



HAL
open science

Résolution numérique des équations des ondes longues dans un réseau de caractéristiques

Maria-Isabel Chenin-Mordoiovitch

► **To cite this version:**

Maria-Isabel Chenin-Mordoiovitch. Résolution numérique des équations des ondes longues dans un réseau de caractéristiques. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1980. Français. NNT : . tel-00292545

HAL Id: tel-00292545

<https://theses.hal.science/tel-00292545>

Submitted on 1 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

**Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble**

pour obtenir le grade de

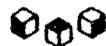
**DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
ANALYSE NUMÉRIQUE**

par

Maria-Isabel CHENIN - MORDOJOVICH



**RESOLUTION NUMERIQUE
DES EQUATIONS DES ONDES LONGUES
DANS UN RESEAU DE CARACTERISTIQUES**



Thèse soutenue le 26 juin 1980 devant la Commission d'Examen :

Président : Madame F. Chatelin

Examineurs : Messieurs N. Gastinel
C. Le Provost

Invités : Messieurs A. Preissmann
A. Temperville

UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

.../...

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophthysiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. CRABBE Pierre
SUNIER Jules

CERMO
Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1979-1980

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-Présidents : M. Georges LESPINARD

M. René PAUTHENET

PROFESSEURS DES UNIVERSITES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du Solide - Cristallographie
	BOIS Philippe	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Génie Chimique
	BONNIER Etienne	Métallurgie
	BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
	BRISSONNEAU Pierre	Physique des Matériaux
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CHARTIER Germain	Electronique
	CHERADAME Hervé	Chimie Physique Macromoléculaires
Mme	CHERUY Arlette	Automatique
MM.	CHIAVERINA Jean	Biologie, Biochimie, Agronomie
	COHEN Joseph	Electronique
	COUMES André	Electronique
	DURAND Francis	Métallurgie
	DURAND Jean-Louis	Physique Nucléaire et Corpusculaire
	FELICI Noël	Electrotechnique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Métallurgie Physique
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide - Cristallographie
	LACOUME Jean-Louis	Géographie - Traitement du Signal
	LANCIA Roland	Electronique - Automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire Corpusculaire
	MOREAU René	Mécanique
	MORET Roger	Physique Nucléaire Corpusculaire
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie - Physique
	PAUTHENET René	Physique du Solide - Cristallographie
	PERRET René	Automatique

.../...

MM.	PERRET Robert	Electrotechnique
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	POUPOT Christian	Electronique - Automatique
	RAMEAU Jean-Jacques	Chimie
	ROBERT André	Chimie Appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Electrotechnique
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie - Physique
Mme	SCHLENKER Claire	Physique du Solide - Cristallographie
MM.	TRAYNARD Philippe	Chimie - Physique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNÝ François	Electronique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maître de Recherche)

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)

E.N.S.E.E.G.

MM.	ALLIBERT Michel
	BERNARD Claude
	CAILLET Marcel
Mme	CHATILLON Catherine
MM.	COULON Michel
	HAMMOU Abdelkader
	JOUD Jean-Charles
	RAVAINE Denis
	SAINFORT

C.E.N.G.

MM. SARRAZIN Pierre
 SOUQUET Jean-Louis
 TOUZAIN Philippe
 URBAIN Georges

Laboratoire des Ultra-Réfractaires ODEILLO

E.N.S.M.E.E.

MM. BISCONDI Michel
 BOOS Jean-Yves
 GUILHOT Bernard
 KOBILANSKI André
 LALAUZE René
 LANCELOT Francis
 LE COZE Jean
 LESBATS Pierre
 SOUSTELLE Michel
 THEVENOT François
 THOMAS Gérard
 TRAN MINH Canh
 DRIVER Julian
 RIEU Jean

E.N.S.E.R.G.

MM. BOREL Joseph
 CHEHIKIAN Alain
 VIKTOROVITCH Pierre

E.N.S.I.E.G.

MM. BORNARD Guy
 DESCHIZEAUX Pierre
 GLANGEAUD François
 JAUSSAUD Pierre
 Mme JOURDAIN Geneviève
 MM. LEJEUNE Gérard
 PERARD Jacques

E.N.S.H.G.

M. DELHAYE Jean-Marc

E.N.S.I.M.A.G.

MM. COURTIN Jacques
 LATOMBE Jean-Claude
 LUCAS Michel
 VERDILLON André

à PATRICK
à ANNE-SOPHIE

*Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe
d'Analyse Numérique du Laboratoire d'Informatique
et de Mathématiques Appliquées de Grenoble*

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à

*Monsieur le Professeur N. GASTINEL qui a bien voulu m'accueillir
dans l'équipe d'Analyse Numérique et diriger ce travail.*

*Madame F. CHATELIN pour ses marques d'encouragement et pour avoir
accepté la présidence du jury.*

*Monsieur A. PREISSMANN pour avoir accepté de faire partie du jury
et pour l'intérêt qu'il a porté à cette étude.*

*Messieurs C. LE PROVOST et A. TEMPERVILLE de l'Institut de Mécanique
de Grenoble pour leur participation au jury, leur intérêt
vis-à-vis de mon travail et leurs remarques lors de la
rédaction de ce texte.*

J'exprime toute ma reconnaissance à

*Monsieur le Professeur J. KRAVTCHEKNO pour les communications
personnelles dont il m'a fait l'honneur.*

Je remercie amicalement

*Melio SAENZ pour l'enthousiasme qu'il a montré pour ce sujet quand
je l'ai abordé*

*Claire DISCRESCENZO, André EBERHARD et G. ROUGIER pour l'aide qu'ils
m'ont donnée lors de la mise en oeuvre de mes programmes*

*Madame M. TREVISAN pour la qualité de son travail de dactylographie
effectué dans un court délai et les membres du Service de
Reprographie qui auront contribué à son impression.*

Je tiens enfin à exprimer toute ma sympathie

aux membres de l'Equipe d'Analyse Numérique.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION -----	1
PREMIERE PARTIE : LE PROBLEME A UNE VARIABLE D'ESPACE	
CHAPITRE I : LA METHODE DE MASSAU -----	7
I.1. : Les équations des ondes longues -----	7
I.2. : Le problème unidimensionnel -----	8
a) La géométrie du bassin	
b) Les conditions initiales	
c) Les conditions aux limites	
d) Les équations	
I.3. : Les courbes et relations caractéristiques -----	10
a) Le problème de Cauchy	
b) Les courbes caractéristiques	
c) Les relations caractéristiques	
d) Domaines de définition, de dépendance, d'influence	
I.4. : La transformation Hodographe -----	13
a) La transformation hodographe	
b) Les frontières dans le nouveau système de coordonnées	
c) Les équations, les conditions initiales et aux limites dans le nouveau système de référence -----	15
I.5. : La discrétisation. La méthode de Massau -----	17
a) Notations	
b) La discrétisation	

CHAPITRE II : LA STABILITE DANS LE DOMAINE DE DEFINITION DES CONDITIONS INITIALES -----	21
II.1. : Les espaces des fonctions et leurs normes. Définition de la stabilité -----	21
a) Les espaces normés	
b) Définitions de stabilité	
II.2. : Le procédé de calcul. Notations. Les matrices A et B -	23
II.3. : Quelques propriétés des matrices A et B : Proposition I	25
II.4. : Etude de $ A^n \Delta w^n $ -----	30
II.5. : Définition de l'ensemble $\Phi_{\theta, \epsilon}$. Proposition II -----	33
II.6. : Etude de $ A^n \Delta \Delta w^n $ -----	36
II.7. : Théorème de stabilité -----	40
II.8. : Généralisation du théorème -----	44
II.9. : Difficultés de l'étude de la stabilité au-delà du domaine de définition des conditions initiales -----	49
a) Le problème	
b) La méthode utilisée	
c) Le cas de la réflexion totale	
 CHAPITRE III : EXPERIENCES NUMERIQUES -----	 55
III.1. : Introduction -----	55
III.2. : Les programmes -----	55
III.3. : Les résultats numériques -----	58
a) La solution exacte de Temperville	
b) Les résultats numériques avec une condition de perméabilité	
c) Les résultats numériques avec une condition de réflexion	

DEUXIEME PARTIE : LE PROBLEME A DEUX VARIABLES D'ESPACE

CHAPITRE IV : SUR LES METHODES DE CARACTERISTIQUES A DEUX VARIABLES

D'ESPACE -----	75
IV.1. : Les surfaces et relations caractéristiques -----	75
a) Généralités	
b) Interprétation géométrique du système totalement hyperbolique	
IV.2. : Application aux équations des ondes longues -----	79
a) Le problème	
b) Les deux familles de surfaces caractéristiques	
c) Les relations caractéristiques	
d) Domaines de dépendance, d'influence et de définition	
e) Conditions aux limites	
IV.3. : Les méthodes de calcul à maillage régulier qui utilisent les caractéristiques -----	90
a) Les méthodes de bicaractéristiques	
b) Les méthodes du plan de référence	
IV.4. : Les méthodes de calcul dans un réseau de caractéristiques	95
a) Généralités	
b) Une méthode particulière	
IV.5. : Condition de stabilité de COURANT-FRIEDRICHS et LEWY	
Conclusions -----	107
a) La condition de COURANT-FRIEDRICHS et LEWY	
b) Conclusions	

INTRODUCTION

Ce travail porte essentiellement sur les méthodes de caractéristiques appliquées aux équations des ondes longues.

Les équations des ondes longues ou équations de Saint-Venant constituent un système quasilinéaire totalement hyperbolique de trois équations et trois variables indépendantes.

Dans notre étude nous ne nous occupons pas des conditions d'existence d'une solution. Nous utilisons le théorème de Cauchy-Kowalewski d'existence d'une solution analytique dans un voisinage d'une surface non caractéristique avec des conditions de Cauchy analytiques. Nous utilisons aussi des résultats de Friedrichs et Lewy [15], [16] pour des conditions de Cauchy assez régulières. On peut trouver des résultats plus généraux dans le cours de Nishida [22] et dans les références que cet auteur donne.

En fait, cette étude a été motivée en juin 1978 à l'occasion d'un séminaire réalisé à l'Institut de Mécanique de Grenoble par M.Y. Biollay. Dans cet exposé M.Y. Biollay proposa une nouvelle méthode de calcul de la solution des équations des ondes longues. Cette méthode qui a été conçue par M.J. Kravtchenko et par M.Y. Biollay, est une méthode de calcul sur un réseau de surfaces caractéristiques.

Dans la mesure où, a priori, cette méthode est d'une programmation délicate, on s'est intéressé d'abord à une étude sur la possibilité de convergence de la méthode.

Pour mener cette étude à bien, nous avons considéré dans une première partie le problème à une variable d'espace. Après un premier chapitre dans lequel on pose le problème à une variable d'espace et la méthode de Massau correspondante [2] , qui est une méthode de calcul sur un réseau de courbes caractéristiques ; on étudie, dans un deuxième chapitre, la stabilité de cette méthode dans un sens particulier[2] , [17].

On montre qu'à partir de deux conditions initiales "voisines" (en un certain sens) on obtient dans le domaine de définition deux solutions voisines. La démonstration de ce résultat suit la démarche de Friedrichs et Lewy [15] et complète dans le cas des ondes longues l'étude de Cosnier [8] . Bien que dans leur article, Friedrichs et Lewy aient pour but de démontrer un théorème d'existence particulier pour des problèmes hyperboliques, ils montrent pratiquement, au passage, la stabilité de la méthode de Massau. Nous avons détaillé cette démonstration dans le cas des équations des ondes longues en précisant le domaine dans lequel la méthode est stable.

D'autre part, nous avons programmé la méthode (cf. chapitre III). La mise en oeuvre de la méthode nous a conduit à l'écriture d'un ensemble de programmes d'environ six cents instructions. Les difficultés de programmation proviennent des interpolations nécessaires à l'utilisation des résultats : en effet, la méthode de Massau, consistant à écrire un schéma aux différences dans le plan de variables caractéristiques, il est nécessaire (et relativement coûteux par rapport au temps de calcul de la solution) de réaliser des interpolations pour évaluer la solution en fonction des coordonnées spatio-temporelles.

Nous avons comparé nos résultats numériques à la solution exacte d'un problème particulier exhibée par A. Temperville [28] Les résultats obtenus sont satisfaisants.

Dans la deuxième partie, après avoir rappelé des généralités sur les surfaces et relations caractéristiques, dans le cas à deux variables d'espace, on décrit les méthodes de calcul sur un maillage régulier qui utilisent les caractéristiques ainsi que la méthode de calcul dans un maillage de caractéristiques. Un exemple de non convergence et des remarques sur la condition de COURANT-FRIEDRICHS et LEWY [10] suggèrent quelques modifications pour que la méthode dans un réseau de caractéristiques puisse être stable. Les études antérieures nous ont convaincus de l'intérêt de ce type de méthodes pour un certain nombre de problèmes (chocs, discontinuités) malgré les difficultés évidentes de leur mise en oeuvre.

PREMIÈRE PARTIE

LE PROBLÈME À UNE VARIABLE D'ESPACE

CHAPITRE ILA MÉTHODE DE MASSAU [2] , [8]I.1. - LES EQUATIONS DES ONDES LONGUES

On considère un bassin occupé par une masse d'eau en mouvement. Nous choisissons un repère orthonormé d'axes OX et OY dans le plan de la surface du liquide au repos et d'axe OZ orienté selon la verticale ascendante.

Le fond du bassin a pour équation :

$$(1.1) \quad z = - h(x,y)$$

On admet :

- que la fonction h est suffisamment régulière et que $\text{grad}(h)$ est petit en norme ;
- que la masse d'eau vérifie les hypothèses des ondes longues, c'est-à-dire que :
 - a) le vecteur vitesse de toute particule d'eau est horizontale ;
 - b) la dérivée $\frac{\partial v}{\partial z}$ est nulle.

On a alors une répartition hydrostatique de la pression et il est possible de décrire le mouvement du liquide au moyen de la côte $z(x,y,t)$ de la surface libre et des composantes horizontales $u(x,y,t)$ et $v(x,y,t)$ de la vitesse.

Les équations, dites de Saint Venant, décrivant un tel mouvement sont les équations des ondes longues, qui peuvent être déduites des équations de Navier-Stokes [27]. Ces équations sont :

$$(1.2) \left\{ \begin{array}{l} (z+h)_t + (z+h)u_x + u(z+h)_x + (z+h)v_y + v(z+h)_y = 0 \\ u_t + u u_x + g(z+h)_x + v u_y = g h_x + fv - C \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{(z+h)} u \\ v_t + u v_x + v v_y + g(z+h)_y = g h_y - fu - C \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{(z+h)} v \end{array} \right.$$

où :

- les lettres en indices indiquent la variable par rapport à laquelle est prise la dérivée partielle première,
- g est la constante de gravité,
- f est la force de Coriolis,
- C est une constante due au frottement du liquide sur le fond.

Les équations des ondes longues (1.2) forment un système hyperbolique quasi-linéaire du premier ordre. (Pour plus de détails, voir chapitre IV).

I.2. - Le problème unidimensionnel

a) La géométrie du bassin

Dans la suite, on étudiera les équations des ondes longues, sans force de Coriolis, dans le cas où le bassin est un canal de longueur L et de largeur infinie.

On oriente l'axe OX dans le sens de la longueur et on place l'origine à l'amont du canal.

On suppose, en plus, que le fond est indépendant de y :

$$(2.1) \quad h(x,y) = h(x)$$

b) Les conditions initiales

On se donne les conditions initiales (de Cauchy) pour $x \in [0,L]$:

$$(2.2) \quad \begin{cases} u(x,y,0) = \tilde{\phi}_1(x) \\ z(x,y,0) = \tilde{\phi}_2(x) \end{cases}$$

On impose aux conditions initiales la propriété (2.3) suivante qui sera justifiée au paragraphe II.3, relatif à la stabilité :

$\exists \theta, 0 \leq \theta < 1$ tel que $\forall x \in [0,L]$

$$(2.3) \quad \begin{cases} |2\sqrt{gh(x)} - (\tilde{\phi}_1(x) + 2\sqrt{g(h(x) + \tilde{\phi}_2(x))})| \leq \theta \sqrt{gh(x)} \\ |-2\sqrt{gh(x)} - (\tilde{\phi}_1(x) - 2\sqrt{g(h(x) + \tilde{\phi}_2(x))})| \leq \theta \sqrt{gh(x)} \end{cases}$$

c) Les conditions aux limites

On se donne des conditions aux limites compatibles avec les conditions initiales :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \tilde{H}_1(u(0,y,t), z(0,y,t), t) = 0 \\ \tilde{H}_2(u(L,y,t), z(L,y,t), t) = 0 \end{cases} \quad \text{et}$$

d) Les équations

Les conditions précédentes entraînent que le mouvement est "plan", c'est-à-dire indépendant de y . Les équations (1.2) se réduisent à

$$(2.5) \quad \begin{cases} (z+h)_t + (z+h)u_x + u(z+h)_x = 0 \\ u_t + u u_x + g(z+h)_x = gh_x - C \frac{|u| u}{(z+h)} \end{cases}$$

Ce système est de deux équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes x et t et deux fonctions inconnues $(z+h)$ et u .

Matriciellement :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+h \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} u & (z+h) \\ g & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+h \\ u \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ gh_x - \frac{C|u|u}{(z+h)} \end{bmatrix}$$

ou

$$(2.5)' \quad w_t + A w_x = b$$

I.3. - Les courbes et relations caractéristiques

a) Le problème de Cauchy

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 dans lequel la solution de (2.5) existe (pour des conditions initiales et aux limites données).

Soit $P \in \Omega$ et C un arc de courbe régulier qui passe par P , paramétré par η d'équation $x(\eta), t(\eta)$ où η parcourt un intervalle de \mathbb{R} .

\dot{x} et \dot{t} indiquent les dérivées de x et t par rapport à η .

Si on pose pour C le problème de Cauchy, à savoir résoudre le système (2.5) dans un voisinage de P , u et z étant donnés sur C , on a que la quantité :

$$(3.1) \quad \frac{dw}{d\eta} = \dot{x} w_x + \dot{t} w_t$$

est connue sur C . On veut déterminer w_x et w_t sur C . Si $\dot{t}(\eta)$ est non nul sur C on peut écrire le système (2.5) sous la forme :

$$\frac{1}{\dot{t}} \frac{dw}{d\eta} - \frac{\dot{x}}{\dot{t}} w_x + A w_x = b$$

ou encore

$$(3.2) \quad \left(A - \frac{\dot{x}}{t} I\right) w_x = -\frac{1}{t} \frac{dw}{d\eta} + b$$

Le problème de Cauchy n'admettra pas de solution pour toute donnée w sur C si \dot{x}/t est valeur propre de A [9] c'est-à-dire pour \dot{x}/t égale à :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \lambda_1 = u + \sqrt{g(h+z)} \\ \lambda_2 = u - \sqrt{g(h+z)} \end{cases} \quad \text{ou a}$$

b) Les courbes caractéristiques

Si \dot{x}/t égale λ_1 ou λ_2 sur tout C on dit que C est une courbe caractéristique. Pour $i = 1, 2$, soit C^i la courbe caractéristique qui passe par P associée à la valeur propre λ_i . On remarque que λ_i est la valeur de la pente dx/dt de C^i en P . Soit ℓ_i^t le vecteur propre gauche de A associé à λ_i . Pour que le problème de Cauchy pour la courbe C^i admette une solution, c'est nécessaire que [9].

$$(3.4) \quad \ell_i^t \left(-\frac{1}{t} \frac{dw}{d\eta} + b \right) = 0$$

c) Les relations caractéristiques

On appelle (3.4) la relation caractéristique sur C^i .

Il est immédiat que

$$(3.5) \quad \begin{cases} \ell_1^t = (g, \sqrt{g(z+h)}) \\ \ell_2^t = (-g, \sqrt{g(z+h)}) \end{cases}$$

et que les relations caractéristiques sont :

$$(3.6) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{g(z+h)}} \frac{g d(z+h)}{d\eta_1} + \frac{du}{d\eta_1} = \left(g h_x - \frac{C|u|u}{z+h} \right) \frac{dt}{d\eta_1} \\ -\frac{1}{\sqrt{g(z+h)}} \frac{g d(z+h)}{d\eta_2} + \frac{du}{d\eta_2} = \left(g h_x - \frac{C|u|u}{z+h} \right) \frac{dt}{d\eta_2} \end{cases}$$

ou encore

$$(3.7) \quad \begin{cases} \frac{d}{d\eta_1} (u + 2\sqrt{g(z+h)}) = \left(g h_x - \frac{C|u|u}{z+h} \right) \frac{dt}{d\eta_1} \\ \frac{d}{d\eta_2} (u - 2\sqrt{g(z+h)}) = \left(g h_x - \frac{C|u|u}{z+h} \right) \frac{dt}{d\eta_2} \end{cases}$$

d) Domaine de définition des conditions initiales

On appelle domaine de définition des conditions initiales la région de $X \times T$ où la solution ne dépend que des conditions initiales.

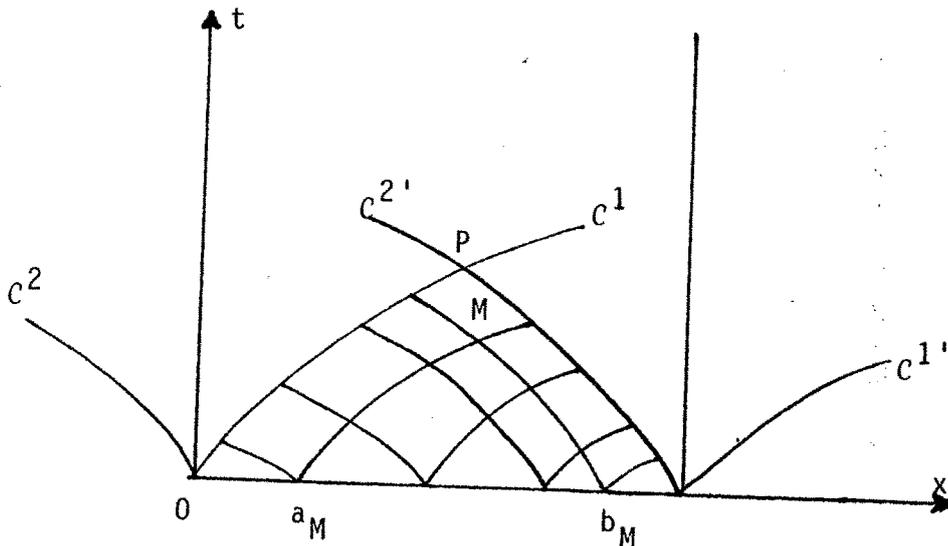


Figure 1

Sur la figure 1, c^1 et c^2 représentent les courbes caractéristiques qui passent par le point $(x = 0, t = 0)$. $c^{1'}$ et $c^{2'}$ représentent les courbes caractéristiques issues de $(x = L, t = 0)$.

Le domaine de définition des conditions initiales (définies sur OL) est la région encadrée par c^1 , c^2 et OL.

De façon analogue le domaine de définition de l'intervalle (a_M, b_M) (voir figure 1) est la région encadrée par le segment (a_M, b_M) , la courbe caractéristique de la première famille issue de a_M et celle de la deuxième famille issue de b_M .

On appelle domaine de dépendance d'un point M (dans le domaine de définition des conditions initiales) l'intervalle (a_M, b_M) qui définit complètement la solution en M.

Finalement, on appelle domaine d'influence de l'intervalle (a_M, b_M) la région de $X \times T$ où la solution dépend des conditions initiales en (a_M, b_M) . Dans la figure 1 le domaine d'influence de (a_M, b_M) est limité par le segment (a_M, b_M) , par la courbe caractéristique de la deuxième famille issue de a_M et celle de la première famille issue de b_M .

I.4. - La transformation hodographe

a) La transformation hodographe

An chaque point du domaine Ω , il passe une courbe caractéristique appartenant à chacune des deux familles, ces deux courbes étant distinctes. On se propose d'utiliser le réseau des courbes caractéristiques comme nouvelles lignes de coordonnées et d'utiliser une méthode de différences finies dans le plan des variables caractéristiques pour intégrer numériquement les équations.

Il existe une infinité de transformations :

$$(4.1) \quad x = x(\alpha, \beta) \quad t = t(\alpha, \beta)$$

pour lesquelles α et β sont respectivement constantes sur les courbes de la première et de la deuxième famille de caractéristiques.

Les conditions (2.3) et (3.3) entraînent que pour t suffisamment petit, disons pour $t \leq T_0$ les courbes caractéristiques (dans le plan (X,T)) ne sont jamais parallèles aux axes.

Soit dorénavant :

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T_0\}$$

Alors dans $\bar{\Omega}$ chaque caractéristique coupe les parallèles aux axes en un seul point.

On peut alors choisir, dans Ω , la transformation des coordonnées (4.1) telle que l'inverse satisfasse :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \alpha(x,0) = \beta(x,0) = x & \text{pour } x \in [0,L] \\ \alpha(0,t) + \beta(0,t) = 0 & t \in [0,T_0] \\ \alpha(L,t) + \beta(L,t) = 2L & t \in [0,T_0] \end{cases}$$

On appelle la transformation (4.2) la transformation hodographe. Cette transformation est illustrée par la figure 2.

b) Les frontières dans le nouveau système de coordonnées

Dans le plan (α, β) on appelle

$$(4.3) \quad \begin{cases} \Gamma_0 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 0 \leq \alpha = \beta \leq L\} \\ \Gamma_1 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 0 \leq \beta = -\alpha\} \\ \Gamma_2 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } L \leq \beta = 2L - \alpha\} \end{cases}$$

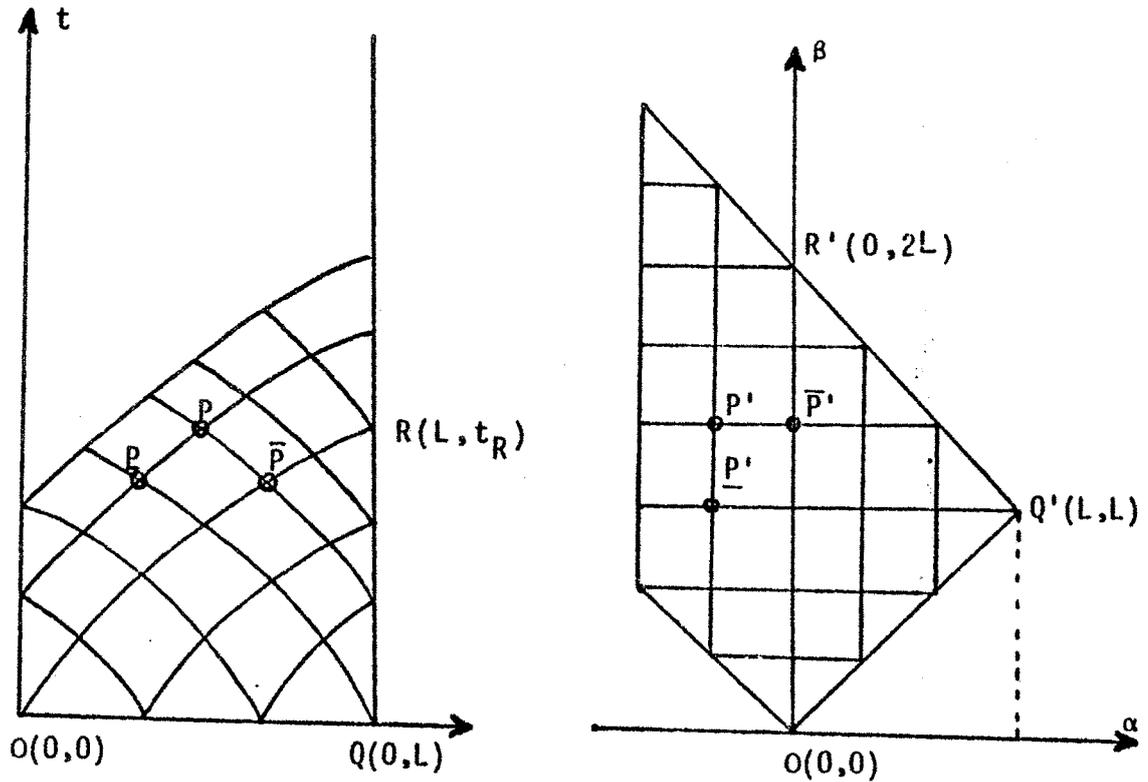


Figure 2

c) Les équations, conditions initiales et aux limites dans le nouveau système de référence

Dans Ω la transformation hodographe satisfait $\frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} \neq 0$. En utilisant (3.3), (3.7) et (4.1) le système (2.5) s'écrit en variables caractéristiques sous la forme canonique :

$$(4.4) \quad \begin{cases} x_\beta = a(r,s) t_\beta \\ x_\alpha = b(r,s) t_\alpha \\ r_\alpha = f(x,r,s) t_\beta \\ s_\alpha = f(x,r,s) t_\alpha \end{cases}$$

où l'on a adopté les nouvelles variables dépendantes r et s :

$$(4.5) \quad \begin{cases} r = u + 2 \sqrt{g(z+h)} \\ s = u - 2 \sqrt{g(z+h)} \end{cases}$$

et les notations

$$(4.6) \quad \begin{cases} a(r,s) = u + \sqrt{g(z+h)} = \frac{1}{4} (3r+s) \\ b(r,s) = u - \sqrt{g(z+h)} = \frac{1}{4} (r+3s) \\ f(x,r,s) = g(h_x - 4 c \frac{|r+s| (r+s)}{(r-s)^2}) \end{cases}$$

- Les conditions initiales (2.2) deviennent pour $(\alpha, \alpha) \in \Gamma_0$

$$(4.7) \quad \begin{cases} x(\alpha, \alpha) = \phi^1(\alpha) = \alpha \\ t(\alpha, \alpha) = \phi^2(\alpha) = 0 \\ r(\alpha, \alpha) = \phi^3(\alpha) = \phi_1^{\sim}(\alpha) + 2 \sqrt{g(h_\alpha + \phi_2^{\sim}(\alpha))} \\ s(\alpha, \alpha) = \phi^4(\alpha) = \phi_1^{\sim}(\alpha) - 2 \sqrt{g(h_\alpha + \phi_2^{\sim}(\alpha))} \end{cases}$$

- Les conditions (2.3) deviennent $\exists \theta, 0 \leq \theta < 1$ tel que $\forall \alpha \in [0, L]$

$$(4.8) \quad \begin{cases} |2 \sqrt{gh(\alpha)} - r(\alpha, \alpha)| \leq \theta \sqrt{gh(\alpha)} \\ |-2 \sqrt{gh(\alpha)} - s(\alpha, \alpha)| \leq \theta \sqrt{gh(\alpha)} \end{cases}$$

- Les conditions à l'amont (2.4) deviennent pour $(-\alpha, \alpha) \in \Gamma_1$ ($0 \leq \alpha$)

$$(4.9) \quad \begin{cases} x(-\alpha, \alpha) = 0 \\ H_1(r(-\alpha, \alpha), s(-\alpha, \alpha), t(-\alpha, \alpha)) = 0 \end{cases}$$

et à l'aval $(\alpha, 2L-\alpha) \in \Gamma_2$

$$(4.10) \quad \begin{cases} x(\alpha, 2L-\alpha) = L \\ H_2(r(\alpha, 2L-\alpha), s(\alpha, 2L-\alpha), t(\alpha, 2L-\alpha)) = 0 \end{cases}$$

