Fonctions-spline homogènes à plusieurs variables

Jean Duchon

THESE

présentée à

Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de
DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Jean DUCHON

FONCTIONS–SPLINE HOMOGENES A PLUSIEURS VARIABLES

These soutenue le 8 février 1980 devant la commission d'examen

B. MALGRANGE	Président
P. CIARLET G. WAHBA	Rapporteurs
M. ATTEIA N. GASTINEL P. J. LAURENT	Examinateurs

THESE

présentée à

Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Jean DUCHON

FONCTIONS–SPLINE HOMOGENES A PLUSIEURS VARIABLES

These soutenue le 8 février 1980 devant la commission d'examen

B. MALGRANGE	Président
P. CIARLET G. WAHBA	Rapporteurs
M. ATTEIA N. GASTINEL P. J. LAURENT	Examinateurs

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1977-1978

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-présidents : M. René PAUTHENET
M. Georges LESPINARD

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Electronique - automatique
	BESSON Jean	Chimie minérale
	BLOCH Daniel	Physique du solide - cristallographie
	BONNETAIN Lucien	Génie chimique
	BONNIER Etienne	Métallurgie
*	BOUDOURIS Georges	Electronique - automatique
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide - cristallographie
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique - automatique
	COUMES André	Electronique - automatique
	DURAND Francis	Métallurgie
	FELICI Noël	Electronique - automatique
	FOULARD Claude	Electronique - automatique
	LANCIA Roland	Electronique - automatique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire corpusculaire
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MOREAU René	Mécanique
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie - physique
	PAUTHENET René	Electronique - automatique
	PERRET René	Electronique - automatique
	POLOUJADOFF Michel	Electronique - automatique
	TRAYNARD Philippe	Chimie - physique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée

* en congé pour études

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuël	Electronique - automatique
	BOUVARD Maurice	Génie mécanique
	COHEN Joseph	Electronique - automatique
	GUYOT Pierre	Métallurgie physique
	LACOUME Jean-Louis	Electronique - automatique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide - cristallographie

.../...

MM.	ROBERT André	Chimie appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	ZADWORNY François	Electronique - automatique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	CHARTIER Germain	Electronique - automatique
	CHIAVERINA Jean	Biologie, biochimie, agronomie
	IVANES Marcel	Electronique - automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	MORET Roger	Physique nucléaire - corpusculaire
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	SABONNADIERE Jean-Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie Physique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)

E.N.S.E.E.G.

MM.	BISCONDI Michel	Ecole des Mines St. Etienne (dépt. Métallurgie)
	BOOS Jean-Yves	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	DRIVER Julian	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)

.../...

MM.	KOBYLANSKI André	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	LE COZE Jean	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	LESBATS Pierre	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	LEVY Jacques	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	RIEU Jean	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	SAINFORT	C.E.N. Grenoble (Métallurgie)
	SOUQUET	U.S.M.G.
	CAILLET Marcel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	COULON Michel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	GUILHOT Bernard	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	LALAUZE René	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	LANCELOT Francis	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	SARRAZIN Pierre	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	SOUSTELLE Michel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	THEVENOT François	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	THOMAS Gérard	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	TOUZAIN Philippe	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	TRAN MINH Canh	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)

E.N.S.E.R.G.

MM.	BOREL	Centre d'études nucléaires de Grenoble
	KAMARINOS	Centre national recherche scientifique

E.N.S.E.G.P.

M.	BORNARD	Centre national recherche scientifique
Mme	CHERUY	Centre national recherche scientifique
MM.	DAVID	Centre national recherche scientifique
	DESCHIZEAUX	Centre national recherche scientifique

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président
Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

.../...

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

.../...

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	SUNIER Jules	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

.../...

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

.../...

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

.../...

MM.	SCHAERER René	Cancérologie
Mme	SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM.	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
	STUTZ Pierre	Mécanique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	DEVINE Roderick	Spectro Physique
	KANEKO Akira	Mathématiques pures
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	RAY Tuhina	Physique

MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M.	ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977

Cette thèse a été préparée au laboratoire d'informatique et de mathématiques appliquées de Grenoble (IMAG, laboratoire associé au CNRS n° 7) au sein de l'équipe d'analyse numérique animée par Noël Gastinel, que je remercie d'avoir accepté de faire partie du jury.

C'est Pierre-Jean Laurent qui m'a accueilli dans l'équipe et a dirigé mes recherches. Il m'a constamment soutenu et je l'en remercie.

Marc Attéia sait que mon travail, dans le domaine de l'interpolation à plusieurs variables, s'inscrit à la suite du sien. Je suis heureux qu'il ait pu venir participer à ce jury.

Philippe Ciarlet m'a considérablement aidé par ses appréciations et ses conseils. Il a bien voulu faire le voyage de Paris à Grenoble pour cette occasion, je lui en suis très reconnaissant.

