



HAL
open science

Quelques outils en vue de la modélisation des processus ponctuels et des processus de clustering

Gérard Grégoire

► **To cite this version:**

Gérard Grégoire. Quelques outils en vue de la modélisation des processus ponctuels et des processus de clustering. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1980. Français. NNT: . tel-00292578

HAL Id: tel-00292578

<https://theses.hal.science/tel-00292578>

Submitted on 2 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

et à

l'Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE
"Mathématiques Appliquées"

par

Gérard GREGOIRE



**QUELQUES OUTILS EN VUE DE LA
MODELISATION DES PROCESSUS PONCTUELS
ET DES PROCESSUS DE CLUSTERING.**



Thèse soutenue le 5 septembre 1980 devant la Commission d'Examen :

B. VAN CUTSEM

Président

K. KRICKEBERG

A. LE BRETON

B. MAISONNEUVE

G. ROMIER

Examineurs

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. CRABBE Pierre
SUNIER Jules

CERMO
Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAEERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEBCNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1979-1980

Président : M. Philippe TRAYNARD
Vice-Présidents : M. Georges LESPINARD
M. René PAUTHENET

PROFESSEURS DES UNIVERSITES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du Solide - Cristallographie
	BOIS Philippe	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Génie Chimique
	BONNIER Etienne	Métallurgie
	BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
	BRISSONNEAU Pierre	Physique des Matériaux
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CHARTIER Germain	Electronique
	CHERADAME Hervé	Chimie Physique Macromoléculaires
Mme	CHERUY Arlette	Automatique
MM.	CHIAVERINA Jean	Biologie, Biochimie, Agronomie
	COHEN Joseph	Electronique
	COUMES André	Electronique
	DURAND Francis	Métallurgie
	DURAND Jean-Louis	Physique Nucléaire et Corpusculaire
	FELICI Noël	Electrotechnique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Métallurgie Physique
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide - Cristallographie
	LACOUME Jean-Louis	Géographie - Traitement du Signal
	LANCIA Roland	Electronique - Automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire Corpusculaire
	MOREAU René	Mécanique
	MORET Roger	Physique Nucléaire Corpusculaire
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie - Physique
	PAUTHENET René	Physique du Solide - Cristallographie
	PERRET René	Automatique

.../...

MM.	PERRET Robert	Electrotechnique
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	POUPOT Christian	Electronique - Automatique
	RAMEAU Jean-Jacques	Chimie
	ROBERT André	Chimie Appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Electrotechnique
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie - Physique
Mme	SCHLENKER Claire	Physique du Solide - Cristallographie
MM.	TRAYNARD Philippe	Chimie - Physique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maître de Recherche)

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)

E.N.S.E.E.G.

MM.	ALLIBERT Michel
	BERNARD Claude
	CAILLET Marcel
Mme	CHATILLON Catherine
MM.	COULON Michel
	HAMMOU Abdelkader
	JOURD Jean-Charles
	RAVAINE Denis
	SAINFORT

C.E.N.G.

.../...

MM. SARRAZIN Pierre
 SOUQUET Jean-Louis
 TOUZAIN Philippe
 URBAIN Georges

Laboratoire des Ultra-Réfractaires ODEILLO

E.N.S.M.E.E.

MM. BISCONDI Michel
 BOOS Jean-Yves
 GUILHOT Bernard
 KOBILANSKI André
 LALAUZE René
 LANCELOT François
 LE COZE Jean
 LESBATS Pierre
 SOUSTELLE Michel
 THEVENOT François
 THOMAS Gérard
 TRAN MINH Canh
 DRIVER Julian
 RIEU Jean

E.N.S.E.R.G.

MM. BOREL Joseph
 CHEHIKIAN Alain
 VIKTOROVITCH Pierre

E.N.S.I.E.G.

MM. BORNARD Guy
 DESCHIZEAUX Pierre
 GLANGEAUD François
 JAUSSAUD Pierre
 Mme JOURDAIN Geneviève
 MM. LEJEUNE Gérard
 PERARD Jacques

E.N.S.H.G.

M. DELHAYE Jean-Marc

E.N.S.I.M.A.G.

MM. COURTIN Jacques
 LATOMBE Jean-Claude
 LUCAS Michel
 VERDILLON André

Je suis reconnaissant à Monsieur B. VAN CUTSEM, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, de l'intérêt qu'il a témoigné pour ce travail de recherche et l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence de ce jury.

Les travaux de Monsieur K. KRICKEBERG, Professeur à l'Université René Descartes de Paris, ont été pour moi une stimulation importante au cours de l'élaboration de cette thèse. Je le remercie vivement d'avoir accepté de juger ce travail et de participer à ce jury.

Monsieur B. MAISONNEUVE, Professeur à l'Université des Sciences Sociales de Grenoble, s'est intéressé de près à ce travail. Je le remercie très sincèrement pour ses critiques et conseils amicaux ainsi que sa participation au jury.

Monsieur G. ROMIER, Professeur à l'Université des Sciences Sociales de Grenoble, m'a initié à la recherche et proposé de travailler dans le domaine des processus de ramification. Je le remercie vivement de la confiance qu'il m'a toujours accordée.

J'ai plaisir à reconnaître l'aide précieuse que m'ont apporté Monsieur A. LE BRETON, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble et Monsieur S. DEGERINE, Maître Assistant à l'Université des Sciences Sociales de Grenoble. Ils m'ont incité à entreprendre la rédaction de ce travail et en ont suivi l'élaboration. Leurs critiques, suggestions et encouragements ont été déterminants et je les remercie tout particulièrement.

La dactylographie du manuscrit a pu être assurée avec autant de soin que de rapidité grâce à la compétence et à l'amabilité de Madame A.M. STRANO ; je la remercie très sincèrement. De même je suis très reconnaissant aux membres du service reprographie du Laboratoire I.M.A.G. qui ont réalisé le tirage et en particulier à Monsieur C. ANGUILE pour son dévouement.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION		I
CHAPITRE I	NOTIONS FONDAMENTALES SUR LES MESURES ALEATOIRES ET PROCESSUS PONCTUELS DESCRIPTION DU CLUSTERING DANS $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$	1
§1.	Mesures aléatoires et processus ponctuels	1
1.1.	Probabilités sur les espaces $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ et $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$	2
1.2.	Fonctionnelles de Laplace	5
1.3.	Notions de convergence de suites de mesures aléatoires	8
1.4.	Séries de mesures aléatoires et produit infini de convolution	11
1.5.	Infinie divisibilité	15
1.6.	Propriété g_ν et processus de Poisson mélangé. Distributions de Palm	18
§2.	Description du clustering dans $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$	22
2.1.	Les processus de Neymann-Scott et de Bartlett-Lewis	22
2.2.	Définition du processus de clustering	25
2.3.	Amincissements, translations et compositions	32
CHAPITRE II	UNE CLASSE DE MODELES POUR LES PROCESSUS PONCTUELS : LOIS GEOMETRIQUES ET BINOMIALES NEGATIVES	36

§1. Lois géométriques et binomiales négatives en dimension finie	37
1.1. Lois géométriques et binomiales négatives usuelles	37
1.2. Loi géométrique en dimension finie	38
1.3. Loi binomiale négative en dimension finie	42
§2. Lois géométriques et binomiales négatives pour des processus ponctuels	44
2.1. Définition de la loi $Q(v)$ pour un processus ponctuel	44
2.2. Représentation de la loi géométrique comme loi de processus de Poisson mélangé	47
2.3. Lois binomiales négatives $BN(v,r)$	49
§3. Infinie divisibilité. Probabilités de Palm	52
3.1. Représentation canonique des lois $BN(v,r)$ comme lois indéfiniment divisibles.	52
3.2. Probabilités de Palm associées aux lois $BN(v,r)$	53
§4. Cas particuliers de processus sur R_+	55
4.1. Lois des variables de temps inter-occurrences pour un processus de loi $BN(v,r)$	55
4.2. Processus binomial négatif stationnaire	57
4.3. Le processus de Yule	59

CHAPITRE III	ETUDE DU CLUSTERING	61
§1.	Etude du clustering dans (M_p, \mathcal{M}_p)	63
1.1.	Cas général	63
1.2.	Le clustering homogène de loi primaire stationnaire	68
§2.	Etude du clustering dans (M, \mathcal{M})	74
§3.	Fonctionnelles logarithmiques et clustering dans (M_p, \mathcal{M}_p)	92
§4.	Exemples	103
BIBLIOGRAPHIE		107

INTRODUCTION

Le travail que nous présentons s'inscrit dans le cadre de la théorie des processus ponctuels et des mesures aléatoires tels que les étudient des auteurs comme KALLENBERG ([20]), KRICKEBERG ([21]), MATTHES, KERSTAN et MECKE ([28]) et NEVEU ([30]), c'est-à-dire la théorie des éléments aléatoires à valeurs dans l'espace des mesures de Radon positives sur un espace localement compact à base dénombrable. Ce travail s'articule plus particulièrement autour de deux objectifs : d'une part, proposer une famille de lois binomiales négatives pour les processus ponctuels, et d'autre part généraliser au cas des mesures aléatoires la notion de processus de clustering que les auteurs anglo-saxons appellent "cluster processes" ou "processes of clustering".

Le chapitre I présente les outils théoriques et introduit les processus de clustering.

Dans la première partie nous étudions les lois de probabilité sur les espaces (M, \mathcal{M}) et (M_p, \mathcal{M}_p) des mesures de Radon et des mesures de Radon ponctuelles. Nous définissons les fonctionnelles de Laplace qui leur sont associées et donnons leurs propriétés élémentaires. Nous présentons les diverses notions de convergence et, pour la convergence en loi plus particulièrement utilisée nous donnons des critères en termes de fonctionnelles de Laplace et de lois cylindriques. Nous faisons ensuite une place importante à l'étude des séries de mesures aléatoires indépendantes et à ses relations avec la notion de produit de convolution dénom-

brable de lois de probabilité sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$. Un résultat essentiel ici est que la somme d'une série de mesures aléatoires est une mesure aléatoire si la suite des sommes partielles converge en loi ; ainsi, en particulier, le produit de convolution $\ast_{i \in \mathbb{N}} P_i$ d'une famille dénombrable de probabilités sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ est définie si les probabilités $\ast_{i=1}^n P_i$ convergent étroitement. La fin de cette première partie est consacrée aux notions d'infinie divisibilité, de propriété g_ν et de probabilités de Palm.

Dans la deuxième partie nous décrivons les processus de NEYMAN-SCOTT et de BARTLETT-LEWIS, puis nous donnons la définition probabiliste du processus de clustering dans le cadre des processus ponctuels.

Un exemple de modèle de clustering peut être décrit sommairement de la manière suivante : des particules sont distribuées de manière aléatoire sur un espace, constituant une première génération ; chacune de ces particules, indépendamment des autres, donne ensuite naissance à d'autres particules en nombre aléatoire et distribuées sur l'espace de manière aléatoire, constituant ainsi une deuxième génération.

NEYMAN et SCOTT ont, les premiers, proposé un tel modèle en 1952 pour l'étude de la répartition spatiale des étoiles. De nombreux auteurs ont ensuite utilisé ce type de modèles dans des domaines divers : écologie, épidémiologie, études forestières, géographie, ... Le processus de BARTLETT-LEWIS concerne une situation où l'espace de base est \mathbb{R}_+ . Le livre édité par LEWIS ([25]) et en particulier l'article de NEYMAN et SCOTT ([33]) constituent une illustration importante de ce sujet.

Nous reprenons, pour définir un processus de clustering, les idées de l'école allemande : MATTHES et al. ([28]). Etant donné deux espaces X_1, X_2 et $(\mathbb{M}_{p1}, \mathcal{M}_{p1}), (\mathbb{M}_{p2}, \mathcal{M}_{p2})$ les espaces de mesures associés, nous appelons générateur de clustering π une probabilité de transition sur $X_1 \times \mathcal{M}_{p2}$. Le couple (P_1, π) constitué d'une probabilité P_1 sur $(\mathbb{M}_{p1}, \mathcal{M}_{p1})$ et d'un générateur de clustering π définit un processus de

clustering lorsque le produit de convolution

$$\pi(\mu, \cdot) = \sum_{\{x \in X_1, \mu(x) > 0\}} \pi(x, \cdot)^{* \mu(x)}$$

est défini pour P_1 -presque tout μ . Dans ce cas π peut être prolongé en une transition sur $\mathbb{M}_{p1} \times \mathbb{M}_{p2}$ et le processus de clustering est alors un cas particulier de processus de ramification à valeurs mesures.

Nous terminons ce chapitre en montrant que certaines opérations aléatoires sur les processus ponctuels (amincissements, translations, compositions et mélanges de ces opérations) peuvent être modélisées par des processus de clustering.

Dans le chapitre II nous proposons une classe de lois de probabilité généralisant aux processus ponctuels les lois géométrique et binomiale négative habituelles.

On rencontre assez souvent dans les applications des situations où l'étude d'une distribution de points sur un espace fait apparaître des lois cylindriques de dimension unité de type binomial négatif (cf. BARTLETT [2], CLIFF et ORD [8], BLISS [6]). Une des motivations de ce chapitre a été de construire une loi de processus ponctuels dont toutes les lois cylindriques soient binomiales négatives. BARNDORFF-NIELSEN et YEO ([1]) ont défini et étudié sur \mathbb{R}^n une famille de processus qu'ils appellent binomiaux négatifs. Ces processus sont en fait des processus de Cox où l'intensité aléatoire est définie par un processus de loi gamma, mais les lois cylindriques obtenues ne sont pas de type binomial négatif.

Nous commençons par montrer, en utilisant les modèles de tirage d'urnes, comment les lois géométrique et binomiale négative usuelles se généralisent en dimension finie. On obtient alors, par exemple, comme loi binomiale négative en dimension n , une loi admettant comme fonction génératrice :

$$G(s_1, \dots, s_n) = \left(\frac{p}{1 - \sum_{i=1}^n q_i s_i} \right)^r ; p + \sum_{i=1}^n q_i = 1 .$$

Les marginales de cette loi sont, elles aussi, des lois binomiales négatives.

Généralisant ensuite le modèle de tirages, nous construisons le processus ponctuel $\xi = \sum_{i=1}^N \delta_{\tau_i}$, où les τ_i sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi ν_0 , et N est une variable, indépendante des τ_i , et de loi binomiale négative de paramètres r et p . Ce processus d'échantillonnage mélangé possède la propriété souhaitée : toutes ses lois cylindriques sont binomiales négatives. La fonctionnelle de Laplace qui lui est associée a pour expression :

$$\varphi(f) = \left[1 + \int_X (1 - e^{-f(x)}) \nu(dx) \right]^{-r}$$

où ν est la mesure finie $\nu = \frac{q}{p} \nu_0$. Or nous constatons que, pour toute mesure de Radon positive ν sur X , φ définit une loi de processus ponctuel qui possède encore la propriété souhaitée et que nous appelons loi binomiale négative de paramètres ν et r : $\mathfrak{B}\mathcal{N}(\nu, r)$. Cette loi ne peut plus être considérée comme la loi d'un processus d'échantillonnage mélangé, mais on vérifie qu'elle possède localement cette propriété. Il s'ensuit qu'elle admet une représentation comme loi de processus de Poisson mélangé et nous utilisons ensuite cette propriété de manière intensive. Elle nous permet, par exemple, de montrer simplement que les lois $\mathfrak{B}\mathcal{N}(\nu, r)$ sont indéfiniment divisibles et de fournir la représentation canonique associée.

Nous calculons aussi les moments d'ordre un et deux. Déterminant ensuite les probabilités de Palm, nous observons que les lois $\mathfrak{B}\mathcal{N}(\nu, r)$ possèdent une propriété de stabilité intéressante : la loi de Palm associée à la loi

$\theta \eta(v, r)$ n'est autre que la loi $\theta \eta(v, r+1)$. Nous terminons en considérant le cas particulier où l'espace de base est R_+ : nous calculons la loi conjointe du vecteur (τ_1, \dots, τ_n) des dates des n premières occurrences, nous étudions le processus binomial négatif stationnaire et enfin, nous retrouvons le processus de Yule.

Signalons que les processus de Poisson mélangés étant des processus de Cox particuliers, il nous aurait été possible d'utiliser les résultats qui ont été développés pour cette classe de processus (cf. KRICKEBERG [22], GRANDSELL [12]). Nous avons choisi une démarche qui nous a paru plus naturelle en ce qu'elle permet de fournir une présentation qui se suffit à elle-même. BATES et NEYMAN ([5]) et NEYMAN ([36]), dans le cas particulier de R_+ , ont eu l'idée d'utiliser les modèles de tirages d'urnes de manière assez voisine de la nôtre, mais n'ont pas développé l'étude générale de la loi du processus ponctuel qui pouvait être obtenu.

Le chapitre III est consacré à l'étude des problèmes de clustering.

Dans une première partie, utilisant la présentation faite au chapitre I, nous donnons d'abord des critères d'existence du processus de clustering (P_1, π) dans le cas des processus ponctuels et nous calculons les moments d'ordre un et deux de la loi secondaire. Nous nous intéressons ensuite aux problèmes d'existence dans le cas particulier où la loi primaire est stationnaire et le générateur de clustering homogène. A l'exception des formules donnant les moments d'ordre deux de la loi secondaire, ces résultats sont pour l'essentiel ceux de l'école allemande (cf. [28]).

Nous proposons ensuite une généralisation des processus de clustering dans le cas des mesures de Radon positives quelconques. La loi $\pi(\mu, \cdot)$ est ici définie par la fonctionnelle $\psi(\mu, \cdot) = \int \psi(x, \cdot) \mu(dx)$, lorsque cette formule définit bien une fonctionnelle logarithmique (\mathcal{F} .Log.). Nous reprenons là une idée que JIRINA ([18], [19]) avait utilisée pour

l'étude de processus de ramification à valeurs mesures, mais dans le cadre de mesures finies et de lois $\pi(x,.)$ indéfiniment divisibles. Dans la situation plus générale à laquelle nous nous intéressons nous donnons une expression de la \mathcal{F} .Log. de la loi secondaire et les formules exprimant les moments d'ordre un et deux. Des critères d'existence sont ensuite obtenus sous l'hypothèse d'infinie divisibilité des lois $\pi(x,.)$.

Dans la partie suivante, utilisant la méthode des \mathcal{F} .Log. dans le cas ponctuel, nous donnons de nouveaux critères d'existence des processus de clustering. Nous montrons aussi, sur deux exemples, que la méthode des \mathcal{F} .Log. peut être intéressante pour obtenir assez simplement des résultats classiques.

Enfin nous présentons deux situations modélisées par des processus de clustering. La première, dans le cas ponctuel, fait appel aux lois binomiales négatives définies au chapitre II. La seconde est un exemple de processus de clustering sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$.

CHAPITRE I

NOTIONS FONDAMENTALES SUR LES MESURES ALEATOIRES ET PROCESSUS PONCTUELS.

DESCRIPTION DU CLUSTERING DANS (M_p, \mathcal{M}_p) .

Ce chapitre est composé de deux paragraphes : le premier présente les outils théoriques nécessaires à l'étude des mesures aléatoires et des processus ponctuels ; le second décrit le modèle de clustering dans (M_p, \mathcal{M}_p) .

§1. - MESURES ALEATOIRES ET PROCESSUS PONCTUELS.

Au paragraphe 1.1. nous étudions les probabilités sur les espaces (M, \mathcal{M}) et (M_p, \mathcal{M}_p) des mesures de Radon et des mesures de Radon ponctuelles ; au paragraphe 1.2. nous présentons la définition et les propriétés élémentaires des fonctionnelles de Laplace qui leur sont associées.

Le paragraphe 1.3. est consacré aux notions de convergence des mesures aléatoires. Nous définissons la convergence en loi et donnons des critères de convergence en termes de fonctionnelles de Laplace et de lois cylindriques. Nous présentons aussi les notions de convergence presque sûre, de convergence en probabilité et comparons les trois types de convergence ainsi introduits. Dans le paragraphe 1.4., mettant à profit les résultats présentés au paragraphe 1.3., nous nous intéressons aux séries de mesures aléatoires et aux produits de convolution de familles dénombrables de lois sur (M, \mathcal{M}) .

Dans le paragraphe 1.5., nous étudions les lois indéfiniment divi-

sibles sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ et $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$. Enfin au paragraphe 1.6. nous présentons la classe des processus de Poisson mélangés en liaison avec la notion de "loi ayant la propriété g_ν " et terminons par la définition des probabilités de Palm.

1.1. Probabilités sur les espaces $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ et $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$

Soit X un espace localement compact à base dénombrable. X peut donc être muni d'une distance pour laquelle il est de type dénombrable et complet, i.e. X est polonais ; de plus la distance peut être choisie de manière à ce que les boules soient relativement compactes. Nous notons \mathcal{X} la tribu de Borel de X et \mathcal{B} l'anneau de ses boréliens bornés, c'est-à-dire relativement compacts. Dans le cas particulier de \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}^d) la tribu de Borel est notée \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}^d). \mathcal{F} désigne l'espace des fonctions réelles mesurables définies sur (X, \mathcal{X}) .

Soit \mathbb{M} l'espace des mesures de Radon positives sur (X, \mathcal{X}) , c'est-à-dire l'ensemble des mesures positives sur \mathcal{X} qui sont finies sur \mathcal{B} . L'espace \mathbb{M} est muni de la tribu \mathcal{M} engendrée par la famille des applications $\mu \rightarrow \mu(A)$ de \mathbb{M} dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, $A \in \mathcal{X}$; cette tribu est aussi engendrée par la sous-famille obtenue lorsque A parcourt l'ensemble des ouverts bornés de X ou par la famille des applications $\mu \rightarrow \int f d\mu$ de \mathbb{M} dans \mathbb{R} , f décrivant l'ensemble \mathcal{C}_K des fonctions continues à support compact de X dans \mathbb{R} (cf. [30], p.26).

Nous utilisons presque exclusivement la topologie vague sur \mathbb{M} , à savoir la topologie la moins fine rendant continues les applications $\mu \rightarrow \int f d\mu$ de \mathbb{M} dans \mathbb{R} , $f \in \mathcal{C}_K$. L'espace topologique ainsi obtenu est polonais (cf. [20], p.95) et sa tribu borélienne n'est autre que \mathcal{M} (cf. [17], p.157).

Nous désignons par \mathbb{M}_p l'espace des mesures de Radon positives ponctuelles sur (X, \mathcal{X}) :

$$\mathbb{M}_p = \{ \mu \in \mathbb{M}, \mu(A) \in \overline{\mathbb{N}}, A \in \mathcal{X} \} .$$

Une mesure μ appartient à \mathbb{M}_p si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme $\sum_{i \in I} \alpha_i \delta_{x_i}$, où les α_i sont des entiers et la famille $(x_i, i \in I)$ est localement finie sur X , δ_x désignant la mesure de Dirac au point x . \mathbb{M}_p est élément de \mathcal{M} car, si $(G_j, j \in J)$ est une base dénombrable de la topologie de X formée d'ouverts bornés, on a :

$$\mathbb{M}_p = \{ \mu \in \mathbb{M}, \mu(G_j) \in \mathbb{N}, j \in J \} .$$

Nous munissons l'espace \mathbb{M}_p de la tribu \mathcal{M}_p engendrée par les applications $\mu \rightarrow \mu(A)$ de \mathbb{M}_p dans $\bar{\mathbb{N}}$, $A \in \mathcal{X}$. Il est clair que \mathbb{M}_p est la tribu trace $\mathbb{M}_p \cap \mathcal{M}$. Remarquons aussi que pour la topologie vague, \mathbb{M}_p est un sous-espace fermé de \mathbb{M} et est donc polonais (cf. [17], p.200).

Nous notons \mathbb{M}_p^s le sous-ensemble de \mathbb{M}_p constitué des mesures simples :

$$\mathbb{M}_p^s = \{ \mu \in \mathbb{M}_p, \mu\{x\} \leq 1, x \in X \} .$$

Pour tout élément μ de \mathbb{M}_p , μ^* désigne l'élément de \mathbb{M}_p^s défini par :

$$\mu^*(B) = \sum_{x \in B} \mathbb{I}_{[1, +\infty[}(\mu\{x\}), B \in \mathcal{B} .$$

L'application $\mu \rightarrow \mu^*$ de \mathbb{M}_p dans \mathbb{M}_p^s est mesurable (cf. [20], lemme 2.2.), par suite \mathbb{M}_p^s est élément de \mathcal{M}_p .

Pour tout A de \mathcal{X} , nous définissons l'application $\mu \rightarrow {}_A\mu$ de $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ dans lui-même par :

$${}_A\mu(B) = \mu(B \cap A), B \in \mathcal{X},$$

et nous notons ${}_A P$ la loi image d'une loi P sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ par cette application. Si ν est une mesure sur (X, \mathcal{X}) , Q_ν désigne la mesure image sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ de ν par l'application $x \rightarrow \delta_x$.

Pour toute mesure m , nous notons $m(\cdot | B)$, lorsqu'elle est définie, la probabilité conditionnelle $A \rightarrow m(A | B) = \frac{m(A \cap B)}{m(B)}$.

I.1. Définition

On appelle mesure aléatoire (resp. processus ponctuel) sur X
toute application mesurable ξ définie sur un espace probabilisé
 (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans (M, \mathcal{M}) (resp. (M_p, \mathcal{M}_p)) .

Dans la suite nous identifierons souvent la mesure aléatoire ou le processus ponctuel ξ avec sa loi de probabilité, c'est-à-dire la probabilité image de P par ξ . En effet, la donnée d'une probabilité P sur (M, \mathcal{M}) (resp. (M_p, \mathcal{M}_p)) peut toujours être regardée comme la loi de probabilité d'une mesure aléatoire (resp. d'un processus ponctuel) ξ , ne serait-ce que l'identité sur (M, \mathcal{M}) (resp. (M_p, \mathcal{M}_p)) .

Un processus ponctuel étant une mesure aléatoire particulière, les définitions ou propriétés qui leur sont communes ne seront énoncées qu'en termes de mesures aléatoires, la substitution de l'espace (M_p, \mathcal{M}_p) à (M, \mathcal{M}) étant laissée au soin du lecteur. Enfin, pour simplifier les énoncés, nous permettrons aux mesures aléatoires ou aux processus ponctuels de prendre des valeurs à l'extérieur de M ou de M_p sur un ensemble de probabilité nulle.

I.2. Définition

On appelle mesure d'intensité d'une mesure aléatoire ξ de loi P ,
et on note $E\xi$, la mesure définie sur (X, \mathcal{X}) par :

$$E\xi(A) = \int_M \mu(A) P(d\mu) , A \in \mathcal{X} .$$

ξ est dite intégrable ou du 1er ordre lorsque $E\xi$ est une mesure de Radon.

Soit P une probabilité sur (M, \mathcal{M}) . Les images de P par les applications de (M, \mathcal{M}) dans $(\mathbb{R}_+^n, \mathcal{R}_+^n) : \mu \rightarrow (\mu(B_1), \dots, \mu(B_n))$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$, sont des probabilités sur $(\mathbb{R}_+^n, \mathcal{R}_+^n)$ notées P_{B_1, \dots, B_n}^* , $n \in \mathbb{N}^*$, satisfaisant aux conditions de compatibilité habituelles faisant de la famille des P_{B_1, \dots, B_n}^* un système projectif. Inver-

sement on peut se demander sous quelles conditions un tel système définit une probabilité sur (M, \mathcal{M}) .

I.3. Théorème ([20], p.31.)