On supposera dorénavant que l'on peut écrire H_1 et H_2 sous la forme :

$$(4.11) \quad H_1(r,s,t) = r - \gamma_1 s - \psi_1(t)$$

$$(4.12) \quad H_2(r,s,t) = s - \gamma_2 s - \psi_2(t)$$

avec γ_1 et γ_2 constantes et ψ_1 et ψ_2 des fonctions "assez régulières" de t

I.5. - La Discrétisation - La méthode de Massau

a) Notations

On se donne un maillage régulier dans le plan (α, β) avec le même pas de discrétisation k pour α et β en choisissant k de telle sorte que choisissant :

$$(5.1) \quad L = j_0 k \quad j_0 \text{ entier}$$

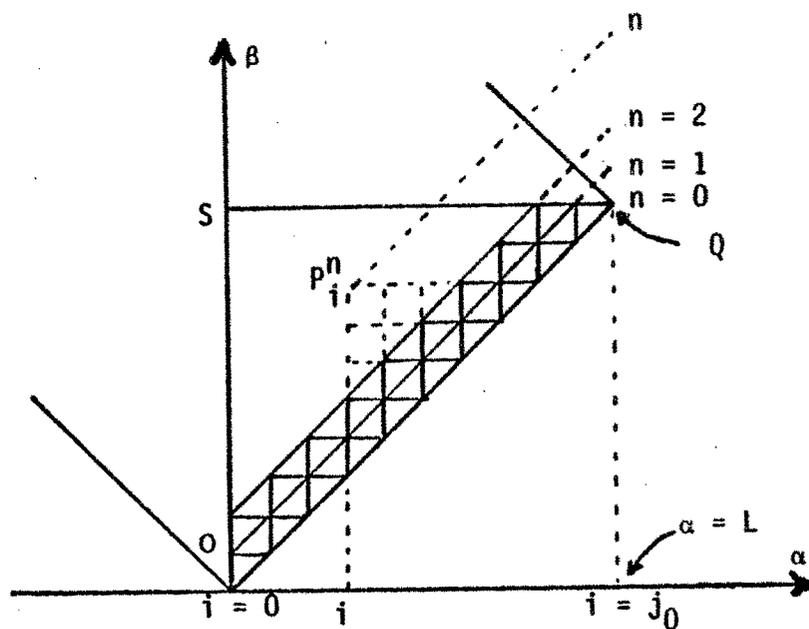


Figure 3

Soit P_i^n le point de coordonnées

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \alpha &= i k \\ \beta &= i k + n k \end{aligned}$$

On définit les ensembles d'indices

$$(5.3) \left\{ \begin{array}{l} I_{n,1} = \begin{cases} \{-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+1, \dots, 0\} & n \text{ pair} \\ \{-\frac{(n-1)}{2}, \dots, -1, 0\} & n \text{ impair} \end{cases} \\ I_{n,2} = \begin{cases} \{j_0^{-n}, j_0^{-n+1}, \dots, j_0^{-n} + \frac{n}{2}\} & n \text{ pair} \\ \{j_0^{-n}, j_0^{-n+1}, \dots, j_0^{-n} + \frac{n-1}{2}\} & n \text{ impair} \end{cases} \\ I_0 = \emptyset \\ I_n = I_{n,1} \cup I_{n,2} \\ J_n = \{0, 1, 2, \dots, j_0^{-n}\} \end{array} \right.$$

Alors, posons pour un pas de discrétisation k :

$$(5.4) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{0,k} = \bigcup_{i \in J_0} P_i^0 \\ \Gamma_{1,k} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_{-n}^{2n} \\ \Gamma_{2,k} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_{j_0^{-n}}^{2n} \\ \Omega_k = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in I_n \cup J_n} P_i^n \right) \setminus (\Gamma_{0,k} \cup \Gamma_{1,k} \cup \Gamma_{2,k}) \\ \mathcal{D}_k = \bigcup_{n \in J_0} \bigcup_{i \in J_0} P_i^n \end{array} \right.$$

où \mathcal{D}_k est la restriction à la grille du domaine de définition des conditions initiales.

b) La discrétisation

On suppose connue la solution à l'étape n , c'est-à-dire en P_i^n , $i \in I_n \cup J_n$ et on cherche la solution à l'étape $n+1$, c'est-à-dire en P_i^{n+1} , $i \in I_{n+1} \cup J_{n+1}$

Il y a trois cas :

$$1) P_i^{n+1} \in \Omega_k$$

On discrétise (4.4) :

$$(5.5) \left\{ \begin{array}{l} x_i^{n+1} - x_i^n = a_i^n (t_i^{n+1} - t_i^n) \\ x_i^{n+1} - x_{i+1}^n = b_{i+1}^n (t_i^{n+1} - t_{i+1}^n) \\ r_i^{n+1} - r_i^n = f_i^n (t_i^{n+1} - t_i^n) \\ s_i^{n+1} - s_{i+1}^n = f_{i+1}^n (t_i^{n+1} - t_{i+1}^n) \end{array} \right.$$

ou encore :

$$(5.5)' \left\{ \begin{array}{l} (x_i^{n+1} - x_i^n) - a_i^n (t_i^{n+1} - t_i^n) = 0 \\ (x_i^{n+1} - x_i^n) - b_{i+1}^n (t_i^{n+1} - t_i^n) = (x_{i+1}^n - x_i^n) - b_{i+1}^n (t_{i+1}^n - t_i^n) \\ r_i^{n+1} - r_i^n - f_i^n (t_i^{n+1} - t_i^n) = 0 \\ s_i^{n+1} - s_i^n - f_{i+1}^n (t_i^{n+1} - t_i^n) = (s_{i+1}^n - s_i^n) - f_{i+1}^n (t_{i+1}^n - t_i^n) \end{array} \right.$$

ii) Pour $P \in \Gamma_{l,k}$, c'est-à-dire pour P_{-n}^{2n} on discrétise (4.9) et (4.11) :

$$(5.6) \left\{ \begin{array}{l} x_{-n}^{2n} = 0 \\ x_{-n}^{2n} - x_{-n+1}^{2n-1} = b_{-n+1}^{2n-1} (t_{-n}^{2n} - t_{-n+1}^{2n-1}) \\ s_{-n}^{2n} - s_{-n+1}^{2n-1} = f_{-n+1}^{2n-1} (t_{-n}^{2n} - t_{-n+1}^{2n-1}) \\ r_{-n}^{2n} = \gamma_1 s_{-n}^{2n} + \psi_1 (t_{-n}^{2n}) \end{array} \right.$$

iii) Pour $P \in \Gamma_{2,k}$ c'est-à-dire pour $P_{j_0-n}^{2n}$ on discrétise (4.10) et (4.12) :

$$(5.7) \left\{ \begin{array}{l} x_{j_0-n}^{2n} = L \\ x_{j_0-n}^{2n} - x_{j_0-n}^{2n-1} = a_{j_0-n}^{2n-1} (t_{j_0-n}^{2n} - t_{j_0-n}^{2n-1}) \\ r_{j_0-n}^{2n} - r_{j_0-n}^{2n-1} = f_{j_0-n}^{2n-1} (t_{j_0-n}^{2n} - t_{j_0-n}^{2n-1}) \\ s_{j_0-n}^{2n} = \gamma_2 r_{j_0-n}^{2n} + \psi_2(t_{j_0-n}^{2n}) \end{array} \right.$$

Les expressions (5.5)', (5.6) et (5.7) permettent de déterminer de façon explicite la solution à l'étape $n+1$ en utilisant la solution à l'étape n . On appelle cette méthode de calcul la méthode de Massau.

CHAPITRE II

LA STABILITÉ DANS LE DOMAINE DE DEFINITION DES
CONDITIONS INITIALES

II.1. - Les espaces des fonctions, les normes. Définition de la stabilité

a) Les espaces normés :

Soient :

W : l'espace des fonctions continues w (de composantes (x, t, r, s)) définies sur \mathcal{D} (domaine de définition des conditions initiales) normé par :

$$(1.1) \quad \|w\|_W = \sup_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}} \{\max\{|x|, |t|, |r|, |s|\}\}$$

$$= \sup_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}} \|w(\alpha, \beta)\|_\infty$$

ϕ : l'espace des fonctions ϕ (conditions de Cauchy), de composantes $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ définies sur Γ_0 telles que $\phi_i \in C^2(\Gamma_0)$, normé par :

$$(1.2) \quad \|\phi\|_\phi = \max_{\lambda \in [0, L]} \|\phi(\lambda)\|_\infty + \max_{\lambda \in [0, L]} \|\phi'(\lambda)\|_\infty$$

$$\text{où } \|\phi(\lambda)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 4} (|\phi_i(\lambda)|)$$

$$\text{et } \|\phi'(\lambda)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 4} (|\phi_i'(\lambda)|)$$

W_k : l'espace des fonctions w_k (de composantes (x_k, t_k, r_k, s_k) définies sur D_k et normé par

$$(1.3) \quad \|w_k\|_{W_k} = \max_{0 \leq n \leq j_0} \|w_k^n\|_{n, \infty} = \max_{p_i^n \in D_k} \|w_{k,i}^n\|_{\infty}$$

$$\text{où } \|w_k^n\|_{n, \infty} = \max_{i \in J_n} \|w_{k,i}^n\|_{\infty}$$

$$\text{et } \|w_{k,i}^n\|_{\infty} = \max(|x_{k,i}^n|, |t_{k,i}^n|, |r_{k,i}^n|, |s_{k,i}^n|)$$

ϕ_k : l'espace des fonctions ϕ_k (de composantes $\phi_k^1, \phi_k^2, \phi_k^3, \phi_k^4$) définies sur Γ_{0k} normé par

$$(1.4) \quad \|\phi_k\|_{\phi_k} = \max_{i \in J_0} \|(\phi_k)_i\|_{\infty} + \max_{i \in J_1} \left\| \frac{(\phi_k)_{i+1} - (\phi_k)_i}{k} \right\|_{\infty}$$

$$\text{où } \|(\phi_k)_i\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq 4} \{ |(\phi_k^j)_i| \}$$

$$\text{et de façon analogue pour } \left\| \frac{(\phi_k)_{i+1} - (\phi_k)_i}{k} \right\|_{\infty}$$

Les normes des espaces W_k et ϕ_k sont compatibles avec les normes de W et Φ [17].

b) Définitions de stabilité

1 - ϕ -stabilité : Soit $\phi \in \Phi$

La méthode de Massau est ϕ -stable dans le domaine de définition des conditions initiales si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \geq 0$, indépendant de k , tel que

$$\forall \tilde{\phi} \in \Phi \quad \forall k \in \mathbb{R} \text{ tq } 0 \leq k \leq L, \quad k j_0 = L, \quad j_0 \text{ entier}$$

$$(1.5) \quad \|\phi_k - \tilde{\phi}_k\|_{\phi_k} \leq \delta \Rightarrow \|w_k - \tilde{w}_k\|_{W_k} \leq \epsilon$$

où ϕ_k et $\tilde{\phi}_k$ sont les restrictions à Γ_{0k} de ϕ et $\tilde{\phi}$ respectivement et w_k et \tilde{w}_k sont les solutions de la méthode de Massau.

2 - $\tilde{\phi}$ -stabilité : Soit $\tilde{\phi} \subseteq \phi$

La méthode de Massau est $\tilde{\phi}$ - stable dans le domaine de définition des conditions initiales si $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta \geq 0$ indépendant de k et de ϕ et $\tilde{\phi} \in \tilde{\phi}$ tel que

$$(1.6) \quad \|\phi_k - \tilde{\phi}_k\|_{\phi_k} \leq \delta \Rightarrow \|w_k - \tilde{w}_k\|_{W_k} \leq \epsilon$$

II.2. - Le procédé de Calcul. Notations. Les matrices A et B.

Le procédé de calcul sur \mathcal{D}_k est le suivant :

On suppose connue la solution en

$$P_i^n, \quad i \in J_n \quad ; \quad n < j_0 \quad (J_n = \{0, 1, \dots, j_0 - n\})$$

et on calcule la solution en

$$P_i^{n+1}, \quad i \in J_{n+1}$$

en utilisant les équations (I.5.5) mais en faisant $f \equiv 0$ on obtient matriciellement pour $i \in J_{n+1}$

$$(2.1) \quad \begin{bmatrix} 1 & -a_i^n & 0 & 0 \\ 1 & -b_{i+1}^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^{n+1} - x_i^n \\ t_i^{n+1} - t_i^n \\ r_i^{n+1} - r_i^n \\ s_i^{n+1} - s_i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -b_{i+1}^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1}^n - x_i^n \\ t_{i+1}^n - t_i^n \\ r_{i+1}^n - r_i^n \\ s_{i+1}^n - s_i^n \end{bmatrix}$$

$$(2.2) \quad A_i^n (w_i^{n+1} - w_i^n) = B_i^n \Delta w_i^n$$

où l'on a adopté la convention :

$$(2.3) \quad \Delta \alpha_i^n = \alpha_{i+1}^n - \alpha_i^n$$

Globalement :

Soit A^n la matrice de $(j_0 - n) \times (j_0 - n)$ blocs de 4×4 éléments ayant dans sa diagonale les blocs $A_0^n, A_1^n, \dots, A_{j_0 - (n+1)}^n$ et des "0" ailleurs.

Soit B^n définie de la même façon mais par rapport aux B_i^n . Soient :

\underline{w}^{n+1} : le vecteur de j_{n+1} blocs $w_0^{n+1}, \dots, w_{j_0 - (n+1)}^{n+1}$

\underline{w}^n : le vecteur de j_{n+1} blocs $w_0^n, \dots, w_{j_0 - (n+1)}^n$
(le vecteur \underline{w}^n est le vecteur w^n tronqué)

et Δw^n : le vecteur de $j_0 - (n+1)$ blocs $\Delta w_0^n, \Delta w_1^n, \dots, \Delta w_{j_0 - n - 1}^n$

alors le procédé de calcul est :

$$(2.4) \quad A^n (w^{n+1} - \underline{w}^n) = B^n \Delta w^n$$

(nota : on a supprimé le sous-indice k pour simplifier les écritures, mais on devrait écrire : $w_k^{n+1}, \underline{w}_k^n, \Delta w_k^n$, etc...).

Il n'y aura pas d'ambiguïté si on note toutes les normes des vecteurs simplement par $||\cdot||$. Par exemple :

$$||w^{n+1}|| = ||w^{n+1}||_{\infty} = \max_{i \in J_{n+1}} ||w_i^{n+1}||_{\infty}$$

$$||\underline{w}^n|| = \max_{i \in J_{n+1}} ||w_i^n||_{\infty}$$

$$||w^n|| = \max_{i \in J_n} ||w_i^n||_{\infty}$$

II.3. - Quelques propriétés des matrices A et B

Proposition 1 : Si les conditions initiales satisfont I.4.8 pour θ donné,

$0 \leq \theta < 1$ alors :

a) $\exists p_{\theta} \in \mathbb{R}, p_{\theta} > 0$ indépendant de n et de k tel que

$$||B^n||_{\infty} \leq ||A^n||_{\infty} \leq p_{\theta}$$

b) A^n est inversible dans \mathcal{D}_k et il existe q_{θ} indépendant de n et de k , tel que

$$|| (A^n)^{-1} ||_{\infty} \leq q_{\theta}$$

Démonstration :

i) Le fait d'avoir choisit $f \equiv 0$ dans les équations (2.1) entraîne que :

$$(3.1) \quad \begin{cases} r_i^{n+1} = r_i^n = \dots = r_i^0 \\ s_i^{n+1} = s_{i+1}^n = s_{i+n+1}^0 \end{cases}$$

C'est-à-dire que r et s sont "invariantes" sur les courbes caractéristiques.

D'autre part,

$$(3.2) \quad \begin{aligned} a_i^n &= \frac{1}{4} (3 r_i^n + s_i^n) = \frac{1}{4} (3 r_i^0 + s_{n+i}^0) \\ b_{i+1}^n &= \frac{1}{4} (r_{i+1}^n + 3 s_{i+1}^n) = \frac{1}{4} (r_{i+1}^0 + 3 s_{i+n+1}^0) \end{aligned}$$

(I.4.8) entraîne que

$$\begin{aligned} (2 - \theta) \sqrt{gh} &< r_i^0 < (2 + \theta) \sqrt{gh} \\ (-2 - \theta) \sqrt{gh} &< s_i^0 < (-2 + \theta) \sqrt{gh} \end{aligned}$$

donc que :

$$(3.3) \quad \begin{cases} (1 - \theta) \sqrt{gh} < a_i^n < (1 + \theta) \sqrt{gh} \\ (-1 - \theta) \sqrt{gh} < b_i^n < (-1 + \theta) \sqrt{gh} \end{cases}$$

mais :

$$\begin{aligned} \|B^n\|_\infty &= \max_{i \in J_{n+1}} (1 + |b_{i+1}^n|) \text{ et} \\ \|A^n\|_\infty &= \max_{i \in J_{n+1}} (\|B^n\|_\infty \max (1 + |a_i^n|)) \end{aligned}$$

donc :

$$(3.4) \quad \|B^n\|_\infty \leq \|A^n\|_\infty \leq 1 + (1 + \theta) \sqrt{gh} = p_\theta$$

ii) Un calcul facile montre que :

$$(3.5) \quad (A_i^n)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-b_{i+1}^n}{a_i^n - b_{i+1}^n} & \frac{a_i^n}{a_i^n - b_{i+1}^n} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{a_i^n - b_{i+1}^n} & \frac{1}{a_i^n - b_{i+1}^n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mais $\forall p_i^n \in \mathcal{D}_k$ les inégalités (3.3) sont vérifiées pour θ donné, $0 < \theta < 1$.

Donc $b_{i+1}^n < 0$, $a_i^n > 0$ et $|a_i^n - b_{i+1}^n|$ est borné inférieurement par

$2(1 - \theta) \sqrt{gh}$ d'où l'on déduit facilement que :

$$(3.6) \quad \|(A_i^n)^{-1}\| \leq \max \left(1, \frac{1}{(1-\theta) \sqrt{gh}} \right) = q_\theta$$

Il est clair que $(A^n)^{-1}$ est une matrice de $j_n \times j_n$ blocs de 4×4

éléments, qui a comme blocs diagonaux les blocs $(A_i^n)^{-1}$ $i \in J_{n+1}$ et 0 partout ailleurs. Donc :

$$\|(A^n)^{-1}\|_\infty = \max_{i \in J_{n+1}} \|(A_i^n)^{-1}\|_\infty \leq q_\theta$$

Les propriétés que l'on va montrer maintenant correspondent au caractère "affine" des matrices A_i^n et B_i^n . Les propriétés 1, 2 et 3 qui suivent sont valables autant pour les matrices A_i^n que pour les matrices B_i^n . Néanmoins nous ne les expliciterons que pour les matrices A^n bien qu'elles soient utilisées par la suite pour B^n .

On observe que :

$$(3.7) \quad \begin{cases} A_i^n = E_{11} + L_1(w_i^n) E_{12} + E_{21} + L_2(w_{i+1}^n) E_{22} + E_{33} + E_{44} \\ B_i^n = E_{21} + L_2(w_{i+1}^n) E_{22} + E_{44} \end{cases}$$

où E_{ij} est la matrice 4×4 qui vaut 0 partout sauf dans la position ij qui vaut 1 ($0 \leq i, j \leq 4$)

et $L_i(w)$ est une fonctionnelle linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R} définie par :

$$(3.8) \quad \begin{cases} L_1(x, t, r, s) = \frac{1}{4} (3r + s) \\ L_2(x, t, r, s) = \frac{1}{4} (r + 3s) \end{cases}$$

on remarque alors que

$$- \quad |L_i(x, t, r, s)| \leq \max\{|r|, |s|\} \leq \max\{|x|, |t|, |r|, |s|\}$$

$$-- \quad A_i^n - A_j^m = L_1(w_i^n - w_j^m) E_{12} + L_2(w_{i+1}^n - w_{j+1}^m) E_{22}$$

Propriété 1 : $\|A_i^n - A_j^m\|_\infty = \max(\|w_i^n - w_j^m\|, \|w_{i+1}^n - w_{j+1}^m\|)$

démonstration :

$$\|A_i^n - A_j^m\|_\infty = \max\{|L_1(w_i^n - w_j^m)|, |L_2(w_{i+1}^n - w_{j+1}^m)|\}$$

$$\text{mais } |L_i(\alpha)| \leq \|\alpha\|_\infty$$

Propriété 2 : $\|\Delta A_i^n\| \leq \|\Delta w_i^n\|$

démonstration : de la propriété 1, on a

$$\|\Delta A_i^n\| \leq \max(\|\Delta w_i^n\|, \|\Delta w_{i+1}^n\|) \leq \|\Delta w_i^n\|$$

Propriété 3 :

$$i) \quad ||\Delta A_i^n - \Delta A_j^m|| \leq \max(||\Delta w_i^n - \Delta w_j^m||, ||\Delta w_{i+1}^n - \Delta w_{j+1}^m||)$$

$$ii) \quad ||\Delta(A(w_i^n) - A(\tilde{w}_i^n))|| \leq \max(||\Delta(w_i^n - \tilde{w}_i^n)||, ||\Delta(w_{i+1}^n - \tilde{w}_{i+1}^n)||)$$

démonstration :

$$\Delta A_i^n - \Delta A_j^m = L_1(\Delta w_i^n - \Delta w_j^m) E_{12} + L_2(\Delta w_{i+1}^n - \Delta w_{j+1}^m) E_{22}$$

donc i). De façon analogue, nous avons

$$\Delta A(w_i^n) - \Delta A(\tilde{w}_i^n) = L_1(\Delta w_i^n - \Delta \tilde{w}_i^n) E_{12} + L_2(\Delta w_{i+1}^n - \Delta \tilde{w}_{i+1}^n) E_{22}$$

Propriété 4 : Soit $(v_j^n)_{j=1}^4 \in \mathbb{R}^4$ pour $i \in J_{n+1}$, alors :

$$|| (A_i^n - B_i^n) v_i^n + B_{i+1}^n v_{i+1}^n || \leq \max_{i \in J_{n+1}} ||A_i^n v_i^n|| \leq ||A^n v^n||$$

démonstration :

$$\text{Soit } \alpha_j = ((A_i^n - B_i^n) v_i^n)_j \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{et } \beta_j = (B_{i+1}^n v_{i+1}^n)_j \quad j = 1, 2, 3, 4$$

mais la structure des matrices A^n et B^n (3.7) entraîne que :

$$\alpha_j \neq 0 \Rightarrow \beta_j = 0$$

$$\beta_j \neq 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$$

$$\text{donc } ||(\alpha + \beta)||_\infty = \max_{j=1,2,3,4} |\alpha_j + \beta_j| = \max(||\alpha||_\infty, ||\beta||_\infty)$$

$$\text{donc } ||(A_i^n - B_i^n) v_i^n + B_{i+1}^n v_{i+1}^n|| = \max(||(A_i^n - B_i^n) v_i^n||, ||B_{i+1}^n v_{i+1}^n||)$$

$$|| (A_i^n - B_i^n) v_i^n || = \max (|v_{1,i}^n - a_i^n v_{2,i}^n|, 0, |v_{3,i}^n|, 0)$$

$$\leq \max (|v_{1,i}^n - a_i^n v_{2,i}^n|, |v_{1,i}^n - b_{i+1}^n v_{2,i}^n|, |v_{3,i}^n|, |v_{4,i}^n|)$$

$$= ||A_i^n v_i^n||$$

et de façon analogue :

$$||B_{i+1}^n v_{i+1}^n|| \leq ||A_{i+1}^n v_{i+1}^n||$$

donc :

$$|| (A_i^n - B_i^n) v_i^n + B_{i+1}^n v_{i+1}^n || \leq \max_{j=i, i+1} ||A_j^n v_j^n|| \leq ||A^n v^n||$$

II. 4. - Etude de $A_{\Delta}^n w^n$

Le procédé de calcul est :

$$A^n (w^{n+1} - \underline{w}^n) = B^n \Delta w^n$$

D'après la proposition I et les propriétés du paragraphe précédent, on obtient :

$$w^{n+1} - \underline{w}^n = (A^n)^{-1} B^n \Delta w^n$$

et

$$(4.1) \quad ||w^{n+1} - \underline{w}^n|| \leq q_{\theta} ||A^n \Delta w^n||$$

On va montrer que si les conditions initiales " ϕ " vérifient une condition particulière alors la quantité $||A^n \Delta w^n||$ sera bornée par une expression de la forme :

$$||A^n \Delta w^n|| \leq Mk$$

où M est indépendante de k et de n.

Les équations (2.1) pour p_i^{n+1} et p_{i+1}^{n+1} sont

$$A_i^n (w_i^{n+1} - w_i^n) = B_i^n (w_{i+1}^n - w_i^n)$$

$$A_{i+1}^n (w_{i+1}^{n+1} - w_{i+1}^n) = B_{i+1}^n (w_{i+2}^n - w_{i+1}^n)$$

On réécrit la dernière équation de la façon suivante :

$$A_i^n (w_{i+1}^{n+1} - w_{i+1}^n) = -\Delta A_i^n (w_{i+1}^{n+1} - w_i^n) + B_{i+1}^n \Delta w_{i+1}^n$$

et en soustrayant la première, on obtient :

$$A_i^n \Delta w_i^{n+1} = (A_i^n - B_i^n) \Delta w_i^n + B_{i+1}^n \Delta w_{i+1}^n - \Delta A_i^n (w_{i+1}^{n+1} - w_{i+1}^n)$$

et finalement :

$$(4.2) \quad A_i^{n+1} \Delta w_i^{n+1} = \alpha + \beta + \gamma$$

avec

$$\alpha = (A_i^n - B_i^n) \Delta w_i^n + B_{i+1}^n \Delta w_{i+1}^n$$

$$\beta = (A_i^{n+1} - A_i^n) \Delta w_i^{n+1}$$

$$\gamma = -\Delta A_i^n (w_{i+1}^{n+1} - w_{i+1}^n)$$

Alors :

$$||A_i^{n+1} \Delta w_i^{n+1}|| \leq ||\alpha|| + ||\beta|| + ||\gamma||$$

et la propriété 4 entraîne que :

$$||\alpha|| \leq ||A_i^n \Delta w_i^n|| ,$$

la propriété 1 que :

$$||A_i^{n+1} - A_i^n|| \leq ||w_{i+1}^{n+1} - w_{i+1}^n|| ;$$

la propriété 2 que :

$$||\Delta A_i^n|| \leq ||\Delta w_i^n|| ;$$

d'où en utilisant (4.1) et :

$$||w_{i+1}^{n+1} - w_{i+1}^n|| \leq 2 ||w_{i+1}^{n+1} - w_{i+1}^n|| + ||\Delta w_i^n|| ,$$

on a montré que

$$(4.3) \quad ||A^{n+1} \Delta w^{n+1}|| \leq ||A^n \Delta w^n|| + 4 q_0^2 ||A^n \Delta w^n||^2$$

Soient $\{M_0, M_1, \dots, M_{j_0-1}\}$ définis par

$$M_0 k = ||A^0 \Delta \phi_k||$$

$$(4.4) \quad M_{n+1} k = M_n k + 4 q_0^2 M_n^2 k^2$$

alors $\forall n \in J_1$

$$(4.5) \quad ||A^n \Delta w^n|| \leq M_n k$$

L'ensemble ordonné $\{M_0, M_1, \dots, M_{j_0-1}\}$ est majoré terme à terme par la solution en $t = nk$ ($M_n \leq f(nk)$) du problème différentiel^(*) :

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{df}{dt} = 4 q_0^2 f^2 \\ f(0) = M_0 \end{cases}$$

La solution à ce problème est

$$(4.7) \quad f(t) = \frac{f(0)}{1 - 4q_0^2 t f(0)} \quad \text{si}$$

$$(4.8) \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4 q_0^2 f(0)}$$

(*) Dans [15] Friedrichset Lewy utilisent cette majoration pour prouver l'existence de la solution d'un système d'équations hyperboliques quasi-linéaires dans un voisinage d'une courbe C sur laquelle on a des conditions de Cauchy. Les auteurs utilisent le fait que la solution de (4.6) est bornée dans un voisinage de t égal 0 mais ils n'explicitent pas la solution (4.7), donc ils ne remarquent pas la condition (4.8) qui est intéressante pour démontrer la stabilité dans tout le domaine de définition de Cauchy. Dans [8] , Cosnier utilise les résultats de [15] mais lui non plus ne remarque pas cette condition.

