



**HAL**  
open science

# Propriétés combinatoires des produits tensoriels d'ensembles convexes

Jean Fonlupt

► **To cite this version:**

Jean Fonlupt. Propriétés combinatoires des produits tensoriels d'ensembles convexes. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1981. tel-00294618

**HAL Id: tel-00294618**

**<https://theses.hal.science/tel-00294618>**

Submitted on 10 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**l' Université Scientifique et Médicale de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*  
**DOCTEUR D'ETAT**  
*« mathématiques appliquées »*

*par*

**FONLUPT Jean**



**PROPRIETES COMBINATOIRES DES PRODUITS  
TENSORIELS D'ENSEMBLES CONVEXES.**



**Thèse soutenue le 26 Juin 1981 devant la commission d'examen.**

**P.J. LAURENT**      **Président**

<b>C. BENZAKEN</b>	}	<b>Examineurs</b>
<b>J.F. MAURRAS</b>		
<b>M. SAKAROVITCH</b>		
<b>M.I. EKELAND</b>		<b>Rapporteur</b>



# THESE

*présentée à*

**l' Université Scientifique et Médicale de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*  
**DOCTEUR D'ETAT**  
*« mathématiques appliquées »*

*par*

**FONLUPT Jean**



**PROPRIETES COMBINATOIRES DES PRODUITS  
TENSORIELS D'ENSEMBLES CONVEXES.**



**Thèse soutenue le 26 Juin 1981 devant la commission d'examen.**

**P.J. LAURENT**      **Président**

**C. BENZAKEN**  
**J.F. MAURRAS**  
**M. SAKAROVITCH**      **Examineurs**

**M.I. EKELAND**      **Rapporteur**



# UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

### PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale



**PROFESSEURS ASSOCIES**

MM. CRABBE Pierre  
SUNIER Jules

CERMO  
Physique

**PROFESSEURS SANS CHAIRE**

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

#### MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAEERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

#### MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

#### MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977



Je remercie vivement Monsieur Michel SAKAROVITCH,  
Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de  
Grenoble de m'avoir accueilli dans son équipe et d'avoir  
accepté de diriger ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à  
Monsieur P.J. LAURENT, Professeur à l'Université Scientifique  
et Médicale de Grenoble, pour avoir accepté de présider ce  
jury de thèse.

Je tiens également à remercier Monsieur I. EKELAND,  
Professeur à l'Université Paris-Dauphine, pour l'intérêt  
qu'il a pris à la lecture de ce manuscrit, ainsi que les  
remarques et les commentaires particulièrement intéressants  
qu'il a su m'apporter.

Tous mes remerciements à Monsieur J.F. MAURRAS,  
Professeur à l'Université du Val de Marne, et Monsieur  
C. BENZAKEN, Professeur à l'Université Scientifique et  
Médicale de Grenoble, pour l'intérêt qu'ils ont apporté  
à ce travail et pour l'honneur qu'ils me font de participer  
à ce jury.

Enfin, je remercie vivement Madame NEUMANN  
et Madame HOTTELLIER, ainsi que le personnel du service  
tirage pour l'excellente qualité de la présentation de  
ce travail.



## TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION .....	1
<u>CHAPITRE I - INTRODUCTION. NOTATIONS</u> .....	5
I) Espaces vectoriels .....	5
II) Espaces affines .....	6
III) Plongement affine de E dans un espace vectoriel .....	8
IV) Cône associé à un ensemble convexe .....	9
V) Polarité .....	12
VI) Produits tensoriels .....	14
<u>CHAPITRE II - PRODUIT TENSORIEL DE DEUX ENSEMBLES CONVEXES FERMES</u> .....	21
I) Produit tensoriel direct .....	21
II) Produit tensoriel polaire .....	26
<u>CHAPITRE III - ETUDE DES FACES DE <math>\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2</math> ET <math>\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2</math></u> .....	35
I) Faces de $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$ et $K_1 \otimes K_2$ .....	35
II) Faces de $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ et $K_1 \boxtimes K_2$ .....	47
III) Faces de $K_1 \otimes K_2$ et $K_1 \boxtimes K_2$ .....	55
<u>CHAPITRE IV - RELATIONS ENTRE <math>K_1 \otimes K_2</math> ET <math>K_1 \boxtimes K_2</math></u> ...	61
I) Introduction .....	61
II) Théorème fondamental : condition nécessaire	62



	Pages
III) Théorème fondamental : condition suffisante	65
 <u>CHAPITRE V - ETUDE DU PRODUIT TENSORIEL DIRECT ET</u>	
<u>DU PRODUIT TENSORIEL DANS DES CAS PARTICULIERS</u> .....	71
I) Introduction .....	71
II) Produit tensoriel de 2 hypersphères .....	74
III) Produit tensoriel d'ensembles polaires d'hypercubes .....	92
IV) Produit tensoriel de deux hypercubes .....	102
V) Conclusion .....	105
 ANNEXE I .....	 109
 BIBLIOGRAPHIE .....	

## INTRODUCTION

Il est bien connu que les problèmes d'optimisation combinatoire ou d'existence de structure combinatoire peuvent se formuler comme problème de programmation bilinéaire : Etant donnés deux polyèdres  $K_1$  et  $K_2$  plongés respectivement dans deux espaces vectoriels distincts  $E_1$  et  $E_2$ , résoudre le problème suivant :

$$z = \left\{ \min F(X,Y) \mid X \in K_1 ; Y \in K_2 \right\} \quad (P)$$

où  $F$  est une fonction bi-affine [3] [12].

Le problème (P) peut donc être considéré comme un problème difficile, de la classe des problèmes NP-complets [6].

Une manière d'aborder le problème (P) consiste à linéariser la fonction objectif  $F(X,Y)$ . Cette opération nous amène à introduire le produit tensoriel des deux espaces  $E_1$  et  $E_2$  et à définir deux nouveaux polyèdres appelés produit tensoriel direct et produit tensoriel polaire de  $K_1$  et  $K_2$ . On peut alors, de cette façon, étudier des algorithmes intéressants pour résoudre (P) [2], [3], [12].

L'autre intérêt de ces deux nouveaux polyèdres est leur structure combinatoire. C'est cet aspect qui est étudié dans ce mémoire.

Par structure combinatoire d'un polyèdre, nous entendons étude des faces de ce polyèdre : caractérisation des points extrêmes, propriétés d'adjacence des points extrêmes, étude des facettes, etc... .

Par extension nous appellerons structure combinatoire d'un ensemble convexe, l'étude de ses faces, bien que le nombre de celles-ci soit infini dans le cas général.

Le mémoire se divise de la manière suivante :

Le premier chapitre précise les définitions et notations utilisées par la suite et rappelle certains résultats dont nous aurons besoin ultérieurement.

Dans le deuxième chapitre, nous définissons à partir de deux ensembles convexes  $K_1$  et  $K_2$ , le produit tensoriel direct noté  $K_1 \otimes K_2$  et polaire  $K_1 \boxtimes K_2$ .

Au troisième chapitre, nous étudions quelques propriétés faciales de  $K_1 \otimes K_2$  et  $K_1 \boxtimes K_2$ .

Au quatrième chapitre, nous étudions la relation entre  $K_1 \otimes K_2$  et  $K_1 \boxtimes K_2$ .

Enfin, au dernier chapitre, nous étudions le produit tensoriel direct et le produit tensoriel polaire dans les cas suivants :

- $K_1$  et  $K_2$  sont des hypersphères
- $K_1$  et  $K_2$  sont des polaires d'hypercubes
- $K_1$  et  $K_2$  sont des hypercubes.

Les résultats principaux de ce mémoire sont de deux types :

1°) Cette recherche peut s'inscrire dans l'étude générale des propriétés combinatoires des polyèdres. A ce titre, le produit tensoriel direct et le produit tensoriel polaire de deux polyèdres apparaissent comme des classes particulièrement intéressantes de polyèdres (voir [4]).

2°) D'autre part, un des problèmes principaux rencontré en optimisation combinatoire est le suivant : caractériser les facettes ou tout au moins certains hyperplans d'appui du polytope (K) enveloppe convexe des vecteurs représentatifs des solutions possibles d'un problème d'optimisation combinatoire (voir par exemple [5], [16], [17], [20], [23], [25]).

L'étude combinatoire du produit tensoriel direct et polaire de deux polytopes permet d'aborder ce problème de manière nouvelle et en particulier de caractériser certains hyperplans d'appui et facettes du polytope K.



## CHAPITRE I

### INTRODUCTION - NOTATIONS

Dans ce chapitre, nous précisons les notations et définitions que nous utiliserons tout au long de ce mémoire. Nous rappellerons quelques propriétés en algèbre linéaire et convexité, démontrées pour la plupart dans les ouvrages de référence [9], [13], [14], [22]

#### I - ESPACES VECTORIELS

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur le corps des réels. Un vecteur  $X \in E$  sera défini par ses coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  par rapport à une base de référence  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

On notera  $\dim(L)$  la dimension d'un sous-espace vectoriel  $L$  de  $E$ . On dira que  $L$  est un sous-espace propre si :  $0 < \dim(L) < n$ . Etant donnés  $L_1$  et  $L_2$  sous-espaces vectoriels de  $E$ , on dira que  $E$  est somme directe de  $L_1$  et de  $L_2$  et on notera  $E = L_1 \oplus L_2$  si :

$$a) L_1 \cap L_2 = \{0\}$$

$$b) \forall X \in E, \exists X_1 \in L_1, \exists X_2 \in L_2 \text{ tel que } X = X_1 + X_2.$$

On appellera  $L(E)$  (resp.  $\text{Aut}(E)$ ) l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $E$  (resp.  $E$  sur  $E$ ). Une telle application  $A$  se définit par une matrice que nous noterons également  $A$ .

$$A = \|a_{ij}\| \quad 1 \leq i \leq n \quad ; \quad 1 \leq j \leq n.$$

Notons que  $A \in \text{Aut}(E) \iff \det A \neq 0$ .

## II - ESPACES AFFINES

a) Définition :  $L \subset E$  est un sous-espace affine de  $E$  si  
 $\forall X_1 \in L, \forall X_2 \in L, \forall \lambda$  réel,  $\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in L$ .

On montre [22] qu'un sous-espace affine  $L$  est toujours translaté d'un sous-espace vectoriel  $L_0$  défini de manière unique.

$$\forall a \in L, L = a + L_0$$

b) La dimension de  $L$  notée  $\dim(L)$  est la dimension du sous-espace vectoriel parallèle  $L_0$ .

c) Soit  $K \subset E$ . On appelle sous-espace affine engendré par  $K$ , le sous-espace affine  $L(K)$  ainsi défini :

$$X \in L(K) \iff \exists X_1 \in K, \exists X_2 \in K, \exists \lambda \text{ réel tel que } X = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$$

On posera  $\dim(K) = \dim[L(K)]$

$K$  sera de pleine dimension si  $\dim(K) = n$ .

d)  $k + 1$  vecteurs de  $E$   $\{X^1, X^2, \dots, X^{k+1}\}$  seront appelés affinement indépendants si :

$$\dim\{X^1, X^2, \dots, X^{k+1}\} = k.$$

e) Un élément  $X \in E$  sera appelé vecteur en tant qu'élément de l'espace vectoriel  $E$  et point en tant qu'élément d'un sous-espace affine.

Un point est un sous-espace affine de dimension 0.

Un sous-espace affine de dimension 1 est une droite, de dimension 2 un plan. Un sous-espace affine de dimension  $n-1$  est un hyperplan.

f) Une forme affine est une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall X_1 \in E, \forall X_2 \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] = \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2)$$

Soit  $X^0 = (x_i^0 ; 1 \leq i \leq n)$  et  $s^0 \in \mathbb{R}$ .

La fonction  $X \rightarrow f(X) = \langle X^0, X \rangle + s^0$  est une fonction affine.

Inversement, toute fonction affine peut se caractériser par un couple  $(X^0, s^0)$ ,  $X^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $s^0 \in \mathbb{R}$

On notera  $1_X$  la fonction constante :  $1_X(X) = 1 \quad \forall X \in E$ .

$1_X$  est représenté par le couple  $[X^0 = 0, s^0 = 1]$ .

Etant donnée une fonction affine  $f$ , l'ensemble des points :  $H = \{X \in E ; f(X) = 0\}$  est un hyperplan et tout hyperplan peut se caractériser de cette manière.

Tout sous-espace affine est intersection d'un nombre fini d'hyperplans.



### III - PLONGEMENT AFFINE DE E DANS UN ESPACE VECTORIEL

a) Soit  $\bar{E} = \mathbb{R}^{n+1}$  l'espace vectoriel obtenu en ajoutant un vecteur indépendant  $e_{n+1}$  à la base  $(e_1, \dots, e_n)$  de E.

Tout vecteur  $\bar{X} \in \bar{E}$  se définira par un vecteur  $X \in E$  et un réel s coordonnée de  $\bar{X}$  suivant  $e_{n+1}$ .

On écrira  $\bar{X} = [X, s]$

Par l'application  $X \in E \rightarrow \bar{X} = [X, 1] \in \bar{E}$ , E peut s'identifier à l'hyperplan de  $\bar{E} : \{ \bar{X}, \bar{X} = [X, 1] \}$ . E sera désormais un sous-espace affine de  $\bar{E}$  appelé support de  $\bar{E}$ .

Si L est un sous-espace affine de E, on appellera sous-espace vectoriel associé à L, le sous-espace

$$\bar{L} = \bigcup_{X \in L} \{ \lambda [X, 1] ; \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Notons que  $\dim(\bar{L}) = \dim(L) + 1$ .

b) L'espace dual de  $\bar{E}$ , noté  $\bar{E}^0$  est l'espace des formes linéaires sur  $\bar{E}$ . On peut choisir pour base de  $\bar{E}$  la base duale de  $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$  formée des vecteurs  $(e_1^0, e_2^0, \dots, e_{n+1}^0)$  vérifiant :

$$\forall 1 \leq i \leq n+1 : \langle e_i^0, e_i \rangle = 1, \quad \langle e_i^0, e_j \rangle = 0 \quad j \neq i$$

Un vecteur  $\bar{X}^0$  sera défini par un vecteur  $X^0 = (x_i^0, 1 \leq i \leq n)$  et un réel  $s^0$  coordonnée de  $\bar{X}^0$  suivant  $e_{n+1}^0$ . On notera

$$\bar{X}^0 = [X^0, s^0]$$

$\bar{E}^0$  s'identifie à l'espace des formes affines sur E par la relation :

$\bar{X}^0 = [X^0, s^0]$  définit la forme affine:  $[X, 1] \rightarrow \langle X^0, X \rangle + s^0$ .

Le sous-espace affine  $E^0 = (\bar{X}^0 = (X^0, 1))$  sera appelé espace dual affine de E. Notons que  $1_X = [0, 1] \in E^0$ .

#### IV - CÔNE ASSOCIÉ A UN ENSEMBLE CONVEXE

a) Soit  $K \subset E$ . On supposera par la suite que K vérifie les conditions suivantes :

α) K est un ensemble convexe fermé.

β) K est de pleine dimension.

γ) K ne contient aucune droite. Dans la terminologie utilisée dans [22] cette dernière condition s'écrit :

L'espace de linéarité de K noté Lin (K) est vide.

b) Cône asymptote de K

On notera  $O^+K$  le cône asymptote de K. Rappelons que :

$$V \in O^+K \iff \exists X \in K \text{ tel que } \forall \lambda \geq 0 \quad X + \lambda V \in K$$

Si  $V \neq 0$  et  $V \in O^+K$ , V est appelé direction à l'infini de K.

On a le résultat suivant :

Théorème 1 [22]  $O^+K$  est un cône convexe fermé

$$O^+K = \{0\} \iff K \text{ est compact}$$

c) Cône associé à K

$$\text{Soit } K' \text{ le cône de } \bar{E} : K' = \bigcup_{X \in K, \lambda \geq 0} \lambda(X, 1)$$

Soit  $\bar{K}$  la fermeture topologique de  $K'$  :  $\bar{K} = \text{Cl}K'$ .

$\bar{K}$  sera l'extension de K et K le support de  $\bar{K}$ .

Théorème 2 [22] a)  $\bar{K}$  est un cône convexe fermé

$$b) \bar{K} = K' \cup \{(X, 0) \mid X \in O^+K\}$$

$$c) \text{ Si } \bar{X} = (X, s) \in \bar{K}, s \geq 0$$

d) Inversement soit  $\bar{K}$  un cône convexe fermé.

Si quelque soit  $X = (X, s) \in \bar{K}$ , on a  $s \geq 0$ , alors l'ensemble convexe fermé  $K = \bar{K} \cap E = (X \in K \iff X = (X, 1) \text{ et } X \in \bar{K})$  est le support de  $\bar{K}$ .

d) Faces de K et de  $\bar{K}$

On dira que F est une face de K si pour tout triplet  $X \in F$ ,  $X_1 \in K$ ,  $X_2 \in K$  tel que  $X = \alpha X_1 + (1-\alpha)X_2$  avec  $0 \leq \alpha \leq 1$  on a  $X_1 \in F$ ,  $X_2 \in F$ .

Si  $\dim(F) = 0$ , F est un point extrême de K.

Si  $\dim(F) = 1$ , F est une arête de K. 2 points extrêmes appartenant à une arête seront appelés points extrêmes adjacents.

Si  $\dim(F) = n-1$ , F est une facette de K.

On notera  $\varepsilon(K)$  l'ensemble des points extrêmes de K.

Un hyperplan H d'équation  $\langle X^0, X \rangle + \alpha = 0$  est un hyperplan d'appui de K si :

$$\alpha) \langle X^0, X \rangle + s^0 \geq 0 \quad \forall X \in K$$

$$\beta) H \cap K = F \neq \emptyset$$

Notons que F est alors une face de K.

Toute facette est définie par un hyperplan d'appui.

Notons que si  $F$  est une face de  $K$ , l'extension  $\bar{F}$  de  $\bar{K}$  est une face de  $\bar{K}$  et  $\dim(\bar{F}) = \dim(F) + 1$ .

L'extension d'un point extrême de  $K$  sera une direction extrême de  $\bar{K}$ .

Inversement, si  $\bar{F}$  est une face de  $\bar{K}$  et  $F = \bar{F} \cap E \neq \emptyset$ ,  $F$  est une face de  $K$ . On notera  $\varepsilon(\bar{K})$  l'ensemble des directions extrêmes de  $\bar{K}$ .

e) Remarque : un ensemble convexe  $K$  étant caractérisé par son cône associé  $\bar{K}$ , l'étude combinatoire de  $K$  sera l'étude des faces du cône associé  $\bar{K}$ .

Il est préférable d'étudier  $\bar{K}$  plutôt que  $K$  car de cette manière, on ne distingue plus les propriétés des faces de  $K$  et les propriétés des points à l'infini de  $K$ .

Par exemple une direction extrême de  $\bar{K}$  peut être soit l'extension d'un point extrême de  $K$ , soit une direction extrême du cône asymptote  $O^+K$ .

f) Soit  $A \in \text{Aut}(\bar{E})$ . Pour  $\bar{L} \in \bar{E}$  posons

$$A\bar{L} = [\bar{X} : \exists \bar{X}' \in \bar{L} \text{ tel que } \bar{X} = A\bar{X}'] .$$

2 cones fermés  $\bar{K}$  et  $\bar{K}'$  seront isomorphes si  $\exists A \in \text{Aut}(\bar{E})$  tel que :

$$\bar{K}' = A\bar{K} .$$

Notons que si  $\bar{K}' = A\bar{K}$ ,  $\bar{K} = A^{-1}\bar{K}'$ .

De plus, A crée une bijection entre les faces de  $\bar{K}$  et celles de  $\bar{K}'$ .

Pour cette raison,  $\bar{K}$  et  $\bar{K}'$  ont la même structure combinatoire.

2 ensembles convexes K et K' sont isomorphes ou combinatoirement équivalents si  $\bar{K}$  et  $\bar{K}'$  sont isomorphes

#### V - POLARITE

a) On définira le cône polaire  $\bar{K}^0$  de  $\bar{K}$  de la manière suivante :

$$\bar{X}^0 \in \bar{K}^0 \iff \langle \bar{X}^0, \bar{X} \rangle \geq 0 \quad \forall \bar{X} \in \bar{K}$$

Théorème 3 (22) a)  $\bar{K}^0$  est un cône fermé

b) Si  $\bar{K}$  est fermé ( $\bar{K}^0$ ) =  $\bar{K}$  (Théorème fondamental de la polarité).

c)  $\dim \bar{K}^0 = \dim \bar{K} = n+1$

Notons que si  $\bar{X}^0 \in \bar{K}^0$ , l'hyperplan : H : ( $\bar{X} | \leq \bar{X}^0, \bar{X} \rangle = 0$ ) définit deux demi-espaces et  $\bar{K}$  est contenu entièrement dans un de ces deux demi-espaces. D'autre part  $\{0\} \in H$ .

Si  $\bar{X}^0 \in \text{Int}(\bar{K})$  on peut montrer que H est un hyperplan d'appui de  $\bar{K}$  et  $H \cap \bar{K} = \{0\}$ .

Si  $\bar{X}^0 \in \mathcal{E}(\bar{K}^0)$ ,  $\bar{X}^0$  définit une forme affine sur  $\bar{E}$  qu'on appellera forme affine irréductible.

b) Soit  $\bar{F}$  une face de  $\bar{K}$

Posons  $\bar{F}^0 = [\bar{X}^0 ; \bar{X}^0 \in \bar{K}^0 ; \langle \bar{X}^0, \bar{X} \rangle = 0 \quad \forall \bar{X} \in \bar{F}]$ .

$\bar{F}^0$  sera appelée face polaire de  $\bar{F}$ .

$\bar{K}$  est un cône polyédral si le nombre de directions extrêmes de  $\bar{K}$  est fini.

$\bar{K}$  est un cône simplicial si le nombre de directions extrêmes de  $\bar{K}$  est égal à  $n+1$ .

- Théorème 4 (5)
- a)  $\bar{K}$  est polyédral  $\iff \bar{K}^0$  est polyédral
  - b)  $\bar{K}$  est simplicial  $\iff \bar{K}^0$  est simplicial
  - c) Si  $\bar{K}$  est polyédral et  $\bar{F}$  est une face de  $\bar{K}$ 
    - c1)  $(\bar{F}^0)^0 = \bar{F}$
    - c2)  $\dim \bar{F} + \dim \bar{F}^0 = n+1$

c) On appelle ensemble polaire de  $K$ , l'ensemble convexe  $K^0 \in E^0$  défini par :

$$K^0 = \{ (X^0, 1) ; \langle X^0, X \rangle + 1 \geq 0 \quad \forall (X, 1) \in K \}$$

Théorème 5 [22]

- a)  $1_X = [0, 1] \in K^0$
- b) Si  $[0, 1] \in K$ ,  $K^0$  est support de  $\bar{K}^0$
- c) Si  $[0, 1] \in K$ ,  $(K^0)^0 = K$
- d)  $[0, 1] \in \text{Int } K \iff K^0$  est compact
- e)  $[0, 1] \in \text{Int } K^0 \iff K$  est compact.

d) La propriété suivante sera utilisée au chapitre suivant.

Elle permet de ramener l'étude des cônes fermés à l'étude des cônes ayant pour support des ensembles compacts.

Proposition 6 [9] Tout cône convexe fermé dans  $\bar{E}$  ne contenant aucun sous espace propre est isomorphe à un cône  $\bar{K}$  ayant pour support un ensemble convexe compact  $K$  contenant l'origine  $(X = 0, 1)$  comme point intérieur.

## VI - Produits tensoriels

### a) Notations

Les notations suivantes seront utilisées tout au long de ce mémoire

$$\underline{E_1 = \mathbb{R}^n}$$

$$\underline{\text{Base de référence de } E_1 = (e_1, e_2, \dots, e_n)}$$

$$\underline{\text{Vecteur de } E_1 : X = (x_i) ; 1 \leq i \leq n_1}$$

$$\underline{\bar{E}_1 \text{ espace vectoriel associé à } E_1 : \bar{E}_1 = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1})}$$

$$\underline{\text{Vecteur de } \bar{E}_1 : \bar{X} = [(X, s) : X \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}]}$$

$$\underline{\text{Point de } E_1 : \bar{X} = [X, 1]}$$

$K_1$  ensemble convexe plongé dans  $E_1$  vérifiant les conditions

$\alpha)$   $\beta)$   $\gamma)$  de IV-a)

$\bar{K}_1$  cône convexe associé à  $K_1$

$$\underline{\bar{E}_1^0 = \text{espace dual de } \bar{E}_1 : E_1^0 = (e_1^0, \dots, e_{n+1}^0)}$$

$$\underline{X^0 = (x_i^0 ; 1 \leq i \leq n)}$$

$$\underline{\text{Vecteur de } \bar{E}_1^0 : \bar{X}^0 = [(X^0, s^0) ; X^0 \in \mathbb{R}^n ; s^0 \in \mathbb{R}]}$$

$$\underline{\text{Espace affine dual de } E_1 : E_1^0 = [(X^0, 1), X^0 \in \mathbb{R}^n]}$$

$\bar{K}_1^0$  = cône polaire de  $\bar{K}_1$

$K_1^0$  : ensemble polaire de  $K_1$

$E_2 = R^m$

Base de  $E_2$  :  $(f_1, f_2, \dots, f_m)$

Vecteur de  $E_2$  :  $Y = (y_j ; 1 \leq j \leq m)$

$\bar{E}_2$  = espace vectoriel associé à  $E_2$  :  $\bar{E}_2 = (f_1, f_2, \dots, f_{m+1})$

Vecteur de  $\bar{E}_2$  :  $\bar{Y} = [(Y, t) ; Y \in R^m ; t \in R]$

Point de  $E_2$  :  $\bar{Y} = [(Y, 1) ; Y \in R^m]$

$K_2$  ensemble convexe plongé dans  $E_2$ , vérifiant les propriétés

$\alpha)$   $\beta)$   $\gamma)$  de IV-a)

$\bar{K}_2$  cône convexe associé à  $K_2$

$\bar{E}_2^0$  : espace dual de  $\bar{E}_2$  :  $\bar{E}_2^0 = (f_1^0, \dots, f_{m+1}^0)$

$Y^0 = (y_j^0 ; 1 \leq j \leq m)$

Vecteur de  $\bar{E}_2^0 = \bar{Y}^0 = [(Y^0, t^0) ; Y^0 \in R^m, t^0 \in R]$

Espace affine dual de  $E_2$  :  $E_2^0 = [(Y^0, 1) ; Y^0 \in R^m]$

$\bar{K}_2^0$  : cône polaire de  $\bar{K}_2$

$K_2^0$  : ensemble polaire de  $K_2$ .

b) Produit tensoriel de  $\bar{E}_1$  et  $\bar{E}_2$  [13]

On appelle  $\bar{E}_3 = \bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2$  l'espace vectoriel produit tensoriel de  $\bar{E}_1$  et  $\bar{E}_2$ .



