^0 la vraie valeur du paramètre θ .

Conditions de régularité.

- A1 . Il existe $\alpha > 0$ tel que $f_\theta(x/y)$ admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 3 sur $S_\alpha = \{\theta : \|\theta - \theta^0\| \leq \alpha\}$, mesurables en (x, y) , pour θ fixé dans S_α ;
- A2 . Les espérances mathématiques $E_{\theta^0}\{V_n(\theta^0)\}$ et $E_{\theta^0}\{U'_n(\theta^0)U_n(\theta^0)\}$ existent pour tout $n \geq 1$;
- A3 . $E_{\theta^0}\{u_t(\theta^0) | F_{t-1}^X\} = 0$ et $E\{u_t(\theta^0)u'_t(\theta^0) | F_{t-1}^X\} = -E_{\theta^0}\{v_t(\theta^0) | F_{t-1}^X\}$ pour tout $t \geq 1$;
- A4 . La matrice $E_{\theta^0}\{u_1(\theta^0)u'_1(\theta^0)\}$ est non singulière ;
- A5 . Pour tout $\theta \in S_\alpha$, tout $i, j, k = 1, \dots, s$ et tout $n \geq 1$

$$n^{-1} \left| \frac{\partial^3}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} L_n^*(X_0, \dots, X_n; \theta) \right| \leq M_n(X_0, \dots, X_n)$$

où $M_n(X_0, \dots, X_n)$ est une variable aléatoire indépendante de θ telle que $E_{\theta^0}\{M_n\} < C < +\infty$.

On a alors l'énoncé

IV.2.1. Théorème (cf. P.D. FEIGIN (1975)).

Supposons que le processus est stationnaire et ergodique et que les conditions de régularité A1, ..., A5 sont vérifiées. Alors il existe une

suite d'estimateurs $(\hat{\theta}_n ; n \geq 1)$ de θ basés respectivement sur l'observation (X_0, \dots, X_n) telle que :

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P [U_n(\hat{\theta}_n) = 0] = 1 ;$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P [V_n(\hat{\theta}_n) \text{ définie négative }] = 1 ;$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{\theta}_n = \theta^0 \text{ en probabilité.}$$

De plus la suite $(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta^0); n \geq 1)$ converge en loi vers un vecteur aléatoire gaussien de matrice de covariance $[E_{\theta^0} \{u_1(\theta^0)u_1'(\theta^0)\}]^{-1}$

Dans le cas qui nous intéresse la densité de transition s'écrit

$$f_{\theta}(x/y) = [2\pi(1+\theta_2 y^2)]^{-1/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x - \theta_1 y]^2 \cdot [1 + \theta_2 y^2]^{-1} \right\} .$$

L'équation $U_n(\theta) = 0$ s'écrit sous la forme

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^n X_{t-1} (X_t - \theta_1 X_{t-1}) (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-1} = 0 \\ \sum_{t=1}^n \{ -X_{t-1}^2 (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-1} + X_{t-1}^2 (X_t - \theta_1 X_{t-1})^2 (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-2} \} = 0 . \end{array} \right.$$

On a alors le résultat suivant :

IV.2.2. Corollaire.

Soit (X_t) un processus stationnaire solution de (6'), les hypothèses (G) et (Θ) étant satisfaites. Alors il existe une suite $(\hat{\theta}_n ; n \geq 1)$ d'estimateurs de θ basés respectivement sur l'observation (X_0, \dots, X_n) vérifiant

les conditions (i), (ii) et (iii) du Théorème IV.2.1 avec $U_n(\theta) = 0$ remplacée par (8) et $[E_{\theta^0} \{u_1(\theta^0)u_1'(\theta^0)\}]^{-1}$ remplacée par

$$\begin{bmatrix} [E_{\theta^0} \{X_{t-1}^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-1}\}]^{-1} & 0 \\ 0 & 2[E_{\theta^0} \{X_{t-1}^4 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2}\}]^{-1} \end{bmatrix}$$

Démonstration.