Soit $\{P_{B_1, \dots, B_n}, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}^*\}$ un système projectif de probabilités sur $\{(R_+^n, \mathcal{A}_+^n), n \in \mathbb{N}^*\}$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une probabilité P sur (M, \mathcal{M}) telle que, pour tout n de \mathbb{N}^* et tout choix des B_1, \dots, B_n dans \mathcal{B} , P_{B_1, \dots, B_n} soit l'image de P par l'application $\mu \rightarrow (\mu(B_1), \dots, \mu(B_n))$, $n \in \mathbb{N}^*$, est que :

1°) pour tout couple B_1, B_2 d'éléments disjoints de \mathcal{B} on ait :

$$P_{B_1, B_2, B_1 \cup B_2} (\{(x, y, z) : x + y = z\}) = 1$$

2°) pour toute suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissant vers l'ensemble vide

$$P_{B_n} \text{ converge étroitement vers } \delta_0.$$

L'interprétation des deux conditions ci-dessus est claire. La première garantit que la probabilité sur $R_+^{\mathcal{B}}$ définie par le système projectif des P_{B_1, \dots, B_n} est concentrée sur les fonctions d'ensembles additives, la seconde garantit qu'elle est concentrée sur le sous-espace des fonctions σ -additives.

1.2. Fonctionnelles de Laplace

I.4. Définition

On appelle fonctionnelle de Laplace d'une loi P sur (M, \mathcal{M}) l'application φ définie par :

$$\varphi(f) = \int_M e^{-\int_X f d\mu} P(d\mu)$$

où f parcourt le cône \mathcal{F}_+ des fonctions boréliennes positives sur X .
 Si ξ est une mesure aléatoire, on appelle fonctionnelle de Laplace de ξ , notée φ_ξ , celle associée à sa loi P_ξ .

Soit P une loi de probabilité sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ de fonctionnelle de Laplace φ . Alors pour tout n de \mathbb{N}^* et tout choix B_1, \dots, B_n d'éléments de \mathcal{B} , la fonction $\varphi_{B_1, \dots, B_n}$ définie sur \mathbb{R}_+^n par :

$$\varphi_{B_1, \dots, B_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{B_i}\right)$$

est la transformée de Laplace de P_{B_1, \dots, B_n} , probabilité image de P par l'application $\mu \rightarrow (\mu(B_1), \dots, \mu(B_n))$ de \mathbb{M} dans \mathbb{R}_+^n .

Les deux propositions suivantes concernent en particulier le problème de l'existence d'une loi de probabilité sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ et sont à rapprocher du Théorème I.3. La première est donnée dans le cas général d'une probabilité sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$, la seconde dans le cas particulier d'une probabilité sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M}_p)$.

I.5. Proposition ([30], Prop. I.12.)

Soit φ une application de C_K^+ dans \mathbb{R} telle que pour toute suite finie f_1, \dots, f_n dans C_K^+ la fonction $\varphi_{f_1, \dots, f_n}$ définie sur \mathbb{R}_+^n par :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rightarrow \varphi_{f_1, \dots, f_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\right)$$

soit la transformée de Laplace d'une loi de probabilité sur \mathbb{R}_+^n . Il existe une probabilité unique P sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ dont la fonctionnelle de Laplace restreinte à C_K^+ soit φ ; de plus pour toute suite finie f_1, \dots, f_n dans C_K^+ $\varphi_{f_1, \dots, f_n}$ est alors la transformée de Laplace de P_{f_1, \dots, f_n} , loi image de P par l'application $\mu \rightarrow (\int f_1 d\mu, \dots, \int f_n d\mu)$.

Notons que cette proposition autorise à ne considérer que la restriction de la fonctionnelle φ à l'espace C_K^+ puisqu'elle est complètement

définie dès qu'elle est connue sur cet espace. En fait, on substituera souvent à φ la fonctionnelle $\psi = -\text{Log } \varphi$ qu'on appellera fonctionnelle logarithmique.

I.6. Proposition ([30], Prop. I.13.)

Soit B_{ke}^+ le cône des fonctions définies sur X , boréliennes étagées, positives et nulles hors d'un compact. Si une fonction φ de B_{ke}^+ dans $[0,1]$ est telle que :

- a) pour toute suite finie F_1, \dots, F_n d'éléments de \mathcal{B} deux à deux disjoints, la fonction $\varphi_{F_1, \dots, F_n}$ définie sur \mathbb{R}_+^n par :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rightarrow \varphi_{F_1, \dots, F_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{F_i}\right)$$

est la transformée de Laplace d'une loi de probabilité sur \mathbb{N}^n ,

- b) $\lim_n \varphi(1_{F_n}) = 1$ pour toute suite d'éléments de \mathcal{B} décroissant vers l'ensemble vide,

alors il existe une probabilité unique P sur \mathbb{M}_p dont la fonctionnelle de Laplace φ_P vérifie :

$$\varphi_P(f) = \varphi(f), \quad f \in B_{ke}^+.$$

La condition b) dans l'énoncé ci-dessus permet de prolonger φ en une fonctionnelle sur l'espace B_k^+ des fonctions boréliennes positives et nulles hors d'un compact. On montre alors que la restriction de cette fonctionnelle à C_K^+ satisfait aux hypothèses de la proposition I.5. Remarquons que dans l'énoncé de la proposition I.5 les conditions 1) et 2) du théorème I.3 semblent disparaître. En réalité, le fait que les $\varphi_{f_1, \dots, f_n}$ soient des transformées de Laplace suffit à assurer que ces conditions sont satisfaites.

1.3. Notions de convergence de suites de mesures aléatoires.

On s'intéresse maintenant à différents types de convergence de suites de mesures aléatoires.

La définition suivante est justifiée par le fait que \mathbb{M} est un espace polonais pour la convergence vague.

I.7. Définition

On dit qu'une suite de probabilités $(P_n, n \in \mathbb{N})$ sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ converge étroitement vers la probabilité P sur le même espace si et seulement si :

$$\lim_n \int_{\mathbb{M}} g(\mu) P_n(d\mu) = \int_{\mathbb{M}} g(\mu) P(d\mu)$$

pour toute fonction g réelle bornée et continue pour la topologie vague sur \mathbb{M} . Une suite $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ de mesures aléatoires de lois $(P_n, n \in \mathbb{N})$ est dite converger en loi vers la mesure aléatoire ξ si et seulement si $(P_n, n \in \mathbb{N})$ converge étroitement vers la loi P de ξ .

Soit ξ une mesure aléatoire sur X . Nous notons \mathcal{B}_ξ le sous-ensemble de \mathcal{B} défini par :

$$\mathcal{B}_\xi = \{ B \in \mathcal{B}, \xi(\partial B) = 0 \text{ p.s.} \}$$

où ∂B est la frontière de B , c'est-à-dire $\bar{B} \cap \bar{B}^c$, si \bar{B} et B^c désignent respectivement la fermeture et le complémentaire de B .

I.8. Théorème. ([20], Th. 4.2 p.22.)

Pour que la suite $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ de mesures aléatoires converge en loi vers la mesure aléatoire ξ , il est nécessaire et suffisant que l'une des trois conditions suivantes soit satisfaite :

- i) pour tout f de C_K^+ , la suite de variables aléatoires réelles positives $\int f d\xi_n$ converge en loi vers $\int f d\xi$;

- ii) pour tout f de C_K^+ , la suite réelle $\varphi_{\xi_n}(f)$ converge vers $\varphi_{\xi}(f)$;
- iii) $(\xi_n(B_1), \dots, \xi_n(B_k))$ converge en loi vers $(\xi(B_1), \dots, \xi(B_k))$ pour tout k de \mathbb{N}^* et toute famille B_1, \dots, B_k d'éléments de \mathcal{B}_{ξ} .

Nous donnons un critère d'existence de la loi limite en termes de transformées de Laplace.

I.9. Lemme ([30], Corol. I.17.)

Si la suite $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ des fonctionnelles de Laplace des mesures aléatoires $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ sur X converge simplement sur C_K^+ vers une fonctionnelle φ de C_K^+ dans $[0,1]$ telle que $\lim_{t \searrow 0} \varphi(tf) = 1$, $f \in C_K^+$, alors la suite de mesures aléatoires $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ converge en loi vers une mesure aléatoire ξ dont φ est la fonctionnelle de Laplace.

Outre la notion de convergence en loi, on utilise aussi dans la suite la notion de convergence presque sûre (p.s.) en un sens évident et celle de convergence en probabilité que nous précisons : rappelons que si ν est un élément de \mathcal{M} les ensembles $V_{f_1, \dots, f_k; \epsilon_1, \dots, \epsilon_k}(\nu)$ définis par :

$$V_{f_1, \dots, f_k; \epsilon_1, \dots, \epsilon_k}(\nu) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}, \left| \int f_l d\mu - \int f_l d\nu \right| < \epsilon_l, l=1, \dots, k \right\}$$

pour tout k de \mathbb{N}^* , $f_1, \dots, f_k \in C_K$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ positifs, constituent un système fondamental de voisinages de ν pour la topologie vague. Alors la suite de mesures aléatoires $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ converge en probabilité vers la mesure aléatoire ξ si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \int f_l d\xi_n - \int f_l d\xi \right| \geq \epsilon_l, l=1, \dots, k\right) = 0 \quad f_1, \dots, f_k \in C_K,$$

$$\epsilon_1, \dots, \epsilon_k > 0, k \in \mathbb{N}^*.$$

On constate immédiatement que l'on peut donner une formulation plus simple de cette définition, à savoir : la suite de mesures aléatoires ξ_n converge en probabilité vers la mesure aléatoire ξ si et seulement si pour toute fonction f de C_K la suite de variables aléatoires réelles $\int f d\xi_n$ converge en probabilité vers la variable aléatoire $\int f d\xi$.

Les relations usuelles entre les trois types de convergence restent vraies pour les mesures aléatoires :

I.10. Lemme

Soit $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de mesures aléatoires. On a les implications suivantes :

- i) si la suite $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ converge p.s. vers la mesure aléatoire ξ elle converge en probabilité vers ξ .
- ii) si la suite $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ converge en probabilité vers la mesure aléatoire ξ elle converge en loi vers ξ .

Nous donnons ici une démonstration directe de ce résultat, mais il faut noter que les relations entre les divers types de convergence énoncées dans ce lemme sont en fait vérifiées dès que les éléments aléatoires concernés sont à valeurs dans un espace polonais (cf. [16] , p.304).

Démonstration

Si ξ_n converge p.s. vers ξ , il existe Ω_0 élément de \mathcal{G} vérifiant $P(\Omega_0) = 0$ tel que :

$$\forall \omega \in \Omega_0^c, \forall f \in C_K \quad \lim_n \int f d\xi_n(\omega) = \int f d\xi(\omega) .$$

Pour tout f de C_K , la suite de variables aléatoires réelles $\int f d\xi_n$ converge alors p.s. vers $\int f d\xi$ et donc aussi en probabilité, d'où :

$$\lim_n P(|\int f d\xi_n - \int f d\xi| > \epsilon) = 0, \quad \epsilon > 0 .$$

La suite ξ_n converge donc en probabilité vers ξ .

Enfin, la convergence en probabilité de la suite de variables aléatoires réelles $\int f d\xi_n$ vers $\int f d\xi$ implique la convergence en loi et donc ξ_n converge en loi vers ξ (cf. Th. I.8.).

1.4. Séries de mesures aléatoires et produit infini de convolution

Nous étudions ici la convergence des séries de mesures aléatoires ou de processus ponctuels parallèlement à la notion de produit infini de convolution de probabilités sur (M, \mathcal{M}) ou (M_p, \mathcal{M}_p) . Cette dernière notion nous sera utile au paragraphe suivant.

Dans ce paragraphe, I désigne un ensemble d'indices infini dénombrable que l'on suppose avoir ordonné suivant les valeurs croissantes de $N : I = \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots\}$. Ainsi les notions de séries ou limites utilisées sont définies sans ambiguïté, mais il est important de noter que ces définitions restent indépendantes de l'ordre choisi sur I . Dans le paragraphe suivant I sera souvent lié à la réalisation d'un processus ponctuel.

Soit $(\mu_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de M . Il est naturel de définir $\sum_{i \in I} \mu_i$ par :

$$\left(\sum_{i \in I} \mu_i \right) (A) = \sum_{i \in I} \mu_i(A), \quad A \in \mathcal{X}.$$

Nous notons $\mu^{(n)}$ la somme partielle $\sum_{j=1}^n \mu_{i_j}$

La somme $\sum_{i \in I} \mu_i$ est toujours une mesure mais cette mesure n'est pas nécessairement dans M : elle est en fait dans M si et seulement si la suite des sommes partielles est vaguement convergente dans M .

Supposons que $\mu^{(n)}$ converge vaguement vers une mesure μ de M et montrons que μ est alors la somme de la série. En effet on a pour tout f de C_K^+ $\lim_n \int f d\mu^{(n)} = \int f d\mu$ et d'autre part $\lim_n \int f d\mu^{(n)} = \int f d\left(\sum_{i \in I} \mu_i\right)$;

ainsi $\int f d\mu = \int f d(\sum_{i \in I} \mu_i)$ pour tout $f \in C_K^+$. Par suite $\sum_{i \in I} \mu_i = \mu$.

L'implication dans l'autre sens est triviale.

Compte tenu de la définition de $\sum_{i \in I} \mu_i$, si $(\xi_i)_{i \in I}$ est une famille de mesures aléatoires, on peut définir $\sum_{i \in I} \xi_i$ en tout ω en posant :

$$(\sum_{i \in I} \xi_i)(\omega) = \sum_{i \in I} \xi_i(\omega)$$

la somme $\sum_{i \in I} \xi_i$ définit donc une mesure aléatoire si presque sûrement, pour tout B de \mathfrak{B} $\sum_{i \in I} \xi_i(B)$ est finie. On a en fait le résultat plus intéressant qui suit :

I.11. Lemme ([20], lemme 1.6.)

Soit $(\xi_i)_{i \in I}$ une famille de mesures aléatoires (resp. de processus ponctuels). La somme $\sum_{i \in I} \xi_i$ est une mesure aléatoire (resp. un processus ponctuel) si et seulement si $\sum_{i \in I} \xi_i(B)$ est p.s. finie pour tout B de \mathfrak{B} .

Soit M^I l'espace des suites de mesures indexées par I et \mathfrak{M}^I la tribu produit habituelle. On note D_I le sous-ensemble de M^I formé par les suites $(\mu_i)_{i \in I}$ pour lesquelles la somme $\sum_{i \in I} \mu_i$ définit une mesure de Radon :

$$D_I = \left\{ (\mu_i)_{i \in I} \in M^I, \sum_{i \in I} \mu_i(B) < +\infty, B \in \mathfrak{B} \right\}$$

Quel que soit B de \mathfrak{B} , l'application $(\mu_i)_{i \in I} \rightarrow \sum_{i \in I} \mu_i(B)$ de M^I dans $[0, \infty]$ est mesurable et donc D_I est dans \mathfrak{M}^I . En effet, pour une suite convenable (K_n) de compacts croissant vers X on peut écrire :

$$D_I = \bigcap_n \left\{ (\mu_i)_{i \in I} \in M^I, \sum_{i \in I} \mu_i(K_n) < +\infty \right\}.$$

Ainsi l'application $(\mu_i)_{i \in I} \rightarrow \sum_{i \in I} \mu_i$, restreinte à D_I , est mesurable en tant qu'application de $(D_I, \mathcal{M}^I \cap D_I)$ dans (M, \mathcal{M}) , ce qui permet de donner la définition suivante :

I.12. Définition

Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de lois de probabilité sur (M, \mathcal{M}) telle que $(\otimes_{i \in I} P_i)(D_I) = 1$. On appelle produit de convolution de la famille $(P_i)_{i \in I}$ et on note $\star_{i \in I} P_i$, la probabilité sur (M, \mathcal{M}) image de $\otimes_{i \in I} P_i$ par l'application $(\mu_i)_{i \in I} \rightarrow \sum_{i \in I} \mu_i$.

Remarquons que lorsque $(P_i)_{i \in I}$ est une famille de probabilités concentrées sur M_p , la probabilité $\star_{i \in I} P_i$, si elle est définie, est aussi concentrée sur M_p .

La proposition suivante établit le lien entre la loi d'une somme de mesures aléatoires indépendantes et le produit de convolution des lois de ces mesures aléatoires. C'est une conséquence du lemme I.11. et de la définition du produit de convolution.

I.13. Proposition

Soit $(\xi_i)_{i \in I}$ une famille de mesures aléatoires indépendantes de lois de probabilité $(P_i)_{i \in I}$. Si la condition du lemme I.11. est vérifiée, le produit de convolution $\star_{i \in I} P_i$ est défini et est la loi de la mesure aléatoire $\sum_{i \in I} \xi_i$.

Lorsque la somme $\sum_{i \in I} \xi_i$ définit une mesure aléatoire ξ , la

suite des sommes partielles converge vers ξ p.s. et donc d'après le lemme I.10. converge aussi en loi vers ξ . La réciproque est vraie et on peut énoncer :

I.14. Proposition

Soit $(\xi_i)_{i \in I}$ une famille de mesures aléatoires. La somme $\sum_{i \in I} \xi_i$ définit une mesure aléatoire ξ si et seulement si la suite des sommes partielles converge en loi vers ξ .

Démonstration

Posons :

$$\xi^{(n)} = \sum_{j=1}^n \xi_{i_j}, \quad \xi = \sum_{i \in I} \xi_i = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{i_j}.$$

Si la somme $\sum_{i \in I} \xi_i$ définit une mesure aléatoire ξ , la suite des sommes partielles $\xi^{(n)}$ converge p.s. vers ξ et d'après le lemme I.10. converge donc aussi en loi vers ξ .

Réciproquement, supposons que $\xi^{(n)}$ converge en loi vers une mesure aléatoire $\tilde{\xi}$. Alors, d'après le Théorème I.8, pour tout C de $\mathcal{B}_{\tilde{\xi}}$ la suite de variables aléatoires réelles $\xi^{(n)}(C)$ converge en loi vers $\tilde{\xi}(C)$ et donc aussi presque sûrement car cette suite est croissante. D'autre part tout élément B de \mathcal{B} peut être recouvert par une famille finie, disons $\{C_1, \dots, C_m\}$, d'éléments de $\mathcal{B}_{\tilde{\xi}}$ (cf. [20], lemme 4.3.) ; il s'ensuit immédiatement que la suite des variables aléatoires réelles $\xi^{(n)}(B)$ converge p.s..

D'après le lemme I.11. on peut donc affirmer que la somme $\sum_{i \in I} \xi_i$ définit une mesure aléatoire.

I.15. Corollaire.

Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de probabilités sur (M, \mathcal{M}) (resp. (M_p, \mathcal{M}_p)). Le produit de convolution $\ast_{i \in I} P_i$ existe si et seulement si $\ast_{i=1}^n P_i$

converge étroitement vers une probabilité sur (M, \mathcal{M}) (resp. (M_p, \mathcal{M}_p)) .

Si cette condition est réalisée $(\prod_{i=1}^n P_i)_{B_1, \dots, B_m}$ converge étroitement

vers $(\prod_{i \in I} P_i)_{B_1, \dots, B_m}$ pour toute suite finie de boréliens bornés

B_1, \dots, B_m .

Pour terminer cette section, remarquons que dans le cas d'une famille $(\xi_i)_{i \in I}$ de processus ponctuels de lois $(P_i)_{i \in I}$, on peut affaiblir la condition d'existence donnée dans le lemme I.11. En effet, la probabilité $\otimes_{i \in I} P_i$ doit être concentrée sur l'ensemble :

$$D_I \cap M_p^I = \left\{ (\mu_i)_{i \in I} \in M_p^I, \sum_{i \in I} \mu_i(B) < +\infty, B \in \mathcal{B} \right\} .$$

D'autre part, pour tout B de \mathcal{B} on peut écrire :

$$\left\{ (\mu_i)_{i \in I} \in M_p^I, \sum_{i \in I} \mu_i(B) < +\infty \right\} = \liminf_I \left\{ (\mu_j)_{j \in I}, \mu_i(B) = 0 \right\} .$$

Le lemme de Borel-Cantelli donne alors immédiatement :

I.16. Lemme

Soit $(\xi_i)_{i \in I}$ une famille de processus ponctuels indépendants de lois $(P_i)_{i \in I}$. La somme $\sum_{i \in I} \xi_i$ est un processus ponctuel si et seulement si pour tout B de \mathcal{B} on a :

$$\sum_{i \in I} P_i(\{\mu(B) > 0\}) < +\infty .$$

1.5. Infinie divisibilité

La notion d'infinie divisibilité, bien connue dans le cadre des lois de probabilité sur \mathbb{R}^n (cf. [9] par exemple) se généralise de fa-

çon naturelle aux lois sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ ou $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$.

I.17. Définition

Une probabilité P sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ (resp. $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$) est dite indéfiniment divisible sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ (resp. $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$) si et seulement si pour tout entier positif n , il existe une probabilité P_n sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ (resp. $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$) telle que $P = (P_n)^{*n}$. On dit qu'une mesure aléatoire (resp. un processus ponctuel) ξ est indéfiniment divisible si sa loi est indéfiniment divisible sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ (resp. $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$).

I.18. Lemme ([20], p.36 ; [28], p.51)

Une mesure aléatoire ou un processus ponctuel est indéfiniment divisible si et seulement si les lois des vecteurs

$(\xi(B_1), \dots, \xi(B_k))$, $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}$, $k \in \mathbb{N}^*$, sont indéfiniment divisibles.

Les lois indéfiniment divisibles sur \mathbb{R} apparaissent comme lois limites de sommes, $\sum_k X_{nk}$, de variables aléatoires indépendantes uniformément asymptotiquement négligeables, c'est-à-dire vérifiant pour tout ϵ positif :

$$\lim_n \sup_k P(|X_{nk}| > \epsilon) = 0 .$$

La situation est analogue pour des lois indéfiniment divisibles sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ (resp. $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$). Ce sont des lois limites de sommes, $\sum_k \xi_{nk}$, de mesures aléatoires indépendantes (resp. processus ponctuels indépendants) vérifiant pour tout B de \mathcal{B} :

$$\lim_n \sup_k P(\xi_{nk}(B) > \epsilon) = 0 , \epsilon > 0 \left(\text{resp. } \lim_n \sup_k P(\xi_{nk}(B) > 0) = 0 \right) .$$

On sait (cf. [9], p.425 et suivantes) que la transformée de Laplace d'une loi P indéfiniment divisible sur \mathbb{R}_+ est caractérisée par

une décomposition canonique. De manière précise P est indéfiniment divisible si et seulement si il existe une mesure positive \tilde{P} sur $]0, \infty[$, finie sur $[1, \infty[$ pour laquelle la transformée de Laplace φ_P de P vérifie :

$$\psi_P(t) = -\text{Log } \varphi_P(t) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-tx}) \tilde{P}(dx) , t \in \mathbb{R}_+ .$$

Dans le cas des lois indéfiniment divisibles sur (M, \mathcal{M}) ou (M_p, \mathcal{M}_p) , on a le résultat similaire suivant :

I.19. Théorème ([20], p.34, th.6.1.)

Il existe une bijection entre, d'une part, les lois indéfiniment divisibles sur (M, \mathcal{M}) et, d'autre part, les couples (α, \tilde{P}) formés d'une mesure de Radon α et d'une mesure positive \tilde{P} sur $M^* = M \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$\int_{M^*} (1 - e^{-\mu(B)}) \tilde{P}(d\mu) < +\infty , B \in \mathcal{B} .$$

Cette bijection est définie par la relation :

$$\psi_P(f) = \int_X f d\alpha + \int_{M^*} (1 - e^{-\int f d\mu}) \tilde{P}(d\mu) , f \in C_K^+ .$$

Le cas ponctuel (P concentrée sur (M_p, \mathcal{M}_p) et indéfiniment divisible sur cet espace) est caractérisé par $\alpha = 0$ et \tilde{P} concentrée sur $M_p^* = M_p \setminus \{0\}$.

On dit que le couple (α, \tilde{P}) est la "représentation canonique" de la loi indéfiniment divisible P et que α et \tilde{P} sont les mesures canoniques associées à P . Le lemme suivant donne une interprétation intéressante de la représentation canonique :

I.20. Lemme ([20], p.40)

Soit P une probabilité sur (M, \mathcal{M}) indéfiniment divisible de

représentation canonique (α, \tilde{P}) . Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de \mathbb{M}^* formée d'ensembles mesurables de \tilde{P} -mesure finie. Supposons que pour tout n de \mathbb{N} , Z_n soit une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\tilde{P}(M_n)$ et que $\{\xi_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ soit une suite de mesures aléatoires sur X de même loi la loi conditionnelle $\tilde{P}(\cdot | M_n)$. Supposons enfin que tous ces éléments aléatoires soient indépendants. Alors P est la loi de la mesure aléatoire ξ définie par :

$$\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{Z_n} \xi_{nk} ,$$

avec la convention $\xi_{n0} = 0$ pour tout n de \mathbb{N} .

Notons qu'en calculant la fonctionnelle de Laplace de la mesure aléatoire $\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{Z_n} \xi_{nk}$, on obtient immédiatement la forme canonique du th. I.15. et le lemme est ainsi démontré.

1.6. Propriété g_ν et processus de Poisson mélangé. Distribution de Palm.

I.21. Définition

Soit ν une mesure de Radon sur X , on dit qu'une probabilité P sur (M_p, \mathcal{M}_p) a la propriété g_ν si et seulement si pour tout B de \mathcal{B} on a :

$$i) P(\mu(B) > 0) > 0 \implies \nu(B) > 0$$

$$ii) P(\mu(B) = k) > 0 \implies {}_B P(\cdot | \mu(B) = k) = Q_{\nu(\cdot | B)}^{*k} .$$

Si un processus ponctuel ξ possède une loi P qui a la propriété g_ν , alors conditionnellement à $\xi(B) = k$, $k > 0$, les k points se répartissent sur B de manière indépendante et suivent la même loi $\nu(\cdot | B)$. Remarquons que si une probabilité P a la propriété g_ν , alors elle a aussi la propriété $g_{t\nu}$ pour $0 < t < \infty$ et donc, dans le cas où ν

est finie, on supposera toujours que ν est une probabilité.

La notation P_ν sera réservée à la loi d'un processus de Poisson de mesure d'intensité ν . Rappelons qu'un processus ξ est un processus de Poisson de mesure d'intensité la mesure de Radon ν si pour tout borélien A de X , $\xi(A)$ suit la loi de Poisson de paramètre $\nu(A)$ (avec $\xi(A) = +\infty$ p.s. si $\nu(A) = +\infty$) et si les variables $\xi(A_1), \dots, \xi(A_n)$ associées à toute suite finie de boréliens A_1, \dots, A_n deux à deux disjoints de X sont indépendantes.

I.22. Définition

On dit qu'un processus ponctuel ξ de loi P est un processus de Poisson mélangé basé sur la mesure ν de M et sur la loi de probabilité σ sur $[0, \infty[$ si et seulement si la loi P vérifie :

$$P(M) = \int_0^\infty P_{\nu}(M) \sigma(d\lambda), \quad M \in \mathcal{M}_p.$$

I.23. Proposition ([28], th. 1.14.8 et prop. 1.14.11).

