



HAL
open science

Méthodes de sous-gradient dans les problèmes d'optimisation avec contraintes

Michel Michalopoulos

► **To cite this version:**

Michel Michalopoulos. Méthodes de sous-gradient dans les problèmes d'optimisation avec contraintes. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1982. Français. NNT: . tel-00301273

HAL Id: tel-00301273

<https://theses.hal.science/tel-00301273>

Submitted on 21 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

" Recherche Opérationnelle "

par

Michel MICHALOPOULOS



**METHODES DE SOUS-GRADIENT DANS LES PROBLEMES
D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES:
APPLICATION A LA PROGRAMMATION LINEAIRE.**



Thèse soutenue le 10 septembre 1982 devant la commission d'examen

C. BENZAKEN **Président**

J. FONLUPT
J.M. PLA
M. SAKAROVITCH **Examineurs**

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

année scolaire 1980-1981

Président de l'Université : M. J.J. PAYAN

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

Mlle	AGNIUS DELORD Claudine	Biophysique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Clinique dermatologie
	AMBROISE THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	Physique nucléaire
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique pédiatrie et puériculture
	BELORISKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
M.	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale & traumatologie
	BILLET Jean	Géographie
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET EYMARD Joseph	Clinique Hépto-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Jane-Marie	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie

.../...

MM. BUTEL Jean	Orthopédie
CABANEL Guy	Clinique rhumatologie et hydrologie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHARACHON Robert	Clinique O.R.L.
CHATEAU Robert	Clinique neurologique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COEUR André	Chimie analytique et bromotologique
COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
CRABBE Pierre	C.E.R.M.O.
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude	M.I.A.G.
DELORMAS Pierre	Pneumo-phtisiologique
DENIS Bernard	Clinique cardiologique
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DODU Jacques	Mécanique appliquée IUT 1
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GAVEND Jean-Michel	Pharmacologie
GEINDRE Michel	Electro-radiologie
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
JANIN Bernard	Géographie
JEANNIN Charles	Pharmacie galénique
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
KAHANE André	Physique
KAHANE Josette	Physique
KLEIN Joseph	Mathématiques pures
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Hermodynamique
LACHARME Jean	Biologie cellulaire
LAJZEROWICZ Joseph	Physique

Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie thoracique
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutiques
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LE NOC Pierre	Bactériologie virologie
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LOUP Jean	Géographie
	LUU DUC Cuong	Chimie générale et minérale
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
Mlle	MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognostie
MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	NEGRE Robert	Mécanique IUT 1
	MOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OMONT Alain	Astrophysique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Sémeiologie médicale (neurologie)
	PERRIER Guy	Géophysique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	RACHAIL Michel	Clinique médicale B
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
M.	REVOL Michel	Urologie
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
MM.	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
Mme	SEIGLE MURANDI Françoise	Botanique et cryptogamie
MM.	SENGEL Philippe	Biologie animale
	SIBILLE Robert	Construction mécanique IUT 1
	SOUTIF Michel	Physique
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MM. VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VERAIN Alice	Pharmacie galénique
VERAIN André	Biophysique
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

MM. ARNAUD Yves	Chimie IUT 1
AURIAULT Jean-Louis	Mécanique IUT 1
BEGUIN Claude	Chimie organique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BOUTHINON Michel	E.E.A. IUT 1
BRUGEL Lucien	Energétique IUT 1
BUISSON Roger	Physique IUT 1
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
CHEHIKIAN Alain	E.E.A. IUT 1
COHEN Henri	Mathématiques pures
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CONTE René	Physique IUT 1
CYROT Michel	Physique du solide
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude	Sciences nucléaires
GLENAT René	Chimie organique
GOSSE Jean-Pierre	E.E.A. IUT 1
GROS Yves	Physique IUT 1
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KERCKOVE Claude	Géologie

MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique IUT 1
	KUPKA Yvon	Mathématiques pures
	LUNA Domingo	Mathématiques pures
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
Mme	MINIER Colette	Physique IUT 1
MM.	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
	OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
	PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie minéralogie
	PERRIN Claude	Sciences nucléaires
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
	ROBERT Gilles	Mathématiques pures
	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	ROSSI André	Physiologie végétale
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
	SARROT REYNAUD Jean	Géologie
	SAXOD Raymond	Biologie animale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique
MM.	STUTZ Pierre	Mécanique
	VIALON Pierre	Géologie
	VIDAL Michel	Chimie organique
	VIVIAN Robert	Géographie

CHARGES D'ENSEIGNEMENT PHARMACIE

MM.	ROCHAS Jacques	Hygiène et hydrologie
	DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie

PROFESSEURS SANS CHAIRE (médecine)

M.	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
----	--------------	-----------------

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie (hormonologie)
	CHAMPETIER Jean	Anatomie
	COLOMB Maurice	Biochimie
	COULOMB Max	Radiologie
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GROULADE Joseph	Biochimie A
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Gérontologie
	JALBERT Pierre	Histologie
	MAGNIN Robert	Hygiène
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VROUSOS Constantin	Radiothérapie

MAITRES DE CONFERENCES AGREGES (médecine)

MM.	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BENABID Alim Louis	Médecine et chirurgie
	BERNARD Pierre	Gynécologie obstétrique
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DEBRU Jean-Luc	Médecine interne
	DYON Jean-François	Chirurgie infantile
	FAURE Claude	Anatomie et organogénèse
	FAURE Gilbert	Urologie
	FLOYRAC Roger	Biophysique
	FOURNET Jacques	Hépto-gastro-entérologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIRARDET Pierre	Anesthésiologie
	GUIDICELLI Henri	Chirurgie générale
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique (réanimation)
	JUNIEN-LAVILLAULOY Claude	Clinique O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie biologique
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MASSOT Christian	Médecine interne
	MOUILLON Michel	Ophthalmologie

MM. PARAMELLE Bernard
RACINET Claude
RAMBAUD Pierre
RAPHAEL Bernard
SCHAEFER René
SEIGNEURIN Jean-Marie
SOTTO Jean-Jacques
STOEBNER Pierre

Pneumologie
Gynécologie-Obstétrique
Pédiatrie
Stomatologie
Cancérologie
Bactériologie-virologie
Hématologie
Anatomie-pathologique

Je tiens à remercier :

Monsieur le Professeur C. BENZAKEN qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Monsieur le Professeur J.M. PLA pour tous les échanges fructueux que nous avons eus et pour l'intérêt qu'il a toujours montré pour ce que je faisais.

Monsieur J. FONLUPT qui n'a jamais cessé de me conseiller et de me guider tout au long de l'élaboration de ce travail qui sans lui n'aurait jamais été possible

Monsieur le Professeur M. SAKAROVITCH qui a bien voulu faire partie du jury.

Je remercie également Madame NEUMANN pour le soin apporté à la dactylographie de cette thèse et à Monsieur IGLESIAS du service de reprographie pour la qualité de tirage.

MICHALOPOULOS MICHEL

TABLE DES MATIERES

	Pages
<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>CHAPITRE I</u> - METHODES EXACTES POUR LA RESOLUTION D'UN PROGRAMME LINEAIRE	
I.0 - Préliminaires - Notations	3
I.1 - Méthode simpliciale	3
I.1.0 - Introduction	3
I.1.1 - Complexité - Finitude et efficacité pra- tique de la méthode simpliciale	4
I.1.1.a - Complexité	4
I.1.1.b - Finitude	4
I.1.1.c - Efficacité de la méthode	5
I.1.2 - Exemple d'application	6
I.2 - Méthode de Sakarovitch-Abadie	7
I.2.0 - Introduction	7
I.2.1 - Préliminaires mathématiques	8
I.2.2 - L'algorithme	9
I.2.3 - Conclusion	11
<u>Annexe I.1</u> - Exemples où la méthode simpliciale se com- porte comme un algorithme exponentiel	13
<u>Annexe I.2</u> - Sur la règle de pivotage de BLAND	15
<u>CHAPITRE II</u> - METHODES NON LINEAIRES POUR LA RESOLUTION D'UN PROGRAMME LINEAIRE	
II.0 - Introduction	19
II.1 - Méthodes de relaxation	19
II.2 - Méthode de sous-gradient	22

	Pages
II.2.0 - Formulation - Interprétation de la méthode	21
II.2.1 - Etude la convergence	24
II.2.3 - Etude du cas où f est linéaire par morceaux - Domaine d'application de la méthode de sous-gradient	29
II.2.4 - Variantes de la méthode de sous-gradient	31
II.2.5 - Méthode de sous-gradient et problèmes de minimisation avec contraintes	32
<u>Annexe II.1</u>	34
 CHAPITRE III - METHODE DE SOUS-GRADIENT MODIFIE	
III.0 - Introduction	37
III.1 - Cas où f est différentiable et C sous points singuliers	39
III.1.1 - La méthode de sous-gradient modifiée	42
III.1.1.a - Organigramme résumé de la méthode	42
III.1.1.b - Construction de la nouvelle direction \tilde{u}	43
III.1.1.c - Construction de λ	46
III.1.1.d - Test d'arrêt	46
III.1.2 - Etude de la convergence de la méthode	47
III.2 - Cas où f est différentiable et C avec des points singuliers	53
III.2.0 - Exemple de l'introduction	53
III.2.1 - Cas où f est fonctionnelle linéaire et C polyèdre borné	56
III.2.2 - Etude de la convergence de la méthode	65
 CHAPITRE IV - EXPERIMENTATION - APPLICATIONS DE L'ALGORITHME	
IV.1 - Expérimentation de l'algorithme	71
IV.2 - Applications de l'algorithme	78
<u>Annexe IV.1</u> - Caractérisation de sous-gradient de $f(x_1)$	79
<u>CONCLUSION</u>	85
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	87

INTRODUCTION

Vers les années soixantes les méthodes de sous gradient sont apparues pour résoudre des problèmes de minimisation d'une fonction non continuellement différentiable dans un domaine. On se place en général dans le cas de minimisation d'une fonction convexe. Ces méthodes appliquées aux problèmes d'optimisation combinatoire de grandes dimensions, ont eu un grand succès. Dans ces applications on se ramène à la minimisation d'une fonction convexe, linéaire par morceaux dans un espace R^n .

L'objet de ce travail est l'étude d'un algorithme numérique basée sur la méthode des sous-gradients pour résoudre les problèmes de minimisation d'une fonction f convexe sur un ensemble convexe fermé de R^n .

L'application la plus simple sera la programmation linéaire. En particulier on cherchera rapidement une solution "apporchée" du problème:

$$\begin{aligned} & \min \langle \vec{a}, x \rangle \\ & \text{sous les contraintes} \\ & \quad Ax \leq h \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un problème de minimisation d'une fonction linéaire dans un polyèdre

Au premier chapitre, on étudiera quelques méthodes dites exactes pour la solution d'un programme linéaire en donnant leurs avantages et inconvénients ainsi que leurs limites dans la pratique. On y trouvera aussi les motivations de cette recherche.

Au deuxième chapitre, on étudiera les méthodes non linéaires pour la solution d'un programme linéaire. En particulier on examinera les méthodes de relaxation et de sous-gradient en liaison avec la programmation linéaire lorsque les contraintes sont prises en compte dans la fonction objective, donc on a à résoudre un problème de minimisation sans contraintes.

Au troisième chapitre, on présentera une nouvelle méthode basée sur la méthode de sous-gradient pour résoudre des problèmes d'optimisation avec contraintes. On étudiera l'application de la méthode et les questions liées aux problèmes de sa convergence dans différents cas, selon que la fonction à minimiser ou la fonction qui définit le domaine est ou n'est pas continuellement différentiable. On exposera aussi les avantages de la méthode par rapport aux méthodes déjà connues.

Au quatrième chapitre, on donnera quelques résultats numériques conclusion de l'expérimentation de la méthode sur des programmes linéaires. Ces applications numériques sont destinées à illustrer le comportement de l'algorithme. On donnera, enfin, différentes applications de la méthode dans le cadre de la programmation linéaire.

CHAPITRE I
METHODES EXACTES POUR LA RESOLUTION D'UN PROGRAMME LINEAIRE

I.0 - PRELIMINAIRES - NOTATIONS

Dans ce chapitre on rappellera quelques méthodes dites exactes pour résoudre un programme linéaire. En même temps on donnera les premières justifications sur les raisons qui nous ont conduit dans cette voie de recherche

On donne quelques rappels. Soit un programme linéaire sous la forme canonique

$$(P) \quad \text{Min}_{x \in C} \langle f, x \rangle \quad \text{où } C = \{x / Ax = a, x \geq 0\}$$

Supposons qu'on dispose d'une base I , alors, on pose d'une façon conventionnelle [PLA 80] :

$$\begin{aligned} T(I) &= (A^I)^{-1} A \\ t(I) &= (A^I)^{-1} a \quad (\text{second membre}) \\ \pi(I) &= f^I (A^I)^{-1} \quad (\text{pricing vector}) \\ d(I) &= f - f^I (A^I)^{-1} a = f - \pi(I) A = f - f^I T(I) \\ \zeta(I) &= f^I (A^I)^{-1} a = \pi(I) a = f^I t(I) \end{aligned}$$

I.1 - METHODE SIMPLICIALE

I.1.0 - Introduction

La méthode la plus connue pour résoudre un programme linéaire est la méthode dite simpliciale. Cette méthode est une méthode classique, et, on n'étudiera pas les problèmes liés à sa conception et à sa convergence. Ici, après un bref rappel historique de son évolution, on va s'orienter vers la question liée à notre travail. Quelle est l'efficacité pratique de cette méthode ?

La méthode simpliciale due à G.B. Dantzig, aux environs de 1947, est la plus célèbre et une des plus utilisées en Recherche Opérationnelle et également en Mathématiques Appliquées.

G.B. Dantzig [1963] dit qu'il était influencé par les travaux de Kantorovitch dans lesquels on peut trouver une première description de la méthode simpliciale. C'est Van de Panne [1979] qui a montré que la méthode de Kantorovitch est équivalente à la méthode simpliciale avec une règle de pivotage particulière

Autres que ses nombreuses applications en optimisation, la méthode simpliciale est aussi une méthode combinatoire. Différents chercheurs comme Tucker, Rockafellar, Minty, Bland ont travaillé sur cet aspect de la méthode. Un fruit, fort joli de cette extension est la théorie des matroïdes orientés.

I.1.1 - Complexité - Finitude et Efficacité pratique de la méthode simpliciale

I.1.1.a - Complexité

Pour la question de complexité, au sens de Edmonds [1965], on peut affirmer que la méthode simpliciale n'est pas un algorithme polynomial. A l'annexe I.1, on donne quelques exemples de programmes linéaires bien particuliers qui conduisent à un nombre exponentiel d'itérations en fonction de la taille du problème.

I.1.1.b - Finitude

La question de la finitude est liée à celle de la dégénérescence. Dans le cas où elle se présente pour la régler, il est naturel de penser à perturber légèrement les données. D'où historiquement, ce fut la première méthode qui fut préconisée. En pratique, on utilise les méthodes lexicographiques qui sont plus faciles à exposer et à appliquer et qui conduisent aux mêmes résultats. On peut aussi utiliser des méthodes aléatoires.

Enfin, c'est Bland [1977] qui a donné une autre règle de simplexe pour éviter le cyclage. A l'annexe I.2 on donne une autre démonstration de la finitude de la méthode simpliciale d'après cette règle.

En pratique, le cyclage est un phénomène rare, on peut donc

poser qu'il ne se présente pas, et qu'il ne joue aucun rôle sur la finitude de la méthode

I.1.1.c - Efficacité de la méthode

Contrairement à ce que les derniers paragraphes laissent entendre, la méthode simpliciale se comporte la plupart du temps comme un algorithme polynomial. Par exemple, pour des problèmes tels que le nombre de lignes soit inférieur à 50 et le nombre de lignes et colonnes soit inférieur à 200, on peut dire [Dantzig 1963] qu'il faut $3m/2$ itérations et assez rarement m itérations pour les résoudre. Le nombre d'itérations augmente d'une façon plus lente en fonction du nombre de colonnes.

Avant d'examiner l'efficacité de la méthode sur ordinateur, on peut faire les remarques suivantes :

Les calculs sont pratiquement les mêmes que ceux effectués pour résoudre un système linéaire par la méthode de Gauss-Jordan. On sera confronté sur le plan numérique à des difficultés tout à fait analogues avec deux circonstances aggravantes :

- Le nombre de pivotages nécessaires est presque toujours supérieur à la "hauteur" m de A .

- Le signe des coefficients joue ici un rôle tout à fait crucial, or ce signe est incertain quand ces coefficients sont voisins de 0.

Ainsi, la méthode simpliciale, par la façon dont elle est utilisée sur ordinateurs, ne résout pas tous les problèmes avec le succès qu'elle mérite. De fait, les programmes qui appliquent cette méthode produisent des résultats absurdes pour des données raisonnables, du fait des erreurs d'arrondi ("round-off-error") qui s'accumulent pendant les itérations. Des codes très sophistiqués ont été développés pour détecter les erreurs d'arrondi et essayer de réduire les effets sur les résultats mais leur efficacité n'est presque jamais prouvée, et d'autre part, chaque code a ses propres performances. La littérature concernant l'étude de cet effet, pourtant très important, est très

restreinte. On cite comme exemples Bartel [1968] Muller-Merbach [1970]

On peut songer à étendre le domaine d'application d'un code en "fractionnant" l'ensemble des données du programme linéaire à résoudre : c'est une première motivation de notre recherche.

D'autre part, l'application de la méthode simpliciale détruit toutes les particularités des matrices de contraintes des programmes linéaires. Or il est bien normal d'essayer de tirer parti de ces "structures", et, en même temps, de les garder pendant le déroulement de la méthode.

C'est pour cette raison qu'on a développé plusieurs méthodes nouvelles dites méthodes de décomposition.

I.1.2 - Exemple d'application [Sakarovitch 1963]

Soit le programme linéaire

$$\begin{array}{l} \text{min } \langle a_1, x_1 \rangle + \langle a_2, x_2 \rangle \\ \text{PL} \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 \leq h \\ \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

avec :

$$(a_1, a_2) = (-3, -2, 2, -1, 0, 1)$$

$$(A_1, A_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix} \quad x_1 \in \mathbb{R}_+^3, \quad x_2 \in \mathbb{R}_+^3$$

Ce programme sera l'exemple de base pour toutes les méthodes qu'on étudiera dans la suite. On donne pour mémoire la progression de la fonction économique et les points correspondants suivant la méthode simpliciale.

Initialisation

$$x_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

valeur de la fonction économique 0

Itération 1

$$x_1 = (2.5, 0, 0, 0, 0, 0)$$

valeur de la fonction économique - 7.5

Itération 2

$$x_2 = (4, 0, 0, 0, 4, 0)$$

valeur de la fonction économique -12

Itération 3

$$x_3 = (5, 0, 1, 0, 4, 0) \leftarrow \text{point optimal}$$

valeur de la fonction économique -13 \leftarrow valeur optimale.