La démonstration consiste en une simple vérification des conditions A1, ..., A5 pour tout θ^0 tel que $(\theta_1^0)^2 + \theta_2^0 < 1$.

A1

Elle est évidente : vue l'expression de $f_{\theta}(x/y)$ alors nous nous contentons de donner les expressions des quantités qui seront utilisées dans la suite.

Pour $t \geq 1$ on a donc :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) = X_{t-1} (X_t - \theta_1 X_{t-1}) (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) = -\frac{1}{2} X_{t-1}^2 (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-1} + \frac{1}{2} X_{t-1}^2 (X_t - \theta_1 X_{t-1})^2 (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) &= -X_{t-1}^2 (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-1}; \quad \frac{\partial}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) = \\ &= -X_{t-1}^3 (X_t - \theta_1 X_{t-1}) (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) = \frac{1}{2} X_{t-1}^4 (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-2} - X_{t-1}^4 (X_t - \theta_1 X_{t-1})^2 (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-3}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial \theta_1^3} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3}{\partial \theta_1^2 \partial \theta_2} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) = X_{t-1}^4 (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-2}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial \theta_1 \partial \theta_2^2} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) = 2X_{t-1}^5 (X_t - \theta_1 X_{t-1}) (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-3}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial \theta_2^3} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) = -X_{t-1}^6 (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-3} + 3X_{t-1}^6 (X_t - \theta_1 X_{t-1})^2 (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-4}$$

A2

$$E_{\theta^0} \left\{ \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta_1} \text{Log } f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right| \right\} = E_{\theta^0} \left\{ X_{t-1}^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-1} \right\} \leq E_{\theta^0} \{ X_{t-1}^2 \} < +\infty .$$

$$\begin{aligned} E_{\theta^0} \left\{ \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \text{Log } f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right| \right\} &= E_{\theta^0} \left\{ \left| -X_{t-1}^3 (X_t - \theta_1^0 X_{t-1}) (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2} \right| \right\} \\ &= 2 \times (2\pi)^{-1/2} E_{\theta^0} \left\{ |X_{t-1}|^3 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-3/2} \right\} \\ &= 2 \times (2\pi)^{-1/2} (\theta_2^0)^{-3/2} \quad \text{pour } \theta_2^0 \neq 0 . \end{aligned}$$

On remarque que, pour $\theta_2^0 = 0$, le processus ainsi obtenu est de classe AR(1), par conséquent il admet des moments de tous ordres.

Alors $E_{\theta^0} \left\{ \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \text{Log } f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right| \right\}$ existe pour tout θ^0 .

$$\begin{aligned} E_{\theta^0} \left\{ \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} \text{Log } f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right| \right\} &= E_{\theta^0} \left\{ \left| \frac{1}{2} X_{t-1}^4 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - X_{t-1}^4 (X_t - \theta_1^0 X_{t-1})^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-3} \right| \right\} \\ &\leq \frac{3}{2} E_{\theta^0} \left\{ X_{t-1}^4 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2} \right\} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{3}{2} (\theta_2^0)^{-2} \quad \text{pour } \theta_2^0 \neq 0$$

Pour $\theta_2^0 = 0$ on se réfère à la remarque précédente.

Alors $E_{\theta^0} \left\{ \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} \text{Log } f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right| \right\}$ existe pour tout θ^0 .

Par conséquent $E_{\theta^0} \{V_n(\theta^0)\} = \sum_{t=1}^n E_{\theta^0} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta'} \text{Log } f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right\}$ existe pour tout $n \geq 1$.

