



HAL
open science

Sur les colorations des arêtes des graphes cubiques

Myriam Preissmann

► **To cite this version:**

Myriam Preissmann. Sur les colorations des arêtes des graphes cubiques. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1981. Français. NNT: . tel-00294175

HAL Id: tel-00294175

<https://theses.hal.science/tel-00294175>

Submitted on 8 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE
en MATHEMATIQUES APPLIQUEES**

par

Myriam PREISSMANN



**SUR LES COLORATIONS DES ARETES
DES GRAPHES CUBIQUES.**



Thèse soutenue le 8 mai 1981 devant la Commission d'Examen :

Président : C. BENZAKEN

Examineurs : D. DEWERRA
J.L. FOUQUET
F. JAEGER
C. PAYAN

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. CRABBE Pierre
SUNIER Jules

CERMO
Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAEERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEIBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977

Je remercie

- *Monsieur C. BENZAKEN, Professeur à l'Université de Grenoble, Président de mon Jury,*
- *Monsieur J.L. FOUQUET, Attaché de Recherche au CNRS,*
- *Monsieur F. JAEGER, Chargé de Recherche au CNRS, auquel je suis particulièrement reconnaissante du temps et de l'attention qu'il m'a accordés,*
- *Monsieur C. PAVAN, Chargé de Recherche au CNRS,*
- *Monsieur D. DE WERRA, Professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne,*

d'avoir accepté de faire partie de mon Jury.

Je remercie également Mme NEUMANN et le Service du Tirage pour la présentation de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	7
 <u>CHAPITRE I : DEFINITIONS GENERALES. EXPOSE DE PROBLEMES ET DE</u> <u>CONJECTURES RELATIFS AUX GRAPHES CUBIQUES ET A LEUR INDICE</u> <u>CHROMATIQUE</u>	
I - Définitions	11
II - Le problème des quatre couleurs	13
a - Introduction historique	17
b - Le théorème de Tait	17
III - Quelques résultats sur l'indice chromatique des graphes cubiques	18
a - Une conjecture de Tutte	18
b - Conséquence de la conjecture de Tutte	19
c - Théorème	20
IV - Trois conjectures	21
a - Une construction permettant de transformer un graphe sans isthme quelconque en un graphe cubique sans isthme	21
b - La conjecture du 5-flot de Tutte	22
b-1 - Définition d'un k-flot	22
b-2 - Remarques	23
b-3 - La conjecture de Tutte	24
c - La conjecture de la double couverture par des cycles	25
d - Autres conjectures	26
e - La conjecture de la double couverture par des couplages parfaits de Fulkerson	28
 <u>CHAPITRE II : CONSTRUCTIONS DE GRAPHES CUBIQUES NON 3-COLORIABLES.</u> <u>SNARKS C-MINIMAUX</u>	
I - Introduction	29
I - Introduction	31

	Pages
II - <u>Définitions et propriétés</u>	31
a - Graphes à m pendants	31
b - Colorations des pendants	34
c - Colorations	35
III - <u>Les graphes cubiques non 3-coloriables qui ne sont pas cycliquement-quatre-arête-connexes</u>	37
0 - Les graphes cubiques non connexes	37
1 - Les graphes cubiques possédant un isthme	38
2 - Deux constructions dues à Isaacs	38
a - Construction 1	38
b - Construction 2	39
3 - Théorème 1	40
4 - Conclusion	40
IV - <u>La construction d'Isaacs et les snarks de cyclique-arête-connectivité quatre</u>	41
1 - Représentation des éléments de C_4	41
2 - La construction d'Isaacs	41
3 - La construction triviale	49
3-a - Définitions	49
3-b - Propriétés	49
3-c - La construction triviale	50
4 - Théorème 2	51
V - <u>Constructions et snarks de cyclique-arête-connectivité cinq</u>	53
1 - Représentations des éléments de C_5	53
2 - Quelques cas particuliers	54
3 - La construction P. Propriété	55
4 - Les snarks de cyclique-arête-connectivité 5. Théorème 3	60
5 - Les snarks c-minimaux	75
6 - Autres constructions de graphes cubiques non 3-coloriables	77
7 - Conclusion	83

	Pages
<u>CHAPITRE III : DECOMPOSITIONS POLYEDRALES PAIRES DES GRAPHES</u>	
<u>CUBIQUES</u>	85
I - <u>Définition et propriété</u>	87
II - <u>Le cas des graphes cubiques d'indice chromatique trois</u> ..	88
III - <u>Le cas des graphes cubiques d'indice chromatique quatre</u>	89
1 - Le graphe de Petersen	89
2 - Les snarks-fleurs	91
2-1 - Définition	91
2-2 - Décompositions polyédrales paires des snarks- fleurs	92
3 - Autres contre-exemples. Conclusion	93
 BIBLIOGRAPHIE	 103

I N T R O D U C T I O N

INTRODUCTION

Parmi tous les problèmes qui sont à l'origine de la théorie des graphes, le problème dit "des quatre couleurs" est certainement celui qui a motivé le plus de recherches. Or, dès 1880, et alors que le théorème des quatre couleurs était considéré comme démontré, Tait a remarqué que l'on pouvait reformuler le problème de la coloration d'une carte de la manière suivante :

Est-il toujours possible de colorier les arêtes d'un graphe cubique planaire en trois couleurs de manière à ce qu'il n'y ait pas deux arêtes adjacentes de même couleur ?

Ceci explique l'intérêt initial porté à l'étude de l'indice chromatique des graphes cubiques.

Par la suite, on s'est rendu compte que si les conjectures du 5-flot de Tutte, de la double-couverture par des cycles, et de la double couverture par des couplages de Fulkerson sont vérifiées sur tous les graphes cubiques sans isthme d'indice chromatique quatre, elle sont alors vraies pour tous les graphes sans isthme pour les deux premières, pour tous les graphes cubiques sans isthme pour la dernière.

L'étude des graphes cubiques et de leur indice chromatique est ainsi liée à différents problèmes importants en théorie des graphes, et l'objet du Chapitre I sera de les présenter.

Le Chapitre II est une étude sur les graphes cubiques sans isthme, d'indice chromatique quatre, de cyclique-arête-connectivité inférieure à six. En 1975, on ne connaissait que quatre graphes cubiques sans isthme d'indice chromatique quatre non triviaux (le premier trouvé étant celui de Petersen qui date de 1898).

C'est alors qu'Isaacs a montré qu'il existe deux constructions permettant à partir d'un graphe cubique d'indice chromatique quatre d'en construire une infinité, et que tout graphe cubique sans isthme d'indice chromatique quatre non cycliquement-quatre-arête-connexe peut être ainsi construit à partir d'un graphe ayant moins de sommets.

C'est pourquoi il a proposé d'appeler non triviaux tous les graphes cubiques sans isthme d'indice chromatique quatre cycliquement-quatre-arête-connexes qui plus tard ont été baptisés snarks par M. Gardner. On montrera que tout graphe cubique sans isthme d'indice chromatique quatre de cyclique-arête-connectivité inférieure à six peut être obtenu à l'aide de certaines constructions à partir de snarks qui sont :

- soit de cyclique-arête-connectivité 4 et tels que tout c -cocycle 4 soit engendré par un carré sans corde ;
- soit de cyclique-arête-connectivité 5 et tels que tout c -cocycle 5 soit engendré par un graphe non 3-coloriable ou isomorphe à l'un parmi trois graphes que l'on précisera ;
- soit de cyclique-arête-connectivité supérieure ou égale à six.

Pour montrer cela, on étudiera de façon approfondie les 3-colorations possibles des arêtes des deux graphes déterminés par un c -cocycle cinq d'un graphe cubique d'indice chromatique quatre, sans isthme. On définira, grâce à cette étude, de nouvelles constructions de graphes cubiques d'indice chromatique quatre.

Le point de départ du chapitre III est une tentative de caractérisation des graphes cubiques d'indice chromatique trois. Il s'agit d'un théorème de Szekeres qui s'est révélé faux et qui s'énonce de la manière suivante : une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe cubique G soit d'indice chromatique trois est que G possède un ensemble D (appelé décomposition polyédrale paire) de cycles élémentaires de longueur paire tel que toute arête de G appartienne à deux cycles exactement. Il est clair que cette condition est nécessaire. Or F. Jaeger, ayant remarqué que la

démonstration de Szekeres était fausse, savoir si la condition était suffisante restait un problème ouvert. On montrera qu'elle ne l'est pas en donnant de nombreux contre-exemples (dont une famille infinie).

De plus on montre qu'un graphe cubique d'indice chromatique trois peut posséder une décomposition polyédrale paire qui n'est liée à aucune coloration des arêtes.

C H A P I T R E I

DEFINITIONS GÉNÉRALES, EXPOSÉ DE PROBLÈMES ET DE CONJECTURES
RELATIFS AUX GRAPHS CUBIQUES ET A LEUR INDICE CHROMATIQUE

CHAPITRE I : DEFINITIONS GENERALES. EXPOSE DE PROBLEMES ET DE CONJECTURES
RELATIFS AUX GRAPHES CUBIQUES ET A LEUR INDICE CHROMATIQUE

I - DEFINITIONS

On appelle graphe un couple $G = (V, E)$ où :

- V est un ensemble fini, non vide, appelé ensemble des sommets de G .
- E est un ensemble fini, appelé ensemble des arêtes de G tel que à toute arête e de G sont associés deux sommets de G (non nécessairement distincts) appelés extrémités de e .

On appellera boucle une arête dont les extrémités sont confondues.

Deux sommets distincts x et y seront dits adjacents si ils sont extrémités d'une même arête.

Deux arêtes distinctes seront dites adjacentes si elles ont au moins une extrémité commune.

Une arête e sera dite incidente à un sommet x si x est une de ses extrémités ; dans ce cas x sera également dit incident à e .

On notera indifféremment xy ou yx l'ensemble des arêtes de G ayant x et y pour extrémités.

Si $|xy| = k > 1$, on dira que xy est une arête multiple de multiplicité k , et si $k = 2$ on dira que xy est une arête double.

On appellera degré d'un sommet x le nombre

$$d(x) = \sum_{y \in V - \{x\}} |xy| + 2|xx|$$

Un graphe cubique est un graphe dont tous les sommets sont de degré 3.

Soit V' un ensemble de sommets ($V' \subseteq V$).

On appelle sous-graphe de G défini par V' , le graphe noté $G_{V'} = (V', E_{V'})$ où $E_{V'}$ est l'ensemble des arêtes de E dont les deux extrémités appartiennent à V' .

Soit E' un ensemble d'arêtes ($E' \subseteq E$).

On appelle graphe partiel de G défini par E' , le graphe $G' = (V, E')$.

Dans le cas où le graphe partiel de G défini par E' est tel que :

- tous les sommets sont de degré inférieur ou égal à 1, E' est appelé couplage de G ;

- tous les sommets sont de degré 1, E' est appelé couplage parfait de G .

Remarque : Un couplage ne contient pas de boucle.

On appellera chaîne de longueur n , ayant pour extrémités les sommets x et y , toute séquence d'arêtes distinctes e_1, e_2, \dots, e_n telle que :

- e_1 soit incident à x , et adjacent à e_2 par son autre extrémité.
- e_n soit incident à y et adjacent à e_{n-1} par son autre extrémité.
- e_i , pour $i \in \{2, \dots, n-1\}$, soit adjacent à e_{i-1} par l'une de ses extrémités, et à e_{i+1} par l'autre extrémité.

Un cycle est une chaîne dont les extrémités sont confondues.

Un cycle est dit élémentaire si tout sommet du graphe est incident à au plus deux arêtes du cycle.

Par extension, on appellera chaîne (respectivement cycle) un graphe formé par les arêtes d'une chaîne (respectivement d'un cycle) et par les sommets incidents.

G est connexe si, pour toute paire de sommets x et y , il existe une chaîne d'extrémités x et y .

On appellera composante connexe de G tout sous-graphe de G connexe et maximal (relativement à l'inclusion de l'ensemble des sommets) pour cette propriété.

Une arête e d'un graphe $G = (V, E)$ est appelée isthme si $G' = (V, E - \{e\})$ a plus de composantes connexes que G .

Soit $A \subseteq V$; on note $\omega_G(A)$ (ou plus simplement $\omega(A)$ si aucune confusion n'est possible) l'ensemble des arêtes du graphe G ayant une extrémité et une seule dans A .

Un cocycle est, par définition, un ensemble d'arêtes de la forme $\omega(A)$.

On appellera c-cocycle un cocycle $\omega(A)$ ($A \subseteq V$) tel que G_A et G_{X-A} contiennent chacun un cycle.

Un cocycle (respectivement un c -cocycle) de n arêtes sera appelé cocycle n (respectivement c -cocycle n).

On dira qu'un graphe est cycliquement k -arête connexe (noté $c.k.a.c.$) si il ne possède pas de c -cocycle n pour $n < k$.

On dira qu'un graphe est de cyclique-arête-connectivité- k (noté $c.a.c.k$) si il est $c.k.a.c.$ et possède un c -cocycle k .

On dira qu'un graphe est de cyclique-arête-connectivité ∞ (noté $c.a.c.\infty$) si il ne possède aucun c -cocycle.

Remarque : Dans un graphe cubique, tout cocycle 1 est un c-cocycle 1, tout cocycle 2 est un c-cocycle 2.

En effet, soit $\omega(A)$ un cocycle n d'un graphe cubique et soient $s = |A|$ et a , le nombre d'arêtes de G_A .

$$\text{On a } 3s = 2a + n$$

Pour que G_A ne contienne pas de cycle, on doit avoir $a \leq s-1$ et donc $3s \leq 2(s-1) + n$ ce qui donne $s \leq n-2$. Il est clair que ce n'est pas possible dans le cas où $n = 1$ ou 2 .

On dira que deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes s'il existe deux bijections

$$B_V : V \rightarrow V'$$

$$B_E : E \rightarrow E'$$

telles que deux arêtes qui se correspondent dans la bijection B_E aient des extrémités qui se correspondent dans la bijection B_V .

Un graphe cubique G est dit k -coloriable ($k \in \mathbb{N}$) si l'on peut avec k couleurs colorier les arêtes de G de manière à ce que chaque sommet soit incident à des arêtes coloriées par trois couleurs différentes.

Remarque : Quelque soit l'entier k , un graphe cubique G possédant une boucle n'est pas k -coloriable.

L'indice chromatique d'un graphe cubique G sans boucle est le nombre k minimum tel que G soit k -coloriable.

Considérons un ensemble V fini non vide de points d'un plan Π et un ensemble E fini de courbes simples (courbes de Jordan) tel que :

- toute courbe de E a ses deux extrémités (éventuellement confondues) dans V et son intérieur disjoint de V ;

- l'intersection des intérieurs de deux courbes de E , distinctes, est vide.

Le couple (V, E) est un graphe au sens défini précédemment (la notion combinatoire d'extrémité correspond naturellement à la notion topologique).

Un tel graphe sera dit graphe plan [1]

Un graphe sera dit planaire s'il est isomorphe à un graphe plan.

Soit G_{Π} un graphe plan.

On appellera face de G_{Π} toute composante connexe de $\Pi - G_{\Pi}$.

Deux faces distinctes seront dites adjacentes si leurs frontières contiennent au moins une arête commune.

II - LE PROBLEME DES QUATRE COULEURS

a - Introduction historique

Toute carte de géographie peut-elle être coloriée à l'aide de quatre couleurs de manière à ce que l'on puisse distinguer les régions qui la composent ?

Cette question a été posée pour la première fois en 1852.

En effet, à cette date, un étudiant, nommé Guthrie, ayant remarqué qu'il arrivait toujours à se contenter de quatre couleurs pour colorier une carte de géographie, sollicita l'avis de son professeur, De Morgan.

Et c'est ainsi que "naquit" le problème des quatre couleurs, problème qui s'est vite transformé en conjecture, personne n'ayant été capable de découvrir une carte nécessitant cinq couleurs.

Pourtant cette conjecture provoqua l'intérêt d'un très grand nombre de mathématiciens et si elle n'a pu être démontrée qu'en 1976 par K. Appel et W. Haken [2] grâce à l'utilisation d'un grand nombre

d'heures d'ordinateur, elle a inspiré beaucoup de fausses démonstrations.

La plus célèbre de celles-ci est celle de Kempe [3] qui date de 1879 et dont le caractère erroné n'a été découvert qu'en 1890 par Heawood [4].

Toutefois, cette recherche d'une démonstration de la conjecture des quatre couleurs a été à l'origine de nombreux résultats relatifs à des problèmes de coloration dans les graphes, tout en élargissant l'éventail de ceux-ci.

b - Le théorème de Tait

En termes de théorie des graphes, la conjecture des quatre couleurs s'énonce ainsi :

Quatre couleurs suffisent pour colorier les faces de tout graphe planaire sans isthme de sorte qu'il n'y ait pas de faces adjacentes de même couleur.

Mais très vite, Cayley [5] et Kempe [3] ont remarqué qu'il suffisait, pour démontrer cette conjecture, de montrer qu'elle est vérifiée dans le cas particulier des graphes cubiques planaires et sans isthme. C'est cette remarque qui a permis à Tait d'établir le théorème suivant : La conjecture des quatre couleurs est vraie si et seulement si tout graphe cubique planaire sans isthme est d'indice chromatique trois.

C'est ce théorème qui a été à l'origine de l'étude des graphes cubiques et de leur indice chromatique.

III - QUELQUES RESULTATS SUR L'INDICE CHROMATIQUE DES GRAPHES CUBIQUES

a - On remarque que le théorème des quatre couleurs et le théorème de Tait établissent le fait suivant :

Tout graphe cubique planaire sans isthme est d'indice chromatique trois.

Pendant un certain temps, on a même cru que tous les graphes cubiques sans isthme étaient 3-coloriables. Or cela est faux, Petersen [6] l'a montré en construisant un graphe dit graphe de Petersen (représenté à la figure 1) de telle sorte que celui-ci ne soit pas 3-coloriable.

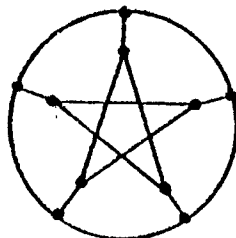


Figure 1

Jusqu'en 1975, seuls quatre graphes cubiques sans isthmes non 3-coloriables non triviaux étaient connus [6, 7, 8, 9], et c'est alors qu'Isaacs exhiba plusieurs constructions permettant d'en obtenir une infinité. Mais aucun d'eux ne dément la conjecture déjà ancienne de Tutte citée ci-dessous :

Conjecture de Tutte [33] : Pour tout graphe cubique sans isthme non 3-coloriable G , il existe un graphe partiel G' de G homéomorphe au graphe de Petersen.

(où l'on appelle insertion d'un sommet z dans une arête $x \in xy$ l'opération qui transforme le graphe $G = (V, E)$ en $H = (V \cup \{z\}, (E - \{e\}) \cup \{e_1, e_2\})$, z étant un nouveau sommet e_1 et e_2 deux nouvelles arêtes telles que $e_1 \in xz$ et $e_2 \in zy$;

et où G' est homéomorphe à G , s'il peut être obtenu à partir de G par une suite d'insertions de sommets).

b - Conséquences de la conjecture de Tutte remarquées par différents chercheurs

Soit G un graphe.

On notera : $cr(G)$ le nombre minimum de "croisements" d'arêtes que l'on puisse obtenir en représentant le graphe G sur un plan.

$s(G)$ le nombre minimum d'arêtes qu'il faut retirer à G pour qu'il devienne planaire.

Il est clair que :

- si H est un graphe homéomorphe au graphe G , on a

$$\text{cr}(H) = \text{cr}(G)$$

$$s(H) = s(G)$$

- si G' est un graphe partiel du graphe G on a

$$\text{cr}(G) \geq \text{cr}(G')$$

$$s(G) \geq s(G')$$

D'autre part, P étant le graphe de Petersen, on a
 $\text{cr}(P) = s(P) = 2$

Par conséquent si la conjecture de Tutte est vraie, alors les deux propositions suivantes sont vraies :

Proposition 1 : Tout graphe cubique sans isthme G tel que $\text{cr}(G) \leq 1$ est d'indice chromatique trois.

Proposition 2 : Tout graphe cubique sans isthme G tel que $s(G) \leq 1$ est d'indice chromatique trois.

La proposition 1 qui est plus forte que le théorème des quatre couleurs, a pu être démontrée par Jaeger [10], Celmins et Swart [11] à l'aide de ce théorème.

La proposition 2 n'ayant été jusqu'à présent ni démontrée, ni démentie, reste à l'état de conjecture [12].

c - Théorème (Johnson [13], Brooks [14], Vizing [15]) : L'indice chromatique d'un graphe cubique sans boucle est trois ou quatre.

Un graphe cubique sans boucle dont on ne peut colorier les arêtes avec 3 couleurs peut donc indifféremment être appelé graphe cubique non 3-coloriable ou graphe cubique d'indice chromatique quatre.

IV - TROIS CONJECTURES

Le problème des quatre couleurs n'est pas le seul en théorie des graphes dont on puisse trouver une formulation équivalente en termes de graphe cubique et d'indice chromatique.

En effet, tel est le cas pour les trois conjectures présentées dans ce chapitre.

De plus, ces trois conjectures, se révèlent, elles aussi, très difficiles.

a) Présentons tout d'abord une construction utilisée par plusieurs auteurs permettant de transformer un graphe sans isthme quelconque en graphe cubique sans isthme.

Soit $G = (V, E)$ un graphe sans isthme.

On peut définir sur G les opérations suivantes :

- Réduction d'un sommet x de degré 2 :

Deux cas sont possibles

(i) $xx \neq \emptyset$. Dans ce cas $|xx| = 1$: soit e l'unique arête de xx . Alors $G' = (V - \{x\}, E - \{e\})$ est le graphe obtenu par la réduction du sommet x , dans le cas (i).

(ii) $xx = \emptyset$. Soient $e_1 \in xy$, $e_2 \in xz$ les deux arêtes de G adjacentes à x . (y et z ne sont pas nécessairement des sommets distincts).

$G' = (X - \{x\}, [E - \{e_1, e_2\}] \cup \{e_3\})$, où e_3 est une arête nouvelle d'extrémités y et z , est le graphe obtenu par la réduction du sommet x dans le cas (ii).

- Extension d'un sommet x de degré d supérieur à 3.

Soient e_1, e_2, \dots, e_d l'ensemble des arêtes de G telle que $e_i \in xy_i$ avec $y_i \neq x$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ (les y_i ne sont pas nécessairement distincts).

Soient e'_1, \dots, e'_{d_2} les arêtes de xx .

