



HAL
open science

Classes quasi-analytiques de fonctions et problèmes de prolongement quasi-analytique

Teiki Philippe Reboul

► **To cite this version:**

Teiki Philippe Reboul. Classes quasi-analytiques de fonctions et problèmes de prolongement quasi-analytique. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1982. Français. NNT: . tel-00300424

HAL Id: tel-00300424

<https://theses.hal.science/tel-00300424>

Submitted on 18 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

Mathématiques Appliquées

(Analyse numérique)

par

Teiki Philippe REBOUL



**CLASSES QUASI-ANALYTIQUES
DE FONCTIONS ET PROBLEMES
DE PROLONGEMENT QUASI-ANALYTIQUE.**



Thèse soutenue le 6 janvier 1982 devant la Commission d'Examen :

Monsieur	N. GASTINEL	: Président
Messieurs	J. DELLA DORA	} Examineurs
	M. DUC JACQUET	
	P.J. LAURENT	

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

année scolaire 1980-1981

Président de l'Université : M. J.J. PAYAN

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

Mlle	AGNIUS DELORD Claudine	Biophysique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Clinique dermatologie
	AMBROISE THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	Physique nucléaire
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique pédiatrie et puériculture
	BELORISKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
M.	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale & traumatologie
	BILLET Jean	Géographie
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET EYMARD Joseph	Clinique Hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Jane-Marie	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie

MM. BUTEL Jean	Orthopédie
CABANEL Guy	Clinique rhumatologie et hydrologie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHARACHON Robert	Clinique O.R.L.
CHATEAU Robert	Clinique neurologique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COEUR André	Chimie analytique et bromotologique
COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
CRABBE Pierre	C.E.R.M.O.
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude	M.I.A.G.
DELORMAS Pierre	Pneumo-phtisiologique
DENIS Bernard	Clinique cardiologique
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DODU Jacques	Mécanique appliquée IUT 1
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GAVEND Jean-Michel	Pharmacologie
GEINDRE Michel	Electro-radiologie
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
JANIN Bernard	Géographie
JEANNIN Charles	Pharmacie galénique
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
KAHANE André	Physique
KAHANE Josette	Physique
KLEIN Joseph	Mathématiques pures
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Hermodynamique
LACHARME Jean	Biologie cellulaire
LAJZEROWICZ Joseph	Physique

Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie thoracique
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutiques
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LE NOC Pierre	Bactériologie virologie
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LOUP Jean	Géographie
	LUU DUC Cuong	Chimie générale et minérale
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
Mlle	MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognostie
MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	NEGRE Robert	Mécanique IUT 1
	MOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OMONT Alain	Astrophysique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Sémeiologie médicale (neurologie)
	PERRIER Guy	Géophysique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	RACHAIL Michel	Clinique médicale B
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
M.	REVOL Michel	Urologie
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
MM.	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
Mme	SEIGLE MURANDI Françoise	Botanique et cryptogamie
MM.	SENGEL Philippe	Biologie animale
	SIBILLE Robert	Construction mécanique IUT 1
	SOUTIF Michel	Physique
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MM. VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VERAIN Alice	Pharmacie galénique
VERAIN André	Biophysique
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

MM. ARNAUD Yves	Chimie IUT 1
AURIAULT Jean-Louis	Mécanique IUT 1
BEGUIN Claude	Chimie organique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BOUTHINON Michel	E.E.A. IUT 1
BRUGEL Lucien	Energétique IUT 1
BUISSON Roger	Physique IUT 1
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
CHEHIKIAN Alain	E.E.A. IUT 1
COHEN Henri	Mathématiques pures
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CONTE René	Physique IUT 1
CYROT Michel	Physique du solide
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude	Sciences nucléaires
GLENAT René	Chimie organique
GOSSE Jean-Pierre	E.E.A. IUT 1
GROS Yves	Physique IUT 1
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KERCKOVE Claude	Géologie

MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique IUT 1
	KUPKA Yvon	Mathématiques pures
	LUNA Domingo	Mathématiques pures
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
Mme	MINIER Colette	Physique IUT 1
MM.	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
	OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
	PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie minéralogie
	PERRIN Claude	Sciences nucléaires
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
	ROBERT Gilles	Mathématiques pures
	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	ROSSI André	Physiologie végétale
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
	SARROT REYNAUD Jean	Géologie
	SAXOD Raymond	Biologie animale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique
MM.	STUTZ Pierre	Mécanique
	VIALON Pierre	Géologie
	VIDAL Michel	Chimie organique
	VIVIAN Robert	Géographie

CHARGES D'ENSEIGNEMENT PHARMACIE

MM.	ROCHAS Jacques	Hygiène et hydrologie
	DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie

PROFESSEURS SANS CHAIRE (médecine)

M.	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
----	--------------	-----------------

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie (hormonologie)
	CHAMPETIER Jean	Anatomie
	COLOMB Maurice	Biochimie
	COULOMB Max	Radiologie
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GROULADE Joseph	Biochimie A
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Gérontologie
	JALBERT Pierre	Histologie
	MAGNIN Robert	Hygiène
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VROUSOS Constantin	Radiothérapie

MAITRES DE CONFERENCES AGREGES (médecine)

MM.	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BENABID Alim Louis	Médecine et chirurgie
	BERNARD Pierre	Gynécologie obstétrique
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DEBRU Jean-Luc	Médecine interne
	DYON Jean-François	Chirurgie infantile
	FAURE Claude	Anatomie et organogénèse
	FAURE Gilbert	Urologie
	FLOYRAC Roger	Biophysique
	FOURNET Jacques	Hépatogastro-entérologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIRARDET Pierre	Anesthésiologie
	GUIDICELLI Henri	Chirurgie générale
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique (réanimation)
	JUNIEN-LAVILLAULOY Claude	Clinique O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie biologique
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MASSOT Christian	Médecine interne
	MOUILLON Michel	Ophtalmologie

MM. PARAMELLE Bernard
RACINET Claude
RAMBAUD Pierre
RAPHAEL Bernard
SCHAEFER René
SEIGNEURIN Jean-Marie
SOTTO Jean-Jacques
STOEBNER Pierre

Pneumologie
Gynécologie-Obstétrique
Pédiatrie
Stomatologie
Cancérologie
Bactériologie-virologie
Hématologie
Anatomie-pathologique

Monsieur le Professeur N. GASTINEL m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, je lui exprime ma profonde gratitude.

Je remercie vivement Messieurs M. DUC-JACQUET, J. DELLA DORA, P.J. LAURENT, d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Monsieur J.L. KOSZUL et Marc LEGRAND ont bien voulu me recommander à Monsieur N. GASTINEL lorsque je me suis présenté comme candidat à un troisième cycle d'Analyse Numérique. C'est avec plaisir que je leur témoigne ici toute ma reconnaissance.

Je remercie vivement Monsieur N. GASTINEL de m'avoir accueilli au sein de son équipe, d'avoir su m'intéresser à la programmation sur ordinateur et d'avoir guidé ma curiosité vers des problèmes de prolongement et d'approximation de fonctions.

Monsieur J. DELLA DORA malgré ses multiples occupations, a bien voulu me prendre en charge et laisser aboutir mon travail. Cela n'a pas été une tâche facile, je lui en suis profondément reconnaissant.

Monsieur J. DELLA DORA m'a intéressé aux problèmes de prolongement et de singularité de fonctions analytiques, m'a fait connaître la vie de la recherche en me faisant faire des Séminaires et participer à des Colloques.

Pour toutes ces raisons, ses conseils et son amitié, je le remercie du fond du coeur.

Je remercie Monsieur P.J. LAURENT d'avoir lu et critiqué le troisième chapitre de ce travail.

L'aide et les précieux conseils de Mademoiselle C. DI CRESCENZO, de Messieurs A. EBERHARD, A. PONCET et de J.R. ROCHE m'ont permis de mener à bien la partie numérique de ce travail. Je les en remercie beaucoup.

Pour ses multiples renseignements bibliographiques donnés avec gentillesse, je remercie sincèrement Madame HIRTZ.

Je remercie Madame Ch. NEUMANN pour la frappe du premier chapitre.

Je remercie profondément Claudine MEYRIEUX pour son soutien et la patience d'avoir mené à bien la dactylographie du deuxième et troisième chapitre.

Je dois un grand merci au Service de Reproduction pour la rapidité et la qualité du tirage.

Enfin, j'ai été très touché par l'ambiance sympathique du laboratoire et du dévouement de ses membres.

Je leur fais part de toute ma reconnaissance.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

<u>CHAPITRE 1</u>	QUELQUES RÉSULTATS SUR LES FONCTIONS QUASI-ANALYTIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE, EXEMPLES, PROBLÈMES DE PROLONGEMENT DE FONCTIONS ANALYTIQUES.....	1
	INTRODUCTION.....	4
	- 1 - FONCTIONS ANALYTIQUES REELLES.....	5
	- 2 - INTRODUCTION AUX CLASSES QUASI-ANALYTIQUES REELLES.....	10
	- 3 - RESULTATS SUR LES CLASSES DE DENJOY-CARLEMAN...	12
	- 4 - RESULTATS SUR LES CLASSES DE BERNSTEIN.....	32
	- 5 - EXEMPLES DE FONCTIONS APPARTENANT A DES CLASSES QUASI-ANALYTIQUES.....	53
	- 6 - PROLONGEMENT QUASI-ANALYTIQUE, PROBLEME D'UNICITE, APPLICATION.....	62
	- 7 - CONCLUSION.....	72
	REFERENCES.....	73
	COMPLEMENT BIBLIOGRAPHIQUE.....	75
 <u>CHAPITRE 2</u>	 CALCUL DU MAXIMUM GLOBAL D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE.....	 77
	INTRODUCTION.....	79
	- 1 - QUELQUES INEGALITES UTILES.....	81
	Questions ouvertes.....	86
	- 2 - EXEMPLES DE MAJORANTES PARTIELLES.....	87
	2.1. Cas où l'on connaît un module de continuité de f	88

. 2.		
2.2.	Cas où l'on connaît une majoration de l'une des dérivées de f	89
2.2.1.	Cas où l'on connaît une majoration d'une dérivée Nième de f avec N pair	90
2.2.2.	Cas où l'on connaît une majoration d'une dérivée nième de f , première méthode.....	94
2.2.3.	Cas où l'on connaît une majoration d'une dérivée nième de f , deuxième méthode.....	95
- 3 -	EXEMPLES DE PROCÉDES P CAS D'UNE VARIABLE REELLE.....	98
- 4 -	COMPARAISON DE QUATRE ALGORITHMES PARTICULIER	102
4.0.	Principe général des algorithmes.....	103
4.1.	Méthode de Bruno O. Shubert.....	106
4.2.	Algorithme de Bruno O. Shubert modifié.....	112
4.3.	Méthode des majorantes paraboliques.....	116
4.4.	Méthode des majorantes paraboliques modifiée.	119
4.5.	Expériences numériques.....	121
- 5 -	DEMONSTRATIONS DES THEOREMES du §4.....	132
- 6 -	EXTENSIONS.....	140
	REFERENCES.....	141

CHAPITRE 3 QUELQUES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR DÉTERMINER UN POLYNÔME DE MEILLEURE APPROXIMATION POUR LA NORME DE TCHEBYCHEFF..... 143

	INTRODUCTION.....	145
- 1 -	GENERALITES.....	145
1.1.	Définitions.....	145
1.2.	Théorèmes généraux.....	146
- 2 -	REFERENCES DE QUELQUES METHODES NUMERIQUES DE RECHERCHE DE MEILLEURE APPROXIMATION D'UNE FONCTION.....	148
- 3 -	DEUXIEME ALGORITHME DE REMES.....	150
3.1.	Définitions et résultats classiques.....	151
3.2.	Description de l'algorithme.....	152
- 4 -	UN NOUVEL ALGORITHME DE RECHERCHE D'UN POLYNOME DE MEILLEURE APPROXIMATION.....	155

4.1. Définitions.....	155
4.2. Etude d'expressions particulières de $L(f,e)$.	156
4.3. Théorème fondamental.....	157
4.4. Un nouvel algorithme de recherche de meilleure approximation.....	161
4.4.1. Idée de l'algorithme.....	161
4.4.2. Description de l'algorithme.....	161
4.4.3. <u>Choix de la suite i_k pour que</u> l'algorithme s'arrête.....	164
4.4.4. Remarques sur la programmation de l'algorithme	164
4.4.5. Généralisation.....	166
- 5 - RESULTATS NUMERIQUES.....	167
5.1. Etude de la rapidité de convergence de l'algorithme de Rémès.....	167
5.2. Comparaison de l'algorithme de Rémès et du nouvel algorithme.....	176
5.3. Conclusion.....	180
REFERENCES.....	181

INTRODUCTION

Les méthodes numériques de prolongement et de reconstruction de fonction d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes sont l'objet essentiel de ce travail.

Le chapitre I est consacré à l'exposition des propriétés de certaines classes de fonctions dites "classes quasi-analytiques" et de rechercher, parmi les résultats des méthodes susceptibles d'être numériquement utilisables.

Deux types de classes quasi-analytiques seront présentées, celles de S.N. BERNSTEIN et celles de A. DENJOY et T. CARLEMAN.

Un bref exposé des propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle conduira de façon naturelle à la définition des deux types de classes précitées. Je me suis efforcé de résumer et de rassembler un maximum de renseignements concernant ces classes, d'approfondir les méthodes de reconstruction d'une fonction dans une classe quasi-analytique (méthode de Charles de la VALLEE POUSSIN, méthode de Torsten CARLEMAN) et de trouver un procédé de reconstruction d'une fonction dans une classe de S.N. BERNSTEIN.

Le point essentiel de ce dernier procédé étant la possibilité de quantifier les erreurs sur l'approximation de la fonction reconstruite.

Le procédé en question nécessite de calculer des polynômes de meilleure approximation approchés à une erreur, déterminée par le procédé de reconstruction, ce qui sera l'objet du chapitre III.

La détermination des polynômes précédemment cités conduit à chercher une valeur approchée du maximum global d'une fonction à une erreur fixée à l'avance .

Le chapitre II est un exposé de quelques méthodes numériques pour rechercher le maximum global d'une fonction sur un intervalle .

Des résultats numériques souligneront l'efficacité de ces méthodes .

On expose brièvement dans le chapitre III trois méthodes numériques de recherche de polynômes de meilleure approximation d'une fonction .

- 2^{ème} Algorithme de REMES , méthode simple d'échange .
- Un nouvel algorithme de recherche de polynômes de meilleure approximation d'une fonction .
- 2^{ème} Algorithme de REMES , méthode générale d'échange .

Quelques comparaisons des résultats numériques des deux premiers algorithmes ont été faites .

CHAPITRE I

QUELQUES RESULTATS SUR LES FONCTIONS QUASI-ANALYTIQUES D'UNE VARIABLE REELLE, EXEMPLES, PROBLEMES DE PROLONGEMENT DE FONCTIONS ANALYTIQUES

Plan

Introduction

1 - <u>Fonctions analytiques réelles</u>	5
- Propriétés d'unicité	5
- Prolongement par recollement	5
- Théorème de caractérisation	6
- Prolongement par interpolation	7
- Propriétés algébriques	9
2 - <u>Introduction aux classes quasi-analytiques réelles</u>	10
- Classes de DENJOY-CARLEMAN	10
- Classes de BERNSTEIN	10
3 - <u>Résultats sur les classes de DENJOY-CARLEMAN</u>	12
- Caractérisation	12
- Inclusion d'une classe dans une classe	13
- Propriétés algébriques	14
- Propriétés différentielles	16
- Prolongement par recollement	17
- Prolongement par interpolation	17
. Méthode de Charles de la Vallée-Poussin	17
. Méthode de T. Carleman	19
. Complément, 1er Algorithme, 2ème Algorithme	20
4 - <u>Résultats sur les classes de BERNSTEIN</u>	32
- Caractérisation	32
- Inclusion d'une classe dans une classe	32
- Propriétés algébriques	34
- Propriétés différentielles et de continuité	35

- Prolongement par recollement	39
- Prolongement par extrapolation	39
. Résultats de Bernstein	39
. Compléments	40
. Algorithme de reconstruction	41
5 - <u>Exemples de fonctions appartenant à des classes quasi-analytiques</u>	53
6 - <u>Prolongement "quasi-analytique", problème d'unicité, application</u>	62
- Dépendance entre la classe quasi-analytique dans laquelle on prolonge une fonction, et son prolongement dans cette classe	63
- Critiques des procédés constructifs de fonctions quasi-analytiques étudiés et problèmes ouverts	66
- Application au prolongement de fonction analytique	69
. Prolongement "quasi-analytique" d'une fonction analytique à travers sa frontière naturelle	69
. Prolongement analytique le long d'un arc d'une fonction analytique définie par sa série de Taylor	71
7 - <u>Conclusion</u>	72
- Références	73
- Compléments bibliographiques	75

INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons étudier des classes quasi-analytiques de fonctions puis donner des applications aux fonctions analytiques, plus particulièrement :

1) On se pose le problème de savoir comment on peut prolonger une fonction analytique à travers sa frontière naturelle suivant un segment, et quand est-ce que ce prolongement est unique.

On pourrait s'intéresser à trouver des conditions pour que si deux segments sur lesquels la fonction a été prolongée se rencontrent, la valeur des prolongements de la fonction à l'intersection des segments coïncident. Nous n'aborderons pas ce dernier problème.

2) Etant donnée une série entière $s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n (z - z_0)^n$

si l'on sait que l'ensemble des singularités* de la fonction multiforme s est localisé dans un ensemble S trouver un moyen numérique de prolonger s sur un arc analytique issu de z_0 et inclus dans le complément de S .

Deux types de classes quasi-analytiques de fonctions seront étudiées, les classes de Denjoy-Carleman et celles de Bernstein, auxquelles on s'intéressera plus particulièrement.

On va tout d'abord exposer les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle ce qui nous conduira à la définition de classes quasi-analytiques.

* l'ensemble des singularités étant l'ensemble des points z tel qu'il existe un arc joignant z_0 à z sur lequel s est prolongeable analytiquement sauf en z où elle n'est pas prolongeable analytiquement.

1 - FONCTIONS ANALYTIQUES REELLES

Définitions :

. Soit f une fonction d'une variable réelle ou complexe à valeur complexe définie sur un ensemble X .

On dit que f est analytique en x_0 , si x_0 appartient au domaine de définition de f et s'il existe une série entière $\sum a_n (x - x_0)^n$ de rayon de convergence strictement positif qui coïncide avec f sur un voisinage de x_0 .

. On dit que f est analytique sur E , si f est analytique en tout point de E .

. On dit qu'une fonction $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ (où \mathbb{C}) est indéfiniment dérivable, si f est indéfiniment dérivable sur $]a,b[$ et si toutes les dérivées de f admettent une limite finie à droite de a et à gauche de b .

Propriétés d'unicité

Soient f et g définies et analytiques sur $[a,b]$ alors :

(1) S'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que pour tout naturel n on ait

$$f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \text{ alors } f = g$$

(2) Si $f(x) = g(x)$ sur un sous-intervalle ouvert non vide de $[a,b]$ alors $f = g$.

Prolongement par recollement

Soient f et g analytiques respectivement sur $[a,b]$ et $[c,d]$, $I = [a,b] \cup [c,d]$, $J = [a,b] \cap [c,d]$ alors :

(3) S'il existe $x_0 \in J$ tel que pour tout naturel n
 $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$ alors il existe h analytique sur I qui
coïncide avec f sur $[a,b]$ et avec g sur $[c,d]$.

(4) Si $f(x) = g(x)$ sur un sous-intervalle ouvert non vide de
 J , alors il existe une fonction analytique h définie sur I
qui coïncide avec f sur $[a,b]$ et avec g sur $[c,d]$.

Théorèmes de caractérisation

(5) Théorème de PRINGSHEIM [3]

f définie sur $[a,b]$ est analytique sur $[a,b]$ si et seulement
si f est indéfiniment dérivable sur $[a,b]$ et s'il existe $A > 0$
tel que pour tout naturel n et tout $x \in [a,b]$.

$$|f^{(n)}(x)| \leq A^n n !$$

Définitions

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, on note :

$$\|f\| = \|f\|_{[a,b]} = \sup \{|f(x)| ; x \in [a,b]\}$$

$E_n(f) = E_n(f, [a,b]) = \min\{\|f-p\| ; p \text{ polynôme de degré au plus } n\}$.

Signalons que si f est continue, il existe un unique polynôme
 P_n tel que $\|f-P_n\| = E_n(f)$, appelé polynôme de meilleure approxi-
mation de degré au plus n de la fonction (Théorème de CHEBYSHEV
[15] p. 54).

(6) Théorème de BERNSTEIN [2] p. 113.

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, f est analytique sur
 $[a,b]$ si et seulement si il existe $A > 0$ et $\rho \in]0,1[$ tel
que pour tout naturel n

$$E_n(f) \leq A\rho^n$$

Prolongement par interpolation

(7) Soient x_0 et $\{c_n\}$ une suite de nombres il existe $\epsilon > 0$ et une fonction f analytique sur $I = [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ telle que $f^{(n)}(x_0) = c_n$ si et seulement si on a :

$$R^{-1} = \overline{\lim}_n \left| \frac{c_n}{n!} \right|^{1/n} < \infty$$

Construction de la fonction analytique f

Soit $\epsilon \in]0, R[$.

Pour tout $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} (x - x_0)^n$ converge vers un nombre $f(x)$.

Soit $\eta \in]\epsilon, R[$ et k tel que $\sup_{n \geq k} \left| \frac{c_n}{n!} \right|^{1/n} \leq \frac{1}{\eta}$ alors pour tout x tel que $|x - x_0| \leq \epsilon$, $m \geq k$ et $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^m \frac{c_n}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \left(\frac{\epsilon}{\eta} \right)^{m+1} \frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{\eta}}$$

$$\left| f^{(p)}(x) - \left(\sum_{n=0}^m \frac{c_n}{n!} (x - x_0)^n \right)^{(p)} \right| \leq \frac{1}{\eta^p} \left(\frac{t^{m+1}}{1-t} \right)^{(p)} \Bigg|_{t = \frac{\epsilon}{\eta}}$$

ce qui donne une estimation de l'erreur que l'on fait pour calculer $f^{(p)}(x)$ $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ en remplaçant f par l'approximation $\sum_{n=0}^m \frac{c_n}{n!} (x-x_0)^n$.

(8) Soit u une fonction définie sur $I = [a, b]$, $c = \frac{a+b}{2}$, $\rho \in]0, 1[$ $\gamma_\rho = \frac{b-a}{4} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)$, $J_\rho = [c - \gamma_\rho, c + \gamma_\rho]$ qui contient I dans son intérieur.

Il existe $\rho \in]0, 1[$ et une fonction analytique f sur J qui prolonge u si et seulement si on a l'inégalité

$$\rho_u = \overline{\lim}_n E_n(u, I)^{\frac{1}{n}} < 1$$

Dans la suite on va utiliser le

Lemme cf [1] ou [2] p 112

Soit P un polynôme de degrés n , $a < b$, $M = \|P\|_{[a, b]}$, $\rho \in]0, 1[$.
 Quelque soit z appartenant à l'ellipse E_ρ de foyer a, b et de demi-axes $\frac{b-a}{4} (\frac{1}{\rho} - \rho)$, $\frac{b-a}{4} (\frac{1}{\rho} + \rho)$ on a

$$|P(z)| \leq M/\rho^n$$

"Construction" de la fonction analytique f

Soient P_n les polynômes de meilleure approximation de u sur I .
 Soient $\rho \in]\rho_u, 1[$, $\eta \in]\rho_u, \rho[$ et k tel que $\sup_{n \geq k} E_n(u, I)^{1/n} \leq \eta$.

Pour tout $x \in E_\rho$ la suite $\{P_n(x)\}_n$ converge vers un nombre $f(x)$.

De plus si $n \geq k$ et si $\|g\|_{E_\rho} = \sup_{x \in E_\rho} |g(x)|$ on a pour tout n :

$$\begin{aligned} \|f - P_n\|_{E_\rho} &= \left\| \sum_{m=n}^{\infty} P_{m+1} - P_m \right\|_{E_\rho} \leq \sum_{m=n}^{\infty} \|P_{m+1} - P_m\|_{E_\rho} \\ &\leq \sum_{m=n}^{\infty} \|P_{m+1} - P_m\|_I / \rho^{m+1} \end{aligned}$$

et de

$$\begin{aligned} \|P_{m+1} - P_m\|_I &\leq \|P_{m+1} - u\|_I + \|P_m - u\|_I \leq E_{m+1}(u, I) + E_m(u, I) \\ &\leq \eta^{m+1} + \eta^m \end{aligned}$$

On obtient

$$\| f - P_n \|_{E_\rho} \leq \sum_{m=n}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \left(\frac{\eta}{\rho}\right)^{m+1} = \frac{1 + \frac{1}{\eta}}{1 - \frac{\eta}{\rho}} \left(\frac{\eta}{\rho}\right)^{n+1}$$

ce qui donne une estimation de l'erreur que l'on fait sur $f(x)$ $x \in E_\rho$ en remplaçant f par l'approximation P_n .

Remarque :

Signalons que dans (7) l'on connaît un ensemble de valeurs possibles pour ϵ et dans (8) on connaît un ensemble de valeurs possibles de ρ . Ces deux ensembles sont des intervalles.

Dans des cas particuliers on peut espérer trouver des valeurs de ϵ ou ρ notamment lorsque la suite $\{c_n\}$ telle que

$f^{(x)}(x_0) = c_n$ est définie par récurrence, ou bien lorsque

$u = \sum u_n T_n^{a,b}$ en notant $T_n^{a,b}(x) = T_n(y)$ avec

$x = 0.5((1+y)b + (1-y)a)$ et $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$,

la suite $\{u_n\}_n$ étant lacunaire et suffisamment décroissante.

Propriétés algébriques

. L'ensemble des fonctions analytiques sur $[a, b]$ est une algèbre pour la multiplication ponctuelle.

. Si $f : I \rightarrow J$ est analytique, g analytique sur J alors $g \circ f$ est analytique sur I .

Propriétés différentielles

. Si f est analytique sur I , toute primitive de f est analytique sur I et sa dérivée f' est analytique sur I .

Dans la suite, on soulignera les propriétés des fonctions analytiques qui seront conservées par toutes les fonctions d'une classe quasi-analytique.

2 - INTRODUCTION AUX CLASSES QUASI-ANALYTIQUES REELLES

. Les classes de DENJOY-CARLEMAN (notion due à J. HADAMARD) [4]

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $\{M_n\}_n = M$ une suite de nombres positifs

Définitions

La classe $C(M) = C(M, I)$ est l'ensemble des fonctions f définies sur I , indéfiniment dérivables telles qu'il existe $A > 0$ vérifiant pour tout naturel n

$$\|f^{(n)}\|_I \leq A^n M_n$$

Si $M_n = n!$ ces inégalités sont vérifiées en particulier par toute fonction analytique sur I et §1/ (5) montre que $C(M, I)$ est l'ensemble des fonctions analytiques sur I .

La classe $C(M)$ est dite quasi-analytique au sens de Denjoy-Carleman si tout élément f de cette classe est complètement déterminé par la suite $\{f^{(n)}(x_0)\}_n$, où $x_0 \in I$.

En particulier (1) du §1 montre que la classe des fonctions analytiques est une classe quasi-analytique de Denjoy-Carleman.

. Les classes de S. BERNSTEIN [2] p. 163

Soit $\{N_n\}_n = N$ une suite strictement croissante de naturels ;
 $I = [a, b]$.

Définitions

La classe $B(N) = B(N, I)$ est l'ensemble des fonctions f telles qu'il existe $A > 0$ et $\rho \in]0, 1[$ satisfaisant pour tout $m \in (N_n)_n$

$$E_m(f) \leq A\rho^m$$

Si $N_n = n$ ces inégalités sont vérifiées en particulier par toute fonction analytique sur I , et (6) ^{§1/} montre que $B(N, I)$ est exactement l'ensemble des fonctions analytiques sur I .

La classe $B(N, I)$ est dite quasi-analytique au sens de Bernstein si tout élément f de cette classe est complètement déterminé par sa restriction à un sous-intervalle ouvert non vide de I .

En particulier (2) du §1 montre que la classe des fonctions analytiques est une classe quasi-analytique de Bernstein.

Dans toute la suite I et J seront des intervalles compacts avec un point intérieur.

3 - RESULTATS SUR LES CLASSES DE DENJOY-CARLEMAN

Caractérisation

Théorème de DENJOY-CARLEMAN [9] p. 52, [10] p. 107 §4.2

$C(M)$ est une classe quasi-analytique de D.C. si et seulement si $\sum_n \frac{1}{\beta_n}$ diverge avec $\beta_n = \inf_{r \in \mathbb{N}} (M_{n+r})^{1/n+r}$

Pour des conditions équivalentes on peut utiliser le

Lemme ; voir [9] p. 75, [10] p. 23

Soit $\{M_n\}_n$ une suite de nombres positifs, on désigne par $\bar{M}_n = \exp(\inf \{t ; (n,t) \in E\})$ où E désigne l'enveloppe convexe des points (k, M_k) $k \in \mathbb{N}$, $T(r) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{r^n}{M_n}$ alors les expressions suivantes convergent ou divergent simultanément

$$\sum_n \frac{1}{\beta_n}, \quad \sum_n \frac{1}{(\bar{M}_n)^{1/n}}, \quad \sum_n \frac{\bar{M}_n}{M_{n+1}}, \quad \int_1^\infty \frac{\text{Log } T(r)}{r^2} dr, \quad \int_1^\infty \log[\sum (\frac{r^n}{M_n})^p] dr$$

avec $p > 0$.

Exemples et contre-exemples de classes quasi-analytiques de DENJOY-CARLEMAN

Soit q un entier $q > 1$ soit $\log_1 x = \log x$ et par récurrence

$\log_{p+1}(x) = \log(\log_p x)$ alors

- les classes $C(M_q, I)$ avec $M_q(n) = (n \log_1(n) \times \dots \times \log_q(n))^n$

pour n assez grand, sont des classes quasi-analytiques de Denjoy-Carleman pour tout entier $q \geq 1$.

- Les classes $C(M_q^\lambda, I)$ avec $M_q^\lambda(n) = [n \log_1(n) \times \dots \times \log_{q-1}(n) \times (\log_q(n))^\lambda]^n$ sont quasi-analytiques pour $\lambda \leq 1$ et non quasi-analytique pour $\lambda > 1$.

Inclusion d'une classe dans une classe

Théorème de Cartan et Mandelbrojt [6]

$C(M, I) \subseteq C(M', I)$ si et seulement si $\overline{\lim}_n \frac{M_n^f}{M_n'}^{1/n} < \infty$

où $M_n^f = \frac{1}{n^n} \sup_{r \geq n} \frac{r^{2n}}{U(r)}$ et $U(r) = \sup_{n \leq r} \frac{r^{2n}}{n^n M_n}$, $r \in \mathbb{R}$.

Remarques :

. Il existe un procédé constructif pour obtenir la suite $\{M_n^f\}_n$ à l'aide de la suite $\{M_n\}_n$, voir [10] p. 14.

. Le théorème précédent est encore valable en supprimant la condition de quasi-analyticité de $C(M, I)$ et de $C(M', I)$.

On a les résultats

- S'il existe n tel que $M_n = 0$ alors $C(M, I)$ est inclus dans l'ensemble des polynômes de degré au plus $n-1$ restreints à I .

- La classe analytique est incluse dans $C(M', I)$ si et seulement si

$$\overline{\lim}_n \frac{n}{(M_n')^{1/n}} < \infty.$$

Démonstration

Le premier point est évident, montrons le second.

En utilisant la formule de Stirling on montre que

$C(n!, I) = C(n^n, I)$. Soit $M_n = n^n$, on va déterminer un encadrement de M_n^f .

$U(r) = \sup_{n \leq r} \frac{r^{2n}}{n^{2n}}$ et on remarque que $\frac{d}{dn} \left(\frac{r^{2n}}{n^{2n}} \right) = 2 \left(\frac{r}{n} \right)^{2n} \left(\log \frac{r}{n} - 1 \right)$

donc $\frac{r^{2n}}{n^{2n}}$ est maximale en $x = \frac{r}{e}$ sur $[0, r]$, (on suppose $r \geq 6$).

On obtient que $U(r) \leq \beta^r$ avec $\beta = e^{2/e}$. D'autre part soit

$m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq r$ tel que $\frac{r^{2m}}{m^{2m}} = U(r)$. Comme $\frac{r^{2y}}{y^{2y}}$ est monotone sur $[1, x]$ et $[x, r]$ il vient que $|m - \frac{r}{e}| < 1$ et donc $|m - \frac{r}{e}| < \frac{r}{2e}$

par conséquent

$$U(r) \geq \min \left\{ \left[\frac{r}{2e} \right]^2 \cdot \frac{r}{2e} ; \left[\frac{3}{2} \frac{r}{e} \right]^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{e} \right\} = \alpha^r \text{ avec } \alpha = (2e)^{1/e}.$$

On obtient l'encadrement

$$\left(\frac{2n}{e \cdot \log \beta} \right)^{2n} = \sup_{r \geq n} \frac{r^{2n}}{\beta^r} \leq n^n M_n^f \leq \sup_{r \geq n} \frac{r^{2n}}{\alpha^r} = \left(\frac{2n}{e \cdot \log \alpha} \right)^{2n}$$

vu que $\frac{d}{dr} \left[\frac{r^{2n}}{\gamma^r} \right] = \left(2 \frac{n}{r} - \log \gamma \right) \frac{r^{2n}}{\gamma^r}$, d'où on déduit que

$\frac{r^{2n}}{\gamma^r}$ est maximale en $r = \frac{2n}{\log \gamma}$. Enfin on obtient les inégalités

$$\left(\frac{4n}{(e \cdot \log \beta)^2} \right)^n M_n^f \leq \left(\frac{4n}{(e \cdot \log \alpha)^2} \right)^n \text{ qui avec le théorème précédent}$$

démontrent le deuxième point.

Propriétés algébriques

- $C(M, I)$ est un espace vectoriel.

- Une condition suffisante pour que $C(M, I)$ soit stable pour la multiplication ponctuelle est que l'une des deux propriétés suivantes soient vérifiées :

i) Pour tout $n \geq 1$ $M_n^2 \leq M_{n-1} M_{n+1}$ voir [13] p.373

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n^{1/n}}{n} > 0$ c'est à dire si $C(M, I)$ contient la classe analytique.

Démonstration de ii)

Rappelons les inégalités de Cartan-Gorny [6] p 33 .

Soit $I = [-1, 1]$ et pour tout naturel r, A_r un nombre positif tel que $A_r \geq ||f^{(r)}||_I$ alors pour tout naturel p et tout naturel $k \leq p$ on a

$$||f^{(k)}||_I \leq \max \left\{ 2 \left(\frac{e^2 p}{k} \right)^k A_0^{1 - \frac{k}{p}} A_p^{\frac{k}{p}}, 2 \left(\frac{e^2 p^2}{2k} \right)^k A_0 \right\}$$

Ceci dit remarquons que cette inégalité peut s'écrire

$$||f^{(k)}||_I \leq 2 \left(\frac{e^2 p}{k} \right)^k A_0 \max \left\{ (A_p/A_0)^{k/p}, \left(\frac{p}{2} \right)^k \right\} \text{ et en posant}$$

$$B_p = \max \left\{ A_p/A_0, \left(\frac{p}{2} \right)^p \right\} \text{ il vient que } ||f^{(k)}||_I \leq 2 A_0 \left(\frac{e^2 p}{k} \right)^k B_p^{\frac{k}{p}} .$$

Soient f et g éléments de $C(M, I)$ il existe A et B deux nombres positifs tels que pour tout naturel n on ait $||f^{(n)}||_I \leq A B^n M_n$, $||g^{(n)}||_I \leq A B^n M_n$.

Définissons pour tout naturel $r, A_r = A B^r M_r$ de

$$(f.g)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)} \text{ il vient en utilisant les}$$

inégalités de Cartan-Gorny que

$$\begin{aligned} \|(f.g)^{(p)}\|_I &\leq \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (2A_0 \left(\frac{e^2 p}{k}\right)^k B_p^{\frac{k}{p}}) (2A_0 \left(\frac{e^2 p}{p-k}\right)^{p-k} B_p^{\frac{p-k}{p}}) \\ &\leq 4 e^{2p} A_0^2 B_p \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{p^p}{k^k (p-k)^{p-k}} \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Stirling, il est facile de vérifier qu'il existe une constante c vérifiant pour tout naturel k et p , $k \leq p$.

$$\frac{p^p}{k^p (p-k)^k} < \frac{p!}{k! (p-k)!} \quad c \cdot \sqrt{p}$$

D'autre part $\sum_{k=0}^p \binom{p}{k}^2 \leq \left(\sum_{k=0}^p \binom{p}{k}\right)^2 = 4^{2p}$ donc

$$\|(f.g)^{(p)}\|_I \leq 4c(4e)^{2p} \sqrt{p} A_0^2 \max \left\{ \frac{A_p}{A_0}, \left(\frac{p}{2}\right)^p \right\}.$$

Du fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(M_n)^{1/n}}{n} > 0$ il existe $a \geq 1$ tel que quelque soit p $\left(\frac{p}{2}\right)^p \leq a^p \frac{A_p}{A_0}$.

Donc $\|(f.g)^{(p)}\|_I \leq A' B'^p M_p$ avec $A' = 4c \cdot A_0 \cdot A$, $B' = 2a \cdot (4e)^2$ et en remarquant que $\sqrt{p} < 2^p$.

Le cas où $I = [a, b]$ se ramène, par un changement de variable affine, au cas $[-1, 1]$ ce qui achève la démonstration. \square

Propriétés différentielles

- Toute primitive de $f \in C(M, I)$ est un élément de $C(M, I)$.

- $C(M, I)$ est stable pour la dérivation si et seulement si

$$\overline{\lim}_n \left(\frac{M_{n+1}^f}{M_n} \right)^{1/n} < \infty.$$

Prolongement par recollement

- Soient $f \in C(M, I)$, $g \in C(M, J)$, $K = I \cup J$. S'il existe $x_0 \in I \cap J$ tel que pour tout naturel n , $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, alors il existe $n \in C(M, K)$ qui prolonge f et g .

Prolongement par interpolation

- Méthode de Charles de la Vallée-Poussin [8] p. 157

Pour simplifier les notations soit $I = [-\Pi, \Pi]$, soit $x_0 \in I$ et $\{c_n\}_n$ des nombres réels (ou complexes),

Supposons qu'il existe $f \in C(M, I)$ périodique de période 2Π telle que $f^{(n)}(x_0) = c_n$ et que de plus, l'on connaisse A et B tels que $\|f^{(n)}\|_I \leq B A^n M_n$. On se propose de déterminer les coefficients de Fourier de f . Sans restreindre la généralité

on peut supposer que f est paire, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$, $x_0 = 0$.