I.2 - METHODE DE DECOMPOSITION DE SAKAROVITCH-ABADIE [1963]

I.2.0 - Introduction

Dans cete partie on va examiner une méthode de décomposition proposée par Sakarovitch et Abadie pour résoudre des programmes linéaires de type :

$$\begin{aligned} & \text{Min } \langle a_1, x_1 \rangle + \langle a_2, x_2 \rangle \\ & P_1 x_1 = p \\ \text{(PL)} \quad & Q_1 x_2 = q \\ & A_1 x_1 + A_2 x_2 = h \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

L'idée de base de cet algorithme est de partitionner le vecteur h ("scarce resource vector") en $a+b = h$ et de résoudre les sous-programmes :

$$\begin{array}{ll}
 (P_1) & \min \langle a_1, x_1 \rangle \\
 & P_1 \quad x_1 = p \\
 & A_1 \quad x_1 = a_1 \\
 & x_1 > 0
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ll}
 (P_2) & \min \langle a_2, x_2 \rangle \\
 & A_2 \quad x_2 = b \\
 & Q_1 \quad x_2 = q \\
 & x_2 > 0
 \end{array}$$

I.2.1 - Préliminaires mathématiques

Il est clair que (PL) peut s'écrire comme :

$$\begin{array}{ll}
 (PL1) & \min \langle a_1, x_1 \rangle + \langle a_2, x_2 \rangle \\
 & A_1 \quad x_1 = a + \zeta \\
 & A_2 \quad x_2 = b - \zeta \quad \text{où} \quad a + b = h \\
 & x_1 > 0 \quad x_2 > 0
 \end{array}$$

Soient I, J deux bases pour les programmes (P₁) et (P₂) et x₁ et x₂ les solutions de bases correspondantes. On pose, vu les notations de I.0

$$\begin{array}{ll}
 T^{\bar{I}}(I) = (A_1^I)^{-1} A_1^{\bar{I}} & T^{\bar{J}}(J) = (A_2^J)^{-1} A_2^{\bar{J}} \\
 \pi(I) = a_1^I (A_1^I)^{-1} & \pi(J) = a_2^J (A_2^J)^{-1} \\
 d^{\bar{I}}(I) = a_1^{\bar{I}} - a_1^I T^{\bar{I}}(I) & d^{\bar{J}}(J) = a_2^{\bar{J}} - a_2^J T^{\bar{J}}(J)
 \end{array}$$

$$\bar{x}_1^I = t(I) = (A_1^I)^{-1} a \quad \bar{x}_2^J = t(J) = (A_2^J)^{-1} b$$

Le problème (PL1) peut s'écrire comme

$$\min d^{\bar{I}}(I) x_1^{\bar{I}} + d^{\bar{J}}(J) x_2^{\bar{J}} + (\pi(I) - \pi(J)) \zeta$$

$$\begin{array}{ll}
 (PL2) & x_1^I + T^{\bar{I}}(I) x_1^{\bar{I}} = t(I) + (A_1^I)^{-1} \zeta (a_1) \\
 & x_2^J + T^{\bar{J}}(J) x_2^{\bar{J}} = t(J) - (A_2^J)^{-1} \zeta (a_2) \\
 & x_1 > 0 \quad x_2 > 0
 \end{array}$$

En posant $(x_1^{\bar{I}}, x_2^{\bar{J}}) \equiv 0$ on arrive au problème auxiliaire

$$\min(\pi(I) - \pi(J)) \zeta$$

$$\begin{array}{ll}
 (PL2)' & t(I) + (A_1^I)^{-1} \zeta > 0 \quad (a_1') \\
 & t(J) - (A_2^J)^{-1} \zeta > 0 \quad (a_2')
 \end{array}$$

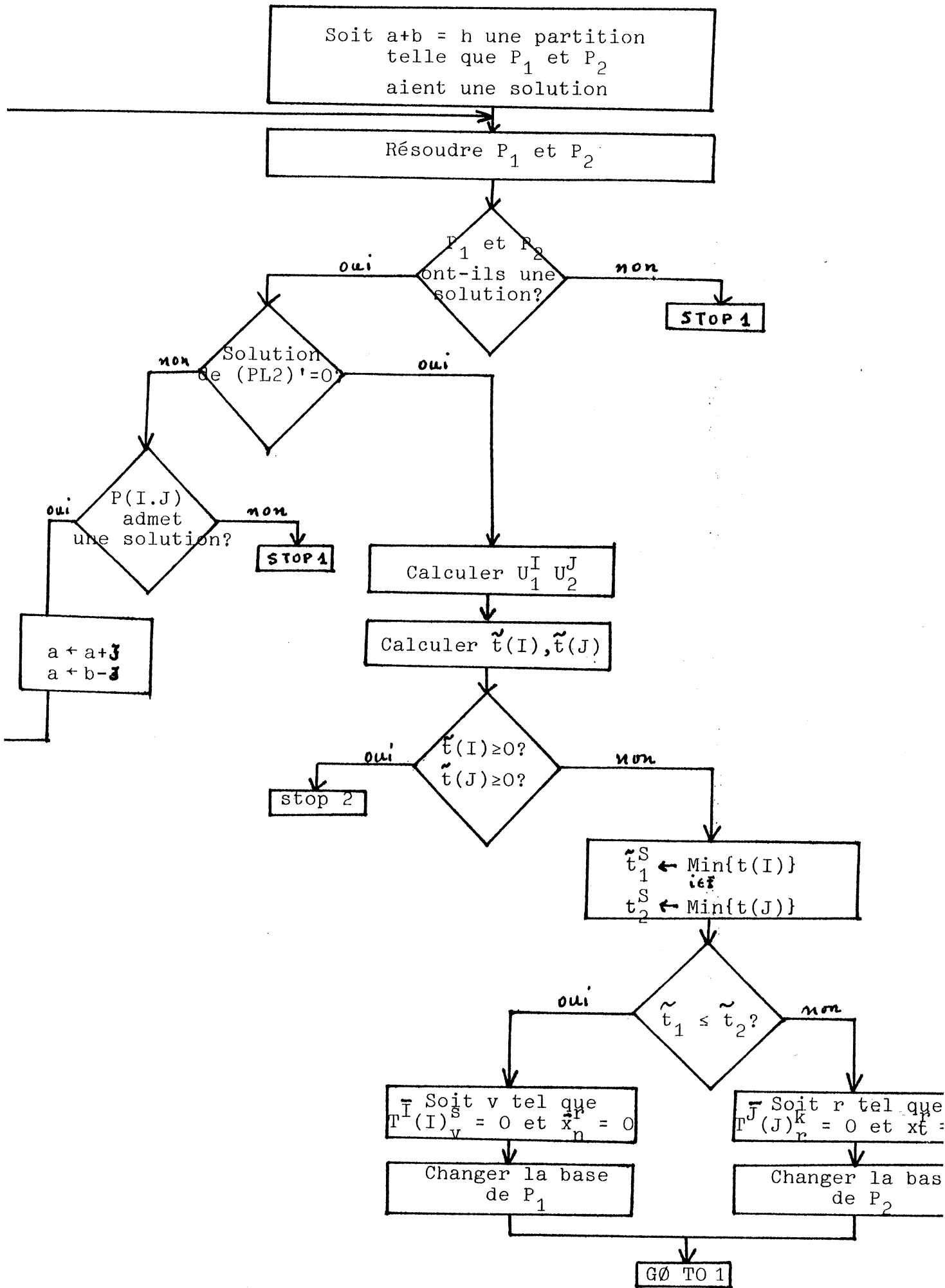
En notant pour U_1^I et U_2^J les variables duales qui correspondent à (a_1) et (a_2) ou à (a'_1) et (a'_2) , on peut écrire les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une solution de (PL2) ou (PL2)' soit optimale. Ainsi :

$$\begin{array}{llll}
 U_1^I > 0 & b_1 & U_1^I > 0 & b'_1 \\
 U_2^J > 0 & b_2 & U_2^J > 0 & b'_2 \\
 t(I) + U_1^I d^I(I) > 0 & b_3 & & \\
 t(J) + U_2^J d^J(J) > 0 & b_4 & & \\
 \pi(I) - \pi(J) - U_1^I (A_1^I)^{-1} + U_2^J (A_1^I)^{-1} > 0 & b_5 & \pi(I) - \pi(J) - U_1^I (A_1^I)^{-1} + U_2^J (A_2^I)^{-1} > 0 & b'_5 \\
 \text{condition de complémentarité} & b_6 & \text{condition de complémentarité} & b'_6
 \end{array}$$

Dans la suite U_1^I et U_2^J désigneront une solution de b'_1, b'_2, b_5 . En posant $\tilde{t}(I) = t(I) + U_1^I d^{\tilde{J}}(J)$ et $\tilde{t}(J) = t(J) + U_2^J d^{\tilde{J}}(J)$ on demandera à la dernière itération pour que la solution soit optimale : $\tilde{t}(I) > 0$ et $\tilde{t}(J) > 0$.

On donne l'algorithme dans la suite.

1.2.2 - L'algorithme



On ne donnera pas les détails de la justification de la convergence de la méthode qu'on peut trouver dans l'article original

Exemple : On peut appliquer l'algorithme à l'exemple de base. En prenant comme décomposition initiale $a \equiv b$ et $b \equiv \vec{0}$ on peut obtenir au bout de 4 itérations complètes (c'est à dire qu'on passe toutes les étapes) la même solution qui est donnée par la méthode simpliciale. On note que le nombre d'itérations nécessaires est plus grand que celui que nécessite la méthode simpliciale.

1.2.3 - Conclusion

On peut utiliser d'autres méthodes de décomposition comme la méthode de décomposition de Dantzig et Wolfe ou la méthode de décomposition de Benders. On a exposé la méthode de Sakarovitch-Abadie car la structure de données est semblable à la structure des données qu'on va traiter.

Ces méthodes ont l'avantage par rapport à la méthode simpliciale de s'efforcer d'exploiter les particularités des matrices de contraintes des programmes linéaires. Ceci conduit à "réduire" les tailles des programmes à résoudre.

Elles ont aussi l'avantage de garder les "structures" données pendant les itérations donc, il est facile de donner une interprétation économique nette en termes, par exemple, de prix, de décentralisation. etc ..

Mais en observant la méthode exposée ci-dessus, comme les autres méthodes on peut dire que la décomposition du vecteur h se fait d'une façon assez compliquée et elle nécessite beaucoup de calculs et beaucoup de place mémoire. En pratique les méthodes de décomposition demandent en général un nombre d'itérations supérieur à celui de la méthode simpliciale.

Pour éviter toutes ses difficultés, qui sont coûteuses en temps et en place sur un ordinateur on peut songer à rechercher une méthode qui ne donne pas la solution exacte, mais une

solution approchée d'une façon rapide et peu coûteuse en évitant notamment les problèmes d'inversion de matrices liés aux méthodes exactes. D'autant plus que dans de nombreux cas, les tailles de programmes linéaires sont très grandes, et les données sont incertaines ce qui implique que connaître la solution exacte n'a pas une grande valeur.

ANNEXE I.1

Exemples où la méthode simpliciale se comporte comme un algorithme exponentiel

On peut trouver quelques exemples où l'application de la méthode simpliciale demande un nombre exponentiel d'itérations. On peut trouver des exemples dans Klee-Minty [1972], Charnes [1980], Edmonds [1979], Avis-Chvatal [1978] et Golfard-Sit [1978] On donne deux exemples dans la suite

Edmonds [Cunnigham 1979] a trouvé une classe de problèmes du plus court chemin P_n pour laquelle la méthode simpliciale demande un nombre exponentiel d'itérations.

Soit P_n le plus court chemin dans le graphe $G_n (V_n \cup U_n)$.

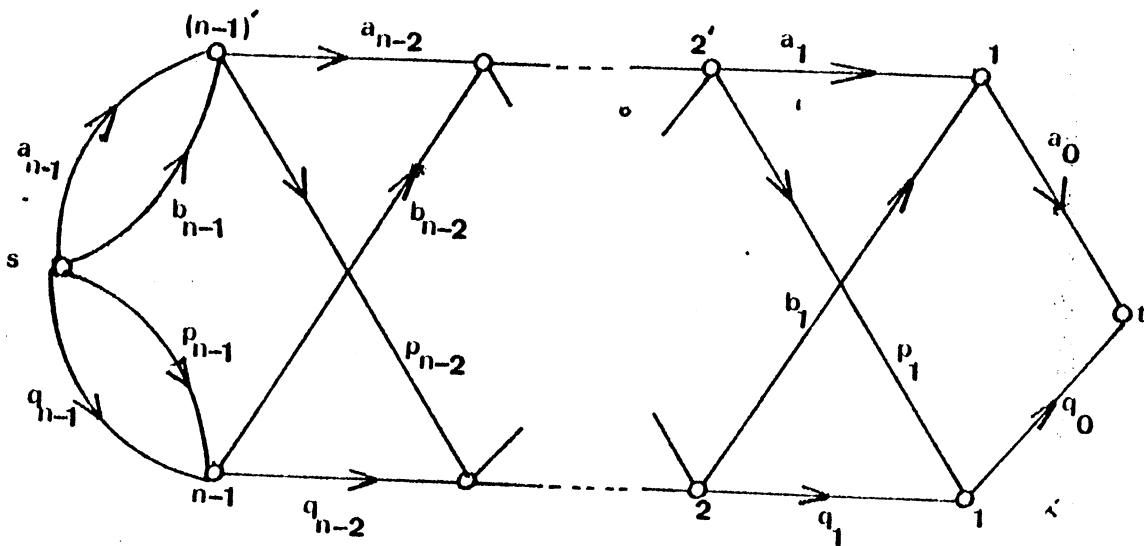


Figure I.1

$$|V_n| = 2n \quad |U_n| = 2(2n-1) \quad U_n = \{a_0, q_0, a_1, b_1, p_1, q_1, \dots, q_{n-1}\}$$

On pose $c(b_i) = c(q_i) = 0$ $c(a_i) = c(p_i) = 2^i$.

Il suffit de le considérer, comme chaque problème de flot, comme un programme linéaire. $\min_{x \in C} \langle c, x \rangle$ $C = \{x / Ax = b, x \geq 0\}$

L'autre est dû à Jens Clausen et sa forme est la suivante :

$$P_n : \max_{x \in C} \langle c, x \rangle \text{ où } C = \{x / \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq 5^{i-2}, i = 1(1)n, x \in \mathbb{R}_+^n\}$$

avec

$$C_J = (4/5)^{J-1}, a_{ii} = 1, a_{ij} = 1, a_{ij} = \begin{cases} 2 (5/4)^{i-j} & \text{pour } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ANNEXE I.2

Sur la règle de pivotage de BLAND

Bland [1977] a proposé deux règles de type simplexe pour montrer qu'on évite ainsi toujours la dégénérescence. Ces règles ne présentent pas un grand intérêt pratique car par exemple des problèmes de dimensions 50×50 demandent en moyenne 400 itérations au lieu des 100 nécessaires avec les règles normales de simplexe. D'autre part, en les appliquant par exemple aux exemples de Klee-Minty de dimension $n \times n$ on aura besoin d'un nombre d'itérations borné supérieurement par le $n^{\text{ième}}$ nombre de Fibonacci.

On donnera une autre démonstration de type "continue" sur la finitude de la méthode d'après ces règles.

D'abord les règles :

(I) Parmi tous les candidats à entrer à la base, sélectionner la variable avec le plus petit indice possible.

(II) Parmi tous les candidats à sortir de la base, sélectionner la variable avec le plus petit indice

Avant d'annoncer le théorème on donne quelques rappels classiques

Définition 1 : On appelle base homogène tout couple (I, k) où I est une base et k un indice de I .

Définition 2 : On appelle solution homogène fondamentale attachée à la base homogène (I, k) tout $y \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$1^\circ) Ay = 0$$

$$2^\circ) \text{Le support de } y \text{ appartient à } I+k$$

$$3^\circ) y_k = 1.$$

Dans le cas où A est de pleine dimension, c'est à dire $\text{rang}(A) = n$ alors $y_I^k(I) = -(A^I)^{-1} A^k = T^k(I)$, $y_k^k = 1$ $y_{I-k}^k = 0$. On peut maintenant annoncer et démontrer le théorème. L'aide M.

Pla à la démonstration du théorème était importante.

Théorème : Soit le programme linéaire

$$(P) \quad \begin{array}{l} \max x_0 \\ Ax = b \quad \text{où } A \text{ est une matrice de dimension} \\ x > 0 \quad \quad \quad (m+1) \times (n+1) \end{array}$$

Alors sous les règles (I) et (II), on ne peut pas avoir de cyclage.

Preuve : On va raisonner par l'absurde et soit Γ un cycle. On désigne par $T \subset N_n$ l'ensemble d'indices qui sont entrés et qui sont sortis de la base pendant le cycle. Soit $q = \max \{j \in T\}$. D'après la définition de T , q est entré pendant le cycle à la base et il est sorti. Soit I la base au moment où on a choisi q comme variable entrante. Vue la règle (I) on aura certainement:

$$d^q(I) < 0 \quad \text{et} \quad d^j(I) > 0 \quad \forall j \leq q \quad (\alpha)$$

La variable q était aussi sortie, et soit J la base au moment où il fallait sortir et p la variable qui fallait entrer.

On va montrer qu'on arrive à une contradiction d'après les règles choisies. Plus précisément on va montrer que $d^p(J) > 0$ donc p ne peut pas être candidat. En effet :

$$\begin{aligned} d^p(J) &= f y^p(J) \\ &= d(I) y^p(J) \\ &= d^p(I) + y_p^p(J) + d^J(I) y_J^p(J) + d^{\bar{J}-p}(I) \cdot y_{\bar{J}-p}^p(J) \\ &= d^p(I) - d^p(I) T_q^p(J) - d^{J-I-q}(I) T_{J-I-q}^p(J) \end{aligned}$$

La deuxième égalité est satisfaite car $A y^p(J) = 0$ par définition et la quatrième car $y_{\bar{J}-p}^p = 0$ par définition, $q \in J$,

$$d^I(I) = 0$$

Alors, il suffit que la dernière quantité soit non-négative.

Or $d^Q(I) > 0$, d'après (α)

$d^Q(I) < 0$, d'après (α)

$T_q^P(J) > 0$, car il y a cyclage donc on aura $t_i(I) = 0$ pour chaque base qui apparaît pendant le cyclage et pour chaque variable de $I \cap T$. En combinant ce résultat avec la règle II on aura

(β) $T_q^P(J) > 0$ et $T_J^P(J) < 0 \quad \forall j \in J \cap T - Q$

$d^{J-I-Q}(I) > 0$ et $T_{J-(I+p)}^P(J) < 0$

car si $k \in J - (I+p)$ alors $j < T$ avec $j < q$. Par suite :

$d^{J-I-Q}(I) > 0$, d'après (α)

$T_{J-(I+p)}^P(J) < 0$, d'après (β)

D'où la contradiction.

c.q.f.d.

CHAPITRE II

METHODES NON LINEAIRES POUR LA RESOLUTION
D'UN PROGRAMME LINEAIREII.0 - INTRODUCTION

Il existe différentes approches pour la solution d'un programme linéaire avec des méthodes qui ne sont pas de type simplex. On va donner quelques exemples de telles approches.

Von Neumann [1955] a exploré une méthode qui utilise le résultat suivant: Un programme linéaire peut se transformer en temps polynomial en un problème de jeu symétrique à somme nulle. Finalement on arrive à un problème de jeu pour lequel différentes méthodes sont proposées.

Une autre approche est basée sur l'idée suivante : l'algorithme de simplex est un algorithme où le cheminement se fait de sommet en sommet. On peut imaginer, alors, un autre algorithme où le cheminement se fait à l'intérieur du domaine. Un tel algorithme a été proposé par Bureau-Costovici[1967]. Cet algorithme est déduit de l'algorithme du gradient projeté. Ce genre de méthodes réapparaît comme applications des méthodes que nous allons développer.

Enfin, on donne comme dernier exemple les méthodes de relaxation et de sous-gradient. A partir des critiques sur les méthodes de type simplex examinées au premier chapitre on verra qu'elles sont les plus intéressantes dans certaines conditions pour la solution d'un programme linéaire. Le reste de ce chapitre va être consacré à ces méthodes

II.1 - METHODES DE RELAXATION

On rappelle que tous les théorèmes et définitions nécessaires sur la notion de sous-gradient se trouvent en Annexe II.1.

Soit alors le problème :

"Trouver une solution réalisable du système d'inégalités :

$$(I) \langle a^i, x \rangle + b^i > 0, \quad i \in N_n \quad b^i \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a^i \in \mathbb{R}^n$$

Les travaux de base pour résoudre ce problème sont dûs à Agmon [1954] et Motzkin et Schoenberg [1954].

L'algorithme itératif qu'ils proposent, repose sur l'idée suivante

(Initialisation) On part d'un point x^0 arbitraire

(Itération) A partir de x^i on construit x^{i+1} en projetant x^i sur le plus éloigné des hyperplans définis par les contraintes

Les figures qui vont suivre donneront une idée de la vitesse de convergence de cet algorithme.