(Remarque : $d_1 + 2d_2 = d$)

Pour construire le graphe G' obtenu par l'extension du sommet x on supprime x et les arêtes qui lui étaient incidentes et l'on crée :

- d nouveaux sommets : x_1, x_2, \dots, x_d

- $d+d_1+d_2$ nouvelles arêtes : $a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_{d_1}, c_1, \dots, c_{d_2}$

telles que

$$a_i \in x_i x_{i+1} \text{ pour } i \in \{1, \dots, d-1\}$$

$$a_d \in x_d x_1$$

$$b_i \in x_i y_i \text{ pour } i \in \{1, \dots, d_1\}$$

$$c_i \in x_{d_1+i} x_{d_1+i+d_2} \text{ pour } i \in \{1, \dots, d_2\}$$

et

$$G' = ((V - \{x\}) \cup \{x_1, \dots, x_d\}, (E - \{e_1, \dots, e_d, e'_1, \dots, e'_{d_2}\}) \cup \{a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_{d_1}, c_1, \dots, c_{d_2}\})$$

(On a "remplacé" le sommet x par un cycle de longueur d).

En appliquant ces opérations sur tous les sommets de G de degré non égal à trois, il est clair que l'on obtient un graphe cubique sans isthme, ou (dans le cas où tous les sommets sont de degré 2) le graphe vide.

b) Conjecture du 5-flot de Tutte [16]

b1) Définition d'un k-flot

On appellera orientation d'un graphe $G = (V, E)$ toute application O de E dans $V \times V$ qui à toute arête e de G associe un couple $O(e) = (x, y)$ où x et y sont les extrémités de e , x étant alors appelé extrémité initiale de e , y extrémité terminale de e dans l'orientation O .

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

On appellera k-flot du graphe $G = (V, E)$ muni de l'orientation O toute application f de E dans $\{-(k-1), \dots, -1, 1, \dots, k-1\}$ telle que pour tout sommet v on ait $\sum_{e \in D_1} f(e) = \sum_{e \in D_2} f(e)$

où D_1 est l'ensemble des arêtes de E ayant leur extrémité initiale dans l'orientation O égale à v .

D_2 est l'ensemble des arêtes de E ayant leur extrémité terminale dans l'orientation O égale à v (si $e \in v$ alors $e \in D_1$ et $e \in D_2$).

b2) Remarques

- Si un graphe possède un k -flot pour une certaine orientation O , alors il en possède un pour toute orientation.

Le fait pour un graphe de posséder ou non un k -flot est donc indépendant de l'orientation choisie.

- Soit f un k -flot d'un graphe $G = (V, E)$ muni d'une orientation O ;

Soit $A \subseteq V$; on a $\sum_{e \in E_1} f(e) = \sum_{e \in E_2} f(e)$

où E_1 est l'ensemble des arêtes de E telles que $O(e) = (x, y)$ avec $x \in A$ $y \notin A$

E_2 est l'ensemble des arêtes de E telles que $O(e) = (x, y)$ avec $x \notin A$ et $y \in A$.

Par conséquent, un graphe possédant un isthme ne possède aucun k -flot. De plus, si dans un graphe G qui possède un k -flot, on remplace un ensemble de sommets A par un seul sommet a incident à toutes les arêtes de $\omega(A)$, le graphe obtenu possède un k -flot directement dérivé du précédent.

- Soit k' un entier supérieur à k . Tout k -flot sur G est un k' -flot sur G .

- Soit $G = (V, E)$ un graphe, f un k -flot de G muni d'une orientation O .

Soit e une arête de G telle que $O(e) = (x, y)$.

Soit $G' = (V \cup \{v\}, (E - \{e\}) \cup \{e_1, e_2\})$ où v est un nouveau sommet et où e_1, e_2

sont de nouvelles arêtes avec :

$$e_1 \in xv$$

$$e_2 \in vy$$

(on a fait l'opération inverse de la réduction d'un sommet de degré 2).

Soit O' une orientation de G' telle que :

$$O'_{|E-\{e\}} = O_{|E-\{e\}}$$

$$O'(e_1) = (x,v)$$

$$O'(e_2) = (v,y)$$

Il est clair que f' telle que $f'_{|E-\{e\}} = f_{|E-\{e\}}$
 $f'(e_1) = f'(e_2) = f(e)$

est un k -flot sur G' muni de l'orientation O' .

b3) La conjecture de Tutte [16]

Tout graphe sans isthme possède un 5-flot.

Or, on peut montrer qu'il suffit, pour que cette conjecture soit vraie, qu'elle soit vérifiée par tous les graphes cubiques sans isthme non 3-coloriables ([17],[18]).

En effet on a :

- (i) Si la conjecture est vraie pour tous les graphes cubiques sans isthme, elle est vraie.
- (ii) La conjecture est vraie pour tous les graphes cubiques 3-coloriables.
- (i) Supposons que tout graphe cubique sans isthme possède un 5-flot.

Soit G un graphe sans isthme, si tous ses sommets sont de degré 2, il a trivialement un 2-flot, donc un 5-flot. Sinon, à l'aide de la construction IV a) on peut obtenir un graphe cubique sans isthme G' à partir de G . D'après les remarques précédentes (III.b2), il est clair que d'un 5-flot existant sur G' , on peut déduire un 5-flot sur G .

(ii) Soit G un graphe cubique 3-coloriable.

Etant donnée une coloration des arêtes de G avec les couleurs 1, 2 et 3, soient E_1, E_2, E_3 les ensembles d'arêtes coloriées respectivement 1, 2 et 3.

Soient G_1 le graphe partiel de G défini par $E_1 \cup E_2$, G_2 celui défini par $E_2 \cup E_3$.

Il est clair que tous les sommets de G_i ($i = 1, 2$) sont de degré 2.

Soit O une orientation de G .

On vérifie immédiatement que G_i muni de l'orientation induite par O admet un 2-flot f_i ($i = 1, 2$).

Soit f'_i l'application de $E(G)$ dans Z définie par :

$$\begin{aligned} f'_i(e) &= f_i(e) \text{ si } e \text{ est une arête de } G_i \\ &= 0 \quad \text{sinon} \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

$f'_1 + 2f'_2$ est un 4-flot de G muni de l'orientation O .

c) La conjecture de la double couverture par des cycles

Cette conjecture, dont la paternité n'est pas établie, est la suivante : tout graphe sans isthme possède une famille de cycles élémentaires telle que chaque arête appartienne à deux cycles exactement (une telle famille est appelée double couverture par des cycles).

De même que précédemment, il a été montré [19] que :

(1) Si la conjecture est vraie pour les graphes cubiques sans isthme, elle est vraie.

(ii) La conjecture est vraie pour les graphes cubiques 3-coloriables.

En effet

(1) Supposons que tout graphe cubique sans isthme possède une double couverture.

Soit G un graphe sans isthme et soit G' un graphe cubique sans isthme obtenu à partir de G à l'aide de la construction IV-a. (On suppose que G a un sommet de degré ≥ 3 sinon il admet trivialement une double couverture).

On peut montrer sans difficulté qu'une double couverture par des cycles de G , peut être déduite de celle de G' .

(ii) Soit G un graphe cubique 3-coloriable.

Etant donnée une coloration des arêtes de G avec les couleurs 1, 2 et 3, soit E_i l'ensemble des arêtes coloriées i ($i = 1, 2, 3$).

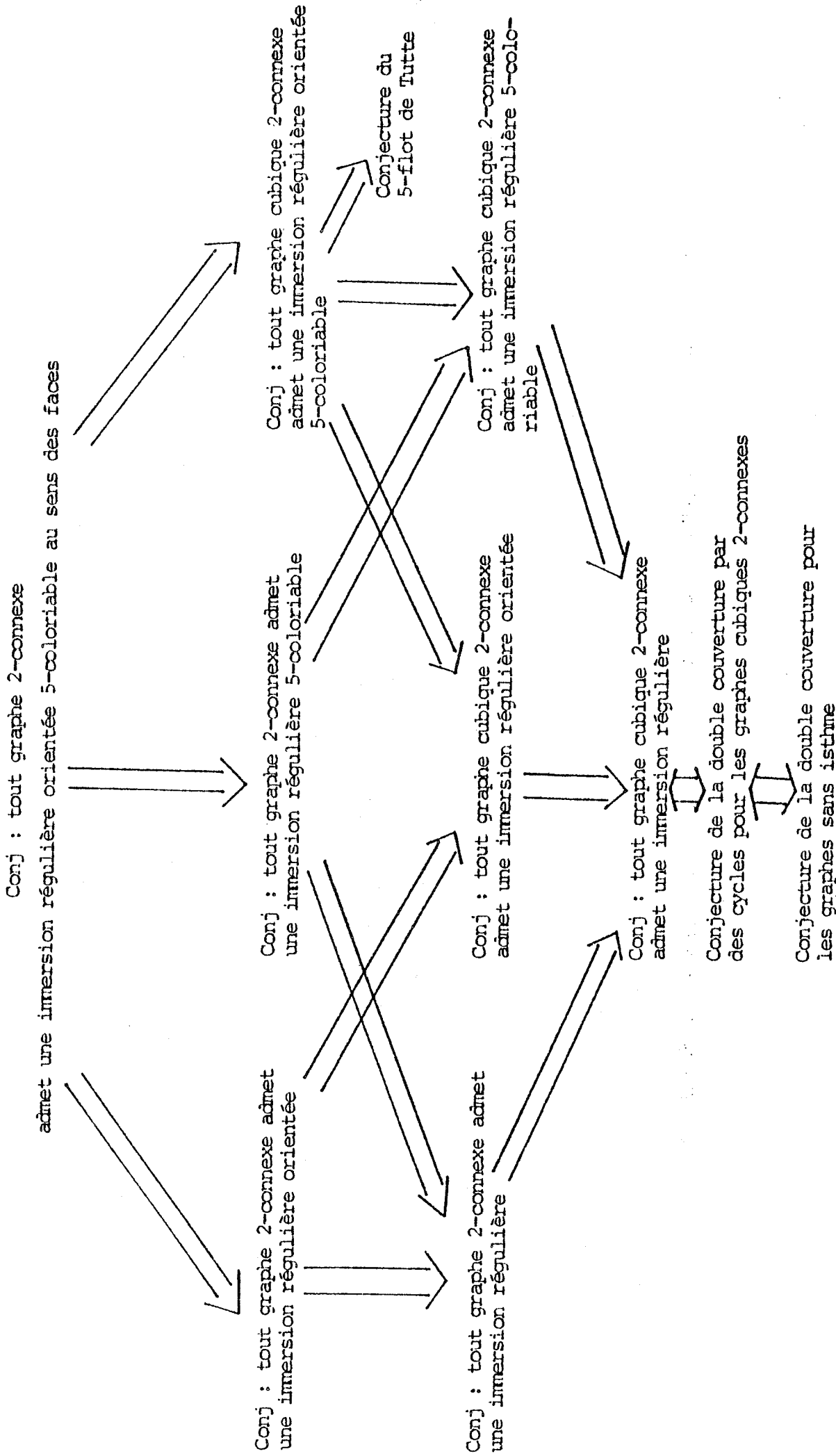
Chaque composante connexe du graphe partiel de G déterminé par $E_1 \cup E_2$ est un cycle élémentaire de G .

De même pour $E_2 \cup E_3$, $E_1 \cup E_3$.

L'ensemble de tous ces cycles constitue une double couverture des arêtes de G par des cycles.

De même que précédemment il suffit donc de montrer que la conjecture est vraie pour tous les graphes cubiques sans isthme non 3-coloriables, pour montrer qu'elle est vraie pour tous les graphes sans isthme.

d) De nombreuses conjectures sont liées aux deux conjectures précédentes, ainsi que l'indique le tableau ci-après :



Nous renvoyons à [20] pour la définition d'une immersion d'un graphe dans une surface (orientable ou non).

Une telle immersion est dite régulière quand le bord de toute face est un cycle élémentaire (voir [20], chap III) ; comme dans le cas planaire deux faces sont dites adjacentes si leurs bords ont une intersection non vide au sens des arêtes. L'immersion régulière sera dite k -coloriable au sens des faces si on peut colorier les faces avec k couleurs de sorte qu'il n'y ait pas deux faces adjacentes de même couleur.

e) La conjecture de la double couverture par des couplages parfaits de Fulkerson

La conjecture de Fulkerson [21] est la suivante :

Tout graphe cubique sans isthme possède six couplages parfaits (non nécessairement différents), tels que chaque arête appartienne à exactement deux de ces couplages.

De même que précédemment, on montre que la conjecture est vérifiée pour les graphes cubiques 3-coloriables.

En effet, soit G un graphe cubique 3-coloriable et dont les arêtes sont coloriées 1, 2 et 3.

L'ensemble des arêtes coloriées 1 (2,3) forme un couplage parfait du graphe, noté C_1 (C_2, C_3).

$\{C_1, C_1, C_2, C_2, C_3, C_3\}$ est une famille de six couplages de G telle que chaque arête appartient à deux couplages exactement.

Il suffit donc d'étudier la conjecture sur les graphes cubiques non 3-coloriables.

En fait, Seymour [18] et Celmins [19] ont montré qu'il suffirait, pour démontrer ces 3 conjectures difficiles, de montrer qu'elles sont vraies sur l'ensemble des graphes cubiques cycliquement-4-arête-connexes non 3-coloriables (aussi appelés snarks comme on le verra par la suite).

C H A P I T R E I I

CONSTRUCTIONS DE GRAPHES CUBIQUES NON 3-COLORIABLES
SNARKS C-MINIMAUX

CHAPITRE II : CONSTRUCTIONS DE GRAPHES CUBIQUES NON 3-COLORIABLES.

SNARKS C-MINIMAUX

I - INTRODUCTION

Le problème des quatre couleurs, ainsi que certaines conjectures (Chapitre I) amènent à l'étude des graphes cubiques non 3-coloriables, ou plutôt de certains d'entre eux.

Ainsi les graphes cubiques possédant un isthme ne sont généralement pas considérés puisqu'ils sont toujours d'indice chromatique quatre, ne peuvent correspondre à une carte et sont très faciles à construire.

D'autre part, R. Isaacs [26] a remarqué que l'on peut très facilement, à partir d'un graphe cubique sans isthme non 3-coloriable, obtenir, à l'aide de deux constructions, une infinité de graphes cubiques sans isthme non 3-coloriables, mais possédant tous au moins un c -cocycle de cardinalité 2 ou 3.

Inversement, Isaacs a montré que tout graphe cubique sans isthme non 3-coloriable possédant au moins un c -cocycle de cardinalité 2 ou 3, peut être ainsi construit à partir d'un ou plusieurs graphes cubiques sans isthme non 3-coloriables cycliquement-4-arête-connexes.

Pour ces raisons, Isaacs a appelé les graphes cubiques non 3-coloriables cycliquement-4-arête-connexes : graphes cubiques non 3-coloriables non triviaux.

On montrera ici que, à l'aide d'autres constructions, on peut encore restreindre l'ensemble des graphes cubiques sans isthme non 3-coloriables à partir desquels on sait que l'on peut obtenir tous les graphes cubiques sans isthme non 3-coloriables.

II - DEFINITIONS ET PROPRIETES

a) Graphes à m pendants

On appellera graphe à m pendants ou G.m P. ($m \in \mathbb{N}$) un graphe dont m sommets sont de degré 1 et tous les autres de degré 3.

Les m sommets de degré 1 d'un G.m P. seront appelés pendants, les arêtes qui leur sont incidentes, arêtes pendantes.

Remarque 1 : Le nombre de sommets de degré 3 d'un G.m P. est de même parité que m .

En effet, soit s le nombre de sommets de degré 3 et a le nombre d'arêtes d'un G.m P. . On a $3s+m = 2a$.

Remarque 2 : Une arête d'un G.m P. peut être incidente à 0, 1 ou 2 pendants.

On appellera graphe à m pendants numérotés ou G.m P.N. tout couple (G, ϕ) où :

- * G est un G.m P.
- * ϕ est une bijection de l'ensemble des pendants de G dans $\{1, 2, \dots, m\}$ appelée numérotation des pendants.

On définit à présent trois opérations :

- La cassure d'une arête

Soit $e \in xy$ ($x \in X, y \in X$) une arête d'un graphe $G = (X, E)$.
On dira que le graphe $G' = (X \cup \{p_1, p_2\}, (E - \{e\}) \cup \{e_1, e_2\})$ où p_1 et p_2 sont deux nouveaux sommets et e_1 et e_2 deux nouvelles arêtes avec $e_1 \in xp_1, e_2 \in yp_2$, est obtenu par la cassure de l'arête e .

- La soudure de deux pendants

Il s'agit en quelque sorte de l'opération inverse de la cassure.
Soient p_1 et p_2 deux pendants d'un G.m P. ($m \geq 2$), $G = (X, E)$.

Deux cas sont possibles :

- p_1 et p_2 sont incidents à la même arête pendante e .
- p_1 et p_2 sont incidents à deux arêtes distinctes, respectivement e_1 et e_2 . $e_1 \in xp_1, e_2 \in yp_2$ (x et y ne sont pas nécessairement distincts).

Dans le premier cas le graphe G' obtenu par la soudure de p_1 et p_2 sera $G' = (X - \{p_1, p_2\}, E - \{e\})$ et dans le second cas $G' = (X - \{p_1, p_2\}, (E - \{e_1, e_2\}) \cup \{e_3\})$ où e_3 est une nouvelle arête d'extrémités x et y .

Dans tous les cas G' est un $G.(m-2)P.$

- L'union de deux $G.m P.N.$

Soient $(G = (X, E), \phi)$ et $(G' = (X', E'), \phi')$ deux $G.m P.N.$ avec $X \cap X' = \emptyset$ et $\max\{|X|, |X'|\} > m$.

Le graphe $H = (X \cup X', E \cup E')$ est un $G.2m P.$. En soudant $\phi^{-1}(i)$ à $\phi'^{-1}(i)$ pour tout i appartenant à $\{1, 2, \dots, m\}$, on obtient un graphe cubique K .

K est, par définition, l'union de (G, ϕ) et de (G', ϕ') .

On dira qu'un graphe cubique K est une union des deux $G.m P.$ G et G' si il existe une numérotation ϕ de G , une numérotation ϕ' de G' telles que l'union de (G, ϕ) et de (G', ϕ') soit isomorphe à K .

Remarque 3 : Soit G un graphe cubique, en cassant n arêtes de G on obtient un $G.2n P.$

Remarque 4 : Soit $G = (V, E)$ un graphe cubique.
Soit $\omega(A)$ ($A \subseteq V$) un cocycle n de G .

En cassant les n arêtes de $\omega(A)$ on obtient un $G.2n P.$, soit G' .
Soit P_1 (respectivement P_2) l'ensemble des pendants de G' adjacents à des sommets de A (respectivement $V-A$).

Les sous-graphes de G' engendrés par $A \cup P_1$ et $(V-A) \cup P_2$ sont deux $G.n P.$ notés G^A et G^{V-A} ayant pour ensemble de sommets de degré trois, respectivement A et $V-A$.

G^A et G^{V-A} seront dits déterminés par $\omega(A)$.

b) Colorations des pendants

On appellera 3-partition d'un ensemble E tout ensemble de 3 sous-ensembles de E : E_1, E_2, E_3 tels que

$$E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \emptyset$$

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 = E$$

(on n'exigera pas que ces sous-ensembles soient non vides ; l'ensemble vide pourra apparaître deux fois).

On appellera 3-coloration d'un G.m P. $G = (V, E)$ toute 3-partition E de E en 3 sous-ensembles de E égaux chacun à un couplage de G ; chacun d'eux sera appelé une couleur de E .

On dira qu'un G.m P. G est 3-coloriable si et seulement si G possède au moins une 3-coloration.

Remarque 5 : Un G.m P. G possède une 3-coloration si et seulement si on peut colorier les arêtes de G en trois couleurs de sorte que tout sommet de degré 3 soit incident à des arêtes coloriées avec trois couleurs différentes.

Dans le cas d'un G.OP. (c'est à dire d'un graphe cubique), la définition ci-dessus de la 3-coloriabilité est bien cohérente avec celle donnée dans le chapitre précédent.

On appellera coloration des pendants d'un G.m P. G toute 3-partition $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ de l'ensemble des pendants de G , telle qu'il existe une 3-coloration de G , $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ pour laquelle P_i est l'ensemble des pendants incidents aux arêtes de E_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

E et P seront dites associées.

On notera $\mathcal{C}(G)$ l'ensemble des colorations des pendants d'un G.m P. G .

Propriétés :

Soit G un G.m P..

P1 : Soit $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ une 3-coloration de G.

Considérons le graphe partiel de G déterminé par l'union de deux couleurs de E : E_1 et E_2 .

Une composante connexe de ce graphe partiel est :

- soit un cycle élémentaire dont les arêtes appartiennent alternativement à E_1 et à E_2 (un tel cycle sera dit "bicolorié") ;

- soit une chaîne élémentaire dont les arêtes appartiennent alternativement à E_1 et à E_2 et dont les deux extrémités sont des pendants de G (une telle chaîne sera dite "bicoloriée") ;

- soit un pendant de G si celui-ci est incident à une arête de E_3 .

Remarque 6 : Soit donc C une chaîne ayant deux pendants pour extrémités et dont les arêtes appartiennent alternativement à E_1 et à E_2 .

Solent C_1 les arêtes de C appartenant à E_1 , C_2 les arêtes de C appartenant à E_2 .

$E' = \{(E_1 - C_1) \cup C_2, (E_2 - C_2) \cup C_1, E_3\}$ est une 3-coloration de G.

On dira que E' est obtenu par échange des couleurs le long de la chaîne C.

P2 : Soit $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ une coloration des pendants d'un G.m P..

On a

$$|P_1| \equiv |P_2| \equiv |P_3| \equiv m \pmod{2}$$

Ce résultat qui est d'ailleurs une conséquence de la propriété précédente, est démontré dans [7] et [8] et a pour

Corollaire : Un G.l P. n'admet aucune 3-coloration.

c) Colorations

On dénotera par C_m ($m \in \mathbb{N}^*$) l'ensemble des 3-partitions $C = \{C_1, C_2, C_3\}$ de $\{1, \dots, m\}$ telles que

$$|C_1| \equiv |C_2| \equiv |C_3| \equiv m \pmod{2}$$

Soit (G, ϕ) un G.m P.N. .

Soit $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ une coloration des pendants de G .

Soit $C_i = \{\phi(p) ; p \in P_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) ; $\{C_1, C_2, C_3\}$ est une 3-partition de $\{1, \dots, m\}$.

D'autre part la propriété P2 du paragraphe précédent donne :

$$|C_1| \equiv |C_2| \equiv |C_3| \equiv m \pmod{2}.$$

Donc $\{C_1, C_2, C_3\} \in C_m$.

$\{C_1, C_2, C_3\}$ est appelée coloration induite par P .