On obtient donc :

$$(4.9) \quad \max_{0 < n \leq j_0 - 1} M_n \leq M_{j_0 - 1} \leq \frac{M_0}{1 - 4 q_\theta^2 (L-k) M_0}$$

$$M_{j_0 - 1} \leq \frac{M_0}{1 - 4 q_\theta^2 L M_0} \quad \text{si}$$

$$0 \leq L M_0 \leq \frac{1}{4 q_\theta^2}$$

mais :

$$(4.10) \quad M_0 \leq p_\theta \left\| \frac{\Delta \phi}{k} \right\|_\infty \leq p_\theta \left\| \phi' \right\|_\infty$$

donc une condition suffisante pour que (4.9) soit satisfait est que

$$(4.11) \quad L \left\| \phi' \right\|_\infty \leq \frac{1}{4 p_\theta q_\theta^2}$$

II.5. - L'ensemble $\phi_{\theta, \epsilon}$

Rappelons que dans la démonstration de proposition I on a prouvé que

$$\left\| A^n \right\| \leq p_\theta = 1 + (1 + \theta) \sqrt{gh} \quad \text{et}$$

$$\left\| (A^n)^{-1} \right\| \leq q_\theta = \max\left(1, \frac{1}{(1-\theta) \sqrt{gh}}\right)$$

On définit pour θ , $0 < \theta < 1$ et pour ϵ , $0 \leq \epsilon < 1$ l'ensemble :

$$(5.1) \quad \phi_{\theta, \epsilon} = \left\{ \begin{array}{l} \phi \in \Phi, \text{ de composantes } (x_0, t_0, r_0, s_0) \text{ telles que :} \\ \forall \lambda \in [0, L] \end{array} \right.$$

$$(2 - \theta) \sqrt{gh} < r_0(\lambda) < (2 + \theta) \sqrt{gh}$$

$$(-2 - \theta) \sqrt{gh} < s_0(\lambda) < (-2 + \theta) \sqrt{gh}$$

et tel que

$$L \cdot \sup_{\lambda \in (0, L)} \left\{ \max \left\{ |x_0'(\lambda)|, |t_0'(\lambda)|, |r_0'(\lambda)|, |s_0'(\lambda)| \right\} \right\} \leq \frac{\epsilon}{4 p_\theta q_\theta^2}$$

Alors, on peut annoncer la proposition suivante :

Proposition II :

Il existe deux réels positifs $H_1(p_\theta, q_\theta, \varepsilon)$ et $H_2(p_\theta, q_\theta, \varepsilon)$ indépendants de k , de n et de $\phi \in \Phi_{\theta, \varepsilon}$ tels que $\forall \phi \in \Phi_{\theta, \varepsilon}$
 $\forall k, 0 \leq k \leq L, \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < n \leq j_0 - 1 :$

$$i) \quad \|\Delta w^n\|_\infty \leq H_1 k$$

$$ii) \quad \|w^{n+1} - \underline{w}^n\|_\infty \leq H_1 k$$

$$iii) \quad \|\Delta w\|_{D_k} \leq H_2 \|\phi\|_{\phi_k}$$

Démonstration :

D'après le paragraphe 4 et en particulier de (4.5), (4.9) et (4.10) on a que :

$$(5.2) \quad \|A^n \Delta w^n\| \leq \frac{M_0 k}{1 - 4 q_\theta^2 L M_0}$$

$$\|A^n \Delta w^n\| \leq \frac{p_\theta \|\phi'\|_\infty k}{1 - 4 p_\theta q_\theta^2 L \|\phi'\|_\infty}$$

mais :

$$\phi \in \Phi_{\theta, \varepsilon} \Rightarrow L \|\phi'\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4 p_\theta q_\theta^2}$$

donc :

$$(5.3) \quad \|A^n \Delta w^n\| \leq \frac{\varepsilon}{L(1-\varepsilon) 4 q_\theta^2} k$$

d'autre part, on sait que

$$||\Delta w^n|| \leq q_\theta ||A^n \Delta w^n||$$

finalement, on montre : i) :

$$(5.4) \quad ||\Delta w^n||_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4 L q_\theta (1-\varepsilon)} k$$

d'autre part de (4.1) on a que

$$||w^{n+1} - \underline{w}^n|| \leq q_\theta ||A^n \Delta w^n||$$

c'est-à-dire : ii) :

$$(5.5) \quad ||w^{n+1} - \underline{w}^n|| \leq \frac{\varepsilon}{4 L q_\theta (1-\varepsilon)} k$$

pour démontrer : iii) on pose :

$$||w^{n+1}|| \leq ||w^n|| + q_\theta ||A^n \Delta w^n||$$

et (4.10), (5.1) et (5.2), on trouve que

$$||A^n \Delta w^n|| \leq \frac{M_0 k}{1-\varepsilon}$$

donc

$$||w^{n+1}||_\infty \leq ||w^n||_\infty + q_\theta \frac{M_0 k}{1-\varepsilon} \quad \text{et}$$

$$\max_{0 \leq n \leq j_0-1} ||w^{n+1}||_\infty \leq ||\phi||_\infty + q_\theta (j_0-1) \frac{M_0 k}{1-\varepsilon}$$

$$||w||_{W_k} \leq ||\phi||_\infty + q_\theta \frac{L}{k} \frac{M_0 k}{1-\varepsilon}$$

mais $M_0 \leq p_\theta ||\frac{\Delta \phi_k}{k}||_\infty$

donc $||w||_{W_k} \leq ||\phi||_\infty + \frac{p_\theta q_\theta L}{1-\varepsilon} ||\frac{\Delta \phi_k}{k}||_\infty$

donc

$$(5.6) \quad ||w||_{W_k} \leq \max(1, \frac{p_\theta q_\theta L}{1-\varepsilon}) ||\phi_k||_{\phi_k}$$

II. 6. - Etude de $||A^n \Delta \Delta w^n||$

On peut réécrire la formule (4.2) sous la forme :

$$(6.1) \quad A_i^{n+1} \Delta w_i^{n+1} = A_i^n \Delta w_i^n + (A_i^{n+1} - A_i^n) \Delta w_i^{n+1} \\ - \Delta A_i^n (w_{i+1}^{n+1} - w_{i+1}^n) + B_i^n \Delta \Delta w_i^n \\ + \Delta B_i^n \Delta w_{i+1}^n$$

En écrivant (6.1) aux points p_{i+1}^{n+1} et p_i^{n+1} et en faisant la différence, on obtient :

$$A_i^{n+1} \Delta \Delta w_i^{n+1} = \sum_{j=1}^{11} \alpha_j$$

où

$$\alpha_1 = -\Delta A_i^{n+1} \Delta w_{i+1}^{n+1}$$

$$\alpha_2 = + A_i^n \Delta \Delta w_i^n$$

$$\alpha_3 = + \Delta A_i^n \Delta w_{i+1}^n$$

$$\alpha_4 = + (A_{i+1}^{n+1} - A_{i+1}^n) \Delta w_{i+1}^{n+1}$$

$$\alpha_5 = - (A_i^{n+1} - A_i^n) \Delta w_i^{n+1}$$

$$\alpha_6 = - \Delta A_{i+1}^n (w_{i+2}^{n+1} - w_{i+2}^n)$$

$$\alpha_7 = + \Delta A_i^n (w_{i+1}^{n+1} - w_{i+1}^n)$$

$$\alpha_8 = + B_{i+1}^n \Delta \Delta w_{i+1}^n$$

$$\alpha_9 = - B_i^n \Delta \Delta w_i^n$$

$$\alpha_{10} = + \Delta B_{i+1}^n \Delta w_{i+2}^n$$

$$\alpha_{11} = - \Delta B_i^n \Delta w_{i+1}^n$$

en regroupant les termes on trouve que :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 &= -A_{i+1}^{n+1} \Delta w_{i+1}^{n+1} + A_i^{n+1} \Delta w_{i+1}^{n+1} \\
 &+ A_{i+1}^n \Delta w_{i+1}^n - A_i^n \Delta w_{i+1}^n \\
 &+ A_{i+1}^{n+1} \Delta w_{i+1}^{n+1} - A_{i+1}^n \Delta w_{i+1}^{n+1} \\
 &- A_i^{n+1} \Delta w_i^{n+1} + A_i^n \Delta w_i^{n+1} \\
 &+ A_i^n \Delta w_{i+1}^{n+1} - A_i^n \Delta w_{i+1}^n \\
 &= (A_i^{n+1} - A_i^n) \Delta \Delta w_i^{n+1} \\
 &- \Delta A_i^n (\Delta w_{i+1}^{n+1} - \Delta w_{i+1}^n)
 \end{aligned}$$

$$\alpha_2 + \alpha_8 + \alpha_9 = (A_i^n - B_i^n) \Delta \Delta w_i^n + B_{i+1}^n \Delta \Delta w_{i+1}^n$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_6 &= -\Delta A_i^n (w_{i+1}^{n+1} - w_{i+1}^n) - \Delta A_i^n (\Delta w_{i+1}^{n+1} - \Delta w_{i+1}^n) \\
 &- \Delta \Delta A_i^n (w_{i+2}^{n+1} - w_{i+2}^n)
 \end{aligned}$$

$$\alpha_6 + \alpha_7 = -\Delta A_i^n (\Delta w_{i+1}^{n+1} - \Delta w_{i+1}^n) - \Delta \Delta A_i^n (w_{i+2}^{n+1} - w_{i+2}^n)$$

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} = \Delta B_i^n \Delta \Delta w_{i+1}^n + \Delta \Delta B_i^n \Delta w_{i+2}^n$$

Au total :

$$\begin{aligned}
 (6.2) \quad A_i^{n+1} \Delta \Delta w_i^{n+1} &= (A_i^{n+1} - A_i^n) \Delta \Delta w_i^{n+1} \\
 &- 2 \Delta A_i^n (\Delta w_{i+1}^{n+1} - \Delta w_{i+1}^n) \\
 &- \Delta \Delta A_i^n (w_{i+2}^{n+1} - w_{i+2}^n) \\
 &+ \Delta B_i^n \Delta \Delta w_{i+1}^n \\
 &+ \Delta \Delta B_i^n \Delta w_{i+2}^n \\
 &+ (A_i^n - B_i^n) \Delta \Delta w_i^n + B_{i+1}^n \Delta \Delta w_{i+1}^n
 \end{aligned}$$

d'après les propriétés 1 à 4 du paragraphe II.3 on a que :

$$\begin{aligned}
 (6.3) \quad \max_{i \in J_{n+2}} \left\| A_i^{n+1} \Delta \Delta w_i^{n+1} \right\| &\leq \left\| w^{n+1} - \underline{w}^n \right\| \left\| \Delta \Delta w^{n+1} \right\| \\
 &+ 2 \left\| \Delta w^n \right\| \left\| \Delta w^{n+1} - \Delta w^n \right\| \\
 &+ \left\| \Delta \Delta w^n \right\| \left\| w^{n+1} - \underline{w}^n \right\| \\
 &+ \left\| \Delta w^n \right\| \left\| \Delta \Delta w^n \right\| \\
 &+ \left\| \Delta \Delta w^n \right\| \left\| \Delta w^n \right\| \\
 &+ \max_{i \in J_{n+2}} \left\| A_i^n \Delta \Delta w_i^n \right\|
 \end{aligned}$$

Nous utiliserons plus loin l'identité précédente ; rappelons auparavant, d'une part, que par la proposition II, nous savons qu'il existe une constante H_1 indépendante de k et de n telle que :

$$\begin{aligned}
 (6.4) \quad \left\| \Delta w^n \right\| &\leq H_1 k \\
 \left\| w^{n+1} - \underline{w}^n \right\| &\leq H_1 k
 \end{aligned}$$

et d'autre part que : $\left\| (A^n)^{-1} \right\| \leq q_\theta$ d'où

$$(6.5) \quad \left\| \Delta \Delta w^n \right\| \leq q_\theta \left\| A^n \Delta \Delta w^n \right\|$$

En déduisant de (6.1), l'identité suivante

$$\begin{aligned}
 A_i^{n+1} (\Delta w_i^{n+1} - \Delta w_i^n) &= - (A_i^{n+1} - A_i^n) \Delta w_i^n \\
 &+ (A_i^{n+1} - A_i^n) \Delta w_i^{n+1} \\
 &- \Delta A_i^n (w_{i+1}^{n+1} - w_{i+1}^n) \\
 &+ B_i^n \Delta \Delta w_i^n \\
 &+ \Delta B_i^n \Delta w_{i+1}^n
 \end{aligned}$$

et en appliquant les propriétés 1 à 4, les inégalités (6.4) et (6.5), on a que :

$$(6.6) \quad \|\Delta w^{n+1} - \Delta w^n\| \leq \tilde{H} k^2 + q_0 \|A^n \Delta \Delta w^n\|$$

où \tilde{H} est une constante indépendante de k et de n ; en plus :

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \|\Delta \Delta w_1^{n+1}\| &\leq \|\Delta w_{i+1}^{n+1} - \Delta w_{i+1}^n\| + \|\Delta \Delta w_1^n\| + \|\Delta w_1^n - \Delta w_1^{n+1}\| \\ &\leq 2 \tilde{H} k^2 + 3 q_0 \|A^n \Delta \Delta w^n\| \end{aligned}$$

donc,

en utilisant (6.3), (6.4), ..., (6.7), on peut faire la majoration :

$$(6.8) \quad \|A^{n+1} \Delta \Delta w^{n+1}\| \leq (1 + H k) \|A^n \Delta \Delta w^n\| + H k^3$$

où H ne dépend que de p_0 , q_0 et de ϵ . Maintenant, en rappelant que $L = j_0 k$ et en définissant la suite $\{\Lambda_{j_0}\}_{j_0=1}^\infty$ par :

$$(6.9) \quad \Lambda_{j_0} = \max_{0 \leq n \leq j_0} \left\| \frac{A_k^n \Delta \Delta w_k^n}{k^2} \right\|$$

(ou bien entendu A_k^n et w_k^n sont la matrice A^n et le vecteur w^n construits à l'étape "n" avec un pas de discrétisation $k = L/j_0$) on trouve que

$$(6.10) \quad \Lambda_{j_0} \leq \left\| A_k^0 \frac{\Delta \Delta \phi_k}{k^2} \right\| \left(1 + \frac{HL}{j_0} \right)^{j_0} + \frac{HL}{j_0} \sum_{i=0}^{j_0-1} \left(1 + \frac{HL}{j_0} \right)^i$$

si $\phi \in C^2(0, L)$

$$(6.11) \quad \lim_{j_0 \rightarrow \infty} \Lambda_{j_0} \leq p_0 \|\phi''\|_\infty e^{HL} + HL e^{HL}$$

la suite Λ_{j_0} est donc bornée. Au total, on peut déduire qu'il existe une constante $H_{p_0, q_0, \epsilon, \|\phi''\|_\infty}$

telle que $\forall k, \forall n$:

$$(6.12) \quad \left\| A^n \Delta w^n \right\| \leq H k^2 P_{\theta, \varrho_{\theta}, \varepsilon} \left\| \phi'' \right\|_{\infty}$$

et de (6.6) que

$$\left\| \Delta w^{n+1} - \Delta w^n \right\| \leq H' k^2 P_{\theta, \varrho_{\theta}, \varepsilon} \left\| \phi'' \right\|_{\infty}$$

II. 7. - Théorème de stabilité

Théorème : Soient $0 \leq \theta < 1$, $0 \leq \varepsilon < 1$, $0 < M < +\infty$ et soit $\Phi_{\theta, \varepsilon, M}$ l'ensemble des fonctions ϕ de $\Phi_{\theta, \varepsilon}$ telles que $\left\| \phi'' \right\|_{\infty} \leq M$. Alors $\forall \varepsilon' > 0 \exists \delta > 0$ indépendant de $k \leq L$ tel que :

$$\phi, \tilde{\phi} \in \Phi_{\theta, \varepsilon, M} \text{ et } \left\| \phi_k - \tilde{\phi}_k \right\|_{\phi_k} < \delta$$

entraîne que

$$\left\| w_k - \tilde{w}_k \right\| < \varepsilon' \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\Delta w_k}{k} - \frac{\Delta \tilde{w}}{k} \right\| < \varepsilon'$$

Démonstration : Soient

ϕ et $\tilde{\phi} \in \Phi_{\theta, \varepsilon, M}$. Définissons :

(7.1) ϕ_k et $\tilde{\phi}_k$ les restrictions de ϕ et $\tilde{\phi}$ à Γ_{0k}
 w_k et \tilde{w}_k les solutions de la méthode de Massau correspondantes à ϕ_k et $\tilde{\phi}_k$.

Dorénavant, on va travailler pour une valeur de k fixe et on omettra l'indice k pour simplifier les notations.

$$(7.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Soient :} \\ u = w - \tilde{w} \\ A^n = A^n(w^n) \quad , \quad B^n = B^n(w^n) \\ \tilde{A}^n = A^n(\tilde{w}^n) \quad \quad \quad \tilde{B}^n = B^n(\tilde{w}^n) \end{array} \right.$$

Les procédés de calcul sont :

$$(7.3) \quad A^n(w^{n+1} - \underline{w}^n) = B^n \Delta w^n$$

$$(7.3)' \quad \tilde{A}^n(\tilde{w}^{n+1} - \underline{\tilde{w}}^n) = \tilde{B}^n \Delta \tilde{w}^n$$

où

$$(\tilde{A}^n + A^n - \tilde{A}^n) (w^{n+1} - \underline{w}^n) = (\tilde{B}^n + B^n - \tilde{B}^n) \Delta w^n$$

en faisant la différence avec (7.3)' on obtient :

$$(7.4) \quad \tilde{A}^n(u^{n+1} - \underline{u}^n) + (A^n - \tilde{A}^n) (w^{n+1} - \underline{w}^n) = \tilde{B}^n \Delta u^n + (B^n - \tilde{B}^n) \Delta w^n$$

maintenant en utilisant les résultats des propositions I et II ainsi que les propriétés 1 à 4, on montre qu'il existe une constante H, indépendante de k et de n telle que :

$$(7.5) \quad ||u^{n+1}|| \leq (1 + Hk) ||u^n|| + q_0 \quad ||\tilde{A}^n \Delta u^n||$$

il s'avère nécessaire d'étudier le terme $||\tilde{A}^n \Delta u^n||$; pour le faire on applique à l'égalité (7.4) exactement le même procédé que celui utilisé pour passer de (2.2) à (4.2) et on obtient :

$$(7.6) \quad \tilde{A}_i^{n+1} \Delta u_i^{n+1} + (A_i^{n+1} - \tilde{A}_i^{n+1}) \Delta w_i^{n+1} = \sum_{j=1}^6 \alpha_j$$

avec :

$$\alpha_1 = (\hat{A}_i^n - \hat{B}_i^n) \Delta u_i^n + \hat{B}_{i+1}^n \Delta u_{i+1}^n$$

$$\alpha_2 = (\hat{A}_i^{n+1} - \hat{A}_i^n) \Delta u_i^{n+1}$$

$$\alpha_3 = - \Delta \hat{A}_i^n (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n)$$

$$\alpha_4 = ((\hat{A}_i^n - \hat{B}_i^n) - (\hat{A}_i^n - \hat{B}_i^n)) \Delta w_i^n + (\hat{B}_{i+1}^n - \hat{B}_{i+1}^n) \Delta w_{i+1}^n$$

$$\alpha_5 = ((\hat{A}_i^{n+1} - \hat{A}_i^{n+1}) - (\hat{A}_i^n - \hat{A}_i^n)) \Delta w_i^{n+1}$$

$$\alpha_6 = - (\Delta \hat{A}_i^n - \Delta \hat{A}_i^n) (w_{i+1}^{n+1} - w_{i+1}^n)$$

en éliminant le terme $(\hat{A}_i^{n+1} - \hat{A}_i^{n+1}) \Delta w_i^{n+1}$ du côté gauche de (7.6) et de α_5 et en regroupant ce qui reste de α_5 avec α_4 et α_6 on trouve :

$$\alpha_5 - (\hat{A}_i^{n+1} - \hat{A}_i^{n+1}) \Delta w_i^{n+1} + \alpha_4 = \alpha_4' + \alpha_5'$$

avec :

$$\alpha_4' = - (\hat{A}_i^n - \hat{A}_i^n) (\Delta w_i^{n+1} - \Delta w_i^n)$$

$$\alpha_5' = - (\hat{B}_i^n - \hat{B}_i^n) \Delta w_i^n + (\hat{B}_{i+1}^n - \hat{B}_{i+1}^n) \Delta w_{i+1}^n$$

mais :

$$\alpha_5' = (\hat{B}_i^n - \hat{B}_i^n) \Delta \Delta w_i^n + (\Delta \hat{B}_i^n - \Delta \hat{B}_i^n) \Delta w_{i+1}^n$$

donc :

$$(7.7) \quad \hat{A}_i^{n+1} \Delta u_i^{n+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4' + \alpha_5' + \alpha_6$$

$$\text{et} \quad \|\hat{A}_i^{n+1} \Delta u_i^{n+1}\| \leq \|\alpha_1\| + \|\alpha_2\| + \dots + \|\alpha_6\|$$

Par la suite, on utilisera la lettre H pour désigner toute constante de majoration indépendante de k et de n. En appliquant aux α_i les propriétés 1 à 4, les propositions I et II, les inégalités (6.12) et (6.13) et les

inégalités suivantes (issues de (7.4)) :

$$(7.8) \quad ||u^{n+1} - \underline{u}^n|| \leq Hk ||u^n|| + Hk \left| \left| \frac{\tilde{A}^n \Delta u^n}{k} \right| \right|$$

$$(7.9) \quad ||u^{n+1}|| \leq (1 + Hk) ||u^n|| + Hk \left| \left| \frac{\tilde{A}^n \Delta u^n}{k} \right| \right|$$

on obtient l'inégalité :

$$(7.10) \quad \left| \left| \frac{\tilde{A}^{n+1} \Delta u^{n+1}}{k} \right| \right| \leq (1 + Hk) \left| \left| \frac{A^n \Delta u^n}{k} \right| \right| + Hk ||u^n||$$

En regroupant (7.9) et (7.10), on obtient :

$$(7.11) \quad \begin{bmatrix} ||u^{n+1}|| \\ \left| \left| \frac{A^{n+1} \Delta u^{n+1}}{k} \right| \right| \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} (1 + Hk) & Hk \\ Hk & (1 + Hk) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ||u^n|| \\ \left| \left| \frac{A^n \Delta u^n}{k} \right| \right| \end{bmatrix}$$

d'où, pour $k = L/j_0$ donné, on trouve que

$$\max_{0 \leq n \leq j_0} \left(\max \left(||u^n||, \left| \left| \frac{\tilde{A}^n \Delta u^n}{k} \right| \right| \right) \leq (1 + 2Hk)^{j_0} \max \left(||u^0||, \left| \left| \frac{\tilde{A}^0 \Delta u^0}{k} \right| \right| \right)$$

où H ne dépend que de θ , ϵ et M.

Soit $\{\lambda_{j_0}\}_{j_0=1}^{\infty}$ la suite définie par $\lambda_{j_0} = \left(1 + \frac{2HL}{j_0}\right)^{j_0}$

Cette suite converge vers e^{2HL} donc elle est bornée. Soit Λ une borne. On a démontré que :

$$\max_{0 \leq n \leq j_0} ||u_k^n|| \leq \Lambda \max(1, p_\theta) ||\phi_k - \tilde{\phi}_k||_{\phi_k}$$

et

$$\max_{0 \leq n \leq j_0} \left\| \frac{\Delta u_k^n}{k} \right\|_{\infty} \leq q_{\theta} \wedge \max(1, p_{\theta}) \left\| \phi_k - \phi_k \right\|_{\phi_k}$$

ce qui achève la démonstration de la stabilité.

II. 8. - Généralisation du théorème

Considérons le système d'équations hyperboliques quasi-linéaire écrit sous la forme canonique.

$$(8.1) \quad \begin{cases} x_{\beta} = a t_{\beta} \\ x_{\alpha} = b t_{\alpha} \\ r_{\beta} = c t_{\beta} \\ s_{\alpha} = d t_{\alpha} \end{cases}$$

où a, b, c et d dépendent de x, t, r et s .

- On se donne des conditions de Cauchy $\phi \in \tilde{\Phi} \leq \tilde{\Phi}$ sur Γ_0 (on conserve les notations du paragraphe II.1)

- On fait $\forall \phi \in \tilde{\Phi}$ les hypothèses

H_1 : $|a|, |b|, |c|, |d|$ sont bornés par \tilde{p} (où \tilde{p} est indépendant de $\phi \in \tilde{\Phi}$)

H_2 : $\exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ tq

$\forall \lambda_1 \in \text{domaine de définition de } a$

$\forall \lambda_2 \in \text{domaine de définition de } b$

$|a(\lambda_1) - b(\lambda_2)| > \delta$

H_3 : i) a, b, c et $d \in C^2(W)$ où $W \subset \mathbb{R}^4$

ii) il existe une borne supérieur K des modules des dérivées partielles du premier et second ordre de a, b, c et d .

On se propose d'étudier la $\tilde{\phi}$ - stabilité de la méthode de Massau dans le domaine de définition des conditions de Cauchy.

On peut faire la démonstration de cette stabilité en suivant pas à pas les paragraphes antérieurs.

Le paragraphe II.2 reste inchangé sauf que :

$$(8.2) \quad A_i^n = \begin{bmatrix} 1 & -a_i^n & 0 & 0 \\ 1 & -b_{i+1}^n & 0 & 0 \\ 0 & -c_i^n & 1 & 0 \\ 0 & -d_{i+1}^n & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(8.3) \quad (A_i^n)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{b_{i+1}^n}{a_i^n - b_{i+1}^n} & \frac{a_i^n}{a_i^n - b_{i+1}^n} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a_i^n - b_{i+1}^n} & \frac{1}{a_i^n - b_{i+1}^n} & 0 & 0 \\ -\frac{c_i^n}{c_i^n - b_{i+1}^n} & \frac{c_i^n}{a_i^n - b_{i+1}^n} & 1 & 0 \\ -\frac{d_{i+1}^n}{a_i^n - b_{i+1}^n} & \frac{d_{i+1}^n}{a_i^n - b_{i+1}^n} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(8.4) \quad B_i^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -b_{i+1}^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{i+1}^n & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Au paragraphe II.3 on trouve en premier lieu que par H_1 et H_2 la proposition I est inutile car H_1 , (8.2) et (8.4) entraînent directement que $||B^n|| \leq ||A^n|| \leq 1 + \tilde{p} = p$ (où p est indépendant de n) et H_1 , H_2 et (8.3) entraînent que $(A^n)^{-1}$ est borné indépendamment de n . Soit q cette borne : $|| (A^n)^{-1} || \leq q$ (p et q peuvent dépendre de $\tilde{\phi}$).

Les propriétés 1, 2 et 3 dues au caractère "linéaire" de a et b sont remplacées respectivement, grâce à l'hypothèse H_3 , par :

$$\text{propriété 1' : } ||A_i^n - A_j^m|| \leq K_1 \max (||w_i^n - w_j^m||, ||w_{i+1}^n - w_{j+1}^m||)$$

$$\text{propriété 2' : } ||\Delta A_i^n|| \leq K_1 ||\Delta w_i^n||$$

propriété 3' :

$$\begin{aligned} \text{i) } ||\Delta A(w_i^n) - \Delta A(w_j^m)|| &\leq \max\{ [K_1 ||\Delta w_i^n - \Delta w_j^m|| + 2 K_1 ||w_i^n - w_j^m|| \cdot ||\Delta w_j^m|| + \\ &+ K_2 ||\Delta w_j^m||^2 + K_2 ||\Delta w_i^n||^2], [K_1 ||\Delta w_{i+1}^n - \Delta w_{j+1}^m|| + \dots + K_2 ||w_{i+1}^n|| \\ &+ K_2 ||\Delta w_{i+1}^n||^2] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } ||\Delta A(w_i^n) - \Delta A(\tilde{w}_i^n)|| &\leq \max\{ [K_1 ||\Delta(w_i^n - \tilde{w}_i^n)|| + K_2 ||w_i^n - \tilde{w}_i^n|| ||\Delta w_i^n|| + \\ &+ K_2 ||\Delta w_i^n||^2 + K_2 ||\Delta \tilde{w}_i^n||^2], [K_1 ||\Delta(w_{i+1}^n - \tilde{w}_{i+1}^n)|| + \dots] \} \end{aligned}$$

où K_1 est une borne d'une norme des gradients de a , b , c et d et K_2 est une borne d'une norme des matrices Hessiennes de a , b , c et d .

Les propriétés 1' et 2' sont triviales à démontrer en utilisant l'hypothèse H_3 .

On va par contre démontrer la propriété 3' :

Démonstration :

Remarquons que :

$$(8.5) \quad \Delta A(u_i) - \Delta A(v_j) = \begin{bmatrix} 0 & -(\Delta a(u_i) - \Delta a(v_j)) & 0 & 0 \\ 0 & -(\Delta b(u_{i+1}) - \Delta b(v_{j+1})) & 0 & 0 \\ 0 & -(\Delta c(u_i) - \Delta c(v_j)) & 0 & 0 \\ 0 & -(\Delta d(u_{i+1}) - \Delta d(v_{j+1})) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On voit que pour trouver une borne de $\|\Delta A(v_i) - \Delta A(v_j)\|_\infty$ il suffit d'étudier les quantités de la deuxième colonne. On ne le fera que pour le premier terme car c'est analogue pour les autres termes.

On note $\text{grad } a(\theta)$ et $a''(\theta)$ le gradient et la matrice hessienne de a au point θ , alors pour p, q, r et s dans le domaine de définition (contenu dans \mathbb{R}^4) de a , il existe θ et η tels que :

$$a(s) = a(r) + (\text{grad } a(r))^t (s-r) + \frac{1}{2} (s-r)^t a''(\eta) (s-r)$$

$$a(q) = a(p) + (\text{grad } a(p))^t (q-p) + \frac{1}{2} (q-p)^t a''(\eta) (q-p)$$

d'où

$$\begin{aligned} [(a(q) - a(p)) - (a(s) - a(r))] &= (\text{grad } a(p))^t (q-p) - (\text{grad } a(r))^t (s-r) \\ &\quad + \frac{1}{2} (q-p)^t a''(\eta) (q-p) \\ &\quad - \frac{1}{2} (s-r)^t a''(\theta) (s-r) \end{aligned}$$

et par l'identité (vérifiée pour un certain δ)

$$(\text{grad } a(p))^t = (\text{grad } a(r))^t + (p-r)^t a''(\delta)$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 [(a(q) - a(p)) - (a(s) - a(r))] &= [\text{grad } a(r)]^t [(q-p) - (s-r)] \\
 &+ (p-r)^t a''(\delta) (q-p) \\
 &+ \frac{1}{2} (q-p)^t a''(\eta) (q-p) \\
 &- \frac{1}{2} (s-r)^t a''(\theta) (s-r)
 \end{aligned}$$

en passant aux normes, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (8.6) \quad |(a(q) - a(p)) - (a(s) - a(r))| &\leq K_1 \|(q-p) - (s-r)\| \\
 &+ K_2 \{2\|p-r\| \cdot \|(q-p)\| + \|(q-p)\|^2 + \|s-r\|^2\}
 \end{aligned}$$

De ceci on déduit la propriété 3' en remplaçant p, q, r et s par les w_α^β adéquats.

La propriété 4 reste inchangée. On peut suivre sans aucune difficulté le paragraphe II.4 en utilisant les propriétés 1' et 2' au lieu des propriétés 1 et 2 et en prenant p et q au lieu de p_θ et q_θ .

Au lieu de considérer l'ensemble $\Phi_{\theta, \epsilon, M}$ du paragraphe II.7 on considère :

$$\Phi_{\epsilon, M} = \{ \phi \in \tilde{\Phi} \text{ tq } L \cdot \|\phi'\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{4K_1 p q^2} \text{ et } \|\phi''\|_\infty < M \}$$

Le reste de l'étude se fait sans aucune difficulté particulière jusqu'à démontrer le théorème de stabilité pour l'ensemble :

$$\Phi_{\epsilon, M} \text{ au lieu de } \Phi_{\theta, \epsilon, M}$$

Nota : Dans notre problème particulier des ondes longues, on sait démontrer que les hypothèses H_1 et H_2 ne sont vérifiées que pour le cas où le fond est horizontal et le frottement est nul (Proposition I).

II. 9. - Difficulté de l'étude de la stabilité au delà du domaine de définition des conditions initiales

On a essayé d'étudier la stabilité au-delà du domaine de définition des conditions initiales mais sans aucun résultat sauf dans le cas très particulier des conditions aux limites de réflexion total (§ c). En tout cas on croit intéressant de poser le problème (§ a) qu'on a voulu étudier et la voie qu'on a choisie pour l'aborder (§ b).

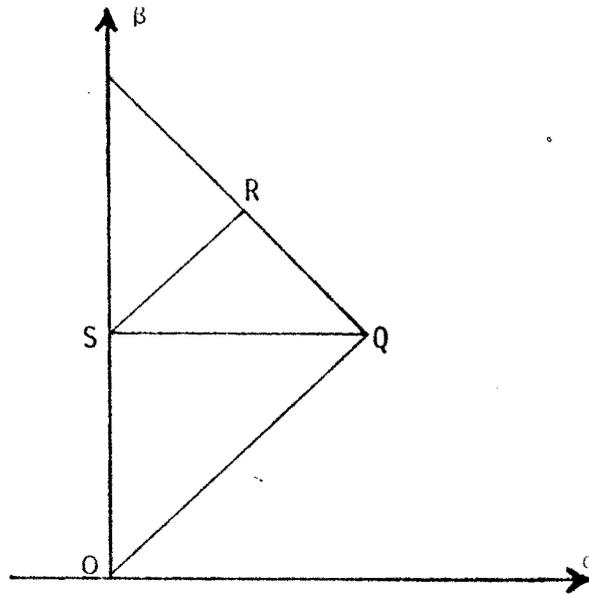


Figure 4

a) Le problème

Dans les paragraphes précédents on a étudié la stabilité de la méthode de Massau dans la région $O Q S$, qui dans le plan des variables caractéristiques est le domaine des conditions de Cauchy données sur OQ (voir figure 4). On s'est posé ici le problème d'étudier la stabilité de la méthode de Massau par rapport aux conditions initiales (et si possible aux limites) dans tout le quadrilatère $O Q R S$.