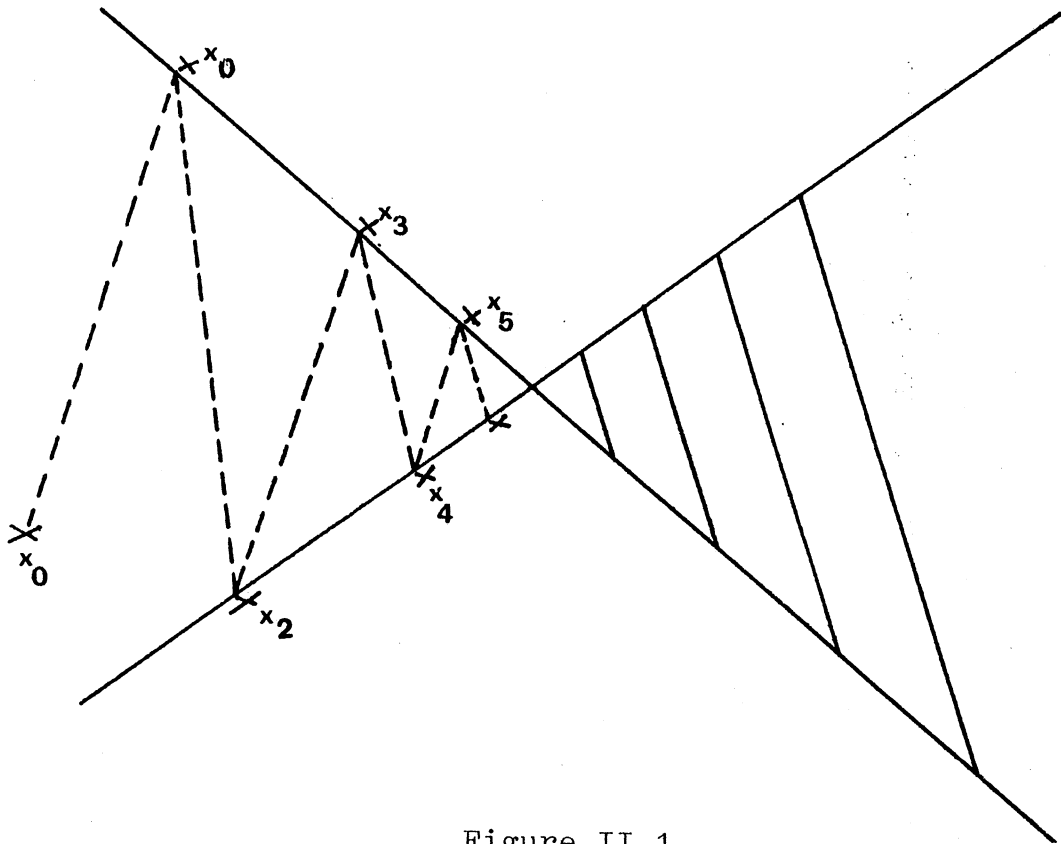


Figure II.1

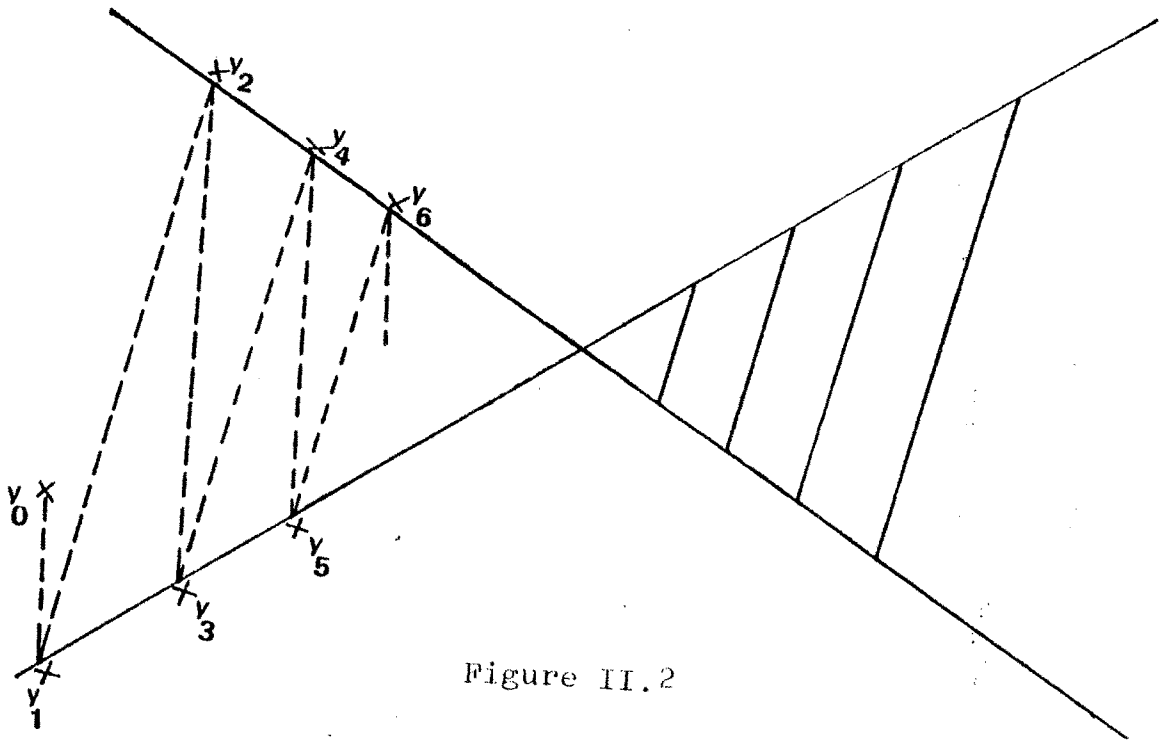


Figure II.2

La première figure montre un cas où on peut trouver une solution réalisable en un nombre fini d'itérations. L'autre montre le contraire. En règle générale la convergence est d'autant plus lente que l'angle entre deux hyperplans qui définissent les contraintes est plus aigu.

On peut alors chercher des méthodes pour accélérer la vitesse de la convergence. Une idée sera la suivante. Le point x^{i+1} est choisi sur la droite qui joint x^i à sa projection sur l'hyperplan choisi, entre le point x^i et son symétrique.

Les figures suivantes montrent l'amélioration qu'on peut obtenir sur la vitesse de la convergence en appliquant cette méthode.

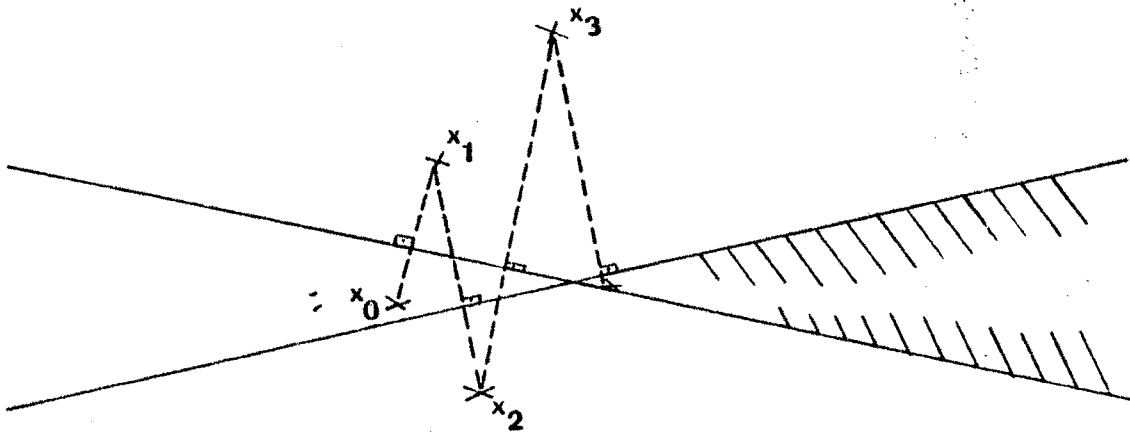


Figure II.3

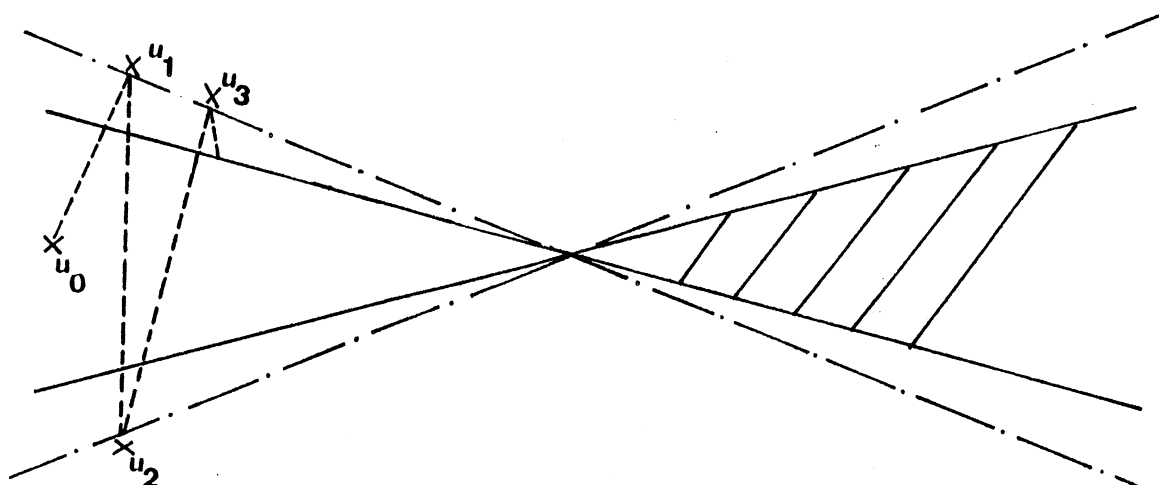


Figure II.4

Parmi d'autres, on cite deux applications de la méthode. La première due à Maurras [1978] qui a suggéré de résoudre un programme linéaire par l'optimisation d'une fonction convexe non différentiable, afin de se ramener à un problème de type I.

La deuxième est due à Mangasarian [1981]. Il suggère de perturber le programme linéaire en un programme quadratique en lui ajoutant le terme ϵx^2 pour ϵ petit et le résoudre par la méthode de relaxation.

Dans la suite, on étudiera la méthode de sous-gradient dont la liaison avec la méthode de relaxation est très étroite.

II.2 - METHODE DE SOUS-GRADIENT

II.2.0 - Formulation - Interprétation de la méthode

Soit $f(x)$ une fonction convexe, qui n'est pas nécessairement différentiable, définie sur \mathbb{R}^n . On cherche un $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\min_x f(x) = f(\tilde{x})$$

Pour trouver ce point, Polyak [1967], Shor [1964], dans leurs travaux originaux ont proposés la procédure suivante :

(Initialisation) Soit un point x^0 quelconque

(Itération) Le point x^i étant calculé

- * Calculer $u^i \in \partial f(x^i)$
- * Poser $x^{i+1} = x^i - \lambda_i \frac{u^i}{\|u^i\|}$ où λ_i est

une suite de scalaires positifs et qui vérifient certaines conditions que nous préciserons ultérieurement.

Une interprétation géométrique [Held 1974] est la suivante : Supposons qu'à l'itération i , on a obtenu le point x^i et soit \tilde{x} le point où le minimum est atteint D'après la définition de sous-gradient (voir annexe II.1) on aura :

$$f(x) - f(x^i) \geq \langle u^i, x - x^i \rangle \quad \forall x \text{ et } u^i \in \partial f(x^i)$$

$$\text{En particulier } f(\tilde{x}) - f(x^i) \geq \langle u^i, \tilde{x} - x^i \rangle$$

Or $f(\tilde{x}) < f(x^i)$ car \tilde{x} point minimum.

$$\text{Donc } \underline{\langle u^i, \tilde{x} - x^i \rangle} < 0.$$

Alors, on peut dire que \tilde{x} se trouve certainement dans le demi-espace défini par $\{x / \langle u^i, x - x^i \rangle < 0\}$. Sans perte de généralité on peut supposer que \tilde{x} se trouve à l'intérieur de cet espace. Il est clair que le vecteur $-u^i$ d'origine x^i pointe vers l'intérieur de cet espace. Donc, on peut choisir un $\lambda^i > 0$ de telle sorte que le point $x^{i+1} = x^i - \lambda_i \frac{u^i}{\|u^i\|}$ soit plus proche de \tilde{x} que le point x^i .

Discutons maintenant les différences qui existent entre la méthode de sous-gradient et les méthodes classiques de descente. On rappelle que la méthode de descente sont des méthodes où, à chaque itération, on a une amélioration de la fonction économique. La méthode de sous-gradient, par contre, peut ne pas assurer cette amélioration à chaque pas. Prenons par exemple le cas où $\partial f(x^i) = \{\text{grad } f(x^i)\}$. Supposons alors que la variation de la fonction $f(x^i - \theta u^i)$ où $u^i = \frac{\text{grad } f(x^i)}{\|\text{grad } f(x^i)\|}$ se donne pour la figure II.4 et $\theta > 0$.

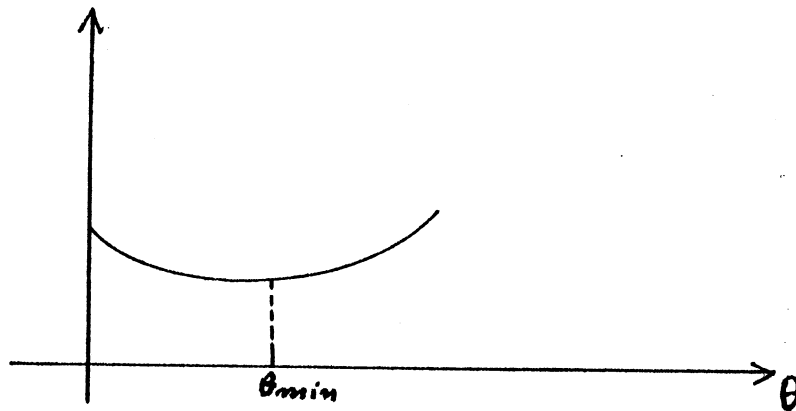


Figure II.5

Certaines fois on choisit λ_i plus grand que θ_{\min} donc on n'aura pas d'amélioration de la fonction $f(x)$ au bout de cette itération.

De même, on peut avoir des cas où suivant la direction choisie pour chaque $\theta > 0$ on a $f(x^i - \theta u^i) > f(x^i)$ c'est à dire la direction choisie n'est pas une direction de descente.

Le seul point commun avec la méthode de descente est le suivant comme dans la méthode de descente, la direction $-u^i$ pointe vers l'espace qui contient toutes les solutions optimales.

La méthode décrite ci-dessus est connue sous le nom "méthode de sous-gradient" aux U.S.A. et "Méthode de gradient généralisé" en Union Soviétique

II.2.1 - Etude de la convergence

Le théorème classique qui étudie la convergence de cette méthode est dû à Polyak [1967]. Ce théorème donne des conditions très générales sur le choix du pas λ_i .

Théorème : Soit f une fonction continue et convexe. Sous

l'hypothèse $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i = +\infty$ et $\lambda_i \rightarrow 0$, la suite construite par la

relation $x^{i+1} = x^i - \lambda_i \frac{u^i}{\|u^i\|}$ contient une sous-suite x^{n_k} telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{n_k}) = \tilde{f} = \inf_x f(x)$$

Preuve : Soit α un nombre réel, tel que $\alpha \geq \tilde{f}$ et $S_\alpha = \{x/f(x) < \alpha\}$ et $x^0 \in S_\alpha$. Il existe alors $p > 0$ tel que $\|x - x^0\| < p$ entraîne $x \in S_\alpha$. Il suffit alors de montrer qu'il existe un indice j tel que $x^j \in S_\alpha$. Supposons qu'il n'en soit

pas ainsi. Alors $S_\alpha \subseteq \{x/f(x) < f(x^j)\}$. Mais $\frac{u^i}{\|u^i\|} = \tilde{u}^i$ est une

fonctionnelle support de l'ensemble $\{x/f(x) < f(x^j)\}$ donc $\langle \tilde{u}^i, x^i \rangle < \langle \tilde{u}^i, y \rangle$ pour chaque $y \in S_\alpha$ et en particulier on aura

$$\langle \tilde{u}^i, x^i \rangle < \langle \tilde{u}^i, x^0 - p \frac{u^i}{\|u^i\|} \rangle.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|x^{i+1} - x^0\|^2 &= \|x^i - \lambda_i \frac{u^i}{\|u^i\|} - x^0\|^2 \\ &= \|x^i - x^0\|^2 + \lambda_i^2 - 2 \langle x^i - x^0, \lambda_i \frac{u^i}{\|u^i\|} \rangle \\ &= \|x^i - x^0\|^2 + \lambda_i^2 - 2 \frac{\lambda_i}{\|u^i\|} \langle x^i, u^i \rangle + 2 \frac{\lambda_i}{\|u^i\|} \langle x^0, u^i \rangle \\ &\leq \|x^i - x^0\|^2 + \lambda_i^2 - \frac{\lambda_i}{\|u^i\|} \langle u^i, u^i \rangle \\ &= \|x^i - x^0\|^2 + \lambda_i^2 - 2p\lambda_i \quad (\alpha) \end{aligned}$$

D'après les propriétés de la suite $\{\lambda_i\}$ il existe N tel que pour tout $n > N$, on ait

$$\lambda_i > p \quad (\beta)$$

De la relation (α) on déduit alors que :

$$0 < \|x^{N+r+1} - x^0\|^2 < \|x^N - x^0\|^2 - \sum_{i=N}^{N+r} \lambda_i (\lambda_i - 2p)$$

Soit encore, en tenant compte d. (β) :

$$0 < \|x^{N+r+1} - x^0\|^2 < \|x^N - x^0\|^2 - p \sum_{i=N}^{n+r} \lambda_i$$

mais comme $\sum \lambda_i = +\infty$, on aboutit à une contradiction. Il existe, alors, un indice j tel que $x^j \in S_\alpha$. Si on fait tendre $\alpha \rightarrow \tilde{f}$ et en tenant compte de la propriété ci-dessus on en déduit alors qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\tilde{f} = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m \geq N_1}} f(x^m)$

c.q.f.d.

Une interprétation de conditions posées par le théorème de Polyak est la suivante :

* Supposons que la série $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i$ soit convergente. Alors la méthode construit une suite $\{x^i\}_{i=0}^{\infty}$ qui converge vers un point. En effet

$$\begin{aligned} \|x^{i+m} - x^i\| &= \left\| \sum_{k=0}^{m-1} (x^{i+k+1} - x^{i+k}) \right\| \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \|x^{i+k+1} - x^{i+k}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_{i+k} \\ &< \sum_{k=i}^{\infty} \lambda_k = p. \end{aligned}$$

De plus, on observe que (x^i) converge vers un point x à distance au plus p du point initial. Si \tilde{x} se trouve au dehors de cette boule alors x ne peut pas être un point optimal.

* La condition $\lambda_i \rightarrow 0$ est nécessaire pour pouvoir rapprocher de l'optimum aussi près qu'on veut.

II.2.2 - Etude de la forme de la méthode en pratique

Vu les paragraphes précédents, on peut faire la remarque suivante :

* Bien que les conditions posées par Polyak soient générales, en pratique elles ne présentent aucun intérêt puisqu'elles conduisent à une convergence très lente. Par exemple, supposons que x^0 est très loin de \tilde{x} et qu'on prend comme $\sum \lambda_i$ la série $\sum \frac{1}{n}$.

Le choix de la série $\{\lambda_i, i = 1, \dots, +\infty\}$ est donc crucial pour la réussite ou l'échec total de la méthode. Et même, on a l'intérêt de choisir λ_i de telle sorte que les λ_i soient assez grands au départ et petits à la fin de l'itération.

Ainsi pour accélérer la convergence, on peut choisir λ_i

par $\lambda_i = \sigma_i \frac{\tilde{f} - f(x^i)}{u_i^2}$ avec $\sigma_i \in]2 - \varepsilon, 2]$, $\varepsilon > 0$ fixé.

On peut montrer [Polyak 1967] que la convergence sera dans ce cas géométrique

Il est clair que ce résultat a un intérêt essentiellement théorique, puisque on ne connaît pas \tilde{f} . Le seul cas où on le connaît est le suivant : Si on minimise la différence entre une fonction objective primale (à minimiser) et sa fonction objective duale sous l'ensemble de contraintes, primales et duales, la valeur \tilde{f} est égale à 0. Cette idée explorée par Oettli [1972] et Eremin [1968] représente un grand désavantage. Elle résoud le problème dans un espace d'une dimension très grande (dimension du primal plus la dimension du dual).

On s'oriente alors vers deux directions : dans la première on remplace \tilde{f} par une estimation par défaut $f^* < \tilde{f}$. On peut montrer [Polyak 1967] que : ou bien la suite $f(x^i)$ converge vers f^* ; ou bien elle converge vers un point x^* tel que $f^* < f(x^*) < \tilde{f}$.

L'autre direction [Held 1974] sera de remplacer \tilde{f} par une estimation par excès $f^* > \tilde{f}$. On peut montrer que la convergence

de l'algorithme n'est pas affectée.

En pratique, on choisit pour f^* la valeur $f(x)$ correspondant à la meilleure solution obtenue dans les itérations précédentes. Et pour les σ_i on dispose des deux grandes stratégies suivantes :

La première due à Held [1974] est :

$\sigma_i = 2$ pendant $2n$ itérations ($n =$ dimension du vecteur x), puis diviser par 2 la valeur de σ_i et le nombre d'itérations jusqu'à atteindre une limite inférieure q , fixée à l'avance, du nombre d'itérations. enfin diviser par 2 la valeur de p toutes les q itérations (généralement $q = 5$) jusqu'à ce que les λ_i soient suffisamment petits c'est à dire inférieurs à un ϵ fixé.