Grace Wahba aussi a fait un large détour pour venir. Je suis tout particulièrement heureux de sa présence : ses travaux, qui fondent un élargissement décisif du champ d'application des fonctions-spline, nous ont fourni une ample matière à réflexion.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Bernard Malgrange en acceptant de présider le jury.

Je dois à Laurent Schwartz : 1° ce que je sais d'analyse fonctionnelle, et 2° un encouragement qui a balayé, il y a huit ans, l'hésitation à me lancer dans la recherche. L'un et l'autre ont été décisifs pour mon orientation, je tiens aujourd'hui à l'en remercier et à lui dire ma profonde admiration.

Je remercie le directeur de l'institut géographique national, René Mayer, et Raymond d'Hollander, directeur de l'école nationale des sciences géographiques, pour leur compréhension lors de la conversion du jeune ingénieur géographe que j'étais, à la recherche scientifique.

Ce travail aurait perdu beaucoup de son intérêt sans les algorithmes élaborés, les programmes écrits, les problèmes concrets traités, par Jean Thomann, Luis Paihua et Florencio Utreras, et d'autres, que je remercie chaleureusement.

Je dois également rendre hommage à ceux qui ont inventé les "surface splines" en 1971, R.L.Harder et R.Desmarais. J'espère que cette étude-ci rehausse l'intérêt de leur découverte.

Merci enfin à Daniel Iglesias et au service de tirage pour la réalisation matérielle de cette courte thèse.

Les documents rassemblés pour cette soutenance sont, outre le présent mémoire, les six articles suivants :

I Fonctions-spline du type "plaque mince" en dimension 2.
Séminaire d'analyse numérique n° 231, Grenoble, 1975.

II Fonctions-spline à énergie invariante par rotation.
Rapport de recherche n° 27, mathématiques appliquées, Grenoble, 1976.

III Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces.
Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle (R.A.I.R.O.), analyse numérique, vol. 10, n° 12, p. 5-12, 1976.

IV Fonctions-spline et espérances conditionnelles de champs gaussiens.
Annales scientifiques de l'université de Clermont, vol. 61, fasc. 14, p. 19-27, 1976.

V Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces.
Constructive theory of functions of several variables (Oberwolfach 1976), édité par W. Schempp et K. Zeller, p. 85-100.
Lecture notes in Math. 571, Springer, 1977.

VI Sur l'erreur d'interpolation des fonctions de plusieurs variables par les D^m-splines.
R.A.I.R.O. analyse numérique, vol. 12, n° 4, p. 325-334, 1978.

Le problème.

Le problème pratique est le suivant : une fonction de deux variables étant connue en des points quelconques, construire une fonction prenant les mêmes valeurs en ces points, et qui ait une chance, si possible, d'être une bonne approximation de la vraie fonction inconnue.

J'ai commencé (en 1974) par m'intéresser au krigeage, une méthode probabiliste, élaborée par G. Matheron et son groupe du Centre de morphologie mathématique de Fontainebleau, voir (16) par exemple. Ceci m'a conduit à établir une relation générale entre une estimation optimale de certaines fonctions aléatoires, et les fonctions-spline. Ce qu'avaient fait G.S. Kimeldorf et G. Wahba (12, 13, 14) dans un cas seulement un peu plus particulier.

Les splines abstraites.

Un cadre général pour une autre approche de ce problème était fourni par la théorie des fonctions-spline. On peut dire qu'il y a eu quelque chose comme une "école grenobloise" des fonctions-spline, avec essentiellement la thèse d'Attéia (4) en 1966, puis en 1972 le livre de Laurent (15) dont le chapitre IV porte sur la question ; parmi les travaux qui s'en sont inspirés, citons le théorème général de convergence de Joly (11), la thèse de Ducateau (7), celle d'Arcangéli (2).

Dans cette conception devenue classique (voir par exemple les travaux de Sard dans (19, 20)), on appelle "fonction-spline" toute solution d'un problème de la forme suivante :

$$\text{Minimiser } \|Tv\|_Y \text{ parmi les fonctions } v \text{ de } X$$
$$\text{vérifiant } l_i(v) = z_i \quad , \quad i \in I \ .$$

où X et Y sont des espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, T une application linéaire continue surjective $X \longrightarrow Y$, les l_i des formes linéaires continues sur X, et les z_i des nombres réels ou complexes. L'exemple type est celui où $X = H^2(a,b)$, espace des fonctions ayant des dérivées secondes de carré sommable, $Y = L^2(a,b)$, $Tv = v''$ et $l_i(v) = v(t_i)$ où les t_i sont des points donnés, $a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$. On obtient ainsi les splines cubiques (cubic splines) de Schoenberg (21).

