Contribution à l'étude des points singuliers des systèmes différentiels linéaires

Abdelaziz Hilali

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE
Mathématiques Appliquées
(Analyse Numérique)

par

Abdelaziz HILALI

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES POINTS SINGULIERS DES SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES.

Thèse soutenue le 26 avril 1982 devant la Commission d'Examen :

Monsieur	N. GASTINEL	: Président
Messieurs	J. DELLA DORA	Examinateurs
	B. MALGRANGE	
	J. THOMANN	

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

année scolaire 1980-1981

Président de l'Université : M. J.J. PAYAN

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

Mlle	AGNIUS DELORD Claudine	Biophysique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Clinique dermatologie
	AMBROISE THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	Physique nucléaire
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique pédiatrie et puériculture
	BELORISKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
M.	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale & traumatologie
	BILLET Jean	Géographie
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET EYMARD Joseph	Clinique Hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Jane-Marie	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie

.../...

MM.	BUTEL Jean	Orthopédie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologie et hydrologie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHARACHON Robert	Clinique O.R.L.
	CHATEAU Robert	Clinique neurologique
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Chimie analytique et bromotologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	CRABBE Pierre	C.E.R.M.O.
	DAUMAS Max	Géographie
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DELORMAS Pierre	Pneumo-phtisiologique
	DENIS Bernard	Clinique cardiologique
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Electrochimie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée IUT 1
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Jean-Micnel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electro-radiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	JEANNIN Charles	Pharmacie galénique
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	KAHANE André	Physique
	KAHANE Josette	Physique
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	LACAZE Albert	Hermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie cellulaire
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique

.../...

Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie thoracique
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutiques
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LE NOC Pierre	Bactériologie virologie
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LOUP Jean	Géographie
	LUU DUC Cuong	Chimie générale et minérale
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
Mlle	MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognostie
MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	NEGRE Robert	Mécanique IUT 1
	MOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OMONT Alain	Astrophysique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	PERRIER Guy	Géophysique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	RACHAIL Michel	Clinique médicale B
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
M.	REVOL Michel	Urologie
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
MM.	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
Mme	SEIGLE MURANDI Françoise	Botanique et crytogamie
MM.	SENGEL Philippe	Biologie animale
	SIBILLE Robert	Construction mécanique IUT 1
	SOUTIF Michel	Physique
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

.../...

MM.	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
	VERAIN André	Biophysique
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

MM.	ARNAUD Yves	Chimie IUT 1
	AURIAULT Jean-Louis	Mécanique IUT 1
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BOITET Christian	Mathématiques appliquées
	BOUTHINON Michel	E.E.A. IUT 1
	BRUGEL Lucien	Energétique IUT 1
	BUISSON Roger	Physique IUT 1
	CASTAING Bernard	Physique
	CHARDON Michel	Géographie
	CHEHIKIAN Alain	E.E.A. IUT 1
	COHEN Henri	Mathématiques pures
	COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTE René	Physique IUT 1
	CYROT Michel	Physique du solide
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
	GASPARD François	Physique
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Maurice	Géologie
	GIGNOUX Claude	Sciences nucléaires
	GLENAT René	Chimie organique
	GOSSE Jean-Pierre	E.E.A. IUT 1
	GROS Yves	Physique IUT 1
	GUITTON Jacques	Chimie
	HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
	HERBIN Jacky	Géographie
	HICTER Pierre	Chimie
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
	KERCKOVE Claude	Géologie

.../...

MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique IUT 1
	KUPKA Yvon	Mathématiques pures
	LUNA Domingo	Mathématiques pures
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
Mme	MINIER Colette	Physique IUT 1
MM.	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
	OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
	PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie minéralogie
	PERRIN Claude	Sciences nucléaires
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
	ROBERT Gilles	Mathématiques pures
	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	ROSSI André	Physiologie végétale
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
	SARROT REYNAUD Jean	Géologie
	SAXOD Raymond	Biologie animale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique
MM.	STUTZ Pierre	Mécanique
	VIALON Pierre	Géologie
	VIDAL Michel	Chimie organique
	VIVIAN Robert	Géographie

CHARGES D'ENSEIGNEMENT PHARMACIE

MM.	ROCHAS Jacques	Hygiène et hydrologie
	DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie

PROFESSEURS SANS CHAIRE (médecine)

M.	BARGE Michel	Neuro-chirurgie

.../...

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie (hormonologie)
	CHAMPETIER Jean	Anatomie
	COLOMB Maurice	Biochimie
	COULOMB Max	Radiologie
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GROULADE Joseph	Biochimie A
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Gérontologie
	JALBERT Pierre	Histologie
	MAGNIN Robert	Hygiène
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VROUSOS Constantin	Radiothérapie

MAITRES DE CONFERENCES AGREGES (médecine)

MM.	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BENABID Alim Louis	Médecine et chirurgie
	BERNARD Pierre	Gynécologie obstétrique
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DEBRU Jean-Luc	Médecine interne
	DYON Jean-François	Chirurgie infantile
	FAURE Claude	Anatomie et organogénèse
	FAURE Gilbert	Urologie
	FLOYRAC Roger	Biophysique
	FOURNET Jacques	Hépato-gastro-entérologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIRARDET Pierre	Anesthésiologie
	GUIDICELLI Henri	Chirurgie générale
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique (réanimation)
	JUNIEN-LAVILLAUROY Claude	Clinique O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie biologique
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MASSOT Christian	Médecine interne
	MOUILLON Michel	Ophtalmologie

.../...

MM.	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	RACINET Claude	Gynécologie-Obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
	SCHAEFER René	Cancérologie
	SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-virologie
	SOTTO Jean-Jacques	Hématologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie-pathologique

A mes Parents,

à mes Frères et Soeurs.

Je remercie vivement Monsieur le Profsseur **N. Gastinel** de l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse. Il s'est intéressé de près à mon sujet, pendant de nombreuses heures il m'a soutenu, conseillé et critiqué. Qu'il me permette cependant de lui exprimer ma respectueuse gratitude.

C'est un grand honneur pour moi que Monsieur le Professeur **B. Malgrange** accepte de faire partie de ce jury, ses travaux ont été l'outil principal de cette thèse. J'ai pu librement les consulter, il m'a souvent accueilli et enseigné. Pour tout cela je le prie de bien vouloir accepter toute ma reconnaissance et mes remerciements.

Que Monsieur **J. Thomann** reçoive mes plus sincères remerciements d'être venu de Strasbourg pour juger ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur **Jean Della Dora** de m'avoir accueilli au sein de l'équipe d'analyse numérique et de m'avoir bien conduit à mener à bien ce travail. Il a su m'intéresser au probléme des singularités des équations différentielles, m'a donné constamment des conseils et encouragements. Son amitié et sa sympathie ont beaucoup compté pour moi.

Je tiens à remercier par la même occasion Mesdemoiselles **Cl. Dicrescenzo** et **E. Tournier** de m'avoir témoigné leur gentillesse. Elles ont lu et corrigé avec patience les algorithmes de cette thèse. Pour tout cela je les remercie du fond du coeur.

Ce travail doit encore à Monsieur **J.P. Ramis** qui nous a constamment communiqué ses travaux, ils ont été trés utils pour l'accomplissement de ce travail. Qu'il soit remercié ici.

Je voudrais remercier très sincèrement Madame **Hirtz** pour ses multiples renseignements bibliographiques, Madame **Cl. Meyrieux** pour la frappe d'une grande partie de cette thèse malgré son planing chargé ainsi que le service de reproduction pour la qualité de son travail.

Enfin que tous les membres de l'équipe reçoivent mes plus sincères remerciements pour leur sympathie et leur dévouement.

A. Hilali

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 3

CARACTERISATION DES SYSTEMES DIFFERENTIELS A SINGULARITE REGULIERE

Première Partie : Critère de Malgrange

Deuxième Partie : Réductibilité d'un système différentiel

CHAPITRE 4

SOLUTIONS FORMELLES DES SYSTEMES DIFFERENITELS AU VOISINAGE DES POINTS SINGULIERS REGULIERS

QUELQUES NOTATIONS

* $\mathbb{C}[[x]]$: L'algèbre des séries formelles en une indéterminée sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Ce sont des expressions de type $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ sans conditions de convergence.

* $\mathbb{C}((x))$: Le corps des fractions de l'anneau des séries formelles. Ce sont des expressions de type $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k x^k$ avec les a_k $(k < 0)$ tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux

* $M_{n,n}(\mathbb{C}((x))$: L'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}((x))$.

* $Gl(n,\mathbb{C}((x))$: Le groupe des matrices inversibles de $M_{n,n}(\mathbb{C}((x))$

INTRODUCTION GENERALE

On s'intéresse dans ce travail à la caractérisation des systèmes différentiels linéaires à singularité régulière . Dans la littérature,ce problème a été étudié par plusieurs auteurs. Voir [6],[10],[11],[13].

Pour une équation différentielle scalaire de la forme

(1) $$\frac{d^n}{dx^n} y + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)\, y = 0$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n$ appartiennent à $\mathbb{C}((x))$, on possède un critère très pratique et bien connu dû à Fuchs : " **$x=0$ est une singularité régulière de (1) si et seulement si , pour tout $i = 1,2,\dots,n$, a_i a un pôle d'ordre inférieur ou égal à i** " . Un critère aussi simple n'est pas connu pour un système différentiel :

S(h) : $$Y'(x) = \frac{A(x)}{x^h} Y(x) \qquad ; \qquad h>1$$

où $Y^t = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ et $A \in M_{n,n}(\mathbb{C}[[x]])$ avec $A(0) \neq 0$.

L'origine est une singularité régulière pour un système S(h) si tout système fondamental de solutions Φ est de la forme :

(2) $$\Phi(x) = P(x).x^R$$

où $P \in M_{n,n}(\mathbb{C}((x)))$ et $R \in M_{n,n}(\mathbb{C})$.

Ceci est le cas où h = 1, **mais celà est également possible lorsque h>1.** En fait tout système différentiel S(h) ayant une singularité régulière à l'origine se ramène à un système S(1) par une transformation :

(3) $$Y(x) = T(x).Z(x)$$

où $T \in G\ell(n,\mathbb{C}(x))$. Par une telle transformation, le système S(h) devient :

S(1)
$$Z'(x) = \frac{B(x)}{x} Z(x)$$

où $B \in M_{n,n}(\mathbb{C}[[x]])$ vérifie la relation :

$$\frac{B(x)}{x} = T^{-1} \frac{A(x)}{x^h} T - T^{-1} T'$$

Une grande partie de cette thèse est basée sur une idée de B.Malgrange cf. [11], qui a remarqué que l'on peut toujours se ramener par l'intermédiaire d'un vecteur cyclique (cf,chap.2) à une équation différentielle scalaire.

On présente dans le premier chapitre un algorithme (Méthode de Birkohoff-Cope) programmé en language de calcul formel (Reduce) pour réduire un système différentiel de la forme S(h) à une équation différentielle de la forme (1).

Au chapitre deux, on démontre quelques propriétés du vecteur cyclique permettant la réduction du système S(h) à (1).

Le troisième chapitre est composée de deux parties :

- Dans la première, on applique le critère de B.Malgrange pour lequel les deux premiers chapitres sont l'outil principal. Nous obtenons ainsi les résultats suivants :

  .) Un moyen pratique pour calculer l'irrégularité (cf. chap3. $1^{ère}$ partie) de la singularité du système.

  .) Une caractérisation des systèmes différentiels à singularité régulière.

  .) Un moyen pour calculer la transformation T.

- Dans la deuxième partie, on reprend le critère de J.Moser cf [13] en lui donnant un caractère plus pratique. On donne :

  .) Une condition nécessaire et suffisante permettant de reconnaitre si un système différentiel est réductible.

  .) Un algorithme qui calcule la transformation T(x) dans certains cas et qui réduit le système S(h) sous la forme :

$$S(h^*) \qquad Y'(x) = \frac{B(x)}{x^{h^*}} Y(x)$$

où h^* est la valeur minimale de h lorsque on applique à S(h) toutes les transformations possibles. On peut par ce même algorithme d'ailleurs calculer l'invariant de Moser cf p. 83.

La singularité régulière est caractérisée par $h^* = 1$.

Dans le chapitre quatre, nous développons deux algorithmes pour la détérmination d'un système fondamental de solutions formelles d'un système différentiel linéaire homogène au voisinage d'un point singulier régulier. Le premier algorithme est dû à W.Wasow cf. [17], on donne un système fondamental $\Phi(x)$ sous la forme :

$$\Phi(x) = T(x)\, x^C$$

où $T \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C}[[x]])$ et $C \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

Le deuxième algorithme est en grande partie dû à L.Sirovich cf. [16]. On peut considérer cet algorithme comme une généralistion de l'algorithme de Frobenius [9] pour les systèmes différentiels. On détérmine les solutions vectorielles Y sous la forme :

$$Y(x) = x^{\lambda}(\phi_0(x) + (\mathrm{Log}x)\, \phi_1(x) + \ldots + \phi_k(x)\, (\mathrm{Log}x)^k)$$

où les ϕ_i sont des vecteurs colonnes à n composantes, à coefficients dans $\mathbb{C}[[x]]$. On donne à la fin de ce chapitre quelques exemples.

CHAPITRE 1

REDUCTION D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL LINEAIRE HOMOGENE A UNE SEULE EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE HOMOGENE

1. INTRODUCTION

On présente dans ce chapitre une méthode pour la réduction d'un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 de la forme :

$$(1) \qquad y_i' = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} y_j(x) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

à une seule équation différentielle linéaire homogène d'ordre n de la forme :

$$(2) \qquad a_0(x) \frac{d^n}{dx^n} y + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y + \ldots + a_n(x)\, y = 0$$

où les a_{ij} et les a_i appartiennent au même corps $\mathbb{C}(x)$ des fractions rationnelles (la même étude peut s'étendre au corps des séries formelles $\mathbb{C}((x))$.

Cette méthode dûe à G. Birkhoff [1] pour les systèmes linéaires aux différences a été reprise par la suite par F. Cope [3] pour les systèmes différentiels.

Nous avons développé dans [7],une autre méthode dûe à Samuelson [15] qui n'est qu'un cas particulier de la première.

Le but de cette étude est de construire un système fondamental de solutions formelles de (1) à partir de celles de l'équation différentielle (2) associée à (1). D'autre part il existe un critère pratique et très simple, pour mesurer l'irrégularité [12] d'un point singulier d'une équation différentielle de la forme (2). Tandis que pour un système (1), **un critère aussi simple n'est pas connu.**

2. SYSTEME DIFFERENTIEL ASSOCIE A UNE EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE HOMOGENE

Soit une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n ,

$$a_0(x)\, y^{(n)}(x) + a_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)\, y = 0 \tag{3}$$

où

$$a_0(x) \neq 0 \quad , \quad a_i \in \mathbb{C}((x)) \qquad (i = 0,1,\dots,n)$$

Il est bien connu que (3) peut toujours se ramener à une système différentiel linéaire homogène d'ordre 1.

En effet, si on pose $y_1 = y$, $y_{i+1} = y_i'$ $(i=1,2,\dots,n-1)$

on a :

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \\ \\ y_n' = -\dfrac{a_n(x)}{a_0(x)}\, y_1 - \dots - \dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}\, y_n \end{cases}$$

Ce qui peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$Y'(x) = C(x)Y(x) \tag{4}$$

où $Y(x)$ est le vecteur colonne $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ et $C(x)$ est une matrice compagnon d'ordre n :

$$C(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ -\dfrac{a_n}{a_0} & & & & & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}$$

on obtient ainsi un système différentiel linéaire dont les coefficients sont des fractions rationnelles si les coefficients $a_i(x)$ de l'équation (3) le sont aussi. Il est clair que si y est solution de l'équation (3), le vecteur colonne $(y,y', \dots, y^{(n-1)})$ est solution de (4). Inversement, si $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ est solution de (4), y_1 est solution de (3).

On appellera le système différentiel (4) ; **le système différentiel associé à l'opérateur** D , où D est défini par :

$$D = \frac{d^n}{dx^n} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{a_n(x)}{a_0(x)}$$

3. EQUIVALENCE DE DEUX SYSTEMES DIFFERENTIELS

Considérons maintenant le système (1) qu'on écrit matriciellement sous la forme :

$$(1) \qquad Y'(x) = A(x)Y(x)$$

où cette fois $A(x) = (a_{ij})_{i,j}$ est une matrice appartenant à $M_{n,n}(\mathbb{C}((x)))$ et $Y^t = (y_1,y_2,\dots,y_n)$.
Au lieu des fonctions $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ introduisons les nouvelles fonctions inconnues $z_1(x),z_2(x),\dots,z_n(x)$ au moyen de la transformation

$$(5) \qquad Y(x) = T(x)Z(x)$$

où T est une matrice appartenant à $G\ell(n,\mathbb{C}((x)))$.
Z est le vecteur colonne qui a pour composantes les nouvelles fonctions $z_1(x),z_2(x),\dots,z_n(x)$.
Par ce changement de variables, le système (1) devient

$$(6) \qquad Z'(x) = B(x)\ Z(x)$$

où

$$B(x) = T^{-1}A\ T - T^{-1}T'$$

La transformation (5) nous établit une correspondance biunivoque entre les solutions des systèmes (1) et (6) ; de plus les solutions linéairement indépendantes du sytème (1) le restent après la transformation.

Définition1

Deux systèmes différentiels :

(1) $$Y'(x) = A_1(x)\,Y(x)$$

(2) $$Y'(x) = A_2(x)\,Y(x)$$

où A_1, A_2 appartiennent à $M_{n,n}(\mathbb{C}((x)))$, sont dits **équivalents** dans $\mathbb{C}((x))$ si et seulement si il existe une transformation $T(x) \in G\ell(n, \mathbb{C}((x)))$ telle que :

$$A_2 = T^{-1} A_1\, T - T^{-1} T'$$

Dans les mêmes conditions, nous dirons que :
A_1 et A_2 **sont équivalents par la transformation T.**

4. METHODE DE BIRKHOFF - COPE [1], [3]

Soit le système différentiel

(1) $$y_i' = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}(x)\, y_j(x) \qquad i=1,2,\dots,n$$

où les a_{ij} sont dans $\mathbb{C}(x)$ et soit A, la matrice dont les coefficients sont les a_{ij}, on pose :

(7) $$y(x) = \lambda_1(x)y_1(x) + \lambda_2(x)y_2(x) + \dots\ \lambda_n(x)y_n(x)$$

où les $\lambda_i(x)$ sont des fonctions arbitraires pour l'instant. En dérivant successivement $y(x)$ et en en remplaçant à chaque étape $y_i'(x)$ par son expression (1), on obtient (n+1) équations :

(8) $$\left\{\begin{array}{l} y(x) = \lambda_{01}(x)y_1(x) + \dots + \lambda_{0n}(x)y_n(x) \\ y'(x) = \lambda_{11}(x)y_1(x) + \dots + \lambda_{1n}(x)y_n(x) \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ y^{(n)}(x) = \lambda_{n1}(x)y_1(x) + \dots + \lambda_{nn}(x)y_n(x) \end{array}\right.$$

où les $\lambda_{ij}(x)$ sont données par les formules suivantes :

(9)
$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda_{0i}(x) = \lambda_i(x) & i = 1,2,\ldots,n \\ \lambda_{ij}(x) = \lambda'_{i-1j}(x) + \sum\limits_{k=1}^{k=n} \lambda_{i-1k}(x)a_{kj}(x) & \\ i=1,2,\ldots,n & \\ j=1,2,\ldots,n & \end{array}}$$

Pour que le système (8) admette des solutions non triviales, il faut que le déterminant de la matrice suivante :

(10)
$$\begin{vmatrix} y & \lambda_{01} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{0n} \\ y' & \lambda_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{1n} \\ & & & & & \\ y^{(n)} & \lambda_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{nn} \end{vmatrix}$$

soit identiquement nul.

Il en résulte alors une relation linéaire homogène entre les dérivées successives de la fonction $y(x)$ de la forme :

(11)
$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

où l'un au moins des a_i est non identiquement nul, on peut écrire les formules (9) sous une forme vectorielle. Soient les vecteurs linéaires :

$$Y_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{in}) \qquad i=0,1, \ldots ,n$$

On a :

(12)
$$\boxed{\begin{array}{ll} Y_0 = (\lambda_{01}, \lambda_{02}, \ldots ,\lambda_{0n}) & \\ Y_i = Y'_{i-1} + Y_{i-1}A & i=1,2, \ldots ,n \end{array}}$$

Si A_i pour $i=0,\dots,n$ désignent les matrices co-facteurs de $y^{(n-i)}$ dans la matrice (10) , on a :

$$A_0 = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{n-1} \end{bmatrix} \qquad\qquad A_i = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \cdot \\ Y_{n-i-1} \\ Y_{n-i+1} \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix} \quad i=1,2,\dots,n$$

et

$$a_i(x) = (-1)^i \det(A_i(x)) \ , \ i=0,1,\dots,n$$

où les $a_i(x)$ sont les coefficients de l'équation différentielle (5). Dans son article [14] , J.P. Ramis a montré que l'on peut toujours choisir les $\lambda_i(x)$ comme étant des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$, telles que la condition suivante :

(13) $$a_0(x) = \det(A_0(x)) \not\equiv 0$$

soit satisfaite. La démonstration de ceci résulte immédiatement du lemme suivant :

Lemme [14]

Soit x_0 appartenant à $\mathbb{C}$ qui n'est pas pôle des fonctions a_{ij} $(i=1,2,\dots,n \ ; \ j=1,2,\dots,n)$.
Soit $L \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice fixée (arbitraire).
Alors on peut trouver :

$$Y_0(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ \dots \ , \lambda_n(x)) \in \left(\mathbb{C}[x]\right)^n$$

avec de degré de $\lambda_i \leqslant n-1$ $(i=1,2,\dots,n)$ tel que :

(14) $$A_0(x_0) = L$$

les $\lambda_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$ sont alors déterminés d'une manière unique par cette condition.

<u>Démonstration</u> [14]

Soient ℓ_i $(i=1,2,\dots,n)$ les vecteurs lignes de L , la condition (14) s'écrit de la manière suivante :

$$(15)\quad \begin{cases} Y_0(x_0) = \ell_1 \\ Y_1(x_0) = \ell_2 \\ \\ Y_{n-1}(x_0) = \ell_n \end{cases}$$

Ces conditions sont équivalentes aux :

$$(16)\quad \begin{aligned} & Y_0(x_0) = \ell_1 \\ & Y_0'(x_0) = \ell_2 - Y_0(x_0)\Phi_{20}(x_0) \\ & Y_0''(x_0) = \ell_3 - Y_0'(x_0)\Phi_{30}(x_0) - Y_0(x_0)\Phi_{30}(x_0) \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

où les Φ_{ij} sont des matrices, fonctions algébriques de $A, A', \dots, A^{(n-1)}$. Les a_{ij} étant définis en x_o , donc A et ses dérivées le sont et par conséquent les Φ_{ij} aussi. Les conditions (16) considérées comme équations en

$$Y_0(x_0)\ ,\ Y_0'(x_0)\ ,\ \dots\ ,Y_0^{(n-1)}(x_0)$$

admettent une solution et une seule

$$\begin{aligned} & Y_0(x_0) = \ell_1 = C_1 \\ & Y_0'(x_0) = \ell_1 - \ell_1\Phi_{20}(x_0) = C_2 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & Y_0^{(n-1)}(x_0) = C_n \end{aligned}$$

où les $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$, $(i=1,2,\dots,n)$ sont n vecteurs lignes à coefficients dans $\mathbb{C}$ dépendant des ℓ_i $(i=1,2,\dots,n)$.

On détermine ainsi d'une manière unique les λ_i $(i=1,2,\dots,n)$ par la formule de Taylor

$$\lambda_i(x) = c_{1i} + (x-x_0)c_{2i} + \dots + \frac{(x-x_0)^{(n-1)}}{(n-1)!}c_{n-1i}$$

Remarquons qu'en pratique , il est très difficile de construire les $\lambda_i(x)$ de cette manière .

on appelle un vecteur

$$Y_0(x_0) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots ,\lambda_n(x)$$

vérifiant la condition (13) ; un vecteur cyclique de A . On démontre dans le chapitre suivant quelques propriétés concernant ce vecteur qui est l'outil essentiel pour réduire un système différentiel linéaire à une équation différentielle scalaire d'ordre n .

Un travail reste cependant à faire, celui de la construction d'un tel vecteur sans avoir à vérifier la condition (13). On se contentera ici de poser

$$\lambda_i(x) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}x + \ldots + \alpha_{n-1i}x^{n-1}$$

où les α_{ij} sont des constantes arbitraires que l'on choisit de façon à vérifier la condition (13). Cependant malgré cette contrainte le choix reste large (même infini) et le calcul formel des coefficients a_i , $(i=0,\ldots,n)$ s'avère très long (cf. page 29). Pour pallier à cette difficulté, les $\lambda_i(x)$ doivent être pris de degré le plus petit possible.

Dans le cas particulier où la matrice est à coefficients polynômiaux supposons tous de degré inférieur ou égal à k et si l'on a choisi les λ_i de degré = n-1 ; alors

$$\overset{\circ}{\partial}(a_i) \leqslant n(n-1) + k(\frac{n(n+1)}{2} - i) \qquad i=0,1,\ldots,n$$

Si les a_i $(i=0,\ldots,n)$ désignent les coefficients de l'équation scalaire.

Exemple :

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 \\ y_2' = y_1 + x^2y_2 \end{cases}$$

avec le choix

$$\lambda_1(x) \equiv 1$$

$$\lambda_2(x) \equiv 0$$

cela donne

$$a_0(x) \equiv 0.$$

mais si l'on prend

$$\lambda_1(x) \equiv 0$$

$$\lambda_2(x) \equiv 1$$

cela donne

$$a_0(x) \equiv 1.$$

Le déterminant (10) s'écrit :

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 0 \\ y' & x^2 & 1 \\ y'' & 2x^2+x^4 & x+x^2 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui s'écrit :

$$y'' - (x+x^2)y' + (x^3-2x)y = 0$$

on notera $D(Y_o)$; l'opérateur différentiel correspondant à l'équation différentielle obtenue par la méthode à partir du vecteur cyclique Y_o. Dans cet exemple : $Y_o = (0,1)$ et :

$$D(Y_0) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 - (x+x^2)\frac{d}{dx} + (x^3-2x)$$

Il en résulte de tout ce qui précède que l'on peut toujours choisir les λ_i $(i=1,\ldots,n)$ de telle manière que la condition (13) soit satisfaite. On obtient ainsi à partir d'un système différentiel linéaire homogène une équation différentielle linéaire homogène <u>de degré n</u>. D'où le théorème :

Théorème [14]

Tout système différentiel linéaire homogène

(1) $$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$ peut être réduit à une équation différentielle scalaire d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$. De plus si l'opérateur différentiel correspondant à cette équation est :

$$D = \frac{d^n}{dx^n} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{a_n(x)}{a_0(x)}$$

le système différentiel associé à D est équivalent au système (1).