Soit P une probabilité sur $(\mathcal{M}_p, \mathcal{M}_p)$; une condition nécessaire et suffisante pour que P ait la propriété g_ν est que :

a) si ν est une probabilité, P vérifie :

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P(\mu(X) = k) Q_\nu^{*k},$$

on dit alors que P est la loi d'un processus d'échantillonnage mélangé,

b) si ν est infinie, il existe une probabilité σ sur $[0, \infty[$ telle que P soit la loi d'un processus de Poisson mélangé basé sur ν et σ .

Nous utiliserons dans la suite les probabilités de Palm associées

à une mesure aléatoire ou à un processus ponctuel. Aussi, compte tenu de ce que diverses définitions sont possibles, nous précisons maintenant celle que nous retenons. Nous suivons en cela Kallenberg [20] .

Soit ξ une mesure aléatoire sur X de loi P et soit θ la mesure de Campbell sur $X \times \mathcal{M}$ définie par :

$$\theta(B \times M) = \int_M \mu(B) P(d\mu) , \quad B \in \mathfrak{B} , \quad M \in \mathcal{M} .$$

Pour tout M de \mathcal{M} la mesure $\theta(\cdot \times M)$ est absolument continue par rapport à la mesure $\theta(\cdot \times M) = E\xi$. Compte tenu du fait que \mathcal{M} est un espace topologique polonais pour la convergence vague, si $E\xi$ est σ -finie, il existe alors une probabilité de transition $(x, M) \rightarrow \hat{P}^x(M)$ sur $X \times \mathcal{M}$ telle que l'on ait :

$$\theta(B \times M) = \int_B \hat{P}^x(M) E\xi(dx) , \quad B \in \mathfrak{B} , \quad M \in \mathcal{M} .$$

On pose alors :

I.24. Définition

Soit ξ une mesure aléatoire sur X de loi P et de mesure d'intensité, $E\xi$ σ -finie. On appelle probabilités de Palm associées à ξ les probabilités $\{ \hat{P}^x, x \in X \}$ sur \mathcal{M} définies par la probabilité de transition sur $X \times \mathcal{M}$ caractérisée par :

$$\int_M \mu(B) P(d\mu) = \int_B \hat{P}^x(M) E\xi(dx) , \quad B \in \mathfrak{B} , \quad M \in \mathcal{M} .$$

Il découle immédiatement de la définition ci-dessus que si f est une fonction mesurable de $X \times \mathcal{M}$ dans \mathbb{R} , intégrable par rapport à la mesure θ , on peut écrire :

$$\iint f(x, \mu) \mu(dx) P(d\mu) = \iint f(x, \mu) \hat{P}^x(d\mu) E\xi(dx) .$$

Dans le cas où ξ est un processus ponctuel, introduisant le

processus ponctuel ξ^x défini par l'identité sur $(M_p, \mathcal{M}_p, \hat{P}^x)$, on montre alors que $\xi^x - \delta_x$ est un processus ponctuel $E\xi$ -presque sûrement. La loi P^x du processus $\xi^x - \delta_x$ est définie par :

$$P^x(M) = \hat{P}^x(M + \delta_x) \quad , \quad M \in \mathcal{M}_p .$$

Il pourra être plus intéressant dans certains cas d'utiliser P^x plutôt que \hat{P}^x . Notons que dans le cas où ξ est un processus ponctuel p.s. simple (c'est-à-dire p.s. à valeurs dans M_p^s), la probabilité \hat{P}^x peut s'interpréter comme la loi conditionnelle du processus sachant $\xi\{x\} = 1$. Signalons enfin que dans le cas d'une loi de processus de Poisson, on a la propriété remarquable :

$$P_v^x = P_v \quad , \quad E\xi \text{-presque sûrement.}$$

§ 2. - DESCRIPTION DU CLUSTERING DANS (M_p, \mathcal{M}_p)

Envisageons la situation suivante : des points constituant une première génération sont distribués de manière aléatoire sur un espace, $(R, R^2$ ou R^3 par exemple) ; supposons que chacun de ces points donne naissance à d'autres points en nombre aléatoire et distribués aussi de manière aléatoire, constituant ainsi une deuxième génération. Nous venons de décrire sommairement un processus de clustering. Dans ce paragraphe 2 nous donnons à l'aide d'exemples une présentation heuristique de ce type de processus et décrivons un modèle général de clustering ainsi que certains de ses aspects intéressant la théorie des processus ponctuels.

Nous présentons tout d'abord au paragraphe 2.1. deux situations dans le domaine des applications pour lesquelles Neymann et Scott d'une part, Bartlett et Lewis d'autre part ont été conduits à proposer des modèles appelés processus de clustering. Les processus de Neymann-Scott et de Bartlett-Lewis sont en fait des cas particuliers de modèles de clustering : nous explicitons au paragraphe 2.2. les hypothèses générales du modèle de clustering. Enfin au paragraphe 2.3. nous montrons que certaines opérations aléatoires sur les mesures ponctuelles (amincissement, translation, composition et mélanges de ces opérations) peuvent être considérées comme des processus de clustering.

2.1. Les processus de Neymann-Scott et de Bartlett-Lewis

Les processus de Neymann-Scott et de Bartlett-Lewis ont en commun le fait que la distribution de la première génération est celle d'un processus de Poisson. On va voir qu'ils diffèrent par contre sur la façon dont est produite la deuxième génération.

2.1.1. Le processus de Neymann-Scott

Le processus de Neymann-Scott est l'exemple de processus de clustering le plus souvent cité. Il a été utilisé pour l'étude d'évolutions

de populations dans des cadres divers. Citons par exemple la propagation d'une colonie d'insectes sur une parcelle de terrain ([2]), l'évolution du nombre d'arbres et de leur répartition dans une forêt ([38]), l'évolution d'une épidémie sur un territoire ([31]), ...

Un cas où les hypothèses s'introduisent très simplement est celui de la modélisation de la répartition des étoiles dans l'espace. Neymann et Scott ont proposé un modèle basé sur l'idée que cette répartition résulte de la superposition de groupes d'étoiles dont la composition et la localisation dans l'espace sont aléatoires. Chaque groupe est constitué d'un nombre aléatoire d'étoiles qui se dispersent autour d'un point particulier appelé centre du groupe. De manière précise les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- 1°) Les centres des groupes sont les points d'une réalisation d'un processus de Poisson stationnaire.
- 2°) Chaque groupe est constitué d'un nombre aléatoire d'étoiles. Indépendamment de ce nombre, les étoiles se dispersent autour du centre selon une même loi et de manière indépendante.
- 3°) Tous les groupes sont constitués selon le modèle ci-dessus et indépendamment ; i.e. les variables relatives à des groupes différents sont indépendantes et de même loi. Ces variables sont de plus indépendantes du processus des centres.

Il est clair que la répartition des étoiles apparaît comme une réalisation d'un processus ponctuel et que les hypothèses ci-dessus permettent de caractériser la loi de ce processus.

Notons que ce modèle peut être enrichi de plusieurs manières : on peut par exemple faire dépendre les lois des variables relatives à un groupe de la position de son centre. Il arrive aussi qu'on associe à tout point du processus final une variable de Bernoulli pouvant s'interpréter par exemple comme la possibilité d'observer ou de ne pas observer le point. Les différents processus de clustering ainsi construits ont toujours en commun la

manière avec laquelle est constitué chaque groupe associé aux points de la première génération (cf. 2°) ci-dessus). C'est cette propriété qui caractérise les processus de Neymann-Scott.

2.1.2. Le processus de Bartlett-Lewis

Le processus de Bartlett-Lewis est un autre exemple très connu de processus de clustering. Il a d'abord été proposé par Bartlett pour l'étude de données de trafic (cf. [3]) et a ensuite été repris par Lewis sous le nom de "branching-Poisson process" pour la modélisation des phénomènes de pannes d'un ordinateur (cf. [23], [24],...). Il a aussi été utilisé par Verejones pour l'étude des suites de chocs dans les tremblements de terre (cf. [37]). C'est dans le cadre des phénomènes de pannes d'un ordinateur que nous le décrivons.

Les phénomènes de pannes auxquels nous nous intéressons sont ceux qui se produisent sur des ordinateurs importants ; ces ordinateurs ont un grand nombre de composants dont une bonne partie n'est pas utilisée fréquemment. L'état de fonctionnement de chaque composant n'est alors pas suivi en permanence car le fait que certains composants deviennent défectueux n'empêche pas l'ordinateur de fonctionner. L'ordinateur ne tombe en panne qu'au moment où il doit utiliser l'un de ces composants. Donc, lorsqu'un composant devient défectueux, il provoque une panne, appelée panne principale, à l'instant où l'ordinateur veut l'utiliser. Lors de cette panne a lieu un essai de détection du composant responsable. Si celui-ci n'est pas détecté, à la tentative suivante d'utilisation on aura une nouvelle panne appelée cette fois panne secondaire. Si à cette occasion le composant défectueux n'est toujours pas détecté, on aura plus tard une nouvelle panne secondaire et ainsi de suite... Le phénomène des pannes observées par l'utilisateur est la superposition des suites de pannes dues à chaque composant.

Dans cette situation, la connaissance du phénomène physique sous-jacent implique donc que les suites d'occurrences de pannes doivent être considérées comme des superpositions de groupes, chaque groupe

étant constitué d'une panne principale et des pannes secondaires qui lui sont associées. Les hypothèses proposées par Lewis concernant la constitution des groupes et la manière dont ils interviennent dans le temps sont les suivantes :

- 1°) Le processus des occurrences de pannes principales est un processus de Poisson stationnaire.
- 2°) Dans chaque groupe de pannes, le nombre de pannes secondaires associées à la panne principale est aléatoire et les intervalles de temps séparant deux occurrences consécutives de pannes du groupe sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi.
- 3°) Tous les groupes de pannes sont constitués de la même façon et indépendamment : les variables aléatoires relatives à des groupes différents sont indépendantes et de même loi. En outre ces variables sont indépendantes du processus des pannes principales.

Dans le cas le plus simple qui est celui où l'essai de détection du composant défectueux a toujours même probabilité de réussite et est indépendant des essais précédents, la loi du nombre de pannes secondaires d'un groupe est évidemment géométrique.

2.2. Définition du processus de clustering

Soit (X_i, \mathcal{X}_i) , $i = 1, 2$ deux espaces localement compacts à base dénombrable munis de leurs tribus boréliennes. Nous affectons l'indice i aux objets concernant l'espace X_i ; en particulier $(\mathbb{M}_i, \mathcal{M}_i)$ et $(\mathbb{M}_{pi}, \mathcal{M}_{pi})$ désignent les espaces de mesures de Radon et de mesures de Radon ponctuelles sur l'espace X_i munis de leurs tribus associées (cf. § 1.1.) .

I.25. Définition

On appelle générateur de clustering, défini sur (X_1, \mathcal{X}_1) , à valeurs dans (X_2, \mathcal{X}_2) , toute probabilité de transition π sur $(X_1 \times \mathcal{M}_{p_2})$.
Si $X_1 = X_2 = X$ on dit simplement que π est un générateur de clustering sur X .

Soit π un tel générateur et μ un élément de \mathbb{M}_{p_1} . On note :

$$\pi(\mu, \cdot) = \sum_{\{x, \mu(x) > 0\}} \pi(x, \cdot)^{* \mu(x)}$$

le produit de convolution défini au §1.4.

D'après le lemme I.16., $\pi(\mu, \cdot)$ est définie si et seulement si on a :

$$\sum_{\{x, \mu(x) > 0\}} \mu(x) \pi(x, \eta(B) > 0) < +\infty, \quad B \in \mathcal{B}_2.$$

Cette condition s'écrit sous la forme

$$\int_{X_1} \pi(x, \eta(B) > 0) \mu(dx) < +\infty, \quad B \in \mathcal{B}_2.$$

En outre, si $(K_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite de compacts croissant vers X_2 telle que tout élément de \mathcal{B}_2 soit inclus dans l'un des K_n , la condition est équivalente à :

$$\int_{X_1} \pi(x, \eta(K_n) > 0) \mu(dx) < +\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lorsqu'elle est définie, $\pi(\mu, \cdot)$ est une probabilité sur $(\mathbb{M}_{p_2}, \mathcal{M}_{p_2})$ qui coïncide, pour $\mu = \delta_x$, avec $\pi(x, \cdot)$. Nous allons montrer comment cela permet de prolonger la transition π de X_1 à un sous-ensemble de \mathbb{M}_{p_1} . Soit D_π^1 l'ensemble des éléments μ de \mathbb{M}_{p_1} pour lesquels $\pi(\mu, \cdot)$ est défini :

$$D_\pi^1 = \{ \mu \in \mathbb{M}_{p_1}, \int_{X_1} \pi(x, \eta(K_n) > 0) \mu(dx) < +\infty, n \in \mathbb{N} \}.$$

L'application $x \rightarrow \pi(x, M)$ de X_1 dans \mathbb{R} étant mesurable pour tout M de \mathcal{M}_{p_2} , il s'ensuit que l'application $\mu \rightarrow \int_{X_1} \pi(x, \eta(K_n) > 0) \mu(dx)$ de \mathbb{M}_{p_1}

dans \bar{R}_+ est mesurable et donc que D_π^1 est élément de \mathfrak{M}_{p1} .

Le lemme suivant est extrait du livre de Matthes ([28], 4.1.3) : nous en donnons une démonstration qui utilise un résultat énoncé par Kallenberg (cf. [20], lemmes 2.1. et 2.3.).

I.26. Lemme ([28], p.181)

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans X_2 . Pour tout M de \mathfrak{M}_{p2} la restriction à D_π^1 de l'application $\mu \rightarrow \pi(\mu, M)$ de \mathbb{M}_{p1} dans \mathbb{R} est mesurable lorsque D_π^1 est muni de la tribu trace de \mathfrak{M}_{p1} .

Démonstration

Nous procédons en plusieurs étapes. Nous observons tout d'abord qu'il est suffisant de démontrer la mesurabilité des applications $\mu \rightarrow \pi(\mu, M)$ pour M parcourant une sous-classe C_2 de \mathfrak{M}_{p2} . Nous montrons ensuite que ce dernier résultat est acquis si, pour tout compact K de X_1 , les applications $\mu \rightarrow \pi(\mu, M)$, $M \in C_2$ restreintes au sous-ensemble $K \cap \mathbb{M}_{p1} \cap D_\pi^1$ de \mathbb{M}_{p1} constitué des mesures de D_π^1 à support dans K , sont mesurables. Enfin nous constatons qu'une application $\mu \rightarrow \pi(\mu, M)$ définie sur $K \cap \mathbb{M}_{p1}$ peut s'écrire comme la composée d'une application qui à une mesure μ associe la famille de ses atomes et de leurs poids $(x_1, n_1; \dots; x_k, n_k)$ et de l'application qui, à une telle famille, associe le réel $(\sum_{i=1}^k \pi(x_i, \cdot)^{n_i}) (M)$; on est donc conduit à montrer la mesurabilité de ces deux applications.

Soit C_2 le sous-ensemble de \mathfrak{M}_{p2} constitué des éléments M de la forme :

$$M = \{ \eta \in \mathbb{M}_{p2}, \eta(B_1) = k_1, \dots, \eta(B_m) = k_m \},$$

pour tout m de \mathbb{N}^* , toute famille d'entiers k_1, \dots, k_m et toute suite finie de boréliens deux à deux disjoints B_1, \dots, B_m de \mathbb{R}_2 . C_2 est une algèbre engendrant \mathfrak{M}_{p2} . Supposons que les applications

$\mu \rightarrow \pi(\mu, M)$, $M \in \mathcal{C}_2$, soient mesurables. La famille \mathcal{M}'_{p2} de tous les M de \mathcal{M}_{p2} tels que les applications $\mu \rightarrow \pi(\mu, M)$ soient mesurables est stable pour la limite monotone, il s'ensuit donc que \mathcal{M}'_{p2} coïncide avec \mathcal{M}_{p2} .

Nous supposons dorénavant que M est un élément fixé de \mathcal{C}_2 , disons :

$$M = \{ \eta \in \mathbb{M}_{p2}, \eta(B_1) = k_1, \dots, \eta(B_m) = k_m \},$$

où m, k_1, \dots, k_m sont des entiers fixés et B_1, \dots, B_m des éléments de \mathcal{B}_2 fixés et deux à deux disjoints.

Pour tout compact K de X_1 , notons ${}_K \mathbb{M}_{p1}$ l'ensemble :

$${}_K \mathbb{M}_p = \{ \mu \in \mathbb{M}_{p1}, \mu(X_1 \setminus K) = 0 \},$$

et ${}_K \mu$ la mesure sur X_1 définie à partir de μ par :

$${}_K \mu(A) = \mu(A \cap K), \quad A \in \mathcal{X}_1.$$

Soit $(K_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de compacts croissant vers X_1 telle que tout élément de \mathcal{B}_1 soit inclus dans l'un des K_n . Le corollaire I.15. permet d'écrire :

$$\pi(\mu, M) = \lim_n \pi({}_K \mu, M), \quad \mu \in D_\pi^1.$$

Si l'on tient compte du fait que toute application $\mu \rightarrow \pi({}_K \mu, M)$ de D_π^1 dans $[0, 1]$ est la composée de l'application mesurable $\mu \rightarrow {}_K \mu$ à valeurs dans ${}_K \mathbb{M}_{p1} \cap D_\pi^1$ et de l'application $\mu \rightarrow \pi(\mu, M)$ de ${}_K \mathbb{M}_{p1} \cap D_\pi^1$ dans $[0, 1]$, on voit que la mesurabilité de l'application $\mu \rightarrow \pi(\mu, M)$ de D_π^1 dans $[0, 1]$ sera acquise lorsqu'on aura montré celle des applications $\mu \rightarrow \pi(\mu, M)$ de ${}_K \mathbb{M}_{p1} \cap D_\pi^1$ dans $[0, 1]$. Nous montrons ci-dessous ce résultat pour un compact K arbitraire fixé.

Rappelons qu'il existe un procédé pour indiquer les atomes de toute mesure de \mathbb{M}_{p1} de telle sorte que les applications $\mu \rightarrow x_i$ et $\mu \rightarrow \mu(x_i)$, où x_i est le i -ième atome de μ soient mesurables (cf. [20], lemmes

2.1 et 2.3). Soit μ une mesure de $K \mathbb{M}_{p1}$ possédant k atomes, c'est-à-dire telle que $\mu^*(X_1) = \mu^*(K) = k$ (cf. § 1.1.) ; nous lui associons dans $E^k = (X_1 \times \mathbb{N}^{*k})$ l'élément $(x_1, \mu(x_1); \dots; x_k, \mu(x_k))$. Nous définissons

ainsi une application, notée g , de $K \mathbb{M}_{p1} \cap D_{\pi}^1$ dans l'ensemble $E^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k = \bigcup_{k=0}^{\infty} (X_1 \times \mathbb{N}^{*k})$ (avec la convention $E^0 = \phi$) que nous munissons de la tribu \mathcal{E}^* engendrée par $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}^{\otimes k} = \bigcup_{k=0}^{\infty} (\mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))^{\otimes k}$.

Cette application est mesurable car, pour tout k ,

$g^{-1}(E^k) = \{\mu^*(X_1) = k\} \cap K \mathbb{M}_{p1} \cap D_{\pi}^1$ et d'autre part la restriction de g à $g^{-1}(E^k)$ est mesurable puisque les applications $\mu \rightarrow x_i$ et $\mu \rightarrow \mu(x_i)$ le sont.

Considérons maintenant l'application h de E^* dans $[0,1]$ qui associe à $(x_1, n_1; \dots; x_k, n_k)$:

$$\left(\begin{matrix} k \\ * \\ \pi(x_1, \cdot) \end{matrix} \begin{matrix} *n_1 \\ \\ \end{matrix} \right) (M) = \left(\begin{matrix} k \\ * \\ \pi(x_1, \cdot) \end{matrix} \begin{matrix} *n_1 \\ \\ \end{matrix} \right)_{B_1, \dots, B_m} (k_1, \dots, k_m).$$

Remarquons qu'elle est mesurable si, pour tout k , sa restriction à E^k est mesurable. Le terme de droite de l'égalité peut s'écrire en utilisant uniquement des sommes et des produits de termes de la forme :

$$\left(\pi(x_1, \cdot) \begin{matrix} *n_1 \\ \\ \end{matrix} \right)_{B_1, \dots, B_m} (t_1, \dots, t_m)$$

avec $t_j \leq k_j$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Il suffit donc de démontrer pour tout i de $\{1, 2, \dots, k\}$ la mesurabilité de l'application :

$$(x_1, n_1; \dots; x_k, n_k) \rightarrow \left(\pi(x_1, \cdot) \begin{matrix} *n_1 \\ \\ \end{matrix} \right)_{B_1, \dots, B_m} (t_1, \dots, t_m)$$

avec $t_j \leq k_j$, $j = 1, 2, \dots, m$. Ce résultat est lui-même acquis si l'on peut montrer la mesurabilité des applications :

$$(x, n) \rightarrow \left(\pi(x, \cdot) \begin{matrix} *n \\ \\ \end{matrix} \right)_{B_1, \dots, B_m} (t_1, \dots, t_m)$$

de E dans $[0,1]$. Or, constatons que pour tout y de $[0,1]$, on peut écrire :

$$\left\{ (x,n) , \pi(x, \cdot)_{B_1, \dots, B_m}^{*n} (t_1, \dots, t_m) < y \right\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ x \in \mathcal{X}_1 , (\pi(x, \cdot)_{B_1, \dots, B_m}^{*k}) (t_1, \dots, t_m) < y \right\} \times \{k\} .$$

L'application h est donc mesurable, et par suite on a le résultat annoncé. ■

Ainsi le générateur de clustering π se prolonge en une probabilité de transition sur $D_{\pi}^1 \times \mathcal{M}_{p_2}$.

I.27. Définition

Soit P_1 une probabilité sur l'espace $(M_{p_1}, \mathcal{M}_{p_1})$ et π un générateur de clustering défini sur (X_1, \mathcal{X}_1) et à valeurs dans (X_2, \mathcal{X}_2) . On dit que le couple (P_1, π) définit un processus de clustering si $\pi(\mu, \cdot)$ est P_1 -presque sûrement défini.

Donc (P_1, π) définit un processus de clustering si et seulement si $P_1(D_{\pi}^1) = 1$. Dans ce cas le générateur se prolonge en une probabilité de transition sur $M_{p_1} \times \mathcal{M}_{p_2}$. L'utilisation du terme processus de clustering dans la définition I.27. alors que n'interviennent dans cette définition que des probabilités se justifie par le fait que la donnée d'une probabilité P_1 sur $(M_{p_1}, \mathcal{M}_{p_1})$ et d'une probabilité de transition π sur $M_{p_1} \times \mathcal{M}_{p_2}$ permet toujours de construire un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et un couple d'éléments aléatoires (ξ_1, ξ_2) défini sur cet espace et à valeurs dans $(M_{p_1} \times M_{p_2}, \mathcal{M}_{p_1} \otimes \mathcal{M}_{p_2})$ tel que la loi de ξ_1 soit la probabilité P_1 et que pour P_1 -presque tout μ la loi conditionnelle de ξ_2 sachant $\xi_1 = \mu$ soit la probabilité $\pi(\mu, \cdot)$.

Nous terminons cette section en définissant la classe des processus de clustering homogènes sur \mathbb{R}^d .

Soit $X = \mathbb{R}^d$ et, pour tout x de X , l'opérateur de translation T_x

défini sur X par :

$$T_x y = y - x, \quad y \in X.$$

Pour tout élément μ de M_p , nous notons $T_x \mu$ la mesure image de μ par l'application T_x . Nous définissons ainsi un opérateur mesurable sur M_p encore noté T_x . Il est immédiat de montrer que la mesure $T_x \mu$ vérifie :

$$T_x \mu(A) = \mu(A+x), \quad A \in \mathcal{X}.$$

En particulier pour $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{x_i}$ on a $T_x \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{x_i - x}$.

Si P est une probabilité sur (M_p, \mathcal{M}_p) nous désignons par $T_x P$ la probabilité image de P par l'opérateur T_x sur M_p . La probabilité $T_x P$ vérifie alors :

$$(T_x P)_{A_1, \dots, A_n} = P_{A_1+x, \dots, A_n+x}$$

pour tout n de \mathbb{N}^* et tout choix des A_1, \dots, A_n dans \mathcal{X} .

1.28. Définition

Soit π un générateur de clustering défini sur X . On dit que π est un générateur de clustering homogène si pour tout x de X on a :

$$\pi(x, \cdot) = T_{-x} \pi(0, \cdot).$$

On dit que le générateur de clustering homogène sur π est défini par la probabilité π_0 si :

$$\pi(0, \cdot) = \pi_0(\cdot).$$

On dit enfin que le processus de clustering défini par un couple (P_1, π) est homogène lorsque π est homogène.

Le processus de Neymann-Scott tel que nous l'avons présenté dans le cadre de l'étude de la répartition des étoiles n'est autre que le

processus de clustering homogène sur \mathbb{R}^3 défini par le couple (P_1, π) où P_1 est la loi d'un processus de Poisson stationnaire et π le générateur de clustering homogène défini par la probabilité :

$$\pi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n Q_{\nu_0}^{*n}$$

où les probabilités ν_0 et $(p_n, n \in \mathbb{N}^*)$ sont respectivement la loi de la dispersion d'une étoile par rapport au centre du groupe et la loi du nombre d'étoiles d'un groupe. Remarquons que π_0 est une loi d'échantillonnage mélangé (cf. Prop. I.23) ainsi que les probabilités $\pi(x, \cdot)$ puisque :

$$\pi(x, \cdot) = T_{-x} \pi(0, \cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n Q_{T_{-x} \nu_0}^{*n}(\cdot), \quad x \in X.$$

Le processus de Bartlett-Lewis est le processus de clustering homogène associé au couple (P_1, π) dans lequel P_1 est la loi d'un processus de Poisson stationnaire et π le générateur de clustering homogène défini par la probabilité π_0 construite ci-dessous :

soit $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires réelles positives indépendantes et de même loi, et soit N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* indépendante de la suite $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$. Posons :

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

La probabilité π_0 définissant le générateur de clustering homogène π est alors la loi du processus :

$$\xi = \sum_{j=1}^N \delta_{Y_j}.$$

2.3. Amincissements, translations et compositions

Soit (X, \mathcal{X}) un espace du type habituel. Rappelons que \mathbb{M}_p^s désigne le sous-ensemble de \mathbb{M}_p constitué des mesures ponctuelles simples (cf. §1.1.)

2.3.1. Amincissements

Pour tout x de X soit $A(x)$ une variable de Bernoulli vérifiant :

$$P(A(x) = 1) = p(x) , P(A(x) = 0) = q(x) .$$

On suppose que l'application $x \rightarrow p(x)$ de X dans $[0,1]$ est mesurable et que pour toute famille finie (x_1, \dots, x_n) les variables $A(x_1), \dots, A(x_n)$ sont indépendantes. Nous définissons alors une transformation aléatoire mesurable sur M_p^S appelée opérateur d'amincissement et notée A , de la manière suivante :

$$A\left(\sum_{i \in I} \delta_{x_i}\right) = \sum_{i \in I} A(x_i) \delta_{x_i} .$$

Appliquer A à une mesure ponctuelle simple consiste donc à effacer indépendamment chaque point x_i de la famille $(x_i, i \in I)$ avec la probabilité $q(x_i)$. Si ξ est un processus ponctuel simple indépendant de la famille $\{A(x), x \in X\}$ le processus $A(\xi)$ est dit processus aminci.