Le mérite de cette théorie a été d'englober, en un formalisme abstrait unique, beaucoup de raisonnements et de calculs particuliers. Moyennant quoi l'outillage mathématique nécessaire se réduit à peu près à la projection orthogonale dans un espace de Hilbert, plus le théorème des homomorphismes de Banach. Mais cette abstraction a pu avoir certains inconvénients. Par exemple, en identifiant systématiquement chaque espace de Hilbert avec son dual, on voit moins facilement que la véritable (et la seule) difficulté éventuelle pour obtenir une caractérisation utilisable de la fonction-spline, dans tel ou tel cas particulier, est précisément d'expliciter, pour une forme linéaire $l \in X'$ orthogonale à $\ker T$, quelles sont les fonctions u de X qui vérifient : $(Tu, Tv)_Y = l(v)$, $\forall v \in X$.

Pour cela, on a besoin des

Noyaux reproduisants.

Pour un espace hilbertien de fonctions sur un ensemble, le noyau reproduisant est la fonction $R(x,y)$ qui vérifie : $(R(x,.), v) \doteq v(x)$. Autrement dit, $R(x,.)$ est le représentant, dans l'espace de Hilbert, de la forme linéaire continue (mesure de Dirac en x) : $v \mapsto v(x)$. C'est N. Aronszajn (3), après S. Bergman pour les espaces de fonctions holomorphes, qui a étudié les propriétés de ce noyau. la principale est que les noyaux reproduisants sur un ensemble X sont exactement toutes les fonctions $R(x,y)$ sur $X \times X$, symétriques (ou hermitiennes dans le cas complexe : $R(y,x) = \overline{R(x,y)}$) et de type positif : $\sum_{i,j} c_i \bar{c}_j R(x_i,x_j) \geq 0$ quels que soient les $x_i \in X$ et les $c_i \in \mathbb{C}$. Et la correspondance entre noyaux reproduisants et sous-espaces hilbertiens de $\mathbb{R}^X$ ou $\mathbb{C}^X$ est biunivoque.

L. Schwartz (24) a défini un noyau associé plus généralement à un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ contenu dans un espace vectoriel topologique localement convexe séparé (et quasi-complet) E ; c'est une application linéaire $H : E' \longrightarrow \mathcal{H}$ caractérisée par

$$(He', v)_{\mathcal{H}} = \langle v, e' \rangle , \forall e' \in E', \forall v \in \mathcal{H} .$$

La propriété de positivité s'écrit ici $\langle He', e' \rangle \geq 0$, $\forall v \in \mathcal{H}$, $\forall e' \in E'$. Et ici encore, la correspondance entre noyaux symétriques positifs $E' \longrightarrow E$ et sous-espaces hilbertiens de E est biunivoque.

Grâce à cette extension, on voit facilement que certains noyaux $R(x,y)$ sur l'espace euclidien E_n, comme $|x-y|^3$ où $|x-y|^2 \operatorname{Log}|x-y|$, qui ne sont pas de type positif (et ne sont donc pas des noyaux reproduisants d'espaces hilbertiens de fonctions) mais vérifient une positivité conditionnelle (23, p. 281) :

> $\sum_{i,j} c_i \bar{c}_j R(x_i,x_j) \geq 0$ chaque fois que les $x_i \in E_n$ et les $c_i \in \mathbb{C}$ sont tels que $\sum c_i = 0$ et $\sum c_i x_i = 0$,

ces noyaux définissent des applications linéaires symétriques positives de $(\mathbb{R}^{E_n}/P_1)'$ dans $\mathbb{R}^{E_n}/P_1$, donc des sous-espaces hilbertiens du quotient $\mathbb{R}^{E_n}/P_1$, ou encore des espaces semi-hilbertiens de fonctions sur E_n, d'espace nul P_1 (espace des fonctions affines). Plus généralement les noyaux $|x-y|^{2k+1}$ et $|x-y|^{2k} \operatorname{Log}|x-y|$ (au signe près) définissent des espaces semi-hilbertiens de fonctions sur E_n, d'espace nul P_k (polynômes de degré $\leq k$).

Les splines "plaque mince" en dimension 2.

Partant de cette constatation, j'ai commencé par expliciter l'espace semi-hilbertien de fonctions sur E_2, associé au noyau $|x-y|^2 \operatorname{Log}|x-y|$. Comme la fonction $r^2 \operatorname{Log} r$ est, à un facteur près, la classique "solution élémentaire" de l'opérateur aux dérivées partielles Δ^2 (le carré du laplacien $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$), c'est-à-dire que $\Delta^2(r^2 \operatorname{Log} r) = c\,\delta$, il était intuitivement probable que l'espace en question ne serait autre que l'espace de Beppo Levi BL_2 ou $D^{-2}L^2 = \left\{u \in \mathcal{D}' : \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(E_2)\right\}$ avec le semi-produit scalaire :

$$(u,\, v)_2 = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{E_n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$$

Traduisant ce résultat en termes de fonctions-spline d'interpolation, on obtenait le théorème suivant :