Soit (G, ϕ) un G.m P.N. et $C \in C_m$.

On dira que (G, ϕ) admet la coloration C si il existe une coloration P des pendants de G qui induise C .

Soit $C \in C_m$.

On appellera représentation de C tout vecteur-colonne à m composantes à

valeurs dans $\{a, b, c\}$ $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_m \end{pmatrix}$ tel que

$$C = \{A, B, C\} \text{ où } A = \{i ; i \in \{1, \dots, m\} \rho_i = a\}$$

$$B = \{i ; i \in \{1, \dots, m\} \rho_i = b\}$$

$$C = \{i ; i \in \{1, \dots, m\} \rho_i = c\}$$

Il est clair qu'il existe 3 représentations de C si un seul des C_i est non vide, et 6 sinon.

Soit (G, ϕ) un G.m P.N. .

On notera $\underline{C(G, \phi)}$ l'ensemble des colorations admises par (G, ϕ) : $\underline{C(G, \phi)} \subseteq C_m$.

On notera $\overline{C(G, \phi)}$ le complémentaire de $\underline{C(G, \phi)}$ dans $\underline{C_m}$.

On dira que deux G.m P., G et G' sont :

- équivalents si il existe ϕ et ϕ' deux numérotations respectivement de G et G' telles que $C(G, \phi) = C(G', \phi')$;

- contraires si il existe ϕ et ϕ' deux numérotations respectivement de G et G' telles que $C(G, \phi) \cap C(G', \phi') = \emptyset$.

Remarque 7 : Deux G.m P., G et G' , peuvent être à la fois équivalents et contraires (on en verra des exemples par la suite).

Remarque 8 : Soient $G = (V, E)$ un G.m P. ($m \geq 2$) et p_1 et p_2 deux pendants de G .

Soit G' le $G(m-2)P.$ obtenu par la soudure de p_1 et p_2 .
 G' est 3-coloriable si et seulement si il existe une 3-coloration E de G telle que les arêtes incidentes à p_1 et p_2 appartiennent à la même couleur de E .

Une conséquence de la Remarque 8 est :

Remarque 9 : Soit (G, ϕ) et (G', ϕ') deux G.m P.N. .

L'union de (G, ϕ) et de (G', ϕ') est 3-coloriable si et seulement si $C(G, \phi) \cap C(G', \phi') \neq \emptyset$.

En particulier, si G est un G.m P. non 3-coloriable, tout union de G et d'un G.m P. quelconque est un graphe cubique non 3-coloriable.

Remarque 10 : Soit G un G.m P. . Soit ϕ une numérotation quelconque de G . On a $|C(G)| = |C(G, \phi)|$.

Par conséquent, si G et G' sont deux G.m P. tels que $|C(G)| + |C(G')| > |C_m|$, alors toute union de G et G' est 3-coloriable.

III - LES GRAPHES CUBIQUES NON 3-COLORIABLES QUI NE SONT PAS CYCLIQUEMENT-QUATRE-ARÊTE-CONNEXES

0 - Les graphes cubiques non connexes

Un graphe cubique n'est pas 3-coloriable si et seulement si l'une au moins de ses composantes connexes n'est pas 3-coloriable.

On est ainsi ramené à l'étude des graphes cubiques connexes non 3-coloriables.

1 - Les graphes cubiques possédant un isthme

D'après le corollaire de la propriété P2 du paragraphe précédent, ces graphes ne sont jamais 3-coloriables.

2 - Deux constructions dues à Isaacs

Remarque 11 : Une union de deux G.2P. (respectivement de deux G.3P.) est non 3-coloriable si et seulement si l'un d'eux est non 3-coloriable.

Démonstration : On a $c_2 = \{ \{1,2\}, \emptyset, \emptyset \}$, $c_3 = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\} \}$;
donc $|c_2| = |c_3| = 1$.

La remarque 10 permet de conclure.

a) Construction 1

Soit G un graphe cubique non 3-coloriable.

Soit G' un G.2P. obtenu en cassant une arête de G.

Soit F_2 le G.2P. possédant une seule arête représenté à la Figure 1.

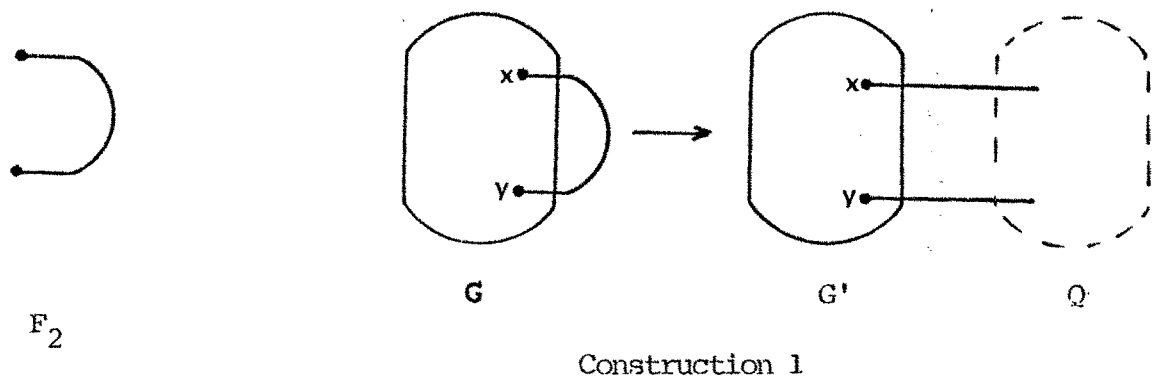


Figure 1

Toute union de G' et de F_2 est égale à G .

F_2 étant 3-coloriable et G ne l'étant pas, la Remarque 11 nous indique que G' n'est pas 3-coloriable.

En unissant G' à un G.2P. quelconque Q , on obtient donc un graphe cubique non 3-coloriable.

A l'aide de cette construction (représentée à la Figure 1), il est donc possible d'obtenir une infinité de graphes cubiques non 3-coloriables.

b) La construction 2

Soit $G = (V,E)$ un graphe cubique non 3-coloriable.

Soit v un sommet de G , qui n'est pas incident à une boucle. $\omega(\{v\})$ détermine deux G.3P. $G' = G^{V-\{v\}}$, et $F_3 = G^{\{v\}}$ (voir Figure 2)

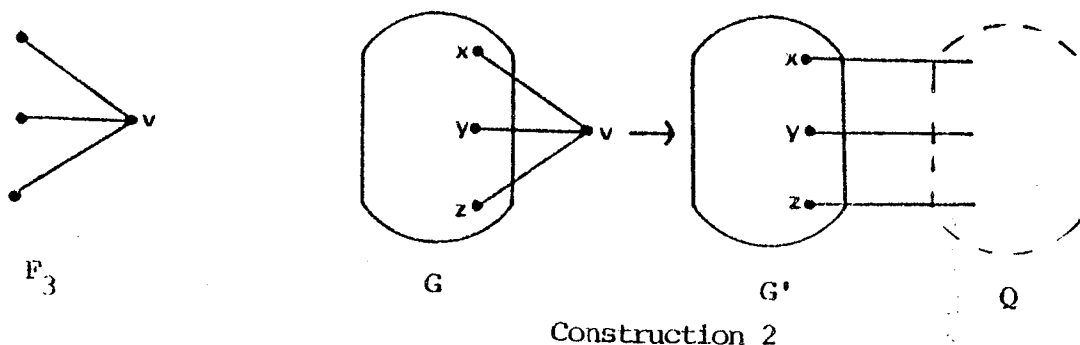


Figure 2

Toute union de G' et de F_3 est égale à G . F_3 étant 3-coloriable et G ne l'étant pas, on en conclut que G' n'est pas 3-coloriable (Remarque 11).

En unissant G' à un G.3P. quelconque Q , on obtient donc un graphe cubique non 3-coloriable.

A l'aide de cette construction, il est donc possible d'obtenir une infinité de graphes cubiques non 3-coloriables.

3 - Théorème 1 : Soit G un graphe cubique connexe non 3-coloriable, possédant un c -cocycle 2 (respectivement un c -cocycle 3) G peut être obtenu par une construction 1 (respectivement par une construction 2) à partir d'un graphe cubique H non 3-coloriable, possédant moins de sommets que G . Si G est sans isthme, H l'est aussi.

Démonstration : Supposons que G possède un c -cocycle 2. G est le résultat d'une union des deux G_1 et G_2 déterminés par ce c -cocycle 2.

On sait donc (remarque 11) que l'un d'eux disons G_1 n'est pas 3-coloriable.

Toute union H de G_1 et de F_2 (voir Figure 1) est un graphe cubique non 3-coloriable. Il est clair que ce graphe possède moins de sommets que G et qu'il est sans isthme lorsque G est sans isthme. De plus, G est construit à partir de H par la construction 1.

Dans le cas où G possède un c -cocycle 3, la démonstration est similaire.

4 - Conclusion

Ayant démontré le théorème précédent, R. Isaacs [26] a qualifié de triviaux les graphes cubiques non 3-coloriables possédant un isthme, un c -cocycle 2 ou un c -cocycle 3, et il a proposé de concentrer l'étude des graphes cubiques non 3-coloriables sur ceux qui sont cycliquement-quatre-arête-connexes.

Ces graphes non triviaux ont plus tard été baptisés snarks par M. Gardner [28].

Remarque 12 : On vérifie facilement que les snarks sont des graphes simples sans triangle.

IV - LA CONSTRUCTION D'ISAACS ET LES SNARKS DE CYCLIQUE-ARETE-CONNECTIVITE-QUATRE

1 - Représentation des éléments de C_4

La propriété P2 du paragraphe précédent nous permet d'affirmer que si on peut colorier les arêtes d'un G.4P. en 3 couleurs de sorte que les sommets de degré 3 soient incidents à des arêtes de 3 couleurs différentes, on a soit tous les pendants incidents à des arêtes de la même couleur, soit deux pendants incidents à des arêtes d'une même couleur, les deux autres étant incidents à des arêtes d'une autre couleur.

On a :

$$C_4 = \{ \{(1,2,3,4), \emptyset, \emptyset\}, \{(1,2), (3,4), \emptyset\}, \{(1,3), (2,4), \emptyset\}, \{(1,4), (2,3), \emptyset\} \}$$

Soit $C \in C_4$, on choisira de représenter C par la représentation unique qui n'a pour composantes que "a" ou "b", et dont la première composante est "a".

L'unicité de cette représentation permet d'identifier les éléments de C_4 et leur représentation.

Nous écrirons donc :

$$C_4 = \left(\begin{array}{cccc} a & a & a & a \\ a & a & b & b \\ a & b & a & b \\ a & b & b & a \end{array} \right)$$

2 - La construction d'Isaacs

Soient S_1 et S_2 deux snarks : $S_1 = (V_1, E_1)$, $S_2 = (V_2, E_2)$.

On peut à partir de S_1 et de S_2 , créer deux G.4P.N. (S_1', ϕ_1) et (S_2', ϕ_2) de la manière suivante :

- Soient $e_1 \in x_1x_2$ et $e_2 \in x_3x_4$ deux arêtes disjointes de S_1 . En cassant e_1 et e_2 on obtient un G.4P. S_1' dont les pendants sont adjacents aux sommets x_1, x_2, x_3 et x_4 .

Soit ϕ_1 la numérotation de S_1' qui attribue le numéro i au pendant adjacent au sommet x_i pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. (S_1', ϕ_1) est un G.4P.N. (voir Figure 3).

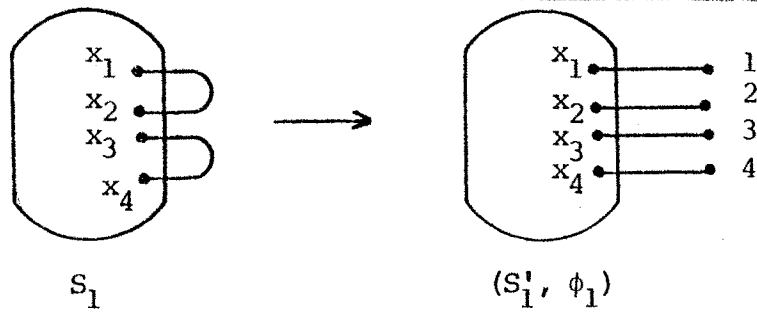


Figure 3

- Soient $e \in zt$ une arête de S_2 , y_1 et y_2 les sommets adjacents à z , y_3 et y_4 les sommets adjacents à t .

(On peut remarquer que S_2 ne possédant ni arête double, ni triangle, y_1, y_2, y_3, y_4 sont distincts).

Le cocycle $\omega(\{z, t\})$ détermine le G.4P.N. $G^{V_2 - \{z, t\}}$ que l'on appellera S_2' et dont les pendants sont adjacents à y_1, y_2, y_3, y_4 .

Soit ϕ_2 la numérotation de S_2' qui attribue le numéro i au pendant adjacent au sommet y_i pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(S_2', ϕ_2) est un G.4P.N. (voir Figure 4).

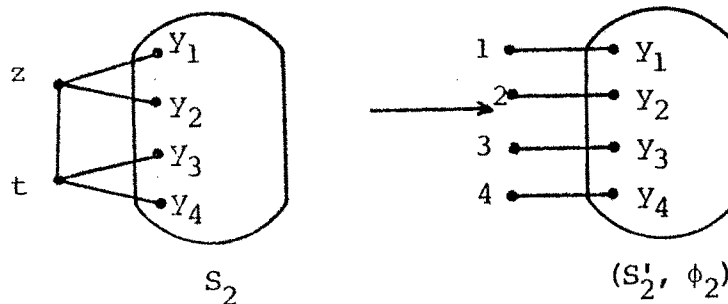


Figure 4

(1) L'union de (S_1', ϕ_1) et de (S_2', ϕ_2) donne un graphe cubique K non 3-coloriable.

Pour montrer cela on remarque que :

- S_1 est égal à l'union de (S_1', ϕ_1) et du G.4P.N. (Q_1, ψ_1) de la figure 5.

- S_2 est égal à l'union de (S_2', ϕ_2) et du G.4P.N. (Q_2, ψ_2) de la figure 6.

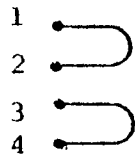


Figure 5 : (Q_1, Ψ_1)

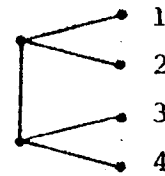


Figure 6 : (Q_2, Ψ_2)

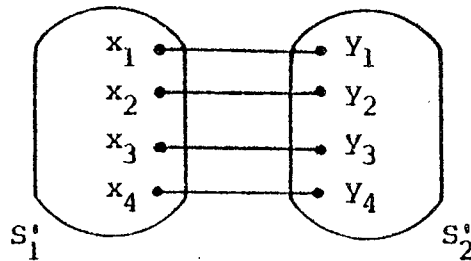


Figure 7 : K

S_1 et S_2 n'étant pas 3-coloriables, on a donc :

$$C(S'_1, \phi_1) \subseteq \overline{C(Q_1, \Psi_1)}$$

$$C(S'_2, \phi_2) \subseteq \overline{C(Q_2, \Psi_2)}$$

$$\text{Or on a } C(Q_1, \Psi_1) = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \\ a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{a} \\ \overline{b} & \overline{b} \\ \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = \overline{C(Q_2, \Psi_2)}$$

$$\text{On a donc } C(S'_1, \phi_1) \cap C(S'_2, \phi_2) = \emptyset$$

L'union de (S'_1, ϕ_1) et de (S'_2, ϕ_2) (voir Figure 7) est donc bien non 3-coloriable. On notera $K = (V, E)$ cette union.

Remarque 13 : Cette méthode de preuve peut être étendue et elle le sera ultérieurement. En effet soient K_1 et K_2 deux graphes cubiques non 3-coloriables, avec K_1 égal à l'union de deux G.mP.N. (F_1, Ψ_1) et (F_1, Ψ_1) , K_2 égal à l'union de deux G.mP.N. (F_2, Ψ_2) et (F_2, Ψ_2) .

Si l'on a $\overline{C(F_1, \Psi_1)} \cap \overline{C(F_2, \Psi_2)} = \emptyset$ alors l'union de (K_1, ϕ_1) et de (K_2, ϕ_2) est non 3-coloriable.

(2) K est cycliquement-4-arête-connexe.

Pour montrer cela on considère

$$G_1 = (V'_1, E'_1) \text{ où } V'_1 = V_1 \quad E'_1 = E_1 - \{e_1, e_2\}$$

$$G_2 = (V'_2, E'_2) \text{ où } V'_2 = V_2 - \{z, t\} \text{ et } E'_2 = E_2 - \{e, e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$$

e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 étant les quatre arêtes de S_2 adjacentes à e .

G_1 et G_2 possèdent chacun quatre sommets de degré deux : respectivement x_1, x_2, x_3, x_4 et y_1, y_2, y_3, y_4 .

On dira que x_i et x_{i+1} pour $i = 1$ ou 3 sont couplés.

De même on dira que y_i et y_{i+1} ($i = 1$ ou 3) sont couplés.

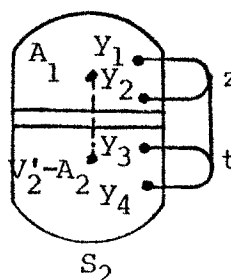
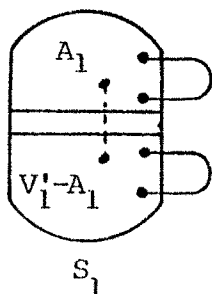
a) Soit A_i une partie propre non vide de V'_i ($i = 1$ ou 2) contenant au moins deux sommets de degré deux de G_i . Nous allons montrer que, alors, le cocycle $\omega_{G_i}(A_i)$ engendré par A_i dans G_i est de cardinal supérieur ou égal à deux.

En effet supposons $|\omega_{G_i}(A_i)| \leq 1$, quatre cas sont possibles :

- A_i contient exactement deux sommets de degré deux dans G_i qui sont couplés.

+ si $i = 1$: dans S_1 , $\omega_{S_1}(A_1)$ serait alors de cardinal inférieur ou égal à 1.

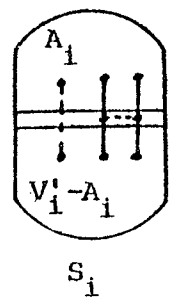
+ si $i = 2$: supposons, sans perte de généralité, que les deux sommets de degré 2 de G_2 appartenant à A_2 sont y_1 et y_2 ; alors dans S_2 , $\omega_{S_2}(A_2 \cup \{z\})$ serait de cardinal inférieur ou égal à 2.



Dans les deux cas, l'hypothèse : " S_i est c.4.a.c." n'est pas respectée.

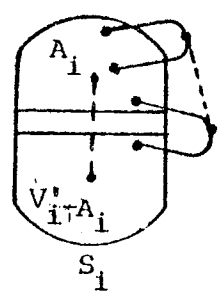
- A_i contient exactement deux sommets de degré deux de G_i , qui sont non couplés.

Dans S_i , $\omega_{S_i}(A_i)$ serait alors de cardinal inférieur ou égal à trois, ce qui est impossible car par hypothèse A_i et $V_i - A_i$ contiennent au moins deux sommets et S_i est c.4.a.c. .



- A_i contient exactement trois sommets de degré deux de G_i .

Dans S_i , $\omega_{S_i}(V_i - A_i)$ serait alors de cardinal inférieur ou égal à deux.

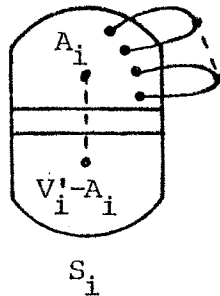


S_i étant c.4.a.c., il y a contradiction.

- A_i contient les quatre sommets de degré deux de G_i .

Dans S_i , $\omega_{S_i}(V_i - A_i)$ serait alors de cardinal inférieur ou égal à un.

Il y a là encore contradiction avec l'hypothèse que S_i est c.4.a.c. .



b) Soit $\omega(A)$ ($A \neq \emptyset$) un c-cocycle n de K . Posons :

$$A_i = V_i' \cap A \quad (\text{et donc } A = A_1 \cup A_2).$$

$$n_i = |\omega_{G_i}(A_i)| \text{ pour } i = 1, 2$$

Il est clair que $|\omega(A)| \geq n_1 + n_2$.

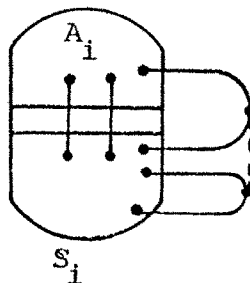
Donc, d'après ce qui précède, si A_1 et A_2 sont des parties propres et non vides respectivement de V_1' et de V_2' alors $|\omega(A)| \geq 2+2 = 4$.

Il ne reste donc plus qu'à étudier le cas où $A = A_i$ pour $i = 1$ ou 2 , avec $|\omega(A)| \leq 3$.

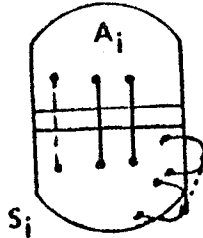
Or si $A_i = V_i'$ alors $|\omega(A)| = 4$, on a donc $A_i \neq V_i'$; $A_i = A$ est une partie propre non vide de V_i' et d'après ce qui précède $|\omega(A)| \geq n_i = |\omega_{G_i}(A_i)| \geq 2$.

Il est clair que $|\omega(A)|$ étant supposé inférieur ou égal à trois, A_i contient au plus un sommet de degré deux de G_i .

Si A_i contient un sommet de degré deux de G_i alors $|\omega_{G_i}(A_i)| = 2$, et $\omega_{S_i}(A_i)$ est un c-cocycle 3 de S_i . (A_i , par hypothèse, contient un cycle et $V_i' - A_i$ au moins trois sommets).



Si A_i ne contient pas de sommet de degré deux de G_i , alors $|w_{S_i}(A_i)| = |\omega(A)| \leq 3$ et $w_{S_i}(A_i)$ est un c -cocycle 2 ou un c -cocycle 3 de S_i . (A_i , par hypothèse, contient un cycle et $V_i - A_i$ au moins quatre sommets).



Dans chacun des cas l'hypothèse " S_i ($i = 1, 2$) est c.4.a.c." est contredite. Ceci achève la démonstration.

Remarque 14 : Il est possible par cette construction d'obtenir des snarks à partir de graphes non 3-coloriables qui ne sont pas des snarks.

En particulier on peut généraliser cette construction de la façon représentée en Figure 8 :

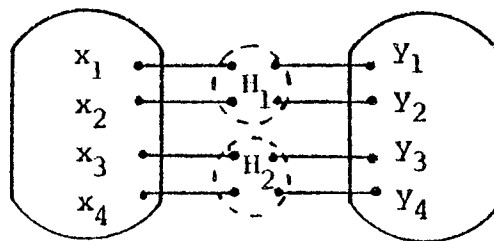


Figure 8

où H_1 et H_2 sont deux G.4P. quelconques.