On a donc à résoudre le système linéaire infini :

$$c_{2i} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^i r^{2i} a_r \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Posons $T(r) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{r^n}{M_n}$ et $S(r) = \frac{1}{B} T\left(\frac{r}{A}\right)$. On montre, par intégrations par partie, que $|a_r| \leq \frac{1}{S(r)}$. Soient $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés,

on choisit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{k^{2(n-1)}}{S(k)} \right)^2 \leq \frac{\epsilon}{n}$ (*)

On a alors

$$(c_{2i} - \sum_{r=0}^p r^{2i} a_r)^2 \leq \frac{\epsilon}{n} \text{ pour } i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Soient $F(y) = \sum_{i=0}^{n-1} (c_{2i} - \sum_{r=0}^p r^{2i} y_r)^2 + \epsilon \sum_{r=0}^p y_r^2 S(r)^2 \alpha^{-2r}$,

$\alpha > 1, (a_0^p, \dots, a_p^p)$ le point où F est minimale et m la valeur de ce minimum. On a

$$m \leq \sum_{i=0}^{n-1} (c_{2i} - \sum_{r=0}^p r^{2i} a_r^p)^2 + \epsilon \sum_{r=0}^p a_r^2 S(r)^2 \alpha^{-2r} \leq \epsilon \left(1 + \frac{1}{1-\alpha^2} \right)$$

on obtient en posant $C = 1 + \frac{1}{1-\alpha^2}$ et $D = \alpha \cdot C^{1/2}$

$$i) \left(c_{2i} - \sum_{r=0}^p r^{2i} a_r^p \right)^2 < \epsilon \cdot C, \quad i \leq n-1$$

$$ii) |a_r^p| < \frac{D}{S(r)}, \quad r \leq p.$$

Soient $\{\epsilon_k\}_k$ une suite de nombres strictement positifs qui converge vers zéro et $\{n_k\}_k$ une suite strictement croissante de naturels. Soit p_k un entier satisfaisant (*) pour $\epsilon = \epsilon_k$ et $n = n_k$, soit $N_0 = \{p_k ; k \in \mathbb{N}\}$. Pour tout sous-ensemble infini N_1 de N_0 il existe un sous-ensemble infini N_2 de N_1 tel que pour tout $r \in \mathbb{N}$ $\{a_r^p\}_{p \in N_2}$ soit convergente vers a_r^* . ($\alpha > 1$ fixé).

On peut montrer [8] p. 79, que "La classe des fonctions périodiques $P(\gamma) = \{g ; g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \cos nx + b'_n \sin x \text{ et } \exists B' \text{ tel que } \max\{|a'_n|, |b'_n|\} < B' e^{-\gamma(n)}\}$ où γ est une fonction continue sur $[1, \infty[$ telle que $t\gamma'(t)$ tend en croissant vers l'infini lorsque t tend vers l'infini est quasi-analytique si et seulement si $\int_1^{\infty} \frac{\gamma(t)}{t^2} dt$ diverge". Supposons de plus que $\{M_n\}_n$ croît vers l'infini.

En prenant pour $\gamma(t) = \log(S(t))$ on a $\int_1^{\infty} \frac{\gamma(t)}{t^2} dt = \infty$

et $\gamma'(t) = \frac{A}{2} \frac{n(t/A)}{t}$ où $n(r)$ est la plus petite valeur $m \in \mathbb{N}$ telle que $T(r) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{r^n}{M_n} = \frac{r^m}{M_m}$.

Les conditions sur γ sont alors vérifiées et $P(\gamma)$ est une classe quasi-analytique périodique qui a pour élément f et

$g : g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \cos(nx)$, vu les inégalités ii). De plus, les inégalités i) montrent que $g^{(r)}(0) = f^{(r)}(0) \forall r \in \mathbb{N}$, par conséquent $f = g$ et $\{a_r^p\}_p$ converge vers a_r pour tout naturel r .

Remarque :

La méthode qu'on vient de présenter n'est pas exactement celle de C. de la Vallée-Poussin. Ce dernier n'a pas imposé l'inégalité (*) et de ce fait n'obtient que l'existence d'une sous-suite de $\{a_r^p\}_p$ qui converge vers a_r pour tout naturel r .

- Méthode de T. CARLEMAN [4] p. 65

Soit $\{c_n\}_n$ une suite de nombres et supposons qu'il existe $f \in C(M, I)$, $I = [0, 1]$, telle que $f^{(n)}(0) = n! c_n$ pour tout naturel n . On se propose de déterminer une suite de fonctions qui convergent uniformément vers f sur I ainsi que leurs dérivées successives. La classe $C(M, I)$ étant quasi-analytique on a $\sum \frac{1}{\beta_n} = \infty$, il est alors facile de construire une suite $\{\alpha_n\}_n$ telle que : $\sum \frac{1}{\alpha_n} = \infty$ et $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ croît vers l'infini avec n .

Posons $\gamma_n = \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{2n}$

Soit f_n la fonction qui minimise $I_n(g) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \int_0^1 |g^{(k)}(x)|^2 dx$ et qui vérifie les conditions $f_n^{(k)}(0) = k! c_k \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$
Alors f_n est la suite de fonctions cherchées.

De plus CARLEMAN montre l'existence de réels $\omega_{n,m}$ $n,m \in \mathbb{N}$ (le procédé de calcul des $\omega_{n,m}$ est explicite dans sa démonstration) tels que toute fonction $f \in C(M,I)$ se représente par

$$f(x) = \lim_n \sum_{m=0}^{n-1} \omega_{n,m} c_m x^m \text{ la convergence étant uniforme et}$$

$m! c_m = f^{(m)}(0)$. T. Carleman affirme ce dernier résultat sans toutefois l'avoir démontré. Au passage Carleman énonce le

Théorème :

"Etant donné un nombre positif ϵ on peut trouver un nombre entier N et une quantité positive δ (ne dépendant que de ϵ , k et $M_0, M_1, \dots, M_n, \dots$) tels que les inégalités

$$|f^{(v)}(x)| \leq k^v M_v \quad a \leq x \leq b$$

$$|f^{(v)}(a)| \leq \delta \quad \text{pour } 0 \leq v \leq N$$

entraînent

$$|f(x)| < \epsilon \quad \text{pour } a \leq x \leq b$$

pourvu que $C(M,[a,b])$ soit quasi-analytique".

Théorème qui a été depuis démontré par Bang et Mandelbrojt [10] p. 109.

Compléments

Soit $C_2(M,I)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur l'intervalle I telles qu'il existe deux nombres A et B tels que pour tout naturel n , $\|f^{(n)}\|_2 \leq B A^n M_n$ où

$$\|g\|_2 = \left[\int_I |g(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Il serait naturel d'utiliser la méthode de Carleman dans ces classes de fonctions.

Théorème : La classe $C_2(M, I)$ est quasi-analytique si et seulement si $\sum \frac{1}{\beta_n}$ diverge avec $\beta_n = \inf_{r \in \mathbb{N}} (M_{n+r})^{1/(n+r)}$

Démonstration :

Signalons le lemme de Carleman [4] p. 54.

Lemme :

Une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction analytique ϕ dans le demi-plan, réel $(z) > a$ et qui satisfait aux inégalités $|\phi(z)| \leq \frac{M_n}{|z|^n}$ soit identiquement nulle est que

$$\int_1^\infty \log \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{M_n} \right] \frac{dr}{r^2} \text{ diverge.}$$

Ceci dit montrons la suffisance par l'absurde.

Supposons qu'il existe $x_0 \in I$ et $f \in C_2(M, I)$ tels que $f \neq 0$ et $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout naturel n .

Quitte à faire une transformation affine on peut supposer que $I = [0, 1]$ et que $x_0 = 0$. On peut aussi supposer que $f'' \in C_2(M, I)$ quitte à remplacer $f(x)$ par $\int_0^x \int_0^\tau f(t) dt d\tau$.

La fonction $g(x) = f(4x(x-1))$ est non identiquement nulle vu que $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est surjective et que f est non identiquement nulle. De plus, g vérifie :

i) $g^{(n)}(0) = g^{(n)}(1) = 0$ pour tout naturel n

ii) $g \in C_2(M, I)$

Le premier point est évident, montrons le second.

Tout d'abord montrons que $\|f^{(n-p)}\|_2 \leq \frac{1}{(p-1)!} \|f^{(n)}\|_2$

ceci pour tout $p \leq n$.

$$f^{(n-p)}(x) = \int_0^x f^{(n-p+1)}(t) dt = \frac{1}{(p-2)!} \int_0^x (x-t)^{(p-1)} f^{(n)}(t) dt.$$

en appliquant l'inégalité de Schwarz il vient

$$\begin{aligned} \|f^{(n-p)}\|_2^2 &= \int_0^1 \frac{1}{((p-2)!)^2} \left| \int_0^x (x-t)^{(p-1)} f^{(n)}(t) dt \right|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{((p-2)!)^2} \int_0^1 \int_0^x (x-t)^{2(p-1)} dt \int_0^1 |f^{(n)}(t)|^2 dt dx \end{aligned}$$

$$\|f^{(n-p)}\|_2^2 \leq \frac{1}{((p-2)!)^2 \cdot 2(p-1) \cdot (2p-1)} \|f^{(n)}\|_2^2 \leq \frac{1}{(p-1)!^2} \|f^{(n)}\|_2^2$$

Rappelons l'identité entre séries formelles

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m!} X^m \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} X^k \quad \text{avec}$$

$$\frac{c_k}{k!} = \sum_{n=0}^k \frac{a_n}{n!} \sum_{\substack{\sum_{m=1}^k i_m = k \\ \sum_{m=1}^k i_m \cdot m = k}} \frac{(\sum_{m=1}^k i_m)!}{k} \prod_{m=1}^k \left(\frac{b_m}{m!} \right)^{i_m}$$

on a en particulier l'identité avec $a_k = h^{(k)}(x)$, $b_k = f^{(k)}(h(x))$

et $c_k = (f \circ h)^{(k)}(x)$. Posons $a'_n = a_n \frac{(k-n)!}{k!}$, $b_n^* = |b_n|$,

$$a_n^* = \frac{k!}{(k-n)!} \text{ pour } n \leq k \text{ et } a_n^* = 0 \text{ si } n > k$$

$$\text{On a } \left| \frac{c_k}{k!} \right| \leq \left[\max_{n=0}^k |a_n^*| \right] \cdot \frac{c_k^*}{k!} \text{ avec}$$

$$\frac{c_k^*}{k!} = \sum_{n=0}^k \frac{a_n^*}{n!} \sum_{\substack{\sum_{m=1}^k i_m = k \\ m=1}} \frac{(\sum i_m)!}{\prod i_m!} \prod_{m=1}^k \frac{b_m^*}{m!}^{i_m}$$

On remarque alors que :

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{c_{\ell}^*}{\ell!} X^{\ell} = \sum_{n=0}^k \frac{a_n^*}{n!} P^*(X)^n \text{ avec } P^*(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^*}{n!} X^n$$

$$\text{Comme } \frac{a_n^*}{n!} = \binom{k}{n} \text{ il vient que } \sum_{\ell} \frac{c_{\ell}^*}{\ell!} X^{\ell} = (1 + P^*(X))^k$$

Définition

Soient $A(X) = \sum A_m X^m$ et $B(X) = \sum B_m X^m$ deux séries formelles, on note $A(X) \leq B(X)$ si pour tout $m, A_m \leq B_m$.

Il est aisé de voir que si $A(X) \leq B(X)$ alors $\frac{d}{dX} A(X) \leq \frac{d}{dX} B(X)$ et que si $A(X)$ et $B(X)$ ont de plus leurs coefficients positifs alors $(A(X))^k \leq (B(X))^k$ pour tout naturel k .

Ceci dit, prenons $h(x) = 4x(x-1)$, P^* est un polynôme de

degré 2. Soit $M = \max_{m=0}^2 \frac{||h^{(m)}||_{\infty}}{m!} = 8$. Il est clair que

$$1 + P^*(X) \leq M(1+X)^2 \text{ et que } (1+P^*(X))^k \leq M^k (1+X)^{2k}.$$

On a donc

$$c_k^* \leq M^k \cdot 2k(2k-1) \dots (2k-(k-1))$$

donc

$$|c_k| \leq \left(\max_{n=0}^k |a_n| (k-n)! \right) \cdot M^k \frac{2k(2k-1)\dots(2k-(k-1))}{k!}$$

$$\leq (2eM)^k \max_{n=0}^k |a_n| (k-n)!$$

La dernière inégalité étant obtenue à l'aide de la formule de Stirling, on obtient :

$$|g^{(k)}(x)|^2 \leq (2eM)^{2k} \max_{n=0}^k |f^{(n)}(4x(x-1)) (k-n)!|^2$$

$$\int_0^1 |g^{(k)}(x)|^2 \leq (2eM)^{2k} \max_{n=0}^k (k-n)!^2 \int_0^1 |f^{(n)}(4x(x-1))|^2 dx$$

or

$$|f^{(n)}(4x(x-1))| \leq \int_0^{4x(x-1)} |f^{(n+1)}(t)| dt \leq \int_0^1 |f^{(n+1)}(t)| dt$$

$$\leq \|f^{(n+1)}\|_2$$

en utilisant le fait que $\|f^{(n+1)}\|_2 (k-n)! \leq \|f^{(k+2)}\|_2$ il vient que $\|g^{(k)}\|_2 \leq (2eM)^k \max_{n=0}^k (k-n)! \|f^{(n+1)}\|_2 \leq (2eM)^k \|f^{(k+2)}\|_2$ qui montre que $g \in C_2(M, I)$.

On considère $\phi(Z) = \int_0^1 g(t) e^{-Zt} dt$ qui est une fonction entière, en intégrant par partie il vient que

$$\phi(Z) = \int_0^1 \frac{g^{(n)}(t)}{Z^n} e^{-Zt} dt$$

et donc

$$|\phi(Z)| \leq \frac{1}{|Z|^n} \int_0^1 |g^{(n)}(t)| dt \leq \frac{M_n}{|Z|^n}$$

dans le demi-plan réel $Z > 0$ donc d'après le lemme de Carleman ϕ devrait être identiquement nulle ce qui implique que g est identiquement nulle, ce qui conduit à une contradiction.

Si $\int_1^\infty \log\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{r^n}{M_n}\right) \frac{dr}{r^2}$ converge d'après le théorème de Denjoy-Carleman, il existe $f \in C(M, I)$ non identiquement nulle et $x_0 \in I$ telle que $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout naturel n , et il est facile de vérifier que $f \in C_2(M, I)$ d'où le théorème.

Remarque :

Soit $p \in [1, \infty[$.

Si $C_p(M, I)$ désigne l'ensemble des fonctions f telles qu'il existe A et B vérifiant pour tout $r \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_I |f^{(r)}(t)|^p dt \right|^{1/p} \leq AB^r M_r$$

alors, en reprenant la démonstration précédente, on peut montrer que la classe $C_p(M, I)$ est quasi-analytique si et seulement si la classe $C(M, I)$ est quasi-analytique.

Voici deux algorithmes théoriques de reconstruction d'une fonction dans une classe quasi-analytique inspirées de la méthode de Carleman.

Dans la suite, on se fixe $\{c_n\}_n$, $c_n \in \mathbb{C}$ et $\{M_n\}_n$, $M_n > 0$, deux suites de nombres et on suppose que $\sum_n \beta_n^{-1}$ diverge,

$$\beta_n = \inf_{r \in \mathbb{N}} (M_{n+r})^{1/(n+r)}$$

1er Algorithme

On se propose de résoudre le problème suivant :

Existe-t-il f appartenant à la classe quasi-analytique $C_2(M, I)$, $I = [0, 1]$, telle que $f^{(n)}(0) = n! c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dans l'affirmative déterminer une suite de fonctions $\{g_n\}_n$ qui convergent uniformément vers f sur I ainsi que toutes leurs dérivées.

Définitions

- Pour tout naturel n , V_n désignera l'ensemble des fonctions g , $n-1$ fois continûment dérivables, de dérivée $n^{\text{ième}}$ de carré intégrable et qui satisfont

$$g^{(r)}(0) = r! c_r, \quad 0 \leq r \leq n-1$$

- Pour tout $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $g \in V_n$ on définit

$$J_n(\varepsilon, g) = \sum_{m=0}^n \frac{\varepsilon^{2m+1}}{M_m^2} \int_0^1 |g^{(m)}(t)|^2 dt$$

- Soit $J_n(\varepsilon) = \min\{J_n(\varepsilon, g) ; g \in V_n\}$

- Soit C un nombre strictement plus grand que 1.

Remarque

Carleman [4] p. 67 a montré que quelque soit n et $\varepsilon > 0$ il existe un unique élément de V_n qui minimise $J_n(\varepsilon, g)$.

Description de l'algorithme

- Déterminer $k_1 = \min\{k ; k \in \mathbb{Z} \quad J_1(2^{-k}) < C\}$

- $\epsilon_1 = 2^{-k_1}$ déterminer $g_1 \in V_1$ tel que

$$J_1(\epsilon_1, g_1) = J_1(\epsilon_1)$$

Boucle sur r

Au $r+1^{\text{ème}}$ pas

- déterminer $k_{r+1} = \min\{k ; k \in \mathbb{Z} \quad k \geq k_r \quad J_{r+1}(2^{-k}) < C\}$

- $\epsilon_{r+1} = 2^{-k_{r+1}}$ déterminer $g_{r+1} \in V_{r+1}$ tel que

$$J_{r+1}(\epsilon_{r+1}, g_{r+1}) = J_{r+1}(\epsilon_{r+1})$$

Théorème :

Il existe $f \in C_2(M, I)$ telle que $f^{(n)}(0) = n! c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 si et seulement si dans l'algorithme précédent la suite $\{k_n\}_n$ est stationnaire.

De plus si $\{k_n\}_n$ est stationnaire alors $\{g_n^{(k)}\}_{n>k}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ pour tout naturel k .

Démonstration : (calquée sur celle de Carleman)

On remarque que s'il existe $f \in C_2(M, I)$ telle que $f^{(n)}(0) = n! c_n$ alors il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que

$$\|f^{(k)}\|_2 \leq B \cdot A^k \cdot M_k$$

pour tout naturel k et il vient que

$$J_n(\epsilon) \leq J_n(\epsilon, f) = \sum_{m=0}^n \frac{\epsilon^{2m+1}}{M_m^2} \|f^{(m)}\|_2^2 \leq B \sum_{m=0}^n \epsilon^{2m+1} A^{2m} = \frac{1 - (A\epsilon)^{2(n+1)}}{1 - (A\epsilon)^2} B\epsilon$$

Soit $p = \min\{k ; A2^{-k} < 1 \text{ et } \frac{2^{-k} \cdot B}{1-(A2^{-k})^2} < C\}$ on a alors

$$2^{-p} \cdot B \cdot \frac{1-(A2^{-p})^{2(n+1)}}{1-(A2^{-p})^2} \leq \frac{B \cdot 2^{-p}}{1-(A2^{-p})^2} < C$$

par conséquent $J_n(2^{-p}) < C$ et donc pour tout n , $k_n \leq p$.
 $\{k_n\}$ étant une suite croissante, on déduit que $\{k_n\}$ est une suite stationnaire.

Réciproquement si la suite $\{k_n\}_n$ est stationnaire il existe n_0 tel que quelque soit $n \geq n_0$ $k_n = k$.

Posons $\epsilon = 2^{-k}$.

Pour tout $n \geq n_0$ on a $J_n(\epsilon, g_n) < C$ par conséquent pour tout naturel $r \leq n$ on a $\|g_n^{(r)}\|_2 \leq \sqrt{C/\epsilon} \cdot \frac{1}{\epsilon} \cdot M_r$

Les suites $\{g_n^{(r)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont des ensembles uniformément équi-continus de fonctions pour la norme uniforme sur I .

Il existe donc un sous-ensemble infini N' de l'ensemble des naturels tel que pour tout $r \in \mathbb{N}$ $\{g_n^{(r)}\}_{n \in N'}$ converge uniformément sur I . Soit h la limite de $\{g_n\}_{n \in N'}$.

D'autre part, pour tout $r \in \mathbb{N}$ on a $\|g_n^{(r)}\|_2 \leq \sqrt{C/\epsilon} \cdot \epsilon^{-r} M_r$ par conséquent $\|h^{(r)}\|_2 \leq \sqrt{C/\epsilon} \cdot \epsilon^{-r} M_r$ donc $h \in C_2(M, I)$.

Du fait que $g_n^{(r)}(0) = r! c_r$ on a $h^{(r)}(0) = r! c_r$, $r \in \mathbb{N}$.

Par conséquent la fonction cherchée f est égale à h .

Montrons enfin que quelque soit $r \in \mathbb{N}$, $\{g_n^{(r)}\}_n$ converge uniformément vers $f^{(r)}$.

Pour cela il suffit de montrer que quelque soit N_1 ensemble infini de naturels, il existe N_2 sous-ensemble infini de N_1 tel que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\{g_n^{(r)}\}_{n \in N_2}$ converge vers $f^{(r)}$.

Soit donc N_1 un ensemble infini de naturels et du fait que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\{g_n^{(r)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille uniformément équicontinue, il existe N_2 sous-ensemble infini de N_1 tel que quelque soit r , $\{g_n^{(r)}\}_{n \in N_2}$ converge uniformément vers $f^{(r)}$. Comme pour la fonction h , on montre que $g \in C_2(M, I)$ et vérifie $g^{(r)}(0) = c_r r!$, $r \in \mathbb{N}$, et du fait que $C_2(M, I)$ est une classe quasi-analytique, il vient que $g = f$, ce qui achève la démonstration du théorème.

2ème Algorithme

On se propose de résoudre le problème suivant :

Existe-t-il $\eta > 0$ et $f \in C_2(M, [0, \eta])$ telle que $f^{(n)}(0) = n! c_n$. Dans l'affirmative, construire une suite de fonctions $\{g_n\}_n$ qui converge uniformément vers f sur $[0, \eta]$ ainsi que toutes leurs dérivées.

Définitions

Pour tout $\varepsilon > 0$ on note :

. $V_n(\epsilon)$ l'ensemble des fonctions g , $n-1$ fois continûment dérivables et de dérivée $n^{\text{ème}}$ de carré intégrable sur $[0, \epsilon]$, et qui satisfont à $g^{(r)}(0) = r! c_r$, $0 \leq r \leq n-1$.

$$K_n(\epsilon, g) = \sum_{m=0}^n \frac{\epsilon^{2m+1}}{M \cdot 2^m} \int_0^\epsilon |g^{(m)}(t)|^2 dt.$$

$$K_n(\epsilon) = \min\{K_n(\epsilon, g) ; g \in V_n(\epsilon)\}, \text{ et } C > 1.$$

Description de l'Algorithme

- Déterminer $k_1 = \min\{k ; k \in \mathbf{Z} \quad K_1(2^{-k}) < C\}$
- $\epsilon_1 = 2^{-k_1}$ déterminer $g_1 \in V_1(\epsilon_1)$ tel que $K_1(\epsilon_1, g_1) = K_1(\epsilon_1)$.

Boucle sur r

Au $r+1^{\text{ème}}$ pas

- déterminer $k_{r+1} = \min\{k ; k \in \mathbf{Z} \quad k \geq k_r \quad K_{r+1}(2^{-k}) < C\}$
- $\epsilon_{r+1} = 2^{-k_{r+1}}$ déterminer $g_{r+1} \in V_{r+1}(\epsilon_{r+1})$ tel que $K_{r+1}(\epsilon_{r+1}, g_{r+1}) = K_{r+1}(\epsilon_{r+1})$.

Théorème

Il existe $\eta > 0$ et $f \in C_2(M, [0, \eta])$ vérifiant $f^{(r)}(0) = c_r r!$
 $r \in \mathbf{N}$ si et seulement si la suite $\{k_n\}_n$ est stationnaire.
 De plus si $\{k_n\}_n$ est stationnaire, soit n_0 tel que si

$n > n_0$, $k_n = k_{n_0}$ et $\eta = 2^{-k_{n_0}}$, alors pour tout naturel r la suite $\{g_n^{(r)}\}_n$ converge uniformément vers $f^{(r)}$ sur $[0, \eta]$.

Démonstration

A des modifications mineures près, c'est la même démonstration que celle du théorème précédent.

4 - RESULTATS SUR LES CLASSES DE BERNSTEIN

Caractérisation

Théorème de BERNSTEIN [2], p. 165

Toute classe $B(N, I)$ est quasi-analytique au sens de Bernstein.

Inclusion d'une classe dans une classe

Théorème

$B(N, I) \subseteq B(N', I)$ si et seulement s'il existe un entier non nul λ tel que pour tout naturel n , il existe un naturel r vérifiant $N_r \leq N'_n \leq \lambda N_r$.

Démonstration

Soit λ un naturel tel que pour tout naturel n il existe un naturel r vérifiant $N_r \leq N'_n \leq \lambda N_r$.

Quelque soit $f \in B(N, I)$ il existe $\rho \in]0, 1[$ et M tels que $E_k(f) < M \rho^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Quelque soit n , soit r tel que $N_r \leq N'_n \leq \lambda N_r$.

$E_{N'_n}(f) \leq E_{N_r}(f) \leq M \rho^{N_r} \leq M(\rho^{1/\lambda})^{N'_n}$ donc $f \in B(N', I)$.

Théorème TIMAN [15], p. 40

Soit $\{e_n\}_n$ une suite décroissante vers 0, $e_n \geq 0$, alors il existe une fonction continue f sur I telle que

$E_n(f) = e_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Ceci dit, soit $\rho \in]0,1[$ et f continue telle que $E_n(f) = \rho^{N_k}$ pour tout n tel que $N_k \leq n < N_{(k+1)}$, et pour tout naturel k . On a $f \in B(N,I) \subset B(N',I)$ et par conséquent il existe $\rho' \in]0,1[$ et $A > 0$ tels que $E_k(f) \leq A\rho'^k$ pour tout naturel $k \in N'$.

Pour tout naturel n soit r tel que $N_r \leq N'_n < N_{(r+1)}$
 $E_{N'_n}(f) = \rho^{N_r} \leq A \rho'^{N'_n}$, pour n suffisamment grand

$n \geq n_0$ quitte à remplacer ρ' par $\rho'' \in]\rho',1[$ on peut supposer que $A = 1$, il vient alors $\rho^{N_r} \leq \rho'^{N'_n}$ c'est à dire

$$N'_n \leq N_r \frac{\log \rho'}{\log \rho}$$

D'autre part, il est évident que si $N''_n = N'_{(n+n_0)}$ pour tout n alors $B(N'', I) = B(N', I)$ ce qui achève la démonstration.

Remarques

- La classe des fonctions analytiques est incluse dans toute classe de Bernstein $B(N,I)$.
- Si $\overline{\lim}_n \frac{N_{n+1}}{N_n} < \infty$ alors $B(N,I)$ est la classe des fonctions analytiques.
- Si N' est une sous suite de N alors $B(N,I) \subseteq B(N',I)$.
- Si $N'_n = N_{(n+p)}$ pour tout n , p naturel fixé, alors $B(N,I) = B(N',I)$.

- Si $(pN)_n = p \cdot N_n$ pour tout n , $p \neq 0$ naturel fixé
alors $B(N, I) \subseteq B(pN, I)$.

Propriétés algébriques

- $B(N, I)$ est un espace vectoriel.

- Le produit ponctuel de deux fonctions de $B(N, I)$ appartient à $B(2N, I)$.

- Si P est un polynôme tel que $P : I \rightarrow J$ si $f \in B(N, J)$
alors $f \circ P \in B(pN, I)$ où p désigne le degré de P .

Démonstrations (BERNSTEIN [2])

Deuxième point : soient f et g éléments de $B(N, I)$, P_n
et Q_n leur polynôme de meilleure approximation respectif de
degré au plus n .

Soit $A > 0$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que $E_n(f) \leq A \rho^n$,

$E_n(g) \leq A \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} E_{2n}(f.g) &\leq \|f.g - P_n.Q_n\| = \|f.(g - Q_n) + Q_n.(f - P_n)\| \\ &\leq \|f\| \|g - Q_n\| + \|Q_n\| \|f - P_n\| \leq (\|f\| + \|g\| + A) A \rho^n \end{aligned}$$

vu que $\|Q_n\| \leq \|g - Q_n\| + \|g\| \leq A + \|g\|$.

Donc il existe $\rho' = \rho^{1/2} \in]0, 1[$ et $A' = (\|f\| + \|g\| + A)A$
tels que $E_{2n}(f.g) \leq A' \rho'^{2n}$ $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire que
 $f.g \in B(2N, I)$.

Troisième point : Soit P_n le polynôme de meilleure approximation de f , $A > 0$ et $\rho \in]0,1[$ tels que $E_n(f) \leq A \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $E_{n,p}(f \circ P, I) \leq \|f \circ P - P_n \circ P\| \leq E_n(f, J) < A \rho^n = A(\rho^{1/p})^{n \cdot p}$ donc $f \circ P \in B(pN, I)$

Propriétés différentielles et de continuité

- . Si $f \in B(N, I)$ alors f est continue
- . Si $f \in B(N, I)$ alors toute primitive de f appartient à $B(N, I)$.
- . Toute fonction de $B(N, I)$ est indéfiniment différentiable si et seulement si

$$\lim_n \frac{\log(N_{n+1})}{N_n} = 0$$

- . Si $\overline{\lim}_n \frac{\log(N_{n+1})}{N_n} > 0$ alors il existe une fonction de $B(N, I)$ qui n'est pas continûment différentiable .

- . Si toute fonction de $B(N, I)$ est dérivable et de dérivée bornée, alors

$$\lim_n \frac{\log(N_{n+1})}{N_n} = 0$$

c'est à dire que toute fonction de $B(N, I)$ est indéfiniment dérivable.

Démonstration du troisième point

Quitte à faire une transformation affine on peut supposer que l'intervalle I est $[-1, 1]$. Soit $f \in B(N, I)$.

Soit P_n le polynôme de meilleure approximation de f sur I de degré au plus n .

Soient $A > 0$ et $\rho \in]0,1[$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $E_n(f) \leq A \rho^n$. On remarque que

$$\|P_{N_{k+1}} - P_{N_k}\| \leq \|f - P_{N_{k+1}}\| + \|f - P_{N_k}\| \leq A(\rho^{N_{k+1}} + \rho^{N_k}) \leq 2A \rho^{N_k}.$$

Par conséquent $f(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_{N_{k+1}}(x) - P_{N_k}(x) \right) + P_{N_0}(x)$ et

la convergence est uniforme.

L'inégalité de A.A. MARKOV, "si P est un polynôme de degré au plus n on a $\|P'\|_I \leq n^2 \|P\|_I$ ", permet d'affirmer que pour tout entier r on a l'inégalité

$$\|P_{N_{k+1}}^{(r)} - P_{N_k}^{(r)}\| \leq N_{k+1}^{2r} \|P_{N_{k+1}} - P_{N_k}\| \leq 2A N_{k+1}^{2r} \rho^{N_k}.$$

Or $N_{k+1}^{2r} \rho^{N_k} = \exp\left[N_k \left(2r \frac{\log N_{k+1}}{N_k} + \log \rho\right)\right]$ et comme

$\lim_n \frac{\log N_{n+1}}{N_n} = 0$, pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe k_r tel que

$$\text{si } k \geq k_r, \quad \frac{\log N_{k+1}}{N_k} < -\frac{\log \rho}{4r}.$$

On déduit que si $k \geq k_r$, $N_{k+1}^{2r} \rho^{N_k} \leq \rho^{N_k/2}$ et que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P_{N_{k+1}}^{(r)} - P_{N_k}^{(r)}\| + \|P_{N_0}^{(r)}\| \leq \sum_{k=0}^k \|P_{N_{k+1}}^{(r)} - P_{N_k}^{(r)}\| +$$

$$\left(\sum_{k=k_r+1}^{\infty} 2A \rho^{N_k/2} \right) + \|P_{N_0}^{(r)}\|$$

est fini donc $\left\{ \sum_{k=0}^n (P_{N_{k+1}}^{(r)} - P_{N_k}^{(r)}) + P_{N_0}^{(r)} \right\}_n$ converge uniformément vers $f^{(r)}$, ce qui montre que f est indéfiniment dérivable.

Réciproquement

Tout d'abord signalons le

Théorème de Jackson [7], p. 147

Soit f une fonction k fois continûment dérivable sur l'intervalle $I = [-1, 1]$ alors pour tout $n \geq k$ on a

$$E_n(f) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \|f^{(k)}\| / [(n+1) \cdot n \dots (n-k+2)].$$

Ceci dit supposons que toute fonction de $B(N, I)$ soit indéfiniment dérivable.

Soit $\rho \in]0, 1[$, d'après le théorème de TIMAN, précédemment cité, il existe $f \in B(N, I)$ telle que pour tout naturel k et tout n tel que $N_k \leq n < N_{k+1}$, $E_n(f) = \rho^{N_k}$.

Du fait que f est indéfiniment dérivable en appliquant le théorème de JACKSON à $f-P$, où P est un polynôme de degré au plus $N_{k+1}-1$ dont la $r^{\text{ème}}$ dérivée est le polynôme de meilleure approximation de $f^{(r)}$ sur I de degré au plus $N_{k+1}-(r+1)$, on obtient :

$$\rho^{N_k} = E_{N_{k+1}-1}(f) \leq K_r \left(\frac{\pi}{2}\right)^r \frac{1}{(N_{k+1})^r} E_{N_{k+1}-(r+1)}(f^{(r)})$$

où
$$K_r = \sup_k \frac{(N_{k+1})^r}{N_{k+1} \cdot (N_{k+1}-1) \dots (N_{k+1}-r+1)}$$

Comme $E_{N_{k+1}-(r+1)}(f^{(r)})$ tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini, vu le théorème de WEIERSTRASS, il vient que

$$\rho^{N_k} (N_{k+1})^r = \exp\left(\frac{N_k}{r} \left[\frac{\log \rho}{r} + \frac{\log N_{k+1}}{N_k}\right]\right)$$

tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini, par conséquent il existe $k_r \in \mathbb{N}$ tel que quelque soit $k \geq k_r$,

$$\frac{\log N_{k+1}}{N_k} < -\frac{\log \rho}{r}.$$

r pouvant être choisi arbitrairement grand, il vient que

$$\lim_k \frac{\log N_{k+1}}{N_k} = 0.$$

Démonstration du quatrième et du cinquième point

Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\overline{\lim}_n \frac{\log N_{n+1}}{N_n} \geq \delta$.

Soit $\rho > 0$ tel que $-\log \rho < \delta$ et soit f telle que pour tout k et tout n , $N_k < n \leq N_{k+1}$, $E_n(f) = \rho^{N_k}$.

En utilisant le théorème de JACKSON on obtient

$$\rho^{N_k} = E_{N_{k+1}}(f) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{N_{k+1}} E_{N_{k+1}-1}(f')$$

ou encore

$$N_{k+1} \rho^{N_k} \leq \frac{\pi}{2} E_{N_{k+1}-1}(f')$$

et comme

$$\overline{\lim}_k N_{k+1} \rho^{N_k} = \overline{\lim}_k \exp\left[N_k \left(\log \rho + \frac{\log N_{k+1}}{N_k}\right)\right] = +\infty$$

vu que $\overline{\lim}_k (\log \rho + \frac{\log N_{k+1}}{N_k}) \geq \log \rho + \delta > 0$ il vient que $\overline{\lim}_k E_{N_{k+1}^{-1}}(f') = +\infty$ on en déduit que f n'est pas continûment dérivable et mieux, si f est dérivable en tout point sa dérivée n'est pas bornée.

Prolongement par recollement

Théorème de BERNSTEIN [2], p. 163

Soient $f \in B(N, I)$, $g \in B(N, J)$ si $f(x) = g(x)$ sur un sous intervalle non vide ouvert de $I \cap J$ alors il existe $h \in B(2N, I \cup J)$ qui prolonge f et g .

Prolongement par extrapolation

Résultats de BERNSTEIN

Théorème de BERNSTEIN [2], p. 166-168 et [1].

Soit $f \in B(N, I)$, il existe un intervalle compact J contenant I en son intérieur et un prolongement $g \in B(N, J)$ de f sur J si et seulement s'il existe un intervalle compact K contenant I en son intérieur tel que les polynômes $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de meilleures approximations de f sur I relatifs à la suite d'indices N convergent uniformément vers une fonction h et de plus il existe $A > 0$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que $\|P_n - h\|_K \leq A \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
($h \in B(N, K)$ est un prolongement de f).

Remarques (BERNSTEIN)

. S'il existe $x_0 \in I$ tel que $P_n(x) = Q_n((x-x_0)^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n étant un polynôme de degré au plus $n/2$.

Soit J l'union de I et du symétrique de I par rapport à x_0 alors il existe $h \in B(\mathbb{N}, J)$ qui prolonge f .

. Même résultat si l'on a $P_n(x) = (x-x_0) Q_n((x-x_0)^2)$ où Q_n est un polynôme tel que degré $Q_n < \frac{n}{2}$.

. Soient x_0 une extrémité de I et

$$Q_n(x) = 0.5 (P_n(x) + P_n(2x_0 - x))$$

$$R_n(x) = 0.5 (P_n(x) - P_n(2x_0 - x))$$

Si $\{Q_n\}_n$ et $\{R_n\}_n$ convergent uniformément respectivement vers Q_* et R_* sur un intervalle de I de longueur $\varepsilon > 0$ et d'extrémité x_0 et s'il existe $A > 0$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que

$$\|Q_n - Q_*\|_K \leq A \rho^n, \|R_n - R_*\|_K < A \rho^n$$

ceci pour tout n appartenant à la suite d'indices N alors il existe $g \in B(2N, I \cup [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])$ qui prolonge f .

On remarquera que si $x \in I$ $g(x) = f(x)$ et que si $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ $g(x) = R_*(x) + Q_*(x)$.

Compléments

- Si $f \in B(\mathbb{N}, I)$ s'annule sur un fermé de I de capacité logarithmique positive alors $f = 0$ (Théorème d'AKUTOWICZ [1])

Définition : $B^*(N, I) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(n, N, I)$

Les classes $B^*(N, I)$ satisfont aux propriétés suivantes :

- . $B^*(N, I) \subset B^*(N, I)$ si et seulement si il existe λ tel que pour tout n il existe r tel que $\frac{N_r}{\lambda} \leq N_{n-\lambda} N_r$.
- . $B^*(N, I)$ est un espace vectoriel.
- . $B^*(N, I)$ est stable pour la multiplication ponctuelle.
- . Si P est un polynôme et $P : I \rightarrow J$, si $f \in B^*(N, J)$ alors $f \circ P \in B^*(N, I)$
- . La classe analytique est incluse dans $B^*(N, I)$.
- . Si $f \in B^*(N, I)$ et $g \in B^*(N, J)$ coïncident sur un ouvert non vide alors il existe $h \in B^*(N, I \cup J)$ qui prolonge f et g .
- . Si $f \in B^*(N, I)$ s'annule sur un ouvert non vide, alors $f = 0$, c'est dire que $B^*(N, I)$ est quasi-analytique au sens de Bernstein.
- . Toute fonction de $B^*(N, I)$ est dérivable et à dérivée bornée si et seulement si $\lim_n \frac{\log N_{n+1}}{N_n} = 0$ ou si et seulement toute fonction de $B^*(N, I)$ est indéfiniment dérivable.

Algorithme de reconstruction

Soient $I = [a, b]$, $\tau_0 \in]a, b[$ et $u \in B(N, [a, \tau_0])$ supposés connus.

Supposons qu'il existe $f \in B(N, I)$ telle que pour tout $x \in [a, \tau_0]$ $f(x) = u(x)$.

On se propose de trouver un algorithme qui permet de déterminer une suite de polynômes qui convergent uniformément vers f sur I .

Définition

On dit qu'une suite $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes P_n de degré au plus n converge quasi-analytiquement vers f sur un intervalle compact J s'il existe $A > 0$ et $\rho \in]0,1[$ tels que pour tout naturel n appartenant à la suite d'indices N on ait $\|f - P_n\|_J \leq A \rho^n$.