Considérons la classe des générateurs de clustering π sur X vérifiant :

$$\pi(x, \{0\}) + \pi(x, \{\delta_x\}) = 1 , x \in X .$$

Puisque la loi de la transformation A sur M_p^S est définie par l'application $x \rightarrow p(x)$, il existe entre la famille des opérateurs d'amincissement A et la classe des générateurs de clustering ci-dessus une bijection donnée par :

$$(*) \quad \pi(x, \cdot) = p(x) \delta_{\delta_x} + q(x) \delta_0 .$$

Pour tout x de X $\pi(x, \cdot)$ est évidemment la loi de $A(\delta_x)$ et on peut vérifier que $\pi(\mu, \cdot)$ est la loi de $A(\mu)$ pour tout μ de M_p^S .

Remarquons que le générateur de clustering défini par (*) caractérise en fait la loi d'une transformation sur l'ensemble de toutes les mesures ponctuelles. Cette transformation considère un point x de masse n comme n points différents qui seront donc effacés indépendamment et avec la même probabilité $q(x)$.

2.3.2. Translation

Soit P_θ une probabilité de transition sur (X, \mathcal{X}) et π le générateur de clustering défini par :

$$\pi(x, \cdot) = T_{-x} Q_{P_\theta(x, \cdot)}(\cdot) .$$

Le générateur de clustering π définit la loi d'une transformation aléatoire sur M_p qui consiste à faire subir de manière indépendante à chaque atome simple x d'une mesure ponctuelle quelconque une translation aléatoire de loi $P_\theta(x, \cdot)$. Un atome multiple x de masse n est considéré comme n points différents qui sont donc traduits indépendamment et avec la même loi $P_\theta(y, \cdot)$.

Notons que, comme dans le cas de l'amincissement, si on se limite aux mesures ponctuelles simples, on peut définir facilement l'opérateur de translation aléatoire de la manière suivante : pour tout x de X soit $\theta(x)$ une variable aléatoire à valeurs dans X de loi $P_\theta(x, \cdot)$; notons aussi θ l'opérateur de translation sur M_p^S défini par :

$$\theta\left(\sum_{i \in I} \delta_{x_i}\right) = \sum_{i \in I} \delta_{x_i + \theta(x_i)} .$$

On peut alors vérifier que, pour tout x de X , $\pi(x, \cdot)$ est la loi de $\theta(\delta_x)$ et que, pour toute mesure μ de M_p^S telle que $\theta(\mu)$ soit dans M_p^S , $\pi(\mu, \cdot)$ est la loi de $\theta(\mu)$.

2.3.3. Composition

Pour tout x de X soit $(p_n(x), n \in \mathbb{N})$ une probabilité sur \mathbb{N} . On suppose que l'application $x \rightarrow p_n(x)$ de X dans $[0, 1]$ est mesurable pour tout n de \mathbb{N} . Considérons alors le générateur de clustering :

$$\pi(x, \cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \delta_{n\delta_x} , \quad x \in X .$$

Le générateur π définit la loi d'une transformation aléatoire sur M_p appelée composition. Soit μ un élément de M_p ; la composition trans-

forme indépendamment la masse unité de chaque atome simple x de μ en une masse n avec la probabilité $p_n(x)$. Tout atome multiple x , disons de masse k , est considéré comme k atomes différents dont les masses unité sont donc transformées indépendamment et avec la même loi $(p_n(x), n \in \mathbb{N})$.

Notons que l'amincissement est un cas particulier de la composition.

2.3.4. Remarque

Remarquons qu'il est possible de définir d'autres transformations à partir de celles que nous venons de présenter ; par exemple le générateur d'expression :

$$\pi(x, \cdot) = p_A(x) T_{-x} Q_{P_\theta(x, \cdot)}(\cdot) + q_A(x) \delta_0(\cdot), \quad x \in X,$$

définit la loi d'une transformation qui est la composée d'un amincissement et d'une translation. Les lois de ces dernières peuvent être déduites de l'expression du générateur de clustering π .

Notons encore que les transformations d'amincissement, de translation et de composition peuvent être définies dans un cadre plus général que celui utilisé ici : on peut définir ces transformations comme applications de l'espace \mathbb{M}_{p_1} des mesures ponctuelles sur un espace X_1 dans l'espace \mathbb{M}_{p_2} des mesures sur un autre espace X_2 . Cependant le cadre que nous avons choisi pour notre présentation est plus proche des applications.

CHAPITRE II

UNE CLASSE DE MODELES POUR LES PROCESSUS PONCTUELS : LOIS GEOMETRIQUES ET BINOMIALES NEGATIVES

L'objet de ce chapitre est de proposer et étudier une classe de modèles généralisant aux processus ponctuels les modèles géométriques et binomiaux négatifs usuels dans les situations expérimentales élémentaires.

Le premier paragraphe est consacré à la présentation des lois géométrique et binomiale négative en dimension finie. Nous y décrivons aussi le type de situations modélisées par cette classe de lois en vue de justifier la démarche utilisée au paragraphe suivant.

Le paragraphe 2. commence en effet par introduire les lois binomiales négatives pour des processus p.s. finis dans le but de modéliser une situation voisine de celle décrite au paragraphe précédent. Nous présentons ensuite le cas général des lois binomiales négatives sur (M_p, \mathcal{M}_p) et donnons leurs premières propriétés : lois marginales, structure de covariance et représentation comme lois de processus de Poisson mélangés.

Au paragraphe 3., après avoir montré que les lois binomiales négatives sur (M_p, \mathcal{M}_p) sont indéfiniment divisibles, nous donnons la représentation canonique liée à cette propriété et étudions les probabilités de Palm associées à ces lois.

Au paragraphe 4. , nous nous intéressons au cas particulier où l'espace de base X est la demi-droite \mathbb{R}_+ . Nous donnons la loi conjointe du vecteur (τ_1, \dots, τ_n) des dates des n premières occurrences pour un processus de loi binomiale négative, puis nous étudions le processus binomial négatif stationnaire et retrouvons le processus de Yule.

Pour des réels positifs $r, s, r \leq s$, nous notons $\binom{s}{r}$ la quantité :

$$\binom{s}{r} = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+1) \Gamma(s-r+1)} .$$

Plus généralement, pour $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $r = \sum_{i=1}^n r_i$, nous posons :

$$\binom{r}{r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r_1+1) \Gamma(r_2+1) \dots \Gamma(r_n+1)} .$$

\mathcal{F}_+ désigne l'espace des fonctions mesurables positives sur (X, \mathcal{X}) .

§ 1. - LOIS GEOMETRIQUES ET BINOMIALES NEGATIVES EN DIMENSION FINIE.

1.1. Lois géométriques et binomiales négatives usuelles.

1.1. Définition

Une variable aléatoire N à valeurs dans \mathbb{N} est dite de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p, 0 < p < 1$, si $P(N=k) = p q^k$, $k = 0, 1, \dots$; $q = 1-p$. Elle est dite de loi binomiale négative $\mathcal{BN}(r, p)$ de paramètres r et $p, r > 0, 0 < p < 1$, si $P(N=k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k$;

$k = 0, 1, \dots$; $q = 1-p$.

La fonction génératrice de la loi $Q(p)$ a pour expression :

$$G(s) = \frac{p}{1-qs} , s \in [0,1] ,$$

et celle de la loi $\mathcal{N}(r,p)$ s'écrit :

$$G(s) = \left(\frac{p}{1-qs} \right)^r , s \in [0,1] .$$

Rappelons que la loi géométrique $Q(p)$ peut être obtenue par exemple dans des situations de tirages de Bernoulli : considérons une urne contenant des boules de deux types, les types 0 et 1, en proportions respectives p et q , et effectuons des tirages successifs avec remise. La variable N , nombre de boules de type 1 obtenues avant d'avoir tiré une boule de type 0, est une variable de loi géométrique $Q(p)$. De même, si r est un entier positif, la variable $N^{(r)}$, nombre de boules de type 1 obtenues avant le r -ième tirage d'une boule de type 0, est une variable de loi binomiale négative $\mathcal{N}(r,p)$.

1.2. Loi géométrique en dimension finie

Considérons maintenant une urne contenant des boules de $n+1$ types ; les types $0, 1, \dots, n$, en proportions respectives p, q_1, q_2, \dots, q_n , et effectuons une suite de tirages avec remise. Soit $N_i, i = 1, 2, \dots, n$, la variable nombre de boules de type i obtenues avant le premier tirage d'une boule de type 0. Nous notons \underline{N} le vecteur (N_1, \dots, N_n) et N la variable temps d'attente du premier tirage d'une boule de type 0. On peut alors adopter la modélisation suivante :

si X_j est pour $j = 1, 2, \dots$ la variable aléatoire "type de la boule obtenue lors du j -ième tirage", on a :

$$N = \text{Inf} \{ j \geq 0, X_{j+1} = 0 \}$$

et pour $i = 1, 2, \dots, n$

$$N_i = \begin{cases} \sum_{j \leq N} 1_{\{i\}} \circ X_j & \text{si } N \geq 1 \\ 0 & \text{si } N = 0 \end{cases}$$

Il est clair que N est de loi $\mathcal{G}(p)$ et que pour $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ on a, si $k = \sum_{i=1}^n k_i$:

$$P(N_1 = k_1, \dots, N_n = k_n) = \begin{cases} P(N=0) & \text{si } k = 0 \\ P\left(\sum_{j=1}^k 1_{\{i\}} \circ X_j = k_i, i=1, \dots, n; X_{k+1} = 0\right) & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } k = 0 \\ \binom{k}{k_1 \dots k_n} p q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

La loi de \underline{N} est alors donnée par :

$$(II.1) \quad P(N_1 = k_1, \dots, N_n = k_n) = \binom{k}{k_1 \dots k_n} p q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n}$$

Remarquons que pour $k \geq 1$ la loi conditionnelle de \underline{N} sachant $N = k$ est la loi multinomiale de paramètres $k, \frac{q_1}{q}, \dots, \frac{q_n}{q}$ où $q = \sum_{i=1}^n q_i = 1 - p$

La situation que nous venons de décrire est en fait un cas particulier de la suivante : soit un système Σ à n états E_1, \dots, E_n qui, à chaque instant, se trouve indépendamment dans l'état E_i avec la probabilité p_i . Supposons d'autre part que ce système est sans vieillissement, c'est-à-dire que, indépendamment de son état, il s'éteint avec la probabilité p . La durée de vie N du système est donc de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Notons N_i le nombre de passages dans l'état E_i et \underline{N} le vecteur (N_1, \dots, N_n) . La loi de \underline{N} est donnée par :

$$P(N_1=k_1, \dots, N_n=k_n) = p q^k \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$$

$$= p \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_n^{k_n},$$

avec $k = \sum_{i=1}^n k_i$, $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ et $q_i = q p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ où $q = 1-p$.

Il est clair que la situation des tirages dans l'urne peut se ramener à celle d'un système Σ dont les états E_1, \dots, E_n sont les types de boules $1, 2, \dots, n$ et dont l'évolution s'arrête au premier tirage d'une boule de type 0.

La fonction génératrice associée à la loi définie par (II.1) a pour expression :

$$(II.2) \quad G_{N_1, \dots, N_n}(s_1, \dots, s_n) = \frac{p}{1 - \sum_{i=1}^n q_i s_i}, \quad (s_1, \dots, s_n) \in [0, 1]^n.$$

On peut, à partir de cette formule, calculer les moments d'ordre 1 et 2 du vecteur (N_1, \dots, N_n) ; on obtient :

$$E(N_i) = \frac{q_i}{p}$$

$$\text{Var}(N_i) = \frac{q_i}{p^2}$$

$$\text{Cov}(N_i, N_j) = \frac{q_i q_j}{p^2}, \quad i \neq j.$$

D'autre part, on remarque immédiatement que la fonction génératrice de toute marginale de (N_1, \dots, N_n) est du même type que (II.2). Par exemple, pour $k < n$ on a :

$$G_{N_1, \dots, N_k}(s_1, \dots, s_k) = G_{N_1, \dots, N_k, \dots, N_n}(s_1, \dots, s_k, 1, \dots, 1)$$

$$= \frac{p'}{1 - \sum_{i=1}^k q'_i s_i}$$

avec
$$p' = \frac{p}{p + \sum_{i=1}^k q_i} ; \quad q'_i = \frac{q_i}{p + \sum_{i=1}^k q_i} ; \quad i = 1, 2, \dots, k .$$

En particulier, on obtient pour les marginales unidimensionnelles :

$$G_{N_i}(s) = \frac{\frac{p}{p + q_i}}{1 - \frac{q_i}{p + q_i} s} , \quad s \in [0, 1] ,$$

et donc N_i est de loi $Q\left(\frac{p}{p + q_i}\right)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Il est alors naturel de poser :

II.2. Définition

On appelle loi géométrique de paramètres p, q_1, \dots, q_n ,
 ($0 < p < 1$, $q_i \geq 0$ $i = 1, 2, \dots, n$, $p + \sum_{i=1}^n q_i = 1$) , et on note

$Q(p; q_1, q_2, \dots, q_n)$ la loi de probabilité définie sur \mathbb{N}^n par la fonction génératrice :

$$G(s_1, \dots, s_n) = \frac{p}{1 - \sum_{i=1}^n q_i s_i} ; \quad (s_1, \dots, s_n) \in [0, 1]^n .$$

1.3. Loi binomiale négative en dimension finie

Dans le cas unidimensionnel, la loi binomiale négative apparaît comme une généralisation de la loi géométrique. L'extension dans le cas multidimensionnel est analogue.

La fonction G définie par :

$$(II.3) \quad G(s_1, \dots, s_n) = \left(\frac{p}{1 - \sum_{l=1}^n q_l s_l} \right)^r, \quad (s_1, \dots, s_n) \in [0, 1]^n,$$

est évidemment, pour r entier, la fonction génératrice de la convolution de r lois $G(p; q_1, \dots, q_n)$. Les méthodes habituelles permettent de montrer que, pour r positif quelconque, G est encore la fonction génératrice d'une probabilité sur \mathbb{N}^n .

Considérons à nouveau le système Σ à n états E_1, \dots, E_n présenté plus haut et supposons que le système n'est plus sans vieillissement, mais a une durée de vie N de loi binomiale négative $\mathcal{BN}(r, p)$. On peut alors montrer que la loi du vecteur \underline{N} a pour fonction génératrice la fonction définie par (II.3).

Dans le cas où r est entier on peut aussi donner une interprétation de la loi définie par (II.3) en utilisant le schéma d'urne présenté au début du paragraphe. La fonction G définie en (II.3) est la fonction génératrice de la loi du vecteur $(N_1^{(r)}, \dots, N_n^{(r)})$ où $N_1^{(r)}$ est le nombre de boules de type 1 obtenue avant le r -ième tirage d'une boule de type 0 .

II.3. Définition

On appelle loi binomiale négative de paramètres r, p, q_1, \dots, q_n , ($r > 0, 0 < p < 1, q_l \geq 0 \quad l = 1, 2, \dots, n, p + \sum_{l=1}^n q_l = 1$), et on note $\mathcal{BN}(r, p; q_1, \dots, q_n)$, la loi de probabilité définie sur \mathbb{N}^n par la fonction génératrice :

$$(II.4) \quad G(s_1, \dots, s_n) = \left(\frac{p}{1 - \sum_{i=1}^n q_i s_i} \right)^r, \quad (s_1, \dots, s_n) \in [0, 1]^n.$$

La fonction génératrice donnée par (II.4) permet d'obtenir les probabilités :

$$P(N_1 = k_1, \dots, N_n = k_n) = \binom{r-1+k}{r-1} \binom{k}{k_1 k_2 \dots k_n} p^r q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_n^{k_n}$$

pour $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ et $k = \sum_{i=1}^n k_i$.

On peut d'autre part remarquer que les marginales d'une loi binomiale sont aussi binomiales négatives : si (N_1, \dots, N_n) est un vecteur de loi $\mathcal{BN}(r, p; q_1, \dots, q_n)$, le vecteur (N_1, \dots, N_k) pour $0 < k < n$,

est de loi $\mathcal{BN}(r, p'; q'_1, \dots, q'_k)$ avec $p' = \frac{p}{p + \sum_{i=1}^k q_i}$ et $q'_i = \frac{q_i}{p + \sum_{i=1}^k q_i}$
 $i = 1, 2, \dots, k$.

La formule (II.4) permet d'obtenir les moments d'ordre 1 et 2 de la loi $\mathcal{BN}(r, p; q_1, \dots, q_n)$. On obtient :

$$E(N_i) = r \frac{q_i}{p}$$

$$\text{Var}(N_i) = r \frac{q_i}{p^2}$$

$$\text{Cov}(N_i, N_j) = r \frac{q_i q_j}{p^2}, \quad i \neq j.$$

§ 2. - LOIS GEOMETRIQUES ET BINOMIALES NEGATIVES POUR DES PROCESSUS PONCTUELS

2.1. Définition de la loi géométrique $Q(v)$ pour un processus ponctuel

Remplaçons l'ensemble d'états $\{E_1, \dots, E_n\}$ du système Σ présenté au paragraphe précédent par la droite $X = \mathbb{R}$ et supposons qu'à chaque instant, indépendamment, l'état est déterminé suivant la loi de probabilité ν_0 sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$. On suppose à nouveau que le système est sans vieillissement, c'est-à-dire que, indépendamment de son état, il s'éteint avec la probabilité p . On obtient par cette construction un processus ponctuel ξ sur la droite, qui peut s'écrire $\xi = \sum_{i=1}^N \delta_{\tau_i}$, où les τ_i sont des variables qui suivent indépendamment la même loi ν_0 et où on a posé $\sum_{i=1}^0 \delta_{\tau_i} = 0$, la variable N étant, elle, de loi $Q(p)$ et indépendante des variables τ_i . Ce type de processus, appelé généralement processus d'échantillonnage mélangé (cf. par exemple [20]), a évidemment presque sûrement ses trajectoires finies.

Considérons une partition de la droite : $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $A_i \in \mathcal{R}$ $i=1, 2, \dots, n$. Le vecteur $(\xi(A_1), \dots, \xi(A_n))$ donne le nombre de passages du système dans les ensembles A_1, \dots, A_n respectivement. Nous retrouvons en fait ici une situation identique à celle de l'ensemble fini d'états E_1, \dots, E_n décrite au paragraphe précédent, avec $p_i = \nu_0(A_i)$. Le vecteur $(\xi(A_1), \dots, \xi(A_n))$ est de loi géométrique $Q(p; q_1, \dots, q_n)$ avec $q_i = q p_i = q \nu_0(A_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$. En ce sens, la loi du processus ponctuel ξ généralise bien la loi géométrique définie au paragraphe précédent.

Ce qui vient d'être dit dans le cas $X = \mathbb{R}$ est évidemment encore valable dans le cas de tout espace X localement compact à base dénombrable ; nous supposons donc dans ce paragraphe et le suivant que X est un tel espace. Avec les notations déjà utilisées au chapitre I on peut écrire que la loi P du processus ξ vérifie :

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k) Q_{\nu_0}^{*k} \\
 \text{(II.5)} \quad &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi(X)=k) Q_{\nu_0}^{*k}
 \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement la mesure d'intensité $E\xi$ du processus ξ :

$$\begin{aligned}
 E\xi(A) &= \int_{\mathbb{M}_p} \mu(A) P(d\mu) \\
 &= E(N) \nu_0(A) \\
 &= \frac{q}{p} \nu_0(A) \quad , \quad A \in \mathcal{X} .
 \end{aligned}$$

Nous notons $\nu = \frac{q}{p} \nu_0$. La mesure ν suffit à décrire les paramètres p et ν_0 puisque :

$$p = \frac{1}{1 + \nu(X)} \quad \text{et} \quad \nu_0 = \frac{1}{\nu(X)} \nu ;$$

La mesure ν sera dans la suite utilisée comme seul paramètre de la loi de ξ . La relation (II.5) permet aussi d'obtenir très simplement la fonctionnelle de Laplace du processus ξ :

$$\begin{aligned}
 \varphi(f) &= \int_{\mathbb{M}_p} e^{-\int_X f(x) \mu(dx)} P(d\mu) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} p q^k \left[\int_X e^{-f(x)} \nu_0(dx) \right]^k \quad , \quad f \in \mathcal{F}_+ ,
 \end{aligned}$$

soit :

$$\text{(II.6)} \quad \varphi(f) = \left[1 + \int_X (1 - e^{-f(x)}) \nu(dx) \right]^{-1} \quad , \quad f \in \mathcal{F}_+ .$$

On constate que lorsqu'on permet à la mesure ν d'être une mesure de Radon infinie, la formule (II.6) définit aussi une fonctionnelle de

Laplace de loi de probabilité sur $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$. En effet pour que (II.6) définisse une fonctionnelle de Laplace, il suffit (prop. I.6.) que pour toute suite finie B_1, \dots, B_n de boréliens bornés deux à deux disjoints, la fonction $\varphi_{B_1, \dots, B_n}$ de $[0, \infty[^n$ dans $[0, 1[$ définie par :

$$\varphi_{B_1, \dots, B_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{B_i}\right), \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n,$$

soit la transformée de Laplace d'une loi de probabilité sur \mathbb{N}^n et que, si $(F_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite de boréliens bornés décroissant vers \emptyset , alors $\lim_n \varphi(1_{F_n}) = 1$. Ces deux propriétés sont ici vérifiées : l'écriture de $\varphi_{B_1, \dots, B_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ fait apparaître la transformée de Laplace de la loi

$$Q\left(\frac{1}{1 + \nu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right)}; \frac{\nu(B_1)}{1 + \nu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right)}, \dots, \frac{\nu(B_n)}{1 + \nu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right)}\right),$$

et d'autre part $\lim_n \nu(F_n) = 0$ implique $\lim_n \nu(F_n) = 0$ et $\lim_n \varphi(1_{F_n}) = \lim_n [1 + \nu(F_n)(1 - e^{-1})]^{-1} = 1$.

Notons qu'en fait on peut démontrer directement que si (X, \mathcal{X}, ν) est un espace mesuré, dès que ν est finie ou que X est localement compact à base dénombrable, ν étant une mesure de Radon, il existe une mesure aléatoire entière ξ sur (X, \mathcal{X}) telle que pour toute suite finie B_1, \dots, B_n d'ensembles de mesures finies deux à deux disjoints, la loi du vecteur $(\xi(B_1), \dots, \xi(B_n))$ soit la loi géométrique ci-dessus. On peut alors montrer qu'à cette mesure aléatoire correspond la transformée de Laplace (II.6). Toutefois on adopte ici :

II.4. Définition

On appelle loi géométrique de paramètre la mesure de Radon ν , et on note $Q(\nu)$, la loi de probabilité définie sur $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$ par la fonctionnelle de Laplace :

$$\varphi(f) = \left[1 + \int_X (1 - e^{-f(x)}) \nu(dx) \right]^{-1}, \quad f \in \mathcal{F}_+.$$

La proposition suivante donne les moments d'ordre 1 et 2 de la loi $Q(\nu)$:

II. 5 Proposition

Soit ξ un processus ponctuel de loi $Q(\nu)$; ξ a pour mesure d'intensité la mesure ν et pour structure de covariance :

$$\text{Cov}(\xi(A), \xi(B)) = \nu(A \cap B) + \nu(A) \cdot \nu(B) \quad , \quad A, B \in \mathcal{B} .$$

Démonstration

La formule (II.6) appliquée à $f = -1_B \text{Log } s$, $s \in]0,1]$, $B \in \mathcal{B}$, permet de montrer que $\xi(B)$ est de loi $Q\left(\frac{1}{1+\nu(B)}\right)$ et donc que $E \xi(B) = \nu(B)$.

Le résultat sur la covariance peut être obtenu à l'aide de la fonction génératrice $G_{A,B}$ dont l'expression est un cas particulier de celle que nous donnons ci-dessous pour la loi cylindrique la plus générale :

$$G_{B_1, \dots, B_n}(s_1, \dots, s_n) = \left[1 + \sum_{i=1}^n \nu(B_i)(1-s_i) - \sum_{i \neq j} \nu(B_i \cap B_j)(1-s_i)(1-s_j) + \sum_{i < j < k} \nu(B_i \cap B_j \cap B_k)(1-s_i)(1-s_j)(1-s_k) + \dots + (-1)^{n+1} \nu(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \prod_{i=1}^n (1-s_i) \right]^{-1}$$

Remarquons que cette formule, obtenue à partir de (II.6), permet de retrouver le fait que pour des B_i $i=1,2,\dots,n$, boréliens bornés deux à deux disjoints, la loi de $(\xi(B_1), \dots, \xi(B_n))$ est la loi géométrique

$$Q\left(\frac{1}{1+\nu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right)} ; \frac{\nu(B_1)}{1+\nu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right)} , \dots , \frac{\nu(B_n)}{1+\nu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right)}\right)$$

La représentation des lois géométriques comme lois de processus de Poisson mélangés que nous allons donner ci-dessous permet aussi d'obtenir les résultats énoncés dans la proposition II.5.

2.2. Représentation de la loi géométrique comme loi de processus de Poisson mélangé

Nous avons défini au ch. I § 1.6. la notion de probabilité sur $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$ ayant la propriété g_ν : il s'agit de probabilités dont le comportement local est celui de lois de processus d'échantillonnage mélangés. On a vu (prop. I.13.) qu'une loi P ayant la propriété g_ν peut être considérée, si ν est finie, comme la loi d'un processus d'échantillonnage mélangé, et si ν est infinie comme la loi d'un processus de Poisson mélangé. Dans le cas particulier de la loi $Q(\nu)$ on a le résultat suivant :

II. 6. Proposition

Pour toute mesure ν de \mathbb{M} , la loi $Q(\nu)$ a la propriété g_ν et est la loi du processus de Poisson mélangé basé sur la mesure ν et la loi exponentielle $\Gamma(1,1)$.

Démonstration

On vérifie directement que la loi $P = Q(\nu)$ possède la propriété g_ν . On sait que si ν est finie, P a par construction la propriété g_ν . Nous nous plaçons dans le cas où ν est infinie. Remarquons tout d'abord que, pour tout B de \mathcal{B} , l'implication :

$$P(\mu(B) > 0) > 0 \implies \nu(B) > 0$$

est trivialement vérifiée.

Soit B un élément de \mathcal{B} tel que $\nu(B) > 0$. La fonctionnelle de Laplace de ${}_B P$ est alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{M}_p} e^{-\int_X 1_B(x) f(x) \mu(dx)} P(d\mu) &= \left[1 + \int_X (1 - e^{-1_B(x)f(x)}) \nu(dx) \right]^{-1} \\ &= \left[1 + \int_X (1 - e^{-f(x)}) {}_B \nu(dx) \right]^{-1}, \end{aligned}$$

où la mesure ${}_B \nu$ est définie par :

$${}_B \nu(A) = \nu(A \cap B), \quad A \in \mathcal{X}.$$

Il résulte donc que ${}_B P$ est la loi d'un processus d'échantillonnage mélangé de mesure d'intensité ${}_B \nu$, autrement dit :

$${}_B P(\cdot \mid \mu(B) = k) = Q_{\nu(\cdot \mid B)}^{*k}.$$

La loi $Q(\nu)$ a donc la propriété g_ν . D'autre part si $\varphi_{t\nu}$ désigne la fonctionnelle de Laplace de la loi $P_{t\nu}$, on peut écrire pour tout f de \mathfrak{F}_+ :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi_{t\nu}(f) e^{-t} dt &= \int_0^\infty e^{-\int_X (1-e^{-f(x)}) t \nu(dx)} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t \left[1 + \int_X (1-e^{-f(x)}) \nu(dx) \right]} dt \\ &= \left[1 + \int_X (1-e^{-f(x)}) \nu(dx) \right]^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui fournit la représentation annoncée.