3 - La construction triviale

3-a) Définitions

On appellera C le G.4P. dont les quatre arêtes non pendantes forment un carré (voir Figure 9)

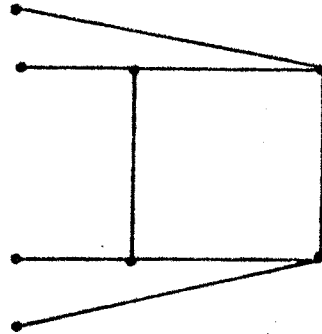


Figure 9 : C

Soit $G = (V,E)$ un graphe cubique non 3-coloriable sans isthme possédant un carré sans corde, G est une union de C et d'un G.4P. que l'on dira déterminé par ce carré.

3-b) Propriétés

P3 [11] : Soit G un G.4P., on a $|C(G)| \neq 1$.

Démonstration : On supposera $|C(G)| > 0$ et on montrera que, alors, $|C(G)| \geq 2$.

En effet supposons que G possède une coloration des pendants, il existe une numérotation ϕ des pendants de G de sorte que (G,ϕ) admette la coloration

a		a
a	ou la coloration	a
a		b
a		b

Or on sait (propriété P1, §II) que pour une 3-coloration des arêtes de G associée à une de ses colorations des pendants, il existe une chaîne "bicoloriée" (a,b) qui relie le premier pendant à l'un des trois autres, et que l'on peut échanger les couleurs le long de ces chaînes. Par ce procédé on obtient :

à partir de

a	b	b	b
a	:	b	ou a
a	:	a	ou b
a	:	a	ou a
		a	b

à partir de

a	b	b	b
a	:	b	ou a
b	:	b	ou a
b	:	b	ou b
		b	a

Dans chacun de ces cas, en échangeant b et a dans le vecteur colonne obtenu, on obtient une nouvelle coloration de G et donc $|C(G)| > 1$.

P4 [11] : Soit $G = (V,E)$ un graphe cubique non 3-coloriable contenant un carré sans corde.

G_1 , le G.4P. déterminé par ce carré, n'est pas 3-coloriable.

Démonstration : G est égal à une union de G_1 et de C.

Or $|C(C)| = 3$; on a donc, G n'étant pas 3-coloriable : $|C(G_1)| \leq 1$ (Remarque 10).

Or on sait (Propriété P3) que $|C(G_1)| \neq 1$; on a donc $|C(G_1)| = 0$.

3-c) La construction triviale

Soit $G = (V,E)$ un graphe cubique non 3-coloriable possédant un carré sans corde.

Soit G_1 le G.4P. déterminé par ce carré.

Toute union de G_1 et d'un G.4P. quelconque Q est un graphe cubique non 3-coloriable. (puisque G_1 n'est pas 3-coloriable d'après P4).

La construction est décrite à la Figure 10

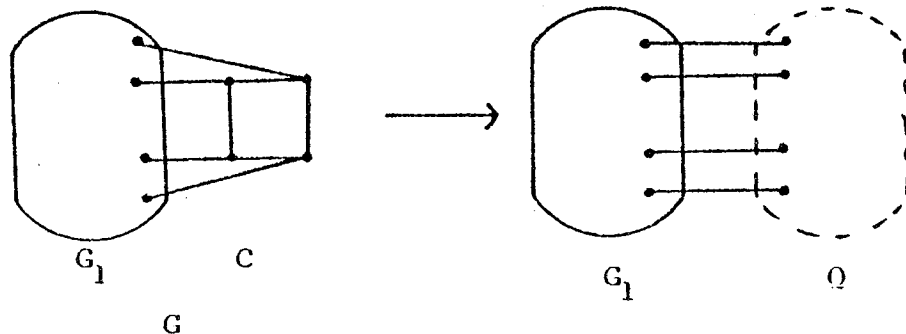


Figure 10

4- Théorème 2 [29, 30]:

Soit S un snark de cyclique-arête-connectivité 4.

Si S contient un c-cocycle 4 qui n'est pas engendré par les quatre sommets d'un carré sans corde, alors :

S est le résultat, soit d'une construction d'Isaacs, soit d'une construction triviale, à partir de graphes cubiques non 3-coloriables sans isthme ayant un nombre de sommets strictement inférieur à celui de S.

Démonstration : Soient S_1 et S_2 deux G.4P. déterminés par un c-cocycle 4 de S non engendré par les quatre sommets d'un carré sans corde. Deux cas sont possibles :

- S_1 ou S_2 , disons S_1 n'est pas 3-coloriable.

Soit S' une union quelconque de S_1 et de C.

Il est clair que S' est un graphe cubique non 3-coloriable à partir duquel on peut obtenir S par la construction triviale. S étant de c.a.c.4 et S_2 étant différent de C, S' a moins de sommets que S (on a en quelque sorte "remplacé" S_2 par C).

Il est facile de vérifier que S ne possédant pas d'isthme, S' n'en possède pas non plus.

- S_1 et S_2 sont 3-coloriables.

Dans ce cas la propriété P3 nous donne $|C(S_1)| \geq 2$ et $|C(S_2)| \geq 2$.

Or S_1 et S_2 sont contraires, on a donc (Remarque 10) :

$$|C(S_1)| = |C(S_2)| = 2.$$

D'autre part pour toutes les numérotations ϕ_1 et ϕ_2 respectivement de S_1 et S_2 , telles que l'union de (S_1, ϕ_1) et de (S_2, ϕ_2) soit égale à S on a $C(S_1, \phi_1) \cap C(S_2, \phi_2) = \emptyset$ et donc (S_1, ϕ_1) ou (S_2, ϕ_2) disons (S_1, ϕ_1)

admet la coloration
a
a
a
a

On peut donc choisir ϕ_1 et ϕ_2 telles que $C(S_1, \phi_1) = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \\ a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ et

$$C(S_2, \phi_2) = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \\ a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Il est clair que l'union de (S_1, ϕ_1) et de (Q_2, ψ_2) (Figure 6) et l'union de (S_2, ϕ_2) et de (Q_1, ψ_1) (Figure 5) sont deux graphes cubiques non 3-coloriables ayant moins de sommets que S .

On montre facilement que ces deux graphes sont sans isthme grâce au fait que S est c.4.a.c. .

Il est clair que S est le résultat d'une construction d'Isaacs à partir de ces deux graphes.

V - CONSTRUCTIONS ET SNARKS DE CYCLIQUE-ARETE-CONNECTIVITE 5

1 - Représentations des éléments de C_5

D'après la définition donnée en II-c), les éléments de C_5 sont les partitions de $\{1, \dots, 5\}$ en trois parties de cardinal impair ; l'une de ces parties est donc de cardinal 3 et les deux autres de cardinal 1.

Il y a donc autant d'éléments dans C_5 qu'il y a de choix de trois éléments parmi cinq, soit $C_5^3 = 10$.

Soit $C \in C_5$ $C = \{C_1, C_2, C_3\}$ avec $|C_1| = 3$, $|C_2| = |C_3| = 1$.

On représentera C par un vecteur colonne ρ à 5 composantes à valeurs dans $\{a, .\}$ tel que $\{i/i \in \{1, \dots, 5\}, \rho_i = a\} = C_1$.

L'unicité de cette représentation permet d'identifier les éléments de C_5 et leur représentation.

Nous écrirons donc :

$$C_5 = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a & . & . & a & a & a & . & a & . & a \\ a & a & . & . & a & a & a & . & a & . \\ a & , & a & , & a & , & . & , & . & , & a & , & a & , & . & , & a \\ . & a & a & a & . & a & . & a & a & . \\ . & . & a & a & a & . & a & . & a & a \end{array} \right\}$$

Soit (G, ϕ) un G.5P.N. . On appellera matrice représentative de $C(G, \phi)$ toute matrice à cinq lignes et dont l'ensemble des colonnes est égal à l'ensemble des colorations admises par (G, ϕ) .

On dira qu'un pendant p d'un G.5P. noté G est colorié "a" (resp. colorié ".") par une coloration P des pendants de G si pour toute numérotation des pendants de G dans la coloration de (G, ϕ) induite par P , la composante de rang $\phi(p)$ est égale à "a" (resp. à ".").

D'autre part, soit E une 3-coloration de G , et ϕ une numérotation des pendants de G .

Soit P la coloration des pendants de (G, ϕ) associée à E .

P induit une coloration C ($C \in C_5$).

Chacun des pendants correspondant aux composantes du vecteur-colonne C égales à "." (donc coloriés différemment dans P) est extrémité (dans G muni de la 3-coloration E) d'une chaîne bicoloriée dont l'autre extrémité est un pendant correspondant à une composante du vecteur-colonne C égale à "a" (cf. Remarque 6).

Ces deux chaînes, que l'on appellera chaînes (a,.), seront indiquées sur C par deux lignes joignant chacune des composantes "." à une composante "a".

Par exemple on écrira :

a
a
.)

2 - Quelques cas particuliers

Le graphe de Petersen P représenté à la Figure 11 est le plus petit graphe cubique sans isthme non 3-coloriable [20,31].

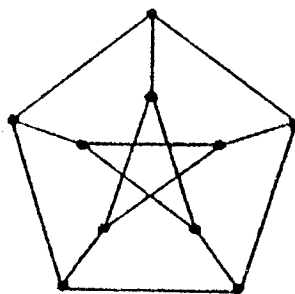
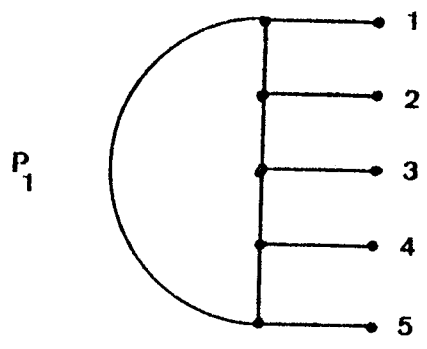
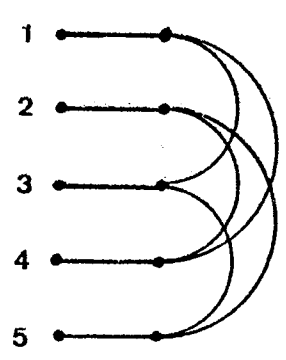


Figure 11 : le graphe de Petersen

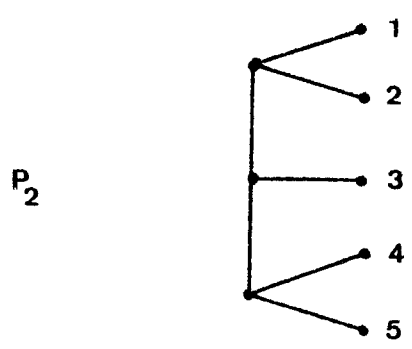
Solent $P_1, P_1', P_2, P_2', P_3, P_3'$ les six G.5P.N. de la Figure 12:



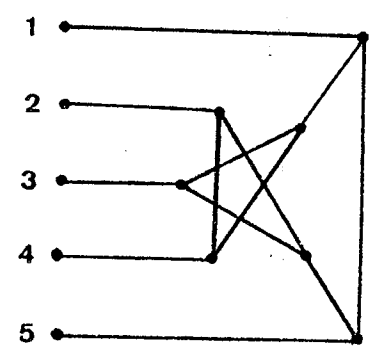
$$C(P_1) = \left\{ \begin{array}{ccccc} a & \cdot & \cdot & a & a \\ a & a & \cdot & \cdot & a \\ a & a & a & \cdot & \cdot \\ \cdot & a & a & a & \cdot \\ \cdot & \cdot & a & a & a \end{array} \right\}$$



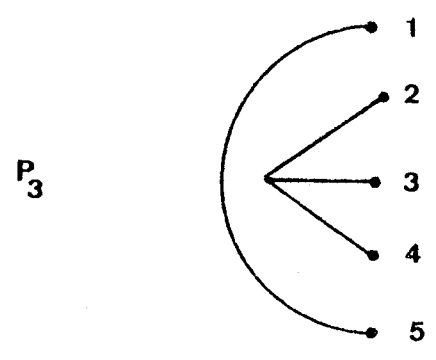
$$C(P'_1) = \left\{ \begin{array}{ccccc} a & \cdot & a & \cdot & a \\ a & a & \cdot & a & \cdot \\ \cdot & a & a & \cdot & a \\ a & \cdot & a & a & \cdot \\ \cdot & a & \cdot & a & a \end{array} \right\}$$



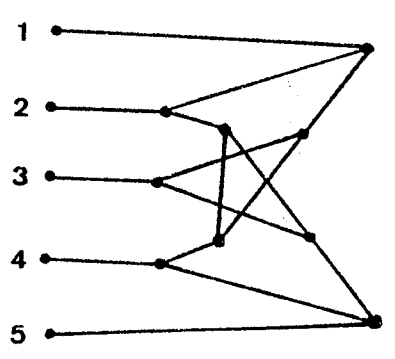
$$C(P_2) = \left\{ \begin{array}{ccccc} a & a & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & a & a & a \\ a & a & a & a & \\ a & \cdot & a & \cdot & \\ \cdot & a & \cdot & a & \end{array} \right\}$$



$$C(P'_2) = \left\{ \begin{array}{cccccc} a & a & a & \cdot & \cdot & a \\ a & a & a & a & \cdot & \cdot \\ a & \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot \\ \cdot & a & \cdot & a & a & a \\ \cdot & \cdot & a & a & a & a \end{array} \right\}$$



$$C(P_3) = \left\{ \begin{array}{ccc} a & a & a \\ a & \cdot & \cdot \\ \cdot & a & \cdot \\ \cdot & \cdot & a \\ a & a & a \end{array} \right\}$$



$$C(P'_3) = \left\{ \begin{array}{cccccc} a & a & a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a & a & \cdot & a & a \\ a & \cdot & a & a & \cdot & a \\ a & a & \cdot & a & a & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a & a & a \end{array} \right\}$$

Figure 12

P_i uni à P'_i est isomorphe au graphe de Petersen ($i = 1, 2, 3$).

On sait donc que $C(P_i) \subseteq \overline{C(P'_i)}$ ($i = 1, 2, 3$).

En fait l'étude des colorations admises par ces G.5P.N (indiquées à la Figure 12) nous permet de remarquer que :

$$C(P_i) = \overline{C(P'_i)} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

D'autre part, nous obtenons ici un exemple de G.5P. à la fois équivalents et contraires puisque P_i et P'_i s'obtiennent par numérotation des pendants de deux graphes isomorphes.

3 - La construction P

Soient S_1 et S_2 deux graphes cubiques non 3-coloriables tels que :

- S_1 est l'union d'un G.5P.N. noté (G_1, ϕ_1) et de P'_i .
- S_2 est l'union d'un G.5P.N. noté (G_2, ϕ_2) et de P_i .

pour i donné égal à 1, 2 ou 3.

S_1 et S_2 n'étant pas 3-coloriables on :

$$C(G_1, \phi_1) \subseteq \overline{C(P'_i)}$$

et $C(G_2, \phi_2) \subseteq \overline{C(P_i)}$

$$\text{Or } \overline{C(P'_i)} = C(P_i) \text{ et l'on a donc } C(G_1, \phi_1) \cap C(G_2, \phi_2) = \emptyset.$$

On en déduit que l'union de (G_1, ϕ_1) et de (G_2, ϕ_2) donne un graphe cubique S non 3-coloriable.

Cette construction sera appelée construction P et S sera dit P-construct à partir de S_1 et de S_2 .

Un exemple de cette construction dans le cas où $i = 1$ est le snark double-étoile (représenté à la Figure 13) découvert par R. Isaacs qui est P-construct à partir de deux graphes isomorphes au "snark-fleur" J_5 (représenté à la Figure 14) ([26], voir également Chapitre III).

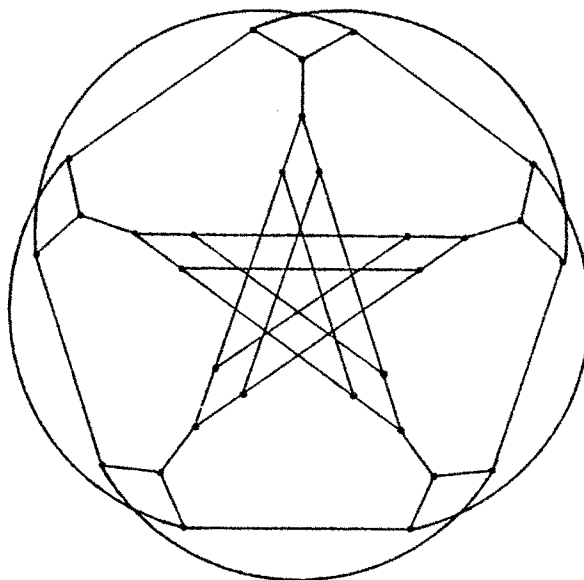


Figure 13 : snark double-étoile

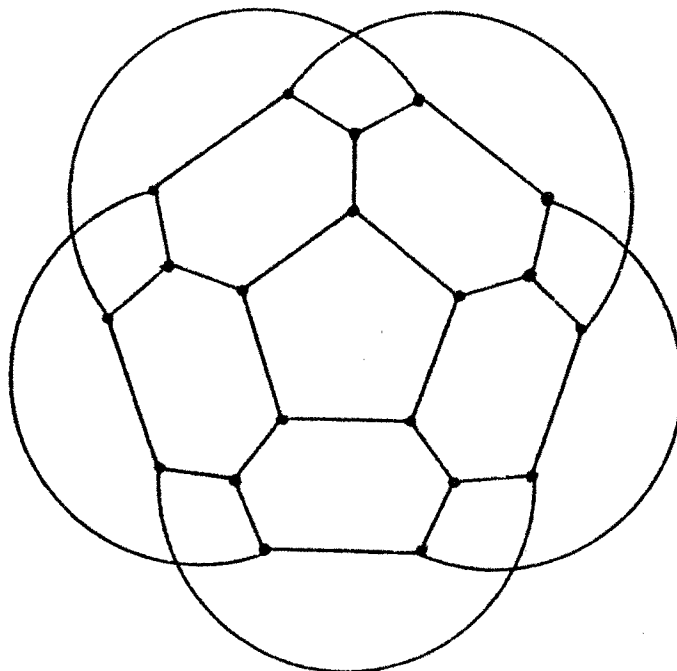


Figure 14 : snark-fleur J_5

Propriété : Un graphe S obtenu par la construction P à partir de deux snarks S_1 et S_2 cycliquement-5-arête-connexes est cycliquement-4-arête-connexé.

Démonstration : Supposons donc que

S_1 est égal à l'union de (G_1, ϕ_1) et de P_1^i } où $i \in \{1, 2, 3\}$ et (G_1, ϕ_1) et
 S_2 est égal à l'union de (G_2, ϕ_2) et de P_1^i } (G_2, ϕ_2) sont deux G.5P.N. .

Soient X_1 l'ensemble des sommets de degré trois de G_1 ,

X_2 l'ensemble des sommets de degré trois de G_2 .

L'ensemble des sommets de S , noté X , est égal à $X_1 \cup X_2$.

Supposons que S ne soit pas c.5.a.c. . Nous allons aboutir à une contradiction.

Soit $\omega(A)$ ($A \subset X$) un c-cocycle n de S avec $n \leq 3$.

On notera A_1 l'ensemble $A \cap X_1$,

A_2 l'ensemble $A \cap X_2$.

(donc $A = A_1 \cup A_2$).

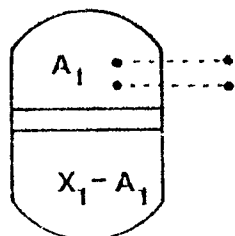
On a $|\omega(A)| = n_1 + n_2 + n_3 = n$, où n_1 est le nombre d'arêtes de $\omega(A)$ dont les deux extrémités appartiennent à X_1 , n_2 est le nombre d'arêtes de $\omega(A)$ dont les deux extrémités appartiennent à X_2 , n_3 est le nombre d'arêtes de $\omega(A)$ dont une extrémité appartient à X_1 et l'autre à X_2 .

Nous utiliserons deux résultats préliminaires.

R1) Si A_1 est une partie propre non vide de X_1 , alors $n_1 \geq 2$

Pour le démontrer, nous pouvons supposer sans perte de généralité que dans G_1 le nombre de pendants adjacents à des sommets de A_1 est inférieur ou égal à deux.

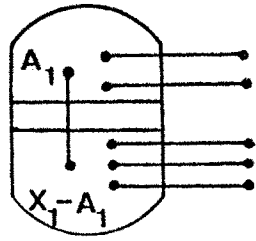
1-a : Supposons que $n_1 = 0$



G_1

S_1 (l'union de G_1 et de P_1^i) contiendrait alors un c-cocycle 0, 1 ou 2 (voir Chapitre I, paragraphe I) : impossible.

1-b : Supposons que $n_1 = 1$



G_1

S_1 ne contenant pas de c-cocycle 1 ou 2, A_1 doit être adjacent dans G_1 à deux pendants et donc $(X_1 - A_1)$ est adjacent à trois pendants.

D'autre part, S_1 ne contenant pas de c-cocycle 3 ou 4, A_1 doit être réduit à un sommet et $(X_1 - A_1)$ à deux sommets adjacents.

Dans ce cas G_1 est isomorphe au graphe de P_2 .

Or, on vérifie facilement qu'une union quelconque de ce graphe et de P_1' ou P_3' n'est jamais un snark.

S_1 est donc isomorphe à l'union de P_2 et de P_2' , c'est à dire au graphe de Petersen, et S_2 est l'union de (G_2, ϕ_2) et de P_2 .

On a donc $S = S_2$ qui est c.4.a.c. (puisque c.5.a.c.) : impossible.

R2) Si A_2 est une partie propre non vide de X_2 , alors $n_2 \geq 2$

De même que précédemment, on peut supposer ici que A_2 est adjacent dans G_2 à au plus deux pendants.

2-a : Supposons que $n_2 = 0$

De même que précédemment on contredirait alors le fait que S_2 ne possède pas de c-cocycle 0, 1 ou 2 : impossible.

2-b : Supposons que $n_2 = 1$

De même que précédemment il faudrait, pour ne pas contredire le fait que S_2 est c.4.a.c. que G_2 soit isomorphe au graphe de P_2 .

Or, on vérifie facilement qu'aucune union du graphe de P_2 et de P_1, P_2 ou P_3 n'est un snark. Ce cas ne peut donc pas se produire.