Ensuite

$$\begin{aligned} E_{\theta^0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \text{Log } f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right\}^2 &= E_{\theta^0} \left\{ X_{t-1}^2 (X_t - \theta_1^0 X_{t-1})^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2} \right\} \\ &= E_{\theta^0} \left\{ X_{t-1}^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-1} \right\} \leq E_{\theta^0} \{X_{t-1}^2\} < +\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\theta^0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \text{Log } f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right\}^2 &= E_{\theta^0} \left\{ \frac{1}{4} X_{t-1}^4 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} X_{t-1}^4 (X_t - \theta_1^0 X_{t-1})^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} X_{t-1}^4 (X_t - \theta_1^0 X_{t-1})^4 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-4} \right\} \\ &= \frac{1}{2} E_{\theta^0} \{X_{t-1}^4 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2}\} \\ &\leq \frac{1}{2} (\theta_2^0)^{-2} \quad \text{pour } \theta_2^0 \neq 0. \end{aligned}$$

Pour $\theta_2^0 = 0$ on se réfère encore à la remarque précédente.

Alors $E_{\theta^0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \text{Log } f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right\}^2$ existe pour tout θ^0 .

Il s'ensuit que $E_{\theta^0} \{U_n'(\theta^0) U_n(\theta^0)\} = E_{\theta^0} \left\{ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta_1} \text{Log } f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right\}^2 +$

$$+ E_{\theta^0} \left\{ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta_2} \text{Log } f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right\}^2 \text{ existe pour tout } n \geq 1 .$$

A3

Comme (X_t) est un processus de Markov d'ordre 1, on a alors

$$E_{\theta^0} \{u_t(\theta^0) / F_{t-1}^X\} = E_{\theta^0} \{u_t(\theta^0) / X_{t-1}\} , \quad E_{\theta^0} \{u_t(\theta^0) u_t'(\theta^0) / F_{t-1}^X\} = E \{u_t(\theta^0) u_t'(\theta^0) / X_{t-1}\}$$

$$\text{et } E_{\theta^0} \{v_t(\theta^0) / F_{t-1}^X\} = E_{\theta^0} \{v_t(\theta^0) / X_{t-1}\} \text{ pour tout } t \geq 1 .$$

Par suite on vérifie que :

$$\begin{aligned} \cdot E_{\theta^0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \text{Log } f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) / X_{t-1} \right\} &= E_{\theta^0} \{ X_{t-1} (X_t - \theta_1^0 X_{t-1}) (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-1} / X_{t-1} \} \\ &= X_{t-1} (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-1/2} E_{\theta^0} \{ (X_t - \theta_1^0 X_{t-1}) (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-1/2} / X_{t-1} \} \\ &= 0 \text{ pour tout } t \geq 1 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot E_{\theta^0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \text{Log } f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) / X_{t-1} \right\} &= E_{\theta^0} \left\{ \left[-\frac{1}{2} X_{t-1}^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} X_{t-1}^2 (X_t - \theta_1^0 X_{t-1})^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2} \right] / X_{t-1} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} X_{t-1}^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-1} + \frac{1}{2} X_{t-1}^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-1} \times \\ &\quad \times E_{\theta^0} \{ (X_t - \theta_1^0 X_{t-1})^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-1} / X_{t-1} \} \\ &= 0 \text{ pour tout } t \geq 1 . \end{aligned}$$

Par conséquent $E_{\theta^0} \{u_t(\theta^0) / X_{t-1}\} = 0$ pour tout $t \geq 1$.