Préliminaires

Soient $I = [a,b]$, N une suite d'indices, $A > 0$, $\rho \in]0,1[$ et f tel que $E_n(f) \leq A \rho^n$ pour tout n appartenant à la suite d'indices N .

Soient $\tau_0 \in]a,b[$ et $P_n^{\tau_0}$ le polynôme de meilleure approximation de f de degré au plus n sur l'intervalle $[a, \tau_0]$.

On se propose tout d'abord de trouver un algorithme théorique qui, à partir de I, A, ρ et de la connaissance de f sur l'intervalle $[a, \tau_0]$, permet de reconstruire f sur I .

Définitions

- . $I = [a,b]$
- . P_n^t est le polynôme de meilleure approximation de f relatif à $[a,t]$ de degré au plus n .

Par récurrence $P_{n_0, n_1, \dots, n_r, n_{r+1}}^{t_0, t_1, \dots, t_r, t_{r+1}}$ est le polynôme de meilleure

approximation de $P_{n_0, n_1, \dots, n_r}^{t_0, t_1, \dots, t_r}$ de degré au plus n_{r+1} sur l'intervalle $[a, t_{r+1}]$.

$$P_n = P_n^b.$$

Lemme

Sous les hypothèses ci-dessus

Soient $\eta \in]\rho, 1[$, $\delta = \frac{1}{2} [1 + \frac{1}{2} (\frac{1}{\eta} + \eta)]$ et $\tau = \min\{b, a + \delta(t-a)\}$, alors la suite des polynômes $\{P_n^t\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge quasi-analytiquement vers f sur l'intervalle $[a, \tau]$.

Démonstration du lemme

Pour tout n appartenant à la suite d'indice N on a

$$\|P_n^t - P_n\|_{[a, t]} \leq \|P_n^t - f\|_{[a, t]} + \|P_n - f\|_I \leq 2A \rho^n$$

D'autre part, en utilisant le lemme cité en page (8) on a pour tout z appartenant à l'intérieur de l'ellipse de foyer a, t et de demi-axes $\frac{t-a}{4} (\frac{1}{\eta} - \eta)$, $\frac{t-a}{4} (\frac{1}{\eta} + \eta)$ l'inégalité

$$|P_n^t(z) - P_n(z)| \leq 2A \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^n \text{ et par conséquent}$$

$$\|P_n^t - f\|_{[a, \tau]} \leq \|P_n^t - P_n\|_{\text{ellipse}} + \|P_n - f\|_{[a, b]}$$

$$\leq 2A \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^n + A \rho^n \leq 3A \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^n$$

On remarquera que $[a, \tau] = [a, b] \cap \text{Ellipse}$ et que si $\tau \leq b$ on a $\frac{\tau-a}{t-a} = \frac{1}{2} [1 + \frac{1}{2} (\frac{1}{\eta} + \eta)] = \delta$.

Ce qui achève la démonstration du lemme.

Voici l'algorithme théorique :

Hypothèses

Supposons connaître $N, I = [a, b], \rho \in]0, 1[, \tau_0 \in]a, b[, A \geq 0$, u une fonction définie sur $[a, \tau_0]$, et l'existence d'une fonction f définie sur I telle que

i) $E_n(f) \leq A \rho^n$ pour tout n appartenant à la suite d'indice N .

ii) $f(x) = u(x)$ pour tout $x \in [a, \tau_0]$.

Description

On procède de la façon suivante :

- Choisir $\eta \in]\rho, 1[$ et poser $\delta = \frac{1}{2} [1 + \frac{1}{2} (\frac{1}{\eta} + \eta)]$.

- Déterminer $\{p_n^{\tau_0}\}_{n \in \mathbb{N}}$, poser $\tau_1 = \min\{b, a + \delta(\tau_0 - a)\}$

d'après le lemme $\{p_n^{\tau_0}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge quasi-analytiquement vers f sur $[a, \tau_1]$, c'est à dire que f est maintenant définie sur $[a, \tau_1]$.

- Si l'on a déterminé f sur $[a, \tau_k]$, déterminer $\{p_n^{\tau_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$, poser $\tau_{k+1} = \min\{b, a + \delta(\tau_k - a)\}$.

En utilisant le lemme on déduit que $(P_n^{\tau_k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge quasi-analytiquement vers f sur $[a, \tau_{k+1}]$, alors f sera définie sur $[a, \tau_{k+1}]$.

Remarquons que dès que k sera supérieur ou égal à la partie entière de $\log \frac{b-a}{\tau_0-a} / \log \delta$ on aura $\tau_{k+1} = b$, car

$$\frac{\tau_k - a}{\tau_0 - a} = \delta^k \quad \text{si } \tau_k < b.$$

Nous allons maintenant modifier cet algorithme pour avoir

Un algorithme effectif de reconstruction

Sous les hypothèses de l'algorithme théorique

Description

- 1) Choisir $\eta \in]\rho, 1[$ et poser $\delta = \frac{1}{2} [1 + \frac{1}{2} (\frac{1}{\eta} + \eta)]$.
- 2) Poser $k =$ partie entière de $\log \frac{b-a}{\tau_0-a} / \log \delta$.
- 3) Choisir $n = n_{k+1}$ dans la suite d'indices N et déterminer $n_i \in N$; $i \in \{0, \dots, k\}$ vérifiant

$$n_i \geq n_{i+1} \frac{\log \rho}{\log \frac{\rho}{\eta}} \quad \text{pour } i \leq k.$$

- 4) Déterminer $P_{n_0}^{\tau_0}$.

- 5) Pour $i = 1, k$

- i) Calculer $\tau_i = a + \delta(\tau_{i-1} - a)$
- ii) Déterminer $P_{n_0, \dots, n_i}^{\tau_0, \dots, \tau_i}$ polynôme de meilleure approximation du polynôme $P_{n_0, \dots, n_{i-1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{i-1}}$ sur l'intervalle $[a, \tau_i]$ de degré au plus n_i .

Théorème

Le polynôme $P_{n_0, \dots, n_k}^{\tau_0, \dots, \tau_k}$ obtenu dans l'algorithme ci-dessus vérifie

$$\|f - P_{n_0, \dots, n_k}^{\tau_0, \dots, \tau_k}\|_I \leq 3(2^k - 1) A \rho^n$$

Démonstration

Posons $I_j = [a, \tau_j]$ et $c_j = 3(2^j - 1)$.

Montrons par récurrence que

$$\|f - P_{n_0, \dots, n_{i-1}}^{\tau_0, \dots, \tau_k}\|_{I_i} \leq c_i A \rho^{n_i}$$

cas où $i = 1$.

D'une part

$$\begin{aligned} \|f - P_{n_0}^{\tau_0}\|_{I_1} &\leq \|f - P_{n_0}\|_I + \|P_{n_0} - P_{n_0}^{\tau_0}\|_{I_1} \\ &\leq A \rho^{n_0} + \|P_{n_0} - P_{n_0}^{\tau_0}\|_{I_1} \end{aligned}$$

D'autre part

$$\|P_{n_0} - P_{n_0}^{\tau_0}\|_{I_0} \leq \|P_{n_0} - f\|_I + \|f - P_{n_0}^{\tau_0}\|_{I_0} \leq 2 A \rho^{n_0}$$

En utilisant à nouveau le lemme page (8), il vient

$$\|P_{n_0} - P_{n_0}^{\tau_0}\|_{I_1} \leq \sup_{z \in \text{ellipse}} |P_{n_0}(z) - P_{n_0}^{\tau_0}(z)| \leq \frac{1}{\eta^{n_0}} \|P_{n_0} - P_{n_0}^{\tau_0}\|_{I_0}$$

l'ellipse étant celle de foyer a, τ_0 et de demi-axes

$$\frac{\tau_0 - a}{4} \left(\frac{1}{\eta} - \eta\right), \quad \frac{\tau_0 - a}{4} \left(\frac{1}{\eta} + \eta\right) \quad \text{et donc de ces deux derniers}$$

résultats il vient que

$$\|P_{n_0} - P_{n_0}^{\tau_0}\|_{I_1} \leq 2A \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^{n_0}$$

Comme $n_0 \geq n_1 \frac{\log \rho}{\log \frac{\rho}{\eta}}$ il vient que $\left(\frac{\rho}{\eta}\right)^{n_0} \leq \rho^{n_1}$ et donc

$$\|f - P_{n_0}^{\tau_0}\|_{I_1} \leq A \rho^{n_0} + 2A \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^{n_0} \leq 3A \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^{n_0} \leq 3A \rho^{n_1}$$

ce qui démontre la récurrence pour $i = 1$.

Supposons que l'on ait montré pour tout i tel que

$1 \leq i \leq j < k$ les inégalités

$$\|f - P_{n_0, \dots, n_{i-1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{i-1}}\|_{I_i} \leq c_i A \rho^{n_i}$$

D'une part on a

$$\begin{aligned} \|f - P_{n_0, \dots, n_j}^{\tau_0, \dots, \tau_j}\|_{I_{j+1}} &\leq \|f - P_{n_j}\|_I + \|P_{n_j} - P_{n_0, \dots, n_j}^{\tau_0, \dots, \tau_j}\|_{I_{j+1}} \\ &\leq A \rho^{n_j} + \|P_{n_j} - P_{n_0, \dots, n_j}^{\tau_0, \dots, \tau_j}\|_{I_{j+1}} \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \|P_{n_0, \dots, n_j}^{\tau_0, \dots, \tau_j} - P_{n_0, \dots, n_{j-1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{j-1}}\|_{I_j} &\leq \|P_{n_j} - P_{n_0, \dots, n_{j-1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{j-1}}\|_{I_j} \\ &\leq \|f - P_{n_j}\|_I + \|f - P_{n_0, \dots, n_{j-1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{j-1}}\|_{I_j} \\ &\leq A \rho^{n_j} + A c_j \rho^{n_j} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \|P_{n_j} - P_{n_0, \dots, n_j}^{\tau_0, \dots, \tau_j}\|_{I_j} &\leq \|P_{n_j} - P_{n_0, \dots, n_{j-1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{j-1}}\|_{I_j} \\ + \|P_{n_0, \dots, n_j}^{\tau_0, \dots, \tau_j} - P_{n_0, \dots, n_{j-1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{j-1}}\|_{I_j} &\leq 2A (1 + c_j) \rho^{n_j} \end{aligned}$$

En réutilisant le lemme page (8), il vient que

$$\begin{aligned} \|P_{n_j} - P_{n_0, \dots, n_j}^{\tau_0, \dots, \tau_j}\|_{I_{j+1}} &\leq \sup_{z \in \text{ellipse}} |P_{n_j}(z) - P_{n_0, \dots, n_j}^{\tau_0, \dots, \tau_j}(z)| \\ &\leq \frac{1}{n_j} \|P_{n_j} - P_{n_0, \dots, n_j}^{\tau_0, \dots, \tau_j}\|_{I_j} \end{aligned}$$

l'ellipse étant celle de foyer a, τ_j et de demi-axes

$\frac{\tau_j - a}{4} \left(\frac{1}{\eta} - \eta\right), \frac{\tau_j - a}{4} \left(\frac{1}{\eta} + \eta\right)$ et donc des deux derniers résultats, il vient que

$$\| |P_{n_j} - P_{n_0, \dots, n_j}^{\tau_0, \dots, \tau_j} \|_{I_{j+1}} \leq 2A (1 + c_j) \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^{n_j}$$

Comme $n_j \geq n_{j+1} \frac{\log \rho}{\log \frac{\rho}{\eta}}$ c'est à dire $\left(\frac{\rho}{\eta}\right)^{n_j} \leq \rho^{n_{j+1}}$

on obtient

$$\begin{aligned} \| |f - P_{n_0, \dots, n_j}^{\tau_0, \dots, \tau_j} \|_{I_{j+1}} &\leq A \rho^{n_j} + 2A (1 + c_j) \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^{n_j} \\ &\leq A (3 + 2 c_j) \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^{n_j} \leq A (3 + 2 c_j) \rho^{n_{j+1}} = A c_{j+1} \rho^{n_{j+1}} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarques

- En remplaçant la majoration $\rho^{n_i} \leq \rho^{n_{i+1}}$ par la majoration $\rho^{n_i} \leq \eta^{n_i} \rho^{n_{i+1}}$ dans la démonstration du théorème on obtient

$$\| |f - P_{n_0, \dots, n_k}^{\tau_0, \dots, \tau_k} \| \leq (2(2^k - 1) + \sum_{k=0}^j 2^{j-k} \eta^{n_k}) A \rho^{n_i}$$

- Soit g une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$. Dans le chapitre III, nous étudierons des procédés qui permettent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $c > 1$, de déterminer un polynôme Q , degré $Q \leq n$, et qui vérifie

$$\| |g - Q \|_I \leq c E_n(g)$$

dans les cas où :

- i) g est un polynôme
- ii) g est une fonction deux fois dérivable et l'on connaît M tel que $\|g''\|_I \leq M$.
- iii) g est une fonction lipchitzienne de coefficient de Lipchitz L connu (sur I) .

- Soit $c > 1$ et dans l'algorithme de reconstruction, si l'on remplace $P_{n_0}^{\tau_0}$ par $Q_{n_0}^{\tau_0}$ tel que

$$\|u - Q_{n_0}^{\tau_0}\|_{I_0} \leq c \|u - P_{n_0}^{\tau_0}\|_{I_0}$$

et par récurrence $Q_{n_0, \dots, n_i}^{\tau_0, \dots, \tau_i}$ polynôme de degré $\leq n_i$ tel que

$$\|Q_{n_0, \dots, n_{i-1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{i-1}} - Q_{n_0, \dots, n_i}^{\tau_0, \dots, \tau_i}\|_{I_i} \leq c \inf\{\|Q_{n_0, \dots, n_{i-1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{i-1}} - P\|_{I_i} ; \deg P \leq n_i\}$$

En reprenant la démonstration du théorème précédent, à des modifications mineures près, on montre que

$$\|f - Q_{n_0, \dots, n_k}^{\tau_0, \dots, \tau_k}\|_I \leq ((1+c)^{k+1} - 1) \left(\frac{2}{c} + 1\right) A \rho^n$$

On peut montrer aussi que

$$\|f - Q_{n_0, \dots, n_{k+1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{k+1}}\|_I \leq (c + (1+c)(1+c)^{k+1} - 1) \left(\frac{2}{c} + 1\right) A \rho^n$$

Démontrons ce dernier résultat.

Posons $K = ((1+c)^{k+1} - 1) \left(\frac{2}{c} + 1\right)$ et rappelons que $n_{k+1} = n$.

$$\begin{aligned} \|f - Q_{n_0, \dots, n_{k+1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{k+1}}\|_I &\leq \|f - Q_{n_0, \dots, n_k}^{\tau_0, \dots, \tau_k}\|_I + \|Q_{n_0, \dots, n_k}^{\tau_0, \dots, \tau_k} - Q_{n_0, \dots, n_{k+1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{k+1}}\|_I \\ &\leq K A \rho^{n_k} + \|Q_{n_0, \dots, n_k}^{\tau_0, \dots, \tau_k} - Q_{n_0, \dots, n_{k+1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{k+1}}\|_I \end{aligned}$$

$$\|Q_{n_0, \dots, n_k}^{\tau_0, \dots, \tau_k} - Q_{n_0, \dots, n_{k+1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{k+1}}\|_I \leq c \cdot E_{n_{k+1}}^{\tau_0, \dots, \tau_k}(Q_{n_0, \dots, n_k}^{\tau_0, \dots, \tau_k})$$

$$\leq c \|Q_{n_0, \dots, n_k}^{\tau_0, \dots, \tau_k} - P_{n_{k+1}}\|_I$$

et comme

$$\begin{aligned} \|Q_{n_0, \dots, n_k}^{\tau_0, \dots, \tau_k} - P_{n_{k+1}}\|_I &\leq \|Q_{n_0, \dots, n_k}^{\tau_0, \dots, \tau_k} - f\|_I + \|f - P_{n_{k+1}}\|_I \\ &\leq K A \rho^{n_{k+1}} + A \rho^{n_{k+1}} \end{aligned}$$

il vient

$$\|f - Q_{n_0, \dots, n_{k+1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{k+1}}\|_I \leq K A \rho^n + c(KA\rho^n + A\rho^n) = (c+K(c+1))A\rho^n$$

ce qui achève la démonstration.

Si l'on note $Q_n = Q_{n_0, \dots, n_{k+1}}^{\tau_0, \dots, \tau_{k+1}}$ alors $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes qui convergent quasi-analytiquement vers f sur I .

- Sous les hypothèses de l'algorithme de reconstruction, on peut remplacer "supposons connaître ... u définie sur $[a, \tau_0]$..." par "supposons connaître ... u définie sur $[\mu_0, \tau_0]$ " avec $\mu_0 \in]a, \tau_0[$ et l'on a un algorithme de reconstruction analogue au précédent, avec la différence que les intervalles $I_i = [\mu_i, \tau_i]$ sont obtenus par récurrence à l'aide de

$$\mu_{i+1} = \max \left\{ \frac{\mu_i + \tau_i}{2} - \left(\frac{\tau_i - \mu_i}{2} \right)^{\frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right)}, a \right\}$$

$$\tau_{i+1} = \min \left\{ \frac{\mu_i + \tau_i}{2} + \left(\frac{\tau_i - \mu_i}{2} \right)^{\frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right)}, b \right\}$$

et posant $x_0 = \frac{\mu_0 + \tau_0}{2}$, k doit être remplacé par

$$\max \left\{ \log \frac{b-a}{x_0-a}, \log \frac{b-a}{b-x_0} \right\} / \log \left(\frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) \right).$$

- Il se peut que toute sous-suite de $\{p_n^{\tau_0}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas bornée sur I bien que $\{p_{n_0}^{\tau_0}, \dots, p_{n_{k+1}}^{\tau_0}\}_{n_{k+1} \in \mathbb{N}}$ converge quasi-analytiquement vers f sur I.

5 - EXEMPLES DE FONCTIONS
APPARTENANT A DES CLASSES QUASI-ANALYTIQUES

Il y a assez peu d'exemples non triviaux de fonctions appartenant à des classes quasi-analytiques dans la littérature.

Carleman, [4] p. 76, signale $\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-e^n} \left[\frac{1}{x - \frac{1}{n}} + \frac{1}{x + \frac{1}{n}} \right]$

et dit que $\phi \in C(M, \mathbb{R})$ où $M_n = (n \log n)^n$ et qu'en fait $\|\phi^{(r)}\|_{\mathbb{R}}$ est de l'ordre de grandeur de M_r , en particulier n'est pas analytique.

Bernstein, [2] p. 171, cite $\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n! \arccos x)}{u^{(n-1)!}}$

où $u > 1$, $\theta \in B(n!, [-1, 1])$, ne peut être prolongée quasi-analytiquement et n'est pas analytique, et cite aussi

$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos F(n) \arccos x}{F(n)}$ où $F(0) = 1$ et $F(n+1) = 2^{F(n)}$

pour tout n qui n'est pas dérivable sur I .

Voici maintenant quelques exemples [14] qui permettent de mettre en valeur des différences entre classes de Bernstein et classes de Carleman.

- Soit $a(x) = \exp(-\frac{1}{x})$, $x \in]0, 1]$, $a(0) = 0$ $I = [0, 1]$.
 a est indéfiniment dérivable sur I , analytique sur $]0, 1]$
et n'appartient à aucune classe quasi-analytique $C(M, I)$.

- Soit $b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\frac{2^n}{n}) \cos(2^n x)$, alors $b \in C(M, I)$

avec $M_n = (n \log n)^n$ et n n'est analytique en aucun point.

- Soit $c(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \exp(-\frac{3^n}{\log_p(n)}) \cos(3^n x)$, $c \in C(M^p, I)$

avec $M_n^p = (n \log_{p+1}(n))^n$, et n n'est analytique en aucun point.

. Posons $T_n(x) = \cos(n \arcsin(x))$, $x \in [-1, 1] = J$.

- Soit $d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\frac{2^{n^2}}{n}) T_{2^{n^2}}(x)$ est indéfiniment dérivable sur J appartient à la classe $B(2^{n^2}, J)$ et n'est analytique en aucun point.

- Soit $e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\frac{3^n}{\log n}) T_{3^n}(x)$, alors $e \in C(M, J)$

$M_n = (n \log n)^n$ et n n'appartient à aucune classe $B(N, J)$.

- Soit $f(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \exp(-\frac{3^n}{\log_p(n)}) T_{3^n}(x)$, $f \in C(M^p, J)$ et

n n'appartient à aucune classe $B(N, J)$.

- Soit $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2r N_n} T_{N_{n+1}}(x)$ avec $N_0 = 1$, $N_{n+1} = 3^{N_n}$

et r un naturel non nul, alors $g \in B(N, J)$ est $r-1$ continûment dérivable mais $g^{(r-1)}$ n'est pas continûment dérivable.

- Soit $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-(\log n)N_n} T_{N_{n+1}}(x)$, N_n défini ci-dessus,

$h \in B(N, J)$ est indéfiniment dérivable et n n'appartient à aucune classe Q.A $C(M, J)$.

Démonstrations

. $b \in C(M, I)$ et n est analytique en aucun point.

Soit $u_n(r) = 2^{r \cdot n} \exp(-\frac{2^n}{n})$, $\theta_n(r) = \log \frac{u_{n+1}(r)}{u_n(r)}$,

$A(r) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r)$ alors $\|b(r)\| \leq A_r$ et

$\theta_n(r) = r \log 2 - \frac{2^n}{n+1} [1 - \frac{1}{n}]$. Soit n_r la partie entière de $\frac{\log(r) + \log_2(r)}{\log 2} - 1$. Pour tout $n \geq n_r + 1$ on a

$\frac{2^{n-1}}{n-1} \geq \log 2 \frac{r \log r}{\log r + \log_2(r)}$ vu que $\frac{2^t}{t}$ croit pour $t \geq \frac{1}{\log 2}$.

On a alors

$\theta_n(r) = r \log 2 - 2 \frac{2^{n-1}}{n-1} \frac{n-1}{n+1} [1 - \frac{1}{n}]$
 $\leq r \log 2 [1 - 2 \frac{\log(r)}{\log(r) + \log_2(r)} (1 - \frac{\log 2}{\log(r)})]$

par conséquent il existe $r_0 > \frac{2}{\log 2}$ tel que pour tout

$r \geq r_0$, $\theta_n(r) < -r \frac{\log 2}{2}$. Posons $n_1 = n_r + 1$.

$A(r) = \sum_{n \leq n_r} u_n(r) + \sum_{n > n_r} u_n(r) < \sum_{n \leq n_r} u_n(r) + \sum_{n > n_r} u_n(r) e^{-n \frac{\log 2}{2}}$
 $< \sum_{n \leq n_r} u_n(r) + u_{n_1}(r) \frac{2^{-\frac{n_1}{2}}}{1 - 2^{-\frac{1}{2}}} < \frac{1 + 2^{-\frac{n_1}{2}}}{1 - 2^{-\frac{1}{2}}} \sum_{n \leq n_1} u_n(r)$

Posons $\alpha = \frac{2}{1-2^{-1/2}}$

$$A(r) < \alpha \sum_{n \leq n_1} 2^{r \cdot n} \exp\left(-\frac{2^n}{n}\right) < \alpha \cdot n_1 \cdot 2^{r \cdot n_1} \leq 4^r \cdot \alpha \frac{\log r + \log_2(r)}{\log 2} (r \log r)^r$$

Ceci montre l'existence d'un nombre β tel que pour tout naturel $r > 1$, $A(r) \leq \alpha \beta^r (r \log r)^r$ donc $b \in C(M, I)$.

Afin de montrer que b n'est analytique nulle part,

considérons $B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2^n}{n}\right) z^{2^n}$.

B est une série qui converge uniformément sur le disque unité fermé \bar{D} , et d'après le théorème d'Hadamard sur les séries lacunaires, le cercle unité S est une frontière naturelle pour la fonction analytique B .

Signalons le

Lemme :

Soit $F(z)$ une fonction analytique sur le disque ouvert D , continue sur \bar{D} et telle que le cercle unité S soit une frontière naturelle pour F , alors $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \text{Réal } F(\exp(ix))$ est analytique en aucun point.

Démonstration :

Il suffit de montrer que f n'est pas analytique en 0, la démonstration en les autres points étant similaire. Supposons le contraire.

Soit $G(z) = f(-i \log z)$, $\log z = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n}$, il

existe un voisinage ouvert connexe V de 1 sur lequel G est analytique. Puisque $\text{Réel}(F(z) - G(z)) = 0$ pour tout $z \in V \cap S$, par le principe de symétrie de Schwarz, il existe un prolongement analytique H de $F(z) - G(z)$ sur un voisinage de 1 . Alors, de $F(z) = G(z) + H(z)$, au voisinage de 1 on conclut que 1 est un point régulier de F , contradiction, ce qui achève la démonstration du lemme.

Comme $b(x) = \text{Réel } B(\exp ix)$ on déduit que b n'est analytique en aucun point.

$c \in C(M^p, I)$ et n'est analytique en aucun point

Même démonstration que précédemment sauf qu'il faut remplacer

$$n_r \text{ par } k_r = \frac{\log r + \log_{p+1}(r)}{\log 3} - 1.$$

$d \in B(2^{n^2}, J)$ est indéfiniment dérivable et n'est analytique nulle part.

$$\text{On a } E_{2^{n^2}}(d, J) \leq \sum_{r=n+1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2^{r^2}}{r}\right) \leq \sum_{r>2^{n^2}} \exp(-r) < e^{-2^{n^2}}$$

$$\text{vu que } \frac{2^{(r+1)^2}}{r+1} = 2^{r^2} \frac{2^{2r+1}}{r+1} > 2^{r^2}, \text{ donc } d \in B(2^{n^2}, J) \text{ qui}$$

est une classe stable pour la dérivation.

$$\text{D'autre part, } d(\cos x) = \text{Réel } \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2^{n^2}}{n}\right) z^{2^{n^2}} \text{ qui}$$

avec le lemme montre que d n'est analytique en aucun point.

$e \in C(M, J)$ et n'appartient à aucune classe $B(N, J)$

Rappelons l'inégalité de V.A. Markov [12] p. 119.

$$\| |P^{(r)}| \|_J \leq \frac{n^2(n^2-1)\dots(n^2-(r-1)^2)}{1.3.\dots.(2r-1)} \| |P| \|_J, J = [-1, 1]$$

et P polynôme de degré au plus n .

$$e(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \exp\left(-\frac{3^n}{\log n}\right) T_{3^n}(x)$$

$$|e^{(r)}(x)| \leq A(r) = \frac{1}{r!} \sum_{n=2}^{\infty} u_n(r) \quad \text{avec} \quad u_n(r) = 3^{2nr} \exp\left(-\frac{3^n}{\log n}\right)$$

$$\text{Soit } \theta_n(r) = \log \frac{u_{n+1}(r)}{u_n(r)} = 2r \log 3 - \frac{3^n}{\log(n)} \left[3 \frac{\log(n+1)}{\log n} - 1 \right]$$

$$\text{Posons } m_r = \frac{\log r + \log_3 r}{\log 3} - 1, \text{ de } \left(\frac{3^t}{\log t}\right)' = \left(\log 3 - \frac{1}{t \log t}\right) \frac{3^t}{\log t}$$

il vient qu'il existe r_0 tel que si $r > r_0$ et $n \geq m_r + 1$

$$\text{alors } \theta_n(r) < 2r \log 3 - \frac{3r \log_2 r}{\log\left(\frac{\log r + \log_3 r}{\log 3}\right)} (3-1) \rightarrow -\infty \quad r \rightarrow \infty$$

par conséquent il existe $r_1 > r_0$ tel que quelque soit $r > r_1$ et $n > m_r$, $\theta_n(r) < -1$. Soit m_1 la partie entière de $m_r + 2$.

$$A(r) r! \leq \sum_{n \leq m_r} u_n(r) + u_{m_1}(r) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \leq \frac{1+e^{-1}}{1-e^{-1}} \sum_{n \leq m_1} u_n(r)$$

$$A(r) \leq \text{cste} \frac{m_1}{r!} 3^{2r m_1} \leq 9^r \cdot \text{cste} \cdot \frac{\log r + \log_3(r)}{\log 3} \frac{1}{r!} r^{2r} (\log_2 r)^{2r}$$

en utilisant la formule de Stirling il est facile de voir qu'il existe une constante C telle que

$$A(r) < C^r (r \log_2^2 r)^r \leq C^r (r \log r)^r$$

ce qui montre que $e \in C(M, J)$.

Montrons que $e \notin B(N, J)$ pour tout N . Pour tout naturel $m > 0$ il existe un naturel r tel que $3^r \leq m < 3^{r+1}$.

Soit $P_m = \sum_{n=0}^r \exp(-\frac{3^n}{\log(n)}) T_{3^n}(x)$, P_m est un polynôme de degré au plus m . Si maintenant $x = \cos(\frac{\pi k}{3(r+1)})$ avec k naturel $k \leq 3^{r+1}$, alors

$$(f - P_m)(x) = (-1)^k \sum_{n=r+1}^{\infty} \exp(-\frac{3^n}{\log n}) = (-1)^k \|f - P_m\|_J$$

et on utilise le théorème suivant (Cebishev [15] p. 53)

" P_m est le polynôme de meilleure approximation de degré au plus m de f sur J si et seulement si il existe $x_0 < x_1 < \dots < x_{m+1}$, éléments de J , tels que

$$|(f - P_m)(x_i)| = E_m(f, J) \text{ et } (f - P_m)(x_j) = -(f - P_m)(x_{j+1})$$

pour tout naturel $j \leq m$ ", pour conclure que

$$E_m(e) = \sum_{n=r+1}^{\infty} \exp(-\frac{3^n}{\log n}) > \exp(-\frac{3^{(r+1)}}{\log(r+1)})$$

$$(E_m(e))^{1/m} > \exp(-\frac{3^{(r+1)}}{m \log(r+1)}) > \exp(-\frac{3}{\log(r+1)})$$

la dernière quantité tendant vers 1 lorsque m tend vers l'infini on déduit que $e \notin B(N, I)$ pour tout N .

$f \in C(M^P, J)$ et n appartient à aucune classe $B(N, J)$

La démonstration est semblable à la précédente sauf qu'il

faut remplacer m_r par $\ell_r = \frac{\log r + \log_{p+3}(r)}{\log 3}$

$g \in B(N, J)$ est $r-1$ fois continûment différentiable et ne l'est pas r fois.

On a les résultats [12] :

$$|T_n^{(r)}(x)| \leq T_n^{(r)}(1) = \frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(r-1)^2)}{1.3.(2r-1)} \quad \text{pour tout } x \in J.$$

$$g^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2r N_n} T_{N_{n+1}}^{(k)}(x) \quad \text{et comme pour } k \leq r-1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2r N_{n-1}} \frac{N_n^2(N_n^2-1^2)\dots(N_n^2-(k-1)^2)}{1.3.\dots(2k-1)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} 3^{-2r N_{n-1}} N_n^{2(r-1)}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2r N_n} 3^{2(r-1) N_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2 N_n} \leq \frac{1}{2}$$

On déduit que g est $r-1$ fois continûment dérivable.

Soit $h \in]0, 1[$ on a $\frac{T_n^{(r-1)}(1) - T_m^{(r-1)}(1-h)}{h} > 0$ et de

$$\frac{g^{(r-1)}(1) - g^{(r-1)}(1-h)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2r N_n} \frac{T_{N_n}^{(r-1)}(1) - T_{N_n}^{(r-1)}(1-h)}{h}$$

$$\text{il vient } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g^{(r-1)}(1) - g^{(r-1)}(1-h)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2r N_n} T_{N_{n+1}}^{(r)}(1) = \infty$$

$h \in B(N, J)$ est indéfiniment dérivable et n'appartient à aucune classe Q.A C(M, J)

$$E_{N_n}(h, J) = \sum_{r=n}^{\infty} 3^{-(\log r)N_r} \leq 3^{-(\log n)N_n} \sum_{r=0}^{\infty} 3^{-r} \\ \leq \frac{3}{2} 3^{-(\log n) \cdot N_n}$$

$(E_{N_n}(h, J))^{1/N_n} < 2 \cdot 3^{-\log n}$ qui tend vers zéro lorsque n

tend vers l'infini donc $h \in B(N, J)$.

On remarque que $\|h^{(r)}(x)\| \leq h^{(r)}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-(\log n)N_n} T_{N_{n+1}}^{(r)}(1)$ (1)

Soit n_r un entier tel que $e^r < n_r < e^{r+1}$ alors

$$h^{(r)}(1) \geq (3^{-\log(e^{r+1})N_{n_r}} \cdot (3^{2 \cdot N_{n_r-1}} \cdot (3^{2 \cdot N_{r-2}}) \dots$$

$$(3^{2 \cdot N_{n_r-(r-1)}})) / 1 \cdot 3 \dots (2r-1)$$

donc $h^{(r)}(1) \geq (3^{-(r+1)N_{n_r}} 3^{2 \cdot r \cdot N_{n_r}}) / (4r)^r$ soit alors

$$a_r = \|h^{(r)}\|_{J^{1/2}}, a_r \geq \frac{3^{\frac{r-1}{r} N_{n_r}}}{4r} \geq 3^{N_{n_r-1}} \text{ et donc}$$

$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{a_r} < \infty$ donc h n'appartient à aucune classe quasi-

analytique C(M, J).

6 - PROLONGEMENT QUASI-ANALYTIQUE
PROBLEME D'UNICITE, APPLICATION

Définition : Soient I un intervalle compact, $C(M,I)$ une classe quasi-analytique au sens de Denjoy-Carleman et $f \in C(M,I)$.

On dit que $g \in C(M',J)$ est un prolongement quasi-analytique de f relatif à $C(M,I)$ si

i) J est un intervalle compact et $I \subset J$.

ii) Quelle que soit la classe quasi-analytique $C(M'',I)$ telle que $C(M,I) \subseteq C(M'',I)$ il existe une classe quasi-analytique $C(M^*,J)$ telle que $C(M'',J) \cup C(M',J) \subseteq C(M^*,J)$.

iii) Pour tout $x \in I$, $f(x) = g(x)$.

On définit de façon analogue la notion de prolongement quasi-analytique relatif à une classe $B(N,I)$.

Remarques :

. Si g_1 définie sur I_1 et g_2 définie sur I_2 sont des prolongements quasi-analytiques de f relatifs à $C(M,I)$, (respectivement $B(N,I)$) alors pour tout $x \in I_1 \cap I_2$ on a $g_1(x) = g_2(x)$.

. Soient I et J des intervalles compacts, $I \subset J$, $f \in C(M,I)$ (respectivement $f \in B(N,I)$), $g \in C(M,J)$ (respectivement $g \in B(p.N,I)$, p naturel non nul), alors si pour tout $x \in I$

$g(x) = f(x)$, g est un prolongement quasi-analytique de f relatif à $C(M,I)$ (respectivement $B(N,I)$).

Procédés constructifs de prolongement quasi-analytique

. Soit $I = [a,b]$ $f \in C(M,I)$ (respectivement $B(N,I)$)

1ère Méthode :

i) Déterminer $\epsilon > 0$ tel qu'il existe un prolongement quasi-analytique $g \in C(M,[a,b+\epsilon])$, (resp. $B(pN,[a,b+\epsilon])$), relativement à $C(M,I)$, (resp. $B(N,I)$).

ii) Utiliser un procédé de reconstruction de g précédemment étudié.

2ème Méthode (Théorique)

Voir le 2ème algorithme de reconstruction page (30).

La seule différence de cette méthode avec la méthode précédente est que le choix de ϵ se fait au cours de l'algorithme.

. Dépendance entre la classe quasi-analytique dans laquelle on prolonge une fonction, et son prolongement dans cette classe

Signalons tout d'abord deux théorèmes :

Théorème de S. MANDELBOJT [11]

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur I , alors il existe deux fonctions f_1, f_2 indéfiniment dérivables telles que :

$$i) \sum_{r=0}^{\infty} \|f_i^{(r)}\|^{-1/r} \text{ diverge } i \in \{1,2\}$$

$$ii) f = f_1 + f_2$$

Théorème de MARKUSHEVICH [15], p. 374

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue alors il existe deux fonctions continues f_1, f_2 telles que

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} (E_n(f_i))^{1/n} < 1 \text{ pour } i \in \{1,2\}$$

$$ii) f = f_1 + f_2.$$

De plus, si f est r fois continûment dérivable f_1 et f_2 peuvent être choisis r fois continûment dérivables.

De ces deux théorèmes on peut déduire

. Qu'il existe deux classes quasi-analytiques $C(M,I)$ et $C(M_2,I)$ (resp. $B(N_1,I), B(N_2,I)$) qui ne peuvent être incluses toutes deux dans une classe quasi-analytique $C(M,I)$ (resp. $B(N,I)$).

. Soit f appartenant à la classe quasi-analytique $C(M,I)$ (resp. $B(N,I)$), J un intervalle compact contenant strictement I .

Soit une classe quasi-analytique $C(M,J)$ (resp. $B(N',J)$) telle que

$$i) C(M,J) \subset C(M',J) \text{ (resp. } B(N,J) \subset B(N',J))$$

ii) Il existe $g \in C(M', J)$ (resp. $g \in B(N', J)$) qui prolonge f .

Alors le prolongement g de f dépend en général effectivement de la classe $C(M', J)$ (resp. $B(N', J)$)

. Soit $I = [0, 1]$ il existe une suite $\{c_n\}$, deux classes quasi-analytiques $C(M, I)$ et $C(M', I)$, et deux fonctions f et g telles que

i) $f \in C(M, I)$, $g \in C(M', I)$

ii) $f^{(n)}(0) = c_n n! = g^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

iii) $f \neq g$

En particulier le procédé de reconstruction de CARLEMAN d'une fonction dans une classe quasi-analytique $C(M, I)$ fournit une fonction qui dépend effectivement de la classe $C(M, I)$.

. Soit $I = [a, b]$, $\tau_0 \in [a, b]$ il existe deux classes $B(N, I)$ et $B(N', I)$, u définie sur $[a, \tau_0]$, et deux fonctions f et g telles que

i) $f \in B(N, I)$, $g \in B(N', I)$

ii) $f(x) = g(x) = u(x)$ pour tout $x \in [a, \tau_0]$.

iii) $f \neq g$.

En particulier le procédé de reconstruction d'une fonction dans une classe de BERNSTEIN $B(N, I)$ fournit une fonction qui dépend effectivement de la classe $B(N, I)$.

Critiques des procédés de reconstruction de fonctions quasi-analytiques étudiés et problèmes ouverts

Procédés de reconstruction dans les classes de Carleman

Soient $\{c_n\}_n$ une suite de nombres et $A > 0$.

Supposons qu'il existe $f \in C(M, I)$ telle que

$$i) \|f^{(n)}\|_I \leq A^n M_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$ii) f^{(n)}(0) = c_n n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) Le procédé de Carleman fournit une suite de fonctions g_n qui convergent uniformément vers f sur I ainsi que leurs dérivées.

. Le calcul de chaque g_n s'obtient en résolvant une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce à noyau symétrique.

. Pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$ donnés nous n'avons pas de moyen pour trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \leq r$ on ait $\|f^{(k)} - g_n^{(k)}\|_I < \epsilon$.

2) Si de plus la fonction est périodique,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad \text{la méthode de Charles de la}$$

Vallée-Poussin fournit pour tout $r \in \mathbb{N}$ des suites $\{a_n^r\}_n$ $\{b_n^r\}_n$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\{a_n^r\}_n$ et $\{b_n^r\}_n$ convergent respectivement vers a_n et b_n .