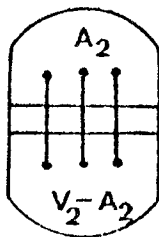
En conclusion de R1) et de R2), si A_1 et A_2 sont des parties propres non vides l'une de X_1 , l'autre de X_2 alors

$$|\omega(A)| \geq n_1 + n_2 \geq 2 + 2 = 4, \text{ contrairement à notre hypothèse de départ.}$$

Il reste donc à étudier deux cas :

C1) $A_1 = \emptyset$ (on se ramène à ce cas si $A_1 = X_1$).

Dans ce cas $A = A_2$.



S_2

Si G_1 ne possède pas d'arête incidente à deux pendants, il est clair que :

$$|\omega_{S_2}(A_2)| \leq |\omega_S(A_2)| = |\omega_S(A)| \leq 3$$

On a donc $|\omega_{S_2}(A_2)| = 3$.

Soit V_2 l'ensemble des sommets de S_2 . $(V_2 - A_2)$ contient au moins un sommet pendant de G_2 et au moins un sommet de $X_2 - A_2$ (si $A_2 = X_2$ alors $|\omega_S(A)| = 5$).

D'autre part, A_2 par hypothèse contient un cycle.

$\omega_{S_2}(A_2)$ serait alors un c-cocycle 3 de S_2 ce qui est impossible.

Si G_1 possède une arête incidente à deux pendants, S_1 étant c.5.a.c., il est clair que G_1 est isomorphe au graphe de P_3 . Or aucune union du graphe de P_3 et de P'_1 ou P'_2 n'est un snark. S_1 est donc isomorphe à l'union de P_3 et de P'_3 , c'est à dire au graphe de Petersen.

Et S est égal à S_2 qui est c.5.a.c. donc c.4.a.c. : impossible.

C2) $A_2 = \emptyset$ (on se ramène à ce cas si $A_2 = X_2$)

Dans ce cas $A_1 = A$.

Si G_2 ne possède pas d'arête incidente à deux pendants, il est clair que l'on a

$$|\omega_{S_1}(A_1)| = |\omega_S(A_1)| = |\omega_S(A)| \leq 3$$

On a donc $|\omega_{S_1}(A_1)| = 3$ et de même que précédemment on montre que $\omega_{S_1}(A_1)$ serait alors un c-cocycle 3 de S_1 , ce qui est impossible.

D'autre part, si G_2 possède une arête incidente à deux pendants, il est isomorphe au graphe de P_3 .

Or aucune union de ce graphe et de P_1 , P_2 ou P_3 n'est égale à un snark.

On a ainsi montré que S est bien c.4.a.c. .

4 - Les snarks de cyclique-arête-connectivité 5

Théorème 3 : Soit S un snark de c.a.c.5. .

Soient G_1 et G_2 les deux G.5P. déterminés par un c-cocycle 5 de S .

On a :

- G_1 ou G_2 n'est pas 3-coloriable

ou - S résulte d'une construction P à partir de deux graphes cubiques non 3-coloriables connexes sans isthmes S_1 et S_2 .

Si G_1 et G_2 sont différents des graphes de P_1' , P_2' et P_3' , S_1 et S_2 ont chacun moins de sommets que S .

Démonstration :

Supposons que G_1 et G_2 sont 3-coloriables.

Lemme 1 : Soit S un graphe cubique non 3-coloriable possédant un cocycle-5 $\omega(A)$.

On appellera G_1 celui des deux G.5P. déterminés par $\omega(A)$ qui possède le moins de colorations des pendants (en cas d'égalité, on choisira indifféremment l'un ou l'autre).

Si G_1 est 3-coloriable, alors il est équivalent à P_1 ou P_2 ou P_3 .

Démonstration du lemme 1 :

Appelons G_2 l'autre G.5P. déterminé par $\omega(A)$.

On sait qu'il existe deux numérotations ϕ_1 et ϕ_2 respectivement de G_1 et G_2 telles que l'union de (G_1, ϕ_1) et de (G_2, ϕ_2) soit égale à S .

Or S n'est pas 3-coloriable et $|C_5| = 10$, on a donc $|C(G_1)| \leq 5$ (cf. Remarque 10).

On divise l'étude de l'ensemble des colorations des pendants de G_1 en deux cas :

1) $0 < |C(G_1)| \leq 4$

2) $|C(G_1)| = 5$

1) $0 < |C(G_1)| \leq 4$

G_1 admet au moins une coloration des pendants.

On peut choisir la numérotation ϕ_1 des pendants de G_1 de telle sorte que la coloration induite soit

a
.
a
.
a

Deux cas sont possibles :

Hypothèse 1 : Pour toute 3-coloration de G_1 , les deux chaînes (a,.) ont une extrémité commune (qui est bien sûr un pendant colorié "a").

On peut supposer (sans modifier le problème) que ϕ_1 est telle que l'on a la situation suivante :

a
.
a } (le pendant numéroté 3 est extrémité des deux chaînes)
.
a

L'échange des couleurs le long des chaînes (a,.) et l'hypothèse 1 nous donnent les deux situations suivantes :

a a
a) et .)
.) .)
. a)
a a

Les échanges de couleurs le long des chaînes (a,.) indiquées sur ces colorations n'induisent pas de colorations supplémentaires.

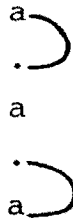
Si l'on avait une quatrième coloration, celle-ci devrait par échange des couleurs le long de ces chaînes (a,.) engendrer deux colorations déjà existantes. Il est clair que cela n'est pas possible.

On remarque alors que dans ce cas :

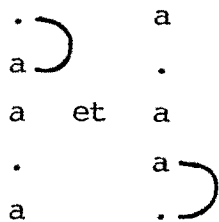
$$C(G_1, \phi_1) = C(P_3) \quad (\text{voir Chapitre II, paragraphe V-2})$$

Hypothèse 2 : Il existe une 3-coloration de G_1 telle que les deux chaînes (a,.) aient des extrémités distinctes.

On peut supposer que l'on a choisi ϕ_1 de telle sorte que l'on ait la situation suivante :



L'échange des couleurs le long des chaînes (a,.) donne les colorations :



On a indiqué sur ces colorations la chaîne (a,.) sur laquelle l'échange a eu lieu (elle reste une chaîne (a,.) de la nouvelle coloration).

Les chaînes (a,.) autres que celles indiquées ne doivent pas créer par échange des couleurs plus d'une coloration nouvelle puisque l'on a supposé $|C(G_1)| \leq 4$.

	.	.	.	(les chaînes (a,.)
a)	crée par échange	.	a	a indiquées à droite
Or a	sur la chaîne (a,.)	a)	ou .)	ou a sont celles sur
.	non indiquée	a)	a)	a) lesquelles l'échange
a		a	a	.) a eu lieu)
a		.	a	a
.	crée par échange	a)	a)	a)
a	sur la chaîne (a,.)	a	ou .)	ou a)
a)	non indiquée	a	a	.)
.		.	.	.

Seule la coloration

.
a
a
a
.

est obtenue dans les deux cas.

$$\text{On a donc } C(G_1, \phi_1) = \left\{ \begin{array}{cccc} a & . & a & . \\ . & a & . & a \\ a & , & a & , & a & , & a \\ . & . & a & a \\ a & a & . & . \end{array} \right\}$$

$$= C(P_2) \quad (\text{voir Chapitre II, paragraphe V-2}).$$

$$2) |C(G_1)| = 5$$

On sait que chacun des pendants de G_1 est colorié "a" par au moins l'un des éléments de $C(G_1)$ (puisque'il y en a au plus quatre qui ne colorent pas "a").

L'étude suivante des cas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ permet d'examiner toutes les solutions possibles pour $C(G_1)$.

Cas α : Un pendent p_1 n'est colorié "a" qu'une seule fois ; soient p_2 et p_3 les deux pendants coloriés "a" par la même coloration que p.

On peut supposer que ϕ_1 est une numérotation des pendants de G_1 telle que $\phi_1(p_j) = j$ ($j = 1, 2, 3$), la matrice suivante est représentative de $C(G_1, \phi_1)$:

$$\begin{bmatrix} a & . & . & . & . \\ a & . & a & a & a \\ a & a & . & a & a \\ . & a & a & . & a \\ . & a & a & a & . \end{bmatrix}$$

Or si l'on considère la coloration

.
.
a
a
a

on remarque que, quelle que soit l'extrémité de la chaîne (a,.) issue du pendent p_1 , l'échange des couleurs le long de cette chaîne donnera une sixième coloration.

Ce cas est donc impossible.

Cas β : Un pendent p est colorié "a" par exactement deux colorations des pendants de G_1 , soient P_1 et P_2 . Il y a au plus un autre pendent que p qui est colorié "a" par P_1 et P_2 (puisque $P_1 \neq P_2$).

Deux cas sont donc possibles :

1er cas : Il n'existe pas d'autre pendent que p qui soit colorié "a" par P_1 et P_2 . On peut choisir la numérotation ϕ_1 des pendants de G_1 telle que

les colorations induites par P_1 et P_2 soient égales l'une à a et l'autre
a
a
.
.
a
.
a
a
à . ($\phi_1(p) = 1$).

Pour éviter d'autres colorations avec p colorié "a", les chaînes $(a,.)$ dans chacune des deux colorations doivent avoir p pour extrémité ; or

$\left. \begin{matrix} a \\ a \\ a \\ . \\ . \end{matrix} \right\}$ et $\left. \begin{matrix} a \\ . \\ . \\ a \\ a \end{matrix} \right\}$ donnent les colorations $\begin{matrix} . & . & . & . \\ a & a & a & . \\ a & . & a & a \\ . & a & a & a \end{matrix}$ et il y a au moins

six colorations admises par (G_1, ϕ_1) ce qui contredit l'hypothèse $|C(G_1)| = 5$.

2ème cas : Soit p' un pendant colorié "a" par P_1 et P_2 .

On peut choisir la numérotation ϕ_1 des pendants de G_1 telle que les

colorations induites par P_1 et P_2 soient égales à $\begin{matrix} a & a \\ a & a \\ a & . \\ . & a \\ . & . \end{matrix}$ avec

$$\phi_1(p) = 1, \phi_1(p') = 2.$$

(G_1, ϕ_1) ne peut admettre la coloration $\begin{matrix} . \\ . \\ a \\ a \\ a \end{matrix}$ (quelle que soit l'extrémité

de la chaîne $(a,.)$ issue de p dans cette coloration, on aurait une troisième coloration des pendants de G_1 avec p colorié "a").

La matrice suivante est donc représentative de $C(G_1, \phi_1)$:

$$\begin{bmatrix} a & a & . & . & . \\ a & a & a & a & a \\ a & . & . & a & a \\ . & a & a & . & a \\ . & . & a & a & . \end{bmatrix}$$

L'ensemble de ces cinq colorations que l'on appellera E_5 est obtenu par exemple pour le G.5P.N. noté F de la Figure 15.

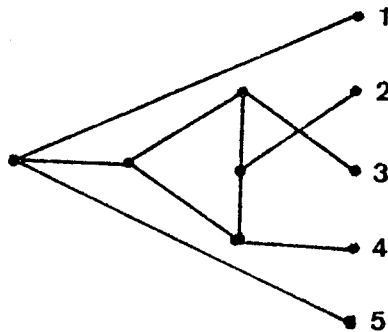


Figure 15 : F

Cas γ : Un pendant p est colorié "a" par quatre colorations ou plus.

Toute matrice représentative d'un ensemble de cinq colorations contient quinze "a" (il y en a trois par colonne). Si une ligne contient quatre "a" ou plus, il existe une autre ligne qui en contient moins que trois. Et l'on est ainsi ramené à l'étude des cas précédents.

Cas δ : Chaque pendant est colorié "a" par trois colorations exactement.

Considérons le graphe H à cinq sommets construit de la manière suivante : les sommets de H sont 1, 2, 3, 4, 5 et H possède une arête d'extrémités i et j ($i \neq j$) si et seulement si il existe une coloration admise par (G_1, ϕ_1) dont les composantes de rang i et j sont égales à ".".

Comme les colorations sont distinctes, H est un graphe simple. Chaque pendant étant colorié "." exactement deux fois, H est régulier de degré deux. Il s'agit donc d'un cycle élémentaire de longueur cinq.

Soit H' le G.5.P. obtenu en ajoutant cinq nouveaux sommets : p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 à H et en créant cinq arêtes nouvelles e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 avec $e_i \in p_i$ ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$). H' est isomorphe au graphe de P_1 .

Soit ϕ' la numérotation des pendants de H' telle que $\phi'(p_i) = i$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

On a $C(G_1, \phi_1) = C(H', \phi')$.

G_1 est donc équivalent à P_1 .

Nous pouvons donc déjà affirmer que G_1 est équivalent à P_1 , P_2 , P_3 ou au G.5P.N. noté F de la Figure 15.

Faisons maintenant intervenir le fait qu'il existe un G.5P. G_2 contraire à G_1 avec $|C(G_1)| \leq |C(G_2)|$.

Ce fait n'est pas contradictoire avec : G_1 équivalent à P_i ($i = 1, 2$ ou 3) puisque l'on pourra prendre G_2 égal au graphe de P_i .

Par contre, nous allons voir que nous pouvons maintenant éliminer le cas : G_1 équivalent à F.

En effet $C(G_1, \phi_1) \cap C(G_2, \phi_2) = \emptyset$ avec :

$$5 = |C(G_1, \phi_1)| \leq |C(G_2, \phi_2)| \quad \text{et} \quad |C_5| = 10$$

Donc $C(G_2, \phi_2) = \overline{C(G_1, \phi_1)}$; on vérifie alors (voir cas β ci-dessus) que si G_1 est équivalent à F, un pendant de G_2 est colorié "a" une seule fois, ce qui est exclu par l'étude du cas α : il y a contradiction.

Le lemme 1 est ainsi démontré.

Remarque au sujet de ce lemme :

Connaissant les ensembles de colorations des pendants qui peuvent être égaux à $C(G_1)$, on peut se demander quels sont ceux qui peuvent être égaux à $C(G_2)$. Pour étudier cette question, il est utile de remarquer que l'on peut représenter l'ensemble $C(G)$ des colorations des pendants d'un G.5P. noté G par un graphe R_G dont les sommets sont les pendants de G coloriés "." au moins une fois et dont les arêtes correspondent aux éléments de $C(G)$ de la manière suivante :

à toute coloration des pendants de G qui colorie "." les pendants p et p' on associe une arête d'extrémités p et p' .

Toute coloration des pendants de G qui colorie "." les pendants p et p' permet par échange des couleurs le long de la chaîne (a, \dots) ayant p' pour extrémité d'obtenir une nouvelle coloration des pendants de G qui colorie "." le pendant p .

Il est donc clair que les sommets de R_G doivent être de degré différent de un et que R_G est un graphe simple, possédant autant d'arêtes que G possède de colorations des pendants.

D'autre part, si G est :

- équivalent à P_1 , alors R_G est un cycle élémentaire sans corde de longueur cinq ;
- équivalent à P_2 , alors R_G est un cycle élémentaire sans corde de longueur quatre ;
- équivalent à P_3 , alors R_G est un cycle élémentaire sans corde de longueur trois ;
- équivalent au G.5P.N. noté F de la Figure 15, alors R_G est un cycle élémentaire de longueur quatre possédant une corde.

Et si R_G possède un sous-graphe partiel qui est un cycle élémentaire de longueur cinq (resp. un cycle élémentaire sans corde de longueur quatre, un cycle élémentaire sans corde de longueur trois, un cycle élémentaire de longueur quatre possédant une corde), alors il existe une numérotation ϕ de G telle que $C(G, \phi)$ contienne $C(P_1)$ (resp. $C(P_2)$, $C(P_3)$, $C(F)$).

a - Si G_1 est équivalent à P_1

On a $5 = |C(G_1)| \leq |C(G_2)| \leq |\overline{C(G_1)}| = 5$, donc $|C(G_2)| = 5$.

On peut supposer que ϕ_1 est telle que $C(G_1, \phi_1) = C(P_1)$ et donc

$$C(G_2, \phi_2) = \overline{C(G_1, \phi_1)} = C(P_1').$$

G_2 est équivalent à P_1' .

Remarque :

Supposons que $S = (V, E)$ est un graphe cubique non 3-coloriable et qu'il existe $A, A \subset V$ tel que le sous-graphe de S défini par A et noté S_A soit un cycle élémentaire sans corde de longueur cinq ; alors le G.5P. noté G^{V-A} déterminé par $\omega(A)$ est soit non 3-coloriable, soit équivalent à P_1' (et donc également à P_1).

b - Si G_1 est équivalent à P_2

On peut supposer que ϕ_1 est telle que

$$C(G_1, \phi_1) = \left\{ \begin{array}{cccc} a & a & . & . \\ . & . & a & a \\ a & , & a & , & a & , & a \\ a & . & a & . \\ . & a & . & a \end{array} \right\} = C(P_2)$$

On a alors :

$$C(G_2, \phi_2) \subseteq \overline{C(G_1, \phi_1)} = \left\{ \begin{array}{cccccc} a & a & a & . & . & a \\ a & a & a & a & . & . \\ a & , & . & , & . & , & a & , & . \\ . & a & . & a & a & a \\ . & . & a & a & a & a \end{array} \right\} = C(P_2')$$

et

$$|C(G_2)| \geq |C(G_1)| = 4$$

Considérons le graphe $R_{P_2'}$ représenté à la Figure 16

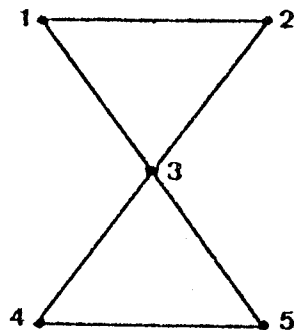


Figure 16 : $R_{P_2'}$

Si $|C(G_2)|$ était égal à quatre ou cinq, alors G_2 serait équivalent à P_2 , à P_1 ou à F (démonstration du lemme 1).

Or R_{P_2} ne contient ni cycle de longueur quatre, ni cycle de longueur cinq. Donc $|C(G_2)| = 6$ et $C(G_2, \phi_2) = \overline{C(G_1, \phi_1)} = C(P_2')$: G_2 est équivalent à P_2' .

c - Si G_1 est équivalent à P_3

On peut supposer que ϕ_1 est telle que

$$C(G_1, \phi_1) = \left\{ \begin{array}{ccc} a & a & a \\ a & . & . \\ . & , & a & , & . \\ . & . & a \\ a & a & a \end{array} \right\} = C(P_3)$$

et donc

$$C(G_2, \phi_2) \subseteq \overline{C(G_1, \phi_1)} = \left\{ \begin{array}{cccccccc} a & a & a & . & . & . & . & . \\ . & a & a & . & a & a & a & . \\ a & , & . & , & a & , & a & , & . & , & a & , & a \\ a & a & . & a & a & . & a & . & a \\ . & . & . & a & a & a & . & . \end{array} \right\} = C(P_3')$$

D'autre part $|C(G_2)| \geq |C(G_1)| = 3$.

Considérons le graphe $R_{P_3'}$ représenté à la Figure 17

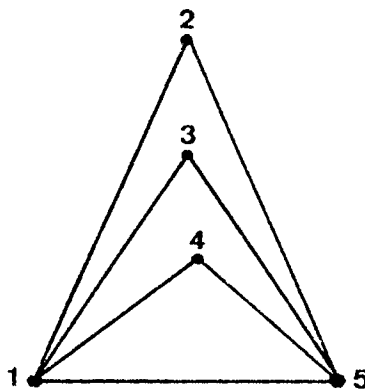


Figure 17 : $R_{P_3'}$

Ce graphe contient trois triangles, G_2 peut donc être équivalent à P_3 avec

$$C(G_2, \phi_2) = \left\{ \begin{array}{c} \cdot \quad a \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad a \\ a, a, a \\ a \quad a \quad a \\ a \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{c} \cdot \quad a \quad \cdot \\ a \quad a \quad a \\ \cdot, \cdot, a \\ a \quad a \quad a \\ a \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{c} \cdot \quad a \quad \cdot \\ a \quad a \quad a \\ a, a, a \\ \cdot \quad \cdot \quad a \\ a \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right\}$$

Ce graphe contient trois carrés sans corde, G_2 peut donc être équivalent à P_2 avec :

$$C(G_2, \phi_2) = \left\{ \begin{array}{c} \cdot \quad a \quad a \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad a \quad a \\ a, a, \cdot, \cdot \\ a \quad a \quad a \quad a \\ a \quad \cdot \quad \cdot \quad a \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{c} \cdot \quad a \quad a \quad \cdot \\ a \quad a \quad a \quad a \\ \cdot, \cdot, a, a \\ a \quad a \quad \cdot \quad \cdot \\ a \quad \cdot \quad \cdot \quad a \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{c} \cdot \quad a \quad a \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad a \quad a \\ a, a, a, a \\ a \quad a \quad \cdot \quad \cdot \\ a \quad \cdot \quad \cdot \quad a \end{array} \right\}$$

Ce graphe contient trois carrés possédant une corde, G_2 peut donc être équivalent au graphe F de la Figure 15 avec :

$$C(G_2, \phi_2) = \left\{ \begin{array}{c} \cdot \quad a \quad a \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad a \quad a \quad a \\ a, a, \cdot, \cdot, a \\ a \quad a \quad a \quad a \quad a \\ a \quad \cdot \quad \cdot \quad a \quad \cdot \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{c} \cdot \quad a \quad a \quad \cdot \quad \cdot \\ a \quad a \quad a \quad a \quad a \\ \cdot, \cdot, a, a, a \\ a \quad a \quad \cdot \quad \cdot \quad a \\ a \quad \cdot \quad \cdot \quad a \quad \cdot \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{c} \cdot \quad a \quad a \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad a \quad a \quad a \\ a, a, a, a, a \\ a \quad a \quad \cdot \quad \cdot \quad a \\ a \quad \cdot \quad \cdot \quad a \quad \cdot \end{array} \right\}$$

D'autre part, on peut avoir $C(G_2, \phi_2) = \overline{C(G_1, \phi_1)}$ et donc G_2 équivalent à P_3' .

Il ne reste plus qu'à étudier le cas où $|C(G_2, \phi_2)| = 6$. Cela revient à chercher : quelles sont les arêtes e de R_{P_3} telles que le graphe partiel obtenu en supprimant l'arête e puisse correspondre à l'ensemble des colorations des pendants d'un G.5P. .

Il est clair que la seule arête que l'on puisse supprimer sans créer de sommet de degré 1 est l'arête d'extrémités 1 et 5 qui correspond

.
 a
 à la coloration a .
 a
 .

Apparemment rien ne s'oppose à ce qu'un G.5P.N. ait $C(P_3) -$
 .
 a
 a
 a
 .
 pour

ensemble de colorations, mais je n'ai pas réussi à trouver un tel G.5P.N. .