Démonstration :

Soit $Y_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ un vecteur cyclique de A .

Posons $$C_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_0(x)}$$

et montrons que le système

(1) $$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

est équivalent au système

(1') $$Y'(x) = C(x)Y(x)$$

où C est la matrice :

(17) $$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & 1 \\ -C_n & & & & & & -C_1 \end{bmatrix}$$

D'après les formules (12) on a :

$$Y_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

$$Y_i = Y'_{i-1} + Y_{i-1}A \qquad i=1,2,\ldots,n$$

donc

(18) $$A_n = A_0' + A_0 A$$

De plus on a :

$$\left|\begin{array}{l} Y_0 = Y_0 \\ Y_1 = Y_1 \\ . \quad . \quad . \quad . \\ Y_n = -C_1 Y_0 - C_2 Y_1 + \cdot \cdot \cdot \cdot - C_n Y_{n-1} \end{array}\right.$$

où $$C_i = (-1)^i \frac{\det(Y_0^t, Y_1^t, \ldots, Y_{n-i-1}^t, Y_{n-i+1}^t, \ldots, Y_n^t)}{\det(Y_0^t, Y_1^t, \ldots, Y_n^t)}$$

$$i = 1,2,\ldots,n$$

Le système (19) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

(20) $$A_n = C A_0$$

où C est la matrice compagnon définie dans (17) les deux relations (18) et (20) donnent

$$C = A_0' A_0^{-1} + A_0 A A_0^{-1}$$

et si l'on pose $A_0^{-1} = P$, on a finalement la relation

$$C = P^{-1} A P - P^{-1} P'$$

cela prouve que C et A sont équivalents.

Proposition 1 :

Si A est une matrice constante et si les $\lambda_i(x)$ ont été choisies toutes constantes, alors les C_i représentent les coefficients du polynôme caractéristique de A .

En effet, dans ce cas particulier, on a :

$$C = P^{-1} A P \qquad \text{où } P \in Gl(n,C)$$

et donc les C_i sont nécessairement les coefficients du polylnôme caractéristique de A .

5 LIENS ENTRE LES SOLUTIONS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE ET CELLES DU SYSTEME

Considérons l'équation différentielle scalaire (11) obtenue à partir du système (1) et à l'aide du vecteur cyclique $Y_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
Ecrivons les n premières équations du système (8) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = A_0(x) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_n \end{bmatrix}$$

ce qui peut s'écrire aussi :

$$Z_y(x) = A_0(x)Y(x)$$

où

$$Z_y^t = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$Y^t = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Puisque Y_o est un vecteur cyclique, $\det(A_0(x)) = a_0(x) \not\equiv 0$ donc $A_0 \in G\ell(n,C(x))$, et on a :

Proposition 2 :

Soient $y_{[1]}$, $y_{[2]}$, ... ,$y_{[n]}$; n solutions linéairement indépendants de (11) , alors :

$$Y_{[1]} = A_0^{-1} Z_{y_{[1]}} , \dots , Y_{[2]} = A_0^{-1} Z_{y_{[n]}}$$

sont n solutions linéairement indépendantes du système (1) .

Démonstration :

Si y est solution de (5) ; on a :

$$Y'(x) = (A_0^{-1})' Z_y + A_0^{-1} Z_y'$$

Or $$Z_y' = A_n Y$$

donc $$Y'(x) = (A_0^{-1} A_n - A_0^{-1} A_0') Y(x)$$

et en utilisant la relation (18), on a :

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

D'autre part, si il existe n constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_n$ telles que :

$$\alpha_1 Y_{[1]} + \alpha_2 Y_{[2]} + \dots \alpha_n Y_{[n]} = 0$$

on a : $$\alpha_1 y_i^{[1]} + \alpha_2 y_i^{[2]} + \dots \alpha_n y_i^{[n]} = 0 \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\alpha_1 \sum_1^n \lambda_i y_i^{[1]} + \dots \alpha_n \sum_1^n \lambda_i y_i^{[n]} = 0$$

$$\alpha_1 y_{[1]} + \alpha_2 y_{[2]} + \dots \alpha_n y_{[n]} = 0$$

donc les α_i $(i=1,2,\ldots,n)$ sont nécessairement toutes nulles. Nous allons illustrer ceci sur des exemples.

Premier exemple :

$$\left\{\begin{aligned} y_1' &= \frac{x+2}{x(x+1)}\, y_1 + \frac{1}{x(x+1)}\, y_2 + \frac{1}{x(x+1)}\, y_3 \\ y_2' &= \frac{-4}{x(x+1)}\, y_2 + \frac{x^2-5x+2}{x(x^2-1)}\, y_2 + \frac{-6x+2}{x(x^2-1)}\, y_3 \\ y_3' &= \frac{1}{x(x+1)}\, y_1 + \frac{3x-1}{x(x^2-1)}\, y_2 + \frac{x^2+4x-1}{x(x^2-1)}\, y_3 \end{aligned}\right.$$

choisissons $\qquad Y_0(x) = (2x-1\ ,\ 1\ ,\ 0)$

on trouve :

$$A_0(x) = \begin{bmatrix} 2x-1 & 1 & 0 \\ \dfrac{4x^2+5x-6}{x(x+1)} & \dfrac{3x^2-8x+3}{x(x^2-1)} & \dfrac{2x^2-9x+3}{x(x^2-1)} \\ \dfrac{4(x+2)}{x(x+1)} & \dfrac{4}{x(x+1)} & \dfrac{4}{x(x+1)} \end{bmatrix}$$

$$a_0(x) = \det(A_0(x)) = \frac{-20}{x(x^2-1)}$$

L'équation différentielle correspondante à ce choix est :

$$y''' = 0$$

dont trois solutions linéairement indépendantes sont :

$$y_{[1]} = 1 \qquad y_{[2]} = x \qquad y_{[3]} = x^2$$

Les solutions du système sont alors :

$$Y_{[1]} = A_0^{-1} Z_{y_{[1]}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2(x+2) \\ x+2 \end{bmatrix} \qquad Y_{[2]} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7x+1 \\ 3(2x-1) \end{bmatrix} \qquad Y_{[3]} = \begin{bmatrix} 5x-3 \\ 11x-3 \\ 9-13x \end{bmatrix}$$

Deuxième exemple :

Considérons le système différentiel à coefficients constants suivant

$$\begin{cases} y_1' = 7y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ y_2' = 18y_1 + 7y_2 - 9y_3 \\ y_3' = 24y_1 + 8y_2 - 11y_3 \end{cases}$$

le polynôme minimal de la matrice de ce système est $m(x) = (x-1)^2$, nous avons montré dans [7], que pour un système différentiel à coefficients constants, une condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur cyclique Y_0 soit à coefficients constants est que la matrice du système soit **cyclique (le degré du polynôme minimal est égal au degré du polynôme caractéristique)** mais avec le choix :

$$Y_0 = (x,-x,1)$$

l'équation différentielle que l'on obtient :

$$y''' - 3y'' + 3y' - y$$

admet comme coefficients, ceux du polynôme caractéristique du système, ses solutions sont :

$$y_{[1]} = e^x \quad ; \quad y_{[2]} = xe^x \quad ; \quad y_{[3]} = x^2e^x$$

et donc trois solutions linéairement indépendantes du système sont :

$$Y_{[1]} = \begin{bmatrix} 3e^x \\ 3e^x \\ 8e^x \end{bmatrix} \quad ; \quad Y_{[2]} = \begin{bmatrix} e^x \\ -3e^x \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad Y_{[3]} = \begin{bmatrix} (8x-7)e^x \\ (24x+25)e^x \\ 2xe^x \end{bmatrix}$$

6- Algorithme et quelques exemples :

```
symbolic procedure lire;
xread(nil);
flag('(lire),'opfn);


procedure leclambda( );

% cette procedure initialise le vecteur c qui a pour
  composantes les parametres lambda ;

begin
write " QUELS SONT VOS PARAMETRES LAMBDA ? ";
for i:=1:n do
c(i):=lire( );
end;


procedure reduction( );

% algorithme de reduction d'un systeme differentiel lineaire
   homogene a une equation differentielle lineaire homogene ;

% DONNEES :
 --------
  n:: dimension de la matrice a
  a(1::n,1::n):: matrice a coefficients dans c(x)
  c(1::n):: tableau a coefficients dans c[x] ;

% RESULTATS :
  ---------
  b(1::n+1)::     tableau des coefficients de l'equation
                  differentielle correpondante au
                  systeme differentiel
  a0(1::n,1::n):: tranformation permettant de retrouver
                  les solutions du systeme ;

begin
for i:=1:n do for j:=1:n do write "a(",i,",",j,")=",a(i,j);
on gcd;
for i:=1:n do write "lambda(",i,")= ",c(i);

% REMPLISSAGE DE LA MATRICE D(1::n+1,1::n) ;
% --------------------------------------- ;

for j:=1:n do
d(1,j):=c(j);
for i:=1:n do
for j:=1:n do
d(i+1,j):=df(d(i,j),x) + for k:=1:n sum d(i,k)*a(k,j);

% REMPLISSAGE DE LA MATRICE A0(1::n,1::n) ;
% ------------------------------------- ;

for i:=1:n do
for j:=1:n do
a0(i,j):=d(i,j);
b(n+1):=-det(a0)$

% TESTER SI "c" EST CYCLIQUE ;
% ------------------------ ;
if b(n+1) neq 0 then
 <<
   for i:=1:n do
   for j:=1:n do
   m(i,j):=d(i+1,j);
   b(1):=(-1)**(n+1)*det(m);
   for k:=2:n do
    <<
       for j:=1:n do
       <<
         for i:=1:k-1 do
         m(i,j):=d(i,j);
         for i:=k:n do
         m(i,j):=d(i+1,j);
       >>;
       b(k):=(-1)**(n-k)*det(m);
    >>;
 >>
 else
 % c N'EST PAS CYCLIQUE ;
  <<
  write "Error : Le choix des parametres n'est pas convenable " ;
  write " faire : leclambda( ) ; (pour reinitialiser le vecteur c) " ;
  write " faire ensuite : reduction( ) ;  ";
  >>;
  end;

  procedure algoreduction( );
  % appel de l'algorithme reduction ;
  begin
   write "quelle est la taille de la matrice a ? " ;
   n:=lire( )$
   Array c(6),b(6);
   matrix a(n,n),a0(n,n),m(n,n),d(n+1,n);
   write "Ecrire l'expression de la matrice a par lignes : " ;
   for i:=1:n do for j:=1:n do a(i,j):=lire( )$
   leclambda( );
   reduction( );
  end;

  write "Pour utiliser l'algorithme de reduction d'un syteme ";
  write "differentiel a une equation faire : algoreduction( ) ; " ;
  end;
```

$$a(1,1) := (x^3 + x^2 + 6)/x^2$$

$$a(1,2) := (- x^3 - x^2 + 2)/x^2$$

$$a(1,3) := (- 3)/x^2$$

$$a(2,1) := (2*(x^3 + x^2 + 9))/x^2$$

$$a(2,2) := (3*(x^3 + x^2 + 2))/x^2$$

$$a(2,3) := (- x^3 - x^2 - 9)/x^2$$

$$a(3,1) := (6*(x^3 + x^2 + 4))/x^2$$

$$a(3,2) := (x^3 + x^2 + 8)/x^2$$

$$a(3,3) := (4*(x^3 + x^2 - 3))/x^2$$

lambda(1)= 1

lambda(2)= 0

lambda(3)= 0

CØEFFICIENTS DE L'EQUATIØN DIFFERENTIELLE CØRRESPØNDANTS AUX PARAMETRES DØNNES :

$$a3(x) = - 27*x^{12} - 162*x^{11} - 405*x^{10} - 823*x^{9} - 1820*x^{8} - 3511*x^{7} - 6217*x^{6} - 9733*x^{5} - 12184*x^{4} - 19367*x^{3} - 31546*x^{2} - 27511*x - 8763$$

$$a2(x) = 22*x^{11} + 110*x^{10} + 228*x^{9} + 361*x^{8} + 605*x^{7} + 1003*x^{6} + 2132*x^{5} + 3523*x^{4} + 3199*x^{3} + 3864*x^{2} + 5396*x + 2775$$

$$a1(x) = x*(- 8*x^{9} - 32*x^{8} - 51*x^{7} - 54*x^{6} - 59*x^{5} - 120*x^{4} - 428*x^{3} - 618*x^{2} - 167*x + 148)$$

$$a0(x) = x^2*(x^7 + 3*x^6 + 3*x^5 + 3*x^4 + 4*x^3 + 11*x^2 + 43*x + 32)$$

$a(1,1) := 1$

$a(1,2) := (- 2*x + 1)/x^3$

$a(1,3) := 4/x$

$a(2,1) := x^2*(x + 1)$

$a(2,2) := (- x + 2)/x$

$a(2,3) := 4/x$

$a(3,1) := 3*x^2$

$a(3,2) := 0$

$a(3,3) := (x^2 + 2)/x$

lambda(1)= x

lambda(2)= 1

lambda(3)= 0

COEFFICIENTS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE CORRESPONDANTS AUX PARAMETRES DONNES :

$$a3(x) =(4*(- 2*x^{14} - 18*x^{13} - 28*x^{12} + 29*x^{11} + 368*x^{10} + 274*x^9 - 786*x^8 - 959*x^7 - 8*x^6 + 367*x^5 + 253*x^4 + 120*x^3 + 26*x^2 + 11*x + 1))/x$$

$$a2(x) =4*(- 10*x^{12} - 25*x^{11} - 48*x^{10} + 162*x^9 + 356*x^8 + 223*x^7 - 52*x^6 - 191*x^5 - 189*x^4 - 66*x^3 - 8*x^2 + 3*x - 1)$$

$$a1(x) =4*x^2*(- x^{10} - 3*x^9 - 15*x^8 - 16*x^7 - 17*x^6 + 64*x^5 + 130*x^4 + 64*x^3 + 14*x^2 + x - 1)$$

$$a0(x) =4*x^2*(x^9 + 3*x^8 + 6*x^7 - 8*x^6 - 25*x^5 - 16*x^4 - 5*x^3 + x - 1)$$

$$a(1,1) := 6/x^{3}$$

$$a(1,2) := (- x^{4} - x^{3} + 2)/x^{3}$$

$$a(1,3) := (- 3)/x^{3}$$

$$a(2,1) := 18/x^{3}$$

$$a(2,2) := 6/x^{3}$$

$$a(2,3) := (- x^{4} - x^{3} - 9)/x^{3}$$

$$a(3,1) := 24/x^{3}$$

$$a(3,2) := 8/x^{3}$$

$$a(3,3) := (4*(x^{4} + x^{3} - 3))/x^{3}$$

lanbda(1)= 1

lanbda(2)= 0

lanbda(3)= 0

COEFFICIENTS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE CORRESPONDANTS AUX PARAMETRES DONNES

$$a3(x) = (6*(16*x^{11} + 80*x^{10} + 188*x^{9} + 265*x^{8} + 139*x^{7} - 284*x^{6} - 422*x^{5} + 70*x^{4} + 1196*x^{3} + 2556*x^{2} + 2292*x + 736))/x^{9}$$

$$a2(x) = (4*x^{12} + 12*x^{11} + 89*x^{10} + 303*x^{9} + 520*x^{8} + 526*x^{7} - 109*x^{6} - 1353*x^{5} - 678*x^{4} + 898*x^{3} + 4070*x^{2} + 7084*x + 3404)/x^{9}$$

$$a1(x) = (- 4*x^{11} - 16*x^{10} - 27*x^{9} - 22*x^{8} + 21*x^{7} + 84*x^{6} + 29*x^{5} - 84*x^{4} - 205*x^{3} - 332*x^{2} + 46*x + 276)/x^{7}$$

$$a0(x) = (- x^{9} - 3*x^{8} - 3*x^{7} - x^{6} + 7*x^{5} + 14*x^{4} - 5*x^{3} - 9*x^{2} - 46*x - 46)/x^{6}$$

$$a(1,1) := (x^2 - 1)/x$$

$$a(1,2) := -2*x$$

$$a(1,3) := (x + 1)/x^2$$

$$a(2,1) := (2*(3*x - 1))/(2*x + 1)$$

$$a(2,2) := 1$$

$$a(2,3) := 1/x$$

$$a(3,1) := 5*x^2 - 1$$

$$a(3,2) := (x - 1)/x$$

$$a(3,3) := 2$$

$$\mathrm{lambda}(1) = 1$$

$$\mathrm{lambda}(2) = 0$$

$$\mathrm{lambda}(3) = 0$$

COEFFICIENTS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE CORRESPONDANTS AUX PARAMETRES DONNES

$$a3(x) = (160*x^{13} - 64*x^{12} + 384*x^{11} + 528*x^{10} + 266*x^{9} + 732*x^{8} - 13*x^{7} - 3*x^{6} + 191*x^{5} - 206*x^{4} - 176*x^{3} - 12*x^{2} + 8*x + 1)/(x^{8}*(4*x^{2} + 4*x + 1))$$

$$a2(x) = (- 32*x^{10} + 72*x^{9} - 24*x^{8} - 18*x^{7} + 140*x^{6} + 57*x^{5} - 6*x^{4} + 42*x^{3} + 34*x^{2} - 12*x - 9)/(x^{7}*(2*x + 1))$$

$$a1(x) = (4*x^{8} + 10*x^{7} - 4*x^{6} + 13*x^{5} + 10*x^{4} - 17*x^{3} + 8*x^{2} - 2*x - 6)/x^{6}$$

$$a0(x) = (4*x^{6} - 2*x^{5} + 2*x^{4} + 5*x^{3} - x^{2} + x + 1)/x^{5}$$

$$a(1,1) := (x^{2} - 1)/x$$

$$a(1,2) := - 2*x$$

$$a(1,3) := (x + 1)/x^{2}$$

$$a(2,1) := (2*(3*x - 1))/(2*x + 1)$$

$$a(2,2) := 1$$

$$a(2,3) := 1/x$$

$$a(3,1) := 5*x^{2} - 1$$

$$a(3,2) := (x - 1)/x$$

$$a(3,3) := 2$$

$$\mathrm{lambda}(1) = x^{2} + 1$$

$$\mathrm{lambda}(2) = (- 6*x^{2} + 1)/2$$

$$\mathrm{lambda}(3) = 2$$

COEFFICIENTS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE CORRESPONDANTS AUX PARAMETRES DONNES

$$a3(x) =(640*x^{20} - 110976*x^{19} + 143552*x^{18} - 441024*x^{17} + 125192*x^{16} -$$
$$31368*x^{15} + 395328*x^{14} - 280172*x^{13} + 1453950*x^{12} + 738910*x^{11}$$
$$+ 496446*x^{10} + 748683*x^{9} - 15353*x^{8} + 66811*x^{7} + 62132*x^{6} -$$
$$75314*x^{5} - 36885*x^{4} - 5382*x^{3} + 150*x^{2} + 80*x + 8)/(8*x^{8}*(8*x^{3}$$
$$+ 12*x^{2} + 6*x + 1))$$

$$a2(x) =(- 256*x^{18} + 44480*x^{17} - 80384*x^{16} + 261808*x^{15} + 87024*x^{14} +$$
$$18152*x^{13} + 150440*x^{12} + 525980*x^{11} - 45824*x^{10} - 39034*x^{9} +$$
$$248282*x^{8} + 140486*x^{7} + 42357*x^{6} + 23317*x^{5} + 12827*x^{4} + 1111*$$
$$x^{3} - 2242*x^{2} - 732*x - 72)/(8*x^{7}*(8*x^{3} + 12*x^{2} + 6*x + 1))$$

$$a1(x) =(64*x^{17} - 10848*x^{16} - 28656*x^{15} - 61288*x^{14} - 64456*x^{13} - 64808*$$
$$x^{12} - 24952*x^{11} + 59194*x^{10} - 17198*x^{9} + 50670*x^{8} + 46319*x^{7} -$$
$$9967*x^{6} - 9960*x^{5} - 5867*x^{4} - 5131*x^{3} - 2448*x^{2} - 544*x - 48)/(8$$
$$*x^{6}*(8*x^{3} + 12*x^{2} + 6*x + 1))$$

$$a0(x) =(32*x^{14} - 5536*x^{13} + 4808*x^{12} - 11616*x^{11} + 1360*x^{10} + 684*x^{9} +$$
$$9410*x^{8} - 7768*x^{7} + 3448*x^{6} + 7741*x^{5} + 1674*x^{4} + 769*x^{3} + 384*$$

2 5 2

$a(1,1) := 6/x^{3}$

$a(1,2) := (-x^{4} - x^{3} + 2)/x^{3}$

$a(1,3) := (-3)/x^{3}$

$a(1,4) := 1/x^{3}$

$a(2,1) := 18/x^{3}$

$a(2,2) := 6/x^{3}$

$a(2,3) := (-x^{4} - x^{3} - 9)/x^{3}$

$a(2,4) := 1/x^{3}$

$a(3,1) := 24/x^{3}$

$a(3,2) := 8/x^{3}$

$a(3,3) := (4*(x^{4} + x^{3} - 3))/x^{3}$

$a(3,4) := 1/x^{3}$

$a(4,1) := (-1)/x^{3}$

$a(4,2) := 4/x^{3}$

$a(4,3) := 2/x^{3}$

$a(4,4) := 1/x^{3}$

lambda(1)= 1

lambda(2)= 0

lambda(3)= 0

lambda(4)= 0

COEFFICIENTS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE CORRESPONDANTS AUX PARAMETRES DONNES

$$a4(x) = (1655 x^{25} + 7535 x^{24} + 21537 x^{23} + 45664 x^{22} + 51626 x^{21} + 1383 x^{20} - 107776 x^{19} - 290882 x^{18} - 324676 x^{17} + 74344 x^{16} + 423673 x^{15} + 657209 x^{14} + 79572 x^{13} - 1426471 x^{12} - 2422475 x^{11} - 2557083 x^{10} - 1522394 x^{9} - 347196 x^{8} + 1164128 x^{7} + 2125932 x^{6} + 770140 x^{5} + 119252 x^{4} + 228256 x^{3} + 47520 x^{2} - 207680 x - 207680)/x^{27}$$

$$a3(x) = (460 x^{28} + 3220 x^{27} + 12645 x^{26} + 33205 x^{25} + 61033 x^{24} + 77478 x^{23} + 61094 x^{22} + 14601 x^{21} + 14227 x^{20} + 126281 x^{19} + 348683 x^{18} + 638743 x^{17} + 656229 x^{16} + 340693 x^{15} + 32622 x^{14} - 506003 x^{13} - 388439 x^{12} + 168039 x^{11} + 544658 x^{10} + 727092 x^{9} + 482264 x^{8} + 229852 x^{7} - 632132 x^{6} - 525156 x^{5} - 23904 x^{4} - 34464 x^{3} + 10560 x^{2} + 66880)/x^{27}$$

$$a2(x) = (20 x^{26} + 160 x^{25} + 335 x^{24} - 340 x^{23} - 4075 x^{22} - 12534 x^{21} - 23059 x^{20} - 25093 x^{19} - 11004 x^{18} + 7387 x^{17} + 4870 x^{16} - 26937 x^{15} - 112603 x^{14} - 187013 x^{13} - 175479 x^{12} - 196179 x^{11} - 63134 x^{10} + 112196 x^{9} + 143628 x^{8} + 168924 x^{7} + 101108 x^{6} + 31092 x^{5} - 120160 x^{4} - 58912 x^{3} + 6336 x^{2} + 3520)/x^{24}$$

$$a1(x) = (20 x^{24} + 120 x^{23} + 390 x^{22} + 805 x^{21} + 1037 x^{20} + 604 x^{19} - 368 x^{18} - 856 x^{17} + 837 x^{16} + 4078 x^{15} + 6352 x^{14} + 6874 x^{13} - 807 x^{12} - 6123 x^{11} - 4826 x^{10} - 15648 x^{9} + 760 x^{8} + 6632 x^{7} + 7428 x^{6} + 11076 x^{5} + 2016 x^{4} + 2016 x^{3} - 12672 x^{2} + 704)/x^{21},$$

$$a0(x) = (- 5 x^{20} - 25 x^{19} - 70 x^{18} - 125 x^{17} - 133 x^{16} - 43 x^{15} + 86 x^{14} + 127 x^{13} - 217 x^{12} - 633 x^{11} - 1302 x^{10} - 1556 x^{9} - 792 x^{8} - 1020 x^{7} + 572 x^{6} + 924 x^{5} + 800 x^{4} + 800 x^{3} - 704)/x^{18}$$

C H A P I T R E 2

VECTEUR CYCLIQUE D'UNE MATRICE

1. Définition d'un vecteur cyclique

2. Quelques propriétés d'un vecteur cyclique

3. Liens entre les solutions des différents équations différentielles scalaires associées à différents vecteurs cyclique et correspondants au même système differentiel.

1. DEFINITION D'UN VECTEUR CYCLIQUE

On considère un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 :

(1) $$Y'(x) = M(x)\, Y(x)$$

où Y est un vecteur colonne de n composantes $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, M est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}((x))$. On désigne par $\mathbb{C}((x))$ le corps des fractions de l'anneau des séries formelles, c'est-à-dire des expressions du type $\sum_{-p}^{+\infty} a_k x^k$ sans conditions de convergence. Soit Y_o un vecteur ligne à n composatnes :

$$Y_o = (t_1, t_2, \dots, t_n)$$

où $$t_i \in \mathbb{C}((x)) \quad , \quad i=1,2,\dots,n \, .$$

Soient $Y_1, Y_2, \dots$, les vecteurs lignes définis à partir de Y_o de la manière suivante :

(2) $$\begin{cases} Y_1'(x) = Y_0'(x) + Y_0(x)\, M(x) \\ Y_2'(x) = Y_1'(x) + Y_1(x)\, M(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_k(x) = Y_{k-1}' + Y_{k-1}(x)\, M(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

et soit T , la matrice formée par les n premiers vecteurs :

(3) $$T(x) = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{n-1} \end{bmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{C}((x)))$$

Définition :

Y_o est dit **vecteur cyclique** de la matrice M si et seulement si $\det(T(x)) \not\equiv 0$.

J.P. Ramis [14] a démontré que l'on peut toujours construire un tel vecteur d'une manière unique en utilisant le développement de Taylor du vecteur au voisinage d'un point x_o qui n'est pas pôle de M.