L'autre due à Minoux [1979] détermine les coefficients p_i de façon dynamique. Ainsi, au départ $p_i = 2$;

$$\text{si } f(x^i) > \min_{v=1(1)k} \{f(x^{i-v})\} \text{ alors } p_{i+1} = p_i$$

$$\text{- sinon } p_{i+1} = \alpha p_i \quad (\alpha < 1)$$

Il faut préciser que si la fonction est mal conditionnée, alors une grande partie des difficultés rencontrées à l'application de la méthode provient aussi de la "mauvaise" qualité de la direction $-u^i$. souvent cette direction forme avec la direction souhaitée $\tilde{x} - x^i$ un angle voisin de 90° . Considérons l'exemple suivant: [Lemaréchal 1980] Soit $\epsilon > 0$ un nombre positif petit, la fonction à minimiser est :

$$f(x_1, x_2) = \max \{ \epsilon x_1 + x_2, \epsilon x_1 - x_2 \}$$

En tout point la direction souhaitée sera $(-1, 0)$. Or, les seuls sous-gradients de f qu'on puisse générer sont les gradients de deux fonctions linéaires $\epsilon x_1 + x_2$ et $\epsilon x_1 - x_2$. Ainsi pour chaque $u \in \partial f(x)$ on aura $\langle u, (-1, 0) \rangle = \epsilon$.

Cette idée amène à définir le conditionnement d'une fonction non différentiable [Shor 1970] et Goffin [1978] comme

$$\mu(x) = \min_{u \in \partial f(x)} \cos(-u \cdot x - \bar{x})$$

et

$$\mu = \inf_{x \neq \bar{x}} \mu(x)$$

Le théorème suivant donne les conditions sous lesquelles on aura une convergence de rayon géométrique.

Théorème : Soit $\{x_i\}$ la suite définie par: [Goffin 1977]

$$x^{i+1} = x^i - \lambda_0 p^i \frac{u^i}{\|u^i\|}$$

où $u^i \in \partial f(x^i)$, $\lambda_0 > 0$ et $p \in]0, 1[$,

et soient

$$C = \max \left\{ \frac{1}{p}, \frac{\mu - \sqrt{[\mu^2 - (1-p^2)]}}{1-p^2} \right\}$$

$$D = \frac{\mu + \sqrt{[\mu^2 - (1-p^2)]}}{1-p^2}$$

$$z(\mu) = \begin{cases} \sqrt{1-\mu^2} & \text{si } \mu < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2\mu} & \text{si } \mu \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$d(x^i) = \|\tilde{x} - x^i\|$$

Alors :

(A) $p > z(\mu)$ et $d(x^0) \in [\lambda_0 C, \lambda_0 D]$ implique que pour chaque i , $d(x^i) < d(x^0) p^i$.

(B) $p > z(\mu)$ et $d(x^0) < \lambda_0 C$ implique que pour chaque i , $d(x^i) < \lambda_0 C p^i$.

(C) $p < z(\mu)$ ou $d(x^0) > \lambda_0 D$ peut conduire à une convergence de x^i à un point optimal

Pour éliminer les risques de converger vers un point qui n'est pas optimal, il faut prendre p proche de 1 et λ_0 assez grand

En conclusion, on peut dire qu'on ne connaît pas de règles exactes pour le choix de λ_i , (ou σ_i) mais des stratégies expérimentales qui sont souvent très convaincantes.

II.2.3 - Etude du cas où f est linéaire par morceaux

- Domaine d'application de la méthode de sous-gradient

Soit le problème suivant :

$$(P) \max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{où} \quad f(x) = \min_{i \in I} \{b^i + \langle a^i, x \rangle\}$$

La fonction f est dans ce cas une fonction concave.

Chaque programme linéaire peut se mettre sous cette forme. Examinons à la suite la liaison de la méthode de sous-gradient avec la méthode de relaxation. Soit $\tilde{f} = \max f(x)$. Alors résoudre le problème : "Existe-t-il x tel que $f(x) = \tilde{f}$ " est équivalent à résoudre le problème :

"Existe-t-il x tel que $\langle a^i, x \rangle + (b^i - \tilde{f}) > 0 \quad \forall i \in I$ (α)".

En effet soit une solution réalisable de (α), \tilde{x} . Alors

$$\langle a^i, \tilde{x} \rangle + (b^i - \tilde{f}) > 0 \quad \forall i \in I$$

car \tilde{x} solution réalisable.

Donc

$$\min_{i \in I} \{\langle a^i, \tilde{x} \rangle + (b^i - \tilde{f})\} > 0.$$

D'autre part

$$\tilde{f} = \max_x \min_{i \in I} \{\langle a^i, x \rangle + b^i\} > \min_{i \in I} \{\langle a^i, \tilde{x} \rangle + b^i\}.$$

D'où le résultat

Donc il existe dans ce cas une liaison très étroite avec les méthodes de relaxation. Essayons maintenant de retrouver la formule $t_i = \sigma_i \frac{\tilde{f} - f(x^i)}{\|u^i\|^2}$ proposée par Held [1974] en considérant la méthode de sous-gradient comme méthode de relaxation.

En effet au lieu de considérer l'hyperplan le plus éloigné, on choisit l'hyperplan en choisissant la contrainte la plus violée. Alors on aura

$$\begin{aligned} -\{(b^k - \tilde{f}) + \langle a^k, x^i \rangle\} &= \max_{j \in I} \{ -[(b^j - \tilde{f}) + \langle x^i, a^j \rangle] \} \\ &= \tilde{f} - \min_{j \in I} \{ b^j + \langle x^i, a^j \rangle \} \\ &= \tilde{f} - f(x^i) \end{aligned}$$

La relation de récurrence devient :

$$x^{i+1} = x^i - \sigma_i \frac{\tilde{f} - f(x^i)}{\|a^k\|^2} a^k$$

où σ_i est le coefficient de relaxation.

Revenons à la méthode de sous-gradient. Soit $I(x) = \{i \in I, f(x) = \langle a^i, x \rangle + b^i\}$. Si on veut chercher une direction de descente, il faut résoudre le système de $I(x)$ contraintes violées mais ce problème peut être résolu en appliquant le lemme de Farkas, donc finalement on arrive à utiliser l'inversion de matrices. C'est pour cette raison que l'on choisit un sous-gradient parmi ceux qui appartiennent à $\partial f(x) = \{u \in \mathbb{R}^n, u = \sum_i \lambda_i a^i, \sum_i \lambda_i = 1\}$. Cette direction peut ne pas être une direction de $I(x)$ descente.

Des résultats expérimentaux très convaincants ont été obtenus avec cette méthode appliquée sur de nombreux problèmes discrets de grandes dimensions

On donne une série d'applications :

- Problèmes de multiflots compatibles et de multiflots à coût

minimum

- Arbre (ou arborescence) minimum avec contraintes sur les degrés et applications aux problèmes du voyageur de commerce
- Intersections de k matroïdes et problèmes de k -parité dans les matroïdes.
- Résolution (en continu) de certains programmes linéaires de grandes dimensions par décompositions en utilisant la relaxation lagrangienne.
- Problème de 3-affectation.
- Problème de l'ordonnement.

II.2.4 - Variantes de la méthode de sous-gradient

La première idée [Camerini 1975] consiste à changer la direction par des méthodes de même type que du gradient modifié, c'est à dire au lieu de considérer

$$x^{i+1} = x^i - \lambda_i \frac{u^i}{\|u^i\|}, \quad \text{on considère } x^{i+1} = x^i - \lambda_i \frac{\tilde{u}^i}{\|\tilde{u}^i\|},$$

avec $\tilde{u}^i = \mu^i + b_i u^{i-1}$ où μ^i et b_i sont à préciser.

Une autre idée repose sur l'idée suivante : On a vu précédemment que la direction $-u^i$ est souvent de "mauvaise" qualité On peut alors essayer de construire des accélérations. On cite deux types d'accélérations :

* L'idée de Shor [1970] consistant à utiliser le principe de la métrique variable (Generalized Gradient with dilatation).

L'algorithme est le suivant

(Initialisation) $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $B_0 = I$ $i = 0$

(Itération) Soit $u^i \in \partial f(x^i)$

Test : $u^i = 0$. Si oui terminer; x^i optimal

$$\text{sinon } s^i = \frac{(b^i)^t u^i}{(B^i)^t u^i}$$

$$x^{i+1} = x^i - h^i B^i s^i$$

transformer B^i

poser $i \leftarrow i+1$

Sur ce principe est basée la méthode de Kachian pour résoudre un programme linéaire en temps polynomial.

* Utiliser le sous-gradient conjugué [Wolfe 1975].

Une autre idée consiste à utiliser la notion de ϵ -sous-gradient. Dans ce cas la direction - (ϵ -sous-gradient) devient une direction de descente donc on aura une méthode de descente classique.

Donnons quelques définitions :

Définition 1 : Pour $\epsilon > 0$ une solution \tilde{x} est appelée une ϵ optimale solution si et seulement si

$$f(\tilde{x}) \leq f(x) - \epsilon \quad \forall x.$$

Définition 2 On appelle ϵ -sous-différential de la fonction f en x l'ensemble

$$\partial_{\epsilon} f(x) = \{u / f(y) - f(x) \geq \langle y-x, u \rangle + \epsilon \quad \forall y\}$$

L'algorithme devient alors :

(0) Soit x^0 un point initial et $\epsilon_0 > 0$, α tel que
 $0 < \alpha < 1$

(1) Etant donné x^i et $\epsilon_0 > 0$. poser $\epsilon_{i+1} = \alpha^k \cdot \epsilon_i$ où k est le plus petit entier tel que

$$0 \notin \partial_{\epsilon_{i+1}} f(x^i).$$

(2) Si un tel k n'existe pas alors terminer, sinon trouvez d tel que

$$\min_{u \in \partial_{\epsilon_{i+1}} f(x^i)} \langle u, d \rangle > 0.$$

(3) Poser $x^{i+1} = x^i - \theta_i d$ où θ vérifie
 $f(x^{i+1}) \leq f(x^i) + \epsilon_{i+1}.$

minimisation avec contraintes

Soit le problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

où f est une fonction convexe pas nécessairement différentiable.

Pour résoudre ce problème on peut appliquer l'algorithme proposé par Polyak [1967] sous la forme :

(Initialisation) : Soit x^0 un point quelconque.

(Itération) : Le point x^i étant calculé

* Calculer $u^i \in \partial f(x^i)$

* Poser $\tilde{x}^{i+1} = x^i - \lambda_i \frac{u^i}{\|u^i\|}$

(Test) : $\tilde{x}^{i+1} \in C$ si oui $x^{i+1} = \tilde{x}^{i+1}$.
 Sinon $x^{i+1} =$ Projection de \tilde{x}^{i+1} sur C .
 Poser $i = i+1$.

Etant donné que la projection est un opérateur contractant de constante 1, le théorème de Polyak sur la convergence reste encore tout à fait valable. Mais comme on le sait, il est très difficile, au vue algorithmique, d'avoir la projection d'un point sur un ensemble même si celui-ci a une forme apparemment facile à explorer. Or dans le cas de notre problème, on est en présence de différents types de contraintes (voir chapitre suivant).

En résumé, vu les critiques du premier chapitre sur les méthodes de type simplex et des difficultés rencontrées au deuxième chapitre par rapport à l'application de la méthode de sous-gradient, on peut s'orienter à résoudre (PL) par une méthode de type sous gradient donc pas de type simplex et qui n'utilise pas la projection. Cette méthode fera l'objet du chapitre suivant.

ANNEXE II.1

Définition 1 : Soit f une fonction de C dans $[-\infty, +\infty]$ avec C convexe. La fonction f est convexe si

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) &\leq \alpha \mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 \quad \forall x_1, \forall x_2 \in C \\ f(x_1) &\leq \mu_1 \quad f(x_2) \leq \mu_2 \quad 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

Définition 2 : L'épigraphes d'une fonction convexe f , désigné par $\text{epi } f$ est l'ensemble

$$\{(x, \mu) / x \in \tilde{\mathbb{R}}^n, \mu \in \mathbb{R}, \mu \geq f(x)\}.$$

Définition 3 Le domaine effectif d'une fonction convexe f est l'ensemble :

$$\begin{aligned} \text{dom } f &= \{x / f(x) < +\infty\} = \\ &= \{x / \exists \mu \text{ tel que } (x, \mu) \in \text{epi } f\} \end{aligned}$$

Définition 4 : Une fonction convexe f est dite propre si $\text{dom } f \neq \emptyset$ et $f(x) > -\infty \quad \forall x \in \text{dom } f$.

Définition 5 : Soit f une fonction convexe définie sur \mathbb{R}^n . La conjuguée de f est la fonction f^* définie sur \mathbb{R}^n et donnée par

$$f^*(x^*) = \sup_x \langle x^*, x \rangle - f(x).$$

Définition 6 : Un vecteur x^* est dit sous gradient de f au point x si

$$f(y) - f(x) \geq \langle y - x, x^* \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 7 : La conjuguée seconde de f noté f^{**} est tout simplement la conjuguée de f^* donnée par

$$f^{**}(x) = \sup_x \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*).$$

Théorème 1 : $0 \in \partial f(x^0)$ si et seulement si x^0 est le point où f est minimisé.

Théorème 2 : $x^* \in \partial f(x)$ si et seulement si $f^*(x^*) + f(x) = \langle x^*, x \rangle$.

Définition 8 : Une fonctionnelle linéaire $c \in (\mathbb{R}^n)^*$ ($(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$) est une fonctionnelle support à l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ au point x de A si $\langle c, x \rangle \leq \langle c, y \rangle \forall y \in A$.

CHAPITRE III
METHODE DE SOUS-GRADIENT MODIFIE

III-0 - INTRODUCTION

Dans ce chapitre on va développer une nouvelle méthode basée sur la méthode de sous-gradient. On va essayer de surmonter les difficultés rencontrées aux chapitres précédents. On étudiera en même temps les problèmes liés à la convergence de cette méthode

On rappelle que le problème à résoudre est sous la forme :

$$(P) \quad \begin{cases} \min f(x) \\ x \in Q \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Donnons d'abord quelques rappels. On peut les trouver dans le livre classique de Rockaffellar [1970].

Définition III.1 - Soit un ensemble convexe C et x^0 appartenant à \bar{C} . Un vecteur y est une direction admissible pour C à partir de x^0 s'il existe un $n > 0$ tel que: $x^0 + ny \in C$.

On note par $G(C, x^0)$ l'ensemble de directions admissibles et par $\bar{G}(C; x^0)$ la-fermeture de $G(C; x^0)$.

Définition III.2 - Un vecteur x^* est appelé normal à un ensemble convexe A au point x où $x \in A$ si

$$\langle y - x, x^* \rangle \leq 0 \quad \forall y \in A.$$

Définition III.3 - On appelle cône normal à l'ensemble convexe A en un point $x \in A$ l'ensemble de vecteurs normaux.

Soit $\delta(. / C)$ la fonction indicatrice de l'ensemble C , c'est à dire :

$$\delta(x/C) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est facile de voir que $\partial\delta(x/C)$ est le cône normal à l'ensemble C au point x .

Définition III.4 - Le point x appartenant à C est appelé point singulier si le cône normal à l'ensemble $G(x;C)$ contient plus d'un vecteur.

La figure III.1 montre un tel point.

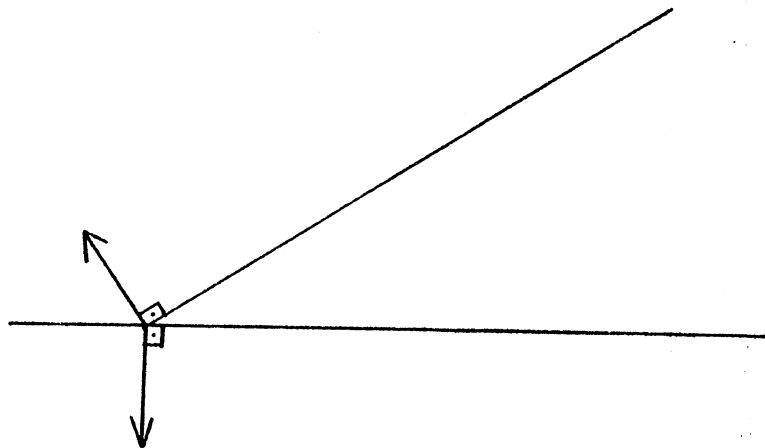


Figure III.1

On rappelle aussi le théorème suivant :

Théorème III.1 - Soit f une fonction convexe propre, non différentiable. Soit x un point où la fonction n'est pas différentiable et supposons que le point x n'est pas le point où la fonction f atteint son minimum. Alors, le cône normal à l'ensemble $C = \{x/f(z) \leq f(x)\}$ au point x est la fermeture du cône convexe généré par $\partial f(x)$.

Vu le théorème III.1 et la définition III.4 on peut parler pour des points singuliers du domaine et points singuliers de la fonction f . Par abus de langage, on ne distingue pas les cas et on les appellera points singuliers.

Enfin, on rappelle le théorème suivant :

Théorème III.2 [Rockafellar 1970, page 246] - Soit $f(x)$ une fonction propre convexe définie sur \mathbb{R}^n et soit D l'ensemble de points où f est différentiable. Alors la fonction $\text{grad } f(x)$ est continue sur D .

On va maintenant exposer la méthode en distinguant différents cas :

III.1 CAS OU F EST DIFFERENTIABLE ET C SANS POINTS SINGULIERS

III.1.0 - Introduction

Soit f une fonction différentiable convexe, et C un domaine sans point singulier par exemple le cercle dans \mathbb{R}^2 .

On va illustrer d'abord la méthode de Polyak [1967] sur ce problème.

On note par $\text{grad } f(x)$ le gradient de la fonction $f(x)$ au point x et par $v(x)$ la normale de la courbe au point x .

Supposons alors qu'en un point x^i donné, on a l'état présenté par la figure III.2; c'est à dire la direction $\text{grad } f(x^i)$ n'est pas une direction admissible.

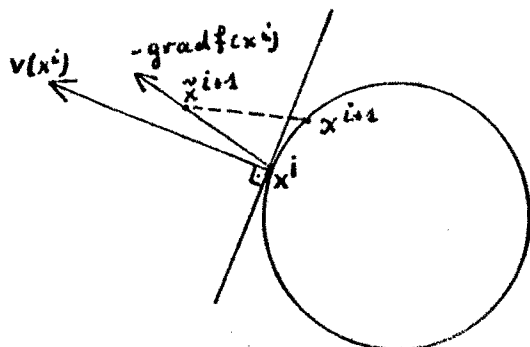


Figure III.2

Pour dépasser cette difficulté, Polyak a proposé la méthode suivante :

* Construire $\tilde{x}^{i+1} \leftarrow x^i - \lambda_i \frac{\text{grad } f(x^i)}{\|\text{grad } f(x^i)\|}$ où λ_i est le terme d'une série divergente.

* Poser $x^{i+1} \leftarrow$ projection de \tilde{x}^{i+1} , sur C .

Mais trouver la projection d'un point sur un domaine convexe est un problème qui soulève en général un certain nombre de difficultés algorithmiques (sauf dans des cas particuliers où le domaine a certaines propriétés intéressantes) comme le montre brièvement ce qui suit :

Prenons un exemple apparemment simple et qui se présente fréquemment dans les problèmes de programmation linéaire. Supposons alors que dans \mathbb{R}^n on veut calculer la projection d'un vecteur x sur une variété linéaire V de dimension p . On peut supposer que V est définie par le système :

$$Mx = 0$$

On peut montrer que la projection de x sur V est un autre vecteur g tel que

$$g = x[-{}^tM(M{}^tM)^{-1}M]$$

où V est la matrice unité, tM la matrice transposée de M et $(M{}^tM)^{-1}$ l'inverse généralisé de la matrice M .

On remarque que même dans ce cas, on a déjà des difficultés car la projection conduit à une solution qui demande de résoudre des problèmes d'inversion des matrices. Dans le cas général, les difficultés se multiplient car on aura soit un polyèdre, soit un ensemble convexe quelconque.

Pour éviter ces difficultés, on propose l'idée suivante: à partir de la direction $-\text{grad } f(x^i)$, construire une autre direction \tilde{u} qui sera d'une part une direction admissible (on évite ainsi la projection) et d'autre part restera une direction

de descente. La figure (III.3.a) indique dans quel domaine on peut se déplacer pour que la direction choisie reste une direction de descente et l'autre (III.3.b) indique dans quel domaine on peut se déplacer pour être en même temps une direction admissible.