Corollaire du lemme 1 :

Soient S , G_1 et G_2 définis comme dans le lemme 1. Si G_1 et G_2 sont coloriables alors S est le résultat d'une construction P .

Démonstration : D'après le lemme 1, on sait que si G_1 est 3-coloriable (et donc G_2 aussi) alors il existe une numérotation ϕ_1 des pendants de G_1 telle que

$$C(G_1, \phi_1) = C(P_i) \text{ pour un } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Or $C(P_i) \cap C(P_i') = \emptyset$, donc l'union de (G_1, ϕ_1) et de P_i' est un graphe cubique non 3-coloriable que l'on appellera S_1 .

D'autre part, on sait qu'il existe une numérotation ϕ_2 des pendants de G_2 telle que l'union de (G_1, ϕ_1) et de (G_2, ϕ_2) soit égale à S , et l'on a :

$$C(G_1, \phi_1) \cap C(G_2, \phi_2) = \emptyset \text{ avec } C(G_1, \phi_1) = C(P_i).$$

Par conséquent, l'union de (G_2, ϕ_2) et de P_i est un graphe cubique non 3-coloriable que l'on appellera S_2 .

Il est clair que S est le résultat d'une construction P à partir des graphes S_1 et S_2 .

Pour terminer la démonstration du théorème 3, il reste à montrer que les graphes S_1 et S_2 sont connexes et sans isthme et que si G_1 et G_2 sont différents de P_1' , P_2' et P_3' alors S_1 et S_2 possèdent chacun moins de sommets que S .

Lemme 2 : S_1 et S_2 sont connexes et sans isthme.

Démonstration :

S_1 est égal à l'union de G_1 et de P_i' pour $i = 1, 2$ ou 3 .

S_2 est égal à l'union de G_2 et de P_i

Or S étant supposé cycliquement-5-arête-connexe, G_j ($j = 1$ ou 2) est connexe et ne possède pas d'autre isthme que ses cinq arêtes pendantes.

En effet, il est clair que si G_j ($j = 1$ ou 2) n'était pas connexe alors S posséderait un c -cocycle $0, 1$ ou 2 .

D'autre part, supposons que G_j possède un isthme e qui n'est pas une arête pendante.

G_j étant déterminé par un c -cocycle 5 , doit contenir un cycle et donc l'une des composantes connexes du graphe obtenu en supprimant l'arête e dans G_j , doit contenir un cycle. Cette composante doit donc posséder au moins quatre sommets pendants. L'autre composante connexe contiendrait alors au plus un sommet pendant et S posséderait alors un c -cocycle 1 ou un c -cocycle 2 .

D'autre part, on vérifie facilement que l'union d'un G.5P.N. noté G connexe ne possédant pas d'autre isthme que ses cinq arêtes pendantes et de P_1' , P_2' , P_3' , P_1' , P_2' ou P_3' est connexe et ne possède pas d'isthme.

On a ainsi montré que S_1 et S_2 sont connexes et sans isthme.

Il reste à montrer que si G_1 et G_2 sont différents de P_1' , P_2' et P_3' alors S_1 et S_2 possèdent chacun moins de sommets que S .

Supposons donc que G_1 et G_2 sont tous deux différents des graphes de P'_1 , P'_2 et P'_3 .

Il est clair que S_2 possède moins de sommets que S .

En effet, S_2 est égal à une union de G_2 et de P_i (i donné, $i = 1, 2$ ou 3) alors que S est égal à une union de G_2 et de G_1 ; pour obtenir S_2 à partir de S , on a donc en quelque sorte "remplacé" G_1 par P_i .

Pour que S_2 ait plus de sommets que S il faudrait que P_i ait plus de sommets que G_1 . Or G_1 doit contenir un cycle, il doit donc posséder au moins cinq sommets non pendants (S est c.5.a.c.). Si il en possède cinq, S étant c.5.a.c., le sous-graphe de G_1 engendré par ces cinq sommets est un cycle élémentaire de longueur 5. G_1 est alors isomorphe au graphe de P'_1 , ce qui est contraire aux hypothèses.

Donc G_1 possède plus de sommets non pendants que P_1 , P_2 ou P_3 et S possède plus de sommets que S_2 .

Il reste à étudier le cas de S_1 .

Or pour montrer que S_1 possède moins de sommets que S , il suffit, pour les mêmes raisons que précédemment, de montrer que G_2 possède plus de sommets non pendants que P'_i (i quelconque dans $\{1, 2, 3\}$).

Nous savons que G_2 peut être uni à P_i de manière à donner un graphe cubique sans isthme non 3-coloriable (que l'on a noté S_2).

Supposons que G_2 ne possède pas plus de sommets non pendants que P'_i .

Nous considérerons trois cas :

A) Le nombre de sommets non pendants de G_2 est égal à cinq, i quelconque.

De même que G_1 (voir ci-dessus) si G_2 possède exactement cinq sommets non pendants, G_2 est isomorphe au graphe de P'_1 ce qui est contraire aux hypothèses.

B) Le nombre de sommets non pendants de G_2 est égal à sept, $i = 2$ ou 3 .

Si $i = 2$: S_2 est égal à une union de G_2 et de P_2 .

S_2 est alors un graphe cubique non 3-coloriable sans isthme à dix sommets.

S_2 ne peut donc être que le graphe de Petersen et, grâce aux propriétés très fortes de symétrie du graphe de Petersen, on en déduit que G_2 est isomorphe au graphe de P_2' ce qui est contraire aux hypothèses.

Si $i = 3$: S_2 est égal à une union de G_2 et de P_3 .

S_2 serait alors un graphe cubique sans isthme non 3-coloriable à huit sommets.

Ce cas n'est donc pas possible.

C) Le nombre de sommets non pendants de G_2 est égal à neuf et $i = 3$.

S_2 est égal à une union de G_2 et de P_3 .

S_2 est alors un graphe cubique non 3-coloriable sans isthme à dix sommets.

Il ne peut donc s'agir que du graphe de Petersen et G_2 est alors isomorphe au graphe de P_3' , ce qui est contraire aux hypothèses.

Le théorème 3 est à présent démontré.

5 - LES SNARKS C-MINIMAUX

Définition : On appellera snark c-minimal tout snark qui est :

- soit de cyclique-arête-connectivité 4 et tel que tout c-cocycle-4 qu'il possède soit engendré par les quatre sommets d'un carré sans corde.

- soit de cyclique-arête-connectivité 5 et tel que tout c-cocycle-5 qu'il possède détermine un G.5P. non 3-coloriable ou isomorphe au graphe de P_1' , P_2' ou P_3' (voir Figure 12).

- soit de cyclique-arête-connectivité supérieure ou égale à six.

Les théorèmes précédents nous permettent d'établir le théorème suivant :

Théorème : Soit G un graphe cubique sans isthme non 3-coloriable, qui n'est pas un snark c -minimal.

G peut être obtenu à l'aide des constructions suivantes :

- construction 1
- construction 2
- construction d'Isaacs
- construction triviale
- construction P

à partir de snarks c -minimaux possédant chacun moins de sommets que G .

Démonstration : Soit G un graphe cubique sans isthme non 3-coloriable qui n'est pas un snark c -minimal, qui ne vérifie pas la conclusion du théorème et qui comporte un nombre minimum de sommets.

a) G est cycliquement quatre-arête-connexe.

En effet G est connexe (sinon il ne comporterait pas un nombre minimum de sommets) et sans isthme.

D'autre part, d'après le théorème 1, si G possédait un c -cocycle 2 ou un c -cocycle 3, il pourrait être obtenu par une construction 1 ou une construction 2 à partir d'un graphe cubique H non 3-coloriable sans isthme et possédant moins de sommets que G .

D'après la définition de G , H devrait alors soit être un snark c -minimal, soit vérifier la conclusion du théorème et donc G également, ce qui est contraire aux hypothèses.

b) Si G est de cyclique-arête-connectivité 4, tout c -cocycle 4 de G est engendré par les quatre sommets d'un carré sans corde.

En effet, d'après le théorème 2, si G possédait un c -cocycle 4 qui n'est pas engendré par les quatre sommets d'un carré sans corde, il pourrait être obtenu à l'aide de la construction d'Isaacs ou de la construction triviale à partir de graphes cubiques non 3-coloriables sans isthme possédant moins de sommets que G .

D'après la définition de G , chacun de ces graphes H devrait alors soit être un snark c -minimal, soit vérifier la conclusion du théorème et donc G également, ce qui est contraire aux hypothèses.

c) Si G est de cyclique-arête-connectivité 5, tout c -cocycle de G détermine un G.5P. non 3-coloriable ou isomorphe à P'_1, P'_2, P'_3 . En effet, d'après le théorème 3, si G possédait un c -cocycle 5 non déterminé par un G.5P. non 3-coloriable ou isomorphe à P'_1, P'_2 ou P'_3 , alors G pourrait être obtenu à l'aide d'une construction P et de deux graphes non 3-coloriables sans isthme S_1 et S_2 , possédant chacun moins de sommets que G .

D'après la définition de G , chacun de ces graphes H devrait alors soit être un snark c -minimal, soit vérifier la conclusion du théorème, et donc G également, ce qui est contraire aux hypothèses.

D'après a), b), c) G est un snark c -minimal : contradiction.

6 - AUTRES CONSTRUCTIONS DE GRAPHES CUBIQUES NON 3-COLORIABLES

On appellera :

- G.5P.N. de type A tout G.5P.N. noté (G, ϕ) tel que $C(G, \phi) \subseteq C(P'_2)$. Il est clair qu'un tel G.5P.N. s'obtient facilement à partir d'un graphe cubique non 3-coloriable en cassant les cinq arêtes adjacentes à deux arêtes adjacentes e et f .

On sait que si G est 3-coloriable, dans toute 3-coloration des arêtes de G , on a $\phi^{-1}(1)$ et $\phi^{-1}(2)$ ou $\phi^{-1}(4)$ et $\phi^{-1}(5)$ de la même couleur, mais pas les deux.

- G.5P.N. de type B tout G.5P.N. noté (G, ϕ) tel que $C(G, \phi) \subseteq C(P'_3)$. Il est clair qu'un tel G.5P.N. s'obtient facilement à partir d'un graphe cubique non 3-coloriable en cassant une arête e , et trois arêtes différentes de e , incidentes à un même sommet.

On sait que si G est 3-coloriable, dans toute 3-coloration des arêtes de G on a $\phi^{-1}(1)$ et $\phi^{-1}(5)$ de couleurs différentes.

- G.mP.N. de type A_k ($k \in \mathbb{N}, m = k+4$) tout G.($k+4$)P.N. noté (G, ϕ) obtenu à partir de k G.5P.N. de type A notés $(G_1, \phi_1) \dots (G_k, \phi_k)$ de la manière suivante :

- G est le graphe que l'on obtient en soudant $\phi_i^{-1}(4)$ et $\phi_{i+1}^{-1}(1)$, $\phi_i^{-1}(5)$ et $\phi_{i+1}^{-1}(2)$ pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

- ϕ est telle que $\phi^{-1}(1) = \phi_1^{-1}(1)$, $\phi^{-1}(2) = \phi_1^{-1}(2)$, $\phi^{-1}(4) = \phi_k^{-1}(4)$, $\phi^{-1}(5) = \phi_k^{-1}(5)$.

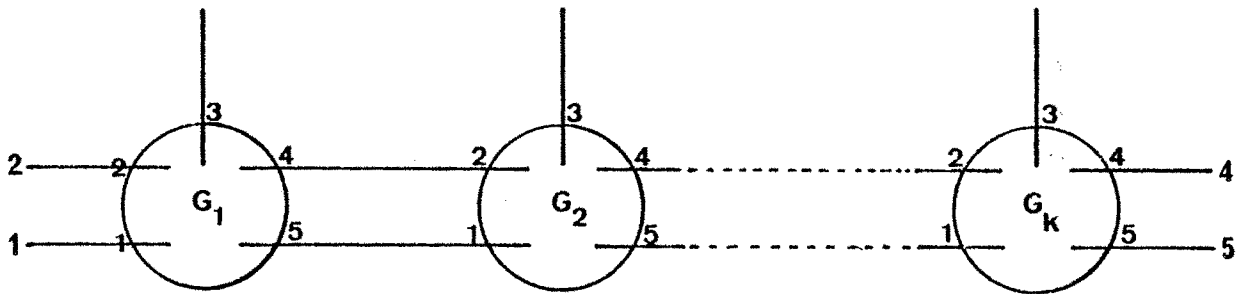


Figure 18 : G.($k+4$).P.N. de type A_k

. si k est pair : il est clair que si G est 3-coloriable, dans toute 3-coloration des arêtes de G on a : $\phi^{-1}(1)$ et $\phi^{-1}(2)$ sont de la même couleur $\iff \phi^{-1}(4)$ et $\phi^{-1}(5)$ sont de la même couleur.

. si k est impair : il est clair que si G est 3-coloriable, dans toute 3-coloration des arêtes de G , on a $\phi^{-1}(1)$ et $\phi^{-1}(2)$ de la même couleur ou $\phi^{-1}(4)$ et $\phi^{-1}(5)$ de la même couleur mais pas les deux.

On remarque qu'un G.5P.N. de type A est de type A_k avec $k = 1$.

1) Tout arrangement de deux G.5P.N. de type B, d'un G.(2p+5)P.N. de type A_{2p+1} et d'un G.(2p+7)P. quelconque Q suivant le modèle de la Figure 19 est un graphe cubique non 3-coloriable.

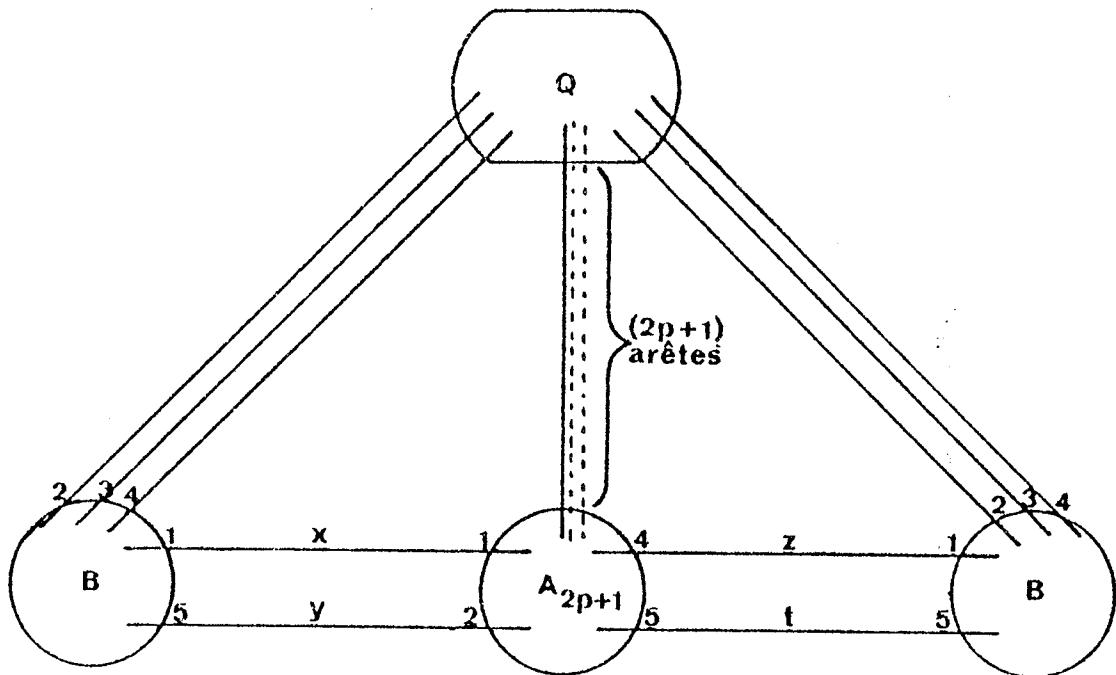


Figure 19

En effet, supposons qu'un tel graphe soit 3-colorié. A cause des deux G.5P.N. de type B, les arêtes x et y doivent être de couleurs différentes de même que les arêtes z et t. Or ceci n'est pas possible à cause du G.5P.N. de type A_{2p+1} .

2) Tout arrangement de deux G.5P.N. de type B, d'un G.(2p+5)P.N. de type A_{2p+1} , d'un G.(2p'+5)P.N. de type $A_{2p'+1}$, d'un G.(2p+3)P. quelconque noté Q et d'un G.(2p'+3)P. quelconque noté Q' suivant le modèle de la Figure 20 est un graphe cubique non 3-coloriable.

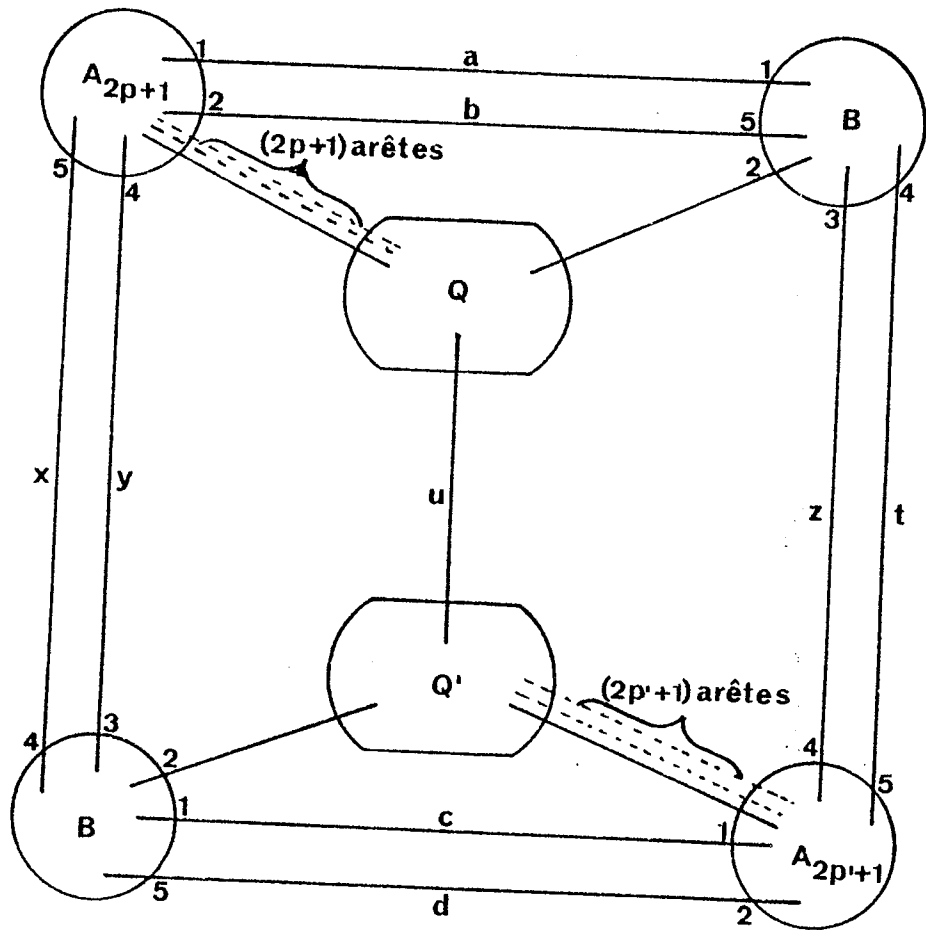


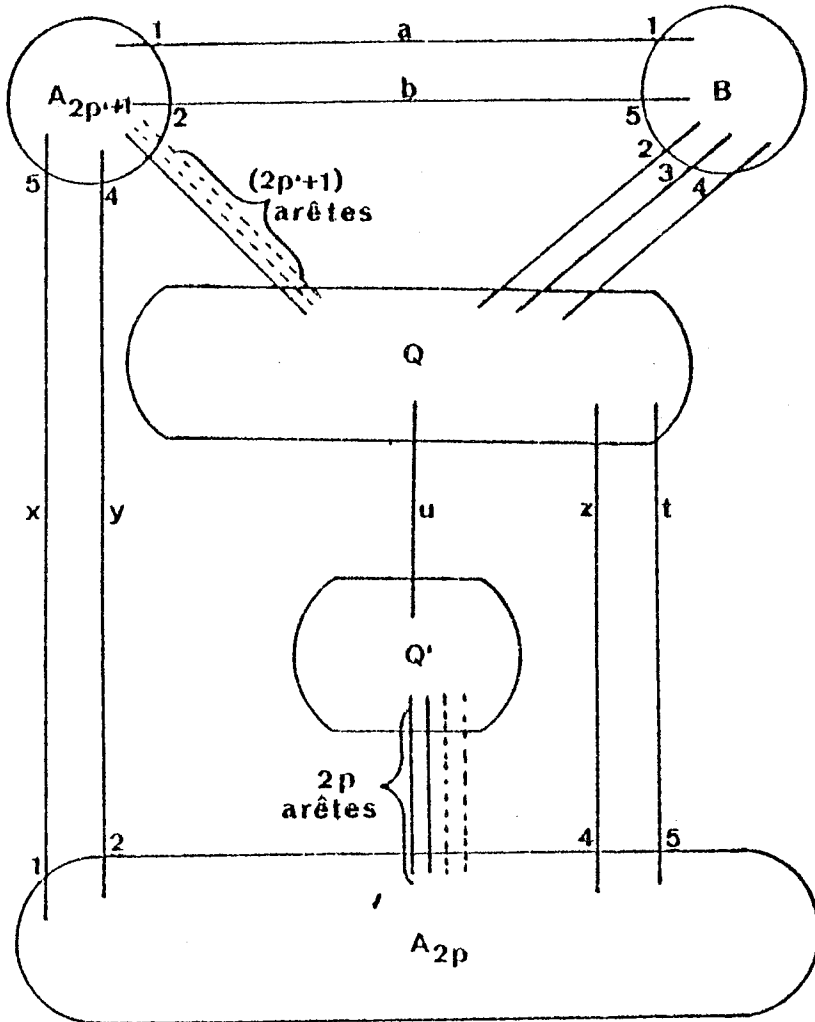
Figure 20

En effet, supposons qu'un tel graphe soit 3-colorié :
 à cause des deux G.5P.N. de type B les arêtes a et b doivent être, de
 même que les arêtes c et d, de couleurs différentes.

Par conséquent, à cause des G.5P.N. de type A_{2p+1} et $A_{2p'+1}$ les arêtes x et
 y, de même que les arêtes z et t, doivent être de même couleur.

Or $\{x, y, z, t, u\}$ est un cocycle 5 du graphe, une telle situation n'est donc
 pas possible.