Rappelons le résultat essentiel du premier chapitre :

Etant donné un vecteur cyclique Y_o , le système (1) peut être réduit à une équation différentielle scalaire linéaire homogène d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}(x))$. On note :

$$D(Y_0) = \frac{d^n}{dx^n} + \frac{a_1}{a_0}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{a_n}{a_0}$$

l'opérateur différentiel correspondant à l'équation différentielle associée au système différentiel (1) obtenue à l'aide du vecteur cyclique Y_o . On a (cf. chapitre 1, page 14) :

$$a_0(x) = \det(T(x))$$

$$(4) \qquad a_i(x) = \det(Y_0^t, Y_1^t, \dots, Y_{n-i-1}^t, Y_{n-i+1}^t, \dots, Y_n^t)$$

$$i=1,2,\dots,n$$

2. QUELQUES PROPRIETES D'UN VECTEUR CYCLIQUE

Proposition 1 :

Quelques soit le choix du vecteur cyclique Y_o de la matrice M , on a la relation suivante :

$$(5) \qquad tr(M) = - \frac{a_1(x) + a_0'(x)}{a_0(x)}$$

tr(M) désigne la matrice de M

a_1, a_o désignent les coefficients définis dans (4) .

Démonstration

Considérons l'équation différentielle associée au système (1) à l'aide du vecteur cyclique Y_0 .

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

Soient $y_{[1]}$, $y_{[2]}$, ... , $y_{[n]}$, n solutions linéairement indépendantes de (6) et soit leur wronskien W . Par définition :

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_{[1]} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{[n]} \\ y'_{[1]} & \cdot & \cdot & \cdot & y'_{[n]} \\ \vdots & & & & \vdots \\ y^{(n-1)}_{[1]} & \cdot & \cdot & \cdot & y^{(n-1)}_{[n]} \end{bmatrix}$$

On sait que W(x) est non identiquement nul au voisinage de tout point non singulier et d'après un théorème de Liouville :

$$W(x) = \exp(- \int \frac{a_1}{a_0})$$

$\int \frac{a_1}{a_0}$ désignant une primitive de $\frac{a_1}{a_0}$

Or si y est solution de l'équation différentielle (6), on a (cf.chapitre 1 , page)

$$y^{(i)} = \langle Y_i , Y \rangle \quad i=1,2,\dots,n$$

où $\langle Y_i , Y \rangle$ désigne le produit scalaire du vecteur ligne Y_i avec le vecteur colonne Y .

Les Y_i sont les vecteurs définis dans (2) et Y désigne une solution du système (1), par conséquent :

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} \langle Y_0, Y_{[1]}\rangle & \cdot & \cdot & \cdot & \langle Y_0, Y_{[n]}\rangle \\ \langle Y_1, Y_{[1]}\rangle & \cdot & \cdot & \cdot & \langle Y_1, Y_{[n]}\rangle \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \langle Y_{n-1}, Y_{[n]}\rangle & \cdot & \cdot & \cdot & \langle Y_{n-1}, Y_{[n]}\rangle \end{bmatrix}$$

(8) $$W(x) = \det(T(x))\ V(x)$$

où T est la matrice définie dans (3)
$V(x)$ est le wronskien du système

$$V(x) = \det \left[Y_{[1]}, Y_{[2]}, \ldots, Y_{[n]} \right]$$

où $Y_{[1]}, Y_{[2]}, \ldots, Y_{[n]}$ sont n solutions vectorielles linéairement indépendantes du sytème (1) ; et on a aussi :

$$V(x) = \exp\left(\int tr(M)\right)$$

où $tr(M) = m_{11} + m_{22} + \ldots + m_{nn}$, si les m_{ii} désignent les éléments diagonaux de la matrice M.

les deux relations (7) et (8) donnent :

$$\exp\left(-\int \frac{a_1}{a_0}\right) = a_0 \exp\left(\int tr(M)\right)$$

donc

$$tr(M) = -\frac{a_1(x) + a_0'(x)}{a_0(x)}$$

Proposition 2

Etant donnés deux systèmes différentiels équivalents par une transformation $P \in Gl(n,\mathbb{C}((x)))$.

(1) $$Y'(x) = A_1(x)\ Y(x)$$

(2) $$Y'(x) = A_2(x)\ Y(x)$$

où A_1 , $A_2 \in M_{n,n}(\mathbb{C}((x)))$ et :

$$A_2 = P^{-1} A_1 P - P^{-1} P'$$

si Y_o est un vecteur cyclique de A_1 , alors Y_oP est un vecteur cyclique de A_2 . De plus les coefficients des équations différentielles scalaires correspondants respectivement à Y_o et Y_oP et aux systèmes (1) et (2), sont à un coefficient multiplicatif (appartenant à $\mathbb{C}((x))$) près égaux.

Démonstration :

Puisque Y_o est un vecteur cyclique de A_1 , $\det(T(x)) \not\equiv 0$ où T est la matrice définie dans (3) et en utilisant les relations (2) on a :

(9) $$Y_i = Y'_{i-1} + Y_{i-1} A_1 \qquad i=1,2,\dots,n-1$$

Comme

$$A_1 = P A_2 P^{-1} + P' P^{-1}$$

on a :

(10) $$Y_i P = (Y_{i-1} P)' + (Y_{i-1} P) A_2$$

$$i=1,2,\dots,n-1$$

Soit $\tilde{T}$, la matrice suivante :

$$\widetilde{T} = \begin{bmatrix} Y_0 \; P \\ Y_1 \; P \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{n-1} \; P \end{bmatrix} = T\,P$$

On a $$\det(\widetilde{T}) = \det(T)\det(P) \not\equiv 0$$

donc $Y_o.P$ est un vecteur cyclique de A_2.
De la même manière si on note : a_i, les coefficients des équations différentielles associées respectivement aux systèmes (1) et (2) obtenues à l'aide des vecteurs cycliques Y_o et $Y_o.P$, on a d'après les relations (9) et (10) :

$$\widetilde{a}_i(x) = a_i(x)\det(P)$$

Corollaire :

Si deux systèmes différentiels

(1) $$Y'(x) = A_1(x)\,Y(x)$$

(2) $$Y'(x) = A_2(x)\,Y(x)$$

$A_1, A_2 \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C}((x)))$

sont équivalents par une transformation $P \in G\ell(n, \mathbb{C}((x)))$.
Alors

$$\det(P) = \exp(\int \operatorname{tr}(A_1 - A_2))$$

$\operatorname{tr}(A_1 - A_2)$ désigne la trace de la matrice $A_1 - A_2$.

Démonstration

Par hypothèse les matrices A_1, A_2 sont équivalentes par la transformation $P \in G\ell(n, \mathbb{C}((x)))$. i.e.

$$A_2 = P^{-1} A_1 P - P^{-1} P'$$

Soit Y_o un vecteur cyclique quelconque de la matrice A_1. D'après la proposition 2, $Y_o.P$ est un vecteur cyclique de A_2. De plus on a

$$\tilde{a}_0(x) = a_0(x)\ \det(P(x))$$

$$\tilde{a}_1(x) = a_1(x)\ \det(P(x))$$

où $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$, a_o, a_1 sont les coefficients définis plus haut.
D'après la proposition 1, on a :

$$\operatorname{tr}(A_2) = -\frac{\tilde{a}_1(x) + \tilde{a}_0'(x)}{\tilde{a}_0(x)} = -\frac{a_1(x) + a_0'(x)}{a_0(x)} - \frac{\det(P)'}{\det(P)}$$

$$\operatorname{tr}(A_2) = \operatorname{tr}(A_1) - \frac{\det(P)'}{\det(P)}$$

Par conséquent :

$$\det(P) = \exp(\int \operatorname{tr}(A_1 - A_2))$$

Théorème

Si la matrice A_o dans le développement

$$A(x) = \sum_0^\infty A_n\ x^n$$

est cyclique (Le degré du polynôme minimal est égal au degré du polynôme caractéristique) et si T_o vecteur ligne à coefficients constants appartenant à $\mathbb{C}$ est cyclique pour la matrice A_o, alors $Z_0(x) \equiv T_0$ est un vecteur cyclique pour la matrice $\frac{A(x)}{x^h}$, où h est un entier quelconque supérieur ou égal à 1.

Démonstration

Si on pose $Z_k = x^{kh}\ Y_k$, $k=0,1,2,\ldots,n$; les relations (2) deviennent :

(11) $$Z_k(x) = x^h . Z'_{k-1}(x) + Z_{k-1}(x) \left(A(x) - kh\, x^{h-1} I \right) \qquad k=1,2,\dots,n$$

où cettre fois les Z_k sont sans pôle $k=0,1,\dots,n$.
D'après les relations (11) et(2), on a :

$$\tau(x) = \det \begin{bmatrix} Z_0(x) \\ Z_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_{n-1}(x) \end{bmatrix} = x^{\frac{(n-1)(n-2)h}{2}} . \det \begin{bmatrix} Y_0(x) \\ Y_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$\tau(x) = x^{\frac{(n-1)(n-2)h}{2}} . \det(T(x))$$

Par conséquent Y_o est un vecteur cyclique de $\frac{A(x)}{x^h}$ si et seulement si $\tau(x) \not\equiv 0$; Or :

$$\tau(0) = \det \begin{bmatrix} Z_0(0) \\ Z_1(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_{n-1}(0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} T_0 \\ T_0 A_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_0 A_0^{n-1} \end{bmatrix}$$

Comme T_o est vecteur cyclique de la matrice A_o , donc : $\tau(x) \equiv 0$

c.q.f.d.

2. LIENS ENTRE LES SOLUTIONS DES DIFFERENTES EQUATIONS DIFFERENTIELLES SCALAIRES ASSOCIEES A DIFFERENTS VECTEURS CYCLIQUES ET CORRESPONDANT AU MEME SYSTEME DIFFERENTIEL.

Considérons le système différentiel

(1) $$Y'(x) = M(x)\, Y(x)$$

Soient Y_o et S_o deux vecteurs cycliques de M, ($Y_o \neq S_o$) et soient :

(12) $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

(13) $$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_n(x)y = 0$$

les équations différentielles associées au système (1), obtenues à l'aide des deux vecteurs cycliques Y_o et S_o soient :

(14) $$Y'(x) = C_1(x)\ Y(x)$$

(15) $$Y'(x) = C_2(x)\ Y(x)$$

les deux systèmes différentiels associés (cf. chapitre 1, paragraphe 1) aux opérateurs différentiels correspondant respectivement aux équations différentielles (12) et (13). Nous avons vu que si l'on note les matrices :

$$Y = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_{n-1} \end{bmatrix}$$

où les Y_i $(i=1,\ldots,n-1)$ et les S_i $(i=1,\ldots,n-1)$ sont les vecteurs définies par les relations (2), ces deux matrices sont inversibles (étant donné que les vecteurs Y_o et S_o sont cycliques) et de plus, on a :

$$C_1 = Y\,M\,Y^{-1} + Y'\,Y^{-1}$$

$$C_2 = S\,M\,S^{-1} + S'\,S^{-1}$$

ces deux relations donnent

$$Y^{-1}\,C_1\,Y - Y^{-1}\,Y' = S^{-1}C_2\,S^{-1} - S^{-1}\,S'$$

d'où en posant

$$P = S\, Y^{-1}$$

(16) $$C_1 = P^{-1}\, C_2\, P - P^{-1}\, P'$$

par conséquent les matrices C_1 et C_2 sont équivalentes par la transformation P, et si y, s désignent deux solutions scalaires des équations différentielles (12) et (13), alors (cf. chapitre 1, paragraphe 3) les vecteurs colonnes :

$$Z_y = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z_s = \begin{bmatrix} s \\ s' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

sont respectivement solutions des systèmes (14) et (15) et d'après la relation (16), la relation entre ces deux vecteurs est :

$$Z_y = P^{-1}\, Z_s$$

c'est-à-dire :

(17) $$Z_y = Y\, S^{-1}\, Z_s$$

Remarque :

Puisque les matrices Y, S sont inversibles, étant données n solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle (13) $s_{[1]}$, $s_{[2]}$, ..., $s_{[n]}$; on peut déterminer à partir de la relation (17) n solutions linéairement indépendantes : $y_{[1]}$, $y_{[2]}$, ..., $y_{[n]}$ de l'équation différentielle (12) et vis versa.

C H A P I T R E 3

CARACTERISATION DES SYSTEMES DIFFERENTIELS A SINGULARITE REGULIERES

Première Partie

CRITERE DE MALGRANGE

1. Classification des singularités

2. Singularité régulière

3. Calcul de l'irrégularité au sens de Malgrange

4. Quelques exemples.

1. CLASSIFICATION DES SINGULARITES

On considère un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 de la forme :

(1) $$Y'(x) = M(x)\,Y(x)$$

où cette fois les coefficients m_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$ de la matrice M sont supposés des fonctins holomorphes dans le disque $0 < |x| < \rho$, $\rho > 0$. On suppose que l'origine est un pôle pour les m_{ij} . Notons $\Phi(x) = \left(Y_{[1]}, Y_{[2]}, \ldots , Y_{[n]}\right)$ un système fondamental de solutions de (1). Si on remplace $\Phi(x)$ par $W(x)$, où W est un autre système fondamental de solutions de (1), alors on a la relation suivante :

$$W(x) = \Phi(x)\,C$$

où C est une matrice appartenant à $\mathcal{GL}(n,\mathbb{C})$ ((cf. [2])). $\Phi(x)$ est cependant une matrice non uniforme. On peut prolonger cette solution le long d'un cricuit autour de l'origine de telle sorte qu'en $z = xe^{2i\pi}$, on obtienne une autre solution que l'on note :

$$\Phi^{+}(x) = \Phi(xe^{2i\pi})$$

et puisque M est une matrice uniforme ($M(x) = M(xe^{2i\pi})$) , il en résulte qu'il existe une matrice constante C telle que

(2) $$\Phi^{+}(x) = \Phi(xe^{2i\pi}) = \Phi(x)\,C$$

où C appartient à $\mathcal{GL}(n,\mathbb{C})$.

Puisque C est une matrice non singulière, il est toujours possible de définir une matrice R appartenant à $M_{n,n}(\mathbb{C})$ et telle que :

(3) $$C = e^{2i\pi R}$$

Posons

$$S(x) = \Phi(x)\ e^{-R \mathrm{Log} x}$$

la matrice S est uniforme en effet :

$$S^{+}(x) = \Phi^{+}(x)\ e^{-R \mathrm{Log} x} = \Phi(x)\ C\ e^{-R \mathrm{Log}(x e^{2i\pi})}$$

$$S^{+}(x) = \Phi(x)\ e^{2i\pi R}\ e^{-2i\pi R}\ e^{-R \mathrm{Log} x}$$

$$S^{+}(x) = \Phi(x)\ e^{-R \mathrm{Log} x} = S(x)$$

De plus $S(x)$ est une matrice holomorphe dans le disque $0 < |x| < \rho$ et inversible. Donc tout système fondamental de solutions du système (1) peut s'écrire de la manière suivante :

(4) $$\Phi(x) = S(x)\ x^{R}$$

avec

$$R = \frac{1}{2i\pi} \mathrm{Log} C$$

où $S(x)$ est une matrice uniforme, holomorphe dans $0 < |x| < \rho$ et inversible. C est la matrice définie dans (2). Soit Φ la matrice que l'on a définie plus haut, on a :

$$\Phi'(x) = M(x)\ \Phi(x)$$

donc

$$M(x) = \Phi'(x)\ \Phi^{-1}(x)$$

D'après la relation (4)

$$\Phi(x) = S(x)\ e^{R \mathrm{Log} x}$$

on en déduit la relation suivante :

(5) $$\boxed{M(x) = S\ \frac{R}{x}\ S^{-1} + S'\ S^{-1}}$$

Définition :

Soit un système différentiel

$$(1) \qquad Y'(x) = M(x)\, Y(x)$$

où M et une matrice holomorphe dans le disque $0 < |x| < \rho$, $\rho > 0$.
On suppose en plus que $x=0$ est un pôle pour M .
On dit que le système (1) admet une **singularité régulière** à l'origine, si la matrice S dans la représentation (5) est holomorphe au voisinage de l'origine ou admet un pôle en ce point.
On dit que le point $x=0$ est **un point singulier irrégulier** dans le cas contraire.

2. SINGULARITE REGULIERE

Un système (1) peut toujours se mettre sous la forme suivante :

$$S(p) : \qquad Y'(x) = \frac{A(x)}{x^p}\, Y(x)$$

où p est un entier supérieur ou égal à 1 . On se place dans ce qui suit dans le cas formel , $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C}[[x]])$ la même étude peut s'étendre dans le cas où A est holomorphe au voisinage de l'origine.

Il est connu que les singularités du système sont aussi les singularités des solutions. Le problème est alors d'étudier la nature des solutions vectorielle $Y(x)$ au voisinage de la singularité $x=0$.

D'après la définition annoncée plus haut, on peut voir facilement que **si $p=1$, l'origine est un point singulier régulier.** Mais ce n'est pas une condition nécessaire, l'exemple suivant le prouve :

Exemple :

$$(6) \qquad \begin{cases} y_1' = -\dfrac{1}{x^2}\, y_1 + \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2}\, y_2 \\[2ex] y_2' = \dfrac{1}{x^2}\, y_1 + \dfrac{x + 1}{x^2}\, y_2 \end{cases}$$

faisons le changement de variable suivant :

$$(7) \qquad \begin{cases} z_1 = xy_1 + xy_2 \\ z_2 = x^2 y_2 \end{cases}$$

on obtient alors le système :

$$(8) \qquad \begin{cases} z_1' = \frac{1}{x} z_1 + \frac{1}{x} z_2 \\ z_2' = \frac{1}{x} z_1 + \frac{3}{x} z_2 \end{cases}$$

dont un système fondamental de solutions est

$$Z = x^{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}$$

Donc d'après (7)

$$Y = \frac{1}{x^2} \begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}$$

est un système fondamental de solution du système (6).

La singularité du système (6) est donc régulière malgré que l'ordre du pôle soit 2. Remarquons que dans cet exemple la matrice :

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

est nilpotente.

En général, tout système différentiel $S(p)$ ayant une singularité régulière à l'origine est équivalent par une transformation $T \in Gl(n,\mathbb{C}((x))$ à un système $S(1)$ comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent. Autrement dit, si $x=0$ est un point singulier régulier pour le système $S(p)$, il existe une transformation $T \in Gl(n,\mathbb{C}((x)))$ telle que le changement de variables

$$(9) \qquad Y(x) = T(x)\, Z(x)$$

transforme le système $S(p)$ sous la forme :

$$S(1) : \qquad Z'(x) = \frac{B(x)}{x} Z(x)$$

où $B \in M_{n,n}(\mathbb{C}[[x]])$ et vérifie la relation suivante :

$$\frac{B(x)}{x} = T^{-1} \frac{A(x)}{x} T - T^{-1} T'$$

Remarquons que la transformation (9) ne change pas la nature des solutions vectorielles $Y(x)$, au voisinage de la singularité. Dans l'exemple précédent les matrices :

$$M(x) = \frac{1}{x^2} \begin{bmatrix} -1 & x^2 - x - 1 \\ 1 & x + 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B(x) = \frac{1}{x} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

sont équivalentes par la transformation

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1/x & -1/x^2 \\ 0 & 1/x^2 \end{bmatrix}$$

Malheureusement en pratique, on ne sait pas d'une part reconnaitre sur un système $S(p)$, $(p \neq 1)$; si le point singulier est régulier et d'autre part, on ne possède pas d'algorithme de construction effective de cette transformation $T(x)$.

G. Birkhoff (cf. [1]) a démontré que l'on peut toujours se ramener à une équation différentielle par l'intermédiaire d'un vecteur cyclique (cf. (chapitre 1). **B. Malgrange** [11] associe ainsi à tout système (1) un indice $i(D)$ dont la nullité caractérise la régularité de la singularité. Nous donnons dans le paragraphe suivant un moyen de calcul de $i(D)$ et de la transformation $T(x)$.

R. Gerard et A.H.M. Levelt (cf. [6]) définissent pour tout système (1) , une suite d'entiers $\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_{\ell-1}$ (appelés invariants du point singulier) et ils montrent que $i(D) = \rho_1$.

W.B. Jurkat et D.A. Lutz (cf. [10]) associent à (1) la suite des matrices (G_k) , $k=1,2,\ldots,\infty$, définie par la formule de récurrence

$$\begin{cases} G_1 = M \\ G_{k+1} = G_k M + G_k' \qquad\qquad k=1,2,\ldots,\infty \end{cases}$$

Si on note g_k l'ordre polaire de l'origine pour la matrice G_k , alors on a équivalence entre les deux propositions :

1) le système (1) est à singularité régulière à l'origine
2) $g_k \leq k+(n-1)(p-1)$, $k=n,n+1,\ldots,(n-1)(2n(p-1)-1)$.

La deuxième partie de ce chapitre est consacré au critère de **J. Moser** [13] où on donne comme application de son critère un algorithme pour reconnaitre sur un système $S(p)$ si la singularité régulière et pour construire effectivement la transformation $T(x)$.

3. CALCUL DE L'IRREGULARITE AU SENS DE MALGRANGE

Dans ce qui suit nous allons supposer que la matrice M du système (1) soit de la forme :

$$M(x) = \frac{A(x)}{x^p} \qquad \text{où } A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C}[[x]])$$

On considère Y_o un vecteur (ligne) cyclique de la matrice M. Soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$; les vecteurs définis par les relations ((2), chapitre 2) et considérons au lieu de ces vecteurs, les vecteurs

$$Z_k = x^k \, Y_k \qquad k = 0,1, \dots ,n$$

Dans ce cas les relations ((2) ,chapitre 2), deviennent :

$$(10) \quad \begin{cases} Z_0 = Y_0 \\ Z_1 = x Z_0' + Z_0 \dfrac{A(x)}{x^{p-1}} \\ Z_2 = x Z_1' + Z_1\left(\dfrac{A(x)}{x^{p-1}} - I \right) \\ \vdots \\ Z_n = x Z_{n-1}' + Z_{n-1} \left(\dfrac{A(x)}{x^{p-1}} - (n-1)I \right) \end{cases}$$

l'équation différentielle associée au système différentiel (1) correspondant au vecteur cyclique $Z_o = Y_o$ est :

$$(11) \qquad x^n a_0(x) y^{(n)} + x^{n-1} a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0$$

où

$$(12) \quad \begin{aligned} a_0(x) &= \det\left(Z_0^t , Z_1^t , \quad . \quad . \quad . \quad , Z_{n-1}^t \right) \\ a_i(x) &= (-1)^i \det\left(Z_0^t , Z_1^t , \dots , Z_{n-i-1} , Z_{n-i+1} , \dots , Z_n^t \right) \\ & i=1,2, \dots ,n \end{aligned}$$

Soit v la fonction :

$$v : f \quad \mathbb{C}((x)) \xrightarrow{\quad v \quad} v(f) = \mathrm{ord}_0(f) \in Z \cup \{+\infty\}$$

qui a f associe son ordre en zéro.

Exemple :

$$f(x) = \frac{a_0}{x^p} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \ldots . \qquad \text{avec } a_0 \neq 0$$

$$\text{alors} \quad v(f) = -p$$

Définition : (Irrégularité au sens de Malgrange)

On appelle irrégularité du système $S(p)$ au point $x=0$ le nombre

$$i(D) = \sup_{i=1,2,\ldots,n} (0 \,,\, -v(C_i))$$

où

$$C_i = \frac{a_i}{a_0} \qquad i=1,2,\ldots,n$$

les a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ sont les coefficients de l'équation différentielle (11) définies par les relations (12).

Remarque 1 :

La singularité régulière en $x=0$ est caractérisée par : $i(D) = 0$. Dans ce cas on a $v(C_i) \geqslant 0$ pour $i=1,2,\ldots,n$. C'est le critère de Fuchs (cf. [9]).

Remarque 2 :

Le nombre $i(D)$ est indépendant du choix du vecteur cyclique Z_0.

Théorème 2 :

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe une transformation $T \in Gl\,(n,\mathbb{C}((x)))$ telle que :

$$\frac{B(x)}{x} = T^{-1}\,\frac{A(x)}{x^p}\,T - T^{-1}\,T'$$

où $B \in M_{n,n}(\mathbb{C}[[x]])$.

(2) Quelque soit Z_o vecteur cyclique de la matrice $M(x) = \dfrac{A(x)}{x^p}$ quelque soit m appartenant à $\mathbb{N}$, il existe n séries $C_i^{(m)}$, $(i=1,2,\dots,n)$ appartenant à $\mathbb{C}[[x]]$ telles que :

$$Z_{n+m} = \sum_{i=1}^{i=n} C_i^{(m)}\, Z_{n-i}$$

Remarque :

Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante (inspirée d'un résultat de R.Gerard et A.H.M. Levelt (Cf. [6]) sur les vecteurs Z_i, $(i=0,1,\dots,n)$, sachant que Z_o est cyclique pour que le le système $S(p)$ soit équivalent à un système $S(1)$ par une transformation $T \in Gl\,(n,\mathbb{C}((x)))$.
On donne ici une démonstration constructive qui donne en même temps la transformation $T(x)$.