. Les valeurs des suites $\{a_n^r\}_n$ et $\{b_n^r\}_n$ qui en fait satisfont à $a_n^r = b_n^r = 0$ pour tout n assez grand s'obtiennent en minimisant une forme quadratique.

. Pour tout $\epsilon > 0$ nous n'avons pas de procédé pour trouver $r \in \mathbb{N}$ tel que
$$\| f(x) - \sum_n (a_n^r \cos(nx) + b_n^r \sin(nx)) \|_{\mathbb{R}} \leq \epsilon$$

Voici deux problèmes ouverts

Premier problème

Soient $\{c_n\}_n$ une suite de nombres et $A > 0$.

Supposons qu'il existe $f \in C(M, I)$ telle que

$$i) \|f^{(n)}\|_I \leq A^n M_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$ii) f^{(n)}(0) = c_n n!, \quad n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$ fixé, construire une fonction g telle que pour tout $n \leq r$

$$\|f^{(n)} - g^{(n)}\|_I < \epsilon.$$

Signalons que ce problème admet une solution et que g peut être choisie polynômiale, résultat qui peut être déduit de la démonstration du théorème de BANG [9], p. 107.

Deuxième problème

Soient $I = [0, 1]$, $C_2(M, I)$ une classe quasi-analytique

$$\|g\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{M_n} \int_0^1 |g^{(n)}(t)|^2 dt$$

$$H = \{g ; g \in C_2(M, I) \quad ||g|| < \infty\}$$

Est-ce que l'ensemble des polynômes est dense dans H pour la norme $|| \quad ||$.

Procédé de reconstruction dans les classes de BERNSTEIN

Supposons connaître $N, I = [a, b], \rho \in]0, 1[, \tau_0 \in]a, b[$
 $A > 0, u$ une fonction définie sur $[a, \tau_0]$ et l'existence
d'une fonction f définie sur I telle que

$$i) E_n(f) \leq A \rho^n, \quad n \in N$$

$$ii) f(x) = u(x), \quad x \in [a, \tau_0].$$

Choisissons $\eta \in]\rho, 1[$ et $c > 1$ et posons $\delta = \frac{1}{2} [1 + \frac{1}{2} (\frac{1}{\eta} + \eta)]$
et soit k la partie entière de $(\log \frac{b-a}{\tau_0-a}) / \log \delta$.

Alors quelque soit n appartenant à la suite d'indices N
l'algorithme de reconstruction adapté aux classes de Bernstein
fournit un polynôme Q dont le degré peut être imposé inférieur
ou égal à n , tel que :

$$||f-Q||_I \leq [c+(1+c) ((1+c)^{k+1} - 1) (\frac{2}{c} + 1)] A \rho^n$$

. Le calcul de Q s'obtient à l'aide de $k+1$ calculs
de polynômes de meilleure approximation approchés d'une
fonction continue.

. Pour tout $\epsilon > 0$ soit n appartenant à la suite d'indices N tel que

$$[c + (1+c) (1+c)^{k+1} - 1] \left(\frac{2}{c} + 1\right) A \rho^n < \epsilon$$

Alors le polynôme Q fourni par le procédé de reconstruction vérifie :

$$\|f-Q\|_I < \epsilon.$$

Application au prolongement de fonctions analytiques

. Prolongement quasi-analytique d'une fonction analytique à travers sa frontière naturelle

Soient $D = \{z \mid |z| < 1\}$

$$. F_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{3^n}{\log n}\right) z^{3^n}$$

$$. F_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)!} z^{n!}$$

F_1 et F_2 sont des fonctions analytiques sur D et continues sur \bar{D} , et $\partial D = \{z \mid |z| = 1\}$ est leur frontière naturelle.

On peut montrer, en reprenant la démonstration concernant l'exemple $c(x)$ page (54), que

$$\|F_1^{(r)}\|_D \leq A B^r (r \log r)^r$$

pour tout r et que l'on peut déterminer A et B .

Soient $a \in D$ et b un point frontière de D soit

$$f_1(t) = F_1(bt + (1-t)a) \quad t \in I = [0,1]$$

il est clair que $f_1 \in C((n \log n)^n, I)$

Si f_1 admet un prolongement quasi-analytique sur $[0, 1+\epsilon]$ ($\epsilon > 0$) relatif à $C((n \log n)^n, I)$ on dira que $f_1(t)$, $t \in]1, 1+\epsilon]$ est la valeur du prolongement quasi-analytique de F_1 suivant $[a, b]$ en $a(1-t) + bt$ relatif à la classe $C((n \log n)^n, I)$.

Remarquons d'autre part que

$$\|F_2(z) - \sum_{n=1}^r e^{-(n-1)!} \cdot z^{n!}\| \leq \sum_{n=r+1}^{\infty} e^{-(n-1)!} \leq \frac{e}{e-1} e^{-r!}$$

Soit $a \in D$ et b un point frontière de D soit

$$f_2(t) = F_2(bt + (1-t)a) \quad t \in I = [0, 1].$$

Il est évident que $f_2 \in B(n!, I)$.

Si f_2 admet un prolongement quasi-analytique sur $[0, 1+\epsilon]$ ($\epsilon > 0$) relatif à $B(n!, I)$ on dira que $f_2(t)$, $t \in]1, 1+\epsilon]$ est la valeur du prolongement quasi-analytique de F_2 suivant $[a, b]$ en $a(1-t) + bt$ relatif à la classe $B(N, I)$.

Le prolongement quasi-analytique d'une fonction analytique à travers sa frontière naturelle peut être un moyen de définir en certains points une fonction analytique à l'extérieur de sa frontière naturelle.

. Prolongement analytique le long d'un arc d'une fonction analytique définie par sa série de Taylor en un point

Soit $I = [-1, 1]$, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ un arc de Jordan analytique,

$z_0 = \gamma(-1)$ et $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ une série entière

de rayon de convergence non nul et supposons que

i) $s(z)$ se prolonge analytiquement le long de l'arc γ

ii) L'on connaisse $r > 0$ tel que pour tout t le prolongement analytique de $s \circ \gamma$ en t ait un développement en série entière de rayon de convergence $r_t > r$.

iii) L'on connaisse $\tau_0 \in]-1, 1[$ tel que $\gamma([-1, \tau_0])$ soit inclus dans le disque de convergence de $s(z)$ (ouvert).

On se propose de trouver une suite de polynômes P_n qui convergent quasi-analytiquement vers le prolongement de $s \circ \gamma$.

Remarque : si s^* est le prolongement analytique de s et si $f = s^* \circ \gamma$ alors f est une fonction analytique réelle et à l'aide d'un théorème de Bernstein [2], p. 111 et 112, en posant $\rho = r+1 - ((r+1)^2 - 1)^{1/2}$ et M le maximum de f sur l'ellipse de foyers 0 et 1 et d'axes $\rho+1/\rho$, $1/\rho - \rho$

on a
$$E_n(f) < \frac{2M}{\left(\frac{1}{\rho} - 1\right)} \rho^n.$$

Soient $c > 1$, $\eta \in]\rho, 1[$, k la partie entière de $(\log \frac{1}{\tau_0}) / \log \delta$ ou $\delta = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{\eta}\right)\right)$ alors

Pour tout n le procédé de reconstruction, page (45), fournit un polynôme Q_n tel que

$$\|f - Q_n\|_I \leq (c + (1+c)((1+c)^{k+1} - 1) \left(\frac{2}{c} + 1\right)) \frac{2M}{\frac{1}{\rho} - 1} \rho^n$$

La suite $\{Q_n\}_n$ est la suite de polynômes cherchés.

7 - CONCLUSION

Nous n'avons pas pu donner une solution satisfaisante au problème de prolonger de façon unique une fonction analytique le long d'un segment qui traverse la frontière naturelle de la fonction, car en général le prolongement quasi-analytique dépend de la classe quasi-analytique dans laquelle on a effectué le prolongement.

Enfin, étant donné $s(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ une série entière qui se prolonge analytiquement sur un arc de Jordan analytique $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$, sous certaines hypothèses, nous avons construit une suite de polynômes Q_n de degré au plus n qui convergent quasi-analytiquement vers le prolongement de $s \circ \gamma$.

REFERENCES

- [1] Edwin J. AKUTOWICZ : Extrapolation and approximation of function given on linear sets of positive capacity. Math. Zeit. 89, pp. 414-419 , (1965).
- [2] Serge BERNSTEIN : Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle.
L'APPROXIMATION, par S. BERNSTEIN et C. de la VALLEE POUSSIN.
CHELSEA publishing company, 1965.
- [3] Serge BERNSTEIN : Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle.
Math. Ann. 75, (1914), pp. 450-468.
- [4] Torsten CARLEMAN : Les fonctions quasi-analytiques.
GAUTHIER-VILLARS, Paris 1926.
- [5] Henri CARTAN : Sur les inégalités entre les maxima des dérivées successives d'une fonction.
Comptes rendus T 208, 1939, pp. 414.
- [6] H. CARTAN & S. MANDELBROJT : Solution du problème d'équivalence des classes de fonctions indéfiniment dérivables.
Acta. Mat. T 72, (1940), pp. 31-49.
- [7] E.W.CHENEY : Approximation theory .
Mc GRAW-HILL book Company, 1966.
- [8] C. de LA VALLEE POUSSIN : On the approximation of functions of a Real variable and on quasi-analytic functions.
The Rice Institute, (1924), pp. 105-172.

- [9] S. MANDELBROJT : Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions.
GAUTHIER-VILLARS, Paris 1935.
- [10] S. MANDELBROJT : Séries adhérentes régularisation des suites applications.
GAUTHIER-VILLARS, Paris 1952.
- [11] S. MANDELBROJT : Sur les fonctions indéfiniment dérivables.
Acta. Mat. T 72 (1940) pp. 15-29.
- [12] T. RIVLIN : The Chebyshev polynomials.
Wiley-Interscience (1970).
- [13] W. RUDIN : Real and Complex Analysis.
Mc GRAW-HILL book Company, 1970 .
- [14] T. REBOUL : Critical Phenomena in Physics, Biology chemistry and other fields.
Springer series in synergetics (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1980).
- [15] A.F. TIMAN : Theory of approximation of functions of a real variable.
Pergamon Press 1963.

COMPLEMENT BIBLIOGRAPHIQUE

S. BOCHNER : Quasi-analytic functions, Laplace operator, positive kernel.

Annals of Mathematics, Vol. 51, n°1, January 1950, pp. 68-91.

S. BOCHNER & A.E.TAYLOR : Some theorems on quasi-analyticity for function of several variables.

Amer. J. Math. 61 (1939) pp. 303-329.

Philip DAVIS : Uniqueness Theory for asymptotic expansions in general regions.

Pacific Journal of Math. 7 (1957) pp. 849-860.

M.M.DZRBASJAN : An extension of the Denjoy-Carleman quasi-analytic classes.

A.M.S. Translation Series 2, Vol. 110.

Leon EHRENPREIS : Fourier Analysis in several complex variables. Wiley Interscience 1970 .

A. GORNY : Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle.

Acta. Mat. T 71 (1939) pp. 317-358.

B.I.KORENBLJUM : Quasi-analytic classes of functions in a circle. Doklady (1965) Tom. 164 , n°1 , pp. 1155-1158.

V.I.KORENBLJUM : Conditions of nontriviality of certain classes of functions analytic in a sector, and problems of quasianalyticity.

Doklady (1966) Tom. 166 , n°5 , pp. 232-236.

Keith MILLER : Stabilised numerical analytic prolongation with poles.

SIAM. J. APPL. Vol.18, n°2, march 1970.

Harold S. SHAPIRO : Overconvergence of sequences of rational functions with sparse poles.

Arkiv for Mathematic Band 7 , n°25, pp. 343-349.

I.Sabba STEFANESCU : On the stable analytic continuation with rational functions.

J. Math. Phys. Vol.21 (1) January 1980 , pp. 175-188.

CHAPITRE II

CALCUL DU MAXIMUM GLOBAL D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE

Plan :

Introduction.	79
1) Quelques inégalités utiles	81
2) Exemples de majorantes partielles	87
3) Exemples de procédé P	98
4) Comparaison de quatre algorithmes particuliers pour déterminer le maximum global d'une fonction d'une variable réelle.	102
5) Démonstrations des théorèmes du § 4.132	
6) Extensions.	140

INTRODUCTION

La recherche d'une solution approchée de certains problèmes d'optimisation se résoud numériquement par le biais de calculs de maxima approchés de fonctions généralement non unimodales. Le "contrôle de l'erreur" de la solution approchée nécessite alors celui de l'erreur faite sur les calculs de maxima des fonctions.

Dans le chapitre III on s'intéressera à la recherche numérique approchée à précision voulue, de polynômes de meilleure approximation d'une fonction f , définie sur un intervalle $[a,b]$, notamment à l'aide de l'algorithme de Rémès.

On sera amené à calculer le maximum de $f-P$ sur $[a,b]$ où P est un polynôme, ce qui a motivé le travail résumé dans ce chapitre.

Les méthodes de calcul du maximum global d'une fonction d'une variable réelle, étudiées ici ont été successivement développées par R. Brent [4], Bruno O. Shubert [16], Evtushenko Yu. G [7], Patricio Basso [11] [2], et par [11].

Soient E une réunion finie d'intervalles compacts et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. A l'aide :

- d'un module de continuité de f

ou

- de $r \in \mathbb{N}^*$ et $M \geq \|f(r)\|_E$

on va résoudre les problèmes suivants :

i) pour tout $\epsilon > 0$ trouver un point $x \in E$ tel que

$$\max_{u \in E} f(u) - f(x) < \epsilon$$

- ii) construire une suite $\{E_k\}$ de sous-ensembles de E tels que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcap_{k > i} E_k$ soit exactement l'ensemble des points où f atteint son maximum.

Au paragraphe 1 nous établirons des inégalités qui permettront de donner une majoration d'une dérivée d'une fonction analytique sur un intervalle.

Au paragraphe 2 nous montrerons comment construire des majorantes ϕ_S de la fonction f sur un sous-intervalle S de E en tenant compte de l'information donnée sur f .

Les fonctions ϕ_S que nous construirons vérifieront les propriétés :

- i) Il est facile de calculer à la précision voulue un majorant par excès de ϕ_S sur S ,
- ii) $\sup_{u \in S} (\phi_S(u) - f(u))$ tend vers zéro lorsque le diamètre de S tend vers zéro.

Au paragraphe 3 nous donnerons des exemples de procédés P qui remplacent un intervalle S par des intervalles plus petits, dépendant en général du majorant ϕ_S .

Au paragraphe 4 nous indiquerons une méthode générale pour rechercher le maximum global d'une fonction d'une variable réelle, qu'on illustrera par les résultats numériques de quatre algorithmes.

Au paragraphe 5 nous démontrerons les résultats énoncés au § 4.

Au paragraphe 6 nous signalerons des extensions de la méthode à la recherche du maximum global d'une fonction de plusieurs variables réelles, ainsi que des méthodes de localisation des zéros de fonctions numériques.

1 - QUELQUES INEGALITES UTILES

Lors de la construction de majorantes partielles nous aurons besoin de connaître une majoration grossière du maximum du module d'une dérivée $k^{\text{ième}}$ de la fonction ($k \geq 1$).

Pour cela nous remplacerons fictivement la dérivée $k^{\text{ième}}$ de la fonction par un polynôme ou un polynôme trigonométrique, ou nous remplacerons fictivement la fonction par un polynôme ou un polynôme trigonométrique.

DEFINITION

Si $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ on note $\|g\|_E = \sup_{x \in E} |g(x)|$

THEOREME 1

Si P est un polynôme de degré au plus n sur l'intervalle $[a, b]$ alors on a l'inégalité :

$$\|P\|_{[a, b]} \leq \left(\frac{2}{\pi} \log(n+1) + \tau_n\right) \sup_{j=1}^{n+1} |P(x_j)| \text{ avec}$$

$$x_j = 0.5[a+b + (b-a) \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{2(n+1)}\right)] \text{ , } j \in \{1, \dots, n+1\}$$

$$\tau_n \in \left[A, A + \frac{\pi}{72(n+1)^2}\right] \text{ , } \{\tau_n\}_n \text{ décroissante}$$

$A = \frac{2}{\pi} (\gamma + \log \frac{8}{\pi}) = 0.9625\dots$, γ étant la constante d'Euler.

DEMONSTRATION

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n+1} P(x_j) \prod_{i \neq j} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \quad \text{et donc}$$

$$|P(x)| \leq \sup_{j=1}^{n+1} |P(x_j)| \sup_{x \in [a,b]} \sum_{j=1}^{n+1} \prod_{i \neq j} \left| \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \right|$$

D'autre part M.J.D. Powell [7] a montré que

$$\lambda_n = \sup_{x \in [a,b]} \sum_{j=1}^{n+1} \prod_{i \neq j} \left| \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \right| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \cotg \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}$$

et R. Günttner [6] a donné l'estimation

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi} \log(n+1) + \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \text{Log} \frac{8}{\pi} \right) + \alpha_n ,$$

$$\text{avec } \alpha_n \in]0, \frac{\pi}{72(n+1)^2} [,$$

la suite $\{\alpha_n\}_n$ étant strictement décroissante T. Rivlin [9] p. 18 . Notons qu'il existe un polynôme $P \neq 0$ de degré au

$$\text{plus } n \text{ tel que } \|P\|_{[a,b]} = \lambda_n \sup_{j=1}^{n+1} |P(x_j)| .$$

COROLLAIRE 1

Si $T(\theta) = \sum_{j=0}^n (a_j \cos(j\theta) + b_j \sin(j\theta))$ alors

$$\|T\|_{\mathbb{R}} \leq 0.5 \lambda_n \left(\sup_{j=1}^{n+1} |T(\theta_j) + T(-\theta_j)| + \sup_{j=1}^{n+1} \left| \frac{T(\theta_j) - T(-\theta_j)}{\sin(\theta_j)} \right| \right)$$

avec $\theta_j = \frac{2j-1}{2(n+1)} \cdot \pi$.

DEMONSTRATION

$$\|T(\theta)\|_{\mathbb{R}} \leq 0.5 (\|T(\theta) + T(-\theta)\|_{\mathbb{R}} + \|T(\theta) - T(-\theta)\|_{\mathbb{R}})$$

Posons $U(x) = T(\theta) + T(-\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$ et $x = \arcsin \theta$.
 U est un polynôme de degré au plus n et on applique le théorème 1 pour majorer $\|U(x)\|_{[-1,1]} = \|T(\theta) + T(-\theta)\|_{\mathbb{R}}$.

Posons $V(x) = \frac{T(\theta) - T(-\theta)}{\sin(\theta)}$, $\theta \in [0, \pi]$ et $x = \arcsin \theta$

et on utilise le théorème 1 pour majorer

$$\|V(x)\|_{[-1,1]} \geq \|T(\theta) - T(-\theta)\|_{\mathbb{R}} , \text{ d'où on déduit le corollaire 1.}$$

COROLLAIRE 2

Soit P un polynôme de degré au plus n , si
 $a \in \mathbb{C}$, $C = \{Z ; |Z-a| = \rho\}$, et

$k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{n}{2} < k \leq \frac{n+1}{2}$ on a :

$$\|P\|_C \leq \left(1 + \frac{2}{\pi} \log k\right) \left(\max_{j=1}^k \left| \frac{P(-z_j) + P(z_j)}{2} \right| + \max_{j=1}^k \left| \frac{P(z_j) - P(-z_j)}{2 \sin \theta_j} \right| \right)$$

avec $z_j = a + \rho \exp(i \theta_j)$ et $\theta_j = \frac{2j-1}{2k} \pi$.

DEMONSTRATION

Si $P(z) = \sum_{j=0}^n c_j (z-a)^j$, $z = a + \rho e^{i\theta}$ il vient

que $P(z) = e^{-ik\theta} \sum_{j=0}^k (A_j \cos j\theta + B_j \sin j\theta)$ et en utili-

sant le corollaire 1 on déduit le corollaire 2.

THEOREME 2 A.C. Shaeffer et R.J. Duffin [10]

Soit P un polynôme de degré au plus n alors pour
 tout $r \leq n$ on a l'inégalité optimale

$$\|P^{(r)}\|_{[a,b]} \leq \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\dots(n^2-(r-1)^2)}{1.3.5\dots(2r-1)} \left(\frac{2}{b-a}\right)^r \sup_{i=0}^n |P(y_i)|$$

avec $y_i = 0.5 [a+b+(b-a) \cos (\frac{i\pi}{n})]$ $i \in \{0, \dots, n\}$.

THEOREME 3 Bernstein-Landau [3] p. 39.

Soit $T(\theta) = \sum_{k=0}^n a_k \cos k x + b_k \sin k x$ et r

un naturel non nul alors on a les inégalités optimales :

$$\|T^{(r)}\|_{\mathbb{R}} \leq n^r \|T\|_{\mathbb{R}}$$

CONCLUSION

Nous sommes capables de donner un majorant grossier de l'une de ses dérivées :

- 1) d'un polynôme sur un intervalle
- 2) d'un polynôme trigonométrique sur un intervalle à l'aide de $n+1$ évaluations du polynôme en des points judicieusement choisis.

REMARQUE

Dans l'utilisation de l'inégalité du théorème 2 il est parfois préférable de remplacer $[a,b]$ par un intervalle plus grand.

QUESTIONS OUVERTES

- 1) Si P est un polynôme de degré au plus n ,
 K un intervalle ou un disque, k un naturel $k > n$.
On soulève les problèmes
- i) déterminer l'ensemble $D \subset [a, b]$ de k points, tel que la constante c_k vérifiant $\|P\|_K \leq c_k \|P\|_D$ soit la plus petite possible
 - ii) déterminer cette constante c_k
- 2) Si $R = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle avec
 $\deg P \leq n$, $\deg Q \leq m$ et $Q(x) > 0$ sur $[a, b]$.
Alors, existe-t-il D ensemble de $n+m+1$ points
répartis sur $[a, b]$ et $C > 0$ qui vérifie
 $\|R\|_{[a, b]} \leq C \|R\|_D$ pour toute fraction rationnelle vérifiant les conditions ci-dessus.
Si oui, quelle est la plus petite valeur C et déterminer un ensemble D correspondant. On remarquera que a et b sont nécessairement des éléments de D .

2 - EXEMPLES DE MAJORANTES PARTIELLES

Dans ce qui suit :

- E est une réunion finie d'intervalles compacts
- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

DEFINITION

On dit que $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est un module de continuité si

- ω est continue en 0 .
- ω est une fonction croissante.
- $\omega(x+y) \leq \omega(x) + \omega(y)$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$

On dit qu'une application $f : (X, d) \rightarrow (Y, \delta)$ d'un espace métrique sur un espace métrique admet le module de continuité ω si pour tout x, y éléments de X on a :

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \omega(d(x, y))$$

Nous allons construire, en tenant compte de l'information sur f , (connaissance : d'un module de continuité de la fonction f , ou, de $n \in \mathbb{N}^*$ et de M tels que $M \geq \|f^{(n)}\|_{\omega}$) , des fonctions ϕ_S qui majorent f sur $S = [a, b]$.

Nous donnerons des moyens de calculer, à la précision voulue un maximum par excès z_S de ϕ_S sur $[a, b]$.

2.1. CAS OU L'ON CONNAIT UN MODULE DE CONTINUITÉ DE f

Soit ω un module de continuité de f , supposé facile à évaluer ($\omega \neq 0$ et continue)

Soient, $S = [a, b] \subset E$, $A(x) = f(a) + \omega(|x-a|)$,
 $B(x) = f(b) + \omega(|b-x|)$, et $\phi_S(x) = \min(A(x), B(x))$.

Du fait que A et B majorent f sur $[a, b]$, ϕ majore f sur $[a, b]$.

Soit $\theta(x) = B(x) - A(x)$. θ est continue décroissante sur $[a, b]$ et $\theta(a) > 0$, $\theta(b) < 0$, donc θ s'annule en un point $u \in]a, b[$. Il est alors facile de voir que u est un point où ϕ_S atteint son maximum sur S .

ALGORITHME DE RECHERCHE DE z_S

On pourra utiliser une méthode dichotomique ou de section dorée pour rechercher un zéro de θ sur $[a, b]$.

On prendra par exemple le test d'arrêt suivant :

Soient $\epsilon > 0$, $z(v) = \max(A(v), B(v))$

"Si l'on a trouvé un point $v \in [a, b]$ tel que

$$z(v) - \phi_S(v) \leq \epsilon \cdot \max\{\omega(|b-v|), \omega(|v-a|)\}$$

définir $z_S = z(v)$ et arrêt".

CAS OU L'ON PEUT CALCULER EXPLICITEMENT LE MAXIMUM DE

ϕ_S SUR S .

$$S = [a, b]$$

i) $\omega(x) = Lx$; $L > 0$

Un calcul simple montre que ϕ_S atteint son maximum

$$z_S = 0.5 (f(a) + f(b) + L(b-a))$$

au point

$$u_S = 0.5(a+b + \frac{f(b)-f(a)}{L})$$

ii) $\omega(x) = K x^{\frac{1}{2}} ; K > 0$

Un calcul élémentaire montre que ϕ_S a pour maximum $z_S = f(a)+K(b-a)^{1/2} = f(b)+K(a-b)^{1/2}$ au point

$$u_S = 0.5[a+b + \frac{f(b)-f(a)}{K} (2(b-a) - (\frac{f(b)-f(a)}{K})^2)^{\frac{1}{2}}]$$

PROPRIETE DE CE TYPE DE MAJORANTE PARTIELLE

Pour tous réels a, b , $a < b$, tels que $S = [a, b] \subset E$ on note

$$\phi_{a,b}(x) = \phi_S(x) = \min \{f(a)+\omega(|x-a|), f(b)+\omega(|x-b|)\}.$$

Alors si $c \in]a, b[$ on a :

$$\phi_{a,c}(x) \leq \phi_{a,b}(x) \text{ pour tout } x \in [a, c]$$

$$\phi_{c,b}(x) \leq \phi_{a,b}(x) \text{ pour tout } x \in [c, b].$$

2.2. - CAS OU L'ON CONNAIT UNE MAJORATION DE L'UNE DES DERIVEES DE f.

DEFINITION

$C^k([a, b], \mathbb{R})$ désignera l'ensemble des fonctions définies sur $[a, b]$ et continues sur $[a, b]$ ainsi que leur k premières dérivées, étant entendu que la dérivée en a doit être remplacée par la dérivée à droite de a et la dérivée en b par la dérivée à gauche en b .

2.2.1. CAS OU L'ON CONNAIT UNE MAJORATION D'UNE DERIVEE

Nième DE f AVEC N PAIR

THEOREME 4

Soit $f \in C^{2n}([a,b], \mathbb{R})$ et M tel que
 $M \geq \sup_{t \in [a,b]} -f^{(2n)}(t)$ si n est impair et

$M \geq \sup_{t \in [a,b]} f^{(2n)}(t)$ si n est pair .

Soit P le polynôme de degré $\leq 2n-1$ tel que

$P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ et $P^{(k)}(b) = f^{(k)}(b)$,

pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Alors $\phi(x) = P(x) + \frac{M}{(2n)!} ((x-a)(b-x))^n$ est

telle que pour tout $x \in [a,b]$ on a $\phi(x) \geq f(x)$.

De plus, $P(x) = \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n R(x) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n S(x)$ où R

et S sont des polynômes de degré $\leq n-1$ définis de la façon suivante :

$R(a) = f(a)$ et par récurrence sur $k=1, \dots, n-1$

$$R^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - \sum_{r=i}^{k-1} \frac{(n+1)!k!R^{(r)}(a)}{r!(k-r)!(n+r+1-k)!(a-b)^{k-r}}$$

$S(b) = f(b)$ et par récurrence

$$S^{(k)}(b) = f^{(k)}(b) - \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(n+1)!k!S^{(r)}(b)}{r!(k-r)!(n+r+1-k)!(b-a)^{k-r}}$$

DEMONSTRATION

Montrons que quelque soit $x \in [a, b]$
on a $\phi(x) \geq f(x)$.

Soit $x \in]a, b[$ et $g_x(t) = P(t) + \frac{M_x}{(2n)!} ((x-a)(b-x))^n$.

M_x étant choisi de telle façon que $g_x(x) = f(x)$.

Dans ce qui suit TR signifiera théorème de Rolle.

$g_x(t) - f(t)$ est nulle en a, x, b ; d'après le TR
 $g'_x(t) - f'(t)$ s'annule en deux points c_1^1 et c_2^1 avec
 $a < c_1^1 < x < c_2^1 < b$.

Par récurrence supposons que l'on ait montré que $(g_x - f)^{(k)}$
s'annule en $k+1$ points c_i^k , $i \in \{1, \dots, k+1\}$ où $k < n$
et $a < c_1^k < c_2^k < \dots < c_{k+1}^k < b$.

Comme $(g_x - f)^{(k)}(a) = 0$ et $(g_x - f)^{(k)}(b) = 0$ en utilisant
le TR il vient que $(g_x - f)^{(k+1)}$ a $k+2$ zéros c_i^{k+1} ,
 $i \in \{1, \dots, k+2\}$ avec

$$a < c_1^{k+1} < c_1^k < c_2^{k+1} \dots < c_k^k < c_{k+1}^{k+1} < c_{k+1}^k < c_{k+2}^{k+1} < b .$$

Par conséquent $(g_x - f)^{(n)}$ s'annule en $n+1$ points distincts.

En réappliquant plusieurs fois le TR il vient qu'il existe
 $c \in [a, b]$ tel que $(g_x - f)^{(2n)}(c) = 0$, c'est-à-dire que

$(-1)^n M_x - f^{(2n)}(c) = 0$. Par conséquent

$$\phi(x) - f(x) = (M - (-1)^n f^{(2n)}(c)) \frac{((x-a)(b-x))^n}{(2n)!} \geq 0 \text{ ce qui}$$

achève la démonstration.

Montrons par exemple la formule de récurrence vérifiée par R .
Pour cela on peut remplacer f par P .

$$\text{On a } R(a) = P(a) \text{ et } P^{(k)}(a) = \left(\sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \left[\left(\frac{x-b}{a-b} \right)^{n+1} \right]^{(r)} R^{(k-r)}(a) \right).$$

Soit encore :

$$P^{(k)}(a) = R^{(k)}(a) + \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!} \frac{1}{(a-b)^r} R^{(k-r)}(a)$$

ou enfin que

$$R^{(k)}(a) = P^{(k)}(a) - \sum_{r=0}^{k-1} \frac{k!(n+1)!}{(k-r)!r!(n+r+1-k)!} \frac{R^{(r)}(a)}{(a-b)^{k-r}}$$

On établit de façon analogue la récurrence définissant S .

COROLLAIRE 3

Soient F un ensemble non vide de fonctions deux fois continûment dérivables sur $[a, b]$, à valeurs réelles, et $M > 0$, tels que quelque soit $f \in F$, $M \geq \sup_{x \in [a, b]} -f''(x)$.

Soient $g(x) = \sup_{f \in F} f(x)$ et

$$\phi(x) = g(a) \frac{b-x}{b-a} + g(b) \frac{x-a}{b-a} + \frac{M}{2} (b-x)(x-a)$$

Alors pour tout $x \in [a, b]$ on a :

$$g(x) \leq \phi(x).$$

DEMONSTRATION

Pour tout $f \in F$ on a :

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(a) \frac{b-x}{b-a} + f(b) \frac{x-a}{b-a} + \frac{M}{2} (x-a)(b-x) \\ &\leq \sup_{f \in F} f(a) \frac{b-x}{b-a} + \sup_{f \in F} f(b) \frac{x-a}{b-a} + \frac{M}{2} (x-a)(b-x) \end{aligned}$$

et donc $f(x) \leq \phi(x)$. Cette inégalité étant vraie pour tout $f \in F$ on a :

$$g(x) = \sup_{f \in F} f(x) \leq \phi(x)$$

ce qui achève la démonstration.

RECHERCHE DU MAXIMUM DE ϕ DEFINI DANS LE THEOREME 4

CAS GENERAL : on a à choisir entre

- chercher les zéros de ϕ'
- chercher le maximum de ϕ par une méthode quelconque
- donner un majorant grossier du maximum de ϕ à l'aide du théorème 1 du § 1 première partie.

CAS PARTICULIER $n = 1$: majorante parabolique

$$\phi(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{M}{2} (x-a)(b-x)$$

a pour maximum

$$z = 0.5[f(b) + f(a) + \frac{1}{M} \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right)^2 + 0.25 M(b-a)^2]$$

si $u = 0.5(a+b) + \frac{1}{M} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ appartient à $[a,b]$

sinon ϕ a pour maximum $f(a)$ ou $f(b)$.

2.2.2. CAS OU L'ON CONNAIT UNE MAJORATION D'UNE DERIVEE
nième DE f , PREMIERE METHODE

THEOREME 5

Si l'on connaît $n \in \mathbb{N}$ et $M > 0$ tels que

$$\|f^{(n)}\|_{[a,b]} \leq M$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ posons

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) .$$

Soit P le polynôme de degré $\leq n-1$ interpolant f aux points x_k , $k \in \{1, \dots, n\}$

Soit t tel que $x = \frac{a+b}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right)t$ et

$$T_n(t) = \cos n(\arcsin(t)) \quad ; \quad t \in [-1, 1] .$$

En posant $\phi(x) = P(x) + \frac{2M}{n!} \left(\frac{b-a}{4}\right)^n |T_n(t)|$ on a

pour tout $x \in [a, b]$; $f(x) \leq \phi(x)$.

DEMONSTRATION

A l'aide du théorème de Rolle on montre que pour tout $x \in [a, b]$ il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{k=1}^n (x-x_k) . \text{ D'autre part}$$

$$|f^{(n)}(c)| \leq M \text{ et } \prod_{k=1}^n (x-x_k) = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n T_n(t) \text{ d'où on déduit le}$$

théorème.

CALCUL D'UN MAJORANT DU MAXIMUM DE ϕ

Principe : On détermine un point u où $P(x)$ atteint son

$$\text{maximum et } \|\phi\|_{[a,b]} \leq P(u) + \frac{2M}{n!} \left(\frac{b-a}{4}\right)^n .$$

Cas particuliers

On peut calculer explicitement le maximum de $P(x)$ lorsque n est égal à 2, 3 ou 4 .

2.2.3. CAS OU L'ON CONNAIT UNE MAJORATION D'UNE DERIVEE
nⁱème DE f , DEUXIEME METHODE.

THEOREME 6

Si l'on connaît $n \in \mathbb{N}^*$ et M tels que

$$\|f^{(n)}\|_{[a,b]} \leq M . \text{ En posant } P_c(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x-c)^i$$

$$\text{et } \phi_{a,b}(x) = \min \left\{ P_a(x) + \frac{M}{n!} (x-a)^n, P_b(x) + \frac{M}{n!} (b-x)^n \right\}$$

alors $f(x) \leq \phi_{a,b}(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

DEMONSTRATION

C'est une application de la formule de Taylor.

REMARQUE

$$\text{Posons } A(x) = P_a(x) + \frac{M}{n!} (x-a)^n$$

$$\text{et } B(x) = P_b(x) + \frac{M}{n!} (b-x)^n$$

$$\text{alors de } A'(x) = P'_a(x) + \frac{M}{(n-1)!} (x-a)^{n-1},$$

$$f'(x) = P'_a(x) + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} \quad c \in]a, x[$$

$$\text{et de } B'(x) = P'_b(x) - \frac{M}{(n-1)!} (b-x)^{n-1},$$

$$f'(x) = P'_b(x) + \frac{f^{(n)}(d)}{(n-1)!} (x-b)^{n-1} \quad d \in]x, b[$$

il vient que $A'(x) - f'(x) \geq 0$ et $f'(x) - B'(x) \geq 0$

$$\text{et donc } A'(x) - B'(x) = (A'(x) - f'(x)) - (B'(x) - f'(x)) \geq 0$$

par conséquent $\phi(x) = A(x) - B(x)$ est une fonction croissante, comme $\phi(x)$ est un polynôme il vient que soit $\phi(x)$ est identiquement nul soit $\phi(x)$ n'a qu'une racine c sur $[a, b]$, ce qui sera le cas dès que $M > \|f^{(n)}\|_{[a, b]}$.

CALCUL D'UN MAJORANT DU MAXIMUM DE f SUR $[a, b]$

i) On peut déterminer par dichotomie $c \in [a, b]$ tel que $A(c) = B(c)$, et remarquer que

$$\max_{x \in [a, b]} \phi_{[a, b]}(x) = \max\left\{ \max_{x \in [a, c]} A(x), \max_{x \in [c, b]} B(x) \right\}$$

ii) On peut déterminer explicitement le maximum de $\phi_{a,b}$ sur $[a,b]$ si $n = 2$:
 $\phi_{a,b}$ atteint son maximum au point a ou au point b ou au point

$$u = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + \frac{a f'(a) - b f'(b)}{b-a} + \frac{M}{2} (a+b)}{M - \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}}$$

PROPRIETE DE CE TYPE DE MAJORANTE PARTIELLE

Soit $c \in]a,b[$ alors

pour tout $x \in [a,c]$, $\phi_{a,c}(x) \leq \phi_{a,b}(x)$

pour tout $x \in [c,b]$, $\phi_{c,b}(x) \leq \phi_{a,b}(x)$

DEMONSTRATION

Par récurrence sur $j=n, \dots, 0$ on montre que

$A^{(j)}(x) \geq f^{(j)}(x)$, $x \in [a,b]$.

Par conséquent soient $c \in]a,b[$ et $C(x) = P_c(x) + \frac{M}{n!} (x-c)^n$.

On a $C^{(n)}(x) = M \leq A^{(n)}(x)$, par récurrence sur $j=n, \dots, 0$ on montre que $C^{(j)}(x) \leq A^{(j)}(x)$, $x \in [c,b]$.

Par conséquent $\phi_{c,b}(x) \leq \phi_{a,b}(x)$, $x \in [c,b]$.

En appliquant ce résultat à $g(X) = f(x)$, $X = b+a-x$ au point $c' = b+a-c$ on vérifie que

$\phi_{a,c}(x) \leq \phi_{a,b}(x)$, $x \in [a,c]$.

3 - EXEMPLES DE PROCÉDES P
CAS D'UNE VARIABLE REELLE.

Dans ce qui suit :

- E est une réunion finie d'intervalles compacts
- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue
- $\max f = \max_{x \in E} f(x)$
- $A = \{x ; x \in E, f(x) = \max f\}$
- Si $K \subset E$ $\text{diam } K = \max_{x, y \in K} |x-y|$
- $I(E)$ est l'ensemble des intervalles compacts de E .

Nous allons donner des exemples de procédés P tels que :

- i) P : $I(E) \rightarrow$ l'ensemble des parties finies non vides de $I(E)$
- ii) Pour tout $S = [a, b]$ intervalle de E
$$S \cap A \subseteq \bigcup_{\Delta \in P(S)} \Delta$$
- iii) Si $\Delta \in P(S)$ on a $S \subseteq \Delta$ sauf si S est un singleton et dans ce cas $P(S) = \{S\}$.

REMARQUE

$P(S)$ dépend généralement du majorant ϕ_S de f et d'un nombre γ (qui est la maximum des valeurs des évaluations de f faites au cours de l'algorithme) tel que $\gamma \leq \max f$.

PREMIER EXEMPLE

Soient $S = [a, b] \subset E$.

Si l'on est assuré que ϕ_S n'atteint son maximum qu'en a (respectivement qu'en b) alors $P(S) = \{\{a\}\}$ (respectivement $P(S) = \{\{b\}\}$).