3) Tout arrangement d'un G.5P.N. de type B, d'un G. $(2p+4)$ P. de type A_{2p} , d'un G. $(2p'+5)$ P. de type $A_{2p'+1}$, d'un G. $(2p'+7)$ P. quelconque Q et d'un G. $(2p+1)$ P. quelconque Q' suivant le modèle de la Figure 21, est un graphe cubique non 3-coloriable.



en particulier

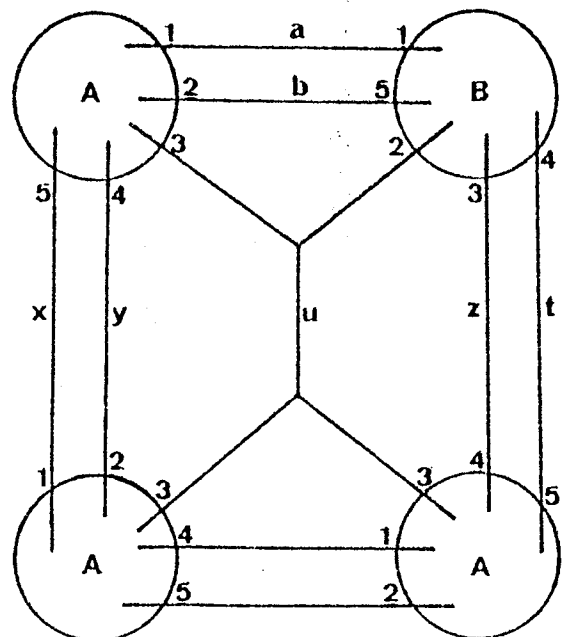


Figure 21

Supposons qu'un tel graphe soit 3-colorié :

A cause du G.5P. de type B, les arêtes a et b doivent être de couleurs différentes. Mais alors à cause du G. $(2p'+5)P.$ de type $A_{2p'+1}$, les arêtes x et y doivent être de la même couleur, et donc à cause du G. $(2p+4)P.$ de type A_{2p} z et t sont de la même couleur.

Or $\{x,y,z,t,u\}$ est un cocycle 5 du graphe, une telle situation n'est donc pas possible.

4) Tout arrangement d'un G. $(2p+5)P.N.$ de type A_{2p+1} et d'un G. $(2p+3)P.$ quelconque noté Q, suivant le modèle de la Figure 22 est un graphe cubique non 3-coloriable (v et v' sont deux nouveaux sommets).

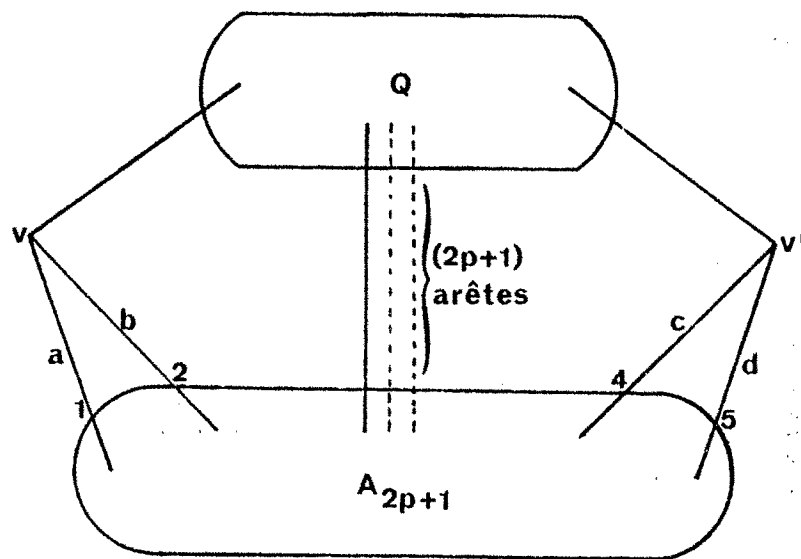


Figure 22

En effet, il est clair que dans toute 3-coloration d'un tel graphe les arêtes a et b, de même que les arêtes c et d, doivent être de couleurs différentes, or ceci n'est pas possible à cause du G. $(2p+5)P.N.$ de type A_{2p+1} .

5) Tout arrangement d'un G. $(2p+5)P.N.$ de type A_{2p+1} , d'un G.5P.N. de type B et d'un G. $(2p+5)P.$ quelconque noté Q, suivant le modèle de la Figure 23 est un graphe cubique non 3-coloriable (v est un nouveau sommet).

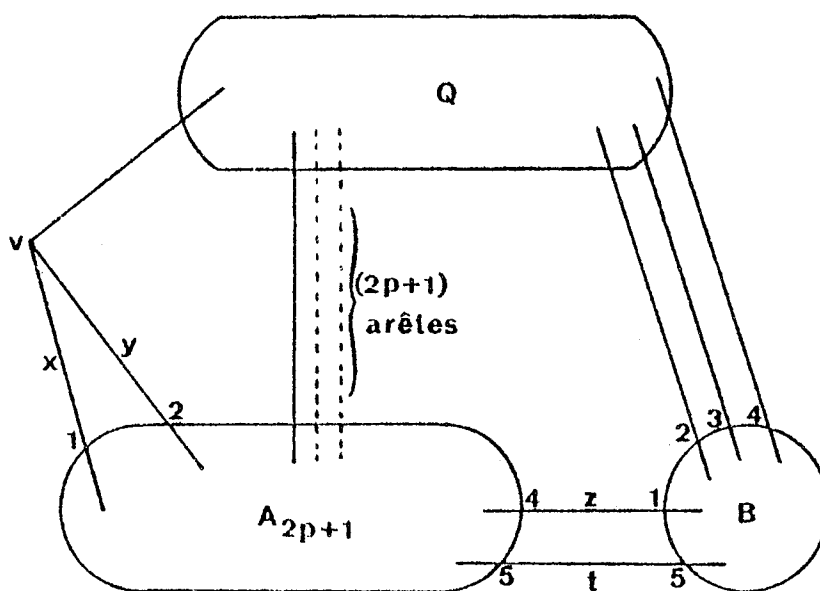


Figure 23

En effet pour toute 3-coloration d'un tel graphe, on doit avoir x et y de couleurs différentes, de même que z et t à cause du G.5P.N. de type B. Or ceci n'est pas possible à cause du G. $(2p+5)P.N.$ de type A_{2p+1} .

7 - CONCLUSION

On peut se demander si par une étude des snarks de cyclique-arête-connectivité supérieure ou égale à six, similaire à celle développée dans ce chapitre pour ceux de c.a.c.5 on ne pourrait pas restreindre encore la classe des snarks c -minimaux, c'est à dire à partir desquels on peut obtenir, à l'aide de certaines constructions, tous les graphes cubiques non 3-coloriables.

Une telle étude est beaucoup plus difficile que la précédente car non seulement C_m pour $m \geq 6$ est de cardinal bien supérieur à C_5 , mais est aussi plus "varié" : en effet, pour toute coloration P des pendants d'un G.5P. on a

$$P = \{P_1, P_2, P_3\} \text{ avec } \begin{array}{l} |P_1| = 3 \\ |P_2| = |P_3| = 1 \end{array}$$

alors que, par exemple, si $P' = \{P'_1, P'_2, P'_3\}$ est une coloration des pendants d'un G.6P., on peut avoir $|P'_1| = 6, |P'_2| = |P'_3| = 0$ ou $|P'_1| = 4, |P'_2| = 2, |P'_3| = 0$ ou $|P'_1| = |P'_2| = |P'_3| = 2$.

D'autre part, les seuls snarks c.6.a.c. actuellement connus sont les snarks-fleurs J_k (k impair, $k \geq 7$) (voir Chapitre III), et l'on ne connaît pas de snark c.7.a.c., ce qui a conduit à la conjecture suivante :

Conjecture (Jaeger, Swart [32]) : Tout graphe cubique c.7.a.c. est 3-coloriable.

et même à la conjecture plus forte :

Conjecture (Celmins et Swart [11]) : Il n'existe pas de snark dont la longueur de tout cycle est supérieure ou égale à sept.

CHAPITRE III

DÉCOMPOSITIONS POLYÉDRALES PAIRES DES GRAPHS CUBIQUES

CHAPITRE III : DECOMPOSITIONS POLYEDRALES PAIRES DES GRAPHES CUBIQUES

I - DEFINITION ET PROPRIETE

On appellera décomposition polyédrale paire ou d.p.p. d'un graphe cubique G , une double couverture par des cycles (élémentaires) de G , chaque cycle étant de longueur paire (cf. chap. I, paragraphe IV(c)).

Szekeres [9] a remarqué la propriété suivante :

Propriété : Si G est un graphe cubique d'indice chromatique trois, alors G possède une d.p.p. D , et une coloration des arêtes de G en trois couleurs de telle sorte que tout cycle de D soit colorié en deux couleurs.

En effet, étant donnée une coloration des arêtes de G en trois couleurs 1, 2 et 3, on appelle E_1 (E_2, E_3) l'ensemble des arêtes de G coloriées 1, (2, 3).

Il est clair que les composantes connexes des graphes partiels de G définis par $E_1 \cup E_2$, $E_2 \cup E_3$, $E_1 \cup E_3$ forment une d.p.p. de G dont chacun des cycles est bicolorié.

Szekeres [9] a cru montrer que l'assertion suivante réciproque de la propriété ci-dessus était vraie.

Assertion 1 : Si G est un graphe cubique possédant une d.p.p. D alors G est d'indice chromatique trois, et plus précisément il existe une coloration des arêtes de G en trois couleurs, de telle sorte que tout cycle de D soit colorié en deux couleurs.

Or ainsi que F. Jaeger l'a remarqué, la démonstration donnée par Szekeres était fautive.

Nous allons tout d'abord étudier cette assertion dans le cas où G est d'indice chromatique trois.

II - LE CAS DES GRAPHES CUBIQUES D'INDICE CHROMATIQUE TROIS

Pour montrer que l'assertion 1 est fausse, il suffit de montrer qu'il existe un graphe cubique d'indice chromatique trois qui possède une d.p.p. dont les cycles ne peuvent être bicoloriés par une 3-coloration.

En effet, considérons le graphe de la figure 1, sur lequel est représentée une décomposition polyédrale paire D en 5 cycles notés 1, 2, 3, 4, 5.

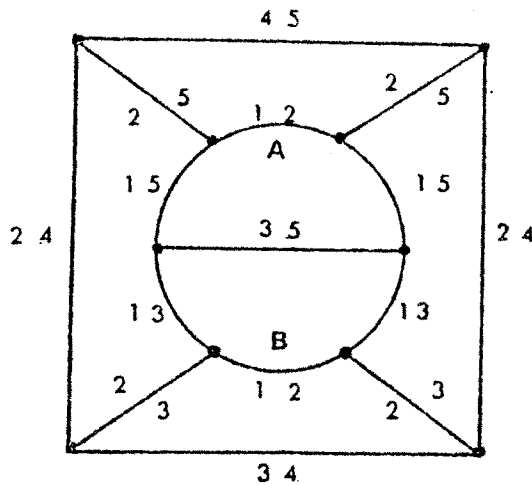


Figure 1

Supposons qu'il existe une 3-coloration des arêtes du graphe telle que tous les cycles de D soient bicoloriés, alors on a :

- 1- Les cycles 1 et 2 s'intersectent en deux arêtes A et B. Ils ont donc une couleur et une seule en commun, et A et B sont toutes deux coloriées avec cette couleur.
- 2- Dans le cycle 1, les arêtes A et B sont séparées par un nombre pair d'arêtes, elles doivent donc être de couleurs différentes.

On aboutit à une contradiction.

L'assertion 1 est donc fausse.

Mais le graphe de la figure 1 étant d'indice chromatique trois, on pourrait croire vraie la version faible du "théorème" de Szekeres citée par Fiorini et Wilson ([22], p. 55).

Assertion 2 : Tout graphe cubique possédant une d.p.p. est d'indice chromatique trois.

Or il n'en est rien ; en effet dans le paragraphe suivant nous donnerons des exemples de graphes cubiques possédant une d.p.p. et néanmoins d'indice chromatique quatre.

III - LE CAS DES GRAPHES CUBIQUES D'INDICE CHROMATIQUE QUATRE

Les graphes cubiques possédant un isthme ne peuvent posséder une d.p.p., un contre-exemple à l'assertion 2 devra donc être un graphe cubique sans isthme d'indice chromatique quatre. La première idée est d'étudier le plus petit d'entre eux.

1) Le graphe de Petersen

Ce graphe ne possède pas de d.p.p.. En effet supposons que ce graphe possède une d.p.p. D . Les cycles de D doivent alors être de longueur 6 ou 8. En effet le graphe de Petersen ne possède pas de cycle de longueur inférieure à cinq ; d'autre part, il ne possède pas de cycle élémentaire de longueur 10, car tout graphe cubique possédant un cycle hamiltonien est 3-coloriable.

Soient donc k_1 et k_2 les nombres de cycles de D de longueur respectivement 6 et 8. On doit avoir :

$$6 k_1 + 8 k_2 = 30 \text{ (puisque le graphe de Petersen a 15 arêtes)}$$

On a donc $k_1 \leq 5$ et $k_2 \leq 3$; de plus $k_2 \equiv 0 \pmod{3}$

Il s'ensuit que seuls deux cas sont possibles :

- $k_1 = 5$ et $k_2 = 0$

- $k_1 = 1$ et $k_2 = 3$

a) D est composée de cinq cycles de longueur 6.

Soit C l'un de ces cycles. Chacun des quatre cycles restants doit avoir au moins une arête commune avec C (puisque le graphe de Petersen n'a que 10 sommets). D'autre part, il est clairement impossible que chacun de ces quatre cycles aie au moins deux arêtes communes avec C.

Soit donc C' ayant exactement une arête e en commun avec C, il est clair que $C \cup C' - \{e\}$ est un cycle hamiltonien.

Ce cas n'est donc pas réalisable.

b) D est composée d'un cycle de longueur 6 et de trois cycles de longueur 8.

Or si un graphe cubique G admet une double couverture par quatre cycles C_1, C_2, C_3, C_4 , G est d'indice chromatique 3.

Il s'agit là d'un cas particulier d'un résultat de Tutte [25].

En effet, colorions en a les arêtes de $(C_1 \cap C_2) \cup (C_3 \cap C_4)$, en b les arêtes de $(C_1 \cap C_3) \cup (C_2 \cap C_4)$, et en c les arêtes de $(C_1 \cap C_4) \cup (C_2 \cap C_3)$; on vérifie immédiatement que l'on obtient ainsi une 3-coloration des arêtes de G.

Remarque : Ce procédé est tout à fait analogue à celui qui permet d'obtenir une 3-coloration des arêtes d'un graphe cubique plan dont les faces sont coloriées en quatre couleurs dans la démonstration du Théorème de Tait.

Comme le graphe de Petersen est d'indice chromatique quatre, le cas (b) n'est pas non plus réalisable.

On a ainsi montré que le graphe de Petersen ne possède pas de d.p.p. .

Mais, tel n'est pas le cas pour une famille infinie de snarks découverte par Isaacs [26] :

2) Les snarks-fleurs

2.1) Définition

Ces snarks sont construits à partir du G.6P. Y représenté figure 2.

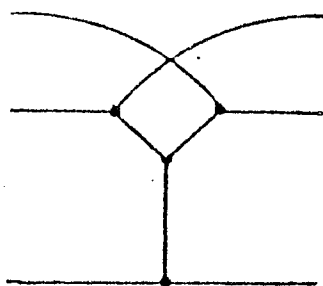


Figure 2 : Y

L'étude des colorations de ses pendants permet de montrer qu'un arrangement cyclique d'un nombre impair k de graphes Y suivant le modèle de la figure 3 donne un graphe cubique non 3-coloriable appelé J_k .

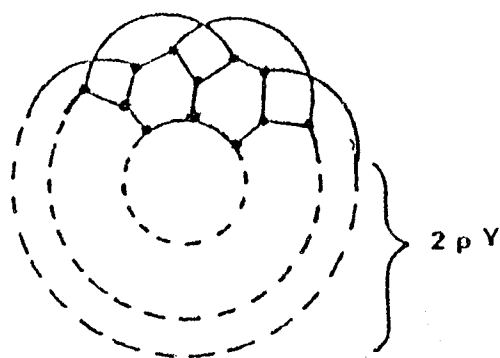


Figure 3 : J_k ($k = 2p+3$)

J_3 n'est pas un snark car il contient un triangle. Si on remplace celui-ci par un sommet, on obtient le graphe de Petersen. On montre que pour $k > 3$, k impair, J_k est cycliquement-4-arête-connexe.

Les graphes J_k (k impair, $k > 3$), aussi appelés snarks-fleurs, peuvent pour cette raison être considérés comme une généralisation du graphe de Petersen.

2.2) Décompositions polyédrales paires des snarks-fleurs

Le graphe de Petersen ne possédant pas de d.p.p., il est clair que J_3 n'en possède pas non plus.

Par contre J_5 en possède une en 6 cycles qui est représentée figure 4.

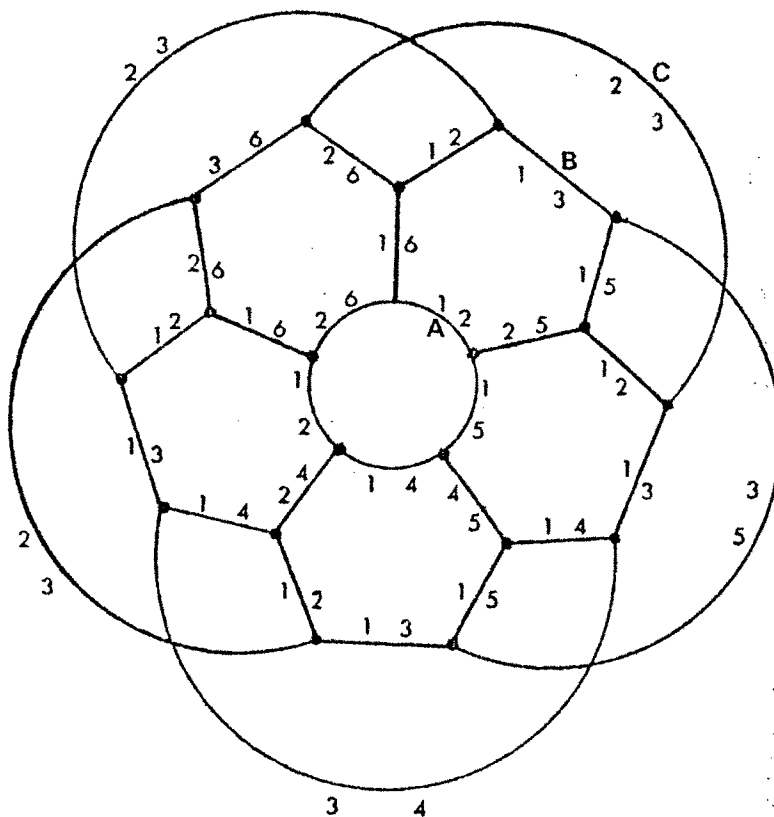


Figure 4

Or on remarque que si l'on casse les arêtes de J_5 marquées A, B, C et si l'on réalise de façon adéquate l'union du G.6P. ainsi obtenu et de celui de la figure 5, on obtient J_7 et une d.p.p. de celui-ci.

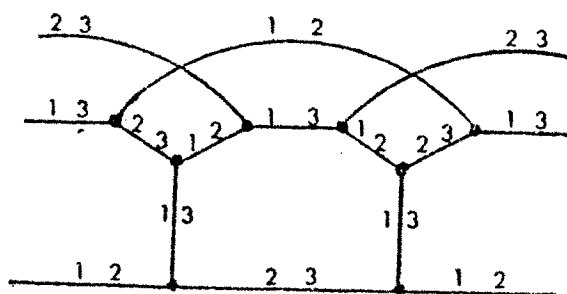


Figure 5

En répétant cette opération (dûe à U.A. Celmins [19] et appelée "splicing" par celui-ci), on obtient une d.p.p. composée de six cycles pour n'importe quel J_k (k impair, $k > 3$).

L'assertion 2 est donc fausse.

3) Autres contre-exemples

D'autre part, J.C. FOURNIER [23] avait remarqué que si le "théorème" de Szekeres avait été vrai, on aurait obtenu, à l'aide d'un théorème de Fisk [24], une démonstration très rapide du théorème des quatre couleurs.

La démonstration du théorème de Fisk transcrite sous une forme duale donne le théorème suivant :

Théorème : Pour tout graphe cubique G connexe possédant une double couverture par des cycles élémentaires, il existe un graphe cubique G' possédant un d.p.p. qui est non 3-coloriable si G est non 3-coloriable.

Démonstration : Nous aurons tout d'abord besoin de quelques définitions. On appellera G.3P. modificateur, tout G.3P. connexe noté M qui possède un ensemble (appelé D_m) constitué de cycles élémentaires de longueur paire, et de trois chaînes élémentaires C_1 , C_2 et C_3 avec C_1 et C_2 de longueur impaire et C_3 de longueur paire, tel que chaque arête appartienne à exactement deux éléments de D_m .

Remarque : D'après la définition d'un G.3P. modificateur M , il est clair que celui-ci possède trois arêtes pendantes et que l'on a une de ces arêtes pendantes (notée e_{12}) appartenant à C_1 et C_2 , une autre (notée e_{23}) à C_2 et C_3 et la troisième (notée e_{13}) à C_1 et C_3 .

On notera p_{ij} le pendant incident à e_{ij} pour $1 \leq i < j \leq 3$.

On peut obtenir un G.3P. modificateur à partir du graphe de Petersen $P = (V, E)$ et de sa double couverture par des cycles représentés à la figure 6.

En effet celle-ci est constituée de 5 cycles, trois d'entre eux étant de longueur paire, alors que les deux autres sont de longueur impaire et ont une arête commune.