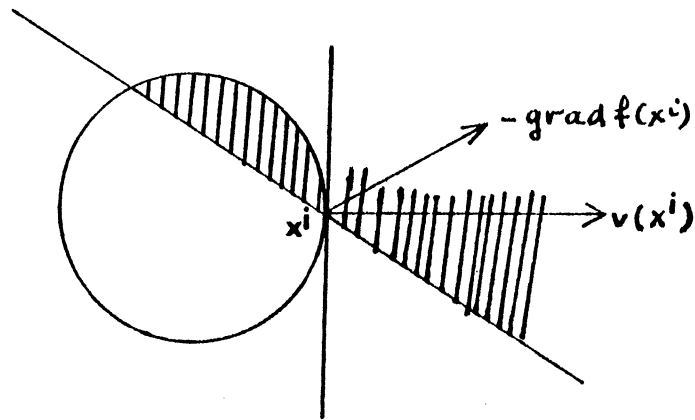


Figure III.3.a

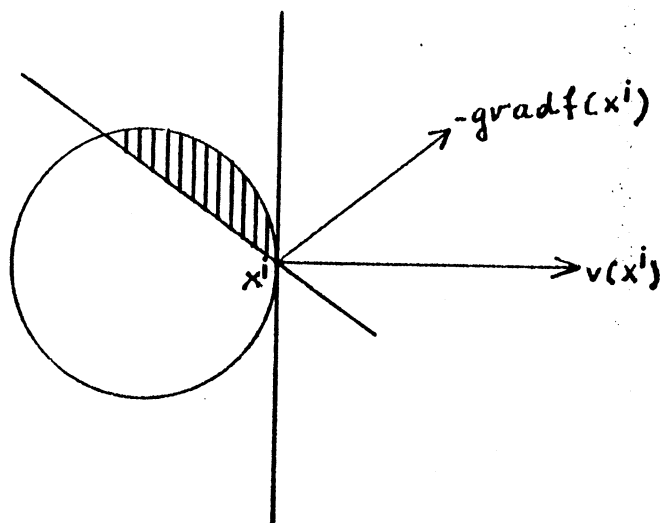


Figure III.3.b

La nouvelle direction \tilde{u} étant obtenue, on peut facilement trouver le nouveau point x^{i+1} .

En effet: pour le choix de λ_i on utilise la condition posée par Polyak [1967], c'est à dire on le prend comme un terme d'une série divergente. Mais comme on a des contraintes (ensemble C), il faut tenir compte du fait qu'on veut que le point soit toujours réalisable. D'où le choix final de λ_i comme un compromis entre les deux conditions.

III.1.1 - La méthode de sous-gradient modifiée

III.1.1.a - Organigramme résumé de la méthode

La méthode en résumé sera:

(Initialisation): On part d'un point x^0 quelconque mais réalisable ($\equiv x^0 \in C$).

(Itération): Supposons que le point x^i est obtenu.

* Faire le test:

la direction $\tilde{u}^i \leftarrow -\text{grad } f(x^i)$ est-elle admissible ?

** Si oui alors $\tilde{u}^i \leftarrow -\text{grad } f(x^i)$.

** Sinon, construire à partir de $\text{grad } f(x^i)$ et de $v(x^i)$ une nouvelle direction \tilde{u}^i .

* Poser $u^{i+1} \leftarrow x^i - \lambda_i \frac{u^i}{\|u^i\|}$ où λ_i est une suite de scalaires positifs à préciser.

Dans la suite on va expliciter trois points :

* Construction de la nouvelle direction \tilde{u} .

* Construction de λ_i .

* Test d'arrêt.

III.1.1.b Construction de la nouvelle
direction \tilde{u}

Une première remarque qu'on peut faire est la suivante: d'après l'hypothèse faite sur f on aura

$$\partial f(x^i) = \{\text{grad } f(x^i)\}.$$

Supposons maintenant qu'à un point x^i , la direction $-\text{grad } f(x^i)$ n'est pas une direction admissible. La figure III.1 donne un exemple d'une telle situation. Soit alors la normale $v(x^i)$ à C au point x^i . On a

$$\langle v(x^i), -\text{grad } f(x^i) \rangle > 0 \quad (\alpha)$$

Comme on vient de le dire en III.1.0, on change la direction pour la rendre admissible. Soit \tilde{u} la nouvelle direction

On peut la mettre sous la forme

$$\tilde{u} = -\text{grad } f(x^i) + p v(x^i)$$

où p est un scalaire à préciser (β).

La nouvelle direction \tilde{u} doit respecter les deux conditions

* \tilde{u} doit être une direction admissible, donc :

$$\langle \tilde{u}, v(x^i) \rangle < 0 \quad (\delta)$$

* \tilde{u} doit être une direction de descente, donc :

$$\langle \tilde{u}, -\text{grad } f(x^i) \rangle > 0 \quad (\epsilon).$$

De (β) et (δ) on obtient

$$\langle \text{grad } f(x^i) + p v(x^i), v(x^i) \rangle < 0 \Rightarrow p - \frac{\langle -\text{grad } f(x^i), v(x^i) \rangle}{\|v(x^i)\|^2} < 0$$

et de (α) et (ϵ) on obtient:

$$\langle -\text{grad}f(x^i) + p v(x^i), \text{grad}f(x^i) \rangle > 0 \implies p > \frac{\|\text{grad}f(x^i)\|^2}{\langle -\text{grad}f(x^i), v(x^i) \rangle}$$

On note $p_1 = - \frac{\langle -\text{grad}f(x^i), v(x^i) \rangle}{\|v(x^i)\|^2}$ et

$$p_2 = - \frac{\|\text{grad}f(x^i)\|^2}{\langle -\text{grad}f(x^i), v(x^i) \rangle}$$

On a bien $p_2 < p_1$. En effet: il suffit de voir que:

$$p_2 < p_1 \implies - \frac{\langle -\text{grad}f(x^i), v(x^i) \rangle}{\|v(x^i)\|^2} > - \frac{\|\text{grad}f(x^i)\|^2}{\langle -\text{grad}f(x^i), v(x^i) \rangle}$$

$$\langle -\text{grad}f(x^i), v(x^i) \rangle^2 < \|v(x^i)\|^2 \cdot \|\text{grad}f(x^i)\|^2$$

qui est toujours vrai. Donc $p \in [p_2, p_1]$.

A partir de deux valeurs extrêmes p_1 et p_2 on peut construire les deux directions extrêmes :

$$\tilde{u}_1 = -\text{grad}f(x^i) + p_1 v(x^i)$$

$$\tilde{u}_2 = -\text{grad}f(x^i) + p_2 v(x^i)$$

En général \tilde{u}_2 est la direction admissible qui "entre" le plus dans C et si on choisit cette direction comme la nouvelle direction alors on n'aura aucune amélioration de la fonction économique $f(x)$.

Par contre la direction \tilde{u}_1 est une direction qui conduit à la plus grande amélioration de la fonction économique par unité. Malheureusement il existe des cas où le seul point réalisable suivant cette direction est le point x^i . Les figures III.4.a et b montrent les deux cas possibles pour \tilde{u}_1 . La première montre un cas où \tilde{u}_1 est une direction admissible au sens strict du terme, la deuxième le contraire. Le problème alors revient à choisir convenablement le scalaire p de telle sorte que d'une part on ait une amélioration de la valeur de la fonction économique f , d'autre part on ait une direction admissible au sens strict du terme. On montrera que, pour n'importe quelle

valeur de p fixée a priori avec le scalaire p dans l'intervalle $[p_2, p_1]$, on peut assurer la convergence de la méthode

En pratique, on choisira en général $p = \frac{e_1 + e_2}{2}$.

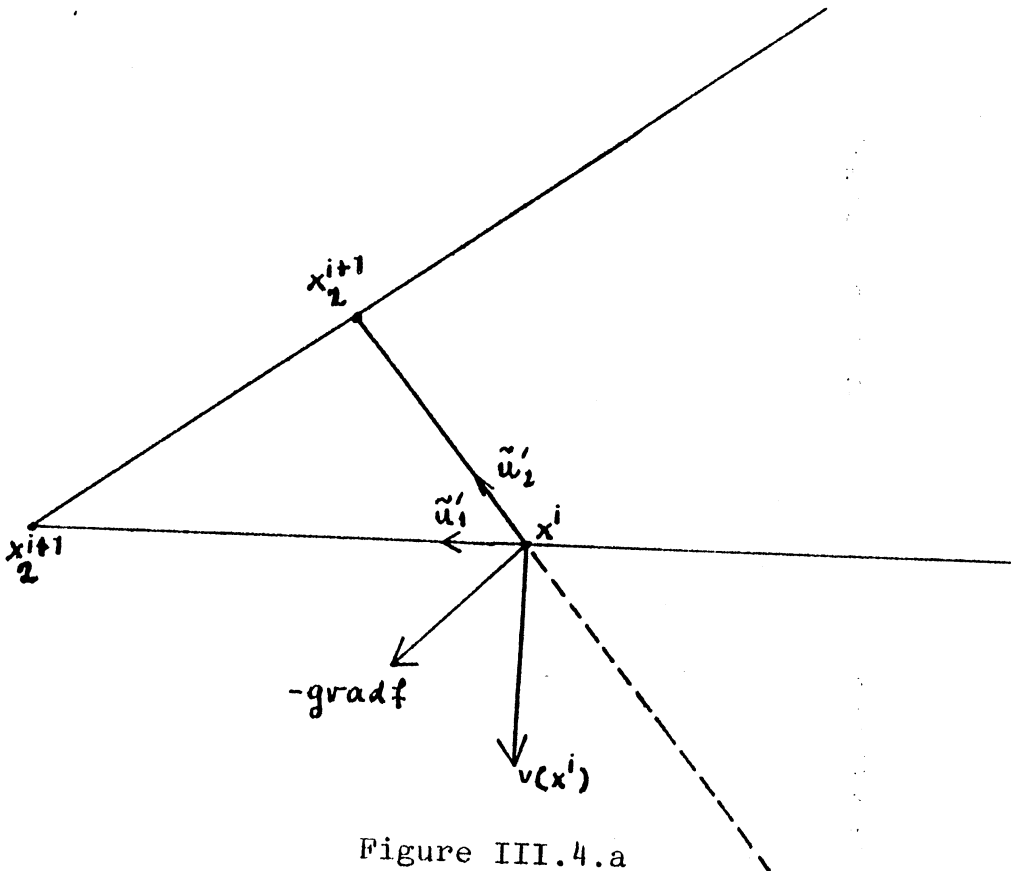


Figure III.4.a

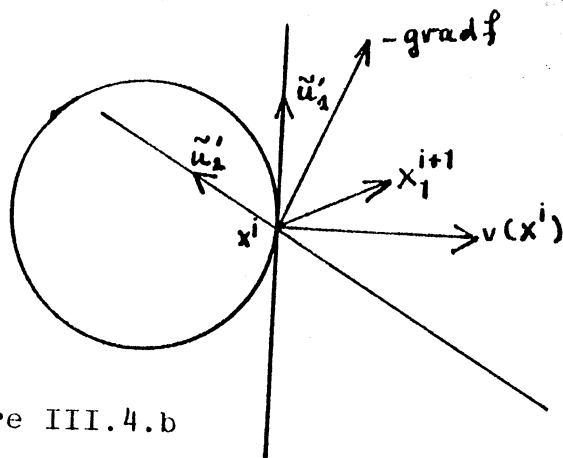


Figure III.4.b

III.1.1.c - Construction de λ_i

Soit une série de scalaires positifs telle que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i = +\infty \quad \text{et} \quad \sigma_i \rightarrow 0$$

Soit aussi μ_i un nombre positif tel que :

$$\mu_i = \max\left\{k/k \in \mathbb{R}_+, x^i + \frac{\tilde{u}^i}{\|\tilde{u}^i\|} \in C\right\}$$

μ_i est le pas le plus grand qu'il est possible de faire à partir de x^i dans la direction $\frac{\tilde{u}^i}{\|\tilde{u}^i\|}$ sans sortir du domaine C .

Notre règle sera $\lambda_i = \min\{\sigma_i, \mu_i\}$.

III.1.1.d - Test d'arrêt

Le test sera le suivant :

Si pour un certain nombre p d'itérations successives (p fixé "a priori") la différence entre deux points consécutifs reste plus petite qu'un certain seuil ε (fixé a priori), alors le point obtenu au bout de p itérations est un point optimal ε -approché

Justifions maintenant le choix de cette règle :

* La méthode proposée est une méthode "approchée" d'où le choix de ε .

* La figure suivante montre un exemple où le choix du nombre p d'itérations ($p > 1$) est vérifié

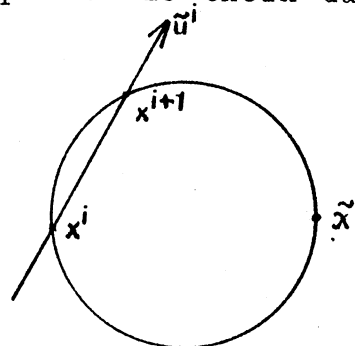


Figure III.5

Cela conduit à un résultat faux si on demande tout

simplement $\|r(x^i) - (x^{i+1})\| < \varepsilon$ pour une itération.

III.1.2 - Etude de la convergence de la méthode de sous-gradient modifié

On va montrer dans la suite que sous des conditions assez générales, on peut assurer la convergence de la méthode.

Avant d'annoncer le théorème principal on va montrer le lemme suivant :

Lemme : Soit un ensemble C compact et convexe, une suite $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de points de C qui converge vers un point x , et $(u^i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs qui converge vers le vecteur u .

On pose

$$\bar{y} = \bar{x} + \bar{\lambda} \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} \quad \text{où} \quad \bar{\lambda} = \max \left\{ \lambda / \bar{x} + \lambda \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} \in C \right\}$$

et

$$y^i = x^i + \lambda_i \frac{u^i}{\|u^i\|} \quad \text{où} \quad \lambda_i = \max \left\{ \lambda / x^i + \lambda \frac{u^i}{\|u^i\|} \in C \right\}$$

Si $\bar{\lambda} > 0$ alors

$$y^i \rightarrow y.$$

Démonstration : On va raisonner par l'absurde. L'ensemble C étant borné, il existe une sous-suite $(\lambda_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de la suite $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ qui converge vers le scalaire α et d'après l'hypothèse faite, α est différent de λ . Alors, la suite y^{i_j} ne converge pas vers y mais vers le point

$$\bar{\bar{y}} = \bar{x} + \alpha \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}. \quad \text{On a bien} \quad \bar{\bar{y}} - \bar{x} = \alpha \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} \quad \text{et} \quad \bar{y} - \bar{x} = \bar{\lambda} \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} \quad \text{donc}$$

\bar{x} , $\bar{\bar{y}}$, \bar{y} se trouvent sur la même droite. On distingue deux cas possibles :

* $\bar{\bar{y}}$ se trouve plus loin que \bar{y} par rapport à x (figure

III.6.a).

Cette situation ne peut pas se produire. En effet, y est définie par

$$\bar{y} = \bar{x} + \bar{\lambda} \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} \quad \text{où} \quad \bar{\lambda} = \max\{\lambda/x + \lambda \frac{\|\bar{u}\|}{\|\bar{u}\|} \in C\}.$$

Donc comme \bar{y} est un point de C et se trouve sur la direction \bar{u} issue de \bar{x} , il ne peut pas être plus loin que \bar{y} .

* Quitte à se trouver sur une face, on peut supposer que le segment défini par \bar{x} et \bar{y} se trouve à l'intérieur de C . Supposons que \bar{y} se trouve à l'intérieur de ce segment (figure III.6.b).

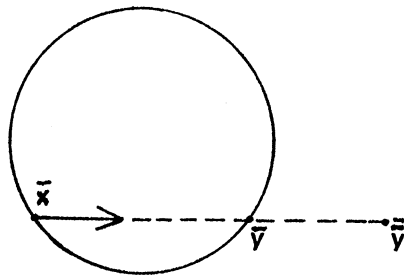


Figure III.6.a

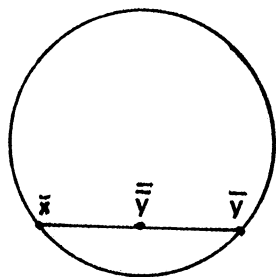


Figure III.6.b

Il est clair qu'on peut trouver un $\varepsilon > 0$ de telle sorte que la boule de centre y et de rayon ε soit toute entière dans C . Mais $y = \lim_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \rightarrow \infty}} y^j$, donc, pour le $\varepsilon > 0$ choisi il existe au moins un y^j qui se trouve dans cette boule D'où la contradiction cherchée car les y^j , vu leurs constructions, ne peuvent pas être à l'intérieur de C .

c.q.f.d.

On va maintenant énoncer et démontrer le théorème principal.

Théorème : Soit C un ensemble compact convexe, sans point singulier $f(x)$ une fonction convexe différentiable et $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite générée par la relation

$$x^0 \in C$$

$$x^{i+1} = x^i - \lambda_i \frac{\tilde{u}^i}{\|\tilde{u}^i\|}$$

où $\lambda_i = \min\{\mu_i, \sigma_i\}$ avec σ_i le terme d'une série divergente et μ_i est défini par $\mu_i = \max\{\mu/x^i - \mu_i \frac{\tilde{u}_i}{\|\tilde{u}_i\|} \in C\}$ et \tilde{u}^i est défini par

$$\tilde{u}^i = \begin{cases} -\text{grad } f(x^i) & \text{si } -\text{grad } f(x^i) \text{ direction admissible} \\ -\text{grad } f(x^i) + p v(x^i) & \text{sinon (p fixé d'avance)} \end{cases}$$

Alors $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ contient une sous suite qui converge vers un point x optimal c'est à dire :

$$\lim_{\substack{i \in \mathbb{N}_1 \\ N_1 \subset \mathbb{N} \\ i \rightarrow \infty}} f(x^i) = f(x) = \text{Inf}_{x \in C} f(x)$$

Démonstration : On distingue deux cas :

* La série $\sum \lambda_i$ est divergente. On reprend la démonstration

donnée par Polyak [1969] en modifiant les points qui correspondent aux conditions nouvelles. Soit encore α un nombre réel tel que $\alpha > f(\tilde{x})$ et posons $S_\alpha = \{x/x \in C \text{ et } f(x) < \alpha\}$ et soit $x_0 \in S_\alpha$. Il existe alors $p > 0$ tel que $\|x - x^0\| < p$ entraîne que $x \in S_\alpha$.

Montrons alors qu'il existe un indice i tel que $x^i \in S_\alpha$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi alors $S_\alpha \subset A = \{x/f(x) \leq f(x^i)\}$. On peut montrer facilement que

$$\langle \tilde{u}^i, x^i - x \rangle < 0 \quad \forall x \in S_\alpha \quad (I)$$

En effet : si $\tilde{u}^i = -\text{grad } f(x^i)$ alors
 $0 > f(x) - f(x^i) > \langle u_x, y - x \rangle \quad \forall y \in A.$

Donc dans ce cas, la relation (I) est vérifiée; sinon \tilde{u}^i aura la forme $\tilde{u}^i = -\text{grad } f(x^i) + \mu v(x^i)$, $\mu > 0$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}^i, x - x^i \rangle &= \langle -\text{grad } f(x^i) + \mu v(x^i), x - x^i \rangle \\ &= \langle -\text{grad } f(x^i), x - x^i \rangle + \mu \langle v(x^i), x - x^i \rangle \\ &< 0 \end{aligned}$$

Alors, on aura en tout cas

$$\langle \tilde{u}^i, x^i - x \rangle < 0$$

pour chaque $x \in A$ et donc pour chaque point de S_α .

En particulier puisque le point $x^0 - p \frac{\tilde{u}^i}{\|\tilde{u}^i\|}$ appartient à S_α on a

$$\left\langle \frac{\tilde{u}^i}{\|\tilde{u}^i\|}, x^i - x \right\rangle < -p$$

Par suite :

$$\|x^{i+1} - x^0\|^2 < \|x^i - x^0\|^2 - 2p\lambda_i + \lambda_i^2 \quad (II)$$

(Pour des détails sur cette inégalité, voir II 2.1).