La base de référence de  $\bar{E}_3$  sera notée  $[e_i \otimes f_j \ ; \ 1 \leq i \leq n+1 \ ; \ 1 \leq j \leq m+1]$ .

Un vecteur de  $E_3$  sera noté  $\bar{Z} = (z_{ij} \ ; \ 1 \leq i \leq n+1 \ ; \ 1 \leq j \leq m+1)$ .  
où  $z_{ij}$  désigne la coordonnée de  $\bar{Z}$  suivant  $e_i \otimes f_j$ .

D'autre part, on appellera  $\bar{X} \otimes \bar{Y}$  le vecteur dont la coordonnée suivant  $e_i \otimes f_j$  est égale à  $x_i \cdot y_j$  pour tout  $1 \leq i \leq n+1$  et  $1 \leq j \leq m+1$ .

$\bar{E}_3$  est engendré par les vecteurs de la forme  $\{\bar{X} \otimes \bar{Y} \ ; \ \bar{X} \in \bar{E}_1, \bar{Y} \in \bar{E}_2\}$ .

Soit  $A \in \text{Aut}(\bar{E}_1)$  et  $B \in \text{Aut}(\bar{E}_2)$

$$\text{A tout } \bar{Z} = \sum_{k=1}^K \bar{X}^k \otimes \bar{Y}^k$$

$$\text{associons le vecteur } \bar{Z}' = \sum_{k=1}^K A \bar{X}^k \otimes B \bar{Y}^k$$

On vérifie que cette application est un automorphisme de  $E_3$  noté  $A \otimes B$ .

Soit  $\bar{F}(X, Y) = \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{i=1}^{n+1} z_{ij}^0 \cdot x_i \cdot y_j$  une forme bilinéaire sur  $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$ .

On peut associer à  $\bar{F}$  un vecteur  $\bar{Z}^0 = (z_{ij}^0 \ ; \ 1 \leq i \leq n+1 \ ; \ 1 \leq j \leq m+1)$  du dual  $\bar{E}_3^0$  de  $E_3$ .

Notons que  $\forall \bar{X} \in \bar{E}_1 \quad \forall \bar{Y} \in \bar{E}_2$

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \langle \bar{Z}^0, \bar{X} \otimes \bar{Y} \rangle.$$

c) Produit tensoriel affine de  $E_1$  et  $E_2$  (voir [13])

Pour  $\bar{Z} = (z_{ij} \ ; \ 1 \leq i \leq n+1 \ ; \ 1 \leq j \leq m+1)$  posons :

$$Z = (z_{ij} \ ; \ 1 \leq i \leq n \ ; \ 1 \leq j \leq m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$X = (x_i = z_{i, m+1} \ ; \ 1 \leq i \leq n) \in \mathbb{R}^n$$

$$Y = (y_j = z_{n+1, j} \ ; \ 1 \leq j \leq m) \in \mathbb{R}^m$$

$$u = (z_{n+1, m+1}) \in \mathbb{R}$$

$\bar{Z}$  sera donc défini par :  $Z \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \in \mathbb{R}$  et on notera  $\bar{Z} = [Z, X, Y, u]$ .

$E_3$  espace produit tensoriel affine de  $E_1$  et  $E_2$  sera identifié à l'hyperplan  $H = \{\bar{Z} : \bar{Z} = [Z, X, Y, 1]\}$ .

$E_3$  est le support de  $\bar{E}_3$  et  $\dim E_3 = nm + n + m$

Propriété 7 :  $E_3$  est l'espace affine engendré par les points :

$$\{[X, 1] \otimes [Y, 1] ; X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m\}$$

Démonstration

1°) Soit  $\bar{Z} = [X, 1] \otimes [Y, 1]$

$$Z = [X \otimes Y, X, Y, 1]$$

Donc  $\bar{Z} \in E_3$

2°) Soit  $n+1$  points  $\bar{X}_i = [X_i, 1]$   $1 \leq i \leq n+1$  engendrant l'espace affine  $E_1$  et  $m+1$  points  $\bar{Y}_j = [Y_j, 1]$   $1 \leq j \leq m+1$  engendrant l'espace affine  $E_2$ . La famille  $\{\bar{X}_i ; 1 \leq i \leq n+1\}$  de vecteurs de  $\bar{E}_1$  constitue un ensemble linéairement indépendant engendrant  $\bar{E}_1$ . De même la famille  $\{\bar{Y}_j ; 1 \leq j \leq m+1\}$  engendre  $\bar{E}_2$ .

Donc  $\{\bar{X}_i \otimes \bar{Y}_j ; 1 \leq i \leq n+1 ; 1 \leq j \leq m+1\}$  forment une famille de vecteurs linéairement indépendants engendrant  $\bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2$ .

Les points  $\bar{X}_i \otimes \bar{Y}_j ; 1 \leq i \leq n+1 ; 1 \leq j \leq m+1$  forment un ensemble de points affinement indépendants au nombre de  $n \times m + n + m$ . Ils engendrent donc  $E_3$ . □

d) Fonction bi-affine sur  $E_1 \times E_2$

Une fonction  $X, Y \rightarrow F(X, Y)$  est une fonction bi-affine si  $F$  est de la forme :

$$F(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m z_{ij}^0 x_i y_j + \sum_{i=1}^n x_i^0 \cdot x_i + \sum_{j=1}^m y_j^0 \cdot y_j + u^0$$

$F(X, Y)$  peut se définir également à partir de la forme linéaire associée :

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m z_{ij}^0 x_i y_j + \sum_{i=1}^n x_i^0 x_i t + \sum_{j=1}^m y_j^0 y_j s + u^0 st$$

On a alors la correspondance :  $F(X, Y) = \bar{F}((X, 1), (Y, 1))$ .

Posons  $Z^0 = (z_{ij}^0 \quad 1 \leq i \leq n ; 1 \leq j \leq m)$ .

$$X^0 = (x_i^0 \quad 1 \leq i \leq n)$$

$$Y^0 = (y_j^0 \quad 1 \leq j \leq m)$$

A  $F(X, Y)$  et  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  on peut associer le vecteur  $\bar{Z}^0 = [Z^0, X^0, Y^0, u^0]$ .  $E_3^0$  espace dual de  $E_3$  sera défini comme l'enveloppe affine des points de la forme

$$\bar{Z}^0 = [Z^0, X^0, Y^0, 1]$$

On peut donc associer à un point  $\bar{Z}^0 \in E_3^0$  une forme bi-affine  $F(X, Y)$  vérifiant :

$$F(0, 0) = 1.$$

A la forme identité :  $F(X, Y) = 1 \quad \forall X \in E_1, Y \in E_2$  on peut associer le point  $1_{X \otimes Y} = [Z^0 = 0 ; X^0 = 0 ; Y^0 = 0 ; u^0 = 1] \in E_3^0$ .

e) Fin des notations

$\bar{E}_3 = \bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2$  produit tensoriel de  $E_1$  et  $E_2$

Dim  $\bar{E}_3 = (n+1) \times (m+1)$

Base de  $\bar{E}_3 = [e_i \otimes f_j \quad 1 \leq i \leq n+1 ; 1 \leq j \leq m+1]$ .

Vecteur de  $\bar{E}_3 : Z = (z_{ij} \quad 1 \leq i \leq n+1 ; 1 \leq j \leq m+1)$ .

$\bar{Z} = \bar{X} \otimes \bar{Y}$  vecteur de coordonnées  $z_{ij} = x_i \cdot y_j$

Représentation de  $\bar{Z} : \bar{Z} = [Z, X, Y, u] \quad Z \in \mathbb{R}^{n \times m} ; X \in \mathbb{R}^n ; Y \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}$ .

Produit tensoriel affine de  $E_1$  et  $E_2 : E_3 = [(Z, X, Y, 1)] \in \bar{E}_3$ .

Dual de  $\bar{E}_3 : \bar{E}_3^0$

Elément de  $\bar{E}_3^0 : \bar{Z}^0 = ((z_{ij}^0) ; 1 \leq i \leq n+1 ; 1 \leq j \leq m+1)$

Dual de  $E_3 : E_3^0$

Elément de  $E_3^0 : \bar{Z}^0 = (Z^0, X^0, Y^0, u^0) \quad Z^0 \in \mathbb{R}^{n \times m} ; X^0 \in \mathbb{R}^n ; Y^0 \in \mathbb{R}^m, u^0 \in \mathbb{R}$ .

Elément de  $E_3^0 : \bar{Z}^0 = (Z^0, X^0, Y^0, 1)$ .

Fonction identité sur  $E_1 : 1_X = (0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Fonction identité sur  $E_2 : 1_Y = (0, 1) \in \mathbb{R}^{m+1}$

Fonction identité sur  $E_3 : 1_{X \otimes Y} = 1_X \otimes 1_Y = (0, 0, 0, 1)$ .



## CHAPITRE II

### PRODUIT TENSORIEL DE DEUX ENSEMBLES CONVEXES FERMES

Le produit tensoriel d'ensembles convexes a déjà été introduit et étudié par [15], [19], dans le cas d'ensembles convexes compacts plongés dans des espaces vectoriels topologiques. La définition de produits tensoriels que nous donnons ici est équivalente à celles fournies par ces auteurs, mais le fait de se restreindre à des espaces vectoriels de dimension finie permet d'étudier des ensembles convexes non nécessairement compacts et de simplifier considérablement les définitions et propriétés élémentaires données dans ce chapitre.

#### I - PRODUIT TENSORIEL DIRECT DE DEUX CONES FERMES

##### a) Définition

Soient  $K_1 \subset E_1$  et  $K_2 \subset E_2$  deux cônes fermés.

Le produit tensoriel direct (P.T.D.) de  $K_1$  et  $K_2$  noté  $K_1 \otimes K_2$  est défini par :

$$\bar{Z} \in \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 \iff Z = \sum_{i=1}^r \lambda_i X^i \otimes Y^i ; X^i \in K_1, Y^i \in K_2, \lambda_i \geq 0 \forall i$$

b) Remarque : Comme  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 \subset \bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2$ , on peut supposer par le théorème de Carathéodory [9] que  $r < \dim \bar{E}_1 \cdot \dim \bar{E}_2$ .

c) Premières propriétés de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$

Propriété 1 : a)  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  est un cône convexe.

$$b) \dim \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 = \dim \bar{E}_1 \cdot \dim \bar{E}_2 = (n+1)(m+1)$$

Evident.

Propriété 2 : Si  $A \in \text{Aut}(\bar{E}_1)$  et  $B \in \text{Aut}(\bar{E}_2)$

$$A \otimes B(\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2) = A(\bar{K}_1) \otimes B(\bar{K}_2)$$

Démonstration

1) Soit  $\bar{Z} \in A \otimes B(\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2)$ .

On peut écrire  $\bar{Z} = A \otimes B \left[ \sum_{i=1}^r \lambda_i \bar{X}^i \otimes \bar{Y}^i \right]$ ;  $\bar{X}^i \in \bar{K}_1$ ;  $\bar{Y}^i \in \bar{K}_2$ ;  $\lambda_i \geq 0$

$$\Rightarrow \bar{Z} = \sum_{i=1}^r \lambda_i A \bar{X}^i \otimes B \bar{Y}^i \in A(\bar{K}_1) \otimes B(\bar{K}_2)$$

2) Inversement si  $\bar{Z} \in A(\bar{K}_1) \otimes B(\bar{K}_2)$ ,  $\bar{Z} = \sum_{i=1}^r \lambda_i A \bar{X}^i \otimes B \bar{Y}^i$  ;

$$\bar{X}^i \in \bar{K}_1, \bar{Y}^i \in \bar{K}_2, \lambda_i \geq 0$$

$$\bar{Z} = A \otimes B \left[ \sum_{i=1}^r \lambda_i \bar{X}^i \otimes \bar{Y}^i \right] \in A \otimes B(\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Ce résultat facile à démontrer est cependant très important.

Il signifie que si  $\bar{K}_1, \bar{K}'_1$  d'une part  $\bar{K}_2, \bar{K}'_2$  d'autre part sont isomorphes,  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  et  $\bar{K}'_1 \otimes \bar{K}'_2$  sont isomorphes, c'est à dire ont les mêmes propriétés topologiques et combinatoires.

d) Définition du produit tensoriel de  $K_1$  et  $K_2$

Soient  $K_1$  et  $K_2$ , 2 ensembles convexes fermés. On appelle produit tensoriel direct (P.T.D.) de  $K_1$  et  $K_2$ , l'ensemble noté  $K_1 \otimes K_2$  défini par :

$$\bar{Z} \in K_1 \otimes K_2 \iff \bar{Z} = \sum_{i=1}^r \lambda_i [X^i, 1] \otimes [Y^i, 1].$$

$$(X^i, 1) \in K_1 ; (Y^i, 1) \in K_2 ; \lambda_i \geq 0 ; \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1.$$

e) Propriétés topologiques de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  et  $K_1 \otimes K_2$

Théorème 3 :  $K_1 \otimes K_2$  est un ensemble convexe compact si et seulement si  $K_1$  et  $K_2$  sont compacts.

Démonstration

a)  $K_1 \otimes K_2$  est un ensemble convexe par définition.

b) Supposons un des deux ensembles  $K_1, K_2$  par exemple  $K_1$  non borné. Alors  $\exists$  une direction à l'infini de  $K_1$  :  $V \neq 0$   
 Soit  $(X, 1) \in K_1$  et  $(Y, 1) \in K_2$ .

$$\forall \lambda \geq 0 \quad (X + \lambda V, 1) \otimes (Y, 1) = (X, 1) \otimes (Y, 1) + (V, 0) \otimes (Y, 1) \in K_1 \otimes K_2$$

Donc  $(V, 0) \otimes (Y, 1) = (V \otimes Y, V, 0; 0)$  est une direction à l'infini de  $K_1 \otimes K_2$ .

c) Supposons  $K_1$  et  $K_2$  compacts.

L'ensemble  $(K_1)^r$  est compact comme ensemble produit de  $r$  ensembles compacts. De même  $(K_2)^r$  est compact.

Enfin l'ensemble  $S = \{(\lambda_i) \mid 1 \leq i \leq r : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1\}$  est également compact.

Soit  $F$  l'application :  $(K_1)^r \times (K_2)^r \times S \rightarrow E_3$  définie par :

$$(X^1, \dots, X^r) (Y^1, \dots, Y^r), (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \xrightarrow{F} \bar{Z} = \sum_{i=1}^r \lambda_i [X^i, 1] \otimes [Y^i, 1].$$



F est une application continue et l'image par F de  $K_1^r \times K_2^r \times S$  est exactement l'ensemble  $K_1 \otimes K_2 \Rightarrow K_1 \otimes K_2$  est compact.

Théorème 4 :  $\bar{K}_3 = \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  est un cône convexe fermé.

Démonstration :

a) Supposons d'abord que  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$  aient respectivement comme support  $K_1$  et  $K_2$  ensembles convexes compacts.

Par les théorèmes (1) et (2) du chapitre I, tout élément  $X \neq 0, X \in K_1$  s'écrit  $\bar{X} = \lambda(X, 1)$  ;  $\lambda > 0, X \in K_1$ . De même, tout élément  $Y \neq 0, Y \in K_2$  s'écrit  $\bar{Y} = \mu(Y, 1)$  ;  $\mu > 0, Y \in K_2$ .

Tout  $\bar{Z} \neq 0$  peut donc s'écrire :

$$\bar{Z} = \sum_{i=1}^r \lambda_i (X^i, 1) \otimes (Y^i, 1) ; (X^i, 1) \in K_1 ; (Y^i, 1) \in K_2 ; \lambda_i > 0.$$

$$\text{Posons } \mu = \sum_{i=1}^r \lambda_i$$

$$\text{et } \mu_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^r \lambda_i} \quad 1 \leq i \leq r$$

$$\bar{Z} = \mu \sum_{i=1}^r \mu_i (X^i, 1) \otimes (Y^i, 1).$$

$$\text{Comme } \sum_{i=1}^r \mu_i = 1, \sum_{i=1}^r \mu_i (X^i, 1) \otimes (Y^i, 1) \in K_1 \otimes K_2$$

$K_1 \otimes K_2$  est donc support de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$

$K_1 \otimes K_2$  étant compact,  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  est fermé (théorèmes 1 et 2 du chapitre I).

b) Par la propriété 6 du chapitre I, on sait que  $\bar{K}_1$  (resp.  $\bar{K}_2$ ) est isomorphe à un cône  $\bar{K}'_1$  (resp.  $\bar{K}'_2$ ) de support compact.

Par la propriété 2,  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  est isomorphe au cône fermé  $\bar{K}'_1 \otimes \bar{K}'_2$  et est donc fermé.

Corollaire 5 :  $K_3 = K_1 \otimes K_2$  est fermé.

$K_3$  étant support de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  le résultat est évident.

Propriété 6 : Si  $\bar{X} \in \text{Int } \bar{K}_1$  et  $\bar{Y} \in \text{Int } \bar{K}_2$ ,  $\bar{X} \otimes \bar{Y} \in \text{Int } \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$

Démonstration :  $\bar{X} \in \text{Int } \bar{K}_1 \iff \exists n+1$  vecteurs linéairement indépendants de  $\bar{K}_1$  :  $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}^{n+1})$  tels que :

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \bar{X}^i \quad ; \quad \lambda_i > 0, 1 \leq i \leq n+1$$

De même  $\bar{Y} \in \text{Int } \bar{K}_2$ ,  $\exists (m+1)$  vecteurs linéairement indépendants de  $\bar{K}_2$  :  $(\bar{Y}^1, \dots, \bar{Y}^{m+1})$  tels que :

$$\bar{Y} = \sum_{j=1}^{m+1} \mu_j \bar{Y}^j \quad ; \quad \mu_j > 0, 1 \leq j \leq m+1$$

$$\text{Donc } \bar{X} \otimes \bar{Y} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_i \mu_j \bar{X}^i \otimes \bar{Y}^j$$

Les vecteurs  $\{\bar{X}^i \otimes \bar{Y}^j ; 1 \leq i \leq n+1 ; 1 \leq j \leq m+1\}$  forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants engendrant l'espace  $\bar{E}_3 = \bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2$  et appartenant à  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$ .

Comme  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \sum_{j=1}^{m+1} \mu_j = 1$  et  $\lambda_i \mu_j > 0 \quad \forall i, \forall j,$

$$\bar{X} \otimes \bar{Y} \in \text{Int } \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$$

## II - PRODUIT TENSORIEL POLAIRE

### a) Produit tensoriel polaire de $\bar{K}_1$ et $\bar{K}_2$

Définition : Soient  $\bar{K}_1^0$  et  $\bar{K}_2^0$  les cônes polaires de  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$ .  
On appelle produit tensoriel polaire (P.T.P.) de  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$   
l'ensemble noté  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$  défini par :

$$\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2 = (\bar{K}_1^0 \otimes \bar{K}_2^0)^0$$

### b) Premières propriétés

Propriété 7 :  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$  est un cône convexe fermé.

$\implies$  Découle de la définition de l'ensemble polaire d'un cône.

Propriété 8 :  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 \subset \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$

Si  $\bar{X} \in \bar{K}_1$  et  $\bar{Y} \in \bar{K}_2$ ,  $\forall \bar{X}^0 \in \bar{K}_1^0$  et  $\forall \bar{Y}^0 \in \bar{K}_2^0$

$$\langle \bar{X}^0 \otimes \bar{Y}^0, \bar{X} \otimes \bar{Y} \rangle = \langle \bar{X}^0, \bar{X} \rangle \langle \bar{Y}^0, \bar{Y} \rangle \geq 0$$

Donc  $\bar{X} \otimes \bar{Y} \in \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Comme  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  est l'enveloppe convexe des vecteurs

$\{\bar{X} \otimes \bar{Y}, \bar{X} \in \bar{K}_1, \bar{Y} \in \bar{K}_2\}$ , on a donc  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 \subset \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$

Corollaire 9 :  $\dim \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2 = (n+1)(m+1)$

Propriété 10 : Soit  $A \in \text{Aut}(\bar{E}_1)$  et  $B \in \text{Aut}(\bar{E}_2)$

$$A \otimes B(\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2) = A(\bar{K}_1) \boxtimes B(\bar{K}_2)$$

Démonstration : Soit  $\bar{\bar{K}}_1 = A(\bar{K}_1)$  et  $\bar{\bar{K}}_2 = B(\bar{K}_2)$ .

$$(\bar{\bar{K}}_1)^0 = (A^{-1})^T(\bar{K}_1^0) \quad \text{et} \quad ((\bar{\bar{K}}_2)^0 = (B^{-1})^T(\bar{K}_2^0)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{K}}_1 \boxtimes \bar{\bar{K}}_2 &= [(\bar{\bar{K}}_1^0 \otimes \bar{\bar{K}}_2^0)]^0 = [(A^{-1})^T(\bar{K}_1^0) \otimes (B^{-1})^T(\bar{K}_2^0)]^0 \\ &= [(A^{-1} \otimes B^{-1})^T(\bar{K}_1^0 \otimes \bar{K}_2^0)]^0 \quad \text{par la propriété II} \\ &= A \otimes B(\bar{K}_1^0 \otimes \bar{K}_2^0)^0 \\ &= A \otimes B(\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2) \end{aligned}$$

La remarque fait après la propriété 2 s'applique ici également.

c) Produit tensoriel polaire de  $K_1$  et  $K_2$

Définition : Soient  $K_1$  et  $K_2$  ensembles convexes fermés.

On appelle produit tensoriel polaire (P.T.P.) de  $K_1$  et  $K_2$

l'ensemble convexe noté  $K_1 \boxtimes K_2$  défini par :

$$K_1 \boxtimes K_2 = (K_1^0 \otimes K_2^0)^0$$

Propriété II :  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$  admet  $K_1 \boxtimes K_2$  comme support.

Démonstration :  $(K_1^0 \otimes K_2^0)$  est le support du cône  $\bar{K}_1^0 \otimes \bar{K}_2^0$  par le théorème 3. Comme le vecteur  $1_X = [X^0 = 0, 1] \in \bar{K}_1^0$  et le vecteur  $1_Y = [Y^0 = (0, 1)] \in \bar{K}_2^0$  (théorème 5, chapitre 1),

$\bar{Z}^0 = (z^0 = 0 ; x^0 = 0 ; y^0 = 0 ; 1)$  appartient à  $\bar{K}_1^0 \otimes \bar{K}_2^0$ .  
Par le théorème 5 du chapitre I,  $K_1 \boxtimes K_2$  est donc support  
du cône  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Théorème 12 :  $K_1 \boxtimes K_2$  est compact si et seulement si  $K_1$  et  $K_2$   
sont compacts.

Démonstration : Comme  $K_1 \otimes K_2 \subset K_1 \boxtimes K_2$  (Propriété 8)  
si  $K_1$  ou  $K_2$  n'est pas borné  $K_1 \otimes K_2$  et donc  $K_1 \boxtimes K_2$  n'est pas  
borné (théorème 3).

Inversement si  $K_1$  et  $K_2$  sont compacts,  $1_X \in \text{Int } K_1^0$  et  $1_Y \in \text{Int } K_2^0$   
(théorème 5 du chapitre I). Donc  $1_{X \otimes Y} \in \text{Int } K_1^0 \otimes K_2^0$  (théorème 6)  
Donc  $K_1 \boxtimes K_2$  est compact (théorème 5 du chapitre I).

Corollaire 13 :  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$  est un cône isomorphe à un cône à sup-  
port compact.

Application du théorème précédent et de la propriété 10.

### III - Exemple

a) Soient  $K_1$  et  $K_2$  les 2 ensembles convexes

$$K_1 \quad \left| \begin{array}{l} x_1 + 1 \geq 0 \\ -x_1 + 1 \geq 0 \\ x_2 + 1 \geq 0 \\ -x_2 + 1 \geq 0 \end{array} \right. \quad K_2 \quad \left| \begin{array}{l} y_1 + 1 \geq 0 \\ -y_1 + 1 \geq 0 \\ y_2 + 1 \geq 0 \\ -y_2 + 1 \geq 0 \end{array} \right.$$









On remarque donc que  $K_1 \otimes K_2$  se définit à partir des points extrêmes de  $K_1$  et de  $K_2$  alors que  $K_1 \boxtimes K_2$  se définit à partir des contraintes définissant  $K_1$  et  $K_2$ .

b) Conséquences algorithmiques

Soient  $K_1$  (resp.  $K_2$ ) 2 polyèdres définis par L (resp. R) inéquations linéaires.