On a étudié le problème dans le cas suivant :

- i) On s'est restreint aux équations des ondes longues avec fond horizontal et sans frottement ($f \equiv 0$ dans les équations (I.4.4)).
- ii) On s'est donné des conditions de Cauchy qui assurent la stabilité en $O Q S$, c'est-à-dire $\phi \in \Phi_{\theta, \epsilon, M}$ (voir II.5. et II.7.)
- iii) On a cherché à se donner des conditions aux limites sur Γ_2 du type (I.4.12) :

$$(9.1) \quad s = \gamma r + \psi(t) \quad , \quad \gamma = \text{constante}, \psi \text{ assez régulière } \gamma \text{ et } \psi \text{ respectant la propriété suivante } \forall \theta, 0 < \theta < 1 :$$

$$(9.2) \quad r \in ((2-\theta) \sqrt{gh}, (2+\theta) \sqrt{gh}) \Rightarrow s \in ((-2-\theta) \sqrt{gh}, (-2+\theta) \sqrt{gh})$$

(voir II.5.1.).

- iv) Finalement, on n'a considéré que les deux cas suivant de conditions aux limites :

$$\text{-) } \gamma = -1 \quad ; \quad \psi \equiv 0 \quad (\text{réflexion totale})$$

$$\text{-) } \gamma = 0 \quad ; \quad \psi \text{ telle que } t \in \mathbb{R}^+ : \psi(t) \in ((-2-\theta) \sqrt{gh}, (-2+\theta) \sqrt{gh})$$

b) La méthode utilisée

On a essayé de reproduire, dans la mesure du possible le schéma de la démonstration faite dans les paragraphes précédents. Les points clés étant :

- i) $\|A^n\|_\infty$ et $\|(A^n)^{-1}\|_\infty$ bornées, indépendamment de k et de n
- ii) $\|A^n \Delta u^n\|$ et $\|A^n \Delta \Delta w^n\|$ vérifiant, pour $\phi \in \Phi_{\theta, \epsilon, M}$ les inégalités (II.4.3) et (II.6.8) respectivement.

On rappelle la méthode de Massau avec conditions aux limites sur la frontière Γ_2 . Bien entendu on conserve les notations du paragraphe I.5

On discrétise le segment OQ en j_0 intervalles avec j_0 pair .
(voir les figures 3 et 4).

Pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$ on utilise :

i) Si n est pair : pour $i \in (J_{n+1} \cup I_{2,n+1})$

$$(9.3) \quad A_i^n (w_i^{n+1} - w_i^n) = B_i^n (w_{i+1}^n - w_i^n)$$

Nota : A l'étape $n+1$ il n'y a pas de point sur la frontière Γ_2 (voir fig. 5).

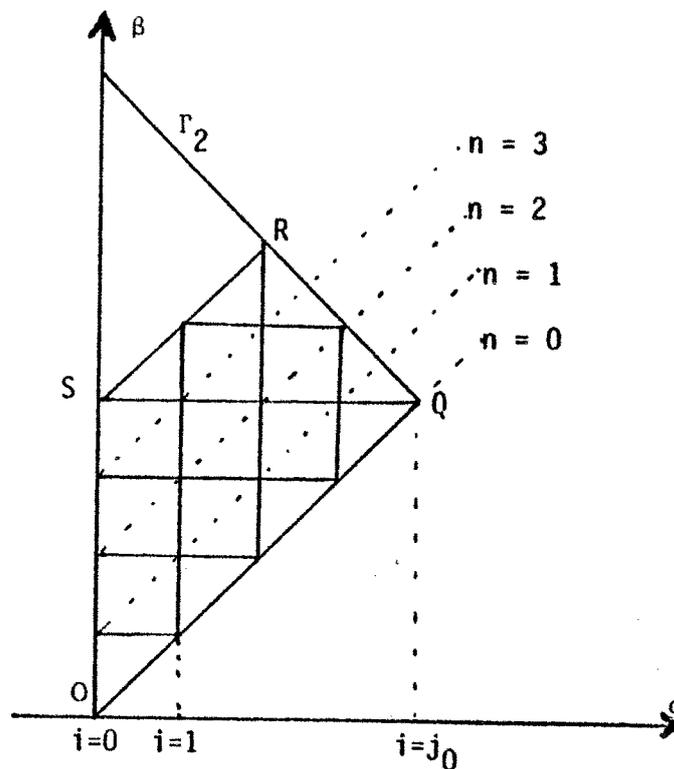


Figure 5

Si n est impair :

- pour $i \in (J_{n+1} \cup I_{2,n+1}) \setminus \{j_0 - \frac{n+1}{2}\}$

$$(9.3)' \quad A_i^n (w_i^{n+1} - w_i^n) = B_i^n (w_{i+1}^n - w_i^n) \quad \text{et}$$

- pour $i = j_0 - \frac{n+1}{2}$ on introduit les conditions aux limites

$$x_i^{n+1} = L$$

$$(x_i^{n+1} - x_i^n) - a_i^n (t_i^{n+1} - t_i^n) = 0$$

(9.4)

$$r_i^{n+1} - r_i^n = 0$$

$$s_i^{n+1} = \gamma r_i^{n+1} + \psi(t_i^{n+1})$$

La condition (9.2) imposée à la condition aux limites (9.1) entraîne que autant dans (9.3) que dans (9.3)' $\|A_i^n\|$ et $\|(A_i^n)^{-1}\|$ sont bornés indépendamment de n , i et de k .

On a cherché à former, pour n pair le produit $A_\ell^n \Delta w_\ell^n$ où P_ℓ^n est le point voisin de la frontière Γ_2 , c'est-à-dire pour $\ell = j_0 - \frac{n}{2} - 1$ et on a cherché à mettre en rapport ce produit avec $A_\ell^{n-1} \Delta w_\ell^{n-1}$, $A_\ell^{n-2} \Delta w_\ell^{n-2}$ et $A_{\ell+1}^{n-2} \Delta w_{\ell+1}^{n-2}$ pour chercher des inégalités qui permettent de déduire (pour ν et ψ bien choisis) que $\|A^n \Delta w^n\|$ possède une borne Mk où M serait indépendant de n et de k . Malheureusement, les inégalités trouvées sont tellement complexes qu'on a rien pu en conclure.

c) Le cas de réflexion totale

On peut vérifier sans aucune difficulté que, la solution de la méthode de Massau (pour k fixé) dans la région $Q R S$ avec la condition aux limites de réflexion totale sur Γ_2 ($\gamma = -1, \psi \equiv 0$ dans (9.4)) est exactement la même solution que celle construite sans conditions aux limites mais avec des conditions initiales prolongées par symétrie à $Q M'$ où M' est le point de coordonnées $(\frac{3L}{2}, \frac{3L}{2})$

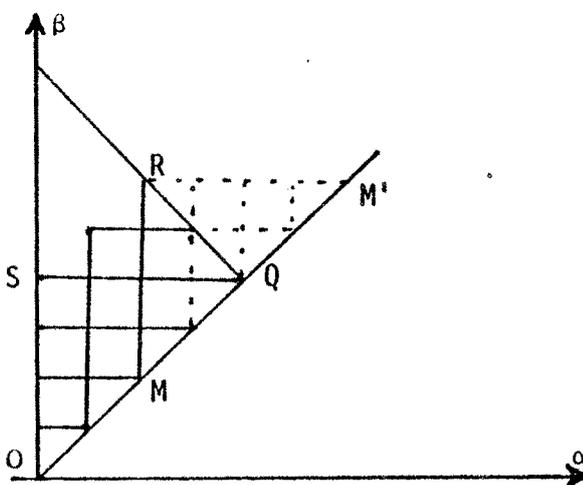


Figure 6

Ces conditions étant données par

$$(9.5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x(\alpha) = \alpha & \alpha \in (0, \frac{3L}{2}) \\ t(\alpha) = 0 & \alpha \in (0, \frac{3L}{2}) \\ r(L+\alpha) = -s(L-\alpha) & \alpha \in [0, L/2] \\ s(L+\alpha) = -r(L-\alpha) & \alpha \in [0, L/2] \end{array} \right.$$

Donc dans le cas de la réflexion totale la méthode de Massau est stable par rapport aux conditions initiales dans $O Q R S$ si et seulement si elle l'est dans tout $O M' R S$ par rapport aux conditions initiales prolongées.

Pour que le théorème sur la stabilité soit applicable, il suffit d'ajouter à l'hypothèse $\phi \in \Phi_{\theta, \epsilon, M}$ les propriétés :

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow L \\ (\alpha < L)}} r'(\alpha) = - \lim_{\substack{\alpha \rightarrow L \\ \alpha < L}} s'(\alpha)$$

(9.6)

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow L \\ \alpha < L}} r''(\alpha) = - \lim_{\substack{\alpha \rightarrow L \\ \alpha < L}} s''(\alpha)$$

CHAPITRE III

EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES

III.1. INTRODUCTION

On a voulu faire des calculs numériques de la solution des équations I.2.5 , en utilisant la méthode de Massau comme elle a été exposée au chapitre I.

Afin d'avoir des éléments de comparaison, on a utilisé dans nos calculs les mêmes données que celles utilisées par Saenz 25 . Cet auteur, qui a étudié les équations des ondes longues à une variable d'espace (équations I.2.5.) a réalisé des expériences numériques comparatives d'un certain nombre de méthodes utilisant un maillage régulier dans le plan (x,t) (le schéma classique des caractéristiques, le schéma diffusif, le schéma de LAX-WENDROFF et le schéma implicite de PREISSMANN).

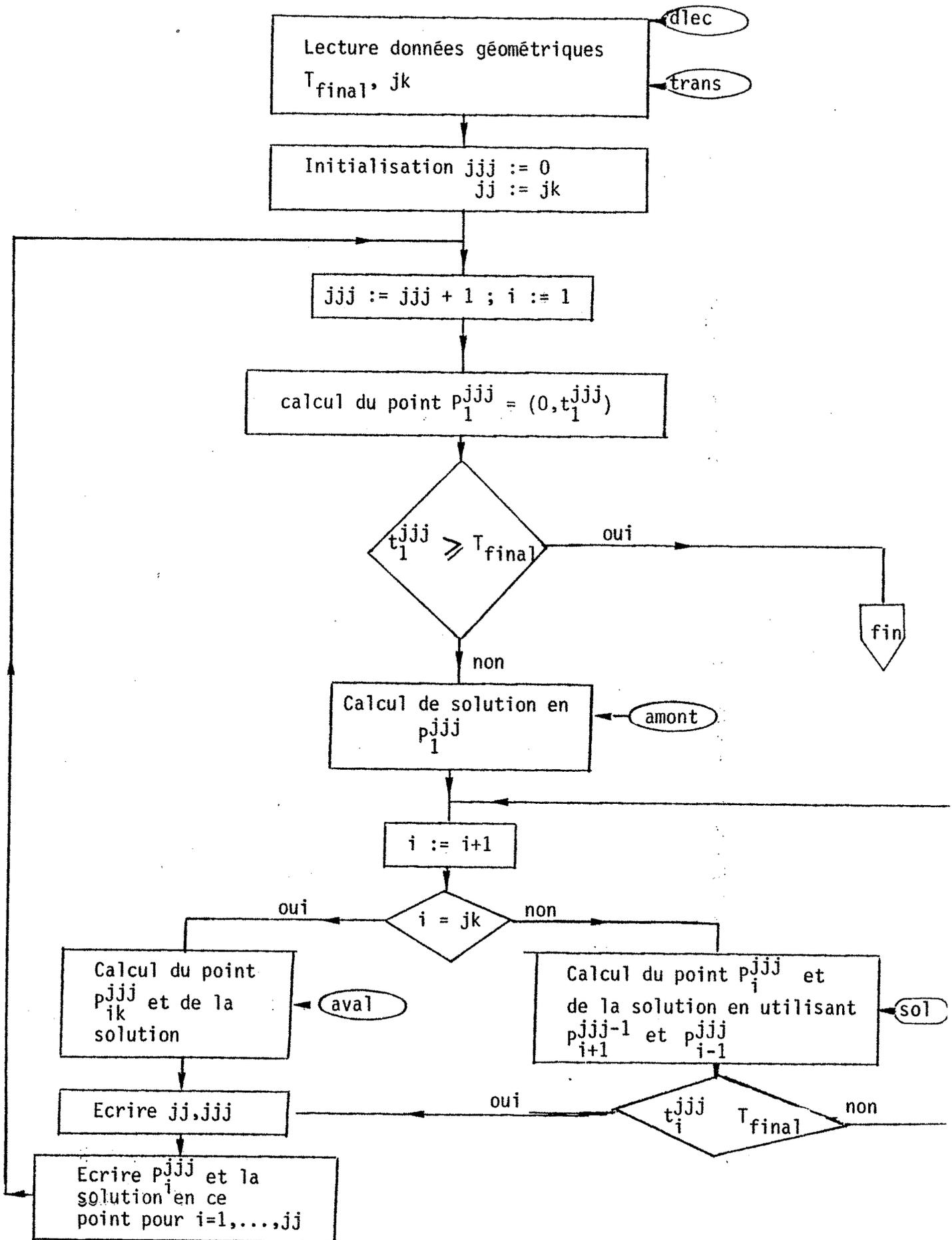
Les programmes que nous avons écrit autorisent donc des conditions initiales de repos et des conditions aux limites à l'amont et à l'aval du canal.

III.2. LES PROGRAMMES

L'ensemble des programmes est constitué par trois programmes principaux CARAC, DESSCAR, CARINT et de quelques sous-programmes.

i) Le programme CARAC permet de calculer la solution à notre problème suivant la méthode de Massau.

L'organigramme ci-joint correspond au programme CARAC.



Dans "initialisation" on calcule de façon approchée la caractéristique de la première famille passant par (0,0). On discrétise cette courbe selon les points d'absciss $x = i (L/(jk-1))$ pour $i = 1, \dots, jk$

jjj est l'indice de la caractéristique calculée ;

amont, sol et aval sont des sous-programmes permettant le calcul de la solution respective des points amont, quelconque et aval de la caractéristique considérée. On range les résultats dans un fichier d'accès séquentiel. Pour faciliter la lecture de ces résultats, on utilise pour chaque caractéristique deux ordres d'écriture : le premier indique le nombre de points et le numéro de la caractéristique et le deuxième indique les coordonnées et la solution aux points considérés sur cette caractéristique.

Le programme CARAC ne contient pas de test pour savoir si on est ou non au delà du déferlement. Les calculs s'arrêtent comme il est indiqué dans l'organigramme.

- ii) DESSCAR réalise le dessin du réseau de caractéristiques dans le plan (x,t) en utilisant le fichier de résultats créé par CARAC. Il n'utilise à chaque instant que les résultats relatifs à deux caractéristiques consécutives.
- iii) CARINT résoud le problème d'interpolation posé par l'utilisation de la méthode de Massau : le calcul étant fait dans le domaine de caractéristiques il faut faire une interpolation des résultats fournis par CARAC. CARINT trouve les intersections des droites $x = C^{te}$ ou $t = C^{te}$ avec toutes les caractéristiques de la première et de la deuxième famille calculées par CARAC et calcule des estimations de la solution en ces intesections. Le fichier de résultats créé par CARAC est parcouru une seule fois même si on désire l'interpolation pour plusieurs abscisses x_i et instants t_i .

Comme DESSCAR, CARINT n'utilise en mémoire centrale, à un instant donné, que les résultats relatifs à deux caractéristiques consécutives. CARINT fait appel aux trois sous-programmes DATA, DESSX et DESST. DATA fournit à CARINT les données d'interpolation. DESSX et DESST réalisent la sortie de résultats.

DESSCAR, DESSX et DESST utilisent le logiciel BENSON pour les sorties graphiques.

III.3. LES RESULTATS NUMERIQUES

a) La solution exacte de Temperville [28].

Considérons un canal de longueur infinie et de profondeur constante h avec les conditions initiales du repos :

$$(3.1.) \quad u(x,0) = 0 \quad , \quad z(x,0) = 0 \quad \forall x \geq 0$$

et considérons une condition aux limites assez régulière, à l'amont du canal donnée par :

$$(3.2.) \quad u(0,t) = f(t) \quad ; \quad f(0) = 0$$

alors on montre (voir [28]) que dans le domaine d'existence d'une solution régulière on a, pour x positif, que les caractéristiques de la première famille sont des droites et que u et z restent constantes sur ces droites. De plus, la solution en $P(x,t)$ doit vérifier :

$$(3.3) \quad u(x) - 2 \sqrt{g(h+z)} = - 2 \sqrt{gh} = C^{te}$$

Cette condition est due au fait que les caractéristiques de la deuxième famille viennent du repos. On l'utilise [25] comme condition aux limites de *perméabilité* pour faire les calculs dans un canal de longueur finie.

b) Les résultats numériques avec une condition de perméabilité :

On s'est donné en $x = 0$ la condition aux limites utilisée par SAENZ :

$$u(0,t) = A \sin \omega t \quad \text{où}$$

$$T = 44\,700 \text{ sec} \quad (12 \text{ heures et } 25 \text{ min})$$

$$A = 1.5$$

$$\omega = 2\pi/T$$

et la profondeur constante :

$$h = 50 \text{ m}$$

Alors la longueur d'onde au repos est donnée par :

$$\lambda = \sqrt{gh} \quad T = 989\,981 \text{ m}$$

On peut montrer analytiquement que le premier point de déferlement dans le temps se trouve au point $P = (1.59\lambda, 1.59T)$

Les dessins : 1a, 1b, ... etc
correspondent aux calculs
réalisés pour un canal de
longueur : $L = 1.5 \lambda$
avec une discrétisation de : 40 intervalles
sur la première caractéristique.

Dans tous les dessins d'interpolation les points indiqués par " \diamond " correspondent aux intersections des courbes caractéristiques avec la droite $x = C^{te}$ ou $t = C^{te}$ considérée. Dans les dessins 1b, 1c, etc... on a représenté par des "•" la solution exacte.

On constate dans 1b, 1d et 1c que la courbe approchée est légèrement déplacée par rapport à la courbe exacte. On peut superposer presque parfaitement ces courbes mais alors l'axe horizontal (l'axe des x ou des t selon le dessin) correspondant à la solution exacte est déplacé par rapport à celui de la solution approchée. Si on fait ceci l'axe de la solution exacte apparaît selon la ligne en pointillé des dessins 1b, 1d et 1e. Il semble que la discrétisation induise une perte de quantité d'eau dans le bassin.

Les dessins: : 2a, 2b, ..., etc
correspondent aux calculs
approchés réalisés pour un
canal de longueur : $L = 2.8 \lambda$
avec une discrétisation de : 80 intervalles
sur la première caractéristique.

On peut observer dans le réseau de caractéristiques (dessin 2a) le point prévu de déferlement $\approx P(1.6, 1.6 T)$. Les calculs continuent à se réaliser même *au-delà* du début de déferlement.

Les dessins 2b, 2c, 2d représentent la surface libre du canal pour $t = 2.50 T$, $t = 2.60 T$ et $t = 2.75 T$.

On voit apparaître des phénomènes de déferlement. Sans tenir compte de la précision des calculs, il semblerait qu'on peut suivre assez bien la nature de la solution. Ceci est remarquable puisque ceci est impossible pour les méthodes de calcul étudiées dans [25].

Les dessins 2e et 2f peuvent trouver une interprétation logique du fait qu'au-delà du déferlement la solution est "multivoque".

c) Les résultats numériques avec une condition de réflexion

$$h = 50 \text{ m} = C^{te}$$

Conditions initiales du repos

Condition à l'amont :

$$u(0,t) + 2 \sqrt{g(h+z(0,t))} = 2 A \sin \omega t + 2 \sqrt{gh}$$

$$A = 0.66$$

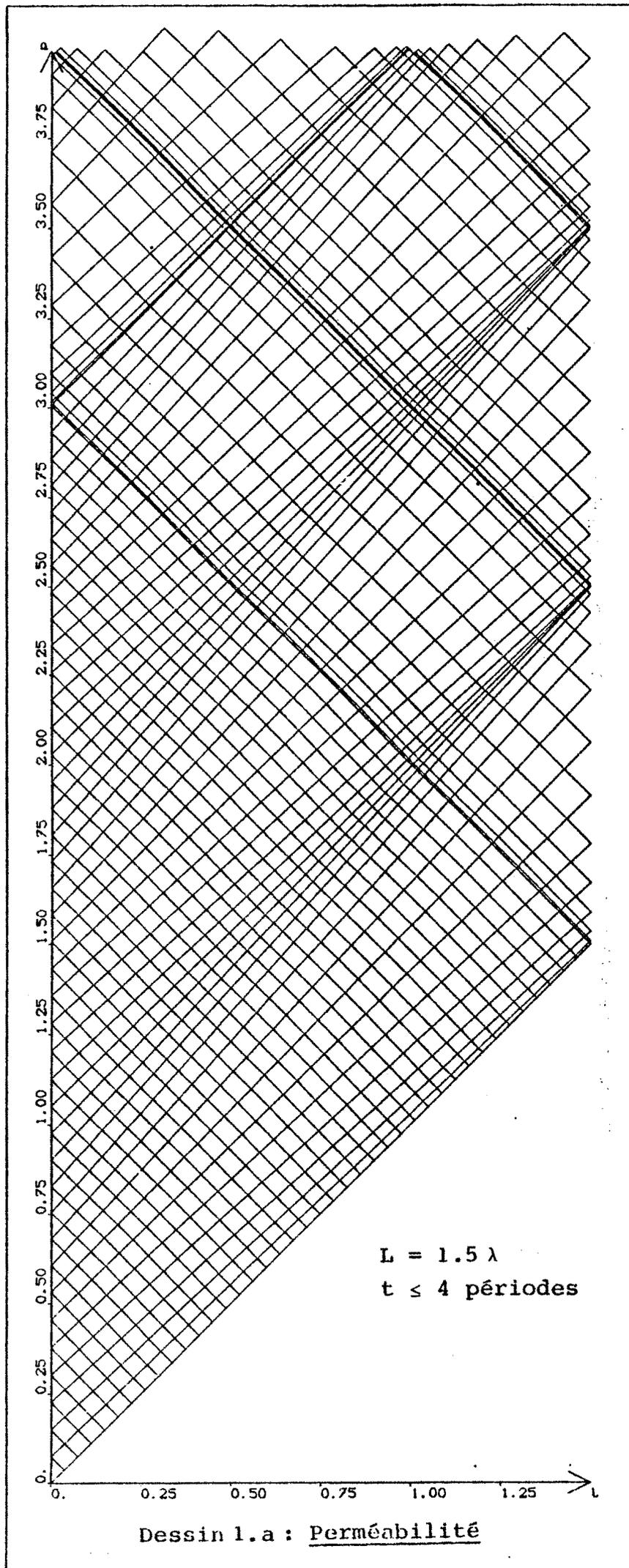
condition à l'aval de la réflexion :

$$u(L,t) = 0$$

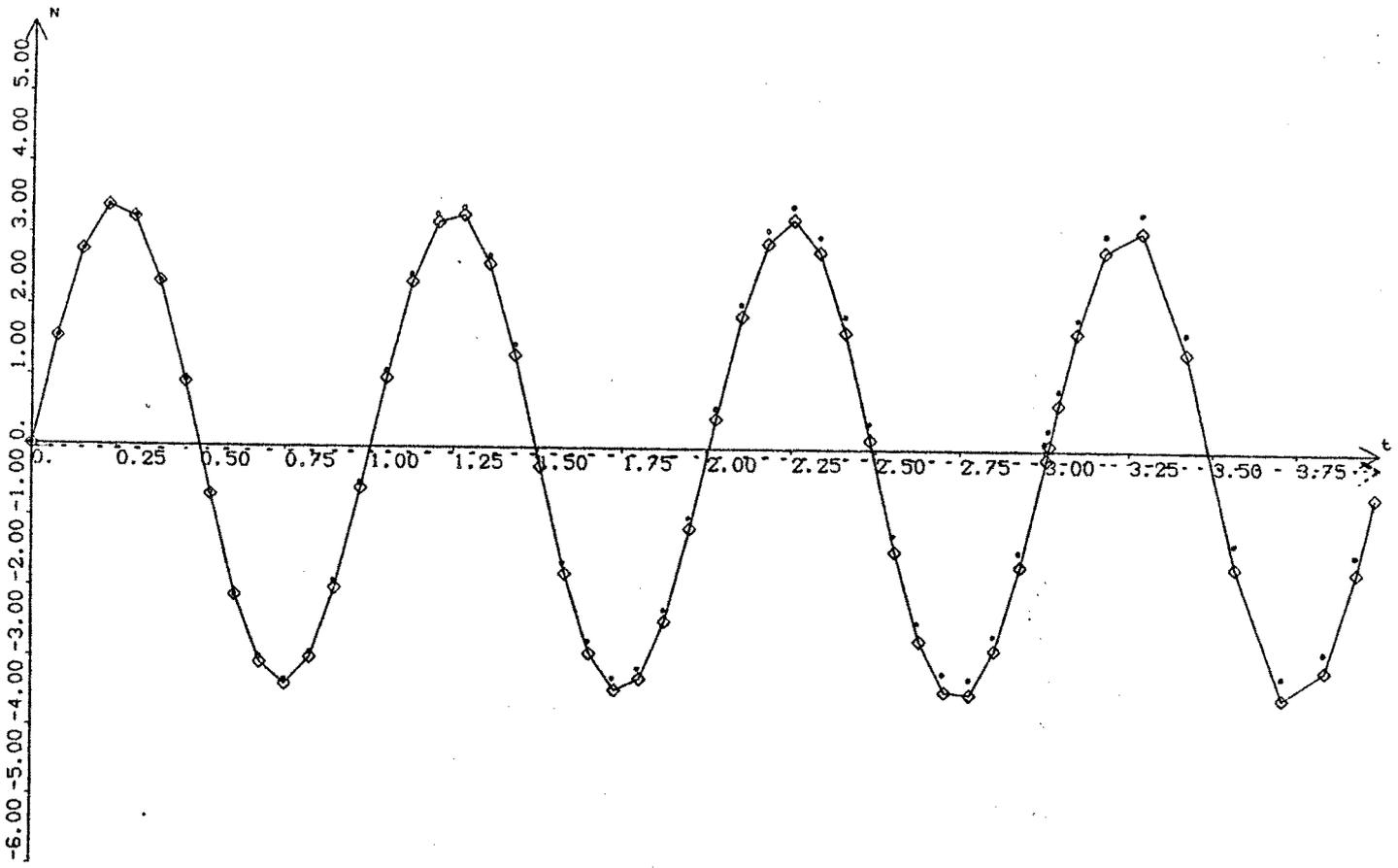
On a fait comme SAENZ [25] , des calculs pour $L = 0.5\lambda$

Les dessins 3a, 3b et 3c correspondent à une discrétisation de 10 intervalles sur la première caractéristique. D'après SAENZ on devrait avoir un régime stationnaire avec un minimum d'amplitude en 0.25λ . Dans cette abscisse on doit trouver une oscillation liée au second harmonique; c'est à dire de période égale à la moitié de celle de l'harmonique principal.

On peut remarquer qu'une discretisation de 10 intervalles sur la première caractéristique correspond à peu près à une discrétisation de 5 intervalles dans l'axe des x pour la méthode de LAX-WENDROFF ($\Delta t/\Delta x$ près de la limite de stabilité). SAENZ utilise en fait une discretisation de 20 intervalles du segment $[0., 0.5\lambda]$. La précision qu'il obtient devrait donc être comparée avec celle obtenue par une discrétisation de 40 intervalles sur la première caractéristique dans la méthode que nous étudions. Dans les dessins 4a, 4b et 4c on montre l'équivalent de 3a, 3b et 3c changeant de 10 à 40 intervalles sur la première caractéristique. On retrouve le même phénomène oscillatoire en $x = 0.25 \lambda$ mais on note une nette amélioration de la qualité de l'approximation.