Proposition 1 :

Une condition nécessaire et suffisante, pour que la propriété (2) soit vérifiée est que :

(3) quelque soit Z_o vecteur cyclique, il existe n séries $C_i^{(0)}$ $(i=1,2,\dots,n)$ appartenant à $\mathbb{C}[[x]]$ telles que :

$$Z_n = \sum_{i=1}^{i=n} C_i^{(0)} Z_{n-i}$$

Démonstration :

(2)------→ (3) : immédiat

(3)-------→ (2) : soit Z_o un vecteur cyclique de la matrice $M(x) = \frac{A(x)}{x^p}$ et supposons qu'il existe n séries $C_i^{(0)} \in \mathbb{C}[[x]]$ telles que :

$$Z_n = \sum_{i=1}^{i=n-1} C_i^{(0)} Z_{n-i} \tag{13}$$

D'après les relations (10), on a :

$$Z_{n+1} = x Z_n' + Z_n \left(\frac{A(x)}{x^p} - nI \right)$$

$$Z_n' = \sum_1^n C_i^{(0)'} Z_{n-i} + \sum_1^n C_i^{(0)} Z_{n-i}'$$

$$Z_{n+1} = \sum_1^n x C_i^{(0)'} Z_{n-i} + \sum_1^n C_i^{(0)} . (x Z_{n-i}' + Z_{n-i}(\frac{A(x)}{x^{p-1}} - (n-i)I)$$
$$- \sum_1^n i C_i^{(0)} Z_{n-i}$$

$$Z_{n+1} = \sum_1^n x C_i^{(0)'} Z_{n-i} + \sum_1^n C_i^{(0)} Z_{n-i+1} - \sum_1^n i C_i^{(0)} Z_{n-i}$$

$$Z_{n+1} = \sum_1^n x C_i^{(0)'} Z_{n-i} + \sum_1^n C_1^{(0)} C_i^{(0)} Z_{n-i} + \sum_1^{n-1} C_{i+1}^{(0)} Z_{n-i} - \sum_1^n i C_i^{(0)} Z_{n-i}$$

$$Z_{n+1} = (x C_n^{(0)'} - nC_n^{(0)} + C_1{}^{(0)} C_n^{(0)}) Z_0$$
$$+ \sum_1^{n-1} (x C_i^{(0)'} + C_1^{(0)} C_i^{(0)} - iC_i^{(0)} + C_{i+1}^{(0)}) Z_{n-i}$$

Le vecteur Z_{n+1} est donc aussi de la forme :

$$Z_{n+1} = \sum_1^n C_i^{(1)} Z_{n-i}$$

où les $C_i^{(1)}$ appartiennent à $\mathbb{C}[[x]]$, $i=1,2,\ldots,n$, avec :

$$C_n^{(1)} = x\, C_n^{(0)'} - n\, C_n^{(0)} + C_1^{(0)} C_n^{(0)}$$

$$C_i^{(1)} = x\, C_i^{(0)'} + C_1^{(0)}\, C_i^{(0)} - i\, C_i^{(0)} + C_{i+1}^{(0)}$$

$$i=1,2,\ldots,n-1$$

En répétant le même raisonnement m fois, on peut conclure que pour tout m appartenant à N on a :

$$Z_{n+m} = \sum_{1}^{n} C_i^{(m)}\, Z_{n-i}$$

avec $C_i^{(m)} \in \mathbb{C}[[x]]$ pour $i=1,2,\ldots,n$

<u>**Démonstration du théorème**</u> :

(3) $\longrightarrow$ (1)

Soit Z_0 un vecteur cyclique quelconque, supposons qu'il existe n séries $C_1, C_2, \ldots, C_n$ appartenant toutes à $\mathbb{C}[[x]]$ telles que :

(14) $$Z_n = C_n\, Z_0 + C_{n-1}\, Z_1 + \ldots + C_1 Z_{n-1}$$

D'après les relations (10) on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
Z_1 & = & x\, Z_0' + Z_0 \dfrac{A}{x^{p-1}} \\[2ex]
Z_2 + 1\, Z_1 & = & x\, Z_1' + Z_1 \dfrac{A}{x^{p-1}} \\[2ex]
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\[2ex]
Z_{n-1} + (n-2)\, Z_{n-2} & = & x\, Z_{n-2}' + Z_{n-2} \dfrac{A}{x^{p-1}} \\[2ex]
Z_n + (n-1)\, Z_{n-1} & = & x\, Z_{n-1}' + Z_{n-1} \dfrac{A}{x^{p-1}}
\end{array}\right.$$

ce qui peut être écrit matriciellement sous la forme

(15) $$A_n + D_n A_0 = x A_0' + A_0 \frac{A}{x^{p-1}}$$

où A_n, A_o, D_n sont les matrices suivantes :

$$A_n = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ . \\ . \\ Z_n \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ . \\ . \\ Z_{n-1} \end{bmatrix}, \quad D_n = \text{diag}\ \{0,1,2, \ldots ,n-1\}$$

Matriciellement, on peut écrire aussi la relation (14) sous la forme :

(16) $$A_n = C A_0$$

où

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & . & . & . & . & & 1 \\ -C_n & & & & & & -C_1 \end{bmatrix}$$

Et en utilisant les deux relations (15) et (16) cela donne

$$C A_0 + D_n A_0 = x A_0' + A_0 \frac{A}{x^{p-1}}$$

le vecteur Z_0 étant cyclique, donc la matrice A_o est par définition inversible;

$$C + D_n = x A_0' A_0^{-1} + A_0 \frac{A}{x^{p-1}} A_0^{-1}$$

et en posant $T = A_0^{-1}$, on a :

$$C + D_n = T^{-1} \frac{A}{x^{p-1}} T - x T^{-1} T'$$

Soit :

$$B(x) = C(x) + D_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & 1 \\ C_n & \cdots & & & & (n-1)+C_1 \end{bmatrix}$$

on a alors :

(17) $$\frac{B(x)}{x} = T^{-1}\frac{A(x)}{x^p}T - T^{-1}T'$$

avec $B \in M_{n,n}(\mathbb{C}[[x]])$ puisque $C_i \in \mathbb{C}[[x]]$, $(i=1,2,\ldots,n)$.

(1) ⟶ (3)

Supposons maintenant que la relation (17) soit vérifiée. Soit Z_o un vecteur cyclique de la matrice $M(x) = \frac{A(x)}{x^p}$, le vecteur $S_o = Z_o.T$ est donc vecteur cyclique de la matrice $\frac{B(x)}{x}$ en vertu de la relation (17) (cf. proposition 2, chapitre 2).

Les relations (10) deviennent alors :

$$\begin{cases} S_1 = x\,S_0' + S_0 B \\ S_2 = x\,S_1' + S_1(B-I) \\ \vdots \\ S_n = x\,S_{n-1}' + S_{n-1}(B-(n-1)I) \end{cases}$$

L'équation différentielle associée au système différentiel

(18) $$Y'(x) = \frac{B(x)}{x}Y(x)$$

correspondant au vecteur cyclique S_o est alors :

$$a_0(x)\, x^n y^{(n)}(x) + a_1(x)\, x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x) y(x) = 0$$

où

$$a_0(x) = \det(S_0^t , S_1^t , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , S_{n-1}^t)$$
$$a_i(x) = (-1)^i \det (S_0^t , S_1^t, \dots, S_{n-i-1}^t, S_{n-i+1}, \dots, S_n^t)$$

$$i=1,2,\dots,n$$

alors, on a la relation suivante :

$$S_n = C_n S_0 + C_{n-1} S_1 + \quad \dots \quad + C_1 S_{n-1} \tag{20}$$

où les $\qquad C_i(x) = - \dfrac{a_i(x)}{a_0(x)} \qquad i=1,2,\dots,n$.

comme le système différentiel (18) est à singularité régulière, l'équation différentielle (19) correspondante l'est aussi par conséquent

$$i(D) = \sup_{i=1,n} (0, -v(C_i)) = 0$$

donc $v(C_i) \geqslant 0$, $i=1,2,\dots,n$.

D'après la relation (20), on a :

$$S_n = \sum_1^n C_i S_{n-i}$$

et comme $S_i(x) = Z_i(x).T(x)$, $i=0,1,\dots,n$

il en résulte que :

$$Z_n(x) = \sum_1^n C_i \, Z_{n-i}$$

et comme $v(C_i) \geqslant 0$, $(i=1,2,\dots,n)$, $C_i \in \mathbb{C}[[x]]$, $(i=1,2,\dots,n)$.

Cas où la matrice $A(0) = A_o$ est cyclique

Nous avons vu (cf. page 41, chapitre 2) que dans le cas particulier où la matrice A_o est cyclique, le vecteur cyclique $Z_o(x)$ peut être choisi constant ; $Z_o(x) \equiv T_o$, où T_o est un vecteur cyclique de A_o.

Proposition 2 :

Si la matrice A_o est cyclique alors, $i(D) \leq n(p-1)$. L'égalité est atteinte lorsque A_o est régulière.

Démonstration :

Nous avons vu (cf. chapitre 2, page 42) que si l'on remplace les vecteurs Y_k dans (2, chapitre 2), par les vecteurs :

$$Z_k(x) = x^{kp}\, Y_k \qquad\qquad k=0,1,\dots,n$$

les relations (2, chapitre 2) deviennent :

$$Z_k(x) = x^p\, Z'_{k-1}(x) + Z_{k-1}(x)\,(A(x) - (k-1)px^{p-1}I)$$

$$k=1,2,\dots,n$$

où cette fois-ci les vecteurs Z_k appartiennent tous à $(\mathbb{C}[[x]])^n$. L'équation différentielle correspondante au système différentiel $S(p)$ et associée au vecteur cyclique Z_o est de la forme :

(21) $$x^{np}a_0(x)y^{(n)} + x^{(n-1)p}a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

où

$$a_0(x) = \det(\, Z_0^t \,,\, Z_1^t \,,\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad ,\, Z_{n-1}^t)$$

(22)

$$a_i(x) = \det(\, Z_0^t \,,\, Z_1^t,\dots,Z_{n-i-1}^t,Z_{n-i+1}^t,\dots,Z_n^t) \qquad i=1,2,\dots,n$$

et par définition, on a :

(23) $$i(D) = \sup_{k=1,2,\dots,n} \left(0 \,,\, k(p-1) - v\left(\frac{a_k}{a_0}\right)\right)$$

puisque A_o est cyclique, $a_o(0) \neq 0$ et comme les fonctions a_k , $(k=1,2,\dots,n)$ appartiennent à $\mathbb{C}[[x]]$, il en résulté que

$\frac{a_k}{a_0} \in \mathbb{C}[[x]]$, par conséquent $v(\frac{a_k}{a_0}) \geq 0$ et :

$$i(D) \leqslant n(p-1)$$

D'autre part, on a :

$$(24) \qquad a_i(0) = \det \begin{bmatrix} T_0 \\ T_0 A_0 \\ \vdots \\ T_0 A_0^{n-i-1} \\ T_0 A_0^{n-i+1} \\ \vdots \\ T_0 A_0^{n} \end{bmatrix} = (-1)^i c_i a_0(0)$$

où les c_i sont les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A_o . Comme :

$$a_n(0) = (-1)^n \det(A_0)\, a_0(0)$$

D'après la formule (23), si A_o est régulière i.e. $a_n(0) \neq 0$, on a :

$$i(D) = n(p-1) \text{ .}$$

Remarque

Une condition nécessaire pour que le système $S(p)$ soit à singularité régulière $(i(D) = 0)$ est que la matrice A_o soit nilpotente.

Effectivement, car sinon, il existe i_o tel que $C_{io} \neq 0$ et d'après les relations (23) et (24) on voit que :

$$i(D) \geqslant i_o(h-1)$$

Ce résultat est connu, voir [13] . On montre plus loin (page 87) que si A_o n'est pas nilpotente (qu'elle soit cyclique ou non), la singularité à l'origine ne peut être régulière.

Equation différentielle canonique associée à un système différentiel de la forme :

(25) $$Y'(x) = \frac{A_0}{x^p} Y(x)$$

où A_o est une matrice constante et cyclique.

On considère l'opérateur :

(26) $$(x^p\partial) : y \quad \mathbb{C}((x)) \longrightarrow (x^p\partial)y = x^p y' \in \mathbb{C}((x))$$

Soit T_o un vecteur (ligne) cyclique de la matrice A_o. Comme dans la méthode de Birkhoff-Cope, posons :

$$y = \langle T_o , Y \rangle$$

$\langle T_o , Y \rangle$ désigne le produit scalaire du vecteur ligne T_o au vecteur colonne Y. On peut voir facilement qu'en appliquant successivement l'opérateur défini dans (26) à y, on a $(n+1)$ relations suivantes :

(27)
$$\begin{aligned} y &= \langle T_o , Y \rangle \\ (x^p\partial)y &= \langle T_1 , Y \rangle \\ &\ \ \vdots \\ (x^p\partial)^n y &= \langle T_n , Y \rangle \end{aligned}$$

Comme T_o a été choisi constant, on a :

$$T_k = T_{k-1} A_0 = T_0 A_0^k$$

donc

(28) $$T_n = T_0 A_0^n = \sum_{k=1}^{k=n} c_k Z_{n-k}$$

où les c_k sont les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A_o . D'après les relations (27) et (28), l'équation différentielle correspondante au système (25) est la suivante :

$$(29) \qquad (x^p\partial)^n y - c_1(x^p\partial)^{n-1} y - \dots - c_{n-1}(x^p\partial)y - c_n y = 0$$

cette équation différentielle est la même quelque soit le choix du vecteur cyclique T_o (constant). On l'appellera
l'équation différentielle canonique associée au système (25).

Les $(x^p\partial)^i$ sont des expressions de type :

$$(30) \qquad \boxed{\begin{array}{l} (x^p\partial)^i = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=i} s_k^i(p)\, x^{ip-(k-1)} \cdot \partial^{i-k+1} \\ \quad i = 1,2,\dots,n \end{array}}$$

où les s_k^i $(k=1,\dots,i)$, $(i=1,2,\dots,n)$, sont des polynômes en p avec $s_1^i = 1$ $(i=1,2,\dots,n)$. Ces polynômes peuvent être déterminés chacun par des relations de récurrence : pour $i=2$, on a :

$$(x^p\partial)^2 y = x^p\, \partial(x^p y')' = x^{2p} y'' + p x^{2p-1} y'$$

$$s_1^2 = 1 \qquad\qquad s_2^2(p) = p$$

supposons que les s_k^i premiers polynômes aient été déterminés, on a :

$$(x^p\partial)^{i+1} = x^p \sum_1^i (ip-k+1)\, s_k^i(p)\, x^{ip-k}\, y^{(i-(k-1))}$$

$$+ x^p \sum_1^i s_k^i(p)\, x^{ip-k+1} y^{(i+1-(k-1))}$$

ce qui peut s'écrire encore

$$(x^p\partial)^{i+1} y = \sum_2^{i+1} (ip-k+2)\, s_{k-1}^i\, x^{(i+1)(p-(k-1))} y^{(i+1-(k-1))}$$

$$+ \sum_1^i s_k^i(p)\, x^{(ip-(k-1))} y^{(i+1-(k-1))}$$

donc $(x^p\partial)^{i+1}y$ est une expression qui s'écrit sous la forme

$$(x^p\partial)^{i+1}y = \sum_{1}^{i+1} s_k^{i+1}(p)\ x^{(i+1)p-(k-1)}y^{(i+1-(k-1))}$$

avec

$$s_1^{i+1}(p) = 1$$

$$s_{i+1}^{i+1}(p) = (ip-i+1)\ s_i^i(p)$$

$$s_k^{i+1}(p) = s_k^i(p) + (ip-k+2)\ s_{i-1}^i(p)$$

$$k=2,3,\dots,i \quad \text{et} \quad i=1,2,\dots,n-1$$

Remarque :

Supposons que l'on ait n solutions linéairement indépendantes $y_{[1]}$, $y_{[2]}$, ..., $y_{[n]}$ de l'équation différentielle (29), alors les :

$$Y_{[i]} = P^{-1} \begin{bmatrix} y_{[i]} \\ (x^p\partial)y_{[i]} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (x^p\partial)^{n-1}y_{[i]} \end{bmatrix} \qquad i=1,2,\dots,n$$

forment un système fondamental de solutions du système (25) P est une matrice constante définie par :

$$P = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_0 A_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_0 A_0^{n-1} \end{bmatrix}$$

Proposition 3 :

Si la matrice A_0 est nilpotente, alors le système différentiel :

(31) $$Y'(x) = \frac{A_0}{x^p} Y(x)$$

est à singularité régulière à l'origine quelque soit l'entier $p > 1$.

Démonstration

Supposons d'abord que la matrice A_o soit cyclique et nilpotente, dans ce cas, l'équation différentielle canonique associée au système (31) est :

$$(x^p\partial)^n y = 0$$

en utilisant la formule (30), on a :

$$\sum_1^n s_k^n(p)\ x^{np-(k-1)} y^{(n-(k-1))} = 0$$

et en multipliant les deux membres de l'égalité par x^{n-np} l'équation différentielle devient :

$$\sum_1^n s_k^n(p)\ x^{n-(k-1)} y^{(n-(k-1))} = 0$$

qui est à singularité régulière $(i(D) = 0)$.

Supposons maintenant que A_o ne soit pas cyclique. Puisque A_o est nilpotente, son polynôme caractéristique $p(\lambda) = \det(\lambda I - A_0)$ est nécessairement de la forme

$$p(\lambda) = \lambda^n$$

Soient $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda)$, ... , $e_r(\lambda)$, $e_{r+1}(\lambda) = 1$, ... , $e_n(\lambda) = 1$

les facteurs invariants de la matrice A_o . D'après la théorie de la représentation d'une matrice A_o sous sa forme normale (forme de Frobénius). Les polynômes $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda)$, ... , $e_r(\lambda)$ ont des degrés positifs et chacun d'eux divise le précédent, donc

$$e_i(\lambda) = \lambda^{n_i} \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

avec

$$n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_r \qquad \text{et} \qquad \sum_1^r n_i = n$$

Désignons par $C_1, C_2, \ldots, C_r$ les matrices compagnons associées respectivement aux polynômes $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda)$, ... , $e_r(\lambda)$, alors la matrice diagonale par blocs :

$$C = \operatorname{diag}\{ C_1 , C_2 , \dots , C_r \}$$

est semblable à la matrice A_o , cela veut dire qu'il existe une matrice P inversible telle que :

$$A_o = P^{-1} C P$$

Posons

$$Z(x) = P\, Y(x)$$

le système (31) devient :

$$(32) \qquad Z'(x) = \frac{C}{x^p} Z(x)$$

Au système (32) on fait correspondre les (r) systèmes :

$$(1) \qquad Z_1'(x) = \frac{C_1}{x^p} Z_1(x)$$

$$(2) \qquad Z_2'(x) = \frac{C_2}{x^p} Z_2(x)$$

$$\vdots$$

$$(r) \qquad Z_r'(x) = \frac{C_r}{x^p} Z_r(x)$$

où les Z_i $(i=1,2,\dots,r)$ sont des vecteurs colonnes à n_i composantes ; chaque système :

$$(i) \qquad Z_i'(x) = \frac{C_i}{x^p} Z_i(x)$$

admet n_i solutions linéairement indépendantes. Soit $\Phi_i(x)$ un système fondamental de solutions du système (i) , $(i=1,2,\dots,r)$ alors un système fondamental de solutions du système (32) est une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\Phi = \operatorname{diag}\{ \Phi_1 , \Phi_2 , \dots , \Phi_r \}$$

et par suite $\tilde{\Phi} = P^{-1}\Phi$ est un système fondamental de solutions du système de départ (31).

Comme la matrice C_i dans le système (i) est cyclique et nilpotente, d'après ce qui précède, le système (i) est à singularité régulière à l'origine. Ceci est vrai pour $i=1,2,\dots,r$; donc $x=0$ est un point singulier régulier du système (31) pour tout $p \geqslant 1$.

4- Quelques exemples :

On donne dans ce qui suit des exemples, programmés en langage de calcul formel (Reduce) pour le calcul de la transformation $T(x)$ (cf. théorème 2).

MATRICE DU SYSTEME DIFFERENTIEL :

$a(1,1) := (-1)/x^{3}$

$a(1,2) := (2*x^{2} + 1)/x^{3}$

$a(2,1) := (-4*x^{2} - 1)/x^{3}$

$a(2,2) := (6*x^{2} + 1)/x^{3}$

CØEFFICIENTS DU VECTEUR CYCLIQUE Z0

$Z0(1) = 1$

$Z0(2) = 0$

IMPRESSIØN DE LA TRANSFØRMATIØN T

$T(1,1)=1$

$T(1,2)=0$

$T(2,1)=1/(2*x^{2} + 1)$

$T(2,2)=x^{2}/(2*x^{2} + 1)$

IMPRESSIØN DE LA MATRICE B = T**(-1)*A*T-T**(-1)*T'

$B(1,1) := 0$

$B(1,2) := 1/x$

$B(2,1) := (4*(-4*x^{2} - 1))/(x*(2*x^{2} + 1))$

$B(2,2) := (4*(3*x^{2} + 1))/(x*(2*x^{2} + 1))$

MATRICE DU SYSTEME DIFFERENTIEL :

$a(1,1) := (x^3 + x^2 + 6)/x^2$

$a(1,2) := (- x^3 - x^2 + 2)/x^2$

$a(1,3) := (- 3)/x^2$

$a(2,1) := (2*(x^3 + x^2 + 9))/x^2$

$a(2,2) := (3*(x^3 + x^2 + 2))/x^2$

$a(2,3) := (- x^3 - x^2 - 9)/x^2$

$a(3,1) := (6*(x^3 + x^2 + 4))/x^2$

$a(3,2) := (x^3 + x^2 + 8)/x^2$

$a(3,3) := (4*(x^3 + x^2 - 3))/x^2$

COEFFICIENTS DU VECTEUR CYCLIQUE ZO

ZO(1) =1

ZO(2) =0

ZO(3) =0

IMPRESSIØN DE LA TRANSFØRMATIØN T

$T(1,1)=1$

$T(1,2)=0$

$T(1,3)=0$

$$T(2,1)=(x^{7}+3*x^{6}+3*x^{5}-4*x^{4}-10*x^{3}+4*x^{2}-102*x-108)/(x^{7}+3*x^{6}+3*x^{5}+3*x^{4}+4*x^{3}+11*x^{2}+43*x+37)$$

$$T(2,2)=(-x^{5}-2*x^{4}-x^{3}+8*x^{2}+8*x-6)/(x^{7}+3*x^{6}+3*x^{5}+3*x^{4}+4*x^{3}+11*x^{2}+43*x+37)$$

$$T(2,3)=(-3)/(x^{7}+3*x^{6}+3*x^{5}+3*x^{4}+4*x^{3}+11*x^{2}+43*x+37)$$

$$T(3,1)=(5*x^{7}+15*x^{6}+15*x^{5}+54*x^{4}+98*x^{3}+73*x^{2}+18*x+2)/(x^{7}+3*x^{6}+3*x^{5}+3*x^{4}+4*x^{3}+11*x^{2}+43*x+37)$$

$$T(3,2)=(-4*x^{5}-8*x^{4}-5*x^{3}-7*x^{2}-7*x-4)/(x^{7}+3*x^{6}+3*x^{5}+3*x^{4}+4*x^{3}+11*x^{2}+43*x+37)$$

$$T(3,3)=(x^{3}+x^{2}-2)/(x^{7}+3*x^{6}+3*x^{5}+3*x^{4}+4*x^{3}+11*x^{2}+43*x+37)$$

IMPRESSIØN DE LA MATRICE B = T**(-1)*A*T-T**(-1)*T'

B(1,1) := 0

B(1,2) := 1/x

B(1,3) := 0

B(2,1) := 0

B(2,2) := 1/x

B(2,3) := 1/x

$$B(3,1) := (27*x^{12} + 162*x^{11} + 405*x^{10} + 823*x^{9} + 1820*x^{8} + 3511*x^{7} + 6217*x^{6} + 9733*x^{5} + 12184*x^{4} + 19367*x^{3} + 31546*x^{2} + 27511*x + 8763)/(x^{7} + 3*x^{6} + 3*x^{5} + 3*x^{4} + 4*x^{3} + 11*x^{2} + 43*x + 37)$$

$$B(3,2) := (- 22*x^{11} - 110*x^{10} - 228*x^{9} - 361*x^{8} - 605*x^{7} - 1003*x^{6} - 2132*x^{5} - 3523*x^{4} - 3199*x^{3} - 3864*x^{2} - 5396*x - 2775)/(x*(x^{7} + 3*x^{6} + 3*x^{5} + 3*x^{4} + 4*x^{3} + 11*x^{2} + 43*x + 37))$$

$$B(3,3) := (8*x^{9} + 32*x^{8} + 53*x^{7} + 60*x^{6} + 65*x^{5} + 126*x^{4} + 436*x^{3} + 640*x^{2} + 253*x - 74)/(x*(x^{7} + 3*x^{6} + 3*x^{5} + 3*x^{4} + 4*x^{3} + 11*x^{2} + 43*x + 37))$$

MATRICE DU SYSTEME DIFFERENTIEL :

$a(1,1) := 1$

$a(1,2) := (-2*x+1)/x^3$

$a(1,3) := 4/x$

$a(2,1) := x^2*(x+1)$

$a(2,2) := (-x+2)/x$

$a(2,3) := 4/x$

$a(3,1) := 3*x^2$

$a(3,2) := 0$

$a(3,3) := (x^2+2)/x$

COEFFICIENTS DU VECTEUR CYCLIQUE Z0

Z0(1) =1

Z0(2) =x

Z0(3) =1

IMPRESSION DE LA TRANSFORMATION T

$$T(1,1)=(4x^{11} - 9x^{10} - 7x^{9} - 58x^{8} - 20x^{7} - 69x^{6} + 22x^{5} + 70x^{4} - 28x^{3} - 28x^{2} + 16x - 4)/(4x^{15} + 9x^{14} + 35x^{13} + 28x^{12} + 31x^{11} - 114x^{10} - 68x^{9} - 153x^{8} - 41x^{7} - 85x^{6} + 39x^{5} + 72x^{4} - 26x^{3} - 28x^{2} + 16x - 4)$$

$$T(1,2)=(x^{2}(4x^{8} + 5x^{7} + 18x^{6} + 5x^{5} + 35x^{4} - 3x^{3} - 8x^{2} + 4x + 1))/(4x^{15} + 9x^{14} + 35x^{13} + 28x^{12} + 31x^{11} - 114x^{10} - 68x^{9} - 153x^{8} - 41x^{7} - 85x^{6} + 39x^{5} + 72x^{4} - 26x^{3} - 28x^{2} + 16x - 4)$$

$$T(1,3)=(x^{2}(- x^{5} - 5x^{4} - 3x^{3} - 2x + 1))/(4x^{15} + 9x^{14} + 35x^{13} + 28x^{12} + 31x^{11} - 114x^{10} - 68x^{9} - 153x^{8} - 41x^{7} - 85x^{6} + 39x^{5} + 72x^{4} - 26x^{3} - 28x^{2} + 16x - 4)$$

$$T(2,1)=(x^{3}(4x^{11} + 9x^{10} + 33x^{9} + 26x^{8} + 20x^{7} - 116x^{6} - 128x^{5} - 114x^{4} + 12x^{2} - 8x + 4))/(4x^{15} + 9x^{14} + 35x^{13} + 28x^{12} + 31x^{11} - 114x^{10} - 68x^{9} - 153x^{8} - 41x^{7} - 85x^{6} + 39x^{5} + 72x^{4} - 26x^{3} - 28x^{2} + 16x - 4)$$

$$T(2,2)=(x^{2}(6x^{7} + 16x^{6} + 6x^{5} - 5x^{4} - 23x^{3} - 6x^{2} + 8x - 4))/(4x^{15} + 9x^{14} + 35x^{13} + 28x^{12} + 31x^{11} - 114x^{10} - 68x^{9} - 153x^{8} - 41x^{7} - 85x^{6} + 39x^{5} + 72x^{4} - 26x^{3} - 28x^{2} + 16x - 4)$$

$$T(2,3)=(x^{4}(- x^{5} - x^{4} - 3x^{3} + x^{2} + 3x + 6))/(4x^{15} + 9x^{14} + 35x^{13} + 28x^{12} + 31x^{11} - 114x^{10} - 68x^{9} - 153x^{8} - 41x^{7} - 85x^{6} + 39x^{5} + 72x^{4} - 26x^{3} - 28x^{2} + 16x - 4)$$

$$T(3,1)=(x^{3}(2x^{10} + 2x^{9} + 7x^{8} + 11x^{7} + 67x^{6} + 19x^{5} - 21x^{4} - 28x^{3} + 25x^{2} - 2x + 2))/(4x^{15} + 9x^{14} + 35x^{13} + 28x^{12} + 31x^{11} - 114x^{10} - 68x^{9} - 153x^{8} - 41x^{7} - 85x^{6} + 39x^{5} + 72x^{4} - 26x^{3} - 28x^{2} + 16x - 4)$$

$$T(3,2)=(x^{2}(- 10x^{8} - 21x^{7} - 24x^{6} - 12x^{4} + 9x^{3} - 1))/(4x^{15} + 9x^{14} + 35x^{13} + 28x^{12} + 31x^{11} - 114x^{10} - 68x^{9} - 153x^{8} - 41x^{7} - 85x^{6} + 39x^{5} + 72x^{4} - 26x^{3} - 28x^{2} + 16x - 4)$$

$$T(3,3)=(x^{2}(x^{8} + x^{7} + 3x^{6} + 2x^{4} - 3x^{3} + 2x - 1))/(4x^{15} + 9x^{14} + 35x^{13} + 28x^{12} + 31x^{11} - 114x^{10} - 68x^{9} - 153x^{8} - 41x^{7} - 85x^{6} + 39x^{5} + 72x^{4} - 26x^{3} - 28x^{2} + 16x - 4)$$