Soit (P) le problème de programmation bilinéaire.

$$(P) \quad \begin{cases} z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_i y_j + \sum_{i=1}^n e_i x_i + \sum_{j=1}^m f_j y_j \\ X = (x_i) \in K_1 \quad ; \quad Y = (y_j) \in K_2 \end{cases}$$

Dans notre formulation (P) est équivalent au programme linéaire :

$$\begin{cases} Z = (Z, X, Y, 1) \in K_1 \otimes K_2 \\ \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} z_{ij} + \sum_{i=1}^n e_i x_i + \sum_{j=1}^m f_j y_j \end{cases}$$

Cependant cette approche n'est pas intéressante d'un point de vue algorithmique, puisque résoudre ce programme linéaire revient à énumérer toutes les solutions de base de  $K_1$  et toutes les solutions de base de  $K_2$ , puis de choisir le couple de solutions de bases réalisables  $(X^{opt}, Y^{opt})$  qui minimise la fonction objectif.

On peut cependant résoudre le programme linéaire relaxé :

$$\text{Pa} \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = (Z, X, Y, 1) \in K_1 \otimes K_2 \\ \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} z_{ij} + \sum_{i=1}^n e_i x_i + \sum_{j=1}^m f_j y_j \end{array} \right.$$

Ce programme ayant L.R+L+R contraintes peut être résolu par des méthodes appropriées. Cependant, nous montrons qu'en général  $K_1 \otimes K_2 \subset K_1 \otimes K_2$ . La valeur du programme Pa sera donc une borne inférieure pour P qu'on pourra utiliser dans une procédure d'évaluation et de séparation progressive pour résoudre P (voir [2], [3]).



CHAPITRE III

ETUDE DES FACES DE  $\overline{K}_1 \otimes \overline{K}_2$

ET DE  $K_1 \otimes K_2$

I - FACES DE  $\overline{K}_1 \otimes \overline{K}_2$  et  $K_1 \otimes K_2$

a) Définition

Soit  $K$  un cône convexe plongé dans  $E$ . Une face  $M$  de  $K$  sera dite exposée, si il existe une forme linéaire  $X \rightarrow f(X)$  telle que :

$\alpha) \forall X \in K, f(X) \geq 0$

$\beta) M = (K \cap (X : f(X) = 0))$

b) Théorème 1

1) Si  $\overline{M}_1$  (resp  $\overline{M}_2$ ) est une face exposée de  $\overline{K}_1$  (resp.  $\overline{K}_2$ )  
 $\overline{M}_1 \otimes \overline{M}_2$  est une face exposée de  $\overline{K}_1 \otimes \overline{K}_2$ .

2) Si  $M_1$  (resp  $M_2$ ) est une face exposée de  $K_1$  (resp.  $K_2$ )  
 $M_1 \otimes M_2$  est une face exposée de  $K_1 \otimes K_2$ .

Démonstration :

Par les théorèmes (I, 6) et (II, 10) , on peut supposer que  $\bar{K}_1$  (resp.  $\bar{K}_2$ ) a un support compact  $K_1$  (resp.  $K_2$ ).

Rappelons que la forme linéaire  $1_X$  est définie par :

$$1_X(\bar{X}) = s \quad \forall \bar{X} = (X, s) \in \bar{E}_1.$$

De même Si  $Y = (Y, t) \in \bar{E}_2$  on a  $1_Y(\bar{Y}) = t$ .

Par les théorèmes [I,1 et I,2]  $(\alpha)$   $\left\{ \begin{array}{l} 1_X(\bar{X}) > 0 \quad \forall \bar{X} \in \bar{K}_1 ; \bar{X} \neq 0 \\ \text{et } 1_Y(\bar{Y}) > 0 \quad \forall \bar{Y} \in \bar{K}_2 ; \bar{Y} \neq 0 \end{array} \right.$

Soient  $f_1$  (resp.  $f_2$ ) la forme linéaire définissant  $\bar{M}_1$  (resp.  $\bar{M}_2$ ).

Par définition et  $(\beta)$   $\left\{ \begin{array}{l} \forall \bar{X} \in \bar{K}_1 \quad f_1(\bar{X}) \geq 0 \\ \forall \bar{X} \in \bar{M}_1 \iff f_1(\bar{X}) = 0 \\ \forall \bar{Y} \in \bar{K}_2 \quad f_2(\bar{Y}) = 0 \\ \forall \bar{Y} \in \bar{M}_2 \iff f_2(\bar{Y}) = 0 \end{array} \right. \quad (\beta)$

Posons  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = f_1(\bar{X}) 1_Y(\bar{Y}) + f_2(\bar{Y}) 1_X(\bar{X})$ .

$\bar{F}$  est une forme bilinéaire sur  $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$  et définit également une forme linéaire sur  $\bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2$ .

Si  $\bar{Z} = \bar{X} \otimes \bar{Y}$ ,  $\bar{F}(\bar{Z}) = f_1(\bar{X}) 1_Y(\bar{Y}) + f_2(\bar{Y}) 1_X(\bar{X})$ .

$\forall \bar{X} \in \bar{K}_1$  et  $\forall \bar{Y} \in \bar{K}_2$  on aura donc par  $(\alpha)$  et  $(\beta)$   $\bar{F}(\bar{X} \otimes \bar{Y}) \geq 0$ .

Donc  $\bar{F}(\bar{Z}) \geq 0 \quad \forall \bar{Z} \in \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$ .

Supposons que  $\bar{F}(Z) = 0$ . Alors :

$$\begin{aligned} & \forall 1 \leq i \leq r \quad \bar{F}(\bar{X}^i \otimes \bar{Y}^i) = 0 \\ \Rightarrow & \quad f_1(\bar{X}^i) \cdot 1_Y(\bar{Y}^i) = 0 \\ & \quad f_2(\bar{Y}^i) \cdot 1_X(\bar{X}^i) = 0 \\ \Rightarrow & \text{Par } \alpha) \text{ et } \beta) \quad f_1(\bar{X}^i) = 0 \text{ et } f_2(\bar{Y}^i) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq r \\ & \quad \bar{X}^i \in \bar{M}_1, \bar{Y}^i \in \bar{M}_2 \quad 1 \leq i \leq r \\ \Rightarrow & \quad \bar{Z} \in \bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2. \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\begin{cases} \forall \bar{Z} \in \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 & \bar{F}(\bar{Z}) \geq 0 \\ \bar{Z} \in \bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2 & \Leftrightarrow \bar{F}(\bar{Z}) = 0 \end{cases}$$

$\bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2$  est une face exposée de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  définie par  $\bar{F}$ .

b) immédiat  $M_1 \otimes M_2$  étant support de  $\bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2$

### Théorème 2

Si  $\bar{M}_1$  est une face de  $\bar{K}_1$  et  $\bar{M}_2$  est une face de  $\bar{K}_2$ ,  $\bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2$  est une face de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  et  $\dim(\bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2) = \dim \bar{M}_1 \cdot \dim \bar{M}_2$ .

Si  $M_1$  est une face de  $K_1$  et  $M_2$  est une face de  $K_2$ ,  $M_1 \otimes M_2$  est une face de  $K_1 \otimes K_2$  et  $\dim M_1 \otimes M_2 = \dim M_1 \cdot \dim M_2 + \dim M_1 + \dim M_2$ .

Démonstration : Si  $\bar{Z} \in \bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2$ ,  $\bar{Z}$  peut s'écrire :

$$\boxed{\bar{Z} = \sum_{i=1}^{r_1} \bar{X}^i \otimes \bar{Y}^i \quad \bar{X}^i \in \bar{M}_1 ; \bar{Y}^i \in \bar{M}_2 \quad 1 \leq i \leq r_1 \quad (\gamma)}$$

Considérons une autre décomposition pour  $\bar{Z}$  :

$$\bar{Z} = \sum_{i=r_1+1}^r \bar{X}^i \otimes \bar{Y}^i \quad \bar{X}^i \in \bar{K}_1 ; \bar{Y}^i \in \bar{K}_2 \quad r_1+1 \leq i \leq r.$$


---

$\{\bar{X}^1, \dots, \bar{X}^r\}$  engendrent un cône polyédral  $\bar{K}'_1$  et  $\{\bar{Y}^1, \dots, \bar{Y}^r\}$  engendrent un cône polyédral noté  $\bar{K}'_2$ . Tous les vecteurs  $\{\bar{X}^i\}$  ( $1 \leq i \leq r$ ) appartenant à  $\bar{M}_1$  engendrent une face de  $\bar{K}'_1$  notée  $\bar{M}'_1$  et tous les vecteurs  $\{\bar{Y}^i\}$   $1 \leq i \leq r$  engendrent une face de  $\bar{K}'_2$  notée  $\bar{M}'_2$ .

Les cônes  $\bar{K}'_1$  et  $\bar{K}'_2$  étant polyédraux,  $\bar{M}'_1 \otimes \bar{M}'_2$  est une face de  $\bar{K}'_1 \otimes \bar{K}'_2$ .

Par la décomposition  $(\gamma) \bar{Z} \in \bar{M}'_1 \otimes \bar{M}'_2$ .

Ceci montre que  $\bar{X}^i \in \bar{M}'_1 \subset \bar{M}_1$  et  $\bar{Y}^i \in \bar{M}'_2 \subset \bar{M}_2 \quad \forall \quad 1 \leq i \leq r$ .

Donc  $\bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2$  est une face de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$ .

$\dim \bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2 = \dim \bar{M}_1 \cdot \dim \bar{M}_2$  par [II, 1]

b) Se déduit immédiatement de a).

3) Soit  $\bar{K}$  un cône convexe (resp. soit  $K$  un ensemble convexe).

On notera  $\varepsilon(\bar{K})$  (resp.  $\varepsilon(K)$ ) l'ensemble des directions extrémales de  $\bar{K}$  (resp. des points extrêmes de  $K$ ).

Corollaire 3

a)  $\varepsilon(\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2) = \varepsilon(\bar{K}_1) \otimes \varepsilon(\bar{K}_2)$

b)  $\varepsilon(K_1 \otimes K_2) = \varepsilon(K_1) \otimes \varepsilon(K_2)$

c)  $K_1 \otimes K_2$  est un polyèdre si et seulement si  $K_1$  et  $K_2$  sont des polyèdres.

a) Si  $\bar{X} \in \varepsilon(\bar{K}_1)$  et  $Y \in \varepsilon(\bar{K}_2)$ , par le théorème précédent  $\bar{X} \otimes \bar{Y}$  est une face de dimension 1 de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$ .

Donc  $\bar{X} \otimes \bar{Y} \in \varepsilon(\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2)$  et  $\varepsilon(\bar{K}_1) \otimes \varepsilon(\bar{K}_2) \subset \varepsilon(\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2)$ .

Inversement, soit  $\bar{X} \in K_1$ ;  $\bar{X} \notin \varepsilon(\bar{K}_1)$ . On peut écrire :

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^r \bar{X}^i \quad \bar{X}^i \in \varepsilon(\bar{K}_1) \quad \forall \quad 1 \leq i \leq r.$$

$$\text{Donc } \bar{X} \otimes \bar{Y} = \sum_{i=1}^r \bar{X}^i \otimes \bar{Y} \quad \forall Y \in \bar{K}_2$$

Par cette dernière propriété, tout  $\bar{Z} \in \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  peut s'écrire

$$\bar{Z} = \sum_{i=1}^r \bar{X}^i \otimes \bar{Y}^i \quad \bar{X}^i \in \varepsilon(\bar{K}_1) \text{ et } \bar{Y}^i \in \varepsilon(\bar{K}_2) \quad 1 \leq i \leq r.$$

Ceci montre que  $\varepsilon(\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2) \subset \varepsilon(\bar{K}_1) \otimes \varepsilon(\bar{K}_2)$ .

$$\Rightarrow \varepsilon(\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2) = \varepsilon(\bar{K}_1) \otimes \varepsilon(\bar{K}_2).$$

b) et c) se déduisent immédiatement de a).

### c) Notations

Soient  $\bar{M}_1$  et  $\bar{N}_1$  2 faces de  $\bar{K}_1$ .

Soit  $\bar{O}_1$  la face intersection de  $\bar{M}_1$  et  $\bar{N}_1$  :  $\bar{O}_1 = \bar{M}_1 \cap \bar{N}_1$

Soit  $\bar{P}_1$  la plus petite face contenant  $\bar{M}_1$  et  $\bar{N}_1$ .

De même, soient  $\bar{M}_2$  et  $\bar{N}_2$  2 faces de  $\bar{K}_2$ .

Soit :  $\bar{O}_2 = \bar{M}_2 \cap \bar{N}_2$

Soit  $\bar{P}_2$  la plus petite face contenant  $\bar{M}_2$  et  $\bar{N}_2$ .

### Théorème 4

La plus petite face contenant  $\bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2$  et  $\bar{N}_1 \otimes \bar{N}_2$  est le cône convexe  $\bar{H} = \bar{O}_1 \otimes \bar{P}_2 + \bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2 + \bar{N}_1 \otimes \bar{N}_2 + \bar{P}_1 \otimes \bar{O}_2$ .



Démonstration :

Supposons d'abord que les cônes  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$  soient polyédral et que les supports  $K_1$  de  $\bar{K}_1$  et  $K_2$  de  $\bar{K}_2$  soient compacts.

1) Par définition, la plus petite face contenant  $\bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2$  et  $\bar{N}_1 \otimes \bar{N}_2$  doit contenir  $\bar{O}_1 \otimes \bar{M}_2 + \bar{O}_1 \otimes \bar{N}_2$  et par conséquent  $\bar{O}_1 \otimes \text{conv} [\bar{M}_2, \bar{N}_2]$ . Comme  $\bar{P}_2$  est la plus petite face contenant  $\bar{M}_2$  et  $\bar{N}_2$ , H contient  $\bar{O}_1 \otimes \bar{P}_2$  et pour les mêmes raisons  $\bar{P}_1 \otimes \bar{O}_2$ .

2) Soient  $m_1(\bar{X})$ ,  $n_1(\bar{X})$ ,  $p_1(\bar{X})$  des formes linéaires définissant respectivement les faces exposées  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{P}_1$ . (Remarquons que si  $\bar{P}_1 = \bar{K}_1$ ,  $p_1(\bar{X}) = 0 \quad \forall \bar{X} \in \bar{K}_1$ ). De la même manière, définissons les formes linéaires  $m_2(\bar{X})$ ,  $n_2(\bar{X})$  et  $p_2(\bar{X})$  associées au cône  $\bar{K}_2$ .

Rappelons enfin que pour  $\bar{X} = (X, s) \in \bar{E}_1$ ,  $1_X(\bar{X}) = s$   
et pour  $\bar{Y} = (Y, t) \in \bar{E}_2$ ,  $1_Y(\bar{Y}) = t$ .

Définissons les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{F}_1(\bar{X}, \bar{Y}) &= 1_X(\bar{X}) \cdot p_2(\bar{Y}) \\ \bar{F}_2(\bar{X}, \bar{Y}) &= p_1(\bar{X}) \cdot 1_Y(\bar{Y}) \\ \bar{F}_3(\bar{X}, \bar{Y}) &= m_1(\bar{X}) \cdot n_2(\bar{Y}) \\ \bar{F}_4(\bar{X}, \bar{Y}) &= n_1(\bar{X}) \cdot m_2(\bar{Y}) \\ \text{et } \bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) &= \sum_{i=1}^4 \bar{F}_i(\bar{X}, \bar{Y}) \end{aligned}$$

Notons que  $\forall \bar{X} \in \bar{K}_1$  et  $\bar{Y} \in \bar{K}_2$ ,  $\bar{F}_i(\bar{X}, \bar{Y}) \geq 0$   
Donc  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) \geq 0 \quad \forall \bar{X} \in \bar{K}_1 ; \forall \bar{Y} \in \bar{K}_2$ .

$\bar{F}$  définit donc sur  $\bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2$  une forme linéaire notée encore  $\bar{F}$   
 et  $\forall \bar{Z} \in \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 \quad \bar{F}(\bar{Z}) \geq 0$ .

Soit  $\bar{H}_1$  la face :  $\bar{H}_1 = (\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2) \cap \{\bar{Z} : \bar{F}(\bar{Z}) = 0\}$ .

$\bar{H}_1$  sera caractérisé par les points extrêmes de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  qui  
 appartiennent à  $\bar{H}_1$ .

Soit  $\bar{X} \otimes \bar{Y} \in \bar{H}_1$ .

Comme  $\bar{F}_1(\bar{X} \otimes \bar{Y}) = 0, \quad 1_X(\bar{X}) p_2(\bar{Y}) = 0$ .

On sait que pour  $X \neq 0 \quad 1_X(\bar{X}) > 0$  puisque  $\bar{K}_1$  est à support  
 compact. Donc  $\bar{Y} \in \bar{P}_2$ .

De la même manière  $\bar{F}_2(\bar{X} \otimes \bar{Y}) = 0$ . Donc  $\bar{X} \in \bar{P}_1$ .

1er cas :

$$\bar{X} \in O_1, \quad \bar{X} \otimes \bar{Y} \in \bar{O}_1 \otimes \bar{P}_2 \subset \bar{H}.$$

2ème cas :

$$\bar{X} \in \bar{M}_1, \quad \bar{X} \notin \bar{N}_1.$$

Comme  $\bar{F}_4(\bar{X} \otimes \bar{Y}) = 0 \quad n_1(\bar{X}) m_2(\bar{Y}) = 0$ .

$n_1(\bar{X}) > 0$  puisque  $X \notin N_1$ . Donc  $m_2(\bar{Y}) = 0$  et  $\bar{Y} \in \bar{M}_2$ .

$$\Rightarrow \bar{X} \otimes \bar{Y} \in \bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2 \in \Pi.$$

3ème cas

$$\bar{X} \in \bar{N}_1, \quad \bar{X} \notin \bar{M}_1.$$

Par le même raisonnement  $\bar{X} \otimes \bar{Y} \in \bar{N}_1 \otimes \bar{N}_2 \in \bar{H}$ .

4ème cas

$$\bar{X} \notin \bar{M}_1, \bar{X} \notin \bar{N}_1, \bar{X} \in \bar{P}_1.$$

Comme  $n_1(\bar{X}) \cdot m_2(\bar{Y}) = 0$  et  $n_1(\bar{X}) > 0 \implies m_2(\bar{Y}) = 0$  et  $\bar{Y} \in \bar{M}_2$ .

De même comme  $n_1(\bar{X}) \cdot m_2(\bar{Y}) = 0$  et  $m_1(\bar{X}) > 0 \implies n_2(\bar{Y}) = 0$  et  $\bar{Y} \in \bar{N}_2$ .

Donc  $\bar{Y} \in \bar{O}_2$  et  $\bar{X} \otimes \bar{Y} \in \bar{P}_1 \otimes \bar{O}_2$ .

Dans tous les cas on arrive à la conclusion  $\bar{X} \otimes \bar{Y} \in H$ .

Ceci montre que  $\bar{H}_1 \subset \bar{H}$  et par définition de  $\bar{H}_1$  :  $\bar{H}_1 = \bar{H}$ .

Plaçons-nous dans le cas général. Par l'argument utilisé au théorème 2, on peut toujours se ramener au cas où  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$  sont des cônes polyédraux .

d) Notations

Soient  $L(\bar{O}_i), L(\bar{M}_i), L(\bar{N}_i), L(\bar{P}_i)$   $i = 1, 2$  les sous-espaces vectoriels de  $\bar{E}_1$  et  $\bar{E}_2$  engendrés par les faces  $\bar{O}_i, \bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{P}_i$ .

Notons que  $L(\bar{O}_i) \subset L(\bar{M}_i) \cap L(\bar{N}_i)$

$$L(\bar{M}_i) \subset L(\bar{P}_i)$$

$$L(\bar{N}_i) \subset L(\bar{P}_i) \quad i = 1, 2.$$

On peut donc trouver des sous-espaces vectoriels de  $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ .

$L_1^j$   $0 \leq j \leq 4$  de  $\bar{E}_1$  et  $L_2^j$   $0 \leq j \leq 4$  de  $\bar{E}_2$  tels que :

$$L(\bar{O}_i) = I_i^0$$

$$L(\bar{M}_i) \cap L(\bar{N}_i) = \bar{L}_i^0 \oplus \bar{L}_i^1$$

$$L(\bar{M}_i) = \bar{L}_i^0 \oplus \bar{L}_i^1 \oplus \bar{L}_i^2$$

$$L(\bar{N}_i) = \bar{L}_i^0 \oplus \bar{L}_i^1 \oplus \bar{L}_i^3$$

$$L(\bar{P}_i) = \bar{L}_i^0 \oplus \bar{L}_i^1 \oplus \bar{L}_i^2 \oplus \bar{L}_i^3 \oplus \bar{L}_i^4$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 5

La dimension de la face  $\bar{H}$  définie au théorème 4 est :

$$\begin{aligned} \dim \bar{H} &= \dim \bar{O}_1 \cdot \dim \bar{P}_2 + \dim \bar{P}_1 \cdot \dim \bar{O}_2 \\ &+ (\dim \bar{M}_1 - \dim \bar{O}_1) \cdot (\dim \bar{M}_2 - \dim \bar{O}_2) \\ &+ (\dim \bar{N}_1 - \dim \bar{O}_1) \cdot (\dim \bar{N}_2 - \dim \bar{O}_2) \\ &- \dim \bar{O}_1 \cdot \dim \bar{O}_2 - \dim \bar{L}_1^1 \cdot \dim \bar{L}_1^2 \end{aligned}$$

Démonstration

$$L(\bar{O}_1 \otimes \bar{P}_2) = \bar{L}_1^0 \otimes [\bar{L}_2^0 \otimes \bar{L}_2^1 \otimes \bar{L}_2^2 \otimes \bar{L}_2^3 \otimes \bar{L}_2^4] \quad (\alpha)$$

$$L(\bar{P}_1 \otimes \bar{O}_2) = [\bar{L}_1^0 \otimes \bar{L}_2^1 \otimes \bar{L}_1^2 \otimes \bar{L}_1^3 \otimes \bar{L}_1^4] \otimes \bar{L}_2^0 \quad (\beta)$$

$$L(\bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2) = [\bar{L}_1^0 \otimes \bar{L}_1^1 \otimes \bar{L}_1^2] [\bar{L}_2^0 \otimes \bar{L}_2^1 \otimes \bar{L}_2^2] \quad (\gamma)$$

$$L(\bar{N}_1 \otimes \bar{N}_2) = [\bar{L}_1^0 \otimes \bar{L}_1^1 \otimes \bar{L}_1^3] [\bar{L}_2^0 \otimes \bar{L}_2^1 \otimes \bar{L}_2^3] \quad (\delta)$$

La dimension de  $\bar{H}$  est la dimension de l'espace vectoriel engendré à partir des sous-espaces écrits dans les relations (α) (β) (γ) (δ) . On vérifie aisément que cette dimension est celle donnée par l'énoncé du théorème.

e) Corollaire b. Si  $L(\bar{M}_1) \cap L(\bar{N}_1) = 0$  et  $L(\bar{M}_2 \cap \bar{N}_2) = 0$

---


$$\bar{H} = \bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2 + \bar{N}_1 \otimes \bar{N}_2$$


---

$$\dim \bar{H} = \dim \bar{M}_1 \cdot \dim \bar{M}_2 + \dim \bar{N}_1 \cdot \dim \bar{N}_2.$$


---

Application immédiate des théorèmes 4 et 5.

Corollaire 7

$$\begin{aligned} \text{Si } \bar{M}_1 = \bar{N}_1, \bar{H} &= \bar{M}_1 \otimes \bar{P}_2 \\ \dim \bar{H} &= \dim \bar{M}_1 \cdot \dim \bar{P}_2. \end{aligned}$$

Dans ce cas  $\bar{O}_1 = \bar{M}_1 = \bar{N}_1 = \bar{P}_1$ . Il suffit d'appliquer les théorèmes 4 et 5.

Corollaire 8

Soient  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$  2 directions extrémales de  $\bar{K}_1$  et  $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2$  2 directions extrémales de  $\bar{K}_2$ ,  $\bar{X}_1 \otimes \bar{Y}_1$  et  $\bar{X}_2 \otimes \bar{Y}_2$  sont 2 directions extrémales adjacentes de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  sauf si :

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 = \bar{X}_2, \bar{Y}_1 \text{ et } \bar{Y}_2 &\text{ ne sont pas adjacentes sur } \bar{K}_2. \\ \bar{Y}_1 = \bar{Y}_2, \bar{X}_1 \text{ et } \bar{X}_2 &\text{ ne sont pas adjacentes sur } \bar{K}_1. \end{aligned}$$

Application des corollaires 6 et 7 :

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2 \text{ et } \bar{Y}_1 \neq \bar{Y}_2 &\text{ on applique le corollaire 6.} \\ \bar{X}_1 = \bar{X}_2 \text{ ou } \bar{Y}_1 = \bar{Y}_2 &\text{ on applique le corollaire 7.} \end{aligned}$$

f) Autres applications

Corollaire 9

Si  $\bar{N}_1$  est une facette de  $\bar{K}_1$  définie par une forme linéaire  $\bar{f}_1$  et  $\bar{M}_2$  est une facette de  $\bar{K}_2$  définie par une forme linéaire  $\bar{f}_2$ ,  $\bar{H} = \bar{K}_1 \otimes \bar{M}_2 + \bar{N}_1 \otimes \bar{K}_2$  est une facette de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  définie par la forme linéaire  $\bar{F} = \bar{f}_1 \otimes \bar{f}_2$ .