2.3. Lois binomiales négatives $\mathfrak{BN}(\nu, r)$

Comme en dimension finie, dans le cas des processus ponctuels, la définition de la loi binomiale négative découle naturellement de celle de la loi géométrique :

II. 7. Définition

On appelle loi binomiale négative de paramètre la mesure de Radon ν et le réel positif r , et on note $\mathfrak{BN}(\nu, r)$, la loi de probabilité définie sur $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$ par la fonctionnelle de Laplace :

$$(II.7.) \quad \varphi(f) = \left[1 + \int_X (1-e^{-f(x)}) \nu(dx) \right]^{-r}, \quad f \in \mathfrak{F}_+.$$

La loi $Q(\nu)$ est donc la loi $\mathfrak{B}\mathcal{N}(\nu, 1)$, et il est clair que si r est entier, on peut toujours considérer la loi $\mathfrak{B}\mathcal{N}(\nu, r)$ comme la convolution de r lois $Q(\nu)$.

La fonction génératrice G_{B_1, \dots, B_n} associée à la probabilité P_{B_1, \dots, B_n} pour des boréliens bornés B_1, \dots, B_n peut être obtenue à partir de (II.7) :

$$G_{B_1, \dots, B_n}(s_1, \dots, s_n) = \left[1 + \sum_{i=1}^n \nu(B_i)(1-s_i) - \sum_{i \neq j} \nu(B_i \cap B_j)(1-s_i)(1-s_j) + \sum_{i < j < k} \nu(B_i \cap B_j \cap B_k)(1-s_i)(1-s_j)(1-s_k) + \dots + (-1)^{n+1} \nu(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \prod_{i=1}^n (1-s_i) \right]^{-r},$$

pour $(s_1, \dots, s_n) \in [0, 1]^n$.

Si les B_i $i = 1, 2, \dots, n$ sont deux à deux disjoints, on constate alors que P_{B_1, \dots, B_n} est la loi $\mathfrak{B}\mathcal{N}\left(r; \frac{1}{1+\nu(B)}; \frac{\nu(B_1)}{1+\nu(B)}, \dots, \frac{\nu(B_n)}{1+\nu(B)}\right)$ où $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$.

En particulier, pour tout B de \mathfrak{B} , P_B est la loi $\mathfrak{B}\mathcal{N}\left(r, \frac{1}{1+\nu(B)}\right)$.

Comme la loi $Q(\nu)$, la loi $\mathfrak{B}\mathcal{N}(\nu, r)$ a la propriété g_ν et on peut énoncer :

II. 8. Proposition

Pour tout ν de \mathbb{M} , la loi $\mathfrak{B}\mathcal{N}(\nu, r)$ a la propriété g_ν et est la loi du processus de Poisson mélangé basé sur la mesure ν et la loi $\Gamma(r, 1)$.

La démonstration est similaire à celle de la proposition II.6. Remarquons que pour α et β réels positifs, la loi d'un processus de Poisson mélangé basé sur la mesure ν et la loi $\Gamma(\alpha, \beta)$ est une loi binomiale négative : la loi $\mathfrak{B}\mathcal{N}\left(\frac{1}{\beta} \cdot \nu, \alpha\right)$.

La représentation de la loi $\mathfrak{BN}(\nu, r)$ comme loi de processus de Poisson mélangé permet de démontrer simplement la proposition suivante :

II. 9. Proposition

Soit ξ un processus ponctuel de loi $\mathfrak{BN}(\nu, r)$; ξ a pour mesure d'intensité la mesure $r \cdot \nu$ et pour structure de covariance :

$$\text{Cov}(\xi(A), \xi(B)) = r[\nu(A \cap B) + \nu(A)\nu(B)] \quad , \quad A, B \in \mathfrak{B} .$$

En effet, si ξ est un processus ponctuel de loi $P = \int_0^\infty P_{\ell\nu} \sigma(d\ell)$, on peut écrire :

$$E\xi(A) = E(\sigma) \cdot \nu(A) \quad , \quad A \in \mathfrak{B}$$

et
$$\text{Cov}(\xi(A), \xi(B)) = E(\sigma) \nu(A \cap B) + \text{Var}(\sigma) \nu(A)\nu(B) \quad , \quad A, B \in \mathfrak{B} ,$$

où
$$E(\sigma) = \int_0^\infty \ell \sigma(d\ell) \quad \text{et} \quad \text{Var}(\sigma) = \int_0^\infty \ell^2 \sigma(d\ell) - E(\sigma)^2 .$$

La proposition en découle alors immédiatement.

Remarquons que l'expression de la covariance montre qu'un processus de loi binomiale négative n'est jamais à accroissements indépendants. Notons aussi qu'un processus ξ de loi $\mathfrak{BN}(\nu, r)$ est p.s. simple si et seulement si la mesure ν est diffuse. En effet, cette propriété est vraie pour tout processus de Poisson de loi P_ν (cf. [28] prop. 1.7.6.), et d'autre part l'égalité

$$P(\mathbb{M}_p^S) = \int_0^\infty P_{\ell\nu}(\mathbb{M}_p^S) \sigma(d\ell)$$

montre que $P(\mathbb{M}_p^S) = 1$ si et seulement si $P_\nu(\mathbb{M}_p^S) = 1$.

§ 3. INFINIE DIVISIBILITE . PROBABILITES DE PALM

Puisque la loi $G(\nu)$ n'est autre que la loi $\mathfrak{B}\mathcal{N}(\nu, 1)$, on ne s'intéresse plus qu'à la loi $\mathfrak{B}\mathcal{N}(\nu, r)$, les résultats concernant $\mathfrak{B}\mathcal{N}(\nu, r)$ étant a fortiori vrais pour $G(\nu)$.

3.1. Représentation canonique des lois $\mathfrak{B}\mathcal{N}(\nu, r)$ comme lois indéfiniment divisibles

Nous avons vu au ch. I § 1.6. qu'à toute probabilité P indéfiniment divisible sur M_p , on peut associer une mesure \tilde{P} sur $M_p^* = M_p \setminus \{0\}$ vérifiant $\int_{M^*} (1 - e^{-\mu(B)}) \tilde{P}(d\mu) < +\infty$, $B \in \mathfrak{B}$, et telle que la fonctionnelle de Laplace φ_P associée à P satisfasse à :

$$\varphi_P(f) = \exp \left[- \int_{M^*} (1 - e^{-\int f d\mu}) \tilde{P}(d\mu) \right], \quad f \in C_K^+$$

Dans le cas binomial négatif, on peut énoncer :

II. 10. Proposition

La loi $\mathfrak{B}\mathcal{N}(\nu, r)$ est une loi indéfiniment divisible sur (M_p, \mathfrak{M}_p) et la mesure canonique qui lui est associée est donnée par :

$$\tilde{P} = \int_0^\infty P_{t\nu} \cdot r \frac{e^{-t}}{t} dt .$$

Démonstration

Si P est la loi $\mathfrak{B}\mathcal{N}(\nu, r)$, et B_1, \dots, B_n une suite quelconque de boréliens bornés de X , on constate immédiatement que la distribution P_{B_1, \dots, B_n} est indéfiniment divisible sur \mathbb{N}^n . Cela suffit à affirmer que la loi $\mathfrak{B}\mathcal{N}(\nu, r)$ est indéfiniment divisible (cf. lemme I.18.). On peut aussi voir de manière plus directe que, pour tout n , on peut écrire $P = (P_n)^{*n}$

où P_n est la loi $\mathfrak{N}(\nu, \frac{r}{n})$.

Rappelons d'autre part ([28] prop. 2.4.7) que, pour une loi de processus de Poisson mélangé indéfiniment divisible $P = \int_0^\infty P_{t\nu} \sigma(dt)$, la mesure canonique \tilde{P} associée à P est donnée par $\tilde{P} = \int_0^\infty P_{t\nu} \tilde{\sigma}(dt)$, où $\tilde{\sigma}$ est la mesure canonique habituelle associée à la loi indéfiniment divisible σ sur $[0, \infty[$, c'est-à-dire la mesure unique sur $]0, \infty[$ vérifiant $\tilde{\sigma}([1, +\infty[) < +\infty$ et $\int_0^\infty e^{-tx} \sigma(dx) = \exp \left\{ - \int_0^\infty (1 - e^{-tx}) \tilde{\sigma}(dx) \right\}$ (cf. par exemple [9] p.425 et suivantes). Compte tenu du fait que si σ est la loi $\Gamma(r, 1)$ alors $\tilde{\sigma}$ est donnée par $\tilde{\sigma}(dt) = r \frac{e^{-t}}{t} dt$, on obtient le résultat annoncé dans la proposition.

3.2. Probabilités de Palm associées aux lois $\mathfrak{N}(\nu, r)$

Nous désignons ici du même nom de probabilités de Palm aussi bien les probabilités \hat{P}^x que les P^x (cf. def. I.24.). Rappelons que \hat{P}^x et P^x sont liées par la relation :

$$P^x(M) = \hat{P}^x(M + \delta_x) \quad , \quad M \in \mathcal{M}_p .$$

La famille des lois $\mathfrak{N}(\nu, r)$ jouit de l'intéressante propriété de stabilité énoncée ci-dessous :

II. 11. Proposition

Si ξ est un processus ponctuel de loi $\mathfrak{N}(\nu, r)$, alors les probabilités de Palm associées P^x ne dépendent pas de x ν -presque sûrement et P^x est la loi $\mathfrak{N}(\nu, r+1)$.

Cette proposition est un corollaire immédiat du résultat suivant démontré dans [20] par une méthode de fonctionnelles de Laplace et dont nous donnons ici une autre démonstration :

II.12. Lemme

Si ξ est un processus de Poisson mélangé de loi $P = \int_0^\infty P_{\iota\nu} \sigma(d\iota)$, alors les probabilités de Palm associées P^x ne dépendent pas de x ν -presque sûrement et sont données par :

$$P^x = \int_0^\infty P_{\iota\nu} \frac{1}{E(\sigma)} \iota \sigma(d\iota) , \quad x \in X .$$

Démonstration

Si $P = \int_0^\infty P_{\iota\nu} \sigma(d\iota)$ où σ est une probabilité sur $[0, \infty[$, on peut écrire pour tout B de \mathfrak{B} et tout M de \mathfrak{M}_p :

$$\begin{aligned} \int_B P^x(M) E(\sigma) \nu(dx) &= \int_B \hat{P}^x(M+\delta_x) E(\sigma) \nu(dx) = \\ \iint 1_B(x) 1_{M+\delta_x}(\mu) \hat{P}^x(d\mu) E(\sigma) \nu(dx) &= \iint 1_B(x) 1_{M+\delta_x}(\mu) \mu(dx) P(d\mu) = \\ \iiint 1_B(x) 1_{M+\delta_x}(\mu) \mu(dx) P_{\iota\nu}(d\mu) \sigma(d\iota) &= \iiint 1_B(x) 1_{M+\delta_x}(\mu) \hat{P}_{\iota\nu}^x(d\mu) \iota \nu(dx) \sigma(d\iota) = \\ \iint 1_B(x) \hat{P}_{\iota\nu}^x(M+\delta_x) \iota \nu(dx) \sigma(d\iota) &= \iint 1_B(x) P_{\iota\nu}^x(M) \iota \nu(dx) \sigma(d\iota) . \end{aligned}$$

Pour un processus de Poisson de mesure d'intensité ν rappelons que $P_\nu^x(M) = P_\nu(M)$, $M \in \mathfrak{M}_p$, pour ν -presque tout x . Il s'ensuit que la dernière intégrale est égale à :

$$\iint 1_B(x) P_{\iota\nu}(M) \iota \nu(dx) \sigma(d\iota) = \int \iota \nu(B) P_{\iota\nu}(M) \sigma(d\iota) ,$$

et donc
$$\int_B P^x(M) \nu(dx) = \nu(B) \int_0^\infty P_{\iota\nu}(M) \frac{1}{E(\sigma)} \iota \sigma(d\iota) .$$

Par suite $P^x(M)$ ne dépend pas de x ν -presque sûrement. On peut alors prendre comme version :

$$P^x(\cdot) = \int_0^\infty P_{\iota\nu}(\cdot) \frac{1}{E(\sigma)} \iota \sigma(d\iota) , \quad x \in X .$$

§ 4. - CAS PARTICULIERS DE PROCESSUS SUR \mathbb{R}_+

4.1. Lois des variables de temps inter-occurrences pour un processus de loi $\mathcal{B}\mathcal{N}(\nu, r)$

Les processus ponctuels que nous considérons dans ce paragraphe sont définis sur $X = \mathbb{R}_+$. On suppose de plus que la mesure ν sur \mathbb{R}_+ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et on note :

$$F_\nu(x) = \nu([0, x[) \quad , \quad f_\nu(x) = \frac{dF_\nu(x)}{dx} \quad , \quad x \in [0, \infty[.$$

On note aussi :

$$F_{\nu_t}(x) = \frac{\nu([0, x[)}{\nu([0, t[)} \quad , \quad f_{\nu_t}(x) = \frac{dF_{\nu_t}(x)}{dx} = \frac{1}{\nu([0, t[)} f_\nu(x) \quad , \quad x \in [0, t[$$

Les variables $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_k \leq \dots$ désignent les dates d'occurrences de points du processus. On note $f_{\tau_1, \dots, \tau_k}$ la densité de la loi conjointe

de (τ_1, \dots, τ_k) et pour $k \leq n$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k < t$,

$f_{\tau_1, \dots, \tau_k}(n, t; t_1, \dots, t_k)$ la densité au point (t_1, \dots, t_k) de la loi conditionnelle à $\xi([0, t[) = n$.

Les variables U_i , $i \geq 1$, désignent les intervalles inter-occurrences

$U_1 = \tau_1$, $U_2 = \tau_2 - \tau_1, \dots, U_i = \tau_i - \tau_{i-1}, \dots$. On note g_{U_1, \dots, U_k} la densité de la loi conjointe du vecteur (U_1, \dots, U_k) .

II. 13. Proposition

Soit un processus de loi $\mathcal{B}\mathcal{N}(\nu, r)$, la mesure ν étant absolument continue. Pour tout $k \geq 1$, les densités respectives des lois de (τ_1, \dots, τ_k) et de (U_1, \dots, U_k) sont données par :

$$(II.8) \quad f_{\tau_1, \dots, \tau_k}(t_1, \dots, t_k) = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)} f_{\nu}(t_1) \dots f_{\nu}(t_k) \left(\frac{1}{1+\nu([0, t_k])} \right)^{k+r}, \quad 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k,$$

$$(II.9) \quad g_{U_1, \dots, U_k}(u_1, \dots, u_k) = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)} f_{\nu}(u_1) f_{\nu}(u_1+u_2) \dots$$

$$\dots f_{\nu} \left(\sum_{i=1}^k u_i \right) \left(\frac{1}{1+\nu([0, \sum_{i=1}^k u_i])} \right)^{k+r}, \quad (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}_+^k.$$

Pour démontrer cette proposition, nous utilisons le résultat de théorie d'échantillonnage suivant :

II.14. Proposition ([40], 8.7.3 a)

Soit T_1, T_2, \dots, T_n un échantillon de n variables aléatoires positives indépendantes. La loi commune de ces variables est supposée absolument continue et on note F et f respectivement la fonction de répartition et la densité associées à cette loi. La statistique ordonnée associée à (T_1, \dots, T_n) est notée (τ_1, \dots, τ_n) . Pour $k \leq n$ et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ la densité de la loi de (τ_1, \dots, τ_k) au point (t_1, \dots, t_k) est donnée par :

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-k+1)} [1-F(t_k)]^{n-k} f(t_1) \dots f(t_k)$$

Démonstration de la proposition II.13.

Pour un processus de Poisson de loi P_{ν} , et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k < t$ la proposition II.14. permet d'écrire :

$$f_{\tau_1, \dots, \tau_k}(n, t; t_1, \dots, t_k) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)} [1-F_{\nu_t}(t_k)]^{n-k} f_{\nu_t}(t_1) \dots f_{\nu_t}(t_k)$$

et

$$f_{\tau_1, \dots, \tau_k}(t_1, \dots, t_k) = \sum_{n \geq k} f_{\tau_1, \dots, \tau_k}(n, t; t_1, \dots, t_k) P(\xi([0, t]) = n)$$

$$= \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} \left[1 - F_{\nu_t}(t_k) \right]^{n-k} f_{\nu_t}(t_1) \dots f_{\nu_t}(t_k) e^{-\nu([0, t])} \frac{(\nu([0, t])^n}{n!}.$$

Après simplifications on obtient :

$$(II.10) \quad f_{\tau_1, \dots, \tau_k}(t_1, \dots, t_k) = f_{\nu}(t_1) \dots f_{\nu}(t_k) e^{-\nu([0, t_k])}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k.$$

On en déduit l'expression de g_{U_1, \dots, U_k} au point $(u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}_+^k$:

$$(II.11) \quad g_{U_1, \dots, U_k}(u_1, \dots, u_k) = f_{\nu}(u_1) f_{\nu}(u_1 + u_2) \dots f_{\nu}\left(\sum_{i=1}^k u_i\right) e^{-\nu([0, \sum_{i=1}^k u_i])}$$

Pour un processus de Poisson mélangé de loi $P^0 = \int_0^{\infty} P_{\ell\nu} \sigma(d\ell)$ et $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ on a alors :

$$(II.10) \quad f_{\tau_1, \dots, \tau_k}^0(t_1, \dots, t_k) = \int_0^{\infty} f_{\ell\nu}(t_1) \dots f_{\ell\nu}(t_k) e^{-\ell\nu([0, t_k])} \sigma(d\ell)$$

$$= f_{\nu}(t_1) \dots f_{\nu}(t_k) \int_0^{\infty} \ell^k e^{-\ell\nu([0, t_k])} \sigma(d\ell),$$

et par suite pour $(u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}_+^k$:

$$(II.11) \quad g_{U_1, \dots, U_k}^0(u_1, \dots, u_k) = f_{\nu}(u_1) f_{\nu}(u_1 + u_2) \dots f_{\nu}\left(\sum_{i=1}^k u_i\right) \int_0^{\infty} \ell^k e^{-\ell\nu([0, \sum_{i=1}^k u_i])} \sigma(d\ell)$$

Il suffit enfin de prendre comme loi σ la loi $\Gamma(r, 1)$ pour obtenir les expressions annoncées dans le cas des lois $\mathcal{BN}(\nu, r)$.

4.2. Processus binomial négatif stationnaire

Soit ξ un processus ponctuel sur \mathbb{R}_+ de loi $\mathcal{BN}(\nu, r)$ avec

$\nu = a m$, $a \in \mathbb{R}_+$ et m la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ . On voit immédiatement que ce processus est stationnaire au sens où pour toute suite finie B_1, \dots, B_n de boréliens bornés de \mathbb{R}_+ , la loi du vecteur $(\xi(B_1+h), \dots, \xi(B_n+h))$ ne dépend pas de h , $h > 0$.

Puisque ξ peut être considéré comme un processus de Poisson mélangé avec comme loi σ la loi $\Gamma(r,1)$ (prop. II.6.), on sait (cf. [], ch.6, §4.) que $\frac{\xi([0,t[)}{t}$ tend, lorsque t tend vers l'infini, vers une variable aléatoire de loi $\Gamma(r,1)$, et donc la loi $\mathcal{M}(\nu, r)$ n'est, bien sûr, ni mélangeante ni ergodique. On peut donner de manière plus précise le comportement asymptotique de la covariance. On a :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \text{Cov}(\xi(A), \xi(B+h)) = r a^2 m(A) m(B), \quad A, B \in \mathcal{B}$$

où, en fait, la limite est atteinte dès que $A \cap (B+h) = \emptyset$ (cf. prop. II.9.). Remarquons que le coefficient de corrélation ne fait pas intervenir r ; pour h suffisamment grand, on peut montrer :

$$\rho(\xi(B), \xi(B+h)) = \frac{a m(B)}{1 + a m(B)}, \quad B \in \mathcal{B}$$

Déterminons les lois des intervalles inter-occurrences à partir des formules (II.8) et (II.9). On a ici pour tout $t \geq 0$, $F_\nu(t) = at$, $f_\nu(t) = a$ et donc on peut écrire :

$$f_{T_1, \dots, T_k}(t_1, \dots, t_k) = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)} a^k \left(\frac{1}{1 + a t_k} \right)^{k+r}, \quad 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$$

et

$$g_{U_1, \dots, U_k}(u_1, \dots, u_k) = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)} a^k \left(\frac{1}{1 + a \sum_{l=1}^k u_l} \right)^{k+r}, \quad (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}_+^k$$

Il s'ensuit que les U_l sont des variables identiquement distribuées et de loi définie par la densité :

$$g_U(u) = ra \left(\frac{1}{1+au} \right)^{r+1}, \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

Remarquons qu'il s'agit à une homothétie près d'une loi $\beta(1,r)$ et que le processus binomial négatif stationnaire présente la particularité d'avoir presque sûrement une infinité de points et cependant une espérance d'intervalles inter-occurrences infinie.

Notons enfin que le résultat obtenu au paragraphe 3. sur les probabilités de Palm s'interprète ici de la manière suivante : sachant qu'une occurrence a lieu en x , la loi conditionnelle du processus est la loi $\mathcal{B}\mathcal{N}(\nu, r+1)$ et donc les lois d'intervalles inter-occurrences ont

pour densité $g_U(u) = (r+1) a \left(\frac{1}{1+au} \right)^{r+2}, \quad u \in \mathbb{R}_+.$

4.3. Le processus de Yule

Considérons maintenant le cas d'un processus ξ de loi $\mathcal{B}\mathcal{N}(\nu, r)$ avec ν la mesure sur \mathbb{R}_+ définie par $\nu([0, t[) = e^{\lambda t} - 1, t > 0, \lambda$ étant un paramètre réel positif.

La définition de la mesure ν permet d'écrire pour tout $t > 0$, $F_\nu(t) = e^{\lambda t} - 1, f_\nu(t) = \lambda e^{\lambda t}$, et les formules (II.8) et (II.9) donnent :

$$f_{\tau_1, \dots, \tau_k}(t_1, \dots, t_k) = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)} \lambda^k e^{\lambda \sum_{i=1}^k t_i} e^{-\lambda(k+r)t_k}, \quad 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k,$$

et

$$g_{U_1, \dots, U_k}(u_1, \dots, u_k) = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)} \lambda^k \exp\{-\lambda(r u_1 + (r+1)u_2 + \dots + (r+k-1)u_k)\}$$

pour $(u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}_+^k$.

De cette dernière expression, on déduit que les variables de temps inter-occurrences U_i sont indépendantes et de lois respectives $\Gamma(1, r+i-1)$. C'est dire, en particulier, que le processus de loi $\mathcal{Q}(\nu)$

n'est autre que le processus de naissance de Yule (cf. par exemple Bartlett [4]).

Remarquons que pour le processus de Yule le résultat obtenu au paragraphe 3. sur les probabilités de Palm s'interprète de la manière suivante : si on sait qu'une naissance a lieu à la date x , la loi du processus $\xi^x - \delta_x$ (avec les notations du ch.I, fin du § 1.6.) est la même que celle d'un processus de Yule où la première naissance aurait lieu à l'instant 0 .

CHAPITRE III

ETUDE DU CLUSTERING

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier les problèmes d'existence et certaines propriétés des processus de clustering.

Le premier paragraphe, à l'exception de l'étude des moments d'ordre deux, expose, dans le cadre ponctuel, des résultats classiques obtenus, pour une grande part, par l'école de Matthes et al. (cf. [28]). Nous donnons d'abord, dans le cas général, des critères d'existence et calculons les moments d'ordre un et deux de la loi secondaire. Puis nous nous intéressons aux problèmes d'existence dans le cas où la loi primaire est stationnaire et le générateur de clustering homogène.

Au paragraphe 2., nous étendons le cadre des problèmes de clustering aux espaces $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ de mesures de Radon positives quelconques. Pour ce faire, nous utilisons une méthode de fonctionnelles logarithmiques, reprenant là une idée que Jirina (cf. [18], [19]) avait employée dans le cadre des mesures finies et de lois indéfiniment divisibles. Les problèmes étudiés sont les analogues de ceux du paragraphe 1. : critères d'existence, formules de moments et propriétés de la loi secondaire.

Le paragraphe 3. présente certaines conséquences, dans le cadre ponctuel de l'approche utilisée dans le second paragraphe. Nous donnons

en termes de fonctionnelles logarithmiques de nouveaux critères d'existence des processus de clustering et montrons que l'utilisation des fonctionnelles logarithmiques permet d'obtenir simplement certains résultats classiques.

Le paragraphe 4. est consacré à l'exposé de deux situations modélisées par des processus de clustering. Dans la première nous utilisons un processus de clustering sur (M_p, \mathcal{M}_p) faisant appel aux lois géométrique et binomiale négative étudiées au chapitre II. La seconde est l'occasion de présenter un processus de clustering sur (M, \mathcal{M}) .

Tout au long du chapitre, les problèmes sont abordés en termes de probabilités sans faire référence aux mesures aléatoires ou aux processus ponctuels qui pourraient être sous-jacents. Les quantités qui, jusque là étaient attachées aux mesures aléatoires sont donc ici associées aux probabilités. Ainsi, par exemple, nous appelons mesure d'intensité d'une probabilité P sur (M, \mathcal{M}) , la mesure ν sur (X, \mathcal{X}) définie par :

$$\nu(A) = \int_M \eta(A) P(d\eta) \quad , \quad A \in \mathcal{X} .$$

D'autre part, la mesure $\nu^{(2)}$ sur (X^2, \mathcal{X}^2) associée à la probabilité P sur (M, \mathcal{M}) est définie par :

$$\nu^{(2)}(A_1 \times A_2) = \int_{M^2} \eta_1(A_1) \eta_2(A_2) P(d\eta_1) P(d\eta_2) \quad A_1, A_2 \in \mathcal{X} .$$

Lorsque $\nu^{(2)}$ est de Radon sur X^2 , la probabilité P est dite d'ordre 2. Enfin, lorsque P est d'ordre 2, nous notons Λ la mesure de covariance qui peut être définie sur l'anneau des boréliens bornés de X^2 à partir de :

$$\Lambda(A \times B) = \nu^{(2)}(A \times B) - \nu(A) \cdot \nu(B) \quad , \quad A, B \in \mathcal{B} .$$

Lorsque le prolongement est possible, nous considérons Λ comme une mesure sur (X^2, \mathcal{X}^2) .

§1. - ETUDE DU CLUSTERING DANS $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$

1.1. Cas général

On considère ici deux espaces du type habituel $(X_1, \mathcal{X}_1), (X_2, \mathcal{X}_2)$, $(\mathbb{M}_{p1}, \mathcal{M}_{p1})$ et $(\mathbb{M}_{p2}, \mathcal{M}_{p2})$ sont les espaces de mesures ponctuelles associés et π est un générateur de clustering défini sur (X_1, \mathcal{X}_1) à valeurs dans (X_2, \mathcal{X}_2) .