> parmi toutes les fonctions continues sur E_2, prenant des valeurs imposées $z_1,\dots,z_N$ aux points $a_1,\dots,a_N$ (non tous alignés), il en existe une, et une seule, qui réalise le minimum de la fonctionnelle

$$I(v) = \int_{E_2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)^2 \right\}$$

et c'est la fonction de la forme

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \, |x-a_i|^2 \, \mathrm{Log}\,|x-a_i| + a.x + b$$

où les $c_i \in \mathbb{R}$, $a \in E_2$ et $b \in \mathbb{R}$ sont la solution du système

$$\begin{cases} \sum c_i = 0 \\ \sum c_i \, a_i = 0 \in E_2 \\ \sum c_i \, |a_j-a_i|^2 \, \mathrm{Log}\,|a_j-a_i| + a.a_j + b = 0 \quad , \quad j = 1,\dots, N \end{cases}$$

C'est ce qui est exposé dans (I), puis dans (III) en remplaçant les dérivées secondes par les dérivées d'ordre $m \geq 2$ (avec une méthode un peu différente et un premier résultat de convergence).

Les splines d'Attéia et Thomann.

M. Attéia (5, 6) avait déjà défini des fonctions-spline très analogues, minimisant la même intégrale mais étendue à un domaine borné. On n'obtenait cependant une caractérisation explicite que pour un domaine circulaire (6, 26 ; la caractérisation indiquée pour le domaine rectangulaire est erronée, les fonctions étant astreintes à être affines au bord). Et encore le noyau était-il donné par une série. Malgré cela, la méthode a été largement utilisée en pratique (en tronquant la série à quelqus dizaines de termes) et se défendait bien sur le marché -peu encombré à l'époque – des méthodes permettant d'interpoler en des points quelconques (information que je dois à J. Thomann). Néanmoins les temps de calcul (surtout pour l'évaluation de la fonction-spline en un point, lors d'opérations telles que la détermination de courbes isovaleurs) ont été considérablement améliorés par l'emploi du noyau $|x-y|^2 \, \mathrm{Log}\,|x-y|$ au lieu du noyau relatif au domaine circulaire.

Autres noyaux.

Maintenant, le noyau $|x-y|^3$, qui a la même positivité conditionnelle que $|x-y|^2 \operatorname{Log}|x-y|$, est encore plus facile à calculer numériquement (une racine carrée au lieu d'un logarithme). Il était donc intéressant de déterminer l'espace semi-hilbertien associé, pour pouvoir étudier la méthode d'interpolation-spline correspondante. C'est ce qui est fait dans (II) et (V), en considérant plus généralement les noyaux $|x-y|^\theta$, θ réel positif non entier pair, et $|x-y|^{2k} \operatorname{Log}|x-y|$, k entier ≥ 1, ceci en dimension quelconque n. les espaces et leurs semi-normes sont définis par des intégrales portant sur les transformées de Fourier de la fonction :

$$\tilde{H}^s = \left\{ u \in \mathscr{S}' : \hat{u} \in L^1_{loc} , \int_{E_n} |y|^{2s} |\hat{u}(y)|^2 \, dy < \infty \right\}$$

$$\|u\|^2_{\tilde{H}^s} = \int_{E_n} |y|^{2s} |\hat{u}(y)|^2 \, dy$$

$$D^{-m}\tilde{H}^s = \left\{ u \in \mathcal{D}' : \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} \in \tilde{H}^s \right\}$$

$$\|u\|^2_{D^{-m}\tilde{H}^s} = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} \left\| \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} \right\|^2_{\tilde{H}^s}$$

$\tilde{H}^s$ est hilbertien si $s < \frac{n}{2}$, et pour que $D^{-m}\tilde{H}^s$ soit un espace semi-hilbertien de fonctions (continues), il faut et il suffit que $m + s > \frac{n}{2}$. Evidemment on retrouve les espaces de Beppo Levi $D^{-m}L^2$ comme cas particulier ($s = 0$).

Noyaux "semi-reproduisants" et caractérisation des fonctions-spline.

La relation entre noyaux "conditionnellement positifs" et espaces semi-hilbertiens de fonctions peut être systématisée, comme j'ai essayé de le faire dans (II). Si $V \subset \mathbf{R}^X$ est un espace semi-hilbertien d'espace nul P et $R(x,y)$ un noyau "semi-reproduisant" de V, les fonctions-spline (obtenues par interpolation de semi-norme minimale) relatives aux points $a_1, \dots, a_N$ de X sont les fonctions de la forme

$$\begin{cases} g(x) = \sum_i c_i \; R(a_i,x) + p(x) \\ \text{où } p \in P \quad \text{et} \quad \sum_i c_i \; q(a_i) = 0 \; , \quad \forall q \in P. \end{cases}$$

qu'on appellera fonctions-spline de noyau $R(x,y)$, d'espace nul P, sur les points $a_1 , \ldots , a_N$.