Démonstration

1) Appliquons le théorème 4 avec  $\bar{M}_1 = \bar{K}_1$  et  $\bar{N}_2 = \bar{K}_2$ .  
 On a alors  $\bar{O}_1 = \bar{N}_1$  et  $\bar{P}_1 = \bar{K}_1$ . De même  $\bar{O}_2 = \bar{M}_2$  et  $\bar{P}_2 = \bar{K}_2$ .  
 Le résultat se déduit alors des théorèmes 4 et 5.

2) Par définition  $\bar{N}_1 = \bar{K}_1 \cap [\bar{X} : \bar{f}_1(\bar{X}) = 0]$  et  
 $\bar{M}_2 = \bar{K}_2 \cap [\bar{Y} : \bar{f}_2(\bar{Y}) = 0]$ .

Posons  $\bar{F} = \bar{f}_1 \otimes \bar{f}_2$ .

$$\forall \bar{X} \otimes \bar{Y} \in \bar{K}_1 \otimes \bar{N}_2 \quad \bar{F}(\bar{X} \otimes \bar{Y}) = \bar{f}_1(\bar{X}) \cdot \bar{f}_2(\bar{Y}) = 0.$$

$$\text{De même } \forall \bar{X} \otimes \bar{Y} \in \bar{N}_1 \otimes \bar{K}_2 \quad \bar{F}(\bar{X} \otimes \bar{Y}) = 0.$$

Donc  $\bar{H} \subset [\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2] \cap [\bar{Z} : \bar{F}(\bar{Z}) = 0]$ .

Comme  $\bar{H}$  est une facette de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  par (1)  $\bar{F} = \bar{f}_1 \otimes \bar{f}_2$   
 définit  $\bar{H}$ .

Corollaire 10

Soient  $\bar{M}_1$  et  $\bar{N}_1$  (resp.  $\bar{M}_2$  et  $\bar{N}_2$ ) 2 facettes distinctes de  $\bar{K}_1$   
 (resp.  $\bar{K}_2$ ) définies par des formes linéaires  $m_1$  et  $n_1$  (resp.  
 $m_2$  et  $n_2$ ).

a) la plus petite face  $\bar{H}$  contenant  $\bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2$  et  $\bar{N}_1 \otimes \bar{N}_2$   
 s'écrit :  $\bar{H} = \bar{O}_1 \otimes \bar{K}_2 + \bar{K}_1 \otimes \bar{O}_2 + \bar{M}_1 \otimes \bar{M}_2 + \bar{N}_1 \otimes \bar{N}_2$ .

b)  $\dim \bar{H} = \dim \bar{K}_1 \cdot \dim \bar{K}_2 - 2$ .

c)  $\bar{H}$  est définie par :  $\bar{H} = \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 \cap [\bar{Z} : m_1 \otimes n_2(\bar{Z}) = 0,$   
 $m_2 \otimes n_1(\bar{Z}) = 0]$ .  $\bar{H}$  est une face exposée de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$ .

Démonstration

a) Application immédiate du théorème 4 puisque  $\bar{P}_1 = \text{conv}(\bar{M}_1, \bar{N}_1) = \bar{K}_1$  et  $\bar{P}_2 = \text{conv}(\bar{M}_2, \bar{N}_2) = \bar{K}_2$ .

b) Appliquons le théorème 5.

Posons  $n' = \dim \bar{K}_1 = \dim \bar{E}_1$  et  $m' = \dim \bar{K}_2 = \dim \bar{E}_2$ .

Donc  $\dim \bar{P}_1 = n'$  et  $\dim \bar{P}_2 = m'$ .

Comme deux hyperplans de  $E_1$  (resp.  $E_2$ ) s'intersectent en un sous-espace vectoriel de dimensions  $n'-2$  (resp.  $m'-2$ ), on a :

$$\dim \bar{L}_1^1 + \dim \bar{O}_1 = n'-2.$$

$$\text{et } \dim \bar{L}_1^2 + \dim \bar{O}_2 = m'-2.$$

La formule du théorème 5 devient :

$$\begin{aligned} \dim \bar{H} = & \dim \bar{O}_1 \cdot m' + n' \cdot \dim \bar{O}_2 + 2(n'-1-\dim \bar{O}_1)(m'-1-\dim \bar{O}_1) \\ & - \dim \bar{O}_1 \cdot \dim \bar{O}_2 - (n'-2-\dim \bar{O}_1)(m'-2-\dim \bar{O}_2). \end{aligned}$$

On vérifie que  $\dim \bar{H} = n'm'-2$ .

c) Soit  $\bar{L}$  le sous-espace vectoriel de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  :

$$\bar{L} = [\bar{Z} : m_1 \otimes n_2(\bar{Z}) = 0 \text{ et } n_1 \otimes m_2(\bar{Z}) = 0].$$

Notons que  $\dim \bar{L} = n'm'-2$ .

D'autre part, on vérifie trivialement que  $m_1 \otimes n_2(\bar{Z}) = 0$

et  $n_1 \otimes m_2(\bar{Z}) = 0 \quad \forall \bar{Z} \in \bar{H}$ .

Donc  $\bar{H} \subset \bar{L}$ . Mais comme  $\dim \bar{H} = \dim \bar{L}$

$$\bar{H} = \bar{L} \cap \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2.$$

Notons alors que  $H = \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 \cap [\bar{Z} : (m_1 \otimes n_2 + n_1 \otimes m_2)(\bar{Z}) = 0]$ .

ce qui montre que  $\bar{H}$  est une face exposée de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$ .

## II - FACES DE $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$

### a) Définition

Le produit tensoriel polaire de 2 cônes  $\bar{K}_1 \subset \bar{E}_1$  et  $\bar{K}_2 \subset \bar{E}_2$  a été défini dans le cas où  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$  sont de pleine dimension. Supposons que  $L(\bar{K}_1) = \bar{L}_1 \subset \bar{E}_1$  et  $L(\bar{K}_2) = \bar{L}_2 \subset \bar{E}_2$ . On peut définir  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$ ,  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$  étant 2 cônes de pleine dimension plongés dans les espaces vectoriels  $\bar{L}_1$  et  $\bar{L}_2$ .  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  est donc un cône de  $\bar{L}_1 \otimes \bar{L}_2$ . Pour définir  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  par rapport à  $\bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2$  il suffit alors de considérer  $\bar{L}_1 \otimes \bar{L}_2$  comme sous-espace vectoriel de  $\bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2$ .

Remarquons que si  $f_1$  est une forme linéaire définie sur  $\bar{E}_1$  ( $f_1 \in E_1^0$ ) la fonction  $\tilde{f}_1$  définie par  $\tilde{f}_1(\bar{X}) = f_1(\bar{X}) \forall \bar{X} \in \bar{L}_1$  est une forme linéaire sur  $\bar{L}_1$  (on notera  $\tilde{f}_1 \in \bar{L}_1^0$ ) appelée restriction de  $f_1$  à  $\bar{L}_1$ .

Inversement, si  $\tilde{f}_1 \in \bar{L}_1^0$ ,  $\exists f_1 \in \bar{E}_1^0$  telle que :  
 $f_1(\bar{X}) = \tilde{f}_1(\bar{X}) \forall \bar{X} \in \bar{L}_1$ .  $f_1$  sera appelée extension de  $\tilde{f}_1$  à  $\bar{E}_1$ .  
 (Des définitions similaires seront faites pour  $\bar{L}_2$  et  $\bar{E}_2$ ).

D'autre part, soit  $\tilde{f}_1 \in \bar{L}_1^0$  telle que  $\tilde{f}_1(\bar{X}) \geq 0 \forall \bar{X} \in \bar{K}_1$ .  
 $\exists f_1 \in \bar{E}_1^0$  extension de  $\tilde{f}_1$  telle que  $f_1(\bar{X}) \geq 0 \forall \bar{X} \in \bar{K}_1$ .  
 (application du théorème de séparation des ensembles convexes).

On a donc le résultat suivant :

### Propriété 11

$$\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 = [\bar{Z} : f \otimes g(\bar{Z}) \geq 0 \quad \forall f \in \bar{K}_1^0, g \in \bar{K}_2^0]$$



b) Résultats préliminaires

Lemme 12

Soit  $\bar{Z} \notin \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Alors,  $\exists f_1 \in \bar{K}_1^0$  tel que  $f_1(\bar{X}) > 0 \quad \forall \bar{X} \in \bar{K}_1, \bar{X} \neq 0$

et  $\exists g_1 \in \bar{K}_2^0$  tel que  $g_1(\bar{Y}) > 0 \quad \forall \bar{Y} \in \bar{K}_2, \bar{Y} \neq 0$

tel que  $f_1 \boxtimes g_1(\bar{Z}) < 0$ .

Démonstration

Soit  $\bar{Z} \notin \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ . Par la propriété (11)  $\exists f \in \bar{K}_1^0$  et  $g \in \bar{K}_2^0$  tels que  $f \boxtimes g(\bar{Z}) < 0$ .

Soit  $f' \in \bar{K}_1^0$  tel que  $f'(\bar{X}) > 0 \quad \forall \bar{X} \in \bar{K}_1, \bar{X} \neq 0$

et  $g' \in \bar{K}_2^0$  tel que  $g'(\bar{Y}) > 0 \quad \forall \bar{Y} \in \bar{K}_2, \bar{Y} \neq 0$ .

Pour  $\epsilon$  suffisamment petit, on a :

$$[(f + \epsilon f') \boxtimes (g + \epsilon g')] (\bar{Z}) < 0.$$

$f_1 = f + \epsilon f'$  et  $g_1 = g + \epsilon g'$  satisfont les conditions de l'énoncé du lemme.

Lemme 13

Etant donné  $\bar{K}_1 \subset \bar{E}_1$  et  $\bar{L}_1$  un sous-espace vectoriel propre de  $\bar{E}_1$ , posons  $\bar{F}_1 = \bar{K}_1 \cap \bar{L}_1$ .

Soit  $\tilde{f}_1 \in \bar{L}_1^0$  tel que  $\tilde{f}_1(\bar{X}) > 0 \quad \forall \bar{X} \in \bar{F}_1, \bar{X} \neq 0$ .

Alors  $\exists$  une extension  $f_1$  de  $\tilde{f}_1$  à  $\bar{E}_1$  telle que  $f_1(\bar{X}) > 0$

$\forall \bar{X} \neq 0 \in \bar{K}_1$ . Ce lemme donné sans démonstration est une conséquence des théorèmes de séparation d'ensembles convexes [11].

Théorème 14

Soit  $\bar{F}_1$  (resp.  $\bar{F}_2$ ) un cône de  $\bar{E}_1$  (resp.  $\bar{E}_2$ ) tel que  $\bar{F}_1 = \bar{K}_1 \cap \bar{L}_1$  (resp.  $\bar{F}_2 = \bar{K}_2 \cap \bar{L}_2$ ) où  $\bar{L}_1$  (resp.  $\bar{L}_2$ ) est un sous-espace vectoriel de  $\bar{E}_1$  (resp.  $\bar{E}_2$ ).

Alors  $\bar{F}_1 \otimes \bar{F}_2 = (\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2) \cap (\bar{L}_1 \otimes \bar{L}_2)$ .

Démonstration

1) Soit  $\bar{Z} \in \bar{F}_1 \otimes \bar{F}_2$ . Par définition  $\bar{Z} \in \bar{L}_1 \otimes \bar{L}_2$ . D'autre part  $\forall f \in \bar{K}_1^0$  et  $g \in \bar{K}_2^0$ ,  $f \otimes g(\bar{Z}) \geq 0$  puisque  $\bar{F}_1 \subset \bar{K}_1$  et  $\bar{F}_2 \subset \bar{K}_2$ . Donc  $\bar{Z} \in \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$ .

2- Inversement soit  $\bar{Z}_1 \in (\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2) \cap (\bar{L}_1 \otimes \bar{L}_2)$ .

Supposons que  $\bar{Z}_1 \notin \bar{F}_1 \otimes \bar{F}_2$ .

Par le lemme (12)  $\exists \tilde{f} \in \bar{L}_1^0$  et  $\tilde{g} \in \bar{L}_2^0$  tels que :  $\tilde{f}(\bar{X}) > 0$   $\forall \bar{X} \neq 0 \in \bar{K}_1$  et  $\tilde{g}(\bar{Y}) > 0$   $\forall \bar{Y} \neq 0 \in \bar{K}_2$  et d'autre part  $\tilde{f} \otimes \tilde{g}(\bar{Z}_1) < 0$ .

Par le lemme (13) on peut étendre  $\tilde{f}$  à  $E_1$  et  $\tilde{g}$  à  $E_2$  par deux extensions  $f$  et  $g$  vérifiant  $f(\bar{X}) > 0$   $\forall \bar{X} \neq 0 \in \bar{K}_1$  et  $g(\bar{Y}) > 0$   $\forall \bar{Y} \neq 0 \in \bar{K}_2$ .

Mais  $\tilde{f} \otimes \tilde{g}$  est la restriction de  $f \otimes g$  à  $\bar{L}_1 \otimes \bar{L}_2$ . Donc  $f \otimes g(\bar{Z}_1) < 0$ . Ceci montre que  $\bar{Z}_1 \notin \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  et on aboutit à une contradiction.

Donc  $(\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2) \cap (\bar{L}_1 \otimes \bar{L}_2) = \bar{F}_1 \otimes \bar{F}_2$ .

c) Faces de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$

Théorème 15

Si  $\bar{F}_1$  est une face exposée de  $\bar{K}_1$  et  $\bar{F}_2$  est une face exposée de  $\bar{K}_2$ ,  $\bar{F}_1 \boxtimes \bar{F}_2$  est une face de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Démonstration

Si  $\bar{F}_1$  est une face exposée de  $\bar{K}_1$  et  $\bar{F}_2$  est une face exposée de  $\bar{K}_2$ ,  $\exists$  un hyperplan  $\bar{L}_1 \subset \bar{E}_1$  et un hyperplan  $\bar{L}_2 \subset \bar{E}_2$  tels que  $\bar{F}_1 = \bar{K}_1 \cap \bar{L}_1$  et  $\bar{F}_2 = \bar{K}_2 \cap \bar{L}_2$ .

Par le théorème 14,  $\bar{F}_1 \boxtimes \bar{F}_2 = (\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2) \cap (\bar{L}_1 \boxtimes \bar{L}_2)$ .

Soit  $\bar{L}_1 = [\bar{X} : \langle \bar{X}_1^0, \bar{X} \rangle = 0 \text{ pour } \bar{X}_1^0 \in \bar{K}_1^0]$

et  $\bar{L}_2 = [\bar{Y} : \langle \bar{Y}_1^0, \bar{Y} \rangle = 0 \text{ pour } \bar{Y}_1^0 \in \bar{F}_2^0]$

comme  $\bar{K}_1^0$  (resp.  $\bar{K}_2^0$ ) engendrent  $\bar{E}_1^0$  (resp.  $\bar{E}_2^0$ ),  $\bar{L}_1 \boxtimes \bar{L}_2$  est défini par :

$$\begin{aligned} \bar{L}_1 \boxtimes \bar{L}_2 = [\bar{Z} : \langle \bar{X}_1^0 \boxtimes \bar{Y}_1^0, \bar{Z} \rangle = 0 \quad \forall \bar{Y}_1^0 \in \bar{K}_2^0, \\ \langle \bar{X}_1^0 \boxtimes \bar{Y}_1^0, \bar{Z} \rangle = 0 \quad \forall \bar{X}_1^0 \in \bar{K}_1^0]. \end{aligned}$$

$\bar{L}_1 \boxtimes \bar{L}_2$  est donc intersection d'hyperplans d'appuis de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

$\Rightarrow \bar{F}_1 \boxtimes \bar{F}_2$  est une face de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Les cas  $\bar{F}_1 = \bar{K}_1$  ou  $\bar{F}_2 = \bar{K}_2$  se traitent d'une façon similaire.

Théorème 16

Si  $\bar{F}_1$  (resp.  $\bar{F}_2$ ) est une face de  $\bar{K}_1$  (resp.  $\bar{K}_2$ )  $\bar{F}_1 \boxtimes \bar{F}_2$  est une face de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Démonstration

On peut supposer qu'une des 2 faces  $\bar{F}_1$  par exemple est non exposée sinon le résultat est vrai par le théorème 13. On peut alors trouver une face exposée  $\bar{G}_1$  de  $\bar{K}_1$  contenant proprement  $\bar{F}_1$  telle que  $\bar{F}_1$  soit une face de  $\bar{G}_1$  [ 22 ] .

Par récurrence sur  $n' = \dim E_1$  on peut établir que  $\bar{F}_1 \boxtimes \bar{F}_2$  est une face de  $\bar{G}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ . Par le théorème 15,  $\bar{G}_1 \boxtimes \bar{K}_2$  est une face de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ . Donc  $\bar{F}_1 \boxtimes \bar{F}_2$  est une face de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Corollaire 17

Si  $\bar{X} \in \varepsilon(\bar{K}_1)$  et  $\bar{Y} \in \varepsilon(\bar{K}_2)$   $\bar{X} \boxtimes \bar{Y} \in \varepsilon(\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2)$ .

Démonstration

Soit  $\bar{F}_1$  le cône engendré par la direction extrême  $\bar{X}$  et  $\bar{F}_2$  le cône engendré par la direction extrême  $\bar{Y}$ .

$\bar{F}_1 \boxtimes \bar{F}_2$  est une face de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$  de dimension  $\dim \bar{F}_1 \cdot \dim \bar{F}_2 = 1$  comme  $\bar{X} \boxtimes \bar{Y} \in \bar{F}_1 \boxtimes \bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_1 \boxtimes \bar{F}_2$  est le cône engendré par  $\bar{X} \boxtimes \bar{Y}$ .

Corollaire 18

Si  $\bar{X} \in \varepsilon(\bar{K}_1)$  et  $\bar{Y}_1$  et  $\bar{Y}_2$  sont 2 directions extrêmes adjacentes de  $\bar{K}_2$ ,  $\bar{X} \boxtimes \bar{Y}_1$  et  $\bar{X} \boxtimes \bar{Y}_2$  sont 2 directions extrêmes adjacentes de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Démonstration

Soit  $\bar{F}_1$  la face engendrée par  $\bar{X}$  et  $\bar{F}_2$  la face engendrée par  $\bar{Y}_1$  et  $\bar{Y}_2$ .  $\dim \bar{F}_1 = 1$  et  $\dim \bar{F}_2 = 2$ .

Donc  $\dim \bar{F}_1 \boxtimes \bar{F}_2 = 2$ . Par le corollaire précédent,  $\bar{X} \boxtimes \bar{Y}_1$  et  $\bar{X} \boxtimes \bar{Y}_2$  sont 2 directions extrêmes adjacentes de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

d) Autres résultats

Rappelons que  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2 = (\bar{K}_1^0 \boxtimes \bar{K}_2^0)^0$ .

Toute face  $\bar{H}^0$  de  $(\bar{K}_1^0 \boxtimes \bar{K}_2^0)^0$  a donc une face polaire  $\bar{H}$  de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

On peut ainsi à partir des résultats du paragraphe I) caractériser de nouvelles faces de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ . Cependant, ce procédé est intéressant dans le cas où  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$  sont 2 cônes polyédraux puisqu'on a alors la relation :

$$\dim \bar{H} + \dim \bar{H}^0 = n'.m' \quad (\text{voir chapitre I, théorème 4}).$$

Théorème 19

Supposons que  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$  soient 2 cônes polyédraux. Soient  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$  (resp.  $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2$ ) 2 directions extrémales distinctes de  $\bar{K}_1$  (resp.  $\bar{K}_2$ ).  $\bar{X}_1 \boxtimes \bar{Y}_1$  et  $\bar{X}_2 \boxtimes \bar{Y}_2$  sont 2 directions extrémales adjacentes de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Démonstration

Soient  $\bar{F}_1^0, \bar{F}_2^0$  (resp.  $\bar{G}_1^0, \bar{G}_2^0$ ) les faces polaires de  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$  (resp.  $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2$ ).  $\bar{F}_1^0, \bar{F}_2^0$  (resp.  $\bar{G}_1^0, \bar{G}_2^0$ ) sont des facettes de  $\bar{K}_1$  (resp.  $\bar{K}_2$ ). Par le corollaire 10 du paragraphe I) la plus petite face  $\bar{H}_0$  contenant  $\bar{F}_1^0 \boxtimes \bar{G}_2^0$  et  $\bar{F}_2^0 \boxtimes \bar{G}_1^0$  a une dimension égale à  $n'.m'-2$ .

La face polaire  $\bar{H}$  de  $\bar{H}_0$  a donc une dimension égale à 2. Mais  $\bar{H}$  contient  $\bar{X}_1 \otimes \bar{Y}_1$  et  $\bar{X}_2 \otimes \bar{Y}_2$ . Donc  $\bar{X}_1 \otimes \bar{Y}_1$  et  $\bar{X}_2 \otimes \bar{Y}_2$  sont 2 directions extrêmes adjacentes de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$ .

Remarque

Ce théorème n'est pas valable dans le cas général de deux cônes convexes quelconques (non polyédraux) comme le montre l'exemple suivant :

$$K_1 = [X = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1]$$

$$K_1 = [X = (x_1, x_2, s) : x_1^2 + x_2^2 - s^2 \leq 0 ; s \geq 0]$$

$$K_2 = [Y = (y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 \leq 1]$$

$$K_2 = [Y = (y_1, y_2, t) : y_1^2 + y_2^2 - t^2 \leq 0 ; t \geq 0].$$

On peut également écrire :

$$\bar{K}_1 = [\bar{X} : f_\alpha(\bar{X}) = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha - s \leq 0 \quad \forall \alpha ; s \geq 0]$$

$$\bar{K}_2 = [\bar{Y} : g_\beta(\bar{Y}) = y_1 \cos \beta + y_2 \sin \beta - t \leq 0 \quad \forall \beta ; t \geq 0]$$

Posons  $\bar{F}_{\alpha, \beta}(\bar{Z}) = f_\alpha \otimes g_\beta(\bar{Z})$ .

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\alpha, \beta}(\bar{Z}) &= z_{11} \cos \alpha \cdot \cos \beta + z_{12} \cos \alpha \sin \beta + z_{21} \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ &\quad + z_{22} \sin \alpha \cdot \sin \beta - tx_1 \cos \alpha - t x_2 \sin \alpha \\ &\quad - sy_1 \cos \beta - sy_2 \sin \beta + u. \end{aligned}$$

On a alors par définition et par la propriété 11 :

$$\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 = [\bar{Z} = [Z, X, Y, u] : \bar{F}_{\alpha, \beta}(\bar{Z}) \geq 0 \quad \forall \alpha, \beta ; u \geq 0].$$

Soit  $\bar{X}_1 = [x_1 = 1, x_2 = 0, s = 1]$  et  $\bar{X}_2 = [x_1 = -1, x_2 = 0, s = 1]$

$\bar{Y}_1 = [y_1 = 1, y_2 = 0, t = 1]$  et  $\bar{Y}_2 = [y_1 = -1, y_2 = 0, t = 1].$

$\bar{X}_1$  et  $\bar{X}_2$  (resp.  $\bar{Y}_1$  et  $\bar{Y}_2$ ) engendrent 2 directions extrémales distinctes de  $\bar{K}_1$  (resp.  $\bar{K}_2$ ).

Posons  $\bar{Z}_1 = \bar{X}_1 \otimes \bar{Y}_1$      $\bar{Z}_2 = \bar{X}_2 \otimes \bar{Y}_2$     et  $\bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}{2}$

Enfin définissons  $Z_4$  et  $Z_5$  de la manière suivante :

	$z_{11}$	$z_{12}$	$z_{21}$	$z_{22}$	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$u$
$Z_1$	1	0	0	0	1	0	1	0	1
$Z_2$	1	0	0	0	-1	0	-1	0	1
$Z_3$	1	0	0	0	0	0	0	0	1
$Z_4$	1	0	0	1	0	0	0	0	1
$Z_5$	1	0	0	-1	0	0	0	0	1

Notons que  $\bar{F}_{\alpha, \beta}(\bar{Z}_4) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta + 1 \geq 0$   
 $\forall \alpha, \forall \beta$ .

Donc  $\bar{Z}_4 \in \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  et de même  $\bar{Z}_5 \in \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$ .

De plus  $\bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_4 + \bar{Z}_5}{2}$ .

Mais on vérifie aisément que  $\bar{Z}_4$  et  $\bar{Z}_5$  ne peuvent appartenir au segment ayant pour extrémité les points  $\bar{Z}_1$  et  $\bar{Z}_2$ .

Donc  $\bar{Z}_1$  et  $\bar{Z}_2$  ne peuvent engendrer une face de dimension 2.

III - FACES DE  $K_1 \otimes K_2$  et  $K_1 \boxtimes K_2$

a) Tous les résultats énoncés aux paragraphes I et II s'étendent immédiatement aux ensembles convexes  $K_1 \otimes K_2$  et  $K_1 \boxtimes K_2$  puisque ces 2 ensembles sont supports des cônes  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  et  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Définition. On dira qu'un ensemble convexe compact  $K$  est de diamètre 1, si  $\forall X_1 \in \varepsilon(K), \forall X_2 \in \varepsilon(K) \quad X_1 \neq X_2, X_1$  et  $X_2$  sont adjacents.

On dira qu'un ensemble convexe compact  $K$  est de diamètre 2 si pour tout couple de points extrêmes non adjacents  $(X_1, X_2)$ ,  $\exists X_3 \in \varepsilon(K)$  tel que  $(X_1, X_3)$  sont adjacents et  $(X_1, X_2)$  sont adjacents.

Reformulons alors les corollaires 7 et 8.