Soit P_1 une probabilité sur $(\mathbb{M}_{p1}, \mathcal{M}_{p1})$. Rappelons que, si la condition $P_1(D_\pi^1) = 1$ est vérifiée, le générateur de clustering π peut être prolongé en une probabilité de transition sur $D_\pi^1 \times \mathcal{M}_{p2}$ et qu'on dit alors que le couple (P_1, π) définit un processus de clustering. On pose :

III.1. Définition

On appelle loi secondaire associée au processus de clustering défini par le couple (P_1, π) la probabilité P_2 définie sur $(\mathbb{M}_{p2}, \mathcal{M}_{p2})$ par :

$$(III.1) \quad P_2(M) = \int_{\mathbb{M}_{p1}} \pi(\mu, M) P_1(d\mu) \quad , \quad M \in \mathcal{M}_{p2} .$$

La probabilité P_1 est dite loi primaire.

Pour $i = 1, 2$, $\nu_i, \nu_i^{(2)}, \Lambda_i$ désignent respectivement la mesure d'intensité, le moment d'ordre deux et la mesure de covariance de P_i .

Il découle de (III.1) que ν_2 vérifie :

$$\nu_2(B) = \int_{\mathbb{M}_{p1}} \nu_\mu(B) P_1(d\mu) \quad , \quad B \in \mathcal{B}_2 .$$

D'autre part, d'après la définition de $\pi(\mu, \cdot)$, on a :

$$\nu_{\mu}(B) = \int_{X_1} \nu_x(B) \mu(dx) \quad , \quad B \in \mathfrak{B}_2 \quad , \quad P_1\text{-p.s.}$$

Il s'ensuit que la mesure d'intensité de P_2 a pour expression :

$$(III.2) \quad \nu_2(B) = \int_{X_1} \nu_x(B) \nu_1(dx) \quad , \quad B \in \mathfrak{B}_2 \quad .$$

III.2. Proposition

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans X_2 et P_1 une probabilité sur $(\mathbb{M}_{p_1}, \mathcal{M}_{p_1})$ tels que :

$$\int_{X_1} \nu_x(B) \nu_1(dx) < +\infty \quad , \quad B \in \mathfrak{B}_2 \quad .$$

Le couple (P_1, π) définit un processus de clustering et de plus la loi P_2 est du 1^{er} ordre.

Ce critère d'existence découle très simplement de la proposition suivante :

III.3. Proposition

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans X_2 et P_1 une probabilité sur $(\mathbb{M}_{p_1}, \mathcal{M}_{p_1})$ tels que :

$$\int_{X_1} \pi(x, \eta(B) > 0) \nu_1(dx) < +\infty \quad , \quad B \in \mathfrak{B}_2 \quad .$$

Le couple (P_1, π) définit alors un processus de clustering.

Démonstration

La condition énoncée peut s'écrire :

$$\int_{\mathbb{M}_{p1}} \int_{X_1} \pi(x, \eta(B) > 0) \mu(dx) P_1(d\mu) < +\infty, \quad B \in \mathfrak{B}_2,$$

et donc on a :

$$\int_{X_1} \pi(x, \eta(B) > 0) \mu(dx) < +\infty \quad P_1\text{-p.s.}, \quad B \in \mathfrak{B}_2,$$

i.e :

$$P_1(D_{\pi}^1) = 1.$$

Démonstration de la proposition III.2

Pour tout B de \mathfrak{B}_2 , l'application définie sur \mathbb{M}_{p2} par $\eta \rightarrow \eta(B)$ est à valeurs entières, il s'ensuit :

$$\nu_x(B) = \int \eta(B) \pi(x, d\eta) \geq \pi(x, \eta(B) > 0), \quad B \in \mathfrak{B}_2,$$

d'où :

$$\int \pi(x, \eta(B) > 0) \nu_1(dx) \leq \int \nu_x(B) \nu_1(dx), \quad B \in \mathfrak{B}_2.$$

L'utilisation de la proposition III.3 assure alors l'existence du processus de clustering et le fait que P_2 soit du 1^{er} ordre résulte de la formule (III.2).

On se propose maintenant d'étudier les caractéristiques du 2^{ème} ordre de la loi secondaire. On commence par deux lemmes :

III.4. Lemme

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans

X_2 , μ un élément de M_{p1} tel que $\pi(\mu, \cdot)$ soit définie. La mesure $\nu_\mu^{(2)}$ vérifie l'égalité :

$$(III.3) \quad \nu_\mu^{(2)}(A \times B) = \int_{X_1} \nu_x^{(2)}(A \times B) \mu(dx) + \nu_\mu(A) \nu_\mu(B) - \int_{X_1} \nu_x(A) \nu_x(B) \mu(dx),$$

$A, B \in \mathfrak{B}_2$.

Démonstration

Soit P une probabilité sur M_p , ν et $\nu^{(2)}$ ses deux premiers moments, A et B deux éléments de \mathfrak{B} et n un entier. Observons qu'on peut écrire :

$$(III.4) \quad \int \eta(A) \eta(B) P^{*n}(d\eta) = n \nu^{(2)}(A \times B) + n(n-1) \nu(A) \nu(B).$$

D'autre part, si $(P_i)_{i \in I}$ est une famille dénombrable de probabilités sur M_p telle que $\sum_{i \in I} P_i$ soit définie, on a :

$$(III.5) \quad \int \eta(A) \eta(B) \left(\sum_{i \in I} P_i \right) (d\eta) = \sum_{i \in I} \int \eta(A) \eta(B) P_i(d\eta) + \sum_{i \neq j} \int \eta(A) P_i(d\eta) \int \eta(B) P_j(d\eta)$$

Pour $\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \delta_{x_i}$, la formule annoncée découle de l'application

successive de (III.5) et (III.4) à la famille $(P_i^{*\alpha_i})_{i \in I}$.

III.5 Lemme

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans X_2 , μ un élément de M_{p1} tel que $\pi(\mu, \cdot)$ soit définie. La probabilité $\pi(\mu, \cdot)$ est du 2nd ordre si et seulement si pour tout choix de A et B

dans \mathfrak{B}_2 on a $|\int_{X_1} \Lambda_x(A \times B) \mu(dx)| < +\infty$. Si cette condition est réali-

sée, la mesure de covariance de $\pi(\mu, \cdot)$ est donnée par :

$$(III.6) \quad \Lambda_\mu = \int_{X_1} \Lambda_x \mu(dx) .$$

Démonstration

Si $\pi(\mu, \cdot)$ est du 2nd ordre, l'égalité (III.6) est obtenue en utilisant le lemme III.4 et les arguments habituels de prolongements d'une mesure définie sur les pavés mesurables.

Réciproquement, lorsque la condition $|\int \Lambda_x(A \times B) \mu(dx)| < +\infty$ est réalisée pour tout choix de A et B dans \mathfrak{B}_2 , le lemme III.4 permet d'assurer que $\pi(\mu, \cdot)$ est du 2nd ordre et l'égalité (III.6) est alors immédiate.

III.6. Proposition

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans X_2 et P_1 une probabilité sur $(\mathbb{M}_{p_1}, \mathfrak{M}_{p_1})$ telle que $P_1(D_\pi^1) = 1$. La mesure $\nu_2^{(2)}$ de la loi secondaire P_2 vérifie l'égalité :

$$(III.7) \quad \nu_2^{(2)}(A \times B) = \int_{X_1} \Lambda_x(A \times B) \nu_1(dx) + \int_{X_1^2} \nu_x(A) \nu_{x'}(B) \nu_1^{(2)}(dx, dx') \quad A, B \in \mathfrak{B}_2 .$$

Lorsque P_2 est du 2nd ordre, on a de plus :

$$(III.8) \quad \Lambda_2(A \times B) = \int_{X_1} \Lambda_x(A \times B) \nu_1(dx) + \int_{X_1^2} \nu_x(A) \nu_{x'}(B) \Lambda_1(dx, dx') \quad A, B \in \mathfrak{B}_2 .$$

Démonstration

La définition de la loi P_2 implique :

$$\nu_2^{(2)} = \int_{\mathbb{M}_{p1}} \nu_{\mu}^{(2)} P_1(d\mu) .$$

Compte tenu de (III.3) et de l'égalité :

$$\int_{\mathbb{M}_{p1}} \int_{X_1^2} \nu_x(A) \nu_{x'}(B) \mu(dx) \mu(dx') P_1(d\mu) = \int \nu_x(A) \nu_{x'}(B) \nu_1^{(2)}(dx, dx')$$

on déduit simplement (III.7) et ensuite (III.8) lorsque P_2 est du 2nd ordre.

1.2. Le clustering homogène de loi primaire stationnaire

Dans toute cette partie on suppose que $X_1 = X_2 = X = \mathbb{R}^d$; P_1 est une probabilité stationnaire sur $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$ et π un générateur de clustering homogène sur X dont nous notons π_0 la loi $\pi(0, \cdot)$. Le processus de clustering éventuellement associé au couple (P_1, π) est désigné par (P_1, π_0) .

Lorsque P est une probabilité stationnaire sur $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$ du 1^{er} ordre, on a, pour tout B de \mathcal{B} , $\nu(B) = \nu([0,1]^d)_m(B)$ où m désigne la mesure de Lebesgue sur X . On pose $i_p = \nu([0,1]^d)$. Rappelons d'autre part que :

$$I(\mu) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(2t)^d} \mu([-t, t]^d)$$

est définie pour P -presque tout μ (cf. [28], prop. 6.2.8) et à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$. Elle est appelée intensité empirique et vérifie l'égalité :

$$\int_{\mathbb{M}_p} I(\mu) P(d\mu) = i_p .$$

III.7. Proposition

Soit π un générateur de clustering homogène sur X et P_1 une probabilité stationnaire sur $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$. Lorsque le processus de clustering (P_1, π_0) est défini, la loi secondaire P_2 est stationnaire ; si de plus P_1 est d'ordre 1, la mesure d'intensité de P_2 est donnée par :

$$\nu_2(B) = i_{P_1} \cdot \nu_0(X) m(B) \quad , \quad B \in \mathcal{B}_2 .$$

Démonstration

La stationnarité de P_2 résulte de l'égalité :

$$T_x \pi(\mu, \cdot) = \pi(T_x \mu, \cdot) \quad , \quad x \in X .$$

Compte tenu de cette relation, on peut en effet écrire :

$$\begin{aligned} T_x P_2 &= \int T_x \pi(\mu, \cdot) P_1(d\mu) = \int \pi(T_x \mu, \cdot) P_1(d\mu) \\ &= \int \pi(\mu, \cdot) T_x P_1(d\mu) = P_2 . \end{aligned}$$

Calculons la mesure d'intensité ν_2 de P_2 :

$$\begin{aligned} \nu_2(B) &= \int_X \nu_x(B) \nu_1(dx) = \int_X \nu_0(B-x) i_{P_1} m(dx) \\ &= i_{P_1} \cdot \nu_0(X) m(B) \quad , \quad B \in \mathcal{B} . \end{aligned}$$

Considérons une loi P_1 stationnaire et du 1^{er} ordre et π un générateur de clustering homogène sur X défini par la loi π_0 ; de la proposition III.3 on déduit qu'une condition suffisante d'existence du processus de clustering (P_1, π_0) est donnée par :

$$\int_X \pi(x, \eta(B) > 0) m(dx) < +\infty \quad , \quad B \in \mathcal{B} ,$$

soit

$$(C) \quad \int_X \pi_0(\eta(B-x) > 0) m(dx) < +\infty, \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Nous verrons que cette condition reste suffisante pour l'existence du processus de clustering dans le cas de certaines distributions P_1 qui ne sont pas du 1^{er} ordre.

Remarquons que la condition (C) est vérifiée dès qu'il existe un B_0 de \mathfrak{B} d'intérieur non vide tel que l'intégrale $\int \pi_0(\eta(B_0-x) > 0) m(dx)$ soit finie. En effet, si B est un élément de \mathfrak{B} , il existe une suite finie x_1, \dots, x_n dans X telle que $B \subset \bigcup_{i=1}^n (B_0 + x_i)$. On a alors :

$$B-x \subset \bigcup_{i=1}^n (B_0 + x_i - x),$$

et on en déduit :

$$\pi_0(\eta(B-x) > 0) \leq \sum_{i=1}^n \pi_0(\eta(B_0 + x_i - x) > 0);$$

par suite l'intégrale $\int \pi_0(\eta(B-x) > 0) m(dx)$ est finie.

Nous notons \mathfrak{M}_p^b le sous-ensemble de \mathfrak{M}_p constitué des mesures bornées.

III.8. Lemme

Si π_0 est une probabilité sur $(\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_p)$ vérifiant la condition (C), on a alors :

$$\pi_0(\mathfrak{M}_p^b) = 1.$$

Démonstration

Pour tout élément (n_1, \dots, n_d) de \mathbb{Z}^d , soit A_{n_1, \dots, n_d} le pavé de X :

$$A_{n_1, \dots, n_d} = [n_1, n_1+1[\times \dots \times [n_d, n_d+1[.$$

La famille de tous les pavés A_{n_1, \dots, n_d} lorsque (n_1, \dots, n_d) parcourt \mathbb{Z}^d réalise une partition de X . Nous pouvons indexer cette famille sur \mathbb{N} et écrire :

$$\mathbb{M}_p^b = \liminf_n \{ \eta(A_n) = 0 \} = \{ \limsup_n \{ \eta(A_n) > 0 \} \}^c .$$

Observons d'autre part que, pour toute probabilité π_0 sur \mathbb{M}_p , et pour tout n , on peut écrire :

$$\pi_0(\eta(A_n) > 0) \leq \int_{A_n} \pi_0(\eta([-1, 1]^d + x) > 0) m(dx) ;$$

il s'ensuit :

$$\sum_n \pi_0(\eta(A_n) > 0) \leq \int_X \pi_0(\eta([-1, 1]^d + x) > 0) m(dx) .$$

Lorsque π_0 satisfait la condition (C), le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure $\pi_0(\mathbb{M}_p^b) = 1$.

Notons que dans le cas où la mesure d'intensité ν_0 de π_0 est une mesure bornée, la relation

$$\int_X \pi_0(\eta(B-x) > 0) m(dx) \leq \int_X \nu_0(B-x) m(dx) = m(B) \nu_0(X) , \quad B \in \mathcal{B} ,$$

permet de conclure que π_0 satisfait la condition (C).

III.9. Proposition

Soit P_1 une probabilité stationnaire sur $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$ telle que l'intensité empirique $I(\mu)$ soit finie pour P_1 presque tout μ et π un générateur de clustering homogène sur X . Le processus de clustering (P_1, π_0) existe si et seulement si π_0 vérifie la condition (C).

Démonstration

Montrons que la condition (C) est suffisante. La distribution P_1 peut être décomposée sous la forme :

$$P_1 = \sum_{n \geq 0} p_n P_1^{(n)}$$

où $p_n = P_1(I(\mu) \in [n, n+1[)$ et $P_1^{(n)}(\cdot) = P_1(\cdot | I(\mu) \in [n, n+1[)$, $n \geq 0$.

Les événements $\{I(\mu) \in [n, n+1[)$ sont invariants par translation et donc les distributions $P_1^{(n)}$ sont stationnaires et d'intensité finie. Par suite, pour tout n , $P_1^{(n)}(D_\pi^1) = 1$ et donc $P_1(D_\pi^1) = 1$.

Nous renvoyons à [28] proposition 11.2.4 pour la démonstration du caractère nécessaire de la condition (C). Notons qu'évidemment la condition (C) reste nécessaire pour l'existence du processus de clustering (P_1, π_0) lorsqu'on suppose seulement P_1 stationnaire.

L'existence du processus de clustering (P_1, π_0) pour toute loi primaire P_1 stationnaire demande une condition forte :

III.10. Proposition

Soit π un générateur de clustering homogène défini par la probabilité π_0 . Le processus de clustering (P_1, π_0) existe pour toute distribution stationnaire P_1 si et seulement si il existe B de \mathcal{B}

tel que $\pi_0 = B \pi_0$.

Démonstration

Il est immédiat que lorsqu'il existe B de \mathfrak{B} tel que $\pi_0 = B \pi_0$ le processus de clustering (P_1, π_0) existe pour toute distribution P_1 , stationnaire ou pas. Pour tout μ de \mathbb{M}_p et tout B' de \mathfrak{B} , on peut en effet écrire :

$$\begin{aligned} \int_X \pi(x, \eta(B') > 0) \mu(dx) &= \int_X \pi_0(\eta(B'-x) > 0) \mu(dx) \\ &= \int_X \pi_0(\eta((B'-x) \cap B) > 0) \mu(dx) < +\infty . \end{aligned}$$

On a donc $D_\pi^1 = \mathbb{M}_p$.

Pour démontrer le caractère nécessaire de la condition énoncée, on montre que lorsque le support de π_0 n'est pas constituée d'un ensemble de mesures à supports uniformément bornés on sait construire une distribution P_1 sur \mathbb{M}_p stationnaire et telle que le processus de clustering (P_1, π_0) n'existe pas (cf. [28] prop. 11.2.5) .

§2. - ETUDE DU CLUSTERING DANS $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$

Soit $(\mathbb{M}_1, \mathcal{M}_1)$ et $(\mathbb{M}_2, \mathcal{M}_2)$ les espaces de mesures de Radon positives sur (X_1, \mathcal{X}_1) et (X_2, \mathcal{X}_2) . Un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans X_2 est maintenant une probabilité de transition sur $X_1 \times \mathcal{M}_2$. Nous dirons qu'un générateur de clustering π est indéfiniment divisible si les lois $\pi(x, \cdot)$ sont indéfiniment divisibles.

Les notations utilisées dans ce paragraphe sont les mêmes que dans le précédent ; en particulier P_1 et P_2 désignent toujours les lois primaire et secondaire.

Pour la commodité d'écriture nous remplaçons les termes fonctionnelles de Laplace et fonctionnelle logarithmique par \mathcal{F}, \mathcal{L} et \mathcal{F}, Log . Nous notons $\psi_1(\cdot)$ et $\psi_2(\cdot)$ les \mathcal{F}, Log associées à P_1 et P_2 et $\psi(x, \cdot)$ celle associée à $\pi(x, \cdot)$:

$$\psi(x, f) = -\text{Log } \varphi(x, f) = -\text{Log} \int_{\mathbb{M}_2} e^{-\mu(f)} \pi(x, d\mu) \quad , f \in C_{2K}^+$$

Pour toute mesure μ , $\mu(f)$ désigne toujours par la suite l'intégrale $\int f(x) \mu(dx)$.

Remarquons que pour tout $f \in C_{2K}^+$, l'application $x \rightarrow \psi(x, f)$ est mesurable de (X_1, \mathcal{X}_1) dans \mathbb{R}_+ , i.e. $\psi(\cdot, f) \in \mathcal{F}_{1+}$.

Il est clair que lorsqu'une mesure μ de \mathbb{M}_1 n'est pas une mesure ponctuelle, il n'est pas possible de définir $\pi(\mu, \cdot)$ comme nous l'avons fait précédemment. Nous allons définir $\pi(\mu, \cdot)$ par sa \mathcal{F}, Log . $\psi(\mu, \cdot)$.

III.11. Définition

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans

X_2 , μ un élément de \mathbb{M}_1 et $\psi(\mu, \cdot)$ la fonctionnelle définie par :

$$(III.9) \quad \psi(\mu, f) = \int_{X_1} \psi(x, f) \mu(dx) \quad , \quad f \in C_{2K}^+ .$$

Si μ est telle que $\psi(\mu, \cdot)$ est une \mathcal{F} .Log, on définit $\pi(\mu, \cdot)$ comme
la loi associée.

Si μ est une mesure ponctuelle sur X_1 telle que le produit de convolution $\ast_{\{x, \mu(x) > 0\}} \pi(x, \cdot)^{\ast \mu(x)}$ est défini, on vérifie facilement

que la fonctionnelle $\psi(\mu, \cdot)$ définie par (III.9) est la \mathcal{F} .Log. associée à cette probabilité. La définition proposée ci-dessus pour $\pi(\mu, \cdot)$ est donc bien cohérente avec celle adoptée dans le cas ponctuel. Posons :

$$C_{\pi}^1 = \{ \mu \in \mathbb{M}_1 ; \psi(\mu, \cdot) \text{ est une } \mathcal{F}\text{-Log.} \} .$$

III.12. Définition

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs
dans X_2 et P_1 une probabilité sur $(\mathbb{M}_1, \mathcal{M}_1)$. On dit que le processus
de clustering (P_1, π) existe si le complémentaire de C_{π}^1 est un ensem-
ble P_1 -négligeable.

Remarquons que la restriction de π à $S_1 \times \mathcal{M}_2$, où S_1 est sous-ensemble mesurable de C_{π}^1 muni de la tribu trace, est une probabilité de transition. Cela résulte de la mesurabilité, pour tout f de C_{2K}^+ , de l'application $\mu \rightarrow \psi(\mu, f)$ de S_1 dans \mathbb{R}_+ .

Lorsque le processus de clustering (P_1, π) existe, on a pour la loi secondaire le résultat suivant :

III.13. Proposition

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans X_2 et P_1 une probabilité sur $(\mathbb{M}_1, \mathcal{M}_1)$ telle que le processus de clustering (P_1, π) existe. Alors la loi secondaire admet comme \mathcal{F} .Log. :

$$(III.10) \quad \psi_2(f) = \psi_1(\psi(\cdot, f)) \quad , \quad f \in \mathcal{F}_{2+} .$$

Démonstration

La relation
$$P_2 = \int_{\mathbb{M}_1} \pi(\mu, \cdot) P_1(d\mu)$$

implique :

$$\varphi_2(f) = \int_{\mathbb{M}_1} \varphi(\mu, f) P_1(d\mu) = \int_{\mathbb{M}_1} e^{-\psi(\mu, f)} P_1(d\mu) \quad , \quad f \in \mathcal{F}_{2+}$$

et donc :

$$\psi_2(f) = -\text{Log} \int_{\mathbb{M}_1} e^{-\int_{X_2} \psi(x, f) \mu(dx)} P_1(d\mu) = \psi_1(\psi(\cdot, f)) \quad , \quad f \in \mathcal{F}_{2+} .$$

Notons que pour $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{B_i}$, B_1, \dots, B_n étant des éléments de \mathcal{B}_2 et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de \mathbb{R}_+ , la relation (III.10) s'écrit :

$$(III.11) \quad \psi_{2B_1, \dots, B_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \psi_1\left(\psi_{B_1, \dots, B_n}(\cdot, \lambda_1, \dots, \lambda_n)\right) .$$

Cela fournit les transformées logarithmiques des lois cylindriques associées à la loi P_2 .

Comme dans le cas ponctuel la mesure d'intensité de la loi P_2 s'exprime simplement en fonction des mesures d'intensité de P_1 et des $\pi(x, \cdot)$. Pour ce faire nous démontrons le résultat préliminaire :

III.14. Lemme

Soit μ une mesure de C_{π}^1 , la mesure d'intensité ν_{μ} de la loi $\pi(\mu, \cdot)$ est donnée par :

$$(III.12) \quad \nu_{\mu}(B) = \int_{X_1} \nu_x(B) \nu_1(dx) \quad , \quad B \in \mathfrak{B}_2 \quad ,$$

les deux membres de cette égalité pouvant être éventuellement infinis.

Démonstration

Nous démontrons (III.12) en montrant que la relation

$$\psi_B(\mu, \lambda) = \int \psi_B(x, \lambda) \mu(dx) \quad , \quad \lambda \geq 0 \quad , \quad \text{donne par dérivation en } \lambda :$$

$$\psi'_B(\mu, \lambda) = \int \psi'_B(x, \lambda) \mu(dx) \quad , \quad \lambda \geq 0 \quad .$$

Pour alléger les écritures nous supprimons dans la suite l'indice B .

Rappelons tout d'abord que la transformée de Laplace φ d'une loi sur \mathbb{R}_+ et $\psi = -\text{Log } \varphi$ sont de classe C^{∞} sur $]0, \infty[$. De plus la fonction φ est complètement monotone sur $]0, \infty[$ et ses dérivées vérifient les inégalités :

$$(III.13) \quad \frac{\varphi'}{\varphi} \geq \frac{\varphi''}{\varphi'} \geq \dots \geq \frac{\varphi^{(n)}}{\varphi^{(n-1)}} \geq \frac{\varphi^{(n+1)}}{\varphi^{(n)}} \geq \dots$$

La première de ces inégalités implique que ψ' est décroissante ; d'autre part ψ' est une fonction positive.

Montrons en premier lieu que pour tout $\lambda > 0$, $\int \psi'(x, \lambda) \mu(dx)$ est finie et égale à $\psi'(\mu, \lambda)$.

Soit $\lambda > 0$, $0 < h < \lambda$, on a :

$$\frac{\psi(x, \lambda) - \psi(x, \lambda-h)}{h} \geq \psi'(x, \lambda) \geq 0$$

d'où

$$\int \psi'(x, \lambda) \mu(dx) \leq \frac{1}{h} \left[\int \psi(x, \lambda) \mu(dx) - \int \psi(x, \lambda-h) \mu(dx) \right] < +\infty$$

D'autre part pour tout $\lambda > 0$, on peut majorer $\psi'(x, \lambda)$ par $\psi'(x, \lambda_1)$ pour un λ_1 vérifiant $0 < \lambda_1 < \lambda$. La fonction $x \rightarrow \psi'(x, \lambda_1)$ étant μ -intégrable, le théorème de dérivation sous le signe somme de Lebesgue donne :

$$\psi'(\mu, \lambda) = \int \psi'(x, \lambda) \mu(dx) .$$

Enfin, on a :

$$\psi'(\mu, 0) = \lim_{\lambda \searrow 0} \psi'(\mu, \lambda) = \lim_{\lambda \searrow 0} \int \psi'(x, \lambda) \mu(dx) = \int \psi'(x, 0) \mu(dx) ,$$

la dernière égalité étant obtenue par convergence monotone.

On a donc dans le cas qui nous concerne :

$$\psi'_B(x, 0) = \int_{X_1} \psi'_B(x, 0) \mu(dx) , \quad B \in \mathfrak{B}_2$$

c'est-à-dire :

$$\nu_\mu(B) = \int_{X_1} \nu_x(B) \nu_1(dx) , \quad B \in \mathfrak{B}_2 .$$

Compte tenu du lemme III.14 et de la définition de la loi secondaire on obtient, pour la mesure d'intensité ν_2 , un résultat analogue à celui obtenu dans le cas ponctuel (cf. (III.2)).

$$\nu_2(B) = \int_{\mathfrak{M}_1} \nu_\mu(B) P_1(d\mu) = \int_{\mathfrak{M}_1} \int_{X_1} \nu_x(B) \mu(dx) P_1(d\mu) , \quad B \in \mathfrak{B}_2 ,$$

soit :

$$(III.14) \quad \nu_2(B) = \int_{X_1} \nu_x(B) \nu_1(dx) , \quad B \in \mathfrak{B}_2 .$$

Pour les mesures de covariance, nous commençons également par montrer, pour une loi $\pi(\mu, \cdot)$ associée à une mesure μ de C_{π}^1 , une relation analogue à (III.12) entre la mesure de covariance Λ_{μ} et les mesures de covariance Λ_x des lois $\pi(x, \cdot)$. Nous montrons tout d'abord le résultat partiel :

III.15. Lemme

Soit μ une mesure de C_{π}^1 telle que $\pi(\mu, \cdot)$ soit du 1^{er} ordre et que pour tout B de \mathfrak{B}_2 , $\int_{X_1} \psi_B'^2(x, 0) \mu(dx) < +\infty$. On a alors :

$$(III.15) \quad \Lambda_{\mu}(B \times B) = \int_{X_1} \Lambda_x(B \times B) \mu(dx) \quad , \quad B \in \mathfrak{B}_2 \quad ,$$

les deux membres de cette égalité pouvant être éventuellement infinis.