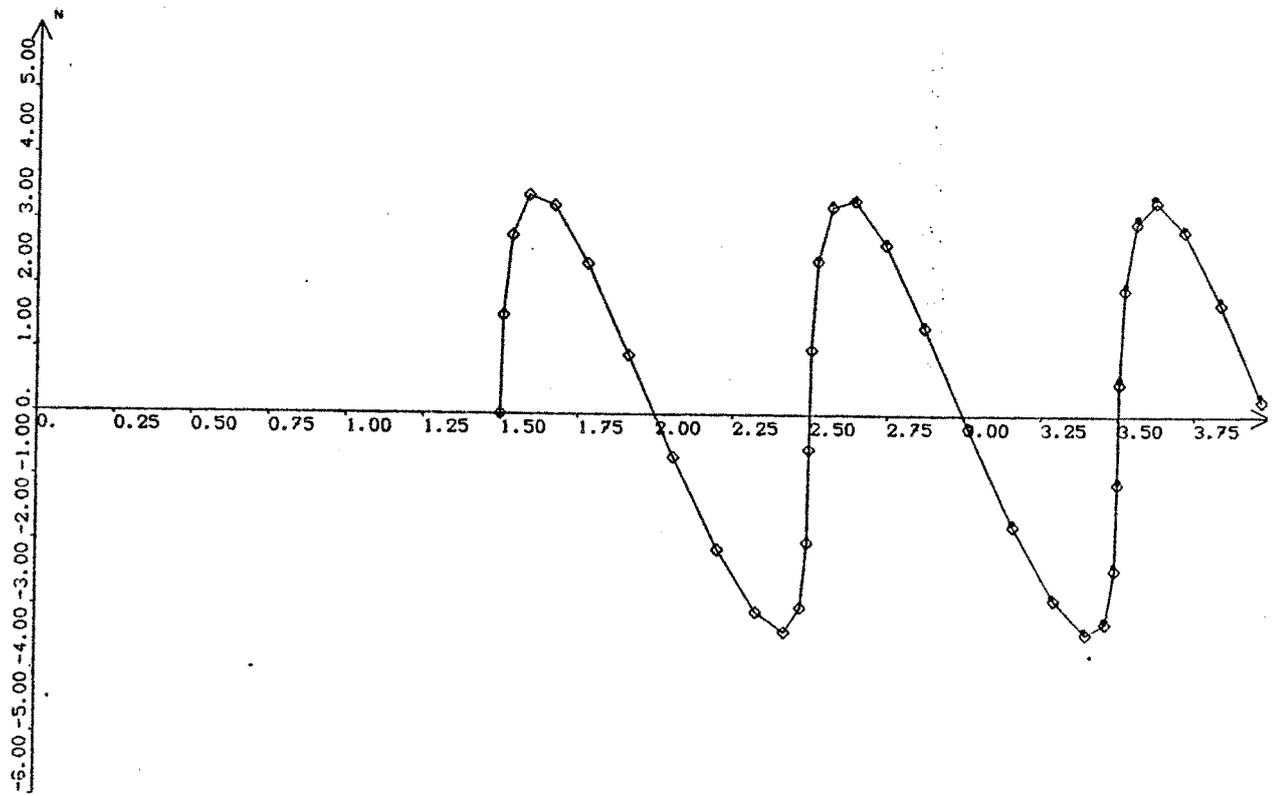


Dessin 1.a : Perméabilité



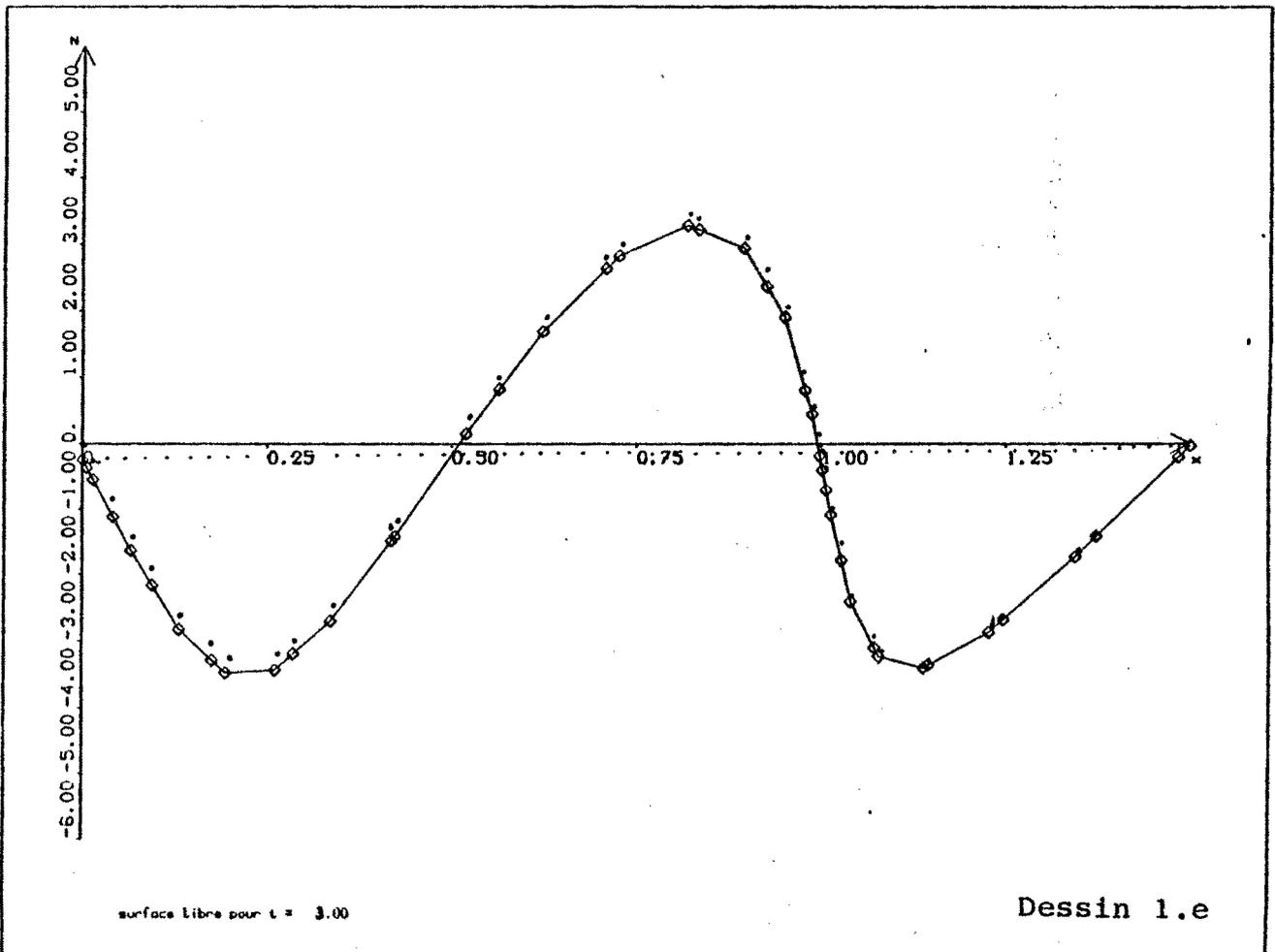
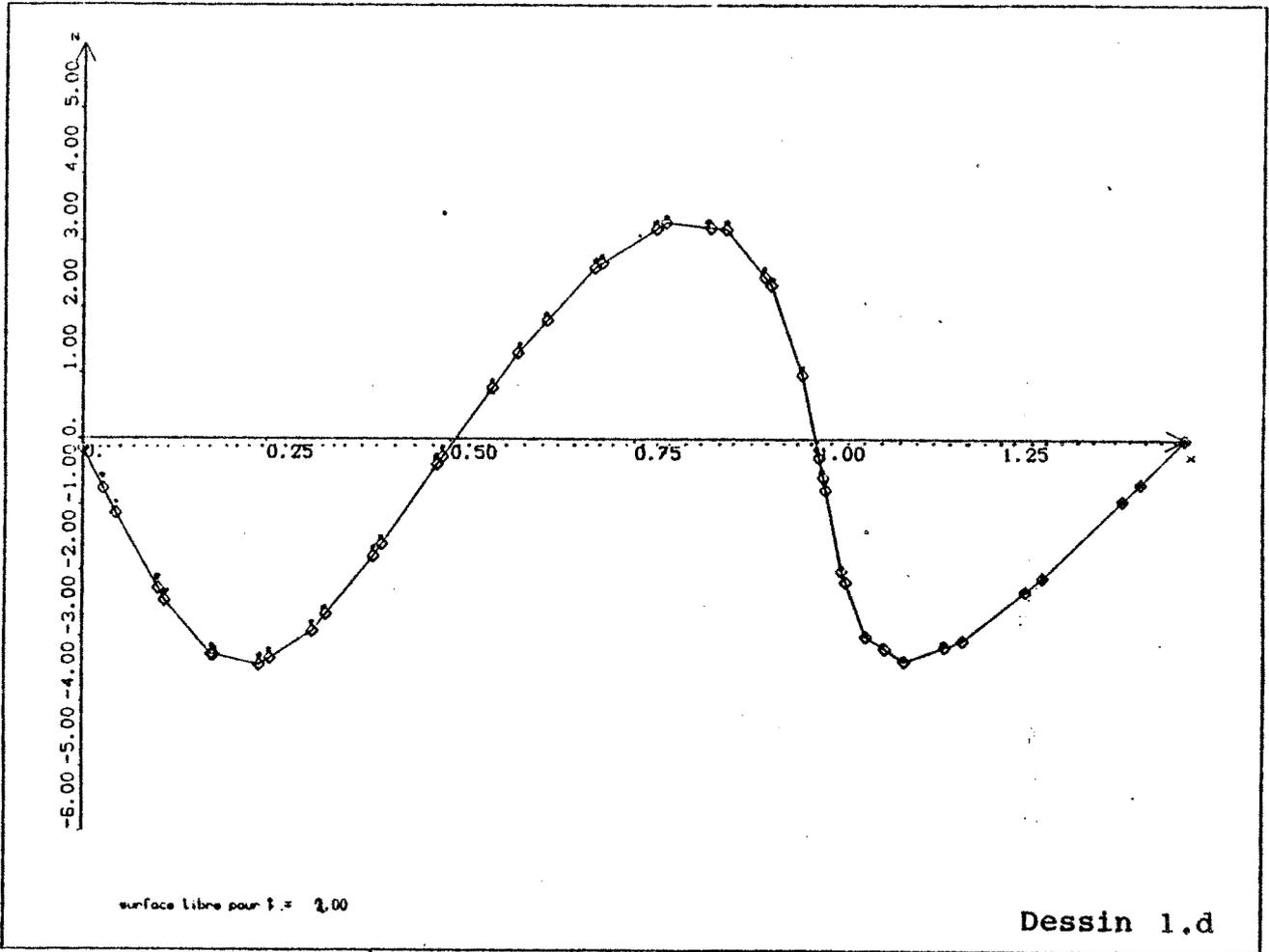
oscillation pour $x = 0.0$

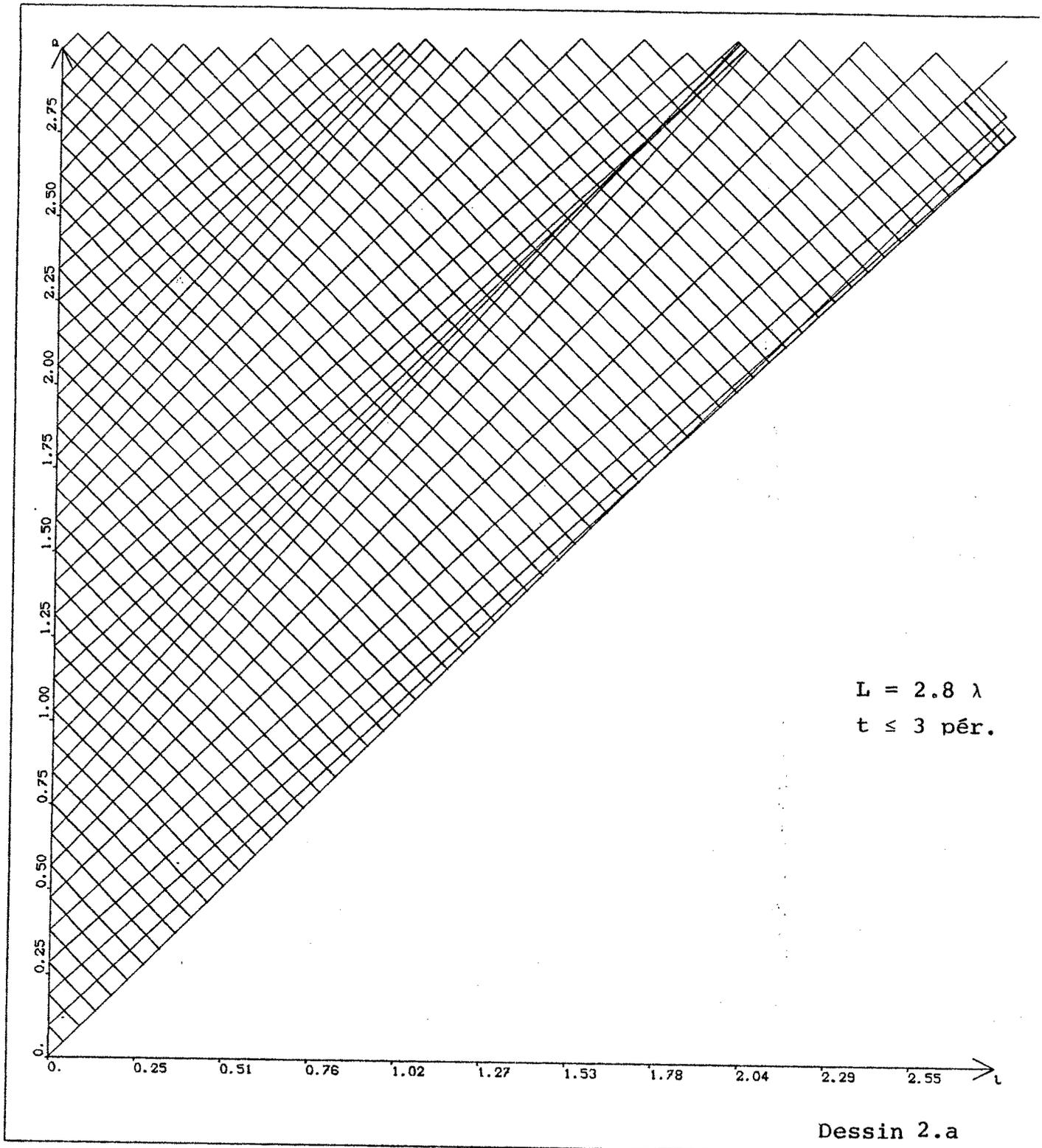
Dessin 1.b

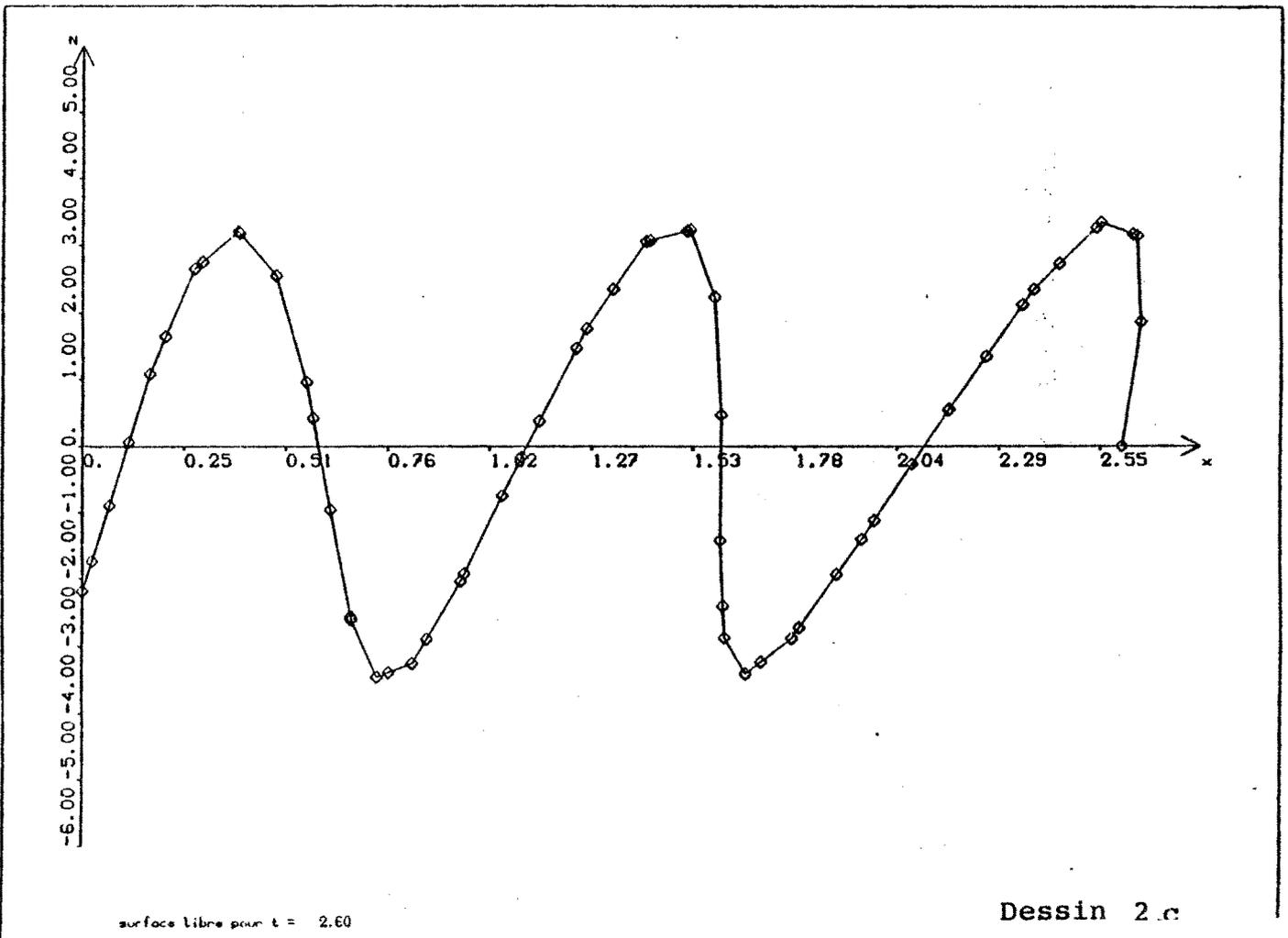
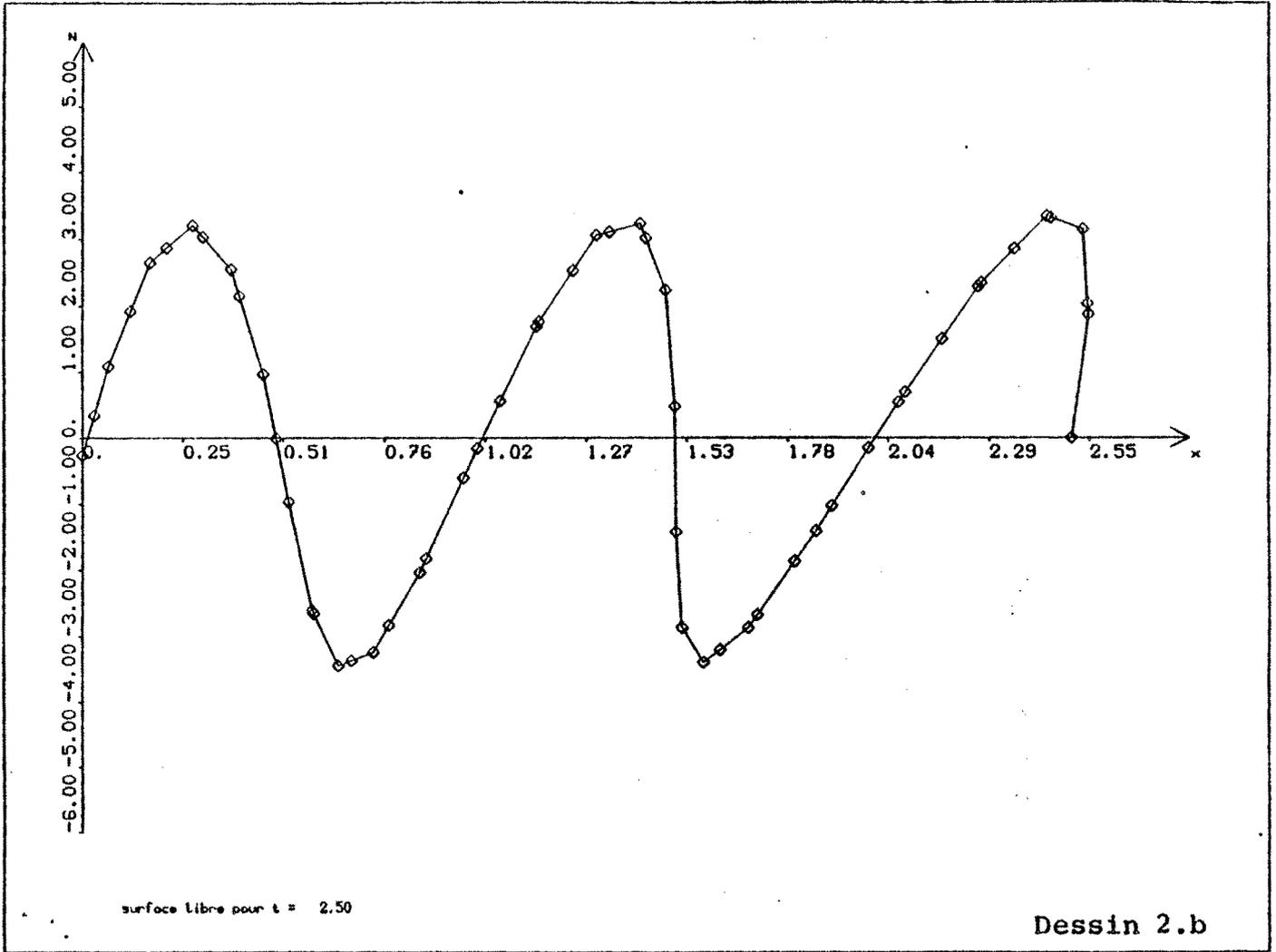


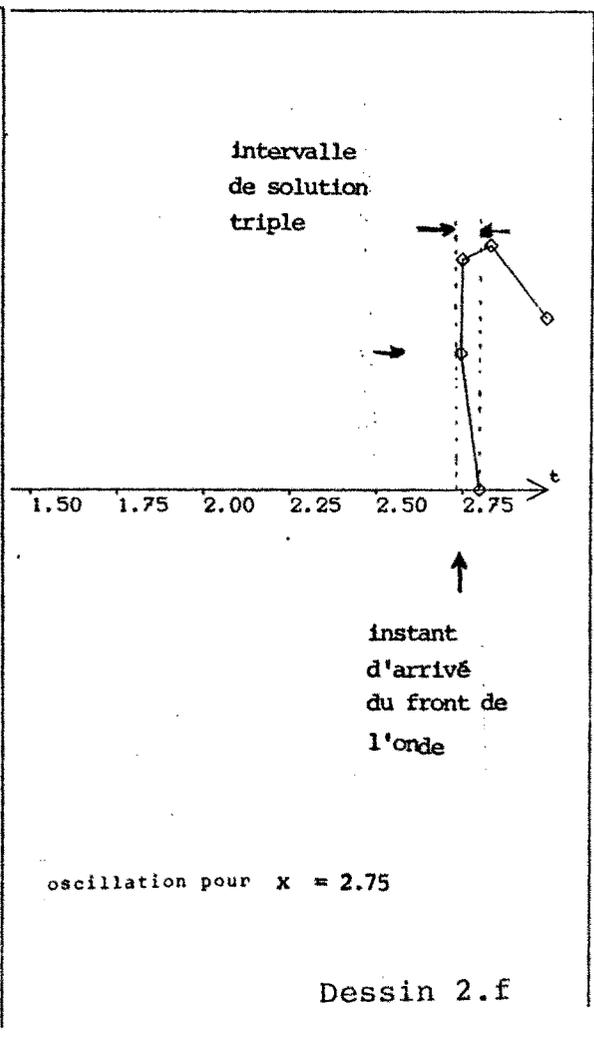
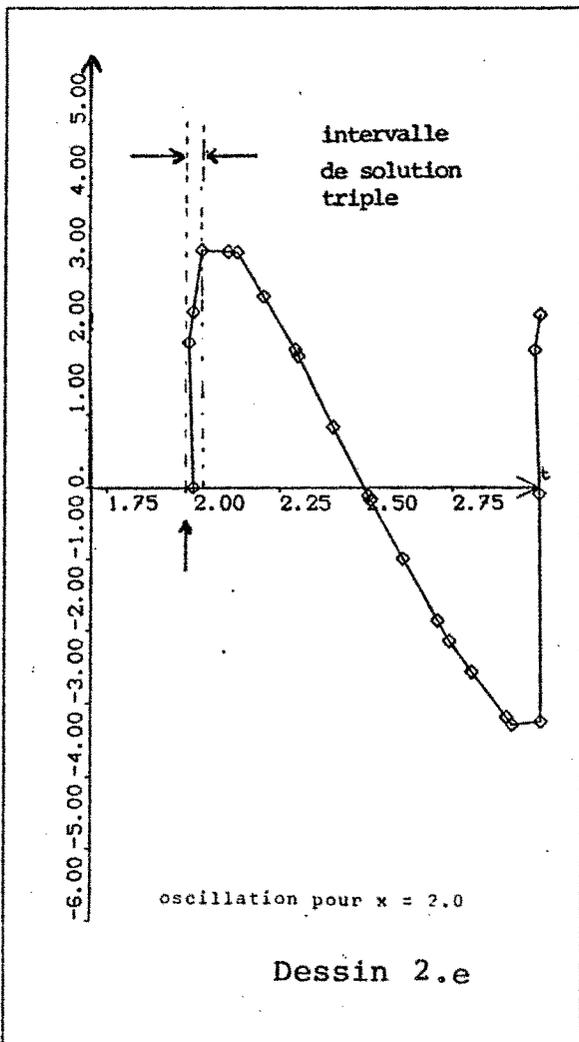
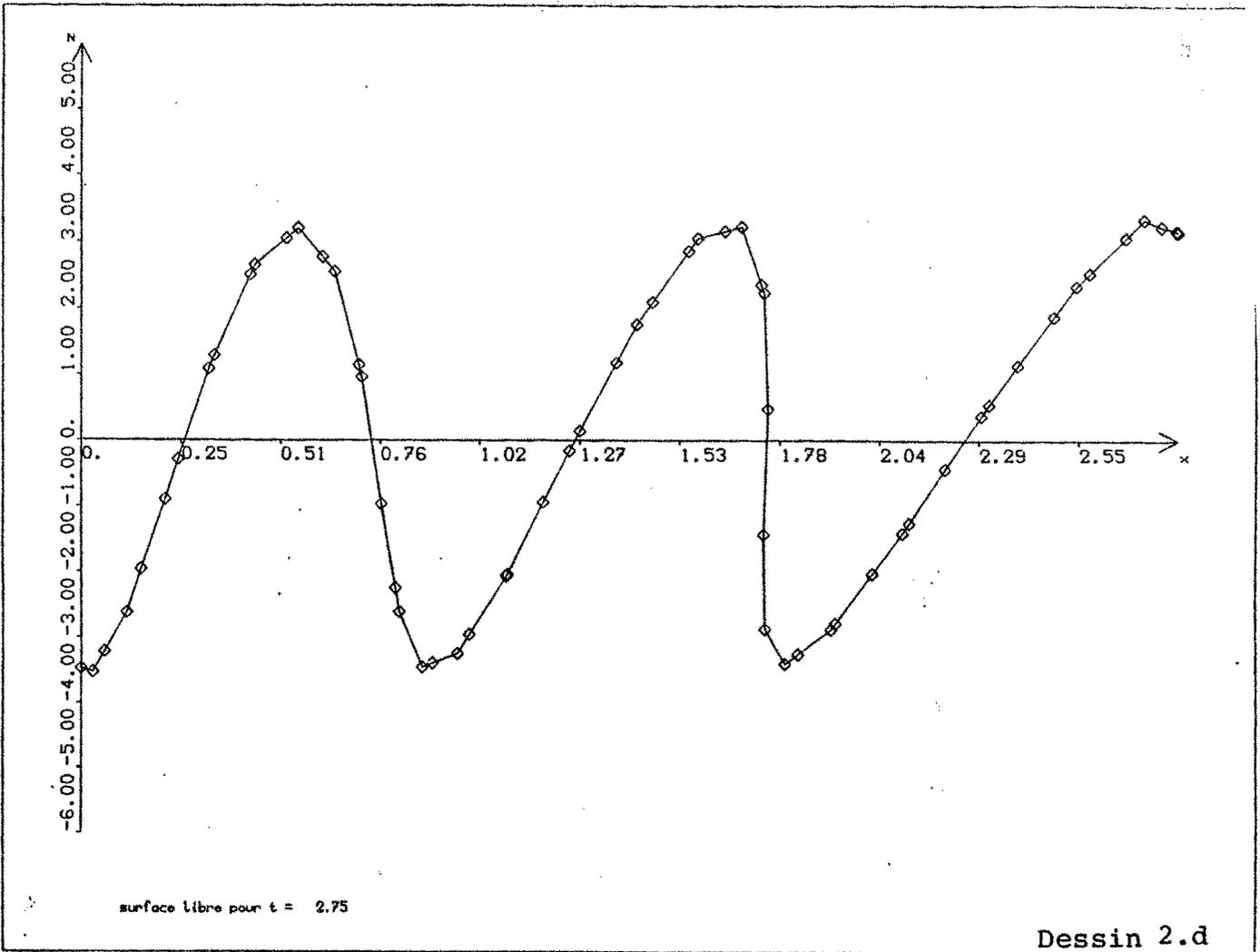
oscillation pour $x = 1.5$

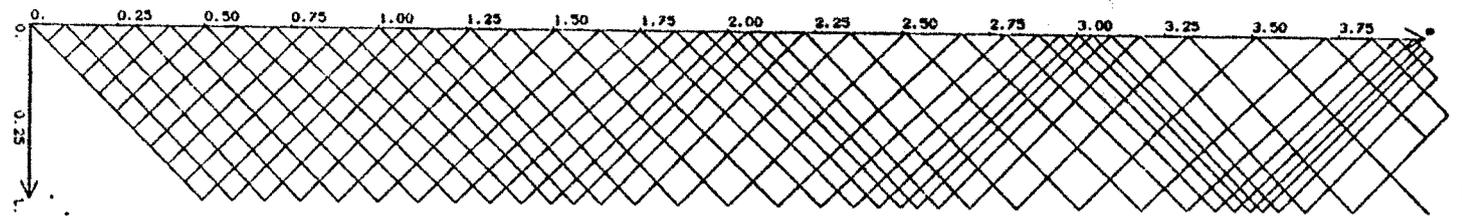
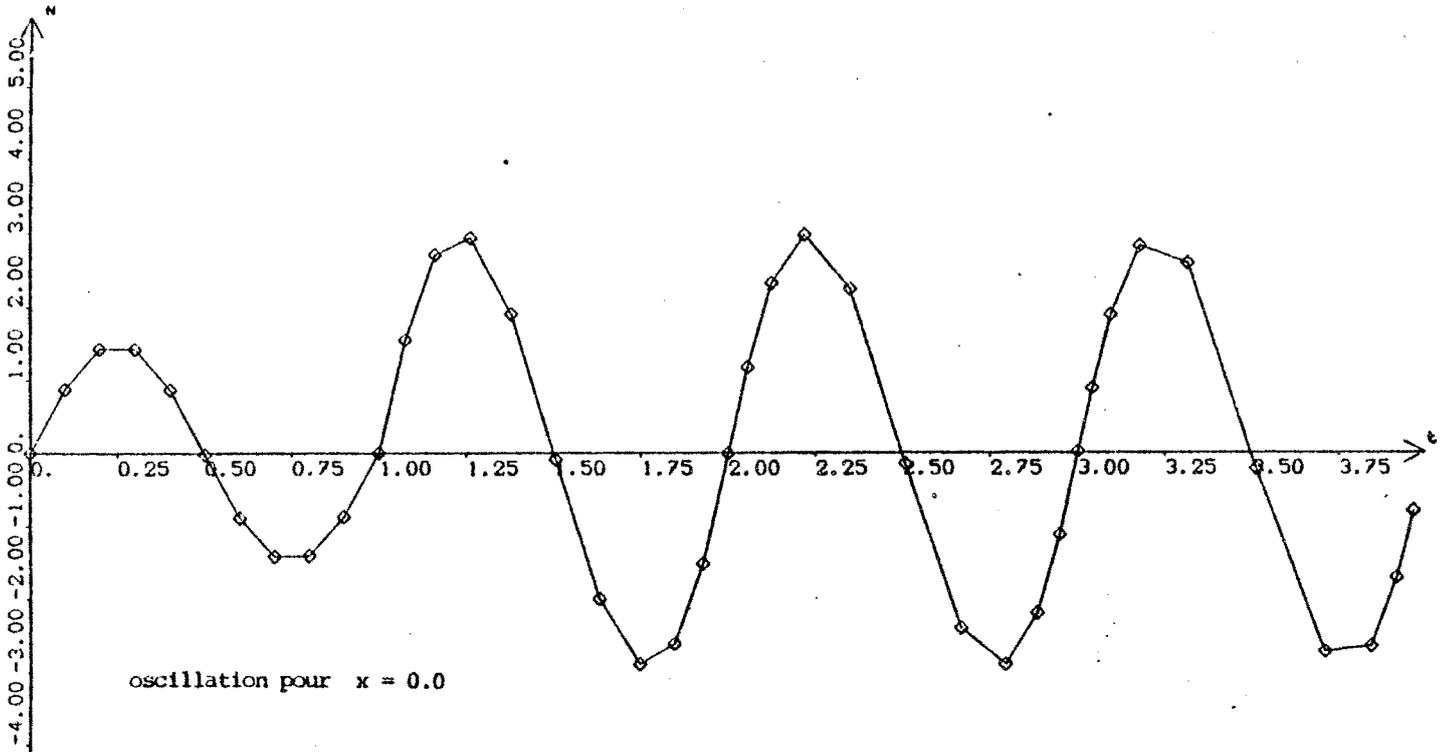
Dessin 1.c