Théorème 20

Si  $\dim K_1 \geq 1$  et  $\dim K_2 \geq 1$ ,  $K_1 \otimes K_2$  est un ensemble convexe de diamètre 2.

Démonstration

Soient  $X_1 \otimes Y_1$  et  $X_2 \otimes Y_2$  2 points extrêmes distincts de  $K_1 \boxtimes K_2$ .

a) Si  $X_1 \neq X_2$  et  $Y_1 \neq Y_2$   $X_1 \otimes Y_1$  et  $X_2 \otimes Y_2$  sont adjacents par le corollaire 6.

b) Si  $X_1 = X_2$  et  $Y_1$  et  $Y_2$  sont adjacents  $X_1 \otimes Y_1$  et  $X_2 \otimes Y_2$  sont adjacents par le corollaire 7.



- c) Si  $X_1 = X_2$  et  $Y_1 \neq Y_2$  ne sont pas adjacents,  $\exists$  un point extrême  $X_3 \in \varepsilon(K_1)$   $X_3 \neq X_1$  et  $\exists Y_3 \in \varepsilon(K_2)$   $Y_3 \neq Y_1, Y_2$ .  $X_1 \otimes Y_1$  et  $X_3 \otimes Y_3$  sont adjacents de même que  $X_2 \otimes Y_2$  et  $X_3 \otimes Y_3$ .
- d)  $Y_1 = Y_2$ . Même démonstration que b) et c).

b) Ensembles convexes de diamètre 1.

b.1. Considérons pour ensembles convexes les 2 hypersphères  $K_1$  et  $K_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = [X = (x_i) : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1] \subset \mathbb{R}^n \\ K_2 = [Y = (y_j) : \sum_{j=1}^n y_j^2 \leq 1] \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

On a alors :

$$\varepsilon(K_1) = [X : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1]$$

$$\varepsilon(K_2) = [Y : \sum_{j=1}^n y_j^2 = 1].$$

La  $F(X, Y)$  la fonction bi-affine :

$$F(X, Y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - 1$$

Par l'inégalité de Schwarz :

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)} \sqrt{\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)}$$

Donc  $F(X, Y) \leq 0 \quad \forall X \in K_1, \forall Y \in K_2.$  (a)

Cependant si  $X = Y$  et  $X \in \varepsilon(K_1)$ , on a :

$$F(X, Y) = 0 \quad (\beta)$$

On peut associer à la fonction  $F$  une forme affine notée  $\bar{Z}_0$  définie sur le produit tensoriel affine  $E_3$  de  $E_1$  et  $E_2$  (voir

$$\text{Si } \bar{Z} = [Z, X, Y, 1] \text{ on a } \langle \bar{Z}^0, \bar{Z} \rangle = \sum_{i=1}^n z_{ii}^{-1}.$$

$$\text{Par } \alpha) \quad \langle \bar{Z}^0, \bar{Z} \rangle \leq 0 \quad \forall \bar{Z} \in K_1 \otimes K_2.$$

$$\text{Par } \beta) \text{ Si } \bar{Z} = [X, 1] \otimes [X, 1] \quad X \in \varepsilon(\bar{K}_1)$$

$$\langle \bar{Z}_0, \bar{Z} \rangle = 0.$$

Soit  $\Pi$  l'hyperplan de  $E_3$  d'équation  $\sum_{i=1}^n z_{ii}^{-1} = 0$ .

Il est un hyperplan d'appui de  $K_1 \otimes K_2$  et l'ensemble convexe  $K' = \Pi \cap [K_1 \otimes K_2]$  est enveloppe convexe des points extrêmes  $\bar{Z} = [X, 1] \otimes [X, 1] \quad X \in \varepsilon(K_1)$ .

Si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont 2 points extrêmes distincts de  $K'$ , ils sont définis à partir de 2 points extrêmes distincts  $X_1, X_2$  de  $K_1$ .  
Donc par le théorème (20),  $Z_1$  et  $Z_2$  sont adjacents. Ceci montre que  $K'$  est un ensemble convexe de diamètre 1.

Notons également que pour tout point  $Z \in K'$ , on a :

$$z_{ij} - z_{ji} = 0 \quad \forall i, j \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq n$$

$$x_i - y_i = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^n z_{ii}^{-1} = 0.$$

$K'$  est donc plongé dans un espace de dimension  $n' = n^2 + 2$

$$n' = n^2 + 2n - \left(n + \frac{n^2 - n}{2}\right) - 1.$$

On peut aisément montrer que  $\dim K' = n' = \frac{n^2 + 3n}{2} - 1$ .

b.2. Soient  $C_1$  et  $C_2$  les 2 hypercubes :

$$C_1 = [X = (x_i) \quad -1 \leq x_i \leq +1 \quad 1 \leq i \leq n]$$

$$C_2 = [Y = (y_j) \quad -1 \leq y_j \leq +1 \quad 1 \leq j \leq n]$$

Notons que :  $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq n \quad \forall X \in C_1$

et :  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = n \quad \forall X \in \varepsilon(C_1)$ .

On a un résultat identique pour  $Y \in C_2$  et  $Y \in \varepsilon(C_2)$ .

Donc si  $H$  est l'hyperplan d'équation  $\sum_{i=1}^n z_{ii}^{-1} = 0$ ,  $H$  est un hyperplan d'appui de  $C_1 \otimes C_2$  et l'ensemble convexe :

$C' = H \cap (C_1 \otimes C_2)$  est enveloppe convexe des points extrêmes :

$$Z = [X, 1] \otimes [X, 1] \quad X \in \varepsilon(C_1).$$

Comme dans le cas précédent, c'est un polytope de diamètre 1.

D'autre part, l'ensemble des points  $\bar{Z} = [X, 1] \otimes [X, 1]$

$X \in \varepsilon(C_1)$  constitue une famille de points extrêmes adjacents deux à deux du polytope  $C_1 \otimes C_2$ .

La structure combinatoire de  $C'$ ,  $C_1 \otimes C_2$  et  $C_1 \boxtimes C_2$  joue un rôle très important pour tous les problèmes d'optimisation combinatoire. Puisque  $C'$  est une face de  $C_1 \otimes C_2$ , pour connaître les faces de  $C'$ , il suffit de connaître les faces de  $C_1 \otimes C_2$ . Le problème de la caractérisation des facettes de  $C_1 \otimes C_2$  sera abordée au dernier chapitre de ce mémoire.

Remarquons que les premiers exemples de polytopes de diamètre 1 ont été donnés par D. GALE [9]. Ce sont les polyèdres connus sous le nom de "d-neighbourly polytopes". Les exemples que nous venons d'étudier sont de nouveaux exemples d'ensembles convexes de ce type.



CHAPITRE IV

RELATION ENTRE  $K_1 \otimes K_2$  ET  $K_1 \boxtimes K_2$

I - INTRODUCTION

a) Il a été montré au chapitre II que  $K_1 \otimes K_2 \subset K_1 \boxtimes K_2$ .

Dans ce chapitre, nous caractérisons les ensembles convexes pour lesquels  $K_1 \otimes K_2 = K_1 \boxtimes K_2$ .

b) Soit  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  une forme bilinéaire sur  $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$ .

Nous avons noté qu'on peut naturellement associer à  $\bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2$ , une forme linéaire notée  $\bar{Z}^0$ , élément de  $(\bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2)^0$  telle que  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \langle \bar{Z}^0, \bar{X} \otimes \bar{Y} \rangle \quad \forall \bar{X} \in \bar{E}_1, \forall \bar{Y} \in \bar{E}_2$ .

D'autre part, une forme bilinéaire  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  peut toujours s'écrire  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \langle (\bar{A} \bar{X})^T, \bar{Y} \rangle$  où  $\bar{A}$  est une application linéaire de  $\bar{E}_1$  dans  $\bar{E}_2^0$ .

Réciproquement, toute application linéaire  $\bar{A} : \bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}_2^0$  définit une forme bilinéaire sur  $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2$  par :

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \langle (\bar{A}\bar{X})^T, \bar{Y} \rangle$$

Les 3 propositions suivantes sont alors équivalentes :

$\alpha)$   $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) \geq 0 \quad \forall \bar{X} \in \bar{K}_1, \forall \bar{Y} \in \bar{K}_2$

$\beta)$  La forme linéaire  $\bar{Z}^0$  associée à  $\bar{F}$  vérifie  $\bar{Z}^0 \in (\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2)^0$ .

$\gamma)$   $\text{Im}(\bar{K}_1) = [\bar{Y}^0 : \exists \bar{X} \in \bar{K}_1 \text{ tel que } \bar{Y} = \bar{A}\bar{X}]$  est un cône contenu dans  $\bar{K}_2^0$ .

II - THEOREME FONDAMENTAL : CONDITION NECESSAIRE

Le résultat suivant a été démontré par Phelps et Namioka [19] dans un cadre plus général. Nous en donnons ici une démonstration plus simple.

Théorème I : Si  $\bar{K}_1$  ou  $\bar{K}_2$  est un cône simplicial,  
 $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 = \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Démonstration : Supposons que  $\bar{K}_2$  soit simplicial.  $\bar{K}_2^0$  est alors également un cône simplicial.

Soient  $\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_{m'}$ , les directions extrêmes de  $\bar{K}_2^0$  ( $m' = m+1$  est la dimension de l'espace  $\bar{E}_2$  et de  $\bar{E}_2^0$ ).

Tout  $\bar{V} \in \bar{E}_2^0$  peut s'écrire d'une manière unique

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^{m'} \lambda_i \bar{V}_i$$

L'application  $\bar{V} \rightarrow \lambda_i$  ( $1 \leq i \leq m'$ ) est une forme linéaire que nous noterons  $P_i(\bar{V})$ . Donc  $\bar{V} = \sum_{i=1}^{m'} P_i(\bar{V}) \cdot \bar{V}_i$ .

Soit  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  une forme bilinéaire positive sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$  et soit A son application linéaire associée.  $A : \bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}_2^0$ .

L'application  $\bar{X} \rightarrow P_i(A\bar{X})$  est une forme linéaire (comme application composée d'une application linéaire et d'une forme linéaire) que nous noterons  $\bar{X} \rightarrow \langle \bar{V}_i, \bar{X} \rangle$ .

Comme  $A\bar{X} = \sum_{i=1}^{m'} P_i(A\bar{X}) \cdot \bar{V}_i$

on a donc

$$A\bar{X} = \sum_{i=1}^{m'} \langle \bar{V}_i, \bar{X} \rangle \cdot \bar{V}_i$$

Et

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \sum_{i=1}^{m'} \langle \bar{U}_i, \bar{X} \rangle \langle \bar{V}_i, \bar{Y} \rangle$$

Comme  $\bar{K}_2$  est un cône simplicial,  $\exists \bar{Y}_1 \in \epsilon(\bar{K}_2)$  tel que

$$\langle \bar{V}_i, \bar{Y}_1 \rangle = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m' \quad i \neq 1$$

$$\text{et } \langle \bar{V}_1, \bar{Y}_1 \rangle > 0$$

Comme  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}_1) \geq 0 \quad \forall \bar{X} \in \bar{K}_1$  on a donc :

$$\langle \bar{V}_1, \bar{X} \rangle \geq 0, \quad \forall \bar{X} \in \bar{K}_1.$$

De même :  $\langle \bar{V}_i, \bar{X} \rangle \geq 0, \quad \forall \bar{X} \in \bar{K}_1, \quad \forall 1 \leq i \leq m'.$

Ceci montre que si  $\bar{Z}^0$  est la forme linéaire définie sur  $\bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2$  associée à  $\bar{F}$  :  $\bar{Z}^0 = \sum_{i=1}^{m'} \bar{U}_i \otimes \bar{V}_i$

$$\text{et } \bar{Z}^0 \in \bar{K}_1^0 \otimes \bar{K}_2^0$$

Ceci démontre donc que  $(\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2)^0 = \bar{K}_1^0 \boxtimes \bar{K}_2^0 \subset \bar{K}_1^0 \otimes \bar{K}_2^0.$

Donc en passant aux cônes polaires  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 \supset \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$

$$\implies \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 = \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2.$$

### III - THEOREME FONDAMENTAL. CONDITION SUFFISANTE

Nous supposons dans ce paragraphe que  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$  sont des cônes polyédraux.

#### a) Définition

Un cône convexe  $\bar{K}$  sera dit appartenir à la classe (S) si :



- α)  $\bar{K}$  n'est pas un cône simplicial.
- β) Chaque face propre  $\bar{F}$  de  $\bar{K}$  est un cône simplicial dans l'espace  $L(\bar{F})$ .
- γ) Chaque face propre  $\bar{F}_0$  de  $\bar{K}^0$  cône polaire de  $\bar{K}$  est un cône simplicial dans l'espace  $L(\bar{F}^0)$ .

b) Lemme 2

- α) Si  $\bar{K} \in (S), \bar{K}^0 \in (S)$
- β) Si  $\bar{K} \in (S), \exists$  2 directions extrêmes distinctes qui n'appartiennent pas simultanément à une même face propre de  $\bar{K}$ .

Démonstration :

α) Conséquence de la définition de la classe (S).

β) Soit  $K$  support compact de  $\bar{K}$ . Soit  $V_1 \in \varepsilon(K)$ .

Comme chaque face de  $\bar{K}^0$  est un simplexe,  $V_1$  appartient à  $n$  facettes distinctes et  $\exists$   $n$  points extrêmes adjacents  $\{V_2, \dots, V_{n+1}\}$ . Comme  $K$  n'est pas un simplexe,  $\exists$  au moins un autre point extrême  $V_{n+2}$  différent des précédents.

$V_1, V_{n+2}$  n'étant pas adjacents, ils ne peuvent appartenir à une même face de  $K$  puisque une telle face est un simplexe, c'est à dire à tous ces points extrêmes adjacents entre eux.

- c) Théorème 3 : Si  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$  sont de la classe (S),  
 $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 \neq \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Démonstration :

α) Définition d'une application linéaire  $A_1 : \bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}_2^0$   
Soient  $\bar{V}_1$  et  $\bar{V}_2$  2 directions extrémales de  $\bar{K}_2^0$  vérifiant le

lemme b). Cette condition peut également s'écrire :

Si  $\bar{V} = \lambda_1 \bar{V}_1 + \lambda_2 \bar{V}_2$  ;  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$  alors  $\bar{V} \in \text{Int}(\bar{K}_2^0)$

Soit (P) le plan engendré par les 2 vecteurs  $\bar{V}_1$  et  $\bar{V}_2$ .

Soient  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$  2 directions extrêmes de  $\bar{K}_1$  satisfaisant le lemme 2. Soient  $f_1(\bar{X}) = 0$  et  $f_2(\bar{X}) = 0$  les équations de 2 hyperplans d'appui à  $\bar{K}_1$  tels que :

$$\bar{K}_1 \cap [\bar{X} : f_1(\bar{X}) = 0] = X_1$$

$$\bar{K}_1 \cap [\bar{X} : f_2(\bar{X}) = 0] = X_2.$$

(Ces 2 hyperplans existent donc par le lemme 2).

On a nécessairement  $f_1(\bar{X}_2) > 0$  et  $f_2(\bar{X}_1) > 0$ .

On pourra supposer en multipliant éventuellement  $f_1$  et  $f_2$  par des coefficients convenablement choisis que  $f_1(\bar{X}_2) = 1$  et  $f_2(\bar{X}_1) = 1$ .

Définissons alors l'application  $A_1$ .

$$A_1 \bar{X} = f_2(\bar{X}) \cdot \bar{V}_1 + f_1(\bar{X}) \cdot \bar{V}_2.$$

$A_1$  satisfait les propriétés suivantes :

$$\alpha) A_1 \bar{X}_1 = \bar{V}_1$$

$$A_1 \bar{X}_2 = \bar{V}_2$$

$$\beta) \text{ Si } \bar{X} \in \bar{K}_1 \text{ et } \bar{X} \neq \bar{X}_1, \bar{X}_2 \quad f_1(\bar{X}) > 0 \text{ et } f_2(\bar{X}) > 0.$$

Donc  $A_1 \bar{X} \in \text{Int}(\bar{K}_2^0)$ .

$$\gamma) \forall \bar{X} \in \bar{K}_1, A_1 \bar{X} \in (P)$$

b) Définition d'une application linéaire  $A : \bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}_2^0$

Soit  $A_2$  une application linéaire  $\bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}_2^0$  telle que :

$$- A_2 \bar{X}_1 = \bar{V}_1$$

$$- A_2 \bar{X}_2 = \bar{V}_2$$

- Soit  $\bar{X}_3 \in \varepsilon(\bar{K}_1)$  tel que  $\bar{X}_3$  n'appartienne pas au plan engendré par  $\bar{X}_1$  et  $\bar{X}_2$  ; alors  $A_2 \bar{X}_3$  n'appartient pas au plan (P) engendré par  $\bar{V}_1$  et  $\bar{V}_2$ . (Une telle application existe toujours puisque  $\dim \bar{K}_1 > 2$  et  $\dim \bar{K}_2^0 > 2$ ).

Soient  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k$  l'ensemble des directions extrêmes de  $\bar{K}_1$ .

$$\text{Posons } A_\varepsilon = (1-\varepsilon) A_1 + \varepsilon A_2.$$

Comme  $A_1 \bar{X}_i \in \text{Int } \bar{K}_2^0$ ,  $\exists 1 > \varepsilon_i > 0$  tel que

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_i \quad A_\varepsilon(\bar{X}_i) \in \text{Int } \bar{K}_2^0$$

Soit  $\varepsilon_0 = \min_{i=1}^k \varepsilon_i$  et posons

$$A = (1-\varepsilon_0) A_1 + \varepsilon_0 A_2$$

A vérifie alors les 3 conditions suivantes :

$$\alpha) A \bar{X} \in \bar{K}_2^0 \quad \forall \bar{X} \in \bar{K}_1 \text{ puisque } A \bar{X}_i \in \bar{K}_2^0 \quad \forall \bar{X}_i \in \varepsilon(\bar{K}_1)$$

$$\beta) A \bar{X}_1 = \bar{V}_1$$

$$A \bar{X}_2 = \bar{V}_2$$

$\gamma) A \bar{X}_3$  n'appartient pas au plan (P) engendré par  $\bar{V}_1$  et  $\bar{V}_2$ .

$$\text{En effet } A \bar{X}_3 = (1-\varepsilon_0) A_1 \bar{X}_3 + \varepsilon_0 A_2 \bar{X}_3.$$

Comme  $A_1 \bar{X}_3 \in (P)$  et  $A_2 \bar{X}_3 \notin (P)$ ,  $A \bar{X}_3 \notin (P)$

c) A définit une application bilinéaire

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \langle (A\bar{X})^T, \bar{Y} \rangle$$

Par la condition  $\alpha$ ) à laquelle satisfait A :  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) \geq 0$   
 $\forall \bar{X} \in \bar{K}_1, \forall \bar{Y} \in \bar{K}_2$ .

Supposons que la forme linéaire associée à  $\bar{F}$  appartienne à  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$ .

$$\bar{Z}^0 = \sum_{i=1}^r \bar{U}_i \otimes \bar{V}_i$$

$$\text{et } F(\bar{X}, \bar{Y}) = \sum_{i=1}^r \langle \bar{U}_i, \bar{X} \rangle \langle \bar{V}_i, \bar{Y} \rangle$$

Par la condition  $\beta$ ) satisfaite par A :

$$F(\bar{X}_1, \bar{Y}) = \langle \bar{V}_1, \bar{Y} \rangle \text{ et } F(\bar{X}_2, \bar{Y}) = \langle \bar{V}_2, \bar{Y} \rangle$$

$$\text{Donc } \langle \bar{U}_i, \bar{X}_1 \rangle = \langle \bar{U}_i, \bar{X}_2 \rangle = 0 \quad 3 \leq i \leq r$$

Comme il n'existe aucune face propre de  $\bar{K}_1$  contenant simultanément  $\bar{X}_1$  et  $\bar{X}_2$ , ceci impose :

$$\langle \bar{U}_i, \bar{X} \rangle = 0 \quad \forall \bar{X} \in \bar{E}_1 \quad 3 \leq i \leq r$$

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \langle \bar{U}_1, \bar{X} \rangle \langle \bar{V}_1, \bar{Y} \rangle + \langle \bar{U}_2, \bar{X} \rangle \langle \bar{V}_2, \bar{Y} \rangle$$

$$\implies A\bar{X} = \langle \bar{U}_1, \bar{X} \rangle \bar{V}_1 + \langle \bar{U}_2, \bar{X} \rangle \bar{V}_2$$

Mais ceci signifie que  $A\bar{X} \in (P) \quad \forall \bar{X} \in \bar{K}_1$ , ce qui contredit la condition  $(\gamma)$  à laquelle A satisfait

$$\implies \bar{Z}^0 \notin \bar{K}_1^0 \otimes \bar{K}_2^0$$

$$\bar{K}_1^0 \otimes \bar{K}_2^0 \neq (\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2)^0$$

$$\implies \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 \neq \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$$

Théorème 4 : Si  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$  sont des cônes polyédraux non simpliciaux,  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 \neq \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Démonstration : Supposons le théorème faux. Soient  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$ , 2 cônes polyédraux non simpliciaux tels que  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 = \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$  et  $k = \dim \bar{K}_1 + \dim \bar{K}_2$  soit minimum.

Notons que si  $\dim \bar{K}_1 = \dim \bar{K}_2 = 1$ ,  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$  sont des cônes simpliciaux. Donc  $k \geq 3$ .

Soit  $\bar{F}_1$  une facette de  $\bar{K}_1$ .

On a vu [théorème 2, chapitre III] que  $\bar{F}_1 \times \bar{K}_2$  est une face de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$ . De même [théorème 16, chapitre III]  $\bar{F}_1 \boxtimes \bar{K}_2$  est une face de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Or  $\bar{F}_1 \otimes \bar{K}_2 \subset \bar{F}_1 \boxtimes \bar{K}_2$

et  $\dim \bar{F}_1 \otimes \bar{K}_2 = \dim \bar{F}_1 \boxtimes \bar{K}_2 = \dim \bar{F}_1 \cdot \dim \bar{K}_2$

Donc si  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 = \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ , alors  $\bar{F}_1 \otimes \bar{K}_2 = \bar{F}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

Par l'hypothèse de minimalité sur  $k$ ,  $\bar{F}_1$  est un cône simplicial. De même chaque face propre de  $\bar{K}_2$  est un cône simplicial.

Si  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 = \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ ,  $\bar{K}_1^0 \otimes \bar{K}_2^0 = \bar{K}_1^0 \boxtimes \bar{K}_2^0$

Donc pour les mêmes raisons que précédemment, chaque face propre de  $\bar{K}_1^0$  et de  $\bar{K}_2^0$  est un cône simplicial.

$\implies \bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$  sont donc des cônes de la classe (S).

Par le théorème (3)  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 \neq \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ , ce qui contredit notre hypothèse.

Remarque : Le théorème suivant est également vrai.

Théorème 5 : Si  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$  ne sont pas des cônes simpliciaux,  
 $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2 \neq \bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$ .

La démonstration est similaire à la précédente. Elle est cependant plus compliquée et nécessite l'utilisation de propriétés fines des ensembles convexes. Pour cette raison nous ne la donnerons pas.



CHAPITRE V

ETUDE DU PRODUIT TENSORIEL DIRECT ET DU PRODUIT TENSORIEL POLAIRE  
DANS DES CAS PARTICULIERS

I - INTRODUCTION

a) Nous allons, dans ce chapitre, étudier la structure des cônes  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  et  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$  pour des classes particulières d'ensembles convexes  $K_1$  et  $K_2$ .

b) Définition : Soit  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  une forme bilinéaire définie sur  $\bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2$  et soit  $\bar{Z}^0$  l'élément du dual de  $\bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2$  associé à  $\bar{F}$  (voir chapitre I, VI, b).

$\bar{F}$  sera appelée forme bilinéaire irréductible si et seulement si la forme linéaire  $\bar{Z}^0$  est une direction extrême du cône  $[\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2]^0 = \bar{K}_1^0 \boxtimes \bar{K}_2^0$ .

On peut alors caractériser les forme bilinéaires irréductibles de la manière suivante :

α)  $\bar{F}$  est positive sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$

$$\forall \bar{X} \in \bar{K}_1, \bar{Y} \in \bar{K}_2 \quad \bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) \geq 0$$

β) Soient  $\bar{F}_1$  et  $\bar{F}_2$ , 2 formes bilinéaires positives sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$  telles que  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{F}_1(\bar{X}, \bar{Y}) + \bar{F}_2(\bar{X}, \bar{Y})$

Alors  $\bar{F}_1(\bar{X}, \bar{Y}) = \lambda \bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) \quad \forall \bar{X} \in \bar{E}_1, \bar{Y} \in \bar{E}_2$

et  $\bar{F}_2(\bar{X}, \bar{Y}) = (1-\lambda) \bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) \quad \forall \bar{X} \in \bar{E}_1, \bar{Y} \in \bar{E}_2$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$



c) Comme il a été signalé au chapitre IV, par I,  $\bar{F}$  est positive sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$  si et seulement si le cône :

$$\text{Im}(\bar{K}_1) = (\bar{Y}^0 \in E_2^0 : \exists \bar{X} \in \bar{K}_1 \text{ tel que } \bar{Y}^0 = A\bar{X})$$

est inclus dans le cône  $\bar{K}_2^0$ .

d) Les 2 problèmes fondamentaux

$\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  a été défini à partir des directions extrémales de  $\bar{K}_1$  et de  $\bar{K}_2$ . Nous nous poserons alors le premier problème suivant (P1) : Comment caractériser les hyperplans d'appui de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$  ? Plus précisément, comment caractériser les formes bilinéaires irréductibles sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$  ?