Si π est indéfiniment divisible (III.15) est vraie sans l'hypothèse

$$\int_{X_1} \psi_B'^2(x, 0) \mu(dx) < +\infty \quad .$$

Démonstration

Nous nous replaçons dans le cadre de la démonstration du lemme III.14 et nous allons montrer que, sous l'hypothèse $\int \psi'^2(x, 0) \mu(dx) < +\infty$, la relation $\psi'(\mu, \lambda) = \int \psi'(x, \lambda) \mu(dx)$, $\lambda \geq 0$, donne par dérivation en λ :

$$-\psi''(\mu, \lambda) = \int -\psi''(x, \lambda) \mu(dx) \quad , \quad \lambda \geq 0 \quad .$$

Remarquons que ψ'' est négative et que les inégalités III.13. impliquent que $-\psi'' + \psi'^2$ est une fonction positive décroissante.

Nous commençons par montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\int -\psi''(x, \lambda) \mu(dx)$ est finie et égale à $-\psi''(\mu, \lambda)$.

Soit $\lambda > 0$, $0 < h < \lambda$, on peut écrire :

$$\frac{\psi'(x, \lambda-h) - \psi'(x, \lambda)}{h} = -\psi''(x, \lambda - \theta_x h) \quad \text{pour un } \theta_x, \quad 0 \leq \theta_x \leq 1,$$

et :

$$-\psi''(x, \lambda) + \psi'^2(x, \lambda) \leq -\psi''(x, \lambda - \theta_x h) + \psi'^2(x, \lambda - \theta_x h)$$

$$-\psi''(x, \lambda) \leq -\psi''(x, \lambda - \theta_x h) + \psi'^2(x, \lambda - \theta_x h)$$

$$-\psi''(x, \lambda) \leq -\psi''(x, \lambda - \theta_x h) + \psi'^2(x, \lambda-h)$$

Intégrant cette dernière relation et utilisant l'expression de $-\psi''(x, \lambda - \theta_x h)$, on a :

$$\int -\psi''(x, \lambda) \mu(dx) \leq \frac{1}{h} \int (\psi'(x, \lambda-h) - \psi'(x, \lambda)) \mu(dx) + \int \psi'^2(x, \lambda-h) \mu(dx) < +\infty,$$

compte tenu de l'hypothèse $\int \psi'^2(x, 0) \mu(dx) < +\infty$. On peut aussi affirmer maintenant que pour tout $\lambda > 0$, $\int (-\psi''(x, \lambda) + \psi'^2(x, \lambda)) \mu(dx)$ est finie.

Pour $0 < \lambda_1 < \lambda$, on peut écrire :

$$-\psi''(x, \lambda) + \psi'^2(x, \lambda) \leq -\psi''(x, \lambda_1) + \psi'^2(x, \lambda_1)$$

$$-\psi''(x, \lambda) \leq -\psi''(x, \lambda_1) + \psi'^2(x, \lambda_1).$$

Le second membre de cette inégalité est μ -intégrable. Par suite, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme de Lebesgue à $-\psi'(\mu, \lambda) = \int -\psi'(x, \lambda) \mu(dx)$. On a donc :

$$-\psi''(\mu, \lambda) = \int -\psi''(x, \lambda) \mu(dx) \quad , \quad \lambda > 0.$$

Montrons enfin que cette relation est vraie en $\lambda = 0$. Par convergence monotone, on a :

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \int (-\psi''(x, \lambda) + \psi'^2(x, \lambda)) \mu(dx) = \int (-\psi''(x, 0) + \psi'^2(x, 0)) \mu(dx),$$

soit :

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \int -\psi''(x, \lambda) \mu(dx) + \int \psi'^2(x, 0) \mu(dx) = \int (-\psi''(x, 0) + \psi'^2(x, 0)) \mu(dx)$$

Puisque $\int \psi'^2(x, 0) \mu(dx)$ est finie, on en déduit :

$$-\psi''(\mu, 0) = \int -\psi''(x, 0) \mu(dx) ,$$

où les deux termes peuvent éventuellement être infinis.

Pour tout B de \mathfrak{B}_2 , sous l'hypothèse $\int_{X_1} \psi_B'^2(x, 0) \mu(dx) < +\infty$, on a donc :

$$-\psi_B''(\mu, 0) = \int_{X_1} -\psi_B''(x, 0) \mu(dx) ,$$

et par suite (III.15).

Lorsque π est un générateur de clustering indéfiniment divisible, pour tout x de X_1 et tout B de \mathfrak{B}_2 , la loi $\pi(x, \cdot)_B$ est indéfiniment divisible. Il s'ensuit que les fonctions $\lambda \rightarrow \psi_B(x, \lambda)$ sont complètement monotones.

Reprenant la démarche utilisée dans la démonstration du lemme III.14., on peut alors montrer sans l'hypothèse $\int_{X_1} \psi_B'^2(x, 0) \mu(dx) < +\infty$, $B \in \mathfrak{B}_2$, la relation :

$$-\psi_B''(\mu, \lambda) = \int_{X_1} -\psi_B''(x, \lambda) \mu(dx) , \lambda \geq 0 .$$

Du lemme III.15. on déduit :

III.16. Lemme

Soit μ une mesure de C_π^1 telle que $\pi(\mu, \cdot)$ soit du 2^{ème} ordre et que pour tout B de \mathfrak{B}_2 , $\int_{X_1} \psi_B'^2(x, 0) \mu(dx) < +\infty$. On a alors :

$$(III.16) \quad \Lambda_{\mu}(A \times B) = \int_{X_1} \Lambda_x(A \times B) \mu(dx) \quad , \quad A, B \in \mathfrak{B}_2$$

lorsque π est indéfiniment divisible, (III.16) est vraie sans l'hypothèse

$$\int_{X_1} \psi_B'^2(x, 0) \mu(d\lambda) < +\infty .$$

Démonstration

Considérons tout d'abord les pavés $A \times B$ où A et B sont des éléments disjoints de \mathfrak{B}_2 . On a :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu}(A \times B) &= \text{Cov}_{\mu}(\eta(A), \eta(B)) \\ &= \frac{1}{2} [\text{Var}_{\mu}(\eta(A) + \eta(B)) - \text{Var}_{\mu}(\eta(A)) - \text{Var}_{\mu}(\eta(B))] \\ &= \frac{1}{2} [\Lambda_{\mu}((A \cup B) \times (A \cup B)) - \Lambda_{\mu}(A \times A) - \Lambda_{\mu}(B \times B)] \end{aligned}$$

En appliquant (III.15) à chacun des termes du membre de droite on obtient (III.16)

Lorsque A et B ne sont pas disjoints, posons :

$$A' = A \setminus B \quad , \quad B' = B \setminus A \quad \text{et} \quad C' = A \cap B .$$

On a pour toute mesure η de \mathfrak{M}_2 :

$$\eta(A) = \eta(A') + \eta(C') \quad , \quad \eta(B) = \eta(B') + \eta(C') .$$

Compte tenu de la relation :

$$\text{Cov}(X+Z, Y+Z) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z) + \text{Var} Z ,$$

on obtient :

$$\Lambda_{\mu}(A \times B) = \Lambda_{\mu}(A' \times B') + \Lambda_{\mu}(A' \times C') + \Lambda_{\mu}(C' \times B') + \Lambda_{\mu}(C' \times C') .$$

On en déduit que la relation (III.16) est valable pour tous les pavés $A \times B$, $A, B \in \mathfrak{B}_2$.

On déduit alors immédiatement un résultat analogue à la proposition (III.6) du cas ponctuel :

III.17. Proposition

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans X_2 et P_1 une probabilité sur (M_1, \mathcal{M}_1) telle que le processus de clustering (P_1, π) existe et que l'on ait $\int_{X_1} \psi_B'^2(x, 0) \mu(dx) < +\infty$, $B \in \mathcal{B}_2$, pour P_1 -presque tout μ . La mesure $\nu_2^{(2)}$ de la loi secondaire P_2 vérifie l'égalité :

$$(III.17) \quad \nu_2^{(2)}(A \times B) = \int_{X_1} \Lambda_x(A \times B) \nu_1(dx) + \int_{X_1^2} \nu_x(A) \nu_{x'}(B) \nu_1^{(2)}(dx, dx'), \quad A, B \in \mathcal{B}_2.$$

Lorsque P_2 est du 2^{ème} ordre, on a de plus :

$$(III.18) \quad \Lambda_2(A \times B) = \int_{X_1} \Lambda_x(A \times B) \nu_1(dx) + \int_{X_1^2} \nu_x(A) \nu_{x'}(B) \Lambda_1(dx, dx'), \quad A, B \in \mathcal{B}_2.$$

Lorsque π est indéfiniment divisible, ces résultats sont vrais sans l'hypothèse de finitude des $\int_{X_1} \psi_B'^2(x, 0) \mu(dx)$.

Nous nous intéressons maintenant à l'existence du processus de clustering (P_1, π) .

Rappelons (cf. Th. I.19.) qu'une loi P sur (M, \mathcal{M}) est indéfiniment divisible si et seulement si sa \mathcal{F} .Log. $\psi(\cdot)$ peut se mettre sous la forme :

$$\psi(f) = \alpha(f) + \int_{M^*} (1 - e^{-\eta(f)}) \tilde{P}(d\eta), \quad f \in C_K^+,$$

où α est un élément de \mathbb{M} et \tilde{P} une mesure sur $\mathbb{M}^* = \mathbb{M} \setminus \{0\}$ vérifiant pour tout B de \mathcal{B} $\int_{\mathbb{M}^*} (1 - e^{-\eta(B)}) \tilde{P}(d\mu) < +\infty$.

Lorsque π est un générateur de clustering indéfiniment divisible, nous notons α_x et \tilde{P}_x les mesures canoniques associées à la représentation de $\pi(x, \cdot)$.

III.18. Proposition

Soit π un générateur de clustering indéfiniment divisible défini sur X_1 à valeurs dans X_2 et tel que les applications de X_1 dans \mathbb{R}_+ :

$$(III.19) \quad x \rightarrow \alpha_x(f) \quad \text{et} \quad x \rightarrow \tilde{P}_x(M)$$

soient mesurables pour tout f de C_{2K}^+ et tout M de \mathcal{M}^* .

Une condition nécessaire et suffisante pour que le processus de clustering (P_1, π) existe est que l'on ait pour tout f de C_{2K}^+ :

$$(III.20) \quad \int \psi(\mu, f) \mu(dx) < +\infty \quad \text{pour } P_1\text{-presque tout } \mu.$$

$\pi(\mu, \cdot)$ est alors pour P_1 -presque tout μ une loi indéfiniment divisible.

La démonstration demande le résultat préliminaire suivant :

III.19. Lemme

Soit X un espace localement compact à base dénombrable. Il existe un sous-ensemble dénombrable \mathcal{H}_0 de C_K^+ tel que :

$$\forall g \in C_K^+ \quad \exists f \in \mathcal{H}_0, \quad g \leq f.$$

Démonstration

En utilisant une base dénombrable de la topologie de X , on peut construire une suite d'ouverts (G_k) vérifiant

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k, \quad \overline{G}_k \subset G_{k+1} \text{ pour tout } k,$$

et telle que tout compact de X soit inclus dans un G_k . Pour tout k , choisissons une fonction f_k de C_K^+ vérifiant $1_{\overline{G}_k} \leq f_k \leq 1_{G_{k+1}}$ et posons :

$$H_0 = \{ n f_k, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \}.$$

Si g est une fonction de C_K^+ , on a alors $g \leq n f_k$ pour un k tel que le support de g soit inclus dans G_k et un entier n vérifiant $n \geq \sup_{x \in X} g(x)$.

Démonstration de la proposition III.19.

Nous allons montrer tout d'abord que le processus de clustering (P_1, π) existe si et seulement si :

$$P_1(\{ \mu \in \mathcal{M}_1; \psi(\mu, f) = \int \psi(x, f) \mu(dx) < +\infty, f \in C_{2K}^+ \}) = 1.$$

Nous verrons ensuite que le lemme III.19. permet d'assurer que cette condition est équivalente à celle plus intéressante énoncée dans la proposition.

Pour tout f de C_{2K}^+ , posons :

$$E_{\pi f}^1 = \{ \mu \in \mathcal{M}_1; \psi(\mu, f) < +\infty \}$$

et soit

$$E_{\pi}^1 = \bigcap_{f \in C_{2K}^+} E_{\pi f}^1 = \{ \mu \in \mathcal{M}_1; \psi(\mu, f) < +\infty, f \in C_{2K}^+ \}$$

Le lemme III.19. permet d'affirmer $E_{\pi}^1 = \bigcap_{f \in \mathcal{H}_0} E_{\pi f}^1$. Il s'ensuit que E_{π}^1 est élément de \mathcal{M}_1 . Remarquons d'autre part que C_{π}^1 est inclus dans E_{π}^1 . Nous allons voir qu'en fait $E_{\pi}^1 = C_{\pi}^1$, ce qui permet d'affirmer que $P_1(E_{\pi}^1) = 1$ est bien une condition nécessaire et suffisante d'existence du processus de clustering.

Soit μ une mesure de E_{π}^1 , on a alors pour tout f de C_{2K}^+ :

$$\begin{aligned} \psi(\mu, f) &= \int_{X_1} \psi(x, f) \mu(dx) = \int_{X_1} \left[\alpha_x(f) + \int_{\mathbb{M}_2^+} (1 - e^{-\eta(f)}) \tilde{P}_x(d\eta) \right] \mu(dx) \\ &= \int_{X_1} \int_{X_2} f(s) \alpha_x(ds) \mu(dx) + \int_{X_1} \int_{\mathbb{M}_2^*} (1 - e^{-\eta(f)}) \tilde{P}_x(d\eta) \mu(dx). \end{aligned}$$

Notons α_{μ} et \tilde{P}_{μ} les mesures définies par :

$$\alpha_{\mu}(A) = \int_{X_1} \alpha_x(A) \mu(dx) \quad , \quad A \in \mathcal{X}_2$$

$$\tilde{P}_{\mu}(M) = \int_{X_1} \tilde{P}_x(M) \mu(dx) \quad , \quad M \in \mathcal{M}_2^* .$$

On peut alors écrire :

$$\psi(\mu, f) = \int_{X_2} f d\alpha_{\mu} + \int_{\mathbb{M}_2^*} (1 - e^{-\eta(f)}) \tilde{P}_{\mu}(d\eta) .$$

Le fait que $\psi(\mu, f)$ soit finie pour tout f de C_{2K}^+ assure que α_{μ} est élément de \mathbb{M}_2 et que \tilde{P}_{μ} satisfait à $\int (1 - e^{-\eta(B)}) \tilde{P}(d\eta) < +\infty$ pour tout B de \mathcal{B}_2 . La fonctionnelle $\psi(\mu, .)$ est donc une \mathcal{F} .Log. et c'est la \mathcal{F} .Log d'une loi indéfiniment divisible.

Montrons enfin que la condition $P_1(E_\pi^1) = 1$ est équivalente à celle énoncée dans la proposition : pour tout f de C_{2K}^+ , $P_1(E_{\pi f}^1) = 1$.
 Pour tout f de C_{2K}^+ , $E_\pi^1 \subset E_{\pi f}^1$ donc $P_1(E_\pi^1) = 1$ implique $P_1(E_{\pi f}^1) = 1$.
 Inversement si, pour tout f de C_{2K}^+ , $P_1(E_{\pi f}^1) = 1$, alors

$$P_1(E_\pi^1) = P_1\left(\bigcap_{f \in \mathcal{H}_0} E_{\pi f}^1\right) = 1.$$

III.20. Proposition

Soit π un générateur de clustering indéfiniment divisible satisfaisant aux hypothèses de mesurabilité de la proposition III.18 et P_1 une loi indéfiniment divisible sur (M_1, \mathcal{M}_1) telle que le processus de clustering (P_1, π) existe. La loi secondaire P_2 est alors indéfiniment divisible.

Démonstration

La \mathcal{L} .Log de P_1 s'écrit :

$$\psi_1(f) = \alpha_1(f) + \int_{M_1^*} (1 - e^{-\mu(f)}) \tilde{P}_1(d\mu), \quad f \in C_{1K}^+.$$

Pour tout f de C_{2K}^+ , on a donc :

$$\begin{aligned} \psi_2(f) &= \psi_1(\psi(\cdot, f)) = \int_{X_1} \psi(x, f) \alpha_1(dx) + \int_{M_1^*} (1 - e^{-\psi(\mu, f)}) \tilde{P}_1(d\mu) \\ &= \int_{X_1} \left[\alpha_x(f) + \int_{M_2^*} (1 - e^{-\eta(f)}) \tilde{P}_x(d\eta) \right] \alpha_1(dx) + \int_{M_1^*} (1 - \varphi(\mu, f)) \tilde{P}_1(d\mu) \\ &= \int_{X_1} \int_{X_2} f(s) \alpha_x(ds) \alpha_1(dx) + \int_{X_1} \int_{M_2^*} (1 - e^{-\eta(f)}) \tilde{P}_x(d\eta) \mu(dx) \\ &\quad + \int_{M_1^*} \int_{M_2^*} (1 - e^{-\eta(f)}) \pi(\mu, d\eta) \tilde{P}_1(d\mu) \end{aligned}$$

Posons :

$$\alpha_2(\cdot) = \int_{X_1} \alpha_x(\cdot) \alpha_1(dx)$$

et

$$\tilde{P}_\mu(\cdot) = \int_{X_1} \tilde{P}_x(\cdot) \alpha_1(dx) + \int_{\mathbb{M}_1^*} \pi(\mu, \cdot) \tilde{P}_1(d\eta) .$$

Puisque $\psi_2(\cdot)$ est une \mathcal{F} .Log. , il s'ensuit que α_2 est nécessairement une mesure de Radon et que $\int (1 - e^{-\eta(B)}) \tilde{P}_2(d\eta)$ est finie pour tout B de \mathfrak{B}_2 . On a donc la représentation canonique de P_2 comme loi indéfiniment divisible.

Nous donnons maintenant un critère d'existence qui est un corollaire de la proposition III.18.

III.21. Proposition

Soit π un générateur de clustering indéfiniment divisible satisfaisant aux hypothèses de mesurabilité de la proposition III.18. et P_1 une loi du 1^{er} ordre sur $(\mathbb{M}_1, \mathfrak{M}_1)$. Une condition suffisante pour que le processus de clustering (P_1, π) existe est que l'on ait :

$$\int_{X_1} \psi(x, f) \nu_1(dx) < +\infty \quad , \quad f \in C_{2K}^+ .$$

Démonstration

On a :

$$\int_{X_1} \psi(x, f) \nu_1(dx) = \int_{\mathbb{M}_1} \int_{X_1} \psi(x, f) \mu(dx) P_1(d\mu) ,$$

et donc la condition assure que $\int_{X_1} \psi(x, f) \mu(dx)$ est finie pour P_1 -presque tout μ .

Nous allons donner un autre corollaire de la proposition III.18. dans le cas particulier où $X_1 = \mathbb{R}^d$. Dans cet énoncé nous utiliserons l'espace \mathcal{S} des fonctions indéfiniment différentiables telles que :

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} |x|^k \partial^p f(x) = 0 \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad , \quad p \in \mathbb{N}^d$$

où $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $|x|^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2$.

Nous notons d'autre part \mathcal{S}' le sous-espace de \mathcal{M} constitué des mesures tempérées, c'est-à-dire des mesures μ de \mathcal{M} vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad , \quad \int_X \frac{\mu(dx)}{(1+|x|^2)^k} < +\infty .$$

III.22. Proposition

Soit π un générateur de clustering indéfiniment divisible défini sur $X_1 = \mathbb{R}^d$ à valeurs dans X_2 et satisfaisant aux hypothèses de mesurabilité de la proposition III.18. . Supposons en outre que pour tout f de C_{2K}^+ , l'application $x \rightarrow \psi(x, f)$ est dans \mathcal{S} . Une condition suffisante pour que le processus de clustering (P_1, π) existe est que P_1 soit concentrée sur \mathcal{S}' .

Démonstration

La condition énoncée a pour conséquence que, pour tout f de C_{2K}^+ , $\psi(\mu, f)$ est finie pour P_1 -presque tout μ .

Nous présentons maintenant un autre critère pour l'existence du processus de clustering.

III.23. Proposition

Soit π un générateur de clustering indéfiniment divisible défini sur X_1 à valeurs dans X_2 et tel que pour tout f de C_{2K}^+ l'application $x \rightarrow \psi(x, f)$ soit élément de C_{1K}^+ . Le processus de clustering (P_1, π) est alors défini pour toute loi primaire P_1 . De plus, lorsque P_1 est indéfiniment divisible P_2 l'est aussi.

Démonstration

Montrons que pour tout μ de \mathbb{M}_1 , $\psi(\mu, \cdot)$ est une \mathcal{F} .Log. . Nous le faisons d'abord dans le cas où μ est bornée et déduisons ensuite le résultat dans le cas général.

Pour toute mesure μ bornée, il existe une suite de mesures bornées (μ_n) à supports finis qui converge vaguement vers μ (cf. par ex. Bourbaki, Integ. ch.III, §2, n°3, cor.3). On a donc pour tout f de C_{2K}^+ :

$$\lim_n \int \psi(x, f) \mu_n(dx) = \int \psi(x, f) \mu(dx) = \psi(\mu, f) .$$

D'autre part il résulte de l'infinie divisibilité des lois $\pi(x, \cdot)$ et du fait que les μ_n sont à support fini que les fonctionnelles $\int \psi(x, \cdot) \mu_n(dx)$ sont des \mathcal{F} .Log. . De plus on a :

$$\lim_{t \searrow 0} \psi(\mu, tf) = \lim_{t \searrow 0} \int \psi(x, tf) \mu(dx) = \int \lim_{t \searrow 0} \psi(x, tf) \mu(dx) = 0 ,$$

car pour tout x , $\psi(x, tf) \searrow 0$ lorsque $t \searrow 0$. Il s'ensuit (cf. lemme I.9.) que $\psi(\mu, \cdot)$ est une \mathcal{F} .Log.

Considérons une mesure de Radon non bornée et (K_n) une suite croissante de compacts de X_1 telle que $X_1 = \bigcup_n K_n$ et que tout compact K de X_1 soit inclus dans l'un des K_n . Pour tout n , notons μ_n la mesure définie par :

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap K_n) , A \in \mathcal{X}_1 .$$

La suite de mesures bornées (μ_n) converge vaguement vers μ et donc :

$$\lim_n \psi(\mu_n, f) = \psi(\mu, f) \quad , \quad f \in C_{2K}^+ .$$

La fonctionnelle $\psi(\mu, .)$ est limite simple de $\mathfrak{F}.\text{Log}.$. Le même argument que dans le cas des mesures bornées permet de conclure que $\psi(\mu, .)$ est une $\mathfrak{F}.\text{Log}.$.

Lorsque P_1 est indéfiniment divisible, pour tout n notons $P_1^{(n)}$ sa racine n -ème de convolution. $P_1^{(n)}$ admet comme $\mathfrak{F}.\text{Log}.$ associée $\frac{1}{n} \psi_1(\cdot)$. Le processus de clustering $(P_1^{(n)}, \pi)$ existe et la $\mathfrak{F}.\text{Log}.$ de sa loi secondaire $P_2^{(n)}$ est donnée par

$$\psi_2^{(n)}(f) = \frac{1}{n} \psi_1(\psi(\cdot, f)) = \frac{1}{n} \psi_2(\psi(\cdot, f)) \quad , \quad f \in C_{2K}^+ .$$

On en déduit que la loi secondaire P_2 associée au processus de clustering (P_1, π) admet une racine n -ème de convolution qui n'est autre que la loi associée à la $\mathfrak{F}.\text{Log}.$ $\psi_2^{(n)}(\cdot)$. P_2 est donc indéfiniment divisible.

Remarquons que le fait d'imposer aux applications $x \rightarrow \psi(x, f)$ d'être dans C_{1K}^+ signifie que, pour un élément B_2 de \mathfrak{B}_2 , la loi de la masse $\eta(B_2)$ pour la probabilité $\pi(\mu, .)$ ne dépend que de la masse de μ sur un compact de X_1 , mais ce compact peut dépendre de B_2 .

§3. - FONCTIONNELLES LOGARITHMIQUES ET CLUSTERING DANS $(\mathbb{M}_p, \mathcal{M}_p)$

Nous examinons quelques aspects de l'utilisation des \mathcal{F} .Log. dans l'étude des problèmes de clustering pour les processus ponctuels. Signalons tout de suite que le fait déterminant est que les probabilités $\pi(\mu, \cdot)$ qui interviennent ici sont des produits de convolution dénombrables de lois $\pi(x, \cdot)$. Nous nous limitons ici au cas où les lois $\pi(x, \cdot)$ sont des lois sur $(\mathbb{M}_{p2}, \mathcal{M}_{p2})$ bien que, tous les résultats énoncés, à l'exception du théorème III.30., sont valables dans le cas de l'espace $(\mathbb{M}_2, \mathcal{M}_2)$.

Nous commençons par donner pour les mesures de \mathbb{M}_1 , un critère d'appartenance à D_{π}^1 en termes de \mathcal{F} .Log. .

III.24. Lemme

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans X_2 et pour tout x de X_1 , $\psi(x, \cdot)$ la \mathcal{F} .Log. associée à la loi $\pi(x, \cdot)$ sur $(\mathbb{M}_{p2}, \mathcal{M}_{p2})$. Pour toute mesure μ de \mathbb{M}_{p1} la probabilité $\pi(\mu, \cdot) = \sum_{\{x, \mu(x) > 0\}} \pi(x, \cdot)^{* \mu(x)}$ est définie si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

- i) $\int_{X_1} \psi(x, f) \mu(dx) < +\infty$, $f \in C_{2K}^+$
- ii) $\int_{X_1} \psi_B(x, \lambda) \mu(dx) < +\infty$, $\lambda \geq 0$, $B \in \mathcal{B}_2$.

Lorsqu'elle est définie, $\pi(\mu, \cdot)$ admet comme \mathcal{F} .Log. :

$$\psi(\mu, f) = \int_{X_1} \psi(x, f) \mu(dx) , f \in \mathcal{F}_{2+} .$$

Démonstration

Soit $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{x_i}$ une mesure de \mathbb{M}_1 . Si $\pi(\mu, \cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi(x_i, \cdot)^{\alpha_i}$ est définie, alors $\pi(\mu, \cdot)$ est limite étroite des probabilités $\sum_{i=1}^n \pi(x_i, \cdot)^{\alpha_i}$ et par suite, pour tout f de C_{2K}^+ , sa \mathcal{F} .Log. vérifie :

$$\psi(\mu, f) = \lim_n \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(x_i, f) = \int_{X_1} \psi(x, f) \mu(dx) .$$

L'égalité se prolonge ensuite aux fonctions de \mathcal{F}_{2+} par un argument de classe monotone, et donc i) est vérifiée.