Le G.3P. $P^{V-\{v\}}$, où v est un sommet de cette arête est donc modificateur

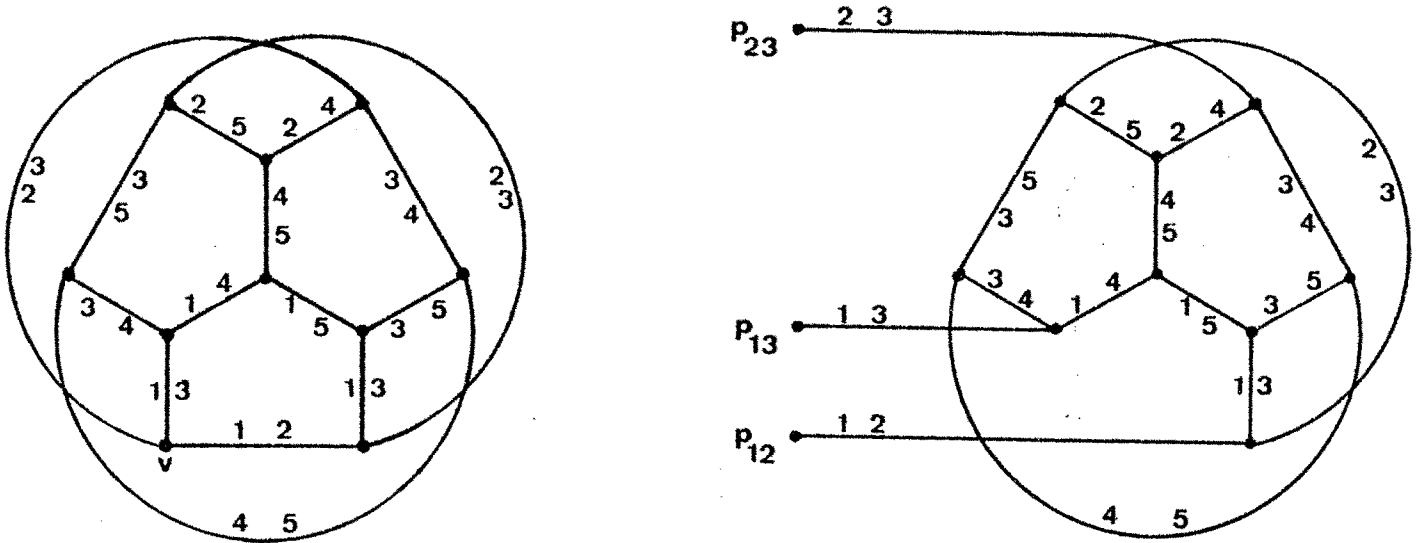


Figure 6 : P et $p^{V-\{v\}}$

Soit $G = (V, E)$ un graphe cubique possédant une double couverture D par des cycles et soient C_a et C_b deux cycles de D possédant une arête commune notée e_{ab} d'extrémités x et y :

$$e_{ab} \in C_a \cap C_b, \quad e_{ab} \in xy$$

Les deux arêtes incidentes à x autres que $e_{a,b}$ appartiennent à un même cycle de D noté C_c .

Soient e_{bc}, e_{ac} ces arêtes :

$$e_{bc} \in C_b \cap C_c, \quad e_{ac} \in C_a \cap C_c, \quad e_{bc} \in xz, \quad e_{ac} \in xt$$

En cassant e_{ab}, e_{bc}, e_{ac} on obtient le G.3P. $G^{V-\{v\}}$, dont on appellera p_{ab} le pendant adjacent à y , p_{bc} le pendant adjacent à z , p_{ac} le pendant adjacent à t .

Le graphe cubique H obtenu en unissant $G^{V-(x)}$ et un G.3P. modificateur M de la manière suivante :

- soudure de p_{ab} à p_{12} qui crée l'arête e
- soudure de p_{bc} à p_{23} qui crée l'arête f
- soudure de p_{ac} à p_{13} qui crée l'arête g

est dit obtenu par modification des cycles C_a et C_b sur l'arête e_{ab}

Ce graphe H possède la double couverture par des cycles constitués par :

- les cycles de D différents de C_a, C_b et C_c ;
- les cycles de D_m ;
- les trois cycles C', C'', C''' tels que :

$$C' = (C_a - e_{ab}, e_{ac}) \cup (C_1 - e_{12}, e_{13}) \cup \{e, g\}$$

$$C'' = (C_b - e_{ab}, e_{bc}) \cup (C_2 - e_{12}, e_{23}) \cup \{e, f\}$$

$$C''' = (C_c - e_{ac}, e_{bc}) \cup (C_3 - e_{13}, e_{23}) \cup \{f, g\}$$

Il est clair que l'on a :

$$\ell(C') \equiv \ell(C_a) + 1 \pmod{2}$$

$$\ell(C'') \equiv \ell(C_b) + 1 \pmod{2}$$

$$\ell(C''') \equiv \ell(C_c) \pmod{2}$$

où $\ell(C)$ est égal à la longueur du cycle C .

Ces définitions étant données, soit $G = (V, E)$ un graphe cubique connexe possédant une double couverture par des cycles .

Si D n'est pas une d.p.p., elle contient au moins deux cycles de longueur impaire, soient C_a et C_b (en effet $\sum_{C \in D} \ell(C) = 2|E| \equiv 0 \pmod{2}$).

Soient a une arête de C_a , b une arête de C_b .

G étant supposé connexe, il existe une chaîne élémentaire de la forme :

$$a = e_1, e_2, \dots, e_n = b$$

Il est clair que e_i et e_{i+1} (pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$) appartiennent à même cycle de D . Soit u_i ce cycle et soit $u_n = C_b$.

La suite des cycles C_1, C_2, \dots, C_k où :

- $C_1 = C_a$
- $C_2 = u_{\ell_2}$ où $\ell_2 = \min(\{i ; u_i \neq C_1, i \in \{1, \dots, n\}\})$
- $C_3 = u_{\ell_3}$ où $\ell_3 = \min(\{i ; u_i \neq C_2 ; i \in \{\ell_2, \dots, n\}\})$
- ⋮
- $C_k = u_{\ell_k} = C_b$ où $\ell_k = \min(\{i ; u_i \neq C_{k-1} ; i \in \{\ell_{k-1}, n\}\})$

est telle que C_i et C_{i+1} possèdent tous deux l'arête $e_{\ell_{i+1}}$, pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

On peut donc par modification de C_1 et C_2 sur l'arête e_{ℓ_2} obtenir un graphe H_2 , possédant une double couverture par des cycles où C_2 aura été transformé en un cycle C'_2 qui aura l'arête e_{ℓ_3} en commun avec C_3 .

On pourra donc par modification de C'_2 et C_3 sur l'arête e_{ℓ_3} obtenir un graphe H_3 , et ainsi de suite jusqu'à H_k .

H_k possède une double couverture par des cycles D_k possédant un nombre de cycles de longueur impaire inférieur de deux à celui de D .

En effet, la parité des cycles correspondant à C_a et C_b dans H_k aura été modifiée un nombre impair de fois, et ils étaient de longueur impaire. Par ailleurs, la parité des cycles correspondant aux C_i ($i \in \{2, \dots, k-1\}$) a été modifiée un nombre pair de fois.

Enfin les autres cycles nouvellement créés sont de longueur paire.

Si D_k n'est pas une d.p.p. on continue ce processus jusqu'à ce que l'on obtienne un graphe cubique G' qui possède une d.p.p..

Or il est clair que le graphe H obtenu par modification de deux cycles d'un graphe cubique G non 3-coloriable est non 3-coloriable (voir construction 2, chapitre II).

Le théorème est ainsi démontré.

Conclusion

On obtient par ce procédé une d.p.p. du graphe ci-dessous, obtenu à partir du graphe de Petersen muni de sa double couverture par des cycles représentée Figure 6, en modifiant les 2 cycles impairs de celle-ci sur l'une de leurs arêtes communes (le G.3P. modificateur utilisé est également décrit figure 6).

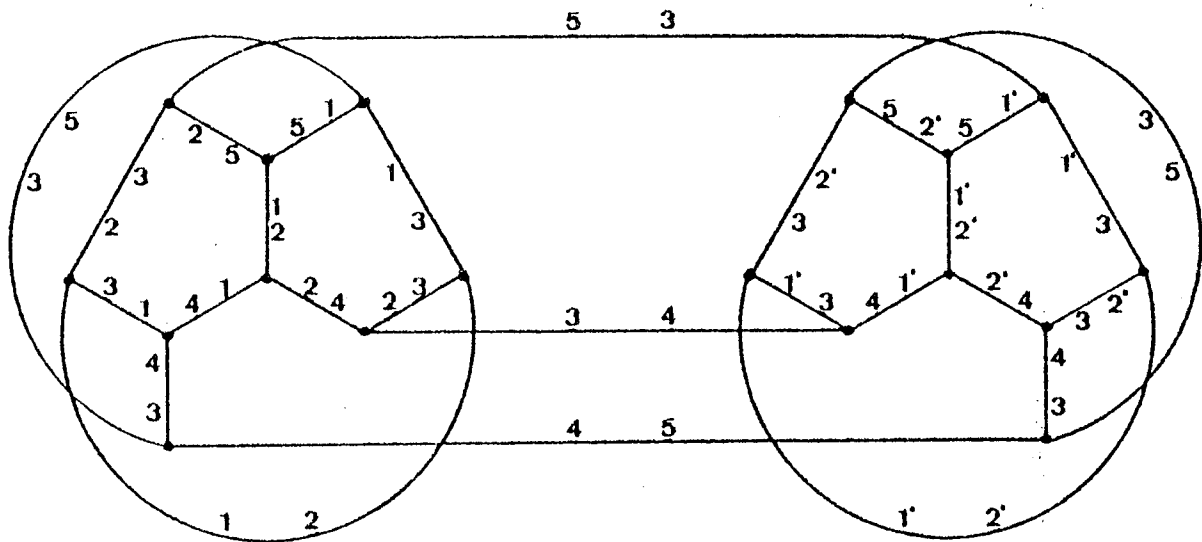


Figure 7

La double couverture par des cycles du graphe de Petersen représenté à la Figure 6 permet également de trouver une d.p.p. d'un snark obtenu par la construction de Loupekchine [27], représentée à la Figure 8.

D'autre part, à l'aide également de la double couverture par des cycles du graphe de Petersen représentée à la figure 9 on obtient une d.p.p. d'un snark (voir figure 10) obtenu par une construction donnée par Szekeres [9] et qui s'obtient également à partir de la construction d'Isaacs.

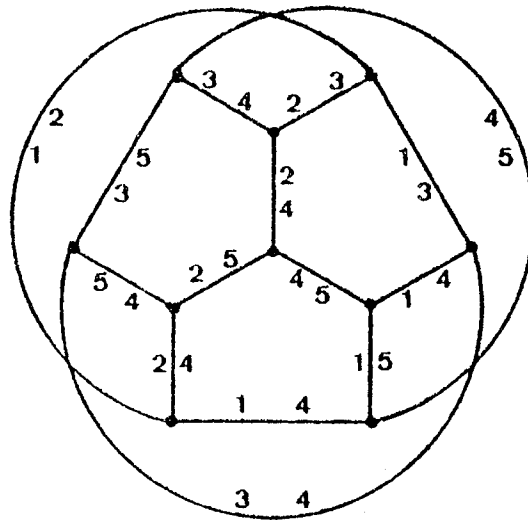
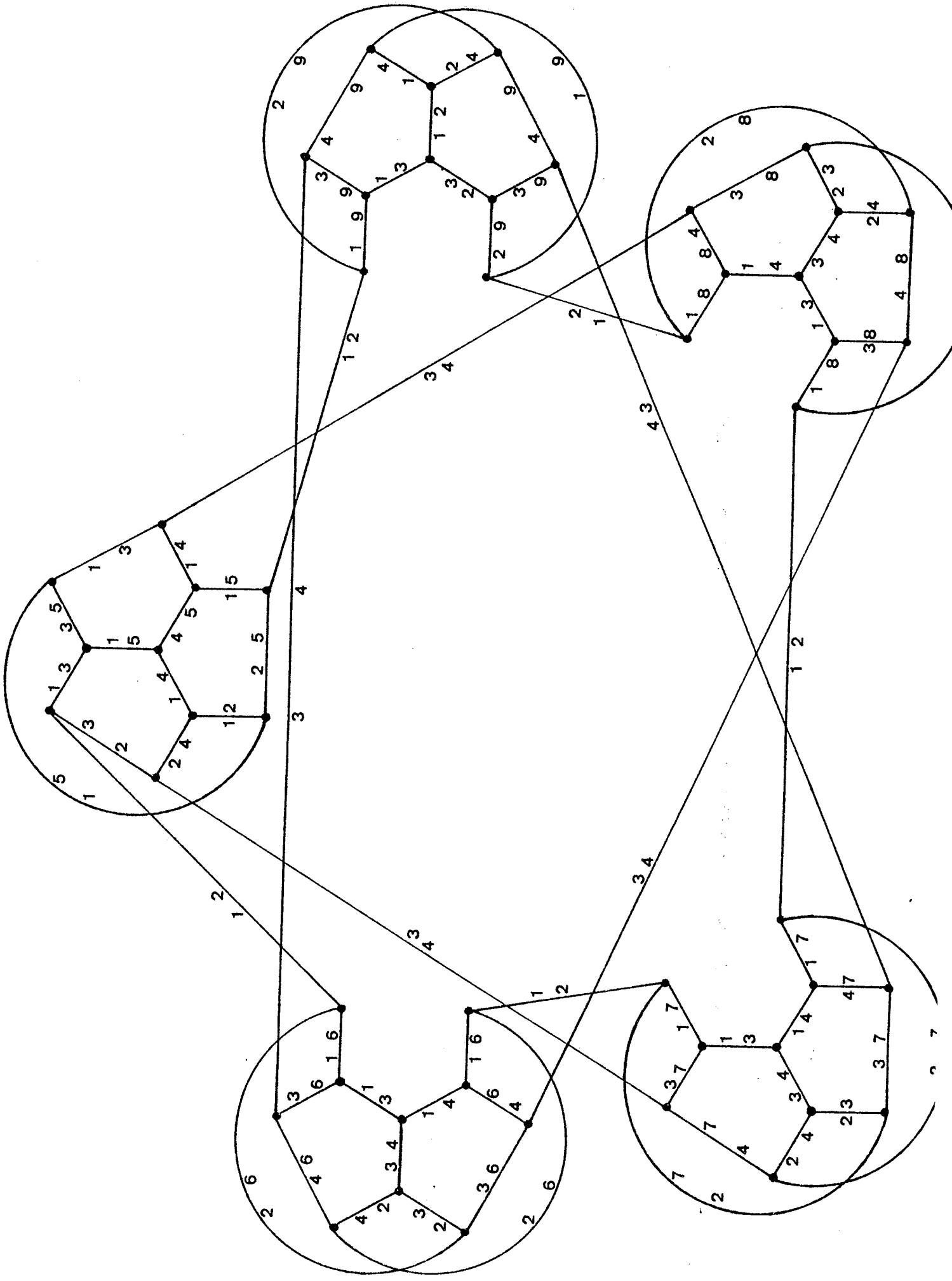


Figure 9



Enfin on trouvera représentée en figure 11 une d.p.p. du snark double étoile [26].

Il semble donc que rares soient les graphes cubiques d'indice chromatique quatre ne possédant pas de d.p.p. .

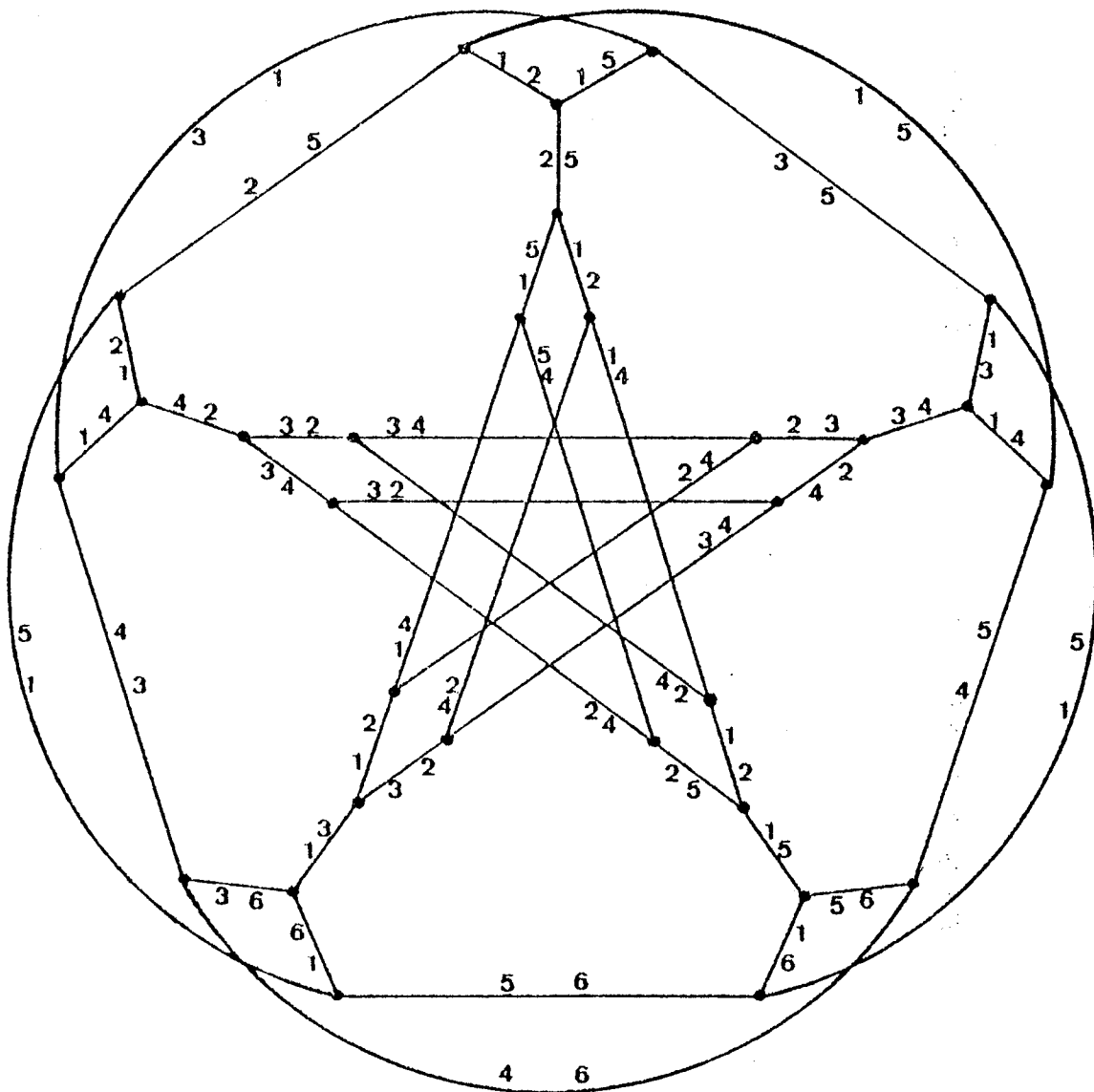


Figure 11

B I B L I O G R A P H I E

BIBLIOGRAPHIE

- [1] O. ORE,
The Four Color Problem, Academic Press, New-York (1967).
- [2] K. APPEL et W. HAKEN,
Every planar map is four-colorable, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976),
711-712.
- [3] A.B. KEMPE,
On the geographical problem of four colours, American Journal of Mathe-
matics 2 (1879), 193-200.
- [4] P.J. HEAWOOD,
Map-colour theorem, Quart. J. Pure. Appl. Math. 24, (1890), 332-336.
- [5] A. CAYLEY,
On the colouring of maps, Proc. Roy. Geog. Soc. (New Ser.) 1 (1879),
259-261.
- [6] J. PETERSEN
[Sur le théorème de Tait] L'intermédiaire des Mathématiciens 5 (1898),
225-227.
- [7] D. BLANUŠA,
Problem ceteriju boja, Hrvatsko Prirodoslovno Društvo Glasnik Mat.
Fiz. Astr. Ser. II, 1 (1946), 31-42.
- [8] B. DESCARTES,
Network-colourings, Math. Gazette 32 (1948), 67-69.
- [9] G. SZEKERES,
Polyhedral decompositions of cubic graphs. Bull. Austral. Math. Soc. 8
(1973), 367-387.
- [10] F. JAEGER,
Tait's theorem for graphs with crossing number at most one, Ars Combinatoria
9 (1980), 283-287.
- [11] U.A. CELMINS, J.L. FOUQUET, E.R. SWART,
Construction and characterization of snarks, Journal of Graph Theory
(à paraître).
- [12] P.D. SEYMOUR,
Communication privée.

- [13] E.J. JOHNSON,
A proof of four-coloring the edges of a cubic graph, Oper. Res. Centre,
Univ. California (1963) : Amer. Monthly 73 (1966), 52-55.
- [14] R.L. BROOKS,
On colouring the nodes of a network, Proc. Cambridge, Phil. Soc. 37
(1941), 194-197.
- [15] V.G. VIZING,
On an estimate of the chromatic class of a p-graph, Diskret Analiz
3 (1964), 25-30.
- [16] W.T. TUTTE,
A contribution to the theory of chromatic polynomials, Can. J. Math.
6 (1954), 80-91.
- [17] F. JAEGER,
Flows and Generalized Coloring Theorems in Graphs, J. Comb. Theory,
vol. 26, n° 2 (2 avril 1979).
- [18] P.D. SEYMOUR,
Of nowhere zero six flows, J. Comb. Theory (à paraître).
- [19] U.A. CEJMINS,
A study of three conjectures on an infinite family of snarks, Research
Report CORR 79-19 University of Waterloo.
- [20] N.H. XUONG,
Sur quelques problèmes d'immersion d'un graphe dans une surface. Thèse
Grenoble (1977).
- [21] D.R. FULKERSON
Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra, Math. Prog. 1 (1971),
168-194.
- [22] S. FIORINI et R.J. WILSON,
Edge-colourings of graphs, Research Notes in Mathematics. Pitman 1977.
- [23] J.C. FOURNIER,
Communication en séminaire à la Maison des Sciences de l'Homme,
Paris 1974-1975.
- [24] S. FISK,
Combinatorial Structures on Triangulations. II. Local Colourings.
Advances in Mathematics 11 (1973), th. 10, p. 349.
- [25] W.T. TUTTE
On the imbedding of linear graphs in surfaces, Procs. London Math.
Soc., 51 (1950), 474-483.
- [26] R. ISAACS,
Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait
colorable, Amer. Math. Monthly, 82 (1975), n° 3, 221-239.

- [27] R. ISAACS,
Loupekhine's Snarks ; A bifamily of non-Tait-colourable graphs,
Manuscrit non publié.
- [28] M. GARDNER,
Mathematical Games, Sci. Amer. 234 (1976), 126-130.
- [29] P.D. SEYMOUR,
Séminaire d'Algèbre, Combinatoire et Recherche Opérationnelle,
27 mars 1981.
- [30] M.K. GOLDBERG,
Construction of class two graphs with maximum vertex degree three,
Journal of Combinatorial Theory (à paraître).
- [31] W.T. TUTTE,
Connectivity in Graphs, Univ. of Toronto Press (1966).
- [32] F. JAEGER, E.R. STWART,
Combinatorics 79, part II, annals of discrete mathematics, 9 sessions
de problèmes, 304-305.
- [33] W.T. TUTTE
A geometrical version of the four color problem, Combinatorial
Mathematics and its applications (Eds. R.C. Bose et T.A. Dowling),
Univ. N. Carolina Press, Chapel Hill (1969), 553-560.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le

Le Président de la thèse

C. BENZAKEN



Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 3.4.84

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