IMPRESSIØN DE LA MATRICE B = T**(-1)*A*T-T**(-1)*T′

$B(1,1) := 0$

$B(1,2) := 1/x$

$B(1,3) := 0$

$B(2,1) := 0$

$B(2,2) := 1/x$

$B(2,3) := 1/x$

$$B(3,1) := (8x^{19} + 66x^{18} + 58x^{17} + 164x^{16} - 738x^{15} - 804x^{14} - 728x^{13} + 5059x^{12} + 4618x^{11} + 2570x^{10} - 611x^{9} + 5277x^{8} + 10094x^{7} - 7544x^{6} - 4300x^{5} + 1560x^{4} + 1256x^{3} - 1132x^{2} + 288x - 56)/(4x^{15} + 9x^{14} + 35x^{13} + 28x^{12} + 31x^{11} - 114x^{10} - 68x^{9} - 153x^{8} - 41x^{7} - 85x^{6} + 39x^{5} + 72x^{4} - 26x^{3} - 28x^{2} + 16x - 4)$$

$$B(3,2) := (40x^{18} + 62x^{17} + 299x^{16} - 186x^{15} - 553x^{14} - 3032x^{13} - 1530x^{12} - 2117x^{11} + 2605x^{10} - 912x^{9} + 963x^{8} + 819x^{7} + 719x^{6} - 842x^{5} + 680x^{4} - 352x^{3} + 8x^{2} + 4)/(x(4x^{15} + 9x^{14} + 35x^{13} + 28x^{12} + 31x^{11} - 114x^{10} - 68x^{9} - 153x^{8} - 41x^{7} - 85x^{6} + 39x^{5} + 72x^{4} - 26x^{3} - 28x^{2} + 16x - 4))$$

$$B(3,3) := (4x^{17} + 9x^{16} + 91x^{15} + 145x^{14} + 451x^{13} + 194x^{12} + 242x^{11} - 1179x^{10} - 505x^{9} - 1156x^{8} - 207x^{7} - 353x^{6} + 130x^{5} + 188x^{4} - 36x^{3} - 32x^{2} + 4)/(x(4x^{15} + 9x^{14} + 35x^{13} + 28x^{12} + 31x^{11} - 114x^{10} - 68x^{9} - 153x^{8} - 41x^{7} - 85 \cdot$$

CHAPITRE 3

CARACTERISATION DES SYSTEMES DIFFERENTIELS A SINGULARITE REGULIERE

$2^{\text{ème}}$ partie

Réductibilité d'un système différentiel

1. Introduction

2. Réductibilité d'un système différentiel au sens de Moser

3. Algorithme

4. Quelques exemples

1. INTRODUCTION

On considère un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 de la forme :

$$(1) \qquad Y'(x) = A(x)\,Y(x)$$

où

- Y est un vecteur colonne à n composantes $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$
- A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $C((x))$. On désigne par $\mathbb{C}((x))$; le corps des fractions de l'anneau des séries formelles, c'est à dire des expressions de type $\sum_{-p}^{+\infty} a_k \cdot x^k$ sans conditions de convergence sur la partie non polaire.

$$A(x) = \frac{1}{x^p} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cdot x^k \qquad (A_0 \neq 0)$$

où p est un entier positif supérieur ou égal à 1, les A_k : $k = 0,1,\ldots$ sont des matrices constantes. Ils est connu que les singularités du système (1) sont aussi les singularités des solutions. Le problème est d'étudier la nature des solutions vectorielles $Y(x)$ au voisinage de la singularité $x = 0$.

Si $p = 1$, l'origine est un point singulier régulier; **mais celà est également possible lorsque $p > 1$.** En fait on a le résultat suivant cf. [17] :

On dit que le système différentiel (1) est à singularité régulière au voisinage de l'origine si et seulement si tout système fondamental de solutions W est de la forme :

$$(2) \qquad W(x) = P(x) \cdot x^R$$

$P \in M_{n,n}(\mathbb{C}((x)))$, $R \in M_{n,n}(\mathbb{C})$

EXEMPLE 1 :

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} y_1' \\ \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{x^2} & \dfrac{x^2-x-1}{x^2} \\ \\ \dfrac{1}{x^2} & \dfrac{x+1}{x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \\ y_2 \end{bmatrix}$$

posons

$$(4) \qquad \begin{cases} z_1 = xy_1 + xy_2 \\ z_2 = x^2y_2 \end{cases}$$

des nouvelles variables, celà donne un nouveau système

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_1' \end{bmatrix} = \frac{1}{x}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}$$

dont un système fondamental de solutions est :

$$Z = x^{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}$$

D'après les relations (4)

$$Y = \frac{1}{x^2}\begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}$$

est un système fondamental de solutions du système (3). La singularité du système (3) est donc régulière malgré que l'ordre polaire soit 2.
Remarquons que dans cet exemple

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}$$

est nilpotente.

Tout système différentiel linéaire homogène de la forme :

$$S(p) : \qquad Y'(x) = A(x)\cdot Y(x)$$

à singularité régulière au voisinage de l'origine, se ramène à un système S(1) par une transformation de la forme :

$$(6) \qquad Y(x) = T(x)\cdot Z(x)$$

où T(x) est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}((x))$ dont le détérminant est non identiquement nul cf. [12].

Par une telle transformation le système S(p) devient

$$S(1) : \qquad Z'(x) = B(x)\cdot Z(x)$$

où B(x) est une matrice carrée d'ordre n, d'ordre polaire égal à 1 vérifiant la relation

$$(7) \qquad B = T^{-1} A T - T^{-1}T'$$

Il apparait à partir de l'exemple que nous avons traité dans la page précédante, un problème fondamental, celui de pouvoir décider directement sur un système S(p) si la singularité à l'origine est régulière et de calculer la transformation T(x).

Dans la littérature, ce problème a été étudié par plusieurs auteurs. Voir [6], [10], [12], [13].

C'est ainsi que B. Malgrange cf. [12] a remarqué que l'on peut toujours se ramener à une équation différentielle scalaire par l'intermédiaire d'un vecteur cyclique. Il associe ainsi à tout système (1) un indice i(D) dont la nullité caractérise la singularité régulière. Dans le cas où x = 0 est un point singulier régulier, nous avons donné dans la première partie de ce chapitre par le même argument un algorithme programmé en language de calcul formel (Reduce) permettant le calcul de la transformation T. Malheuresement le calcul des coefficients de la matrice T s'avère très long (voir la page 74).

Dans cette partie du chapitre nous reprenons le critère de J. Moser cf. [13] en lui donnant un caractère plus pratique. Par application à son théorème cf. [13], on obtient un moyen permettant de vérifier la réductibilité d'un système différentiel et un algorithme qui calcule dans certains cas en un nombre fini de pas la transformation T(x) qui réduit le système S(p) sous la forme :

$$S(p^*) : \qquad Y'(x) = \frac{1}{x^{p^*}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cdot x^k \right) Y(x)$$

où p^* est la valeur minimale de l'entier p, lorsqu'on applique à S(p) toutes les transformations possibles de type (6). On peut par ce même algorithme d'ailleurs calculer l'invariant de Moser cf. p. 5.

La singularité régulière est caractérisée par $p^* = 1$.

2. - REDUCTIBILITE D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL (AU SENS DE MOSER)

On considère un système différentiel linéaire homogène de la forme :

$$(1) \qquad Y'(x) = A(x)\, Y(x)$$

où

- $A(x) = \frac{1}{x^p} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cdot x^k$
- p est un entier positif ≥ 1
- $A_k \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) \qquad k = 0,1,\dots \qquad (A_0 \neq 0)$.

J. Moser [5], associe à tout système (1), le nombre rationnel :

$$m(A) = p - 1 + \frac{r}{n}$$

où

- $r = \text{rang}(A_0) \qquad 0 \leq r \leq n$
- $m(A) \geq 0$ est appelé **l'ordre de la matrice A.**

Il considère ensuite le nombre :

$$\mu(A) = \operatorname*{Inf}_{T \in G\ell(n,\mathbb{C}((x)))} m\left(T^{-1} A\, T - T^{-1} T' \right)$$

$G\ell(n,\mathbb{C}((x)))$ désigne le groupe des matrices inversibles dans $M_{n,n}(\mathbb{C}((x)))$. On appelera μ (A) **l'invariant de Moser.** associé au système (1). On a naturellement :

" x = 0 est une singularité régulière si et seulement si $\mu \leq 1$ ".

Moser démontre l'existence des transformations T de type :

(4) $$T(x) = \left(P_0 + xP_1 \right) \operatorname{diag}(1,1,\ldots,1,x,x,\ldots,x)$$

où P_0 , P_1 sont des matrices constantes avec $\det(P_0) \neq 0$.
Ces transformations permettent de diminuer le nombre m(A). Il donne ensuite une estimation du nombre de pas pour atteindre le nombre μ . Si le système est à singularité régulière, on peut diminuer m(A) en au plus (n-1)(p-1) pas à $\mu = 1$.

Définition. 1

On dit que le système différentiel (1) est **réductible** si $m(A) > \mu(A)$.
On dira dans les mêmes conditions que la matrice A est réductible.

Nous allons supposer dans ce qui suit que $m(A) > 1$ et nous allons regarder dans quelles conditions la matrice A est réductible. Moser cf. [13] démontre le résultat suivant :

Théorème 1 :

Si $m(A) > 1$, alors A est réductible si et seulement si le polynôme :

$$\theta(\lambda) = x^r.\det\left(\lambda I + x^{p-1}.A(x)\right)\Big|_{x=0}$$
$$r = \operatorname{rang}(A_0)$$

est identiquement nul en λ .

Remarque 1 [13] :

La réductibilité de la matrice

$$A(x) = \frac{1}{x^p} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cdot x^k$$

dépend seulement de A_0 et de A_1. En effet :

$$\theta(\lambda) = x^r \det(\lambda I + \frac{A_0}{x} + A_1 + A_2 x + \dots)\Big|_{x=0}$$

$$\theta(\lambda) = x^r \det(\lambda I + \frac{A_0}{x} + A_1)\Big|_{x = 0}$$

Remarque 2 :

Soit $P \in G\ell(n,\mathbb{C})$, la matrice qui transforme A_0 sous une forme de Jordan

(5) $$J = P^{-1} A_0 P$$

On a :

(6) $$\theta(\lambda) = x^r \det\ (\lambda I + \frac{J}{x} + G)\Big|_{x=0}$$

où

(7) $$G = P^{-1} A_1 P$$

Proposition 1

Une condition nécessaire pour que A(x) soit réductible est que A_0 admette une valeur propre nulle et dont un bloc de Jordan J_1 correspondant soit de dimension $n_1 \geqslant 2$.

Démonstration : supposons que A_0 admette une valeur propre $\lambda_1 = 0$ et que tous les blocs de Jordan correspondants soient de dimension 1. Dans ce cas J peut s'écrire sous la forme suivante :

$$J = \text{diag}\{ H_1 , J_2 , \cdots , J_m \}$$

où

- H_1 est une matrice nulle d'ordre un certain nombre n_1
- $J_2, \dots, J_m$ sont de la forme :

(9) $$J_i = \lambda_i I_{n_i} + H_i \qquad i = 2,\dots,m\ .$$

où

- λ_i $(i = 2,\dots,m)$ sont des valeurs propres de A_0 non nulles (non forcément distinctes).
- I_{n_i} est la matrice identité d'ordre n_i $(i = 2,\dots,m)$.
- H_i sont des matrices nilpotentes d'ordre n_i $(i = 2,\dots,m)$ et de la forme :

(9') $$H_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Par hypothèse, les valeurs propres $\lambda_2,\dots,\lambda_m$ de A_0 ne sont pas nulles. Dans ce cas on a :

(10) $$r = \text{rang}(A_0) = n_2 + n_3 + \dots + n_m$$

Ecrivons la matrice G sous la forme suivante :

(11) $$G = \begin{array}{|c|c|c|c|c} \multicolumn{1}{c}{\overleftrightarrow{n_1}} & \multicolumn{1}{c}{\overleftrightarrow{n_2}} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\overleftrightarrow{n_m}} & \\ \hline G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1m} & n_1 \\ \hline G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2m} & n_2 \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \hline G_{m1} & G_{m2} & \cdots & G_{mm} & n_m \\ \hline \end{array}$$

où les G_{ij} sont des matrices à n_i lignes, n_j colonnes.

Considérons ensuite les matrices :

(12) $$\Gamma_r(x) = \mathrm{diag}\{ I_{n-r} , xI_r \}$$

(où r est l'entier défini dans (10)) et :

(13) $$R(\lambda ,x) = \lambda I + \frac{J}{x} + G$$

D'après la construction (12) et (13), on a :

(14) $$\begin{aligned} \theta(\lambda) &= \det(\Gamma_r(x)) \cdot \det(R(\lambda,x))\big|_{x=0} \\ \theta(\lambda) &= \det(\Gamma_r(x)\cdot R(\lambda,x))\big|_{x=0} \end{aligned}$$

Effectuons le produit de la matrice (12) et (13) nous obtenons (après avoir fait x = 0) :

(15) $$\Gamma_r(x)\cdot R(\lambda,x)\big|_{x=0} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & & n_m \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} \lambda I_{n_1} + G_{11} & G_{12} & \cdots\cdots & G_{1m} \\ \hline 0 & J_2 & \cdots\cdots & 0 \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots\cdots & J_m \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \\ n_m \end{array}$$

Par conséquent

$$\theta(\lambda) = \lambda_2^{n_2} \cdot \lambda_3^{n_3} \cdot \ldots \cdot \lambda_m^{n_m} \cdot \det(\lambda I_{n_1} + G_{11})$$

donc

$$\theta(\lambda) \not\equiv 0 \qquad \text{c.q.f.d}$$

Corollaire :

Si dans le développement

$$A(x) = \frac{1}{x^p} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cdot x^k$$

la matrice A_0 n'est pas nilpotente, alors le nombre p ne peut être diminué.

Démonstration : Supposons dans (9) que les valeurs propres $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_s$ ($s < m$) soient nulles et que $\lambda_{s+1}, \lambda_{s+2}, \ldots, \lambda_m$ ne les soient pas. Dans ce cas on a :

$$r = \text{rang}(A_0) = n_2 - 1 + n_3 - 1 + \ldots + n_s - 1 + n_{s+1} + \ldots + n_m$$

$$r = n_2 + n_3 + \ldots + n_m - (s - 1)$$

En effectuant le produit des matrices $\Gamma_r(x)$ et $R(\lambda, x)$ définies dans (12) et (13), on obtient (aprés avoir fait $x = 0$) :

$$(16) \qquad \theta(\lambda) = \lambda_{s+1}^{n_{s+1}} \cdot \lambda_{s+2}^{n_{s+2}} \cdot \ \ldots \ \cdot \lambda_m^{n_m} \cdot x^{r-\bar{n}} \cdot \det(\lambda \tilde{I} + \frac{\tilde{J}}{x} + \tilde{G})\Big|_{x=0}$$

où
- $\bar{n} = n_{s+1} + \ldots + n_m$
- $\tilde{J}$ est la partie nilpotente de J.
- $\tilde{J}$ est d'ordre $n_1 + n_2 + \ldots + n_s$.
- $\tilde{G}$ est la matrice G à laquelle on enlève les $\bar{n}$ premières lignes et colonnes.

La réduction de la matrice A(x) ne depend donc que de la partie nilpotente de A_0. On peut écrire (16) :

$$\theta(\lambda) = \lambda_{s+1}^{n_{s+1}} \cdot \ldots \cdot \lambda_m^{n_m} \tilde{\theta}(\lambda)$$

où

$$\tilde{\theta}(\lambda) = x^{\tilde{r}} \cdot \det(\lambda I + \frac{\tilde{J}}{x} + \tilde{G})\Big|_{x=0}$$

$$\tilde{r} = r - (n_{s+1} + \ldots + n_m)$$

Dans ce qui suit nous allons nous intéresser qu'à la diminution de l'entier p, nous ajoutons donc l'hypothèse : **A_0 est nilpotente.**

3- Algorithme de réduction d'un système différentiel linéaire homogène

Considérons le système différentiel (1) :

$$Y'(x) = A(x)\ Y(x)$$

où

$$A(x) = \frac{1}{x^p} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cdot x^k$$

où

- p est un entier strictement supérieur à 1.
- A_0 est une matrice nilpotente non nulle.

Soit $P \in G\ell(n,\mathbb{C})$, la matrice qui transforme A_0 sous une forme de Jordan :

$$J = P^{-1} \cdot A_0 \cdot P$$

On suppose que J soit de la forme

(17) $$J = \mathrm{diag}\{ H_1, H_2, \ldots ,H_m\}$$

où

- H_1 est une matrice nulle d'ordre un certain nombre n_1.
- H_i ($i = 2, \ldots ,m$) sont de la forme (9') d'ordre $n_i \geqslant 2$.

On a :

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$$

et

$$r = \mathrm{rang}(A_0) = n_2 - 1 + n_3 - 1 + \ldots + n_m - 1$$

(17') $$r = n_2 + n_3 + \ldots + n_m - (m-1)$$

Considérons la matrice $G = P^{-1}A_1P$ écrite sous la forme (11). On nôte $\hat{G}(\lambda)$, la matrice carrée d'ordre $m + n_1 - 1$ associée à la matrice G et définie par :

$$
(18) \quad \hat{G}(\lambda) = \begin{array}{|ccc|cccc|}
\multicolumn{3}{c}{\overleftrightarrow{\quad n_1 \quad}} & \multicolumn{4}{c}{\overleftrightarrow{\quad m-1 \quad}} \\
\hline
 & & & G_{12}(1,1) & G_{13}(1,1) & \cdots & G_{1m}(1,1) \\
 & & & G_{12}(2,1) & G_{13}(2,1) & \cdots & G_{1m}(2,1) \\
 & \lambda I_{n_1} + G_{11} & & & & & \\
 & & & G_{12}(n_1,1) & G_{13}(n_1,1) & \cdots & G_{1m}(n_1,1) \\
\hline
G_{21}(n_2,1) & \cdots & G_{21}(n_2,n_1) & G_{22}(n_2,1) & G_{23}(n_2,1) & \cdots & G_{2m}(n_2,1) \\
G_{31}(n_3,1) & \cdots & G_{31}(n_3,n_1) & G_{32}(n_3,1) & G_{33}(n_3,1) & \cdots & G_{3m}(n_3,1) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
G_{m1}(n_m,1) & \cdots & G_{m1}(n_m,n_1) & G_{m2}(n_m,1) & G_{m3}(n_m,1) & \cdots & G_{mm}(n_m,1) \\
\hline
\end{array}
$$

Lemme :

Si $m(A) > 1$ et A_0 nilpotente alors
$\theta(\lambda) = \det(\hat{G}(\lambda))$.

Démonstration : D'après la remarque 2, on a :

$$\theta(\lambda) = x^r \cdot \det(\lambda I + \frac{J}{x} + G)\Big|_{x=0}$$

où J est la forme de Jordan écrite sous la forme (17) et $G = P^{-1}A_1P$.

$$\lambda I + \frac{J}{x} + G = \begin{array}{cccc} \overleftrightarrow{n_1} & \overleftrightarrow{n_2} & & \overleftrightarrow{n_m} \\ \left.\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \lambda I_{n_1} + G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1m} \\ \hline G_{21} & \lambda I_{n_2} + \frac{H_2}{x} + G_{22} & \cdots & G_{2m} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline G_{m1} & G_{m2} & \cdots & \lambda I_{n_m} + \frac{H_m}{x} + G_{mm} \\ \hline \end{array}\right. \end{array}$$

On peut voir facilement qu'après un certain nombre de permutations de lignes et de colonnes, on peut mettre cette matrice sous la forme suivante :

$$\lambda I + \frac{J}{x} + G \sim \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{r = n_2 + n_3 + \ldots + n_m - (m-1)} & \overleftrightarrow{m + n_1 - 1} \\ \left.\begin{array}{|c|c|} \hline \frac{1}{x} \cdot I_r + L & \\ \hline & \hat{G}(\lambda) \\ \hline \end{array}\right. \end{array}$$

où

- I_r est la matrice identité d'ordre $r = n_1 + n_2 + \dots + n_m - (m - 1)$.

- $\hat{G}(\lambda)$ est la matrice que l'on a défini dans (18).

- Les parties hachurées sont des matrices qui dépendent seulement des coefficients de G, de λ mais non de x.

- L est une matrice carrée d'ordre r ne dépendant que de G et de λ

$$\theta(\lambda) = x^r \cdot \det(\lambda I_r + \frac{J}{x} + G)\big|_{x=0}$$

$$\theta(\lambda) = x^r \cdot \det(\hat{G}(\lambda)) \cdot \det(\frac{1}{x} I_r + L)\big|_{x=0}$$

(19) $$\theta(\lambda) = \det(\hat{G}(\lambda)) \qquad \text{c.q.f.d}$$

- On considère les $(m - 1)$ vecteurs lignes associées à la matrice $\hat{G}(\lambda)$ et définis par :

(20) $$\begin{cases} X^{(1)} = \hat{G}_{n_1+1*}(\lambda) \\ X^{(2)} = \hat{G}_{n_1+2*}(\lambda) \\ \vdots \\ X^{(m-1)} = \hat{G}_{n_1+m-1*}(\lambda) \end{cases}$$

- De la même manière considérons les $(m - 1)$ vecteurs colonnes associés à $\hat{G}(\lambda)$ et définis par :

(21) $$\begin{cases} Y^{(1)} = \hat{G}_{*n_1+1}(\lambda) \\ Y^{(2)} = \hat{G}_{*n_1+2}(\lambda) \\ \vdots \\ Y^{(m-1)} = \hat{G}_{*n_1+m-1}(\lambda) \end{cases}$$

Ces deux suites de vecteurs sont indépendants du paramétre λ. En appliquant le théorème 1, et le lemme précédent, on a :

Théorème 2 :

> Si A_0 est une matrice nilpotente et $m(A) > 1$ alors $A(x)$ est réductible si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :
>
> I - $\mathrm{rang}(X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(m-1)}) < m - 1$
>
> II - $\mathrm{rang}(Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(m-1)}) < m - 1$

En effet d'après le théorème 1 et le lemme précédent, la matrice A est réductible si et seulement si :

$$\theta(\lambda) = \det(\hat{G}(\lambda)) \equiv 0$$

La matrice $A(x)$ est donc réductible si et seulement si la matrice $\hat{G}(\lambda)$ définie dans (18) est singulière quelque soit λ . Or d'après les constructions (18), (20), et (21), ceci est vérifié si les vecteurs

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(m-1)}$$

ou

$$Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(m-1)}$$

sont linéairement dépendants.

On donne dans le théorème suivant la transformation $T(x)$ pour réduire le nombre $m(A)$ cf. (2) correspondante à chaque cas I et II. Pour appliquer ce théorème il est donc nécéssaire d'appliquer le théorème 2

Théorème 3 :

Si A_0 est nilpotente, A(x) réductible et m(A)   1, alors la réduction s'obtient à l'aide de la transformation :

(22) $$T(x) = P \cdot S(x)$$

où

- P est une matrice constante avec $\det(P) \neq 0$, elle transforme A_0 sous une forme de Jordan que l'on suppose écrite sous la forme (17).

- S(x) est une matrice diagonale définie par :

$$S(x) = \mathrm{diag}\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$$

où

- $S_1 = I_{n_1}$

(23) $$- S_i(x) = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & x \cdot I_{n_i - 1} \end{array}\right] \qquad i = 2, \ldots, m$$

si la propriété I est vérifiée, et :

(24) $$- S_i(x) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{x} I_{n_i - 1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \qquad i = 2, \ldots, m$$

si la propriété II est vérifiée.