D'après les propriétés de la suite $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, il existe N tel que pour tout $x > N$, on ait

$$\lambda_i < p \quad (\text{III})$$

De la relation (II), on déduit alors que

$$0 < \|x^{N+v+1} - x^0\| < \|x^N - x^0\|^2 + \sum_{i=N}^{N+v} \lambda_i (\lambda_i - 2p)$$

soit encore, en tenant compte de (III)

$$0 < \|x^{N+v+1} - x^0\| < \|x^N - x^0\|^2 - p \sum_{i=N}^{N+v} \lambda_i$$

et comme $\sum_{i=N}^{\infty} \lambda_i = +\infty$, on aboutit à une contradiction. Il existe donc un indice $i \in \mathbb{N}$ tel que $x_i \in S_\alpha$. Si on fait tendre α vers $f(\tilde{x})$ et en tenant compte de la propriété ci-dessus on en déduit alors qu'il existe $N_1 \subset \mathbb{N}$ tel que

$$f(\tilde{x}) = \lim_{\substack{i \in N_1 \\ i \rightarrow \infty}} f(x^i)$$

* La série $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i$ est convergente. La suite $\{x^i\}$ converge vers un point \tilde{x} .ⁱ⁼⁰ En effet, il suffit de remarquer que:

$$\begin{aligned} \|x^{i+1} - x^i\| &= \left\| \sum_{k=0}^{m-1} (x^{i+k+1} - x^{i+k}) \right\| \\ &< \sum_{k=0}^{m-1} \|x^{i+k+1} - x^{i+k}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_{i+k} \\ &< \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \end{aligned}$$

Raisonnons par l'absurde et supposons alors que \tilde{x} n'est pas un point optimal. On établit d'abord quelques résultats :

. La suite $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors, pour $\varepsilon > 0$, il existe un $n(\varepsilon)$ tel que pour chaque $n > n(\varepsilon)$ x^n appartient à la boule de centre \tilde{x} et de rayon ε . (α)

. La série $\sum \lambda_i$ est définie par $\sum \lambda_i = \sum \min \{ \mu_i, v_i \}$ avec $\sum \sigma_i = +\infty$ et $\sigma_i \rightarrow 0$. Il est clair que $\lambda_i \rightarrow 0$ car $0 < \lambda_i < \sigma_i$. Comme la série $\sum \lambda_i$ est convergente, pour chaque $N > 0$, il existe un $n > N$ tel que x^n sera définie par la relation

$$x^n = x^{n-1} - \lambda_{n-1} \frac{\tilde{u}^{n-1}}{\|\tilde{u}^{n-1}\|} \quad \text{avec} \quad \lambda_{n-1} = \mu_{n-1}$$

c'est à dire

$$\lambda_{n-1} = \max \left\{ \mu / x^n - \mu \frac{\tilde{u}^{n-1}}{\|\tilde{u}^{n-1}\|} \right\} < \sigma_{n-1} \quad (\beta)$$

• Vu le théorème III.1 et les hypothèses faites sur la fonction et le domaine, on a les résultats suivants :

* $-\text{grad } f(x)$ est une fonction continue donc
 $-\text{grad } f(x^i)$ converge vers $-\text{grad } f(\tilde{x})$

* $v(x^i)$ est une fonction continue donc
 $v(x^i)$ converge vers $v(\tilde{x})$

Comme p est choisi "a priori" on arrive au résultat suivant :
 $\tilde{u}(x)$ est une fonction continue et $\tilde{u}(x^i)$ converge vers

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = -\text{grad } f(\tilde{x}) + p v(\tilde{x}) \quad (\gamma)$$

Le point \tilde{x} n'est pas un point optimal, alors, il existe un $\bar{\lambda} > 0$ défini par la relation :

$$\bar{\lambda} = \max \left\{ \lambda / x - \lambda \frac{\tilde{u}(\tilde{x})}{\|\tilde{u}(\tilde{x})\|} \in C \right\}$$

On pose $\bar{y} = \bar{x} - \bar{\lambda} \frac{\tilde{u}(\tilde{x})}{\|\tilde{u}(\tilde{x})\|}$ et $y^{i+1} = x^i - \mu_i \frac{\tilde{u}^i}{\|\tilde{u}^i\|}$.

Vu la relation (γ) , on peut appliquer le lemme III.1 d'où le résultat suivant: y^i converge vers \bar{y} .

Soit $\varepsilon_\alpha = \frac{\|x-y\|}{4}$. Vu la définition de x et y il existe un $n > 0$ tel que: x^i appartient à la boule de centre y et de rayon n implique que y^i appartient à la boule de centre y et de rayon ε_d (δ) .

Soit $\varepsilon = \min(n, \varepsilon_d)$. D'après la relation (α) on a vu que tous les termes de $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ sauf un nombre fini se trouvent dans la boule de centre \bar{x} et de rayon ε . Vu la relation (β) , un nombre fini de termes de y^i sera dans cette boule. D'après, finalement, la relation (δ) , on arrive à une contradiction car les deux boules l'une de centre \bar{x} et de rayon ε et l'autre de centre y et de rayon ε_d n'ont aucun point commun.

c q.f.d.

III.2 - CAS OU f EST DIFFERENTIABLE ET C AVEC DES POINTS SINGULIERS

III.2.0 - Exemple de l'introduction

Soit une fonction f qui est différentiable et un domaine C qui comporte des points singuliers. A première vue, on peut appliquer la méthode décrite au III.1 telle qu'elle est présentée. Malheureusement cette application n'est pas possible, car on peut se trouver en présence de "phénomènes de blocages", c'est à dire la suite construite par la méthode converge vers un point qui n'est pas un point optimal. L'exemple suivant, bien que simple, montre d'une part la présence et d'autre part l'effet de ce phénomène sur la "qualité" de la convergence de la méthode.

Soit alors le problème

max $\langle \vec{a}, x \rangle$ avec $\vec{a} = (-1, -1, 1)$ et $x = (x_1, x_2, x_3)$
 sous les contraintes :

$$(C) \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ (x_3) \end{cases}$$

Il est clair que la valeur maximum de ce problème est $+\infty$. On applique la méthode décrite en III.1. On fixe, alors, "a priori" la stratégie sur le choix de p comme $p = p_1 + \frac{4}{5}(p_2 - p_1)$.

Soit alors le point de départ $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On va expliciter complètement la première itération. Le nouveau

point sera de la forme $x^0 + \lambda_i \frac{\tilde{u}^i}{\|\tilde{u}^i\|}$ où \tilde{u}^i est la direction

choisie. On demande d'autre part que $x^0 + \lambda_i \frac{\tilde{u}^i}{\|\tilde{u}^i\|} \in C$. Ce test

nous conduit au résultat suivant : La deuxième contrainte $(x^0 + \lambda_i \frac{\tilde{u}^i}{\|\tilde{u}^i\|})_2 > 0$ est violée. Donc on va changer de direction.

La normale de l'hyperplan correspondant est $v(x^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On cherche alors une nouvelle direction qui sera de la forme $\tilde{x} = \vec{a} + pv(x^0)$. Les deux valeurs extrêmes de p , qui correspondent aux deux directions admissibles extrêmes peuvent être facilement obtenues. En effet on aura

$$\langle \tilde{u}, \vec{a} \rangle > 0 \implies \langle \vec{a} + pv(x^0), \vec{a} \rangle > 0$$

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle p_1 v(x^0), \vec{a} \rangle > 0 \implies p_1 > -\frac{\|\vec{a}\|^2}{\langle v(x^0), \vec{a} \rangle} = -3$$

et

$$\langle \tilde{u}, v(x^0) \rangle < 0 \implies \langle \vec{a} + p_2 v(x^0), v(x^0) \rangle < 0$$

$$p_2 = -\frac{\langle \vec{a}, v(x^0) \rangle}{\|v(x^0)\|^2} = -1$$

donc $p \in]-3, -1[$. Vu la règle qu'on a posé au départ sur p on aura la nouvelle direction:

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3 + \frac{4}{5}(-2)) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le λ_0 sera défini par $\max\{\lambda / x^0 + \lambda \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|} \in C\}$ donc sera égal à $\|\tilde{u}\|$. D'où le nouveau point sera

$$x^1 = x^0 + \lambda_0 \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

et la valeur de la fonction $f(x) = \langle \vec{a}, x \rangle$ sera :

$$f(x^1) = \langle \vec{a}, x^1 \rangle = \frac{3}{5}$$

A partir du point x^1 on peut facilement calculer les autres points à cause d'une part de l'égalité de deux coefficients $a_1 = a_2 = -1$ et d'autre part de la symétrie des deux contraintes $(x_1 > 0)$ et $(x_2 > 0)$.

Ainsi à la deuxième itération, la première contrainte sera violée,

$$(x^1 + \lambda_1 \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|})_1 > 0. \text{ La nouvelle direction sera } \tilde{u} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et}$$

le nouveau λ_1 sera égal à $\frac{2}{5}$ d'où

$$x^2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ 1 + \frac{2}{5} \end{bmatrix} \text{ et } f(x^2) = 1 + \frac{2}{5} - (\frac{2}{5})^2$$

Plus généralement à la $x^{i\text{ème}}$ itération on aura :

Si n - pair

$$x^n = \begin{bmatrix} \frac{2^n}{5^n} \\ 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{5}\right)^i \end{bmatrix}$$

Si n - impair

$$x^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2^n}{5^n} \\ \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{5}\right)^i \end{bmatrix}$$

Ainsi on construit une suite x^i qui tend vers le point :

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^i \end{bmatrix}$$

qui n'est pas le vrai point optimal.

Cet exemple montre bien qu'il faut poser d'autres restrictions sur p pour éviter les phénomènes de "blocage". Dans la suite on va examiner le cas où f est une fonctionnelle linéaire et C un polyèdre borné.

III.2.1 - Cas où f est fonctionnelle linéaire et C polyèdre borné

Soit alors un programme linéaire sous la forme canonique, c'est à dire

$$(P) \quad \min \langle \vec{a}, x \rangle$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} A \cdot x < h \\ x > 0 \end{cases}$$

On pose $f(x) = \langle \vec{a}, x \rangle + \min \langle \vec{0}, y \rangle$

sous les contraintes

$$\begin{cases} U \cdot y = h - Ax_1 \\ x_2 > 0 \end{cases}$$

Il est clair qu'on se trouve en présence de deux types de contraintes. De contraintes de type $(x > 0)$ et de contraintes de type $(h - Ax > 0)$. L'idée de la méthode reste la même que celle de la méthode décrite en III.1 tout en ajoutant quelques restrictions sur le choix pour éviter les phénomènes de blocage

Comme on a vu (III.1) les trois points à expliciter sont les suivants

- * Construction de la direction
- * Construction de λ_i
- * Test d'arrêt

Le phénomène de "blocage" étant lié seulement avec la construction de la direction on va expliciter ce point.

Pour éviter alors le blocage on propose la stratégie suivante qu'on va expliciter sur l'exemple suivant :

Exemple : Soit le problème

$\max \langle \tilde{a}, \tilde{x} \rangle$ avec $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $a_1, a_2 > 0$, $a_3 < 0$
sous les contraintes

$$\begin{cases} -x_1 + kx_2 < 0 \\ x_1 > 0 \\ (x_3) \end{cases}$$

Il est clair que la valeur maximum est $+\infty$. Partons encore du point

$$x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La direction \tilde{u}^0 sera le vecteur \vec{a} si toutes les contraintes sont respectées. Mais, on a $x_2^0 = 0$ et $a_2 < 0$ donc une violation. Il faut alors changer la direction. La nouvelle direction \tilde{u} sera de la forme $\tilde{u} = \vec{a} + p v(x^0)$ avec

$$v(x^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comme on l'a dit déjà, la nouvelle direction doit respecter les contraintes suivantes

$$\langle \tilde{u}, \vec{a} \rangle > 0 \Rightarrow \|\vec{a}\|^2 + p(-a_2) > 0 \Rightarrow p_2 = -\frac{\|\vec{a}\|^2}{\bar{a}_2}$$

(on note $\bar{a}_i = -a_i$)

et

$$\langle \tilde{u}, v(x^0) \rangle < 0 \Rightarrow a_2 + p < 0 \Rightarrow p_1 = a_2$$

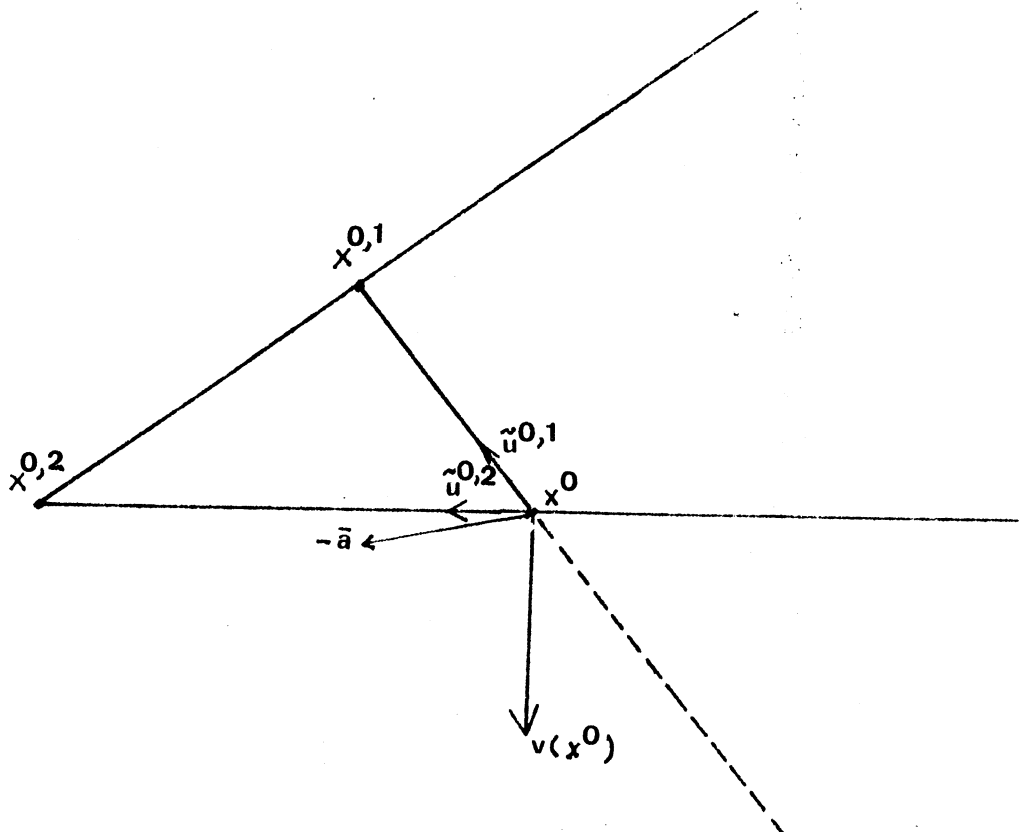


Figure III.7

D'où alors les deux directions admissibles extrêmes :

$$\tilde{u}^{0,1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} - \frac{\|\vec{a}\|^2}{\bar{a}_2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \frac{\|\vec{a}\|^2 - a_2}{\bar{a}_2} \\ a_3 \end{bmatrix}$$

et

$$\tilde{u}^{0,2} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

A partir de deux directions extrêmes, on construit les deux points correspondants. On choisit λ_0 comme

$$\lambda_0 = \max \left\{ \lambda / x^0 + \lambda \frac{\tilde{u}^{0,i}}{\|\tilde{u}^{0,i}\|} \in C \right\} \quad \text{où } i = 1 \text{ ou } 2$$

Pour la direction $\tilde{u}^{0,1}$ on aura :

$$x^{0,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{para} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^2 + a_3^2 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} > 0 \Rightarrow \text{para}_1 = \frac{1}{a_1}$$

et

$$\langle (-1, k, 0), x^{0,1} \rangle < 0 \Rightarrow \text{para}_2 = \frac{a_2}{ka_1^2 + a_3^2 + a_1 + a_2} < \text{para}_1,$$

d'où le nouveau point

$$x^{0,1} = \begin{bmatrix} \frac{k(a_1^2 + a_3^2)}{k(a_1^2 + a_3^2) + a_1 + a_2} \\ \frac{a_1^2 + a_3^2}{k(a_1^2 + a_3^2) + a_1 + a_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{a_3 a_2}{k(a_1^2 + a_3^2) + a_1 a_2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

De la même façon

$$x^{0,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_3}{a_1} \end{bmatrix}$$

(Voir Figure III.7)

Supposons maintenant que le nouveau point x^{i+1} est le point $x^{0,1}$. On recommence la procédure. On fait le test de réalisabilité

$$\langle (-1, k, 0), x^{0,1} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle (-1, k, 0), \vec{a} \rangle = -a_1 + k a_2 > 0$$

d'où la normale

$$v(x^{0,1}) = \begin{bmatrix} -1 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la même façon que précédemment, on construit les deux directions admissibles extrêmes $\tilde{u}^{0,1,1}$ et $\tilde{u}^{0,1,2}$. On pose encore $\tilde{u}^{0,1} = \vec{a} + p v(x^{0,1})$, alors.

$$\langle \tilde{u}^{0,1}, \vec{a} \rangle > 0 \Rightarrow p_1 = \frac{\|\vec{a}\|^2}{k a_2 - a_1}$$

et

$$\langle \tilde{u}^{0,1}, v(x^{0,1}) \rangle < 0 \quad p_2 = -\frac{k a_2 - a_1}{k^2 + 1}$$

d'où alors

$$\tilde{u}^{0,1,1} = \begin{bmatrix} \frac{a_2^2 + a_3^2 + ka_2 a_1}{(ka_2 - a_1)} \\ \frac{-ka_1^2 + ka_3^2 + ka_2 a_1}{ka_2 - a_1} \\ a_3 \end{bmatrix}$$

et le point sera de la forme

$$x^{0,1,1} = x^{0,1} + \text{para} \frac{\tilde{u}^{0,1,1}}{\|\tilde{u}^{0,1,1}\|}$$

Vu les contraintes on arrive à

$$\text{para} = \frac{(a_1^2 + a_3^2)(ka_2 - a_1)}{(ka_1^2 + ka_3^2 + a_1 a_2)}$$

d'où finalement

$$x^{2,1} = \begin{bmatrix} \frac{k(a_1^2 + a_3^2)}{k(a_1^2 + a_3^2) + a_1 a_2} + \frac{(a_1^2 + a_2^2)(a_2^2 + a_3^2 + ka_2 a_1)}{(ka_1^2 + ka_3^2 + a_1 a_2)^2} \\ 0 \\ \frac{a_3 a_1}{k(a_1^2 + a_3^2) + a_1 a_2} + \frac{a_3(a_1^2 + a_3^2) + (ka_2 - a_1)}{(ka_1^2 + ka_3^2 + a_1 a_2)^2} \end{bmatrix}$$

On peut montrer facilement que $(x^{2,1})_1 > 1 = x_1^0$. (voir Figure III.8).

III.8)

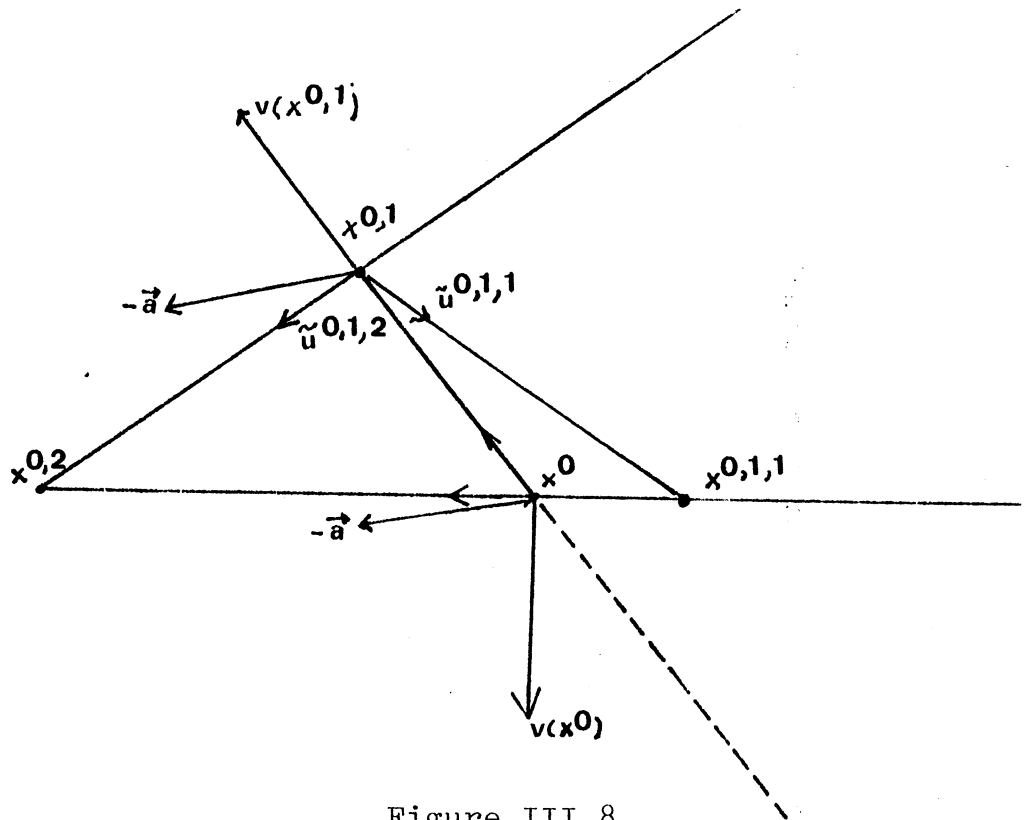


Figure III.8

La méthode qu'on propose est la suivante :

On cherche, alors, un coefficient α ($\alpha < 1$) tel que :
 si $x^1 = \alpha x^0,1 + (1-\alpha)x^0,2$ est le point qu'on obtient à
 l'itération i et si $x^1,2$ et $x^1,1$ sont les deux points
 extrêmes qu'on obtient à partir de deux directions admissibles
 extrêmes sorties de x^1 , alors on aura

$$((\alpha x^1,1 + (1-\alpha) x^1,2),_1 = 1 = (x^0),_1 \quad (\beta)$$

Vu de (a) et (b) on arrive finalement à la relation :

$$a^2 = \frac{k(a_1^2 + a_3^2)}{k(a_1^2 + a_3^2) + a_1 a_2} + \frac{1}{\frac{(a_1^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_3^2 + k a_1 a_2)}{(k a_1^2 + k a_3^2 + a_1 a_2)^2}}$$

Des résultats numériques obtenus à partir de cette méthode nous montrent bien qu'on peut éviter le blocage.