(Ces 2 problèmes sont équivalents compte-tenu des résultats rappelés en introduction et au paragraphe b).

Notons que les formes bilinéaires irréductibles caractérisant également les directions extrêmes de  $(\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2)^0 = \bar{K}_1^0 \boxtimes \bar{K}_2^0$ .

Nous nous poserons également le deuxième problème dual du premier (P2)

Trouver les directions extrêmes de  $\bar{K}_1 \boxtimes \bar{K}_2$  où les formes bilinéaires irréductibles sur  $\bar{K}_1^0 \times \bar{K}_2^0$ .

Notons que ces 2 problèmes sont excessivement difficiles dans le cas général. Ceci est lié à la nature des formes bilinéaires :

Supposons que  $K_1$  et  $K_2$  soient 2 polytopes. Si  $F(X,Y)$  est une forme bi-affine le problème d'optimisation suivant :

$$z = \min\{F(X,Y) \mid X \in K_1, Y \in K_2\} \quad (1)$$

est un problème NP complet [6].

Si on pouvait caractériser les formes bilinéaires irréductibles sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$  (c'est à dire dans ce cas connaître les facettes de  $\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$ ), on pourrait formuler le problème (1) comme un programme linéaire (avec certes un grand nombre de contraintes).

On sait que quand un problème d'optimisation combinatoire est de la classe des problèmes NP-complets [ 6 ], on ne sait pas caractériser les facettes du polytope associé à ce problème [ 5 ], [10], [17], [18], [20], [23], [25].

e) Résultat préliminaire

$$\text{Nous poserons } X_0 = \begin{cases} X_0 = 0 \\ s = 1 \end{cases}$$

$$Y_0 = \begin{cases} Y_0 = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  sera écrite sous la forme :

$$\bar{F}[(X, s), (Y, t)] = \langle X^T A^T, Y \rangle + \langle U^T, X \rangle + \langle V^T, Y \rangle + \alpha_0 \text{ st.}$$

La forme bi-affine associée à  $\bar{F}$  est :

$$F(X, Y) = \langle X^T A^T, Y \rangle + \langle U^T, X \rangle + \langle V^T, Y \rangle + \alpha_0$$

Rappelons que nous supposons que  $K_1$  et  $K_2$  supports de  $\bar{K}_1$  et  $\bar{K}_2$  sont des ensembles convexes compacts et que  $\bar{X}_0 \in \text{Int } \bar{K}_1$  et  $\bar{Y}_0 \in \text{Int } \bar{K}_2$ .

Lemme 1 : Si  $\bar{F} \neq 0$  et  $\bar{F}$  est une forme bilinéaire positive sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$ ,  $\alpha_0 > 0$ .

Démonstration : Supposons ce résultat faux.

- Si  $U \neq 0$  on peut trouver  $X_1 \in K_1$  tel que  $\langle U^T, X_1 \rangle < 0$  puisque  $X^0$  est point intérieur de  $K_1$ .  
Donc  $F(X_1, Y_0) = \langle U^T, X_1 \rangle < 0$  ce qui contredit l'hypothèse faite sur F.

- On supposera donc  $U = 0$  et pour des raisons similaires  $V = 0$ . Si  $A \neq 0$  on peut trouver  $X_1 \in K_1$  et  $Y_1 \in K_2$  tels que

$$F(X_1, Y_1) = \langle X_1^T A^T, Y_1 \rangle < 0$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur F.

On pourra supposer, divisant éventuellement chaque coefficient de A par  $\alpha_0$  que  $\alpha_0 = 1$ .

## II - PRODUIT TENSORIEL DE DEUX HYPERSPHERES

### a) Définitions et notations

Soit  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . On posera :

$$||X||^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$K_1$  et  $K_2$  seront des hypersphères :

$$K_1 = \{ X = (x_i \mid 1 \leq i \leq n) \mid ||X||^2 \leq 1 \}$$

$$K_2 = \{ Y = (y_j \mid 1 \leq j \leq m) \mid ||Y||^2 \leq 1 \}$$

Notons que l'ensemble polaire  $K_1^0$  de  $K_1$  est défini par :

$$K_1^0 = \{ X^0 = (x_i^0 \mid 1 \leq i \leq n) \mid ||X^0||^2 \leq 1 \}$$

En effet par l'inégalité de Schwarz

$$\langle X^0, X \rangle + 1 \geq 0 \quad \forall X \in K_1 \iff ||X^0||^2 \leq 1.$$

De même  $K_2^0 = (Y^0 = (y_j^0 \mid 1 \leq j \leq m) \mid ||Y^0||^2 \leq 1)$

$K_1^0$  (resp.  $K_2^0$ ) est donc isomorphe à  $K_1$  (resp.  $K_2$ ). Les 2 problèmes fondamentaux  $(P_1)$  et  $(P_2)$  définis en I.d sont alors identiques puisque la caractérisation des formes bilinéaires irréductibles de  $K_1 \otimes K_2$  permet de caractériser les directions extrêmes de  $K_1^0 \otimes K_2^0$  (problème P1) et comme  $K_1^0 \otimes K_2^0$  est isomorphe à  $K_1 \otimes K_2$  on peut ainsi caractériser les directions extrêmes de  $K_1 \otimes K_2$ . Les cônes associés à  $K_1$  et  $K_2$  sont :

$$\bar{K}_1 = \{\bar{X} = (X, s) \mid ||X||^2 \leq s^2 ; s \geq 0\}$$

$$\bar{K}_2 = \{\bar{Y} = (Y, t) \mid ||Y||^2 \leq t^2 ; t \geq 0\}$$

#### b) Transformations invariantes

b-1- Définition : Soit  $\bar{B}$  une transformation linéaire de  $\bar{E}_1$  sur  $\bar{E}_1$ . On dira que  $\bar{B}$  est invariante et on écrira  $\bar{B} \in H(\bar{E}_1)$  si :

$$1^\circ) \forall \bar{X} \in \bar{K}_1, \bar{X}' = \bar{B}\bar{X} \in \bar{K}_1$$

$$2^\circ) \forall \bar{X} \in \bar{K}_1, \bar{X}' = \bar{B}^{-1}\bar{X} \in \bar{K}_1$$

$\bar{B}$  établit donc une bijection du cône  $\bar{K}_1$  sur lui-même.

Il est facile de vérifier que cette définition est équivalente à la définition suivante :

$\bar{B} \in H(\bar{E}_1)$  si et seulement si :

$\forall \bar{X} \in \bar{K}_1, \bar{X}' = (X', s') = \bar{B}\bar{X}$  vérifie

$$1^\circ) ||X'||^2 \leq s'^2$$

$$2^\circ) s' \geq 0$$

On définira de manière identique  $H(\bar{E}_2)$

b-2) On a alors les propriétés élémentaires suivantes :

Lemme 2 : a) Si  $\bar{B} \in H(\bar{E}_1)$  et  $\bar{C} \in H(\bar{E}_1)$  l'application composée  $\bar{X} \rightarrow \bar{C}(\bar{B}(\bar{X}))$  appartient à  $H(\bar{E}_1)$ .

b) Si  $\bar{B} \in H(\bar{E}_1)$ ,  $\bar{B}^{-1} \in H(\bar{E}_1)$ .

Démonstration : Evident.

Lemme 3 : a) Si  $\bar{B} \in H(\bar{E}_1)$  et  $\bar{C} \in H(\bar{E}_2)$

$$\bar{B} \otimes \bar{C}[\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2] = \bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2$$

b)  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  est une forme bilinéaire irréductible sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$  si et seulement si  $\bar{F}(\bar{B}\bar{X}, \bar{C}\bar{Y})$  est une forme bilinéaire irréductible sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$ .

Démonstration :

a) Par (chapitre II, propriété 2)  $\bar{B} \otimes \bar{C}[\bar{K}_1 \otimes \bar{K}_2] = (\bar{B}\bar{K}_1) \otimes (\bar{C}\bar{K}_2)$   
 Mais par définition de  $H(\bar{E}_1)$  et  $H(\bar{E}_2)$   $\bar{B}\bar{K}_1 = \bar{K}_1$  et  $\bar{C}\bar{K}_2 = \bar{K}_2$ ,  
 ce qui montre le résultat.

b) Il est trivial de vérifier que  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  est une forme bilinéaire irréductible sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$  si et seulement si  $\bar{F}(\bar{B}\bar{X}, \bar{C}\bar{Y})$  est une forme irréductible sur  $(\bar{B}^{-1} \bar{K}_1) \otimes (\bar{C}^{-1} \bar{K}_2)$ . Le résultat découle alors du lemme 2 et de a).

b-3) Transformations invariantes particulières

- Transformations orthogonales : Soit B une matrice orthogonale définissant une transformation linéaire de  $E_1$  sur  $E_1$  :

$$X' = BX$$

Définissons  $\bar{B}$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} X' = BX \\ s' = s \end{cases}$$

$\bar{B}$  sera encore appelé (par abus de langage) transformation orthogonale sur  $\bar{E}_1$  ou transformation associée à  $\bar{B}$ .

- Symétrie : Une symétrie est une transformation orthogonale qui à tout  $\bar{X} = (X, s)$  associe  $\bar{X}' = (X', s')$  défini par les relations :

Si  $X = (x_i \mid 1 \leq i \leq n)$  et  $X' = (x'_i \mid 1 \leq i \leq n)$

$$\begin{cases} x'_i = \pm x_i & ; \quad 1 \leq i \leq n \\ s' = s \end{cases}$$

#### b-4) Propriété 4

Soit  $\bar{X}^1 \in \text{Int } \bar{K}_1$ . Il existe une transformation invariante  $\bar{B}$  qui transforme  $\bar{X}^1$  en  $\bar{X}_0 = (X_0 = 0, s = 1)$ .

Démonstration : Soit  $\bar{X}^1 = (X^1, s_1)$ . Par hypothèse  $\|X^1\|^2 < (s_1)^2$ .

On peut, par une transformation orthogonale  $B_1$ , transformer  $\bar{X}^1$  en  $\bar{X}^2$  de coordonnées :

$$\bar{X}^2 \begin{cases} x_1^2 = \alpha s_1 \\ x_i^2 = 0 & \quad 2 \leq i \leq n \\ s_2 = \alpha s_1 \end{cases}$$

Notons que  $\bar{X}^2 \in \text{Int } \bar{K}_1$ . Donc  $|\alpha| < 1$ .

Par une symétrie éventuelle  $\bar{B}_2$  on pourra supposer de plus que  $\alpha > 0$ .

Considérons l'application linéaire  $\bar{B}_3$  :

$$\begin{cases} x_1' = (x_1 - \alpha s) \beta \\ \vdots \\ x_i' = \beta \sqrt{1-\alpha^2} x_i & 2 \leq i \leq n \\ \vdots \\ s' = (-\alpha x_1 + s) \beta \end{cases}$$

Posons  $\beta = \frac{1}{s_1(1-\alpha^2)}$

Notons que si  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n, s) \in \bar{K}_1$  alors :  $x_1 \leq s$

Donc  $\alpha x_1 \leq s$  puisque  $0 < \alpha < 1$ . Donc  $s' \geq 0$  (α)

D'autre part  $\sum_{i=1}^n (x_i')^2 - (s')^2 = \beta^2(1-\alpha^2) \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - s^2 \right]$  (β)

Ces deux dernières relations (α) et (β) montrent que  $\bar{B}_3$  est une application invariante.

On vérifie d'autre part que  $\bar{B}_3 \bar{X}_0^2 = \bar{X}_0$ , ce qui montre le résultat.

b-5) Rappelons enfin un résultat classique sur les formes bilinéaires [13].

Théorème 5 : Soit  $F(X,Y) = \langle X^T A^T, Y \rangle$  une forme bilinéaire sur  $E_1 \times E_2$ . Il existe une transformation orthogonale B sur  $E_1$  :  $X' \rightarrow BX$  et une transformation orthogonale C sur  $E_2$  :  $Y' \rightarrow CY$  telles que  $F(BX,CY) = \sum_{i=1}^n r_i x_i y_i$ .

c) Formes bilinéaires irréductibles du premier type

Soit  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \langle (\bar{A}\bar{X})^T, \bar{Y} \rangle$  une forme bilinéaire positive sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$ . Supposons que l'image de l'origine

$$X_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} X_0 = 0 \\ s = 1 \end{array} \right. ,$$

par l'application linéaire  $\bar{A}$  soit une direction extrême  $\bar{V}$  de  $\bar{K}_2^0$  :

$$\bar{V} = \bar{A} \bar{X}_0 \in \varepsilon(K_2^0)$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 6 :  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  est une forme bilinéaire irréductible sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$  si et seulement si  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  peut s'écrire :

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \langle \bar{U}, \bar{X} \rangle \langle \bar{V}, \bar{Y} \rangle \quad (\alpha)$$

avec  $\bar{U} \in \varepsilon(\bar{K}_1^0)$  et  $\bar{V} \in \varepsilon(\bar{K}_2^0)$

Démonstration : Si  $\bar{F}$  vérifie la propriété  $(\alpha)$  le vecteur  $\bar{Z}^0 \in \bar{E}_1^0 \otimes \bar{E}_2^0$  associé à  $\bar{F}$  peut s'écrire :  $\bar{Z}^0 = \bar{U} \otimes \bar{V}$

Par le corollaire 3 du chapitre III, si  $\bar{U} \in \varepsilon(\bar{K}_1^0)$  et  $\bar{V} \in \varepsilon(\bar{K}_2^0)$ ,  $\bar{U} \otimes \bar{V} \in \varepsilon(\bar{K}_1^0 \otimes \bar{K}_2^0)$ . Ceci montre que  $\bar{F}$  est une forme bilinéaire irréductible sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$ .

Inversement soit  $\bar{F}$  une forme bilinéaire positive sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$  telle que :

$$\bar{V} = \bar{A} \bar{X}_0 \in \varepsilon(\bar{K}_2^0)$$

Comme  $\bar{X}_0 \in \text{Int}(\bar{K}_1)$ ,  $\forall \bar{X} \in \bar{K}_1$ , on peut trouver  $\bar{X}'$  tel que

$$\bar{X}_0 = \bar{X} + \bar{X}'$$



Donc  $\bar{A} \bar{X}_0 = \bar{A}\bar{X} + \bar{A}\bar{X}'$

Comme  $\bar{V} = \bar{A} \bar{X}_0 \in \varepsilon(\bar{K}_2)$ , on doit avoir également

$$\bar{A}\bar{X} = f(\bar{X}) \bar{V} \quad \text{et} \quad \bar{A}\bar{X}' = f(\bar{X}') \bar{V}$$

$\bar{K}_1$  engendrant tout l'espace  $\bar{E}_1$ , on a aussi :

$$\bar{A}\bar{X} = f(\bar{X}) \bar{V} \quad \forall \bar{X} \in \bar{E}_1$$

$\bar{X} \rightarrow f(\bar{X})$  étant une forme linéaire, on peut écrire :

$$\bar{A}\bar{X} = \langle \bar{U}, \bar{X} \rangle \bar{V}$$

et  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \langle \bar{U}, \bar{X} \rangle \langle \bar{V}, \bar{Y} \rangle$

Soit  $\bar{Y}_1 \in \bar{K}_2$  tel que  $\langle \bar{V}, \bar{Y}_1 \rangle > 0$ .

On doit donc avoir, puisque  $\bar{F}$  est positive sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$  :

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}_1) = \langle \bar{U}, \bar{X} \rangle \langle \bar{V}, \bar{Y}_1 \rangle > 0 \quad \forall \bar{X} \in \bar{K}_1$$

Ceci montre que  $\bar{U} \in \bar{K}_1^0$

Si  $\bar{U} \notin \varepsilon(\bar{K}_1^0)$ , on peut trouver  $\bar{V}_1$  et  $\bar{V}_2$  non proportionnels à  $\bar{U}$

tels que  $\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2$   $\bar{U}_1 \in \bar{K}_1^0$  et  $\bar{V}_2 \in \bar{K}_2^0$

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \langle \bar{U}_1, \bar{X} \rangle \langle \bar{V}, \bar{Y} \rangle + \langle \bar{U}_2, \bar{X} \rangle \langle \bar{V}, \bar{Y} \rangle.$$

Ceci montre que  $\bar{F}$  n'est pas une forme bilinéaire irréductible

sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$ . Donc si  $\bar{F}$  est une forme bilinéaire irréductible

sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$  :

$$\bar{U} \in \varepsilon(\bar{K}_1^0) \quad \text{et} \quad \bar{V} \in \varepsilon(\bar{K}_2^0)$$

d) Formes bilinéaires irréductibles du 2ème type

d-1) On supposera que l'image de l'origine

$$\bar{X}_0 \left\{ \begin{array}{l} X_0 = 0 \\ s = 1 \end{array} \right. \quad \text{par l'application A est un vecteur } \bar{V}$$

intérieur au cône  $\bar{K}_2^0$ .

Par le lemme 3-b) et la propriété 4, on peut supposer que  $\bar{V}$  est l'origine  $1_Y$  du cône  $\bar{K}_2^0$  :

$$1_Y = \begin{cases} Y^0 = 0 \\ t_0 = 1 \end{cases}$$

Donc  $\bar{F}(\bar{X}_0, \bar{Y}) = \langle 1_Y, \bar{Y} \rangle = \langle 0, Y \rangle + t_0 \cdot t = t$

d-2) On a donc

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \langle (AX)^T, Y \rangle + t \langle U^T, X \rangle + st$$

d-3) Remarques

On peut supposer que  $\|U\|^2 < 1$ , sinon en échangeant le rôle de  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$ , on se trouverait dans la situation étudiée au paragraphe précédent.

Par le théorème 5, il existe une transformation linéaire orthogonale B sur  $E_1$  et une transformation linéaire orthogonale C sur  $E_2$  telles que :

$$\langle (ABX)^T, CY \rangle = \sum_{i=1}^n r_i x_i y_i \quad (\text{nous avons supposé } n \leq m)$$

Considérant les transformations orthogonales  $\bar{B}$  et  $\bar{C}$  associées à B et C (définies en b-3), on pourra toujours supposer par le lemme 3-b) que

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \sum_{i=1}^n r_i x_i y_i + \left( \sum_{i=1}^n u_i x_i \right) t + st \quad (\alpha)$$

On pourra également supposer que si  $r_i = 0$  alors  $u_i = 0$ ,  
 $\forall 1 \leq i \leq n$ .

En effet supposons que dans l'expression (α)  $r_1 = 0$  et  $u_1 \neq 0$

Soit B l'application linéaire qui à  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n, s)$   
 associe  $\bar{X}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n, s')$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{x_1 - u_1 s}{1 - u_1^2} \\ x'_i = \frac{x_i}{\sqrt{1 - u_1^2}} & 2 \leq i \leq n \\ s' = \frac{s - u_1 x_1}{1 - u_1^2} \end{cases}$$

Puisque  $|u_1| < 1$  cette transformation est du type de celle  
 étudiée en b-4 .

Donc  $\bar{B} \in H(\bar{E}_1)$ .

$$\bar{F}(\bar{B}\bar{X}, \bar{Y}) = \sum_{i=2}^n \frac{r_i}{\sqrt{1 - u_1^2}} x_i y_i + \sum_{i=1}^n \frac{u_i x_i}{\sqrt{1 - u_1^2}} t + st$$

$\bar{F}(\bar{B}\bar{X}, \bar{Y})$  est donc de la forme (α) mais le coefficient de  $x_1$   
 est nul dans cette nouvelle expression.

Par des transformations de ce type, on pourra donc supposer  
 que si  $r_i = 0$  alors  $u_i = 0$ .

Enfin par une symétrie éventuelle sur  $E_1$  et  $E_2$ , on pourra  
 supposer que

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad r_i \geq 0 \quad \text{et} \quad u_i \geq 0$$

On étudiera donc la forme bilinéaire suivante :

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \sum_{i=1}^k (r_i y_i + u_i t) x_i + \sum_{i=k+1}^n r_i x_i y_i + st$$

$\bar{F}$  satisfait aux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{Si } 1 \leq i \leq k \leq n \quad r_i > 0 \text{ et } u_i > 0 \\ - \text{Si } k+1 \leq i \leq n \quad r_{k+1} \geq \dots \geq r_i \geq r_{i+1} \geq \dots \geq r_n \end{array} \right. \quad (\beta)$$

La forme bi-affine  $F$  associée à  $\bar{F}$  s'écrit

$$F(X, Y) = \sum_{i=1}^k (x_i y_i + u_i) x_i + \sum_{i=k+1}^n r_i x_i y_i + 1.$$

d-4) Résultat préliminaire

Posons  $g(Y) = \sum_{i=1}^k (r_i y_i + u_i)^2 + \sum_{i=k+1}^n (r_i y_i)^2$

et  $g_1(Y) = \sum_{i=1}^k (r_i y_i + u_i)^2$

Soient  $(P_1)$  et  $(P_2)$  les 2 programmes d'optimisation

$$z = \max\{g(Y) \mid \sum_{i=1}^m y_i^2 \leq 1\}$$

$$\bar{z} = \max\{g_1(Y) \mid \sum_{i=1}^m y_i^2 \leq 1\}$$

Par l'inégalité de Scharwz, il est évident que  $F(X, Y)$  est positive sur  $K_1 \times K_2$  si et seulement si  $z \leq 1$ .

On a alors le résultat simple suivant conséquence immédiate de la théorie des multiplicateurs de Lagrange.

PROPRIETE 7 :

1°) Soit  $Y'' = (y''_i \mid 1 \leq i \leq m)$  la solution de (P2)

a)  $Y''$  est défini de manière unique

b)  $y''_i > 0 \quad 1 \leq i \leq k$

c)  $y''_i = 0 \quad k < i \leq n$

d) Il existe  $\lambda_0 > 0$  défini de manière unique tel que

$$r_i(r_i y''_i + u_i) = \lambda_0 y''_i \quad 1 \leq i \leq k$$

$\lambda_0$  est calculé de telle manière que  $\sum_{i=1}^k (y''_i)^2 = 1$ .

2°) Soit  $Y' = (y'_i \mid 1 \leq i \leq m)$  une solution de (P<sub>1</sub>)

a) Si  $(r_{k+1})^2 \leq \lambda_0$ ,  $Y'' = Y'$

b) Si  $(r_{k+1})^2 > \lambda_0$ ,  $Y''$  n'est pas solution de P1 et  $Y'$  vérifie les conditions.

c)  $y'_i > 0, \quad 1 \leq i \leq k+1$

d)  $y'_i = 0, \quad k+1 < i \leq n$

e)  $r_i(r_i y'_i + u_i) = (r_{k+1})^2 y'_i, \quad 1 \leq i \leq k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} (y'_i)^2 = 1.$$

Démonstration : La condition 1-c) est évidente.

Soit  $Y^1 = (y^1_i, \quad 1 \leq i \leq m)$  tel que  $\|Y^1\|^2 \leq 1$  et  $y^1_1 < 0$ .

Posons  $Y^2 = (-y^1_1, y^1_2, \dots, y^1_m)$ . Alors  $\|Y^2\|^2 \leq 1$  et puisque

$r_1 > 0$  et  $u_1 > 0$ ,  $|r_1 y_1 + u_1| < |-r_1 y_1 + u_1|$  ce qui implique  $g_1(Y^2) > g_1(Y^1)$ .

$Y''$  vérifie donc la relation  $Y'' \geq 0$ .

$Y''$  vérifie les conditions d'optimalité (conditions de Lagrange) écrites en 1-d). Ces conditions imposent  $\lambda_0 > 0$  et  $y_i'' > 0$

pour  $1 \leq i \leq k$ .  
 On a donc  $y_i'' = \frac{r_i u_i}{\lambda_0 - r_i^2}$   
 et  $\lambda_0$  est déterminé de telle manière que  $\sum_{i=1}^k (y_i'')^2 = 1$ .

Notons que  $\lambda_0 = r_i^2 + \frac{u_i^2}{y_i^2} > r_i^2$

Comme, d'autre part, la fonction  $\lambda \rightarrow \left( \frac{r_i u_i}{\lambda - r_i^2} \right)^2$  est strictement décroissante en  $\lambda$  pour  $\lambda > r_i^2$ ,  $\lambda_0$  est déterminé de manière unique.

3°) Puisque  $r_{k+1} \geq r_{k+2} \dots \geq r_n$ , il est évident, étant donné la forme de la fonction  $g(Y)$  qu'on pourra supposer que  $Y' = (y_i', 1 \leq i \leq m)$  satisfait les conditions  $y_{k+1}' \geq 0$ ,  $y_i' = 0, \forall k+1 < i \leq n$ .

D'autre part, pour les mêmes raisons qu'au 1°),  $y_i' \geq 0, \forall 1 \leq i \leq k$ . Supposons  $y_{k+1}' > 0$ .

$Y'$  est alors déterminé par les conditions de Lagrange. :

$$r_i (r_i y_i' + u_i) = \lambda y_i'$$

$$(r_{k+1})^2 y_{k+1}' = \lambda y_{k+1}'$$

On a donc  $\lambda = (r_{k+1})^2$ .

Si  $r_{k+1} \leq \lambda_0$ , puisque la fonction  $\lambda \rightarrow \left( \frac{r_i u_i}{\lambda - r_i^2} \right)^2$  est décroissante en  $\lambda$  pour  $\lambda > r_i^2, \forall 1 \leq i \leq n$ , on a :

$$\sum_{i=1}^k (y_i')^2 \geq \sum_{i=1}^k (y_i'')^2 \geq 1.$$

Ceci impose donc  $Y'' = Y'$ .

$$\text{Si } r_{k+1} > \lambda_0, \quad \sum_{i=1}^k (y_i')^2 < \sum_{i=1}^k (y_i'')^2 = 1.$$

Donc on peut calculer  $y_{k+1}'$  de manière unique par la relation :

$$\sum_{i=1}^{k+1} (y_i')^2 = 1$$

et les conditions de Lagrange peuvent être vérifiées.