Sinon $P(S) = \{\{a, c\}, \{c, b\}\}$ avec $c = 0.5(a+b)$

PROPRIETE

Pour tout $\Delta \in P(S)$ on a
 $\text{diam } \Delta \leq 0.5 \text{ diam } S$.

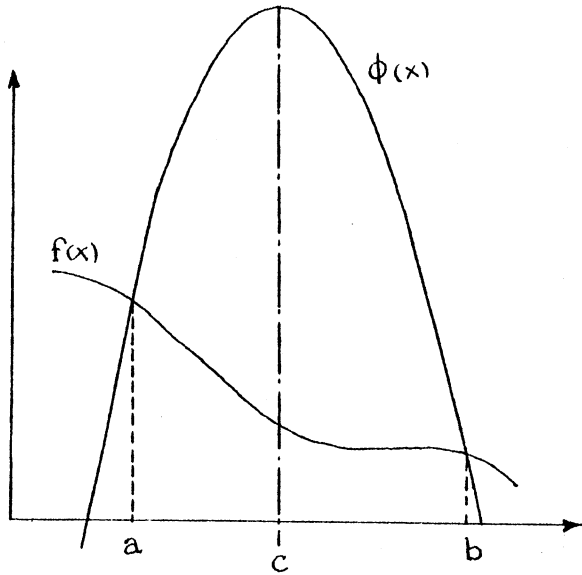
DEUXIEME EXEMPLE

$S = [a, b] \subset E$

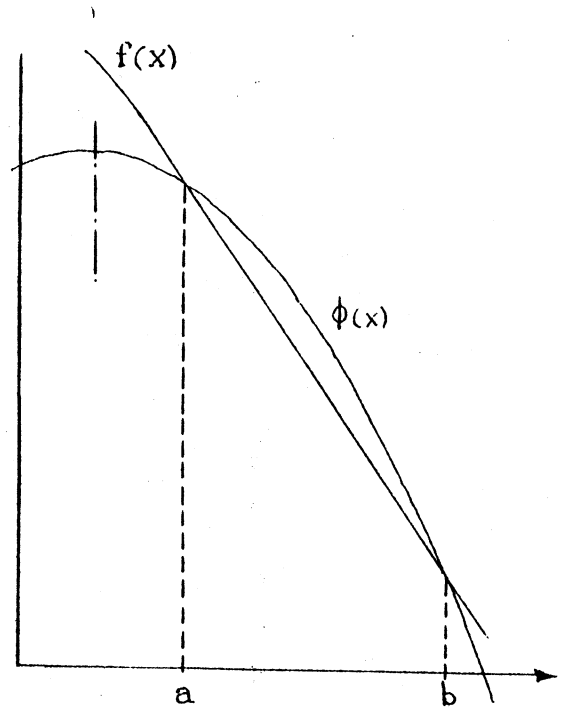
Si l'on est assuré que ϕ_S n'atteint son maximum qu'en a (respectivement qu'en b) alors $P(S) = \{\{a\}\}$ (respectivement $P(S) = \{\{b\}\}$).

Sinon $P(S) = \{\{a, c\}, \{c, b\}\}$ avec $c \in [a, b]$ un point tel que $\phi_S(c)$ soit la valeur maximale des évaluations de ϕ_S que l'on a faites lors du calcul d'un maximum approché par excès de ϕ_S sur $[a, b]$.

EXEMPLES : (majorantes paraboliques)



$$P(S) = \{[a, c], [c, b]\}$$



$$P(S) = \{a\}$$

TROISIEME EXEMPLE

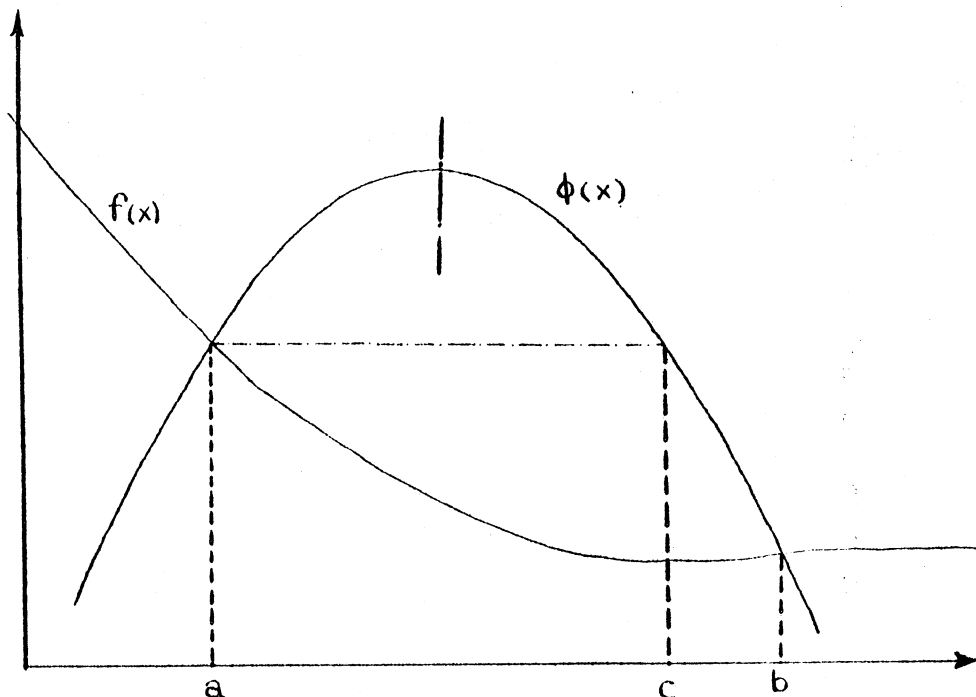
Soient $S = [a, b] \subset E$, $y \leq \max f$,
 ϕ_S majorant f sur S .

- Si l'on est assuré que ϕ_S n'atteint son maximum qu'en a (respectivement b) alors $P(S) = \{a\}$ (respectivement $P(S) = \{b\}$).

Sinon $P([a, b])$ est l'ensemble dont les éléments sont les intervalles disjoints qui ont pour réunion $\{x ; x \in [a, b], \phi_S(x) \leq y\}$.

EXEMPLE : Majorante parabolique

Choisissons $y = \max\{f(a), f(b)\}$ on obtient :



$$P([a,b]) = \{[a,c]\} .$$

Voici des cas où l'on peut utiliser ce procédé

a) $\phi_S(x) = \min\{f(a)+\omega(x-a), f(b)+\omega(b-x)\}$

où ω est l'un des modules de continuité suivants :

• $\omega_1(x) = K \cdot x^{1/2}$, $K > 0$

• $\omega_2(x) = L \cdot x$, $L > 0$

b) $\phi_S(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{M}{2} (x-a)(b-x)$

$$M \geq \sup_{t \in [a,b]} -f''(t)$$

c) $\phi_S(x) = P(x) + \frac{M}{3} \left(\frac{b-a}{4}\right)^3$ où

$$M \geq \|f^{(3)}\|_{[a,b]}$$

P est le polynôme d'interpolation de f ,
deg P \leq 2 , relatif aux points

$$x_k = 0.5(a+b+(b-a)\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{6}\right)), \quad 1 \leq k \leq 3 .$$

d) $\phi_S(x) = \min \{P_a(x) + \frac{M}{n!} (x-a)^2, P_b(x) + \frac{M}{n!} (b-x)^2\}$ où

• $M \geq \|f^{(2)}\|_S$

• $P_c(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$ et $c \in \{a,b\}$.

4 - COMPARAISON DE QUATRE ALGORITHMES PARTICULIERS

Dans tout ce paragraphe on définit

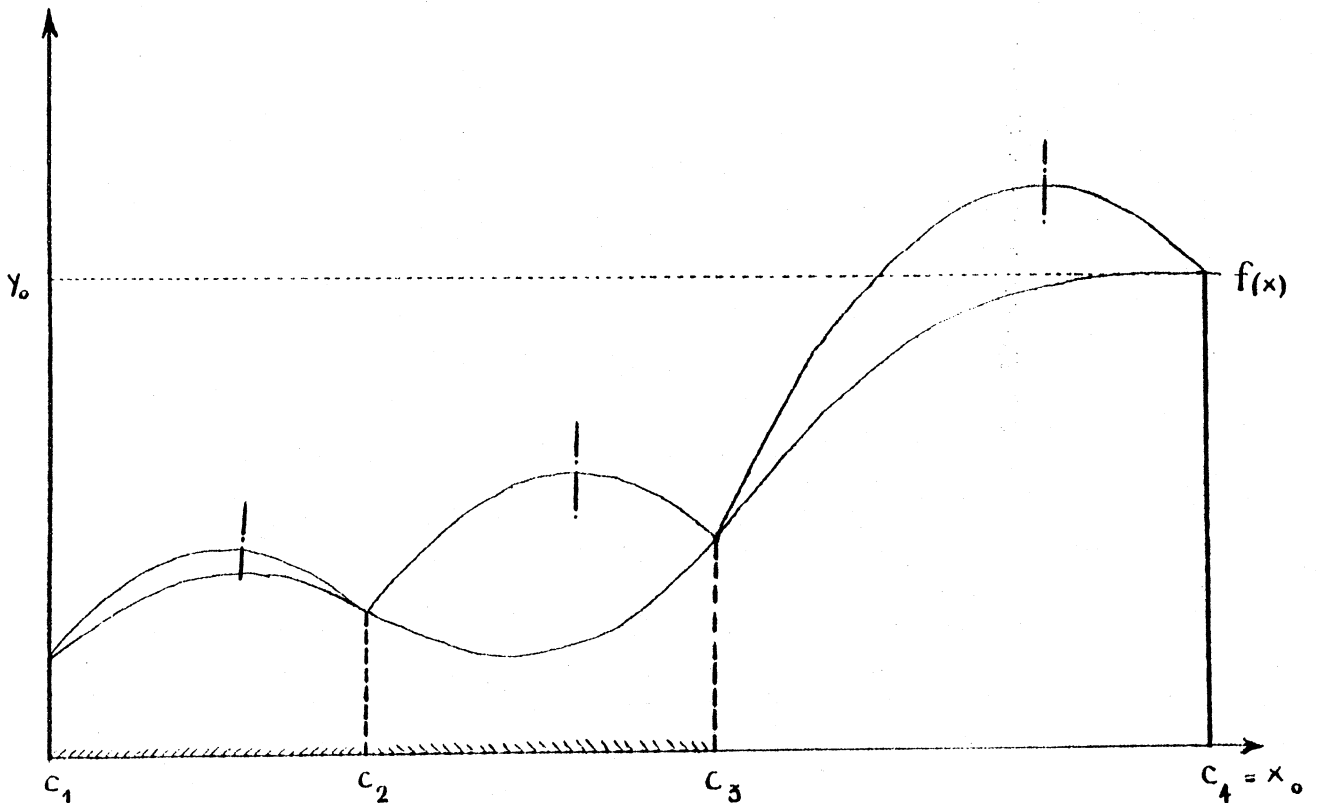
- $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$
- $c_i, i \leq n+1, \alpha = c_0 < c_1 < \dots < c_{n+1} = \beta$
- $\max f = \max_{f \in E} f(x)$
- $H_0 = \{([c_i, c_{i+1}]) ; i \in \{0, \dots, n\}\}$
- $A = \{x ; f(x) = \max f\}$.

4.0 - PRINCIPE GENERAL DES ALGORITHMES

INITIALISATION

Pour tout intervalle S de H_0 on construit la majorante ϕ_S de f sur S et on détermine à une certaine précision, la valeur par excès z_S , du maximum de ϕ_S sur S . On détermine y_0 le maximum des valeurs des évaluations de f qu'on a faites pour construire les fonctions ϕ_S , et x_0 un point où l'on a évalué f tel que $y_0 = f(x_0)$. On élimine les intervalles S de H_0 tels que $z_S < y_0$ car on est sûr que f ne peut y atteindre son maximum $\max f$. On obtient $L_0 = \{S ; S \in H_0, z_S \geq y_0\}$.

Exemple : majorantes paraboliques, on a ici $L_0 = \{[c_3, c_4]\}$



On remarquera que :

$$M_0 = \max \{z_S ; S \in L_0\} \quad \text{majore } \max f$$

$$E_0 = \bigcup_{S \in L_0} S \quad \text{vérifie } A \subset E_0$$

BOUCLE SUR k

A la fin du k ème pas on a obtenu

L_k ensemble fini d'intervalles dont la réunion E_k contient l'ensemble A des points où f atteint son maximum.

y_k est le maximum des valeurs des évaluations de f que l'on a faites, et x_k un point où l'on a évalué f tel que $f(x_k) = y_k$.

DEBUT DU (k+1)^{ème} PAS

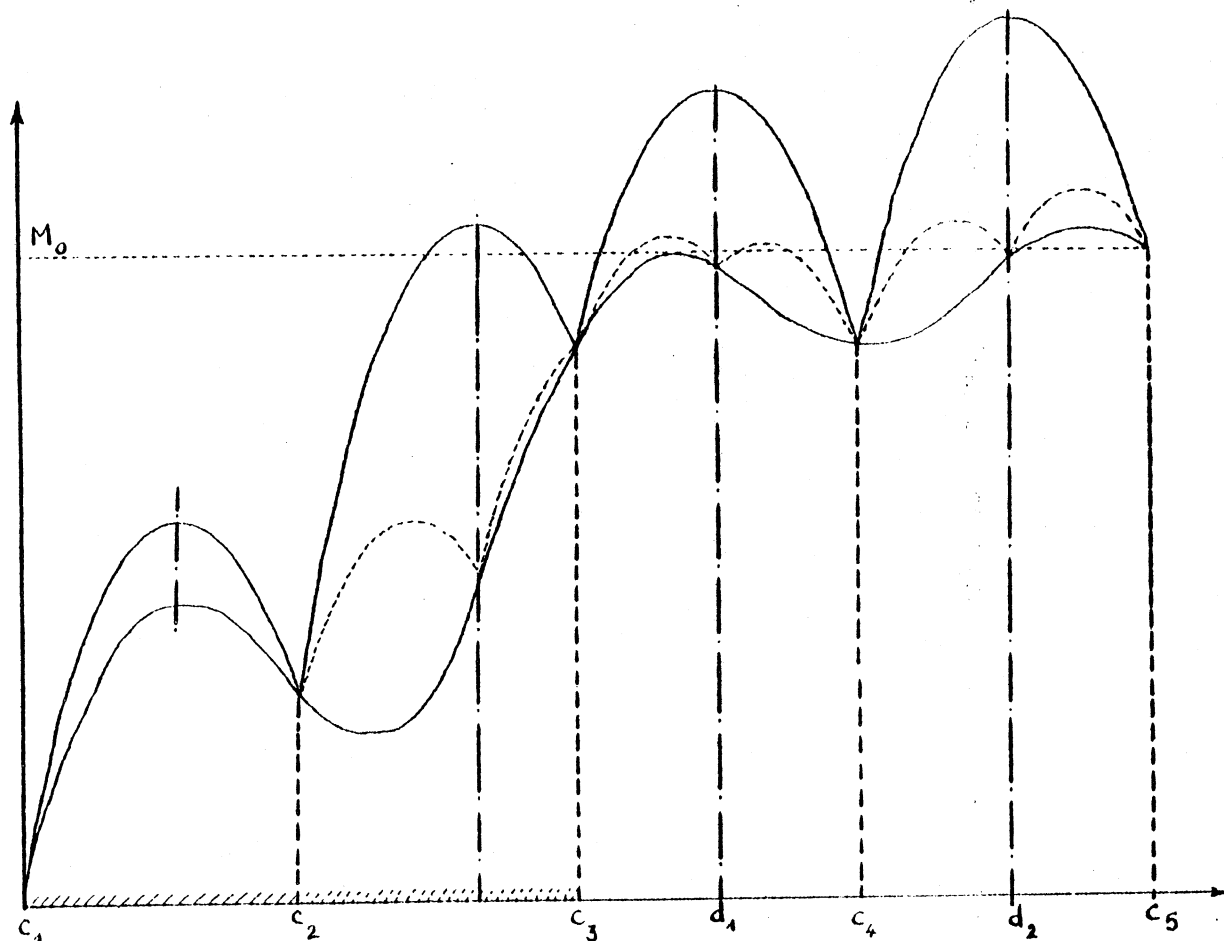
Choisir des intervalles de L_k (au moins 1).

Soit $G_k \subset L_k$ cet ensemble d'intervalles

Remplacer à l'aide du procédé P chaque intervalle par des intervalles plus petits.

On obtient $R_k = \bigcup_{S \in G_k} P(S)$.

Exemple : majorante parabolique, le procédé P étant le deuxième exemple de procédé P § 4 . Si $G_0=L_0$



$$L_0 = \{[c_2, c_3], [c_3, c_4], [c_4, c_5]\} \quad \text{on obtient}$$

$$L_1 = \{[c_3, d_1], [d_1, c_4], [c_4, d_2], [d_2, c_5]\} .$$

Pour tout intervalle $S \in R_k$

construire ϕ_S

déterminer à une certaine précision un maximum

par excès z_S de ϕ_S .

Soit y_{k+1} le maximum des valeurs des évaluations de f que l'on a faites et x_{k+1} un point où l'on a évalué f tel que $f(x_{k+1}) = y_{k+1}$.

- Soit $H_{k+1} = (L_k \setminus G_k) \cup R_k$ l'ensemble des intervalles obtenus

On élimine de H_{k+1} les intervalles S tels que $z_S < y_{k+1}$ car f n'y atteint certainement pas son maximum. On obtient l'ensemble $L_{k+1} = \{S ; S \in H_{k+1}, z_S \geq y_{k+1}\}$

- $M_{k+1} = \max \{z_S ; S \in L_{k+1}\}$ majore $\max f$.

FIN DU k+1 ème PAS

4.1 METHODE DE Bruno O. Shubert [11]

- On suppose que f est lipchitzienne de coefficient de Lipchitz L .

- Soit $I = [a, b]$, $I \subset [\alpha, \beta]$ alors on définit

$$\phi_I(x) = \min \{f(a) + L|x-a|, f(b) + L|b-x|\}$$

$$u_I = 0.5 \left(a+b + \frac{f(b)-f(a)}{L} \right)$$

$$z_I = 0.5 (f(a) + f(b) + L(b-a))$$

DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

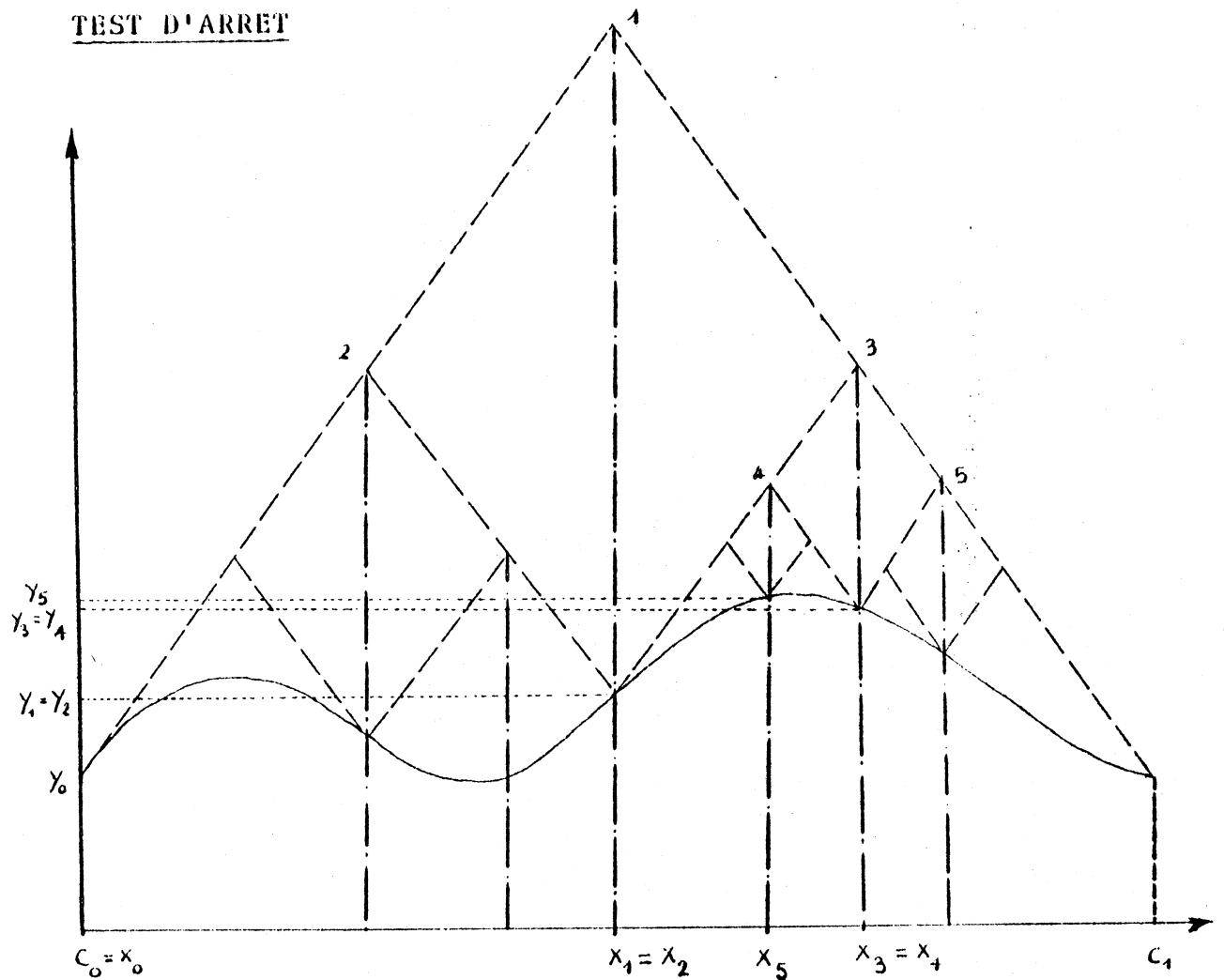
INITIALISATION

- $y_0 = \max \{f(c_j) ; 0 \leq j \leq n+1\}$
- $x_0 = c_i$ avec c_i tel que $f(c_i) = y_0$
- calculer z_I , $I \in H_0$
- $L_0 = \{I ; I \in H_0, z_I > y_0\}$
- $M_0 = \max \{z_I ; I \in L_0\}$.

$k+1$ ème PAS

- Choisir $I \in L_k$ tel que $z_I = M_k$
- Définissons $[a,b] = I$, $I_1 = [a, u_I]$, $I_2 = [u_I, b]$
- $y_{k+1} = \max \{y_k, f(u_I)\}$
- $x_{k+1} = x_k$ si $y_{k+1} = y_k$ et $x_{k+1} = u_I$ sinon
- $H_{k+1} = (L_k \setminus \{I\}) \cup \{I_1, I_2\}$
- $L_{k+1} = \{J ; J \in H_{k+1}, z_J > y_{k+1}\}$ si $L_{k+1} = \emptyset$ arrêt ,
- $M_{k+1} = \max \{z_J ; J \in L_{k+1}\}$

TEST D'ARRET



THEOREME 7 Bruno O. Shubert [11] , [8]

- Soit il existe k tel que $L_k = \phi$ alors $y_k = \max f$
et x_k est un point où f atteint son maximum

- Si l'on fait une infinité de pas dans l'algorithme

• $\{M_k\}_k$ est une suite décroissante vers $\max f$

• $\{y_k\}_k$ est une suite croissante vers $\max f$.

tout point d'accumulation de la suite $\{x_k\}_k$ est un point
où f atteint son maximum.

DEMONSTRATION

Voir [15] , [11] où le § 5 .

REMARQUES

Du fait que $\phi_I(x) = z_I - L|x-u_I|$, ϕ_I est complètement
déterminée à l'aide des nombres z_I et u_I .

Soient $I = [a,b]$, $I_1 = [a,u_I]$ et $I_2 = [u_I,b]$

Alors il est facile de vérifier que :

$$u_{I_1} = u_I - \frac{z_I - f(u_I)}{2.L}$$

$$u_{I_2} = u_I + \frac{z_I - f(u_I)}{2.L}$$

$$z_{I_1} = z_{I_2} = 0.5(z_I - f(u_I)) .$$

Par conséquent pour construire les suites $\{x_k\}_k$, $\{y_k\}_k$
et $\{M_k\}_k$ il suffit de connaître les ensembles

$S_k = \{(u_I, z_I) ; I \in L_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, à la place des ensembles
 L_k , $k \in \mathbb{N}$. On est naturellement conduit à la

DEUXIEME DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

INITIALISATION

- $y = \max \{ f(c_i) ; 0 \leq i \leq n+1 \}$
- $x = c_i$ avec c_i tel que $f(c_i) = y_0$
- $S = \{ (u_I, z_I) ; I \in H_0, z_I \geq y_0 \} =$
 $= \{ (u(i), z(i)) ; 1 \leq i \leq \ell \text{ } z(i) \text{ croissant} \}$

k+1 ème PAS

- si $f(u(\ell)) > y$ alors $x := u(\ell)$, $y := f(u(\ell))$

- calculer $u_1 = x - \frac{z(\ell) - f(u(\ell))}{2L}$

$$u_2 = x + \frac{z(\ell) - f(u(\ell))}{2L}$$

$$z = \frac{z(\ell) + f(u(\ell))}{2}$$

- i) éliminer les $u(i)$, $z(i)$ tels que :
 $i = \ell$ ou bien $z(i) \leq y$
- ii) $\ell :=$ nombre des $(u(i), z(i))$ restants +2
- iii) classer (u_1, z) et (u_2, z) parmi les $(u(i), z(i))$ restants suivant les $z(i)$ croissants.

TEST D'ARRET

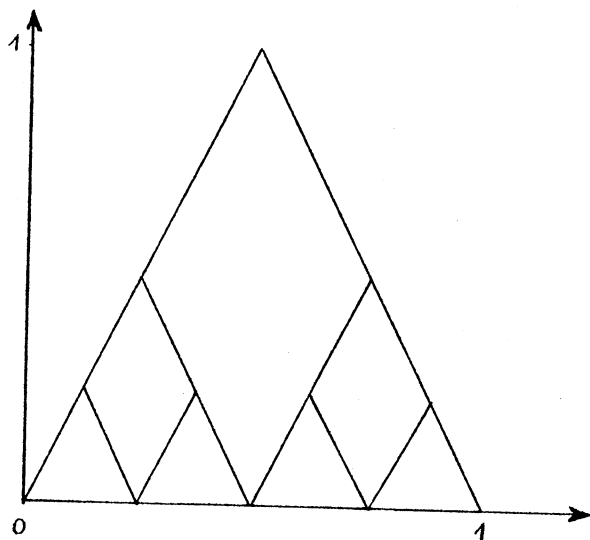
REMARQUE

Pour programmer cet algorithme on utilise deux tableaux à un indice $u(\cdot)$ et $z(\cdot)$.

CRITIQUES DE L'ALGORITHME

On va comparer le comportement de l'erreur $\delta_k = M_k - y_k$ avec le nombre de majorantes partielles $n_k = \text{cardinal}(L_k)$ dans certains cas particuliers.

1) Soit $f(x) = 0$ sur $[0,1]$, $L = 2$.



On obtient

$$\delta_0 = 1$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2}$$

$$\delta_3 = \frac{1}{4}$$

$$\delta_7 = \frac{1}{8}$$

$$\delta_{2^n - 1} = 2^{-n}$$

Par conséquent δ_k se comporte lorsque k tend vers l'infini sensiblement en $\frac{1}{n_k}$.

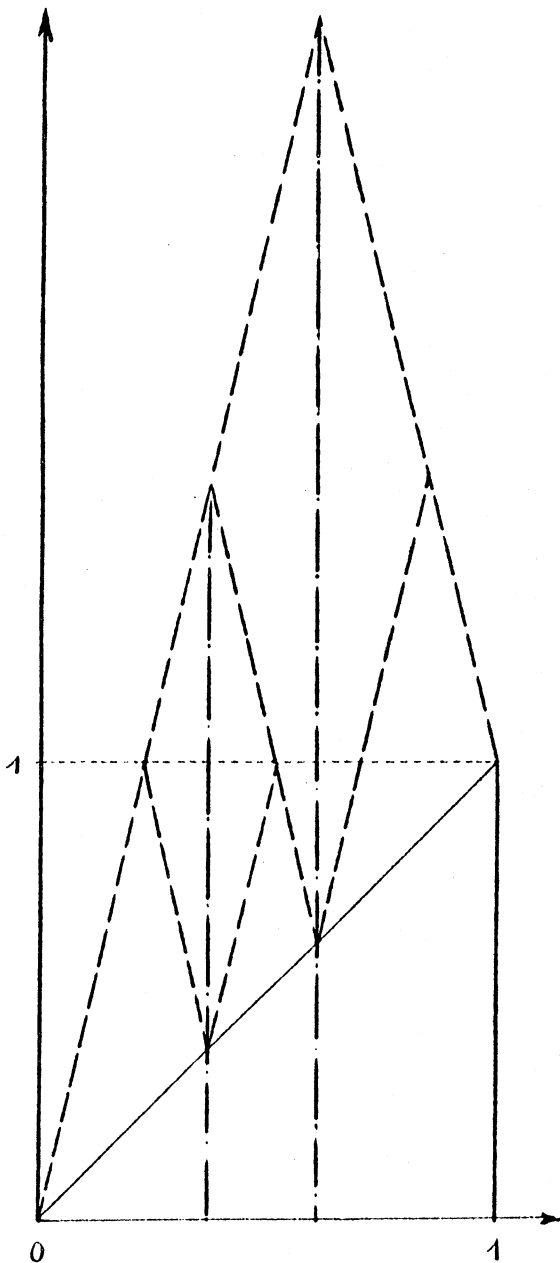
On s'aperçoit que dans ce cas, vu que n_k est limité en fonction de l'ordinateur utilisé, qu'il ne sera pas possible d'obtenir une erreur $\delta_k < 10^{-8}$.

Plus généralement, soit $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ lipchitzienne de coefficient de lipchitz L .

Pour tout $x^* \in [\alpha, \beta]$ définissons

$$L_\varepsilon(x^*) = \inf \{ K ; |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| ; \\ x \text{ et } y \in [\alpha, \beta] \cap [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon] \}$$

S'il existe x^* , point où f atteint son maximum, tel que $\lim_{\varepsilon > 0} L_\varepsilon(x^*) = 0$, alors n_k tend vers l'infini avec k , en particulier si f est continûment dérivable en $x^* \in]a, b[$, (vu que $f'(x) = 0$).



Soit $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$ et L un coefficient de lipchitz de f . Pour tout $x \in [0, 1]$ on a $\lim_{\varepsilon > 0} L_\varepsilon(x) = 1$. Malgré cela s'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ et $l \in L_{k_0}$ tel que $z_l = 1$ alors n_k est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\delta_k}$ lorsque k tend vers l'infini. Il est facile de montrer que cette éventualité se produit pour une infinité dénombrable de valeurs du coefficient de lipchitz L . Plus précisément, $2 + \sqrt{5} = 4.236\dots$ est le minimum de cet ensemble, et, $+\infty$ est le seul point d'accumulation de cet ensemble.

Cet algorithme ne permet pas toujours d'avoir une bonne localisation de $A = \{x ; f(x) = \max f\}$. En effet il suffit que pour tout k , $y_k < \max f$, et qu'il existe k_0 et $I \in L_{k_0}$ tel que $z_I = \max f$ de ce fait $I_0 \subseteq \bigcap_{k \geq k_0} E_k$ avec $E_k = \bigcup_{I \in L_k} I$, bien que I_0 et A peuvent être sans point commun.

On propose maintenant un algorithme tel que, s'il existe $C > 0$ vérifiant pour tout $\epsilon > 0$ et $x^* \in A$ (A fini) $L_\epsilon(x^*) > C$, alors il existe m tel que pour tout k , $n_k \leq m$, c'est-à-dire que le nombre de valeurs gardées en mémoire est indépendant de la précision voulue.

4.2. ALGORITHME DE Bruno O. Shubert MODIFIE [8]

HYPOTHESE

Même hypothèse que la méthode de Bruno O. Shubert.

PROCEDE P :

Premier exemple du § 3 première partie, on a ici :

$$P([a,b]) = \{[a,c],[c,b]\} \quad , \quad c = 0.5(a+b).$$

DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

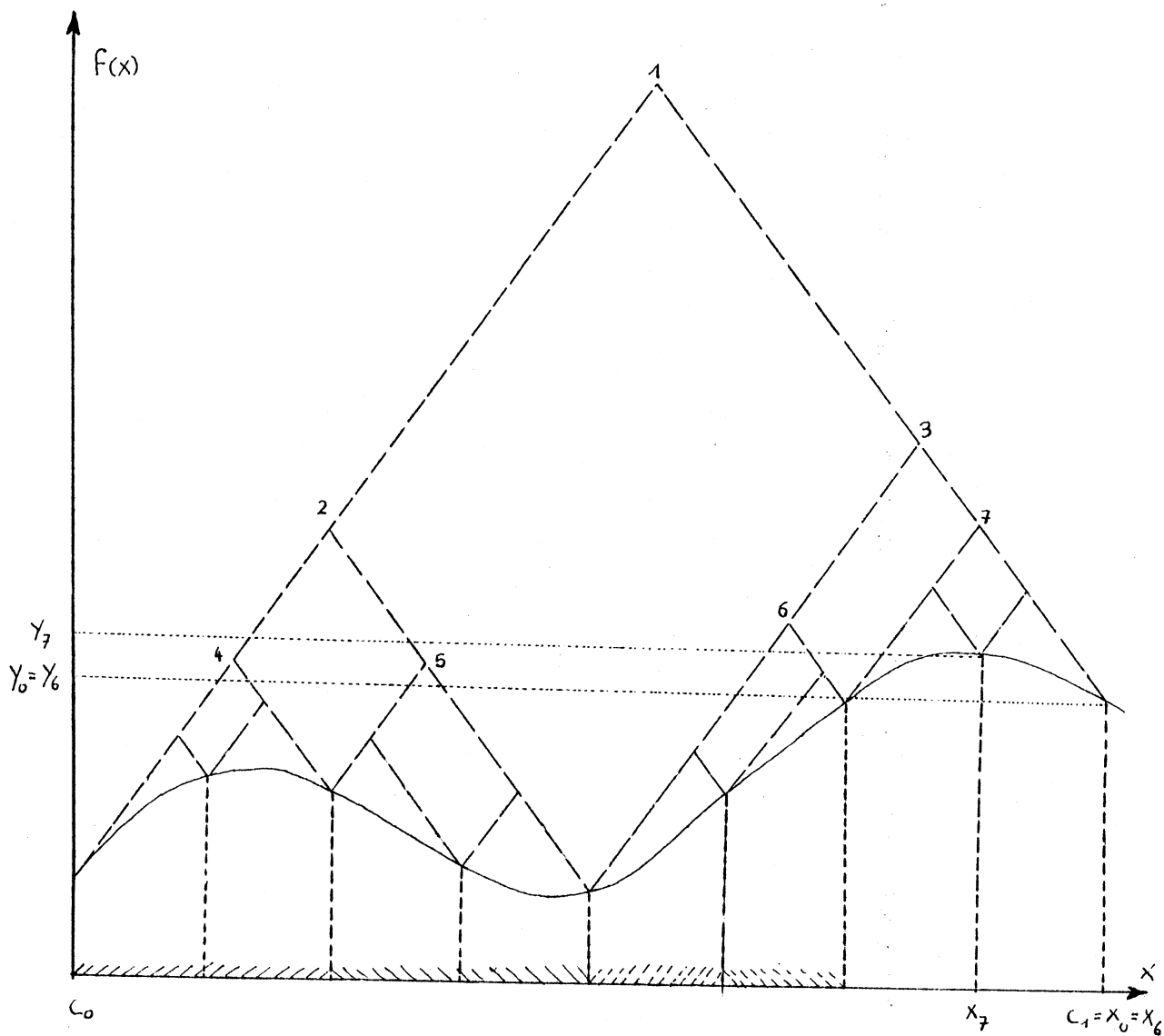
INITIALISATION

- $y_0 = \max \{f(c_j) ; 0 \leq j \leq n+1\}$
- $x_0 = c_i$ avec c_i tel que $f(c_i) = y_0$
- calculer z_I , $I \in H_0$
- $L_0 = \{I ; I \in H_0, z_I \geq y_0\}$
- $M_0 = \max \{z_I ; I \in L_0\}$

k+1 ème PAS

- déterminer $I \in L_k$ de longueur maximale et posons $I = [a, b]$
- calculer $f(c)$ avec $c = 0.5(a+b)$
- $y_{k+1} = \max \{y_k, f(c)\}$
- $x_{k+1} = x_k$ si $y_{k+1} = y_k$ et $x_{k+1} = c$ sinon
- Posons $I_1 = [a, c]$, $I_2 = [c, b]$ (ici $P(I) = \{I_1, I_2\}$)
calculer $z_{I_1} = 0.5 (f(a)+f(c)+L(c-a))$
 $z_{I_2} = 0.5 (f(c)+f(b)+L(b-c))$
- $H_{k+1} = (L_k \setminus \{I\}) \cup P(I)$
- $L_{k+1} = \{J ; J \in H_{k+1}, z_J \geq y_{k+1}\}$
- $M_{k+1} = \max \{z_J, J \in L_{k+1}\}$
- Test d'arrêt
- fin du k+1 ème pas.

EXEMPLE



THEOREME 8

Si l'on fait une infinité de pas dans l'algorithme
alors

$\{M_k\}_k$ est une suite décroissante vers $\max f$

$\{y_k\}_k$ est une suite croissante vers $\max f$

Si $E_k = \bigcup_{J \in L_k} J$ alors $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \geq k} E_i$.

Démonstration : voir [8] ou le §5 de ce chapitre .

PROGRAMMATION DE L'ALGORITHME

On réordonne à chaque pas les intervalles constituant L_k suivant les z_i croissants.

Plus précisément si ℓ est le nombre d'éléments de L_k , $z(1) \leq z(2) \dots \leq z(\ell)$ sont les maximums des majorantes partielles sur les intervalles $[x_o(i), x_e(i)]$, i allant respectivement de 1 jusqu'à ℓ . On utilisera les affectations $y_o(i) = f(x_o(i))$, $y_e(i) = f(x_e(i))$.

Finalement on utilise cinq tableaux à un indice $x_o(\cdot)$, $x_e(\cdot)$, $y_o(\cdot)$, $y_e(\cdot)$, $z(\cdot)$.

REMARQUE

On aura intérêt à utiliser en sus un tableau d'entiers à un indice $na(\cdot)$ qui sera les adresses des éléments des tableaux précédents, c'est-à-dire que $z(na(1)) \leq z(na(2)) \leq \dots \leq z(na(\ell))$, et donc au lieu de réordonner cinq tableaux on n'en réordonne qu'un.

CRITIQUE DE L'ALGORITHME

Comme dans l'algorithme précédent si la fonction est constante au voisinage d'un point où la fonction atteint son maximum alors le nombre d'éléments de L_k c'est-à-dire n_k est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\delta_k}$.