Les "surface splines" de Harder et Desmarais.

C'est seulement après ce travail que j'ai eu connaissance de l'article de R.L. Harder et R. Desmarais "Interpolation using surface splines" publié en 1972 dans le "Journal of Aircraft". La méthode d'interpolation-spline utilisant le noyau $|x-y|^2 \operatorname{Log}|x-y|$ (correspondant à un modèle de la flexion d'une plaque mince infinie) y était déjà décrite, avec une "analyse mathématique" un peu... audacieuse, et d'excellents résultats pratiques rapportés (concernant des cas réels aussi bien que des exemples artificiels). Curieusement, il ne semble pas que cet article, peu connu malgré son évident intérêt, ait suscité une étude approfondie de cette méthode, du point de vue de la théorie de l'approximation.

Convergence et ordre de l'erreur.

Après les méthodes numériques de calcul de ces fonctions-spline (17, 18), l'étude de la convergence est évidemment, s'agissant de procédés d'approximation, primordiale. Un premier résultat (convergence dans l'espace X pour toute fonction de cet espace) s'obtient en appliquant un théorème de Joly (11, démonstration non publiée). Pour les splines "plaque mince" ou D^2-splines en dimension 2 (celles en $|x-y|^2 \operatorname{Log}|x-y|$), cela signifie que pour une fonction de l'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$, Ω domaine borné assez régulier, la convergence a lieu dans $H^2(\Omega)$, donc aussi dans $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, et bien sûr ponctuellement et même uniformément sur $\bar{\Omega}$. En revanche la convergence ponctuelle des dérivées n'est pas assurée, de sorte que l'appréciation de Harder et Desmarais ("un des avantages de la méthode est que la "surface spline" peut être différentiée pour évaluer des pentes") n'est pas étayée par un résultat théorique de convergence. Il y a là un problème ouvert intéressant et sans doute difficile. Pour les splines "pseudo-cubiques" (en $|x-y|^3$) la convergence a lieu dans $H^{2+\frac{n-1}{2}}(\Omega)$ pour une fonction de cet espace ; donc aussi entre autres dans C^1 (convergence uniforme des dérivées).

Mais ces résultats ne donnent aucune "vitesse de convergence", ou plutôt aucun ordre de l'erreur d'interpolation, en fonction d'un paramètre mesurant la plus ou moins grande densité des points donnés. Dans (VI), je montre que l'erreur en norme L^p $(2 \leq p \leq \infty)$ pour les dérivées d'ordre k est en $o(h^e)$, $e = m-k-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}$, pour une fonction de $H^m(\Omega)$ interpolée par une D^m-spline sur un ensemble h-dense de points de $\bar{\Omega}$.

Comme on voit, les résultats publiés sont loin de constituer une étude raisonnablement complète de la convergence des fonctions-spline homogènes. Comme dans ce domaine à mon avis les résultats même imprécis et conjecturaux sont plus importants que leurs démonstrations, souvent pénibles, je vais en citer quelques-uns par ordre de certitude décroissante :

1°) Pour les splines d'ordre non entier s correspondant aux espaces semi-hilbertiens $D^{-m}\tilde{H}^{s-m}$, la propriété ci-dessus est encore valable, à savoir que l'erreur en norme L^p $(2 \leq p \leq \infty)$ pour les dérivées d'ordre k est en $o(h^e)$ pour une fonction de $H^s(\Omega)$, pour $e = s-k-\frac{n}{2}+\frac{n}{p} > 0$, et aussi pour $e = 0$ si $p < \infty$. (Ceci est un théorème, je l'ai exposé à plusieurs reprises, sans rédiger la démonstration. Pour adapter la méthode de (VI), il ne manque que certaines propriétés des espaces de Sobolev d'ordre non entier — immersion et prolongement pour des domaines à frontière lipschitzienne — pour lesquelles je n'ai pu trouver de référence vraiment satisfaisante, pas même la monographie pourtant récente "Sobolev spaces" de R.A. Adams (1) ; plus la relation précise entre les intégrales $\int_{E_n} |\xi|^{2s-2} \, |\mathfrak{F}\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$ et $\iint_{E_n \times E_n} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2s+n}} \, dx\, dy$, chaque fois qu'elles ont un sens (8)).

2°) Pour une fonction très régulière interpolée par une D^m-spline, l'erreur sera en $O(h^{e+\frac{1}{2}})$, $e = m-k-\frac{n}{2}+\frac{n}{p} \geq 0$ (sauf $e = 0$, $p_1 = \infty$). Et pour cela il suffit que la fonction soit par exemple dans un $H^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$. Et cet ordre $O(h^{e+\frac{1}{2}})$ ne sera dépassé que pour des fonctions vérifiant des conditions au bord particulières (certaines dérivées m-ièmes nulles). En général on n'échappera pas à ce que R.S. Varga a appelé "a dramatically poorer convergence rate", c'est-à-dire que, contrairement à ce qui se passe lorsque les données au bord sont suffisantes (comme en dimension 1 lorsque la fonction <u>et ses m-1 premières dérivées au bord</u> sont interpolées par une spline de degré 2m-1), ici l'ordre de l'erreur (dans L^2) n'atteindra pas $O(h^{2m})$ mais seulement $O(h^{m+\frac{1}{2}})$.