Puis,

$$\begin{aligned} E_{\theta^0} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \text{Log} f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right)^2 / X_{t-1} \right\} &= E_{\theta^0} \left\{ X_{t-1}^2 (X_t - \theta_1^0 X_{t-1})^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2} / X_{t-1} \right\} \\ &= X_{t-1}^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-1} \quad \text{pour tout } t \geq 1 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\theta^0} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \text{Log} f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} \text{Log} f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right) / X_{t-1} \right\} \\ &= E_{\theta^0} \left\{ \left[-\frac{1}{2} X_{t-1}^3 (X_t - \theta_1^0 X_{t-1}) (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} X_{t-1}^3 (X_t - \theta_1^0 X_{t-1})^3 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-3} \right] / X_{t-1} \right\} \\ &= 0 \quad \text{pour tout } t \geq 1 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\theta^0} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} \text{Log} f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) \right)^2 / X_{t-1} \right\} &= E_{\theta^0} \left\{ \left[\frac{1}{4} X_{t-1}^4 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} X_{t-1}^4 (X_t - \theta_1^0 X_{t-1})^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} X_{t-1}^4 (X_t - \theta_1^0 X_{t-1})^4 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-4} \right] / X_{t-1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} X_{t-1}^4 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2} \quad \text{pour tout } t \geq 1 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\theta^0} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \text{Log} f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) / X_{t-1} \right\} &= -E_{\theta^0} \left\{ X_{t-1}^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-1} / X_{t-1} \right\} \\ &= -X_{t-1}^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-1} \quad \text{pour tout } t \geq 1 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\theta^0} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \text{Log} f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) / X_{t-1} \right\} &= -E_{\theta^0} \left\{ X_{t-1}^3 (X_t - \theta_1^0 X_{t-1}) (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2} / X_{t-1} \right\} \\ &= 0 \quad \text{pour tout } t \geq 1 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\theta^0} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} \text{Log} f_{\theta^0}(X_t | X_{t-1}) / X_{t-1} \right\} &= E_{\theta^0} \left\{ \left[\frac{1}{2} X_{t-1}^4 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - X_{t-1}^4 (X_t - \theta_1^0 X_{t-1})^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-3} \right] / X_{t-1} \right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} X_{t-1}^4 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2} \text{ pour tout } t \geq 1 .$$

Il s'ensuit qu'on a, pour tout $t \geq 1$,

$$E_{\theta^0} \{u_t(\theta^0) u_t'(\theta^0) | X_{t-1}\} = -E_{\theta^0} \{v_t(\theta^0) / X_{t-1}\} = - \begin{bmatrix} X_{t-1}^2 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} X_{t-1}^4 (1 + \theta_2^0 X_{t-1}^2)^{-2} \end{bmatrix}$$

A4

On déduit du résultat précédent que

$$E_{\theta^0} \{u_1(\theta^0) u_1'(\theta^0)\} = \begin{bmatrix} E_{\theta^0} \{X_0^2 (1 + \theta_2^0)^{-1}\} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} E_{\theta^0} \{X_0^4 (1 + \theta_2^0 X_0^2)^{-2}\} \end{bmatrix}$$

Comme $E_{\theta^0} \{X_0^2 (1 + \theta_2^0 X_0^2)^{-1}\} > 0$ et $E_{\theta^0} \{X_0^4 (1 + \theta_2^0 X_0^2)^{-2}\} > 0$ alors la matrice $E_{\theta^0} \{u_1(\theta^0) u_1'(\theta^0)\}$ est non singulière.

A5

Pour tout $\theta \in S_\alpha$, on a :

$$\left| \frac{\partial^3}{\partial \theta_1^3} \text{Log } f_\theta(X_t | X_{t-1}) \right| = 0 < X_{t-1}^2$$

$$\text{d'où } \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n \frac{\partial^3}{\partial \theta_1^3} \text{Log } f_\theta(X_t | X_{t-1}) \right| < \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 = M_n^1$$

avec $E_{\theta^0} M_n^1 < C^1 < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^3}{\partial \theta_1^2 \partial \theta_2} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) \right| &= X_{t-1}^4 (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-2} \\ &\leq (\theta_2^0 - \alpha)^{-2} \quad \text{pour } \theta_2^0 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n \frac{\partial^3}{\partial \theta_1^2 \partial \theta_2} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) \right| \leq (\theta_2^0 - \alpha)^{-2} = M_n^2 \quad \text{pour } \theta_2^0 \neq 0 .$$

On peut encore remarquer que, pour $\theta_2^0 = 0$, le processus ainsi obtenu est de classe AR(1) par conséquent il admet des moments de tous les ordres.