J. Moser[13] a démontré que la réduction de la matrice $A(x)$ peut être obtenue à l'aide des transformations de la forme

$$T(x) = (P_0 + xP_1)\cdot x^{\alpha}$$

où P_0, P_1 sont des matrices constantes avec $\det(P_0) \neq 0$

et $\alpha = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des entiers avec

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \quad \text{et} \quad \alpha_n - \alpha_1 = 1 .$$

Le théorème 3 donne la construction de ces transformations par la formule (22). Il remarque ensuite que puisque $\alpha_n - \alpha_1 = 1$, la matrice $T^{-1}T'$ dans (3) est d'ordre polaire égale à 1. Donc $m(A)$ ne peut être diminué que par l'opération $T^{-1}AT$, il s'agit donc de démontrer ici que si $A(x)$ est réductible, $m(A) > 1$ et si

$$A^{(1)}(x) = T^{-1}AT$$

alors

$$r(A_0^{(1)}) < r(A_0)$$

<u>Démonstration du théorème 3</u>

Soit

$$A^{(1)} = T^{-1}AT$$

où T est la matrice définie dans (22)

Si

$$A^{(1)} = \frac{1}{x^p} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{(1)}\cdot x^k$$

alors

$$A_0^{(1)} = T^{-1}(A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \ldots)T_{|x=0}$$

$$A_0^{(1)} = T^{-1}(A_0 + xA_1)T_{|x=0}$$

$$A_0^{(1)} = S^{-1}(J + xG)S_{|x=0}$$

Puisque A(x) est réductible, nous supposons que c'est la propriété I (cf. théorème 2) qui est vérifiée, la démonstration est analogue dans l'autre cas. Les $S_i(x)$ sont donc de la forme (23) et en général pour une matrice quelconque N à n_i lignes, n_j colonnes on a :

$$x\cdot S_i^{-1}\cdot N\cdot S_j\Big|_{x=0} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad 1 \quad & \qquad n_j-1 \qquad \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline N(2,1) & \\ \cdots & 0 \\ N(n_i,1) & \end{array}\right] & \begin{array}{l} 1 \\ \\ n_i-1 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$x\cdot S_i^{-1}\cdot N\Big|_{x=0} = \begin{array}{cc} n_j & \\ \left[\begin{array}{ccc} & 0 & \\ \hline N(2,1) & \cdots\cdots & N(2,n_j) \\ & \cdots\cdots & \\ N(n_i,1) & \cdots\cdots & N(n_i,n_j) \end{array}\right] & \begin{array}{l} 1 \\ \\ n_i-1 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$S_i^{-1}\cdot H_i\cdot S_i\Big|_{x=0} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad 1 \quad & \qquad n_i-1 \qquad \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \ddots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} 1 \\ \\ n_i-1 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Les H_i ($i = 2, \ldots , m$) sont les matrices d'ordre n_i définies dans (9').

$$A_0^{(1)} = x\cdot \bar{S}^{1}\cdot G\cdot S_{\,x=0} + \bar{S}^{1}\cdot J\cdot S_{|x=0} =$$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 & n_1 & \multicolumn{2}{c|}{n_2} & & \multicolumn{2}{c}{n_m} \\
\hline
 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & \cdots & \multicolumn{2}{c|}{0} & n_1 \\
\hline
 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & & \multicolumn{2}{c|}{0} & \\
\hline
 & \begin{matrix} G_{21}(2,1) & \cdot\cdot & G_{21}(2,n_1) \\ \\ G_{21}(n_2,1) & \cdot\cdot & G_{21}(n_2,n_1) \end{matrix} & \begin{matrix} G_{22}(2,1) \\ \\ G_{22}(n_2,1) \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} G_{2m}(2,1) \\ \\ G_{2m}(n_2,1) \end{matrix} & 0 & n_2 \\
\hline
 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & & \multicolumn{2}{c|}{0} & \\
\hline
 & \begin{matrix} G_{31}(2,1) & \cdot\cdot & G_{31}(2,n_1) \\ \\ G_{31}(n_3,1) & \cdot\cdot & G_{31}(n_3,n_1) \end{matrix} & \begin{matrix} G_{32}(2,1) \\ \\ G_{32}(n_3,1) \end{matrix} & 0 & \cdots & \begin{matrix} G_{3m}(2,1) \\ \\ G_{3m}(n_3,1) \end{matrix} & 0 & n_3 \\
\hline
 & & \multicolumn{2}{c|}{} & & \multicolumn{2}{c|}{\vdots} & \\
\hline
 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & & \multicolumn{2}{c|}{0} & \\
\hline
 & \begin{matrix} G_{m1}(2,1) & \cdot\cdot & G_{m1}(2,n_1) \\ \\ G_{m1}(n_m,1) & \cdot\cdot & G_{m1}(n_m,n_1) \end{matrix} & \begin{matrix} G_{m2}(2,1) \\ \\ G_{m2}(n_m,1) \end{matrix} & 0 & \cdots & \begin{matrix} G_{mm}(2,1) \\ \\ G_{mm}(n_m,1) \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} & n_m \\
\hline
\end{array}
$$

On peut voir facilement qu'en faisant des combinaisons linéaires de certaines colonnes, on peut annuler tous les termes qui appartiennent à une ligne contenant le chiffre 1. En permuttant ensuite des lignes et des colonnes; on peut mettre la matrice $A_0^{(1)}$ sous la forme suivante :

$$
A_0^{(1)} \sim
\begin{array}{|c|c|c|l}
\multicolumn{1}{c}{n_1+m-1} & \multicolumn{1}{c}{m-1} & \multicolumn{1}{c}{r-(m-1)} & \\
\cline{1-3}
0 & 0 & 0 & n_1 \\
\cline{1-3}
0 & 0 & 0 & m-1 \\
\cline{1-3}
\begin{matrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \\ \vdots \\ X^{(m-1)} \end{matrix} & 0 & 0 & m-1 \\
\cline{1-3}
0 & 0 & I_{r-(m-1)} & r-(m-1) \\
\cline{1-3}
\end{array}
$$

où

- r est le rang de la matrice A_0 défini dans (17').

- $I_{r-(m-1)}$ est la matrice identité d'ordre $r-(m-1)$.

- $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(m-1)}$ sont les vecteurs lignes définis dans (20).

D'après l'hypothèse I on a :

$$r(A_0^{(1)}) < r - (m-1) + (m-1)$$

donc

$$r(A_0^{(1)}) < r(A_0) \qquad \text{c.q.f.d}$$

Conclusion :

On peut considérer le théorème 2 comme une caractérisation des systèmes différentiels à singularité régulière. En effet si le système différentiel (1) du départ est à singularité régulière et si à chaque étape l'une des propriétés I ou II est vérifiée, en calculant successivement les transformations $T_0, T_1, \dots, T_s$ correspondantes aux matrices :

$$A \;,\; A^{(1)},\; A^{(2)},\; \dots \;, A^{(s)}$$

on peut ramener l'entier p à 1 en au plus (n - 1)(p - 1) pas ($s \leqslant (n-1)(p-1)$). Autrement dit si l'on nôte :

$$T(x) = T_0(x) \cdot T_1(x) \cdot \; \dots \; \cdot T_s(x)$$

on a

$$T^{-1} \cdot A(x) \cdot T - T^{-1} T' = B(x) \tag{25}$$

où B est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}((x))$ d'ordre polaire égal à 1.

En général l'algorithme s'arrête lorsque $A_0^{(s)}$ n'est pas nilpotente ou lorsque les deux propriétés I et II ne sont pas vérifiés en même temps.

4 - QUELQUES EXEMPLES

EXEMPLE 1 :

On considère le système différentiel

$$(26) \qquad Y'(x) = \frac{1}{x^3}\begin{bmatrix} -1 & 1+2x^2 \\ -1-4x^2 & 1+6x^2 \end{bmatrix} Y(x)$$

On a :

$$A_0^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1^{(0)} = 0$$

$$J_0 = P_0^{-1} A_0^{(0)} P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m(A) = 3 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > 1$$

Comme $A_1^{(0)} = 0$, la matrice $\hat{G}_0(\lambda)$ est réduit à l'élément 0. Donc la matrice A est réductible en vertu du théorème 2 par la transformation :

$$T_0(x) = P_0 \cdot S_0(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 2x \end{bmatrix}$$

on trouve ensuite que

$$A_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{G}_1(\lambda) = 0$$

donc $A^{(1)}$ est réductible par la transformation

$$T_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

En appliquant enfin cette transformation à $A^{(1)}(x)$, l'ordre du pôle se réduit à 1.

Donc le système (26) est à singularité régulière et la transformation :

$$T(x) = T_0(x) \cdot T_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & x^2 \\ 1 & 2x^2 \end{bmatrix}$$

réduit le système (26) sous la forme :

$$T^{-1}AT - T^{-1}T' = \frac{1}{x} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Deux solutions linéairement indépendantes du système

$$Z'(x) = \frac{1}{x} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Z(x)$$

sont :

$$Z_{[1]}(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad Z_{[2]}(x) = \begin{bmatrix} x^2 \mathrm{Log} x \\ \\ x^2 \end{bmatrix}$$

Donc

$$Y_{[1]}(x) = T(x) \cdot Z_{[1]}(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{[2]}(x) = T(x) \cdot Z_{[2]}(x) = \begin{bmatrix} x^2 \mathrm{Log} x + x^4 \\ \\ x^2 \mathrm{Log} x + 2x^4 \end{bmatrix}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes du système (26).

EXEMPLE 2 : On considère l'exemple traité dans la page73 auquel nous avons appliqué la méthode de la première partie de ce chapitre

$$(27) \qquad Y'(x) = \frac{1}{x^3}\begin{bmatrix} x^3 & 1-2x & 4x^2 \\ x^5+x^6 & 2x^2-x^3 & 4x^2 \\ 3x^5 & 0 & 2x^2+x^4 \end{bmatrix} Y(x)$$

Dans cet exemple on a :

$$A_0^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donc $$m(A) = 3 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} > 1$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J = P_0^{-1}A_0^{(0)}P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme $$G_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

les deux propriétés I et II (cf. Théorème 2) sont vérifiées, donc la matrice $A^{(0)}(x)$ est réductible par la transformation :

$$T_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En appliquant cette transformation à (27), on trouve

$$A_0^{(1)} = T_0^{-1}\left(A_0^{(0)} + xA_1^{(0)}\right)T_0\Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $$G_1 = A_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

par conséquent $$T_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En appliquant cette transformation à $A^{(1)}(x)$, l'ordre du pôle se réduit à 1. Le système (27) est donc à singularité régulière et la transformation :

$$T(x) = T_0(x)\ T_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1/x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

réduit le système (27) sous la forme :

$$Y'(x) = \frac{1}{x}\begin{bmatrix} 2+x^2 & 3x^2 & 0 \\ 4x & 1+x & 1-2x \\ x & x+x^2 & 1-x \end{bmatrix} Y(x) \tag{28}$$

EXEMPLE 3

$$(29)\qquad Y'(x) = \frac{1}{x^5}\cdot\begin{bmatrix} 2+x^3 & 1 & -2+x^3 \\ 4x^3+6x^4 & 5x^3+3x^4 & -4x^3-6x^4 \\ 2-2x^3 & 1 & -2+4x^3 \end{bmatrix} Y(x)$$

On a :

$$A_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_1^{(0)} = 0$$

Donc $$m(A) = 5 - 1 + \frac{1}{3} + = \frac{13}{3} > 1$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad J_0 = P_0^{-1}\cdot A_0^{(0)}\cdot P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme $G_0 = 0$,la réduction du système (29) se fait à l'aide de la transformation cf. théorème 3 :

$$T_0(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & x \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En appliquant cette transformation au système (29) , on trouve

$$A_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_1^{(1)} = 0.$$

donc

$$T_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

En appliquant ensuite cette transformation à $A^{(1)}(x)$,on trouve :

$$A_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Donc $A^{(1)}(x)$ est réductible cf. théorème 2 par la transformation :

$$T_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

celà donne

$$A_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

La matrice $A_0^{(3)}$ n'admet aucune valeur propre nulle. $A^{(3)}(x)$ ne peut donc être réductible. L'algorithme s'arrête. Soit

$$T(x) = T_0(x)\cdot T_1(x)\cdot T_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & x^3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit $$B(x) = T^{-1}(x)\cdot A(x)\cdot T - T^{-1}\cdot T'$$

où A est la matrice du système (29) , on a :

$$B(x) = \frac{1}{x^2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Puisque B(x) n'est pas réductible :

$$\mu(A) = m(B) = 2 - 1 + 1 = 2$$

Le système (29) est donc à singularité régulière au voisinage de l'origine. Trois solutions linéairement indépendantes du système différentiel :

$$Z'(x) = B(x)\cdot Z(x)$$

sont :

$$Z_{[1]} = \begin{bmatrix} \exp(-\frac{3}{x}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z_{[2]} = \begin{bmatrix} 0 \\ \exp(-\frac{2}{x}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z_{[3]} = \begin{bmatrix} 0 \\ \exp(-\frac{2}{x}) + \frac{1}{3}\exp(-\frac{5}{x}) \\ \exp(-\frac{5}{x}) \end{bmatrix}$$

Soient

$$Y_{[1]} = T(x)\cdot Z_{[1]} = \begin{bmatrix} \exp(-\frac{3}{x}) \\ 2\exp(-\frac{3}{x}) \\ 2\exp(-\frac{3}{x}) \end{bmatrix}, \quad Y_{[2]} = \begin{bmatrix} \exp(-\frac{2}{x}) \\ 0 \\ \exp(-\frac{2}{x}) \end{bmatrix}$$

$$Y_{[3]} = T(x)\cdot Z_{[3]} = \begin{bmatrix} \exp(-\frac{3}{x}) + \frac{1}{3}\exp(-\frac{5}{x}) \\ x^3\exp(-\frac{5}{x}) \\ \exp(-\frac{5}{x}) + \frac{1}{3}\exp(-\frac{5}{x}) \end{bmatrix}$$

Ces trois vecteurs colonnes $Y_{[1]}, Y_{[2]}, Y_{[3]}$ forment un système fondamental de solutions du système (29).

CHAPITRE 4

SOLUTIONS FORMELLES DES SYSTEMES DIFFERENTIELS AU VOISINAGE DES POINTS SINGULIERS REGULIERS

1. INTRODUCTION

Nous allons développer ici deux algorithmes qui permettent de déterminer un système fondamental de solutions formelles d'un système différentiel à singularité régulilère au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}$.

Le premier algorithme est dû à W. Wasow [17], [12] où on construit un système fondamental sous la forme :

$$\Phi(x) = T(x)\ x^{C}$$

où T appartient à $G\ell(n,\mathbb{C}((x)))$
et C appartient à $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

Le deuxième algorithme est plus complet, il est dû en grande partie à L.Sirovich [16] où on donne le développement des solutions vectorielles sous la forme :

$$Y(x) = x^{\lambda}[\phi_o(x)+\log x\ \phi_1(x)+\ldots+(\log x)^k\phi_k(x)]$$

où λ appartient à $\mathbb{C}$ et les ϕ_i sont des vecteurs colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}[[x]]$.

L'importance de ces deux algorithmes réside dans le fait que l'on peut les programmer en langage de calcul formel (reduce). Cependant un travail reste à faire, celui du développement formel des solutions des systèmes différentiels au voisinage des singularités irrégulières.

2. POSITION DU PROBLEME

Considérons un système différentiel linéaire d'ordre 1 de la forme :

(1) $$Y'(x) = \frac{M(x)}{x^p}\ Y(x)$$

où $M \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C}[[x]])$, p est un entier supérieur ou égale à 1 .

On suppose que le système (1) est à **singularité régulière** au voisinage de l'origine.

Dans ce cas, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, il existe une matrice $T \in G\ell\,(n,\mathbb{C}((x)))$ que l'on peut construire comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent telle que le changement de variable :

$$Y(x) = T(x)\ Z(x)$$

transforme le système (1) sous la forme :

$$(2) \qquad Z'(x) = \frac{A(x)}{x}\ Z(x)$$

où $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C}[[x]])$ et vérifie :

$$A(x) = T^{-1}\ \frac{M}{x^{p-1}}\ T - x\ T^{-1}\ T'$$

Nous avons donné au chapitre trois deux méthodes pour le calcul de la transformation $T(x)$ lorsque $p > 1$.

On peut considérer chacun de ces deux algorithmes en quatre étapes :

1. Calcul de la transformation $T(x)$.
2. Décider si la singularité est régulière.
3. Appliquer l'algorithme donnant un système fondamental du système (2).
4. Déterminer un système fondamental de solutions du système (1).

Noter que le passage de l'étape 3 à l'étape 4, consiste à faire simplement le produit de deux matrices. Si Φ est un système fondamental de solutions de (2), alors

$$\widetilde{\Phi}(x) = T(x)\ \Phi(x)$$

est un système fondamental de solutions du système (1). Nous allons dans ce qui suit étudier l'étape 3 ; l'étape 1 et l'étape 2 ont été étudiées dans le chapitre précédent.

3. METHODE FORMELLE DE W. WASOW [17]

Considérons le système différentiel (2) :

$$(2) \qquad Y'(x) = \frac{A(x)}{x}\, Y(x)$$

l'algorithme consiste à chercher une matrice $P(x)$ dans $\mathcal{A}(n,\mathbb{C}[[x]])$ sous la forme :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k\, x^k \quad , \quad P_k \in M_{n,n}(\mathbb{C})$$

telle qu'en posant :

$$(3) \qquad Y(x) = P(x)\, Z(x)$$

on ramène $A(x)$ a être constante.

Par la transformation (3), le système (2) devient :

$$(4) \qquad Z'(x) = \frac{B(x)}{x}\, Z(x)$$

où

$$(5) \qquad B = P^{-1} A P - x P^{-1} P'$$

soient

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot x^k$$

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cdot x^k$$

En multipliant les deux termes de l'égalité (5) par P , on obtient :

$$x P' = A P - P B$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k P_k\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=k} A_{k-\nu} P_\nu - P_\nu B_{k-\nu} \right) x^k$$

En identifiant les termes en x^k de l'égalité, on a :

$$(5)' \quad \boxed{\begin{array}{c} A_o P_o - P_o B_o = 0 \quad , \quad (k=0) \\[2ex] (A_o - kI) P_k - P_k B_o = - \sum_{\nu=0}^{k-1} (A_{k-\nu} P_\nu - P_\nu B_{k-\nu}) \\[2ex] k=1,2,3,\dots,\infty \end{array}}$$

Choisissons $B_o = A_o$, $P_o = I$ et $B_k = 0$ pour $k \geqslant 1$
on est amené, par récurrence, à résoudre l'équation matricielle :

$$(6) \quad \begin{array}{ll} (A_o - kI) P_k - P_k A_o = H_k \quad , & k=1,2,\dots,\infty \\ H_k = - \sum_{\nu=0}^{k-1} A_{k-\nu} P_\nu \quad , & k=1,2,\dots,\infty \end{array}$$

La matrice H_k ne dépend que de $P_o, P_1, \dots, P_{k-1}$.

- Si pout tout $k=1,2,\dots,\infty$ l'équation matricielle

$$(A_o - kI)P_k = P_k A_o$$

admet comme seule solution, la solution triviale, alors l'équation (6) admet une solution en P_k et une seule pour tout $k=1,2,\dots,\infty$ Dans ce cas la détermination de la matrice $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k$ avec $P_o = I$ se fait d'une manière unique.

Ce problème est résolu par :

Théorème [17]

L'équation matricielle $AX - XB = 0$ où $A,B \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ admet une solution non triviale si et seulement si A et B ont une valeur propre commune.

<u>**Démonstration**</u> :

Soit λ une valeur propre commune à A et B , il existe un vecteur propre x_A tel que $A\,x_A = \lambda\,x_A$.

Soit B^T : la matrice transposée de B ; il existe un vecteur x_B tel que

$$B^T\,x_B = \lambda\,x_B$$

où

$$x_B^T\,B = \lambda\,x_B^T$$

Considérons la matrice $X = x_A\,x_B^T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, on a :

$$A\,X = A\,x_A\,x_B^T = \lambda\,x_A\,x_B^T = x_A\,x_B^T\,B$$

$$= XB$$

donc $X = x_A\,x_B^T$ est une solution non triviale de l'équation $AX - XB = 0$

<u>Condition nécessaire</u> :

(1) Supposons que B admet n vecteur propres linéairement indépendants.

Soit x_B : un vecteur propre associé à la valeur propre λ de B , on a :

$$XB\,x_B = \lambda\,X\,x_B$$

comme

$$XB = AX$$

$$AX\,x_B = \lambda\,X\,x_B$$

Si A et B n'ont pas de valeurs propres communes alors $X.x_B = 0$ puisque B admet n vecteurs propres qui forment une base, X s'annullant sur cette base, elle ne peut donc qu'être nul donc

$$X = 0$$

(2) $\mathbb{C}^n$ a une base formée de vecteurs x_B vérifiant :

$(B-\lambda I)^P x_B = 0$, λ étant une valeur propre de B .

Comme
$$AX = XB$$
$$A^2X = AXB = XB^2$$
d'où par récurrence $A^kX = XB^k$ pour tout $k \geqslant 1$

Si p est un polynôme quelconque, on a :

$$p(A)X = X\,p(B)$$

d'où
$$X(B-\lambda I)^P x_B = (A-\lambda I)^P X\,x_B = 0$$

Si A et B n'ont pas de valeurs propres communes, alors $(A-\lambda I)^P$ est inversible et par conséquent

$$X\,x_B = 0$$

donc
$$X = 0$$

c.q.f.d.

Conclusion :

Il résulte de tout ce qui précède que si pour tout $k \geqslant 1$, A_0-kI et A_0 n'ont pas de valeurs propres communes. Autrement dit si les valeurs propres de A_0 distinctes ne diffèrent pas entre elles d'un entier, alors il existe une transformation

$$P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k\,x^k \quad \text{avec} \quad P_0 = I$$

unique telle que la transformation

$$Y(x) = P(x)\,Z(x)$$

réduit le système (2) sous la forme :

$$Z'(x) = \frac{A_0}{x}\,Z(x)$$

Nous serons dans le **cas générique** si les valeurs propres distinctes de A_o ne diffèrent pas entre elles d'un entier.
Nous pouvons alors dans ce cas, déterminer d'après (6) et (3) un système fondamental de solutions du système (2) :

$$\Phi(x) = P(x)\, x^{A_o} \quad , \quad \text{avec} \quad P(0) = I \tag{7}$$

a/ Algorithme de détermination de la transformation P dans le cas générique :

Considérons l'équation matricielle (6) :

$$(A_o - kI)\, P_k - P_k\, A_o = H_k \quad , \quad k=1,2,\ldots,\infty$$

où

$$H_k = - \sum_{\nu=0}^{k-1} A_{k-\nu}\, P_\nu$$

Cette équation peut s'écrire à l'aide du produit tensoriel, on obtient une équation vectorielle équivalente (cf. [5]) que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$G_k\, p_k = h_k \quad , \quad k=1,2,\ldots,\infty \tag{8}$$

où G_k est une matrice carrée d'ordre n^2

$$G_k = (A_o - k.I) \otimes I - I \otimes A_o^T$$

A_o^T désigne la matrice transposée de A_o .
p_k et h_k sont les vecteurs colonnes à n^2 composantes tels que si l'on désigne par $(P_k)_{i*}$ et $(H_k)_{i*}$ les $i^{\text{èmes}}$ lignes des matrices P_k et H_k on a :

$$p_k = \begin{bmatrix} (P_k)_{1*}^T \\ (P_k)_{2*}^T \\ \vdots \\ (P_k)_{n*}^T \end{bmatrix} \qquad h_k = \begin{bmatrix} (H_k)_{1*}^T \\ (H_k)_{2*}^T \\ \vdots \\ (H_k)_{n*}^T \end{bmatrix}$$

Remarque 1 :

L'équation (8) est de n^2 équations à n^2 inconnues qui sont les composantes de p_k . Dans le cas générique G_k est inversible quelque soit le choix de l'entier $k > 1$.

En utilisant le calcul formel, on peut inverser formellement la matrice G_k pour tout k , soit D(k) la matrice inverse :

$$G(k) = G_k^{-1}$$

La détermination des p_k $(k=1,2,...)$ est donnée directement par la formule

$$p_k = D(k) \cdot h_k \quad , \quad k=1,2,...,\infty$$

Remarque 2 :

Il convient d'appliquer au système (2) d'abord la transformation constante P_o :

$$Y(x) = P_o \, Z(x)$$

qui transforme la matrice A_o sous une forme de Jordan :
$J_0 = P_0^{-1} A_0 P_0$ .Par cette transformation le système (2) devient :

$$Z'(x) = \frac{\tilde{A}(x)}{x} Z(x)$$

où $\tilde{A}(x) = P_o^{-1} A(x) P_o$ avec $\tilde{A}(0) = J_o$ et cette fois la matrice $\tilde{G}_k$ correspondante est écrite sous la forme :

$$\tilde{G}_k = (J_o - kI) \otimes I - I \otimes J^T$$

et qui est facile à inverser.

Remarquons aussi que numériquement, il est très difficile de décider si deux valeurs propres complexes différent d'un entier qui est la condition de la régularité de la matrice G_k ; cependant on peut appliquer un algorithme dû à Watanabe (cf. [18], [4]).

b/ Cas général : Il existe des valeurs propres qui diffèrent d'un entier

La méthode suivie ici est en grande partie dûe à W. Wasow [17] . Elle consiste à chercher une transformation $T(x)$ permettant de se ramener au "cas générique". Autrement dit, si l'on désigne par $\tilde{A}(x)$, la matrice :

$$\tilde{A}(x) = T^{-1} A(x) T - x T^{-1} T'$$

les valeurs propres distinctes de $\tilde{A}(0)$, ne diffèrent pas entre elles d'un entier. Voilà comme on procède :

(a) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$; les valeurs propres de A_o qui diffèrent entre elles d'un entier.

Soit m_i la multiplicité algébrique de la valeur propre λ_i , $(i=1,2,\ldots,p)$. On suppose que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont ordonnées de la manière suivante :

(9) $$\boxed{\begin{array}{c} Re(\lambda_1) \leqslant Re(\lambda_2) \leqslant \ldots \leqslant Re(\lambda_p) \\[2ex] \lambda_{i+1} - \lambda_i = k_i \quad , \quad (i=1,2,\ldots,p-1) \\[2ex] k_i \in \mathbb{N}^* \end{array}}$$

(10)

où

Considérons la matrice de passage $P \in Gl(n,\mathbb{C})$ qui transforme A_o sous une forme de Jordan

(11) $$T = P^{-1} A_o P$$

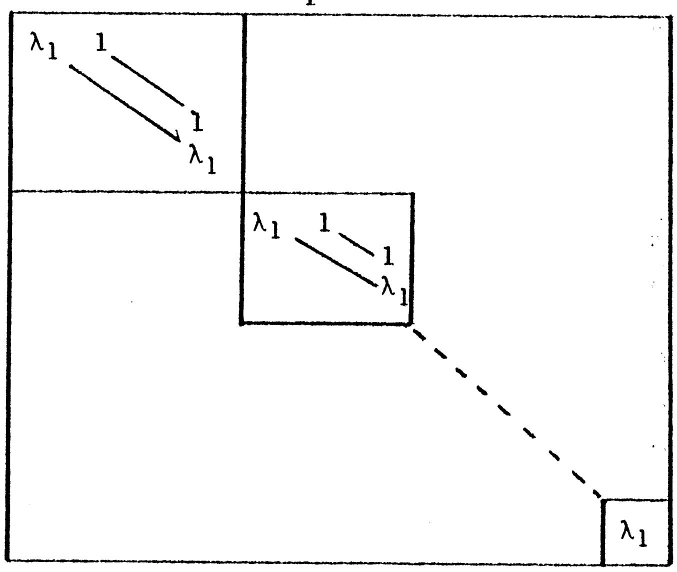
que l'on suppose être de la forme :

(12) $$J = \begin{array}{cc|c} \overset{m_1}{\longleftrightarrow} & \overset{n-m_1}{\longleftrightarrow} & \\ \begin{array}{|c|}\hline J_1 \\ \hline 0 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{c|}\hline 0 \\ \hline J_2 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{c} m_1 \\ n-m_1 \end{array} \end{array}$$

où :

J_1 est la matrice diagonale par blocs correspondant à la valeur propre λ_1 .

m_1

$J_1 =$ 

J_2 est la matrice J à laquelle on enlève les m_1 premières lignes et colonnes. J_2 admet comme valeurs propres :

$$\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_r$$

On peut écrire la matrice $A(x) = A_o + x\, N(x)$ où $N(x) = A_1 + A_2 x + \ldots$
Soit $T_o(x)$ la matrice :

$$T_o(x) = P\, S(x)$$

où P est la matrice définie dans (11) et $S(x)$ (cf. [12]) la matrice diagonale par blocs et définie par

$$S(x) = \text{diag}\, \{ I_{m_1} , x\, I_{n-m_1} \}$$

Notons

$$A^{(1)}(x) = T_0^{-1} A\, T_0 - x\, T_0^{-1} T_0'$$

$$A_0^{(1)}(x) = T_0^{-1} (\, A_0 + xN \,)\, T_0 \,{}_{x=0} - xT_0^{-1} T_0' \big|_{x=0}$$

(12) $$A_0^{(1)} = S^{-1} (\, J + xG \,)\, S_0 \,{}_{x=0} - xS^{-1} S' \big|_{x=0}$$

où

(13) $$G = P^{-1} A_1\, P$$

que l'on écrit sous la forme :

$$G = \begin{array}{cc|c} \overleftrightarrow{\;m_1\;} & \overleftrightarrow{\;n-m_1\;} & \\ \begin{array}{|c} G_{11} \end{array} & \begin{array}{|c|} G_{12} \end{array} & m_1 \\ \begin{array}{|c} G_{21} \end{array} & \begin{array}{|c|} G_{22} \end{array} & n-m_1 \end{array}$$

En effectuant les produits des matrices dans (12), on trouve :

$$A_0^{(1)} = \begin{array}{cc|c} \overleftrightarrow{\;m_1\;} & \overleftrightarrow{\;n-m_1\;} & \\ \begin{array}{|c} J_1 \end{array} & \begin{array}{|c|} 0 \end{array} & m_1 \\ \begin{array}{|c} G_{21} \end{array} & \begin{array}{|c|} J_2 - I \end{array} & n-m_1 \end{array}$$

Les valeurs propres de $A_0^{(1)}$ sont :

$$\lambda_1,\ \lambda_2 - 1\ ,\ \lambda_3 - 1\ ,\ \ldots\ ,\ \lambda_p - 1\ ,\ \lambda_{p+1} - 1\ ,\ \ldots\ ,\ \lambda_r - 1$$

chacune de ces valeurs propres admet la même multiplicité algébrique initiale.