3°) La même chose a très probablement lieu pour les splines d'ordre non entier s, c'est-à-dire que l'ordre atteindra $O(h^{e+\frac{1}{2}})$, $e = s-k-\frac{n}{2}+\frac{n}{p} > 0$, pour une fonction de $H^{s+\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega)$; et pas mieux, sauf condition globale particulière.

4°) Enfin, par interpolation entre les espaces de Sobolev en question, on obtiendra facilement l'ordre $O(h^{e+t})$, $0 < t < \frac{1}{2}$, pour une fonction appartenant à l'espace de Nikolskii $H_2^{s+t}(\Omega)$ (ou espace de Besov $B_{2,\infty}^{s+t}(\Omega)$) qui est "un peu" plus grand que $H^{s+t}(\Omega)$.

Invariance par similitude.

Parallèlement à l'étude de la convergence, je me suis demandé s'il était arbitraire de privilégier ces méthodes, parmi toutes les méthodes imaginables d'interpolation-spline (c'est-à-dire définies par la minimisation d'une semi-norme associée à un espace semi-hilbertien de fonctions de n variables). Or, elles ont la propriété remarquable d'être invariantes par similitude en un sens évident. Sont-elles les seules ? Autrement dit, y a-t-il d'autres espaces semi-hilbertiens de fonctions sur E_n qui définissent des procédés d'interpolation invariants par similitude ?

D'abord, si V est un tel espace, et si P est n'importe quel espace vectoriel de dimension finie $\subset \mathbb{R}^{E_n}$, invariant par similitude, l'espace V+P avec la semi-norme $\|u\|_{V+P} = \inf_{p\in P} \|u+p\|_V$ est lui-même semi-hilbertien, et définit évidemment un procédé d'interpolation invariant par similitude. On peut donc déjà ajouter aux $D^{-m}\tilde{H}^s$ les espaces de la forme $D^{-m}\tilde{H}^s + P$. (Par exemple P pourrait être l'espace des polynômes harmoniques de degré ≤ 2).

Il s'avère que, si l'on demande en outre à l'espace semi-hilbertien V d'être tel qu'une fonction-spline existe quelles que soient les données (en nombre fini) (a_i, z_i) , et qu'elle dépende continûment de chaque a_i (ce qui élimine des absurdités comme $l^2(E_n)$, $\|u\|_1{}^2 = \sum_{x\in E} |u(x)|^2$), alors nécessairement V est de la forme $D^{-m}\tilde{H}^s + P$, où P est un espace de polynômes, invariant par similitude ; et les fonctions-spline associées sont les splines de noyau $|x-y|^{2m+2s-n}$ (ou $|x-y|^{2m+2s-n} \operatorname{Log}|x-y|$) et d'espace nul P . Malheureusement, je suis obligé d'énoncer ce résultat comme une conjecture, la démonstration n'étant pas établie tout à fait en détail. Je vais seulement indiquer ici quelques indices ou éléments de preuve.

On peut voir assez facilement que deux espaces hilbertiens de fonctions continues sur un espace connexe, définissant le même procédé d'interpolation, sont proportionnels, c'est-à-dire coïncident comme ensembles, avec le même produit scalaire à une constante multiplicative près. Pour des espaces semi-hilbertiens de fonctions continues sur E_n , on choisira un ensemble unisolvent pour se ramener au cas précédent, compte tenu du fait que $E_n \sim A$ est connexe (si $n \geq 2$; pour $n = 1$ la démonstration doit être modifiée). Ainsi un espace semi-hilbertien V définissant un procédé invariant doit lui-même être relativement invariant, c'est-à-dire invariant comme ensemble avec

$$\|u\|_{F(V)} = c(F)\ \|u\|_V \quad , \quad \forall u \in V ,$$

$c(F) > 0$, pour chaque similitude $F : E_n \longrightarrow E_n$. On voit ensuite que c est un homomorphisme continu du groupe des similitudes de E_n , dans le groupe multiplicatif des réels positifs. Et il est facile de déterminer tous les homomorphismes possibles, ce sont les fonctions de la forme $c(F) = |F|^e$, $e \in R$, où $|F|$ désigne le rapport de similitude, $|F(x)-F(y)| = |F|\ |x-y|$.