Alors $E_{\theta^0} M_n^2 < C^2 < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^3}{\partial \theta_1 \partial \theta_2^2} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) \right| &= 2 |X_{t-1}^5 (X_t - \theta_1 X_{t-1}) (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-3}| \\ &\leq 2 \{ (\theta_2^0 - \alpha)^{-3} [|X_t| + \max(|\theta_1^0 - \alpha|, |\theta_1^0 + \alpha|) |X_{t-1}|] \mathbb{1}_{|X_{t-1}| > 1} + \\ &\quad + [|X_t| + \max(|\theta_1^0 - \alpha|, |\theta_1^0 + \alpha|) |X_{t-1}|] \mathbb{1}_{|X_{t-1}| \leq 1} \} \\ &\leq 2(\theta_2^0 - \alpha)^{-3} (|X_t| + \max(|\theta_1^0 - \alpha|, |\theta_1^0 + \alpha|) |X_{t-1}|) \\ &\quad \text{pour } \theta_2^0 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n \frac{\partial^3}{\partial \theta_1 \partial \theta_2^2} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\theta_2^0 - \alpha)^{-3} (|X_t| + \\ &\quad + \max(|\theta_1^0 - \alpha|, |\theta_1^0 + \alpha|) |X_{t-1}|) = M_n^3 \quad \text{pour } \theta_2^0 \neq 0 . \end{aligned}$$

Pour $\theta_2^0 = 0$, on se réfère à la remarque précédente.

Alors $E_{\theta^0} M_n^3 < C^3 < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial^3}{\partial \theta_2^3} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) \right| &= \left| -X_{t-1}^6 (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-3} + 3X_{t-1}^6 (X_t - \theta_1 X_{t-1})^2 (1 + \theta_2 X_{t-1}^2)^{-4} \right. \\
 &\leq (\theta_2^O - \alpha)^{-3} + 3(\theta_2^O - \alpha)^{-4} (|X_t| + \max(|\theta_1^O - \alpha|, |\theta_1^O + \alpha|) |X_{t-1}|)^2 \quad \text{II} \quad |X_{t-1}| > 1 \\
 &\quad + 3(|X_t| + \max(|\theta_1^O - \alpha|, |\theta_1^O + \alpha|) |X_{t-1}|)^2 \quad \text{II} \quad |X_{t-1}| \leq 1 \\
 &\leq (\theta_2^O - \alpha)^{-4} (1 + 3(|X_t| + \max(|\theta_1^O - \alpha|, |\theta_1^O + \alpha|) |X_{t-1}|)^2) \quad \text{pour } \theta_2^O \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où } \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n \frac{\partial^3}{\partial \theta_2^3} \text{Log } f_{\theta}(X_t | X_{t-1}) \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\theta_2^O - \alpha)^{-4} (1 + 3(|X_t| + \\
 &\quad + \max(|\theta_1^O - \alpha|, |\theta_1^O + \alpha|) |X_{t-1}|)^2) = M_n^4 \quad \text{pour } \theta_2^O \neq 0 .
 \end{aligned}$$

Pour $\theta_2^O = 0$, on se réfère encore à la remarque précédente.

Alors $E_{\theta^O} M_n^4 < C^4 < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.

Ainsi la condition A5 est vérifiée. ■

Pour des études statistiques complémentaires de la précédente concernant les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires, on peut consulter les articles de D.F. NICHOLLS and B.G. QUINN (1980, 1981 b), 1982).