Supposons maintenant que i) soit vérifiée et posons pour tout f de \mathcal{F}_2^+ :

$$\psi(\mu, f) = \int_{X_1} \psi(x, f) \mu(dx) .$$

La fonctionnelle ainsi définie est nécessairement une \mathcal{F} .Log. car elle est limite de la suite de \mathcal{F} .Log. $\sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(x_i, \cdot)$ et vérifie, pour tout f de C_{2K}^+ , (cf. lemme I.9.) :

$$\lim_{t \searrow 0} \psi(\mu, tf) = \lim_{t \searrow 0} \int_{X_1} \psi(x, tf) \mu(dx) = 0 .$$

La probabilité associée à la \mathcal{F} .Log. $\psi(\mu, \cdot)$ est donc limite étroite des probabilités $\sum_{i=1}^n \pi(x_i, \cdot)^{\alpha_i}$; c'est dire que la probabilité $\sum_{i=1}^{\infty} \pi(x_i, \cdot)^{\alpha_i}$ est définie et admet $\psi(\mu, \cdot)$ comme \mathcal{F} .Log. .

L'équivalence de i) et ii) peut être montrée simplement. Si f est une fonction de C_{2K}^+ , on a :

$$\psi(x, f) \leq \psi(x, \alpha 1_{K_f}) \quad \text{où } \alpha = \sup_{x \in X} f(x) \text{ et } K_f \text{ est le support de } f ,$$

d'où :

$$\psi(x, f) \leq \psi_{K_f}(x, \alpha) .$$

D'autre part si B est un élément de \mathfrak{B}_2 , il existe une fonction f de C_{2K}^+ telle que $1_B \leq f$. Il en résulte :

$$\psi_B(x, \lambda) = \psi(x, \lambda 1_B) = \psi(x, \lambda f) \quad , \quad \lambda \geq 0 .$$

On a comme conséquence de ce lemme, la proposition :

III.25. Proposition

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans X_2 et P_1 une probabilité sur $(\mathbb{M}_{p_1}, \mathfrak{M}_{p_1})$. Le processus de clustering (P_1, π) existe si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

$$(III.21) \quad \text{i) pour tout } f \text{ de } C_{2K}^+ , P_1(\{ \int_{X_1} \psi(x, f) \mu(dx) < +\infty \}) = 1$$

$$(III.22) \quad \text{ii) pour tout } B \text{ de } \mathfrak{B}_2 \text{ et tout } \lambda \geq 0 , P_1(\{ \int_{X_1} \psi_B(x, \lambda) \mu(dx) < +\infty \}) = 1$$

Lorsque le processus de clustering (P_1, π) existe, la loi secondaire P_2 admet comme \mathfrak{F} .Log. :

$$(III.23) \quad \psi_2(f) = \psi_1(\psi(\cdot, f)) \quad , \quad f \in \mathfrak{F}_2^+ .$$

Démonstration

Remarquons que l'application directe du lemme III.24. donne en fait le critère :

$$P_1(\{ \int_{X_1} \psi(x, f) \mu(dx) < +\infty \quad , \quad f \in C_{2K}^+ \}) = 1 .$$

En utilisant une famille dénombrable \mathcal{H}_0 de fonctions de C_{2K}^+ (cf. lemme III.19.) comme nous l'avons fait dans la démonstration de la proposition III.18. , on montre qu'on peut se ramener au critère i) .

De même, l'utilisation d'une famille dénombrable de compacts (K_n) croissant vers X_2 et telle que tout compact de X_2 soit inclus dans l'un des K_n permet de remplacer :

$$P_1(\{ \int_{X_1} \psi_B(x, \lambda) \mu(dx) , \lambda \geq 0 , B \in \mathcal{B}_2 \}) = 1$$

par le critère ii) .

La formule (III.23) est un cas particulier de (III.10).

Observons que la transformée logarithmique ψ d'une probabilité sur \mathbb{R}_+ vérifie, pour tout $\lambda > 0$ et $a \geq 1$, $\psi(a\lambda) \leq a\psi(\lambda)$. Il s'ensuit que le critère suivant est équivalent à celui donné par (III.22) :

$$(III.24) \quad \text{iii) pour tout } B \text{ de } \mathcal{B}_2 , P_1(\{ \int_{X_1} \psi_B(x, 1) \mu(dx) < +\infty \}) = 1 .$$

Les deux corollaires suivants sont les analogues des propositions III.22. et III.23. données pour le clustering dans (M, \mathcal{M}) .

III.26. Corollaire

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans X_2 tel que, pour tout f de C_{2K}^+ , l'application $x \rightarrow \psi(x, f)$ soit élément de C_{1K}^+ . Le processus de clustering (P_1, π) est alors défini pour toute loi primaire P_1 sur $(M_{p1}, \mathcal{M}_{p1})$. De plus si P_1 est indéfiniment divisible P_2 l'est aussi.

Dans l'énoncé qui suit \mathcal{S} et \mathcal{S}' désignent les espaces qui ont été définis pour la proposition III.22. .

III.27. Corollaire

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans X_2 tel que, pour tout f de C_{2K}^+ , l'application $x \rightarrow \psi(x, f)$ soit élément de \mathcal{S} . Une condition suffisante pour que le processus de clustering (P_1, π) existe est que P_1 soit concentrée sur $\mathcal{S}' \cap \mathbb{M}_{p1}$.

Le critère donné en (III.24.) fournit le corollaire suivant :

III.28. Corollaire

Soit π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans X_2 et P_1 une probabilité du 1^{er} ordre sur $(\mathbb{M}_{p1}, \mathcal{M}_{p1})$. Une condition suffisante d'existence du processus de clustering (P_1, π) est alors donnée par :

$$(III.25) \quad \int_{X_1} \psi_B(x, 1) \nu_1(dx) < +\infty, \quad B \in \mathcal{B}_2.$$

Il est intéressant de comparer ce critère avec les critères de même type, c'est-à-dire utilisant la mesure d'intensité de P_1 , donnés dans le paragraphe 1 (propositions III.2. et III.3) .

Puisque, pour tout x de X_1 , l'application $\lambda \rightarrow \psi_B(x, \lambda)$ est concave, on a :

$$\psi_B(x, 1) \leq \psi_B(x, 0),$$

soit :

$$\psi_B(x, 1) \leq \nu_x(B),$$

et donc :

$$\int_{X_1} \psi_B(x, 1) \nu_1(dx) \leq \int_{X_1} \nu_x(B) \nu_1(dx) \quad , \quad B \in \mathfrak{B}_2 .$$

Le critère donné en (III.25) est donc plus fin que celui de la proposition III.2.

Le lemme suivant nous permettra de montrer qu'il est par contre moins fin que celui donné dans la proposition III.3.

III.29. Lemme

Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ une probabilité sur \mathbb{N} de transformée de Laplace φ .
La fonction $\psi = -\text{Log } \varphi$ vérifie l'inégalité :

$$(III.26) \quad \psi(\lambda) \geq (1-p_0) (1-e^{-\lambda}) \quad , \quad \lambda \geq 0 .$$

Démonstration

Pour $p_0 = 1$, l'inégalité (III.26) est évidemment vérifiée. Supposons donc $p_0 < 1$ et posons $q = 1-p_0$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= p_0 + \sum_{n \geq 1} p_n e^{-n\lambda} = 1-q + q \sum_{n \geq 1} \frac{p_n}{q} e^{-n\lambda} \\ &= 1-q + q e^{-\lambda} \sum_{n \geq 1} \frac{p_n}{q} e^{-(n-1)\lambda} \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{p_n}{q} e^{-(n-1)\lambda} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{p_n}{q} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{p_n}{q} = 1 .$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &\leq 1-q(1-e^{-\lambda}) \\ \psi(\lambda) &\geq -\text{Log}(1-q(1-e^{-\lambda})) \geq q(1-e^{-\lambda}) . \end{aligned}$$

Il découle du lemme III.29. que, pour tout x de X_1 et tout B de \mathfrak{B}_2 , on a :

$$\psi_B(x,1) \geq \pi(x, \mu(B) > 0) (1 - e^{-1}) ,$$

et par suite :

$$\int_{X_1} \psi_B(x,1) \nu_1(dx) < +\infty \text{ implique } \int_{X_1} \pi(x, \mu(B) > 0) \nu_1(dx) < +\infty .$$

L'utilisation des \mathfrak{F} .Log. permet dans bon nombre de situations de retrouver de manière assez simple des résultats classiques de la théorie des processus de clustering. Nous en donnons deux exemples. Le premier est celui du "théorème de clustering" (cf. [28], th. 4.3.3.) :

III.30. Théorème

Soit P_1 une loi indéfiniment divisible sur $(M_{p1}, \mathfrak{M}_{p1})$ de mesure canonique associée \tilde{P}_1 et π un générateur de clustering défini sur X_1 à valeurs dans X_2 . Une condition nécessaire et suffisante pour que le processus de clustering (P_1, π) existe est que $\pi(\mu, \cdot)$ soit définie pour \tilde{P}_1 -presque tout μ et que la mesure \tilde{P}_2 définie par :

$$(III.27.) \quad \tilde{P}_2(\cdot) = \int_{M_{p1}^*} \pi(\mu, \cdot \setminus \{0\}) \tilde{P}_1(d\mu)$$

vérifie la condition $\int_{M_{p2}^*} (1 - e^{-\eta(B)}) \tilde{P}_2(d\eta) < +\infty$, $B \in \mathfrak{B}_2$. Alors P_2 est indéfiniment divisible et de mesure canonique associée \tilde{P}_2 .

Démonstration

Observons tout d'abord que, si P est une loi sur \bar{R}_+ de trans-

formée logarithmique $\psi(\lambda) = -\text{Log } \varphi(\lambda) = -\text{Log} \int_{[0, \infty[} e^{-\lambda x} P(dx)$, l'existence d'un $\lambda > 0$ tel que $\psi(\lambda) = \infty$ implique que P n'est autre que δ_∞ et $\psi(\lambda) = \infty$, $\lambda \geq 0$.

Lorsque le processus de clustering (P_1, π) existe, la \mathfrak{F} .Log. associée à ψ_2 est donnée par :

$$\psi_2(f) = \psi_1(\psi(\cdot, f)) = \int_{\mathbb{M}_1^*} (1 - e^{-\psi(\mu, f)}) \tilde{P}_1(d\mu) \geq \tilde{P}_1(M_f),$$

où $M_f = \{\mu \in \mathbb{M}_1, \psi(\mu, f) = \infty\}$. Compte tenu de la remarque ci-dessus on peut écrire pour tout $\lambda \geq 0$

$$M_f = \{\mu \in \mathbb{M}_1, \psi_f(\mu, 1) = \infty\} = \{\mu \in \mathbb{M}_1, \psi_f(\mu, \lambda) = \infty\} = M_{\lambda f}.$$

Par suite, on a, pour tout $\lambda \geq 0$, $\psi_{2f}(\lambda) = \psi_2(\lambda f) \geq \tilde{P}_1(M_f)$.

On en déduit que lorsque $\tilde{P}_1(M_f) = a > 0$, $\psi_{2f}(\cdot)$ ne peut pas être une transformée logarithmique. On a donc $\tilde{P}_1(M_f) = 0$ et l'utilisation de la classe \mathfrak{H}_0 du lemme I.19. permet de conclure $\tilde{P}_1(\bigcup_{f \in \mathbb{C}_{2K}^+} M_f) = 0$.

L'ensemble des μ pour lesquels $\psi(\mu, \cdot)$ ne définit pas une \mathfrak{F} .Log. est un ensemble de \tilde{P}_1 -mesure nulle ; de plus on a :

$$\begin{aligned} \psi_2(f) &= \int_{\mathbb{M}_1^*} (1 - e^{-\psi(\mu, f)}) \tilde{P}_1(d\mu) = \int_{\mathbb{M}_1^*} (1 - \varphi(\mu, f)) \tilde{P}_1(d\mu) \\ &= \int_{\mathbb{M}_1^*} \int_{\mathbb{M}_2^*} (1 - e^{-\eta(f)}) \pi(\mu, d\eta) \tilde{P}_1(d\mu), \quad f \in \mathbb{C}_{2K}^+. \end{aligned}$$

On constate que la mesure \tilde{P}_2 donnée par (III.27.) est bien la mesure canonique associée à la représentation de P_2 comme loi indéfiniment divisible.

Réciproquement supposons les conditions de la proposition vérifiées et

considérons la \mathfrak{F} .Log. $\psi_2(\cdot)$ définie par :

$$\begin{aligned} \psi_2(f) &= \int (1 - e^{-\eta(f)}) \tilde{P}_2(d\eta) = \int_{\mathbb{M}_2^*} \int_{\mathbb{M}_1^*} (1 - e^{-\eta(f)}) \pi(\mu, d\eta) \tilde{P}_1(d\mu) \\ &= \int (1 - e^{-\psi(\mu, f)}) \tilde{P}_1(d\mu) = -\text{Log} \int e^{-\psi(\mu, f)} P_1(d\mu) \geq -\text{Log}(1 - P_1(M_f)) . \end{aligned}$$

Si $P_1(M_f) = a > 0$, on en déduira de la même façon que ci-dessus que $\psi_{2f}(\cdot)$ ne peut pas être une transformée logarithmique. On a donc $P_1(M_f) = 0$, $f \in C_{2K}^+$, et l'existence du processus de clustering (P_1, π) est assurée.

Nous nous intéressons maintenant à la continuité des générateurs de clustering.

Un générateur de clustering π défini sur X_1 à valeurs dans X_2 est dit continu lorsque l'application $x \rightarrow \pi(x, \cdot)$ de X_1 dans l'ensemble des probabilités sur $(\mathbb{M}_{p_2}, \mathcal{M}_{p_2})$ est continue pour la topologie étroite.

Nous donnons en utilisant la méthode des \mathfrak{F} .Log. une démonstration simple du résultat classique suivant (cf. par exemple [28], prop. 4.7.1.) .

III.31. Proposition

Soit π un générateur de clustering continu défini sur X_1 à valeurs dans X_2 , $(P_1^{(n)})$ une suite de probabilités sur $(\mathbb{M}_{p_1}, \mathcal{M}_{p_1})$ convergeant étroitement vers P_1 . S'il existe un élément B de \mathcal{B}_1 tel que :

$$P_1^{(n)}(\{\mu(X_1 \setminus B) > 0\}) = 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad ,$$

alors les processus de clustering (P_1, π) , $(P_1^{(n)}, \pi)$, $n \in \mathbb{N}$, existent et la suite de lois secondaires $(P_2^{(n)})$ converge étroitement vers P_2 .

Démonstration

Remarquons tout d'abord que, puisque les $P_1^{(n)}$ sont concentrées sur un ensemble de mesures finies, les processus de clustering $(P_1^{(n)}, \pi)$ existent. Montrons qu'il en est de même pour (P_1, π) .

Il est possible de trouver un ouvert borné G tel que $B \subset G$ et de montrer que $P_1(\mu(\partial G) > 0) = 0$. Il s'ensuit alors que les probabilités $P_1^{(n)} = {}_G P_1^n$ convergent étroitement vers ${}_G P_1$ (cf. [28], 3.1.11.), où, rappelons-le, ${}_G P$ désigne la loi image de P par l'application $\mu \rightarrow {}_G \mu$ et ${}_G \mu$ est la mesure définie par :

$${}_G \mu(A) = \mu(A \cap G) \quad , \quad A \in \mathfrak{X} .$$

On a donc $P_1 = {}_G P_1$ et par suite l'existence du processus de clustering (P_1, π) .

Remarquons que la continuité du générateur de clustering π est équivalente à la continuité des applications $x \rightarrow \psi(x, f)$, f parcourant C_{2K}^+ . D'autre part le fait qu'une loi P satisfasse à $P = {}_G P$ implique que sa \mathfrak{X} .Log. vérifie :

$$\psi(f) = \psi(1_G \cdot f) \quad , \quad f \in \mathfrak{X}^+ .$$

On a donc, pour tout f de C_{2K}^+ :

$$\psi_2^{(n)}(f) = \psi_1^{(n)}(\psi(\cdot, f)) = \psi_1^{(n)}(1_G(\cdot) \psi(\cdot, f)) ,$$

où, pour tout n , $\psi_1^{(n)}$ est la \mathfrak{X} .Log. associée à $P_1^{(n)}$.

La fonction $x \rightarrow 1_G(x) \psi(x, f)$ est bornée à support compact et n'a de points de discontinuité que sur ∂G . Il s'ensuit (cf. [20] lemme 4.4.) que $\psi_1^{(n)}(1_G(\cdot) \psi(\cdot, f))$ converge vers $\psi_1(1_G(\cdot) \psi(\cdot, f)) = \psi_1(\psi(\cdot, f)) = \psi_2(f)$.

La convergence étroite des $P_2^{(n)}$ vers P_2 est donc assurée.

La méthode des \mathfrak{F} .Log. présente un intérêt dans un certain nombre d'autres situations. En particulier, elle apporte parfois des solutions simples dans les problèmes liés aux opérations d'amincissement, de composition ou de translation. Signalons par exemple que l'invariance des processus de Poisson mélangés stationnaires pour l'opération de translation homogène est obtenue, par cette méthode, de manière immédiate.

§4. - EXEMPLES

Nous présentons ici deux modèles de clustering, le premier dans le cadre de (M_p, \mathcal{M}_p) , le second dans le cadre de (M, \mathcal{M}) .

4.1. Le processus de clustering Poisson-géométrique

Considérons la situation où, sur la droite réelle $X = \mathbb{R}$, une première génération de particules est distribuée selon la loi d'un processus de Poisson stationnaire de paramètre a . Supposons que, dans une deuxième étape, chaque particule de la première génération donne naissance à un certain nombre d'autres particules distribuées selon la loi d'un processus ponctuel de loi géométrique $Q(\gamma_x)$ (cf. def. II.4.) dont la mesure d'intensité γ_x dépend de la position x de la particule mère par :

$$\gamma_x = e^{-|x|} \cdot \gamma, \quad x \in X,$$

où γ est une mesure de Radon fixée. Ce choix est une modélisation possible dans le cas où une particule de la première génération a une descendance d'autant plus faible que sa position est éloignée de l'origine.

La situation que nous venons de décrire peut être représentée par un processus de clustering admettant comme \mathcal{F} .Log. associées à P_1 et $\pi(x, \cdot)$:

$$\psi_1(f) = \int (1 - e^{-f(y)}) a dy, \quad f \in C_K^+,$$

$$\psi(x, f) = -\text{Log} [1 + \int (1 - e^{-f(y)}) \gamma_x(dy)]^{-1}, \quad f \in C_K^+.$$

Le critère du corollaire III.28 permet de montrer que le processus de clustering (P_1, π) est bien défini. On a pour tout B de \mathcal{B} :

$$\int_X \psi_B(x, 1) \nu_1(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Log} [1 + (1 - e^{-1}) e^{-|x|} \gamma(B)] a dx \leq 2a(1 - e^{-1}) \gamma(B) < +\infty.$$

Observons que le critère de la proposition III.2. s'applique aussi. En effet, pour tout B de \mathfrak{B} , on a :

$$\int_X \nu_x(B) \nu_1(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \gamma(B) a dx = 2a \gamma(B) ,$$

on en déduit de plus que le moment d'ordre 1 de la loi secondaire est donné par :

$$\nu_2(B) = 2a \gamma(B) \quad , \quad B \in \mathfrak{B} .$$

Calculons la \mathcal{F} .Log. associée à la loi secondaire :

$$\begin{aligned} \psi_2(f) &= \psi_1(\psi(\cdot, f)) = \int_X (1 - e^{-\psi(x, f)}) a dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x|} \int (1 - e^{-f(y)}) \gamma(dy)}{1 + e^{-|x|} \int (1 - e^{-f(y)}) \gamma(dy)} a dx \\ &= -\text{Log} [1 + \int (1 - e^{-f(y)}) \gamma(dy)]^{-2a} \quad , \quad f \in C_K^+ , \end{aligned}$$

et donc la loi P_2 n'est autre que la loi $\mathfrak{M}(\gamma, 2a)$ dont les caractéristiques ont été étudiées au chapitre II.

4.2. Un modèle de clustering dans $(\mathbb{M}, \mathfrak{M})$

Le modèle de clustering suivant peut être considéré comme une tentative pour donner une approximation de certains phénomènes de diffusion.

Sur un premier espace $X_1 = \mathbb{R}$, nous considérons une mesure aléatoire presque-sûrement égale à la mesure de Lebesgue m , i.e. de loi P_1 vérifiant $P_1(\{m\}) = 1$. Nous nous donnons ensuite un générateur

de clustering construit à partir de l'idée intuitive suivante :

une "masse élémentaire" située en x engendre une masse aléatoire, de loi Q_x sur \mathbb{R}_+ , qui se répartit de manière uniforme sur l'intervalle $I_x = [x-a, x+a]$ de $X_2 = \mathbb{R}$, a étant un réel fixé.

Le générateur de clustering est en fait défini par :

$$\pi(x, \cdot) = \int_0^{\infty} \delta_{ym_x}(\cdot) Q_x(dy) ,$$

où m_x désigne la mesure sur X_2 définie par $m_x(A) = \frac{1}{2a} m(A \cap I_x)$, $A \in \mathcal{X}_2$.

Nous nous plaçons dans le cas particulier où Q_x est la loi exponentielle de paramètre b et donc ne dépend pas de x . Il s'ensuit que le générateur de clustering π est homogène.

La \mathcal{F} .l. associée à la loi $\pi_0 = \pi(0, \cdot)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \int_0^{\infty} \varphi_{\delta_{ym_0}}(f) b e^{-by} dy = \int_0^{\infty} e^{-ym_0(f)} b e^{-by} dy \\ &= \frac{b}{b+m_0(f)} , \quad f \in \mathcal{C}_{2K}^+ . \end{aligned}$$

Il est immédiat de vérifier que π_0 est indéfiniment divisible ; par suite le générateur π l'est aussi. D'autre part, pour tout x de X_1 , la \mathcal{F} .Log. associée à $\pi(x, \cdot)$ est donnée par :

$$\psi(x, f) = \text{Log} \left[1 + \frac{1}{b} m_x(f) \right] , \quad f \in \mathcal{C}_{2K}^+ ;$$

et on montre facilement que, pour tout f de \mathcal{C}_{2K}^+ , l'application $x \rightarrow \psi(x, f)$ est continue à support compact.

L'existence du processus de clustering (P_1, π) est donc assuré par la

proposition III.23. et la loi secondaire P_2 admet comme $\mathfrak{F}.$ Log. :

$$\psi_2(f) = \psi_1(\psi(\cdot, f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, f) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Log}[1+m_x(f)] dx \quad , f \in C_{2K}^+ .$$

Notons que P_2 est d'ordre 1 et de mesure d'intensité :

$$\nu_2(B) = \int_{X_1} \nu_x(B) \nu_1(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b} m_x(B) a dx = \frac{1}{b} m(B) .$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARNDORFF-NIELSEN, O. Negative binomial processes.
YEO, G.F. (1969) - J. Appl. Prob., 6, 633-647.
- [2] BARTLETT, M.S. Stochastic population models in ecology
and epidemiology.
(1960) - Methuen, London.
- [3] BARTLETT, M.S. The spectral analysis of point processes.
(1963) - J. Roy. Stat. Soc., B25, 264-296.
- [4] BARTLETT, M.S. An introduction to stochastic processes.
(1978) - (3rd edn.) Cambridge University Press.
- [5] BATES, G.E. Contribution to the theory of accident
NEYMAN, J. proneness. (1952) - Univ. of California
Publ. in Stat., 1, 215-276.
- [6] BLISS, C.I. The analysis of insects counts as nega-
tive binomial distributions.
(1956) - Proc. 10th Int. Congr. of
Entomology, Vol.2, 1015.
- [7] BOWEN, M.G. Population distribution of the beet
leafhopper in relation to experimental
field-plot layout.
(1947) - J. Agric. Res., 75, 259.
- [8] CLIFF, A.D. Spatial autocorrelation.
ORD, J.K. (1973) - Pion : London.
- [9] FELLER, W. An introduction to Probability Theory
and its Applications.
(1966) - Vol. 2, Wiley : New-York.

- [10] FLEISCHMANN, K. A continuity theorem for clustering.
(1979) - Litovsk. Mat. Sb.
- [11] GOLDMAN, J.R. Infinitely divisible point processes in R^r .
(1967) - Math. Anal. and Appl., 17, 133-14
- [12] GRANDELL, J. Doubly stochastic Poisson processes.
(1976) - Lect. Not. in Math., 529,
Springer-Verlag, Berlin.
- [13] GREGOIRE, G. On a class of branching processes.
(1977) - Recent Development in Statistics,
J.R. Barra and al. ed., North Holland,
345 - 351.
- [14] GREGOIRE, G. Lois géométriques et binomiales négatives
pour des vecteurs de dimension finie et des
processus ponctuels. (1979) - Séminaire de
Statistique de l'Université Scientifique et
Médicale de Grenoble, 175-198.
- [15] HARRIS, T.E. The theory of branching processes.
(1963) - Springer-Verlag : Berlin.
- [16] HENNEQUIN, P.L. Théorie des Probabilités et quelques
TORTRAT, A. Applications. (1965) - Masson éditeur Paris.
- [17] JAGERS, P. Aspects of random measures and point
processes. (1974) - Adv. in Prob. and
rel. topics, 3, P. Ney and S. Port ed.,
Marcel Dekker : New-York, 179-239.

- [18] JIRINA, M. Branching processes with measure-valued states. (1964) - 3rd Prague Conference on Information Theory, 333-357.
- [19] JIRINA, M. Asymptotic behaviour of measure-valued branching processes. (1966) - Rozpravy Ceskoslovenske Akad. Vede. Rada. Mat. Prirod. Ved. 76, n° 3, 1-52.
- [20] KALLENBERG, O. Random measures. (1976) - Academic Press, Londres-New-York-San Francisco.
- [21] KRICKEBERG, K. Processus ponctuels (1976) - Cours Polycopié, Universités Paris V, VI, VII.
- [22] KRICKEBERG, K. The Cox process. (1972) - Int. Nat. Alta. Mat., Symp. Math., 9, 151-167.
- [23] LEWIS, P.A.W. A branching Poisson process model for the analysis of computer failure patterns. (1964) - J. Roy. Stat. Soc., B26, 398-456.
- [24] LEWIS, P.A.W. Asymptotic properties and equilibrium conditions for branching Poisson processes. (1969) - J. Appl. Prob., 6, 355-371.
- [25] LEWIS, P.A.W. (ed.) Stochastic point processes : Statistical analysis, Theory and Applications. (1972) - Wiley : New-York.

- [26] LOEVE, M. Probability theory. Foundations, random sequences. (1961) - Van Nostrand and Co. , 2^e ed.
- [27] MATERN, B. Spatial Variation. Stochastic models and their applications to some problems in forest surveys and other sampling investigations. (1960) - Meddn. St. Skogsforskninst., 44, 1-1
- [28] MATTHES, K. Infinitely divisible point processes. (1978) - Wiley.
KERSTAN, J.
MECKE, J.
- [29] MOYAL, J.E. The general theory of stochastic population processes. (1962) - Acta Math., 108, 1-31.
- [30] NEVEU, J. Processus ponctuels. (1977) - Ecole d'Eté de Probabilités de St-Flour, Springer-Verlag.
- [31] NEYMAN, J. A stochastic model of epidemics. (1964) - Stochastic models in medicine and biology, J. Gurland ed. , Madison, Wisc. : Univ. of Wisc. Press.
SCOTT, E.L.
- [32] NEYMAN, J. Certain chance mechanisms involving discrete distributions. (1965) - Classical and contagious distributions, Pergamon Press.
SCOTT, E.L.
- [33] NEYMAN, J. Processes of clustering and applications. (1972) - Stochastic point process, Lewis ed. Wiley : New-York, 646-681.
SCOTT, E.L.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 9 juillet 1980

Le Président de la thèse

B. Valet

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 20.7.80

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

G. Cau

G. CAU