Par ailleurs on peut montrer que l'espace nul de V (ensemble des fonctions de semi-norme nulle), nécessairement invariant par similitude (et de dimension finie), est forcément un espace de polynômes, de sorte que $\Delta^k V$ (image de V par $\Delta^k : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}'$) est, pour k assez grand, un espace hilbertien de distributions. Grâce aux noyaux de L. Schwartz (24, 25) on connaît tous ceux qui sont invariants par translation, et parmi eux les seuls relativement invariants par rotation et homothétie sont les $\tilde{H}^s$, où $s < \frac{n}{2}$, plus l'espace P_o des constantes. Il "reste" alors à revenir à V...

Proposition de terminologie.

Je propose d'appeler d'une façon générale "fonctions-spline homogènes" ce dont il est question ici, pour tenir compte de la propriété d'invariance discutée plus haut, et pour les distinguer des fonctions obtenues par produit tensoriel de splines à une variable, et plus généralement des combinaisons linéaires de B-splines (fonctions polynomiales par morceaux, à support compact) qui sont ce qu'on entend le plus généralement par "fonctions-spline à plusieurs variables" dans la littérature (surtout américaine). Il faut une terminologie double, suivant qu'on se réfère aux propriétés variationnelles (la semi-norme minimisée) ou à la forme explicite des fonctions :

— Du point de vue de la forme explicite, on pourra appeler fonctions-spline de degré θ, d'espace nul P les fonctions de la forme

$$g(x) = \sum_i c_i R_\theta(x-a_i) + p(x)$$
$$\text{où } p \in P \quad \text{et} \quad \sum_i c_i\, q(a_i) = 0 \;, \quad \forall q \in P$$

où $R_\theta(x) = |x|^\theta$ si θ n'est pas un entier pair, et $R_{2k}(x) = |x|^{2k} \operatorname{Log}|x|$, $k = 1, 2, \ldots$ Par exemple les splines "pseudo-cubiques" (qui, en dimension 1, sont les splines cubiques naturelles) sont de degré 3 et d'espace nul P_1. Les splines "plaque mince" ou "surface splines" de Harder et Desmarais sont de degré 2 et d'espace nul P_1. En général il faut une relation entre P et θ pour que le nom de spline soit légitime : P doit contenir tous les polynômes de degré $\leq \frac{\theta}{2}$. Alors, étant donné un ensemble $A = \{a_1, \ldots, a_N\} \subset E_n$ assez "grand" (pour que tout élément de P qui s'annule en $a_1, \ldots, a_N$ soit identiquement nul), il existe une et une seule fonction-spline de degré θ et d'espace nul P qui prend des valeurs données $z_1, \ldots, z_N$ en $a_1, \ldots, a_N$. Elle est donnée par la solution du système suivant, où $p_1, \ldots, p_M$ forment une base de P :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N c_i\, R_\theta(a_j - a_i) + \sum_{k=1}^M d_k\, p_k(a_j) = z_j \,, & j = 1, \ldots, N \\ \sum_{i=1}^N c_i\, p_k(a_i) = 0 \,, & k = 1, \ldots, M. \end{cases}$$

Les plus simples de ces fonctions sont les splines de degré 1 et d'espace nul P_o, qui en dimension 1 sont affines par morceaux (la méthode d'interpolation correspondante étant simplement l'interpolation linéaire), que P.J. Laurent propose d'appeler "moniques" (comme il y a des cubiques, quintiques, etc.), idée dont je lui laisse l'entière responsabilité ...

— Du point de vue variationnel, je propose d'appeler D^m-splines celles qui minimisent

$$|v|_m^2 = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} \int_{E_n} \left(\frac{\partial^m v}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}}\right)^2$$

parmi les v de l'espace de Beppo Levi $BL_m = D^{-m} L^2$ qui interpolent les données. Ceci par analogie avec les L-splines de Schultz et Varga (22), qui minimisent $\int_a^b |Lv(t)|^2 dt$, L étant un opérateur différentiel.

On pourra également dire "splines d'ordre m " (et d'espace nul P_{m-1}). Mais à cet égard il y a une divergence dans la littérature, beaucoup d'auteurs appelant splines d'ordre k les fonctions qui sont, par morceaux, solution d'une équation différentielle d'ordre k . Par exemple pour eux les splines cubiques sont d'ordre 4 (polynômes de degré ≤ 3 par morceaux) alors que nous dirions plutôt dordre 2 (minimisant $\int_a^b |D^2 v(t)|^2 dt$).

D'après G. Wahba (27), I.J. Schoenberg aurait suggéré de dire "splines laplaciennes" (Laplacian splines), à cause de la relation $\Delta^m g = 0$ qui est vérifiée sur $E_n \sim A$. Je préfèrerais dire "biharmoniques" ou "polyharmoniques" ou "m-harmoniques" en général.