BIBLIOGRAPHIE

- H. AKAIKE -(1974) . " Markovian representation of a stochastic process and its application to the analysis of autoregressive moving average process " . Ann. Inst. Stat. Math. ,Vol 26 , p:363-387.
- P. BILLINGSLEY -(1961) . " Statistical inference for Markov process " . The University of Chicago Press.
- G.E.P. BOX and G.M. JENKINS -(1970) . "Time series forecasting and control " . Holden-Day ,San Francisco.
- B.M. BROWN -(1971) . " Martingale central limit theorems " . Ann. Math. Stat. ,Vol 42 ,p:59-66.
- M.E. EVANS and D.N.P. MURTHY -(1977) . " Controllability of a class of discrete time bilinear systems " . I.E.E.E. Trans. Automatic Control ,Vol AC-22 ,p:78-83.
- M.E. EVANS and D.N.P. MURTHY -(1978) . " Controllability of discrete time inhomogeneous bilinear systems " . Automatica ,Vol 14 , p:147-151.
- P.D. FEIGIN -(1975) . " Maximum likelihood estimation for stochastic process - a martingale approach " . Thesis Ph. D. Australian National University.
- Y. FUNAHASHI -(1979) . " An observable canonical form of discrete time bilinear systems " . I.E.E.E. Trans. Automatic Control ,Vol AC-24/5 ,p:802-803.
- M.M. GABR and T. SUBBA RAO -(1981) . " The estimation and prediction of subset bilinear time series models with applications " . J. of Time series Anal. ,Vol 2/3 ,p:155-171.
- T. GOKA ,T.J. TARN and J.ZABORSKY -(1973) . " On the controllability of a class of discrete bilinear systems " .Automatica ,VOL 9 , p:615-622.
- C.W.J. GRANGER and A.P. ANDERSEN -(1978) . " An introduction to bilinear time series models " . Vandenhoeck & Ruprecht - Göttingen.
- C.W.J. GRANGER and A.P. ANDERSEN -(1978) . " On the invertibility of time series models " . Stoch. Processes and their Appl. ,Vol 8 , p:87-92.
- D. GUEGAN -(1981) . " Etude d'un modèle non linéaire,le modèle superdiagonal d'ordre 1 " . C.R.A.S. ,t.293 série I ,p:95-98.
- E.J. HANNAN -(1970) . " Multiple time series " . J. Wiley ,New-York
- E.J. HANNAN -(1982) . " A note on bilinear time series models " . Stoch. Processes and their Appl. ,Vol 12 ,p:221-224.

- S. HARA and K. FURUTA -(1977) . " Observability for bilinear systems " . Int. J. Control ,Vol 26/4 ,p:559-572.
- A. ISIDORI -(1973) . " Direct construction of minimal bilinear realizations from non-linear input-output maps " . I.E.E.E. Trans. Automatic Control ,Vol 18 ,p:626 -631.
- R.E. KALMAN ,P.L. FALB and M.A. ARBIB -(1969) . " Topics in Mathematical system theory " . Mc Graw-Hill Book Company.
- R.CH. LIPTSER and A.N. SHYRIAIEV -(1978) . " Statistics of Stochastic Processes " . Springer-Verlag.
- R.R. MOHLER -(1973) . " Bilinear Control Process " . Academic Press New-York.
- D.N.P. MURTHY -(1979) . " Controllability of a discrete time bilinear system " . I.E.E.E. Trans. Automatic Control ,Vol AC-24/6 , p:974-975.
- D.F. NICHOLLS and B.G. QUINN -(1980) . " The estimation of random coefficient autoregressive models.I. " . J. of Time Series Anal. , Vol 1/1 ,p:37-46.
- D.F. NICHOLLS and B.G. QUINN -(1981 a)) . " Multiple autoregressive models with random coefficients " . J. of Mult. Anal. ,Vol 11 , p:185-198.
- D.F. NICHOLLS and B. G. QUINN -(1981 b)) . " The estimation of random coefficient autoregressive models.II. " .J. of Time Series Anal. ,Vol 2/3 ,p:185-203.
- D.F. NICHOLLS and B.G. QUINN -(1982) . " Testing for the randomness of autoregressive coefficients " . J. of Time Series Anal. ,Vol 3/2 , p:123-135.
- D.T. PHAM et L.T. TRAN -(1980) . " Quelques résultats sur les modèles bilinéaires de séries chronologiques " . C.R.A.S. ,t;290 série A ,p:335-338.
- D.T. PHAM and L.T. TRAN -(1981) . " On the first order bilinear time series model " . J. Appl. Proba.
- M.B. PRIESTLEY -(1981 a),b)) . " Spectral analysis and time series " . Academic Press ,New-York.
- B.G. QUINN -(1982) . "stationnarity and invertibility of simple bilinear models " . Stoch. Processes and their Appl. ,Vol 12 , p:225-230.
- T. SUBBA RAO -(1978) . " On the theory of bilinear time series models -I " . Technical Report N° 87,Department of Mathematics , University of Manchester .
- T. SUBBA RAO -(1979) . " On the theory of bilinear time series models -II " . Technical Report N° 121,Department of Mathematics , University of Manchester.
- T.J. TARN ,D.L. ELLIOTT and T. GOKA -(1973) . " Controllability of discrete bilinear systems with bounded control " . I.E.E.E. Trans. Automatic Control ,Vol AC-18 ,p:298-301.