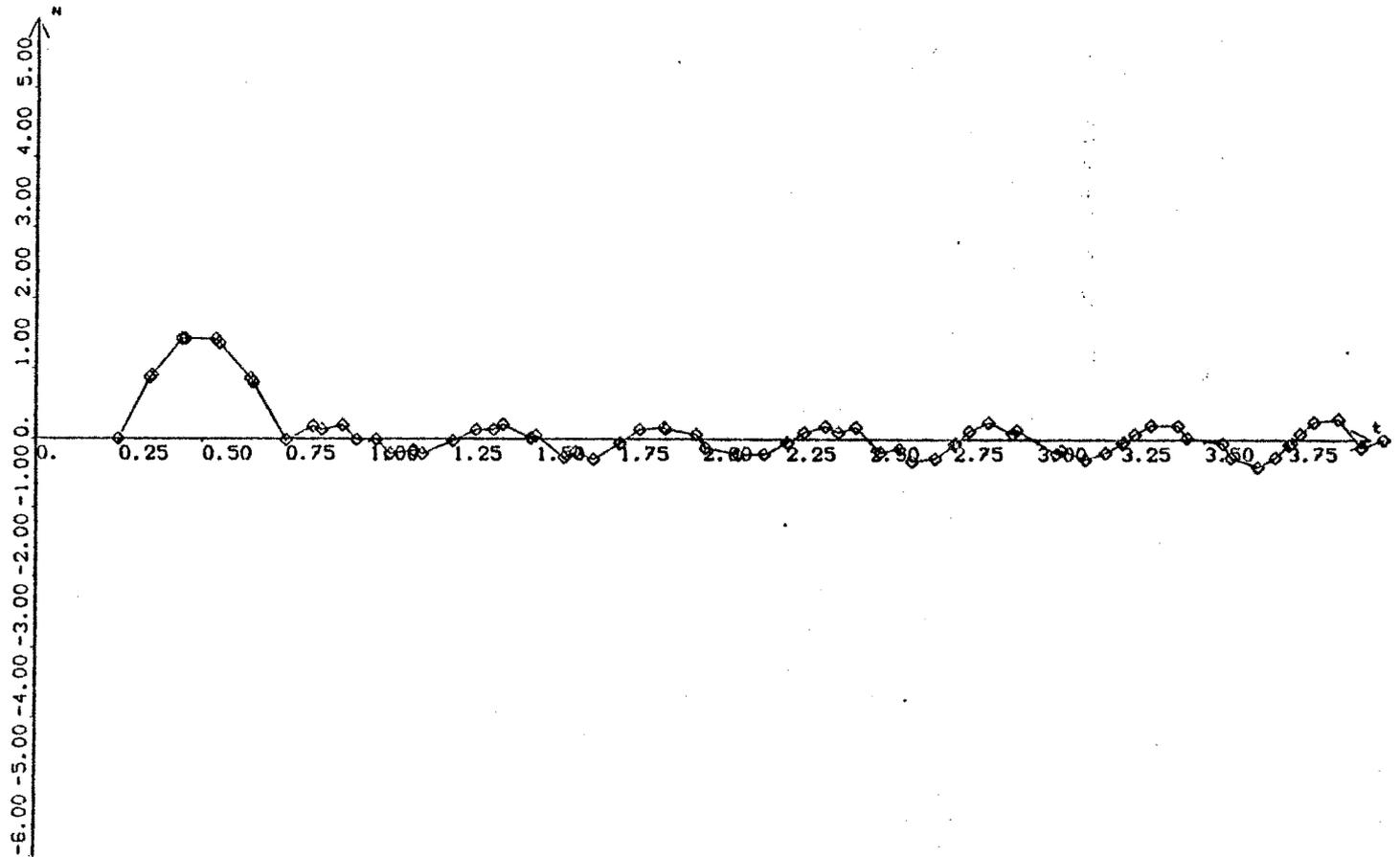




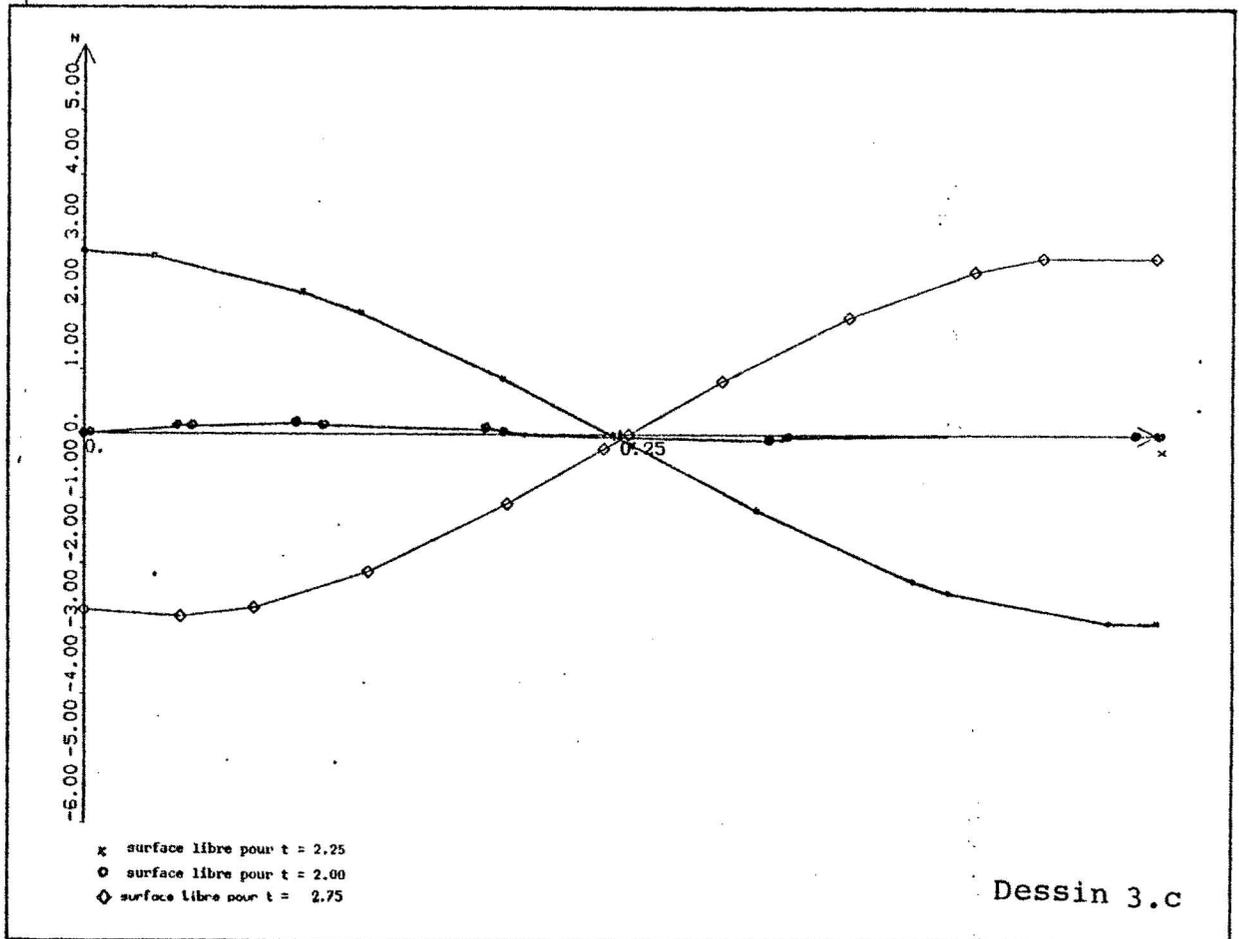


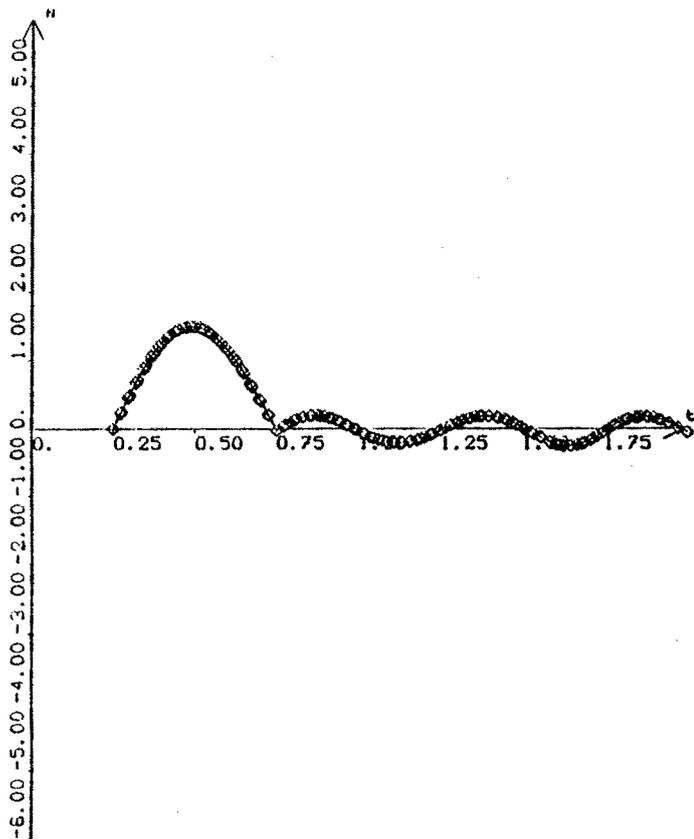
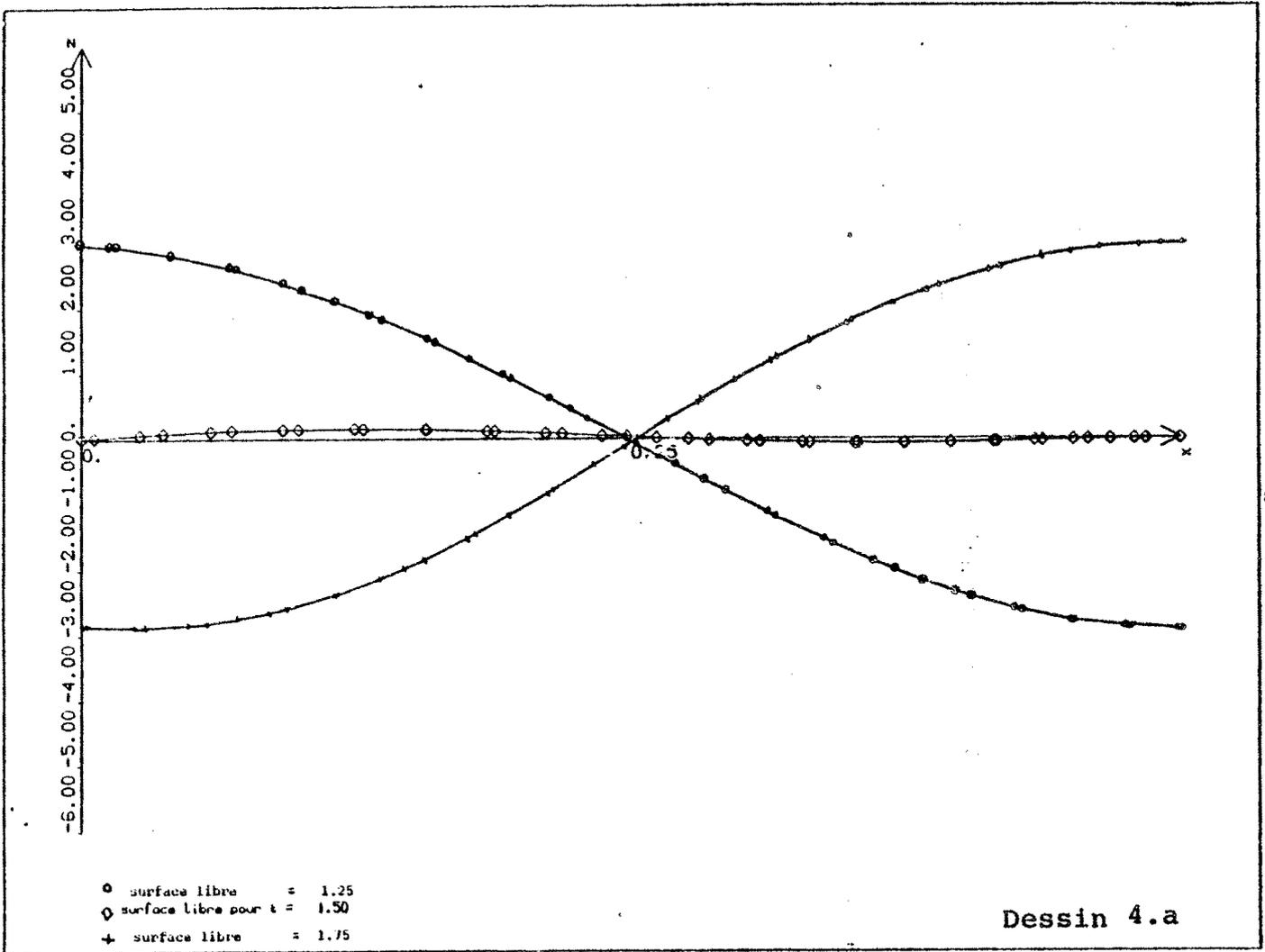


Dessin 3.a

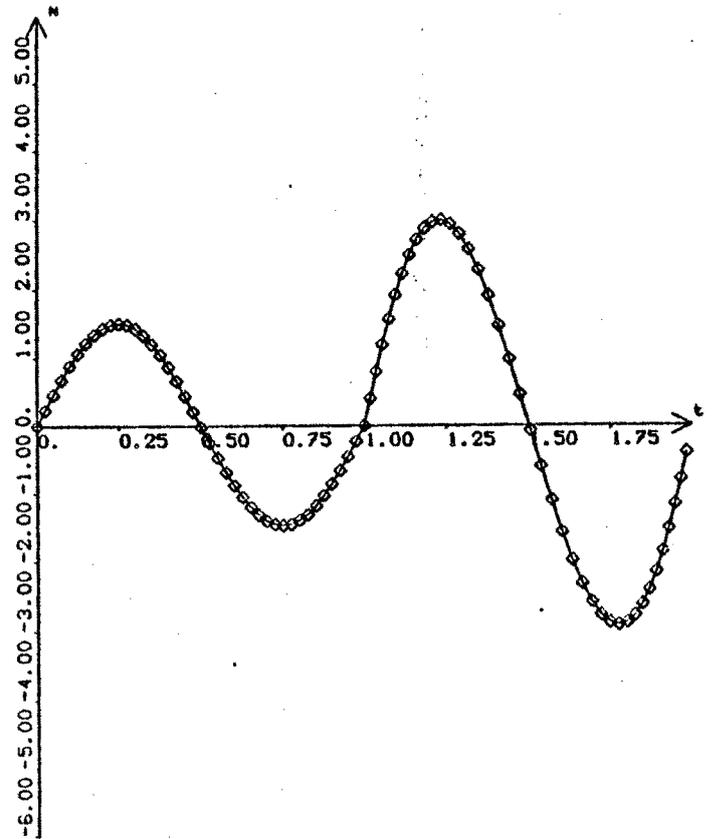


Dessin 3.b





Dessin 4.b



Dessin 4.c

DEUXIÈME PARTIE

LE PROBLÈME À DEUX VARIABLES D'ESPACE

CHAPITRE IV

SUR LES MÉTHODES DE CARACTÉRISTIQUES A DEUX VARIABLES D'ESPACE

IV.1. LES SURFACES ET RELATIONS CARACTERISTIQUES

a) Généralités

Soit S une surface de \mathbb{R}^n (de dimension $n-1$) d'équation $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ et telle que $(\text{grad}(\phi))^t = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ soit non nul en tout point de S . On fera une analyse locale autour d'un point P de S .

On peut supposer, sans perte de généralité, que pour un k au moins, $1 \leq k \leq n$, ϕ_k est non nul en P . Soit, pour i différent de k , T^i le vecteur tangent à S en P défini par :

$$T^i = (T_1^i, T_2^i, \dots, T_n^i)$$

$$(1.1) \quad T_j^i = 0 \quad \text{si } j \neq i \text{ et } j \neq k ; \quad T_i^i = \phi_k ; \quad T_k^i = -\phi_i$$

Soit $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$ une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m telle que les applications $u^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ appartiennent à $C^1(\mathbb{R}^n)$.

Supposons que les valeurs de u soient connues pour tout point de S . On a alors que :

$$(1.2) \quad [\text{grad } u^j(P)]^t \cdot T^i = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_i}\right)_P \phi_k - \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_k}\right)_P \phi_i$$

est la dérivée de u^j en P dans la direction de T^i , c'est donc une fonction, appelons la g_i^j , connue sur S . Soit g_i le vecteur de \mathbb{R}^m défini par :

$$(1.3) \quad (g_i)^t = (g_i^1, g_i^2, \dots, g_i^m)$$

Supposons maintenant que u satisfait au système d'équations aux dérivées partielles quasi-linéaires :

$$(1.4) \quad u_1 + \sum_{i=2}^n A^i u_i + d = 0$$

$$\text{où : } u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u^1}{\partial x_i}, \frac{\partial u^2}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial u^m}{\partial x_i} \right),$$

A^i est une matrice de $m \times m$ éléments,

d est un vecteur de \mathbb{R}^m ,

les matrices A^i et le vecteur d dépendent de façon assez régulière des variables dépendentes u^1, u^2, \dots, u^m et des variables indépendentes x_1, x_2, \dots, x_n .

On se pose le problème de Cauchy pour S en P , c'est-à-dire de savoir s'il est possible de déterminer la solution du système d'équations (1.4) dans un voisinage de P à partir des valeurs de u en S . Supposons que cette solution existe et qu'elle soit assez régulière. On veut déterminer toutes les dérivées partielles du premier ordre u_i de u en P à partir des valeurs de u sur S .

De (1.2), on a que pour i différent de k :

$$(1.5) \quad u_i \phi_k = u_k \phi_i + g_i$$

où g_i est connu sur S . Si on multiplie (1.4) par ϕ_k (non nul) on trouve :

$$(1.6) \quad (\phi_1 I + \sum_{i=2}^n A^i \phi_i) u_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A^i g_i + d \phi_k = 0$$

En rappelant :

$$(1.7) \quad A = \sum_{i=2}^n A^i \phi_i ,$$

une condition nécessaire et suffisante pour déterminer de façon unique les valeurs des u_i est que :

$$(1.8) \quad Q = \det(\phi_1 I + A)$$

soit non nul. Si Q est non nul sur S , alors S est une *surface libre* [9]. Si Q est nul en P : ou bien les données sur S sont telles que (1.6) n'a pas de solution en P , ou bien ces données sont liées et le système (1.6) a une infinité de solutions. Dans ce dernier cas on dit que la surface S est *caractéristique en P* . Une surface est une surface caractéristique si elle l'est en tous ses points.

Inversement, connaissant la solution de (1.4) en P , on peut se poser le problème de trouver tous les plans qui contiennent P et qui sont tangents en P à une surface caractéristique quelconque. La façon classique de chercher ces plans est de se donner des valeurs arbitraires $\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$ et de chercher les valeurs $\lambda = -\phi_1$ qui sont des valeurs propres de la matrice A (définie en (1.7)). Si on parcourt toutes les valeurs possibles de ϕ_2, \dots, ϕ_n on trouvera toutes les solutions de $Q = 0$. On peut supposer, sans perte de généralité que $\phi_2^2 + \phi_3^2 + \dots + \phi_n^2$ est non nul, (dans le cas contraire la seule possibilité pour avoir $Q = 0$ est que $\text{grad}(\phi)$ soit nul en P , mais cela n'a pas de sens), dans ce cas on peut écrire (1.1) pour un indice k différent de 1.

Supposons que, pour $\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$ donnés la matrice A ait m valeurs propres réelles et distinctes : $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$. Soit S^i la surface caracté-

ristique en P dont le gradient est orienté dans la direction $(-\lambda_i, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n)$ et soit ℓ^i le vecteur propre de A^t associé à la valeur propre λ_i ; alors, de (1.6) on déduit que, pour que le problème de Cauchy ne soit pas impossible en P par rapport à S^i il faut que les données sur S vérifient la relation :

$$(1.9) \quad (\ell^i)^t \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A^i g_i + d\phi_k \right) = 0$$

où la relation équivalente :

$$(1.10) \quad (\ell^i)^t (u_1 + \sum_{i=2}^n A^i u_i + d) = 0$$

Cette équation est la *relation* appelée *caractéristique*, elle lie les variables dépendantes sur la *surface caractéristique* S^i associée à la valeur propre λ_i .

De (1.9), on peut observer que dans la *relation caractéristique*, toutes les *dérivées* sont *internes* à la *surface* S^i . Dans (1.10) on montre comment on peut obtenir cette relation à partir des équations (1.4).

On appelle *bicaractéristique* les courbes de contact de deux surfaces caractéristiques.

On définit le système (1.4) comme étant totalement hyperbolique en $P = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ par rapport à l'hyperplan d'équation $x_1 = \bar{x}_1 = C^{te}$

si pour tout ensemble de réels $\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$ non tous nuls la matrice A (voir 1.7) possède n racines distinctes réelles [12].

(nota : inversement si Q est non nul pour tout choix $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \in \mathbb{R}^n$, tel que $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \dots + \phi_n^2 \neq 0$ alors (1.4) est elliptique[9]).

b) Interprétation géométrique du système totalement hyperbolique

Soit $n = 3$. Considérons S le plan parallèle au plan de référence $x_1 = 0$ qui passe par un point P . La famille de plans S qui passe par P et dont la normale, à une constante multiplicative près, est de la forme $(-\lambda, \phi_2, \phi_3)$ (pour ϕ_2 et ϕ_3 donnés ($\phi_2^2 + \phi_3^2 \neq 0$)) est le faisceau de plans engendré par la droite L , qui passe par P , est contenue dans S et est dirigée dans la direction $(0, -\phi_3, \phi_2)$. Donc, chercher pour ϕ_2, ϕ_3 donnés les m valeurs de λ qui satisfont.

$$(1.11) \quad \det |\phi_2 A^2 + \phi_3 A^3 - \lambda I| = 0$$

revient à chercher (si le système $u_1 + A^2 u_2 + A^3 u_3 + d = 0$ est totalement hyperbolique par rapport au plan S) les m plans distincts du faisceau engendré par L dont les cosinus directeurs de la normale n_1, n_2, n_3 satisfont :

$$(1.12) \quad \det |n_1 I + n_2 A^2 + n_3 A^3| = 0$$

IV.2 - Application aux équations des ondes longues

a) Le problème

On désire étudier le système d'équations I.1.2 dans un ouvert connexe cylindrique \mathcal{D} de l'espace (x, y, t) où

$$\mathcal{D} = \Omega \times [0, T]$$

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ est la région géographique étudiée

$[0, T]$ est l'intervalle de temps durant lequel on désire connaître la solution.

Γ étant la frontière de Ω les conditions imposées sur Ω à $t = 0$ sont les conditions initiales et les conditions sur $\Gamma \times [0, T]$ sont les conditions aux limites.

Nous allons écrire les équations I.1.2 sous la forme matricielle suivante :

$$(2.1) \quad \frac{\partial R}{\partial t} + A_x \frac{\partial R}{\partial x} + A_y \frac{\partial R}{\partial y} = d$$

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{où : } R = \begin{bmatrix} z+h \\ u \\ v \end{bmatrix} ; \\ A_x = \begin{bmatrix} u & z+h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} ; A_y = \begin{bmatrix} v & 0 & z+h \\ 0 & v & 0 \\ g & 0 & v \end{bmatrix} \text{ et} \\ d = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh_x + fv - c \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{(z+h)} u \\ gh_y - fu - c \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{(z+h)} u \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

En faisant la correspondance avec les paragraphes antérieures :

$x_1 = t, \quad x_2 = x, \quad x_3 = y$ on montre sans difficulté que le système

(2.1) est totalement hyperbolique par rapport à toute surface $t = C^{te}$.

On se donne arbitrairement $\phi_2 = p$ et $\phi_3 = q$ tels que $p^2 + q^2$ soient non nuls et on cherche les valeurs propres de :

$$(2.3) \quad A = \begin{bmatrix} pu + qv & p(z+h) & q(z+h) \\ pg & pu + qv & 0 \\ qg & 0 & pu + qv \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire les valeurs de $\phi_3 = -\lambda$ pour lesquelles $\det(A - \lambda I)$ est nul.

Mais :

$$(2.4) \quad \det(A - \lambda I) = (-\lambda + pu + qv) [(-\lambda + pu + qv)^2 - g(z+h)(p^2 + q^2)]$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que $p^2 + q^2 = 1$. C'est-à-dire se donner p, q arbitraires revient à se donner α arbitraire, $\alpha \in [0, 2\pi)$ et poser :

$$(2.5) \quad p = \cos \alpha \quad ; \quad q = \sin \alpha \quad ;$$

De (2.4) on déduit que les valeurs propres de A sont :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \lambda_1 = u \cos \alpha + v \sin \alpha - \sqrt{g(z+h)} \\ \lambda_2 = u \cos \alpha + v \sin \alpha \\ \lambda_3 = u \cos \alpha + v \sin \alpha + \sqrt{g(z+h)} \end{cases}$$

qui sont trois racines réelles et distinctes ($g(z+h) < 0$ n'a pas physiquement de sens ; en plus si la solution de (2.1) respecte les hypothèses des ondes longues, on a que $(z+h) \gg 0$). Soit L_α la droite passant par $P = (x_p, y_p, t_p)$ et parallèle au vecteur $(-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$. A la valeur propre λ_1 correspond le plan C^1 du faisceau engendré par L_α , qui est orthogonal au vecteur $(\cos \alpha, \sin \alpha, -\lambda_1)$.

Si la solution de (2.1) vérifie les hypothèses des ondes longues, on doit avoir que $\sqrt{u^2 + v^2} \ll \sqrt{g(z+h)}$, c'est-à-dire que pour toute valeur de α , λ_1 est strictement négatif et λ_3 est strictement positif.

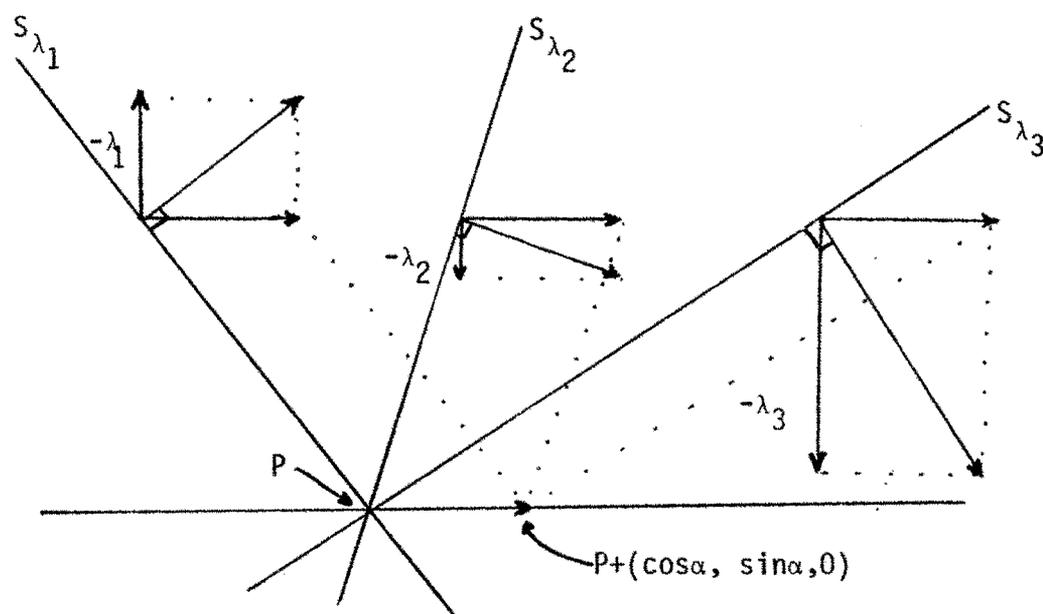


Figure 1

Section en P par le plan perpendiculaire à L en P.

b) Les deux familles de surfaces caractéristiques

i) Première famille

On peut montrer [11] que la famille de surfaces caractéristiques associées à λ_1 lorsque α varie entre 0 et 2π , appelée première famille de surfaces caractéristiques est la même que celle associée à λ_3 et que l'enveloppe de cette famille est une surface conique dite "cône caractéristique" qui est tangente en P au cône d'équation :

$$(2.7) \quad ((x-x_p)-u(t-t_p))^2 + ((y-y_p)-v(t-t_p))^2 = g(z+h) (t-t_p)^2$$

ii) Deuxième famille de surfaces caractéristiques

La deuxième famille de surfaces caractéristiques est celle associée à λ_2 . Ces surfaces sont caractérisées par le fait que leur plan tangent en P contient la droite T_P passant par P qui est orientée dans la direction $(u, v, 1)$. L'enveloppe de cette famille est une courbe T_P qui décrit la trajectoire de la particule d'eau, qui se trouve à la position de coordonnées $x = x_P, y = y_P$ à l'instant $t = t_P$

iii) Courbes bicaractéristiques

La trajectoire T_P et les courbes de contact du cône caractéristique de P avec les surfaces de la première famille forment le complexe de courbes bicaractéristiques qui passent par P.

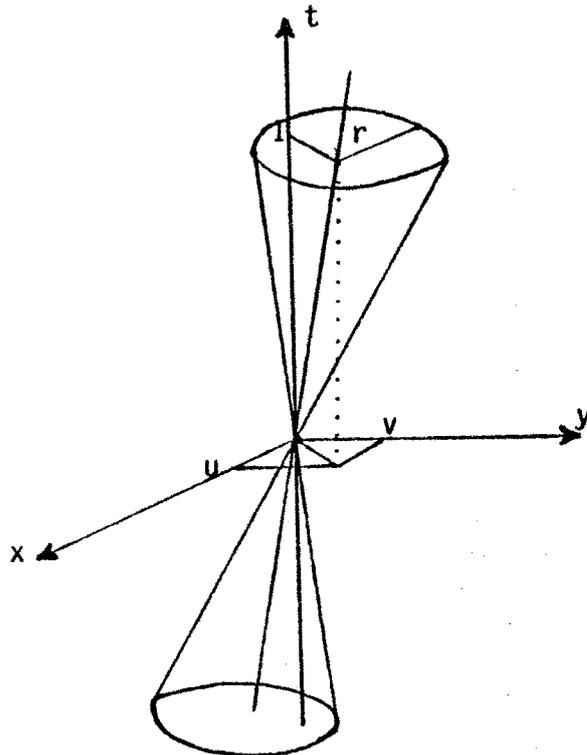


Figure 2

Dans la figure 2 on a pris le point P comme origine de coordonnées pour représenter localement le cône caractéristique.

c) Les relations caractéristiques

i) Sur la première famille de caractéristiques

En appliquant ce qui a été dit au paragraphe a, pour trouver la relation caractéristique associé à $\lambda_1 = u \cos \alpha + v \sin \alpha - \sqrt{g(z+h)}$ il est nécessaire de déterminer le vecteur ℓ^1 tel que :

$$(\ell^1)^t [A_x \cos \alpha + A_y \sin \alpha - \lambda_1 I] = 0$$

c'est-à-dire tel que :

$$(2.8) \quad (\ell^1)^t \begin{bmatrix} + \sqrt{g(z+h)} & (z+h) \cos \alpha & (z+h) \sin \alpha \\ g \cos \alpha & + \sqrt{g(z+h)} & 0 \\ g \sin \alpha & 0 & + \sqrt{g(z+h)} \end{bmatrix} = 0$$

il est facile de vérifier que :

$$(2.9) \quad (\ell^1)^t = [-\sqrt{g(z+h)}, (z+h) \cos \alpha, (z+h) \sin \alpha]$$

De (1.10) et (2.1) on trouve que la relation caractéristique est :

$$(2.10) \quad (\ell^1)^t \left(\frac{\partial R}{\partial t} + A_x \frac{\partial R}{\partial x} + A_y \frac{\partial R}{\partial y} - d \right) = 0$$

c'est-à-dire :

$$(2.10)' \quad - \sqrt{g(z+h)} \left((z+h)_t + (z+h)u_x + u(z+h)_x + (z+h)v_y + v(z+h)_y \right) + \\ + (z+h) \cos \alpha (u_t + uu_x + g(z+h)_x + v u_y - d_2) + \\ + (z+h) \sin \alpha (v_t + u v_x + v v_y + g(z+h)_y - d_3) = 0$$

Remarque 1 : Il est intéressant d'observer que à trois valeurs différentes de α il correspond trois surfaces de la première famille dont les trois normales (orientées selon la direction $(\cos\alpha, \sin\alpha, -\lambda_1(\alpha))$) sont linéairement indépendantes. De plus, les trois vecteurs $\ell^1(\alpha)$, associés aux différentes valeurs de α sont linéairement indépendantes donc les trois relations caractéristiques le sont aussi.