Il suffit pour terminer la démonstration de montrer que si  $r_{k+1} > \lambda_0$ ,  $Y'$  satisfait la condition  $y_{k+1}' > 0$ .

$$\text{Posons } b = (y_{k+1}')^2$$

$$\text{et } h(b) = \max\{g_1(Y) \mid \|Y\|^2 \leq 1-b\} + (r_{k+1})^2 b$$

$$\text{On a alors } z = \max_{0 \leq b \leq 1} h(b)$$

La théorie des multiplicateurs de Lagrange montre que :

$$\frac{dh}{db}(0) = -\lambda_0 + (r_{k+1})^2$$

Si  $(r_{k+1})^2 > \lambda_0$ , on peut trouver  $0 < b \leq 1$  tel que  $h(b) > h(0)$ . Ceci montre que la solution optimale  $Y'$  de  $P_1$  :  $Y'$  satisfait :

$$y_{k+1}' > 0$$

Donc  $Y' \neq Y''$  et  $Y'$  est déterminé par les conditions de Lagrange 2-e.

d-5) Propriété 8 : Si  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  est une forme bilinéaire irré-

$$\text{ductible, } \bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \text{st.}$$

Démonstration :

1) Montrons d'abord que  $u_i = 0, \forall 1 \leq i \leq k$ .

Supposons que l'on ait :  $u_1 > 0$  et  $r_1 > 0$ .

Soit  $Y' = (y_i' \quad 1 \leq i \leq m)$  la solution du programme (P1) vérifiant les propriétés de la proposition 7

$$\begin{aligned} \text{Posons} \quad r_1(\epsilon) &= r_1 + \epsilon \\ u_1(\epsilon) &= u_1 - \epsilon y_1' \end{aligned}$$

On supposera  $\epsilon$  suffisamment petit et  $\epsilon \neq 0$  de telle manière que :

$$\begin{aligned} r_1(\epsilon) &> 0 & r_1(-\epsilon) &> 0 \\ u_1(\epsilon) &> 0 & u_1(-\epsilon) &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{Soit } g_\epsilon(Y) = (r_1(\epsilon) y_1 + u_1)^2 + \sum_{i=2}^k (r_i y_i + u_i)^2 + \sum_{i=k+1}^n r_i^2 y_i^2$$

Dans le cas où  $r_{k+1} > \lambda_0$  on sait par la propriété précédente que :

$$\bar{z} = \max\{g(Y) \mid \|Y\|^2 \leq 1; y_i = 0, k+1 \leq i \leq n\} < \max\{g(Y) \mid \|Y\|^2 \leq 1\} = z$$

On peut donc trouver  $\epsilon_0 > 0$  suffisamment petit pour que :

$\forall \epsilon$  tel que  $|\epsilon| \leq \epsilon_0$

$$\max\{g_\epsilon(Y) \mid \|Y\|^2 < 1; y_i = 0 \quad k+1 \leq i \leq n\} < z$$

On supposera donc dans ce cas qu'on prendra  $\epsilon$  tel que  $|\epsilon| \leq \epsilon_0$ .

Dans ces conditions en remplaçant la fonction  $g(Y)$  par  $g_\epsilon(Y)$ , et en appliquant la propriété précédente, on vérifie immédiatement que  $Y'$  est également solution du programme :

$$z_\epsilon = \max\{g_\epsilon(Y) \mid \|Y\|^2 \leq 1\}$$



Comme  $g_\varepsilon(Y') = g(Y')$  (puisque  $r_1(\varepsilon) y_1' + y_1(\varepsilon) = r_1 y_1' + u_1$ )  
on a  $z_\varepsilon = z$ .

$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  étant une forme bilinéaire positive sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$ ,  $z \leq 1$ .

Donc la forme bilinéaire  $\bar{F}_\varepsilon(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) + \varepsilon x_1 y_1 - (\varepsilon y_1') \cdot x_1 t$   
est également une forme bilinéaire positive sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$ , non  
proportionnelle à  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$ .

$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{1}{2} \bar{F}_\varepsilon(\bar{X}, \bar{Y}) + \frac{1}{2} \bar{F}_{-\varepsilon}(\bar{X}, \bar{Y})$ , ce qui montre que  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$   
n'est pas une forme bilinéaire irréductible sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$ .

Donc si  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  est une forme bilinéaire irréductible sur  
 $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$  :

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \sum_{i=1}^n r_i x_i y_i + st$$

2) Montrons que  $r_i = +1$ ,  $\forall 1 \leq i \leq n$

Supposons ceci faux. On peut supposer en rénumérotant les  
variables que

$$0 \leq r_1 < 1$$

Choisissons  $\varepsilon$  tel que  $r_1 + |\varepsilon| \leq 1$

Posons  $\bar{F}_\varepsilon(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) + \varepsilon x_1 y_1$

Puisque  $r_1 + |\varepsilon| \leq 1$ ,  $\bar{F}_\varepsilon(\bar{X}, \bar{Y})$  et  $\bar{F}_{-\varepsilon}(\bar{X}, \bar{Y})$  sont 2 forme bilinéaire  
positives sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$  non proportionnelles à  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$ .

Comme  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{1}{2} \bar{F}_\varepsilon(\bar{X}, \bar{Y}) + \frac{1}{2} \bar{F}_{-\varepsilon}(\bar{X}, \bar{Y})$ , on aboutit à une  
contradiction.

d-6) Caractérisation des formes bilinéaires irréductibles  
sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$

Théorème 9 :  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  est une forme bilinéaire irréductible sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$  si et seulement si il existe 2 transformations invariantes :

$\bar{B} \in H(\bar{E}_1)$  et  $\bar{C} \in H(\bar{E}_2)$  telles que  $\bar{F}(\bar{B}\bar{X}, \bar{C}\bar{Y})$  peut s'écrire sous une des deux formes :

$$- \bar{F}(\bar{B}\bar{X}, \bar{C}\bar{Y}) = x_1 y_1 + x_1 t + s y_1 + st$$

$$- \bar{F}(\bar{B}\bar{X}, \bar{C}\bar{Y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i + st \text{ (à condition que } m \geq n > 1). \quad \square$$

Démonstration : Soit  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  une forme bilinéaire positive sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$ .

Si  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  est du premier type par les résultats énoncés au théorème 6,  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  est irréductible si et seulement si on peut trouver 2 transformations invariantes  $\bar{B} \in H(\bar{E}_1)$  et  $\bar{C} \in H(\bar{E}_2)$  telles que :

$$\bar{F}(\bar{B}\bar{X}, \bar{C}\bar{Y}) = (x_1 + s)(y_1 + t).$$

Si  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  est du deuxième type et  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  est irréductible, la propriété 8 montre qu'il existe  $\bar{B} \in H(\bar{E}_1)$  et  $\bar{C} \in H(\bar{E}_2)$  telles que :

$$\bar{F}(\bar{B}\bar{X}, \bar{C}\bar{Y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i + st$$

Le théorème sera démontré si on prouve que la forme bilinéaire

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i + st$$

est une forme irréductible sur  $K_1 \times K_2$

$$\text{Posons } X_i^+ \begin{cases} x_j = 0 & \text{si } j \neq i \\ x_i = +1 \\ s = +1 \end{cases}$$

$$\text{et } X_i^- \begin{cases} x_j = 0 & \text{si } j \neq i \\ x_i = -1 \\ s = +1 \end{cases}$$

$$\text{Soit } \bar{V}_i^+ = \bar{A} \bar{X}_i^+$$

$$\text{et } \bar{V}_i^- = \bar{A} \bar{X}_i^- \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\text{On a donc } \bar{F}(\bar{X}_i^+, \bar{Y}) = \langle \bar{V}_i^+, \bar{Y} \rangle = y_i + t \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\text{et } \bar{F}(\bar{X}_i^-, \bar{Y}) = \langle \bar{V}_i^-, \bar{Y} \rangle = -r_i + t \quad 1 \leq i \leq n$$

$\bar{V}_i^+$  et  $\bar{V}_i^-$  sont donc 2 directions extrêmes du cône  $\bar{K}_2^0$ ,  
 $\forall 1 \leq i \leq n$ .

Supposons qu'on puisse écrire

$$\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{F}_1(\bar{X}, \bar{Y}) + \bar{F}_2(\bar{X}, \bar{Y})$$

$$\text{où } \bar{F}_1(\bar{X}, \bar{Y}) = \langle (\bar{A}_1 \bar{X})^T, \bar{Y} \rangle$$

$$\text{et } \bar{F}_2(\bar{X}, \bar{Y}) = \langle (\bar{A}_2 \bar{X})^T, \bar{Y} \rangle$$

sont 2 formes bilinéaires positives sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$ .

$$\text{On a alors : } \bar{V}_i^+ = \bar{A}_1 \bar{X}_i^+ + \bar{A}_2 \bar{X}_i^+$$

Comme  $\bar{A}_1 \bar{X}_i^+ \in \bar{K}_2^0$  et  $\bar{A}_2 \bar{X}_i^+ \in \bar{K}_2^0$  et comme  $\bar{V}_i^+ \in \varepsilon(\bar{K}_2^0)$ , on doit avoir

$$\text{et } \begin{cases} \bar{A}_1 \bar{X}_i^+ = \lambda_1(\bar{X}_i^+) \cdot \bar{V}_i^+ \\ \bar{A}_2 \bar{X}_i^+ = \lambda_2(\bar{X}_i^+) \cdot \bar{V}_i^+ \end{cases}$$

De même

$$\bar{A}_1 \bar{X}_i^- = \lambda_1(\bar{X}_i^-) \cdot \bar{V}_i^- \text{ et } \bar{A}_2 \bar{X}_i^- = \lambda_2(\bar{X}_i^-) \cdot \bar{V}_i^-$$

Mais

$$\bar{X}_0 = \frac{\bar{X}_i^+ + \bar{X}_i^-}{2} \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

$$\text{Donc } \bar{F}_1(\bar{X}_0, \bar{Y}) = \frac{1}{2} \langle (\lambda_1(\bar{X}_i^+) \cdot \bar{V}_i^+ + \lambda_1(\bar{X}_i^-) \cdot \bar{V}_i^-)^T, \bar{Y} \rangle$$

$$\bar{F}_1(\bar{X}_0, \bar{Y}) = \frac{1}{2} [\lambda_1(\bar{X}_i^+) - \lambda_1(\bar{X}_i^-)] y_i + \frac{1}{2} [\lambda_1(\bar{X}_i^+) + \lambda_1(\bar{X}_i^-)] t$$

En considérant 2 indices distincts  $i$  et  $j$ , on a immédiatement le résultat suivant :

$$\lambda_1(\bar{X}_i^+) - \lambda_1(\bar{X}_i^-) = 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\lambda_1(\bar{X}_i^+) + \lambda_1(\bar{X}_i^-) = \lambda_1$$

$$\implies \lambda_1(\bar{X}_i^+) = \lambda_1(\bar{X}_i^-) = \lambda_1 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Les vecteurs  $[\bar{X}_i^+, \bar{X}_i^- ; 1 \leq i \leq n]$  engendrant tout l'espace  $\bar{E}_1$ ,

$$\text{on a donc } \bar{A}_1 \bar{X} = \lambda_1 \bar{A} \bar{X} \quad \forall X \in E_1$$

$$\implies \bar{F}_1(\bar{X}, \bar{Y}) = \lambda_1 \bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$$

$$\text{De même } \bar{F}_2(\bar{X}, \bar{Y}) = \lambda_2 \bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$$

$\bar{F}_1(\bar{X}, \bar{Y})$  et  $\bar{F}_2(\bar{X}, \bar{Y})$  sont 2 formes proportionnelles à  $\bar{F}$ , ce qui montre que  $\bar{F}(\bar{X}, \bar{Y})$  est une forme bilinéaire irréductible sur  $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$ .

Si  $n = 1$ ,  $\bar{K}_1$  est un cône simplicial et par le théorème 4 du chapitre IV, les seules formes bilinéaires irréductibles sont de type I.

### III - PRODUIT TENSORIEL D'ENSEMBLES POLAIRES D'HYPERCUBES

#### a) Définitions

Soient  $C_n$  et  $C_m$  les deux hypercubes de  $E_1$  et  $E_2$ .

$$C_n = \{X \mid -1 \leq x_i \leq +1 \quad \forall 1 \leq i \leq n\}$$

$$C_m = \{Y \mid -1 \leq y_j \leq +1 \quad 1 \leq j \leq m\}$$

$$\text{Posant } e_i = \begin{cases} x_j = 0 & \text{si } j = i \\ x_i = 1 & \quad \quad \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\text{et } f_i = \begin{cases} y_j = 0 & \text{si } j \neq i \\ y_i = 1 & \quad \quad \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

On peut définir  $K_n$  et  $K_m$  par :

$$K_n = \text{Conv}\{+e_i ; -e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

$$K_m = \text{Conv}\{f_j ; -f_j \mid 1 \leq j \leq m\}$$

Identifiant le dual  $E_1^0$  de  $E_1$  à  $E_1$ ,  $K_n$  apparaît comme l'ensemble polaire de  $C_n$ . De même  $K_m$  apparaît comme l'ensemble polaire de  $C_m$  [ex. ch.2]. Dans ce paragraphe, nous allons considérer les formes bi-affines irréductibles de  $K_n \times K_m$ .

b) Résultats préliminaires

- Soit  $F(X,Y)$  une forme bi-affine positive sur  $K_1 \times K_2$ .

- Comme  $X_0 = 0 \in \text{Int } K_n$  et  $Y_0 = 0 \in \text{Int } K_m$ , par le lemme 1 on pourra supposer que

$$F(X,Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j + \sum_{i=1}^n u_i x_i + \sum_{j=1}^m v_j y_j + 1$$


---

- D'autre part, une symétrie sur  $E_1$  transforme  $K_n$  en lui-même et une symétrie sur  $E_2$  transforme  $K_m$  en lui-même. D'autre part, on pourra éventuellement changer les variables  $x_i$  (resp.  $y_j$ ) en  $(-x_i)$  [resp.  $(-y_j)$ ],  $\forall 1 \leq i \leq n$ ,  $\forall 1 \leq j \leq m$ .

En particulier on supposera désormais :

$$u_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

$$v_j \geq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m$$

$F$  est positive sur  $K_1 \times K_m$  si et seulement si :

$$\forall 1 \leq i \leq n$$

et  $\forall 1 \leq j \leq m$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(+e_i, +f_j) \geq 0 \\ F(+e_i, -f_j) \geq 0 \\ F(-e_i, +f_j) \geq 0 \\ F(-e_i, -f_j) \geq 0 \end{array} \right.$$

On doit donc avoir :

$$S(i,j) \begin{cases} F(e_i, f_j) = a_{ij} + u_i + u_j + 1 \geq 0 & (1) \\ F(e_i, -f_j) = -a_{ij} + u_i - v_j + 1 \geq 0 & (2) \\ F(-e_i, f_j) = -a_{ij} - u_i + v_j + 1 \geq 0 & (3) \\ F(-e_i, -f_j) = a_{ij} - u_i - v_j + 1 \geq 0 & (4) \end{cases}$$

Pour chaque couple  $(i,j)$  on appellera  $S(i,j)$  le système de ces 4 inéquations.

Propriété 10 : Si  $F(X,Y)$  est une forme bi-affine positive sur  $K_n \times K_m$ , alors :

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad & |a_{ij}| \leq 1 \\ & |u_i| \leq 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n \\ & |u_j| \leq 1 \quad \forall 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

2°) Pour chaque système  $S(i,j)$ , au moins une des 4 inégalités est vérifiée strictement. Si 3 inégalités sont des égalités alors

$$|a_{ij}| = 1, |u_i| = 1 ; |v_j| = 1.$$

Démonstration :

1°) Sommons membre à membre les inégalités (1) et (4).

$\implies a_{ij} \leq 1$ . Puis sommons membre à membre (2) et (3).

$\implies a_{ij} \geq -1$ .

En prenant 2 inégalités et en les sommant membre à membre de cette manière, on trouve facilement les résultats énoncés.

2°) Supposons par exemple que (2), (3), (4) soient des égalités :

Alors on déduit :  $a_{ij} = +1$ ,  $u_i = +1$ ,  $v_j = +1$ .

Ceci montre également que l'inégalité 1 est satisfaite strictement.

Théorème 11 : Si  $F(X,Y)$  est une forme bi-affine irréductible,  $F$  peut s'écrire, après changement de signe éventuel des variables  $\{x_i\}$   $\{y_j\}$  et renumérotation des variables

$$F(X,Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} x_i y_j + (1 + \sum_{i=k}^n x_i) (1 + \sum_{j=\ell+1}^m y_j)$$

et  $a_{ij} = \pm 1$ .

Démonstration :

Soit  $[a_{ij}, u_i, v_j ; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m]$  une solution du système d'inéquations définies par  $\{S(i,j) \mid 1 \leq i \leq n ; 1 \leq j \leq m\}$ .

Les contraintes satisfaites avec égalité seront appelées contraintes serrées par rapport à la solution considérée, les contraintes satisfaites avec stricte égalité seront appelées contraintes lâches par rapport à la solution considérée.

Soit  $F(X,Y) = \sum \sum a_{ij} x_i y_j + \sum u_i x_i + \sum v_j y_j + 1$

une forme bi-affine positive sur  $K_n \times K_m$ .

α) Montrons que si  $F(X,Y)$  est irréductible :

-  $u_i = 0$  ou  $1 \quad \forall 1 \leq i \leq n$



- $v_j = 0$  ou  $1 \quad \forall 1 \leq j \leq m$
- Dans chaque système  $S(i,j)$  au moins un des contraintes est serrée par rapport à la solution  $(a_{ij}, u_i, v_j)$ .

β) Modification des coefficients  $(a_{ij}, u_i, v_j)$

- Posons
- +  $u_i(\epsilon) = u_i$  si  $u_i = 0$  ou  $1$
  - +  $u_i(\epsilon) = u_i + \epsilon$  si  $0 < u_i < 1$
  - +  $v_j(\epsilon) = v_j$  si  $v_j = 0$  ou  $1$
  - +  $v_j(\epsilon) = v_j + \epsilon$  si  $0 < v_j < 1$
  - + Si aucune contrainte de  $S(i,j)$  n'est serrée

$$a_{ij}(\epsilon) = a_{ij} + \epsilon$$

- + Si au moins une contrainte de  $S(i,j)$  est serrée, choisissons une de ces contraintes et définissons  $a_{ij}(\epsilon)$  de telle manière qu'elle soit encore serrée pour  $a_{ij}(\epsilon)$ ,  $[a_{ij}(\epsilon), u_i(\epsilon), v_j(\epsilon)]$ .

- + Choisissons  $\epsilon_0 > 0$  tel que les contraintes lâches des systèmes  $S(i,j)$  restent lâches pour  $[a_{ij}(\epsilon), u_i(\epsilon), v_j(\epsilon)]$  quel que soit

$$-\epsilon_0 \leq \epsilon \leq + \epsilon_0$$

- γ) Si dans un système d'inéquations  $S(i,j)$  il existe une contrainte serrée par rapport à  $(a_{ij}, u_i, v_j)$ , cette contrainte restera serrée par rapport à  $(a_{ij}(\epsilon), u_i(\epsilon), v_j(\epsilon))$ . Donc si  $-\epsilon_0 \leq \epsilon \leq + \epsilon_0$ ,  $(a_{ij}(\epsilon), u_i(\epsilon), v_j(\epsilon))$  est solution des 4 inéquations de  $S(i,j)$ .

δ) Il nous reste les cas suivants à examiner

- Les contraintes (2) et (3) de  $S(i,j)$  sont serrées
- les contraintes (2) et (4) de  $S(i,j)$  sont serrées
- Les contraintes (3) et (4) de  $S(i,j)$  sont serrées.

Etudions le premier de ces 3 cas, les 2 autres se traitant de façon similaire.

Si (2) et (3) sont serrées :

$$- a_{ij} + u_i - v_j + 1 = 0 \quad (2)$$

$$- a_{ij} - u_i = v_j + 1 = 0 \quad (3)$$

On en déduit  $u_i = v_j$  et  $a_{ij} = +1$

Par la règle de modification définie en b) :

$$u_i(\epsilon) = v_j(\epsilon) \quad \text{et} \quad a_{ij}(\epsilon) = +1$$

Donc  $[u_i(\epsilon), v_j(\epsilon), a_{ij}(\epsilon)]$  est solution de  $S(i,j)$ ,

$$\forall -\epsilon_0 \leq \epsilon \leq +\epsilon_0.$$

ε) Soit  $F(X,Y)$  la forme bi-affine définie à partir des coefficients  $\{a_{ij}(\epsilon), u_i(\epsilon), v_j(\epsilon) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$   
Par b), c), d), e)  $F_{\epsilon_0}(X,Y)$  et  $F_{-\epsilon_0}(X,Y)$  sont 2 formes bi-affines positives sur  $K_n \times K_m$ . D'autre part, une des conditions définies en a) n'est pas satisfaite, alors certains coefficients sont modifiés par la règle définie en b). Dans ce cas, on a donc  $F(X,Y) \neq F_{\epsilon_0}(X,Y)$ .

$$\text{Comme } F(X,Y) = \frac{1}{2}[F_{\epsilon_0}(X,Y) + F_{-\epsilon_0}(X,Y)].$$

Ceci montre que  $F(X,Y)$  n'est pas une forme irréductible.

φ) Fin de la démonstration

α) étant montré, on est nécessairement dans une des situations suivantes :

g-1  $u_i = 0, v_j = 0$ . Une des contraintes de  $S(i,j)$  devant être serrée, on en déduit :

$$a_{ij} = \pm 1$$

g-2  $u_i = 0, v_j = 1$ . Les contraintes (2) et (3) de  $S(i,j)$  montrent que  $a_{ij} = 0$ .

g-3  $u_i = 1, v_j = 0$ . Les contraintes (2) et (3) de  $S(i,j)$  montrent que  $a_{ij} = 0$ .

g-4  $u_i = 1, v_j = 1$ . Une des contraintes de  $S(i,j)$  devant être serrée, on trouve :

$$a_{ij} = +1$$

En renumérotant éventuellement les variables, on trouve le résultat énoncé dans le théorème.

On a alors le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 12 :  $F(X,Y)$  est une forme bi-affine irréductible, si et seulement si  $F(X,Y)$  satisfait les conditions suivantes :

- Après numérotation des variables et changement de signe éventuel de certaines variables ( $x_i ; 1 \leq i \leq n$ ) ou bien ( $y_j \mid 1 \leq j \leq m$ )  $F(X,Y)$  peut s'écrire :

$$F(X,Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} x_i y_j + (1 + \sum_{i=k+1}^n x_i) (1 + \sum_{j=\ell+1}^m y_j) \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } k \neq 0 \quad a_{1i} = 1 \quad 1 \leq i \leq k \\ \text{Si } j \neq 0 \quad a_{j1} = 1 \quad 1 \leq j \leq \ell \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } j \neq 0 \quad a_{j1} = 1 \quad 1 \leq j \leq \ell \end{array} \right. \quad (3)$$

$$a_{ij} = \pm 1 \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n ; 2 \leq j \leq m \quad (4)$$

$$\text{un des coefficients } a_{ij} \text{ est égal à } -1 \quad (5)$$

### Démonstration

a) Si  $F(X,Y)$  est irréductible,  $F(X,Y)$  satisfait les conditions (1) et (4), par le théorème précédent. D'autre part, par changement éventuel de certaines variables  $(x_i ; 1 \leq i \leq k)$  et  $(y_j ; 1 \leq j \leq \ell)$  on peut supposer que les conditions (2) et (3) sont également satisfaites.

Si (5) n'est pas satisfaite :

$$F(X,Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} x_i y_j + (1 + \sum_{i=k+1}^n x_i) (1 + \sum_{j=\ell+1}^m y_j)$$

$$\text{Posons } F_1(X,Y) = (1 + \sum_{i=1}^n x_i) (1 + \sum_{j=1}^m y_j)$$

$$\text{et } F_2(X,Y) = (1 - \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=k+1}^n x_i) (1 - \sum_{j=1}^{\ell} y_j + \sum_{j=\ell+1}^m y_j)$$

Alors  $F_1(X,Y)$  et  $F_2(X,Y)$  sont 2 formes bi-affines positives sur  $K_n \times K_m$ .

$$\text{D'autre part, } F(X,Y) = \frac{1}{2} [F_1(X,Y) + F_2(X,Y)].$$

Ceci montre que si (5) n'est pas réalisé :  $\Rightarrow F(X,Y)$  n'est pas irréductible.

b) Soit  $F(X,Y)$  satisfaisant les conditions (1), (2), (3), (4), (5) de l'énoncé du théorème

Supposons  $F(X,Y)$  non irréductible.