Remarque - Il faut prendre en compte aussi le cas suivant (voir Figure III.9)

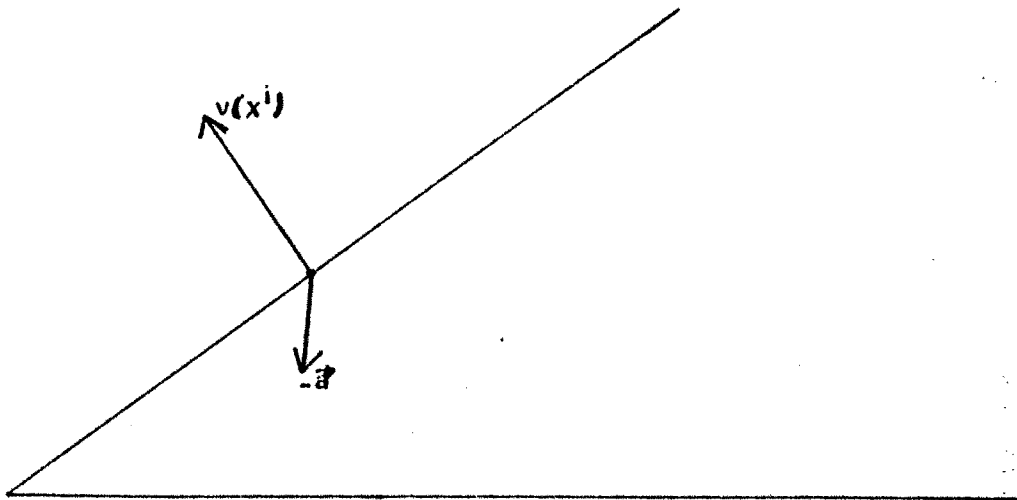


Figure III.9

C'est à dire le cas où la direction \vec{a} est admissible, mais il nous conduit à un point singulier qui n'est pas un point optimal. Dans ce cas on change encore la direction, mais alors on ne peut pas obtenir la nouvelle direction en posant tout simplement $\tilde{u} = \vec{a} + pu(x^0)$. Seule la direction qui correspond à p_2 peut être obtenue. Pour l'autre on pose $\tilde{u} = -\vec{a} - pu(x^0)$. Une fois que les directions sont obtenues, le travail reste tout à fait le même. Cette remarque est générale au point qui ne dépend pas de la stratégie choisie

Application Soit le problème suivant :

$$\max \langle (a_1, a_2, a_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle, a_1, a_2 < 0, a_3 > 0$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ (x_3) \end{cases}$$

On a vu que le choix de p ne peut pas être arbitraire dans l'intervalle $[p_1, p_2]$. On applique l'algorithme avec la stratégie proposée ci-dessus. L'expression de α devienne très simple. Plus précisément on trouve :

$$\alpha = \frac{a_1^2 a_2^2}{(a_1^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_3^2)}$$

En partant du point $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, on n'a jamais le phénomène de

blocage car toujours on passe du point $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ * \end{bmatrix}$ au point $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ * \end{bmatrix}$

et réciproquement.

Revenons maintenant au coefficient α et explicitons les coefficients a_1 a_2 a_3 et k en fonction de $u(x^i)$, $u(x^{i-1})$ et g .

$$k = -\text{ctg}(u(x^i), u(x^{i-1}))$$

avec

$$\cos(u(x^i), u(x^{i-1})) = \frac{\langle u(x^i), u(x^{i-1}) \rangle}{\|u(x^i)\| \|u(x^{i-1})\|}$$

et

$$\sin(\langle u(x^i), u(x^{i,1}) \rangle) = \sqrt{1 - \cos(\langle u(x^i), u(x^{i,1}) \rangle)}$$

Le a_2 est défini comme $a_2 = \langle -g, u(x^i) \rangle$. Cherçons maintenant un vecteur u_i orthogonal à $u(x^i)$ et qui sera dans le même plan avec $u(x^i)$ et $u(x^{i,1})$. Il va être de la forme suivante

$$u_i' = \frac{u(x^i) + \mu u(x^{i,1})}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

On a bien que

$$\langle u_i', u(x^i) \rangle = 0$$

$$\langle u(x^i) + \mu u(x^{i,1}), u(x^i) \rangle = 0$$

$$\langle 1 + \mu u(x^{i,1}), u(x^i) \rangle = 0$$

$$\mu = - \frac{1}{\langle u(x^{i,1}), u(x^i) \rangle}$$

D'où $a_1 = \langle -g, u_i' \rangle$

L'expression de a_3 est très facile. En effet :

$$a_3 = \sqrt{1 - a_1^2 - a_2^2}$$

Il est clair que l'expression qui nous donne α ne dépend pas du repère sur lequel on travaille. Donc cette expression est générale et on peut l'utiliser dans tous les cas possibles avec la seule condition qu'on aura chaque fois deux contraintes actives ("violées") (une à l'itération i et une autre à l'itération $i+1$). Ainsi on retrouve le résultat suivant tant que l'angle $\langle u(x^i), u(x^{i,1}) \rangle$ est aigu tant que α est grand, donc différence $f(x^{i+1}) - f(x^i)$ est petit car on obtient comme point x^{i+1} un point qui est près de $x^{i,1}$.

III.2.2 Etude de la convergence de la méthode

Dans ce paragraphe, on va donner des conditions pour éviter

le phénomène de "blocage"

Théorème : Soit une fonctionnelle linéaire $f(x) = \langle c, x \rangle$ et C un polyèdre borné. Pour minimiser f dans C on construit la suite itérative suivante :

$$x^0 \in C$$

$$x^{i+1} \leftarrow x^i + \lambda_i (-g + pu_1)(\alpha)$$

avec

$g = - \frac{\text{grad } f(x^i)}{\|\text{grad } f(x^i)\|}$ le gradient de la fonction f au point x^i ,

$u_1 = \frac{u(x^i)}{\|u(x^i)\|}$ la norme de l'hyperplan $\langle u(x^i), x \rangle = b_1$ qui correspond à la contrainte active à l'itération i et $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de scalaires définie par la relation :

λ_i est le pas le plus grand qu'il est possible de faire à partir de x^i dans la direction $(-g + pu_1)$ sans sortir du domaine C .

Sous l'hypothèse qu'à chaque point x^i une seule contrainte est active, il existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ ($0 < \alpha < 1$) tel que le pas

$$p \leftarrow \alpha p_2(x^i) + (1-\alpha) p_1(x^i),$$

avec $p_2(x^i)$, $p_1(x^i)$ les deux pas qui nous définissent les deux directions extrêmes à partir de x^i , nous avons une direction qui

* est admissible.

* est une direction de descente,

* évite le blocage

Démonstration : Raisonons par l'absurde. Supposons que la suite converge vers un point \tilde{x} qui n'est pas optimal et que ce point se trouve à l'intersection de k hyperplans d'équations :

$$\langle u, x \rangle = a_i, i = 1(i)k$$

On peut trouver $\epsilon > 0$ tel que la boule de centre \tilde{x} et de rayon ϵ n'intersecte que les hyperplans qui sont définis ci-dessus. Comme la suite $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers le point \tilde{x} , pour le $\epsilon \in 0$ il existe $N(\epsilon)$ tel que pour chaque $i > N(\epsilon)$

x^i appartient à cette boule. Donc, il existe $\varepsilon > 0$ et $N(\varepsilon)$ tel que pour chaque $i > N(\varepsilon)$, x^i se trouve sur un des k hyperplans qu'on a définis, précédemment. Sans perte de généralité on peut supposer que le point x^i se trouve sur la contrainte active d'équation $\langle u_1, x \rangle = b_1$.

On supposera que les k contraintes ont la forme :

$$x_1 > 0 \quad x_2 > 0 \quad \dots \quad x_k > 0$$

Donc $u_i = (0, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$ $i = 1(i)k$ et $\tilde{x} = \tilde{0}$

La direction $-g$ peut s'écrire comme :

$$-g = \sum_{i=1}^p b_i u_i + \sum_{j=1}^q b_j u_j + h$$

$$\text{où } \langle h, u_i \rangle = 0 \quad \forall i \quad \text{et } b_i > 0 \quad \text{et } b_j < 0$$

La nouvelle direction à partir du point x^i aura la forme suivante : $-g + pu_1$ tout en respectant les deux conditions :

* $-g + pu_1$ doit être une direction de descente, donc :

$$\langle g + pu_1, -g \rangle > 0 \Rightarrow p > - \frac{\langle -g, -g \rangle}{b_1} = p_2$$

* $-g + pu_1$ doit être une direction admissible, donc :

$$\langle -g + pu_1, u_1 \rangle < 0 \Rightarrow p < -b_1 = p_1$$

Donc $p \in [p_2, p_1]$. En plus on pose la condition suivante :

$$\left\langle \sum_{k=1}^p b_k u_k, x^{i+1} \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^p b_k u_k, x^i \right\rangle = r_0$$

De cette relation on obtient :

$$\sum_{k=1}^p b_k \langle u_k, x^i \rangle + \lambda_i \langle -g + pu_1, x^i \rangle = \sum_{k=1}^p b_k \langle u_k, x^i \rangle$$

$$\sum_{k=1}^p b_k \langle u_k, \lambda_i (-g + pu_1) \rangle = 0$$

$$\tilde{p} = \frac{\sum_{k=1}^p b_k \langle -g, u_k \rangle}{\sum_{k=1}^p b_k \langle u_1, u_k \rangle} = - \frac{\sum_{k=1}^p b_k \langle -g, u_k \rangle}{b_1}$$

Maintenant, montrons que $p \in [p_2, p_1]$

* $p > p_2$. Il suffit de montrer que $\langle -g + pu_1, -g \rangle > 0$

$$\begin{aligned} - \frac{\sum b_k \langle -g, u_k \rangle}{b_1} &> - \frac{\langle -g, -g \rangle}{b_1} \\ \therefore \frac{\langle -g, -g - h \rangle}{b_1} &> - \langle -g, -g \rangle \\ - \langle -g, -g \rangle + \langle -g, h \rangle &> - \langle -g, -g \rangle \\ \langle -g, h \rangle &> 0 \text{ qui est vrai car } \langle -g, h \rangle = \|h\|^2. \end{aligned}$$

* $p < p_1$: Il suffit de montrer que $\langle -g + pu_1, u_1 \rangle < 0$

$$\begin{aligned} - \frac{\sum b_k \langle -g, u_k \rangle}{b_1} &< -b_1 \\ - \sum_{k=1}^p b_k \langle -g, u_k \rangle &< -b_1^2 \\ - \sum_{k=2}^p b_k^2 &< 0 \text{ qui est vrai.} \end{aligned}$$

Donc pour chaque $p \in [p_2, \tilde{p}]$ $\sum_{j=1}^p b_j \langle u_j, x^{i+1} \rangle > r_0$
 A partir de \tilde{p} on trouve le nombre α_1^i ($0 < \alpha_1^i < 1$)
 défini par la relation

$$\tilde{p} = \alpha p_2(x^i) + (1-\alpha) p_1(x^i)$$

De la même façon, en supposant que le point x^i se trouve sur l'hyperplan défini par la normale u_j , $j \in \{2, 3, \dots, p\}$, on peut trouver d'autres nombres α_j^i . On prend alors

$$\alpha^i = \max_{j \in N_p} \alpha_j^i$$

On arrive ainsi à une contradiction car on a trouvé un nombre α telle que

$$\sum b_j \langle u_j, x^i + \lambda_i (-g + (\alpha p_2 + 1 - p_1)u_1) \rangle \geq r_0,$$

donc on ne peut pas converger au point \bar{x} ou $\sum b_j \langle u_j, \bar{x} \rangle = 0$.

Si on n'a pas un système orthonormé, dans le cas général, on peut arriver au cas précédent par une transformation affine

Comme les points singuliers de C sont en nombre finis, on peut trouver un nombre $\tilde{\alpha}$ ($0 < \tilde{\alpha} < 1$) avec lequel on évite le blocage, et vu le théorème du paragraphe précédent on peut assurer la convergence à un point optimal.

c.q.f.d.

Remarque · L'hypothèse "Le point x^i se trouve à une contrainte active" n'est pas gênante pour la généralité car si on part d'un point x^0 quelconque il est très peu probable qu'on arrive à un point singulier.

CHAPITRE IV
EXPERIMENTATION - APPLICATIONS DE L'ALGORITHME

IV.1 - EXPERIMENTATION DE L'ALGORITHME

La méthode de sous-gradient modifiée a été programmée en langage FORTRAN sur HB 68 : à partir d'une série d'exemples, nous présentons des résultats expérimentaux pour étudier le comportement de l'algorithme.

On reprend l'exemple de base, vu au premier chapitre. On montre, en un premier temps, que le choix de p arbitrairement dans l'intervalle $[p_1, p_2]$ nous donne très souvent des phénomènes de blocage

Les tableaux qui suivent, donnent le comportement de l'algorithme en fonction du choix de p dans l'intervalle $[p_1, p_2]$.

On pose, pour faciliter la construction des tableaux :

A = nombre d'itérations

B = valeur optimale obtenue à la fin de l'application de la méthode

C = La différence entre la valeur optimale exacte du programme linéaire et la valeur "optimale" obtenue par l'algorithme est plus petite d'un pourcentage x ($x = 20\%$, 10% , 5% , etc).

D = temps C.P.U.

E = point final.

On rappelle, enfin, que la valeur optimale exacte est -13 et le point optimal $x = (5, 0, 1, 0, 4, 0)$ a été obtenu en 3 itérations et à 0.841 sec de C.P.U.

Pour le premier tableau on prend comme point initial :

$$x^0 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

et pour le choix de p la stratégie suivante :

$$p = p_1 + \frac{i}{5} (p_2 - p_1) \quad \text{où } i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

i	A	B	C	D	E
1	57	-10.029	≈20%	1.176	(2.87, 0.95, 0.78, 1.15, 2.15, 0.08)
2	21	- 8.02	>20%	1.152	(2.06, 1.48, 1.08, 1.02, 0.55, 0.001)
3	11	- 8.16	>20%	0.594	(1.88, 1.31, 0.54, 0.98, 0.51, 0.0)
4	12	- 8.32	>20%	0.598	(1.77, 1.19, 0.15, 0.95, 0.54, 0.01)

TABLEAU I

Pour le deuxième tableau, on choisit le même point initial mais p est donné par la formule suivante

$$p = p_1 + \frac{i}{8} (p_2 - p_1) \quad i = 1, 2, 3$$

i	A	B	C	D	E
1	64	-12.43	< 5%	1.240	(4.01, 0.00, 0.01, 0.48, 3.55, 0.05)
2	102	-11.25	>10%	2.667	(3.21, 0.54, 0.36, 1.07, 2.87, 0.00)
3	30	- 8.061	>20%	0.847	(2.09, 1.47, 1.10, 1.03, 0.59, 0.00)

TABLEAU II

Au troisième tableau, on prend toujours le même point initial et comme

$$p = p_1 + \frac{1}{k} (p_2 - p_1) \quad \frac{i}{k} \in \left\{ \frac{1}{7}, \frac{1}{9} \right\}$$

i/k	A	B	C	D	E
1/7	87	-12.456	< 5%	1.581	(4.00, 0.00, 0.003, 0.46, 3.47, 0.00)
1/9	95	-12.47	< 5%	1.678	(4.02, 0.001, 0.045, 0.48, 3.50, 0.006)

TABLEAU III

On reprend le même travail en changeant le point initial.
Ainsi on prend

$$x^0 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1 \\ 1 \\ 1,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

i	A	B	C	D	E
1	107	-10.24	> 20%	1.886	(3.59, 1.36, 2.32, 1.37, 2.62, 0.031)
2	37	-11.68	< 11%	0.954	(3.51, 0.363, 0.2425, 0.91, 3.07, 0.014)
3	17	- 8.98	> 20%	0.685	(2.19, 1.028, 0.41, 1.171, 1.175, 0.0004)
4	10	- 7.85	> 20%	0.571	(1.77, 1.19, 0.16, 0.95, 1.02, 0.49)

TABLEAU IV

i	A	B	C	D	E
1	110	-11.66	>10%	2.387	(5.18, 0.90, 2.98, 0.29, 3.69, 0.005)
2	56	- 9.42	>20%	1.1151	(3.04, 1.46, 1.97, 1.30, 1.90, 0.000)
3	43	- 8.55	>20%	1.038	(2.52, 1.13, 1.29, 1.30, 1.19, 0.001)

TABLEAU V

i/k	A	B	C	D	E
1/7	108	-10.83	>10%	1.935	(4.48, 1.23, 2.35, 0.83, 3.17, 0.01)
1/9	51	-11.50	>10%	1.096	(5.32, 1.02, 3.45, 0.37, 3.61, 0.005)

TABLEAU VI

L'étude des tableaux montre que le phénomène de "blocage" est très fréquent dans le cas du choix de p arbitraire. On observe que tant que la direction choisie approche de la direction définie par p_1 le phénomène de blocage est plus fréquent.

Ainsi, on a cherché une autre stratégie pour définir le p (voir chapitre III). Cette stratégie demande plus d'informations: par exemple, il faut connaître la contrainte violée à l'itération suivante. Mais elle définit le choix de p d'une façon dynamique, c'est à dire elle le définit en fonction de données qu'on dispose à chaque itération. C'est le grand avantage de cette stratégie par rapport au choix arbitraire -"fixé a priori"- de p (choix statique). L'application de cette stratégie aux programmes précédents montrent qu'on évite le phénomène de blocage. Les tableaux VII et VIII montrent l'évolution de la méthode de sous-gradient modifiée en fonction de différentes

stratégies (stratégie dynamique, stratégie statique). Le tableau IX donne les différentes caractéristiques de la stratégie dynamique quand on l'applique à l'exemple de base suivant les deux points initiaux

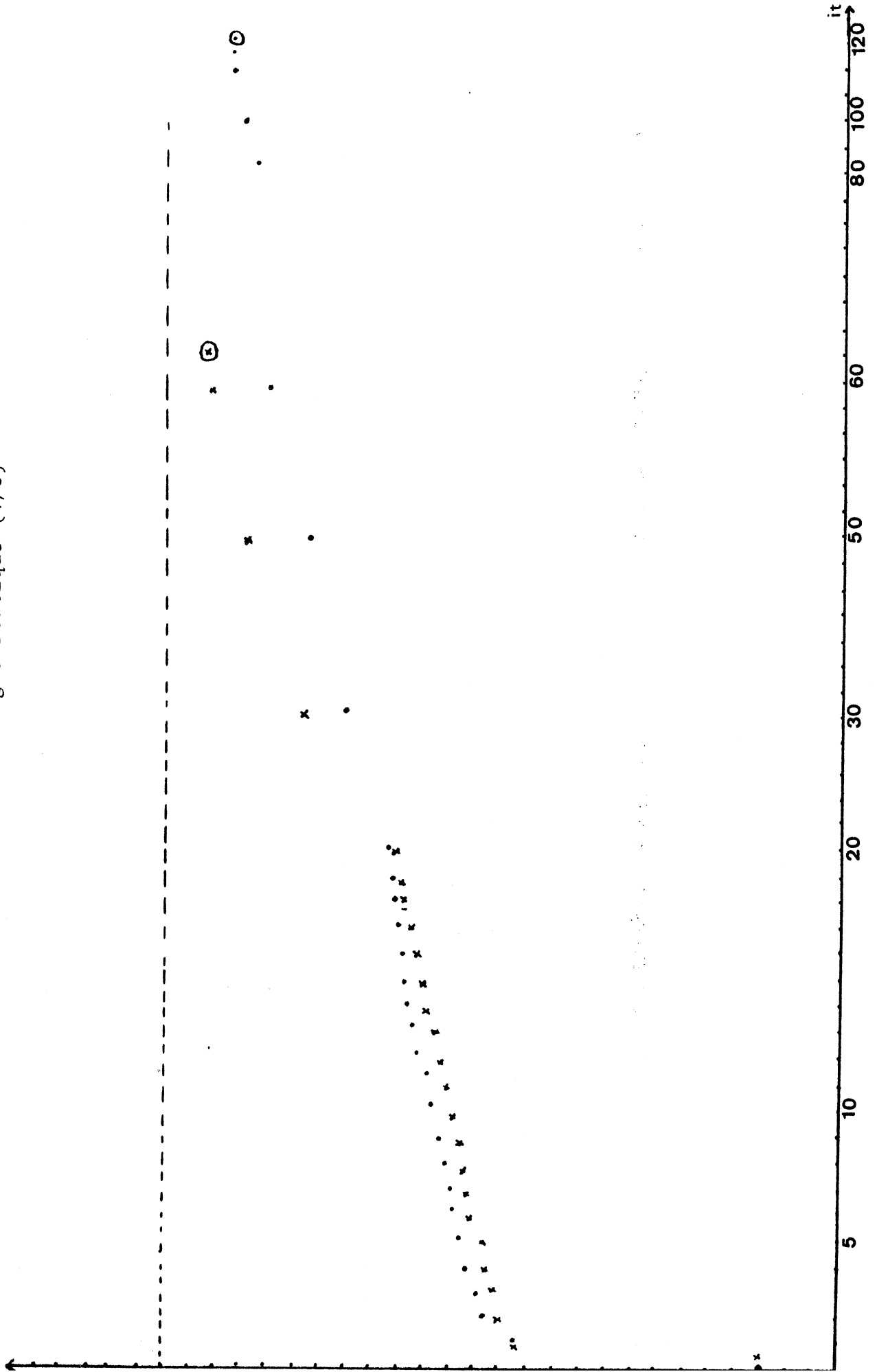
$$x_1^0 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5) \text{ et } x_2^0 = (0.5, 0.5, 1, 1, 1.5, 2.5)$$

x^0	A	B	C	D	E
x_1^0	116	-11.84	< 9%	3.253	(3.65, 0.23, 0.28, 0.81, 3.18, 0.0005)
x_2^0	48	-12.71	≈ 3%	1.214	(4.66, 0.000, 0.66, 0.10, 3.93, 0.04)