Comme le système (2.1) comporte trois équations linéairement indépendantes on pourrait remplacer en P ce système par trois équations du type (2.10)'.

ii) Sur la deuxième famille

Pour trouver la relation caractéristique associée à la valeur propre $\lambda_2 = u \cos\alpha + v \sin\alpha$ on procède de façon analogue : on cherche le vecteur ℓ^2 tel que :

$$(\ell^2)^t [A_x \cos\alpha + A_y \sin\alpha - \lambda_2 I] = 0$$

c'est-à-dire que :

$$(\ell^2)^t \begin{bmatrix} 0 & (z+h) \cos \alpha & (z+h) \sin \alpha \\ g \cos \alpha & 0 & 0 \\ g \sin \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

on trouve :

$$(\ell^2)^t = [0, -\sin\alpha, \cos\alpha]$$

De (1.10) et (2.1) on trouve que la relation caractéristique est :

$$(2.11) \quad (\ell^2)^t \left[\frac{\partial R}{\partial t} + A_x \frac{\partial R}{\partial x} + A_y \frac{\partial R}{\partial y} - d \right] = 0$$

c'est-à-dire :

$$(2.11)' - \sin\alpha[u_t + u u_x + g(z+h)_x + v u_y - d_2] + \\ + \cos\alpha[v_t + u v_x + v v_y + g(z+h)_y - d_3] = 0$$

Cette relation caractéristique est une combinaison linéaire des deux équations du mouvement.

Remarque 2 : Contrairement à ce qui se passe pour la première famille. Les normales aux surfaces de la deuxième famille associées à trois valeurs de α différentes sont linéairement dépendantes. De plus, les relations caractéristiques associées à trois valeurs différentes de α sont aussi dépendantes. Néanmoins si α_1 et α_2 sont telles que α_1 soit différente de $\alpha_2 + k\pi$ avec k entier, alors les plans tangents correspondants sont différents et les deux relations associées indépendantes.

Les remarques 1 et 2 sont d'un grand intérêt pour justifier les différentes méthodes de calcul numérique qui utilisent les surfaces et relations caractéristiques. Par exemple, on peut remplacer localement le système (2.1) par trois relations caractéristiques à condition qu'elles soient indépendantes. On peut aussi s'intéresser à se donner un système de coordonnées curvilignes tel que les trois surfaces coordonnées qui passent par chaque point P soient des surfaces caractéristiques. Pour que cela soit possible il faut que les normales en P aux trois surfaces soient linéairement indépendantes. La proposition suivante rappelle et complète les remarques précédentes.

Proposition :

Soit $S^1(\alpha)$ la surface caractéristique de la première famille dont la normale en P est :

$$n^1(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, -\lambda_1(\alpha)).$$

Soit $R^1(\alpha)$ la relation caractéristique associée à $S^1(\alpha)$. Soient $S^2(\alpha)$, $n^2(\alpha)$ et $R^2(\alpha)$ définis de façon analogue par rapport à la deuxième famille avec $n^2(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, -\lambda_2(\alpha))$ alors :

1. Si α_1, α_2 et α_3 sont différentes alors :
 $n^1(\alpha_1), n^1(\alpha_2)$ et $n^1(\alpha_3)$ sont linéairement indépendantes
 $R^1(\alpha_1), R^1(\alpha_2)$ et $R^1(\alpha_3)$ sont linéairement indépendants
2. Si $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \pi$ et $\alpha_3 = \alpha_1 \pm \frac{\pi}{2}$, alors :
 $n^1(\alpha_1), n^1(\alpha_2), n^2(\alpha_3)$ sont indépendantes
 $R^1(\alpha_1), R^1(\alpha_2), R^2(\alpha_3)$ sont dépendantes.
3. Si $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \pi$, $\alpha_3 = \alpha_1 \pm k\pi$
 $n^1(\alpha_1), n^1(\alpha_2), n^2(\alpha_3)$ sont dépendantes
 $R^1(\alpha_1), R^1(\alpha_2), R^2(\alpha_3)$ sont indépendantes.
4. Si $\alpha_3 \neq \alpha_2 \pm k\pi$, k entier
 $n^1(\alpha_1), n^2(\alpha_2), n^3(\alpha_3)$ sont indépendantes
 $R^1(\alpha_1), R^2(\alpha_2), R^2(\alpha_3)$ sont indépendantes
5. $\forall \alpha_2 \neq \alpha_1 \pm \pi \quad \exists \alpha_3, (\alpha_3 \neq \alpha_1 \pm k\pi)$ et $(\alpha_3 \neq \alpha_2 \pm k\pi)$ tel que : $n^1(\alpha_1), n^1(\alpha_2), n^2(\alpha_3)$ sont dépendantes.

d) Domaines de dépendance, d'influence et de définition

Soit $P = (x_P, y_P, t_P) \in \mathcal{D}$

On peut séparer les points à l'intérieur du cône caractéristique en deux parties :

G^+ les points dont la composante t est telle que $t > t_P$ et

G^- les points dont $t < t_P$

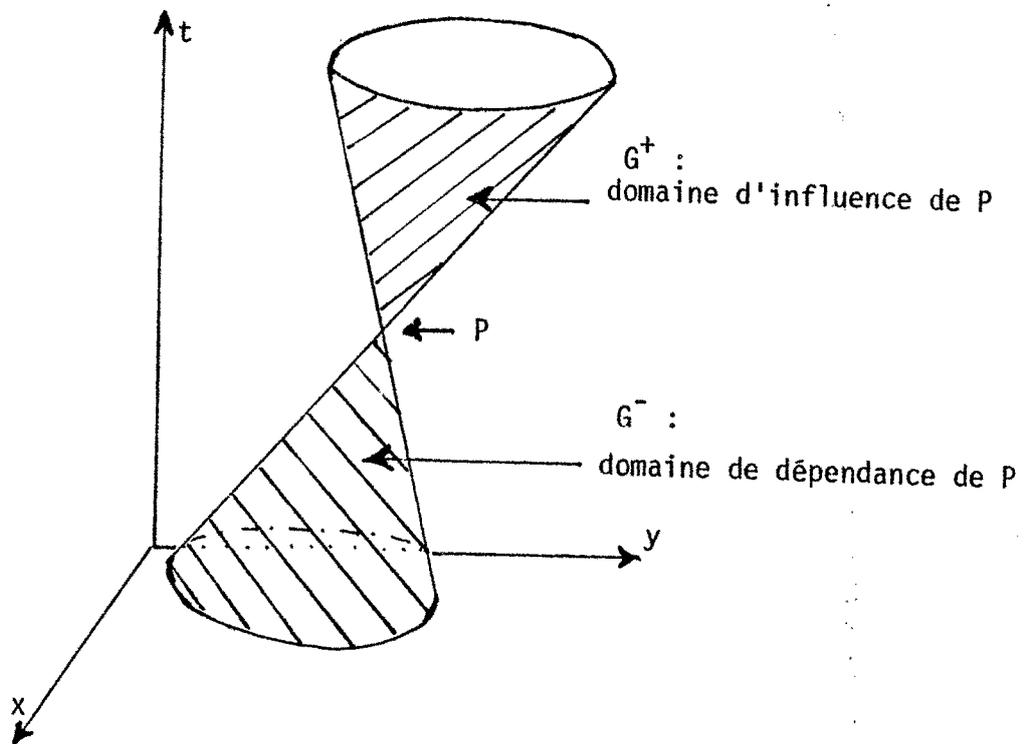


Figure 3

La solution en G^+ dépend de la solution en P donc on dit que G^+ est le domaine d'influence de P . De façon analogue on dit que le domaine de dépendance de P est G^- .

Soit θ un ouvert connexe d'une surface libre, par exemple du plan $t = 0$. Le domaine de définition de est la région de l'espace (X, Y, T) où la solution est complètement définie à partir des données de Cauchy sur θ .

Soit Γ un arc de courbe porté par une surface libre, par exemple $t = t_\Gamma = \text{constante}$ et soit P en Γ .

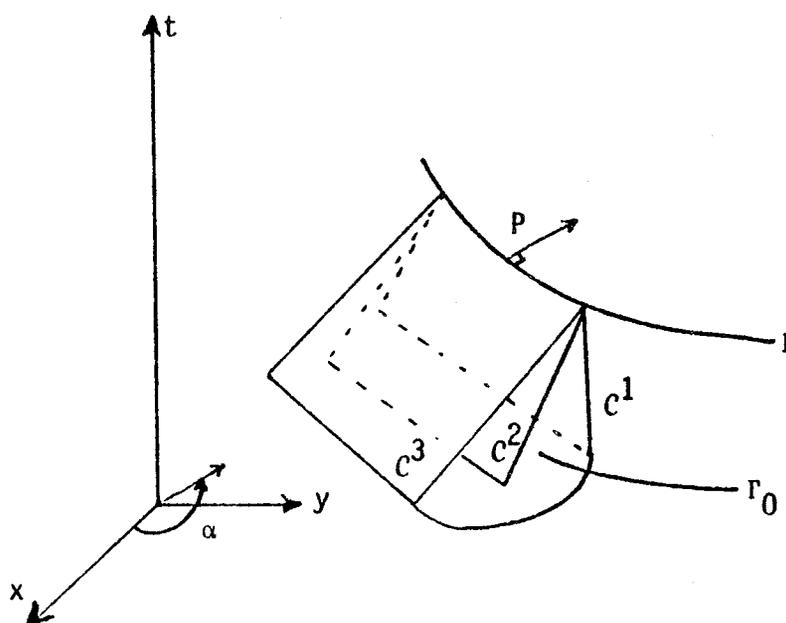


Figure 4

Le domaine de dépendance de la courbe Γ est la région comprise entre les deux surfaces caractéristiques de la première famille qui contiennent Γ pour t inférieur à t_Γ .

e) Conditions aux limites

En utilisant le point 3 de la Proposition on peut remplacer sur Γ les équations (2.1) par les trois relations caractéristiques (indépendantes) sur les trois surfaces caractéristiques qui contiennent Γ .

Si Γ est un arc de courbe contenu dans la frontière du domaine Ω et P un point de Γ il faudra remplacer les relations caractéristiques des surfaces qui "viennent de l'extérieur de Ω " par des conditions aux limites. Ceci revient à dire que si la normale à Γ en P , orientée vers l'extérieur de Ω est donnée par $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ il y aura autant de conditions aux limites à imposer en P que de valeurs propres négatives de la matrice $A = \cos\alpha A_x + \sin\alpha A_y$. On a déjà vu que si les hypothèses des ondes longues sont vérifiées la matrice A possède au maximum deux valeurs propres négatives (si $u\cos\alpha + v\sin\alpha < 0$) et au minimum une (dans le cas $u\cos\alpha + v\sin\alpha \geq 0$). Il y aura donc deux conditions à imposer en P si l'eau "rentre" dans Ω au point P et une seule sinon. (voir figure 1).

IV.3 - Les méthodes de calcul à maillage régulier qui utilisent les caractéristiques

Dans une méthode de caractéristiques on peut distinguer deux aspects. Le premier étant la grille sur laquelle on fait les calculs et le second la façon dont on utilise les caractéristiques pour calculer la solution dans un nouveau point de la grille à partir des valeurs déjà connues.

Les méthodes qui ont été programmées jusqu'à présent, référencées par CAMARERO [5] , considèrent un maillage régulier du domaine $\Omega \times [0, T]$. Ils supposent connue la solution sur la grille à l'étape $t = n \Delta t$ et cherchent à la déterminer en $t = (n+1) \Delta t$. On appellera $P_{i,j}^n$ le point de la grille de coordonnées $(i \Delta x, j \Delta y, n \Delta t)$. On peut classer ces méthodes en deux groupes [5] :

a) Les méthodes de bicaractéristiques [3] , [11].

L'idée de ces méthodes, pour les systèmes de trois équations est d'approcher le cône caractéristique de $P_{i,j}^{n+1}$ par le cône d'équation :

$$((x-x_{i,j}^{n+1}) - u_{i,j}^n (t-t_{i,j}^{n+1}))^2 + ((y-y_{i,j}^{n+1}) - v_{i,j}^n (t-t_{i,j}^{n+1}))^2 = g(z+h)_{i,j}^n (t-t_{i,j}^{n+1})^2$$

qui est le cône tangente de $P_{i,j}^n$ translaté de $\overrightarrow{P_{i,j}^n P_{i,j}^{n+1}}$. Les sections hori-

zontales de ce cône sont des cercles. On détermine le cercle γ intersection de ce cône avec le plan $t = n \Delta t$.

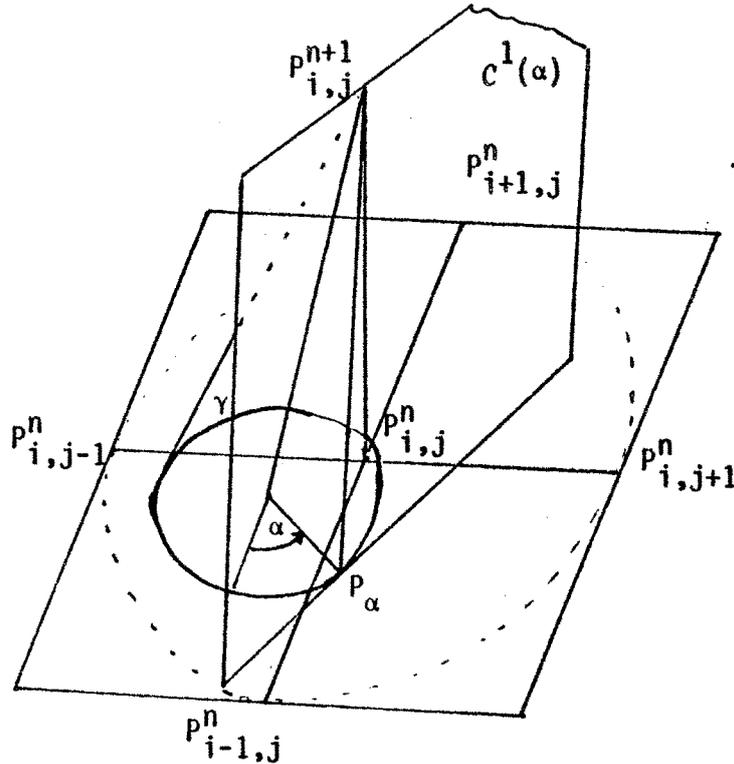


Figure 5

On construit ensuite, pour au moins trois valeurs de α , le plan tangent $C^1(\alpha)$ à la surface $S^1(\alpha)$ (voir proposition 3). Dans chaque plan, on écrit l'équation caractéristique $R^1(\alpha)$ en utilisant comme axes de coordonnées la bicaractéristique (génératrice du cône) et la trace (L) du plan tangent sur le plan $t = n \Delta t$. (Fait qui donne son nom à la méthode).

Soit P_α le point de contact du cercle γ avec le plan $C^1(\alpha)$. Soit V_{ij}^n l'ensemble de points du maillage de l'étape n qu'on utilisera dans nos calculs pour estimer la solution en $P_{i,j}^{n+1}$. On estime la solution en P_α par interpolation en n'utilisant que des valeurs de la solution en V_{ij}^n . On transforme la relation caractéristique en une équation aux différences finies en utilisant, pour approcher la dérivée sur la bicaractéristique, la différence entre la solution en $P_{i,j}^{n+1}$ et en P_α . La dérivée dans la direction de la trace (L) est approchée en n'utilisant que les valeurs de la solution en

V_{ij}^n . On obtient ainsi dans chaque plan $C^1(\alpha)$ une équation linéaire en les trois composantes de la solution en $P_{i,j}^{n+1}$.

Il faut un minimum de trois valeurs de α pour déterminer la solution. Si on utilise plus de trois surfaces on peut faire une moyenne des différentes estimations obtenues pour chaque triplet de valeurs de α .

Le critère de stabilité de Courant Friedrichs-Lewy (voir § IV.5) établit que le domaine d'influence de l'espace discrétisé doit contenir le domaine d'influence de l'espace continu. Daubert et Graffe [11] qui utilisent la méthode décrite avec

$$\Delta x = \Delta y = \Delta s ; V_{i,j}^n = \{P_{i,j}^n, P_{i-1,j}^n, P_{i+1,j}^n, P_{i,j-1}^n, P_{i,j+1}^n\}$$

traduisent cette condition par :

$$\Delta t < \Delta s / (\sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{g(z+h)})$$

qui revient à dire que le cercle γ est à l'intérieur du cercle de centre $P_{i,j}^n$ et de rayon Δs .

b) Les méthodes du plan-de-référence

L'idée ici est d'utiliser les trois surfaces caractéristiques qui contiennent une courbe, elle-même contenue dans une surface libre. On suppose qu'on connaît la solution sur la grille à l'étape n et on cherche à la déterminer pour les points de la grille à l'étape $n+1$.

Par exemple (figure 6) :

Soit L la droite d'équation :

$$x = i \Delta x = C^{te} ; t = (n+1) \Delta t = C^{te}$$

contenue dans le plan $t = (n+1) \Delta t$

Soit $P_{i,j}^{n+1} \in L$ et

Soient p^1, p^2 et p^3 les plans tangents en $P_{i,j}^{n+1}$ aux trois surfaces caractéristiques qui contiennent L .

Soient L^1, L^2 et L^3 les traces de p^1, p^2 et p^3 , respectivement, dans le plan $t = n \Delta t$.

Soient pour $k = 1, 2, 3$

$Q_{j-1}^k, Q_j^k, Q_{j+1}^k$ les intersections respectives de la droite L^k avec les trois plans parallèles au plan-de-référence $y = 0$, suivantes

$$y = (j-1) \Delta y ; y = j \Delta y \quad \text{et} \quad y = (j+1) \Delta y$$

Soient M_{j-1}, M_j, M_{j+1} les intersections respectives du plan $t = n \Delta t$ avec les plans

$$y = (j-1) \Delta y ; y = j \Delta y, y = (j+1) \Delta y$$

On remarque que, pour $k = 1, 2, 3$ et pour $\ell = j-1, j, j+1$, le point Q_ℓ^k appartient à la droite M_ℓ .

On estime la solution en Q_ℓ^k en faisant une interpolation (splines par exemple) à partir des valeurs de la solution dans tous les points de M_ℓ qui appartiennent à la grille. On transforme l'équation caractéristique relative à la surface de plan tangent p^k en une équation de différences finies qui utilise la solution que dans les points $Q_{j-1}^k, Q_j^k, Q_{j+1}^k$ et $P_{i,j}^{n+1}$.

On obtient ainsi un système de trois équations pour déterminer les trois inconnues en $P_{i,j}^{n+1}$.

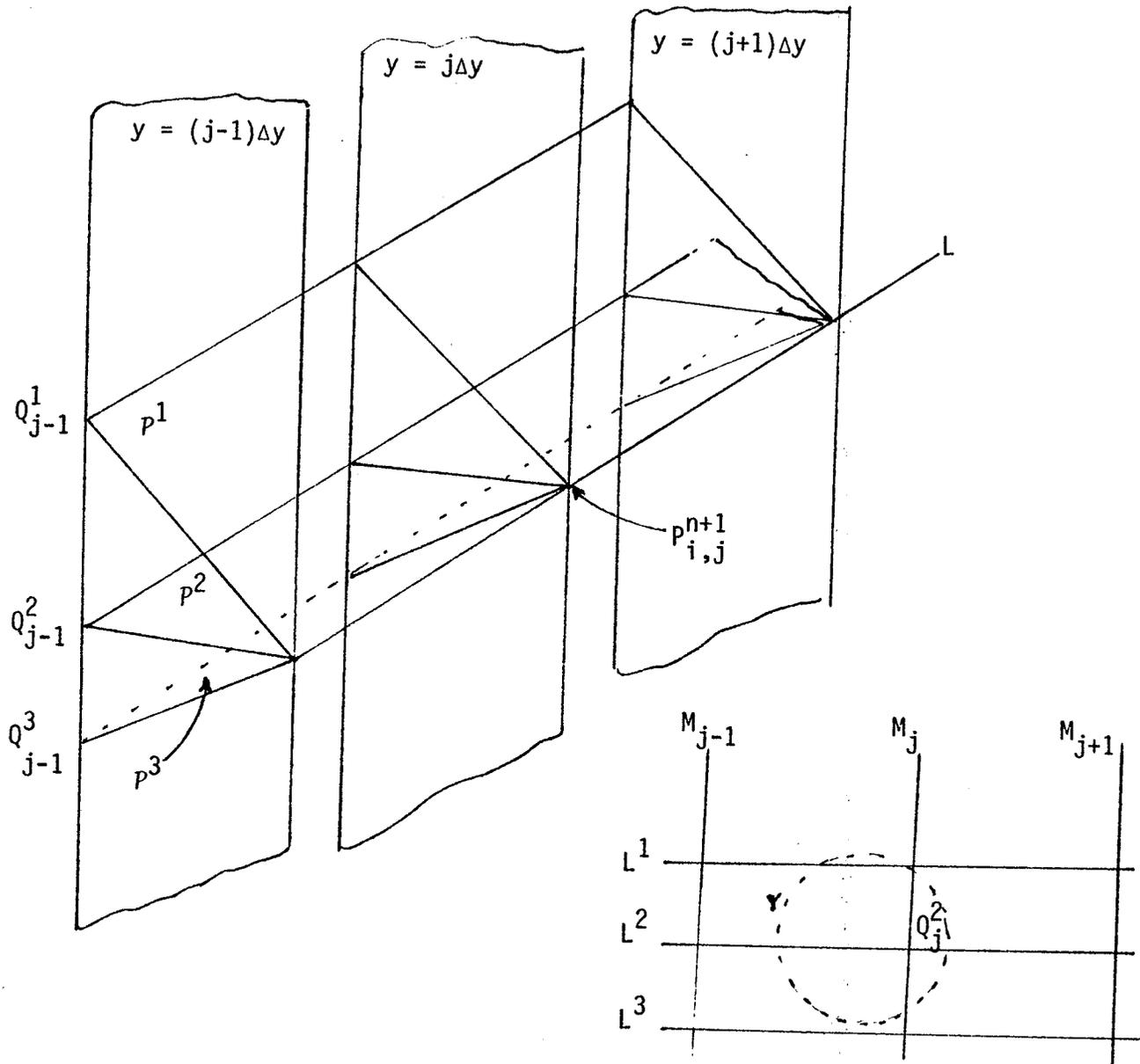


Figure 6

La condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy(voir § IV.5) se traduirait ici par une condition du type : le cercle γ , intersection du cône caractéristique de $p_{i,j}^{n+1}$ avec le plan $t = n \Delta t$ reste à l'intérieur de la bande comprise entre les deux plans :

$$y = (j-1) \Delta y \quad \text{et} \quad y = (j+1) \Delta y .$$

Cette méthode a été programmée par CAMARERO [4] , [5] pour calculer la solution des équations tridimensionnelles de l'écoulement supersonique avec des résultats, selon l'auteur assez satisfaisantes.

IV.4 - Les méthodes de calcul dans un réseau de caractéristiques

a) Généralités

Dans la littérature, on n'a pas trouvé de référence dans laquelle l'équivalent de la méthode de Massau pour des problèmes à trois variables ait été utilisée. Ce fait n'est pas étonnant étant donné tous les problèmes que l'implantation d'une telle méthode peut poser, à savoir :

i) Le choix du réseau et de variables caractéristiques

Dans le problème à une variable d'espace, bien que l'on ait une infinité de transformations de coordonnées $x = x(\alpha, \beta)$, $t = t(\alpha, \beta)$ pour lesquelles α et β restent respectivement constantes sur les courbes caractéristiques de la première et de la deuxième famille, on sait très bien sur quelles courbes α et β doivent être constantes. Ces courbes forment ce que nous appelons le *réseau continu* de caractéristiques qui sert de base au nouveau système de coordonnées.

Dans le problème à deux variables d'espace, dans la région où la solution existe et est assez régulière on a une infinité de surfaces caractéristiques qui passent par chaque point. Choisir un réseau continu de caractéristiques signifie choisir trois familles de surfaces caractéristiques telles que par chaque point P du domaine $\Omega \times [0, T]$ passe une et une seule surface de chaque famille, les normales en P aux trois surfaces étant linéairement indépendantes. Il faut naturellement que les surfaces d'une même famille du réseau soit d'un même type (première et deuxième famille) de surface caractéristique.

Une fois le réseau continu choisi, il reste le choix de la transformation de coordonnées :

$$(4.1) \quad \alpha_i = \alpha_i(x, y, t) \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

telle que d'une part α_i soit constante sur chaque surface de la $i^{\text{ème}}$ famille du réseau et que d'autre part le Jacobien de la transformation (4.1) soit non nul pour $P \in \Omega \times [0, T]$.

ii) La numérotation des points

Ici, il se pose le problème de numérotation des points de façon encore plus complexe que dans le cas d'une seule variable d'espace. Ceci est important, d'une part pour faire les calculs de façon systématique, et d'autre part pour savoir se repérer dans le maillage afin de faire des interpolations à x, y sont constantes. Ces interpolations étant indispensable pour "interpréter" la solution.

iii) La méthode de calcul

Le système en variables caractéristiques est composé de 6 équations à dérivées partielles dans les 6 inconnues : les trois coordonnées x, y, t et les trois composantes de R : $(z+h), u, v$. Il faudra donc approcher autant les équations des surfaces caractéristiques comme les relations caractéristiques.

b) Une méthode particulière

Cette méthode qui a été élaborée par MM J. KRAVICHENKO et Y. BIOLLAY fût exposé par M. BIOLLAY à l'occasion d'un séminaire à l'Institut de Mécanique de Grenoble en juin 1978. Des communications personnelles de M. J. KRAVICHENCKO nous ont facilité sa compréhension. Bien que pour les auteurs précédents, le fait d'utiliser un réseau de caractéristiques, ait pour but de *régulariser des discontinuités* entre les conditions initiales et les conditions aux limites, on expose ici seulement la "construction fondamentale" utilisée pour

obtenir la solution dans un nouveau point de la grille quand ce point est *loin* de la frontière. On construit ici un exemple où la solution numérique de la méthode que nous avons étudiée ici n'est pas convergente vers la solution du problème continu. Dans cet exemple, ce n'est pas le choix du réseau qui est en question mais la façon de transformer les relations caractéristiques en équations aux différences.

i) Le choix du réseau

Considérons dans un plan $x' 0 y'$ des parallèles à l'axe OX' à égale distance k_1 , des parallèles à l'axe OY' à égale distance k_2 et des droites de pente k_1/k_2 passant par les points (mk_1, nk_2) $m, n \in \mathbb{Z}$. Toutes ces droites forment trois familles qui, pour une classe d'applications régulières $x = f_1(x, y)$, $y = f_2(x, y)$ déterminent dans le plan $x 0 y$, $t = 0$, trois familles de courbes L^i , $i = 1, 2, 3$ qui forment un réseau de triangles curvilignes couvrant le domaine Ω .

Comme le plan $t = 0$ est une surface libre, par chaque courbe qui forme le réseau, on peut faire passer trois surfaces caractéristiques distinctes qui ne sont pas tangentes au plan $t = 0$.

A chaque famille de courbes on fait correspondre un type de surface caractéristique (parmi les trois possibles). Ce sont ces surfaces qui formeront le réseau.

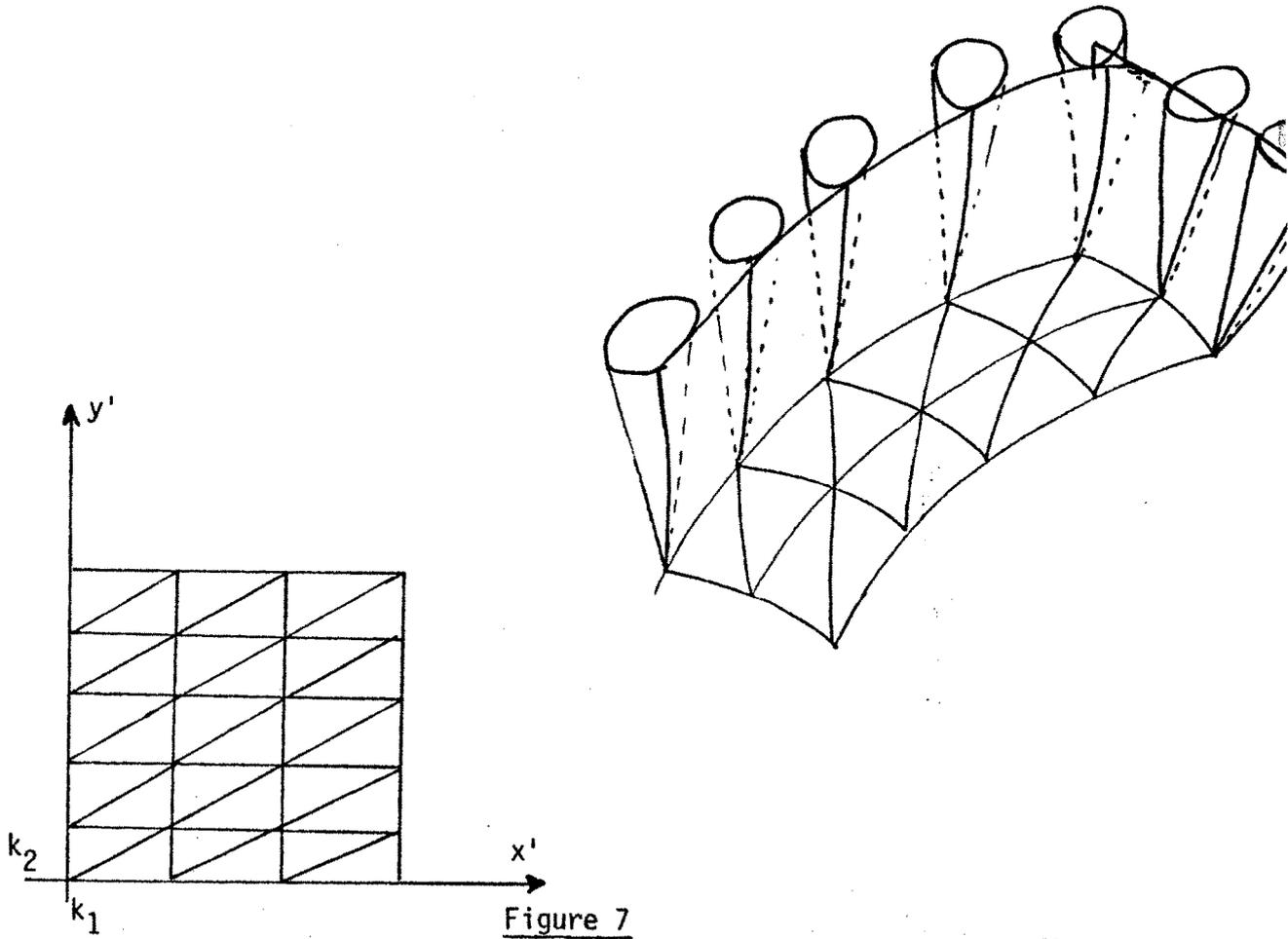


Figure 7

Rappelons maintenant la Proposition du paragraphe IV.2.6. En chaque sommet du réseau triangulaire les trois courbes du réseau déterminent trois directions distinctes dans le plan $t = 0$.