H. TONG -(1982) . " A note on a Markov bilinear stochastic process in discrete time " . J. of Time Series Anal. ,Vol 2/4 ,p:225-230.

R.L. TWEEDIE -(1975) . " Sufficient conditions for ergodicity and recurrence of Markov chains on a general state space " . Stoch. Processes and their Appl. ,Vol 3 ,p:385-403.

T. YOSHIKAWA and S.P. BHATTACHARYYA -(1975) . " Partial uniqueness : observability and input identifiability " . I.E.E.E. Trans. Automatic Control ,Vol 20 ,p:713-714.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 1/02/83

Le Président de la thèse

B. Valet
B. VALET

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 9.2.83

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

M. Tanche
Le Président
M. TANCHE





Résumé : Le travail présenté concerne l'étude de différents modèles bilinéaires de systèmes dynamiques à temps discret dans leurs versions déterministe et stochastique . Dans le cas déterministe on précise des conditions assurant des propriétés de contrôlabilité, d'observabilité et d'identifiabilité partielle de l'entrée . Dans le cas stochastique on examine les problèmes d'existence d'un processus d'état stationnaire , d'existence des moments d'un tel processus ainsi que les problèmes statistiques de filtrage de l'état et d'estimation des paramètres .

Mots clefs :

 Systèmes dynamiques à temps discret

 Modèles bilinéaires

 Contrôlabilité , observabilité , identifiabilité

 Séries chronologiques

 Stationnarité , filtrage , estimation

CHAPITRE IV. - ETUDE DU MODELE BILINEAIRE 111

$$Y_t = AY_{t-1} + BY_{t-1} u_t^1 + C u_t^2 ; X_t = H Y_t .$$

- I. - Etude des problèmes de nature déterministe. 111
- II. - Caractéristiques du second-ordre et Stationnarités. 121
- III. - Filtrage linéaire et filtrage non linéaire. 126
- IV. - Etude d'un modèle particulier de série chronologique unidimensionnelle. 132

BIBLIOGRAPHIE 151

Je remercie vivement Monsieur B. VAN CUTSEM
pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse .

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à
Monsieur A. LE BRETON qui a dirigé ce travail . Il m'a apporté
un grand soutien par beaucoup de disponibilité et de gentillesse .
Ses conseils et encouragements ont été déterminants .
Pour tout cela je le prie d'accepter mes sincères remerciements .

Je remercie beaucoup Monsieur J.Y. OUVRARD qui a accepté
de critiquer la rédaction de ce travail et de participer au jury .

A Monsieur PHAM DINH TUAN j'adresse toute ma gratitude
pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail , pour ses précieux
conseils qui m'ont aidé à l'élaborer et pour sa participation
au jury .

Enfin je remercie Madame STRANO qui a assuré la dactylo-
graphie du manuscrit et le personnel du service de reprographie
du Laboratoire I.M.A.G. qui en a réalisé le tirage . Je salue
leur goût pour le travail bien fait .