On peut trouver deux formes bi-affines  $F_1(X,Y)$  et  $F_2(X,Y)$  positives sur  $K_n \times K_m$  distinctes de  $F(X,Y)$  telles que

$$F(X,Y) = \frac{1}{2}[F_1(X,Y) + F_2(X,Y)]$$

$$\text{Posons } F_1(X,Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^1 x_i y_j + \sum_{i=1}^n u_i^1 x_i + \sum_{j=1}^m v_j^1 y_j + 1$$

$$F_2(X,Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 x_i y_j + \sum_{i=1}^n u_i^2 x_i + \sum_{j=1}^m v_j^2 y_j + 1$$

On doit donc avoir :

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij}^1 + a_{ij}^2) & \forall 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq m \\ u_i = \frac{1}{2}(u_i^1 + u_i^2) & \forall 1 \leq i \leq n \\ v_j = \frac{1}{2}(v_j^1 + v_j^2) & \forall 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Comme  $F_1(X,Y)$  et  $F_2(X,Y)$  sont positives sur  $K_n \times K_m$ , par la propriété 10, on a donc :

$$\text{Si } a_{ij} = 1 \quad a_{ij}^1 = a_{ij}^2 = a_{ij}$$

$$\text{Si } u_i = +1 \quad u_i^1 = u_i^2 = +1$$

$$\text{Si } v_j = +1 \quad v_j^1 = v_j^2 = +1$$

$$\text{Donc } a_{ij}^1 = a_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq k \quad 1 \leq j \leq \ell$$

$$a_{ij}^1 = a_{ij} \quad \forall k+1 \leq i \leq n \quad \ell+1 \leq j \leq m$$

$$u_i^1 = u_i = +1 \quad \forall k+1 \leq i \leq n$$

$$v_j^1 = v_j = +1 \quad \forall \ell+1 \leq j \leq m$$

Soit un couple  $(i,j)$  pour lequel  $a_{ij}^1 = +1$ .

Les contraintes (2) et (3) de  $S(i,j)$  montrent que  $u_i^1 = u_j^1$ .

De même si  $a_{ij}^1 = -1$ , les contraintes (1) et (4) de  $S(i,j)$  montrent que  $u_i^1 = -u_j^1$ .

Comme  $a_{1i}^1 = +1 \quad \forall 1 \leq i \leq k$  et

$$a_{j1}^1 = +1 \quad \forall 1 \leq j \leq \ell$$

on a donc  $u_i^1 = v_j^1 \quad \forall 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j \leq \ell$  (7)

Mais par (5) il existe  $1 \leq i \leq k$  et  $1 \leq j \leq \ell$  tel que  $a_{ij}^1 = -1$ .

On doit donc avoir  $u_i^1 = -v_j^1$  (8)

De (7) et (8) on déduit  $u_i^1 = v_j^1 = 0, \forall 1 \leq i \leq k ; 1 \leq j \leq \ell$  (9)

Enfin si  $u_i^1 = 1$  et  $v_j^1 = 0$  (ou  $u_i^1 = 0$  et  $v_j^1 = 1$ ) le système de contraintes  $S(i,j)$  montre que  $a_{ij}^1 = 0$  (10)

(6), (9) et (10) montrent alors que

$$a_{ij}^1 = a_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq n ; 1 \leq j \leq m$$

$$u_i^1 = u_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

$$v_j^1 = v_j \quad \forall 1 \leq j \leq m$$

Donc  $F_1(X,Y) = F(X,Y)$

De même  $F_2(X,Y) = F(X,Y)$

Ceci montre que  $F(X,Y)$  est irréductible.

#### Remarques :

1°) Comme il a été signalé au premier paragraphe de ce chapitre, les formes irréductibles sur  $K_n \times K_m$  sont en correspondance bi-univoque avec les points extrêmes de  $C_n \boxtimes C_m$ .

Soit  $X_1$  le point extrême du cube  $C_n$  suivant :

$$X_1 = [x_i = 1 ; \forall 1 \leq i \leq n]$$

De même définissons  $Y_1 = [y_j = 1 ; 1 \leq j \leq m]$  point extrême de  $C_m$ .

$$\text{Si } F(X,Y) = \left(1 + \sum_{i=1}^n x_i\right) \left(1 + \sum_{j=1}^m y_j\right) = [1 + \langle X_1, X \rangle][1 + \langle Y_1, Y \rangle]$$

le point extrême associée à  $F$  est :  $Z = (Z,1) = (X_1,1) \otimes (Y_1,1)$

$$\text{Si } F(X,Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} x_i y_j + \left(1 + \sum_{i=k+1}^n x_i\right) \left(1 + \sum_{j=\ell+1}^m y_j\right),$$

le point extrême associé  $Z = [Z,X,Y,1]$  est défini par les relations suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} z_{ij} = a_{ij} \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq m \\ x_i = \begin{cases} 0 & 1 \leq i \leq k \\ 1 & k+1 \leq i \leq n \end{cases} \\ y_j = \begin{cases} 0 & 1 \leq j \leq \ell \\ 1 & \ell+1 \leq j \leq m \end{cases} \end{array} \right.$$

#### IV - PRODUIT TENSORIEL DIRECT DE DEUX HYPERCUBES

Dans le paragraphe précédent, on a caractérisé les formes irréductibles de  $K_n \otimes K_m$ , c'est à dire les points extrêmes de  $C_n \boxtimes C_m$ .

Le problème de la caractérisation des formes irréductibles de  $C_n \otimes C_m$  (et par conséquent de la caractérisation des points extrêmes de  $K_n \boxtimes K_m$ ) est beaucoup plus difficile.

Nous poserons les deux conjectures suivantes :

1°) C<sub>1</sub> - Les formes irréductibles de  $C_n \otimes C_m$  s'écrivent sous la forme

$$F(X,Y) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i + \sum_{j=1}^m \eta_j y_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \epsilon_{ij} x_i y_j + k$$

$$\text{avec } \epsilon_i = \pm 1 \text{ ou } 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\eta_j = \pm 1 \text{ ou } 0 \quad 1 \leq j \leq m$$

$$\epsilon_{ij} = \pm 1 \text{ ou } 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq m$$

2°) C<sub>2</sub> - Les formes irréductibles de  $C_n \otimes C_m$  qui ne sont pas associées à des points extrêmes de  $K_n \otimes K_m$  sont de la forme

$$F(X,Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \epsilon_{ij} x_i y_j + k$$

$$\text{avec } \epsilon_{ij} = 0, 1 \text{ ou } -1 \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq m$$

Cette deuxième conjecture est plus forte que la première.

Notons que ces deux conjectures sont vraies dans le cas  $n = 2$ ,  $m = 2$ .

En effet, si  $n = 2$ ,  $C_n$  est défini par :

$$C_n = [(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq +1 \quad ; \quad -1 \leq x_2 \leq +1]$$

De même

$$C_m = [(y_1, y_2) : -1 \leq y_1 \leq +1 \quad ; \quad -1 \leq y_2 \leq +1]$$



Posons  $X' = (x'_1, x'_2)$  et  $Y' = (y'_1, y'_2)$  et soient B et C les 2 transformations linéaires  $X' = BX$  et  $Y' = CY$  définies comme il suit :

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \\ x'_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'_1 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \\ y'_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \end{cases}$$

Par ces automorphismes linéaires  $C_n$  (resp.  $C_m$ ) est transformé en  $K_n$  (resp. en  $K_m$ ).

$F_1(X', Y')$  est une forme bi-affine irréductible sur  $K_n \times K_m$  si et seulement si  $F(X, Y) = F_1(BX, CY)$  est une forme bi-affine irréductible sur  $C_n \times C_m$ .

Appliquons le théorème 2 :

$$1^\circ) \text{ Si } k = \ell = 0, \text{ alors } F_1(X', Y') = (1 + x'_1 + x'_2)(1 + y'_1 + y'_2)$$

$$\text{Donc } F(X, Y) = (1 + x_1)(1 + y_1) \quad (1)$$

$$2^\circ) \text{ Si } k = \ell = m, \text{ alors } F_1(X', Y') = x'_1 y'_1 + x'_1 y'_2 + x'_2 y'_1 + x'_2 y'_2 +$$

$$\text{Alors } F(X, Y) = \frac{1}{2}\{x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2 + 2\} \quad (2)$$

La forme bi-affine (1) est associée au point extrême  $(e_1, 1) \otimes (f_1, 1)$  de  $K_n \otimes K_m$ .

Toutes les formes bi-affines irréductibles sur  $K_n \otimes K_m$  se déduisent de (1) et (2) par changement de signe de certaines variables  $(x_1, x_2, y_1, y_2)$ .

## V - CONCLUSION

1) Il n'est pas surprenant que la caractérisation des facettes de deux polaires d'hypercubes soit plus aisée que le problème de la caractérisation des facettes de deux hypercubes.

En effet comme il a été noté par plusieurs auteurs [ 5 ], [ 9 ], [16] le problème de caractériser un polyèdre  $K$  par ses facettes quand on connaît ses points extrêmes est intimement lié à la difficulté de résolution du problème de programmation linéaire :

$$z = \min\{\langle C^T, X \rangle \mid X \in K\}$$

pour une fonction objectif  $\langle C^T, X \rangle$  quelconque.

Quand des algorithmes de la classe (P) existent pour résoudre le problème de la programmation linéaire, on sait en général (à quelques exceptions cependant, voir [16]) caractériser les facettes de  $K$ . Quand le problème de la programmation linéaire est NP-complet, on sait au contraire caractériser les facettes de  $K$ .

Or le problème de programmation linéaire dans le cas du polyèdre  $K_n \times K_m$  est très simple puisque le nombre de points extrêmes de  $K_n \otimes K_m$  est égal au produit du nombre de points extrêmes de  $K_n$  par le nombre de points extrêmes de  $K_m$ , c'est à dire  $4n \times m$ . Par simple énumération des points extrêmes de  $K_n \otimes K_m$ , on a donc un algorithme polynomial en  $n \times m$  pour résoudre le problème de programmation linéaire sur  $K_n \otimes K_m$ .

Au contraire dans le cas de  $C_n \otimes C_m$  le nombre de points extrêmes de  $C_n \times C_m$  est  $2^n \times 2^m$ . D'autre part, le problème de programmation linéaire sur  $C_n \otimes C_m$  est équivalent au problème de programmation bilinéaire sur  $C_n \times C_m$  qui est un problème NP-complet.

En effet, on peut montrer que ce problème recouvre la plupart des problèmes d'optimisation combinatoire (cycles hamiltoniens dans un graphe [16], stable maximum dans un graphe [16], etc...).

2) Nous allons, pour conclure, montrer l'intérêt de l'étude des conjectures formulées lors de l'étude du produit tensoriel de 2 hypercubes (paragraphe IV).

Soit  $G = (V, E)$  un graphe dont  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  l'ensemble des arêtes.

On posera  $|V| = n$ .

Associant à chaque sommet  $v_i \in V$  une variable  $x_i$ , le problème de la détermination d'un ensemble stable de cardinalité maximum peut se formuler de la manière suivante :

$$(P) \begin{cases} x_i \geq 0 & \forall 1 \leq i \leq n & x_i = 0 \text{ ou } 1 \\ x_i + x_j \leq 1 & \forall (v_i, v_j) \in E \\ \max \sum_{i=1}^n x_i \end{cases}$$

Ce problème de la classe NP-complet peut se formuler comme un problème de programmation quadratique

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i \geq 0 \\ x_i + x_j \leq 1 \quad \forall (v_i, v_j) \in E \\ x_i \cdot x_j = 0 \quad \forall (v_i, v_j) \in E \\ x_i(1-x_i) = 0 \\ \max \sum_{i=1}^n x_i \end{array} \right.$$

Ce problème peut se formuler comme un problème de programmation bilinéaire où les 2 ensembles convexes  $K_1'$  et  $K_2'$  sont :

$$K_1' = \{X = (x_i ; 1 \leq i \leq n) \quad 0 \leq x_i \leq 1\}$$

$$K_2' = \{Y = (y_j ; 1 \leq j \leq n) \quad 0 \leq y_j \leq 1\}$$

Pour cette formulation voir [21].

Notons que  $K_1'$  et  $K_2'$  sont isomorphes à  $K_n$ .

Si on pouvait caractériser certaines facettes de  $K_1' \otimes K_2'$ , on pourrait appliquer des méthodes de coupes semblables à celles utilisées par [1], [7], [24] pour résoudre le problème de stable de cardinalité maximum dans un graphe. Ce sont ces mêmes motivations qui ont inspiré de nombreux auteurs pour étudier les problèmes d'optimisation combinatoire dans un but de résolution pratique de ces problèmes (voir par exemple [10]). La formulation de ces problèmes par l'intermédiaire des produits tensoriels d'ensembles convexes étant nouvelles, on peut donc mettre en oeuvre de nouvelles approches pour les problèmes d'optimisation combinatoire NP-complets.

3) Notons enfin que si une de deux conjectures posées au paragraphe IV était vraie, et si on pouvait caractériser

un temps polynomial si un couple de points  $(X \otimes Y)$  satisfait à toutes les contraintes définissant  $C_n \otimes C_m$ , alors on montrerait grâce aux derniers travaux sur la complexité d'algorithme (8), (11) que  $P = NP$ . Ceci ne montre pas que les conjectures sont fausses. Il est en effet possible que le fait de détecter une contrainte violée par un point  $(X \otimes Y)$  soit un problème NP-complet.

ANNEXE I

Communication faite au "Fünf Symposium Über operations Research"  
Köln 25-27 août 1980.

Dans cette annexe, sont très brièvement résumés les résultats expérimentaux de résolution du problème de programmation bilinéaire, par l'utilisation du produit tensoriel polaire de deux ensembles convexes  $K_1$  et  $K_2$ .



RESOLUTION OF THE BILINEAR PROGRAMMING PROBLEM  
VIA A RELAXATION METHOD

A.Chagoya-Guzman and J. Fonlupt, Grenoble

1) Introduction

The bilinear programming problem (B.P.P.) may be defined in the following form :  $\bar{v} = \min[v(x,y) = \langle p^T, x \rangle + \langle q^T, y \rangle + \langle x^T, Cy \rangle ; x \in K_1, y \in K_2]$  where  $K_1 = \{x \geq 0 ; Ax = e\}$   $K_2 = \{y \geq 0 ; By = f\}$  are two polytopes.

$$x \in R^{n_1} ; p \in R^{n_1} ; y \in R^{n_2} ; q \in R^{n_2} ; e \in R^{m_1} ; f \in R^{m_2}$$

$$A \in R^{m_1 \times n_1} ; B \in R^{m_2 \times n_2} ; C \in R^{n_1 \times n_2}$$

The main interest in this problem is that it includes many well-known combinatorial problems (concave quadratic programming, 0-1 integer programming). This is also a reason for its difficulty. In fact, (B.P.P.) obviously is a NP complete problem. To get a local optimum is easy : if we fix one of the two sets of variables (x,y) (B.P.P.) is reduced to a linear program where the variables are the other set of variables x or y.

Starting from  $x_0 \in K_1$  and  $y_0 \in K_2$  and fixing alternatively x or y we reach a local optimum of (B.P.P.) (2,4).

But our goal is to find the global optimum  $(\bar{x}, \bar{y})$  and the value  $\bar{v} = v(\bar{x}, \bar{y})$  of (B.P.P.) and we need to use special methods for non convex problems.

Existing algorithms are based on :

- Cutting (or convexity cuts) methods. See for instance (4,5)
- Branch and bound methods.

We present an algorithm of this last type : we associate to the original problem (B.P.P.) a linear program (P). All the feasible solutions (x,y)



of (B.P.P.) define feasible solutions of (P). Therefore the value  $v_a$  of (P) is a lower bound for the value  $\bar{v}$  of (B.P.P.). We use this lower bound in a Branch and Bound strategy.

## 2) Description of the linear program (P)

a) To each product  $x^i \cdot y^j$  we associate a variable  $x^i \circ y^j$ . Let  $z$  be the vector

$$z = [x^i \circ y^j, x^i, y^j \quad 1 \leq i \leq n_1 ; 1 \leq j \leq n_2].$$

Note that  $z \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 + n_1 + n_2}$

The first set of constraints is  $\underline{z \geq 0} \quad (1).$

b) Starting from a constraint of  $K_1 \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_{\ell, i} x^i - e_{\ell} \right) = 0$  and the

constraint  $y^j \geq 0$  we obtain the relation  $\sum_{i=1}^{n_1} (a_{\ell, i} x^i - e_{\ell}) \cdot y_j = 0$ . Let

us replace each product  $x^i \cdot y^j$  by the variable  $x^i \circ y^j$ . We obtain a linear constraint  $\sum a_{\ell, i} x^i \circ y^j - e_{\ell} \cdot y^j = 0$ . The set of constraints obtained

by this method will be noted  $\underline{Ax \circ y^j - ey^j = 0} \quad (2)$ . [Setting  $x \circ y^j = (x^i \circ y^j \quad 1 \leq i \leq n_1)$ ].

c) Similarly setting  $x^i \circ y = (x^i \circ y^j \quad 1 \leq j \leq n_2)$  we obtain a set of constraints.  $\underline{Bx^i \circ y - fx^i = 0} \quad (3)$ .

d) The set  $\underline{K_1 \boxtimes K_2}$  is defined by

$$z \geq 0 \quad (1)$$

$$Ax \circ y^j - ey^j = 0 \quad 1 \leq j \leq n_2 \quad (2)$$

$$Bx^i \circ y - fx^i = 0 \quad 1 \leq i \leq n_1 \quad (3)$$

$$Ax = e \quad (4)$$

$$By = f \quad (5)$$

The objective function of (P) is  $\langle \bar{c}, z \rangle = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} c_{ij} x^i \circ y^j + \langle p^T, x \rangle + \langle q^T, y \rangle$ .

(P) is defined by  $\boxed{v_a = \min \langle \bar{c}, z \rangle ; Z \in K_1 \boxtimes K_2}$

### 3) Resolution of (P)

#### a) Theoretical results

All these results are proved in (3).

For  $\bar{x} \in K_1$  and  $\bar{y} \in K_2$  define  $\bar{x} \boxtimes \bar{y} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 + n_1 + n_2}$  by

$$\bar{x} \boxtimes \bar{y} = [x^i \cdot y^j = \bar{x}^i \cdot \bar{y}^j \ ; \ x^i = \bar{x}^i \ ; \ y^j = \bar{y}^j \quad 1 \leq i \leq n_1 \ ; \ 1 \leq j \leq n_2]$$

Theorem 1 :  $\bar{x} \boxtimes \bar{y} \in K_1 \boxtimes K_2$

Theorem 2 : If  $\bar{x} \in K_1$  is an extreme point of  $K_1$  and  $\bar{y} \in K_2$  is an extreme point of  $K_2$ ,  $\bar{x} \boxtimes \bar{y}$  is an extreme point of  $K_1 \boxtimes K_2$ .

Application :-  $v_a \leq \bar{v}$ . (From theorem 1)

- If the solution of (P) is of the form  $\bar{x} \boxtimes \bar{y}$  where  $\bar{x}$  (resp.  $\bar{y}$ ) is an extreme point of  $K_1$  (resp.  $K_2$ )  $(\bar{x}, \bar{y})$  is the solution of (B.P.P.) and  $v_a = \bar{v}$ . (From theorem 2).

#### b) Description of the algorithm

1) The linear program (P) is a large scale linear program with a special structure. We use this nice structure to implement an efficient method of resolution of (P).

2) We do not want to solve completely (P). We need only a lower bound to the value of (B.P.P.). Consequently our algorithm is a dual algorithm and we are searching for a "good" dual feasible solution of (P). When the computer time to improve the best dual feasible solution obtained so far, is too important, we stop the investigation of (P) keeping for lower bound of (B.P.P.) the best value of the dual objective function of (P).

3) The algorithm fully described in (1), (2) is very efficient for the class of constraints appearing in  $K_1 \boxtimes K_2$ . This algorithm avoids pivoting methods but does not guarantee (at least in theory) that the optimum solution of (P) is obtained.

### 4) Conclusion

In all the tests we studied, one of the two polytopes  $K_1$  was an hyper-cube  $K_1 = [x_i \geq 0 \quad x_i + x_{\frac{n_1}{2} + i} = 1; 1 \leq i \leq \frac{n_1}{2}]$ . The other polytope  $K_2$

was either an hypercube or a randomly generated polytope. The coefficients of the objective function were randomly generated. The interval of generation was  $[0,100]$  or  $[0,200]$ .

For all the examples, the algorithm of resolution of (P) is very efficient.

Moreover when  $K_2$  is randomly generated the solution of (P) gives for almost all the examples the solution of (B.P.P.). When  $K_2$  is an hypercube, the number of nodes in the exploration tree of the branching procedure never exceeds 12. The C.P.U. time never exceeded 20 seconds on the computer IRIS 80 of Grenoble University. In conclusion our method seems efficient for randomly generated polytopes, corresponding to practical problems, in spite of the fact that (as all the other algorithms) it can be unefficient for some well specified combinatorial problems.

### References

- [1] A. CHAGOYA-GUZMAN : Programmation bilinéaire. Une approche de résolution par relaxation. Thèse de 3ème cycle.
- [2] A. CHAGOYA-GUZMAN, J. FONLUPT : A Branch and Bound algorithm for the bilinear programming problem. (To appear).
- [3] J. FONLUPT : Tensor product of convex sets. Combinatorial structures Rapport de Recherche, Université de Grenoble.
- [4] H. KONO : A cutting plane algorithm for solving bilinear programs. Mathematical programming 11, (1976).
- [5] H. TUI : Concave minimization over a convex polyhedron. Soviet Mathematics 5, (1964).

#### Address:

Laboratoire d'Informatique et  
de Mathématiques Appliquées  
B.P. 53 X  
F-38041-Grenoble Cédex

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. BALAS  
Intersection cuts. A new type of cutting planes for integer programming. Operations Research 19, (1971).
- [2] A. CHAGOYA-GUZMAN, J. FONLUPT  
Resolution of the bilinear programming problem via a relaxation method. Symposium über operations research. Août 1980.
- [3] A. CHAGOYA-GUZMAN, J. FONLUPT  
Resolution of the bilinear programming problem via a relaxation method. Rapport de Recherche, IRMA (Grenoble), soumis à Mathematical Programming.
- [4] J. FONLUPT  
Quelques propriétés des produits tensoriels d'ensembles convexes. (Séminaire Analyse Numérique, Grenoble 1977, n° 789).
- [5] J. FONLUPT, J.P. UHRY  
Transformations which preserve perfectness and h-perfectness. Rapport de Recherche, Grenoble, Janvier 1981. Workshop on combinatorial Optimization. Bonn, Août 1980. Soumis à "Annals of Discrete Mathematics".
- [6] M.R. GAREY et D.S. JOHNSON  
Computers and Intractability. A guide to the theory of NP-Completeness. H. Freeman S.F. (1978).
- [7] F. GLOVER  
Convexity cuts and cut search. Operations Research, Vol. 21, n° 1, (1973).
- [8] M. GRÖTSCHHEL, L. LOVÁSZ and A. SCHRIVER  
The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. Rapport de Recherche, Université de Bonn, W.P. 80150.

- [9] B. GRUNBAUM  
Convex polytopes.(Wiley and Sons).
- [10] P.L. HAMMER, P. HANSEN and B. SIMEONE  
Best linear Relaxations for quadratic 0-1 optimization.  
Istituto per le applicacione del Calcola M. Picone,  
August 1976.
- [11] L.G. KHACHIAN  
A polynomial algorithm in linear programming. Doklady  
Akademii Nank SSSR 244 (1979) (1093-1096) (Englisj trans-  
lation : Soviet Math. Dokl 20 (1979) (191-194).
- [12] H. KONNO  
A cutting plane alogrithm for solving bilinear programs.  
Mathematical programming 11, (1976).
- [13] S. LANG  
Linear Algebra. (Addison Wesley), 1971.
- [14] P.J. LAURENT  
Approximation et optimisation. (Herman), 1972.
- [15] A. LAZAR  
Affine products of simplexes. Math. Scand. 22(1968).
- [16] J.F. MAURRAS  
Polytopes à sommets dans  $0,1$  . Thèse de Doctorat d'Etat,  
Université de Paris VII.
- [17] J.L. NEMHAUSER and L.E. TROTTER  
Properties of vertex packing and independent system  
polyhedra". Mathematical Programming 6, (1974), 48-61.

- [18] J.L. NEMHAUSER and L.E. TROTTER  
Vertex Packing Structural properties and Algorithms.  
Mathematical Programming 8, (1975), 232-248.
- [19] I. NAMIOKA, P. PHELPS  
Tensor product of compact convex set. Pac. J. Math.  
(1969), p. 469-480.
- [20] M.W. PADBERG  
On the facial structure of set packing polyhedra.  
Mathematical Programming 5, (1973), 199-215.
- [21] M. RAGHAVACHARI  
On connections between zero-one integer programming.  
Dans Integer and Nolinear Programming, J. ABADIE (1970).
- [22] R.T. ROCKAFELLAR  
Convex Analysis. (Princeton University Press), 1970.
- [23] L.E. TROTTER  
A class of facet producing graphs for vertex packing  
polyhedra. Discrete Mathematics 12, (1975), 373-388.
- [24] H. TUI  
Concave Programming under linear constraints. Soviet  
Mathematics 5, (1964).
- [25] L.A. WOLSEY  
Further facet generating procedures for vertex packing  
polytopes. Mathematical Programming 11, (1976), 158-163.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

VU les dispositions de l'article 5 de l'arrêté du 16 Avril 1974,

VU les rapports de M. M. ... SAKAROVITCH.....

M. P. ... F. K. E. L. A. N. D. ....

M. P. J. LAURENT.....

M. .... Jean ..... F. O. N. A. V. P. T. .... est autorisé  
à présenter une thèse en soutenance pour l'obtention du grade de  
DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES.

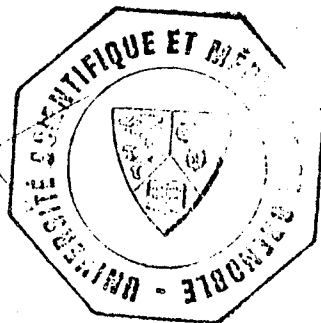
Fait à GRENOBLE, le 5-6-81

Le Président de l'U.S.M.G.

Le Président de l'I.H.P.G.

Le Président,

J.J. PAYAN



Handwritten signature or initials.