4.3. METHODE DES MAJORANTES PARABOLIQUES [8]

HYPOTHESE

- On suppose que l'on connaisse $M \geq \sup_{x \in [\alpha, \beta]} -f''(x)$
- Soit $I = [a, b]$, $I \subset [\alpha, \beta]$ alors on note

$$\phi_I(x) = f(a) \frac{x-a}{b-a} + f(b) \frac{b-x}{b-a} + \frac{M}{2} (x-a)(b-x)$$

$$v_I = 0.5 (a+b) + \frac{1}{M} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- si $v_I \in]a, b[$ on a $u_I = v_I$ et

$$z_I = 0.5 [f(b)+f(a) + \frac{1}{M} (\frac{f(b)-f(a)}{b-a})^2 + 0.25M(b-a)^2]$$

- si $v_I \leq a$ $u_I = a$ et $z_I = f(a)$

- si $v_I \geq b$ $u_I = b$ et $z_I = f(b)$

PROCEDE P (deuxième procédé du § 3, première partie)

Si $I = [a, b] \subset [\alpha, \beta]$

$$P(I) = \{[a, u_I], [u_I, b]\} \text{ si } v_I \in]a, b[$$

$$P(I) = \{[a, a]\} \text{ si } v_I \leq a$$

$$P(I) = \{[b, b]\} \text{ si } v_I \geq b$$

DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

INITIALISATION

- $y_0 = \max\{f(c_j) ; 0 \leq j \leq n+1\}$
- $x_0 = c_i$ avec c_i tel que $f(c_i) = y_0$
- calculer z_I , $I \in H_0$
- $L_0 = \{I ; I \in H_0, z_I > y_0\}$
- $M_0 = \max\{z_I ; I \in L_0\}$.

k+1 ème PAS

Soit $I \in L_k$ tel que $z_I = M_k$

- $y_{k+1} = \max\{y_k, f(u_I)\}$
- $x_{k+1} = x_k$ si $y_{k+1} = y_k$ et $x_{k+1} = u_I$ sinon
- $H_{k+1} = (L_k \setminus \{I\}) \cup P(I)$
- $L_{k+1} = \{J ; J \in H_{k+1}, z_J > y_{k+1}\}$ si $L_{k+1} = \emptyset$ arrêt
- $M_{k+1} = \max\{z_J ; J \in L_{k+1}\}$

TEST D'ARRET

THEOREME 9

Si dans l'algorithme on fait une infinité de pas :

$\{M_k\}_k$ est une suite décroissante vers $\max f$

$\{y_k\}_k$ est une suite croissante vers $\max f$

Tout point d'accumulation de la suite $\{x_k\}_k$ est un point où f atteint son maximum .

DEMONSTRATION

Voir § 5 ou [8] .

PROGRAMMATION DE LA METHODE

On utilise les tableaux à un indice
 $na(i)$ adresse du i ème intervalle (de L_k)
 $z(na(i))$ valeur du maximum de la majorante partielle sur
 le i ème intervalle $[x_o(i), x_e(i)]$ (de L_k) , les $z(na(i))$
 étant ordonnés suivant l'ordre croissant.

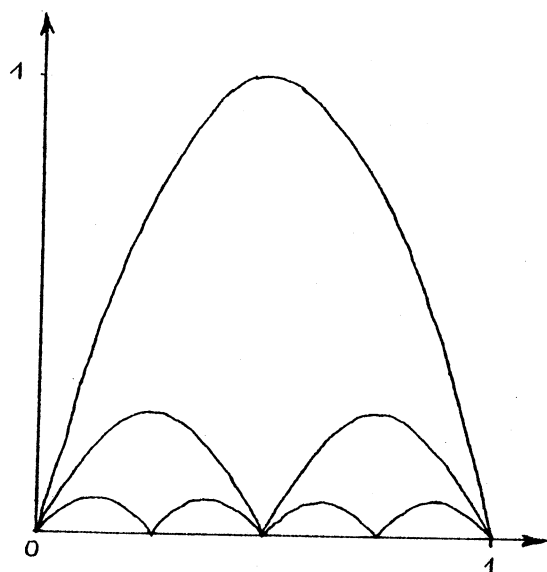
$$y_o(na(i)) = f(x_o(na(i)))$$

$$y_e(na(i)) = f(x_e(na(i)))$$

$$u(na(i)) = u_I \text{ si } I \text{ est le } i\text{ème intervalle (de } L_k) .$$

CRITIQUES DE L'ALGORITHME

Reprenons l'exemple $f(x) = 0$ sur $[0,1]$ et soit $M = 8$.



On obtient

$$\delta_0 = 1$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2^2}$$

...

$$\delta_{2^{n-1}} = 2^{-2n}$$

On remarque que le nombre n_k d'éléments de L_k est de

grandeur de $\frac{1}{\sqrt{\delta_k}}$. La convergence de l'erreur δ_k vers zéro lorsque k tend vers l'infini, obtenue en utilisant cet algorithme, est quadratique comparativement à l'erreur obtenue dans l'algorithme de Shubert.

La cause principale, au fait que n_k tende vers l'infini lorsque k tend vers l'infini, est que la dérivée et la dérivée seconde de f s'annulent en un point où f atteint son maximum.

D'autre part, comme dans l'algorithme de Bruno O. Shubert il se peut qu'il existe $I \in L_k$ (de longueur non nulle) tel que $z_I = \max f$ et $I \cap A = \emptyset$ et donc $\bigcap_{k \geq k_0} E_k$ contiendra $A \cup I$ et donc on ne peut avoir une bonne localisation de A (si $y_k < \max f$). Nous allons maintenant décrire l'analogie du deuxième algorithme.

4.4. METHODE DES MAJORANTES PARABOLIQUES MODIFIEE [8]

HYPOTHESE

On suppose connaître $M > \sup_{x \in [\alpha, \beta]} -f''(x)$

Soit $I = [a, b]$, $I \subset [\alpha, \beta]$ on définit

$$\phi_I(x) = f(a) \frac{x-a}{b-a} + f(b) \frac{b-x}{b-a} + \frac{M}{2} (x-a)(b-x)$$

z_I le maximum de ϕ_I sur $[a, b]$ et u_I

le point où ϕ_I atteint son maximum.

PROCEDE P : (premier procédé du § 3 , première partie)

Si $I = [a, b] \subset [\alpha, \beta]$

$P(I) = \{[a, \frac{a+b}{2}], [\frac{a+b}{2}, b]\}$ si $u_I \in]a, b[$

$P(I) = \{[a, a]\}$ si $u_I = a$

$P(I) = \{[b, b]\}$ si $u_I = b$.

DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

C'est l'algorithme décrit en 4.2 de ce paragraphe seule la définition de ϕ_I diffère.

THEOREME 10

On a les mêmes résultats que le théorème 2.

DEMONSTRATION :

Voir [8] ou § 5 .

CRITIQUE DE L'ALGORITHME

On peut montrer que si f atteint son maximum en un nombre fini de points et qu'en tout point où f atteint son maximum on a $f'(x) \neq 0$ ou $f''(x) < 0$, alors il existe m tels que pour tout k on ait $n_k \leq m$ et

$$(M_{k+m} - y_{k+m}) \leq (M_k - y_k)^2 .$$

4.5 EXPERIENCES NUMERIQUES

- Faites sur ordinateur HONEYWELL BULL HB68 .
- Nous n'avons pas utilisé de tableau d'adresse na .
- Les calculs ont été faits en double précision, les résultats arrondis au décimal le plus proche, sauf $z_{\max, 1}$, et mesloc, qui ont été arrondis au décimal supérieur.
- Le temps d'exécution ici est majoré car nous avons omis de décompter les ordres d'écritures qui sont particulièrement nombreux dans les deux derniers algorithmes.

En ce qui concerne les algorithmes 3 et 4, si $I = [a, b]$ est tel que $b-a$ soit petit, on peut penser majorer $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dans l'expression de z_I par $M \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right) + \max \{f'(b), f'(a)\}$ ou $M(b-a) + \min \{f'(b), f'(a)\}$, cela pour éviter des overflow (~ division par zéro).

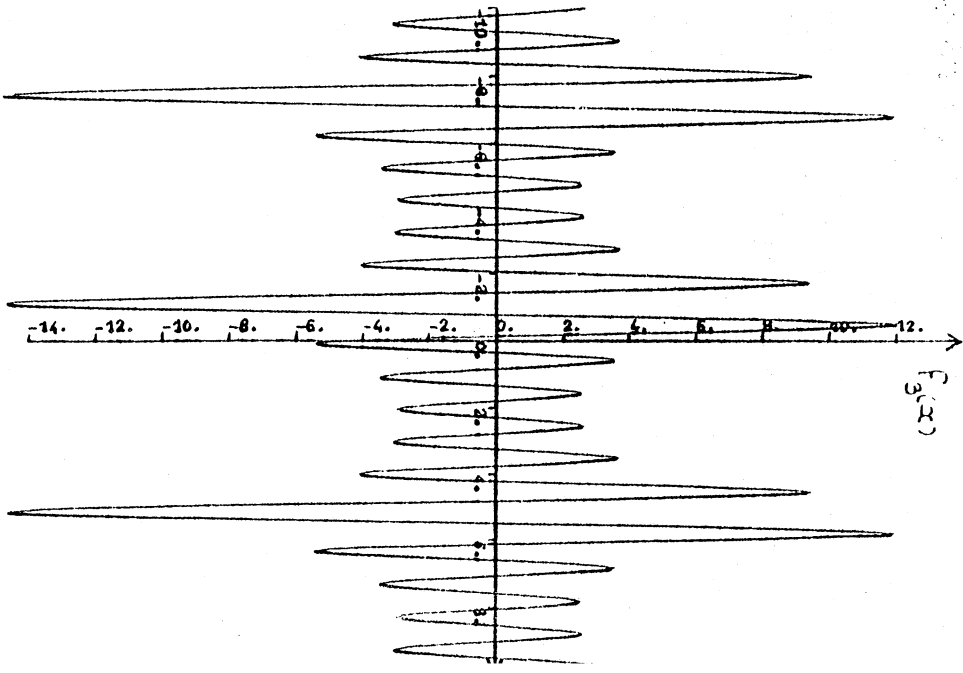
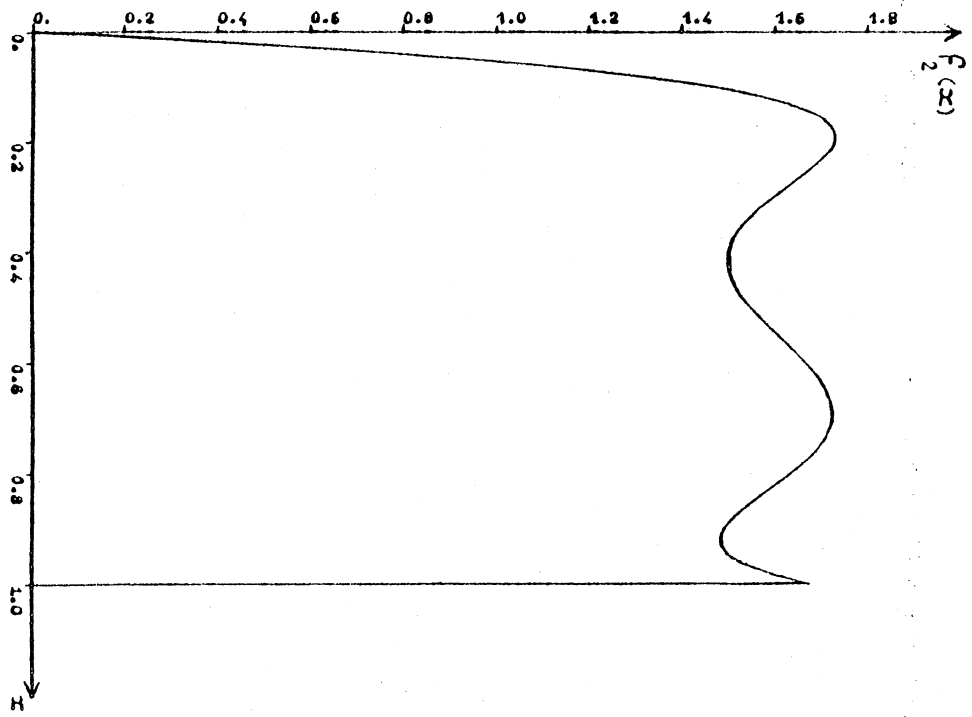
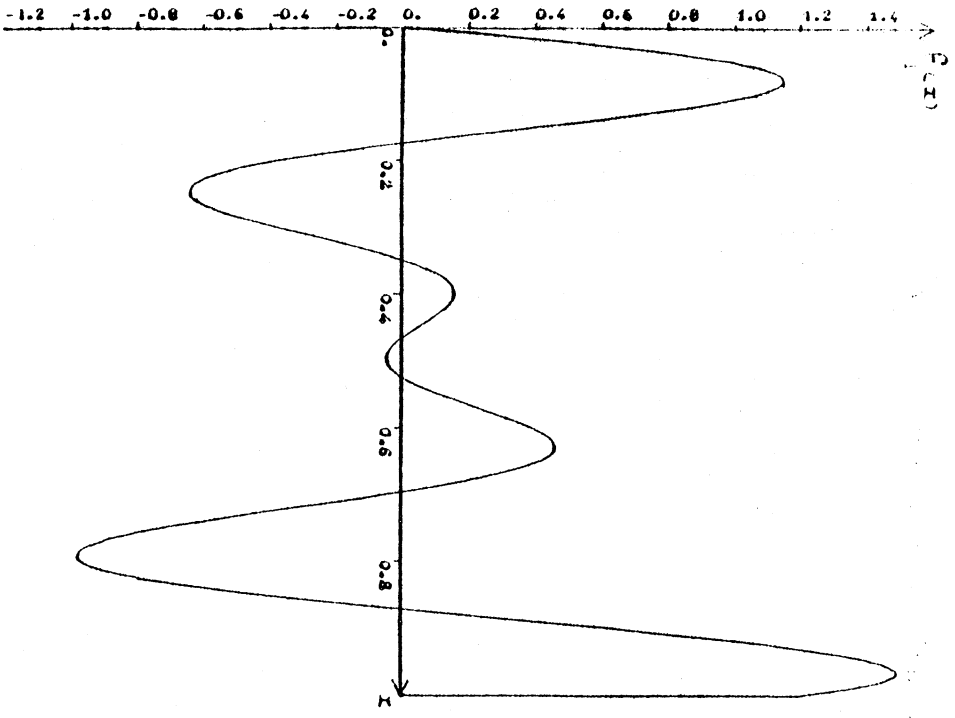
Les expériences numériques montrent que cela n'est pas utile.

Sur les tests d'arrêt des algorithmes 3 et 4

Si $\epsilon > 0$ est la précision absolue de l'évaluation de $f(x)$ lorsque x est un point où f atteint son maximum $f'(x) = 0$, il sera nuisible de continuer l'algorithme si l'intervalle I choisi par le procédé Q satisfait à $M \eta^2 < 32\epsilon$ où η est la longueur de l'intervalle I car on peut perdre un point théorique de A . Voir par exemple l'algorithme 3 avec $M = 700$ et $\eta = 176$ pour la fonction f_3 . La condition $M \eta^2 \geq 32\epsilon$ est une condition nécessaire pour être assuré que si $I \subset A(\epsilon)$ alors $z_I \geq \max f$.

CONVENTIONS

- dt est la longueur minimale des tableaux $u(\cdot), z(\cdot), x_0(\cdot), x_e(\cdot), y_0(\cdot), y_e(\cdot)$ utilisée .
- ne est le nombre d'évaluations de la fonction f
- em est la valeur maximale des évaluations de f parmi celles qui ont été faites, $em = y_{ne-n-1}$.
- pem est un point où l'on a évalué f tel que la valeur de l'évaluation de f en ce point soit égale au maximum des valeurs des évaluations de f qui ont été faites, $pem = x_{ne-n-1}$.
- zmax est le maximum des valeurs z_I (z_I maximum de ϕ_I) pour $I \in L_{ne-n-1}$, $zmax = M_{ne-n-1}$.
- temps temps d'exécution (en comptant les ordres d'écriture) en secondes
- [...] 1 : 1 est la longueur de l'intervalle situé à gauche.
- mesloc est la somme des longueurs des intervalles de L_{ne} .
- A la fin des algorithmes (sauf pour la Méthode de Bruno O. Shubert les intervalles de L_{ne-n-1} qui ont une extrémité commune ont été mis bout-à-bout. Les intervalles ainsi obtenus seront nommés intervalles de localisation.



CALCUL DU MAXIMUM DE f_1

$$f_1(x) = (-3.x + 1.4) \sin(18.x) \text{ sur } [0.0, 1.0]$$

f_1 a pour maximum 1.48907253868960406 au point 0.966085803826851

De $f_1'(x) = -3 \sin(18.x) + 18(-3.x + 1.4) \cos(18.x)$ on déduit que

$\|f_1'\| < 3 + 1.6 \times 18 = 31.8$ et de $f_1''(x) = -108 \cos(18.x) - 324.(-3.x + 1.4) \sin 18x$
on déduit que $\|f_1''\| < 108 + 324 \times 1.6 = 626.4$

1. Méthode de Bruno O. Shubert : L=31.8

ne	temps	dt	pem	em	zmax-em
27	0.041	9	0.9666	1.48901	$8.5 \cdot 10^{-2}$
40	0.066	19	0.96581	1.4890541	$2.5 \cdot 10^{-2}$
52	0.091	25	0.96620	1.4890691	$1.3 \cdot 10^{-2}$
88	0.169	46	0.96611	1.48907244	$3.1 \cdot 10^{-3}$
166	0.373	100	0.9660811	1.48907253	$7.5 \cdot 10^{-4}$
251	0.733	160	0.9660811	1.48907253	$3.7 \cdot 10^{-4}$

2. Méthode de Bruno O. Shubert modifiée : L=31.8

ne	temps	dt	pem	em	zmax-em	mesloc
32	0.125	15	0.969	1.4873	1.8	0.35
57	0.127	15	0.965	1.4887	$2.5 \cdot 10^{-1}$	$0.45 \cdot 10^{-1}$
86	0.249	22	0.9658	1.489056	$6.2 \cdot 10^{-2}$	$0.23 \cdot 10^{-1}$
109	0.305	32	0.9663	1.489060	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$0.17 \cdot 10^{-1}$
142	0.392	45	0.96606	1.48907243	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$0.12 \cdot 10^{-1}$
250	0.768	89	0.96606	1.48907243	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$0.57 \cdot 10^{-2}$

Après 250 évaluations de f_1 on obtient 89 majorantes partielles et on a la localisation ;

$$[0.963257 ; 0.968872] \quad 1 < 5.7 \cdot 10^{-3}$$

Temps mis pour former la localisation : 0.15 s

3. Méthode des majorantes paraboliques : M= 626.4

ne	temps	dt	pem	em	zmax-em
14	0.206	7	0.965	1.4889	$2.0 \cdot 10^{-3}$
17	0.252	7	0.9661	1.489072504	$8.1 \cdot 10^{-7}$
20	0.307	7	0.9660853	1.489072538629	$3.8 \cdot 10^{-10}$
25	0.341	7	0.9660858006	1.4890725386896015	$7.1 \cdot 10^{-14}$
27	0.372	7	0.96608580367	1.48907253868960406	$3.9 \cdot 10^{-17}$
30	0.387	7	0.966085803828	1.48907253868960406	$1.0 \cdot 10^{-17}$

Après 30 évaluations de f_1 on obtient une majorante partielle et un intervalle de localisation :

$$[0.9660858038 , 0.966085804] \quad \epsilon < 1.7 \cdot 10^{-10}$$

4. Méthode des majorantes paraboliques modifiées : M= 626.4

ne	temps	dt	pem	em	zmax-em	mesloc
16	0.065	8	0.625	1.9	$8.2 \cdot 10^{-1}$	0.32
22	0.128	8	0.965	1.4887	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$0.79 \cdot 10^{-2}$
26	0.196	8	0.96631	1.48906	$7.0 \cdot 10^{-5}$	$0.98 \cdot 10^{-3}$
32	0.239	8	0.966095	1.48907252	$7.8 \cdot 10^{-8}$	$0.62 \cdot 10^{-4}$
39	0.329	8	0.96608591	1.48907253868678	$1.8 \cdot 10^{-11}$	$0.20 \cdot 10^{-5}$
46	0.380	8	0.9660858065	1.489072538689602	$1.6 \cdot 10^{-14}$	$0.30 \cdot 10^{-7}$
50	0.441	8	0.966085803696	1.48907253868960406	$7.0 \cdot 10^{-17}$	$0.38 \cdot 10^{-8}$

Après 50 évaluations de f_1 on obtient 3 majorantes partielles et un intervalle de localisation

$$[0.96608580369 , 0.9660858065] \quad \epsilon < 2.8 \cdot 10^{-9}$$

CALCUL DU MAXIMUM DE f_2

$$f_2(x) = 25.0 x - 128.0 x^2 + 282.5 x^3 - 278.7 x^4 + 100.9 x^5 \quad \text{sur } [0.0, 1.0]$$

f_2 a trois maxims relatifs aux points

0.189168220683086 de valeur 1.7286609636469185
0.689273618554688 de valeur 1.7208674452856
1.0 de valeur 1.7

A l'aide des inégalités du § 2 on obtient :

$$\|f_2'\| < 38.93 \quad \text{et} \quad \|f_2''\| < 369.4$$

1. Méthode de Bruno O. Shubert : L = 39.0

ne	temps	dt	pem	em	zmax-em
10	0.202	8	0.7027	1.7194	3.3
21	0.228	19	0.1908	1.728609	1.2
168	0.593	120	0.1890	1.72866094	$7.0 \cdot 10^{-2}$
251	0.918	166	0.1890	1.72866094	$3.3 \cdot 10^{-2}$

2. Méthode de Bruno O. Shubert modifiée : L = 39.0

ne	temps	dt	pem	em	zmax-em	mesloc
5	0.054	3	0.75	1.69	14.3	1.0
16	0.058	14	0.1875	1.728603	4.9	1.0
350	1.8	145	0.1875	1.728603	$1.6 \cdot 10^{-2}$	0.33

Après 350 évaluations de f_2 on obtient 145 majorantes partielles et les intervalles de localisation :

[0.5879 , 0.7832] $1 < 0.21$
[0.1367 , 0.2667] $1 < 0.13$
[0.9922 , 1.0] $1 < 0.001$

3. Méthode des majorantes paraboliques : M = 370.0

ne	temps	dt	pem	em	zmax-em
14	00.4	11	0.2027	1.7251	$5.4 \cdot 10^{-1}$
20	0.06	13	0.1769	1.7253	$1.3 \cdot 10^{-1}$
30	0.08	15	0.18977	1.728653	$3.0 \cdot 10^{-2}$
47	0.11	15	0.189156	1.7286609605	$6.3 \cdot 10^{-4}$
64	0.14	15	0.1891689	1.728660963638	$2.9 \cdot 10^{-9}$
74	0.16	15	0.18916763	1.728660963696	$4.0 \cdot 10^{-10}$
77	0.18	15	0.189168253	1.728660963646897	$6.7 \cdot 10^{-11}$
87	0.21	15	0.189168192	1.728660963646901	$6.8 \cdot 10^{-13}$
90	0.23	15	0.1891682222	1.72866096364691846	$1.6 \cdot 10^{-13}$
103	0.26	15	0.189168220694	1.72866096364691850	$5.0 \cdot 10^{-17}$
110	0.27	15	0.189168220694	1.72866096364691850	$1.0 \cdot 10^{-17}$

Après 110 évaluations de f_2 on obtient 6 majorantes partielles et la localisation :

$$[0.1891682192, 1891682222] \quad 1 < 3.0 \cdot 10^{-9}$$

4. Méthode des majorantes paraboliques modifiée : M = 370.0

ne	temps	dt	pem	em	zmax-em	mesloc
16	0.09	10	0.1875	1.728603	$6.9 \cdot 10^{-1}$	0.75
45	0.14	10	0.18945	1.7286593	$6.3 \cdot 10^{-4}$	$0.78 \cdot 10^{-2}$
63	0.24	10	0.1891797	1.7286609615	$1.6 \cdot 10^{-7}$	$0.92 \cdot 10^{-4}$
75	0.33	10	0.18916893	1.728660963637	$6.1 \cdot 10^{-10}$	$0.58 \cdot 10^{-5}$
78	0.36	10	0.18916798	1.7286609636457	$1.6 \cdot 10^{-10}$	$0.29 \cdot 10^{-5}$
81	0.38	10	0.18916845	1.728660963645998	$3.8 \cdot 10^{-11}$	$0.15 \cdot 10^{-5}$
84	0.41	10	0.1891682148	1.7286609636469178	$9.4 \cdot 10^{-12}$	$0.96 \cdot 10^{-6}$
99	0.44	10	0.18916822225	1.72866096364691845	$9.2 \cdot 10^{-15}$	$0.30 \cdot 10^{-7}$
105	0.46	10	0.189168220386	1.72866096364691850	$5.7 \cdot 10^{-16}$	$0.75 \cdot 10^{-8}$
108	0.49	10	0.189168220386	1.72866096364691850	$4.0 \cdot 10^{-17}$	$0.28 \cdot 10^{-8}$

Après 108 évaluations de f_2 on obtient 3 majorantes partielles et la localisation :

$$[0.18916821946, 0.18916822225] \quad 1 < 2.8 \cdot 10^{-9}$$

CALCUL DU MAXIMUM DE f_3

$$f_3(x) = \sum_{k=1}^5 k \sin((k+1)x + k) \quad \text{sur} \quad [-10.0, +10.0]$$

f_3 a pour maximum 12.0312494421671389 aux points -6.77457614343890
 -0.491390836259315
 5.79179447092027

$$\|f_3'\| < \sum_{k=1}^5 k(k+1) = 70.0 \quad \|f_3''\| \leq \sum_{k=1}^5 k(k+1)^2 = 350.0$$

1. Méthode de Bruno O. Shubert : L = 70.0

ne	temps	dt	pem	em	zmax-em
35	0.26	32	5.7992	12.023	7.4
70	0.33	34	-6.7799	12.027	2.7
102	0.42	38	5.7922	12.031228	$4.9 \cdot 10^{-1}$
171	0.60	69	-0.49126	12.031248	$1.2 \cdot 10^{-1}$
264	0.99	134	5.79174	12.03124898	$3.1 \cdot 10^{-2}$
382	1.65	206	-6.774557	12.031249381	$1.4 \cdot 10^{-2}$
488	2.42	264	-0.491406	12.031249428	$7.4 \cdot 10^{-3}$
649	4.03	369	5.7917934	12.03124944197	$3.8 \cdot 10^{-3}$

2. Méthode de Bruno O. Shubert modifiée : L = 70.0

ne	temps	dt	pem	em	zmax-em	mesloc
18	0.08	16	-6.875	10.45	79.0	20.0
128	0.61	67	5.781	12.014	8.3	9.06
236	0.98	67	-6.7773	12.030	2.7	0.57
266	1.09	67	5.7910	12.3116	0.14	0.40
364	1.49	80	-6.7749	12.031232	$3.5 \cdot 10^{-1}$	0.20
562	2.74	163	-0.49133	12.03124892	$8.6 \cdot 10^{-2}$	0.10
726	4.20	230	-6.774597	12.03124937	$4.3 \cdot 10^{-2}$	$0.71 \cdot 10^{-1}$
833	5.84	231	-6.774597	12.03124937	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$0.5 \cdot 10^{-1}$

Après 833 évaluations de f_3 on obtient 203 majorantes partielles et les intervalles de localisations :

$$\begin{aligned} [-6.7828, -6.7662] & \quad l = 1.66 \cdot 10^{-2} \\ [-0.4997, -0.4831] & \quad l = 1.66 \cdot 10^{-2} \\ [5.7875, 5.8002] & \quad l = 1.67 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

3. Méthode des majorantes paraboliques : M = 350.0

ne	temps	dt	pem	em	zmax-em
30	0.18	28	-6.7756	12.031082	46.0
70	0.27	30	5.791727	12.031248746	$6.8 \cdot 10^{-4}$
80	0.33	30	-6.7745770	12.031249442046	$4.8 \cdot 10^{-8}$
86	0.36	30	5.79179506	12.031249442115	$9.3 \cdot 10^{-9}$
91	0.42	30	-6.774576189	12.03124944216681	$2.2 \cdot 10^{-12}$
97	0.51	30	5.791794472	12.0312494421671388	$3.4 \cdot 10^{-14}$
99	0.53	30	-0.491398610	12.0312494421671389	$1.4 \cdot 10^{-15}$
101	0.56	30	-0.491398610	12.0312494421671389	$2.0 \cdot 10^{-16}$

Après 101 évaluations de f_3 on obtient 4 majorantes partielles et les intervalles de localisations :

$[-6.774576146, -6.774576141]$	$l = 4.0 \cdot 10^{-9}$
$[-0.491390844, -0.491390826]$	$l = 1.8 \cdot 10^{-9}$
$[5.791794470, 5.791794472]$	$l = 2.0 \cdot 10^{-9}$

4. Méthode des majorantes paraboliques modifiée : M = 350.0

ne	temps	dt	pem	em	zmax-em	mesloc
69	0.24	32	5.781	12.0139	$8.8 \cdot 10^{-1}$	0.94
80	0.30	32	-6.7773	12.03006	$8.7 \cdot 10^{-3}$	$0.97 \cdot 10^{-1}$
91	0.36	32	-0.49072	12.031180	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$0.13 \cdot 10^{-1}$
101	0.48	32	-6.774597	12.3124937	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$0.16 \cdot 10^{-2}$
115	0.54	32	5.7917976	12.031249441	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$0.12 \cdot 10^{-3}$
132	0.65	32	5.79179406	12.031249442141	$5.2 \cdot 10^{-11}$	$0.48 \cdot 10^{-5}$
151	0.75	32	5.7917944714	12.0312494421671389	$2.8 \cdot 10^{-14}$	$0.15 \cdot 10^{-6}$
167	0.83	32	5.7917944714	12.0312494421671389	$1.0 \cdot 10^{-16}$	$0.94 \cdot 10^{-8}$

Après 167 évaluations de f_3 on obtient 4 majorantes partielles et les intervalles de localisation :

$[-6.77457614569, -6.77457614104]$	$l = 4.7 \cdot 10^{-9}$
$[-0.49139083829, -0.49139083594]$	$l = 2.4 \cdot 10^{-9}$
$[5.7917944691, 5.7917944715]$	$l = 2.4 \cdot 10^{-9}$

3. Méthode des majorantes paraboliques : M = 700.0

ne	temps	dt	pem	em	zmax-em
30	0.13	28	5.635	8.28	49.1
66	0.25	33	5.784	12.0226	4.0
87	0.34	33	5.791899	12.0312477	$1.2 \cdot 10^{-2}$
109	0.44	33	5.791790	12.0312494391	$1.5 \cdot 10^{-6}$
122	0.49	33	-6.7745746	12.0312494418	$2.2 \cdot 10^{-8}$
132	0.55	33	-6.774576193	12.03124944216677	$5.4 \cdot 10^{-10}$
146	0.61	33	5.791794468	12.0312494421671376	$3.4 \cdot 10^{-12}$
159	0.66	33	5.791794473	12.0312494421671385	$6.4 \cdot 10^{-14}$
168	0.73	33	-0.49139083614	12.0312494421671389	$7.0 \cdot 10^{-16}$
176	0.76	33	5.79179440934	12.0312494421671390	0.0 ?

Après 176 évaluations de f_3 on obtient 3 majorantes partielles et les intervalles de localisation :

$$[-0.49139083668, -0.49139083614] \quad l = 5.4 \cdot 10^{-10}$$

$$[5.79179447055, 5.79179447127] \quad l = 7.2 \cdot 10^{-10}$$

4. Méthode des majorantes paraboliques modifiée : M = 700.0

ne	temps	dt	pem	em	zmax-em	mesloc
30	0.22	28	-8.125	7.977	122.	20.
66	0.38	33	-0.4875	11.953	6.1	4.1
87	0.50	33	5.79102	12.031155	$1.9 \cdot 10^{-1}$	$0.98 \cdot 10^{-1}$
111	0.62	33	5.7917786	12.031249403	$4.6 \cdot 10^{-5}$	$0.16 \cdot 10^{-2}$
127	0.67	33	-0.49139023	12.03124944211	$7.1 \cdot 10^{-8}$	$0.16 \cdot 10^{-3}$
145	0.75	33	5.79179406	12.0312494421412	$3.9 \cdot 10^{-10}$	$0.12 \cdot 10^{-4}$
167	0.83	33	5.7917944714	12.0312494421671389	$2.8 \cdot 10^{-13}$	$0.38 \cdot 10^{-6}$
180	0.87	33	-6.774576143362	12.0312494421671389	$4.3 \cdot 10^{-15}$	$0.38 \cdot 10^{-7}$
200	0.95	33	-0.4913908362050	12.0312494421671389	$1.0 \cdot 10^{-16}$	$0.3 \cdot 10^{-8}$
204	0.99	33	-0.4913908362050	12.0312494421671389	$1.0 \cdot 10^{-16}$	$0.18 \cdot 10^{-8}$

Après 204 évaluations de f_3 on obtient 6 majorantes partielles et les intervalles de localisation :

$$[-6.774576143653, -6.774576143070] \quad l = 5.9 \cdot 10^{-10}$$

$$[-0.491390836541, -0.491390835959] \quad l = 5.9 \cdot 10^{-10}$$

$$[5.791794470569, 5.791794471152] \quad l = 5.9 \cdot 10^{-10}$$

COMMENTAIRES DES RESULTATS NUMERIQUES

- Les algorithmes 2 et 4 (méthode...modifiée) pour une même erreur $z_{\max-em}$ nécessitent, en moyenne, sensiblement plus d'évaluations de la fonction que respectivement les algorithmes 1 et 3.
- Si L et M sont remplacés par des valeurs un peu plus grandes, le nombre d'évaluations de f augmentent sensiblement pour une même erreur $z_{\max-em}$.
- Si l'on augmente L (resp. M) le nombre d'évaluations de f pour les méthodes 1 et 2 (respectivement 3 et 4) sont de plus en plus voisin pour une même erreur $z_{\max-em}$.
- La localisation de l'ensemble A des points où f atteint son maximum semble moins bonne dans les algorithmes 2 et 4 que respectivement dans les algorithmes 1 et 3 pour un même nombre d'évaluations de f .
- La convergence des algorithmes 3 et 4 est beaucoup plus rapide que celle des algorithmes 1 et 2.
- La dimension des tableaux dans les algorithmes 3 et 4 reste bornée en ce qui concerne les trois exemples traités.
- n_k croit rapidement pour les algorithmes 1 et 2 et plus particulièrement pour le premier, sur les exemples traités.
- Signalons que le temps d'exécution dans les algorithmes 3 et 4 est erroné.

Par exemple pour f_3 , $M = 350.0$, $n_e = 109$, on obtient

$$p_{em} = 5.79179447081025954$$

$$e_m = 12.0312494421671390$$

en un temps de 0.2374 seconde, alors qu'avec les ordres d'écriture pour 101 évaluations on a un temps de 0.56 seconde.

5 - DEMONSTRATIONS DES THEOREMES DU § 4

DEFINITIONS

- E, d est un espace métrique compact
- $C(E)$ désigne l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles

On muni $C(E)$ de la norme

$$\|f\|_E = \sup_{x \in E} |f(x)|$$

- $C(E, K) = \{f ; f \in C(E) , \forall x \in E , f(x) \in K\}$

où $K \subset \mathbb{R}$

• On dit qu'un ensemble $F \subset C(E)$ est un ensemble **uniformément équicontinu** , s'il existe un module de continuité ω qui soit un module de continuité pour toute fonction de la famille F .

THEOREME D'ASCOLI

Soit $F \subset C(E)$ on a l'équivalence des propositions :

- F est un ensemble uniformément équicontinu et il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que $F \subset C(E, K)$
- F est un ensemble précompact de $C(E)$, $\| \cdot \|_E$

LEMME 1

Soit K un intervalle compact et $F \subset C(E, K)$ un ensemble uniformément équicontinu de $C(E)$ alors

$S = \{ \max_{f \in F} f ; H \text{ partie finie non vide de } F \}$ où

$(\max_{f \in F} f)(x) = \max_{f \in F} f(x)$ pour tout $x \in E$, est un ensemble

uniformément équicontinu et $S \subset C(E, K)$.

DEMONSTRATION

D'après le théorème d'Ascoli il suffit de montrer que S est un ensemble précompact de $C(E)$, $\| \cdot \|_E$.

D'après le théorème d'Ascoli F est précompact.

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et n fonctions f_1, \dots, f_n de F tel que quelque soit $f \in F$ il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\|f - f_i\|_E \leq \epsilon$.

Pour toute partie finie G de F soient

- $g = \max_{f \in G} f$
- $H = \{i ; i \leq n \text{ et il existe } f \in G \text{ telle que } \|f - f_i\|_E \leq \epsilon\}$
- $h_H = \max_{i \in H} f_i$

Soient $x \in E$, $f \in G$, tels que $g(x) = f(x)$.

De par la définition de f_1, \dots, f_n et de celle de H , il existe $i \in H$ tel que $\|f - f_i\|_E \leq \epsilon$, et donc

$$g(x) \leq f_i(x) + \epsilon \leq h_H(x) + \epsilon.$$

D'autre part, soit $j \in H$ tel que $h_H(x) = f_j(x)$, de par la définition de H il existe $f \in G$ telle que $\|f - f_j\|_E \leq \epsilon$ et donc $h_H(x) = f_j(x) \leq f(x) + \epsilon \leq g(x) + \epsilon$. Par conséquent pour tout $x \in E$ on a :

$$g(x) - \epsilon \leq h(x) \leq g(x) + \epsilon$$

c'est-à-dire que $\|h_H - g\|_E < \epsilon$

Or $\{h_H ; H \subset \{1, \dots, n\}, H \neq \emptyset\}$

est un ensemble fini donc S est précompact.

REMARQUE

Soient

- E un compact de \mathbb{R}
- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue
- $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave
- $S = [-a, a]$, $b = \max_{x \in E} |x|$, $c = a+b$, $J = [-c, c]$
- $K = [-A, A]$, $A = \|f\|_E + 2\|\phi\|_J$
- H l'ensemble des fonctions h de $C(E)$ de la forme

i) Pour tout $x \in E$, $h(x) = z + \phi(x-u)$, $z \in \mathbb{R}$
 $u \in S$

ii) h interpole f en au moins un point

Alors H est un ensemble équi-uniformément continu et

$H \subset C(E, K)$ c'est-à-dire que H est un ensemble précompact.

Pour justifier ce dernier point, soit $v \in E$ tel que

$z + \phi(v-u) = f(v)$ on a :

$|z| \leq \|\phi\|_J + \|f\|_E$ et donc pour tout $x \in E$

$|z + \phi(x-u)| \leq |z| + \|\phi\|_J \leq A$. \square

CAS PARTICULIERS

1) $\phi(x) = -L|x|$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ lipchitzienne de coefficient de lipchitz L et I un intervalle compact tel que $E \subset I$.

Conséquence : l'ensemble des fonctions $\{\phi_I ; I \text{ intervalle de } E\}$ définies en 4.1 et 4.2 § 4 est précompact.

2) $\phi(x) = -\frac{M}{2}x^2$; $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $M \geq -\inf_{x \in E} f''(x)$

$$a = \sup_{\substack{u, v \in E \\ u \neq v}} \left| 0.5(u+v) + \frac{1}{M} \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \right|$$

$$I = [-a, a]$$

Conséquence : l'ensemble des fonctions $\{\phi_I ; I \text{ intervalle de } E\}$ définie en 4.3 et 4.4 du § 4 est un ensemble uniformément équi-continu .