TABLEAU IX

"." : stratégie dynamique

"x" : stratégie statique (1/8)



• : strategie dynamique
 "x" : strategie statique (1/2)

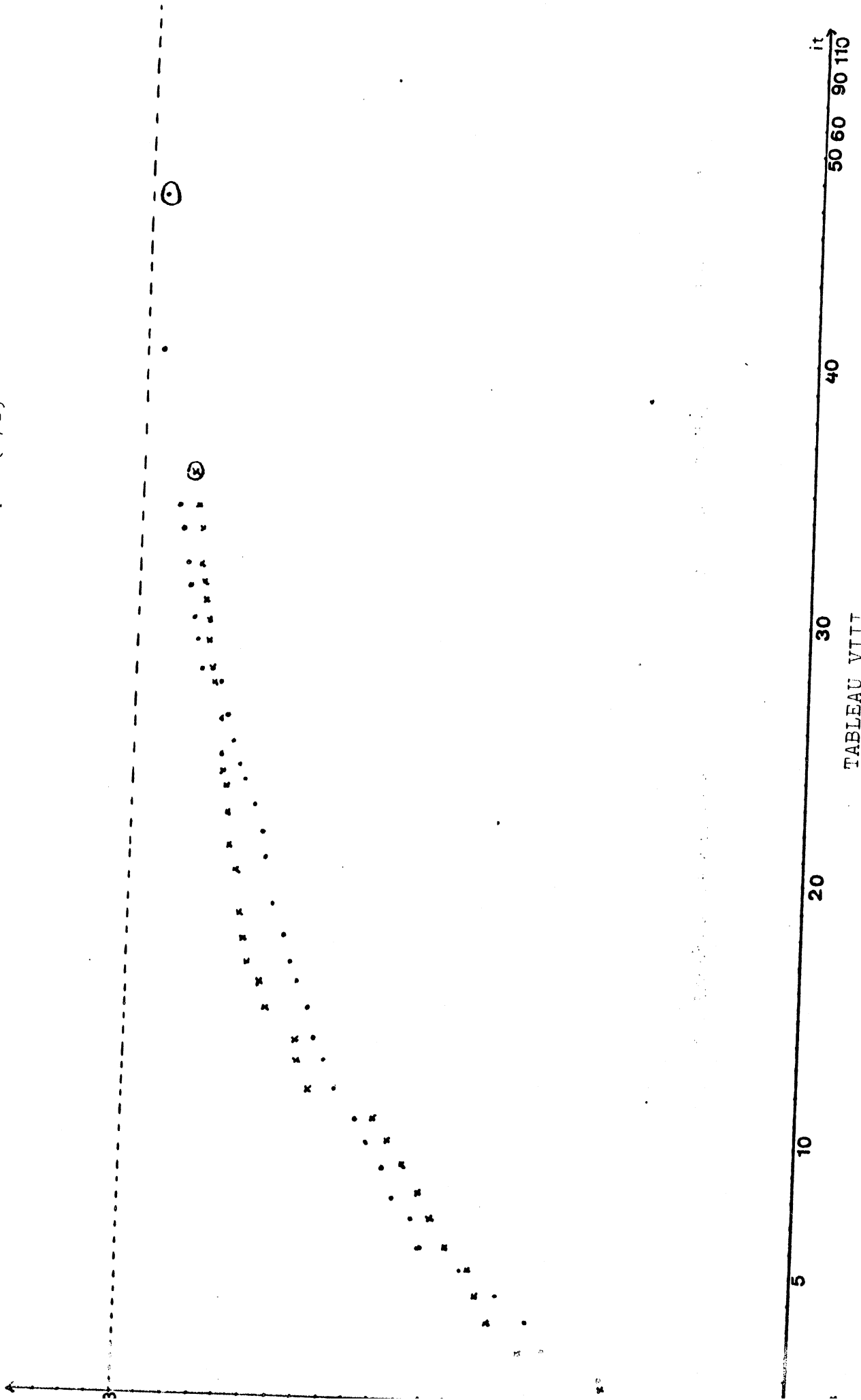


TABLEAU VIII

IV.2 - APPLICATIONS DE L'ALGORITHME

On se place dans le cadre de la programmation linéaire. Une des applications est basée sur l'idée suivante : quelques fois une partie d'un programme linéaire est facilement résoluble. Comme aux méthodes de décomposition on va exploiter ce phénomène.

Soit alors le programme linéaire

$$(PL) \left\{ \begin{array}{l} \min \langle \vec{a}_1, x_1 \rangle + \langle \vec{a}_2, x_2 \rangle \\ \text{sous les contraintes} \\ \left\{ \begin{array}{l} A_1 x_1 + A_2 x_2 \leq h \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

En posant

$$f(x_1) = \langle \vec{a}_1, x_1 \rangle + (PL_{x_1}) \left\{ \begin{array}{l} \min \langle \vec{a}_2, x_2 \rangle \\ \text{sous les contraintes} \\ \left\{ \begin{array}{l} A_2 x_2 \leq h - A_1 x_1 \\ x_2 > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Le programme (PL) devient

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min f(x_1) \\ x_1 \in Q \end{array} \right.$$

On peut voir facilement que f est une fonction convexe et linéaire par morceaux. Ainsi on arrive à minimiser une fonction linéaire par morceaux sur un polyèdre. Pour un point x_1 donné un vecteur u est un sous-gradient de la fonction f au point x_1 si et seulement si $u = a_1 + \tilde{u} A_1$ avec \tilde{u} une solution optimale du dual de PL_{x_1} . En annexe IV.1, on donne une démonstration complète de cette caractérisation.

L'application de notre méthode à la résolution du problème (P) reste facile. Seules les questions liées à la convergence de la méthode dans ce cas restent une question ouverte.

On peut citer comme exemple particulier de la situation ci-dessus le cas de biflots.

ANNEXE IV.1Caractérisation de sous-gradients de $f(x_1)$

On rappelle que l'on désigne par Dx_1 le dual de PLx_1 et par \tilde{u} une des solutions optimales de Dx_1 .

Avant d'énoncer le théorème on montre quelques résultats préliminaires

Lemma 1 : Soit f une fonction convexe et A un opérateur linéaire non singulier et désignons par

$$\tilde{A}(\tilde{x}) = f(x) \quad \text{où} \quad x = A^{-1}\tilde{x}.$$

Alors

$$\partial\tilde{A}(\tilde{x}) = (A^{-1})^t \partial f(x)$$

Preuve : Montrons d'abord que la fonction \tilde{A} est convexe. Soit encore $\tilde{x} = Ax$ et $\tilde{y} = Ay$ et k, λ deux scalaires tels que $k + \lambda = 1$, $k > 0$, $\lambda > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \tilde{A}(k\tilde{x} + \lambda\tilde{y}) &= f(A^{-1}(k\tilde{x} + \lambda\tilde{y})) = f(kA^{-1}\tilde{x} + \lambda A^{-1}\tilde{y}) = f(kx + \lambda y) \\ &\leq kf(x) + \lambda f(y) = kf(A^{-1}\tilde{x}) + \lambda f(A^{-1}\tilde{y}) \\ &= k\tilde{A}(\tilde{x}) + \lambda\tilde{A}(\tilde{y}) \end{aligned}$$

Pour l'égalité, on va montrer, classiquement, que

$$\partial\tilde{A}(\tilde{x}) \subseteq (A^{-1})^t \partial f(x)$$

et

$$\partial\tilde{A}(\tilde{x}) \supseteq (A^{-1})^t \partial f(x)$$

$$\bullet \quad \partial\tilde{A}(\tilde{x}) \subseteq (A^{-1})^t \partial f(x)$$

Soit $\tilde{u}_{\tilde{x}} \in \partial\tilde{A}(\tilde{x})$, alors par définition on aura :

$$\tilde{A}(\tilde{y}) - \tilde{A}(\tilde{x}) \geq \langle \tilde{u}_{\tilde{x}}, \tilde{y} - \tilde{x} \rangle \quad \text{avec} \quad \tilde{x} = Ax. \quad \tilde{y} = Ay$$

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\geq \langle \tilde{u}_{\tilde{x}}, Ay - Ax \rangle \\ &\geq \langle A^t \tilde{u}_{\tilde{x}}, y - x \rangle \end{aligned}$$

ce qui implique $A^t \tilde{u}_{\tilde{x}} \in \partial f(x)$ et ça pour chaque $\tilde{u}_{\tilde{x}} \in \partial \tilde{A}(\tilde{x})$
d'où le résultat

$$\partial \tilde{A}(\tilde{x}) \supseteq (A^{-1})^t \partial f(x)$$

Soit $\tilde{x} = Ax$ et $\tilde{y} = Ay$ alors :

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\tilde{y}) - \tilde{A}(\tilde{x}) &= f(y) - f(x) \\ &> \langle u_x, y-x \rangle \text{ avec } u_x \in \partial f(x) \\ &= \langle u_x, A^{-1}(\tilde{y}-\tilde{x}) \rangle \\ &= \langle (A^{-1})^t u_x, \tilde{y}-\tilde{x} \rangle \end{aligned}$$

Ce qui implique $(A^{-1})^t u_x \in \partial \tilde{A}(Ax)$ et ça pour chaque $u_x \in \partial f(x)$
d'où le résultat.

Donc on aura $\partial \tilde{A}(\tilde{x}) = (A^{-1})^t \partial f(x)$ où encore

$$\underline{\partial f(x) = \partial f(Ax) \cdot A}$$

c.q.f.d.

Lemma 2 · Soit la fonction

$$f_1(y) = (P') \quad \left\{ \begin{array}{l} \min \langle \alpha, x \rangle \\ \left\{ \begin{array}{l} Ax \leq v+y \\ x > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

alors un sous gradient de la fonction f_1 sera une solution du dual du programme (P') .

Preuve · On rappelle que la fonction indicatrice sous une forme généralisée est définie par

$$\delta(x, C) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après la définition de la fonction polaire (voir annexe II.1)

on aura

$$f_1^*(y^*) = \sup_y (\langle y, y^* \rangle - f(y))$$

$$= \sup_y (\langle y, y^* \rangle - \min_{\substack{Ax \leq v+y \\ x > 0}} \langle \alpha, x \rangle)$$

$$= \sup_y (\langle y, y^* \rangle - \max_{C \left\{ \begin{array}{l} uA \leq a_2 \\ u \leq 0 \end{array} \right.}} \langle u, v+y \rangle)$$

$$= \sup_y [\langle y, y^* \rangle - \max_u (u, y - \tilde{\delta}(u, C))] \quad (\text{ici } \alpha = -u, v)$$

$$\sup_y (\langle y, y^* \rangle - \tilde{\delta}^*(y, C))$$

$$= \tilde{\delta}^{**}(y^*, C)$$

$$= \tilde{\delta}^*(y^*, C)$$

Mais d'après un théorème (annexe II.1) on aura :

$$y^* \in \partial f(y)$$

si et seulement si

$$f(y) + f^*(y^*) = \langle y, y^* \rangle$$

Donc $f(y) = \langle y, y^* \rangle + \langle y^*, v \rangle$ avec $y^* \in C$ ce qui montre que y^* est une solution du dual.

c.q.f.d.

Maintenant il est assez facile de montrer le théorème en question .

Théorème : Pour un x_1 donné

$$\partial f(x_1) = \{y/y = a_1 - \tilde{u}A_1 \text{ où } \tilde{u} \text{ est une solution de } Dx_1\}$$

Démonstration . On montrera d'abord que chaque y de la forme décrite dans l'énoncé est un sous-gradient de f .

En effet, il suffit de montrer que

$$f(x'_1) - f(x_1) > \langle y, x'_1 - x_1 \rangle.$$

Soit alors \tilde{u} une solution optimale de Dx_1 et \tilde{u}' une solution optimale de Dx'_1 . Il est clair que \tilde{u} est une solution réalisable de Dx'_1 . donc $\langle \tilde{u}, (h - Ax'_1) \rangle < \langle \tilde{u}', (v - Ax'_1) \rangle$, d'où

$$\begin{aligned} f(x'_1) - f(x_1) &= \langle a_1, x'_1 \rangle + \langle \tilde{u}', (v - A_1 x'_1) \rangle - \langle a_1, x_1 \rangle - \langle \tilde{u}, v - A_1 x_1 \rangle \\ &> \langle a_1, x'_1 - x_1 \rangle + \langle \tilde{u}, v - A_1 x'_1 \rangle - \langle \tilde{u}, v - A_1 x_1 \rangle \\ &= \langle a_1 - \tilde{u}A_1, x'_1 - x_1 \rangle \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Maintenant on montrera que seuls les vecteurs de la forme décrite ci-dessus appartiennent à $\partial f(x_1)$.

D'abord on fait la remarque que

$$\partial f(x_1) = \delta \left\{ \begin{array}{l} a_1, x_1 + \min \langle a_2, x_2 \rangle \\ \left\{ \begin{array}{l} A_2 x_2 \leq n - A_1 x_1 \\ x_2 > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$= a_1 + \delta \left\{ \begin{array}{l} \min \langle a_2, x_2 \rangle \\ \left\{ \begin{array}{l} A_2 x_2 \leq h - A_1 x_1 \\ x_2 > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

D'après le Lemme 1 on a le résultat .

$$\partial f(x_1) = a_1 - \partial f(-A_1 x_1) A_1$$

et d'après finalement le Lemme 2 on a le résultat cherché.

c q.f d.

CONCLUSION

Nous avons mis au point une nouvelle méthode pour la solution de problèmes de minimisation avec contraintes. Cette méthode est assez performante dans le cas où l'on cherche à obtenir rapidement une solution approchée d'un programme linéaire.

Bien qu'il s'agisse d'une méthode appliquée au cas de fonctions non différentiables, on peut remarquer que cette méthode se comporte d'autant mieux quand la fonction est différentiable et, donc, elle peut être considérée comme une généralisation de la méthode classique du gradient.

Bien que les résultats obtenus montrent le bon comportement de l'algorithme il reste encore beaucoup à faire dans ce domaine soit pour apporter des raffinements à l'algorithme, soit pour adapter ces algorithmes à des problèmes spécifiques (problème de biflots par exemple).

Vu les résultats obtenus jusqu'ici, nous espérons pouvoir aborder des problèmes de tailles plus grandes avec des temps de calcul très prometteurs.

BIBLIOGRAPHIE

- [AGMON 1954] S. Agmon : The relaxation Method for linear Inequalities.
Canadian Journal of Mathematics 6(1954), 382-392.
- [Avis, Chvatal 1978] D. Avis. V. Chvatal : Notes on Bland's Pivoting Rule.
Mathematical Programming Study 8(1978), 1-13.
- [Bartel 1968] R.H. Bartels : A numerical investigation of the simplex methods.
Computer Science Department Stanford University.
- [Bland 1977] R.B. Bland : New finite pivoting rules for simplex method.
Mathematics of Operations Research 2(1977), 103-107.
- [Bureau. Costovici 1967] Bureau. Costovici : Une méthode de cheminement intérieur en programmation linéaire M.E.T.R.A.
- [Camerini 1975] P.M. Camerini, L. Fratta et F. Maffioli : On improving Relaxation Methods by modified Gradient Techniques
Mathematical Programming Study 3(1975) 26-34
- [Charnes 1980] Charnes : Complexity and Computability of Solution to linear programming systems
Intern. Jr. of Computer and Information 9(1980), 483-506.
- [Cunningham 1979], W.H. Cunningham : Theoretical Properties of the Network Simplex Method.
Mathematics of Operations Research 4(1979) 196-208.
- [Dantzig 1963] G. B. Dantzig : Linear programming and Extensions.
Princeton University Press, Princeton N.J. 1963.
- [Edmonds 1965] J. Edmonds : Path Trees and Flowers.
Canadian J. Math. 17(1965), 449-467.
- [Eremin 1968] I.I. Eremin : Methods of Fejer's approximations in convex programming.
Mathematical Notes of Academy of Sciences, U.S.S.R. 3(2)1968, 139-149
- [Goffin 1977] J.L. Goffin : On convergence rates of subgradient optimisation methods
Mathematical Programming 13(1977), 329-347.
- [Goldfard, Sit 1979] D. Goldfard and W.Y. Sit : Worst Case Behavior of the Steepest Edge Simplex Method.
Discrete Applied Math. 1(1979) 277-285.
- [Held 1974] M. Held, P. Wolfe and H. Growder : Validation of Subgradient Optimisation

- Mathematical Programming 6(1974), 62-68.
- [Klee, Minty 1972] V. Klee and G.L. Minty · How Good is the Simplex Algorithm.
L. Shicha Ed. Inequalities III Academic Press New-York (1972), 159-175.
- [Lemaréchal 1980] Lemaréchal : Extensions diverses de méthodes de gradient et applications.
Thèse d'Etat (Paris IX), 1980.
- [Mangasarian 1981] O.L. Mangasarian : Iterative Solution of Linear Programm.
SIAM Numerical Analysis 18(1981), 606-614.
- [Maurras 1978] J.F. Maurras · Good Algorithmes Old Ideas manuscript, (1978).
- [Motzkin, Schoenberg 1954] T. Motzkin and I.J. Schoenberg : The Relaxation Method for Linear Inequality.
Canadian Journal of Mathematics 6(1954), 393-404.
- [Müller, Merbach 1970] H. Müller, Merbach On Round off Errors in Linear Programming.
Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems 37(1970).
- [Oettli 1972] W. Oettli : An iterative method, having linear rate of Convergence, for solving a pair of dual linear programs.
Mathematical Programming 3(1972), 302-311.
- [Pla 1980] J.M. Pla · Porgammation linéaire.
Polycopié de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de St Etienne (1980)
- [Polyak 1967] B.T. Polyak : A General Method of Solving Extremum Problems.
Soviet Mathematics Doklady 8(1967), 593-597.
- [Rockafellar 1970] Rockafellar · Convex Analysis.
Princeton, New Jersey.
Princeton University Press 1970.
- [Sakarovitch, Abadie 1963] M. Sakarovitch, J. Abadie : Two methods of decomposition for linear programs.
6th Mathematical Programming Symposium, A. Tucker Editor, Princeton University Press
- [Shor 1964] N.Z. Shor : On the Structure of Algorithms for the Numerical solutions of Optimal Planning and Design Problems.
Dissertation Cybernetics Institute, Academy of Sciences of the Uknainan SSR. Kiev (1964)
- [Shor 1970] N.Z. Shor : On the convergence rate of the generalized gradient method with space dilatation.

Kibernetika 6(2) 1970.

[Van de Panne 1979] C. Van de Panne : The First Algorithm for Linear Programming : An analysis of Kantorovitch's Methods. Presented at the 10th International Symposium on Mathematical Programming, Montreal 1979

[Von Neumann 1952] J. Von Neumann : A Numerical Method to Determine Optimum Strategy
Naval Logistic Research Quarterly 1(1952), 109-115.

[Wolfe 1975] P. Wolfe : A Method of Conjugate Subgradient for Minimizing Nondifferentiable Functions.
Mathematical programming Study 3(1975), 145-173.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le

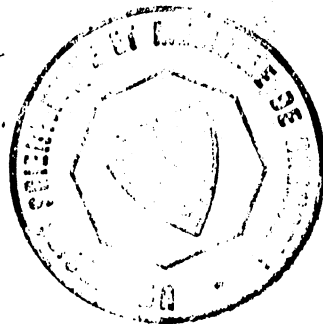
Le Président de la thèse

C. Nequin

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 6.7.82

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale



Le Président
M. TANCHE