Pour les splines définies par la minimisation de la semi-norme

$$|v|_{s,m}^2 = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \int_{E_n} |y|^{2s-2m} |(\frac{\partial^m v}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}})^{\wedge}|^2 \, dy$$

dans l'espace semi-hilbertien $D^{-m}\tilde{H}^{s-m}$, je propose le nom de splines <u>d'ordre s</u> , d'espace nul P_{m-1} . Le plus petit espace nul possible pour un ordre s donné est $P_{[s-\frac{n}{2}]}$ ([ ] = partie entière). D'autre part en dimension n on ne peut interpoler des données ponctuelles que par des splines d'ordre $s > \frac{n}{2}$. La relation entre l'ordre s et le degré θ est $\theta = 2s-n$, $s = \frac{\theta+n}{2}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. ADAMS, R.A.: Sobolev Spaces.
   Academic Press, 1975.

2. ARCANGELI, R.: Etude de problèmes de type elliptique ou parabolique avec conditions ponctuelles.
   Thèse, Toulouse, 1974.

3. ARONSZAJN, N.: Theory of reproducing kernels.
   Trans. A.M.S. 68 (1950), 337-404.

4. ATTEIA, M.: Etude de certains noyaux et théorie des fonctions "spline" en analyse numérique.
   Thèse, Grenoble, 1966.

5. ATTEIA, M.: Existence et détermination des fonctions "spline" à plusieurs variables.
   C.R. Acad. Sci. Paris A-262 (1966), 575-578.

6. ATTEIA, M.: Fonctions "spline" et noyaux reproduisants d'Aronszajn-Bergman.
   Rev. Fr. d'Inf. et Rech. Op. R-3 (1970), 31-43.

7. DUCATEAU, C.F.: Etude de quelques problèmes d'interpolation.
   Thèse, Grenoble, 1971.

8. DUCHON, J., ROBERT, R. et WITOMSKI, P.: Problème de Dirichlet dans un domaine image bilipschitzienne d'un demi-espace.
   Rapport de recherche n° 170, math. appliquées, Grenoble, 1979.
   Soumis à Numer. Math..

9. GOLOMB, M. et WEINBERGER, H.F.: Optimal approximation and error bounds.
   On numerical approximation, R. Langer ed., 117-190.
   Univ. of Wisconsin Press, 1959.

10. HARDER, R.L. et DESMARAIS, R.: Interpolation using surface splines.
    J. Aircraft 9-2 (1972), 189-191.

11. JOLY, J.L.: Théorèmes de convergence des fonctions "spline" générales d'interpolation et d'ajustement.
C.R. Acad. Sci. Paris A-264 (1967), 126-128.

12. KIMELDORF, G.S. et WAHBA, G.: A correspondence between Bayesian estimation on stochastic processes and smoothing by splines.
Ann. Math. Stat. 41 (1970), 495-502.

13. KIMELDORF, G.S. et WAHBA, G.: Spline functions and stochastic processes.
Sankhyā A-32-2 (1970), 173-180.

14. KIMELDORF, G.S. et WAHBA, G.: Some results on Tchebycheffian spline functions.
J. Math. Anal. Appl. 33-1 (1971), 82-95.

15. LAURENT, P.J.: Approximation et optimisation.
Hermann, 1972.

16. MATHERON, G.: The theory of regionalized variables, and its applications.
Cahiers du centre de morphologie mathématique 5 (1971).

17. PAIHUA, L.: Quelques méthodes numériques pour le calcul de fonctions splines à une et plusieurs variables.
Thèse 3e cycle, Grenoble, 1978.

18. PAIHUA, L. et UTRERAS, F.: Un ensemble de programmes pour l'interpolation des fonctions, par des fonctions-spline du type plaque mince.
Rapport de recherche n° 140, math. appliquées, Grenoble, 1978.

19. SARD, A.: Optimal approximation.
J. Funct. Anal. 1 (1967), 222-244 ; et 2 (1968), 368-369.

20. SARD, A. et WEINTRAUB, S.: A book of splines.
Wiley, 1971.

21. SCHOENBERG, I.J.: On interpolation by spline functions and its minimal properties.
Proceedings of a conference on approximation theory, ISNM 5.
Birkhäuser, 1964.

22. SCHULTZ, M.H. et VARGA, R.S.: L-splines.
Numer. Math. 10 (1967), 345-369.

23. SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions.
Hermann, nouvelle édition 1966.

24. SCHWARTZ, L.: Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés. (Noyaux reproduisants).
J. Anal. Math. 13 (1964), 115-256.

25. SCHWARTZ, L.: Application of distributions to the theory of elementary particles in quantum mechanics.
Gordon and Breach, 1968.

26. THOMANN, J.: Détermination et construction de fonctions-spline à deux variables sur un domaine rectangulaire ou circulaire.
Thèse 3^{e} cycle, Lille, 1970.

27. WAHBA, G.: How to smooth curves and surfaces with splines and cross-validation.
Technical report n° 555, Stat. Dept., Univ. of Wisconsin, 1979.