THEOREME 12

Soit E, d un espace métrique compact, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, des applications continues. Sous les conditions

1) $\{f_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble uniformément équicontinu

2) Il existe une suite $\{u_n\}_n$ de E satisfaisant à

i) $f_n(u_n) = \max_{x \in E} f_n(x)$

ii) Pour tout $p > n$, $f_p(u_n) = f(u_n)$

Alors en posant $M_n = \sup_{x \in E} f_n(x)$ et $y_n = f(u_n)$

i) $\{M_n\}$ et $\{y_n\}$ sont des suites convergentes vers $\max f$.

ii) Tout point de $B = \bigcap_n \overline{\{u_p ; p \geq n\}}$ est un point où f atteint son maximum.

DEMONSTRATION

Pour montrer que $\{M_n\}_n$ est une suite convergente vers $\max f$ il suffit de montrer que de toute sous suite $\{M_n\}_{N'}$ on peut en extraire une sous suite $\{M_n\}_{N''}$ convergente vers $\max f$.

Quelque soit N' sous ensemble infini de \mathbb{N} , d'après le théorème d'Ascoli il existe N'' sous ensemble infini de N' tel que $\{f_n\}_{n \in N''}$ soit une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction continue.

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe m tel que pour tout n et p éléments de N'' tels que $n \geq m, p \geq m$ on ait $\|f_n - f_p\|_E < \epsilon$. Soient p, n éléments de N'' tels que $p > n > m$ on a

$$\max f \geq f(u_n) = f_p(u_n) \geq f_n(u_n) - \|f_p - f_n\|_E \geq M_n - \epsilon$$

Donc pour tout $n \in N''$, $n \geq m$ on a :

$$M_n \geq \max f \geq M_n - \epsilon$$

c'est-à-dire que $\{M_n\}_{n \in N''}$ converge vers $\max f$.

Ce qui achève la démonstration.

Pour montrer que $\{y_n\}_n$ converge vers $\max f$ il suffit de montrer que de toute sous-suite $\{y_n\}_{N'}$ on peut en extraire une sous-suite convergente vers $\max f$.

Quelque soit N' sous-ensemble infini de \mathbb{N} soit N'' sous-ensemble infini de N' tel que $\{f_n\}_{n \in N''}$ converge uniformément.

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe m tel que si p, n sont des éléments de N'' tels que $p > n > m$ alors

$$\|f_p - f_n\|_E < \epsilon$$

d'où :

$$\max f \geq f(u_n) \geq f_p(u_n) \geq f_n(u_n) - \|f_n - f_p\|_E \geq M_n - \epsilon$$

$\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente vers $\max f$, ($y_n = f(u_n)$),

De ce dernier résultat il est facile d'en déduire que $B \subset A$.

Ce qui achève la démonstration.

DEMONSTRATION DU THEOREME DE BRUNO O. SHUBERT

Soient $f_k(x) = \max\{f(x), \max\{z_I - L|x - u_I|\}; I \in L_k\}$

$k \in \mathbb{N}$, z_I et u_I étant ceux définis en 4.1 du § 4.

D'après la remarque et le lemme 1 du § 5, $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble précompact.

f_k a pour maximum M_k qui est atteint au point $v_k = u_I$, I étant l'intervalle de L_k qu'on a choisi dans l'algorithme tel que $z_I = l_k$.

Les conditions du théorème 1 du § 5 sont satisfaites et de ce théorème on déduit le théorème 7, § 4.

DEMONSTRATION DU THEOREME 9, § 4

Soient $f_k(x) = \max\{f(x), \max\{\phi_S(x); S \in L_k\}\}$

où ϕ_S est définie en 4.3 du § 4.

Du lemme 1 et de la remarque du § 5 on déduit que $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble précompact.

Signalons que si $x \notin S$, $\phi_S(x) \leq f(x)$, et que M_k est le maximum de f_k qui est atteint au point u_k , où ϕ_I atteint son maximum sur I , et où $I \in L_k$ est l'intervalle de L_k qu'on a choisi au cours de l'algorithme tel que $z_I = M_k$. Les conditions du théorème 12, § 5 sont satisfaites d'où on déduit le théorème 9, § 4.

DEMONSTRATION DES THEOREMES 8 et 10, § 4

Posons $d_k = \max\{b-a ; [a,b] \in L_k\}$ il est clair que d_k décroît vers zéro. Soit $A(\eta) = \{x ; f(x) \geq \max f - \eta\}$, $\eta \geq 0$. Montrons que $\{M_k\}_k$ et $\{y_k\}_k$ convergent vers $\max f$.

D'après la remarque du § 5 il existe un module de continuité ω qui est un module de continuité de $\phi_I \in C(E)$ pour tout intervalle I de E .

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n tel que pour tout $k > n$, $d_k < \varepsilon$.

Soit $I = [a,b]$, $I \in L_k$ tel que $M_k = z_I$, on a :

$$\max f \geq y_k \geq f(a) = M_k - (M_k - f(a)) \geq M_k - \omega(|u_I - a|)$$

c'est-à-dire que pour tout $k \geq n$

$$M_k \geq \max f \geq y_k \geq M_k - \omega(\varepsilon)$$

donc $\{M_k\}_k$ et $\{y_k\}$ sont des suites convergentes vers $\max f$.

Montrons que $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq k} E_p$.

On peut toujours supposer que ω est aussi un module de continuité pour f . Pour tout $\varepsilon > 0$ soit n tel que pour tout

$p \geq n$ on ait $d_p \leq \epsilon$.

Quelque soit $p \geq n$, et $x \in E_p$, soit $I \in L_k$ tel que $x \in I = [a, b]$, On a :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(a) - \omega(|x-a|) \geq z_I - (\phi_I(u_I) - \phi_I(a)) - \omega(\epsilon) \\ &\geq z_I - 2\omega(\epsilon) \underset{(1)}{\geq} y_k - 2\omega(\epsilon) \underset{(2)}{\geq} M_k - 3\omega(\epsilon) \geq \max f - 3\omega(\epsilon) \end{aligned}$$

(1) car $I \in L_k$

(2) car on a vu que $y_k \geq M_k - \omega(\epsilon)$

Et donc $E_p \subset A(3\omega(\epsilon))$ pour tout $p \geq n$ et donc

$\bigcup_{p \geq n} E_p \subset A(3\omega(\epsilon))$ ou encore $\bigcup_{p \geq k} E_p \subset A(3\omega(\epsilon))$ pour

tout $\epsilon > 0$ donc $\bigcup_{p \geq k} E_p \subset \bigcap_{\eta > 0} A(\eta) = A$

ce qui achève la démonstration.

6 - EXTENSIONS

CALCUL DU MAXIMUM GLOBAL D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE REELLE

Signalons que les résultats des théorèmes 3 et 4 du § 4 sont encore valables pour tous les types de majorants cités au § 2.

De façon simplifiée, plus on prend r grand, et en utilisant $M \geq \|f^{(r)}\|$ pour construire les majorants décrit au § 2, et plus l'erreur $M_k - y_k$ converge rapidement vers zéro.

CALCUL DU MAXIMUM GLOBAL D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES REELLES

Dans [18] nous avons généralisé le principe précédant aux fonctions de plusieurs variables réelles. E est une réunion finie de simplexes et les majorantes partielles majorent f sur des simplexes inclus dans E .

LOCALISATION DES ZEROS D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

En utilisant des majorants et minorants paraboliques on peut adapter la méthode à la localisation des zéros d'une fonction définie sur un intervalle compact et a valeurs dans \mathbb{R} .

REFERENCES

- [1] Patricio BASSO : Localisation du maximum global des fonctions non-unimodale.
Séminaire IMAG, analyse numérique n° 272 (17.03.77).
- [2] Patricio BASSO : Méthodes de localisation du maximum global et des zéros d'une fonction sur un intervalle de la droite numérique.
Thèse (1978) Univ. Scient. Méd. de Grenoble.
- [3] S.N. BERNSTEIN et C. De la VALLEE POUSSIN
L'approximation. Chelsea publishing company 1970.
- [4] Richard BRENT : Algorithms for minimization without derivatives .
Prentice Hall series in automatic computation, 1973 .
- [5] YU. G. EVTUSHENKO : Numerical methods for finding global extrema (case of non-uniform mesh).
Zh. vyvhisl. Mat. Fiz. 1971, 11, 6, 1390-1403.
- [6] R. GUNTNER : Evaluation of Lebesgue constants.
SIAM. J. Numer. Anal. Vol.17, N°4, Aug. 1980 , 512-520 .
- [7] M.J.D. POWEL : On the maximum errors of polynomial approximation defined by interpolation and by least squares criteria.
Comput. J., 9 (1967), pp. 404-407.
- [8] T. REBOUL : Une classe de méthodes pour la recherche du maximum global d'une fonction numérique.
Rapport de recherche analyse numérique n° 230,
Laboratoire IMAG, (janvier 1981).

- [9] Theodore T. RIVLIN : The Chebyshev polynomials.
Wiley Interscience, New-York , 1974 .
- [10] A.C. SHAEFFER and R.J. DUFFIN : A refinement of an
inequality of the Brothers Markoff.
Trans. American mathematical society 1941, 517-529.
- [11] BRUNO O. SHUBERT : A sequential method seeking the
global maximum of a function.
SIAM J. Numer. Anal. Vol. 9 n° 3, (sep. 1972).

COMPLEMENT

Eldon Hansen : Global Optimization Using Interval
Analysis . The Multi-Dimensional Case .
Numer. Math. 34, 247-270 (1980) .

CHAPITRE III

QUELQUES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR DÉTERMINER UN POLYNÔME DE MEILLEURE APPROXIMATION POUR LA NORME DE TCHEBYCHEFF

PLAN :

Introduction	145
1) Généralités	145
2) Références de quelques méthodes numériques de recherche d'un polynôme de meilleure approximation d'une fonction	148
3) Deuxième algorithme de Rémès	150
4) Un nouvel algorithme de recherche d'un polynôme de meilleure approximation	155
5) Résultats numériques.	167

INTRODUCTION

Soient $C([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles, muni de la norme uniforme $\|\cdot\|$, V un sous espace vectoriel de $C([a,b], \mathbb{R})$ de dimension n , vérifiant la condition de Haar, et $f \in C([a,b], \mathbb{R})$. On va étudier deux méthodes numériques pour résoudre le problème suivant :

Pour tout $\varepsilon > 0$ trouver $g \in V$ tel que si

$$\rho_V(f) = \inf \{ \|f-h\| ; h \in V \} \text{ on ait}$$

$$\|f-g\| - \rho_V(f) \leq \varepsilon \cdot \rho_V(f) .$$

Les résultats numériques obtenus en utilisant le deuxième algorithme de Rémès (méthode simple d'échange), montrent que la convergence (au sens de la norme $\|\cdot\|$) des meilleures approximations discrètes Q_k (relatives aux points e_1^k, \dots, e_{n+1}^k) vers f^* (meilleure approximation uniforme de f dans V) devient très rapide dès que la distance discrète $d_k = \|f-Q_k\|(e_i^k)$, $1 \leq i \leq n+1$ est voisine de $\rho_V(f)$.

On s'est intéressé à trouver un moyen de mieux choisir les points d'alternance de départ, (voir [20] p. 116-122), ce qui nous a conduit à chercher un algorithme permettant de corriger la position des points d'alternances exposé au paragraphe 4.

1. GENERALITES

1.1. DEFINITIONS

$K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

X est un espace métrique compact

$C(X,K)$ est l'ensemble des fonctions continues de X dans K muni de la norme uniforme (ou de Tchebycheff)

$$\|g\| = \sup_{x \in X} |g(x)|$$

Soit $Y \subset X$, on définit $\|g\|_Y = \sup_{x \in Y} |g(x)|$

- On dit qu'un sous-espace vectoriel V de $C(X,K)$ (sur K) de dimension n , vérifie la condition de Haar si toute fonction $h \in V \setminus \{0\}$ ne peut avoir qu'au plus $n-1$ zéros.
- Soient $E, \|\cdot\|$ un espace vectoriel normé, $f \in E$, G un sous ensemble non vide de E et $\rho_G(f) = \inf \{\|f-g\|; g \in G\}$.
On dit que $g \in G$ est meilleure approximation de f dans G si $\|f-g\| = \rho_G(f)$.

1.2. THEOREMES GENERAUX

Existence [20] p. 1, (pour une généralisation voir [18] p.434)

Soient $E, \|\cdot\|$ un espace vectoriel normé, $f \in E$ et V un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors il existe $g \in V$ tel que $\|f-g\| = \rho_V(f)$.

Caractérisation

Soit V un sous-espace vectoriel de $C(X,K)$, (sur K) de dimension n et $f \in C(X,K) \setminus V$.
 $g \in V$ est meilleure approximation de f dans V si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

i) A.N. Kolmogorov [20] p. 15 (Théorème direct)

Si $D = \{x; x \in X, |f-g|(x) = \|f-g\|_X\}$

alors pour tout $h \in V$ on a :

$$\min_{x \in D} \text{Réal } ((f-g)h)(x) \leq 0.$$

ii) Rivlin et Shapiro [27] (Théorème dual)

Il existe $k, k \leq n+1$ si $K = \mathbb{R}$ ($k \leq 2n+1$ si $K = \mathbb{C}$), z_1, \dots, z_k des points distincts de X et c_1, \dots, c_k des éléments de K tels qu'en posant

$$L(h) = \sum_{i=1}^k c_i h(z_i) , \text{ on ait :}$$

$$\cdot \sum_{i=1}^k |c_i| = 1$$

$$\cdot |L(f-g)| = \|f-g\|_X$$

$$\cdot L(h) = 0 \text{ pour tout } h \in V .$$

Remarque : on a alors $|f-g|(z_i) = \|f-g\|_X , 1 \leq i \leq k .$

iii) THEOREME D'ALTERNANCE DE TCHEBYCHEFF [20] p. 20.

On suppose ici que $K = \mathbb{R}$, $X \in [a,b]$ est un ensemble (d'au moins $n+1$ points), V un sous-espace vectoriel de $C([a,b], \mathbb{R})$ de dimension n qui vérifie la condition de Haar sur $[a,b]$, alors il existe e_1, \dots, e_{n+1} , $n+1$ points de X ,
 $e_1 < e_2 < \dots < e_{n+1}$, tels que :

$$(f-g)(e_{i+1}) = -(f-g)(e_i) , 1 \leq i \leq n$$

$$|f-g|(e_1) = \|f-g\|_X$$

Unicité [20] p. 16

Soit V un sous-espace vectoriel de $C(X, K)$ (sur K) de dimension n et qui vérifie la condition de Haar sur X , alors quelque soit $f \in C(X, K)$ il existe $g \in V$ unique tel que $\|f-g\|_X = \rho_V(f)$.

2. REFERENCES DE QUELQUES METHODES NUMERIQUES DE RECHERCHE
DE MEILLEURE APPROXIMATION D'UNE FONCTION.

Soit $f \in C(X,K)$ et V un sous-espace vectoriel de dimension n sur K de $C(X,K)$.
Voici une liste de références d'algorithmes de recherche d'une meilleure approximation de f dans V .

1) Algorithmes basés sur le critère de Kolmogorov

$K = \mathbb{R}$: Premier algorithme de Rémès [23] , [20] p. 128,
(V vérifiant la condition de Haar sur $[a,b]$,
 $X \subset [a,b]$) ;

$K = \mathbb{C}$: Méthode de W. Krabs et G. Opter [21].

2) Algorithmes basés sur la méthode de Lawson

$K = \mathbb{R}$: Algorithme de Lawson [24] p. 229, [11]
(Convergence assurée si V vérifie la condition
de Haar sur X) ;

$K = \mathbb{C}$: S. Ellacot et J. Williams [14]
(X discret, convergence assurée si V vérifie
la condition de Haar sur X).

3) Méthodes basées sur des méthodes de programmation linéaires
ou de descente

$K = \mathbb{R}$: - Algorithme 495 (I. Barrodale et C. Philipps) [3]
- Algorithme 328 (H. Bartels et G. Golub) [4][5]
- Algorithmes de E.W. Cheney et A.A. Golstein [8][9]
- Algorithme 414 (G.H. Golub L.B. Smith) [16]
($X = [a,b]$, V vérifiant la condition de Haar)
- Généralisation du deuxième algorithme de Rémès par
P.J. Laurent [18] p. 454,
(convergence assurée si à chaque pas de l'algorithme
la meilleur approximation discrète de f est unique,
voir C. Carasso [6])

- Algorithme de P.J. Laurent et C. Carasso, [7], [19]
- Méthode de descente de P.D. Scott et J.S. Thorp [29]
- Voir aussi [28] et [30].

$K = \mathbb{C}$: - Méthodes de I. Barrodales, L.M. Delves et
C. Mason [2].
(X fini).

4) Méthodes basées sur le théorème d'Alternance de Tchebycheff

$K = \mathbb{R}$; $X = [a, b]$ et V vérifie la condition de Haar.

deuxième algorithme de Rémès, méthode simple d'échange [20]
p. 105 ,

deuxième algorithme de Rémès, méthode générale d'échange
[1] p. 225 , [20] p. 105 .

En ce qui concerne ce dernier algorithme signalons que
Veidinger a montré que la convergence de la distance discrète
vers $\rho_V(f)$ est en général quadratique [20] p. 111.

5) Méthodes de recherche de meilleure approximation approchée

La plupart de ces méthodes sont basées sur le dévelop-
pement en série de Tchebycheff de la fonction,

$$f(x) = \sum_n a_n T_n(x) , \text{ avec } X = [-1, 1] , T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x),$$

voir [25].

- G. Hornecker [17]
- D. Elliot et B. Lam [15]
- voir [20] p. 116-124 pour d'autres méthodes
(méthodes de C.W. Clenshaw [10], C. Lanczos, S.N. Bernstein,
G. Meinardus).

6) Méthode de Polya [20] p. 125.

Remarques

- i) Si X est infini les méthodes précédentes basées sur le calcul de maximum de fonctions sont des méthodes qui ne permettent pas d'assurer qu'on a bien obtenu le maximum global de la fonction à une erreur qu'on s'est donné à l'avance.
- ii) Soient X, d un espace métrique compact, $Y \subset X$,
 $|Y| = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y)$, $f \in C(X, K)$
 V sous-espace vectoriel de $C(X, K)$ de dimension n
 et $\rho_V^Y(f) = \inf \{ \|f-g\|_Y ; g \in V \}$. Alors $\rho_V^Y(f)$ tend vers $\rho_V(f)$ lorsque $|Y|$ tend vers zéro.

Dans le cas où $V = \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ étant l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus $n-1$ et $X = [a, b]$, T.J. Rivlin et E.W. Cheney [26] donnent une estimation de $\rho_V(f) - \rho_V^Y(f)$ (Cette estimation est grossière si les fonctions sont dérivables). Certaines méthodes de recherche de la meilleure approximation de f dans V consistent à choisir $Y \subset X$ tel que $|Y|$ soit assez petit et de chercher la meilleure approximation de f dans V pour la semi-norme $\| \cdot \|_Y$. Cette approximation est alors susceptible d'approcher (au sens $\| \cdot \|_X$) la meilleure approximation de f dans V pour la norme $\| \cdot \|_X$.

3. DEUXIEME ALGORITHME DE REMES (Méthode simple d'échange)

Problème :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$
 l'ensemble des polynômes de degré au plus n à coefficients réels. Pour tout $\epsilon > 0$, déterminer P
 $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|f-P\|_{[a,b]} - \rho_V(f) \leq \epsilon \cdot \rho_V(f)$.

3.1. DEFINITIONS ET RESULTATS CLASSIQUES [18]

Soient :

- e_1, \dots, e_{n+2} tels que $a \leq e_1 < e_2 < \dots < e_{n+2} \leq b$,

$$L(v, e) = \sum_{i=1}^{n+2} \mu_i v(e_i) \text{ une forme linéaire en } v \in C([a, b], \mathbb{R})$$

telle que :

i) $L(k, e) = 0$ pour tout $k \in V$

ii) $\sum_{i=1}^{n+2} |\mu_i| = 1$

$$Q = g - \frac{g_{n+1}}{h_{n+1}} h$$

- où g est le polynôme de degré au plus $n+1$ qui interpole f aux points e_1, \dots, e_{n+2} , g_{n+1} étant le coefficient de x^{n+1} de g ;

- où h est le polynôme de degré $n+1$ tel que

$$h(e_i) = (-1)^i, \quad 1 \leq i \leq n+2, \quad h_{n+1} \text{ étant le coefficient de } x^{n+1} \text{ de } h,$$

Alors on a les résultats

- $Q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$

- $\left| \frac{g_{n+1}}{h_{n+1}} \right| = |L(f-Q, e)| = |L(f, e)| \leq \rho_V(f) \leq \|f-Q\|$

DEFINITION

Q est appelé meilleure approximation discrète de f dans V relative à e_1, \dots, e_{n+2} ,

$d = |L(f, e)|$ est appelé distance discrète de f à V relative à e_1, \dots, e_{n+2} .

Remarque :

En définissant $\delta_{e_1, \dots, e_{n+2}}(f)$ comme [18] p. 106 on a

$$g_{n+1} = \delta_{e_1, \dots, e_{n+2}}(f), \quad h_{n+1} = \delta_{e_1, \dots, e_{n+2}}(h) \quad \text{ce}$$

qui donne un procédé de calcul de g_{n+1} et de h_{n+1} .

3.2. DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

On suppose que f n'est pas un polynôme de degré inférieur ou égal à n , $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$;

Choisir :

- $\varepsilon > 0$
- $\theta \in]0, 1[$
- e_1^0, \dots, e_{n+2}^0 tels que $a \leq e_1^0 < e_2^0 < \dots < e_{n+2}^0 \leq b$.

$k^{\text{ème}}$ pas :

- i) Déterminer Q_k la meilleure approximation discrète de f dans V et d_k la distance discrète de f à V sur e_1^k, \dots, e_{n+2}^k , et notons $r_k = f - Q_k$.
- ii) Déterminer un majorant M_k de $\|r_k\|$ et $x_k \in [a, b]$ tels que
$$M_k - |r_k(x_k)| \leq \theta(M_k - d_k)$$
- iii) Si $M_k - d_k \leq \varepsilon d_k$ arrêt

iv) Méthode d'échange

- si $x_k \leq e_1^k$ définissons $e_1^{k+1} = x_k$.
 - si $r_k(x_k)$ est du même signe que $r_k(e_1^k)$
alors on définit $e_i^{k+1} = e_i^k$, $2 \leq i \leq n+2$
 - si $r_k(x_k)$ est de signe opposé à $r_k(e_1^k)$
alors on définit $e_i^{k+1} = e_{i-1}^k$, $2 \leq i \leq n+2$.
- si $e_{n+2}^k \leq x_k$, définissons $e_{n+2}^{k+1} = x_k$
 - si $r_k(x_k)$ est du même signe que $r_k(e_{n+2}^k)$
alors on définit $e_i^{k+1} = e_i^k$, $1 \leq i \leq n+1$
 - si $r_k(x_k)$ est de signe opposé à $r_k(e_{n+2}^k)$
alors on définit $e_i^{k+1} = e_{i+1}^k$, $1 \leq i \leq n+1$
- si $e_j^k \leq x_k \leq e_{j+1}^k$
 - si $r_k(x_k)$ est du même signe que $r_k(e_j^k)$
on définit $e_j^{k+1} = x_k$ et
 $e_i^{k+1} = e_i^k$, $1 \leq i \leq n+2$, $i \neq j$.
 - si $r_k(x_k)$ est du même signe que $r_k(e_{j+1}^k)$
on définit $e_{j+1}^{k+1} = x_k$ et
 $e_i^{k+1} = e_i^k$, $1 \leq i \leq n+2$, $i \neq j+1$.

Fin du k^{ème} pas.

THEOREME

L'algorithme s'arrête après un nombre fini de pas.

Démonstration : voir [1],

Remarques sur ii) du k^{ème} pas

On suppose que f est deux fois continûment dérivable par morceaux et que sur chacun de ces morceaux (qui est un intervalle I) il existe un polynôme de degré au plus p qui égale f'' à une précision relative de 10^{-2} (ce qui est suffisant en ce qui concerne les exemples numériques étudiés). Sur chacun des intervalles où f est deux fois continûment dérivable on détermine une majoration de $\|r_k''\|_I$ à l'aide d'une des méthodes présentées au paragraphe 1 du chapitre II et K est la valeur obtenue .

A l'aide de l'algorithme des majorantes paraboliques du paragraphe 3 chapitre II et de K , on détermine des suites

$\{M_q^k\}_q$, $\{y_q^k\}_q$ et $\{x_q^k\}_q$ avec

$$y_q^k = |r_k(x_q^k)| \quad , \quad q \in \mathbb{N} \quad \text{telles que}$$

$$\bullet \quad y_q^k \leq \|r_k\|_{[a,b]} \leq M_q^k$$

$$\bullet \quad \lim_q (M_q^k - y_q^k) = 0$$

Posons $q_k = \inf \{q ; M_q^k - y_q^k \leq \theta(M_q^k - d_k)\}$ alors

$$\text{alors} \quad x_k = x_{q_k}^k \quad , \quad y_k = y_{q_k}^k \quad , \quad M_k = M_{q_k}^k$$

satisfont aux conditions du ii) du k^{ème} pas.

4. UN NOUVEL ALGORITHME DE RECHERCHE D'UN POLYNÔME DE MEILLEURE APPROXIMATION

Hypothèse : $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ et $f \in C([a,b], \mathbb{R}) \setminus V$.

4.1. DEFINITIONS

Soient e_1, \dots, e_{n+2} tels que

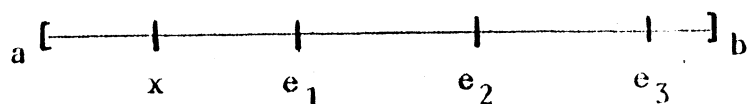
$$a \leq e_1 < e_2 < \dots < e_{n+2} < b.$$

- $e = (e_1, \dots, e_{n+2})$

- Pour tout i ($1 \leq i \leq n+2$) et tout $x \in [a,b]$ on note $\langle e, i, x \rangle$ l'élément de $[a,b]^{n+2}$ dont les coordonnées sont x, e_j , $j \neq i$, et croissantes avec leur rang.

Exemple : Dans le cas de figure ci-dessous

$$\langle e, 2, x \rangle = (x, e_1, e_3)$$



$$L(h, e) = \sum_{i=1}^{n+2} (-1)^i \lambda_i(e) h(e_i)$$

avec
$$\lambda_i(e) = \left[1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+2} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i, j}}^{n+2} \left| \frac{e_i - e_r}{e_j - e_r} \right| \right]^{-1}$$

On remarquera que :

- pour tout $h \in V$, $L(h, e) = 0$

- $\lambda_i(e) > 0$, ($1 \leq i \leq n+2$), et $\sum_{j=1}^{n+2} \lambda_j(e) = 1$

- si Q est la meilleure approximation discrète de f dans V relative à e_1, \dots, e_{n+2} alors

$$L(f-Q, e) = - (f-Q)(e_1).$$

4.2. ETUDE D'EXPRESSIONS PARTICULIERES DE $L(f,e)$

Soit Q la meilleure approximation discrète de f dans V relative à e_1, \dots, e_{n+2} et posons $\boxed{r = f - Q}$.

Afin d'alléger l'écriture on a posé dans la suite $e' = \langle e, i, x \rangle$:

- i) Si $i \neq 1, n+2$ et $x \in]e_{i-1}, e_{i+1}[$
 $(\langle e, i, x \rangle = (e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_{n+2}))$
 ou si $i=1$ et $x \in [a, e_2[$
 $(\langle e, 1, x \rangle = (x, e_2, \dots, e_{n+2}))$
 ou si $i=n+2$ et $x \in]e_{n+1}, b]$
 $(\langle e, n+2, x \rangle = (e_1, \dots, e_{n+1}, x))$

alors

$$\begin{aligned} L(f, e') &= \sum_{j=1}^{n+2} (-1)^j \lambda_j(e') r(e'_j) \\ &= (-1)^i \lambda_i(e') r(x) + \sum_{j \neq i} (-1)^j \lambda_j(e') r(e_j) \\ &= (-1)^i \lambda_i(e') [r(x) - r(e_i)] + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n+2} (-1)^j \lambda_j(e') r(e_j) \\ &= (-1)^i \lambda_i(e') [r(x) - r(e_i)] + (-1)^i r(e_i) \end{aligned}$$

La dernière égalité se justifiant par le fait que

$$\sum_{j=1}^{n+2} \lambda_j(e') = 1 \text{ et } (-1)^j r(e_j) = (-1)^i r(e_i), \quad 1 \leq j \leq n+2,$$

finalement

$$\boxed{L(f, \langle e, i, x \rangle) = (-1)^i [r(e_i) + \lambda_i(\langle e, i, x \rangle) (r(x) - r(e_i))]}.$$

ii) $\boxed{\text{Si } i = n+2 \text{ et } x \in [a, e_1[}$ ($\langle e, i, x \rangle = (x, e_1, \dots, e_{n+1})$)

$$\begin{aligned} L(f, e') &= \sum_{j=1}^{n+2} (-1)^j \lambda_j(e') r(e'_j) \\ &= \sum_{j=2}^{n+2} (-1)^j \lambda_j(e') r(e_{j-1}) + (-1) \lambda_1(e') r(x) \\ &= (-1) \lambda_1(e') r(x) + \sum_{j=2}^{n+2} \lambda_j(e') r(e_1) \\ &= (-1) \lambda_1(e') r(x) + (1 - \lambda_1(e')) r(e_1) \end{aligned}$$

$$\boxed{L(f, \langle e, n+2, x \rangle) = r(e_1) - \lambda_1(\langle e, n+2, x \rangle) (r(x) + r(e_1))}$$

iii) $\boxed{\text{Si } i = 1 \text{ et } x \in]e_{n+2}, b]}$ ($\langle e, 1, x \rangle = (e_2, \dots, e_{n+2}, x)$)

$$\begin{aligned} L(f, e') &= (-1)^{n+2} \lambda_{n+2}(e') r(x) + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \lambda_j(e') r(e_{j+1}) \\ &= (-1)^{n+2} \lambda_{n+2}(e') r(x) + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \lambda_j(e') r(e_{n+2}) \\ &= (-1)^{n+2} \lambda_{n+2}(e') r(x) + (-1)^{n+1} (1 - \lambda_{n+2}(e')) r(e_{n+2}) \end{aligned}$$

$$\boxed{L(f, \langle e, 1, x \rangle) = (-1)^{n+1} [r(e_{n+2}) - \lambda_{n+2}(\langle e, 1, x \rangle) (r(x) + r(e_{n+2}))]}$$

4.3. THEOREME FONDAMENTAL

DEFINITIONS

Soit $a \leq e_1 < e_2 < \dots < e_{n+2} \leq b$, $e = (e_1, \dots, e_{n+1})$

- $I_1(e) = [a, e_2] \cup [e_{n+2}, b]$
- $I_{n+2}(e) = [a, e_1] \cup [e_{n+1}, b]$
- pour tout $i \neq 1, n+2$, $I_i(e) = [e_{i-1}, e_{i+1}]$
- pour tout i , $1 \leq i \leq n+2$ on définit

$$B_i(e) = \max \{ |L(f, \langle e, i, x \rangle)| ; x \in I_i(e) \}$$

$$B(e) = \max_{1 \leq i \leq n+2} B_i(e)$$

Signalons un

LEMME CLASSIQUE

Soit $\Omega = \{e ; e \in [a,b]^{n+2} \text{ et } e_1 < e_2 < \dots < e_{n+2}\}$
alors pour tout $m > 0$ l'ensemble

$$K_m = \{e ; e \in \Omega , |L(f,e)| \geq m\} \text{ est compact}$$

DEMONSTRATION

Soit $\bar{\Omega}$ l'adhérence de Ω dans \mathbb{R}^{n+2} et définissons
 $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^+$ de la façon suivante :

$$\text{si } e \in \bar{\Omega} \setminus \Omega \quad F(e) = 0$$

$$\text{si } e \in \Omega \quad F(e) = |L(f,e)|$$

Pour démontrer le lemme il suffit de montrer que F est continue sur $\bar{\Omega}$.

Il est clair que F est continue sur Ω .

Montrons la continuité de F en un point $e^* \in \bar{\Omega} \setminus \Omega$.

Pour cela il suffit de montrer que toute suite $\{e^k\}_k$ de points de Ω qui converge vers e^* vérifie $\lim_{k \rightarrow \infty} F(e^k) = 0$.

Du fait de la définition de e^* il existe $i \in \{1, \dots, n+2\}$

tel que $e_i^* = e_{i+1}^*$. Soit g un polynôme de degré au plus n qui interpole f en e_1^*, \dots, e_{n+2}^* alors

$$F(e^k) = |L(f-g, e^k)| \leq \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i(e^k) |f-g|(e_i^k) \text{ et donc}$$

$$F(e^k) \leq \max_{i=1}^{n+2} |f-g|(e_i^k).$$

Comme $[a,b]^{n+2} \ni e \rightarrow \sup_{i=1}^{n+2} |f-g|(e_i)$ est continue et nulle

en e^* il vient que $\lim_k F(e^k) = 0$ ce qui achève la démonstration du lemme.

THEOREME FONDAMENTAL

Soient $\epsilon > 0$ et $m > 0$. Il existe une constante $C > 0$ (ne dépendant que de m, a, b et f) telle que, quel que soit $e = (e_1, \dots, e_{n+2})$, $a \leq e_1 < \dots < e_{n+2} \leq b$ vérifiant

$$\bullet \quad |L(f, e)| \geq m$$

$$\bullet \quad B(e) - |L(f, e)| \leq \epsilon$$

alors

$$\|f - Q\| - |L(f, e)| \leq \frac{\epsilon}{C}$$

Q étant la meilleure approximation discrète de f dans V relative à e_1, \dots, e_{n+2} .

DEMONSTRATION

D'après le lemme précédent K_m est compact. D'autre part V vérifie la condition de Haar sur $[a, b]$ d'où pour tout $e' \in K_m$ et i , $1 \leq i \leq n+2$ on a $\lambda_i(e') > 0$.

Comme les fonctions λ_i sont continues sur K_m on en déduit

que $C = \min_{e' \in K_m} \min_{i=1}^{n+2} \lambda_i(e')$ est un nombre strictement positif.

Réutilisons la notation $r = f - Q$,

$d = |L(f, e)|$, ($d = |r(e_i)|$ $1 \leq i \leq n+2$).

Soit $x \in [a, b]$ tel que $|r(x)| = \|r\|$.

i) $x \leq e_1$

• Si $r(x)$ est du même signe que $r(e_1)$, d'après i) paragraphe 4.2 on a

$$|L(f, \langle e, 1, x \rangle)| = d + \lambda_1(\langle e, 1, x \rangle)(\|r\| - d) \leq B(e)$$

et donc si $d \geq m$, $B(e) - d < \epsilon$ et C est le nombre défini dans le lemme précédent on a :

$$\|r\| - d \leq \frac{B(e) - d}{\lambda_1(\langle e, 1, x \rangle)} \leq \frac{\epsilon}{C}$$

• Si $r(x)$ est de signe opposé à $r(e_1)$ d'après ii) du paragraphe 4.2 on a

$$|L(f, \langle e, n+2, x \rangle)| = d + \lambda_1(\langle e, n+2, x \rangle)(\|r\| - d)$$

comme précédemment on obtient

$$\|r\| - d \leq \frac{\varepsilon}{C} .$$

ii) $\underline{e_1 < x < e_{n+2}}$.

Il existe i , $1 \leq i \leq n+2$ tel que $r(x)$ et $r(e_i)$ soient de même signe et $x \in I_i(e)$.

E utilisant i) paragraphe 4.2 il vient

$$|L(f, \langle e, i, x \rangle)| = d + \lambda_i(\langle e, i, x \rangle)(\|r\| - d)$$

et comme précédemment on établit

$$\|r\| - d \leq \frac{\varepsilon}{C}$$

iii) $\underline{e_{n+2} \leq x}$

• Si $r(x)$ est du même signe que $r(e_{n+2})$, à l'aide de i) paragraphe 4.2 on établit,

$$|L(f, \langle e, n+2, x \rangle)| = d + \lambda_{n+2}(\langle e, n+2, x \rangle)(\|r\| - d)$$

et de façon analogue aux points précédents

$$\|r\| - d \leq \frac{\varepsilon}{C}$$

• Si $r(x)$ et $r(e_{n+2})$ sont de signe opposé, à l'aide de iii) paragraphe 4.2 on établit :

$$|L(f, \langle e, 1, x \rangle)| = d + \lambda_{n+2}(\langle e, 1, x \rangle)(\|r\| - d)$$

et comme précédemment on montre que $\|r\| - d \leq \frac{\varepsilon}{C}$ ce qui

achève la démonstration du théorème.

4.4. UN NOUVEL ALGORITHME DE RECHERCHE DE MEILLEURE APPROXIMATION

Dans ce qui suit Π désignera $\{1, \dots, n+2\}$

4.4.1. Idée de l'algorithme [22]

Soit Ω défini dans le lemme paragraphe 4.3.

Remarquons que du théorème paragraphe 4.3 on déduit que si $e \in \Omega$ est proche d'un point e' où $|L(f, \cdot)|$ atteint son maximum alors la meilleure approximation discrète relative à e est proche pour la norme uniforme de la meilleure approximation de f dans V .

L'idée de départ de l'algorithme est de chercher le maximum de $|L(f, \cdot)|$ par rapport à un point d'alternance variant dans $[a, b]$ les autres points d'alternances étant fixés et de substituer l'ancien point d'alternance par un nouveau point d'alternance ainsi trouvé. On recommence l'opération sur un autre point d'alternance ainsi de suite sans en oublier. On obtient ainsi une suite $\{e^k\}_k$ de points de Ω tels que $|L(f, e^k)|$ croît avec k et à l'aide du théorème fondamental on montre que les meilleures approximations discrètes de f relatives à e^k convergent uniformément vers la meilleure approximation de f dans V . Afin d'économiser du temps de calcul d'ordinateur on ne calcule le maximum de $|L(f, \cdot)|$ par rapport au $i^{\text{ème}}$ point d'alternance que sur $I_i(e)$ à la place de $[a, b]$, e_1, \dots, e_{n+2} étant les points d'alternances au début de l'opération.

4.4.2. Description de l'algorithme

On suppose que $f \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R})$

choisir $\epsilon > 0$, $\theta \in]0, 1[$, $e^0 = (e_1^0, \dots, e_{n+2}^0)$

avec $a \leq e_1^0 < \dots < e_{n+2}^0 \leq b$, $i_0 \in \Pi$.

Posons $J_0 = \emptyset$.

k^{ème} pas

On connaît e^k , $J_k \subset H$ et $i_k \in H \setminus J_k$.

Posons $d_k = |L(f, e^k)|$.

i) Déterminer $x_k \in I_{i_k}(e^k)$ et M_k un majorant de $B_{i_k}(e^k)$ (voir paragraphe 4.3) tel que si

$$d_{k+1} = |L(f, \langle e^k, i_k, x_k \rangle)|, \quad d_{k+1} \geq d_k \quad \text{et}$$

$$M_k - d_{k+1} \leq \theta(M_k - d_k)$$

ii) - Si $M_k - d_k \leq \epsilon d_k$ on pose $J_{k+1} = J_k \cup \{i_k\}$

si $J_{k+1} = H$ arrête

sinon $e^{k+1} = e^k$ aller à iii)

- sinon $J_{k+1} = \emptyset$ et $e^{k+1} = (e^k, i_k, x_k)$

iii) choisir $i_{k+1} \in H \setminus J_{k+1}$.

fin du k^{ème} pas.