En faisant la même manipulation k_1 fois, les valeurs propres de la matrice $A_o^{(k_1)}$ sont

$$\lambda_1 \ , \ \lambda_2 - k_1 = \lambda_1 \ , \ \lambda_2 - k_1 \ , \ \dots \ , \ \lambda_r - k_1$$

on peut ainsi se ramener au cas générique en amenant toutes les valeurs propres à être égales, l'algorithme s'arrête au bout

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_{p-1}$$

pas.

L'algorithme que nous proposons ci-dessous donne un système fondamental $Y(x)$ de solutions formelles du système (2) sous la forme :

$$Y(x) = T(x)\ x^C$$

où

C est une matrice constante appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$

$$T(x) = \sum_{i=0}^{m} T_i\ x^i \quad \text{avec} \quad T_i \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$$

$m+1$ est le nombre maximal de termes du développement formel des solutions. Voici l'algorithme :

Algorithme de Wasow

Données :

N : Dimension de la matrice A

A(1::N,1::N) : matrice à coefficients dans $\mathbb{C}[x]$

Résultats :

T(1::N,1::N) : matrice à coefficients dans $\mathbb{C}[x]$

A0(1::N,1::N) : matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$

Algorithme

[1] Initialisation

T := I (I : matrice identité d'ordre N)

A0 = SUB (x=0,A)

[2] p(λ) := det(A0-λI)

[3] Résoudre p(λ) := 0

[4] R : tableau trié des racines de p(λ) = 0

[4.1] factorisation de p(λ) sur $\mathbb{Z}$

[4.2] détermintion des autres racines

[4.3] détermination des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ qui diffèrent entre elles d'un entier (on utilise ici l'algorithe de Watanabe)

[5] Si cas non générique alors

Début

Pour ℓ=1 jusqu'à p-1 faire

Pour s=1 jusqu'à $\lambda_{p+1}-\lambda_\ell$ faire

Début

Détermination de la matrice P

Remplissage de la matrice S

(cf. page 120)

$A = T^{-1} A T - x T^{-1} T'$

A0 := SUB(x=0,A)

Fin

Fin

[6] Q := cas générique (cf. page 124)

[7] T := Q.T

```
symbolic procedure lire ;
xread(nil);
flag('(lire),'opfn) ;

integer procedure fac(m);

% cette procedure calcule m! ;

if m eq 0 then 1 else for i:=1:m product i ;

procedure wasow( );

% algorithme de wasow dans le cas generique
  ---------------------------------------- ;

%  DONNEES
   ------- ;
% n: DIMENSION DE LA MATRICE A ;
% a: MATRICE A COEFFICIENTS DANS c[x] ;
% q: DEGRE MAXIMAL DES COEFFICIENTS DE LA MATRICE a ;
% l: DEGRE MAXIMAL DES COEFFICIENTS DE LA TRANSFORMATION T DE WASOW ;

% RESULTATS
  --------- ;

% t(1::n,1::n) :: transformation de WASOW , matrice a coefficients dans c[[x]] ;

begin
write "QUELLE EST LA TAILLE DE LA MATRICE A ? " ;
n:=lire( )$
write "QUELLE EST LA VALEUR DE q ? " ;
q:=lire( )$
write "QUELLE EST LA VALEUR DE l ? " ;
l:=lire( )$
matrix t(n,n),aks(n,n),ps(n,n),hk(n,n),g(n**2,n**2),d(n**2,n**2),id(n,n);
matrix h(n**2,1),pk(n**2,1),a0t(n,n),tprim(n,n),a0(n,n),a(n,n);
Array tabp(4,4,6),taba(4,4,6);
write "ECRIRE L'EXPRESSION DE LA MATRICE PAR LIGNES " ;
for i:=1:n do for j:=1:n do a(i,j):=lire( )$
for v:=0:q do for i:=1:n do for j:=1:n do
<<
  s:=df(a(i,j),x,v)/fac(v);
  taba(i,j,v):=sub(x=0,s);
>>;
for i:=1:n do for j:=1:n do
<<
  write "a(",i,",",j,")=",a(i,j);
  a0(i,j):=taba(i,j,0)$
  id(i,j):=if i eq j then 1 else 0;
  tabp(i,j,0):=id(i,j);
>>;
a0t:=tp(a0);
for r:=1:n do for i:=1:n do
for s:=1:n do for j:=1:n do
g((r-1)*n+s,(i-1)*n+j):=(a0(r,i)-k*id(r,i))*id(s,j)-id(r,i)*a0t(s,j);
d:=g**(-1)$
for m:=1:l do
 begin
  k:=m;
  for i:=1:n do
  for j:=1:n do
  hk(i,j):=0;
  for s:=0:m-1 do
   <<
     for i:=1:n do
     for j:=1:n do
      <<
        aks(i,j):=taba(i,j,m-s);
        ps(i,j):=tabp(i,j,s);
      >>;
     hk:=hk-aks*ps;
   >>;
  for i:=1:n do
  for j:=1:n do
  h((i-1)*n+j,1):=hk(i,j);
  pk:=d*h;
  for i:=1:n do   for j:=1:n do
  tabp(i,j,m):=pk((i-1)*n+j,1);
 end;
t:=id$
for q:=1:l do
for i:=1:n do
for j:=1:n do
t(i,j):=t(i,j)+tabp(i,j,q)*(x**q);
end;

write "pour utiliser l'algorithme wasow faire : wasow( ) ; " ;

end;
```

$$a(1,1) := x^{2} + 1$$

$$a(1,2) := 3*x$$

$$a(1,3) := 0$$

$$a(2,1) := 4*x^{2}$$

$$a(2,2) := x + 1$$

$$a(2,3) := -(2*x - 1)$$

$$a(3,1) := x^{2}$$

$$a(3,2) := (x + 1)*x$$

$$a(3,3) := -(x - 1)$$

IMPRESSION DES 4 PREMIERS TERMES DE LA TRANSORMATION DE WASOW

$$T(1,1) = (9*x^{3} + 2*x^{2} + 4)/4$$

$$T(1,2) = (3*x*(x^{2} + 2*x + 2))/2$$

$$T(1,3) = (-x*(8*x^{2} + 21*x + 6))/2$$

$$T(2,1) = (x^{2}*(22*x + 81))/36$$

$$T(2,2) = (8*x^{3} + x^{2} + 4*x + 2)/2$$

$$T(2,3) = (-(34*x^{2} + 15*x + 36)*x)/6$$

$$T(3,1) = ((7*x + 6)*x^{2})/12$$

$$T(3,2) = ((3*x^{2} + 2*x + 2)*x)/2$$

$$T(3,3) = (-(7*x^{3} + 5*x^{2} + 4*x - 2))/2$$

$a(1,1) := -(x^2 - 2)$

$a(1,2) := x^3 + x^2 + 1$

$a(1,3) := (x^2 - 1)*x$

$a(2,1) := (3*x + 1)*x$

$a(2,2) := 2*(x + 1)$

$a(2,3) := x^2 + x + 1$

$a(3,1) := 4*x^3$

$a(3,2) := (x^2 - 2)*x$

$a(3,3) := x^2 - 2*x + 2$

IMPRESSION DES_4_PREMIERS TERMES DE LA TRANSORMATION DE WASOW

$T(1,1) = (3749*x^4 + 4256*x^3 + 2592*x^2 + 3456*x + 3456)/3456$

$T(1,2) = (- x*(26881*x^3 + 33216*x^2 + 1728*x + 27648))/13824$

$T(1,3) = ((112093*x^3 + 167872*x^2 + 77760*x + 124416)*x)/41472$

$T(2,1) = ((1661*x^3 + 2328*x^2 + 2160*x + 864)*x)/864$

$T(2,2) = (- (2099*x^4 + 3868*x^3 + 2160*x^2 + 864*x - 864))/864$

$T(2,3) = (x*(217201*x^3 + 269184*x^2 + 150336*x + 82944))/41472$

$T(3,1) = (- (37*x^2 - 24*x + 72)*x^2)/72$

$T(3,2) = ((1337*x^3 - 960*x^2 + 3024*x - 1728)*x)/864$

$T(3,3) = (- (3473*x^4 - 416*x^3 + 11232*x^2 - 3456))/3456$

4. DEVELOPPEMENT FORMEL DES SOLUTIONS DU SYSTEME :

(1) Supposons que A_o admette n vecteurs propres linéairement indépendants.

Dans ce premier cas, A_o est semblable à une matrice diagonale. i.e. il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}(n,\mathbb{C})$ telle que :

$$D = P^{-1} A_o P = \text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$$

où $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ sont les valeurs propres de A_o non nécessairement distinctes. L'algorithme proposé dans le paragraphe précédent donne un système fondamental de solutions sous la forme :

$$\Phi(x) = T(x)\, x^{A_o}$$

$$\Phi(x) = T(x)\, P\, x^{D}\, P^{-1}$$

où $T(x) = \sum_{i=0}^{m} T_i\, x^i$, , $T_i \in {}_{n,n}(\mathbb{C})$, $(i=0,1,\ldots,m)$.

D'après la remarque (cf. chapitre 3, page 47) un système fondamental de (2) est en particulier :

$$Y(x) = \Phi(x)\, P \quad , \quad (P \in \mathcal{GL}(n,\mathbb{C}))$$

(13) $$Y(x) = Q(x)\, x^{D}$$

où $$Q(x) = T(x)\, P = \sum_{i=0}^{m} T_i\, P\, x^i$$

Considérons :

$q_1(x),q_2(x),\ldots,q_n(x)$ les n colonnes de Q

$Y_{[1]},Y_{[2]},\ldots,Y_{[n]}$ les n colonnes de Y

D'après le relation (13) on a :

$$(14) \qquad \begin{cases} Y_{[1]}(x) = x^{\lambda_1} q_1(x) \\ Y_{[2]}(x) = x^{\lambda_2} q_2(x) \\ \vdots \\ Y_{[n]}(x) = x^{\lambda_n} q_n(x) \end{cases}$$

Nous avons ainsi mis en évidence n solutions linéairement indépendants du système (2).

$Y_{[1]}, [2], \ldots, Y_{[n]}$ sont linéairement indépendants puisque d'après la relation (13) on a :

$$\det(Y(x)) = \det(T(x)) \det(P)\, x^{\Sigma\lambda_i} \neq 0$$

(2) Supposons que A_o n'admette pas n vecteur propres linéairement indépendants

Dans ce cas A_o est semblable à une matrice diagonale par blocs ; sa forme de Jordan J .

Soit :

$$J = P^{-1} A_o P$$

où

$$J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, \ldots, J_p)$$

où les J_i sont des matrices carrées que l'on suppose d'ordre m_i :

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

avec $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A_o non nécessairement distinctes.

Dans ce cas, on a :

$$Y(x) = Q(x)\,\mathrm{diag}(x^{J_1}, x^{J_2}, \ldots, x^{J_p})$$

où

$$x^{J_i} = \begin{bmatrix} x^{\lambda_i} & x^{\lambda_i}\mathrm{Log}x & \cdot & \cdot & \cdot & \dfrac{x^{\lambda_i}(\mathrm{Log}x)^{m_i-1}}{(m_i-1)!} \\ & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & x^{\lambda_i}\mathrm{Log}x \\ & & & & & x^{\lambda_i} \end{bmatrix}$$

D'où l'expression des m_i solutions correspondant au bloc J_i

$$(15)\quad \begin{cases} Y^{(i)}_{[1]} = x^{\lambda_i}\, q_{N_i+1}(x) \\ Y^{(i)}_{[2]} = x^{\lambda_i}\,(\mathrm{Log}x)\, q_{N_i+1}(x) + x^{\lambda_i}\, q_{N_i+2} \\ \quad\vdots \\ Y^{(i)}_{[m_i]} = x^{\lambda_i}\left[\dfrac{(\mathrm{Log}x)^{m_i-1}}{(m_i-1)!}\, q_{N_i+1}(x) + \dfrac{(\mathrm{Log}x)^{m_i-2}}{(m_i-2)!}\, q_{N_i+2}(x) + \ldots + q_{N_i+m_i}(x)\right] \end{cases}$$

avec $N_i = m_1 + m_2 + \ldots + m_{i-1}$.

Ces solutions $Y^{(i)}_{[j]}$, $(j=1,2,\ldots,m_i)$ sont linéairement indépendantes à cause de la présence du logarithme dans l'expression. Ainsi de cette manière nous venons de déterminer $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$ solutions linéairement indépendantes du système (2) et qui en forment un système fondamental.

$$a(1,1)=(-2*x^3 - x^2 + 2)/2$$

$$a(1,2)=(x*(3*x + 1))/2$$

$$a(1,3)=(x*(2*x + 1))/2$$

$$a(2,1)= - x$$

$$a(2,2)=1/2$$

$$a(2,3)=1$$

$$a(3,1)=(x*(- 2*x^3 - x^2 + 3))/2$$

$$a(3,2)=(x^2 *(3*x + 1))/2$$

$$a(3,3)=(2*x^3 + x^2 + 1)/2$$

IMPRESSION DES_ 4 - PREMIERS TERMES DE LA TRANSFORMATION DE WASOW

$$T(1,1) =1$$

$$T(1,2) =x*(x + 1)$$

$$T(1,3) = - x$$

$$T(2,1) =0$$

$$T(2,2) =1$$

$$T(2,3) =0$$

$$T(3,1) =x$$

$$T(3,2) =x^2 *(x + 1)$$

$$T(3,3) = - x^2 + 1$$

Développement des solutions du système : (p130)

$$(16) \qquad Y'(x) = \frac{1}{2x}\begin{bmatrix} -2-x^2-2x^3 & x+3x^2 & x+2x^2 \\ -2x & 1 & 2 \\ 3x^2-x^3-2x^4 & x^2+3x^2 & 1+x+2x^3 \end{bmatrix} Y(x)$$

En appliquant à (16) la transformation T de Wasow :

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & x+x^2 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & x^2+x^3 & 1-x^2 \end{bmatrix}$$

le système (16) devient :

$$Z'(x) = \frac{1}{x}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} Z(x)$$

où

$$Z(x) = T(x)\ Y(x)$$

Trois solutions linéairement indépendantes du système (16) sont donc (cf. 15)) :

$$Y_{[1]}(x) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x^2 \end{bmatrix}, \quad Y_{[2]}(x) = \begin{bmatrix} x^{1/2}[x+x^2] \\ x^{1/2} \\ x^{1/2}[x^2+x^3] \end{bmatrix} \quad Y_{[3]}(x) = \begin{bmatrix} x^{1/2}[-x+\mathrm{Log}x(x+x^2)] \\ x^{1/2}\mathrm{Log}x \\ x^{1/2}[1-x+\mathrm{Log}x(x^2+x^3)] \end{bmatrix}$$

Deuxième exemple : Cas non générique

On considère l'exemple de la page 74 , paragraphe 4 :

$$(17) \qquad Y'(x) = \frac{1}{x^3}\begin{bmatrix} x^3 & 1-2x & 4x^2 \\ x^5+x^6 & 2x^2-x^3 & 4x^2 \\ 3x^5 & 0 & 2x^2+x^4 \end{bmatrix} Y(x)$$

Nous avons trouver en utilisant l'algorithme du chapitre 2, deuxième partie que le système (17) est équivalent (cf. page 104) au système :

$$(18) \qquad Z'(x) = \frac{1}{x}\begin{bmatrix} 2+x^2 & 3x^2 & 0 \\ 4x & 1+x & 1-2x \\ x & x+x^2 & 1-x \end{bmatrix} Z(x)$$

par la transformation :

$$(19) \qquad T_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1/x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on a :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
Comme λ_1 et λ_2 diffèrent entre elles d'un entier nous allons d'abord appliquer à (18) la transformation (cf. b paragraphe 3)

$$(20) \qquad T_2(x) = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

par cette transformation nous nous ramenons au cas générique et le système (18) devient :

$$(21) \qquad W'(x) = \frac{1}{x} \begin{bmatrix} 1+x^2 & 3x & 0 \\ 4x^2 & 1+x & 1-2x \\ x^2 & x+x^2 & 1-x \end{bmatrix} W(x)$$

où cette fois

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où toutes les valeurs propres sont confondues. On peut donc cette fois appliquer l'algorithme de Wasow (voir page 123). Soit T_3 la transformation de Wasow avec quatre termes.

Enfin une matrice fondamentale de solution du système (17) est :

$$Y(x) = T_1(x)\ T_2(x)\ T_3(x)\ V(x)$$

où

- T_1 , T_2 sont les matrices définies respectivement dans (19) et (20).

- T_3 est la transformation de Wasow calculée à la page 125

- $V(x)$ est une matrice fondamentale de solutions du système :

$$V'(x) = \frac{A_0}{x} V(x)$$

$$V(x) = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & x\mathrm{Log}x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

5. METHODE FORMELLE DE L. SIROVICH [16]

La méthode suivie ici est en grande partie dû à L. Sirovich . L'avantage de cette méthode c'est qu'elle donne le développement formel (15) directement. Elle consiste à chercher des solutions formelles sous la forme :

(1) $$\phi(x) = x^{\lambda}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(\lambda)\, x^i\right)$$

où les ϕ_i $(i=0,\dots,\infty)$ sont des vecteurs colonnes à n composantes fonctions du paramètre λ .

Considérons le système (2)

(2) $$x\, Y' = A(x)\, Y(x)$$

où $$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i \qquad A_i \in M_{n,n}(\mathbb{C}) .$$

On écrit **formellement** :

$$x\, \phi'(x) = x^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k+\lambda)\, \phi_k\, x^k$$

$$A(x)\, \phi(x) = x^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{k} A_\nu\, \phi_{k-\nu}\right) x^k$$

$$x\, \phi'(x) - A(x)\, \phi(x) = x^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+\lambda)\, \phi_k - \sum_{r=0}^{k} A_\nu\, \phi_{k-\nu}\right] x^k$$

D'où l'équivalence :

$$\boxed{\begin{array}{l} \phi(x) = x^{\lambda} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\lambda) x^k \qquad \text{est solution formelle de (2)} \\ \Longleftrightarrow \quad \displaystyle\sum_{\nu=0}^{k} A_\nu\, \phi_{k-\nu} - (k+\lambda)\, \phi_k(\lambda) = 0 \qquad \text{pour } k=0,1,\dots,+\infty \\ k=1,2,\dots,\infty \end{array}}$$

Supposons que l'on puisse choisir les $\phi_k(\lambda)$ pour $k \geqslant 1$ de telle manière que :

(3) $$[\, A_o - (\lambda+k)I \,]\, \phi_k = - \sum_{\nu=0}^{k-1} A_\nu \, \phi_{k-\nu}$$

$$k=1,2,\ldots,\infty$$

alors on a :

(4) $$x\, \phi'(x) - A(x)\, \phi(x) = x^\lambda (\lambda I - A_o)\, \phi_o$$

ϕ_o étant arbitraire, le vecteur $\phi(x)$ dépend de x, du paramètre λ et de ϕ_o, on le note :

(5) $$\phi = \phi(x,\lambda,\phi_o) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\lambda)\, x^k$$

pour que ϕ soit solution du système (2), il faut choisir λ telle que :

(6) $$A_o \phi_o = \lambda\, \phi_o$$

λ doit donc être une valeur propre de A_o et ϕ_o son vecteur propre associé. La difficulté apparait dans (3) (comme dans la méthode précédente) quand $\lambda + k$ est aussi une valeur propre de A_o pour un certain entier k. Nous sommes amenés alors à distinguer deux cas :

(a) Cas générique : les valeurs propres de A_o distinctes ne diffèrent pas d'un entier.

(1) La matrice A_o possède n vecteurs propres linéairement indépendants.

Soient $\phi_0^{(1)}, \phi_0^{(2)}, \ldots, \phi_0^{(n)}$ ces n vecteurs. et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes non nécessairement distinctes.

Dans ce cas, nous pouvons déterminer d'après ce qui précède n solutions linéairement indépendantes du système (2) et qui sont :

$$
(7) \quad \begin{cases} \phi^{(1)} = \phi(x,\lambda_1,\phi_o^{(1)}) \\ \phi^{(2)} = \Phi(x,\lambda_2,\phi_o^{(2)}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi^{(n)} = \phi(x,\lambda_n,\phi_o^{(n)}) \end{cases}
$$

avec

$$
\phi^{(i)} = x^{\lambda_i} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^{(i)} (\lambda_i)\, x^k
$$

$$
i=1,2,\ldots,n
$$

où

- les $\phi_o^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ sont n vecteurs propres linéairement indépendants associés respectivement aux valeurs propres λ_i $(i=1,2,\ldots,n)$
- les $\phi_k^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ $(k=1,2,\ldots,\infty)$ sont déterinés à partir des équations (3).

(2) A_o n'admet pas n vecteurs propres linéairement indépendants

Dans ce cas A_o admet des vecteurs invariants. Considérons J la forme de Jordan de la matrice A_o, que l'on suppose de la forme :

$$
J = \mathrm{diag}\{ J_1, J_2, \ldots , J_p \}
$$

et qui est telle que : $\qquad J = P\, A_o\, P^{-1}$

où

J_i est le bloc de Jordan d'ordre m_i associé à la valeur propre λ_i $(i=1,2,\ldots,p)$. Il faut noter ici que les valeurs propres $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ ne sont pas nécessairement distinctes $(m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n)$.

Nous allons montrer dans ce qui suit comment on détermine la chaîne de solutions correspondant à chaque bloc J_i.

Considérons le premier bloc J_1 ; le même procédé est valable pour $J_2, J_3, \ldots, J_p$.

Soient $\phi_o^{(1)}, \phi_o^{(2)}, \ldots, \phi_o^{(m_1)}$ les m_1 premières colonnes de la matrice de passage P alors on a :

$$(8) \qquad \begin{cases} (A_o - \lambda_1 I)\, \phi_o^{(1)} = 0 \\ (A_o - \lambda_1 I)\, \phi_o^{(2)} = \phi_o^{(1)} \\ \vdots \\ (A_o - \lambda_1 I)\, \phi_o^{(m_1)} = \phi_o^{(m_1-1)} \end{cases}$$

Considérons les vecteurs colonnes :

$$(9) \qquad \phi^{(i)} = \phi(x, \lambda, \phi_o^{(i)})$$

$$i = 1, 2, \ldots, m_1$$

Comme le choix des $\phi_o^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,m_1)$ est indépendant de λ , on a

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \phi_o^{(i)} = 0 \quad , \forall\ i = 1, 2, \ldots, m_1$$

Nous allons maintenant dériver "formellement" par rapport au paramètre λ l'expression :

$$x\, \phi'(x) - A(x)\, \phi(x) = 0$$

Pour tout entier $s \geq 0$ on a :

$$\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s} \left(x \frac{d}{dx} \phi^{(i)} - A\, \phi^{(i)}\right) = \left(x \frac{d}{dx} - A\right) \frac{\partial^s}{\partial\lambda^s} \phi^{(i)}$$

$$\|$$

$$\frac{\partial^s}{\partial\, \lambda^s} \left(x^{\lambda} (\lambda I - A_o)\, \phi_o^{(i)}\right)$$

Or

$$\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\,(x^\lambda(\lambda I-A_o)\,\phi_o^{(i)} = x^\lambda(\mathrm{Log}x)^s(\lambda I-A_o)\phi_o^{(i)} + s x^\lambda(\mathrm{Log}x)^{s-1}\phi_o^{(i)}$$

Considérons pour $s=0,1,2,\ldots,m_1-1$, l'expression :

$$(x\frac{d}{dx} - A)(\frac{1}{s!}\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\phi^{(1)} + \frac{1}{(s-1)!}\frac{\partial^{s-1}}{\partial\lambda^{s-1}}\phi^{(2)} + \ldots + \phi^{(p+1)})$$

$$= \frac{x^\lambda(\mathrm{Log}x)^s}{s!}(\lambda I-A_o)\,\phi_o^{(1)} + \frac{x^\lambda(\mathrm{Log}x)^{s-1}}{(s-1)!}\,\phi_o^{(1)}$$

$$+ x^\lambda\,\frac{(\mathrm{Log}x)^{s-1}}{(s-1)!}\,(\lambda I-A_o)\,\phi_o^{(2)} + x^\lambda\,\frac{(\mathrm{Log}x)^{s-2}}{(s-2)!}\,\phi_o^{(2)}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ x^\lambda(\mathrm{Log}x)(\lambda I-A_o)\,\phi_o^{(s)} + x^\lambda\,\phi_o^{(s)}$$
$$+ x^\lambda\,\phi_o^{(s)} + x^\lambda\,(\lambda I-A_o)\,\phi_o^{(s+1)}$$

Remplaçons dans l'expression précédente λ par λ_1 , le second membre de l'équalité s'annule, donc les vecteurs :

$$Y_{[s]}^{(1)} = [\frac{1}{s!}\,\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\phi^{(1)} + \frac{1}{(s-1)!}\,\frac{\partial^{s-1}}{\partial\lambda^{s-1}}\phi^{(2)} + \ldots + \phi^{(s+1)}]\Big|_{\lambda=\lambda_1}$$

pour $s=0,1,2,\ldots,m_1-1$

sont solutions du système (2) .