Dans le cas où nous choisissons de faire passer par chaque direction une surface de la première famille de caractéristiques et dans le cas où nous faisons passer des surfaces de la deuxième famille par deux des directions et une surface de la première famille par la direction restante, les normales aux trois surfaces ainsi choisies seront linéairement indépendantes ainsi que les relations caractéristiques correspondantes.

Dans ces deux cas, on aura dans un voisinage du plan $t = 0$ l'équivalence entre le système (2.1) invariables (x, y, t) et le système en variables caractéristiques.

Pour un réseau triangulaire donné on peut construire 8 réseaux de surfaces du premier type et 6 du deuxième.

ii) La méthode

. L'Idée

Considérons pour $t = 0$ un triangle du réseau de sommets P_1 , P_2 et P_3 .

Par les courbes du réseau qui contiennent $P_1 P_2$ et $P_1 P_3$ on fait passer les surfaces de la deuxième famille de caractéristiques.

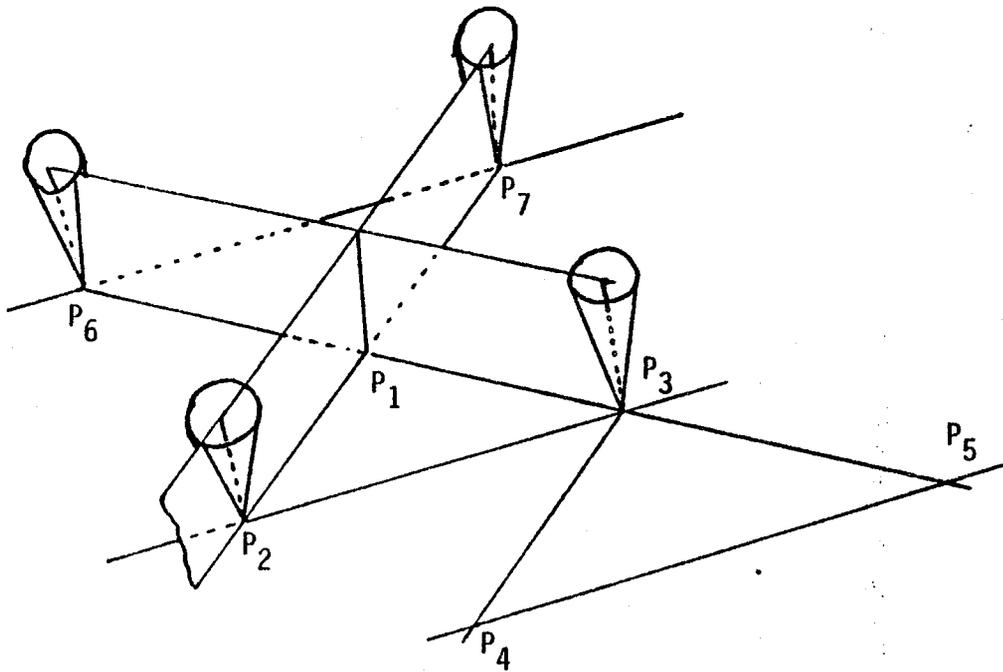


Figure 8

Soient S_{12}^2 et S_{13}^2 ces deux surfaces de la deuxième famille. Leur intersection décrit dans l'espace (X, Y, T) la trajectoire T_1 de la particule d'eau qui se trouve à l'instant $t = 0$ en P_1 .

Par la courbe qui contient $P_2 P_3$ on fait passer une des deux surfaces $S_{2\ 3}^1$ tangentes aux cônes caractéristiques des points sur cette courbe.

Si les hypothèses des ondes longues sont satisfaites la surface $S_{2\ 3}^1$ qui est tangente au cône par l'intérieur du triangle $P_1 P_2 P_3$ doit rencontrer la trajectoire T_1 en un point P . Par contre T_1 ne doit pas rencontrer la surface $(S_{2\ 3}^1)$ tangente aux cônes par l'extérieur du triangle.

Si par $P_2 P_3$ on choisit la surface caractéristique $S_{2\ 3}^1$ qui rencontre la trajectoire T_1 (associée à P_1) alors par $P_4 P_5$ (voir figure 8) il faudra choisir la surface tangente aux cônes $S_{4\ 5}^1$ qui rencontre la trajectoire T_3 (associée à P_3) et ainsi de suite.

Les 3 surfaces caractéristiques du réseau associées à chaque triangle se rencontrent (vers le "haut") pour un triangle du réseau sur deux.

A chaque point P_i du réseau correspond un et seulement un triangle du réseau, soit Δ_i , pour lequel les surfaces se rencontrent dans un point P'_i qui se trouve sur la trajectoire T_i .

Le triangle $P_1 P_2 P_3$ du plan $t = 0$ se déformera ainsi, après une première étape de calculs sur le triangle $P'_1 P'_2 P'_3$.

. L'approximation

On va calculer une approximation des coordonnées de $P = P'_1$ et de la solution en P en n'utilisant que les données en $P_1 P_2$ et P_3 .

Soient (x_i, y_i, t_i) les coordonnées de P_i

Soient (z_i, u_i, v_i) les composantes de la solution en P_i

Soient (x, y, t) les coordonnées de P et

Soit (z, u, v) la solution en P .

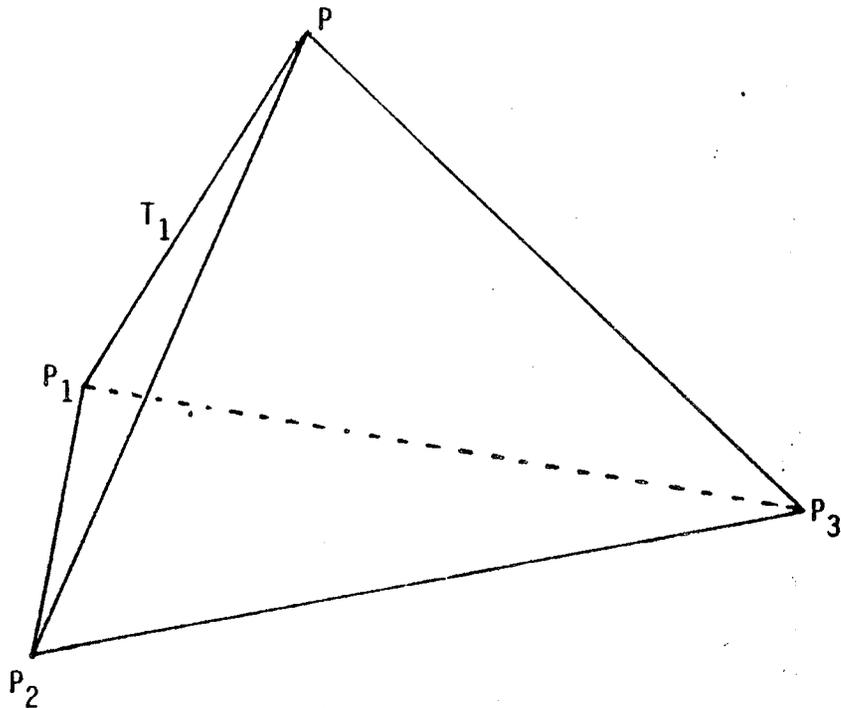


Figure 9

Calcul de P

. On approche la trajectoire T_1 par sa tangente en P_1 : la droite T_1 d'équation vectorielle $(x_1, y_1, t_1) + \lambda(u_1, v_1, 1)$.

Ceci revient à approcher les surfaces $S_{1\ 2}^2$ et $S_{1\ 3}^2$ par leurs plans tangents en P_1 .

.. On approche la surface $S_{2\ 3}^1$ par le plan du faisceau qui contient la droite $P_2 P_3$, appelons le $C_{2\ 3}^1$ qui est tangente au cône caractéristique de P_2 (du côté intérieur du triangle). (Ceci revient à chercher les racines d'un polynôme du second degré).

On pourrait aussi utiliser celui qui est tangent au cône de P_3 ou une moyenne des deux.

... On obtient l'intersection de T_1 et de $C_{2\ 3}^1$.

Calcul de la solution en P

- Soit $R_{1\ 2}^2(P_1)$ la relation caractéristique en P_1 relative à la surface $S_{1\ 2}^2$. Cette relation qui est interne à $S_{1\ 2}^2$ peut être écrite en P_1 en n'utilisant que des dérivées dans les directions $\overline{P_1 P_2}$ et $\overline{P, P}$. On discrétise l'équation en remplaçant les dérivées de f ($= u, v$ ou z) dans les directions $\overline{P, P}$ et $\overline{P_1 P_2}$ par des différences divisées :

$$\frac{f(P) - f(P_1)}{(x-x_1, y-y_1, t-t_1)} \quad \text{et} \quad \frac{f(P_2) - f(P_1)}{(x_2-x_1, y_2-y_1, t_2-t_1)}$$

respectivement.

On procède de façon analogue avec les relations $R_{1\ 3}^2(P_1)$ et $R_{2\ 3}^1(P_2)$ en n'utilisant que les données du triangle $P_1 P_2 P_3$.

On obtient ainsi un système linéaire de trois équations qui est utilisé pour déterminer les trois composantes (z, u, v) de la solution en P .

c) Un exemple de non convergence

- Soit $\Omega = \mathbb{R}^2$

- On se donne un maillage régulier formé de parallèles à l'axe $O Y$ à égale distance k , des parallèles à l'axe $O X$ à égale distance k et des droites de pente $m = 1$ passant par les intersections.

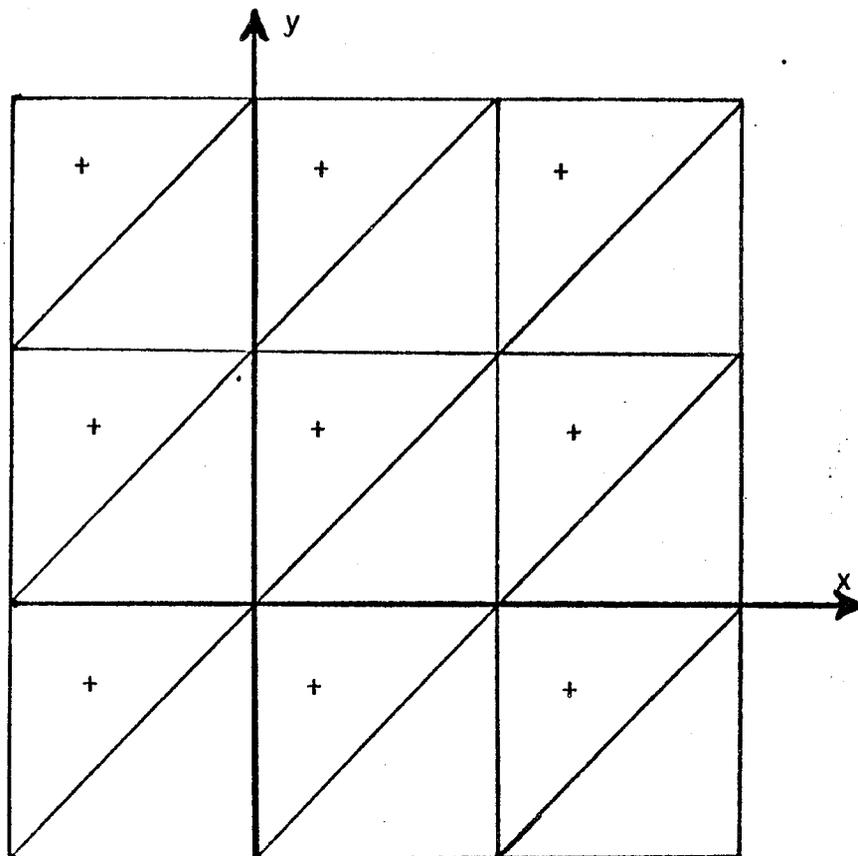


Figure 10

- On choisit comme réseau un réseau tel que les surfaces qui contiennent les parallèles aux axes sont de la deuxième famille de caractéristiques. Par les droites de pente égale à 1 on construit les surfaces de la première famille de caractéristiques qui sont tangentes aux cônes du côté des "y" positifs.

- Supposons que h soit constant.

- On se donne maintenant des conditions initiales régulières sur le plan $t = 0$ tels que u , v et z soient nuls pour x positifs. (Ce sont les conditions du repos pour x positif).

Dans la région du repos les surfaces caractéristiques de deux familles sont des plans (du fait que $h = C^{te}$). Les plans de la deuxième famille étant des plans parallèles à l'axe de la variable temps. A chaque point de la grille $P_i = (x_i, y_i, 0)$ tel que $x_i \geq 0$ la méthode utilisée associe donc un point $P'_i = (x_i, y_i, t_i)$. Soit α l'angle que forment les plans de la première famille avec le plan $t = 0$. On a que $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{gh}$: cet angle α est donc indépendant du triangle dans lequel on se trouve. Il en résulte que $t_i = k \frac{\sqrt{gh}}{2}$. La méthode reproduit donc le maillage donné sur $t = 0$ dans le plan $t = k \frac{\sqrt{gh}}{2}$; la solution étant également nulle car dans ces conditions le système de trois équations de différences pour calculer la solution en $P'_i = (x_i, y_i, t_i)$ devient un système homogène de trois équations linéairement indépendantes en u_i, v_i, t_i .

Au total la solution obtenue par la méthode est nulle sur la grille pour tout t et x positif et quelque soit y indépendamment de k . Donc quand k tends vers zéro la solution discrète converge vers la fonction identiquement nulle indépendamment des conditions initiales données pour des x négatifs et ne peut donc pas converger vers la solution du problème continu pour n'importe quel choix de conditions initiales pour x négatifs.

- Considérons le système d'équations (2.1), sans force de Coriolis, sans frottement, et telles que $h = C^{te}$.

- On se donne des conditions de Cauchy dans le plan $t = 0$:

$$u(x, y, 0) = f(x)$$

$$v(x, y, 0) = 0$$

$$z(x, y, 0) = 0$$

$f \in C^2(\mathbb{R})$ et telle que

$$i) \quad |f(x)| < \frac{1}{2} \sqrt{gh}$$

ii) il existe un voisinage $B(0, r)$ de l'origine tel que :

$$f(x) < 0 \quad \text{si } (x < 0 \text{ et } x \in B(0, r))$$

$$iii) \quad f(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$$

Dans ces conditions le système (2.4) est équivalent au système (I.2.4) avec des conditions de Cauchy dans la droite $t = 0$. Considérons le problème à une variable d'espace.

D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski [9] il existe une solution unique pour $t < 0$, dans un voisinage V de la droite $t = 0$.

Soit P le point du plan (X, T) de coordonnées $(0, T)$. Il existe donc t_0 , tel que si $T < t_0$ alors la solution existe en P .

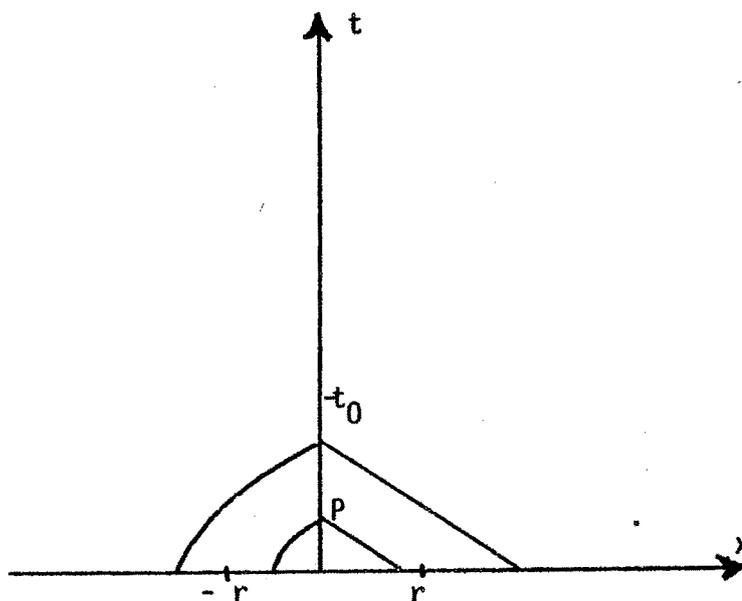


Figure 11

D'après le chapitre I si la solution existe en P et si T est suffisamment petit le domaine de dépendance de P sera contenu dans le domaine de définition de $B(0, r)$. On a alors que la courbe caractéristique de la première famille qui passe par P intersecte la droite $t = 0$ dans un point $\bar{P}(\bar{x}, 0)$ pour lequel $f(\bar{x}) < 0$.

De (I.4.4), (I.4.5) et (I.4.6) on déduit que :

$$u(P) + 2\sqrt{g(h+z(P))} = u(\bar{P}) + 2\sqrt{g(h+z(\bar{P}))}$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} u(P) + 2\sqrt{g(h+z(P))} &= -f(\bar{x}) + 2\sqrt{gh} \\ &\neq 2\sqrt{gh} \end{aligned}$$

Donc que la solution en $P : (u(P), z(P))$ n'est pas nulle. Ceci montre que la méthode précédente n'est pas convergente vers la solution du problème continu dans ce cas particulier.

Effectivement, dans la formulation de leur méthode, les auteurs ont imposé la restriction $u \neq 0, v \neq 0, z \neq 0$, c'est à dire ont écarté en tout point du domaine étudié, une condition locale de repos.

La raison pour laquelle la méthode n'est pas convergente dans notre exemple est que l'on n'a pas respecté le critère de COURANT-FRIEDRICHS et LEWY comme on le verra dans le paragraphe suivant.

IV.5. Condition de stabilité de COURANT-FRIEDRICHS et LEWY - CONCLUSIONS

a) La condition de COURANT-FRIEDRICHS et LEWY

Il est connu qu'une condition nécessaire de stabilité des méthodes de différences finies sur un maillage régulier, pour des problèmes hyperboliques linéaires est la condition de COURANT-FRIEDRICHS et LEWY [10]. Cette condition établit que "le domaine d'influence de la méthode de différences doit contenir celui du problème continu".

Dans les problèmes non linéaires, on demande qu'une condition de ce type soit également satisfaite. Voir par exemple DAUBERT [11], LE ROUX [21].

Dans la suite, on va formuler cette condition de COURANT-FRIEDRICHS et LEWY d'une façon plus générale qui sera applicable tant pour des méthodes définies sur un maillage régulier que pour d'autres types de méthodes. On s'appliquera en particulier à illustrer ce critère dans l'exemple de non convergence de la méthode de caractéristiques donné au paragraphe précédent.

Considérons le système suivant de m équations quasi linéaires à trois variables indépendantes (x_1, x_2, x_3) en \mathcal{D} et totalement hyperbolique par rapport à la variable x_1 .

$$(5.1) \quad u_1 + A^{(2)} u_2 + A^{(3)} u_3 + d = 0$$

Les notations sont les mêmes qu'au paragraphe IV.1, \mathcal{D} est le demi-espace $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $x_1 \geq 0$, \mathbb{R}^3 muni de la distance euclidienne.

On se donne des conditions de Cauchy analytiques sur le plan Ω d'équation $x_1 = 0$. Ces conditions étant à l'intérieur du domaine d'analytité des coefficients des matrices $A^{(i)}$, $i = 2, 3$ et du vecteur d . D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski [9] il existe dans \mathcal{D} un voisinage connexe V de Ω dans lequel il existe une unique solution analytique de (5.1).

On se donne sur V un système de coordonnées curvilignes (α, β, γ) tel que la transformation inverse $x_i = x_i(\alpha, \beta, \gamma)$ existe et que le Jacobien de cette transformation $\frac{D \alpha \beta \gamma}{Dx_1 x_2 x_3}$ soit défini et soit non nul pour tout point de V . (Pour les problèmes à maillage régulier la transformation de coordonnées est la transformation identité et elle est définie sur tout D).

On fait une discrétisation de l'espace des variables (α, β, γ) de "pas" $\Delta = h(a_\alpha, a_\beta, a_\gamma)$ telle que $a_\alpha, a_\beta, a_\gamma$ soient des constantes réelles strictement positives qui vérifient $a_\alpha^2 + a_\beta^2 + a_\gamma^2 = 1$.

On définit la grille G_h comme l'ensemble des points de V (de D dans le cas d'un maillage régulier) de coordonnées curvilignes $(i h a_\alpha, j h a_\beta, k h a_\gamma)$ avec $i, j, k \in \mathbb{Z}$.

Soit $\Omega_h = \Omega \cap G_h$

Supposons que le système de coordonnées (α, β, γ) et le triplet $(a_\alpha, a_\beta, a_\gamma)$ soient tels que il existe une constante positive C , indépendante de P en Ω et de h positif telle que :

$$(5.2) \quad \forall P \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall h > 0 \quad \Omega_h \cap B(P, Ch) \neq \emptyset$$

où $B(P, r)$ est la boucle ouverte de D de centre P et de rayon r (c'est une hypothèse de densité de la grille).

Supposons qu'on ait un schéma de calcul approché de (5.1) sur la grille tel que, à partir des conditions de Cauchy sur Ω_h , on puisse estimer une solution approchée u_h sur une partie M_h de la grille G_h .

Soit A une partie de Ω et soit $A_h = A \cap \Omega_h$ la restriction de A à la grille.

Soit $DD(A_h)$ l'ensemble de points de M_h où le calcul approché de la solution est fait en utilisant les données sur A_h mais sans utiliser les données dans $(\Omega_h \setminus A_h)$: $DD(A_h)$ est le domaine de définition à partir de A_h dans G_h .

Soit $DI(A_h)$ l'ensemble de points de M_h où le calcul approché de la solution est fait en utilisant les données sur A_h . $DI(A_h)$ est le domaine d'influence de A_h dans G_h .

On suppose que la méthode de calcul est telle que pour tout h , positif et pour toute partie A de Ω on ait que $DD(A_h)$ et $DI(\Omega_h \setminus A_h)$ constituent une partition de M_h .

Soit $\{B_h\}_{0 < h < h_0}$ une famille d'ensembles de \mathcal{D} telle que pour chaque valeur de h , $B_h \subseteq M_h$. On définit la limite "étoile" de cette famille par :

$$(5.3) \quad \lim_{h \rightarrow 0}^* B_h = \{Q \in \mathcal{D} / \forall \epsilon > 0 \exists h_0 / \forall h < h_0 \exists P \in B_h / \text{dist}(P-Q) < \epsilon\}$$

Cette limite est un ensemble fermé, éventuellement vide de l'espace \mathcal{D} . On définit en particulier l'ensemble

$$(5.4) \quad M^* = \lim_{h \rightarrow 0}^* M_h$$

Pour toute partie non triviale A de Ω , on définit les domaines de définition $DD(A)$ et d'influence $DI(A)$, relatifs au schéma numérique, par les relations suivantes :

$$(5.5) \quad DD(A) = \text{intérieur} \left[\lim_{h \rightarrow 0}^* DD(A_h) \right]$$

$$(5.6) \quad DI(A) = \lim_{h \rightarrow 0}^* DI(A_h)$$

On supposera enfin que la méthode de calcul est telle que, pour des conditions de Cauchy analytiques sur Ω , on ait :

- 1.- M^* est un voisinage de Ω
- 2.- Pour toute partie ouverte connexe, non triviale A de Ω , $DD(A)$ et $DI(A)$ sont des voisinages connexes de A .
- 3.- Pour toute partie non triviale A de Ω , $DD(A)$ et $DI(\Omega \setminus A)$ forment une partition de M^* .

On formule la condition de COURANT-FRIEDRICHS et LEWY de la façon suivante :

Pour toute partie fermée A de Ω , telle que le domaine de définition de A , $DEF(A)$, relatif au problème continu, soit inclus dans le domaine d'analyticité de la solution, il faut que : $DEF(A)$ contienne le domaine de définition de A de la méthode de différences $DD(A)$.

Soit $INF(A)$ le domaine d'influence de A relatif au problème continu. On peut symboliser la condition précédente par :

$$(5.7) \quad DD(A) \subseteq DEF(A) \cap M^*$$

qui est équivalente à

$$\{M^* \setminus DI(\Omega \setminus A)\} \subseteq \{M^* \setminus INF(\Omega \setminus A)\}$$

ou encore à :

$$(5.8) \quad \{INF(\Omega \setminus A) \cap M^*\} \subseteq DI(\Omega \setminus A)$$

Si M^* est égal à \mathcal{D} , comme c'est en général le cas des méthodes de différences finies sur un maillage régulier, on retrouve la formulation classique que le domaine d'influence de la méthode de différences doit contenir celui du problème continu.

On peut vérifier, dans l'exemple de non convergence du paragraphe précédent, que le domaine de définition de l'ensemble $A = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0\}$ relatif à la méthode de différences est l'ensemble $DD(A) = \{(x,y,t) \in \mathcal{D} / x > 0\}$ tandis que celui du problème continu est $DEF(A) = \{(x,y,t) \in \mathcal{D} / 0 \leq x \leq \sqrt{gh t}\}$, c'est-à-dire que dans cet exemple la condition de COURANT-FRIEDRICHS et LEWY n'est pas vérifiée.

b) Conclusions

Considérons une méthode de calcul basée sur un schéma répétitif sur un maillage fixe, par exemple $\alpha = x_1$, $\beta = x_2$, $\gamma = x_3$ et a_α , a_β , a_γ fixes. Alors à chaque ensemble A de Ω la méthode de calcul fait correspondre un ensemble $DD(A)$ sans tenir compte des conditions de Cauchy en A . Il dépendra alors des conditions de CAUCHY sur Ω que la condition de COURANT-FRIEDRICHS et LEWY soit respectée. Dans la pratique, et pour des conditions de Cauchy particulières on fait une estimation a priori de la solution de (5.1) ou des ensembles $DEF(A)$ de telle sorte de choisir a_α , a_β , a_γ de façon que la condition de COURANT-FRIEDRICHS et LEWY soit respectée si l'estimation est correcte [21].

Considérons maintenant les méthodes de calcul basées sur un réseau de surfaces caractéristiques. On peut interpréter ces méthodes en supposant que la transformation de coordonnées $[\alpha = \alpha(0, x_2, x_3), \beta = \beta(0, x_2, x_3), \gamma = \gamma(0, x_2, x_3)]$ n'est donnée que sur Ω . La transformation de coordonnées et en particulier les ensembles $DD(A)$ seront "calculés" en même temps que la solution. Il peut donc sembler nécessaire, pour obtenir la stabilité ou la convergence, qu'une méthode de ce type satisfasse la condition de COURANT-FRIEDRICHS et LEWY, indépendamment des conditions de CAUCHY analytiques sur Ω .

Sans justification, on peut dire que pour améliorer la méthode proposée au paragraphe IV.4.b, il semble nécessaire :

- 1 : d'augmenter le nombre de points qui interviennent dans le calcul de la solution en un nouveau point de la grille et,
- 2 : de choisir convenablement la grille de départ.

Dans le même esprit, on pourrait étudier les méthodes des caractéristiques construites de façon analogue à la méthode proposée au paragraphe IV.4.b, mais en n'utilisant dans le réseau que des surfaces de la première famille de caractéristiques.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] M.B. ABBOTT : An introduction to the method of characteristics
American Elsevier, New York, 1966
- [2] I.S. BEREZIN and N.P. ZHIDKOV : Computing Methods
Vol. II, Pergamon Press. 1965
- [3] D.S. BUTLER : The numerical solution of hyperbolic systems of partial
differential equations in three independant variables
Proc. Roy Soc. A, Vol. 255, pp 232-252, 1960
- [4] R. CAMARERO : A numerical method for the solution of three-dimensional
supersonic flows
CASI Transactions, vol. 8, n° 2, pp 35-43, september 1975
- [5] R. CAMARERO : A reference-plane method for the solution of three-dimen-
sional supersonic flows
Aeronautical Quarterly, vol. XXVII, pp 74-86, february 1976
- [6] Chong-Wei CHU and Stefan NADIR : Unsteady two-dimensional subsonics,
transonic, and supersonic flow calculations by the method of charac-
teristiques
Lecture Notes in Physics, 59, Springer-Verlag, Proc. 1976
- [7] M. CINQUINI-CIBRARIO, S. CINQUINI : Equazioni a derivate parziali di
tipo iperbolico
Edizioni Cremonese, Roma 1964
- [8] J. COSNIER : Sur la stabilité de la solution numérique pour un problème
particulier d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique
Thèse, Grenoble 1969
- [9] R. COURANT and D. HILBERT : Methods of mathematical physics
Vol. II, Interscience, Publishers, London, 1962
- [10] R. COURANT, K. FRIEDRICHS und H. LEWY
Über die partiellen differenzengleichungen der Physik
Math. Ann., Vol. 100 (1928-1929), pp. 32-74

- [11] A. DAUBERT and O. GRAFFE : Quelques aspects des écoulements presque horizontaux
La Houille Blanche, n° 8, 1967
- [12] G. A. DESCHAMPS et Al. : Mathematics applied to physics
Springer-Verlag, 1970
- [13] S. DITTRICH and W. HACKBUSH : A method of characteristics solving the initial-boundary value problem of a hyperbolic differential equation of second order
Numerische Mathematik 34, pp 217-234, 1980
- [14] H. FREDA : Méthode des caractéristiques pour l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques
Memorial des Sciences Mathématiques, fasc. LXXXIV, Paris, 1937
- [15] K. FRIEDRICHS and H. LEWY : Das Anfangswertproblem einer beliebigen nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichung beliebiger Ordnung in zwei Variablen. Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeitsbereich der Lösung
Math. Ann. 99, pp 200-221, 1928
- [16] K. FRIEDRICHS : Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables.
Am. J. Math., Vol. 70, (1948, pp. 555-588)
- [17] N. GASTINEL : Introduction élémentaire aux méthodes numériques pour la résolution de problèmes d'équations aux dérivées partielles
Cours INPG-USMG, Grenoble, 1978
- [18] S. GODOUNOV : Equations de la physique mathématique
MIR. Moscou, 1973
- [19] A. JEFFREY : Quasilinear hyperbolic systems and waves
Pitman, edition 1978
- [20] J. KRAVTCHENKO et Ch. Le PROVOST : Théorie des marées littorales
Cours professé au CISME (Centre International de Sciences Mécaniques)
Udine, 1976, Edition lithographie

- [21] A.Y. LE ROUX : Stabilité de schémas numériques adaptés à certains modules océaniques non linéaires.
Publications Analyse Numérique et Mécanique, Université de Rennes I, mars 1980
- [22] T. NISHIDA : Nonlinear hyperbolic equations and related topics in fluid dynamics
Publications Mathématiques d'Orsay, Université de Paris-Sud, février 1978
- [23] R. RICHTMEYER and K.W. MORTON : Difference methods for initial-value problems
Interscience Publishers, 1967
- [24] P. ROACHE : Computational fluid dynamics
Hermosa publishers, New Mexico, 1972
- [25] M. SAENZ : Simulation de la propagation des ondes longues
Thèse, Grenoble, 1978
- [26] R. SAUER : Anfangswertprobleme bei partiellen differentialgleichungen
Springer-Verlag, 1958
- [27] J.J. STOKER : Water waves
Interscience Publishers, 1957
- [28] A. TEMPERVILLE : Sur la propagation des ondes de gravité planes en eau peu profonde
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 29 mars 1971
- [29] G. B. WHITHAM : Linear and nonlinear waves
John Wiley and Sons, 1974

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le

Le Président de la thèse

Frutkin

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 18.06.80.

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale



F. P. Cau

D. G. CAU