THEOREME

Si l'algorithme ne s'arrête pas alors il existe $j \in H$ tel que $R_j = \{k ; i_k = j\}$ soit fini

Si l'algorithme s'arrête au k^{ème} pas, et si Q_k est le polynôme de meilleure approximation discrète de f relatif à e^k , alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de f, a, b, e^0, θ telle que :

$$\|f - Q_k\| \leq d_k \left(1 + \frac{\epsilon}{C}\right).$$

DEMONSTRATION DU THEOREME

• Premier point (par l'absurde).

Supposons que l'algorithme ne s'arrête pas et que R_j , $1 \leq j \leq n+2$, soient des ensembles infinis.

Soit $s = \min \{k ; H \subseteq (i_j ; 1 \leq j \leq k)\}$.

Du fait que $f \notin \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ et que d_k , $k \leq s$, sont croissants avec k il vient que $d_s > 0$.

En effet, si $d_s = 0$ on déduirait que f serait un polynôme de degré au plus n sur $F_k = I_{i_k}(e^k)$, $k \leq s$.

Comme la réunion des intérieurs de F_k égale $]a, b[$ on conclut que f serait un polynôme sur $]a, b[$.

Soit k tel que $M_k - d_k \geq \epsilon d_k$, on a :

$$\theta(M_k - d_k) \geq M_{k+1} - d_{k+1} = M_k - d_k + d_k - d_{k+1} \quad \text{donc :}$$

$$d_{k+1} - d_k \geq (1-\theta)(M_k - d_k) \geq (1-\theta)\epsilon d_k$$

On en déduit que pour tout $k \geq s$ tel que :

$$M_k - d_k \geq \epsilon d_k \quad \text{on a :}$$

$$d_{k+1} - d_k \geq (1-\theta)\epsilon d_s > 0.$$

Par conséquent l'éventualité $M_k - d_k \geq \epsilon d_k$ ne peut avoir lieu qu'au plus $s + \left\lceil \frac{\rho_V(f) - d_s}{(1-\theta)\epsilon d_s} \right\rceil$ fois et donc l'algorithme s'arrête, d'où contradiction.

• Deuxième point : se déduit immédiatement du Théorème paragraphe 4.3.

4.4.3. Choix de la suite $\{i_k\}_k$ pour que l'algorithme s'arrête

Dans [22] on a donné plusieurs exemples de suites $\{i_k\}$ pour que l'algorithme s'arrête. Lors des expériences numériques nous avons choisi la suite $\{i_k\}_k$ suivante :

Balayage de la gauche vers la droite :

On choisit i_0 , on définit i_{k+1} à l'aide de i_k, x_k, e^k de la façon suivante :

- Si $i_k = 1$ soit $x_k > e_2^k$ et on prend $i_{k+1} = 1$, soit $x_k \leq e_2^k$ et on pose $i_{k+1} = 2$.
- Si $1 < i_k < n+2$, $i_{k+1} = i_k + 1$
- Si $i_k = n+2$, soit $x_k < e_{n+1}^k$ et $i_{k+1} = 2$, soit $x_k \geq e_{n+1}^k$ et $i_{k+1} = 1$.

4.4.4. Remarques sur la programmation de l'algorithme

i) Une expression utile pour évaluer $|L(f, \langle e, i, x \rangle)|$

Soit $i \in \{1, \dots, n+2\}$ et g le polynôme de degré au plus n qui interpole f en e_j , $j \neq i$, $1 \leq j \leq n+2$.

Pour tout $x \in [a, b]$, $x \neq e_j$ et $j \neq i$ on a

$$L(f, \langle e, i, x \rangle) = L(f-g, \langle e, i, x \rangle)$$

et en utilisant la définition de λ_i , paragraphe 4.1, on établit :

$$|L(f, \langle e, i, x \rangle)| = \frac{|f-g|(x)}{1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+2} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i, j}}^{n+2} \left| \frac{x-e_r}{e_j-e_r} \right|}$$

On remarquera que le membre de gauche est une fonction continue de $x \in [a, b]$.

ii) Estimation d'une majoration de la dérivée seconde
de $|L(f, (e, i, x))|$ sur $J = [c, d] \subset [a, b]$

On suppose que f est deux fois continûment dérivable par intervalle et que sur chacun de ces intervalles il existe un polynôme de degré au plus p qui égale f'' (à une précision relative de 10^{-2}).

On remarque que si f est deux fois dérivable en x et

$$L(f, (e, i, x)) \neq 0 \text{ alors } ||L(f, (e, i, x))''|| = |L(f, (e, i, x))''|$$

et on montre que

$$|L(f, (e, i, x))''| \leq 0.5 (||f-g||_J + 2A_1 ||f'-g'||_J + A_2 ||f''-g''||_J)$$

avec :

$$A_1 = \max_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{n+2} \left| \sum_{j \neq i, r} \frac{1}{e_r - e_j} \left(1 - \prod_{s \neq i, j, r} \left| \frac{e_r - e_s}{e_j - e_s} \right| \right) \right|$$

$$A_2 = \max_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{n+2} \left| \sum_{j \neq i, r} \left[\frac{1}{e_r - e_j} \left(1 - 2 \prod_{s \neq i, j, r} \left| \frac{e_r - e_s}{e_j - e_s} \right| \right) \left(\sum_{t \neq i, j, r} \frac{1}{e_r - e_t} \right) \right] \right|$$

et g défini précédemment.

Cette estimation s'avère trop grossière dans la pratique.

Lors des expériences numériques, nous avons pris comme majorant de la dérivée seconde de $|L(f, (e, i, x))|$ sur $[c, d]$

$$D(n) \max_{j=1}^{n+2} |L(f, (e, i, y_j))| \text{ avec}$$

$$y_j = 0.3(c+d+(d-c)\cos(\frac{2j-1}{2(n+2)}\pi)) \text{ , } j \in \{1, \dots, n+2\} \text{ et}$$

$D(n) = n^2(n^2-1)$ ou $\frac{n^2(n^2-1)}{3}$, ce qui diminue les temps de calculs d'ordinateur.

iii) Calcul d'un maximum approché de $|L(f, \langle e^k, i_k, x \rangle)|$
sur $I_{i_k}(e^k)$.

On détermine une majoration de la dérivée seconde de
 $h_k(x) = |L(f, \langle e^k, i_k, x \rangle)|$ sur $I_{i_k}(e^k)$ comme ci-dessus

et on utilise l'algorithme des majorantes paraboliques du
 paragraphe 4, chapitre II pour déterminer les suites

$\{M_{k,q}\}_q$, $\{x_{k,q}\}_q$ et $\{y_{k,q}\}_q$ telles que :

- $y_{k,q} = h_k(x_{k,q})$
- $M_{k,q}$ majore $B_{i_k}(e^k) = z_k$
- $\{y_{k,q}\}_q$ croît vers z_k et $\{M_{k,q}\}_q$ décroît vers z_k .

On prendra comme condition d'arrêt de l'algorithme des majorantes paraboliques

$$M_{k,q} - y_{k,q} \geq \theta(M_{k,q}^{-d_k})$$

On obtient $M_k = M_{k,q}$, $x_k = x_{k,q}$ vérifiant i) du $k^{\text{ème}}$ pas de l'algorithme.

iv) Vérification

En fin d'algorithme, on calcule le polynôme de meilleure approximation discrète Q de f relatif à e^k , et on calcule $\|f-Q\|$.

Soit $\varepsilon' > 0$ choisi.

Si l'on veut que $\|f-Q\| - d_k \leq \varepsilon' d_k$, alors si en fin d'algorithme cette inégalité n'est pas vérifiée on relance l'algorithme avec ε plus petit jusqu'à ce que l'inégalité précédente soit vérifiée.

4.4.5. Généralisation

Soit X un compact de \mathbb{R} , $X \subset [a,b]$ (par exemple X est une réunion finie d'intervalles compacts), $f \in C(X, \mathbb{R})$ et V un sous-espace vectoriel de $C([a,b], \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Haar et v_1, \dots, v_n une base de V .

Soient e_1, \dots, e_{n+1} des points de X tels que $e_1 < e_2 < \dots < e_{n+1}$ et $g \in C(X, \mathbb{R})$. On définit :

$$L(g, e) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \lambda_i(e) g(e_i) \quad \text{où} \quad \lambda_i(e) = \frac{\mu_i(e)}{\mu(e)},$$

$$\mu_i(e) = \det [v_j(e_k)]_{\substack{1 \leq k \leq n+1, k \neq i \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{et} \quad \mu(e) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i(e).$$

Du fait que V vérifie la condition de Haar sur $[a, b]$ $\mu_i(e)$, $1 \leq i \leq n+1$, sont non nuls et de même signe donc $\lambda_i(e) > 0$, $1 \leq i \leq n+1$.

Il vient que L satisfait à :

- $h \rightarrow L(h, e)$ est une forme linéaire sur $C(X, \mathbb{R})$ de norme 1
- Pour tout $h \in V$, $L(h, e) = 0$
- Il existe un unique $Q \in V$ tel que

$$(f-Q)(e_i) = -(f-Q)(e_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq n$$

et $L(f-Q, e) = -(f-Q)(e_1)$

et donc les résultats de 4.4.2 et 4.4.3 restent valables.

5. RESULTATS NUMERIQUES

5.1. ETUDE DE LA RAPIDITE DE CONVERGENCE DE L'ALGORITHME DE REMES

L'algorithme utilisé est celui décrit dans le paragraphe 3. En ce qui concerne les tableaux :

- n est le degré du polynôme de meilleure approximation
- p est le nombre de pas faits dans l'algorithme
- Si Q_p est le polynôme de meilleure approximation discrète de f , d_p la distance discrète de f à $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ relative à e^p , on indique dans le tableau une valeur par excès de

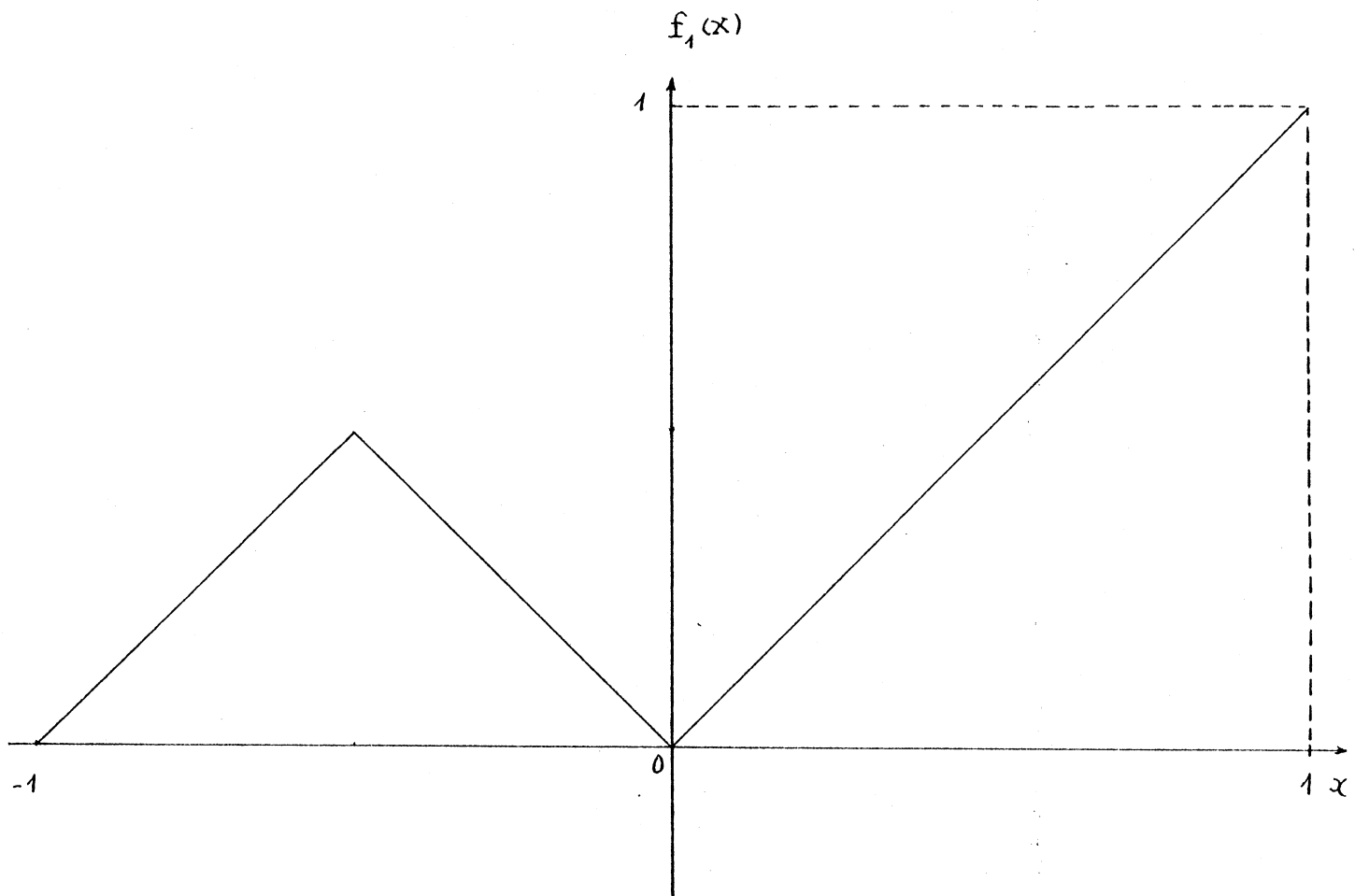
$$1 - \frac{d_p}{\|f - Q_p\|}.$$

$$\begin{aligned} 1) \quad f_1(x) &= 1+x \\ &= -x \\ &= x \end{aligned}$$

$$-1 \leq x < -0.5$$

$$-0.5 \leq x < 0.0$$

$$0 \leq x \leq 1$$



$p \backslash n$	5	6	7	8
0	0.44	0.89	0.94	0.999
2	0.36	0.44	0.77	1
4	$0.35 \cdot 10^{-2}$	$0.16 \cdot 10^{-2}$	0.35	0.99
6	$0.49 \cdot 10^{-8}$	$0.58 \cdot 10^{-5}$	$0.46 \cdot 10^{-1}$	0.87
8		$0.76 \cdot 10^{-7}$	$0.28 \cdot 10^{-3}$	0.19
10			$0.52 \cdot 10^{-6}$	0.11
12				$0.90 \cdot 10^{-2}$
14				$0.43 \cdot 10^{-3}$
16				$0.16 \cdot 10^{-3}$
18				$0.26 \cdot 10^{-5}$
20				$0.35 \cdot 10^{-6}$

2) $f_2(x) = \frac{1}{x-2}$ sur $[-1,1]$

n	3	4	5	6	7	8	9
0	1		0.99	0.99	0.99	0.98	0.98
2	0.85	0.91	0.66	0.67	0.94	0.94	0.95
4	0.14	0.24	0.30	0.42	0.79	0.86	0.88
6	0.84 10 ⁻⁴	0.16 10 ⁻¹	0.78 10 ⁻¹	0.15	0.36	0.77	0.62
8	0.48 10 ⁻⁹	0.40 10 ⁻³	0.46 10 ⁻³	0.65 10 ⁻²	0.28	0.57	0.22
10			0.66 10 ⁻⁵	0.90 10 ⁻³	0.15 10 ⁻¹	0.23	0.13
12			0.14 10 ⁻⁸	0.25 10 ⁻⁶	0.92 10 ⁻²	0.17 10 ⁻¹	0.53 10 ⁻¹
14					0.84 10 ⁻³	0.39 10 ⁻³	0.89 10 ⁻²
16					0.35 10 ⁻⁵	0.12 10 ⁻⁴	0.21 10 ⁻²
18						0.36 10 ⁻⁶	0.29 10 ⁻⁴
20							0.17 10 ⁻⁵

3) $f_3(x) = \exp(x)$ sur $[-1,1]$

$n \backslash P$	3	4	5	6	7	8
0	0.993	0.996	0.94		0.93	0.17
1	0.95	0.93	0.84		0.50	0.14
2	0.47	0.51	0.70		0.32	0.41 10^{-1}
3	0.29	0.39	0.46 10^{-1}		0.15	0.12 10^{-1}
4	0.57 10^{-1}	0.37	0.39 10^{-1}		0.8 10^{-1}	0.11 10^{-1}
5	0.65 10^{-2}	0.69 10^{-1}	0.11 10^{-1}	0.77 10^{-2}	0.24 10^{-1}	0.61 10^{-2}
7	0.54 10^{-3}	0.30 10^{-2}	0.30 10^{-2}	0.47 10^{-2}	0.65 10^{-2}	0.12 10^{-3}
8	0.19 10^{-4}	0.46 10^{-3}	0.13 10^{-2}	0.67 10^{-3}	0.14 10^{-2}	0.14 10^{-4}
9	0.17 10^{-7}	0.25 10^{-5}	0.85 10^{-5}	0.38 10^{-4}	0.94 10^{-5}	0.11 10^{-4}
10	0.19 10^{-9}	0.16 10^{-8}	0.27 10^{-5}	0.45 10^{-5}	0.41 10^{-2}	0.28 10^{-5}
11	0.26 10^{-11}		0.25 10^{-6}	0.20 10^{-5}	0.11 10^{-5}	0.12 10^{-5}
12			0.13 10^{-8}	0.14 10^{-6}	0.50 10^{-4}	0.48 10^{-6}
13				0.14 10^{-6}	0.31 10^{-6}	0.42 10^{-6}
14				0.41 10^{-8}	0.1 10^{-7}	0.56 10^{-6}

On constate :

- qu'à partir d'un certain nombre de pas $1 - \frac{d_k}{\|f-Q_k\|}$ décroît assez rapidement vers zéro ;
- qu'il est important de bien choisir les points d'alternances de départ ;
- que le nombre de pas p augmente rapidement avec le degré n du polynôme de meilleure approximation pour une même erreur $1 - \frac{d_p}{\|f-Q_p\|}$ et pour une erreur initiale $1 - \frac{d_0}{\|f-Q_0\|}$

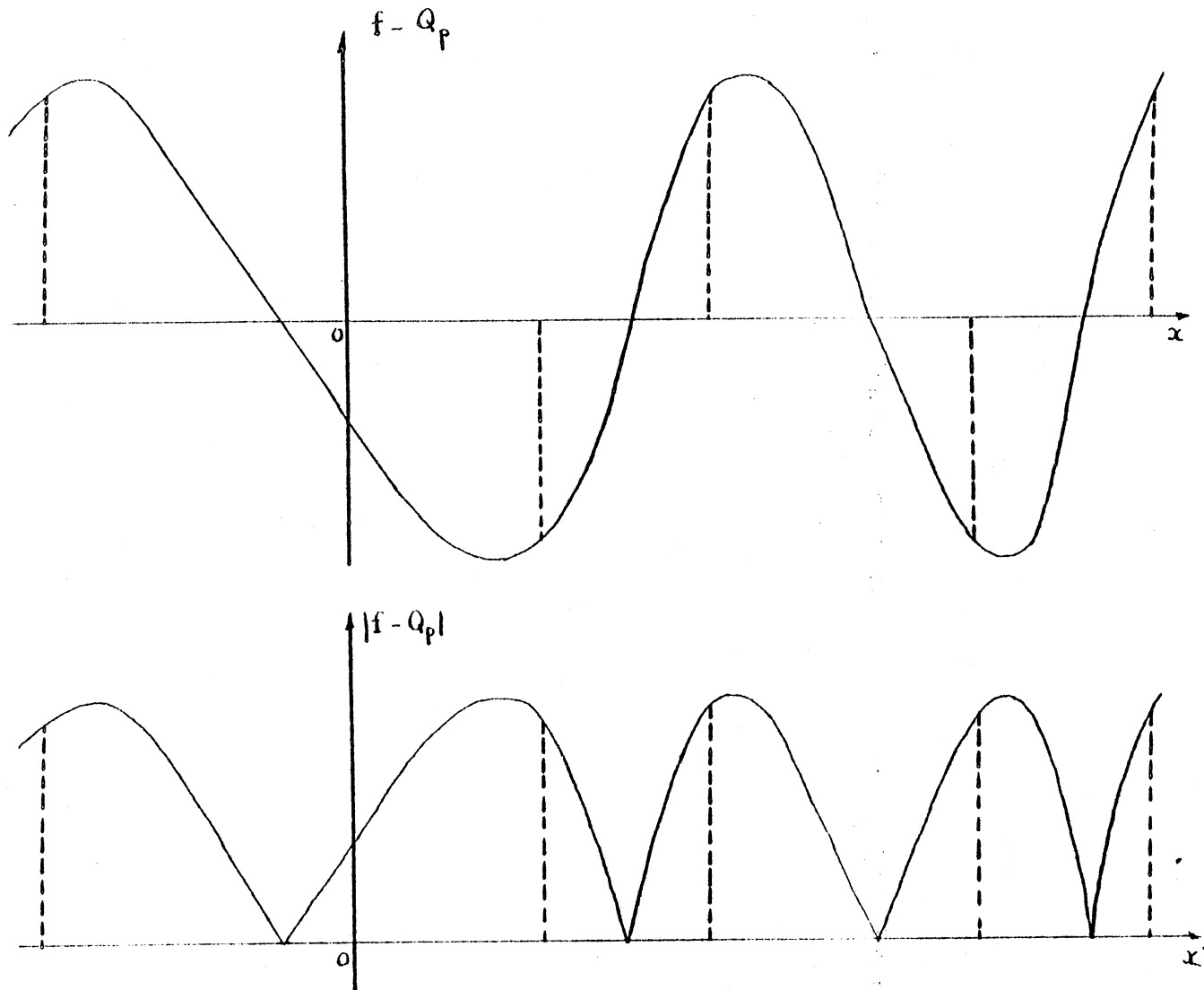
REMARQUES

1) Signalons que le nombre d'évaluations et le nombre de mémoires utilisées dans l'algorithme des majorantes partielles pour calculer $\|f-Q_p\|$ augmente rapidement, en fin d'algorithme surtout lorsque le degré du polynôme de meilleure approximation cherché est élevé.

Si l'on cherche le polynôme de meilleure approximation de degré n la fonction $|f-Q_p|(x)$ aura au moins $n+2$ maxima voisins.

Pour remédier à cet inconvénient et pour accélérer l'algorithme on pourra utiliser l'algorithme signalé dans l'annexe de ce paragraphe.

Exemple $n = 3$



2) L'algorithme du paragraphe 4 était principalement destiné à faire une correction sur les points d'alternances de départ e_1^0, \dots, e_{n+2}^0 .
On aurait pu s'attendre à ce qu'en faisant $n+2$ pas avec cet algorithme que les points d'alternances obtenus soient tels que la distance discrète de f à $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ soit du même ordre de grandeur que $E_n(f)$, ce qui n'est pas toujours le cas.
(Si $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $E_n(f) = \rho_V(f)$).

Par exemple en prenant $-0.1, -0.8, -0.6, -0.4, -0.2, 0.0, 0.2, 0.4$ comme points d'alternance de départ pour rechercher la meilleure approximation de $\frac{1}{x-2}$ sur $[-1,1]$ dans $\mathcal{P}_6(\mathbb{R})$, on obtient $d_0 = 0.373 \cdot 10^{-5}$, $d_8 = 0.1745 \cdot 10^{-4}$,
 $d_{16} = 0.105 \cdot 10^{-3}$ et $E_6\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0.1233654\dots \cdot 10^{-3}$.

ANNEXE

Algorithme de Rémès, méthode générale d'échange

[1] p. 226.

Hypothèse : Soit $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 par intervalle $f \notin \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Problème : Rechercher la meilleure approximation de f dans $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme sur $[a,b]$.

Algorithme

Choisir $\theta \in]0,1[$, $\epsilon > 0$, $e^0 = (e_1^0, \dots, e_{n+2}^0)$ tel que :

$$a \leq e_1^0 < e_2^0 < \dots < e_{n+2}^0 \leq b$$

$k^{\text{ème}}$ pas $k \geq 0$

Déterminer Q_k le polynôme de meilleure approximation discrète de f relatif à e^k et d_k la distance discrète.

- Pour tout $i \in \{1, \dots, n+2\}$ désignons par m_i^k le maximum de $f-Q_k$ sur $I_i(e^k)$ si $(f-Q_k)(e_i^k) > 0$, et, m_i^k le minimum de $f-Q_k$ sur $I_i(e^k)$ si $(f-Q_k)(e_i^k) < 0$.
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n+2\}$, déterminer $x_i^k \in I_i(e^k)$ et $y_i^k = (f-Q_k)(x_i^k)$ tels que :
 - si $(f-Q_k)(e_i^k) > 0$, $m_i^k - y_i^k \leq \theta (m_i^k - d_k)$ (*)
 - si $(f-Q_k)(e_i^k) < 0$, $m_i^k - y_i^k \geq \theta (m_i^k + d_k)$ (*)

Test d'arrêt :

Soit $m_k = \max_{i=1}^{n+2} |m_i^k|$, si $m_k - d_k < \epsilon \cdot d_k$ arrêt.

Méthode générale d'échange

Pour $i=1$ à $n+2$ poser $a_i = e_i^k$, $z_i = (f-Q_k)(e_i^k)$

Pour $i=1$ à $n+2$

- déterminer j minimal tel que $x_i^k < a_j$ en posant $j = n+3$
 - si $x_i^k > a_{n+2}$,
 - si $j = n+3$
 - .. si y_i^k et z_{n+2} sont de même signe et $|y_i^k| > |z_{n+2}|$
faire $a_{n+2} + x_i^k$ et $z_{n+2} + y_i^k$,
 - .. si y_i^k et z_{n+2} sont de signe contraire et $|y_i^k| > |z_{n+2}|$
alors
 - i) pour $l=1, n+1$ faire $a_l + a_{l+1}$ et $z_l + z_{l+1}$
 - ii) faire $a_{n+2} + x_i^k$ et $z_{n+2} + y_i^k$
 - si $j = 1$
 - .. si y_i^k et z_1 sont de même signe et $|y_i^k| > |z_1|$
faire $a_1 + x_i^k$ et $z_1 + y_i^k$,
 - .. si y_i^k et z_1 sont de signe contraire et $|y_i^k| > |z_{n+2}|$
alors
 - i) pour $l=n+2$ à $2, -1$, faire $a_l + a_{l-1}$ et $z_l + z_{l-1}$
 - ii) faire $a_1 + x_i^k$ et $z_1 + y_i^k$,
 - si $1 < j < n+3$
 - .. si y_i^k et z_j sont de même signe et $|y_i^k| > |z_j|$
faire $a_j + x_i^k$ et $z_j + y_i^k$
 - .. si y_i^k et z_j sont de signe contraire et $|y_i^k| > |z_{j-1}|$
faire $a_{j-1} + x_i^k$ et $z_{j-1} + y_i^k$.

Fin de l'échange :

On définit $e^{k+1} = (a_1, \dots, a_{n+2})$.

Sur la programmation de l'algorithme

Pour déterminer y_i^k et x_i^k vérifiant (*), on détermine un majorant de $|(f-Q_k)''(x)|$ sur $I_i(e^k)$, et, à l'aide de l'algorithme des majorantes partielles, on détermine des suites $\{M_{i,q}^k\}_q$, $\{y_{i,q}^k\}_q$, $\{x_{i,q}^k\}_q$ telles que si l'on définit $s = 1$ si $(f-Q_k)(e_i^k) > 0$, et $s = -1$, sinon, on ait :

- i) $M_{i,q}^k \geq \sup_{x \in I_i(e^k)} s(f-Q_k)(x) = s \cdot m_i^k$
- ii) $y_{i,q}^k = (f-Q_k)(x_{i,q}^k)$
- iii) $\{s M_{i,q}^k\}_k$ et $\{y_{i,q}^k\}_k$ sont des suites convergentes vers $s \cdot m_i^k$.

Soit ℓ la plus petite valeur de q telle que :

$$M_{i,q}^k - s y_{i,q}^k \leq \theta(s \cdot y_{i,q}^k - d_k)$$

On pose $y_i^k = y_{i,\ell}^k$, $x_i^k = x_{i,\ell}^k$, $M_i^k = M_{i,\ell}^k$

(*) est alors vérifié et le test d'arrêt sera vérifié si

$$\max_{i=1}^{n+2} M_i^k - d_k < \epsilon \cdot d_k.$$

5.2. COMPARAISON DE L'ALGORITHME DE REMES ET DU NOUVEL ALGORITHME

- n désigne le degré du polynôme de meilleure approximation
- p le nombre de pas
- N.A veut dire nouvel algorithme
- A.R. signifiera algorithme de Rémès.

Après une discrétisation fictive de l'intervalle $X = [-1,1]$ et en prenant les mêmes points d'alternances de départ on compare d_p et $\|f-Q_p\|$ où Q_p est le polynôme de meilleure approximation discrète relatif aux points obtenus au $p^{\text{ème}}$ pas :

- i) Après un même nombre de recherche de point de X
A.R première ligne
- ii) Après un même nombre de multiplication
A.R deuxième ligne (on suppose ne connaître qu'une tabulation de f)

1) $f_1(x)$ sur $[-1,1]$ définie en 5.1.

	n	p	ρ^p	$\ f_1 - Q^p\ $
N.A.	6	22	0.53644 10^{-1}	0.53653 10^{-1}
A.R.		7	0.53645 10^{-1}	0.53487 10^{-1}
		13	0.53645816327 10^{-1}	0.5364581634 10^{-1}
N.A.	7	25	0.5177 10^{-1}	0.5183 10^{-1}
A.R.		7	0.5169 10^{-1}	0.5208 10^{-1}
		14	0.5177732 10^{-1}	0.51777321 10^{-1}
N.A.	8	52	0.33726 10^{-1}	0.337277 10^{-1}
A.R.		12	0.33093 10^{-1}	0.340134 10^{-1}
		21	0.337267197 10^{-1}	0.337267205 10^{-1}

les points d'alternances de départ étant :

n=6 : -1 , -0.66 , -0.33 , 0.0 , 0.2 , 0.4 , 0.6 , 1

n=7 : -1 , -0.6 , -0.4 , -0.2 , 0.0 , 0.2 , 0.4 , 0.6 , 1

n=8 : -1 , -0.6 , -0.4 , -0.2 , -0.1 , 0.1 , 0.2 , 0.4 , 0.6 , 1

2) $f_2(x) = \frac{1}{x-2}$ sur $[-1, 1]$

	n	p	ρ^p		$\ E_2-Q^p\ $	
N.A.	6	28	0.1233643	10^{-1}	0.1233697	10^{-3}
A.R.		9	0.1202	10^{-3}	0.141	10^{-3}
		16	0.12336542	10^{-3}	0.12336545	10^{-3}
N.A.	7	25	0.3305347	10^{-4}	0.330571	10^{-4}
A.R.		8	0.2689	10^{-4}	0.41574	10^{-4}
		16	0.330483	10^{-4}	0.33081	10^{-4}
N.A.	8	27	0.88569	10^{-5}	0.88581	10^{-5}
A.R.		8	0.6074	10^{-5}	0.1825	10^{-4}
		15	0.88545	10^{-5}	0.88693	10^{-5}
N.A.	9	42	0.23732	10^{-5}	0.23735	10^{-5}
A.R.		10	0.23118	10^{-5}	0.2629	10^{-5}
		20	0.23732894	10^{-5}	0.2373294	10^{-5}

les points d'alternances de départ étant :

- n=6 : -1 , -0.8 , -0.6 , -0.4 , -0.2 , 0.0 , 0.2 , 0.4
- n=7 : -1 , -0.8 , -0.6 , -0.4 , -0.2 , 0.0 , 0.2 , 0.4 , 0.8
- n=8 : -1 , -0.8 , -0.6 , -0.4 , -0.2 , 0.0 , 0.2 , 0.4 , 0.6 , 0.
- n=9 : -1 , -0.8 , -0.6 , -0.4 , -0.2 , 0.0 , 0.2 , 0.4 , 0.6 ,
0.8 , 1

3) $f_3(x) = \exp(x)$ sur $[-1, 1]$

	n	p	ρ^p	$\ f_3 - Q^p\ $
N.A.	4	24	0.546667549 10^{-3}	0.5466677 10^{-3}
A.R.		10	0.546658 10^{-3}	0.5466985 10^{-3}
		13	0.5466676002 10^{-3}	0.5466676011 10^{-3}
N.A.	9	39	0.551706 10^{-9}	0.551782 10^{-9}
A.R.		8	0.5183 10^{-9}	0.7156 10^{-9}
		16	0.55159 10^{-9}	0.55187 10^{-9}

les points d'alternances de départ étant :

n=4 : -1 , -0.9 , -0.8 , -0.7 , -0.6 , -0.5

n=9 : -1 , -0.8 , -0.6 , -0.4 , -0.2 , 0.0 , 0.2 , 0.4 ,
0.6 , 0.8 , 1

On déduit que si l'on discrétise l'intervalle le nouvel algorithme donne en général d'aussi bon résultats que l'algorithme de Rémès (lorsque n est grand).

Dans le cas où on ne discrétise pas l'intervalle on s'aperçoit que le temps d'exécution des deux algorithmes dépend beaucoup du choix de la majoration de la dérivée seconde lors du calcul du maximum, et l'algorithme de Rémès est le plus sensible à ce choix.

On constate d'autre part que dans ces deux algorithmes il n'est pas nécessaire de prendre un majorant du module de la dérivée seconde des fonctions dont on calcule le maximum.

Signalons que les temps de calcul pour une même précision sur $\rho_V(f)$ sont semblables pour les deux algorithmes.

5.3. CONCLUSION

Le nouvel algorithme (balayage de la gauche vers la droite) ne donne pas en général (sur les exemples traités) une meilleure correction des points d'alternance de départ que l'algorithme de Rémès (méthode simple d'échange).

L'algorithme de Rémès méthode générale d'échange est une méthode adaptée à la méthode des majorantes paraboliques paragraphe 4 , chapitre II et peut être une méthode efficace pour rechercher les polynômes de meilleure approximation de fonction (et utilisable peut être pour faire du prolongement quasi-analytique dans les classes de Bernstein).

Enfin, il serait aussi intéressant d'étudier le nouvel algorithme en utilisant d'autre exemple de suite $\{i_k\}_k$.

- [1] N. BAKHVALOV : Méthodes numériques. Edition de Moscou 1976.
- [2] I. BARRODALE, L.M. DELVES and J.C. MASON : Linear Chebyshev approximation of complex-valued function. Mathematics of Computation, Vol.32, Number 143, July 1978, p 853-863 .
- [3] I. BARRODALE and C. PHILLIPS : Algorithm 495 , solution of an overdetermined system of linear equation in the Chebyshev norm [F4] . ACM Transaction on Mathematical Software, Vol.1, No.3, September 1975, p 264-270 .
- [4] Richard H. BARTELS and Gene H. GOLUB : Stable numerical methods for obtaining the Chebyshev solution to an overdetermined system of equations . Communication of the ACM Vol.11, N.6, June 1968, p 401-406 .
- [5] Richard H. BARTELS and Gene H. GOLUB : Algorithm 328, Chebyshev solution to an overdetermined linear system [F4] . Communication of the ACM Vol.11, N.6, June 1968, p 428-430.
- [6] C. CARASSO : Etude de l'algorithme de Rémès en l'absence de condition de Haar . Numer. Math. ,20 (1972), p 165-178 .
- [7] C. CARASSO et P.J. LAURENT : Un algorithme de minimisation en chaine en optimisation convexe . Siam J. Control and Optimization , Vol.16, No.2, March 1978, p 209-235 .
- [8] C. CHENEY and A.A. GOLDSTEIN : A finite algorithm for the solution of consistent inequalities and for the Tchebycheff approximation of inconsistent linear equations . Pacific J. Math. 8, 415-427, 1958 .
- [9] C. CHENEY and A.A. GOLDSTEIN : Newton's method for convex programming and Tchebycheff approximation . Numer. Math. 1, 253-268 (1959) .

- [10] C. W. CLENSHAW : Chebyshev series for mathematical functions. National Physical Lab., Math. Tables 5, HM Stat. Off., London , 1962 .
- [11] A.K. CLINE : Rate of convergence of Lawson's algorithm. Math. Comp. , V.26, 1972, p 167-176, MR 45 7921 .
- [12] Charles B. DUNHAM : Discrete Chebyshev approximation, alternation and the Remez algorithm. ZAMM 58, 326-328, 1979.
- [13] Charles B. DUNHAM : A survey of published programs for best approximation. Journal of Comp. and Applied Mathematics, Vo.5, No.2, 1979, p 141-143 .
- [14] S. ELLACOT and Jack WILLIAMS : Linear Chebyshev approximation in the complex plane using Lawson's algorithm . Mathematics of Computation Vol.30,N.133, January 1976, 35-44.
- [15] David ELLIOT and Binh LAM : An estimate of $E_n(f)$ for large n^* . Siam J. Numer. Anal. Vol.10? No.6, December 1973, 1091-1102 .
- [16] G.H.GOLUB and L.B. SMITH : Algorithm 414, Chebyshev approximation of continuous functions by a Chebyshev system of functions [E2] . Com. ACM Vol.14, N.11, November 1971, 737-746.
- [17] Georges HORNECKER : Evaluation approchée de la meilleure approximation polynomiale d'ordre n de $f(x)$ sur un segment fini $[a,b]$. CHIFFRE 1, (1958), p 157-169 .
- [18] P.J. LAURENT : Approximation et optimisation. Hermann, Paris 1972 .
- [19] P.J. LAURENT and C. CARASSO : An algorithm of successive minimization in convex programming. R.A.I.R.O. Analyse Numérique/Numerical Analysis V.12, N.4, 1978, p 377-400 .
- [20] Günter MEINARDUS : Approximation of functions, theory and numerical methods. Springer Tracts in Natural Philosophy, Vo.13, Springer Verlag 1967 .

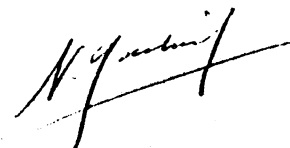
- [21] Gehard OFFER : An algorithm for the construction of best approximations based on Kolmogorov's criterion .
Journal of approximation theory 23, 299-317 (1978) .
- [22] T. REBOUL : Unalgorithme ressemblant au 2^{ème} algorithme de Rémès . Séminaire IMAG N.35, 11 Déc. 1980, U.S.M.GRENOBLE.
- [23] E.JA. REMES : Sur la détermination des polynômes d'approximation de degré donné. Comm.Soc.Math.Kharkov 10,41-63(1934).
- [24] John RICE : The approximations of functions Vol. II, advanced topics. Addison Wesley publishing company (1969).
- [25] Theodore RIVLIN : The Chebyshev polynomials .
Wiley-Interscience (1970) .
- [26] T.J. RIVLIN and E.W. CHENEY : A comparison of uniform approximations on a interval and a finite subset thereof.
J. SIAM Numer.Anal.vol.3, No.2, 1966, p 311-320.
- [27] T.J. RIVLIN and H.S. SHAPIRO : A unified approach to certain problems of approximation and minimization.
J.Soc.Indust.Appl.Math.Vol.9, No.4,December 1961,p 670-699.
- [28] D.M. SIMMONS : Non linear programming for operations research.
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975 (Chapter 9) .
- [29] P.D. SCOTT : A descent algorithm for linear continuous Chebyshev approximation. J. of App. Theory 6, 231-241 (1972) .
- [30] I. COLLATZ & W. WETTERLING : Optimization problems.
Springer-Verlag , Berlin and New York, 1975 ,p 278-280.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 30 juin 1981

Le Président de la thèse



Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