Nous venons de déterminer ainsi m_1 solutions linéairement indépendantes du système correspondant au premier bloc de Jordan J_1 . Elles sont :

$$\begin{cases} Y^{(1)}_{[1]}(x,\lambda_1) = \phi^{(1)}(x,\lambda_1,\phi_o^{(1)}) \\ Y^{(1)}_{[2]}(x,\lambda_1) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\,\phi^{(1)}(x,\lambda,\phi_o^{(1)})\Big|_{\lambda=\lambda_1} + \phi^{(2)}(x,\lambda_1,\phi_o^{(2)}) \\ \vdots \\ Y^{(1)}_{[m_1]}(x,\lambda_1) = \frac{1}{(m_1-1)!}\,\frac{\partial^{m_1-1}}{\partial\lambda^{m_1-1}}\,\phi^{(1)}(x,\lambda,\phi_o^{(1)})\Big|_{\lambda=\lambda_1} + \dots + \phi^{(m_1)}(x,\lambda_1,\phi_o^{(m_1)}) \end{cases}$$

En faisant le même raisonnement pour les blocs de Jordan $J_2,J_3,\dots,J_p$, nous pouvons ainsi déterminer :

$$\begin{cases} Y^{(1)}_{[1]}(x,\lambda_1),\ Y^{(1)}_{[2]}(x,\lambda_1)\ ,\dots,\ Y^{(1)}_{[m_1]}(x,\lambda_1) \\ Y^{(2)}_{[1]}(x,\lambda_2),\ Y^{(2)}_{[2]}(x,\lambda_2)\ ,\dots,\ Y^{(2)}_{[m_2]}(x,\lambda_2) \\ \vdots \\ Y^{(p)}_{[1]}(x,\lambda_p),\ Y^{(p)}_{[2]}(x,\lambda_p)\ ,\dots,\ Y^{(p)}_{[m_p]}(x,\lambda_p) \end{cases}$$

$m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$ solutions linéairement indépendantes du système (2). Elles en forment un système fondamental de solutions.

(b) Cas général : Il existe des valeurs propres de A_o qui diffèrent d'un entier

Considérons les valeurs propres distincts de A_o : $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ qui diffèrent d'un entier.

Soient $m_1,m_2,\dots,m_p$ les ordres de multiplicité des valeurs propres $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$

On suppose que $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ sont ordonnées de la manière suivante :

(10) $$Re(\lambda_1) \leq Re(\lambda_2) \leq \ldots \leq Re(\lambda_p)$$

(11) $$\lambda_{i+1} - \lambda_i = \ell_i \quad , \quad i=1,2,\ldots,p$$

$$\text{où } \ell_i \in \mathbb{N}^*$$

On suppose que les autres valeurs propres

$$\lambda_{p+1},\lambda_{p+2},\ldots,\lambda_r$$

ne vérifient pas les conditions précédentes.
Nous avons deux cas à distinguer ; $m_1 = 1$, $m_1 > 1$.

1°/ Premier cas : La multiplicité de la valeur propre λ_1 est $m_1 = 1$

Soit $$m = \sum_{i=2}^{i=p} m_i$$

L'idée (cf. [16]) est de remplacer le vecteur propre ϕ_o associé à la valeur propre λ_1 par :

$$\phi_o = (\lambda-\lambda_1)^m \omega_o$$

où ω_o est un vecteur propre de A_o associé à la valeur propre λ_1

$$(A_o - \lambda_1 I)\,\omega_o = 0$$

Dans ce cas :

$$(x \frac{d}{dx} - A)\,\phi = x^\lambda (\lambda-\lambda_1)^m (\lambda_1 I - A_o)\omega_o$$

où les ϕ_k pour $k \geq 1$ coefficients de ϕ sont déterminés par l'équation

(12) $$[A_o - (\lambda+k)I]\,\phi_k = - \sum_{\nu=1}^{k-1} A_\nu \, \phi_{k-\nu}$$

puisque ϕ_o est de la forme

$$\phi_o = (\lambda-\lambda_1)^m \omega_o$$

Il en suit que tous les vecteurs ϕ_i , i=1 jusqu'à $i = \ell_1 = \lambda_2 - \lambda_1$ sont aussi de la forme :

$$\phi_i = (\lambda - \lambda_1)^m \omega_i \quad , \quad i=0,1,\ldots,\ell_1$$

Or la matrice

$$[A_o - (\lambda + \ell_1)I] = [A_o - (\lambda + \lambda_2 - \lambda_1)I]$$

a un pôle en $\lambda = \lambda_1$ d'ordre la multiplicité de la valeur propre λ_2 , c'est-à-dire m_2 , donc le vecteur ϕ_{ℓ_1} est de la forme :

$$\phi_{\ell_1} = (\lambda-\lambda_1)^{m-m_2} \omega_{\ell_1}$$

ainsi de suite.

On peut donc déterminer les vecteurs ϕ_k $(k=0,\ldots,\infty)$ de la manière suivante :

$$(13) \qquad \begin{aligned} \phi_k &= (\lambda-\lambda_1)^m \omega_k \quad , \quad k=0,1,\ldots,\ell_1 -1 \\ \phi_k &= (\lambda-\lambda_1)^{m-m_1} \omega_k \quad , \quad k=\ell_1,\ldots,\ell_2-1 \\ &\vdots \\ \phi_k &= (\lambda-\lambda_1)^{m-(m_2+\ldots+m_{p-1})} \omega_k \quad , \quad k=\ell_{p-2},\ldots,\ell_{p-1}-1 \end{aligned}$$

Les autres ϕ_k $(k \quad \ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_{p-1})$ sont déterminés par l'équation (12). Notons que pour ces valeurs de k , la matrice $[A_o-(\lambda+k)I]$ est inversible en $\lambda = \lambda_1$.

D'après la même démarche (dérivation formelle) on a :

(14)

$$\boxed{\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s} \phi(x,\lambda,\phi_o)\Big|_{\lambda=\lambda_1}}$$

est solution du système (2) quelque soit s=0,1,...,m

(i) Considérons tout d'abord le cas où $s=0$

Nous avons comme solution :

$$\phi(x,\lambda_1,\phi_1) = x^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\lambda_1)x^k$$

or d'après les formules (13)

$$\phi_o(\lambda_1) = \phi_1(\lambda_1) = \ldots = \phi_{\ell-1}(\lambda_1) = 0$$

où $$\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{p-1} = \lambda_p - \lambda_1$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\phi(x,\lambda_1,\phi_1) &= x^{\lambda_1} \sum_{k=\ell}^{+\infty} \phi_k(\lambda_1)x^k \\
&= x^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_{k+\ell}(\lambda_1)x^{k+\ell} \\
&= x^{\lambda_1+\ell} \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_{k+\ell}(\lambda_1)\, x^k \\
&= x^{\lambda_p} \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_{k+\ell}(\lambda_1)x^k
\end{aligned}$$

Cette solution n'est autre (à une constante multiplicative près) que la solution correspondante à la valeur propre $\lambda = \lambda_p$.

(ii) cas où $s < m$

Nous pouvons faire le même raisonnement pour $s < m$ on peut montrer ainsi que toues les solutions (14) pour $s=0,1,\ldots,m-1$ sont combinaisons linéaires des solutions correspondantes aux valeurs propres $\lambda_2,\ldots,\lambda_p$.

(iii) Cas où $s = m$

C'est dans ce cas que l'on obtient une solution correspondante à la valeur propre $\lambda = \lambda_1$ qui en fait :

(15) $$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\phi(x,\lambda,\phi_o)_{|\lambda=\lambda_1}$$

2°/ **Deuxième Cas :La multiplicité de la valeur propre λ_1 est $m_1 > 1$**

Comme dans le cas générique, les solutions associées à la valeur propre λ_1 seront dans ce deuxième cas au nombre de m_1 . Voilà comment on les obtient :

a) **Supposons que λ_1 admette m_1 vecteurs propres linéairement indépendants**

Soient $\phi_o^{(1)}$, $\phi_o^{(2)}$, ... , $\phi_o^{(m_1)}$ ces m_1 vecteurs.
En faisant la même démarche que le cas 1 , les m_1 solutions correspondantes à la valeur propre λ_1 sont (cf. (15)) :

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\phi(x,\lambda,\phi_o^{(1)})_{|\lambda=\lambda_1}$$

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\phi(x,\lambda,\phi_o^{(2)})_{|\lambda=\lambda_1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\phi(x,\lambda,\phi_o^{(m_1)})_{|\lambda=\lambda_1}$$

qui sont m_1 solutions linéairement indépendantes.

b) **Venons-en au cas où λ_1 admet des vecteurs généralisés.**

Comme nous l'avons fait dans le cas générique, si il existe plusieurs blocs de Jordan correspondant à la valeur propre λ_1 on donne le procédé pour obtenir les solutions correspondantes au premier bloc, les solutions correspondantes aux autres blocs sont déterminées de la même manière. Nous allons donc supposer que λ_1 n'admet qu'un seul bloc de Jordan. Il existe alors m_1 vecteurs colonnes $\omega_o^{(1)},\omega_o^{(2)},\ldots,\omega_o^{(m_1)}$ tel que :

$$
(16) \quad
\begin{aligned}
(A_o - \lambda_1 I)\ \omega_o^{(1)} &= 0 \\
(A_o - \lambda_1 I)\ \omega_o^{(2)} &= \omega_o^{(1)} \\
&\vdots \\
(A_o - \lambda_1 I)\ \omega_o^{(m_1)} &= \omega_o^{(m_1-1)}
\end{aligned}
$$

De la même manière que dans le cas 1 nous allons poser :

$$\phi_o^{(i)} = (\lambda-\lambda_1)^m\ \omega_o^{(i)} \quad , \quad i=1,2,\ldots,m_1$$

où $$m = m_2 + m_3 + \ldots + m_p$$

Supposons que les vecteurs colonnes ϕ_k $(k=1,2,\ldots,\infty)$ aient été choisis tels que l'équation (3) soit vérifiée. Alors, on a : pour $i=1,2,\ldots,m_1$:

$$(x\frac{d}{dx} - A)\ \phi^{(i)}(x,\lambda,\phi_o) = x^\lambda\ (\lambda I - A_o)\ \phi_o^{(i)}$$

$$(x\frac{d}{dx} - A)\ \phi^{(i)} = x^\lambda\ (\lambda-\lambda_1)^m\ \ (\lambda I - A_o)\ \omega_o^{(i)}$$

D'après la même démarche (dérivation formelle)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\ (x\frac{d}{dx} - A)\ \phi = (x\frac{d}{dx} - A)\ \frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\phi
&= \frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\ (x^\lambda(\lambda-\lambda_1)^m(\lambda I-A_o)\omega_o) \\
&= \sum_{k=0}^{k=s} C_s^k\ \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\ (\lambda-\lambda_1)^m\ \frac{\partial^{(s-k)}}{\partial\lambda^{(s-k)}}\ (x^\lambda(\lambda I-A_o)\ \omega_o)
\end{aligned}
$$

où $$C_s^k = \frac{s!}{k!(s-k)!}$$

posons $\Theta(m,k) = m(m-1)\ \ldots\ (m-k+1)$. Alors

$$(x\frac{d}{dx} - A)\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\phi \quad =$$

$$\sum_{k=0}^{k=s} C_s^k \quad \Theta(m,k)(\lambda-\lambda_1)^{m-k}[x^\lambda(\log x)^{(s-k)}(\lambda I-A_o)\omega_o + (s-k)(\log x)^{(s-k-1)}\omega_o]$$

Les m_1 solutions que l'on cherche sont finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=s} \frac{(s+m)!}{(s+m-k)!s!} \frac{\partial^{s+m-k}}{\partial\lambda^{s+m-k}} \phi^{(k+1)}(x,\lambda,\phi_o^{(k+1)})\Big|_{\lambda=\lambda_1} \qquad \text{pour } s= 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,m_1-1}$$

Nous allons montrer cette dernière proposition.

En effet, pour tout $s=0,1,\dots,m-1$ on a :

$$(x\frac{d}{dx} - A)[\frac{1}{s!}\frac{\partial^{s+m}}{\partial\lambda}\phi^{(1)} + \frac{s+m}{s!}\frac{\partial^{s+m-1}}{\partial\lambda^{s+m-1}}\phi^{(2)} + \dots + \frac{(s+m)!}{m!s!}\frac{1}{m!s!}\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\phi^{(s+1)}]$$

$$= \sum_{k=0}^{s+m} \frac{1}{s!}C_{s+m}^k\Theta(m,k)(\lambda-\lambda_1)^{m-k}x^\lambda\ (\mathrm{Log}x)^{s+m-k}\ (\lambda I-A_o)\omega_o^{(1)}$$

$$+ \sum_{k=0}^{s+m} \frac{1}{s!}C_{s+m}^k\ \Theta(m,k)(\lambda-\lambda_1)^{m-k}\ (s+m-k)\ x^\lambda\ (\mathrm{Log}x)^{s+m-k-1}\ \omega_o^{(1)}$$

$$+ \sum_{k=0}^{s+m-1} \frac{s+m}{s!}\ C_{s+m-1}^k\ \Theta(m,k)(\lambda-\lambda_1)^{m-k}x^\lambda(\mathrm{Log}x)^{s+m-k-1}(\lambda I-A_o)\omega_o^{(2)}$$

$$+ \sum_{k0}^{s+m-1} \frac{s+m}{s!}\ C_{s+m-1}^k\ \Theta(m,k)(\lambda-\lambda_1)^{m-k}(s+m-k-1)x^\lambda(\mathrm{Log}x)^{s+m-k-2}\omega_o^{(2)}$$

$$+ \sum_{k=0}^{s+m-2} \frac{(s+m)(s+m-1)}{s!}\ C_{s+m-2}^k\ \Theta(m,k)(\lambda-\lambda_1)^{m-k}x^\lambda(\log x)^{s+m-k-2}(\lambda I-A_0)\omega_0^{(3)}$$

$$+ \sum_{k=0}^{s+m-2} \frac{(s+m)(s+m-1)}{s!}C_{s+m-2}^k\Theta(m,k)(\lambda-\lambda_1)^{m-k}(s+m-k-2)x^\lambda(\log x)^{(s+m-k-3)}\ \omega_o^{(3)}$$

$$+ \ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ \sum_{k=0}^{m} \frac{(s+m)!}{m!s!} C_k^m \Theta(m,k)(\lambda-\lambda_1)^{m-k} x^{\lambda} (\mathrm{Log}x)^{m-k} (\lambda I - A_o)\omega_o^{(s+1)}$$

$$+ \sum_{k=0}^{m} \frac{(s+m)!}{m!s!} C_k^m \Theta(m,k)(\lambda-\lambda_1)^{m-k} (m-k) x^{\lambda} (\mathrm{Log}x)^{(m-k-1)} \omega_o^{(s+1)}$$

En remplaçant λ par λ_1 dans le deuxième membre de cette égalité. Il devient d'après les relations (16) que vérifient $\omega_o^{(i)}$, $(i=1,2,\ldots,m_1)$:

$$\frac{1}{s!} C_{s+m}^m \Theta(m,m)\ s\ x^{\lambda_1} (\mathrm{Log}x)^{s-1} \omega_o^{(1)}$$

$$+ \frac{s+m}{s!} C_{s+m-1}^m \Theta(m,m)\ x^{\lambda_1} (\mathrm{Log}x)^{s-1} (-\omega_o^{(1)})$$

$$+ \frac{s+m}{s!} C_{s+m-1}^m \Theta(m,m)\ x^{\lambda_1} (s-1)\ x^{\lambda_1} (\mathrm{Log}x)^{s-2} \omega_o^{(2)}$$

$$+ \frac{(s+m)(s+m-1)}{s!} C_{s+m-2}^m \Theta(m,m)\ x^{\lambda_1} (\mathrm{Log}x)^{s-2} (-\omega_o^{(2)})$$

$$+ \frac{(s+m)(s+m-1)}{s!} C_{s+m-2}^m \Theta(m,m)\ (s-2)\ x^{\lambda_1} (\mathrm{Log}x)^{(s-3)} \omega_o^{(3)}$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ \frac{(s+m)!}{m!s!} C_m^m \Theta(m,m)\ x^{\lambda_1} (-\ \omega_o^{(s)})$$

$$=\ 0$$

Nous venons ainsi de mettre en évidence m_1 solutions linéairement indépendantes correspondantes à la valeur propre $\lambda = \lambda_1$, elles sont :

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\phi^{(1)}\Big|_{\lambda=\lambda_1}$$

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial\lambda^{m+1}}\phi^{(1)}\Big|_{\lambda=\lambda_1} + \frac{m+1}{s!}\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\phi^{(2)}\Big|_{\lambda=\lambda_1}$$

$$\frac{1}{2!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial\lambda^{m+2}}\phi^{(1)}\Big|_{\lambda=\lambda_1} + \frac{m+2}{2!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial\lambda^{m+1}}\phi^{(2)}\Big|_{\lambda=\lambda_1} + \frac{(2+m)(2+m-1)}{2!}\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\phi^{(3)}\Big|_{\lambda=\lambda_1}$$

.

.

.

.

$$\frac{1}{(m_1-1)!}\frac{\partial^{m+m_1-1}}{\partial\lambda^{m+m_1-1}}\phi^{(1)}\Big|_{\lambda=\lambda_1} + \frac{(m+m_1-1)}{(m_1-1)!}\frac{\partial^{m+m_1-2}}{\partial\lambda^{m+m_1-2}}\phi^{(2)}\Big|_{\lambda=\lambda_1} + \dots + \frac{(m+m_1-1)}{m!(m_1-1)!}\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\phi^{(m_1)}\Big|_{\lambda=\lambda_1}$$

En conclusion, la méthode de L. Sirovich permet contrairement à la précédente de donner directement le développement des solutions du système (2). On peut considérer cette méthode comme une généralisation de l'algorithme de Frobénius [9] , puisque on peut par la même méthode développer les solutions d'une équation différentielle scalaire à une inconnue.

Le procédé de la méthode précédente (paragraphe 3) permet par contre en un nombre fini de pas de calculer la monodromie (cf. [12]) du système (2), il permet en même temps de donner un système fondamental de solutions sous la forme ((7), paragraphe 3).

6. EXEMPLES

Premier exemple :

$$(18) \qquad Y'(x) = \frac{1}{x}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -x \\ -x & 0 & 2 \end{bmatrix} Y(x)$$

on a :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $A_k = 0 \quad , \quad k=2,3,\ldots,\infty$

A_o admet trois valeurs propres égales $\lambda = 2$

$$\phi_o^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \phi_o^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \text{vecteurs propres de } \lambda$$

$$\phi_o^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad : \text{vecteur propre généralisé de } \lambda$$

Une solution de (18) s'écrit formellement sous la forme :

$$\phi(x) = x^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\lambda)\, x^k$$

où les $\Phi_k(\lambda)$, $k=1,2,\ldots,\infty$ sont déterminés à partir de l'équation :

$$[A_o - (\lambda+k)I]\ \phi_k = -\ A_1\ \phi_{k-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2-k-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-k-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-k-\lambda \end{bmatrix} \phi_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \phi_{k-1}$$

(19) $$\phi_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/(2-k-\lambda)^2 \\ 0 & 0 & 1/(2-k-\lambda) \\ 1/(2-k-\lambda) & 0 & 0 \end{bmatrix} \phi_{k-1}$$

a/ Solutions correspondantes au premier bloc de Jordan

$\phi_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ d'après la relation (19) on a : $\phi_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/(1-\lambda) \end{bmatrix}$, $\phi_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -1/\lambda^2(1-\lambda) \\ -1/\lambda(1-\lambda) \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ \phi_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/(1-\lambda)^2 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}\ \phi_2^{(1)} = \begin{bmatrix} (2-\lambda)/\lambda^3(1-\lambda)^2 \\ (2\lambda-1)/\lambda^2(1-\lambda)^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'autre part $$\phi_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'après la relation (19), on a :

$$\phi_1^{(2)} = 0 \quad \text{donc} \quad \phi_k^{(2)} = 0 \quad , \quad k=1,2,\dots,\infty$$

Deux solutions correspondantes au premier bloc de Jordan sont donc :

$$\phi^{(1)}(\lambda=2) = x^2 \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + O(x^2) \right\}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \phi^{(1)}_{\lambda=2} + \phi^{(2)}(\lambda=2) = x^2 \mathrm{Log}x \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ \end{bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots\dots \right\}$$

$$+ \quad x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3/4 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots\dots$$

$$+ x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b / Solution correspondante au deuxième bloc de Jordan

On a :

$$\phi_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{donc} \quad \phi_1^{(3)} = \begin{bmatrix} -1/(1-\lambda)^2 \\ 1/(1-\lambda) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \phi_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/(1-\lambda)^2 \end{bmatrix}$$

Une solution correspondante au deuxième bloc de Jordan estdonc

$$\phi^{(3)} = x^2 \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} + 0(x^2) \right\}$$

Deuxième Exemple : **Cas non générique :**

$$Y'(x) = \frac{1}{x} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y(x)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $A_k = 0 \quad , \quad k=2,\dots,\infty$

Les valeurs propres de A_o sont :

$\lambda_1 = 2$ et $\phi^{(1)} = (1,0,0)$ vecteur propre de λ_1

$\lambda_2 = 1$, $\phi_0^{(2)} = (0,1,0)$ vecteur propre de λ_2

$\phi_0^{(3)} = (0,0,1)$ vecteur propre génériisé de λ_2.

Une solution de (20) s'écrit formellement :

$$\phi(x) = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\lambda)\, x^k$$

où les $\phi_k(\lambda)$, $k=1,2,\ldots,\infty$, sont déterminés à partir de l'équation :

$$[A_o - (\lambda+k)I]\phi_k = - A_1 - \phi_{k-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2-k-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-k-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-k-\lambda \end{bmatrix} \phi_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/(2-k-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \phi_{k-1}$$

(21) $$\phi_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/(1-k-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \phi_{k-1}$$

$k=1,2,\ldots,\infty$.

a / Solution correspondante à la valeur propre $\lambda_1 = 2$

$\phi_o^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, on trouve cette fois $\phi_1^{(1)} = 0$ et donc $\phi_k^{(1)} = 0$ $k=1,\ldots,\infty$

Une solution correspondante à $\lambda_1 = 2$ est donc :

$$\phi(x) = x^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b / Solutions correspondantes à la valeur propre $\lambda_2 = 1$

Puisque cette valeur propre est de multiplicité égale à 2 et diffère de la valeur propre λ_2 d'un entier qui elle est de multiplicité égale à 1 on prend :

$$\phi_o^{(2)} = (\lambda-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \phi_o^{(2)} = (\lambda-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

D'après (21) on a :

$$\phi_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda-1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi_1^{(2)} = 0 \quad \text{donc} \quad \phi_k^{(2)} = 0 \quad , \quad k = 1,2,\ldots,\infty$$

$$\phi_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/\lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi_2^{(3)} = 0 \quad \text{donc} \quad \phi_k^{(3)} = 0 \quad , \quad k=2,\ldots,\infty$$

On a :

$$\phi^{(2)} = x^{\lambda}\ (\lambda-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^{\lambda}(\lambda-1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi^{(3)} = x^{\lambda}(\lambda-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x^{\lambda+1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^{\lambda+1} \\ 0 \\ x^{\lambda}(\lambda-1) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ \phi^{(2)}_{\lambda=1} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial^2}{\partial\lambda}\ \phi^{(2)}_{\lambda=1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x\mathrm{Log}x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ \phi^{(3)}_{\lambda=1} = \begin{bmatrix} -x^2\,\mathrm{Log}x \\ 0 \\ x \end{bmatrix}$$

Deux solutions correspondantes à la valeur propre $\lambda = 1$ sont donc cf. (17) :

$$1/ \quad \frac{\partial}{\partial\lambda} \phi^{(2)}\Big|_{\lambda=1} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2/ \quad \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\phi^{(2)}\Big|_{\lambda=1} + 2\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\,\phi^{(3)}\Big|_{\lambda=1} = \begin{bmatrix} -2x^2\mathrm{Log}x \\ 2x\mathrm{Log}x \\ 2x \end{bmatrix}$$

B I B L I O G R A P H I E

[1] **G.D. BIRKHOFF :**

" Formal theory of irregular linear difference equations "
Acta. Math. Vol. 54 (1930), p. 207-209.

[2] **E.A. CODDINGTON et N. LEVINSON :**

" Theory of ordinary differential equations "
Mc. Graw-Hill Book Compagny. INC New-York (1955).

[3] **F.T. COPE :**

" Formal solutions of irregular linear differential equations"
Am. J. Math. Vol. 58 (1936) p. 130-140.

[4] **J. DELLA DORA et E. TOURNIER :**

" Solutions formelles d'équations différentiélles au voisinage de points singuliers réguliers "
Rapport de Recherche n° 239, IMAG, Grenoble (1981).

[5] **Mac. DUFFEE, c.c :**

" The theory of Matrices "
Chelsa (1959) p. 255-264.

[6] **R. GERARD et A.H.M. LEVELT :**

" Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes différentiels linéaires "
Ann. Math. Fourier (1973) p. 157-195.

[7] **A. HILALI :**

" Réduction d'un système différentiel linéaire homogène à une seule équation différentielle linéaire homogène "
Rapport de Recherche n°240, IMAG, Grenoble (1981).

[8] **A. HILALI :**

" Réductibilité d'un système différentiel linéaire "
(à paraitre)

[9] **E.L INCE :**
" Ordinary differential equations ".
New-York, Dover (1956).

[10] **W.B. JURKAT** et **D.A. LUTZ :**
" On the order of solutions of analytic differential equations "
Proc. London. Math. Soc. 3(1971) p. 465-482.

[11] **B. MALGRANGE :**
" Sur les points singuliers des équations différentielles "
L'enseignement Mathématique, t. xx,1-2. (1974) p. 147-176.

[12] **B. MALGRANGE :**
" Points singuliers des équations différentiels "
Cours de D.E.A, Grenoble.

[13] **J. MOSER :**
" The order of singularity in Fuch's theory "
Math. Zeitshrift ,72(1960). p. 379-398.

[14] **J.P RAMIS :**
" Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires "
Pub. IRMA, Strasbourg (1981).

[15] **P.A. SAMUELSON :**
" A method of determining Explicitly the coefficients of the characteristic equations "
Ann. Math. Statist. 13(1942) p. 424-429.

[16] **L. SIROVICH :**
" Thechniques of asymptotic analysis "
Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York Heidelberg. Berlin (1971) p. 240-244.

[17] W. WASOW :

" Asymptotic expansions for Ordinary differential equations "
Wieley (1973).

[18] S. WATANABE :

" Formula manipulations Solving linear ordinary differential equations (I) and (II) "

I Publ RIMS Kyoto univ. Vol. 6. (1970) p. 71-111.

II Publ RIMS Kyoto univ. Vol. 11. (1976) p. 297-337.

HILALI Abdelaziz

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 25/05/82

Le Président de la thèse

N GASTINEL

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE - GRENOBLE -

M. TANCHE